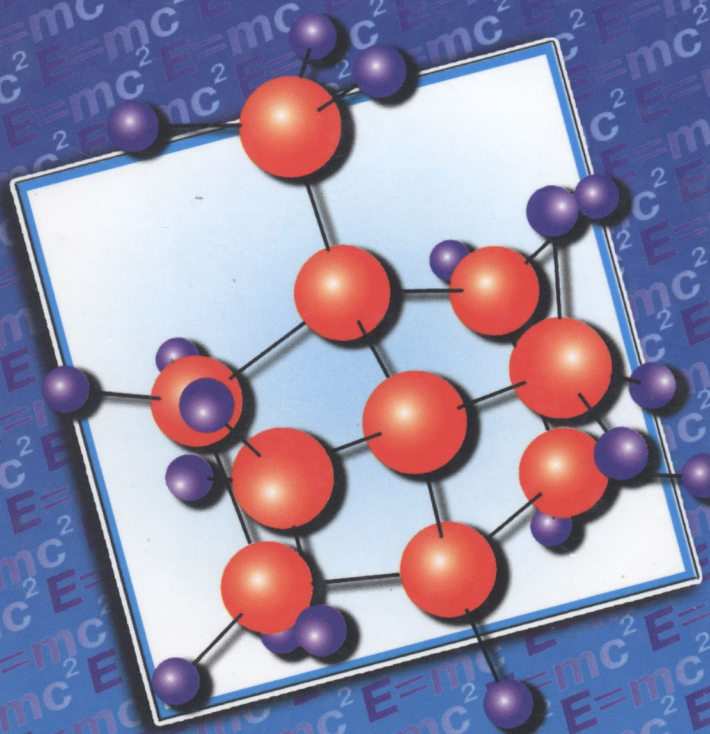


ФІЗИКА ДЛЯ ІНЖЕНЕРІВ

523
K93

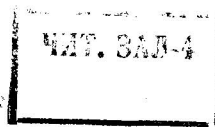
КУРС ФІЗИКИ



53(075)
К93

КУРС ФІЗИКИ

ЗА РЕДАКЦІЄЮ
І. Є. ЛОПАТИНСЬКОГО



Львів
Видавництво «Бескид Біт»
2002

ББК 22.3 Я 73
К 937
УДК 53(075.8)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів (протокол №14/18.2-702 від 24.05.2001р.)

Автори:

**І.Р. ЗАЧЕК, І.М. КРАВЧУК, Б.М. РОМАНИШИН,
В.М. ГАБА, Ф. М. ГОНЧАР**

Відповідальний за випуск

І.Р. ЗАЧЕК, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензенти:

З.В. СТАСЮК, зав. кафедрою загальної фізики Львівського Національного університету ім. І.Франка, доктор фіз.-мат. наук, професор

В.І. ВАЙДАНИЧ, зав. кафедрою загальної фізики Українського державного лісотехнічного університету, доктор фіз.-мат. наук, професор

Зачек І.Р., Кравчук І.М., Романишин Б.М., Габа В.М., Гончар Ф.М.

Курс фізики: Навчальний підручник. – Львів: Видавництво “Бескид Біт”,
2002 р. – 376 с.

ISBN 966-96071-1-6

Посібник написаний у відповідності з програмою по фізиці для студентів вищих технічних навчальних закладів. Він складається з десяти розділів, в яких викладені фізичні основи механіки, молекулярної фізики і термодинаміки, електростатики, постійного струму, електромагнетизму, хвильової оптики, квантової природи випромінювання, фізики атомів і молекул, фізики атомного ядра і елементарних частинок, елементи фізики твердого тіла.

Для студентів вищих навчальних закладів технічного профілю.

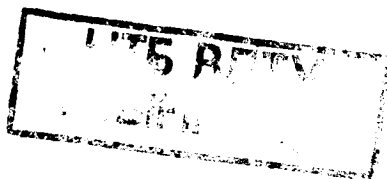
ББК 22.3 Я 73

408695

© Зачек І.Р., Кравчук І.М.,
Романишин Б.М., Габа В.М.,
Гончар Ф.М.

© “Бескид Біт”, 2002

ISBN 966-96071-1-6



I. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

1. Швидкість і прискорення.....	7
2. Закони динаміки матеріальної точки.....	8
3. Закон збереження імпульсу	10
4. Центр мас (інерції) механічної системи і закон його руху.....	10
5. Робота сили і її вираз через криволінійний інтеграл.....	11
6. Кінетична енергія механічної системи.....	12
7. Потенціальна енергія.....	13
8. Закон збереження механічної енергії. Дисипація енергії, закон збереження і перетворення енергії.....	15
9. Кутова швидкість і кутове прискорення.....	16
10. Момент сили і момент імпульсу механічної системи. Момент інерції тіла відносно осі.....	18
11. Рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі. Кінетична енергія тіла, що обертається	22
12. Закон збереження моменту імпульсу.....	24
13. Гармонічні коливання. Диференціальне рівняння гармонічних коливань.....	24
14. Пружинний, фізичний і математичний маятники.....	27
15. Додавання гармонічних коливань однакового напрямку і однакової частоти. Биття.....	29
16. Додавання взаємно перпендикулярних коливань.....	31
17. Диференціальне рівняння загасаючих коливань і його розв'язання.....	33
18. Диференціальне рівняння вимушених коливань і його розв'язання. Резонанс.....	35
19. Утворення хвиль в пружному середовищі. Поздовжні і поперечні хвилі. Рівняння біжучої хвилі.....	38
20. Енергія хвилі.....	41
21. Інтерференція хвиль. Рівняння стоячої хвилі.....	43
22. Рівняння нерозривності. Рівняння Бернуллі.....	46

23. Перетворення Галілея. Механічний принцип відносності	48
24. Постулати спеціальної теорії відносності. Перетворення Лоренца	49
25. Поняття одночасності. Відносність довжин і проміжків часу.....	50
26. Релятивістський закон додавання швидкостей.....	51
27. Елементи релятивістської динаміки. Взаємозв'язок маси і енергії.....	52

II. ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ І ТЕРМОДИНАМІКИ

28. Статистичний і термодинамічний методи дослідження. Термодинамічні параметри. Рівноважний стан і процеси	54
29. Рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу для тиску.....	55
30. Середня кінетична енергія молекул. Молекулярно-кінетичне трактування абсолютної температури.....	57
31. Розподіл Максвелла молекул ідеального газу за швидкостями теплового руху.....	57
32. Барометрична формула. Розподіл Больцмана частинок у зовнішньому потенціальному полі	60
33. Закон рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності молекул.....	61
34. Перший закон термодинаміки. Робота газу при зміні його об'єму.....	64
35. Теплоємність. Класична молекулярно-кінетична теорія теплоємностей ідеального газу і її обмеженість	66
36. Застосування першого закону термодинаміки до ізопроцесів.....	68
37. Адіабатний процес. Застосування першого закону термодинаміки до адіабатного процесу ідеального газу.....	69
38. Середнє число зіткнень і середня довжина вільного пробігу молекул.....	71
39. Явище переносу в термодинамічних нерівноважних системах .	72

40. Коловий процес. Теплові двигуни і холодильні машини. Оборотні і необоротні процеси...	78	60. Закон Відемана-Франца. Нендоліки класичної електронної теорії провідності металів.....	131
41. Цикл Карно і його коефіцієнт корисної дії для ідеального газу ..	79	61. Робота виходу електронів з металу. Термоелектронна емісія..	133
42. Другий закон термодинаміки.	82	62. Струм в газах.....	135
43. Ентропія. Ентропія ідеального газу.....	83	63. Види самостійного розряду...	139
44. Статистичне тлумачення другого закону термодинаміки.....	86	64. Плазма.....	142
45. Реальні гази. Рівняння Ван-дер-Ваальса.....	87	V. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ	
46. Порівняння ізотерм Ван-дер-Ваальса з експериментальними. Критичний стан.....	90	65. Магнітне поле. Магнітна індукція. Закон Ампера.....	144
47. Внутрішня енергія реального газу.....	94	66. Закон Біо-Савара-Лапласа....	146
III. ЕЛЕКТРОСТАТИКА		67. Магнітне поле прямолінійного провідника зі струмом. Магнітне поле колового струму.....	148
48. Закон збереження електричного заряду. Електричне поле. Напруженість електричного поля	95	68. Закон повного струму магнітного поля у вакуумі. Вихровий характер магнітного поля.....	149
49. Потенціал електричного поля. Напруженість як градієнт потенціалу.....	98	69. Магнітне поле тороїда і довгого соленоїда.....	150
50. Потік вектора напруженості. Теорема Остроградського-Гаусса	101	70. Сила Лоренца.....	152
51. Застосування теореми Остроградського-Гаусса до розрахунку електричних полів.....	103	71. Ефект Холла.....	154
52. Типи діелектриків. Електронна і орієнтаційна поляризація	107	72. Контур зі струмом в магнітному колі.....	155
53. Електричне поле в речовині. Теорема Остроградського-Гаусса для електростатичного поля в діелектрику. Електричне зміщення.....	110	73. Магнітний потік. Теорема Остроградського-Гаусса.....	157
54. Сегнетоелектрики.....	113	74. Робота переміщення провідника і контура з струмом в магнітному полі.....	158
55. Провідники в електричному полі.....	115	75. Магнітні моменти атомів. Намагніченість. Атоми в магнітному полі.....	160
56. Електроємність відокремленого провідника. Конденсатори ..	117	76. Елементарна теорія діа- і парамагнетизму.....	163
57. Енергія зарядженого відокремленого провідника, конденсатора. Енергія електростатичного поля. Об'ємна густина енергії	121	77. Магнітне поле в речовині. Закон повного струму для магнітного поля в речовині. Напруженість магнітного поля.....	166
IV. ПОСТІЙНИЙ СТРУМ		78. Феромагнетики.....	169
58. Постійний електричний струм	123	79. Явище електромагнітної індукції. Закон Ленца. Закон електромагнітної індукції (закон Фарадея).....	171
59. Класична електронна теорія електропровідності металів і її дослідне обґрунтування. Виведення закону Ома в диференціальній формі із електронних представлень.....	127	80. Виведення закону електромагнітної індукції із закону збереження енергії, а також на основі електронної теорії.....	174
		81. Явище самоіндукції. Індуктивність.....	175
		82. Явище взаємної індукції. Взаємна індуктивність.....	178
		83. Енергія магнітного поля.....	179
		84. Основи теорії Максвелла для електромагнітного поля. Струм зміщення.....	180

85. Рівняння Максвелла для електромагнітного поля.....	184
86. Електричний коливальний контур. Власні електромагнітні коливання.....	186
87. Основні властивості електромагнітних хвиль.....	187
88. Енергія електромагнітних хвиль. Потік енергії. Вектор Умова-Пойнтинга	191

VI. ХВИЛЬОВА ОПТИКА

89. Інтерференція світла. Когерентність та монохроматичність світлових хвиль.....	193
90. Розрахунок інтерференційної картини від двох когерентних джерел.....	196
91. Інтерференція світла в тонких плівках.....	198
92. Практичне застосування інтерференції світла.....	202
93. Дифракція світла. Принцип Гюйгенса – Френеля.....	205
94. Метод зон Френеля. Прямолінійне поширення світла. Дифракція Френеля на круглому отворі і диску.....	207
95. Дифракція Фраунгофера на одній щілині і на дифракційній ґратці.....	211
96. Дифракція рентгенівського випромінювання.....	218
97. Дисперсія світла. Області нормальної і аномальної дисперсії.....	219
98. Електронна теорія дисперсії світла.....	222
99. Поглинання світла.....	226
100. Природне і поляризоване світло. Закон Малюса.....	227
101. Поляризація світла при відбиванні. Закон Брюстера.....	231
102. Подвійне променезаломлення.....	231
103. Штучна оптична анізотропія.....	237
104. Обертання площини поляризації.....	240
105. Ефект Доплера.....	242

VII. КВАНТОВА ПРИРОДА ВИПРОМІНЮВАННЯ

106. Теплове випромінювання. Абсолютно чорне тіло. Закон Кірхгофа. Закон Стефана – Больцмана.....	244
107. Розподіл енергії в спектрі абсолютно чорного тіла. Закон зміщення Віна.....	248
108. Квантова гіпотеза і формула Планка.....	250
109. Зовнішній фотоэффект і його закони. Рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоэффекту.....	252
110. Маса й імпульс фотона. Тиск світла.....	255
111. Ефект Комптона і його теорія.....	258

VIII. ФІЗИКА АТОМІВ І МОЛЕКУЛ

112. Досліди Резерфорда. Ядерна модель атома.....	261
113. Атом водню і його спектр за теорією Бора.....	264
114. Формула де Бройля. Дослідне обґрунтування корпускулярно-хвильового дуалізму властивостей речовин.....	268
115. Співвідношення невизначеностей як прояв корпускулярно-хвильового дуалізму властивостей матерії. Обмеженість механічного детермінізму.....	271
116. Хвильова функція і її статистичний зміст.....	274
117. Рух вільної частинки. Рівняння Шрединґера. Принцип причинності в квантовій механіці.....	276
118. Рух вільної частинки. Частинка в прямокутній потенціальній ямі. Принцип відповідності Бора. Тунельний ефект.....	278
119. Атом водню в квантовій механіці.....	283
120. Дослід Штерна і Герлаха. Спін електрона.....	286
121. Принцип Паулі. Розподіл електронів в атомі по станах.....	289
122. Рентгенівські промені.....	291
123. Поняття про енергетичні рівні молекул. Спектри молекул..	295
124. Поглинання, спонтанне і вимушене випромінювання.....	299
125. Оптичні квантові генератори	303
126. Комбінаційне розсіяння світла.....	306

ІХ. ФІЗИКА АТОМНОГО ЯДРА І ЕЛЕМЕНТАРНИХ ЧАСТИНОК

127. Розмір, склад і заряд ядра. Масове і зарядове число.....	309
128. Дефект маси і енергія зв'язку ядра.....	311
120. Взаємодія нуклонів і поняття про властивості і природу ядерних сил.....	313
129. Радіоактивність. Основний закон радіоактивного перетворення атомних ядер.....	316
130. Закономірності радіоактивного випромінювання атомних ядер.....	319
131. Ядерні реакції.....	326
132. Реакція ядерного поділу. Ланцюгова реакція поділу. Ядерний реактор.....	331
133. Реакція синтезу атомних ядер. Проблема керованих тер — моядерних реакцій.....	335
134. Елементарні частинки, їх класифікація і взаємна перетворюваність.....	338

Х. ЕЛЕМЕНТИ ФІЗИКИ ТВЕРДОГО ТІЛА

136. Поняття про квантові статистики Бозе-Ейнштейна і Фермі-Дірака.....	341
137. Розподіл електронів провідності в металі за енергіями. Енергія Фермі.....	344
138. Енергетичні зони в кристалах.....	346
139. Розподіл електронів по енергетичних зонах. Валентна зона і зона провідності. Метали, діелектрики і напівпровідники.....	351
140. Власна провідність напівпровідників.....	352
141. Домішкова провідність напівпровідників.....	356
142. Р-п перехід і його вольт-амперна характеристика.....	359
143. Люмінесценція твердих тіл..	363

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	367
----------------------------	-----

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	375
--------------------------	-----

І. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

§ 1. Швидкість і прискорення

Матеріальна точка, рухаючись, описує деяку лінію в просторі. Ця лінія називається **траєкторією**. Залежно від форми траєкторії рух може бути прямолінійним або криволінійним.

Розглянемо рух матеріальної точки вздовж довільної криволінійної траєкторії (рис.1). Довжина ділянки траєкторії AB ,

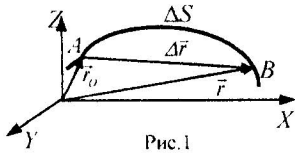


Рис.1

яка пройдена точкою з моменту початку відліку часу, називається **довжиною шляху** ΔS і $\Delta S = \Delta S(t)$.

Вектор $\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, проведений з початкового положення рухомої точки в положення її в даний момент часу, називається **вектором переміщення**.

Нехай матеріальна точка рухається по якійсь криволінійній траєкторії (рис.2).

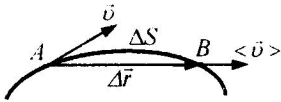


Рис.2

Величина $\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ називається середньою швидкістю руху точки за час Δt .

Якщо перейти до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, то отримаємо вираз для миттєвої швидкості \vec{v} :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Миттєва швидкість \vec{v} - векторна величина, яка дорівнює першій похідній радіус-вектора рухомої точки по часу. Вектор швидкості \vec{v} напрямлений по дотичній до траєкторії в сторону руху.

Числове значення миттєвої швидкості дорівнює першій похідній по часу:

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

Довжина шляху, який пройдений точкою за проміжок часу від t_1 до t_2 ,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

У випадку нерівномірного руху важливо знати, як швидко змінюється швидкість з часом.

Нехай точка в положенні A в момент часу t має швидкість \vec{v} . За час Δt рухома точка перейде в положення B і набуде швидкості \vec{v}_1 (рис.3), яка відмінна від \vec{v} як за модулем, так і за напрямком і $\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta \vec{v}$. Перенесемо вектор \vec{v} в точку B і знайдемо $\Delta \vec{v}$.

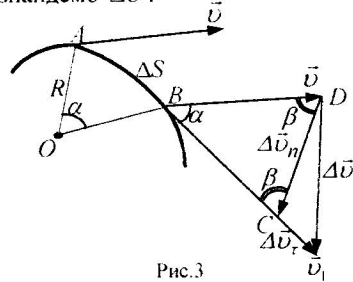


Рис.3

Середнім прискоренням нерівномірного руху в інтервалі часу від t до $t + \Delta t$ називається вектор $\langle \vec{a} \rangle$, який дорівнює відношенню вектора $\Delta \vec{v}$ до проміжку часу Δt :

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Вектор $\langle \vec{a} \rangle$ збігається за напрямком з вектором зміни швидкості $\Delta \vec{v}$.

Миттєвим прискоренням точки в момент часу t називають векторну величину \vec{a} , яка дорівнює границі середнього прискорення:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \bar{a} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}.$$

Прискорення точки дорівнює першій похідній від її швидкості \bar{v} по часу.

Розкладемо вектор зміни швидкості $\Delta \bar{v}$ на дві складові: $\Delta \bar{v}_\tau$ і $\Delta \bar{v}_n$ так, щоб $BC=BD=v$. Складова $\Delta \bar{v}_\tau$ визначає зміну швидкості лише за величиною: якщо рух рівномірний, то $v_1=v$ і $\Delta \bar{v}_\tau=0$. Інша складова $\Delta \bar{v}_n$ існує і при рівномірному русі, очевидно, $\Delta \bar{v}_n=0$ в тому випадку, якщо рух тіла прямолінійний. Якщо кут $\alpha \rightarrow 0$, то $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ і вектор $\Delta \bar{v}_n$ стає перпендикулярним вектору швидкості \bar{v} . Таким чином, вектор прискорення можна представити у вигляді суми двох взаємно перпендикулярних векторів:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}_\tau + \Delta \bar{v}_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}_n}{\Delta t} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

Величина \bar{a}_τ називається **тангенціальним прискоренням**, яке характеризує зміну швидкості лише за величиною і напрямлене по дотичній до траєкторії. Числове значення вектора \bar{a}_τ дорівнює:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Величина \bar{a}_n називається вектором **нормального прискорення** і характеризує зміну швидкості лише за напрямком. Це прискорення завжди перпендикулярне до напрямку швидкості. Для його обчислення припустимо, що точка B досить близька до точки A , тому ΔS можна вважати дугою кола радіусом R , при цьому за величиною ця дуга мало відрізняється від хорди AB .

Тоді з подібності трикутників OAB і BDC отримаємо:

$$\frac{\Delta v_n}{v} = \frac{AB}{R} \text{ і } \Delta v_n = \frac{v}{R} AB.$$

Тоді

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AB v}{\Delta t R} = \frac{v^2}{R}.$$

Отже, повне прискорення \bar{a} матеріальної точки дорівнює векторній сумі її

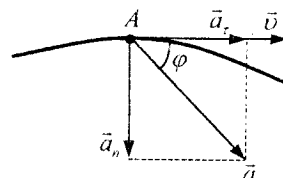


Рис.4

тангенціального і нормального прискорень (рис.4):

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n,$$

причому

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}.$$

Напрямок повного прискорення визначається кутом φ між векторами \bar{a}_τ і \bar{a} . З рис.4 видно, що

$$\text{tg } \varphi = \frac{a_n}{a_\tau}.$$

§ 2. Закони динаміки матеріальної точки

В основі динаміки, яка розглядає закони руху тіл і ті причини, що його викликають або змінюють, лежать закони Ньютона.

Перший закон Ньютона: *всяка матеріальна точка (тіло) зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, доки дія з боку інших тіл не змусить її змінити цей стан.*

Перший закон Ньютона називають законом інерції, а властивість тіла зберігати стан спокою або рівномірного прямолі-

нійного руху без дії на них інших тіл називають *інертністю*.

Системи відліку, відносно яких виконується перший закон Ньютона, називаються інерціальними системами відліку.

Зміст першого закону Ньютона зводиться до двох тверджень: 1) всім тілам властива інертність; 2) існують інерціальні системи відліку.

Інерціальною системою відліку можна вважати систему відліку, зв'язану із Сонцем, - початок координат знаходиться в центрі Сонця, а осі проведено в напрямку певних зірок. Система відліку, яка зв'язана з Землею, строго кажучи, неінерціальна.

Перш ніж розкривати зміст II закону Ньютона, зупинимось на поняттях маси і сили.

Фізична величина, яка є мірою інертності матеріальної точки, називається *інертною масою* m . Маса тіл характеризує теж здатність його взаємодіяти з іншими тілами згідно з законом всесвітнього тяжіння. В цьому випадку маса є мірою гравітаційної взаємодії і називається *гравітаційною масою* (m_g). В сучасній фізиці з високим ступенем точності встановлено, що $m_g = m_i$, якщо швидкість матеріальної точки набагато менша від швидкості світла у вакуумі.

Маса тіла – скалярна величина і, як показує дослід, маса – величина адитивна: маса тіла дорівнює сумі мас всіх частинок цього тіла, відповідно маса довільної механічної системи дорівнює сумі мас всіх матеріальних точок, на які цю систему можна уявно розбити.

Силою називається векторна величина, що є мірою механічної дії на тіло з боку інших тіл, внаслідок якої тіло отри-

мує прискорення або змінює свою форму і розміри. В кожному момент часу сила характеризується числовим значенням, напрямком у просторі і точкою прикладання.

Другий закон Ньютона: прискорення, що його набуває тіло, прямо пропорційне до сили, яка діє на нього, і обернено пропорційне до маси цього тіла: за напрямком прискорення збігається із силою:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

або, якщо маса є стала величина,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} m\vec{v}.$$

Векторна величина $\vec{P} = m\vec{v}$ називається *імпульсом* (кількістю руху) матеріальної точки.

Тоді

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

Отже, швидкість зміни імпульсу матеріальної точки дорівнює силі, яка діє на точку.

Другий закон Ньютона справедливий лише в інерціальних системах відліку.

При дії на матеріальну точку кількох сил виконується *принцип незалежності дії сил*: якщо на матеріальну точку діють одночасно кілька сил, то кожна з цих сил надає матеріальній точці прискорення, що визначається II законом Ньютона так, нібито інших сил не було.

Взаємодія між матеріальними точками (тілами) визначається *третьім законом Ньютона*: *сили взаємодії обох матеріальних точок (тіл) в інерціальній системі відліку рівні за модулем і напрямлені в протилежні сторони*

$$\vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{ki},$$

де \vec{F}_{ik} – сила, що діє на i -у точку з боку k -ї точки, а \vec{F}_{ki} – сила, що діє на k -у точку з боку i -ї. Сили \vec{F}_{ik} і \vec{F}_{ki} прикладені до різних точок (рис.5).

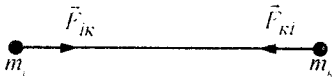


Рис. 5

§ 3. Закон збереження імпульсу

Сукупність матеріальних точок (тіл), які розглядаються як єдине ціле, називається *механічною системою*. Механічна система, в якій тіла взаємодіють між собою і на яку не діють зовнішні сили, називається *замкненою*.

Розглянемо механічну систему, яка складається із n тіл, маса і швидкість яких дорівнюють відповідно m_1, m_2, \dots, m_n і $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Нехай $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ – рівнодійні зовнішніх сил, що діють на кожне з цих тіл, а \vec{F}_{ik} – внутрішня сила, яка діє на i -е тіло з боку k -го.

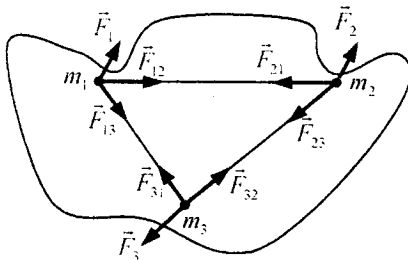


Рис.6

На рис.6 наведені рівнодійні зовнішніх сил і внутрішні сили, які діють між тілами механічної системи, що складається, наприклад, із трьох тіл. Запишемо II закон Ньютона для кожного з n тіл механічної системи:

$$\frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1) = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n} + \vec{F}_1,$$

$$\frac{d}{dt}(m_2 \vec{v}_2) = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2n} + \vec{F}_2,$$

$$\dots \dots \dots \frac{d}{dt}(m_n \vec{v}_n) = \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \dots + \vec{F}_{n(n-1)} + \vec{F}_n.$$

Додаючи почленно ці рівняння, знаходимо:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}) + \dots + (\vec{F}_{(n-1)n} + \vec{F}_{n(n-1)}) + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

За третім законом Ньютона $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, і

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \text{і} \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F},$$

де \vec{P} – імпульс системи, а \vec{F} – головний вектор зовнішніх сил. Отже, *похідна по часу від імпульсу механічної системи дорівнює головному вектору зовнішніх сил, що діють на систему*.

У випадку замкненої системи

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = 0,$$

тобто $\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = const$.

Цей вираз є *законом збереження імпульсу*: імпульс замкненої системи зберігається, тобто не змінюється із бігом часу.

§ 4. Центр мас (інерції) механічної системи і закон його руху

Центром мас, або центром інерції системи матеріальних точок називається точка C , радіус-вектор \vec{r}_C якої дорівнює

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i,$$

де $M = \sum_{i=1}^n m_i$ - загальна маса всієї системи,

\vec{r}_i - радіус-вектор i -ї матеріальної точки.

Якщо радіус-вектори \vec{r}_i^* проведені із центра мас C , то $\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i^* = 0$.

Отже, **центр мас** - це геометрична точка, для якої сума добутків мас всіх матеріальних точок, що утворюють механічну систему, на їх радіус-вектори, які проведені з цієї точки, дорівнює нулю.

Швидкість центра інерції

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{P}}{M}$$

Отже, $\vec{P} = M\vec{v}_c$,

тобто імпульс системи дорівнює добутку величини маси системи на величину швидкості руху її центра інерції.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_c}{dt} = M\vec{a}_c = \vec{F}'$$

Центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка, в якій зосереджено всю масу системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору прикладених до системи зовнішніх сил.

§ 5. Робота сили та її вираз через криволінійний інтеграл

Нехай тіло рухається прямолінійно і на всьому переміщенні $\Delta\vec{r}$ на нього діє стала за величиною і напрямком сила \vec{F} , яка утворює кут α з напрямком переміщення.

Робота A , яка виконана силою \vec{F} , - це фізична величина рівна скалярному добутку сили на переміщення:

$$A = (\vec{F}, \Delta\vec{r}) = F S \cos \alpha,$$

де S - шлях пройдений тілом за час дії сили.

У загальному випадку сила може змінюватись як за модулем, так і за напрямком. При цьому сила \vec{F} може залежати як від координат x, y, z точки прикладання сили, так і від швидкості точки. Якщо розглянути елементарне переміщення $d\vec{r}$, то силу \vec{F} можна вважати постійною, а рух точки її прикладання - прямолінійним. **Елементарною роботою** сили \vec{F} на переміщенні $d\vec{r}$ називається скалярна величина

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{r}) = (\vec{F}, \vec{v} dt) = F \cos \alpha dS,$$

де $dS = |d\vec{r}|$ - елементарний шлях (рис.7).

Робота сили на ділянці траєкторії

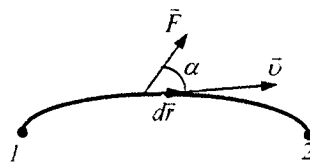


Рис.7

від точки 1 до точки 2 дорівнює алгебраїчній сумі елементарних робіт на окремих

нескінченно малих ділянках шляху:

$$A = \int_1^2 F dS \cos \alpha = \int_1^2 F_S dS,$$

де F_S - проекція сили F на напрямок переміщення.

Нехай залежність сили F_S від шляху S представлена графічно (рис.8). Тоді робота A вимірюється площею, заштрихованою на рис.8.

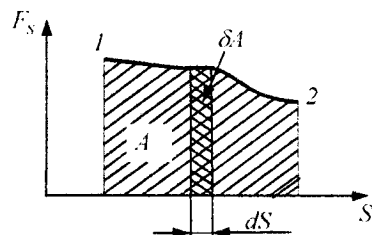


Рис.8

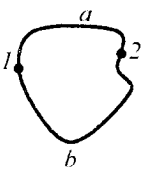
§ 6. Кінетична енергія механічної системи

Сила, що діє на тіло, не виконує роботи, якщо:

- а) тіло перебуває у спокої ($dS=0$);
- б) сила перпендикулярна до напрямку переміщення тіла ($\alpha = 90^\circ$).

Якщо $\alpha < \pi/2$, робота сили додатна і силу \vec{F} називають рушійною силою. Якщо кут $\alpha > \pi/2$, то робота сили від'ємна і силу \vec{F} називають силою опору.

Якщо на тіло, яке рухається поступально, одночасно діють кілька сил, то робота рівнодійної сили дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил.



Сила \vec{F} , що діє на матеріальну точку або на тіло, яке рухається поступально, називається **консервативною або потенціальною**, якщо робота A_{1-2} , яка виконується цією силою при переміщенні точки (тіла) з одного довільного положення 1 в інше 2, не залежить від того, по якій траєкторії відбулось це переміщення (рис.9):

Рис. 9

$$A_{1-a-2} = A_{1-b-2} = A_{1-2}.$$

Зміна напрямку руху вздовж траєкторії на протилежний спричинює зміну знака роботи (кут α замінюється на $\pi-\alpha$ і $\cos \alpha$ змінює свій знак). Тому при переміщенні матеріальної точки вздовж замкненої траєкторії L (1-a-2-b-1), робота консервативної сили тотожно дорівнює нулю:

$$\oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) = A_{1-a-2} + A_{2-b-1} = 0.$$

Прикладами консервативних сил можуть бути сили тяжіння, гравітаційні сили, сили пружності, сили електростатичної взаємодії між зарядженими тілами.

Кінетичною енергією механічної системи називається енергія механічного руху цієї системи.

Сила \vec{F} , яка діє на тіло у стані спокою і викликає його рух, виконує роботу, а енергія рухомого тіла зростає на величину виконаної роботи:

$$dE_K = \delta A.$$

Використовуючи скалярний запис II закону Ньютона і помноживши обидві частини на елементарний шлях dS , отримаємо

$$m \frac{dv}{dt} dS = F dS.$$

Оскільки $v = \frac{dS}{dt}$, то

$$\delta A = F dS = m v dv = dE_K$$

і

$$E_K = \int_0^v m v dv = \frac{m v^2}{2}.$$

Кінетична енергія тіла не може бути від'ємною.

Повна кінетична енергія E_K системи дорівнює сумі кінетичних енергій E_{Ki} всіх тіл, що входять до неї:

$$E_K = \sum_i E_{Ki} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Кінетична енергія системи залежить від величини мас і швидкостей руху тіл, що входять до неї. При цьому неістотно, як тіло з масою m_i набуло швидкості v_i . Цей висновок можна сформулювати так: **кінетична енергія системи є функцією стану її руху.**

Швидкість \vec{v}_i істотно залежить від вибору системи відліку. В різних інерціальних системах відліку, що рухаються одна відносно одної, швидкість \vec{v}_i i -го тіла системи, а отже, його кінетична енергія системи будуть неоднакові. *Величина кінетичної енергії системи залежить від вибору системи відліку, тобто є величиною відносною.*

Якщо в інерціальній системі відліку (і.с.в.) K кінетична енергія системи дорівнює E'_K , то в і.с.в. K' , яка рухається відносно K поступально з швидкістю v_c , центра мас системи, то

$$E_K = E'_K + \frac{mv_c^2}{2},$$

де m – маса системи, E_K – кінетична енергія системи відносно і.с.в. K' .

Ця рівність описує **теорему Кюніга**: *кінетична енергія механічної системи дорівнює сумі кінетичної енергії цієї системи при її русі відносно і.с.в. K' , яка поступально рухається з початком в центрі мас і кінетичної енергії, яку мала би матеріальна точка, що має масу, яка дорівнює масі всієї системи і рухається зі швидкістю її центра мас.*

§ 7. Потенціальна енергія

Потенціальною енергією механічної системи називається енергія, яка залежить від її конфігурації, тобто від взаємного розміщення всіх матеріальних точок системи і характеру консервативних сил, які діють між точками.

Робота A_{12} , що виконується консервативними силами при зміні конфігурації системи, не залежить від того, як здійсню-

ється процес переходу з початкової конфігурації системи (1) в кінцеву (2). Робота A_{12} повністю визначається початковою і кінцевою конфігураціями системи. Отже, роботу A_{12} можна подати у вигляді різниці значень деякої функції конфігурації системи $E_n(x, y, z)$, яка називається потенціальною енергією системи.

$$A_{12} = E_{n1} - E_{n2} = -(E_{n2} - E_{n1}).$$

Робота потенціальних сил дорівнює зменшенню потенціальної енергії системи. Відповідно елементарна робота консервативних сил при малій зміні конфігурації системи

$$\delta A = -dE_n, \text{ або } (\vec{F}, d\vec{r}) = -dE_n.$$

Звідси потенціальна енергія

$$E_n = -\int \vec{F} d\vec{r} + C,$$

де C – стала інтегрування, тобто потенціальна енергія визначається з точністю до деякої довільної сталої. Це не відбивається на фізичних законах, оскільки в них входить або різниця потенціальних енергій двох конфігурацій системи, або похідна E_n по координатах. В кожній задачі для отримання однозначної залежності потенціальної енергії системи від її конфігурації вибирають нульову конфігурацію, в якій потенціальну енергію системи вважають такою що дорівнює нулеві.

Якщо відомий вираз $E_n(x, y, z)$, то можна знайти силу, що діє на матеріальну точку. Розглянемо переміщення точки паралельно осі Ox на dx . Таке переміщення супроводжується виконанням над точкою роботи $\delta A = F_x dx$. Та сама робота дорівнює зменшенню потенціальної енергії: $\delta A = -dE_n$. Прирівнявши обидва вирази для роботи, отримаємо:

$$F_x dx = -dE_n.$$

Звідси

$$F_x = -\frac{\partial E_n}{\partial x} \quad (y=\text{const}, z=\text{const}).$$

Тут ураховано те, що похідна по x обчислюється при умові, що координати y і z залишаються сталими.

Для компонент сил по осях Y і Z отримують аналогічні вирази. Отже,

$$F_x = -\frac{\partial E_n}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_n}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_n}{\partial z}$$

або

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_n}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_n}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_n}{\partial z} \vec{k} \right).$$

Вектор $\frac{\partial E_n}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_n}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_n}{\partial z} \vec{k}$,

який побудований за допомогою скалярної функції E_n , називається градієнтом функції E_n і позначається $grad E_n$. Напрямок вектора $grad E_n$ збігається з напрямком осі l , вздовж якої потенціальна енергія зростає з найбільшою швидкістю.

Отже, сила, що діє на матеріальну точку в потенціальному полі, дорівнює взятому із знаком мінус градієнту потенціальної енергії цієї точки в полі, яка розглядається:

$$\vec{F} = -grad E_n.$$

1. Потенціальна енергія

матеріальної точки в однорідному силовому полі.

Поле називається однорідним, якщо сила \vec{F} , яка діє на матеріальну точку з боку поля, однакова у всіх точках поля. Нехай ця сила напрямлена вздовж осі OZ , тобто $\vec{F} = F_z \vec{k}$, де \vec{k} – орт осі OZ (рис.10). Проекція F_z сили \vec{F} на вісь OZ не залежить від координати z матеріальної точки.



Знайдемо потенціальну

енергію матеріальної точки:

$$dE_n = -(\vec{F}, d\vec{r}) = -F_z dz.$$

Звідси

$$E_n(z) - E_n(0) = -\int_0^z F_z dz = -F_z z.$$

Рис. 10 де $E_n(0)$ – значення потенціальної енергії матеріальної точки на рівні $z=0$.

Наприклад, для тіла масою m , що знаходиться в однорідному полі сили тяжіння біля поверхні Землі, $F_z = -mg$ (\vec{g} – прискорення вільного падіння) і потенціальна енергія

$$E_n(h) = mgh,$$

де h – висота тіла над поверхнею Землі, а початок відліку енергії E_n вибрано так, що біля поверхні Землі $E_n=0$.

2. Потенціальна енергія матеріальної точки в полі центральних сил.

Сили, що діють на матеріальну точку, називаються *центральними*, якщо вони напрямлені вздовж прямих, що проходять через одну і ту саму нерухому точку – центр сил і залежать лише від відстані r

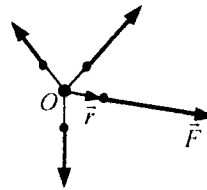


Рис.11

до центра сил: $\vec{F} = F_r(r) \frac{\vec{r}}{r}$ (рис.11). Тут \vec{r} – радіус-вектор, який проведений з центра сил в точку поля, яка розглядається, $F_r(r)$ – проекція сили \vec{F} на напрямок вектора \vec{r} . Для сил відштовхування $F_r(r) > 0$, а для сил притягання $F_r(r) < 0$.

Знайдемо потенціальну енергію матеріальної точки:

$$dE_n = -\delta A = -F_r(r) dr,$$

$$E_n(r) - E_n(\infty) = - \int_r^{\infty} F_r(r) dr.$$

За початок відліку потенціальної енергії в даному випадку приймають енергію матеріальної точки, що знаходиться нескінченно далеко від центра сил, тобто вважають $E_n(\infty) = 0$ і

$$E_n(r) = - \int_{\infty}^r F_r(r) dr = \int_r^{\infty} F_r(r) dr.$$

3. Потенціальна енергія пружнодеформованого тіла.

Під час деформації пружного тіла в ньому виникають внутрішні сили, які перешкоджають деформації тіла і називаються силами пружності. У разі поздовжнього розтягу або стиску тіла (наприклад, пружини вздовж осі OX) сила пружності

$$\vec{F} = -kx\vec{i},$$

де k – коефіцієнт пружності, який характеризує пружні властивості тіла; $x\vec{i}$ – вектор деформації (\vec{i} – орт осі OX).

Знайдемо потенціальну енергію пружнодеформованого тіла, вважаючи, що вона дорівнює нулю у недеформованого тіла, тобто при $x = 0$:

$$dE_n = kx dx, \quad E_n = k \int_0^x x dx = \frac{kx^2}{2}.$$

§ 8. Закон збереження механічної енергії.

Дисипація енергії. Закон збереження і перетворення енергії

Розглянемо систему матеріальних точок, маси яких m_1, m_2, \dots, m_n , що рухаються із швидкостями $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Нехай F_1', F_2', \dots, F_n' – рівнодійні внутрішніх консервативних сил, що діють на кожну з цих

точок, а $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ – рівнодійні зовнішніх сил, які теж вважаємо консервативними. Вважатимемо, що на матеріальні точки діють ще і зовнішні неконсервативні сили: рівнодійні цих сил, що діють на кожну з матеріальних точок, позначимо $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$. Якщо $v \ll c$, то маси матеріальних точок сталі, і рівняння II закону Ньютона для цих точок мають такий вигляд:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_1' + \vec{F}_1 + \vec{f}_1,$$

$$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_2' + \vec{F}_2 + \vec{f}_2,$$

.....

$$m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{F}_n' + \vec{F}_n + \vec{f}_n.$$

Рухаючись під дією сил, точки системи за інтервал часу dt здійснюють переміщення, які відповідно дорівнюють $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \dots, d\vec{r}_n$. Помножимо кожне з рівнянь скалярно на відповідне переміщення $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$ і отримаємо

$$m_1 (\vec{v}_1 d\vec{v}_1) - (\vec{F}_1' + \vec{F}_1) \chi d\vec{r}_1 = \vec{f}_1 d\vec{r}_1,$$

$$m_2 (\vec{v}_2 d\vec{v}_2) - (\vec{F}_2' + \vec{F}_2) d\vec{r}_2 = \vec{f}_2 d\vec{r}_2,$$

.....

$$m_n (\vec{v}_n d\vec{v}_n) - (\vec{F}_n' + \vec{F}_n) \chi d\vec{r}_n = \vec{f}_n d\vec{r}_n,$$

Додавши ці рівняння, отримаємо

$$\sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_i d\vec{v}_i) - \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i' + \vec{F}_i) \chi d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i d\vec{r}_i.$$

Перший доданок цього рівняння

$$\sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_i d\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n d \left(m_i \frac{v_i^2}{2} \right) = dE_K,$$

Другий доданок $-\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i' + \vec{F}_i) \chi d\vec{r}_i$

дорівнює елементарній роботі внутрішніх і зовнішніх консервативних сил, взятій зі

знаком мінус, тобто дорівнює елементарній зміні потенціальної енергії:

$$-\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i' + \vec{F}_i) d\vec{r}_i = dE_n.$$

а $\sum_{i=1}^n \vec{f}_i d\vec{r}_i = \delta A$ – робота зовнішніх неконсервативних сил.

$$\text{Отже, } d(E_K + E_n) = \delta A.$$

У разі переходу системи із стану 1 в який-небудь стан 2

$$\int_1^2 d(E_K + E_n) = A_{12},$$

тобто зміна повної механічної енергії системи при переході з одного стану в інший дорівнює роботі, яка виконана при цьому зовнішніми неконсервативними силами.

Якщо зовнішні неконсервативні сили відсутні, то

$$d(E_K + E_n) = 0 \quad \text{і} \quad E_K + E_n = E = \text{const}.$$

Закон збереження механічної енергії: в системі тіл, між якими діють лише консервативні сили, повна механічна енергія зберігається, тобто не змінюється з часом.

Механічні системи, на тіла яких діють лише консервативні сили, називаються **консервативними**.

Існує ще один вид систем – **дисипативні системи**, в яких механічна енергія поступово зменшується за рахунок перетворення в інші форми енергії. Цей процес одержав назву дисипації енергії.

При “зникненні” механічної енергії завжди виникає еквівалентна кількість енергії іншого виду. **Енергія ніколи не зникає і не появляється знову, вона лише перетворюється із одного виду в інший.**

В цьому і полягає фізична суть **закону збереження і перетворення енергії**.

§ 9. Кутова швидкість і кутове прискорення

Розглянемо обертання **абсолютно твердого тіла** – тіла, відстань між будь-якими двома точками якого стала, які б не були сили, що діють на нього.

Обертанням абсолютно твердого

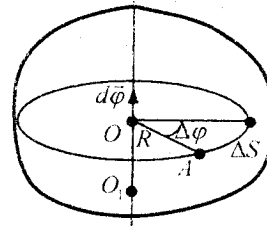


Рис.12

тіла навколо нерухомої осі називається такий його рух, при якому всі точки тіла рухаються в площинах, перпендикулярних до неру-

хомої прямої, що називається **віссю обертання тіла**, і описують кола, центри яких лежать на цій осі (рис.12). Обертання навколо осі OO_1 тіла можна здійснити, закріпивши нерухомо дві його точки O і O_1 .

Положення в просторі такого тіла визначається значенням кута повороту навколо осі обертання із деякого умовно вибраного початкового положення цього тіла. Обертання навколо нерухомої осі здійснюють ротори турбін, електричних генераторів і двигунів, колісні вали двигунів внутрішнього згорання і т. д.

Рух абсолютно твердого тіла, закріпленого в одній нерухомій точці, називається **обертанням твердого тіла навколо нерухомої точки - центра обертання**. Такий рух абсолютно твердого тіла в кожний момент часу можна розглядати як обертання навколо нерухомої осі, що проходить через центр обертання і назива-

ється *миттєвою віссю обертання тіла*. Положення миттєвої осі відносно нерухомої системи відліку, а також самого тіла з бігом часу може змінюватися. Для однозначного задання положення такого тіла в просторі потрібно задати значення трьох незалежних координат.

Нехай деяка точка A рухається по колу радіуса R (рис.13). Всі точки радіуса повертаються протягом часу Δt на однаковий кут $\Delta\varphi$. Мірою переміщення всього тіла за малий проміжок часу dt служить вектор $d\vec{\varphi}$ елементарного повороту тіла. Модуль вектора $d\vec{\varphi}$ дорівнює куту повороту тіла і напрямлений вздовж осі обертання за правилом правого гвинта: з кінця вектора $d\vec{\varphi}$ поворот тіла відбувається проти ходу годинникової стрілки.

Вектори, напрямки яких зв'язуються з напрямком обертання, називаються псевдовекторами. Ці вектори не мають певних точок прикладання: вони можуть відкладатися з довільної точки осі обертання.

Кінематичною характеристикою напрямку і швидкості обертання тіла служить кутова швидкість.

Кутовою швидкістю називається векторна величина, яка дорівнює першій похідній кута повороту тіла по часу:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

Вектор $\vec{\omega}$ напрямлений вздовж осі обертання так, що з його кінця обертання видно проти руху стрілки годинника (рис.13).

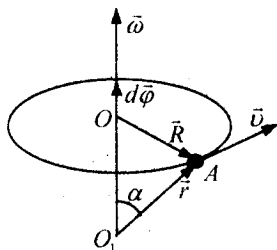


Рис.13

Вектор $\vec{\omega}$ визначає положення осі обертання, напрямок і швидкість обертання тіла.

Лінійна швидкість точки A (рис.13)

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \Delta \varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \omega$$

З цього рівняння і рис.14 випливає, що вектор лінійної швидкості \vec{v} дорівнює векторному добутку вектора швидкості $\vec{\omega}$ на радіус-вектор \vec{R} :

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$$

Якщо положення точки A обертового тіла визначається радіус-вектором \vec{r} , який проведений з будь-якої точки O_1 осі OO_1 обертання тіла (рис.14), то векторний добуток $[\vec{\omega}, \vec{r}]$ збігається за напрямком з вектором \vec{v} і має модуль, який дорівнює $\omega r \sin \alpha = \omega R$. Отже,

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

Якщо за час t тіло здійснює N обертів, то час, протягом якого обертове тіло здійснює один повний оберт $T = \frac{t}{N}$, називається *періодом обертання*. З іншого боку, тіло, яке рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω , за час T повертається на кут $\varphi = 2\pi$. Тому

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

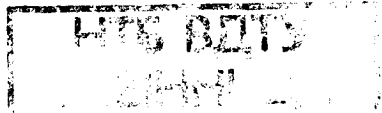
Кількість обертів за одиницю часу називається *частотою обертання*:

$$n = \frac{N}{t} = \frac{\omega}{2\pi}$$

При рівномірному обертанні

$$\omega = 2\pi n$$

Вектор $\vec{\omega}$ може змінюватися як за рахунок зміни швидкості обертання тіла навколо осі (в такому разі він змінюється за величиною), так і за рахунок повернен-



ня осі обертання в просторі (в такому разі він змінюється за напрямком). Зміна вектора кутової швидкості з часом характеризується кутовим прискоренням.

Середнім кутовим прискоренням $\langle \bar{\varepsilon} \rangle$ називається фізична величина рівна відношенню зміни кутової швидкості $\Delta \bar{\omega}$ до проміжку часу Δt , за який ця зміна відбулася:

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle = \frac{\Delta \bar{\omega}}{\Delta t}$$

Миттєвим кутовим прискоренням $\bar{\varepsilon}$ називається границя середнього кутового прискорення:

$$\bar{\varepsilon} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$$

Отже, кутове прискорення дорівнює першій похідній по часу від кутової швидкості. Кутове прискорення, як і кутова швидкість, є псевдовектором.

У випадку обертання тіла навколо нерухомої осі зміна вектора $\bar{\omega}$ зумовлюється тільки зміною його числового значення і $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$.

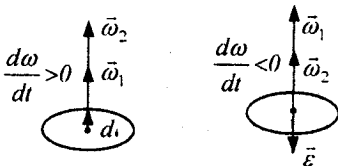


Рис.14

Вектора $\bar{\varepsilon}$ напрямлений вздовж осі обертання (рис.14): у той самий бік, що й $\bar{\omega}$, при прискореному обертанні ($\frac{d\bar{\omega}}{dt} > 0$) і в протилежний бік – при сповільненому обертанні ($\frac{d\bar{\omega}}{dt} < 0$).

Визначимо тангенціальне і нормальне прискорення точки A обертового

тіла через кутову швидкість і кутове прискорення:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon,$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$

При рівнозмітному обертанні ($\varepsilon = \text{const}$) із виразу $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ отримуємо:

$$d\omega = \varepsilon dt, \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt \quad \text{і}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

де ω_0 - початкова кутова швидкість.

Проінтегрувавши вираз $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, отримуємо:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t) dt, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

§ 10. Момент сили і момент імпульсу механічної системи. Момент інерції тіла відносно осі

Усяке тіло можна умовно поділити на таку кількість n малих частин, щоб розміри їх були малі порівняно з розмірами всього тіла. Отже, тіло завжди можна розглядати як систему з n матеріальних точок, причому маса m тіла дорівнює сумі

$$\text{мас усіх цих точок: } m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Розглянемо закономірності руху твердого тіла, закріпленого в одній нерухомій точці O , навколо якої тіло може вільно обертатись. Точка O називається центром обертання твердого тіла. Сумістимо з цією точкою початок нерухомої системи координат. Тоді положення i -ої

точки в просторі повністю визначається радіус-вектором \vec{r}_i , який проведений з центра O в цю точку (рис.15). Позначимо

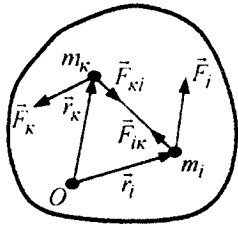


Рис.15

\vec{F}_{ik} силу, що діє на i -ту точку тіла з боку k -ої його точки, а \vec{F}_i – рівнодійну всіх зовнішніх сил, які прикладені до i -ої точки. За

другим законом Ньютона рівняння руху цієї матеріальної точки має вигляд:

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i,$$

де $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ – швидкість i -ї точки.

Помножимо обидві частини цієї рівності векторно на \vec{r}_i :

$$\left[\vec{r}_i, \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) \right] = \left[\vec{r}_i, \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n \vec{F}_{ik} \right] + [\vec{r}_i, \vec{F}_i].$$

Знак похідної по часу можна винести за знак векторного добутку тому, що

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] &= \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}, m_i \vec{v}_i \right] + \left[\vec{r}_i, \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) \right] = \\ &= [\vec{v}_i, m_i \vec{v}_i] + \left[\vec{r}_i, \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) \right]. \end{aligned}$$

Отже,
$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \left[\vec{r}_i, \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n \vec{F}_{ik} \right] + [\vec{r}_i, \vec{F}_i],$$

оскільки $[\vec{v}_i, m_i \vec{v}_i] = 0$ як векторний добуток двох однаково напрямлених векторів.

Для характеристики зовнішньої механічної дії на тіло, яка приводить до зміни обертального руху тіла, введемо поняття моменту сили.

Моментом сили \vec{F}_i відносно нерухомої точки O називається векторний добуток радіус-вектора \vec{r}_i , який проведений з точки O в точку прикладання сили, на силу \vec{F}_i :

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i].$$

Вектор \vec{M}_i , напрямлений перпендикулярно до площини векторів \vec{r}_i і \vec{F}_i (рис.16).

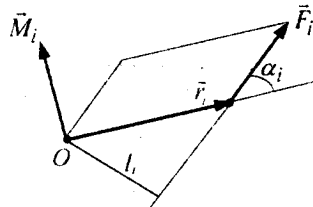


Рис.16

Модуль моменту сили

$$M_i = F_i r_i \sin \alpha_i = F_i l_i,$$

де α_i – кут між \vec{r}_i і \vec{F}_i , $l_i = r_i \sin \alpha_i$ – плече сили – довжина перпендикуляра, опущеного з точки O на лінію дії сили \vec{F}_i .

Момент сили \vec{M}_i , характеризує здатність сили обертати тіло навколо точки, відносно якої він береться. Коли тіло може обертатися відносно точки O довільно, під дією сили тіло повертається навколо осі, яка перпендикулярна до площини, в якій лежать сила і точка O , тобто навколо осі, що збігається з напрямком моменту сили відносно даної точки.

Моментом сили відносно нерухомої осі OZ називається скалярна величина M_{iz} , яка дорівнює проекції на цю вісь вектора \vec{M}_i моменту сили, визначеного відносно довільної точки O даної осі OZ (рис.17).

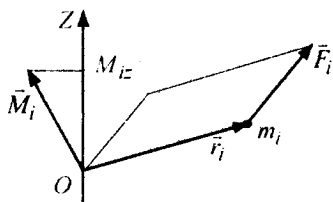


Рис.17

Значення моменту M_{iZ} не залежить від вибору положення точки O на осі OZ .

Розкладемо вектор сили \vec{F}_i , що діє на точку m_i , на три взаємно перпендикулярні складові (рис.18): $\vec{F}_{i||}$ – паралельну до осі OZ , \vec{F}_{iR} – перпендикулярну до осі

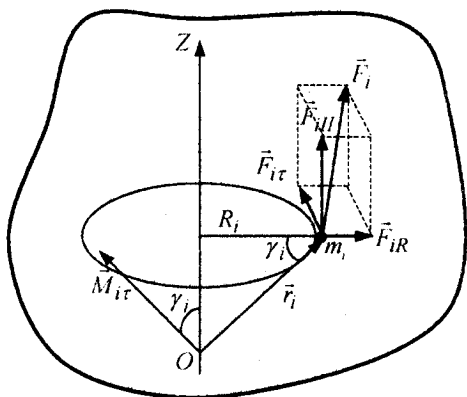


Рис.18

OZ , і таку, що діє вздовж прямої, яка проходить через вісь, і \vec{F}_{iT} – перпендикулярну до площини, яка проходить через вісь OZ і точку прикладання сили \vec{F}_i . Складова \vec{F}_{iT} напрямлена по дотичній до кола радіусом R_i з центром на осі OZ . Момент сили \vec{F}_i відносно точки O дорівнює сумі моментів складових:

$$\vec{M}_i = \vec{M}_{i||} + \vec{M}_{iR} + \vec{M}_{iT}$$

Вектори $\vec{M}_{i||}$ і \vec{M}_{iR} перпендикулярні до осі OZ , тому їх проекції на вісь OZ дорівнюють нулю. Момент $M_{iT} = r_i F_{iT}$

утворює з віссю OZ кут γ_i і $\cos \gamma_i = \frac{R_i}{r_i}$.

Момент складової \vec{F}_{iT} відносно осі OZ дорівнює:

$$M_{iTz} = M_{iT} \cos \gamma_i = r_i F_{iT} \cdot \frac{R_i}{r_i} = F_{iT} R_i.$$

Отже, момент сили \vec{F}_i відносно осі OZ дорівнює

$$M_{iZ} = F_{iT} R_i.$$

Момент сили відносно осі OZ характеризує здатність сили обертати тіло навколо цієї осі. Складові $\vec{F}_{i||}$ і \vec{F}_{iR} не можуть викликати обертання навколо осі OZ . Такий поворот може бути викликаний лише складовою \vec{F}_{iT} .

Векторна сума моментів \vec{M}_i всіх зовнішніх сил, які прикладені до тіла, називається **головним моментом \vec{M} зовнішніх сил відносно точки O** :

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{F}_i].$$

Головний момент (результуючий момент) відносно нерухомої осі OZ системи сил дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх сил системи відносно цієї осі:

$$\vec{M}_z = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{iz} = \sum_{i=1}^n R_i F_{iT}.$$

Моментом імпульсу \vec{L}_i матеріальної точки відносно нерухомої точки O називається векторний добуток радіус-вектора \vec{r}_i матеріальної точки, який проведений з точки O , на імпульс цієї матеріальної точки $m_i \vec{v}_i$ (рис.19):

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i].$$

Модуль вектора моменту імпульсу

$$L_i = r_i m_i v_i \sin \alpha_i.$$

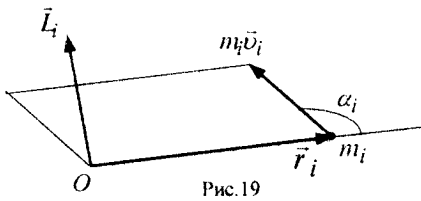


Рис.19

Векторна сума моментів імпульсу \vec{L}_i всіх матеріальних точок тіла називається **моментом імпульсу тіла відносно точки O**:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i].$$

Моментом імпульсу тіла відносно нерухомої осі називається скалярна величина L_z , яка дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту імпульсу тіла відносно довільної точки O на осі OZ. Значення моменту імпульсу L_z не залежить від положення точки O на осі OZ.

Знайдемо вираз для моменту L_z імпульсу тіла відносно осі обертання. Проекція результуючого вектора на деяку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на цю вісь усіх складових векторів:

$$L_z = \sum_{i=1}^n L_{iz}.$$

Розглянемо обертання абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі OZ, орт \vec{k} якої збігається з напрямком кутової швидкості $\vec{\omega}$ тіла (рис.20). При цьому $\vec{\omega} = \omega_z \vec{k}$, де $\omega_z = \omega > 0$.

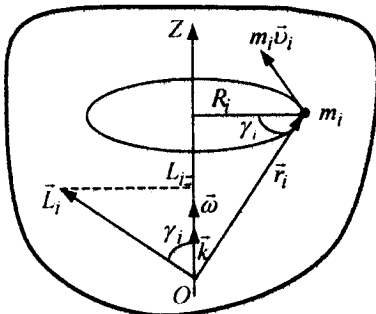


Рис.20

При обертанні тіла навколо осі OZ матеріальна точка масою m_i рухається по колу радіусом R_i із швидкістю \vec{v}_i . Швидкість \vec{v}_i й імпульс $m_i \vec{v}_i$ перпендикулярні до радіуса R_i , і радіус-вектора \vec{r}_i , причому $R_i = r_i \cos \gamma_i$.

В результаті момент імпульсу тіла відносно осі OZ

$$\begin{aligned} L_z &= \sum_{i=1}^n L_{iz} = \sum_{i=1}^n L_i \cos \gamma_i = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i \cos \gamma_i = \sum_{i=1}^n m_i v_i R_i \end{aligned}$$

Швидкість i -ої точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі OZ з кутовою швидкістю ω_z , дорівнює:

$$v_i = \omega_z R_i.$$

Отже,
$$L_z = \omega_z \sum_{i=1}^n m_i R_i^2.$$

Сума добутоків мас усіх матеріальних точок тіла на квадрати їх відстаней до осі OZ називається **моментом інерції тіла відносно цієї осі**:

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2.$$

Отже,
$$L_z = J_z \omega_z.$$

Момент імпульсу тіла відносно осі дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно тієї самої осі на кутову швидкість обертання навколо цієї осі.

Ми ввели поняття моменту інерції, розглядаючи обертання твердого тіла. Однак момент інерції існує безвідносно до обертання. Всяке тіло, незалежно від того, чи обертається воно, чи знаходиться в стані спокою, має момент інерції відносно довільної осі.

Щоб обчислити момент інерції тіла, його поділяють на нескінченно велику кількість нескінченно малих елементів з масами dm . Тому суму $\sum_{i=1}^n m_i R_i^2$ замінимо інтегралом:

$$J = \int_0^m R^2 dm,$$

де R - відстань від елемента dm до осі OZ . Момент інерції тіла залежить від матеріалу, форм і розмірів тіла, а також від розміщення тіла відносно осі.

Момент інерції тіла відносно довільної осі можна розрахувати, використавши *теорему Штейнера*: момент інерції J_a тіла відносно довільної осі a дорівнює сумі моменту інерції J_c тіла відносно паралельної до неї осі a_c , що проходить через центр мас C тіла, і добутку маси тіла m на квадрат відстані d між цими осями (рис.21):

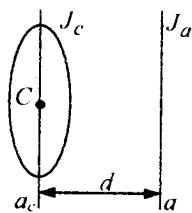


Рис.21

$$J_a = J_c + md^2.$$

§ 11. Рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі. Кінетична енергія тіла, що обертається

Розглянемо обертання абсолютно твердого тіла, яке закріплене в одній нерухомій точці O . В § 10 отримано таке співвідношення:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \left[\vec{r}_i, \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n \vec{F}_{ik} \right] + [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$$

або

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \left[\vec{r}_i, \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n \vec{F}_{ik} \right] + \vec{M}_i.$$

Додамо почленно всі ці рівняння, які записані для кожної з матеріальних точок тіла:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i, \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n \vec{F}_{ik} \right] + \sum_{i=1}^n \vec{M}_i,$$

Векторна сума моментів відносно точки O всіх внутрішніх сил \vec{F}_{ik} взаємодій між точками тіла дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i, \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n \vec{F}_{ik} \right] = 0.$$

Це пов'язано з тим, що за III за-

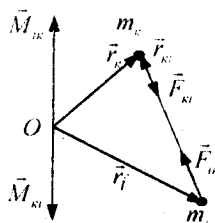


Рис.22

коном Ньютона сили \vec{F}_{ik} і \vec{F}_{ki} числово рівні, мають спільну лінію дії, але напрямлені в протилежні сторони (рис.22).

Провівши з точки m_i у точку m_k вектор \vec{r}_{ki} , маємо

$$\vec{r}_{ki} = \vec{r}_i + \vec{r}_{ki}.$$

Тоді момент \vec{M}_{ki} сили \vec{F}_{ki} дорівнює:

$$\vec{M}_{ki} = [\vec{r}_k, \vec{F}_{ki}] = [\vec{r}_i, \vec{F}_{ki}] + [\vec{r}_{ki}, \vec{F}_{ki}].$$

Векторний добуток $[\vec{F}_{ki}, \vec{F}_{ki}] = 0$, оскільки вектори \vec{F}_{ki} і \vec{F}_{ki} напрямлені вздовж однієї прямої. Отже, враховуючи, що $\vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik}$,

$$\vec{M}_{ki} = -[\vec{F}_i, \vec{F}_{ki}] = -\vec{M}_{ik}.$$

Моменти \vec{M}_{ik} і \vec{M}_{ki} відносно точки O числово однакові і протилежні за напрямком.

Враховуючи, що

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} \text{ і } \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{M},$$

де \vec{L} - момент імпульсу тіла відносно точки O , \vec{M} - головний момент зовнішніх сил відносно точки O , отримуємо рівняння, що виражає закон зміни моменту імпульсу:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Швидкість зміни моменту імпульсу тіла, що обертається навколо нерухомої точки, дорівнює головному моменту відносно цієї точки всіх зовнішніх сил, які прикладені до тіла.

Спроєктуємо вектори рівняння

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ на довільну вісь Z , що проходить через точку O . Тоді

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z,$$

де L_z і M_z - проєкції на вісь OZ обертання тіла векторів моменту імпульсу тіла і результуючого моменту зовнішніх сил відносно точки O .

Це рівняння динаміки тіла, що обертається навколо нерухомої осі OZ . Отже, швидкість зміни моменту імпульсу тіла відносно нерухомої осі обертання дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил, що діють на тіло, відносно цієї осі.

Враховуючи, що $L_z = J_z \omega_z$, отримуємо

$$\frac{d(J_z \omega_z)}{dt} = M_z.$$

Якщо тіло абсолютно тверде, то його момент інерції J_z не залежить від часу. Тому

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z \text{ і } J_z \varepsilon_z = M_z,$$

де $\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}$ - проєкція вектора кутового

прискорення $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_z \vec{k}$ на вісь обертання OZ . Звідси кутове прискорення твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі OZ , прямо пропорційне до головного моменту відносно цієї осі всіх зовнішніх сил, що діють на тіло, і обернено пропорційне до моменту інерції тіла відносно тієї самої осі.

Отже, момент інерції тіла є його мірою інертності при обертальному русі.

Момент M_z зовнішніх сил вважається додатним, якщо ці сили спричиняють збільшення кутової швидкості обертання тіла ($\varepsilon > 0$). Якщо $M_z = 0$, то

$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = 0$ і кутова швидкість твердого тіла стала.

Кінетична енергія тіла, що рухається довільно, дорівнює сумі кінетичних енергій всіх n матеріальних точок, на які це тіло можна умовно поділити:

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі OZ з кутовою швидкістю ω , то

$$v_i = \omega R_i,$$

де R_i - відстань від цієї точки до осі обертання. Отже,

$$E_{к^{об}} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}.$$

Якщо тверде тіло рухається поступально з швидкістю v і одночасно обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі, що проходить через його центр інерції, то його кінетична енергія

$$E_{к} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}.$$

Знайдемо роботу, яку виконує зовнішня сила при обертанні твердого тіла. За малий час dt точка масою m_i (рис.19) здійснює переміщення

$$d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt = [\vec{\omega}, \vec{R}_i] dt = [d\vec{\varphi}, \vec{R}_i],$$

де $d\vec{\varphi}$ - вектор елементарного повороту тіла за час dt . При цьому сила \vec{F}_i , яка прикладена до тіла, виконує елементарну роботу

$$\delta A_i = (\vec{F}_i, d\vec{r}_i) = F_{i\tau} |d\vec{r}_i|.$$

Оскільки вектори $d\vec{\varphi}$ і \vec{R}_i взаємно ортогональні, то $|d\vec{r}_i| = R_i d\varphi$ і

$$\delta A_i = \vec{F}_{i\tau} R_i d\varphi = M_{i\tau} d\varphi = (\vec{M}_i, d\vec{\varphi}).$$

Елементарна робота, яка виконується зовнішньою силою при обертанні тіла,

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \delta A_i = M_z d\varphi.$$

§ 12. Закон збереження моменту імпульсу

Закон збереження моменту імпульсу випливає із закону зміни моменту імпульсу тіла, закріпленого в нерухомій точці, і полягає в такому:

якщо головний момент зовнішніх сил відносно нерухомої точки, прикладених до тіла, тотожно дорівнює нулю, то момент імпульсу тіла відносно цієї точки з бігом часу не змінюється.

Якщо $\vec{M} = 0$, то $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ і $\vec{L} = const$.

Цей закон справедливий і для системи тіл. На замкнену систему тіл зовнішні сили взагалі не діють. Тому результуючий момент цих сил відносно будь-якої нерухомої точки тотожно дорівнює нулю. Отже, момент імпульсу замкненої системи тіл відносно будь-якої нерухомої точки сталий у часі.

З рівняння динаміки тіла, що обертається навколо нерухомої осі OZ , випливає **закон збереження моменту імпульсу тіла відносно цієї осі:**

якщо момент зовнішніх сил відносно нерухомої осі обертання тіла тотожно дорівнює нулю, то момент імпульсу тіла відносно цієї осі не змінюється в процесі руху:

$$M_z = 0 \text{ і } \frac{dL_z}{dt} = 0, \quad L_z = const,$$

або

$$J_z \omega_z = const,$$

де ω_z - кутова швидкість тіла, J_z - його момент інерції відносно осі обертання.

Закон збереження моменту імпульсу - фундаментальний закон природи. Він зв'язаний з певними властивостями симетрії простору - його ізотропністю, тобто з інваріантністю фізичних законів відносно вибору напрямку осей координат системи відліку.

§ 13. Гармонічні коливання.

Диференціальне рівняння гармонічних коливань

Коливанням називається всякий рух або зміна стану тіла, що характеризується тим чи іншим ступенем повторюваності в часі значень фізичних величин, що визначають цей рух або стан тіла.

Коливання називаються *вільними*, якщо вони здійснюються за рахунок енергії, яка була надана, за відсутності в наступному зовнішніх впливів на коливну систему.

Коливання називаються *періодичними*, якщо значення фізичних величин, які змінюються в процесі коливань, повторюються через однакові проміжки часу. Найпростішим типом періодичних коливань є так звані *гармонічні коливання* – коливання, при яких значення фізичної величини змінюється з часом за законом косинуса (синуса).

Нехай матеріальна точка здійснює прямолінійні гармонічні коливання вздовж осі координат Ox біля положення рівноваги, яке прийняте за початок координат. Тоді залежність координати x від часу t задається рівнянням

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Тут x – зміщення коливної точки; A – амплітуда коливання ($A = x_{max}$); ω_0 – циклічна частота; φ_0 – початкова фаза коливань в момент часу $t = 0$; $\omega_0 t + \varphi_0$ – фаза коливань в момент часу t .

Найменший проміжок часу T , після проходження якого повторюються значення всіх фізичних величин, що характеризують коливання, називається *періодом*

коливання. За час T здійснюється одне повне коливання і фаза коливань отримує приріст 2π , тобто

$$\omega_0(t + T) + \varphi_0 = (\omega_0 t + \varphi_0) + 2\pi.$$

Звідси
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Частотою коливань називається кількість повних коливань, що здійснюються за одиницю часу:

$$\nu = \frac{N}{t},$$

де N – кількість коливань, виконаних за час t . Частота коливань – величина, яка обернена до періоду коливань:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Циклічна частота

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Отже, циклічна частота дорівнює кількості повних коливань, що здійснюється за 2π с.

Коливний процес характеризується швидкістю і прискоренням коливної точки:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= v_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) = -\omega_0^2 x, \end{aligned}$$

де $v_0 = A\omega_0$ – амплітуда швидкості,

$a_0 = A\omega_0^2$ – амплітуда прискорення. Зміщення, швидкість і прискорення точки, що гармонічно коливається, є періодичними функціями часу з однаковими циклічною частотою ω_0 і періодом T . Фаза швидкості

відрізняється від фази зміщення на $\frac{\pi}{2}$, а

фаза прискорення відрізняється від фази зміщення на π (рис.23). В моменти часу, коли $x = 0$, швидкість v набуває найбіль-

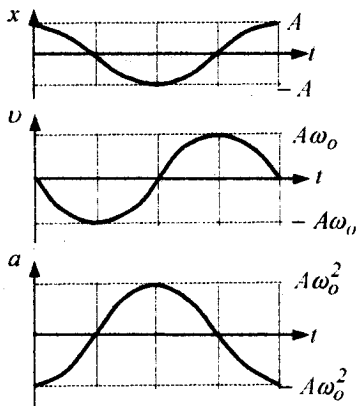


Рис.23

шого значення, коли ж x досягає максимального від'ємного значення, то прискорення a набуває найбільше додатне значення.

Прискорення завжди напрямлене до положення рівноваги: віддаляючись від положення рівноваги, коливна точка рухається сповільнено, наближаючись до нього – прискорено. Прискорення прямо пропорційне до зміщення, а його напрямок протилежний до напрямку зміщення.

ІІ закон Ньютона дає змогу в загальному вигляді записати зв'язок між силою і прискоренням для прямолінійних гармонічних коливань матеріальної точки з масою m :

$$F = ma = -mA\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -m\omega_0^2 x = -kx.$$

Сила, що діє на коливну матеріальну точку прямо пропорційна до зміщення і завжди напрямлена до положення рівноваги. Тому її називають повертальною си-

лою. Фаза сили F збігається з фазою прискорення.

Прикладом сил, що задовольняють співвідношення $F = -kx$, є пружні сили. Сили F , що мають іншу природу, ніж пружні сили, але також задовольняють умову $F = -kx$, називаються квазіпружними, а $k = m\omega_0^2$ – коефіцієнтом квазіпружної сили.

Для прямолінійних коливань вздовж осі Ox прискорення $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$.

Тоді

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

і

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Це диференціальне рівняння вільних прямолінійних гармонічних коливань збуджених пружними або квазіпружними силами.

Частковими розв'язками цього диференціального рівняння є функції:

$$x_1 = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{і} \quad x_2 = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Кінетична енергія матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання, дорівнює:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m}{2} A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{m}{4} A^2 \omega_0^2 [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]$$

Потенціальна енергія матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання під дією квазіпружної сили, дорівнює:

$$E_n = - \int_0^x F_x dx = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 = \frac{m}{2} A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{m}{4} A^2 \omega_0^2 [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]$$

Кінетична і потенціальна енергії здійснюють гармонічні коливання з циклічною частотою $2\omega_0$ і амплітудою

$$\frac{1}{4} m A^2 \omega_0^2 \text{ біля середнього значення } \frac{1}{4} m A^2 \omega_0^2.$$

Повна механічна енергія коливної точки:

$$E = E_k + E_n = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2.$$

Графіки залежностей E_k , E_n і E від часу t для випадку $\varphi_0 = 0$ наведено на рис.24.

Квазіпружна сила є консерватив-

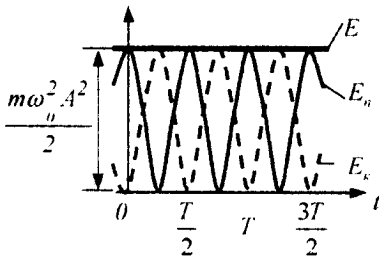


Рис.24

ною. Тому повна енергія гармонічного коливання залишається постійною. У процесі коливання відбувається перетворення кінетичної енергії в потенціальну і навпаки. В момент найбільшого відхилення точки від положення рівноваги повна енергія складається лише з потенціальної енергії. При проходженні точки через положення рівноваги повна енергія складається лише з кінетичної енергії, яка в цей момент є максимальною.

§ 14. Пружинний, фізичний і математичний маятники

Пружинний маятник – це тіло масою m , яке підвішено на невагомій абсолютно пружній пружині і здійснює гармонічні коливання під дією пружної сили $\vec{F} = -k\vec{x}$, де k – коефіцієнт пружності, який у випадку пружини називається жорсткістю (рис.25). На тіло діє і сила тяжіння $m\vec{g}$.

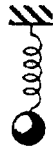


Рис.25

Запишемо основне рівняння динаміки для цього випадку:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + mg = -k(x - x_0),$$

де $x_0 = \frac{mg}{k}$ – статична деформація пружини під дією сили тяжіння mg .

Позначимо $x_1 = x - x_0$ і, враховуючи, що $\ddot{x} = \ddot{x}_1$, бо x_0 не залежить від часу, знайдемо рівняння руху тіла:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1, \quad \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0.$$

$$\text{де } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Отже, пружинний маятник здійснює гармонічні коливання за законом $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ з циклічною частотою

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ і періодом } T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Період коливань T не залежить від амплітуди A .

Ця формула справедлива для пружних коливань в межах, в яких виконується закон Гука, тобто коли маса пружини мала порівнянно з масою тіла.

Потенціальна енергія пружинного маятника дорівнює:

$$E_n = \frac{kx^2}{2},$$

а кінетична:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Фізичний маятник – абсолютно тверде тіло, що здійснює коливання під дією сили тяжіння навколо горизонтальної осі O , яка не проходить через його центр мас C (рис.26).

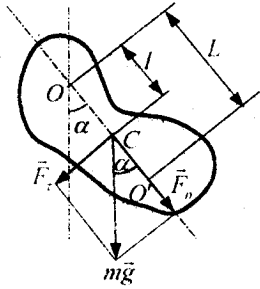


Рис.26

Нехай маятник відхилено з положення рівноваги на невеликий кут α . Складова сили тяжіння маятника \vec{F}_n , напрямлена вздовж осі OO' , зрівноважується реакцією осі O . Складова F_t , яка перпендикулярна до OC , намагається повернути маятник у положення рівноваги.

Відповідно до рівняння динаміки обертального руху твердого тіла момент M обертальної сили F_t можна записати у вигляді:

$$M = J\epsilon = J\ddot{\alpha} = F_t l = -mgl \sin \alpha \approx -mgl \alpha,$$

де J - момент інерції маятника відносно осі, що проходить через точку O , l - відстань між точкою підвісу і центром мас маятника, $\sin \alpha \approx \alpha$ відповідає малим коливанням маятника.

Тоді

$$J\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0 \text{ або } \ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0.$$

Позначивши

$$\frac{mgl}{J} = \omega_0^2,$$

отримаємо рівняння

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0.$$

Розв'язок цього рівняння такий:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

При малих коливаннях фізичний маятник здійснює гармонічні коливання з частотою ω_0 і періодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

де $L = \frac{J}{ml}$ - зведена довжина фізичного маятника.

Точка O' на продовженні прямої OC , що знаходиться від осі підвісу на відстані зведеної довжини L , називається центром гойдання фізичного маятника.

Точка підвісу O і центр гойдання O' мають властивість спряженості: якщо вісь підвісу проходить через центр гойдання, то точка O попередньої осі підвісу стане новим центром гойдання і період гойдання фізичного маятника не зміниться.

За теоремою Штейнера маємо:

$$J = J_c + ml^2,$$

де J_c - момент інерції маятника відносно осі, що проходить через центр мас. Отже,

$$L = \frac{J}{ml} = \frac{J_c}{ml} + l, \text{ тому } L > l.$$

Математичним маятником називається матеріальна

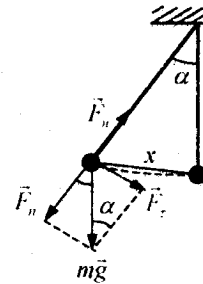


Рис. 27

точка, яка підвішена на невагомій і незтягнутій нитці. На практиці математичним маятником можна вважати важке тіло, яке підвішене

на легенькій нитці, довжина якої набагато більша, ніж розміри тіла (рис.27).

