

519.2(075)
Ю94

С.В. Юхимчук, Л.М. Ваховська, Л.М. Захарченко

**Елементи кореляційної теорії
випадкових процесів**

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

С.В. Юхимчук, Л.М. Ваховська, Л.М. Захарченко

Елементи кореляційної теорії випадкових процесів



519.2(075) Ю 94 2005

Юхимчук С.В. Елементи кореляційної теорії

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів напряму підготовки 0804 “Комп’ютерні науки” спеціальності 7.080404 “Інтелектуальні системи прийняття рішень” денної та заочної форм навчання. Протокол № 10 від 26.05.2005 р.

Вінниця ВНТУ 2005



Рецензенти:

В.М. Лисогор, доктор технічних наук, професор

А.М.Петух, доктор технічних наук, професор

Р.Н. Кветний, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

465373

С.В. Юхимчук, Л.М. Ваховська, Л.М. Захарченко.

Ю 94 Елементи кореляційної теорії випадкових процесів. Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2005. – 82 с.

Посібник розрахований на студентів спеціальності 7.080404 «Інтелектуальні системи прийняття рішень». Розглянуті основні положення кореляційної теорії випадкових процесів та її застосування для розв'язку технічних задач.

УДК 519.21(075)

**НТБ ВНТУ
м. Вінниця**

© С.Юхимчук, Л.Ваховська, Л.Захарченко, 2005

Вступ	5
1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ	6
1.1 Означення випадкової функції та випадкового процесу.....	6
1.2 Моментні характеристики випадкових процесів.....	7
1.3 Властивості кореляційної функції випадкових процесів.....	9
Питання для самоперевірки.....	11
Лабораторна робота № 1	12
2 ХАРАКТЕРИСТИКА СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ	14
2.1 Означення стаціонарних випадкових процесів.....	14
2.2 Властивості кореляційної функції стаціонарних випадкових процесів.....	15
Питання для самоперевірки.....	16
3 ХАРАКТЕРИСТИКА ЕРГОДИЧНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ	17
3.1 Означення ергодичних випадкових процесів.....	17
3.2 Статистичні характеристики оцінок математичного сподівання кореляційної функції ергодичних випадкових процесів	18
Питання для самоперевірки.....	20
4 СПЕКТРАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ	21
4.1 Означення функції спектральної щільності потужності випадкового процесу.....	21
4.2 Основні властивості функції спектральної щільності потужності випадкового процесу	23
Питання для самоперевірки.....	24
Лабораторна робота № 2.....	25
5 ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ	27
5.1 Основні означення кореляційної теорії дискретних випадкових процесів.....	27
5.2 Частотні характеристики дискретних випадкових процесів.....	28
Питання для самоперевірки.....	31
6 ШВИДКЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є	32
6.1 Алгоритм ШПФ.....	32
6.2 Процес обчислення ДПФ за допомогою направленої графу... ..	34
6.3 Знаходження оберненого ДПФ.....	36
Питання для самоперевірки.....	37
Лабораторна робота № 3	38
7 ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ З ОДНИМ ВХОДОМ ТА ОДНИМ ВИХОДОМ	41
7.1 Аналіз можливості реалізації фізичних систем.....	41

7.2 Дослідження впливу шуму на поведінку системи, що розглядається.....	51
7.3 Аналіз системи зі зворотнім зв'язком.....	59
Питання для самоперевірки.....	63
Лабораторна робота № 4.....	64
8 ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ І ПЕРЕДБАЧЕННЯ ЇХ РЕАКЦІЇ.....	66
8.1. Визначення частотної характеристики.....	66
8.2. Помилки оцінювання частотної характеристики.....	73
Питання для самоперевірки.....	77
Лабораторна робота № 5.....	79
Список використаної літератури.....	81

Вступ

Дослідження вхідних і вихідних процесів систем – головна область застосування спектрального і кореляційного аналізу до розв'язку інженерних задач. Це обумовлено появою сучасних засобів обчислювальної техніки, а також розробкою нових методів в області чисельного моделювання і інтерпретації результатів аналізу, які зробили можливим розв'язання багатьох складних задач.

Перший розділ навчального посібника висвітлює основні поняття і визначення кореляційної теорії випадкових процесів, які необхідні в подальшому при розгляді стаціонарних і ергодичних випадкових процесів (розділ 2, 3 і 4).

В п'ятому розділі розглянуто основні властивості дискретних випадкових функцій та їх числові характеристики.

Далі, в шостому розділі, розглянуто алгоритм швидкого перетворення Фур'є, за допомогою якого нині здійснюється підрахунок спектральної та взаємоспектральної щільності випадкових процесів та відповідних кореляційних функцій.

Методи аналізу одновимірної лінійної системи і методи оцінювання її характеристик детально розглянуті в сьомому і восьмому розділах.

В навчальному посібнику поряд з теоретичним матеріалом подані лабораторні роботи, які допомагають закріпити окремі теоретичні положення.

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Вивчення ряду явищ природи побудоване на спостереженні процесів, що характеризуються функціями, які залежно від напрямку досліджень мають різний фізичний зміст. Такими функціями можуть бути, наприклад, траєкторії частинок у броунівському русі, профіль дороги, сигнал на виході радіоприймача, на який діють збурення, тощо [1].

1.1 Означення випадкової функції та випадкового процесу

Функція невинядкового аргументу t (наприклад, часу), яка приймає випадкові значення, називається випадковою функцією елементарних подій $X(t, \omega)$, де ω – елементарна подія. Випадкова функція, аргументом якої є час, називається випадковим процесом. Якщо зафіксувати елементарну подію $\omega = \omega_0$, то $X(t, \omega_0)$ буде невинядковою функцією аргументу t [1].

Конкретний вигляд випадкової функції при фіксованому ω називають реалізацією випадкової функції. Випадковий процес, який описує явища, що вивчаються, задається ансамблем його реалізацій. Для випадкових процесів характерно, що ні одна з реалізацій не повторюється. Випадковий процес неможливо подати детермінованими функціями.

На рис.1.1 наведені реалізації випадкової функції $X(t, \omega)$ при $\omega = \omega_1$, $\omega = \omega_2$, $\omega = \omega_3$. Якщо зафіксувати моменти часу $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ та розглянути n перетинів випадкової функції $X(t_1, \omega), X(t_2, \omega), \dots, X(t_n, \omega)$, то в кожному з перетинів отримаємо набір значень випадкової величини.

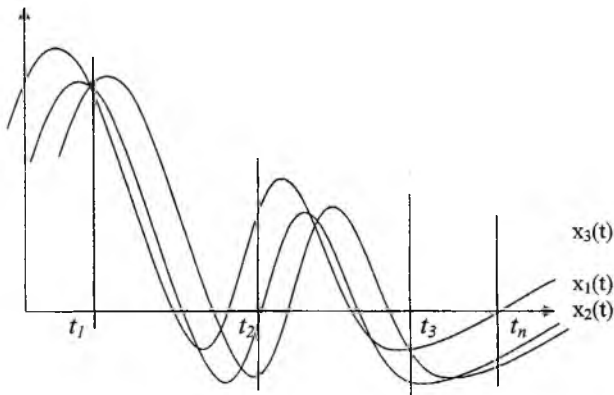


Рисунок 1.1 – Реалізації випадкової функції $X(t, \omega)$

В подальшому аргумент ω при розгляді характеристик випадкового процесу не будемо використовувати з метою спрощення запису розрахункових співвідношень.

Введемо до розгляду одновимірну функцію розподілу [2]:

$$F_1(x_i, t_i) = P\{X(t_i) < x_i\}, \quad (1.1)$$

де $F_1(x_i, t_i)$ – функція розподілу t_i перетину, $X(t_i)$ – випадкове значення взятє в t_i перетині.

Для перетину t_j :

$$F_1(x_j, t_j) = P\{X(t_j) < x_j\}. \quad (1.2)$$

В загальному вигляді функція розподілу прийме вигляд:

$$F_1(x, t) = P\{X(t) < x\}. \quad (1.3)$$

По аналогії з одновимірною випадковою величиною щільність ймовірностей буде визначатись виразом:

$$f_1(x, t) = \frac{(\partial F_1(x, t))}{\partial x}, \quad (1.4)$$

де t – це час, який задається дослідником.

При цьому F_1, f_1 характеризують випадкові функції тільки в одному перетині. Для того, щоб з'ясувати зв'язки між перетинами, в розгляд вводяться двовимірні функції розподілу та щільності розподілу ймовірностей [2, 3]:

$$F_2(x_i, x_j, t_i, t_j) = P\{X(t_i) < x_i; X(t_j) < x_j\}, \quad (1.5)$$

$$f_2(x_i, x_j, t_i, t_j) = \frac{\partial^2 F_2(x_i, x_j, t_i, t_j)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (1.6)$$

де $f_2(x_i, x_j, t_i, t_j) dx_i dx_j = P\{x_i < x(t_i) < x_i + dx_i; x_j < x(t_j) < x_j + dx_j\}$.

Для того, щоб повністю задати функцію $X(t)$ необхідно знати n -вимірну функцію розподілу, яка залежить від n змінних та n значень часу:

$$F_n(x_i, x_j, \dots, x_n; t_i, t_j, \dots, t_n) = P\{X(t_i) < x_i; X(t_j) < x_j, \dots, X(t_n) < x_n\}, \quad (1.7)$$

$$f_2(x_i, x_j, \dots, x_n; t_i, t_j, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_2(x_i, x_j, \dots, x_n, t_i, t_j, \dots, t_n)}{\partial x_i \partial x_j \dots \partial x_n}. \quad (1.8)$$

Якщо відомо (1.7) та (1.8), то завжди можна знайти функції розподілу та щільності ймовірностей меншої розмірності. Але на практиці, звичайно, невідомі функції розподілу великої розмірності, тому в ряді випадків обмежуються заданням тільки двовимірних функцій розподілу, як і, відповідно, двовимірних функцій щільності розподілу ймовірностей.

1.2 Моментні характеристики випадкових процесів

Важливими характеристиками випадкових величин є відповідні моменти. Використаємо ці поняття для опису випадкових процесів. Якщо відомі двовимірні функції розподілу та щільності розподілу ймовірностей,

то можна обчислити моменти випадкового процесу до другого порядку включно.

Математичним сподіванням випадкового процесу $X(t)$ називається невідповідна функція $m_x(t)$, яка в кожний момент часу дорівнює математичному сподіванню перетину, який береться в цей самий момент [1].

$$M[X(t)] = m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x,t)dx. \quad (1.9)$$

Дисперсією випадкового процесу $X(t)$ називається невідповідна функція $D_x(t)$, яка в кожний момент часу дорівнює дисперсії перетину, який береться в цей самий момент [1]:

$$D[X(t)] = G_x^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 f(x,t) dx = D_x(t). \quad (1.10)$$

Кореляційною функцією випадкового процесу $X(t)$ називається невідповідна функція $K_x(t_b, t_j)$, яка в вибрані моменти часу t_b, t_j дорівнює кореляційному моменту перетинів, які взяті в ці моменти [1]:

$$K_x(t_b, t_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_x(t_b)] [x_2 - m_x(t_j)] f_2(x_b, x_j, t_b, t_j) dx_b dx_j. \quad (1.11)$$

Кореляційна функція $K_x(t_b, t_j)$ характеризує розкид випадкового процесу біля середніх значень та лінійний зв'язок між перетинами.

Якщо $t_i = t_j$, то з (1.11) витікає:

$$K_x(t_b, t_b) = G_x^2(t) = D_x(t). \quad (1.12)$$

Для подальшого більш строгого викладення матеріалу введемо поняття комплексного випадкового процесу. В цьому випадку випадкова функція має вигляд [3]:

$$Z(t) = X(t) + jY(t), \quad (1.13)$$

де $X(t), Y(t)$ – процеси з дійсними значеннями.

Математичне сподівання комплексного випадкового процесу визначається виразом [3]:

$$M[Z(t)] = M[X(t)] + jM[Y(t)]. \quad (1.14)$$

Дисперсією випадкового процесу $Z(t)$ називається математичне сподівання квадрата модуля її центрованого значення [3]:

$$G^2[Z(t)] = M \left[\overset{\circ}{Z}(t) \right]^2 = M \left[\overset{\circ}{Z}(t) - \overline{\overset{\circ}{Z}(t)} \right], \quad (1.15)$$

де $\overset{\circ}{Z}(t) = (X - m_x(t)) + j(Y - m_y(t))$, а $\overline{\overset{\circ}{Z}(t)}$ – спряжене значення $\overset{\circ}{Z}(t)$.

Кореляційна функція комплексного випадкового процесу визначається співвідношенням [3]:

$$K_z(t_i, t_j) = M \left[\overset{\circ}{Z}(t_i) - \overline{\overset{\circ}{Z}(t_j)} \right], \quad (1.16)$$

тобто це є центральний момент другого порядку.

Крім кореляційної функції вводиться змішаний початковий момент другого порядку (коваріаційна функція) [4]:

$$\Gamma_z(t_i, t_j) = M[Z(t_i)Z(t_j)]. \quad (1.17)$$

Знайдемо зв'язок між (1.16) і (1.17):

$$\begin{aligned} K_z(t_i, t_j) &= M[(Z(t_i) - m_z(t_i))(\overline{Z(t_j)} - \overline{m_z(t_j)})] = \\ &= M[Z(t_i) \cdot \overline{Z(t_j)}] - m_z(t_i) \cdot M[\overline{Z(t_j)}] - \overline{m_z(t_j)} \cdot M[Z(t_i)] + \\ &+ m_z(t_i) \cdot \overline{m_z(t_j)} = \Gamma_z(t_i, t_j) - m_z(t_i) \cdot \overline{m_z(t_j)}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

1.3 Властивості кореляційної функції випадкових процесів

Розглянемо основні властивості кореляційної функції:

1. Кореляційна функція при однакових значеннях аргументів ($t_i = t_j = t$) дорівнює дисперсії випадкової функції, тобто:

$$K(t, t) = D(t). \quad (1.19)$$

2. При зміні місцями аргументна кореляційна функція змінюється на комплексно спряжену, тобто

$$K(t_i, t_j) = \overline{K(t_j, t_i)}. \quad (1.20)$$

Доведення:

$$K(t_i, t_j) = M[\dot{Z}(t_i) \cdot \overline{\dot{Z}(t_j)}] = M[\overline{\overline{\dot{Z}(t_i) \cdot \dot{Z}(t_j)}}] = M[\overline{\dot{Z}(t_i) \cdot \dot{Z}(t_j)}] = \overline{K(t_j, t_i)}.$$

Якщо випадковий процес дійсний, то

$$K(t_i, t_j) = K(t_j, t_i). \quad (1.21)$$

3. Якщо до випадкового процесу додати не випадкову функцію $\varphi(t)$, то кореляційна функція не змінюється.

Дійсно, нехай випадкова функція $Z_1(t)$ дорівнює:

$$Z_1(t) = Z(t) + \varphi(t).$$

Тоді:

$$M[Z_1(t)] = M[Z(t)] + \varphi(t).$$

Якщо від першого рівняння відняти друге, отримуємо $\dot{Z}_1(t) = \dot{Z}(t)$.

Таким чином,

$$K_{z_1}(t_i, t_j) = M[\dot{Z}_1(t_i) \cdot \overline{\dot{Z}_1(t_j)}] = M[\dot{Z}(t_i) \cdot \overline{\dot{Z}(t_j)}] = K_z(t_i, t_j)$$

4. Для будь-якої кореляційної функції справедлива нерівність:

$$|K(t_i, t_j)| \leq \sqrt{G^2(t_i)G^2(t_j)}. \quad (1.22)$$

При $K(t_i, t_j) = 0$ нерівність (1.22) справедлива. Нехай $K(t_i, t_j) \neq 0$, тоді розглянемо рівність:

$$M\left[\left(\dot{X}_i - \lambda \dot{X}_j\right)^2\right] = M\left[\left(\dot{X}_i\right)^2 - 2\lambda \dot{X}_i \dot{X}_j + \lambda^2 \left(\dot{X}_j\right)^2\right] = M\left[\left(\dot{X}_i\right)^2\right] - 2\lambda M\left[\dot{X}_i \dot{X}_j\right] + \lambda^2 M\left[\left(\dot{X}_j\right)^2\right] = D\left[X_i\right] - 2\lambda K\left(t_i, t_j\right) + \lambda^2 D\left[X_j\right].$$

Вираз у лівій частині цієї рівності додатний при будь-якому λ як математичне сподівання квадрата випадкової величини. Встановимо, що $\lambda = \frac{D[X_i]}{K(t_i, t_j)}$, тоді якщо підставити це значення в останній вираз, отримаємо:

$$D[X_i] - \frac{2D[X_i]K(t_i, t_j)}{K(t_i, t_j)} + \frac{(D[X_i])^2 D[X_j]}{K^2(t_i, t_j)} \geq 0. \quad (1.23)$$

Помножимо вираз (1.23) на $\frac{K^2(t_i, t_j)}{D[X_i]}$, отримуємо:

$$-K^2(t_i, t_j) + D[X_i]D[X_j] \geq 0,$$

звідки витікає справедливості виразу (1.22).

5. Кореляційна функція є позитивно-визначеною функцією.

Функція $f(x, y)$ називається позитивно-визначеною, якщо для будь-яких λ_i, λ_j справедлива нерівність:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, x_j) \lambda_i \lambda_j \geq 0.$$

Доведемо справедливості останнього співвідношення для кореляційної функції [4]:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (k(t_i, t_j) \lambda_i \bar{\lambda}_j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M\left[\dot{Z}(t_i) \overline{\dot{Z}(t_j)}\right] \lambda_i \bar{\lambda}_j = M\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{Z}(t_i) \overline{\dot{Z}(t_j)} \lambda_i \bar{\lambda}_j\right] = \\ &= \left[\left(\sum_{i=1}^n \dot{Z}(t_i) \lambda_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \overline{\dot{Z}(t_j)} \bar{\lambda}_j \right) \right] = M\left[\left| \sum_{i=1}^n \dot{Z}(t_i) \lambda_i \right|^2 \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Часто замість кореляційної функції розглядається нормована безрозмірна кореляційна функція:

$$R(t_i, t_j) = \frac{K(t_i, t_j)}{\sqrt{D(t_i)D(t_j)}}. \quad (1.24)$$

З (1.24) та властивостей кореляційної функції легко показати, що для нормованої кореляційної функції справедливі такі співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} R(t, t) &= 1, \\ R(t_j, t_j) &= R(t_i, t_j), \\ R(t_j, t_j) &\geq 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

В теорії випадкових функцій велику роль відіграє один з видів випадкової функції, математичне сподівання якої дорівнює нулю, а

кореляційна функція є дельта-функцією. Таку випадкову функцію називають білим шумом. Для білого шуму справедливо [2 - 5]:

$$M[X(t)] = 0,$$

$$K(t_i, t_j) = G(t)\delta(t_i - t_j),$$

де $G(t)$ – інтенсивність білого шуму.

Розглянемо систему n випадкових функцій:

$$X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t). \quad (1.26)$$

Кожна з функцій цієї системи характеризується математичним сподіванням та кореляційною функцією, але є потреба ввести ще характеристику зв'язку між окремими випадковими процесами системи (1.26). Такою характеристикою є взаємкореляційна функція двох випадкових процесів $X(t_i), Y(t_j)$, яка визначається рівністю [4]:

$$K_{XY}(t_i, t_j) = M\left[\overset{\circ}{X}(t_i)\overset{\circ}{Y}(t_j)\right]. \quad (1.27)$$

Вираз, який визначається рівністю (1.27), часто називають ще й автокореляційною функцією. Для взаємкореляційної функції справедливі властивості 2 і 4 кореляційної функції випадкового процесу.

