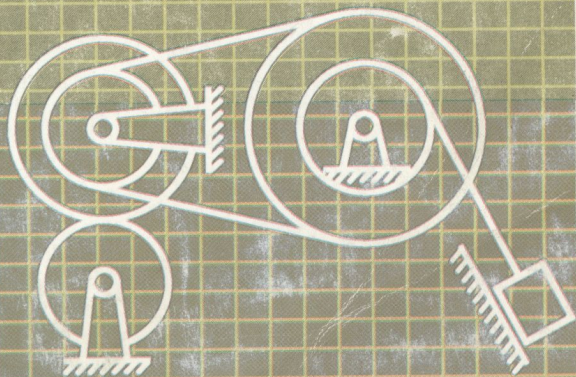


М. Б. ЯСКІЛКА

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ

ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО-
ГРАФІЧНИХ
РОБІТ

з теоретичної механіки



531/078)
881

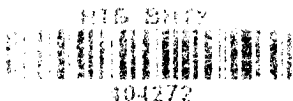
М. Б. ЯСКІЛКА

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ

ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО-
ГРАФІЧНИХ
РОБІТ

з теоретичної механіки

Рекомендовано
Міністерством освіти
України

A barcode is located below the publisher information, with the number 104272 printed below it.

8 81

Київ
•ВИЩА ШКОЛА• •ВЕСЕЛКА•
1999

ББК 22.21я73
Я81
УДК 531(075.8)

Гриф затверджено Міністерством освіти
України 01.12.98, лист № 1508

Рецензенти: засл. працівник народної освіти України, канд. фіз.-мат. наук, доц. *Л. М. Шальда* (Національний технічний університет України «КПІ»); канд. фіз.-мат. наук, доц. *Д. А. Байдак* (Державний університет «Львівська політехніка»)

Редактор *В. Ф. Хміль*

404 272

Я81 Яскілка М. Б.

Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки: Посібник. — К.: Вища шк.: Веселка, 1999. — 351 с.: іл.

ISBN 5-11-004833-9 («Вища школа»)

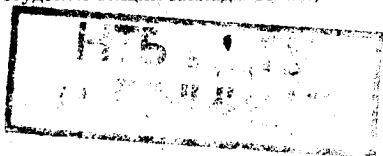
ISBN 966-01-0116-3 («Веселка»)

Уміщено 38 завдань із статички твердого тіла, кінематики, динаміки матеріальної точки, твердого тіла, аналітичної механіки та коливань механічної системи. До кожного завдання наводиться приклад, який пояснює методику його виконання, причому в кожному із завдань передбачено, як мінімум, 30 варіантів для вибору певного з них.

Для студентів вищих закладів освіти, які вивчають курс теоретичної механіки.

ББК 22.21я73

© М. Б. Яскілка, 1999



ПЕРЕДМОВА



Теоретична механіка як фундаментальна дисципліна є математизованою наукою, методами якої часто користуються при розв'язанні досить широкого класу інженерних задач, з якими доводиться стикатися під час підготовки інженерів, бакалаврів і магістрів різних спеціальностей.

Закони та принципи теоретичної механіки широко застосовуються в таких загальноінженерних науках, як опір матеріалів, будівельна механіка, теорія механізмів і машин, деталі машин та в ряді курсів з машинобудування, будівництва і приладобудування.

Успішне вивчення теоретичної механіки потребує не тільки ґрунтовного засвоєння теорії, а й набуття міцних практичних навичок, які здобуваються студентами завдяки самостійному розв'язуванню великої кількості задач із різних розділів теоретичної механіки.

Пропонований збірник містить 38 завдань, при цьому 11 — із розділу статички твердого тіла, 10 — з кінематики і 17 — з динаміки матеріальної точки, твердого тіла, аналітичної механіки та коливань механічної системи.

У кожному із завдань передбачено, як мінімум, 30 варіантів. Студент повинен вибрати свій варіант відповідно до порядкового номера, за яким він вписаний в журнал відвідування практичних занять, причому номер варіанта зазначається вгорі біля кожної розрахункової схеми, а числові значення необхідних для розрахунку величин наводяться в таблиці, що додається.

У завданнях К-9, К-10 варіант вибирається аналогічно, за винятком того, що числові значення параметрів до варіанта потрібно брати із табл. 33 згідно з останньою цифрою номера залікової книжки.

До кожного номера завдання в збірнику наводиться приклад, який пояснює методику його виконання, однак ці приклади не містять програм і рекомендацій щодо їх складання, оскільки у вищих закладах освіти України застосовуються різні алгоритмічні мови й використовуються різні обчислювальні засоби.

При виконанні завдання із статички необхідно дотримуватися такої послідовності дій:

- а) виділити тіло чи вузол, рівновагу якого треба вивчити;
- б) показати задані (активні) сили;
- в) встановити для даного тіла чи вузла механічні в'язі й на підставі аксіоми про звільнення від в'язей замінити їх силами (реакціями в'язей);
- г) проаналізувати систему сил і впевнитися в тому, що ця система сил статично визначена;
- д) вибрати прямокутну систему координат і записати аналітичні рівняння для системи сил;
- ж) розв'язати систему лінійних алгебричних рівнянь, обчисливши згідно з умовою завдання реакції в'язей.

Що стосується виконання завдань з кінематики, то тут слід діяти так:

- а) з'ясувати, рух яких точки або тіла має бути досліджений;
- б) використати відповідні кінематичні величини, що відповідають даному кінематичному процесові;
- в) показати на розрахунковій схемі вектори кінематичних величин (швидкості, прискорення, кутової швидкості, кутового прискорення і т. д.);
- г) у вибраній системі відліку визначити величини, запропоновані відповідним завданням.

Виконання завдання з динаміки матеріальної точки, твердого тіла, аналітичної механіки та коливань механічної системи потрібно проводити в такій послідовності:

- а) для точки або тіла, рух яких вивчається, показати активні сили, реакції в'язей, сили інерції;
- б) на підставі відповідних законів, теорем і принципів теоретичної механіки скласти диференціальні рівняння, що описують рух точки чи тіла;
- в) проінтегрувати диференціальні рівняння.

В основу збірника завдань покладено методичні вказівки та контрольні завдання з теоретичної механіки (розділ "Статика"), складені у співавторстві з М. В. Боженком (Львів: Львівська політехніка, 1996).

Автор висловлює щире вдячність *Д. А. Байдаку* (доц. кафедри теоретичної механіки Державного університету "Львівська політехніка"), *Л. М. Шальді* (доц. кафедри теоретичної механіки Національного технічного університету України "КПІ") за ґрунтовний перегляд оригіналу збірника та ретельне вичитування верстки книги, а також лаборанту кафедри теоретичної механіки Державного університету "Львівська політехніка" *Р. П. Ястремській* за допомогу під час друкування авторського оригіналу.

РОЗДІЛ

1

СТАТУКА ТВЕРДОГО ТІЛА



Завдання С-1

ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР І ЗУСИЛЬ
В СТЕРЖНЯХ ПЛОСКОЇ ФЕРМИ

Для заданої ферми графічно й аналітично (методом вирізання вузлів) визначити:

- 1) модуль і напрямок рівнодійної активних сил, прикладених до ферми;
- 2) реакції опор ферми;
- 3) зусилля, що виникають в стержнях ферми:
 - а) побудовою діаграми Максвелла — Кремони;
 - б) вирізуванням вузлів із застосуванням аналітичних умов рівноваги.

Методом перерізів (методом Ріттера) додатково перевірити зусилля в трьох стержнях ферми для заданого навантаження (номери стержнів зазначено в табл. 1).

Таблиця 1

Варіант	P_1	P_2	P_3	P_4	a	b	c	α	β	Номери стержнів
	кН				м			град		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	40	30	50	40	3	4	3	45	30	8, 9, 10
2	20	40	20	20	4	3	2	60	60	8, 11, 14
3	30	20	20	50	2,5	2,5	4	45	30	6, 9, 12
4	30	30	40	50	3	3	3	60	30	7, 8, 9
5	50	20	30	40	1,5	3	1,5	75	30	8, 9, 10
6	60	50	20	30	2	4	4	60	15	4, 5, 6
7	20	40	50	20	4	3	3	30	45	2, 7, 8
8	40	40	30	30	2,5	3	2,5	45	45	6, 7, 8
9	30	40	30	20	3	4	2	30	30	10, 11, 12
10	50	50	40	40	1,5	4	3	60	60	8, 9, 10
11	40	30	20	20	2	3	2	90	30	4, 5, 6
12	20	40	50	50	3	6	4	45	60	8, 9, 11
13	30	20	30	20	2	2	2	—	—	9, 10, 11
14	30	40	30	20	3	5	3	30	45	4, 7, 10
15	50	50	40	30	5	3	4	60	30	4, 11, 15

Варіант	P_1	P_2	P_3	P_4	a	b	c	α	β	Номери стержнів
	кН				м			град		
16	60	50	60	50	4	3	3	30	30	1, 3, 6
17	40	40	50	60	3	3	3	15	60	1, 3, 7
18	30	30	30	30	4	2	3	30	30	4, 5, 6
19	50	20	30	40	1,5	4	1,5	60	—	12, 13, 14
20	40	50	20	40	3	3	5	30	45	8, 9, 10
21	30	20	20	50	2	3	2	30	30	9, 10, 11
22	20	30	30	60	3	4	2	30	15	2, 3, 7
23	40	20	40	50	2,5	4	2,5	45	45	2, 5, 8
24	10	40	50	30	1,5	2	1,5	30	30	1, 3, 7
25	30	20	40	20	3	3	2	45	30	6, 7, 8
26	50	50	10	60	2,5	2	2,5	60	45	4, 7, 11
27	20	40	40	30	4	4	4	45	30	4, 5, 6
28	40	60	30	30	3	4	3	60	30	2, 5, 6
29	60	30	50	40	3	3	2	30	30	2, 3, 4
30	30	40	20	20	2	3	4	30	30	8, 9, 10

Схеми ферм показано на рис. 5, a — $в$. Необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 1.

Приклад 1. На плоску ферму з геометричними розмірами $a = 1,5$ м, $b = 2,5$ м (рис. 1, де 1 см = 1,5 м) діють зовнішні сили $F_1 = 15$ кН, $F_2 = 20$ кН, $F_3 = 25$ кН, $F_4 = 30$ кН.

Розв'язання. 1. Модуль і напрямок рівнодійної \vec{F} заданої системи сил визначаємо побудовою у вибраному масштабі багатокутника сил (рис. 2). Рівнодійна $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$. Для знаходження її лінії дії вибираємо довільний полюс O , який з'єднуємо променями $O-1$, $1-2$, $2-3$, $3-4$, $4-O$ з початками та кінцями векторів сил системи (F_1 , F_2 , F_3 , F_4).

Переходимо до побудови мотузкового багатокутника. В площині дії сил (див. рис. 1) з точки A проводимо пряму, паралельну променю $O-1$, до перетину з лінією дії сили \vec{F}_1 . Зі знайденої точки проводимо пряму, паралельну променю $1-2$, до перетину з лінією дії сили \vec{F}_2 . Зі здобутої точки проводимо пряму, паралельну променю $2-3$, до перетину з лінією дії сили \vec{F}_3 , і т. д. Утворена ламана лінія ($O-1$)-($1-2$)-($2-3$)-($3-4$)-($4-O$) називається мотузковим багатокутником. З'єднуючи між собою крайні сторони $O-1$ і $4-O$ багатокутника, дістаємо точку, через яку проходить рівнодійна системи сил (див. рис. 1).

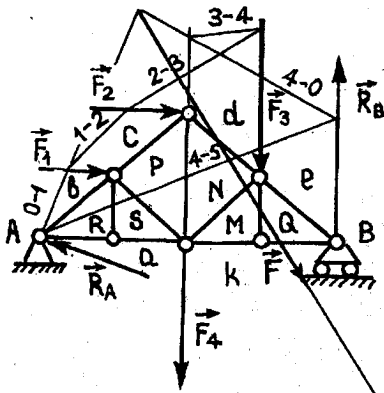


Рис. 1

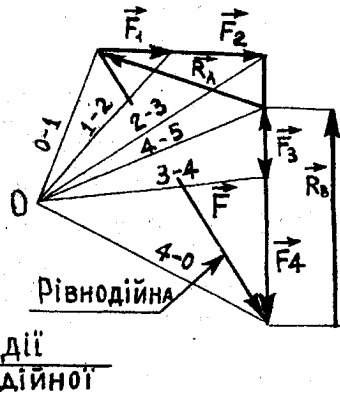


Рис. 2

2. Значення і напрямок реакцій \vec{R}_A та \vec{R}_B опор ферми можна визначити, виходячи з умов рівноваги плоскої системи сил, які полягають в тому, що силовий і мотузковий багатокутники мають бути замкнені.

Оскільки напрямок реакції \vec{R}_B відомий (лінія її дії перпендикулярна до площини опори B), маючи точку перетину променя 4-O з нею, з'єднуємо її з точкою A променем 4-5 (див. рис. 1).

Через те що умова рівноваги вимагає замкненості силового багатокутника (див. рис. 2), проводимо з полюса O промінь 4-5, паралельний променю 4-5 на мотузковому багатокутнику. Промінь 4-5 на рис. 2 дає змогу розкласти рівнодійну активних сил $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$ на дві сили, причому за модулем ця рівнодійна дорівнює рівнодійній реакції опор $\vec{R} = \vec{R}_A + \vec{R}_B$, а за напрямком протилежна їй. У вибраному масштабі (1 см = 15 кН) значення кожної з реакцій відповідно становлять $R_A = 36,5$ кН, $R_B = 45$ кН.

Для аналітичного визначення реакцій опор використовуємо рис. 3, на якому до ферми прикладено активні сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ і реакції в'язей $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B$.

Аналітичні умови рівноваги мають вигляд:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -X_A + F_1 + F_2 = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -Y_A + R_B - F_3 - F_4 = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad -F_1 \cdot 0,5b - F_2 b - F_3 \cdot 3a - F_4 \cdot 2a + R_B \cdot 4a = 0. \quad (3)$$

Із рівняння (3)

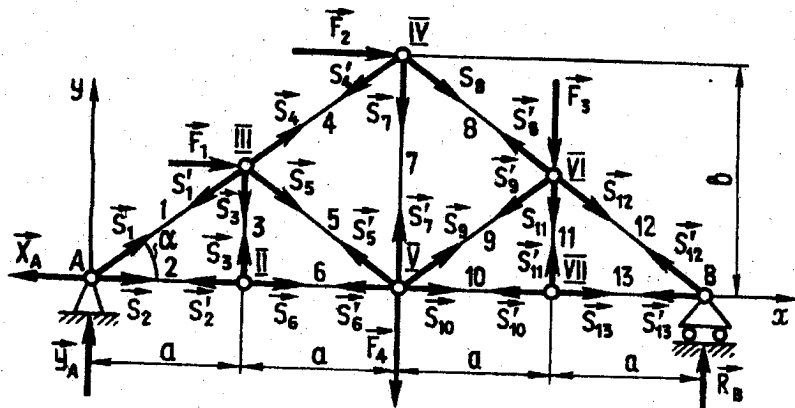


Рис. 3

$$R_B = \frac{F_1 \cdot 0,5b + F_2 b + F_3 \cdot 3a + F_4 \cdot 2a}{4a} =$$

$$= \frac{15 \cdot 1,25 + 20 \cdot 2,5 + 25 \cdot 4,5 + 30 \cdot 3}{6} = 45,2 \text{ кН.}$$

Із рівняння (1)

$$X_A = F_1 + F_2 = 15 + 20 = 35 \text{ кН.}$$

Із рівняння (2)

$$R_B + Y_A = F_3 + F_4 = 25 + 30 = 55 \text{ кН; } Y_A = 98 \text{ кН.}$$

Тоді

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{35^2 + 9,8^2} = 36,5 \text{ кН.}$$

За. Всі замкнені багатокутники сил будемо для кожного вузла, щоб утворити діаграму Максвелла—Кремони. При цьому дотримуємося таких правил:

1) креслимо в масштабі схему ферми і показуємо на ній всі зовнішні сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{R}_A, \vec{R}_B$, які діють на ферму (див. рис. 1);

2) розбиваємо площину ферми на області, що знаходяться між зовнішніми силами та стержнями ферми (зовнішні області), а також області між стержнями (внутрішні області). Зовнішніми є області a, b, c, d, e, k , а внутрішніми — області R, S, P, N, M, Q ;

3) зовнішні сили і зусилля в стержнях на діаграмі позначаємо двома літерами, що відповідають назвам тих областей, між якими знаходиться певна сила або певний стержень ферми;

4) обхід ферми та її вузлів здійснюємо за ходом годинникової стрілки.

На рис. 1 сила \vec{R}_A лежить на межі зовнішніх областей a і b . При обході ферми в зазначеному напрямку перетинаємо лінію дії цієї сили, переходячи з області a в область b . На діаграмі у вибраному масштабі силу

\vec{R}_A зображаємо відрізком \vec{ab} , де першою літерою a фіксуємо початок вектора сили \vec{R}_A (відповідає області a), а другою b — кінець вектора цієї сили (відповідає області b).

Аналогічно на діаграмі рис. 4 відрізком \vec{bc} позначаємо силу \vec{F}_1 , відрізком \vec{cd} — силу \vec{F}_2 , відрізком \vec{de} — силу \vec{F}_3 , відрізком \vec{ek} — реакцію \vec{R}_B , а відрізком \vec{ka} — силу \vec{F}_4 . Здобути діаграму зовнішніх сил на рис. 4 виділяємо товстішими лініями.

Визначення зусиль в стержнях ферм починаємо з побудови замкненого багатокутника сил для вузла A . Використовуючи вибраний напрямок обходу ферми, з точки b проводимо пряму, паралельну стержню 1, а з точки a — пряму, паралельну стержню 2. Точка перетину R цих прямих на рис. 3 дає змогу визначити зусилля в стержнях \vec{S}_1 і \vec{S}_2 , які на діаграмі зображено відрізками \vec{bR} (\vec{S}_1) та \vec{Ra} (\vec{S}_2).

Подібним способом будуємо діаграму для вузла II (див. рис. 3), оскільки в цьому вузлі сходяться два стержні (3 і 6) з невідомими зусиллями \vec{S}_3 та \vec{S}_6 . На рис. 4 з точки R проводимо пряму, паралельну стержню 3, а з точки a — пряму паралельну стержню 6. Зусилля в стержні 3 зображається відрізком \vec{RS} , величина якого $S_3 = 0$, а зусилля в стержні 6 — відрізком \vec{Sa} . Подібним способом будуємо багатокутники сил для вузлів $III...VII$, закінчуючи вузлом B . При цьому враховуємо той факт, що побудова багатокутників сил можлива для вузлів, де сходяться не більше двох невідомих зусиль. Правильність побудови діаграми Максвелла—Кремони підтверджується її замкненістю на вузлі B .

У табл. 2 наведено значення зусиль в стержнях ферми, знайдені з побудованої діаграми з урахуванням масштабу побудови. Знак "плюс" означає, що стержень розтягнений (на діаграмі зусилля спрямовано від вузла при вибраному обході ферми), а знак "мінус" — стержень стиснений.

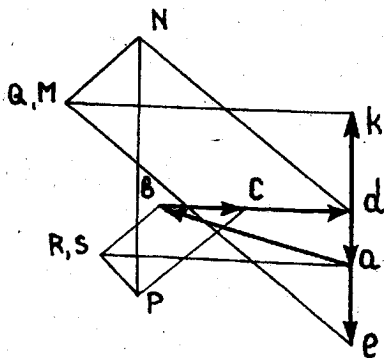


Рис. 4

Таблиця 2

Номер стержня		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Знак сили		-	+		-	-	+	+	-	-	+		-	+
Сила (кН), визначена	аналітично	15,3	45,8	0	25,1	9,8	45,8	48,8	51,1	19,6	53,3	0	70,7	53,3
	графічно	15,0	46,0	0	26,0	10,0	46,0	49,0	52,0	19,0	53,0	0	71,0	53,0

36. Відкидаємо всі в'язі та замінюємо їх дії на вузли реакціями. На рис. 3 показано вузли ферми з прикладеними до них активними силами і реакціями в'язей. Зусилля в стержнях позначено \vec{S}_i (i — номер стержня).

Реакція стержня, прикладена до відповідного вузла, $\vec{S}'_i = -\vec{S}_i$. Зусилля в стержнях спрямовано від вузлів в середину відповідного стержня. Вважаємо, що стержні розтягнуті. Якщо в результаті розрахунку зусилля в стержні матиме від'ємний знак, то цей стержень працює на стиск.

Для кожного вузла складаємо два рівняння рівноваги:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0. \quad (4)$$

Легко переконатися, що виходячи з цих рівнянь можна визначити не тільки всі сили, а й реакції опор. Дійсно, вузлів — 8, рівнянь 16, невідомих — 13 плюс 3 реакції опор.

Якщо рівняння рівноваги розв'язувати без застосування ЕОМ, то вузли слід розглядати в такій послідовності, щоб кожен раз в рівняння (4) входило не більше двох невідомих зусиль.

Аналітичні умови рівноваги для вузла А мають вигляд

$$\sum F_{ix} = 0; \quad S_2 + S_1 \cos \alpha - X_A = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad Y_A + S_1 \sin \alpha = 0,$$

звідки

$$S_1 = -\frac{Y_A}{\sin \alpha} = -Y_A \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2a}{b} = \frac{3}{2,5} = 1,2;$$

$$S_1 = -9,8 \sqrt{1 + 1,44} = -15,3 \text{ кН}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{6};$$

$$S_2 = X_A - S_1 \cos \alpha = X_A + Y_A \operatorname{ctg} \alpha; \quad S_2 = 35 + 9,8 \cdot 1,2 = 45,8 \text{ кН}.$$

Для вузла II маємо

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -S_2' + S_6 = 0; \quad S_2' = S_2 = S_6 = 45,8 \text{ кН};$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad S_3 = 0.$$

Для вузла III дістаємо

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -S_1' \cos \alpha + F_1 + S_4 \cos \alpha + S_5 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -S_1' \sin \alpha - S_3' + S_4 \sin \alpha - S_5 \sin \alpha = 0; \quad S_1' = S_1;$$

$$S_3' = S_3;$$

$$+ \begin{cases} -S_1 + F_1 / \cos \alpha + S_4 + S_5 = 0; \\ -S_1 + S_4 - S_5 = 0; \end{cases}$$

$$S_4 = S_1 - F_1 / (2 \cos \alpha) = S_1 - F_1 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} / 2 =$$

$$= -15,3 - 7,5 \sqrt{1 + 25/36} = -25,1 \text{ кН}; S_5 = S_4 - S_1 = -9,8 \text{ кН}.$$

Для узла IV находимо

$$\sum F_{ix} = 0; F_2 + S_8 \cos \alpha - S_4' \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; -S_4' \sin \alpha - S_7 - S_8 \sin \alpha = 0; S_4' = S_4;$$

$$F_2 / \cos \alpha + S_8 - S_4 = 0;$$

$$S_8 = S_4 - F_2 / \cos \alpha = S_4 - F_2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} =$$

$$= -25,1 - 20 \sqrt{1 + 25/36} = -51,1 \text{ кН};$$

$$S_7 = -S_4 \sin \alpha - S_8 \sin \alpha = -(S_4 + S_8) / \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} =$$

$$= -(-25,1 - 51,1) / \sqrt{1 + 1,44} = 48,8 \text{ кН}.$$

Для узла V маємо

$$\sum F_{ix} = 0; -S_6' - S_5' \cos \alpha + S_9 \cos \alpha + S_{10} = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; -F_4 + S_5' \sin \alpha + S_7' + S_9 \sin \alpha = 0; S_6' = S_6; S_5' = S_5;$$

$$S_9 = (F_4 - S_7) / \sin \alpha - S_5 =$$

$$= (F_4 - S_7) \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} - S_5 = (30 - 48,8) \sqrt{1 + 1,44} + 9,8 = -19,6 \text{ кН};$$

$$S_{10} = S_6 + S_5 \cos \alpha - S_9 \cos \alpha = S_6 + (S_5 - S_9) / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} =$$

$$= 45,8 + (-9,8 + 19,6) / \sqrt{1 + 25/36} = 53,3 \text{ кН}.$$

Для узла VI дістаємо

$$\sum F_{ix} = 0; -S_9' \cos \alpha - S_8' \cos \alpha + S_{12} \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; -F_3 + S_8' \sin \alpha - S_9' \sin \alpha - S_{11} - S_{12} \sin \alpha = 0;$$

$$S_8' = S_8; S_9' = S_9;$$

$$S_{12} = S_8 + S_9 = -51,1 - 19,6 = -70,7 \text{ кН};$$

$$S_{11} = -F_3 + S_8 \sin \alpha - S_9 \sin \alpha - S_{12} \sin \alpha =$$

$$= -F_3 + (S_8 - S_9 - S_{12})/\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} =$$

$$= -25 + (-51,1 + 19,6 + 70,7)/\sqrt{2,44} = 0.$$

Для вузла VII знаходимо

$$\sum F_{lx} = 0; S_{13} - S_{10}' = 0; \sum F_{ly} = 0; S_{11}' = 0;$$

$$S_{11}' = S_{11}; S_{10}' = S_{10}; S_{11} = 0; S_{13} = 53,3 \text{ кН.}$$

Для вузла B (перевірка) маємо

$$S_{13}' = S_{13}; \sum F_{lx} = 0; -S_{13}' - S_{12}' \cos \alpha = 0; S_{12}' = S_{12}; \sum F_{ly} = 0;$$

$$S_{12}' \sin \alpha + R_B = 0; S_{12} \cos \alpha = -S_{13}; S_{12} \sin \alpha = -R_B;$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = S_{13}/R_B = 53,3/45,2 = 1,2.$$

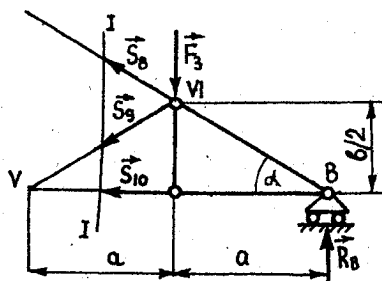


Рис. 5

Методом перерізів (методом Ріттера) додатково перевіряємо зусилля в трьох стержнях ферми, наприклад 8, 9 і 10. Для цього розглядаємо рівновагу правої частини ферми, на яку діють сили, показані на рис. 5.

Для визначення сил \vec{S}_8 , \vec{S}_9 , \vec{S}_{10} розрізаємо умовно ферму перерізом I-I. Дію відкинutoї лівої частини ферми на праву замінюємо силами \vec{S}_8 , \vec{S}_9 , \vec{S}_{10} .

Складаємо суму моментів відносно точок Ріттера (V, VI, B):

$$\sum M_V(\vec{F}_i) = 0; R_B \cdot 2a - F_3 a + S_8 \cdot 2a \sin \alpha = 0;$$

$$\sum M_{VI}(\vec{F}_i) = 0; R_B a - S_{10} \cdot 0,5b = 0;$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0; F_3 a + S_9 \cdot 2a \sin \alpha = 0.$$

Звідси

$$S_{10} = 2R_B a/b = 45,2 \cdot 3/2,5 = 53,3 \text{ кН};$$

$$S_9 = -F_3/(2 \sin \alpha) = -12,5\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = -19,5 \text{ кН};$$

$$S_8 = (F_3 - 2R_B)/(2 \sin \alpha) = (25 - 90,4)\sqrt{2,44}/2 = -51 \text{ кН.}$$

Знак "мінус" тут означає, що стержні 8 і 9 стиснені.

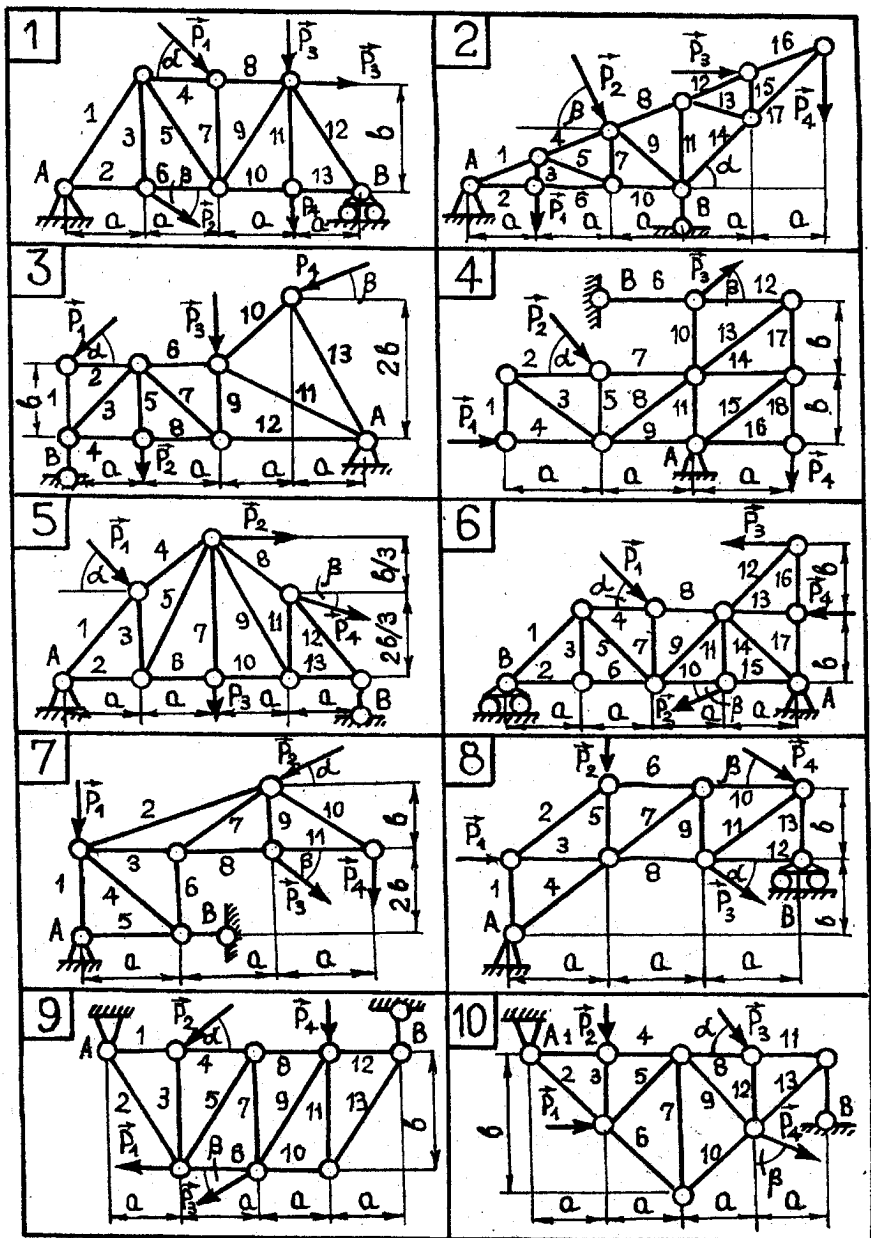


Рис. 5,а

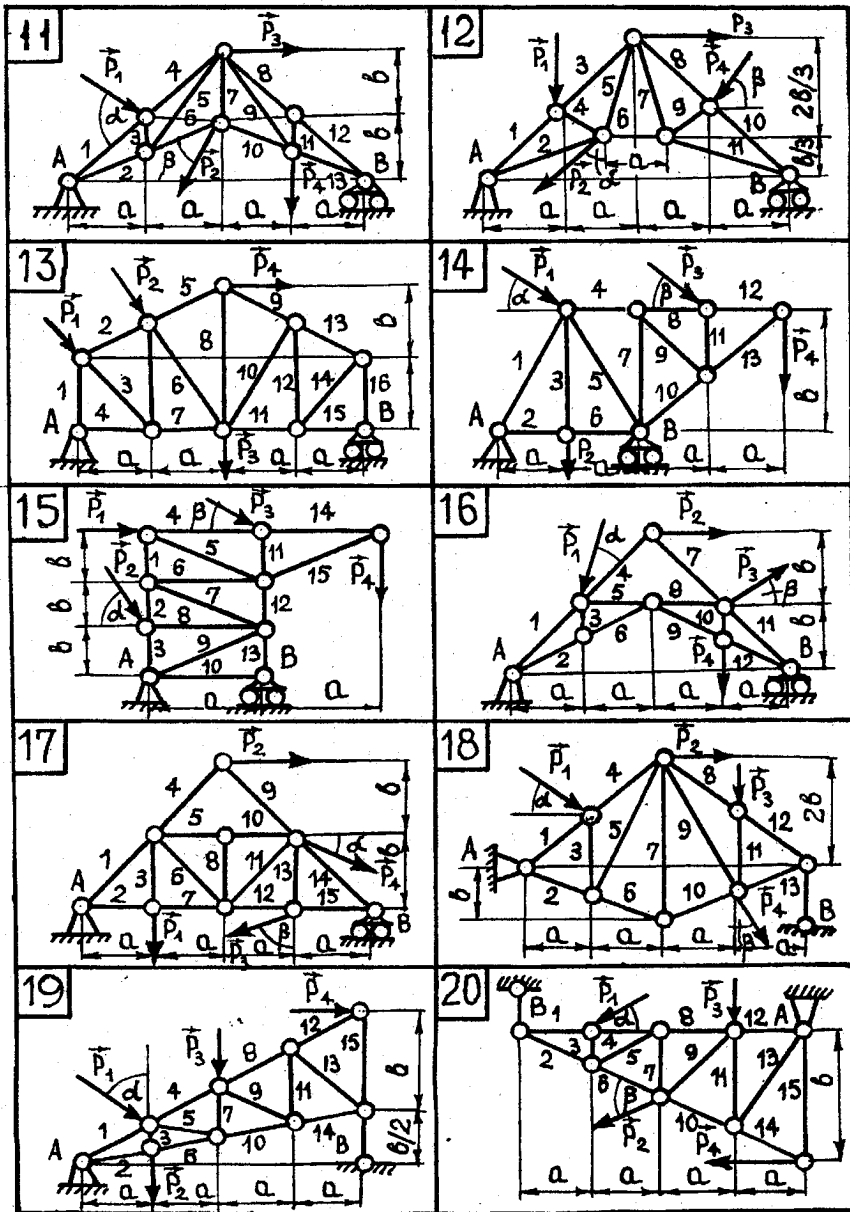


Рис. 5,6

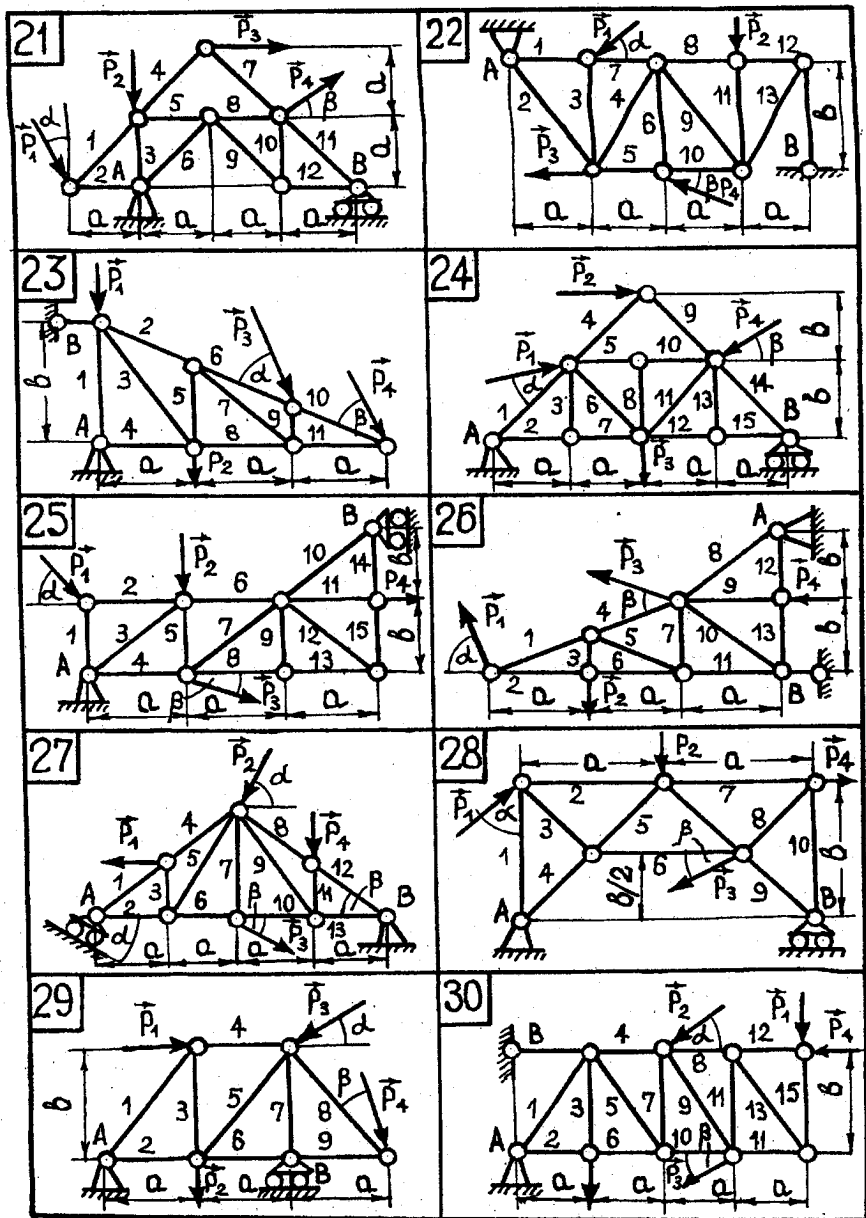


Рис. 5.6

Завдання С-2

ПРОСТОРОВА СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

На конструкцію, що складається із трьох невагомих стержнів (рис. 6, a — b), у вузлі A діє сила \vec{P}_1 , напрямок якої показано на схемах. Геометричні розміри конструкції та значення сили \vec{P}_1 наведено в табл. 1.

Визначити зусилля в стержнях 1—3.

Приклад 2. Визначити зусилля в стержнях 1—3 просторової конструкції (рис. 6) у вигляді паралелепіпеда із сторонами $a = 3$ м, $b = 4$ м, $c = 5$ м. На вузол A діє сила $P_1 = 15$ кН, спрямована вздовж прямої AB , причому точка B лежить на вертикальній осі Oz .

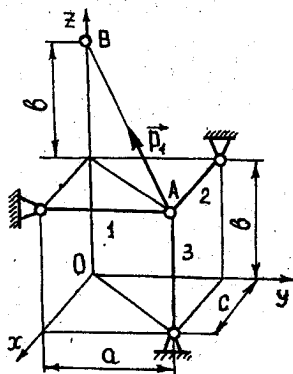


Рис. 6

Розв'язання. В рівновазі розглядаємо вузол A , на який діє відома сила \vec{P}_1 . Звільнюємо умовно цей вузол від в'язів, а їх дію на нього замінюємо реакціями \vec{R}_1 , \vec{R}_2 , \vec{R}_3 , спрямованими вздовж стержнів 1—3 від вузла (вважаємо, що стержні працюють на розтяг). У системі координат $xOyz$, показаній на рис. 7, записуємо аналітичні умови рівноваги збіжної системи сил:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -R_2 - P_1 \cos \alpha \sin \beta = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -R_1 - P_1 \cos \alpha \cos \beta = 0;$$

$$\sum F_{iz} = 0; \quad P_1 \sin \alpha - R_3 = 0,$$

де

$$\sin \beta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{5}{\sqrt{9 + 25}} = \frac{5}{\sqrt{34}};$$

$$\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{3}{\sqrt{9 + 25}} = \frac{3}{\sqrt{34}};$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{4}{\sqrt{9 + 16 + 25}} = \frac{2\sqrt{2}}{5};$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{9 + 25}}{\sqrt{9 + 16 + 25}} = \frac{\sqrt{34}}{5\sqrt{2}}.$$

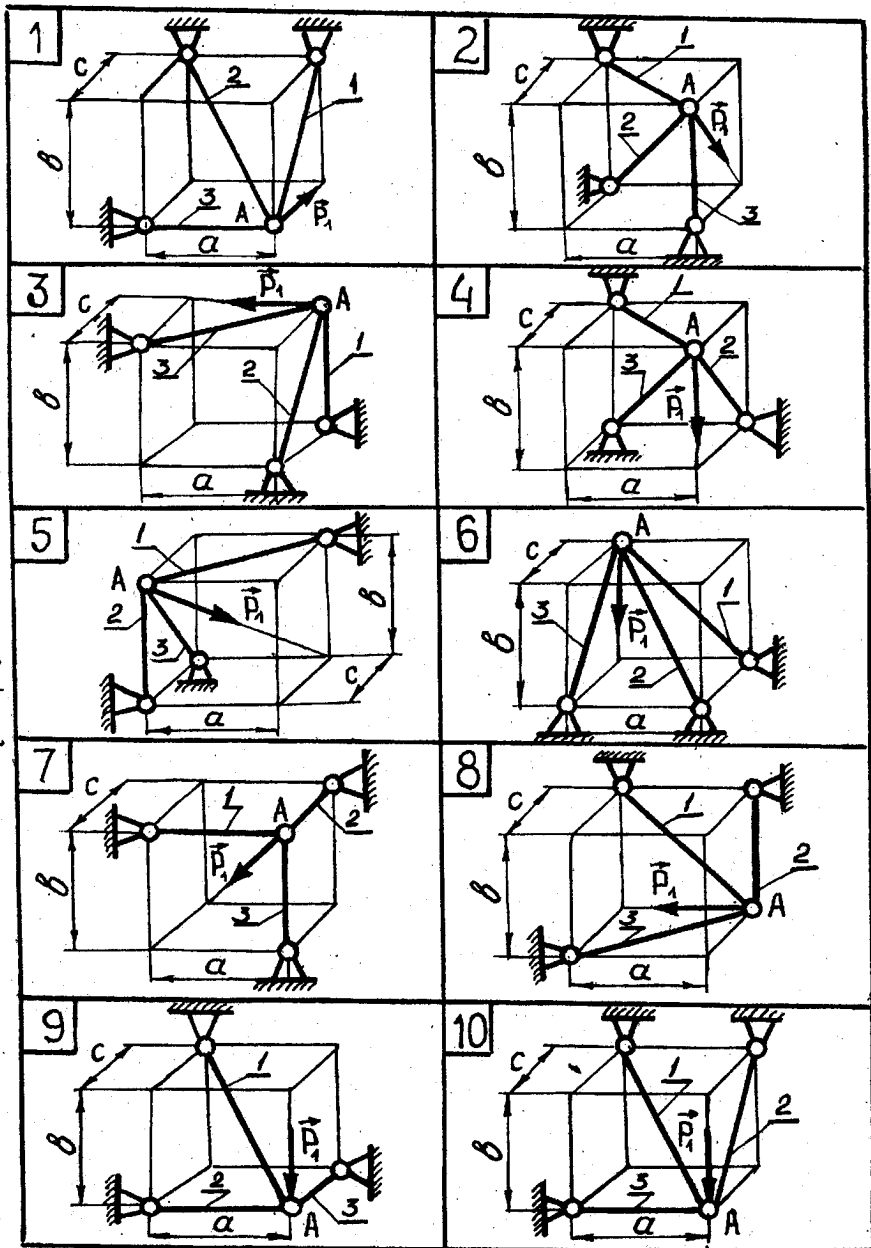


Рис. 6,а

НТБ ЦНТУ
М. ВІСНИЦЬКА

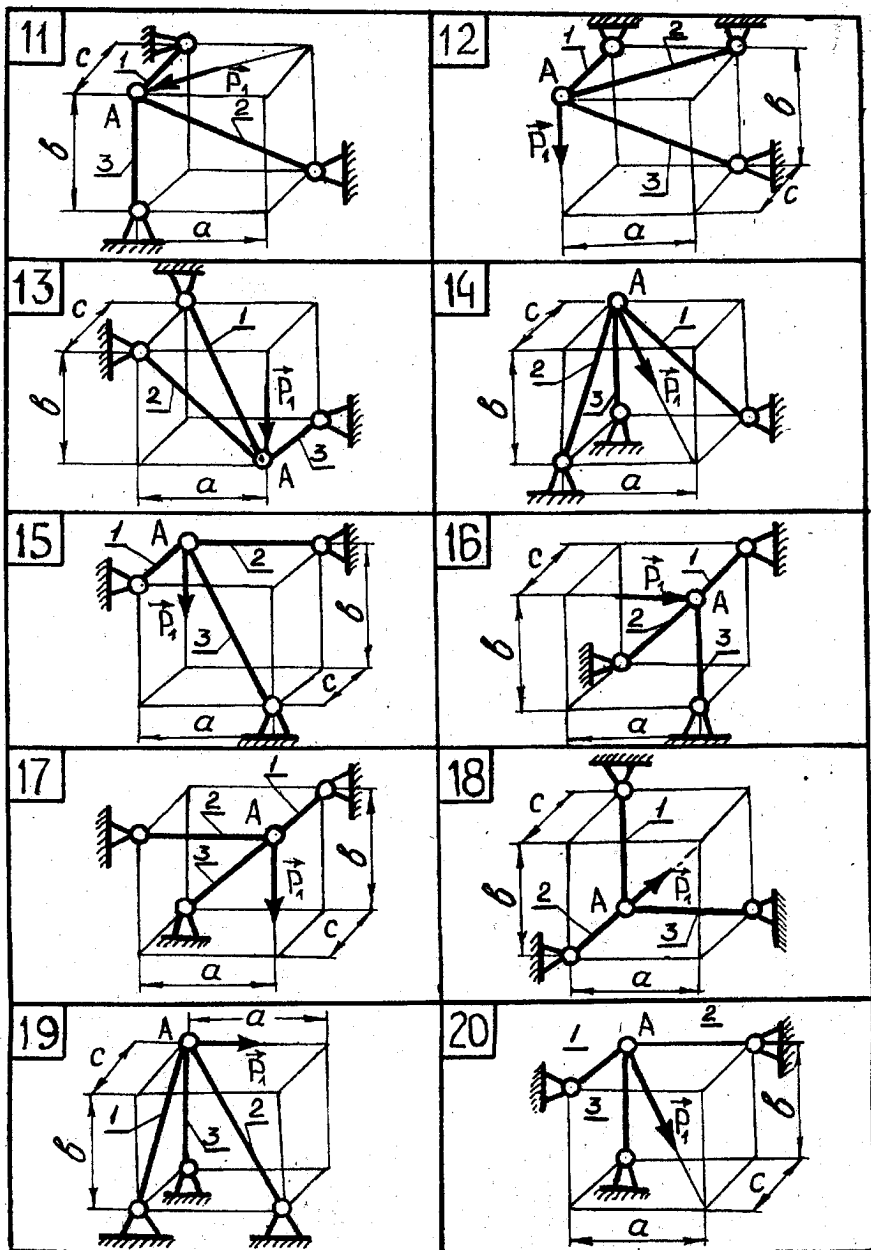


Рис. 6,6

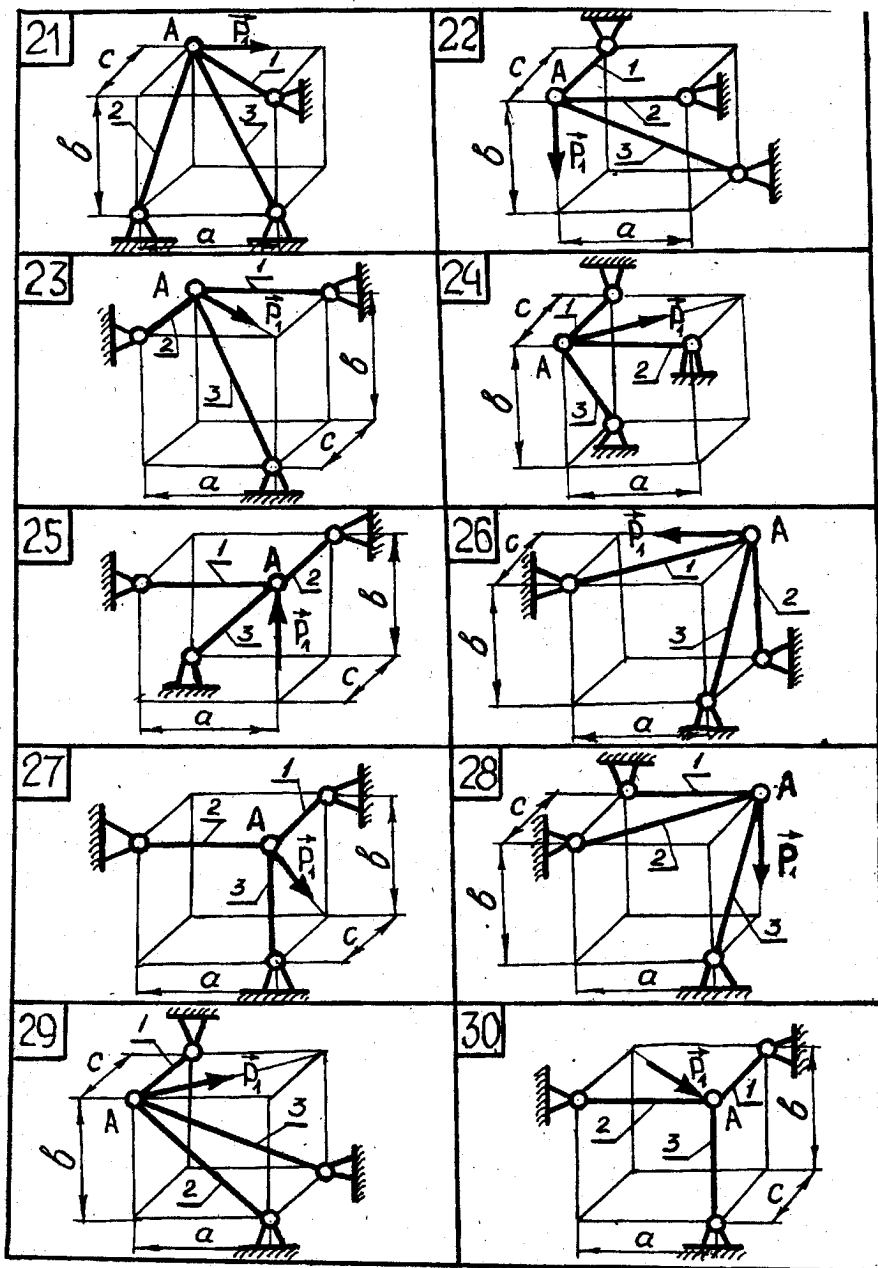


Рис. 6,6

Остаточну зусилля в стержнях 1—3 станов-
лять

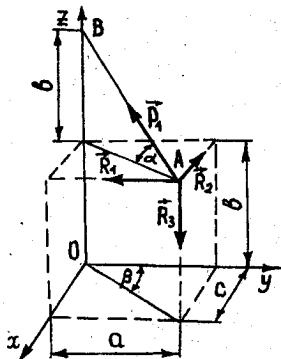


Рис. 7

$$R_1 = -P_1 \cos \alpha \cos \beta =$$

$$= -15 \frac{\sqrt{34}}{5\sqrt{2}} \frac{3}{\sqrt{34}} = -6,38 \text{ кН};$$

$$R_2 = -P_1 \cos \alpha \sin \beta =$$

$$= -15 \frac{\sqrt{34}}{5\sqrt{2}} \frac{5}{\sqrt{34}} = -10,63 \text{ кН};$$

$$R_3 = P_1 \sin \alpha = 15 \frac{2\sqrt{2}}{5} = 8,46 \text{ кН}.$$

Отже, 1 і 2 стиснені, а стержень 3 розтягнений.

Завдання С-3

ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР СКЛАДНОЇ КОНСТРУКЦІЇ (СИСТЕМА ДВОХ ТІЛ)

На конструкцію (рис. 8, а—в), що складається із двох частин, діють показані на рисунках активні навантаження. Числові значення геометричних параметрів, зображених на рисунках, наведено в табл. 3.

Визначити реакції опор конструкції та сили взаємодії між її окремими тілами.

Таблиця 3

Варіант	P	a	b	c	M ₁	M ₂	q	α	β
	кН	м			кН·м		кН/м	град	
1	4	1	3	3	5	—	1,5	45	30
2	3	2	2	5	6	—	1,0	30	30
3	5	3	2	6	8	—	2,0	60	60
4	6	3	1,5	5	4	—	1,8	45	60
5	10	8	3	3	12	—	1,0	30	60
6	8	2	3	4	8	—	2,0	60	30
7	4	2	4	3	6	—	1,6	30	45
8	2	4	2	3	3	—	1,5	30	45
9	2	2	4	5	4	—	1,5	45	30
10	3	4	3	5	10	—	1,2	60	45

Варіант	P	a	b	c	M_1	M_2	q	α	β
	кН	м			кН·м		кН/м	град	
11	3	3	2	4	7	9	2,0	45	30
12	6	5	3	6	9	12	1,5	30	30
13	2	2	4	3	5	4	1,8	45	
14	7	4	3	4	6	8	1,5	60	45
15	2	8	3	2	4	5	1,2	45	60
16	3	4	2	1	3	4	1,0	30	30
17	4	3	5	2	8	6	1,6	30	30
18	6	2	4	3	12	10	1,5	30	45
19	5	4	2	4	10	—	2,0	45	45
20	8	2	4	2	14	8	1,5	45	60
21	3	4	3	2	6	—	1,8	30	45
22	4	2	4	3	8	—	2,0	60	45
23	6	4	2	4	4	—	1,5	30	60
24	2	4	3	2	5	—	1,0	30	60
25	3	4	2	2	6	—	1,2	90	30
26	2	1	4	4	4	—	1,5	45	30
27	6	3	3	5	12	—	1,0	30	45
28	4	4	1	2	8	—	1,5	45	45
29	2	1	2	4	6	—	1,4	30	30
30	5	2	4	2	9	—	1,2	45	45
31	3	2	1	5	5	—	1,5	60	60
32	4	3	3	4	6	—	1,0	45	30
33	3	2	2		8	—	1,2	30	60
34	6	3	2	5	12	—	1,4	45	45
35	8	4	3	2	9	—	1,5	45	60
36	4	2	3	4	11	—	1,0	30	
37	5	2	4	3	10	—	1,8	45	60
38	3	3	4	6	7	—	1,5	45	30
39	2	3	5	1	4	—	1,2	45	60
40	4	5	3	4	8	—	2,0	30	—

Приклад 3. Дано: схему конструкції (рис. 8); $P = 6\text{кН}$; $a = 4\text{ м}$; $b = 2\text{ м}$; $c = 3\text{ м}$; $M_1 = 8\text{ кН}\cdot\text{м}$; $q = 1,5\text{ кН/м}$; $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 60^\circ$.

Визначити реакції опор A та B і тиск на шарнір C .

Розв'язання. Розглянемо систему зрівноважувальних сил, прикладену до складної конструкції (див. рис. 8). На конструкцію діє плоска система сил, що складається із: сили \vec{P} ; пари сил із моментом

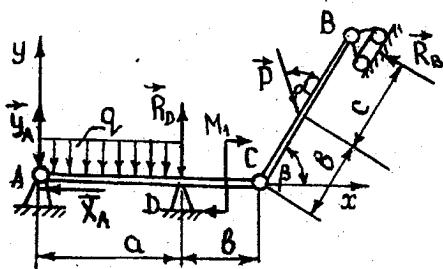


Рис. 8

M_1 ; розподіленого навантаження інтенсивністю q , яке можна замінити силою $Q = qa$, а також із невідомих реакцій опор $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B, \vec{R}_D$, для якої можна використати такі аналітичні умови рівноваги:

$$\sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0;$$

$$\sum M_0(\vec{F}_i) = 0.$$

Рівнянь можна записати три, а невідомими є чотири реакції опор і тиск у шарнірі С. Тому розглянемо рівновагу окремих частин конструкції, а саме: бруса АС (рис. 9) та балки СВ (рис. 10).

Аналітичні умови рівноваги у вибраній системі координат xAy мають вигляд:

для бруса АС

$$\sum F_{ix} = 0; X_A - X_C' = 0; \sum F_{iy} = 0; Y_A - Q + R_D - Y_C' = 0;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; -Qa/2 + R_D a - M_1 - Y_C'(a + b) = 0;$$

для балки СВ

$$\sum F_{ix} = 0; X_C + P \cos(180^\circ - (\alpha + \beta)) - R_B \cos(90^\circ - \beta) = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; Y_C + P \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) + R_B \sin(90^\circ - \beta) = 0;$$

$$\sum M_C(\vec{F}_i) = 0; R_B(c + b) - Pb \sin \alpha = 0.$$

Підставляючи в записані рівняння відповідні числові значення сил і геометричні параметри конструкції, дістаємо

$$R_B = \frac{Pb \sin \alpha}{b + c} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2}/2}{5} = 1,7 \text{ кН};$$

$$Y_C' = Y_C = P \sin(\alpha + \beta) - R_B \cos \beta = 6 \sin 105^\circ - 1,7 \cos 60^\circ = 4,95 \text{ кН};$$

$$R_D = \frac{M_1 + Y_C'(a + b) + 0,5Qa}{a} = \frac{8 + 4,95 \cdot 6 + 0,5 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot 4}{4} = 12,43 \text{ кН};$$

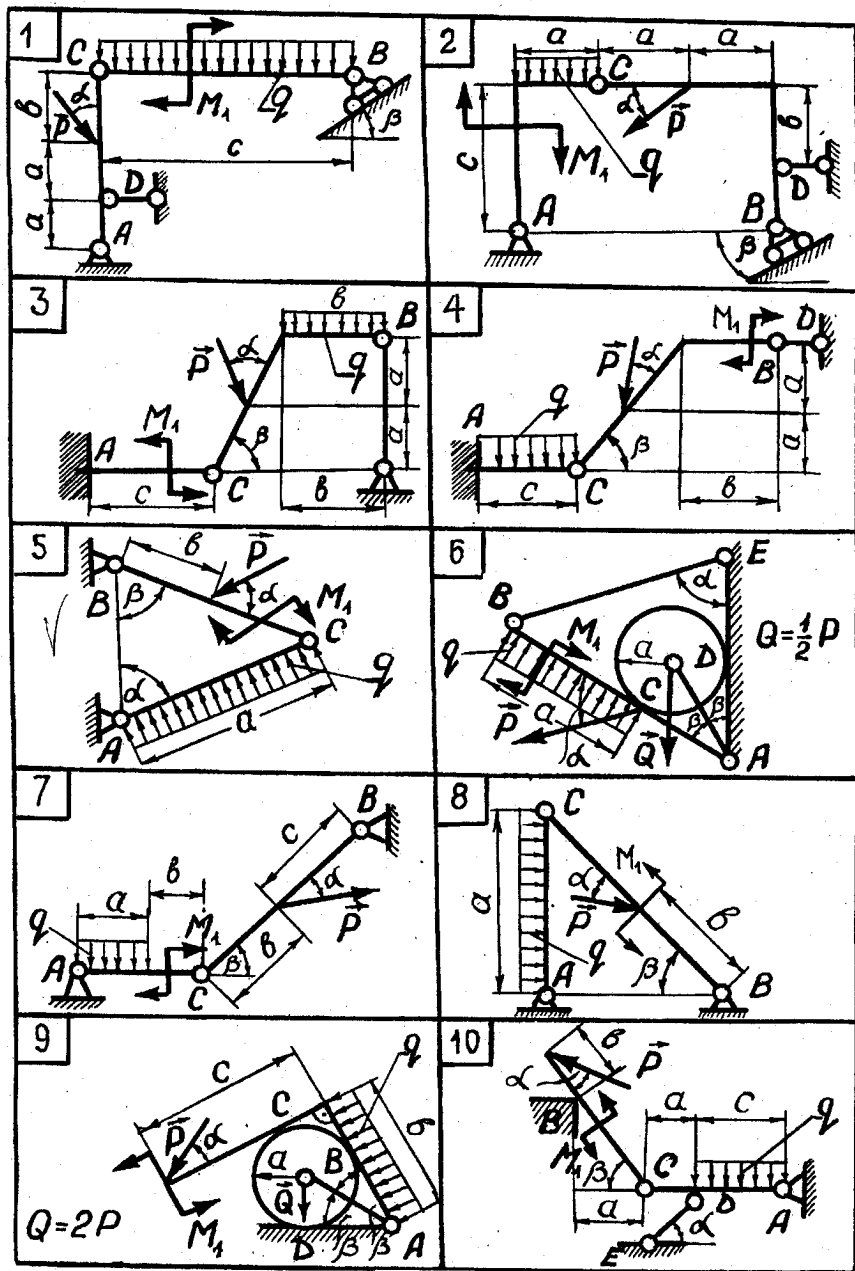


Рис. 8,а

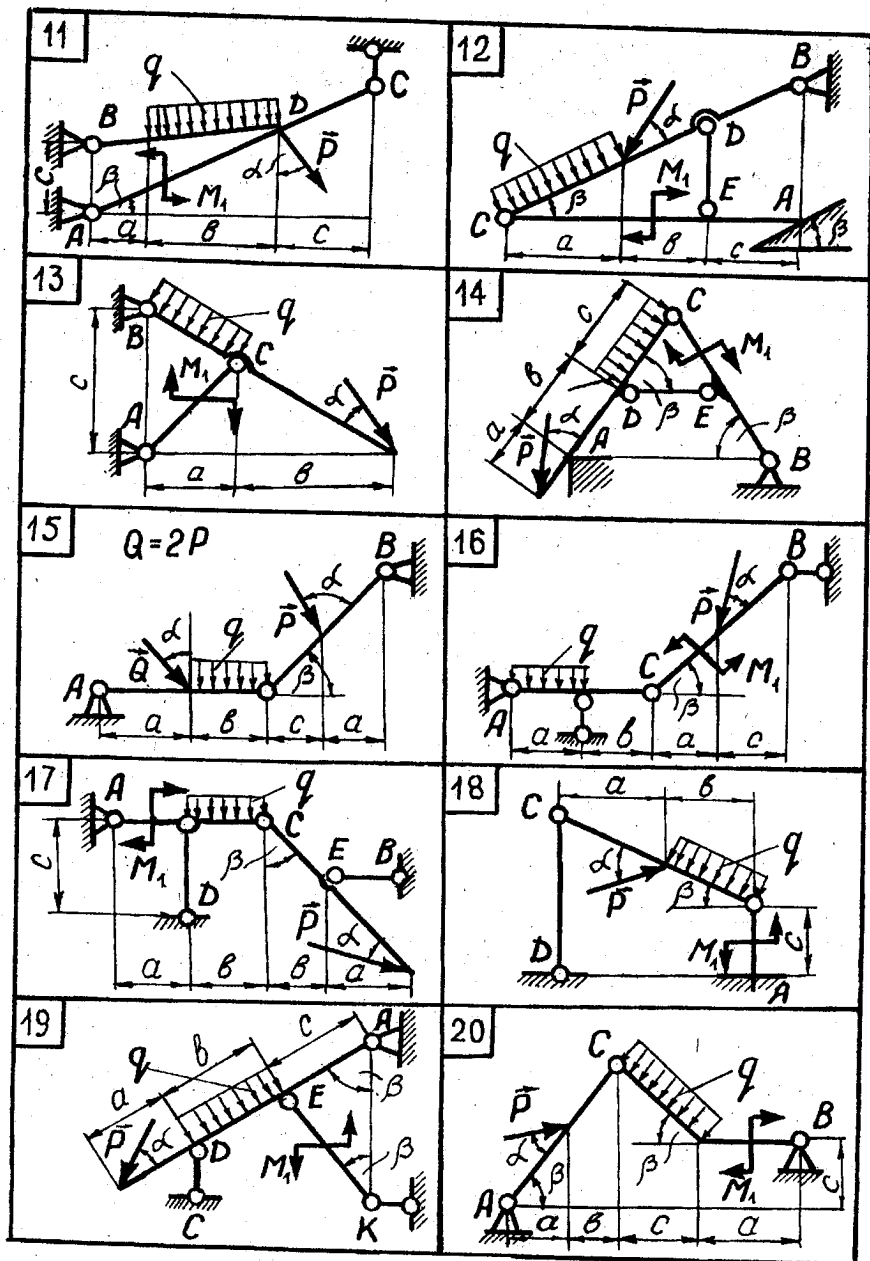


Рис. 8,6

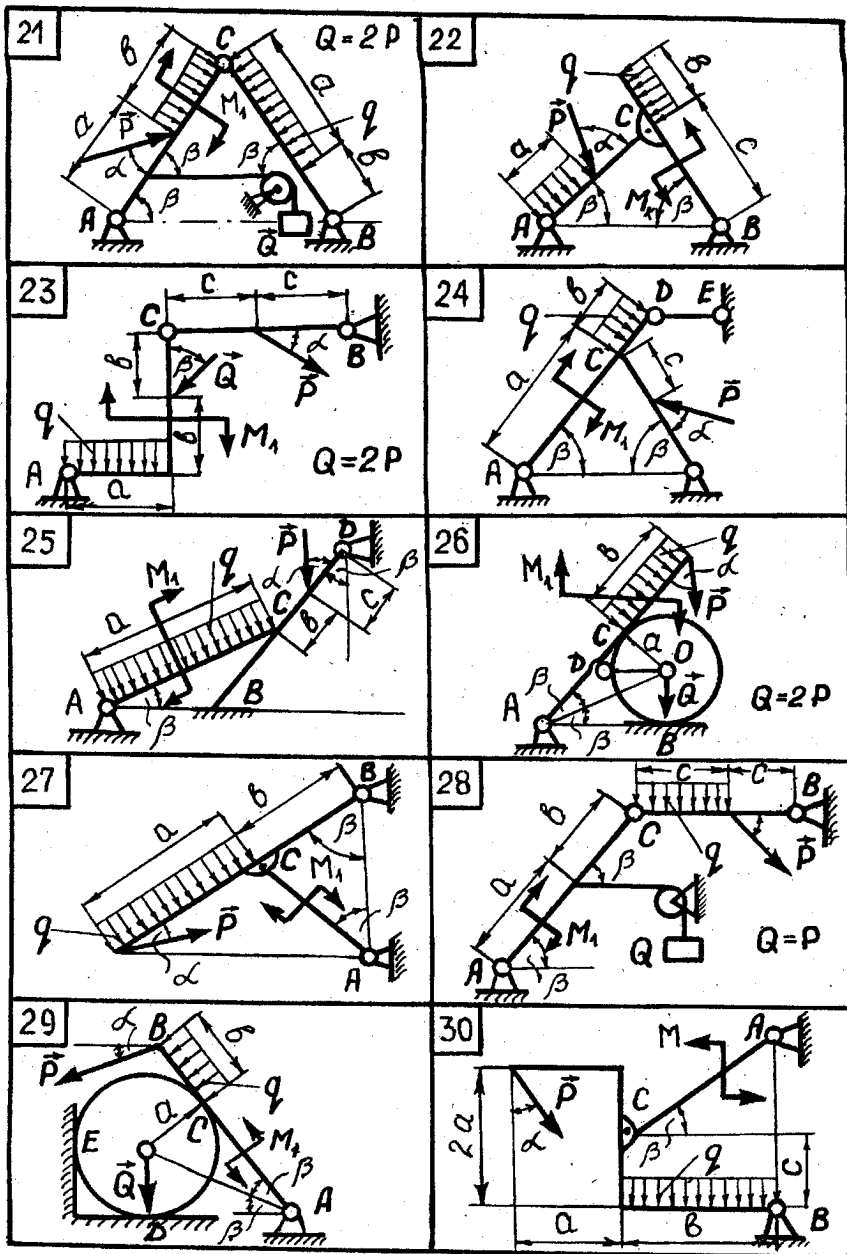


Рис. 8,6

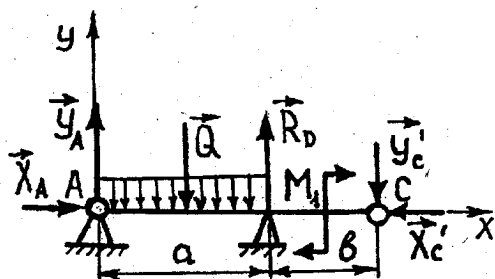


Рис. 9

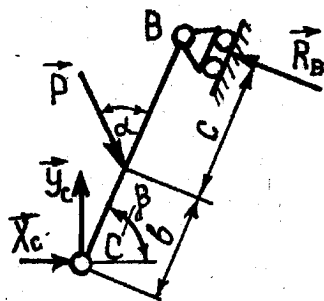


Рис. 10

$$Y_A = Q + Y_C' - R_D = 1,5 \cdot 4 + 4,95 - 12,43 = -1,48 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} X_C = X_C' &= R_B \sin \beta + P \cos (\alpha + \beta) = \\ &= 1,7 \sin 60^\circ + 6 \cos 105^\circ = -0,08 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$X_A = X_C = -0,08 \text{ кН}.$$

Завдання С-4

ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР СКЛАДНОЇ КОНСТРУКЦІЇ (СИСТЕМА ТРЬОХ ТІЛ)

Конструкція складається з трьох тіл. Схеми конструкції зображено на рис. 11, *a—г* (всі розміри — в метрах); навантаження, що передається на конструкцію, наведено в табл. 3.

Визначити реакції в'язей і сили, з якими взаємодіють тіла між собою.

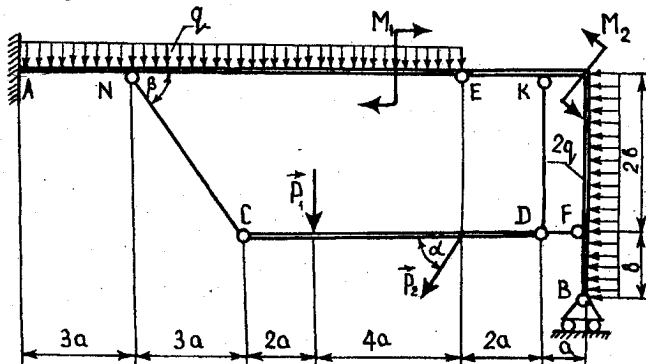


Рис. 11

Приклад 4. Визначити реакції опор A і B складної конструкції (рис. 11), яка складається з тіл AE , $EKFB$ та CD , а також тиск на шарнір E і зусилля в стержнях CN , KD , DF . На конструкцію діють сили $P_1 = 4$ кН, $P_2 = 6\sqrt{3}$ кН, пари сил із моментами $M_1 = 20$ кН·м, $M_2 = 35$ кН·м, а також розподілене навантаження інтенсивністю $q = 0,5$ кН/м ($a = 1$ м, $b = 2$ м, $\alpha = 60^\circ$).

Розв'язання. Розділяємо конструкцію на окремі частини (рис. 12—14). На кожному тілі розділеної конструкції показуємо активні сили і реакції в'язей. Знак "плюс" указує на те, що напрямок відповідної реакції відповідає показаному на рисунку.

Аналітичні умови рівноваги мають вигляд:

для тіла CD

$$\sum F_{ix} = 0; \quad N_F - N_C \cos \beta - P_2 \cos \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -P_1 - P_2 \sin \alpha + N_C \sin \beta + N_D = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_i) = 0; \quad -P_1 \cdot 2a - P_2 \cdot 6a \sin \alpha + N_D \cdot 8a = 0; \quad (3)$$

для тіла $EKFB$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -N_F' - Q_2 - X_E = 0; \quad (4)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad Y_E - N_D' + R_B = 0; \quad (5)$$

$$\sum M_E(\vec{F}_i) = 0; \quad -N_D' \cdot 2a + M_2 - Q_2 \cdot 1,5b - N_F' \cdot 2b + R_B \cdot 3a = 0; \quad (6)$$

для тіла AE

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -X_A + N_C' \cos \beta + X_E' = 0; \quad (7)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad Y_A - N_C' \sin \beta - Q_1 - Y_E' = 0; \quad (8)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad M_A - Q_1 \cdot 6a - M_1 - Y_E' \cdot 12a - N_C' \cdot 3a \sin \beta = 0;$$

$$Q_1 = 12aq = 12 \cdot 1 \cdot 0,5 = 6 \text{ кН}; \quad Q_2 = 3b \cdot 2q = 6bq = 6 \text{ кН}.$$

Із рівняння (3) маємо

$$N_B' = N_D = \frac{P_1 + 3P_2 \sin \alpha}{4} = \frac{4 + 3 \cdot 6\sqrt{3}\sqrt{3}/2}{4} = 7,75 \text{ кН}.$$

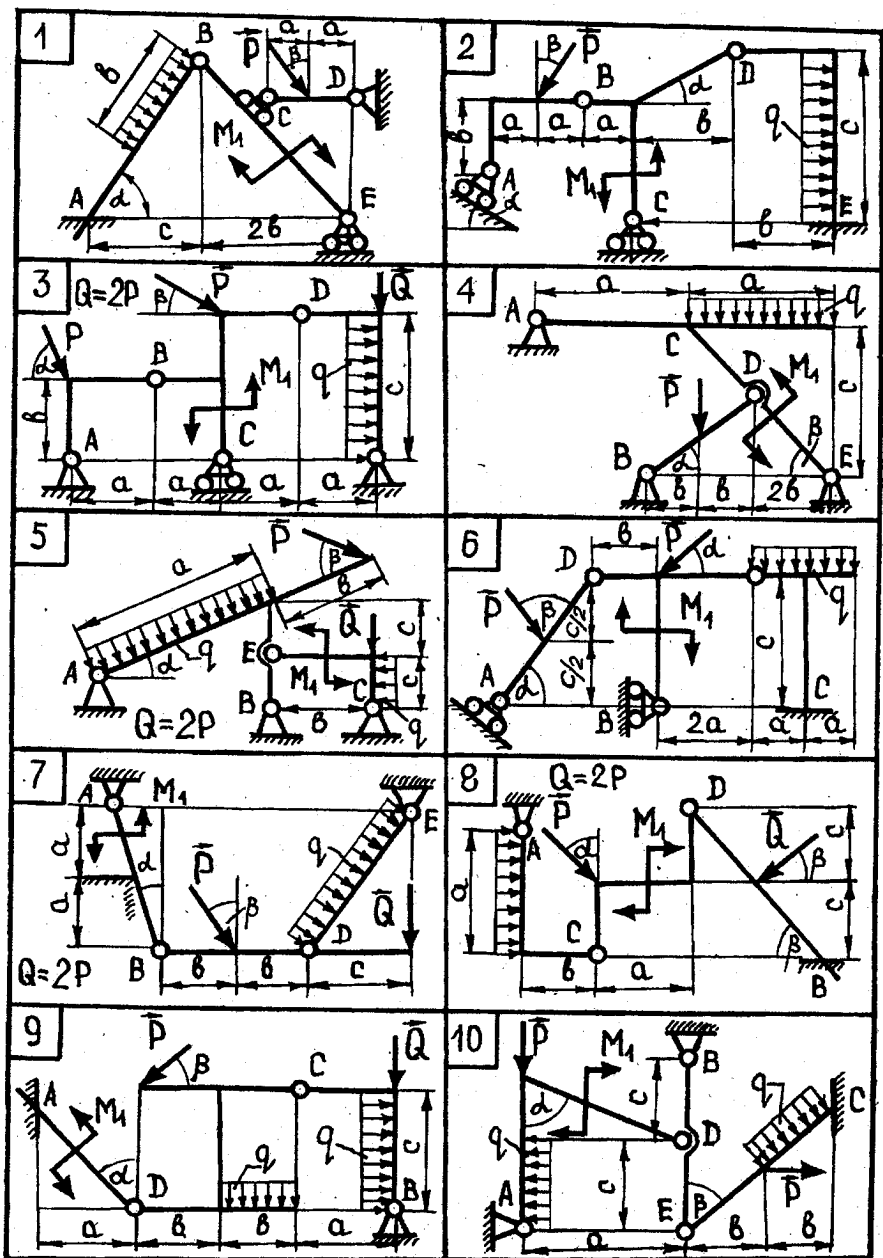


Рис. 11,а

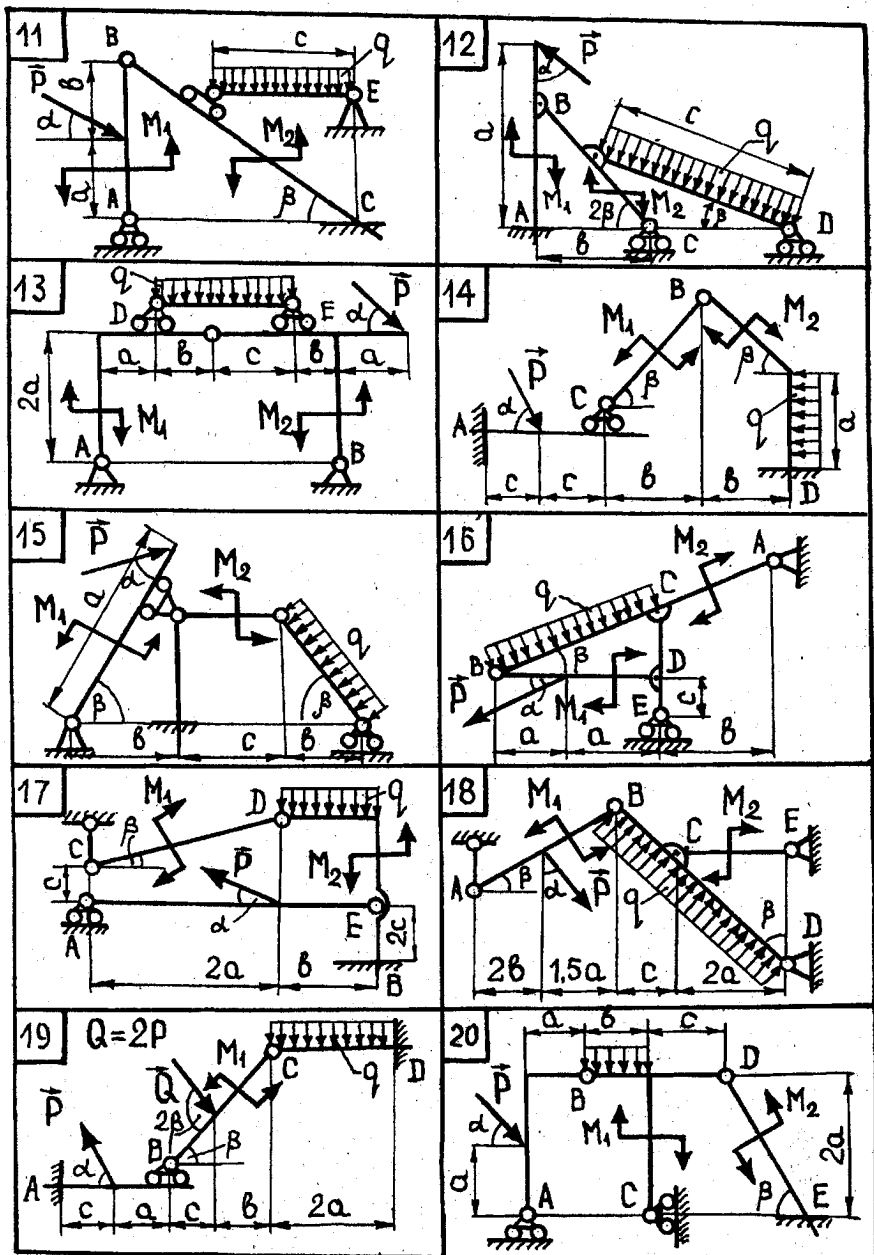


Рис. 11,6

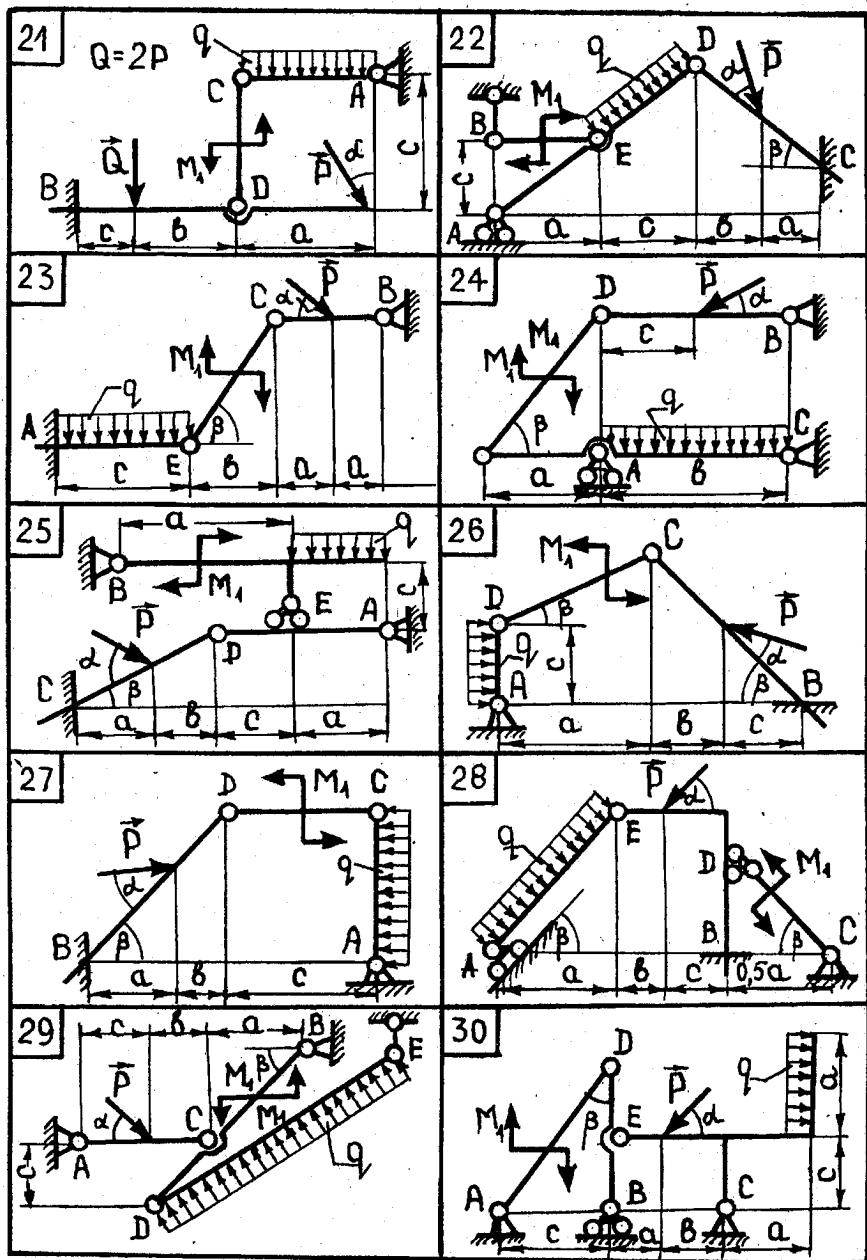


Рис. 11,8

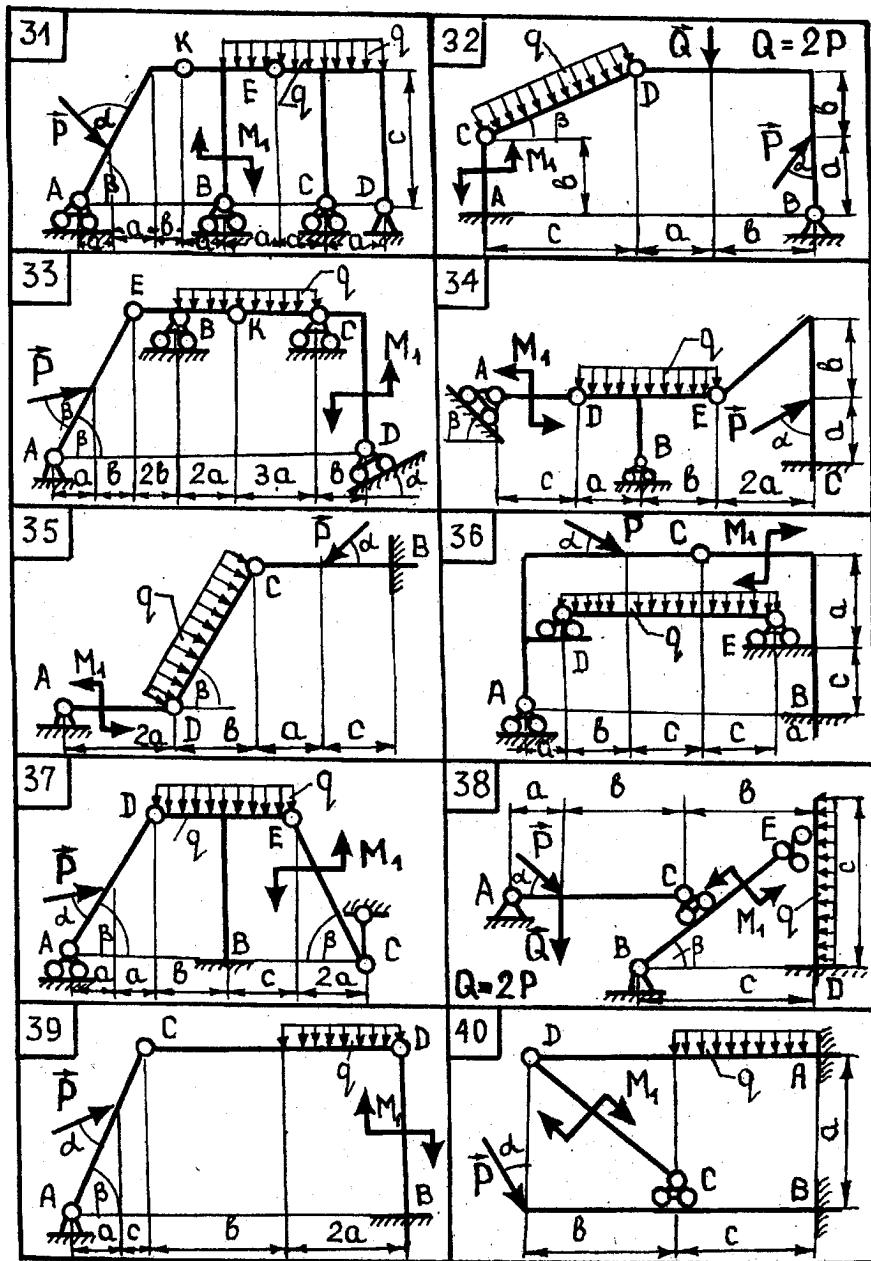


Рис. 11,2

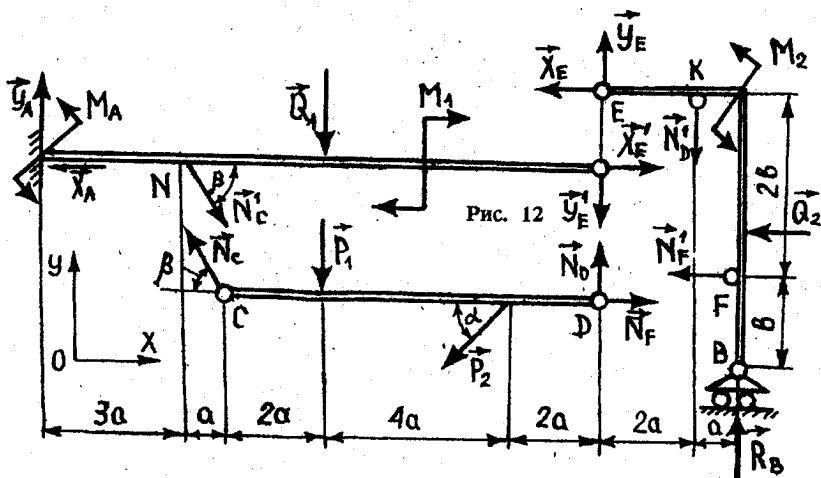


Рис. 13

Рис. 14

На підставі рівняння (2) дістаємо

$$N_C' = N_C = \frac{P_1 + P_2 \sin \alpha - N_D}{\sin \beta} = (P_1 + P_2 \sin \alpha - N_D) \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta};$$

$$\operatorname{ctg} \beta = 3a/(2b) = 3/4; \quad \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta} = \sqrt{1 + 9/16} = 5/4;$$

$$N_C = (4 + 6\sqrt{3}\sqrt{3}/2 - 7,75) \cdot 1,25 = 6,56 \text{ кН.}$$

Із рівняння (1) знаходимо

$$N_F' = N_F = P_2 \cos \alpha + N_C \cos \beta = 6\sqrt{3} \cdot 0,5 + \\ + 6,56\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = 3\sqrt{3} + 6,56\sqrt{1 - 16/25} = 9,13 \text{ кН.}$$

Із рівняння (4) маємо

$$X_E = -Q_2 - N_F' = -6 - 9,16 = -15,16 \text{ кН.}$$

На підставі рівняння (6) дістаємо

$$R_B = \frac{N_F' \cdot 2b + Q \cdot 1,5b - M_2 + N_D' \cdot 2a}{3a} = \\ = \frac{9,13 \cdot 4 + 6 \cdot 3 - 35 + 7,75 \cdot 2}{3} = 23,34 \text{ кН.}$$

Із рівняння (5) знаходимо

$$Y_E = N_D' - R_B = 7,75 - 23,34 = -15,6 \text{ кН.}$$

На підставі рівняння (4) маємо

$$X_E' = X_E = -Q_2 - N_F' = -6 - 9,16 = -15,16 \text{ кН.}$$

Із рівняння (7) дістаємо

$$\begin{aligned} X_A = X_E' + N_C' \cos \beta &= X_E + (P_1 + P_2 \sin \alpha - N_D) \operatorname{ctg} \beta = \\ &= -15,16 + (4 + 6\sqrt{3}\sqrt{3}/2 - 7,75) \cdot 3/4 = -11,3 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Із рівняння (8) знаходимо

$$\begin{aligned} Y_A = N_C' \sin \beta + Q_1 + Y_E' &= \frac{P_1 + P_2 \sin \alpha - N_D}{\sin \beta} \sin \beta + Q_1 + Y_E = \\ &= P_1 + P_2 \sin \alpha - N_D + Q_1 + Y_E = 4 + 6\sqrt{3}\sqrt{3}/2 - \\ &\quad - 7,75 + 6 - 15,6 = -4,35 \text{ кН.} \end{aligned}$$

На підставі рівняння (9) маємо

$$\begin{aligned} M_A = Q_1 \cdot 6a + M_1 + Y_E' \cdot 12a + N_C' \cdot 3a \sin \beta &= \\ = Q_1 \cdot 6a + M_1 + Y_E' \cdot 12a + 3a(P_1 + P_2 \sin \alpha - N_D) &= \\ = 6 \cdot 6 + 20 - 15,6 \cdot 12 + 3(4 + 6\sqrt{3}\sqrt{3}/2 - 7,75) &= -115,45 \text{ кН} \cdot \text{м.} \end{aligned}$$

Завдання С-5

ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР КОНСТРУКЦІЇ, ЩО СКЛАДАЄТЬСЯ З ДВОХ ТІЛ ПЕВНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ФОРМИ

Конструкція складається з двох тіл, які закріплено у вертикальній площині на опорах A , B та D і з'єднано шарнірно в точці C . Схеми конструкцій показано на рис. 15, a — $в$. На конструкцію діють сили \vec{F} , \vec{Q} , пара сил із моментом M і розподілене навантаження інтенсивністю q . Сила тяжіння заштрихованих частин тіл 1 та 2 дорівнює \vec{P}_1 і \vec{P}_2 . Лінії дії всіх сил лежать у вертикальній площині. Визначити реакції опор A та B і тиск на шарнір C . Модулі сил та геометричні розміри тіл наведено в табл. 4.

Приклад 5. На конструкцію (рис. 15), що складається з двох тіл 1 і 2, діють сили $P_1 = 4$ кН, $P_2 = 6$ кН, $F = 4\sqrt{2}$ кН, $Q = 8$ кН, пара сил із моментом $M = 12$ кН·м та розподілене навантаження інтенсивністю $q = 2$ кН/м.

Визначити реакції опор A , B , D і тиск на шарнір C ($a = 1,5$ м, $\beta = 45^\circ$).

Таблиця 4

Вари- ант	F	Q	P_1	P_2	M	q	a	b	c	α	β
	кН				кН·м	кН/м	м			град	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	6	8	5	4	12	—	2	1	—	60	60
2	8	—	6	10	24	—	1.	3	—	30	—
3	4	5	7	9	18	—	3	2	—	45	60
4	10	6	10	6	20	—	1,5	1	2	30	60
5	5	2	4	8	16	—	3	2	4,5	60	30
6	6	—	12	18	22	—	2	4	2	30	60
7	4	—	15	12	14	—	1	1,5	3	30	—
8	4	4	8	6	15	—	1	1	2	60	30
9	8	—	9	5	10	—	1	1,5	—	60	—
10	2	4	14	8	12	—	1,5	2	2,25	45	60
11	9	—	15	—	18	2,4	3	2	1	30	—
12	3	—	12	—	16	3,0	1	4	3	30	60
13	6	—	7	—	20	3,2	2	3	1	30	—
14	10	—	16	—	22	2,8	1	2	3	90	—
15	4	—	8	—	22	2,6	1,5	4	—	45	—
16	2	—	10	—	14	2,2	4	2	1,5	45	—
17	12	—	12	—	26	2,0	3	3	—	30	—
18	5	—	9	—	18	2,4	1	4	—	60	—
19	4	—	14	9	24	4,0	2	—	—	90	—
20	8	—	15	18	25	1,8	1,5	3	2	45	—
21	6	—	6	10	16	—	$1,5\sqrt{2}$	2	—	30	45
22	3	5	12	10	20	—	1	5	4	60	60
23	4	6	5	8	10	—	1,5	4	3	45	45
24	5	4	18	14	15	—	1	3	2	90	60
25	6	3	8	6	14	—	4	1	1,5	60	60
26	4	2	20	—	24	—	2	3	5	45	45
27	2	5	10	7	11	—	4	1	1	60	45
28	3	—	4	16	13	—	1,5	3	1	90	—
29	6	4	6	8	15	—	1,5	—	2	60	45
30	8	8	10	12	17	—	3	4	1	90	60

Розв'язання. Розглянемо рівновагу тіл 1 і 2, розчленивши конструкцію по шарніру С. Схеми дії сил (активних і реакції в'язей) показано на рис. 16 та 17, причому тіло 2 (трикутник у вертикальній площині) має прямокутний отвір, а тому, щоб не шукати центра прикладання сили \vec{P}_2 , діємо так:

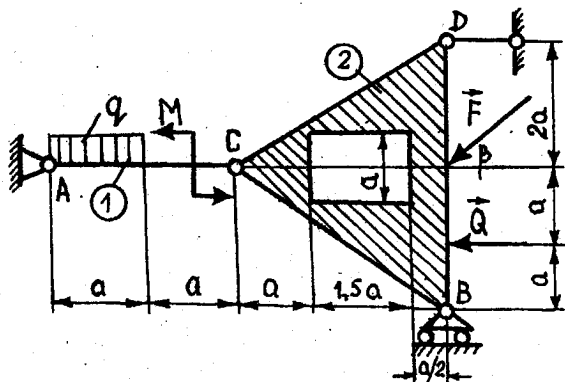


Рис. 15

а) зображаємо на рис. 17 силу тяжіння трикутника $B CD$ силою \vec{P}_2^x , прикладаючи її в точці перетину медіан трикутника;

б) аналогічно на цьому самому рисунку зображаємо силу \vec{P}_2^{xx} , прикладаючи її в точці перетину діагоналей вирізаного прямокутника.

Модулі цих сил

$$P_2^x = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 3a \gamma = 6a^2 \gamma; \quad P_2^{xx} = 1,5a a \gamma = 1,5 a^2 \gamma,$$

де γ — питома вага площі.

Сила тяжіння трикутника $B CD$ з вирізаним отвором

$$P_2 = P_2^x - P_2^{xx} = 4,5a^2 \gamma,$$

звідки

$$a^2 \gamma = P_2 / 4,5 = 2P_2 / 9; \quad P_2^x = 4 P_2 / 3; \quad P_2^{xx} = P_2 / 3.$$

Аналітичні умови рівноваги мають вигляд:

для тіла 1 (див. рис. 16)

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -X_A + X_C' = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad Y_A - P_1 - Q_1 - Y_C' = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad -Q_1 \cdot 0,5a - P_1 a - Y_C' \cdot 2a + M = 0; \quad (3)$$

для тіла 2 (див. рис. 17)

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -X_D - F \cos \beta - Q - X_C = 0; \quad (4)$$

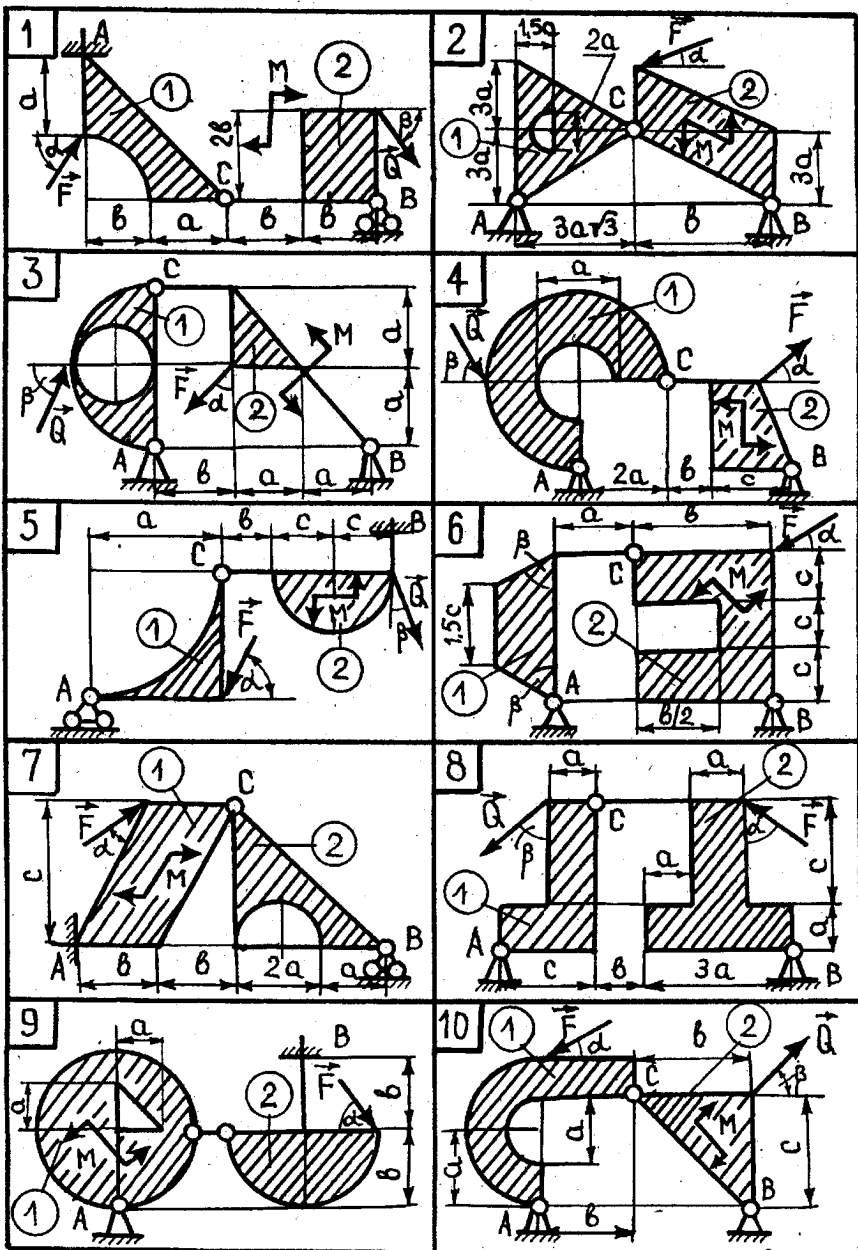


Рис. 15,а

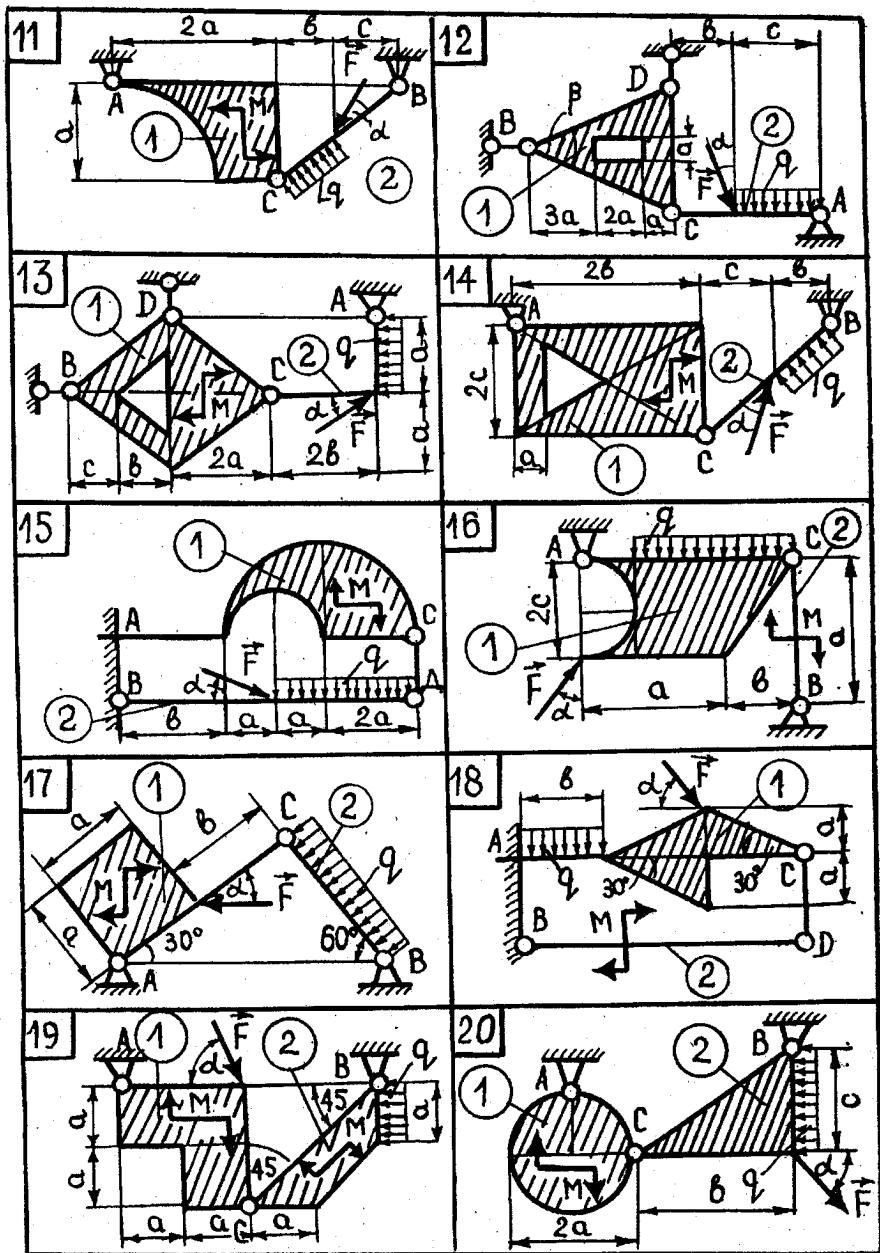


Рис. 15,6

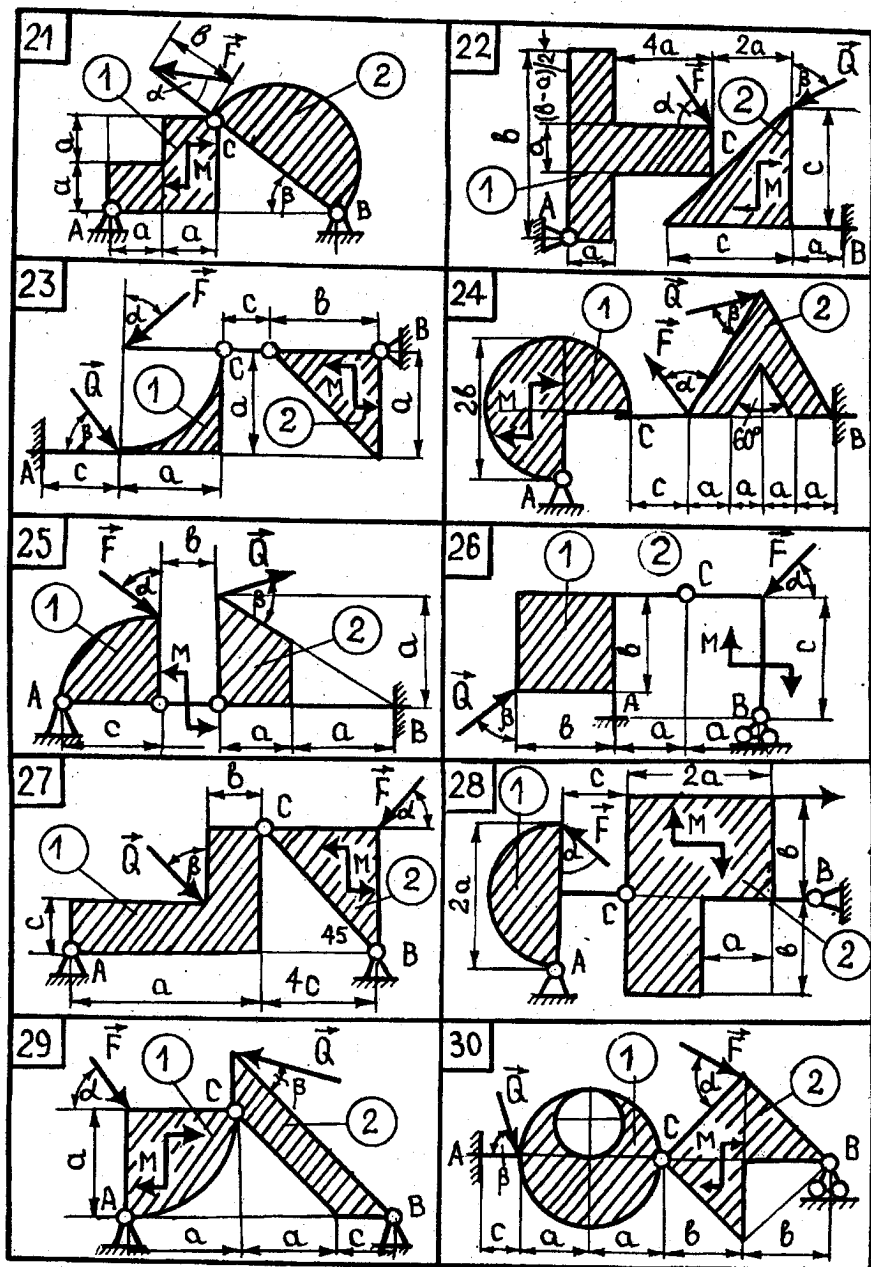


Рис. 15,6

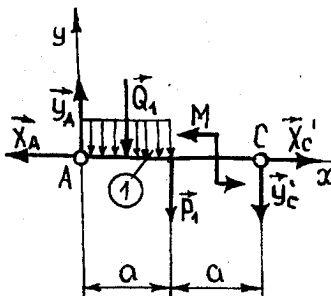


Рис. 16

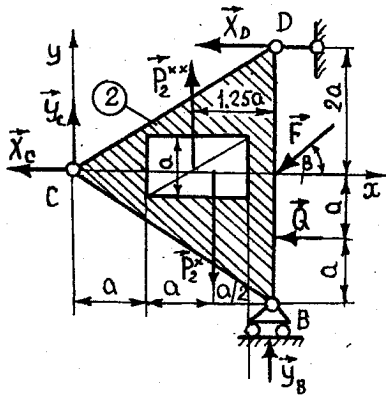


Рис. 17

$$\sum F_{iy} = 0; Y_B - F \sin \beta - P_2^x + P_2^{xx} + Y_C = 0; \quad (5)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_i) = 0; Y_B \cdot 3a - Qa - F \cdot 3a \sin \beta + X_D \cdot 2a - P_2^x \cdot 2a + P_2^{xx} \cdot 1,75a = 0. \quad (6)$$

На підставі рівняння (3) маємо:

$$Y_C' = Y_C = \frac{M - P_1 a - 0,5 Q_1 a}{2a} = \frac{12 - 4 \cdot 1,5 - 0,5 \cdot 2 \cdot 1,5 \cdot 1,5}{3} = 1,25 \text{ кН.}$$

Із рівняння (2) дістаємо

$$Y_A = P_1 + Q_1 + Y_C' = 4 + 2 \cdot 1,5 + 1,25 = 8,25 \text{ кН.}$$

Із рівняння (5) знаходимо

$$Y_B = F \sin \beta + P_2^x - P_2^{xx} - Y_C = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}/2 + 4P_2/3 - P_2/3 - 1,25 = 8,75 \text{ кН.}$$

Із рівняння (6) маємо

$$X_D = \frac{-Y_B \cdot 3a + Qa + F \cdot 3a \sin \beta + P_2^x \cdot 2a - P_2^{xx} \cdot 1,75a}{2a} = \frac{-8,75 \cdot 3 + 8 + 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}/2 + 4 \cdot 6/(3 \cdot 2) - 6/(3 \cdot 1,75)}{2} = -0,88 \text{ кН.}$$

Із рівняння (4) дістаємо

$$X_C = X_C' = -Q - F \cos \beta - X_D = -8 - 4\sqrt{2} \sqrt{2}/2 + 0,88 = -11,12 \text{ кН.}$$

Із рівняння (1) знаходимо

$$X_A = X_C' = X_C = -11,12 \text{ кН.}$$

Завдання С-6

ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ЗАТИСНЕННЯ ПРОСТОРОВОГО ЛАМАНОГО БРУСА

На просторову конструкцію (ламаний брус), закріплену (затиснену) одним кінцем нерухомо в точці A , діють дискретні сили \vec{P} і \vec{F} , розподілене навантаження інтенсивністю q , а також пара сил із моментом M . Прикладені зусилля діють в різних площинах. Схеми конструкції зображено на рис. 18, $a-v$. Значення зусиль та відповідні геометричні розміри наведено в табл. 5.

Визначити реакції затиснення бруса.

Таблиця 5

Варіант	Завдання С-6		Завдання С-7		Завдання С-8		M , кН·м	q , кН/м	l, R, m
	F	P	F	P	F	P			
	кН		кН		кН				
1	2	3	10	—	8	10	—	0,5	1
2	5	6	8	5	4	8	4	1	2,5
3	4	4	6	—	10	2	6	0,8	1,25
4	4	5	12	3	8	12	8	0,5	2
5	6	1,5	10	—	12	6	6	0,4	2,5
6	2	3	5	—	4	9	3	1	1
7	5	5	4	—	2	4	10	1,25	0
8	4	2	8	—	3	6	6	2	1,5
9	6	3	4	—	2	5	8	0,75	2
10	5	3,75	9	—	5	2,5	12	1,5	1,4
11	3	4	4	4	8	6	4	1,5	2
12	4,5	3	15	9	4	4	9	0,8	2,5
13	6	—	5	—	10	—	15	4	1,25
14	4	8	8	12	7	—	10	2	1,5
15	2	5	—	—	—	2	8	1,5	2
16	—	4	6	—	4	4	6	0,4	1,5
17	8	6	4	—	12	10	—	2	1

Варіант	Завдання С-6		Завдання С-7		Завдання С-8		M , кН·м	q , кН/м	l, R, m
	F	P	F	P	F	P			
	кН		кН		кН				
18	8	3	2	—	5	5	4	1,5	2
19	4	4	5	—	—	7	8	1,5	3
20	8	8	10	—	—	12	12	1,8	1,25
21	5	2	4	—	9	9	—	2	2,5
22	5	5	—	6	3	2	10	—	2
23	6	4	8	—	—	6	—	2	1,5
24	8	4	4	—	8	4	8	1,5	2
25	—	8	6	4	—	10	6	1,5	1,8
26	5	6	3	—	4	6	8	2,5	1,2
27	3	2	—	4	6	9	2,4	0,6	2
28	6	4	—	6	—	5	9	—	1
29	2	1,5	3	8	7	10	4	2	0,5
30	4	4,0	—	4	10	8	6	1	1,5

Приклад 6. На просторовий ламаний брус, закріплений одним кінцем нерухомо в точці A , діють: сила $P = 4$ кН, спрямована паралельно осі Ax , сила $F = 6$ кН у площині, паралельній площині xAy , пара сил із моментом $M = 8$ кН·м у площині, паралельній площині zAy , а також рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $q = 1,5$ кН/м, що діє на кожен ділянку бруса так, як показано на рис. 18. Довжина $l = 2$ м.

Визначити реакції затиснення бруса.

Розв'язання. Активними силами, що діють на брус, є сили \vec{P} , \vec{F} , \vec{Q}_1 , \vec{Q}_2 , \vec{Q}_3 і пара сил із моментом M . Сили \vec{Q}_1 , \vec{Q}_2 , \vec{Q}_3 — це рівнодійні відповідних розподілених навантажень, прикладені в центрі епюр цих навантажень.

Реакція жорсткого затиснення визначається трьома складовими силами $\vec{R}_A(X_A, Y_A, Z_A)$ та трьома складовими реактивного моменту $\vec{M}_A(M_x, M_y, M_z)$.

У вибраній системі координат, показаній на рис. 19, записуємо шість рівнянь рівноваги довільної просторової системи сил:

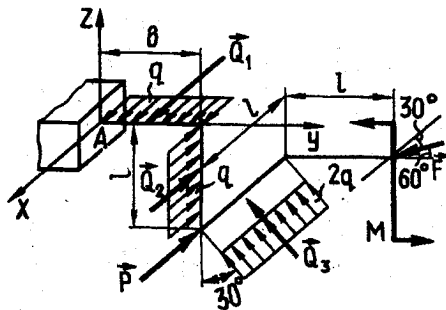


Рис. 18

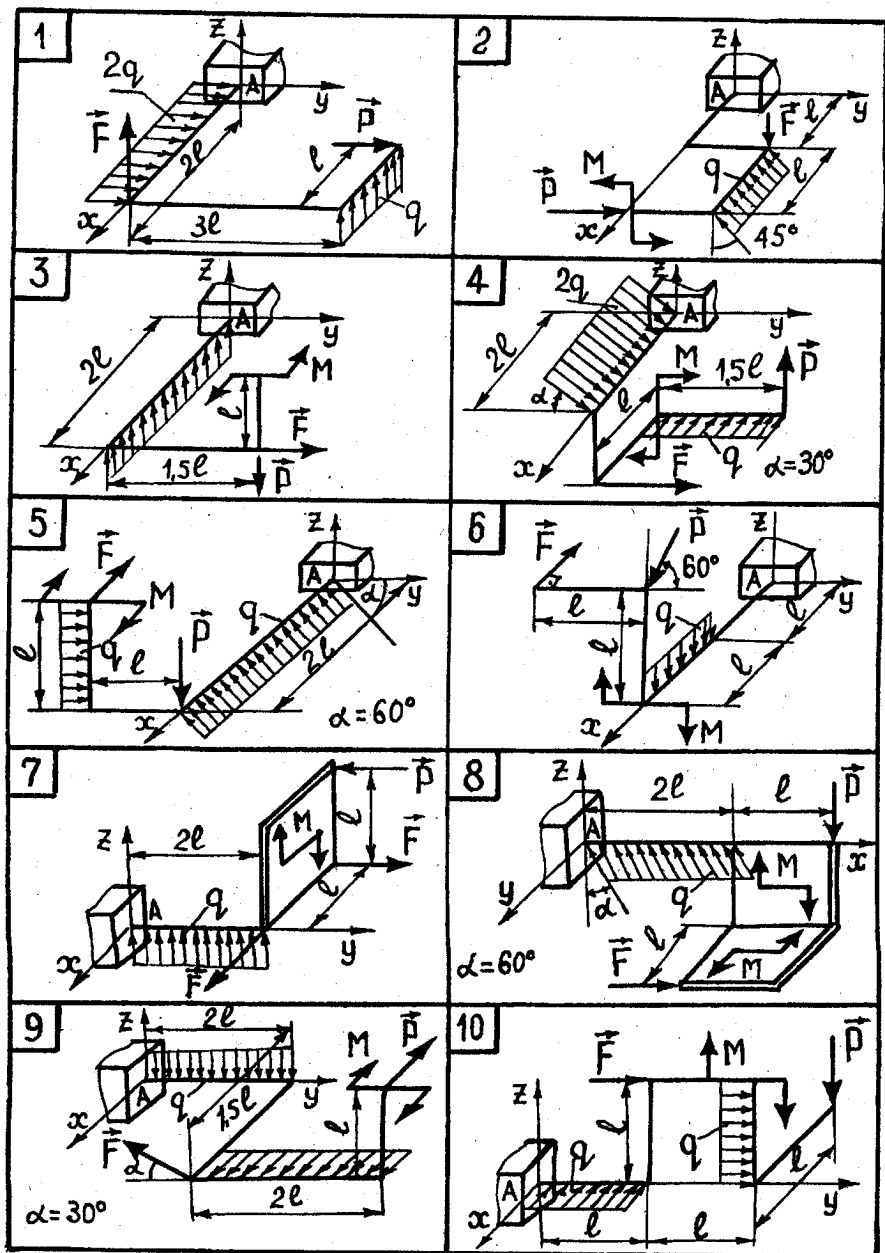


Рис. 18,а

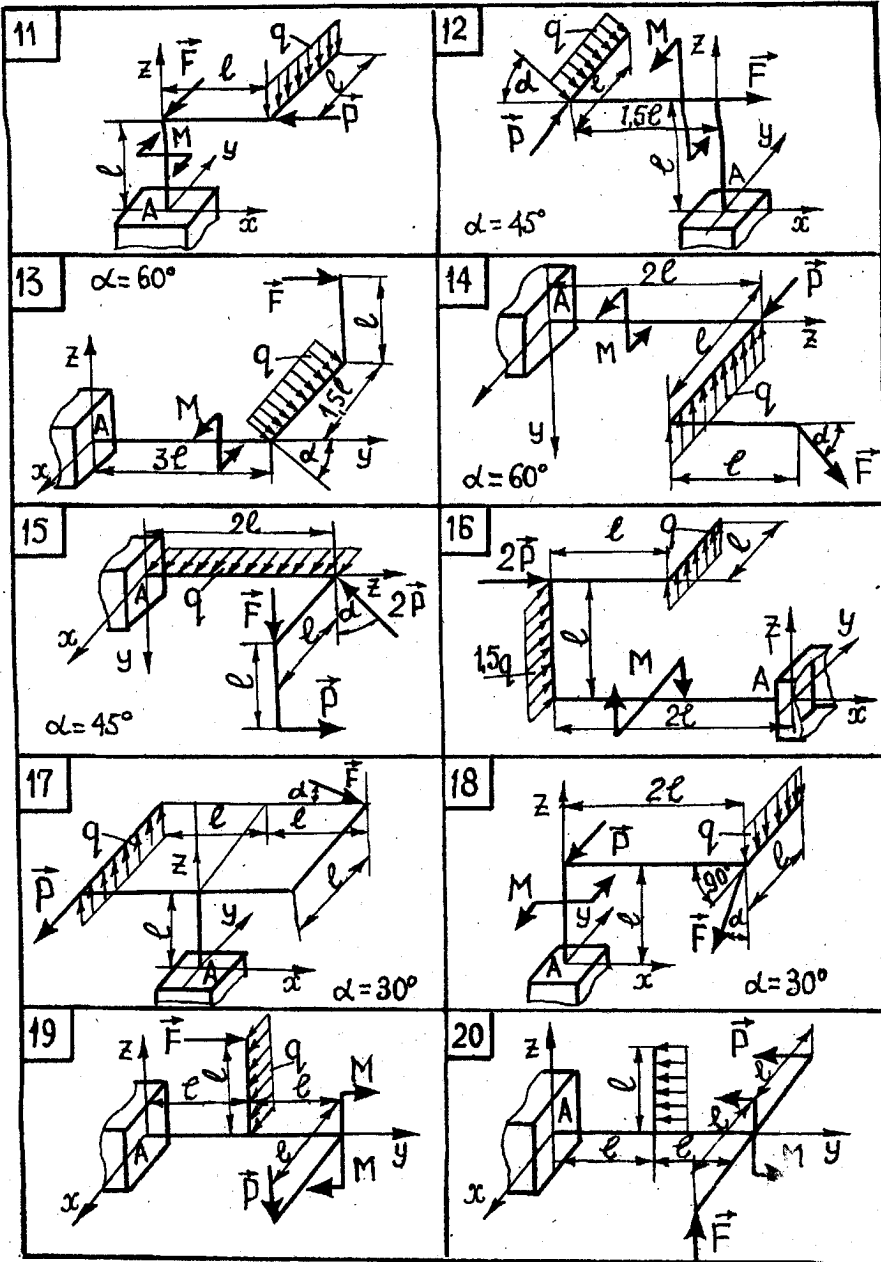


Рис. 18,6

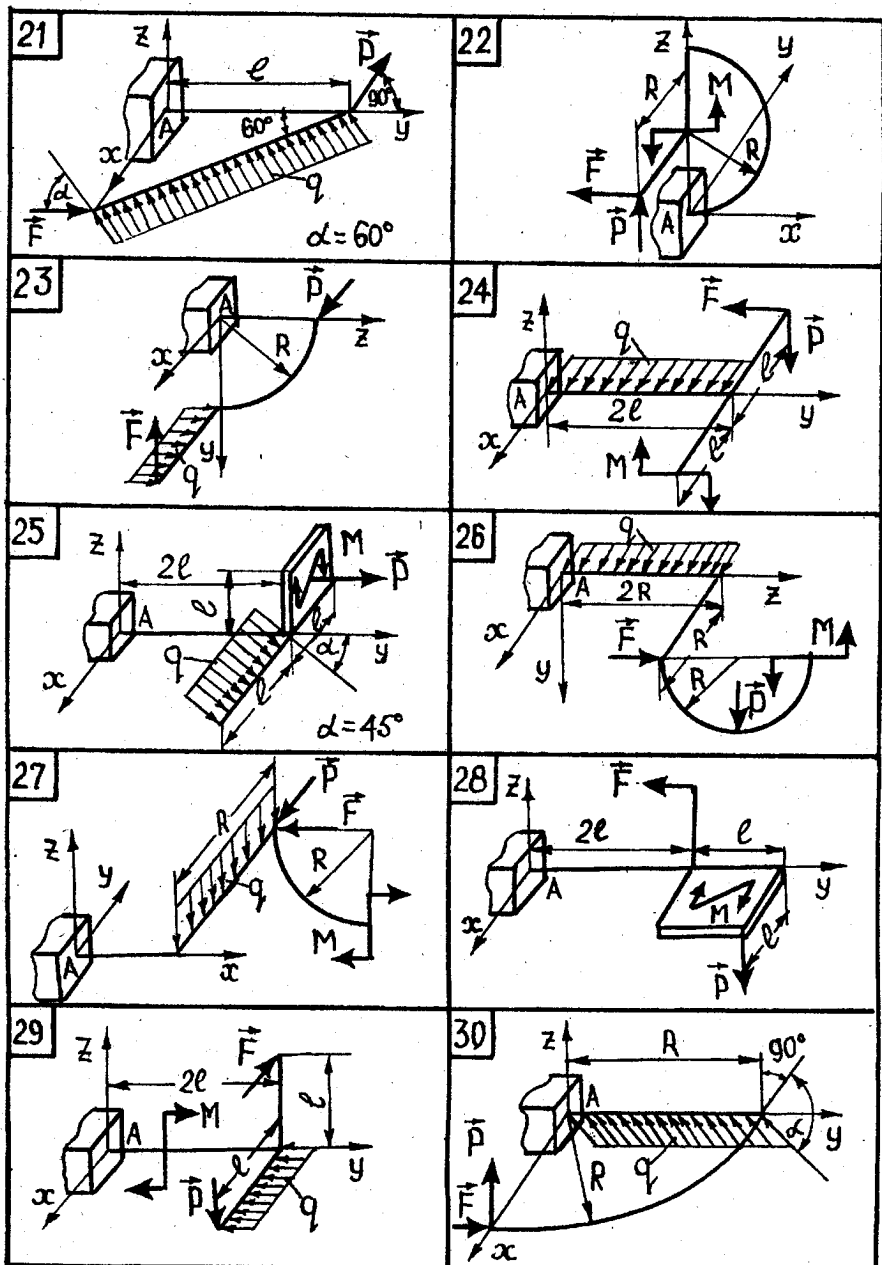


Рис. 18,с

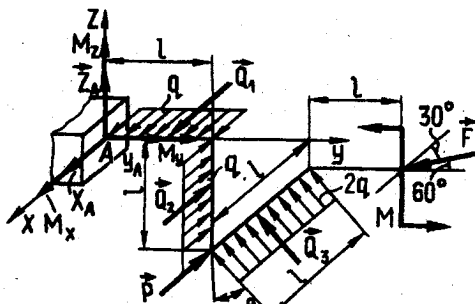


Рис. 19

$$\sum F_{ix} = 0; X_A + Q_1 - Q_2 + F \cos 30^\circ - P = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; Y_A - Q_3 \cos 60^\circ - F \cos 60^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{iz} = 0; Z_A + Q_3 \cos 30^\circ = 0; \quad (3)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0; M_x + Q_3 \cos 30^\circ \cdot l - Q_3 \cos 60^\circ \cdot l + F \cos 60^\circ \cdot l + M = 0; \quad (4)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_i) = 0; M_y + 0,5Q_2l + pl + Q_3 \cos 30^\circ \cdot 0,5l - F \cos 30^\circ \cdot l = 0; \quad (5)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = 0; M_z - Q_1 \cdot 0,5l + Q_2l + Pl + Q_3 \cos 60^\circ \cdot 0,5l - F \cos 30^\circ \cdot 2l + F \cos 60^\circ \cdot l = 0. \quad (6)$$

Тут

$$Q_1 = ql = 1,5 \cdot 2 = 3 \text{ кН}; \quad Q_2 = ql = 1,5 \cdot 2 = 3 \text{ кН}; \\ Q_3 = 2ql = 2 \cdot 1,5 \cdot 2 = 6 \text{ кН}. \quad (7)$$

Підставляючи модулі сил \vec{P} , \vec{F} і моменту M , а також значення Q_1 , Q_2 , Q_3 згідно з (7) у рівняння (1)–(6), дістаємо

$$X_A = -Q_1 + Q_2 + P - F \cos 30^\circ = -3 + 3 + 4 - 6\sqrt{3}/2 = -1,19 \text{ кН};$$

$$Y_A = Q_3 \cos 60^\circ + F \cos 60^\circ = 6 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,5 = 6 \text{ кН};$$

$$Z_A = -Q_3 \cos 30^\circ = -6\sqrt{3}/2 = -5,19 \text{ кН};$$

$$M_x = -Q_3 \cos 30^\circ \cdot l + Q_3 \cos 60^\circ \cdot l + F \cos 60^\circ \cdot l - M =$$

$$= -6\sqrt{3}/2 \cdot 2 + 6 \cdot 0,5 \cdot 2 + 6 \cdot 0,5 \cdot 2 - 8 = -6,38 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_y = -0,5Q_2l - Pl - Q_3 \cos 30^\circ \cdot 0,5l + F \cos 30^\circ \cdot l =$$

$$= -3 \cdot 0,5 \cdot 2 - 4 \cdot 2 - 6 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot 0,5 \cdot 2 + 6\sqrt{3}/2 \cdot 2 = -5,81 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_z = Q_1 \cdot 0,5l - Q_2l - Pl - Q_3 \cos 60^\circ \cdot 0,5l + Fl (2 \cos 30^\circ - \cos 60^\circ) =$$

$$= 0,76 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Завдання С-7

ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ПІДШИПНИКІВ І ПІДП'ЯТНИКІВ, ЯКИМИ УТРИМУЮТЬСЯ ВАЛИ

Механічну систему утворено колінчастими валами або валами з пасовою передачею, які закріплені в підшипниках й утримуються підп'ятниками. На систему діють активні сили та моменти, числові значення яких наведено в табл. 5. Відповідні схеми системи показано на рис. 20, а-в.