Якщо відхилити маятник з положення рівноваги так, щоб нитка утворювала кут α з вертикаллю, то він почне коливатися у вертикальній площині під дією сили тяжіння $m\vec{g}$.

Сила, що повертає математичний маятник у положення рівноваги, є складовою його сили тяжіння mg :

$$F_{\tau} = -mg \sin \alpha.$$

Складова \vec{F}_n зрівноважується силою натягу нитки \vec{F}_n .

Для малих кутів відхилення $\sin \alpha$ можна замінити кутом α , а дугу, вздовж якої рухається маятник, можна вважати відрізком прямої. Силу що повертає маятник до положення рівноваги, можна вважати квазіпружною силою:

$$F_{\tau} = -\frac{mg}{l}x = -kx.$$

Отже, малі коливання математичного маятника – гармонічні.

Період цих коливань дорівнює:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Період малих коливань математичного маятника не залежить від амплітуди коливань.

Формулу для періоду T математичного маятника можна отримати з виразу

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}},$$

якщо розглядати математичний маятник як окремий випадок фізичного, в якому вся маса зосереджена в центрі мас C на віддалі L від підвісу, що дорівнює довжині l

нитки математичного маятника. Тоді

$$J = ml^2 \text{ і маємо } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

В загальному випадку період коливань математичного маятника визначається формулою:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right)},$$

де α - максимальний кут відхилення маятника.

Математичний маятник зберігає площину, в якій він коливається.

Спостереження над коливаннями маятників використовуються для визначення прискорення g сили тяжіння.

Порівнюючи формули $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ і

$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, бачимо, що якщо зведена довжина L фізичного маятника дорівнює довжині l математичного маятника, то їх періоди коливань однакові.

Отже, зведена довжина фізичного маятника – це довжина такого математичного маятника, період коливання якого дорівнює періоду коливань даного фізичного маятника.

§ 15. Додавання гармонічних коливань однакового напрямку і однакової частоти. Биття

Перш ніж розглядати додавання коливальних рухів, спинимось на способі подачі коливань за допомогою обертально-го вектора амплітуди.

Для цього із довільної точки O , яка вибрана на осі X , під кутом φ_0 , що дорівнює початковій фазі коливань, відкладемо

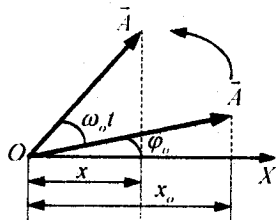


Рис.28

Проекція вектора \vec{A} на вісь OX дорівнює зміщенню x_0 у момент початку відліку часу ($t = 0$):

$$x_0 = A \cos \varphi_0.$$

Обертатимемо вектор амплітуди навколо осі O , яка перпендикулярна до площини рисунка, з кутовою швидкістю ω_0 . За проміжок часу t вектор амплітуди повертається на кут $\omega_0 t$. Проекція вектора \vec{A} в цьому положенні на вісь OX дорівнює:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

За час T , що дорівнює періоду коливань, вектор амплітуди повертається на кут 2π , а проекція його кінця зробить одне повторне коливання навколо положення рівноваги O , отже, обертовий вектор амплітуди повністю характеризує гармонічне коливання.

Нехай точка бере участь у двох гармонічних коливаннях однакової частоти, які напрямлені вздовж однієї прямої:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2).$$

Ці коливання зручно додати, ко-

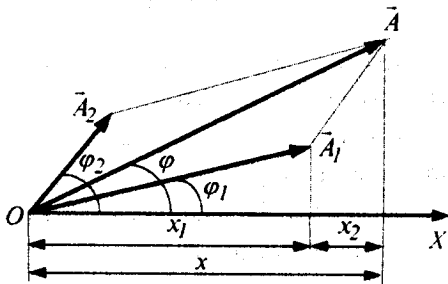


Рис. 29

вектор \vec{A} , модуль якого дорівнює амплітуді A коливання (рис.28). Проекція вектора \vec{A} на вісь

ристуючись методом обертового вектора амплітуди (рис.29). Оскільки вектори \vec{A}_1 і \vec{A}_2 обертаються з однаковою кутовою швидкістю, то різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ між ними постійна. Оскільки сума проєкцій двох векторів на одну вісь дорівнює проєкції на ту саму вісь вектора, який є їх сумою, то результуюче коливання можна подати вектором амплітуди \vec{A} , що дорівнює сумі векторів \vec{A}_1 і \vec{A}_2 :

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

і який обертається навколо точки O з тією самою кутовою швидкістю ω , що й вектори \vec{A}_1 і \vec{A}_2 . Результуюче коливання описуються рівнянням

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

де A – амплітуда результуючого коливання, а φ – його початкова фаза.

З рис.29 видно, що

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Амплітуда A результуючого коливання залежить від різниці початкових фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ коливань, що додаються. Можливі значення A лежать в межах

$$A_1 + A_2 \geq A \geq |A_2 - A_1|.$$

Розглянемо кілька окремих випадків.

$$1). \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

$$\text{Тоді } \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1 \text{ і } A = A_1 + A_2.$$

$$2). \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m + 1)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

$$\text{Тоді } \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1 \text{ і } A = |A_1 - A_2|.$$

Розглянемо аналітичний метод знаходження результуючого коливання в деяких простих випадках:

а) частоти і фази коливань, що додаються, однакові, амплітуди різні:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = (A_1 + A_2) \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Амплітуда результуючого коливання A_p дорівнює сумі амплітуд коливань, що додаються.

б) частоти і амплітуди однакові, фази відрізняються на φ :

$$x = x_1 + x_2 = A \cos \omega_0 t + A \cos(\omega_0 t + \varphi) = 2A \cos \frac{\varphi}{2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Амплітуда результуючого коливання $A_p = 2A \cos \frac{\varphi}{2}$ менша суми амплітуд, що додаються; зокрема, якщо $\varphi = \pi$, то $A_p = 0$.

Якщо частоти коливань x_1 і x_2 не однакові, то вектори \vec{A}_1 і \vec{A}_2 будуть обертатися з різною швидкістю. В цьому випадку результуючий вектор \vec{A} пульсує за величиною і обертається з непостійною швидкістю. Результуючим рухом буде в цьому випадку не гармонічне коливання, а деякий складний коливний процес.

Особливий інтерес становить випадок, коли два гармонічні коливання однакового напрямку, що додаються, мало відрізняються за частотою.

Періодичні зміни амплітуди коливання, які виникають при додаванні двох гармонічних коливань одного напрямку з близькими частотами, називаються биттям.

Нехай амплітуди коливань

$A_1 = A_2 = A$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, а частоти дорівнюють ω_0 , $\omega_0 + \Delta\omega$ і $\Delta\omega \ll \omega_0$:

Тоді рівняння коливань матимуть вигляд:

$$x_1 = A \cos \omega_0 t, \quad x_2 = A \cos(\omega_0 t + \Delta\omega t).$$

Додаючи ці вирази і застосовуючи тригонометричну формулу для суми косинусів, отримуємо:

$$x = x_1 + x_2 = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos \omega_0 t.$$

Отриманий вираз є добуток двох коливань. Оскільки $\Delta\omega \ll \omega_0$, то множник $2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$ майже не зміниться, коли множник $\cos \omega_0 t$ здійснює кілька повних коливань. Тому результуюче коливання x можна розглядати як гармонічне з частотою ω_0 й амплітудою

$$A_\delta = \left|2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t\right|.$$

Частота зміни A_δ удвоє більша від частоти зміни косинуса (оскільки береться за модулем). Частота биття дорівнює різниці частот коливань, що додаються, тобто $\omega_\delta = \Delta\omega$. Період биття $T_\delta = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$.

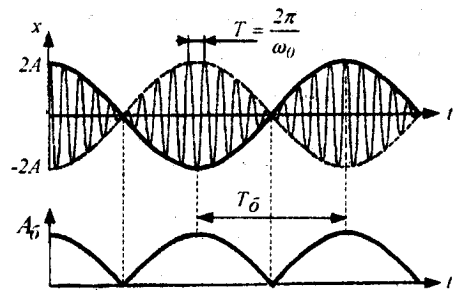


Рис. 30

Суцільні лінії на рис. 30 дають графік результуючого коливання у випадку

$\frac{\omega}{\Delta\omega} = 10$, і графік амплітуди A_δ .

§ 16. Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Нехай матеріальна точка C одночасно бере участь у двох гармонічних коливаннях з однаковою частотою у двох взаємно перпендикулярних напрямках як вздовж осі X , так і вздовж осі Y (рис.31).

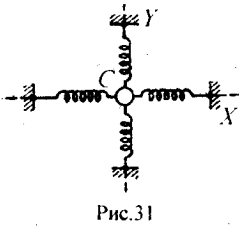


Рис.31

Якщо збудити обидва коливання, матеріальна точка буде рухатись по деякій криволінійній траєкторії, форма якої залежить від різниці фаз

обох коливань.

Виберемо початок відліку часу так, щоб початкова фаза першого коливання дорівнювала нулю. Тоді рівняння коливань матимуть такий вигляд:

$$x = A \cos \omega_0 t, \quad y = B \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

де φ - різниця фаз обох коливань.

Ці вирази - параметрична форма рівняння траєкторії, по якій рухається точка, що бере участь в обох коливаннях. Щоб отримати рівняння траєкторії у звичайному вигляді, треба виключити з цих рівнянь параметр t .

$$\frac{x}{A} = \cos \omega_0 t, \quad \sin \omega_0 t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}},$$

$$\frac{y}{B} = \cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos \omega_0 t \cos \varphi -$$

$$- \sin \omega_0 t \sin \varphi = \frac{x}{A} \cos \varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \varphi;$$

$$\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A} \cos \varphi \right)^2 = \left(- \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \varphi \right)^2,$$

$$\frac{x^2}{A^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{x}{A} \frac{y}{B} \cos \varphi + \frac{y^2}{B^2} =$$

$$= - \frac{x^2}{A^2} \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi.$$

В результаті отримаємо

$$\frac{x^2}{A^2} - 2 \frac{x}{A} \frac{y}{B} \cos \varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \varphi.$$

Це рівняння еліпса, осі якого повернуті відносно координатних осей X і Y . Орієнтація еліпса і величина його півосей залежить від амплітуд A і B і різниці фаз φ .

Розглянемо частинні випадки.

1). $\varphi = \pm 2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$

Тоді $\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right)^2 = 0;$

звідси $y = \frac{B}{A} x.$

Результуюче

коливання є гармонічним вздовж прямої з частотою ω і амплітудою $\sqrt{A^2 + B^2}$ (рис.32).

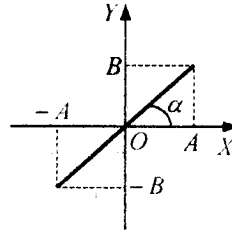


Рис.32

Пряма утворює з віссю X кут

$$\alpha = \arctg \frac{B}{A}.$$

2). $\varphi = \pm(2m+1)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$

У цьому випадку

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B} \right)^2 = 0;$$

і

$$y = - \frac{B}{A} x.$$

Результуючий рух - це гармонічне коливання вздовж прямої $y = - \frac{B}{A} x$ (рис.33).

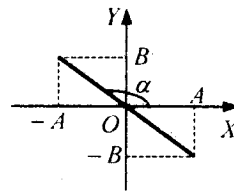


Рис.33

$$3). \varphi = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2} \quad (m=0,1,2,\dots)$$

$$\text{В результаті } \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Це рівняння еліпса, осі якого збігаються з осями координат, а його півосі дорівнюють відповідним амплітудам (рис.34). Якщо $A=B$ еліпс вироджується в коло. Випадки

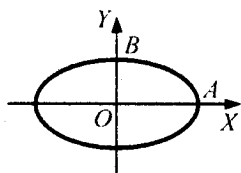


Рис.34

$\varphi = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ і $\varphi = -(2m+1)\frac{\pi}{2}$ відрізняються напрямком руху по еліпсу чи колу.

Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань, що додаються, різні, то замкнена траєкторія результуючого коливання досить складна.

Замкнені траєкторії, що кресляться точкою, яка здійснює одночасно два взаємно перпендикулярні коливання, називаються фігурами *Ліссажа*. Форма цих кривих залежить від співвідношення амплітуд, частот і різниці фаз коливань, що додаються (рис.35).

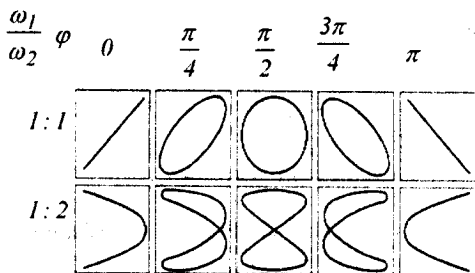


Рис.35

§ 17. Диференціальне рівняння загасаючих коливань і його розв'язання

Усі реальні коливальні системи є дисипативними. Енергія механічних коливань такої системи поступово витрачається на роботу проти сил опору, тому вільні коливання завжди загасаючі - їх амплітуда поступово зменшується.

Для пружинного маятника масою m , що здійснює малі коливання під дією пружної сили $F = -kx$, сила опору пропорційна до швидкості, тобто

$$F_{on} = -rV = -r\dot{x}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

де r - коефіцієнт опору.

Другий закон Ньютона для загасаючих коливань має наступний вигляд:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}, \quad \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Введемо позначення

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{r}{m} = 2\delta,$$

де δ - коефіцієнт загасання, а ω_0 - частота з якою здійснювались би вільні коливання за відсутності опору середовища. Цю частоту називають власною частотою системи.

Тоді II закон Ньютона можна записати у вигляді

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2x = 0.$$

Для розв'язання цього рівняння введемо нову змінну u , яка зв'язана з x співвідношенням $x = e^{-\delta t}u$.

Звідси

$$\dot{x} = u e^{-\delta t} - \delta u e^{-\delta t},$$

$$\ddot{x} = \dot{u} e^{-\delta t} - 2\delta \dot{u} e^{-\delta t} + \delta^2 u e^{-\delta t}.$$

Підставивши ці значення \dot{x} і \ddot{x} в рівняння II закону Ньютона для загасаючих коливань і скорочуючи всі доданки на множник $e^{-\delta t}$, отримуємо

$$\ddot{u} + (\omega_0^2 - \delta^2) u = 0.$$

Нехай опір середовища малий і $\omega_0^2 > \delta^2$. Тоді можна ввести позначення

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 > 0.$$

В результаті отримуємо рівняння

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0,$$

розв'язок якого має такий вигляд

$$u = A_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

де A_0 і φ – сталі, які визначаємо з початкових умов.

Отже,

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

де $A = A_0 e^{-\delta t}$ – амплітуда загасаючих коливань, а A_0 – початкова амплітуда. Амплітуда загасаючих коливань зменшується з бігом часу і тим скоріше, чим більший коефіцієнт опору і чим менша маса m коливного тіла.

Величина $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ називається власною циклічною частотою коливань дисипативної системи.

Графік залежності x від часу наведений на рис.36.

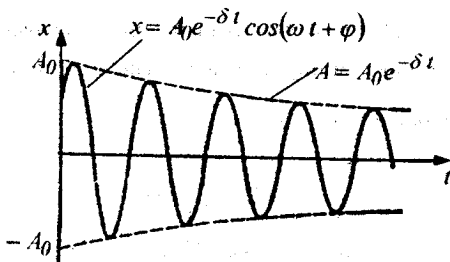


Рис.36

Загасаючі коливання – неперіодичні коливання, бо в них ніколи не повторюються, наприклад, максимальні значення зміщення, швидкості і прискорення. Однак при загасаючих коливаннях величина x перетворюється в нуль, змінюючись в одну і ту саму сторону, а також досягає максимальних і мінімальних значень через рівні проміжки часу:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}}.$$

Величину T тому називають періодом загасаючих коливань.

Якщо $A(t)$ і $A(t+T)$ – амплітуди двох послідовних коливань, що йдуть одне за одним через проміжок часу T , то відношення

$$D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T}$$

називається **декрементом загасання**, а його натуральний логарифм

$$\varepsilon = \ln D = \delta T$$

– **логарифмічний декремент загасання**.

Позначимо τ проміжок часу, протягом якого амплітуда коливань зменшується в e разів. Тоді

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+\tau)}} = e^{\delta \tau} = e.$$

$$\text{Звідси } \delta \tau = 1 \text{ або } \delta = \frac{1}{\tau}.$$

Коефіцієнт загасання δ є фізична величина, обернена до проміжку часу, протягом якого амплітуда зменшується в e разів. Час τ називається часом релаксації.

Нехай N – кількість коливань, після яких амплітуда коливань зменшується в e разів.

Тоді

$$\tau = NT, \quad \alpha = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}.$$

Логарифмічний декремент загасання α є фізична величина, обернена до кількості коливань N , після закінчення яких амплітуда зменшується в e разів.

Добротністю коливальної системи називається величина Q , яка дорівнює добутку 2π на відношення енергії $E(t)$ коливальної системи в довільний момент часу t до зменшення цієї енергії за проміжок часу від t до $t + T$:

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}.$$

Оскільки енергія $E(t)$ пропорційна до квадрата амплітуди коливань, то

$$2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\alpha}}.$$

При малих значеннях α ($\alpha \ll 1$)

$$e^{-2\alpha} \approx 1 - 2\alpha$$

$$i \quad Q = \frac{\pi}{\alpha} = \pi N = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{r} \sqrt{km}.$$

Тут враховано, що при $\alpha \ll 1$ $\omega \approx \omega_0$ і умовний період T загасаючих коливань практично дорівнює періоду T_0 вільних коливань.

§ 18. Диференціальне рівняння вимушених коливань і його розв'язання. Резонанс

Розглянемо коливання, що їх здійснює система, якщо на неї, крім пружної си-

ли kx і сили опору $r\dot{x}$, діє ще додаткова періодична сила F , яку називатимемо **вимушуючою силою** і яка змінюється за гармонічним законом

$$F = F_0 \cos \Omega t.$$

Диференціальне рівняння вимушених коливань, що відбувається вздовж осі OX , має такий вигляд:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \Omega t,$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

$$\text{де } \delta = \frac{r}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Припустимо, що усталені вимушені коливання системи, які виникають під дією сили F , також є гармонічними, тобто

$$x = A \cos(\Omega t - \varphi),$$

причому їх циклічна частота дорівнює циклічній частоті вимушуючої сили.

Задача полягає в знаходженні амплітуди A і початкової фази φ .

Знайдемо \dot{x} і \ddot{x} :

$$\dot{x} = -A\Omega \sin(\Omega t - \varphi) = A\Omega \cos\left(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ddot{x} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi) =$$

$$= A\Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi + \pi).$$

Підставивши вирази для \ddot{x} , \dot{x} і x у диференціальне рівняння вимушених коливань:

$$A\Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi + \pi) + A2\delta\Omega \cos\left(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + A\omega_0^2 \cos(\Omega t - \varphi) = f_0 \cos \Omega t.$$

З цього рівняння видно, що амплітуда A і фаза φ повинні мати такі значення, щоб гармонічне коливання $f_0 \cos \Omega t$ дорівнювало сумі трьох гармонічних коливань, що знаходяться в лівій частині рівняння.

Введемо позначення

$$A_1 = A\Omega^2, \quad A_2 = A2\delta\Omega, \quad A_3 = A\omega_0^2,$$

$$A_4 = f_0.$$

Тоді

$$A_1 \cos(\Omega t - \varphi + \pi) + A_2 \cos\left(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + A_3 \cos(\Omega t - \varphi) = A_4 \cos \Omega t.$$

Щоб додати ці коливання, використаємо метод векторних діаграм. Відкладемо під кутом φ до осі OX за годинниковою стрілкою вектор \vec{A}_3 , потім під кутом $\frac{\pi}{2}$ відносно вектора \vec{A}_3 проти годинникової стрілки побудуємо вектор \vec{A}_2 і вектор \vec{A}_1 ,

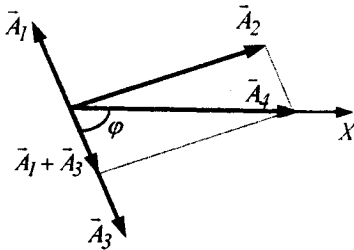


Рис.37

який повернутий на кут π відносно вектора \vec{A}_3 . Додавши три вектори $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$, отримаємо вектор \vec{A}_4 (рис.37).

З рис.37 видно, що

$$A_4^2 = (A_3 - A_1)^2 + A_2^2,$$

і, відповідно,

$$f_0^2 = A^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + A^2(2\delta\Omega)^2.$$

$$\text{Звідси } A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}.$$

Амплітуда усталених вимушених коливань прямо пропорційна до амплітуди вимушуючої сили F_0 , обернено пропор-

ційна масі m системи і зменшується із збільшенням коефіцієнта загасання.

Із рис.37 можна отримати значення φ - зсув мас між зміщенням і вимушуючою силою:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Розв'язок диференціального рівняння вимушених коливань дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння

$$x_1 = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad \text{де } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

і частинного розв'язку $x = A \cos(\Omega t - \varphi)$ неоднорідного рівняння. Доданок x_1 відіграє помітну роль лише на початковій стадії процесу виникнення коливань (рис.38). З часом внаслідок експоненціального множника $e^{-\delta t}$ роль доданка x_1 зменшується, амплітуда вимушених коливань зростає, доки не досягне значення A .

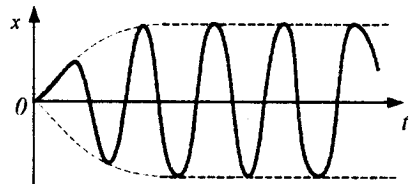


Рис.38

Якщо F_0, m і δ сталі, то амплітуда усталених вимушених коливань залежить тільки від співвідношення між циклічними частотами вимушуючої сили (Ω) і вільних коливань системи (ω_0).

Розглянемо залежність амплітуди A вимушених коливань від частоти Ω і побудуємо криві $A = f(\Omega)$ (рис.39) при різних значеннях коефіцієнта загасання δ . Чим менше δ , тим вище і правіше лежить максимум кривої. Якщо $\Omega = 0$, то

$$A = A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}.$$

в такому разі коливання не здійснюються,

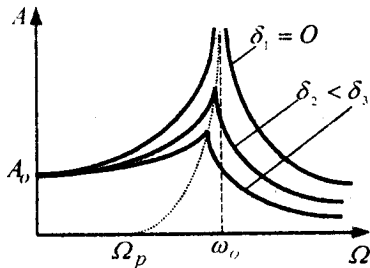


Рис. 39

а відхилення A_0 називається статичною амплітудою. При $\Omega \rightarrow \infty$ всі криві асимптотично прямують до нуля. Якщо загасання немає ($\delta = 0$), то амплітуда коливань A зростає із зростанням циклічної частоти Ω вимушуючої сили і при $\Omega = \omega_0$ стає нескінченно великою.

Якщо є загасання ($\delta \neq 0$), то амплітуда досягає максимального значення, коли вираз $\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2 \right]$, що є в знаменнику співвідношення для A , досягає мінімуму. Це відбувається, коли

$$\frac{d}{d\Omega} \left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2 \right] = 0.$$

Виконуючи диференціювання, отримуємо

$$-4\Omega(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\delta^2 \Omega = 0.$$

Це рівняння має два розв'язки:

$$\Omega = 0, \quad \Omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

Розв'язок $\Omega = 0$ відповідає максимуму знаменника виразу для A . Із інших двох розв'язків лише додатний позитивний має фізичний сенс.

Отже, **резонансна частота** - частота, при якій амплітуда A коливань досягає

максимального значення, - має такий вигляд.

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

Якщо різкого зростання амплітуди вимушених коливань при наближенні частоти вимушуючої сили до частоти Ω_p називається резонансом.

Для консервативної системи ($\delta = 0$) $\Omega_p = \omega_0$, а для дисипативної системи Ω_p трохи менша від власної частоти ω_0 системи.

Підставивши Ω_p у вираз для амплітуди A , отримаємо вираз для амплітуди при резонансі:

$$A_p = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left[\omega_0^2 - (\omega_0^2 - 2\delta^2) \right]^2 + 4\delta^2 (\omega_0^2 - 2\delta^2)}} = \frac{\frac{F_0}{m}}{2\delta \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}.$$

При малому загасанні ($\delta^2 \ll \omega_0^2$) амплітуда при резонансі приблизно дорівнює

$$A_p = \frac{F_0}{2\delta\omega_0 m} = \frac{\omega_0}{2\delta} \frac{F_0}{m\omega_0^2} = Q \frac{F_0}{m\omega_0^2},$$

де Q - добротність коливної системи. Отже, добротність характеризує резонансні властивості коливної системи: чим більше значення Q , тим більше A_p .

З виразу $\text{tg } \varphi = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$ видно, що

у випадку $\delta = 0$ зміщення коливної системи і вимушуюча сила мають однакові фази; у всіх інших випадках $\varphi \neq 0$. Залежність φ від Ω при різних значеннях δ

наведена на рис.40. При $\Omega = 0$ $\varphi = 0$, при

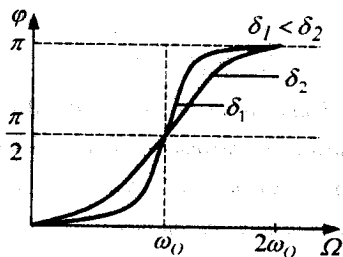


Рис.40

$\Omega = \omega_0$ незалежно від значення δ $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

тобто вимушуюча сила випереджує по фазі зміщення на $\frac{\pi}{2}$. При подальшому збільшенні Ω зсув фаз зростає і при $\Omega \gg \omega_0$ $\varphi \rightarrow \pi$, тобто фаза зміщень коливної системи майже протилежна до зовнішньої вимушуючої сили.

§ 19. Утворення хвиль в пружному середовищі. Поздовжні і поперечні хвилі. Рівняння біжучої хвилі

Розглянемо *пружне середовище*, між частинками якого існують сили взаємодії, що перешкоджають тому або іншому виду його деформації. Тіло, яке коливається в пружному середовищі, періодично діє на прилеглі до нього частинки середовища, виводячи їх з положення рівноваги і змушуючи здійснювати вимушені коливання. При цьому середовище поблизу тіла деформується і в ньому виникають пружні сили. Ці сили діють як на прилеглі до тіла частинки, намагаючись повернути їх у положення рівноваги, так і на віддаленіші від тіла частинки, виводячи їх з положення рівноваги. Віддаленіші від тіла області се-

редовища поступово втягуються в коливальний рух.

Процес поширення коливань в суцільному середовищі, яке неперервно розподілене в просторі і має пружні властивості, називається механічним хвильовим процесом, або механічною хвилею.

При поширенні хвилі частинки середовища не рухаються разом з хвилею, а коливаються біля свого положення рівноваги. *Основна властивість всіх хвиль є перенос енергії без переносу речовини.*

Пружними (або механічними) хвилями називаються механічні збурення, що поширюються у пружному середовищі. Пружні хвилі бувають поперечні і поздовжні.

У *поперечних* хвилях частинки середовища коливаються в площинах, які перпендикулярні до напрямку поширення хвилі (рис.41а). Поперечні хвилі можуть

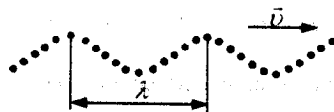


Рис.41а

поширюватись в середовищі, в якому виникають пружні сили при деформації зсуву, тобто лише у твердих тілах.

У *поздовжніх* хвилях частинки коливаються в напрямку поширення хвилі

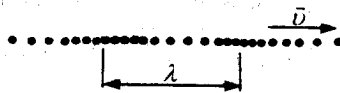


Рис.41б

(рис.41б). Ці хвилі можуть поширюватись в середовищах, в яких виникають пружні сили при деформації стиску і розтягу, тобто у твердих, рідких і газоподібних тілах.

Пружна хвиля називається **гармонічною**, якщо відповідні їй коливання частинок середовища є гармонічними.

Нехай поперечна гармонічна хвиля поширюється вздовж осі OX .

На рис.42 наведено залежність між зміщенням ξ частинок середовища, що бе-

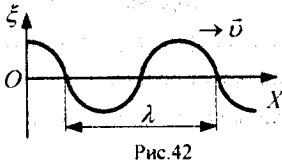


Рис.42

руть участь у хвильовому процесі, і відстанню x цих частинок від джерела коливань O для якогось фіксованого моменту часу.

Відстань між найближчими частинками, що коливаються в однаковій фазі, називається **довжиною хвилі λ** . Довжина хвилі дорівнює тій відстані, на яку поширюється певна фаза коливань за період:
 $\lambda = vT$ і $\lambda = \frac{v}{\nu}$.

Нехай точка, від якої йдуть коливання, коливається в суцільному середовищі. Коливання поширюються від центра у всі сторони. **Поверхня, до якої доходить коливання в деякий момент часу, називається фронтом хвилі.** Фронт хвилі – це поверхня, яка відокремлює частину простору, уже залучену у хвильовий процес, від області, в якій коливання ще не виникли.

Поверхня, в якій всі частинки коливаються в однаковій фазі, називається хвильовою. Хвильову поверхню можна провести через довільну точку простору, який охоплений хвильовим процесом. Отже, хвильових поверхонь існує нескінченна множина, а хвильовий фронт в кожний

момент часу лише один. Хвильові поверхні залишаються нерухомими, а хвильовий фронт весь час переміщується.

Хвильові поверхні можуть бути довільної форми.

Хвиля називається плоскою, якщо її хвильові поверхні мають вигляд площин, які паралельні площині, що проходить через джерело хвилі.

Хвиля називається сферичною, якщо її хвильові поверхні мають вигляд концентричних сфер. Центр цих сфер називається центром хвилі.

Напрямки, в яких поширюються коливання, називаються **променями**. В ізотропному середовищі промені перпендикулярні до фронту хвилі.

Поширення в пружному середовищі механічних збурень, збуджених джерелом хвилі, пов'язане з перенесенням хвилями енергії. Тому такі хвилі називаються **біжучими хвилями**.

Рівнянням хвилі називається вираз, який дає зміщення коливної частинки як функцію її координат x, y, z і часу t .

Розглянемо плоску хвилю, яка поширюється

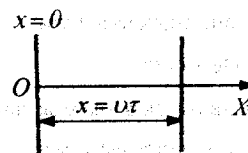


Рис. 43

вздовж осі OX і збуджується в площині $x = 0$ (рис.43). Нехай коливання в цій

площині мають вигляд:

$$\xi(0, t) = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Знайдемо вигляд коливання частинок у площині, що відповідає довільному значенню x . Для того, щоб пройти шлях від площини $x = 0$ до цієї площини, хвилі

потрібен час $\tau = \frac{x}{v}$, де v – швидкість поширення хвилі. Отже, коливання частинок, що лежать у площині x , будуть запізнюватись на час τ від коливань частинок в площині $x = 0$, тобто матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}\xi(x,t) &= A \cos[\omega(t - \tau) + \varphi_0] = \\ &= A \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{v} + \varphi_0\right) = \\ &= A \cos\left(\omega - \frac{2\pi}{vT}x + \varphi_0\right) = A \cos\left(\omega - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right).\end{aligned}$$

Введемо величину, яка називається *хвильовим числом*:

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}.$$

Тоді *рівняння біжучої плоскої хвилі*, що поширюється вздовж осі OX , має такий вигляд:

$$\xi(x,t) = A \cos(\omega t - \kappa x + \varphi_0),$$

де A – амплітуда коливань, яка називається амплітудою хвилі; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – циклічна частота хвилі; φ_0 – початкова фаза коливань в площині $x = 0$. Величина $\Phi = \omega t - \kappa x + \varphi_0$ дорівнює фазі коливань в довільній площині з координатою x і називається фазою плоскої хвилі.

Зафіксуємо певне значення фази:

$$\omega t - \kappa x + \varphi_0 = \text{const}.$$

Цей вираз визначає зв'язок між часом t і тим місцем x , в якому фаза має зафіксоване значення. Величина $\frac{dx}{dt}$ дає швидкість, з якою переміщається дане значення фази. Продиференціюємо вираз для фази:

$$\omega dt - \kappa dx = 0.$$

Звідси

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{\omega \lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = v.$$

Отже, швидкість v поширення хвилі є ніщо інше, як швидкість переміщення фази хвилі і її називають *фазовою швидкістю*.

Якщо плоска хвиля поширюється в довільному напрямку, то

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{\kappa} \vec{r} + \varphi_0),$$

де $\vec{\kappa} = \kappa \vec{n}$ – вектор, який дорівнює за модулем хвильовому числу і має напрям нормалі до хвильової поверхні.

У випадку сферичної хвилі

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - \kappa r + \varphi_0),$$

де r – відстань від центра хвилі до точки середовища, яка розглядається. У випадку сферичної хвилі навіть у середовищі, яке не поглинає енергію, амплітуда коливань не залишається постійною, а зменшується з відстанню за законом $\frac{1}{r}$. Це співвідношення справедливе лише для r , що значно більші за розміри джерела.

Рівняння довільної хвилі є розв'язком *рівняння*, яке називається *хвильовим*.

Для виведення цього рівняння використаємо рівняння плоскої хвилі, що поширюється в довільному напрямку:

$$\begin{aligned}\xi(\vec{r}, t) &= A \cos(\omega t - \vec{\kappa} \vec{r} + \varphi_0) = \\ &= A \cos(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_0).\end{aligned}$$

Продиференціюємо цю функцію двічі по кожній змінній:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - \vec{\kappa} \vec{r} + \varphi_0) = -\omega^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\kappa_x^2 A \cos(\omega t - \vec{\kappa} \vec{r} + \varphi_0) = -\kappa_x^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -\kappa_y^2 A \cos(\omega t - \vec{\kappa} \vec{r} + \varphi_0) = -\kappa_y^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -\kappa_z^2 A \cos(\omega t - \vec{\kappa} \vec{r} + \varphi_0) = -\kappa_z^2 \xi.$$

Додамо похідні по координатах:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2) \xi = -\kappa^2 \xi.$$

Зіставимо цю суму з похідною по часу і врахуємо, що $\omega^2 = v^2 \kappa^2$. Отже, поширення хвиль в однорідному ізотропному середовищі описується *хвильовим рівнянням* – диференціальним рівнянням в частинних похідних

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

або
$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

де v – фазова швидкість, а

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ – оператор Лапласа.}$$

§ 20. Енергія хвилі

Нехай в деякому середовищі поширюється в додатному напрямку осі Ox плоска хвиля

$$\xi = A \cos(\omega t - \kappa x + \varphi_0).$$

Визначимо зміну енергії малого об'єму dV пружного середовища, пов'язану з поширенням у середовищі плоскої хвилі. Оскільки об'єм dV дуже малий, то можна вважати, що всі частинки середовища, які містяться в цьому об'ємі, коливаються в одній фазі, так що їх швидкості однакові і $v = \frac{d\xi}{dt}$. Тому кінетична енергія об'єму dV , яка пов'язана з коливальним рухом,

$$dE_k = \frac{v^2}{2} dm = \frac{\rho v^2}{2} dV =$$

$$= \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 dV \sin^2(\omega t - \kappa x + \varphi_0).$$

Визначаючи роботу деформації об'єму dV середовища під час хвильового руху, можна показати, що потенціальна енергія dE_n об'єму dV середовища дорівнює його кінетичній енергії:

$$dE_n = dE_k = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 dV \sin^2(\omega t - \kappa x + \varphi_0).$$

Повна механічна енергія коливального руху об'єму dV дорівнює

$$dE = dE_k + dE_n = \rho A^2 \omega^2 dV \sin^2(\omega t - \kappa x + \varphi_0).$$

Об'ємна густина енергії хвиль у пружному середовищі

$$w = \frac{dE}{dV} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - \kappa x + \varphi_0).$$

Густина енергії в кожний момент часу в різних точках простору різна. В одній і тій же точці густина енергії змінюється з часом за законом квадрату синуса. Середнє значення квадрата синуса дорівнює $\frac{1}{2}$. Відповідно середнє за часом значення об'ємної густини енергій в кожній точці середовища дорівнює:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2.$$

Поширення хвиль у пружному середовищі нерозривно пов'язане з процесом передавання енергії від одних ділянок середовища до інших. Саме тому при хвильовому русі об'ємна густина енергії w коливань у кожній точці середовища змінюється в часі.

Об'ємна густина енергії

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - \kappa x + \varphi_0) = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 [1 - \cos 2(\omega t - \kappa x + \varphi_0)].$$

Швидкість u поширення енергії хвилі дорівнює швидкості переміщення в просторі поверхні, яка відповідає максимальному значенню об'ємної густини енергії w . Рівняння поверхні $w = w_{max}$ має вигляд:

$$2(\omega t - kx + \varphi_0) = \pi.$$

Продиференціюємо цей вираз

$$\omega dt - k dx = 0.$$

Звідси швидкість переміщення поверхні

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v.$$

Отже, швидкість поширення енергії хвилі збігається з фазовою швидкістю хвилі.

Для характеристики процесу перенесення енергії хвилями введемо поняття про потік енергії. *Потоком енергії Φ_E крізь яку-небудь поверхню площею S називається фізична величина, яка числово дорівнює кількості енергії dE , яка передається через цю поверхню за одиницю часу:*

$$\Phi_E = \frac{dE}{dt}.$$

Знайдемо потік енергії хвилі, що рухається з фазовою швидкістю \vec{v} , через площадку dS (рис.44). За час dt хвиля перенесе енергію,

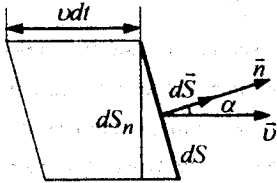


Рис.44

що міститься всередині косою циліндра, об'єм якого

$$dV = v dt dS \cos \alpha = v dt dS_n.$$

Тоді $dE = w dV = w v dt dS_n$ і потік енергії $d\Phi_E = w v dS_n = w(\vec{v}, d\vec{S})$, де w –

об'ємна густина енергії хвилі, $d\vec{S} = \vec{n} dS$ – вектор площадки dS .

Для характеристики потоку енергії в різних точках простору вводиться векторна величина \vec{j} , яка називається густиною потоку енергії. *Густина потоку енергії – векторна величина, яка напрямлена у бік поширення хвилі і числово дорівнює потоку енергії $d\Phi_E$ крізь одиницю площі dS поверхні, яка розташована перпендикулярно до напрямку поширення хвилі:*

$$\vec{j} = \frac{d\Phi_E}{dS_n} = \frac{d\Phi_E}{dt dS_n} = w \vec{v}.$$

Оскільки швидкість \vec{v} – це вектор, модуль якого дорівнює фазовій швидкості хвилі, а напрямок збігається з напрямком поширення хвилі (і перенесення енергії), то

$$\vec{j} = w \vec{v}.$$

Вектор густини потоку енергії хвилі, який називається вектором Умова, дорівнює добутку вектора швидкості поширення енергії хвилі на величину її об'ємної густини.

Вектор \vec{j} в різних точках простору має неоднакові значення, а в даній точці простору змінюється з часом за законом квадрата синуса. Середнє значення вектора Умова:

$$\langle \vec{j} \rangle = \frac{l}{2} \rho A^2 \omega^2 \vec{v}.$$

Знаючи \vec{j} у всіх точках довільної поверхні S , можна обчислити потік енергії через цю поверхню:

$$\Phi_E = \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Скалярна величина I , яка дорівнює модулю середнього значення вектора Умова, називається *інтенсивністю хвилі*:

$$I = \langle \vec{j} \rangle.$$

Інтенсивність хвилі числово дорівнює енергії, яка переноситься хвилею за одиницю часу через одиницю площі поверхні, яка перпендикулярна до напрямку поширення хвилі:

$$I = v \langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2.$$

Інтенсивність синусоїдальної хвилі пропорційна до квадрата її амплітуди.

§ 21. Інтерференція хвиль.

Рівняння стоячої хвилі

Якщо в середовищі є декілька джерел коливань, то хвилі, які поширюються від них, йдуть незалежно одна від одної і після взаємного перетину розходяться далі так, ніби такої зустрічі і не було. Це положення називається **принципом суперпозиції**.

В місцях зустрічі хвиль коливання середовища, які викликані кожною з хвиль, складаються одне з одним. Результат додавання (результуюча хвиля) залежить від співвідношення фаз, періодів і амплітуд хвиль, що накладаються.

Узгоджене проходження в часі і просторі декількох коливань або хвильових процесів пов'язується з поняттям когерентності. Дві хвилі називаються когерентними, якщо мають однакову частоту і різниця їх фаз залишається постійною в часі.

Інтерференцією хвиль називається явище, яке відбувається при накладанні двох або кількох когерентних хвиль, при якому має місце стійке в часі їх взаємне підсилення в одних точках простору і ос-

лаблення в інших в залежності від співвідношення між фазами цих хвиль.

Розглянемо накладання двох когерентних косинусоїдальних хвиль, які збуджуються точковими джерелами S_1 і S_2

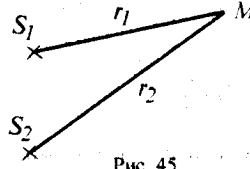


Рис. 45 (рис.45):

$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega t - \kappa r_1 + \varphi_1) = A_1 \cos \Phi_1.$$

$$\xi_2 = A_2 \cos(\omega t - \kappa r_2 + \varphi_2) = A_2 \cos \Phi_2.$$

Амплітуда A результуючої хвилі в точці M дорівнює

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[\kappa(r_2 - r_1) - (\varphi_2 - \varphi_1)].$$

Оскільки для когерентних джерел різниця початкових фаз $(\varphi_2 - \varphi_1) = const$, то результат інтерференції двох хвиль в різних точках залежить від величини $\Delta_s = r_2 - r_1$, яка називається **геометричною різницею ходу** хвиль.

У точках, де $\kappa(r_2 - r_1) - (\varphi_2 - \varphi_1) = \pm 2m\pi$, ($m = 0, 1, 2, \dots$), спостерігається **інтерференційний максимум**: амплітуда результуючого коливання $A = A_1 + A_2$.

В точках, де $\kappa(r_2 - r_1) - (\varphi_2 - \varphi_1) = \pm(2m+1)\pi$, ($m = 0, 1, 2, \dots$) спостерігається **інтерференційний мінімум** амплітуда результуючого коливання

$$A = |A_1 - A_2|.$$

m – порядок інтерференційного максимуму або мінімуму.

Оскільки хвильове число $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$, де λ – довжина хвилі в даному середовищі, то при різниці ходу хвиль

$$\Delta_1 = \pm 2m \frac{\lambda}{2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} \lambda$$

амплітуда результуючого коливання максимальна. Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, то ця умова набирає вигляду

$$\Delta_1 = \pm 2m \frac{\lambda}{2}$$

Амплітуда результуючого коливання мінімальна в усіх точках, для яких

$$\Delta_1 = \pm (2m+1) \frac{\lambda}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi} \lambda$$

Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, то ця умова набирає вигляду

$$\Delta_1 = \pm (2m+1) \frac{\lambda}{2}$$

При інтерференції хвиль їхня енергія механічно не підсумовується. Інтерференція хвиль призводить до перерозподілу енергії коливань між сусідніми областями середовища.

На рис.46 наведені дві системи хвиль, які інтерферують; гребені хвиль

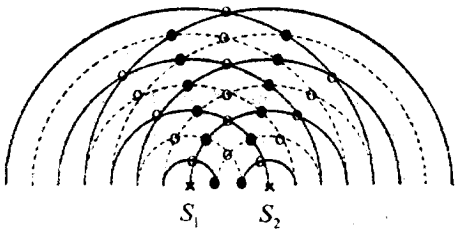


Рис.46

зображені суцільними лініями, западини - пунктирними.

У місцях перетину двох гребенів або двох западин розміщені максимуми коливань (о), в місцях перетину гребенів і западин розміщені мінімуми (•).

Особливим випадком інтерференції є стоячі хвилі. *Стоячі хвилі* – це хвилі, які утворюються при накладанні обох біжу-

чих хвиль, що поширюються назустріч одна одній з однаковими частотами і амплітудами.

Нехай дві плоскі хвилі поширюються назустріч одна одній вздовж осі в середовищі без загасання.

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx),$$

$$\xi_2 = A \cos(\omega t + kx + \varphi),$$

де φ – різниця фаз хвиль у точці $x=0$ (рис.47).

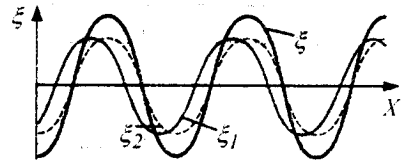


Рис.47

Додавши ці рівняння і враховуючи, що $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, отримаємо *рівняння стоячої хвилі*:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) = \\ &= 2A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

Множник $\cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$ показує, що в точках середовища виникає коливання з тією самою ж частотою ω , що і коливання зустрічних хвиль

Множник $2A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right)$, який не залежить від часу, виражає амплітуду $A_{ст}$ результуючих хвиль, точніше – амплітуда як величина позитивна дорівнює абсолютному значенню цього множника:

$$A_{ст} = \left| 2A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right) \right|$$

Амплітуда результуючого коливання залежить від координати x , що визначає положення точок середовища.

У точках середовища, де

$$\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2} = \pm m\pi, \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

амплітуда A_{cm} досягає максимального значення $2A$. Точки, в яких A_{cm} максимальна, називаються *пучностями стоячої хвилі*.

У точках середовища, де

$$\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$A_{cm} = 0$. Ці точки називаються *вузлами стоячої хвилі*. Точки середовища, що знаходяться у вузлах, не коливаються.

Виберемо початок відліку x так, щоб φ дорівнювало нулю. Тоді координати пучностей

$$x_n = \pm m \frac{\lambda}{2},$$

а вузлів

$$x_n = \pm (2m+1) \frac{\lambda}{4}.$$

Відстань між двома сусідніми пучностями отримаємо, якщо знайдемо різницю двох значень x_n для двох послідовних значень m :

$$x_n(m+1) - x_n(m) = \left[(m+1) \frac{\lambda}{2} - m \frac{\lambda}{2} \right] = \frac{\lambda}{2},$$

тобто відстань між сусідніми пучностями дорівнює половині довжини тих хвиль, в результаті інтерференції яких утворюється дана стояча хвиля.

Відстані вузла від найближчої пучності дорівнює:

$$x_n - x_n = (2m+1) \frac{\lambda}{4} - m \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4}.$$

На рис. 48 наведено характер руху частинок середовища при встановленні в ньому поперечної стоячої хвилі через проміжки часу $\frac{T}{4}$. Стрілками показано напрямки руху частинок, які викликані тією чи іншою хвилею. Світлим кружечками на рис. 48 позначені пучності, а темними – вузли.

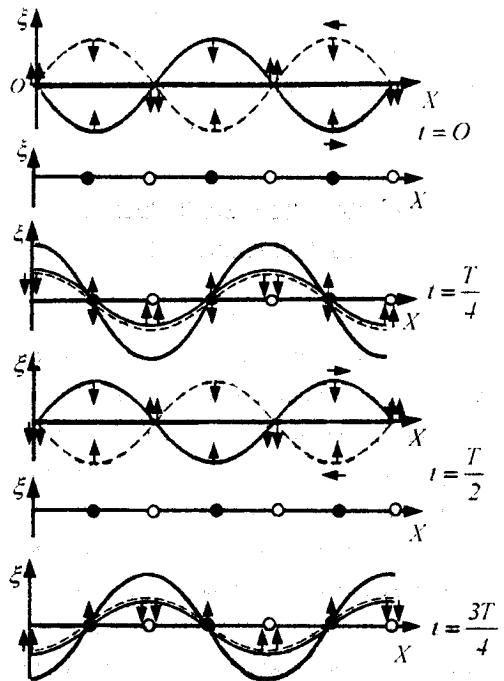


Рис.48

Отже, в стоячій хвилі є ряд нерухомих вузлових точок, які розміщені на відстані півхвилі одна від одної. Частинки між вузлами коливаються з різними амплітудами, від нуля у вузлі до подвійної амплітуди у пучності. Всі частинки одночасно проходять через положення рівноваги і одночасно досягають максимальних відхилень, отже, коливаються в однакових фазах. В суміжному інтервалі між вузлами характер коливання такий самий, але фаза протилежна.

У стоячій хвилі енергія не переноситься – повна енергія коливань кожного елемента об'єму середовища, обмеженого сусіднім вузлом і пучністю, не залежить від часу. Вона лише переходить з кінетичної енергії в потенціальну енергію пружно деформованого середовища і навпаки. Відсутність перенесення енергії стоячою хвилею є результатом того, що падаюча і відбита хвилі, які утворюють цю стоячу хвилю, переносять енергію в рівних кількостях і в протилежних напрямках.

§ 22. Рівняння нерозривності.

Рівняння Бернуллі

Рух рідин називають *течією*, а сукупність частинок рухомої рідини – *поток*. Течію рідини називають *усталеною*, або *стаціонарною*, якщо швидкість рідини у кожній точці простору, який займає рідина, не змінюється з часом.

Рух рідин зображають за допомогою *ліній течії*, які проводять так, що дотичні до них збігаються за напрямком з векторами швидкостей рідини у відповідних точках простору. Лінії течії вказують не тільки напрямок швидкостей, а й дають змогу зробити висновок про величину швидкості частинок в даному місці.

Зображаючи потік, лінії течії проводять так, щоб їх густина, тобто кількість ліній, які пронизують одиницю площі поверхні, що проведена в потоці перпендикулярно до лінії течії, числово дорівнювала б швидкості частинок потоку в даному перерізі.

Поверхню, утворену лініями течії, проведеними через усі точки малого замк-

неного контура, називають трубкою течії. Частину рідини, обмежену трубкою течії, називають струминою. При стаціонарній течії частинки рухаються так, що кожна з них весь час залишається в межах певної струмини.

Розглянемо трубку течії, настільки тонку, що в кожному її перерізі швидкість можна вважати постійною (рис.49). Виберемо довільно два перерізи,

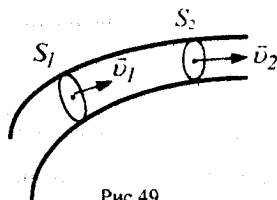


Рис.49

площі яких дорівнюють S_1 і S_2 і перпендикулярні до напрямку швидкості, відповідно \vec{v}_1 і \vec{v}_2 . За одиницю часу через переріз S_1 протече об'єм рідини, який дорівнює $S_1 v_1$, а через переріз S_2 - $S_2 v_2$. Якщо рідина нестискувана ($\rho = const$, де ρ - густина рідини), то за одиницю часу через перерізи S_1 і S_2 протечуть однакові об'єми рідини:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Для нестискувальної рідини величина Sv в довільному перерізі однієї і тієї самої трубки повинна бути однаковою:

$$Sv = const.$$

Це співвідношення називається *рівнянням нерозривності струмини*.

Нехай по нахилений трубці течії змінного перерізу рухається ідеальна рідина – рідина, в якій немає внутрішнього тертя – в напрямку зліва направо (рис.50).

Умовно виділимо область трубки,

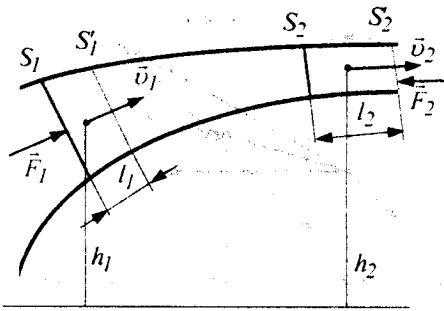


Рис.50

обмежену перерізами S_1 і S_2 . Нехай в місці перерізу S_1 швидкість рідини \bar{v}_1 , тиск p_1 , і висота, на якій розмішений цей переріз, h_1 . Аналогічно в місці перерізу S_2 швидкість рідини \bar{v}_2 , тиск p_2 і висота перерізу h_2 .

Визначимо зміну повної енергії, яка відбувається в цій області між перерізами S_1 і S_2 за час Δt . За цей час маса рідини між перерізами S_1 і S'_1 втікає в область, а маса що знаходиться між S_2 і S'_2 , витікає з неї. Величина зміни повної енергії, яка є сумою кінетичної і потенціальної енергій маси Δm рідини, дорівнює різниці повних енергій мас, які витікають і втікають, ($\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m$):

$$\Delta E = (E_{k_2} + E_{n_2}) - (E_{k_1} + E_{n_1}) = \left(\frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2 \right) - \left(\frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_1 \right)$$

За законом збереження енергії енергія ΔE дорівнює роботі зовнішніх сил, що переміщують масу Δm рідини від перерізу S_1 до перерізу S_2 :

$$\Delta E = A,$$

Робота A дорівнює роботі, яка виконується при переміщенні всієї ділянки рідини, що знаходиться між перерізами S_1 і S_2 протягом такого часу Δt , за який через ці перерізи буде перенесена маса рідини Δm . Для перенесення маси рідини Δm в місці розміщення перерізу S_1 рідина повинна переміститися на відстань $l_1 = v_1 \Delta t$, а в місці перерізу S_2 – на відстань $l_2 = v_2 \Delta t$. Зазначимо, що l_1 і l_2 настільки малі, що величини швидкості v , тиску p і висоти h між перерізами S_1 – S'_1 і S_2 – S'_2 є постійні. Сили, що діють на обидва кінці виділеної ділянки рідини, відповідно, дорівнюють $F_1 = p_1 S_1$ і $F_2 = -p_2 S_2$. Сила F_2 – від'ємна, оскільки направлена в сторону, протилежну до течії рідини.

Отже, робота зовнішніх сил із переміщення маси Δm

$$A = F_1 l_1 + F_2 l_2 = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t.$$

За законом нерозривності струмину

$$S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t = \Delta V.$$

В результаті

$$A = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V.$$

Враховуючи, що $\Delta E = A$, отримуємо

$$p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = \frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2 - \frac{\Delta m v_1^2}{2} - \Delta m g h_1$$

Оскільки, густина рідини $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$,

то отримуємо

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1.$$

Оскільки перерізи S_1 і S_2 вибрані довільно і тому

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const.}$$

Це співвідношення називається **рівнянням Бернуллі**.

Величина p називається статичним тиском, величина $\frac{\rho v^2}{2}$ – динамічним тиском, а величина ρgh – гідростатичним тиском.

Рівняння Бернуллі можна сформулювати так: *в стаціонарному потоці ідеальної нестискуваної рідини сума статичного, динамічного і гідростатичного тисків є сталою на довільному поперечному перерізі потоку.*

Для трубки течії, яка розміщена горизонтально ($h_1 = h_2$), рівняння Бернуллі має такий вигляд:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const.},$$

де $\frac{\rho v^2}{2} + p$ називається повним тиском.

Із рівняння Бернуллі для горизонтальної трубки течії і рівняння нерозривності струмнини видно, що при течії рідини в горизонтальній трубці, що має різні перерізи, швидкість рідини більша в місцях звуження трубки, а тиск більший в місцях, де площа поперечного перерізу трубки більша.

§ 23. Перетворення Галілея. Механічний принцип відносності

Розглянемо інерціальну нерухому систему K і систему K' , яка рухається відносно K рівномірно і прямолінійно із

швидкістю \vec{u} (рис.51) і $\vec{r}_0 = \vec{u}t$. Відлік ча-

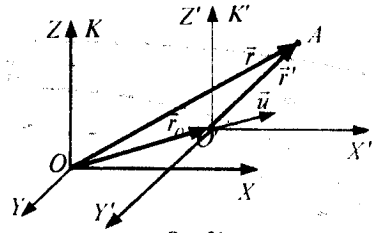


Рис.51

су почнемо з моменту, коли початки координат обох систем збігаються.

Знайдемо зв'язок між координатами довільної точки A в обох системах. З рис.51 видно, що

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 = \vec{r}' + \vec{u}t,$$

або в проєкціях на осі координат:

$$x = x' + u_x t, \quad y = y' + u_y t, \quad z = z' + u_z t.$$

Ці рівняння – **перетворення координат Галілея**.

У випадку, коли система K' рухається зі швидкістю \vec{u} вздовж додатного напрямку осі OX системи K , перетворення Галілея мають вигляд

$$x = x' + ut, \quad y = y', \quad z = z'.$$

У класичній механіці передбачається, що хід часу не залежить від відносного руху систем відліку: $t = t'$.

Записані вище співвідношення мають місце лише в класичній механіці ($u \ll c$).

Отримаємо правило додавання швидкостей в класичній механіці:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{u}, \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}.$$

Прискорення в системі відліку K

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}' + \vec{u})}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}'.$$

Сила \vec{F} , що діє на частинку в системі K , збігається з силою \vec{F}' , що діє на частинку в системі K' : $\vec{F} = \vec{F}'$. Це пов'язано з тим, що сила залежить від відстані між даною частинкою і частинками, які діють на неї, а ці відстані в ньютонівській механіці вважаються однаковими у всіх інерціальних системах. Маса також однакова у всіх системах.

Отже, рівняння динаміки не змінюються при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої, тобто є інваріантними відносно перетворення координат. Це і є *механічний принцип відносності*. Галілей зазначив, що ніякими механічними дослідами, які проведені в даній інерціальній системі відліку, не можна встановити, чи знаходиться вона в стані спокою, чи рухається рівномірно і прямолінійно.

§ 24. Постулати спеціальної теорії відносності. Перетворення Лоренца

Спеціальна теорія відносності є сучасною фізичною теорією простору і часу. Спеціальну теорію відносності називають релятивістською теорією, а явища, що описуються цією теорією, - релятивістськими ефектами, які проявляються при швидкостях руху тіл, близьких за величиною до швидкості світла у вакуумі c . Релятивістською механікою називається механіка рухів з релятивістськими швидкостями, яка ґрунтується на спеціальній теорії відносності.

В основі спеціальної теорії відносності лежать два постулати Ейнштейна.

I. *Принцип відносності*: ніякі досліди (механічні, електричні, оптичні), які проведені всередині даної інерціальної системи відліку, не дають можливості виявити, чи знаходиться ця система в стані спокою чи рухається рівномірно і прямолінійно: всі закони природи інваріантні відносно переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

II. *Принцип інваріантності швидкості світла*: швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості руху джерела світла або спостерігача і однакова у всіх інерціальних системах відліку.

Розглянемо дві інерціальні системи відліку: K і K' , яка рухається відносно K вздовж осі OX з швидкістю \vec{v} (рис.52). Нехай в початковий момент часу $t = t' = 0$,

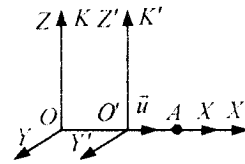


Рис.52

коли початки O і O' збігаються, випромінюється світловий імпульс. Швидкість світла в обох

системах одна і та сама і дорівнює c . Тому, якщо за час t в системі K сигнал дійде до деякої точки A , пройшовши відстань

$$x = ct,$$

то в системі K' координата світлового імпульсу в момент досягнення точки A

$$x' = ct',$$

$$x' - x = c(t' - t).$$

Оскільки $x' \neq x$, тому що система K' переміщається відносно до системи K , то

$$t' \neq t.$$

В результаті відлік часу має відносний характер.

Ейнштейн показав, що в теорії відносності перехід від однієї інерціальної системи відліку до іншої описується *перетвореннями Лоренца*:

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

$$\beta = \frac{u}{c}.$$

Перетворення Лоренца переходять у перетворення Галілея, якщо $u \ll c$.

§ 25. Поняття одночасності. Відносність довжин і проміжків часу

Нехай в системі K в точках з координатами x_1 і x_2 в моменти часу t_1 і t_2 відбуваються дві події. В системі K' , яка рухається відносно K з швидкістю \vec{u} вздовж осі OX , цим подіям відповідають координати x'_1 і x'_2 в моменти часу t'_1 і t'_2 (рис.52). Якщо події в системі K відбуваються в одній точці ($x_1 = x_2$) і є одночасними ($t_1 = t_2$), то згідно з перетвореннями Лоренца

$$x'_1 = x'_2 \quad \text{і} \quad t'_1 = t'_2,$$

тобто ці події є одночасними і такими, що просторово збігається для довільної інерціальної системи відліку.

Якщо події в системі K просторово рознесені ($x_1 \neq x_2$), але одночасні ($t_1 = t_2$), то в системі K'

$$x'_1 = \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$t'_1 = \frac{t - \frac{u}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t'_2 = \frac{t - \frac{u}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$x'_1 \neq x'_2, \quad t'_1 \neq t'_2.$$

Отже, в системі K' ці події, залишаючись просторово рознесеними, виявляються і неодноразними. Знак різниці $t'_2 - t'_1$ визначається знаком виразу $u(x_1 - x_2)$, тому в різних точках системи K' (при різних u) різниця $t'_2 - t'_1$ буде неоднаковою за величиною і за знаком.

Нехай в деякій точці, яка нерухома в системі K , відбувається подія, тривалість якої $\tau = t_2 - t_1$. Тривалість цієї події в системі K'

$$\tau' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{t_1 - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

або

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Отже, $\tau < \tau'$ і тривалість події, що відбувається в деякій точці, найменша в тій інерціальній системі відліку, відносно якої ця точка нерухома. Отже, годинники, які рухаються відносно інерціальної системи відліку, йдуть повільніше від нерухомих годинників.

Нехай деяке тіло (наприклад, стрижень) розміщене вздовж осі OX' , рухається разом з системою відліку K' і має в цій системі довжину $l_0 = x'_2 - x'_1$, де x'_1 і x'_2 - координати початку і кінця стрижня, які не змінюються з часом t' . Визначимо довжину стрижня в системі K , відносно якої він рухається з швидкістю u . Для цього треба виміряти координати його кінців x_1

і x_2 в системі K в один і той самий момент часу t :

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

тобто

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Отже, довжина стрижня, яка виміряна в системі, відносно якої він рухається, є меншою від довжини, виміряної в системі, відносно якої стрижень знаходиться у стані спокою.

Поперечні розміри тіла не залежать від швидкості його руху і однакові у всіх інерціальних системах відліку.

§ 26. Релятивістський закон додавання швидкостей

Розглянемо рух матеріальної точки в системі K' , яка рухається відносно системи K із швидкістю u . Якщо в системі K рух точки в кожний момент часу t визначається координатами x, y, z , а в системі K' в момент часу t' — координатами x', y', z' , то

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

$$v_{x'} = \frac{dx'}{dt'}, \quad v_{y'} = \frac{dy'}{dt'}, \quad v_{z'} = \frac{dz'}{dt'}$$

є проекціями на відповідні осі вектора швидкості точки відносно систем K і K' .

Використаємо перетворення Лоренца

$$dx = \frac{dx' + u dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz',$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{u}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{u}{c}.$$

Розділимо перші три рівності на четверту:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + u dt'}{dt' + \frac{u}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + u}{1 + \frac{u}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}.$$

$$\frac{dy}{dt} = dy' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{dt' + \frac{u}{c^2} dx'} = \frac{dy'}{dt'} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{u}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}.$$

$$\frac{dz}{dt} = dz' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{dt' + \frac{u}{c^2} dx'} = \frac{dz'}{dt'} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{u}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}.$$

В результаті отримуємо формули перетворення швидкостей при переході від однієї системи відліку до іншої:

$$v_x = \frac{v_{x'} + u}{1 + \frac{u}{c^2} v_{x'}}, \quad v_y = \frac{v_{y'} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{u}{c^2} v_{x'}}$$

$$v_z = \frac{v_{z'} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{u}{c^2} v_{x'}}$$

Аналогічно

$$v_{x'} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}, \quad v_{y'} = \frac{v_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}$$

$$v_{z'} = \frac{v_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}$$

Якщо матеріальна точка рухається паралельно до осі x , то швидкість v відносно системи K збігається з v_x , а швидкість v' відносно K' — з $v_{x'}$. Тоді

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{v'u}{c^2}}, \quad v' = \frac{v - u}{1 - \frac{v'u}{c^2}}.$$

Якщо швидкості v , v' і u малі порівняно з швидкістю c , то $v = v' + u$, $v' = v - u$.

Якщо $v' = c$, то

$$v = \frac{c+u}{1+\frac{cu}{c^2}} = \frac{c+u}{c+u} c = c.$$

Нехай $v' = u = c$.

$$v = \frac{c+c}{1+\frac{c \cdot c}{c^2}} = c.$$

При додаванні довільних швидкостей результат не може перевищити швидкості світла c у вакуумі.

§ 27. Елементи релятивістської динаміки. Взаємозв'язок маси і енергії

У релятивістській механіці, як і в ньютонівській, імпульс \vec{p} матеріальної точки пропорційний до її маси m і збігається за напрямком з швидкістю \vec{v} цієї точки. Проте, на відміну від ньютонівської механіки, імпульс матеріальної точки є нелінійною функцією її швидкості:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

де $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ – релятивістська маса, а

m_0 – маса спокою матеріальної точки, тобто маса, яка виміряна в тій інерціальній системі відліку, відносно якої матеріальна точка знаходиться в стані спокою.

Основний закон релятивістської динаміки: швидкість зміни імпульсу мате-

ріальної точки дорівнює силі \vec{F} , що діє на цю точку, тобто

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} \right) = \vec{F}.$$

Елементарна робота сили \vec{F} на малому переміщенні $d\vec{r}$ точки її прикладення дорівнює:

$$\begin{aligned} \delta A &= (\vec{F}, d\vec{r}) = (\vec{F}, \vec{v} dt) = (\vec{v}, d\vec{p}) = \\ &= \vec{v} \cdot \left[\frac{m_0 d\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_0 \vec{v} \left(\vec{v} \frac{d\vec{v}}{c^2} \right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} \right] = \frac{m_0 d \left(\frac{v^2}{2} \right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} = \end{aligned}$$

(тут враховано, що $\vec{v} d\vec{v} = d(v^2/2)$)

$$= \frac{m_0 c^2 d \left(\frac{v^2}{c^2} \right)}{2 \left(1-\frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} = c^2 d \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Приріст кінетичної енергії δE_K матеріальної точки дорівнює роботі δA :

$$dE_K = c^2 d \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = c^2 dm.$$

Інтегруючи отримане співвідношення, маємо:

$$E_K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + C.$$

При $v=0$ $E_K=0$ і $C = -m_0 c^2$.

Отже, релятивістський вираз для кінетичної енергії частинки має вигляд:

$$E_K = m_0 c^2 \left(\frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - l \right) = mc^2 - m_0 c^2.$$

При $v \ll c$ $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ розкладемо в ряд, обмежившись членами другого порядку малості:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{l}{l + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}}.$$

Тоді

$$E_K = m_0 c^2 \left(\frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - l \right) \approx m_0 c^2 \left(l + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - l \right) = \frac{m_0 v^2}{2}.$$

Ейнштейн узагальнив положення $dE_K = c^2 dm$, передбачивши, що воно справедливе не лише для кінетичної енергії матеріальної точки, але і для повної енергії, а саме: довільна зміна маси Δm супроводжується зміною повної енергії матеріальної точки:

$$\Delta E = c^2 \Delta m.$$

Звідси Ейнштейн отримав універсальну залежність між повною енергією тіла E і його масою m :

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Це рівняння виражає **закон взаємоз'язку маси і енергії**.

Знайдемо релятивістську залежність між повною енергією й імпульсом частинки:

$$\begin{aligned} E^2 &= m^2 c^4 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \\ &+ \frac{m_0^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \\ &= m_0^2 c^4 + m^2 v^2 c^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \end{aligned}$$

і

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}.$$

Якщо тіло нерухоме, то

$$E_0 = m_0 c^2,$$

де E_0 – енергія спокою тіла.

II. ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ І ТЕРМОДИНАМІКИ

§ 28. Статистичний і термодинамічний методи дослідження. Термодинамічні параметри. Рівноважний стан і процеси

Молекулярна фізика і термодинаміка – розділи фізики, в яких вивчаються макроскопічні процеси в тілах, що зв'язані з великою кількістю атомів і молекул, з яких складаються тіла.

Для дослідження цих процесів використовують два методи: *статистичний (молекулярно-кінетичний)* і *термодинамічний*.

Молекулярна фізика вивчає будову і властивості речовини, виходячи з молекулярно-кінетичних уявлень про те, що всі тіла складаються з атомів і молекул, які перебувають у неперервному тепловому русі.

Безпосереднім дослідним підтвердженням справедливості молекулярно-кінетичної теорії є процес дифузії, броунівський рух.

Властивості величезного скупчення молекул, що утворюють тіло, підлягають особливим статистичним закономірностям і їх можна вивчити за допомогою *статистичного методу*, який ґрунтується на тому, що властивості макроскопічної системи визначаються властивостями частинок системи, особливостями їх руху і усередненими значеннями динамічних характеристик цих частинок (швидкості, енергії тощо).

Сукупність величезної кількості молекул набуває нових властивостей, яких не має жодна молекула зокрема, і підлягає статистичним законам. У сучасній фізиці

статистичний метод використовується у формі класичної і квантової статистик.

Термодинаміка – розділ фізики, що вивчає загальні властивості макроскопічних систем, що знаходяться в стані термодинамічної рівноваги, і процеси переходу між цими станами.

На основі *термодинамічного методу* вивчаються умови перетворення енергії з одного виду в інший і ті самі перетворення з кількісного боку. В основі термодинаміки лежать два експериментально встановлені закони, які називають першим і другим законами термодинаміки. Термодинаміка нічого не досліджує про мікроскопічну будову речовини, механізм явищ, а лише встановлює зв'язок між макроскопічними властивостями речовини.

Термодинамічна система – сукупність макроскопічних тіл, які взаємодіють і обмінюються енергією як між собою, так і з іншими тілами.

Стан системи задається *термодинамічними параметрами* – сукупністю фізичних величин, що характеризують властивості термодинамічної системи.

Найважливіші параметри стану хімічно однорідної системи – об'єм V , тиск p і температура T . Між цими трьома основними параметрами стану існує зв'язок, що називається рівнянням стану: $f(V, p, T) = 0$.

Стан термодинамічної системи називається *стаціонарним*, якщо значення всіх термодинамічних параметрів системи не змінюються з часом. Стаціонарний стан системи називається *рівноважним*, якщо його незмінність у часі не зумовлена пе-

ребігом яких-небудь процесів у зовнішніх відносно системи тілах. Будь-яка зміна в термодинамічній системі, яка зв'язана із зміною хоча би одного з його термодинамічних параметрів, називається *термодинамічним процесом*.

Рівноважними називаються такі *процеси*, під час яких зміна стану тіла відбувалася дуже повільно, точно кажучи, нескінченно повільно, і при цих процесах система проходить неперервний ряд нескінченно близьких рівноважних термодинамічних станів.

Усі реальні процеси відбуваються із скінченною швидкістю і тому нерівноважні.

§ 29. Рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу для тиску

У молекулярно-кінетичній теорії користуються *моделлю ідеального газу*, що задовольняє такі умови:

- 1) власний об'єм молекул газу нехтовно малий порівняно з об'ємом посудини;
- 2) між молекулами газу відсутні сили взаємодії;
- 3) зіткнення молекул газу між собою і з стінками посудини абсолютно пружні.

Модель ідеального газу можна використати, вивчаючи реальні гази, оскільки вони при умовах, близьких до нормальних, а також при низьких тисках і високих температурах близькі за своїми властивостями до ідеального газу.

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії пов'язує параметри стану газу з характеристиками руху його молекул, тобто встановлює залежність між тиском і об'ємом газу і кінетичною енергією поступального руху його молекул.

Тиск газу в посудині є результатом зіткнення молекул газу із стінками посудини. Тиск газу є макроскопічним проявом руху молекул.

Розглянемо однорідний газ, який поміщений в посудину кубічної форми. Напрямимо осі системи відліку вздовж ребер куба (рис. 53). Нехай певна молекула M

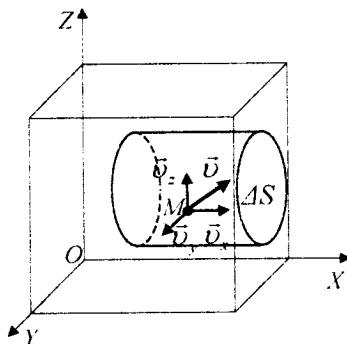


Рис. 53

рухається в посудині зі швидкістю \vec{v} . Швидкість \vec{v} можна розкласти на три складові вздовж координатних осей:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z.$$

Виділимо на стінці посудини елементарну площадку ΔS , яка перпендикулярна до осі X . При кожному зіткненні молекула передає площадці імпульс $2m_0v_x$, де m_0 – маса молекули. За час Δt площадки досягнуть лише ті молекули, які знаходяться в об'ємі циліндра з основою ΔS і висотою $v_x \Delta t$. Кількість цих молекул дорівнює $n \Delta S v_x \Delta t$, де n – кількість молекул в одиниці об'єму газу. З них тільки половина потрапляє на площадку ΔS . Решта через повну безладність молекулярних рухів рухається не до стінки, а від неї. За час Δt об площадку ΔS ударяються $N_x = \frac{1}{2} n \Delta S \Delta t v_x$ молекул газу.

Нехай з кількості n молекул, що є в одиниці об'єму, n_i молекул має швидкість v_{ix} , де $i = 1, 2, \dots, l$ так що

$$\sum_{i=1}^l n_i = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_l = n.$$

Тоді кількість ударів молекул в площадку ΔS за час Δt дорівнюватиме:

$$N_{1x} = \frac{1}{2} n_1 \Delta S \Delta t v_{1x}, \quad N_{2x} = \frac{1}{2} n_2 \Delta S \Delta t v_{2x}, \dots$$

$$N_{nx} = \frac{1}{2} n_n \Delta S \Delta t v_{1n}.$$

При зіткненні з площадкою ці молекули передають їй імпульс:

$$\Delta P_{1x} = 2m_o v_{1x} N_{1x} = m_o n_1 v_{1x}^2 \Delta S \Delta t,$$

$$\Delta P_{2x} = 2m_o v_{2x} N_{2x} = m_o n_2 v_{2x}^2 \Delta S \Delta t,$$

...

$$\Delta P_{nx} = 2m_o v_{nx} N_{nx} = m_o n_n v_{nx}^2 \Delta S \Delta t.$$

Загальний імпульс, переданий всіма молекулами площадці,

$$\begin{aligned} \Delta P_x &= \Delta P_{1x} + \Delta P_{2x} + \dots + \Delta P_{lx} = \\ &= m_o \Delta S \Delta t (n_1 v_{1x}^2 + n_2 v_{2x}^2 + \dots + n_l v_{lx}^2) \end{aligned}$$

Тиск газу на площадку ΔS

$$p_x = \frac{F_x}{\Delta S} = \frac{\Delta P_x}{\Delta S \Delta t} = m_o \sum_{i=1}^l n_i v_{ix}^2,$$

де враховано, що імпульс сили дорівнює зміні імпульсу молекул:

$$F_x \Delta t = \Delta P_x.$$

Так само тиск на будь-яку площадку, яка перпендикулярна до осей Y і Z , визначається рівностями:

$$p_y = m_o \sum_{i=1}^l n_i v_{iy}^2, \quad p_z = m_o \sum_{i=1}^l n_i v_{iz}^2.$$

Зважаючи на цілковиту хаотичність рухів молекул, тиск газу в будь-якому напрямку повинен бути однаковий, тобто

$$p_x = p_y = p_z = p.$$

Додамо почленно рівняння для p_x ,

p_y і p_z :

$$p_x + p_y + p_z = 3p = m_o \sum_{i=1}^l n_i (v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2)$$

Через те, що $v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2 = v_i^2$,

$$\text{то} \quad 3p = m_o \sum_{i=1}^l n_i v_i^2.$$

Величина $\sum_i n_i v_i^2$ – це сума квадра-

тів швидкостей усіх молекул в одиниці об'єму газу. При великій кількості молекул немає потреби знати значення квадрата швидкості кожної молекули. Тому знайдемо середнє значення цієї величини. За визначенням

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\sum_i n_i v_i^2}{\sum_i n_i} = \frac{\sum_{i=1}^l n_i v_i^2}{n}.$$

Величина

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{\sum_i n_i v_i^2}{n}}$$

називається *середньою квадратичною швидкістю*.

В результаті тиск газу

$$p = \frac{1}{3} m_o n v_{\text{ср.кв.}}^2.$$

Це рівняння називається *основним рівнянням молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу для тиску*.

Знайдену формулу перепишемо у вигляді:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m_o v_{\text{ср.кв.}}^2}{2} = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_k \rangle,$$

де $\langle \varepsilon_k \rangle$ – середня кінетична енергія поступального руху однієї молекули газу.

$$\text{Густина газу } \rho = \frac{m}{V} = \frac{Nm_0}{V} = nm_0.$$

$$\text{Тоді } p = \frac{1}{3} \rho v_{\text{ср.кв.}}^2.$$

Оскільки кінетична енергія поступального руху молекул газу $E_k = N \langle \varepsilon_k \rangle$, то

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle \varepsilon_k \rangle \text{ і } pV = \frac{2}{3} E_k.$$

Це рівняння перепишемо так чином:

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{m_0 v_{\text{ср.кв.}}^2}{2} = \frac{1}{3} m v_{\text{ср.кв.}}^2,$$

де $m = Nm_0$ – маса газу.

Для одного моля газу $m = \mu$ і $V = V_m$.

$$\text{Тоді } pV_m = \frac{1}{3} \mu v_{\text{ср.кв.}}^2.$$

З іншого боку, за рівнянням Менделєєва-Клапейрона

$$pV_m = RT.$$

Отже,

$$RT = \frac{1}{3} \mu v_{\text{ср.кв.}}^2 \text{ і } v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\frac{3kT}{\mu}}.$$

Оскільки $\mu = m_0 N_A$, $R = k N_A$, де k –

стала Больцмана, то $v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$.