В ряді випадків використовують безрозмірну характеристику зв'язку між випадковими функціями - нормовану взаємкореляційну функцію:

$$R_{XY}(t_i, t_j) = \frac{K_{XY}(t_i, t_j)}{\sqrt{G^2(t_i)G^2(t_j)}}. \quad (1.28)$$

Взаємкореляційна функція є центральним моментом другого порядку, інколи використовують взаємопочатковий момент другого порядку:

$$\Gamma_{xy}(t_e, t_m) = M[X(t_e) \cdot \overline{Y(t_m)}]. \quad (1.29)$$

Легко показати, що

$$K_{xy}(t_i, t_j) = \Gamma_{xy}(t_i, t_j) - m_x(t_i)\overline{m_y(t_j)}. \quad (1.30)$$

Питання для самоперевірки:

1. Які функції є випадковими ?
2. Що вивчає кореляційна теорія випадкових функцій ?
3. Коли випадкову функцію називають випадковим процесом ?
4. Що називають реалізацією випадкової функції ?
5. Назвіть основні характеристики випадкового процесу.
6. Які є моментні характеристики випадкових процесів ?
7. Як визначається математичне сподівання випадкового процесу ?
8. Що характеризує дисперсія випадкового процесу ?
9. Як визначається кореляційна функція і взаємкореляційна функція випадкового процесу ?
10. Назвіть основні властивості кореляційної функції випадкового процесу.
11. Наведіть означення нормованих кореляційної і взаємкореляційної функцій.

Лабораторна робота № 1

Тема: Дослідження властивостей кореляційної функції випадкового процесу $X(t)$.

Мета: Експериментальним шляхом дослідити властивості кореляційної функції випадкових процесів.

Порядок виконання роботи:

1. Обрати, згідно з варіантом, вигляд випадкового процесу $X(t)$.
2. Задатися значенням математичного сподівання $M(u)$ і дисперсії $D(u)$, де u - випадкова величина випадкової функції $X(t)$.
3. Знайти кореляційну функцію $K_x(t_b, t_j)$.
4. Побудувати $K_x(t_b, t_j)$.
5. Дослідити властивості кореляційної функції $K_x(t_b, t_j)$. Побудувати відповідні графіки.
6. Зробити висновки по роботі і оформити звіт.

Методика виконання:

Приклад:

Нехай задано випадковий процес $X(t) = ut$, де u - випадкова величина.

Задаємося довільними значеннями математичного сподівання $M(u)$ і дисперсії $D(u)$. Приймаємо: $M(u) = 4$, $D(u) = 10$. Тоді

$$m_x(t) = M(X(t)) = M(ut) = t \cdot M(u) = 4t,$$

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) = ut - 4t = t(u-4),$$

$$\overset{\circ}{X}(t_1) = (u-4)t_1,$$

$$\overset{\circ}{X}(t_2) = (u-4)t_2,$$

$$K_x(t_1, t_2) = M(\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)) = M((u-4)t_1(u-4)t_2) = t_1 t_2 M((u-4)^2) = 10t_1 t_2,$$

$$K_x(t_1, t_2) = 10t_1 t_2.$$

Зміст звіту:

1. Титульний лист.
2. Мета роботи.
3. Обчислення $K_x(t_b, t_j)$.
4. Графік $K_x(t_b, t_j)$.
5. Результати перевірки (графіки, обчислення) властивостей $K_x(t_b, t_j)$.
6. Висновки за результатами роботи.

Варіанти завдань:

№ вар.	Аналітичне подання випадкових процесів	№п/п вар.	Аналітичне подання випадкових процесів
1	$X(t) = u \sin(t)$	6	$X(t) = u (t^2 + 7)^{\frac{1}{3}}$
2	$X(t) = u \cos(t^2)$	7	$X(t) = u \sqrt{t^3 - 4}$
3	$X(t) = u(t^2 + 3)$	8	$X(t) = u(t-7)^2$
4	$X(t) = u\sqrt{t}$	9	$X(t) = u(1 - e^t)$
5	$X(t) = u e^{2t}$	10	$X(t) = \frac{u}{e^{0,4t}}$

2 ХАРАКТЕРИСТИКА СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Всю множину випадкових процесів розбивають на стаціонарні випадкові процеси і нестаціонарні випадкові процеси. Але більш вірним є те, що всі випадкові процеси є нестаціонарними і тільки частина з них стаціонарні [3].

2.1 Означення стаціонарних випадкових процесів

Випадкові процеси, які не змінюють свої числові характеристики з часом, називають стаціонарними процесами [3].

Існують поняття стаціонарних випадкових процесів у вузькому та широкому сенсі [3, 4]. Випадковий процес, для якого всі n -вимірні функції розподілу не змінюються зі зміною початку відліку часу, носить назву стаціонарного у вузькому сенсі.

Для нього виконується рівність:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + h, t_2 + h, \dots, t_n + h). \quad (2.1)$$

Аналогічна рівність має місце для функції щільності розподілу ймовірності:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + h, t_2 + h, \dots, t_n + h).$$

В кореляційній теорії розглядаються моменти випадкових функцій тільки до другого порядку, тому необхідно ввести ще одне поняття стаціонарного випадкового процесу.

Випадковий процес з постійним математичним сподіванням і кореляційною функцією, яка залежить тільки від різниці аргументів, носить назву стаціонарного в широкому сенсі (сенсі Хінчіна).

$$\left. \begin{aligned} m_x(t) &= M[X(t)] = \text{const} \\ K(t_i, t_j) &= K(t_i - t_j) = K(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Якщо випадковий процес має нормальний закон розподілу, то всі n -вимірні функції розподілу ймовірностей повністю визначаються вектором математичного сподівання:

$$\bar{m}(t) = [m(t_1), m(t_2), \dots, m(t_n)]$$

та кореляційною матрицею

$$k = [k(t_i, t_j)] = \begin{bmatrix} k(t_1, t_1) & \dots & k(t_1, t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ k(t_n, t_1) & \dots & k(t_n, t_n) \end{bmatrix}.$$

В цьому випадку n -вимірна щільність розподілу n -вимірного вектора, який відповідає n -перетинам випадкового процесу визначається виразом [6]:

$$x(t) = f(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2 (\det)^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}[(x - \bar{m})k^{-1}(x - \bar{m})]\right). \quad (2.3)$$

Аналіз (2.3) дозволяє зробити висновок, що якщо випадковий процес має нормальний закон розподілу, то він стаціонарний в широкому сенсі, тобто його математичне сподівання і кореляційна матриця дорівнюють, відповідно:

$$\bar{m} = \begin{pmatrix} m \\ m \\ \vdots \\ m \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad [k(t_i, t_j)] = \begin{pmatrix} k(t_1 - t_1) & \dots & k(t_1 - t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ k(t_n - t_1) & \dots & k(t_n - t_n) \end{pmatrix},$$

але такий випадковий процес стаціонарний і у вузькому сенсі, тому що для такої функції при зміні початку відліку аргументу t , вектор математичного сподівання і кореляційна матриця, а відповідно, і всі n -вимірні функції щільності розподілу ймовірностей не зміняться.

Кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу залежить тільки від одної змінної $t_i - t_j = \tau$.

2.2 Властивості кореляційної функції стаціонарних випадкових процесів

Розглянемо властивості кореляційної функції стаціонарних випадкових процесів [5, 6]:

1. Дисперсія стаціонарного випадкового процесу дорівнює значенню кореляційної функції при $\tau = 0$, тобто

$$D[X(t)] = K_x(t - t) = K_x(0) = D[X(t)] = K_x(0) = D = \text{const.}$$

2. Якщо змінити знак аргументу, то кореляційна функція зміниться на комплексно-спряжену, тобто

$$K(\tau) = \overline{K(-\tau)}. \quad (2.4)$$

Для дійсний стаціонарних випадкових процесів маємо:

$$K(\tau) = K(-\tau),$$

тобто кореляційна функція є функцією парною.

3. Модуль кореляційної функції при довільних τ не перевищує її значення при $\tau = 0$, тобто

$$|K(\tau)| \leq D = K(0). \quad (2.5)$$

Нормована кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу визначається виразом:

$$R(\tau) = \frac{K(t_i - t_j)}{D} = \frac{K(\tau)}{D} = \frac{K(\tau)}{K(0)}. \quad (2.6)$$

Два стаціонарних випадкових процеси $X(t_i)$ та $Y(t_j)$ називаються стаціонарно пов'язаними, якщо їх взаємкореляційна функція залежить тільки від різниці аргументів, тобто

$$\left. \begin{aligned} K_{xy}(t_i, t_j) &= K_{xy}(t_i - t_j) = K_{xy}(\tau), \quad (\tau = t_i - t_j) \\ R_{xy}(t_i, t_j) &= R_{xy}(t_i - t_j) = R_{xy}(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

З рівностей, які пов'язують початкові та центральні моменти можна отримати, що для стаціонарних випадкових функцій початкові моменти другого порядку:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(t_i, t_j) &= K_x(t_i - t_j) + \overline{m_x}^2 = \Gamma_x(t_i - t_j), \\ \Gamma(t_i, t_j) &= K_{xy}(t_i - t_j) + \overline{m_x} \overline{m_y} = \Gamma_{xy}(t_i - t_j). \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Тобто початкові моменти другого порядку для стаціонарних функцій залежать тільки від різниці аргументів.

Питання для самоперевірки:

1. Як називаються випадкові функції, що не змінюють свої характеристики з плином часу?
2. Як визначається стаціонарна випадкова функція в вузькому сенсі?
3. Як визначається стаціонарна випадкова функція в широкому сенсі?
4. Які дві випадкові функції називаються стаціонарно пов'язаними?
5. Наведіть основні властивості кореляційної функції стаціонарних випадкових процесів.

3 ХАРАКТЕРИСТИКА ЕРГОДИЧНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

В кореляційній теорії випадкових процесів, випадковий процес характеризується такими моментами першого і другого порядків [2 - 6]:

- 1) математичним сподіванням;
- 2) дисперсією;
- 3) кореляційною функцією.

Для того, щоб оцінити математичне сподівання будь-якого процесу, необхідно виконати велику кількість експериментів, зафіксувати кожну з реалізацій, а потім визначити в кожному перетині t_i ($i=1, m$) середнє значення випадкового процесу. Якщо розглядати це середнє значення як функцію часу t , то при кількості реалізацій $n \rightarrow \infty$ таке середнє буде за ймовірністю збігатися до математичного сподівання $M[x(t)]$ випадкового процесу $X(t)$.

3.1 Означення ергодичних випадкових процесів

Дуже часто бажано визначити статистичні характеристики випадкового процесу як результат не багатьох, а одного досліду. В багатьох практичних випадках це є можливим. Знайдемо середнє значення за часом m^* однієї з реалізацій випадкової функції $X(t)$ на відрізку $[0, t]$ оці часу:

$$m^* = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt.$$

Означення: Стаціонарні випадкові процеси, для яких усереднення по часу відповідає усередненню по ансамблю, носять назву ергодичних процесів [4, 6].

Тобто, для ергодичних процесів:

$$m^* = m_x = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx}_{\text{для ансамблю реалізацій}} = \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt}_{\text{одна реалізація ергодичних процесів}}. \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} K_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_i - m_x(t_i)] [x_j - m_x(t_i + \tau)] f_2(x_i, x_j, \tau) dx_i dx_j = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int [x(t) - m_x(t)] \times [x(t + \tau) - m_x(t)] dt. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для ергодичних випадкових процесів оцінки математичного сподівання кореляційної функції та взаємкореляційної функції можна знайти за допомогою співвідношень:



$$\left. \begin{aligned} m^* &= \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt, \\ K^*(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T \dot{X}(t) \dot{X}(t+\tau) dt \quad \text{або} \quad \frac{1}{T} \int_0^T \dot{X}(t) \dot{X}(t-\tau) dt, \\ K_{xy}^* &= \frac{1}{T} \int_0^T \dot{X}(t) \dot{Y}(t+\tau) dt \quad \text{або} \quad \frac{1}{T} \int_0^T \dot{X}(t) \dot{Y}(t-\tau) dt. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Оцінки, що визначаються співвідношенням (3.3) самі є випадковими величинами. Для того, щоб оцінити відповідні характеристики, вони повинні бути достатньо близькими до дійсних значень.

Якщо математичне сподівання оцінки співпадає із значенням величини що оцінюється, то її називають незсувною.

Якщо дисперсія оцінки прямує до нуля, то її називають слухною.

3.2 Статистичні характеристики оцінок математичного сподівання кореляційної функції ергодичних випадкових процесів

Розглянемо статистичні характеристики оцінок математичного сподівання кореляційної функції ергодичних випадкових процесів.

$$M[m^*] = M\left[\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt\right] = \frac{1}{T} \int_0^T M[X(t)] dt = \frac{1}{T} M[X(t)] \Big|_0^T = M[X(t)].$$

Останній вираз підтверджує те, що оцінка математичного сподівання ергодичних випадкових процесів є величиною незсувною.

$$\begin{aligned} M[K^*(\tau)] &= M\left[\frac{1}{T} \int_0^T \dot{X}(t) \dot{X}(t+\tau) dt\right] = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T M[\dot{X}(t) \dot{X}(t+\tau)] dt = \frac{1}{T} \int_0^T k(\tau) dt = \frac{1}{T} k(\tau) \Big|_0^T = K_x(\tau). \end{aligned}$$

Знайдемо дисперсію оцінки математичного сподівання [6]:

$$\begin{aligned} G^2[m^*] &= M[(m^* - m)^2] = \\ &= M\left[\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T (x(t_i) - m)(x(t_j) - m) dt_i dt_j\right] = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T M[(x(t_i) - m)(x(t_j) - m)] dt_i dt_j = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T k(t_i - t_j) dt_i dt_j. \end{aligned}$$

Щоб знайти подвійний інтеграл введемо нові змінні:

$$\begin{cases} \tau = t_1 - t_2, \\ v = t_2. \end{cases}$$

Знайдемо якобіан перетворення:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{dt_1}{d\tau} & \frac{dt_1}{dv} \\ \frac{dt_2}{d\tau} & \frac{dt_2}{dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

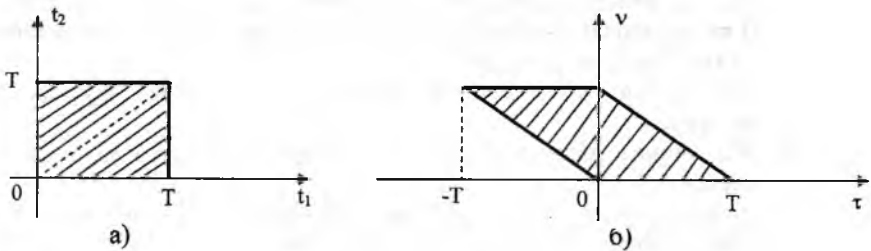


Рисунок 3.1 – Межі інтегрування за змінними t_1, t_2 (а) і τ, v (б)

Якщо врахувати, що кореляційна функція дійсної змінної є непарною функцією, то останній вираз можна подати у вигляді:

$$G^2[m^*] = \frac{2}{T^2} \int_0^T k(\tau) d\tau \int_0^{T-\tau} dv = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) k(\tau) d\tau. \quad (3.4)$$

Якщо дисперсія математичного сподівання прямує до нуля,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) k(\tau) d\tau = 0,$$

то оцінка математичного сподівання є слушною.

Крім того, останнє співвідношення є необхідною і достатньою умовою ергодичності випадкового процесу. Але остання границя знаходиться не так просто [5].

Існує теорема, яка визначає достатні умови ергодичності. Для того, щоб стаціонарний випадковий процес був ергодичним, достатньо щоб його кореляційна функція прямувала до нуля при нескінченному зростанні τ [6].

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K(\tau) = 0. \quad (3.5)$$

Найбільш широко використовуються наступні апроксимації кореляційних функцій [2, 6]:

$$k(\tau) = G^2 \exp(-\alpha|\tau|),$$

$$k(\tau) = G^2 \exp(-\alpha|\tau|) \cos \beta\tau,$$

$$k(\tau) = G^2 \exp(-\alpha|\tau|) \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right).$$

Питання для самоперевірки:

1. Які випадкові процеси є ергодичними?
2. Сформулюйте достатню умову ергодичності випадкових процесів.
3. В якому випадку випадкова функція є ергодичною по відношенню до кореляційної функції?
4. Яка оцінка математичного сподівання випадкової функції є незсувною?
5. Яка оцінка математичного сподівання випадкової функції є слухною?
6. Доведіть незсувність оцінок математичного сподівання і кореляційної функції ергодичних випадкових процесів.
7. Наведіть необхідні і достатні умови ергодичності випадкових процесів та достатні умови ергодичності.

4 СПЕКТРАЛЬНЕ ПОДАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Таке подання запропоновано в роботах В.С. Пугачова [7]. Ним було доведено що будь-який стаціонарний випадковий процес з кінцевою дисперсією з деякою точністю можна подати у вигляді:

$$X(t) \approx \sum_{k=-n}^n V_k e^{j\omega_k t} + m_x(t), \quad (4.1)$$

де V_k - некорельовані випадкові величини;
 ω_k - кругова частота, причому $\omega_k = -\omega_{-k}$;
 $m_x(t)$ - математичне сподівання процесу ($m_x(t) = const$),

$$M[V_k] = 0, M[V_k \bar{V}_l] = \begin{cases} d_k, k=l \\ 0, k \neq l \end{cases} \quad (d_{-k} = -d_k),$$

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_k e^{j\omega_k t}, \quad (4.2)$$

$$X(t) = \overset{\circ}{X}(t) + m_x(t). \quad (4.3)$$

Знайдемо кореляційну функцію процесу (4.3) з врахуванням (4.1) і (4.2)

$$K_x(t_i - t_j) = M \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} V_k e^{j\omega_k t_i} V_l e^{-j\omega_l t_j} \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \exp(j\omega_k(t_i - t_j)). \quad (4.4)$$

Останнє співвідношення справедливе, якщо відоме канонічне представлення випадкових процесів.

Знайдемо границю (4.3) у випадку, коли $k \rightarrow \infty$

$$X(t) = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \max \omega_k \rightarrow 0}} \sum_{k=-n}^k V_k e^{j\omega_k t} \Delta \omega_k + m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{j\omega t} d\omega + m_x(t). \quad (4.5)$$

Співвідношення (4.5) задає спектральне подання стаціонарного випадкового процесу $X(t)$.

Доведення співвідношення (4.5) наведене в книзі Розанова Ю.В.[4].

4.1 Означення функції спектральної щільності потужності випадкового процесу

Якщо умови некорельованості для кінцевої суми наводилися раніше, то для нескінченної суми ці умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} M[V(\omega)] &= 0, \\ M[V(\omega) \bar{V}(\lambda)] &= \frac{S(\omega)}{2\pi} \delta(\omega - \lambda), \end{aligned} \quad (4.6)$$

де $\delta(t)$ — функція, яка має такі властивості:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Для з'ясування сутності (4.6) згадаємо поняття *білого шуму*, яке було введено в першому розділі. Білий шум є випадковим процесом, математичне сподівання якого дорівнює нулю, кореляційна функція визначається виразом:

$$K(t_i, t_j) = G(t)\delta(t_i - t_j), \quad (4.7)$$

де $G(t)$ - інтенсивність білого шуму

Порівняємо співвідношення (4.6) і (4.7). Це порівняння дозволяє зробити висновок, що випадкова функція $V(\omega)$ є білим шумом з інтенсивністю $\frac{S(\omega)}{2\pi}$, тобто випадкові величини $V(\omega)$, $V(\lambda)$ некорельовані за будь-яких фіксованих $\omega \neq \lambda$.

При цьому функція $S(\omega)$ називається *спектральною щільністю потужності* випадкового процесу $X(t)$ [7].

Знайдемо кореляційну функцію стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ з урахуванням співвідношення (4.1):

$$\begin{aligned} K(t_i, t_j) &= M[\overset{\circ}{X}(t_i)\overset{\circ}{X}(t_j)] = M\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [V(\omega)\overline{V(\lambda)}] e^{j\omega t_i} e^{-j\lambda t_j} d\omega d\lambda\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M[V(\omega)\overline{V(\lambda)}] e^{+j(\omega t_i - \lambda t_j)} d\omega d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{+j(\omega t_i - \lambda t_j)} \delta(\omega - \lambda) d\omega d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{+j\omega(t_i - t_j)} d\omega = K(t_i - t_j), \end{aligned} \quad (4.8)$$

якщо $t_i - t_j = \tau$, то

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Зі співвідношення (4.8) витікає, що кореляційна функція є оберненим перетворенням Фур'є від спектральної щільності $S(\omega)$.