Визначити реакції опор.

Приклад 7. Колінчастий вал із жорстко закріпленим на ньому шківом K , радіус якого $R = 4a$, може обертатися в підшипниках A і B . Шків K за допомогою пасової передачі, що з'єднує шків L радіусом $R_1 = a$, передає обертальний рух валу CD . Диск E , жорстко закріплений на валу CD , обмотано канатом, до кінця якого підвішено вантаж P (рис. 20).

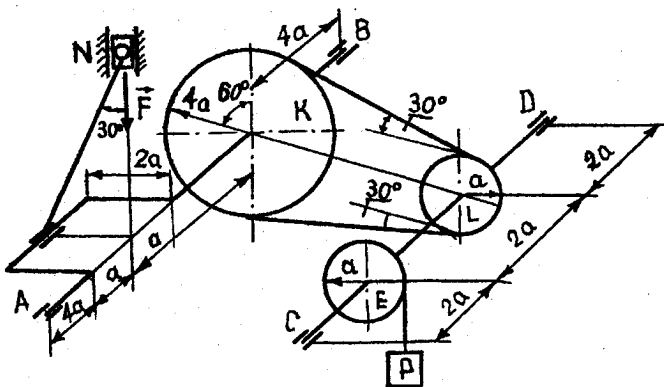


Рис. 20

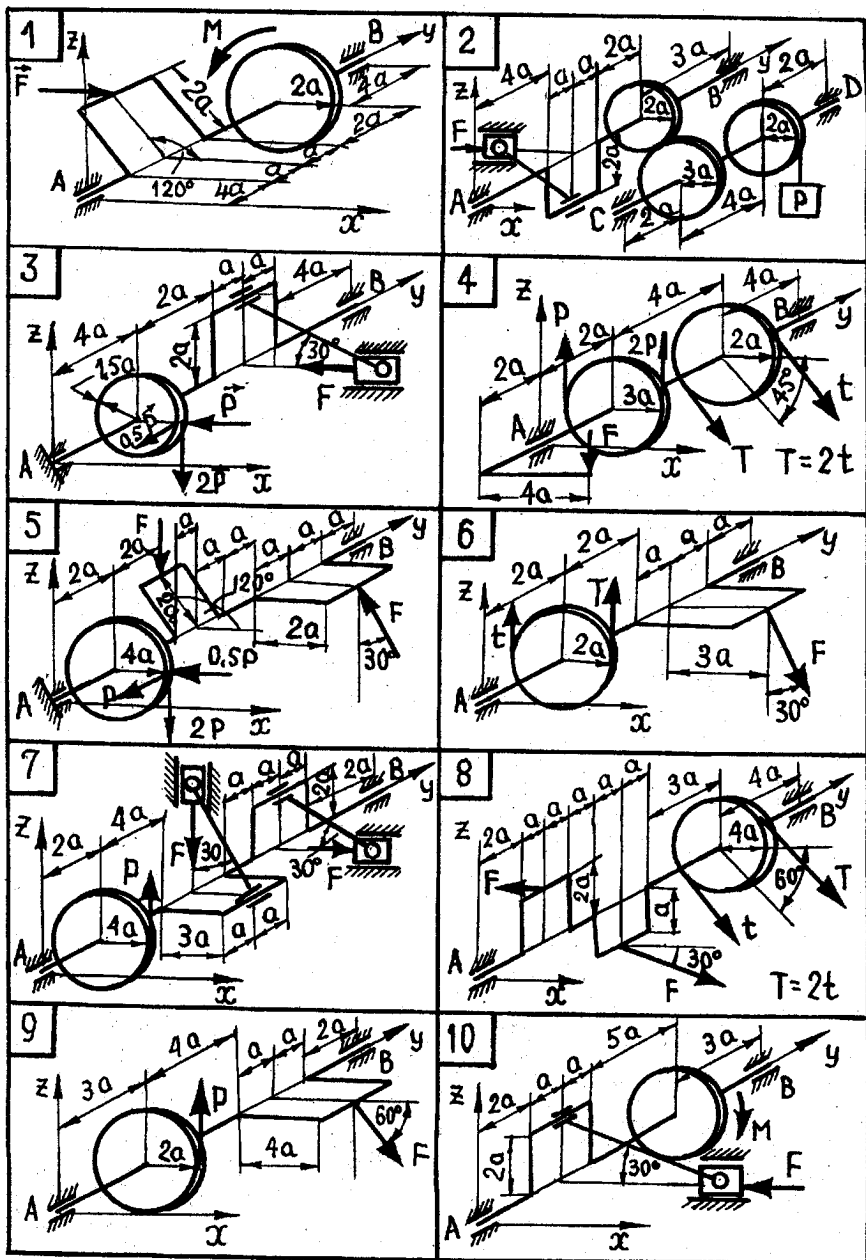


Рис. 20,а

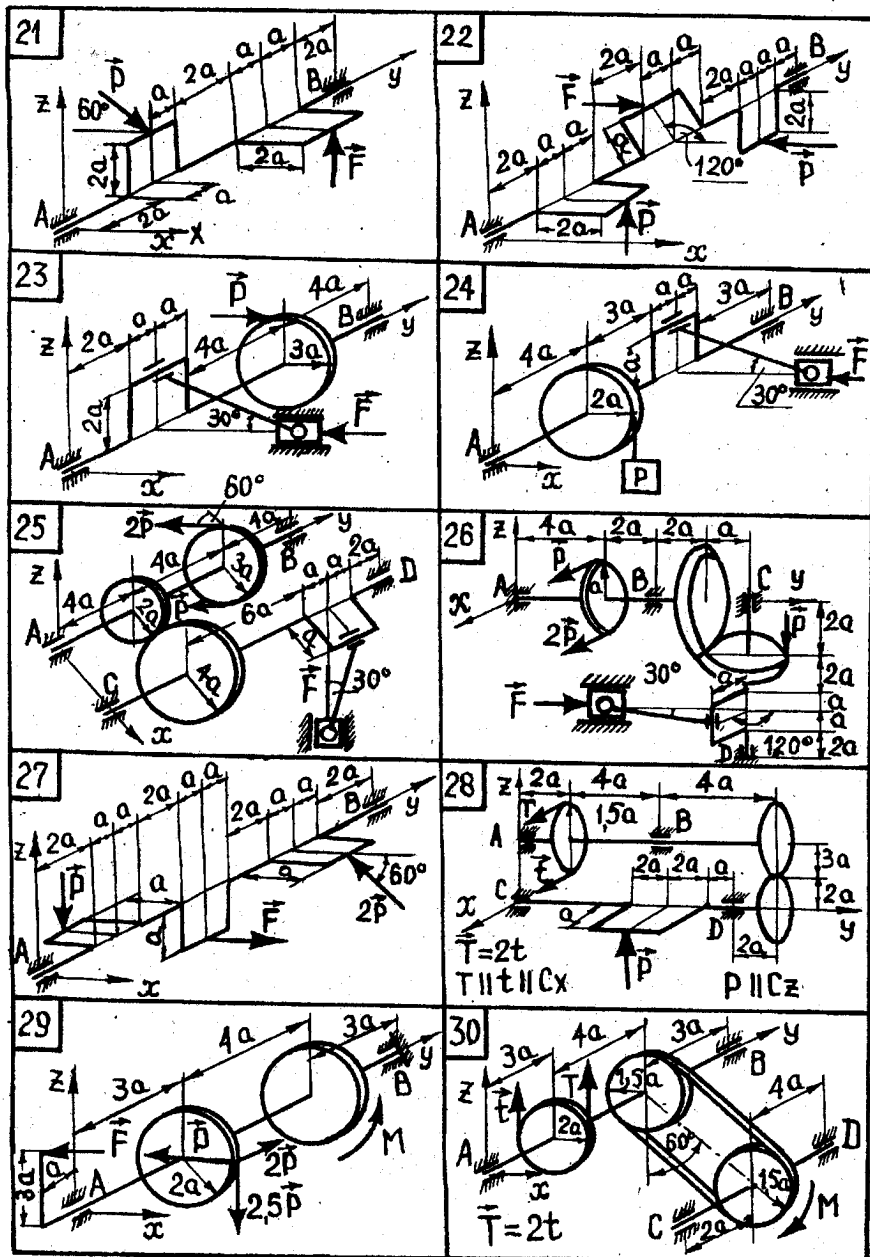


Рис. 20,с

Визначити реакції підшипників A, B, C, D і силу \vec{F} для зрівноваження вантажу $P = 10\text{кН}$ в положенні, показаному на рисунку (розміри валів та їхніх ділянок зазначено на рис. 20).

Розв'язання. Виходячи з умови завдання, згідно з якою потрібно розглянути рівновагу системи двох валів, вивчимо окремо рівновагу валів AB, CD і повзуна N . На вал CD діють активна сила P та реакції підшипників C і D ($\vec{X}_C, \vec{Z}_C, \vec{X}_D, \vec{Z}_D$), а також сили \vec{T}_1, \vec{T}_2 ($T_1 = T_2/2$), які чисельно дорівнюють зусиллям пасової передачі (рис. 21). На вал AB діють сили натягу пасової передачі T_2' та T_1' , причому $T_2' = T_2, T_1' = T_1$, і реакції підшипників A і B ($\vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B$), а також реакція шатуна \vec{S} (рис. 22). На повзун N діють сили \vec{F}, \vec{S}' та \vec{R} , причому $S' = S$ (рис. 23).

Аналітичні умови рівноваги мають вигляд:
для вала CD (див. рис. 21)

$$\sum F_{ix} = 0; X_C + X_D - T_1 - T_2 \cos 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{iz} = 0; Z_C + Z_D - P + T_2 \cos 30^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0; -P \cdot 2a + T_2 \cos 30^\circ \cdot 4a + Z_D \cdot 6a = 0; \quad (3)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_i) = 0; -T_2 a + T_1 a + Pa = 0; \quad (4)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = 0; T_1 \cdot 4a + T_2 \cos 60^\circ \cdot 4a - X_D \cdot 6a = 0; \quad (5)$$

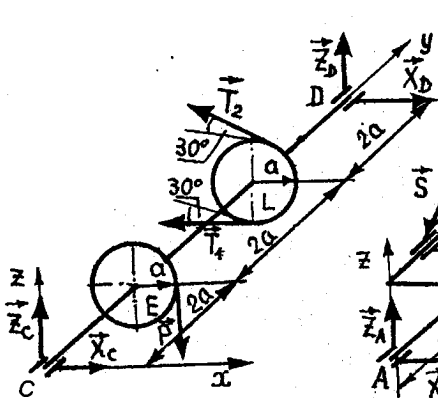


Рис. 21

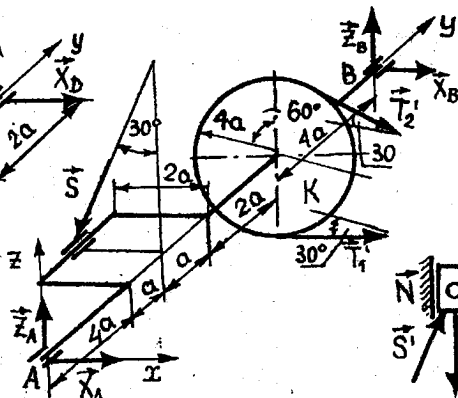


Рис. 22

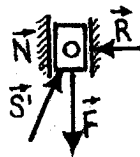


Рис. 23

для вала AB (див. рис. 22)

$$\sum F_{ix} = 0; X_A + X_B - S \cos 60^\circ + T_1' + T_2' \cos 60^\circ = 0; \quad (6)$$

$$\sum F_{iz} = 0; Z_A + Z_B - S \cos 30^\circ - T_2' \cos 30^\circ = 0; \quad (7)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0; -S \cdot 5a \cos 30^\circ - T_2' \cdot 8a \cos 30^\circ + Z_B \cdot 12a = 0; \quad (8)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_i) = 0; T_2' \cdot 4a - T_1' \cdot 4a - S \cdot 2a \cos 30^\circ = 0; \quad (9)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = 0; S \cdot 5a \cos 60^\circ - T_1' \cdot 8a - T_2' \cdot 8a \cos 60^\circ - X_B \cdot 12a = 0; \quad (10)$$

для повзуна N (див. рис. 23)

$$\sum F_{ix} = 0; -R + S' \cos 60^\circ = 0; \quad (11)$$

$$\sum F_{iy} = 0; -F + S' \cos 30^\circ = 0. \quad (12)$$

Якщо врахувати значення відомих сил і геометрію валів, то на підставі системи рівнянь (1)—(12) дістанемо:

із (4) $T_1 = 10$ кН, $T_2 = 20$ кН; із (9) $S = 23,12$ кН;

із (5) $X_D = 13,3$ кН; із (10) $X_B = -15,4$ кН;

із (3) $Z_D = -8,2$ кН; із (8) $Z_B = 20,18$ кН;

із (2) $Z_C = 0,9$ кН; із (7) $Z_A = 37,3$ кН;

із (1) $X_C = 6,7$ кН; із (6) $X_A = 6,96$ кН;

із (12) $F = 40$ кН.

Завдання С-8

ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР ПЛОСКИХ ПЛИТ

Прямокутні плити, на які діють сили \vec{F} , \vec{P} і пара сил із моментом M , закріплено відповідним способом, показаним на схемах (рис. 24, $a-v$). Значення сил та моментів наведено в табл. 5.

Визначити реакції опор.

Приклад 8. Прямокутна плита силою тяжіння \vec{P} (рис. 24), що закріплена в точці A кульовим шарніром, у точці B — петлею й утримується в горизонтальному положенні стержнем CE , знаходиться в рівновазі під дією сили \vec{F} .

Визначити реакції в опорах, а також зусилля в стержні, якщо $P = 2$ кН, $F = 6$ кН, $a = 1$ м.

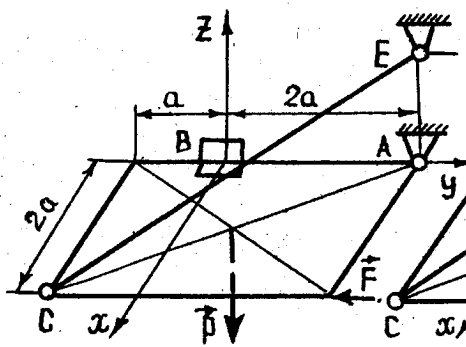


Рис. 24

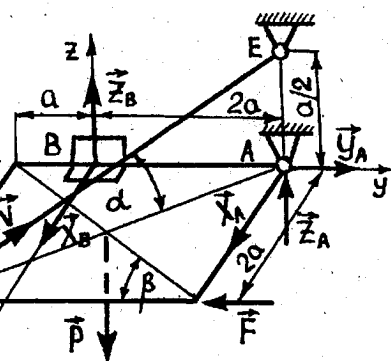


Рис. 25

Розв'язання. До об'єкта рівноваги, яким є плита, прикладаємо активні сили \vec{P} та \vec{F} , а також реакції опор A , B і зусилля в стержні \vec{N} . Реакція кульового шарніра A визначається трьома складовими \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A , а петлі B — двома \vec{X}_B та \vec{Z}_B (рис. 25).

Для довільної просторової системи сил записуємо шість рівнянь рівноваги у вибраній системі координат (див. рис. 25):

$$\sum F_{ix} = 0; X_A + X_B - N \cos \alpha \sin \beta = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; Y_A - F + N \cos \alpha \cos \beta = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{iz} = 0; Z_A + Z_B - P + N \sin \alpha = 0; \quad (3)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0; Z_A \cdot 2a - N \sin \alpha \cdot a - P \cdot 0,5a = 0; \quad (4)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_i) = 0; P a - N \sin \alpha \cdot 2a = 0; \quad (5)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = 0; -X_A \cdot 2a + N \cos \alpha \cos \beta \cdot 2a - N \cos \alpha \sin \beta \cdot a - F \cdot 2a = 0. \quad (6)$$

Тут кути α і β введено для спрощення запису рівнянь рівноваги. З геометричних розмірів конструкції знаходимо:

$$\sin \beta = \frac{2a}{a\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = 0,554; \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = 0,833;$$

$$\sin \alpha = \frac{0,5a}{a\sqrt{13,25}} = \frac{1}{2\sqrt{13,25}} = 0,137; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 0,99.$$

Із рівняння (5) маємо

$$N = \frac{P}{2 \sin \alpha} = \frac{2}{2 \cdot 0,137} = 7,3 \text{ кН.}$$

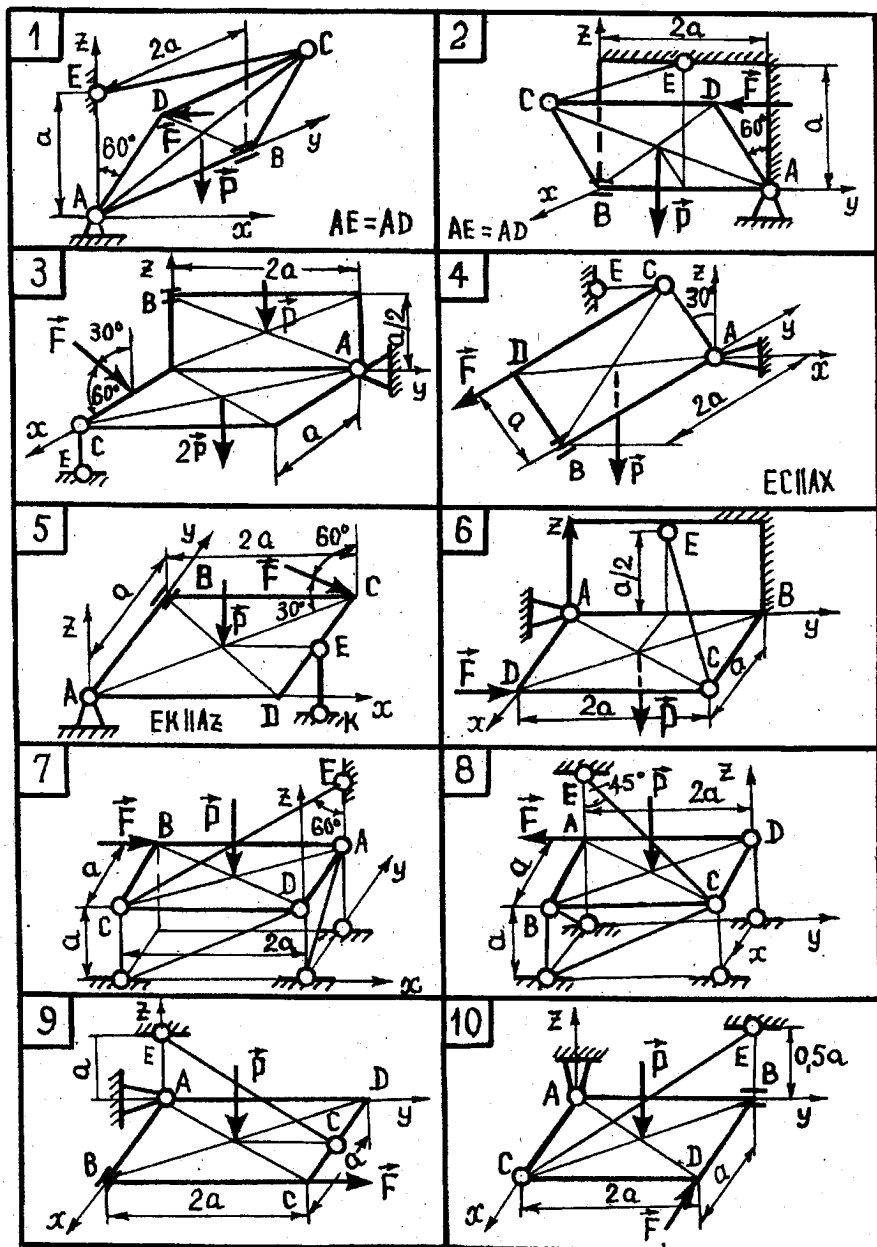


Рис. 24,а

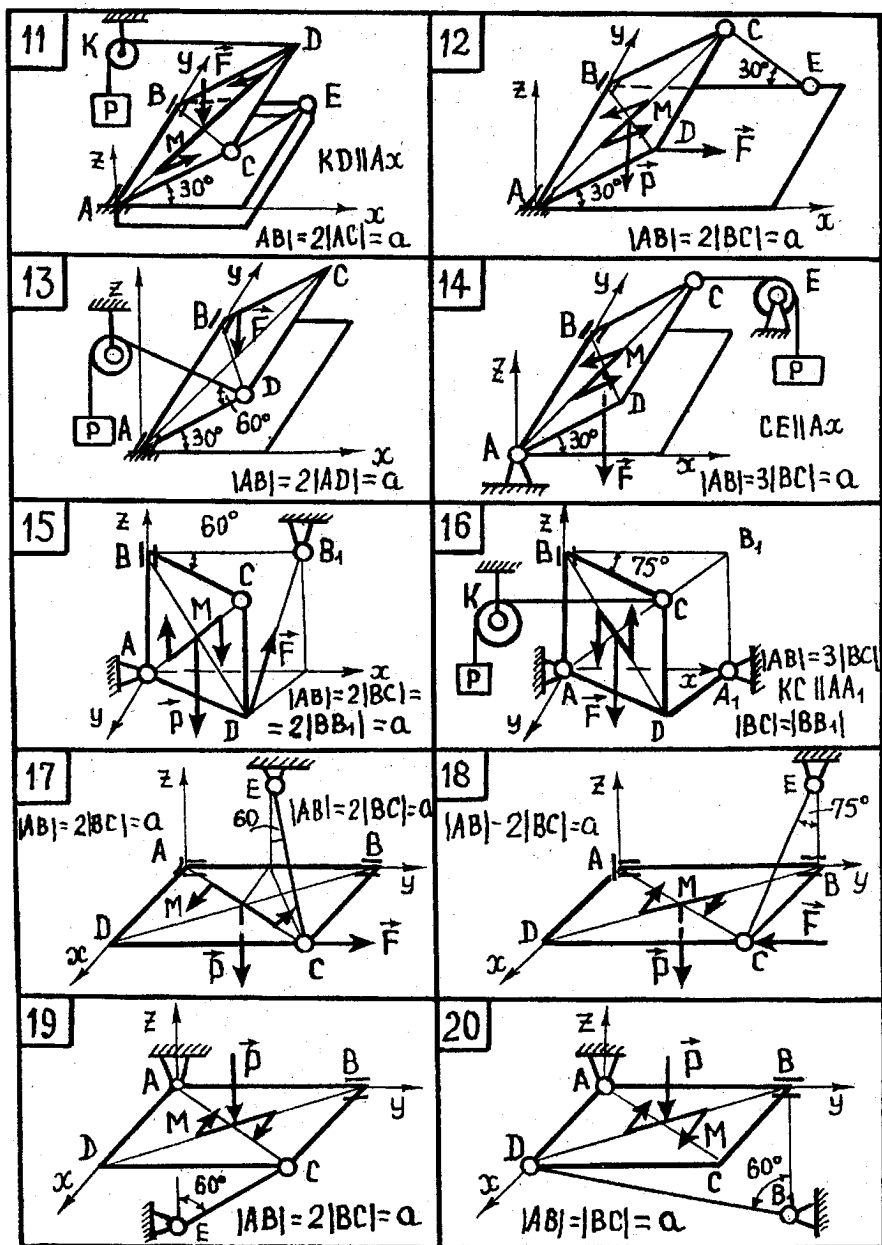


Рис. 24,6

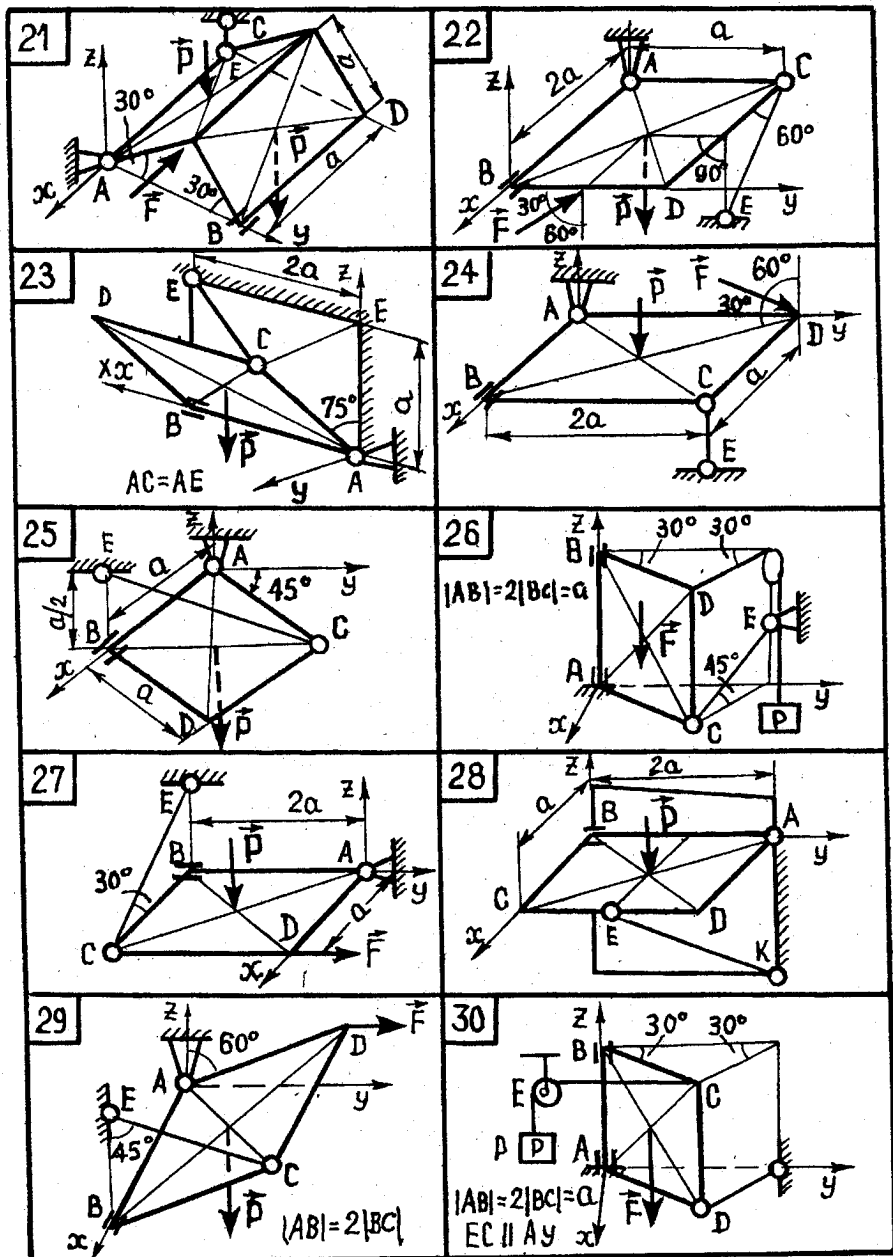


Рис. 24,б

Із рівняння (4) дістаємо

$$Z_A = \frac{0,5P + N \sin \alpha}{2} = \frac{0,5 \cdot 2 + 7,3 \cdot 0,137}{2} = 1 \text{ кН.}$$

Із рівняння (6) знаходимо

$$X_A = \frac{2N \cos \alpha \cos \beta - N \cos \alpha \sin \beta - F}{2} = \\ = 0,5 (2 \cdot 7,3 \cdot 0,99 \cdot 0,833 - 7,3 \cdot 0,99 \cdot 0,554) = 1,02 \text{ кН.}$$

Із рівняння (1) маємо

$$X_B = N \cos \alpha \sin \beta - X_A = 7,3 \cdot 0,99 \cdot 0,554 - 1,02 = 2,98 \text{ кН.}$$

Із рівняння (2) дістаємо

$$Y_A = F - N \cos \alpha \cos \beta = 6 - 7,3 \cdot 0,99 \cdot 0,833 = -0,02 \text{ кН.}$$

Із рівняння (3) знаходимо

$$Z_B = P - N \sin \alpha - Z_A = 2 - 7,3 \cdot 0,137 - 1 = 0.$$

Завдання С-9

ЗВЕДЕННЯ СИСТЕМИ СИЛ ДО НАЙПРОСТІШОГО ВИДУ

Визначити головний вектор \vec{R}_O і головний момент \vec{M}_O просторової системи сил відносно центра O , а також установити, до якого найпростішого виду зводиться задана система сил. Напрямки дії сил показано на рис. 26, а—в. Модулі сил і геометричні розміри наведено в табл. 6.

Таблиця 6

Вариант	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	M_1	M_2	M_3	a	b	c
	Н						Н·м			м		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	20	10	40	50	10	50	—	—	—	0,5	0,3	0,2
2	30	50	20	40	10	60	—	—	—	0,5	0,2	0,3
3	20	20	20	$10\sqrt{2}$	$20\sqrt{3}$	15	—	—	—	0,4	—	—
4	100	200	400	18	400	300	—	—	—	0,2	0,4	0,2
5	10	30	20	80	40	8	—	—	—	0,6	0,8	0,4
6	$10\sqrt{2}$	20	$10\sqrt{2}$	40	20	10	—	—	—	0,3	—	—
7	$10\sqrt{3}$	16	18	120	32	30	—	—	—	0,5	—	—
8	80	80	80	40	80	80	—	—	—	0,2	0,4	0,2
9	20	$30\sqrt{3}$	40	18	$20\sqrt{3}$	$30\sqrt{3}$	—	—	—	0,4	0,2	—
10	50	100	120	$50\sqrt{3}$	$100\sqrt{2}$	$80\sqrt{2}$	—	—	—	0,3	—	—

Вари- ант	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	M_1	M_2	M_3	a	b	c
	Н						Н·м			м		
11	40	30	40	$60\sqrt{2}$	50	80	60	—	—	0,2	0,4	0,2
12	15	12	18	20	16	30	20	—	—	0,4	0,4	$\sqrt{3}$
13	90	$30\sqrt{2}$	$50\sqrt{3}$	40	—	—	80	60	—	—	—	0,6
14	80	40	$60\sqrt{2}$	50	—	—	36	48	—	0,6	0,6	0,4
15	60	72	80	40	—	—	40	80	—	0,2	0,4	0,6
16	80	80	60	60	—	—	80	—	—	0,5	0,2	0,2
17	60	50	50	80	40	40	—	—	—	0,8	0,6	0,8
18	$40\sqrt{2}$	30	$80\sqrt{0,34}$	60	60	60	40	—	—	0,3	0,4	0,3
19	70	80	90	20	—	—	30	40	—	1	2	0,5
20	50	30	30	50	$70\sqrt{2}$	40	—	—	—	$2\sqrt{2}$	—	4
21	100	80	120	60	—	—	—	—	—	0,3	0,4	0,5
22	50	50	50	—	—	—	200	200	—	2	2	2
23	60	120	120	60	120	120	—	—	—	0,3	—	0,3
24	200	200	200	200	200	—	—	—	—	0,6	—	—
25	100	120	140	80	—	—	60	—	—	0,3	0,2	0,4
26	300	400	200	500	100	600	—	—	—	2	4	3
27	40	50	40	40	60	—	24	32	—	0,4	0,4	0,4
28	20	60	40	50	30	—	—	—	—	—	—	5
29	200	200	400	400	600	600	—	—	—	0,5	—	6
30	300	400	200	—	—	—	900	400	1200	3	2	4

Приклад 9. Уздовж сторін паралелепіпеда (рис. 26) діють чотири сили, модулі яких $F_1 = 20$ Н, $F_2 = 30$ Н, $F_3 = 40$ Н, $F_4 = 50$ Н.

Звести цю систему сил до найпростішого виду, якщо $a = 3$ м, $b = 6$ м, $c = 2$ м.

Розв'язання. Головний вектор і головний момент системи сил визначаються виразами $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$; $\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i)$.

Окремі випадки зведення:

- якщо $\vec{R} \neq 0$ та $\vec{M}_O = 0$, то система сил еквівалентна одній силі (тобто рівнодійній), яка геометрично дорівнює головному вектору і прикладена в центрі O . Напрямок рівнодійної проходить через центр O ;
- коли $\vec{R} = 0$ та $\vec{M}_O \neq 0$, то система сил зводиться до однієї пари сил;
- якщо $\vec{R} \neq 0$ і $\vec{M}_O \neq 0$, але $\vec{R} \perp \vec{M}_O$ ($\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$), то система сил зводиться до рівнодійної,

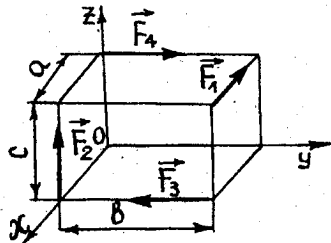


Рис. 26

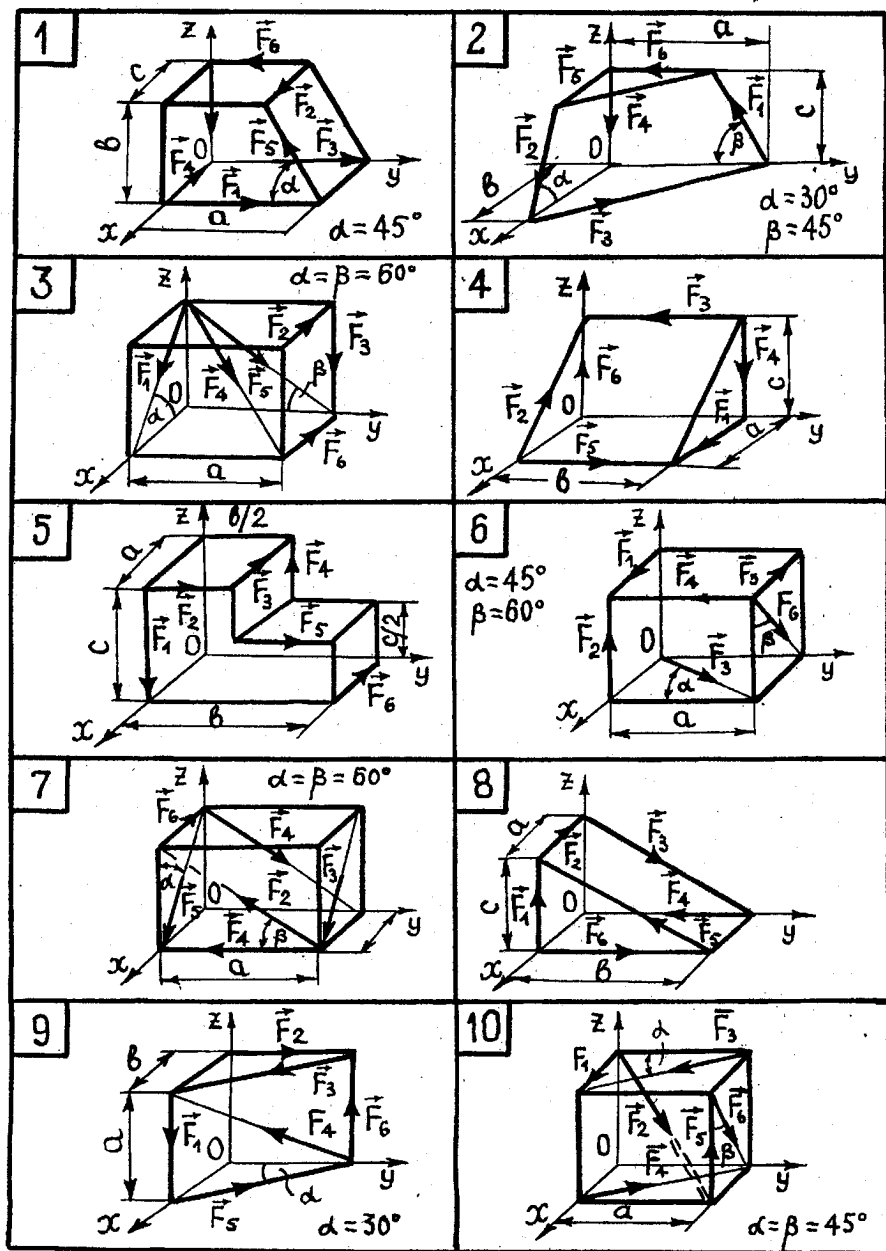


Рис. 26,а

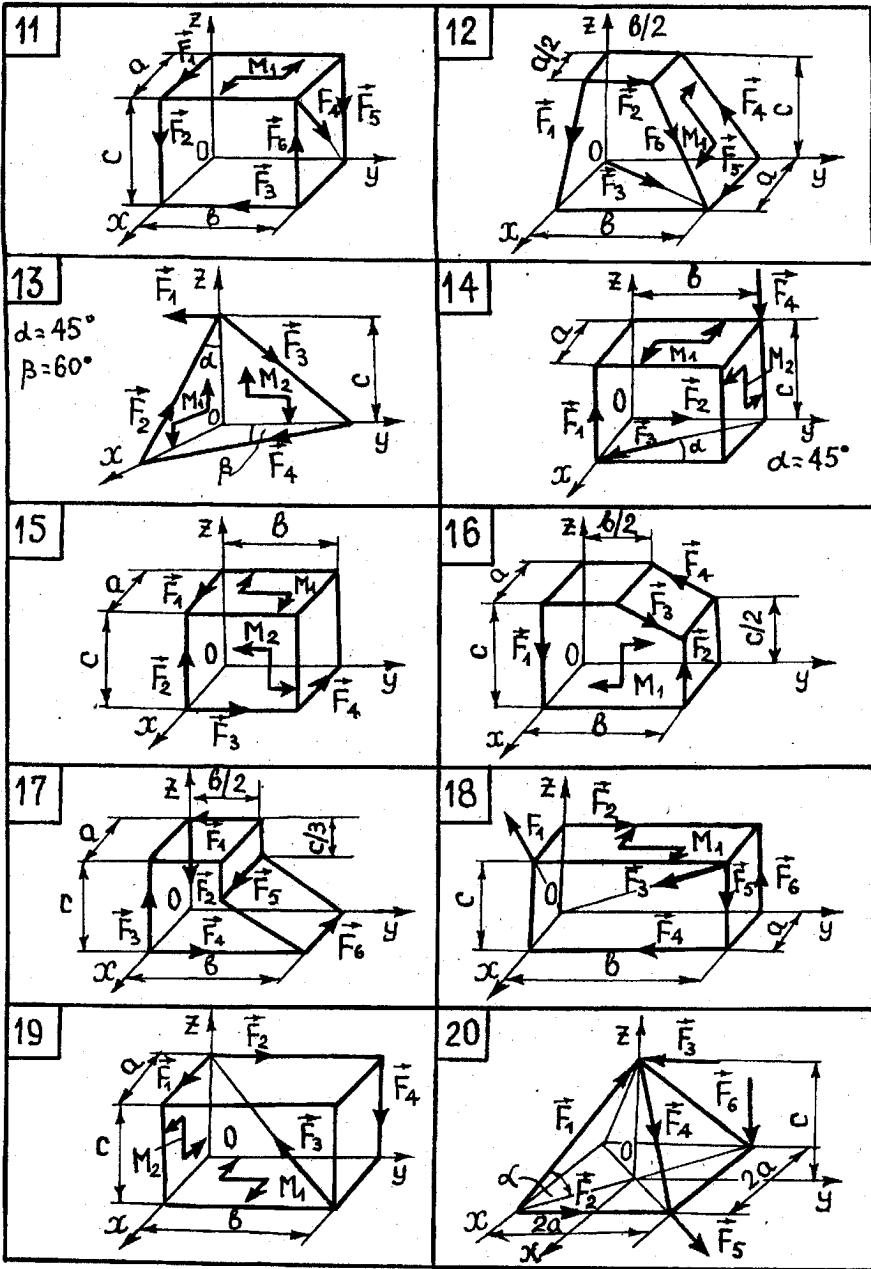


Рис. 26,6

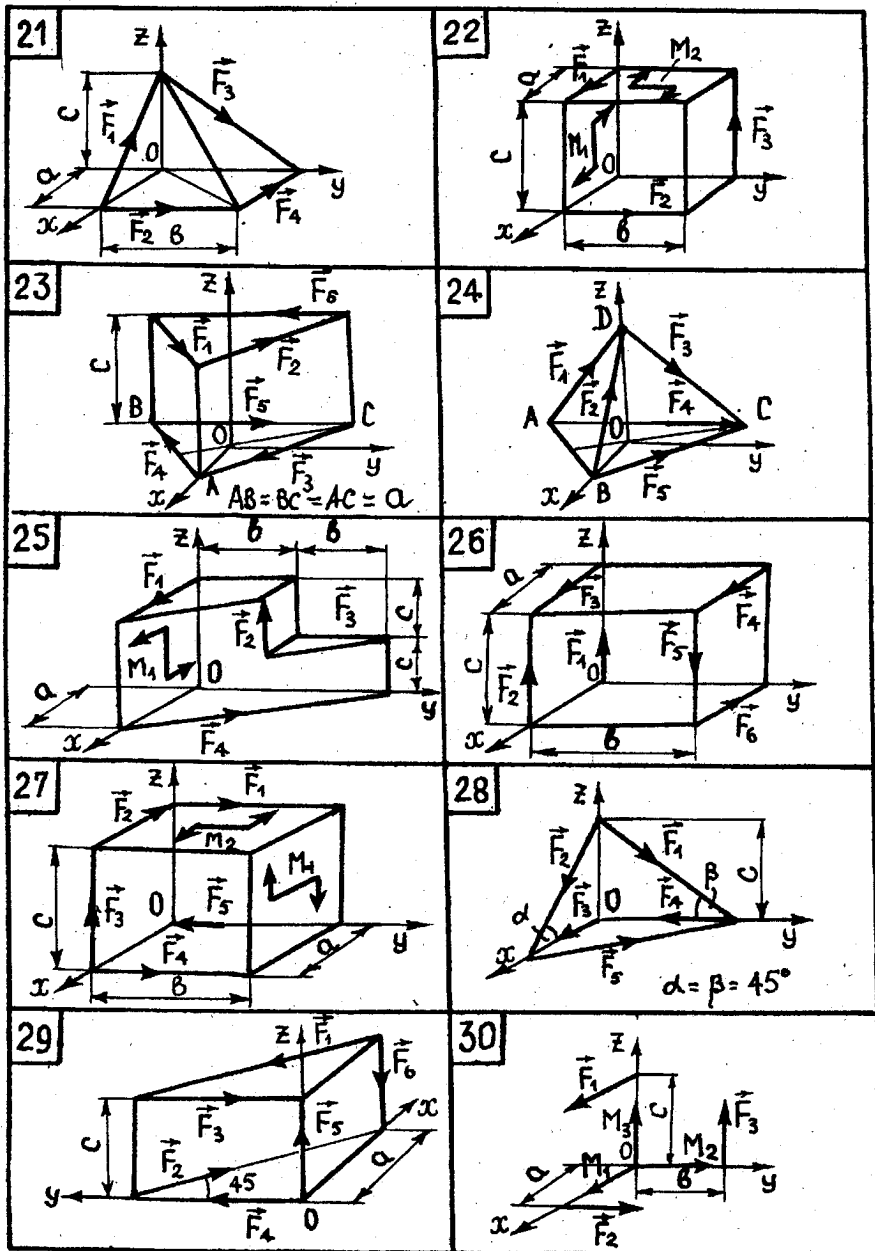


Рис. 26,6

напрямок якої не проходить через центр зведення O ; 4) коли $\vec{R} \neq 0$ та $\vec{M}_O \neq 0$, але вектор \vec{R} колінеарний до \vec{M}_O , то система сил зводиться до силового гвинта (динами); 5) якщо $\vec{R} = 0$ і $\vec{M}_O = 0$, то система сил знаходиться в рівновазі.

У вибраній системі координат (див. рис. 26) головний вектор

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

де

$$R_x = \sum F_{ix} = -F_1 = -20 \text{ кН};$$

$$R_y = \sum F_{iy} = F_4 - F_3 = 10 \text{ кН};$$

$$R_z = \sum F_{iz} = F_2 = 30 \text{ кН};$$

$$R = \sqrt{(-20)^2 + 10^2 + 30^2} = 37,5 \text{ кН},$$

а головний момент

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2},$$

причому

$$M_{Ox} = \sum M_x(\vec{F}_i) = -F_4 c = -50 \cdot 2 = -100 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{Oy} = \sum M_y(\vec{F}_i) = -F_1 c - F_2 a = -20 \cdot 2 - 30 \cdot 3 = -130 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{Oz} = \sum M_z(\vec{F}_i) = F_1 b - F_3 a = 20 \cdot 6 - 40 \cdot 3 = 0;$$

$$M_O = \sqrt{(-100)^2 + (-130)^2} = 10\sqrt{269} = 164 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Напрямні косинуси цих векторів визначаються виразами:

$$\cos(\vec{R}_1, \hat{Ox}) = \cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{-20}{37,5} = -0,533;$$

$$\cos(\vec{R}_1, \hat{Oy}) = \cos \beta = \frac{R_y}{R} = \frac{10}{37,5} = 0,267;$$

$$\cos(\vec{R}_1, \hat{Oz}) = \cos \gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{30}{37,5} = 0,8;$$

$$\cos(\vec{M}_O, \hat{Ox}) = \cos \alpha_1 = \frac{M_{Ox}}{M_O} = \frac{-100}{164} = -0,609;$$

$$\cos(\vec{M}_O, \hat{Oy}) = \cos \beta_1 = \frac{M_{Oy}}{M_O} = \frac{-130}{164} = -0,793;$$

$$\cos(\vec{M}_O, \hat{Oz}) = \cos \gamma_1 = \frac{M_{Oz}}{M_O} = 0.$$

Головний вектор і головний момент не дорівнюють нулеві й утворюють між собою кут φ , що визначається виразом

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{R_x M_{Ox} + R_y M_{Oy} + R_z M_{Oz}}{|\vec{R}| |\vec{M}_O|} = \\ &= \frac{(-20)(-100) + 10(-130) + 30 \cdot 0}{37,5 \cdot 164} = 0,114 \end{aligned}$$

→ Система сил зводиться до динами (силового гвинта), тобто до сили R^x (головного вектора) і пари сил із моментом

$$M_1 = |\vec{M}_O| \cos(\vec{M}_O, \vec{R}) = M_O \cos \varphi = 18,7 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Рівняння прямої дії динами (центральної гвинтової осі) має вигляд

$$\frac{M_{Ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{Oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{Oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z},$$

де x, y, z — біжучі координати точки, що лежать на центральній гвинтовій осі.

Підставляючи відповідні величини в рівняння центральної гвинтової лінії, дістаємо

$$\begin{aligned} \frac{-100 - (y \cdot 30 - z \cdot 10)}{-20} &= \frac{-130 - (z(-20) - x \cdot 30)}{10} = \\ &= \frac{0 - (x \cdot 10 - y(-20))}{30}. \end{aligned}$$

Таким чином, центральна гвинтова вісь має вигляд прямої від перетину двох площин:

$$6x - 3y + 5z - 36 = 0; \quad 10x + 2y + 6z - 39 = 0.$$

Завдання С-10

РІВНОВАГА ТВЕРДИХ ТІЛ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ КОВЗАННЯ

Визначити мінімальний модуль сили P та реакції опор системи твердих тіл за умови, що вона знаходиться в стані спокою. Схеми варіантів показано на рис. 27, а—в, а необхідні для розрахунку параметри наведено в табл. 7.

Таблиця 7

Варіант	G	Q	a	b	e	f	α
	кН		м			град	
1	1	10	0,5	—	0,04	0,15	—
2	1,2	8	0,6	1,2	0,05	0,2	30
3	1,5	12	0,45	0,8	0,05	0,1	60

Варіант	G	Q	a	b	e	f	α
	кН		м				град
4	1,8	9	0,8	0,4	0,03	0,25	30
5	1,4	6	1	2	0,04	0,03	45
6	1,6	14	1,2	0,6	0,05	0,35	15
7	2	16	0,3	1	0,02	0,1	45
8	1,1	8	0,5	0,8	0,03	0,25	—
9	1,3	10	0,2	0,6	0,14	0,15	—
10	1,8	7	0,4	1,2	0,06	0,2	60
11	1,2	6	0,25	0,4	0,05	0,3	—
12	1	5	0,6	0,8	0,04	0,25	60
13	1,6	12	0,3	0,7	0,03	0,4	—
14	1,7	18	0,5	1,5	0,08	0,2	30
15	1,4	20	1	1,5	0,1	0,15	60
16	1,2	15	0,15	—	—	0,25	45
17	1,5	12	0,8	1,2	0,06	0,3	60
18	1,8	14	0,4	1	0,08	0,35	30
19	1,6	16	0,6	1,4	0,05	0,2	15
20	1,3	18	0,2	0,6	0,04	0,4	45
21	1,2	8	0,25	0,3	0,06	0,15	30
22	1	10	0,4	0,5	0,08	0,3	—
23	2	6	0,2	0,8	0,05	0,25	—
24	2,4	16	0,6	1,4	0,04	0,2	—
25	1,5	8	1,2	0,6	0,1	0,1	15
26	1,1	5	1,5	0,5	0,08	0,15	30
27	1,4	7	0,2	0,8	0,06	0,25	45
28	1,6	9	0,25	0,6	0,05	0,3	60
29	2	10	0,6	0,2	0,04	0,2	—
30	1	12	0,5	1	0,06	0,4	60

Приклад 10. Барабан лебідки (рис. 27) радіусом $R = 0,3$ м і силою тяжіння $G = 2$ кН гальмується колодковим гальмом. Визначити мінімальне значення прикладеної до гальма сили \vec{P} для того, щоб барабан знаходився в стані спокою. На барабан навито канат, до кінця якого підвищено вантаж $Q = 10$ кН, причому канат сходить дотично з барабана під кутом $\alpha = 30^\circ$ до

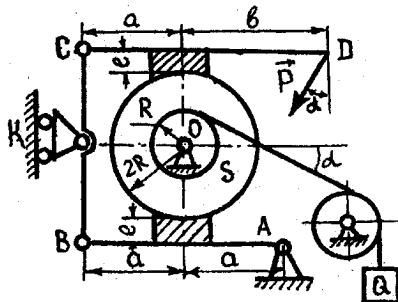


Рис. 27

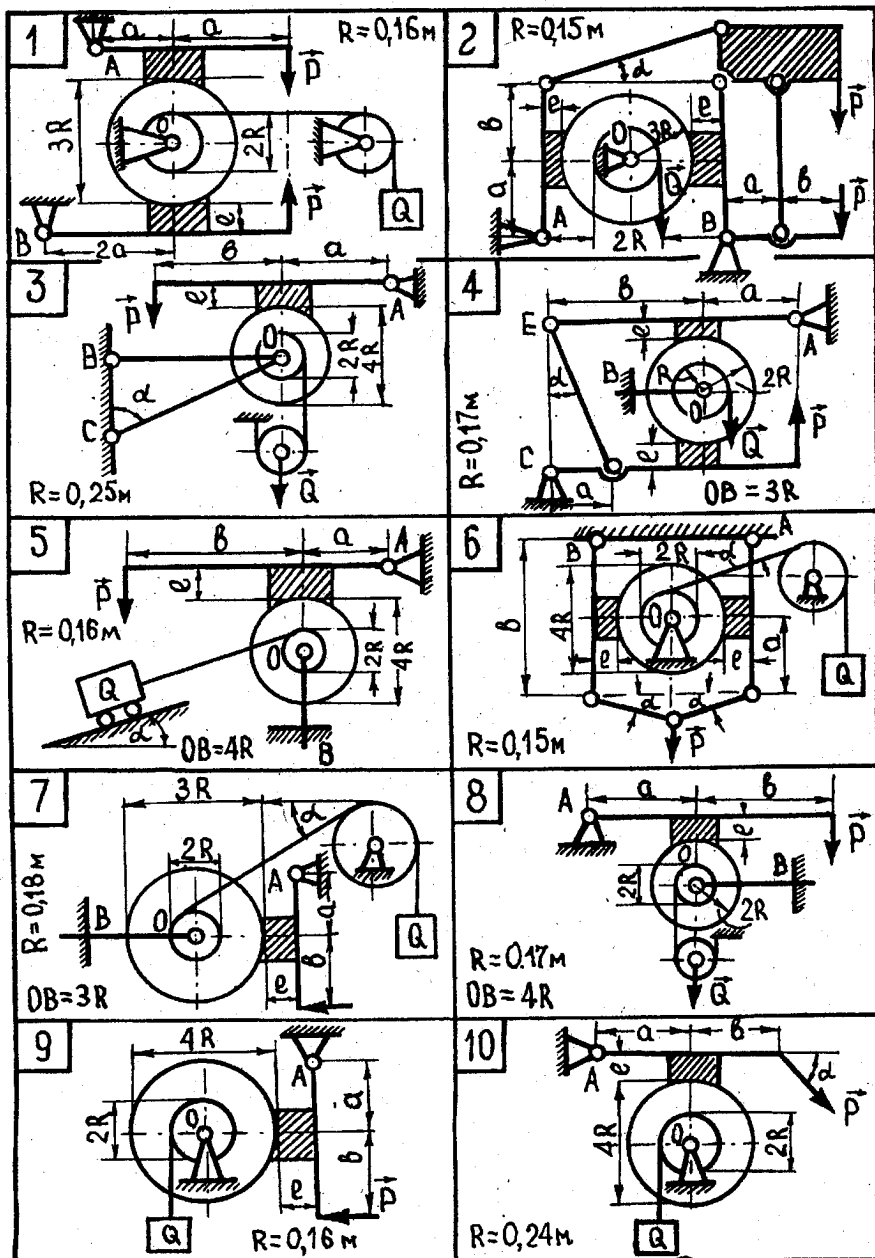


Рис. 27,а

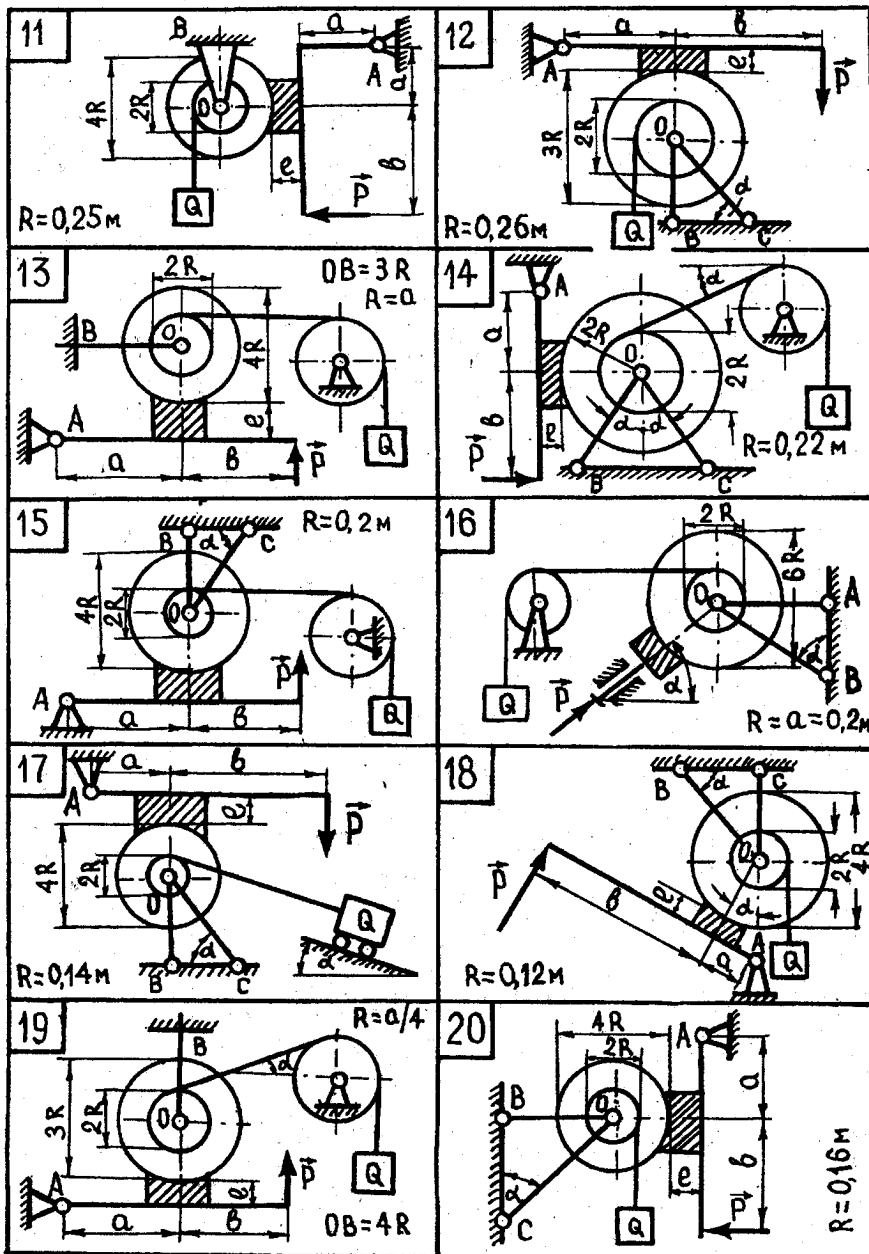


Рис. 27,6

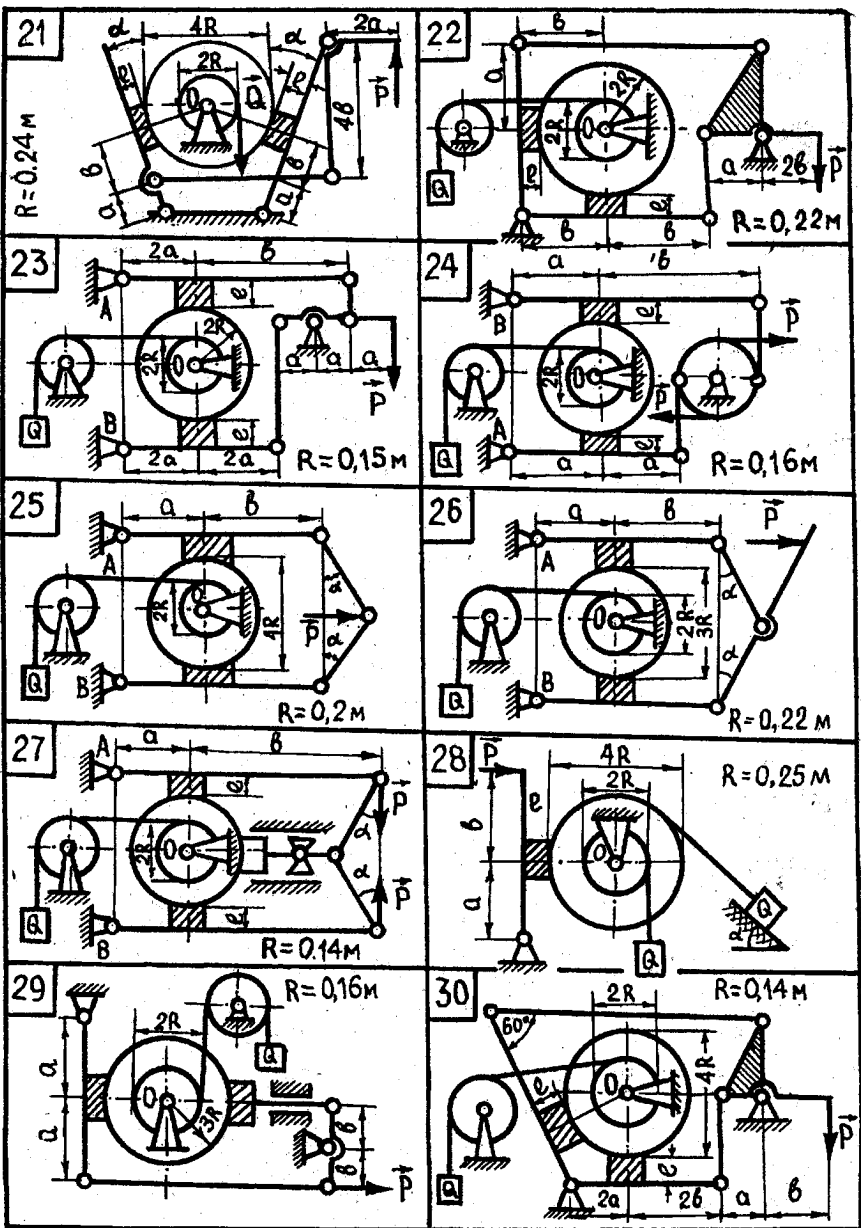


Рис. 27,б

горизонту. Коефіцієнт тертя $f = 0,4$; висота гальмових колодок $e = 0,05$ м. Геометричні розміри $a = 0,5$ м, $b = 0,8$ м.

Визначити силу \vec{P} , а також реакції в опорах O й A .

Розв'язання. В рівновазі знаходиться система твердих тіл, що складається з барабана S , важелів AB , CD і невагомго стержня BC . На рис. 27, з—є показано активні сили та реакції в'язей, які діють на кожне з названих тіл.

Аналітичні умови рівноваги системи розглядуваних твердих тіл мають вигляд:

для барабана S (рис. 27, з)

$$\sum F_{ix} = 0; -X_O + Q \cos \alpha - F_1 + F_2 = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; Y_O - G + N_2 - N_1 - Q \sin \alpha = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_O(\vec{F}_i) = 0; -QR + F_1 \cdot 2R + F_2 \cdot 2R = 0; \quad (3)$$

для важеля AB (рис. 27, д)

$$\sum F_{ix} = 0; X_A - F_2' + X_B = 0; \quad (4)$$

$$\sum F_{iy} = 0; Y_A + Y_B - N_2' = 0; \quad (5)$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0; -N_2'a + Y_A \cdot 2a + F_2' e = 0; \quad (6)$$

для важеля CD (рис. 27, е).

$$\sum F_{ix} = 0; -X_C + F_1' - P \sin \alpha = 0; \quad (7)$$

$$\sum F_{iy} = 0; N_1' - Y_C - P \cos \alpha = 0; \quad (8)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_i) = 0; N_1' a + F_1' e - P(a + b) \cos \alpha = 0; \quad (9)$$

для стержня CB (рис. 27, є)

$$\sum F_{ix} = 0; +X_C' - X_B' + X_K = 0; \quad (10)$$

$$\sum F_{iy} = 0; Y_C' - Y_B' = 0; \quad (11)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_i) = 0; X_K(2R + e) - X_B'(4R + 2e) = 0, \quad (12)$$

причому

$$F_1' = F_1 = f N_1; \quad (13)$$

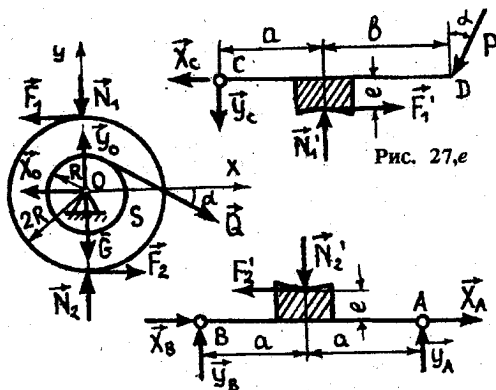


Рис. 27,г

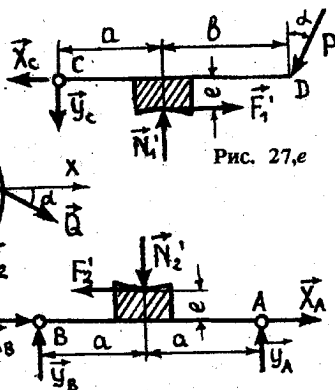


Рис. 27,д

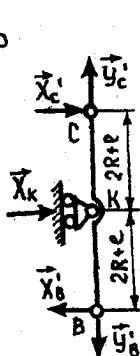


Рис. 27,е

$$F_2' = F_2 = f N_2. \quad (14)$$

Після підстановки відповідних величин у рівняння (1)—(14) дістанемо значення шуканих величин, а саме: $P = 2,68 \text{ кН}$; $X_O = 9,02 \text{ кН}$; $Y_O = 4,1 \text{ кН}$; $X_A = 3,66 \text{ кН}$; $Y_A = 3,22 \text{ кН}$.

Завдання С-11

ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛОЖЕННЯ ЦЕНТРА ТЯЖИННЯ ТІЛА

Визначити координати центра тяжіння однорідних: а) плоских стержневих конструкцій (рис. 31, а); б) тонких пластин (рис. 31, б); в) об'ємів (рис. 31, в).

Необхідні для розрахунку значення геометричних параметрів наведено в табл. 8.

Таблиця 8

Варіант	a	b	R	α	Варіант	a	b	R	α
	м					град	м		
1	0,6	0,4	—	—	18	—	—	0,6	—
2	0,9	0,6	—	—	19	0,2	0,6	0,15	—
3	0,45	1,0	—	—	20	0,5	—	0,3	—
4	1,2	0,9	—	—	21	—	—	0,6	45
5	0,6	1,2	—	—	22	0,9	—	0,3	—
6	0,45	1,0	—	—	23	0,4	0,3	—	—
7	0,9	1,8	—	—	24	0,45	—	0,15	—
8	0,4	0,3	—	—	25	0,4	0,6	0,45	90
9	0,6	1,8	—	—	26	0,5	0,7	0,3	—
10	0,45	0,9	—	—	27	0,4	0,5	—	45

Варіант	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>R</i>	α	Варіант	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>R</i>	α
	м			град		м			град
11	0,9	1,2	—	—	28	0,3	0,4	—	—
12	0,45	1,8	—	—	29	0,25	0,4	—	—
13	—	—	0,3	45	30	0,5	0,35	0,3	45
14	—	—	1,2	45	31	0,3	0,4	—	—
15	0,15	—	0,9	—	32	0,4	0,5	0,15	—
16	0,4	—	0,6	30	33	0,5	0,6	—	90
17	0,2	1,2	—	—	34	0,6	0,5	—	—

Приклад 11а. Визначити координати центра тяжіння конструкції (рис. 28), що складається з 10 тонких однорідних стержнів, розміщених у площині xOy , якщо $a = 0,6$ м, $b = 0,9$ м.

Розв'язання. Стержневу конструкцію розміщено симетрично відносно осі Oy , а тому центр її тяжіння знаходиться на цій осі.

Ордината центра тяжіння

$$y_c = \frac{\sum l_i y_i}{\sum l_i} = \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2 + \dots + l_{10} y_{10}}{l_1 + l_2 + \dots + l_{10}} \quad (1)$$

причому довжини окремих стержневих ліній становлять

$$l_1 = l_9 = 2a = 2 \cdot 0,6 = 1,2 \text{ м}; \quad l_2 = l_5 = a + b = 0,6 + 0,9 = 1,5 \text{ м};$$

$$l_3 = l_4 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1,17} \text{ м}; \quad l_6 = 2a + b = 2,1 \text{ м};$$

$$l_7 = l_8 = 2\pi a / 4 = 0,3\pi \text{ м}; \quad l_{10} = 2\pi a / 2 = 0,6\pi \text{ м},$$

а координати центрів тяжіння (точок C_1, C_2, \dots, C_{10} на рис. 29)

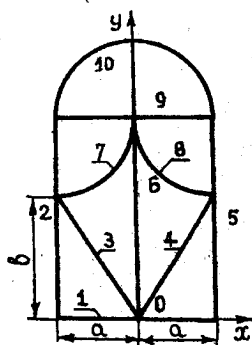


Рис. 28

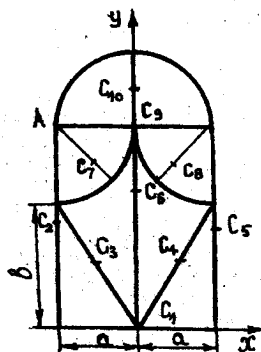


Рис. 29

$$y_1 = 0; \quad y_2 = y_5 = (a + b)/2 = 0,75 \text{ м}; \quad y_3 = y_4 = b/2 = 0,45 \text{ м};$$

$$y_6 = (2a + b)/2 = 1,05 \text{ м};$$

$$y_7 = y_8 = (a + b) - AC_7 \sin \frac{\pi}{4} = (a + b) - \frac{a \sin \pi/4}{\pi/4} \sin \pi/4 = 1,12 \text{ м};$$

$$y_9 = a + b = 1,5 \text{ м}; \quad y_{10} = a + b + \frac{a \sin \pi/2}{\pi/2} = 1,88 \text{ м}.$$

Підставляючи значення обчислених величин в (1), дістаємо

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1,2 \cdot 0 + 3 \cdot 0,75 + 2\sqrt{1,17} \cdot 0,45 + 2,1 \cdot 1,05}{2 \cdot 1,2 + 2 \cdot 1,5 + 2 \cdot \sqrt{1,17} + 2,1 + 2 \cdot 0,3\pi + 0,6\pi} + \\ &+ \frac{0,6\pi \cdot 1,12 + 1,2 \cdot 1,5 + 0,6\pi \cdot 1,88}{2 \cdot 1,2 + 2 \cdot 1,5 + 2 \cdot \sqrt{1,17} + 2,1 + 2 \cdot 0,3\pi + 0,6\pi} = \\ &= \frac{6,255 + 0,9\sqrt{1,17} + 1,8\pi}{7,5 + 2\sqrt{1,17} + 1,2\pi} = 0,91 \text{ м}. \end{aligned}$$

Приклад 116. Визначити координати центра тяжіння однорідної пластинки, зображеної на рис. 30, якщо $a = 0,4 \text{ м}$, $b = 0,8 \text{ м}$.

Розв'язання. Подаємо площу плоскої пластинки як суму площ квадрата 1, трикутника 2, півкола 3 радіусом a та півкола 4 радіусом $a/2$.

Координати центра тяжіння сумарної площі пластинки

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i} = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3 + S_4 x_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}; \quad (1)$$

$$y_c = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i} = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3 + S_4 y_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}.$$

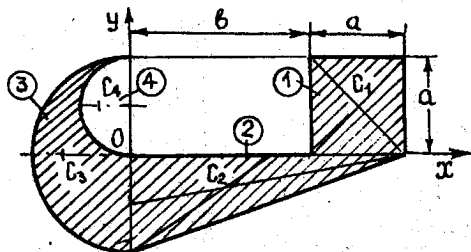


Рис. 30

Площі та координати квадрата, трикутника і двох півкіл у вибраній системі координат xOy відповідно становлять

$$S_1 = a^2 = 0,16 \text{ м}^2; \quad x_1 = b + a/2 = 1 \text{ м}; \quad y_1 = a/2 = 0,2 \text{ м};$$

$$S_2 = \frac{1}{2} a (a + b) = 0,24 \text{ м}^2; \quad x_2 = (a + b)/3 = 0,4 \text{ м};$$

$$y_2 = -a/3 = -0,133 \text{ м}; \quad S_3 = \frac{1}{2} \pi a^2 = 0,251 \text{ м}^2;$$

$$x_3 = -\frac{2}{3} a \frac{\sin \pi/2}{\pi/2} = -0,17 \text{ м}; \quad y_3 = 0;$$

$$S_4 = -\frac{1}{2} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = -0,063 \text{ м}^2;$$

$$x_4 = -\frac{2}{3} \frac{a}{2} \frac{\sin \pi/2}{\pi/2} = -0,085 \text{ м}; \quad y_4 = a/2 = 0,2 \text{ м}.$$

Підставляючи значення обчислених величин в (1), знаходимо

$$x_c = \frac{0,16 \cdot 1 + 0,24 \cdot 0,4 + 0,251(-0,17) + (-0,063)(-0,085)}{0,16 + 0,24 + 0,251 - 0,063} =$$

$$= 0,37 \text{ м};$$

$$y_c = \frac{0,16 \cdot 0,2 + 0,24(-0,133) + 0,251 \cdot 0 + (-0,063) \cdot 0,2}{0,16 + 0,24 + 0,251 - 0,063} =$$

$$= -0,021 \text{ м}.$$

Приклад 11в. Визначити координати центра тяжіння тіла, зображеного на рис. 31, якщо $a = 1 \text{ м}$, $b = 1,2 \text{ м}$, $R = 0,45 \text{ м}$.

Розв'язання. Координати тіла у вибраній системі координат xOz (див. рис. 31)

$$x_c = \frac{\sum V_i x_i}{\sum V_i} = \frac{V_1 x_1 + V_2 x_2 + V_3 x_3}{V_1 + V_2 + V_3},$$

$$y_c = \frac{\sum V_i y_i}{\sum V_i} = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2 + V_3 y_3}{V_1 + V_2 + V_3}; \quad (1)$$

$$z_c = \frac{\sum V_i z_i}{\sum V_i} = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2 + V_3 z_3}{V_1 + V_2 + V_3},$$

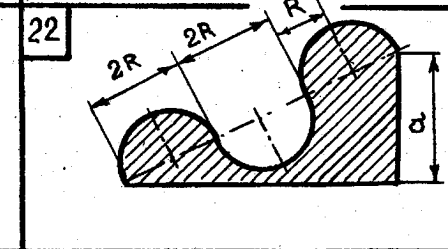
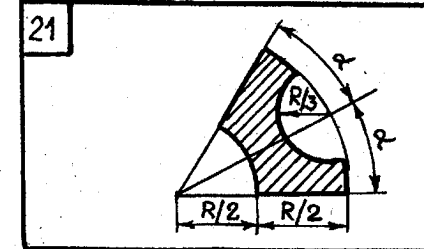
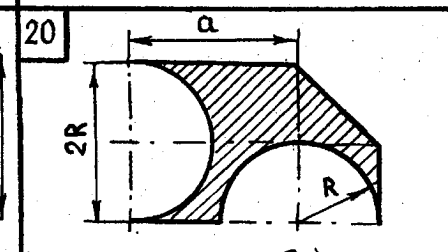
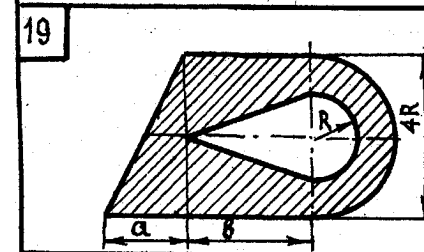
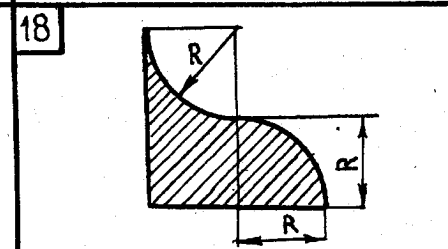
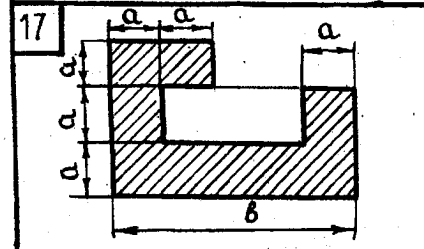
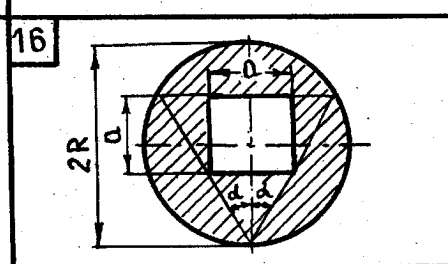
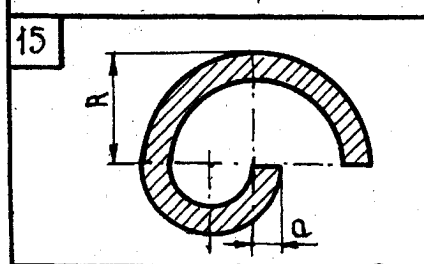
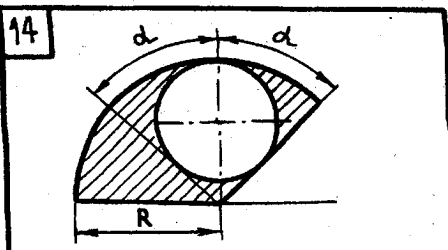
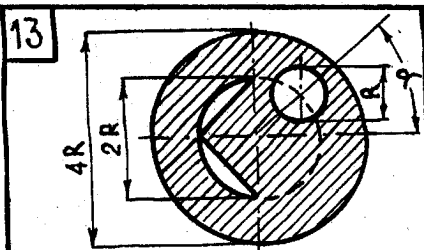


Рис. 31,6

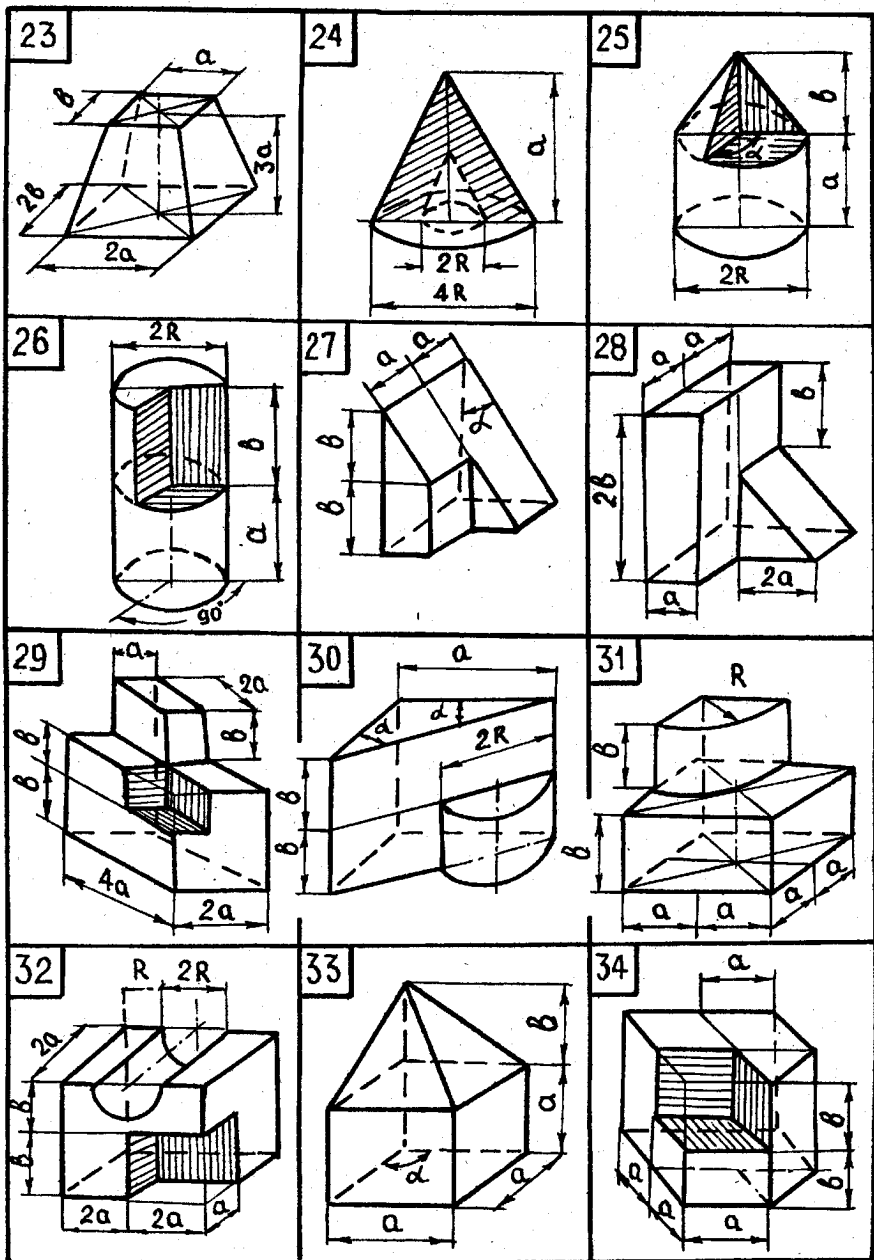


Рис. 31,б

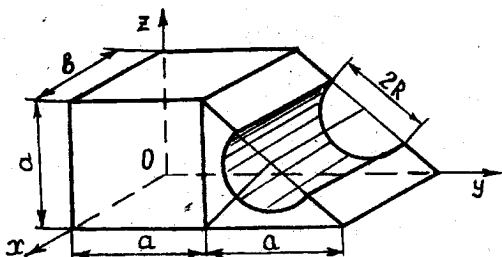


Рис. 31

де $V_1 = a^2 b = 1^2 \cdot 1,2 = 1,2 \text{ м}^3$ — об'єм паралелепіпеда; $V_2 = \frac{1}{2} a^2 b = -0,6 \text{ м}^3$ — об'єм призми; $V_3 = -\frac{1}{2} \pi R^2 b = -\frac{1}{2} \cdot 3,14 \cdot 0,45^2 \cdot 1,2 = -0,38 \text{ м}^3$ — об'єм півциліндра, а координати центрів тяжіння названих тіл

$$x_1 = x_2 = x_3 = b/2 = 0,6 \text{ м}; \quad y_1 = a/2 = 0,5 \text{ м}; \quad y_2 = a + a/3 = 4/3 \text{ м};$$

$$y_3 = a + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} R \frac{\sin \pi/2}{\pi/2} \right) \cos \pi/4 = 1,5a - \frac{0,3\sqrt{2}}{\pi} = 1,37 \text{ м};$$

$$z_1 = a/2 = 0,5 \text{ м}; \quad z_2 = a/3 = 1/3 \text{ м};$$

$$z_3 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} R \frac{\sin \pi/2}{\pi/2} \right) \sin \pi/4 = a/2 - \frac{0,3\sqrt{2}}{\pi} = 0,37 \text{ м}.$$

Підставляючи значення обчислених величин в (1), дістаємо

$$x_c = \frac{1,2 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,6 - 0,38 \cdot 0,6}{1,2 + 0,6 - 0,38} = 0,6 \text{ м};$$

$$y_c = \frac{1,2 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 4/3 - 0,38 \cdot 1,37}{1,2 + 0,6 - 0,38} = 0,62 \text{ м};$$

$$z_c = \frac{1,2 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 1/3 - 0,38 \cdot 0,37}{1,2 + 0,6 - 0,38} = 0,46 \text{ м}.$$

□

КІНЕМАТИКА



2.1. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

Завдання К-1

ВИЗНАЧЕННЯ ТРАЕКТОРІЇ, ШВИДКОСТІ ТА ПРИСКОРЕННЯ ТОЧКИ
ЗА РІВНЯННЯМИ, ЩО ОПИСУЮТЬ ЇЇ РУХ

За заданими рівняннями руху точки M установити її траєкторію і для моментів часу t_i ($i = 1, 2, 3$) визначити положення цієї точки на траєкторії, її швидкість, дотичне, нормальне та повне прискорення, а також радіус кривини траєкторії.

Необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 9.

Таблиця 9

Ва- ріант	$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, см	Час, с		
		t_1	t_2	t_3
1	$\vec{r} = (6 \sin(\pi t/4) + 2)\vec{j} + (3 - 6 \cos(\pi t/4))\vec{k}$	0	2	4
2	$\vec{r} = (3 - 2 \cos(\pi t/4))\vec{i} + (2 \sin(\pi t/8) - 1)\vec{j}$	0	4/3	4
3	$\vec{r} = (6 \sin(\pi t/6) + 1)\vec{i} + (4 \cos(\pi t/6) - 2)\vec{k}$	0	3	6
4	$\vec{r} = (3t)\vec{j} + (6t - 5t^2)\vec{k}$	1	2	3
5	$\vec{r} = (5 - 2 \cos(\pi t/3))\vec{i} + (3 \sin(\pi t/3) - 2)\vec{k}$	3/2	3	9/2
6	$\vec{r} = (5 \sin(\pi t^2/4) + 3)\vec{j} + (2 - 5 \cos(\pi t^2/4))\vec{k}$	1	$\sqrt{2}$	2
7	$\vec{r} = (20 \cos^2(\pi t))\vec{i} + (20 \sin(\pi t) - 10)\vec{j}$	1/4	1/3	1
8	$\vec{r} = (\cos(\pi t^2))\vec{i} + (\sin(\pi t^2) - 1)\vec{k}$	1	2	3
9	$\vec{r} = (3 - 8 \sin(\pi t/6))\vec{j} - (6 \cos(\pi t/6))\vec{k}$	0	3	3/2
10	$\vec{r} = (2 \cos(\pi t/2) + 4 \sin(\pi t/2))\vec{i} + (3 \cos(\pi t/2) + 6 \sin(\pi t/2))\vec{j}$	0	1	2
11	$\vec{r} = (1 + 3 \cos(\pi t^2/3))\vec{i} + (3 \sin(\pi t^2/3) + 3)\vec{k}$	0	1	$\sqrt{3}$
12	$\vec{r} = \frac{1}{2}(e^{4t} + e^{-4t})\vec{i} + \frac{1}{2}(e^{4t} - e^{-4t})\vec{j}$	0	1/4	1/2
13	$\vec{r} = (2 \cos(\pi t^2))\vec{j} + (\cos(2\pi t^2))\vec{k}$	0	1	$\sqrt{3/2}$
14	$\vec{r} = (5 \cos^2(\pi t/4))\vec{i} + (2 \sin(\pi t/4))\vec{k}$	1	2	3
15	$\vec{r} = -(3/(t+2))\vec{i} + (2t+4)\vec{j}$	0	1	2
16	$\vec{r} = (4 \cos^2(\pi t/2))\vec{j} + (3 \sin(\pi t))\vec{k}$	0	1/2	1
17	$\vec{r} = (3 - t^2)\vec{i} + (t^2 + 1)\vec{j}$	1	2	3
18	$\vec{r} = (3t^2 - 2)\vec{i} + 2t\vec{k}$	1/2	1	3/2
19	$\vec{r} = (3 \cos(\pi t^2) - 1)\vec{j} + (1 + 3 \sin(\pi t^2))\vec{k}$	$\sqrt{1/2}$	1	$\sqrt{3/2}$

Ва- ріант	$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, см	Час, с		
		t_1	t_2	t_3
20	$\vec{r} = (5 \sin(\pi t^2/6) - 2)\vec{i} + (3 + 5 \cos(\pi t^2/6))\vec{j}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
21	$\vec{r} = (3/(t+2))\vec{j} + (3t+6)\vec{k}$	1	1/2	2
22	$\vec{r} = -(3 + 8 \cos(\pi t^2/6))\vec{i} + (4 - 8 \sin(\pi t^2/6))\vec{k}$	1	$\sqrt{2}$	2
23	$\vec{r} = (2 - 3 \cos(\pi t/3))\vec{i} + (10 \sin(\pi t/6))\vec{j}$	0	1	3/2
24	$\vec{r} = (8 \cos(\pi t/6) - 3)\vec{i} + (16 \sin^2(\pi t/6))\vec{k}$	1	2	3
25	$\vec{r} = (4 - 6 \cos^2(\pi t/6))\vec{j} + (12 \sin^2(\pi t/6))\vec{k}$	2	3	6
26	$\vec{r} = (6 \cos(\pi t/3) - 4)\vec{i} + (4 - 9 \sin(\pi t/6))\vec{j}$	1	2	3
27	$\vec{r} = 4t\vec{i} + (16t^2 - 1)\vec{k}$	1/4	1/2	1
28	$\vec{r} = (3 \sin(\pi t/3))\vec{j} + (2 \cos(\pi t/3) - 3)\vec{k}$	1	3/2	3
29	$\vec{r} = (5 \cos^2(\pi t/3))\vec{i} + (2,5 \sin(2\pi t/3))\vec{j}$	1/2	1	2
30	$\vec{r} = (-4t^2 + 1)\vec{j} + 3t\vec{k}$	1/2	1	3/2
31	$\vec{r} = (\sin^2(\pi t^2/3) - 1)\vec{i} + (3 - \cos^2(\pi t^2/3))\vec{k}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
32	$\vec{r} = (3 \sin^2(\pi t^2/4) + 4)\vec{i} + (2 \cos(\pi t^2/2) - 1)\vec{j}$	1	$\sqrt{2}$	2
33	$\vec{r} = (25 + 75 \cos(\pi t/2))\vec{j} + (50 - 75 \sin(\pi t/2))\vec{k}$	1	$\sqrt{2}$	2
34	$\vec{r} = (75 \cos(\pi t^2/2) + 25)\vec{i} + (15 - 75 \sin(\pi t^2/2))\vec{k}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
35	$\vec{r} = \frac{3}{2}(e^t + e^{-t})\vec{j} + \frac{3}{2}(e^t - e^{-t})\vec{k}$	0	ln2	2
36	$\vec{r} = \left(\frac{1}{2} \sin(2t)\right)\vec{i} + (\cos^2 t)\vec{k}$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
37	$\vec{r} = -(10 \cos(\pi t/3))\vec{j} + (3 \sin(\pi t/3))\vec{k}$	1	1/2	3/2
38	$\vec{r} = (2 \sin^3(\pi t/2))\vec{i} + (2 \cos^3(\pi t/2))\vec{j}$	0	1	2
39	$\vec{r} = (3 - 6 \sin^2(\pi t/6))\vec{i} + (4 - 6 \sin(\pi t/6))\vec{k}$	1	2	3
40	$\vec{r} = (3 \sin(\pi t^2/3 + 3))\vec{j} + (4 + 3 \cos(\pi t^2/3))\vec{k}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

Теоретичні відомості. Основна задача кінематики точки полягає в тому, щоб на підставі рівнянь її руху, визначити всі кінематичні характеристики цього руху (траєкторію, швидкість, прискорення і т. д.).

Рух точки в кінематиці можна описати трьома способами: векторним, координатним та натуральним.

При векторному способі задання руху точки M її положення визначається радіусом-вектором, один кінець якого починається в нерухомому центрі, а інший визначає положення точки, причому цей вектор є векторною функцією часу, тобто

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1)$$

Лінія, яку описує під час руху рухомий кінець вектора в просторі (годограф радіуса-вектора $\vec{r}(t)$), називається траєкторією руху точки.

Рухи за траєкторіями поділяються на *прямолінійні* (траєкторія руху — пряма лінія) і *криволінійні* (траєкторія руху — крива лінія). Рівняння (1) є векторним рівнянням траєкторії.

Координатний спосіб задання руху точки M полягає в тому, що її положення визначається у вибраній нерухомій системі координат трьома координатами, які змінюються залежно від часу t , а саме:

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t). \quad (2)$$

При відсутності однієї з координат (2) рухома точка описує траєкторію, розміщену в одній із площин.

При натуральному способі задання руху точки вважається, що траєкторію точки M відомо, а тому на цій траєкторії визначаються точка (початок руху) і додатний напрямок відліку дугової координати, що встановлює положення рухомої точки на траєкторії, тобто

$$s = s(t). \quad (3)$$

Якщо початок декартової системи координат збігається з початком радіуса-вектора $\vec{r}(t)$, то

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (4)$$

Рівняння (4) встановлює зв'язок між векторним та координатним способами задання руху точки. При векторному способі швидкість руху точки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \quad (5)$$

а прискорення

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}. \quad (6)$$

Якщо рух точки задано координатним способом, то модуль швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad (7)$$

причому проекції вектора швидкості на відповідні координатні осі

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (8)$$

Модуль прискорення при координатному способі задання руху точки

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (9)$$

де проекції вектора прискорення на осі координат

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x}; a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y}; a_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z}. \quad (10)$$

Напрямні косинуси векторів швидкості та прискорення визначаються виразами

$$\cos(\hat{v}, \hat{i}) = v_x/v; \quad \cos(\hat{v}, \hat{j}) = v_y/v; \quad \cos(\hat{v}, \hat{k}) = v_z/v; \quad (11)$$

$$\cos(\hat{a}, \hat{i}) = a_x/a; \quad \cos(\hat{a}, \hat{j}) = a_y/a; \quad \cos(\hat{a}, \hat{k}) = a_z/a. \quad (12)$$

При натуральному способі задання руху модуль швидкості

$$v = \left| \frac{ds}{dt} \right|, \quad (13)$$

причому вектор швидкості спрямований вздовж дотичної до траєкторії.

Модуль прискорення визначається його проекціями на натуральні осі (дотичну, нормаль і бінормаль):

$$a_t = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}; \quad a_b = 0, \quad (14)$$

де ρ — радіус кривини траєкторії в даній точці.

Модуль повного прискорення і його напрямок (рис. 32) визначаються за формулами

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}; \quad \operatorname{ctg} \mu = a_t/a_n. \quad (15)$$

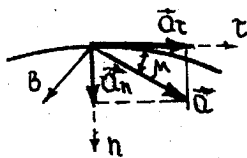


Рис. 32

Приклад 12. Рух точки задано рівнянням

$$\vec{r}(t) = (3 \cos(\pi t^2/3) - 2) \vec{i} + (3 - 4 \sin(\pi t^2/3)) \vec{j},$$

де \vec{r} — радіус вектор у сантиметрах; t — час у секундах.

Визначити траєкторію точки і для t_i ($i = 1, 2, 3$) знайти положення точки на траєкторії, її швидкість, повне, дотичне, нормальне прискорення та радіус кривини траєкторії.

Р о з в ' я з а н н я. На підставі (4) координатами рухомої точки M є

$$x = 3 \cos(\pi t^2/3) - 2; \quad y = 3 - 4 \sin(\pi t^2/3). \quad (16)$$

Виключаючи з рівнянь (16) час t , дістаємо рівняння траєкторії в координатній формі

$$(x + 2)^2/9 + (y - 3)^2/16 = 1. \quad (17)$$

Рівняння (17) указує на те, що траєкторія рухомої точки має вигляд еліпса (рис. 33).

Вектор швидкості

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}, \quad (18)$$

а вектор прискорення

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}. \quad (19)$$

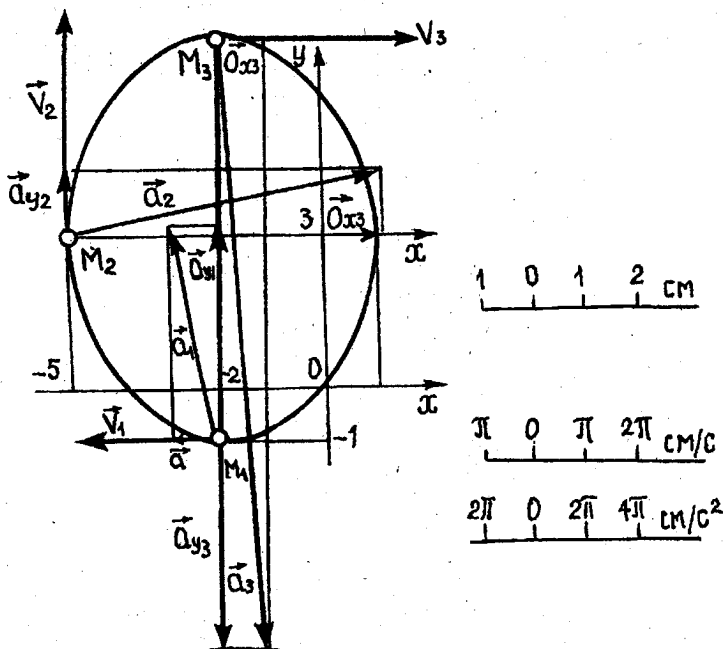


Рис. 33

У рівняннях (18), (19) \vec{i}, \vec{j} — орти координатних осей x та y ; v_x, v_y, a_x, a_y — проєкції швидкостей і прискорення точки на ці осі.

Для розглядуваного прикладу, використовуючи (16), (8) та (10), маємо

$$\left. \begin{aligned} v_x = \dot{x} &= -2\pi t \sin(\pi t^2/3); \\ v_y = \dot{y} &= -\frac{8\pi t}{3} \cos(\pi t^2/3); \\ a_x &= -2\pi \sin(\pi t^2/3) - \frac{4\pi^2 t^2}{3} \cos(\pi t^2/3); \\ a_y &= -\frac{8\pi}{3} \cos(\pi t^2/3) + \frac{16\pi^2 t^2}{9} \sin(\pi t^2/3). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Модуль швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \quad (21)$$

а модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (22)$$

Модуль дотичного прискорення

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} \quad (23)$$

Нормальне прискорення рухомої точки

$$a_n = v^2 / \rho, \quad (24)$$

якщо радіус кривини траєкторії ρ відомий. Якщо ж цей радіус невідомий, то

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}. \quad (25)$$

Якщо рух точки відбувається в площині xOy , то

$$a_n = \frac{v_x a_y - v_y a_x}{v}. \quad (26)$$

Після визначення нормального прискорення за формулою (26) або (24) можна знайти радіус кривини траєкторії

$$\rho = v^2 / a_n. \quad (27)$$

Результати обчислень величин за формулами (16) — (27) для моментів часу $t_1 = \sqrt{3}/2$ с, $t_2 = \sqrt{3}$ с і $t_3 = 3/\sqrt{2}$ с наведено в табл. 10.

Таблиця 10

Час t , с	Координати, см		Швидкості, см/с			Прискорення, см/с ²					Радіус кривини ρ , см
	x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_t	a_n	
$\sqrt{3}/2$	-2	-1	$-2\pi\sqrt{3}/2$	0	$2\pi\sqrt{3}/2$	-2 π	$\frac{8\pi^2}{3}$	$2\pi\sqrt{1+16\pi^2/9}$	2 π	$\frac{8\pi^2}{3}$	2,25
$\sqrt{3}$	-5	3	0	$\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$	$\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$	4 π^2	$\frac{8\pi}{3}$	$4\pi\sqrt{\pi^2+4/9}$	$\frac{8\pi}{3}$	4 π^2	16/3
$3/\sqrt{2}$	-2	7	3 $\pi\sqrt{2}$	0	3 $\pi\sqrt{2}$	2 π	-8 π^2	$2\pi\sqrt{1+16\pi^2}$	2 π	8 π^2	2,25

Завдання К-2

СКЛАДАННЯ РІВНЯНЬ РУХУ ТОЧКИ І ВИЗНАЧЕННЯ ЇЇ ШВИДКОСТІ ТА ПРИСКОРЕННЯ

Для точки M заданого механізму скласти рівняння руху в декартових координатах і, використовуючи ЕОМ, побудувати траєкторію руху цієї точки, показати на ній положення точки для моментів часу

$t_i (i = 1, 2, 3)$, обчислити модулі швидкості та прискорення, а також радіус кривини траєкторії для зазначених моментів часу.

Схеми механізмів показано на рис. 35, *a—e*, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 11.

Таблиця 11

Вариант	l , см	R , см	r , см	$\varphi = \varphi(t)$, рад	$s = s(t)$, см	Час, с		
						t_1	t_2	t_3
1	40	—	10	πt	—	1/6	1/2	2/3
2	60	—	—	—	$40\sqrt{3} \sin \pi t$	1/6	1/3	2/3
3	—	30	20	$6\pi t$	—	1/4	1/3	1/2
4	—	—	30	$2\pi t$	—	1/8	1/4	1,0
5	50	—	—	—	$100 \cos 2\pi t$	1/8	3/8	5/8
6	80	—	—	—	$80 \cos 2\pi t$	1/8	1/4	1/2
7	30	—	20	πt	—	1/4	1/2	3/4
8	—	50	—	$5\pi t$	—	1/10	1/5	2/5
9	42	—	30	$3\pi t$	—	1/12	1/6	1/3
10	50	—	—	—	$50 \sin 3\pi t$	1/9	1/6	1/3
11	15	—	—	$2\pi t$	—	1/6	1/3	5/6
12	54	—	30	πt	—	1/4	1/2	2/3
13	45	—	—	—	$45 \sin \pi t$	1/6	1/3	1/2
14	—	20	10	$5\pi t$	—	1/15	1/10	1/5
15	—	30	12	$4\pi t$	—	1/12	1/8	1/6
16	80	—	40	$6\pi t$	—	1/18	1/12	5/36
17	36	—	15	$2\pi t$	—	1/12	1/6	1/4
18	45	—	—	—	$30\sqrt{3} \cos \pi t$	1/4	1/2	2/3
19	30	—	—	—	$60 \sin 2\pi t$	1/6	1/3	1/4
20	—	36	24	$3\pi t$	—	1/12	1/6	1/3
21	18	12	6	πt	—	1/4	1/2	3/4
22	24	—	—	$4\pi t$	—	1/8	1/6	1/4
23	25	—	—	$5\pi t$	—	1/5	1/10	1/15
24	—	50	10	$2\pi t$	—	1/6	1/3	5/12
25	12	—	48	$3\pi t$	—	1/15	1/12	1/6
26	25	—	—	$5\pi t$	—	1/15	1/10	1/5
27	—	40	—	$6\pi t$	—	1/9	1/8	1/4
28	50	—	—	—	$50 \sin 3\pi t$	1/9	2/9	1/3
29	42	—	—	—	$42\sqrt{3} \sin 2\pi t$	1/8	1/4	1/2
30	30	—	—	$3\pi t$	—	1/12	1/6	1/3

Приклад 13. Дано: схему механізму (рис. 34, *a*), де $\varphi = \pi t/3$, $R = 20$ см, $r = 10$ см, $l = 30$ см, $t_1 = 3/4$ с, $t_2 = 3/2$ с, $t_3 = 9/4$ с.

Визначити траєкторію руху точки M , а також \vec{v}_M , \vec{a}_M , ρ_M .

Розв'язання. Рівняння руху точки M , виходячи з рис. 34,б, мають вигляд

$$x = (R + r) \cos \varphi + (r + l) \cos(\alpha + \varphi);$$

$$y = (R + r) \sin \varphi + (r + l) \sin(\alpha + \varphi),$$

причому

$$\omega_{CB} = \omega_{CB_0},$$

або

$$\alpha r = \varphi R; \quad \alpha = \frac{R}{r} \varphi = 2\varphi.$$

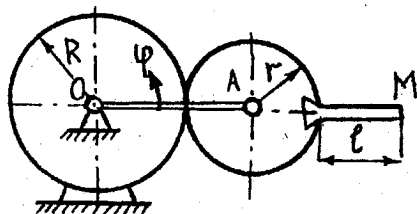


Рис. 34,а

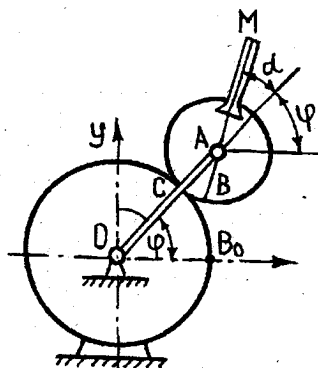


Рис. 34,б

Отже,

$$x = 30 \cos \varphi + 40 \cos 3\varphi; \quad y = 30 \sin \varphi + 40 \sin 3\varphi. \quad (1)$$

Проекції вектора швидкості на осі координат

$$\left. \begin{aligned} v_x = \dot{x} &= -\dot{\varphi}(30 \sin \varphi + 120 \sin 3\varphi) = -30\dot{\varphi}(\sin \varphi + 4 \sin 3\varphi); \\ v_y = \dot{y} &= \dot{\varphi}(30 \cos \varphi + 120 \cos 3\varphi) = 30\dot{\varphi}(\cos \varphi + 4 \cos 3\varphi). \end{aligned} \right\} (2)$$

Модуль швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 30 \dot{\varphi} \sqrt{17 + 8 \cos 2\varphi}. \quad (3)$$

Проекції прискорення точки на осі координат

$$\left. \begin{aligned} a_x = \ddot{x} &= -30 \ddot{\varphi} (\cos \varphi + 12 \cos 3\varphi); \\ a_y = \ddot{y} &= -30 \ddot{\varphi} (\sin \varphi + 12 \sin 3\varphi). \end{aligned} \right\} (4)$$

Модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 30 \ddot{\varphi} \sqrt{145 + 24 \cos 2\varphi}. \quad (5)$$

Дотичне прискорення

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -240 \ddot{\varphi}^2 \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{17 + 8 \cos 2\varphi}}. \quad (6)$$

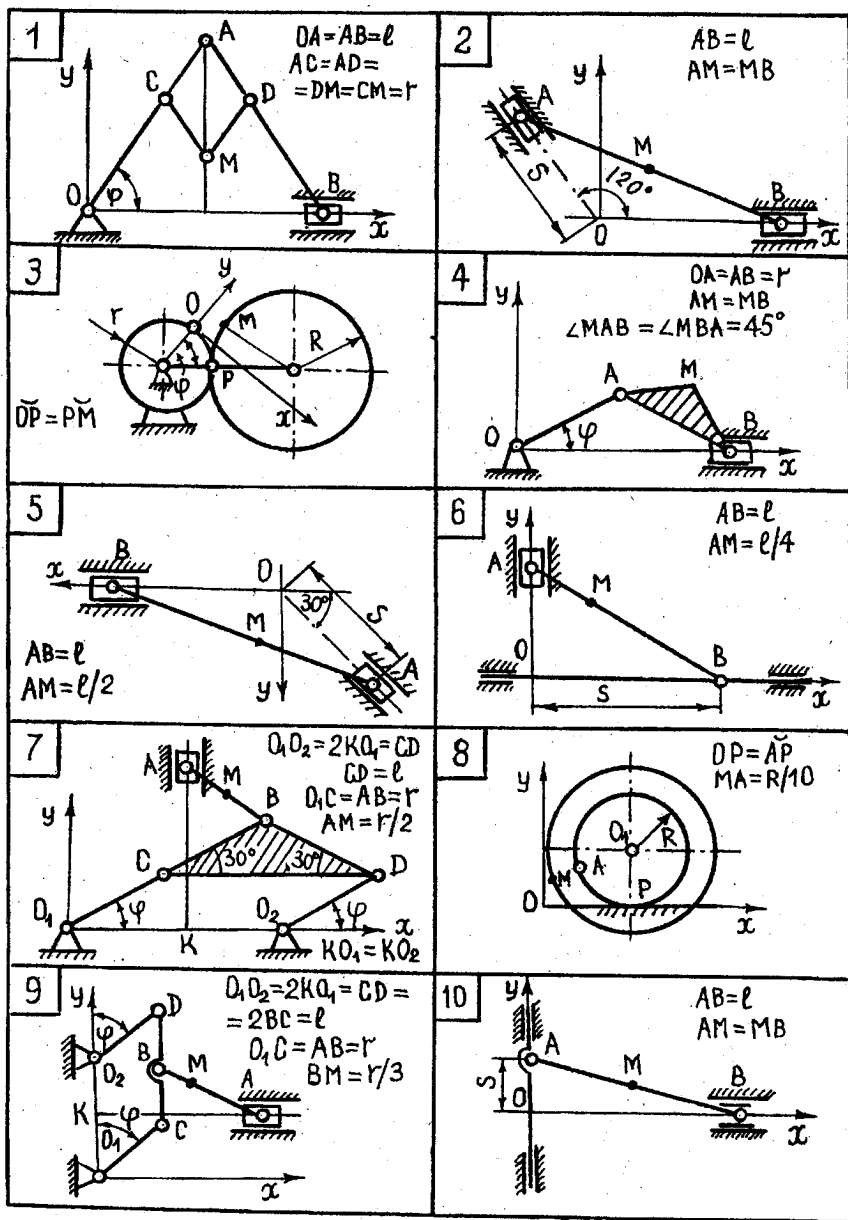


Рис. 35,а

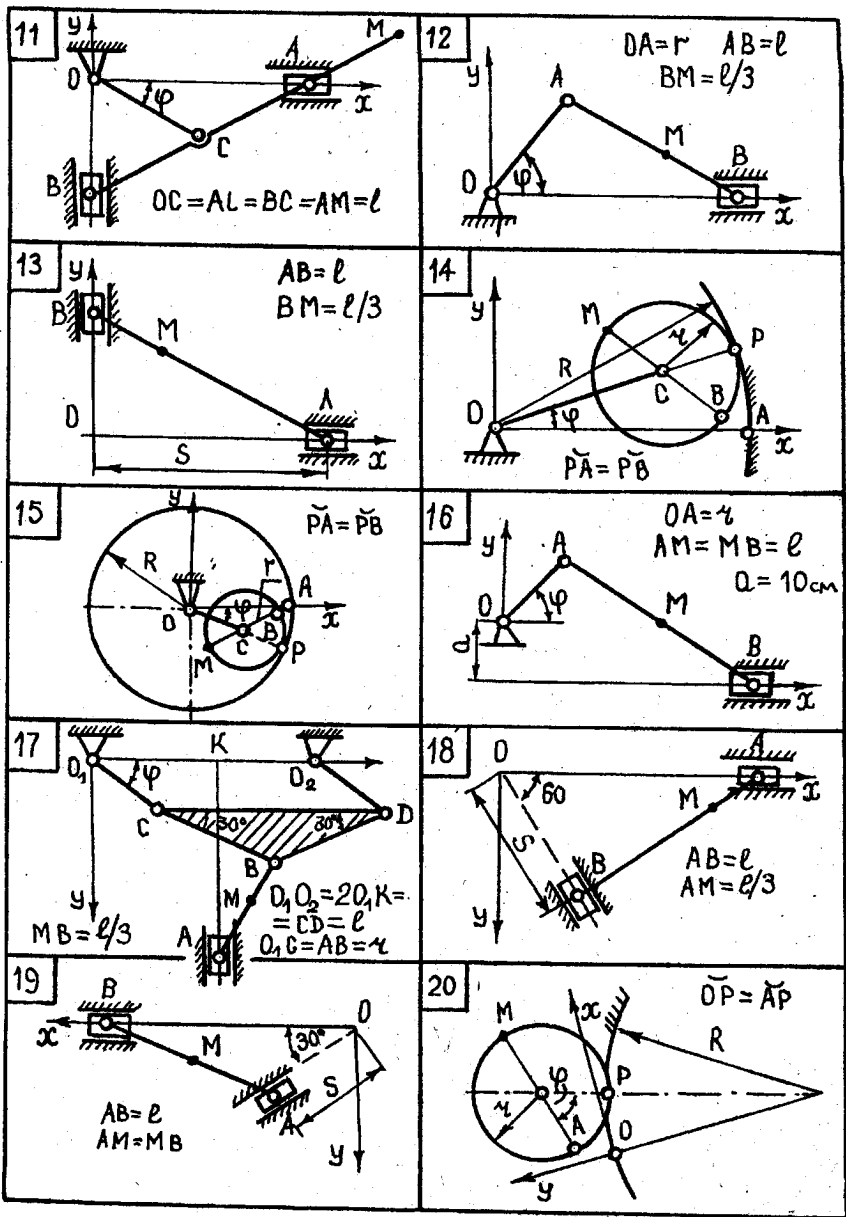


Рис. 35,6

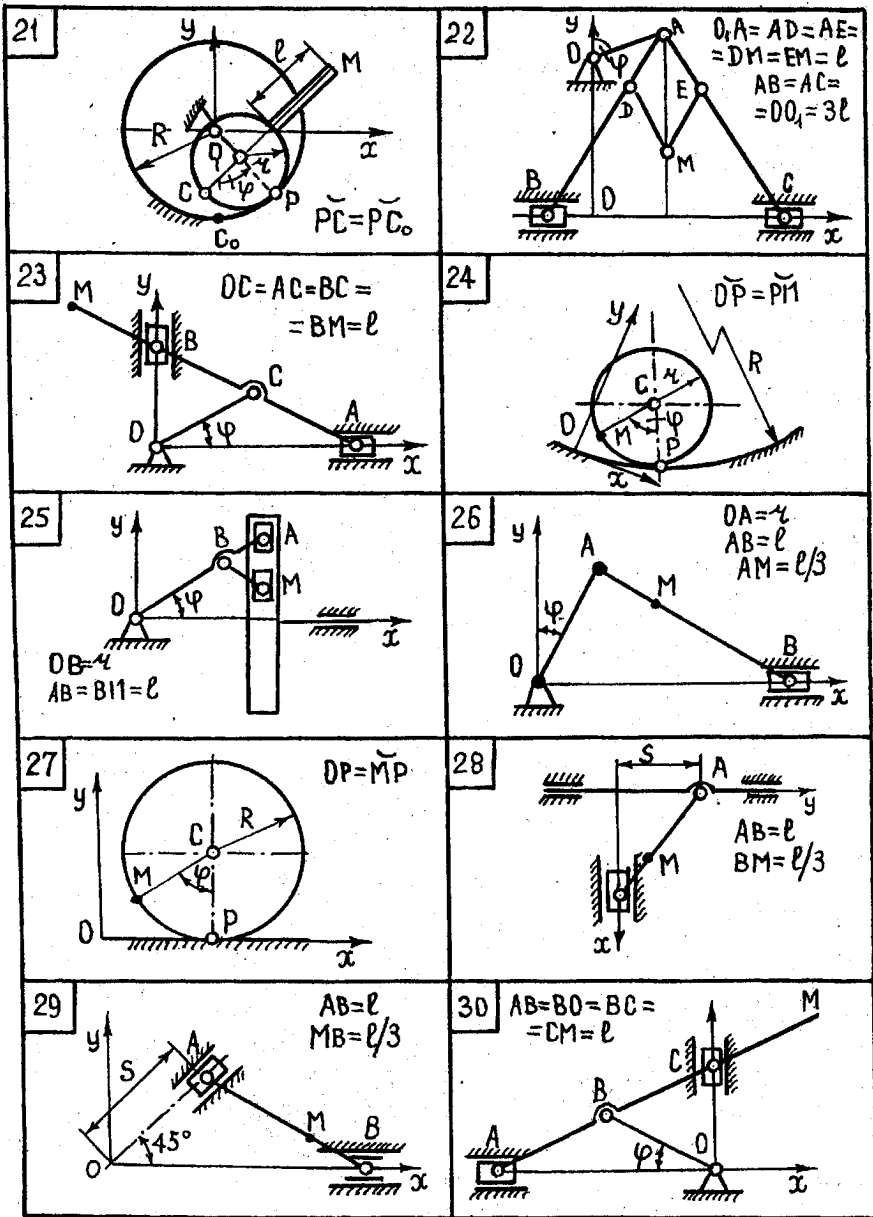


Рис. 35,6

Нормальне прискорення

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}. \quad (7)$$

Радіус кривини траєкторії

$$\rho = v^2 / a_n. \quad (8)$$

У формулах (2)—(6)

$$\dot{\phi} = \pi/3.$$

Положення точки M , її швидкість, прискорення та їхні проєкції на осі координат, а також дотичне і нормальне прискорення, обчислені для моментів часу t_i ($i = 1, 2, 3$), наведено в табл. 12.