З рівняння Менделєєва-Клапейрона

$$p = \frac{RT}{V_m} = \frac{k N_A T}{V_m} = knT.$$

§ 30. Середня кінетична енергія молекул. Молекулярно-кінетичне трактування абсолютної температури

Знайдемо вираз для середньої кінетичної енергії поступального руху молекули ідеального газу:

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{E_k}{N} = \frac{m_0}{2} v_{\text{ср.кв.}}^2.$$

Оскільки $v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$, то

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{m_0}{2} \frac{3kT}{m_0} = \frac{3}{2} kT.$$

Отже, середня кінетична енергія поступального руху молекул ідеального газу залежить тільки від його абсолютної температури, $\langle \varepsilon_k \rangle$ прямо пропорційна до T .

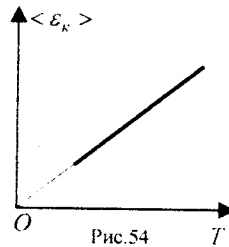


Рис.54

На рис. 54 зображено залежність $\langle \varepsilon_k \rangle$ від T . Якщо $T = 0$, $\langle \varepsilon_k \rangle = 0$, тобто припиняється поступальний рух молекул газу, а отже, дорівнює нулю і його тиск.

Отже, абсолютна температура є міра середньої кінетичної енергії поступального руху молекул.

Однак в області температур, близьких до абсолютного нуля, поведінка молекул описується не класичними законами, а законами квантової механіки.

§31. Розподіл Максвелла молекул ідеального газу за швидкостями теплового руху

Внаслідок безперервного хаотичного руху молекул, а також взаємного зіткнення молекул під час цього руху кожна молекула зокрема може змінювати свою швидкість як за величиною, так і за напрямком. Тому в газі будуть як швидкі, так і повільні молекули. Але, хоча швидкості окремих молекул змінюються, властивості газу у стані термодинамічної рівноваги загалом при цьому не змінюються: залишаються

постійними параметри системи. Зумовлено це тим, що швидкості газових молекул підлягають певному закону, тобто, незважаючи на повну хаотичність молекулярних рухів, розподіл молекул за швидкостями виявляється не випадковим, а цілком визначеним. До того ж він є однозначним і єдино можливим.

Дж. Максвелл теоретично розв'язав задачу про розподіл молекул ідеального газу за швидкостями поступального руху. Він встановив закон, що дає змогу визначити, яка кількість молекул dn із загальної кількості n молекул ідеального газу в одиниці об'єму мають при даній температурі швидкості, які лежать в інтервалі від v до $v + dv$. Дж. Максвелл вважав, що газ складається з великої кількості n однакових молекул, температура в усіх частинах посудини з газом теж однакова і відсутні зовнішні дії на газ.

Якщо розбити діапазон швидкостей молекул на малі інтервали, які дорівнюють dv , то на кожний інтервал швидкості припадатиме деяка кількість молекул $dn(v)$, що мають швидкість в інтервалі dv .

Закон Максвелла описується деякою функцією $f(v)$, що називається функцією розподілу молекул за швидкостями руху. Ця функція визначає відносну кількість молекул $\frac{dn(v)}{n}$, швидкості яких лежать в інтервалі від v до $v + dv$, тобто

$$\frac{dn(v)}{n} = f(v)dv, \text{ звідси } f(v) = \frac{dn(v)}{ndv}.$$

Застосовуючи методи теорії імовірності, Максвелл знайшов функцію $f(v)$ у такому вигляді:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}.$$

Конкретний вигляд функції залежить від роду газу (m_0) і від параметра стану (T). Графік функції $f(v)$ наведений на рис. 55. Функція $f(v)$ починається від

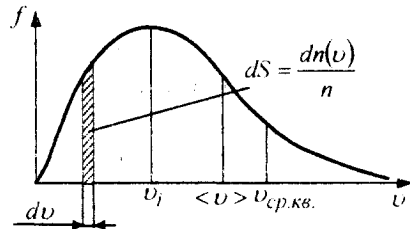


Рис.55

нуля, досягає максимуму, а потім асимптотично прямує до нуля. Крива несиметрична відносно максимального значення

$f(v)$. Відносна кількість молекул $\frac{dn(v)}{n}$,

швидкості яких лежать в інтервалі від v до $v + dv$, числово дорівнює площі заштрихованої ділянки на рис. 55.

Вся площа, обмежена кривою розподілу і віссю абсцис, числово дорівнює числу молекул, швидкості яких мають різні значення від 0 до ∞ . Оскільки цю умову задовольняють всі n молекул, то площа, що розглядається, дорівнює одиниці:

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1.$$

Швидкість, при якій $f(v)$ максимальна, називається **найімовірнішою швидкістю** v_i . Для знаходження v_i використаємо умову максимуму виразу $f(v)$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dv} \left(v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \right) \right|_{v=v_{im}} &= 0 \\ = \left[2ve^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} - v^2 \frac{2vm_0}{2kT} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \right]_{v=v_{im}} &= 0 \\ = 2v \left(1 - \frac{m_0 v^2}{2kT} \right) e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \Big|_{v=v_{im}} &= 0. \end{aligned}$$

Звідси,

$$v_i = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

оскільки $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$, $k = \frac{R}{N_A}$.

Середня арифметична швидкість молекул $\langle v \rangle$ визначається за формулою

$$\langle v \rangle = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v dn(v) = \int_0^{\infty} v f(v) dv.$$

Підставляючи сюди $f(v)$ й інтегруючи, отримаємо

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$$

Отже, є три швидкості, які характеризують стан газу (рис. 55):

$$\text{найімовірніша } v_i = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}};$$

$$\text{середня арифметична } \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = 1.13 v_{im};$$

$$\text{середня квадратична } v_{сркв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 1.22 v_{im}.$$

При збільшенні температури (або зменшенні маси молекул) максимум кривої $f(v)$ зміщується у бік більших швидкостей, а його абсолютна величина зменшується, причому площа, яка охоплена кривою

$f(v)$ і віссю v , залишається незмінною (рис. 56).

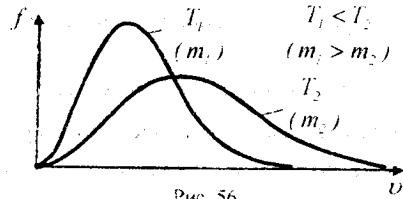


Рис. 56

На рис.56 наведено дві криві розподілу, які відповідають температурам T_1 і T_2 для молекул одного газу або масам m_1 і m_2 молекул різних газів при однаковій температурі.

Закон Максвелла зручно формулювати, ввівши відносну швидкість $u = \frac{v}{v_i}$, де v – дана швидкість, а v_i – найімовірніша швидкість для молекул даного газу при даній температурі.

Розподіл, який визначає кількість молекул, відносні швидкості яких лежать в межах від u_0 до $u_0 + du_0$, має такий вигляд:

$$dn(u_0) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n e^{-u_0^2} u_0^2 du_0 = f(u_0) n du_0.$$

Знайдемо середню відносну швидкість молекул ідеального газу:

$$\langle u_0 \rangle = \int_0^{\infty} u_0 f(u_0) du_0 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{2} \langle v \rangle.$$

де $\langle v \rangle$ – середня арифметична швидкість.

Виходячи із розподілу молекул за швидкостями

$$dn(v) = 4\pi n \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 dv,$$

можна знайти розподіл молекул за значеннями кінетичної енергії поступального руху. Для цього перейдемо від змінної v

до змінної $\varepsilon = \frac{m_0 v^2}{2}$. Звідси $v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m_0}}$ і

$$dv = \frac{d\varepsilon}{\sqrt{2m_0\varepsilon}}$$

$dn(v)$. У результаті отримуємо співвідношення, яке визначає кількість молекул, кінетична енергія поступального руху яких має значення, які лежать в межах від ε до $\varepsilon + d\varepsilon$:

$$\begin{aligned} dn(\varepsilon) &= \frac{2n}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon = \\ &= f(\varepsilon) n d\varepsilon. \end{aligned}$$

§ 32. Барометрична формула.

Розподіл Больцмана частинок

у зовнішньому потенціальному полі

Якщо на молекули не діють зовнішні сили, то вони рівномірно розподіляються по об'єму посудини. Однак молекули будь-якого газу завжди перебувають в полі сил тяжіння Землі. Якби не було тяжіння, то атмосферне повітря розсіялося б по всьому Всесвіту. Якби не було теплового руху молекул атмосферного повітря, то всі вони впали б на Землю. Тяжіння і тепловий рух приводять до стаціонарного стану газу, при якому його тиск і концентрація зменшується з висотою.

Розглянемо ідеальний газ, маса всіх молекул якого однакова, температура постійна і який знаходиться в однорідному полі тяжіння.

Якщо тиск газу на висоті h дорівнює p (рис. 57), то на висоті $h+dh$ він дорівнює $p+dp$, причому

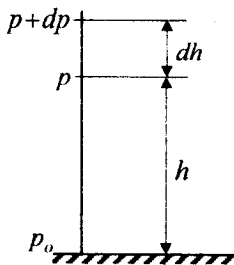


Рис. 57

при $dh > 0$ $dp < 0$, оскільки тиск з висотою зменшується.

Різниця тиску p і $p+dp$ числово дорівнює вазі газу, що знаходиться в об'ємі циліндра заввишки dh , а площа основи, що дорівнює одиниці:

$$p - (p + dp) = \rho g dh,$$

де ρ – густина газу на висоті h .

Використаємо рівняння Менделєєва-Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$.

Звідси

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}.$$

$$\text{Тоді } -dp = \frac{\mu g p}{RT} dh \text{ або } \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh.$$

Вважаючи $T = const$ й інтегруючи по тиску від p_0 до p , а по висоті від 0 до h , отримуємо

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} \int_0^h dh, \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\mu g}{RT} h,$$

звідси

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g}{RT} h},$$

$$h = \frac{RT}{\mu g} \ln \frac{p_0}{p}.$$

Ці формули називаються *барометричними формулами*. Із них можна зробити висновок, що тиск газу зменшується із висотою експоненціально і тим швидше, чим важчий газ (чим більше μ) і чим нижча температура (рис. 58).

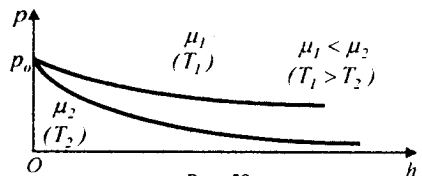


Рис. 58

Барометрична формула дозволяє знайти співвідношення між концентраціями газу на різній висоті. Використаємо рівняння стану ідеального газу у вигляді $p = nkT$, де n – концентрація молекул газу. При $T = const$ отримуємо

$$nkT = n_0 k T e^{-\frac{\mu g h}{RT}},$$

де n_0 – концентрація молекул на висоті $h = 0$.

Оскільки $\mu = m_0 N_A$, а $R = k N_A$,

то

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} = n_0 e^{-\frac{E_n}{kT}},$$

де E_n – потенціальна енергія молекул в полі тяжіння.

Із збільшенням висоти концентрація молекул газу зменшується за експоненці-

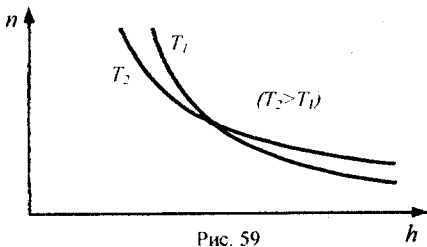


Рис. 59

альним законом (рис.59). При високих температурах кількість молекул n незначно зменшується з висотою і при $T \rightarrow \infty$ $n \rightarrow n_0$, тобто підвищення температури викликає вирівнювання концентрації газу за висотою.

При $T \rightarrow 0K$ $n \rightarrow 0$, тобто всі молекули під дією сили тяжіння опускаються на дно посудини.

Больцман довів, що співвідношення

$$n = n_0 e^{-\frac{E_n}{kT}}$$

справдливе не тільки у випадку потенціального поля сил земного тяжіння, але і в довільному потенціальному полі сил для сукупності довільних однако-

вих частинок, що знаходяться у стані хаотичного теплового руху. Тому вираз

$$n = n_0 e^{-\frac{E_n}{kT}}$$

називається *розподілом Больцмана* у зовнішньому потенціальному полі.

Із цього виразу видно, що чим менша потенціальна енергія молекул, тим більша їх концентрація.

§ 33. Закон рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності молекул

Числом ступенів вільності називають найменше число координат, які необхідно задати для того, щоб повністю визначити положення тіла у просторі, або кількість незалежних рухів, які може виконувати тіло.

Матеріальна точка, що довільно рухається у просторі, має три ступені вільності (x, y, z). Якщо ця точка рухається по деякій поверхні або вздовж певної кривої, то вона відповідно має два або один ступені вільності.

Абсолютно тверде тіло має 6 ступенів вільності. Щоб визначити його положення в просторі, треба задати три координати (x, y, z) (3 ступені вільності поступального руху) центра мас тіла (рис.60); два кути ϑ і φ , які визначають

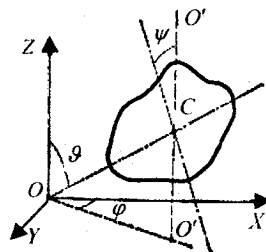


Рис.60

положення в просторі певної осі ($O'O'$), яка проходить через центр мас і яку-небудь іншу фіксовану точку тіла і необхідно задати кут ψ , який визначає напрямку другої

зв'язаної з тілом осі, яка перпендикулярна до першої (ϑ, φ, ψ – 3 ступені вільності обертового руху).

Якщо тіло не абсолютно тверде і його частини можуть зміщуватись одна відносно одної, то необхідно ввести ще додаткові ступені вільності коливального руху.

Молекули одноатомного газу можна

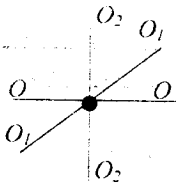


Рис. 61

розглядати як матеріальні точки на тій підставі, що маса такої частинки зосереджена в ядрі, розміри якого дуже малі. Молекула одно-

атомного газу має три ступені вільності поступального руху (рис.61).

Її середня кінетична енергія $\langle \varepsilon_k \rangle$ дорівнює кінетичній енергії молекули, що рухається з швидкістю, яка дорівнює середній квадратичній швидкості $v_{ср.кв.}$:

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{m_0}{2} v_{ср.кв.}^2.$$

Враховуючи, що $v_{ср.кв.}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l n_i v_i^2$, маємо

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{m_0}{2n} \sum_{i=1}^l n_i v_i^2.$$

Середня кінетична енергія, що припадає на один ступінь вільності (с.в.) молекули, на рух вздовж осі x , дорівнює:

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{m_0}{2n} \sum_{i=1}^l n_i v_{ix}^2, \text{ тому що рух вздовж}$$

цієї осі відбувається тільки за рахунок складової \bar{v}_{ix} вектора \bar{v}_i швидкості i -ї молекули газу. Внаслідок хаотичності тепло-

вого руху молекул ідеального газу

$$\sum_{i=1}^n v_{ix}^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n v_i^2, \text{ тому } \langle \varepsilon_{k1} \rangle = \frac{1}{3} \langle \varepsilon_k \rangle.$$

Отже, в середньому на кожний ступінь вільності поступального руху одноатомної молекули припадає однакова кінетична енергія $\langle \varepsilon_{k1} \rangle$, що дорівнює одній третині $\langle \varepsilon_k \rangle$. Оскільки $\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{3}{2} kT$, то

$$\langle \varepsilon_{k1} \rangle = \frac{1}{2} kT.$$

Молекули, що складаються з двох, трьох і більшої кількості атомів, не можуть бути уподібнені до матеріальних точок.

Молекула двоатомного газу в першому наближенні – це два жорстко зв'язані атоми, що перебувають на деякій відстані один від одного. Положення такої системи можна визначити, якщо задати три координати центра мас системи (рис.62) і два кути ϑ і φ , які визначають напрямок у просторі осі системи.

Отже, три ступені вільності будуть поступальними, а дві – обертовими нав-

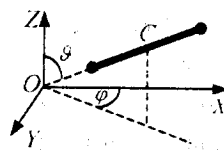


Рис. 62

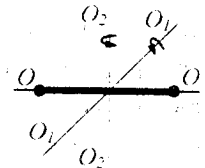


Рис. 63

коло осей $O_1 - O_1$ і $O_2 - O_2$ (рис.63). Обертання навколо третьої осі $O - O$ розглядати не треба, бо момент інерції атомів відносно цієї осі дуже малий.

Якщо два атоми зв'язані не жорстким зв'язком, а пружним, то $i = 6$. Положення системи в цьому випадку можна визначити, якщо задати три координати центра мас, два кути ϑ і φ і відстань між ато-

мами r (рис. 64). Зміна r відповідає коливанням в системі, внаслідок чого цей ступінь вільності називається коливним.

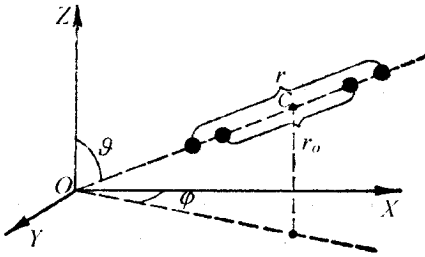


Рис. 64

Триатомна і багатоатомні нелінійні молекули (рис. 65) мають 6 ступенів вільності – 3 посту-

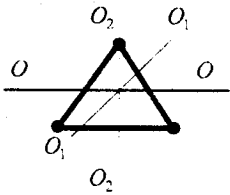


Рис. 65

пальних і 3 обер-
тальних. Жорстко-
го зв'язку між ато-
мами не існує. То-
му для реальних
молекул необхідно

враховувати також ступені вільності коливного руху.

У класичній статистичній фізиці виводиться **закон Больцмана про рівномірний розподіл енергій за ступенями вільності молекул**: для статичної системи, що перебуває у стані термодинамічної рівноваги, на кожний поступальний і обер-
тальний ступінь вільності припадає в середньому кінетична енергія, що дорівнює $\frac{kT}{2}$, а на кожний коливний ступінь вільності – в середньому енергія kT .

Колівний ступінь має вдвоє більшу енергію тому, що на нього припадає не лише кінетична енергія (як у разі поступального і обертового руху), але і потенціальна енергія, причому середні значення кінетичної і потенціальної енергій однакові:

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \langle \varepsilon_n \rangle = \frac{1}{2} kT.$$

Таким чином, середня енергія молекули

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

де $i = i_{\text{пост.}} + i_{\text{об.}} + 2i_{\text{кол.}}$.

Важливою характеристикою термодинамічної системи є її **внутрішня енергія**

U – енергія хаотичного (теплого) руху мікрочастинок системи (молекул, атомів, електронів, ядер і тощо) і енергія взаємодії цих частинок. До внутрішньої енергії не належать кінетична енергія системи як цілого і потенціальна енергія системи у зовнішніх полях.

Внутрішня енергія – однозначна функція термодинамічного стану системи, тобто в кожному стані система має цілком визначене значення внутрішньої енергії. Стан системи, в якому $U = 0$, цілком довільний, оскільки в термодинаміці інтерес становить не сама внутрішня енергія U системи, а її зміна ΔU при зміні стану системи.

В ідеальному газі немає сил взаємодії між молекулами, а, отже, дорівнює нулю взаємна потенціальна енергія молекул. Тому для моля ідеального газу внутрішня енергія дорівнює сумі кінетичних енергій N_A молекул:

$$U_m = \frac{i}{2} kT N_A = \frac{i}{2} RT.$$

Якщо $\nu = \frac{m}{\mu}$ мольв газу, то його внутрішня енергія

$$U = \nu \frac{i}{2} RT = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT.$$

Внутрішня енергія ідеального газу залежить від кількості ступенів вільності молекул і абсолютної температури газу.

§ 34. Перший закон термодинаміки.

Робота газу при зміні його об'єму

Розглянемо термодинамічну систему, для якої механічна енергія не змінюється, а змінюється лише її внутрішня енергія. Можливі дві форми передавання енергії від одного тіла до іншого, а, отже, і зміни внутрішньої енергії системи.

Перша з них зводиться до того, що енергія впорядкованого руху одного тіла переходить в енергію впорядкованого руху іншого тіла або його частин. Це може відбуватись під час взаємодії макроскопічних тіл, розміри яких у багато разів більші за розміри окремих атомів або молекул. Таку форму передавання енергії називають *роботою*. Наприклад, газ, що розширюється в циліндрі двигуна внутрішнього згорання, переміщує при цьому поршень і передає йому енергію у формі роботи.

Друга форма передавання енергії здійснюється при безпосередньому обміні енергією між частинками взаємодіючих тіл, що рухаються хаотично. За рахунок переданої тілу енергії підсилюється невпорядкований рух його частинок, тобто збільшується внутрішня енергія тіла. Таку форму передавання енергії в термодинаміці називають *теплотою*. Так, наприклад, при дотику холодного тіла і гарячого молекули другого тіла, які швидко рухаються, стикаються з молекулами першого тіла, що рухається повільніше, і передають їм частину своєї кінетичної енергії. Внаслідок цього внутрішня енергія першого тіла збільшується, другого – зменшується, а їх температури вирівнюються.

Теплота подібно до роботи є формою передавання енергії, а зовсім не видом

енергії. Тілу треба надати різних кількостей теплоти, щоб перевести його з одного стану в інший, залежно від того, через які проміжні стани воно при цьому проходить. Це означає, що теплота, на відміну від енергії, не є функцією стану.

Робота і теплота мають ту спільну властивість, що вони існують лише в процесі передавання енергії, а їх числові значення істотно залежать від виду цього процесу.

Проте між теплотою і роботою існує глибока якісна відмінність. Теплота і робота є нерівноцінними формами передавання енергії впорядкованого руху. Виконання роботи над системою може безпосередньо привести до збільшення будь-якого виду енергії системи (кінетичної, потенціальної, внутрішньої).

Надання системі (або тілу) теплоти, тобто збільшення енергії хаотичного теплового руху її частинок безпосередньо приводить тільки до збільшення внутрішньої енергії. Для того, щоб при підведенні до системи теплоти зросла енергія інших видів, крім внутрішньої, необхідно хоч би частково перетворити хаотичний рух частинок в упорядкований або перетворити теплоту в роботу.

Теплота і робота тісно пов'язані між собою. Обидві ці форми передавання енергії переходять одна в одну і в реальних умовах супроводять одна одну. Так, наприклад, при нагріванні металевого стрижня не тільки збільшується його внутрішня енергія, а відбувається також розширення стрижня і, отже, виконується робота розширення. Досліди показали, що теплота перетворюється в роботу, або робота в теплоту завжди в точно відповідних кіль-

костях, незалежно від способу перетворення.

Отже, можна говорити про дві форми передачі енергії від одних тіл до інших: у формі роботи і у формі теплоти. Енергія механічного руху може перетворюватись в енергію теплового руху і навпаки. При цих перетвореннях має бути дотримано закону збереження і перетворення енергії, чим, по суті, застосовним до термодинамічних процесів і є перший закон термодинаміки, який сформульований в результаті узагальнення багаточисельних дослідних даних.

Допустимо, що деяка система (газ, що знаходиться в циліндрі під поршнем), маючи внутрішню енергію U_1 , отримала деяку кількість теплоти Q і, перейшовши в новий стан, що характеризує внутрішню енергію U_2 , виконала роботу A проти зовнішніх сил. Кількість теплоти вважається додатною, коли вона підводиться до системи, а робота – позитивною, коли система виконує її проти зовнішніх сил.

Дослід показує, що відповідно до закону збереження енергії при довільному способі переходу системи з першого стану у другий зміна внутрішньої енергії $\Delta U = U_2 - U_1$ дорівнюватиме різниці між кількістю теплоти Q , отриманою системою, і роботою A , яка виконана системою проти зовнішніх сил: $\Delta U = Q - A$, або

$$Q = \Delta U + A.$$

Це рівняння являє собою математичний вираз **першого закону термодинаміки**:

теплота, надана системі, витрачається на збільшення її внутрішньої енергії і на виконання системою роботи проти зовнішніх сил.

Вираз для першого закону термодинаміки для малої зміни стану системи матиме вигляд: $dQ = dU + dA$ або в коректнішій формі $\delta Q = dU + \delta A$, де dU – нескінченно мала зміна внутрішньої енергії системи, δA – нескінченно мала робота, δQ – нескінченно мала кількість теплоти. У цьому виразі dU є головним диференціалом, а δA і δQ такими не є.

Дуже важливим є випадок, коли система – це періодично діюча машина, в якій газ, пара або інше “робоче тіло” внаслідок деякого процесу повертається до початкового стану. У цьому разі $\Delta U = 0$ і $A = Q$.

Робота, що виконується машиною за один цикл, дорівнює підведеній зовні теплоті Q . Цей висновок дає змогу сформулювати **перший закон термодинаміки** так: *неможливо побудувати періодично діючий двигун, який виконував би роботу без підведення енергії ззовні або виконував би роботу більшу, ніж кількість переданої йому ззовні енергії (вічний двигун першого роду неможливий).*

Знайдемо роботу, яка виконується

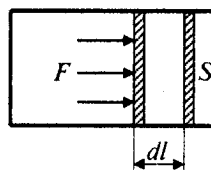


Рис. 66

газом при зміні його об'єму. Нехай газ знаходиться в циліндричній посудині з поршнем (рис 66).

Якщо газ, розширюючись, переміщує поршень на нескінченно малу відстань dl , то він виконує над ним роботу

$$\delta A = Fdl = pSdl = pdV,$$

де S – площа поршня, $Sdl = dV$ – зміна об'єму газу.

Повну роботу A , яка виконана газом при зміні його об'єму від V_1 до V_2 , знайдемо інтегруванням:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Результат інтегрування визначається характером залежності між тиском і об'ємом газу.

Зобразимо графічно залежність тиску від

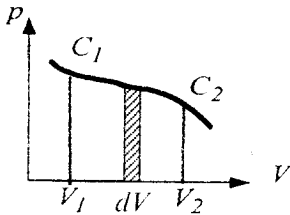


Рис. 67

об'єму (рис.67). При збільшенні об'єму на dV виконана газом робота дорівнює $p dV$, тобто вона числово дорівнює площі, яка заштрихована на рис.67. Повна робота, що виконується газом при розширенні від об'єму V_1 до V_2 визначається площею, яка обмежена віссю абсцис, кривою $p = f(V)$ і прямими V_1 і V_2 .

Величина роботи A залежить не тільки від початкового і кінцевого станів тіла, а й від того, яким є термодинамічний процес, тобто по якій кривій відбувається зміна стану.

Якщо процес відбувався по замкненій кривій і газ повернувся до початкового стану, то повна робота, виконана газом, не дорівнює нулю.

§ 35. Теплоємність. Класична молекулярно-кінетична теорія теплоємностей ідеального газу та її обмеженість

Для характеристики теплових властивостей газу, як і будь-якого іншого тіла,

користуються особливою величиною – **теплоємністю**.

Теплоємністю тіла називається фізична величина, яка числово оорієнює кількості теплоти, яку потрібно надати тілу, щоб підвищити його температуру на одини кельвін:

$$C_T = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Значення C_T залежить від маси тіла, його хімічного складу, термодинамічного стану і виду процесу зміни стану тіла, в якому надходить теплота δQ .

Питома теплоємність c називається фізична величина, що числово оорієнює кількості теплоти, яку слід надати одиниці маси цієї речовини для підвищення її температури на 1К:

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}.$$

Молярною теплоємністю C називається фізична величина, яка числово оорієнює кількості теплоти, яку треба надати одному молу речовини для підвищення його температури на 1К:

$$C = \frac{\delta Q}{\nu dT},$$

де $\nu = \frac{m}{\mu}$ – число молей газу.

Між молярною теплоємністю C і питомою теплоємністю c існує співвідношення: $C = \mu c$.

Оскільки величина теплоємності газу залежить від умов, при яких йому надається кількість теплоти, то розрізняють теплоємність при сталому об'ємі C_V і теплоємність при сталому тиску C_p . В першому випадку нагрівання газу відбувається при сталому об'ємі, а в другому – при сталому тиску.

Якщо нагрівають газ, то згідно з першим законом термодинаміки

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

а для одного моля газу

$$C dT = dU_m + p dV_m.$$

Якщо газ нагрівається при сталому об'ємі, то надана газу теплота йде лише на збільшення його внутрішньої енергії:

$$C_V = \frac{dU_m}{dT}.$$

Якщо газ нагрівається при постійному тиску, то

$$C_p = \frac{dU_m}{dT} + \frac{p dV_m}{dT} = C_V + p \frac{dV_m}{dT}.$$

Тут враховано, що $\frac{dU_m}{dT}$ не залежить від виду процесу, оскільки внутрішня енергія ідеального газу не залежить ні від p , ні від V , а визначається лише температурою. Тому завжди $\frac{dU_m}{dT} = C_V$.

Згідно з рівнянням Менделєєва-Клапейрона

$$V_m = \frac{RT}{p} \quad \text{і} \quad \frac{dV_m}{dT} = \frac{R}{p}.$$

В результаті

$$C_p = C_V + R.$$

Отриманий вираз називається **рівнянням Масра**. Воно вказує на те, що C_p завжди більше від C_V на величину універсальної газової сталої. Це пояснюється тим, що під час нагрівання газу при сталому тиску потрібна додаткова кількість теплоти на виконання роботи розширення газу.

Оскільки $dU_m = \frac{i}{2} R dT$, то

$$C_V = \frac{i}{2} R \quad \text{і} \quad C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R.$$

Кожний газ характеризується величиною $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{2}$ і $\gamma = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}$.

$$\text{Звідси } C_V = \frac{R}{\gamma - 1}.$$

Отримані вирази для C_V і C_p добре збігаються з експериментом для одноатомних і багатьох двоатомних газів при кімнатній температурі (H_2, N_2, O_2). Однак у Cl_2 $C_V \approx \frac{6}{2} R$, що неможливо пояснити. У триатомних газів спостерігаються систематичні відхилення від теорії.

Експеримент показав, що теплоємність залежить від температури. Водночас згідно з формулами для C_V і C_p вона стала для даного газу.

Графічно залежність теплоємності C_V водню від температури показано на рис. 68. При низьких температурах до тем-

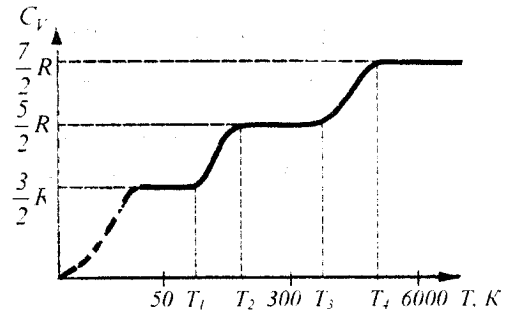


Рис. 68

ператури T_1 $C_V = \frac{3}{2} R$. Це означає, що молекули газу перебувають лише в поступальному русі, тобто мають три ступені вільності. З підвищенням температури до T_2 внаслідок обертання деяких молекул газу число ступенів вільності зростає, що відповідає зростанню теплоємності. При температурах від T_2 до T_3 усі молекули

обертаються і $C_V = \frac{5}{2}R$. При вищих температурах від T_3 до T_4 до перших двох видів руху молекул додаються також коливання молекул. Спочатку коливається невелика частина молекул, і з підвищенням температури ця частина зростає і після T_4 в коливальний рух будуть залучені всі молекули і тому $C_V = \frac{7}{2}R$.

Причина розбіжності теорії і експерименту для температурної залежності C_V полягає в тому, що закон про рівномірний розподіл енергій між всіма ступенями вільності молекул не є правильним, а лише наближено застосовується для найпростіших газів, що перебувають при не дуже низьких температурах.

Лише квантова теорія дає змогу пояснити температурну залежність теплоємності.

§ 36. Застосування першого закону термодинаміки до ізо процесів

Ізо процесами в газах називаються процеси, при яких один із основних параметрів стану (V, p, T) зберігається постійним.

Ізохорний процес ($V = \text{const}, m = \text{const}$).

Діаграма цього процесу в координатах p, V зображається прямою, яка паралельна до осі ординат, де 1-2 – процес ізохорного нагрівання, а 1-3 – ізохорне охолодження (рис.69).

При ізохорному процесі газ не виконує роботи над зовнішніми тілами: $\delta A = pdV = 0$.

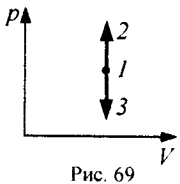


Рис. 69

Отже, з першого закону термодинаміки $\delta Q = dU + \delta A$ для ізохорного процесу випливає, що $\delta Q = dU$. Оскільки $dU_m = C_V dT$, то для довільної маси газу

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C_V dT.$$

Ізобарний процес ($p = \text{const}, m = \text{const}$).

Діаграма цього процесу в координатах p, V зображається прямою, яка паралельна до осі V (рис.70).

1-2 – ізобарний процес розширення, 1-3 – ізобарний стиск.

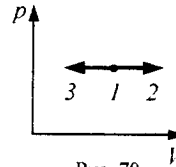


Рис. 70

Робота, яку виконує газ при ізобарному розширенні від об'єму V_1 до V_2 , дорівнює

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1),$$

де використано рівняння Менделєєва-Клапейрона.

При ізобарному процесі при наданні газу масою m кількості теплоти

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C_p dT$$

його внутрішня енергія зростає на величину

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT.$$

Газ виконує роботу

$$\delta A = pdV = \frac{m}{\mu} R dT.$$

Ізотермічний процес ($T = \text{const}, m = \text{const}$).

Діаграма цього процесу в координатах p, V є гіперболою. 1-3 – ізотермічний стиск, 1-2 – ізотермічне розширення (рис.71).

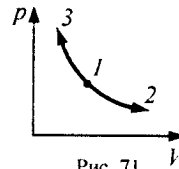


Рис. 71

Робота газу при ізотермічному розширенні:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

При $T = const$ внутрішня енергія ідеального газу не змінюється, тобто

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT = 0 \text{ і } \delta Q = \delta A,$$

тобто вся кількість теплоти, надана газу, витрачається на виконання ним роботи проти зовнішніх сил:

$$Q = A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Робота розширення газу ($V_2 > V_1$) додатна. У випадку стиску газу (процес 1-3) робота A , що виконується газом, від'ємна, водночас зовнішні сили виконують додатну роботу $A' = -A$. При цьому $Q < 0$, тобто теплота від газу відводиться.

§ 37. Адіабатний процес. Застосування першого закону термодинаміки до адіабатного процесу ідеального газу

Адіабатний – це такий процес, який відбувається без обміну теплою ($\delta Q = 0$) між термодинамічною системою і середовищем.

Розглянемо, при яких умовах можна реально здійснити адіабатний процес. Можливо в трьох випадках здійснити процес, який буде адіабатним.

В *першому* випадку необхідна адіабатна оболонка, теплопровідність якої дорівнює нулю. Такою оболонкою може слугувати посудина Дьюара. В такій посудині з подвійними посрібленими стінками, з про-

стору між якими відкачано повітря, передачі теплоти через стінки практично не буде.

Другий випадок адіабатичних процесів – це процеси, що відбуваються дуже швидко. При швидкому стиску газу затрачається робота δA , в наслідок чого збільшується внутрішня енергія dU , що викликає підвищення температури. При підвищенні температури деяка кількість теплоти δQ повинна бути передана навколишньому середовищі, що знаходиться при нижчій температурі, але процес теплопередачі вимагає деякого часу, тому при швидкому стиску теплота не встигає поширитись з даного об'єму.

Третій випадок – це процеси, що відбуваються в дуже великих об'ємах газу, наприклад, в атмосфері. Якщо в атмосфері відбудеться зменшення тиску – розрідження, яке виникає внаслідок атмосферної діяльності, то кількість теплоти, яка повинна бути передана із навколишнього простору для того, щоб вирівняти температуру, яка понизилась внаслідок адіабатичного розширення, просто не встигне поширитися упродовж значного проміжку часу.

Продиференціюємо рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$\frac{m}{\mu} R dT = d(pV) = p dV + V dp.$$

$$\text{Звідси } dT = \frac{m}{\mu} \frac{1}{R} (p dV + V dp).$$

Підставимо значення dT у вираз для першого закону термодинаміки:

$$p dV = -\frac{m}{\mu} C_V dT$$

$$\text{і } p dV = -\frac{C_V}{R} (p dV + V dp).$$

Оскільки $R = C_p - C_V$, то

$$(C_p - C_v) p dV = -C_v p dV - C_v V dp.$$

$$C_p p dV + C_v V dp = 0 \left| \cdot \frac{1}{C_v p V} \right.,$$

$$\frac{C_p}{C_v} \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0,$$

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0, \text{ де } \gamma = \frac{C_p}{C_v} - \text{показник}$$

адіабати. або коефіцієнт Пуассона.

Проінтегруємо отриманий вираз:

$$\gamma \int \frac{dV}{V} + \int \frac{dp}{p} = 0, \quad \ln V^\gamma + \ln p = \ln const.,$$

$$pV^\gamma = const \text{ або}$$

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma.$$

Цей вираз називається рівнянням Пуассона.

Для переходу до змінних T, V виключимо з рівняння Пуассона за допомогою рівняння Менделєєва-Клапейрона тиск:

$$p = \frac{mRT}{\mu V}. \text{ Тоді } \frac{mRT}{\mu V} V^\gamma = const.$$

$$\text{Звідси, } TV^{\gamma-1} = const \text{ і}$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}.$$

Оскільки об'єм $V = \frac{mRT}{\mu p}$, то, підставивши цей вираз в рівняння Пуассона, отримуємо:

$$p \left(\frac{mRT}{\mu p} \right)^\gamma = \left(\frac{mR}{\mu} \right)^\gamma T^\gamma p^{1-\gamma} = const.$$

$$\text{Отже, } T^\gamma p^{1-\gamma} = const \text{ і}$$

$$T_1^\gamma p_1^{1-\gamma} = T_2^\gamma p_2^{1-\gamma}.$$

Побудуємо графіки рівнянь:

1) $pV^\gamma = const$ (адіабата) і

2) $pV = const$ (ізотерма) (рис.72).

Диференціюючи рівняння $pV = const$,

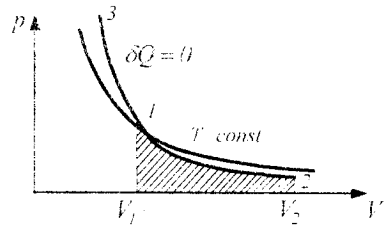


Рис. 72

отримуємо $p dV + V dp = 0$. звідси для ізотерми маємо

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V}.$$

Диференціюючи рівняння $pV^\gamma = const$,

$$\text{маємо } \gamma p V^{\gamma-1} dV + V^\gamma dp = 0.$$

$$\text{Звідси } \frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p}{V}.$$

Отже, тангенс кута нахилу адіабати в γ разів більший, ніж в ізотерми. Це пояснюється тим, що при адіабатному стиску 1-3 тиск газу збільшується не лише внаслідок зменшення його об'єму, як при ізотермічному стиску, але і підвищенням температури. При адіабатному розширенні газу 1-2 його температура знижується і тому тиск зменшується швидше, ніж при ізотермічному розширенні.

Розрахуємо роботу, яку виконує газ при адіабатному процесі 1-2. Вона вимірюється числово площею, заштрихованою на рис. 72. Якщо газ адіабатно розширюється від об'єму V_1 до V_2 , то його температура зменшується від T_1 до T_2 і робота розширення ідеального газу

$$A = -\frac{m}{\mu} C_v \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{\mu} C_v (T_1 - T_2).$$

Оскільки, як показано під час розгляду теплоємності ідеального газу,

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1}, \text{ тому}$$

$$A = \frac{m}{\mu} \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2) = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right).$$

Якщо використати рівняння адиабатного процесу у змінних T , V і T , p , отримуємо

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Тоді роботу газу при адиабатному процесі можна записати в такому вигляді:

$$A = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \right]$$

$$A = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

Робота, яка виконується газом при адиабатному розширенні 1-2, менша, ніж при ізотермічному. Це пояснюється тим, що при адиабатичному розширенні відбувається охолодження газу, тоді як при ізотермічному – температура підтримується постійною за рахунок припливу зовні еквівалентної кількості теплоти.

§ 38. Середнє число зіткнень і середня довжина вільного пробігу молекул

Молекули газу, перебуваючи в стані хаотичного теплового руху, безперервно стикаються одна з одною. Зіткненням молекул називається процес взаємодії між молекулами, внаслідок якого молекули змінюють напрямок свого руху.

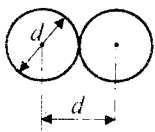


Рис. 73

Мінімальна відстань, на яку зближуються при зіткненні центри обох молекул, називається ефективним діаметром d молекули

(рис.73). Величина $\sigma = \pi d^2$ називається ефективним перерізом молекули. Ефективний діаметр молекули залежить від її енергії, а, отже, значить і від температури. З підвищенням температури ефективний ді-

аметр молекул зменшується. Величина d залежить і від хімічної природи газу.

Підрахуємо середнє число зіткнень під час руху молекули в однорідному газі за одиницю часу. Припустимо, одна молекула рухається із середньою арифметичною швидкістю $\langle v \rangle$, а всі інші молекули нерухомі (рис.74).

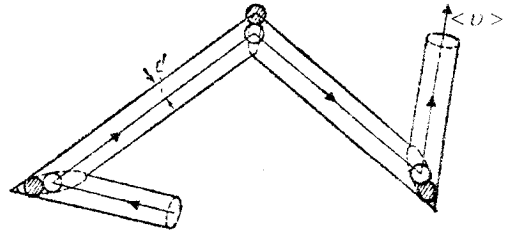


Рис. 74

Під час руху молекула стикатиметься з усіма молекулами газу, центри яких віддалені від траєкторії руху її центра на відстанях, що менші або дорівнюють d . За одиницю часу молекула зіткнеться з усіма молекулами, центри яких лежать всередині циліндра заввишки $\langle v \rangle$ і радіусом основи d . Якщо n - концентрація молекул, то середнє число $\langle z \rangle$ зіткнень молекули за одиницю часу дорівнюватиме:

$$\langle z \rangle = \pi d^2 \langle v \rangle n$$

Якщо врахувати рух інших молекул, в цю формулу ввійде відносна швидкість молекул $\langle u_{rel} \rangle = \sqrt{2} \langle v \rangle$.

Отже, середнє число зіткнень за одиницю часу

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle$$

Між двома послідовними зіткненнями молекули рухаються прямолінійно і рівномірно і проходять при цьому деякі відстані λ , що мають назву довжин вільного пробігу. Ці відстані можуть бути різними (рис.75). Тому введемо поняття про

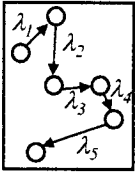


Рис. 75

середню довжину вільного пробігу $\langle \lambda \rangle$ – середню відстань, яку молекула проходить без зіткнення. Середня довжина вільного пробігу є характеристикою

всієї сукупності молекул газу при даних значеннях тиску p і температури T .

Середній шлях, що проходить молекула за одиницю часу, числово дорівнює середній арифметичній швидкості $\langle v \rangle$ і якщо за одиницю часу молекула стикається з іншими молекулами $\langle z \rangle$ разів, то середня довжина вільного пробігу

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{l}{\sqrt{2\pi} d^2 n}$$

Оскільки $p = nkT$, то

$$\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2\pi} d^2 p}$$

При постійній температурі середня довжина вільного пробігу є обернено пропорційною до тиску, тобто

$$\langle \lambda_1 \rangle p_1 = \langle \lambda_2 \rangle p_2 = \langle \lambda_3 \rangle p_3.$$

§ 39. Явища переносу

у термодинамічних нерівноважних системах

Невпорядкованість теплового руху молекул газу, безперервні зіткнення між ними приводять до постійного перемішування частинок і зміни їх швидкостей і енергії.

Якщо в газі існує просторова неоднорідність густини, температури або швидкості впорядкованого переміщення окремих шарів газу, то рух молекул вирівнює ці неоднорідності. При цьому в газі відбу-

ваються особливі процеси, об'єднані загальною назвою *явищ переносу*. До цих явищ належать *дифузія, теплопровідність і внутрішнє тертя*.

1. Дифузія у газах

Процес дифузії полягає у вирівнюванні густини або складу газу в об'ємі.

Якщо процес дифузії зводиться лише до вирівнювання густини, то в ньому беруть участь односторні молекули, тобто тут переноситься маса однієї речовини. Таку дифузію називають *самодифузійною*.

Якщо у процесі дифузії відбувається вирівнювання складу газу по всьому об'ємі, то зустрічаємося з явищем, яке називається просто *дифузійною*. Тут маса однієї речовини переноситься в середовище іншої. Отже, у цьому випадку процес дифузії полягає в тому, що кожна з компонент суміші переходить з тих частин об'єму газу, де її концентрація є більшою, туди, де вона є меншою.

Переміщення однієї або іншої компоненти суміші, або ж групи молекул односторонньої речовини під дією різниці концентрації або густини називається *дифузійним потоком*. Дифузійний потік визначається кількістю дифузійної речовини, яка за одиницю часу проходить через одиницю площі, яка перпендикулярна до напрямку дифузії.

Перемішування молекул внаслідок їх теплового руху приводить до вирівнювання густини газу по всьому об'єму. Для того щоб існував неперервний, незалежний від часу (стаціонарний) перенос газу потрібна зовнішня дія. Вона повинна підтримувати незмінний розподіл густини за об'ємом газу і нейтралізувати вирівнювання густини внаслідок процесу дифузії.

Нехай газ міститься у посудині, яка має форму куба, з площею граней S і довжиною ребер l .

Об'єм, який займає газ, дорівнює об'ємові посудини, тобто $V = Sl = S \langle v \rangle t$, де $\langle v \rangle$ – середня швидкість молекул. У цьому об'ємі буде N молекул: $N = n \langle v \rangle St$, n – кількість молекул в одиниці об'єму.

Рух молекул у газі є однаково ймовірним у всіх напрямках, тобто в напрямку X , Y і Z буде рухатись $\frac{1}{3}N$ молекул. Нехай напрямок дифузійного потоку збігається є віссю X . Тоді в заданому напрямку X рухатиметься $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}N$ молекул і у від'ємному $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}N$ молекул. Отже, в напрямку перебігу дифузії рухатиметься $\frac{1}{6}n \langle v \rangle St$ молекул. При цьому переноситься маса речовини

$$M_x = \frac{1}{6}n \langle v \rangle St m.$$

Однак це б відбувалося, коли густина газу ρ була би сталою у всьому об'ємі. Але $\rho = \rho(x)$ і $n = n(x)$. Тому за час t через поверхню S переноситься зліва направо і справа наліво різна кількість молекул:

$$M_1 = \frac{1}{6}n_1 \langle v \rangle St m, \quad M_2 = \frac{1}{6}n_2 \langle v \rangle St m.$$

Отже, загальна маса, яка переноситься через площадку S , дорівнюватиме

$$M = M_1 - M_2 = \frac{1}{6} \langle v \rangle St m (n_1 - n_2).$$

Нехай на рівні площадки S є $n(x_0)$ молекул (рис.76). На відстанях, які дорівнюють середній довжині вільного пробігу, не змінюються ні величина, ні напрямок

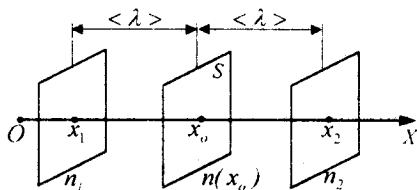


Рис.76

швидкості молекул і з двох боків площадки S буде n_1 і n_2 молекул.

Підраховуючи кількість n_1 молекул, що проходять за час t через S зліва направо, треба брати значення $n(x)$ в точці $x_1 = x_0 - \langle \lambda \rangle$, а, підраховуючи кількість n_2 молекул, що проходять у зворотному напрямку, – в точці $x_2 = x_0 + \langle \lambda \rangle$.

Різниця

$$\Delta n = n_1 - n_2 = [n(x_0 - \langle \lambda \rangle) - n(x_0 + \langle \lambda \rangle)]$$

характеризує густину потоку молекул через поверхню під час дифузії.

Введемо градієнт концентрації

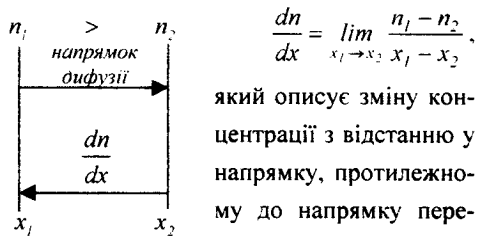


Рис. 77

$$\frac{dn}{dx} = \lim_{x_1 \rightarrow x_2} \frac{n_1 - n_2}{x_1 - x_2},$$

який описує зміну концентрації з відстанню у напрямку, протилежному до напрямку перебігу дифузії (рис.77).

Тоді

$$n(x_0 - \langle \lambda \rangle) = n(x_0) - \langle \lambda \rangle \frac{dn}{dx},$$

$$n(x_0 + \langle \lambda \rangle) = n(x_0) + \langle \lambda \rangle \frac{dn}{dx}.$$

В результаті

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{6} \langle v \rangle St m \left[n(x_0) - \langle \lambda \rangle \frac{dn}{dx} - n(x_0) + \langle \lambda \rangle \frac{dn}{dx} \right] = \\ &= \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \frac{dn}{dx} St m. \end{aligned}$$

Оскільки густина газу $\rho = nm$ і

$$\frac{dn}{dx} = \frac{1}{m} \frac{d\rho}{dx},$$

часомо

$$M = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \frac{d\rho}{dx} S t = -D \frac{d\rho}{dx} S t.$$

де

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle.$$

Маса газу M , що переноситься завдяки дифузії через поверхню S , яка перпендикулярна до напрямку OX , в якому зменшується густина, пропорційна до розміру цієї поверхні, проміжку часу t переносу і градієнта густини $\frac{d\rho}{dx}$.

Формула для маси M , що переноситься, називається рівнянням дифузії, або **законом Фіка**.

Коефіцієнт пропорційності D називається коефіцієнтом дифузії. Покладаючи

$$S = lM^2, \quad t = lc, \quad \frac{d\rho}{dx} = -l \frac{\kappa^2}{M},$$

отримаємо $M = D$, тобто коефіцієнт дифузії числово дорівнює масі газу, що переноситься через

$$\text{поверхню } S = lM^2 \text{ за } lc \text{ при } \frac{d\rho}{dx} = -l \frac{\kappa^2}{M}.$$

Оскільки $\langle \lambda \rangle \sim \frac{l}{\rho}$, $\langle v \rangle \sim \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, то

D залежить від сорту газу (μ) і його стану

$$(p \text{ і } T): \quad D \sim \frac{l}{\rho} \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

Незважаючи на велику швидкість хаотичного руху газових молекул, дифузія відбувається повільно. Це пояснюється тим, що внаслідок численних зіткнень між молекулами вони проходять шлях значно більший, ніж відстань по прямій між двома точками в газі.

У разі взаємодифузії двох газів рівняння дифузії залишається справедливим, а коефіцієнт взаємодифузії

$$D_0 = \frac{D_1 n_1 + D_2 n_2}{n_1 + n_2},$$

де n_1, n_2 – концентрації молекул першого і другого газів.

2. Теплопровідність газів

Теплопровідність має місце, коли існує різниця температур, викликана будь-якими зовнішніми причинами. Виникнення потоку тепла в газі називається теплопровідністю. Молекули газу в різних місцях його об'єму мають різні середні кінетичні енергії. Тому при хаотичному тепловому русі молекул відбувається перенос енергії. Молекули, що потрапили з нагрітих частин газу в холодніші, віддають надлишок своєї енергії навколишнім частинкам. Навпаки, молекули, що повільно рухаються, потрапляючи з холодних частин в тепліші, збільшують свою енергію за рахунок зіткнень з молекулами, що мають більші швидкості.

Нехай в деякому об'ємі газу температура T зменшується в напрямку OX (рис.78). Позначимо через T_1 і T_2 значення

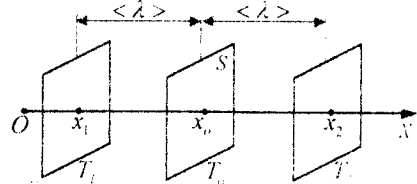


Рис.78

температури на відстанях $\langle \lambda \rangle$ від поверхні S , причому $T_1 > T_2$. Оскільки кінетична енергія газової молекули $\langle \epsilon_k \rangle = \frac{1}{2} kT$, то $\langle \epsilon_{k1} \rangle > \langle \epsilon_{k2} \rangle$. Тому в напрямку зменшення температури буде

відбуватися перенос енергії, а, отже, і кількості теплоти Q , оскільки внутрішня енергія газу складається з кінетичної енергії його молекул.

Зліва направо рухатиметься кількість молекул, яка дорівнює $N_1 = \frac{1}{6}nS\langle v \rangle t$, а справа наліво $N_2 = \frac{1}{6}nS\langle v \rangle t$.

Відповідно при цьому буде переноситися кількість теплоти

$$Q_1 = N_1 \langle \varepsilon_{k1} \rangle = \langle \varepsilon_{k1} \rangle \frac{1}{6}nS\langle v \rangle t,$$

$$Q_2 = N_2 \langle \varepsilon_{k2} \rangle = \langle \varepsilon_{k2} \rangle \frac{1}{6}nS\langle v \rangle t.$$

Загальна кількість теплоти, яка буде переноситися при теплопровідності, дорівнюватиме

$$Q = Q_1 - Q_2 = \frac{1}{6}nS\langle v \rangle t (\langle \varepsilon_{k1} \rangle - \langle \varepsilon_{k2} \rangle)$$

Середня енергія молекули дорівнює $\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{i}{2}kT = \frac{i}{2} \frac{R}{N_A} T = C_V \frac{1}{N_A} T$.

$$\text{Тому } Q = \frac{1}{6}nS\langle v \rangle t \frac{C_V}{N_A} (T_1 - T_2).$$

Якщо градієнт температури $\frac{dT}{dx} = \lim_{x_1 \rightarrow x_2} \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2}$ поблизу площадки S ,

то $T_1 - T_2 = -2\langle \lambda \rangle \frac{dT}{dx}$, бо $\frac{dT}{dx}$ – зміна температури на одиницю довжини. Знак “-” показує, що зростанню x відповідає спадання T .

$$\text{Звідси } Q = -\frac{1}{3}n\langle v \rangle \langle \lambda \rangle \frac{C_V}{N_A} \frac{dT}{dx} St, \text{ а}$$

коефіцієнт теплопровідності

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{3}n\langle v \rangle \langle \lambda \rangle \frac{C_V}{N_A} = \frac{1}{3}\langle v \rangle \langle \lambda \rangle n \frac{\mu C_V}{N_A} = \\ &= \frac{1}{3}\langle v \rangle \langle \lambda \rangle n m_0 c_V = \frac{1}{3}\langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho c_V. \end{aligned}$$

Отже,

$$Q = -\kappa \frac{dT}{dx} St.$$

Отриманий вираз називається **законом теплопровідності Фур'є**.

Кількість теплоти Q , яка переноситься через поверхню S , перпендикулярну до напрямку OX , в якому зменшується температура, пропорційна розміру цієї поверхні, проміжку часу t переносу і градієнта температури $\frac{dT}{dx}$.

Коефіцієнт теплопровідності числово дорівнює кількості теплоти, що переноситься через поверхню в 1 м^2 за 1 с при градієнті температури $-1 \frac{\text{К}}{\text{м}}$.

Оскільки середня довжина вільного пробігу $\langle \lambda \rangle \sim \frac{1}{\rho}$, а густина газу $\rho \sim p$, то добуток $\langle \lambda \rangle \rho$ не залежить від тиску. Тому коефіцієнт теплопровідності κ не залежить від тиску.

Однак у сильно розріджених газах, які знаходяться в посудині, κ може виявитися залежним від тиску. Будемо розріджувати газ, що знаходиться в кубічній посудині з ребром a . При цьому $\langle \lambda \rangle$ буде збільшуватися, а ρ – зменшуватися. Тому добуток $\langle \lambda \rangle \rho$, а, отже, і κ залишиться постійним.

Понизимо тиск до такого ступеня, що $\langle \lambda \rangle$ дорівнюватиме a . Тоді при подальшому розрідженні ρ буде зменшуватися, а $a \langle \lambda \rangle$ уже не зможе збільшуватися. Тому добуток $\langle \lambda \rangle \rho$ і κ будуть тепер зменшуватися разом із зменшенням тиску.

Якщо $\langle \lambda \rangle \geq a$, то κ не залежить від тиску p , якщо $\langle \lambda \rangle \sim a$, то $\kappa \sim p$.

Введемо поняття *потіку тепла*. Під потоком тепла розуміють кількість теплоти, яка проходить через одиницю площі за одиницю часу.

$$q = -\alpha \frac{dT}{dx}.$$

Напрямок потоку тепла збігається з напрямком падіння температури. Тепло тече в напрямку зростаючого значення x . Потік тепла спрямований так, щоб зменшувати наявний градієнт температури, який його викликав.

У стаціонарних умовах кількість тепла Q , що проходить за одиницю часу через газ, дорівнює потужності джерела енергії, за рахунок якого підтримується заданий градієнт температури.

3. Внутрішнє тертя у газах

Явище внутрішнього тертя пов'язано з виникненням сил тертя між шарами газу або рідини, що переміщуються паралельно один до одного з різними за величиною швидкостями. З боку шару, що рухається швидше, на шар, який рухається повільніше, діє прискорювальна сила. Навпаки, шар, що повільно рухається, гальмує шари газу, які рухаються швидше. Сили тертя, які при цьому виникають, напрямлені по дотичній до поверхні зіткнення шарів.

З погляду кінетичної теорії газів причиною внутрішнього тертя є накладання впорядкованого руху шарів газу з різними швидкостями на хаотичний тепловий рух молекул, інтенсивність якого залежить від температури. Завдяки тепловому руху молекули переходять з шару, що рухається з швидкістю \vec{u}_2 у шар, який рухається з швидкістю \vec{u}_1 . При цьому молекули переносять імпульс $m\vec{u}$ свого впорядкованого руху.

Якщо різниця швидкостей руху різних шарів газу зовнішніми силами підтримується сталою, то і потік імпульсу від шару до шару буде сталим (стаціонарним), причому цей потік буде спрямований уздовж спадання швидкості. З таким випадком зустрічаємось при повільній течії газу (або рідини) між двома пластинами або у трубі під впливом сталої зовнішньої різниці тисків, спрямованої вздовж руху.

Коли газ тече вздовж труби, то швидкості різних шарів розподілені так, як

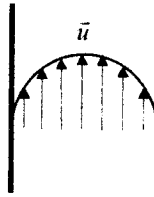


Рис. 79

показано на рис.79. Найбільша швидкість спостерігається в середній частині труби, що прилягає до осі, у міру наближення до стінок швидкість зменшується, а шар, що безпосередньо прилягає до стінок труби, перебуває у спокої. При

такій течії імпульс переноситься від центрального шару, де швидкість найбільша, до шарів, які рухаються з меншою швидкістю. Через те, що цей процес пов'язаний зі зміною кількості руху, то газ поводить себе так, як коли б на нього діяла якась сила (сила внутрішнього тертя).

Кількісно перенесення імпульсу можна описати так само, як перенесення енергії у процесі теплопровідності.

Розглянемо площадку S , паралельну швидкості течії газу і перпендикулярну до осі Ox (рис.80). Нехай $\vec{u}_1 > \vec{u}_2$. Завдяки обміну молекулами між обома шарами га-

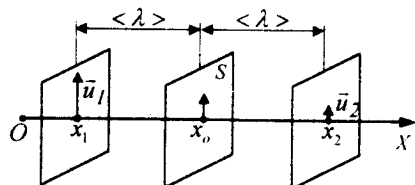


Рис.80

зу (обмін відбувається завдяки тепловим рухам) ця різниця зменшується.

Молекули праворуч від S заміщуються іншими молекулами, які надійшли зліва і мають більший імпульс. У разі зіткнення цих молекул з молекулами, що були до цього праворуч від S , більша швидкість течії розподілиться між усіма молекулами праворуч, після чого швидкість течії цього шару, а, отже, й імпульс стануть більшими. Водночас швидкість й імпульс шару газу, який знаходиться ліворуч від S , зменшується.

Отже, обмін молекулами, зумовлений тепловими рухами, приводить до вирівнювання швидкостей течії різних шарів газу. Таким є механізм переносу імпульсу в напрямку осі Ox від одного шару газу, який тече, до другого.

Величина потоку імпульсу P , який переноситься за одиницю часу через одиницю площі площадки S , визначається різницею імпульсів P_1 і P_2 , які переносяться молекулами, що перетинають площадку S зліва і справа відповідно.

Зліва направо рухатиметься кількість молекул, яка дорівнює $N_1 = \frac{1}{6}nS \langle v \rangle t$, а справа наліво $N_2 = \frac{1}{6}nS \langle v \rangle t$.

Припускаємо, що всі молекули рухаються з однаковою тепловою швидкістю $\langle v \rangle$. Через площадку S протікатимуть лише ті молекули, які перебувають на відстані $\langle \lambda \rangle$. Молекули, завдяки наявності в них теплової швидкості $\langle v \rangle$, мають імпульс $m \langle v \rangle$. Цей імпульс не розглядається. А мова йде про той імпульс $m \bar{u}$, який мають молекули завдяки тому, що вся маса газу рухається поступально.

Молекули, які рухаються зліва направо, переносять імпульс

$$P_1 = \frac{1}{6}nS \langle v \rangle t m u_1.$$

Відповідно, молекули, які рухаються справа наліво, переносять імпульс

$$P_2 = \frac{1}{6}nS \langle v \rangle t m u_2.$$

Повна зміна імпульсу молекул

$$P = P_1 - P_2 = \frac{1}{6}nS \langle v \rangle t m (u_1 - u_2).$$

Якщо градієнт швидкості

$$\frac{dv}{dx} = \lim_{x_1 \rightarrow x_2} \frac{u_1 - u_2}{x_1 - x_2} \text{ поблизу площадки } S,$$

то $u_1 - u_2 = -2 \langle \lambda \rangle \frac{du}{dx}$, оскільки $\frac{du}{dx}$ – зміна швидкості на одиницю довжини. Знак “-” показує, що зростанню x відповідає спадання v .

$$\text{Звідси } P = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho \frac{du}{dx} S t, \text{ де}$$

$\rho = mn$. Оскільки зміна імпульсу дорівнює імпульсу діючої сили, то $P = Ft$, де F – сила взаємодії між шарами газу, що діє у поверхні їх дотику:

$$Ft = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho \frac{du}{dx} S t,$$

або

$$F = -\eta \frac{du}{dx} S.$$

Це рівняння внутрішнього тертя, або **закон Ньютона**.

Сила внутрішнього тертя, що виникає у площині дотику двох шарів газу, що ковзають один відносно одного, пропорційна до площі їх дотику S і градієнта швидкості $\frac{du}{dx}$.

Коефіцієнт пропорційності η називається коефіцієнтом внутрішнього тертя або динамічною в'язкістю:

$$\eta = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho.$$

Приймаючи $S = l m^2$, $\frac{dv}{dx} = -l c^{-1}$, маємо $F = \eta$, тобто коефіцієнт в'язкості числово дорівнює силі внутрішнього тертя, що діє на $l m^2$ поверхні дотику шарів газу, що рухається паралельно при градієнті швидкості $-l c^{-1}$, $[\eta] = l \frac{Kz}{m \cdot c}$.

Внаслідок пропорційності η добутку $\langle \lambda \rangle \rho$ виходить, що, як і α , коефіцієнт внутрішнього тертя не залежить від тиску, за винятком сильно розрідженого газу, коли середня довжина вільного пробігу молекул стає більшою від розмірів посудини.

Вперше найбільш систематичні дослідження температурної залежності коефіцієнта внутрішнього тертя для різних газів виконав І.П.Пулюй. Зокрема, він досліджував повітря, вуглекислий газ, водень, а також пару води, спирту, бензину, ефіру та їх сумішей. Він показав, що з підвищенням температури η зростає за законом $\eta = \eta_0 (1 + \alpha t)^n$, причому $\frac{2}{3} < n < \frac{3}{4}$.

Крім того, він довів, що значення коефіцієнта в'язкості суміші газів, які хімічно не взаємодіють між собою, лежить між значеннями коефіцієнтів внутрішнього тертя компонент.

Поряд з динамічною в'язкістю η використовується також кінематична в'язкість σ , яка визначається як динамічна

в'язкість, поділена на густину: $\sigma = \frac{\eta}{\rho}$.

Між коефіцієнтами переносу існують такі співвідношення:

$$\eta = \rho D, \quad \alpha = c_v \eta, \quad \alpha = D c_v \rho.$$

Наявність цього зв'язку між коефіцієнтами процесів переносу обумовлена однаковістю фізичної природи процесів переносу і тим, що всі вони описуються однаковими рівняннями.

§ 40. Коловий процес. Теплові двигуни і холодильні машини. Оборотні і необоротні процеси

Коловим процесом (циклом) називається процес, при якому система, пройшовши через ряд станів, повертається у вихідний стан. На діаграмі процесів цикл зображається замкненою кривою.

Тіло, яке здійснює коловий процес і обмінюється енергією з іншими тілами, називається робочим тілом. Звичайно таким тілом є газ.

Цикл, який виконує ідеальний газ, можна розбити на процеси розширення ($1-2$) і стискування ($2-1$) газу (рис.81). Рабо-

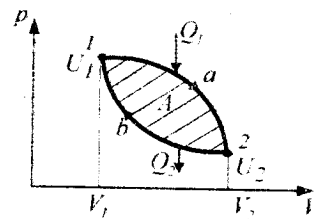


Рис. 81

та розширення, яка визначається площею фігури $1a2V_2V_11$, додатна ($dV > 0$), робота стискування, що визначається площею фігури $2b1V_1V_22$, від'ємна ($dV < 0$). Робота, яка виконується газом за цикл

$$A = \int_{1a}^2 p dV + \int_{2b}^1 p dV = A_{1-2} - A_{2-1}.$$

визначається заштрихованою площею, що охоплюється кривою $1a2b1$.

Якщо за цикл виконується додатна робота $A > 0$ (цикл виконується за годинниковою стрілкою), то він називається прямим.

При прямому циклі робочому тілу, надається кількість теплоти Q_1 і тіло виконує роботу розширення A_{1-2} . Внутрішня енергія змінюється на величину $\Delta U = U_2 - U_1$, де U_1 і U_2 – внутрішня енергія тіла в стані 1 і 2, відповідно. Потім тіло стискається, над ним виконується робота $A'_{2-1} = -A_{2-1}$, яка менша, ніж A_{1-2} , і від нього забирається кількість теплоти Q_2 , яка менша Q_1 . Внутрішня енергія змінюється на величину $-\Delta U$. Робота стискування виконується за рахунок використання частини роботи виконаної при розширенні робочого тіла, наприклад, за рахунок кінетичної енергії маховика, що почав обертатись при розширенні робочого тіла. За першим законом термодинаміки для процесу розширення $Q_1 = \Delta U + A_{1-2}$, для процесу стискування: $-Q_2 = -\Delta U - A_{2-1}$.

Якщо ці рівняння додати, то отримаємо $Q_1 - Q_2 = A_{1-2} - A_{2-1} = A$.

Після закінчення циклу тіло повертається в свій початковий стан, внутрішня енергія тіла не змінюється. Тому робота циклу може виконуватись лише за рахунок зовнішніх джерел, що підводять до тіла теплоту.

Прямий цикл використовується в *тепловому двигуні*, в якому робоче тіло отримує енергію у формі теплоти від зовнішніх джерел і частину її віддає у формі роботи. Тепловий двигун складається з

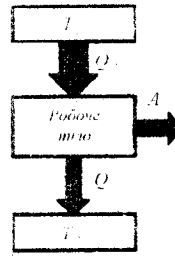


Рис. 82.

трьох частин: нагрівник, робоче тіло, холодильник (рис.82). Від термостата з вищою температурою T_1 , який називається нагрівником, за цикл відбирається кількість теплоти

Q_1 , а термостату з нижчою температурою T_2 , який називається холодильником, за цикл передається кількість теплоти Q_2 , виконується робота $A = Q_1 - Q_2$.

Тепловий двигун характеризується коефіцієнтом корисної дії η , який дорівнює відношенню роботи A , яка виконана тілом за цикл роботи, до кількості теплоти Q_1 , що отримало тіло від нагрівника:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

Температура газу при його стискуванні повинна бути нижча, ніж при розширенні. Тоді тиск газу у всіх проміжних станах при стиску буде менший, ніж при розширенні, і буде виконано умову $A_{1-2} > A_{2-1}$, необхідну при виконанні двигуном корисної роботи.

Якщо здійснити цикл проти годинникової стрілки, то робота буде та сама за абсолютною величиною, але від'ємна (рис.83):

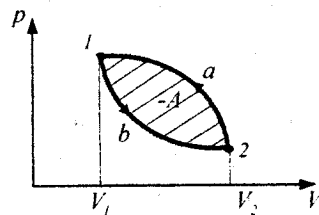


Рис. 83

$$A_l = \int_{1b}^2 pdV + \int_{2a}^1 pdV = - \left[\int_{2b}^1 pdV + \int_{1a}^2 pdV \right] = -A.$$

Такий процес називається *зворотним*.

Зворотний цикл використовується в *холодильних машинах* - періодично діючих установках, в яких за рахунок роботи зовнішніх сил теплота переноситься до тіла з вищою температурою (рис.84).

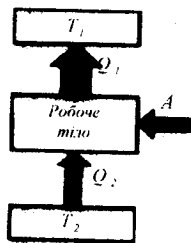


Рис. 84

Така машина забирає за цикл від тіла з температурою T_2 кількість теплоти Q_2 і віддає тілу при температурі T_1 кількість теплоти Q_1 . Над машиною за цикл повинна бути виконана робота A . Кількість відданої теплоти Q_1 дорівнює сумі отриманої кількості теплоти Q_2 і роботи, яку виконали зовнішні сили:

$$Q_1 = Q_2 + A.$$

Отже, чистий результат циклу полягає в тому, що тіло з меншою температурою, від якого забирається певна кількість теплоти, охолоджується, а тіло з вищою температурою, якому віддається теплота, нагрівається.

Ефективність холодильної машини характеризується її холодильним коефіцієнтом, який дорівнює відношенню віднятої кількості теплоти Q_2 до роботи, яка затрачується на приведення машини в роботу:

$$\eta_{х.м.} = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}.$$

Робочим тілом в холодильній машині слугують пари рідин, які легко киплять: аміак, фреон і ін. Енергія підводиться до машини від електричної мережі. За ра-

хунок цієї енергії відбувається перехід теплоти від холодильної камери до більш нагрітого тіла - до навколишнього середовища.

Оборотним термодинамічним процесом називається така зміна стану системи, яка, будучи проведена у зворотному напрямку, повертає її в початковий стан так, щоб система пройшла через ті самі проміжні стани, що і у прямому процесі, але у зворотній послідовності, а стан тіл поза системою залишився незмінним.

Необоротним називається процес, коли зворотний перехід через ті самі проміжні стани неможливий.

Будь-який рівноважний процес є оборотним.

Оборотні процеси - це до деякої міри ідеалізація реальних процесів. Всі реальні процеси є необоротними.

§ 41. Цикл Карно і його коефіцієнт корисної дії для ідеального газу

Розглянемо коловий процес, в результаті якого тепло, відняте від якогось тіла, можна перетворити в роботу і притому якнайкраще.

Карно довів теорему: із всіх періодично діючих теплових машин, що мають однакові температури нагрівачів і холодильників, найбільший к.к.д. мають оборотні машини; при цьому к.к.д. оборотних машин, що працюють при однакових температурах нагрівачів і холодильників, дорівнюють один одному і не залежать від конструкції машини.

Цикл Карно складається з двох ізо-терм і двох адіабат (рис.85).

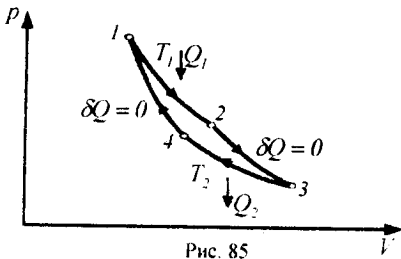


Рис. 85

Ізотермічне розширення і стиск задані відповідно кривими 1-2 і 3-4, адіабатне розширення і стиск – кривими 2-3 і 4-1. Для виконання циклу Карно необхідні термостат з температурою T_1 (нагрівник) і термостат з температурою T_2 (холодильник), причому $T_1 > T_2$. При проходженні адіабатних ділянок циклу система повинна бути термоізолюваною від навколишнього середовища.

Визначимо к.к.д. циклу Карно. При ізотермічному процесі $\Delta U = 0$ і робота розширення газу A_{12} дорівнює кількості теплоти Q_1 , що отримав газ від нагрівника:

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1.$$

При адіабатному розширенні робота виконується за рахунок зміни внутрішньої енергії:

$$A_{23} = -\frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1).$$

При ізотермічному стисканні газу виконується робота A_{34} і газ віддає холодильнику кількість теплоти Q_2 :

$$A_{34} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2.$$

Робота адіабатного стискання:

$$A_{41} = -\frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2) = -A_{23}.$$

В результаті колового циклу виконується робота

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2.$$

Термічний к.к.д. циклу Карно

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Використаємо рівняння адіабат 2-3 і

4-1:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \quad T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1};$$

$$\frac{T_1 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = \frac{T_2 V_3^{\gamma-1}}{T_2 V_4^{\gamma-1}}.$$

Звідси

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Тоді,

$$\eta = \frac{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}} =$$

$$= \frac{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}}{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Для циклу Карно к.к.д. визначається лише температурами нагрівника і холодильника.

Довільна реальна машина втрачає деяку кількість теплоти через теплообмін з навколишнім середовищем, що знаходиться при нижчій температурі. Позначимо цю втрату теплоти Q_3 . Крім того, на подолання сил тертя, які існують у всякій реальній машині, тратиться деяка кількість теплоти Q_4 .

Отже, робота реальної машини

$$A = Q_1 - Q_2 - Q_3 - Q_4 = Q_1 - Q_2', \text{ де}$$

$$Q'_2 = Q_2 + Q_3 + Q_4.$$

Формула коефіцієнта корисної дії реальної теплової машини має вигляд:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

§ 42. Другий закон термодинаміки

Другий закон термодинаміки встановлює *напрямок перебігу* і характер процесів, що відбуваються в природі.

Згідно із *Клаузіусом*, який дав одне з перших формулювань другого закону, *теплота ніколи не може переходити сама собою від тіл з нижчою температурою до тіл з вищою температурою*.

Це означає, що для такого переходу теплоти потрібна затрата роботи зовнішнього джерела, що здійснюється в холодильній машині.

Фізичний зміст другого закону найбільш зрозуміло розкривається у формулюванні *Планка*: *неможливо побудувати таку періодично діючу теплову машину, яка, отримавши ззовні деяку кількість теплоти при довільній температурі, цілком перетворювала би її в механічну роботу і при цьому поверталась би точно у вихідний стан*.

Отже, в довільній тепловій машині перетворюється в роботу лише частина отриманої від нагрівника кількість теплоти, тобто $A = Q_1 - Q_2$. Теплота Q_2 не використовується в машині і розсіюється в навколишньому середовищі. Величина Q_2 завжди досить велика, тому коефіцієнт корисної дії теплової машини $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ завжди значно менший від одиниці.

Із формули к.к.д. теплової машини, що працює за циклом Карно,

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

випливає, що Q_2 дорівнювала би нулеві лише в тому випадку, якби температуру робочого тіла можна було би довести до температури абсолютного нуля, яку повинен мати холодильник. К.к.д. реальних теплових машин завжди менший від одиниці.

Вираз для к.к.д. теплової машини, яка працює за циклом *Карно*, теж є одним з формулювань другого закону: *коефіцієнт корисної дії ідеальної теплової машини визначається лише температурами нагрівника і холодильника*.

Кельвін сформулював другий закон термодинаміки в такому вигляді: *неможливо побудувати теплову машину, яка перетворювала би в роботу теплоту найбільш холодної з тіл, що є в системі*.

Такою машиною могла би бути машина, яка перетворювала б в роботу теплоту води в океані. Якби відніманням теплоти і перетворенням її в роботу вдалось би понизити температуру всієї океанської води лише на $0,1\text{ K}$, то можна було би приводити в рух усі машини і верстати на земній кулі упродовж 1500 років. Така машина була би еквівалентна вічному двигуну, тому її називають вічним двигуном другого роду, на відміну від вічного двигуна першого роду, який повинен створювати роботу з нічого, без затрати енергії.

Вічний двигун першого роду протирічить закону збереження енергії; вічний двигун другого роду не протирічить закону збереження енергії, але він протирічить другому закону термодинаміки.

Другий закон термодинаміки вказує на необоротність процесу перетворення однієї форми передачі енергії – роботи – у другу форму передачі енергії – теплоту. Він стверджує, що процес переходу впорядкованого руху тіла як цілого в неупорядкований рух його частинок є необоротним. Упорядкований рух може переходити в неупорядкований без будь-яких додаткових процесів, як це відбувається, наприклад, при внутрішньому терті. Перехід же неупорядкованого руху частинок у впорядкований рух тіл можливий лише при умові, що він супроводжується будь-яким компенсуючим процесом.