З іншого боку, спектральна щільність $S(\omega)$ є перетворенням Фур'є від кореляційної функції, тобто:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (4.9)$$

Формули (4.8) і (4.9) справедливі для взаємкореляційної функції $K_{xy}(\tau)$ і взаємоспектральної щільності потужності $S_{xy}(\omega)$

Формули (4.8) і (4.9) називаються формулами Вінера-Хінчина.

4.2 Основні властивості функції спектральної щільності потужності випадкового процесу

Розглянемо основні властивості функції спектральної щільності $S(\omega)$ [6, 7].

1. Спектральна щільність дійсного стаціонарного випадкового процесу є парною дійсною функцією аргументу ω

$$\left. \begin{aligned} S(\omega) &= S(-\omega), \\ I_m S(\omega) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Доведення:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau.$$

З парності кореляційної функції витікає, що підінтегральна функція в першому доданку парна, а в другому – непарна функція аргументу τ , тому $\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \sin \omega\tau d\tau = 0$ як інтеграл від непарної функції при симетричних межах інтегрування. В результаті можна записати, що

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \omega\tau d\tau.$$

2. Дисперсія дійсного стаціонарного процесу дорівнює інтегралу від спектральної щільності цього процесу в нескінченних границях поділеному на 2π , тобто

$$D_x = G^2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (4.11)$$

Доведення:

$$D = G^2(x) = K_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega.$$

У випадку, коли випадковий процес $X(t)$ є флуктуацією струму чи напруги, дисперсія випадкового процесу $X(t)$ як середнє значення квадрата струму або напруги пропорційна середній потужності цього процесу, тому з співвідношення (4.11) випливає, що спектральна щільність $S(\omega)$ в цьому випадку - це щільність потужності, яка приходить на одиницю кругової частоти ω .

3. Спектральна щільність $S(\omega)$ стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ є величиною не від'ємною:

$$S(\omega) \geq 0. \quad (4.12)$$

4. Для взаємної спектральної щільності $S_{XY}(\omega)$ справедливо:

$$S_{XY}(\omega) = \overline{S_{YX}(\omega)}. \quad (4.13)$$

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення функції $S(\omega)$ спектральної щільності потужності випадкового процесу $X(t)$.
2. Наведіть основні властивості функції спектральної щільності.
3. Наведіть приклад зв'язку між функцією спектральної щільності і кореляційною функцією.
4. Поясніть зміст формул Вінера-Хінчина.
5. Поясніть фізичний зміст спектральної щільності випадкового процесу.
6. Наведіть властивості спектральної щільності.

Лабораторна робота № 2

Тема: Дослідження спектральної щільності стаціонарних випадкових процесів.

Мета: експериментально підтвердити основні властивості спектральної щільності $S(\omega)$ випадкової функції $X(t)$.

Порядок виконання

1. Згідно з варіантом обрати кореляційну функцію $K_x(\tau)$ випадкової функції $X(t)$.
2. Обчислити функцію спектральної щільності $S(\omega)$.
3. Побудувати графік функції спектральної щільності $S(\omega)$.
4. Перевірити властивості спектральної щільності $S(\omega)$ і підтвердити їх графічно.
5. Оформити звіт за результатами роботи.

Зміст звіту:

1. Титульний лист.
2. Мета роботи.
3. Графік функції спектральної щільності $S(\omega)$.
4. Обчислення і графіки, що підтверджують властивості $S(\omega)$.
5. Висновки за результатами роботи.

Варіанти завдань

№п/п вар.	Кореляційна функція	Примітки
1	$K_x(\tau) = a^2 e^{-2\lambda \tau }$	$a = 1,74; \lambda = 1$
2	$K_x(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \tau , & \tau \leq 2 \\ 0, & \tau > 2 \end{cases}$	
3	$K_x(\tau) = D e^{-\alpha \tau }$	$D = 0,8; \alpha = 1$
4	$K_x(\tau) = \begin{cases} \sigma^2(1 - \tau), & \tau \leq 1 \\ 0, & \tau > 1 \end{cases}$	$\sigma = 0,5$
5	$K_x(\tau) = a e^{-0,5\lambda \tau }$	$a = 1,74; \lambda = 1$
6	$K_x(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3} \tau , & \tau \leq 3 \\ 0, & \tau > 3 \end{cases}$	
7	$K_x(\tau) = 5e^{-2 \tau }$	
8	$K_x(\tau) = a^2 e^{-2\lambda \tau }$	$a = 1,74; \lambda = 1$
9	$K_x(\tau) = \begin{cases} 1 - 0,5 \tau , & \tau \leq 2 \\ 0, & \tau > 2 \end{cases}$	
10	$K_x(\tau) = 0,32e^{- \tau }$	

5 ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

Якщо випадкові процеси $X(t)$ визначені лише для дискретних моментів часу $t = t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ (або $t = nT$, де T – інтервал дискретизації), то такі випадкові процеси називають дискретними випадковими процесами або випадковими послідовностями [2, 3].

За аргумент дискретного випадкового процесу можна прийняти індекс при t_n .

Щоб задати дискретний випадковий процес, необхідно задати всі його n -вимірні функції розподілу або n -вимірні функції щільності розподілу.

Але, як і для випадкових процесів з неперервними значеннями t , для дослідження дискретних випадкових функцій широко застосовується кореляційна теорія випадкових функцій, яка базується на знанні двох моментних характеристик – математичного сподівання і кореляційної функції.

5.1 Основні означення кореляційної теорії дискретних випадкових процесів

Наведемо означення, на яких базується кореляційна теорія дискретних випадкових процесів.

Означення 1

Математичним сподіванням дискретного випадкового процесу $X[n]$ називається випадкова числова послідовність $m_x[n]$, значення якої при кожному фіксованому n дорівнює математичному сподіванню випадкової величини $X[n]$, тобто [4, 6]:

$$m_x[n] = M(X[n]) = \sum_{i=1}^n X_i P_i, \quad (5.1)$$

Означення 2

Центрована випадкова величина визначається співвідношенням:

$$\overset{\circ}{X}[n] = X[n] - m_x[n]. \quad (5.2)$$

Означення 3

Кореляційною функцією дискретного випадкового процесу називається дискретна функція двох аргументів $K_x[n, l]$, значення якої дорівнюють кореляційному моменту випадкових величин $X[n]$ і $X[l]$ при всіх значеннях n і l , тобто [4, 6]:

$$K_x[n, l] = M\left(\overset{\circ}{X}[n] \overset{\circ}{X}[l]\right). \quad (5.3)$$

Означення 4

Початковий змішаний момент другого порядку для дискретної функції визначається виразом [4, 6]:

$$\Gamma_x[n, l] = M(X[n]X[l]). \quad (5.4)$$

Всі основні властивості математичного сподівання, дисперсії, кореляційної функції та початкового змішаного моменту другого порядку, які розглянуті раніше для неперервних процесів, мають місце і для дискретних процесів [1 - 3].

Визначення стаціонарних дискретних процесів як у вузькому, так і в широкому сенсі нічим не відрізняються від визначень, які наведені раніше для неперервних процесів. Означення ергодичності для неперервних і дискретних процесів також однакові [1 - 3].

5.2 Частотні характеристики дискретних випадкових процесів

Знайдемо частотні характеристики дискретних випадкових процесів.

Для стаціонарного процесу з неперервним часом поставимо у відповідність дискретний процес $X[nT]$, зрозуміло, що цей процес теж буде стаціонарним.

Будемо вважати що задано спектральну щільність $S_x(\omega)$ випадкового процесу $X(t)$.

Кореляційна функція для неперервного сигналу $K_x(\tau)$ є оберненим перетворенням від спектральної щільності для всіх значень τ , в тому числі і для $\tau = rT$, де T – інтервал дискретності. Тоді:

$$K_x(rT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega rT} d\omega . \tag{5.5}$$

Розіб'ємо вісь ω на відрізки довжиною $\frac{2\pi}{T}$. Тоді (5.5) подамо у вигляді суми

$$K_x(rT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{(2k-1)\pi}{T}}^{\frac{(2k+1)\pi}{T}} S_x(\omega) e^{j\omega rT} d\omega . \tag{5.6}$$

Якщо ввести нову змінну:

$$\omega_1 = \omega - \frac{2\pi k}{T}$$

і врахувати, що $e^{j2\pi k} = 1$, тоді (5.6) можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} K_x(rT) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{T}}^{\frac{3\pi}{T}} S_x(\omega_1 + \frac{2\pi k}{T}) e^{j\omega_1 rT} e^{j2\pi k r} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{T}}^{\frac{3\pi}{T}} S_x(\omega_1 + \frac{2\pi k}{T}) e^{j\omega_1 rT} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{T}}^{\frac{3\pi}{T}} S_x^*(\omega_1) e^{j\omega_1 rT} d\omega , \end{aligned} \tag{5.7}$$

де

$$S_x^*(\omega_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_x \left(\omega_1 + \frac{2\pi k}{T} \right). \quad (5.8)$$

Функція $S_x^*(\omega_1)$ носить назву спектральної щільності потужності або спектральної щільності дискретної випадкової функції $X[nT]$ і визначається виразом (5.8) [4 - 6].

Нескладно показати, що щільність дискретного випадкового процесу є періодичною функцією з періодом $\frac{2\pi}{T}$. Але відомо, що будь-яку періодичну функцію можна розкласти в ряд Фур'є:

$$S_x^*(\omega) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_r e^{-j\omega r T}, \quad (5.9)$$

де C_r – коефіцієнт ряду Фур'є, який визначається виразом:

$$C_r = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} S_x^*(\omega) e^{j\omega r T} d\omega. \quad (5.10)$$

Якщо порівняти співвідношення (5.10) і (5.7), то можна записати, що

$$C_r = TK_x[rT]. \quad (5.11)$$

Підставимо (5.11) в (5.9) і отримаємо:

$$S_x^*(\omega) = T \sum_{r=-\infty}^{\infty} K_x[rT] e^{-j\omega r T}. \quad (5.12)$$

Тоді

$$K_x[rT] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} S_x^*(\omega) e^{j\omega r T} d\omega. \quad (5.13)$$

Співвідношення (5.12) та (5.13) визначають залежність між кореляційною функцією і спектральною щільністю дискретного випадкового процесу $X[nT]$ [6].

Взаємоспектральна щільність $S_{xy}^*(\omega)$ двох стаціонарно пов'язаних випадкових процесів $X[nT]$ та $Y[mT]$ визначається виразом [4, 6]:

$$S_{xy}^*(\omega) = T \sum_{r=-\infty}^{\infty} K_{xy}[rT] e^{-j\omega r T}, \quad (5.14)$$

$$K_{xy}[rT] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} S_{xy}^*(\omega) e^{j\omega r T} d\omega. \quad (5.15)$$

З рівності (5.8)

$$S_x^*(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_x \left(\omega_1 + \frac{2k\pi}{T} \right)$$

витікає, що спектральна щільність $S_x^*(\omega)$ дискретного випадкового процесу $X[nT]$, який відповідає неперервному випадковому стаціонарному процесу $X(t)$ при $t = nT$ дорівнює сумі функцій, що отримані зі спектральної щільності $S_x^*(\omega)$ випадкового процесу $X(t)$ зсувом на величину $\frac{2\pi}{T}k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) збільшити. Тобто можна стверджувати, якщо випадкова функція $X(t)$ з неперервним значенням аргументу t має спектральну щільність $S_x(\omega)$ відмінну від нуля тільки на інтервалі $(-\omega_c, \omega_c)$, причому $|\omega_c| < \frac{\pi}{T}$, то спектральна щільність цього випадкового процесу може бути відновлена повністю за спектральною щільністю $S_x^*(\omega)$ дискретного випадкового процесу $X[nT] = X(t)|_{t=nT}$. Дійсно, за цих умов спектральна щільність решітчастої випадкової функції отримується шляхом додавання зміщених, неперериваючих один одного графіків спектральної щільності $S_x(\omega)$ випадкової функції $X(t)$ і тому спектральна щільність $S_x(\omega)$ може бути відновлена зі спектральної щільності решітчастої випадкової функції $S_x^*(\omega)$ за допомогою рівності

$$S_x(\omega) = \begin{cases} S_x^*(\omega) & \text{при } |\omega| < \frac{\pi}{T}, \\ 0, & \text{при } |\omega| \geq \frac{\pi}{T}. \end{cases}$$

Розглянемо поняття ергодичності, яке можна поширити на дискретні процеси. Випадковий дискретний процес $X[nT]$ називається ергодичним по відношенню до математичного сподівання, якщо оцінка його середнього значення, яка дорівнює

$$m_x^* = \frac{1}{n+1} \sum_{n=0}^N x[nT], \quad (5.16)$$

при $N \rightarrow \infty$ співпадає з його математичним сподіванням [3, 6]. Оцінку кореляційної функції для дискретного випадкового процесу $X[nT]$ можна знайти як середнє значення за аргументом n за співвідношенням

$$K_x^*[rT] = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} x[nT] x[(n-r)T]. \quad (5.17)$$

Дискретна випадкова функція $X[nT]$ носить назву ергодичної по відношенню до кореляційної функції, якщо при $N \rightarrow \infty$ оцінка (5.17) співпадає з кореляційною функцією [3, 6].

Оцінки (5.16) і (5.17) є незсувними, а достатньою умовою ергодичності дискретної стаціонарної функції по відношенню як до

математичного сподівання, так і до кореляційної функції є виконання рівності [6]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K_x[rT] = 0. \quad (5.19)$$

В цьому випадку оцінки математичного сподівання і кореляційної функції дискретної випадкової функції $X[nT]$ можуть бути знайдені за однієї реалізації за співвідношеннями (5.15) і (5.17).

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення математичного сподівання дискретної випадкової функції $X[n]$.
2. Наведіть співвідношення, за яким визначається центрована випадкова величина.
3. Дайте визначення кореляційної функції $K_x[rT]$ дискретної випадкової функції $X[nT]$.
4. Наведіть співвідношення для знаходження моментних характеристик дискретної випадкової функції $X[n]$.
5. Наведіть формулу функції спектральної щільності потужності $S_x(\omega)$ дискретної випадкової функції $X[n]$.
6. В чому полягає властивість ергодичності дискретних процесів ?

6 ШВИДКЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

В 1965р. був запропонований алгоритм швидкого перетворення Фур'є (ШПФ), за допомогою якого нині здійснюється підрахунок спектральної та взаємоспектральної щільності випадкових процесів та відповідних кореляційних функцій [8].

ШПФ є новим алгоритмом знаходження дискретного перетворення Фур'є скінченної послідовності $f[k]$ ($k=0, N-1$). При цьому послідовність $f[k]$ отримана в результаті дискретизації сигналу $f(t)$ з обмеженою смугою частот, тобто спектр сигналу скінчений.

Ідея ШПФ базується на поданні початкової вибірки N у вигляді ряду співмножників та розбиття початкової вибірки на більш короткі послідовності, при цьому вдається отримати результуючий ряд коефіцієнтів Фур'є ітераційним шляхом. Підкреслимо, якщо $N=2^p$, то це перетворення здійснюється за p ітерацій.

Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) визначається співвідношенням:

$$C[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W_N^{nk}, \quad (6.1)$$

де $C[n]$ - спектральні складові;

$$W_N = e^{-\frac{j2\pi}{N}}, \quad (n = 0, N-1).$$

При великих N ($N > 10000$), безпосередньо обчислення ДПФ за співвідношенням (6.1) є громіздкою процедурою за рахунок великої кількості обчислювальних операцій. Так, якщо $f[k]$ є комплексна величина, то необхідно буде здійснити $(N-1)^2$ операцій множення та $N(N-1)$ операцій комплексного додавання [9].

6.1 Алгоритм ШПФ

Розглянемо алгоритм ШПФ з основою 2 ($N = 2^p$). Для реалізації алгоритму ШПФ розіб'ємо N -точкову початкову послідовність на дві менші послідовності розміром $\frac{N}{2}$. Тобто створимо дві нові послідовності: перша з яких буде складатися з парних членів початкової послідовності, а друга з непарних [8, 9].

Позначимо ці послідовності $f_1[k]$ та $f_2[k]$, відповідно:

$$\left. \begin{aligned} f_1[k] &= f[2k], \quad k = 0, \frac{N}{2} - 1, \\ f_2[k] &= f[2k+1], \quad k = 0, \frac{N}{2} - 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Підставимо (6.2) в (6.1):

$$NC[n] = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f[2k] W_N^{2nk} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f[2k+1] W_N^{(2k+1)n} \quad (6.3)$$

Знайдемо:

$$W_N^2 = (e^{\frac{j2\pi}{N}})^2 = e^{\frac{j2\pi}{N/2}} = W_{N/2} \quad (6.4)$$

З врахуванням (6.4) запишемо (6.3):

$$NC[n] = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_1[k] W_{N/2}^{nk} + W_N^n \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_2[k] W_{N/2}^{kn} \quad (6.5)$$

Це співвідношення запишемо у вигляді:

$$NC[n] = F_1[n] + W_N^n F_2[n], \quad (6.6)$$

де $F_1[n]$ -ДПФ послідовності $f_1[k]$;

$F_2[n]$ - ДПФ послідовності $f_2[k]$.

Як витікає з (6.6), необхідно знайти коефіцієнти $C[n]$ для значень

$$n=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1.$$

Тому необхідно до визначити (6.6) також для значень

$$n = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1.$$

Для того, щоб здійснити вищезазначену операцію відзначимо, що послідовність W_N^{nk} є періодичною з періодом N , тобто

$$W_N^{nk} = W_N^{(n+mN)k} \cdot W_N^{(k+lN)n}, \quad (6.7)$$

де $m, l = \pm 1, \pm 2, \dots$,

а
$$W_N^k = -W_N^{k-\frac{N}{2}} \quad (6.8)$$

Якщо врахувати (6.7) і (6.8), то (6.6) до визначимо таким чином [8, 9]:

$$NC[n] = \begin{cases} F_1[n] + W_N^n F_2[n], & 0 \leq n \leq \frac{N}{2}-1, \\ F_2\left[n - \frac{N}{2}\right] - W_N^{n-\frac{N}{2}} F_1\left[n - \frac{N}{2}\right], & \frac{N}{2} \leq n \leq N-1. \end{cases} \quad (6.9)$$

З (6.9) витікає, що початкове N -точкове ДПФ можна подати у вигляді комбінації двох $\frac{N}{2}$ - точкових ДПФ.

Аналогічно (6.9) можна подати і $\frac{N}{2}$ - точкові ДПФ. Для цього послідовності $f_1[k]$ і $f_2[k]$ розбиваємо кожну на дві послідовності, які складаються з парних і непарних членів.

В цьому випадку $\frac{N}{2}$ -точкові ДПФ можна визначити таким чином:

$$F_1[n] = \begin{cases} A[n] + W_N^{2n} B[n], & 0 \leq n \leq \frac{N}{4} - 1 \\ A\left[n - \frac{N}{4}\right] - W_N^{2n - \frac{N}{2}} B\left[n - \frac{N}{4}\right], & \frac{N}{4} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1, \end{cases}$$

$$F_2[n] = \begin{cases} D[n] + W_N^{2n} E[n], & 0 \leq n \leq \frac{N}{4} - 1 \\ D\left[n - \frac{N}{4}\right] - W_N^{2n - \frac{N}{2}} E\left[n - \frac{N}{4}\right], & \frac{N}{4} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1, \end{cases} \quad (6.10)$$

де $A[n]$ та $D[n] - \frac{N}{2}$ - точкові ДПФ парних членів $f_1[k]$ та $f_2[k]$, відповідно;

$B[n]$ та $E[n] - \frac{N}{2}$ - точкові ДПФ непарних членів $f_1[k]$ та $f_2[k]$, відповідно.