Таблиця 12

t_i, c	x	y	v_x	v_y	v
	см		см/с		
3/4	-7,05	49,35	-35,25π	-21,15π	41,11π
3/2	0	-10,00	30π	0	30π
9/4	7,05	49,35	-35,25π	21,15π	41,11π

Закінчення табл. 12

t_i, c	a_x	a_y	a	a_t	a_n	ρ, cm
	см/с ²					
3/4	25,53π ²	-30,55π ²	39,81π ²	-6,47π ²	-39,28π ²	43,0
3/2	0	36,67π ²	36,67π ²	0	36,67π ²	24,5
9/4	-25,53π ²	-30,55π ²	39,81π ²	6,47π ²	39,28π ²	43,0

У табл. 13 вміщено значення координат, проєкцій швидкості та прискорення, обчислені за допомогою ЕОМ для інтервалу зміни кута повороту кривошипа OA від $\phi_1 = 0$ до $\phi_2 = 2\pi$ рад.

На рис. 36 зображено траєкторію руху точки, а також усі компоненти швидкості та прискорення для моментів часу t_i ($i = 1, 2, 3$).

Програма обчислення координат рухомої точки M , її швидкості та прискорення має такий вигляд:

PROGRAM RR:

var

$x, y, \phi, \phi_, vx, vy, v, ax, ay, at, an, a$: real;

f:text;

Begin

assign (f,'tablel'); rewrite (f);

phi:=0.0; phi_:=pi/3;

Таблица 13

φ, град	см			см/с			см/с ²			a	
	x	y	z	v _x	v _y	v _z	a _x	a _y	a _z		a _φ
0	70,000	0,000	0,000	157,080	157,080	157,080	-427,683	0,000	0,000	427,683	427,683
5	68,523	12,967	-35,262	152,678	152,678	156,697	-414,106	-105,045	-9,163	427,123	427,221
10	64,185	25,209	-68,287	139,767	139,767	155,557	-374,292	-203,105	-18,179	425,459	425,848
15	57,262	36,049	-96,989	119,203	119,203	153,676	-310,932	-287,669	-26,902	422,740	423,595
20	48,191	44,902	-119,573	92,353	92,353	151,085	-228,307	-353,145	-35,177	419,044	420,518
25	37,542	51,316	-134,659	60,997	60,997	147,830	-131,994	-395,236	-42,846	414,485	416,694
30	25,981	55,000	-141,372	27,207	27,207	143,966	-28,491	-411,234	-49,738	409,2,08	412-219
35	14,222	55,844	-139,401	-6,790	-6,790	139,567	75,229	-400202	-55,670	403,388	407-211
40	2,981	53,925	-129,022	-38,766	-38,766	134,720	172,190	-363,040	-60,442	397,233	401,805
45	-7,071	49,497	-111,072	-66,643	-66,643	129,531	255,892	-302,417	-63,833	390,976	396,153
50	-15,357	42,981	-86,898	-88,634	-88,634	124,126	320,746	-222,594	-65,601	384,867	390,418
55	-21,430	34,927	-58,259	-103,362	-103,362	118,650	362,462	-129,127	-65,484	379,163	384,776
60	-25,000	25,981	-27,207	-109,956	-109,956	113,272	378,335	-28,491	-63,216	374,103	379,406
65	-25,958	16,836	4,052	-108,105	-108,105	108,181	367,429	72,361	-58,549	369,881	374,486
70	-24,380	8,191	33,311	-98,083	-98,083	103,585	330,641	166,477	-51,308	366,614	370,187
75	-20,520	0,694	58,512	-80,727	-80,727	99,702	270,640	247,377	-41,465	364,310	366,662
80	-14,791	-5,097	77,889	-57,377	-57,377	96,741	191,679	309,494	-29,232	362,868	364,043
85	-7,738	-8,751	90,085	-29,786	-29,786	94,882	99,310	348,559	-15,132	362,114	362,430

90	0,000	-10,000	94,248	0,000	94,248	-0,000	361,885	0,000	361,885	361,885
95	7,738	-8,751	90,085	29,786	94,882	-99,310	348,559	15,132	362,114	362,430
100	14,791	-5,097	77,889	57,377	96,741	-191,679	309,494	29,232	362,868	364,043
105	20,520	0,694	58,512	80,727	99,702	-270,640	247,377	41,465	364,310	366,662
110	24,380	8,191	33,311	98,083	103,585	-330,641	166,477	51,308	366,614	370,187
115	25,958	16,836	4,052	108,105	108,181	-367,429	72,361	58,549	369,881	374,486
120	25,000	25,981	-27,207	109,956	113,272	-378,335	-28,491	63,216	374,103	379,406
125	21,430	34,927	-58,259	103,362	118,650	-362,462	-129,127	65,484	379,163	384,776
130	15,357	42,981	-86,898	88,634	124,126	-320,746	-222,594	65,601	384,867	390,418
135	7,071	49,497	-111,072	66,643	129,531	-255,892	-302,417	63,833	390,976	396,153
140	-2,981	53,925	-129,022	38,766	134,720	-172,190	-363,040	60,442	397,233	401,805
145	-14,222	55,844	-139,401	6,790	139,567	-75,229	-400,202	55,670	403,388	407,211
150	-25,981	55,000	-141,372	-27,207	143,966	28,491	-411,234	49,738	409,208	412,219
155	-37,542	51,316	-134,659	-60,997	147,830	131,994	-395,236	42,846	414,485	416,694
160	-48,191	44,902	-119,573	-92,353	151,085	228,307	-353,145	35,177	419,044	420,518
165	-57,262	36,049	-96,989	-119,203	153,676	310,932	-287,669	26,902	422,740	423,595
170	-64,185	25,209	-68,287	-139,767	155,557	374,292	-203,105	18,179	425,459	425,848
175	-68,523	12,967	-35,262	-152,678	156,697	414,106	-105,045	9,163	427,123	427,221

270	-0,000	10,000	-94,248	-0,000	94,248	0,000	-361,885	0,000	361,885	361,885
275	-7,738	8,751	-90,085	-29,786	94,882	99,310	-348,559	15,132	362,114	362,430
280	-14,791	5,097	-77,889	-57,377	96,741	191,679	-309,494	29,232	362,868	364,043
285	-20,520	-0,694	-58,512	-80,727	99,702	270,640	-247,377	41,465	364,310	366,662
290	-24,380	-8,191	-33,311	-98,083	103,585	330,641	-166,477	51,308	366,614	370,187
295	-25,958	-16,836	-4,052	-108,105	108,181	367,429	-72,361	58,549	369,881	374,486
300	-25,000	-25,981	27,207	-109,956	113,272	378,335	28,491	63,216	374,103	379,406
305	-21,430	-34,927	58,259	-103,362	118,650	362,462	129,127	65,484	379,163	384,776
310	-15,357	-42,981	86,898	-88,634	124,126	320,746	222,594	65,601	384,867	390,418
315	-7,071	-49,497	111,072	-66,643	129,531	255,892	302,417	63,833	390,976	396,153
320	2,981	-53,925	129,022	-38,766	134,720	172,190	363,040	60,442	397,233	401,805
325	14,222	-55,844	139,401	-6,790	139,567	75,229	400,202	55,670	403,388	407,211
330	25,981	-55,000	141,372	27,207	143,966	-28,491	411,234	49,738	409,208	412,219
335	37,542	-51,316	134,659	60,997	147,830	-131,994	395,236	42,846	414,485	416,694
340	48,191	-44,902	119,573	92,353	151,085	-228,307	353,145	35,177	419,044	420,518
345	57,262	-36,049	96,989	119,203	153,676	-310,932	287,669	26,902	422,740	423,595
350	64,185	-25,209	68,287	139,767	155,557	-374,292	203,105	18,179	425,459	425,848
355	68,523	-12,967	35,262	152,678	156,697	-414,106	105,045	9,163	427,123	427,221

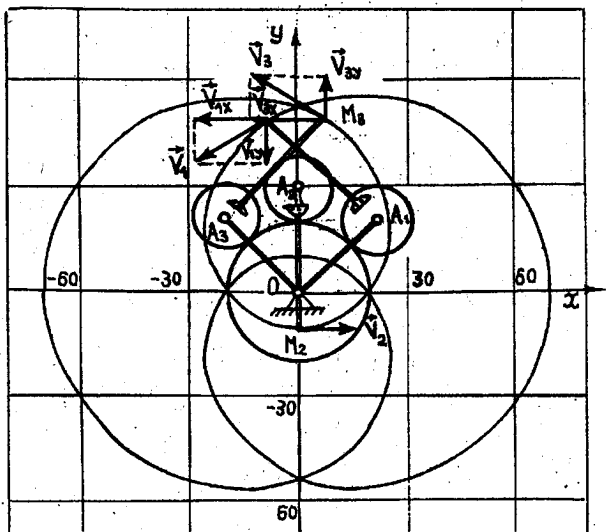


Рис. 36

```

repeat
  x:=30*cos(phi)+40*cos(s*phi);
  y:=30*sin(phi)+40*sin(3*phi);
  vx:=-30*phi*(sin(phi)+4*sin(3*phi));
  vy:=30*phi*(cos(phi)+4*cos(3*phi));
  v:=sqrt(vx*vx+vy*vy);
  ax:=-30*phi*phi*(cos(phi)+12*cos(3*phi));
  ay:=-30*phi*phi*(sin(phi)+12*sin(3*phi));
  a:=sqrt(ax*ax+ay*ay);
  at:=(-240*phi*phi*sin(2*phi))/(sqrt(17+8*cos(2*phi)));
  an:=sqrt(a*a-at*at);
  writeln(f, phi*180/pi:3:0, ' ', x:3:3, ' ', y:3:3, ' ',
    vx:3:3, ' ', vy:3:3, ' ', v:3:3, ' ',
    ax:3:3, ' ', ay:3:3, ' ', at:3:3, ' ',
    an:3:3, ' ', a:3:3);
  phi:=phi+(pi/36);
  until (phi>2*pi);
close (f);
end.

```

2.2. КІНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

Завдання К-3

ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТЕЙ І ПРИСКОРЕНЬ ТОЧОК ТВЕРДОГО ТІЛА ПРИ ПОСТУПАЛЬНОМУ Й ОБЕРТАЛЬНОМУ РУХАХ

Механізми складаються із ступінчастих коліс з поєднанням пасових передач, зображених на рис. 38, а—в.

Радіуси коліс і закон руху першого колеса $\varphi_1(t)$ наведено в табл. 14.

Таблиця 14

Вариант	$\varphi_1(t)$, рад	R, см	Час, с		
			t_1	t_2	t_3
1	$10t - 0,1t^2$	20	2	1	3
2	$0,2t^3 + t$	15	4	2	3
3	$0,75t + 1,5t^3$	30	2	3	4
4	$5t - 4t^2$	12	1	1/2	1/4
5	$t + 3t^2$	18	1/3	1/2	1
6	$2t - 0,25t^2$	10	2	1	3
7	$1,2t - t^2$	16	0,4	0,3	0,2
8	$3t - 0,5t^2$	20	1	1/2	2
9	$0,4t^2 + t$	24	1/2	1/4	1/8
10	$8t^2 - 2t$	40	1/4	1/2	1/16
11	$2t^2 + 3t$	14	1/2	1/4	1/8
12	$3t^2 - 4t$	30	1	2	3
13	$0,5\pi t^2$	20	1/2	1	2
14	$2\pi t - 1,6\pi/t$	18	2	4	1
15	$\sin 2t$	16	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
16	$5t^2 + 3t$	12	0,1	0,05	0,25
17	$\cos 2t + 1$	40	$\pi/6$	$\pi/2$	$5\pi/6$
18	$3t - 2t^2$	14	1/4	1/2	1
19	$4 \cos t$	30	π	$5\pi/6$	$5\pi/3$
20	$3,2\pi t - 0,2\pi t^2$	10	2	3	4
21	$0,3\pi t^3 + \pi/t^2$	24	1	2	3
22	$2 \sin \pi t$	18	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/4$
23	$6(t - 0,5t^2)$	20	1/2	1/3	1/4
24	$8 \cos (\pi t/2)$	12	1/3	1/2	1
25	$4t + 1,5t^2$	10	1	1/3	1/2
26	$3 \sin 2t + 1$	16	$\pi/6$	$\pi/2$	π
27	$4\pi \cos (\pi t/6)$	14	1	2	3
28	$6t + t^2$	40	1/4	1/2	1/3
29	$2t - 0,3t^2$	30	2	1	3
30	$t + 4t^2$	28	1/8	1/4	1/2

Додатний напрямок $\varphi_1(t)$ прийняти таким, як показано на схемах механізмів.

Визначити для моментів часу $t_i (i = 1, 2, 3)$ швидкість, доцентрове і повне прискорення точок A, B та C .

Приклад 14. Для механізму, схему якого зображено на рис. 37,а, визначити швидкість і прискорення точок A, B та C в моменти часу $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с і $t_3 = 4$ с, якщо $\varphi_1 = 0,2\pi t^3 - 1,6\pi/t$, $R_1 = R = 10$ см, $R_4 = 10$ см, $R_2 = 2R$, $r_2 = R$, $R_3 = 2R$, $R = r_3$, $r_4 = 2R$.

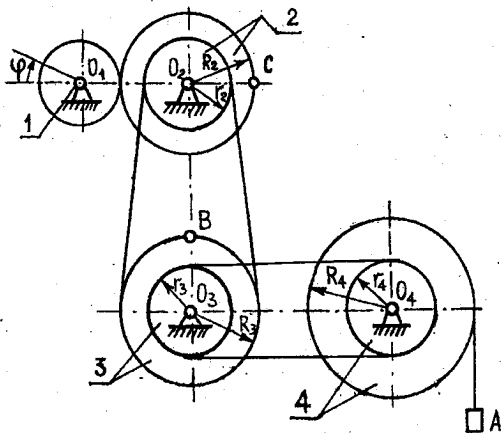


Рис. 37,а

Розв'язання. Кутова швидкість першого зубчастого колеса

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = 0,6\pi t^2 + 1,6\pi/t^2.$$

Оскільки зубчасте колесо 1 і колесо 2 радіусом R_2 зачеплені між собою, швидкість точки їхнього контакту K (рис. 37,б)

$$v_K = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2,$$

звідки кутова швидкість колеса 2

$$\omega_2 = \frac{R_1}{R_2} \omega_1 = \frac{R_1}{R_2} (0,6\pi t^2 + 1,6\pi/t^2).$$

Швидкість точки M_2 на колесі 2 $v_2 = \omega_2 r_2$, а швидкість точки M_3 на ободі колеса 3 $v_3 = \omega_3 R_3$. Через те що $v_2 = v_3$ (див. рис. 37,б), $\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3$, а кутова швидкість колеса 3

$$\omega_3 = \frac{r_2}{R_3} \omega_2 = \frac{r_2 R_1}{R_2 R_3} (0,6\pi t^2 + 1,6\pi/t^2).$$

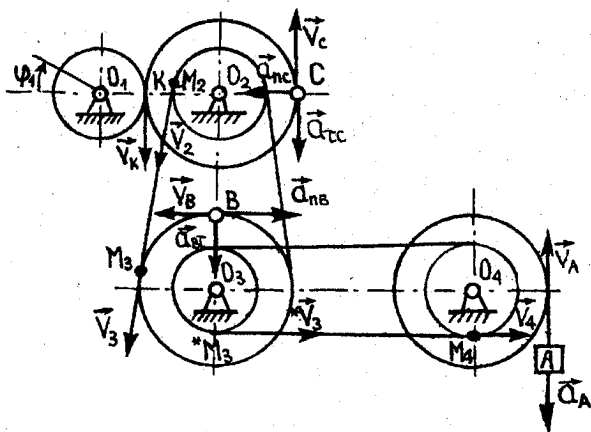


Рис. 37.6

Аналогічно визначається кутова швидкість колеса 4

$$v_{M_3} = v_{M_4}; \omega_3 r_3 = \omega_4 R_4.$$

Отже,

$$\omega_4 = \frac{r_3}{R_4} \omega_3 = \frac{r_3 r_2 R_1}{R_4 R_2 R_3} (0,6\pi t^2 + 1,6\pi/t^2).$$

Лінійні швидкості точок A, B і C для будь-якого моменту часу визначаються виразами

$$v_A = \omega_4 r_4 = r_4 \frac{r_3 r_2 R_1}{R_4 R_2 R_3} (0,6\pi t^2 + 1,6\pi/t^2);$$

$$v_B = \omega_3 R_3 = r_2 \frac{R_1}{R_2} (0,6\pi t^2 + 1,6\pi/t^2);$$

$$v_C = \omega_2 R_2 = R_2 \frac{R_1}{R_2} (0,6\pi t^2 + 1,6\pi/t^2).$$

Значення модулів швидкостей точок A, B та C для відповідних моментів часу t_i наведено в табл. 15, а напрямок цих швидкостей показано на рис. 37, в.

Таблиця 15

t_i, c	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	v_A	v_B	v_C
	c^{-1}				c^{-2}				см/с		
1	2,2π	1,1π	0,55π	0,55π	-2π	-π	-0,5π	-0,5π	11π	11π	22π
2	2,8π	1,4π	0,70π	0,70π	2π	π	0,5π	0,5π	14π	14π	28π
4	9,7π	4,85π	2,43π	2,43π	4,75π	2,375	1,19π	1,19π	48,5π	48,5π	97π

t, c	a_A^n	a_A^{τ}	a_A	a_B^n	a_B^{τ}	a_B	a_C^n	a_C^{τ}	a_C
	см/с ²								
1	—	-10π	10π	6,05π ²	-10π	67,5	24,2π ²	-20π	247
2	—	10π	10π	9,8π ²	10π	101,7	39,2π ²	20π	392
4	—	23,8π	23,8π	118,1π ²	23,8π	1168	470,5π ²	47,5π	4646

Модулі прискорень точок A, B і C для моментів часу t_i визначаються виразами

$$a_A = \varepsilon_4 r_4; \quad a_B = \sqrt{a_{nB}^2 + a_{B\tau}^2} = R_3 \sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2};$$

$$a_C = \sqrt{a_{nC}^2 + a_{C\tau}^2} = R_2 \sqrt{\omega_2^4 + \varepsilon_2^2},$$

причому кутові прискорення коліс 2 та 3 відповідно становлять

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{R_1}{R_2} (1,2\pi t - 3,2\pi/t^3) = \frac{R_1}{R_2} \varepsilon_1;$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{r_2 R_1}{R_2 R_3} (1,2\pi t - 3,2\pi/t^3) = \frac{r_2 R_1}{R_2 R_3} \varepsilon_1.$$

Числові значення прискорень точок A, B і C для моментів часу t_i наведено в табл. 15, а їхні напрямки для $t_1 = 1$ с показано на рис. 37,в.

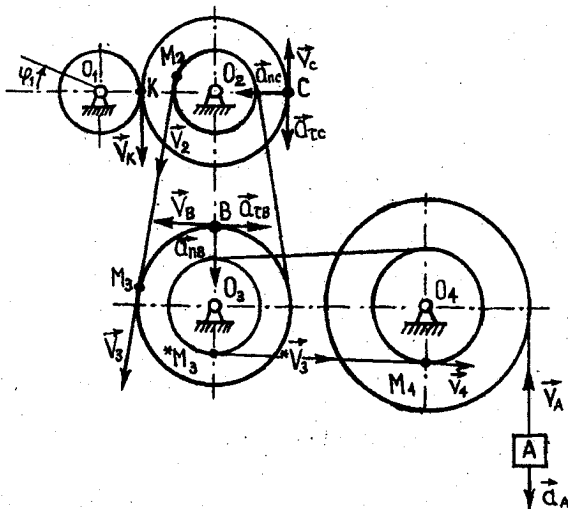


Рис. 37,в

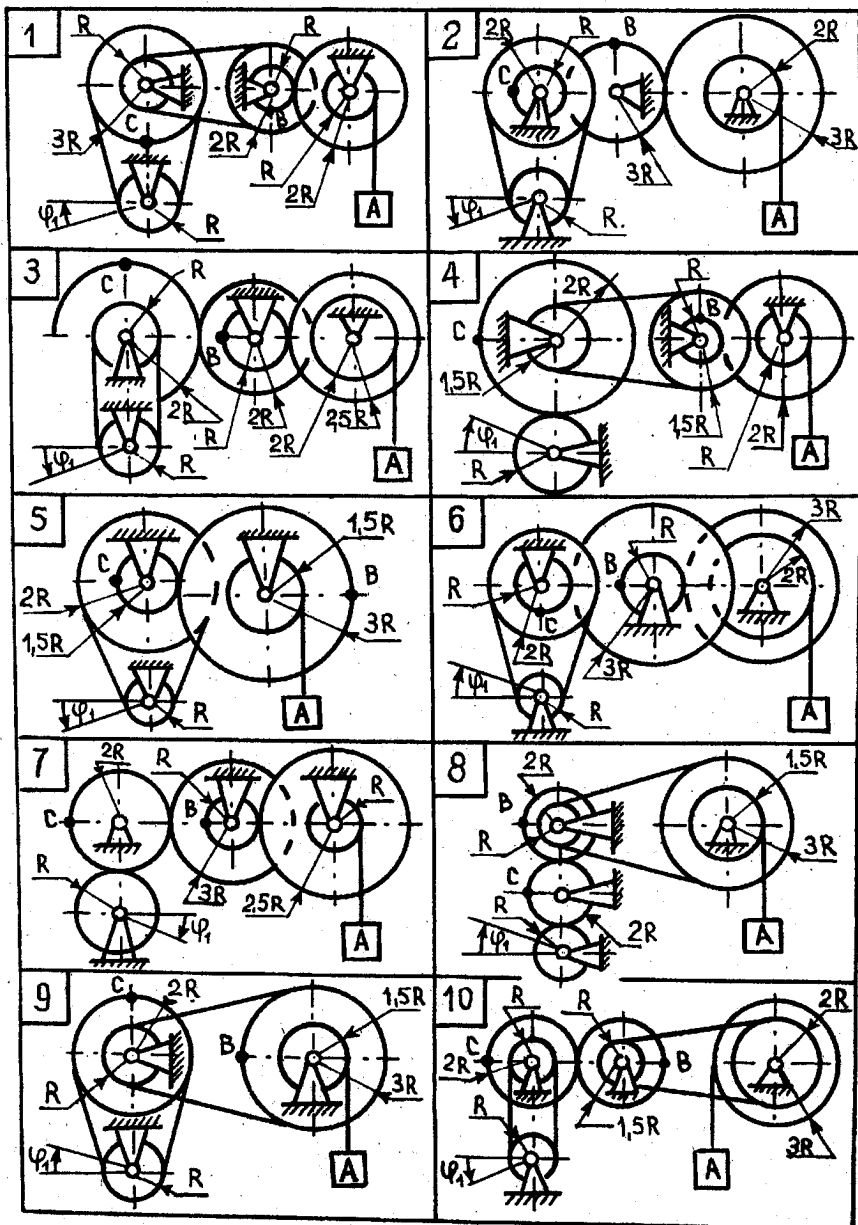


Рис. 38,а

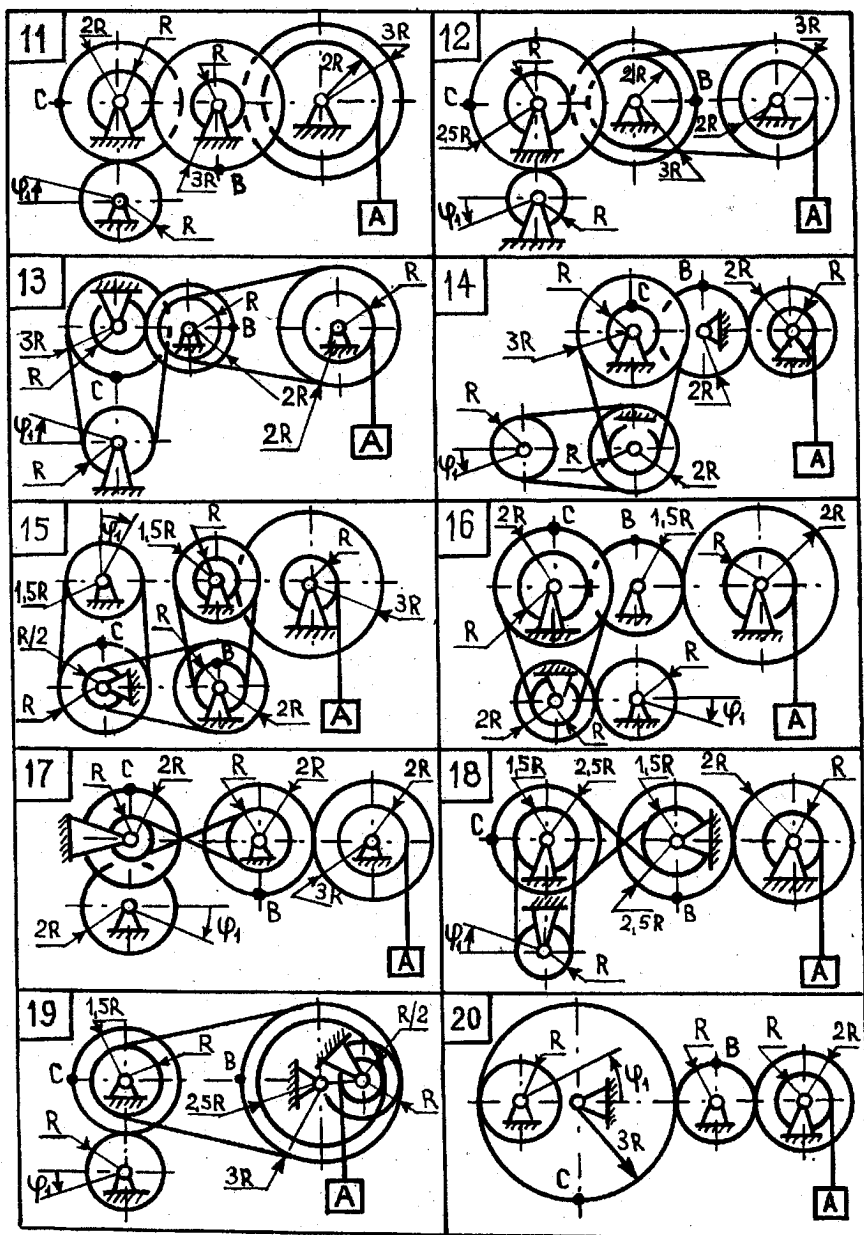


Рис. 38,6

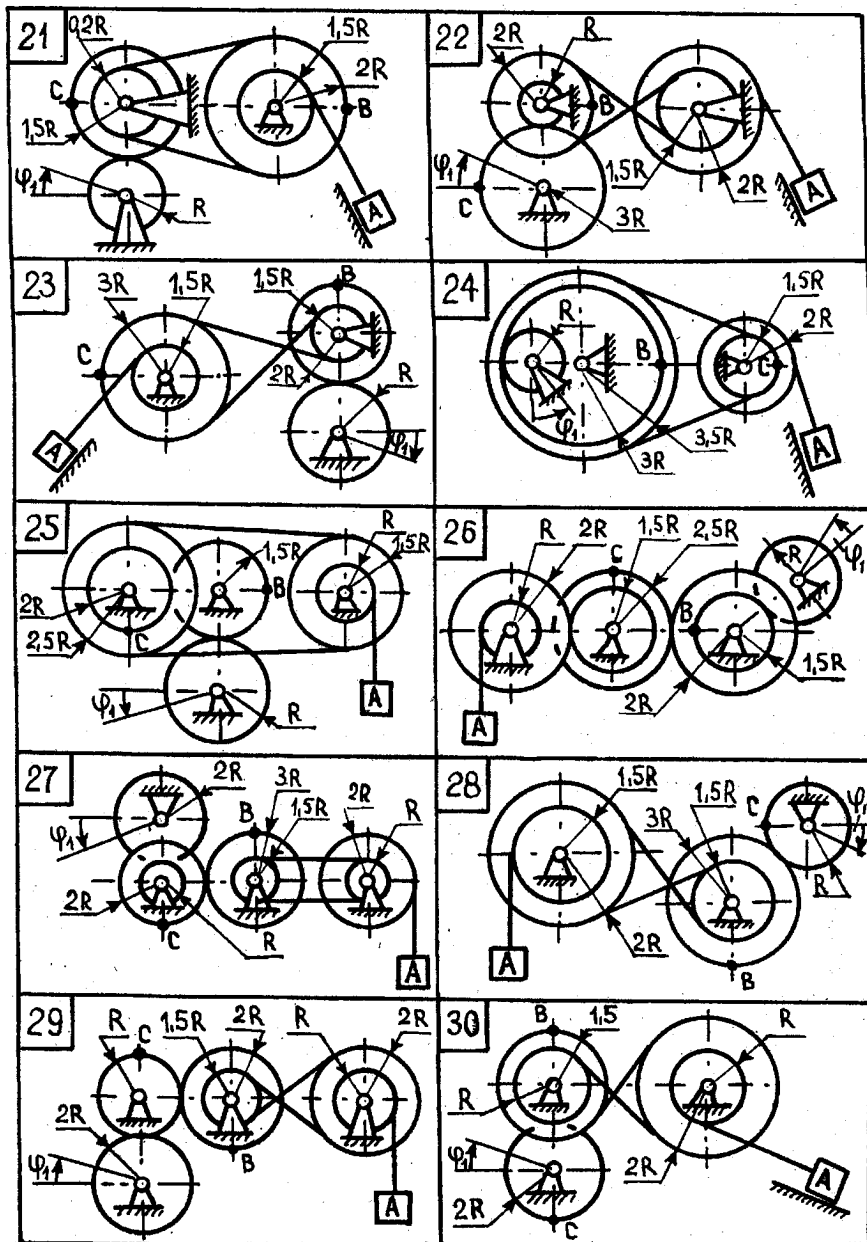


Рис. 38,6

Завдання К-4

ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТЕЙ І ПРИСКОРЕНЬ ТОЧОК ТВЕРДОГО ТІЛА, ЩО ВИКОНУЄ ПЛОСКИЙ РУХ

Для заданого положення механізму визначити швидкості та прискорення точок A, B, C, \dots .

Плоский рух дуже часто виконується різними механізмами машин, ланки яких мають вигляд стержнів, а буває і так, що до складу механізму входять також диски, круги й інші тіла.

Тому пропонується два варіанти завдання К-4:

В а р і а н т 1. Схеми механізмів показано на рис. 40, $a-v$, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 16.

Таблиця 16

Варіант	ω, c^{-1}	ϵ, c^{-2}	OA	AB	BC	CD	Варіант	ω, c^{-1}	ϵ, c^{-2}	OA	AB	BC	CD
1	5	2	a	$3a$	$3a$	—	16	4	2	a	$2a$	$2a$	a
2	4	3	$1,5a$	$1,5a$	$3a$	—	17	6	4	a	$2a$	$2a$	$3a$
3	3	2	$1,5a$	$3a$	$2a$	$2a$	18	4	2	a	$2a$	$1,5a$	$2a$
4	6	4	a	$3a$	$2a$	—	19	4	4	a	$2a$	$2a$	$2a$
5	5	3	a	$2a$	—	$3a$	20	2	3	a	$2a$	$2a$	$2a$
6	4	2	a	$3a$	a	$3a$	21	5	4	a	$3a$	$3a$	$2a$
7	5	4	a	$2a$	—	$3a$	22	3	2	$1,5a$	$2a$	$1,5a$	$4a$
8	3	3	$2a$	$2a$	$2a$	$2a$	23	2	3	a	$3a$	$3a$	$3a$
9	2	2	a	—	a	$1,5a$	24	4	3	$2a$	$4a$	$2a$	$2a$
10	6	3	$2a$	$3a$	a	$2a$	25	4	6	$1,2a$	$3a$	$1,5a$	$3a$
11	5	3	$2a$	$4,5a$	$3a$	$3a$	26	8	4	$2a$	$4a$	—	$3a$
12	4	3	a	$3a$	$2a$	$2a$	27	3	5	a	$2a\sqrt{3}$	—	$3a$
13	3	2	a	$2a\sqrt{3}$	—	$4a$	28	5	2	$2a$	$3a$	$1,5a$	$2a$
14	2	2	$2a$	$2a$	$4a$	$3a$	29	6	4	a	—	$4a$	—
15	5	2	a	$2a$	—	$2a$	30	2	2	$3a$	$2a$	—	$1,5a$

В а р і а н т 2. Схеми механізмів зображено на рис. 41, $a-v$, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 17.

Таблиця 17

Варіант	ω, c^{-1}	ϵ, c^{-2}	OA	AB	BC	R	r	$v_0, m/c$	$a_0, m/c^2$
			м						
1	—	—	0,50	0,60	0,8	—	0,30	0,6	0,9
2	—	—	—	0,40	—	—	—	1,2	1,6
3	—	—	—	0,25	—	—	—	$\sqrt{2}/4$	$2\sqrt{2}$
4	5	2	0,40	0,50	0,6	0,2	—	—	—
5	4	4	0,25	0,60	—	0,4	0,20	—	—
6	6	3	—	—	—	0,6	0,30	—	—

Варіант	$\omega, \text{с}^{-1}$	$\epsilon, \text{с}^{-2}$	OA	AB	BC	R	r	$v_{\text{оп}}, \text{м/с}$	$a_{\text{оп}}, \text{м/с}^2$
			м						
7	—	—	—	$2\sqrt{2}$	—	—	—	2,0	4,0
8	—	—	—	$1,5\sqrt{3}$	—	—	—	4,5	3,0
9	4	2	0,30	—	0,6	0,3	—	—	—
10	8	—	0,15	0,60	—	—	—	—	—
11	—	—	—	0,40	0,2	—	—	$1,2\sqrt{3}$	0,6
12	5	4	0,40	0,80	—	0,9	0,15	—	—
13	—	—	—	1,00	—	0,4	0,20	0,6	0,4
14	—	—	—	2,00	1,0	—	—	1,6	1,2
15	—	—	—	$0,4\sqrt{3}$	$0,2\sqrt{3}$	—	—	2,0	4,0
16	6	2	—	—	—	—	0,40	—	—
17	—	—	—	—	—	4,0	3,00	6,0	3,0
18	—	—	—	2,00	1,0	—	—	4,0	2,0
19	—	—	—	1,00	—	—	—	1,2	0,8
20	10	4	0,40	0,80	—	0,3	0,15	—	—
21	—	—	—	$2\sqrt{3}$	—	—	—	2,0	4,0
22	—	—	—	0,40	0,2	0,1	—	0,8	1,2
23	—	—	—	$0,6\sqrt{3}$	—	—	—	0,6	0,9
24	—	—	—	0,80	—	0,2	—	0,4	0,4
25	5	5	0,24	0,60	0,3	—	—	—	—
26	—	—	—	—	$2\sqrt{3}$	—	—	10,0	5,0
27	10	4	0,18	0,54	$0,6\sqrt{3}$	—	—	—	—
28	4	—	—	—	—	0,6	—	—	—
29	—	—	—	$2\sqrt{3}$	—	0,5	—	2,0	1,0
30	5	4	$0,4\sqrt{3}$	—	1,6	—	—	—	—

Приклад 15. Для заданого положення механізму (рис. 39,а) визначити швидкості та прискорення точок A, B, C, D і M , а також кутові швидкості та кутові прискорення всіх ланок механізму, якщо кривошип OA обертається з кутовим сповільненням $\epsilon_{OA} = 3 \text{ с}^{-2}$, маючи в даний момент кутову швидкість $\omega_{OA} = 2 \text{ с}^{-1}$. Лінійні розміри ланок механізму такі: $OA = 20 \text{ см}$, $AB = 50 \text{ см}$, $BC = 40 \text{ см}$, $CM = MD = 30 \text{ см}$.

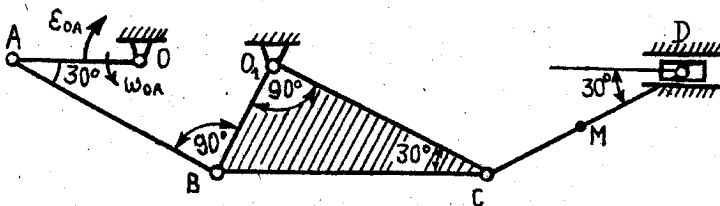


Рис. 39,а

Розв'язання. Оскільки кривошип OA обертається в площині рис. 39,а навколо точки O , швидкість точки A

$$v_A = \omega_{OA} OA = 2 \cdot 20 = 40 \text{ см/с},$$

а прискорення цієї точки

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^t,$$

причому доцентрове (нормальне) й обертальне прискорення точки A відповідно становлять

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 OA = 2^2 \cdot 20 = 80 \text{ см/с}^2; \quad a_A^t = \varepsilon_{OA} OA = 3 \cdot 20 = 60 \text{ см/с}^2.$$

Отже,

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^t)^2} = 100 \text{ см/с}^2.$$

Швидкість точки B

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}, \quad \text{або} \quad \text{пр}_{AB} \vec{v}_B = \text{пр}_{AB} \vec{v}_A.$$

Тому

$$v_B = v_A \cos 60^\circ = 20 \text{ см/с}.$$

Точка B належить ланці механізму (трикутнику O_1BC), який обертається навколо точки O_1 .

Отже,

$$v_B = \omega_{O_1} O_1B; \quad O_1B = BC \sin 30^\circ = 40 \cdot 0,5 = 20 \text{ см}.$$

Кутова швидкість ланки (трикутника O_1BC) $\omega_{O_1} = 1 \text{ с}^{-1}$.

Швидкість точки C

$$v_C = \omega_{O_1} O_1C = \omega_{O_1} BC \cos 30^\circ = 1 \cdot 40 \cdot \sqrt{3}/2 = 20\sqrt{3} \text{ см/с}.$$

Аналогічно визначаються швидкості точок D та M :

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_{CD} \rightarrow \text{пр}_{CD} \vec{v}_D = \text{пр}_{CD} \vec{v}_C;$$

$$v_D \cos 30^\circ = v_C \cos 30^\circ;$$

$$v_D = v_C = 20\sqrt{3} \text{ см/с};$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{v}_{CM}; \quad \text{пр}_{CM} \vec{v}_M = \text{пр}_{CM} \vec{v}_C \quad (\text{див. рис. 39,б});$$

$$v_M = v_C \cos 30^\circ = 30 \text{ см/с}.$$

Кутові швидкості ланок AB і CD відповідно становлять

$$\omega_{AB} = v_{AB}/AB = v_A \cos 30^\circ / AB = (40\sqrt{3}/2) : 50 = 0,4\sqrt{3} \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{CD} = v_{CD}/CD = v_C / CD = 20\sqrt{3}/60 = \sqrt{3}/3 \text{ с}^{-1}.$$

Швидкості точок B , C , D та M можна підрахувати, якщо використати властивість миттєвих центрів швидкостей, а саме: P_1 — миттєвого цент-

ра швидкостей ланки AB ; O_1 — миттєвого центра швидкостей ланки O_1BC ; P_2 — миттєвого центра швидкостей ланки CD .

Тому з урахуванням властивості миттєвого центра швидкостей маємо

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{BP_1}{AP_1} = \sin 30^\circ \rightarrow v_B = v_A \sin 30^\circ = 20 \text{ см/с};$$

$$\frac{v_C}{v_B} = \frac{CO_1}{BO_1} = \text{ctg} 30^\circ \rightarrow v_C = v_B \text{ctg} 30^\circ = 20\sqrt{3} \text{ см/с};$$

$$\frac{v_D}{v_C} = \frac{DP_2}{CP_2} = 1 \rightarrow v_D = v_C = 20\sqrt{3} \text{ см/с}.$$

Аналогічно можна обчислити кутові швидкості ланок механізму, якщо використати властивість миттєвого центра швидкостей:

$$\omega_{AB} = v_A / AP_1 = v_A / (AB / \cos 30^\circ) = v_A \cos 30^\circ / AB = 40\sqrt{3} / (2 \cdot 50) = 0,4\sqrt{3} \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{CD} = v_C / CP_2 = v_C / CD = 20\sqrt{3} / 60 = \sqrt{3} / 3 \text{ с}^{-1}.$$

Вектори швидкостей точок A, B, C, D й M показано на рис. 39, б, а числові значення модулів цих швидкостей та кутових швидкостей ланок механізму наведено в табл. 18.

Таблиця 18

Величина	A	B	C	D	M	OA	AB	O_1BC	CD
Швидкість, см/с	40	20	$20\sqrt{3}$	$20\sqrt{3}$	30	—	—	—	—
Прискорення точки, см/с ²	100	25,1	43,6	19,2	52	—	—	—	—
Кутова швидкість ланки, с ⁻¹	—	—	—	—	—	2	$0,4\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$
Кутове прискорення ланки, с ⁻²	—	—	—	—	—	-3	1,44	0,76	-0,53

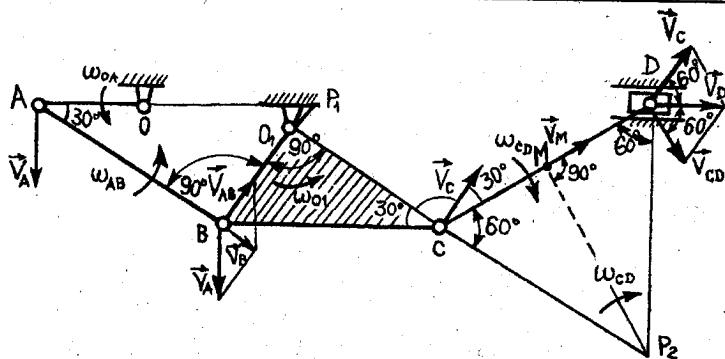


Рис. 39,б

Прискорення точки B

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^{\tau} = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_{AB}^{\text{доп}} + \vec{a}_{AB}^{\text{об}}, \quad (1)$$

причому модулі відповідних складових цього прискорення

$$a_B^n = v_B^2 / BO_1 = 2O^2 / 20 = 20 \text{ см/с}^2; \quad a_B^{\tau} = \varepsilon_{O_1} BO_1;$$

$$a_{AB}^{\text{доп}} = \omega_{AB}^2 AB = (0,4\sqrt{3})^2 \cdot 50 = 24 \text{ см/с}^2; \quad a_{AB}^{\text{об}} = \varepsilon_{AB} AB.$$

Спроекувавши рівняння (1) на осі декартової системи координат x та y , дістанемо

$$\begin{aligned} a_B^n &= a_A^n \cos 60^\circ + a_A^{\tau} \cos 30^\circ - a_{AB}^{\text{об}}; \\ -a_B^{\tau} &= -a_A^n \cos 30^\circ + a_A^{\tau} \cos 60^\circ + a_{AB}^{\text{доп}}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} a_B^{\tau} &= a_A^n \cos 30^\circ - a_A^{\tau} \cos 60^\circ - a_{AB}^{\text{доп}} = 2^2 \cdot 20\sqrt{3}/2 - 3 \cdot 20 \cdot 0,5 - \\ &\quad - 24 = 15,2 \text{ см/с}^2; \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{O_1} = a_B^{\tau} / BO_1 = 15,2 / 20 = 0,76 \text{ с}^{-2};$$

$$\begin{aligned} a_{AB}^{\text{об}} &= a_A^n \cos 60^\circ + a_A^{\tau} \cos 30^\circ - a_B^n = 2^2 \cdot 20 \cdot 0,5 + 3 \cdot 20 \cdot \sqrt{3}/2 - \\ &\quad - 20 = 71,9 \text{ см/с}^2; \quad \varepsilon_{AB} = a_{AB}^{\text{об}} / AB = 71,9 / 50 = 1,44 \text{ с}^{-2}; \end{aligned}$$

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^{\tau})^2} = 25,1 \text{ см/с}^2.$$

Прискорення точки C

$$a_C = \sqrt{(a_C^n)^2 + (a_C^{\tau})^2},$$

де

$$a_C^n = \omega_{O_1}^2 O_1C = 1^2 \cdot 40 \cos 30^\circ = 34,6 \text{ см/с}^2; \quad (2)$$

$$a_C^{\tau} = \varepsilon_{O_1} O_1C = 0,76 \cdot 20\sqrt{3} = 26,3 \text{ см/с}^2; \quad a_C = 43,6 \text{ см/с}^2.$$

Аналогічно визначаємо прискорення точок C та D і кутове прискорення ланки CD , тобто

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{CB}^{\text{доп}} + \vec{a}_{CD}^{\text{об}} = \vec{a}_C^n + \vec{a}_C^{\tau} + \vec{a}_{CB}^{\text{доп}} + \vec{a}_{CD}^{\text{об}},$$

де

$$a_{CD}^{\text{доп}} = \omega_{CD}^2 CD = (\sqrt{3}/3)^2 \cdot 60 = 20 \text{ см/с}^2; \quad a_{CD}^{\text{об}} = \varepsilon_{CD} CD.$$

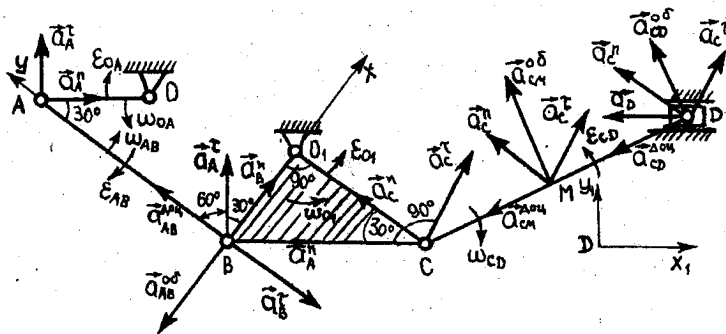


Рис. 39,в

Після проєктування рівняння (2) на осі декартової системи координат x_1 та y_1 дістанемо

$$-a_D = -a_C^n \cos 30^\circ + a_C^\tau \cos 60^\circ - a_{CD}^{\text{доп}} \cos 30^\circ - a_{CD}^{\text{об}} \cos 60^\circ;$$

$$0 = a_C^n \cos 60^\circ + a_C^\tau \cos 30^\circ - a_{CD}^{\text{доп}} \cos 60^\circ + a_{CD}^{\text{об}} \cos 30^\circ.$$

Звідси

$$\begin{aligned} a_{CD}^{\text{об}} &= (a_{CD}^{\text{доп}} - a_C^n) \cos 60^\circ / \cos 30^\circ - a_C^\tau = (20 - 34,6) / \sqrt{3} - 23,6 = \\ &= -32 \text{ см/с}^2; \end{aligned}$$

$$\epsilon_{CD} = a_{CD}^{\text{об}} / CD = -32 / 60 = -0,53 \text{ с}^{-2};$$

$$a_D = (a_C^n + a_{CD}^{\text{доп}} \cos 30^\circ + (a_{CD}^{\text{об}} - a_C^\tau) \cos 60^\circ =$$

$$= (34,6 + 20) \sqrt{3} / 2 + (-32 - 23,6) \cdot 0,5 = 19,2 \text{ см/с}^2.$$

Аналогічно знаходимо

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C^n + \vec{a}_C^\tau + \vec{a}_{CM}^{\text{доп}} + \vec{a}_{CM}^{\text{об}}, \quad (3)$$

де

$$a_{CM}^{\text{доп}} = \omega_{CD}^2 CM = (\sqrt{3}/3)^2 \cdot 30 = 10 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{CM}^{\text{об}} = \epsilon_{CD} CM = -0,53 \cdot 30 = -15,9 \text{ см/с}^2.$$

Спроєктувавши рівняння (3) на осі декартової системи координат x_1 та y_1 , матимемо

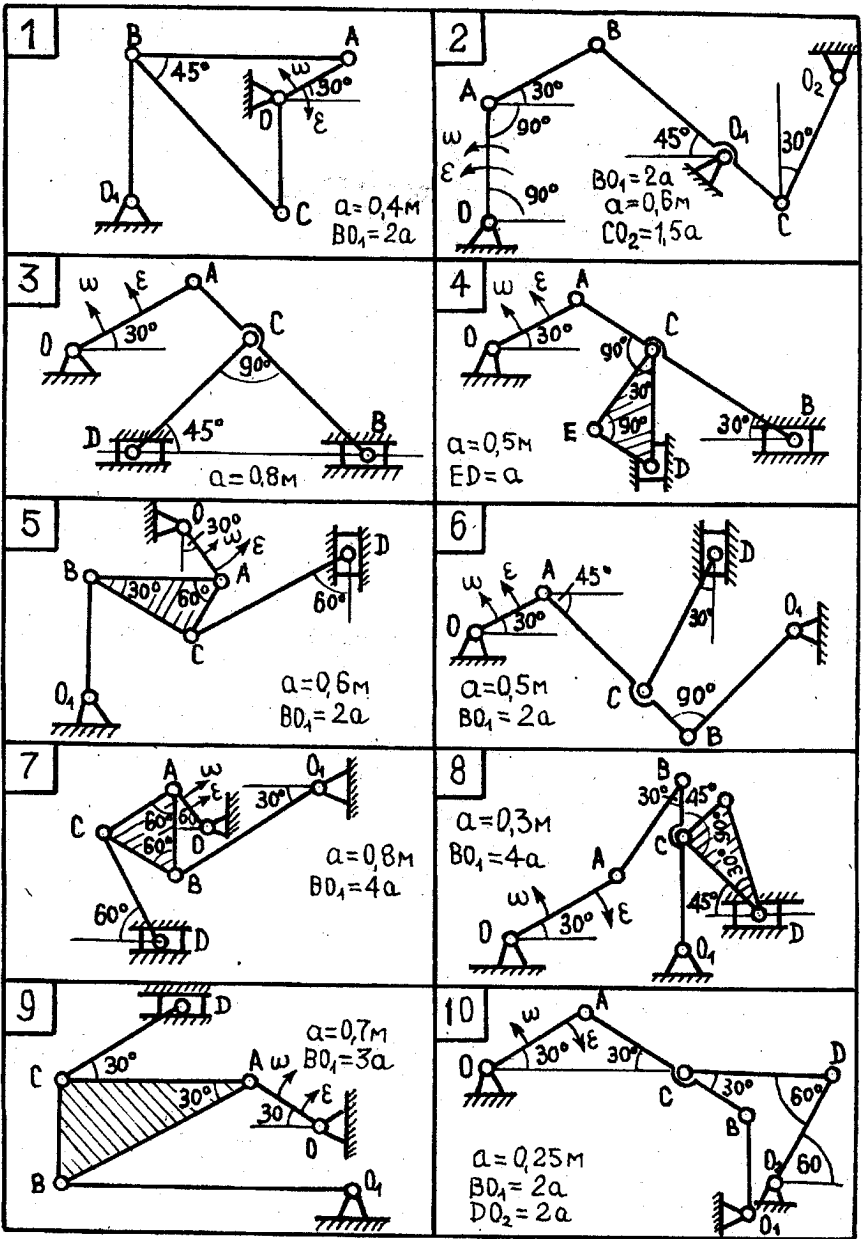


Рис. 40,а

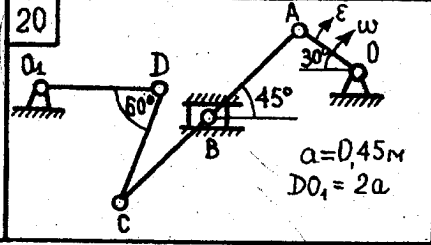
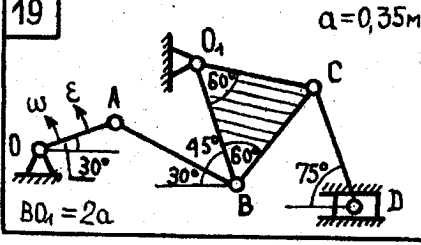
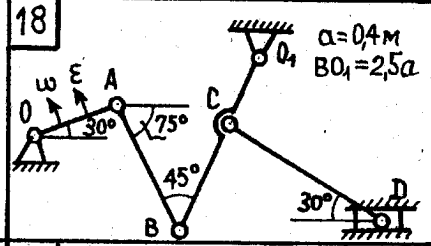
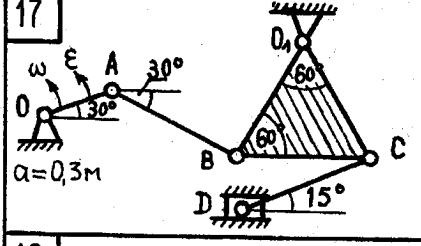
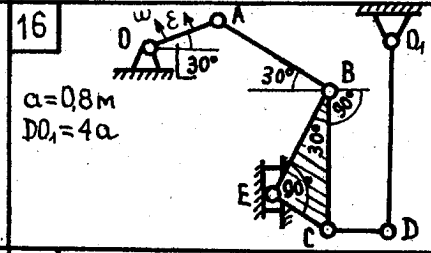
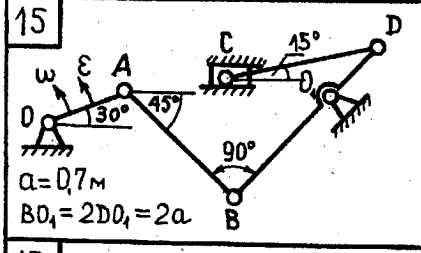
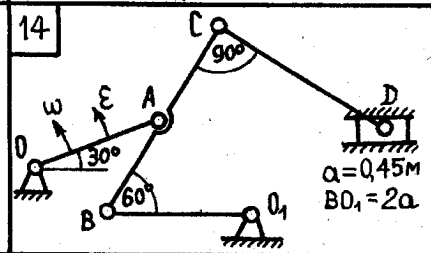
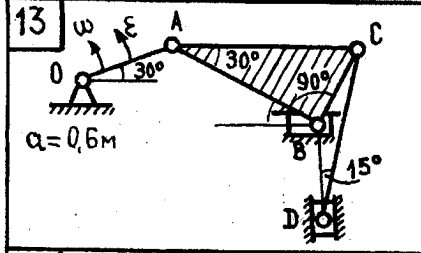
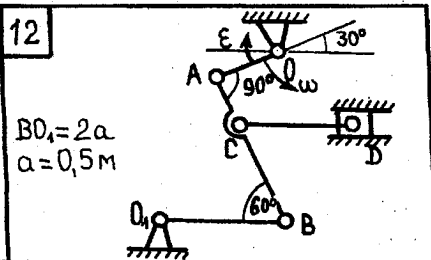
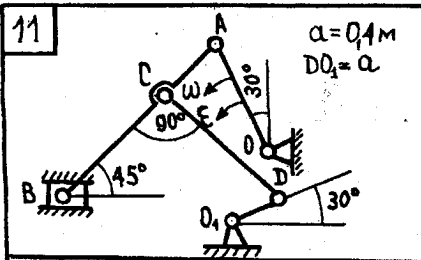


Рис. 40,6

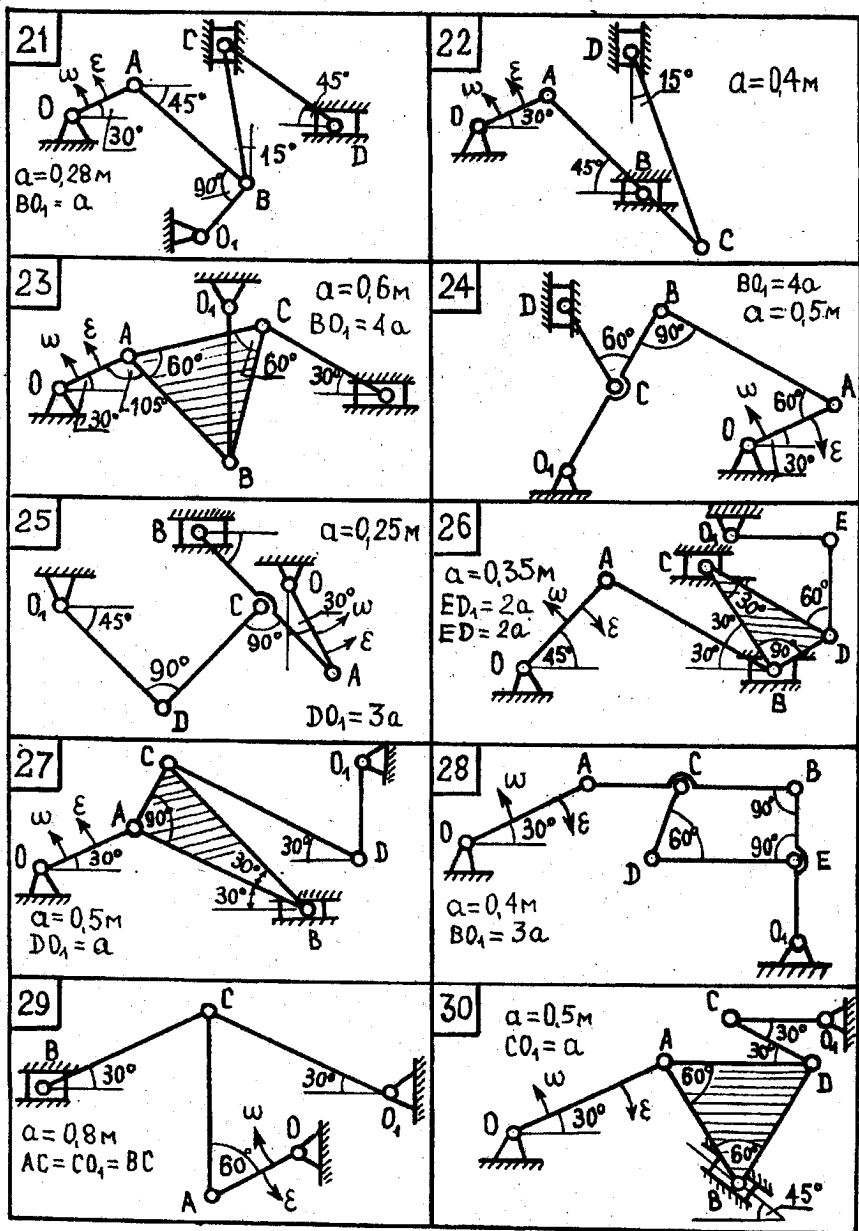


Рис. 40,а

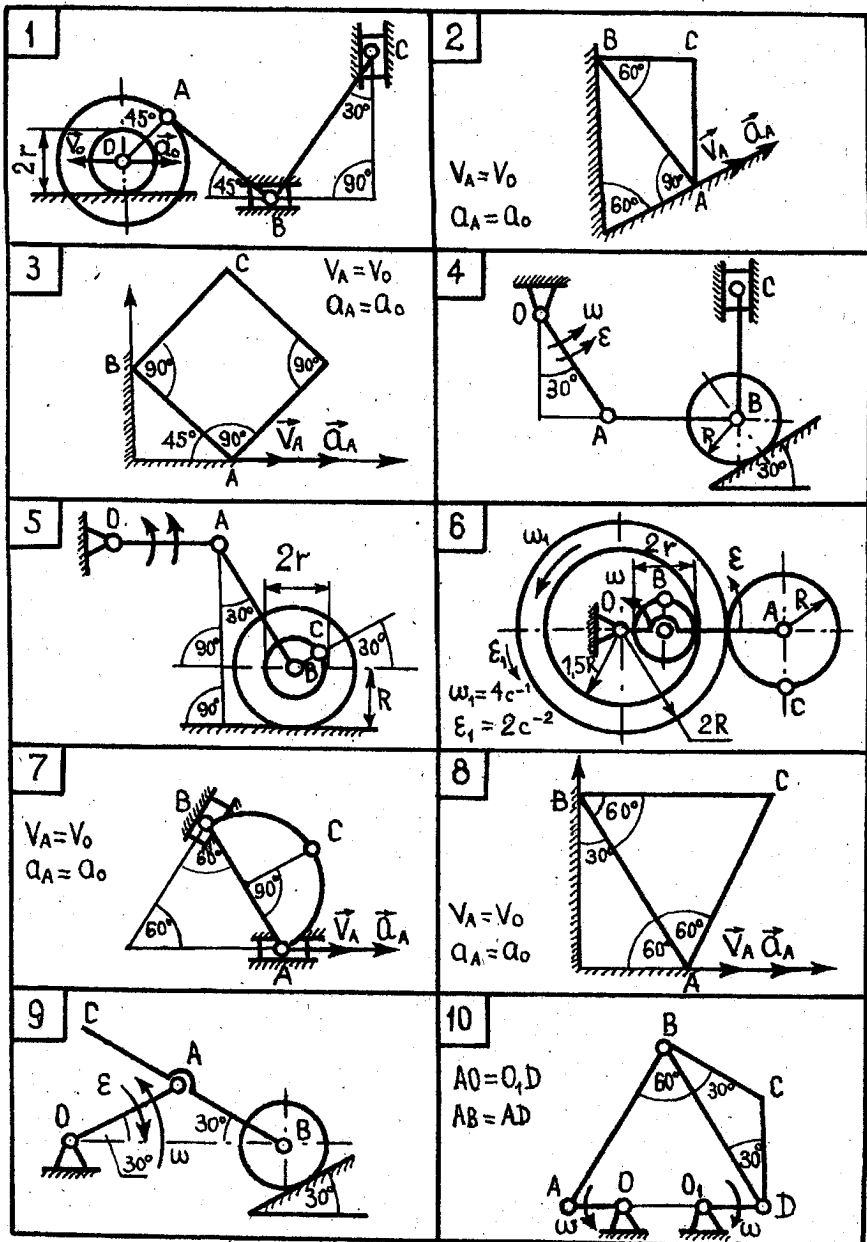


Рис. 41,а

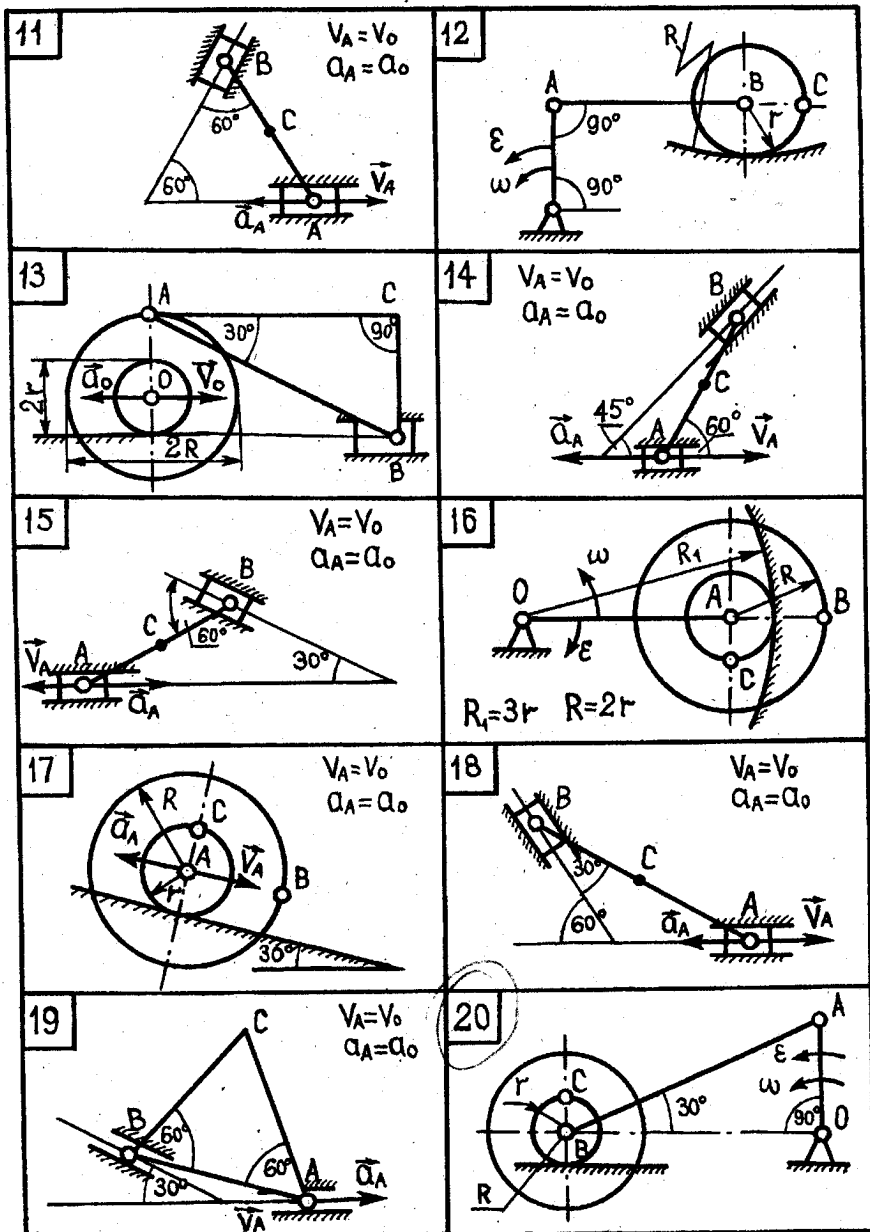


Рис. 41,6

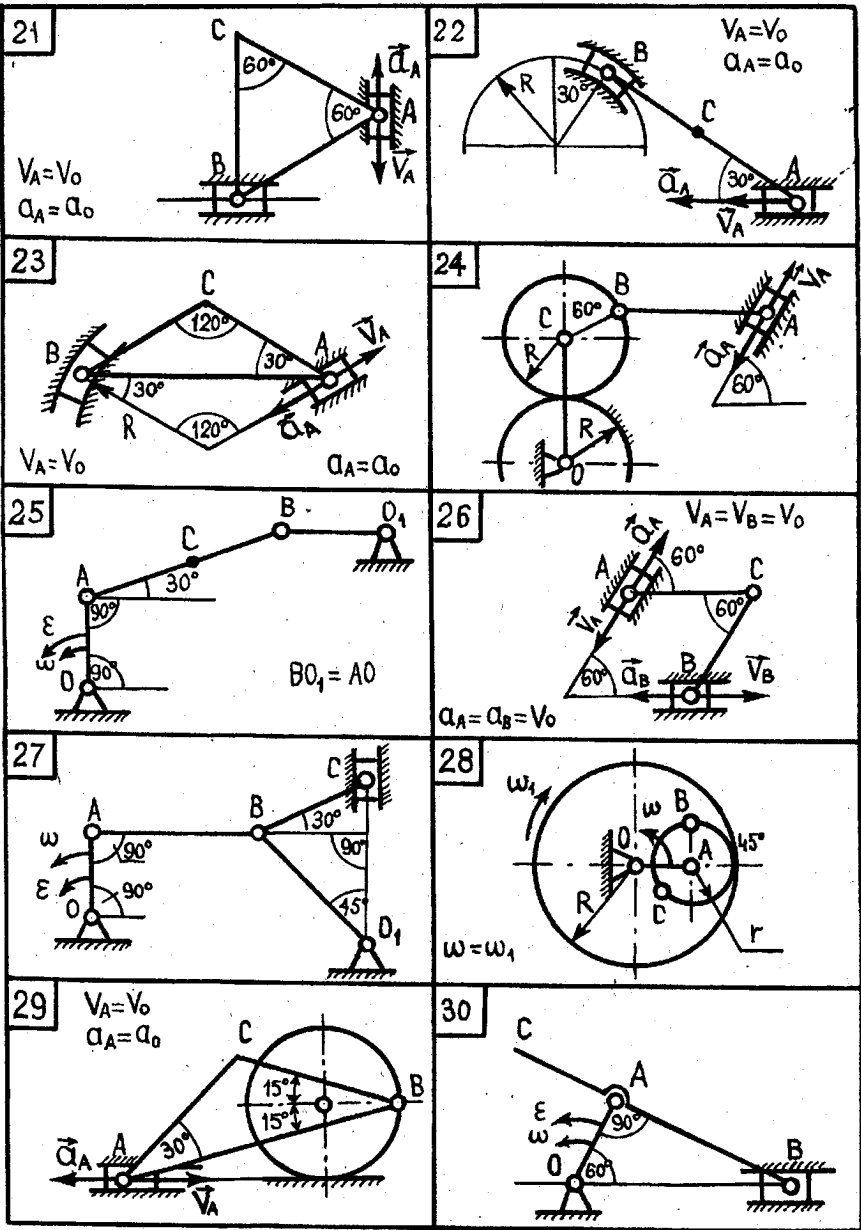


Рис. 41,е

$$a_{Mx_1} = -a_C^n \cos 30^\circ + a_C^r \cos 60^\circ - a_{CM}^{\text{доп}} \cos 30^\circ - a_{CM}^{\text{об}} \cos 60^\circ =$$

$$= -20\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} + 26,3 \cdot 0,5 - 10 \frac{\sqrt{3}}{2} + 15,9 \cdot 0,5 = -17,56 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{My_1} = -a_C^n \cos 60^\circ + a_C^r \cos 30^\circ - a_{CM}^{\text{доп}} \cos 60^\circ - a_{CM}^{\text{об}} \cos 30^\circ =$$

$$= 34,6 \cdot 0,5 + 26,3 \cdot 0,87 - 10 \cdot 0,5 + 15,9 \cdot 0,87 = 48,81 \text{ см/с}^2;$$

$$a_M = \sqrt{a_{Mx_1}^2 + a_{My_1}^2} = \sqrt{(-17,56)^2 + 48,81^2} = 52 \text{ см/с}^2.$$

Вектори прискорень точок A , B , C , D та M показано на рис. 39, в, модулі цих прискорень і числові значення кутових прискорень відповідних ланок механізму наведено в табл. 18.

Знак "мінус" біля числового значення прискорення вказує на те, що напрямок цього вектора в розрахунковій моделі вибрано протилежно дійсному напрямку. Це саме стосується також знака "мінус" біля числового значення кутового прискорення.

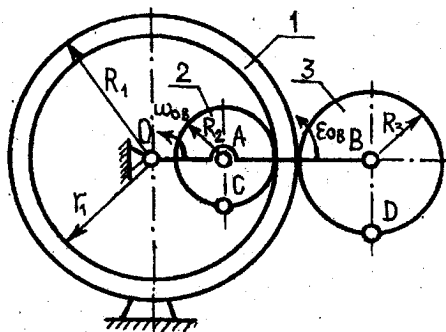


Рис. 42,а

Приклад 16. В планетарному механізмі (рис. 42, а) шестірна 1, зовнішній радіус якої R_1 , нерухома (внутрішній радіус шестірни 1 дорівнює r_1).

Водило OB , що обертається з кутовим прискоренням ε_{OB} навколо осі, яка проходить через точку O , переносить осі шестерень 2 і 3 радіусами R_2 та R_3 .

Визначити швидкості і прискорення точок A , B , C та D , якщо $R_1 = 30$ см, $r_1 = 25$ см, $R_2 = 10$ см, $R_3 = 15$ см, $\omega_{OB} = 2 \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon_{OB} = 4 \text{ с}^{-2}$.

Розв'язання Розглядуваний механізм складається з чотирьох ланок: водила OB , нерухокої шестірни 1 і рухомих шестерень 2 (радіусом R_2) та 3 (радіусом R_3).

Миттєвими центрами швидкостей для відповідних ланок механізму є (рис. 42, б) O — для водила OB ; P_1 — для шестірни 2; P_2 — для шестірни 3.

Швидкості точок A і B водила OB

$$v_A = \omega_{OB} OA = \omega_{OB}(r_1 - R_2) = 2(25 - 10) = 30 \text{ см/с};$$

$$v_B = \omega_{OB} OB = \omega_{OB}(R_1 + R_3) = 2(30 + 15) = 90 \text{ см/с}.$$

Користуючись властивістю миттєвого центра швидкостей, маємо

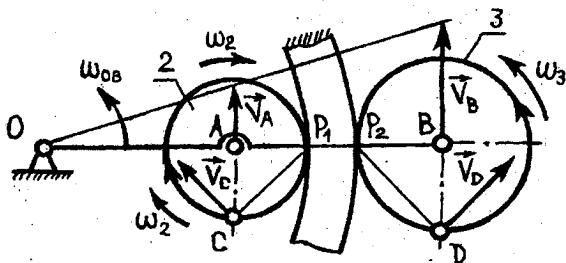


Рис. 42,6

$$\frac{v_C}{v_A} = \frac{CP_1}{AP_1} = \frac{R_2\sqrt{2}}{R_2} = \sqrt{2} \rightarrow v_C = v_A\sqrt{2} = 30\sqrt{2} \text{ см/с};$$

$$\frac{v_D}{v_B} = \frac{DP_2}{BP_2} = \frac{R_3\sqrt{2}}{R_3} = \sqrt{2} \rightarrow v_D = v_B\sqrt{2} = 90\sqrt{2} \text{ см/с}.$$

Кутові швидкості другої та третьої шестерень

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP_1} = \frac{v_A}{R_2} = \frac{30}{10} = 3 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_3 = \frac{v_B}{BP_2} = \frac{v_B}{R_3} = \frac{90}{15} = 6 \text{ с}^{-1}.$$

Вектори швидкостей точок A, B, C, D і напрямки обертання відповідних тіл показано на рис. 42, б.

Прискорення точок A та B водила OB визначаються так:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^{\tau}; \quad \vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^{\tau},$$

причому нормальні прискорення цих точок

$$a_A^n = \omega_{OB}^2 OA = 2^2 (25 - 10) = 60 \text{ см/с}^2;$$

$$a_B^n = \omega_{OB}^2 OB = 2^2 (30 + 15) = 180 \text{ см/с}^2,$$

а дотичні прискорення

$$a_A^{\tau} = \varepsilon_{OB} OA = 4 (25 - 10) = 60 \text{ см/с}^2;$$

$$a_B^{\tau} = \varepsilon_{OB} OB = 4 (30 + 15) = 180 \text{ см/с}^2.$$

Числові значення прискорень точок A і B

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^{\tau})^2} = \sqrt{60^2 + 60^2} = 60\sqrt{2} \text{ см/с}^2;$$

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^{\tau})^2} = \sqrt{180^2 + 180^2} = 180\sqrt{2} \text{ см/с}^2.$$

Шестерні 2 та 3 виконують плоский рух. Тому, користуючись теоремою про додавання прискорень в плоскому русі, можемо записати:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_{AC}^{\text{доп}} + \vec{a}_{AC}^{\text{об}};$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^{\tau} + \vec{a}_{BD}^{\text{доп}} + \vec{a}_{BD}^{\text{об}}.$$

Вектори прискорень показано на рис. 42, в і г, а їхні числові значення

$$a_{AC}^{\text{доп}} = \omega_2^2 R_2 = 3^2 \cdot 10 = 90 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{BD}^{\text{доп}} = \omega_3^2 R_3 = 6^2 \cdot 15 = 540 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{AC}^{\text{об}} = \varepsilon_2 R_2; \quad a_{BD}^{\text{об}} = \varepsilon_3 R_3.$$

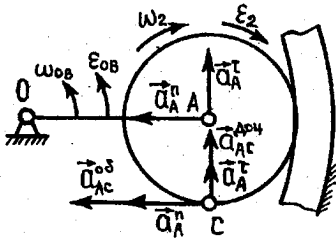


Рис. 42, в

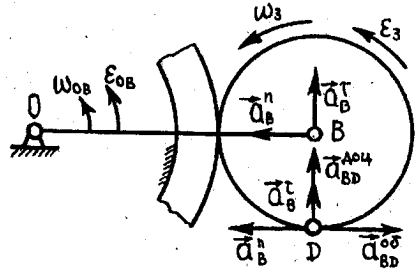


Рис. 42, г

Кутові прискорення шестерень 2 та 3

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_A}{R_2} \right) = \frac{1}{R_2} \frac{dv_A}{dt} = \frac{a_A^{\tau}}{R_2} = \frac{60}{10} = 6 \text{ с}^{-2};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_B}{R_3} \right) = \frac{1}{R_3} \frac{dv_B}{dt} = \frac{a_B^{\tau}}{R_3} = \frac{180}{15} = 12 \text{ с}^{-2}.$$

Тоді

$$a_{AC}^{\text{об}} = 6 \cdot 10 = 60 \text{ см/с}^2; \quad a_{BD}^{\text{об}} = 12 \cdot 15 = 180 \text{ см/с}^2.$$

Прискорення точок C і D на підставі рис. 42, в, г

$$\begin{aligned} a_C &= \sqrt{(a_A^n + a_{AC}^{\text{об}})^2 + (a_A^{\tau} + a_{AC}^{\text{доп}})^2} = \\ &= \sqrt{(60 + 60)^2 + (60 + 90)^2} = 30\sqrt{41} \text{ см/с}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_D &= \sqrt{(a_B^n - a_{BD}^{\text{об}})^2 + (a_B^{\tau} + a_{BD}^{\text{доп}})^2} = \\ &= \sqrt{(180 - 180)^2 + (180 + 540)^2} = 720 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Завдання К-5

КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ БАГАТОЛАНКОВОГО МЕХАНІЗМУ

Кривошип O_1A обертається зі сталою кутовою швидкістю $\omega_{O_1A} = 3 \text{ с}^{-1}$. Для заданого положення механізму визначити:

1) швидкості точок A, B, C, D, E, F і кутові швидкості всіх його ланок за допомогою плану швидкостей;

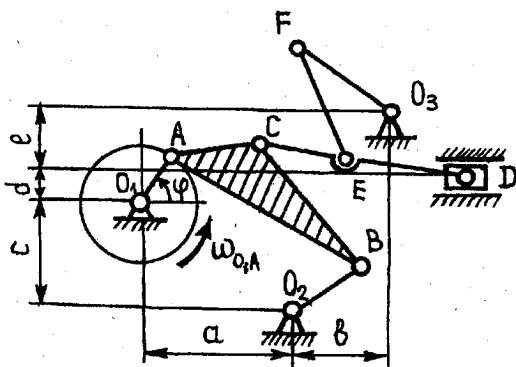


Рис. 43,а

2) швидкості зазначених точок механізму та кутові швидкості всіх його ланок за допомогою миттєвих центрів швидкостей;

3) прискорення точок A, B, C, D, E, F і кутові прискорення всіх його ланок;

4) положення миттєвого центра прискорення ланки AB .

Схеми механізмів показано на рис. 44, а—в, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 23.

Приклад 17. Для заданого на рис. 43,а положення механізму визначити швидкості та прискорення точок A, B, C, D, E, F , а також кутові швидкості та прискорення його відповідних ланок.

Числові значення необхідних для розрахунку величин уміщено в табл. 19, де всі лінійні розміри механізму задано в сантиметрах.

Таблиця 19

φ, град	a	b	c	d	e	O_1A	AB	AC	BC	CD	CE	ED	O_2B	$\omega_{O_1A}, \text{с}^{-1}$	O_3F	EF
60	40	23	25	15	25	20	60	20	50	70	30	40	25	3	30	40

Розв'язання 1. Визначення швидкостей точок A, B, C і кутових швидкостей ланок механізму за допомогою плану швидкостей:

а) будуємо схему механізму у вибраному масштабі (рис. 43, б).

Швидкість точки A

$$v_A = \omega_{O_1A} AO_1 = 3 \cdot 20 = 60 \text{ см/с.}$$

Вектор \vec{v}_A перпендикулярний до кривошипа O_1A і спрямований в бік його обертання;

б) будуємо план швидкостей. З довільно вибраного полюса O (рис. 43, в) проводимо пряму лінію, паралельну вектору швидкості \vec{v}_A ,

причому у вибраному масштабі для швидкостей зображаємо швидкість точки A . Для визначення швидкості точки B через полюс O проводимо пряму, паралельну вектору швидкості \vec{v}_B , яка перпендикулярна до ланки O_2B , причому використовуємо рівність

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}.$$

Модуль швидкості точки B дорівнює довжині відрізка OB , а кутова швидкість, з якою обертається ланка механізму ($\triangle ABC$) навколо точки (полюса) A

$$\omega_{AB} = ab/AB = 32/60 = 0,533 \text{ с}^{-1}.$$

Користуючись масштабом швидкостей, знаходимо

$$v_B = 67 \text{ см/с}.$$

Аналогічно діємо при визначенні швидкості точки C , будуючи план швидкостей, тобто

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{AC} = \vec{v}_B + \vec{v}_{BC},$$

де модулі обертальних швидкостей \vec{v}_{AC} і \vec{v}_{BC} визначаються виразами

$$v_{AC} = ca; v_{BC} = cb,$$

причому вектори \vec{v}_{AC} і \vec{v}_{BC} перпендикулярні до сторін трикутника ABC ($\vec{v}_{AC} \perp AC$, $\vec{v}_{BC} \perp CB$).

Виходячи з плану швидкостей (див. рис. 43,б),

$$v_C = 66 \text{ см/с}.$$

Продовжуючи побудову плану швидкостей, знаходимо числові значення швидкостей v_D , v_E , v_F (табл. 20).

Таблиця 20

Визначення швидкостей	v_A	v_B	v_C	v_D	v_E	v_F
	см/с					
За допомогою плану швидкостей	60	67	66	62	60	94
За допомогою миттєвих центрів швидкостей	60	68	64	63	59	88,5

Обертальна швидкість точки B навколо точки A

$$ab = v_{AB} = \omega_{AB} AB,$$

звідки кутова швидкість ланки ($\triangle ABC$)

$$\omega_{AB} = \frac{ab}{AB} = \frac{32}{60} = 0,533 \text{ с}^{-1}.$$

Аналогічно визначаємо кутові швидкості ланок CD , EF , O_3F :

$$\omega_{CD} = cd/CD = 39/70 = 0,577 \text{ c}^{-1};$$

$$\omega_{EF} = fe/FE = 116/40 = 2,9 \text{ c}^{-1};$$

$$\omega_{O_2B} = v_B/O_2B = 67/25 = 2,68 \text{ c}^{-1};$$

$$\omega_{O_3F} = v_F/O_3F = 94/30 = 3,133 \text{ c}^{-1}.$$

Числові значення кутових швидкостей зведено в табл. 21.

Таблиця 21

Визначення кутових швидкостей	ω_{AB}	ω_{CD}	ω_{EF}	ω_{O_2B}	ω_{O_3F}
	c^{-1}				
За допомогою плану швидкостей	0,533	0,577	2,90	2,68	3,13
За допомогою миттєвих центрів швидкостей	0,555	0,554	2,68	2,72	2,95

2. Визначення швидкостей точок A , B , C , D , E , F та кутових швидкостей ланок механізму за допомогою миттєвих центрів швидкостей:

а) ланки механізму O_1A , O_2B , O_3F обертаються навколо нерухомих центрів O_1 , O_2 , O_3 . Миттєвий центр ланки ($\triangle ABC$) знаходиться в точці P_1 , яка визначається перетином двох ліній, проведених перпендикулярно до векторів швидкостей \vec{v}_A і \vec{v}_B .

Аналогічно визначаються положення миттєвих центрів швидкостей для ланок CD (точка P_2) та FE (точка P_3);

б) швидкості точок ланок механізму пропорційні віддалям цих точок від миттєвих центрів швидкостей відповідних ланок. Ці віддалі беремо із рис. 43,б. Значення швидкостей відповідних точок знаходимо, виходячи з таких умов:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{BP_1}{AP_1} \rightarrow v_B = v_A \frac{BP_1}{AP_1} = 60 \cdot \frac{122}{108} = 68 \text{ см/с};$$

$$\frac{v_C}{v_A} = \frac{CP_1}{AP_1} \rightarrow v_C = v_A \frac{CP_1}{AP_1} = 60 \cdot \frac{114}{108} = 64 \text{ см/с};$$

$$\frac{v_D}{v_C} = \frac{DP_2}{CP_2} \rightarrow v_D = v_C \frac{DP_2}{CP_2} = 64 \cdot \frac{118}{120} = 63 \text{ см/с};$$

$$\frac{v_E}{v_C} = \frac{EP_2}{CP_2} \rightarrow v_E = v_C \frac{EP_2}{CP_2} = 64 \cdot \frac{110}{120} = 59 \text{ см/с};$$

$$\frac{v_F}{v_E} = \frac{FP_3}{EP_3} \rightarrow v_F = v_E \frac{FP_3}{EP_3} = 59 \cdot \frac{33}{22} = 88,5 \text{ см/с}.$$

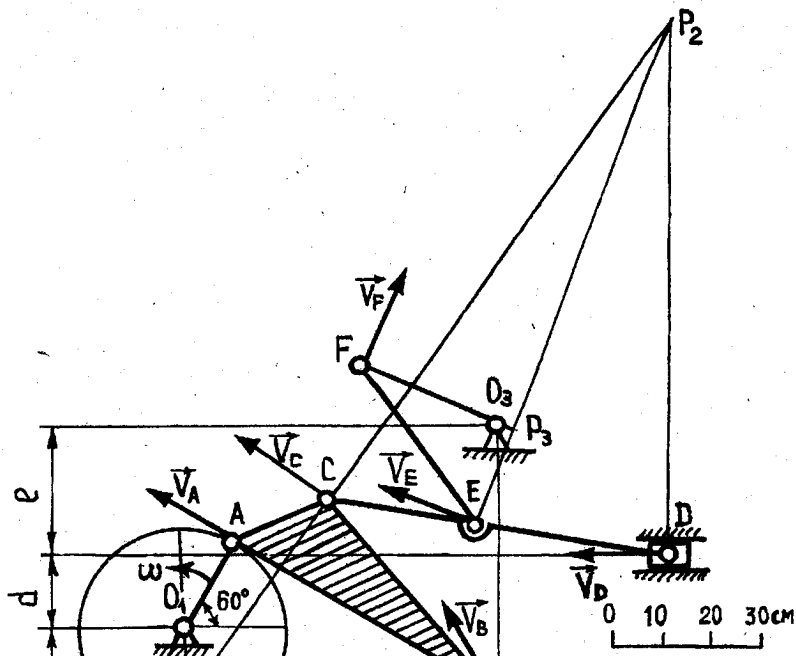


Рис. 43,б

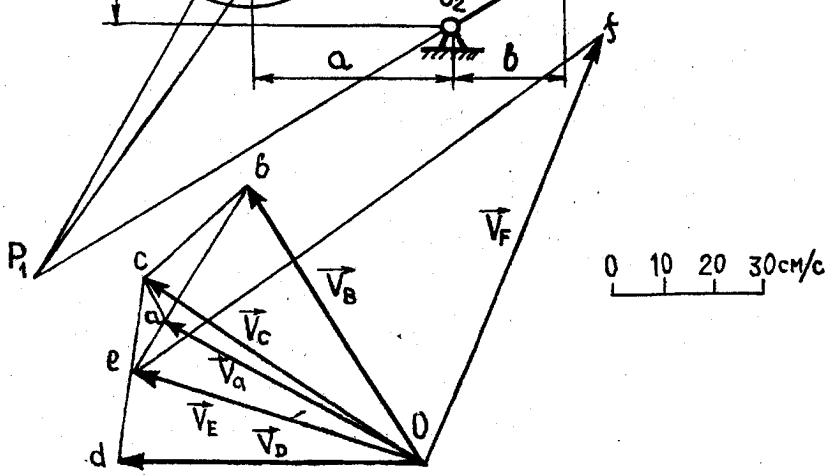


Рис. 43,в

Напрямок векторів швидкостей $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C, \vec{v}_D, \vec{v}_E, \vec{v}_F$ показано на рис. 43, б;

в) кутові швидкості ланок механізму

$$\omega_{AB} = v_A / AP_1 = 60 / 108 = 0,555 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{CD} = v_C / CP_2 = 64 / 120 = 0,534 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{O_2B} = v_B / O_2B = 68 / 25 = 2,72 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{EF} = v_F / FP_3 = 88,5 / 33 = 2,68 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{O_3F} = v_F / O_3F = 88,5 / 30 = 2,95 \text{ с}^{-1}.$$

Числові значення кутових швидкостей ланок механізму зведено в табл. 21.

3. Визначення прискорення точок A, B, C, D, E, F і кутових прискорень ланок механізму. Для визначення прискорень $\vec{a}_A, \vec{a}_B, \epsilon_{AB}$ (рис. 43, з) використаємо теорему про прискорення точки B плоскої фігури

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^{\text{доц}} + \vec{a}_{AB}^{\text{об}}.$$

Оскільки напрямок і модуль прискорення \vec{a}_B невідомі, з іншого боку, маємо

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^{\tau}.$$

Отже,

$$\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^{\tau} = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^{\text{доц}} + \vec{a}_{AB}^{\text{об}}.$$

Кривошип O_1A обертається рівномірно, а тому

$$a_A = a_A^n = \omega_{O_1A}^2 AO_1 = 3^2 \cdot 20 = 180 \text{ см/с}^2.$$

Доцентрове прискорення точки B при обертальному русі трикутника ABC навколо полюса A

$$a_{AB}^{\text{доц}} = \omega_{AB}^2 AB = 0,544^2 \cdot 60 = 17,76 \text{ см/с}^2,$$

а нормальне прискорення цієї точки

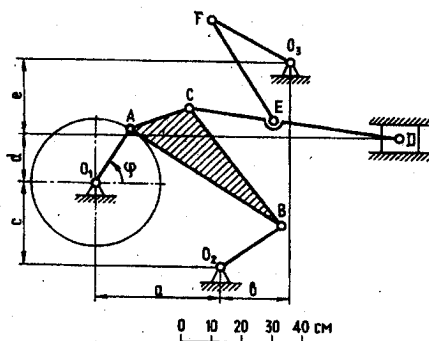


Рис. 43, з

$$a_B^n = v_B^2 / O_2B = 68^2 / 25 = 185 \text{ см/с}^2.$$

Прискорення точок можна знайти також графічно за допомогою плану прискорень. Для цього відкладаємо від довільно вибраної точки Q у відповідному масштабі ($\mu_Q = 2 \frac{\text{см/с}^2}{\text{мм}}$) прискорення точки \vec{a}_A (рис. 43, ∂).

З кінця вектора \vec{a}_A будуємо в тому самому масштабі вектор $\vec{a}_{AB}^{\text{доп}}$, провівши його паралельно прямій BA . Через кінець вектора $\vec{a}_{AB}^{\text{доп}}$ проводимо пряму, перпендикулярну до прямої BA . З точки Q відкладаємо в напрямку прямої BO_2 вектор a_B^n , а через його кінець проводимо пряму, перпендикулярну до прямої BO_2 .

Точка перетину прямих, перпендикулярних до прямих BA та BO_2 , визначає кінець вектора \vec{a}_B .

На підставі рис. 43, ∂ маємо

$$a_B = 194 \text{ см/с}^2; \quad \varepsilon_{ABC} = a_{AB}^{\text{об}} / AB = 10 / 60 = 0,133 \text{ с}^{-2}.$$

Аналогічно визначаємо прискорення точки C

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{AC}^{\text{доп}} + \vec{a}_{AC}^{\text{об}} = \vec{a}_B + \vec{a}_{BC}^{\text{доп}} + \vec{a}_{BC}^{\text{об}},$$

де

$$a_{AC}^{\text{доп}} = \omega_{AB}^2 AC = 0,544^2 \cdot 20 = 5,92 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{BC}^{\text{доп}} = \omega_{AB}^2 BC = 0,544^2 \cdot 50 = 14,8 \text{ см/с}^2.$$

Відкладаємо від кінця вектора \vec{a}_A в масштабі $\mu_Q = 2 \frac{\text{см/с}^2}{\text{мм}}$ вектор $\vec{a}_{AC}^{\text{доп}}$, провівши його паралельно прямій CA , і через його кінець проводимо пряму, перпендикулярну до прямої AC . Аналогічно від кінця вектора \vec{a}_B проводимо паралельно прямій CB вектор $\vec{a}_{BC}^{\text{доп}}$, а через його кінець — пряму перпендикулярну до прямої BC . Точка перетину прямих, проведених перпендикулярно до прямих CA та BC , визначає кінець вектора \vec{a}_C .

На підставі рис. 43, ∂ прискорення точки C

$$a_C = 192 \text{ см/с}^2.$$

Кутове прискорення ланки ($\triangle ABC$)

$$\varepsilon_{ABC} = a_{AC}^{\text{об}} / AC = 3,5 / 20 = 0,175 \text{ с}^{-2}.$$

Далі будуємо план прискорення для точки D , враховуючи, що

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{CD}^{\text{доп}} + \vec{a}_{CD}^{\text{об}};$$

$$a_{CD}^{\text{доп}} = \omega_{CD}^2 CD = 0,565^2 \cdot 70 = 22,34 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{CD}^{\text{об}} = \varepsilon_{CD} CD.$$

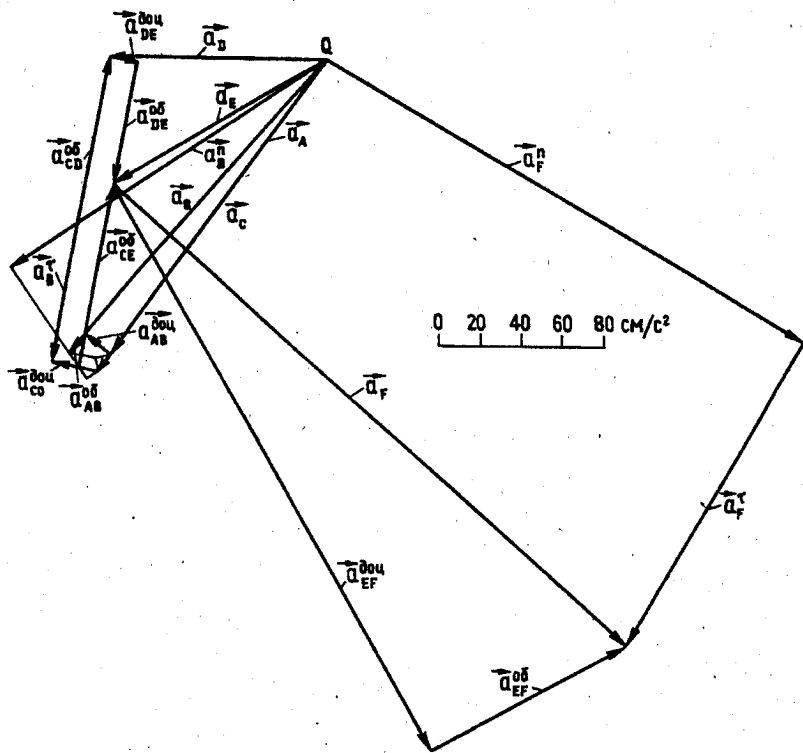


Рис. 43, д

При цьому діємо так. До вектора прискорення \vec{a}_C (див. рис. 43, б) додаємо вектор $\vec{a}_{CD}^{доц}$. Через кінець вектора $\vec{a}_{CD}^{доц}$ проводимо вектор $\vec{a}_{CD}^{об}$ ($\vec{a}_{CD}^{об} \perp CD$).

Одночасно через точку Q проводимо пряму, що збігається з напрямком прискорення точки D.

Перетин двох прямих, а саме: прямої, перпендикулярної до ланки CD і паралельної вектору \vec{a}_D , визначає на плані прискорень прискорення точки D, тобто $a_D = 98 \text{ см/с}^2$.

Далі можна знайти кутові прискорення ланки CD

$$\varepsilon_{CD} = a_{CD}^{об} / CD = 156 / 70 = 2,22 \text{ с}^{-2}.$$

Аналогічно будуємо план прискорень для точок E та F (див. рис. 43, б).

Прискорення точок A, B, C, D, E, F, а також кутові прискорення відповідних ланок механізму, обчислені на основі плану прискорень, зведено в табл. 22.

a_A	a_B	a_C	a_D	a_E	a_F	ε_{AB}	ε_{CD}	ε_{EF}	ε_{O_2B}	ε_{O_2F}
см/с ²						с ⁻²				
180	194	192	94	120	334	0,133	2,22	2,75	2,00	5,80

Таблица 23

Вариант	$\omega, \text{с}^{-1}$	O_1A	O_2B	BC	AB	CD	R	a	b	c	α		β	
												град		
1	5	0,40	1,00	—	0,60	—	—	0,40	0,35	—	30	45		
2	6	0,15	0,50	0,60	0,50	0,30	—	0,20	1,00	0,60	30	—		
3	4	0,25	0,90	0,40	—	—	—	0,75	0,15	—	45	30		
4	5	0,20	—	0,45	0,35	0,60	—	0,30	0,40	—	30	30		
5	3	0,90	—	0,60	0,80	0,30	—	0,40	—	—	75	45		
6	4	0,40	—	—	0,70	—	—	0,40	0,80	—	60	—		
7	2	0,50	0,60	—	0,30	—	—	0,30	0,40	—	45	—		
8	6	0,20	—	0,20	0,30	0,50	0,20	0,60	0,20	—	45	30		
9	5	0,30	0,25	0,90	0,50	—	—	0,30	0,30	0,25	60	30		
10	3	0,60	0,60	0,30	—	0,30	—	—	0,20	—	30	45		
11	6	0,25	—	0,25	0,50	0,15	—	0,75	—	—	60	30		
12	4	0,30	0,40	0,20	0,15	0,65	—	0,60	0,40	0,20	0,45	45		
13	5	0,18	0,20	—	0,80	0,60	0,15	0,50	0,54	—	45	30		
14	8	0,25	0,60	0,30	0,55	0,60	0,25	0,80	0,40	—	60	30		
15	10	0,20	—	0,80	0,50	—	0,20	0,40	0,30	—	45	30		
16	6	0,30	0,20	—	0,70	0,60	0,16	0,40	0,40	0,50	60	60		
17	8	0,30	—	0,50	0,40	1,00	0,18	0,40	—	—	30	30		
18	5	0,28	0,30	0,70	—	—	0,20	1,00	0,35	—	30	—		
19	5	0,24	0,24	0,40	—	0,40	—	0,40	0,30	—	45	30		
20	6	0,20	0,40	0,50	—	—	0,15	0,80	0,15	—	45	—		
21	4	0,25	0,60	0,55	0,80	0,70	—	0,20	0,15	—	60	—		
22	5	0,40	0,70	1,00	1,20	1,20	—	1,00	—	—	30	—		
23	10	0,18	0,50	0,90	0,25	0,50	0,12	0,60	0,20	0,15	45	60		
24	8	0,15	0,50	0,25	0,50	0,60	0,15	0,20	0,40	—	30	—		
25	6	0,25	—	0,60	0,40	—	0,15	—	0,25	—	150	—		
26	5	0,20	—	0,80	0,40	0,40	0,15	0,60	0,30	—	60	—		
27	4	0,30	0,40	0,60	0,70	—	—	0,60	—	—	60	—		
28	5	0,28	—	0,30	0,80	0,50	—	0,40	0,20	—	45	—		
29	6	0,25	—	0,80	0,70	—	0,20	—	—	0,15	45	—		
30	8	0,20	0,18	0,30	0,60	0,50	0,20	0,40	0,25	—	60	—		

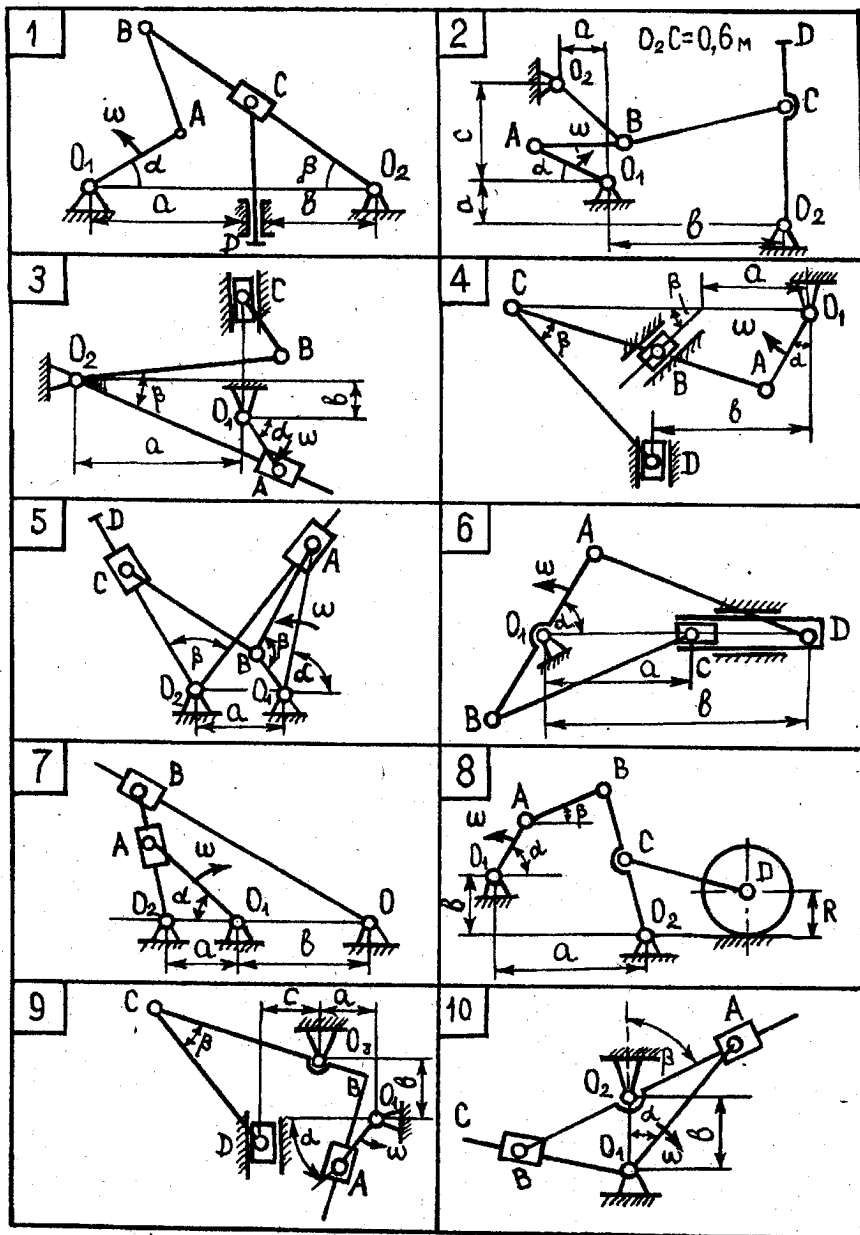


Рис. 44,а

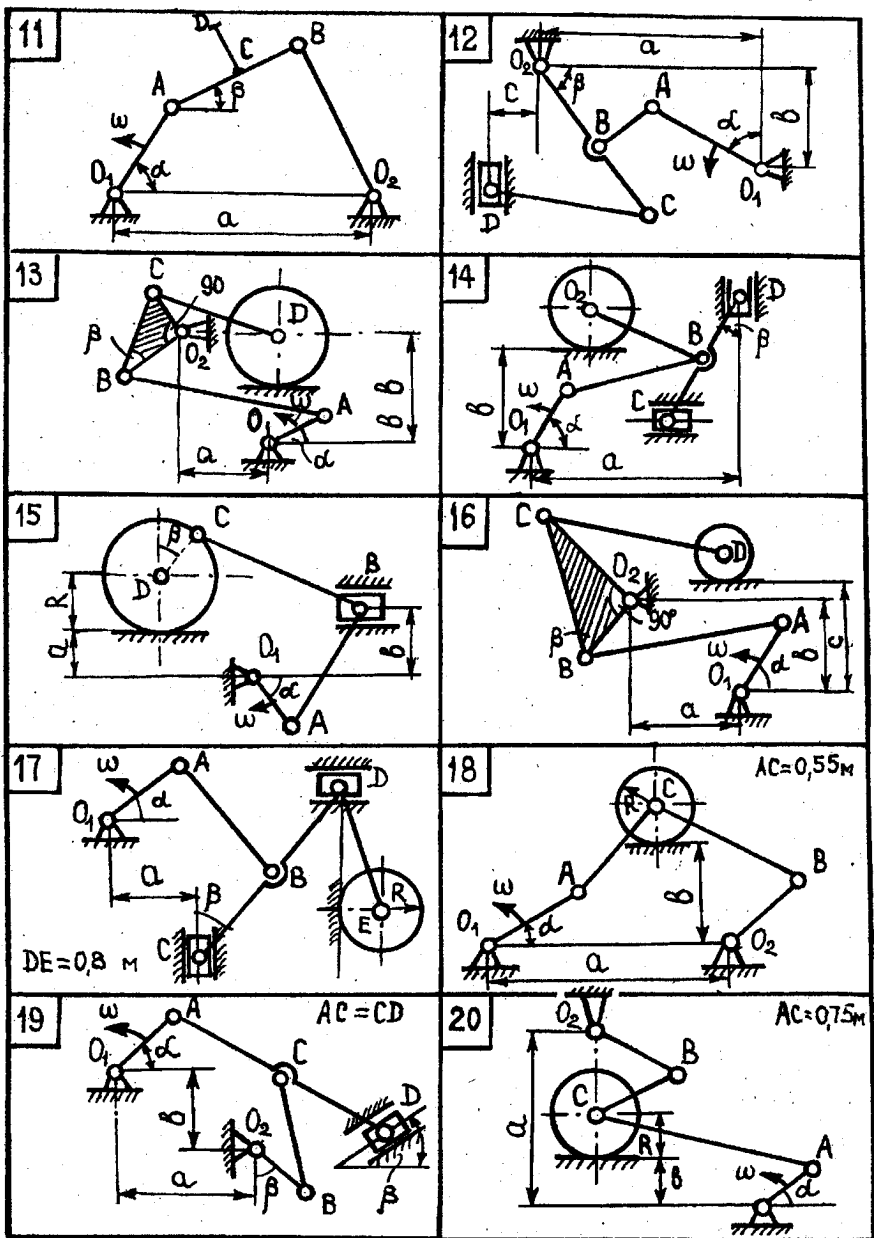


Рис. 44,6

2.3. СФЕРИЧНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

Завдання К-6

ВИЗНАЧЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА І ЙОГО ТОЧОК ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ КУТІВ ЕЙЛЕРА

Задано рівняння сферичного руху твердого тіла $\psi(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$, де ψ , θ , φ — кути Ейлера (рис. 45).

Визначити для моментів часу t_i ($i = 1, 2, 3$) кутову швидкість, кутове прискорення тіла, а також швидкість і прискорення точки А, координатами якої в рухомій системі координат, жорстко зв'язаної з тілом, є x_1 , y_1 , z_1 . Необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 24.

Таблиця 24

Варіант	$\psi(t)$	$\theta(t)$	$\varphi(t)$	x_1	y_1	z_1	t_1	t_2	t_3
	рад			см			с		
1	$2t^3 - t^2$	$\pi/4$	$5t$	-2	2	3	1	1,5	2
2	$4t + 1,6t^2$	$(\pi/2) \cos \pi t$	$20t$	3	3	3	1/6	1/3	1
3	$-2t^2 + t$	$-\pi/6$	$15t$	2	3	4	1	2	3
4	$-4t$	$(\pi/6) \cos (\pi t/4)$	$12t$	6	8	4	1/4	1	4
5	$4t - 3t^2$	$(\pi/6) \sin (\pi t/6)$	$4t$	4	-2	3	1	2	3
6	$-3t^2 + 2t$	$\pi/3$	$24t$	-4	5	6	1/2	1	2
7	$8t - t^2$	$(\pi/3) \cos (6\pi t)$	$10t$	6	3	-5	1/2	1	2
8	$5t$	$-(\pi/3) \sin (\pi t/3)$	$8t$	4	-4	-3	1	2	3
9	$4t - 3t^2$	$-\pi/4$	$6t$	5	4	3	2/5	1/2	1
10	$10t - 0,1t^2$	$(\pi/4) \sin (\pi t/4)$	$15t$	7	5	4	1	2	10/3
11	$t^2 - 2t$	$\pi/6$	$-4t$	6	3	6	1	2	3
12	$4t$	$(\pi/2) \cos (\pi t)$	$-5t$	6	5	8	1/4	1/3	1
13	$t - 0,5t^2$	$-\pi/3$	$16t$	8	4	5	1/2	1	2
14	$3t - 0,5t^2$	$(\pi/6) \sin (2\pi t)$	$-9t$	-5	8	2	1/4	1/2	1
15	$0,6t^2$	$(\pi/4) \sin (\pi t)$	$3t$	4	4	4	1/4	1/3	1/2
16	$1,2t - t^2$	$(\pi/3) \cos (\pi t/4)$	$12t$	5	5	5	1	2	3
17	$8t^2 - 3t$	$\pi/4$	$18t$	-2	6	-3	1/2	1	2
18	$4t - 0,2t^2$	$(\pi/3) \sin (\pi t/3)$	$10t$	2	-2	6	1/2	1	2
19	$-2\pi t^2$	$(\pi/2) \cos (\pi t/6)$	$8t$	3	2	-4	1	2	3
20	$5t - 4t^2$	$\pi/3$	$9t$	-6	4	5	1/2	1	2
21	$0,2t^2 + t$	$\pi \cos (\pi t/2)$	$-6t$	8	5	-5	1	3	4
22	$t - 0,4t^2$	$(\pi/4) \sin (\pi t/3)$	$14t$	2	3	4	1	2	4
23	$6t - t^2$	$\pi/3$	$-3t$	7	4	2	1/2	1	3/2
24	$2t$	$(\pi/3) \cos (\pi t/6)$	$20t$	10	8	6	1	2	3
25	$2t^2 - 3t$	$(\pi/6) \sin (\pi t/6)$	$6t$	-3	-5	5	2	3	5
26	$-5t$	$(\pi/4) \sin (\pi t/4)$	$2t$	2	4	2	1	2	3

Вариант	$\psi(t)$	$\theta(t)$	$\varphi(t)$	x_1	y_1	z_1	t_1	t_2	t_3
	рад			см			с		
27	$4t^2$	$-\pi/4$	$16t$	-2	8	-2	2	3	4
28	$3t^2 + 2t$	$-(\pi/3) \cos(\pi t)$	$-5t$	3	10	5	1/6	1/3	1/4
29	$t - 3t^2$	$(\pi/6) \sin(\pi t)$	$10t$	10	10	2	1/2	3/2	5/2
30	$2t^2 - 4t$	$(\pi/2) \cos(2\pi t)$	$3t$	5	4	4	1/3	1/4	1/8

Приклад 18. Дано: $\psi = (2t^2 - 3t)$ рад; $\theta = \pi/3$ рад; $\varphi = 12t$ рад; $x_1 = 3$ см; $y_1 = 4$ см; $z_1 = 5$ см; $t_1 = 0,5$ с; $t_2 = 1$ с; $t_3 = 1,5$ с.

Визначити $\vec{\omega}$, \vec{e} , \vec{v}_A , \vec{a}_A .

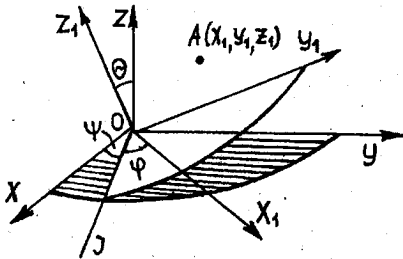


Рис. 45

Роз'язання 1. Проекції вектора кутової швидкості тіла на осі рухомої системи координат визначаються за такими формулами:

$$\omega_{x_1} = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi;$$

$$\omega_{y_1} = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi;$$

$$\omega_{z_1} = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}.$$

Використовуючи вихідні дані, дістаємо

$$\omega_{x_1} = \frac{1}{2} (4t - 3) \sqrt{3} \sin(12t);$$

$$\omega_{y_1} = \frac{1}{2} (4t - 3) \sqrt{3} \cos(12t); \quad \omega_{z_1} = \frac{1}{2} (4t - 3) + 12.$$

Проекції вектора кутової швидкості тіла на осі нерухомої системи координат

$$\omega_x = \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi; \quad \omega_y = -\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \psi;$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}.$$

У розглядуваному прикладі

$$\omega_x = 6\sqrt{3} \sin(2t^2 - 3t); \quad \omega_y = -6\sqrt{3} \cos(2t^2 - 3t); \quad \omega_z = 4t + 3.$$

Значення проекцій вектора кутової швидкості тіла для відповідних моментів часу t_i наведено в табл. 25.

Таблиця 25

$t_1, \text{ с}$	ω_{x_1}	ω_{y_1}	ω_{z_1}	ω	ω_x	ω_y	ω_z	ω
	с^{-1}				с^{-1}			
0,5	0,242	-0,830	11,5	11,53	-8,734	-5,668	5	11,52
1,0	-0,464	0,730	12,5	12,53	-8,734	-5,608	7	12,52
1,5	-1,949	1,714	13,5	13,75	0	-10,380	9	13,74

Модуль кутової швидкості:
в рухомій системі координат

$$\omega = \sqrt{\omega_{x_1}^2 + \omega_{y_1}^2 + \omega_{z_1}^2};$$

в нерухомій системі координат *

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}.$$

Значення кутових швидкостей тіла для відповідних значень t , наведено в табл. 25.

Модуль кутової швидкості тіла незалежно від проектування її вектора на осі зазначених систем координат можна визначити за формулою

$$\omega = \sqrt{\psi^2 + \theta^2 + \phi^2 + 2\psi\phi \cos \theta}.$$

Напрямок вектора кутової швидкості, а також миттєвої осі обертання тіла можна встановити за напрямними косинусами, а саме:

в рухомій системі координат

$$\cos(\vec{\omega}, \hat{x}_1) = \omega_{x_1}/\omega; \quad \cos(\vec{\omega}, \hat{y}_1) = \omega_{y_1}/\omega; \quad \cos(\vec{\omega}, \hat{z}_1) = \omega_{z_1}/\omega;$$

в нерухомій системі координат

$$\cos(\vec{\omega}, \hat{x}) = \omega_x/\omega; \quad \cos(\vec{\omega}, \hat{y}) = \omega_y/\omega; \quad \cos(\vec{\omega}, \hat{z}) = \omega_z/\omega.$$

В результаті обчислень для $t_1 = 0,5$ с знаходимо:

в рухомій системі координат

$$\begin{aligned} \cos(\omega, z_1) &= 11,5/11,53 = 0,9974; \\ \cos(\omega, x_1) &= \frac{0,242}{11,53} = 0,021 \quad \cos(\omega_{1,y_1}) = \frac{-0,830}{11,53} = -0,072; \end{aligned}$$

в нерухомій системі координат

$$\begin{aligned} \cos(\omega, x) &= -8,734/11,52 = -0,7582; \\ \cos(\omega, y) &= \frac{-5,668}{11,52} = -0,492; \quad \cos(\omega, z) = \frac{5}{11,52} = 0,434. \end{aligned}$$

2. Проекції вектора прискорення тіла на осі рухомої системи координат визначаємо так:

$$\begin{aligned} \epsilon_{x_1} &= \dot{\omega}_{x_1} = 2\sqrt{3} \sin(12t) + 6\sqrt{3} (4t - 3) \cos(12t); \\ \epsilon_{y_1} &= \dot{\omega}_{y_1} = 2\sqrt{3} \cos(12t) - 6\sqrt{3} (4t - 3) \sin(12t); \quad \epsilon_{z_1} = \dot{\omega}_{z_1} = 2, \end{aligned}$$

а на осі нерухомої системи координат — так:

$$\epsilon_x = 6(4t - 3)\sqrt{3} \cos(2t^2 - 3t);$$

$$\varepsilon_y = 6(4t - 3)\sqrt{3} \sin(2t^2 - 3t); \varepsilon_z = 4.$$

Значення проєкцій вектора кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ тіла на осі рухомої та нерухомої систем координат для відповідних моментів часу t_1 наведено в табл. 26.

Таблиця 26

t_1, c	ε_{x_1}	ε_{y_1}	ε_{z_1}	ε	ε_x	ε_y	ε_z	ε
	c^{-2}				c^{-2}			
0,5	-10,934	0,422	2	11,12	-5,608	8,734	4	11,12
1,0	6,903	8,490	2	11,12	5,608	-8,734	4	11,12
1,5	17,964	25,670	2	31,40	31,14	0	4	31,40

Аналогічно за напрямними косинусами визначаємо напрямок вектора кутового прискорення тіла, саме:
в рухомій системі координат

$$\cos(\vec{\varepsilon}, \hat{x}_1) = \varepsilon_{x_1}/\varepsilon; \quad \cos(\vec{\varepsilon}, \hat{y}_1) = \varepsilon_{y_1}/\varepsilon; \quad \cos(\vec{\varepsilon}, \hat{z}_1) = \varepsilon_{z_1}/\varepsilon;$$

в нерухомій системі координат

$$\cos(\vec{\varepsilon}, x) = \varepsilon_x/\varepsilon; \quad \cos(\vec{\varepsilon}, y) = \varepsilon_y/\varepsilon; \quad \cos(\vec{\varepsilon}, z) = \varepsilon_z/\varepsilon.$$

3. Швидкість точки A

$$v_A = \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2 + v_{z_1}^2},$$

де проєкції вектора цієї швидкості на осі рухомої системи координат визначаються за такими формулами:

$$v_{x_1} = \omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1; \quad v_{y_1} = \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1; \quad v_{z_1} = \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1.$$

Значення проєкцій вектора швидкостей і модуль швидкості точки A для відповідних моментів часу t_1 наведено в табл. 27.

Таблиця 27

t_1, c	v_{x_1}	v_{y_1}	v_{z_1}	v_A	$\cos(\vec{v}_A, \hat{x}_1)$	$\cos(\vec{v}_A, \hat{y}_1)$	$\cos(\vec{v}_A, \hat{z}_1)$
	см/с						
0,5	-50,15	33,27	3,46	60,28	-0,8319	0,5519	0,0574
1,0	-46,35	39,82	-4,06	61,24	-0,7568	0,6502	-0,0663
1,5	-45,43	50,25	-12,94	68,96	-0,6588	0,7287	-0,1876

4. Проєкції вектора прискорення точки A на осі рухомої системи координат визначаємо так:

$$a_{x_1} = \varepsilon_{y_1} z_1 - \varepsilon_{z_1} y_1 + \omega_{x_1} (\omega_{x_1} x_1 + \omega_{y_1} y_1 + \omega_{z_1} z_1) - \omega^2 x_1;$$

$$a_{y_1} = \varepsilon_{z_1} x_1 - \varepsilon_{x_1} z_1 + \omega_{y_1} (\omega_{x_1} x_1 + \omega_{y_1} y_1 + \omega_{z_1} z_1) - \omega^2 y_1;$$

$$a_{z_1} = \varepsilon_{x_1} y_1 - \varepsilon_{y_1} x_1 + \omega_{z_1} (\omega_{x_1} x_1 + \omega_{y_1} y_1 + \omega_{z_1} z_1) - \omega^2 z_1.$$

Значення проєкцій прискорення точки A і модуль цього прискорення для відповідних моментів часу t_i наведено в табл. 28.

Таблиця 28

t_1, c	a_{x_1}	a_{y_1}	a_{z_1}	a	$\cos(\vec{a}, \hat{x}_1)$	$\cos(\vec{a}, \hat{y}_1)$	$\cos(\vec{a}, \hat{z}_1)$
	см/с ²						
0,5	-379,64	-516,67	-599,88	878,03	-0,4324	-0,5884	-0,683
1,0	-464,01	-606,78	-507,05	916,84	-0,5061	-0,6618	-0,553
1,5	-559,33	-695,39	8,484	892,46	-0,6267	-0,7792	-0,009

Напрямок вектора прискорення точки $A(x_1, y_1, z_1)$ визначається напрямними косинусами, значення яких для відповідних моментів часу t_i наведено в табл. 28.

Завдання К-7

ВИЗНАЧЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТВЕРДОГО ТІЛА, ЩО КОТИТЬСЯ БЕЗ КОВЗАННЯ ПО НЕРУХОМІЙ ПОВЕРХНІ ПРИ НАЯВНОСТІ НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ

Тіло D котиться без ковзання по поверхні нерухомого тіла E , маючи нерухому точку O .

Вісь Oz_1 тіла D обертається навколо нерухомої осі Oz і має при заданому його положенні E кутові швидкість ω_1 та прискорення ε_1 .

Визначити кутові швидкість і прискорення тіла D , а також швидкість та прискорення точок A, B, C для показаного на рисунку положення тіла D .

Схеми зображено на рис. 46, $a-v$, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 29.

Таблиця 29

Вари- ант	ω_1	ε_1	OA	BC	Вари- ант	ω_1	ε_1	OA	BC
	с ⁻¹	с ⁻²	м			с ⁻¹	с ⁻²	м	
1	4	2	0,50	—	16	4	4	0,50	0,30
2	5	3	0,60	0,20	17	5	4	0,20	0,50
3	3	4	0,80	0,30	18	6	5	0,30	$30\sqrt{2}$
4	2	3	0,40	—	19	4	2	0,25	—
5	3	2	—	0,24	20	3	3	0,40	—
6	4	3	0,36	—	21	4	3	0,60	—
7	6	3	0,30	—	22	2	2	0,50	—

Вариант	ω_1	ε_1	OA	BC	Вариант	ω_1	ε_1	OA	BC
	c^{-1}	c^{-2}	м			c^{-1}	c^{-2}	м	
8	5	2	0,24	0,24	23	8	5	0,30	—
9	3	3	0,70	—	24	5	4	0,40	—
10	2	2	0,80	—	25	4	4	0,75	—
11	3	1	0,60	0,40	26	3	4	0,60	—
12	5	3	0,40	0,20	27	6	3	0,50	—
13	2	3	0,50	0,40	28	5	3	0,48	—
14	6	4	0,32	—	29	3	2	0,80	—
15	3	2	0,40	0,40	30	4	3	0,40	—

Приклад 19. Прямий конус D (рис. 46) котиться по поверхні прямого конуса E , виконуючи сферичний рух навколо нерухомої точки O . Дано: $\alpha = 90^\circ$; $\beta = 120^\circ$; $OM_0 = l = 40$ см; $\omega_1 = 1,8 c^{-1}$; $\varepsilon_1 = 2,4 c^{-2}$; $M_0M = 20$ см.