У тепловій машині, що працює за прямим циклом, виконується робота за рахунок підведеної від нагрівника теплоти. Але при цьому частина отриманої теплоти передається холодильнику. Отже, робота за цикл не еквівалентна до підведеної теплоти.

У холодильній машині теплота передається від холодного тіла до гарячого. Проте для здійснення такого процесу необхідний компенсуючий процес виконання роботи зовнішніми силами.

§ 43. Ентропія.

Ентропія ідеального газу

Формулу коефіцієнта корисної дії ідеальної теплової машини, що працює за циклом Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

приведемо до вигляду

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}; \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

Відношення кількості переданої теплоти до температури тепловіддавача або теплоприймача $\frac{Q}{T}$ називається *зведеною кількістю теплоти*.

Під час виконання циклу Карно приведені теплоти при процесах ізотермічного розширення і стиску однакові.

Розглянемо деякий рівноважний цикл, що здійснюється по шляху $lanbl$. Наведемо ряд нескінченно близьких адіабат, які перетинають лінії прямого a і зворотного b переходів (рис.86). Ці лінії розіб'ються на ряд нескінченно малих відрізків.

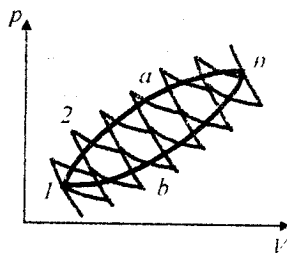


Рис. 86

Кожну з ліній a і b можна вважати такою, що складається з ряду нескінченно близьких ізотерм, на яких робоче тіло одержує від ряду нагрівників, що знаходяться при температурах T_{a1}, T_{a2}, \dots кількості теплоти $\delta Q_{a1}, \delta Q_{a2}, \dots$ і віддає ряду холодильників, що знаходяться при температурах T_{b1}, T_{b2}, \dots кількості теплоти $\delta Q_{b1}, \delta Q_{b2}, \dots$. До кожного циклу застосуємо формулу про рівність зведених кількостей теплоти:

$$\frac{\delta Q_{a1}}{T_{a1}} = \frac{\delta Q_{b1}}{T_{b1}}, \quad \frac{\delta Q_{a2}}{T_{a2}} = \frac{\delta Q_{b2}}{T_{b2}}, \dots$$

і додамо отримані вирази:

$$\sum_i \frac{\delta Q_{ai}}{T_{ai}} = \sum_i \frac{\delta Q_{bi}}{T_{bi}}$$

Звідси сума зведених кількостей теплоти не залежить від шляху переходу.

Це положення називається *теоремою* Клаузіса.

У випадку необоротної теплової машини

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

і

$$\frac{Q_1}{T_1} < \frac{Q_2}{T_2}.$$

Тоді, об'єднавши формули для оборотної і необоротної теплових машин, маємо:

$$\frac{Q_1}{T_1} \leq \frac{Q_2}{T_2} \quad \text{і} \quad \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0.$$

Умовимося кількість теплоти, яка віддана тілу нагрівником, вважати додатною, а кількість теплоти, віддану тілом холодильнику, – від'ємною. Тоді

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0,$$

причому “=” – відповідає оборотним переходам а “<” – необоротним.

В загальному вигляді $\sum \frac{Q}{T} \leq 0$.

При неперервній зміні стану тіла можна вважати, що воно входить в теплообмін з неперервним рядом нагрівників і холодильників. Кожен з цих нагрівників і холодильників віддає робочому тілу або отримує від нього нескінченно малі кількості теплоти δQ . Тоді сума $\sum \frac{\delta Q}{T} \leq 0$ перетворюється в інтеграл $\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$.

Це співвідношення називається рівністю (нерівністю) Клаузіса.

Розглянемо оборотний цикл $lanbl$ (рис.86). Запишемо рівність Клаузіса у вигляді суми двох інтегралів:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_{la}^n \frac{\delta Q}{T} + \int_{nb}^l \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Звідси,

$$\int_{la}^n \frac{\delta Q}{T} = - \int_{nb}^l \frac{\delta Q}{T} = \int_{lh}^n \frac{\delta Q}{T}.$$

Незалежність інтегралу $\int \frac{\delta Q}{T}$ від

шляху оборотного переходу між станами l і 2 означає, що цей інтеграл виражає зміну деякої функції стану тіла. Підінтегральний вираз $\frac{\delta Q}{T}$ є повним диференціалом деякої функції, яка визначається лише станом системи і не залежить від шляху, яким система прийшла в цей стан. Отже,

$$\frac{\delta Q}{T} = dS.$$

Функція стану, диференціал якої є $\frac{\delta Q}{T}$, називається *ентропією* S .

Згідно з визначенням зміна ентропії при оборотному процесі

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T},$$

де підінтегральний вираз і границі інтегрування треба виразити через величини, що характеризують досліджуваний процес. Ця формула визначає ентропію лише з точністю до адитивної сталої, тобто початок відліку ентропії довільний.

Кожний стан тіла характеризується певним значенням ентропії S , яка є повним диференціалом.

Ентропія – адитивна функція стану системи: ентропія системи дорівнює сумі ентропій всіх тіл, що входять в систему.

Розглянемо фізичний зміст ентропії.

Аналізуючи роботу машини, яка працює за циклом Карно, доходимо висновку,

що к.к.д. залежить від температури нагрівника. Наприклад, при однаковій температурі холодильників T_2 , але при різних температурах нагрівників T_1 і T'_1 , причому $T_1 > T'_1$, отримаємо

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad \eta_2 = 1 - \frac{T_2}{T'_1},$$

тобто $\eta_1 > \eta_2$.

Це означає, що при високій температурі передачі кількості теплоти робочому тілу ефективність теплової машини зростає, тобто більша кількість переданої теплоти перетворюється в роботу. З іншого боку, зміна ентропії залежить від температури. При вищій температурі нагрівника зростання ентропії буде меншим, ніж при низькій, оскільки температура входить у знаменник виразу для ентропії. Отже, більшому зростанню ентропії відповідає зменшення к.к.д. Це означає, що цінність переданої нагрівником певної кількості теплоти δQ залежить від температури. Оскільки ентропія більше зростає при низьких температурах, зрозуміло, що великому зростанню ентропії відповідає мала цінність нагрівника. Отже, ентропію можна розглядати як міру знецінення енергії тіла. Ентропія – міра теплової непрацездатності тіла.

Розглянемо цикл $lanbl$, частина якого lan необоротна, вона здійснюється нерівноважним процесом, а частина nbl оборотна, виконується рівноважним процесом. Тоді на основі $\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$,

$$\int_{lneob}^n \frac{\delta Q}{T} + \int_{noo}^l \frac{\delta Q}{T} < 0; \quad \int_{lneob}^n \frac{\delta Q}{T} < \int_{loob}^l \frac{\delta Q}{T},$$

тобто інтеграл від $\frac{dQ}{T}$ по необоротному

шляху завжди менший від інтеграла по оборотному шляху між тими ж станами.

$$\text{Але } \int_{loob}^n \frac{\delta Q}{T} = S_n - S_l; \quad \int_{lneob}^n \frac{\delta Q}{T} < S_n - S_l.$$

$$\text{При необоротному процесі } \int_{lneob}^n \frac{\delta Q}{T}$$

менший зміни ентропії в даному процесі.

$$\text{Тоді, } S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

Для оборотного рівноважного циклу

$$\text{зміна ентропії } \Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Якщо система виконує необоротний цикл, то ентропія системи, зростає: $\Delta S > 0$.

Ентропія замкненої системи може зростати, або залишатися постійною.

Оскільки реальні процеси необоротні, то всі процеси в замкненій системі ведуть до збільшення її ентропії – у цьому полягає принцип зростання ентропії. Цей принцип лежить в основі формулювання **другого закону термодинаміки**: *можливі лише такі процеси, що відбуваються в макроскопічній системі, які ведуть до збільшення її ентропії.*

Знайдемо зміну ентропії у процесах

ідеального газу. Оскільки $dU = \frac{m}{\mu} C_V dT$,

$$\delta A = p dV = \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{1 \rightarrow 2} &= S_2 - S_1 = \\ &= \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{m}{\mu} C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \\ &= \frac{m}{\mu} \left(C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right). \end{aligned}$$

Зміна ентропії $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$ ідеального газу при переході його із стану 1 у стан 2 не залежить від виду процесу переходу $1 \rightarrow 2$.

При адіабатному процесі $\delta Q = 0$ і $\Delta S \geq 0$.

Для оборотного адіабатного процесу зміна ентропії дорівнює 0, для необоротного $S_2 > S_1$ – ентропія тіла зростає.

Оборотний адіабатний процес – ізоентропічний процес.

При ізотермічному процесі $T_1 = T_2$ і

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1},$$

при ізохоричному процесі $V_1 = V_2$ і

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

§ 44. Статистичне тлумачення другого закону термодинаміки

Розглядаючи другий закон термодинаміки і висновки з нього, ми не цікавилися внутрішньою будовою тіл, а весь час користувалися термодинамічним методом дослідження. Розглянемо питання про зв'язок другого начала термодинаміки з молекулярно-кінетичною теорією будови речовини. З'ясування цього зв'язку дає змогу глибше зрозуміти фізичний зміст другого начала термодинаміки.

З молекулярно-кінетичної теорії випливає, що кожному стану тіла (наприклад, газу) відповідає певний розподіл його молекул за об'ємом і певний розподіл молекул за швидкостями.

Припустимо, що в посудині перебувають лише три "мічені" молекули газу a, b і c , які рухаються з однаковою швидкістю, а весь об'єм посудини поділено на

три рівні частини I, II, III (рис.87). Різні стани газу розрізняються лише за розподілом молекул a, b і c по трьох комірках

№ розподілу	Комірки			№ розподілу	Комірки		
	I	II	III		I	II	III
1	abc	-	-	16	c	-	ab
2	-	abc	-	17	-	c	ab
3	-	-	abc	18	b	-	ac
4	ab	c	-	19	-	b	ac
5	ab	-	c	20	a	-	bc
6	ac	b	-	21	-	a	bc
7	ac	-	b	22	a	b	c
8	bc	a	-	23	a	c	b
9	bc	-	a	24	b	a	c
10	c	ab	-	25	b	c	a
11	-	ab	c	26	c	a	b
12	b	ac	-	27	c	b	a
13	-	ac	b				
14	a	bc	-				
15	-	bc	a				

Рис. 87

об'єму. Всього можливі 27 різних розподілів. Молекули газу рухаються хаотично. Якби ми спостерігали довгий час τ за можливими розподілами молекул a, b і c , то виявили би, що в середньому всі 27 розподілів зустрічаються однаково часто. Вони рівномірні. Під ймовірністю w даного розподілу розуміють таку границю $w = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\Delta \tau}{\tau}$, де $\Delta \tau$ – частина всього часу τ спостереження за розподілом частинок у системі, протягом якого відбувається даний розподіл.

Ймовірність w кожного з 27 розподілів однакова і тому дорівнює $1/27$.

Ймовірність розподілу w , що обчислюється за рівнянням, відмінна від ймовірності термодинамічного стану системи, який відповідає цьому розподілу. Річ у тому, що в однорідному газі всі молекули однакові. Тому всі стани, що відповідають однаковим числам молекул у кожній комірці, будуть тотожними незалежно від

того, які саме молекули газу знаходяться в кожній комірці. Ймовірність стану 4.6 або 8 дорівнює $3/27$, а 22-27 – $6/27$.

Отже, ймовірність будь-якого стану тіла W більша від ймовірності w окремого розподілу в P разів $W = w \cdot P$, де P – термодинамічна ймовірність стану.

Термодинамічна ймовірність будь-якого стану тіла або системи дорівнює числу найрізноманітніших мікророзподілів частинок за координатами і швидкостями, які відповідають даному термодинамічному стану ($P \geq 1$).

Найбільшу термодинамічну ймовірність має рівномірний розподіл, вона може здійснюватися найбільшою кількістю способів.

Больцман встановив зв'язок між ентропією S системи і термодинамічною ймовірністю P її стану

$$S = k \ln P + \text{const},$$

де k – стала Больцмана. Це співвідношення називається *формулою Больцмана*. Отже, ентропія визначається логарифмом числа мікророзподілів частинок, за допомогою якого може бути реалізований даний макростан.

Ентропія може розглядатися як міра ймовірності стану термодинамічної системи. Формула Больцмана дає змогу дати ентропії таке статистичне тлумачення: *ентропія є мірою неупорядкованості системи*.

Ентропія досягає найбільшого значення при найбільш ймовірному стані системи. Найбільш ймовірним є стан термодинамічної рівноваги, в такому стані механічна система має мінімальну потенціальну енергію. Отже, максимум ентропії

відповідає стану рівноваги ізольованої системи.

Згідно із уявленнями термодинаміки процеси в замкненій системі йдуть в бік зростання ентропії до максимуму. Якщо ентропію трактувати статистично, то це означає, що процеси в замкненій системі йдуть в напрямку збільшення кількості мікростанів, доки ймовірність станів не стане максимальною.

Другий закон термодинаміки еквівалентний твердженню про неможливість зменшення ентропії ізольованої системи. Формула Больцмана дозволяє дати таке статистичне тлумачення цьому закону: *термодинамічна ймовірність стану ізольованої системи при всіх процесах, що в ній відбуваються, не може зменшуватися*.

Отже, при всякому процесі, що відбувається в ізольованій системі, зміна термодинамічної ймовірності її стану ΔP додатна або дорівнює нулю:

$$\Delta P = P_2 - P_1 \geq 0.$$

У випадку оборотного процесу $\Delta P = 0$, тобто термодинамічна ймовірність P не змінюється, а у випадку необоротного процесу $\Delta P > 0$ і P зростає.

Отже, другий закон термодинаміки є законом статистичним, тобто можливі процеси в ізольованій системі, які приводять не до збільшення, а до зменшення ентропії, не лише для явищ мікросвіту, але і для звичайних макроскопічних явищ; правда, ймовірність таких процесів в наших землях умовах дуже мала.

§ 45. Реальні гази.

Рівняння Ван-дер-Ваальса

Модель ідеального газу, яка використовується в молекулярно-кінетичній те-

орії газів, дає змогу описувати поведінку розріджених газів при достатньо високих температурах і низьких тисках. Виводячи рівняння стану ідеального газу, нехтують при цьому розмірами молекул і їх взаємодію одна з одною.

Підвищення тиску приводить до зменшення середньої відстані між молекулами, тому потрібно враховувати об'єм молекул і взаємодію між ними.

Розглядаючи реальні гази – гази, властивості яких залежать від взаємодії молекул, треба враховувати сили міжмолекулярної взаємодії. Вони проявляються на відстані $\leq 10^{-9}$ м і швидко зменшуються при збільшенні відстані між молекулами. Такі сили – короткосяжні.

Між молекулами одночасно діють сили притягання і сили відштовхування. На відстані $r = r_0$ результуюча сила $F = 0$.

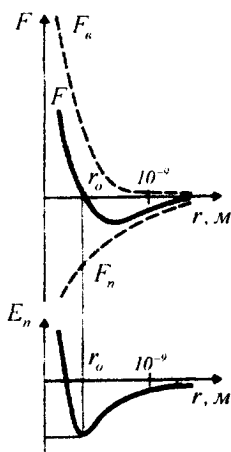


Рис. 88

Відстань r_0 відповідає рівноважній відстані між молекулами, на якій би вони знаходились за відсутності теплового руху. Якщо $r < r_0$, то переважають сили відштовхування ($F > 0$), якщо $r > r_0$ – сили притягання ($F < 0$) (рис.88).

Елементарна робота δA сили F при збільшенні відстані між молекулами на dr виконується за рахунок зменшення взаємної потенціальної енергії молекул: $\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = -dE_n$. Якщо молекули знаходяться на відстані, коли молекулярні сили

не діють ($r \rightarrow \infty$), то $E_n = 0$. При зближенні молекул появляются сили притягання, які виконують додатну роботу. Потенціальна енергія взаємодії зменшується, досягаючи мінімуму при $r = r_0$ (рис.88). Якщо $r < r_0$, то із зменшенням r сили відштовхування ($F > 0$) різко зростають і робота, яка виконується проти цих сил, від'ємна ($\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) < 0$). Потенціальна енергія також різко зростає і стає додатною. Отже, система із двох молекул, що взаємодіють між собою, у стані стійкої рівноваги ($r = r_0$) характеризується мінімальною потенціальною енергією.

Механізм співударяння молекул реальних газів не містить прямого пружного удару, як це приймалось при розгляді молекул ідеального газу. Взаємодія реальних молекул відбувається на відстані, і молекули не наближаються до дотику.

Радіус молекул більшості газів порядку 10^{-8} см, отже, об'єм молекули порядку $4 \cdot 10^{-24}$ см³. В одному см³ газу при нормальних умовах міститься $2,68 \cdot 10^{19}$ молекул. Отже, власний об'єм всіх молекул в 1 см³ при нормальних умовах $\sim 1,2 \cdot 10^{-4}$ см³, тобто $\sim 0,0001$ від об'єму, занятого газом. При тиску 500 МПа об'єм молекул становить уже половину всього об'єму газу.

Отже, для реальних газів необхідно враховувати розміри молекул і їх взаємодію одна з одною, тому модель ідеального газу і рівняння Менделєєва-Клапейрона $pV_m = RT$ (для моля газу), яке описує ідеальний газ, для реальних газів непридатне.

1. Врахування власного об'єму молекул

Наявність сил відштовхування, які протидіють проникненню в зайнятий молекулою об'єм інших молекул, зводиться до того, що фактично вільний об'єм, в якому можуть рухатись молекули реального газу, буде не V_m , а $V_m - b$, де b - об'єм, що "заборонений" для руху молекул.

Дві молекули можуть наблизитися на відстань не меншу, ніж сума їх радіусів ($d = r + r$), (рис.89).

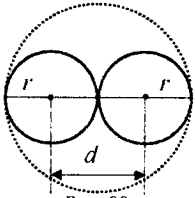


Рис. 89

Тому b пропорційна об'єму сфери, яка описана радіусом d , і кількості молекул, які співударяються:

$$b = kN_A \frac{4}{3} \pi d^3 = kN_A 8 \frac{4}{3} \pi r^3 = 8kN_A V_0,$$

де N_A - число Авогадро, V_0 - об'єм одної молекули.

Прийmemo коефіцієнт $k = \frac{1}{2}$, оскільки здебільшого одночасно співударяються дві, а не більше число молекул. Тоді,

$$b = 4N_A V_0.$$

2. Врахування притягання молекул

Дія сил притягання між молекулами реального газу приводить до появи додаткового тиску на газ, що називається *внутрішнім тиском*.

Для обчислення значення поправки p' розглянемо молярний об'єм газу V_m , в якому подумки виділимо площину - стінку, по обидві сторони якої знаходиться газ (рис. 90).

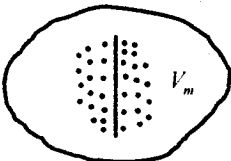


Рис. 90

Сила f , що діє в бік стінки на одну молекулу, що знаходиться перед стінкою, пропорційна до тиску n молекул в одиниці об'єму, що знаходиться за стінкою: $f = c_1 n$.

Увесь додатковий тиск p' , що діє на газ і на виділену в ньому стінку, пропорційний до сили f , що діє на одну молекулу в бік стінки, і числу молекул в одиниці об'єму перед стінкою, тобто n :

$$p' = C_2 f n = C_1 C_2 n^2.$$

Оскільки $n = \frac{N_A}{V_m}$, то

$$p' = C_1 C_2 \frac{N_A}{V_m^2} = \frac{a}{V_m^2}.$$

Рівняння стану реальних газів можна отримати, якщо в рівняння Менделєєва-Клапейрона ввести поправки, які зв'язані з врахуванням власного об'єму молекул і сил притягання молекул. Тоді рівняння стану набуде вигляду:

$$(p + p')(V_m - b) = RT.$$

Це рівняння має назву *рівняння Ван-дер-Ваальса*:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT.$$

Для довільної маси m газу

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \frac{m^2}{\mu^2} \right) \left(V - b \frac{m}{\mu} \right) = \frac{m}{\mu} RT.$$

a і b - постійні для кожного газу величини, що визначаються дослідно (записуються рівняння Ван-дер-Ваальса для двох відомих з досліду станів газу і розв'язуються відносно a і b).

Виводячи рівняння Ван-дер-Ваальса, робиться ряд спрощень, тому воно досить наближене. При малих тисках p і високих

температурах T об'єм V_m стає великим і $b \leq V_m$, $p' \leq p$ і рівняння Ван-дер-Ваальса в даному випадку збігається з рівнянням Менделєєва-Клапейрона.

§ 46. Порівняння ізоTERM Ван-дер-Ваальса з експериментальними.

Критичний стан

Для дослідження поведінки одного моля реального газу розглянемо ізоТЕРми Ван-дер-Ваальса, які визначаються рівнянням:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT.$$

Перетворимо це рівняння у вигляд:

$$pV_m - pb + \frac{a}{V_m} - \frac{ab}{V_m^2} = RT$$

$$i \quad pV_m^3 - (RT + pb)V_m^2 + aV_m - ab = 0.$$

Отримане рівняння є алгебраїчним рівнянням третього ступеня відносно молекулярного об'єму. Коефіцієнти рівняння залежать від тиску, температури і хімічної природи газу. Залежно від числових значень p і T для даного газу це рівняння може мати або три дійсні корені або один дійсний і два уявні, причому фізичний зміст мають лише дійсні додатні корені.

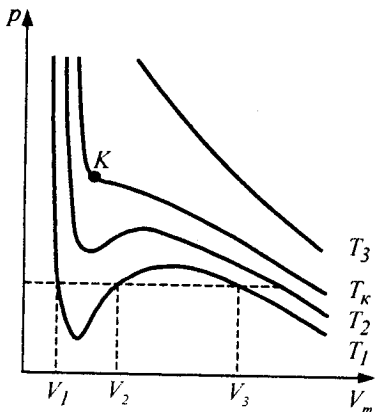


Рис. 91

ІзоТЕРми газу, які описуються рівнянням Ван-дер-Ваальса, мають вигляд, наведений на рис.91, де $T_1 < T_2 < T_k < T_3$.

При температурах $T < T_k$ є область станів, де кожному значенню тиску відповідають три точки ізоТЕРми й ізоТЕРма має хвилястоподібну ділянку. При підвищенні температури ці три точки зближуються і при $T = T_k$ зливаються в одну точку K ,

яка є точкою перегину ізоТЕРми при $T = T_k$. Дотична до ізоТЕРми в точці K паралельна осі абсцис. При температурах $T > T_k$ ізоТЕРми Ван-дер-Ваальса близькі до ізоТЕРми ідеального газу.

Розглянемо ізоТЕРму при $T > T_k$ (рис.92). На ділянках 1-3 і 5-7 при зме-

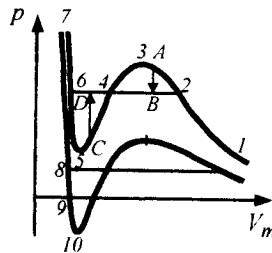


Рис. 92

нненні об'єму V зростає тиск p , що відповідає експерименту. Частина ізоТЕРми 1-2 відповідає газоподібному стану, а частина 6-7 - рідині.

На ділянці 3-5 стискування речовини приводить до зменшення тиску p . У природі немає і не може бути таких речовин, в яких із збільшенням тиску p об'єм не зменшується, а зростає. Стан речовини з такими властивостями повинен бути дуже нестійким. Справді, уявимо собі, що такий стан якось реалізовано і нехай в якійсь частині такої речовини з випадкових причин як завгодно мало збільшився тиск. Такі ви-

падкові невеликі зміни не тільки можливі, а й неминучі (флюктуації). Тоді це збільшення тиску повинно викликати збільшення об'єму, яке у свою чергу спричинить ще значніше збільшення тиску і т.д., доки речовина не перейде до стану, що відповідає точці Z , починаючи з якого, залежність об'єму від тиску стає якісно нормальною.

Як завгодно мале випадкове зменшення тиску p викликає довільний перехід речовини до стану, якому відповідає точка 5 .

Істинна ізотерма матиме вигляд ламаної лінії $1-2-6-7$.

У станах, що відповідають горизонтальній ділянці $2-6$, спостерігається рівновага рідкої і газоподібної фази речовини.

Речовина в газоподібному стані при $T < T_k$ називається парою, а пара, що знаходиться в рівновазі зі своєю рідиною, називається *насиченою*.

Речовина, стани якої відповідають точкам частини $2-3$ кривої, перебуває в газоподібному стані, тому що частина $2-3$ є продовженням гілки $1-2$. Але тиск пари в будь-якому з цих станів вищий за пружність насиченої пари при тій самій температурі, а це протиприродно.

Цей стан $2-3$ речовини спостерігається при швидкому охолодженні закритої посудини з повітрям, що містить у собі водяну пару. Треба ретельно очистити повітря від слідів пилу і щоб у ньому не було електричних зарядів. У цих умовах, незважаючи на охолодження, а отже, і зменшення тиску насиченої водяної пари, вона досить довгий час не конденсується, залишаючись в газоподібному стані. Така пара називається *перенасиченою*. Стан $2-3$ є

нестійкий: достатньо, наприклад, в стані A попадання пилінки в пару, щоб вся речовина розпалась на дві фази і перейшла в стан B на прямій $2-4-6$. Стан $2-3$ називається *метастабільним*.

Точки на частині ізотерми $6-5$ відповідають стану рідини, тому, що частина $6-5$ є продовженням гілки $7-6$. Цей стан речовини називають *перегрітою рідиною*. Це рідина, яка зберігається при тисках менших, ніж тиск насиченої пари за даної температури. Стан перегрітої рідини досягається так. Береться дуже чиста рідина без домішок і мікроскопічних бульбашок повітря в об'ємі, що займає рідина. Це досягається тривалим кипінням рідини. Якщо приготовлену таким чином рідину нагрівати, то при досягненні умов переходу від рідкого стану в газоподібний такий перехід не спостерігається. Параметри речовини T, p відповідають його знаходженню в газоподібному стані, але він існує у вигляді рідини. Якщо в перегріту рідину кинути піщинку, то відбувається швидкий перехід певної частини рідини із рідкого стану в газоподібний по всьому об'єму, який супроводжується бурхливим кипінням рідини. Тиск газу над рідиною зростає до тиску, що відповідає ділянці $2-4-6$ (перехід $C \rightarrow D$ на рис.92). Стан $6-5$ – *метастабільний*.

При досить низьких температурах нижня частина ізотерми Ван-дер-Ваальса перетинає вісь V і переходить в область від'ємних тисків. Речовина при від'ємному тиску знаходиться у стані не стиску, а розтягу. Ділянка $8-9$ на нижній ізотермі (рис.92) відповідає перегрітій, а ділянка $9-10$ – *розтягнутій рідині*.

З рівняння стану Ван-дер-Ваальса не можна визначити положення горизонтальної частини дослідної кривої відносно максимуму і мінімуму кривої Ван-дер-Ваальса (рис.93). Це означає, що не можна визна-

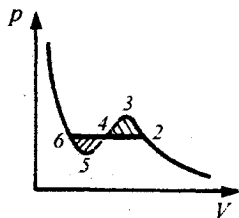


Рис. 93

чити величину рівноважного тиску насиченої пари при даній температурі. Як показав Максвелл, якщо уявити собі перехід від

стану 6 до стану 2, то незалежно від того, як він відбувається, по однофазній кривій 6-5-4-3-2, чи по двофазній прямій 6-4-2, він повинен супроводжуватися однією і тією ж роботою. Площа під кривою 6-5-4-3-2 повинна дорівнювати площі під прямою 6-4-2, оскільки робота на діаграмі pV дорівнює площі під відповідними діаграмами. Звідси, пряма розташована так, щоб площі заштрихованих областей дорівнювали одна одній.

Висновки, які отримуємо з аналізу рівняння Ван-дер-Ваальса були підтвержені дослідями Ендрюса, що вивчав ізотермічне стискання вуглекислого газу. Отримані результати з експериментальних (Ендрюс) і теоретичних (Ван-дер-Ваальса) ізотерм відрізняються лише тим, що перетворенню газу в рідину в першому випадку відповідають горизонтальні ділянки, а у другому – хвилеподібні.

Незважаючи на те, що рівняння Ван-дер-Ваальса правильно описує основні явища, пов'язані зі зміною густини газів при зміні тиску p і об'єму V і взаємні переходи рідини і газу, також і важливі відступи від цього рівняння. Це стосується

передусім кількісного порівняння теорії з дослідом.

Насамперед, a і b є не зовсім сталі величини, як показують досліди, а вони залежать від температури.

Можна підібрати a і b так, щоб при якійсь температурі T теоретична і дослідна ізотерми зійшлися. Але тоді ізотерми для інших температур не збігатимуться.

При підвищенні температури серед ізотерм з хвилеподібними ділянками є одна, що не має таких ділянок. Така ізотерма називається *критичною*, а температура T_k – критичною. При цій температурі зникає різниця між різними станами речовини і коефіцієнт поверхневого натягу дорівнює нулю. Відповідні T_k об'єм V_k і тиск p_k називаються *критичними*. Стан з критичними параметрами p_k, V_k, T_k називається *критичним станом*.

Знайдемо критичні параметри. Якщо $p = p_k$ і $T = T_k$ ($V = V_m$)

$$p_k V^3 - (RT_k + p_k b)V^2 + aV - ab = 0.$$

При $T = T_k$ всі три корені збігаються і дорівнюють V_k . Отже, рівняння Ван-дер-Ваальса може бути записане у вигляді:

$$p_k (V - V_k)^3 = 0,$$

або

$$p_k V^3 - 3p_k V_k V^2 + 3p_k V_k^2 V - p_k V_k^3 = 0.$$

Отримані вище два вирази рівняння Ван-дер-Ваальса тотожні і в них повинні бути рівні коефіцієнти при однакових степенях.

Тому

$$3p_k V_k = RT_k + p_k b,$$

$$3p_k V_k^2 = a,$$

$$p_k V_k^3 = ab.$$

Поділивши третє рівняння на друге, отримуємо вираз для V_k . Якщо підставити отриманий вираз для V_k у третє рівняння, маємо вираз для p_k . Тоді з першого рівняння, враховуючи вирази для p_k і V_k , отримуємо співвідношення для T_k . В результаті

$$V_k = 3b, \quad p_k = \frac{a}{27b^2}, \quad T_k = \frac{8a}{27Rb}.$$

Отже, критичні величини T_k , V_k , p_k безпосередньо виражаються через Ван-дер-Ваальсівські поправки a і b .

Зникнення відмінності між рідким і газоподібним станами рідини в критичній точці можна продемонструвати на такому досліді. В запаяну скляну ампулу вміщено рідкий ефір ($t_k^0 = 194^\circ\text{C}$). Між рідкою і газоподібною фазами ефіру в ампулі видно різку межу поділу. Нагрівання ампули приводить до зростання температури і тиску пари ефіру, до зменшення сил поверхневого натягу і зникнення кривини меніска. При досягненні критичного стану зникає межа між рідиною і парою. Якщо нагріти ефір в ампулі до температури вищої, ніж критична, а потім охолодити, то в момент проходження через критичну температуру виникає раптове помутніння вмісту ампули. Після того знову виникає різка межа поділу між рідиною і парою.

Якщо через крайні точки горизонтальних ділянок сімейства Ван-дер-Ваальсівських ізотерм провести лінії, то одержимо криву, що обмежує область двофазних станів речовини (рис.94).

Пара відрізняється від інших газоподібних станів тим, що при ізотермічному зстиску відбувається процес зрідження.

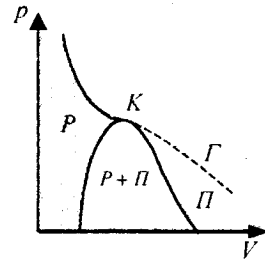


Рис. 94

Газ, який знаходиться в стані при температурі, що вища за критичну, не може бути перетворений в рідину ні при якому тиску.

Рівняння Ван-дер-Ваальса має той недолік, що воно змінюється від речовини до речовини, оскільки до нього належать параметри a і b , які залежать від природи речовини. Але a і b і R можна виключити, виразивши їх через критичні параметри:

$$R = \frac{8}{3} \frac{p_k V_k}{T_k}, \quad b = \frac{1}{3} V_k, \quad a = 27b^2 p_k = 3p_k V_k^2.$$

Тоді рівняння Ван-дер-Ваальса

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2} \text{ набуває вигляду:}$$

$$p = \frac{8}{3} \frac{p_k V_k}{T_k} \frac{T}{V_m - \frac{1}{3} V_k} - \frac{3p_k V_k^2}{V_m^2},$$

$$\text{або} \quad \frac{p}{p_k} = 8 \frac{T}{T_k} \frac{V_k}{3V_m - V_k} - 3 \frac{V_k^2}{V_m^2},$$

Звідси

$$\frac{p}{p_k} + 3 \frac{V_k^2}{V_m^2} = 8 \frac{T}{T_k} \frac{1}{3 \frac{V_m}{V_k} - 1},$$

або

$$\left[\frac{p}{p_k} + 3 \left(\frac{V_k}{V_m} \right)^2 \right] \left(3 \frac{V_m}{V_k} - 1 \right) = 8 \frac{T}{T_k}.$$

Введемо зведені параметри, під якими розуміємо відношення змінної величини

ни даного параметра до його критичного значення, а саме:

$$\theta = \frac{T}{T_k} - \text{зведена температура,}$$

$$\pi = \frac{p}{p_k} - \text{зведений тиск,}$$

$$\omega = \frac{V_m}{V_k} - \text{зведений об'єм.}$$

В результаті отримуємо *зведене рівняння Ван-дер-Ваальса*

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\theta.$$

§ 47. Внутрішня енергія реального газу

Внутрішня енергія реального газу дорівнює кінетичній енергії E_k теплового руху його молекул і потенціальної енергії E_n міжмолекулярної взаємодії. Потенціальна енергія реального газу обумовлена лише силами притягання між молекулами, які приводять до виникнення внутрішнього тиску на газ

$$p' = \frac{a}{V_m^2}.$$

Робота, яка затрачається для подолання сил притягання, що діють між молекулами газу, або проти внутрішнього тиску, йде на збільшення потенціальної енергії системи:

$$dA = p'dV_m = dE_n, \text{ або } \int dE_n = \int \frac{a}{V_m^2} dV_m.$$

Звідси

$$E_n = -\frac{a}{V_m}.$$

Знак “-” означає, що молекулярні сили, які створюють внутрішній тиск p' , є силами притягання.

З достатнім ступенем точності можна вважати, що кінетична енергія E_k для од-

ного моля реального газу дорівнює кінетичній енергії ідеального газу, що перебуває при тій самій температурі. Внутрішня енергія U_{io} ідеального газу дорівнює тільки кінетичній енергії хаотичного руху молекул. Тому

$$E_k = U_{io} = \int_0^T dU_{io} = \int_0^T C_V dT = C_V T.$$

Тоді внутрішня енергія одного моля реального газу:

$$U_m = C_V T - \frac{a}{V_m}$$

і вона росте із збільшенням температури та об'єму газу.

Якщо газ розширюється без теплообміну з навколишнім середовищем ($\delta Q = 0$) і не виконує зовнішньої роботи ($\delta A = 0$), то на основі першого начала термодинаміки $\delta Q = ((U_2 - U_1) + \delta A)$, отримуємо, що $U_1 = U_2$.

При адіабатному розширенні без виконання зовнішньої роботи внутрішня енергія газу не міняється.

Для ідеального газу $U_1 = U_2$ означає рівність температур ($T_1 = T_2$), тобто при адіабатному розширенні ідеального газу у вакуумі його температура не міняється.

Для реального газу:

$$U_1 = C_V T_1 - \frac{a}{V_1} \text{ і } U_2 = C_V T_2 - \frac{a}{V_2}.$$

З умови $U_1 = U_2$ отримуємо

$$T_1 - T_2 = \frac{a}{C_V} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

Оскільки $V_2 > V_1$, то $T_1 > T_2$, тобто реальний газ при адіабатному розширенні у вакуум охолоджується. При адіабатному стиску реальний газ нагріватиметься.

III. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

§48. Закон збереження електричного заряду. Електричне поле. Напруженість електричного поля.

Електростатика – це розділ фізики, в якому розглядають взаємодії і властивості електричних зарядів, нерухомих в тій системі координат, в якій ці заряди вивчають.

У природі існує два види електричних зарядів – *позитивні і негативні*. Домовились вважати позитивним заряд, що виникає, наприклад, на склі, яке натирають шовком, а негативним – на бурштині, який натирають хутром. Одноіменно заряджені тіла відштовхуються одне від одного, а різноіменно заряджені притягуються. Знак заряду, який виникає на тілі внаслідок електризації тертям, залежить не тільки від хімічного складу цього тіла, а й від того, з яким іншим тілом воно стикається при терті.

При електризації тіл тертям завжди одночасно електризуються *обидва тіла*, причому одне з них дістає позитивний заряд, а друге – негативний. Позитивний заряд першого тіла за величиною завжди точно дорівнює негативному заряду другого, якщо до електризації обидва тіла не були заряджені. Численними експериментами було встановлено **закон збереження електричних зарядів**: *в ізольованій системі повна алгебраїчна сума електричних зарядів залишається незмінною. Заряди можуть лише передаватись від одного тіла даної системи до іншого або зміщуватись всередині даного тіла.*

Електричні заряди можуть зникати і виникати знову, але завжди зникають або виникають два електричні заряди протилежних знаків.

1909 року американський вчений Р.Мілікен встановив кратність електричного заряду деякому елементарному заряду e
 $q = \pm n \cdot e$, де $n=1,2,3\dots$

Було виявлено, що цей елементарний заряд має величину $1,6 \cdot 10^{-19}$ кулона.

За одиницю електричного заряду в системі СІ беруть заряд, що проходить за одну секунду через поперечний переріз провідника, струм у якому постійний і дорівнює 1 амперу.

В 1785 році французький вчений Ш.Кулон експериментально за допомогою крутильних терезів встановив основний закон взаємодії нерухомих точкових електричних зарядів.

Точковим називається заряд, який зосереджений на тілі, лінійні розміри якого малі порівняно з відстанню до інших заряджених тіл, з якими він взаємодіє.

Закон Кулона: *сила електростатичної взаємодії між двома точковими електричними зарядами у вакуумі прямо пропорційна до добутку величин зарядів і обернено пропорційна до квадрата відстані між ними.*

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2},$$

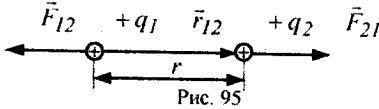
де k – коефіцієнт пропорційності ($k > 0$).

Сили, які діють на заряди, є **центральними**, тобто вони напрямлені вздовж прямої, що з'єднує заряди. Для однойменних зарядів сила $F > 0$ відповідає випадку взаємного відштовхування однойменних зарядів, а сила $F < 0$ – взаємного притягання різнойменних зарядів.

Закон Кулона можна записати у векторній формі. Якщо \vec{r}_{12} – радіус-

вектор, що сполучає заряд q_1 із зарядом q_2 (рис.95) і $|\vec{r}_{12}| = r$, тоді

$$\vec{F}_{12} = -k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}_{12}, \quad \vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}_{12}.$$



У системі СІ для зарядів у вакуумі коефіцієнт k у формулі закону Кулона беруть таким, що дорівнює

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

де $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$ – електрична стала.

Множник 4π у виразі $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ відбиває сферичну симетрію електростатичного поля точкового заряду, оскільки величина 4π числово дорівнює повному тілесному куту в стерadiansах.

Електричне поле – це специфічний вид матерії, який існує навколо електричних зарядів і за допомогою якого передається електрична взаємодія. Воно проявляє себе в тому, що поміщений в нього електричний заряд виявляється під дією сили. Досліди показують, що ця сила, при інших однакових умовах, пропорційна до величини заряду. Тому ця сила не може бути характеристикою самого поля.

Але величина, яка дорівнює відношенню $\frac{F}{q_{np}} = const$, може служити *силовою характеристикою поля.*

Векторна величина

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{np}}$$

називається *напруженістю електричного поля.*

Напруженість електричного поля числово дорівнює силі, що діє на одиничний позитивний пробний заряд в даній точці поля. За напрямком вектора напруженості \vec{E} беруть напрямок сили, з якою поле діє на пробний позитивний заряд, вміщений у певну точку поля (рис.96).

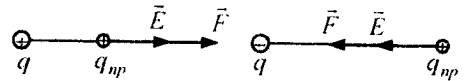


Рис.96

У системі СІ одиниця напруженості електричного поля 1 Н/м – це напруженість такого поля, яке на точковий заряд 1 Кл діє з силою 1 Н .

Електричні поля зображують за допомогою *ліній напруженості*, які проводять так, щоб дотичні до цих ліній в кожній точці збігалися з напрямками вектора \vec{E} (рис.97). Лінії напруженості мають по-

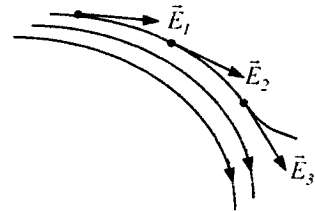


Рис.97

чаток і кінець або йдуть у нескінченність, вони напрямлені від позитивного заряду до негативного, тобто виходять з позитивного заряду, а входять у негативний заряд. Лінії напруженості ніколи не перетинаються. Ці лінії проводять з такою густиною, щоб

кількість ліній, які пронизують одиничну площу, перпендикулярну до вектора напруженості, число дорівнювала величині напруженості електричного поля в місці розміщення площини. Приклади графічного зображення електричних полів за допомогою ліній напруженості показано на рис.98.

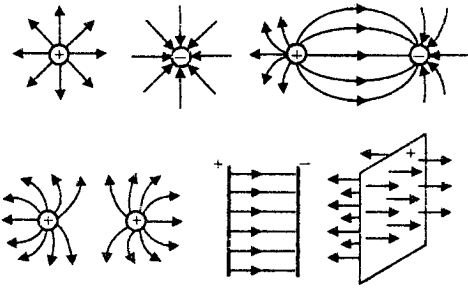


Рис.98

Поле, у всіх точках якого величина і напрямок вектора напруженості незмінні, називається *однорідним*. Однорідне поле зображують паралельними лініями напруженості, що мають однакову густину.

Якщо поле створено системою N нерухомих зарядів, то результуюча сила, яка діє на пробний заряд зі сторони системи зарядів, дорівнює векторній сумі сил, з якими окремі заряди діють на пробний.

Звідси випливає:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n.$$

Напруженість поля системи точкових зарядів дорівнює векторній сумі напруженостей полів, які створював би кожний із зарядів системи зокрема:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{np}} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i}{q_{np}} = \frac{\vec{F}_1}{q_{np}} + \dots + \frac{\vec{F}_N}{q_{np}},$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N.$$

Це твердження називають *принципом незалежності дії* електричних полів, або *принципом суперпозиції полів*.

Виходячи із закону Кулона, напруженість поля точкового заряду у вакуумі на відстані r від заряду становить:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}_{12}.$$

Звідси видно, що поле точкового заряду – центрально симетричне.

Принцип суперпозиції дає можливість обчислювати напруженість поля будь-якої системи зарядів. Подумки поділяючи, наприклад, заряджене тіло скінчених розмірів на точкові заряди, знаходимо складові напруженості в певній точці, створені окремими елементами зарядженого тіла. Потім згідно з принципом суперпозиції визначаємо результуючу напруженість.

Електричним диполем називається

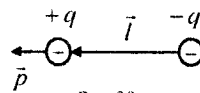


Рис.99

система з двох однакових за величиною і протилежних за знаком електричних зарядів $+q$ і $-q$.

відстань l між якими мала порівняно з відстанню до точок поля, які розглядаються (рис.99).

Плечем диполя називається вектор \vec{l} , напрямлений вздовж осі диполя від негативного заряду до позитивного; він числово дорівнює відстані між ними. Добуток позитивного заряду диполя q на плече \vec{l} називається електричним моментом диполя:

$$\vec{p} = q\vec{l}.$$

Вектор \vec{p} за напрямком збігається з плечем диполя \vec{l} .

**§49. Потенціал електричного поля.
Напруженість як градієнт потенціалу**

Розглянемо поле, яке створюється нерухомим точковим зарядом q у вакуумі (рис.100). Нехай в електростатичному полі

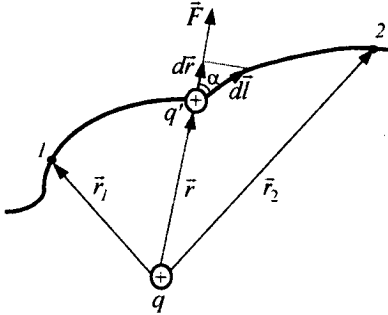


Рис.100

заряду q вздовж довільної траєкторії з точки 1 в точку 2 переміщується інший точковий заряд q' під дією сили. Робота сили \vec{F} на елементарному переміщенні $d\vec{l}$ дорівнює:

$$dA = F dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qq' \frac{dr}{r^2}$$

Робота при переміщенні заряду q' з точки 1 в точку 2 дорівнює:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qq'}{r_1} - \frac{qq'}{r_2} \right)$$

Ця робота не залежить від траєкторії переміщення, а визначається лише початковим (1) і кінцевим (2) положенням заряду. Отже, *електростатичне поле* точкового заряду є *потенціальним*, а електростатичні сили – консервативними.

Оскільки робота консервативних сил виконується за рахунок зменшення потенціальної енергії, то

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r_2} = W_1 - W_2$$

Отже, потенціальна енергія заряду q' в полі заряду q у вакуумі дорівнює:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r} + C$$

Домовимось вважати потенціальну енергію заряду q' такою, що дорівнює нулю на нескінченно великій відстані від q . При $r \rightarrow \infty$ $W = 0$ і $C = 0$. Тому потенціальна енергія заряду q' , що перебуває на відстані r від точкового заряду q , дорівнює

$$W = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Якщо заряди q' та q однойменні, то

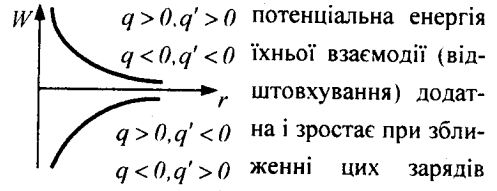


Рис.101

(рис.101). У випадку взаємного притягання різнойменних зарядів потенціальна енергія їхньої взаємодії від'ємна і зменшується при наближенні одного із зарядів до другого.

Потенціальна енергія W заряду q' , що перебуває в полі точкових зарядів q_1, q_2, \dots, q_n , дорівнює сумі його потенціальних енергій W у полях, що створюються кожним зарядом зокрема:

$$W = \sum_{i=1}^n W_i = q' \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

де r_i – відстань від заряду q_i до заряду q' .

Величина $\phi = \frac{W}{q'}$ однакова для всіх зарядів в даній точці поля, називається *потенціалом поля*.

Потенціалом φ будь-якої точки електростатичного поля називають фізичну величину, яка числово дорівнює потенціальній енергії одиничного позитивного заряду, поміщеного в цю точку.

Одиниця потенціалу – вольт. $1В$ – це потенціал такої точки поля, в якій заряд в $1Кл$ володіє потенціальною енергією в $1Дж$.

Потенціал поля, створеного одним точковим зарядом q у вакуумі, дорівнює:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Роботу, яку виконують електростатичні сили при переміщенні заряду q' від точки 1 до точки 2 електростатичного поля, можна записати так:

$$A = W_1 - W_2 = q'(\varphi_1 - \varphi_2),$$

де φ_1 та φ_2 – потенціали поля в точках 1 та 2.

Якщо заряд q' з точки з потенціалом φ_1 віддаляється в нескінченність ($\varphi_2 = 0$), тоді робота сили поля буде дорівнювати $A_x = q'\varphi_1$. Звідси

$$\varphi_1 = \frac{A_x}{q'}$$

Потенціал даної точки електростатичного поля – це така фізична величина, яка числово дорівнює роботі, яку виконують зовнішні сили (проти сил електростатичного поля) при переміщенні одиничного позитивного заряду з нескінченності в дану точку поля.

Потенціал поля, яке створюється системою зарядів, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, створених кожним із зарядів зокрема:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

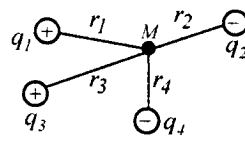


Рис.102

Наприклад, потенціал поля в точці M (рис.102), яке створене зарядами q_1, q_2, q_3, q_4 дорівнює

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} - \frac{q_4}{r_4} \right)$$

Нехай маємо заряд q в електростатичному полі. Перемішаючи його в просторі, електричне поле виконає деяку роботу (розглядаємо для простоти переміщення вздовж осі X (рис.103)).

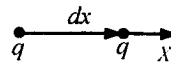


Рис. 103

Величина цієї роботи визначається за формулою

$$dA = F dx = qE_x dx.$$

З іншого боку, робота при переміщенні заряду q в електростатичному полі виражається через потенціали цього поля $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$. Отже, елементарна робота становитиме:

$$dA = -q d\varphi.$$

Тоді, прирівнявши елементарні роботи, дістанемо:

$$E_x dx = -d\varphi, \quad E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Знак “-” означає, що під дією сил електричного поля заряд переміщується в бік зменшення потенціалу.

Аналогічні міркування можна поширити і на напрямки перемішень вздовж осей Y і Z .

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Отже, ми знайшли E_x, E_y та E_z – компоненти вектора напруженості E :

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}.$$

Це рівняння можна переписати так:

$$\vec{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

У векторному аналізі градієнтом скалярної величини φ називається така векторна величина, для якої справедливий запис:

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

Отже,

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi.$$

Знак "-" вказує на те, що вектор \vec{E} напрямлений в бік найшвидшого зменшення потенціалу. Напруженість в якій-небудь точці електростатичного поля дорівнює градієнту потенціалу в цій точці, взятому з оберненим знаком.

Знаючи потенціал φ в кожній точці поля, за формулою $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ можемо обчислити напруженість в кожній точці поля. Можна розв'язати і обернену задачу, тобто знаючи напруженість поля в кожній точці поля, можна знайти різницю потенціалів між двома довільними точками.

Робота із переміщення заряду з точки 1 в 2 дорівнює:

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{l}) = \int_1^2 q(\vec{E} \cdot d\vec{l}),$$

але, з іншого боку,

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Звідси
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E} \cdot d\vec{l}).$$

Інтеграл можна брати довільним шляхом, який з'єднує точки 1 та 2, оскільки електростатичне поле є консервативне.

При обході по замкненому контуру заряд потрапляє в кінцеву точку поля, яка збігається з початковою і $\varphi_2 = \varphi_1$, отже

$$\oint_1 (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = 0.$$

Цей інтеграл називають циркуляцією вектора напруженості вздовж замкненого контура.

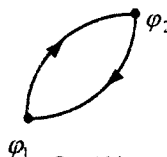


Рис.104

Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля вздовж замкненого контура дорівнює нулю (рис.104).

Векторне поле \vec{E} називається потенціальним, якщо циркуляція вектора \vec{E} по довільному замкненому контуру дорівнює нулю.

Геометричне місце точок з однаковим потенціалом називається еквіпотенціальною поверхнею. Для еквіпотенціальних поверхонь:

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}.$$

При переміщенні по еквіпотенціальній поверхні на відрізок dl потенціал не змінюється, а, отже, і робота

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

З іншого боку, на еквіпотенціальній поверхні $A_{12} = \int_1^2 q(\vec{E} \cdot d\vec{l}) = 0.$

Тобто
$$\int_1^2 q(\vec{E} \cdot d\vec{l}) = q \int_1^2 E dl \cos(\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

Звідси
$$E dl \cos(\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

Оскільки $E \neq 0; dl \neq 0$, то $\cos(\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$

В результаті кут між E та dl дорівнює $\frac{\pi}{2}.$

Вектор \vec{E} напруженості електростатичного поля в кожній точці напрямлений перпендикулярно до еквіпотенціальної поверхні.

Еквіпотенціальні поверхні точкового заряду – це сферичні оболонки навколо нього (рис. 105) ($\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3 > \varphi_4$).

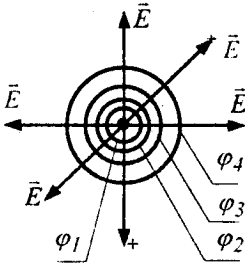


Рис.105

**§50. Потік вектора напруженості.
Теорема Остроградського-Гаусса**

Основне завдання електростатики полягає в тому, щоб за заданим розподілом у просторі і величиною електричних зарядів знайти величину і напрямку вектора напруженості \vec{E} в кожній точці поля. Використання принципу суперпозиції для обрахунку електричних полів пов'язано із значними математичними труднощами. Значно простіший метод розрахунку полів ґрунтується на використанні теореми Остроградського-Гаусса.

Нехай в однорідному електричному полі ($\vec{E} = const$) проведена довільна площина dS . Одиничний вектор \vec{n} нормалі до площини складає з вектором \vec{E} кут α (рис.106).

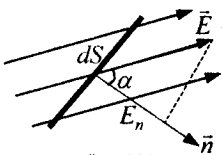


Рис.106

Потоком вектора напруженості будемо називати величину

$$d\Phi_E = E dS \cos \alpha$$

або
$$d\Phi_E = E_n dS = (\vec{E} \cdot d\vec{S})$$

де E_n – проекція вектора \vec{E} на напрямку вектора нормалі, а вектор $d\vec{S} = dS \vec{n}$.

Повний потік вектора напруженості через довільну поверхню S буде

$$\Phi_E = \int_S E_n dS = \int_S E \cos \alpha dS.$$

Знак потоку залежить від вибору напрямку нормалі. Для замкнених поверхонь нормаль, яка виходить назовні, приймається за додатну. Тоді там, де вектор \vec{E} напрямлений назовні, E_n та Φ_E додатні, а коли \vec{E} входить в середину поверхні, E_n та Φ_E від'ємні (рис.107).

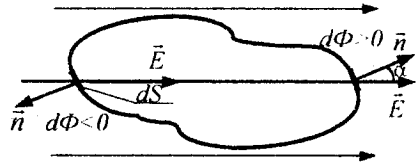


Рис.107

Для замкнених поверхонь

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}).$$

Нехай навколо точкового заряду $+q$, який знаходиться у вакуумі, описано довільну замкнену поверхню S (рис.108).

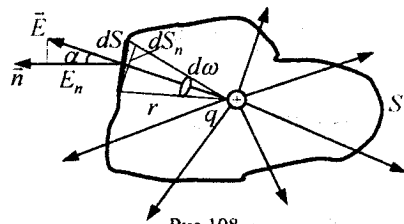


Рис.108

Лінії напруженості виходять з цієї поверхні. Виділимо довільну елементарну площадку dS , нормаль \vec{n} до якої складає кут α з вектором \vec{E} . Спроектуємо елемент dS поверхні S на поверхню радіуса r з центром в місці знаходження заряду q . Тоді $dS_n = dS \cos \alpha$. Елементарний потік

$$\begin{aligned} d\Phi_E &= E \cos \alpha dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS_n = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 d\omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega, \end{aligned}$$

а $d\omega$ – тілесний кут, під яким елементарну площадку dS видно з точкового заряду q .

Провівши інтегрування по куту, отримуємо

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \int_0^{4\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Якщо всередині замкненої поверхні буде негативний заряд, то кут між нормаллю і вектором \vec{E} буде тупий (лінії напруженості входять всередину замкненої поверхні). Отже, $\cos\alpha < 0$. Тоді $d\Phi_E < 0$. Це означає, що потік через замкнену поверхню $\Phi_E < 0$ і $\Phi_E = -\frac{q}{\epsilon_0}$.

Нехай всередині замкненої поверхні S буде N позитивних і негативних зарядів (рис.109). За принципом суперпозиції напруженість \vec{E} поля, що створюється всіма зарядами, дорівнює сумі напруже-

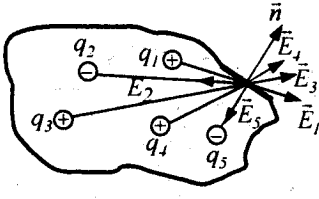


Рис.109

ностей \vec{E}_i , що створюється кожним зарядом зокрема і $\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i$. Тому проекція вектора \vec{E} на напрямок нормалі до площадки dS дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій всіх векторів \vec{E}_i на цей напрямок:

$$E_n = \sum_{i=1}^N E_{in}.$$

Потік вектора напруженості результуючого поля через довільну замкнену по-

верхню S , що охоплює заряди q_1, q_2, \dots, q_n , дорівнює

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \left(\sum_{i=1}^n E_{in} \right) dS = \sum_{i=1}^n \oint_S E_{in} dS.$$

Оскільки $\oint_S E_{in} dS = \frac{q_i}{\epsilon_0}$, то

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i.$$

Отже, потік вектора напруженості у вакуумі через довільну замкнену поверхню, яка охоплює електричні заряди, дорівнює алгебраїчній сумі цих зарядів, поділений на електричну сталу ϵ_0 .

Це твердження називається *теоремою Остроградського-Гаусса*.

Наприклад, для системи зарядів, які наведені на рис.109, потік напруженості

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} (q_1 - q_2 + q_3 + q_4 - q_5).$$

Якщо замкнена поверхня S не охоплює заряд q (рис.110), то дотична до

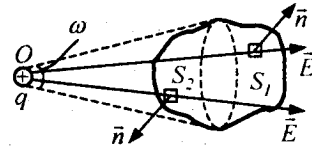


Рис.110

поверхні S конічна поверхня з вершиною у точці O поділяє поверхню S на дві частини: S_1 і S_2 . Потік напруженості через поверхню S дорівнює сумі потоків:

$$\Phi_E = \Phi_{E_1} + \Phi_{E_2}.$$

Потоки Φ_{E_1} і Φ_{E_2} дорівнюють один одному за абсолютною величиною, тому що поверхні S_1 і S_2 видно з точки O під тим самим тілесним кутом ω . Оскільки для всіх елементів поверхні S_1 кути між век-

торами \vec{E} і зовнішніми нормальми \vec{n} гострі, а для поверхні S_2 ці кути тупі, то

$$\Phi_{E_1} = \int_{S_1} E \cos(\vec{E}, \vec{n}) dS > 0,$$

$$\Phi_{E_2} = \int_{S_2} E \cos(\vec{E}, \vec{n}) dS < 0.$$

Тому сумарний потік через поверхню S

$$\Phi_E = \Phi_{E_1} + \Phi_{E_2} = 0.$$

Нехай заряд q знаходиться всередині замкненої поверхні S і лінії напруженості перетинають цю поверхню кілька разів (рис.111). Елементарний потік напру-

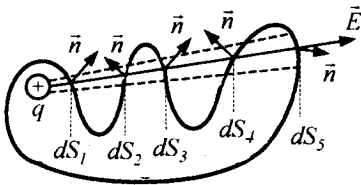


Рис.111

женості через площадки dS_1, \dots, dS_5 дорівнює

$$\begin{aligned} d\Phi_E &= d\Phi_{E_1} + d\Phi_{E_2} + d\Phi_{E_3} + \\ &+ d\Phi_{E_4} + d\Phi_{E_5} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega + \\ &+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega + \\ &+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega. \end{aligned}$$

Отже, непарне число перетинів при обчисленні потоку напруженості зводиться до одного перетину.

§51. Застосування теореми

Остроградського-Гаусса до розрахунку електричних полів.

За допомогою теореми Остроградського-Гаусса набагато простіше, ніж за формулами для напруженості \vec{E} точкового

заряду та принципу суперпозиції, знаходити напруженість електричних полів.

Розглянемо декілька прикладів.

1. Електростатичне поле у вакуумі нескінченної зарядженої площини.

Введемо поняття поверхневої густини заряду: $\sigma = \frac{dq}{dS}$ – це фізична величина, яка числово дорівнює заряду dq на одиничній поверхні, по якій він неперервно розподілений.

Нехай площина P заряджена рівномірно з поверхневою густиною заряду $+\sigma$ (рис.112). Для визначення напруженості

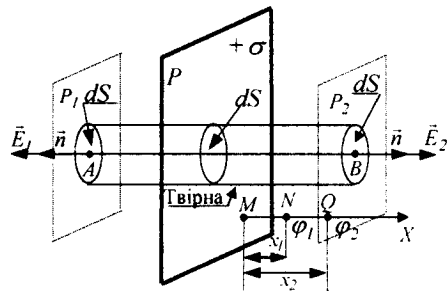


Рис. 112

поля у будь-якій точці A проведемо через цю точку і симетричну їй точку B дві площини, які паралельні до площини P . Побудуємо нескінченно вузький циліндр, основи якого dS проходять через точки A і B , а його твірна паралельна до лінії напруженості поля.

За теоремою Остроградського-Гаусса: повний потік вектора напруженості через замкнену поверхню циліндра дорівнює заряду $dq = \sigma \cdot dS$, який охоплений цією поверхнею.

З рис.112 видно, що потік вектора напруженості через замкнену поверхню циліндра дорівнює сумі потоків через основи циліндра, тому що потік через бічну поверхню дорівнює нулю (лінії напруже-

ності ковзають вздовж бічної поверхні). Оскільки напрямки векторів \vec{E}_1 та \vec{E}_2 збігаються з напрямками нормалей, то потоки через основи dS будуть більші від нуля і числово рівні, оскільки площини P_1 та P_2 знаходяться на однаковій віддалі ($\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}$). Отже, потік вектора напруженості через замкнену поверхню циліндра дорівнює:

$$E_1 dS + E_2 dS = 2EdS = \frac{l}{\epsilon_0} dS.$$

Звідси:
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Знайдемо різницю потенціалів між двома точками Q і N цього поля, що лежать на відстанях x_2 та x_1 від площини P .

Оскільки, $E = -\frac{d\varphi}{dx}$, то $d\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx$.

Проінтегруємо це рівняння по x в межах від x_1 до x_2 . Позначимо потенціали в точках Q і N через φ_2 та φ_1 . Тоді:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} dx; \quad \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_2 - x_1);$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_1 - x_2).$$

II. Електростатичне поле у вакуумі між двома паралельними нескінченними площинами, зарядженими різнойменно.

Нехай маємо дві нескінченні площини, різнойменно заряджені, але з однаковими поверхневими густинами зарядів $+\sigma$ та $-\sigma$ (рис. 113).

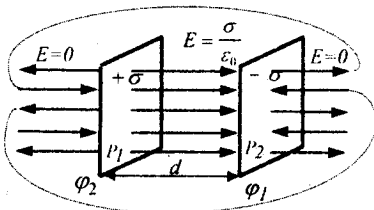


Рис. 113

З рис.113 видно, що зліва від площини P_1 та справа від площини P_2 напруженості поля взаємно знищуються, оскільки вони направлені в протилежні сторони.

Між площинами напруженості полів мають однакові напрямки і тому тут результуюча напруженість E дорівнює сумі напруженостей E_1 та E_2 , створених обома площинами

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Знайдемо різницю потенціалів між площинами: $d\varphi = -Edx$. Проінтегрувавши це рівняння по x від $x = 0$ до $x = d$ (де d - віддаль між площинами), отримаємо:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}.$$

III. Електростатичне поле зарядженої сфери

Якщо на поверхні сфери радіуса R рівномірно розподілено заряд q (рис.114).

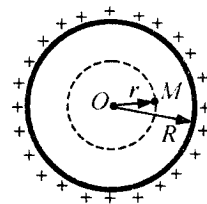


Рис.114

то поверхнева густина заряду дорівнює

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{q}{4\pi R^2}.$$

Розглянемо всередині сфери деяку точку M на відстані r від її центра. З центра O проведемо допоміжну поверхню теж у вигляді сфери радіуса r . За теоремою Остроградського-Гауса обчислимо потік ліній напруженості Φ_E крізь цю поверхню:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Оскільки всередині допоміжної поверхні радіуса $r < R$ немає зарядів, тобто $q = 0$ і $\Phi_E = 0$, то напруженість поля

$$E = \frac{\Phi_E}{4\pi r^2} \text{ також дорівнює нулю:}$$

$$E_{r < R} = 0.$$

Всередині зарядженої сфери електричного поля немає.

Для точок, які лежать зовні біля самої поверхні сфери, можна вважати, що $r = R$. Тоді допоміжна поверхня – сфера радіуса r охоплює заряджену сферу. Заряд q міститься всередині допоміжної поверхні і створює повний потік вектора напруженості:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\epsilon_0} = \frac{4\pi r^2 \sigma}{\epsilon_0}.$$

Тоді

$$E = \frac{\Phi_E}{4\pi r^2} = \frac{4\pi r^2 \sigma}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Для точок, що знаходяться на значній віддалі від поверхні зарядженої сфери ($r > R$), маємо

$$E = \frac{\Phi_E}{S} = \frac{q}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}.$$

Графік залежності $E = f(r)$ напруженості електричного поля E зарядженої сфери від відстані r між її центром O і точкою, в якій визначають напруженість, подано на рис. 115.

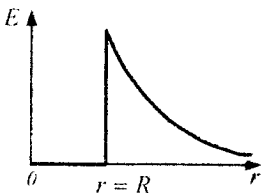


Рис. 115

Різниця потенціалів між двома точками, що лежать на відстані r_1 і r_2 від центра сфери ($r_1 > R, r_2 > R$), дорівнює

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \end{aligned}$$

Якщо прийняти $r_1 = r$ і $r_2 = \infty$, то потенціал поля поза сферичною поверхнею

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

У випадку $r_1 = R$, а $r_2 = \infty$, поверхня зарядженої сфери отримає потенціал

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}.$$

Оскільки всередині сфери електричного поля немає ($E = 0$), то для переміщення одиниці заряду з поверхні в будь-яку точку всередині сфери роботу проти сил поля виконувати не потрібно. Тому потенціал точок усередині зарядженої сфери дорівнює потенціалу її поверхні.

IV. Електростатичне поле зарядженої по об'єму кулі.

Якщо куля радіуса R (рис. 116) має

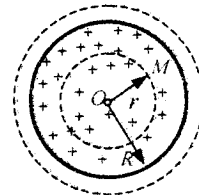


Рис. 116

рівномірно розподілений по об'єму заряд q , то величина $\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ називається об'ємною густиною заряду.

Розглянемо точку M всередині сфери ($r < R$). Допоміжна сферична поверхня, проведена з центра кулі O радіуса r , містить заряд

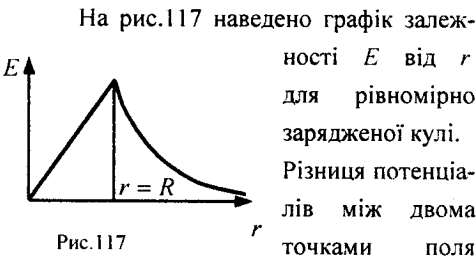
$$q' = \rho V' = \rho \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Тільки цей заряд q' створює потік вектора напруженості Φ_E крізь поверхню допоміжної сфери площею $S = 4\pi r^2$. Отже,

$$\Phi_E = E \cdot S = \frac{q'}{\epsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0}.$$

$$\text{Звідси } E = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \frac{1}{3} \frac{\rho}{\epsilon_0} r = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R^3} r.$$

У точці, що лежить поза кулею на відстані r від її центра ($r > R$), напруженість обчислюється за формулою напруженості поля точкового заряду $q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$, що розміщений в кулі.



Для рівномірно зарядженої кулі. Різниця потенціалів між двома точками поля всередині кулі дорівнює

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R^3} \int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{q}{8\pi \epsilon_0 R^3} (r_2^2 - r_1^2). \end{aligned}$$

Різниця потенціалів між центром кулі ($r_1 = 0$) і її поверхнею ($r_2 = R$)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R}.$$

V. Електростатичне поле нескінченно довгого рівномірно зарядженого циліндра.

Розглянемо циліндр радіуса R і довжиною L , на якому знаходиться заряд q , який рівномірно розподілений по його

поверхні вздовж всієї довжини L (рис.118). Величина $\tau = \frac{q}{L}$ називається

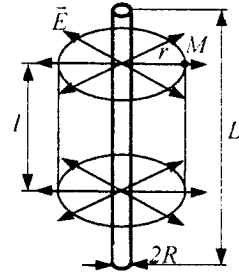


Рис. 118

лінійною густиною заряду. Якщо відстань r від осі циліндра до точки M значно менша за довжину L зарядженого циліндра ($r \ll L$), то циліндр з достатньою точністю можна вважати нескінченно довгим.

Виділимо довільну ділянку циліндра довжиною l і охопимо її допоміжною поверхнею у вигляді циліндра радіуса r . Ця поверхня охоплює заряд q' , який дорівнює:

$$q' = \tau l.$$

Оскільки лінії вектора напруженості \vec{E} нормальні до поверхні зарядженого тіла в кожній його точці, то потік Φ_E пронизує лише бічну поверхню допоміжного циліндра.

Отже,

$$E = \frac{\Phi_E}{S} = \frac{q'}{\epsilon_0 S} = \frac{q'}{\epsilon_0 2\pi r l} = \frac{\tau l}{\epsilon_0 2\pi r l}.$$

Звідси

$$E = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0 r}.$$

Поле циліндра є неоднорідним. Різниця потенціалів між двома точками поля, що лежать на відстані r_1 і r_2 від осі зарядженого провідника, дорівнює

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \end{aligned}$$

§52. Типи діелектриків. Електронна і орієнтаційна поляризація

Діелектриками (або ізоляторами) називаються речовини, нездатні проводити електричний струм.

У природі ідеальних ізоляторів не існує, вони проводять струм в $10^{15} - 10^{20}$ разів гірше, ніж провідники.

Питомий опір діелектриків становить $\rho \approx 10^{15}$ Ом·м. У діелектриках немає вільних електричних зарядів (електронів), як в металах або інших провідниках.

Кожна молекула (або атом) діелектрика має позитивно заряджені ядра і негативно заряджені електрони, які рухаються навколо ядер. Позитивні заряди всіх ядер дорівнюють абсолютній величині заряду всіх електронів, а тому молекула речовини загалом електрично нейтральна.

Вивчаючи електричні властивості діелектриків, молекули діелектриків можна зобразити як систему, що складається з двох точкових зарядів.

Замінімо всі позитивні заряди ядер молекули одним сумарним зарядом $+q$, що перебуває в центрі мас позитивних зарядів, а всі негативні заряди – одним сумарним негативним зарядом $-q$, що перебуває в центрі маси негативних зарядів. Тоді молекулу діелектрика можна розглядати як диполь, який складається із зарядів $+q$ і $-q$. Діелектрики поділяються на три типи.

I. Неполарні діелектрики – це діелектрики, які складаються з молекул, центри мас позитивних і негативних зарядів яких збігаються за відсутності електричного поля (рис.119). Прикладом неполярних діелектриків є гази $N_2, H_2, O_2, CO_2, CH_4$. Молекули таких діелектриків називаються **неполарними**. Дипольний момент таких молекул за відсутності зовнішнього електричного поля дорівнює нулю.

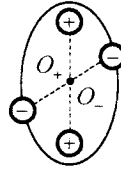


Рис.119

II. Полярні діелектрики – це діелектрики, в яких центри мас позитивних і негативних зарядів не збігаються, тобто мають асиметричну будову (рис.120). До полярних діелектриків належать гази SO_2, H_2S, NH_3 та ін., рідини – вода H_2O , соляна кислота HCl , бензол C_6H_6 тощо.

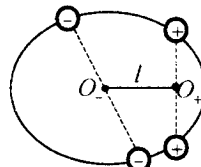


Рис.120

Молекули таких діелектриків називають **полярними**. Ці молекули за відсутності зовнішнього поля мають дипольні моменти $\vec{p}_0 = q\vec{l}$. Їх називають жорсткими диполями.

III. Іонні діелектрики – це речовини, молекули яких мають іонну будову. Прикладом таких діелектриків є $NaCl, KCl$ та інші.

Іонні кристали є просторовими ґратками з правильним чередуванням іонів різних знаків (рис.121). У цих кристалах не можна виділити окремі молекули. Іонні

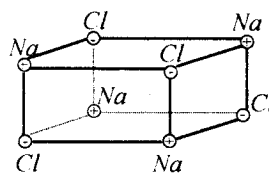


Рис.121

кристали необхідно розглядати як систему вміщених одна в одну іонних підґраток. У цих діелектриках кожна пара сусідніх різноіменних іонів подібна до диполя.

Розглянемо, що відбувається з діелектриками при внесенні їх в однорідне електричне поле.

I. Неполлярні діелектрики. Електронна поляризація.

Сили, з якими електричне поле діє на позитивні і негативні заряди молекул, напрямлені протилежно і тому розсувають їх. В електричному полі центри мас позитивних і негативних зарядів кожної молекули не збігаються, а зміщені на відстань l між ними (рис.122). Чим більша напруженість поля \vec{E} , тим на більшу відстань l розсуваються заряди протилежних знаків.

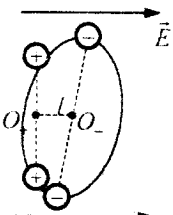


Рис.122

Молекула з неполярної перетворюється в полярну з дипольним моментом \vec{p} .

Оскільки $l \sim E$, а $p = ql$, то $p \sim E$, або $\vec{p} = \beta \epsilon_0 \vec{E}$, де ϵ_0 – електрична стала, β – поляризованість окремої молекули діелектрика. Величина β має неоднакові значення для атомів і молекул різних речовин. Поляризованість β характеризує здатність електронів в атомі або в молекулі зміщуватись під дією сил електричного поля.

Дипольні моменти \vec{p} молекул неполяризованих діелектриків називають індукованими або квазіпружними.

При внесенні неполярного діелектрика в електричне поле всі індуковані дипольні моменти розміщуються ланцюжками вздовж ліній напруженості \vec{E} (рис.123), де $-$ негативні заряди, а $+$

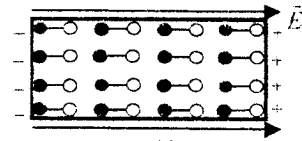


Рис.123

позитивні. Внаслідок цього грані діелектрика набувають різноіменних зарядів – діелектрик поляризується. Такого роду поляризація діелектрика називається *електронною*.

II. Полярні діелектрики.

Дипольна, або орієнтаційна поляризація.

Якщо діелектрик з полярними молекулами не перебуває у зовнішньому електричному полі, то внаслідок хаотичного теплового руху молекул вектори їхніх дипольних моментів орієнтовані хаотично (рис.124а). Тому векторна сума дипольних

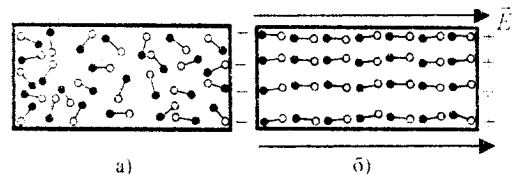


Рис. 124

моментів всіх молекул, які перебувають у довільному об'ємі ΔV діелектрика, дорівнює нулю.

Якщо діелектрик з полярними молекулами внести в електричне поле, то під дією поля полярні молекули діелектрика намагаються повернутись так, щоб вектори їх дипольних моментів збігалися з напрямком вектора напруженості поля \vec{E} (рис.124б). Але тепловий рух молекул хаотично розкидає диполі і заважає орієнтації всіх векторів \vec{p} (дипольних моментів) вздовж поля. Внаслідок спільної дії цих двох факторів в діелектрику переважає орієнтація дипольних моментів молекул вздовж поля. Ця орієнтація буде тим повнішою, чим сильніше електричне поле

в діелектрика і чим слабший тепловий рух молекул, тобто чим нижча температура. Цей процес називають *орієнтаційною поляризацією* діелектрика.

III. Іонні діелектрики. Іонна поляризація.

У кристалічних діелектриках, які мають кубічні кристалічні ґратки (*NaCl, KCl, NaJ* та інші) під дією електричного поля всі позитивні іони зміщуються в напрямку напруженості поля \vec{E} , а всі негативні іони – в протилежному на-

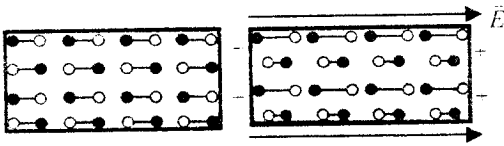


Рис. 125

рямку (рис.125). При цьому в кожній одиниці об'єму кристала перебуває однакова кількість позитивних і негативних іонів, а на кожній з двох протилежних граней кристала, перпендикулярних до вектора напруженості електричного поля, містяться іони якого-небудь одного знака. Такий вид поляризації називають *іонною поляризацією*.

Заряди, які виникають на гранях діелектрика, не вільні, вони зв'язані з атомами та молекулами речовини.

Явище обмеженого зміщення зарядів в атомах і молекулах або напрямленої орієнтації дипольних моментів жорстких молекул в зовнішньому електричному полі, внаслідок якого на поверхні діелектрика виникають зв'язані електричні заряди, називається поляризацією діелектриків.

Ступінь поляризації діелектрика характеризується вектором поляризації, або поляризованістю.

Вектором поляризації називають границю відношення електричного момен-

ту деякого об'єму діелектрика до цього об'єму, коли об'єм прямує до нуля:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{\Delta V},$$

\vec{p}_i – дипольний момент i -го диполя,

n – кількість диполів, які знаходяться в об'ємі ΔV .

Отже, вектор \vec{P} є дипольним моментом одиниці об'єму діелектрика, який виникає при його поляризації.