Процес зменшення розміру ДПФ здійснюється до того моменту, доки не залишиться тільки двоточкові ДПФ. Обчислення такого двоточкового перетворення здійснюється за формулами:

$$\begin{aligned} NC[0] &= f[0] + W_N^0 f[1] \\ NC[1] &= f[0] - W_N^0 f[1] \end{aligned} \quad (6.11)$$

причому $W_N = 1$.

6.2 Процес обчислення ДПФ за допомогою направленої графу

Наглядно процес обчислення дискретного перетворення Фур'є за алгоритмом, що розглянуто, подається за допомогою направленої графу. Для такого подання введемо позначення (рис. 6.1):

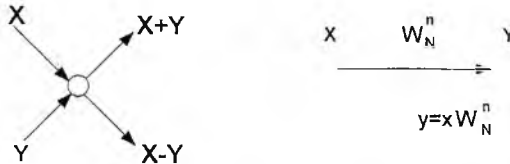


Рисунок 6.1- Направлений граф ДПФ

Використовуючи введені позначення, послідовність операцій при виконанні восьмиточкового ДПФ з використанням двох чотириточкових перетворень можна подати у вигляді графу (рис. 6.2):

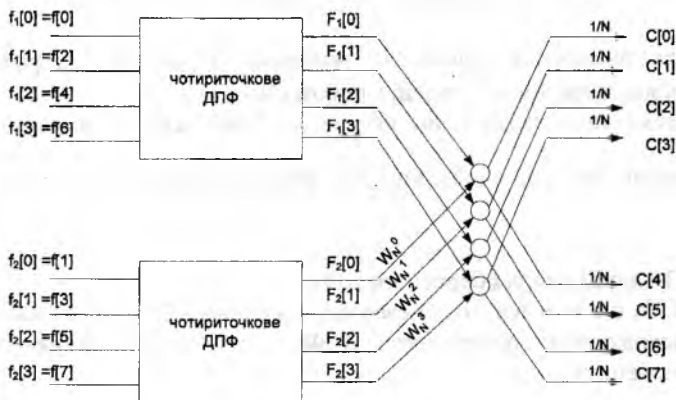


Рисунок 6.2 - Граф восьмиточкового ДПФ з використанням двох чотириточкових перетворень

Для отримання загального графу наведемо граф для розрахунку чотирьох двоточкових ДПФ за допомогою співвідношення (6.10)

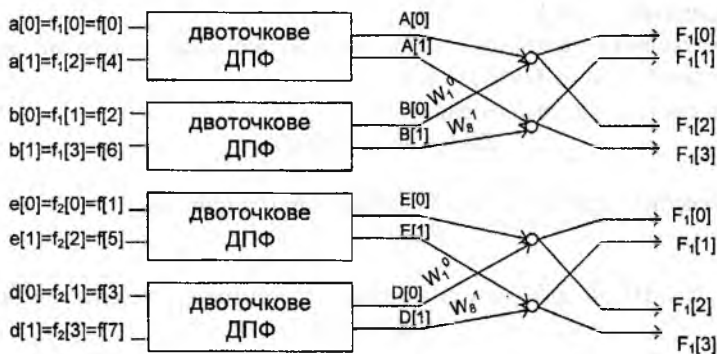


Рисунок 6.3 - Граф для розрахунку чотирьох двоточкових ДПФ

Якщо поєднати в одне ціле наведені графи, можна отримати граф швидкого перетворення Фур'є для підрахунку восьмиточкового швидкого перетворення Фур'є.

Для реалізації розглянутого алгоритму на ЕОМ процес обчислення подається в матричному вигляді, при цьому весь процес підрахунку розбивається на $\log_2 N = P$ етапів. В цьому випадку весь процес обчислень подається у вигляді [9]:

$$C = \frac{1}{N} W_p \cdot W_{p-1} \dots W_1 \cdot F, \quad (6.12)$$

де $C = (C[0], C[1], \dots, C[N-1])$, $F = (f[0], f[1], \dots, f[N-1])$.

Для визначення елементів матриць $W_m(m=\overline{1, p})$ є різноманітні способи, які докладно викладені в роботі [10].

Нескладно показати, що алгоритм ШПФ дозволяє зменшити об'єм оперативної пам'яті, необхідної для реалізації даного алгоритму в $\frac{N}{2}$ разів.

6.3 Знаходження оберненого ДПФ

ДПФ, що розглянуто, з невеликою модифікацією можна використати для знаходження оберненого ДПФ, таке перетворення задається співвідношенням:

$$f[k] = \sum_{n=0}^{k-1} c[n] \cdot W_N^{-kn} \quad (k=\overline{0, N-1}). \quad (6.13)$$

Розглянемо послідовність обчислень, при розрахунку взаємкореляційної функції $\hat{R}_{xy}(m\Delta)$ методом двократного швидкого перетворення Фур'є [9].

Початковими масивами є накопичені масиви квантованих по часу і рівню сигналів $X(i\Delta)$ та $Y(i\Delta)$, $(i=\overline{0, N-1})$.

1. Вводиться масив комплексних чисел:

$$Z(i\Delta) = X(i\Delta) + jY(i\Delta).$$

2. Доповнення масиву Z до $N=2^p$ членів (якщо потрібно):

$$Z(i\Delta) = N=2^p.$$

3. Методом ШПФ здійснюється пряме перетворення масиву чисел Z
 $Z(i\Delta) \Rightarrow Z(k)$.

4. Знаходимо комплексно спряжені коефіцієнти ряду Фур'є $Z^*(k)$.

5. Знаходимо коефіцієнти $X_k(\omega)$, $Y_k(\omega)$ за допомогою співвідношень :

$$X_k(\omega) = \{Z(k) + Z^*(k)\}/2,$$

$$Y_k(\omega) = \{Z(k) - Z^*(k)\}/2j.$$

6. Знаходимо оцінку взаємкореляційної функції:

$$S_{xy}(k) = \frac{2\Delta}{N} |X_k^*(\omega) \cdot Y_k(\omega)|. \quad (6.14)$$

7. Знаходимо $\hat{R}_{xy}(m\Delta)$ за допомогою оберненого ШПФ спектральної щільності

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення ДПФ.
2. На чому базується ідея ШПФ ?
3. Яким чином змінюється кількість обчислювальних операцій при виконанні ДПФ ?
4. Який вигляд має направлений граф ДПФ ?
5. За яким співвідношенням розраховується кількість етапів для реалізації алгоритму ШПФ на ЕОМ ?
6. На скільки зменшується використання оперативної пам'яті комп'ютера при застосуванні алгоритму ШПФ у порівнянні з ДПФ ?
7. Наведіть послідовність обчислень при розрахунку взаємореляційної функції методом двократного ШПФ.

Лабораторна робота № 3

Тема: Дослідження алгоритму швидкого перетворення Фур'є (ШПФ).

Мета: набути навичок у застосуванні алгоритму ШПФ для аналізу випадкових процесів у середовищі ППП МСAD .

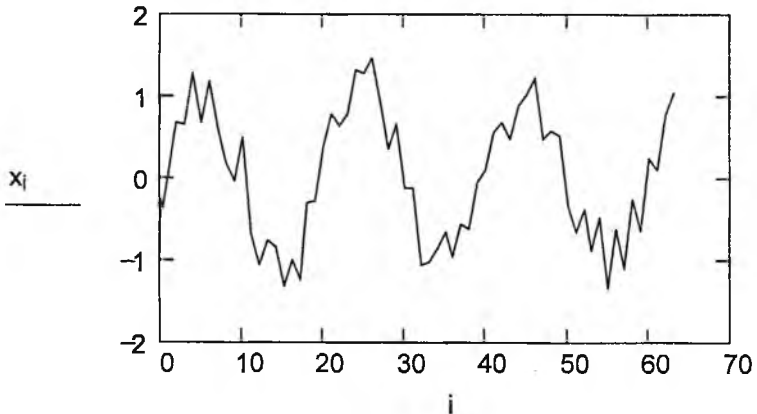
Порядок виконання

1. Згідно з варіантом обрати вид реального сигналу x_i . Побудувати x_i .
2. Обчислити fft (швидке перетворення Фур'є).
3. Побудувати fft .
4. Обчислити $ifft$ (інверсне швидке перетворення Фур'є).
5. Оформити звіт за результатами роботи.

Методика виконання

$i := 0 .. 63$

$$x_i := \left(\sin \left(\pi \cdot \frac{i}{10} \right) + \text{rnd} (1) \right) - 0.5$$



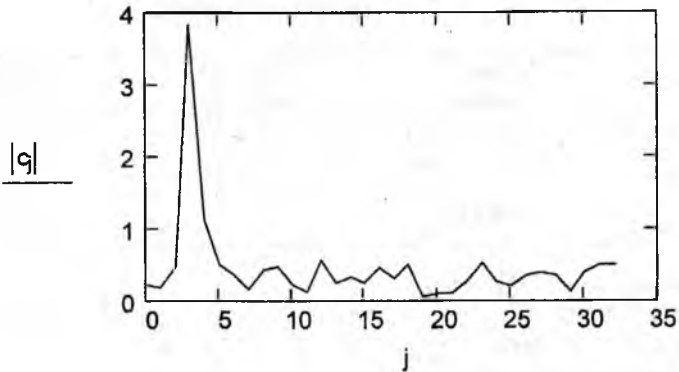
Графік реального сигналу $x(t)$

$c := fft(x)$

$N := \text{last}(c)$

$N := 32$

$j := 0 .. N$



Графік ШПФ

$z := \text{ifft}(c)$ $N2 := \text{last}(z)$ $N2 := 63$ $k := 0..N2$

$$\max(|x - z|) = 3.845368 \cdot 10^{-12}$$

$x_j =$

-0.498
2.340014-1
0.672
0.659
1.273
0.674
1.161
0.613
0.179
-0.04
0.488
-0.689
-1.078
-0.777
-0.849
-1.333

$c =$

	0
0	0.2
1	-0.110133+0.110133i
2	0.461691+0.092338i
3	2.485874+2.90281i
4	-0.895561-0.610133i
5	-0.17599-0.488001i
6	-0.281216-0.233811i
7	-0.036042-0.161013i
8	-0.31452-0.292338i
9	-0.261086-0.361013i
10	-0.208073-0.072338i
11	-0.111058-0.092338i
12	-0.230166-0.488001i
13	0.226-0.041013i
14	-0.239923-0.210133i
15	-0.233632+0.092338i

$z =$

	0
0	-0.498
1	2.340014-1
2	0.672
3	0.659
4	1.273
5	0.674
6	1.161
7	0.613
8	0.179
9	-0.04
10	0.488
11	-0.689
12	-1.078
13	-0.777
14	-0.849
15	-1.333

Варіанти завдань

№ вар.	Реальний сигнал	Кількість кроків	Кількість кроків
1	$x_i = 4 \sin\left(\pi \cdot \frac{i}{10}\right)$	$i = 0 \div 31$	$i = 0 \div 127$
2	$x_i = \cos\left(2\pi \cdot \frac{i}{10}\right)$	$i = 0 \div 13$	$i = 0 \div 255$
3	$x_i = \operatorname{tg}\left(0,5\pi \cdot \frac{i}{5}\right)$	$i = 0 \div 15$	$i = 0 \div 255$
4	$x_i = \operatorname{ctg}\left(\pi \cdot \frac{i}{15}\right)$	$i = 0 \div 31$	$i = 0 \div 13$
5	$x_i = \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{i}{20}\right)$	$i = 0 \div 15$	$i = 0 \div 31$
6	$x_i = 2 \sin\left(3\pi \cdot \frac{i}{10}\right)$	$i = 0 \div 31$	$i = 0 \div 255$
7	$x_i = 2 \cos\left(2\pi \cdot \frac{i}{20}\right)$	$i = 0 \div 13$	$i = 0 \div 15$
8	$x_i = 0,9 \cos\left(\pi \cdot \frac{i}{10}\right)$	$i = 0 \div 255$	$i = 0 \div 15$
9	$x_i = 0,5 \sin\left(7\pi \cdot \frac{i}{100}\right)$	$i = 0 \div 13$	$i = 0 \div 31$
10	$x_i = 3,5 \cos\left(0,9\pi \cdot \frac{i}{20}\right)$	$i = 0 \div 31$	$i = 0 \div 255$

Зміст звіту:

1. Титульний лист.
2. Мета роботи.
3. Графік реального сигналу x_i .
4. Результати обчислення fft (швидке перетворення Фур'є).
5. Графік fft .
6. Результати обчислення $ifft$ (інверсне швидке перетворення Фур'є).
7. Висновки за результатами виконання роботи.

7 ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ З ОДНИМ ВХОДОМ ТА ОДНИМ ВИХОДОМ

7.1 Аналіз можливості реалізації фізичних систем

У найпростішому випадку систему називають такою, що може бути реалізована, якщо вона [9, 11]:

- стійка;
- має сталі параметри;
- лінійна.

Основні властивості фізичної системи, що може бути реалізована, описуються її імпульсною перехідною функцією чи ваговою функцією, яка є реакцією системи на збурення у вигляді дельта-функції. Нехай на вхід системи поступає деяка гладка функція $x(t)$, а на виході спостерігається гладка функція $y(t)$. Імпульсна перехідна функція $h(t)$ системи визначається виразом

$$h(t) = y(t) \text{ при } x(t) = \delta(t),$$

причому відлік часу t починається з моменту, коли на вхід системи подається дельта-функція. Важлива роль імпульсної перехідної функції як засобу для опису властивостей фізичної системи, що може бути реалізована, витікає з наступного твердження: реакція $y(t)$ системи на довільний вхідний процес $x(t)$ визначається інтегралом згортки:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau,$$

тобто реакція системи $y(t)$ є зваженою лінійною сумою всіх попередніх і наступних значень вхідного процесу $x(t)$ [11].

Динамічні властивості фізичних систем прийнято описувати не самою імпульсною перехідною функцією $h(\tau)$, а деяким її лінійним перетворенням, причому вигляд перетворення залежить від конкретної задачі. Однак у випадку ідеальної системи зручніше всього користуватися перетворенням Фур'є, яке дозволяє безпосередньо описати динамічні характеристики системи в частотній області. Перетворення Фур'є імпульсної перехідної функції $h(\tau)$ задовольняє умові $h(\tau)=0$ при $\tau < 0$, має вигляд:

$$H(\omega) = \int_0^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi\tau\omega} d\tau$$

і називається частотною характеристикою системи.

Отже, нехай лінійна система з постійними параметрами задається ваговою функцією $h(\tau)$ та частотною характеристикою $H(\omega)$ (рис.7.1).

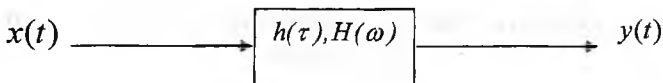


Рисунок 7.1 - Еталонна система з одним входом та одним виходом.

Припустімо, що вплив на систему одного вхідного сигналу $x(t)$ викликає один цілком визначений вихідний сигнал $y(t)$ (рис. 7.1). При ідеальних умовах, коли система може бути фізично реалізована, стійка, має сталі параметри і лінійна, вихідний процес системи, яка зображена на рисунку 7.1, задається згорткою [9, 11]:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \quad (7.1)$$

де $h(\tau) = 0$ при $\tau < 0$, якщо система може бути фізично реалізована.

Припустімо, що на вхід системи (рис. 7.1) поступає реалізація $x(t)$ стаціонарного ергодичного випадкового процесу $\{x(t)\}$. Після згасання перехідних процесів, які викликані ввімкненням системи, реакція $y(t)$ також буде реалізацією стаціонарного процесу $\{y(t)\}$. Використовуючи формулу (7.1), знайдемо добуток $y(t)y(t+\tau)$:

$$y(t)y(t+\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\xi)h(\eta)x(t-\xi)x(t+\tau-\eta)d\xi d\eta. \quad (7.2)$$

Якщо знайти математичне сподівання від обох частин виразу (7.2), отримаємо, з урахуванням формули кореляційної функції $x(t)$ і $y(t)$ для довільного зсуву часу τ :

$$\begin{aligned} K_{yy}(\tau) &= M\{\{x(t) - \mu_x\}\{y(t+\tau) - \mu_y\}\} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{x(t) - \mu_x\}\{y(t+\tau) - \mu_y\} dt = R_{yy}(\tau) - \mu_x \mu_y, \end{aligned}$$

де $R_{yy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$ – співвідношення, яке встановлює зв'язок між коваріаційними функціями вихідного та вхідного процесів:

$$R_{yy}(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\xi)h(\eta)R_{xx}(t+\tau-\eta)d\xi d\eta. \quad (7.3)$$

Аналогічно визначається і добуток $x(t)y(t+\tau)$:

$$x(t)y(t+\tau) = \int_0^{\infty} h(\xi)x(t)x(t+\tau-\eta)d\xi. \quad (7.4)$$

Якщо знайти математичне сподівання від обох частин рівняння (7.4), то отримаємо взаємну коваріаційну функцію вхідного і вихідного процесів:

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} h(\xi)R_{xx}(\tau-\xi)d\xi d\eta. \quad (7.5)$$

Відзначимо, що згортка у формулі (7.5) має той же вигляд, що і у (7.1).

Застосування перетворення Фур'є до співвідношень (7.3) та (7.5) дозволяє отримати важливі співвідношення для знаходження двосторонніх спектральних густин $S_{yy}(\omega)$ та $S_{xx}(\omega)$, визначених через $S_{xx}(\omega)$:

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega), \quad (7.6)$$

$$S_{xy}(\omega) = H(\omega)S_{xx}(\omega). \quad (7.7)$$

Тут ω додатна або від'ємна. Як видно, вираз (7.6) дійсний і містить тільки амплітудну характеристику системи $|H(\omega)|$. У той же час вираз (7.7) комплексний і може бути розбитий на дві формули, які міститимуть, відповідно, амплітудну $|H(\omega)|$ і фазову $\varphi(\omega)$ характеристики системи. Формула (7.6) визначає співвідношення між спектрами вхідного та вихідного процесів, а формула (7.7) – співвідношення для взаємного спектру вхідного та вихідного процесів. Ці формули можуть бути застосовані тільки в ідеальному випадку – за відсутності зовнішнього шуму на вході чи на виході, коли характеристики системи лінійні і не змінюються у часі. Інтерпретувати ці спектральні співвідношення у частотній області значно простіше, ніж відповідні кореляційні співвідношення у часовій області [11].

Двосторонні спектральні густини

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad \text{та} \quad S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

зручні для аналітичного вивчення, але на практиці краще мати справу зі спектрами, визначеними тільки для невід'ємних частот. Такі спектри називають односторонніми і задаються співвідношеннями [12]:

$$G_{xx}(\omega) = \begin{cases} 2S_{xx}(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\omega\tau} d\tau, & \omega \geq 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases}$$

$$G_{xy}(\omega) = \begin{cases} 2S_{xy}(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\omega\tau} d\tau, & \omega \geq 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases}$$

На рисунку 7.2 ілюструється зв'язок між односторонніми та двосторонніми спектральними щільностями.