Визначити кутові швидкості і прискорення тіла D , а також швидкість та прискорення точки M для заданого положення тіла D .

Розв'язання. Конус D виконує сферичний рух. Миттєва вісь обертання $O\Omega$ збігається із спільною твірною конусів. Вибірємо напрямки координатних осей Ox і Oy так, щоб вісь Oz_1 , а також вісь $O\Omega$ знаходилися в площині yOz .

Швидкість точки C при обертанні конуса D навколо осі $O\Omega$

$$\vec{v}_c = \vec{\omega} \times \vec{OC}, \quad (1)$$

де $\vec{\omega}$ — кутова швидкість тіла D .

Якщо розглядати рух тіла D як обертальний навколо осі Oz , то

$$\vec{v}_c = \vec{\omega}_1 \times \vec{OC}. \quad (2)$$

Виходячи з (1) і (2), маємо

$$\omega \cdot OC \sin(180^\circ - \beta/2) = \omega_1 OC \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)/2),$$

або

$$\omega \sin(\beta/2) = \omega_1 \sin((\alpha + \beta)/2). \quad (3)$$

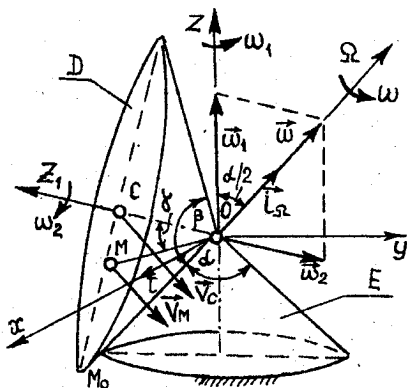


Рис. 46

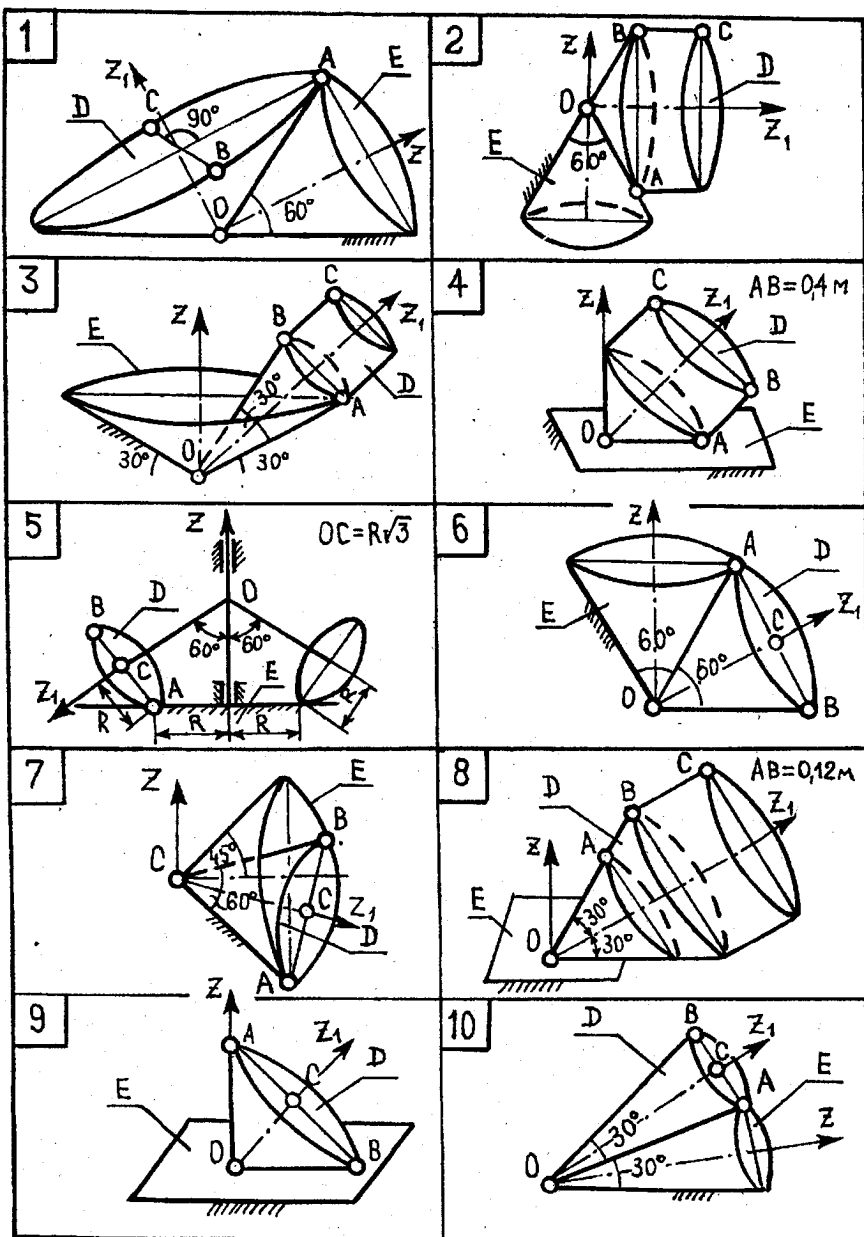


Рис. 46,а

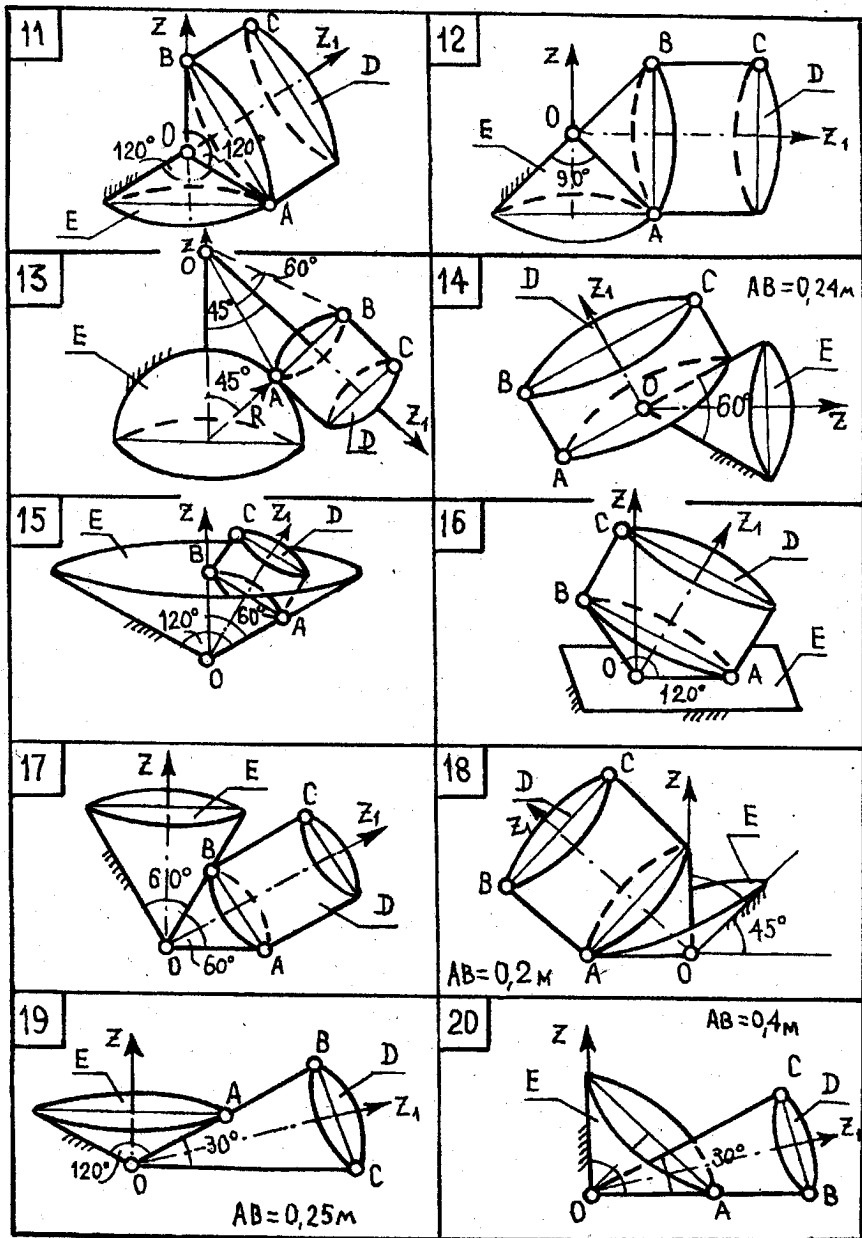


Рис. 46,6

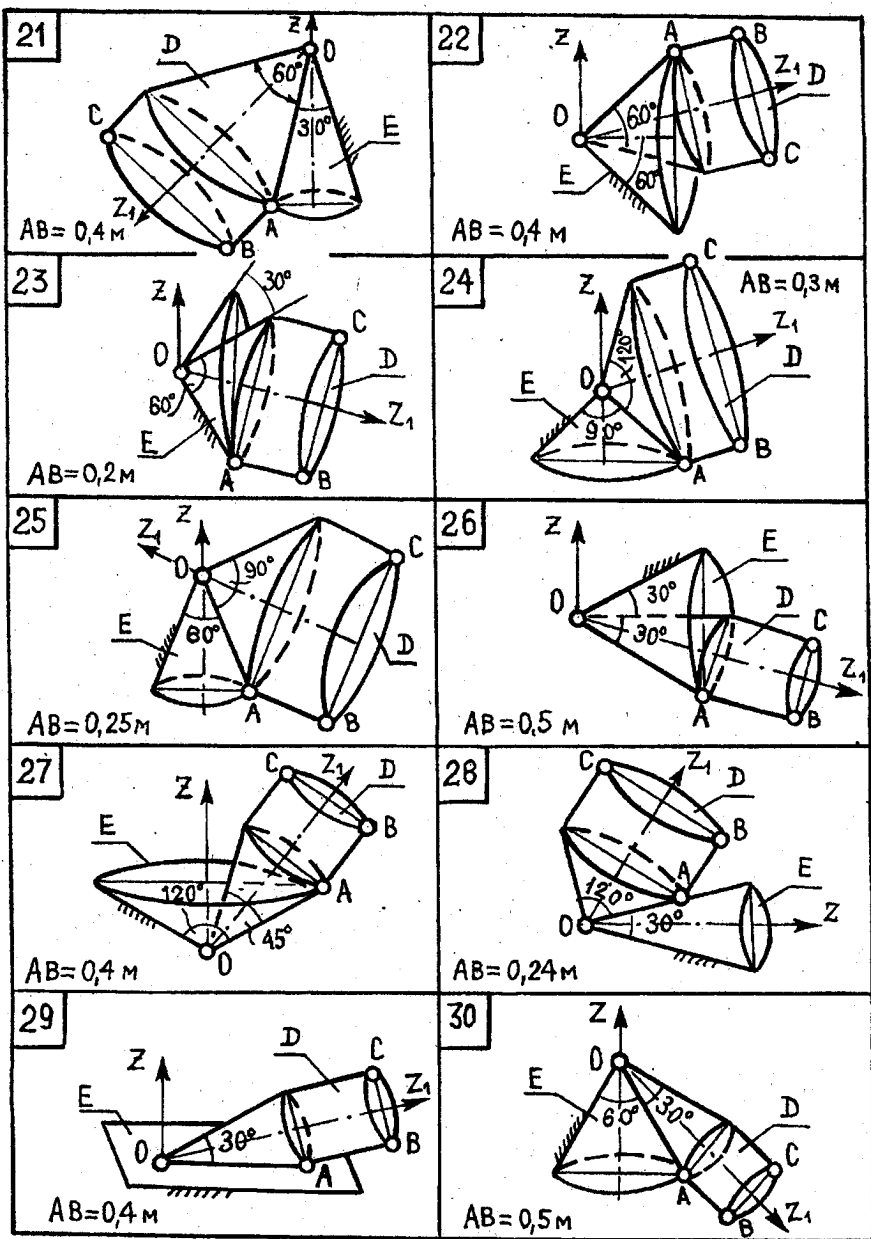


Рис. 46,с

Отже,

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_1 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) / \sin\frac{\beta}{2} = \\ &= 1,8 \sin 105^\circ / \sin 60^\circ = 1,8 \sin 75^\circ / \sin 60^\circ = 2 \text{ с}^{-1}.\end{aligned}$$

Кутову швидкість тіла D можна знайти додаванням обертань навколо осей, що перетинаються, побудувавши паралелограм кутових швидкостей (див. рис. 46), а саме:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \quad (4)$$

У рівнянні (4) $\vec{\omega}_2$ — кутова швидкість обертання конуса D навколо його власної осі Oz_1 .

На підставі теореми синусів маємо

$$\frac{\omega}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta)/2)} = \frac{\omega_1}{\sin(\beta/2)},$$

або.

$$\omega = \omega_1 \sin((\alpha + \beta)/2) / \sin(\beta/2) = 1,8 \frac{\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} = 2 \text{ с}^{-1},$$

що збігається з (3).

Кутове прискорення конуса D

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Вектор кутової швидкості

$$\vec{\omega} = \omega \vec{i}_\Omega,$$

де ω — модуль вектора; \vec{i}_Ω — орт його напрямку.

Отже,

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} \vec{i}_\Omega + \omega \frac{d\vec{i}_\Omega}{dt}, \quad (5)$$

де

$$\frac{d\vec{i}_\Omega}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{i}_\Omega.$$

Використовуючи рис. 46, з урахуванням напрямків векторів $\vec{\omega}$ та \vec{i}_Ω записуємо

$$\frac{d\vec{i}_\Omega}{dt} = -\omega_1 \sin\frac{\alpha}{2} \vec{i}.$$

Остаточню рівняння (5) набуває вигляду

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\omega}{dt} \vec{i}_\Omega - \omega \omega_1 \sin \frac{\alpha}{2} \vec{i}, \quad (6)$$

або

$$\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_\parallel + \vec{\epsilon}_\perp, \quad (7)$$

де

$$\vec{\epsilon}_\parallel = \frac{d\omega}{dt} \vec{i}_\Omega, \quad (8)$$

а

$$\vec{\epsilon}_\perp = -\omega \omega_1 \sin (\alpha/2) \vec{i}. \quad (9)$$

Вирази (8) і (9) складових кутового прискорення $\vec{\epsilon}$ указують на те, що воно дорівнює геометричній сумі радіального ϵ_\parallel та трансверсального ϵ_\perp кутових прискорень.

Вектор ϵ_\parallel спрямований вздовж миттєвої осі $O\Omega$, а його модуль

$$\epsilon_\parallel = \left| \frac{d\omega}{dt} \right|.$$

Виходячи з (3), маємо

$$\epsilon_\parallel = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} \frac{\sin ((\alpha + \beta)/2)}{\sin (\beta/2)} = 2,4 \frac{\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} = 2,67 \text{ с}^{-2}.$$

Вектор $\vec{\epsilon}_\perp$, як випливає з (9), спрямований протилежно орту \vec{i} (рис. 47), а його модуль

$$\epsilon_\perp = |-\omega \omega_1 \sin (\alpha/2)| = 2 \cdot 1,8 \sin 45^\circ = 2,55 \text{ с}^{-2}.$$

Оскільки вектори $\vec{\epsilon}_\parallel$ та $\vec{\epsilon}_\perp$ взаємно перпендикулярні,

$$\epsilon = \sqrt{\epsilon_\parallel^2 + \epsilon_\perp^2} = \sqrt{2,67^2 + 2,55^2} = 3,69 \text{ с}^{-2}.$$

Швидкість точки M знаходимо як швидкість руху тіла D при обертанні навколо миттєвої осі $O\Omega$, тобто

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{OM}. \quad (10)$$

Модуль цієї швидкості

$$v_M = \omega OM \sin (180^\circ - \beta/2 + \gamma) = \omega OM \sin (\beta/2 - \gamma).$$

На підставі рис. 46 маємо

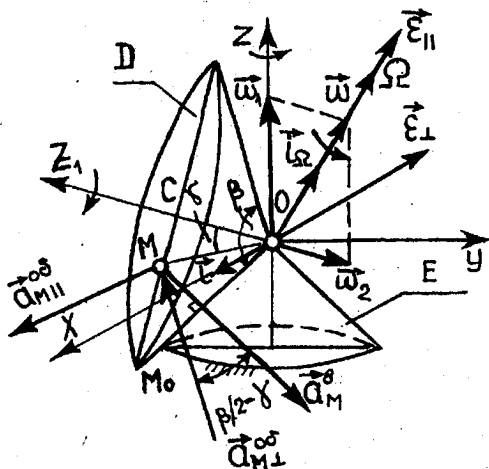


Рис. 47

$$\cos \gamma = OC/OM,$$

де

$$OC = OM_0 \cos (\beta/2) = 40 \cos 60^\circ = 20 \text{ см};$$

$$OM = \sqrt{OM_0^2 + MM_0^2 - 2OM_0 MM_0 \cos 30^\circ} =$$

$$= \sqrt{40^2 + 20^2 - 2 \cdot 40 \cdot 20 \cos 30^\circ} = 24,78 \text{ см}.$$

Тому

$$\cos \gamma = 20/24,78 = 0,8071.$$

Звідси

$$\gamma = 36,18^\circ,$$

так що

$$v_M = 2 \cdot 24,78 \sin (60^\circ - 36,18^\circ) = 20,02 \text{ см/с}.$$

Прискорення точки M дорівнює геометричній сумі вісеспрямованого й обертового прискорень:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_M^{\text{сп}} + \vec{a}_M^{\text{об}}.$$

Вісеспрямоване прискорення

$$\vec{a}_M^{\text{сп}} = \vec{\omega} \times \vec{v}_M$$

спрямоване перпендикулярно до миттєвої осі обертань (див. рис. 47).

Модуль цього прискорення

$$a_M^B = \omega v_M \sin 90^\circ = 2 \cdot 20,02 \cdot 1 = 40,04 \text{ см/с}^2.$$

Обертальне прискорення

$$\vec{a}_M^{o6} = \vec{\varepsilon} \times \vec{OM} = (\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_\perp) \times \vec{OM},$$

або

$$\vec{a}_M^{o6} = \vec{a}_{M1}^{o6} + \vec{a}_{M\perp}^{o6},$$

де

$$\vec{a}_{M1}^{o6} = \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{OM}; \quad (11)$$

$$\vec{a}_{M\perp}^{o6} = \vec{\varepsilon}_\perp \times \vec{OM}. \quad (12)$$

Оскільки напрямки $\vec{\varepsilon}_1$ та $\vec{\omega}$ збігаються, напрямки \vec{a}_{M1}^{o6} і \vec{v}_M також збігаються.

Модуль обертального прискорення

$$\begin{aligned} a_{M1}^{o6} &= \varepsilon_1 OM \sin(\vec{\varepsilon}_1, \vec{OM}) = \\ &= \varepsilon_1 OM \sin(180^\circ - \beta/2 + \gamma) = \varepsilon_1 OM \sin(\beta/2 - \gamma) = \\ &= 2,67 \cdot 24,78 \sin(60^\circ - 36,18^\circ) = 26,72 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Вектор $\vec{a}_{M\perp}^{o6}$ розміщений в площині xOz і перпендикулярно спрямований до OM (див. рис. 47).

Модуль

$$\begin{aligned} a_{M\perp}^{o6} &= \varepsilon_\perp OM \sin 90^\circ = \\ &= 2,55 \cdot 24,78 \cdot 1 = 63,19 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Прискорення точки M знаходимо як геометричну суму трьох складових:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_M^B + \vec{a}_{M1}^{o6} + \vec{a}_{M\perp}^{o6}.$$

Вектори \vec{a}_M^B та $\vec{a}_{M\perp}^{o6}$ лежать в площині yOz , а вектор \vec{a}_{M1}^{o6} перпендикулярний до цієї площини

Модуль прискорення точки M (див. рис. 47)

$$\begin{aligned} a_M &= \sqrt{(a_M^B)^2 + (a_{M\perp}^{o6})^2 - 2a_M^B a_{M\perp}^{o6} \cos(\beta/2 - \gamma) + (a_{M1}^{o6})^2} = \\ &= 35,77 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

2.4. СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

Завдання К-8

ВИЗНАЧЕННЯ АБСОЛЮТНИХ ШВИДКОСТІ ТА ПРИСКОРЕННЯ ТОЧКИ

Пропонуються два варіанти:

1. За заданими рівняннями відносного руху точки M і переносного руху тіла A визначити для моментів часу t_i ($i=1, 2, 3$) абсолютні швидкість та прискорення точки M .

Схеми механізмів показано на рис. 48, $a—z$, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 30.

Таблиця 30

Варі-ант	Схе-ма ме-ханізму	$\varphi_A(t)$, рад	$y_r(t)$	$z_r(t)$	t_1	t_2	t_3
			см		с		
1	Рис. 48, а	$t^2/9 - 9t$	$2 - 5 \sin \pi t/6$	$4 \cos(\pi t/6)$	0	3	9
2		$0,6t^{-2}$	$4t^2$	$2t^2 - 3$	0,5	1	1,5
3		$4 - 3t^2$	$t + 2$	$1 - 2t^2$	0	1	2
4		$\frac{4\sqrt{6}}{3}(t^2 + \sqrt{\frac{3}{2}}t)$	$2 \cos(\pi t^2/3) - 5$	$3 - 2 \sin(\pi t^2/3)$	0	$\sqrt{3/2}$	$\sqrt{3}$
5		$4t^2 + t$	$5 + 4 \sin(2\pi t)$	$8 \sin^2(\pi t)$	0	1/4	3/4
6		$1,5t - 4t^2$	$5 - 2 \cos(\pi t/3)$	$4 - 3 \sin(\pi t/3)$	0	3/2	3
7		$\frac{30}{\pi} \sin(\pi t/6)$	$3 \cos(\pi t/6) + 3$	$4 - 3 \sin(\pi t/6)$	0	3	6
8		$0,5t^2 + t$	$1 - 2 \cos(\pi t/4)$	$2 \sin(\pi t/4) + 3$	0	2	4
9		$2t^3 + 5t$	$5t^2 + 2,5$	$2t^2 + 1$	0	1/2	1
10		$t^3 - 2t$	$-3 - 9 \sin(\pi t^2/6)$	$3 - 9 \cos(\pi t^2/6)$	1	$\sqrt{3}$	3
Варі-ант	Схе-ма ме-ханізму	$\varphi_A(t)$, рад	$x_r(t)$	$y_r(t)$	t_1	t_2	t_3
			см		с		
11	Рис. 48, б	$4t - 0,2t^2$	$4 \cos(\pi t/3) + 1$	$4 \sin(\pi t/3)$	0	3/2	3
12		$t^3 - t^2$	$1 - 3 \sin(\pi t)$	$3 \cos(\pi t) + 1$	1/2	1	3/2
13		$t^2/2 - 3t$	$2 - 4 \sin(\pi t/6)$	$3 \sin(\pi t/6)$	1/2	1	2
14		$2t - t^3/2$	$10 + 20 \cos(\pi t/2)$	$-20 \sin(\pi t/2) + 10$	0	1	2
15		$2t^3$	$20 - 10 \sin^2(\pi t/3)$	$40 \sin^2(\pi t/3)$	1/2	1	2
16		$t + t^2/6$	$30 - 20 \cos(\pi t/6)$	$40 \sin^2(\pi t/6)$	0	3	6
17		$2t - 4t^2$	$20 \sin^2(\pi t) - 30$	$20 + 30 \cos^2(\pi t)$	1/2	1	1/4
18		$t - 0,1t^2$	$80 \cos(\pi t/6) + 20$	$30 - 80 \sin(\pi t/6)$	0	3	6
19		$0,3t^2$	$30 \cos^2(\pi t/4)$	$40 - 40 \sin(\pi t/4)$	1	2/3	2
20		$10t - 8t^2$	$40 \sin(\pi t/3)$	$20 - 30 \cos(\pi t/3)$	0	1/2	1

Вариант	Схема механізму	$\varphi_A(t)$, рад	$x_r(t)$	$y_r(t)$	t_1	t_2	t_3
			см			с	
21	Рис. 48,б	$0,4t^2$	$2t + 1$	$2 - 3t$	1	3/2	2
22		$3t - 0,1t^3$	$10 + 30 \sin(\pi t/6)$	$30 \cos(\pi t/6)$	0	3	9
23		$t - 0,5t^2$	$40 \cos(\pi t/3) + 10$	$20 + 30 \sin(\pi t/3)$	0	3/2	3
24		$0,2t^3 + t$	$40 \sin(\pi t/4) + 40$	$40 \cos(\pi t/4)$	0	2	4
25		$0,2t^2$	$3t^2 - 2t$	t	1	2	3
26		$2t - 4t^2$	$6/(1 + 2t)$	$1/2 + t$	1/2	1	3/2
27		$t + 5t^3$	$5 \cos(5\pi t^2/2)$	$5 \sin(5\pi t^2/2)$	0	1/√5	√ $\frac{2}{5}$
28		$4t - 0,2t^2$	$30 + 30 \sin^2(\pi t/2)$	$-30 \cos^2(\pi t/2) - 30$	0	1/2	1
29		$0,1t^2$	$2t^2 - 4$	$0,5t$	2	3	4
30		$0,2t^3$	$7 \sin(\pi t^2/6) + 3$	$2 - 7 \cos(\pi t^2/6)$	1	√2	√3
Вариант	Схема механізму	$\varphi_A(t)$, рад	$x_r(t)$	$y_r(t)$	t_1	t_2	t_3
			см			с	
31	Рис. 48,з	$3t^2 - 2t$	$30 - 20 \cos(\pi t/3)$	$-20 + 30 \sin(\pi t/3)$	0	3/2	3
32		$t - 0,5t^3$	$10 \sin(\pi t)$	$10 \cos^2(\pi t/2)$	1/2	3/2	2
33		$6t + t^2$	$10 - 20 \cos(\pi t/4)$	$30 + 20 \sin(\pi t/4)$	0	2	4
34		$0,5t^2$	$2t + 3$	t^2	1	2	3
35		$t + 0,4t^2$	$20t + 5$	$20 - 15t$	1/2	3/2	2
36		$2t + 0,5t^2$	$20 + 10 \sin(\pi t/6)$	$10 + 20 \cos(\pi t/6)$	0	3	6
37		$1,2t - 4t^2$	$2(\sin \pi t + \cos \pi t)$	$3(\sin \pi t - \cos \pi t)$	0	1/2	1
38		$t^3 - 5t$	$6 \sin(\pi t^2/6) - 2$	$3 + 6 \cos(\pi t^2/6)$	1	√2	√3
39		$1,5t - t^2$	$4 \cos^2(\pi t/3) + 2$	$4 \sin^2(\pi t/3)$	1/2	1	3/2
40		$2t^2 - 0,5t$	$2/(t + 1)$	$2t + 2$	0	1	2

2. Точка M рухається відносно тіла D . За заданим рівнянням відносного руху цієї точки (траєкторію відносного руху відомо) та руху тіла D визначити для моментів часу t_i (1, 2, 3) абсолютні швидкість і прискорення зазначеної точки. Схеми механізмів показано на рис. 49, а—в, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 31.

Таблиця 31

Вариант	$S_r(t)$, см	$\varphi_r(t)$, град	R	a	t_1	t_2	t_3
			см			с	
1	$30 \cos(\pi t/6)$	$-2t^2 + 3t$	30	50	2	3	4
2	$20\sqrt{3} \sin(\pi t)$	$4t^2 - t$	40	30	0	1/2	3/2
3	$25 \sin(\pi t/4)$	$-2t^2 + t$	—	25	0	2	6
4	$20 \cos(\pi t/4)$	$3t^2 - 4t$	20	—	4/3	2	16/3

Вариант	$S_r(t)$, см	$\varphi_r(t)$, град	R	a	t_1	t_2	t_3
			см		с		
5	$25\pi t^3/8$	$0,5t^2$	50	—	0	2	$3\sqrt{2}$
6	$36 \sin(\pi t)$	$-3t^2 + 2t$	—	—	1/3	1/2	7/3
7	$40 \cos(2\pi t)$	$2t - t^2$	—	40	0	1/4	1/2
8	$45\pi \sin(\pi t/3)$	$4t^2 - 2t$	90	50	0	3/2	9/2
9	$5\pi \sin(2\pi t)$	$-3t^2 + 2t$	10	—	0	1/4	3/4
10	$24 \cos(\pi t/4)$	$-t^2 + 5t$	—	24	0	2	4
11	$25 \sin(\pi t/3)$	$t^2 - 2t$	—	25	0	3/2	9/2
12	$18 \cos(\pi t/2)$	$2t^2 - 5t$	18	—	0	1	2
13	$10\pi \cos(\pi t/4)$	$2t - 0,3t^2$	40	20	0	4/3	4
14	$16\pi \sin(\pi t/2)$	$5t - t^2$	32	—	0	1	3
15	$18 \sin(\pi t/4)$	$10t - 0,1t^2$	—	$18\sqrt{2}$	0	2	3
16	$20\pi t^2$	$0,5t^2$	60	—	1/2	1	$\sqrt{3/2}$
17	$12\pi \sin(2\pi t)$	$4t - 0,2t^2$	24	—	0	1/4	3/4
18	$30 \cos(\pi t/3)$	$3t - 0,5t^2$	—	30	0	3/2	3
19	$20 \sin(\pi t/6)$	$0,2t^3 + t$	—	28	0	3	9
20	$20\pi \cos(\pi t/4)$	$5t - 4t^2$	40	20	0	2	4
21	$6t + 4t^2$	$2t^2 - 0,5t$	$16\sqrt{2}$	—	1	3/2	2
22	$15 \sin(\pi t)$	$1,2t - t^2$	—	40	0	1/2	3/2
23	$12\sqrt{3} \sin(\pi t/2)$	$3t^2 - 0,5t$	—	20	1/3	1	3
24	$40\pi \cos(\pi t/6)$	$4t - 1,6t^2$	40	—	2	3	4
25	$20\pi \sin(\pi t)$	$0,4t^2 + t$	40	20	0	1/6	3/2
26	$10\pi \cos(\pi t)$	$2t + 0,5t^2$	40	—	0	1/2	1
27	$20 \sin(\pi t/2)$	$2t^3 - t^2$	—	15	0	1	3
28	$15 \sin(\pi t/3)$	$t^3 + t$	$15\sqrt{2}$	15	0	3/2	3
29	$10\pi \sin(\pi t/4)$	$3t^2 - t$	20	—	0	2	6
30	$8 \cos(\pi t/6)$	$0,5t^2 + t$	—	16	0	3	6

Приклад 20. Горизонтальна пластинка A , перпендикулярна до осі Oz (рис. 48), обертається навколо осі z згідно з законом $\varphi_A = 2t - t^3/6$. У пластинці прорізано канавку (щілину), вздовж якої рухається точка M , рух якої описується рівняннями

$$x = 3 + 4 \cos(\pi t/6) \text{ см}, \quad y = 3 \sin(\pi t/6) \text{ см}.$$

Визначити швидкість і прискорення точки M для моментів часу $t_1 = 0$, $t_2 = 3$ с, $t_3 = 6$ с.

Розв'язання. Рух точки M складається з двох рухів: переносного, що визначається законом обертального руху пластинки A , та відносного, що описується рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Рівняння траєкторії відносного руху точки M

$$(x - 3)^2/16 + y^2/9 = 1$$

відображає еліпс (рис. 48, ∂ — ϵ).

Швидкість точки M

$$\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r,$$

де $\vec{v}_e = \vec{\omega}_e \times \vec{r}_e$ — переносна швидкість, а \vec{v}_r — відносна швидкість точки M .

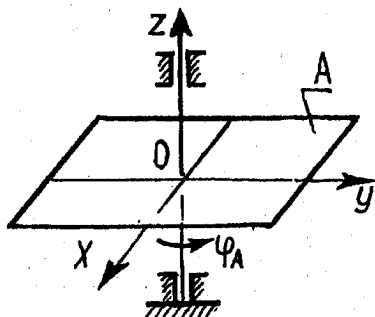


Рис. 48

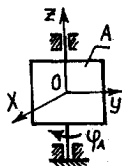


Рис. 48,а

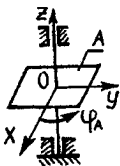


Рис. 48,б

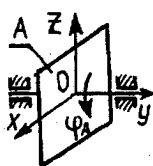


Рис. 48,в

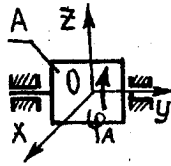


Рис. 48,г

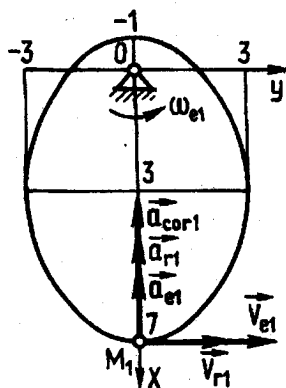


Рис. 48,д

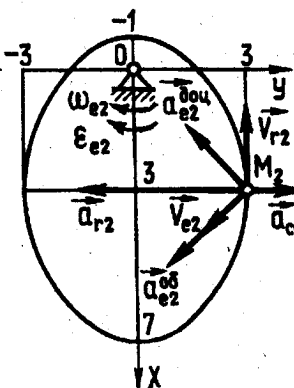


Рис. 48,е

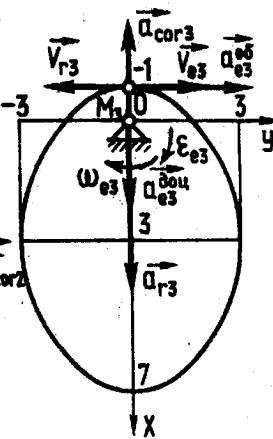


Рис. 48,е

Прискорення точки M

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_{\text{кор}}$$

де $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\text{доп}} + \vec{a}_e^{\text{об}}$ — переносне прискорення; a_r — прискорення точки M у відносному русі; $\vec{a}_{\text{кор}} = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r)$ — прискорення Коріоліса.

Переносна кутова швидкість пластинки A

$$\omega_e = \frac{d\varphi_A}{dt} = 2 - t^2/2,$$

причому для відповідних моментів часу

$$\omega_e|_{t=0} = 2 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_e|_{t_2=3 \text{ с}} = -2,5 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_e|_{t=6 \text{ с}} = -16 \text{ с}^{-1}.$$

Переносне кутове прискорення пластинки A

$$\varepsilon_e = -t.$$

Для відповідних моментів часу переносне кутове прискорення пластинки A

$$\varepsilon_e|_{t=0} = 0; \quad \varepsilon_e|_{t_2=3 \text{ с}} = -3 \text{ с}^{-2}; \quad \varepsilon_e|_{t_3=6 \text{ с}} = -6 \text{ с}^{-2}.$$

Положення точки M у відносному русі для відповідних моментів часу визначається її координатами:

$$\text{при } t_1 = 0 \quad x_1 = 7 \text{ см}, \quad y_1 = 0;$$

$$\text{при } t_2 = 3 \text{ с} \quad x_2 = 3 \text{ см}, \quad y_2 = 3 \text{ см};$$

$$\text{при } t_3 = 6 \text{ с} \quad x_3 = -1 \text{ см}, \quad y_3 = 0;$$

Значення переносної швидкості точки M для заданих моментів часу:

$$\text{при } t_1 = 0 \quad v_{e1} = \omega_{e1} R_{e1} = 2 \cdot 7 = 14 \text{ см/с};$$

$$\text{при } t_2 = 3 \text{ с} \quad v_{e2} = \omega_{e2} R_{e2} = -2,5 \cdot 3\sqrt{2} = -7,5\sqrt{2} \text{ см/с};$$

$$\text{при } t_3 = 6 \text{ с} \quad v_{e3} = \omega_{e3} R_{e3} = -16 \cdot 1 = -16 \text{ см/с}.$$

Відносна швидкість точки M

$$v_r = \sqrt{v_{rx}^2 + v_{ry}^2}, \quad \text{де } v_{rx} = \dot{x} = -\frac{2}{3}\pi \sin(\pi t/6); \quad v_{ry} = \dot{y} = \frac{\pi}{2} \cos(\pi t/6).$$

Значення проєкцій вектора відносної швидкості точки M на координатні осі Ox та Oy , які обертаються разом з пластинкою, для заданих моментів часу:

$$\text{при } t_1 = 0 \quad v_{r1x} = 0, \quad v_{r1y} = \pi/2 \text{ см/с};$$

$$\text{при } t_2 = 3 \text{ с} \quad v_{r2x} = -2\pi/3 \text{ см/с}, \quad v_{r2y} = 0;$$

$$\text{при } t_3 = 6 \text{ с} \quad v_{r3x} = 0, \quad v_{r3y} = -\pi/2 \text{ см/с}.$$

Швидкість точки M

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

де $v_x = v_{ex} + v_{rx}$, $v_y = v_{ey} + v_{ry}$.

Для заданих моментів часу маємо:

при $t_1 = 0$

$$v_{y1} = v_{e1} + v_{r1} = 14 + \pi/2 = 15,57 \text{ см/с},$$

$$v_{x1} = 0, \quad v_1 = 15,57 \text{ см/с};$$

при $t_2 = 3 \text{ с}$

$$v_{x2} = v_{e2} \cos 45^\circ - 2\pi/3 = 7,5\sqrt{2} \sqrt{2}/2 - 2\pi/3 = 5,4 \text{ см/с};$$

$$v_{y2} = -v_{e2} \cos 45^\circ + v_{r2y} = -7,5\sqrt{2} \sqrt{2}/2 = -7,5 \text{ см/с};$$

$$v_2 = \sqrt{v_{x2}^2 + v_{y2}^2} = \sqrt{5,4^2 + (-7,5)^2} = 9,24 \text{ см/с};$$

при $t_3 = 6 \text{ с}$

$$v_{x3} = v_{e3x} + v_{r3x} = 0, \quad v_{y3} = v_{e3y} + v_{r3y} = 16 - \pi/2 = 14,43 \text{ см/с};$$

$$v_3 = \sqrt{v_{x3}^2 + v_{y3}^2} = 14,43 \text{ см/с}.$$

Складові переносного прискорення для заданих моментів часу:

при $t_1 = 0$

$$a_{e1}^{\text{доп}} = \omega_{e1}^2 R_{e1} = 2^2 \cdot 7 = 28 \text{ см/с}^2, \quad a_{e1}^{06} = \varepsilon_{e1} R_{e1} = 0 \cdot 7 = 0;$$

при $t_2 = 3 \text{ с}$

$$a_{e2}^{\text{доп}} = \omega_{e2}^2 R_{e2} = (-2,5)^2 \cdot 3\sqrt{2} = 18,75\sqrt{2} \text{ см/с}^2;$$

$$a_{e2}^{06} = \varepsilon_{e2} R_{e2} = (-3) \cdot 3\sqrt{2} = -9\sqrt{2} \text{ см/с}^2;$$

при $t_3 = 6 \text{ с}$

$$a_{e3}^{\text{доп}} = \omega_{e3}^2 R_{e3} = (-16)^2 \cdot 1 = 256 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{e3}^{06} = \varepsilon_{e3} R_{e3} = (-6) \cdot 1 = -6 \text{ см/с}^2.$$

Відносне прискорення точки M

$$a_r = \sqrt{a_{rx}^2 + a_{ry}^2},$$

де проекції вектора прискорення точки M на координатні осі, що обертаються разом з пластинкою A ,

$$a_{rx} = \ddot{x} = -\frac{\pi^2}{9} \cos(\pi t/6), \quad a_{ry} = -\frac{\pi^2}{12} \sin(\pi t/6).$$

Відносні прискорення точки M для заданих моментів часу t_i :
при $t_1 = 0$

$$a_{r1x} = -\pi^2/9 \text{ см/с}^2, \quad a_{r1y} = 0;$$

$$a_{r1} = \sqrt{a_{r1x}^2 + a_{r1y}^2} = \pi^2/9 \text{ см/с}^2;$$

при $t_2 = 3 \text{ с}$

$$a_{r2x} = 0, \quad a_{r2y} = -\pi^2/12 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{r2} = \sqrt{a_{r2x}^2 + a_{r2y}^2} = \pi^2/12 \text{ см/с}^2;$$

при $t_3 = 6 \text{ с}$

$$a_{r3x} = \pi^2/9 \text{ см/с}^2, \quad a_{r3y} = 0;$$

$$a_{r3} = \sqrt{a_{r3x}^2 + a_{r3y}^2} = \pi^2/9 \text{ см/с}^2.$$

Напрямок вектора прискорення Кориоліса для моментів часу t_i показано на рис. 48, δ — ϵ , а його значення:

$$\text{при } t_1 = 0 \quad a_{\text{кор}1} = 2\omega_{e1}v_{r1} = 2 \cdot 2\pi/2 = 6,28 \text{ см/с}^2;$$

$$\text{при } t_2 = 3 \text{ с} \quad a_{\text{кор}2} = 2\omega_{e2}v_{r2} = 21 - 2,51 \cdot 2\pi/3 = 10,47 \text{ см/с}^2;$$

$$\text{при } t_3 = 6 \text{ с} \quad a_{\text{кор}3} = 2\omega_{e3}v_{r3} = 21 - 161\pi/2 = 50,27 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного прискорення $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, де відповідні проекції a_x та a_y на осі координат

$$a_x = a_{ex}^{\text{доц}} + a_{ex}^{\text{об}} + a_{rx} + a_{\text{кор}x}; \quad a_y = a_{ey}^{\text{доц}} + a_{ey}^{\text{об}} + a_{ry} + a_{\text{кор}y}.$$

Для моментів часу t_i ($i = 1, 2, 3$) значення a_x , a_y й a відповідно становлять:

при $t_1 = 0$

$$a_{x1} = a_{e1x}^{\text{доц}} + a_{e1x}^{\text{об}} + a_{r1x} + a_{\text{кор}x} = -28 + 0 - \pi^2/9 - 2\pi = -35,38 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{y1} = a_{e1y}^{\text{доц}} + a_{e1y}^{\text{об}} + a_{r1y} + a_{\text{кор}y} = 0;$$

$$a_1 = \sqrt{a_{x1}^2 + a_{y1}^2} = 35,38 \text{ см/с}^2;$$

при $t_2 = 3$ с

$$a_{x2} = a_{ex2}^{\text{доп}} + a_{ex2}^{\text{об}} + a_{r2x} + a_{\text{кор}x} = -a_{ex2}^{\text{доп}} \cos 45^\circ + a_{ex2}^{\text{об}} \cos 45^\circ = \\ = -18,75\sqrt{2} \sqrt{2}/2 + 9\sqrt{2} \sqrt{2}/2 = -9,75 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{y2} = a_{e2y}^{\text{доп}} + a_{e2y}^{\text{об}} + a_{r2y} + a_{\text{кор}y} = \\ = -18,75\sqrt{2} \sqrt{2}/2 - 9\sqrt{2} \sqrt{2}/2 - \pi^2/12 + 10,47 = -18,1 \text{ см/с}^2;$$

$$a_2 = \sqrt{a_{x2}^2 + a_{y2}^2} = \sqrt{(-9,75)^2 + (-18,1)^2} = 20,56 \text{ см/с}^2;$$

при $t_3 = 6$ с

$$a_{3x} = a_{e3x}^{\text{доп}} + a_{e3y}^{\text{об}} + a_{r3x} + a_{\text{кор}3x} = 256 + \pi^2/9 - 50,27 = 206,8 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{3y} = a_{e3y}^{\text{доп}} + a_{e3y}^{\text{об}} + a_{r3y} + a_{\text{кор}3y} = a_{e3y}^{\text{об}} = 6 \text{ см/с}^2;$$

$$a_3 = \sqrt{a_{3x}^2 + a_{3y}^2} = \sqrt{206,8^2 + 6^2} = 206,9 \text{ см/с}^2.$$

Напрямки векторів швидкостей і прискорень точок M_1 , M_2 та M_3 для моментів часу $t_1 = 0$, $t_2 = 3$ с, $t_3 = 6$ с показано на рис. 48, δ — ϵ , а їхні значення наведено в табл. 32.

Таблиця 32

$t, \text{с}$	x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a
	см		см/с			см/с ²		
0	7	0	0	15,57	15,57	-35,38	0	35,38
3	3	3	5,4	-7,5	9,24	-9,75	-18,1	20,56
6	-1	0	0	14,43	14,43	206,8	6	206,9

Приклад 21. Дано: схему механізму (рис. 49); $s_r = AM = 30\pi \cos(\pi t/6)$ см; $\varphi_e = 6t + t^2$ рад; $R = 60$ см; $t_1 = 0$; $t_2 = 3$ с; $t_3 = 6$ с.

Визначити швидкість і прискорення точки M у момент часу t_i ($i = 1, 2, 3$).

Розв'язання. В розглядуваному прикладі траєкторію відносного руху механізму відомо: це півколо радіусом R . Положення точки M на траєкторії у відносному русі механізму визначається дуговою координатою, а саме:

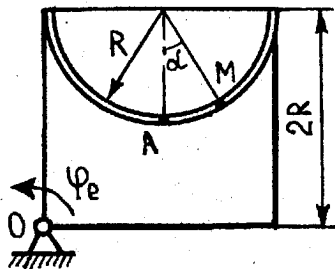


Рис. 49

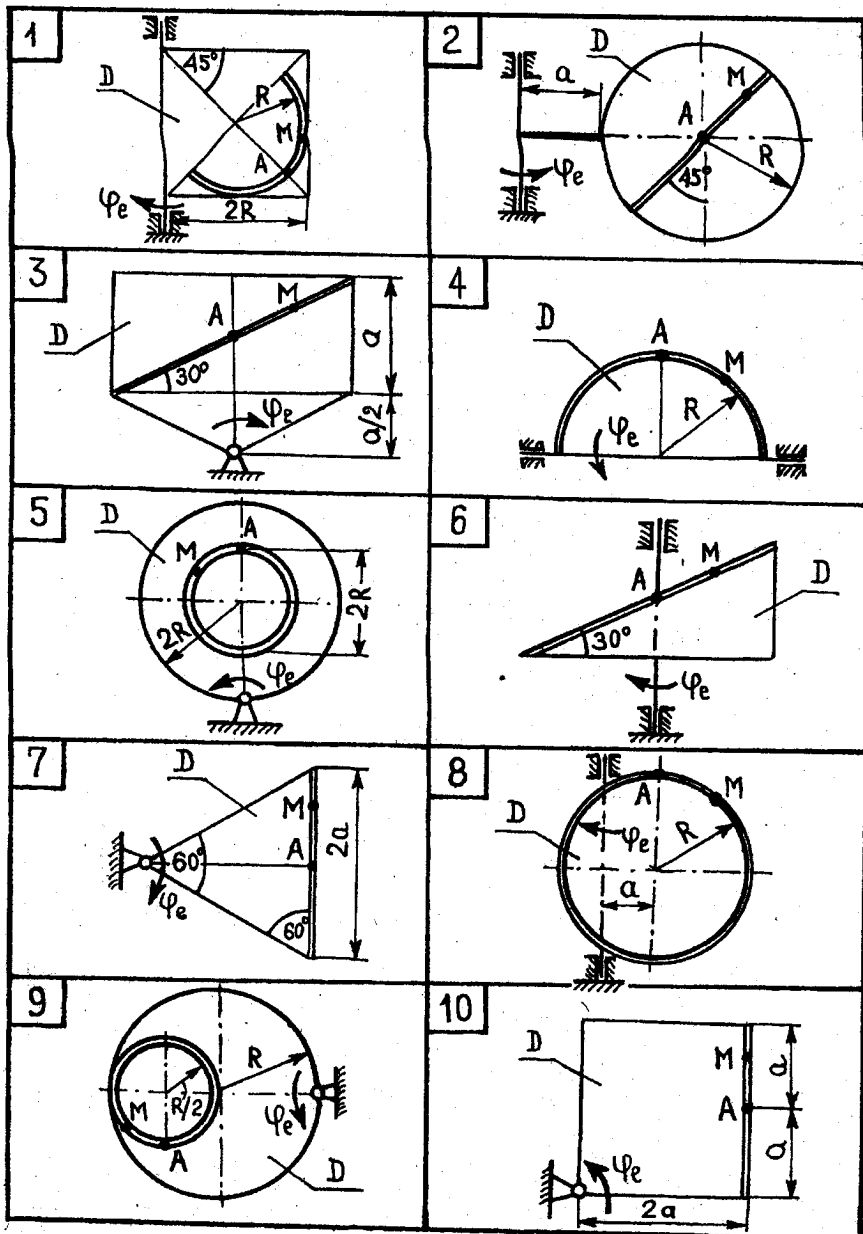


Рис. 49,а

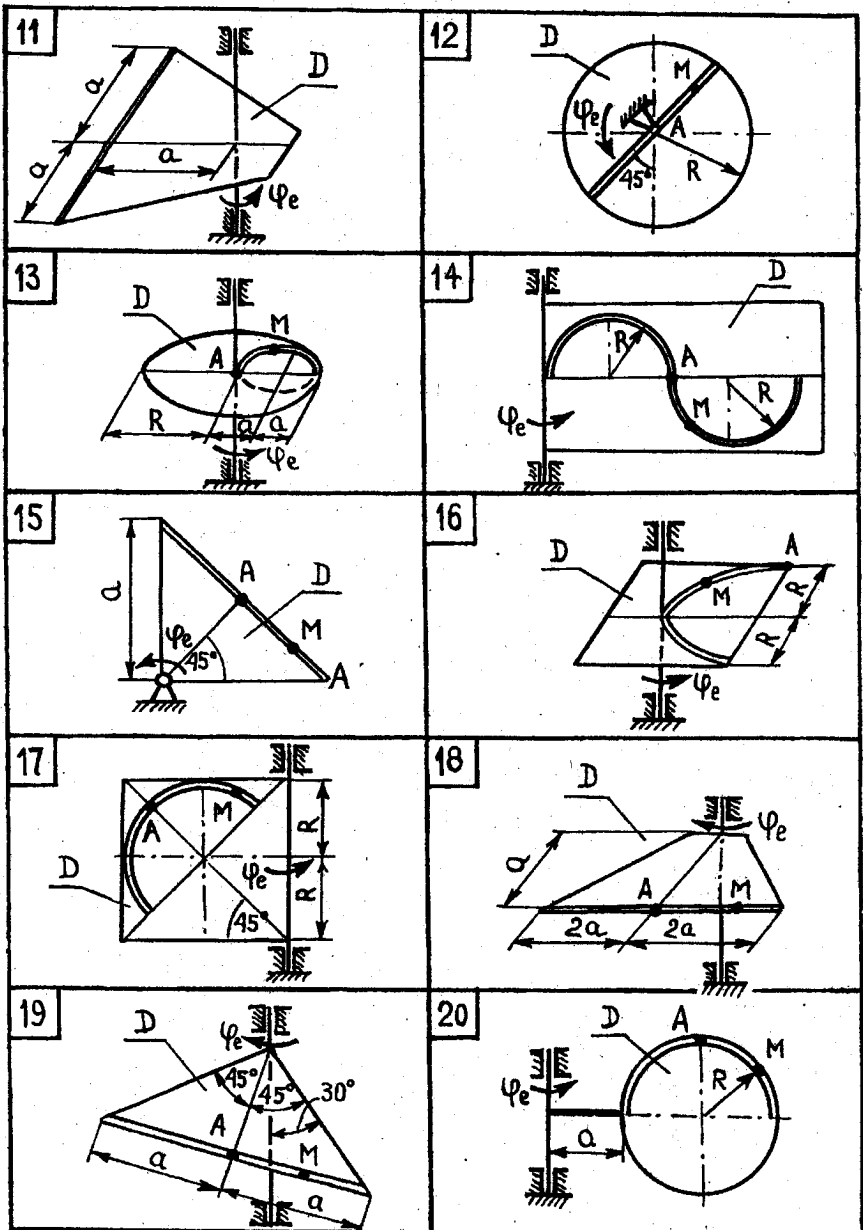


Рис. 49,6

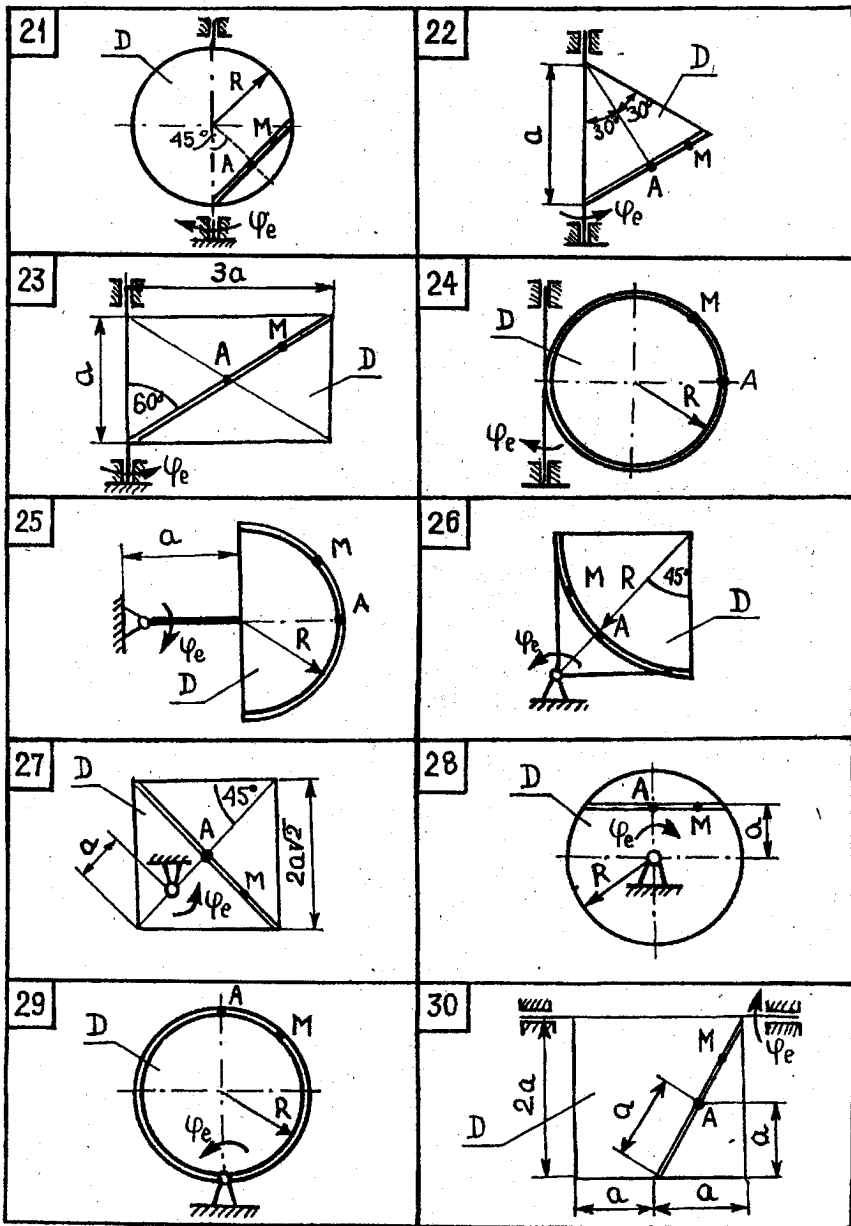


Рис. 49,6

при $t_1 = 0$ $s_r|_{t_1=0} = 30\pi$ см; при $t_2 = 3$ с $s_r|_{t_2=3\text{с}} = 0$; при $t_3 = 6$ с $s_r|_{t_3=6\text{с}} = -30\pi$ см.

Якщо ввести кут α (див. рис. 49), що визначає положення точки M , то матимемо:

при $t_1 = 0$ $\alpha_1 = s_r|_{t_1}/R = \pi/2$; при $t_2 = 3$ с $\alpha_2 = s_r|_{t_2}/R = 0$; при $t_3 = 6$ с $\alpha_3 = s_r|_{t_3}/R = -\pi/2$.

Абсолютна швидкість точки M

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

Модуль відносної швидкості цієї точки

$$v_r = |\dot{s}_r|,$$

де $\dot{s}_r = -5\pi^2 \sin(\pi t/6)$.

Для моментів часу t_i знаходимо:

при $t_1 = 0$ $v_{r1} = 0$; при $t_2 = 3$ с $v_{r2} = -5\pi^2$ см/с; при $t_3 = 6$ с $v_{r3} = 0$.

Від'ємний знак біля v_r указує на те, що вектор \vec{v}_r спрямований протилежно до зростання s_r .

Модуль переносної швидкості точки M

$$v_e = \omega_e R_e,$$

де R_e — радіус обертання точки M у переносному русі, причому для відповідних моментів часу t_i в розглядуваному прикладі маємо:

$$\text{при } t_1 = 0 \quad R_{e1} = 2R\sqrt{2} = 120\sqrt{2} \text{ см};$$

$$\text{при } t_2 = 3 \text{ с} \quad R_{e2} = R\sqrt{2} = 60\sqrt{2} \text{ см};$$

$$\text{при } t_3 = 6 \text{ с} \quad R_{e3} = 2R = 120 \text{ см}.$$

Переносна кутова швидкість точки M

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 6 + 2t.$$

Для моментів часу t_i знаходимо:

$$\text{при } t_1 = 0 \quad \omega_{e1} = 6 \text{ с}^{-1};$$

$$\text{при } t_2 = 3 \text{ с} \quad \omega_{e2} = 12 \text{ с}^{-1};$$

$$\text{при } t_3 = 6 \text{ с} \quad \omega_{e3} = 18 \text{ с}^{-1}.$$

Отже, модуль переносної швидкості точки M для моментів часу t_i становить:

$$\text{при } t_1 = 0 \\ v_{e1} = 6 \cdot 120\sqrt{2} = 720\sqrt{2} \text{ см/с;}$$

$$\text{при } t_2 = 3 \text{ с} \\ v_{e2} = 12 \cdot 60\sqrt{2} = 720\sqrt{2} \text{ см/с;}$$

$$\text{при } t_3 = 6 \text{ с } v_{e3} = 18 \cdot 120 = 2160 \text{ см/с.}$$

Напрямки векторів \vec{v}_e і \vec{v}_r показано на рис. 50.

Швидкість точки M_i для моментів часу t_i становить:

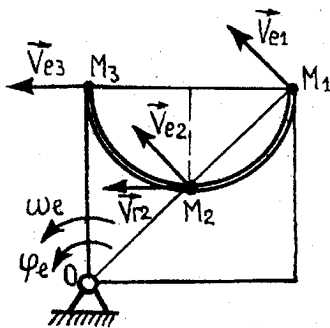


Рис. 50

$$\text{при } t_1 = 0 \quad v_{M1} = v_{e1} = 720\sqrt{2} \text{ см/с;}$$

$$\begin{aligned} \text{при } t_2 = 3 \text{ с } v_{M2} &= \sqrt{v_{e2}^2 + v_{r2}^2 + 2v_{e2} v_{r2} \cos 45^\circ} = \\ &= \sqrt{720^2 \cdot 2 + (5\pi^2)^2 + 2 \cdot 720\sqrt{2} \cdot 5\pi^2\sqrt{2}/2} = \\ &= 1053,7 \text{ см/с} = 10,54 \text{ м/с;} \end{aligned}$$

$$\text{при } t_3 = 6 \text{ с } v_{M3} = v_{e3} = 2160 \text{ см/с} = 21,6 \text{ м/с.}$$

Прискорення точки M

$$\vec{a} = \vec{a}_e^{\text{доп}} + \vec{a}_e^{06} + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^r + \vec{a}_{\text{кор}},$$

причому

$$a_e^{\text{доп}} = \omega_e^2 R_e; \quad a_e^{06} = \varepsilon_e R_e; \quad a_r^n = v_r^2/R; \quad a_r^r = \frac{dv_r}{dt}; \quad \vec{a}_{\text{кор}} = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r).$$

У розглядуваному прикладі для моментів часу t_i маємо:

$$\text{при } t_1 = 0 \quad a_{e1}^{\text{доп}} = 6^2 \cdot 120\sqrt{2} = 4320\sqrt{2} \text{ см/с}^2 = 43,2\sqrt{2} \text{ м/с}^2;$$

$$\text{при } t_2 = 3 \text{ с } a_{e2}^{\text{доп}} = 12^2 \cdot 60\sqrt{2} = 8640\sqrt{2} \text{ см/с}^2 = 86,4\sqrt{2} \text{ м/с}^2;$$

$$\text{при } t_3 = 6 \text{ с } a_{e3}^{\text{доп}} = 18^2 \cdot 120 = 38\,880 \text{ см/с}^2 = 388,8 \text{ м/с}^2.$$

Модуль обертального прискорення точки M

$$a_e^{06} = \varepsilon_e R_e,$$

де переносне кутове прискорення

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 2 \text{ с}^{-2}.$$

Тому дістаємо:

$$\text{при } t_1 = 0 \quad a_{e1}^{o\delta} = 2 \cdot 120\sqrt{2} = 240\sqrt{2} \text{ см/с}^2 = 2,4\sqrt{2} \text{ м/с}^2;$$

$$\text{при } t_2 = 3 \text{ с} \quad a_{e2}^{o\delta} = 2 \cdot 60\sqrt{2} = 120\sqrt{2} \text{ см/с}^2 = 1,2\sqrt{2} \text{ м/с}^2;$$

$$\text{при } t_3 = 6 \text{ с} \quad a_{e3}^{o\delta} = 2 \cdot 120 = 240 \text{ см/с}^2 = 2,4 \text{ м/с}^2;$$

Значення відносного нормального прискорення \vec{a}_r^n точки M для моментів часу t_i становить:

$$\text{при } t_1 = 0 \quad a_{r1}^n = 0;$$

$$\text{при } t_2 = 3 \text{ с} \quad a_{r2}^n = 25\pi^4/60 = 5\pi^4/12 = 40,6 \text{ см/с}^2 = 0,41 \text{ м/с}^2;$$

$$\text{при } t_3 = 6 \text{ с} \quad a_{r3}^n = 0.$$

Дотичне прискорення точки M у відносному русі

$$a_r^t = \frac{dv_r}{dt} = -\frac{5\pi^3}{6} \cos(\pi t/6).$$

Для моментів часу t_i маємо:

$$\text{при } t_1 = 0 \quad a_{r1}^t = -5\pi^3/6 = -25,83 \text{ см/с}^2 = -0,26 \text{ м/с}^2;$$

$$\text{при } t_2 = 3 \text{ с} \quad a_{r2}^t = 0;$$

$$\text{при } t_3 = 6 \text{ с} \quad a_{r3}^t = 5\pi^3/6 = 0,26 \text{ м/с}^2.$$

Коріолісове прискорення точки M для моментів часу t_i становить:

$$\text{при } t_1 = 0$$

$$a_{cor1} = 2\omega_{e1} v_{r1} = 2 \cdot 6 \cdot 0 = 0;$$

$$\text{при } t_2 = 3 \text{ с}$$

$$a_{cor2} = 2\omega_{e2} v_{r2} \sin 90^\circ = 2 \cdot 12 \cdot 5\pi^2 = 11,84 \text{ м/с}^2;$$

$$\text{при } t_3 = 6 \text{ с}$$

$$a_{cor3} = 2\omega_{e3} v_{r3} = 2 \cdot 18 \cdot 0 = 0.$$

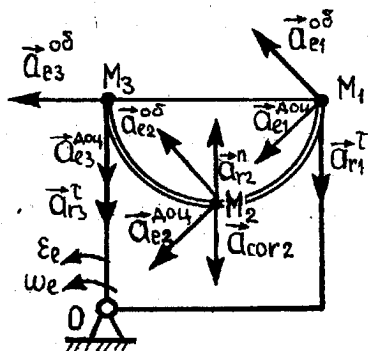


Рис. 51

На рис. 51 зображено напрямки складових векторів прискорень точок M_i .

Значення цих прискорень для відповідних моментів часу t_i становлять:

$$\text{при } t_1 = 0 \quad a_{M_1} = 61,36 \text{ м/с}^2;$$

$$\text{при } t_2 = 3 \text{ с} \quad a_{M_2} = 130,43 \text{ м/с}^2;$$

$$\text{при } t_3 = 6 \text{ с} \quad a_{M_3} = 389,1 \text{ м/с}^2.$$

2.5. СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

Завдання К-9

ДОДАВАННЯ ОБЕРТАЛЬНИХ РУХІВ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО ПАРАЛЕЛЬНИХ ОСЕЙ

Визначити кутові швидкості веденого вала II і сателітів редуктора. Схеми редукторів показано на рис. 52, а—в, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 33.

В и п а д о к 1. Обертання відбуваються навколо паралельних осей, причому так, що кутові швидкості цих обертань спрямовано в один бік.

Нехай тверде тіло обертається навколо двох паралельних осей з кутовими швидкостями $\vec{\omega}_1$ та $\vec{\omega}_2$, спрямований в один бік (рис. 52). В такому випадку розподіл кутових швидкостей в площинах, перпендикулярних до осей обертань, буде однаковий. Розглянемо площину Π , в якій лежать точки A і B (точки перетину осей обертань з площиною Π). У цій площині є така точка C , швидкість якої дорівнює нулю.

З одного боку

$$v_{1C} = \omega_1 AC,$$

а з іншого

$$v_{2C} = \omega_2 BC.$$

Якщо вважати, що

$$v_{1C} = v_{2C},$$

то матимемо

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{BC}{AC} \quad (\text{умова, за якої } v_C = 0).$$

На підставі цієї умови вісь CC' є миттєвою віссю підсумкового обертального руху тіла.

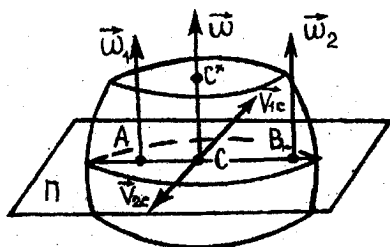


Рис. 52

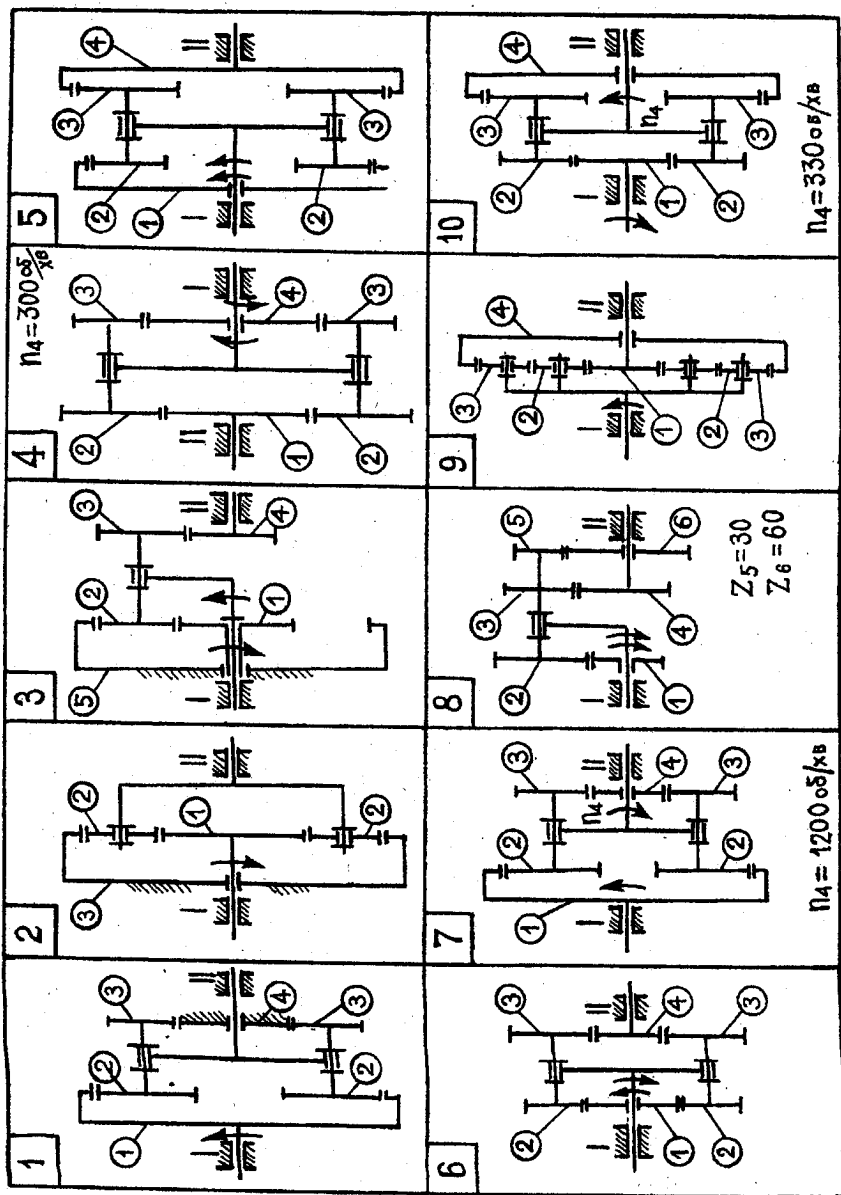


Рис. 52,а

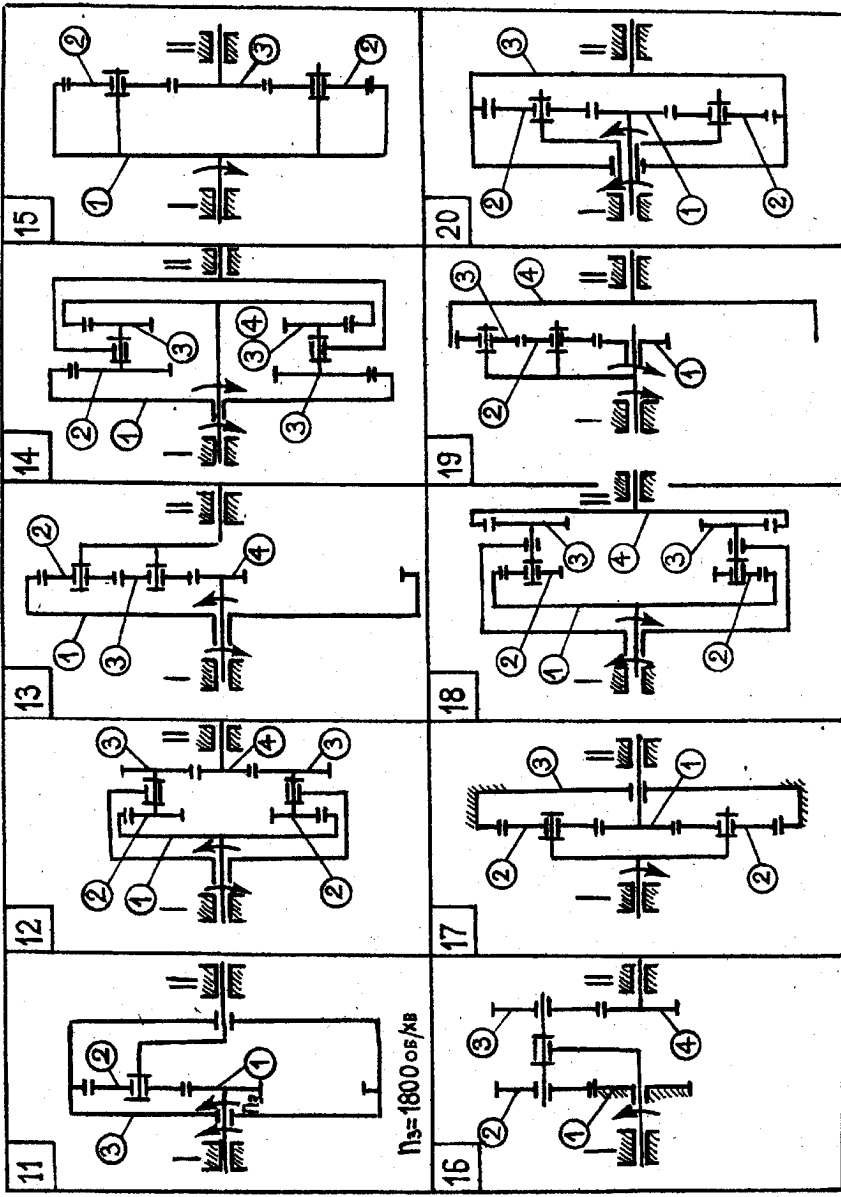
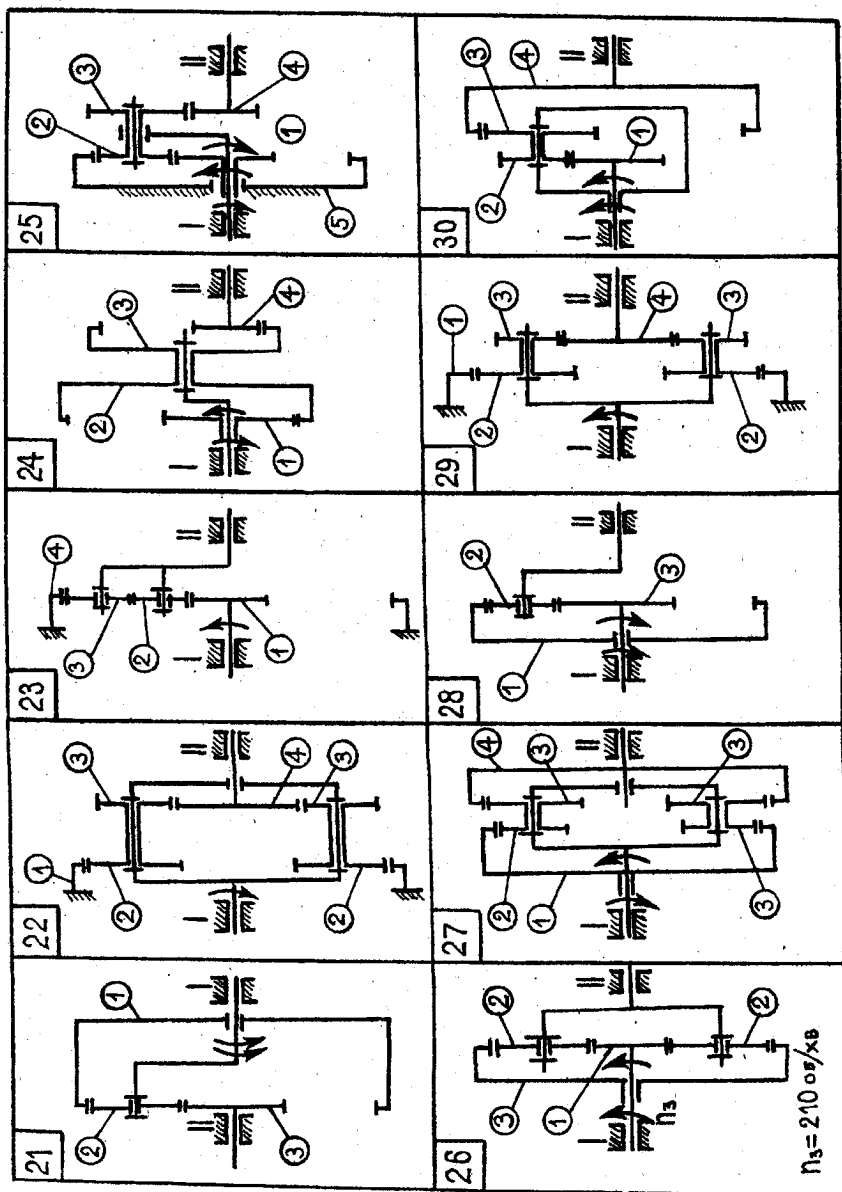


Рис. 52,б



Ва- рі- ант	n_i об/хв	n_i , об/хв	Остання цифра номера залікової книжки																			
			0			1			2			3			4							
			z_1	z_2	z_3	z_1	z_2	z_3	z_1	z_2	z_3	z_1	z_2	z_3	z_1	z_2	z_3	z_1	z_2	z_3		
Кількість зубців шестерень																						
1	1200	—	90	30	20	40	120	30	40	50	90	20	30	40	120	44	26	50	120	35	25	60
2	975	—	30	24	78	—	24	30	84	—	18	33	84	—	20	32	84	—	28	28	84	—
3	1500	975	80	20	40	60	90	30	50	70	70	20	30	60	70	30	40	60	84	24	48	60
4	600	—	25	25	15	35	30	20	10	40	20	30	20	30	15	35	25	25	26	24	35	15
5	1200	1800	70	20	30	80	80	25	35	90	78	24	36	90	94	28	24	90	69	18	33	84
6	900	600	60	40	20	80	70	50	30	90	60	30	20	70	60	38	20	78	69	42	24	87
7	1800	—	90	30	20	40	120	35	25	60	120	30	40	50	90	20	30	40	120	40	30	50
8	1350	450	40	50	20	70	60	30	45	45	30	60	20	70	70	20	30	60	70	20	60	30
9	870	—	20	40	30	160	15	20	15	85	20	15	15	80	20	20	15	90	30	15	20	100
10	570	—	40	20	30	90	50	30	40	120	40	30	20	90	50	26	44	120	60	25	35	120
11	3000	—	20	25	70	—	30	30	90	—	40	40	120	—	25	20	65	—	18	26	70	—
12	900	1200	120	30	40	50	96	26	35	35	140	60	40	40	87	37	30	20	90	30	40	20
13	600	900	110	15	30	20	150	30	30	30	120	26	24	20	130	22	28	30	95	20	20	15
14	270	600	55	15	10	50	70	20	30	80	80	25	35	90	78	24	36	90	94	28	34	100
15	810	—	84	28	28	—	84	33	18	—	84	32	20	—	78	24	30	—	84	30	24	—

Ва- рі- ант	п ₁ , об/хв	п ₂ , об/хв	Остання цифра номера залікової книжки																										
			5				6				7				8				9										
			z ₁	z ₂	z ₃	z ₄	z ₁	z ₂	z ₃	z ₄	z ₁	z ₂	z ₃	z ₄	z ₁	z ₂	z ₃	z ₄	z ₁	z ₂	z ₃	z ₄							
1	900	—	120	60	40	20	90	25	35	30	80	20	30	30	120	30	50	40	100	40	20	40	30	50	40	100	40	20	40
2	1500	—	30	20	70	—	26	26	78	—	20	32	84	—	34	22	78	—	22	24	70	—	34	22	78	—	22	24	70
3	1200	900	60	40	20	80	70	50	30	90	60	30	20	70	60	38	20	78	60	48	24	84	60	38	20	78	60	48	24
4	1200	—	40	10	25	25	24	26	25	25	30	20	28	22	28	22	30	20	25	25	25	25	28	22	30	20	25	25	25
5	870	1200	80	30	20	70	90	35	25	80	90	36	24	78	90	34	28	84	84	33	18	69	90	34	28	84	84	33	18
6	1410	900	40	60	20	80	70	50	30	90	60	30	20	70	78	20	38	60	87	24	42	69	78	20	38	60	87	24	42
7	1350	—	80	20	30	30	100	30	40	30	120	44	26	50	110	30	40	40	120	45	35	40	40	30	40	40	120	45	35
8	570	810	50	40	45	45	45	45	40	50	50	40	70	20	30	60	45	45	25	65	55	35	60	45	45	45	25	65	55
9	1200	—	30	15	15	90	30	20	20	110	20	25	15	100	20	30	20	120	30	20	30	130	20	30	20	120	30	20	30
10	1800	—	50	40	30	120	42	30	48	120	50	20	50	120	80	40	60	180	80	60	40	180	80	40	60	180	80	60	40
11	1500	—	40	30	100	—	36	22	80	—	30	40	110	—	20	35	90	—	24	33	90	—	20	35	90	—	24	33	90
12	600	300	80	20	40	20	120	40	30	50	90	30	20	40	70	20	30	20	150	60	50	40	70	20	30	20	150	60	50
13	630	1500	140	30	20	40	140	35	25	20	130	24	24	34	115	22	23	25	110	18	24	26	115	22	23	25	110	18	24
14	450	570	90	35	25	80	80	30	20	70	90	34	28	84	90	36	24	78	69	18	33	84	90	36	24	78	69	18	33
15	600	—	100	40	20	—	100	35	30	—	93	35	23	—	90	27	36	—	120	40	40	—	90	27	36	—	120	40	—

Ва- рі- ант	n ₁ , об./хв	Остання цифра номера залікової книжки																					
		0			1			2			3			4									
		z ₁	z ₂	z ₃	z ₁	z ₂	z ₃	z ₁	z ₂	z ₃	z ₁	z ₂	z ₃	z ₁	z ₂	z ₃	z ₄						
		Кількість зубців шестерень																					
16	1200	40	60	30	70	27	39	45	21	78	20	38	60	57	24	42	39	39	45	33	51		
17	1410	40	30	100	—	30	25	80	—	20	25	70	—	30	30	90	—	18	26	70	—	—	
18	120	300	94	28	24	90	80	30	20	70	84	33	18	69	90	24	78	67	18	38	87		
19	1500	870	20	30	20	120	30	15	25	110	40	18	22	120	18	33	126	20	30	15	110		
20	900	1200	30	24	78	—	24	30	84	—	18	33	84	—	32	26	84	—	28	28	84	—	—
21	1800	1500	90	33	24	—	90	27	36	—	75	24	27	—	75	27	21	—	110	35	40	—	—
22	570	—	180	60	40	80	120	30	40	50	180	40	60	80	120	48	42	180	50	40	90		
23	870	—	27	33	33	159	33	24	27	135	21	18	24	105	24	24	120	30	21	24	120		
24	975	1470	30	80	70	20	36	84	74	26	33	84	74	23	30	84	20	32	80	70	22		
25	600	900	22	49	24	47	26	47	33	40	60	30	60	30	30	45	25	60	30	40	50		
26	330	—	20	30	80	—	30	15	60	—	20	40	100	—	40	25	90	—	34	33	100	—	—
27	1200	1500	70	20	30	80	80	25	35	90	120	30	60	150	69	18	84	80	30	20	70		
28	1800	1200	60	15	30	—	100	40	20	—	70	20	30	—	66	24	18	—	78	21	36	—	—
29	1350	—	90	20	30	40	84	24	20	40	78	33	15	30	69	18	24	93	27	39	27		
30	270	630	80	40	60	180	40	50	30	120	80	60	40	180	42	30	48	90	40	50	180		

Ва- рі- ант	n_i , об./хв	n_i , об./хв	Остання цифра номера залікової книжки																							
			5				6				7				8				9							
			z1	z2	z3	z4	z1	z2	z3	z4	z1	z2	z3	z4	z1	z2	z3	z4	z1	z2	z3	z4				
16	1500	—	80	20	40	60	50	30	20	60	30	70	20	60	30	75	27	45	57	87	24	42	69			
17	1350	—	36	22	80	—	40	40	120	—	20	35	90	—	30	35	100	—	24	33	90	—				
18	480	810	40	10	20	50	60	20	30	70	90	30	20	80	78	24	36	90	69	18	33	84				
19	870	1200	30	30	30	150	15	20	20	95	20	20	22	130	27	33	21	135	33	27	24	135				
20	1800	1350	27	21	69	—	24	27	78	—	21	33	87	—	33	27	87	—	30	30	90	—				
21	1200	1410	70	20	30	—	60	20	20	—	100	30	40	—	120	40	40	—	100	40	20	—				
22	670	—	120	30	50	40	120	42	48	30	180	40	60	80	150	60	40	50	140	50	60	30				
23	900	—	20	20	20	100	30	25	25	130	33	27	21	129	27	24	28	131	30	30	30	150				
24	1200	930	30	90	120	60	21	75	87	33	54	87	75	42	60	90	60	30	42	69	63	36				
25	330	570	20	50	30	40	30	45	25	50	24	48	36	36	36	42	36	42	38	41	36	43				
26	390	—	36	27	90	—	48	21	90	—	30	30	90	—	40	40	120	—	27	33	93	—				
27	1500	1350	84	33	18	40	90	36	24	78	87	33	24	78	120	40	20	100	84	24	18	78				
28	1410	1800	60	20	20	—	90	30	30	—	120	40	40	—	81	24	33	—	90	27	36	—				
29	930	—	180	60	40	80	120	30	50	40	150	60	45	45	180	50	40	90	120	50	30	40				
30	600	300	40	20	30	90	60	25	35	120	50	26	44	120	50	30	40	120	40	30	20	90				

Нехай $\vec{\omega}$ — миттєва кутова швидкість тіла, спрямована вздовж осі CC^* . Визначимо швидкість точки A .

З одного боку,

$$v_A = \omega_2 AB,$$

а з іншого

$$v_A = \omega AC.$$

Тому

$$\omega AC = \omega_2 AB.$$

Звідси

$$\omega = \omega_2 \frac{AB}{AC} = \omega_2 \frac{AC + CB}{AC} = \omega_2 \left(1 + \frac{CB}{AC} \right).$$

Оскільки

$$\omega_1 / \omega_2 = BC / AC,$$

маємо

$$\omega = \omega_2 \left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) = \omega_1 + \omega_2.$$

У даному випадку підсумкове обертання тіла відбувається навколо миттєвої осі CC^* із сумарною кутовою швидкістю $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

В и п а д о к 2. Тверде тіло обертається з кутовими швидкостями $\vec{\omega}_1$ та $\vec{\omega}_2$, паралельними одна одній і спрямованими в різні боки (рис. 53).

Визначимо підсумковий рух тіла, вважаючи, що $\omega_2 > \omega_1$. Діючи так, як і в попередньому випадку, маємо

$$v_{2C} = v_{1C}; \quad \omega_2 AC = \omega_1 BC,$$

або

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC + CB}{AC} = 1 + \frac{CB}{AC}.$$

Вісь CC^* , паралельна ω_2 , є миттєвою віссю обертання тіла.

Швидкість точки A

$$v_A = \omega CA = \omega_1 AB,$$

звідки

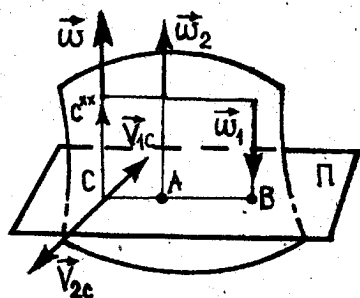


Рис. 53

$$\omega = \omega_1 \frac{AB}{AC}$$

З іншого боку,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = -1.$$

Тоді $\omega = \omega_1(\omega_2/\omega_1 - 1) = \omega_2 - \omega_1$.

Отже, тіло, обертаючись навколо паралельних осей з кутовими швидкостями $\vec{\omega}_1$ та $\vec{\omega}_2$, спрямованими в різні боки, виконує обертання навколо миттєвої осі CC'' з кутовою швидкістю

$$\omega = \omega_2 - \omega_1.$$

Напрямок вектора підсумкової кутової швидкості $\vec{\omega}$ збігається з напрямком більшої з кутових швидкостей $\vec{\omega}_2$ й $\vec{\omega}_1$. Зауважимо, що коли $\vec{\omega}_1$ та $\vec{\omega}_2$ мають однаковий напрямок, миттєва вісь обертання тіла знаходиться між осями, вздовж яких спрямовано $\vec{\omega}_1$ й $\vec{\omega}_2$. Якщо $\vec{\omega}_1$ та $\vec{\omega}_2$ мають протилежні напрямки, то миттєва вісь обертання тіла паралельна їм і лежить ззовні осей складових обертань $\vec{\omega}_1$ та $\vec{\omega}_2$, а вектор миттєвої кутової швидкості має напрямок більшої з кутових швидкостей $\vec{\omega}_1$ й $\vec{\omega}_2$.

Приклад 22. Редуктор швидкостей, зображений на рис. 54,а, використовується для передачі обертання від ведучого вала I веденому валу II, вісь якого збігається з віссю вала I. Редуктор має два ведучих елементи: вал I, що обертається з кутовою швидкістю $n_I = 600$ об/хв, і зубчасте колесо 1, яке обертається в протилежний бік з кутовою швидкістю $n_1 = 300$ об/хв. Ведучі елементи приводять в рух спарені між собою шестерні 2-3, які вільно насаджено на кінцях рукоятки, закли-

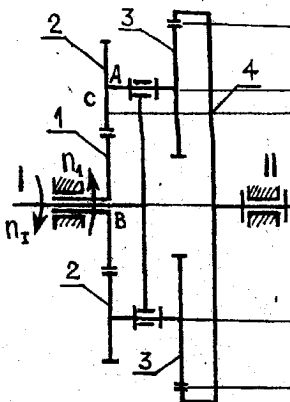


Рис. 54,а

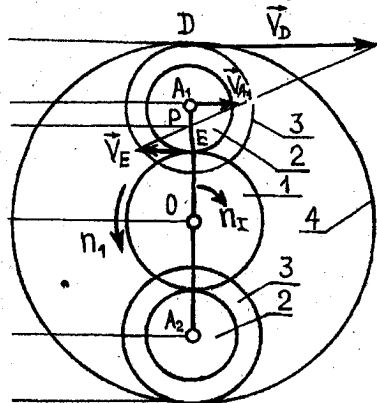


Рис. 54,б

нею на ведучому валу *I*. Шестерні 2-3 знаходяться в зачепленні з зубчастими колесами 1 та 4. Радіуси коліс $R_1 = 30$ см, $R_2 = 20$ см, $R_3 = 30$ см, $R_4 = 80$ см.

Визначити частоту обертання веденого вала *II* і шестерень 2-3.

Розв'язання. Прийемо кутову швидкість ведучого вала за переносу:

$$\vec{\omega}_I = \vec{\omega}_e \quad (\omega_e = \omega_I = \pi n_I / 30).$$

Абсолютна кутова швидкість $\vec{\omega}_1$ колеса 1 спрямована протилежно вектору переносної кутової швидкості $\vec{\omega}_e$ (згідно з умовою задачі). Відносна кутова швидкість колеса 1

$$\vec{\omega}_{1r} = \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_e,$$

або в проекції на вісь обертання

$$\omega_{1r} = \omega_1 + \omega_e = \frac{\pi}{30}(n_I + n_1).$$

Відносне обертання шестірні 2, зовнішньо зачепленої з колесом 1, спрямовано протилежно відносному обертанню колеса 1, тобто за рухом годинникової стрілки.

Шестірня 3, спарена із шестірнею 2, здійснює такий самий обертальний рух, як і шестірня 2. Колесо 4, яке має із шестірнею 3 внутрішнє зачеплення, обертається в бік шестірні 3, тобто за рухом годинникової стрілки.

Модулі кутових швидкостей цих обертань пов'язані між собою співвідношенням

$$\frac{\omega_{2r}}{\omega_{1r}} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Звідси

$$\omega_{2r} = \omega_{1r} \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_1 \pi}{R_2 30}(n_I + n_1).$$

Абсолютна кутова швидкість шестірні 2

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_{2r},$$

або в алгебричному вигляді

$$\omega_2 = \omega_I + \omega_{2r} = \frac{\pi}{30}n_I + \frac{R_1 \pi}{R_2 30}(n_I + n_1).$$

На підставі останньої рівності маємо

$$n_2 = n_I + \frac{R_1}{R_2}(n_I + n_1) = \frac{30}{20}(600 + 300) + 600 = 1950 \text{ об/хв.}$$

Вісь миттєвого обертання шестірни 2 можна знайти, виходячи із співвідношення

$$\frac{\omega_{2r}}{\omega_{1r}} = \frac{BC}{AC},$$

або

$$\frac{n_{2r}}{n_1} = \frac{R_1 + R_2 - AC}{AC} = \frac{R_1 + R_2}{AC} - 1,$$

звідки

$$AC = \frac{R_1 + R_2}{1 + n_{2r}/n_1} = \frac{30 + 20}{1 + \frac{30}{20} \frac{300 + 600}{600}} = \frac{200}{13} \text{ см.}$$

Оскільки шестірню 3 закріплено на одному валу із шестірнею 2,

$$\omega_{3r} = \omega_{2r}.$$

Відносну кутову швидкість колеса 4 визначимо, виходячи із співвідношення

$$\omega_{4r}/\omega_{3r} = R_3/R_4,$$

звідки

$$\omega_{4r} = \omega_{3r} \frac{R_3}{R_4} = \frac{\pi n_{3r} R_3}{30 R_4},$$

або

$$n_{4r} = n_{3r} \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_1}{R_2} (n_1 + n_1) \frac{R_3}{R_4} = \frac{30}{20} (300 + 600) \frac{30}{80} = 506,25 \text{ об/хв.}$$

Напрямок вектора ω_{4r} збігається з напрямком векторів $\vec{\omega}_{2r}$ та $\vec{\omega}_{3r}$. Абсолютна кутова швидкість зубчастого колеса 4, яка одночасно дорівнює кутовій швидкості веденого вала II,

$$\vec{\omega}_4 = \vec{\omega}_{II} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_{4r}.$$

Оскільки напрямки векторів $\vec{\omega}_e$ і $\vec{\omega}_{4r}$ збігаються, абсолютна кутова швидкість колеса 4

$$\begin{aligned} \omega_4 &= \omega_I + \omega_{4r}, \text{ або } n_4 = n_I + n_{4r} = \\ &= \frac{R_1}{R_2} \frac{R_3}{R_4} (n_1 + n_1) + n_1 = 506,25 + 600 = 1106,25 \text{ об/хв.} \end{aligned}$$

Кутові швидкості n_{II} і n_{2-3} можна визначити також, застосовуючи теорію плоского руху твердого тіла.

Точка P — миттєвий центр швидкості тіла (спарених шестерень 2-3, див. рис. 54, б).

Швидкість точки A_1

$$v_{A_1} = \omega_I (R_1 + R_2) = \frac{\pi n_I}{30} (R_1 + R_2).$$

Швидкість точки E (точки контакту шестерень 1 і 2)

$$v_E = \omega_1 R_1 = \frac{\pi n_1}{30} R_1.$$

Швидкість точки D (точки контакту шестерень 3 та 4)

$$v_D = \omega_4 R_4 = \omega_{II} R_4.$$

Використавши властивість миттєвого центра швидкостей, запишемо

$$\frac{v_{A_1}}{v_E} = \frac{A_1 P}{EP} = \frac{R_2 - EP}{EP} = \frac{R_2}{EP} - 1;$$

$$\frac{v_D}{v_E} = \frac{DP}{EP} = \frac{R_2 + R_3 - EP}{EP} = \frac{R_2 + R_3}{EP} - 1.$$

Звідси

$$EP = \frac{R_2}{1 + \frac{v_{A_1}}{v_E}} = \frac{R_2}{1 + \frac{n_I R_1 + R_2}{n_1 R_1}} = \frac{20}{1 + \frac{600 \cdot 50}{300 \cdot 30}} = \frac{60}{13} \text{ см};$$

$$\frac{n_{II} R_4}{n_1 R_1} = \frac{R_2 + R_3}{EP} - 1;$$

$$n_{II} = n_1 \frac{R_1}{R_4} \left(\frac{R_2 + R_3}{EP} - 1 \right) = 300 \frac{30}{80} \left(\frac{50 \cdot 13}{60} - 1 \right) = 1106,25 \text{ об/хв.}$$

Кутова швидкість спарених шестерень 2-3

$$n_{2-3} = n_2 = \frac{v_E}{EP} = \frac{n_1 R_1}{EP} = \frac{300 \cdot 30 \cdot 13}{60} = 1950 \text{ об/хв.}$$

ДОДАВАННЯ ОБЕРТАЛЬНИХ РУХІВ НАВКОЛО ОСЕЙ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ

Визначити кутові швидкість і прискорення веденого вала конічної зубчастої передачі, якщо ведучий вал I та шестірня I обертаються з кутовими прискореннями ϵ_1 й ϵ_2 . Схеми конічних передач показано на рис. 57, а—в, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 34.

Знайти кутові швидкість і прискорення вала II та швидкість і прискорення точки M .

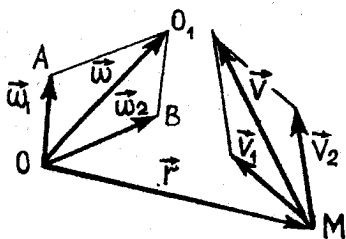


Рис. 55

Розглянемо два рухи, які в даний момент часу є обертаннями навколо миттєвих осей з кутовими швидкостями $\vec{\omega}_1$ та $\vec{\omega}_2$. Одночасно розглянемо випадок, коли миттєві осі обертання перетинаються в точці O . Прикладемо вектори $\vec{\omega}_1$ й $\vec{\omega}_2$ в точці O . Рівнодійний векторам $\vec{\omega}_1$ та $\vec{\omega}_2$ вектор дорівнює діагоналі паралелограма (рис. 55), побудованого на цих векторах.

Обчислимо швидкість точки O_1 діагоналі паралелограма, тобто

$$\vec{v}_{O_1} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{\omega}_1 \times \vec{OO}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{OO}_1.$$

Модулі швидкостей $|\vec{v}_1|$ і $|\vec{v}_2|$ дорівнюють подвоєній площі трикутників, побудованих на векторах $\vec{\omega}_1$ та $\vec{\omega}_2$ і векторі $\vec{OM} = \vec{r}$, тобто

$$v_1 = 2S_{\Delta AOO_1}; \quad v_2 = 2S_{\Delta BOO_1}.$$

Вектори \vec{v}_1 та \vec{v}_2 , перпендикулярні до площин паралелограмів, спрямовані в протилежні боки. Тому швидкість точки O_1 , як і швидкість точки O , дорівнює нулю. Пряма OO_1 є миттєвою віссю підсумкового обертального руху.

Швидкість якої-небудь точки M на підставі теореми про додавання швидкостей

$$\vec{v}_M = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

де $\vec{r} = \vec{OM}$; $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$.

Порівнюючи вираз швидкості з формулою Ейлера ($\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$), переконуємося в тому, що миттєвий підсумковий рух є обертальним навколо миттєвої осі, яка проходить через точку O , причому миттєва кутова швидкість цього руху дорівнює геометричній сумі заданих миттєвих кутових швидкостей.

Ва- рі- ант	n_1 , об/хв	n_1 , об/хв	Остання цифра номера залкової книжки																			
			0				1				2				3				4			
			Кількість зубців шестерень																			
z_1	z_2	z_3	z_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_1	z_2	z_3	z_4			
1	1200	$\omega_3 = \omega_1$	40	30	24	44	60	45	36	66	80	60	48	88	100	75	60	110	20	15	12	22
2	960	1800	40	40	20	20	50	50	25	25	60	60	30	30	80	80	40	40	30	30	15	15
3	1350	—	30	30	30	—	20	20	20	—	40	40	40	—	50	50	—	25	25	25	—	—
4	870	—	60	48	36	45	48	36	27	36	32	20	15	24	40	28	30	64	52	39	48	48
5	1500	990	18	18	36	36	12	12	24	24	20	20	40	40	30	60	60	15	15	30	30	30
6	600	1440	40	60	40	—	30	60	30	—	20	44	20	—	25	25	—	30	30	30	—	—
7	975	870	48	60	48	36	36	48	36	24	24	36	24	12	30	42	18	33	45	33	21	21
8	1800	$\omega_2 = \omega_1$	80	80	60	60	20	20	15	15	40	40	30	30	50	50	20	60	60	45	45	45
9	1410	975	24	24	30	30	30	30	36	36	18	18	24	24	27	27	33	21	21	27	27	27
10	810	1500	20	20	40	40	15	15	30	30	30	30	60	60	25	25	50	40	40	80	80	80
11	900	600	80	80	40	40	40	40	20	20	30	30	15	15	60	60	30	50	50	25	25	25
12	360	450	24	24	30	30	30	30	36	36	18	18	24	24	27	27	33	21	21	27	27	27
13	600	1350	30	30	40	40	24	24	32	32	27	27	54	54	36	36	40	21	21	24	24	24
14	1200	1800	15	15	24	24	18	18	27	27	21	21	30	30	10	10	20	12	12	21	21	21
15	1350	930	18	—	—	24	21	—	—	28	24	—	—	32	27	—	36	15	—	—	—	20

Продовження табл. 34

Ва- рі- ант	n ₁ , об/хв	Остання цифра номера залікової книжки																							
		5				6				7				8				9							
		z ₁	z ₂	z ₃	z ₄	z ₁	z ₂	z ₃	z ₄	z ₁	z ₂	z ₃	z ₄	z ₁	z ₂	z ₃	z ₄	z ₁	z ₂	z ₃	z ₄				
1	900	50	40	30	45	70	50	40	60	50	60	75	90	60	40	50	60	40	30	40	60	40	30	24	36
2	1200	48	48	24	24	36	36	18	18	70	70	35	35	90	90	45	45	90	44	44	45	44	44	22	22
3	810	24	36	24	—	25	30	25	—	28	40	28	—	60	50	60	60	—	80	60	—	80	60	80	—
4	1500	64	48	36	48	48	32	24	36	36	24	18	24	48	40	30	36	40	45	30	36	45	30	24	36
5	870	24	24	48	48	18	18	36	36	16	16	32	32	40	40	80	80	40	25	25	80	25	25	50	50
6	1440	28	56	28	—	40	30	40	—	24	48	24	—	30	50	30	30	—	40	60	—	40	60	40	—
7	990	48	54	40	36	32	44	36	28	20	30	20	15	40	50	40	32	36	36	45	32	36	45	36	24
8	1200	48	48	36	36	36	36	27	27	28	28	21	21	32	32	24	24	24	24	24	24	24	24	18	18
9	960	25	25	30	30	40	40	50	50	28	28	32	32	28	28	36	36	28	20	20	36	20	20	25	25
10	900	25	25	50	50	20	20	40	40	40	40	80	80	24	24	48	48	28	18	18	48	18	18	36	36
11	870	48	48	36	36	45	45	30	30	36	36	20	20	42	42	28	28	24	39	39	28	39	39	27	27
12	810	28	28	32	32	32	32	36	36	20	20	28	28	24	24	30	30	24	28	28	30	28	28	36	36
13	1350	28	28	56	56	24	24	36	36	32	32	48	48	25	25	50	50	25	36	36	50	36	36	54	54
14	1500	18	18	24	24	27	27	39	39	15	15	27	27	24	24	36	36	24	20	20	36	20	20	40	40
15	900	24	—	—	36	32	—	—	40	28	—	—	36	30	—	—	—	40	27	—	40	27	—	33	

Ва- рі- ант	n_i , об/хв	n_i , об/хв	Остання цифра номера залікової книжки																			
			0				1				2				3				4			
			z1	z2	z3	z4	z1	z2	z3	z4	z1	z2	z3	z4	z1	z2	z3	z4	z1	z2	z3	z4
16	900	1500	12	—	—	14	23	—	28	19	—	—	23	27	—	—	32	11	—	—	13.	
17	1200	810	18	21	30	—	15	18	33	—	21	24	36	—	27	24	—	25	25	40	—	
18	600	900	35	45	36	28	30	36	30	30	32	40	35	28	28	42	30	45	54	48	40	
19	1350	900	20	15	—	—	30	20	—	30	40	—	—	48	60	—	—	40	50	—	—	
20	810	810	36	—	—	—	40	—	—	18	—	—	—	27	—	—	—	21	—	—	—	
21	1500	—	20	—	20	—	30	—	30	24	—	—	24	32	—	32	—	36	—	36	—	
22	900	—	40	—	32	—	30	—	24	50	—	—	40	60	—	50	—	54	—	40	—	
23	1200	600	—	36	18	—	—	48	24	—	32	16	—	—	24	12	—	—	38	19	—	
24	1350	—	12	—	—	—	16	—	—	18	—	—	—	20	—	—	24	—	—	—	—	
25	1200	900	—	20	15	—	—	28	21	—	40	30	—	—	36	27	—	—	48	36	—	
26	810	—	42	35	28	—	60	48	40	—	54	45	36	—	36	30	—	45	30	25	—	
27	900	—	35	28	—	—	40	48	—	36	54	—	—	24	36	—	—	30	25	—	—	
28	1500	870	20	—	—	—	28	—	—	32	—	—	—	24	—	—	—	36	—	—	—	
29	870	—	25	30	36	—	28	36	45	—	36	45	54	—	30	36	—	21	24	28	—	
30	810	900	20	20	—	24	25	25	—	30	30	—	—	36	20	—	35	36	36	—	420	

Закінчення табл. 34

Ва- рі- ант	n_i , об./хв	n_1 , об./хв	Остання цифра номера залікової книжки																			
			5			6			7			8			9							
			z_1	z_2	z_3	z_1	z_2	z_3	z_1	z_2	z_3	z_1	z_2	z_3	z_1	z_2	z_3	z_1	z_2	z_3	z_4	
16	1350	810	24	—	—	—	18	—	—	—	22	22	—	—	—	26	20	—	—	—	—	24
17	600	450	24	26	32	—	—	32	28	40	—	—	20	20	35	—	15	15	25	—	—	—
18	480	600	30	40	32	24	40	32	28	25	20	50	60	48	40	48	48	60	50	40	—	40
19	1500	900	36	48	—	—	—	—	25	30	—	—	28	42	—	—	40	30	—	—	—	—
20	900	900	20	—	—	—	—	—	24	—	—	—	32	—	—	—	28	—	—	—	—	—
21	1200	—	40	—	40	—	48	—	50	50	—	—	44	—	44	—	28	—	28	—	—	—
22	810	—	70	—	50	—	80	—	48	40	—	—	36	—	24	—	64	—	48	—	—	—
23	1350	900	—	20	10	—	—	—	—	13	—	—	—	26	15	—	—	50	25	—	—	—
24	600	—	15	—	—	—	—	—	27	—	—	—	21	—	—	—	10	—	—	—	—	—
25	900	900	—	32	24	—	—	—	—	33	—	—	—	44	42	—	—	42	39	—	—	—
26	1500	—	40	30	24	—	—	—	60	40	—	—	48	32	24	—	32	28	21	—	—	—
27	1200	—	30	24	—	—	—	—	50	40	—	—	32	24	—	—	28	21	—	—	—	—
28	810	870	10	—	—	—	—	—	40	—	—	—	18	—	—	—	25	—	—	—	—	—
29	600	—	24	32	36	—	—	—	20	25	30	—	40	48	54	—	40	50	60	—	—	—
30	870	1200	32	32	—	—	—	—	40	40	—	48	45	45	—	54	50	50	—	—	—	60

Розглянемо складний рух тіла (диска С), що складається з двох обертальних рухів (рис. 56): обертання навколо осі АВ (назвемо цей рух *переносним*) та обертання навколо осі ОС (назвемо його *відносним*).

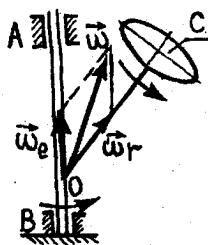


Рис. 56

Отже, підсумковий рух буде також обертальним з кутовою швидкістю $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$, причому миттєва вісь обертання, вздовж якої спрямовано $\vec{\omega}$, проходить через точку О. Визначимо кутове прискорення тіла для випадку, коли воно здійснює два обертальних рухи навколо двох миттєвих осей, які перетинаються в точці О.

Відомо, що

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r = \vec{\omega}_e + (\vec{i}\omega_{rx} + \vec{j}\omega_{ry} + \vec{k}\omega_{rz}),$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орти осей рухомої системи координат, зв'язаної з твердим тілом, яке виконує відносний рух; $\omega_{rx}, \omega_{ry}, \omega_{rz}$ — проекції вектора кутової швидкості тіла на ці осі.

Кутове прискорення твердого тіла

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} &= \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} + \left(\frac{d\vec{i}}{dt} \omega_{rx} + \frac{d\vec{j}}{dt} \omega_{ry} + \frac{d\vec{k}}{dt} \omega_{rz} \right) + \\ &+ \left(\vec{i} \frac{d\omega_{rx}}{dt} + \vec{j} \frac{d\omega_{ry}}{dt} + \vec{k} \frac{d\omega_{rz}}{dt} \right), \end{aligned}$$

причому

$$\frac{d\vec{\omega}_e}{dt} = \vec{\varepsilon}_e;$$

$$\frac{d\vec{i}}{dt} \omega_{rx} + \frac{d\vec{j}}{dt} \omega_{ry} + \frac{d\vec{k}}{dt} \omega_{rz} = \vec{\omega}_e \times (\vec{i} \omega_{rx} + \vec{j} \omega_{ry} + \vec{k} \omega_{rz}) = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r;$$

$$\vec{i} \frac{d\omega_{rx}}{dt} + \vec{j} \frac{d\omega_{ry}}{dt} + \vec{k} \frac{d\omega_{rz}}{dt} = \vec{\varepsilon}_{rx} + \vec{\varepsilon}_{ry} + \vec{\varepsilon}_{rz} = \vec{\varepsilon}_r.$$

Остаточно

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r,$$

де $\vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r = \vec{\omega}_c$ — вектор обертального (додаткового кутового) прискорення, або

$$\vec{\omega}_c = \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega} - \vec{\omega}_e) = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega} - \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_e = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}.$$

Прискорення точки М тіла при складанні двох рухів, які відбуваються навколо осей, що перетинаються,

$$\begin{aligned} \vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}_M = \\ &= (\vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \vec{\omega}_c) \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}_M. \end{aligned}$$

Приклад 23. Подвійний диференціал (рис. 57) складається з кривошипа OC , що може обертатися навколо нерухомої осі AB . На кривошип вільно надіто сателіт, який складається з двох жорстко скріплених конічних зубчастих коліс радіусами $R_3 = 5$ см і $R_4 = 2$ см. Ці зубчасті колеса з'єднано з зубчастими конічними колесами 1 та 2 радіусами $R_1 = 10$ см і $R_2 = 5$ см, що обертаються навколо осі AB , але з кривошипом їх не з'єднано.

Визначити кутові швидкість та прискорення кривошипа OC , кутові швидкість і прискорення сателіта та швидкість і прискорення точок M_1 й M_2 , якщо колеса 1 та 2 обертаються в один бік з кутовими швидкостями $\omega_1 = 45$ с⁻¹ і $\omega_2 = 9$ с⁻¹, маючи в даний момент часу кутові прискорення $\epsilon_1 = 2$ с⁻², $\epsilon_2 = 11$ с⁻².

Розв'язання. Швидкість точки E

$$\vec{v}_E = \vec{\omega}_1 \times KE.$$

Модуль цієї швидкості

$$v_E = \omega_1 R_1 = 4,5 \cdot 10 = 45 \text{ см/с.}$$

Вектор \vec{v}_E перпендикулярний до площини рис. 58 і відходить від нас. З іншого боку,

$$\vec{v}_E = (\vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r) \times \vec{OE} = \vec{\omega}_e \times \vec{OE} + \vec{\omega}_r \times \vec{OE}. \quad (1)$$

Спроектувавши (1) на напрямок вектора \vec{v}_E , дістанемо

$$\begin{aligned} v_E &= \omega_e OE \sin(90^\circ + \alpha) - \omega_r OE \sin(180^\circ - \alpha) = \\ &= \omega_e OE \cos \alpha - \omega_r OE \sin \alpha, \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$OE = \sqrt{R_1^2 + R_3^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5} \text{ см,}$$

а

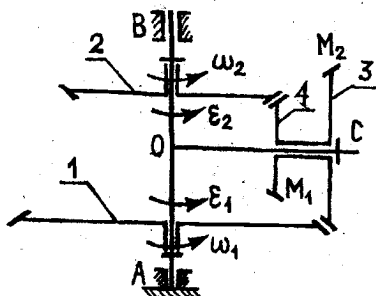


Рис. 57

$$\sin \alpha = \frac{R_3}{DE} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\cos \alpha = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Остаточно (2) набуває вигляду

$$\begin{aligned} v_E &= 4,5 \cdot 10 = \\ &= \omega_e \cdot 5\sqrt{5} \cdot 2/\sqrt{5} - \omega_r \cdot 5\sqrt{5} \cdot 1/\sqrt{5}, \end{aligned}$$

або

$$10 \omega_1 = 45 = 10 \omega_e - 5 \omega_r. \quad (3)$$

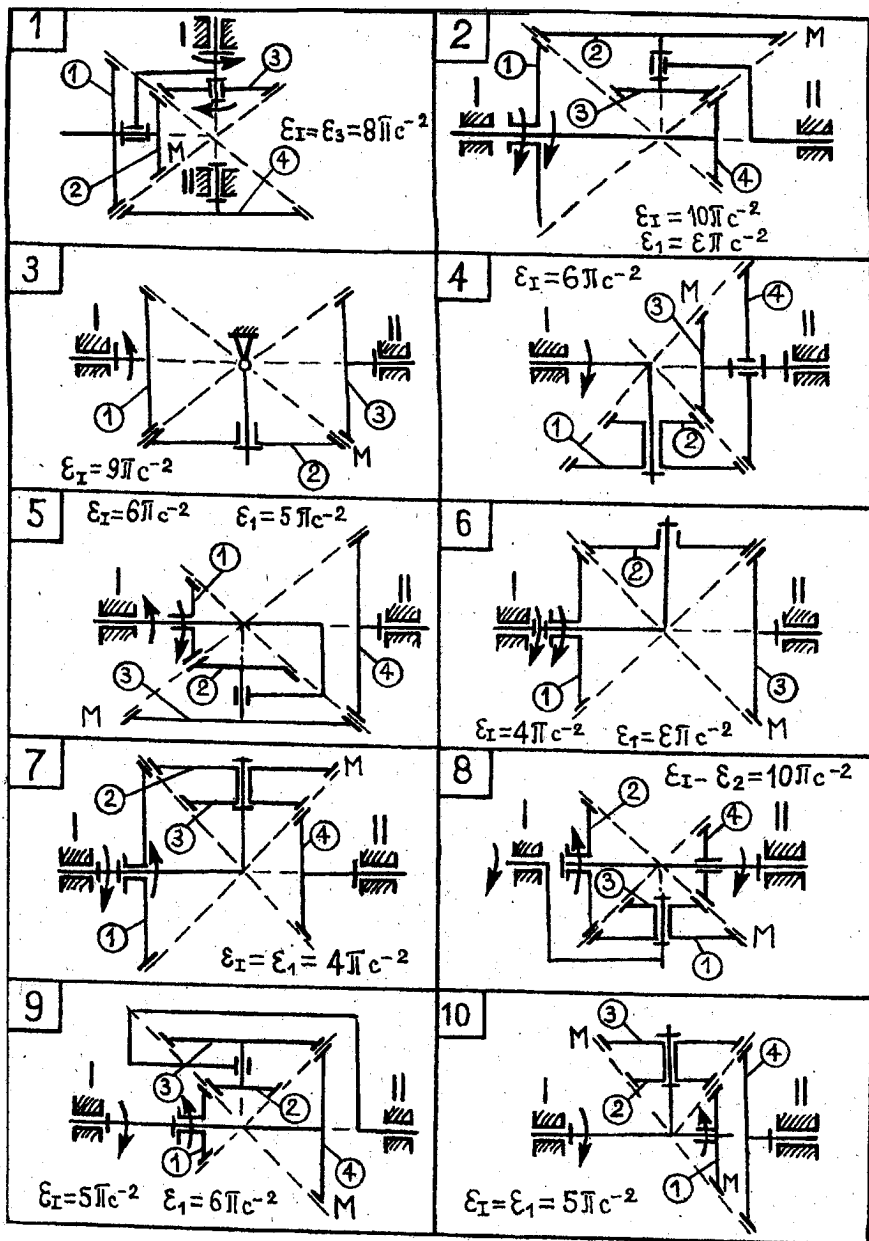


Рис. 57,а

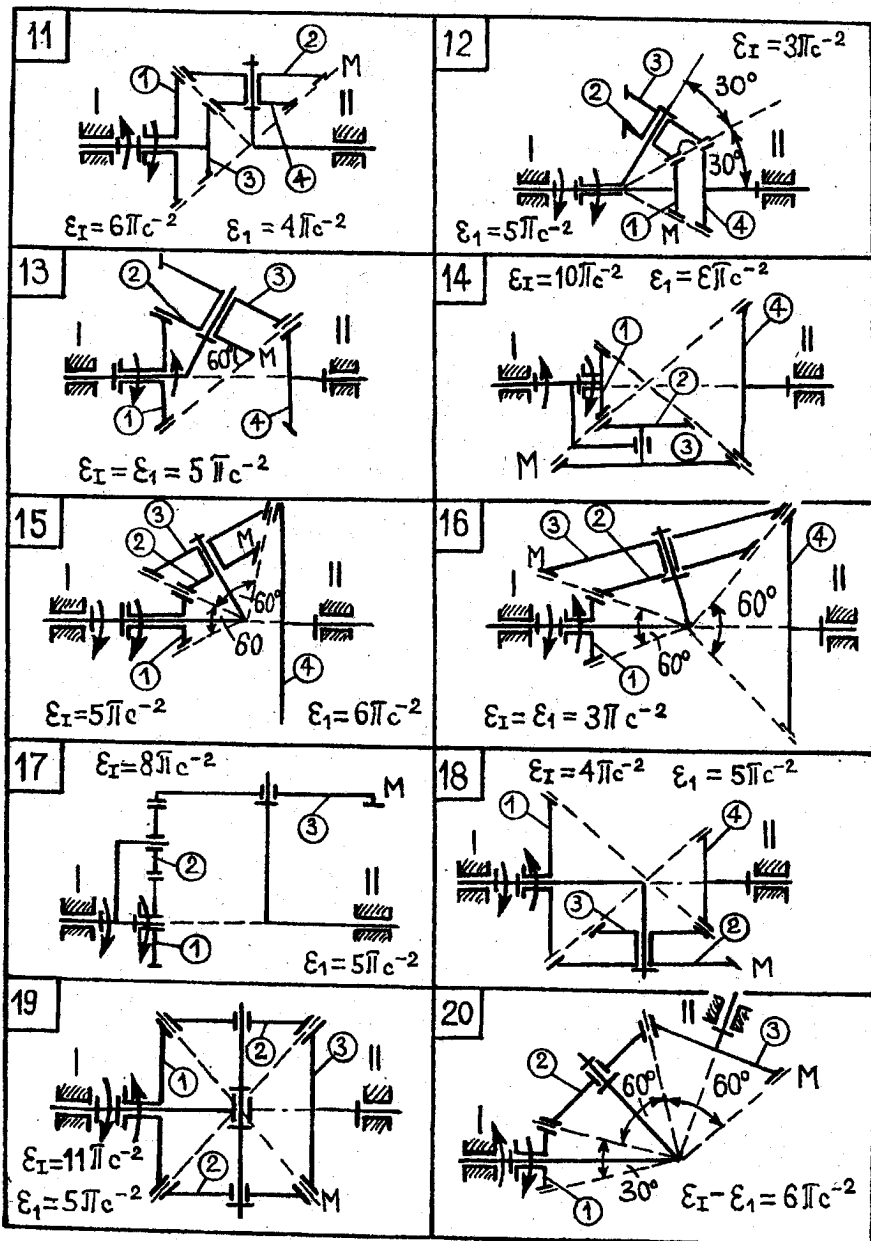


Рис. 57,6

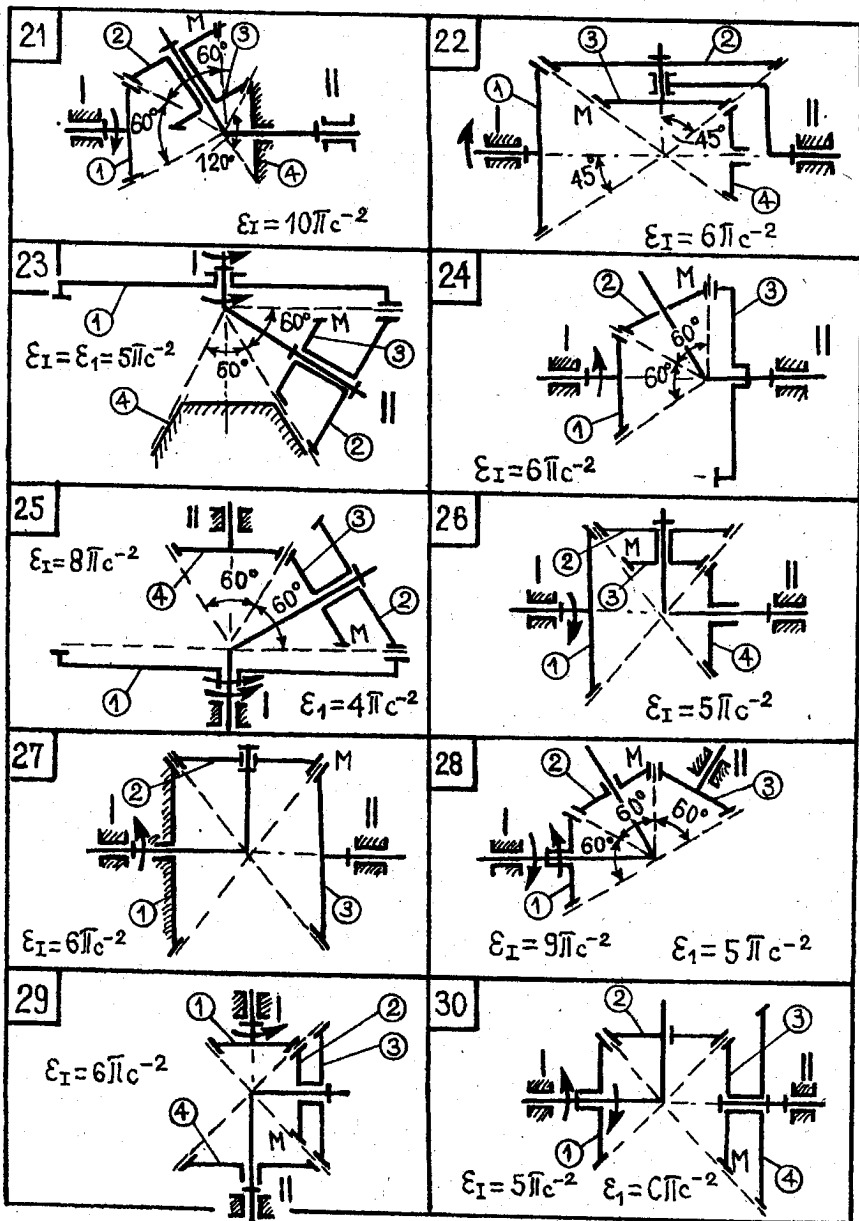


Рис. 57,б

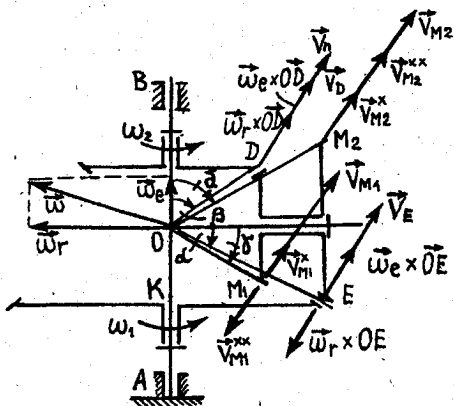


Рис. 58

Аналогічно визначаємо швидкість точки D

$$v_D = \omega_2 R_2 = 9 \cdot 5 = 45 \text{ см/с.}$$

З іншого боку,

$$\vec{v}_D = (\vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r) \times \vec{OD} = \vec{\omega}_e \times \vec{OD} + \vec{\omega}_r \times \vec{OD}. \quad (4)$$

Спроектувавши (4) на напрямок вектора \vec{v}_D , знайдемо

$$\omega_2 R_2 = \omega_e OD \sin \beta + \omega_r OD \sin (90^\circ + \beta). \quad (5)$$

Оскільки

$$OD = \sqrt{R_2^2 + R_4^2} = \sqrt{29} \text{ см; } \sin \beta = \frac{R_2}{OD} = 5/\sqrt{29};$$

$$\cos \beta = \frac{R_1}{OD} = 2/\sqrt{29},$$

вираз (5) набуває вигляду

$$\omega_2 R_2 = 45 = \omega_e \sqrt{29} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} + \omega_r \sqrt{29} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}},$$

або

$$5 \omega_2 = 5 \omega_e + 2 \omega_r. \quad (6)$$

На підставі (3) і (6) записуємо таку систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} 45 &= 10 \omega_1 = 10 \omega_e - 5 \omega_r; \\ 45 &= 5 \omega_2 = 5 \omega_e + 2 \omega_r. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

На підставі (7) стверджуємо, що переносна кутова швидкість сателіта $\omega_e = 7 \text{ с}^{-1}$, а його відносна кутова швидкість $\omega_r = 5 \text{ с}^{-1}$.