Для однорідного діелектрика, який перебуває в однорідному електричному полі, справедлива рівність: $\vec{P} = n \cdot \vec{p}$, де n – кількість молекул в одиниці об'єму, \vec{p} – дипольний момент молекули. Оскільки $\vec{p} = \beta \epsilon_0 \vec{E}$, то $\vec{P} = n\beta \cdot \epsilon_0 \vec{E}$.

Позначимо $n\beta = \chi$, отже, $\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$. Коефіцієнт χ називається діелектричною сприйнятливістю речовини або поляризованістю одиниці об'єму діелектрика. χ – величина безрозмірна ($\chi \approx 80$ для води, $\chi \approx 25$ для спиртів).

На рис.126 подано залежність діелектричної сприйнятливості χ від $\frac{1}{T}$ у випадку не-

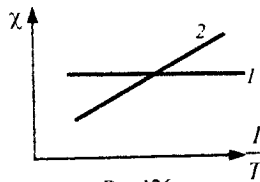


Рис.126

поляричних (1) і поляричних (2) молекул. Поляризація неполярних діелектриків не залежить від температури ($\chi = const$).

Для поляричних діелектриків, як показав

Дебай,
$$\chi = \frac{nr_0^2}{3\epsilon_0 kT}.$$

При нагріванні полярного діелектрика діелектрична сприйнятливість зменшується.

§53. Електричне поле в речовині.

Теорема Остроградського-Гавсса для електростатичного поля в діелектрику.

Електричне зміщення

Для встановлення кількісних закономірностей поля в діелектрику внесемо в однорідне зовнішнє електростатичне поле, яке створюється двома нескінченними паралельними різнойменно зарядженими пластинами, пластину з однорідного діелектрика (рис.127).

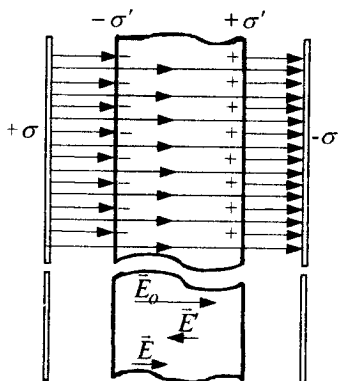


Рис.127

Під дією поля діелектрик поляризується, тобто відбувається зміщення зарядів. Внаслідок цього на правій грані діелектрика буде надлишок позитивного заряду з поверхневою густиною $+\sigma'$, на лівій – від'ємного заряду з поверхневою густиною $-\sigma'$. Ці некомпенсовані заряди, що появляються внаслідок поляризації діелектрика, називаються зв'язаними. Оскільки їх поверхнева густина σ' менша від густини σ вільних зарядів площин, то не все поле \vec{E}_0 компенсується зарядами діелектрика: на границі діелектрика відбувається розрив ліній напруженості зовнішнього електричного поля. Отже, поляризація діелектрика викликає зменшення в ньому поля порівняно з початковим зовнішнім

полем. Поза діелектриком $\vec{E} = \vec{E}_0$. Поява зв'язаних зарядів приводить до виникнення електричного поля \vec{E}' , яке ослаблює \vec{E}_0 . Результуюче поле всередині діелектрика:

$$E = E_0 - E'.$$

Оскільки поля E_0 і E' створені двома нескінченними зарядженими площинами, то

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ і } E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}.$$

Тому

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0}.$$

Отже, напруженість поля при наявності діелектрика обчислюється за такою ж формулою, як і для вакууму з тією лише відмінністю, що до вільних зарядів треба додати зв'язані заряди протилежного знака.

Визначимо поверхневу густину зв'язаних зарядів σ' .

Повний дипольний момент пластинки діелектрика $P_V = PV = PSd$, де S – площа грані пластинки, d – її товщина. З іншого боку, $P_V = q'd = \sigma'Sd$. Тоді, $PSd = \sigma'Sd$, і $\sigma' = P$, тобто *поверхнева густина зв'язаних зарядів σ' дорівнює модулю вектора поляризації P .*

В загальному випадку, якщо зовнішнє електричне поле \vec{E}_0 утворює кут α

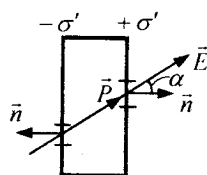


Рис.128

з поверхнею діелектрика, то

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n,$$

де P_n – проекція вектора поляризації на напрямок нормалі поверхні. Для правої поверхні на рис.128

$P_n > 0$, і відповідно σ' для неї позитивна; для лівої поверхні $P_n < 0$ і відповідно σ' для неї негативна.

$$\text{Оскільки } \vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \text{ то } \sigma' = \chi \varepsilon_0 E_n.$$

де E_n – нормальна складова напруженості поля всередині діелектрика. В тих місцях, де лінії напруженості виходять із діелектрика ($E_n > 0$), на поверхні будуть позитивні зв'язані заряди, там же, де лінії напруженості входять в діелектрик ($E_n < 0$), появляются негативні поверхневі заряди.

$$\text{Оскільки } E = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0},$$

а $\sigma' = P = \chi \varepsilon_0 E$, то $E = E_0 - \chi E$. Звідси напруженість поля в середовищі

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi} = \frac{E_0}{\varepsilon}.$$

де $\varepsilon = 1 + \chi$ – **відносна діелектрична проникність діелектрика**, яка характеризує поляризаційні властивості діелектрика.

Відносна діелектрична проникність діелектрика дорівнює його діелектричній сприйнятливості, збільшеній на одиницю і показує, у скільки разів напруженість E_0 електричного поля, утвореного зарядами у вакуумі, більша, ніж напруженість E поля цих зарядів у діелектрику.

Величини χ і ε – безрозмірні і для вакууму $\chi = 0, \varepsilon = 1$.

Якщо відносна діелектрична проникність діелектрика дорівнює ε , то

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0}.$$

З іншого боку, $E = \frac{\sigma - \sigma'}{\varepsilon_0}$. Прирів-

нюючи праві сторони, отримуємо

$$\frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\sigma - \sigma'}{\varepsilon_0} \text{ і } \sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma.$$

За цією формулою можна обчислити поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів, а, отже, і вектор поляризації \vec{P} , бо поверхневу густину σ вільних зарядів можна визначити експериментально.

Всі отримані в попередніх параграфах формули, які описують електричні поля і взаємодії електричних зарядів у вакуумі, залишаються справедливими і якщо ці явища мають місце в однорідному ізотропному діелектрику. Тільки у формули, що містять електричну сталу ε_0 , треба ввести відносну діелектричну проникність ε як співмножник при ε_0 :

$$\text{закон Кулона } - F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2},$$

напруженість електричного поля

$$\text{точкового заряду } - E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2},$$

потенціал електричного поля точко-

$$\text{вого заряду } - \varphi = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r}.$$

Напруженість електричного поля залежить від властивостей середовища: нормальна складова напруженості поля при переході з вакууму в середовище зменшується в ε разів. На границі двох діелектриків нормальні складові \vec{E} обернено пропорційні до ε , тобто вектор напруженості при переході через границю діелектриків стрибкоподібно змінюється, створюючи тим самим незручності при розрахунку електричних полів.

У §50 було розглянуто теорему Остроградського-Гаусса для потоку вектора напруженості електричного поля у ваку-

$$\text{умі: } \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i,$$

де q_i – вільні заряди.

Узагальнимо цю теорему для випадку електричного поля у діелектрику, в якому поле створюється як вільними, так і зв'язаними зарядами. Тому

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\sum_{i=1}^N q_i + q' \right),$$

де q' – зв'язані заряди.

Це співвідношення не можна використати для розрахунку електричного поля \vec{E} в діелектрику, оскільки це поле залежить від величини зв'язаних зарядів, які у свою чергу визначаються полем \vec{E} .

Нехай шар однорідного неполярного діелектрика розміщений між двома нескінченими паралельними площинами, зарядженими з поверхневими густинами вільних зарядів $+\sigma$ і $-\sigma$ (рис.129). В діе-

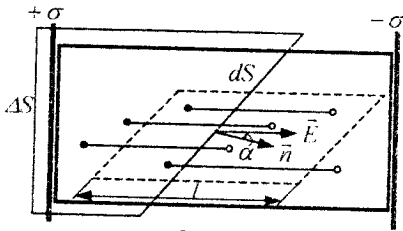


Рис.129

лектрику індукуються диполі (• – негативні заряди $-q$, ◦ – позитивні заряди $+q$), електричні моменти яких паралельні до \vec{E} . Виберемо малу ділянку dS поверхні S , яка охоплює як вільні, так і зв'язані заряди. Молекули-диполі електрично нейтральні. Тому внесок в q' роблять лише ті диполі, які перетинаються поверхнею S . Вектор \vec{E} в межах площадки dS всюди однаковий і утворює кут α із зовнішньою нормаллю \vec{n} .

Площадка dS перетинає лише ті dn диполів, центри яких знаходяться всередині, показано на рис.129 штриховою лінією, косою циліндра з основою пло-

щею dS і твірною, довжина якої дорівнює довжині l молекули-диполя:

$$dn = ndl' = nldS \cos \alpha,$$

де n – концентрація молекул діелектрика. Поверхнею S охоплюються негативні заряди диполів і їх величина

$$dq' = -qdn = -qindS \cos \alpha = -npdS \cos \alpha = -(\vec{P}, d\vec{S}),$$

а $\vec{P} = n\vec{p}$ – вектор поляризації діелектрика.

Отже,

$$q' = -\oint_S (\vec{P}, d\vec{S}).$$

Середнє значення об'ємної густини зв'язаних зарядів в межах об'єму V , який обмежений замкненою поверхнею S , дорівнює

$$\langle \rho' \rangle = -\frac{1}{V} \oint_S (\vec{P}, d\vec{S}).$$

Величина вільних зарядів, які охоплюються поверхнею S , в цьому випадку дорівнює $q = \sigma \Delta S$.

Отже,

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(q - \oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) \right)$$

або

$$\oint_S \epsilon_0 (\vec{E}, d\vec{S}) + \oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = q.$$

В обох інтегралах, що стоять зліва, інтегрування проводиться по одній і тій же замкненій поверхні S . Тому

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}), d\vec{S} = q.$$

Вектор $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ називається **електричним зміщенням**.

В результаті рівняння, яке виражає теорему **Остроградського-Гаусса** для електричного поля в середовищі, можна записати у вигляді:

$$\Phi_D = \oint_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}) = q$$

або

$$\Phi_D = \oint_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}) = \sum_{i=1}^N q_i.$$

Згідно з цією теоремою *потік електричного зміщення електричного поля через довільну замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі вільних зарядів, що охоплюються цією поверхнею.*

Вектор поляризації \vec{P} пропорційний до напруженості поля в діелектрику. Отже,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}.$$

З чим можна зв'язати вектор електричного зміщення? Зв'язані заряди появляються в діелектрику при наявності зовнішнього електричного поля, що створюється системою вільних зарядів, тобто в діелектрику на поле вільних зарядів накладається додаткове поле зв'язаних зарядів.

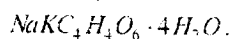
Результуюче поле в діелектрику описує вектор напруженості \vec{E} і тому він залежить від властивостей діелектрика. Вектор \vec{D} від середовища не залежить і описує електростатичне поле, що створюється вільними зарядами. Зв'язані заряди, що виникають в діелектрику, викликають перерозподіл вільних зарядів. Тому вектор \vec{D} характеризує електростатичне поле, що створюється вільними зарядами (тобто у вакуумі), але при такому їх розподілі в просторі, який є при наявності діелектрика.

Вектор \vec{D} не залежить від властивостей середовища тоді, коли поле створюється зарядженими провідниками в однорідному, ізотропному і безмежному середовищі.

Лінії вектора \vec{E} можуть починатися і закінчуватися як на вільних, так і зв'язаних зарядах, а лінії вектора \vec{D} – лише на вільних зарядах. Через області поля, де знаходяться зв'язані заряди, лінії вектора \vec{D} проходять, не перетинаючись.

§54. Сегнетоелектрики.

Серед численних діелектриків є група кристалічних діелектриків, які мають специфічні властивості. Свою назву сегнетоелектрики отримали від першої речовини цього типу – сегнетової солі



Характерна особливість сегнетоелектриків полягає в тому, що у певному температурному інтервалі різко зростає відносна діелектрична проникність.

Як видно з рис.130, відносна діелек-

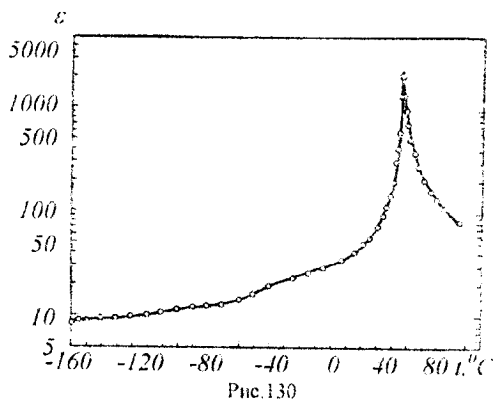


Рис.130

трична проникність ϵ тригліцинсульфату при збільшенні температури зростає, досягаючи максимального значення $\epsilon \approx 2500$ при $t_c = 49^\circ\text{C}$. Після наступного нагрівання ϵ зменшується.

Відносна діелектрична проникність ϵ і діелектрична сприйнятливність χ

сегнетоелектриків залежить від напруженості електричного поля в речовинах.

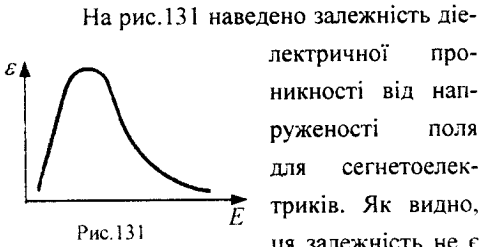


Рис.131

На рис.131 наведено залежність діелектричної проникності від напруженості поля для сегнетоелектриків. Як видно, ця залежність не є лінійною. Тому для сегнетоелектриків немає прямої пропорційності між векторами електричного зміщення \vec{D} , поляризації \vec{P} і напруженості електричного поля \vec{E} .

При не дуже сильних полях в сегнетоелектриках електричне зміщення \vec{D} залежить від напруженості поля \vec{E} нелінійно (рис.132). Нелінійне зростання D із збільшенням E замінюється лінійним лише при дуже великих значеннях E .

Для сегнетоелектриків характерне явище діелектричного гістерезису, яке полягає у відставанні змін вектора поляризації \vec{P} від змін вектора напруженості \vec{E} електричного поля (рис.133). Якщо непо-

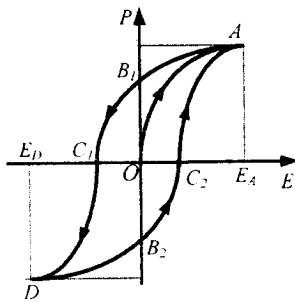


Рис.133

ляризований сегнетоелектрик помістити в електричне поле і збільшувати напруженість поля E , то викликана цим полем поляризація зростає по кривій OA , яка називається основною кривою поляризації

сегнетоелектрика. E_4 – напруженість поля, при якій досягається насичення поляризації.

При зменшенні поля E поляризація зменшується не по кривій AO , а по кривій AB_1 , причому в точці B_1 зовнішнє поле відсутнє, але сегнетоелектрик поляризований. При зміні напрямку зовнішнього поля вектор поляризації зменшується до нуля в точці C_1 , а потім, змінивши свій напрямок, зростає за величиною вздовж кривої C_1D . Наступна зміна зовнішнього поля від E_D до E_4 супроводжується зміною вектора поляризації по кривій DB_2C_2A . В точках B_1 і B_2 спостерігається *залишкова поляризація*. Величина напруженості поля в точках C_1 і C_2 , при якій поляризація сегнетоелектрика дорівнює нулю, називається *коерцетивною силою*.

При періодичній зміні поляризації сегнетоелектрика на подолання тертя під час повертання електричних моментів витрачається електрична енергія, яка йде на нагрівання сегнетоелектрика. Площа петлі гістерезису пропорційна до електричної енергії, що перетворюється у внутрішню енергію в одиниці об'єму сегнетоелектрика за один цикл.

Великі числові значення відносної діелектричної проникності в сегнетоелектриках зумовлені особливостями процесу



$$\vec{E} = 0$$

Рис.134

поляризації в цих речовинах. В сегнетоелектриках по всьому об'єму розподілені області, в яких окремі молекули орієнтовані

однаково. Такі області називаються *доменами* (рис.134). А така самовільна поляри-

зація молекул називається спонтанною поляризацією.

За відсутності поля області спонтанної поляризації розміщуються так, що електричні дипольні моменти різних доменів компенсують один одного і середня поляризація сегнетоелектрика дорівнює нулю.

Якщо внести кристал сегнетоелектрика у зовнішнє поле, відбувається переорієнтація електричних моментів доменів і весь кристал стає поляризованим.

При підвищенні температури в сегнетоелектрику здійснюється фазовий перехід, який супроводжується зникненням спонтанної поляризації і зміною симетрії кристалічної ґратки. Температура, при якій відбувається фазовий перехід, називається точкою Кюрі. Сегнетова сіль має дві точки Кюрі: $-15^{\circ}C$ і $+22.5^{\circ}C$.

§55. Провідники в електричному полі

Характерною особливістю провідників є наявність у них вільних носіїв заряду. Якщо провідник поміщують в зовнішнє електростатичне поле $\vec{E}_{зовн.}$, то кожен вільний заряд діє сила $\vec{F}_1 = q\vec{E}_{зовн.}$ (рис. 135).

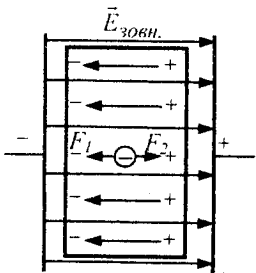


Рис. 135

Під дією сили \vec{F}_1

відбувається переміщення вільних носіїв заряду і внаслідок цього відбувається перерозподіл електричних зарядів: на одній грані провідника буде надлишок вільних електронів, які заряджають її негативно, на іншій виникає нестача їх і ця грань заряджається позитивно.

Якщо перерозподілу вільних носіїв заряду у провіднику під дією зовнішнього електричного поля, внаслідок чого виникає електризація, називається електростатичною індукцією або електризацією через вплив.

Індуковані на гранях заряди створюють всередині провідника внутрішнє електростатичне поле $\vec{E}_{вн.}$, яке діє на вільні електрони із силою $\vec{F}_2 = q\vec{E}_{вн.}$. Переміщення вільних зарядів у провіднику припиняється, коли $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$. Тоді

$q(\vec{E}_{зовн.} + \vec{E}_{вн.}) = 0$. Оскільки $q \neq 0$, то

$$\vec{E}_{зовн.} + \vec{E}_{вн.} = 0, \text{ і } \vec{E}_{зовн.} = -\vec{E}_{вн.}.$$

Внутрішнє поле дорівнює за величиною і протилежне за напрямком зовнішньому. **Результуюча напруженість поля всередині провідника дорівнює нулю.**

Відсутність поля всередині провідника означає, згідно з $\vec{E} = -grad\phi$, що потенціал у всіх точках всередині провідника постійний ($\phi = const$), тобто поверхня провідника в електростатичному полі є екіпотенціальною.

Звідси вектор напруженості поля на зовнішній поверхні провідника спрямований по нормалі до кожної точки її поверхні.

Якщо провіднику надати деякий заряд q , то нескомпенсовані заряди розміщуються лише на поверхні провідника. Для пояснення цього факту проведемо всередині провідника довільну замкнену поверхню S , яка обмежує деякий внутрішній об'єм провідника. За теоремою Остроградського-Гаусса сумарний заряд цього об'єму дорівнює:

$$q = \Phi_D = \oint (\vec{D} \cdot d\vec{S}) = D_n dS = 0,$$

оскільки у всіх точках всередині поверхні $D=0$.

Знайдемо взаємозв'язок між напруженістю E поля поблизу поверхні зарядженого провідника і поверхневою густиною σ зарядів на її поверхні.

Для цього розглянемо замкнену поверхню у вигляді циліндра з основою dS , вісь якого орієнтована вздовж вектора \vec{D} (рис.136), і застосуємо теорему Остроградського-Гаусса. Оскільки поле всередині провідника відсутнє, потік \vec{D} через замкнену циліндричну поверхню визначається лише потоком через зовнішню основу циліндра:

$$\Phi_{D1} = DdS = q = \sigma dS. \text{ Звідси } D = \sigma, \text{ або}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0},$$

де ϵ – відносна діелектрична проникність середовища, в якому знаходиться провідник.

Це співвідношення визначає напруженість електричного поля поблизу поверхні провідника довільної форми.

Дослідження розподілу зарядів на провідниках довільної форми можна провести за допомогою сітки Кольбе – гнучкої металічної сітки, до якої по обидві сторони приклеєні легкі паперові смужки. Вона встановлюється на ізолюючих підставках, а сітці надається певний заряд.

Кут відхилення паперових смужок на сітці залежить від величини заряду. На прямій сітці всі смужки відхиляються на однаковий кут, що свідчить про рівно-

мірний розподіл заряду на поверхні площини сітки.

При наданні сітці форми циліндра відхиляються тільки ті смужки, які розміщені на зовнішній поверхні циліндра. Якщо ж різні ділянки сітки мають неоднакову кривину, то кут відхилення смужок також буде різним. Це означає, що поверхнева густина заряду на різних ділянках тіла довільної форми неоднакова.

На рис.137 наведено вигляд ліній напруженості (штрихові лінії) і екіпотен-

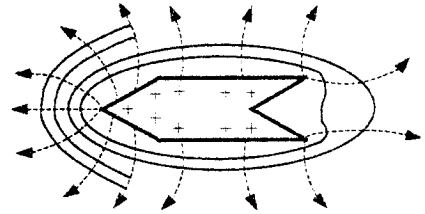


Рис. 137

ціальних поверхонь (суцільні лінії) поля позитивно зарядженого провідника циліндричної форми з конічним виступом на одному кінці і конічною западиною на іншому. З рисунка видно, що поблизу вістря і виступів екіпотенціальні поверхні найсильніше зближені, відповідно і поверхнева густина вільних зарядів на цих ділянках провідника більша, ніж на інших поверхнях тіла. В області конічної западини напруженість поля мінімальна.

Значна величина напруженості поля поблизу гострого виступу на зарядженому провіднику приводить до явища, відомого під назвою "електричний вітер". В атмосферному повітрі завжди є невелика кількість позитивних іонів і вільних електронів, що виникають під впливом космічних променів, випромінювання радіоактивних речовин тощо. В сильному електричному полі поблизу вістря електрони рухаються з великою швидкістю і, стикаючись з моле-

кулами повітря, іонізують їх. Отже, виникає все більша кількість позитивних рухомих зарядів, які утворюють "електричний вітер".

Існування "електричного вітру" супроводжується розрядженням наелектризованого тіла, бо до нього рухаються під дією електричного поля заряди протилежного до знака зарядів наелектризованого тіла. Тому це явище біля проводів високовольтних ліній електропередач є шкідливим, оскільки спричиняє втрати заряду.

Нейтральний провідник, внесений в електростатичне поле, розриває частину ліній напруженості; вони закінчуються на від'ємних індукованих зарядах і знову починаються на додатних (рис.138).

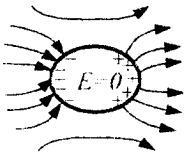


Рис.138

Лінії напруженості електричного поля перпендикулярні до поверхні провідника, оскільки при такій умові індуковані заряди не будуть рухатися вздовж поверхні провідника.

У стані рівноваги всередині провідника заряди відсутні, тому створення в середині нього порожнини не впливає на конфігурацію розміщення зарядів і тим самим на електростатичне поле. Всередині порожнини поле відсутнє. На цьому ґрунтується *електростатичний захист* – екранування тіл від впливу зовнішніх електростатичних полів.

Властивість зарядів розміщатися на зовнішній поверхні провідника використовується для створення *електростатичних генераторів*, які призначені для нагромадження великих зарядів і досягнення різниці потенціалів в декілька мільйонів вольт.

§56. Електроємність відокремленого провідника. Конденсатори

Розглянемо провідник, що перебуває в однорідному середовищі далеко від заряджених тіл та інших провідників. Такий провідник називається *відокремленим*.

При наданні відокремленому провіднику деякої кількості електрики заряди розподіляються на його поверхні з різною поверхневою густиною σ . Проте характер цього розподілу залежить не від його загального заряду q , а лише від форми провідника. Кожна нова частина зарядів розподіляється на поверхні подібно до попередньої. Отже, при збільшенні в n разів заряду q провідника у стільки ж разів збільшиться і σ у будь-якій точці його поверхні. Тобто σ прямо пропорційна до q : $\sigma = k q$ – деяка функція координат точки поверхні, що розглядається.

Поділимо поверхню S провідника на нескінченно маленькі елементи dS , які мають заряди σdS . Кожний такий заряд можна вважати точковим. Потенціал $d\varphi$ поля заряду σdS у точці, віддаленій від нього на відстань r , дорівнює:

$$d\varphi = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$$

де ϵ – відносна діелектрична проникність середовища, в якому знаходиться провідник.

Інтегруючи цей вираз по всій замкненій поверхні S провідника, знайдемо потенціал у довільній точці його електростатичного поля:

$$\varphi = \oint_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \oint_S \frac{kdS}{r}$$

Для точки, що лежить на поверхні провідника, r є функцією координат цієї

точки й елемента dS . У цьому випадку інтеграл у правій частині залежить лише від розмірів і форми поверхні S провідника.

З формули випливає, що потенціал відокремленого провідника прямо пропорційний до його заряду. Відношення q до φ для даного провідника називають **електричною ємністю**:

$$C = \frac{q}{\varphi}, \text{ або } C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{1}{\oint_S \frac{k dS}{r}}$$

Електроємність відокремленого провідника числово дорівнює електричному заряду, який треба надати цьому провіднику, щоб потенціал змінився на одиницю.

Електроємність відокремленого провідника залежить від його форми і розмірів, причому геометрично подібні провідники мають ємності, прямо пропорційні до їхніх лінійних розмірів.

Електроємність прямо пропорційна до діелектричної проникності середовища.

Електроємність не залежить ні від матеріалу провідника, ні від його агрегатного стану, ні від форми і розмірів можливих порожнин всередині нього. Це пов'язано з тим, що надлишкові заряди розподілені тільки на зовнішній поверхні провідника. Електроємність не залежить також від заряду провідника та його потенціалу.

Одиниця ємності – фарада:

1 фарада – це ємність такого провідника, потенціал якого змінюється на 1В при наданні йому заряду в 1Кл .

Оскільки

$$\varphi_{\text{кулі}} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R},$$

то ємність кулі $C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R$.

1 фарада – це ємність провідника у формі кулі, радіус якої

$$R = \frac{C}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^6 \text{ км}; \quad \frac{R}{R_{\text{земли}}} \approx 1406.$$

Для того, щоб провідник мав велику ємність, він повинен мати дуже великі розміри. На практиці, однак, необхідні пристрої, які мають здатність при малих розмірах і невеликих відносно навколишніх тіл потенціалах нагромаджувати значні за величиною заряди. Ці пристрої – **конденсатори**.

Конденсатор складається з двох провідників, які розділені діелектриком. Щоби на ємність конденсатора не впливали навколишні тіла, провідникам надають таку форму, щоб поле, яке створюється зарядами, було зосереджено у вузькому проміжку між обкладками конденсатора.

Оскільки поле зосереджене всередині конденсатора, то лінії напруженості починаються на одній обкладці і закінчуються на іншій і тому вільні заряди, що виникають на різних обкладках, є рівними за модулем різнойменними зарядами.

Ємність конденсатора – фізична величина, що числово дорівнює відношенню заряду q , нагромадженого у конденсаторі, до різниці потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ між його обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Залежно від форми обкладок конденсатори поділяються на плоскі, циліндричні і сферичні.

I. Плоский конденсатор.

Якщо обкладки конденсатора мають форму паралельних між собою площин, то його називають плоским (рис.139). Площа пластин конденсатора S і якщо лінійні

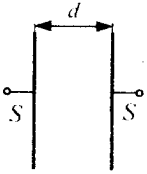


Рис. 139

розміри пластин великі порівняно з d , то електричне поле між пластинами можна вважати еквівалентним полю між двома нескінченними площинами, які заряджені різнойменно і поверхневі густини яких дорівнюють $+\sigma$ і $-\sigma$. Крім того, відстань d повинна бути настільки малою, щоб порушення однорідності поля поблизу його країв можна було не брати до уваги.

Напруженість електричного поля і різниця потенціалів між обкладками конденсатора в цьому випадку дорівнюють:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S} d$$

де ϵ – відносна діелектрична проникність середовища, що заповнює простір між пластинами.

Отже, ємність плоского конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$$

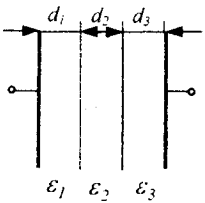


Рис. 140

Ємність конденсатора, який має шаруватий діелектрик (рис.140), визначають за формулою:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} + \frac{d_3}{\epsilon_3}}$$

II. Циліндричний конденсатор.

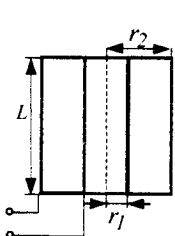


Рис. 141

Дві металеві трубки різних радіусів, вставлені одна в одну аксіально, тобто так, що їх осі збігаються, і розділені шаром діелектрика, утворюють циліндричний кон-

денсатор (рис.141). Поза конденсатором поля, створені внутрішньою і зовнішньою обкладками, взаємно знищуються. Поле створюється між обкладками тільки зарядом циліндра радіусом r_1 , оскільки заряд зовнішнього циліндра всередині конденсатора не створює електричного поля. Різниця потенціалів між обкладками циліндричного конденсатора

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{r}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon \cdot L} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Тоді ємність циліндричного конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon \cdot L}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Якщо шар діелектрика $d = r_2 - r_1$ дуже тонкий, то

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = \ln \frac{r_1 + d}{r_1} = \ln \left(1 + \frac{d}{r_1} \right) \approx \frac{d}{r_1} \quad \text{і}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 \cdot L r_1}{d}$$

Але $2\pi r_1 \cdot L = S$ – площа обкладки циліндричного конденсатора. В результаті

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$$

Коли обкладки циліндричного конденсатора розділені дуже тонким шаром діелектрика, його електроємність з достатньою точністю можна обчислити за формою плоского конденсатора.

III. Сферичний конденсатор.

Обкладки такого конденсатора – це дві концентричні провідні сфери з радіусами r_1 і r_2 , розділені тонким шаром діелектрика завтовшки d (рис.142) і $d = r_2 - r_1$. Поля поза конденсато-

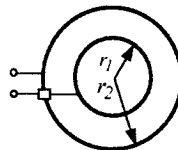


Рис. 142

ром, створені внутрішньою та зовнішньою обкладками, взаємно знищуються. Поле між обкладками створюється зарядом q кулі радіусом r_1 , а заряд $-q$ зовнішньої кулі всередині цієї кулі не створює електричного поля. Різниця потенціалів між обкладками конденсатора дорівнює

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Тоді електроємність сферичного конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Якщо товщина шару діелектрика d мала, то можна вважати $r_2 \approx r_1$.

Тоді

$$C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1^2}{d} = \frac{\epsilon\epsilon_0 4\pi r_1^2}{d} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d},$$

де $S = 4\pi r_1^2$ – площа обкладки конденсатора.

Коли сферичний конденсатор має дуже тонкий шар діелектрика, його електроємність можна обчислювати за формулою ємності плоского конденсатора.

Конденсатор характеризується не лише електроємністю, а й “пробивною напругою” – різницею потенціалів між його обкладками, при якій може відбутися пробій, тобто електричний розряд через шар діелектрика в конденсаторі. Величина пробивної напруги залежить від властивостей діелектрика, його товщини і форми обкладок.

Для збільшення ємності і варіювання її можливих значень конденсатори з’єднують в батареї.

Паралельне з’єднання конденсаторів.

Щоб отримати велику електроємність, кілька конденсаторів з’єднують в батарею так, щоб всі позитивні обкладки мали один спільний електрод, а негативні – інший (рис. 143). Таке з’єднання називається

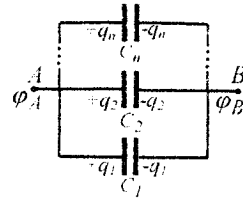


Рис. 143

ється **паралельним**. При цьому кілька конденсаторів немовби замінюють одним, у якого площа обкладок дорівнює

сумі площ обкладок складових конденсаторів.

Різниця потенціалів між обкладками всіх конденсаторів C_1, C_2, \dots, C_n , незалежно від ємності, однакова і дорівнює різниці потенціалів $\varphi_A - \varphi_B = U$. При цьому на кожному з них містяться заряди:

$$q_1 = C_1 U, q_2 = C_2 U, \dots, q_n = C_n U.$$

Заряд всієї батареї розподіляється між обкладками конденсатора так, що

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n,$$

або

$$q = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) U.$$

Крім того, заряд q батареї можна виразити через її електроємність $C_{\text{пар}}$ та напругу на її клеммах:

$$q = C_{\text{пар}} U.$$

Прирівнюючи два вирази для заряду q , отримуємо

$$C_{\text{пар}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i.$$

Якщо батарея складається з n однакових паралельно з’єднаних конденсаторів ємністю C кожен, то її електроємність

$$C_{\text{пар}} = Cn.$$

З'єднувати паралельно доцільно такі конденсатори, у яких однакова робоча напруга.

Послідовне з'єднання конденсаторів.

При послідовному з'єднанні конденсаторів негативну обкладку першого конденсатора з'єднують з позитивною об-

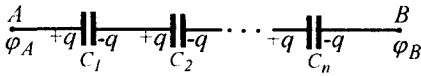


Рис.144

кладкою другого і т.д. (рис.144). Якщо на батарею подати напругу $U = \varphi_A - \varphi_B$, то до такої різниці потенціалів зарядяться тільки крайні обкладки першого і останнього конденсатора, причому

$$U = \varphi_A - \varphi_B = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + (\varphi_{n-1} - \varphi_n).$$

Провідник, що з'єднує негативну обкладку першого та позитивну обкладку другого конденсатора, можна розглядати разом з обкладками як одне провідне тіло. Внаслідок явища електростатичної індукції вільні заряди цього тіла під дією поля прикладеної напруги перерозподіляються так, що на одній обкладці з'являється негативний заряд $-q$, а на іншій – позитивний $+q$. Тому можна зробити висновок, що заряди на всіх послідовно з'єднаних конденсаторах, незалежно від їх ємності, однакові і дорівнюють заряду всієї батареї, тобто

$$q = q_1 = q_2 = \dots = q_n.$$

Ємність батареї послідовно з'єднаних конденсаторів

$$C_{\text{нос}} = \frac{q}{\varphi_A - \varphi_B}.$$

звідки
$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{q}{C_{\text{нос}}}.$$

Для першого конденсатора $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C_1}$,

для другого $\varphi_2 - \varphi_3 = \frac{q}{C_2}$ і т.д.

Тоді
$$\frac{q}{C_{\text{нос}}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \dots + \frac{q}{C_n}.$$

Після скорочення на q отримуємо формулу для обчислення електроємності батареї послідовно з'єднаних конденсаторів:

$$\frac{1}{C_{\text{нос}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}.$$

Якщо послідовно з'єднано n однакових конденсаторів з ємністю C кожен, то

$$C_{\text{нос}} = \frac{C}{n}.$$

Послідовно з'єднують конденсатори для підвищення робочої напруги, яку можна подати на батарею конденсаторів.

**§57. Енергія зарядженого відокремленого провідника, конденсатора.
Енергія електростатичного поля.
Об'ємна густина енергії**

Нехай ϵ відокремлений провідник, заряд, ємність і потенціал якого становлять q, C, φ . Збільшимо заряд цього провідника на dq . Для цього треба перенести заряд dq з нескінченності до поверхні провідника, затративши на це роботу

$$dA = \varphi dq = C \varphi d\varphi, \quad \left(C = \frac{dq}{d\varphi} \right).$$

Щоб зарядити тіло від нульового потенціалу до φ , треба виконати роботу

$$A = \int_0^{\varphi} C \varphi d\varphi = C \frac{\varphi^2}{2}.$$

Енергія зарядженого провідника чи слово дорівнює тій роботі, яку треба виконати, щоб зарядити цей провідник, тобто

$$W_e = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Під час зарядження конденсатора витрачається робота із перенесення електричних зарядів з однієї обкладки на іншу. Енергію зарядженого конденсатора визначають за формулою:

$$W_e = \frac{C\Delta\varphi^2}{2} = \frac{q\Delta\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

де $\Delta\varphi$ – різниця потенціалів між обкладками.

Знайдемо енергію електричного поля. Для цього у формулу $W = \frac{C\Delta\varphi^2}{2}$ під-

ставимо значення C і $\Delta\varphi$: $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$,

$$\Delta\varphi = Ed.$$

Тоді

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 S E^2 d = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V,$$

де $V = Sd$ – об'єм конденсатора. Відомо, що $\varepsilon\varepsilon_0 E = D$.

Тоді

$$W_e = \frac{1}{2} DEV.$$

Ці формули показують, що енергія конденсатора виражається через величину, що характеризує електростатичне поле, – через напруженість E . Це означає, що електростатичне поле володіє енергією і можна говорити про енергію електростатичного поля.

Електростатичне поле як одна з форм матерії існує в часі і просторі. Енергія є однією з характеристик стану матерії. Тому енергія нерозривно пов'язана з її матеріальним носієм – електричним полем. Енергія електричного поля локалізована у просторі, де існує це поле.

$$\text{Вираз } W_e = \frac{C\Delta\varphi^2}{2} = \frac{q\Delta\varphi}{2} \text{ відпові-}$$

дає положенням теорії далекодії, де W розглядається як потенціальна енергія заряджених тіл, що притягуються або відштовхуються один від одного. Формула

$$W_e = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V \text{ відповідає уявленням теорії}$$

поля (теорії близькодії), де вважається, що енергія, подібно до речовини, розподілена у просторі з *об'ємною густиною*

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2}.$$

Дослідження неоднорідних електричних полів, утворених довільними зарядженими тілами, показали, що для них формула $W_e = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E^2 V$ незастосовна, бо

$E \neq const$, а вираз для w_e визначає об'ємну густину енергії в кожній точці будь-якого електричного поля.

Енергія dW_e нескінченно малого об'єму dV поля дорівнює:

$$dW_e = w_e dV = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV.$$

Інтегруючи це рівняння по всьому об'єму V поля, знаходимо повну енергію W_e електростатичного поля:

$$W_e = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E^2 dV.$$

IV. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

§58. Постійний електричний струм

Явища і процеси, пов'язані з рухом електричних зарядів, становлять особливу частину вчення про електрику – електродинаміку.

Електричним струмом називають всякий упорядкований рух електричних зарядів. Електричний струм, який виникає у провіднику внаслідок того, що в ньому створюється електричне поле, називається *струмом провідності*.

Під час руху електричних зарядів порушується їхній рівномірний розподіл; поверхня провідника вже не є екіпотенціальною поверхнею. Всередині провідника повинно бути електричне поле. Переміщення електричних зарядів – електричний струм – продовжується доти, доки всі точки провідника не будуть екіпотенціальними.

Для появи й існування електричного струму треба, щоб виконувалися дві умови:

перша – наявність у даному середовищі вільних електричних зарядів. Такими зарядами в металах є електрони провідності; у газах – позитивні іони й електрони;

друга – наявність у даному середовищі електричного поля, енергія якого витрачалась б на переміщення електричних зарядів.

Щоб струм був тривалим, енергія електричного поля повинна весь час поповнюватись, тобто потрібен такий пристрій, в якому би певний вид енергії безперервно перетворювався в енергію електричного поля. Такий пристрій називається *джерелом електрорушійної сили*, або джерелом струму.

Якщо перенесення електричних зарядів здійснюється при нерівномірному переміщенні у просторі зарядженого макроскопічного тіла, то виникає струм, що називається *конвекційним*.

За напрямком електричного струму умовно приймають напрямком руху позитивних електричних зарядів.

Кількісною мірою електричного струму служить *сила струму* – скалярна фізична величина, яка числово дорівнює електричному заряду, що проходить через поперечний переріз провідника за одиницю часу:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Якщо сила струму і його напрямок з часом не змінюються, то струм називається постійним. Тоді

$$dq = Idt, \quad q = I \int_0^t dt.$$

Звідси
$$I = \frac{q}{t}.$$

Щоб струм був постійний, треба, щоб в кожній частині провідника заряди не нагромаджувались і не зникали. Тому коло постійного струму повинно бути замкненим.

Для характеристики розподілу електричного струму по перерізу провідника вводять вектор *густини струму* \vec{j} .

Вектор \vec{j} напрямлений вздовж струму і числово дорівнює силі струму, який проходить через одиницю площі перерізу провідника, який проведений перпендикулярно до напрямку струму:

$$j = \frac{dI}{dS}.$$

Повна сила струму у провіднику

$$I = \oint_S (\vec{j} \cdot d\vec{S}).$$

Виразимо силу і густину струму через швидкість $\langle \vec{u} \rangle$ впорядкованого руху зарядів у провіднику. За час dt через поперечний переріз S переноситься заряд $dq = ne \langle u \rangle S dt$. Сила струму

$$I = \frac{dq}{dt} = ne \langle u \rangle S,$$

отже, густина струму:

$$\vec{j} = ne \langle \vec{u} \rangle.$$

У джерелі е. р. с. на електрони повинні діяти сили неелектростатичного походження, які називаються *сторонніми*.

Сторонні сили, переміщаючи електричні заряди, виконують роботу. Фізична величина, що числово дорівнює роботі, яка виконується сторонніми силами під час переміщення одиничного позитивного заряду, називається *електрорушійною силою* (е. р. с.), що діє в колі:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{cm}}{q}.$$

Стороння сила \vec{F}_{cm} , що діє на заряд q , дорівнює:

$$\vec{F}_{cm} = \vec{E}_{cm} q.$$

Робота сторонніх сил над зарядом q на замкненій ділянці кола дорівнює

$$A = \oint_l (\vec{F}_{cm} \cdot d\vec{l}) = \oint_l (q \vec{E}_{cm} \cdot d\vec{l}).$$

Тоді
$$\mathcal{E} = \oint_l (\vec{E}_{cm} \cdot d\vec{l}).$$

Е. р. с., що діє в замкнутому колі, визначається циркуляцією вектора напруженості сторонніх сил.

Е. р. с., яка діє на ділянці 1-2, дорівнює:

$$\mathcal{E}_{12} = \int_l^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l}.$$

Результуюча сила, що діє в колі на заряд q :

$$\vec{F} = \vec{F}_{cm} + \vec{F}_e = q(\vec{E}_{cm} + \vec{E}).$$

Робота, яка виконується результуючою силою над зарядом q на ділянці 1-2, дорівнює

$$\begin{aligned} A_{12} &= q \int_l^2 (\vec{E}_{cm} \cdot d\vec{l}) + q \int_l^2 (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = \\ &= q \mathcal{E}_{12} + q(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Напрягою U_{12} на ділянці 1-2 називається фізична величина, що визначається роботою, що виконується сумарним полем електростатичних і сторонніх сил при переміщенні одиничного позитивного заряду на даній ділянці кола. Отже,

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

Поняття напруги є узагальненням поняття різниці потенціалів: напруга на кінцях ділянки кола дорівнює різниці потенціалів в тому випадку, якщо на цій ділянці не прикладена е. р. с.

Ділянка кола, на якій на носії струму діють сторонні сили, називається *неоднорідною*. Ділянка кола, на якій не діють сторонні сили, називається *однорідною*. Для однорідної ділянки кола

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Німецький фізик Ом експериментально встановив, що сила струму I , що тече по однорідному металевому провіднику, пропорційна до напруги U на кінцях провідника:

$$I = \frac{U}{R},$$

де R – електричний опір провідника. Це рівняння виражає *закон Ома для однорідної ділянки кола*.

Одиниця опору – Ом: Ом – опір такого провідника, в якому при напрузі $1В$ тече струм силою $1А$.

Величина $G = \frac{1}{R}$ – електрична провідність провідника.

Опір провідника залежить від його розмірів і форми, а також від матеріалу, з якого виготовлений провідник.

Для однорідного провідника опір R прямо пропорційний до його довжини l і обернено пропорційний до площі його поперечного перерізу S :

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

де ρ – питомий опір.

Подамо закон Ома для однорідної ділянки кола у диференціальній формі:

$$\frac{U}{l} = \rho \frac{l}{S}; \frac{l}{S} = \frac{lU}{\rho l} = \sigma \frac{U}{l},$$

де $\sigma = \frac{1}{\rho}$ – питома електрична провідність.

Оскільки $\frac{U}{l} = E$; $\frac{l}{S} = j$, то $j = \sigma E$. **Закон**

Ома для однорідної ділянки кола в диференціальній формі

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}.$$

В ізотропному провіднику носії струму в кожній точці рухаються в напрямку вектора \vec{E} . Напрямки \vec{j} та \vec{E} збігаються.

Закон Ома в диференціальній формі зв'язує густину струму в кожній точці всередині провідника з напруженістю електричного поля в тій самій точці.

Оскільки напрямлений рух носіїв заряду створюється електричним полем у провіднику, то можна вважати, що середня швидкість $\langle \vec{u} \rangle$ напрямленого руху зарядів прямо пропорційна до напруженості \vec{E} поля в провіднику:

$$\langle \vec{u} \rangle \approx \vec{E}, \text{ або } \langle \vec{u} \rangle = u\vec{E},$$

де u – рухливість носіїв заряду.

Рухливість носіїв заряду числово дорівнює швидкості напрямленого руху, якої вони набувають під дією електричного поля у провіднику з одиничною напруженістю.

Тоді формулу для густини струму можна записати у вигляді

$$\vec{j} = neu\vec{E}.$$

Порівнюючи цю формулу з виразом

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}, \text{ отримуємо}$$

$$\sigma = enu.$$

Отже, питома електропровідність металів прямо пропорційна до концентрації вільних електронів та їх рухливості.

На неоднорідній ділянці кола на носії струму діють, крім електростатичних сил $\vec{F}_e = q\vec{E}$, сторонні сили $\vec{F}_{cm} = q\vec{E}_{cm}$. Тому середня швидкість впорядкованого руху носіїв $\langle \vec{u} \rangle$ буде пропорційна до сумарної сили $q\vec{E} + q\vec{E}_{cm}$. Відповідно густина струму буде пропорційна до суми напруженостей $\vec{E} + \vec{E}_{cm}$:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{cm}) = \frac{1}{\rho} (\vec{E} + \vec{E}_{cm}).$$

Це співвідношення є математичним виразом в **диференціальній формі закону Ома для неоднорідної ділянки кола.**

Помножимо скалярно обидві частини виразу для закону Ома на вектор $d\vec{l}$, який числово дорівнює довжині dl елемента провідника і напрямлений вздовж вектора густини струму:

$$(\vec{j}, d\vec{l})\rho = (\vec{E}, d\vec{l}) + (\vec{E}_{cm}, d\vec{l}).$$

Оскільки вектори \vec{j} та $d\vec{l}$ збігаються за напрямком, то $(\vec{j}, d\vec{l}) = jdl$. Величина

густини струму $j = \frac{I}{S}$. Отже,

$$I\rho \frac{dl}{S} = (\vec{E}, d\vec{l}) + (\vec{E}_{cm}, d\vec{l}).$$

Інтегруючи по довжині ділянки кола 1-2 і враховуючи, що сила струму по всіх перерізах кола однакова, отримуємо

$$I \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_1^2 (\vec{E}_{cm}, d\vec{l}).$$

Як було показано вище,

$$\int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}) = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \int_1^2 (\vec{E}_{cm}, d\vec{l}) = \mathcal{E}_{12},$$

а інтеграл $\int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = R_{12}$ – опір ділянки кола

1-2. Для однорідного провідника постійного перерізу

$$R_{12} = \rho \frac{l_{12}}{S},$$

де l_{12} – довжина провідника між перерізами 1-2. Отже,

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

Поділивши на R_{12} , отримаємо математичний вираз **закону Ома для неоднорідної ділянки кола**:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R_{12}} = \frac{U_{12}}{R_{12}}.$$

Силу струму треба розглядати як алгебраїчну величину. Якщо струм тече по ділянці кола від перерізу 1 до перерізу 2, то $l > 0$, якщо струм тече в протилежному напрямку, то $l < 0$.

Е.р.с. \mathcal{E}_{12} є теж величиною алгебраїчною. У випадку, коли е.р.с. сприяє руху позитивних носіїв струму у напрямку 1-2, то $\mathcal{E}_{12} > 0$, якщо е.р.с. перешкоджає руху позитивних носіїв у цьому напрямку, то $\mathcal{E}_{12} < 0$ (рис.145).



Рис. 145

Якщо електричне коло замкнене, то точки 1 і 2 збігаються, тому $\varphi_1 = \varphi_2$ і $R_{12} = R$, де R – загальний опір кола.

Тому закон Ома для замкненого кола має такий вигляд:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

де \mathcal{E} – алгебраїчна сума всіх електрорушійних сил, прикладених у цьому колі.

Нехай замкнене електричне коло складається із джерела струму з е.р.с. \mathcal{E} і внутрішнім опором r і зовнішньої частини, яка має опір $R_{зов}$.

Тоді

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{зов} + r}.$$

Якщо коло розімкнуте, то $\mathcal{E}_{12} = \varphi_2 - \varphi_1$. Це означає, що е.р.с., прикладена до розімкнутого кола, дорівнює різниці потенціалів на кінцях цього кола.

Розглянемо однорідний провідник, до якого прикладена напруга U . За час dt через переріз провідника переноситься заряд $dq = Idt$. Оскільки струм представляє переміщення заряду dq під дією електричного поля, то робота струму

$$dA = dqU = IUdt = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt.$$

Потужність струму:

$$P = \frac{dA}{dt} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

Якщо струм проходить по нерухомому металевому провіднику, то вся робота струму йде на його нагрівання і за законом збереження енергії

$$dQ = dA.$$

Тоді **закон Джоуля-Ленца** має вигляд

$$dQ = IU dt = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt.$$

Виділимо в провіднику елементарний циліндричний об'єм $dV = dSdl$, опір якого $R = \rho \frac{dl}{dS}$, а за законом Джоуля-Ленца за час dt в цьому об'ємі виділиться теплота

$$dQ = I^2 R dt = \rho \frac{dl}{dS} (j dS)^2 dt = \rho j^2 dV dt.$$

Кількість теплоти, що виділяється за одиницю часу в одиниці об'єму, називається *густиною теплової потужності струму*:

$$w = \frac{dQ}{dV dt}.$$

Отже, $w = \rho j^2.$

Оскільки $j = \sigma E$, а $\rho = \frac{1}{\sigma}$, то

$$w = jE = \sigma E^2.$$

Це закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі.

§59. Класична електронна теорія електропровідності металів і її дослідне обґрунтування. Виведення закону Ома в диференціальній формі із електронних представлень

Численні експерименти з електрики, виконані різними вченими в XIX ст., дали багатий матеріал для створення науково обґрунтованої теорії електричної провідності металів.

Перші дослідні із з'ясування механізму електропровідності металів виконав Е. Рінке. В електричне коло постійного струму було увімкнено три послідовно з'єднані циліндри з хімічно чистих алюмінію і міді, які щільно притискувались один до одного (рис.146).

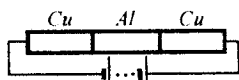


Рис.146

Через коло протягом року пропускали електричний струм. Через циліндри пройшов електричний заряд, що дорівнює $3.5 \cdot 10^6 \text{ Кл}$. Проте ніяких ознак перенесення речовини (Cu , Al) не було виявлено. Це було експериментальним доказом того, що іони в металах не беруть участі в переносі електрики, а перенесення заряду в металах здійснюється частинками, які є загальними для усіх металів. Такими частинками можуть бути електрони.

Для вивчення природи носіїв струму в металі Г. Лоренц запропонував такий дослід.

Металевий стрижень C рухався поступально з швидкістю v_0 (рис.147). Внаслідок взаємодії з кристалічною ґраткою носії струму в провіднику теж рухались з швидкістю v_0 . Стрижень різко гальмувався і в момент гальмування замикався нерухомим металевим провідником B на гальванометр. Носії струму, не зв'язані жорстко з кристалічною ґраткою, продовжували рухатись за інерцією доти, доки взаємодія з іонами ґратки не зупинить їх. У замкненому колі проходив короткочасний струм, який можна виявити за допомогою гальванометра G . За напрямком струму визначають знак рухомих зарядів. Цей дослід дав змогу визначити питомий заряд $\frac{q}{m}$; де q – заряд носія струму, m – його маса.

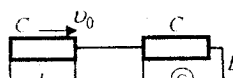


Рис 147

За законом Джоуля-Ленца робота, яка виконується струмом I за час dt в колі з опором R , дорівнює

$$\delta A = I^2 R dt.$$

Ця робота виконується внаслідок зменшення кінетичної енергії впорядкованого руху носіїв струму в стрижні С:

$$\delta A = -N d \left(\frac{mu^2}{2} \right) = -n l S m u du,$$

де $n l S = N$ кількість носіїв струму в стрижні з площею поперечного перерізу S ; u – швидкість впорядкованого руху носіїв заряду в момент часу t , n – концентрація носіїв заряду.

Густина струму в стрижні дорівнює

$$j = |q| n u,$$

а сила струму в стрижні і у всьому колі

$$I = |q| n u S.$$

Тоді, робота

$$\delta A = |q| n u S R I dt = |q| n u S R dQ,$$

де $dQ = I dt$ – заряд, який пройшов через гальванометр за час dt .

Отже, $|q| n u S R dQ = -n l S m u du$.

$$\text{Звідси } \frac{|q|}{m} dQ = -\frac{l}{R} du.$$

Проінтегруємо ліву і праву частину цієї рівності:

$$\frac{|q|}{m} \int_0^Q dQ = -\frac{l}{R} \int_{v_0}^0 du, \quad \frac{|q|}{m} Q = \frac{l}{R} v_0.$$

Звідси отримуємо

$$\frac{|q|}{m} = \frac{l v_0}{Q R},$$

де Q – повний заряд, що пройшов через гальванометр при гальмуванні стрижня.

Л. Мандельштам і Н. Папалексі виконали такий дослід: взяли котушку з намотаним на неї дротом, кінці якої були з'єднані з нерухомою телефонною трубкою. При швидких крутильних коливаннях котушки навколо її осі в колі виникав змінний струм, що викликав тріск в телефонній

трубці. Цей дослід підтвердив наявність носіїв струму в дроті. Проте він не дав змоги визначити напрямок струму і знак заряду.

Т. Стюарт і Р. Толмен удосконалили цей дослід, замінивши телефон чутливим гальванометром. Дослід показав, що носії струму заряджені негативно. Відношення q/m виявилось близьким до питомого заряду електрона.

Отже, було експериментально доведено, що носіями струму в металах насправді є електрони.

Класичну електронну теорію провідності металів створив П. Друде, а розвинув у своїх працях Г. Лоренц.

Класична електронна теорія провідності металів, яка створена П. Друде і Г. Лоренцом ґрунтується на таких фундаментальних положеннях:

- усі метали мають кристалічну будову. У вузлах кристалічної ґратки розміщуються іони металу;
- простір між вузлами кристалічної ґратки заповнений електронним газом, який утворюється валентними електронами, що порівняно слабо зв'язані з атомними ядрами і відриваються від атомів при утворенні кристалічної ґратки, вільні електрони рухаються хаотично між іонами металу;
- в середньому кожен атом металу втрачає один електрон і концентрація електронів провідності в металах дорівнює кількості атомів в одиниці об'єму металу. Концентрацію носіїв заряду в металах можна обчислити за формулою

$$n = \frac{N_A}{A} \rho,$$

де ρ – густина металу, A – його атомна ма-

$$\text{са. Для міді } A = 63,6 \frac{\text{кг}}{\text{атом}},$$

$$\rho = 8,93 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \text{ і } n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3};$$

– до електронного газу в металах застосовані всі закони молекулярно-кінетичної теорії газів, тобто електронний газ розглядається як ідеальний газ.

Під час руху електрони стикаються з іонами кристалічної ґратки металу. Середня довжина вільного пробігу електронів $\langle \lambda \rangle$ за порядком величини дорівнює періоду кристалічної ґратки, тобто 10^{-10} м .

За теорією Друде – Лоренца електрони мають таку ж енергію теплового руху, як і молекули одноатомного газу. Середня швидкість теплового руху електронів

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}$$

$$(\text{при } T=300\text{K}, \langle v \rangle = 1,08 \cdot 10^5 \text{ м/с}).$$

Тепловий рух електронів, який є хаотичним, не може привести до виникнення струму.

При накладанні зовнішнього електричного поля на металевий провідник, крім теплового руху електронів, виникає й впорядкований рух, тобто електричний струм. Середню швидкість $\langle u \rangle$ впорядкованого руху електронів можна оцінити на основі формули: $j = ne \langle u \rangle$.

Для міді допустима густина струму

$$j = 10^7 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}, n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Тоді

$$\langle u \rangle = \frac{10^7}{8,5 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ м/с} \approx 8 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}.$$

Отже, $\langle u \rangle \ll \langle v \rangle$. Незначна величина

$\langle u \rangle$ пояснюється досить частими зіткненнями електронів з іонами кристалічної ґратки.

Здавалось би, отриманий результат протирічить тому відомому факту, що швидкість поширення електричного струму величезна і дорівнює швидкості світла c . Швидкість c є швидкістю поширення електромагнітного поля вздовж провідника.

Рух електронів під дією зовнішнього електричного поля виникає по всій довжині дроту практично одночасно з подачею сигналу.

Найважливішим завданням класичної електронної теорії провідності металів є теоретичне виведення основних законів електричного струму, які були встановлені на досліді.

Закон Ома

Нехай в металевому провіднику існує електричне поле напруженістю $E = \text{const}$. З боку поля на заряд діє сила $F = eE$ і він отримує прискорення

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}.$$

За час вільного пробігу електрони рухаються рівноприскорено, набуваючи до кінця вільного пробігу швидкість

$$u_{\text{max}} = \frac{eE}{m} \langle t \rangle, \text{ де } \langle t \rangle - \text{середній час}$$

між двома послідовними зіткненнями електронів з іонами ґратки. Згідно з теорією Друде в кінці вільного пробігу електрон, стикаючись з іонами ґратки, віддає їм енергію, швидкість впорядкованого руху стає нульовою. Отже,

$$\langle u \rangle = \frac{u_{\text{max}} + 0}{2} = \frac{eE}{2m} \langle t \rangle.$$

Класична теорія не враховує розподіл електронів за швидкостями, тому $\langle t \rangle$ визначається довжиною вільного пробігу

$\langle \lambda \rangle$ і середньою швидкістю руху електронів відносно кристалічної ґратки провідника, яка дорівнює $\langle v \rangle + \langle u \rangle$:

$$\langle t \rangle = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle + \langle u \rangle}.$$

Але $\langle u \rangle \ll \langle v \rangle$, і $\langle t \rangle = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle}$.

Тоді
$$\langle u \rangle = \frac{eE \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle}.$$

Порівнюючи цей вираз з формулою $\langle u \rangle = uE$, де u – рухливість носіїв заряду, знаходимо

$$u = \frac{e \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle}.$$

Отже, рухливість носіїв заряду залежить від їх питомого заряду $\frac{e}{m}$, середньої довжини вільного пробігу $\langle \lambda \rangle$ та швидкості, що характеризує хаотичний рух носіїв заряду в провіднику.

Густина струму в металевому провіднику

$$j = ne \langle u \rangle \text{ і } j = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle} E.$$

Величину $\sigma = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle}$ називають питомою електропровідністю, а обернену до неї величину $\frac{1}{\sigma} = \rho$ – питомим опором провідника.

Отже,
$$j = \frac{1}{\rho} E = \sigma E.$$

Ця формула виражає **закон Ома для густини струму**: густина струму в провіднику дорівнює добутку питомої електропровідності провідника на напруженість електричного поля.

Вектори \vec{E} і \vec{j} мають той самий напрямок. Тому закон Ома можна записати також у векторній формі:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}.$$

Розглянемо межі застосування закону Ома. Як видно з формули

$$\vec{j} = enu\vec{E},$$

закон Ома справджується, коли добуток nu залишається сталим, тобто не залежить від напруженості поля \vec{E} . Якщо ж електричне поле настільки велике, що воно змінює концентрацію n або надає електронам на довжині вільного пробігу додаткової швидкості, яка за величиною наближається до середньої швидкості теплового руху, то тоді закон Ома не матиме місця, тобто порушиться лінійність між \vec{j} та \vec{E} . Для металів відхилення від закону Ома настає при дуже великих напруженостях порядку 10^8 В/м .

Закон Дюсоуля - Ленца.

До кінця вільного пробігу електрон під дією поля отримує додаткову кінетичну енергію

$$\langle E_K \rangle = \frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{m e^2 E^2 \langle t \rangle^2}{2 m^2} = \frac{e^2 \langle \lambda \rangle^2}{2m \langle v \rangle^2} E^2.$$

При співударі електрона з іоном ця енергія повністю передається ґратці і йде на збільшення внутрішньої енергії металу, тобто на його нагрівання:

За одиницю часу електрон стикається з вузлами ґратки в середньому $\langle z \rangle$ разів:

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle \lambda \rangle}.$$

Якщо n – концентрація електронів, то за одиницю часу відбувається $n \langle z \rangle$ зіткнень і ґратці передається енергія

$$w = n \langle z \rangle \langle E_K \rangle,$$

яка йде на нагрівання провідника, w – густина теплової потужності струму.

Підставивши в це рівняння вираз для $\langle E_k \rangle$, отримаємо:

$$w = n \frac{\langle v \rangle e^2 \langle \lambda \rangle^2}{\langle \lambda \rangle 2m \langle v \rangle^2} E^2 = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle} E^2.$$

Оскільки $\frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle} = \sigma$, тоді

$$w = \sigma E^2.$$

Ця формула для обчислення густини теплової потужності електричного струму отримана теоретично на основі уявлень класичної електронної теорії. Вона є математичним виразом закону Джоуля-Ленца в диференціальній формі.

§60. Закон Відемана-Франца.

Недоліки класичної електронної теорії провідності металів

У 1853 році німецькі вчені Відеман і Франц на основі експериментів встановили закон, згідно з яким:

для всіх металів при одній і тій самій температурі відношення коефіцієнта теплопровідності κ до коефіцієнта питомої електропровідності σ є величина стала

$$\frac{\kappa}{\sigma} = C.$$

Оскільки величини κ та σ залежать від температури (неявно, а через середню арифметичну швидкість та швидкість теплового руху), то наступні дослідження Лоренца довели, що

$$\frac{\kappa}{\sigma} = C_1 T.$$

Відомо, що теплопровідність металів переважно здійснюється за рахунок руху вільних електронів. Електронний газ в металах подібний до одноатомного ідеального газу. Тому згідно з молекулярно-кі-

нетичною теорією коефіцієнт теплопровідності становитиме

$$\kappa = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho c_V = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle mn \frac{3}{2} \frac{R}{mN_A},$$

звідси $\kappa = \frac{1}{2} kn \langle \lambda \rangle \langle v \rangle$,

де n – концентрація вільних електронів, k – стала Больцмана.

Оскільки питома електропровідність

$$\sigma = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle},$$

тоді

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{kn \langle \lambda \rangle \langle v \rangle 2m \langle v \rangle}{2ne^2 \langle \lambda \rangle} = \frac{k}{e^2} m \langle v \rangle^2.$$

Середня кінетична енергія однієї молекули ідеального газу дорівнює

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{m v_{\text{ср.кв.}}^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

де $v_{\text{ср.кв.}}$ – середня квадратична швидкість.

Якщо знехтувати, як це зробив Друде, відмінністю між квадратами середньої швидкості $\langle v \rangle$ теплового руху і їхньою середньою квадратичною швидкістю $v_{\text{ср.кв.}}$, тобто припустити, що

$$m \langle v \rangle^2 = m v_{\text{ср.кв.}}^2 = 3kT, \text{ тоді}$$

$$\frac{\kappa}{\sigma} = 3 \frac{k^2}{e^2} T.$$

Отже,

$$C_1 = 3 \frac{k^2}{e^2} \text{ і } C_1 = 2.23 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж}^2}{\text{Кт}^2 \cdot \text{К}^2}.$$

Це значення добре узгоджується з дослідними даними.

Але це узгодження класичної електронної теорії виявилось порушенням. Лоренц вдосконалив теорію Друде, застосувавши до електронного газу статистику Максвелла, тобто розподіл молекул за швидкостями (Друде вважав, що всі елек-

трони мають однакову швидкість теплового руху). Виявилось, що в тому разі

$$\frac{\alpha}{\sigma} = 2 \frac{k^2}{e^2} T.$$

Коефіцієнт $C_1 = 2 \frac{k^2}{e^2}$ згідно з теорією Лоренца гірше узгоджується з дослідними даними, ніж результат Друде $C_1 = 3 \frac{k^2}{e^2}$.

Виявляється, що уточнена класична електронна теорія, яка враховує статистичні властивості електронного газу в металах, гірше узгоджується з дослідними даними, ніж теорія Друде.

Спроби застосувати класичну електронну теорію Друде-Лоренца для пояснення ряду закономірностей електрики і теплових явищ, які спостерігаються на досліді, не завжди приводили до позитивних результатів. Нездатність класичної електронної теорії пояснити деякі закони і явища свідчать про її обмеженість. Розглянемо кілька таких прикладів.

I. Молярна теплоємність металу $C_{мет}$

Згідно з класичною електронною теорією молярна теплоємність $C_{мет}$ металу дорівнює сумі молярної теплоємності кристалічної ґратки $C_{гр}$ і молярної теплоємності $C_{ел}$ електронного газу, який може розглядатися як одноатомний ідеальний газ:

$$C_{мет} = C_{гр} + C_{ел}.$$

Іони, що утворюють кристалічну ґратку металу, здійснюють коливання біля вузлів ґратки. Кожний іон має три коливні ступені вільності, на які в середньому припадає енергія $3kT$. Внутрішня енергія моля іонів

$$U_{гр} = 3N_A kT = 3RT.$$

Отже,

$$C_{гр} = \frac{dU_{гр}}{dT} = 3R.$$

Молярна теплоємність електронного газу як ідеального

$$C_{ел} = \frac{3}{2} R.$$

Отже, молярна теплоємність металів

$$C_{мет} = C_{гр} + C_{ел} = 3R + \frac{3}{2} R = \frac{9}{2} R.$$

Але експериментальні дані показують, що теплоємність металів, так само, як і теплоємність твердих діелектриків, близька до $3R$. Отримали неочікуване і незрозуміле явище практичної відсутності теплоємності в електронного газу.

II. Температурна залежність опору

Експериментально встановлено, що в досить широкому інтервалі температур питомий опір $\rho \sim T$ або $\sigma \sim \frac{1}{T}$. Відомо, що

$$\rho = \frac{1}{\sigma}, \quad \text{а} \quad \sigma = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle u \rangle}, \quad \text{крім того,}$$

$$\langle u \rangle \sim \sqrt{T}, \quad \text{отже} \quad \sigma \sim \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad \text{а звідси впливає, що} \quad \rho \sim \sqrt{T}, \quad \text{що суперечить дослідним даним.}$$

Щоб $\rho \sim \sqrt{T}$, що суперечить дослідним даним.

III. Оцінка середньої довжини вільного пробігу електронів в металах

$$\text{Щоб за формулою} \quad \sigma = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle u \rangle}$$

отримати значення σ , яке збігається з дослідними, треба прийняти $\langle \lambda \rangle$ значно більшими від періоду кристалічної ґратки, тобто допустити, що електрон проходить без співударянь з іонами ґратки сотні міжвузлових відстаней. Таке припущення не відповідає класичній теорії Друде-Лоренца.

Згадані розбіжності теорії з дослідом можна пояснити тим, що рух електронів в металах підлягає законам квантової механіки.

Однак класична електронна теорія не втратила свого значення, оскільки при високих температурах вона дає правильні якісні результати і є наочною.

§61 Робота виходу електронів з металу.
Термоелектронна емісія

Електрони провідності в металі весь час перебувають в хаотичному тепловому русі. Та обставина, що вільні електрони утримуються всередині металу, вказує на те, що в поверхневому шарі металу виникає затримуюче електричне поле, яке перешкоджає електронам виходити з металу в навколишній вакуум. Щоб покинути метал, електрон повинен виконати деяку роботу, яка називається *роботою виходу*.

Одна із причин виникнення роботи виходу полягає в наступному. Якщо при тепловому русі електрон вилетить з металу, то він індукує на його поверхні заряд, який називається зарядом дзеркального відображення. Між електронем і цим зарядом виникає сила притягання, що називається силою електричного зображення і яка намагається повернути електрон назад в метал.

Друга причина зумовлена тим, що біля поверхні металу у вакуумі існує "електронна хмарка", яка заряджена негативно

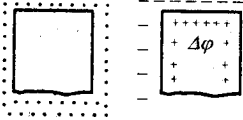


Рис.148

но (рис.148). Розміри цієї хмарки одного порядку з розмірами атомів (10^{-10} м). При цьому метал, охоплений негативною

електронною хмаринкою, відносно вакууму заряджений позитивно (рис. 148). Позитивний потенціал внутрішньої частини металу відносно вакууму називається внутрішнім потенціалом $\Delta\phi$.

Потенціальну енергію W вільних електронів $-e$ у вакуумі вважають такою, що дорівнює нулю (бо $\phi = 0$). Тоді всередині металу з позитивним внутрішнім потенціалом $\Delta\phi$ потенціальна енергія електронів провідності від'ємна:

$$W = (-e)\Delta\phi = -e\Delta\phi.$$

Отже, вільні електрони в металах знаходяться в "потенціальній ямі з плоским дном" (рис.149) (плоским через те, що

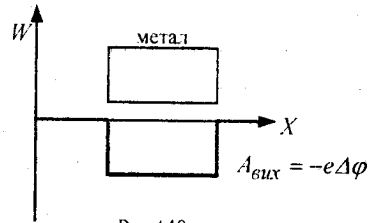


Рис.149

поверхневий подвійний шар утворює електричне поле, подібне до поля плоского конденсатора).

Для виходу електрона з металу у вакуум треба подолати потенціальний бар'єр – поле подвійного поверхневого шару. Це потребує додаткової енергії, яка має бути не меншою за глибину потенціальної ями.

Роботою виходу називається величина $A_{вих}$, що дорівнює тій найменшій додатковій енергії, з протилежним знаком, яку потрібно передати електрону провідності в металі для його виходу у вакуум. Отже, числово робота виходу дорівнює:

$$A_{вих} = e\Delta\phi.$$

Якщо електрону в металі надати додаткової енергії, його кінетична енергія

зростає. Умову виходу електрона з металу можна записати так:

$$\frac{m v_n^2}{2} \geq e \Delta \phi.$$

де v_n – проекція швидкості електрона на нормаль до поверхні металу.

Додаткову енергію електрони провідності можуть отримати при освітленні металу (зовнішній фотоэффект), нагріванні (термоелектронна емісія), під дією сильного електричного поля (автоелектронна емісія), при бомбардуванні поверхні металу потоком електронів у вакуумі (вторинна електронна емісія).

Робота виходу залежить від хімічної природи металу і стану його поверхні. Забруднення, залишки вологи тощо змінюють величину роботи.

Підібравши певним чином покриття поверхні, можна значно зменшити $A_{вих}$. Якщо на поверхню вольфраму ($A_{вих} = 4,5 \text{ eV}$) нанести шар оксиду лужноземельного металу (Ca, Ba), то робота виходу зменшується до 2 eV .

Емісія – це вихід електронів з металу під дією зовнішніх факторів.

Явище термоелектронної емісії полягає в тому, що нагріті метали випускають електрони. Електрон провідності може вилетіти з будь-якого металу тоді, коли його енергія (кінетична) перевищує роботу виходу електрона з металу.

Внаслідок термоелектронної емісії виникає термоелектронний струм.

Явище термоелектронної емісії на практиці можна спостерігати за допомогою вакуумної лампи-діода, в яку впаяно два електроди – катод K і анод A (рис.150). Катод нагрівається електричним струмом

від батареї розжарювання B_p . Регулюючи

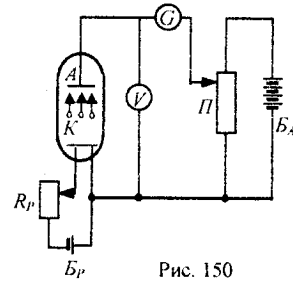


Рис. 150

за допомогою реостата R_p силу струму розжарювання, можна змінювати температуру катода. Від батареї на електроди подається напруга U_a , величину якої можна змінювати за допомогою потенціометра Π і вимірювати вольтметром V . Термоелектронний струм I_a вимірюється гальванометром G .

Сила термоелектронного струму I_a залежить від напруги U_a , яка прикладена між катодом та анодом, температури катода і матеріалу, з якого виготовлений катод.

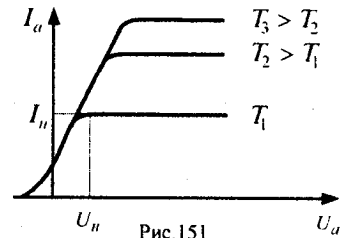


Рис.151

На рис.151 подано залежність термоелектронного струму I_a від напруги U_a при різних температурах катода. Ця крива називається *вольт-амперною характеристикою діода*. При малих значеннях U_a криві при різних температурах збігаються.

При невеликих анодних напругах сила струму спочатку повільно зростає з підвищенням напруги. Це пояснюється

тим, що при невеликих значеннях U_a не всі електрони, які вийшли з катода, досягають анода. Частина електронів між катодом і анодом утворює електронну хмаринку (просторовий заряд), яка перешкоджає руху до анода електронів, які знову вилетіли з катода. Із збільшенням напруги U_a електронна хмаринка поступово розсіюється і струм I_a зростає. При $U_a = U_n$ зростання струму припиняється. Це пов'язано з тим, що кількість електронів, які долітають до анода за одиницю часу, дорівнює кількості електронів, що вилітають за той самий час з катода.

Максимальний термоелектронний струм, можливий при даній температурі катода, називають *струмом насичення* I_n .

При малих значеннях $U_a \ll U_n$ залежність термоелектронного струму від анодної напруги описується законом Богуславського-Ленгмюра

$$I_a = BU_a^{3/2},$$

де B – коефіцієнт, який залежить від форми електродів та їх взаємного розміщення.

Якщо позначити через N загальну кількість електронів, що вилітають з катода при даній температурі за одиницю часу, то силу струму насичення I_n можна визначити за формулою

$$I_n = Ne.$$

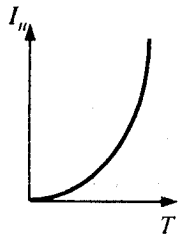


Рис.152

Залежність струму насичення I_n від температури катода має вигляд (рис.152).

Математично залежність густини струму насичення описується за класичною електронною теорією *формулою Річардсона*:

$$j_n = A\sqrt{T}e^{-\frac{e\Delta\varphi}{kT}},$$

де $A = ne\sqrt{\frac{k}{2\pi m}}$, тут e, m, n – відповідно заряд, маса та концентрація електронів в металі, k – стала Больцмана.

Отже, за класичною електронною теорією коефіцієнт A залежить від концентрації електронів n і для різних металів є неоднаковим.

За квантовою теорією густина струму насичення визначається *формулою Річардсона-Дешимена*:

$$j_n = BT^2e^{-\frac{e\Delta\varphi}{kT}},$$

де $B = \frac{4\pi emk^2}{h^3} \approx 120 \frac{A}{\text{см}^2 K}$.

Отже, стала B є однаковою для всіх металів. Проте таке B не виявлене у жодного з металів. Розбіжності пояснюються тим, що в теоретичних розрахунках використовується модель ідеального електронного газу.

Обидві теорії правильно передають експоненціальну залежність густини струму j_n від температури. Множники $T^{1/2}$ і T^2 відіграють другорядну роль, оскільки показникова функція змінюється значно сильніше за степеневу.

§62. Струм в газах

Гази складаються з електрично нейтральних атомів і молекул і не мають вільних зарядів (електронів та іонів), здатних під дією електричного поля рухатись впорядковано. Отже, при нормальних умовах гази є ізоляторами. Це підтверджують досліди із зарядженими ізольованими провід-

никами в сухому повітрі: їх заряд майже не змінюється протягом тривалого часу. Газ стає провідником, якщо частина його молекул іонізується.

Явище відривання електронів від молекул газу, що приводить до утворення в газі вільних електронів та позитивних іонів і зумовлює його електропровідність, називається іонізацією газу.

Атоми і молекули газу – це стійкі системи заряджених частинок. Тому для іонізації атома (або молекули) треба виконати роботу проти сил взаємодії між електроном, що виривається, та іншими частинками атома. Цю роботу називають *роботою іонізації* A_i . Робота іонізації (її величина) залежить від хімічної природи газу і енергетичного стану електрона в атомі або молекулі, з яких він виривається. Найслабше зв'язані з ядром зовнішні (валентні) електрони атома. Через те, щоб вирвати валентний електрон з атома, треба виконати меншу роботу, ніж для виривання будь-якого іншого електрона. Після того як з атома вирвали один електрон, зміцнюється зв'язок з ядром інших електронів.