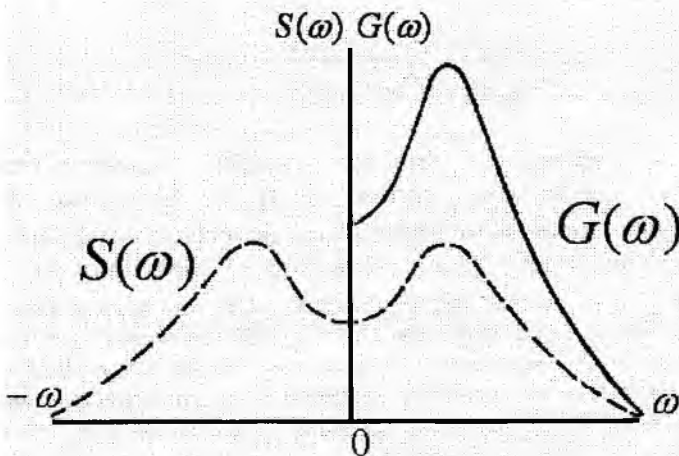


Рисунок 7.2 – Односторонні та двосторонні спектральні щільності

Таким чином, співвідношення (7.6) та (7.7) можна записати через фізично вимірювальні односторонні спектральні щільності:

$$G_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 G_{xx}(\omega), \quad (7.8)$$

$$G_{xy}(\omega) = H(\omega) G_{xx}(\omega). \quad (7.9)$$

При використанні полярного подання комплексних чисел

$$\left. \begin{aligned} G_{xy}(\omega) &= |G_{xy}(\omega)| e^{-j\theta_{xy}(\omega)}, \\ H(\omega) &= |H(\omega)| e^{-j\varphi(\omega)} \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

вираз (7.9) прийме вигляд:

$$\left. \begin{aligned} |G_{yy}(\omega)| &= |H(\omega)|G_{xx}(\omega), \\ \theta_{yy}(\omega) &= \varphi(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Формула (7.8) дає змогу обчислити середній квадрат вихідного процесу [11, 12]:

$$\psi^2_y = \int_0^{\infty} G_{yy}(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 G_{xx}(\omega) d\omega. \quad (7.12)$$

Формула (7.8), крім того, дозволяє визначити $G_{xx}(\omega)$ за відомими $G_{yy}(\omega)$ і $|H(\omega)|$ або ж $|H(\omega)|$ за відомими $G_{xx}(\omega)$ і $G_{yy}(\omega)$, але з (7.8) неможливо знайти повністю частотну характеристику $H(\omega)$ системи, так як вона не містить інформації про фазу. Повністю відновити амплітудну та фазову характеристику системи можна з формул (7.9) – (7.11), коли відомі $G_{yy}(\omega)$ та $G_{xx}(\omega)$.

Формули (7.8) і (7.9) можна отримати і без попереднього знаходження коваріаційних співвідношень (7.3) і (7.5). Для будь-якої пари зрізаних реалізацій достатньо великої довжини T , співвідношення (7.1) еквівалентно такій рівності [11]:

$$Y(\omega, T) = H(\omega)X(\omega, T), \quad (7.13)$$

де $X(\omega, T)$ і $Y(\omega, T)$ – фінітні перетворення Фур'є $x(t)$ і $y(t)$, відповідно, які визначаються за формулами:

$$X_k(\omega, T) = \int_0^T x_k(t) e^{-j2\pi ft} dt,$$

$$Y_k(\omega, T) = \int_0^T y_k(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

Тому двостороння взаємна спектральна щільність цих двох випадкових процесів визначається за таким співвідношенням [11]:

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[X_k^*(\omega, T)Y_k(\omega, T)],$$

де E – оператор математичного сподівання, що визначає операцію усереднення по індексу k .

Односторонні взаємні щільності і спектральні щільності визначаються таким чином [11]:

$$G_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} E[X_k^*(\omega, T)Y_k(\omega, T)],$$

$$G_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} E[|X_k(\omega, T)|^2].$$

Тоді

$$Y^*(\omega, T) = H^*(\omega)X^*(\omega, T),$$

$$|Y(\omega, T)|^2 = |H(\omega)|^2 |X(\omega, T)|^2,$$

$$X^*(\omega, T)Y(\omega, T) = H(\omega)|X(\omega, T)|^2.$$

При аналізі реалізацій перехідних випадкових процесів довжиною T замість спектральних щільностей “потужності” $G_x(\omega)$, $G_{xy}(\omega)$ і $G_y(\omega)$ зручніше користуватись “енергетичними” спектрами $\mathcal{G}_x(\omega)$, $\mathcal{G}_{xy}(\omega)$ і $\mathcal{G}_y(\omega)$. Вони пов’язані формулою $\mathcal{G}_{xy}(\omega) = T G_{xy}(\omega)$, де припускається, що реалізації перехідних процесів $x(t)$ і $y(t)$ є тільки на інтервалі $0 \leq t \leq T$. Замість формул (7.8) і (7.9) отримаємо [11, 12]:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}_{yy}(\omega) &= |H(\omega)|^2 \mathcal{G}_x(\omega), \\ \mathcal{G}_{xy}(\omega) &= H(\omega) \mathcal{G}_x(\omega), \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

де ω невід’ємна.

Якщо допустити $\zeta_{xy}(\omega) = \frac{1}{2} \mathcal{G}_{xy}(\omega)$ для $\omega \geq 0$ і $\zeta_{xy}(-\omega) = \zeta_{xy}^*(\omega)$, то отримаємо двосторонні густини. Зокрема, при $x(t) = y(t)$ маємо $\zeta_x(\omega) = \frac{1}{2} \mathcal{G}_x(\omega)$ для $\omega \geq 0$ і $\zeta_x(-\omega) = \zeta_x(\omega)$. Тому

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{yy}(\omega) &= |H(\omega)|^2 \zeta_x(\omega), \\ \zeta_{xy}(\omega) &= H(\omega) \zeta_x(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

Відзначимо, що ці формули як для двосторонніх спектрів, так і для односторонніх, відрізняються від відповідних формул для стаціонарних процесів тільки масштабним коефіцієнтом.

Припустімо, що середнє значення μ_x вхідного стаціонарного випадкового процесу $\{x(t)\}$ відмінне від нуля. Тоді за формулою (7.1) середнє значення μ_y вихідного процесу $\{y(t)\}$ також відмінне від нуля і дорівнює

$$\mu_y = \int_0^{\infty} h(\tau) \mu_x d\tau = H(0) \mu_x, \quad (7.16)$$

де $H(0)$ – межа $H(f)$ при прямуванні f до нуля справа.

Якщо μ_x і μ_y оцінюються за урізаними реалізаціями довжиною T , то їх фінитні перетворення Фур'є можна подати у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} F.T. [\mu_x] &= \mu_x \delta_1(\omega), \\ F.T. [\mu_y] &= \mu_y \delta_1(\omega), \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

де $\delta_1(\omega)$ - фінитна дельта-функція, яка визначається таким чином [11]:

$$\delta_1(\omega) = \begin{cases} T, & -\frac{1}{T} \leq \omega \leq \frac{1}{2}T; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (7.18)$$

Відповідні двосторонні спектри тоді мають вигляд [11]:

$$\left. \begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= \left(\frac{1}{T}\right) E \left[\mu_x \delta_1(\omega) \right]^2 = \mu_x^2 \delta_1(\omega), \\ S_{yy}(\omega) &= \left(\frac{1}{T}\right) E \left[\mu_y \delta_1(\omega) \right]^2 = \mu_y^2 \delta_1(\omega), \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

де $\delta_1(\omega)$ задовольняє (7.18). Відповідно,

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega &= \int_{-1/2T}^{1/2T} \mu_x^2 \delta_1(\omega) d\omega = \mu_x^2, \\ \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(\omega) d\omega &= \int_{-1/2T}^{1/2T} \mu_y^2 \delta_1(\omega) d\omega = \mu_y^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

Визначимо односторонні спектри наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} G_{xx}(\omega) &= \mu_x^2 \delta_1(\omega), \quad \omega \geq 0, \\ G_{yy}(\omega) &= \mu_y^2 \delta_1(\omega), \quad \omega \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

причому інтеграл від $G_{xx}(\omega)$ дорівнює μ_x^2 , тобто

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} G_{xx}(\omega) d\omega &= \int_{-1/2T}^{1/2T} 2\mu_x^2 \delta_1(\omega) d\omega = \mu_x^2, \\ \int_{-\infty}^{\infty} G_{yy}(\omega) d\omega &= \int_{-1/2T}^{1/2T} 2\mu_y^2 \delta_1(\omega) d\omega = \mu_y^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

Довільну вхідну реалізацію $x(t)$ довжиною T подамо у вигляді суми двох членів $[x(t) - \mu_x]$ та μ_x . Тоді замість формули (7.13) отримаємо співвідношення [11, 12]:

$$Y(\omega, T) + \mu_y \delta_1(\omega) = H(\omega)X(\omega, T) + H(0)\mu_x \delta_1(\omega), \quad (7.23)$$

де $X(\omega, T)$ і $Y(\omega, T)$ - фінітні перетворення Фур'є $[x(t) - \mu_x]$ і $[y(t) - \mu_y]$ відповідно, а $\delta_1(\omega)$ задовольняє (7.18). І далі, замість співвідношень (7.8) і (7.9) отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} G_{yy}(\omega) + 2\mu_y^2 \delta_1(\omega) &= |H(\omega)|^2 G_{xx}(\omega) + 2H^2(0)\mu_x^2 \delta_1(\omega), \\ G_{xy}(\omega) &= H(\omega)G_{xx}(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

Як видно, формула для взаємної спектральної щільності не змінилася порівняно з формулою (7.9), а співвідношення для спектральних щільностей не збігається з виразом (7.8) тільки у точках, де $\delta_1(\omega) \neq 0$. А саме, якщо ω прийме дискретні рівновіддалені значення з кроком $B_s = \frac{1}{T}$, то $\delta_1(\omega) = 0$ в усіх точках (крім $\omega = 0$), де $\delta_1(0) = T$.

З урахуванням ненульового середнього, співвідношення (7.12) для загального середнього квадрата вихідного процесу перетворюється до вигляду:

$$\psi_x^2 = \int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 G_{xx}(\omega) d\omega + \mu_y^2, \quad (7.25)$$

де $\mu_y^2 = H^2(0)\mu_x^2$. Ці результати показують, що вплив ненульового середнього легко врахувати шляхом простого додавання відповідних членів. У випадку необхідності випадковий процес можна перетворити у процес з ненульовим середнім.

Функція когерентності між $x(t)$ і $y(t)$ - це дійсна величина [11, 12]:

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|G_{xy}(\omega)|^2}{G_{xx}(\omega)G_{yy}(\omega)} = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}, \quad (7.26)$$

де літерою G позначені односторонні спектри, а літерою S - відповідні двосторонні спектри. Відомо [11], що

$$0 \leq \gamma_{xy}^2(\omega) \leq 1. \quad (7.27)$$

Перед обчисленням $\gamma_{xy}^2(\omega)$ потрібно виключити з процесу ненульове середнє, щоб уникнути стрибкоподібної поведінки функції когерентності на початку відліку. Потрібно також подбати про те, щоб $G_{xx}(\omega)$ і $G_{yy}(\omega)$ були більшими за нуль, і, тим самим, уникнути ділення на нуль або появи невизначеності типу нуль на нуль, коли $G_{xy}(\omega)$ також близька до нуля.

В ідеальному випадку, який описується співвідношеннями (7.6) – (7.9), для усіх ω справедлива рівність

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|H(\omega)G_{xx}(\omega)|^2}{G_{xx}(\omega)|H(\omega)|^2 G_{xx}(\omega)} = 1. \quad (7.28)$$

З іншого боку, якщо $x(t)$ і $y(t)$ зовсім некорельовані, тобто $G_{xy}(\omega) = 0$ для всіх ω , то функція когерентності $\gamma_{xy}^2(\omega) = 0$ для всіх ω .

Коли ж функція когерентності відмінна від нуля, але менша за одиницю, то практично може мати місце одна або декілька з таких можливостей [12]:

- 1) у вимірах наявний зовнішній шум;
- 2) оцінки спектрів змішані через недостатню роздільну здатність за частотою;
- 3) система, що перетворює $x(t)$ в $y(t)$, нелінійна;
- 4) на вихідний процес $y(t)$ впливають і інші вхідні процеси, крім $x(t)$.

Коли зовнішній шум $n(t)$ є тільки на виході, то загальний спектр, що спостерігається, $G_{yy}(\omega)$ складається з суми спектру лінійного входу $G_{vv}(\omega)$, який породжений перетворенням $x(t)$ через $H(t)$, і шуму на виході $G_{nn}(\omega)$, тобто

$$G_{yy}(\omega) = G_{vv}(\omega) + G_{nn}(\omega), \quad (7.29)$$

де

$$G_{vv}(\omega) = |H(\omega)|^2 G_{xx}(\omega). \quad (7.30)$$

Отже,

$$G_{vv}(\omega) = \frac{G_{yy}(\omega)}{|G_{xx}(\omega)|} G_{xx}(\omega) = \gamma_{xy}^2(\omega) G_{yy}(\omega). \quad (7.31)$$

Тому

$$\gamma^2_{xy}(\omega) = \frac{G_{xy}(\omega)}{G_{yy}(\omega)}. \quad (7.32)$$

Добуток $\gamma^2_{xy}(\omega)$ на $G_{yy}(\omega)$ у формулі (7.31) називається когерентним спектром (потужності) вихідного процесу. Рівняння (7.32) дозволяє тлумачити функцію когерентності як частку вихідного спектру $y(t)$, що обумовлена лінійним перетворенням $x(t)$ на частоті ω . Вихідний спектр шуму $G_m(\omega) = G_{yy}(\omega) - G_{vv}(\omega)$ тоді рівний

$$G_m(\omega) = [1 - \gamma^2_{xy}(\omega)]G_{yy}(\omega) \quad (7.33)$$

і може бути інтерпретований як частина вихідного спектру, яка не пов'язана з лінійними операціями над $x(t)$ на частоті ω .

Якщо підставити вираз (7.29) у (7.32), то отримаємо:

$$\gamma^2_{xy}(\omega) = \frac{[G_{yy}(\omega) - G_{mm}(\omega)]}{G_{yy}(\omega)} = 1 - \frac{G_{mm}(\omega)}{G_{yy}(\omega)}. \quad (7.34)$$

Таким чином, функція когерентності безпосередньо задає відношення $G_{mm}(\omega)$ до загального спектру $G_{yy}(\omega)$ на частоті ω . Як легко бачити $\gamma^2_{xy}(\omega)$ прямує до одиниці, якщо $G_{mm}(\omega)/G_{yy}(\omega)$ прямує до нуля, і, навпаки, $\gamma^2_{xy}(\omega)$ прямує до нуля, якщо $G_{mm}(\omega)/G_{yy}(\omega)$ прямує до одиниці. Співвідношення (7.32) і (7.33) дозволяє знайти відношення спектру шуму на виході $G_{mm}(\omega)$ до спектру сигналу $G_{vv}(\omega)$:

$$\frac{G_{mm}(\omega)}{G_{vv}(\omega)} = \frac{[1 - \gamma^2_{xy}(\omega)]}{\gamma^2_{xy}(\omega)}. \quad (7.35)$$

З цієї формули витікає, що $\frac{G_{mm}(\omega)}{G_{vv}(\omega)}$ прямує до нескінченності, якщо $\gamma^2_{xy}(\omega)$ прямує до нуля, і прямує до нуля, якщо $\gamma^2_{xy}(\omega)$ прямує до одиниці.

Якщо зовнішній шум $m(t)$ є тільки на вході, то вхідний процес, що спостерігається, має вигляд $x(t) = u(t) + m(t)$, де $u(t)$ – дійсний вхідний сигнал. Вхідний спектр $G_{xx}(\omega)$, що спостерігається, тоді складається із суми $G_{uu}(\omega)$ і $G_{mm}(\omega)$ у припущенні, що $u(t)$ і $m(t)$ некорельовані, тобто

$$G_{xx}(\omega) = G_{uu}(\omega) + G_{mm}(\omega). \quad (7.36)$$

З формул (7.8) і (7.9) знаходимо

$$\left. \begin{aligned} G_{yy}(\omega) &= |H(\omega)|^2 G_{uu}(\omega), \\ G_{xy}(\omega) &= H(\omega)G_{uu}(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (7.37)$$

Отже,

$$\gamma^2_{xy}(\omega)G_{xx}(\omega) = \frac{|G_{xy}(\omega)|^2}{G_{yy}(\omega)} = G_{uu}(\omega). \quad (7.38)$$

Тому

$$\gamma^2_{xy}(\omega) = \frac{G_{uu}(\omega)}{G_{xx}(\omega)} = 1 - \frac{G_{nn}(\omega)}{G_{xx}(\omega)}. \quad (7.39)$$

Важлива і корисна властивість функції когерентності полягає у тому, що вона зберігається при лінійних перетвореннях. Припустимо, що $\gamma^2_{xy}(\omega)$ – функція когерентності $x(t)$ і $y(t)$, яку потрібно визначити. Нехай $x_1(t)$ – лінійне перетворення $x(t)$, а $y_1(t)$ – лінійне перетворення $y(t)$; тоді $\gamma^2_{x_1y_1}(\omega) = \gamma^2_{xy}(\omega)$. Тому для вимірювання $\gamma^2_{xy}(\omega)$ можна використовувати спостереження $x_1(t)$ замість $x(t)$ і (або) спостереження $y_1(t)$ замість $y(t)$ [11, 12].

7.2 Дослідження впливу шуму на поведінку системи, що розглядається

Розглянемо модель, яка враховує вплив шуму на спостереження вхідного і вихідного процесів. Нехай $u(t)$ і $v(t)$ – дійсні сигнали, а $m(t)$ і $n(t)$ – шуми на виході і вході, відповідно (рис. 7.3).

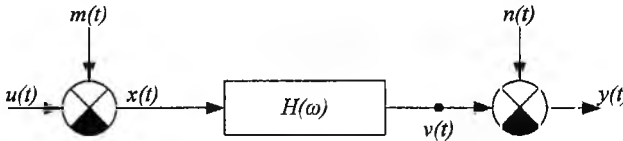


Рисунок 7.3 - Система з одним входом і одним виходом при наявності зовнішнього шуму.

Якщо шум наявний на вході і на виході, то реалізації вхідних і вихідних процесів, що спостерігаються, мають вигляд [9, 11]:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= u(t) + m(t), \\ y(t) &= v(t) + n(t), \end{aligned} \right\} \quad (7.40)$$

причому допускається, що взаємні спектральні щільності:

$$G_{um}(\omega) = G_{vn}(\omega) = G_{mn}(\omega) = 0. \quad (7.41)$$

Отже, шуми не корельовані між собою і з сигналами. Випадок $G_{mm}(\omega) \neq 0$ розглядається нижче. Із співвідношень (7.8) і (7.9) отримуємо:

$$\left. \begin{aligned} G_{vv}(\omega) &= |H(\omega)|^2 G_{uu}(\omega), \\ G_{uv}(\omega) &= H(\omega)G_{uu}(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (7.42)$$

Однак в дійсності спостерігаються спектральні щільності $G_{xx}(\omega)$, $G_{yy}(\omega)$ і $G_{xy}(\omega)$, де

$$G_{xx}(\omega) = G_{uu}(\omega) + G_{mm}(\omega) \geq G_{uu}(\omega), \quad (7.43)$$

$$\left. \begin{aligned} G_{yy}(\omega) &= G_{vv}(\omega) + G_{mm}(\omega) \geq G_{vv}(\omega), \\ G_{xy}(\omega) &= G_{uv}(\omega), \end{aligned} \right\} \quad (7.44)$$

так як $G_{mm}(\omega) \geq 0$ і $G_{nn}(\omega) \geq 0$ для всіх ω .

Далі, дійсна функція когерентності дорівнює [11]:

$$\gamma_{uv}^2(\omega) = \frac{|G_{uv}(\omega)|^2}{G_{uu}(\omega)G_{vv}(\omega)}, \quad (7.45)$$

а функція когерентності, що спостерігається, має вигляд [11]:

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|G_{xy}(\omega)|^2}{G_{xx}(\omega)G_{yy}(\omega)}. \quad (7.46)$$

З формул (7.41) – (7.43) знаходимо:

$$|G_{xy}(\omega)|^2 = |G_{uv}(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 G_{uu}^2(\omega) = G_{uu}(\omega)G_{vv}(\omega). \quad (7.47)$$

Тому функція когерентності дорівнює:

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{G_{uu}(\omega)G_{vv}(\omega)}{[G_{uu}(\omega) + G_{mm}(\omega)][G_{vv}(\omega) + G_{mm}(\omega)]} \leq 1. \quad (7.48)$$

Нерівність строга, якщо $G_{mm}(\omega) > 0$ або $G_{nn}(\omega) > 0$, що на практиці завжди має місце. Із визначення когерентного спектру потужності вихідного процесу (вираз (7.31)) витікає:

$$\gamma^2_{xy}(\omega)G_{yy}(\omega) = G_{vv}(\omega) \left[\frac{G_{mm}(\omega)}{G_{uu}(\omega) + G_{mm}(\omega)} \right] \quad (7.49)$$

Таким чином, когерентний спектр потужності вихідного процесу визначає $G_{vv}(\omega)$, якщо тільки $G_{mm}(\omega) = 0$ незалежно від спектра шуму на виході $G_{nn}(\omega)$ [11].