Швидкість точки M_1

$$\vec{v}_{M_1} = (\vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r) \times \vec{OM}_1 = \vec{\omega}_e \times \vec{OM}_1 + \vec{\omega}_r \times \vec{OM}_1 = \vec{v}_{M_1}^{\cdot} + \vec{v}_{M_1}^{\cdot\cdot},$$

де

$$\vec{v}_{M_1}^{\cdot} = \vec{\omega}_e \times \vec{OM}_1;$$

$$\vec{v}_{M_1}^{\cdot\cdot} = \vec{\omega}_r \times \vec{OM}_1,$$

тобто

$$v_{M_1}^{\cdot} = \omega_e OM_1 \sin(\vec{\omega}_e \hat{\vec{OM}}_1) = \omega_e OM_1 \sin(90^\circ + \gamma) = \omega_e OM_1 \cos \gamma;$$

$$v_{M_1}^{\cdot\cdot} = \omega_r OM_1 \sin(\vec{\omega}_r \hat{\vec{OM}}_1) = \omega_r OM_1 \sin(180^\circ - \gamma) = \omega_r OM_1 \sin \gamma,$$

$$\text{а } \sin \gamma = \frac{R_4}{OM_1}; \quad \cos \gamma = \frac{R_2}{OM_1}.$$

Тому

$$v_{M_1}^{\cdot} = \omega_e OM_1 \frac{R_2}{OM_1} = \omega_e R_2 = 7 \cdot 5 = 35 \text{ см/с};$$

$$v_{M_1}^{\cdot\cdot} = \omega_r OM_1 \frac{R_1}{OM_1} = \omega_r R_4 = 5 \cdot 2 = 10 \text{ см/с}.$$

Остаточно швидкість точки M_1

$$v_{M_1} = v_{M_1}^{\cdot} - v_{M_1}^{\cdot\cdot} = 35 - 10 = 25 \text{ см/с}.$$

Аналогічно визначаємо швидкість точки M_2

$$\vec{v}_{M_2} = (\vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r) \times \vec{OM}_2 = \vec{\omega}_e \times \vec{OM}_2 + \vec{\omega}_r \times \vec{OM}_2 = \vec{v}_{M_2}^{\cdot} + \vec{v}_{M_2}^{\cdot\cdot},$$

$$\text{де } \vec{v}_{M_2}^{\cdot} = \vec{\omega}_e \times \vec{OM}_2; \quad \vec{v}_{M_2}^{\cdot\cdot} = \vec{\omega}_r \times \vec{OM}_2,$$

тобто

$$v_{M_2}^{\cdot} = \omega_e OM_2 \sin \delta;$$

$$v_{M_2}^{\cdot\cdot} = \omega_r OM_2 \cos \delta, \quad \text{а } \sin \delta = \frac{R_1}{OM_2}; \quad \cos \gamma = \frac{R_3}{OM_2}.$$

Тому

$$v_{M_2}^{\cdot} = \omega_e OM_2 \frac{R_1}{OM_2} = \omega_e R_1 = 7 \cdot 10 = 70 \text{ см/с};$$

$$v_{M_2}^{\cdot\cdot} = \omega_r OM_2 (R_3/OM_2) = \omega_r R_3 = 5 \cdot 5 = 25 \text{ см/с}.$$

Згідно з рис. 58

$$v_{M_2} = v_{M_2}^* + v_{M_2}^{**} = 70 + 25 = 95 \text{ см/с.}$$

Кутова швидкість супутника

$$\omega = \sqrt{\omega_e^2 + \omega_r^2} = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74} \text{ с}^{-1}.$$

Продиференціювавши рівності (3) і (6) по часу, дістанемо систему рівнянь для знаходження переносного і відносного кутових прискорень супутника, а саме:

$$\left. \begin{aligned} 10 \dot{\omega}_1 &= 10 \dot{\omega}_e - 5 \dot{\omega}_r; \\ 5 \dot{\omega}_2 &= 5 \dot{\omega}_e + 2 \dot{\omega}_r, \end{aligned} \right\}$$

або

$$\left. \begin{aligned} 10 \varepsilon_1 &= 10 \varepsilon_e - 5 \varepsilon_r; \\ 5 \varepsilon_2 &= 5 \varepsilon_e + 2 \varepsilon_r, \end{aligned} \right\}$$

звідки $\varepsilon_e = 7 \text{ с}^{-2}$, $\varepsilon_r = 10 \text{ с}^{-2}$.

Обертальне (додаткове) кутове прискорення супутника

$$\vec{\varepsilon}_c = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r.$$

Модуль цього прискорення

$$\varepsilon_c = \omega_e \omega_r \sin(\vec{\omega}_e \wedge \vec{\omega}_r) = \omega_e \omega_r \sin 90^\circ = 35 \text{ с}^{-2}.$$

Вектори $\vec{\varepsilon}_e$, $\vec{\varepsilon}_r$ та $\vec{\varepsilon}_c$ зображено на рис. 59.

Прискорення точки M_1

$$\vec{a}_{M_1} = \vec{a}_{M_1}^{oc} + \vec{a}_{M_1}^{ob},$$

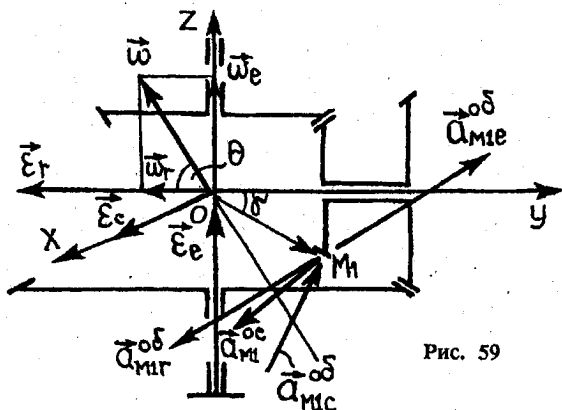


Рис. 59

причому

$$\vec{a}_{M_1}^{oc} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{M_1}.$$

Модуль

$$a_{M_1}^{oc} = \omega v_{M_1} \sin(\vec{\omega} \hat{\vec{v}}_{M_1}) = \sqrt{74} \cdot 25 \sin 90^\circ = 215,1 \text{ см/с}^2.$$

Обертальне прискорення точки M_1

$$\begin{aligned} \vec{a}_{M_1}^{ob} &= \vec{\varepsilon} \times \vec{OM}_1 = (\vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \vec{\varepsilon}_c) \times \vec{OM}_1 = \vec{\varepsilon}_e \times \vec{OM}_1 + \vec{\varepsilon}_r \times \vec{OM}_1 + \\ &+ \vec{\varepsilon}_c \times \vec{OM}_1 = \vec{a}_{M_1,e}^{ob} + \vec{a}_{M_1,r}^{ob} + \vec{a}_{M_1,c}^{ob}, \end{aligned}$$

де

$$\vec{a}_{M_1,e}^{ob} = \vec{\varepsilon}_e \times \vec{OM}_1; \quad \vec{a}_{M_1,r}^{ob} = \vec{\varepsilon}_r \times \vec{OM}_1; \quad \vec{a}_{M_1,c}^{ob} = \vec{\varepsilon}_c \times \vec{OM}_1.$$

Вектори обертальних прискорень сателіта показано на рис. 59. Модулі цих прискорень

$$\begin{aligned} a_{M_1,e}^{ob} &= \varepsilon_e OM_1 \sin(\vec{\varepsilon}_e \hat{\vec{OM}}_1) = \\ &= \varepsilon_e OM_1 \sin(90^\circ + \gamma) = \varepsilon_e OM_1 \cos \gamma = \\ &= \varepsilon_e OM_1 (R_2 / OM_1) = \varepsilon_2 R_2 = 7 \cdot 5 = 35 \text{ см/с}^2; \\ a_{M_1,r}^{ob} &= \varepsilon_r OM_1 \sin(180^\circ - \gamma) = \varepsilon_r OM_1 (R_4 / OM_1) = \\ &= \varepsilon_r R_4 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ см/с}^2; \\ a_{M_1,c}^{ob} &= \varepsilon_c OM_1 \sin(\vec{\varepsilon}_c \hat{\vec{OM}}_1) = \varepsilon_c OM_1 \sin 90^\circ = \\ &= 35\sqrt{2^2 + 5^2} = 188,5 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Згідно з рис. 59 прискорення точки M_1

$$\begin{aligned} a_{M_1} &= \sqrt{a_{M_1,x}^2 + a_{M_1,y}^2 + a_{M_1,z}^2} = \\ &= \sqrt{(a_{M_1,r}^{ob} - a_{M_1,e}^{ob})^2 + (-a_{M_1}^{oc} \sin \theta + a_{M_1,c}^{ob} \sin \gamma)^2 + \dots} \\ &\quad \dots + (-a_{M_1}^{oc} \cos \theta + a_{M_1,c}^{ob} \cos \gamma)^2 = \\ &= \sqrt{(a_{M_1,r}^{ob} - a_{M_1,e}^{ob})^2 + \left(-a_{M_1}^{oc} \frac{\omega_s}{\omega} + a_{M_1,c}^{ob} \frac{R_4}{OM_1}\right)^2 + \left(-a_{M_1}^{oc} \frac{\omega_t}{\omega} + a_{M_1,c}^{ob} \frac{R_2}{OM_1}\right)^2}, \end{aligned}$$

де

$$\sin \theta = \frac{\omega_e}{\omega} = \frac{7}{\sqrt{74}}; \quad \cos \theta = \frac{\omega_r}{\omega} = \frac{5}{\sqrt{74}};$$

$$\sin \gamma = \frac{R_4}{OM_1}; \quad \cos \gamma = \frac{R_2}{OM_1}.$$

Остаточнo

$$a_{M_1} = \sqrt{(20-35)^2 + \left(-\sqrt{74} \cdot 25 \frac{7}{\sqrt{74}} + 35\sqrt{29} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(-\sqrt{74} \cdot 25 \cdot \frac{5}{\sqrt{74}} + 35\sqrt{29} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(-15)^2 + (-25 \cdot 7 + 35 \cdot 2)^2 + (-25 \cdot 5 + 35 \cdot 5)^2} = 117,3 \text{ см/с}^2.$$

Аналогічно визначаємо прискорення точки M_2

$$\vec{a}_{M_2} = \vec{a}_{M_2}^{oc} + \vec{a}_{M_2}^{ob} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{M_2} + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{OM}_2 + \vec{\varepsilon}_r \times \vec{OM}_2 + \vec{\varepsilon}_c \times \vec{OM}_2.$$

Абсолютні значення доосьового (a^{oc}) та обертового (a^{ob}) прискорень точки M_2

$$a_{M_2}^{oc} = \omega v_{M_2} \sin 90^\circ = \sqrt{74} \cdot 95 \cdot 1 = 95\sqrt{74} \text{ см/с}^2;$$

$$a_{M_2,e}^{ob} = \varepsilon_e OM_2 \sin(\vec{\varepsilon}_e \vec{OM}_2) = \varepsilon_e OM_2 \sin \delta,$$

де $\sin \delta = R_1/OM_2$.

Тому

$$a_{M_2,e}^{ob} = \varepsilon_e OM_2 (R_1/OM_2) = \varepsilon_e R_1 = 7 \cdot 10 = 70 \text{ см/с}^2.$$

Прискорення

$$a_{M_2,r}^{ob} = \varepsilon_r OM_2 \sin(\vec{\varepsilon}_r \vec{OM}_2) = \varepsilon_r OM_2 \sin(90^\circ + \delta) =$$

$$= \varepsilon_r OM_2 \cos \delta = \varepsilon_r OM_2 (R_3/OM_2) = \varepsilon_r R_3 = 50 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{M_2,c}^{ob} = \varepsilon_c OM_2 \sin(\vec{\varepsilon}_c \vec{OM}_2) = \varepsilon_c OM_2 \sin 90^\circ =$$

$$= 35\sqrt{5^2 + 10^2} = 175\sqrt{5} \text{ см/с}^2.$$

Складові прискорення точки M_2 показано на рис. 60, а його модуль

$$a_{M_2} = \sqrt{a_{M_2,x}^2 + a_{M_2,y}^2 + a_{M_2,z}^2},$$

де

$$a_{M_2,x} = -a_{M_2,e}^{ob} - a_{M_2,r}^{ob} =$$

$$= -70 - 50 = -120 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{M_2,y} = -a_{M_2,c}^{ob} \cos(90^\circ - \theta) - a_{M_2,c}^{ob} \cos \delta =$$

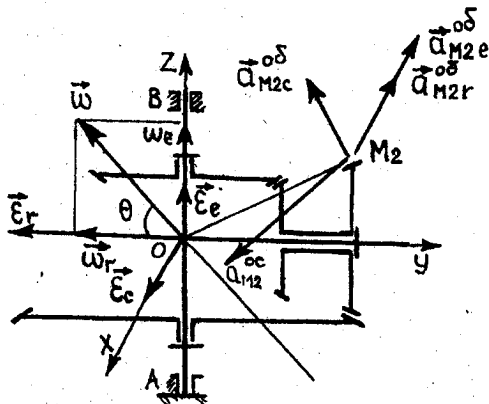


Рис. 60

$$\begin{aligned}
 &= -a_{M_2}^{0c} \sin \theta - a_{M_2c}^{06} \cos \delta = -a_{M_2}^{0c} (\omega_e / \omega) - a_{M_2c}^{06} (R_3 / OM_2) = \\
 &= -95\sqrt{74} (7/\sqrt{74}) - 175\sqrt{5} (5/5\sqrt{5}) = -840 \text{ см/с}^2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{M_2z} &= -a_{M_2}^{0c} \cos \theta + a_{M_2c}^{06} \sin \theta = \\
 &= -a_{M_2}^{0c} (\omega_r / \omega) + a_{M_2c}^{06} (R_1 / OM_2) = \\
 &= -95\sqrt{74} (5/\sqrt{74}) + 175\sqrt{5} (10/5\sqrt{5}) = -125 \text{ см/с}^2.
 \end{aligned}$$

Тому

$$a_{M_2} = \sqrt{(-120)^2 + (-840)^2 + (-125)^2} = 898,1 \text{ см/с}^2.$$



ДИНАМІКА



Завдання Д-1

ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ПІД ДІЄЮ СТАЛИХ СИЛ АБО СИЛ, ЗАЛЕЖНИХ ВІД ЧАСУ, ПОЛОЖЕННЯ (ВІДСТАНІ) ЧИ ШВИДКОСТІ

Завдання Д-1 має 40 варіантів, а саме:

а) варіанти 1—10 відповідають руху матеріальної точки під дією сталої сили, для яких розрахункові схеми показано на рис. 61, а, а необхідні величини наведено в табл. 35, де вказано також, які величини потрібно знайти;

б) варіанти 11—20 відповідають руху матеріальної точки під дією сил, залежних від часу (рис. 61, б);

в) у варіантах 21—30 на рухоми точку діють сили, залежні від відстані (рис. 62, а);

г) у варіантах 31—40 на рухоми точку діють сили, залежні від швидкості (рис. 63, а).

Необхідні для розрахунку величини стосовно варіантів 11—40 наведено в табл. 35, а.

У варіантах 1—10 потрібно знайти величини, зазначені в табл. 35, а у варіантах 11—40 визначити траєкторію рухомиї точки і швидкості та прискорення для моментів часу, вказаних у табл. 35, а.

Таблиця 35

Варіант	Завдання	v_A	v_B	v_C	l	h	H	d	τ	T	α	β	f
		м/с			м			с		град			
1	Задано	10	—	—	20	—	10	—	2	—	30	—	—
	Знайти	—	—	+	—	—	—	—	—	—	—	—	+
2	Задано	—	45	—	40	4	—	—	—	—	30	—	—
	Знайти	+	—	—	—	—	—	+	—	—	—	—	—
3	Задано	—	3	—	5	8	—	—	—	—	—	—	0,3
	Знайти	+	—	—	—	—	—	—	—	+	—	—	—
4	Задано	—	$2v_A$	—	8	10	—	—	1,5	—	45	—	—
	Знайти	—	—	—	—	—	—	+	—	—	—	—	+
5	Задано	15	—	—	—	—	20	30	—	—	30	45	0
	Знайти	—	—	—	—	+	—	—	+	—	—	—	—

Вариант	Завдання	v_A	v_B	v_C	l	h	H	d	τ	T	α	β	f
		м/с			м				с		град		
		6	Задано Знайти	— —	— +	— +	— —	20 —	— —	— —	0,2 —	— —	
7	Задано Знайти	— —	— —	— +	— +	40 —	— —	— —	0,4 —	— —	30 —	60 —	0,2 —
8	Задано Знайти	12 —	— —	— —	— +	9 —	— —	$3\sqrt{3}$ —	— —	— —	30 —	— —	— +
9	Задано Знайти	$2v_B$ —	— —	— —	9,8 —	12 —	— —	$2\sqrt{3}$ —	— —	— +	30 —	60 —	— +
10	Задано Знайти	— —	— +	— +	— —	10 —	— —	4 —	— —	— —	30 —	45 —	0,2 —

Таблиця 35,а

Вариант	m	x_0	y_0	v_0	$F(t)$	$F(\vec{r})$	$R(\vec{v})$	k	α	t_1	t_2	t_3
	кг	м		м/с	Н				град	с		
11	4	0	0	15	$2t + 3 \sin 2t$	—	—	—	45	1/2	1	2
12	10	0	8	10	$2 \cos t$	—	—	—	—	$\pi/4$	$\pi/3$	$2\pi/3$
13	6	5	0	25	$10e^{2t}$	—	—	—	—	2	3	4
14	12	15	12	10	$\sqrt{t^2 + 10}$	—	—	—	—	2	$\sqrt{15}$	6
15	10	0	10	15	$2 - \sin t$	—	—	—	—	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
16	6	0	0	12	$2t - t^3$	—	—	—	60	1	3	4
17	4	8	5	20	$t^2 - 3t$	—	—	—	—	2	4	6
18	5	0	5	10	$5 \cos t$	—	—	—	—	$\pi/3$	$2\pi/3$	$5\pi/3$
19	6	12	15	8	$t^2 - 2t + 3$	—	—	—	60	1	2	3
20	3	6	8	6	$3e^{-2t}$	—	—	—	45	1/4	1/2	1
21	7	7	14	14	—	$k^2 mr$	—	2	—	1/2	1/4	1
22	5	10	4	8	—	$k^2 mr$	—	3	—	1/6	1/3	1
23	6	6	0	12	—	$k^2 mr$	—	4	60	1/8	1/4	1/2
24	4	0	10	15	—	$k^2 mr$	—	3	—	2/3	1	4/3
25	12	0	4	20	—	$k^2 mr$	—	2	30	1	1,5	2
26	8	8	0	8	—	$k^2 mr$	—	5	45	1/5	2/5	3/5
27	9	18	0	15	—	$k^2 mr$	—	2	30	1/2	1	3/2
28	12	0	8	20	—	$k^2 mr$	—	3	—	1/3	2/3	1
29	10	15	10	10	—	$k^2 mr$	—	2	—	1/2	1	3/2
30	6	20	6	10	—	$k^2 mr$	—	4	—	1/8	1/2	1
31	6	60	100	100	—	—	kv	0,2	—	6	12	18
32	10	0	100	150	—	—	kv	0,4	30	5	10	-15

Вариант	m	x_0	y_0	v_0	$F(t)$	$F(\vec{r})$	$R(\vec{r})$	k	α	t_1	t_2	t_3
	кг	м		м/с	Н				град	с		
33	8	0	8	200	—	—	$k^2 v^2$	0,4	60	1,5	3	4,5
34	6	50	0	120	—	—	$k^2 v^2$	0,3	60	2	40	5
35	4	0	100	150	—	—	kv	0,1	45	4	8	12
36	6	50	120	200	—	—	$k^2 v^2$	0,3	30	2	3	6
37	2	0	100	100	—	—	$k^2 v^2$	0,1	—	1,8	3,6	5,4
38	5	50	0	200	—	—	kv	0,2	60	5	15	20
39	4	60	30	100	—	—	$k^2 v^2$	0,4	45	3	4	6
40	8	0	40	160	—	—	kv	0,5	—	4	8	12

Приклад 24. Тіло масою m рухається по похилій площині AB (довжина $AB = l = 9,8$ м) з нахилом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту (рис. 61).

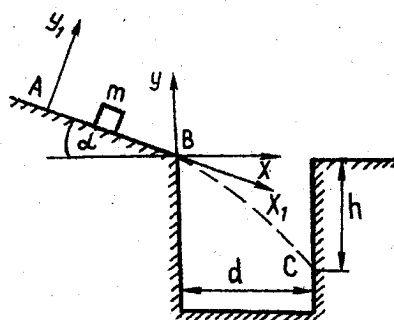


Рис. 61

Швидкість тіла в положенні A становить $v_A = 4,9$ м/с. Тривалість руху на ділянці AB дорівнює t . Коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$. В точці B тіло покидає площину AB із швидкістю \vec{v}_B і прибуває в положення C із швидкістю \vec{v}_C , знаходячись в повітрі протягом часу T .

Визначити значення h і T .

Розв'язання. На рис. 61 рух тіла вздовж площини AB розглядаємо відносно нерухомої системи координат x_1, y_1 , а на ділянці BC — відносно системи координат xBy .

Початкові умови руху тіла на ділянці AB такі: $t = 0$; $x_{10} = 0$; $\dot{x}_{10} = v_A$, а на ділянці BC — такі:

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 0; \quad \dot{x}_0 = v_B \cos \alpha; \quad \dot{y}_0 = -v_B \sin \alpha.$$

На матеріальну точку, що рухається по негладкій площині AB , діють сила тяжіння \vec{P} ($P = mg$), нормальна реакція \vec{N} ($N = P \cos \alpha = mg \cos \alpha$) і сила тертя \vec{F} ($F = fN = f m \cos \alpha$).

На цю саму точку під час руху вздовж траєкторії BC діє тільки сила тяжіння \vec{P} ($P = mg$). Всі ці сили показано на рис. 61, в.

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки на ділянці AB в проєкціях на вісь Ax_1 має вигляд

$$m \ddot{x}_1 = \sum F_{ix}$$

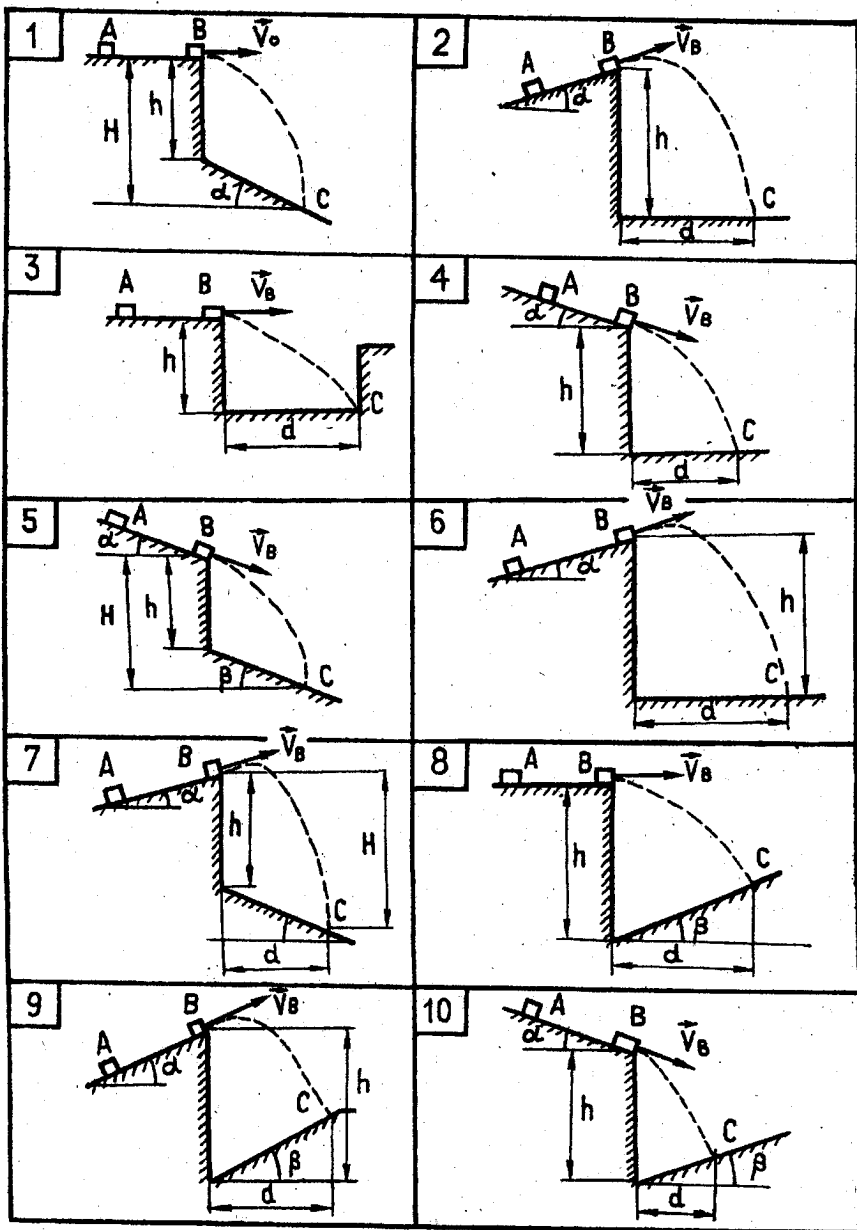


Рис. 61,а

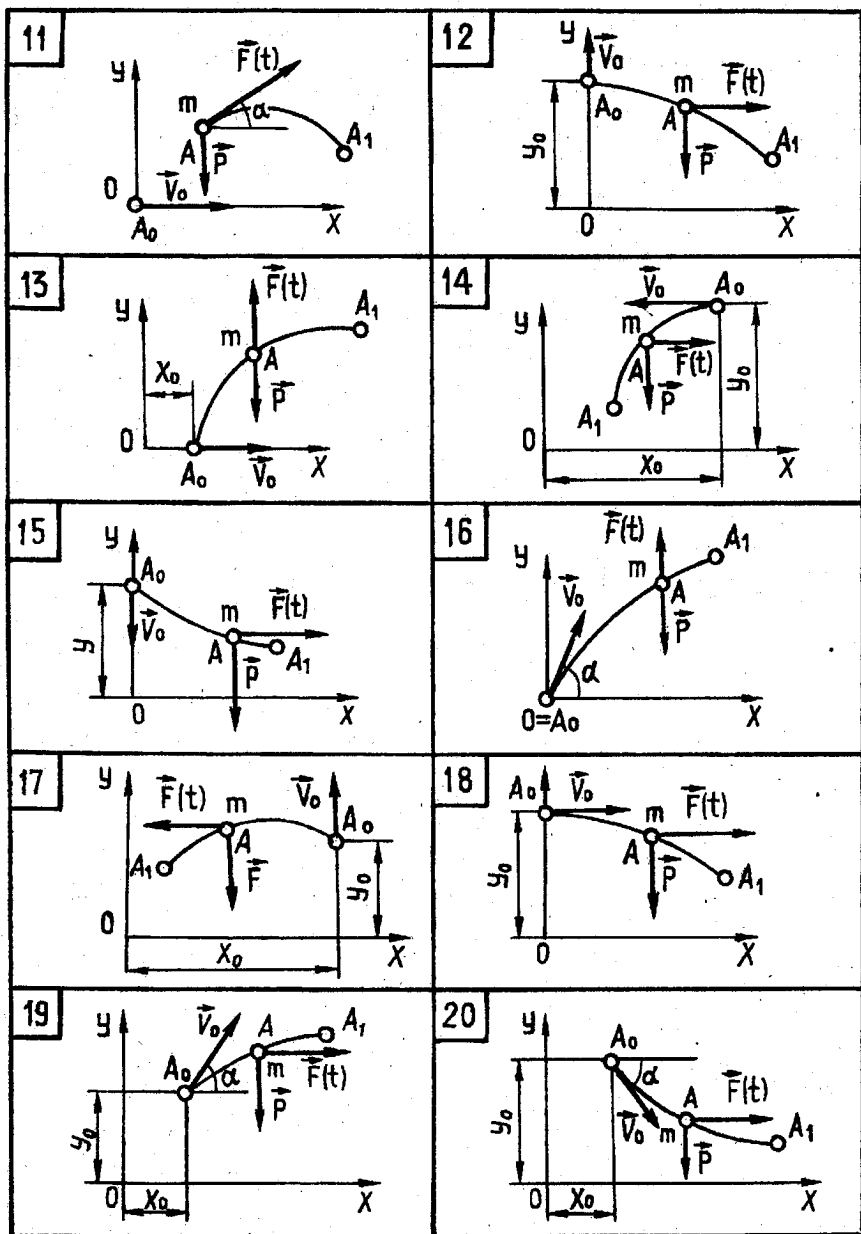


Рис. 61,6

У розглядуваному прикладі
 $m \ddot{x}_1 = mg \sin \alpha - f mg \cos \alpha,$

або

$$\ddot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha). \quad (1)$$

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки на ділянці BC в проекціях на осі Bx і By такі:

$$m \ddot{x} = 0; \quad m \ddot{y} = -mg,$$

або

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = -g. \quad (2)$$

Інтегруючи (1) двічі, дістаємо систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= g(\sin \alpha - f \cos \alpha) t + C_1; \\ x_1 &= \frac{1}{2}g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t^2 + C_1 t + C_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Використовуючи початкові умови руху тіла на ділянці AB , знаходимо значення сталих інтегрування $C_1 = v_A$, $C_2 = 0$. Підставляючи ці значення в (3), дістаємо систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + v_A; \\ x_1 &= \frac{1}{2}g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t^2 + v_A t. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Після введення в друге рівняння (4) заміни $t = \tau$, $x_1 = l$ маємо

$$l = \frac{1}{2}g(\sin \alpha - f \cos \alpha)\tau^2 + v_A \tau. \quad (5)$$

Підставляючи в (5) значення $l = 9,8$ м, $v_A = 4,9$ м/с та $\alpha = 30^\circ$, дістаємо таке рівняння для визначення часу руху тіла з положення A в положення B :

$$0,327 \tau^2 + \tau - 2 = 0,$$

звідки $\tau_1 = 2,4$ с, $\tau_2 < 0$ (не має фізичного змісту).

Знаючи час $\tau = 2,4$ с, можна знайти швидкість тіла в положенні B , а саме:

$$v_B = 9,8 \cdot 0,327 \cdot 2,4 + 4,9 = 12,59 \text{ м/с.}$$

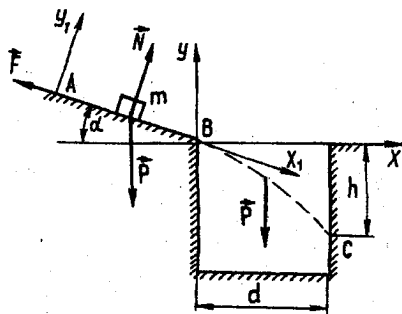


Рис. 61,е

Інтегруючи кожне рівняння (2) двічі, маємо

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= C_3; & \dot{y} &= -gt + C_5; \\ x &= C_3 t + C_4; & y &= -\frac{1}{2}gt^2 + C_5 t + C_6. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Використовуючи початкові умови на ділянці BC руху тіла, знаходимо значення сталих інтегрування, тобто

$$C_3 = v_B \cos \alpha; \quad C_4 = 0; \quad C_5 = -v_B \sin \alpha; \quad C_6 = 0.$$

Підставляючи ці значення в (6), дістаємо такі рівняння:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= v_B \cos \alpha; & \dot{y} &= -gt - v_B \sin \alpha; \\ x &= v_B t \cos \alpha; & y &= -\frac{1}{2}gt^2 - v_B t \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Для моменту часу $t = T(x = d)$ з урахуванням того, що $x = v_B t \cos \alpha$, визначаємо час руху тіла вздовж ділянки BC , а саме:

$$T = \frac{d}{v_B \cos \alpha} = \frac{4}{12,59 \cos 30^\circ} = 0,36 \text{ с.}$$

Після введення в рівняння

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 - v_B t \sin \alpha$$

заміни

$$t = T = d / (v_B \cos \alpha)$$

маємо

$$y = -\frac{gt^2}{2 v_B^2 \cos^2 \alpha} - d \operatorname{tg} \alpha = \frac{-9,8 \cdot 4^2}{2 \cdot 12,59^2 \cos^2 30^\circ} - 4 \operatorname{tg} 30^\circ = -2,97 \text{ м,}$$

тобто $h = 2,97 \text{ м.}$

Приклад 25. Матеріальна точка A масою $m = 5 \text{ кг}$ (рис. 62) рухається у вертикальній площині під дією сили тяжіння \vec{P} і центральної сили $\vec{F}(\vec{r}) = mk^2 \vec{r}$, яка пропорційна відстані точки A від нерухомого центра O , причому коефіцієнт пропорційності $k = 4 \text{ с}^{-1}$.

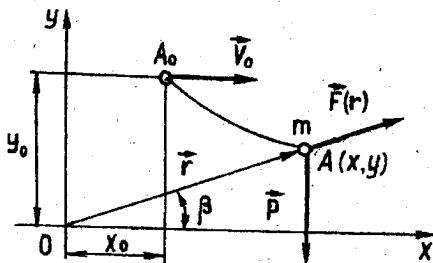


Рис. 62

Знайти рівняння траєкторії руху точки, якщо на початку руху вона займала положення $A_0(x_0, y_0)$ і мала швидкість $\vec{v}_0 \parallel O_x$ ($x_0 = 3 \text{ м}$, $y_0 = 4 \text{ м}$, $v_0 = 10 \text{ м/с}$), а також швидкість точки в моменті часу $t_1 = 1/16 \text{ с}$, $t_2 = 1,8 \text{ с}$, $t_3 = 1/4 \text{ с}$.

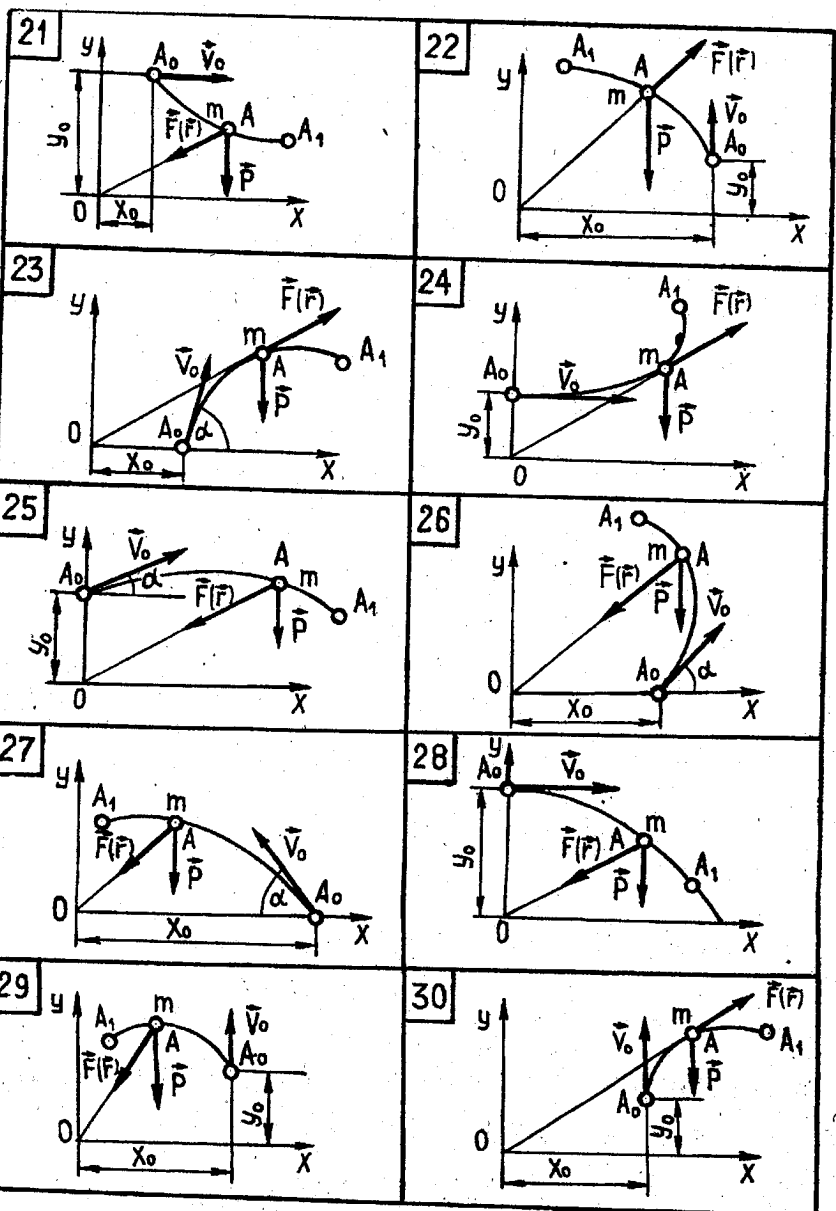


Рис. 62,а

Розв'язання. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки A згідно з рис. 62 мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \Sigma F_{ix}; & m\ddot{x} &= F(\vec{r}) \cos \beta; \\ m\ddot{y} &= \Sigma F_{iy}; & m\ddot{y} &= F(\vec{r}) \sin \beta - P, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

причому $\cos \beta = x/r$, $\sin \beta = y/r$.

Остаточно ці рівняння зводяться до такого вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - k^2 x &= 0; \\ \ddot{y} - k^2 y &= -g. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Інтегруючи рівняння (2), дістаємо

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}; \\ y &= C_3 e^{kt} + C_4 e^{-kt} + g/k^2. \end{aligned}$$

Для визначення сталих інтегрування використовуємо такі початкові умови: при $t = 0$ $x_0 = 3$ м, $y_0 = 4$ м, $\dot{x}_0 = v_0$, $\dot{y}_0 = 0$.

Ураховуючи ці умови, встановлюємо, що

$$\begin{aligned} C_1 &= (x_0 k + v_0)/(2k); & C_2 &= (x_0 k - v_0)/(2k); \\ C_3 &= C_4 = \frac{1}{2}(y_0 - g/k^2). \end{aligned}$$

Остаточно рівняння руху точки A набувають вигляду

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \operatorname{ch}(kt) + \frac{v_0}{k} \operatorname{sh}(kt); \\ y &= (y_0 - g/k^2) \operatorname{ch}(kt) + g/k^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Виключаючи параметр (час t) з рівнянь (3), знаходимо

$$x = x_0 \left(\frac{yk^2 - g}{y_0 k^2 - g} \right) + \frac{v_0}{k} \sqrt{\left(\frac{yk^2 - g}{y_0 k^2 - g} \right)^2 - 1}. \quad (4)$$

Після відповідних перетворень рівняння (4) набуває такого вигляду:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (5)$$

причому

$$A = (y_0 k^2 - g)^2 = (4 \cdot 4^2 - 10)^2 = 2916$$

$$B = -x_0 (y_0 k^2 - g)k^2 = -3(4 \cdot 4^2 - 10) \cdot 4^2 = -2592;$$

$$C = k^2 (x_0^2 k^2 - v_0^2) = 4^2 (3^2 \cdot 4^2 - 10^2) = 704;$$

$$D = x_0 g (y_0 k^2 - g) = 3 \cdot 10 (4 \cdot 4^2 - 10) = 1620;$$

$$E = -g(x_0^2 k^2 - v_0^2) = -10(3^2 \cdot 4^2 - 10^2) = -440;$$

$$F = x_0^2 g^2 + v_0^2 k^2 y_0^2 - 2 v_0^2 y_0 g = \\ = 3^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 - 2 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10 = 18\,500.$$

Рівняння (5) описує лінію другого порядку. Щоб дістати рівняння лінії в канонічному вигляді, спочатку виключимо з рівняння (5) доданок, який містить добуток $xу$. Цього можна досягти поворотом осей координат на кут α , використавши формули

$$\left. \begin{aligned} x &= x^* \cos \alpha - y^* \sin \alpha; \\ y &= x^* \sin \alpha + y^* \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

причому

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C} = \frac{-2 \cdot 2592}{2916 - 704} = -2,3436;$$

$$2\alpha = 113,11^\circ; \quad \alpha = 56,555^\circ;$$

$$\cos 2\alpha = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 113,11^\circ} = -0,3925;$$

$$\cos \alpha = \sqrt{(1 + \cos 2\alpha)/2} = \sqrt{(1 + \cos 113,11^\circ)/2} = 0,5511;$$

$$\sin \alpha = \sqrt{(1 - \cos 2\alpha)/2} = \sqrt{(1 - \cos 113,11^\circ)/2} = 0,8344.$$

Після підстановки (6) в рівняння (5) останнє набуває такого вигляду:

$$A^* x'^2 + C^* y'^2 + 2D^* x' + 2E^* y' + F^* = 0, \quad (7)$$

де

$$A^* = A \cos^2 \alpha + 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha =$$

$$= 2916 \cos^2 56,555^\circ - 2592 \sin 113,11^\circ + 704 \sin^2 56,555^\circ = -1008,1;$$

$$C^* = A \sin^2 \alpha - 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha =$$

$$= 2916 \sin^2 56,555^\circ - B \sin 113,11^\circ + 704 \cos^2 56,555^\circ = 4628;$$

$$D^* = D \cos \alpha + F \sin \alpha = 1620 \cos 56,555^\circ - 440 \sin 56,555^\circ = 526;$$

$$E^* = -D \sin \alpha + E \cos \alpha = -1620 \sin 56,555^\circ - 440 \cos 56,555^\circ = -1594;$$

$$F^* = F = 18\,500.$$

Застосовуючи правило паралельного перенесення осей координат, тобто

$$x^* = \bar{x} + \bar{x}_0; \quad y^* = \bar{y} + \bar{y}_0, \quad (8)$$

можна виключити з рівняння (7) доданки, які містять x^* та y^* .

На підставі (7) і (8) рівняння, що описує лінію другого порядку, набуває вигляду

$$A^* \bar{x}^2 + C^* \bar{y}^2 = M,$$

причому

$$\bar{x}_0 = -D^*/A^* = (-526)/(-1008) \cong 0,52 \text{ м};$$

$$\bar{y}_0 = -E^*/C^* = 1594/4628 \cong 0,34 \text{ м}.$$

Тоді

$$M = -A^* \bar{x}_0^2 - C^* \bar{y}_0^2 - 2D^* \bar{x}_0 - 2E^* \bar{y}_0 - F^* =$$

$$= 1008 \cdot 0,52^2 - 4628 \cdot 0,34^2 - 2 \cdot 526 \cdot 0,52 -$$

$$- 2(-1594) \cdot 0,34 - 18\,500 = -18\,225,5.$$

Остаточно канонічне рівняння, що описує лінію другого порядку, набуває такого вигляду:

$$\frac{\bar{x}^2}{A^2} + \frac{\bar{y}^2}{B^2} = 1,$$

де

$$A^2 = \frac{M}{A^*} = \frac{-18\,225,5}{-1008,1} \cong 18 \text{ м}^2;$$

$$B^2 = \frac{M}{C^*} = \frac{-18\,225,5}{4628} \cong -4 \text{ м}^2.$$

Траєкторія руху матеріальної точки A під дією сили тяжіння та відцентрової сили $\vec{F} = mk^2 \vec{r}$ має вигляд гіперболи

$$\frac{\bar{x}^2}{18} - \frac{\bar{y}^2}{4} = 1,$$

півосі якої $\bar{A} = \sqrt{18} = 4,24 \text{ м}; \quad \bar{B} = \sqrt{4} = 2 \text{ м}.$

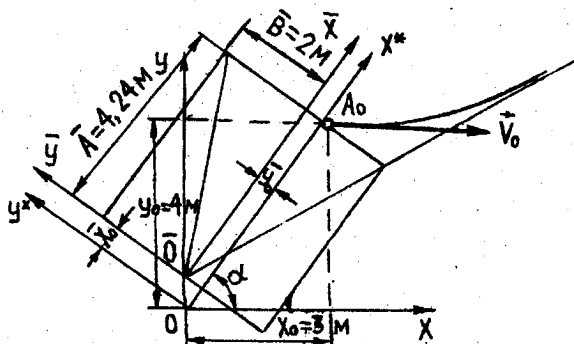


Рис. 62,6

Траекторію руху точки A зображено на рис. 62, б.

Приклад 26. Матеріальна точка A масою $m = 10$ кг (рис. 63) починає рухатися з положення $A_0(x_0, y_0)$, маючи початкову швидкість $v_0 = 100$ м/с, під кутом $\alpha = 45^\circ$ до горизонту в середовищі, що чинить опір. Сила цього опору $R = k^2 v^2$.

Знайти рівняння траекторії руху точки, координати x_{\max} та y_{\max} , а також швидкість точки в момент часу $t = 2$ с, якщо $x_0 = 8$ м, $y_0 = 16$ м, $k = 0,4$ кг^{0,5} · м^{-0,5}.

Розв'язання. Матеріальна точка A рухається під дією сили тяжіння P і сили опору середовища $R = k^2 v^2$ (рис. 63, б). Диференціальні рівняння руху точки в проєкціях на натуральні осі мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -mg \sin \theta - k^2 v^2; \\ m \frac{v^2}{\rho} &= mg \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

де ρ — радіус кривини траекторії.

Для траекторії, опуклості якої спрямована вгору, кривина траекторії визначається так:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\theta}{ds},$$

де s — дугова координата, що визначає положення рухомої точки на траекторії.

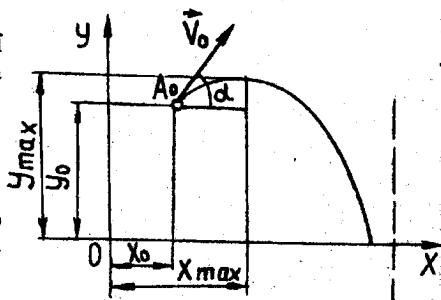


Рис. 63

Оскільки швидкість $v = \frac{ds}{dt}$,

маємо

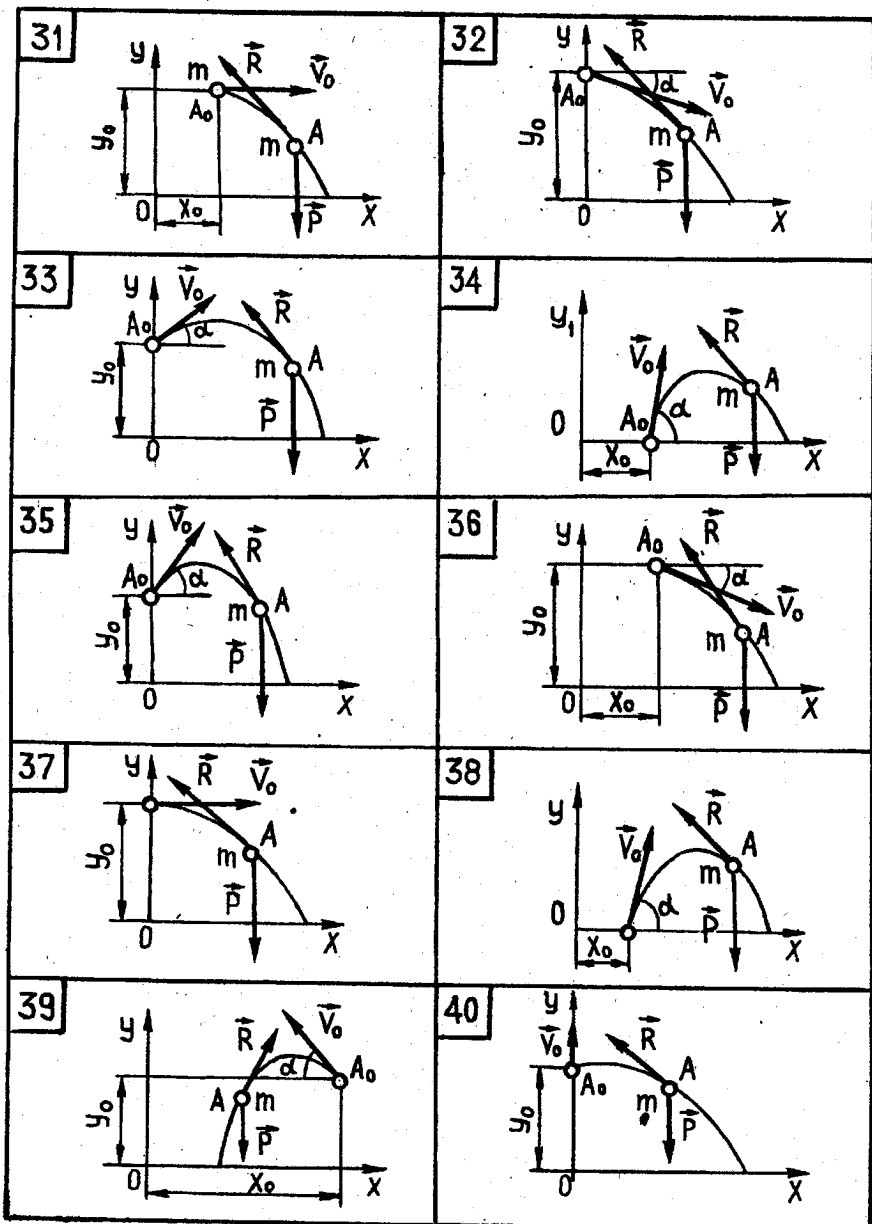


Рис. 63,а

$$m \frac{v^2}{\rho} = -mv^2 \frac{d\theta}{ds} = -mv \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\theta}{ds} = -mv \frac{d\theta}{dt}.$$

Тоді рівняння (1) набувають вигляду

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -mg \sin \theta - k^2 v^2; \\ -mv \frac{d\theta}{dt} &= mg \cos \theta. \end{aligned} \right\} (2)$$

З другого рівняння (2) випливає, що

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g}{v} \cos \theta. \quad (3)$$

Беручи до уваги, що

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt},$$

та враховуючи (3), дістаємо

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{dv}{d\theta} \cdot \frac{g}{v} \cos \theta.$$

Підставляючи (4) в перше рівняння (2), знаходимо

$$-m \frac{dv}{d\theta} \frac{g}{v} \cos \theta = -mg \sin \theta - k^2 v^2,$$

або

$$\frac{dv}{d\theta} \cos \theta - v \sin \theta = \frac{v^3}{c^2}, \quad (5)$$

де

$$c = \sqrt{g \frac{m}{k^2}} = \sqrt{10 \cdot \frac{10}{(0,4)^2}} = 25 \text{ м/с}$$

є граничним значенням швидкості точки при досягненні нею осі Ox .

Оскільки $v_x = v \cos \theta$ й ураховуючи, що

$$\frac{dv}{d\theta} \cos \theta - v \sin \theta = \frac{d}{d\theta} (v \cos \theta) = \frac{dv_x}{d\theta},$$

на підставі (5) маємо

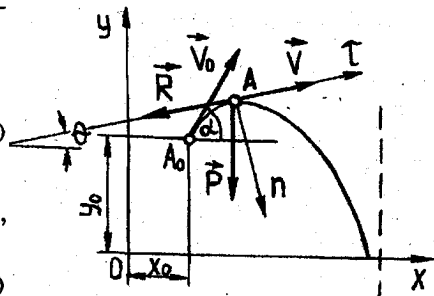


Рис. 63,6

$$\frac{dv_x}{d\theta} = \frac{1}{c^2} \frac{v_x^3}{\cos^3 \theta}. \quad (6)$$

Інтегруючи (6), дістаємо

$$-\frac{1}{2v_x^2} = \frac{1}{2c^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \right] + C. \quad (7)$$

Використовуючи початкові умови, а саме:

$$t = 0, \theta = \alpha, v_x = v_0 \cos \alpha,$$

знаходимо сталу інтегрування

$$C = \frac{1}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} - \frac{1}{2c^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right) + \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \right].$$

Підставляючи C в рівняння (7), знаходимо

$$v_x = v_0 \cos \alpha f(\theta), \quad (8)$$

де

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{c^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right) + \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) - \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \right]}}$$

Проекція вектора швидкості точки на вісь Oy

$$v_y = v_x \operatorname{tg} \theta = v_0 \cos \alpha \operatorname{tg} \theta f(\theta). \quad (9)$$

Щоб дістати параметричні рівняння руху точки A , знайдемо залежність між часом t і кутом θ . З рівнянь (3) та (8) випливає, що

$$dt = -\frac{v}{g} \cdot \frac{d\theta}{\cos \theta} = -\frac{v_x}{g \cos^2 \theta} d\theta = -\frac{v_0 \cos \alpha}{g} f(\theta) \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}.$$

Тоді

$$t = -\frac{v_0 \cos \alpha}{g} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{f(\theta) d\theta}{\cos^2 \theta}. \quad (10)$$

Оскільки

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x = v_0 \cos \alpha f(\theta); \\ \frac{dy}{dt} &= v_y = v_0 \cos \alpha \operatorname{tg} \theta f(\theta), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

інтегруючи рівняння (11), дістаємо

$$x = x_0 + \int_0^t v_x dt = x_0 - \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{[f(\theta)]^2}{\cos^2 \theta} d\theta; \quad (12)$$

$$y = y_0 + \int_0^t v_y dt = y_0 - \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{[f(\theta)]^2 \operatorname{tg} \theta d\theta}{\cos^2 \theta}. \quad (13)$$

Розв'язання рівнянь (10)–(13) проведено з використанням комп'ютера. Програму розрахунку координат $x(t)$, $y(t)$ та проєкцій векторів швидкостей $\vec{v}_x(t)$, $\vec{v}_y(t)$ поміщено на с. 199–202, а результати обчислень наведено в табл. 35, б.

Таблиця 35, б

θ , град	$f(\theta)$	$I_1(\theta)$	t , с	$I_2(\theta)$	$I_3(\theta)$	x	y	v_x	v_y
						м		м/с	
45	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	8,000	16,000	70,689	70,732
40	0,468	-0,102	0,727	-0,068	-0,064	42,615	48,529	33,060	27,756
35	0,367	-0,159	1,149	-0,092	-0,082	54,657	57,879	25,924	18,161
30	0,319	-0,201	1,452	-0,106	-0,091	62,023	62,633	22,562	13,032
25	0,290	-0,235	1,696	-0,116	-0,097	67,348	65,466	20,524	9,575
20	0,270	-0,264	1,904	-0,125	-0,101	71,551	67,286	19,118	6,961
15	0,256	-0,289	2,087	-0,132	-0,103	75,066	68,496	18,062	4,842
10	0,244	-0,312	2,253	-0,138	-0,105	78,128	69,305	17,221	3,038
5	0,234	-0,334	2,407	-0,143	-0,106	80,883	69,830	16,519	1,446
0	0,225	-0,354	2,553	-0,148	-0,106	83,425	70,138	15,910	0,000
-5	0,217	-0,374	2,694	-0,153	-0,106	85,823	70,268	15,363	-1,345
-10	0,210	-0,393	2,833	-0,157	-0,106	88,127	70,240	14,858	-2,621
-15	0,203	-0,412	2,972	-0,162	-0,106	90,377	70,059	14,379	-3,854
-20	0,197	-0,432	3,113	-0,166	-0,105	92,608	69,721	13,914	-5,066
-25	0,190	-0,452	3,258	-0,170	-0,104	94,849	69,207	13,450	-6,275
-30	0,184	-0,473	3,410	-0,175	-0,103	97,130	68,488	12,978	-7,496
-35	0,177	-0,495	3,572	-0,179	-0,101	99,479	67,519	12,487	-8,748
-40	0,169	-0,620	3,748	-0,184	-0,099	101,930	66,232	11,964	-10,044
-45	0,161	-0,547	3,943	-0,189	-0,095	104,515	64,530	11,395	-11,402
-50	0,152	-0,577	4,163	-0,195	-0,091	107,277	62,268	10,763	-12,836
-55	0,142	-0,612	4,417	-0,201	-0,085	110,261	59,230	10,047	-14,360
-60	0,130	-0,654	4,720	-0,207	-0,077	113,523	55,078	9,219	-15,982
-65	0,117	-0,706	5,091	-0,214	-0,065	117,127	49,271	8,244	-17,699
-70	0,100	-0,772	5,567	-0,222	-0,049	121,140	40,880	7,082	-19,486
-75	0,080	-0,861	6,213	-0,231	-0,024	125,628	28,175	5,689	-21,274
-80	0,057	-0,994	7,173	-0,240	0,017	130,629	7,358	4,030	-22,925
-85	0,030	-1,237	8,922	-0,251	0,097	136,115	-33,576	2,103	-24,201

Примітка. Тут $f(\theta) =$

$$= \frac{1'}{\sqrt{1 + \frac{v_0^2 \alpha}{c^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right) + \frac{\sin \alpha}{\cos_2 \alpha} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) - \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \right]}}$$

$$I_1(\theta) = \int_{\alpha}^{\theta} \frac{f(\theta) d\theta}{\cos^2 \theta}; \quad I_2(\theta) = \int_{\alpha}^{\theta} \frac{f^2(\theta) d\theta}{\cos^2 \theta}; \quad I_3(\theta) = \int_{\alpha}^{\theta} \frac{f^2(\theta) \operatorname{tg}(\theta) d\theta}{\cos^2 \theta}.$$

Графічну залежність $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$ показано на рис. 63, в, г.

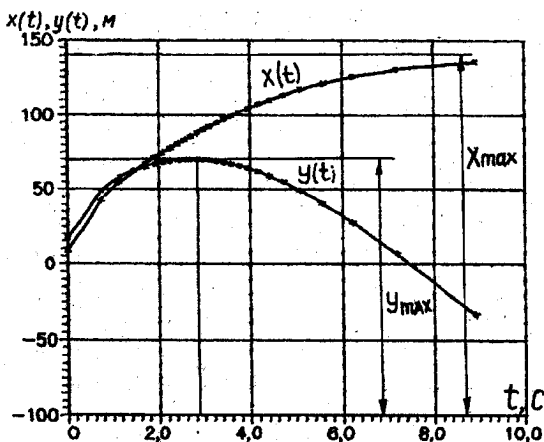


Рис. 63,в

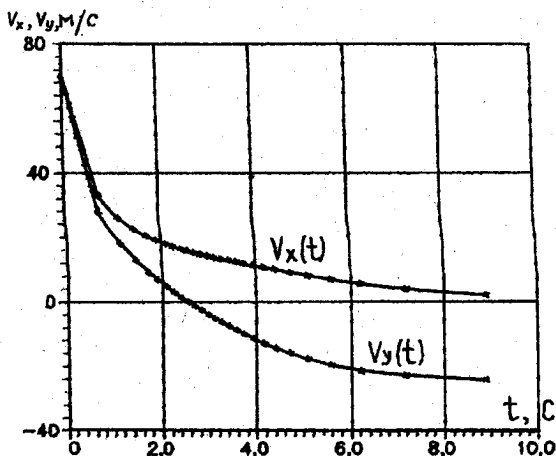


Рис. 63,г

**Програма розрахунку координат
 $x(t)$, $y(t)$ та проєкцій векторів швидкостей $\vec{v}_x(t)$, $\vec{v}_y(t)$**

```
program mex;
var
i,j           :integer;
mas, v0, kop, t, alfa, g, c, a1,
ac1, ac2,
vx, vy, x, y, x0, y0,
tet0, tet,
f, aint_t, aint_x0, aint_y0:real;
file1, file2, f1, f2, f3, f4:text;

function trap0(x0, xn, ac1, ac2:real; m:integer):real;
var      teta, sum,
         a10, a11, ftet, fint, dh :real;
         i:integer;
begin
i:=0;
teta:=x0;
sum:=0;
dh:=(xn-x0)/m;
if dh <> 0 then
begin
while i<=m do
begin
a10:=ln(((1+sin(teta))/(1-sin(teta)))/2+sin(teta)/
sqr(cos(teta)));
ftet:=1/sqrt(1+ac1*(ac2-a10));
fint:=ftet/sqr(cos(teta));
if (i=0) or (i=m) then
fint:=fint/2;
sum:=sum+fint;
i:=i+1;
teta:=teta+dh;
end;
end;
trap0:=sum*abs(dh);
```



```

end;

function trap1(x0, xn, ac1, ac2: real; m: integer):real;
var  teta, sum,
     a10, a11, ftet, fint, dh: real;
     i:integer;
begin
  i:=0;
  teta:=x0;
  sum:=0;
  dh:=(xn-x0)/m;
  if dh <> 0 then
    begin
      while i <= m do
        begin
          a10:=ln((1+sin(teta))/(1-sin(teta)))/2+sin(teta)/
              sqr(cos(teta));
          ftet:=1/sqrt(1+ac1*(ac2-a10));
          fint:=sqr(ftet)/sqr(cos(teta));
          if (i=0) or (i=m) then fint:=fint/2;
          sum:=sum+fint;
          i:=i+1;
          teta:=teta+dh;
        end;
      end;
      trap1:=sum*abs(dh);
    end;
end;

```

```

function trap2(x0, xn, ac1, ac2:real; m:integer):real;
var  teta, sum,
     a10, a11, ftet, fint, dh:real;
     i:integer;
begin
  i:=0; teta:=x0;
  sum:=0;
  dh:=(xn-x0)/m;
  if dh <> 0 then
    begin
      while i<=m do
        begin
          a10:=ln((1+sin(teta))/(1-sin(teta)))/2+sin(teta)/

```

```

    sqr(cos(teta));
ftet:=1/sqrt(1+ac1*(ac2-a10));
fint:=sqr(ftet)*sin(teta)/(cos(teta)*sqr(cos(teta)));
if (i=0) or (i=m) then fint:=fint/2;
sum:=sum+fint;
i:=i+1;
teta:=teta+dh;
end;
    end;
trap2:=sum*abs(dh);
end;

begin
assign(file1, 'jas1.pas'); rewrite(file1);
assign(file2, 'jas2.pas'); rewrite(file2);
assign(f1, 'x_t.dat'); rewrite(f1);
assign(f2, 'y_t.dat'); rewrite(f2);
assign(f3, 'vx_t.dat'); rewrite(f3);
assign(f4, 'vy_t.dat'); rewrite(f4);
write(' Введіть: поч. швид. (м/с) VO= '); read(v0);
write(' Введіть: маса тіла (кг) m= '); read(mas);
write(' Введіть: коефіц. опору k= '); read(kop);
write(' Введіть: поч. кут (град) alfa= '); read(alfa);
write(' Введіть: поч. коорд. (м) x0= '); read(x0);
write(' Введіть: поч. коорд. (м) y0= '); read(y0);
g:=9.8; (* прискор. віль. пад *)
c:=sqrt(g*mas/sqr(kop));
alfa:=3.1428*alfa/180;(*рад. *)
writeln(file1, ' tet ', ' t ', ' x ', ' y ', ' vx ', ' vy ');
writeln(' tet ', ' t ', ' x ', ' y ', ' vx ', ' vy ');
ac1:=sqr(v0)*sqr(cos(alfa))/sqr(c);
ac2:=ln((1+sin(alfa))/(1-sin(alfa)))/2+
    sin(alfa)/sqr(cos(alfa));
i:=0;
tet0:=alfa; tet:=tet0;
while (tet=-3.1428/2+3.1428/30) do
    begin
tet:=alfa-i*3.1428/36;
a1:=ln((1+sin(tet))/(1-sin(tet)))/2+
    sin(tet)/sqr(cos(tet));

```

```

f:=1/sqrt(1+ac1*(ac2-a1));
vx:=v0*cos(alfa)*f;
vy:=v0*cos(alfa)*f*sin(tet)/cos(tet);
aint_t:=trap0(tet, alfa, ac1, ac2,50);
aint_x0:=trap1(tet, alfa, ac1, ac2,50);
aint_y0:=trap2(tet, alfa, ac1, ac2,50);
t:=v0*cos(alfa)*aint_t/g;
x:=x0-sqr(v0)*sqr(cos(alfa))*aint_x0/g;
y:=y0-sqr(v0)*sqr(cos(alfa))*aint_y0/g;
writeln(file1, tet*180/3.1428:5:0, ' ', t:9:3, ' ', x:9:3, ' ',
      y:9:3, ' ', vx:9:3, ' ', vy:9:3);
writeln(tet*180/3.1428:5:0, ' ', t:9:3, ' ', x:9:3, ' ',
      y:9:3, ' ', vx:9:3, ' ', vy:9:3);
writeln(file2, tet*180/3.1428:5:0, ' ', f:11:3, ' ', aint_t:11:3, ' ', t:11:3,
      ' ', aint_x0:11:3, ' ', aint_y0:11:3);
      x:11:3, ' ', y:11:3, ' ', vx:11:3, ' ', vy:11:3);
writeln(f1,t:11:3, ' ',x:11:3);
writeln(f2,t:11:3, ' ',y:11:3);
writeln(f3,t:11:3, ' ',vx:11:3);
writeln(f4,t:11:3, ' ',vy:11:3);
i:=i+1;
end;
close(file1);
close(file2);
close(f1);
close(f2);
close(f3);
close(f4);
end.

```

Завдання Д-2

ДОСЛІДЖЕННЯ ВІДНОСНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Матеріальна точка M переміщується вздовж прямолінійного каналу (варіанти 1—20, рис. 64, б, в) або по криволінійній траєкторії (варіанти 21—30, рис. 64, з) з положення M_0 в положення M_1 .

Тіло A здійснює рух поступальний (варіанти 1—10, рис. 64, б) або обертальний навколо нерухомої осі (варіанти 11—30, рис. 64, в, з).

Знайти рівняння відносного руху точки M і тиск кульки M на тіло A в момент часу t_1 . Необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 36.

Вариант	m	ω	x_{10}	v_0	t_1	c	l_0	r	h	f	α	Рівняння траєкторії руху тіла A
	кг	c^{-1}	м	м/с	с	м				град	м	
1	0,02	—	0,5	2,0	0,1	—	—	—	—	0,2	45	$x = 0,1 \sin(\pi t)$
2	0,02	8π	0,4	1,0	0,3	40	0,2	0,5	—	—	—	—
3	0,06	—	0,3	2,0	0,2	20	0,2	—	—	—	—	$x = 2t - t^2$
4	0,04	—	0,4	0	0,1	—	—	—	—	0,1	30	$y = 0,2 \sin(2\pi t)$
5	0,05	—	0,5	2,0	0,2	30	0,3	—	—	—	30	$x = 3t^3$
6	0,03	—	0,6	1,0	0,4	—	—	—	—	—	60	$x = 0,2t - 2t^3$
7	0,02	—	0,5	0,8	0,3	—	—	—	—	0,2	45	$x = 0,4 \sin(\pi t/2)$
8	0,05	—	0,5	0,5	0,2	20	0,2	—	—	—	—	$x = 6 - 5t^3$
9	0,02	—	0,4	0,8	0,2	20	0,2	—	—	—	60	$x = 5 + t^2$
10	0,03	4π	0,2	3,0	0,3	—	—	0,3	—	—	—	—
11	0,02	3π	0,5	0,1	0,6	25	0,3	0,8	—	—	—	—
12	0,04	2π	0,4	0,2	0,1	30	0,1	0,3	—	—	30	—
13	0,05	π	0,3	0,5	0,2	40	0,2	0,6	—	—	—	—
14	0,03	π	0	0,3	0,3	30	0,4	0,5	0,3	—	—	—
15	0,02	2π	0,1	0,2	0,4	—	—	—	—	—	—	—
16	0,03	2π	0,5	0	0,2	—	—	—	—	—	45	—
17	0,08	π	0,2	0,3	0,1	20	0,1	—	—	—	—	—
18	0,02	3π	0,5	0,3	0,2	—	—	—	—	—	—	—
19	0,04	6π	0,1	0,2	0,2	20	0,2	0,6	—	—	—	—
20	0,08	4π	0,1	0,1	0,2	20	0,1	—	—	—	—	—

Закінчення табл. 36

Вариант	m	ω	x_0	y_0	z_0	r	a	b	c	v_0	Рівняння траєкторії руху точки M
	кг	c^{-1}	м							м/с	м
21	4,0	5	0	6	—	6	—	—	-2	5	$z = (y - r)^2/2 + c$
22	2,0	4	0	—	-3	—	—	—	7	3	$y = -z^2/2 + c$
23	3,0	2	—	9	0	5	3	4	—	7	$b^2(y - r)^2 + a^2z^2 - a^2b^2 = 0$
24	2,3	3	0	3	—	—	5	3	—	4	$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$
25	2,0	4	—	0	3	—	2	3	—	5	$b^2y^2 + a^2z^2 - a^2b^2 = 0$
26	4,0	2	—	0	3	3	—	—	—	4	$y^2 + z^2 = r^2$
27	3,0	5	0	—	-3	—	—	—	6	5	$y = -z^2/2 + c$
28	2,0	3	5	5	—	5	5	3	—	4	$b^2x^2 + a^2(y - r)^2 - a^2b^2 = 0$
29	5,0	2	0	8	0	3	—	—	5	2	$(y - c)^2 + z^2 = r^2$
30	3,0	3	—	1	—	—	—	—	-3	3	$z = y^2 + c$

У завданні прийнято такі позначення: m — маса точки M ; ω — стала кутова швидкість тіла A (варіанти 2, 10—30); c — жорсткість пружини, до якої прикріплено кульку M ; l_0 — довжина недеформованої пружини; f — коефіцієнт тертя ковзання кульки по стінках каналу; x_0, x_0 — початкова координата і проекція вектора початкової швидкості на вісь O_1x_1 .

Приклад 27. Матеріальна точка M масою m переміщається відносно тіла A з положення M_0 в положення M_1 (рис. 64). Тіло A здійснює поступальний рух у вертикальній площині.

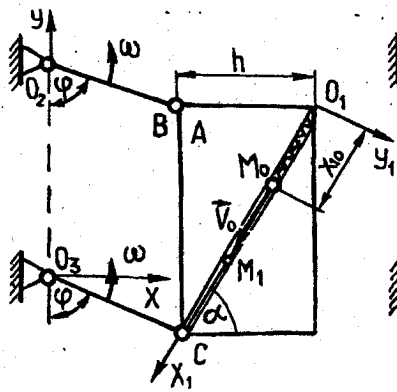


Рис. 64

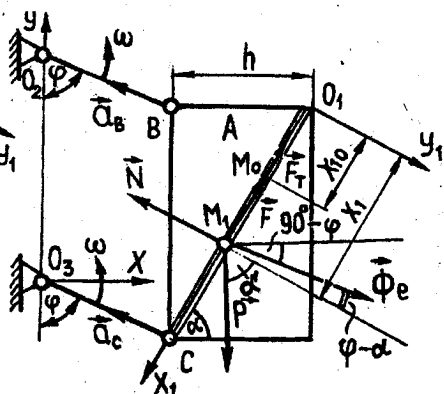


Рис. 64,а

Знайти рівняння відносного руху $x_1(t)$ точки, координату x_1 у момент часу $t = t_1$, тиск кульки M на стінки каналу та її швидкість в положенні M_1 , якщо

$$m = 0,2 \text{ кг}, \quad \omega = \pi \text{ с}^{-1}, \quad O_2B = O_3C = r = 0,4 \text{ м}, \quad h = 0,3 \text{ м},$$

$$\alpha = 60^\circ, \quad x_{10} = 0,1 \text{ м}, \quad \dot{x}_{10} = v_0 = 2 \text{ м/с}, \quad l_0 = 0,08 \text{ м}, \quad c = 0,4 \text{ Н/м},$$

$$f = 0,2; \quad t_1 = 1/2 \text{ с}.$$

Розв'язання. Матеріальна точка M здійснює рух, що складається з двох рухів: переносного та відносного. Рух точки M разом з тілом A (за умови, що точка M немов би зупинила свій рух уздовж прямолінійного каналу) відносно нерухомої системи координат xO_3 у є переносним, а рух цієї самої точки відносно рухомої системи координат $x_1O_1y_1$, зв'язаної з рухомим тілом, — відносним.

На матеріальну точку M діють сили: \vec{P} — сила тяжіння; \vec{F} — реакція пружини; \vec{N} — нормальна реакція тіла A ; \vec{F}_r — сила тертя.

Модулі сил \vec{F} та \vec{F}_r визначаються виразами

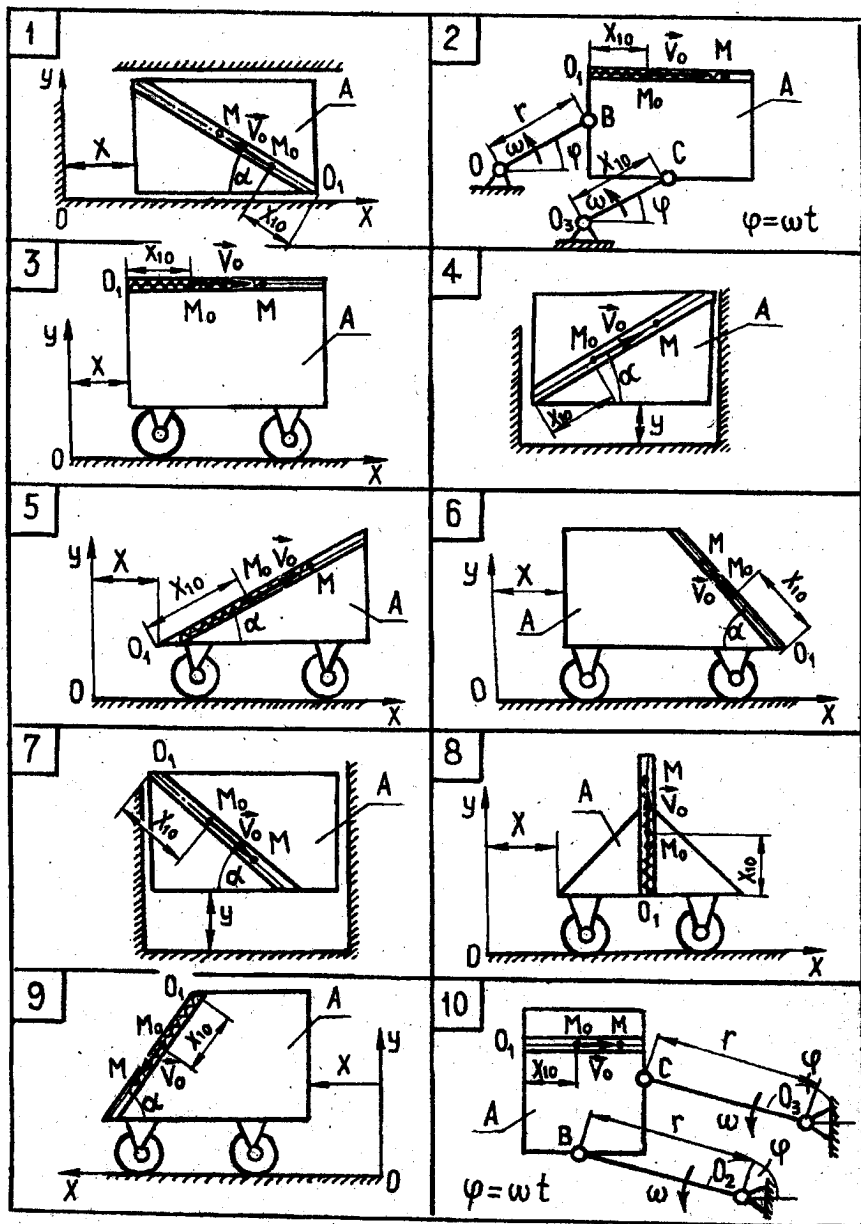


Рис. 64,6

26.5

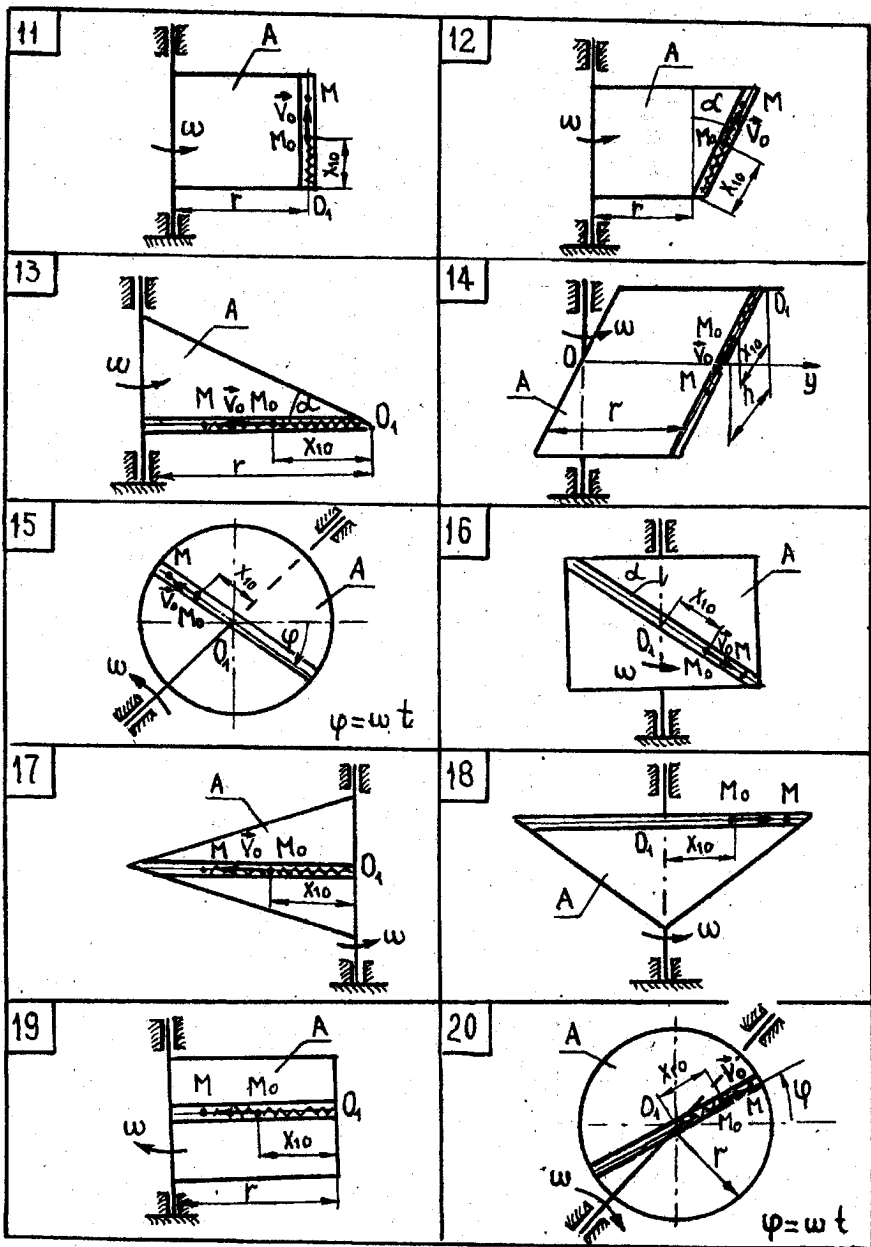


Рис. 64,а

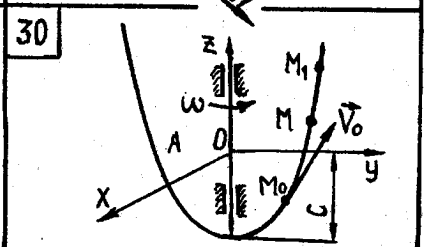
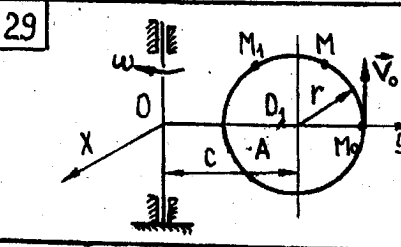
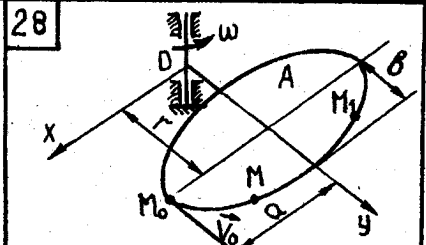
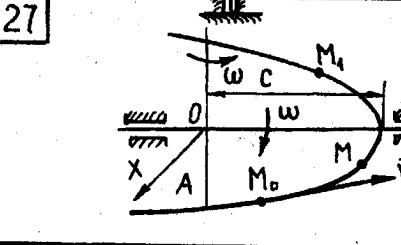
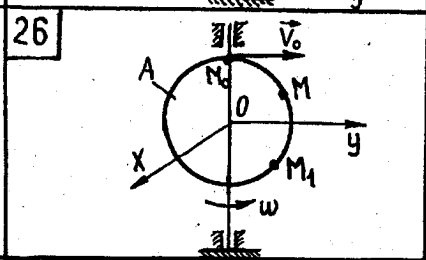
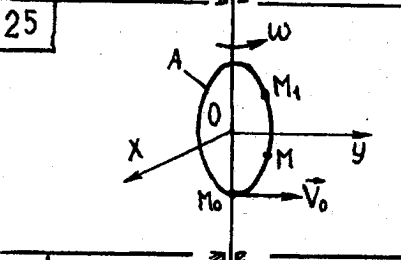
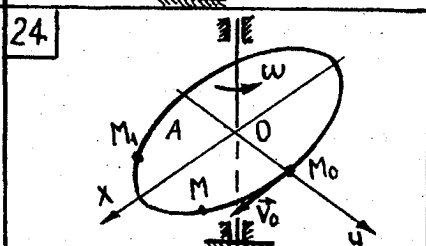
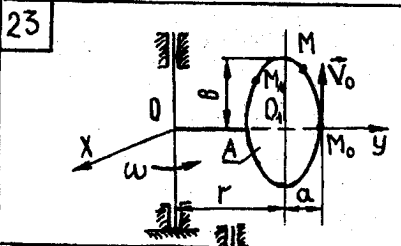
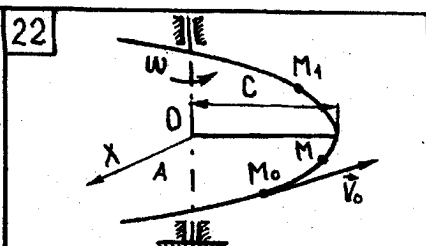
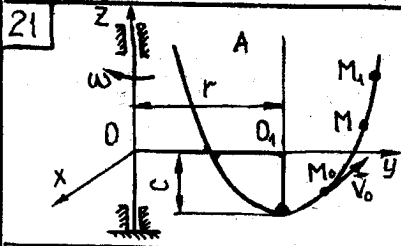


Рис. 64,з

$$F = c(x_1 - l_0); F_T = fN.$$

Прискорення матеріальної точки M для випадку, коли тіло A здійснює переносний поступальний рух, дорівнює прискоренню точки B чи C , тобто

$$a_e = a_B = a_C = \omega^2 r.$$

Модуль переносної сили інерції

$$\Phi_e = ma_e = m\omega^2 r. \quad (1)$$

Усі сили, що діють на точку M , показано на рис. 64, а.

Векторне рівняння, яке описує відносний рух точки M , має вигляд

$$m \vec{a}_r = \vec{P} + \vec{F}_T + \vec{F} + \vec{N} + \vec{\Phi}_e. \quad (2)$$

Проектуючи (2) на осі рухомої системи координат, дістаємо

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= P \sin \alpha - F_T - F - \Phi_e \sin(\varphi - \alpha); \\ 0 &= P \cos \alpha - N + \Phi_e \cos(\varphi - \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

З урахуванням того, що

$$P = mg, F_T = fN, F = c(x_1 - l_0), \Phi_e = m\omega^2 r, \varphi = \omega t,$$

рівняння (3) набувають вигляду

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= mg \sin \alpha - fN - c(x_1 - l_0) - m\omega^2 r \sin(\omega t - \alpha); \\ 0 &= mg \cos \alpha - N + m\omega^2 r \cos(\omega t - \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Із другого рівняння (4) знаходимо нормальну реакцію тіла A на матеріальну точку M , тобто

$$N = m(g \cos \alpha + \omega^2 r \cos(\varphi - \alpha)). \quad (5)$$

Після введення позначень $k^2 = c/m$, $\operatorname{tg} \delta = f$ і використання рівності (5) перше рівняння (4) набуває вигляду

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = \frac{k^2 l_0 \cos \delta + g \sin(\alpha - \delta) - \omega^2 r \sin(\omega t - \alpha + \delta)}{\cos \delta}. \quad (6)$$

Розв'язок рівняння (6) подаємо у вигляді

$$x_1 = x_1^* + x_1^{**}, \quad (7)$$

де $x_1^* = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt)$ — розв'язок однорідного рівняння $\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = 0$; x_1^{**} — частинний розв'язок неоднорідного рівняння (6), який має вигляд

$$x_1^{**} = C_4 + C_3 \sin(\omega t - \alpha + \delta), \quad (8)$$

де C_3, C_4 — сталі.

Підставляючи (8) у (6), дістаємо

$$-C_3\omega^2 \sin(\omega t - \alpha + \delta) + C_4k^2 + C_3k^2 \sin(\omega t - \alpha + \delta) = \frac{k^2l_0 \cos \delta + g \sin(\alpha - \delta) - \omega^2 r \sin(\omega t - \alpha + \delta)}{\cos \delta} \quad (9)$$

Приврівнюючи тут коефіцієнти при $\sin(\omega t - \alpha + \delta)$, маємо

$$-C_3\omega^2 + C_3k^2 = -\frac{\omega^2 r}{\cos \delta},$$

звідки

$$C_3 = -\frac{\omega^2 r}{\cos \delta (k^2 - \omega^2)},$$

а приврівнюючи в (9) вільні доданки, знаходимо

$$C_4k^2 = \frac{k^2l_0 \cos \delta + g \sin(\alpha - \delta)}{\cos \delta},$$

так що

$$C_4 = \frac{k^2l_0 \cos \delta + g \sin(\alpha - \delta)}{k^2 \cos \delta}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} x_1^{**} &= \frac{k^2l_0 \cos \delta + g \sin(\alpha - \delta)}{k^2 \cos \delta} - \frac{\omega^2 r}{\cos \delta (k^2 - \omega^2)} \sin(\omega t - \alpha + \delta) = \\ &= l_0 + \frac{g \sin(\alpha - \delta)}{k^2 \cos \delta} - \frac{\omega^2 r}{(k^2 - \omega^2) \cos \delta} \sin(\omega t - \alpha + \delta). \end{aligned} \quad (10)$$

З урахуванням (7) маємо

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \\ &+ l_0 + \frac{g \sin(\alpha - \delta)}{k^2 \cos \delta} - \frac{\omega^2 r}{(k^2 - \omega^2) \cos \delta} \sin(\omega t - \alpha + \delta). \end{aligned} \quad (11)$$

Швидкість кульки M

$$\dot{x}_1 = -C_1k \sin kt + C_2k \cos kt - \frac{\omega^3 r}{(k^2 - \omega^2) \cos \delta} (\cos \omega t - \alpha + \delta). \quad (12)$$

Підставляючи в (11) початкові умови, а саме: $t = 0$, $x_1 = x_{10}$, $\dot{x}_1 = \dot{x}_{10} = v_0$, знаходимо

$$x_{10} = C_1 + l_0 + \frac{g \sin(\alpha - \delta)}{k^2 \cos \delta} - \frac{\omega^2 r}{(k^2 - \omega^2) \cos \delta} \sin(\delta - \alpha);$$

$$v_0 = C_2k - \frac{\omega^3 r}{(k^2 - \omega^2) \cos \delta} \cos(\delta - \alpha).$$

Звідси

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= x_{10} - l_0 - \frac{g \sin(\alpha - \delta)}{k^2 \cos \delta} + \frac{\omega^2 r}{(k^2 - \omega^2) \cos \delta} \sin(\delta - \alpha); \\ C_2 &= \frac{v_0}{k} + \frac{\omega^3 r}{k(k^2 - \omega^2) \cos \delta} \cos(\alpha - \delta). \end{aligned} \right\} (13)$$

Тут

$$k^2 = c/m = 2 \text{ c}^{-2}; \quad \text{tg } \delta = -0,2; \quad \delta = 11,31^\circ.$$

Тоді

$$C_3 = 0,5117; \quad C_4 = 3,8372; \quad C_1 = -3,3529; \quad C_2 = 0,6661.$$

Остаточо

$$x_1 = -3,3529 \cos t \sqrt{2} + 0,6661 \sin t \sqrt{2} + 3,8372 + 0,5117 \sin(\pi t - 0,85);$$

$$\dot{x}_1 = \sqrt{2}(3,3529 \sin t \sqrt{2} + 0,6661 \cos t \sqrt{2}) + 0,5117 \pi \cos(\pi t - 0,85).$$

У момент часу $t_1 = 1/2 \text{ c}$ значення x_1 та \dot{x}_1 такі:

$$x_1 |_{t=1/2 \text{ c}} = 0,8306 \text{ м}; \quad \dot{x}_1 |_{t=1/2 \text{ c}} = 2,2073 \text{ м/с}.$$

Тиск кульки M на стінку каналу

$$\begin{aligned} N_{t=1/2 \text{ c}} &= 0,2 (9,8 \cos 60^\circ + \pi^2 \cdot 0,4 \cos(\pi/2 - 60^\circ)) = \\ &= 0,2(4,9 + \pi^2 \cdot 0,4 \cos 30^\circ) = 1,66 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Приклад 28. Матеріальна точка M масою $m = 4 \text{ кг}$ рухається відносно тіла A вздовж каналу, що має форму параболи $z = (y - r)^2/2 + c$, з початкового положення M_0 (рис. 65) в положення M_1 . Тіло A обертається навколо осі Oz з кутовою швидкістю $\omega = 5 \text{ с}^{-1}$.

Знайти рівняння швидкості точки M відносно рухомої системи координат x, y, z , а також визначити тиск кульки на стінки каналу в момент часу, коли $v_r = 0$. В початковий момент часу точка займала положення $x_0 = 0, y_0 = 7 \text{ м}, z_0 = -2 \text{ м}$ і мала швидкість відносно рухомої системи координат $v_0 = 5 \text{ м/с}$ ($c = -2, r = 7 \text{ м}$). Тертя не враховувати.

Р о з в ' я з а н н я. Рух точки M — складний і складається з двох рухів: переносного та відносного.

У розглядуваному прикладі відносним рухом слід вважати рух точки M відносно тіла A , яке обертається навколо осі Oz , а переносним — обертальний рух точки M разом із тілом A навколо осі Oz .

Відносний рух точки M описується векторним рівнянням

$$m \vec{a}_r = \Sigma \vec{F}_i + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c, \quad (1)$$

причому на точку M під час руху діють такі сили: \vec{P} — сила тяжіння; \vec{N}_1 і \vec{N}_2 — реакції каналу, по якому рухається точка (спрямовані перпендикулярно до стінок каналу), та сили інерції ($\vec{\Phi}_e$ — переносна, $\vec{\Phi}_c$ — коріолісова), які показано на рис. 65.а.

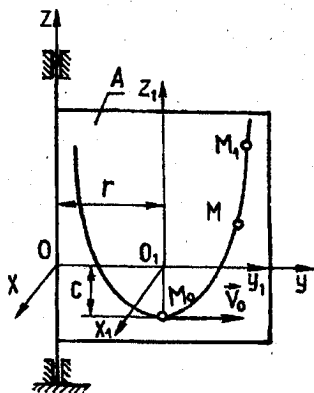


Рис. 65

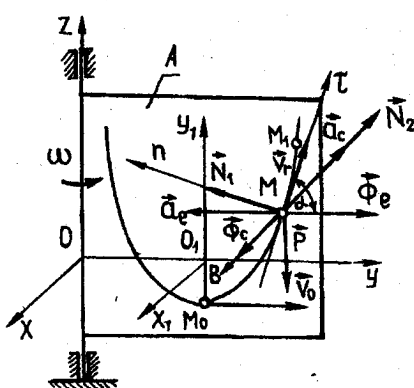


Рис. 65,а

Модулі цих сил становлять $\vec{P}(P = mg)$, $\vec{\Phi}_e = -m \vec{a}_e$ ($\Phi_e = ma_e$),
 $\vec{\Phi}_c = -m \vec{a}_c$ ($\Phi_c = ma_c$).

Переносне прискорення в положенні M

$$a_e = y \omega^2.$$

Вектор коріолісового прискорення

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r),$$

а його модуль

$$a_c = 2 \omega_e v_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e \vec{v}_r}) = 2 \omega v_r \cos \alpha.$$

Тому переносна Φ_e і коріолісова Φ_c сили визначаються так:

$$\Phi_e = m \omega^2 y; \quad \Phi_c = 2m \omega v_r \cos \alpha.$$

Проектуючи рівняння (1) на натуральні осі координат, дістаємо

$$\left. \begin{aligned} m \dot{v}_r &= \Phi_e \cos \alpha - P \sin \alpha; \\ 0 &= N_1 - \Phi_e \sin \alpha - P \cos \alpha; \\ 0 &= -N_2 + \Phi_c. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

На підставі другого і третього рівнянь системи (2) визначаємо нормальні реакції стінок каналу тіла A під час руху точки M , тобто

$$N_1 = m y \omega^2 \sin \alpha + mg \cos \alpha; \quad (3)$$

$$N_2 = 2m \omega v_r \cos \alpha. \quad (4)$$

Перше рівняння із системи (2) набуває вигляду

$$m \frac{dv_r}{dt} = m \omega^2 y \cos \alpha - mg \sin \alpha. \quad (5)$$

Оскільки $\frac{dz}{dy} = \operatorname{tg} \alpha$, можна зробити висновок, що

$$\sin \alpha = \frac{dz}{ds}; \quad \cos \alpha = \frac{dy}{ds}. \quad (6)$$

Ліву сторону рівняння (5) можна записати так:

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v_r \frac{dv_r}{ds}. \quad (7)$$

Підставляючи (6) і (7) у рівняння (5), дістаємо

$$v_r dv_r = \omega^2 y dy - g dz. \quad (8)$$

Після інтегрування (8) маємо

$$v_r^2 = \omega^2 y^2 - 2gz + C_1. \quad (9)$$

Оскільки рівнянням параболи, по якій рухається точка M , є рівняння

$$z = (y - 7)^2 / 2 - 2,$$

знаходимо

$$v_r^2 = \omega^2 y^2 - 2g \left[\frac{1}{2}(y - 7)^2 - 2 \right] + C_1, \quad (10)$$

або

$$v_r^2 = \omega^2 y^2 - g(y - 7)^2 + 4g + C_1.$$

Використовуючи початкові умови:

$$t = 0, v_{r0} = v_0 = 5 \text{ м/с}, y = y_0 = 7 \text{ м},$$

знаходимо сталу інтегрування, а саме:

$$C_1 = v_0^2 - \omega^2 y_0^2 - 4g = 5^2 - 5^2 \cdot 7^2 - 4 \cdot 10 = -1240 \text{ м}^2/\text{с}^2.$$

Підставляючи значення сталої C_1 в рівність (10), знаходимо значення відносної швидкості точки M , тобто

$$v_r^2 = \omega^2 y^2 - g(y - 7)^2 - 1200. \quad (11)$$

Якщо в (11) підставити значення $\omega = 5 \text{ м/с}$ і $g = 10 \text{ м/с}^2$, то дістанемо

$$v_r^2 = 25y^2 - 10(y - 7)^2 - 1200. \quad (12)$$

У положенні M_1 відносна швидкість $v_r = 0$, а тому на підставі (12) можна записати

$$10(y_1 - 7)^2 - 25y_1^2 + 1200 = 0.$$

Після введення в остатнє рівняння заміни

$$y_1 = 7 \pm \sqrt{2(z_1 + 2)}$$

дістанемо

$$9z_1^2 - 2393z_1 - 4809,75 = 0.$$

З останнього рівняння визначаємо аплікату z_1 , тобто

$$z_1 = \frac{2393 \pm \sqrt{2393^2 + 4 \cdot 9 \cdot 4809,75}}{18} = 268 \text{ м.}$$

Ордината точки M у положенні M_1

$$y_1 = 7 + \sqrt{2(268 + 2)} = 30,3 \text{ м.}$$

Рівняння дотичної до параболи в цьому положенні має вигляд $z - z_1 = k(y - y_1)$, причому кутовий коефіцієнт $k = dz/dy$ визначає напрям дотичної і становить $k = \operatorname{tg} \alpha = (y - 7)|_{y=y_1} = 23,3$, звідки $\alpha = 87,5^\circ$, а $\sin \alpha = 0,999$ і $\cos \alpha = 0,044$. Тому $z - 268,6 = 23,3(y - 30,3) \rightarrow z = 23,3y - 437,4$.

Остаточно нормальні реакції (тиски) в положенні M_1 на підставі рівностей (3) та (4) становлять

$$N_1 = 4 \cdot 30,3 \cdot 5^2 \cdot 0,999 + 4 \cdot 10 \cdot 0,044 = 3029 \text{ Н;}$$

$$N_2 = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 0 \cdot 0,043 = 0.$$

Завдання Д-3

ЗАСТОСУВАННЯ ОСНОВНИХ ТЕОРЕМ ДИНАМІКИ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Кулька, яка вважається матеріальною точкою, починає рухатися з положення A в середині трубки, вісь якої розміщено у вертикальній площині (рис. 66, б).

Визначити швидкість кульки в положеннях B та C і тиск її на стінки каналу в положенні C . Тертям на криволінійних ділянках траєкторії руху кульки знехтувати.

Вариант	Схема на рис. 66,б	m	v_A	t_{AB}	t_{ED}	R_1	R_2	f	α	β	β_1	AB	c	l_0	Також визначити
		кг	м/с	с		м			град			м	Н/см	см	
1	1	0,8	5	—	1,5	2,0	1,0	0,1	0	60	60	—	2	0	l
2		0,7	6	—	1,2	1,0	1,5	0,2	45	90	45	—	5	0	v_D, l
3		0,6	12	—	1,0	0,8	1,6	0,3	120	30	60	—	—	—	v_D
4		0,5	8	—	—	1,6	1,0	0,2	60	60	30	—	—	—	t_{BK}
5		0,4	5	—	1,6	1,5	1,0	0,1	120	30	30	—	4	0	l
6	2	0,2	5	—	—	0,8	1,0	0,1	0	0	45	—	1	$2R_1$	S
7		0,3	6	—	0,5	1,0	1,5	0,2	0	30	90	—	4	$2R_1$	v_D
8		0,1	4	—	—	1,5	1,6	0,1	90	0	135	—	3	$2R_1$	H
9		0,4	5	—	0,8	1,2	1,0	0,2	90	30	30	—	2	$2R_1$	v_D
10		0,5	6	—	1,0	1,0	0,8	0,1	60	45	90	—	1	$2R_1$	v_D
11	3	0,8	5	0,3	—	0,6	—	0,1	60	0	150	—	—	—	S
12		0,4	5	—	1,0	1,0	—	0,1	30	0	60	$2R_1$	5	50	v_D
13		0,5	4	2,0	—	0,9	—	0,2	0	30	30	—	2	10	H
14		0,3	6	0,1	—	1,2	—	0,1	60	0	60	—	3	20	S
15		0,6	5	—	0,5	1,0	—	0,3	45	30	60	R_1	2	15	v_D
16	4	0,6	4	—	0,8	1,0	2,0	0,2	90	150	120	$2R_1$	—	—	v_D
17		0,4	3	0,8	—	0,8	1,5	0,1	0	60	150	—	—	—	H
18		0,5	5	1,0	—	0,6	1,0	0,2	0	180	45	—	—	—	S
19		0,3	6	—	—	1,2	0,6	0,1	45	90	135	$2R_2$	—	—	H
20		0,6	5	1,2	1,0	0,8	0,4	0,2	60	150	60	—	—	—	v_D
21	5	0,7	3	—	0,6	0,5	—	0,1	45	45	60	$4R_1$	—	—	S
22		0,6	4	1,5	1,0	1,0	—	0,1	90	0	240	—	4	0	l
23		0,5	8	1,0	—	0,5	—	0,1	0	90	300	—	2	0	l
24		0,4	6	—	1,2	0,8	—	0,2	30	60	120	$2R_1$	—	—	v_D
25		0,3	9	2,0	—	2,0	—	0,2	30	90	60	—	—	—	H
26	6	0,2	4	1,0	—	1,0	0,5	0,1	0	180	60	—	3	0	l
27		0,6	2	0,4	0,2	0,5	1,0	0,2	45	90	120	—	8	0	v_D, l
28		0,8	3	—	0,5	1,2	0,6	0,1	60	60	45	$2R_1$	—	—	S
29		0,4	4	—	0,6	0,6	1,0	0,3	30	90	30	$3R_1$	4	0	l
30		0,8	5	—	1,0	1,0	1,0	0,2	0	30	120	$2R_1$	—	—	t_{KM}, v_D

Вариант	Схема на рис. 66, б	m	v_A	t_{AB}	t_{ED}	R_1	R_2	f	α	β	β_1	AB	c	l_0	Також визначити
		кг	м/с	с		м			град			м	Н/см	см	
31	7	0,4	—	1,5	2,0	1,2	0,6	0,1	30	45	60	—	10	10	H
32		0,6	—	2,0	1,5	1,0	0,5	0,3	45	30	45	—	16	12	H
33		0,8	—	1,0	0,5	1,4	0,7	0,2	30	45	45	—	20	18	v_D, H
34		0,5	—	3,0	2,0	0,8	0,4	0,1	30	30	90	—	18	20	S
35		0,4	—	2,0	1,2	1,6	0,8	0,3	45	30	30	—	16	16	t_{ED}
36	8	0,5	10	4,0	3,0	2,0	—	0,2	60	45	45	—	—	—	S, H
37		0,6	0	8,0	2,0	1,5	—	0,1	45	45	60	—	—	—	v_D, H
38		0,4	5	6,0	1,8	1,2	—	0,2	30	60	30	—	—	—	v_D, S
39		0,5	0	5,0	1,6	2,0	—	0,3	45	45	45	—	—	—	AB
40	0,4	6	4,0	1,4	1,4	—	0,2	60	30	30	—	—	—	S, H	
41	9	0,3	4	2,0	1,2	1,2	1,8	0,2	45	45	45	—	10	14	S
42		0,2	3	4,0	0,8	1,0	1,6	0,3	60	60	30	—	12	16	H
43		0,4	6	3,0	1,2	0,8	2,0	0,1	45	45	30	—	14	16	H
44		0,5	5	6,0	2,0	0,6	1,8	0,2	60	30	30	—	16	18	S
45		0,3	4	4,0	1,4	1,0	1,2	0,3	45	30	45	—	18	20	H
46	10	0,4	4	—	1,5	2,0	2,0	0,2	0	45	45	—	—	—	v_K
47		0,5	5	—	1,0	2,5	1,5	0,1	45	60	60	—	—	—	v_E
48		0,6	8	—	1,2	1,2	1,8	0,3	60	0	60	—	—	—	v_K
49		0,8	6	—	1,4	1,8	1,2	0,2	45	30	90	—	—	—	v_D
50		0,4	5	—	0,8	1,0	1,0	0,1	30	60	45	—	—	—	v_K

У варіантах 1—2, 5—10 і решті деформація пружини, коли кулька знаходиться в точці B , дорівнює нулю, і кулька відділяється від пружини.

У завданні прийнято такі позначення: m — маса кульки; v_A — її початкова швидкість; t_{AB} , t_{ED} — час руху кульки на ділянці AB або ED ; f — коефіцієнт тертя ковзання; l_0 — початкова деформація пружини; l — найбільша деформація пружини; c — коефіцієнт жорсткості пружини; H — найбільша висота підняття кульки; S — шлях, пройдений кулькою до зупинки.

Приклад 29 (рис. 66). Дано: $m = 0,4$ кг; $v_A = 4$ м/с; $t_{AB} = 0,2$ с; $R_1 = 0,4$ м; $R_2 = 0,6$ м; $f = 0,2$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $\beta_1 = 30^\circ$; $l_0 = 0$; $c = 8$ Н/см; $t_{MD} = 0,4$ с.

Визначити v_B , v_C , N_C , v_D , l .

Розв'язання. Для визначення швидкості v_B користуємося теоремою про зміну кількості руху матеріальної точки на ділянці AB (рис. 66, а) $mv_B - mv_A = \sum S_{ix}$, де проекція сумарного імпульсу сил на вісь абсцис, які діють на рухому точку,

$$\Sigma S_{ix} = (-P \sin \beta - f P \cos \beta) t_{AB} = -mg (\sin \beta + f \cos \beta) t_{AB}.$$

Отже, швидкість кульки в положенні B становить $v_B = v_A - g (\sin \beta + f \cos \beta) t_{AB} = 4 - 9,8 (\sin 30^\circ + 0,2 \cos 30^\circ) \cdot 0,2 = 2,68$ м.

Щоб визначити швидкість кульки в положенні C, користуємося теоремою про зміну кінетичної енергії матеріальної точки, тобто

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = \sum A_{BC}^E = P H_C,$$

де

$$H_C = (2R_1 + R_2) \sin \alpha - R_2 \cos(\beta + \beta_1) =$$

$$= 1,4 \sin 60^\circ - 0,6 \cos 60^\circ = 0,91 \text{ м.}$$

Швидкість кульки в положенні C становить

$$v_C = \sqrt{v_B^2 + 2g H_C} = \sqrt{2,68^2 + 2 \cdot 9,8 \cdot 0,91} = 5,05 \text{ м/с.}$$

Для визначення тиску рухомої кульки на стінку каналу в положенні C записуємо диференціальне рівняння руху кульки на заданій кривій в проекції на внутрішню нормаль Cn , тобто

$$mv_C^2/R_2 = -N_C + P \cos(\beta + \beta_1),$$

звідки

$$N_C = mg \cos(\beta + \beta_1) - mv_C^2/R_2 = 0,4 \cdot 9,8 \cos 60^\circ - (0,4 \cdot 5,05^2)/0,6 = -15 \text{ Н.}$$

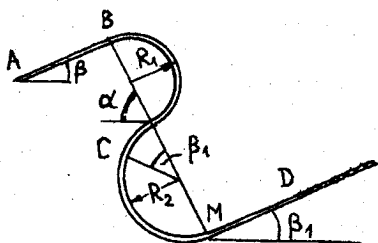


Рис. 66

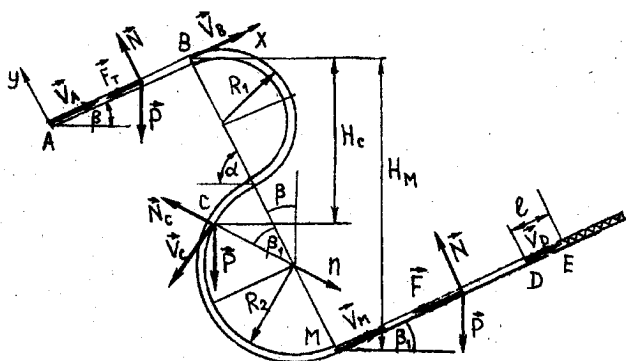


Рис. 66,а

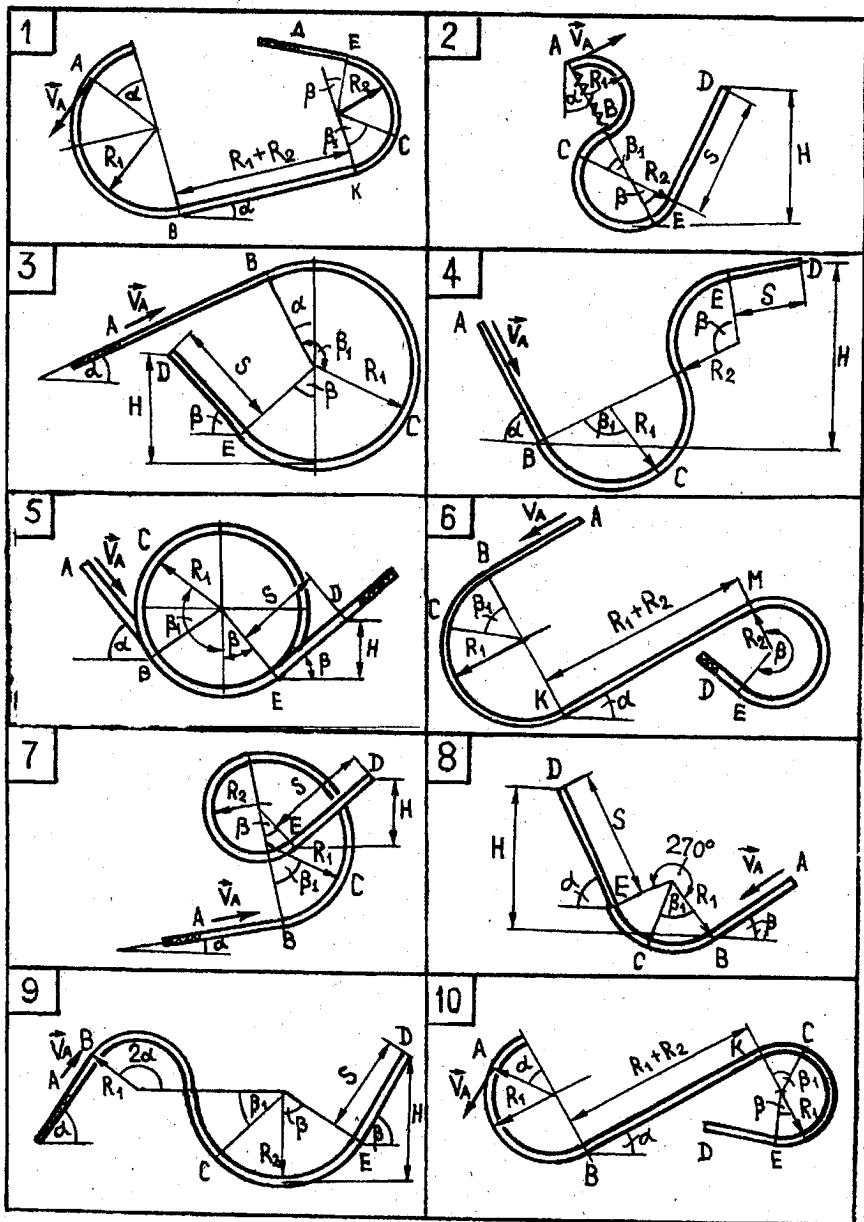


Рис. 66,6

Від'ємний знак N_C означає те, що нормальна реакція стінок каналу, по якому рухається кулька, в положенні C спрямована протилежно тому, як показано на рис. 66, а.

Тиск кульки на стінку каналу в положенні C дорівнює 15 Н і за законом рівності дії протидії спрямований протилежно реакції N_C , тобто дія (тиск) спрямована вздовж внутрішньої нормалі Cn .

Швидкість кульки в положенні M визначаємо на підставі теореми про зміну кінетичної енергії, тобто

$$\frac{mv_M^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = mg H_M = mg(2R_1 + 2R_2) \sin \alpha,$$

звідки

$$\begin{aligned} v_M &= \sqrt{v_B^2 + 4g(R_1 + R_2)\sin\alpha} = \\ &= \sqrt{2,68^2 + 4 \cdot 9,8(0,4 + 0,6)\sin 60^\circ} = 6,41 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Швидкість кульки в положенні D знаходимо, застосовуючи на ділянці MD теорему про зміну кількості руху матеріальної точки, тобто

$$mv_{Dx} - mv_{Mx} = \sum S_{ix}^E.$$

Тому

$$\sum S_{ix}^E = (-P \sin \beta_1 - fP \cos \beta_1)t_{MD},$$

так що

$$\begin{aligned} v_D &= v_M - g(\sin \beta_1 + f \cos \beta_1)t_{MD} = \\ &= 6,41 - 9,8(\sin 30^\circ + 0,2 \cos 30^\circ) \cdot 0,4 = 3,77 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Для визначення максимального стиску пружини користуємося на ділянці DE теоремою про зміну кінетичної енергії матеріальної точки, тобто

$$\frac{mv_E^2}{2} - \frac{mv_D^2}{2} = -\frac{cl^2}{2} - PH_{DE} - fP \cos \beta_1 l.$$

Ураховуючи, що $v_E = 0$ і $H_{DE} = l \sin \beta_1$, дістаємо

$$\frac{cl^2}{2} + mgl(\sin \beta_1 + f \cos \beta_1) - \frac{mv_D^2}{2} = 0.$$

Розв'язуючи це квадратне рівняння при заданих числових значеннях величин, знаходимо

$$l = 0,081 \text{ м} = 8,1 \text{ см.}$$

3.1. ДИНАМІКА МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Завдання Д-4

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ МОМЕНТУ КІЛЬКОСТІ РУХУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ КУТОВОЇ ШВИДКОСТІ ТВЕРДОГО ТІЛА

Тіло $A = A_1 + A_2$ масою m_1 обертається навколо осі O_1z із сталою кутовою швидкістю ω_0 . В точці O каналу CD , проведеного в тілі A , на відстані CO від точки C знаходиться матеріальна точка B масою m_2 . В певний момент часу ($t = 0$) на механічну систему діє пара сил, момент якої $M_z = M_z(t)$. В момент часу $t = t_1$ дія M_z припиняється.

Одночасно точка (кулька) B починає рухатися вздовж каналу CD (з положення C в положення D) за законом $OB = f(t - t_1)$, причому $t > t_1$.

Визначити кутову швидкість тіла A в момент часу $t = t_1$ і $t = t_2$. Опором тертя знехтувати. Тіло A вважати тонкою пластинкою, конфігурацію якої показано на рис 67, б—г.

Необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 38.

Таблиця 38

Вариант	m_1	m_1^*	m_1^{**}	m_2	ω_0	a	b	c	R	OC	t_1	t_2	$M_z = f_1(t), \text{Н} \cdot \text{м}$	$OB = f_2(M_1), \text{м}$
	кг				с^{-1}	м				с				
1	120	—	—	60	-8	4	—	—	—	1,0	4	10	$120\sqrt{t}$	$0,5(t-t_1)$
2	60	—	—	15	6	3	—	—	—	0,5	3	5	$45t$	$0,5(t-t_1)^2$
3	150	—	—	150	4	5	4	—	2	0,5	3	7	$-150t$	$1/8(t-t_1)^2$
4	150	—	—	150	3	4	6	—	—	0,5	4	8	500	$\sqrt{t-t_1}$
5	200	—	—	100	2	—	—	—	1	πR	4	7	$100\sqrt{t}$	$\pi R(t-t_1)/6$
6	50	—	—	40	5	—	—	—	1	0	4	6	$20t^2$	$\sqrt{2}\pi R\sqrt{t-t_1}/4$
7	70	—	—	80	-10	—	—	—	3	$\pi R/4$	5	8	$300t$	$\pi R(t-t_1)/3$
8	—	60	150	100	4	3	4	—	—	0	4	11	$-60\sqrt{t}$	$4(t-t_1)/7$
9	80	—	—	40	7	4	2	—	—	1,0	2	4	$35t^2$	$0,6(t-t_1)^2$
10	—	60	120	100	-4	6	2	2,5	—	0,5	36	100	$15t$	$0,5\sqrt{t-t_1}$
11	150	—	—	200	2	1,5	—	—	2	1,0	2	3	$600t$	$2(t-t_1)^2$
12	—	50	100	150	0	1,5	—	—	1	$\pi R/6$	7	8	$10t^2$	$5\pi R(t-t_1)/6$
13	80	—	—	60	-10	4	3	—	—	1,0	9	25	$200\sqrt{t}$	$0,5\sqrt{t-t_1}$
14	100	—	—	50	5	6	2	—	—	0	2,5	6	$-40t$	$\pi(t-t_1)/7$
15	60	—	—	40	3	3	—	—	1,5	0	3	9	$-25t^2$	$\pi R(t-t_1)/12$
16	30	—	—	25	4	4	2	—	—	$\pi R/2$	2	5	$100\sqrt{t}$	$\pi R(t-t_1)^2/18$
17	60	—	—	50	7	3	2	3	—	1,0	16	25	$-20t$	$0,5\sqrt{t-t_1}$
18	120	—	—	100	-8	6	3	—	—	0,5	4	8	200	$0,2(t-t_1)^2$
19	200	—	—	75	5	2	3	—	—	0,5	4	6	$-100t$	$(t-t_1)^2/4$

Вари- ант	m_1	m_1^*	m_1^{**}	m_2	$\omega_0,$ c^{-1}	a	b	c	R	OC	t_1	t_2	$M_z =$ $= f_1(t), \text{Н} \cdot \text{м}$	$OB = f_2(M_1),$ м
	кг					м					с			
20	300	—	—	200	-6	—	—	—	2	0	3	7	$100t$	$\pi R(t-t_1)/8$
21	60	—	—	40	-6	3	—	—	1,5	1,0	3	9	$60t$	$(t-t_1)/10$
22	150	—	—	150	8	6	3	—	2	$\pi R/2$	9	13	$-70\sqrt{t}$	$\pi R\sqrt{t-t_1}/4$
23	120	—	—	80	-4	4	3	—	1	1,0	6	8	$80t$	$(t-t_1)^2$
24	50	—	—	30	5	2	2	—	2	0	4	9	$20t^2$	$\pi R(t-t_1)/10$
25	140	—	—	120	-7	5	3	—	—	2,0	8	9	$100\sqrt{t}$	$(t-t_1)^2$
26	120	—	—	80	-6	4	—	—	1,5	1,0	6	8	$-50t$	$0,6(t-t_1)^2$
27	150	—	—	60	8	—	—	—	2,0	0	3	7	$150t$	$\pi R(t-t_1)^2/16$
28	60	—	—	40	3	4	—	—	2,0	1,5	5	8	400	$0,5(t-t_1)$
29	—	40	80	60	4	3	—	—	2,0	$\pi R/2$	2	6	$35t$	$\pi R\sqrt{t-t_1}/4$
30	140	—	—	90	-9	—	—	—	1,5	$\pi R/2$	4	6	$150\sqrt{t}$	$\pi R(t-t_1)^2/8$

Приклад 30. Дано: $m_1 = 9$ кг; $m_2 = 2$ кг; $\omega_0 = -3$ с⁻¹; $a = 2$ м; $b = 3$ м; $CO = a/2 = 1$ м; $t_1 = 2$ с; $t_2 = 4$ с; $OB = 0,5(t-t_1)^2$; $M_z = 500t$ Н·м.