Роботу іонізації можна охарактеризувати за допомогою потенціалу іонізації.

Потенціалом іонізації φ_i називають ту різницю потенціалів, яку повинен пройти електрон у прискорювальному електричному полі, щоб збільшення його енергії дорівнювало роботі іонізації:

$$\varphi_i = \frac{A_i}{e}.$$

Іонізація газу може відбуватись під впливом різних зовнішніх факторів:

- 1) сильного нагрівання газу,
- 2) рентгенівського проміння,

3) радіоактивного випромінювання (α, β, γ -частинки),

4) ультрафіолетового випромінювання.

Іонізація газу під впливом рухомих електронів або іонів називається ударною іонізацією. Якщо кінетична енергія частинки мала, то її зіткнення з атомами газу нагадує пружний удар, і це приводить лише до нагрівання газу.

Якщо енергія частинки досить велика, то зіткнення з атомами стають непружними і викликають іонізацію атома (вибивання електрона). Частинка ніби проникає в атом і вибиває з нього електрон.

Визначимо, яку мінімальну кінетичну енергію повинна мати іонізуюча частинка, щоб відбулася ударна іонізація газу.

Швидкість теплового руху молекул набагато менша за швидкість частинок, що іонізують газ. Тому можна вважати, що до удару атом не рухався. У випадку непружного зіткнення закон збереження імпульсу має вигляд:

$$mv = (m + M)u,$$

де m – маса іонізуючої частинки, v – її швидкість, M – маса атома, u – швидкість частинки і атома після удару. Швидкість електрона, який вибитий з атома, наближено вважаємо також u .

Початкова кінетична енергія частинки також витрачається при ударі на роботу іонізації A_i і на те, щоб надати частинці і атому кінетичну енергію, яка відповідає їхній швидкості u після удару:

$$\frac{mv^2}{2} = A_i + \frac{(m + M)u^2}{2}.$$

Із закону збереження імпульсу

$$u = \frac{mv}{m + M}.$$

Тоді

$$\frac{mv^2}{2} = A_i + \frac{m+M}{2} \frac{m^2v^2}{(m+M)^2} =$$

$$= A_i + \frac{mv^2}{2} \frac{m}{m+M}; \quad \frac{mv^2}{2} \left(1 - \frac{m}{m+M} \right) = A_i.$$

Звідси

$$\frac{mv^2}{2} = A_i \frac{m+M}{M} = A_i \left(1 + \frac{m}{M} \right).$$

Частина вільних електронів в іонізованому газі захоплюється нейтральними молекулами, які при цьому перетворюються на негативно заряджені іони. Отже, електропровідність іонізованого газу є мішаною: носіями електричного заряду в газах можуть бути вільні електрони та позитивні і негативні іони.

Переважно, при іонізації газів кількість додатних іонів дорівнює сумі електронів і негативних іонів

$$n_+ = n_e + n_-.$$

Тому загалом навіть іонізований газ залишається електрично нейтральним. Ступінь іонізації визначається співвідношенням

$$\alpha = \frac{n_+}{n_0}.$$

Ступінь іонізації газів залежить від температури, тиску (через концентрацію незаряджених частинок) та енергії іонізації і описується рівнянням Саха:

$$\alpha = \frac{n_+}{n_0} \approx \frac{T^{3/4}}{n_0^2} e^{-\frac{A_i}{kT}},$$

де n_0 – концентрація нейтральних молекул.

Носії заряду в іонізованому газі, як і нейтральні молекули, перебувають у неперервному хаотичному русі. При цьому відбуваються зіткнення між собою частинок, заряди яких мають протилежні знаки, та їх поєднання з утворенням нейтральних мо-

лекул газу. Цей процес називається *рекомбінацією іонів*.

Якщо іонізатор діє в газі тривалий час, то *між процесами іонізації та рекомбінації іонів встановлюється динамічна рівновага*. Це означає, що кількість пар носіїв заряду, створюваних іонізатором в одиниці об'єму газу протягом однієї секунди, дорівнює кількості нейтральних молекул, які утворюються в цьому об'ємі за той самий час внаслідок рекомбінації іонів.

Рекомбінація іонів супроводжується виділенням енергії у вигляді квантів випромінювання відповідної довжини хвилі. Це випромінювання частково розсіюється та витрачається на збудження молекул газу. Отже, рекомбінаційні процеси, що відбуваються в іонізованому газі, супроводжуються світінням газу.

Процес проходження електричного струму через газ називають газовим розрядом.

Електричний струм, зумовлений електропровідністю газу, якої він набуває внаслідок неперервної дії іонізатора, називається несамостійним газовим розрядом.

Несамостійний газовий розряд зникає відразу після припинення дії іонізатора, якщо швидкість електронів недостатня для іонізації газу.

Щоб дослідити залежність сили струму I при газовому розряді від напруги U між електродами, використаємо уста-

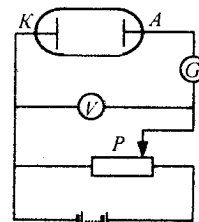


Рис.153

новку, схема якої наведена на рис.153. Напругу, яка прикладена до електродів A і K , регулюють за допомогою потенціометра.

Значення напруги U і сили струму I вимірюють за допомогою вольтметра V і чутливого гальванометра G . Газ в трубці іонізується за допомогою іонізатора, наприклад, рентгенівським промінням. Інтенсивність іонізатора залишається незмінною. Вольт-амперна характеристика газового розряду показана на рис.154. На ді-

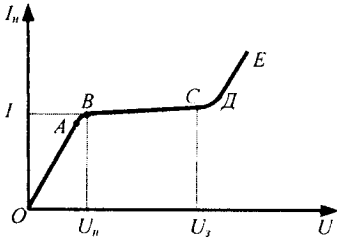


Рис. 154

лянці OA сила струму зростає пропорційно до напруги i , відповідно виконується закон Ома:

$$\vec{j} = en_0(u_+ + u_-)\vec{E},$$

де n_0 — кількість пар іонів в одиниці об'єму; u_+, u_- — рухливість позитивних і негативних іонів газу.

У несамостійному розряді поповнення іонів цілком залежить від потужності зовнішнього джерела іонізації, тому лише при невеликих напругах можна вважати, що кількість пар іонів в одиниці об'єму $n_0 = const$. При збільшенні напруги концентрація іонів зменшується і тому лінійна залежність сили струму від напруги порушується (ділянка AB). Із збільшенням напруги U сила струму зростає все повільніше.

Починаючи з деякого значення напруги U_H , сила струму залишається незмінною, незважаючи на подальше зростання напруги (BC). Це зв'язано з тим, що при напругах, більших за U_H , швидкість іонів

досягає великих значень, і всі іони, що виникли в газі, на шляху до електродів не встигають рекомбінувати в нейтральні молекули. Максимальна сила струму I_H при даній інтенсивності іонізатора називається **струмом насичення**, причому $I_H = eN_0$, N_0 — кількість пар одновалентних іонів, що утворюються в об'ємі газу під дією іонізатора за одну секунду.

Для будь-якої точки кривої OC при вимкненні іонізатора струм негайно припиняється.

*Електричний розряд в газах, що зберігається з припиненням дії зовнішнього іонізатора, називається **самостійним газовим розрядом**.*

Розглянемо умови виникнення самостійного розряду. Підвищуючи напругу U між електродами газорозрядної трубки, можна здійснити перехід від несамостійного газового розряду в самостійний. Цей перехід називають електричним пробоем газу, а відповідну напругу $U = U_3$ — напругою запалювання, або напругою пробую. При напругах більших, за U_3 , струм значно зростає (ділянки CD і DE).

Щоб утворився самостійний газовий розряд, треба, щоб внаслідок самого розряду в газі безперервно утворювались вільні електричні заряди. Основним джерелом для їх виникнення є **ударна іонізація молекул газу**. При досить великому значенні напруги електрони, які виникають під дією зовнішнього іонізатора, настільки сильно прискорюються електричним полем, що, стикаючись з молекулами газу, іонізують їх. При цьому утворюються вторинні електрони та іони, які та-

кож прискорюються електричним полем і вже самі іонізують нові молекули газу. У процесі іонізації беруть участь як електрони, так і додатні іони. Процес наростає лавиноподібно і він є причиною збільшення електричного струму (область *CD*).

Щоб розряд був самостійним, утворення тільки електронних та іонних лавин є необхідною, але недостатньою умовою. Необхідно також, щоб при вимкненому зовнішньому іонізаторі в газі відтворювались нові електрони замість тих, які перейшли на анод. Ці електрони вибиваються з поверхні катода позитивними іонами, які рухаються до катода під дією електричного поля. Явище вибивання електрона з поверхні катода називається вторинною електронною емісією. Крім того, іони й електрони, енергія яких недостатня для ударної іонізації, можуть при зіткненнях з молекулами приводити їх у збуджений стан. Збуджені молекули переходять потім у нормальний стан, випромінюючи фотон. Молекула газу, поглинаючи фотон, іонізується. Така іонізація називається фотонною. Безпосередню фотоіонізацію здатне викликати ультрафіолетове випромінювання. Енергія фотона видимого світла недостатня для відщеплення електрона від молекули. Але видиме випромінювання може обумовити так звану ступеневу фотоіонізацію. Цей процес відбувається в два етапи. На першому етапі фотон переводить молекулу у збуджений стан, на другому – відбувається іонізація молекули за рахунок її співудару з іншою молекулою. Фотон, потрапляючи на катод, може вибивати з нього електрон (зовнішній фотоефект), який потім викличе ударну іонізацію нейтральної молекули. При великих напругах між елек-

тродами і позитивні іони набувають енергії, яка достатня для іонізації молекул газу, і до катода будуть рухатись іонні лавини. Коли виникають, крім електронних лавин, ще й іонні, сила струму збільшується уже практично без зростання напруги U (ділянка *DE*).

Напруга запалювання U_3 залежить від хімічної природи газу, матеріалу катода, тиску газу і віддалі між електродами трубки.

§61. Види самостійного розряду

1. Тліючий розряд

Тліючий розряд спостерігається в газах при низьких тисках (порядку кількох десятків міліметрів ртутного стовпа).

Основними частинами тліючого розряду є (рис. 155):

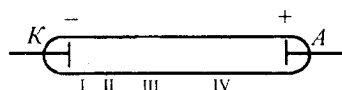


Рис. 155

- I – катодний темний простір;
- II – різко відділене від катодного простору тліюче свічення, яке поступово переходить в область III;
- III – область фарадеєвого темного простору;
- IV – додатний позитивний стовп – стовп газу, який світиться і який визначає оптичні властивості газу.

Області I-II-III утворюють катодну частину розряду.

В області I відбувається сильне прискорення позитивних іонів, які вибивають електрони з катода, і електронів, які вилетіли з катода.

В області II електрони спричинюють інтенсивну ударну іонізацію молекул газу і втрачають свою енергію. Тут утворюються позитивні іони, необхідні для того, щоб підтримувати розряд. Тліюче свічення в цій області є результатом рекомбінації електронів та іонів.

Область III – це область, куди не долітають швидкі електрони.

Область IV – стовп іонізованого газу, який світиться за рахунок переходу молекул із збудженого стану в основний і за рахунок рекомбінації.

Позитивний стовп не відіграє істотної ролі в підтриманні тліючого розряду, тому при зменшенні відстані між електродами трубки довжина позитивного стовпа скорочується і він може зникнути зовсім.

Довжина катодного темного простору і при зближенні електродів не змінюється. Якщо електроди наблизити так, що відстань між ними стане меншою, ніж довжина катодного темного простору, то тліючий розряд у газі зникне. Досліди показують, що довжина катодного темного простору обернено пропорційна до тиску газу. При досить низьких тисках електрони, вибиті з катода позитивними іонами, проходять газ майже без зіткнень з його молекулами.

Тліючий розряд використовують в лампах денного світла, стабілізаторах напруги, катодному розпиленні матеріалів, рекламних газорозрядних трубках.

2. Іскровий розряд

Якщо в газі при нормальному тиску утворити електричне поле з напруженістю, не меншою за пробивне значення (для повітря $3 \cdot 10^6 \frac{В}{м}$), то між електродами вини-

кає самостійний електричний розряд, який називається іскровим.

У природних умовах іскровий розряд спостерігається у вигляді блискавки.

Іскровий розряд має вигляд пучка яскравих зигзагоподібних розгалужених тонких ниток (рис.156), які пронизують

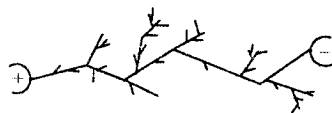


Рис.156

розрядний проміжок, швидко гаснуть і замінюються новими. Ці нитки називаються іскровими каналами. Вони починаються як від позитивного, так і від негативного електродів, а також від довільної точки між ними.

Внаслідок проходження імпульсу через канал іскри в каналі виділяється велика кількість енергії. Виділення енергії супроводжується стрибкоподібним збільшенням тиску в оточуючому газі і утворенням циліндричної ударної хвилі, температура на фронті якої $\approx 10^4 K$. Виникненням ударних хвиль пояснюються звукові ефекти, що супроводжують іскровий розряд: потріскування при слабких розрядах і грім у разі блискавки.

Зупинимось на механізмі іскрового розряду. Нехай напруженість поля є такою, що електрон, який вилетів за рахунок якого-небудь процесу із катода, отримує на шляху вільного пробігу енергію, яка достатня для іонізації. Тому відбувається розмноження електронів – виникає лавина. Якщо поблизу катода зародилась електронна лавина, то на її шляху відбувається іонізація і збудження молекул і атомів газу, які світяться і називаються *стримерами*. Розвиваючись, окремі електронні лавини доганяють одна одну і, зливаючись разом, утворюють хороший провідний місток із стримерів. По цьому містку в нас-

тупний момент часу поширюється потужний потік електронів, що утворює канал іскрового розряду. В стримерах електричний струм поширюється з швидкістю електромагнітних хвиль.

При малій довжині розрядного проміжку іскровий розряд викликає специфічне руйнування анода. Це явище використовують в електроіскровому методі різання, свердління та інших видах точної обробки металу. Іскровий проміжок застосовують як запобіжник від перенапруг в електричних лініях передач (наприклад, у телефонних лініях).

3. Коронний розряд

Коронний розряд виникає при нормальному тиску в газі, що знаходиться в дуже неоднорідному електричному полі, наприклад, поблизу ліній проводів високої напруги. При коронному розряді іонізація і світіння газу відбуваються лише поблизу електрода з малим радіусом кривини. Свічення має вигляд корони, що оточує електрод.

Якщо корона виникає навколо негативного електрода, то вона називається негативною. В протилежному випадку корона називається позитивною.

У випадку негативної корони позитивні іони, що прискорені неоднорідним полем, вибивають із катода електрони, які викликають іонізацію і збудження молекул в коронуючому шарі. В зовнішній області корони поле недостатнє для того, щоб надати електронам енергію, яка необхідна для іонізації або збудження молекул. Електрони, що потрапили в цю область, дрейфують під дією поля до анода. Частина електронів захоплюється молекулами, внаслідок чого утворюються негативні іони. Струм у зовнішній області зумовлю-

ється лише негативними носіями-електронами і негативними іонами. У цій області розряд має несамостійний характер.

У позитивній короні електронні лавини зароджуються біля зовнішньої границі корони. Електрони виникають внаслідок фотоіонізації, яка викликана випромінюванням коронуючого шару. Ці електрони рухаються до анода, який коронує. Носіями струму у зовнішній області корони є позитивні іони, які дрейфують під дією поля до катода.

У лініях високовольтних передач коронний розгляд спричиняє шкідливі витрати струму і втрати електричної енергії. Щоб зменшити коронування, проводи високовольтних ліній беруть досить великого діаметра, а їхні поверхні виготовляють гладкими.

4. Дуговий розряд

Дуговий розряд можна отримати від джерела низької напруги. Для цього електроди наближають до дотику. В місці дотику вони дуже розжарюються електричним струмом за рахунок великого опору, після чого їх розводять, отримуючи яскраву електричну дугу.

Електрична дуга є однією з форм газового розряду, який відбувається при великій густині струму і порівняно невеликій напрузі між електродами (порядку кількох десятків вольт). Встановлено, що основною причиною дугового розряду є інтенсивне випромінювання термоелектронів розжареним катодом і термічна іонізація молекул, яка обумовлена високою температурою у міжелектродному проміжку. Завдяки цьому електричний опір газового проміжку між електродами дуги порівняно малий. При атмосферному тиску температура катода досягає 3000°C . Електрони,

бомбардуючи анод, утворюють у ньому кратер і нагрівають його. Температура кратера при великих тисках повітря досягає 6000-7000°C. Температура газу в каналі електричної дуги становить 5000-7000°C.

Сила струму в дузі може досягати значень порядку $10^3 \div 10^4$ А при напрузі в декілька десятків вольт.

При зростанні розрядного струму опір дуги зменшується внаслідок збільшення термоелектронної емісії з катода й іонізації газу в розрядному проміжку. При цьому опір зменшується більше, ніж зростає струм. Внаслідок цього із збільшенням струму I напруга на розрядному про-

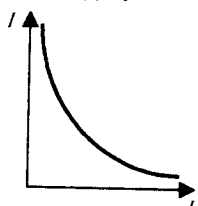


Рис. 157

міжку не зростає, а зменшується. Тому вольт-амперну характеристику дугового розряду (рис.157) називають падаючою.

Дуговий розряд використовують як джерело світла, для зварювання і різання металів, в дугових печах для виплавки сталі, чавуну, отримання карбіду кальцію, оксиду азоту.

§64. Плазма

Плазмою називається квазінейтральний іонізований газ, тобто частково або повністю іонізований газ, в якому об'ємна густина позитивних ρ_+ і негативних ρ_- зарядів практично однакова за абсолютною величиною:

$$\rho = |\rho_-| \text{ або } \rho_+ + \rho_- = 0.$$

Внаслідок теплового руху іонів і електронів миттєві значення ρ_+ і ρ_- здійснюють неперервні коливання. Тому іонізований газ можна вважати плазмою, якщо його об'єм V у багато разів більший від

об'ємів D^3 областей газу, в яких можливі помітні випадкові відхилення від нуля суми позитивних і негативних зарядів, що зумовлені тепловим рухом іонів і електронів: $V \gg D^3$, де D – характерний розмір, який називається *дебаївським радіусом екранування*.

Дебаївський радіус екранування залежить від температури T плазми, зарядів і концентрації електронів та іонів. Найпростіша ізотермічна плазма складається із електронів і однозарядних іонів. Оскільки плазма квазінейтральна, то концентрації електронів та іонів однакові і дорівнюють n_0 . Для такої плазми дебаївський радіус екранування

$$D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T}{2n_0 e^2}}.$$

У плазмі довільна частинка Q (додатний іон або електрон) оточена переважно частинками, заряди яких протилежні за знаком заряду частинки Q . Ці заряди зменшують (екранують) поле частинки Q в плазмі. Потенціал ϕ поля точкового заряду q в плазмі визначається співвідношенням

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{D}},$$

де r – відстань від заряду q . Якщо заряджена частинка A плазми знаходилась би у вакуумі, то потенціал ϕ_0 її електричного поля дорівнював

$$\phi_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Отже, потенціал ϕ поля зменшується із віддаллю r значно швидше, ніж ϕ_0 у вакуумі. Наближено можна вважати, що на відстанях $r > D$ електричне поле в плазмі повністю екранується.

Плазма називається ідеальною або газовою, якщо потенціальна енергія куло-

нівської взаємодії двох частинок плазми, що знаходяться на середній відстані $\langle r \rangle = n_0^{-1/3}$. мала порівняно з їх кінетичною енергією теплового руху:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \langle r \rangle} = \frac{e^2 n_0^{1/3}}{4\pi\epsilon_0} \ll kT.$$

Ця умова виконується, якщо в плазмі число N_D частинок одного знака (N_D – дебайвське число), що знаходиться всередині сфери радіуса D , досить велике:

$$N_D = \frac{4}{3}\pi D^3 n_0 \gg 1.$$

Термодинамічні властивості ідеальної плазми описуються рівнянням, що описує ідеальний газ:

$$p = n_0 kT.$$

Ступенем іонізації плазми α називається відношення кількості іонізованих атомів до їх загальної кількості в плазмі.

Залежно від ступеня іонізації розрізняють слабоіонізовану плазму, помірно іонізовану плазму і повністю іонізовану плазму.

Іонізація газу і утворення плазми може викликатись такими процесами, як термічна іонізація при зіткненні атомів у досить сильно нагрітому газі; ударна іонізація зарядженими частинками; фотоіонізація.

Якщо середні енергії теплового руху різних видів частинок (електронів, іонів і атомів) неоднакові, то така термодинамічна неврівноважена плазма називається неізотермічною плазмою. Таку плазму не можна охарактеризувати за допомогою одного певного значення температури. У такому разі електронний газ характеризу-

ється температурою T_e , а іони – температурою T_i . Ці температури можуть істотно відрізнятись. Залежно від значення іонної температури розрізняють низькотемпературну плазму ($T_i < 10^5$ K) і високотемпературну плазму ($T_i > 10^7$ K).

Для неізотермічної плазми з однозарядними іонами концентрації електронів та іонів однакові, а дебайвський радіус екранування $D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T_i}{n_0 e^2 \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right)}}$.

$$D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T_i}{n_0 e^2 \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right)}}.$$

Плазма характеризується такими основними властивостями:

- високим ступенем іонізації газу;
- однаковими об'ємними густинами позитивних і негативних зарядів;
- незалежністю питомої електричної провідності повністю іонізованої плазми від густини плазми і збільшенням з ростом температури пропорційно $T^{3/2}$;
- сильною взаємодією із зовнішніми електричним і магнітним полями;
- завдяки колективним взаємодіям плазма веде себе як пружне середовище, в якому збуджуються і поширюються різні коливання і хвилі.

У стані плазми знаходиться більшість речовин Всесвіту – зірки, зоряні атмосфери, галактичні туманності і міжзоряне середовище. В навколосемному просторі слабоіонізована плазма знаходиться в радіаційних поясах та іоносфері Землі. З процесами, що відбуваються в цій плазмі, пов'язані такі явища, як магнітні бурі, порушення далекого радіозв'язку і полярні сяйва.

§65. Магнітне поле. Магнітна індукція.

Закон Ампера

Досліди показали, що навколо провідників зі струмом і постійних магнітів існує *магнітне поле*, яке легко виявити за силовою дією, якою воно впливає на інші провідники зі струмом або постійні магніти.

Щоб вивчити основні властивості магнітного поля і способи його створення, розглянемо два досліди.

1. Взаємодія між нерухомими електричними зарядами і магнітною стрілкою.

Підвісимо на нитці коло магнітної стрілки кульку з діелектрика і надамо їй електричного заряду. Не помітимо будь-якої дії з боку нерухомих електричних зарядів кульки на магнітну стрілку. У свою чергу, магнітне поле стрілки не діє на заряджену кульку. Отже, нерухомі електричні заряди не створюють магнітного поля і постійне магнітне поле не діє на нерухомі електричні заряди.

2. Взаємодія між постійним електричним струмом і магнітною стрілкою.

Якщо пропустити постійний струм I через провідник, то магнітна стрілка повернеться навколо своєї осі так, щоб стати

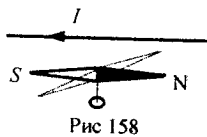


Рис 158

перпендикулярно до провідника зі струмом (рис.158). Це явище відкрив Г.Ерстед. Він виявив, що

напрямок повороту північного полюсу стрілки змінюється на протилежний, якщо змінити напрямок струму в провіднику.

Струм у провіднику – впорядкований рух електричних зарядів. Навколо всякого рухомого заряду існує магнітне поле.

При цьому матеріал провідника і характер його провідності, а також процеси, що відбуваються в ньому, ніякої ролі не відіграють.

Отже, навколо будь-якого рухомого заряду, чи то буде електрон, іон чи заряджене тіло, крім електричного поля, існує також і магнітне поле. Електричне поле діє як на рухомі, так і на нерухомі електричні заряди. Магнітне поле діє лише на рухомі в цьому полі електричні заряди.

Щоб охарактеризувати магнітне поле, треба розглянути його дію на певний струм. Розглянемо замкнений плоский контур зі струмом, розміри якого малі порівняно з відстанню до струмів, що утворюють поле. За позитивний напрямок нормалі приймається напрямок

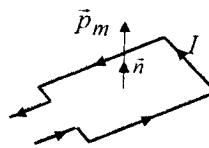


Рис.159

ступального руху свердлика, головка якого обертається в напрямку струму, що тече в контурі (рис.159). Контур зі струмом характеризується магнітним моментом \vec{p}_m , який дорівнює добутку сили струму I , що протікає у контурі, на площу поверхні контура S :

$$\vec{p}_m = I S \vec{n},$$

де \vec{n} – одиничний вектор нормалі до поверхні рамки. Напрямок вектора \vec{p}_m збігається з напрямком позитивної нормалі рамки.

Контур зі струмом в магнітному полі повертається, набуваючи рівноважного положення і його позитивна нормаль розміщується певним чином (рис.160).

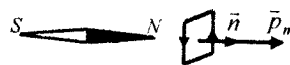


Рис.160

Контуром зі струмом можна скористатись і для кількісного опису магнітного поля. На контур в магнітному полі діє пара сил. Обертальний момент сил M залежить від властивостей контура:

$$M \sim p_m.$$

Якщо контур зі струмом повернути на 90° від рівноважного положення, то на нього буде діяти максимальний обертальний момент M_{max} .

Якщо в дане місце магнітного поля поміщати контури з різними магнітними моментами, то на них діятимуть різні обертальні моменти, але відношення M_{max}/p_m для всіх контурів однакове і служить кількісною характеристикою магнітного поля:

$$B = \frac{M_{max}}{p_m}.$$

Магнітна індукція в даному місці магнітного поля визначається максимальним обертальним моментом, що діє на контур з одиничним магнітним моментом.

Одиниця магнітної індукції – тесла: 1 Тл – магнітна індукція такого магнітного поля, в якому на рамку з магнітним моментом $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ діє максимальний момент сили $1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

За напрямок індукції \vec{B} магнітного поля приймається напрямок магнітного момента поля, який знаходиться в рівноважному положенні у цьому полі.

Для графічного зображення магнітних полів зручно користуватись лініями магнітної індукції. Лініями магнітної індукції називають такі лінії, дотичні до яких в кожній точці збігаються з напрямком вектора \vec{B} в цих точках поля.

Напрямок ліній індукції магнітного поля струму визначається за правилом свердлика: якщо вкручувати свердлик за напрямком руху струму в провіднику, то напрямок руху його рукоятки покаже напрям ліній магнітної індукції.

Лінії магнітної індукції можна спостерігати за допомогою дрібних металевих ошурків, які в магнітному полі ведуть себе, як маленькі магнітні стрілки.

Вигляд ліній магнітної індукції простих магнітних полів показаний на рис.161.

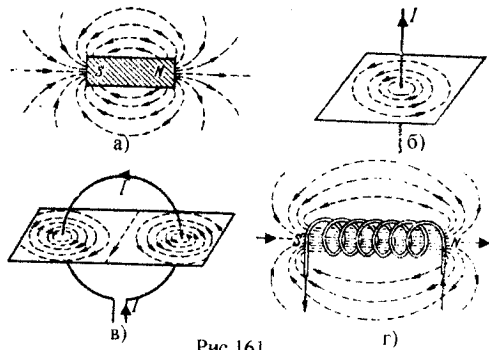


Рис.161

Лінії магнітної індукції охоплюють провідник зі струмом, який створює поле. Поблизу провідника лінії лежать в площині, що перпендикулярна до провідника.

Лінії індукції магнітного поля ні в яких точках не можуть обриватися, вони завжди замкнені. Лінії індукцій постійного магніту (рис.161а) виходять із його північного полюса і входять у південний.

Магнітне поле соленоїда, тобто довгої котушки зі струмом (рис.161г), подібне до магнітного поля штабового магніту. Північний полюс магніту збігається з тим кінцем соленоїда, з якого струм у витках тече проти стрілки годинника. Магнітне поле колового струму (рис.161в), який є одним витком соленоїда, подібне на поле ду-

же короткого штабового магніта, що розташований в центрі витка, так щоб його вісь була перпендикулярна до площини витка.

Повна аналогія між магнітними полями штабових магнітів і соленоїдів дала змогу висловити гіпотезу про те, що магнітні властивості постійних магнітів зумовлені мікрострумами, які існують в них. Вони обумовлені рухом електронів в атомах і молекулах. Ці мікроскопічні молекулярні струми створюють своє магнітне поле і можуть повертатися в магнітних полях макрострумів.

Узагальнюючи результати дослідження дії магнітного поля на різні провідники зі струмом, Ампер встановив, що сила $d\vec{F}$, з якою магнітне поле діє на елемент довжини dl провідника зі струмом, що знаходиться в магнітному полі, прямо пропорційна до сили струму I в провіднику і до векторного добутку елемента довжини $d\vec{l}$ на магнітну індукцію \vec{B} :

$$d\vec{F} = I [d\vec{l} \cdot \vec{B}].$$

Напрямок сили $d\vec{F}$ можна знайти за правилом векторного добутку і за правилом лівої руки: якщо долоню лівої руки поставити так, щоб у неї входили лінії магнітної індукції, а чотири витягнуті пальці спрямувати в напрямку електричного струму в провіднику, то відставлений на 90° великий палець покаже напрямок сили, що діє на провідник з боку поля. Це правило зручне, коли елемент провідника зі струмом перпендикулярний до напрямку магнітного поля.

В загальному випадку для визначення напрямку сили Ампера $d\vec{F}$ слід скористатись правилом векторного добутку: вектор $d\vec{F}$ напрямлений перпендикулярно

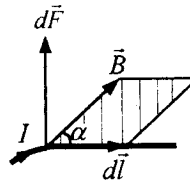


Рис.162

до площини, утвореної векторами $d\vec{l}$ і \vec{B} так, щоб з кінця вектора $d\vec{F}$ обертання від вектора $d\vec{l}$ до вектора \vec{B} найкоротшим шляхом відбувалося проти годинникової стрілки (рис.162).

Модуль сили Ампера розраховується за формулою

$$dF = I B dl \sin \alpha,$$

де α - кут між векторами $d\vec{l}$ і \vec{B} .

Припустимо, що елемент провідника dl із струмом I перпендикулярний до напрямку магнітного поля ($\sin \alpha = 1$), тоді закон Ампера можна записати у вигляді:

$$B = \frac{1}{I} \frac{dF_{\max}}{dl}.$$

Отже, магнітна індукція є силовою характеристикою магнітного поля.

§66. Закон Біо - Савара - Лапласа

У 1920 р. французькі вчені Ж. Біо і Ф. Савар дослідили магнітні поля, створені в повітрі прямолінійним струмом, коловим струмом, котушкою із струмом тощо. На основі численних дослідів вони дійшли таких висновків:

- у всіх випадках індукція B магнітного поля електричного струму пропорційна до сили струму I ;
- магнітна індукція залежить від форми і розмірів провідника із струмом;
- магнітна індукція B у будь-якій точці поля залежить від розташування цієї точки відносно провідника зі струмом.

Біо і Савар намагалися знайти загальний закон, який дав би змогу обчислити магнітну індукцію в кожній точці поля,

створеного електричним струмом, що протікає по провіднику будь-якої форми. Однак зробити це їм не вдалося. Розв'язав це завдання П. Лаплас.

Лаплас узагальнив результати експериментів Біо і Савара у вигляді такого диференціального закону, який називається законом **Біо - Савара - Лапласа**:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} [d\vec{l} \cdot \vec{r}]$$

де $d\vec{l}$ – вектор, що числово дорівнює довжині dl елемента провідника і збігається за

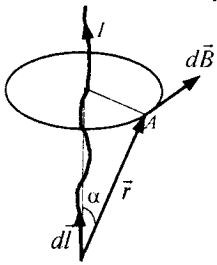


Рис. 163

напрямок з електричним струмом, \vec{r} – радіус-вектор, проведений від елемента провідника dl до точки поля A , що розглядається (рис.163), μ_0 – магнітна стала.

Отже, модуль індукції $d\vec{B}$ магнітного поля малого елемента dl провідника зі струмом прямо пропорційний до сили струму I , довжини елемента dl провідника, обернено пропорційний до квадрата відстані r від елемента провідника до розглядуваної точки поля, а також залежить від кута α між напрямками струму і радіус-вектора \vec{r} (рис.163):

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}$$

Напрямок вектора $d\vec{B}$ перпендикулярний до $d\vec{l}$ і \vec{r} , тобто перпендикулярний до площини, в якій вони лежать, і збігається з дотичною до лінії магнітної індукції. Напрямок $d\vec{B}$ визначається з векторного добутку $[d\vec{l} \cdot \vec{r}]$ і може бути знайдений за правилом свердлика.

Закон Біо - Савара - Лапласа дає змогу розрахувати індукцію магнітного поля електричного струму, що проходить по провіднику скінченних розмірів і будь-якої форми.

Дослід показує, що для магнітного поля справедливий **принцип суперпозиції**: індукція магнітного поля, створеного декількома струмами або рухомими зарядами, дорівнює векторній сумі магнітних полів, що створені кожним струмом або рухомих зарядом окремо.

Відповідно до принципу суперпозиції магнітна індукція \vec{B} у будь-якій точці магнітного поля провідника зі струмом I дорівнює векторній сумі індукцій $\Delta\vec{B}_i$ елементарних магнітних полів, створених окремими ділянками Δl_i цього провідника:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \Delta\vec{B}_i$$

Необмежено збільшуючи кількість ділянок n і переходячи до границі при n , що прямує до нескінченності, можна замінити суму інтегралом:

$$\vec{B} = \int_I d\vec{B}$$

Отже, магнітна індукція поля, яке створене у вакуумі струмом I , що тече по провіднику скінченної довжини і довільної форми, дорівнює

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_I \frac{[d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3}$$

Розрахунок характеристик магнітного поля за наведеними формулами в загальному випадку досить складний. Однак, якщо розподіл струму має певну симетрію, то застосування закону Біо - Савара - Лапласа разом з принципом суперпо-

зиції дозволяє досить просто розрахувати магнітну індукцію конкретних полів.

§67. Магнітне поле прямолінійного провідника з струмом.

Магнітне поле колового струму

Розглянемо *прямий провідник* довільної форми, по якому проходить струм I , наприклад згори вниз (рис.164).

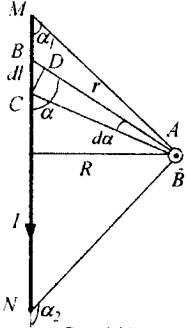


Рис.164

Відповідно до закону Біо - Савара - Лапласа вектор магнітної індукції $d\vec{B}$ поля у вакуумі, створеного в точці A елементом dl провідника зі струмом I , числово дорівнює

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2},$$

де α – кут між векторами $d\vec{l}$ і \vec{r} .

У точці A , яка знаходиться на відстані R від осі провідника, всі вектори $d\vec{B}$, які характеризують магнітні поля, створені окремими ділянками цього провідника, напрямлені перпендикулярно до площини рисунка. Вектор \vec{B} числово дорівнює алгебраїчній сумі модулів векторів $d\vec{B}$:

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \sin \alpha}{r^2}.$$

Замінімо dl і r через одну незалежну змінну α :

$$r = \frac{R}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{CD}{\sin \alpha}, \quad CD = r \cdot d\alpha.$$

Тоді

$$dl = \frac{r \cdot d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

У результаті, індукція магнітного поля прямолінійного провідника MN у точці A дорівнює

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{R d\alpha \cdot \sin \alpha}{\sin^2 \alpha \frac{R^2}{\sin^2 \alpha}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \alpha d\alpha}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Якщо провідник MN нескінченно довгий, то $\alpha_1 = 0$, а $\alpha_2 = \pi$. Отже, магнітна індукція нескінченно довгого провідника зі струмом дорівнює $(\cos 0 = 1, \cos \pi = -1)$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Знайдемо індукцію магнітного поля в центрі O , *колового струму* радіусом R , по якому протікає струм I (рис.165):

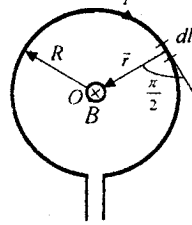


Рис.165

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin(\vec{dl}, \vec{r})}{4\pi r^2},$$

$$\sin(\vec{dl}, \vec{r}) = 1, \quad r = R.$$

Тоді

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2}.$$

Усі вектори $d\vec{B}$ магнітних полів, які створені в точці O різними ділянками $d\vec{l}$ колового струму, напрямлені перпендикулярно до площини рисунка "від нас". Тоді

$$B = \int dB = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} 2\pi R.$$

Отже, індукція магнітного поля колового струму дорівнює

$$B = \mu_0 \frac{I}{2R}.$$

§68. Закон повного струму для магнітного поля у вакуумі.

Вихровий характер магнітного поля

Введемо циркуляцію вектора магнітної індукції. Циркуляцією вектора \vec{B} по замкненому контуру називається інтеграл

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_L B_l dl,$$

де $d\vec{l}$ – вектор елемента довжини контура, напрямлений вздовж обходу контура, $B_l = B \cos \alpha$ – проекція вектора \vec{B} на дотичну до контура, α – кут між векторами \vec{B} і $d\vec{l}$.

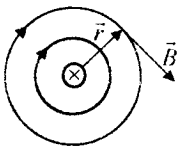


Рис.166

Розглянемо магнітне поле нескінченного прямолінійного провідника зі струмом I , що знаходиться у вакуумі (рис.166). Лінії магнітної індукції цього поля є кола,

площини яких перпендикулярні до провідника, а центри лежать на осі провідника. Знайдемо циркуляцію вектора \vec{B} вздовж кола радіуса r . У всіх точках кола вектор \vec{B} числово дорівнює $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$ і напрямлений по дотичній до кола, тому $\cos \alpha = 1$.

Тоді

$$\oint_L B dl \cos \alpha = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \int_0^{2\pi} dl = \mu_0 I.$$

Звідси можна зробити два висновки:

- 1) Магнітне поле прямолінійного струму – вихрове поле, бо циркуляція вектора \vec{B} вздовж ліній індукції не дорівнює 0;
- 2) Циркуляція вектора \vec{B} магнітної індукції поля прямолінійного струму од-

накова вздовж будь-якої лінії індукції і дорівнює $\mu_0 I$.

Цю формулу можна використати до замкненого контуру L довільної форми, який охоплює нескінченно довгий прямолінійний провідник зі струмом I (рис.167).

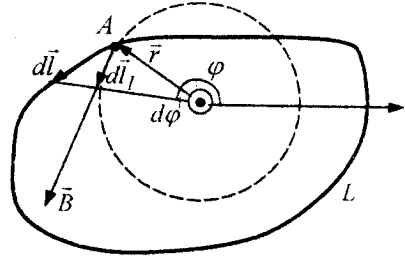


Рис.167

У точці A контуру L вектор індукції \vec{B} перпендикулярний до радіус-вектора \vec{r} . Тому проекція $d\vec{l}$ на напрямок вектора \vec{B} дорівнює $dl_l = dl \cos(\vec{B}, \wedge d\vec{l})$ і збігається з малою дугою кола радіуса r :

$$dl_l = r d\varphi,$$

де $d\varphi$ – центральний кут, під яким видно dl елемент контура L з центром кола.

Тоді

$$B dl \cos(\vec{B}, \wedge d\vec{l}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi.$$

Інтегруючи вздовж всього замкненого контуру L і враховуючи, що при цьому кут φ змінюється від 0 до 2π , знаходимо

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_L B dl \cos(\vec{B}, \wedge d\vec{l}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I$$

Якщо контур L_1 не охоплює провідник зі струмом (рис.168), то

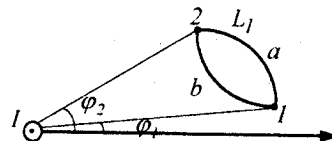


Рис.168

$$\oint_{L_1} B dl \cos \alpha = \int_{1a}^2 B dl \cos \alpha + \int_{2b}^1 B dl \cos \alpha =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi = 0.$$

У всіх випадках, які розглядалися вище, кут α гострий, тобто з кінця вектора густини струму \vec{j} , напрямленого по осі провідника в бік струму, обхід по контуру L відбувається проти стрілки годинника. При протилежному напрямку обходу контуру L або при протилежному напрямку струму в провіднику отримуємо

$$\oint_L B dl \cos \alpha = -\mu_0 I.$$

Надалі використовуватимемо таке правило знаків струмів: **позитивним** вважається струм, напрямок якого зв'язаний з напрямком обходу по контуру правилом свердлика: струм протилежного напрямку вважається **негативним**.

На практиці магнітне поле, переважно, створюється кількома провідниками, по яких проходять струми I_1, I_2, I_3 тощо. На основі принципу суперпозиції магнітна індукція \vec{B} результуючого поля дорівнює

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i.$$

Тоді

$$\oint_L B dl \cos \alpha = \oint_L \sum_{i=1}^n B_i dl \cos \alpha = \sum_{i=1}^n \oint_L B_i dl \cos \alpha$$

Кожен з інтегралів, що стоїть під знаком суми, дорівнює або $\mu_0 I$, якщо струм охоплюється контуром, або 0, якщо струм не охоплюється контуром.

Отже,
$$\oint_L B dl \cos \alpha = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i,$$

де n – кількість провідників зі струмами, що охоплюються контуром L довільної форми. Кожний струм враховується стільки разів, скільки разів він охоплюється контуром.

Наприклад, для системи струмів, зображених на рис.169, алгебраїчна сума струмів

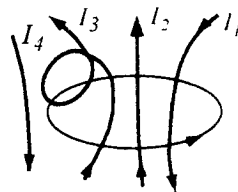


Рис.169

$$\sum_{i=1}^n I_i = -I_1 + I_2 + 2 \cdot I_3 - 0 \cdot I_4.$$

Рівняння $\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i$ є мате-

матичним виразом **закону повного струму** для струмів провідності:

циркуляція вектора \vec{B} по довільному замкненому контуру дорівнює добутку магнітної сталості μ_0 на алгебраїчну суму струмів, що охоплюються цим контуром.

Отриманий вираз закону повного струму справедливий лише для **магнітного поля у вакуумі**, оскільки для поля у речовині слід враховувати молекулярні струми.

§69. Магнітне поле тороїда і довгого соленоїда

Закон повного струму

$$\oint_L B dl \cos \alpha = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i$$

можна використати для розрахунку магнітних полів тороїда і довгого соленоїда.

Тороїдом називають кільцеву котушку, витки якої намотано на осердя, що має форму тора (рис.170). Лінії індукції магнітного поля тороїда повинні мати форму кіл, центри яких лежать на прямій, що проходить через центр тороїда і перпендикулярна до площини рисунка.

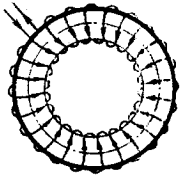


Рис.170

Циркуляція вектора \vec{B} вздовж кола радіусом r дорівнює (рис.171):

$$\oint_L B dl \cos \alpha = B \int_0^{2\pi} dl = 2\pi r B.$$

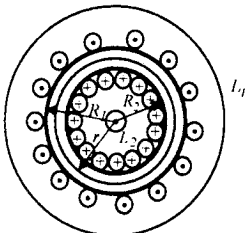


Рис.171

Позначимо кількість витків обмотки тороїда N , а струм у ній - I . Якщо $r < R_2$, то коло радіусом r (L_2) не охоплює провідник

зі струмом, тому $\sum_{i=1}^n I_i = 0$ і за законом повного струму $\oint_L B dl \cos \alpha = 2\pi r B = 0$, тобто $B = 0$.

Якщо $r > R_1$, то коло радіусом r (L_1) охоплює $2N$ провідників зі струмом I . В N з них струм іде в одному напрямку, а в інших N провідниках - у зворотному. Тому алгебраїчна сума струмів у всіх провідниках дорівнює нулю. Й із закону повного струму $2\pi r B = 0$ і $B = 0$.

Отже, поза тороїдом магнітного поля нема. Воно цілком локалізується всередині об'єму тороїда ($R_2 < r < R_1$). Коло радіусом r , яке лежить всередині тороїда, охоплює N провідників, струми в яких дорівнюють I і однаково напрямлені. Тому

$$\oint_L B dl \cos \alpha = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i = \mu_0 N I.$$

Отже,

$$2\pi B r = \mu_0 N I \text{ і } B = \mu_0 \frac{N I}{2\pi r}.$$

Індукція магнітного поля всередині тороїда зменшується зі збільшенням відстані від його центра:

$$B_{max} = \mu_0 \frac{N I}{2\pi R_2},$$

$$B_{min} = \mu_0 \frac{N I}{2\pi R_1} = \mu_0 \frac{N I}{2\pi (R_2 + d)},$$

де d - діаметр тора.

Індукція на основній лінії тороїда

$$r = R_{cp} = \frac{1}{2} (R_1 + R_2)$$

дорівнює

$$B_{cp} = \mu_0 \frac{N I}{2\pi R_{cp}} = \mu_0 n I,$$

де n - кількість витків на одиницю довжини середньої лінії тороїда.

Розглянемо індукцію магнітного поля всередині **соленоїда** (рис.172) - ци-

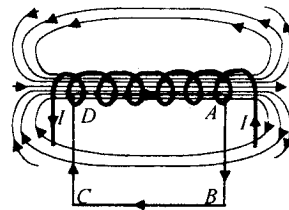


Рис.172

ліндричної котушки, яка складається з великої кількості витків, рівномірно намотаних на загальне осердя. Розглянемо соленоїд завдовжки l , що має N витків, по якому тече струм.

Циркуляція вектора \vec{B} по контуру у вигляді прямокутника $ABCD$, в якому сторона BC дуже віддалена від соленоїда і

який охоплює всі N витків соленоїда, дорівнює

$$\oint_{ABCD} B dl \cos \alpha = \mu_0 NI.$$

Інтеграл по контуру $ABCD$ можна подати у вигляді чотирьох інтегралів:

$$\begin{aligned} \oint_L B dl \cos \alpha &= \int_{CD} B dl \cos \alpha + \int_{DA} B dl \cos \alpha + \\ &+ \int_{AB} B dl \cos \alpha + \int_{BC} B dl \cos \alpha. \end{aligned}$$

Магнітне поле соленоїда практично локалізовано в його об'ємі і на великій відстані від соленоїда індукція магнітного поля дорівнюватиме нулю:

$$\int_{BC} B dl \cos \alpha = 0,$$

А також $\int_{CD} B dl \cos \alpha = \int_{AB} B dl \cos \alpha = 0$, тому що $\cos \alpha = 0$.

Тоді

$$\int_L B dl \cos \alpha \approx \int_{DA} B dl \cos \alpha.$$

Вектори магнітної індукції в усіх точках всередині довгого соленоїда однакові, тобто числово рівні і мають однакові напрямки. Таке магнітне поле називається *однорідним*. Крім того, напрямок вектора індукції та переміщення збігаються, тому $\cos \alpha = 1$.

Отже,

$$\oint_{DA} B dl = B \int_0^l dl = Bl = \mu_0 NI.$$

В результаті магнітна індукція поля всередині соленоїда у вакуумі дорівнює:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I,$$

де n – число витків на одиницю довжини соленоїда.

§70. Сила Лоренца

Виникнення макроскопічної сили Ампера, що діє на провідник із струмом у магнітному полі, можна пояснити так. При проходженні струму носії заряду в провіднику рухаються напрямлено. Тому магнітне поле відхиляє їх в один бік. При цьому вони стикаються з кристалічною ґраткою металу і передають їй певний імпульс, якого набули під дією магнітного поля. Макроскопічним результатом елементарних процесів зіткнення окремих носіїв заряду з кристалічною ґраткою провідника є виникнення сили Ампера.

Магнітне поле діє на вільні електрони в металі і без електричного струму в провіднику. Оскільки електрони в цьому випадку рухаються тільки хаотично, то сумарний імпульс, який вони надають кристалічній ґратці провідника, дорівнює нулю і провідник залишається нерухомим.

Для обчислення сили, що діє на рухомий заряд в магнітному полі, розглянемо елемент провідника dl зі струмом I у магнітному полі з індукцією \vec{B} . На цей елемент діє сила Ампера $dF = BI dl \sin \alpha$. Якщо елемент dl містить dN вільних носіїв заряду, то сила F , що припадає на один електрон, дорівнює:

$$F_{\text{л}} = \frac{dF}{dN},$$

де $F_{\text{л}}$ – сила Лоренца.

Кількість носіїв заряду dN в елементі провідника dl запишемо через їх концентрацію n та об'єм dV елемента: $dN = n dV = n S dl$, S – площа поперечного перерізу провідника.

Тоді

$$F_{\perp} = \frac{Bld \sin \alpha}{nSdl} = \frac{B I}{n S} \sin \alpha = \frac{Bj \sin \alpha}{n}$$

Оскільки за електронною теорією $j = ne < v >$, то

$$F_{\perp} = Be < v > \sin \alpha,$$

або
$$\vec{F}_{\perp} = e[\vec{v}, \vec{B}],$$

де α – кут між векторами \vec{v} і \vec{B} .

В загальному випадку

$$\vec{F}_{\perp} = q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Напрямок сили Лоренца визначається за правилом векторного добутку або правилом лівої руки: якщо долоню лівої руки розмістити так, щоб в неї входив вектор \vec{B} , а чотири витягнуті пальці спрямовувати вздовж вектора швидкості \vec{v} руху позитивних зарядів, то відігнутий на 90° великий палець покаже напрямок си-

ли, що діє на позитивний заряд. На негативний заряд сила діє в протилежному напрямку (рис.173).

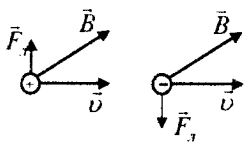


Рис.173

Отже, магнітне поле не діє на електричні заряди, що не рухаються.

Сила Лоренца завжди перпендикулярна до швидкості руху зарядженої частинки, тому вона змінює лише напрямок цієї швидкості, не змінюючи її модуля. Отже, сила Лоренца роботи не виконує і кінетична енергія частинки при русі в магнітному полі не змінюється.

Якщо на рухомий електричний заряд, крім магнітного поля з індукцією \vec{B} , діє і електричне поле з напруженістю \vec{E} , то результуюча сила \vec{F} , яка прикладена до заряду:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Це формула Лоренца.

Якщо заряджена частинка рухається в магнітному полі зі швидкістю \vec{v} вздовж лінії магнітної індукції або в протилежний бік до напрямку магнітної індукції, то $\alpha = 0$, або $\alpha = \pi$. У такому разі $F_{\perp} = 0$, магнітне поле на частинку не діє і вона рухається рівномірно і прямолінійно.

Якщо заряджена частинка рухається в магнітному полі з швидкістю \vec{v} перпендикулярно до вектора \vec{B} , то сила Лоренца постійна за модулем і нормальна до траєкторії частинки. Частинка рухатиметься по колу, бо сила Лоренца за II законом Ньютона буде створювати доцентрове прискорення. Отже,

$$qvB = \frac{mv^2}{r}. \text{ Звідси } r = \frac{mv}{qB},$$

де r - радіус кола.

Використавши зв'язок $v = \omega r$, знайдемо циклічну частоту ω та період T обертання частинки навколо лінії індукції в магнітному полі:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{q}{m} B, \quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Період обертання частинки в однорідному магнітному полі не залежить від її швидкості (при $v \ll c$). На цьому ґрунтується дія циклічних прискорювачів заряджених частинок.

Якщо швидкість \vec{v} зарядженої частинки напрямлена під кутом α до вектора \vec{B} (рис.174), то її рух можна подати у вигляді суперпозиції:

1) рівномірного прямолінійного руху вздовж поля з швидкістю $v = v \cos \alpha$;

2) рівномірного руху з швидкістю $v_{\perp} = v \sin \alpha$ по колу, яке перпендикулярне до поля. Радіус кола $r = \frac{mv \sin \alpha}{qB}$.

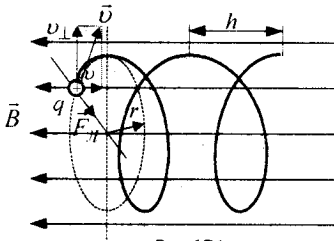


Рис.174

В результаті складання обох рухів виникає рух по спіралі, вісь якої паралельна до магнітного поля. Крок гвинтової лінії

$$h = v T = v T \cos \alpha = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB}$$

Напрямок, в якому закручується спіраль, залежить від знака заряду частинки.

§71. Ефект Холла

Ефект Холла полягає у виникненні в провіднику електричного поля, вектор напруженості якого E_x перпендикулярний, як до вектора індукції \vec{B} магнітного поля, в яке поміщено провідник, так і до вектора густини \vec{j} струму у провіднику (рис.175).

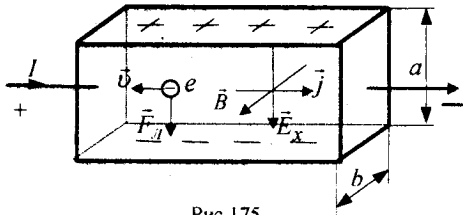


Рис.175

Помістимо металеву пластинку зі струмом густиною \vec{j} в магнітне поле з індукцією \vec{B} , лінії індукції якого перпенди-

кулярні до \vec{j} . При даному напрямку \vec{j} швидкість носіїв струму в металі — електронів — напрямлена справа наліво. На електрони діє сила Лоренца, яка напрямлена вниз і дорівнює: $F_L = Be <v>$. Тому на нижній границі пластинки збиратиметься некомпенсований негативний заряд і вона заряджатиметься негативно, а на верхній границі пластинки виникатиме нестача негативних зарядів і вона заряджатиметься позитивно. Внаслідок цього між краями пластинки виникає додаткове поперечне електричне поле, напрямлене зверху вниз. Розглянемо момент динамічної рівноваги, коли сили F_L і F_E , з якими діють на електрони магнітне поле та холлівське електричне поле, стануть рівними (ця рівність настає вже через 10^{-12} с після замикання кола):

$$F_L = F_E, \quad e <v> B = e E_x, \quad \text{звідси}$$

$$E_x = <v> B.$$

Невідому швидкість $<v>$ напрямленого руху виразимо через густину струму j :

$$j = ne <v>, \quad <v> = \frac{j}{en}.$$

Тоді
$$E_x = \frac{B j}{ne}.$$

Величина $R_H = \frac{1}{ne}$ - стала для даного

провідника і називається *сталю Холла*.

Отже,

$$E_x = R_H B j.$$

Стала Холла обернено пропорційна до концентрації n носіїв заряду.

Під час дослідів зручніше вимірювати не напруженість E_x електричного поля Холла, а холлівську різницю потенціалів $\Delta\phi_x$, що виникає при цьому між

поверхнями пластинки, та силу струму I замість густини струму j .

Помножимо ліву частину виразу на ab , а праву на S

$$E_x = R_x B j \cdot ab = S, \quad abE_x = R_x B j S,$$

$$aE_x = \Delta\varphi_x, \quad jS = I.$$

$$\text{Тоді} \quad \Delta\varphi_x = R_x \frac{BI}{b},$$

де b – лінійні розміри пластинки в напрямку магнітного поля.

Величини $I, B, \Delta\varphi_x$ та b легко виміряти експериментально. Тоді за їх значеннями можна обчислити сталу Холла R_x :

$$R_x = \frac{\Delta\varphi_x b}{BI}.$$

За вимірними значеннями сталої Холла можна:

1) *визначити концентрацію носіїв струму*, якщо характер провідності і заряд носіїв струму відомі, а саме

$$n_0 = \frac{I}{qR_x}.$$

Так, для одновалентних металів виявилось, що концентрація електронів провідності збігається з концентрацією атомів.

Оскільки за електронною теорією питому електропровідність речовини обчислюють за формулою

$$\sigma = neu,$$

де u – рухливість носіїв заряду, то добуток $R_x \sigma$ визначає рухливість носіїв заряду.

Дійсно,

$$R_x \sigma = \frac{I}{ne} neu = u.$$

2) *зробити висновок про природу провідності напівпровідників*, оскільки знак сталої Холла збігається із знаком заряду e носіїв струму. При електронній провідності $R_x < 0$, а при дірковій $R_x > 0$. Якщо в на-

півпровіднику водночас існують обидва типи провідності, то за знаком R_x можна судити про те, який з них переважає.

3) *оцінити величину $\langle \lambda \rangle$ середньої довжини вільного пробігу електронів*:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\sigma 2m \langle u \rangle}{ne^2} = \frac{2m \langle u \rangle \sigma R_x}{e},$$

де σ – питома електропровідність провідника, $\langle u \rangle$ – середня швидкість теплового руху електронів у провіднику. Виявилось, що середня довжина вільного пробігу електронів $\langle \lambda \rangle \sim 10^{-8}$ м, що на два порядки перевищує міжвузлові відстані в металі.

§72. Контур зі струмом в магнітному колі

Розглянемо поведінку в магнітному полі замкнених провідників зі струмом. Помістимо в однорідне магнітне поле електромагніту провідник, який зігнутий у вигляді прямокутної рамки A , що підвішена на пружній нитці C (рис.176).

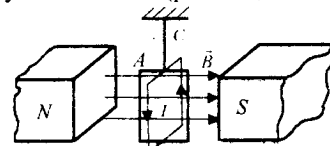


Рис.176

Якщо в рамці немає струму, вона перебуває в стані байдужої рівноваги. Якщо через рамку пропускати постійний електричний струм, то вона повертається навколо осі нитки C так, що її площина розташовується перпендикулярно до вектора \vec{B} магнітної індукції поля. Рамка із струмом завжди встановлюється у зовнішньому однорідному магнітному полі в тому положенні, при якому власний магнітний момент \vec{p}_m рамки збігається з нап-

рячком \vec{B} . З кінця цього вектора ми бачимо, що струм у рамці йде проти стрілки годинника.

Знайдемо вираз для моменту сил,

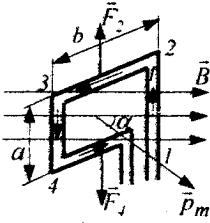


Рис.177

що діють на прямокутну рамку 1-2-3-4 зі струмом I , яка знаходиться в однорідному магнітному полі, вектор магнітної індукції \vec{B} утворює кут α з вектором \vec{p}_m власного магнітного моменту рамки (рис.177). Сторони рамки 2-3 і 4-1 лежать у площинах, паралельних до індукції зовнішнього магнітного поля \vec{B} .

Сили \vec{F}_2 і \vec{F}_4 , які діють на ці прямолінійні провідники, за законом Ампера дорівнюють

$$F_2 = F_4 = IbB \sin(\vec{b}, \wedge \vec{B}) = IbB \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = IbB \cos \alpha.$$

Сили \vec{F}_2 і \vec{F}_4 напрямлені вздовж вертикальної осі рамки у протилежні боки. Вони деформують рамку у вертикальному напрямку.

Сторони рамки 1-2 і 3-4 перпенди-

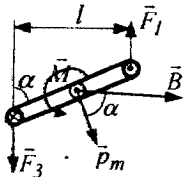


Рис.178

кулярні до вектора \vec{B} магнітної індукції поля (рис.178). Сили \vec{F}_1 і \vec{F}_3 , які прикладені до прямолінійних провідників 1-2 і 3-4, числово дорівнюють:

$$F_1 = F_3 = IaB \sin(\vec{a}, \wedge \vec{B}) = IaB \sin \frac{\pi}{2} = IaB.$$

Результуючий обертальний момент M , який діє на рамку, дорівнює моменту пари сил \vec{F}_1 і $\vec{F}_3 = -\vec{F}_1$, тобто $M = F_1 l$, де $l = bs \sin \alpha$. Тоді

$$M = IabB \sin \alpha = ISB \sin \alpha,$$

де $S = ab$ – площа рамки, $IS = p_m$ – числове значення вектора магнітного моменту рамки зі струмом. Тоді

$$M = p_m B \sin \alpha = p_m B \sin(\vec{p}_m, \wedge \vec{B}).$$

Обертання рамки під дією пари сил \vec{F}_1 і \vec{F}_3 відбувається навколо вертикальної осі, яка перпендикулярна як до вектора \vec{B} , так і до вектора \vec{p}_m . Вектор \vec{M} напрямлений до спостерігача перпендикулярно до площини рисунка.

Вектор обертального моменту \vec{M} , який діє на рамку зі струмом у магнітному полі, дорівнює векторному добутку магнітного моменту \vec{p}_m рамки на магнітну індукцію \vec{B} зовнішнього поля:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}].$$

Обертальний момент \vec{M} дорівнює нулю і контур перебуває в рівновазі, якщо магнітний момент контуру паралельний, або антипаралельний до напрямку зовнішнього поля ($\sin \alpha = 0$).

Стийким є тільки таке положення контура, коли вектори \vec{p}_m і \vec{B} паралельні один до одного.

Розглянемо вплив неоднорідного магнітного поля на поведінку плоского контура зі струмом (рис.179). Припустимо, що індукція магнітного поля змінюється в напрямку осі OX , тобто

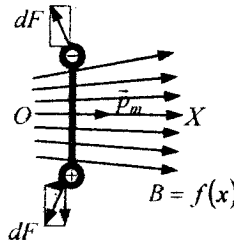


Рис.179

$B_x = B(x)$ і в цьому напрямку існує градієнт індукції

$$\text{grad}\vec{B} = \frac{d\vec{B}}{dx},$$

який напрямлений у бік зростання величини \vec{B} . Плоский контур вміщено в однорідне поле так, що його магнітний момент \vec{p}_m напрямлено вздовж осі OX . Розглянемо два елементи контура dl , які лежать на кінцях його вертикального діаметра. Лінії вектора \vec{B} в цих місцях утворюють з вектором \vec{p}_m кут α . Сили $d\vec{F}$, які діють на розглядувані елементи dl , напрямлені під таким самим кутом α до площини контуру. Розкладаючи кожен із сил $d\vec{F}$ на дві складові: dF_x - в площині контуру та dF_n - паралельну нормалі до площини контуру, знаходимо, що в неоднорідному магнітному полі, крім сил, що деформують контур, виникають сили, які переміщують його в області поля з більшою магнітною індукцією:

$$F = (\vec{p}_m \cdot \text{grad}\vec{B}) = p_m \frac{dB}{dx} \cos\alpha.$$

§73. Магнітний потік.

Теорема Остроградського-Гаусса

Потоком вектора магнітної індукції (магнітним потоком) через площадку dS називається скалярна фізична величина, яка дорівнює

$$d\Phi_B = B_n dS = (\vec{B}, d\vec{S}),$$

де $B_n = B \cos\alpha$ - проекція вектора \vec{B} на напрямок нормалі до площадки dS (α - кут між векторами \vec{n} і \vec{B}) (рис.180), $d\vec{S} = dS\vec{n}$ - век-

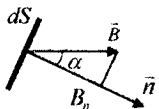


Рис.180

тор, модуль якого дорівнює dS , а напрямок збігається з нормаллю \vec{n} до площадки.

Потік вектора \vec{B} може бути як позитивним, так і негативним залежно від знака $\cos\alpha$ (визначається вибором позитивного напрямку нормалі \vec{n}).

Потік вектора магнітної індукції Φ_B через довільну поверхню S дорівнює

$$\Phi_B = \int_S B_n dS = \int_S (\vec{B}, d\vec{S}).$$

Для однорідного поля і плоскої поверхні, розміщеної перпендикулярно до вектора \vec{B} , $B_n = B = \text{const}$ і $\Phi_B = BS$.

Розрахуємо потік вектора \vec{B} через соленоїд. Всередині соленоїда індукція однорідного поля у вакуумі дорівнює

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}.$$

Магнітний потік через один виток соленоїда площею S :

$$\Phi_1 = BS.$$

Повний магнітний потік через соленоїд, який називається потокозчепленням ψ дорівнює:

$$\psi = \Phi_1 N = NBS = \mu_0 \frac{N^2 I}{l} S.$$

В електродинаміці доводиться *теорема Остроградського-Гаусса для магнітного поля*:

магнітний потік крізь довільну замкнену поверхню дорівнює нулю:

$$\oint_S B_n dS = 0.$$

Ця теорема є наслідком того, що в природі нема магнітних "зарядів" і лінії індукції будь-якого магнітного поля є замкненими кривими.

Покажемо справедливість теореми Остроградського-Гаусса на простому прикладі. Розглянемо магнітне поле нескінченно довгого прямолінійного провідника зі струмом I . За замкнену поверхню S візьмемо поверхню прямого колового циліндра, радіус основи якого дорівнює r , висота h , а вісь збігається з віссю провідника.

Лінії індукції магнітного поля прямолінійного струму є концентричними колами, центри яких лежать на осі провідника, а площини перпендикулярні до нього. Тому лінії індукції не перетинають ні бічної поверхні циліндра, ні його основ. Отже, в будь-якій точці поверхні циліндра проекція вектора \vec{B} на напрямок нормалі \vec{n} до поверхні дорівнює нулю

$$(B_n = 0) \text{ і } \oint_S B_n dS = 0.$$

§74. Робота переміщення провідника і контуру зі струмом у магнітному полі

На провідник зі струмом у магнітному полі діє сила Ампера. Якщо провідник не закріплено, то під впливом сили Ампера він переміщуватиметься у магнітному полі.

Обчислимо роботу dA , виконану силою Ампера при переміщенні елемента dl провідника зі струмом I у магнітному полі (рис.181). Елемент провідника переміщу-

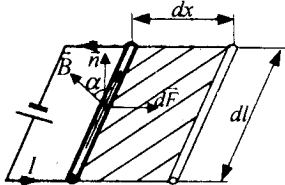


Рис.181

ється в напрямку сили $d\vec{F}$, яка діє на нього. Робота dA дорівнює:

$$dA = dF dx.$$

За законом Ампера

$$dF = IB dl \sin \alpha.$$

Тоді

$$dA = IB \sin \alpha dl dx.$$

Сила $d\vec{F}$ і переміщення $d\vec{x}$ направлені перпендикулярно до елемента провідника $d\vec{l}$.

Добуток $dl \cdot dx = dS$ - площа поверхні, яка описана елементом провідника dl при його переміщенні на dx .

З рис.181 видно, що $B \sin \alpha = B_n$ - проекція вектора \vec{B} на напрямок нормалі \vec{n} до площини dS .

Добуток $B_n dS = d\Phi_B$ - магнітний потік крізь поверхню dS . Тоді

$$dA = IB_n dS = Id\Phi_B.$$

Вважаючи силу струму сталою і, інтегруючи цей вираз, отримаємо

$$A = I\Phi_B.$$

Робота, яку виконує сила Ампера при переміщенні в магнітному полі провідника, струм в якому постійний, дорівнює добутку сили струму на величину магнітного потоку крізь поверхню, яку описує провідник під час свого руху.

Знайдемо вираз для роботи, яку виконують сили Ампера при переміщенні в магнітному полі замкненого контуру, по якому проходить постійний струм I .

Нехай внаслідок нескінченно малого переміщення контур C зайняв положення C' (рис.182).

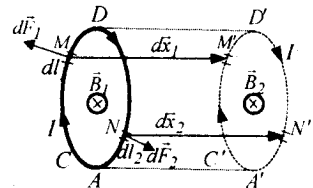


Рис.182

Контур C уявно розіб'ємо на два з'єднані своїми кінцями провідники AMD і DNA . Повна робота dA , виконана силами Ампера при розглядуваному переміщенні контуру, дорівнює алгебраїчній сумі робіт переміщення провідників $AMD(dA_1)$ і $DNA(dA_2)$, тобто $dA = dA_1 + dA_2$.

Припустимо, що вектор \vec{B} магнітної індукції напрямлений перпендикулярно до площини рисунка і в початковому положенні контуру дорівнює B_1 , а в кінцевому - B_2 , причому $B_2 > B_1$.

Сила Ампера $d\vec{F}_2$, що діє на довільний елемент dl_2 , утворює гострий кут з напрямком його переміщення $d\vec{x}_2$ і виконує позитивну роботу.

Сила $d\vec{F}_1$, що діє на елемент dl_1 провідника AMD , утворює з напрямком його переміщення $d\vec{x}_1$ тупий кут і виконує негативну роботу, тому роботи dA_1 і dA_2 переміщення провідників AMD і DNA мають різні знаки. Щоб отримати абсолютні значення роботи dA_1 і dA_2 , треба продиференціювати вираз $A = I\Phi_B$. Тому

$$dA = (dA_1) + (dA_2) = -Id\Phi_{B_1} + Id\Phi_{B_2} = I(d\Phi_{B_2} - d\Phi_{B_1}),$$

де $d\Phi_{B_1}$ - магнітний потік крізь поверхню $AMD D' M' A'$; $d\Phi_{B_2}$ - крізь поверхню $AND D' N' A'$; $d\Phi_{B_2} - d\Phi_{B_1} = d\Phi_B$ - зміна магнітного потоку, що пронизує поверхню, обмежену контуром, при переміщенні контуру з положення C в положення C' .

Остаточний вираз для елементарної роботи dA буде

$$A = I \Delta\Phi_B.$$

Інтегруючи цей вираз, знайдемо роботу A , яку виконує сила Ампера при будь-якому переміщенні контуру в магнітному полі

$$A = I \Delta\Phi_B.$$

Робота, яку виконує сила Ампера при переміщенні в магнітному полі замкненого контуру, по якому проходить постійний струм, дорівнює добутку сили струму на зміну магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром.

Розглянемо кілька прикладів.

1. Замкнений жорсткий ($S = \text{const}$) провідник поступально переміщується в магнітному полі так, що його площина залишається перпендикулярно до вектора \vec{B} . При цьому робота A , яка виконана при переміщенні провідника з деякого початкового в кінцеве положення, дорівнює

$$A = I(\Phi_{B_2} - \Phi_{B_1}).$$

Оскільки вектор \vec{B} перпендикулярний до площини замкненого провідника, то

$$\Phi_{B_2} = B_2 S, \quad \Phi_{B_1} = B_1 S,$$

де S - площа контуру, яка охоплена провідником.

Тоді

$$A = IS(B_2 - B_1) = p_m(B_2 - B_1),$$

де p_m - магнітний момент струму

Якщо поле однорідне, тобто $B_2 = B_1$, то $A = 0$.

2. Виймання замкненого провідника з струмом з магнітного поля. Якщо через контур, що охоплений замкненим струмом I , проходив магнітний потік Φ_{B_1} , то при вийманні провідника зміна магнітного потоку дорівнюватиме

$$\Delta\Phi_B = \Phi_{B_2} - \Phi_{B_1} = -\Phi_{B_1}.$$

Тоді

$$A = -I\Phi_{B1} = -p_m B.$$

3. *Повертання замкненого провідника зі струмом в однорідному магнітному полі.* Розглянемо провідник у вигляді кільця площею S . Припустимо, що спочатку площина контуру провідника перпендикулярна до вектора магнітної індукції і через контур проходить максимальний магнітний потік Φ_B . Якщо повернути провідник навколо діаметра кільця на кут 90° , то площина контура розміститься паралельно вектору \vec{B} і жодна з них не пронизуватиме його. Отже, $\Phi_{B1} = \Phi_B$, $\Phi_{B2} = 0$. Тоді

$$A = -I\Phi_B = -p_m B.$$

При повертанні рамки на кут 180° її кінцеве і початкове положення відрізняться лише напрямком вектора \vec{B} відносно вектора магнітного моменту контура \vec{p}_m і $\Phi_{B1} = \Phi_B$, $\Phi_{B2} = -\Phi_B$. Тоді

$$A = -2p_m B = -2I\Phi_B.$$

§75. Магнітні моменти атомів. Намагніченість. Атом в магнітному полі

Щоб з'ясувати причини відмінностей магнітних властивостей середовищ та їх впливу на величину магнітної індукції магнітного поля, треба вивчити процеси, що відбуваються в речовині під впливом зовнішнього магнітного поля на атоми і молекули речовини. В будь-якій речовині, вміщеній у зовнішнє магнітне поле, виникає особливий стан намагніченості і створюється внутрішнє магнітне поле.

Розглянемо причини цього явища з точки зору будови атомів і молекул, поклавши в основу гіпотезу Ампера, згідно з

якою в будь-якому тілі існують мікроскопічні струми, обумовлені рухом електронів в атомах і молекулах.

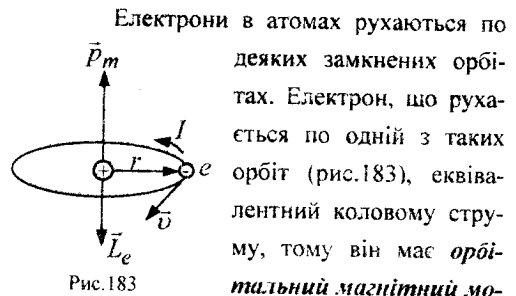


Рис.183

Електрони в атомах рухаються по деяких замкнених орбітах. Електрон, що рухається по одній з таких орбіт (рис.183), еквівалентний коловому струму, тому він має *орбітальний магнітний момент* $\vec{p}_m = IS\vec{n}$, модуль якого $p_m = IS$, де S – площа орбіти електрона: $S = \pi r^2$.

Вектор \vec{p}_m напрямлений в той самий бік, що й індукція магнітного поля в центрі колового струму I . Кількість обертів електронів в секунду $\nu = \frac{v}{2\pi r}$. Тоді сила струму

$$I = e\nu = \frac{ev}{2\pi r} \text{ і } p_m = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2}.$$

З іншого боку, кожний електрон, що рівномірно рухається по орбіті, має *орбітальний механічний момент імпульсу*, який числово дорівнює $L_e = mvr$. Тоді

$$\frac{p_m}{L_e} = \frac{e}{2m}.$$

Вектори \vec{p}_m і \vec{L}_e напрямлені у взаємно протилежні сторони. Тому $\vec{p}_m = -\frac{e}{2m}\vec{L}_e$, $\vec{p}_m = -g\vec{L}_e$, де $g = \frac{e}{2m}$ – гіромагнітне відношення орбітальних моментів.

Знайдене експериментально значення гіромагнітного відношення відрізняється від орбітального гіромагнітного відношення:

$$g_e = \frac{e}{m} \text{ і } g_e = 2g.$$

Щоб пояснити результат експерименту, припустили, що електрон, крім орбітальних моментів \vec{p}_m і \vec{L}_e , має *власний механічний момент імпульсу* \vec{L}_{es} , що називається *спіном електрона*. Спін є невід'ємною властивістю електрона, подібно до того, як йому властиві заряд e і маса m . Спін електрона виявляється в багатьох експериментальних фактах. Спіну електрона \vec{L}_{es} відповідає власний (спіновий) магнітний момент \vec{p}_{ms} , який дорівнює:

$$\vec{p}_{ms} = -g_s \vec{L}_{es} = -\frac{e}{m} \vec{L}_{es}$$

де g_s – гіромагнітне відношення спінових моментів.

У квантовій механіці доведено, що абсолютна величина спіну електрона

$$L_{es} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{h}{2\pi}$$

де h – стала Планка.

Використовуючи вирази для g_s і L_{es} , отримуємо співвідношення для абсолютної величини спінового магнітного моменту електрона

$$p_{ms} = g_s L_{es} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{h}{2\pi} \frac{e}{m} = \sqrt{3} \mu_B$$

де $\mu_B = \frac{h}{4\pi} \frac{e}{m}$ – магнетон Бора.

У магнітному полі спін може орієнтуватися тільки двома способами: його проекції на напрямок вектора \vec{B} може бути або $+\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$, або $-\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$. Відповідно, проекції спінових магнітних моментів дорівнюють $-\mu_B$ і $+\mu_B$.

Магнітний момент електрона складається з його орбітального і спінового магнітних моментів. Відповідно магнітний

момент атома дорівнює сумі магнітних моментів електронів, що входять до складу атома, і магнітного моменту ядра, який значно менший від моментів електрона. Тому магнітним моментом ядра нехтують.

Отже,

$$\vec{P}_{ma} = \sum_{i=1}^Z \vec{p}_{mi} + \sum_{i=1}^Z \vec{p}_{si}$$

де Z – атомний номер хімічного елемента.

За відсутності зовнішнього магнітного поля магнітні моменти орієнтовані хаотично, внаслідок чого сумарний магнітний момент речовини дорівнює нулю і результуюча індукція магнітного поля, яке створене мікроскопічними струмами, дорівнює нулю. Під дією зовнішнього магнітного поля магнітні моменти орієнтуються в певному напрямку і виникає внутрішнє магнітне поле, сумарний магнітний момент відмінний від нуля і речовина намагнічується.

Для кількісного опису намагнічування магнетиків введемо векторну величину – *намагніченість* \vec{J} , яка числово дорівнює магнітному моменту одиниці об'єму магнетика:

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}_m}{V} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_{mai}$$

де N – кількість атомів (молекул), що знаходяться в об'ємі V , \vec{p}_{mai} – магнітний момент i -го атома (молекули). Об'єм V повинен бути настільки малим, щоб в його межах магнітне поле можна вважати однорідним.

Розглянемо вплив зовнішнього магнітного поля \vec{B} на рух електронів в атомах речовини (рис.184). Нехай орбіта електрона розміщена відносно вектора \vec{B}

так, що орбітальний магнітний момент електрона \vec{p}_m утворює з напрямком магнітної індукції \vec{B} поля кут α . На орбіту діє обертальний момент $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$, який намагається встановити орбітальний момент \vec{p}_m за напрямком поля. Під дією моменту \vec{M} вся орбіта починає прецесувати навколо напрямку \vec{B} . Такий рух векторів \vec{p}_m і \vec{L}_e і відповідної їм орбіти електрона в атомі називається *прецесією Лармора*.