Співвідношення (7.8) дозволяє оцінити квадрат амплітудної характеристики за спектрами

$$|H(\omega)|^2_a = \frac{G_{yy}(\omega)}{G_{xx}(\omega)} \quad (7.50)$$

Цю величину можна оцінити інакше – за взаємним спектром:

$$|H(\omega)|^2_c = \frac{|G_{xy}(\omega)|^2}{G_{xx}(\omega)} \quad (7.51)$$

Відношення виразів (7.50) і (7.51) визначає функцію когерентності

$$\gamma^2_{xy}(\omega) = \frac{|H(\omega)|^2_c}{|H(\omega)|^2_a} = \frac{|G_{xy}(\omega)|^2}{G_{xx}(\omega)G_{yy}(\omega)} \quad (7.52)$$

На практиці, зазвичай, $\gamma^2_{xy}(\omega) < 1$, тому оцінювання амплітудної характеристики за взаємним спектром дає меншу величину порівняно з оцінюванням за спектрами. Більш того, якщо підставити вирази (7.43) у (7.50) отримаємо:

$$|H|^2_a = \frac{G_{vv} + G_{mm}}{G_{uu}G_{mm}} = |H|^2 \left[\frac{1 + \frac{G_{mm}}{G_{vv}}}{1 + \frac{G_{mm}}{G_{uu}}} \right] \quad (7.53)$$

де залежність від ω пропущена для спрощення позначень. Тому, якщо навіть $G_{mm} \ll G_{uu}$, $|H|^2_a$ завжди дає змішану оцінку, якщо $G_{mm} \neq 0$. Однак, підставляючи вирази (7.42) і (7.43) у (7.50), отримаємо

$$|H|_c = \frac{|G_{uv}|}{G_{uu} + G_{mm}} = |H| \left[\frac{1}{1 + G_{mm} + G_{uu}} \right] \quad (7.54)$$

Отже, $|H|_c$ – незсувна оцінка $|H|$, якщо $G_{mm} \ll G_{uu}$ незалежно від значення G_m [9, 11].

Співвідношення (7.53) і (7.54) дозволяють зробити висновок, що взаємоспектральні методи мають перевагу над спектральними у тому випадку, коли на виході є незалежний шум, що майже завжди має місце на практиці.

Наявність шуму на вході системи призводить до зсувної оцінки $H(\omega)$, якщо користуватися формулою (7.9), так як знаменник не рівний в цьому випадку дійсному вхідному спектру. Залежно від того, проходить цей незалежний шум $m(t)$ через систему чи він є тільки у вимірах $x(t)$, можливі два різних випадки.

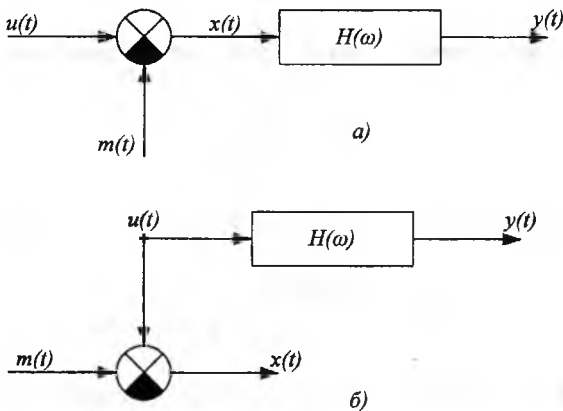


Рисунок 7.4 – Два типи впливу шуму на вхідний процес системи.

- а) – шум проходить через систему;
 б) – шум не проходить через систему*

Рисунок 7.4 ілюструє обидві ці ситуації, причому в обох випадках величинами, що спостерігаються, є $x(t)$ і $y(t)$.

Дослідимо спочатку перший випадок, коли вхідний шум проходить через систему. У багатьох фізичних задачах невідомий шум, що і (або) не спостерігається $m(t)$, корельований з вхідним процесом, що спостерігається, $x(t)$. Тоді фінітне перетворення Фур'є виразу (7.1) при довжині реалізації T дає [9, 12]:

$$Y(\omega, T) = H(\omega)[X(\omega, T) + M(\omega, T)], \quad (7.55)$$

і з урахуванням формули для односторонньої спектральної щільності

$$G_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} E[X_k^*(\omega, T)Y_k(\omega, T)],$$

отримуємо

$$G_{xy}(\omega) = H(\omega)[G_{xx}(\omega) + G_{xm}(\omega)]. \quad (7.56)$$

Тому

$$H(\omega) = \frac{G_{xy}(\omega)}{G_{xx}(\omega) + G_{xm}(\omega)}, \quad (7.57)$$

$$H_{xy}(\omega) = \frac{G_{xy}(\omega)}{G_{xx}(\omega)}. \quad (7.58)$$

Вираз (7.57) - це дійсна частотна характеристика системи, а вираз (7.58) є частотною характеристикою спостережуваної системи.

Із формул (7.57) і (7.58) отримуємо

$$H_{xy}(\omega) = H(\omega) \left[1 + \frac{G_{xm}(\omega)}{G_{xx}(\omega)} \right]. \quad (7.59)$$

Отже, в загальному випадку $H_{xy}(\omega)$ буде зсувною оцінкою $H(\omega)$ як за амплітудою, так і за фазою. Але якщо $G_{xm}(\omega) = 0$, тобто якщо $x(t)$ і $m(t)$ некорельовані, то $H_{xy}(\omega)$ буде не зсувною оцінкою $H(\omega)$.

Розглянемо тепер другий випадок, коли вхідний шум не проходить через систему. Тоді краще прийняти, що $m(t)$ і $u(t)$ не корельовані, а відповідно, не корельовані $m(t)$ і $y(t)$. В цьому випадку мають місце такі співвідношення [12]:

$$X(\omega, T) = U(\omega, T) + M(\omega, T), \quad (7.60)$$

$$G_{xy}(\omega) = G_{uy}(\omega), \quad (7.61)$$

$$G_{xx}(\omega) = G_{uu}(\omega) + G_{mm}(\omega), \quad (7.62)$$

$$H(\omega) = \frac{G_{uy}(\omega)}{G_{uu}(\omega)}, \quad (7.63)$$

$$H_{xy}(\omega) = \frac{G_{xy}(\omega)}{G_{xx}(\omega)}. \quad (7.64)$$

Вираз (7.63) - це дійсна частотна характеристика системи, а вираз (7.64) є частотною характеристикою спостережуваної системи.

Із формул (7.63) і (7.64) витікає, що

$$H_{xy}(\omega) = H(\omega) \left[1 + \frac{G_{mm}(\omega)}{G_{uu}(\omega)} \right]^{-1}. \quad (7.65)$$

Таким чином, $H_{xy}(\omega)$ завжди дає зсувну оцінку $H(\omega)$ за амплітудою (але не за фазою) і є функцією відношення шуму сигналу $\frac{G_{mm}(\omega)}{G_{uu}(\omega)}$. Однак взаємний спектр $G_{xy}(\omega)$ завжди дає незсувну оцінку $G_{yy}(\omega)$ як за амплітудою, так і за фазою.

Припустімо, що $m(t)$ і $n(t)$ корельовані між собою, але не з сигналами, так, що їх функція когерентності задовольняє нерівності:

$$0 < \gamma_{mn}^2(\omega) < 1. \quad (7.66)$$

Визначимо вхідне $\alpha(\omega)$ і $\beta(\omega)$ відношення шуму до сигналу формулами

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\omega) &= \frac{G_{mm}(\omega)}{G_{uu}(\omega)}, \\ \beta(\omega) &= \frac{G_{nn}(\omega)}{G_{vv}(\omega)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.67)$$

Тоді співвідношення (7.72) і (7.73) з врахуванням (7.67) можна записати у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} G_{xx}(\omega) &= G_{uu}(\omega)[1 + \alpha(\omega)], \\ G_{yy}(\omega) &= G_{vv}(\omega)[1 + \beta(\omega)], \end{aligned} \right\} \quad (7.68)$$

$$G_{xy}(\omega) = G_{uv}(\omega) + G_{mn}(\omega). \quad (7.69)$$

Загальний вираз (7.75) для спостережуваної функції когерентності має вигляд:

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|G_{uv}(\omega) + G_{mn}(\omega)|^2}{G_{uu}(\omega)G_{vv}(\omega)[1 + \alpha(\omega)][1 + \beta(\omega)]}. \quad (7.70)$$

Застосування цієї формули потребує деяких додаткових припущень.

Можна отримати декілька корисних результатів, якщо вимагати, щоб модуль взаємного спектру $|G_{uv}(\omega)|$ сигналів $u(t)$ і $v(t)$ був таким, що

$$|G_{mn}(\omega)| \ll |G_{uv}(\omega)|. \quad (7.71)$$

Розглянемо два окремих випадки: модуль $|G_{mn}(\omega)|$ паралельний $|G_{uv}(\omega)|$ або ж $|G_{mn}(\omega)|$ перпендикулярний $|G_{uv}(\omega)|$. Отримаємо оцінки для $\gamma_{xy}^2(\omega)$, визначеною формулою (7.70), для цих двох випадків [11, 12].

По-перше, якщо модуль $|G_{mn}(\omega)|$ паралельний $|G_{uv}(\omega)|$, то

$$|G_{xy}(\omega)| = |G_{uv}(\omega) + G_{mn}(\omega)| = |G_{uv}(\omega)| \pm |G_{mn}(\omega)|, \quad (7.72)$$

(рис. 7.5). Спостережуваний фазовий кут $\theta_{xy}(\omega) = \theta_{uv}(\omega)$. За визначенням

$$|G_{mn}(\omega)|^2 = \gamma_{mn}^2(\omega) G_{mm}(\omega) G_{nn}(\omega), \quad (7.73)$$

де $\gamma_{mn}^2(\omega)$ - функція когерентності між $m(t)$ і $n(t)$.

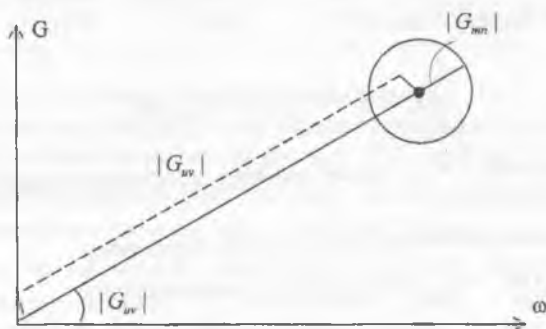


Рисунок 7.5 – Корельований шум; модуль $|G_{mn}(\omega)|$ паралельний $|G_{uv}(\omega)|$.

Крім того,

$$|G_{uv}(\omega)|^2 = G_{uu}(\omega) G_{vv}(\omega). \quad (7.74)$$

Отже,

$$|G_{xy}(\omega)|^2 = |G_{uv}(\omega)|^2 \left[1 \pm \frac{|G_{mn}(\omega)|}{|G_{uv}(\omega)|} \right]^2 = G_{uu}(\omega) G_{vv}(\omega) \left[1 \pm \gamma_{mn}(\omega) [\alpha(\omega) \beta(\omega)]^{1/2} \right]^2 \quad (7.75)$$

Звідси

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{[1 \pm \gamma_{mn}(\omega)[\alpha(\omega)\beta(\omega)]^{1/2}]^2}{[1 + \alpha(\omega)][1 + \beta(\omega)]}. \quad (7.76)$$

Спостережувана функція когерентності прийме мінімальне значення, якщо в чисельнику вибрати знак мінус, а $\gamma_{mn}(\omega)$ спрямувати до одиниці. Найменше можливе значення цієї функції в припущенні $\alpha(\omega) = \beta(\omega)$ дорівнює:

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \left\{ \frac{1 - \alpha(\omega)}{1 + \alpha(\omega)} \right\}^2. \quad (7.77)$$

Величина $\gamma_{xy}^2(\omega)$ як функція $\alpha(\omega)$ наведена в табл. 7.1 [11].

Таблиця 7.1 – Мінімальне значення $\gamma_{xy}^2(\omega)$ як функції $\alpha(\omega)$, отримані за формулою (7.77)

$\alpha(\omega)$	0,050	0,100	0,150	0,200	0,250
$\gamma_{xy}^2(\omega)$	0,819	0,669	0,576	0,777	0,360

Розглянемо тепер другий випадок, коли модуль $|G_{mn}(\omega)|$ перпендикулярний $|G_{uv}(\omega)|$. Тоді

$$|G_{xy}(\omega)| = |G_{uv}(\omega)|^2 + |G_{mn}(\omega)|^2, \quad (7.78)$$

як показано на рисунку 7.6. В цьому випадку спостережуваний фазовий кут $\theta_{xy}(\omega) = \theta_{uv}(\omega) \pm \Delta\theta_{mn}(\omega)$.

Використовуючи співвідношення (7.67) – (7.69), отримаємо

$$|G_{xy}(\omega)|^2 = G_{uv}(\omega)G_{vn}(\omega)[1 + \gamma_{mn}^2(\omega)\alpha(\omega)\beta(\omega)], \quad (7.79)$$

звідки

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{1 + \gamma_{mn}^2(\omega)\alpha(\omega)\beta(\omega)}{[1 + \alpha(\omega)][1 + \beta(\omega)]}. \quad (7.80)$$

Зрозуміло, що спостережувана функція когерентності приймає найменше значення при наближенні $\gamma_{mn}(\omega)$ до нуля. Найменше можливе значення цієї функції в припущенні $\alpha(\omega) = \beta(\omega)$ дорівнює

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{1}{[1 + \alpha(\omega)]^2}, \quad (7.81)$$

що завжди більше величини $\gamma_{xy}^2(\omega)$ з формули (7.77). Значення $\gamma_{xy}^2(\omega)$ як функції $\alpha(\omega)$ наведені в табл. 7.2 [11].

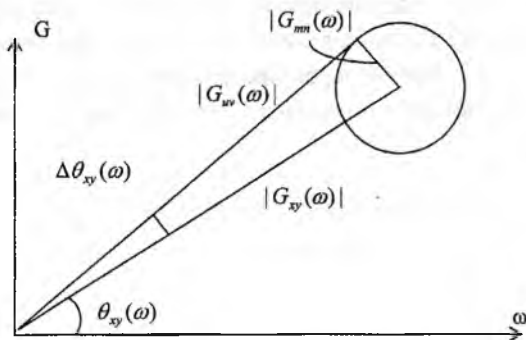


Рисунок 7.6 – Корельований шум; модуль $|G_{mn}(\omega)|$ перпендикулярний $|G_{mv}(\omega)|$.

Таблиця 7.2 - Мінімальне значення $\gamma_{xy}^2(\omega)$ як функції $\alpha(\omega)$, отримані за формулою (7.81)

$\alpha(\omega)$	0,050	0,100	0,150	0,200	0,250
$\gamma_{xy}^2(\omega)$	0,907	0,826	0,756	0,697	0,670

7.3 Аналіз системи зі зворотним зв'язком

Розглянемо систему з від'ємним зворотним зв'язком. Структурна схема цієї системи показана на рисунку 7.7, де $H_1(\omega)$ – лінійна частотна характеристика прямого тракту, $H_2(\omega)$ – лінійна частотна характеристика тракту зворотного зв'язку, $x(t)$ – вхідний процес, $y(t)$ – вихідний. Якщо $H_2(\omega) = 0$, то ця модель зводиться до системи з одним виходом, що зображена на рисунку 7.1. Розглянемо деякі співвідношення, які продемонструють зміни, внесені такою схемою у попередні результати, що вимагатиме нових інтерпретацій отриманих результатів.

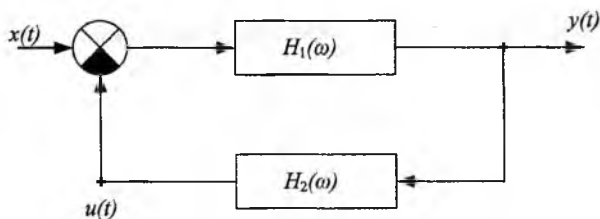


Рисунок 7.7 – Структурна схема системи з одним входом і одним виходом та ланцюгом зворотного зв'язку

Нехай $u(t)$ – вихідний процес тракту зворотного зв'язку з частотною характеристикою $H_2(\omega)$, яка на практиці, як правило, не спостерігається. Згідно з формулою (7.1), фінітні перетворення Фур'є $x(t)$, $y(t)$ і $u(t)$ при достатньо великій довжині реалізації T пов'язані між собою співвідношеннями

$$\left. \begin{aligned} Y(\omega, T) &= H_1(\omega)[X(\omega, T) - U(\omega, T)], \\ U(\omega, T) &= H_2(\omega)Y(\omega, T). \end{aligned} \right\} \quad (7.82)$$

Тому

$$Y(\omega, T) = H_1(\omega)[X(\omega, T) - H_2(\omega)Y(\omega, T)], \quad (7.83)$$

звідки

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega, T)}{X(\omega, T)} = \frac{H_1(\omega)}{1 + H_1(\omega)H_2(\omega)}.$$

Величина $H(\omega)$ – загальна частотна характеристика лінійної системи з колом зворотного зв'язку, яка пов'язує $x(t)$ і $y(t)$, вона може бути визначена за спостереженнями тільки $x(t)$ і $y(t)$. При цьому, зрозуміло, що добуток $H_1(\omega)H_2(\omega)$ не повинен дорівнювати «-1» на всіх частотах. Експериментальне визначення $H_1(\omega)$ і $H_2(\omega)$ неможливе, якщо величина $u(t)$ не спостерігається. Якщо $H_1(\omega)$ або $H_2(\omega)$ відомі або є підстави припустити, що $H_1(\omega)$ або $H_2(\omega)$ має той чи інший вигляд, то тоді другу величину можна знайти.

Наприклад, нехай $H_2(\omega) = c$ є відома додатна константа. Тоді

$$\left. \begin{aligned} H(\omega) &= \frac{H_1(\omega)}{1 + cH_1(\omega)}, \\ H_1(\omega) &= \frac{H(\omega)}{1 - cH(\omega)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.84)$$

У стаціонарному випадку $H(\omega)$ можна знайти за взаємним спектром

$$H(\omega) = \frac{G_y(\omega)}{G_x(\omega)}. \quad (7.85)$$

Тому

$$H_1(\omega) = \frac{G_y(\omega)}{G_x(\omega) - cG_y(\omega)}. \quad (7.86)$$

Очевидно було б помилкою вважати, що $H(\omega)$ і $H_1(\omega)$ співпадають, коли c не дорівнює нулю.

Припустімо тепер, що невідомий зовнішній шум $n(t)$ потрапляє і у системи зі зворотним зв'язком (рис. 7.8). Визначимо у цій схемі $v(t)$ як вихідний процес прямого тракту з частотною характеристикою $H_1(\omega)$, який в цьому випадку не може бути вимірний. Замість нього спостерігається $y(t) = v(t) + n(t)$, де $n(t)$ не корельований з $v(t)$.

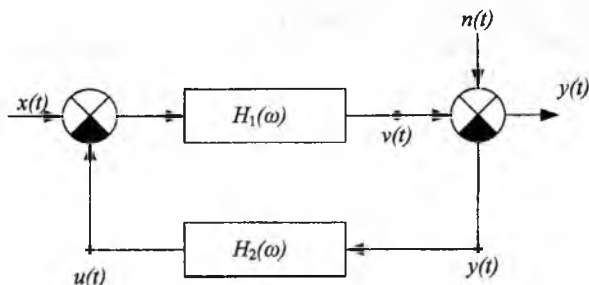


Рисунок 7.8 – Структурна схема системи зі зворотним зв'язком за наявності шуму на її виході.