Схему механічної системи зображено на рис. 67.

Розв'язання. Сили, які діють на механічну систему (тіло А + матеріальна точка В), показано на рис. 67 і 67, а.

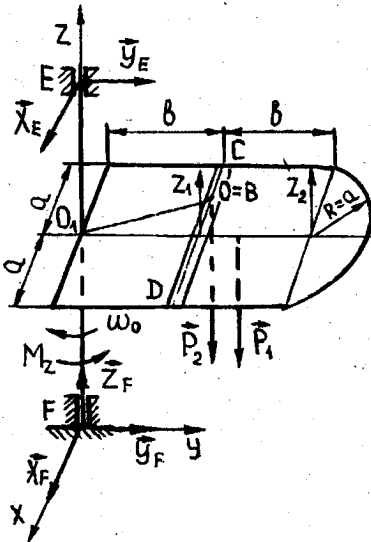


Рис. 67

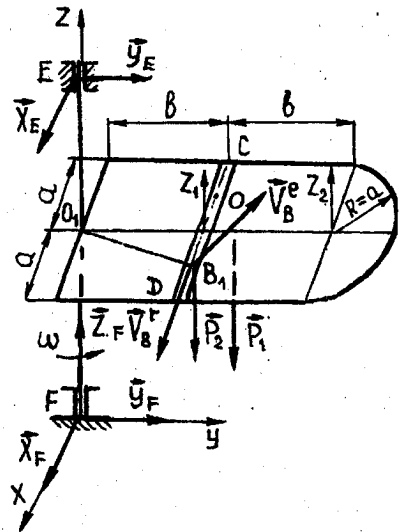


Рис. 67,а

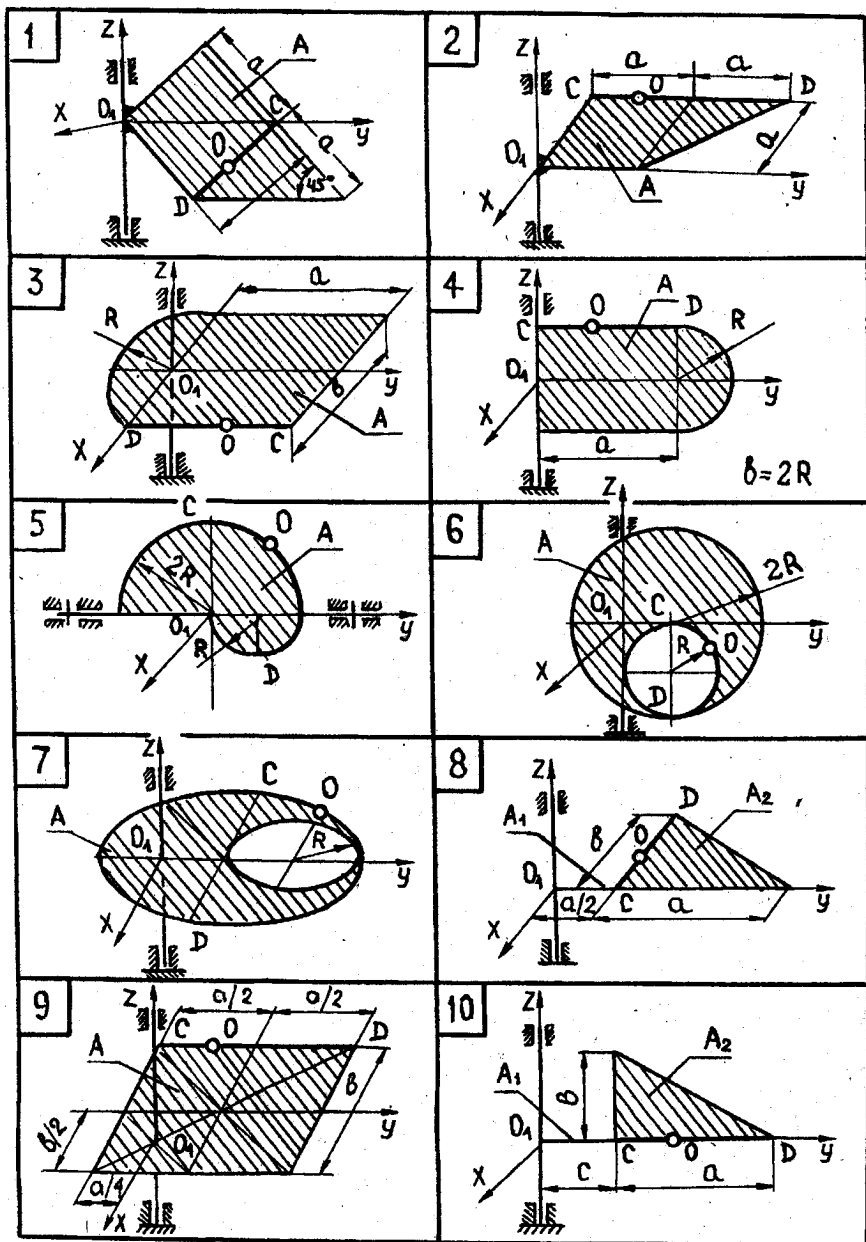


Рис. 67,6

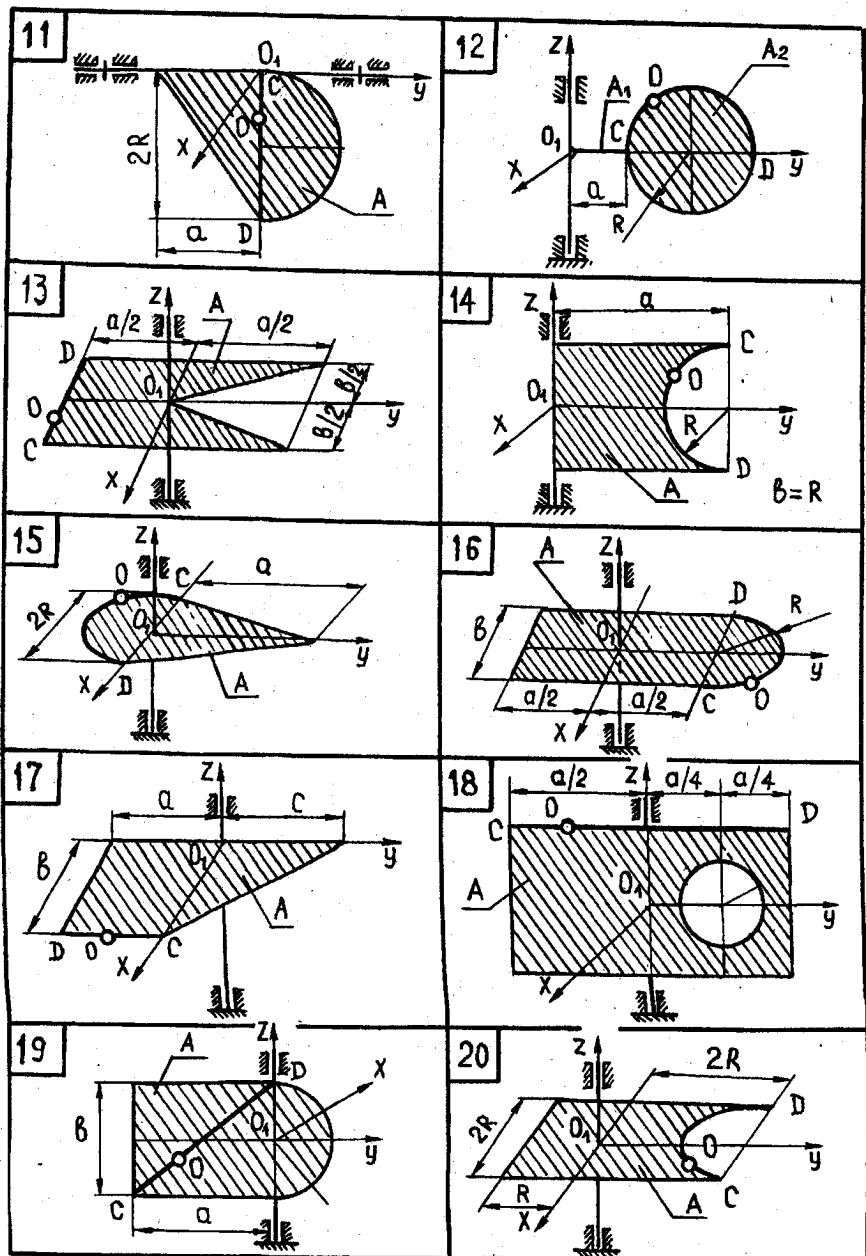


Рис. 67,а

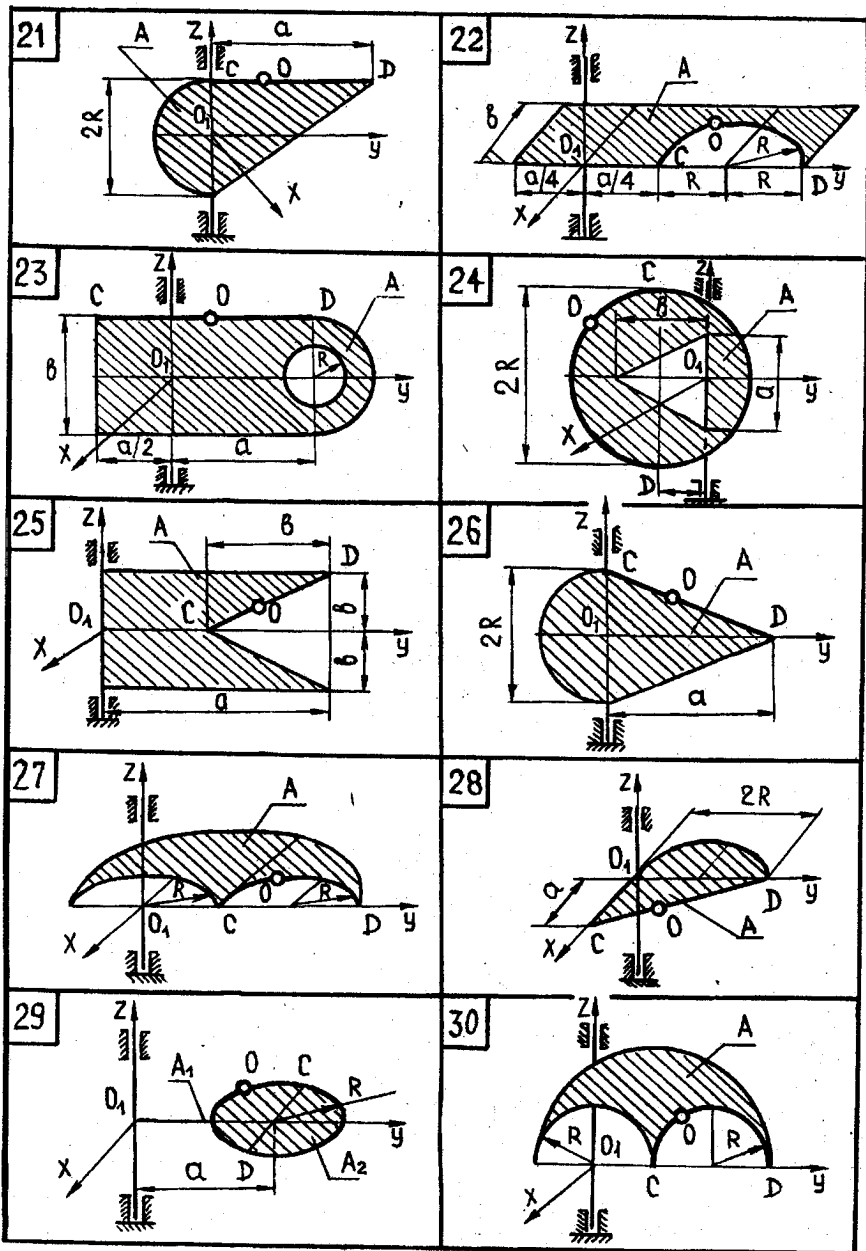


Рис. 67,г

Для визначення кутової швидкості пластинки A в момент часу t користуємося теоремою про зміну моменту кількості руху механічної системи відносно осі O_{1z} , тобто

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (1)$$

Момент кількості руху механічної системи відносно осі O_{1z}

$$L_z = L_z^{(A)} + L_z^{(B)},$$

де $L_z^{(A)} = J_z^{(A)} \omega$ — момент кількості руху пластинки A відносно осі O_{1z} ; $L_z^{(B)} = J_z^{(B)} \omega$ — момент кількості руху кульки B відносно цієї самої осі.

У розглядуваному випадку

$$J_z^A = J_{z_1}^A + m_1^* b^2 + J_{z_2}^A + m_1^{**} (2b)^2,$$

де

$$J_{z_1}^A = \frac{m_1^* (a^2 + b^2)}{3},$$

$$J_{z_2}^A = \frac{m_1^{**} a^2}{2},$$

причому $m_1 = m_1^* + m_1^{**}$, а маса прямокутної пластинки ($2a \times 2b$)
 $m_1^* = 2a \cdot 2b \gamma$ (γ — поверхнева густина), маса півкруга

$$m_1^{**} = \frac{1}{2} \pi a^2 \gamma.$$

Тому

$$\frac{m_1^*}{m_1^{**}} = \frac{4ab\gamma}{\frac{1}{2} \pi a^2 \gamma} = \frac{8b}{a\pi},$$

звідки

$$m_1^{**} = \frac{a\pi}{8b} m_1^*.$$

Тоді

$$m_1 = m_1^* + \frac{a\pi}{8b} m_1^* = \frac{8b + a\pi}{8b} m_1^*,$$

так що

$$m_1^* = \frac{8b}{8b + a\pi} m_1; \quad m_1^{**} = \frac{a\pi}{8b + a\pi} m_1.$$

Отже,

$$J_z^A = \frac{1}{3} \frac{8b m_1}{8b + a \pi} (a^2 + b^2) + \frac{8b m_1}{8b + a \pi} b^2 + \frac{1}{2} \frac{a \pi m_1}{8b + a \pi} a^2 + \frac{a \pi m_1}{8b + a \pi} \cdot 4b^2 =$$
$$= \frac{m_1}{8b + a \pi} \left(\frac{a^2 + 4b^2}{3} \cdot 8b + \frac{a^2 + 8b^2}{2} a \pi \right). \quad (2)$$

Момент інерції кульки B відносно осі O_1z .

$$J_z^B = m_2 O_1 O^2 = m_2 (b^2 + (a - OC)^2) = m_2 (b^2 + \frac{a^2}{4}) = \frac{m_2 (a^2 + 4b^2)}{4} \quad (3)$$

Користуючись (2) і (3), можна на підставі (1) записати

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = 500 t, \quad (4)$$

де

$$J_z = \frac{m_1}{8b + a \pi} \left(\frac{a^2 + 4b^2}{3} \cdot 8b + \frac{a^2 + 8b^2}{2} a \pi \right) + m_2 \frac{a^2 + 4b^2}{4} =$$
$$= \frac{9}{8 \cdot 3 + 2 \pi} \left(\frac{2^2 + 4 \cdot 3^2}{3} \cdot 8 \cdot 3 + \frac{2^2 + 8 \cdot 3^2}{2} \cdot 2 \pi \right) +$$
$$+ \frac{2(2^2 + 4 \cdot 3^2)}{4} = 166 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \quad (5)$$

Після відокремлення змінних та інтегрування рівняння (4) набуває вигляду

$$J_z \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega = 500 \int_0^{t_1} t dt,$$

або

$$J_z (\omega_1 - \omega_0) = 250 t_1^2. \quad (6)$$

Із рівняння (6) знаходимо кутову швидкість пластинки в момент часу t_1 , а саме:

$$\omega_1 = \omega_0 + 250 t_1^2 / J_z = -3 + 250 \cdot 4 / 166 = 3 \text{ с}^{-1}.$$

Отже, пластинка (тіло A) змінила напрямок обертання на протилежний відносно заданого.

Момент кількості руху L_z у момент часу $t = t_1 = 2 \text{ с}$

$$L_z|_{t_1} = 166 \cdot 3 = 498 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}.$$

У момент часу $t = t_2 = 4$ с кулька B переміститься в положення B_1 , причому

$$BB_1 = 0,5(4 - 2)^2 = 2 \text{ м.}$$

Тому можна зробити висноки, що

$$O_1B = O_1O = O_1B_1 = \sqrt{b^2 + (a - a/2)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4b^2}.$$

Кулька B в положенні B_1 має швидкість

$$\vec{v}_{B_1} = \vec{v}_{B_1}^e m + \vec{v}_{B_1}^r,$$

де переносна швидкість

$$v_{B_1}^e = O_1B_1 \omega = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4b^2} \omega.$$

Відносна швидкість кульки B в положенні B_1

$$v_{B_1}^r = \frac{d}{dt} [0,5(t - t_1)^2] |_{t=t_2} = 0,5 \cdot 2(t_2 - t_1) = 2 \text{ м/с.}$$

Момент кількості руху механічної системи в момент часу t_2

$$L_z |_{t=t_2} = J_z^A \omega_2 + m_2 (O_1B_1)^2 \omega_2 - m_2 v_{B_1}^r b.$$

На проміжку часу $t_2 - t_1$ цей момент зберігається, оскільки момент зовнішніх сил відсутній, тобто

$$L_z |_{t=t_1} = L_z |_{t=t_2},$$

або

$$498 = J_z^A \omega_2 + m_2 \frac{a^2 + 4b^2}{4} \omega_2 - m_2 v_{B_1}^r b. \quad (7)$$

Із рівняння (7) знаходимо кутову швидкість тіла A в момент часу $t = t_2 = 4$ с, тобто

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{498 + m_2 v_{B_1}^r b}{\frac{m_1}{8b + a\pi} \left(\frac{a^2 + 4b^2}{3} \cdot 8b + \frac{a^2 + 8b^2}{2} a\pi \right) + m_2 \frac{a^2 + 4b^2}{4}} = \\ &= (498 + 2 \cdot 2 \cdot 3) / 166 = 3,07 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Завдання Д-5

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ ПРИ ВИВЧЕННІ РУХУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Механічна система під дією сил тяжіння починає рухатися із стану спокою. Початкове положення системи показано на рис. 68, б—г. Ураховуючи тертя ковзання тіла 1 і тертя кочення тіла 4, що котиться без ковзання, нехтуючи іншими силами опору та масами шнурів, які не зазнають розтягу, визначити швидкість тіла 1 у момент часу, коли воно пройде шлях S .

У завданні прийнято такі позначення: m_1, m_2, m_3, m_4 — маси тіл 1, 2, 3, 4; R_2, r_2, R_3, r_3, R_4 — радіуси великих і малих кіл; ρ_{2x}, ρ_{3x} — радіуси інерції тіл 2 та 3 відносно горизонтальних осей, які проходять через їхні центри; α і β — кути нахилу площин до горизонту; f — коефіцієнт тертя ковзання; δ — коефіцієнт тертя кочення.

Необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 39. Блоки та котки, для яких радіуси інерції в таблиці не вказано, вважати суцільними однорідними дисками. Нахил шнурів відповідає нахилу площини.

Приклад 31. Система, положення якої показано на рис. 68, починає рухатися із стану спокою. Дано: $m_1 = m$ — маса вантажу 1; $\frac{m_1}{m_3} = 2$; $\frac{m_1}{m_2} = 3$; $\frac{m_1}{m_4} = 1$ — співвідношення між масами тіл 1, 2, 3, 4; $R_2 = 24$ см; $r_2 = r_3 = 12$ см; $R_4 = 10$ см; $\rho_{2x} = 18$ см; $\rho_{3x} = 16$ см; $f = 0,2$; $\delta = 1,5$ см; $S = 2$ м; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 45^\circ$.

Визначити швидкість тіла 1 в той момент часу, коли воно переміститься на відстань S .

Розв'язання. Застосовуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи, тобто

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^I, \quad (1)$$

де T_0 і T — кінетична енергія в початковому та кінцевому положеннях системи; $\sum A_i^E$ — сума робіт зовнішніх сил, прикладених до системи; $\sum A_i^I$ — сума робіт внутрішніх сил системи на її переміщенні. Для механічної системи, що складається з абсолютно твердих

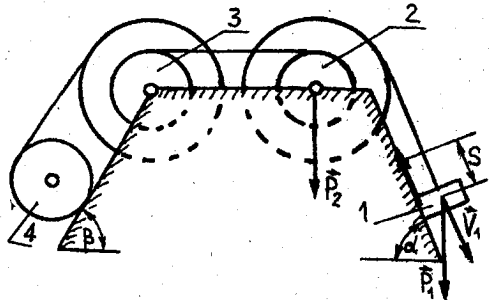


Рис. 68

Таблица 39

Вариант	m_1 , кг	$\frac{m_2}{m_1}$	$\frac{m_3}{m_1}$	$\frac{m_4}{m_1}$	м								град		f	см	
					R_2	r_2	R_3	r_3	R_4	ρ_{2x}	ρ_{2y}	α	β	δ		S	
					R_2	r_2	R_3	r_3	R_4	ρ_{2x}	ρ_{2y}	α	β				
1	m	2	2	1/10	0,20	0,10	0,24	0,12	0,15	0,16	0,20	45	60	0,10	0,025	2,0	
2	m	1	3	1/8	0,24	—	0,20	0,10	0,10	—	0,16	60	60	0,12	0,018	1,5	
3	m	1	2	1/5	0,40	—	0,30	0,20	0,18	—	0,24	30	30	0,15	0,024	1,8	
4	m	2	3	1/4	0,18	0,09	0,30	0,20	0,12	0,14	0,22	45	—	0,10	0,020	1,2	
5	m	2	2	1/2	0,30	0,15	0,30	0,15	0,15	0,24	0,24	—	30	—	—	0,015	1,0
6	m	4	3	1/6	0,24	0,12	0,20	0,10	0,10	0,20	0,16	—	45	—	—	0,016	0,8
7	m	2	2	1/2	0,20	0,10	0,20	0,10	0,12	0,16	0,16	30	—	0,15	0,020	1,5	
8	m	3	2	1	0,28	0,14	0,24	0,12	0,10	0,24	0,20	60	—	0,12	0,018	0,6	
9	m	2	1	1/8	0,24	0,15	0,18	0,15	0,12	0,20	0,14	30	30	0,10	0,015	1,2	
10	m	2	2	1/4	0,40	0,20	0,30	0,15	0,20	0,36	0,24	60	—	0,14	0,024	1,0	
11	m	1/2	2	1/3	0,26	0,16	0,25	0,20	0,15	0,20	0,18	—	60	0,16	0,022	0,9	
12	m	2	1	1/2	0,30	0,20	0,10	0,05	0,12	0,24	0,06	—	45	0,08	0,020	0,8	
13	m	3	2	1	0,24	0,12	0,30	0,15	0,15	0,18	0,24	45	—	0,10	0,025	0,6	
14	m	1	2	1	0,20	0,10	0,24	0,12	0,20	0,16	0,18	30	—	0,12	0,024	1,2	
15	m	2	2	1	0,18	0,09	0,20	0,10	0,15	0,14	0,16	45	45	0,15	0,030	1,4	
16	m	4	3	1/5	0,40	0,15	0,18	0,09	0,18	0,30	0,14	30	—	0,10	0,018	0,4	
17	m	2	1	1/4	0,22	0,11	0,22	0,11	0,16	0,18	0,18	60	—	0,16	0,016	0,5	

18	<i>m</i>	1	1	1/8	0,30	0,20	-0,24	0,12	0,15	0,24	0,20	30	—	0,12	0,012	0,6
19	<i>m</i>	3/5	1	1/6	0,20	0,10	0,30	0,15	0,10	0,16	0,24	45	—	0,14	0,014	0,7
20	<i>m</i>	1	1	1	0,14	—	0,20	0,10	—	—	0,16	45	—	0,08	—	0,8
21	<i>m</i>	2	3	1	0,15	0,10	0,30	0,20	0,10	0,12	0,25	—	—	—	0,015	1,0
22	<i>m</i>	2	1	—	0,20	0,10	0,15	—	—	0,16	—	—	—	—	—	0,05π
23	<i>m</i>	1	2	1/8	0,10	—	0,18	0,10	0,10	—	0,15	60	30	0,10	0,010	0,4
24	<i>m</i>	2	3/2	1	0,30	0,15	0,20	0,10	0,10	0,24	0,16	—	45	0,08	0,012	0,6
25	<i>m</i>	1/10	1/12	1/2	0,10	—	0,12	—	—	—	—	—	—	—	—	0,05π
26	<i>m</i>	2	1	1/10	0,24	0,12	0,10	—	0,20	0,20	0,18	—	60	—	0,020	0,2
27	<i>m</i>	2	2	1/3	0,30	0,15	0,40	0,20	0,20	0,26	0,32	—	45	—	0,026	0,8
28	<i>m</i>	2	3	—	0,20	0,10	0,30	0,15	—	0,16	0,24	30	—	0,12	0,015	1,0
29	<i>m</i>	2	1	—	0,20	0,15	0,15	—	—	0,18	—	30	—	0,10	—	1,0
30	<i>m</i>	1/3	1/5	—	0,24	—	0,12	—	—	0,20	—	45	—	0,15	—	0,4

тіл, з'єднаних нерозтяжними шнурами, $\sum A_i^l = 0$.

Щоб визначити кінетичну енергію T і суму зовнішніх сил, користуємося рис. 68, а, на якому показано всі зовнішні сили та швидкості відповідних тіл і точок у кінцевому положенні системи.

Швидкість точки A на обводі тіла 2 великого радіуса

$$v_A = \omega_2 R_2 = v_1, \quad (2)$$

звідки кутова швидкість тіла 2

$$\omega_2 = v_1 / R_2.$$

Швидкість точки B (на обводі тіла 2 малого радіуса) і точки C (на обводі тіла 3 малого радіуса)

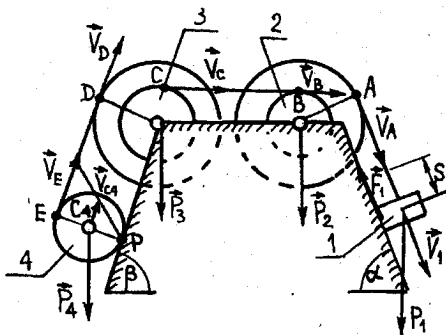


Рис. 68,а

$$v_C = v_B = \omega_2 r_2 = \frac{r_2}{R_2} v_1.$$

Швидкість на обводі тіла 3 малого радіуса r_3

$$v_C = \omega_3 r_3 = \frac{r_2}{R_2} v_1.$$

Кутова швидкість тіла 3

$$\omega_3 = \frac{r_2}{R_2 r_3} v_1. \quad (3)$$

Швидкість точки D на обводі тіла 3 великого радіуса

$$v_D = \omega_3 R_3 = \frac{r_2 R_3}{R_2 r_3} v_1.$$

За умовою швидкість точки E на обводі тіла 4

$$v_E = v_D = \frac{r_2 R_3}{R_2 r_3} v_1.$$

Оскільки точка P — миттєвий центр швидкості для тіла 4, швидкість центра мас цього тіла

$$v_{C_4} = v_E / 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_2 R_3}{R_2 r_3} v_1. \quad (4)$$

Кутова швидкість тіла 4 відносно центра C_4

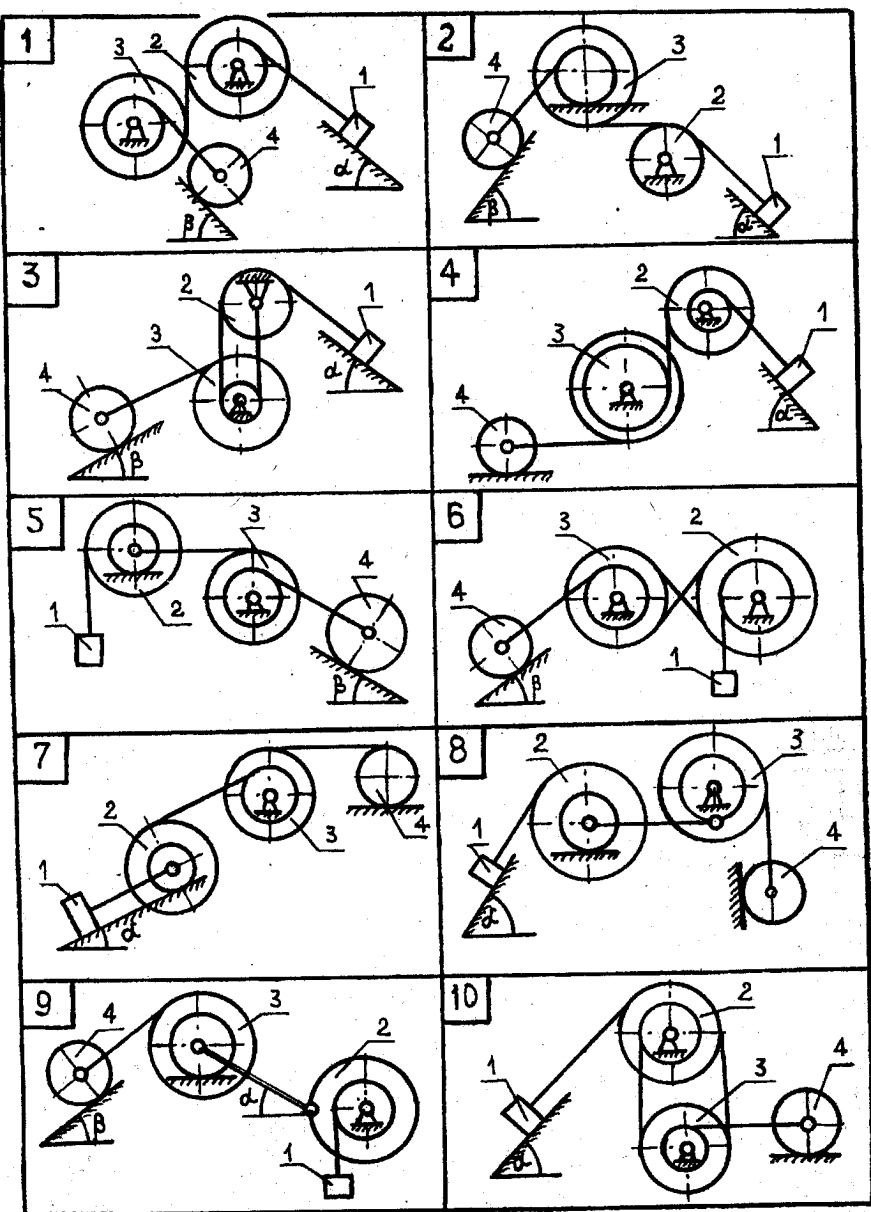


Рис. 68,б

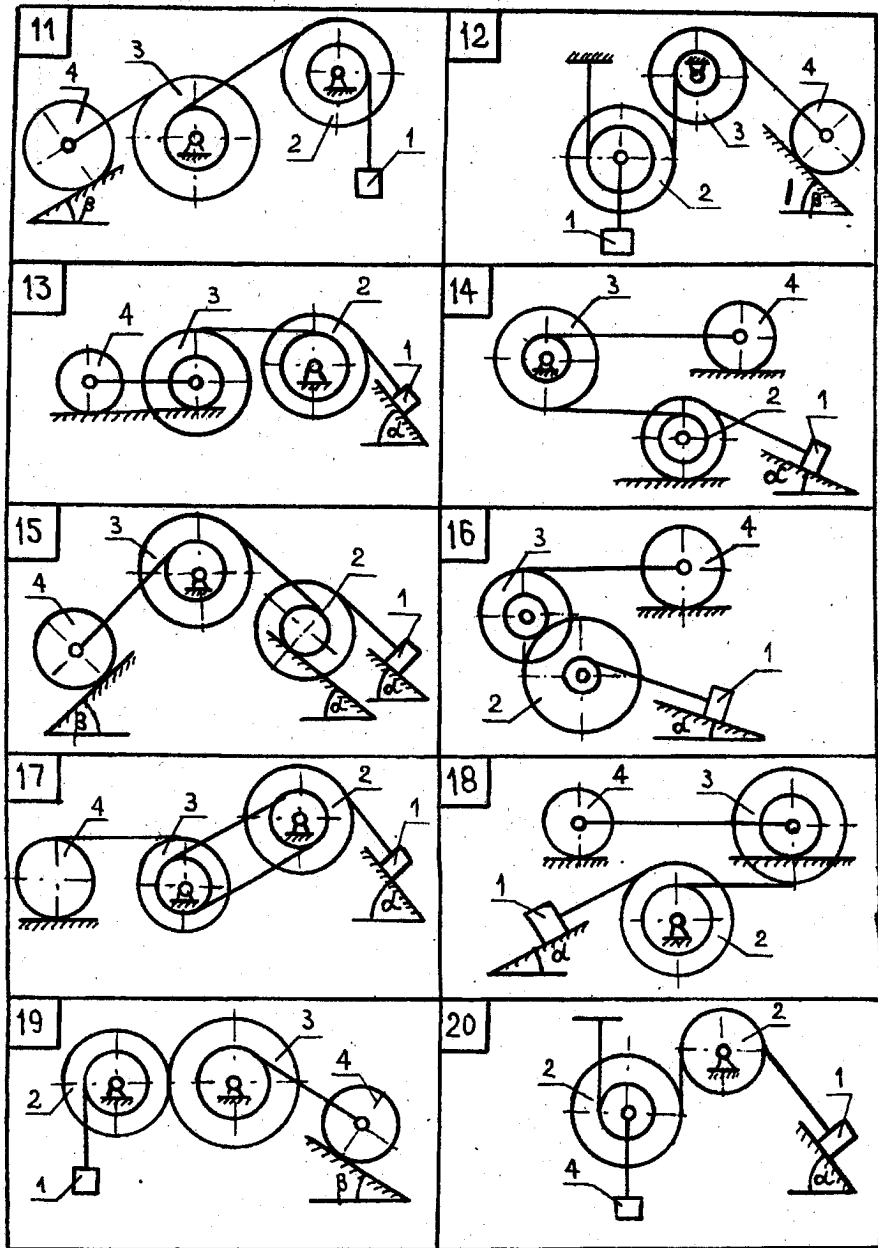


Рис. 68,а

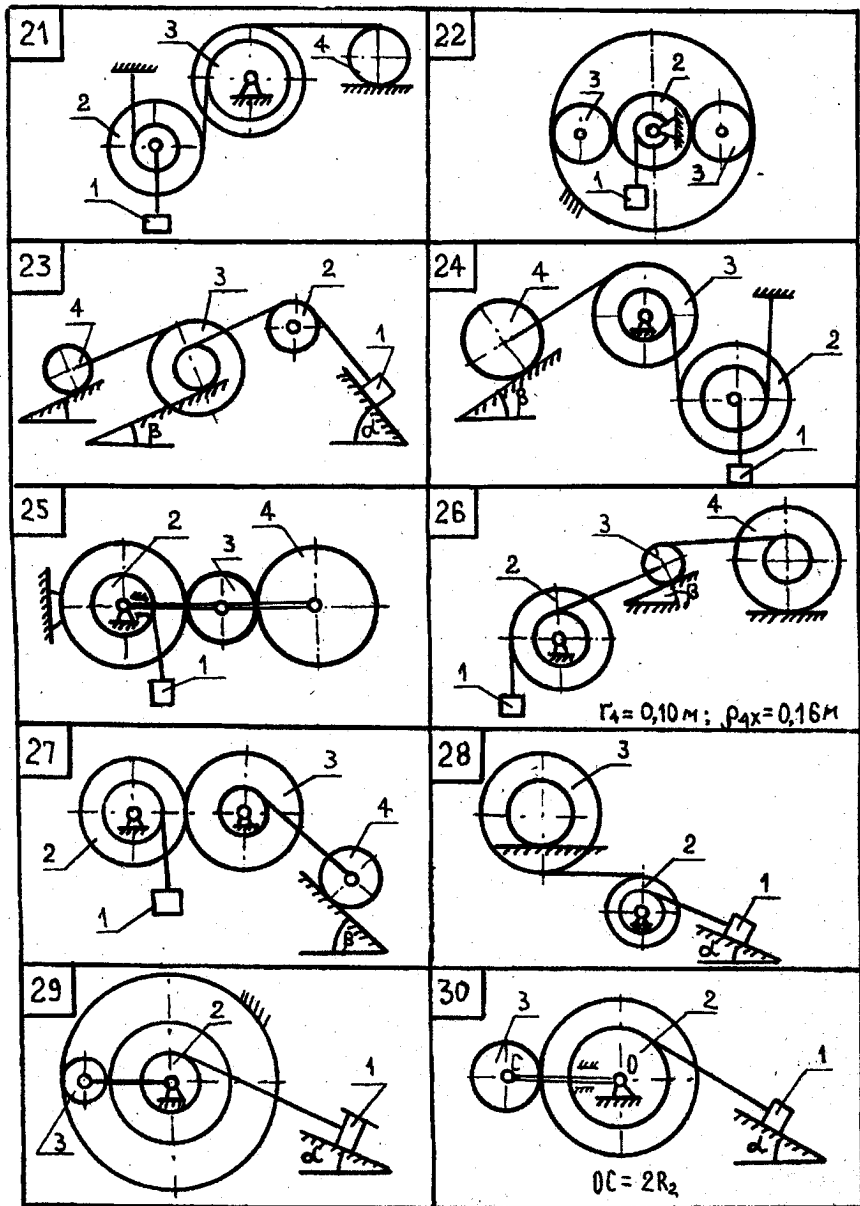


Рис. 68,2

$$\omega_4 = v_{C_4}/R_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_2 R_3}{R_2 r_3 R_4} v_1. \quad (5)$$

Кінетична енергія механічної системи

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \quad (6)$$

де кінетична енергія тіла 1

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m v_1^2; \quad (7)$$

кінетична енергія тіла 2

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \rho_{2x}^2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m \rho_{2x}^2 \frac{v_1^2}{R_2^2}; \quad (8)$$

кінетична енергія тіла 3

$$T_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 = \frac{1}{2} m_3 \rho_{3x}^2 \omega_3^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m \rho_{3x}^2 \frac{r_2^2 v_1^2}{R_2^2 r_3^2}; \quad (9)$$

кінетична енергія тіла 4

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 v_{C_4}^2 + \frac{1}{2} J_{C_4} \omega_4^2 = \frac{1}{2} m \frac{1}{4} \cdot \frac{r_2^2 R_3^2}{R_2^2 r_3^2} v_1^2 + \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R_4^2 \frac{r_2^2 R_3^2 v_1^2}{4 R_2^2 r_3^2 R_4^2} = \frac{3}{16} m \frac{r_2^2 R_3^2}{R_2^2 r_3^2} v_1^2. \quad (10)$$

Ураховуючи (7)–(10), відповідно до (6) визначаємо кінетичну енергію механічної системи в її кінцевому положенні, тобто

$$T = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{6} m \left(\frac{\rho_{2x}}{R_2} \right)^2 v_1^2 + \frac{1}{4} m \left(\frac{\rho_{3x} r_2}{R_2 r_3} \right)^2 v_1^2 + \frac{3}{16} m \left(\frac{r_2 R_3}{R_2 r_3} \right)^2 v_1^2 = \\ = \frac{1}{48} m \left(24 + 8 \left(\frac{\rho_{2x}}{R_2} \right)^2 + 12 \left(\frac{\rho_{3x} r_2}{R_2 r_3} \right)^2 + 9 \left(\frac{r_2 R_3}{R_2 r_3} \right)^2 \right) v_1^2. \quad (11)$$

На рис. 68, а показано всі зовнішні сили, що діють на систему. Робота цих сил

$$\Sigma A_i^E = A(\vec{P}_1) + A(\vec{F}_1) + A(\vec{P}_4) + A(M_{\text{коч}}^r), \quad (12)$$

де робота сили тяжіння \vec{P}_1

$$A(\vec{P}_1) = P_1 S \sin \alpha = mg S \sin \alpha; \quad (13)$$

робота сили тертя F_1

$$A(\vec{F}_1) = -F_1 S = -fmg S \cos \alpha; \quad (14)$$

робота сили тяжіння \vec{P}_4

$$A(\vec{P}_4) = -P_4 S_4 \sin \beta. \quad (15)$$

Тут $S_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_2 R_3}{R_2 r_3} S$ — переміщення центра мас тіла 4 вздовж похилі площини.

Остаточна робота сили тяжіння \vec{P}_4

$$A(\vec{P}_4) = -\frac{1}{2} mg \frac{r_2 R_3}{R_2 r_3} S \sin \beta.$$

Робота пари сил тертя кочення тіла 4 на похилій площині

$$A(M_{\text{коч}}^r) = -M_{\text{коч}}^r \varphi_4,$$

де момент пари сил тертя кочення $M_{\text{коч}}^r = (P_4 \cos \beta) \delta$, а кут, на який повернеться тіло 4 навколо центра мас або навколо миттєвого центра швидкості P при переміщенні тіла 1 на відстань S , становить

$$\varphi_4 = \frac{r_2 R_3 S}{2 R_2 r_3 R_4}.$$

Отже,

$$A(M_{\text{коч}}^r) = -mg \delta \cos \beta \frac{r_2 R_3 S}{2 R_2 r_3 R_4}. \quad (16)$$

Підставляючи (13) — (16) у (12), дістаємо

$$\begin{aligned} \Sigma A_i^E = mg S \left(\sin \alpha - f \cos \alpha - \frac{1}{2} \cdot \frac{r_2 R_3}{R_2 r_3} \sin \beta - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{R_4} \cdot \frac{r_2 R_3}{R_2 r_3} \cos \beta \right). \end{aligned} \quad (17)$$

На підставі рівняння (1) маємо

$$\begin{aligned} \frac{m}{48} \left(24 + 8 \left(\frac{\rho_{2x}}{R_2} \right)^2 + 12 \left(\frac{\rho_{3x} r_2}{R_2 r_3} \right)^2 + 9 \left(\frac{r_2 R_3}{R_2 r_3} \right)^2 \right) v_1^2 = \\ = \frac{1}{2} mg S \left(2 \sin \alpha - 2f \cos \alpha - \frac{r_2 R_3}{R_2 r_3} \sin \beta - \frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{R_3}{r_3} \cdot \frac{\delta}{R_4} \cos \beta \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Виходячи з рівняння (18), знаходимо швидкість тіла 1 у кінцевому положенні системи

$$v_1 = \sqrt{\frac{24gS(2 \sin \alpha - 2f \cos \alpha - \frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{R_3}{r_3} (\sin \beta + \frac{\delta}{R_4} \cos \beta))}{24 + 8 \left(\frac{\rho_{2x}}{R_2}\right)^2 + 12 \left(\frac{\rho_{3x}}{R_2}\right)^2 \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 + 9 \left(\frac{r_2}{R_2}\right)^2 \left(\frac{R_3}{r_3}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{24 \cdot 9,8 \cdot 2 \left(2 \sin 60^\circ - 2 \cdot 0,2 \cos 60^\circ - \frac{12}{24} \cdot \frac{20}{12} \left(\sin 45^\circ + \frac{1,5}{10} \cos 45^\circ\right)\right)}{24 + 8 \left(\frac{18}{24}\right)^2 + 12 \left(\frac{16}{24}\right)^2 \left(\frac{12}{12}\right)^2 + 9 \left(\frac{12}{24}\right)^2 \left(\frac{20}{12}\right)^2}} =$$

$$= 3,33 \text{ м/с.}$$

3.2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

Завдання Д-6

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОСТУПАЛЬНОГО Й ОБЕРТАЛЬНОГО РУХІВ ТВЕРДОГО ТІЛА

Механічна система складається із трьох тіл 1, 2 та 3, схеми яких показано на рис 69, б— г, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 40. Масами шнурів і пасів та їх ковзанням по шківках знехтувати.

У варіантах 4, 5, 20, 22, 25 потрібно врахувати тертя ковзання (коефіцієнт тертя $f = 0,2$), вважаючи, що напрямок шнура паралельний площині, вздовж якої ковзає відповідне тіло.

До колеса 1, що обертається з кутовою швидкістю ω_0 , прикладено момент M , Н·м. На осі кожного колеса виникає момент опору $M_{\text{оп}}$ через сили тертя, пропорційний масі відповідного колеса (коефіцієнт пропорційності $k = 0,03 \text{ м}^2/\text{с}^2$ для всіх коліс однаковий).

У завданні прийнято такі позначення: m_1, m_2, m_3 — маси коліс 1, 2, 3; R_1, R_2, r_2, R_3 — радіуси великих і малих кіл; ρ_{2x} — радіус інерції тіла 2 відносно горизонтальної осі, що проходить через центр тяжіння тіла 2; α — кут нахилу площини, по якій ковзає тіло.

Знайти рівняння обертального руху колеса 1, натяг шнурів і пасів, а також зусилля на обводах коліс у варіантах, де ці зусилля виникають в момент часу $t = t_1$.

Натяг у ведучій частині нескінченного паса (варіанти 3, 8, 10, 16, 19, 21, 30) вдвічі більший від натягу у веденій частині ($T = 2T'$).

Вариант	m_1	m_2	m_3	R_1	R_2	r_2	R_3	ρ_{2x}	M	α	ω_{10}	t_1
	кг			см					Н·м	град	c^{-1}	с
1	100	400	300	20	60	40	-	50	$800+40t$	-	1	5
2	300	400	200	25	30	10	-	20	$200+18t^2$	-	2	3
3	100	300	250	12	20	14	18	15	$60+3t^2$	-	3	2
4	400	600	200	30	40	20	-	30	$400+6t$	60	2	5
5	100	500	200	30	60	30	-	40	$360+4t^2$	30	3	1
6	200	400	300	20	30	10	25	20	$120+3t^2$	-	2	3
7	150	300	200	25	60	-	30	50	$700+40t$	-	2	2
8	400	300	100	40	30	15	10	20	$300+8t$	-	3	2
9	200	300	100	20	20	15	18	16	$60+16t$	-	1	4
10	400	600	200	40	50	36	-	40	$300+6t^2$	-	1	3
11	100	500	150	15	30	20	10	24	$50+12t^2$	-	3	2
12	100	300	100	30	50	20	30	30	$60+15t$	-	1	4
13	400	300	500	30	25	12	40	20	$400+8t$	-	3	5
14	300	600	400	30	50	20	40	40	$280+4t$	-	2	2
15	150	300	200	20	30	10	25	22	$80+50t$	-	2	4
16	200	360	200	40	60	20	-	50	$50+10t^2$	-	4	2
17	500	200	100	50	20	10	-	16	$70+4t$	-	2	5
18	200	400	150	40	60	30	-	40	$270+9t^2$	-	4	3
19	500	300	100	80	50	40	30	45	$450+8t$	-	5	4
20	200	400	100	20	30	14	-	20	$120+30t$	45	2	3
21	200	300	100	30	30	20	20	24	$100+6t^2$	-	5	1
22	200	400	200	30	40	20	-	30	$160+4t$	45	3	2
23	100	600	200	20	50	25	-	36	$400+5t^2$	-	1	2
24	300	400	200	400	60	40	30	50	$50+4t^2$	-	2	2
25	100	400	200	20	40	20	-	30	$240+6t^2$	60	1	4
26	400	600	200	30	50	25	-	32	$160+40t^2$	-	1	1
27	400	400	500	60	40	20	80	30	$700+4t$	-	3	2
28	100	500	400	20	50	40	45	44	$600+12t^2$	-	4	5
29	800	300	200	60	30	20	-	24	$320+20t$	-	2	4
30	300	300	200	20	25	10	-	18	$300+4t^2$	-	4	1

Приклад 32. Знайти закон $\varphi_1(t)$ обертального руху тіла 1 (рис. 69), натяг у шнурі, що з'єднує тіла 3 і 4, натяг пасової передачі та зусилля на обводах коліс 1 і 2 в точці їх контакту в момент часу t_1 .

Дано: $m_1 = 100$ кг; $m_2 = 200$ кг; $m_3 = 300$ кг; $m_4 = 150$ кг; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,2$; $R_1 = 30$ см; $R_2 = 30$ см; $r_2 = 15$ см; $R_3 = 30$ см; $r_3 = 15$ см; $\rho_{2x} = 25$ см; $\rho_{3x} = 24$ см; $M = (800 + 20t)$ Н·м; $k = 0,04$ м²/с²; $\omega_{10} = 3$ с⁻¹; $\varphi_{10} = 0$; $t = t_1 = 4$ с.

Розв'язання. Поділимо механізм на окремі ланки і прикладемо до них усі сили, що діють на кожне тіло (рис. 69, а).

Тіло 1 обертається під дією прикладеного моменту $M = (800 + 20t) \text{ Н} \cdot \text{м}$, причому цьому обертанню протидіє момент опору $M_{01} = k m_1 \text{ Н} \cdot \text{м}$. До тіла 1 прикладено: силу тяжіння \vec{P}_1 ; реакцію $\vec{X}_{01}, \vec{Y}_{01}$ підшипника O_1 ; силу на обводі \vec{S} ; нормальну реакцію N .

Диференціальне рівняння обертального руху тіла 1 має вигляд

$$J_{O_1 z} \ddot{\varphi}_1 = M - M_{01} - S R_1. \quad (1)$$

До тіла 2 прикладено: силу тяжіння P_2 ; колове зусилля S^* ; нормальну реакцію N^* ; складові реакції підшипників $\vec{X}_{02}, \vec{Y}_{02}$; момент опору $M_{02} = k m_2 \text{ Н} \cdot \text{м}$; натяг нескінченної пасової передачі \vec{T} і \vec{T}^* .

Оскільки $\vec{S}^* = -\vec{S}, \vec{N}^* = -\vec{N}$ (тому $S = S^*, N = N^*$), диференціальне рівняння обертального руху тіла 2 має вигляд

$$J_{O_2} \ddot{\varphi}_2 = S r_2 + T^* R_2 - T R_2 - M_{O_2}. \quad (2)$$

До тіла 3 прикладено: силу тяжіння \vec{P}_3 ; момент опору $M_{03} = k m_3$; натяг пасової передачі \vec{T}' , \vec{T}'' і натяг шнура \vec{S}_4 , причому $T' = T, T'' = T$.

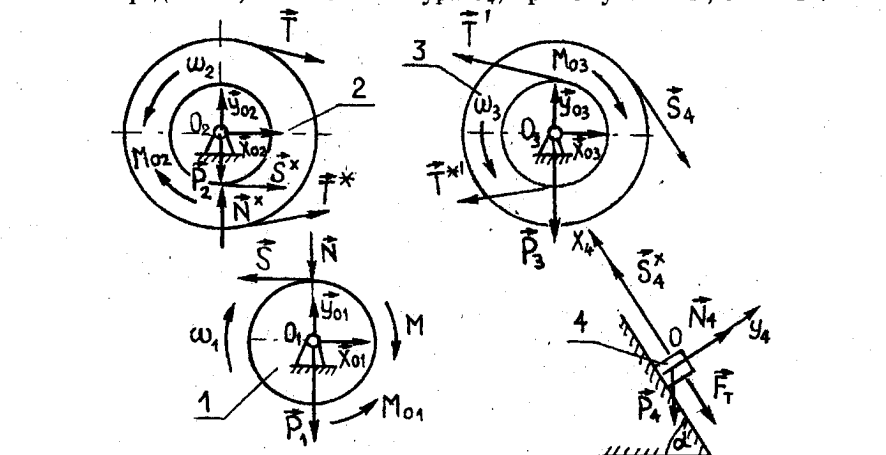


Рис. 69,а

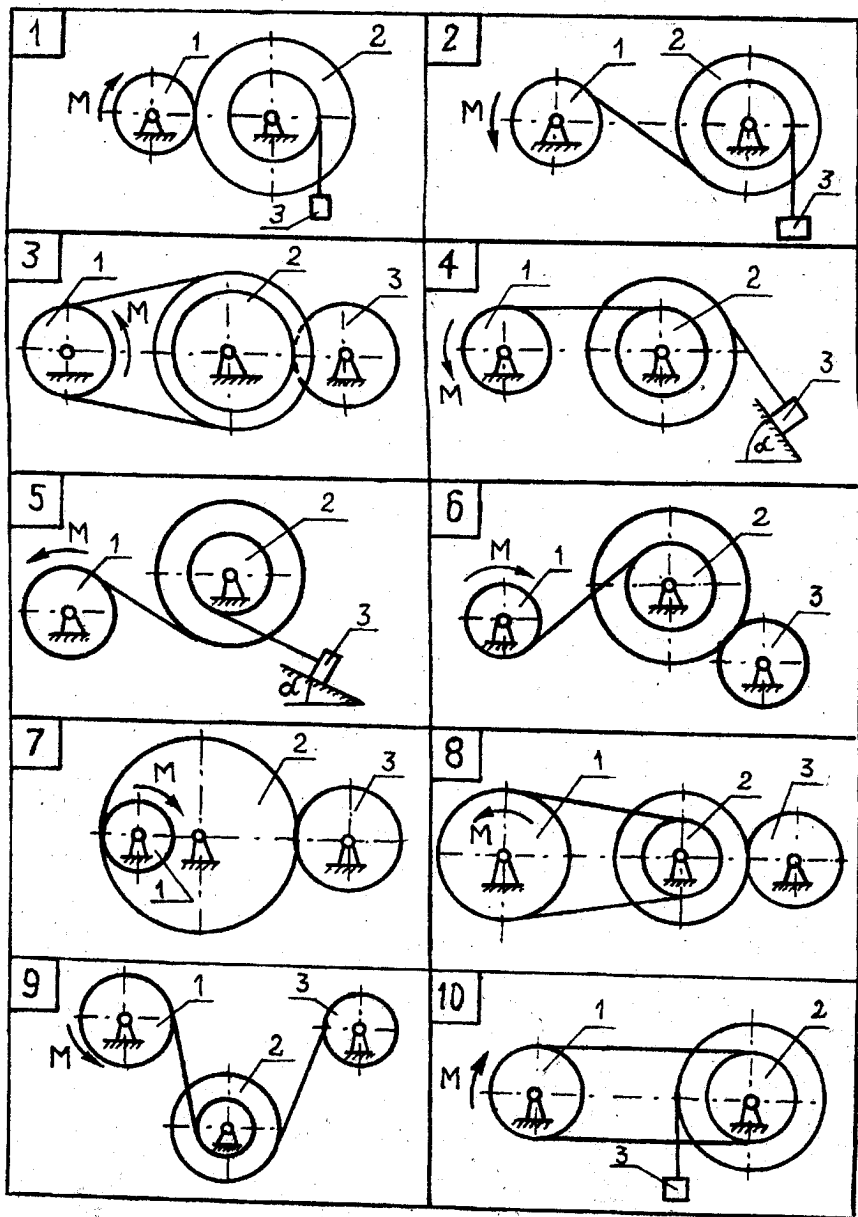


Рис. 69,6

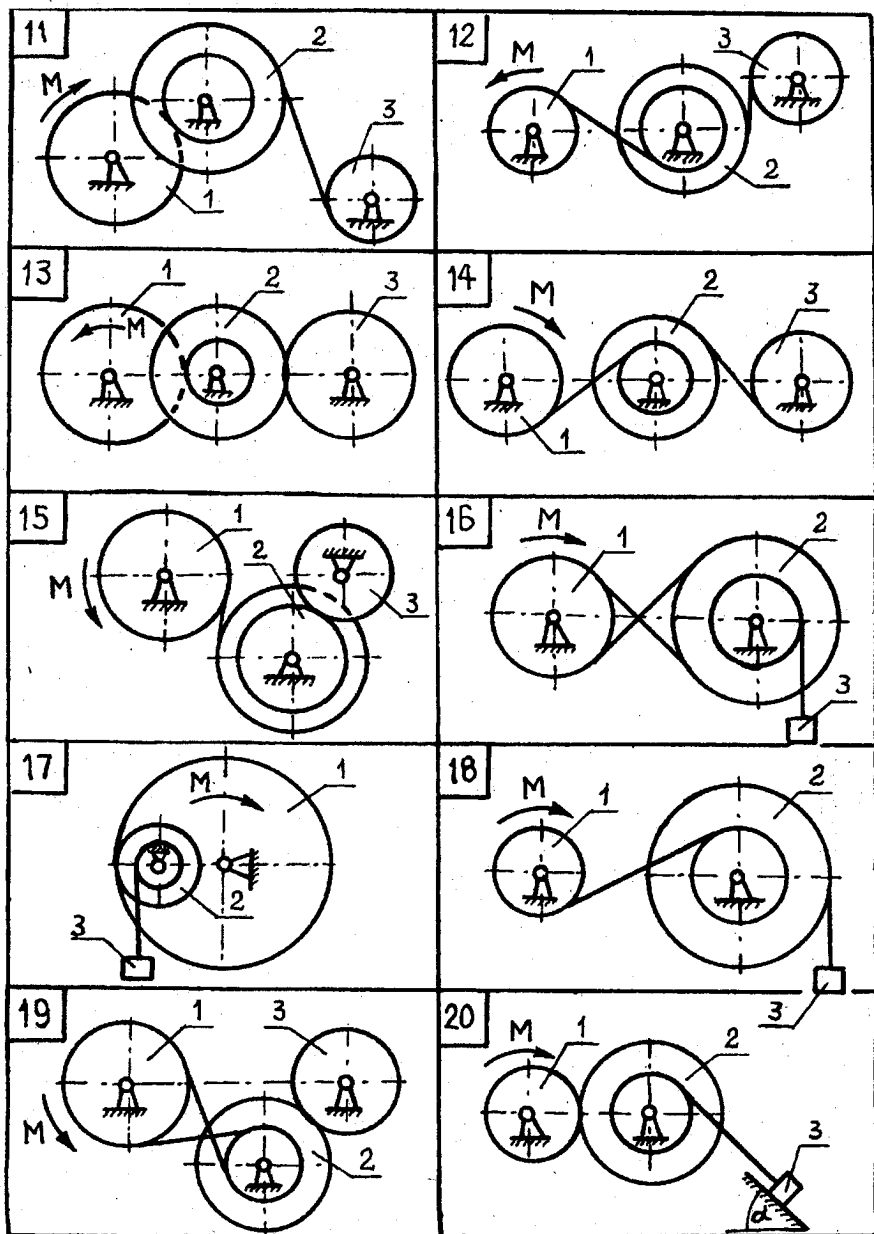


Рис. 69, в

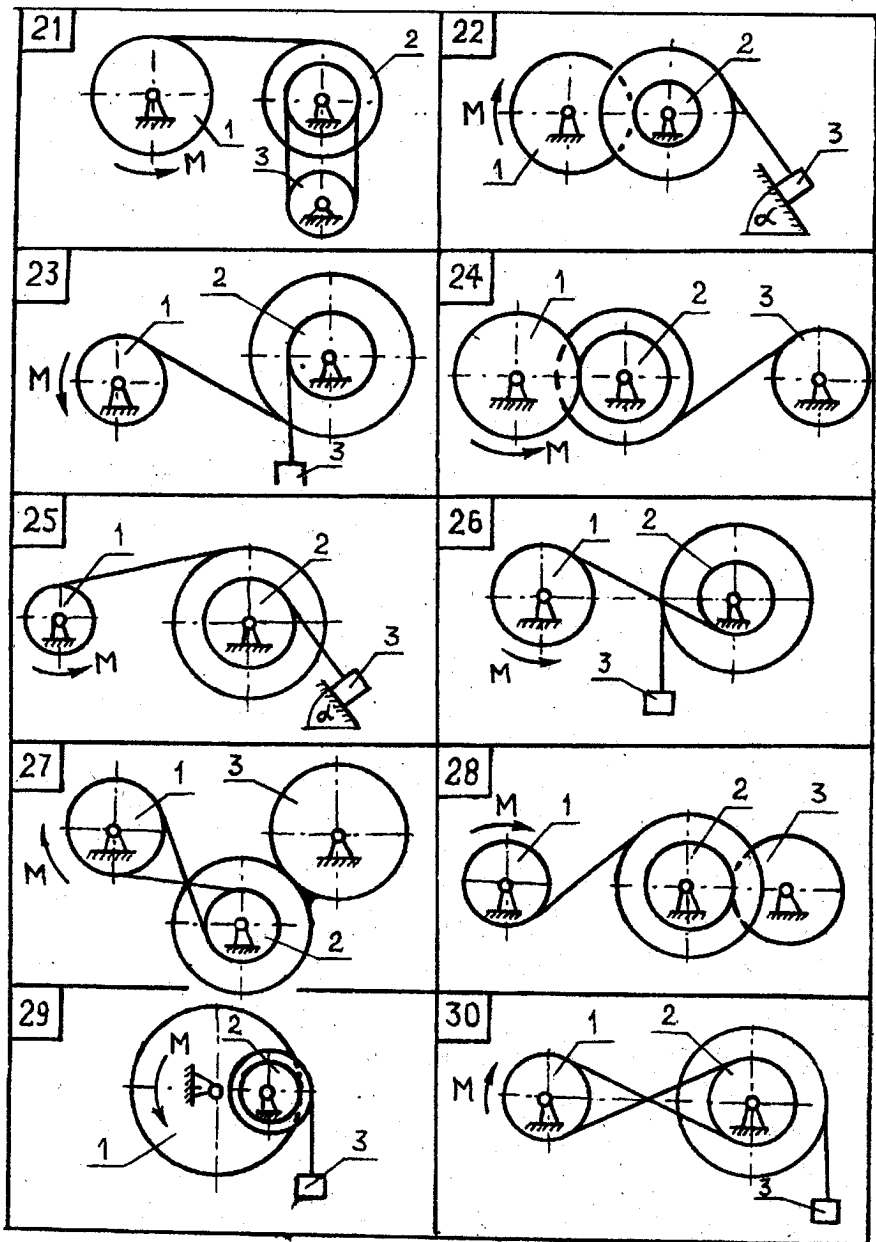


Рис. 69,з

Диференціальне рівняння обертального руху тіла 3 має вигляд

$$J_{O_3} \ddot{\phi}_3 = T' r_3 - T'' r_3 - S_4 R_3 - M_{O_3}. \quad (3)$$

Диференціальні рівняння поступального руху тіла 4 в проекціях на осі координат Ox_4 та Oy_4 з урахуванням того, що це тіло вздовж осі Oy_4 не рухається, набувають вигляду

$$m_4 \ddot{x}_4 = S_4^* - P_4 \sin \alpha - F_T;$$

$$0 = N_4 - P_4 \cos \alpha.$$

Оскільки

$$F_T = f N_4 = f P_4 \cos \alpha;$$

$$S_4^* = S_4,$$

маємо

$$m_4 \ddot{x}_4 = S_4 - P_4 \sin \alpha - f P_4 \cos \alpha. \quad (4)$$

Додаючи до рівнянь (1) — (4) кінематичні співвідношення

$$\dot{\phi}_1 R_1 = \dot{\phi}_2 r_2; \quad \ddot{\phi}_1 R_1 = \ddot{\phi}_2 r_2; \quad (5)$$

$$\dot{\phi}_2 R_2 = \dot{\phi}_3 r_3; \quad \text{або} \quad \ddot{\phi}_2 R_2 = \ddot{\phi}_3 r_3; \quad (6)$$

$$\dot{\phi}_3 R_3 = \dot{x}_4; \quad \ddot{\phi}_3 R_3 = \ddot{x}_4, \quad (7)$$

дістаємо систему рівнянь (1) — (7), до складу якої входять невідомі ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , x_4 , S , T (згідно з умовою $T = 2T''$) і S_4 , тобто маємо сім рівнянь із сімома невідомими.

З урахуванням того, що

$$J_{O_1} = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0,3^2 = 4,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$J_{O_2} = m_2 \rho_{2x}^2 = 200 \cdot 0,25^2 = 12,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$J_{O_3} = m_3 \rho_{3x}^2 = 300 \cdot 0,24^2 = 17,28 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$\ddot{\phi}_2 = \frac{R_1}{r_2} \ddot{\phi}_1 = \frac{30}{15} \ddot{\phi}_1 = 2 \ddot{\phi}_1;$$

$$\ddot{\phi}_3 = \frac{R_2}{r_3} \ddot{\phi}_2 = \frac{30}{15} \ddot{\phi}_2 = 2 \ddot{\phi}_1;$$

$$\ddot{x}_4 = R_3 \ddot{\phi}_3 = 0,3 \cdot 4 \ddot{\phi}_1 = 1,2 \ddot{\phi}_1;$$

$$M_{01} = km_1 = 0,04 \cdot 100 = 4 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{02} = km_2 = 0,04 \cdot 200 = 8 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{03} = km_3 = 0,04 \cdot 300 = 12 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$P_4 \sin \alpha + f P_4 \cos \alpha = P_4 \sin \alpha + F_r = m_4 g(\sin \alpha + f \cos \alpha) = \\ = 150 \cdot 9,8(\sin 30^\circ + 0,2 \cos 30^\circ) = 991 \text{ Н},$$

рівняння (1) — (4) набувають вигляду

$$4,5 \ddot{\varphi}_1 = M - 4 - 0,3 S;$$

$$25 \ddot{\varphi}_1 = 0,15 S + 0,3 T^* - 0,3 T - 8;$$

$$69,12 \ddot{\varphi}_1 = -0,15 T^* + 0,15 T - 0,3 S_4 - 12;$$

$$180 \ddot{\varphi}_1 = S_4 - 991.$$

Звідси

$$S_4 = 180 \ddot{\varphi}_1 + 991; \quad (8)$$

$$T = 201,6 \ddot{\varphi}_1 + 412,4; \quad (9)$$

$$S = \frac{1104,8}{3} \ddot{\varphi}_1 + \frac{1397,2}{3}; \quad (10)$$

$$114,9 \ddot{\varphi}_1 = 20t + 656,28. \quad (11)$$

Інтегруючи (11) двічі, дістаємо

$$114,9 \dot{\varphi}_1 = 10t^2 + 656,28t + C_1,$$

так що

$$57,45 \varphi_1 = \frac{10}{3} t^3 + 328,14 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Використовуючи початкові умови $\dot{\varphi}_{10} = \omega_0 = 3 \text{ с}^{-1}$, $\varphi_{10} = 0$, знаходимо $C_1 = 344,7$, $C_2 = 0$. Тоді

$$\varphi_1 = 0,058 t^3 + 5,712 t^2 + 6t.$$

Підставляючи (11) у (8) — (10), дістаємо

$$S_4 = 62,64t + 3047,32; \quad T = 70,16t + 2715,48;$$

$$S = 128,16t + 4207,08.$$

Для моменту часу $t = t_1 = 4 \text{ с}$ маємо

$$S_4 = 3300 \text{ Н}; \quad T = 2996 \text{ Н}; \quad S = 4720 \text{ Н}.$$

Завдання Д-7

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

Визначити сталі сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 , під дією яких диск масою m котиться по похилій площині без проковзування.

Знайти також рівняння руху центра мас диска C , якщо в початковий момент часу його координата $x_{C0} = 0$ і швидкість $\dot{x}_{C0} = 0$.

Схеми варіантів показано на рис. 70, б — г, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 41.

Таблиця 41

Вариант	m	F_1	F_2	R	r	ρ_C	α	β	f	δ
	кг	Н		см			град			см
1	200	0,2P	0,1P	80	50	60	30	60	0,30	0,8
2	180	0,1P	0	60	40	50	45	60	0,20	1,5
3	240	0,3P	0,2P	50	25	35	30	45	0,15	0
4	300	0,2P	0,1P	60	30	40	30	60	0,18	0
5	160	0,4P	0,3P	70	40	54	30	75	0,25	0,6
6	100	0,5P	0,2P	40	20	30	45	0	0,20	0,4
7	250	0	0,4P	50	30	36	0	60	0,40	0
8	120	0,3P	0,1P	60	30	45	30	0	0,12	1,0
9	320	0,2P	0	80	40	60	30	45	0,15	0,5
10	140	0	0,2P	40	30	36	45	0	0,10	0,7
11	200	0,4P	0,2P	50	25	42	0	30	0,35	0
12	220	0,5P	0	30	20	24	60	45	0,24	2,0
13	160	0,3P	0,2P	60	40	50	30	45	0,16	1,2
14	240	0,2P	0,2P	70	50	60	45	30	0,30	0,8
15	180	0,2P	0,1P	40	20	30	30	0	0,22	0
16	160	0,3P	0,4P	50	30	40	30	60	0,40	0,6
17	200	0	0,3P	30	25	26	0	30	0,28	0,4
18	260	0,4P	0	60	30	50	45	30	0,20	1,4
19	240	0,1P	0,2P	80	60	70	0	45	0,18	0,5
20	120	0,4P	0,1P	20	15	18	30	30	0,10	0
21	300	0,3P	0,2P	50	—	—	30	45	0,12	3,0
22	280	0,2P	0,2P	40	—	—	45	0	0,40	2,5
23	240	0,5P	0,2P	60	—	—	60	0	0,30	1,8
24	200	0	0,4P	30	—	—	30	60	0,25	0
25	160	0,4P	0,1P	20	—	—	60	90	0,20	0,8
26	220	0,4P	0,2P	80	—	—	45	90	0,18	0,6
27	180	0,5P	0,1P	40	—	—	30	0	0,16	0,5
28	100	0,2P	0,1P	30	—	—	45	45	0,30	0
29	120	0,4P	0,1P	20	—	—	0	45	0,40	0,4
30	200	0	0,4P	60	—	—	30	90	0,28	0,3

У завданні прийнято такі позначення: ρ_c — радіус інерції диска відносно центральної осі, перпендикулярної до його площини; R, r — радіуси більшого і меншого кіл; f — коефіцієнт ковзання; δ — коефіцієнт тертя кочення. Тіла, для яких радіуси інерції не вказано, вважати суцільними однорідними дисками.

Приклад 33. Дано: $m = 100$ кг; $R = 0,8$ м; $r = 0,2$ м; $F_1 = 0,4 P$; $F_2 = 0,2 P$; $\rho_c = 0,6$ м; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $f = 0,2$; $\delta = 0,02$ м.

Визначити $P, x_c(t)$.

Розв'язання. На диск (рис. 70) діють такі сили: $\vec{G} (G = mg)$ — сила тяжіння; активні сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 ; сила тертя \vec{F}_T ; \vec{N} — нормальна реакція похилої поверхні; момент тертя кочення ($M_k = \delta N$). Усі названі сили показано на рис. 70, а.

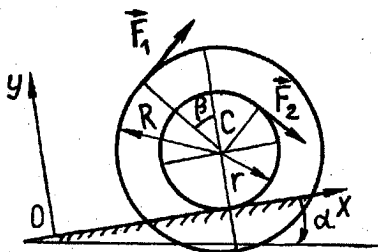


Рис. 70

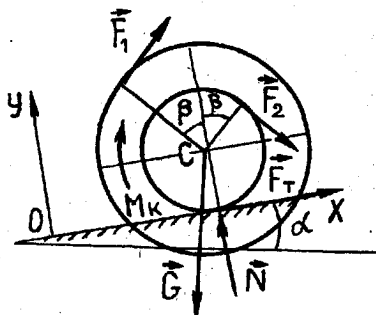


Рис. 70,а

Диференціальні рівняння плоского руху диска мають вигляд

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{ix}^E; \quad m\ddot{y}_C = \sum F_{iy}^E; \quad J_C \ddot{\phi} = \sum M_C(\vec{F}_i^E), \quad (1)$$

або

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_C &= F_1 \cos\beta + F_2 \cos\beta + F_T - G \sin\alpha; \\ m\ddot{y}_C &= F_1 \sin\beta - F_2 \sin\beta - G \cos\alpha + N; \\ J_C \ddot{\phi} &= F_1 R + F_2 r + M_k - F_T r. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

До диференціальних рівнянь (2) приєднуємо рівняння в'язей

$$y_C = r = \text{const}; \quad \dot{\phi} = \dot{x}_C / r.$$

Тому

$$\ddot{y}_C = 0; \quad \ddot{\phi} = \ddot{x}_C / r. \quad (3)$$

Підставляючи (3) у (2), дістаємо

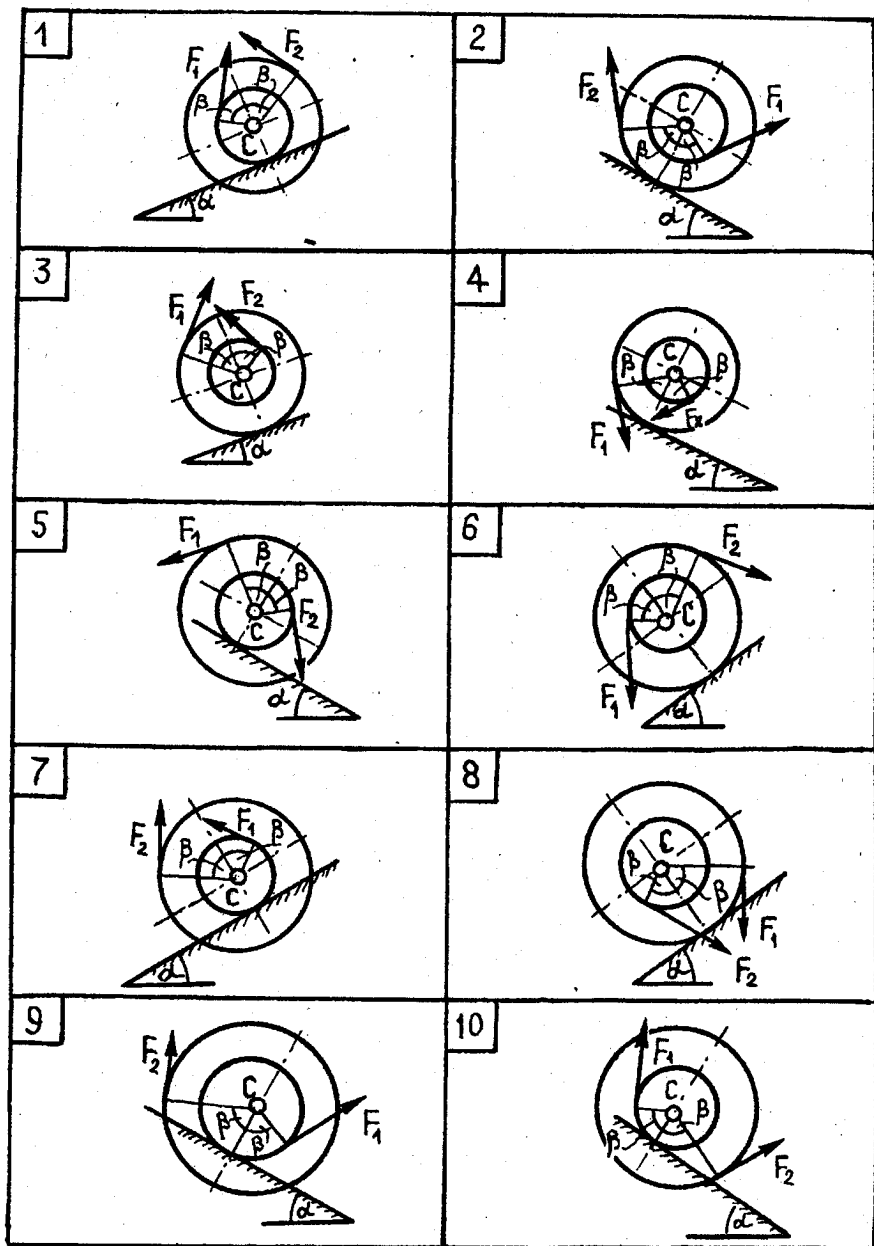


Рис. 70,6

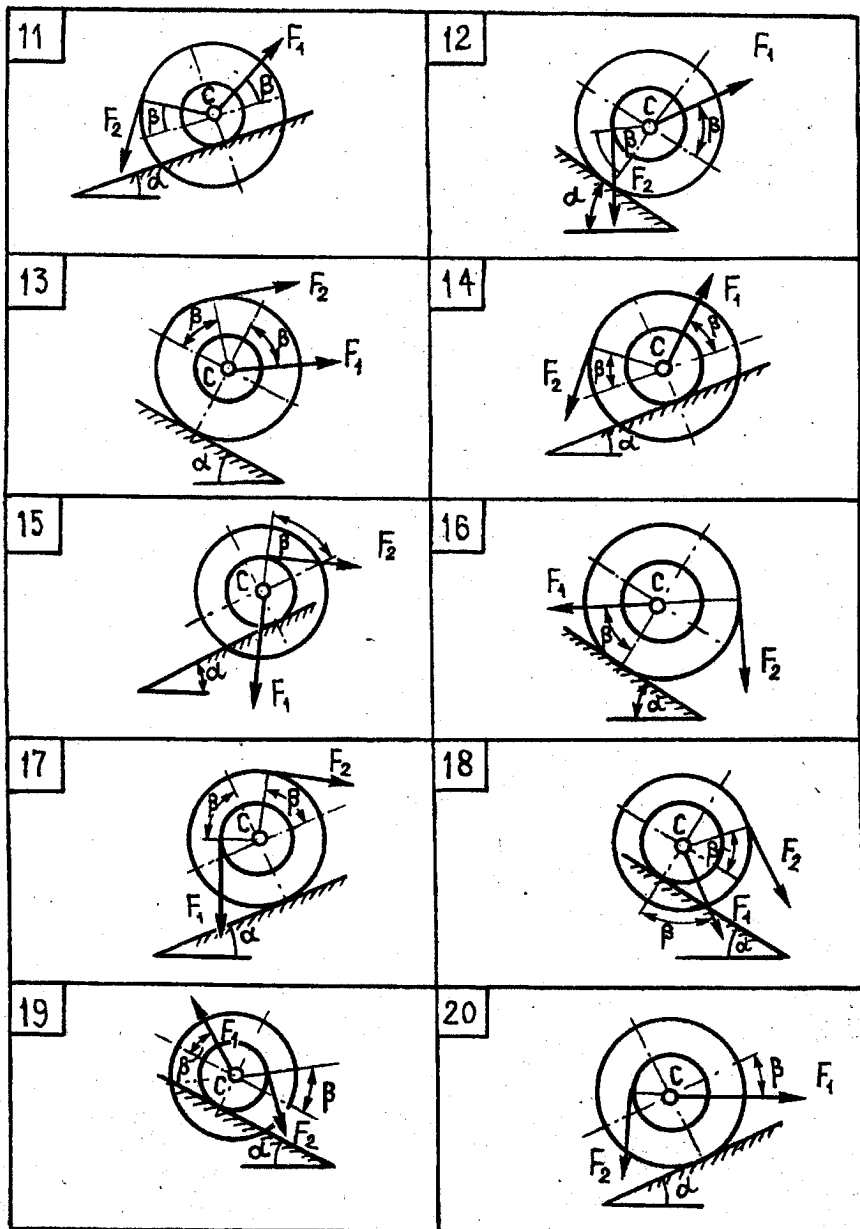


Рис. 70,в

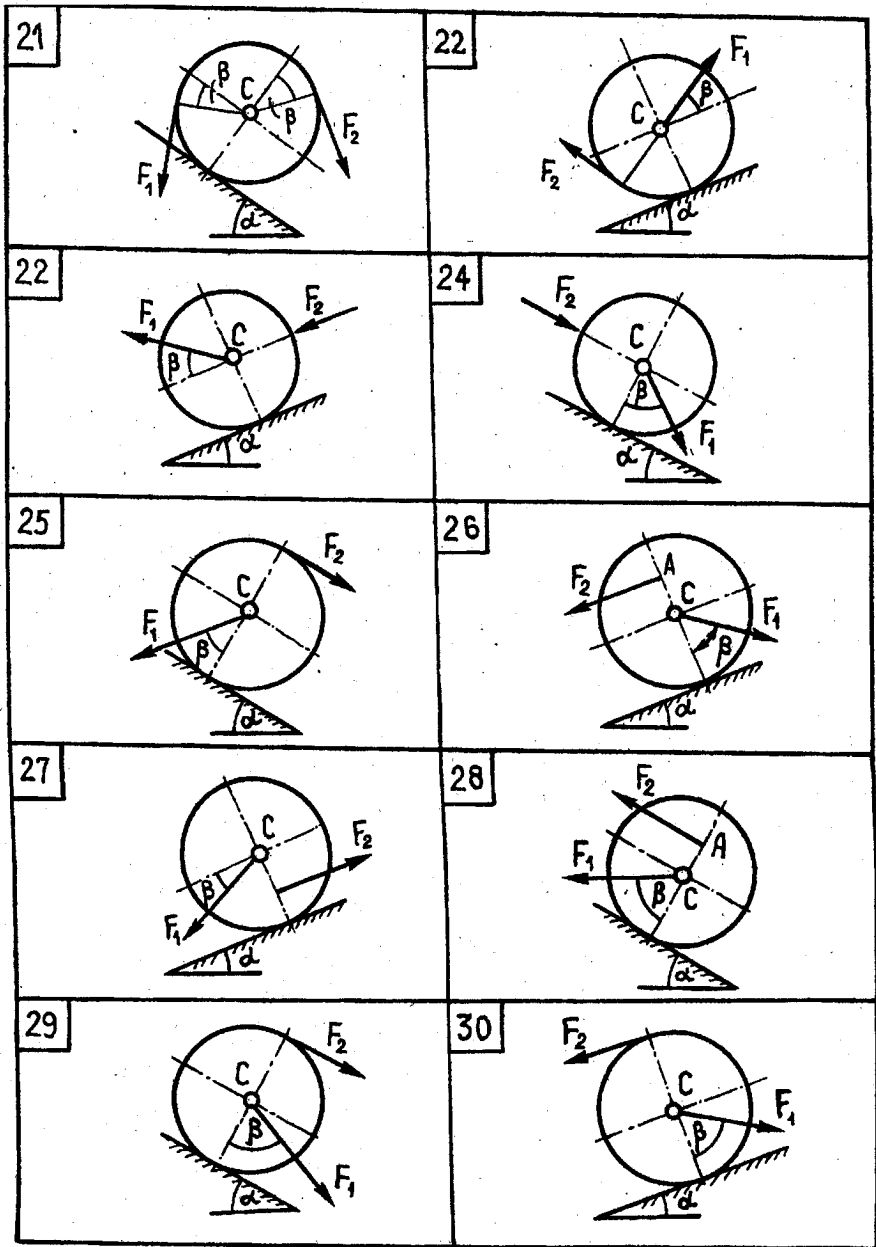


Рис. 70,2

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_c &= (F_1 + F_2) \cos \beta + F_r - G \sin \alpha; \\ 0 &= (F_1 - F_2) \sin \beta - G \cos \alpha + N; \\ m \rho_c^2 \frac{\ddot{x}_c}{r} &= F_1 R + F_2 r + M_x - F_r r. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

На підставі другого рівняння системи (4) нормальна реакція похилої площини

$$N = mg \cos \alpha - 0,2 P \sin \beta. \quad (5)$$

Якщо врахувати значення $F_1 = 0,4 P$, $F_2 = 0,2 P$ та нормальну реакцію N згідно з (5), то на підставі (4) матимемо

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_c &= 0,6 P \cos \beta + F_r - mg \sin \alpha; \\ m \rho_c^2 \frac{\ddot{x}_c}{r^2} &= 0,2 P(2 \frac{R}{r} + 1) + \frac{\delta}{r} (mg \cos \alpha - 0,2 P \sin \beta) - F_r r. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Поділивши перше рівняння системи (6) на друге, дістанемо

$$\frac{r^2}{\rho_c^2} = \frac{0,6 \cos \beta + F_r - mg \sin \alpha}{0,2 P(1 + 2R/r) + \delta/r(mg \cos \alpha - 0,2 P \sin \beta)}. \quad (7)$$

Після ряду перетворень із (7) знаходимо

$$\begin{aligned} F_r &= 0,2 \frac{1 + 2R/r - \frac{\delta}{r} \sin \beta - 3 \frac{\rho_c^2}{r^2} \cos \beta}{1 + \rho_c^2/r^2} P + \\ &+ mg \frac{\rho_c^2/r^2 \sin \alpha + \frac{\delta}{r} \cos \alpha}{1 + \rho_c^2/r^2} = aP + b mg \end{aligned} \quad (8)$$

Використовуючи вихідні дані, маємо

$$\begin{aligned} a &= 0,2 \frac{1 + 2R/r - \frac{\delta}{r} \sin \beta - 3 \frac{\rho_c^3}{r^2} \cos \beta}{1 + \rho_c^2/r^2} = \\ &= 0,2 \frac{1 + 2 \cdot 0,8/0,21 \cdot \frac{0,02}{0,02} \sin 45^\circ - 3 \cdot \frac{0,6^2}{0,2^2} \cos 45^\circ}{1 + 0,6^2/0,2^2} = -0,202; \end{aligned}$$

$$b = \frac{\frac{\rho_c^2}{r^2} \sin \alpha + \frac{\delta}{r^2} \cos \alpha}{1 + \rho_c^2/r^2} = \frac{0,6^2}{0,2^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{0,02}{0,2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,159.$$

Отже, сила тертя

$$F_T = -0,202 P + 0,159 \cdot 100 \cdot 9,8 = -0,202 P + 156. \quad (9)$$

Графік залежності (9) показано на рис. 70,д. Графік перетинає вісь P в точці $P_0 = 772$ Н.

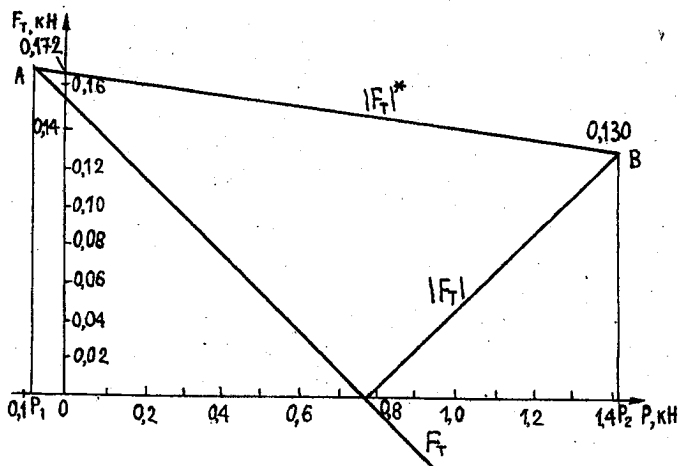


Рис. 70,д

При $0 \leq P \leq P_0$ маємо $F_T \geq 0$, тобто сила тертя спрямована в напрямку додатних значень P .

При $P > P_0$ маємо $F_T < 0$, тобто сила тертя спрямована в протилежний бік. Модуль цієї сили, який забезпечує кочення диска без проковзування, підлягає такому обмеженню:

$$|F_T| \leq N f,$$

причому $N > 0$.

Граничне значення модуля сили тертя згідно з (5)

$$|F_T|^* = N f = (mg \cos \alpha - 0,2 P \sin \beta) f =$$

$$= (100 \cdot 9,8 \sqrt{3}/2 - 0,2 P \sqrt{2}) \cdot 0,2 = -0,028 P + 170. \quad (10)$$

На рис. 70,д зображено графічну залежність сили $|F_T|$ від P , яка має вигляд ламаної лінії. Там же проведено пряму (10). Вона перетинає графік $|F_T|$ в точках A та B з абсцисами P_1 і P_2 .

Областю значень сили P , під дією яких диск котиться без проковзування, є область $|F_T| \leq N f$, де $P_1 \leq P \leq P_2$.

Граничні значення сили P знаходимо, використовуючи (9) та (10), з такої умови:

$$F_T = |F_T^*| \quad - \quad F_T = |F_T^*|$$

$$-0,2 P + 156 = -0,028 P + 170; \quad 0,2 P - 156 = -0,028 P + 170;$$

$$-0,2 P + 0,028 P = 170 - 156; \quad 0,202 P + 0,028 P = 156 + 170;$$

$$-0,174 P = 14; \quad 0,23 P = 326;$$

$$P_1 = -80,5 \text{ Н} = -0,08 \text{ кН}; \quad P_2 = 1417 \text{ Н} = 1,417 \text{ кН}.$$

Якщо виключити із (6) силу тертя F_T , то дістанемо диференціальне рівняння руху центра диска

$$\ddot{x}_c = \frac{(3 \cos \beta + 2 R/r + 1 - \delta \sin \beta/r) \cdot 0,2 P}{(1 + \rho_c^2/r^2) m} - \frac{g(\sin \alpha - \delta \cos \alpha/r)}{(1 + \rho_c^2/r^2) m} \quad (11)$$

Використовуючи задані величини, знаходимо

$$\ddot{x}_c = \frac{(3\sqrt{2}/2 + 2 \cdot 0,8/0,2 + 1 - 0,02 \sqrt{2}/0,2/2) \cdot 0,2 P}{(1 + 0,6^2/0,2^2) \cdot 100} - \frac{9,8 (0,5 - 0,02 \sqrt{3}/0,2/2)}{(1 + 0,6^2/0,2^2) \cdot 100},$$

або

$$\ddot{x}_c = (2,21 P - 4,05) \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2. \quad (12)$$

Графічну залежність (12) показано на рис. 70,е; $\ddot{x}_c = 0$ при $P = 1,8 \text{ Н}$. При $P = P_1 = -80,5 \text{ Н}$ прискорення центра мас C становить $\ddot{x}_c = -0,182 \text{ м/с}^2$, а при $P = P_2 = 1417 \text{ Н}$ $\ddot{x}_c = 3,13 \text{ м/с}^2$.

Інтегруючи (12) двічі та враховуючи початкові умови (при $t = 0$ маємо $x_c = \dot{x}_c = 0$), дістаємо

$$x_c = (1,105 P - 2,025) \cdot 10^{-3} t^2 \text{ м}. \quad (13)$$

Аналізуючи (13), можна зробити висновок, що залежно від модуля сили P значення x_c може бути від'ємним або додатним, тобто диск буде котитися вниз чи вгору по похилій площині.

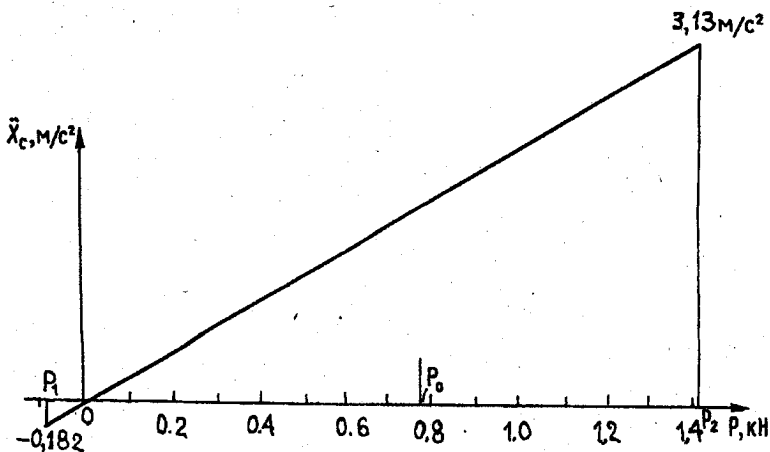


Рис. 70,е

Завдання Д-8

ЗАСТОСУВАННЯ СПРОЩЕНОЇ ТЕОРІЇ ГІРОСКОПА ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

Тіло 1 масою m обертається навколо осі симетрії Oz_1 з кутовою швидкістю ω і котиться без тертя по поверхні нерухомого тіла 2 з кутовою швидкістю ω_1 . Осі симетрії Oz_1 та Oz тіл 1 і 2 перетинаються в точці O .

Визначити гіроскопічний момент, а також відношення динамічної реакції до статичної тіла 2.

Вісь Oz_1 — невагома. Варіанти завдань показано на рис. 71, б—г, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 42.

Таблиця 42

Варіант	$m, \text{кг}$	ω	ω_1	r	R	l	α	β
		с^{-1}						
1	100	—	10	0,5	0,8	—	90	—
2	80	—	12	—	0,6	0,8	—	—
3	60	12	—	—	1,0	—	60	60
4	150	—	14	—	—	1,0	30	30
5	90	8	—	0,4	0,6	1,2	60	120
6	70	16	—	0,6	—	0,4	45	45
7	120	—	15	0,8	—	1,6	45	—
8	90	14	—	—	1,2	—	45	60
9	130	10	—	—	—	1,4	60	—
10	100	—	8	—	0,9	—	45	30

Варіант	m, кг	ω	ω_1	r	R	l	α	β
		c^{-1}		м			град	
11	160	—	10	0,4	0,8	—	60	—
12	180	8	—	—	—	0,6	30	60
13	40	18	—	—	0,7	—	45	—
14	60	—	8	—	0,4	—	30	30
15	50	20	—	—	0,5	0,8	45	—
16	120	—	6	—	0,4	—	—	45
17	40	12	—	—	0,6	—	60	—
18	80	10	—	—	0,8	—	30	—
19	70	—	12	—	1,0	—	120	30
20	150	—	15	—	—	1,0	45	30
21	80	—	18	—	—	1,2	60	—
22	110	12	—	—	1,2	—	30	30
23	100	10	—	—	0,5	—	45	—
24	90	16	—	—	—	0,8	45	60
25	140	14	—	—	0,6	—	45	—
26	130	—	16	0,6	1,0	—	—	45
27	100	—	10	—	—	1,0	30	—
28	80	18	—	—	0,2	—	30	30
29	70	—	14	—	0,8	—	45	60
30	60	—	12	—	0,9	—	45	60

Послідовність виконання завдання така:

- 1) нарисувати схему розташування тіл 1 і 2;
- 2) показати на схемі всі сили, які діють на тіло 1;
- 3) визначити статичну реакцію $R_{\text{стат}}$ тіла 2 на тіло 1;
- 4) підрахувати необхідні для подальших обчислень кутові швидкості;
- 5) обчислити відношення динамічної реакції до статичної тіла 2 на тіло 1;
- 6) визначити гіроскопічний момент.

Приклад 34. Для схеми розташування двох тіл (рис. 71) задано:

$m = 40$ кг; $r_1 = 0,4$ м; $r_2 = 1,2$ м; $r_3 = 0,8$ м; $\omega_1 = 10$ с⁻¹.

Розв'язання. 1. Розрахункову схему зображено на рис. 71, а.

2. На зрізаний конус 1 діють сили: \vec{R}_0 — реакція нерухомого сферичного шарніра O ; \vec{P} — сили тяжіння; $\vec{R}_{\text{стат}}$ — реакція конуса 2.

3. Статичну реакцію тіла 2 визначаємо на підставі рівняння моментів діючих сил навколо точки O , а саме:

$$\Sigma M_O = R_{\text{стат}} \cdot OB - P \cdot OC = 0. \quad (1)$$

Плече OB для сили $\vec{R}_{\text{стат}}$ (рис. 72) знаходимо, виходячи з такої залежності:

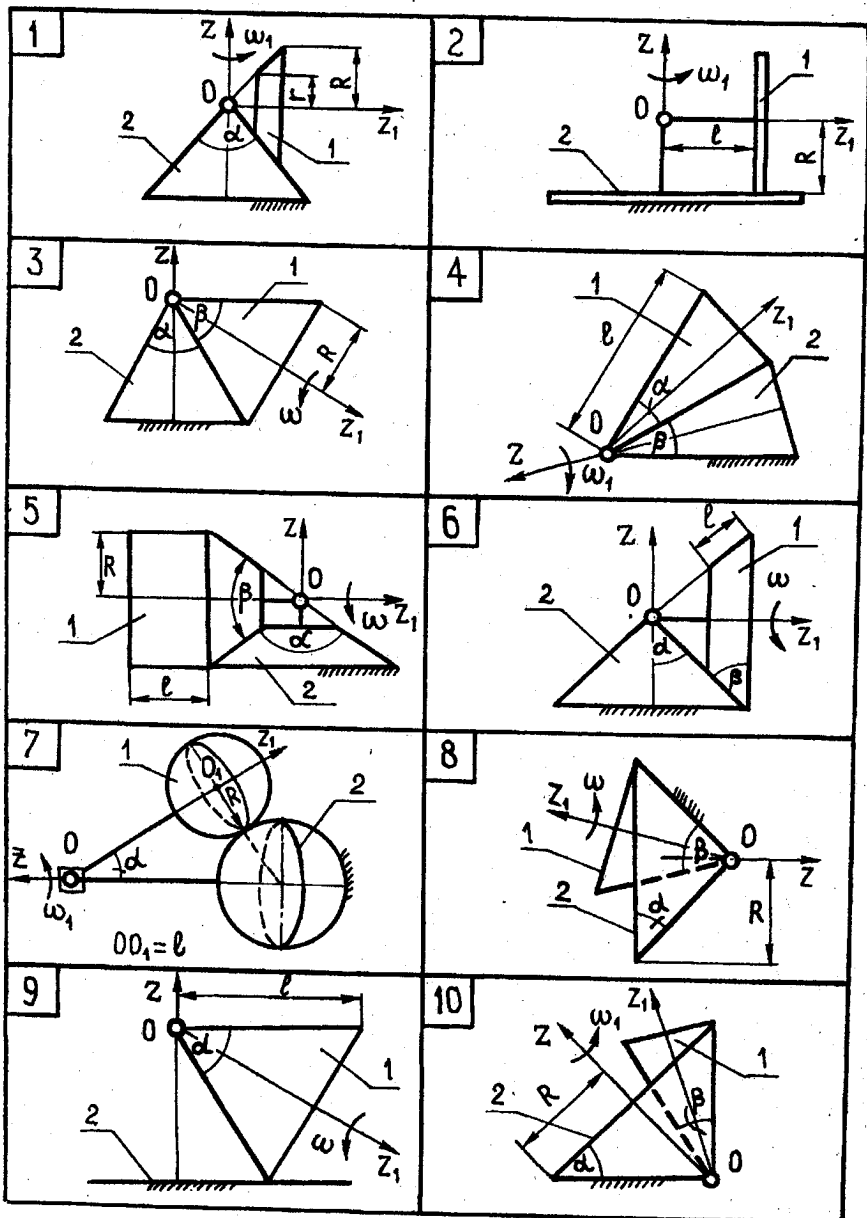


Рис. 71,6

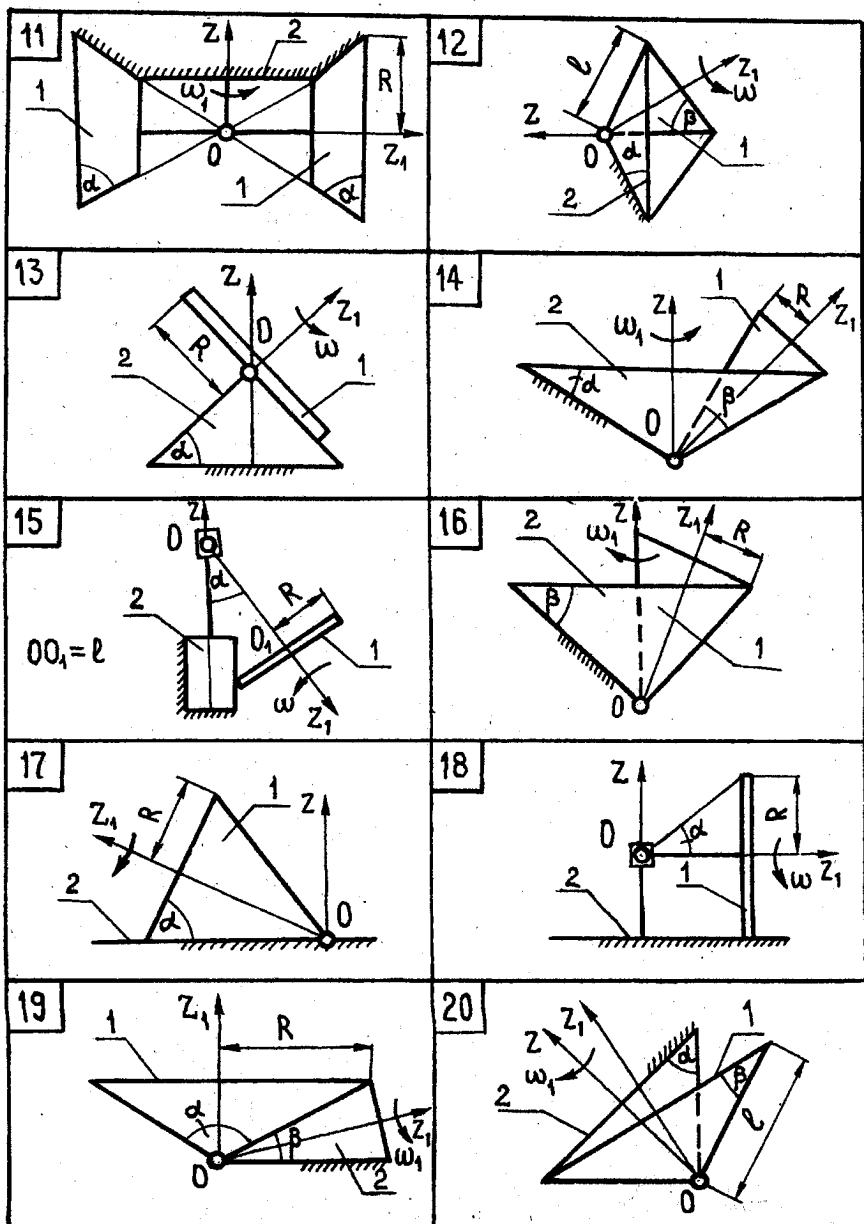


Рис. 71,б

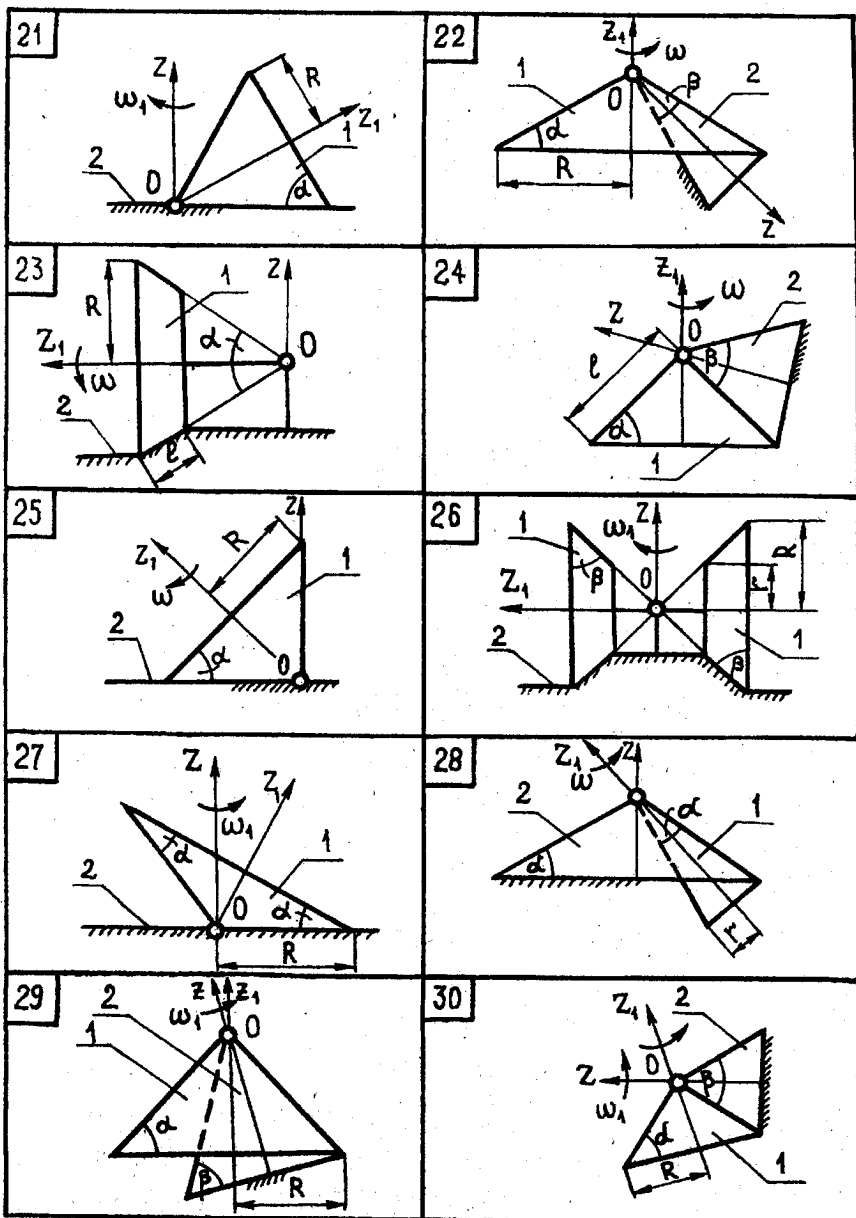


Рис. 71,з

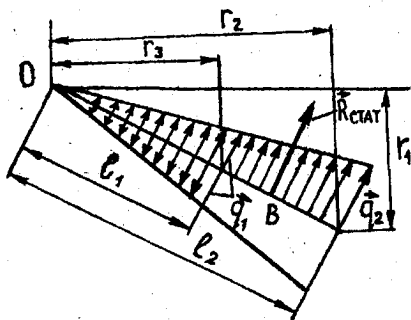


Рис. 72

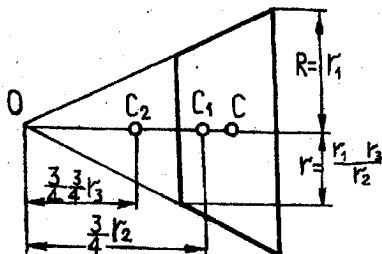


Рис. 73

Підставляючи (5), (6) у (4), знаходимо

$$OC = \frac{3(r_2^2 + r_3^2)(r_2 + r_3)}{4(r_2^2 + r_2 r_3 + r_3^2)} = \frac{3(1,2^2 + 0,8^2)(1,2 + 0,8)}{4(1,2^2 + 1,2 \cdot 0,8 + 0,8^2)} = 1,026 \text{ м.}$$

На підставі (1) статична реакція

$$R_{\text{СТАТ}} = \frac{P \cdot OC}{OB} = \frac{mg \cdot OC}{OB} = \frac{40 \cdot 9,8 \cdot 1,026}{1,068} = 377 \text{ Н.}$$

4. Рух тіла 1 складний і складається з двох рухів, а саме: обертального (переносного) навколо осі \$Oz\$ та відносного (обертального) навколо осі \$Oz_1\$ з кутовою швидкістю \$\omega_1\$.

Миттєва вісь обертання проходить через точки \$O\$ і \$B\$ (див. рис. 71, а).

За правилом додавання обертань навколо двох осей можна записати, що \$\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \vec{\omega}_1\$.

На підставі рис. 71, а

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{r_2}{r_1},$$

або

$$\omega = \omega_1 \frac{r_2}{r_1} = 10 \cdot \frac{1,2}{0,4} = 30 \text{ с}^{-1}.$$

Схему для визначення центра тяжіння тіла 1 зображено на рис. 73.

5. На підставі спрощеної теорії гіроскопа вектор моменту кількості руху \$\vec{L}_0\$ тіла 1 спрямований вздовж вектора кутової швидкості \$\omega\$. Кінець вектора \$\vec{L}_0\$ (див. рис. 71, а) під час кочення тіла 1 по поверхні тіла 2 з кутовою швидкістю \$\omega\$ рухається по колу радіусом \$L_0\$ із швидкістю \$\vec{u}\$,

вектор якої перпендикулярний до вектора \vec{L}_0 і згідно з правилом Резаля дорівнює головному моменту \vec{M}_0 незрівноважених зовнішніх сил.

Модуль

$$M_0 = u = L_0 \omega = J_{z_1} \omega_1 \omega,$$

причому

$$\begin{aligned} J_{z_1} &= \frac{3}{10} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} = \frac{3}{10} m \frac{r_1^5 - \left(\frac{r_1 r_3}{r_2}\right)^5}{r_1^3 - \left(\frac{r_1 r_3}{r_2}\right)^3} = \\ &= \frac{3}{10} m r_1^2 \frac{1 - (r_3/r_2)^5}{1 - (r_3/r_2)^3} = \frac{3}{10} \cdot 40 \cdot 0,4^2 \frac{1 - (0,8/1,2)^5}{1 - (0,8/1,2)^3} = 3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Крім того, момент M_0 можна визначити за формулою

$$M_0 = R_{\text{дин}} OB,$$

звідки динамічна реакція

$$R_{\text{дин}} = \frac{M_0}{OB} = \frac{J_{z_1} \omega \omega_1}{OB} = \frac{3 \cdot 30 \cdot 10}{1,068} = 843 \text{ Н}.$$

Відношення динамічної реакції до статичної тіла 2

$$n = \frac{R_{\text{дин}}}{R_{\text{стат}}} = \frac{843}{377} = 2,24.$$

6. Гіроскопічний момент

$$M_{\text{гир}} = M_0 = J_{z_1} \omega \omega_1 = 900 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Сумарна реакція тіла 2

$$R = R_{\text{стат}} + R_{\text{дин}} = 1220 \text{ Н}.$$

3.3. АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА

Завдання Д-9

ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ НА РІВНОВАГУ СИЛ, ПРИКЛАДЕНИХ ДО СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ

Схеми механізмів розміщено в горизонтальній площині під дією прикладених сил, рівновага яких визначається кутами $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \varphi$ (рис. 74, б — г). Довжини стержнів 1, 2, 3, 4 відповідно дорівнюють l_1, l_2, l_3 та l_4 (табл. 43). Точка E знаходиться посередині відповідного стержня. Повзун B втримується пружиною.

Таблиця 43

Вариант	l_1	l_2	l_3	l_4	α	β	γ	θ	φ	F_1	F_2	M_1	M_2
	м				град					Н		Н·м	
1	0,4	1,2	1,4	0,8	90	120	90	60	90	100	80	-	-
2	0,4	0,8	0,6	0,4	30	120	30	60	0	120	150	-	-
3	0,5	1,0	0,4	0,3	30	150	120	60	0	80	50	-	-
4	0,2	0,5	0,8	0,6	90	150	120	30	90	200	80	-	-
5	0,3	0,6	0,6	0,4	60	150	120	30	90	150	100	-	-
6	0,4	1,4	0,8	0,5	0	120	120	60	0	100	80	-	-
7	0,5	1,2	1,0	0,3	60	60	60	120	90	160	100	-	-
8	0,2	0,8	1,2	0,3	0	150	30	60	0	180	100	-	-
9	0,6	0,6	0,6	0,4	30	120	120	60	0	150	240	-	-
10	0,5	0,7	1,2	0,5	0	60	30	120	0	200	120	-	-
11	1,0	0,5	0,5	-	60	150	120	30	90	90	-	140	-
12	0,4	0,6	1,0	1,0	45	135	120	60	45	-	-	100	150
13	0,6	0,8	0,8	-	60	60	60	120	90	90	150	-	-
14	0,4	0,6	1,0	0,8	30	120	150	60	0	-	-	200	320
15	0,5	1,0	1,0	0,5	90	120	120	60	90	-	-	100	280
16	0,3	0,8	0,6	-	90	120	90	60	90	100	140	-	-
17	0,4	0,4	0,5	0,5	0	60	30	120	0	-	-	120	180
18	1,0	0,6	0,4	0,6	0	135	90	45	0	-	-	180	300
19	0,5	0,7	0,8	0,4	0	120	30	60	0	-	-	240	280
20	0,4	1,4	1,0	0,6	30	150	30	60	0	-	-	200	320
21	0,5	0,6	1,0	0,5	0	45	45	120	0	120	-	100	-
22	0,3	0,5	0,8	0,3	90	120	120	30	60	150	-	160	-
23	0,8	0,4	0,6	0,4	30	150	120	60	0	50	-	200	-
24	0,4	1,2	0,5	0,2	0	135	45	60	0	-	-	240	120
25	0,5	1,0	0,5	0,6	0	120	120	60	0	60	-	120	-
26	0,5	0,5	0,5	0,5	45	135	90	60	45	100	-	100	-

Вариант	l_1	l_2	l_3	l_4	α	β	γ	θ	φ	F_1	F_2	M_1	M_2
	м				град					Н		Н·м	
27	0,4	0,8	0,8	0,4	30	120	30	60	0	150	-	180	-
28	0,6	1,4	0,6	0,8	60	150	120	30	90	120	-	240	-
29	0,3	0,6	0,6	0,7	30	150	120	60	0	200	-	150	-
30	0,4	1,0	1,0	0,6	45	45	45	135	60	150	-	120	-

У варіантах 1 — 10, 13, 16 на механізм діють сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 ; у варіантах 12, 14, 15, 17 — 20 механізм зазнає дії пари сил, моменти яких M_1 та M_2 ; у варіантах 11, 21 — 23, 25 — 30 на механізм діють одна сила й одна пара сил із відповідним моментом.

Визначити модуль сили, з якою пружина втримує повзун B при рівновазі, а також установити розтягнуто чи стиснуто пружину.

Приклад 35. Для механізму, схему якого показано на рис. 74, задано: $F_1 = 400$ Н; $M_1 = 800$ Н·м; $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 90^\circ$; $\gamma = 30^\circ$; $\theta = 60^\circ$; $\varphi = 60^\circ$; $l_1 = 0,6$ м; $l_4 = 0,4$ м.

Визначити модуль пружної сили, яка втримує повзун B при рівновазі сил. Розв'язання. На рис. 74, а зображено механізм, на який діють активна сила \vec{F}_1 , пара сил із моментом M_1 і реакція пружини $\vec{F}_{\text{пр}}$. На рисунку показано також відповідні можливі переміщення ланок механізму.