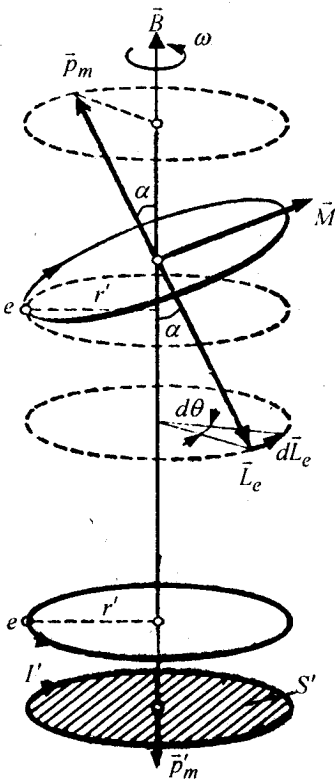


Рис.184

За час dt вектор \vec{L}_e отримує приріст $d\vec{L}_e$, який дорівнює:

$$d\vec{L}_e = \vec{M}dt.$$

Вектор $d\vec{L}_e$, як і вектор \vec{M} , перпендикулярний до площини, що проходить через вектори \vec{B} і \vec{L}_e . Модуль вектора \vec{L}_e дорівнює

$$|\vec{L}_e| = p_m B \sin \alpha dt,$$

За час dt площина, в якій лежить вектор \vec{L}_e , повертається навколо напрямку \vec{B} на кут

$$d\theta = \frac{|d\vec{L}_e|}{r'} = \frac{|d\vec{L}_e|}{L_e \sin \alpha} = \frac{p_m B \sin \alpha dt}{L_e \sin \alpha} = \frac{p_m}{L_e} B dt.$$

Кутова швидкість прецесії

$$\omega_l = \frac{d\theta}{dt} = \frac{p_m}{L_e} B.$$

Враховуючи, що $\frac{p_m}{L_e} = \frac{e}{2m}$, отри-

маємо

$$\omega_l = \frac{eB}{2m}.$$

Кутова швидкість ω_l називається кутовою швидкістю прецесії Лармора. Вона не залежить ні від кута нахилу орбіти відносно вектора \vec{B} , ні від радіуса орбіти або швидкості електрона і, отже, для всіх електронів, що входять в склад атома, однакова.

Теорема Лармора: єдиним наслідком впливу магнітного поля на орбіту електрона в атомі є прецесія орбіти і вектора \vec{p}_m з кутовою швидкістю ω_l навколо осі, що проходить через ядро атома і паралельна вектору \vec{B} індукції магнітного поля.

Прецесія орбіти обумовлює додатковий рух електрона навколо напрямку поля. Якщо б відстань r' електрона від осі,

що проходить через центр орбіти, не змінювалась би, то додатковий рух електрона відбувався би по колу радіуса r' . Йому відповідав би коловий струм

$$I' = e \frac{\omega_L}{2\pi},$$

магнітний момент якого дорівнює

$$p'_m = I'S' = e \frac{\omega_L}{2\pi} \pi r'^2 = \frac{e\omega_L}{2} r'^2$$

і напрямлений в сторону, протилежну вектору \vec{B} . Магнітний момент \vec{p}'_m називається індукованим магнітним моментом.

Проте, внаслідок руху електрона по орбіті, відстань r' весь час змінюється.

Тому треба брати замість r'^2 його середнє за часом $\langle r'^2 \rangle$. Для орбіти, площа якої

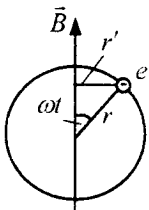


Рис. 185

проходить через напрямок \vec{B} , r' змінюється за законом

$$r' = r \sin \omega t,$$

де ω – кутова швидкість обертання електрона по орбіті (рис. 185).

Отже,

$$\langle r'^2 \rangle = \langle r^2 \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} r^2,$$

$$\left(\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} \right).$$

Якщо провести усереднення за всіма можливими значеннями α , вважати їх рівноймовірними, то $\langle r'^2 \rangle = \frac{2}{3} r^2$.

В результаті середнє значення індукованого магнітного моменту одного електрона матиме наступний вигляд

$$\langle p'_m \rangle = -e \frac{\omega_L}{2} \langle r'^2 \rangle = -\frac{e}{6m} r^2 B.$$

Знак "–" відображає той факт, що вектори $\langle \vec{p}'_m \rangle$ і \vec{B} напрямлені у протилежні сторони.

Індукований магнітний момент атома дорівнює сумі індукованих моментів електронів, що входять до складу атома:

$$P'_{ma} = \sum_{i=1}^Z \langle p'_m \rangle = -\frac{e^2 B}{6m} \sum_{i=1}^Z \langle r_i^2 \rangle.$$

Прецесія Лармора виникає у всіх без винятку речовин.

§76. Елементарна теорія діа-і парамагнетизму

Досліди і теорія показують, що всі речовини, які поміщені в магнітне поле, набувають магнітних властивостей, тобто намагнічуються і тому деякою мірою змінюють зовнішнє поле.

При цьому виявляється, що одні речовини послаблюють зовнішнє поле, а інші – підсилюють його; перші називаються *діамагнетиками*, другі – *парамагнетиками*.

Більшість речовин належить до діамгнетиків. *Діамагнетиками називають речовини, магнітні моменти атомів або молекул яких дорівнюють нулю, коли немає зовнішнього магнітного поля.* В цих речовинах спінові та орбітальні магнітні моменти електронів взаємно скомпенсовані.

До діамгнетиків належать інертні гази He, Ne, Ar, Kr, Xe , а також такі речовини, як $H_2O, C, Si, Zn, Ag, Sb, Hg, Pb, Bi$, багато органічних сполук тощо.

Для пояснення природи діамгнетизму розглянемо вплив магнітного поля на рух електронів в атомах речовини.

Коли внести діаманетик у зовнішнє магнітне поле, у кожному його атомі індукується магнітний момент \vec{P}'_{ma} , який напрямлений протилежно до вектора \vec{B} магнітної індукції поля. В межах малого об'єму V ізотропного діаманетика вектори \vec{P}'_{ma} всіх N атомів (молекул) однакові. Вони пропорційні до вектора \vec{B} і протилежні йому за напрямком. Тому вектор намагнічування дорівнює:

$$\vec{J} = \frac{N\vec{P}'_{ma}}{V} = n\vec{P}'_{ma} = -\frac{ne^2 \sum_{i=1}^{\infty} \langle r_i^2 \rangle}{6m} \vec{B} = \chi \frac{\vec{B}}{\mu_0},$$

де n – концентрація атомів (молекул),
 χ – безрозмірний коефіцієнт пропорційності, який залежить від природи речовини:

$$\chi = -\frac{ne^2 \sum_{i=1}^{\infty} \langle r_i^2 \rangle \mu_0}{6m}.$$

Коефіцієнт χ називається магнітною *сприйнятливістю* речовини. Як видно, для всіх діаманетиків $\chi < 0$ і за величиною $|\chi| \sim 10^{-6} \div 10^{-5}$, тобто $|\chi| \ll 1$. Тому діаманітний ефект мало помітний, цей ефект виникає у всіх речовинах, внесених у магнітне поле.

Стрижень з діаманітного матеріалу намагнічується в напрямку, протилежному до напрямку зовнішнього магнітного поля. Тому в неоднорідному магнітному полі діаманетик виштовхується в область слабшого поля і встановлюється так, щоб його вісь була перпендикулярна до вектора магнітної індукції \vec{B} поля.

Якщо векторна сума орбітальних магнітних моментів усіх електронів атома або молекули не дорівнює нулю, то атом загалом має деякий магнітний момент \vec{P}'_{ma} . Такі атоми (молекули) називаються *парамагнітними*, а речовини, що складаються з них – *парамагнетиками*.

До парамагнетиків належать речовини, атоми яких мають незабудовану до кінця зовнішню електронну підоболонку: Mg, Al, Ca, Cr, Mn, Pt, кисень атомарний і молекулярний, солі заліза, кобальту, нікелю, рідкісноземельних елементів тощо.

За відсутності зовнішнього магнітного поля парамагнетик ненамагнічений, оскільки внаслідок теплового руху власні магнітні моменти атомів орієнтовані хаотично ($J = 0$).

Розглянемо, що станеться при внесенні парамагнетика в однорідне магнітне поле, магнітна індукція якого дорівнює \vec{B} .

Кожен електрон атома парамагнітного тіла бере участь у двох рухах: орбітальному і прецесійному. Згідно з теоремою Лармора всі магнітні моменти електронів атома прецесують навколо напрямку \vec{B} з однаковою кутовою швидкістю ω_L . Результуючий магнітний момент атома процесує навколо напрямку \vec{B} з тією самою кутовою швидкістю ω_L .

Тепловий рух частинок парамагнетика і їх зіткнення спричинюють поступове загасання прецесії магнітних моментів атомів, а також зменшення кутів між напрямками \vec{P}'_{ma} і \vec{B} . Отже, незважаючи на утворюване тепловим рухом "розкидання" атомів, цей рух водночас сприяє переважній орієнтації магнітних атомів у напрямку

зовнішнього магнітного поля, оскільки саме по собі магнітне поле може спричинювати лише процесію \vec{P}_{ma} навколо напрямку \vec{B} .

Магнітний момент \vec{P}_{ma} окремого атома має величину $\sim 10^{-23} \frac{Дж}{Тл}$, але сукупна дія магнітних моментів усіх атомів, що містяться в одиниці об'єму речовини приводить до ефекту намагнічування, що значно перевищує діаманітний ефект. Тому парамагнетик намагнічується "за полем", тобто в напрямку магнітної індукції \vec{B} зовнішнього магнітного поля.

Класичну теорію парамагнетизму розвинув П. Ланжевен, який розглянув задачу про поведінку молекулярних струмів в однорідному магнітному полі.

Орієнтуюча дія магнітного поля на атом залежить від магнітного моменту атома і від магнітної індукції \vec{B} поля. "**Розкидаюча**" дія теплового руху визначається величиною kT , пропорційною до середньої теплової енергії однієї частинки. Виявилося, що результуюча дія двох протилежних факторів залежить від відношення

$$\alpha = \frac{P_{ma} B}{kT}.$$

Ланжевен знайшов залежність інтенсивності намагніченості J парамагнетика від параметра α :

$$J = f(\alpha) = n P_{ma} L(\alpha),$$

де $L(\alpha)$ - класична функція Ланжавена і яка має вигляд:

$$L(\alpha) = \left\{ \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} \right\}.$$

Якщо $\alpha \ll 1$, то $L(\alpha) \sim \frac{\alpha}{3}$; якщо $\alpha \gg 1$,

тоді $L(\alpha) \rightarrow 1$.

При $T \approx 300K$ умова $\alpha = 1$ може справджуватися лише в дуже сильних магнітних полях.

У дуже сильних магнітних полях або при дуже низьких температурах, коли більша частина векторів \vec{P}_n "орієнтована" вздовж напрямку індукції магнітного поля, має місце **явище насиченості**: намагніченість не залежить від \vec{B} .

Далеко від області насиченості

$$L(\alpha) \sim \frac{\alpha}{3}, \text{ тоді}$$

$$\vec{J} = \frac{n P_{ma}^2 \mu_0}{3kT} \vec{B} = \chi \frac{\vec{B}}{\mu_0}.$$

Магнітна сприйнятливість парамагнітних речовин $\chi = \frac{n P_{ma}^2 \mu_0}{3kT}$. Отже $\chi > 0$ і значення $\chi \sim 10^{-3} - 10^{-5}$.

Макроскопічно парамагнетизм виявляється в тому, що парамагнетики втягуються в неоднорідне магнітне поле, а в однорідному полі парамагнітний стрижень орієнтується паралельно до ліній індукції магнітного поля.

При нагріванні парамагнетика, який внесений у зовнішнє магнітне поле, тепловий рух атомів зростатиме і руйнуватиме ту орієнтацію елементарних магнітних моментів частини атомів, яка встановилася під дією зовнішнього поля. Отже, магнітна сприйнятливість парамагнетиків χ як величина, що характеризує з макроскопічного погляду магнітні властивості речовини, повинна залежати від T :

$$\chi = \frac{C}{T},$$

де $C = \frac{n\mu_0 P_m a^2}{3k}$ - стала Кюрі.

Це співвідношення виражає закон

Кюрі: магнітна сприйнятливість парамагнетика обернено пропорційна до його термодинамічної температури.

§77. Магнітне поле в речовині.

Закон повного струму для магнітного поля в речовині.

Напруженість магнітного поля

При вивченні магнітного поля в речовині (магнетик) розрізняють два типи струмів: макроструми і мікроструми. Макрострумами називають електричні струми провідності, а також конвекційні струми, які зв'язані з рухом заряджених макроскопічних тіл. Мікрострумами, або молекулярними струмами, називаються струми, які обумовлені рухом електронів в атомах, іонах і молекулах.

Магнітне поле в речовині складається з двох полів: зовнішнього поля \vec{B}_0 , яке створюється макрострумами, і внутрішнього поля $\vec{B}_{вн}$, яке створюється молекулярними струмами.

Вектор \vec{B} магнітної індукції результуючого магнітного поля в речовині дорівнює векторній сумі магнітних індукцій зовнішнього і внутрішнього полів:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{вн}.$$

Вектор \vec{B} залежить від магнітних властивостей речовини.

Для опису поля $\vec{B}_{вн}$, що створюється молекулярними струмами, розглянемо однорідний ізотропний діамagnetик у вигляді колового циліндра перерізом S і дов-

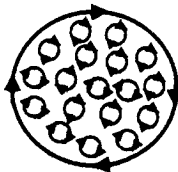


Рис.186

жиною l , який внесений у однорідне зовнішнє магнітне поле з індукцією \vec{B}_0 (рис.186).

Внутрішнє поле, що виникає в діамagnetик, буде напрямлене протилежно зовнішньому. При цьому площини всіх молекулярних струмів розташовуються перпендикулярно до напрямку зовнішнього поля \vec{B}_0 так, щоб вектори їхніх магнітних моментів \vec{p}_m були антипаралельні до вектора \vec{B}_0 .

На внутрішніх ділянках будь-якого перерізу S циліндра молекулярні струми сусідніх атомів напрямлені назустріч один одному і взаємно компенсуються (рис.186). Нескомпенсованими будуть лише молекулярні струми, які виходять на бічну поверхню циліндра.

Струми, які проходять по бічній поверхні циліндра, подібні до струму в соленоїді. Вони утворюють всередині циліндра поле, магнітну індукцію якого $\vec{B}_{вн}$ можна обчислити за допомогою формули для магнітного поля всередині довгого соленоїда:

$$B_{вн} = \mu_0 \frac{N}{l} I_{мол}^{(1)} = \mu_0 n I_{мол}^{(1)} = \mu_0 I_{мол}^{(n)},$$

де $I_{мол}^{(1)}$ - величина молекулярного струму одного кільця, n - число кільцевих струмів $I_{мол}^{(1)}$, що припадають на одиницю довжини циліндра, $I_{мол}^{(n)} = n I_{мол}^{(1)}$ - величина молекулярного струму одиниці довжини циліндра.

Магнітний момент циліндра-соленоїда, об'єм якого $V = lS$, дорівнює

$$P_m = I_{\text{мол}}^{(N)} S = n I_{\text{мол}}^{(I)} I S = I_{\text{мол}}^{(n)} V.$$

Звідси намагніченість магнетика

$$J = \frac{P_m}{V} = I_{\text{мол}}^{(n)},$$

а магнітна індукція $B_{\text{вн}}$ дорівнює:

$$B_{\text{вн}} = \mu_0 J.$$

Вектори $\vec{B}_{\text{вн}}$ і \vec{J} мають однакові напрями, тому

$$\vec{B}_{\text{вн}} = \mu_0 \vec{J}.$$

Закон повного струму для магнітного поля в речовині (теорема про циркуляцію вектора B) є узагальненням закону повного струму для магнітного поля у вакуумі:

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_L \vec{B}_L dl = \mu_0 \left(\sum I + \sum I_{\text{мол}} \right),$$

де $\sum I$ і $\sum I_{\text{мол}}$ – відповідно алгебраїчні суми сил макрострумів (струмів провідності) і мікрострумів (молекулярних струмів), що охоплюються заданим контуром.

Обчислюючи циркуляцію вектора \vec{B} в магнетиках, стикаємося з такою трудністю: для того, щоб визначити циркуляцію вектора \vec{B} , треба знати силу не лише макроскопічних струмів, але також і молекулярних струмів. Сила ж молекулярних струмів у свою чергу залежить від значення вектора \vec{B} . Шлях, щоб обійти це затруднення, такий: можна знайти таку допоміжну величину, циркуляція якої визначається лише силою макроскопічних струмів.

Щоб встановити вигляд цієї допоміжної величини, виразимо силу молекулярних струмів $I_{\text{мол}}$ через намагніченість.

Для цього розглянемо однорідний ізотропний діамagnetик, який має форму колового циліндра завдовжки l , що поміщений в зовнішнє магнітне поле (рис. 187).

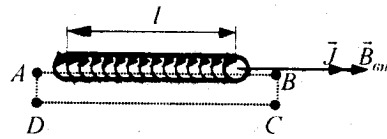


Рис. 187

Виберемо контур L у вигляді прямокутника $ABCD$ сторони BC , CD , DA якого лежать поза магнетиком, а сторона AB паралельна до напрямку магнітного поля і вектору намагніченості \vec{J} (рис. 187). В усіх точках контура L , які лежать поза магнетиком $J = 0$. У точках прямої AB вектори \vec{J} і $d\vec{l}$ паралельні, причому $J = \text{const}$. Тому $\oint_L (\vec{J}, d\vec{l}) = \oint_L J dl = J l$.

Вектор \vec{J} числово дорівнює сумі молекулярних струмів, що припадають на одиницю довжини магнетика. Отже, $J l$ дорівнює сумі молекулярних струмів, що припадають на всю довжину l магнетика, тобто охоплених замкненим контуром L :

$$\oint_L \vec{J} d\vec{l} = J l = \sum I_{\text{мол}}.$$

Цей результат не залежить ні від форми контура L , ні від форми і природи магнетика, ні від того, однорідне магнітне поле чи ні.

Тоді закон повного струму для магнітного поля в речовині можна записати у вигляді

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = I.$$

Вираз в дужках $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$ і є шуканою допоміжною величиною, циркуляція якої визначається лише макроскопічними струмами

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \sum I_i.$$

Вектор \vec{H} називається *напруженістю магнітного поля*.

Отримана формула виражає теорему про циркуляцію вектора \vec{H} (закон повного струму для магнітного поля в середовищі): *циркуляція вектора напруженості магнітного поля по деякому контуру дорівнює алгебраїчній сумі макроскопічних струмів, що охоплюються цим контуром.*

Напруженість магнітного поля \vec{H} є аналогом електричного зміщення \vec{D} .

У вакуумі $\vec{J} = 0$, тому $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ і

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

Як показують досліди, в несильних полях намагніченість \vec{J} прямо пропорційна до напруженості поля \vec{H} , що викликає намагнічення, тобто

$$\vec{J} = \chi \vec{H},$$

де χ - магнітна сприйнятливість речовини.

Тоді

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H},$$

звідки

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1 + \chi)}.$$

Безрозмірна величина

$$\mu = 1 + \chi$$

називається відносною магнітною проникністю речовини.

Оскільки магнітна сприйнятливість діамагнетиків $\chi \sim -(10^{-6} \div 10^{-5})$, то відносна магнітна проникність цих магнетиків $\mu < 1$, а сприйнятливість парамагнетиків $\chi \sim 10^{-3} \div 10^{-5}$, то їх проникність

незначно більша від одиниці, тобто $\mu > 1$.

Вираз для напруженості поля можна записати у вигляді

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}.$$

Отже, напруженість магнітного поля \vec{H} - це вектор, що має той же напрям, що і вектор \vec{B} , але в $\mu\mu_0$ разів менший за модулем.

Повернімося до розгляду магнітного поля в речовині. Нехай макрострумами у вакуумі створюється однорідне магнітне поле \vec{B}_0 , напруженість, якого дорівнює

$$\vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

Внесемо в це поле нескінченно довгий циліндричний стрижень із однорідного й ізотропного магнетика, розмістивши його вздовж напрямку \vec{B}_0 . В стрижні виникає намагніченість \vec{J} , яка паралельна до вектора \vec{B}_0 . В середині стрижня магнітна індукція

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{\text{вн}} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J}.$$

Підставимо це значення \vec{B} у вираз для напруженості поля:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J}) - \vec{J} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \vec{H}_0.$$

Отже, напруженість магнітного поля у стрижні збігається з напруженістю зовнішнього поля.

Помножимо \vec{H} на $\mu\mu_0$:

$$\mu\mu_0 \vec{H} = \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}_0 = \mu\mu_0 \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \mu \vec{B}_0,$$

тобто магнітна індукція всередині стрижня

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_0$$

і магнітна проникність μ показує, у скільки разів підсилюється поле в магнетику.

§78. Феромагнетики

У дев'яти чистих хімічних елементів, а саме залізі (*Fe*), нікелі (*Ni*), кобальті (*Co*) і лантанідах - гадолінію (*Gd*), тербію (*Tb*), диспрозію (*Dy*), гольмію (*Ho*), ербію (*Er*) і тулію (*Tu*) та їх численних сплавах виявлено властивість миттю намагнічуватися навіть у слабких магнітних полях. Усі вони утворюють групу сильномагнітних речовин - *феромагнетиків*. Феромагнетики підсилюють зовнішнє поле в сотні і тисячі разів.

Експериментальне вивчення феромагнетиків розпочав *О.Г.Столетовим*. Він дослідив залежність намагніченості заліза від напруженості магнітного поля.

На рис.188 показано залежність інтенсивності намагніченості заліза від напруженості H магнітного поля. Починаючи з деякого числового значення вектор намагніченості залишається постійним і дорівнює J_n . Це явище Столетов назвав *магнітним насиченням*.

На рис.189 зображено криву залежності магнітної індукції B від H . При $H > H_n$ магнітна індукція $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J})$ зростає за лінійним законом залежно від напруженості по-

ля \vec{H} . Це пояснюється тим, що намагніченість \vec{J} при цій напруженості поля вже не змінюється і вектор магнітної індукції \vec{B} залежить лише від напруженості \vec{H} .

Відносна магнітна проникність μ феромагнетика спочатку швидко зростає із збільшенням H , досягає максимуму і потім спадає, прямуючи до одиниці при сильних намагнічуючих полях (рис.190). Це пов'язано з тим, що

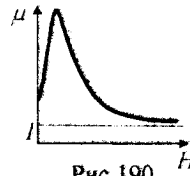


Рис.190

тільки спадає, прямуючи до одиниці при сильних намагнічуючих полях (рис.190). Це пов'язано з тим, що

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{\mu_0 H + J}{\mu_0 H} = 1 + \frac{J}{\mu_0 H}.$$

Тому при $J = J_n = const$ із зростанням H відношення $\frac{J}{H} \rightarrow 0$, а $\mu \rightarrow 1$.

О.Столетов вивчив явище намагнічування феромагнетика у змінному за величиною і напрямком зовнішньому магнітному полі.

Залежність намагніченості \vec{J}_n від напруженості поля H визначається передісторією намагнічення феромагнетика (рис.191). Це явище називається *магнітним гістерезисом*.

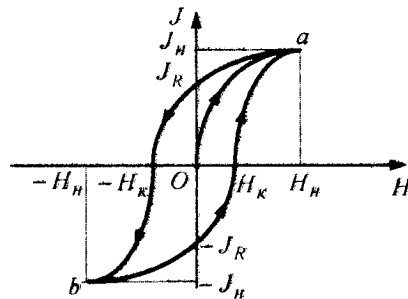


Рис.191

Помістимо стрижень з феромагнетика, який після виготовлення ні разу не

був у зовнішньому магнітному полі, у соленоїд і монотонно збільшуватимемо струм у його обмотці. При цьому зростатиме напруженість \vec{H} поля та намагнічення \vec{J} стрижня (крива Oa), при напруженості поля \vec{H}_H намагнічення досягає насичення \vec{J}_H .

Якщо поступово зменшувати струм в обмотці соленоїда, то зменшується напруженість H поля соленоїда і намагнічення J стрижня. Але крива $J(H)$ вже не збігається з первинною кривою намагнічення Oa . В той момент, коли намагнічуюче поле $H = 0$, у феромагнітного стрижня спостерігатиметься залишкове намагнічення J_R .

Після зміни на клеммах соленоїда полярності джерела і монотонного збільшення струму виникає магнітне поле, яке напрямлене протилежно до залишкового намагнічення, і стрижень розмагнічуватиметься. Та напруженість H_K поля, яка потрібна, щоб повністю розмагнітити попередньо намагнічений стержень, називається *коерцитивною напруженістю* (коерцитивною силою).

При подальшому збільшенні магнітного поля, протилежного початковому, намагнічення стрижня знову досягає намагнічення насичення - J_H при $H = -H_H$. Повертаючись поступово до напруженості магнітного поля H_H , дістанемо замкнену криву, яка називається *петлею гістерезису*.

Коерцитивна сила характеризує властивість феромагнетика зберігати намагніченість. Матеріали з великою коерцитивною напруженістю дають широку

петлю гістерезису і називаються «твердими» магнітними матеріалами. З них виготовляють постійні магніти.

«М'які» магнітні матеріали мають малу коерцитивну силу і дають вузьку петлю гістерезису. Ці матеріали використовують для виготовлення осердь трансформаторів. Перемагнічення феромагнетика пов'язане з повертанням областей спонтанного намагнічення. Робота, необхідна для цього, здійснюється за рахунок енергії зовнішнього магнітного поля. Кількість тепла, яке виділяється під час перемагнічування, пропорційна до площі петлі гістерезису.

В експериментах із залізом П. Кюрі встановив, що при певній температурі воно втрачає властивість феромагнетика і переходить в парамагнітний стан. Цю температуру називають точкою Кюрі.

Залежність магнітної сприйнятливості феромагнетиків від абсолютної температури T речовини у феромагнітному стані наближено описується законом Кюрі:

$$\chi = C(T_c - T)^{\gamma},$$

де $\gamma \neq 1$ і набуває різних значень у різних температурних інтервалах. Наприклад, при температурах T , близьких до точки фазового переходу T_c , $\gamma = \frac{4}{3}$.

Магнітна сприйнятливості феромагнетика в парамагнітній фазі змінюється за законом Кюрі-Вейса:

$$\chi = \frac{C}{T - T_c}.$$

Перехід речовини з феромагнітного стану в парамагнітний не супроводжується виділенням або поглинанням тепла.

Класична теорія феромагнетизму була розроблена П. Вейсом. В основу цієї

теорії покладено дві гіпотези. *Перша гіпотеза* полягає в тому, що в певній області температур (від $T=0$ до $T=T_c$) феромагнетикам властива спонтанна намагніченість, яка не залежить від наявності зовнішнього магнітного поля. Проте досліді показали, що у разі відсутності зовнішнього магнітного поля, якщо не брати до уваги явище магнітного гістерезису, будь-яке феромагнітне тіло буде в цілому розмагнічене. Це примусило ввести *другу гіпотезу* про те, що при $T < T_c$ будь-яке феромагнітне тіло розділяється на малі області, яким властива однорідна спонтанна намагніченість. Такі області називаються *доменами*. Лінійні розміри доменів досягають $10^{-2} - 10^{-3}$ см. Межі доменів (доменні стінки) не слід уявляти у вигляді геометричних площин. Фактично це області, що охоплюють сотні атомних шарів, в яких напрямок намагнічення змінюється мототонно.

Коли зовнішнього магнітного поля немає, вектори магнітних моментів окремих доменів орієнтуються в просторі хаотично, так що результуючий магнітний момент усього тіла дорівнює нулю. Зовнішнє магнітне поле, яке діє на феромагнетика, орієнтує магнітні моменти не окремих частинок як у парамагнетиках, а цілих областей спонтанної намагніченості, домени починають збільшуватись в об'ємі за рахунок сусідніх доменів, що мають інші орієнтації намагніченості (рис.192). При

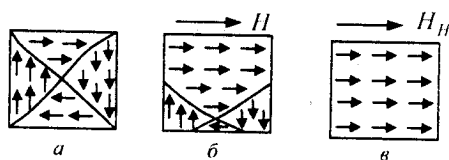


Рис.192

досить сильному полі H_{II} всі домени повертаються в напрямку поля і феромагнетик намагнічується до насичення.

Класична теорія феромагнетизму дала змогу пояснити існування магнітного насичення, яке полягає в тому, що вектори магнітних моментів в усіх областях спонтанної намагніченості встановлюються паралельно зовнішньому магнітному полю. Подальший розвиток теорії феромагнетизму Френкелем і Гейзенбергом, а також ряд експериментальних фактів дозволили з'ясувати природу елементарних носіїв феромагнетизму. Магнітні властивості феромагнетиків визначаються *спіновими магнітними моментами електронів*.

Феромагнітні властивості можуть мати лише кристалічні речовини, в атомах яких недобудовані внутрішні електронні оболонки з некомпенсованими спінами. У цих кристалах можуть виникати сили, які примушують спінові магнітні моменти електронів орієнтуватися паралельно один до одного, що і призводить до виникнення областей спонтанного намагнічення. Ці сили, що називаються *обмінними силами*, мають квантову природу - вони обумовлені хвильовими властивостями електронів.

§79. Явище електромагнітної індукції. Закон Ленца. Закон електромагнітної індукції (закон Фарадея)

Після відкриття Ерстеда, в якому було доведено, що навколо провідників із струмом існує магнітне поле, природно було поставити питання про можливість утворення електричного струму у провідниках за допомогою магнітного поля. Це питання розв'язав М. Фарадей, який в

1831р. показав, що в замкненому провіднику виникає електричний струм при будь-яких змінах магнітного потоку через площу, охоплену цим провідником.

Явище виникнення у провіднику електрорушійної сили при зміні магнітного поля, що пронизує площу контура провідника, називається електромагнітною індукцією. Якщо провідник замкнений, то в ньому виникне електричний струм. Струм, що виникає у провіднику при електромагнітній індукції, називається індукційним.

Виникнення індукційного струму завжди пов'язане із зміною магнітного потоку через контур провідника. Ці зміни можуть відбуватися з різних причин, зокрема через:

- переміщення постійного магніту відносно нерухомого провідника;
- переміщення контура відносно нерухомого магніту;
- замикання та розмикання струму в обмотці нерухомого електромагніту, розміщеного поблизу провідника;
- відносне переміщення контура і електромагніту;
- зміну індукції магнітного поля електромагніту (виймання осердя при сталому струмі в обмотці або зміну струму реостатом);
- зміну комутатором напрямку струму в обмотці електромагніту;
- постійний рух контура в неоднорідному магнітному полі;
- обертальний рух контура в однорідному магнітному полі.

Отже, індукційний струм в замкненому контурі виникає тільки тоді, коли

змінюється магнітний потік, який проходить через площу, охоплену контуром.

Фарадей встановив, що напрямок індукційного струму в провіднику залежить від характеру зміни (збільшення чи зменшення) магнітного потоку ($\Delta\Phi > 0$ чи $\Delta\Phi < 0$) через його контур. Якщо при внесенні постійного магніту в котушку стрілка гальванометра відхиляється в один бік, то при вийманні магніту вона відхиляється в протилежний бік.

Загальне правило, за допомогою якого можна визначити напрямок індукційного струму в замкненому провіднику, сформулював Е.Х.Ленц: *індукційний струм у замкненому провіднику завжди має такий напрямок, що створений цим струмом власний магнітний потік протидіє тим змінам зовнішнього магнітного потоку, які збуваються індукційний струм.*

Використовуючи закон Ленца для визначення напрямку індукційного струму, треба:

- 1) знайти причину, яка створює індукційний струм;
- 2) вважати, що індукційний струм протидіє цій причині, знайти напрямок його магнітного поля;
- 3) визначити напрямок індукційного струму за напрямком його магнітного поля.

Із закону Ленца можна встановити, що енергія індукційного струму у провіднику утворюється за рахунок тієї енергії, яка витрачається на подолання протидії магнітного поля індукційного струму.

Завдяки явищу електромагнітної індукції можна перетворити механічну енергію в електричну, а також передавати електричну енергію з одного кола в інше.

Якщо індукційний струм виникає у прямому провіднику, який є ділянкою замкнутого кола і рухається в зовнішньому магнітному полі перпендикулярно до лінії індукції, напрямок струму можна визначити за *правилом правої руки*: праву руку треба помістити в магнітному полі так, щоб лінії напруженості входили в долоню, а відставлений під прямим кутом великий палець збігався з напрямом переміщення провідника. Тоді чотири витягнуті пальці вкажуть напрямок індукційного струму в цьому провіднику.

Індукційний струм I_i у замкнутому провіднику з опором R виникає під дією \mathcal{E}_i , яку можна виразити за законом Ома

$$\mathcal{E}_i = I_i R.$$

Оскільки та сама ЕРС у провідниках з різним опором створює неоднакові струми, то для кількісної характеристики явища електромагнітної індукції зручніше користуватися величиною \mathcal{E}_i , а не силою індукційного струму I_i .

Дослідження індукційного струму в контурах різної форми і розмірів показали, що ЕРС електромагнітної індукції \mathcal{E}_i в контурі пропорційна до швидкості зміни магнітного потоку Φ через поверхню, обмежену цим контуром (закон Фарадея):

$$\mathcal{E}_i = k \frac{d\Phi_B}{dt}.$$

ЕРС електромагнітної індукції в контурі вважають позитивною, якщо магнітний момент \vec{p}_m відповідного їй індукційного струму утворює гострий кут з лініями магнітної індукції того поля, яке наводить цей струм (рис.193). Тоді для випадку, зображеного на рисунку ліворуч,

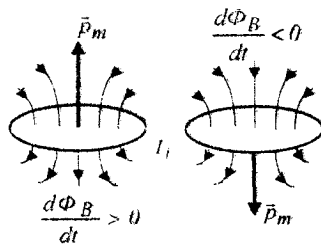


Рис.193

$\mathcal{E}_i < 0$, а для зображеного праворуч — $\mathcal{E}_i > 0$. В системі СІ $k = -1$ і

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Знак "–" є математичним виразом правила Ленца.

Ця формула, яка об'єднує закони Фарадея і Ленца, є математичним виразом основного закону електромагнітної індукції:

електрорушійна сила електромагнітної індукції в замкнутому контурі числово дорівнює і протилежна за знаком швидкості зміни магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром.

Якщо ЕРС індукції виникає при зміні магнітного потоку, який пронизує катушку з N витків, то її величина буде відповідно в N разів більшою, ніж для одного витка, тобто

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi_B}{dt}.$$

На основі закону електромагнітної індукції можна означити одиницю магнітного потоку вебер: $1 Вб$ – це такий магнітний потік, при зменшенні якого до нуля протягом $1 с$ в колі, яке він пронизував, виникає ЕРС індукції в $1 В$.

§80. Виведення закону електромагнітної індукції із закону збереження енергії, а також на основі електронної теорії

Німецький фізик Гельмгольц показав, що основний закон електромагнітної індукції - закон Фарадея - є наслідком закону збереження енергії.

Помістимо в однорідне магнітне поле з індукцією \vec{B} провідник завдовжки Δl з опором R , який є ділянкою замкнутого кола $CDKL$ (рис.194). Опором з'єднувальних провідників DK , KL і LC нехтуємо. Провідник DC рухається без тертя по ділянках DK і LC .

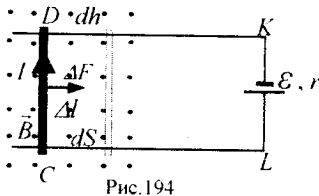


Рис.194

Джерело постійного струму з ЕРС \mathcal{E} і внутрішнім опором r створює в замкнутому колі струм I :

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$

При цьому на провідник Δl діє сила Ампера $\Delta F = BI\Delta l$, внаслідок чого провідник переміщуватиметься прискорено і за час dt пройде шлях dh . При проходженні струму I в замкнутому колі $CDKL$ протягом часу dt відбуваються такі процеси:

а) виділяється ленц-джоулеве тепло:

$$dQ = I^2(R+r)dt;$$

б) виконується механічна робота із переміщення провідника на шляху dh :

$$dA_m = \Delta F dh = IB\Delta S = Id\Phi_B.$$

За законом збереження енергії ці витрати повинні дорівнювати повній робо-

ті джерела струму $dA_0 = \mathcal{E}dt$, тобто

$$I^2(R+r)dt + Id\Phi_B = \mathcal{E}dt.$$

Звідси

$$I = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi_B}{dt}}{R+r}.$$

Ця формула виражає закон Ома для замкнутого кола, яке поміщене в магнітне поле. Роль діючої ЕРС в такому колі відіграє вираз

$$\mathcal{E} - \frac{d\Phi_B}{dt} \text{ або } \mathcal{E} + \left(-\frac{d\Phi_B}{dt}\right).$$

Додатковий член $-\frac{d\Phi_B}{dt}$, який відрізняється від нуля тільки у разі зміни магнітного потоку через контур кола, повинен мати розмірність ЕРС Він і визначає ЕРС індукції \mathcal{E}_i :

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

ЕРС електромагнітної індукції виникає не тільки в замкнутому контурі, а й на відрізку провідника, який, рухаючись перетинає лінії індукції магнітного поля.

Для спрощення вважатимемо, що відрізок прямолінійного металевго провідника DC завдовжки l рухається із сталою швидкістю \vec{v} перпендикулярно до вектора \vec{B} магнітної індукції (рис.195). На електрони провідності металу діє сила Лоренца

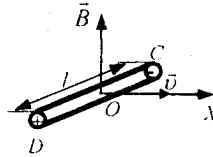


Рис.195

$$\vec{F}_i = -e[(\vec{v} + \vec{v}'), \vec{B}],$$

де \vec{v}' - швидкість впорядкованого руху електронів вздовж провідника. Ця швидкість зумовлена дотичною до провідника

складовою сили Лоренца $\vec{F}'_l = -e[\vec{v}, \vec{B}]$ і напрямлена від D до C . Вона відмінна від нуля лише на початку руху провідника, оскільки впорядкований рух електронів уздовж провідника від D до C викликає виникнення у провіднику електростатичного поля, яке заважає подальшому перерозподілу електронів. Вектор \vec{E} напруженості цього поля напрямлений від D до C і числово дорівнює:

$$E = \frac{\Delta\varphi}{l} = \frac{\varphi_D - \varphi_C}{l}.$$

Сила $e\vec{E}$, що діє на електрон з боку електричного поля, протилежна за напрямком силі Лоренца. Якщо числові значення цих сил дорівнюють одне одному, то подальший рух електронів по провіднику припиниться.

Тому для рівноважного стану ($v' = 0$) маємо $eE = evB$ або $\frac{\Delta\varphi}{l} = vB$.

За законом Ома для розімкненого кола ($I=0$) $\Delta\varphi = \varphi_D - \varphi_C = -\mathcal{E}$, де \mathcal{E} - електрорушійна сила, яка виникла у провіднику DC . Оскільки на ділянці DC гальванічних елементів, або інших джерел струму немає, то $\mathcal{E} = \mathcal{E}_i$. Тоді

$$\mathcal{E}_i = -Blv.$$

Тому що швидкість v руху провідника вздовж OX дорівнює $\frac{dx}{dt}$, то $\mathcal{E}_i = -Bl \frac{dx}{dt}$. Оскільки $l dx = dS$ - площа поверхні, яку описує провідник під час руху за час dt , а $BdS = d\Phi$ - магнітний потік через цю поверхню, то, $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}$.

Зміст правої частини рівняння для контуру і відрізка провідника різний. У

першому випадку $\frac{d\Phi_B}{dt}$ - швидкість зміни магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром. У другому - це відношення магнітного потоку крізь поверхню, яку описує провідник під час руху за дуже малий проміжок часу, до величини dt цього проміжка. Тому $\frac{d\Phi_B}{dt}$ - швидкість перетину провідником ліній індукції магнітного поля.

У роботах Фарадея з електромагнетизму вперше зустрічається поняття поля. Він перший вжив в 1845 р. термін "магнітне поле".

Ньютон й інші вчені простір розглядали як пасивне вмістилище тіл і електричних зарядів. У Фарадея простір бере участь у явищах, він є вмістилищем явищ. Таким чином, Фарадей є творцем вчення про електромагнітне поле. З того часу матерію стали розглядати і у формі речовини і у формі поля.

§81. Явище самоіндукції. Індуктивність

Навколо будь-якого провідника зі струмом існує магнітне поле, магнітна індукція $d\vec{B}$ якого у точці, що лежить на відстані r від елемента $d\vec{l}$ контуру струму I , дорівнює

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} [d\vec{l} \times \vec{r}].$$

Виконавши інтегрування по всій довжині контуру l , знайдемо магнітну індукцію \vec{B} результуючого поля

$$\vec{B} = \oint_l d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} I \oint_l \mu \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}.$$

Якщо цей контур обмежений поверхнею S , то магнітний потік, який створений власним магнітним полем контуру, через поверхню S дорівнює

$$\Phi_B = \int_S B_n dS,$$

де B_n - проекція вектора індукції \vec{B} магнітного поля струму, що тече в цьому контурі, на нормаль до елемента поверхні dS .

Проекція векторної суми \vec{B} на даний напрямок дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на цей напрямок всіх складових векторів. Тому

$$B_n = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\mu}{r^3} [d\vec{l} \cdot \vec{r}]_n,$$

де $[d\vec{l} \cdot \vec{r}]_n$ - проекція векторного добутку $[d\vec{l} \cdot \vec{r}]$ на напрямок нормалі до елемента dS поверхні, обмеженої контуром l . Тоді

$$\Phi_B = \int_S \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \oint \frac{\mu}{r^3} [d\vec{l} \cdot \vec{r}]_n \right\} dS.$$

Сила струму I в контурі не залежить від S . Тому

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S dS \oint \frac{\mu}{r^3} [d\vec{l} \cdot \vec{r}]_n \quad \text{і} \quad \Phi_B = LI,$$

де $L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S dS \oint \frac{\mu}{r^3} [d\vec{l} \cdot \vec{r}]_n$ - величина, яка називається *індуктивністю контуру*.

З цієї формули випливає, що індуктивність контуру залежить від геометричної форми контуру, його розмірів та магнітної проникності середовища, в якому він знаходиться.

Індуктивність контуру числово дорівнює магнітному потоку, створеному одиничним струмом в контурі. При цьому вважається, що немає ніяких інших магніт-

них полів, крім магнітного поля, створеного струмом у контурі, що розглядається.

Одиниця індуктивності - генрі (H): $1 H$ - індуктивність такого контуру, магнітний потік якого при струмі $1 A$ дорівнює $1 Wb$.

Обчислимо індуктивність соленоїда:

$$L = \frac{\Phi_{B_{\text{сол}}}}{I} = \frac{N\Phi_B}{I},$$

де N - загальна кількість витків соленоїда, Φ_B - магнітний потік крізь площу S , обмежену одним витком.

$$\Phi_B = BS = \mu\mu_0 nIS = \mu\mu_0 \frac{NI}{l} S,$$

де l - довжина соленоїда.

Тому індуктивність соленоїда дорівнює

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu\mu_0 n^2 V,$$

де $V = Sl$ - об'єм соленоїда.

Під час проходження по контуру непостійного струму магнітний потік змінюється і в контурі наводиться ЕРС індукції.

Виникнення ЕРС індукції внаслідок зміни струму в колі дістало назву явища самоіндукції. ЕРС індукції у цьому випадку називається ЕРС самоіндукції:

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d\Phi_E}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI).$$

Якщо контур не деформується і магнітна проникність середовища не змінюється, то $L = \text{const}$ і

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt}.$$

Знак "-", обумовлений правилом Ленца, показує, що наявність індуктивності в контурі приводить до сповільнення зміни струму в ньому. Тобто індуктивність

контура є мірою його інертності відносно зміни струму.

Якщо струм з часом росте, то $\frac{di}{dt} > 0$ і $\mathcal{E}_i < 0$, тобто струм самоіндукції напрямлений назустріч струму, який зумовлений зовнішнім джерелом і гальмує його зростання. Якщо струм з часом зменшується, то $\frac{di}{dt} < 0$, і $\mathcal{E}_i > 0$, тобто індукційний струм має такий напрямок, як і спадаючий струм в контурі, і сповільнює його зменшення.

Явище самоіндукції найбільш яскраво проявляється у виникненні так званих екстраструмів замикання та екстраструмів розмикання в колах, що містять котушки з великою індуктивністю.

Знайдемо закон зміни струму в колі, індуктивність якого L , а електричний опір - R , під час вмикання в це коло і вимикання з нього джерела ЕРС \mathcal{E} . Сила струму i дорівнює

$$i = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_i}{R},$$

де \mathcal{E} - алгебраїчна сума ЕРС джерел струму, ввімкнених в коло, а \mathcal{E}_i - ЕРС індукції. Якщо зовнішнє магнітне поле постійне, то індукційні явища в нерухомому колі зумовлені лише явищем самоіндукції, тому

$$i = \frac{\mathcal{E} - L \frac{di}{dt}}{R}.$$

Розділимо змінні в цьому рівнянні:

$$iR = \mathcal{E} - L \frac{di}{dt}, \quad \frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E} - iR}{L}.$$

Звідси

$$\frac{di}{\mathcal{E} - iR} = \frac{dt}{L}.$$

Вважаючи \mathcal{E} , R та L сталими та інтегруючи, дістанемо

$$-\ln(\mathcal{E} - iR) = \frac{R}{L}t + \ln C,$$

де C - довільна стала інтегрування.

Потенціюючи дане рівняння, маємо

$$\mathcal{E} - iR = Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

В початковий момент часу $t = 0$ сила струму дорівнює I_0 . Тоді

$$\mathcal{E} - I_0R = C.$$

В результаті

$$\mathcal{E} - iR = (\mathcal{E} - I_0R)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Звідси знайдемо вираз для сили струму:

$$iR = I_0R e^{-\frac{R}{L}t} + \mathcal{E} - \mathcal{E}e^{-\frac{R}{L}t}$$

і

$$i = I_0e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Для випадку вмикання джерела ЕРС початковий струм $I_0 = 0$ і отримуємо вираз для екстраструму замикання

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Струм у колі поступово збільшується

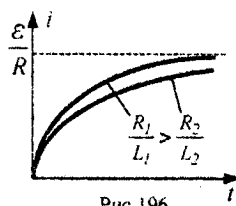
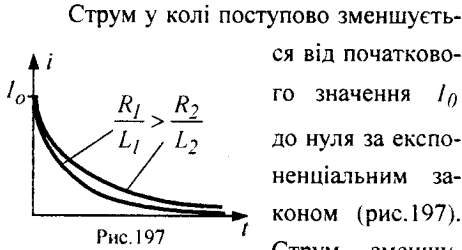


Рис.196

від нуля при $t = 0$ до значення $\frac{\mathcal{E}}{R}$, яке відповідає величині постійного струму (рис.196). Зростання струму відбувається тим швидше, чим більше відношення $\frac{R}{L}$.

Для випадку вимикання джерела ЕРС $\mathcal{E} = 0$, і екстраструм розмикання змінюється за законом

$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$



Струм у колі поступово зменшується від початкового значення I_0 до нуля за експоненціальним законом (рис.197). Струм зменшується тим швидше, чим більше значення $\frac{R}{L}$, тобто чим більший опір кола і чим менша його індуктивність.

§82. Явище взаємної індукції.
Взаємна індуктивність

Розглянемо два нерухомі контури, індуктивності яких L_1 і L_2 , що розміщені досить близько один від одного (рис.198).

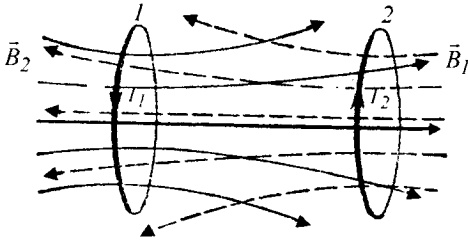


Рис.198

Якщо в контурі 1 тече струм I_1 , то магнітний потік, що створюється цим струмом, пропорційний до I_1 .

Позначимо $\Phi_{B_{21}}$ ту частину потоку, яка пронизує контур 2. Тоді $\Phi_{21} = M_{21}I_1$, де M_{21} - коефіцієнт пропорційності.

Якщо струм I_1 змінюється, то в контурі 1 індукція ЕРС \mathcal{E}_{12} , яка за законом

Фарадея дорівнює швидкості зміни магнітного потоку $\Phi_{B_{21}}$:

$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

Аналогічно, при протіканні в контурі 2 струму I_2 магнітний потік пронизує перший контур. Якщо $\Phi_{B_{12}}$ - частина потоку, що пронизує контур 1, то

$$\Phi_{B_{12}} = M_{12}I_2$$

Якщо струм I_2 змінюється, то в контурі 1 індукується ЕРС \mathcal{E}_{11} :

$$\mathcal{E}_{11} = -\frac{d\Phi_{B_{12}}}{dt} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

Контури 1 і 2 називаються зв'язаними. Явище виникнення ЕРС в одному з контурів при зміні сили струму в іншому називається взаємною індукцією.

Коефіцієнти M_{21} і M_{12} називаються взаємною індуктивністю контурів.

Розрахунки показують, що

$$M_{21} = M_{12}$$

Коефіцієнти M_{21} і M_{12} залежать від геометричної форми, розмірів, взаємного розміщення контурів і від магнітної проникності середовища, яке оточує контури.

Розрахуємо взаємну індуктивність двох котушок, які намотані на загальне тороїдальне осердя (рис.199). Магнітна

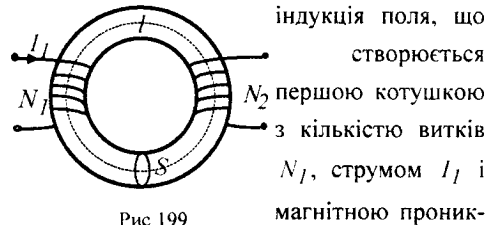


Рис.199

індукція поля, що створюється першою котушкою з кількістю витків N_1 , струмом I_1 і магнітною проникністю μ осердя, дорівнює: $B = \mu\mu_0 \frac{N_1 I_1}{l}$, де l - довжина осердя по середній лінії.

Магнітний потік через один виток другої котушки $\Phi_{B2} = BS = \mu\mu_0 \frac{N_1 I_1}{l} S$. Тоді повний потік через вторинну обмотку:

$$\Phi_B = \Phi_{B2} N_2 = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S I_1.$$

Потік Φ_B створюється струмом I_1 ,

$$\text{тому отримуємо } M_{21} = \frac{\Phi_B}{I_1} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S.$$

Якщо обчислити магнітний потік, що створюється котушкою 2 через котушку 1, коли по котушці 2 проходить струм I_2 , то

$$M_{12} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S.$$

Оскільки індуктивність контурів

$$L_1 = \mu\mu_0 \frac{N_1^2}{l} S \text{ і } L_2 = \mu\mu_0 \frac{N_2^2}{l} S,$$

то коефіцієнти взаємоіндукції

$$M_{12} = M_{21} = L_1 \frac{N_2}{N_1} = L_2 \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{L_1 L_2}.$$

§83. Енергія магнітного поля

Провідник, по якому протікає електричний струм, завжди оточений магнітним полем, причому магнітне поле появляється і зникає разом з появою і зникненням струму. Отже, частина енергії струму йде на створення магнітного поля.

Енергія магнітного поля дорівнює роботі, яка затрачається струмом на створення цього поля.

Обчислимо енергію магнітного поля струму в найпростішому випадку ізотропного середовища, в якого зв'язок індукції з напруженістю поля в ньому лінійний. Для цього розглянемо соленоїд з N витків, який має індуктивність L . Якщо за час dt

струм у соленоїді зростає на величину dI , то при цьому змінюється і її власний магнітний потік відповідно на величину $d\Phi_B$. Якщо в момент часу t сила струму в соленоїді становила I , то при зміні магнітного потоку на величину $d\Phi$, джерелом струму виконується додаткова робота dA :

$$dA = Id\Phi_B.$$

Оскільки соленоїд залишається нерухомим, то ця елементарна робота dA пов'язана із зміною енергії соленоїда, яка зумовлена наявністю в ньому магнітного поля, на величину dW_M :

$$dW_M = dA \text{ і } dW_M = Id\Phi_B.$$

Оскільки $d\Phi = LdI$, то $dW_M = LIdI$.

Інтегруючи цей вираз, знаходимо

$$\int_0^{W_M} dW_M = \int_0^I LIdI; \quad W_M = \frac{LI^2}{2}.$$

Це та енергія, яку було затрачено джерелом струму на утворення в соленоїді магнітного поля. За законом збереження енергії ця енергія дорівнює енергії магнітного поля W , яке пов'язане зі струмом I , що проходить по провіднику з індуктивністю L .

Дослідження властивостей змінних магнітних полів було доказом того, що енергія магнітного поля локалізована у просторі.

Енергію магнітного поля струму можна визначити через характеристики цього поля - значення його напруженості H та індукції B . Для цього розглянемо частковий випадок - однорідне магнітне поле всередині довгого соленоїда, індуктивність якого $L = \mu\mu_0 n^2 V$. Тоді

$$W_M = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n^2 I^2 V.$$

Магнітна індукція поля в середині довгого соленоїда $B = \mu\mu_0 In$. Звідси

$$In = \frac{B}{\mu\mu_0}.$$

Тоді

$$W_M = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu\mu_0} V = \frac{1}{2} B H V.$$

де враховано, що $B = \mu\mu_0 H$.

Магнітне поле соленоїда однорідне і зосереджене всередині соленоїда, а енергія поля розподілена в ньому з постійною об'ємною густиною w_M , яка дорівнює

$$w_M = \frac{W_M}{V} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

Одержаний вираз для w_M відрізняється від виразу для густини енергії електричного поля лише тим, що електричні величини в ній замінені відповідними магнітними.

У випадку неоднорідного магнітного поля його енергію в деякому об'ємі V можна визначити так. Поділимо об'єм V на нескінченно малі елементи dV так, щоб поле в кожному з них можна було вважати однорідним. Тоді енергія елемента об'єму з локальною густиною w_M в ньому дорівнює: $dW_M = w_M dV$.

Інтегруючи цей вираз по всьому об'єму поля V , дістанемо формулу для обчислення енергії неоднорідного поля:

$$W_M = \int_V w_M dV.$$

§84. Основи теорії Максвелла для електромагнітного поля.

Струм зміщення

У 60-х роках XIX століття Д. Максвелл, взявши за основу ідеї Фарадея про електричне і магнітне поле, узагальнив закони, виведені експериментально, і розробив завершену теорію єдиного електромагнітного поля, яке утворюється довільною системою зарядів і струмів.

Теорія Максвелла є *феноменологічною теорією* електромагнітного поля. Це означає, що внутрішній механізм явищ, які відбуваються в середовищі і викликають появу електричних і магнітних полів, у теорії не розглядається.

Електричні і магнітні властивості середовища характеризуються у теорії Максвелла трьома величинами: відносною діелектричною проникністю ϵ , відносною магнітною проникністю μ і питомою електропровідністю σ . Залежність цих величин від властивостей середовища, фізичний зміст тих явищ, які відбуваються у ньому при поляризації і намагнічуванні, у теорії Максвелла не досліджуються.

Теорія Максвелла є *макроскопічною теорією* електромагнітного поля. У ній розглядаються електричні і магнітні поля, які утворюються в об'ємах набагато більших, ніж об'єми окремих атомів і молекул. Крім того, припускається, що відстані від джерел полів до розглядуваних точок у багато разів більші від розмірів молекул.

У теорії Максвелла розглядаються усереднені електричні і магнітні поля, причому усереднення відповідних мікрополів виконується для інтервалів часу, значно

більших від періодів обертання або коливання електричних зарядів і для ділянок поля, об'єми яких у багато разів більші від періодів обертання або коливання електричних зарядів, а також для ділянок поля, об'єми яких у багато разів більші від об'ємів атомів і молекул.

Теорія Максвелла є *теорією близькодії*, згідно з якою електричні і магнітні взаємодії здійснюються за допомогою електричних і магнітних полів і поширюються із скінченною швидкістю.

Максвелл узагальнив закон електромагнітної індукції для замкненого нерухомого провідного контуру, що знаходиться у змінному магнітному полі.

Із закону Фарадея $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ виходить, що будь-яка зміна зчепленого з контуром потоку магнітної індукції приводить до виникнення ЕРС індукції і внаслідок цього виникає електричний струм (струм індукції).

Отже, виникнення ЕРС індукції можливо і в нерухомому контурі, що знаходиться в змінному магнітному полі.

Однак ЕРС в контурі виникає лише тоді, коли в ньому на носії струму діють сторонні сили – сили неелектростатичного походження. Тому виникає питання про природу сторонніх сил в даному випадку.

Досліди показують, що сторонні сили не зв'язані ні з тепловими, ні з хімічними процесами в контурі. Їх не можна пояснити силами Лоренца, оскільки вони не діють на нерухомі заряди.

Тому для пояснення явища електромагнітної індукції в нерухомих провідниках Максвелл висунув гіпотезу, що *змінне*

магнітне поле збужує в навколишньому просторі непотенціальне (тобто неелектростатичне) електричне поле, яке і є причиною виникнення індукційного струму в контурі. Якщо \vec{E}_B - напруженість цього індукваного електричного поля, то відповідно до означення електрорушійної сили

$$\mathcal{E}_i = \oint_L (\vec{E}_B \cdot d\vec{l}).$$

Магнітний потік Φ_B через поверхню, що обмежена контуром, може змінюватись завдяки зміні форми контуру та його розміщення у магнітному полі, а також внаслідок залежності магнітної індукції \vec{B} від часу. Для нерухомого контуру потрібно врахувати залежність магнітної індукції лише від часу і тому замість $\frac{d\Phi_B}{dt}$ треба брати частинну похідну $\frac{\partial\Phi_B}{\partial t}$. Тому ЕРС індукції в нерухомому провіднику дорівнює

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\partial\Phi_B}{\partial t}.$$

Оскільки $\Phi_B = \int_S (\vec{B} \cdot d\vec{S})$, то

$$\frac{\partial\Phi_B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = \int_S \left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right),$$

і

$$\mathcal{E}_i = -\int_S \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} \right),$$

Отже, циркуляція напруженості \vec{E}_B індукваного поля вздовж замкненого контуру L дорівнює

$$\oint_L (\vec{E}_B \cdot d\vec{l}) = -\int_S \left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right).$$

Тут $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$, де \vec{n} – одиничний вектор нормалі до малого елемента dS поверхні S , яка натягнута на замкнений контур L .

Отже, змінне магнітне поле створює в провідному замкненому контурі вихрове електричне поле, оскільки $\oint_L (\vec{E}_B, d\vec{l}) \neq 0$.

Циркуляція ж вектора електростатичного поля по довільному замкненому контурі дорівнює нулеві:

$$\oint_L \vec{E}_q d\vec{l} = \oint_L E_{q_l} dl = 0.$$

Максвелл припустив, що змінне магнітне поле у будь-якій точці простору створює вихрове електричне поле незалежно від того, чи міститься у цій точці провідник, чи ні.

Отже, циркуляція вектора $\vec{E} = \vec{E}_B + \vec{E}_q$ напруженості електричного поля по довільному замкненому контурі, подумки проведеному в електромагнітному полі, дорівнює взятому з протилежним знаком потоку вектора $d\vec{B}$ через поверхню S , яка натягнута на цей контур.

Якщо в контурі L , за яким обчислюється циркуляція вектора напруженості електричного поля, крім ЕРС електромагнітної індукції, ще є й інші ЕРС – $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$, то загальна ЕРС дорівнює їх алгебраїчній сумі $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k$.

Тому в загальному випадку

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = - \int_S \left(\frac{dB_B}{dt}, d\vec{S} \right) + \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k.$$

Явище виникнення у просторі вихрового електричного поля під впливом змінного магнітного поля було використа-

но для створення індукційного прискорювача електронів – *бетатрона*.

Максвелл узагальнив закон повного струму

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \sum I.$$

Він припустив, що, крім струмів, зв'язаних з впорядкованим рухом зарядів, джерелом виникнення магнітного поля є також змінне електричне поле.

За теоремою Остроградського-Гауса потік вектора електричного зміщення через довільну замкнену поверхню S дорівнює

$$\Phi_D = \oint_L (\vec{D}, d\vec{S}) = q,$$

де q – алгебраїчна сума електричних зарядів, що охоплені замкненою поверхнею.

Продиференціюємо цей вираз по часу

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_S (\vec{D}, d\vec{S}).$$

Якщо поверхня S нерухома і не деформується, то зміна в часі потоку зміщення через поверхню S зумовлюється лише зміною електричного зміщення \vec{D} з бігом часу. Тому повну похідну можна замінити частинною похідною по часу і диференціювання внести під знак інтеграла

$$\frac{dq}{dt} = I = \oint_S \left(\frac{d\vec{D}}{dt}, d\vec{S} \right) = \oint_S \frac{dD_n}{dt} dS.$$

Порівнюючи цей вираз з формулою, яка зв'язує силу струму I в провіднику і густину \vec{j} струму провідності

$$I = \int_S (\vec{j}, d\vec{S}) = \int_S j_n dS, \text{ бачимо, що } \frac{\partial D_n}{\partial t}$$

має розмірність густини струму.

Максвелл запропонував назвати $\frac{\partial D_n}{\partial t}$ *густиною струму зміщення*:

$$\vec{j}_{zm} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Густина струму зміщення в даній точці дорівнює швидкості зміни вектора електричного зміщення в цій точці.

Струмом зміщення через довільну поверхню S називають фізичну величину, яка дорівнює потоку вектора густини струму зміщення крізь цю поверхню

$$I_{zm} = \int_S \vec{j}_{zm} \cdot n dS = \int_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS = \frac{\partial \Phi_D}{\partial t}.$$

Ввівши уявлення про струм зміщення, Максвелл зробив висновок про те, що кола будь-яких непостійних струмів замкнені так само, як і кола постійного струму. Замкненість таких кіл забезпечується струмами зміщення, які "проходять" у тих ділянках, де немає провідників, наприклад, між обкладинками конденсатора в процесі його заряджання або розряджання.

На рис.200 зображені вектори гус-

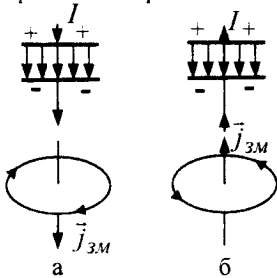


Рис. 200

тини струмів зміщення і вигляд ліній індукції їхніх магнітних полів: *а* – при заряджанні конденсатора (посилення електричного поля); *б* – при розряджанні конденсатора (ослаблення електричного поля).

За Максвеллом струм зміщення, як і звичайні струми провідності, є джерелом виникнення вихрового магнітного поля,

циркуляція напруженості \vec{H} якого по замкненому контуру не дорівнює нулю.

В діелектрику вектор зміщення \vec{D} складається з двох доданків: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, де \vec{E} – напруженість електростатичного поля, \vec{P} – вектор поляризації, який характеризує дійсне зміщення електричних зарядів у неполярних молекулах і поворот полярних молекул, що містяться в одиниці об'єму діелектрика.

Густина струму зміщення в діелектрику

$$\vec{j}_{zm} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t},$$

де $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ – густина струму зміщення у ва-

куумі, $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ – густина струму поляризації,

що обумовлений зміщенням або поворотом зарядів в діелектрику.

Струм зміщення у вакуумі не виділяє тепла. Густина цього струму тим більша, чим більша швидкість зміни напруженості електричного поля

В загальному випадку струми провідності і зміщення в просторі не розділені, вони знаходяться в одному і тому самому об'ємі. Максвелл ввів поняття *повного струму*, що дорівнює сумі струмів провідності і конвекційних, а також струму зміщення. Густина повного струму

$$\vec{j}_{повн.} = \vec{j} + \vec{j}_{zm} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Повний струм в колах змінного струму завжди замкнений.

Максвелл узагальнив закон повного струму, ввівши в його праву частину пов-

ний струм $I_{\text{посн.}} = \int_S (\vec{j}_{\text{посн.}} \cdot d\vec{S})$, що охоплюється замкненим контуром L .

Узагальнений закон повного струму має вигляд

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

Циркуляція вектора напруженості \vec{H} магнітного поля по замкненому контуру L дорівнює повному струму, що пронизує поверхню, обмежену цим контуром.

Якщо струмів провідності, конвекційних струмів і всіх ЕРС, крім ЕРС електромагнітної індукції, немає то отримуємо такі рівняння

$$\oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = - \frac{\partial \Phi_B}{\partial t},$$

$$\oint_L (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = - \frac{\partial \Phi_D}{\partial t}.$$

Порівнюючи ці рівняння, можна зробити такі висновки:

а) між електричним і магнітним полями існує міцний взаємний зв'язок: зміна в часі магнітного поля веде до появи електричного поля, а змінне електричне поле є джерелом вихрового магнітного поля;

б) знаки при швидкостях зміни потоків магнітної індукції і електричного зміщення різні, причому напрямки $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ і \vec{H} утворюють "правогвинтову" систему (рис.201а), у той час як напрямки $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ і \vec{E} утворюють "лівогвинтову" систему (рис.201б).

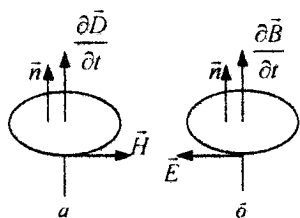


Рис.201

Різниця в знаках правих частин цих рівнянь відповідає вимогам закону збереження енергії і закону Ленца. Ця різниця в знаках є необхідною умовою існування стійкого електромагнітного поля.

§85. Рівняння Максвелла для електромагнітного поля

Відкриття струму зміщення дозволило Максвеллу створити єдину теорію електричних і магнітних явищ. Ця теорія пояснила всі відомі того часу експериментальні факти і передбачила ряд нових явищ, існування яких підтвердилось пізніше.

Рівняння Максвелла пов'язують зміни основних характеристик електромагнітного поля - векторів \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} в даному матеріальному середовищі з розподілом у ньому електричних зарядів і струмів.

Середовище в рівняннях Максвелла враховується феноменологічно, тобто без розкриття внутрішнього механізму взаємодії речовин з полем.

В основі теорії Максвелла лежать чотири рівняння.

1. Електричне поле може бути як потенціальним (\vec{E}_q), так і вихровим (\vec{E}_B). Тому напруженість сумарного поля $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B$. Оскільки циркуляція вектора \vec{E}_q по довільному замкненому контуру дорівнює нулю, то циркуляція вектора \vec{E} сумарного поля

$$\oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right).$$

Це рівняння зв'язує значення \vec{E} із зміною вектора \vec{B} з часом і є виразом закону електромагнітної індукції.

Перше рівняння Максвелла вказує на те, що джерелами електричного поля можуть бути не тільки електричні заряди, але і змінні з часом магнітні поля.

II. Узагальнена теорема про циркуляцію вектора \vec{H} :

$$\oint_L (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}.$$

Це рівняння показує, що магнітні поля можуть збуджуватись або рухомими зарядами, або змінними електричними полями.

III. Теорема Остроградського-Гаусса для потоку вектора електричного зміщення \vec{D} крізь довільну замкнену поверхню S , що охоплює сумарний заряд q :

$$\oint_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}) = q.$$

Якщо заряд розподілений всередині замкненої поверхні з об'ємною густиною ρ , то

$$\oint_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}) = \int_V \rho dV.$$

IV. Теорема Остроградського-Гаусса для магнітного потоку крізь довільну замкнену поверхню S :

$$\oint_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = 0.$$

Величини, що входять в рівняння Максвелла, не є незалежними і між ними є такий зв'язок:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Зазначимо, що до першого та четвертого рівняння Максвелла входять лише основні характеристики поля \vec{E} і \vec{B} , а в

друге і третє – лише допоміжні величини \vec{D} і \vec{H} .

Рівняння Максвелла несиметричні відносно полів. Це зв'язано з тим, що в природі існують електричні заряди, а нема магнітних.

Для стаціонарних полів ($E = const$ і $B = const$) рівняння Максвелла мають такий вигляд:

$$\oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = 0, \quad \oint_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}) = q,$$

$$\oint_L (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = I, \quad \oint_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = 0.$$

В даному випадку електричні і магнітні поля існують незалежно одне від одного.

За допомогою рівняння Максвелла для електромагнітного поля можна знайти співвідношення між тангенціальними і нормальними складовими векторів \vec{E} , \vec{D} і \vec{B} , \vec{H} на межі поділу двох різнорідних діелектриків. Якщо на межі поділу відсутні вільні заряди і струми провідності, то для тангенціальних складових – проекцій векторів \vec{E} , \vec{D} ; \vec{B} , \vec{H} на дотичну площину – мають місце такі співвідношення:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad \frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau},$$

а для нормальних складових – проекцій векторів \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} на спільну нормаль до межі поділу двох середовищ:

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}, \quad B_{1n} = B_{2n},$$

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

де $\epsilon_1, \mu_1, \epsilon_2, \mu_2$ - відносні діелектричні і магнітні проникності відповідно першого і другого середовищ.

§86. Електричний коливальний контур.
Власні електромагнітні коливання

Серед різних електричних явищ особливе місце займають електромагнітні коливання, при яких електричні величини (заряди, струми, електричні і магнітні поля) змінюються періодично. Для збудження і підтримування електромагнітних коливань потрібні певні системи, найпростішою з яких є *коливальний контур* - коло, що складається з включених послідовно котушки індуктивності L , конденсатора ємності C і резистора опором R .

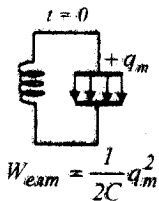


Рис. 202

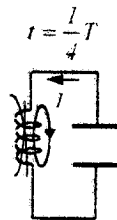
Розглянемо послідовні стадії коливного процесу в ідеалізованому контурі, опір якого малий ($R = 0$). Для збудження коливань в контурі конденсатор попередньо заряджають, надаючи його обкладкам заряди $\pm q_m$ (рис.202). Тоді в початковий момент $t = 0$ між обкладками конденсатора виникає електричне поле, енергія якого $W_{elm} = \frac{1}{2C} q_m^2$. Замкнувши конденсатор на котушку, він почне розряджатися і в контурі потече струм i , який з часом зростає. Цей струм створить в котушці магнітне поле, що також зростає і в свою чергу викличе появу в котушці ЕРС самоіндукції, яка буде напрямлена в протилежну сторону струму розрядки. Оскільки швидкість зміни струму розрядки конденсатора зменшується, то зменшується ЕРС самоіндукції і струм розрядки наростає. В результаті енергія електрич-

ного поля буде зменшуватися, а магнітного поля котушки - зростати. Оскільки ($R = 0$), то згідно із законом збереження енергії повна енергія

$$W = \frac{1}{2C} q^2 + \frac{1}{2} L \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 = const.$$

Тому в момент $t = \frac{1}{4} T$, коли кон-

денсатор розрядиться, (рис.203), енергія електричного поля перетворюється в нуль, а енергія магнітного поля і струм досяга-



$$W_{магн} = \frac{1}{2} L \left(\frac{dq}{dt} \right)_m^2$$

Рис. 203

ють максимального значення. З цього моменту струм в контурі починає зменшуватися і почне зменшуватися магнітне поле котушки, і в ній індукується струм, який тече в тому самому напрямку, що і струм розрядки кон-

денсатора.

Конденсатор почне перезаряджатися, виникне електричне поле, що прагне зменшити струм, який зрештою буде дорівнювати нулю, а заряд на обкладках конденсатора досягне максимуму. Далі ті самі процеси почнуть протікати в зворотному напрямку і система прийде у початковий стан. Після цього почнеться повторення розглянутого циклу розрядження і зарядження конденсатора (рис.204). Якщо би

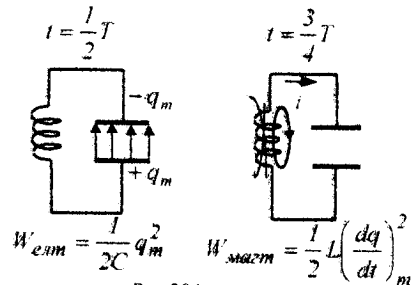


Рис.204

втрати енергії не було, то в контурі здійснювались би періодичні незагасаючі коливання.

В контурі виникають коливання, які супроводжуються перетворенням енергії електричного і магнітного полів. Такі коливання називаються електромагнітними.

Згідно з другим правилом Кірхгофа для довільного контура, що містить L , C і резистор опором R , $IR + U_c = \mathcal{E}_c$, де IR - спад напруги на резисторі, $U_c = \frac{q}{C}$ - напруга на конденсаторі, $\mathcal{E}_c = -L \frac{dl}{dt}$ - ЕРС самоіндукції, отже,

$$L \frac{dl}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0.$$

Оскільки $I = \frac{dq}{dt}$ і $\frac{dl}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$, то

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Якщо зовнішні ЕРС відсутні, то коливання будуть вільні. Якщо $R=0$, вільні коливання в контурі - гармонічні. Диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань заряду q в контурі:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0, \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0.$$

Звідси $q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, де q_m - амплітуда коливань заряду конденсатора з циклічною частотою, яка називається власною частотою контуру:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Період власних коливань, які виникають в контурі,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Це співвідношення називають *формулою Томсона*.

Сила струму в коливному контурі

$$i = -q_m \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

де $I_m = \omega_0 q_m$ - амплітуда сили струму.

Упродовж першої половини періоду струм іде в одному напрямку, а протягом другої половини - в протилежному.

Напруга на конденсаторі

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де $U_m = \frac{q_m}{C}$ - амплітуда напруги.

Колівання струму i випереджують

по фазі коливання заряду q на $\frac{\pi}{2}$, тобто коли струм досягає максимального значення, заряд і напруга дорівнюють нулю і навпаки.

Оскільки

$$U_m = \frac{q_m}{C} \quad \text{і} \quad I_m = \omega_0 q_m = \frac{q_m}{\sqrt{LC}},$$

то

$$U_m = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Величину $\sqrt{\frac{L}{C}}$ називають *хвильовим опором* контура.

§87. Основні властивості електромагнітних хвиль

Згідно з теорією Максвелла змінне електричне і магнітне поле тісно взаємо-з'язане, вони утворюють єдине електромагнітне поле.

Джерелами електромагнітного поля служать різні змінні струми: змінний

струм у провідниках, коливний рух іонів, електронів й інших заряджених частинок.

Простою системою, яка еквівалентна змінному струму, є електричний диполь з моментом, що гармонічно змінюється. В початковий момент заряди $+q$ і $-q$ такого диполя сумішені один з одним і тому $p = 0$ (рис.205). Через чверть періоду

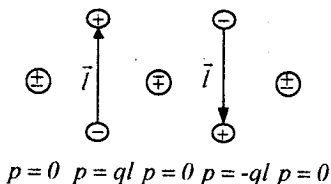


Рис.205

заряди розходяться на максимальну відстань l , момент диполя максимальний і $p = ql$. Через півперіод заряди знову сходяться ($p = 0$), а потім через $t = \frac{3}{4}T$ розходяться в протилежні сторони на відстань l і $p = -ql$. Потім процес періодично повторюється.

Змінне електричне поле, яке виникає під час руху зарядів, породжує змінне магнітне поле, а змінне магнітне поле створює змінне електричне поле. Ці вторинні змінні поля мають вихровий характер. Отже, у просторі, який оточує заряди, виникає послідовність взаємних перетворень електричних і магнітних полів, що поширюються від точки до точки. Цей процес буде періодичним у часі і просторі і, отже, являє собою хвилю.

Електромагнітними хвилями називаються збурення електромагнітного поля, що поширюються у просторі.

Джерелом електромагнітних хвиль може бути і коливальний контур. Щоб випромінювання відіграло помітну роль,

необхідно здійснити перехід від закритого коливального контуру, в якому електричне поле зосереджене між обкладками конденсатора, а магнітне - всередині котушки індуктивності, до відкритого коливального контура (вібратор Герца), що має вигляд двох стрижнів, розділених іскровими проміжками. У відкритому контурі змінне електричне поле заповнює простір, що оточує контур, що істотно підвищує інтенсивність електромагнітного випромінювання.

З рівнянь Максвелла

$$\oint_L (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right),$$

$$\oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right)$$

можна отримати рівняння плоскої електромагнітної хвилі.

Припустимо, що в тому місці, де збуджується електромагнітне поле, вектор \vec{E} весь час залишається паралельним до координатної осі OZ , тоді $E = E_z$, $E_x = E_y = 0$, а вектор \vec{H} - до координатної осі OY і $H = H_y$, $H_x = H_z = 0$.

Оскільки в рівняннях Максвелла контури L можуть бути довільної форми і розмірів, то для першого з рівнянь виберемо елементарний контур $Oabc$, що лежить в площині XOY , а для другого - контур $Odef$, що лежить в площині XOZ (рис.206).