Припустімо, що $u(t)$, вихідний процес тракту зворотного зв'язку з частотною характеристикою $H_2(\omega)$, безпосередньо не може бути вимірний. Застосувавши до реалізації достатньо великої довжини T фінітне перетворення Фур'є, отримаємо наступні співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} Y(\omega, T) &= V(\omega, T) + N(\omega, T), \\ V(\omega, T) &= H_1(\omega)[X(\omega, T) - H_2(\omega)Y(\omega, T)]. \end{aligned} \right\} \quad (7.87)$$

Тому

$$Y(\omega, T) = H_1(\omega)[X(\omega, T) - H_2(\omega)Y(\omega, T)] + N(\omega, T). \quad (7.88)$$

У цьому випадку реакція системи зі зворотним зв'язком визначається виразом:

$$Y(\omega, T) = \frac{H_1(\omega)X(\omega, T)}{1 + H_1(\omega)H_2(\omega)} + \frac{N(\omega, T)}{1 + H_1(\omega)H_2(\omega)} \quad (7.89)$$

і має дві складові, які визначаються сигналом і шумом. Якщо $H_2(\omega) = 0$, то зворотний зв'язок відсутній і реакція описується виразом:

$$Y(\omega, T) = H_1(\omega)X(\omega, T) + N(\omega, T), \quad (7.90)$$

причому члени, які описують сигнал і шум, входять у різні доданки. Обидві ці формули дають одне й те саме відношення сигналу до шуму на виході системи:

$$\text{Сигнал / шум} = \frac{H_1(\omega)X(\omega, T)}{N(\omega, T)}, \quad (7.91)$$

яке є функцією від $H_1(\omega)$, але не залежить від $H_2(\omega)$. Тому відношення сигналу до шуму зростає при збільшенні $H_1(\omega)$ та фіксованому $H_2(\omega)$, що є корисною властивістю систем зі зворотним зв'язком.

Повертаючись тепер до формули (7.89), бачимо, що вона може бути подана у вигляді [11, 12]:

$$Y(\omega, T) = H(\omega)X(\omega, T) + M(\omega, T), \quad (7.92)$$

де

$$\left. \begin{aligned} H(\omega) &= \frac{H_1(\omega)}{1 + H_1(\omega)H_2(\omega)}, \\ M(\omega, T) &= \frac{N(\omega, T)}{1 + H_1(\omega)H_2(\omega)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.93)$$

У стаціонарному випадку $H(\omega)$ і $G_{mn}(\omega)$ визначаються за формулами для систем з одним входом і одним виходом:

$$H(\omega) = \frac{G_{xy}(\omega)}{G_{xx}(\omega)}, \quad (7.94)$$

$$G_{mm}(\omega) = [1 - \gamma^2_{xy}(\omega)]G_{yy}(\omega). \quad (7.95)$$

Сумарний вихідний спектр

$$G_{yy}(\omega) = G_{rr}(\omega) + G_{mm}(\omega), \quad (7.96)$$

де

$$G_{rr}(\omega) = \frac{|H_1(\omega)|^2 G_{xx}(\omega)}{|1 + H_1(\omega)H_2(\omega)|^2}, \quad (7.97)$$

$$G_{mm}(\omega) = \frac{G_{nn}(\omega)}{|1 + H_1(\omega)H_2(\omega)|^2}. \quad (7.98)$$

Із формули (7.32) витікає, що

$$\gamma^2_{xy}(\omega) = \frac{|H_1(\omega)|^2 G_x(\omega)}{|H_1(\omega)|^2 G_x(\omega) + G_m(\omega)}. \quad (7.99)$$

Таким чином, $\gamma^2_{xy}(\omega)$ не залежить від $H_2(\omega)$, що узгоджується з тим, що відношення сигналу до шуму на виході не залежить від $H_2(\omega)$.

Питання для самоперевірки

1. При яких умовах систему називають фізично реалізовною?
2. Наведіть формулу частотної характеристики системи.
3. Покажіть зв'язок між коваріаційними функціями вихідного та вхідного процесів.
4. В яких межах змінюється функція когерентності?

Лабораторна робота № 4

Тема: Дослідження проходження випадкового сигналу через лінійну систему.

Мета: набути навичок визначення статистичних характеристик сигналів на виході лінійної системи при відомих статистичних характеристиках вхідного випадкового сигналу.

Порядок виконання роботи:

1. Обрати згідно з варіантом кореляційну функцію $R_x(\tau)$ вхідного сигналу лінійної системи.
2. Обрати згідно з варіантом передатну функцію $W(p)$ лінійної системи.
3. Обчислити кореляційну функцію $R_y(\tau)$ вихідного сигналу лінійної системи.
4. Зробити висновки по роботі і оформити звіт.

Зміст звіту:

1. Титульний лист.
2. Мета роботи.
3. Обчислення $R_y(\tau)$.
4. Висновки за результатами роботи.

Варіанти завдань:

Кореляційна функція	Передатна функція
1 $R_x(\tau) = G_x^2 \cdot e^{-\alpha \tau }$	$W(p) = \frac{k_1}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1)}$
2 $R_x(\tau) = G_x^2 \cdot e^{-\alpha \tau } \cdot \cos \beta\tau$	$W(p) = \frac{k_1}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1)}$
3 $R_x(\tau) = G_x^2 \cdot e^{-\alpha \tau } \cdot (\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta\tau)$	$W(p) = \frac{k_1}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1)}$
4 $R_x(\tau) = G_x^2 \cdot e^{-\alpha \tau }$	$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$
5 $R_x(\tau) = G_x^2 \cdot e^{-\alpha \tau } \cdot \cos \beta\tau$	$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$
6 $R_x(\tau) = G_x^2 \cdot e^{-\alpha \tau } \cdot (\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta\tau)$	$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$
7 $R_x(\tau) = G_x^2 \cdot e^{-\alpha \tau }$	$W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2^2 p^2 + 2\xi T_2 p + 1)}$
8 $R_x(\tau) = G_x^2 \cdot e^{-\alpha \tau } \cdot \cos \beta\tau$	$W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2^2 p^2 + 2\xi T_2 p + 1)}$
9 $R_x(\tau) = G_x^2 \cdot e^{-\alpha \tau } \cdot (\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta\tau)$	$W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2^2 p^2 + 2\xi T_2 p + 1)}$

8 ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ І ПЕРЕДБАЧЕННЯ ЇХ РЕАКЦІЇ

Розглянемо оцінювання частотних характеристик систем за спостереженнями вхідних і вихідних процесів і передбачення реакції систем за вимірами вхідного процесу і відомою частотною характеристикою або її оцінкою.

8.1 Визначення частотної характеристики

Розглянемо систему з одним входом і одним виходом, в якій шум впливає тільки на вихідний процес (рис. 8.1).

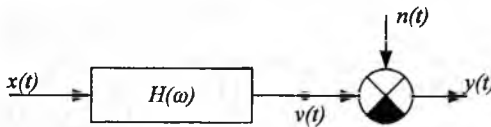


Рисунок 8.1 – Система з одним входом і одним виходом; шум впливає на вихід системи.

Ця ситуація характерна для багатьох фізичних задач, в яких спостереження вхідного процесу $x(t)$ принципово вільні від шуму, а спостереження вихідного процесу $y(t)$ прирівнюється до ідеальної лінійної реакції $v(t)$ на вхідний процес $x(t)$ плюс випадкове збудження $n(t)$. Оцінка частотної характеристики $H(\omega)$ за спостереженням тільки $x(t)$ та $y(t)$ визначається за формулою (7.9), а саме:

$$H(\omega) = \frac{G_{xy}(\omega)}{G_{xx}(\omega)}. \quad (8.1)$$

Відповідно до співвідношень (7.30) та (7.32), отримуємо:

$$G_{vv}(\omega) = \gamma^2_{xy}(\omega) G_{yy}(\omega), \quad (8.2)$$

$$G_m(\omega) = [1 - \gamma^2_{xy}(\omega)] G_{yy}(\omega). \quad (8.3)$$

Величина $G_m(\omega)$ – спектр вихідного процесу $y(t)$, який залишається після виділення з нього лінійної реакції на $x(t)$.

Величина $G_{vv}(\omega)$ – когерентний спектр вихідного процесу $y(t)$, який лінійно обумовлений процесом $x(t)$. Звичайна функція когерентності визначається формулою

$$\gamma^2_{xy}(\omega) = \frac{G_{xy}(\omega)}{G_{yy}(\omega)}, \quad (8.4)$$

як було показано у розділі 7.1.4. Оскільки $G_w(\omega) \leq G_y(\omega)$ для всіх ω , то звідси витікає просте фізичне доведення того, що [11, 12]:

$$0 \leq \gamma^2_{xy}(\omega) \leq 1. \quad (8.5)$$

Функції когерентності, визначені у (8.4) та (7.28), співпадають, якщо $H(\omega)$ задовольняє рівнянню (8.1).

Тимчасово забудемо про рівняння (8.1) і припустимо, що $H(\omega)$ – довільна частотна характеристика лінійної системи, зображеної на рис. 8.1. Тоді для реалізації достатньо великої довжини T поведінка цієї системи описується рівнянням:

$$Y(\omega, T) = H(\omega)X(\omega, T) + N(\omega, T), \quad (8.6)$$

де $Y(\omega, T)$, $X(\omega, T)$ і $N(\omega, T)$ – фінитні перетворення Фур'є, відповідно, $y(t)$, $x(t)$ та $n(t)$.

Тоді

$$N(\omega, T) = Y(\omega, T) - H(\omega)X(\omega, T), \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} |N(\omega, T)|^2 &= |Y(\omega, T)|^2 - H(\omega)X(\omega, T)Y^*(\omega, T) - \\ &- H^*(\omega)X^*(\omega, T)Y(\omega, T) + H(\omega)H^*(\omega)|X(\omega, T)|^2. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Якщо знайти математичні сподівання обох частин рівності (8.8), помножити їх на $2/T$ і, спрямувавши T до нескінченності, з урахуванням того, що:

$$\left. \begin{aligned} G_{yy}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} E[X_k^*(\omega, T)Y_k(\omega, T)], \\ G_{xx}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} E[X_k(\omega, T)|^2] \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

отримаємо співвідношення:

$$G_m(\omega) = G_{yy}(\omega) - H(\omega)G_{yx}(\omega) - H^*(\omega)G_{xy}(\omega) + H(\omega)H^*(\omega)G_{xx}(\omega). \quad (8.10)$$

Цей вираз для $G_m(\omega)$ справедливий для довільної функції $H(\omega)$. Оптимальна частотна характеристика $H(\omega)$ – це та, яка мінімізує $G_m(\omega)$ за всіма можливими $H(\omega)$. Така оцінка називається оцінкою за методом найменших квадратів [11].

Мінімізуємо тепер $G_m(\omega)$ як функцію від $H(\omega)$. З метою спрощення залежність від ω не наводимо, тобто з (8.10) витікає, що:

$$G_m = G_{yy} - HG_{yx} - H^*G_{xy} + HH^*G_{xx}. \quad (8.11)$$

Подамо комплексні числа через їх дійсні та уявні частини

$$\left. \begin{aligned} H &= H_R - jH_I, & H^* &= H_R + jH_I, \\ G_{xy} &= G_R - jG_I, & G_{yx} &= G_R + jG_I. \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

Тоді

$$G_m = G_{yy} - (H_R - jH_I)G_{yx} - (H_R + jH_I)G_{xy} + (H_R^2 + H_I^2)G_{xx}. \quad (8.13)$$

Для знаходження вигляду характеристики H , що мінімізує G_m , необхідно тепер прирівняти до нуля частинні похідні G_m за H_R та за H_I і розв'язувати отриману таким чином систему рівнянь. Система відповідних рівнянь має вигляд [11, 12]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G_m}{\partial H_R} &= -G_{yx} - G_{xy} + 2H_R G_{xx} = 0, \\ \frac{\partial G_m}{\partial H_I} &= jG_{yx} - jG_{xy} + 2H_I G_{xx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

Звідси:

$$\left. \begin{aligned} H_R &= \frac{G_{xy} + G_{yx}}{2G_{xx}} = \frac{G_R}{G_{xx}}, \\ H_I &= \frac{j(G_{xy} - G_{yx})}{2G_{xx}} = \frac{G_I}{G_{xx}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

Таким чином, оптимальна характеристика H співпадає з частотною характеристикою, яка визначається за формулою (8.1), зокрема:

$$H = H_R - jH_I = \frac{G_R - jG_I}{G_{xx}} = \frac{G_{xy}}{G_{xx}}. \quad (8.16)$$

Оптимальна характеристика H , що обчислюється за довільними реалізаціями відповідно до формули (8.16), має теоретичний характер і не обов'язково може бути фізично реалізована.

Спеціальний вид рівняння (8.11) дозволяє легко знайти ту ж саму оптимальну H шляхом прирівнювання до нуля частинної похідної G_m за H

(при фіксованій H^*), або частинної похідної G_m за H^* (при фіксованій H). За допомогою цього способу отримуємо рівняння вигляду:

$$\frac{\partial G_m}{\partial H} = -G_{yx} + H^* G_{xx} = 0, \quad (8.17)$$

$$H^* = \frac{G_{yx}}{G_{xx}}, \quad H = \frac{G_{xy}}{G_{xx}}. \quad (8.18)$$

Підстановка оптимальної частотної характеристики $H(f)$ з (8.16) у рівняння (8.10) дозволяє виявити ще одну важливу властивість:

$$G_m(\omega) = [1 - \gamma^2_{xy}(\omega)] G_{yy}(\omega), \quad (8.19)$$

звідки

$$G_{yy}(\omega) = G_{yy}(\omega) - G_m(\omega) = \gamma^2_{xy}(\omega) G_{yy}(\omega). \quad (8.20)$$

Більш того, підстановка оптимальної $H(\omega)$ дає

$$G_{xx}(\omega) = H(\omega) G_{xx}(\omega), \quad (8.21)$$

$$G_m(\omega) = G_{yy}(\omega) - H(\omega) G_{xx}(\omega) = 0. \quad (8.22)$$

Отже,

$$G_m(\omega) = H^*(\omega) G_m(\omega) = 0. \quad (8.23)$$

Таким чином, якщо для оцінки лінійної системи (рис. 8.1) використовується оптимальна частотна характеристика $H(\omega)$, то $n(t)$ та $v(t)$ автоматично не корельовані [9].

У деяких інженерних додатках вхідний процес $x(t)$ не спостерігається, але є можливість подати на вхід системи відомий випадковий або перехідний зондувальний сигнал $i(t)$, незалежний від звичайного входу $x(t)$ (рис. 8.2) [9, 11].

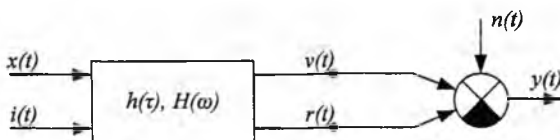


Рисунок 8.2 – Система з зондувальним сигналом і шумом на виході

На рисунку 8.2 маємо: $x(t)$ – звичайний не спостережуваний вхідний процес; $i(t)$ – відомий спостережуваний зондувальний сигнал; $v(t)$ – лінійна не спостережувана реакція на $x(t)$; $r(t)$ – лінійна не

спостережувана реакція на $i(t)$; $n(t)$ – невідомий не спостережуваний шум на виході; $y(t) = v(t) + r(t) + n(t)$ – сумарний спостережуваний вихідний сигнал. Передбачимо, що $i(t)$ не залежить від $x(t)$ та $n(t)$, а $n(t)$ не залежить від $v(t)$ та $r(t)$. Величина $n(t)$ вкючає всі відхилення від лінійної моделі (рис. 8.2), у тому числі нелінійні ефекти і вплив інших некорельованих вхідних сигналів.

Застосування фінітного перетворення Фур'є до реалізацій достатньо великої довжини T приводить до таких співвідношень між величинами, що вказані на рисунку 8.2:

$$\left. \begin{aligned} R(\omega, T) &= H(\omega)I(\omega, T), \\ V(\omega, T) &= H(\omega)X(\omega, T), \\ Y(\omega, T) &= R(\omega, T) + V(\omega, T) + N(\omega, T) = \\ &= H(\omega, T)[I(\omega, T) + X(\omega, T)] + N(\omega, T). \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

За припущенням такі взаємні спектри дорівнюють нулю:

$$G_{ix}(\omega) = G_{in}(\omega) = G_{nv}(\omega) = G_{nr}(\omega) = 0. \quad (8.25)$$

З формул (8.9) витікає, що:

$$G_{yy}(\omega) = G_{rr}(\omega) + G_{vv}(\omega) + G_{nn}(\omega), \quad (8.26)$$

$$G_{yx}(\omega) = H(\omega)G_{ix}(\omega). \quad (8.27)$$

Якщо б частотну характеристику $H(\omega)$ можна було оцінити звичайним чином з використанням спостережень $x(t)$, тобто

$$H(\omega) = \frac{G_{yx}(\omega)}{G_{xx}(\omega)}, \quad (8.28)$$

то за наявності зовнішнього шуму на вході була б отримана змішана оцінка частотної характеристики. Але формулу (8.28) використовувати не можна тому, що $x(t)$ не спостерігається. Проте співвідношення (8.27) показує, що при відомому зондувальному сигналі має місце рівність

$$H(\omega) = \frac{G_{yx}(\omega)}{G_{xx}(\omega)}, \quad (8.29)$$

яка дає незсувну оцінку $H(\omega)$ незалежно від будь-яких спостережень і припущень відносно $x(t)$. Тому цей спосіб можна рекомендувати для

практичного застосування. За зондувальний сигнал $i(t)$ часто вибирають обмежений за частотою білий шум, тобто $G_{ii}(\omega) = K$ – константа, так що $H(\omega)$ дорівнює величині [9]:

$$H(\omega) = \frac{G_y(\omega)}{K}. \quad (8.30)$$

Як тільки частотна характеристика $H(\omega)$ визначена за формулами (8.29) або (8.30), $i(t)$ можна знехтувати, і рівняння (8.24) набуває вигляду:

$$Y(\omega, T) = V(\omega, T) + N(\omega, T) = H(\omega)X(\omega, T) + N(\omega, T). \quad (8.31)$$

Тепер, за наявності тільки $y(t)$, отримаємо:

$$G_{yy}(\omega) = G_{yy}(\omega) + G_{nn}(\omega) = |H(\omega)|^2 G_{xx}(\omega) + G_{nn}(\omega). \quad (8.32)$$

Якщо $G_{nn}(\omega) \ll G_{yy}(\omega)$, то

$$G_{yy}(\omega) \approx |H(\omega)|^2 G_{xx}(\omega). \quad (8.33)$$

Отже,

$$G_{xx}(\omega) \approx \frac{G_{yy}(\omega)}{|H(\omega)|^2}. \quad (8.34)$$

Ця формула дає корисну інформацію про спектр $G_{xx}(\omega)$, навіть якщо $x(t)$ не спостережуваний. Зокрема, $x(t)$ може бути власним шумом на вході, а $y(t)$ – власним шумом на виході, викликаним $x(t)$.