Використовуємо правило обчислення робіт сил на можливих переміщеннях

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (1)$$

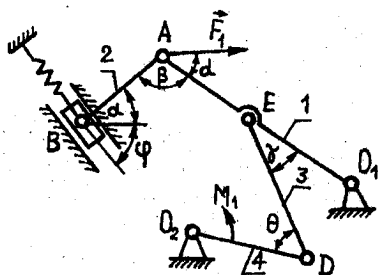


Рис. 74

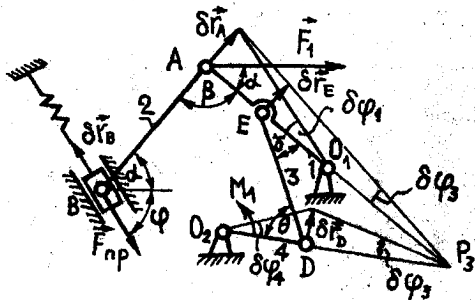


Рис. 74,а

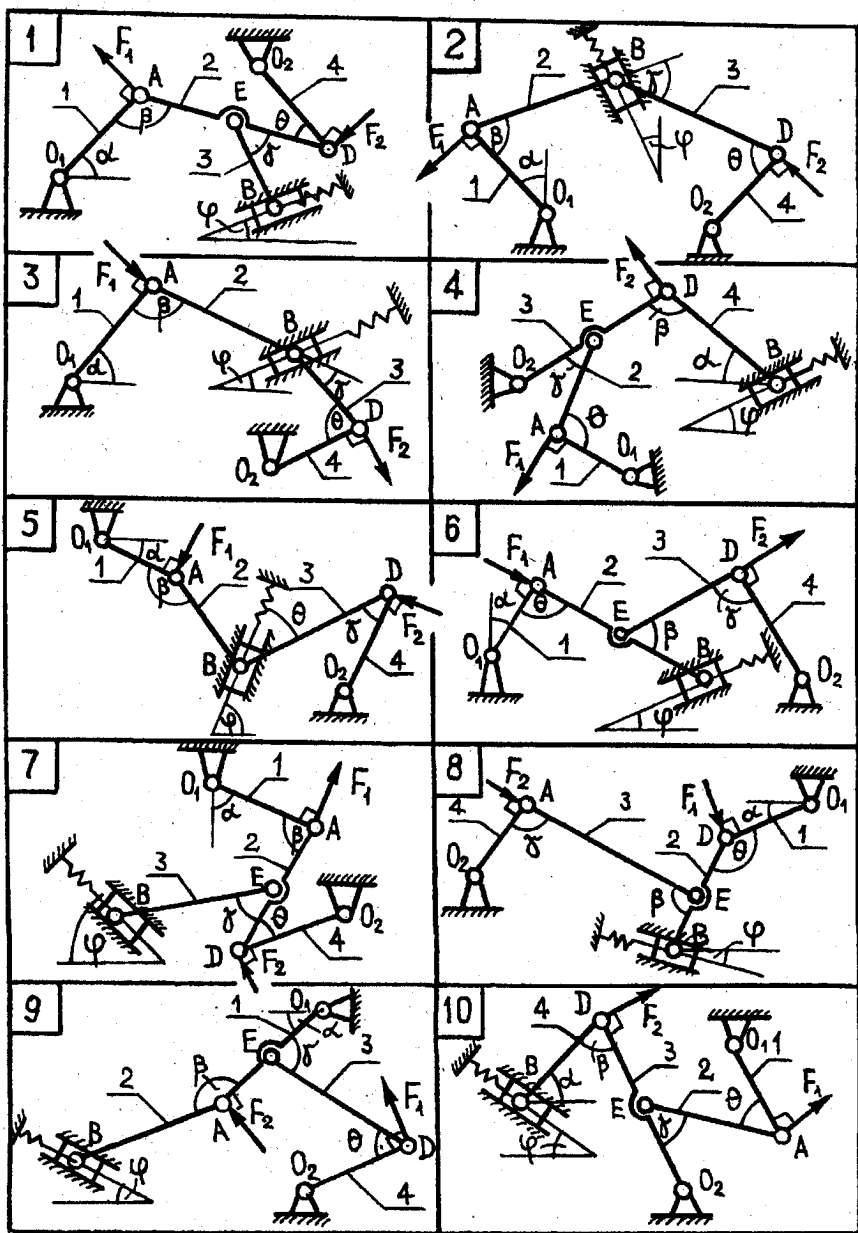


Рис. 74,6

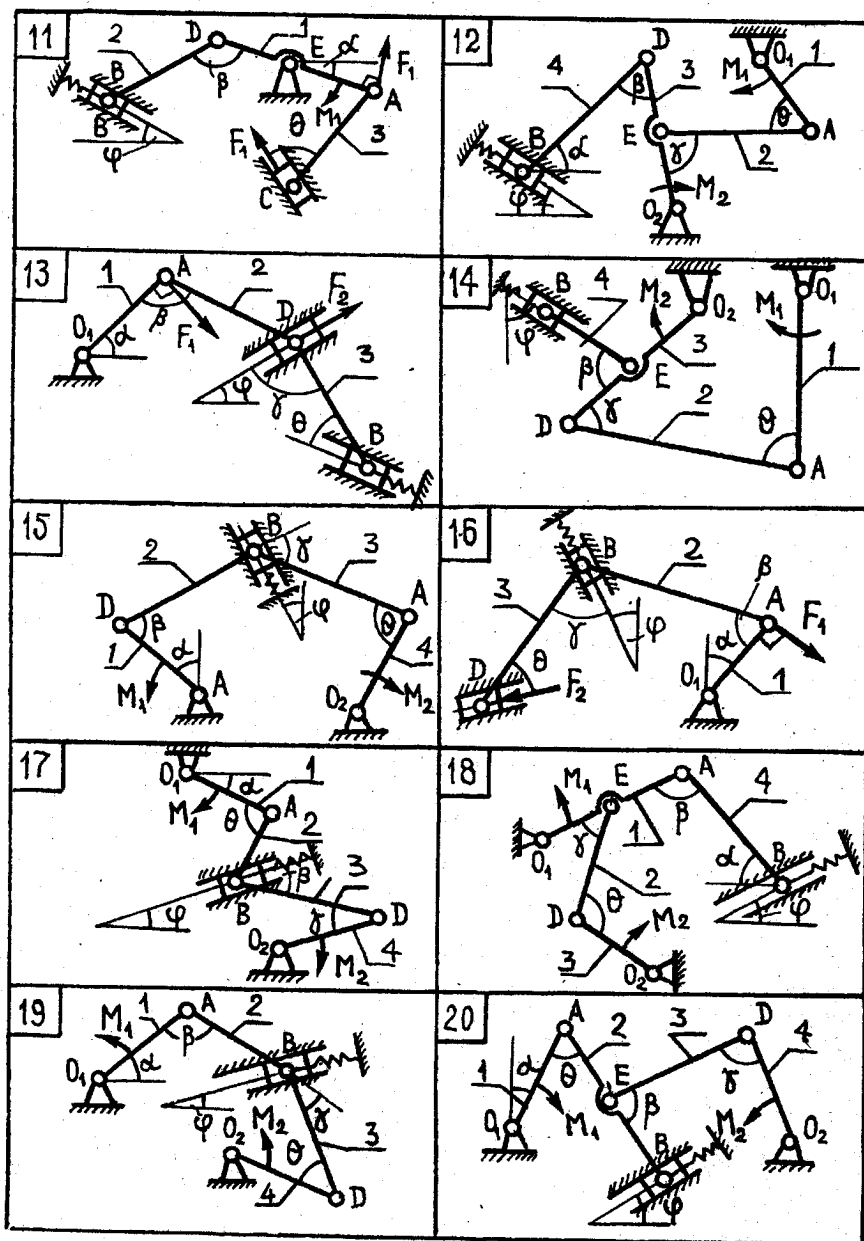


Рис. 74,а

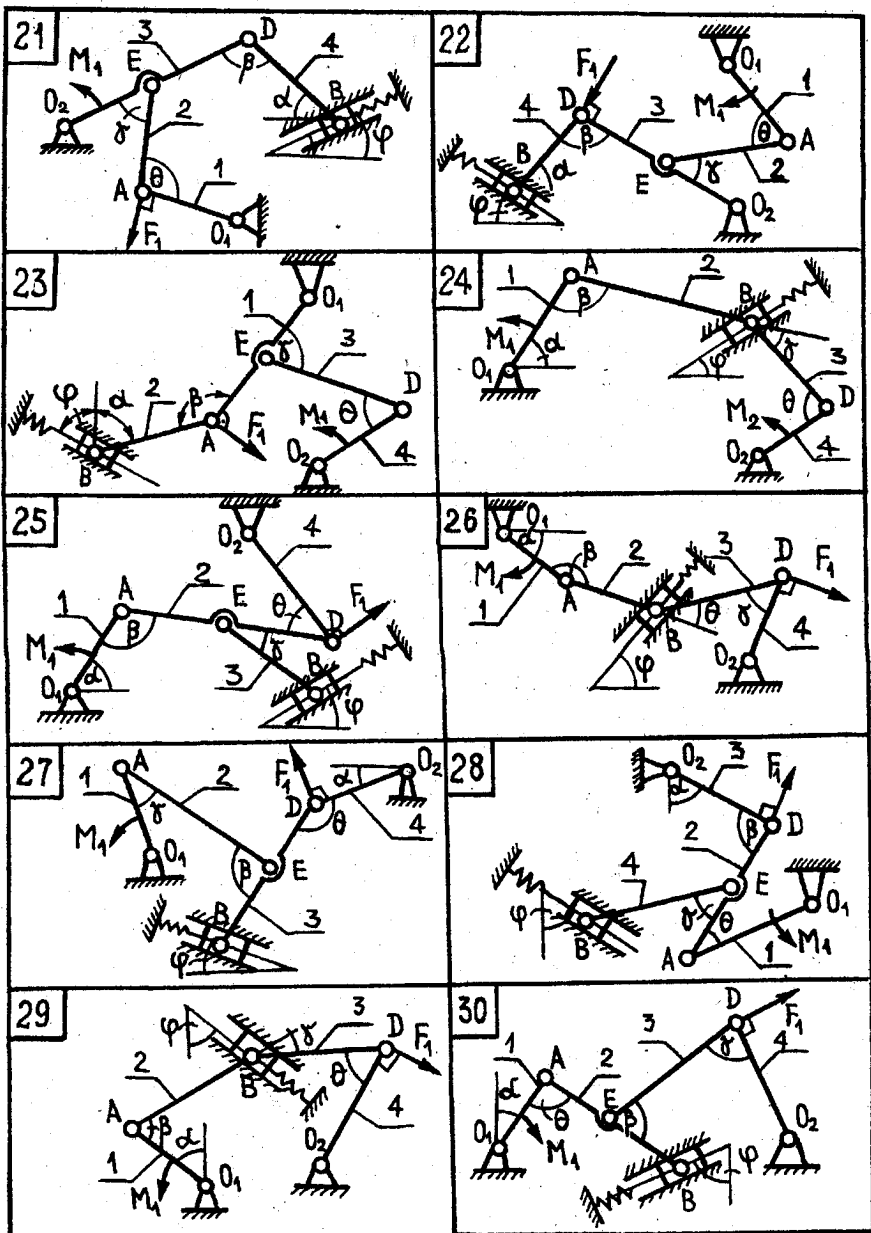


Рис. 74,г

Для розглядуваного прикладу рівність (1) має вигляд

$$F_1 \delta r_A \cos(90^\circ - \alpha) + M_1 \delta \varphi_4 - F_{np} \delta r_B = 0. \quad (2)$$

На підставі рис. 74, а можна записати таке співвідношення між можливими переміщеннями механізму:

$$\delta r_B \cos(180^\circ - (\alpha + \varphi)) = \delta r_A (\beta = 90^\circ). \quad (3)$$

Оскільки точка E поділяє кривошип $O_1 A$ на дві однакові частини,

$$\delta r_E = \frac{1}{2} \delta r_A. \quad (4)$$

З іншого боку,

$$\delta r_E = \frac{1}{2} |O_1 A| \delta \varphi_1 = \frac{1}{2} l_1 \delta \varphi_1. \quad (5)$$

Стержень 3 здійснює плоский рух, тобто обертається навколо миттєвого центра P_3 , а тому

$$\delta r_E = EP_3 \delta \varphi_3. \quad (6)$$

Аналогічно переміщення точки D

$$\delta r_D = DP_3 \delta \varphi_3, \quad (7)$$

або

$$\delta r_D = O_2 D \delta \varphi_4 = l_4 \delta \varphi_4. \quad (8)$$

Застосовуючи теорему синусів для трикутника DEP_3 , дістаємо

$$\frac{EP_3}{DP_3} = \frac{\sin(180^\circ - \theta)}{\sin \gamma}. \quad (9)$$

На підставі (6) — (8) визначаємо можливий кут повороту стержня 4, тобто

$$\delta \varphi_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \theta} \frac{\delta r_A}{l_4}. \quad (10)$$

Підставляючи (3), (10) у рівність (2), знаходимо

$$F_1 \delta r_A \sin \alpha + M_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \theta} \cdot \frac{\delta r_A}{l_4} + F_{np} \frac{\delta r_A}{\cos(\alpha + \varphi)} = 0, \quad (11)$$

або, оскільки $\delta r_A \neq 0$,

$$F_1 \sin \alpha + \frac{1}{2} M_1 \frac{\sin \gamma}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{l_4} + F_{np} \frac{1}{\cos(\alpha + \varphi)} = 0,$$

звідки модуль сили, яка втримує повзун B ,

$$F_{\text{пр}} = - \left(F_1 \sin \alpha + \frac{1}{2} M_1 \frac{\sin \gamma}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{l_4} \right) \cos(\alpha + \varphi). \quad (12)$$

Підставляючи значення F_1 , M_1 , α , γ , θ , φ в рівність (12), дістаємо

$$F_{\text{пр}} = - \left(400 \cos 45^\circ + \frac{1}{2} \cdot 800 \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} \cdot \frac{1}{0,4} \right) \cos 105^\circ = 223 \text{ Н.}$$

Завдання Д-10

ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ РЕАКЦІЙ СКЛАДНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

Схеми конструкцій показано на рис. 75, а — д, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 44. Розміри на рисунках вказано в метрах.

Таблиця 44

Вариант	P_1	P_2	M	q	α	Вариант	P_1	P_2	M	q	α
	кН		кН·м	кН/м	град		кН		кН·м	кН/м	град
1	10	12	6	4	—	16	12	18	28	2	60
2	8	16	30	2	60	17	10	18	24	3	60
3	14	18	24	3	60	18	14	8	26	2	45
4	12	16	30	4	90	19	8	6	22	4	30
5	9	12	20	4	45	20	16	8	18	2	45
6	18	12	10	5	30	21	20	12	20	3	30
7	12	8	16	2	60	22	18	20	36	5	30
8	6	9	24	4	45	23	10	6	8	2	60
9	16	10	18	4	30	24	12	—	20	4	45
10	14	10	22	2	45	25	6	10	25	5	45
11	6	18	36	3	30	26	14	8	30	5	60
12	15	9	40	4	60	27	2	6	8	2	30
13	10	16	32	3	45	28	8	8	12	2	45
14	8	12	22	2	60	29	9	12	20	6	45
15	6	18	30	5	—	30	12	6	18	2	30

Приклад 36. Для конструкції, схему якої зображено на рис. 75, задано:

$$P_1 = 12 \text{ кН}; \quad P_2 = 24 \text{ кН}; \quad M = 18 \text{ кН}; \quad q = 2 \text{ кН/м.}$$

Визначити реакції опор конструкції.

Розв'язання. Замінюємо рівномірно розподілене навантаження q зосереджувальними силами

$$Q_1 = Q_2 = q \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ кН.}$$

На рис. 75, а показано можливі переміщення конструкції для випадку, коли визначається горизонтальна складова реакції на опорі А при її горизонтальному переміщенні $\delta \vec{x}_A$.

За правилом розрахунку робіт на можливих переміщеннях

$$\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1)$$

для визначення реакції \vec{X}_A запишемо рівняння

$$X_A \delta x_A + P_1 \cos 45^\circ \cdot 3,75 \delta \varphi_1 + P_1 \cos 45^\circ \cdot 0,75 \delta \varphi_1 + M \delta \varphi_1 + Q_1 \cdot 1,5 \delta \varphi_2 + Q_2 \cdot 4,5 \delta \varphi_2 + P_2 \cos 60^\circ \cdot 3 \delta \varphi_2 = 0. \quad (2)$$

Навколо точки (опори) В одночасно обертаються тіла 1 і 2; тому можливе переміщення

$$\delta r_C = BC \delta \varphi_1 = BC \delta \varphi_2,$$

звідки

$$\delta \varphi_2 = \delta \varphi_1. \quad (3)$$

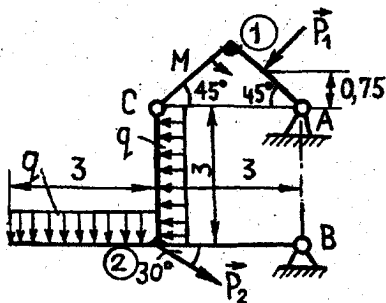


Рис. 75

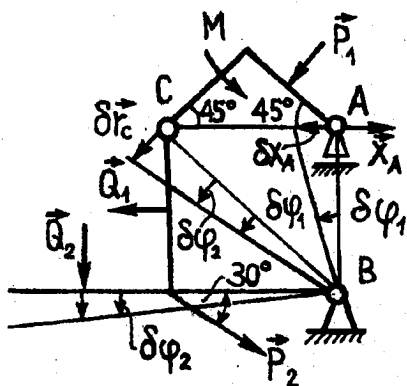


Рис. 75,а

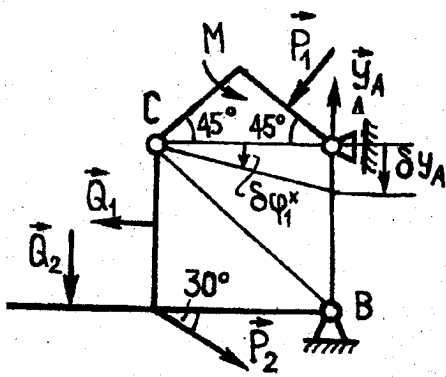


Рис. 75,б

Підставляючи (3) в (2) й ураховуючи, що $\delta x_A = 3 \delta \varphi_1$, дістаємо

$$-X_A \cdot 3 \delta \varphi_1 + 4,5 P_1 \cos 45^\circ \delta \varphi_1 + M \delta \varphi_1 + 6 Q_1 \delta \varphi_1 + 3 P_2 \cos 60^\circ \delta \varphi_1 = 0.$$

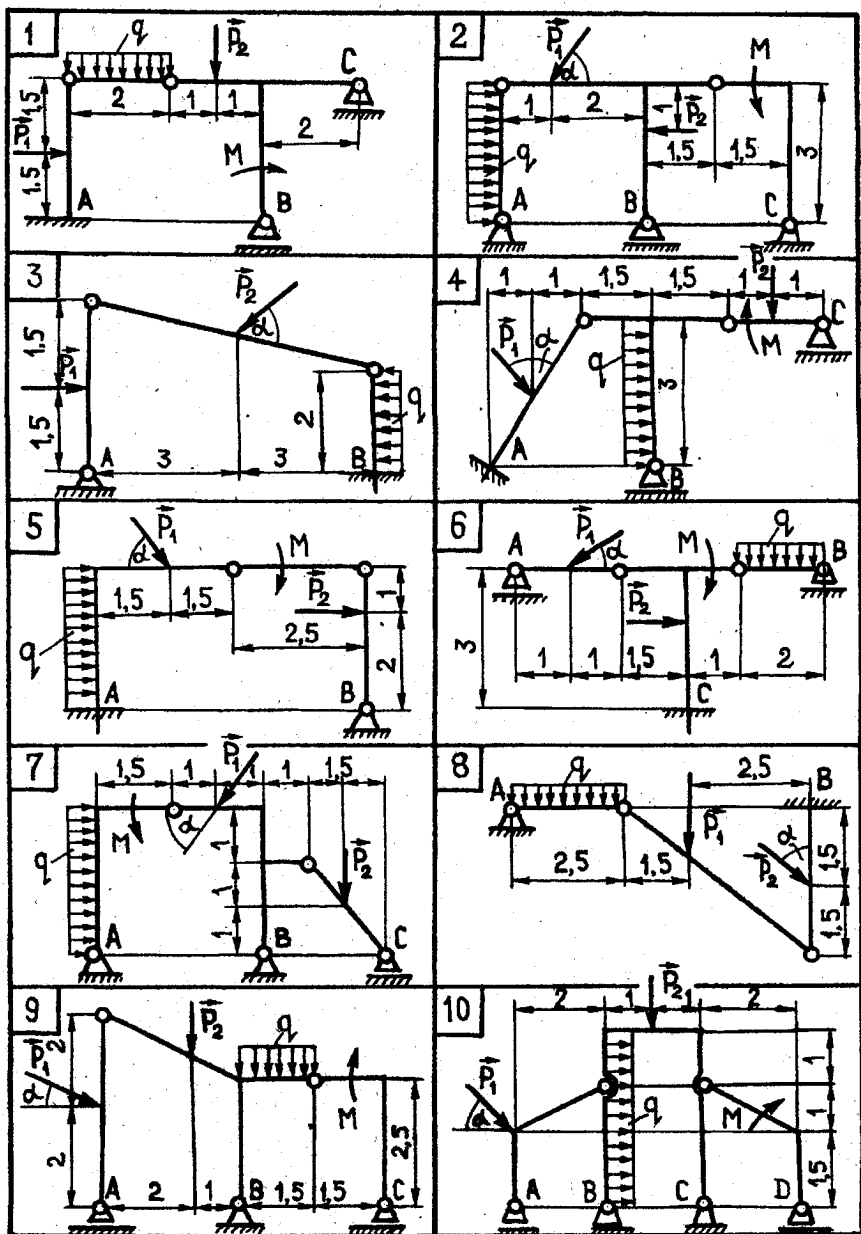


Рис. 75,а

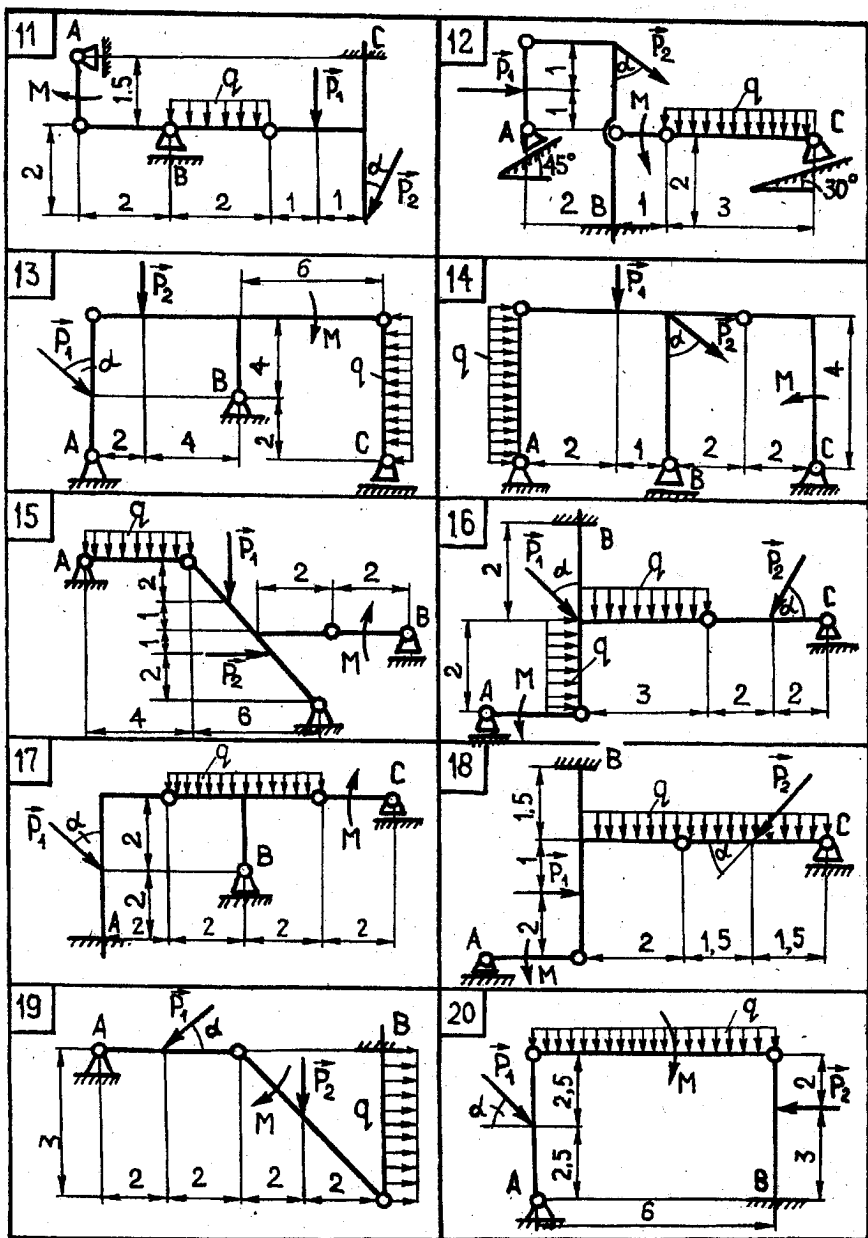


Рис. 75,2

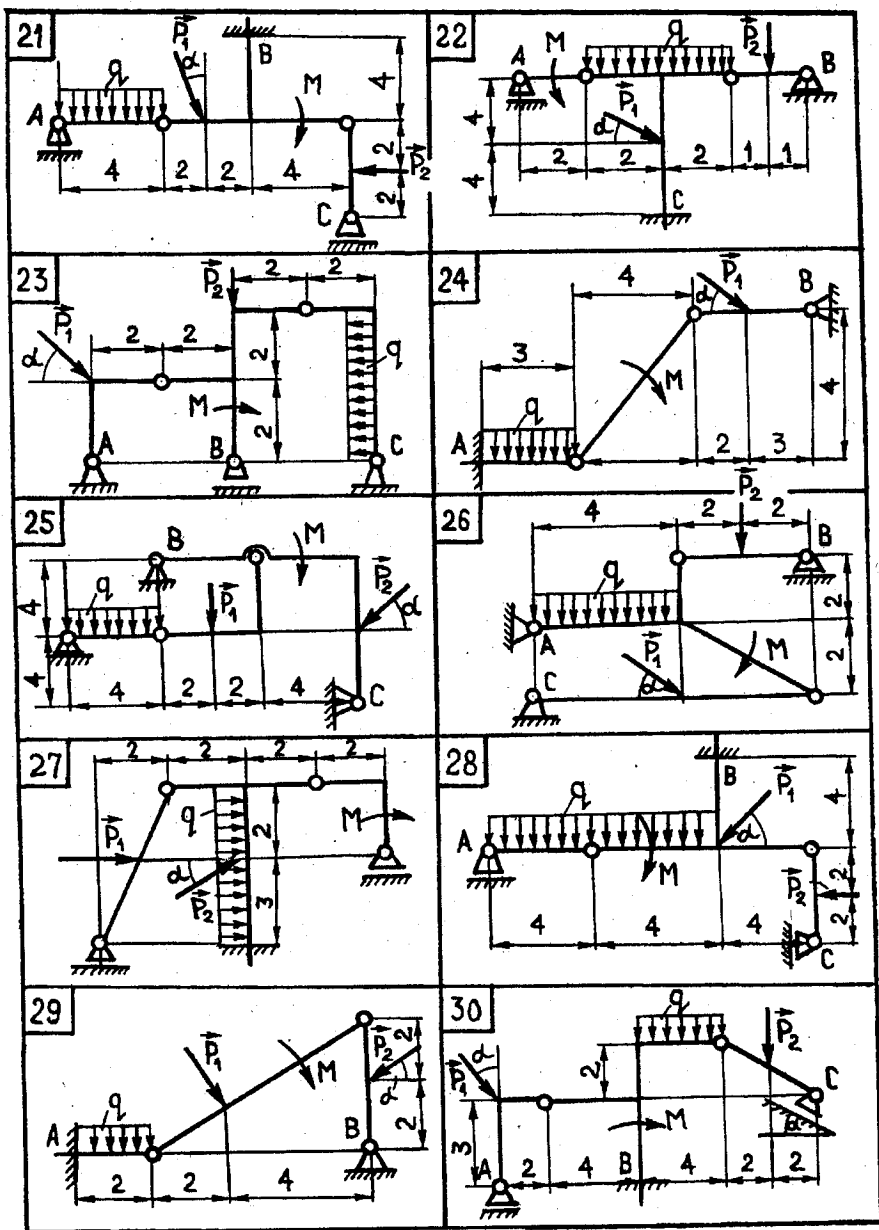


Рис. 75,д

Горизонтальна складова реакції на опорі А

$$X_A = \frac{4,5 \cdot 12 \cos 45^\circ + 18 + 6 \cdot 6 + 3 \cdot 24 \cos 60^\circ}{3} = 42,7 \text{ кН.}$$

Щоб визначити вертикальну складову \vec{Y}_A на опорі А, надамо цій опорі вертикального переміщення δy_A . Рис. 75,б показує, що точка С є миттєвим центром обертання тіла 1 (тіло 2 не переміщається).

Отже,

$$- Y_A \delta y_A + P_1 \cos 45^\circ \cdot 2,25 \delta \varphi_1^* - P_1 \cos 45^\circ \cdot 0,75 \delta \varphi_1^* - M \delta \varphi_1^* = 0.$$

Оскільки

$$\delta y_A = 3 \delta \varphi_1^*,$$

маємо

$$Y_A = \frac{1,5 P_1 \cos 45^\circ - M}{3} = 0,5 P_1 \cos 45^\circ - 6 = -1,77 \text{ кН.}$$

Рис. 76, а дає змогу визначити горизонтальну складову \vec{X}_B на опорі В, причому на цьому самому рисунку показано також можливі переміщення конструкції при дії відповідних сил.

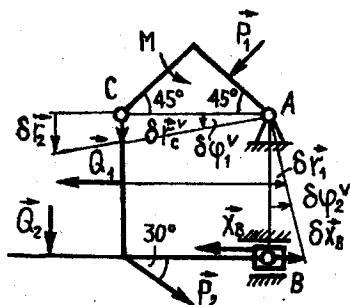


Рис. 76,а

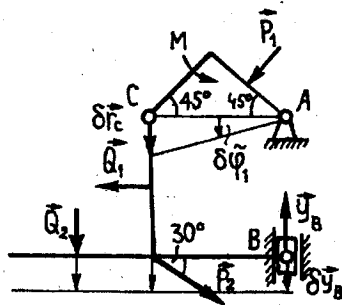


Рис. 76,б

Для визначення реакції \vec{X}_B запишемо рівняння

$$- X_B \cdot 3 \delta \varphi_2^v - Q_1 \cdot 1,5 \delta \varphi_1^v +$$

$$+ Q_2 \cdot 4,5 \delta \varphi_2^v + M_1 \delta \varphi_1^v + P_1 \cos 45^\circ \cdot 0,75 \delta \varphi_1^v +$$

$$+ P_1 \cos 45^\circ \cdot 0,75 \delta \varphi_1^v + P_2 \cos 60^\circ \cdot 3 \delta \varphi_2^v + P_2 \cos 30^\circ \cdot 3 \delta \varphi_2^v = 0,$$

оскільки переміщення точки С

$$\delta r_C^v = 3 \delta \varphi_1^v = 3 \delta \varphi_2^v.$$

Точка (опора) A є миттєвим центром обертання тіл 1 і 2. Горизонтальна складова реакції на опорі B

$$X_B = \frac{3 Q_1 + M + 1,5 P_1 \cos 45^\circ + 3 P_2 \cos 60^\circ + 3 P_2 \cos 30^\circ}{3} =$$

$$= 6 + 6 + 3\sqrt{2} + 12 + 12\sqrt{3} = 49 \text{ кН.}$$

На рис. 76,б показано переміщення конструкції для випадку, коли опорі B надано переміщення у вертикальному напрямку. На підставі рис. 76,б можна стверджувати, що миттєвий центр обертання тіла 2 знаходиться на нескінченності, тобто всі точки тіла 2 зазнають однакового переміщення.

Щоб визначити \vec{Y}_B , складаємо суму робіт, тобто

$$P_1 \cos 45^\circ \cdot 0,75 \delta\varphi_1 + P_1 \cos 45^\circ \cdot 0,75 \delta\varphi_1 + M \delta\varphi_1 +$$

$$+ Q_2 \cdot 3 \delta\varphi_1 + P_2 \cos 60^\circ \cdot 3 \delta\varphi_1 - Y_B \cdot 3 \delta\varphi_1 = 0.$$

Звідси

$$Y_B = \frac{4,5 P_1 \cos 45^\circ + M + 3Q_2 + 3 P_2 \cos 60^\circ}{3} =$$

$$= 6 \cos 45^\circ + 6 + 6 + 12 = 28, 23 \text{ кН.}$$

Рис. 76,в використовуємо для перевірки правильності визначення реакцій, для чого складаємо три рівняння рівноваги сил у статиці, а саме:

$$\sum F_x = X_A - X_B + P_2 \cos 30^\circ - Q_1 - P_1 \cos 45^\circ = 0,$$

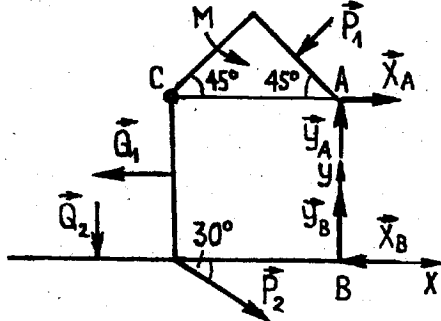


Рис. 76,в

або

$$42,7 - 49 + 12\sqrt{3} - 6 - 6\sqrt{2} = 63,46 - 63,46 \equiv 0;$$

$$\sum F_y = Y_A + Y_B - P_1 \cos 45^\circ - P_2 \cos 60^\circ - Q_2 = 0,$$

або

$$- 1,77 + 28,23 - 6\sqrt{2} - 12 - 6 = 28,23 - 28,23 \equiv 0;$$

$$\sum M_A = M + P_1 \cos 45^\circ \cdot 0,75 + P_1 \cos 45^\circ \cdot 0,75 - Q_1 \cdot 1,5 + \\ + 4,5 Q_2 + P_2 \cos 30^\circ \cdot 3 + P_2 \cos 60^\circ \cdot 3 - X_B \cdot 3 = 0,$$

або

$$18 + 1,5 \cdot 6\sqrt{2} + 18 + 3 \cdot 12\sqrt{3} + 3 \cdot 12 - 3 \cdot 49 = 147 - 147 \equiv 0.$$

Завдання Д-11

ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ Д'АЛАМБЕРА ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

Застосовуючи принцип Д'Аламбера, визначити реакції в'язей:

а) для довільного моменту часу (варіанти 2, 3, 6, 7, 10—16, 20, 24—30);

б) в момент часу $t = t_1$ (варіанти 9, 17—19, 24);

в) у той момент часу, коли кут повороту $\varphi = \varphi_1$ (варіанти 1, 4, 5, 8, 21—23);

г) в положенні, показаному на рис. 77, *в—д* (варіанти 2, 3, 6, 7, 11—13, 15, 17, 18, 20, 24—28, 30).

Схеми механічних систем показано на рис. 77, *в—д*, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 45, де ω — кутова швидкість; φ_0 і ω_0 — кут повороту та кутова швидкість в початковий момент часу; i_{3x} — радіус інерції тіла 3 відносно осі, що проходить через центр мас перпендикулярно до площини рисунку.

Таблиця 45

Варіант	m_1	m_2	m_3	a	R	φ_1	φ_0	ω	ω_0	t_1	Примітка
	кг			м		град		c^{-1}		с	
1	40	50	—	0,8	0,2	240	180	—	30	—	$OA = a$
2	25	15	—	0,2	—	—	—	15	—	—	—
3	45	—	—	0,1	—	—	—	12	—	—	—
4	10	24	—	—	0,3	45	0	—	10	—	$OA = 3R$

Варіант	m_1	m_2	m_3	a	R	φ_1	φ_0	ω	ω_0	t_1	Примітка
	кг			м		град		c^{-1}		с	
5	10	30	—	—	0,2	90	30	—	8	—	$OA = 4R$
6	15	25	—	0,2	—	—	—	20	—	—	$CD = DE$
7	12	36	—	0,2	—	—	—	10	—	—	—
8	30	40	—	—	0,3	60	0	—	6	—	$OA = 3R$
9	30	20	—	—	0,4	—	—	—	9	20	$OA = 3R,$ $M = 6 - 0,2t$
10	60	20	40	0,4	0,2	—	—	—	—	—	$i_{3x} = R\sqrt{2}$
11	10	10	15	0,3	0,3	—	—	20	—	—	—
12	40	20	—	0,2	—	—	—	25	—	—	—
13	10	20	30	0,3	0,2	—	—	10	—	—	—
14	40	60	40	—	0,4	—	—	—	—	—	$OA = 2R,$ $i_{3x} = 0,5 \text{ м}$
15	15	24	20	0,2	0,2	—	—	30	—	—	—
16	50	80	20	0,5	0,1	—	—	—	—	—	$i_{3x} = R\sqrt{2}$
17	20	20	—	0,4	0,4	—	—	—	0	100	$M = 20 - 0,1t$
18	30	10	—	0,2	0,1	—	—	—	0	50	$CD = 3a,$ $M = 30 - 0,2t$
19	50	—	—	—	0,3	—	0	—	0	6	$M = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$
20	40	30	—	0,2	—	—	—	8	—	—	—
21	24	18	27	0,3	0,2	90	0	—	5	—	$OA = BC = 2a$
22	20	30	—	0,4	—	135	0	—	0	—	$OA = 3a,$ $BC = 2a$
23	30	—	—	0,3	—	60	0	—	0	—	—
24	30	20	—	0,2	—	—	—	—	0	40	$M = 5 - 0,1t$
25	24	24	—	0,2	—	—	—	15	—	—	—
26	20	20	—	0,3	—	—	—	—	—	—	$CD = 2a$
27	18	18	—	0,2	0,1	—	—	20	—	—	—
28	30	40	—	0,4	0,3	—	—	16	—	—	—
29	30	15	—	0,2	—	—	—	—	—	—	—
30	21	27	—	0,3	—	—	—	12	—	—	—

Приклад 37. Для механічної системи, схему якої зображено на рис. 77, задано: $m_1 = 3 \text{ кг}$; $m_2 = 6 \text{ кг}$; $a = 0,2 \text{ м}$; $\alpha = 60^\circ$; $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$.

Визначити реакції опор A і B .

Розв'язання. На механічну систему діють: активні сили \vec{P}_1 та \vec{P}_2 — сили тяжіння стержня 1 й однорідної тонкої пластинки 2 розмірами $3a \times 2a$; момент зовнішніх сил M ; сили інерції $\vec{\Phi}_1$ і $\vec{\Phi}_2$; реакції \vec{X}_A, \vec{Z}_A опори A й \vec{X}_B, \vec{Z}_B опори B .

Реакції опор визначимо для випадку, показаного на рис. 77, а, коли стержень 1 знаходиться в площині zAy , а пластинка 2 — в площині xAy .

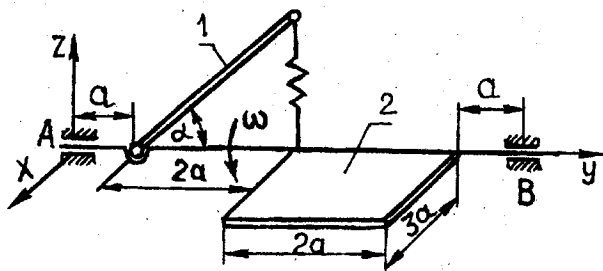


Рис. 77

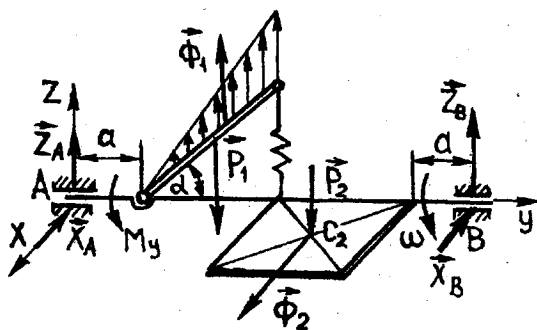


Рис. 77,а

Оскільки $\omega = \text{const}$, сили інерції

$$\Phi_1 = m_1 a_{C_1}; \quad \Phi_2 = m_2 a_{C_2}. \quad (1)$$

Прискорення відповідних центрів мас

$$a_{C_1} = \omega^2 R_{C_1}; \quad a_{C_2} = \omega^2 R_{C_2}, \quad (2)$$

причому радіуси обертання цих центрів

$$R_{C_1} = a \operatorname{tg} \alpha; \quad R_{C_2} = 1,5 a. \quad (3)$$

Підставляючи (3) в (2), а здобутий результат — в рівності (1), дістаємо

$$\Phi_1 = m_1 \omega^2 a \operatorname{tg} \alpha; \quad \Phi_2 = m_2 \omega^2 \cdot 1,5 a. \quad (4)$$

Система рівнянь кінестатики, записана за принципом Д'Аламбера, має такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned}
 \Sigma F_x &= -X_A - X_B + \Phi_2 = 0; \\
 \Sigma F_z &= Z_A + Z_B - P_1 - P_2 + \Phi_1 = 0; \\
 \Sigma M_x &= -P_1 \cdot 2a - P_2 \cdot 4a + Z_B \cdot 6a + M(\vec{\Phi}_1) = 0; \\
 \Sigma M_y &= P_2 \cdot 1,5a + M_y = 0; \\
 \Sigma M_z &= -\Phi_2 \cdot 4a + X_B \cdot 6a = 0.
 \end{aligned} \right\} (5)$$

З метою визначення моменту $M(\vec{\Phi}_1)$ сили інерції $\vec{\Phi}_1$ відносно осі Ax використовуємо допоміжний рис. 77,б, на підставі якого елементарна сила інерції $d\Phi_1$, що діє на елемент стержня dS ,

$$d\Phi_1 = dm_1 \omega^2 S \operatorname{tg} \alpha. \quad (6)$$

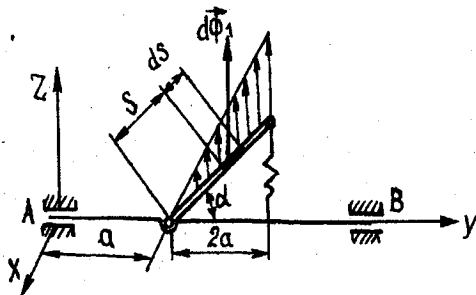


Рис. 77,б

Елементарна маса $dm_1 = \gamma_1 dS$, де γ_1 — лінійна густина однорідного тонкого стержня.

Після підстановки dm_1 в (6) маємо

$$d\Phi_1 = \gamma_1 \omega^2 \operatorname{tg} \alpha S dS. \quad (7)$$

Елементарний момент $dM(\vec{\Phi}_1)$ відносно осі Ax

$$dM(\vec{\Phi}_1) = d\Phi_1(a + S \cos \alpha) = \gamma_1 \omega^2 \operatorname{tg} \alpha (a + S \cos \alpha) S dS. \quad (8)$$

Інтегруючи (8), дістаємо

$$\begin{aligned}
 M(\vec{\Phi}_1) &= \gamma_1 \omega^2 \operatorname{tg} \alpha \int_0^l (a + S \cos \alpha) S dS = \\
 &= \gamma_1 \omega^2 \operatorname{tg} \alpha \left(a \frac{S^2}{2} + \frac{S^3}{3} \cos \alpha \right) \Big|_0^l = \gamma_1 \omega^2 \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{al^2}{2} + \frac{l^3}{3} \cos \alpha \right),
 \end{aligned}$$

де l — довжина однорідного тонкого стержня, тобто

$$l = 2a / \cos \alpha.$$

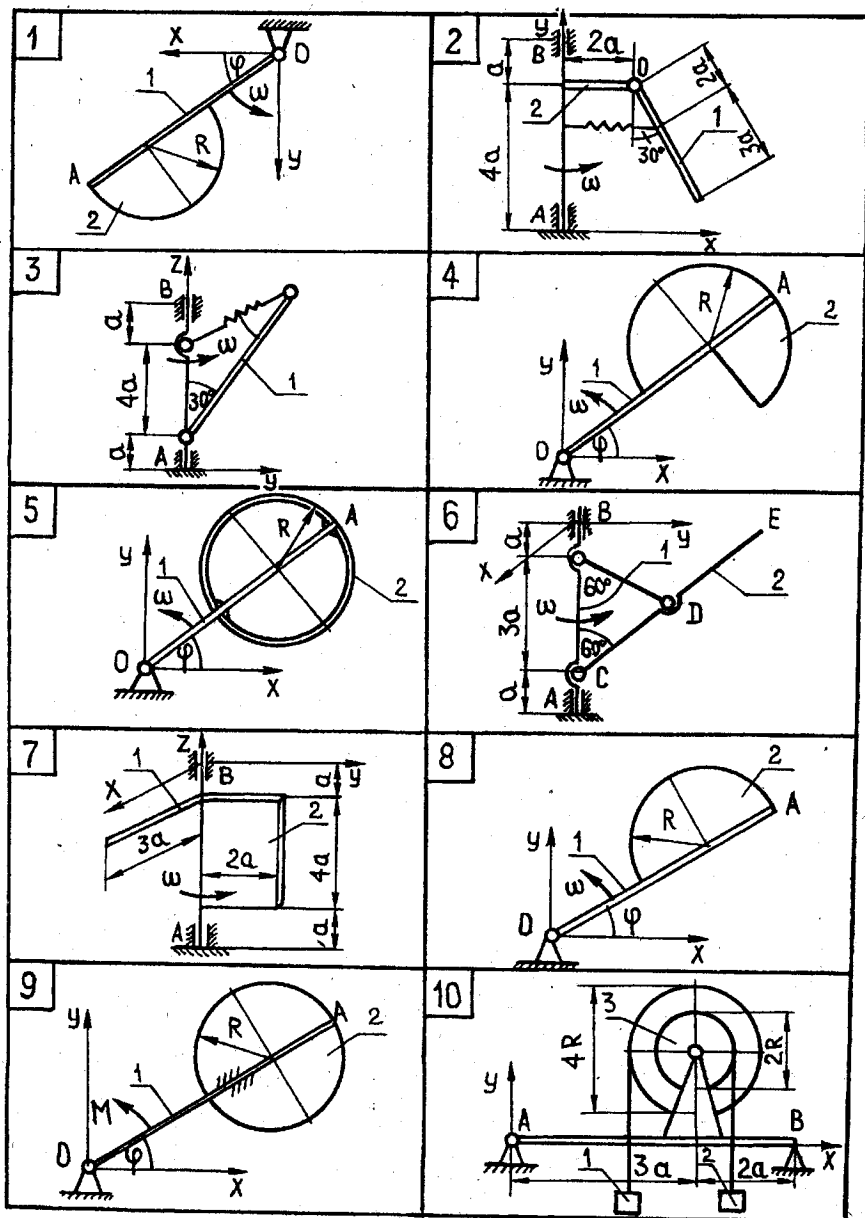


Рис. 77,6

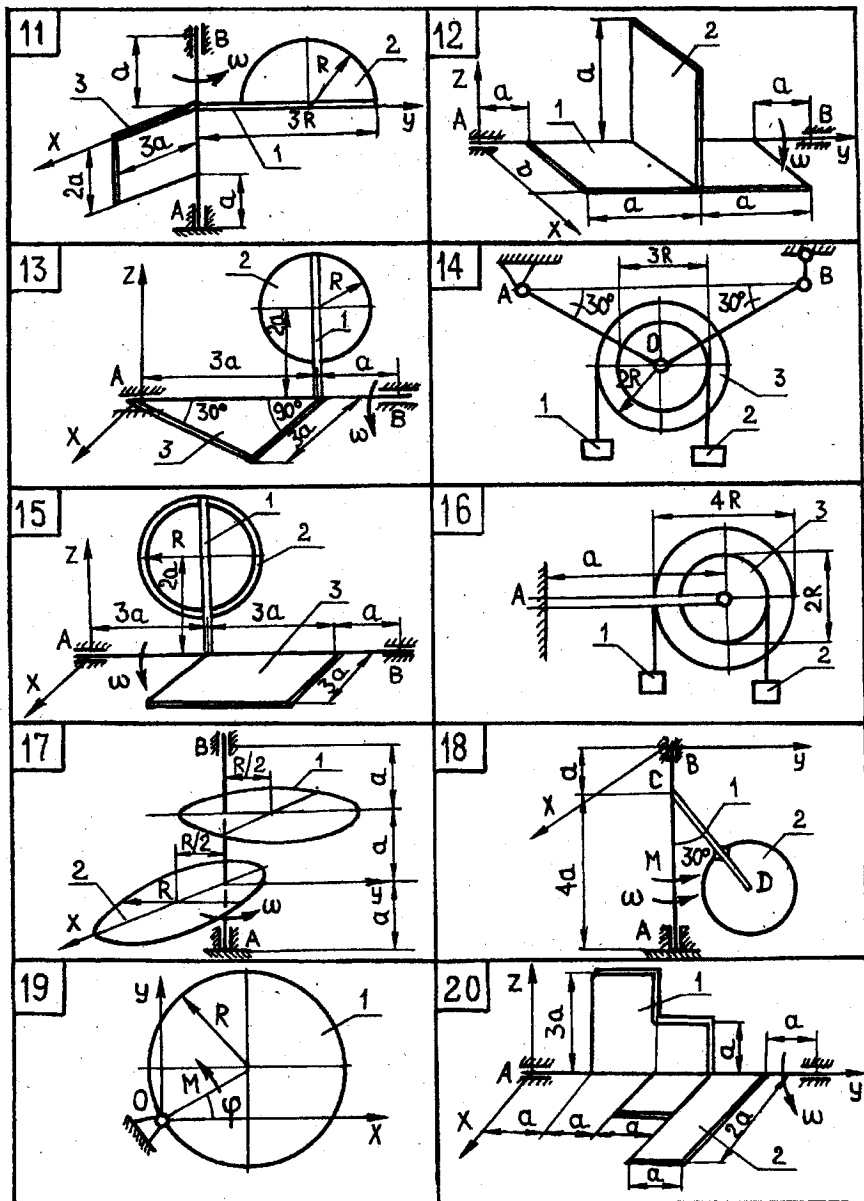


Рис. 77,2

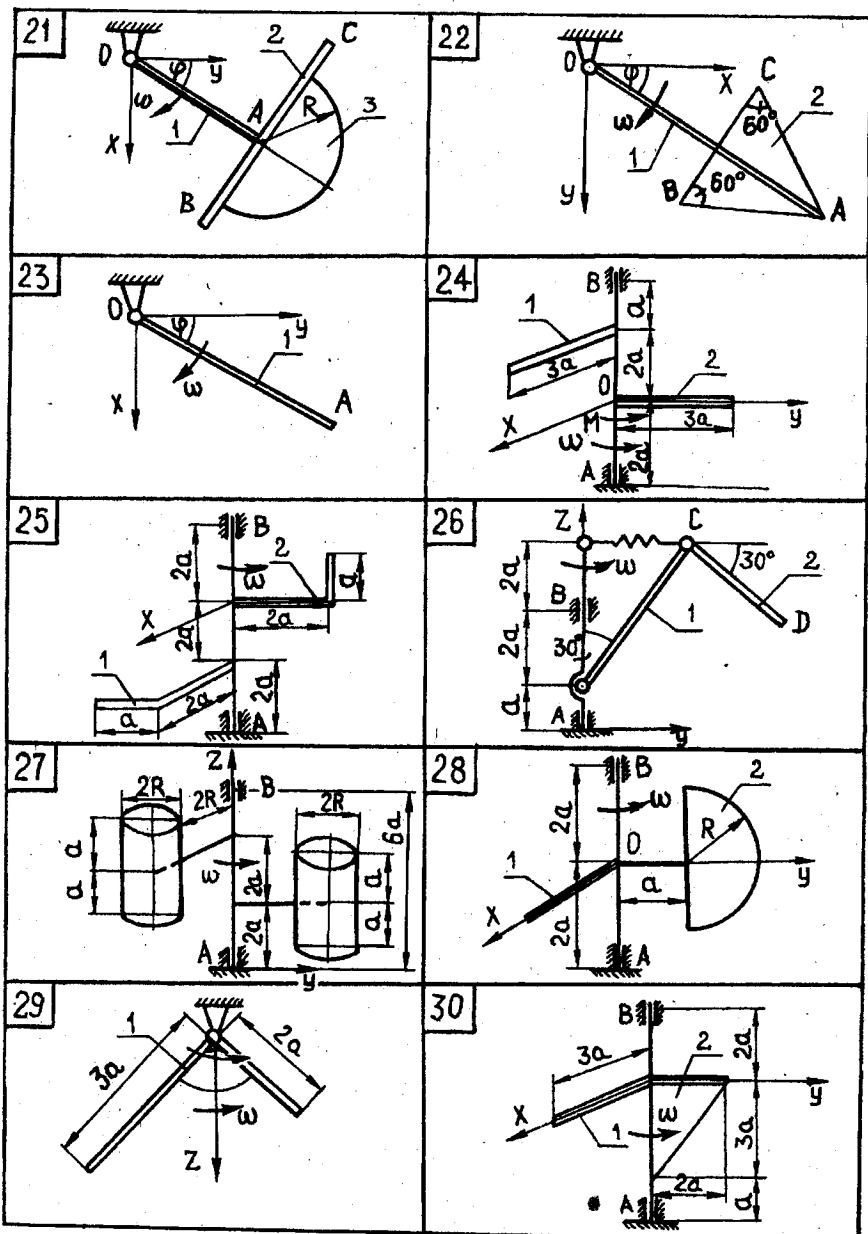


Рис. 77.0

Отже,

$$\begin{aligned}
 M(\vec{\Phi}_1) &= \gamma_1 \omega^2 \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{4a^3}{2 \cos^2 \alpha} + \frac{8a^3}{3 \cos^2 \alpha} \right) = \\
 &= \gamma_1 \omega^2 \operatorname{tg} \alpha \frac{4a^3}{\cos^2 \alpha} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) = \frac{28}{6} \gamma_1 \omega^2 \operatorname{tg} \alpha \frac{a^3}{\cos^2 \alpha} = \\
 &= \frac{14}{3} \gamma_1 \omega^2 \operatorname{tg} \alpha \frac{a^3}{\cos^2 \alpha}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Маса тонкого стержня

$$m_1 = \gamma_1 l = 2a \gamma_1 / \cos \alpha. \tag{10}$$

Підставляючи (10) в рівність (9), знаходимо

$$M(\vec{\Phi}_1) = \frac{7}{3} m_1 \omega^2 a^2 \operatorname{tg} \alpha / \cos \alpha. \tag{11}$$

Підставляючи (4), (11) в рівняння кінестатики, дістаємо реакції опор, а саме:

$$X_B = \frac{2}{3} \Phi_2 = \frac{2}{3} m_2 \omega^2 \cdot 1,5a = m_2 \omega^2 a = 6 \cdot 20^2 \cdot 0,2 = 480 \text{ Н};$$

$$X_A = \Phi_2 - X_B = 1,5 m_2 \omega^2 a - m_2 \omega^2 a = 0,5 m_2 \omega^2 a = 240 \text{ Н};$$

$$\begin{aligned}
 Z_B &= \frac{2P_1 + 4P_2}{6} - \frac{M(\vec{\Phi}_1)}{6a} = \frac{m_1 + 2m_2}{3} g - \frac{7}{3} m_1 \omega^2 \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{6 \cos \alpha} = \\
 &= \frac{3 + 12}{3} \cdot 9,8 - \frac{7}{18} \cdot 3 \cdot 20^2 \cdot \frac{0,2 \operatorname{tg} 60^\circ}{\cos 60^\circ} = -274 \text{ Н};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_A &= P_1 + P_2 - \Phi_1 - Z_B = (m_1 + m_2) g - m_1 \omega^2 a \operatorname{tg} \alpha - Z_B = \\
 &= 9 \cdot 9,8 - 3 \cdot 20^2 \cdot 0,2 \operatorname{tg} 60^\circ + 274 = -53,5 \text{ Н}.
 \end{aligned}$$

Приклад 38. Для механізму, схему якого показано на рис. 78, задано: $m_1 = 4$ кг; $m_2 = 6$ кг; $OA = l = 0,9$ м; $R = 0,3$ м; $\varphi_1 = 60^\circ$; $\varphi_0 = 0$; $\omega_0 = 10$ с⁻¹. Механізм рухається у вертикальній площині.

Визначити реакцію опори шарніра O в той момент часу, коли механізм переміститься з початкового положення $\varphi_0 = 0$ в положення $\varphi_1 = 60^\circ$.

Розв'язання. На механізм (див. рис. 78), що складається з однорідного тонкого стержня l та однорідної тонкої пластинки 2 у формі півкруга радіусом R і здійснює обертальний рух навколо точки O з кутовим сповільненням $\varepsilon(\varphi)$, діють такі сили (рис. 78, а): \vec{P}_1, \vec{P}_2 — сили тяжіння тіл 1 та 2 ; $\vec{\Phi}_1^n, \vec{\Phi}_2^n, \vec{\Phi}_1^r, \vec{\Phi}_2^r$ — нормальні й обертальні сили інерції; \vec{X}_0, \vec{Y}_0 — складові реакції опори (шарніра) O .

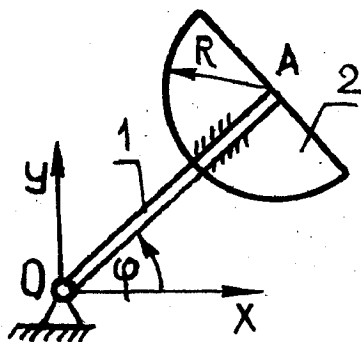


Рис. 78

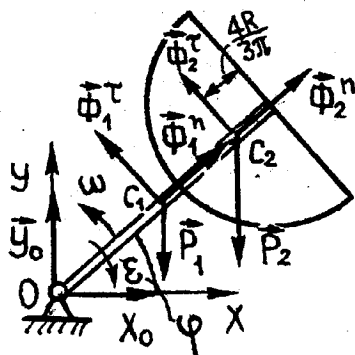


Рис. 78,a

Рівняння кінестатики, які виражають принцип Д'Аламбера, мають такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x &= X_0 + \Phi_1^n \cos \varphi + \Phi_2^n \cos \varphi - (\Phi_1^t + \Phi_2^t) \sin \varphi = 0; \\ \Sigma F_y &= Y_0 - P_1 - P_2 + (\Phi_1^n + \Phi_2^n) \sin \varphi + (\Phi_1^t + \Phi_2^t) \cos \varphi = 0; \\ J_0 \ddot{\varphi} &= -P_1 \frac{l}{2} \cos \varphi - P_2 \left(l - \frac{4R}{3\pi} \right) \cos \varphi. \end{aligned} \right\} (1)$$

Нормальні й обертальні сили інерції визначаються виразами

$$\Phi_1^n = m_1 a_{C_1}^n = m_1 \omega^2 \frac{l}{2}; \quad (2)$$

$$\Phi_2^n = m_2 a_{C_2}^n = m_2 \omega^2 \left(l - \frac{4R}{3\pi} \right); \quad (3)$$

$$\Phi_1^t = m_1 a_{C_1}^t = m_1 \varepsilon \frac{l}{2}; \quad (4)$$

$$\Phi_2^t = m_2 a_{C_2}^t = m_2 \varepsilon \left(l - \frac{4R}{3\pi} \right), \quad (5)$$

де ω та ε — кутові швидкість і прискорення механізму, які залежать від часу t або кута φ .

На підставі третього рівняння системи (1) можна визначити $\varepsilon = \ddot{\varphi}$, підставивши в нього кут $\varphi = \varphi_1 = 60^\circ$ і значення моменту інерції відносно осі Oz .

Момент інерції

$$J_0 = J_{01} + J_{02}. \quad (6)$$

Момент інерції стержня OA відносно осі Oz

$$J_{01} = \frac{1}{3} m_1 l^2 = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 0,9^2 = 1,08 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \quad (7)$$

Момент інерції однорідного півкруга

$$J_{02} = J_{C_2} + m_2 \left(l - \frac{4R}{3\pi} \right)^2, \quad (8)$$

причому момент інерції тіла 2 відносно осі, що проходить через центр мас C_2 , зв'язаний з моментом інерції відносно осі, яка проходить через кінець стержня l (точка A), такою залежністю:

$$\frac{1}{2} m_2 R^2 = J_{C_2} + m_2 \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2. \quad (9)$$

Підставляючи J_{C_2} із (9) в рівність (8), дістаємо

$$\begin{aligned} J_{02} &= \frac{1}{2} m_2 R^2 - m_2 \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 + m_2 \left(l - \frac{4R}{3\pi} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 l^2 - 8 m_2 l R / (3\pi) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,3^2 + 6 \cdot 0,9^2 - 8 \cdot 6 \cdot 0,9 \cdot 0,3 / (3\pi) = 3,75 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Підставляючи (8), (10) у (6), знаходимо

$$J_0 = 1,08 + 3,75 = 4,83 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Отже, кутове прискорення механізму в момент, коли $\varphi_1 = 60^\circ$,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \ddot{\varphi} |_{\varphi_1 = 60^\circ} = - \frac{9}{J_0} \left(m_1 \frac{l}{2} + m_2 \left(l - \frac{4R}{3\pi} \right) \right) \cos \varphi_1 = \\ &= - \frac{9,8}{4,83} \left(4 \cdot \frac{0,9}{2} + 6 \left(0,9 - \frac{1,2}{3\pi} \right) \right) \cos 60^\circ = - 6,53 \text{ с}^{-2}. \end{aligned}$$

Третє рівняння системи (1) у змінних φ і $\dot{\varphi}$ має вигляд

$$J_0 \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = - m_1 g \frac{l}{2} \cos \varphi - m_2 g \left(l - \frac{4R}{3\pi} \right) \cos \varphi.$$

Відокремлюючи змінні й інтегруючи останнє рівняння один раз, дістаємо

$$J_0 \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = - m_1 g \frac{l}{2} \sin \varphi - m_2 g \left(l - \frac{4R}{3\pi} \right) \sin \varphi + C_1. \quad (11)$$

У початковий момент часу ($\varphi_0 = 0$)

$$\dot{\varphi} = \omega_0; \varphi = \varphi_0 = 0.$$

Стала інтегрування

$$C_1 = \frac{1}{2} J_0 \omega_0^2.$$

Отже, рівність (11) набуває такого вигляду:

$$\frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2 = -m_1 g \frac{l}{2} \sin \varphi - m_2 g \left(l - \frac{4R}{3\pi} \right) \sin \varphi + \frac{1}{2} J_0 \omega_0^2. \quad (12)$$

Кутову швидкість ω_1 визначаємо, замінюючи в (12) $\dot{\varphi}_1$ на ω_1 , а φ на $\varphi_1 = 60^\circ$.

Тоді

$$\frac{1}{2} J (\omega_1^2 - \omega_0^2) = -g \left(m_1 \frac{l}{2} + m_2 \left(l - \frac{4R}{3\pi} \right) \right) \sin 60^\circ,$$

звідки

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_0^2 - \frac{2g}{J_0} \left(m_1 \frac{l}{2} + m_2 \left(l - \frac{4R}{3\pi} \right) \right) \sin 60^\circ = \\ &= 10^2 - \frac{19,6}{4,83} \left(4 \cdot 0,45 + 6 \left(0,9 - \frac{0,4}{\pi} \right) \right) \sin 60^\circ = 77,4 \text{ с}^{-2}. \end{aligned}$$

У момент часу, коли $\varphi = \varphi_1 = 60^\circ$,

$$\Phi_1^n = 4 \cdot 77,4^2 \cdot 0,45 = 10\,783,4 \text{ Н};$$

$$\Phi_2^n = 6 \cdot 77,4^2 \left(0,9 - \frac{0,4}{\pi} \right) = 27\,773,5 \text{ Н};$$

$$\Phi_1^r = 4 \cdot 6,53 \cdot 0,45 = 11,8 \text{ Н};$$

$$\Phi_2^r = 6 \cdot 6,53 \left(0,9 - \frac{0,4}{\pi} \right) = 30,3 \text{ Н}.$$

Ураховуючи модулі сил Φ_1^n , Φ_2^n , Φ_1^r , Φ_2^r і маси m_1 та m_2 , на підставі першого і другого рівнянь системи (1) реакції опори шарніра O становлять

$$\begin{aligned} X_0 &= -(\Phi_1^n + \Phi_2^n) \cos \varphi_1 + (\Phi_1^r + \Phi_2^r) \sin \varphi_1 = \\ &= -38\,556,9 \cos 60^\circ + 42,1 \sin 60^\circ = -19\,242 \text{ Н} = -19,2 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_0 &= (m_1 + m_2)g - (\Phi_1^n + \Phi_2^n) \sin \varphi_1 - (\Phi_1^r + \Phi_2^r) \cos \varphi_1 = \\ &= 98 - 38\,556,9 \sin 60^\circ - 42,1 \cos 60^\circ = -33\,314 \text{ Н} = -33,3 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Завдання Д-12

ЗАСТОСУВАННЯ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ

Для заданої механічної системи з одним ступенем вільності визначити прискорення відповідних тіл і натяг шнурів, до яких прикріплено відповідні тіла. Масами шнурів, тертям кочення та силами опору в підшипниках знехтувати. Система рухається із стану спокою.

Варіанти механічних систем показано на рис. 80, а—в, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 46.

Таблиця 46

Варіант	m_1	m_2	m_3	m_4	i_{2x}	i_{3x}	δ	f	α	Примітка
	кг				см				град	
1	3m	2m	m	—	$R\sqrt{3}$	—	0,20	—	60	—
2	4m	2m	m	m	$R\sqrt{2}$	—	0,24	—	45	—
3	5m	2m	m	m	1,6R	—	0,15	—	30	—
4	6m	2m	1,5m	—	$R\sqrt{2}$	—	0,18	—	30	—
5	3m	2m	m	m	1,8R	—	—	—	—	—
6	4m	1,5m	m	m	$R\sqrt{2}$	—	—	—	45	$m_5 = 2m$
7	2m	m	1,2m	m	—	$R\sqrt{3}$	—	—	—	$m_5 = m_6 = m$
8	0,5m	m	m	3m	—	—	—	—	—	—
9	1,5m	1,2m	1,5m	—	1,5R	—	0,28	0,10	30	—
10	2m	m	2m	—	$R\sqrt{3}$	—	0,20	—	45	—
11	m	m	m	2m	—	—	—	—	—	$i_{4x} = 1,6R$
12	m	m	1,6m	m	—	—	—	0,30	60	—
13	m	1,4m	1,4m	1,5m	$R\sqrt{2}$	$R\sqrt{2}$	—	0,15	45	—
14	m	m	2m	m	—	1,8R	—	—	—	$m_5 = m_6 = m$
15	m	1,2m	m	m	1,4R	—	0,22	—	30	—
16	m	2m	m	m	1,6R	—	—	0,24	60	—
17	4m	3m	m	—	1,8R	—	—	0,18	60	—
18	m	2m	m	—	$R\sqrt{2}$	—	—	—	—	—
19	m	1,6m	m	m	$R\sqrt{2}$	—	0,32	—	30	$M = 4mRg$
20	m	m	2m	m	—	1,6R	—	—	—	—
21	2m	2m	m	m	1,5R	—	0,60	—	30	—
22	3m	2m	m	—	1,6R	—	0,40	—	45	—
23	m	1,5m	m	m	$R\sqrt{3}$	—	0,36	—	—	—
24	4m	3m	m	—	1,8R	—	0,24	0,22	45	—
25	m	m	1,5m	m	$R\sqrt{2}$	—	—	—	—	—
26	1,5m	2m	m	m	$R\sqrt{2}$	—	—	—	—	—
27	2m	4m	m	m	1,5R	—	0,80	—	30	—
28	m	m	m	—	—	—	0,50	—	30	—
29	1,5m	1,8m	m	—	1,6R	—	0,40	0,20	45	—
30	m	2m	m	—	1,8R	—	—	—	—	—

Блоки і котки, для яких радіуси інерції в табл. 46 не вказано, вважати однорідними суцільними циліндрами.

Приклад 39. Для механізму, схему якого зображено на рис. 79, задано: $m_1 = 3 m$; $m_2 = m_3 = m$; $r = 0,25 m$; $R/r = 2,5$; $i_{2x} = 2r$; $\alpha = 60^\circ$; $f = 0,2$; $\beta = 45^\circ$.

Розв'язання. На механізм діють такі сили: \vec{P}_1 — сила тяжіння тягарця 1; \vec{P}_2 — сила тяжіння нерухомого блока 2; \vec{P}_3 — сила тяжіння котка 3; F_T — сила тертя тягарця 1 об нерухому площину. Вектори діючих у механізмі сил показано на рис. 79, а.

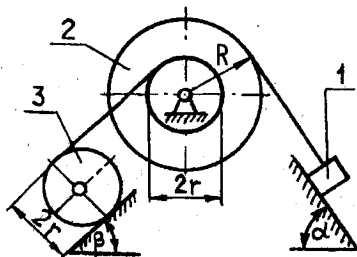


Рис. 79

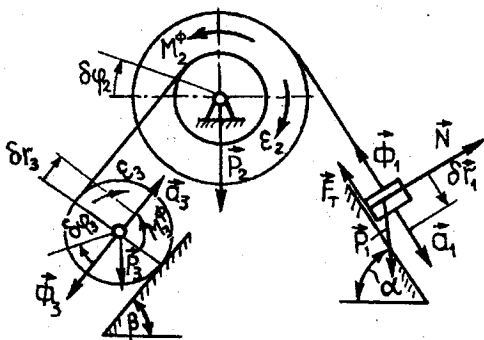


Рис. 79,а

Модуль сили тертя

$$F_T = f N_1 = f m_1 g \cos \alpha = 3 m g f \cos \alpha. \quad (1)$$

Модуль сили інерції тягарця 1, який здійснює поступальний рух,

$$\Phi_1 = m_1 a_1 = 3 m a_1. \quad (2)$$

Момент сил інерції нерухомого блока 2, що обертається з кутовим прискоренням ε_2 ,

$$M_2^\Phi = J_{2x} \varepsilon_2 = m_2 i_{2x}^2 \varepsilon_2. \quad (3)$$

Коток 3 здійснює плоский рух; тому сила інерції

$$\Phi_3 = m_3 a_3, \quad (4)$$

а момент інерції

$$M_3^\Phi = J_{3x} \varepsilon_3 = \frac{1}{2} m_3 r^2 \varepsilon_3, \quad (5)$$

де ε_2 та ε_3 — кутові прискорення тіл 2 і 3.

Після надання тягарцю 1 можливого переміщення δr_1 у бік його руху блок 2 повернеться на кут $\delta \varphi_2$ за ходом стрілки годинника, а коток 3

переміститься на відстань $\delta \vec{r}_3$ і повернеться на кут $\delta \varphi_3$ також за ходом годинникової стрілки (див. рис. 79, а).

Загальне рівняння динаміки $\Sigma \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \Sigma \vec{\Phi}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ для розглядуваного механізму має вигляд

$$P_1 \delta r_1 \sin \alpha - F_T \delta r_1 - P_3 \delta r_3 \sin \beta - M_2^{\Phi} \delta \varphi_2 - \Phi_3 \delta r_3 - M_3^{\Phi} \delta \varphi_3 - \Phi_1 \delta r_1 = 0. \quad (6)$$

До рівняння (6) додамо такі кінематичні залежності:

$$\delta r_1 = R \delta \varphi_2; \quad 2 \delta r_3 = r \delta \varphi_2; \quad \delta r_3 = r \delta \varphi_3. \quad (7)$$

На підставі (7)

$$a_1 = R \varepsilon_2; \quad 2 a_3 = r \varepsilon_2; \quad a_3 = r \varepsilon_3. \quad (8)$$

Ураховуючи (1) — (5), (7) та (8), на підставі (6) маємо таке рівняння:

$$m_1 g \delta r_1 \sin \alpha - m_1 g f \cos \alpha \delta r_1 - m_3 g \frac{r}{2R} \sin \beta \delta r_1 - m_2 \cdot 4r^2 \frac{a_1}{R} \cdot \frac{\delta r_1}{R} - m_3 \frac{r}{2R} a_1 \frac{r}{2R} \delta r_1 - \frac{1}{2} m_3 r^2 \frac{a_1}{2R} \cdot \frac{\delta r_1}{2R} = - m_1 a_1 \delta r_1 = 0. \quad (9)$$

Звідси прискорення тягарця 1

$$a_1 = g \frac{m_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - m_3 \frac{r}{2R} \sin \beta}{m_1 + 4 m_2 (r/R)^2 + \frac{3}{2} m_3 (r/2R)^2} = 9,8 \cdot \frac{3m (\sin 60^\circ - 0,2 \cos 60^\circ) - m \cdot 0,2 \sin 45^\circ}{3m + 4m(2/5)^2 + 1,5 m (1/5)^2} = 0,59 g = 5,75 \text{ м/с}^2.$$

Кутове прискорення блока 2

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R} = \frac{5,75}{2,5 \cdot 0,25} = 9,2 \text{ с}^{-2}.$$

Прискорення центра мас котка 3

$$a_3 = \frac{r}{2} \varepsilon_2 = \frac{0,25}{2} \cdot 9,2 = 1,15 \text{ м/с}^2,$$

а його кутове прискорення

$$\varepsilon_3 = a_3/r = \frac{1,15}{0,25} = 4,6 \text{ c}^{-2}.$$

Для визначення натягу в шнурі, що з'єднує тіла 1 і 2 (рис. 79, б), скористуємося загальним рівнянням динаміки

$$P_1 \delta r_1 \sin \alpha - F_T \delta r_1 - \Phi_1 \delta r_1 - N_1 \delta r_1 = 0,$$

звідки

$$\begin{aligned} N_1 &= P_1 \sin \alpha - P_1 f \cos \alpha - m_1 a_1 = m_1 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) - m_1 a_1 = \\ &= 3mg (\sin 60^\circ - 0,2 \cos 60^\circ) - 3m \cdot 0,59 g = 0,54 mg. \end{aligned}$$

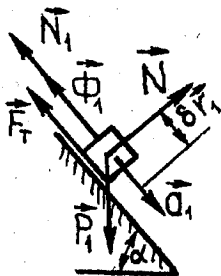


Рис. 79,б

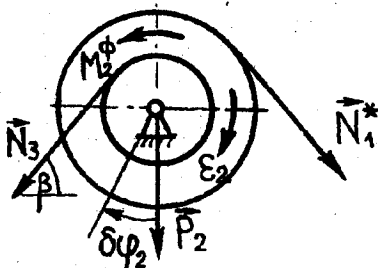


Рис. 79,в

Щоб визначити натяг у шнурі, який з'єднує тіла 2 і 3, скористуємося рис. 79,в, на підставі якого загальне рівняння динаміки має вигляд

$$N_1^* R \delta \varphi_2 - N_3 r \delta \varphi_2 - M_2^\Phi \delta \varphi_2 = 0,$$

звідки

$$\begin{aligned} N_3 &= \frac{R}{r} N_1^* - \frac{1}{r} M_2^\Phi = \frac{R}{r} N_1 - \frac{1}{r} m \cdot 4 r^2 \frac{a_1}{R} = \\ &= 2,5 \cdot 0,54 mg - 4m \frac{r}{R} \cdot 0,59 g = 1,35 mg - 0,944 mg = 0,41 mg. \end{aligned}$$

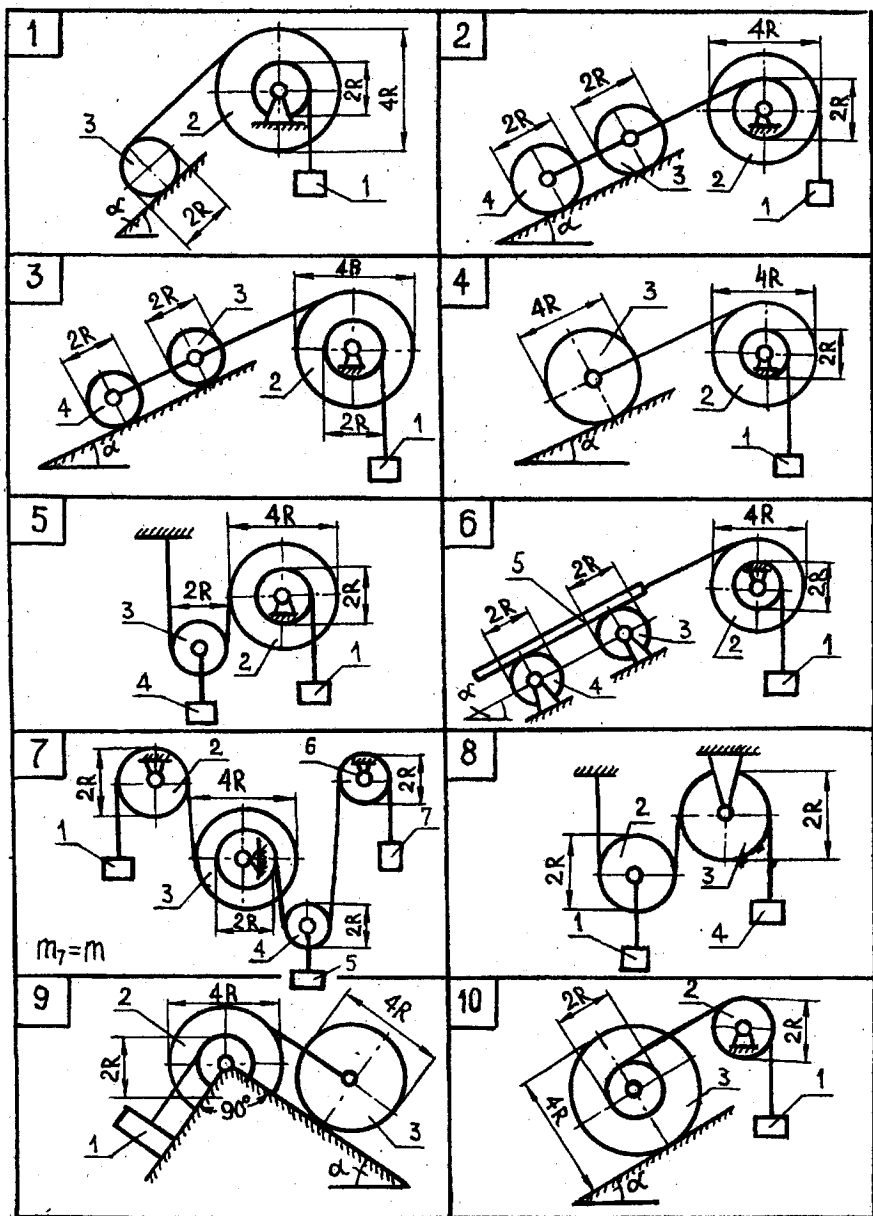


Рис. 80,а

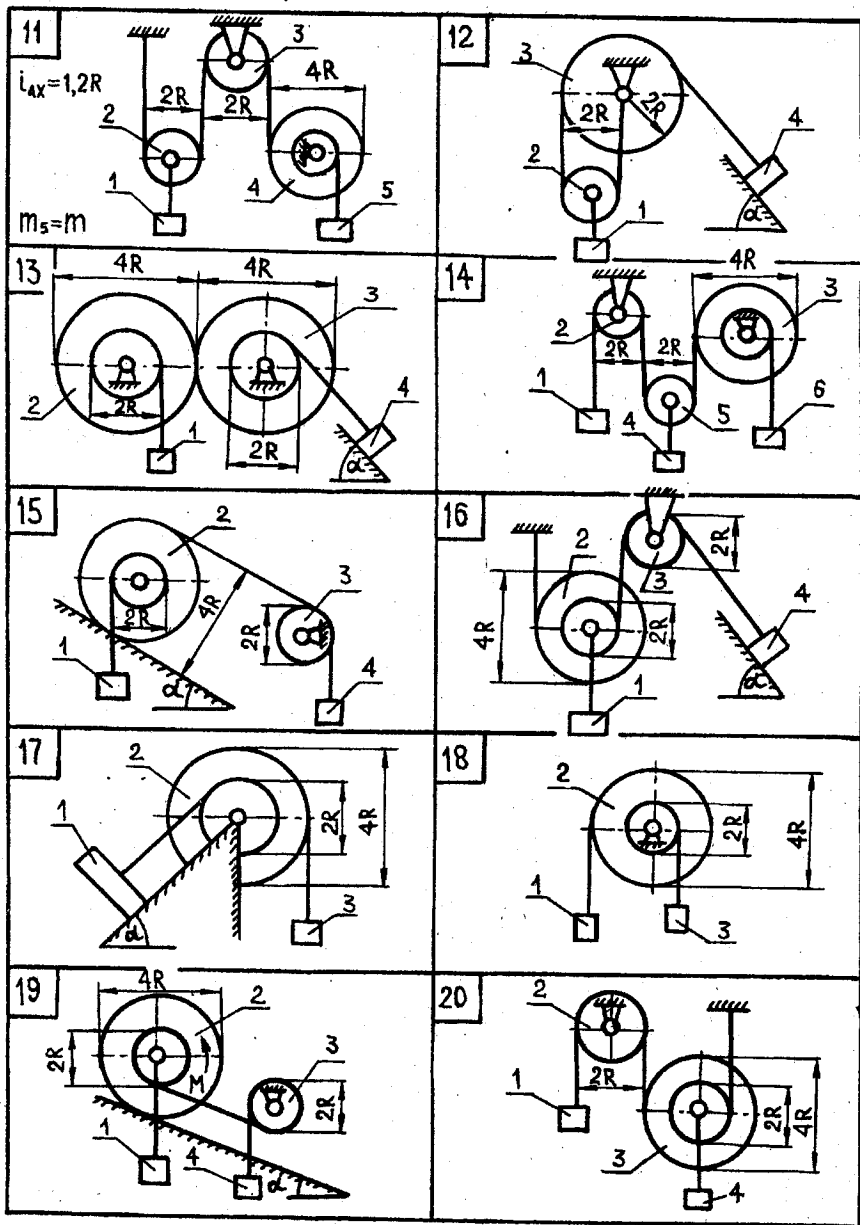


Рис. 80,6

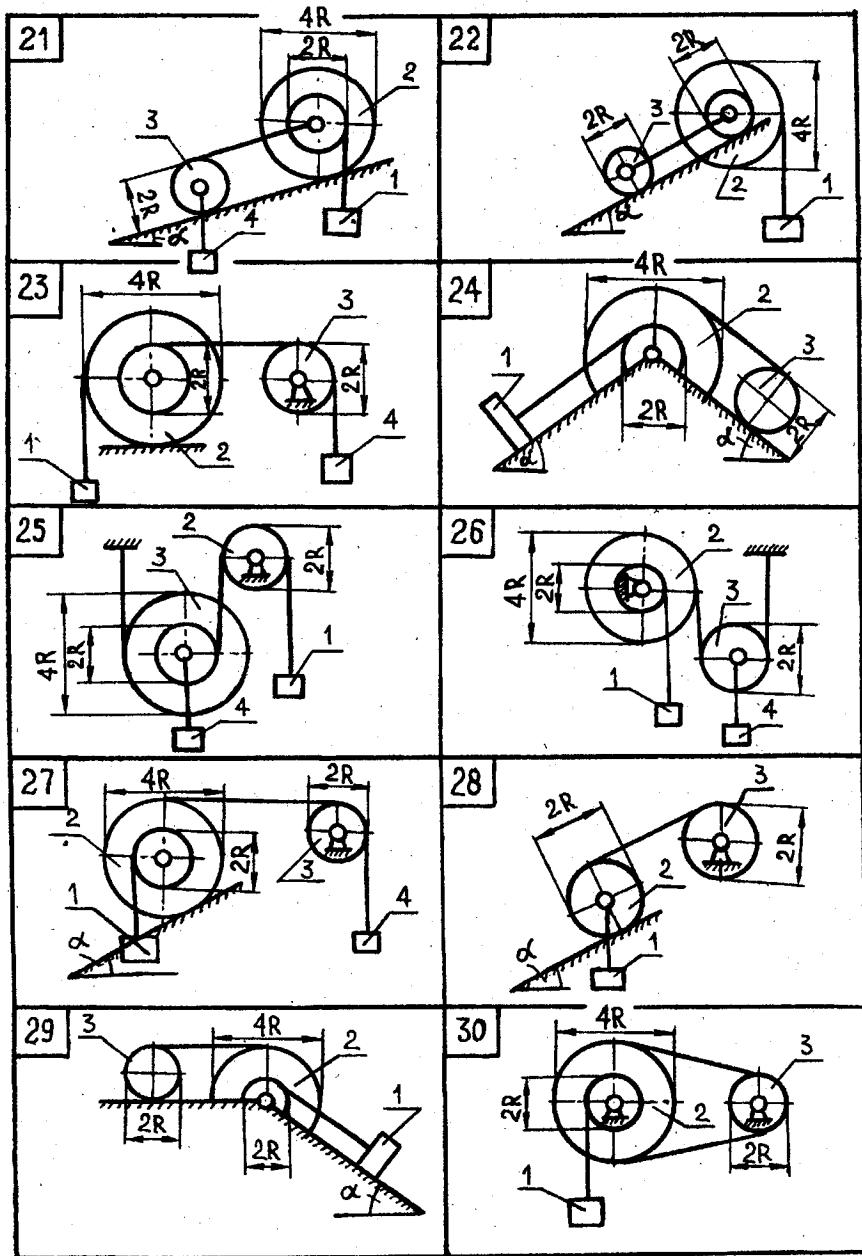


Рис. 80,б

Завдання Д-13

ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА ДРУГОГО РОДУ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ РУХУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Механічна система тіл 1—6 (рис. 81, б—д) рухається під дією сталих сил \vec{F} і пар сил із моментами M_i ($i = 1, 2, 3$) або тільки сил тяжіння.

Під час руху на механічну систему діють певні сили опору, які характеризуються силами тертя або сталими моментами $M_{II}^{оп}$. Система приводиться в рух із стану спокою.

Знайти рівняння руху системи в узагальнених координатах за заданих початкових умов. Необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 47.

Таблиця 47

Вари- ант	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	J_I	J_{II}	R_1	R_2	R_3	R_4	M_I	$M_{II}^{оп}$	F	R
	кг						кг·м ²		см				Н·м		Н	см
1	3	1	2	—	—	—	0,2	0,5	18	4	10	—	8	10°	—	—
2	4	1	—	—	—	—	0,4	0,6	30	10	—	—	6	20	—	—
3	6	3	6	—	—	—	0,6	0,8	24	12	24	—	20	30	—	—
4	4	2	—	—	—	—	0,8	—	16	8	—	—	16	—	—	—
5	3	1	3	—	—	—	—	—	24	8	24	—	—	$M_{II}^{оп} =$ $= M_4$	—	—
6	2,1	1,5	1,8	1,8	—	—	0,6	1,2	21	15	18	18	18	10	—	—
7	9	4	3	2	—	—	2,0	1,5	45	20	15	10	20	30	—	—
8	3	40	3	—	—	—	1,2	0,8	30	40	30	—	12	15	—	—
9	2	2	1,5	1,5	—	—	3,0	1,0	20	20	15	15	12	10	—	—
10	2,5	1	1,5	4	—	—	1,2	1,8	25	10	15	30	18	24	—	—
11	20	30	40	10	20	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	20
12	30	80	100	20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	200	10
13	100	30	80	20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	400	16
14	10	20	30	24	24	30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	30
15	50	30	30	40	50	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	24
16	20	15	30	30	40	—	—	—	—	—	—	—	—	M_5	—	18
17	24	18	16	20	28	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	24
18	10	20	30	40	—	—	—	—	—	—	—	—	—	M_4	—	30
19	40	50	30	24	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10
20	20	40	30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	M_2	—	21
21	40	10	10	10	10	—	—	—	10	10	10	10	—	—	—	—
22	100	10	20	20	—	—	—	—	—	—	10	10	—	—	160	—
23	120	40	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	240	30
24	50	30	20	20	20	20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
25	60	40	20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	20

Варіант	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	J_I	J_{II}	R_1	R_2	R_3	R_4	M_I	$M_{II}^{опор}$	F	R
	кг						кг·м ²		см				Н·м		Н	см
26	40	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	40
27	40	20	20	20	20	20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10
28	30	40	40	—	—	—	—	—	15	15	—	—	—	—	—	—
29	40	10	—	—	—	—	—	—	40	10	—	—	—	—	—	—
30	30	20	15	10	—	—	—	—	20	15	10	6	M_4	—	—	—
31	8	6	8	6	—	—	5	15	20	10	20	10	6	M_4	—	—
32	20	20	40	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	100	16
33	60	30	40	10	10	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	12
34	30	20	20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	40	—	—	30
35	80	40	15	30	10	10	—	—	—	10	20	—	—	—	120	—
36	50	30	40	12	12	12	—	—	—	—	12	—	—	—	—	—
37	40	30	20	16	16	16	—	—	—	—	18	—	—	—	—	—
38	30	40	20	40	—	—	—	—	20	10	20	M_1	—	—	—	—
39	200	80	40	50	—	—	—	—	—	24	—	—	—	—	180	—
40	100	60	30	30	—	—	—	—	—	20	20	—	—	—	200	—

Тіла, для яких в табл. 47 радіуси інерції не вказано, вважати однорідними суцільними дисками.

Водила (кривошпи) вважати однорідними тонкими стержнями. Прийняти, що у варіантах 1, 2, 4—7, 10, 30, 31, 38 механізми розміщено в горизонтальних площинах.

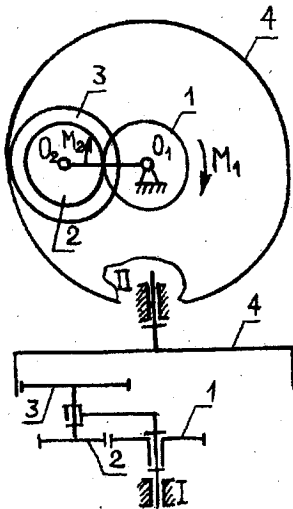


Рис. 81

Приклад 40. Редуктор з циліндричними шестернями, схему якого зображено на рис. 81, має два ступені вільності й рухається під дією сталих пар сил, а саме: однієї — з моментом $M_1 = 50 \text{ Н·м}$ (прикладений до шестірни 1) та іншої — з моментом $M_I = 100 \text{ Н·м}$ (прикладений до ведучого вала I). До веденого вала II прикладено сталий момент сил опору $M_{II}^{опор} = 80 \text{ Н·м}$. Маси шестерень: $m_1 = 4 \text{ кг}$, $m_2 = 2 \text{ кг}$, $m_3 = 4 \text{ кг}$. Радіуси шестерень: $R_1 = R_3 = 15 \text{ см}$, $R_2 = 10 \text{ см}$. Моменти інерції: $J_1 = 0,4 \text{ кг·м}^2$ — ведучого вала; $J_{II} = 0,2 \text{ кг·м}^2$ — веденого вала з урахуванням шестірни 4. За узагальнені вибрати координати $q_1 = \varphi_I$, $q_2 = \varphi_{II}$

— кути повороту ведучого вала і шестірні I .

У початковий момент часу $q_{10} = 0$, $\dot{q}_{10} = 0$, $q_{20} = 0$, $\dot{q}_{20} = 0$.

Знайти рівняння руху ведучого та веденого валів $\varphi_I(t)$ та $\varphi_{II}(t)$.

Розв'язання. Скористуємося рівняннями Лагранжа другого роду, а саме:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_I} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_I} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_I} + Q_I; \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} + Q_1, \quad (2)$$

де T — кінетична енергія системи; Π — її потенціальна енергія.

Кінетична енергія механічної системи

$$T = T_I + T_1 + T_2 + T_3 + T_{II}, \quad (3)$$

де кінетична енергія її тіл визначається так:

ведучого вала I

$$T_I = \frac{1}{2} J_I \dot{\varphi}_I^2; \quad (4)$$

шестірні I

$$T_I = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{4} m_1 R_1^2 \dot{\varphi}_1^2; \quad (5)$$

шестерень 2 і 3

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{O_2}^2 + \frac{1}{2} J_{O_2}^{(2)} \omega_2^2; \quad (6)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_{O_2}^2 + \frac{1}{2} J_{O_2}^{(3)} \omega_2^2. \quad (7)$$

Кінематичними характеристиками руху шестерень 2 та 3 є швидкості

$$v_{O_2} = (R_1 + R_2) \dot{\varphi}_I, \quad v_A = R_1 \dot{\varphi}_I.$$

Оскільки шестерні 2 і 3 здійснюють плоский рух,

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{O_2} + \vec{v}_{AO_2}.$$

Проектуючи вектор $\vec{v}_A = \vec{v}_{O_2} + \vec{v}_{AO_2}$ на напрямок вектора швидкості точки A , дістаємо $v_A = v_{O_2} + v_{AO_2}$, звідки кутова швидкість обертання шестерень 2 та 3 навколо власних осей

$$\omega_2 = \frac{R_1 \dot{\varphi}_I - (R_1 + R_2) \dot{\varphi}_I}{R_2}.$$

Підставляючи значення v_{O_2} й ω_2 в (6) і (7), знаходимо

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (R_1 + R_2)^2 \dot{\phi}_I^2 + \frac{1}{4} m_2 R_2^2 \frac{[R_1 \dot{\phi}_I - (R_1 + R_2) \dot{\phi}_I]^2}{R_2^2}; \quad (8)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 (R_1 + R_2)^2 \dot{\phi}_I^2 + \frac{1}{4} m_3 R_3^2 \frac{[R_1 \dot{\phi}_I - (R_1 + R_2) \dot{\phi}_I]^2}{R_2^2}. \quad (9)$$

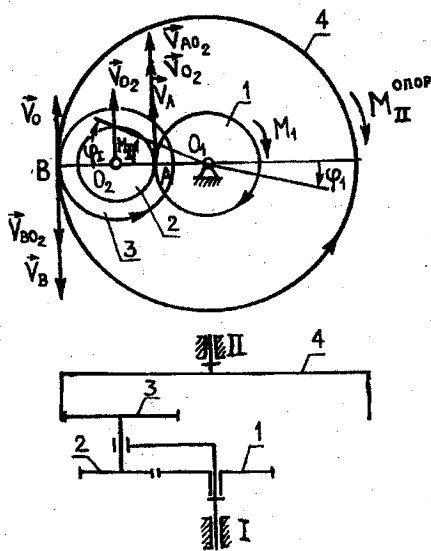


Рис. 81,а

Кінетична енергія веденого вала

$$T_{II} = \frac{1}{2} J_{II} \dot{\phi}_{II}^2. \quad (10)$$

На підставі рис. 81,а маємо

$$v_B = O_1 B \omega_{II} = (R_1 + R_2 + R_3) \omega_{II};$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{O_2} + \vec{v}_{BO_2},$$

або

$$\vec{v}_B = -v_{O_2} + \omega_2 R_3;$$

$$(R_1 + R_2 + R_3) \omega_{II} =$$

$$= -(R_1 + R_2) \omega_I + \frac{R_3}{R_2} \times$$

$$\times [R_1 \dot{\phi}_I - (R_1 + R_2) \dot{\phi}_I].$$

Отже, кутова швидкість веденого вала II

$$\omega_{II} = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \dot{\phi}_I + \frac{R_3}{R_2} \cdot \frac{R_1 \dot{\phi}_I - (R_1 + R_2) \dot{\phi}_I}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (11)$$

Підставляючи (11) у (10), дістаємо

$$T_{II} = \frac{1}{2} J_{II} \left[-\frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \dot{\phi}_I + \frac{R_3}{R_2} \cdot \frac{R_1 \dot{\phi}_I - (R_1 + R_2) \dot{\phi}_I}{R_1 + R_2 + R_3} \right]^2. \quad (12)$$

Ураховуючи (4), (5), (8), (9), (12), на підставі (3) маємо

$$T = \frac{1}{2} J_I \dot{\phi}_I^2 + \frac{1}{4} m_1 R_1^2 \dot{\phi}_I^2 + \frac{1}{2} (m_2 + m_3) (R_1 + R_2)^2 \dot{\phi}_I^2 +$$

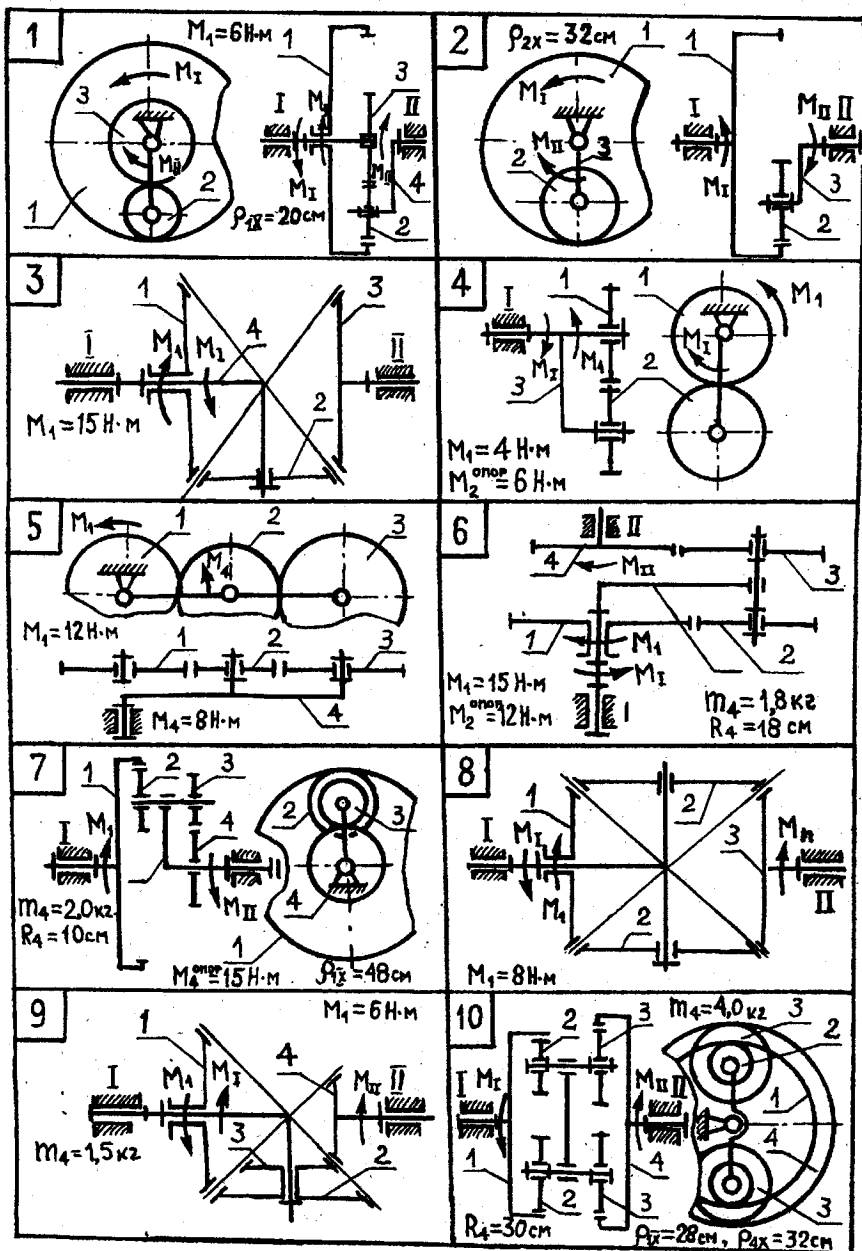


Рис. 81,6

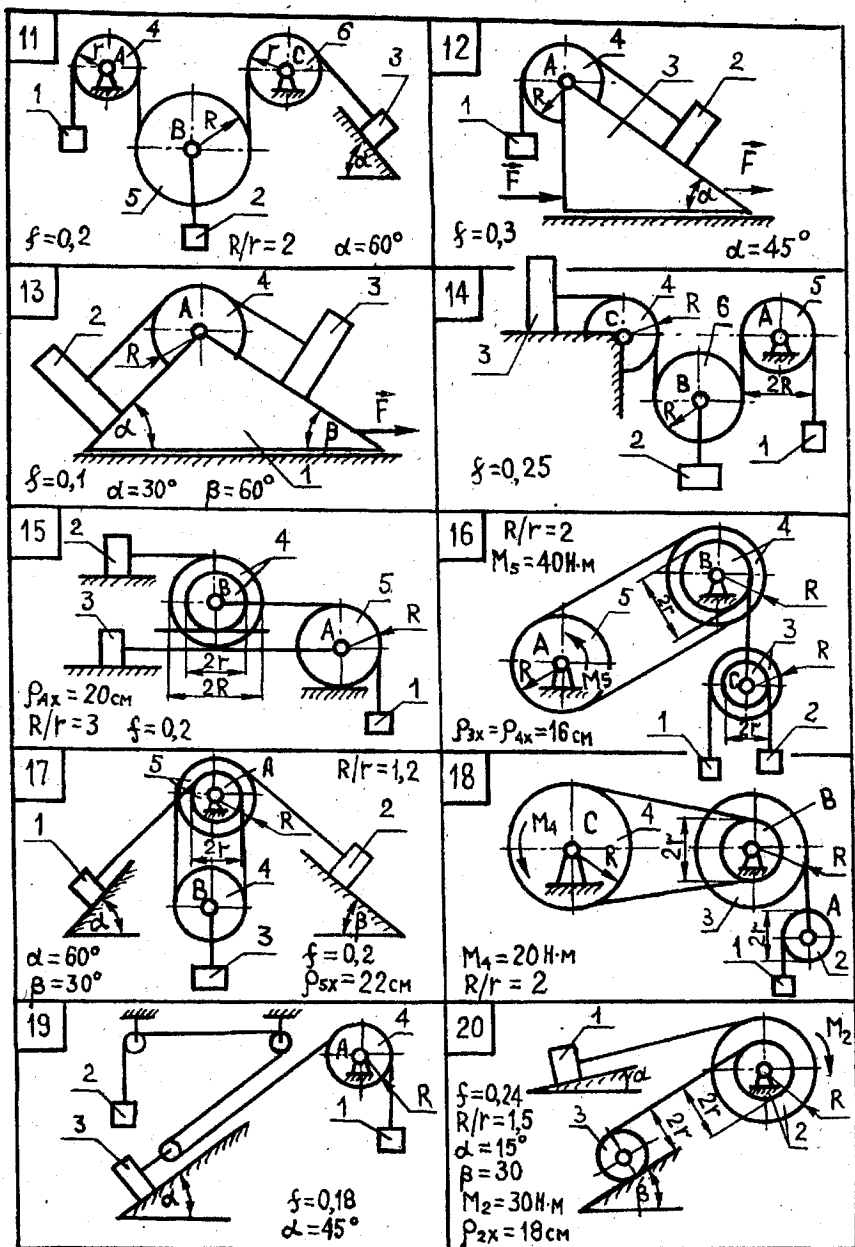


Рис. 81.6

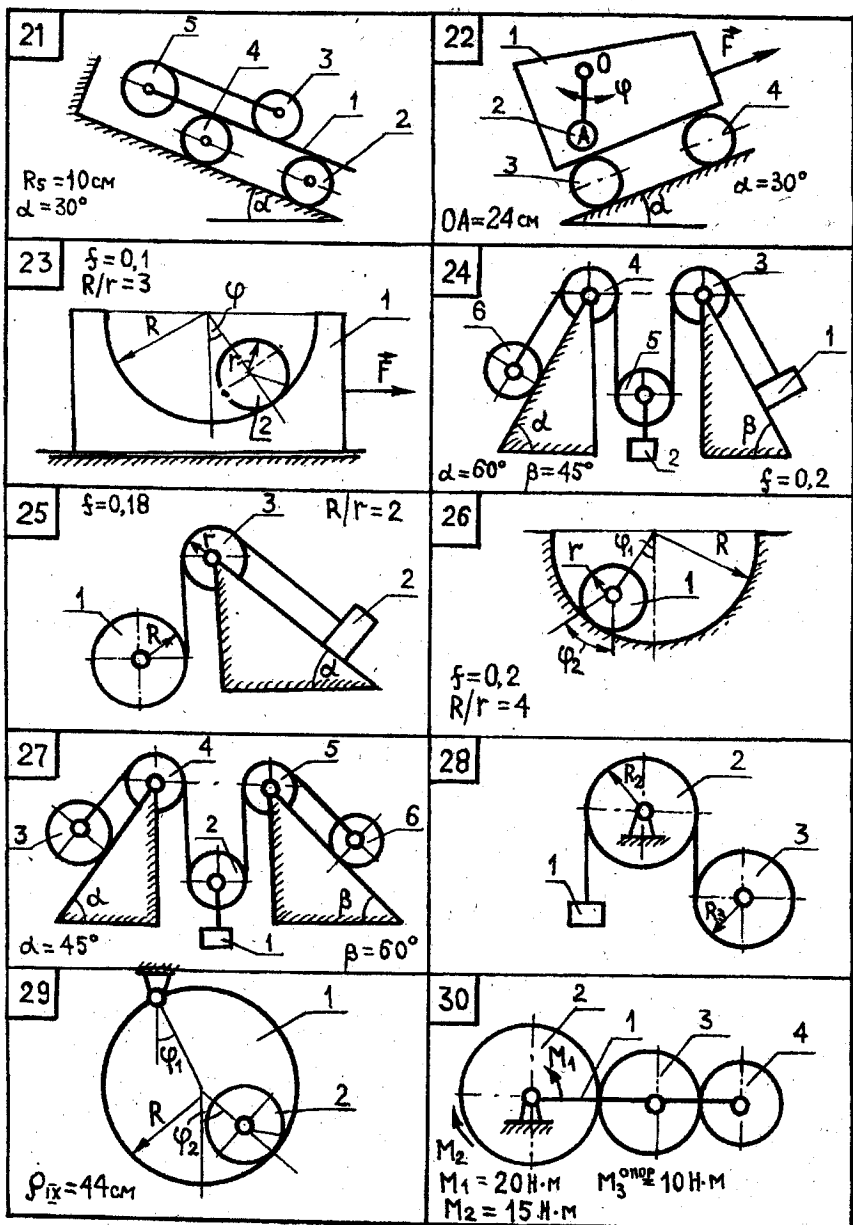


Рис. 81,2

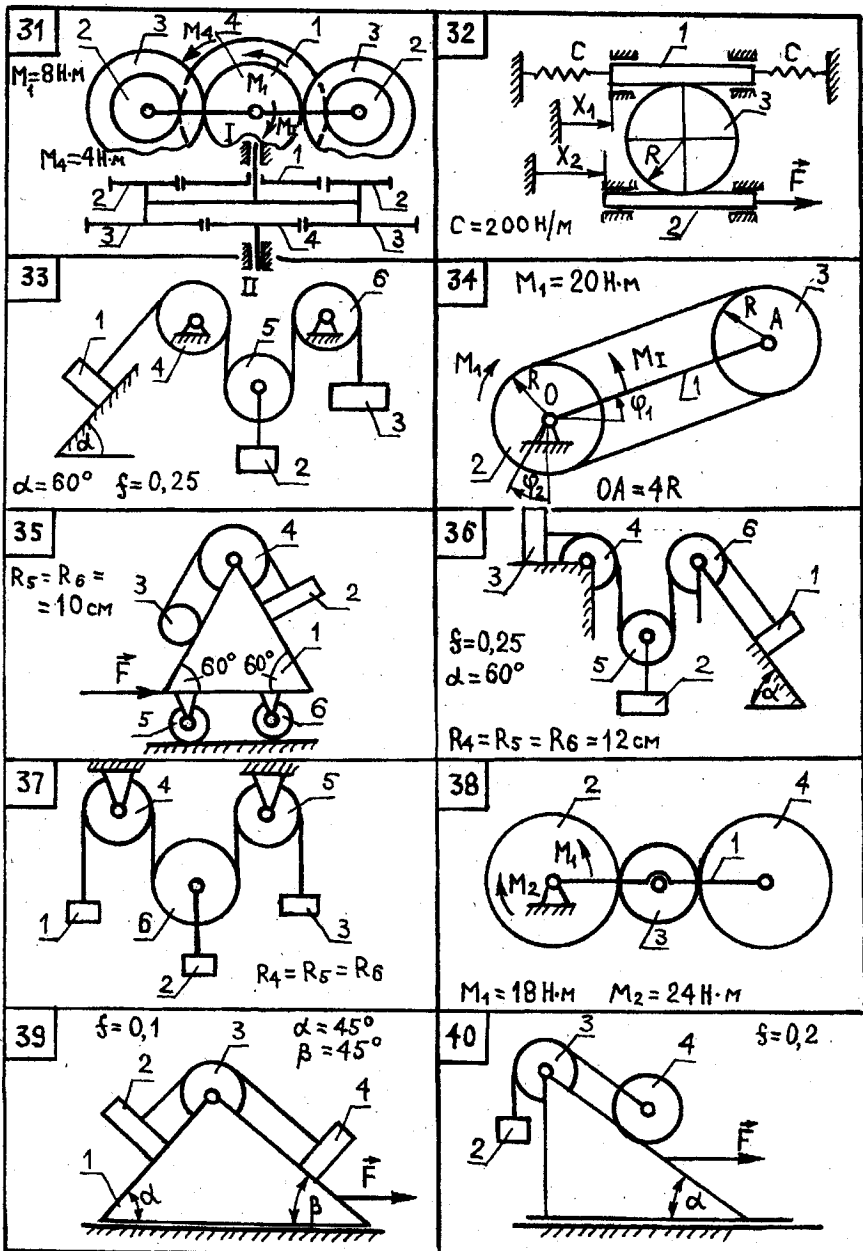


Рис. 81,д

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} (m_2 + m_3 \frac{R_3^2}{R_2^2}) [R_1 \dot{\varphi}_1 - (R_1 + R_2) \dot{\varphi}_I]^2 + \\
& + \frac{1}{2} J_{II} \frac{1}{(R_1 + R_2 + R_3)^2} [-(R_1 + R_2) \dot{\varphi}_I + \\
& + \frac{R_3}{R_2} (R_1 \dot{\varphi}_1 - (R_1 + R_2) \dot{\varphi}_I)]^2. \quad (13)
\end{aligned}$$

Силами, які визначаються своїми потенціалами, є сили тяжіння. Оскільки центр тяжіння всіх рухомих частин редуктора незмінно знаходиться на осі симетрії — прямій, що збігається з осями валів I і II, потенціальна енергія редуктора $\Pi = \text{const}$.

Узагальнену силу знаходимо за формулою

$$Q_j = \frac{\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i}{\delta q_j}.$$

Тому

$$Q_j \delta q_j = Q_I \delta \varphi_I + Q_1 \delta \varphi_1 = M_1 \delta \varphi_1 + M_I \delta \varphi_I - M_{II}^{\text{опор}} \delta \varphi_{II},$$

або

$$\begin{aligned}
Q_j \delta q_j &= Q_I \delta \varphi_I + Q_1 \delta \varphi_1 = M_1 \delta \varphi_1 + M_I \delta \varphi_I - \\
&- M_{II}^{\text{опор}} \left[-\frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \delta \varphi_I + \frac{R_3}{R_2} \cdot \frac{R_1 \delta \varphi_1 - (R_1 + R_2) \delta \varphi_I}{R_1 + R_2 + R_3} \right].
\end{aligned}$$

Остаточно

$$\begin{aligned}
Q_I &= M_I + M_{II}^{\text{опор}} \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) = \\
&= 100 + 80 \cdot \frac{0,25}{0,4} (1 + 1,5) = 225 \text{ Н} \cdot \text{м};
\end{aligned}$$

$$Q_1 = M_1 - M_{II}^{\text{опор}} \frac{R_3}{R_2} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = 50 - 80 \cdot \frac{0,15}{0,1} \cdot \frac{0,15}{0,4} = 5 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

На підставі (13) відповідні доданки в рівняннях (1) і (2) становлять

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_I} = \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} \left(m_2 + m_3 \frac{R_3^2}{R_2^2} \right) [R_1 \ddot{\varphi}_1 - (R_1 + R_2) \ddot{\varphi}_I] \times$$

$$\begin{aligned} & \times R_1 + \frac{J_{II}}{(R_1 + R_2 + R_3)^2} \left[-(R_1 + R_2) \ddot{\phi}_I + \frac{R_3}{R_2} (R_1 \ddot{\phi}_1 - (R_1 + R_2) \ddot{\phi}_I) \right] \frac{R_3}{R_2} R_1 = \\ & = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0,15^2 \ddot{\phi}_1 + \frac{1}{2} (2 + 4 \frac{0,15^2}{0,1^2}) (0,15 \ddot{\phi}_1 - 0,25 \ddot{\phi}_I) \cdot 0,15 + \\ & + \frac{0,2}{0,4^2} [-0,25 \ddot{\phi}_I + \frac{0,15}{0,1} (0,15 \ddot{\phi}_1 - 0,25 \ddot{\phi}_I)] \frac{0,15}{0,1} \cdot 0,15 = \\ & = 0,23203 \ddot{\phi}_1 - 0,38195 \ddot{\phi}_I; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_I} &= J_I \ddot{\phi}_I + (m_2 + m_3) (R_1 + R_2)^2 \ddot{\phi}_I - \\ & - \frac{1}{2} \left(m_2 + m_3 \frac{R_3^2}{R_2^2} \right) [R_1 \ddot{\phi}_1 - (R_1 + R_2) \ddot{\phi}_I] (R_1 + R_2) - \\ - J_{II} \frac{R_1 + R_2}{(R_1 + R_2 + R_3)^2} & \left[-(R_1 + R_2) \ddot{\phi}_I + \frac{R_3}{R_2} (R_1 \ddot{\phi}_1 - (R_1 + R_2) \ddot{\phi}_I) \right] \left(1 + \frac{R_3}{R_2} \right) = \\ & = 0,4 \ddot{\phi}_I + (2 + 4) (0,15 + 0,1)^2 \ddot{\phi}_I - \frac{1}{2} (2 + 4 \frac{0,15^2}{0,1^2}) (0,15 \ddot{\phi}_1 - \\ & - 0,25 \ddot{\phi}_I) \cdot 0,25 - 0,2 \frac{0,15 + 0,1}{(0,15 + 0,1 + 0,15)^2} [-0,25 \ddot{\phi}_I + \\ & + \frac{0,15}{0,1} (0,15 \ddot{\phi}_1 - 0,25 \ddot{\phi}_I)] (1 + \frac{0,15}{0,1}) = 1,60703 \ddot{\phi}_I - 0,38203 \ddot{\phi}_1. \end{aligned}$$

Отже, рівняння (1) і (2) набувають такого вигляду:

$$1,60703 \ddot{\phi}_I - 0,38203 \ddot{\phi}_1 = 225; \quad 0,16172 \ddot{\phi}_1 - 0,31172 \ddot{\phi}_I = 5, \quad (14)$$

звідки

$$\ddot{\phi}_1 = 555 \text{ c}^{-2}; \quad \ddot{\phi}_I = 272 \text{ c}^{-2}. \quad (15)$$

Виходячи з (15) і враховуючи початкові умови

$$t = 0, \quad \phi_{10} = \dot{\phi}_{10} = 0, \quad \phi_{I0} = \dot{\phi}_{I0} = 0,$$

встановлюємо, що закони обертання ведучого та веденого валів такі:

$$\phi_1 = 277,5t^2; \quad \phi_I = 136t^2;$$

$$\begin{aligned} \phi_{II} &= - \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \phi_I + \frac{R_3}{R_2} \cdot \frac{R_1 \phi_1 - (R_1 + R_2) \phi_I}{R_1 + R_2 + R_3} = \\ &= \frac{0,25}{0,4} \cdot 136t^2 + \frac{0,15}{0,1 \cdot 0,4} (0,15 \cdot 277,5t^2 - 0,25 \cdot 136t^2) = -56,4t^2. \end{aligned}$$

Приклад 41. До водила 5 механічної системи (рис. 82) прикладено момент опору $M_5 = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Геометричні параметри системи: $R_1 = R_3 = 50 \text{ см}$; $R_2 = 20 \text{ см}$; діючі моменти $M_1 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $M_3 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$; маса шестірні 1 $m_1 = 24 \text{ кг}$. Вважаючи шестерні однорідними дисками однакових товщини і густини, визначити кутові прискорення водила 5 і шестірні 3. Терттям у механізмі та масою водила знехтувати.

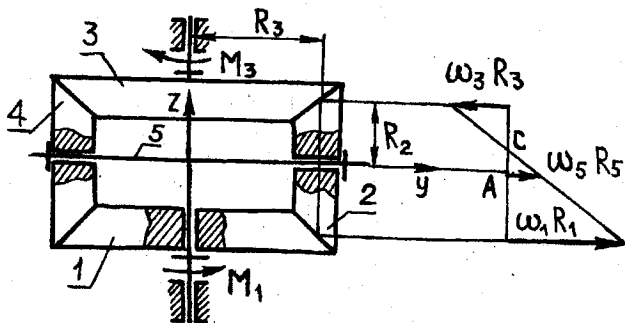


Рис. 82

Розв'язання. Оскільки за умовою $M_1 > M_3$, кутові швидкості шестерень також відповідають умові $\omega_1 > \omega_3$. Із рис. 82 випливає, що кутова швидкість водила ω_5 збігається за напрямком з ω_1 . Власна кутова швидкість сателіта 2 (кутова швидкість обертання навколо осі у)

$$\omega_2 = \frac{\omega_3 R_3}{R_2 - AC} = \frac{\omega_5 R_1}{AC} = (\omega_3 + \omega_5) \frac{R_1}{R_2}, \quad (1)$$

або

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 R_1 - \omega_5 R_1}{R_2} = (\omega_1 - \omega_5) \frac{R_1}{R_2},$$

звідки $\omega_1 - \omega_5 = \omega_3 + \omega_5$, так що $\omega_1 = \omega_3 + 2\omega_5$.

Система має два ступені вільності. За узагальнені координати приймаємо φ_3 (кут повороту шестірні 3) і φ_5 (кут повороту водила 5).

Рух системи описується рівняннями Лагранжа

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} &= Q_3; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_5} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_5} &= Q_5. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Кінетична енергія системи

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

де $T_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2$ — кінетична енергія шестірні 1; $T_2 = T_4 = \frac{1}{2} m_2 v_A^2 + \frac{1}{2} J_{2y} \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_{2z} \omega_3^2$ — кінетична енергія сателітів 2 та 4; $T_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2$ — кінетична енергія шестірні 3.

Ураховуючи, що $J_1 = J_3 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$;

$$\frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2; \quad \frac{J_{2y}}{J_1} = \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^4; \quad J_{2z} = \frac{1}{2} J_{2y},$$

маємо

$$m_2 = m_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 = 2J_1 \frac{R_2^2}{R_1^4}; \quad J_{2y} = J_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^4;$$

$$J_{2z} = \frac{1}{2} J_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^4.$$

Остаточна кінетична енергія системи

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_1 (\dot{\varphi}^3 + 2\dot{\varphi}_5)^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_3^2 + \\ &+ 2 \left[\frac{1}{2} \cdot 2J_1 \frac{R_2^2}{R_1^4} (\dot{\varphi}_5 R_5)^2 + \frac{1}{2} J_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^4 (\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_5)^2 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} J_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^4 \dot{\varphi}_3^2 \right] = \\ &= AJ_1 \dot{\varphi}_3^2 + BJ_1 \dot{\varphi}_5^2 + 2AJ_1 \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_5, \end{aligned}$$

де

$$A = 1 + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 = 1 + \left(\frac{20}{50} \right)^2 = 1,16;$$

$$B = 2 + 3 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^4 = 2 + 3 \left(\frac{20}{50} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{20}{50} \right)^4 = 2,49;$$

$$J_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 0,5^2 = 3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = \frac{\partial T}{\partial \varphi_5} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} = 2AJ_1 \ddot{\varphi}_3 + 2AJ_1 \dot{\varphi}_5 = 2AJ_1 (\ddot{\varphi}_3 + \ddot{\varphi}_5) =$$

$$= 2 \cdot 1,16 \cdot 3 (\ddot{\varphi}_3 + \ddot{\varphi}_5) = 6,96 (\ddot{\varphi}_3 + \ddot{\varphi}_5);$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_5} = 2B J_1 \ddot{\varphi}_5 + 2A I_1 \ddot{\varphi}_3 =$$

$$= 2 \cdot 2,49 \cdot 3 \ddot{\varphi}_5 + 2 \cdot 1,16 \cdot 3 \ddot{\varphi}_3 = 14,94 \ddot{\varphi}_5 + 6,96 \ddot{\varphi}_3.$$

Узагальнена сила

$$Q_j = \frac{\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i}{\delta q_j},$$

або

$$Q_3 \delta \varphi_3 + Q_5 \delta \varphi_5 = M_1 \delta \varphi_1 + M_3 \delta \varphi_3 - M_5 \delta \varphi_5 =$$

$$= M_1 (\delta \varphi_3 + 2 \delta \varphi_5) + M_3 \delta \varphi_3 - M_5 \delta \varphi_5,$$

звідки

$$Q_3 = M_1 + M_3; \quad Q_5 = 2M_1 - M_5,$$

тобто

$$Q_3 = 500 + 300 = 800 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad Q_5 = 1000 - 400 = 600 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Підставляючи відповідні величини в рівняння Лагранжа (2), дістаємо

$$\left. \begin{aligned} 6,96(\ddot{\varphi}_3 + \ddot{\varphi}_5) &= 800; \\ 14,96\ddot{\varphi}_5 + 6,96\ddot{\varphi}_3 &= 600, \end{aligned} \right\}$$

звідки кутові прискорення водила 5 і шестірні 3

$$\varepsilon_5 = \ddot{\varphi}_5 = -25 \text{ с}^{-2}; \quad \varepsilon_3 = \ddot{\varphi}_3 = 140 \text{ с}^{-2}.$$

Завдання Д-14

ВИКОРИСТАННЯ КАНОНІЧНИХ РІВНЯНЬ ГАМІЛЬТОНА ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ

Матеріальна точка M рухається вздовж канавчика OM , прорізаного в тілі A , яке здійснює обертальний рух навколо певної осі (варіанти 1, 3—6, 8—12, 21—30) або поступальний рух (варіанти 2, 7, 13—20).

Знайти рівняння відносного руху точки M ($x = x(t)$), прийнявши за початок відліку точку O . Схеми механізмів показано на рис. 83, $a-v$, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 48, де є такі позначення: m — маса точки M ; ω — стала кутова швидкість тіла A ; c — жорсткість пружини, до якої прикріплено масу рухомої точки M ;

f — коефіцієнт тертя ковзання; a — геометричний розмір; α — кут; l_0 — довжина недеформованої пружини.

Таблиця 48

Вари- ант	α	m	ω	x_0	\dot{x}_0	c	l_0	a	f	Рівняння руху тіла A
	град	кг	c^{-1}	м	м/с	Н/м	м			
1	30	0,04	3	0	0,4	—	—	0,36	0,3	—
2	—	0,03	—	0,2	1,0	20	0,15	—	0,2	—
3	60	0,02	4	0	0,5	—	—	0,40	0,3	—
4	30	0,02	5	0,25	0,6	30	0,20	0,30	0	—
5	60	0,01	2	0,1	0,8	—	—	—	0	—
6	—	0,06	3	0,15	1,0	20	0,10	0,50	0	—
7	45	0,05	—	0,4	0,4	—	—	—	0,2	$x_e = 0,1 \sin \pi t$
8	45	0,03	4	0,12	0,5	40	0,10	$0,4\sqrt{2}$	0	—
9	—	0,02	2	—	—	—	—	0,30	0	$OM = 0,15\pi \sin \pi t$
10	45	0,04	3	0,14	0,6	20	0,10	$0,3\sqrt{2}$	0	—
11	30	0,08	4	0,6	0,8	—	—	—	0	—
12	30	0,06	2	0,2	0,4	30	0,20	—	0,2	—
13	—	0,04	16	0	4,0	—	—	0,20	0,3	—
14	—	0,03	12	0,1	3,0	—	—	0,10	0	—
15	30	0,05	8	0,1	3,0	20	0,10	0,20	0,3	—
16	30	0,06	10	0,2	2,0	30	0,20	0,10	0,2	—
17	60	0,02	—	0	0,4	—	—	—	0,2	$x_1 = 0,1 \cos (2\pi t/3)$
18	45	0,03	—	0,8	0	—	—	—	0	$y_1 = 0,2 \cos (2\pi t)$
19	—	0,01	—	0	0,5	—	—	—	0,1	$y_1 = 5 - 10t^2$
20	—	0,04	—	0,6	0	—	—	—	0,2	$x_1 = 8 - 5t^3$
21	60	0,02	3	0	0,3	20	0,10	0,40	0,2	—
22	—	0,08	4	0,2	0,3	20	0,10	—	0,3	—
23	—	0,04	3	0	0,2	—	—	0,15	0,1	—
24	—	0,06	10	0,2	-0,8	30	0,15	—	0,2	—
25	—	0,08	8	0,1	0	20	0,10	—	0	—
26	30	0,05	3	0	0	—	—	—	0,3	—
27	—	0,04	12	0,5	0,5	—	—	0,20	0,2	—
28	60	0,05	20	0,4	0	—	—	0,30	0,2	—
29	45	0,03	6	0,6	0	—	—	—	0,3	—
30	—	0,02	3	0	0,4	—	—	—	0	—

Приклад 42. Для механізму, схему якого зображено на рис. 83, задано: $x_0 = 0,3$ м; $\dot{x}_0 = 2$ м/с; $\alpha = 30^\circ$; $\omega = 3$ с $^{-1}$; $m = 0,02$ кг; $c = 2$ Н/м; $l_0 = 0,2$ м; $a = 0,2$ м.

Розв'язання. Із рис. 83 випливає, що вісь Ox рухомої системи координат $Oxyz$ спрямовано вздовж каналчика, по якому відбувається відносний рух точки M .

За узагальнену вибираємо координату $q = x$ — біжучу абсцису точки M .