Використовуючи позначення рисунку 8.2, визначимо відношення шуму до сигналу, відповідно, на вході $\alpha(\omega)$ і на виході $\beta(\omega)$ формулами:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\omega) &= \frac{G_{xx}(\omega)}{G_{ii}(\omega)}, \\ \beta(\omega) &= \frac{G_{yy}(\omega) - G_{rr}(\omega)}{G_{rr}(\omega)}. \end{aligned} \right\} \quad (8.35)$$

В цих співвідношеннях $G_{ii}(\omega)$ та $G_{rr}(\omega)$ характеризують вхідний і вихідний сигнали. Чисельник $G_{xx}(\omega)$ у формулі для $\alpha(\omega)$ – це спектр вхідного сигналу за відрахуванням впливу $i(t)$, а чисельник $G_{yy}(\omega) - G_{rr}(\omega)$ у формулі для $\beta(\omega)$ – це спектр вихідного сигналу за відрахуванням впливу $r(t)$. Нехай:

$$x_1(t) = i(t) + x(t). \quad (8.36)$$

Тоді спектри $x_1(t)$ та $y(t)$ дорівнюють:

$$\left. \begin{aligned} G_{x_1x_1}(\omega) &= G_{ii}(\omega) + G_{xx}(\omega) = G_{ii}(\omega)[1 + \alpha(\omega)], \\ G_{yy}(\omega) &= G_{rr}(\omega)[1 + \beta(\omega)], \end{aligned} \right\} \quad (8.37)$$

а взаємний спектр $x_1(t)$ та $y(t)$ має вигляд:

$$G_{x_1y}(\omega) = G_{iy}(\omega) + G_{xy}(\omega) = G_{ir}(\omega) + G_{xy}(\omega), \quad (8.38)$$

Отже,

$$\left. \begin{aligned} G_{ii}(\omega) &= \gamma^2_{ix_1}(\omega) G_{x_1x_1}(\omega), \\ G_{xx}(\omega) &= [1 - \gamma^2_{ix_1}(\omega)] G_{x_1x_1}, \\ G_{rr}(\omega) &= \gamma^2_{iy}(\omega) G_{yy}(\omega), \\ G_{yy}(\omega) - G_{rr}(\omega) &= [1 - \gamma^2_{iy}(\omega)] G_{yy}(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (8.39)$$

Функцію когерентності $\gamma^2_{iy}(\omega)$ завжди можна визначити, а можливість визначення $\gamma^2_{ix_1}(\omega)$ залежить від того, відомий чи ні вхідний процес $x(t)$. З формул (8.35) та (8.39) отримуємо

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\omega) &= \frac{1 - \gamma^2_{ix_1}(\omega)}{\gamma^2_{ix_1}(\omega)}, \\ \beta(\omega) &= \frac{1 - \gamma^2_{iy}(\omega)}{\gamma^2_{iy}(\omega)}. \end{aligned} \right\} \quad (8.40)$$

звідки

$$\left. \begin{aligned} \gamma^2_{ix_1}(\omega) &= \frac{1}{1 + \alpha(\omega)}, \\ \gamma^2_{iy}(\omega) &= \frac{1}{1 + \beta(\omega)}. \end{aligned} \right\} \quad (8.41)$$

Отже, $\alpha(\omega) = \beta(\omega)$ тоді і тільки тоді, коли $\gamma^2_{ix_1}(\omega) = \gamma^2_{iy}(\omega)$. Із співвідношень (8.38) та (8.39) знаходимо функцію когерентності $\gamma^2_{x_1y}$:

$$\gamma^2_{xy}(\omega) = \gamma^2_{ix}(\omega) \gamma^2_{iy}(\omega) \frac{|G_{ix}(\omega) + G_{iy}(\omega)|^2}{G_{ix}(\omega) G_{iy}(\omega)}. \quad (8.42)$$

У випадку $G_{ix}(\omega) = 0$ ця формула значно спрощується:

$$\gamma^2_{xy}(\omega) = \gamma^2_{ix}(\omega) \gamma^2_{iy}(\omega). \quad (8.43)$$

8.2 Помилки оцінювання частотної характеристики

Розглянемо систему з одним входом і одним виходом, наведену на рисунку 8.1, де $x(t)$ і $y(t)$ – реалізації стаціонарних ергодичних випадкових процесів, що спостерігаються одночасно на кінцевому інтервалі часу $0 \leq t \leq T$. Відповідно до формули (8.1), оптимальна оцінка частотної характеристики системи має вигляд:

$$\hat{H}(\omega) = \frac{\hat{G}_{xy}(\omega)}{\hat{G}_{xx}(\omega)}. \quad (8.44)$$

Як витікає із розділу 7.1, частотну характеристику можна оцінювати і за реалізаціями $x(t)$ та $y(t)$ перехідних процесів за формулою:

$$\hat{H}(\omega) = \frac{\hat{\mathcal{G}}_{xy}(\omega)}{\hat{\mathcal{G}}_{xx}(\omega)} \quad (8.45)$$

оцінки „енергетичних” спектральних густин мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}_{xy}(\omega) &= T \hat{\mathcal{G}}_{xy}(\omega), \\ \hat{\mathcal{G}}_{xx}(\omega) &= T \hat{\mathcal{G}}_{xx}(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (8.46)$$

Передбачається, що довжина T реалізацій $x(t)$ та $y(t)$ достатньо велика і охоплює всі суттєві значення $x(t)$ та $y(t)$ так, що $x(t) = y(t) = 0$ при $t < 0$ і $t > T$. Передбачається також, що експеримент можна повторювати, використовуючи перехідні процеси, достатньо кількість разів для отримання n_d реалізацій, необхідних для виконання операцій усереднення за формулами [9]:

$$\hat{G}_{xx}(\omega) = \frac{2}{n_d T} \sum_{k=1}^{n_d} |X_k(\omega, T)|^2, \quad (8.47)$$

$$\hat{G}_{xy}(\omega) = \frac{2}{n_d T} \sum_{k=1}^{n_d} X_k^*(\omega, T) Y_k(\omega, T), \quad (8.48)$$

де $X_k(\omega, T)$ і $Y_k(\omega, T)$ – фінітні перетворення Фур'є $x_k(t)$ і $y_k(t)$.

Оцінювання частотних характеристик за формулою (8.44) або (8.45) звичайно пов'язане з наявністю як випадкових, так і систематичних помилок. Розуміння причин цих помилок і ретельна їх мінімізація – ключ до успішного застосування описаних методів. У більшості випадків функція когерентності між вимірами на вході і виході вказує на наявність помилок і допомагає визначити їх походження і величину. Тому при оцінюванні частотних характеристик необхідно завжди одночасно оцінювати і функцію когерентності.

Джерелами випадкових помилок при оцінюванні частотних характеристик зазвичай є [9, 11]:

1. Інструментальний шум у датчиках і приладах та похибки при обчислюванні.
2. Наявність не спостережуваних вхідних сигналів, що не корельовані зі спостережуваним і впливають на вихідний сигнал.
3. Нелінійний зв'язок між вхідним і вихідним сигналами системи.

Викликана цими чинниками сумарна випадкова помилка прямим чином пов'язана з [11, 12]:

а) функцією когерентності $\hat{\gamma}_{xy}(\omega)$, що обчислена за спостережним реалізаціям вхідного і вихідного процесів;

б) кількістю усереднень n_d , використаних при обчисленні оцінок спектральних густин.

Нормована випадкова помилка оцінювання амплітудної характеристики і середньоквадратичне відхилення при оцінюванні фазової характеристики дорівнюють [11]:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon[|\hat{H}(\omega)|] &\approx \frac{[1 - \hat{\gamma}_{xy}^2(\omega)]^{1/2}}{|\hat{\gamma}_{xy}(\omega)| \sqrt{2n_d}}, \\ \sigma[\hat{\varphi}(\omega)] &\approx \arcsin\{\varepsilon[|\hat{H}(\omega)|]\}. \end{aligned} \right\} \quad (8.49)$$

При проведенні лабораторного експерименту звичайно можна досягти повністю точного визначення вхідного сигналу і низьких інструментальних шумів, що призводить до функції когерентності, близької до одиниці. У цьому випадку частотна характеристика визначається з припустимою випадковою помилкою при порівняно невеликій кількості усереднень. Однак у реальних умовах створити такі ідеальні умови неможливо, особливо якщо вхідний сигнал звичайний, а не результат моделювання. Тому функція когерентності може бути значно меншою одиниці, і для отримання прийнятної точності необхідна більша кількість усереднень n_d .

Для визначення можливого джерела випадкових помилок при оцінюванні частотних характеристик в реальних умовах можна

користуватися переліченими нижче загальними рекомендаціями (які є надто наближені і допускають багаточисельні виключення) [9, 11, 12]:

1. Якщо $\hat{\gamma}_{xy}^2(\omega)$ різко зменшується у тій смузі частот, де $|\hat{H}(\omega)|$ порівняно невелика, то це, зазвичай, пов'язано з впливом зовнішнього шуму на вихідний процес $y(t)$, викликаного неточністю вимірів і (або) наявністю додаткових корельованих вхідних сигналів.

2. Якщо $\hat{\gamma}_{xy}^2(\omega)$ різко зменшується у тій смузі частот, де $|\hat{H}(\omega)|$ далека від свого мінімального значення, а $\hat{G}_x(\omega)$ порівняно невелика, то слід пам'ятати, що шум спричиняє вплив на вхідний процес $x(t)$. Відзначимо, що разом зі збільшенням випадкової помилки в цьому випадку з'являється і систематична помилка.

3. Якщо амплітудна характеристика має різкі максимуми, що притаманне слабкодемпфированим резонансним системам, то зазвичай максимуми $\hat{\gamma}_{xy}^2(\omega)$ і $|\hat{H}(\omega)|$ припадають на ці ж частоти (резонансні частоти системи), оскільки відношення сигналу до шуму є максимальним саме на цих частотах. Якщо ж $\hat{\gamma}_{xy}^2(\omega)$ не має піку на таких частотах або, що ще гірше, має провал, то, очевидно, система нелінійна. Однак більш ймовірною причиною подібної картини є змішаність спектральних оцінок, яка пов'язана з недостатньою роздільною здатністю за частотою.

Систематичні помилки при оцінюванні частотних характеристик звичайно з'являються через такі чотири основні причини [11, 12]:

1) наявність зовнішнього шуму на вході, що не проходить через систему;

2) змішаність оцінок спектральної щільності, яка викликана недостатньою роздільною здатністю за частотою;

3) нелінійність системи;

4) вплив на вихідний сигнал не спостережуваних вхідних процесів, корельованих зі спостережуваним.

Помилки першого типу, викликані інструментальним шумом на вході, були детально проаналізовані у розділі 7.2. Нагадаємо, якщо спостережуваний вхідний процес $x(t)$, є сумою дійсного сигналу $u(t)$ і шуму $m(t)$, то математичне сподівання оцінки частотної характеристики визначається за формулою [9]:

$$E[\hat{H}(\omega)] = H(\omega) \left[1 + \frac{G_{mm}(\omega)}{G_{uu}(\omega)} \right]^{-1}, \quad (8.50)$$

тобто, наявність шуму у спостереженнях вхідного процесу завжди призводить до занижених оцінок частотної характеристики. Тому дуже важливо прагнути того, щоб вплив шуму на вхідний сигнал системи був

мінімальним. Якщо ж шум на вході є дійсним збудженням, яке проходить через систему, і не корельованим з вхідним процесом $u(t)$, що вивчається, то, як витікає з розділу 7.2, зсуву не буде.

Зсувність оцінок спектральних щільностей $\hat{G}_{xx}(\omega)$ і $\hat{G}_{yy}(\omega)$, викликана недостатньою роздільною здатністю за частотою, відбивається в основному на вигляді піків і впадин амплітудної характеристики, що оцінюється. Позбутися їх можна шляхом вибору прийнятної роздільної здатності при оцінюванні спектральних густин, тобто, максимальна роздільна здатність по частоті B_c повинна бути достатньою для чіткого і повного виявлення спектральних піків і впадин [9].

Третє з перелічених вище джерел систематичних помилок пов'язане з порушенням умови лінійності системи. Формули (8.44) та (8.45) дають тільки лінійне наближення частотних характеристик. Але, як доведено у підрозділі 8.1, це найкраще у середньоквадратичному сенсі лінійне наближення частотних характеристик, якщо тільки вхідний процес задовольняє деяким додатковим умовам. Цей факт є вагомим доказом на користь оцінювання частотних характеристик систем з можливими нелінійними властивостями за допомогою звичайних вхідних процесів (або точного лабораторного моделювання таких вхідних процесів), а не за допомогою будь-яких процесів, моделювання яких можливе у лабораторних умовах [11].

Для ілюстрації характеру цієї помилки розглянемо систему з двома входами, причому вхідний процес $x(t)$ спостерігається, другий вхідний процес $z(t)$ не спостерігається, сумарна реакція системи $y(t)$ спостерігається. Тоді, відношення математичного сподівання оцінки частотної характеристики $\hat{H}(\omega)$, отриманого за формулою (8.44), до істинного її значення дорівнює [11, 12]:

$$\frac{E[\hat{H}(\omega)]}{H(\omega)} = \frac{1 - \gamma^2_{xz}(\omega)}{1 - \left[\frac{G_{xz}(\omega)G_{zy}(\omega)}{G_{zz}(\omega)G_{yy}(\omega)} \right]}. \quad (8.51)$$

Відзначимо, що коли спостережувані і не спостережувані вхідні процеси $x(t)$ і $z(t)$, відповідно, не корельовані, то $\gamma^2_{xz}(\omega) = 0$ і права частина співвідношення (8.51) перетворюється на одиницю. Звідси витікає, що не спостережувані вхідні сигнали, не корельовані зі спостережуваними, не викликають зсуву, а проявляються як додатковий шум на виході. Як видно із попереднього розділу, ці вхідні процеси призводять до збільшення випадкових помилок при оцінюванні частотних характеристик.

Відзначимо також, що самим процедурам оцінювання (8.44) і (8.45) притаманний невеликий зсув, пов'язаний з тим, що

$$E[\hat{H}(f)] = E \left[\frac{\hat{G}_{xy}(f)}{\hat{G}_{xx}(f)} \right] \neq \frac{E[\hat{G}_{xy}(f)]}{E[\hat{G}_{xx}(f)]}. \quad (8.52)$$

Тому $E[\hat{H}(\omega)] \neq H(\omega)$. Однак на практиці це зазвичай не викликає труднощів, оскільки при тій кількості усереднень n_d , які необхідні для доведення до прийняттого рівня випадкових помилок (8.49), такою похибкою можна знехтувати.

Наявність систематичних помилок при оцінюванні частотної характеристики, викликаних шумом на вході, неадекватною спектральною роздільною здатністю і нелінійними ефектами, проявляється у вигляді особливостей поведінки функції когерентності $\hat{\gamma}_{xy}^2(\omega)$, що спостерігається. Тому можна керуватися такими міркуваннями [11, 12]:

1. Якщо $\hat{\gamma}_{xy}^2(\omega)$ різко зменшується у тій смузі частот, де $|\hat{H}(\omega)|$ далека від свого мінімального значення, а $\hat{G}_{xx}(\omega)$ відносно мала, то слід очікувати впливу шуму на спостереження вхідного процесу $x(t)$.

2. Якщо $\hat{\gamma}_{xy}^2(\omega)$ знаходить глибокий провал на тій самій частоті, на якій $|\hat{H}(\omega)|$ має гострий пік чи впадину, та найбільш вірогідною причиною помилки є неадекватна спектральна роздільна здатність, хоча подібну ситуацію можуть викликати і нелінійності.

3. Для з'ясування того, яка з цих двох причин має місце, спостереження слід повторити при кращій спектральній роздільній здатності. Якщо значення $\hat{\gamma}_{xy}^2(\omega)$ збільшаться, то, очевидно, причиною є недостатня спектральна роздільна здатність. В іншому випадку потрібно шукати нелінійності.

Систематичні помилки, викликані іншими вхідними сигналами, що не спостерігаються, корельовані з вхідним сигналом $x(t)$, що спостерігається, не обов'язково впливають на вид $\hat{\gamma}_{xy}^2(\omega)$.

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення частотної характеристики $H(\omega)$ лінійної системи при оцінюванні її частотної характеристики.
2. У чому полягає оптимальність частотної характеристики $H(\omega)$ лінійної системи?
3. Яка оцінка називається оцінкою за методом найменших квадратів?

4. Для чого використовується зондувальний сигнал при дослідженні лінійних систем і що найчастіше використовується як цей сигнал?
5. Для чого використовується фінітне перетворення Фур'є при дослідженні лінійних систем і в чому його зміст?
6. В чому полягає оцінювання частотної характеристики $H(\omega)$ лінійної системи?
7. Які похибки виникають при оцінюванні частотної характеристики $H(\omega)$ лінійної системи?
8. Проаналізуйте джерела випадкових похибок при оцінюванні частотної характеристики $H(\omega)$ лінійної системи.
9. Назвіть причини виникнення систематичних похибок при оцінюванні $H(\omega)$.

Лабораторна робота № 5

Тема: Ідентифікація параметрів лінійної системи при впливі на них випадкових сигналів

Мета: ознайомитися з задачею ідентифікації параметрів лінійної системи при впливі на них випадкових сигналів

Порядок виконання роботи:

1. Розглянути задачу ідентифікації параметрів лінійної системи при впливі на них випадкових сигналів.
2. Розглянути особливості вибору методу визначення імпульсної перехідної функції $k(t)$.
3. Розглянути особливості вибору методу визначення передатної функції $W(s)$.
4. Проаналізувати вибір впливів.
5. Розглянути алгоритм обробки експериментальних даних з метою визначення передатної функції $W(s)$.
6. Обрати згідно з варіантом параметри вхідної спектральної щільності $S_x(\omega)$ та вихідної спектральної щільності $S_y(\omega)$.
7. Обчислити частотну характеристику лінійної стаціонарної динамічної системи.
8. Отримати передаточну функцію лінійної системи.
9. Зробити висновки за результатами роботи і оформити звіт.

Зміст звіту:

1. Титульний лист.
2. Мета роботи.
3. Обчислення $W(p)$.
4. Висновки за результатами роботи.

Варіанти завдань:

№ вар.	D	α	T_1	T_2
1	6	2	0.5	1.8
2	1	1	0.75	3.7
3	2	2	0.25	4.8
4	6	6	0.38	2.3
5	6	1	0.94	8.1
6	1	6	0.76	2.75
7	2	1	0.87	6.6
8	3	2	1.5	5.48
9	2	2	2.9	2.48
10	1	1	2.75	3.25

$$S_x(\omega) = \frac{D\alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}, \quad S_y(\omega) = \frac{D\alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)} \cdot \frac{T_1^2 \omega^2 + 1}{T_2^2 \omega^2 + 1}$$

Список використаної літератури

1. Брандт З. Статистические методы анализа наблюдений. – М.: Мир, 1975
2. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1975
3. Скороход А.А. Элементы теории вероятностей и случайных процессов. – К.: Вища школа, 1980
4. Розанов Ю.А. Введение в теорию случайных процессов – М.: Наука, 1981
5. Феллер Ф. Введение в теорию вероятностей и ее приложение. Т.1. – М.: Мир, 1984
6. Математические основы теории автоматического регулирования, Т.П. Изд. 2-е, доп. Под ред. Б.К. Чемоданова. Учебное пособие для вузов. – М.: «Высш. школа», 1977
7. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. – М.: Физматгиз, 1963
8. Cooley J. W., Tukey J. W. An Algorithm for Machine Computation of Complex Fourier Series. Math. of Comp., 19, 297 – 301 (1965)
9. Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егунов Н.Д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. – М.: Машиностроение, 1986.
10. Ефимов А.В. Математический анализ (специальные разделы). – М.: Высшая школа, 1980.
11. Дж. Бендат, А.Пирсон. Применение корреляционного и спектрального анализа: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983
12. Бендат Дж., Пирсон А. Измерение и анализ случайных процессов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1977

Навчальне видання

Сергій Васильович Юхимчук
Любов Михайлівна Ваховська
Людмила Михайлівна Захарченко

Елементи кореляційної теорії випадкових процесів

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Л.М.Ваховською

Редактор Т.О. Старічек

Навчально-методичний відділ ВНТУ

Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 2.08.05р. Гарнітура Times New Roman

Формат 29,7x42 $\frac{1}{4}$

Папір офсетний

Друк різнографічний

Ум. друк. арк. 4.44

Тираж 75 прим.

Зам. № 2005-135

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету

Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95