Кінетична енергія T точки M дорівнює сумі кінетичної енергії обертального руху її навколо осі z_1 зі сталою кутовою швидкістю ω та кінетичної енергії руху вздовж каналчика із швидкістю \dot{x} , тобто

$$T = \frac{1}{2}m(a + x \sin \alpha)^2 \omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2. \quad (1)$$

Потенціальна енергія Π точки M дорівнює сумі потенціальної енергії положення й енергії сили пружності, тобто

$$\Pi = mgx \cos \alpha + \frac{1}{2}c(x - l_0)^2. \quad (2)$$

Виходячи з (1) та (2) функція Лагранжа

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m(a + x \sin \alpha)^2 \omega^2 - mgx \cos \alpha - \frac{1}{2}c(x - l_0)^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2. \quad (3)$$

На підставі (3) узагальнений імпульс

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}. \quad (4)$$

З урахуванням (3) та (4) функція Гамільтона

$$\begin{aligned} H &= \sum_j p_j \dot{q}_j - L = m\dot{x} \dot{x} - \frac{1}{2}m\omega^2(a + x \sin \alpha)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx \cos \alpha + \frac{1}{2}c(x - l_0)^2 = \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2(a + x \sin \alpha)^2 + mgx \cos \alpha + \frac{1}{2}c(x - l_0)^2 = \\ &= \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2(a + x \sin \alpha)^2 + mgx \cos \alpha + \frac{1}{2}c(x - l_0)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Швидкість зміни узагальненого імпульсу

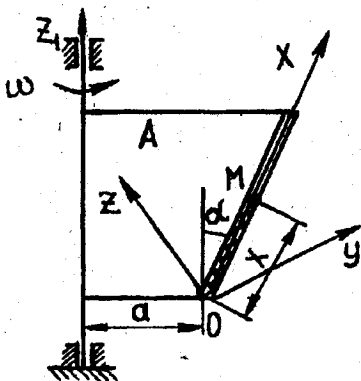


Рис. 83

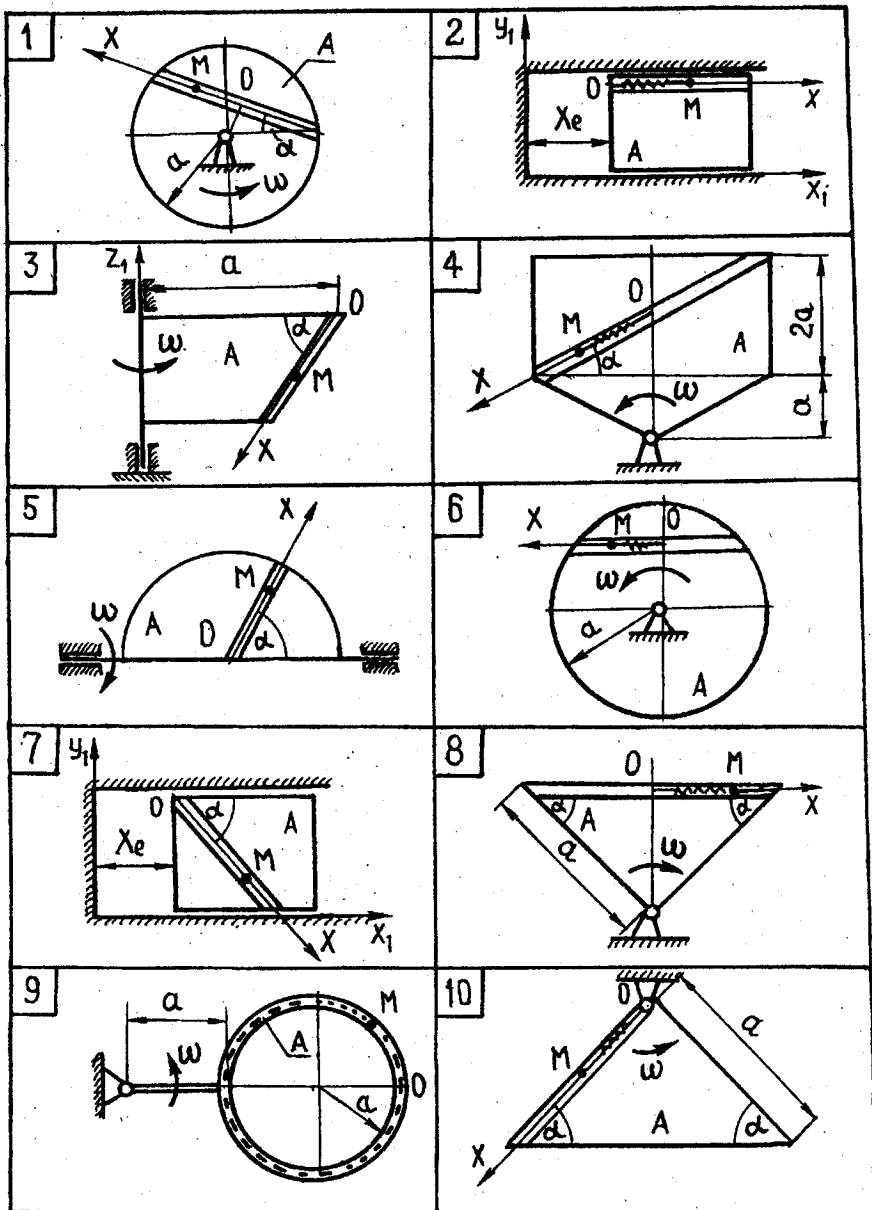


Рис. 83,а

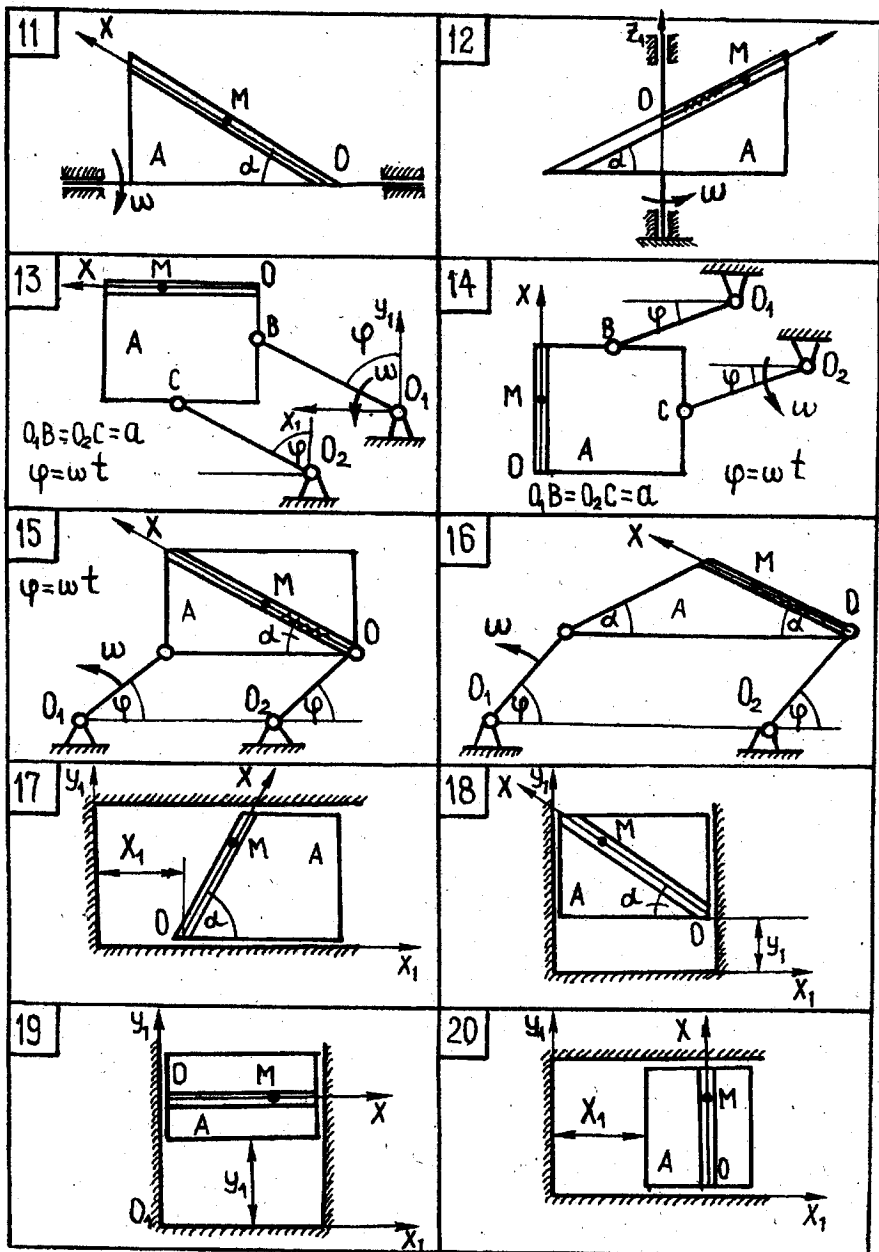


Рис. 83,6

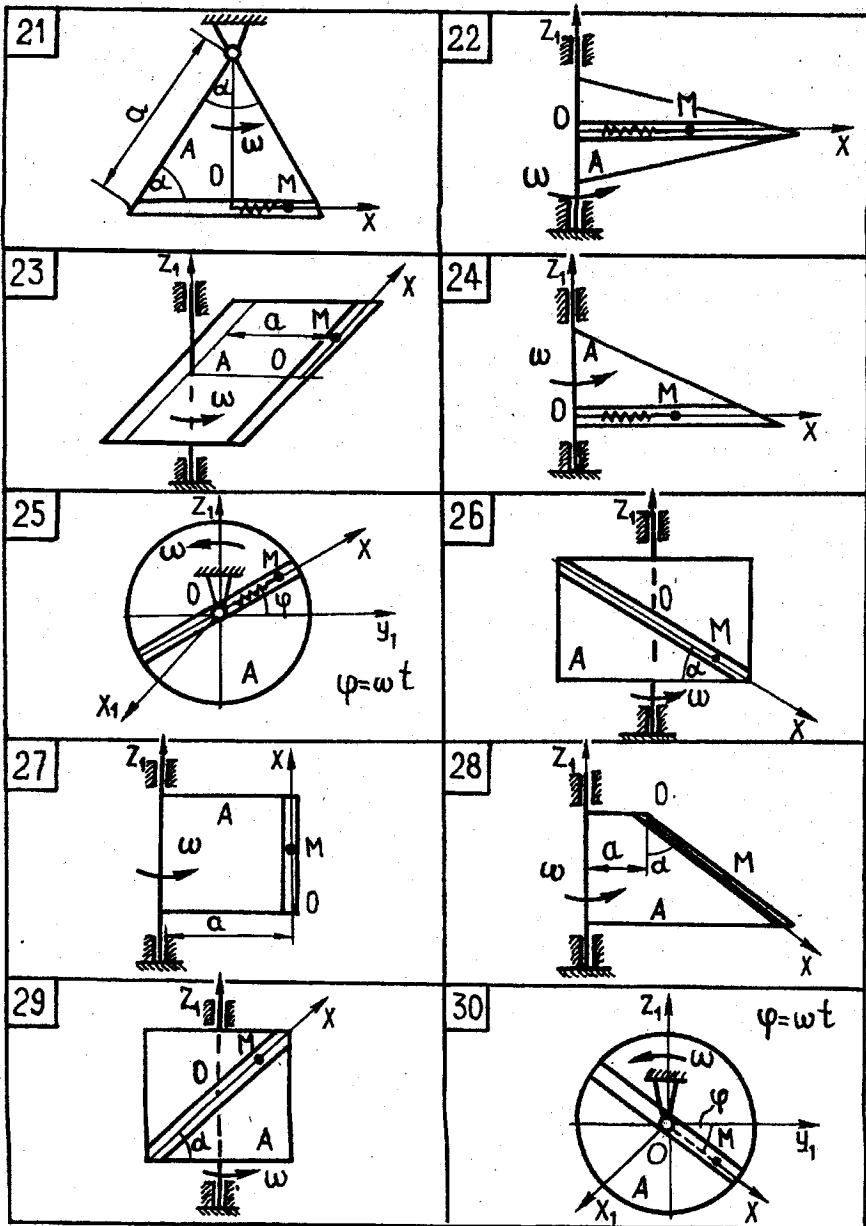


Рис. 83,б

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = m\omega_2 (a + x \sin \alpha) \sin \alpha - mg \cos \alpha - c(x - l_0). \quad (6)$$

Виходячи з рівності (4) маємо $\dot{x} = \frac{p}{m}$, або

$$\dot{x} = \frac{p}{m} = \omega^2 (a + x \sin \alpha) \sin \alpha - g \cos \alpha - \frac{c}{m}(x - l_0), \quad (7)$$

що можна переписати так:

$$\dot{x} + \left(\frac{c}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha \right) x = \omega^2 a \sin \alpha - g \cos \alpha + \frac{c}{m} l_0. \quad (8)$$

Розв'язок рівняння (8) подаємо у вигляді

$$x = x^* + x^{**}, \quad (9)$$

де x^* — розв'язок однорідного рівняння

$$\dot{x} + \left(\frac{c}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha \right) x = 0,$$

якому відповідає характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + \left(\frac{c}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha \right) = 0. \quad (10)$$

Коренями рівняння (10) є

$$\lambda_{1(2)} = \pm \sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{c}{m}} = \pm \sqrt{3^2 \sin^2 30^\circ - 2/0,02} = \pm 9,887i.$$

Тому

$$x^* = C_1 \cos 9,887t + C_2 \sin 9,887t. \quad (11)$$

Частинний розв'язок x^{**} неоднорідного рівняння, оскільки права сторона рівняння (8) стала, вибираємо у вигляді

$$x^{**} = C.$$

На підставі рівняння (8) маємо

$$\begin{aligned} C &= \frac{\omega^2 a \sin \alpha - g \cos \alpha + \frac{c}{m} l_0}{\frac{c}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{3^2 \cdot 0,2 \cdot \sin 30^\circ - 9,8 \cos 30^\circ + \frac{2}{0,02} \cdot 0,2}{\frac{2}{0,02} - 3^2 \sin^2 30^\circ} = 0,127 \text{ м}. \end{aligned} \quad (12)$$

Повний розв'язок рівняння (8) з урахуванням (11) і (12) набуває вигляду

$$x = C_1 \cos 9,887t + C_2 \sin 9,887t + 0,127. \quad (13)$$

Швидкість точки M у відносному русі

$$\dot{x} = -9,887C_1 \sin 9,887t + 9,887C_2 \cos 9,887t. \quad (14)$$

Сталі C_1 та C_2 визначаються після врахування початкової умови:

$$t = 0, \quad x_0 = 0,3 \text{ м}, \quad \dot{x}_0 = 2 \text{ м/с}.$$

Для часу $t=0$ із (13) і (14) знаходимо

$$x_0 = C_1 + 0,127; \quad \dot{x}_0 = 9,887C_2,$$

звідки

$$C_1 = 0,3 - 0,127 = 0,173 \text{ м}; \quad C_2 = 2/9,887 = 0,202 \text{ м}.$$

Остаточно рівняння (13) та (14) набувають такого вигляду:

$$x = 0,173 \cos 9,887t + 0,202 \sin 9,887t + 0,127;$$

$$\dot{x} = -1,71 \sin 9,887t + 1,997 \cos 9,887t.$$

3.4. КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Завдання Д-15

ДОСЛІДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ І ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ

Визначити частоту, період та амплітуду вільних коливань механічної системи, нехтуючи силами опору. Знайти рівняння руху вантажу l ($y = y(t)$), прийнявши за початок відліку положення його спокою (при статичних деформаціях пружин).

Визначити амплітуду вимушених коливань системи, графічно зобразити залежність амплітуди цих коливань від частоти та визначити її для резонансного випадку.

Схеми механічних систем показано на рис. 84, б—г, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 49.

Приклад 42. Для коливальної механічної системи (рис. 84) визначити період T і циклічну частоту k вільних коливань, а також знайти закон руху $y(t)$ рухомої маси m і зобразити графік зміни амплітуди вимушених коливань з умови, що на систему діє збурювальна сила $F = F_0 \sin pt$.

Дано: $m = 1$ кг; $m_1 = 2$ кг; $m_2 = 2,5$ кг; $m_3 = 3$ кг — маси однорідних тонких стержнів 1, 2, 3; $m_4 = 2$ кг — маса однорідного диска 4.

Таблица 49

Вариант	М										КТ		кН/м		P ₀	p	y ₀	y ₀	см/с
	a	b	c	d	r ₀	r ₁	m ₁	m ₂	m ₃	m ₄	m ₅	m ₆	m ₇	k ₁					
1	0,2	0,2	0,3	0,4	0,1	0,1	1	4	4	1	2	2	4	6	9	5	150	0,1	0,2
2	0,6	0,4	0,8	0,6	0,1	0,2	1	1	2	2	3	2	5	5	6	4	150	0,1	0,2
3	0,3	0,4	0,2	0,3	0,1	0,1	1	3	3	2	3	2	5	7	10	6	120	0,1	0,2
4	0,4	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	2	2	1	2	3	2	4	6	7	5	120	0,2	0,2
5	0,2	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1	2	3	3	2	3	8	3	7	8	6	150	0,1	0,2
6	0,4	0,2	0,3	0,3	0,2	0,2	1	4	4	2	3	2	2	8	9	7	150	0,1	0,2
7	0,4	0,2	0,2	0,3	0,1	0,2	3	1	1	2	3	2	3	9	12	8	120	0,1	0,2
8	0,2	0,3	0,4	0,5	0,1	0,2	1	3	3	2	3	2	5	9	10	8	120	0,2	0,2
9	0,4	0,4	0,2	0,2	0,1	0,1	2	2	2	2	3	2	2	8	9	6	150	0,1	0,2
10	0,2	0,4	0,2	0,3	0,1	0,2	3	3	2	2	2	2	4	10	12	9	150	0,1	0,2
11	0,2	0,3	0,4	0,5	0,1	0,1	2	1	1	1	2	2	5	5	6	6	120	0,1	0,2
12	0,2	0,3	0,2	0,4	0,1	0,1	4	1	4	4	2	2	3	9	6	9	120	0,1	0,2
13	0,4	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1	2	3	2	1	2	3	2	6	8	8	150	0,1	0,2
14	0,4	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1	1	2	2	1	2	2	4	6	7	7	150	0,1	0,2
15	0,3	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1	2	3	3	1	2	2	3	5	8	4	120	0,1	0,2
16	0,2	0,3	0,4	0,2	0,1	0,1	1	2	2	2	3	1	4	12	10	8	120	0,1	0,2
17	0,2	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1	1	1	1	1	2	1	3	9	12	6	150	0,1	0,2
18	0,2	0,3	0,4	0,5	0,1	0,1	3	2	2	1	2	2	2	4	7	5	150	0,1	0,22

Закінчення табл. 49

Вари- ант	М										ХГ										Р ₀	Р	γ ₀	γ ₀	γ ₀						
	а	б	с	д	е	г ₁	г ₂	г ₃	г ₄	г ₅	г ₆	г ₇	г ₈	г ₉	г ₁₀	г ₁₁	г ₁₂	г ₁₃	г ₁₄	г ₁₅						г ₁₆	г ₁₇	г ₁₈	г ₁₉	г ₂₀	к ₁
19	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1	1	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	5	12	9	8	120	0,1	0,2
20	0,3	0,3	0,3	0,4	0,1	0,1	2	2	2	3	2	3	2	3	1	2	1	2	2	1	2	2	4	4	4	2	8	6	120	0,1	0,2
21	0,2	0,3	0,4	0,2	0,1	0,1	1	2	3	2	3	2	3	2	3	1	2	2	2	1	2	2	4	2	2	4	7	150	0,1	0,2	
22	0,4	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1	2	3	3	3	3	3	3	3	1	2	2	2	1	2	2	5	5	6	6	10	4	150	0,1	0,2	
23	0,2	0,3	0,4	0,2	0,1	0,1	2	1	1	2	1	2	4	2	3	1	2	3	1	2	3	1	3	3	5	6	6	150	0,1	0,2	
24	0,2	0,3	0,2	0,6	0,1	0,1	2	4	4	3	2	4	3	3	2	2	2	2	2	2	2	4	4	6	9	5	120	0,1	0,2		
25	0,3	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1	3	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2	3	2	2	3	5	5	9	10	6	120	0,1	0,2		
26	0,2	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1	3	3	3	3	3	3	3	3	2	1	2	1	2	1	2	3	3	5	8	7	150	0,1	0,1		
27	0,2	0,4	0,4	0,2	0,1	0,1	2	2	2	3	2	2	3	3	2	2	2	3	2	2	3	4	4	10	12	6	150	0,1	0,2		
28	0,2	0,3	0,4	0,2	0,1	0,1	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	2	3	3	2	8	8	8	120	0,1	0,2		
29	0,2	0,3	0,4	0,3	0,1	0,1	1	2	2	3	2	2	3	3	2	1	2	2	2	1	2	4	4	6	7	9	120	0,1	0,2		
30	0,3	0,4	0,2	0,3	0,1	0,1	1	4	4	3	4	4	3	3	2	2	2	3	2	2	3	2	8	9	7	150	0,1	0,2			

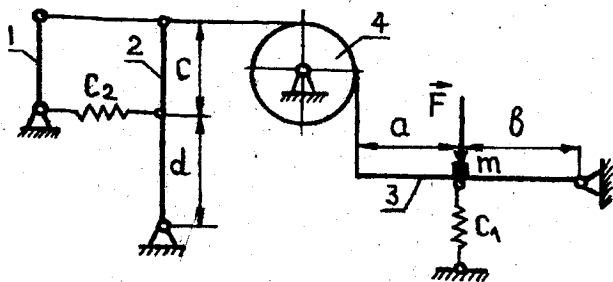


Рис. 84

Геометричні розміри: $a = 0,4$ м, $b = 1$ м, $c = 0,6$ м, $d = 0,8$ м. Жорсткість пружин: $c_1 = 5$ кН/м, $c_2 = 8$ кН/м. Параметри збудовальної сили: $F_0 = 5$ Н, $p = 150$ с⁻¹. Початкові умови: $y_0 = 0,005$ м, $\dot{y}_0 = 0,05$ м/с.

Розв'язання. Оскільки механічна система має один ступінь вільності, доцільно як узагальнену координату прийняти вертикальне переміщення у маси m .

Рівняння Лагранжа має вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\partial \Pi}{\partial y} + Q_y(t). \quad (1)$$

Кінетична енергія системи (рис. 84,а)

$$T = T_m + T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \quad (2)$$

де кінетична енергія маси m

$$T_m = \frac{1}{2} m \dot{y}^2; \quad (3)$$

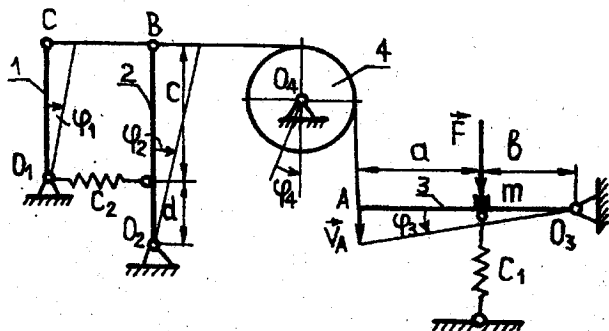


Рис. 84,а

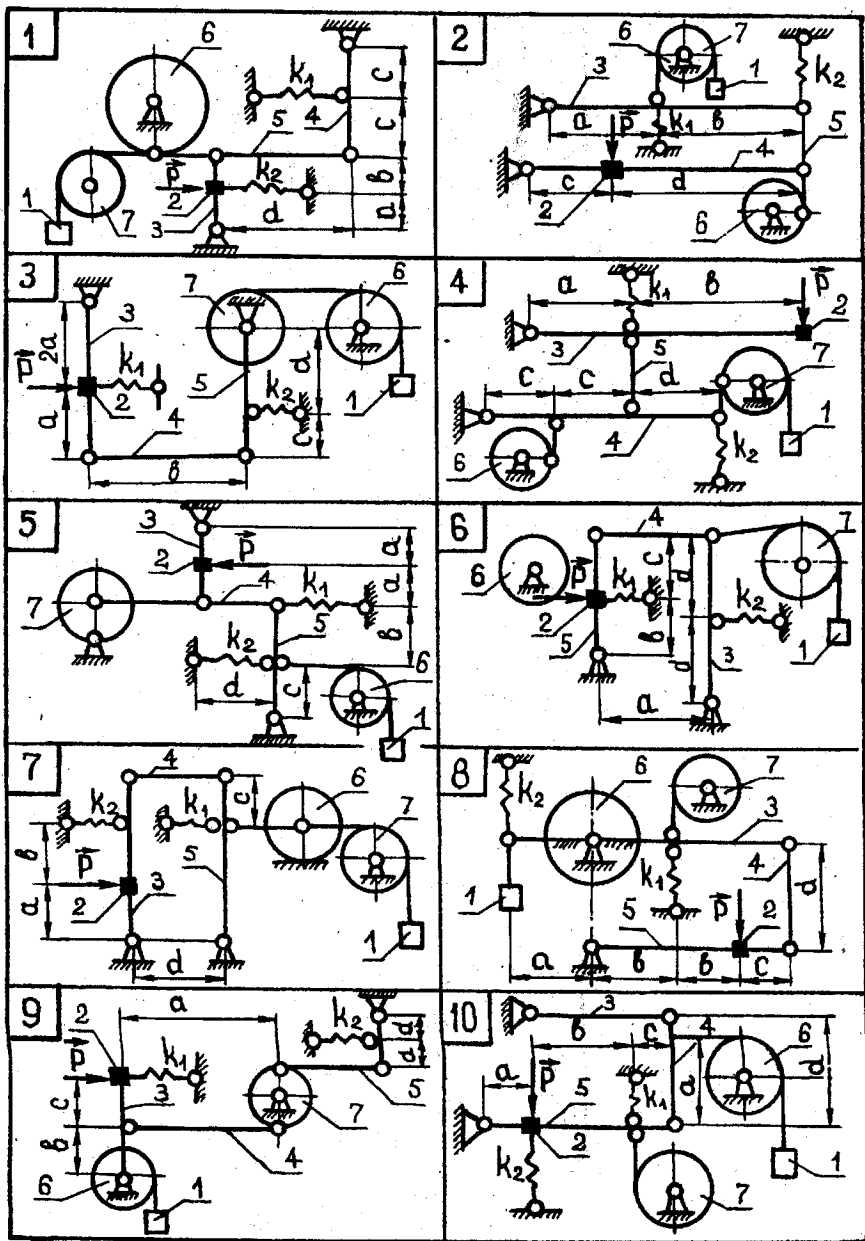


Рис. 84,6

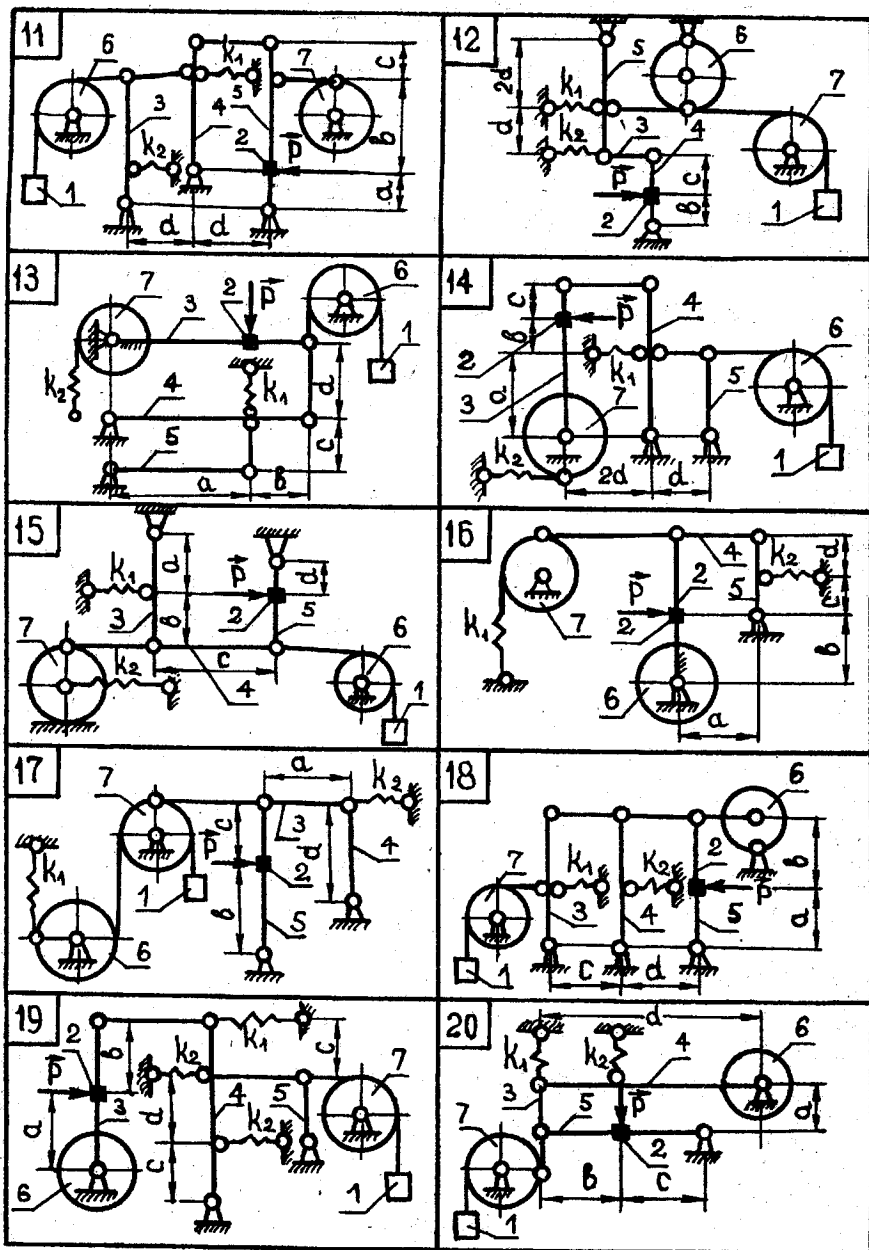


Рис. 84,6

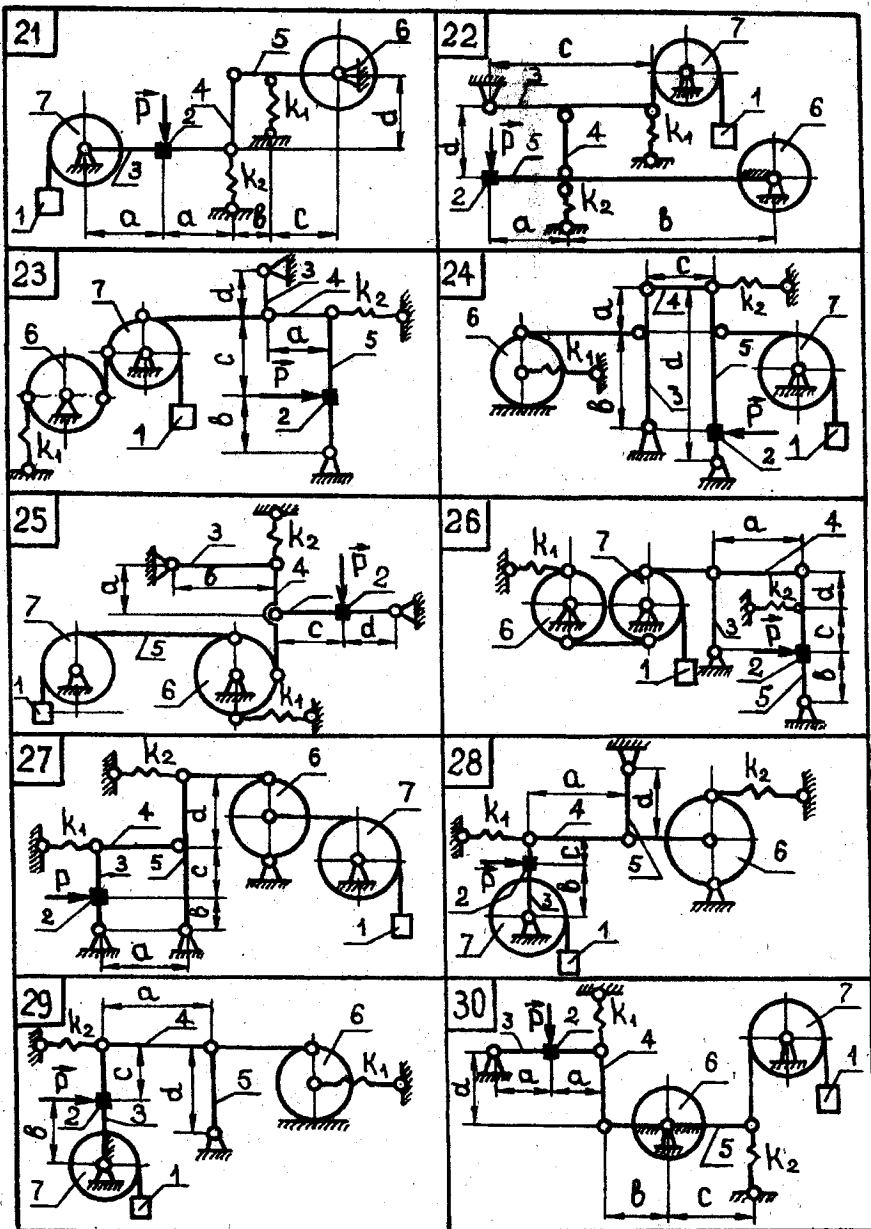


Рис. 84,2

кінетична енергія однорідного тонкого стержня 1

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{O_1} \omega_1^2; \quad (4)$$

кінетична енергія однорідного стержня 2

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{O_2} \omega_2^2; \quad (5)$$

кінетична енергія однорідного стержня 3

$$T_3 = \frac{1}{2} J_{O_3} \omega_3^2; \quad (6)$$

кінетична енергія однорідного диска 4

$$T_4 = \frac{1}{2} J_{O_4} \omega_4^2. \quad (7)$$

Моменти інерції відповідних тіл

$$J_{O_1} = \frac{1}{3} m_1 c^2; \quad J_{O_2} = \frac{1}{3} m_2 (c + d)^2; \quad J_{O_3} = \frac{1}{3} m_3 (a + b)^2; \quad J_{O_4} = \frac{1}{2} m_4 R_4^2. \quad (8)$$

Швидкості відповідних точок системи

$$v_A = v_B = v_C = \dot{y} \frac{a + b}{b}.$$

Кутові швидкості обертання відповідних тіл

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= v_C / c = \dot{y} \frac{a + b}{bc}; \\ \omega_2 &= v_B / (c + d) = \dot{y} \frac{a + b}{b(c + d)}; \\ \omega_3 &= \dot{y} / b; \\ \omega_4 &= v_A / R_4 = \dot{y} \frac{a + b}{b R_4}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

На підставі (3)—(9) кінетична енергія системи

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{6} m_3 \frac{(a + b)^2}{b^2} \dot{y}^2 + \\ &+ \frac{1}{4} m_4 \frac{(a + b)^2}{b^2} \dot{y}^2 + \frac{1}{6} m_2 \frac{(a + b)^2}{b^2} \dot{y}^2 + \frac{1}{6} m_1 \frac{(a + b)^2}{b^2} \dot{y}^2 = \\ &= \frac{1}{12} (6m + (2m_3 + 3m_4 + 2m_2 + 2m_1) \left(\frac{a + b}{b} \right)^2) \dot{y}^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Потенціальна енергія системи

$$\begin{aligned}
 \Pi = & \frac{1}{2}c_1 (y \pm \lambda_{1c})^2 - \frac{1}{2}c_1\lambda_{1c}^2 + \frac{1}{2}c_2 (d\varphi_2 \pm \lambda_{2c})^2 - \\
 & - \frac{1}{2}c_2\lambda_{2c}^2 - m_3g \frac{a+b}{2}\varphi_3 - mgy - m_2g \left(\frac{1}{2}(c+d) - \frac{1}{2}(c+d)\cos\varphi_2 \right) - \\
 & - m_1g \left(\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}c\cos\varphi_1 \right) = \frac{1}{2}c_1y^2 \pm c_1y\lambda_{1c} + \frac{1}{2}c_2d^2\varphi_2^2 \pm c_2d\varphi_2\lambda_{2c} - mgy - \\
 & - m_3g \frac{a+b}{2}\varphi_3 - \frac{1}{2}m_2g(c+d) \cdot 2\sin\frac{2\varphi_2}{2} - \frac{1}{2}m_1gc \cdot 2\sin\frac{2\varphi_1}{2} = \\
 & = \frac{1}{2}c_1y^2 \pm c_1y\lambda_{1c} + \frac{1}{2}c_2 \frac{d^2(a+b)^2}{b^2(c+d)^2}y^2 \pm c_2d \frac{a+b}{(c+d)b}y\lambda_{2c} - \\
 & - mgy - m_3g \frac{a+b}{2b}y - m_2g(c+d) \cdot \frac{1}{4} \frac{(a+b)^2}{b^2(c+d)^2}y^2 - \\
 & - \frac{1}{4}m_1gc \frac{(a+b)^2}{b^2c^2}y^2. \tag{11}
 \end{aligned}$$

У положенні, яке відповідає статичній деформації пружин,

$$\left. \begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} \right)_{y=0} &= 0; \\
 \pm c_1\lambda_{1c} \pm c_2 \frac{d}{b} \cdot \frac{a+b}{c+d} \lambda_{2c} - mg - m_3g \frac{a+b}{2b} &= 0.
 \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

Рівняння (11) з урахуванням (12) набуває вигляду

$$\Pi = \frac{1}{4} \left(2c_1 + 2c_2 \frac{d^2}{b^2} \left(\frac{a+b}{c+d} \right)^2 - m_2g \frac{(a+b)^2}{b^2(c+d)} - m_1g \frac{(a+b)^2}{b^2c} \right) y^2. \tag{13}$$

Частинні похідні, що входять до складу рівняння (1), мають такі значення:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{6} (6m + (2m_3 + 3m_4 + 2m_2 + 2m_1) \left(\frac{a+b}{b} \right)^2) \dot{y};$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(2c_1 + 2c_2 \frac{d^2}{b^2} \cdot \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} - m_2g \frac{(a+b)^2}{b^2(c+d)} - m_1g \frac{(a+b)^2}{b^2c} \right) y;$$

$$Q_j(t) = \frac{\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i}{\delta q_j} = \frac{F_0 \sin pt \cdot \delta y}{\delta y} = F_0 \sin pt.$$

Остаточное рівняння (1) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} (6m + (2m_3 + 3m_4 + 2m_2 + 2m_1) \left(\frac{a+b}{b}\right)^2) \ddot{y} + \\ + \frac{1}{2} (2c_1 + 2c_2 \frac{d^2(a+b)^2}{b^2(c+d)^2} - m_2 g \frac{(a+b)^2}{b^2(c+d)} - \\ - m_1 g \frac{(a+b)^2}{b^2 c}) y = F_0 \sin pt, \end{aligned}$$

або

$$A \ddot{y} + B y = F_0 \sin pt,$$

де

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{6} \left(6m + (2m_3 + 3m_4 + 2m_2 + 2m_1) \left(\frac{a+b}{b}\right)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{6} \left(6 \cdot 1 + (2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2,5 + 2 \cdot 2) \left(\frac{0,4+1}{1}\right)^2 \right) = 7,86 \text{ кг}; \\ B &= \frac{1}{2} (2c_1 + 2c_2 \frac{d^2}{b^2} \cdot \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} - m_2 g \left(\frac{a+b}{b}\right)^2 \frac{1}{c+d} - \\ &- m_1 g \cdot \left(\frac{a+b}{b}\right)^2 \frac{1}{c}) = \frac{1}{2} (2 \cdot 5000 + 2 \cdot 8000 \left(\frac{0,8}{1}\right)^2 \left(\frac{1,4}{1,4}\right)^2 - \\ &- 2,5 \cdot 9,8 \left(\frac{1,4}{1}\right)^2 \frac{1}{1,4} - 2 \cdot 9,8 \left(\frac{1,4}{1}\right)^2 \frac{1}{0,6}) = 10\,070,8 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-2}. \end{aligned}$$

В остаточному вигляді диференціальне рівняння, що описує вимушені коливання механічної системи, записується так:

$$\ddot{y} + k^2 y = h \sin pt, \quad (14)$$

де $k^2 = B/A = 10\,070,8/7,86 = 1281,2 \text{ с}^{-2}$ ($k = 35,8 \text{ с}^{-1}$ — циклічна частота вільних коливань системи), а

$$h = F_0/A = 5/7,86 = 0,636 \text{ м/с}^2.$$

Період вільних коливань

$$T = 2\pi/k = 2\pi/35,8 = 0,175 \text{ с}.$$

Амплітуда вільних коливань

$$a = \sqrt{y_0^2 + \frac{y_0^2}{k^2}} = \sqrt{0,005^2 + \frac{0,05^2}{1281,2}} = 5,19 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Початкова фаза коливань

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ky_0}{y_0} = \frac{35,8 \cdot 0,005}{0,05} = 3,58.$$

Оскільки

$$\sin \alpha = \frac{y_0}{a} = \frac{0,005}{5,19 \cdot 10^{-3}} > 0,$$

маємо $\alpha = 1,3$ рад.

Остаточо рівняння вільних коливань системи набуває вигляду

$$y_1 = 5,19 \cdot 10^{-3} \sin(35,8t + 1,3).$$

Повний розв'язок рівняння (14) з урахуванням збурювальної сили $F = F_0 \sin pt$ записується у вигляді $y = y_1 + y_2$, де

$$y_2 = \frac{h}{k} \int_0^t \sin p\tau \sin k(t - \tau) d\tau = \frac{hp}{k(k^2 - p^2)} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (15)$$

Тут

$$\frac{h}{k^2 - p^2} = B^* = \frac{0,636}{38,5^2 - 150^2} = -0,03 \cdot 10^{-3}; \quad (16)$$

$$-\frac{hp}{k(k^2 - p^2)} = -\frac{0,636 \cdot 150}{35,8(35,8^2 - 150^2)} = 0,13 \cdot 10^{-3}. \quad (17)$$

Повний розв'язок, який описує коливальний процес механічної системи, має вигляд

$$y = 5,19 \cdot 10^{-3} \sin(35,8t + 1,3) + 0,13 \cdot 10^{-3} \sin 35,8t - 0,03 \cdot 10^{-3} \sin 150t.$$

Рівність (16) можна записати так:

$$B^* = \frac{h}{k^2(1 - (p/k)^2)} = \frac{0,636}{35,8^2(1 - (p/k)^2)} = \frac{4,96 \cdot 10^{-4}}{1 - (p/k)^2} \text{ м.}$$

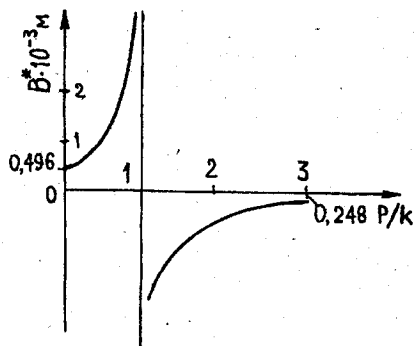


Рис. 85

Графічно залежність $B^* = f(p/k)$ зображено на рис. 85, звідки випливає, що в резонансному випадку, коли $p = k$, амплітуда вимушених коливань системи прямує до нескінченності.

Завдання Д-16

КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ ПРИ НАЯВНОСТІ СИЛИ ОПОРУ, ПРОПОРЦІЙНОЇ ПЕРШОМУ СТЕПЕНЮ ШВИДКОСТІ

Визначити частоту і період коливань механічної системи з одним ступенем вільності, яка здійснює коливання у вертикальній площині.

Знайти рівняння руху тіла 1 ($\varphi = \varphi(t)$), якщо сила опору руху $\vec{F} = -\mu\vec{v}$.

На коливальну систему, крім сил тяжіння тіл 1, 2 та сили тяжіння, обумовленої точковою масою, діє зовнішня сила $F = F_0 \sin pt$ (варіанти 1—12, 21, 23) або момент $M = M_0 \sin pt$ (варіанти 13—20, 22, 26—30).

Схеми механічних систем показано на рис. 86, б—г, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 50.

Таблиця 50

Варіант	m	m_1	m_2	a	b	d	c	F_0	M_0	p	μ	φ_0	Φ_0
	кг			м			кН/м	Н	Н·м	с ⁻¹	Н·с/м	рад	с ⁻¹
1	2	4	—	0,4	0,2	0,6	1,8	4	—	6	32	0	4
2	4	3	—	0,7	0,6	0,5	2,0	6	—	8	24	0,1	0
3	5	6	—	0,6	0,4	0,5	1,0	8	—	5	18	0,2	3
4	1	3	—	0,2	0,5	0,5	1,5	5	—	4	40	0	5
5	6	3	—	0,3	0,3	0,3	1,2	9	—	10	28	0,1	0
6	3	5	—	0,5	0,5	0,2	0,9	7	—	12	36	0,08	6
7	5	6	—	0,5	0,4	0,3	2,0	12	—	6	20	0,09	0
8	4	3	—	0,4	0,4	0,4	1,6	4	—	9	16	0	4
9	2	6	—	0,6	0,2	0,5	2,4	8	—	5	18	0,12	8
10	3	4	—	0,2	0,6	0,4	3,0	6	—	4	30	0,20	0
11	3	6	—	0,6	0,6	0,6	1,8	9	—	8	40	0	5

Вари- ант	m	m_1	m_2	a	b	d	c	F_0	M_0	p	μ	Φ_0	ϕ_0
	кг			м			кН/м	Н	Н·м	с ⁻¹	Н·с/м	рад	с ⁻¹
12	1	3	—	0,5	0,4	0,3	1,2	10	—	6	35	0,14	6
13	2	3	4	0,4	0,5	0,6	2,0	—	8	12	24	0,15	0
14	3	2	4	0,5	0,4	0,3	2,8	—	6	9	28	0,16	4
15	4	3	2	0,6	0,6	0,3	1,0	—	4	5	16	0,10	8
16	1	2	4	0,2	0,4	0,3	1,5	—	5	4	26	0,12	0
17	2	6	3	0,3	0,3	0,3	1,6	—	10	8	32	0	10
18	1	3	2	0,3	0,6	0,3	1,4	—	12	6	18	0	12
19	3	9	6	0,5	0,5	0,5	2,0	—	14	9	30	0	6
20	4	6	—	0,6	0,6	0,6	3,2	—	6	10	34	0,18	0
21	2	3	—	0,2	0,8	0,4	2,0	—	—	8	20	0,12	0
22	3	9	—	0,6	0,8	0,3	3,5	—	8	5	36	0,14	0
23	4	6	—	0,5	0,2	0,4	3,0	—	—	4	40	0	9
24	3	6	—	0,4	0,5	—	1,6	—	—	6	32	0	8
25	1	3	—	0,6	0,4	0,2	1,8	—	—	10	24	0,20	6
26	2	6	—	0,4	0,4	0,4	2,0	—	10	5	18	0,08	0
27	1	2	—	0,3	0,3	0,3	1,4	—	12	4	20	0,12	4
28	1	4	2	0,4	0,6	—	2,4	—	18	8	36	0,14	7
29	2	3	6	0,5	0,4	0,6	2,0	—	15	6	28	0	10
30	2	3	2	0,6	0,6	0,9	1,8	—	8	12	30	0,16	0

Приклад 43. Для механічної системи, схему якої зображено на рис. 86, задано: $m = 2$ кг; $m_1 = 3$ кг; $m_2 = 6$ кг; $c = 2$ кН/м; $a = 20$ см; $b = 30$ см; $d = 50$ см; $\mu = 50$ Н·с/м; $F = F_0 \sin pt$; $F_0 = 7$ Н; $p = 8$ с⁻¹; $\phi_0 = 0,2$ рад; $\phi_0 = 0$.

Систему розміщено у вертикальній площині, причому в початковий момент часу стержень 2 займає горизонтальне положення.

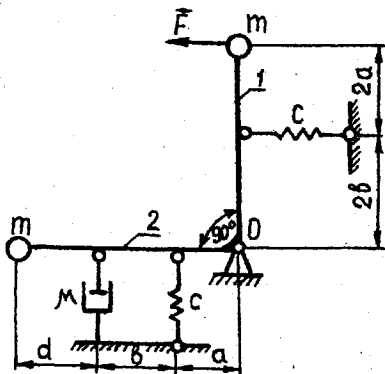


Рис. 86

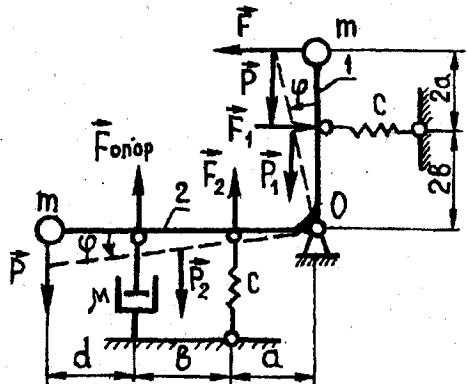


Рис. 86,а

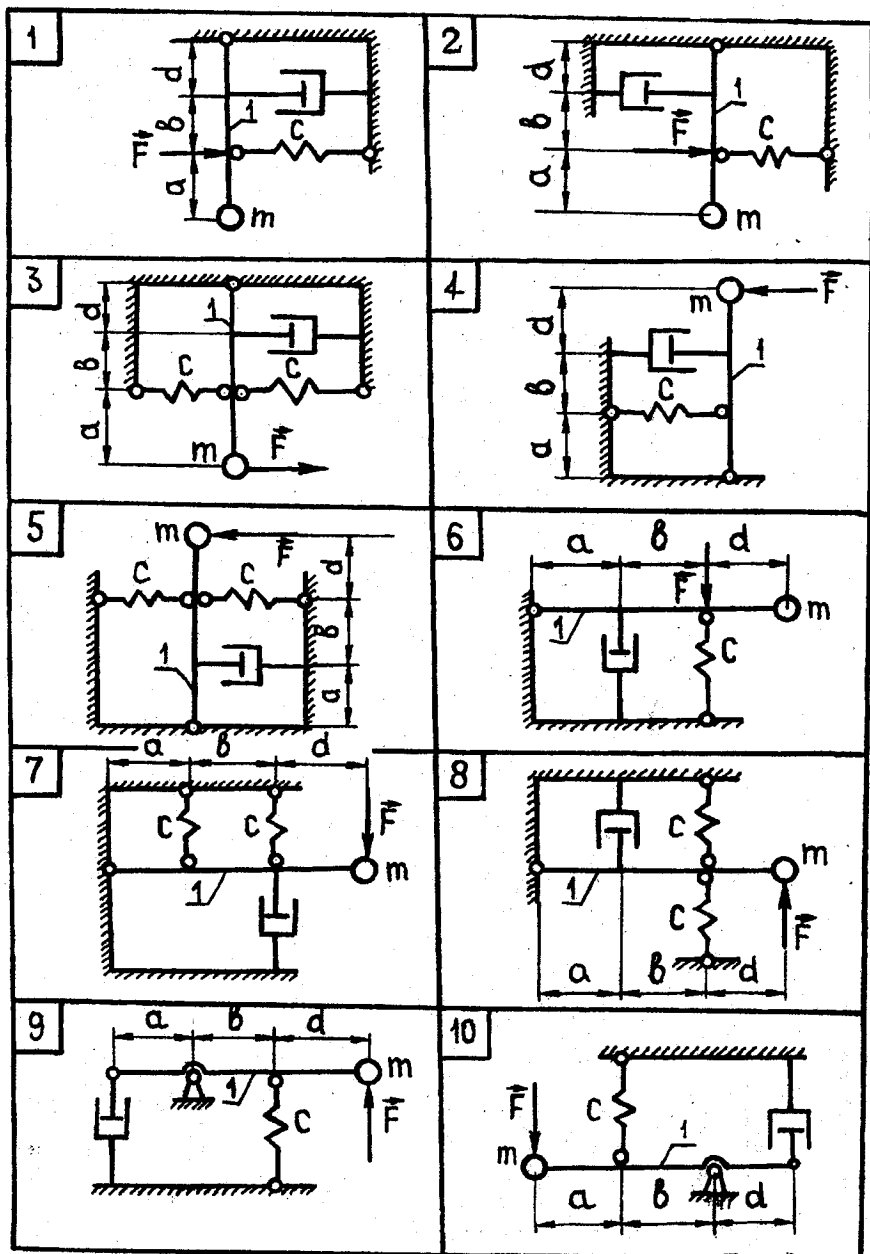


Рис. 86,6

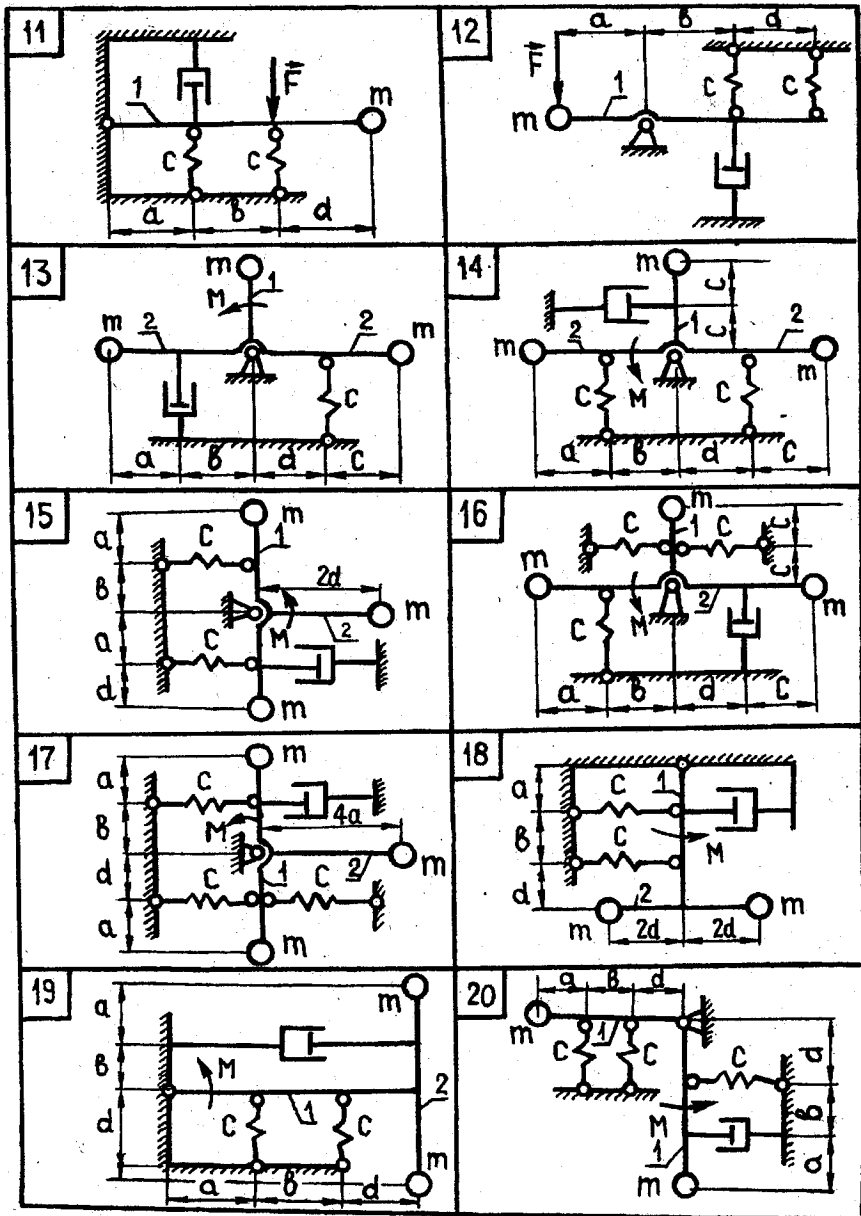


Рис. 86,е

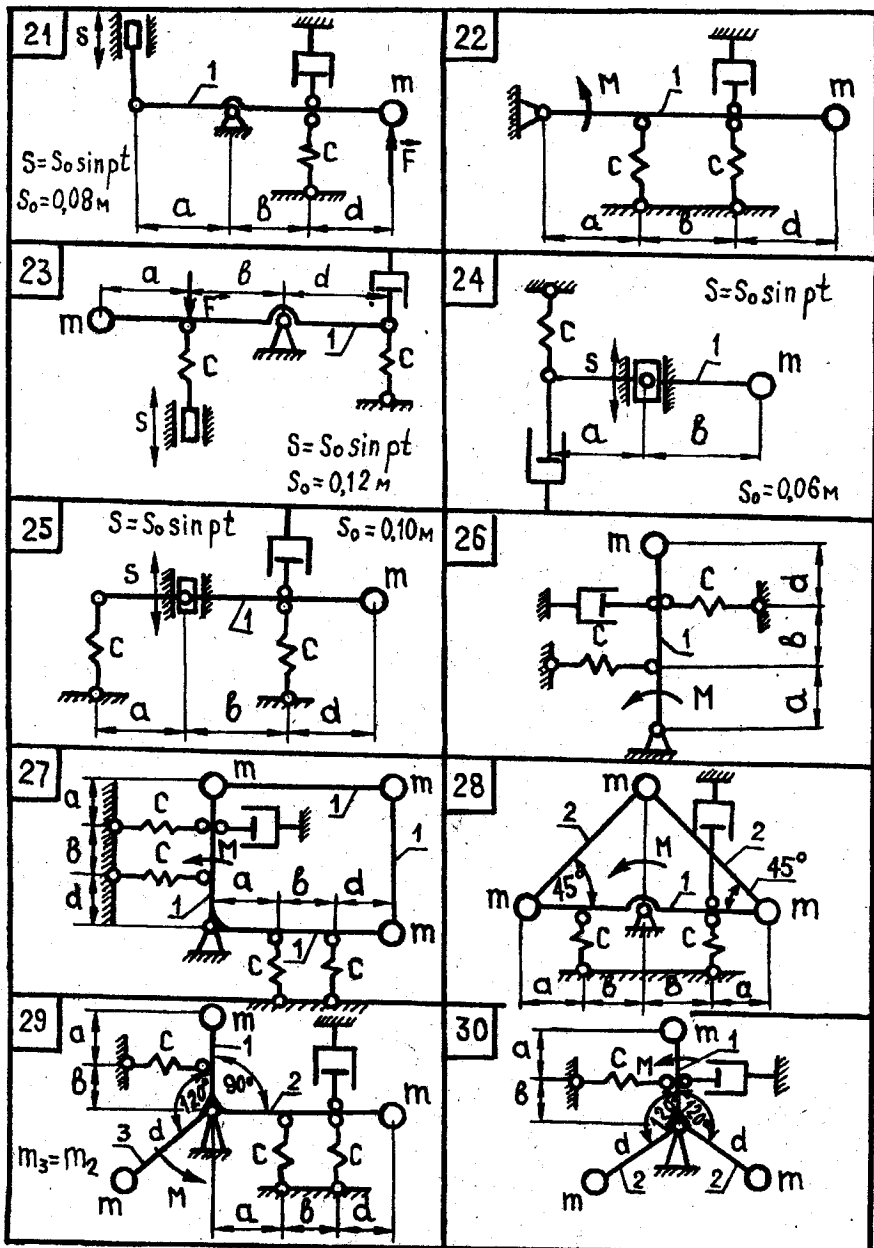


Рис. 86,2

Визначити період та частоту загасаючих коливань в системі, знайти закон коливального процесу в ній, врахувавши опір середовища (силу опору демпфірування).

Розв'язання. Це завдання можна розв'язати, застосовуючи диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла відносно горизонтальної осі

$$J_{Ox} \ddot{\varphi} = \sum M_{Ox} (\vec{F}_i^E) \quad (1)$$

або диференціальне рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} + Q(t). \quad (2)$$

1. Спочатку побудуємо диференціальне рівняння руху механічної системи, використавши рівняння (1). Зауважимо, що

$$\begin{aligned} J_{Ox} &= m(a+b+d)^2 + m(2a+2b)^2 + \\ &+ \frac{1}{3}m_2(a+b+d)^2 + \frac{1}{3}m_1(2a+2b)^2 = \\ &= 2(0,2+0,3+0,5)^2 + 2(0,4+0,6)^2 + \frac{1}{3} \cdot 6(0,2+0,3+0,5)^2 + \\ &+ \frac{1}{3} \cdot 3(0,4+0,6)^2 = 7 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Сума моментів зовнішніх сил (\vec{P} , \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F} , $\vec{F}_{\text{опор}}$), які діють на механічну систему (рис. 86, а), відносно осі Ox визначається так:

$$\begin{aligned} \sum M_{Ox} (\vec{F}_i^E) &= F(2a+2b) + P(2a+2b)\varphi + P_1 \frac{2a+2b}{2}\varphi - \\ &- F_1 \cdot 2b + P_2 \cdot \frac{1}{2}(a+b+d) - F_{\text{опор}}(a+b) - F_2 a + P(a+b+d), \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\left. \begin{aligned} F &= F_0 \sin pt; \quad P_1 = m_1 g; \quad P_2 = m_2 g; \quad P = mg; \\ F_2 &= c(a\varphi \pm \lambda_{2c}); \quad F_1 = c(2b\varphi \pm \lambda_{1c}); \quad F_{\text{опор}} = \mu(a+b)\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

У положенні статичної рівноваги, коли стержень 1 займає вертикальне положення, а стержень 2 — горизонтальне,

$$P_2 \cdot \frac{1}{2}(a+b+d) + P(a+b+d) \mp c \cdot 2b\lambda_{1c} \mp c\lambda_{2c}a = 0. \quad (6)$$

З урахуванням (5) і (6) згідно з (4) маємо

$$\sum M_{Ox}(\vec{F}_i^E) = F(2a + 2b) - (ca^2 + c(2b)^2) \varphi - \mu(a + b)^2 \dot{\varphi} + P_1(a + b) \varphi + 2P(a + b) \varphi. \quad (7)$$

Підставляючи (7) в (1), дістаємо

$$J_{Ox} \ddot{\varphi} + c(a^2 + 4b^2) \varphi - m_1 g(a + b) \varphi - 2mg(a + b) \varphi + \mu(a + b)^2 \dot{\varphi} = 2F_0(a + b) \sin pt. \quad (8)$$

Уведемо такі позначення:

$$\left. \begin{aligned} 2n &= \frac{\mu(a + b)^2}{J_{Ox}} = \frac{50(0,2 + 0,3)^2}{7} = 1,8 \text{ с}^{-1}; \\ k^2 &= \frac{c(a^2 + 4b^2) - g(a + b)(2m + m_1)}{J_{Ox}} = \\ &= \frac{2000(0,2^2 + 4 \cdot 0,3^2) - 9,8(0,2 + 0,3)(2 \cdot 2 + 3)}{7} = 109 \text{ с}^{-2}; \\ h &= \frac{2F_0(a + b)}{J_{Ox}} = \frac{2 \cdot 7(0,2 + 0,3)}{7} = 1 \text{ с}^{-2}. \end{aligned} \right\} (9)$$

Остаточо коливальний процес у системі описується диференціальним рівнянням

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = h \sin pt. \quad (10)$$

2. Щоб використати рівняння (2), визначимо кінетичну і потенціальну енергію механічної системи:

а) кінетична енергія

$$T = \frac{1}{2}m(a + b + d)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(2a + 2b)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}m_1(2a + 2b)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}m_2(a + b + d)^2 \dot{\varphi}^2; \quad (11)$$

б) потенціальна енергія

$$\begin{aligned} \Pi &= -mg(a + b + d) \varphi - m_2g \cdot \frac{1}{2}(a + b + d) \varphi + \frac{1}{2}c(a\varphi \pm \lambda_{2c})^2 - \\ &- \frac{1}{2}c\lambda_{2c}^2 + \frac{1}{2}c(2b\varphi \pm \lambda_{1c})^2 - \frac{1}{2}c\lambda_{1c}^2 - m_1g \left(\frac{2a + 2b}{2} - \frac{2a + 2b}{2} \cos \varphi \right) - \\ &- m_2g((2a + 2b) - (2a + 2b) \cos \varphi) = \\ &= -mg(a + b + d) \varphi - \frac{1}{2}m_2g(a + b + d) \varphi + \frac{1}{2}ca^2\varphi^2 \pm \\ &\pm ca\lambda_{2c}\varphi + \frac{1}{2}c(2b)^2\varphi^2 \pm c(2b)\lambda_{1c}\varphi - \\ &- m_1g(a + b) \cdot 2 \frac{\varphi^2}{4} - 2m_2g(a + b) \cdot 2 \frac{\varphi^2}{4}. \end{aligned} \quad (12)$$

У положенні статичної рівноваги

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = -mg(a+b+d) - \frac{1}{2}m_2g(a+b+d) \pm ca\lambda_x \pm \pm c(2b)\lambda_{1c} = 0. \quad (13)$$

Остаточню з урахуванням (13) потенціальна енергія механічної системи

$$\Pi = \frac{1}{2}ca^2\varphi^2 + \frac{1}{2}c(2b)^2\varphi^2 - \frac{1}{2}m_1g(a+b)\varphi^2 - mg(a+b)\varphi^2. \quad (14)$$

Функція розсіювання енергії

$$\Phi = \frac{1}{2}\mu(a+b)^2\dot{\varphi}^2. \quad (15)$$

Частинні похідні, що входять до складу рівняння (2), мають такі значення:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = (m(a+b+d)^2 + m(2a+2b)^2 + \frac{1}{3}m_1(2a+2b)^2 + \\ &+ \frac{1}{3}m_2(a+b+d)^2)\dot{\varphi} = J_{Ox}\dot{\varphi}; \\ -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= -ca^2\varphi - c(2b)^2\varphi + m_1g(a+b)\varphi + \\ &+ 2mg(a+b)\varphi = -k^2J_{Cx}\varphi; \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} &= -\mu(a+b)^2\dot{\varphi} = -2nJ_{Ox}\dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (16)$$

Узагальнена сила

$$Q(t) = \frac{\sum \vec{F}_i(t) \cdot \delta \vec{r}_i}{\delta q_i} = \frac{2F_0(a+b)\sin pt \cdot \delta \varphi}{\delta \varphi} = 2F_0(a+b)\sin pt. \quad (17)$$

На підставі (2) маємо диференціальне рівняння

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = h \sin pt,$$

що збігається з (10).

Рівняння, яке описує загасаючі коливання в системі, має вигляд

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0. \quad (18)$$

Період і циклічна частота загасаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{109 - 0,9^2}} = 0,6 \text{ с};$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{109 - 0,9^2} = 10,4 \text{ с}^{-1}.$$

Закон, який описує загасаючі коливання в механічній системі, має вигляд

$$\varphi_1(t) = e^{-0,9t} (C_1 \cos 10,4t + C_2 \sin 10,4t). \quad (19)$$

Розв'язком рівняння (10), що описує вимушені коливання в системі з урахуванням сили опору $F_{\text{опор}} = \mu(a + b)\dot{\varphi}$, є

$$\varphi(t) = e^{-0,9t} (C_1 \cos 10,4t + C_2 \sin 10,4t) + A \sin(8t + \beta). \quad (20)$$

Амплітуда вимушених коливань

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{(109 - 64)^2 + 1,8^2 \cdot 8^2}} = 2,12 \cdot 10^{-2}.$$

Початкова фаза коливань

$$\beta = \arctg\left(-\frac{2np}{k^2 - p^2}\right) = \arctg\left(-\frac{1,8 \cdot 8}{109 - 64}\right) = -0,31 \text{ рад.}$$

Отже, розв'язок (20) набуває вигляду

$$\varphi(t) = e^{-0,9t} (C_1 \cos 10,4t + C_2 \sin 10,4t) + \\ + 2,12 \cdot 10^{-2} \sin(8t - 0,31). \quad (21)$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначаємо за допомогою початкових умов (при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0 = 0,2$ рад; $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$), які підставляємо у вирази φ , $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi}(t) = -ne^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + \\ + k_1 e^{-nt} (-C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t) + Ap \cos(pt + \beta). \quad (22)$$

Отже,

$$\dot{\varphi}_0 = -nC_1 + k_1 C_2 + Ap \cos \beta; \quad \varphi_0 = C_1 + A \sin \beta,$$

звідки

$$C_1 = \varphi_0 - A \sin \beta = 0,2 - 2,12 \cdot 10^{-2} \sin(-0,31) = 0,2065;$$

$$C_2 = (\varphi_0 + nC_1 - Ap \cos \beta) / k_1 = (0 + 0,9 \cdot 0,2065 - 2,12 \cdot 10^{-2} \cdot 8 \cos(-0,31)) / 10,4 = 0,051.$$

Остаточко закон (20) коливального процесу в розглядуваній механічній системі з урахуванням опору середовища має вигляд

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= e^{-0,9t}(0,2065 \cos 10,4t + 0,051 \sin 10,4t) + \\ &+ 2,12 \cdot 10^{-2} \sin(8t - 0,31) = \\ &= 0,2071e^{-0,9t} \sin(10,4t + 1,33) + 2,12 \cdot 10^{-2} \sin(8t - 0,31). \end{aligned}$$

Завдання Д-17

ДОСЛІДЖЕННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ДВОМА СТУПЕНЯМИ ВІЛЬНОСТІ

Механічну систему, що складається з тіл 1, 2, 3 та 4, підкріплено пружинами з відповідними жорсткостями c_1, c_2, c_3 і c_4 , причому тіла 2, 3 — однорідні тонкі стержні з лінійною густиною ρ_l , а тіла 1, 4 — однорідні тонкі пластинки з поверхневою густиною ρ_s . Система, на яку діє тягарець масою m , розміщений у певному місці, зазнає гармонічного збудження $F = F_0 \sin pt$.

Схеми механічних систем показано на рис. 87, а—в, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 51. Масами пружин знехтувати.

Визначити частоти вільних та амплітуди вимушених коливань у системі, записати загальний вираз вимушених коливань і накреслити графіки, які характеризують зміну амплітуд вимушених коливань у системі при резонансі.

Таблиця 51

Ва- ріант	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	ρ_s	ρ_l	<i>m</i>	c_1	c_2	c_3	c_4	F_0	<i>p</i>	φ_{10}	φ_{20}	$\dot{\varphi}_{10}$	$\dot{\varphi}_{20}$
	м				кг/м ²	кг/м	кг	кН/м				Н	с ⁻¹	рад		рад · с ⁻¹	
1	0,1	0,1	0,2	0,1	120	0,6	4	6	5	3	4	5	100	0,01	0,01	0	0,02
2	0,3	0,2	0,2	0,1	130	0,7	3	5	5	2	3	6	120	0,02	0,01	0,01	0
3	0,1	0,2	0,2	0,1	140	0,5	2	4	6	4	5	4	150	—	0,18	—	0,01
4	0,1	0,2	0,2	0,1	125	0,6	5	2	4	3	4	8	140	—	0,02	—	0,01
5	0,2	0,2	0,2	0,2	145	0,4	3	6	8	5	4	10	150	—	0,16	—	0,01
6	0,2	0,2	0,2	0,2	150	0,3	4	8	6	4	3	9	150	—	0,14	—	0,12
7	0,1	0,2	0,2	0,1	140	0,5	5	6	6	5	4	7	110	0,01	0,02	0	0,16
8	0,1	0,1	0,1	0,1	120	0,4	4	9	6	4	4	8	120	—	0,02	—	0,01

Варіант	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	ρ_s	ρ_l	<i>m</i>	c_1	c_2	c_3	c_4	F_0	<i>p</i>	Φ_{10}	Φ_{20}	φ_{10}	φ_{20}
	м				кг/м ²	кг/м	кг	кН/м				Н	с ⁻¹	рад		рад · с ⁻¹	
9	0,2	0,1	0,3	0,2	135	0,6	6	7	9	3	4	6	150	—	0,01	—	0,02
10	0,1	0,1	0,2	0,4	130	0,7	3	10	6	2	3	5	100	—	0,18	—	0,01
11	0,1	0,1	0,2	0,1	125	0,8	2	8	5	2	4	6	110	—	0,16	—	0,12
12	0,1	0,1	0,4	0,2	115	1,0	4	6	6	4	3	8	120	—	0,02	—	0,14
13	0,1	0,2	0,2	0,1	120	0,9	3	5	5	5	4	9	150	—	0,12	—	0,01
14	0,1	0,2	0,2	0,1	130	0,6	2	8	4	3	4	7	100	—	0,01	—	0,02
15	0,1	0,1	0,2	0,1	110	0,8	4	5	6	4	3	10	150	—	0,02	—	0,01
16	0,2	0,2	0,1	0,1	100	0,7	5	4	4	4	4	8	140	0,01	0,02	0,01	0,01
17	0,2	0,1	0,2	0,1	90	0,6	4	4	5	4	5	8	120	—	0,01	—	0,02
18	0,2	0,2	0,1	0,1	95	0,5	3	6	8	3	4	7	130	—	0,15	—	0,01
19	0,2	0,2	0,1	0,1	100	0,4	2	3	4	4	5	6	150	0,02	—	0,12	—
20	0,2	0,1	0,1	0,2	80	0,3	4	4	3	3	3	5	100	—	0,02	—	0,02
21	0,2	0,2	0,2	0,2	110	0,5	3	5	3	4	4	8	120	—	0,14	—	0,01
22	0,2	0,2	0,6	0,2	80	0,4	5	3	3	3	3	6	140	—	0,12	—	0,15
23	0,4	0,2	0,3	0,1	60	0,6	6	4	4	4	4	10	100	—	0,01	—	0,02
24	0,3	0,3	0,2	0,2	100	0,5	4	2	3	3	2	4	110	—	0,02	—	0,12
25	0,3	0,6	0,6	0,2	100	0,7	6	3	5	4	—	5	120	—	0,01	—	0,16
26	0,2	0,4	0,2	0,2	70	0,4	3	5	4	2	3	8	100	—	0,18	—	0,01
27	0,4	0,2	0,4	0,3	120	0,5	5	3	4	3	4	10	140	—	0,02	—	0,01
28	0,2	0,4	0,2	0,2	130	0,6	4	4	3	4	3	6	130	—	0,01	—	0,01
29	0,2	0,4	0,4	0,2	85	0,4	6	2	4	4	3	4	150	—	0,16	—	0,12
30	0,2	0,3	0,4	0,2	100	0,8	3	5	2	5	4	8	150	0,02	0,01	0,01	0,02

Приклад 44. Механічна система з двома ступенями вільності (рис. 87) складається з двох пружних тіл 1 і 4 та абсолютно твердого тонкого стержня 2.

Дано: $a = 0,2$ м; $b = 0,04$ м;
 $c = 0,16$ м; $d = 0,2$ м; $c_1 = 1000$
Н/м; $c_2 = 4000$ Н/м; $c_3 = 2000$
Н/м; $c_4 = 1000$ Н/м; $m = 2$ кг;
 $\rho_s = 100$ кг/м²; $\rho_l = 0,5$ кг/м;
 $F_0 = 4$ Н; $p = 100$ с⁻¹; $\varphi_{10} =$
 $= 0,02$ рад; $\varphi_{20} = 0,01$ рад; $\dot{\varphi}_{10} =$
 $= 0$; $\dot{\varphi}_{20} = 0$.

Розв'язання. Використаємо рівняння Лагранжа другого роду. Як узагальнені вибираємо такі координати: φ_1 — кут повороту тіла 1 разом із

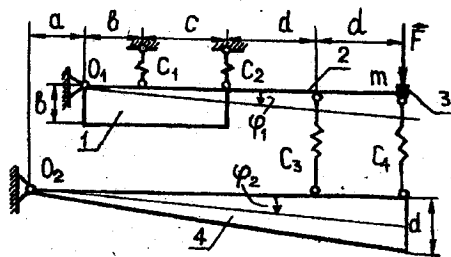


Рис. 87

стержнем 2; φ_2 — кут повороту тіла 4 навколо точки O_2 (див. рис. 87).

Тому

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} + Q_1(t); \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} + Q_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Кінетична енергія механічної системи

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \quad (2)$$

де кінетична енергія обертального руху тіла 1

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{O_1} \dot{\varphi}_1^2; \quad (3)$$

кінетична енергія обертального руху стержня 2

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_1^2; \quad (4)$$

кінетична енергія тіла 3

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{1}{2} m (b + c + 2d)^2 \dot{\varphi}_1^2; \quad (5)$$

кінетична енергія тіла 4

$$T_4 = \frac{1}{2} J_4 \dot{\varphi}_2^2. \quad (6)$$

Моменти інерції окремих тіл

$$\left. \begin{aligned} J_{O_1} &= \frac{1}{3} m_1 (b^2 + (b + c)^2); \\ J_2 &= \frac{1}{12} m_2 (2d^2) + m_2 (b + c + d)^2; \\ J_4 &= \frac{1}{18} m_4 (3d^2 + (a + b + c + 2d)^2) + \\ &+ \frac{4}{9} m_4 (a + b + c + 2d)^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_4 (a + b + c + 2d)^2 + \frac{1}{6} m_4 d^2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

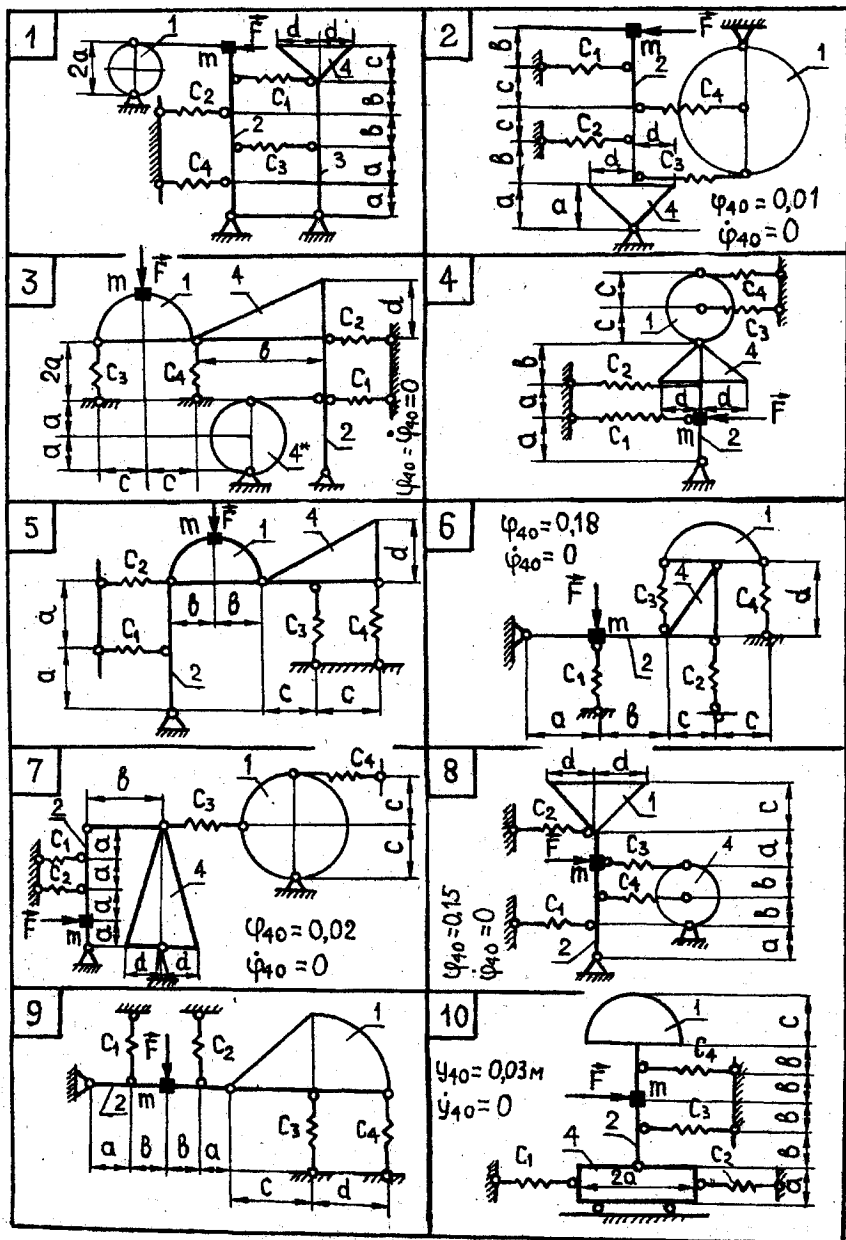


Рис. 87,а

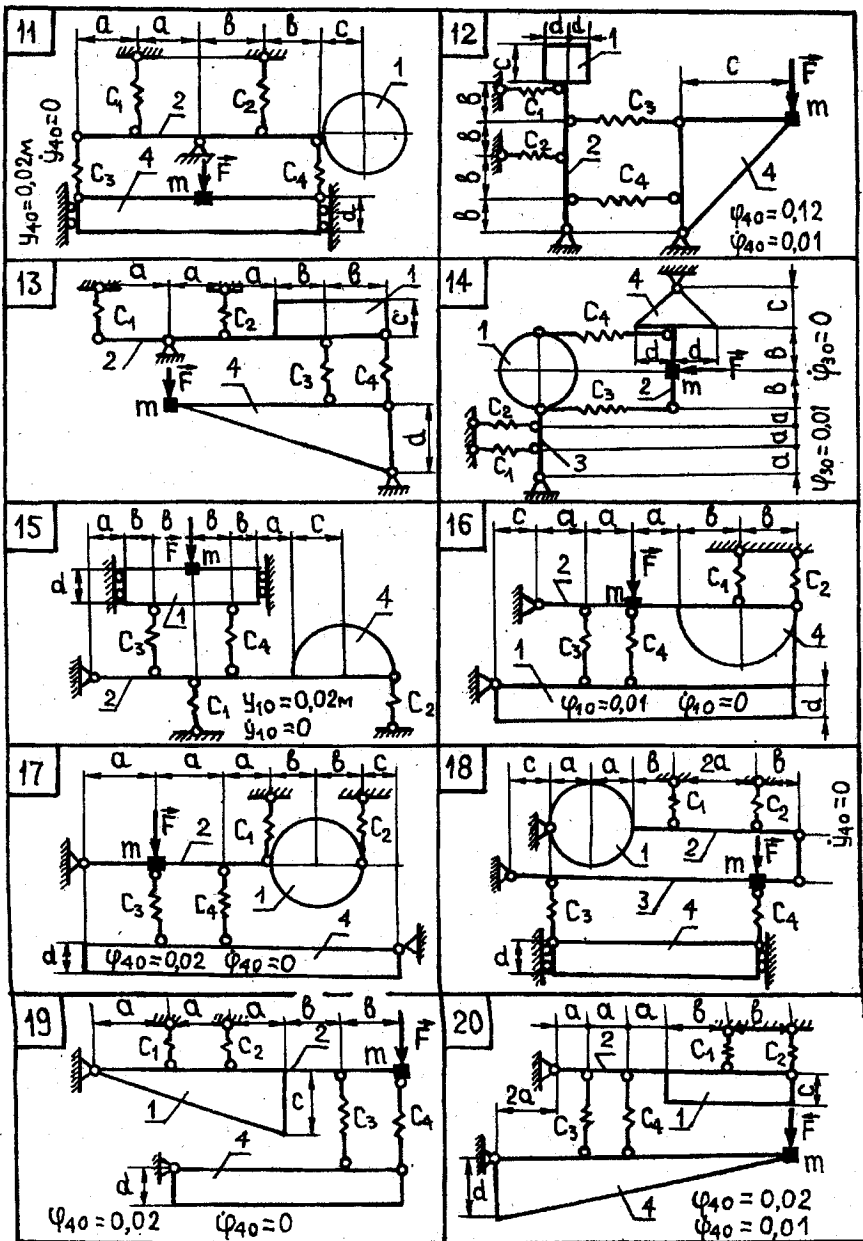


Рис. 87,6

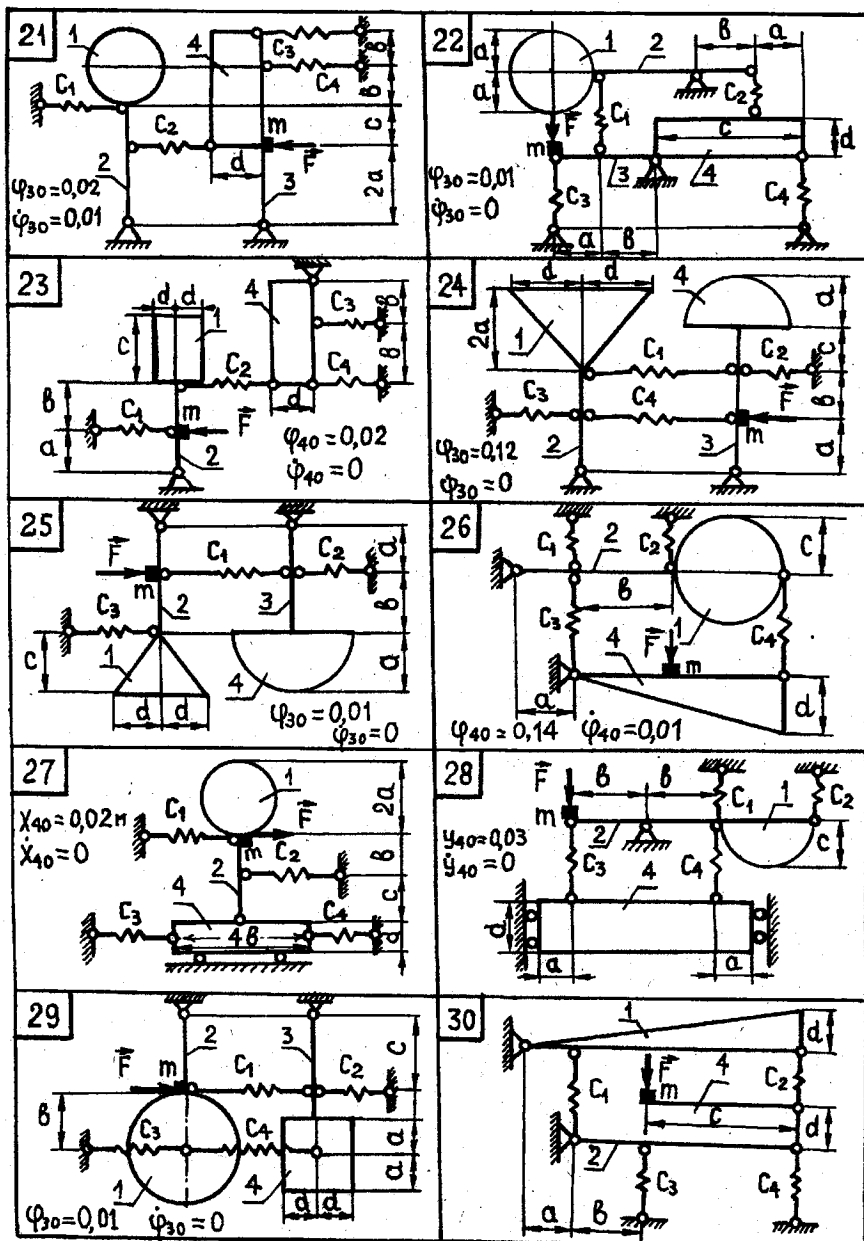


Рис. 87,б

Маси окремих тіл

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= b(b+c) \rho_s = 0,04(0,04+0,16) \cdot 100 = 0,8 \text{ кг}; \\ m_2 &= 2d\rho_l = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 \text{ кг}; \quad m_3 = 2 \text{ кг}; \\ m_4 &= \frac{1}{2}d(a+b+c+2d) \rho_s = \\ &= 0,1(0,2+0,04+0,16+0,4) \cdot 100 = 8 \text{ кг}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

На підставі (2) з урахуванням (3)—(8) кінетична енергія системи

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{6}m_1(b^2 + (b+c)^2) \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{24}m_2(2d)^2 \dot{\varphi}_1^2 + \\ &+ \frac{1}{2}m_2(b+c+d)^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m(b+c+2d)^2 \dot{\varphi}_1^2 + \\ &+ \frac{1}{4}m_4(a+b+c+2d)^2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{12}m_4d^2 \dot{\varphi}_2^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Потенціальна енергія системи

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \Pi_1^T + \Pi_2^T + \Pi_3^m + \Pi_4^T,$$

де потенціальна енергія пружини жорсткістю c_1

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}c_1(b\varphi_1 \pm \lambda_{1c})^2 - \frac{1}{2}c_1\lambda_{1c}^2 = \frac{1}{2}c_1b^2\varphi_1^2 \pm c_1b\lambda_{1c}\varphi_1; \quad (10)$$

потенціальна енергія пружини жорсткістю c_2

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \frac{1}{2}c_2((b+c)\varphi_1 \pm \lambda_{2c})^2 - \frac{1}{2}c_2\lambda_{2c}^2 = \\ &= \frac{1}{2}c_2(b+c)^2\varphi_1^2 \pm c_2(b+c)\lambda_{2c}\varphi_1; \end{aligned} \quad (11)$$

потенціальна енергія пружини жорсткістю c_3

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= \frac{1}{2}c_3((b+c+d)\varphi_1 \pm \lambda_{3c} - (a+b+c+d)\varphi_2)^2 - \frac{1}{2}c_3\lambda_{3c}^2 = \\ &= \frac{1}{2}c_3(b+c+d)^2\varphi_1^2 + \frac{1}{2}c_3(a+b+c+d)^2\varphi_2^2 \pm \\ &\pm c_3(b+c+d)\lambda_{3c}\varphi_1 - c_3(b+c+d)(a+b+c+d)\varphi_1\varphi_2 \mp \\ &\mp c_3(a+b+c+d)\lambda_{3c}\varphi_2; \end{aligned} \quad (12)$$

потенціальна енергія пружини жорсткістю c_4

$$\begin{aligned} \Pi_4 = & \frac{1}{2} c_4 ((b + c + 2d) \varphi_1 \pm \lambda_{4c} - (a + b + c + 2d) \varphi_2)^2 - \\ & - \frac{1}{2} c_4 \lambda_{4c}^2 = \frac{1}{2} c_4 (b + c + 2d)^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_4 (a + b + c + 2d)^2 \varphi_2^2 \pm \\ & \pm c_4 (b + c + 2d) \varphi_1 \lambda_{4c} \mp c_4 (a + b + c + 2d) \varphi_2 \lambda_{4c} - \\ & - c_4 (b + c + 2d) (a + b + c + 2d) \varphi_1 \varphi_2; \end{aligned} \quad (13)$$

потенціальна енергія тіла 1

$$\Pi_1^T = -m_1 g \frac{b + c}{2} \varphi_1; \quad (14)$$

потенціальна енергія стержня 2

$$\Pi_2 = -m_2 g (b + c + d) \varphi_1; \quad (15)$$

потенціальна енергія тіла 3 масою m

$$\Pi_3^m = -mg (b + c + 2d) \varphi_1; \quad (16)$$

потенціальна енергія однорідної тонкої пластинки 4

$$\Pi_4^T = -m_4 g \cdot \frac{2}{3} (a + b + c + 2d) \varphi_2. \quad (17)$$

З урахуванням (10) — (17) потенціальна енергія механічної системи

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} c_1 b^2 \varphi_1^2 \pm c_1 b \lambda_{1c} \varphi_1 + \frac{1}{2} c_2 (b + c)^2 \varphi_1^2 \pm c_2 (b + c) \lambda_{2c} \varphi_1 + \\ & + \frac{1}{2} c_3 (b + c + d)^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_3 (a + b + c + d)^2 \varphi_2^2 \pm \\ & \pm c_3 (b + c + d) \lambda_{3c} \varphi_1 \mp c_3 (a + b + c + d) \lambda_{3c} \varphi_2 - \\ & - c_3 (b + c + d) (a + b + c + d) \varphi_1 \varphi_2 + \frac{1}{2} c_4 (b + c + 2d)^2 \varphi_1^2 + \\ & + \frac{1}{2} c_4 (a + b + c + 2d)^2 \varphi_2^2 \pm c_4 (b + c + 2d) \lambda_{4c} \varphi_1 \mp \\ & \mp c_4 (a + b + c + 2d) \lambda_{4c} \varphi_2 - c_4 (b + c + 2d) (a + b + c + 2d) \varphi_1 \varphi_2 - \\ & - \frac{1}{2} m_1 g (b + c) \varphi_1 - m_2 g (b + c + d) \varphi_1 - \\ & - mg (b + c + 2d) \varphi_1 - \frac{2}{3} m_4 g (a + b + c + 2d) \varphi_2. \end{aligned} \quad (18)$$

У положенні відносного спокою, тобто коли система знаходиться в положенні статичної рівноваги, маємо

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}\right)_{\varphi_1 = \varphi_2 = 0} = \pm c_1 b \lambda_{1c} \pm c_2 (b + c) \lambda_{2c} \pm c_3 (b + c + d) \lambda_{3c} \pm c_4 (b + c + 2d) \lambda_{4c} - \frac{1}{2} m_1 g (b + c) - m_2 g (b + c + d) - mg (b + c + 2d) = 0; \quad (19)$$

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2}\right)_{\varphi_1 = \varphi_2 = 0} = \mp c_3 (a + b + c + d) \lambda_{3c} \mp c_4 (a + b + c + 2d) \lambda_{4c} - \frac{2}{3} m_4 g (a + b + c + 2d) = 0. \quad (20)$$

З урахуванням (19) і (20) вираз (18) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} c_1 b^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (b + c)^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_3 (b + c + d)^2 \varphi_1^2 + \\ & + \frac{1}{2} c_3 (a + b + c + d)^2 \varphi_2^2 - c_3 (b + c + d) (a + b + c + d) \varphi_1 \varphi_2 + \\ & + \frac{1}{2} c_4 (b + c + 2d)^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_4 (a + b + c + 2d)^2 \varphi_2^2 - \\ & - c_4 (b + c + 2d) (a + b + c + 2d) \varphi_1 \varphi_2. \end{aligned} \quad (21)$$

У канонічному поданні кінетичної та потенціальної енергії через узагальнені координати φ_1 і φ_2 маємо

$$T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{\varphi}_1^2 + 2a_{12} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + a_{22} \dot{\varphi}_2^2); \quad (22)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11} \varphi_1^2 + 2c_{12} \varphi_1 \varphi_2 + c_{22} \varphi_2^2), \quad (23)$$

причому, якщо порівняти між собою (22) і (9) та (21) і (23), то інерційні коефіцієнти

$$\begin{aligned} a_{11} = & \frac{1}{3} m_1 (b^2 + (b + c)^2) + \frac{1}{12} m_2 (2d)^2 + m_2 (b + c + d)^2 + \\ & + m (b + c + 2d)^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0,8 (0,04^2 + (0,04 + 0,16)^2) + \frac{1}{12} \cdot 0,2 (2 \cdot 0,2)^2 + \\ + 0,2 (0,04 + 0,16 + 0,2)^2 + 2 (0,04 + 0,16 + 0,4)^2 = 0,766 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$a_{12} = a_{21} = 0; \quad a_{22} = \frac{1}{2} m_4 (a + b + c + 2d)^2 + \frac{1}{16} m_4 d^2 = \\ = \frac{1}{2} \cdot 8 (0,2 + 0,04 + 0,16 + 0,4)^2 + \frac{1}{16} \cdot 8 \cdot 0,2^2 = 2,513 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

а квазіпружні коефіцієнти

$$c_{11} = c_1 b^2 + c_2 (b + c)^2 + c_3 (b + c + d)^2 + c_4 (b + c + 2d)^2 = \\ = 1000 \cdot 0,04^2 + 4000 (0,04 + 0,16)^2 + 2000 (0,04 + 0,16 + 0,2)^2 + \\ + 1000 (0,04 + 0,16 + 0,4)^2 = 841,6 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$c_{12} = c_{21} = -c_3 (b + c + d) (a + b + c + d) - \\ - c_4 (b + c + 2d) (a + b + c + 2d) = \\ = -2000 (0,04 + 0,16 + 0,2) (0,2 + 0,2 + 0,2) - \\ - 1000 (0,2 + 0,4) (0,2 + 0,2 + 0,4) = -960 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$c_{22} = c_3 (a + b + c + d)^2 + c_4 (a + b + c + 2d)^2 = \\ = 2000 (0,2 + 0,04 + 0,16 + 0,2)^2 + \\ + 1000 (0,2 + 0,04 + 0,16 + 0,4)^2 = 1360 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

На підставі (22) і (23) диференціальні рівняння руху механічної системи набувають вигляду

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\ddot{\varphi}_1 + a_{12}\ddot{\varphi}_2 + c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2 &= Q_1(t); \\ a_{21}\ddot{\varphi}_1 + a_{22}\ddot{\varphi}_2 + c_{21}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2 &= Q_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Рівняння (24) описують вимушені коливання в системі з двома ступенями вільності, причому узагальнені сили $Q_1(t)$ і $Q_2(t)$ визначаються з умови

$$Q_1(t)\delta\varphi_1 + Q_2(t)\delta\varphi_2 = \sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = F_0 \sin pt (b + c + 2d) \delta\varphi_1, \quad (25)$$

звідки

$$Q_1(t) = F_0 (b + c + 2d) \sin pt = 4 (0,04 + 0,16 + 0,4) \sin 100t = \\ = 2,4 \sin 100t; \quad Q_2(t) = 0.$$

Розв'язками диференціальних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\ddot{\varphi}_1 + a_{12}\ddot{\varphi}_2 + c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2 &= 0; \\ a_{21}\ddot{\varphi}_1 + a_{22}\ddot{\varphi}_2 + c_{21}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

які описують вільні коливання механічної системи з двома ступенями вільності, є

$$\varphi_1 = A_1 \sin (kt + \alpha); \quad \varphi_2 = A_2 \sin (kt + \alpha), \quad (27)$$

де A_1, A_2, α — невідомі сталі величини.

Підставляючи (27) в (26), дістаємо

$$\left. \begin{aligned} A_1 (c_{11} - a_{11}k^2) + A_2 (c_{12} - a_{12}k^2) &= 0; \\ A_1 (c_{21} - a_{21}k^2) + A_2 (c_{22} - a_{22}k^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Умовою існування сталих A_1 та A_2 , відмінних від нуля, згідно з (28) є

$$\left\| \begin{array}{cc} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 \\ c_{21} - a_{21}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 \end{array} \right\| = 0,$$

звідки

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)(c_{21} - a_{21}k^2) = 0. \quad (29)$$

Рівняння (29) називається *рівнянням частот*.

Користуючись цим рівнянням, знаходимо частоти вільних коливань механічної системи з двома ступенями вільності, а саме:

$$k_{1(2)} = \sqrt{\frac{B}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{B^2 - 4C}}, \quad (30)$$

де

$$B = \frac{c_{11}a_{22} + c_{22}a_{11} - 2c_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \\ = \frac{841,6 \cdot 2,513 + 1360 \cdot 0,766 - 0^2}{0,766 \cdot 2,513 - 0^2} = 1639,9;$$

$$C = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{841,6 \cdot 1360 - (-960)^2}{0,766 \cdot 2,513 - 0^2} = 115\,834,2.$$

Тоді

$$k_1 = \sqrt{\frac{1639,9}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1639,9^2 - 4 \cdot 115\,834,2}} = 8,6 \text{ с}^{-1};$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{1639,9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1639,9^2 - 4 \cdot 115\,834,2}} = 39,6 \text{ с}^{-1}.$$

Частотам k_1 і k_2 відповідають такі розв'язки (27):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{11}(t) &= A_{11} \sin(k_1 t + \alpha_1); \\ \varphi_{12}(t) &= A_{12} \sin(k_2 t + \alpha_2); \\ \varphi_{21}(t) &= A_{21} \sin(k_1 t + \alpha_1); \\ \varphi_{22}(t) &= A_{22} \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

З урахуванням (28) коефіцієнти розподілу, які відповідають частотам k_1 та k_2 , в загальному випадку визначаються так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_{21}}{A_{11}} = \mu_1 &= -\frac{c_{11} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_1^2}{c_{22} - a_{22}k_1^2}, \\ \frac{A_{22}}{A_{12}} = \mu_2 &= -\frac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_2^2}{c_{22} - a_{22}k_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

У розглядуваному прикладі

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= -\frac{841,6 - 0,766 \cdot 8,6^2}{-960 - 0 \cdot 8,6^2} = 0,818; \\ \mu_2 &= -\frac{841,6 - 0,766 \cdot 39,6^2}{-960 - 0 \cdot 39,6^2} = -0,375. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Загальні розв'язки (27) мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(t) &= A_{11} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_{12} \sin(k_2 t + \alpha_2); \\ \varphi_2(t) &= A_{11}\mu_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_{12}\mu_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Оскільки праві сторони (24) є гармонічними функціями, а саме:

$$Q_1(t) = Q_{10} \sin(pt); \quad Q_2(t) = Q_{20} \sin(pt), \quad (35)$$

частинні розв'язки записуємо у вигляді

$$\varphi_1^{\text{ввм}}(t) = A_1 \sin(pt); \quad \varphi_2^{\text{ввм}}(t) = A_2 \sin(pt). \quad (36)$$

Підставляючи (35) і (36) у (24), дістаємо

$$\left. \begin{aligned} A_1 (c_{11} - a_{11}p^2) + A_2 (c_{12} - a_{12}p^2) &= Q_{10}; \\ A_1 (c_{21} - a_{21}p^2) + A_2 (c_{22} - a_{22}p^2) &= Q_{20}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Виходячи із (37), за умови, що $a_{12} = a_{21}$ та $c_{12} = c_{21}$, знаходимо

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{Q_{10}(c_{22} - a_{22}p^2) - Q_{20}(c_{12} - a_{12}p^2)}{(c_{11} - a_{11}p^2)(c_{22} - a_{22}p^2) - (c_{12} - a_{12}p^2)^2} = \\ &= \frac{2,4(1360 - 2 \cdot 613 \cdot 100^2) - 0(-960 - 0 \cdot 100^2)}{(1841,6 - 0,766 \cdot 100^2)(1360 - 2,613 \cdot 100^2) - (-960 - 0 \cdot 100^2)^2} = \\ &= -3,54 \cdot 10^{-4}; \\ A_2 &= \frac{Q_{20}(c_{11} - a_{11}p^2) - Q_{10}(c_{12} - a_{12}p^2)}{(c_{11} - a_{11}p^2)(c_{22} - a_{22}p^2) - (c_{12} - a_{12}p^2)^2} = \\ &= \frac{0 \cdot (841,6 - 0,766 \cdot 100^2) - 2,4(-960 - 0 \cdot 100^2)}{(841,6 - 0,766 \cdot 100^2)(1360 - 2,613 \cdot 100^2) - (-960 - 0 \cdot 100^2)^2} = \\ &= 1,37 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Тоді загальні розв'язки (34) набувають такого вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(t) &= A_{11} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_{12} \sin(k_2 t + \alpha_2) + A_1 \sin(pt) = \\ &= A_{11} \sin(8,6t + \alpha_1) + A_{12} \sin(39,6t + \alpha_2) - \\ &- 3,54 \cdot 10^{-4} \sin(100t); \\ \varphi_2(t) &= A_{11}\mu_1 \sin(k_1 t + \alpha_2) + A_{12}\mu_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) + \\ &+ 1,37 \cdot 10^{-5} \sin(100t) = \\ &= 0,818A_{11} \sin(8,6t + \alpha_1) - 0,375A_{12} \sin(39,6t + \alpha_2) + \\ &+ 1,37 \cdot 10^{-5} \sin(100t). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Із використанням початкових умов

$$t = 0, \quad \varphi_1(0) = \varphi_{10} = 0,02; \quad \varphi_2(0) = \varphi_{20} = 0,01; \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_{10} = 0; \\ \dot{\varphi}_2(0) = \dot{\varphi}_{20} = 0$$

та врахуванням (39) маємо

$$\left. \begin{aligned} A_{11} \sin \alpha_1 + A_{12} \sin \alpha_2 &= \varphi_{10}; \\ A_{11}\mu_1 \sin \alpha_1 + A_{12}\mu_2 \sin \alpha_2 &= \varphi_{20}; \\ A_{11}k_1 \cos \alpha_1 + A_{12}k_2 \cos \alpha_2 + A_{1p} &= \dot{\varphi}_{10}; \\ A_{11}k_1\mu_1 \cos \alpha_1 + A_{12}k_2\mu_2 \cos \alpha_2 + A_{2p} &= \dot{\varphi}_{20}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Після введення позначень

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= A_{11} \sin \alpha_1; \quad C_2 = A_{12} \sin \alpha_2; \\ C_3 &= A_{11} \cos \alpha_1; \quad C_4 = A_{12} \cos \alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

система рівнянь (40) набуває такого вигляду:

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 &= \varphi_{10}; \\ C_1\mu_1 + C_2\mu_2 &= \varphi_{20}; \\ C_3k_1 + C_4k_2 + A_{1p} &= \dot{\varphi}_{10}; \\ C_3k_1\mu_1 + C_4k_2\mu_2 + A_{2p} &= \dot{\varphi}_{20}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

На підставі (42) маємо

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\varphi_{20} - \mu_2 \varphi_{10}}{\mu_1 - \mu_2} = \frac{0,01 - (-0,375) \cdot 0,02}{0,818 - (-0,375)} = 14,7 \cdot 10^{-3}; \\ C_2 &= \frac{\mu_1 \varphi_{10} - \varphi_{20}}{\mu_1 - \mu_2} = \frac{0,818 \cdot 0,02 - 0,01}{0,818 - (-0,375)} = 5,33 \cdot 10^{-3}; \\ C_3 &= \frac{\mu_2 \dot{\varphi}_{10} - \mu_2 A_{1p} - \dot{\varphi}_{20} + A_{2p}}{k_1 (\mu_2 - \mu_1)} = \\ &= \frac{(-0,375) \cdot 0 - (-0,375) (-3,54 \cdot 10^{-4}) \cdot 100 + 1,37 \cdot 10^{-5} \cdot 100}{8,6 (-0,375 - 0,818)} = \\ &= 1,16 \cdot 10^{-3}; \\ C_4 &= \frac{\dot{\varphi}_{20} - A_{2p} - \mu_1 \dot{\varphi}_{10} + \mu_1 A_{1p}}{k_2 (\mu_2 - \mu_1)} = \\ &= \frac{0 - 1,37 \cdot 10^5 \cdot 100 - 0,818 \cdot 0 + 0,818 (-3,54 \cdot 10^{-4}) \cdot 100}{39,6 (-0,375 - 0,819)} = \\ &= 0,64 \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Амплітуди коливань A_{11} , A_{12} і початкові фази на підставі (41) — (43) становлять

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \sqrt{C_1^2 + C_3^2} = \sqrt{(14,7 \cdot 10^{-3})^2 + (1,16 \cdot 10^{-3})^2} = \\ &= 14,75 \cdot 10^{-3}; \\ A_{12} &= \sqrt{C_2^2 + C_4^2} = \sqrt{(5,33 \cdot 10^{-3})^2 + (0,64 \cdot 10^{-3})^2} = \\ &= 5,37 \cdot 10^{-3}; \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{C_1}{C_3} = \frac{14,7 \cdot 10^{-3}}{1,16 \cdot 10^{-3}} = 12,67 \quad (\alpha_1 = 1,492 \text{ рад}); \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{C_2}{C_4} = (5,33 \cdot 10^{-3}) / (0,64 \cdot 10^{-3}) = 8,328 \quad (\alpha_2 = 1,451 \text{ рад}). \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

На підставі (39) маємо

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(t) &= 14,75 \cdot 10^{-3} \sin(8,6t + 1,492) + \\ &+ 5,37 \cdot 10^{-3} \sin(39,6t + 1,451) - 3,54 \cdot 10^{-4} \sin(100t); \\ \varphi_2(t) &= 14,75 \cdot 10^{-3} \cdot 0,818 \sin(8,6t + 1,492) + \\ &+ 5,37 \cdot 10^{-3} (-0,375) \sin(39,6t + 1,451) + 1,37 \cdot 10^{-5} \sin(100t) = \\ &= 12,07 \cdot 10^{-3} \sin(8,6t + 1,492) - 2,01 \cdot 10^{-3} \sin(39,6t + 1,451) + \\ &+ 1,37 \cdot 10^{-5} \sin(100t). \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Щоб простежити за зміною амплітуд, коливань $A_1(p)$, $A_2(p)$ і відобразити цю зміну графічно, подаємо (38) в такому вигляді:

$$\begin{aligned} A_1(p) &= \frac{Q_{10} (c_{22} - a_{22}p^2) - Q_{20} (c_{12} - a_{12}p^2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) (p^2 - k_1^2) (p^2 - k_2^2)} = \\ &= \frac{2,4 (1360 - 2,513p^2) - 0}{(0,766 \cdot 2,513 - 0) (p^2 - 8,6^2) (p^2 - 39,6^2)} = \\ &= \frac{1695,6213 - 3,1332p^2}{(p^2 - 8,6^2) (p^2 - 39,6^2)}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$A_2(p) = \frac{Q_{20}(c_{11} - a_{11}p^2) - Q_{10}(c_{12} - a_{12}p^2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)} =$$

$$= \frac{0 - 2,4(-960 - 0)}{(0,766 \cdot 2,513 - 0)(p^2 - 8,6^2)(p^2 - 39,6^2)} =$$

$$= \frac{1196,9092}{(p^2 - 8,6^2)(p^2 - 39,6^2)} \quad (47)$$

Нехай треба простежити за зміною амплітуд $A_1(p)$, $A_2(p)$ на трьох інтервалах зміни циклічної частоти збудовальної сили, а саме:

1) $0 \leq p < k_1$; 2) $k_1 < p < k_2$; 3) $k_2 < p < \infty$.

На першому інтервалі ($0 \leq p < k_1$), оскільки $k_1 < k_2$, маємо $p^2 - k_1^2 < 0$ і $p^2 - k_2^2 < 0$, а тому знаменник в (46), (47) додатний. Через це $A_1(p) > 0$, $A_2(p) > 0$. При зростанні частоти збудовальної сили p амплітуди коливань $A_1(p)$, $A_2(p)$ також зростають. Якщо $p = 0$, то

$$A_1(0) = \frac{1695,6213 - 0}{(0 - 8,6^2)(0 - 39,6^2)} = 1,46 \cdot 10^{-2};$$

$$A_2(0) = \frac{1196,9092}{(0 - 8,6^2)(0 - 39,6^2)} = 1,03 \cdot 10^{-2}.$$

Коли $p = k_1 = 8,6 \text{ с}^{-1}$, настає явище резонансу й $A_1(p)$, $A_2(p)$ набувають нескінченно великих додатних значень (рис. 88, а, б).

На другому інтервалі ($k_1 < p < k_2$) маємо $p^2 - k_1^2 > 0$ і $p^2 - k_2^2 < 0$, тобто амплітуди коливань $A_1(p)$, $A_2(p)$ можуть змінюватися у великих межах.

Отже, на цьому інтервалі знаменник в (46), (47) від'ємний. Із цього випливає, що на другому інтервалі згідно з (47) функція $A_2(p) < 0$.

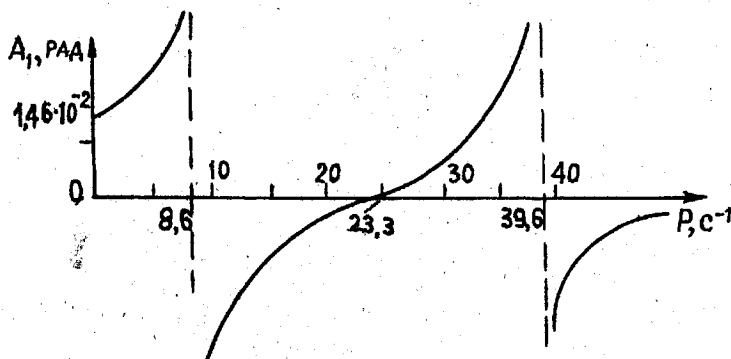


Рис. 88,а

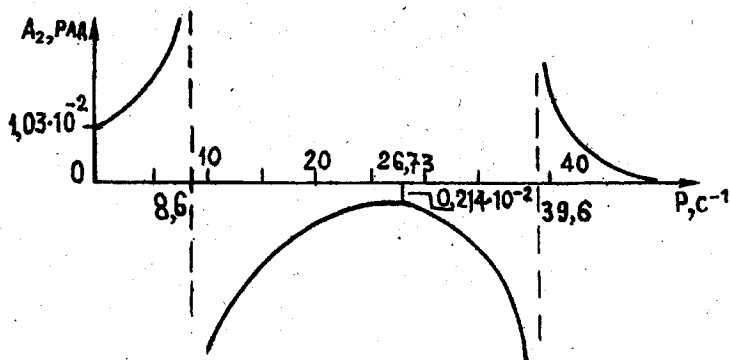


Рис. 88,6

При $k_1 < p < 23,3$ амплітуда $A_1(p) < 0$. Якщо $23,3 < p < k_2$, то $A_1(p) > 0$.

Максимального значення (визначалося дослідженням функції $A_2(p)$ на екстремум) на другому інтервалі ($k_1 < p < k_2$) амплітуда $A_2(p)$ досягає при $p = 26,73 \text{ c}^{-1}$ і становить

$$A_2^{\max} = \frac{1196,9092}{(26,7^2 - 8,6^2)(26,7^2 - 39,6^2)} = -2,14 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

На третьому інтервалі ($k_2 < p < \infty$) маємо $p^2 - k_1^2 > 0$, $p^2 - k_2^2 > 0$, а тому

$$1695,6213 - 3,1332p^2 < 0; A_1(p) < 0, A_2(p) > 0.$$

Із графіків, зображених на рис. 88, а, б, випливає, що резонансні частоти $k_1 = 8,6 \text{ c}^{-1}$ і $k_2 = 39,6 \text{ c}^{-1}$.





1. Бутенин Н. В., Луц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики: В 2 т. — М.: Наука, 1979.
2. Воронков И. М. Курс теоретической механики, — М.: Физматгиз, 1954.
3. Добронравов В. В., Никутин Н. Н. Курс теоретической механики. — М.: Высш. шк., 1983.
4. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики: В 2 т. — М.: Наука, 1982.
5. Павловский М. А., Акинфиева Л. Ю., Бойчук О. Ф. Теоретическая механика. Динамика. — К.: Вища шк., 1990.
6. Яблонский А. А., Никифорова В. В. Курс теоретической механики: В 2 ч, — М.: Высш. шк., 1971.
7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А. А. Яблонского.— М.: Высш. шк., 1985.
8. Бражниченко Н. А., Кац И. Л., Минцберг Б. Л., Морозов В. И. Сборник задач по теоретической механике. — М.: Высш. шк., 1967.
9. Мецгерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. — М.: Наука, 1981.
10. Сборник задач по теоретической механике / Под ред. К. С. Колесникова. — М.: Наука, 1983.
11. Костів М. І., Литвінська М. Й., Яскілка М. Б. Теоретическая механика. Статика. Кинематика: Метод. указания и контрольные задания. — Львов: ЛПИ, 1988.
12. Литвінська М. Й., Яскілка М. Б. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи на тему "Застосування ЕОМ для визначення прискорень точок плоского механізму". — Л.: ЛПІ, 1977.
13. Микитин М. Й., Величко Л. Д., Яскілка М. Б. Кинематика складного руху твердого тіла: Метод. вказівки і контрольні завдання для самостійної роботи з курсу "Теоретична механіка". — Л.: ЛПІ, 1991.
14. Павловский М. А., Акинфиева Л. Ю., Бойчук О. Ф. Теоретическая механика. Статика. Кинематика. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1989.

15. *Динамика материальной точки: Метод. указания и контрольные задания по динамике материальной точки / А. Ф. Попов, И. П. Смерека, И. В. Кузьо и др. — Львов: ЛПИ, 1988.*
16. *Динамика механической системы. Принципы механики: Метод. указания и контрольные задания по динамике механической системы и принципам механики / А. Ф. Попов, И. П. Смерека, И. В. Кузьо и др. — Львов: ЛПИ, 1986.*
17. *Яскілка Н. Б., Боженко М. В., Литвинская М. Й. Статика. Пространственная система сил: Метод. указания и контрольные задания к выполнению расчетно-графических работ по теоретической механике. — Львов: ЛПИ, 1986.*
18. *Яскілка М. Б., Костів М. І., Величко Л. Д., Басараба Д. М. Визначення кінематичних елементів руху точок твердого тіла методами плоского та складного рухів. — Л.: ЛПІ, 1993.*
19. *Яскілка М. Б., Боженко М. В. Статика: Метод. вказівки і контрольні завдання з теоретичної механіки. — Л.: Львів. політехніка, 1996.*



<i>Передмова</i>	3
----------------------------	---

Розділ 1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

<i>Завдання С-1.</i> Визначення реакцій опор і зусиль в стержнях плоскої ферми	5
<i>Завдання С-2.</i> Просторова система збіжних сил	16
<i>Завдання С-3.</i> Визначення реакцій опор складної конструкції (система двох тіл)	20
<i>Завдання С-4.</i> Визначення реакцій опор складної конструкції (система трьох тіл)	26
<i>Завдання С-5.</i> Визначення реакцій опор конструкції, що складається з двох тіл певної геометричної форми	33
<i>Завдання С-6.</i> Визначення реакцій затиснення просторового ламаного бруса	40
<i>Завдання С-7.</i> Визначення реакцій підшипників і під'ятників, якими утримуються вали	46
<i>Завдання С-8.</i> Визначення реакцій опор плоских плит	51
<i>Завдання С-9.</i> Зведення системи сил до найпростішого виду	56
<i>Завдання С-10.</i> Рівновага твердих тіл з урахуванням тертя ковзання	62
<i>Завдання С-11.</i> Визначення положення центра тяжіння тіла	68

Розділ 2. КІНЕМАТИКА

2.1 Кінематика точки	76
<i>Завдання К-1.</i> Визначення траєкторії, швидкості та прискорення точки за рівняннями, що описують її рух	76
<i>Завдання К-2.</i> Складання рівнянь руху точки і визначення її швидкості та прискорення	81
2.2. Кінематика твердого тіла	93
<i>Завдання К-3.</i> Визначення швидкостей і прискорень точок твердого тіла при поступальному й обертовому рухах	93

<i>Завдання</i>	<i>К-4.</i> Визначення швидкостей і прискорень точок твердого тіла, що виконує плоский рух	100
<i>Завдання</i>	<i>К-5.</i> Кінематичний аналіз багатоланкового механізму	115
2.3. Сферичний рух твердого тіла		126
<i>Завдання</i>	<i>К-6.</i> Визначення кінематичних характеристик руху твердого тіла і його точок із використанням кутів Ейлера	126
<i>Завдання</i>	<i>К-7.</i> Визначення кінематичних характеристик твердого тіла, що котиться без ковзання по нерухомій поверхні при наявності нерухомої точки	130
2.4. Складний рух точки		139
<i>Завдання</i>	<i>К-8.</i> Визначення абсолютних швидкості та прискорення точки	139
2.5. Складний рух твердого тіла		153
<i>Завдання</i>	<i>К-9.</i> Додавання обертальних рухів твердого тіла навколо паралельних осей	153
<i>Завдання</i>	<i>К-10.</i> Додавання обертальних рухів навколо осей, що перетинаються	166

Розділ 3. ДИНАМІКА

<i>Завдання</i>	<i>Д-1.</i> Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки під дією сталих сил або сил, залежних від часу, положення (відстані) чи швидкості	182
<i>Завдання</i>	<i>Д-2.</i> Дослідження відносного руху матеріальної точки	202
<i>Завдання</i>	<i>Д-3.</i> Застосування основних теорем динаміки при дослідженні руху матеріальної точки	213
3.1 Динаміка механічної системи		219
<i>Завдання</i>	<i>Д-4.</i> Застосування теореми про зміну моменту кількості руху механічної системи для визначення кутової швидкості твердого тіла	219
<i>Завдання</i>	<i>Д-5.</i> Застосування теореми про зміну кінетичної енергії при вивченні руху механічної системи	227
3.2. Диференціальні рівняння руху твердого тіла		236
<i>Завдання</i>	<i>Д-6.</i> Дослідження поступального й обертального рухів твердого тіла	236
<i>Завдання</i>	<i>Д-7.</i> Дослідження плоского руху твердого тіла	244
<i>Завдання</i>	<i>Д-8.</i> Застосування спрощеної теорії гіроскопа при розв'язуванні задач	252

3.3 Аналітична механіка	260
<i>Завдання Д-9.</i> Застосування принципу можливих переміщень при розв'язуванні задач на рівновагу сил, прикладених до системи з одним ступенем вільності	260
<i>Завдання Д-10.</i> Застосування принципу можливих переміщень при визначенні реакцій складної конструкції	266
<i>Завдання Д-11.</i> Застосування принципу Д'Аламбера при розв'язуванні задач	273
<i>Завдання Д-12.</i> Застосування загального рівняння динаміки при розв'язуванні задач з одним ступенем вільності	284
<i>Завдання Д-13.</i> Застосування рівняння Лагранжа другого роду при дослідженні руху механічної системи	291
<i>Завдання Д-14.</i> Використання канонічних рівнянь Гамільтона при розв'язуванні задач динаміки	303
3.4. Коливання механічної системи	310
<i>Завдання Д-15.</i> Дослідження вільних і вимушених коливань механічної системи з одним ступенем вільності	310
<i>Завдання Д-16.</i> Коливання механічної системи з одним ступенем вільності при наявності сили опору, пропорційної першому степеню швидкості	321
<i>Завдання Д-17.</i> Дослідження вимушених коливань механічної системи з двома ступенями вільності	330
<i>Список використаної та рекомендованої літератури</i>	347

1410
Навчальне видання

ЯСКІЛКА Микола Богданович

Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки

Оправа і титул художника *В. С. Жиборовського*

Художній редактор *Г. С. Муратова*

Технічний редактор *А. І. Омоховська*

Коректор *Л. М. Байбородіна*

Комп'ютерна верстка *В. Ф. Зелтиньша*

У книзі використано рисунки в авторському виконанні

Підписано до друку з плівок 10.11.99. Формат 60×84/16. Папір офсетний.

Гарнітура Таймс. Умовн.-друк. арк. 20,46. Умовн. фарбовідб. 20,46.

Обл.-вид. арк. 17,81. Зам. № 9-500

Видавництво "Вища школа", 01054, вул. Гоголівська, 7, Київ-54.

Видавництво "Веселка", 04655, вул. Мельникова, 63, МСП, Київ

ВАТ "Книжкова друкарня наукової книги"

Київ, вул. Багговутівська, 17-21.