Вектори \vec{E} і \vec{H} є функціями координат і часу, тому їх значення в різних місцях контурів будуть різними. Наприклад, якщо в точці O вектор \vec{E} має значення E_z , то в точці a з координатою dx його

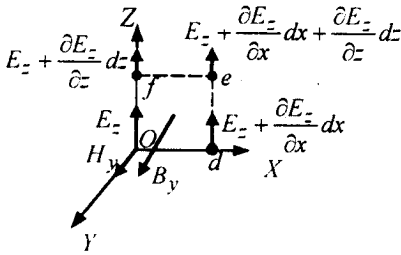
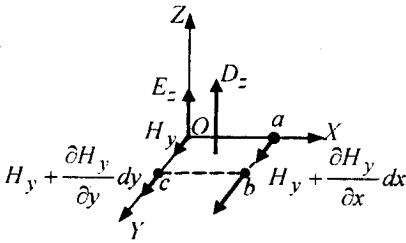


Рис.206

го значення дорівнюватиме: $E_z + \frac{\partial E_z}{\partial x} dx$,

де частинна похідна $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ характеризує швидкість зміни E_z в напрямку осі Ox .

Розрахуємо $\oint_L (\vec{H}, d\vec{l})$. На ділянках

Oa і bc добуток $\vec{H}d\vec{l} = 0$, оскільки вектор \vec{H} перпендикулярний до Oa і bc . Для ділянок ab і Oc помножимо довжину кожної з цих ділянок dy на середнє значення вектора \vec{H} в межах цих ділянок; оскільки на ділянці Oa вектор \vec{H} напрямлений проти обходу, то отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx \right) + \right. \\ & \left. + \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy \right) \right] dy - \\ & - \frac{1}{2} \left[\left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy \right) + H_y \right] dy = \frac{\partial D}{\partial t} dx dy. \end{aligned}$$

де $dx dy$ – площа, яка охоплена контуром.

Тоді

$$\begin{aligned} H_y dy + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx dy + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial y} dy dy - H_y dy - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial y} dy dy = \frac{\partial D}{\partial t} dx dy. \end{aligned}$$

Звідси

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial D_z}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}.$$

Аналогічний розрахунок для другого рівняння і контуру $Odef$ дає такий результат

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} = \mu_0 \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}.$$

Розрахуємо частинні похідні по ча-

су від $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ і по координаті x від $\frac{\partial E_z}{\partial t}$,

вважаючи ϵ і μ сталими величинами.

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial t} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu_0 \mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial t}.$$

Звідси отримуємо **хвильове рівняння для E_z** :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}.$$

Аналогічно, беручи частинні похід-

ні по координаті x від $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ і по часу від

$\frac{\partial E_z}{\partial x}$, отримуємо **хвильове рівняння для**

H_y :

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}.$$

Отже, змінне електромагнітне поле поширюється в просторі у вигляді електромагнітної хвилі.

Фазова швидкість електромагнітних хвиль визначається виразом

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}},$$

де $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ - електродинамічна стала.

Для вакууму $\mu = \epsilon = 1$ і $v = c$.

Оскільки $\epsilon \mu > 1$, то швидкість поширення електромагнітних хвиль у речовині завжди менша, ніж у вакуумі.

Величина $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ і збігається зі швидкістю світла у вакуумі. Це привело Максвелла до думки про електромагнітну природу світла.

З рівнянь Максвелла випливає висновок про те, що вектори \vec{E} і \vec{H} електромагнітної хвилі завжди взаємно перпендикулярні. Крім того, вони лежать у площині, перпендикулярній до напрямку поширення хвилі, тобто до вектора швидкості хвилі. Отже, електромагнітні хвилі є *поперечними*. Взаємна орієнтація трійки векторів \vec{E} , \vec{H} , і \vec{v} задовольняє таке правило: з кінця вектора \vec{v} обертання від \vec{E} до \vec{H} по найкоротшому шляху виглядає таким, що відбувається проти руху стрілки годинника (рис.207). Інакше кажу-

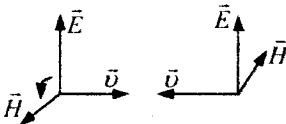


Рис.207

чи, вектор \vec{v} за напрямком збігається з векторним добутком \vec{E} та \vec{H} :

$$\vec{v} = \frac{v}{EH} [\vec{E}, \vec{H}].$$

Розв'язками отриманих хвильових рівнянь є функції

$$E_z = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_1),$$

$$H_y = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_2),$$

де ω - циклічна частота хвилі, k - хвильове число, яке дорівнює $\frac{\omega}{v}$. φ_1, φ_2 - початкові фази коливань в точках з координатою $x = 0$.

Підставимо ці функції в рівняння

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu_0 \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad \text{і} \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

В результаті

$$E_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_1) = -\mu_0 \mu H_0 \omega \sin(\omega t - kx + \varphi_2),$$

$$H_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_2) = -\epsilon_0 \epsilon E_0 \omega \sin(\omega t - kx + \varphi_1).$$

Для того, щоб ці рівняння задовольнялись, необхідним є рівність початкових фаз φ_1 і φ_2 і повинні виконуватися співвідношення

$$k E_0 = -\mu_0 \mu \omega H_0, \quad -\epsilon_0 \epsilon \omega E_0 = -k H_0.$$

Перемножимо обидві частини цих виразів, в результаті отримаємо:

$$-k \omega \epsilon_0 \epsilon E_0^2 = -k \omega \mu_0 \mu H_0^2$$

і

$$\epsilon_0 \epsilon E_0^2 = \mu_0 \mu H_0^2.$$

Отже, коливання електричного і магнітного векторів у електромагнітній хвилі відбувається з однаковою фазою ($\varphi_1 = \varphi_2$) - вони одночасно досягають максимальних значень і одночасно перетворюються в нуль, а амплітуди цих векторів зв'язані співвідношенням

$$E_0 \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H_0 \sqrt{\mu_0 \mu}.$$

Рівняння плоскої електромагнітної хвилі у векторній формі має вигляд

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kx).$$

Косинусоїдальна електромагнітна хвиля називається монохроматичною хвилею. В кожній точці електромагнітного по-

ля монохроматичної хвилі проєкції векторів \vec{E} та \vec{H} на осі координат інерціальної системи відліку здійснюють гармонічні коливання однакової частоти $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, яка називається частотою хвилі.

На рис.208 наведені вектори \vec{E} і \vec{H} поля плоскої монохроматичної хвилі в

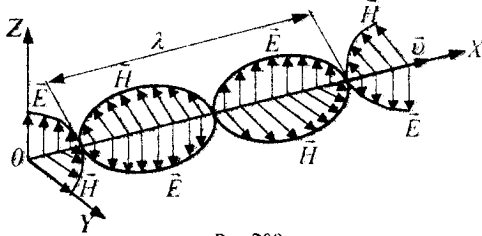


Рис.208

одні і той самий момент часу. У фіксованій точці простору вектори \vec{E} і \vec{H} змінюються з часом за гармонічним законом. Вони одночасно збільшуються від нуля, потім через $\frac{1}{4}$ періоду досягають найбільшого значення. Ще через $\frac{1}{4}$ періоду обидва вектори одночасно дорівнюють нулю. Потім знову обидва вектори досягають максимального значення, але протилежного за напрямком, ніж півперіоду тому. І через час, який дорівнює періоду коливання векторів, знову стають нульовими. Така зміна векторів \vec{E} і \vec{H} відбувається у всіх точках простору, але зі зсувом за фазою, що визначається відстанню між точками, яка відрахована вздовж осі OX .

Площина, яка проходить через вектор \vec{E} і вектор швидкості \vec{v} , називається **площиною поляризації хвилі**.

Довжина λ , період T , частота ν і швидкість поширення електромагнітної хвилі зв'язані між собою співвідношеннями

$$\lambda = \nu T = \frac{v}{\nu}$$

§88. Енергія електромагнітних хвиль. Потік енергії. Вектор Умова-Пойнтинга

Електромагнітне поле має енергію. Тому поширення електромагнітних хвиль пов'язане з перенесенням енергії в полі, подібно до того, як поширення пружних хвиль у речовині пов'язане з перенесенням механічної енергії.

Об'ємна густина енергії електромагнітної хвилі складається з об'ємних густин і електричного і магнітних полів:

$$w = w_{el} + w_m = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$$

Враховуючи вираз $\epsilon\epsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2$, отримаємо, що густина енергії електричного і магнітного полів в кожен момент часу однакова, тобто $w_{el} = w_m$. Тому

$$w = 2w_{el} = \epsilon\epsilon_0 E^2 = \sqrt{\epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0} EH = \frac{1}{v} EH$$

У випадку плоскої лінійно-поляризованої монохроматичної хвилі, що поширюється вздовж додатного напрямку осі OX , напруженість поля

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx)$$

Відповідно об'ємна густина енергії цієї хвилі $w = \epsilon\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$. Значення w в кожній точці поля періодично змінюється з частотою $\frac{\omega}{\pi}$ в границях від 0 до $w_{макс.} = \epsilon\epsilon_0 E_0^2$. Середнє значення w за період пропорційне до квадрата амплітуди напруженості поля:

$$\langle w \rangle = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} w dt = \epsilon \epsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(k\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E_0^2.$$

Помноживши густину енергії w на швидкість v поширення хвилі в середовищі, отримуємо модуль густини потоку енергії, який числово дорівнює енергії, яку переносить хвиля за одиницю часу через одиницю площі поверхні, що розміщена перпендикулярно до напрямку поширення хвилі:

$$P = wv = EH.$$

Оскільки вектори \vec{E} і \vec{H} взаємно перпендикулярні і утворюють з напрямком поширення хвилі правогвинтову систему, то напрямком вектора $[\vec{E}\vec{H}]$ збігається з напрямком переносу енергії, а модуль цього вектора дорівнює EH . Отже, вектор густини потоку енергії електромагнітної хвилі, який називається **вектором Умова-Пойнтинга**, дорівнює:

$$\vec{P} = [\vec{E}, \vec{H}].$$

Потік Φ електромагнітної енергії через деяку поверхню S можна знайти за допомогою інтегрування:

$$\Phi = \int_S (\vec{P}, d\vec{S}).$$

Інтенсивність електромагнітної хвилі I дорівнює модулю середнього значення вектора Умова-Пойнтинга за проміжок часу, який дорівнює періоду T повного коливання:

$$I = \langle \vec{P} \rangle = \langle \vec{E}\vec{H} \rangle = \frac{1}{T} \left| \int_0^T [\vec{E}\vec{H}] dt \right|.$$

Інтенсивність біжучої монохроматичної хвилі $I = \langle w \rangle v$.

Інтенсивність плоскої лінійно поляризованої монохроматичної біжучої хвилі прямо пропорційна до квадрата амплітуди E_0 коливань вектора \vec{E} поля хвилі:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} E_0^2.$$

§ 89. Інтерференція світла.

Когерентність та монохроматичність

світлових хвиль.

Оптична довжина шляху

Інтерференцією світла називається явище накладання двох або кількох когерентних світлових хвиль, в результаті якого відбувається перерозподіл інтенсивності світла в просторі.

Хвилі називаються когерентними, якщо вони мають однакову частоту і в точці накладання – постійну різницю фаз.

Отже, якщо хвилі когерентні, то спостерігається самоузгоджений перебіг в часі і просторі декількох хвильових процесів. Цю умову задовольняють монохроматичні хвилі – хвилі однієї строго визначеної частоти і сталої амплітуди. Оскільки ж одне реальне джерело не дає строго монохроматичного світла з постійною початковою фазою, то хвилі, що випромінюються будь-якими незалежними джерелами світла, завжди не когерентні.

Зрозуміти фізичну природу немонохроматичності, а отже, і некогерентності хвиль, що випромінюються двома різними джерелами світла, можна, виходячи з такої моделі випромінювання світла атомами. У двох самостійних джерелах світла атоми випромінюють світло незалежно один від одного. В кожному з таких атомів процес випромінювання скінченний і триває дуже короткий час ($\tau \approx 10^{-8} \text{ c}$). Через деякий час атом знову може збудитися і почати випромінювати світлові хвилі, але уже з іншою початковою фазою. Оскільки різниця фаз між випромінюванням двох таких незалежних атомів змінюється при кожному новому акті випромінювання, то хвилі,

що спонтанно випромінюються атомами будь-якого джерела світла, не когерентні. Отже, хвилі, що випромінюються атомами, лише протягом інтервалу часу $\approx 10^{-8} \text{ c}$ мають приблизно сталу амплітуду і фазу коливань, тоді як за великий проміжок часу і амплітуда, і фази змінюються.

Переривчасте випромінювання світла атомами у вигляді окремих короткочасних імпульсів називається *хвильовим цугом*.

Довільне реальне немонохроматичне світло можна представити у вигляді сукупності незалежних гармонічних цугів, які змінюють один одного. Середня тривалість одного цугу $\tau_{\text{кв}}$ називається *часом когерентності*.

Когерентність існує лише в межах одного цугу, і час когерентності не може перевищувати час випромінювання, тобто

$$\tau_{\text{кв}} < \tau$$

Якщо хвиля поширюється в однорідному середовищі, то фаза коливань в певній точці середовища зберігається лише протягом часу когерентності $\tau_{\text{кв}}$. За цей час хвиля поширюється на відстань $l_{\text{кв}} = c \tau_{\text{кв}}$, що називається *довжиною когерентності* (або довжиною цугу). Спостереження інтерференції світла можливе лише при оптичних різницях ходу, менших від довжини когерентності використовуваного світла.

Цуг хвиль тим ближчий за своїми властивостями до монохроматичної хвилі з циклічною частотою ω і хвильовим числом $k = \frac{\omega}{c}$ (у вакуумі), чим більша тривалість τ його випромінювання. Однак тривалість спостереження світла завжди в

багато разів більша за тривалість $\tau_{\text{ког}}$, випромінювання одного цугу. Крім того, у кожний момент часу світло випромінюється не одним, а дуже великою кількістю атомів світного тіла. Тому досить високий ступінь монохроматичності кожного цугу окремо зовсім ще не означає когерентності різних цугів між собою і пов'язаної з цим монохроматичності випромінювання джерела світла.

Когерентність коливань, які здійснюються в одній і тій самій точці простору, що визначається ступенем монохроматичності хвиль, називається часовою когерентністю.

Поряд з часовою когерентністю, що визначається часом когерентності, для опису когерентних властивостей хвиль у площині, перпендикулярній до напрямку їх поширення, вводиться *поняття просторової когерентності.*

Для отримання інтерференційних смуг від двох джерел світла недостатньо, щоб ці джерела склалися з попарно когерентних точкових джерел. Навіть у випадку строго монохроматичного світла необхідно, щоб розміри джерел не перевищували певної межі, що залежить від взаємного розміщення та відстані між ними, а також від положення екрану, який призначений для спостереження інтерференційних смуг.

Два джерела, розміри і взаємне розміщення яких дозволяє спостерігати інтерференційні смуги (при необхідному ступені монохроматичності світла), називаються просторово когерентними.

Радіусом когерентності (або довжиною просторової когерентності) називається максимальна поперечна напрямку

поширення хвилі відстань, на якій можливий прояв інтерференції (тобто відстань між точками, між якими випадкова зміна різниці фаз досягає значення порядку π). Отже, просторова когерентність визначається радіусом когерентності.

$$\text{Радіус когерентності } r_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda}{\varphi}, \text{ де } \lambda$$

- довжина світлових хвиль, φ - кутовий розмір джерела.

Колівання в двох точках, які знаходяться на відстані, меншій від $r_{\text{ког}}$, будуть приблизно когерентними.

Розглянемо тепер інтерференцію світла.

Нехай дві когерентні монохроматичні світлові хвилі накладаються одна на одну в деякій точці простору. Перша хвиля викличе в цій точці гармонічні коливання

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t + \varphi_1),$$

а друга -

$$E_2 = E_{02} \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Оскільки тут додаються два гармонічні коливання однакового періоду, що відбуваються в однаковому напрямку, то результуюче коливання буде також гармонічним з тим самим періодом і в тому самому напрямку, тобто

$$E = E_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Амплітуда E_0 цього коливання дорівнює:

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Оскільки хвилі когерентні, то $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ має постійне в часі (але своє для кожної точки простору) значення, тому інтенсивність результуючої хвилі ($I \approx E_0^2$):

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

У точках простору, де $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) > 0$,

$I > I_1 + I_2$, де $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) < 0$, $I < I_1 + I_2$.

Отже, при накладанні двох когерентних світлових хвиль відбувається просторовий перерозподіл інтенсивності світла, внаслідок чого в одних місцях виникають максимуми, а в інших – мінімуми інтенсивності.

Для некогерентних хвиль різниця $\varphi_2 - \varphi_1$ неперервно змінюється, тому середнє в часі значення $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ дорівнює нулю, інтенсивність результуючої хвилі всюди однакова і при $I_1 = I_2$ дорівнює $2I_1$ (для когерентних хвиль при даній умові в максимумах $I = 4I_1$, в мінімумах $I = 0$).

Як можна створити умови, необхідні для виникнення інтерференції світлових хвиль? Для отримання когерентних світлових хвиль застосовують метод розділення хвилі, що випромінюється одним джерелом, на дві частини, які після проходження різних оптичних шляхів накладаються одна на одну і спостерігається інтерференційна картина.

Нехай розділення на дві когерентні хвилі відбувається в певній точці O (рис.209). До точки M , в якій спостерігається інтерференційна картина, одна хвиля в середовищі з показником заломлення n_1 , пройшла шлях d_1 , друга – в середовищі з показником заломлення n_2 – шлях d_2 .

Якщо в точці O фаза коливань дорівнює ωt , то в точці M перша хвиля збудить коливання $E_{01} \cos \omega \left(t - \frac{d_1}{v_1} \right)$, друга хвиля – коливання $E_{02} \cos \omega \left(t - \frac{d_2}{v_2} \right)$, де

$v_1 = \frac{c}{n_1}$, $v_2 = \frac{c}{n_2}$ – фазова швидкість першої та другої хвилі.

Різниця фаз δ двох когерентних хвиль від одного джерела:

$$\delta = \omega \left(\frac{d_2}{v_2} - \frac{d_1}{v_1} \right) = \frac{\omega}{c} (d_2 n_2 - d_1 n_1).$$

Оскільки $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, де λ_0 – довжина хвилі у вакуумі, то

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta.$$

Добуток геометричної довжини d шляху світлової хвилі на показник заломлення цього середовища називається оптичною довжиною шляху L , а $\Delta = L_2 - L_1$ – різниця оптичних довжин пройдених хвилями шляхів – називається оптичною різницею ходу.

Якщо оптична різниця ходу дорівнює цілому числу хвиль у вакуумі:

$$\Delta = \pm m \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

то $\delta = \pm 2m\pi$, і коливання, що збуджуються в точці M обома хвилями, знаходяться в однаковій фазі.

Тому $\Delta = \pm m \lambda_0$ – умова інтерференційного максимуму.

Якщо оптична різниця ходу :

$$\Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

то $\delta = \pm (2m + 1)\pi$ і коливання, що збуджуються в точці M обидвома хвилями, знаходяться у протифазі і

$\Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}$ – умова інтерференційного мінімуму.

Визначимо геометричне місце точок максимальної (мінімальної) інтенсивності. Як для точок максимальної інтен-

сивності $L_2 - L_1 = m\lambda_0$, так і для точок мінімальної інтенсивності $L_2 - L_1 = (2m + 1)\frac{\lambda_0}{2}$ має місце $L_2 - L_1 = const$, що визначає рівняння гіпербол з фокусами S_1 і S_2 . Кожному значенню інтенсивності відповідає поверхня гіперboloїда обертання. Переріз таких поверхонь наведено на рис.210, де суцільними лініями показано

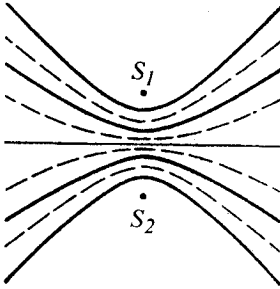


Рис.210

розміщення максимумів інтенсивності, штриховими – мінімумів інтенсивності.

Контрастність інтерференційної картини характеризують за допомогою параметра V , який виражається формулою

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

де I_{max} і I_{min} – інтенсивність світлих і темних смуг. Якщо інтенсивність темної смуги дорівнює нулю, то $V = 1$, тобто когерентність максимальна. Для рівномірно освітленого екрана ($I_{max} = I_{min}$) контрастність дорівнює нулю.

§ 90. Розрахунок інтерференційної картини від двох когерентних джерел

Розглянемо дві когерентні світлові хвилі, що йдуть від джерел S_1 і S_2 , які мають вигляд паралельних тонких світних ниток або вузьких щілин (рис.211).

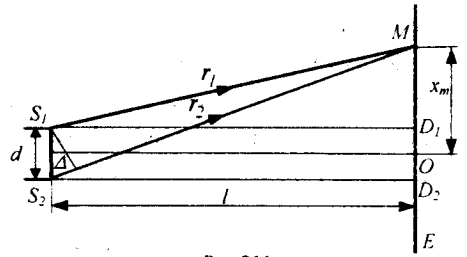


Рис.211

Область, в якій ці хвилі перекриваються, називається полем інтерференції. У всій цій області спостерігається чергування місць з максимальною і мінімальною інтенсивністю світла. Якщо в поле інтерференції внести екран, то на ньому буде видна інтерференційна картина, яка має вигляд світлих і темних смуг, які чергуються. Обчислимо ширину цих смуг, припускаючи, що екран паралельний до площини, яка проходить через джерела S_1 і S_2 , які знаходяться на відстані d одне від одного. Позначимо координату інтерференційного максимуму чи мінімуму x_m . З трикутника S_2MD_2 маємо:

$$r_2^2 = l^2 + \left(x_m + \frac{d}{2}\right)^2,$$

а з трикутника S_1MD_1 –

$$r_1^2 = l^2 + \left(x_m - \frac{d}{2}\right)^2.$$

Звідси

$$r_2^2 - r_1^2 = 2x_md. \text{ або } \Delta = r_2 - r_1 = \frac{2x_md}{r_1 + r_2}.$$

З умови $l \gg d$ випливає, що $r_1 + r_2 \approx 2l$.

Тому $\Delta = \frac{x_md}{l}$, і

$$x_m = \frac{l}{d} \Delta.$$

Положення m -го інтерференційного максимуму на екрані задовольняє умову $\Delta = m\lambda_0$. Тоді

$$x_m^{max} = \frac{ml\lambda_0}{d} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Умова для m -го мінімуму має вигляд

$$\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad \text{і}$$

$$x_m^{min} = \frac{(2m + 1)l\lambda_0}{2d} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Шириною інтерференційної смуги

називається відстань між двома сусідніми мінімумами інтенсивності, тобто

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_{m+1}^{min} - x_m^{min} = \\ &= \frac{[2(m + 1) + 1]l\lambda_0}{2d} - \frac{(2m + 1)l\lambda_0}{2d} = \frac{l\lambda_0}{d}. \end{aligned}$$

Відстань між інтерференційними максимумами називається відстанню між інтерференційними смугами, яка теж дорівнює $\Delta x = \frac{l\lambda_0}{d}$. З цієї формули випливає,

що відстань Δx зростає при зменшенні d між джерелами S_1 і S_2 . Якщо відстань d досягає величини порядку l , то відстань між інтерференційними смугами буде порядку довжини світлової хвилі. При цьому спостерігати окремі смуги неможливо. Щоб інтерференційна картина була чіткою, необхідно додержання умови $d \ll l$. Ширина інтерференційних смуг залежить від довжини хвилі λ_0 .

За вимірними значеннями l , d і Δx можна експериментально визначити довжину світлової хвилі.

Отже, інтерференційна картина, яка створюється на екрані двома когерентними джерелами світла, являє собою чергування світлих та темних смуг, паралельних одна до одної. Головний максимум, що відповідає $m = 0$, проходить через точку O , вниз і вгору від нього на рівних відстанях один від одного розміщуються максимуми

першого ($m = \pm 1$), другого ($m = \pm 2$) порядків тощо.

Якщо використати біле світло, то інтерференційні максимуми для кожної довжини хвилі будуть зміщені один відносно одного і матимуть вигляд райдужних смуг, які будуть починатись фіолетовим і закінчуватись червоним кольором, якщо рахувати від точки O (рис.211). Тільки для $m = 0$ максимуми для всіх довжин хвиль збігаються і в середині екрану буде спостерігатися біла смуга, по обидві сторони якої розмістяться спектрально забарвлені смуги максимумів першого, другого порядків і т. д.

Розглянемо умови, за яких у монохроматичному світлі інтерференційна картина сприймається чітко. Для цього необхідно, щоб різноманітність довжин хвиль була обмежена і не перевищувала деякого інтервалу між λ_0 і $\lambda_0 + \Delta\lambda_0$.

Умовою нерозрізності інтерференційної картини є збіг максимуму $(m + 1)$ -го порядку для довжини хвилі λ_0 з максимумом m -го порядку для довжини хвилі $\lambda_0 + \Delta\lambda_0$, тобто

$$x_{m+1}^{max}(\lambda_0) = x_m^{max}(\lambda_0 + \Delta\lambda_0).$$

Використовуючи вираз $x_m^{max} = m \frac{l}{d} \lambda_0$,

$$\text{отримуємо } (m + 1) \frac{l}{d} \lambda_0 = m \frac{l}{d} (\lambda_0 + \Delta\lambda_0).$$

Звідси граничне значення інтервалу $\Delta\lambda_{cp} = \frac{\lambda_0}{m}$, тобто інтерференційну картину для монохроматичного світла можна спостерігати, коли ширина інтервалу довжин хвиль не перевищує граничного:

$$\Delta\lambda_0 < \Delta\lambda_{cp} = \frac{\lambda_0}{m}.$$

§ 91. Інтерференція світла у тонких плівках

Прикладом інтерференції світла, що спостерігається в природних умовах, може служити райдужне забарвлення мильних плівок, тонких плівок нафти або мінерального масла, які плавають на поверхні води, кольори мінливості на поверхні загартованих сталених деталей, покритих найтоншим шаром окислів. Усі ці явища зумовлені інтерференцією світла в тонких прозорих плівках, яка виникає внаслідок накладання когерентних хвиль, що відбиваються від верхньої та нижньої поверхонь плівки.

Нехай на плоскопаралельну прозору плівку з показником заломлення n і товщиною d під кутом i падає плоска монохроматична хвиля (рис.212).

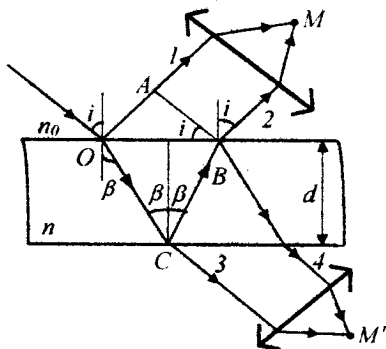


Рис.212

Падаюча хвиля частково відбивається від верхньої поверхні плівки, а частково заломлюється. Напрямок поширення відбитої хвилі зображено променем 1, а заломленої – променем OC . Заломлена хвиля, досягнувши нижньої поверхні плівки, частково відбивається (промінь CB), а частково заломлюється. Хвиля, що поширюється вздовж променя CB , на верхній поверхні плівки частково відбивається, а

частково заломлюється, причому заломлена хвиля (промінь 2) накладається на хвилю, що безпосередньо відбита від верхньої поверхні.

Промені 1 і 2 когерентні між собою. Якщо на їх шляху поставити збірну лінзу, то вони зберуться в одній з точок M фокальної площини лінзи і дадуть інтерференційну картину, яка визначається оптичною різницею ходу Δ між інтерференційними променями 1 і 2:

$$\Delta = (OC + CB)n - OA \pm \frac{\lambda_0}{2} = \bar{\Delta} \pm \frac{\lambda_0}{2}.$$

Доданок $\pm \frac{\lambda_0}{2}$ зумовлений “втратаю півхвилі” при відбиванні світла від межі поділу середовища. Якщо $n > n_0$, то в точці O фаза коливань змінюється на протилежну, відбувається “втрата півхвилі” і доданок матиме знак “-”. У випадку $n < n_0$ “втрата півхвилі” відбудеться в точці C і $\frac{\lambda_0}{2}$ матиме знак “+”.

З рис.212 видно, що

$$OC = CB = \frac{d}{\cos \beta}, \quad OA = OB \sin i = 2d \operatorname{tg} \beta \sin i.$$

$$\text{Оскільки } n = \frac{\sin i}{\sin \beta} \text{ або } \sin i = n \sin \beta, \text{ то}$$

$$OA = 2dn \operatorname{tg} \beta \sin \beta = 2dn \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді: } \bar{\Delta} &= \frac{2dn}{\cos \beta} - \frac{2dn}{\cos \beta} (1 - \cos^2 \beta) = \\ &= 2dn \cos \beta = 2dn \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \\ &= 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i}. \end{aligned}$$

З урахуванням втрати півхвилі для оптичної різниці ходу отримаємо:

$$\Delta = \bar{\Delta} \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2}.$$

В точці M буде максимум, якщо:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2m \frac{\lambda_0}{2} \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

і мінімум, якщо:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1) \frac{\lambda_0}{2}; \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

Інтерференція спостерігається не лише у відбитому світлі, а й у світлі, що проходить через плівку (рис.212, промені 3 і 4). Оптична різниця ходу для прохідного світла відрізняється від Δ для відбитого світла на $\frac{\lambda_0}{2}$, бо світло не відбивається від оптично гущішого середовища. Отже, максимумам інтерференції у відбитому світлі відповідають мінімуми інтерференції в прохідному світлі і навпаки.

1. Смуги однакового нахилу

Інтерференція в плоскопаралельних пластинках визначається величинами λ_0 , d , n та i . Для даних λ_0 , d і n кожному нахилу i променів відповідає своя інтерференційна смуга.

Інтерференційні смуги, які виникають внаслідок накладання хвиль, що падають на плоскопаралельну пластинку під однаковими кутами, називаються смугами однакового нахилу. Промені I' і I'' , відбившись від верхньої та нижньої граней пластинки, паралельні один до одного, ос-

кільки пластина плоскопаралельна (рис.213). Отже, інтерферуючі промені I' і I'' перетинаються лише в нескінченності, тому кажуть, що *смуги однакового нахилу локалізовані на нескінченності*.

Для їх спостереження використовують збірну лінзу й екран, розміщений у фокальній площині лінзи. Паралельні промені I' і I'' зберуться у фокусі лінзи. В ту саму точку прийдуть й інші промені, паралельні до променя I , (на рис.213 – промінь 2) внаслідок чого збільшиться загальна інтенсивність.

Хвилі 3, які падають на пластину під іншим кутом, зберуться в іншій точці M' фокальної площини лінзи.

Вивчаючи інтерференцію світла за допомогою плоскопаралельної пластинки, вважається, що світло монохроматичне. В реальних умовах користуються джерелами світла, випромінювання яких лежить в широкому інтервалі довжин хвиль. Ступінь монохроматичності характеризується величиною $\Delta\lambda_0$, тобто інтервалом довжин хвиль від λ_0 до $\lambda_0 + \Delta\lambda_0$, в якому відбувається випромінювання джерела. Ступінь монохроматичності або максимально допустимий інтервал довжин хвиль немонохроматичного світла $\Delta\lambda_0$, для якого інтерференційна картина контрастна, визначається співвідношенням $\Delta\lambda_{\text{кр}} = \frac{\lambda_0}{m}$, де m – порядок інтерференції.

Користуючись цим співвідношенням, оцінимо допустиму товщину пластинки, за допомогою якої можна спостерігати інтерференційну картину при освітленні пластинки природним світлом. Якщо середня довжина хвилі природного світла

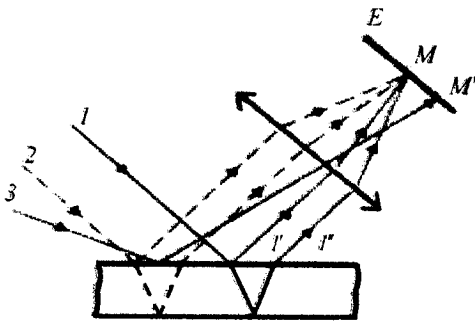


Рис.213

$\lambda_{\text{сер}} = 0,5 \text{ мкм}$, а $\Delta\lambda_{\text{сп}} = 0,01 \text{ мкм}$. Саме з такою різницею хвиль людське око здатне розрізнати дві спектральні лінії. Тоді максимальний порядок інтерференції

$$m = \frac{\lambda_{\text{сер}}}{\Delta\lambda_{\text{сп}}} = 50. \text{ В результаті}$$

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_{\text{сер}}}{2} = 50\lambda_{\text{сер}}.$$

Для $n \approx 1,5$, $i = 0^\circ$, і нехтуючи величиною $\frac{\lambda_{\text{сер}}}{2}$ в порівнянні з $50\lambda_{\text{сер}}$, отримуємо $d \approx \frac{50\lambda_{\text{сер}}}{2m} = \frac{50 \cdot 0,5}{3} \text{ мкм} \approx 8 \text{ мкм}$.

Якщо спостерігати інтерференційну картину в світлі однієї з ліній лінійчастого спектра, для якої $\Delta\lambda_{\text{сп}} \sim 10^{-6} \text{ мкм}$, то допустима товщина пластинки зросте в 10^4 разів і становитиме кілька сантиметрів.

2. Смуги однакової товщини

Нехай на клин (кут α між боковими гранями малий) падає плоска хвиля, напрямком поширення якої збігається з променями 1 і 2 (рис.214). З усіх променів, на які розділяється падаючий промінь 1, розглянемо I' і I'' , які відбилися від верхньої та нижньої поверхні клина. При певному взаємному положенні клина і лінзи проме-

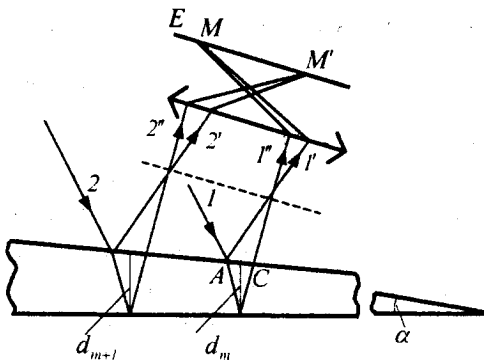


Рис. 214

ні I' і I'' перетнуться в деякій точці M на екрані. Оскільки промені I' і I'' когерентні, вони будуть інтерферувати. Якщо джерело хвиль розміщене далеко від поверхні і кут α досить малий, то різниця ходу променів I' і I'' визначається формулою

$$\Delta = 2d_m\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2},$$

де d_m – середня товщина клина на ділянці AC .

На екрані з'являється система інтерференційних смуг. Кожна зі смуг виникає за рахунок відбивання від місць пластинки, що мають однакову товщину.

Інтерференційні смуги, що виникають внаслідок інтерференції від місць однакової товщини, називаються смугами однакової товщини.

Оскільки верхня та нижня грані клина не паралельні між собою, то промені I' і I'' перетинаються поблизу пластинки. У такий спосіб *смуги однакової товщини локалізовані поблизу поверхні клина.*

Якщо світло падає на пластину нормально, то смуги однакової товщини локалізуються на верхній поверхні клина. Смуги однакової товщини паралельні до ребра клина. Щоб визначити відстань Δu між двома сусідніми максимумами інтерференційних смуг у випадку монохроматичного світла з довжиною хвилі λ_0 , запишемо умову двох сусідніх максимумів інтерференції враховуючи, що кут падіння $i = 0^\circ$ і кут заломлення $\beta = 0^\circ$, оскільки кут α дуже малий:

$$2d_m n - \frac{\lambda_0}{2} = 2m \frac{\lambda_0}{2},$$

$$2d_{m+1} n - \frac{\lambda_0}{2} = 2(m+1) \frac{\lambda_0}{2}.$$

Звідси

$$2(d_{m+1} - d_m) n = \lambda_0.$$

Якщо відстані від ребра клина до інтерференційних смуг дорівнюють y_m і

$$y_{m+1} = y_m + \Delta y, \text{ то } d_m = y_m \sin \alpha.$$

$$d_{m+1} = (y_m + \Delta y) \sin \alpha,$$

тому

$$d_{m+1} - d_m = \Delta y \sin \alpha \approx \Delta y \alpha,$$

де α – малий кут між гранями клина. Тоді

$$\Delta y = \frac{\lambda_0}{2\alpha n}.$$

3. Кільця Ньютонів

Окремим випадком смуг однакової товщини є кільця Ньютонів, що виникають у повітряному шарі між плоскоопуклою лінзою з великим радіусом кривини R і плоскою скляною пластинкою, які дотикаються в точці P (рис.215). При цьому

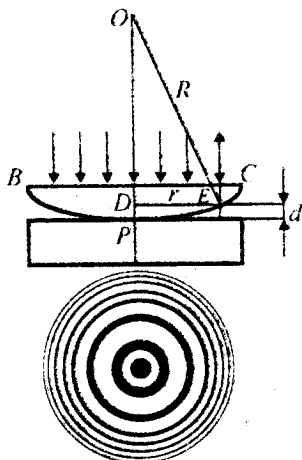


Рис. 215

товщина повітряного шару поступово зростає від точки P до краю пластини.

Паралельний пучок світла падає на плоску поверхню BC лінзи. Після відбивання від опуклої поверхні лінзи і дотичної до неї поверхні пластини світло поширюється у зворотному напрямку паралельним пучком.

При накладанні відбитих хвиль виникають інтерференційні смуги однакової товщини, що мають при нормальному падінні світла вигляд концентричних кілець (рис.215). В центрі міститься темний круг, тому що в місці дотику лінзи з поверхнею пластинки залишається дуже тонкий повітряний шар товщиною набагато меншою від довжини хвилі. Різниця ходу між променями, що виникають в цій точці, визначається лише втратою півхвилі при відбиванні від поверхні пластини, тобто $\Delta = \frac{\lambda_0}{2}$ і тут спостерігається інтерференційний мінімум нульового порядку.

Оскільки результат накладання двох відбитих хвиль залежить від товщини повітряного шару, то для всіх точок цього шару, що знаходяться на однаковій відстані r від точки P , тобто тих, що утворюють коло, буде однакова умова або для інтерференційного максимуму або мінімуму. Тому виникає інтерференційна картина у вигляді концентричних кілець.

Отже, темний круг буде оточений системою світлих кілець, що чергуються, ширина й інтенсивність яких поступово зменшуються з віддаленням від центрального темного круга. У прохідному світлі буде доповняльна картина – центральне світле коло, наступне кільце темне і т. д.

Нехай d – товщина повітряного шару на відстані r від точки P . Оптична різниця ходу Δ між променем, який відбився від межі поділу повітряний шар – скляна пластинка, і променем, який зазнав часткового відбивання від межі поділу опукла поверхня лінзи – повітряний шар, дорівнює

$$\Delta = 2dn \pm \frac{\lambda_0}{2}.$$

де додатак $\pm \frac{\lambda_0}{2}$ враховує "втрату" півхвилі при відбиванні світла. Якщо лінза і пластина виготовлені зі скла, показник заломлення якого n , а шар між ними повітряний ($n_0 = 1$), то $\frac{\lambda_0}{2}$ буде зі знаком "+".

З трикутника ODE маємо

$$R^2 = (R-d)^2 + r^2, R^2 = R^2 - 2Rd + d^2 + r^2.$$

При $d \ll R$ отримуємо

$$r^2 = 2Rd \text{ і } d = \frac{r^2}{2R}.$$

Тут знехтувано членами другого порядку по d . Тоді оптична різниця ходу променів

$$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}.$$

Використавши умову максимуму, знайдемо радіус m -го кільця:

$$\frac{(r_m^{\max})^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2} = 2m \frac{\lambda_0}{2},$$

$$r_m^{\max} = \sqrt{(2m-1) \frac{R\lambda_0}{2}}; (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Радіус m -го темного кільця визначається з умови:

$$\frac{(r_m^{\min})^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1) \frac{\lambda_0}{2},$$

$$r_m^{\min} = \sqrt{m\lambda_0 R}; (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Очевидно, що в прохідному світлі

$$r_m^{\max} = \sqrt{m\lambda_0 R}; (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$r_m^{\min} = \sqrt{(2m-1) \frac{\lambda_0 R}{2}}; (m = 1, 2, 3, \dots).$$

За формулами для радіусів кілець Ньютона можна розрахувати радіус плоскоопуклої лінзи.

При розрахунках радіусів кілець Ньютона знехтувано впливом світлових хвиль, що відбиваються від верхньої по-

верхні лінзи (BC) і нижньої поверхні пластини. Але оскільки товщина центральної частини лінзи і пластини на багато порядків більші за товщину повітряного шару поблизу точки P , то різниця ходу між хвилями, які відбиваються від верхньої і нижньої поверхонь лінзи і пластини, такі великі, що інтерференція цих хвиль практично не спостерігається, тому що максимуми будуть розмішені настільки близько, що розділити їх неможливо.

Як для смуг однакового нахилу, так і для смуг однакової товщини положення максимумів залежить від довжини хвилі λ_0 . Тому систему світлих і темних смуг отримують лише при освітленні монохроматичним світлом. При спостереженні в білому світлі отримують сукупність змішених одна відносно одної смуг, утворених променями різних довжин хвиль, й інтерференційна картина набуває райдужного забарвлення.

§ 92. Практичне застосування інтерференції світла

Явище інтерференції світла лежить в основі дії численних оптичних приладів, за допомогою яких з великою точністю вимірюють довжину світлових хвиль, лінійні розміри тіл та їх зміну під впливом різних фізичних процесів; вимірюють показники заломлення речовин; визначають якість і точність шліфування різних поверхонь; вимірюють кутові розміри небесних тіл тощо. За допомогою явища інтерференції можна виготовляти інтерференційні світлофільтри і значно зменшити відбивання світла від оптичних систем.

О.Смакула розробив спосіб *просвітлення оптики* для зменшення втрат світла, зумовлених його відбиванням на межі поділу двох середовищ, оскільки проходження світла через кожную заломну поверхню лінзи супроводжується відбиттям $\approx 4\%$ падаючого потоку світла. У складних об'єктивах число відбивання велике і сумарна втрата світлового потоку досить значна, що приводить до зменшення світлосили оптичних приладів. Крім того, відбивання від поверхні лінз приводить до виникнення біликів.

Щоб елементи оптичних систем зробити просвітленими, їх поверхні покривають прозорими плівками речовин, показник заломлення яких менший, ніж скла.

При відбиванні світла від межі поділу повітря – плівка і плівка-скло виникає інтерференція когерентних хвиль $1'$ і $2'$ (рис.216). Товщину плівки d і показники

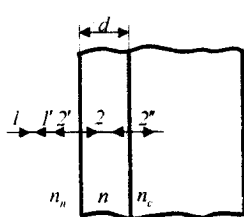


Рис.216

заломлення скла n_c і плівки n можна підібрати так, щоб хвилі, які інтерферують, гасили одна одну. Для цього їх амплітуди повинні бути

$$\Delta = (2m+1) \frac{\lambda_0}{2}.$$

Розрахунки показують, що амплітуди відбитих хвиль рівні, якщо $n = \sqrt{n_c}$.

Речовину плівки підбирають так, щоб виконувалась умова $n_c > n > n_n$, де n_n - показник заломлення повітря. Втрата півхвилі в цьому випадку відбувається на обох поверхнях. Умова мінімуму при куті падіння $i = 0$ має такий вигляд

$$2dn = (2m+1) \frac{\lambda_0}{2}.$$

Для мінімальної товщини плівки $m = 0$, і тоді

$$dn = \frac{\lambda_0}{4}.$$

Отже, якщо $n = \sqrt{n_c}$ і оптична товщина плівки дорівнює $\frac{\lambda_0}{4}$, то в результаті інтерференції спостерігається гасіння відбитих хвиль.

Явище інтерференції використовують у ряді дуже точних вимірвальних приладів, які називають *інтерферометрами*.

Розглянемо принципову схему *інтерферометра Жамена*, який застосовують для точних вимірювань показників заломлення газів і їх залежності від температури, тиску і вологості (рис.217).

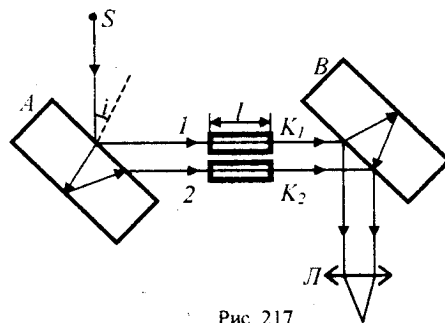


Рис. 217

Дві зовсім однакові скляні товсті плоскопаралельні пластини A та B установлені майже паралельно одна до одної. Промені світла від монохроматичного джерела S падають на поверхню пластини A під різними кутами i , близькими до 45° . На рисунку показано лише один падаючий промінь. Внаслідок його відбивання від обох поверхонь пластини з неї виходять дві когерентні паралельні хвилі 1 і 2 . Пройшовши крізь дві цілком однакові закриті скля-

ні кювети K_1 і K_2 , ці хвилі після відбивання від пластини B збираються лінзою L й інтерферують.

Інтерференційні смуги однакового нахилу розглядають за допомогою окуляра.

Якщо одну з кювет K_1 заповнено газом з відомим показником заломлення n_1 , а другу – газом з показником заломлення n_2 , який треба виміряти, то оптична різниця ходу між інтерферуючими хвилями $\Delta = (n_2 - n_1)l$. Згідно умови інтерференційного максимуму $\Delta = 2m \frac{\lambda_0}{2}$

Отже,

$$n_2 = n_1 + \frac{m\lambda_0}{l}$$

де m – порядок інтерференційного максимуму. Зміна різниці $n_2 - n_1$ зміщує інтерференційні смуги.

Розглянемо спрощену схему *інтерферометра Майкельсона* (рис.218).

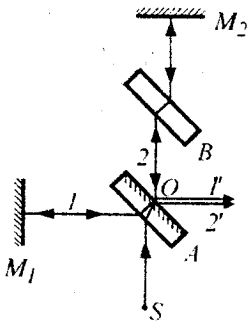


Рис. 218

Монохроматичне світло від джерела S падає під кутом 45° на плоскопаралельну пластинку A .

Сторона пластинки, віддалена від S , посріблена і напівпрозора, розділяє промінь на дві частини: промінь 1 (відбивається від посрібленого шару) і промінь 2 (проходить крізь нього). Промінь 1 відбивається від

дзеркала M_1 і повертається назад, знову проходить через пластинку A ($1'$). Промінь 2 йде до дзеркала M_2 , відбивається від нього, повертається назад і відбивається від пластинки A ($2'$). Оскільки промінь 1 проходить пластинку A двічі, то для компенсації різниці ходу, яка виникає на шляху другого променя, ставиться пластинка B , яку називають компенсатором.

Хвилі $1'$ і $2'$ когерентні; отже, буде спостерігатися інтерференція. Оптична різниця хвиль $1'$ і $2'$ $\Delta = 2n_1(l_1 - l_2)$, де n_1 – абсолютний показник заломлення повітря, а l_1 і l_2 – відстані від точки O до дзеркал M_1 і M_2 .

Якщо $l_1 = l_2$, то буде інтерференційний максимум. Зміщення одного з дзеркал на відстань $\frac{\lambda_0}{4}$ приводить до виникнення інтерференційного мінімуму. Отже, за зміною інтерференційної картини можна зробити висновки про малі переміщення одного з дзеркал і тим самим використати інтерферометр Майкельсона для точних вимірювань довжини. Похибки при вимірюванні довжини $\approx 10^{-8}$ мм.

Інтерферометр Майкельсона можна використати для знаходження незначних змін показника заломлення прозорих тіл залежно від тиску, температури, домішок. Такий інтерферометр – *інтерференційний рефрактометр*. Як і у випадку інтерферометра Жамена, на шляху променів розміщують дві однакові кювети завдовжки l , одна з яких наповнена газом з відомим показником заломлення n_1 , а друга з невідомим n_2 . Між хвилями $1'$ і $2'$ виникає додаткова оптична різниця ходу

$$\Delta = (n_2 - n_1)l.$$

Зміна різниці ходу приведе до зсуву інтерференційних смуг. Цей зсув можна характеризувати величиною

$$m_0 = \frac{\Delta}{\lambda_0} = (n_x - n_l) \delta,$$

де m_0 показує, на яку частину ширини інтерференційної смуги змістилась інтерференційна картина. Вимірюючи величину m_0 при відомих l , n_l і λ , можна обчислити n_x .

В.П. Лінник використав принцип дії інтерферометра Майкельсона для створення *мікроінтерферометра* – високочутливого приладу, який використовується для контролю чистоти обробки поверхонь ме-

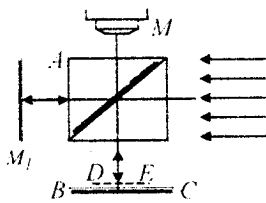


Рис.219

талевих виробів. Основними елементами є скляний кубик A (рис.219), який складається з двох половин, склеєних по діагональній площині. Одну із спостережуваних поверхонь напівпосріблено. BC – досліджувана плоска поверхня, M_1 – плоске дзеркало. Двогранний кут між дзеркалом і поверхнею BC відрізняється від $\frac{\pi}{2}$ на малу величину α . DE – уявне зображення відбивної поверхні дзеркала M_1 у напівпосрібленій діагональній площині кубика A . Інтерференційні смуги однакової товщини для повітряного клина $DE - BC$ спостерігають за допомогою мікроскопа M . У тих місцях поверхні BC , де є виступи або заглибини, інтерференційні смуги

викривлятимуться. За допомогою цього приладу можна виявити штрихи поверхні деталі, глибина яких дорівнює $(2 \div 3) 10^{-7}$ мм.

Крім того, інтерферометри використовуються для вивчення якості виготовлення оптичних деталей, для вимірювання кутів, для дослідження процесів, які з великою швидкістю відбуваються в повітрі, що обтікає літальні апарати. Майкельсон вперше порівняв еталонний метр з довжиною стандартної світлової хвилі.

§ 93. Дифракція світла.

Принцип Гюйгенса-Френеля

Дифракцією називається сукупність явищ, що спостерігаються при поширенні світла в середовищі з різними неоднорідностями (поблизу границь непрозорих або прозорих тіл, через малі отвори) і які пов'язані із зміною напрямку поширення світлових хвиль (порівняно з напрямком, передбаченим геометричною оптикою).

Дифракція, зокрема, приводить до огинання світловими хвилями перешкод і проникнення світла в область геометричної тіні, проникнення через невеликі отвори в екранах, тощо.

Явище дифракції пояснюється за допомогою *принципу Гюйгенса*, згідно з яким *кожна точка, до якої доходить хвиля, служить центром вторинних хвиль, а обвіюна цих хвиль дає положення хвильового фронту в наступний момент часу.*

Як приклад застосування принципу Гюйгенса розглянемо падіння плоскої хвилі на перешкоду з отвором (рис.220). Коли хвильовий фронт доходить до перешкоди,

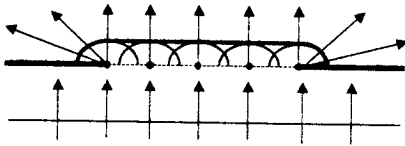


Рис.220

то кожна точка отвору стає джерелом вторинних хвиль, а обвідна цих хвиль задає фронт хвилі, що пройшла через отвір. Цей фронт плоский лише в середній частині, а біля границі отвору відбувається загинання хвильового фронту, тобто хвиля проникає в область геометричної тіні, огинаючи край перешкоди.

Принцип Гюйгенса – суто геометричний спосіб побудови хвильових поверхонь – розв’язує лише задачу про напрямки поширення хвильового фронту, але не зачіпає, по суті, питання про амплітуду, а отже, і про інтенсивність хвиль, що поширюються в різних напрямках. Френель вклав у принцип Гюйгенса фізичний зміст, доповнивши його ідеєю інтерференції вторинних хвиль. **Принцип Гюйгенса-Френеля** можна виразити такими положеннями:

1) під час розрахунку амплітуди світлових коливань, що збуджуються джерелом S_0 в довільній точці M , джерело S_0 можна замінити еквівалентною йому системою вторинних джерел – малих ділянок dS будь-якої замкненої допоміжної поверхні S , проведеної так, щоб вона охоплювала джерело S_0 і не охоплювала розглядувану точку M ;

2) вторинні джерела, які еквівалентні джерелу S_0 , когерентні між собою, тому вторинні хвилі, збуджені ними, інтерферують, і розрахунок інтерференції найбільш простий, якщо S – хвильова по-

верхня для світла джерела S_0 , оскільки при цьому фази коливань всіх вторинних джерел однакові;

3) амплітуда dE_0 коливань, що збуджуються в точці M вторинним джерелом, пропорційна до площі dS відповідної ділянки хвильової поверхні обернено пропорційна

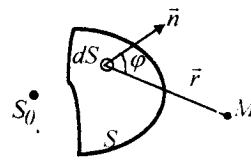


Рис.221

до відстані r від неї до точки M і залежить від кута φ між зовнішньою нормаллю до хвильової поверхні і напрямком від елемента dS до точки M (рис.221):

$$dE_0 = f(\varphi) \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0) dS,$$

де $(\omega t + \varphi_0)$ – фаза коливань в місці розміщення хвильової поверхні, a – величина, яка пропорційна до амплітуди первинних хвиль в точках елемента dS ; $f(\varphi)$ монотонно спадає від 1 при $\varphi = 0$ до 0 при $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$ (вторинні джерела не випромінюють назад); кут φ називається кутом дифракції.

4) якщо частина поверхні S закрыта непрозорими екранами, то вона не випромінює енергію, а інші випромінюють так само, як і за відсутності екранів.

Урахування амплітуд і фаз вторинних хвиль дозволяє в кожному конкретному випадку знайти амплітуду результуючої хвилі в довільній точці простору, тобто визначити закономірності поширення світла. В загальному випадку розрахунок інтерференції вторинних хвиль досить складний і громіздкий, однак для ряду випадків знаходження амплітуди результую-

чого коливання здійснюється алгебраїчним або геометричним підсумовуванням.

Результуюче коливання в точці M являє собою суперпозицію коливань dE_0 , взятих для всієї хвильової поверхні S :

$$E_{0M} = \int_S f(\varphi) \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0) dS.$$

Ця формула є аналітичним виразом принципу Гюйгенса-Френеля.

§ 94. Метод зон Френеля. Прямолінійне поширення світла. Дифракція Френеля на круглому отворі і диску

За допомогою принципу Гюйгенса-Френеля можна обґрунтувати з хвильових властивостей світла закон *прямолінійного поширення світла в однорідному середовищі*. Френель розв'язав цю задачу, розглянувши взаємну інтерференцію вторинних хвиль, і застосував прийом, який отримав назву *методу зон Френеля*.

Знайдемо в довільній точці M амплітуду світлової хвилі, що поширюється в однорідному середовищі від точкового джерела S_0 .

Згідно з принципом Гюйгенса-Френеля замінимо дію джерела S_0 дією уявних джерел, розмішених на допоміжній поверхні S , що є поверхнею фронту хвилі, що йде з S_0 (поверхня сфери з центром в S_0

(рис.222). Френель розбив хвильову поверхню S на кільцеві зони такого розміру, щоб відстані від країв зони до M відрізнялись на $\frac{\lambda}{2}$, тобто

$$P_1M - P_0M = P_2M - P_1M = P_3M - P_2M = \dots = \frac{\lambda}{2}$$

Подібне розбивання фронту хвилі на зони можна виконати, провівши з точки M концентричні сфери радіусами

$$L + \frac{\lambda}{2}; L + 2\frac{\lambda}{2}; L + 3\frac{\lambda}{2}; \dots; L + m\frac{\lambda}{2}.$$

Точки сфери S , що лежать на відстанях $L + \frac{\lambda}{2}; L + 2\frac{\lambda}{2}; L + 3\frac{\lambda}{2}$ і т.д. від точки M , утворюють межі 1-ї, 2-ї, 3-ї і т.д. зон Френеля.

Оскільки коливання від сусідніх зон проходять до точки M відстані, які відрізняються на $\frac{\lambda}{2}$, то в точку M вони надходять з протилежними фазами і при накладанні ці коливання будуть взаємно ослаблюватися. Тому амплітуда результуючого коливання в точці M :

$$E_{0M} = E_{01} - E_{02} + E_{03} - E_{04} + \dots \pm E_{0m},$$

де $E_{01}, E_{02}, \dots, E_{0m}$ - амплітуди коливань, що збуджуються 1-ю, 2-ю, ..., m -ю зонами В цей вираз всі амплітуди непарних зон входять зі знаком "+", а від непарних зон - зі знаком "-".

Величина E_{0M} залежить від площі σ_m m -ї зони і кута φ_m між зовнішньою нормаллю до поверхні зони в якій-небудь її точці і прямою, яка напрямлена з цієї точки в точку M . На рис.223 точки B і B' відповідають зовнішній границі m -ї зони: $BC = r_m$ - радіус зовнішньої границі m -ї зони, $CO = h_m$ - висота кульового сегмента BOB' .

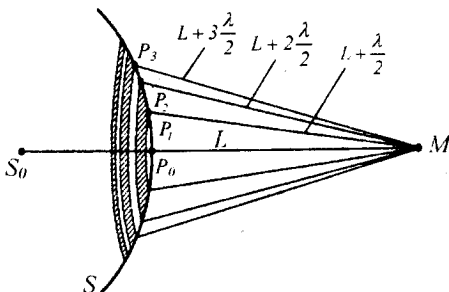


Рис.222

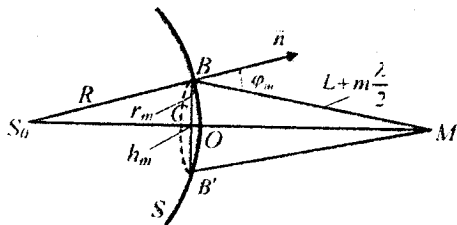


Рис.223

З трикутників S_0BC і MBC видно, що

$$r_m^2 = R^2 - (R - h_m)^2 = \left(L + \frac{m\lambda}{2}\right)^2 - (L + h_m)^2.$$

Звідси

$$R^2 - R^2 + 2Rh_m - h_m^2 = L^2 + 2L\frac{m\lambda}{2} + \left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2 - L^2 - 2Lh_m - h_m^2.$$

Тоді

$$2(R + L)h_m = m\lambda L + \left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2.$$

Оскільки $\lambda \ll L$, то при не дуже великих m доданком $\left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2$ можна знехтувати і

$$h_m = \frac{m\lambda L}{2(R + L)}.$$

Бічна поверхня кульового сегмента BOB' , яка є сумою площ усіх m зон, починаючи з першої, дорівнює

$$S_m = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_m = 2\pi R h_m = \frac{\pi R L \lambda}{R + L} m.$$

а площа m -ї зони Френеля

$$\sigma_m = S_m - S_{m-1} = \frac{\pi R L \lambda}{R + L}.$$

Цей вираз не залежить від m , отже, при не дуже великих m площі зон Френеля однакові. У такий спосіб побудова зон Френеля розбиває поверхню сферичної хвилі на рівні зони.

Згідно з припущенням Френеля дія окремих зон в точці M тим менша, чим більший кут φ_m , тобто дія зон поступово зменшується від центральної зони до периферійної. Крім того, інтенсивність випромінювання в напрямку точки M зменшується із зростанням m і внаслідок збільшення відстані від зони до точки M . Враховуючи обидва ці фактори, можемо записати:

$$E_{01} > E_{02} > E_{03} > E_{04} > \dots$$

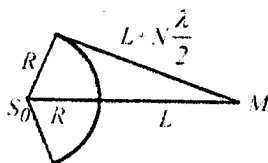


Рис.224

Загальне число N зон Френеля, які вміщуються на частині сфери, яка повернена до точки M (рис.224), дуже

велике.

З рис.224 видно, що

$$L + N\frac{\lambda}{2} = \sqrt{(L + R)^2 - R^2}.$$

$$\text{Звідси: } N = \frac{2}{\lambda} \left(\sqrt{L^2 + 2LR} - L \right).$$

Якщо $R \sim L \sim 10$ см і $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см, то $N \sim 3 \cdot 10^5$. Тому можна вважати, що в межах не дуже великих змін m залежність E_{0M} від M є лінійною, і амплітуда коливань, яка викликана якою-небудь m -ю зоною дорівнює півсумі амплітуд що викликані $m-1$ -ю і $m+1$ -ю зонами. Тобто

$$E_{0m} = \frac{1}{2} (E_{0m-1} + E_{0m+1}).$$

Тоді амплітуда результуючого коливання в точці M матиме такий вигляд:

$$E_{0M} = \frac{E_{01}}{2} + \left(\frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2} \right) + \left(\frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2} \right) + \dots = \frac{E_{01}}{2}.$$

оскільки усі вирази, що стоять у дужках, дорівнюють нулю. Амплітуда, що створюється в довільній точці M сферичною хвильовою поверхнею, дорівнює половині амплітуди, що створюється однією центральною зоною. Отже, дія всієї хвильової поверхні на точку M зводиться до дії її малої ділянки, меншої, ніж центральна зона.

Якщо у виразі $r_m^2 = R^2 - (R - h_m)^2$ покладемо, що висота сегмента $h_m \ll R$ (при не дуже великих m), тоді $r_m^2 = 2Rh_m$. Радіус зовнішньої границі m -ї зони Френеля

$$r_m = \sqrt{2Rh_m} = \sqrt{\frac{m\lambda RL}{R+L}}$$

При $R = L = 10 \text{ см}$ і $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, $r_1 = 0,016 \text{ см}$. Отже, поширення світла від S_0 до M відбувається так, немовби світловий потік поширюється всередині дуже вузького каналу вздовж S_0M , тобто *прямо-лінійно*. У такий спосіб хвильовий принцип Гюйгенса-Френеля дозволяє пояснити прямо-лінійне поширення світла в однорідному середовищі.

Виразимо кількість зон Френеля m через радіус зовнішньої границі:

$$m = \frac{r_m^2}{\lambda} \frac{R+L}{RL} = \frac{r_m^2}{\lambda} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{R} \right).$$

Кількість зон m симетричне відносно L і R .

Це означає, що точкове джерело викликає в точці M таку дію, яку викликало б у точці S_0 , якщо його розмістити у точці M .

Інтенсивність світла в точці M можна значно збільшити, якщо закрити всі парні або непарні зони Френеля. Тоді ре-

зультуюча амплітуда коливань відповідно дорівнюватиме:

$$E_{0M} = E_{01} + E_{03} + E_{05} + \dots \text{ або}$$

$$E_{0M} = E_{02} + E_{04} + E_{06} + \dots$$

Екран, який перекриває всі парні або непарні зони Френеля, називається *зоною пластинкою*. Пластинка має складатися з прозорих або непрозорих кілець, радіуси яких дорівнюють r_m . Радіуси прозорих кілець підраховують для $m = 0, 2, 4, \dots$, непрозорих – для $m = 1, 3, 5, \dots$.

Розглянемо дифракцію сферичних хвиль, або *дифракцію Френеля*, що здійснюється в тому випадку, коли дифракційна картина спостерігається на скінченній віддалі L від перешкоди, що викликала дифракцію.

Дифракція на круглому отворі

Сферична хвиля, що поширюється з точкового джерела S_0 , зустрічає на своєму шляху екран з круглим отвором (рис.225).

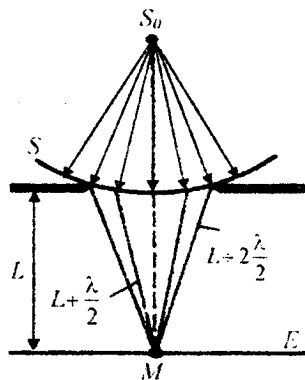


Рис.225

Дифракційну картину спостерігаємо на екрані E в точці M , що лежить на лінії, яка з'єднує S_0 з центром отвору. Екран E паралельний до площини отвору і знаходиться від нього на відстані L . Вигляд дифракційної картини залежить від кількості зон Френеля, які укладаються в отворі. Якщо в

отворі укладається m зон Френеля, то згідно з формулами

$$E_{0M} = E_{01} - E_{02} - E_{03} - E_{04} + \dots \pm E_{0m}, \text{ і}$$

$$E_{0m} = \frac{1}{2}(E_{0m-1} + E_{0m+1})$$

амплітуда E_{0M} результуючих коливань у точці M залежатиме від парності або непарності m .

Якщо кількість m зон Френеля непарна, то

$$E_{0M} = \frac{1}{2}E_{01} + \left(\frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2}\right) + \left(\frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2}\right) + \dots + \left(\frac{E_{0m-2}}{2} - E_{0m-1} + \frac{E_{0m}}{2}\right) + \frac{1}{2}E_{0m} = \frac{E_{01}}{2} + \frac{E_{0m}}{2}.$$

Якщо в отворі укладається парна кількість m зон, то

$$E_{0M} = \frac{1}{2}E_{01} + \left(\frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2}\right) + \left(\frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2}\right) + \dots + \left(\frac{E_{0m-2}}{2} - E_{0m-2} + \frac{E_{0m-1}}{2}\right) + \frac{1}{2}E_{0m-1} - E_{0m} = \frac{E_{01}}{2} + \frac{E_{0m-1}}{2} - E_{0m}.$$

Отже, коли отвір відкриває непарну кількість зон Френеля, то амплітуда в точці M буде більша, ніж при вільному поширенні хвилі – у точці M буде інтерференційний максимум. Якщо m – парна, то у точці M – інтерференційний мінімум. Амплітуди від двох сусідніх зон практично однакові.

Тому $\frac{1}{2}E_{0m-1} - E_{0m} = -\frac{1}{2}E_{0m}$. В результаті

$$E_{0M} = \frac{E_{0m} \pm E_{0m}}{2},$$

де знак “+” стосується непарної, а знак “-” парної кількості зон Френеля.

Якщо в отворі укладається одна зона Френеля, то в точці M амплітуда $E_{0M} = E_{01}$, тобто вдвоє більша, ніж за відсутності непрозорого екрану з отвором. Якщо в отворі укладається дві зони Фре-

неля, то їх дія в точці M практично компенсована через інтерференцію. Таким чином, дифракційна картина від круглого отвору поблизу точки M матиме вигляд темних і світлих кілець з центрами в точці M (якщо m – непарне, то в центрі буде світлий круг (рис.226), коли m – парне – темний (рис.227)), причому інтенсивність

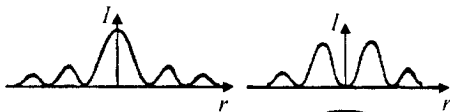


Рис. 226

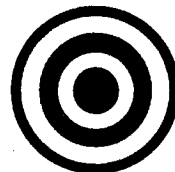


Рис. 227

$I = A^2$ максимумів зменшується з відстанню від центра картини.

При незмінному положенні джерела світла кількість зон m залежить від діаметра отвору і відстані L . При зміні діаметра отвору в отворі змінюватиметься і кількість зон Френеля, що вміщуються на відкритій ділянці хвильового фронту. Їх кількість буде змінюватись з парної на непарну і навпаки. Внаслідок цього інтенсивність світла в точці M періодично зменшуватиметься, то збільшуватиметься. Така зміна інтенсивності також спостерігається, якщо екран E переміщати вздовж лінії S_0M .

У випадку, коли діаметр отвору великий, так що $E_{0M} \ll E_{01}$, то ніякої дифракційної картини на екрані не буде спостерігатись – світло в цьому випадку поширюється прямолінійно.

Якщо отвір освітлюється не монохроматичним, а білим світлом, то кільця будуть мати кольорове забарвлення, бо

кількість зон Френеля, які складаються в отворі, залежить від довжини хвилі світла.

Дифракція на диску

Нехай сферична хвиля, яка поширюється від точкового джерела S_0 , зустрічає на своєму шляху диск. У такому разі закрити диском ділянку фронту хвилі треба виключити з розгляду і будувати зони Френеля потрібно, починаючи з країв диска. На рис.228 показано побудову цих

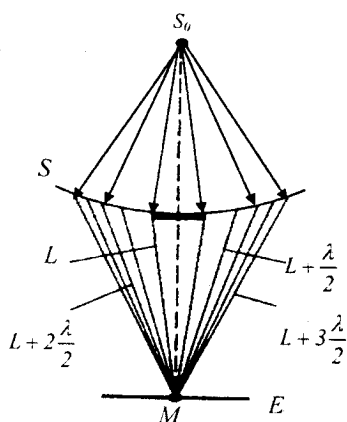


Рис.228

зон для точки M екрану E , яка лежить навпроти центра диска. Амплітуда E_{0M} в точці M визначається спільною дією всіх відкритих зон, починаючи з першої:

$$\begin{aligned} E_{0M} &= E_{01} - E_{02} + E_{03} - E_{04} + \dots = \\ &= \frac{E_{01}}{2} + \left(\frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2} \right) + \\ &+ \left(\frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2} \right) + \dots = \frac{E_{01}}{2}. \end{aligned}$$

Отже, в точці M завжди буде інтерференційний максимум, який відповідає половині дії першої відкритої зони Френеля. Центральний максимум оточений концентричними темними і світлими інтерференційними кільцями, що чергуються. Зміна інтенсивності світла I із відстанню r від точки M наведена на рис.226. Зі

збільшенням радіуса диска перша відкрита зона віддаляється від M і збільшується кут φ , між нормаллю до поверхні цієї зони в якій-небудь її точці і напрямком випромінювання в бік точки M . Тому інтенсивність центрального максимуму послаблюється при збільшенні розмірів диска. Якщо радіус диска набагато більший за радіус закритої ним центральної зони Френеля, то за диском буде звичайна тінь з дуже слабкою інтерференційною картиною в її межах.

§96. Дифракція Фраунгофера на одній щілині і на дифракційній ґратці

Дифракцію *плоских світлових хвиль*, або дифракцію в паралельних променях вперше розглянув І.Фраунгофер. Дифракція Фраунгофера спостерігається в тому випадку, коли джерело світла і точка спостереження нескінченно віддалені від перешкоди, яка викликала дифракцію. Щоб здійснити цей тип дифракції, потрібно джерело світла помістити у фокусі збірної лінзи, а дифракційну картину досліджувати у фокальній площині другої збірної лінзи, встановленої за перешкодою.

Розглянемо дифракцію Фраунгофера від *нескінченно довгої щілини*. Нехай паралельний пучок монохроматичного світла падає нормально на непрозорий екран E , в якому прорізано вузьку щілину BC , що має сталу ширину $a=BC$ і довжину $l \gg a$ (рис.229). За принципом Гюйгенса-Френеля точки щілини є вторинними джерелами хвиль, які коливаються в одній фазі, бо площина щілини збігається з фронтом падаючої хвилі.

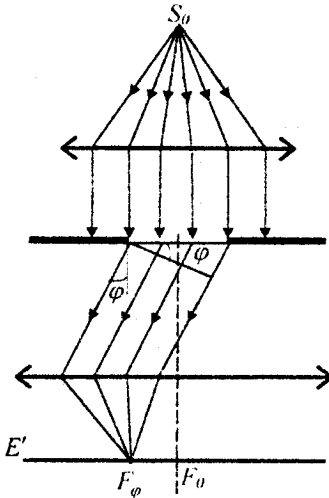


Рис.229

У побічному фокусі лінзи F_φ збираються всі паралельні промені, які падають на лінзу під кутом φ до її оптичної осі OF_0 , перпендикулярної до фронту падаючої хвилі. Оптична різниця ходу Δ між крайніми променями CN і BM , які йдуть від щілини в цьому напрямі, дорівнює $\Delta = CD = a \sin \varphi$, де BD – перпендикуляр, який опущений з точки B на промінь CN .

Щілину BC можна розбити на зони Френеля, які мають вигляд смуг, паралельних до ребра B щілини (рис.230). Ширина кожної зони вибирається так, щоб різниця

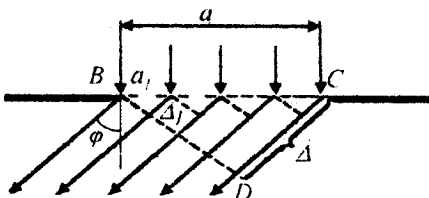


Рис.230

ходу від країв цих зон дорівнювала $\Delta_1 = \lambda/2$, тобто разом на ширині щілини

поміститься $n = \frac{a}{\Delta_1} = \frac{a}{\lambda/2}$ зон. Ширина

кожної зони дорівнює $a_1 = \frac{\lambda/2}{\sin \varphi}$ і їх площі

однакові. Всі зони в заданому напрямку випромінюють світло цілком однаково. При інтерференції світла від кожної пари сусідніх зон амплітуда результуючих коливань дорівнює нулю, бо ці зони спричиняють коливання з однаковими амплітудами, але протилежними фазами. Отже, результат інтерференції світла в точці F_φ визначиться тим, скільки зон Френеля вкладається в щілині. Якщо кількість зон парна, то

$$a \sin \varphi = \pm 2k \frac{\lambda}{2},$$

і в точці F_φ отримується *дифракційний мінімум*. Знак “-” у правій частині відповідає променям світла, які поширюються від щілини під кутом $-\varphi$ і збираються в побічному фокусі $F_{-\varphi}$ лінзи, який симетричний F_φ відносно головного фокусу F_0 . Якщо кількість зон непарна, то

$$a \sin \varphi = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2},$$

і в точці F_φ буде *дифракційний максимум*, який відповідає дії однієї зони Френеля. k – порядок дифракційного максимуму.

У напрямку $\varphi=0$ спостерігатиметься найінтенсивніший центральний максимум нульового порядку; коливання, які спричинюються в точці F_0 всіма ділянками щілини, здійснюється в одній фазі.

Розрахунок дифракційної картини, що ґрунтується на використанні методу зон Френеля, наближений. Точніше можна визначити розподіл інтенсивності світла у

будь-якій точці екрана, якщо поділити відкриту частину хвильової поверхні на елементарні смуги, які паралельні межі щілини і розрахувати результат інтерференції вторинних хвиль, що поширюються від цих смуг. В результаті інтенсивність світла у різних точках екрана визначається формулою

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi\right)^2},$$

де I_0 - інтенсивність центрального максимуму, який відповідає $\varphi = 0$.

Досліджуючи цю формулу на екстремуми, отримаємо, що мінімуми інтенсивності спостерігаються для кутів дифракції, коли $\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi = \pm k\pi$, тобто коли

$$a \sin \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots);$$

Кути дифракції φ , які відповідають максимумам інтенсивності, можна знайти, розв'язуючи трансцендентне рівняння

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi\right) = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi,$$

тобто для кутів

$$\sin \varphi_1 = \pm 1,43 \frac{\lambda}{a}, \quad \sin \varphi_2 = \pm 2,46 \frac{\lambda}{a},$$

$$\sin \varphi_3 = \pm 3,47 \frac{\lambda}{a}, \quad \sin \varphi_4 = \pm 4,48 \frac{\lambda}{a}.$$

Якщо ж розрахувати ці кути φ на основі наближеної формули

$$a \sin \varphi = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2},$$

то отримаємо

$$\sin \varphi_1 = \pm 1,50 \frac{\lambda}{a}, \quad \sin \varphi_2 = \pm 2,50 \frac{\lambda}{a},$$

$$\sin \varphi_3 = \pm 3,50 \frac{\lambda}{a}, \quad \sin \varphi_4 = \pm 4,50 \frac{\lambda}{a}.$$

Отже, різниця дуже невелика.

Залежність відношення $\frac{I_{\varphi}}{I_0}$ від

$\sin \varphi$ зображено на рис.231.

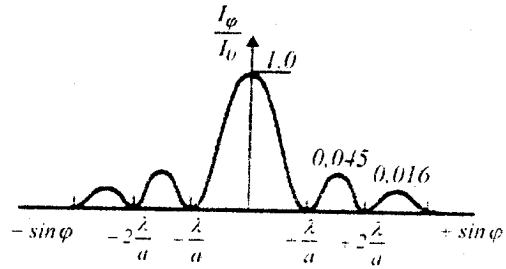


Рис.231

Розрахунок показує, що інтенсивності центрального і наступних максимумів відносяться як

$$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 = 1 : 0,045 : 0,016 : 0,0083 : \dots,$$

тобто основна частина світлової енергії зосереджена в центральному максимумі.

Шириною дифракційного максимуму на екрані E' називають відстань між двома найближчими до нього дифракційними мінімумами.

Ширина максимуму нульового порядку дорівнює відстані між двома мінімумами першого порядку, тобто $l = 2 \frac{\lambda}{a}$. Отже, центральна світла смуга тим ширша, чим більша довжина хвилі λ і чим менша ширина щілини a . В межах самої центральної смуги інтенсивність досить швидко зменшується від її середини до країв. При $\varphi = \pm \frac{\lambda}{2a}$ інтенсивність дорівнює 0,4 від максимальної.

Для $a = \lambda \left(\sin \varphi = 1, \varphi = \frac{\pi}{2} \right)$ головний максимум охоплює всю область екрана, тобто екран освітлений рівномірно. При збільшенні ширини щілини ($a > \lambda$) дифракційні смуги стають вузькими, а число

мінімумів $k = \frac{a}{\lambda} \sin \varphi$ зростає. Дифракційна картина стає яскравіша, оскільки через ширшу щілину проходить більший світловий потік. Коли щілина досить широка ($a \gg \lambda$), то в центрі дифракційної картини буде чітке зображення джерела світла, що відповідає прямолінійному поширенню світла.

У випадку білого світла буде спостерігатися сукупність відповідних картин для різних кольорів. Центральний максимум має райдужне забарвлення по краях. Повного гасіння світла не буде в жодній точці екрана, бо максимуми і мінімуми світла з різними λ перекриваються.

Розглянемо дифракцію світла, зумовлену дією *дифракційної ґрадки*. Цей випадок дифракції найважливіший, бо його широко використовують у багатьох експериментальних методах спектрального аналізу світла.

Найпростіша дифракційна ґрадка — це система з великої кількості однакових за шириною і паралельних одна до одної щілин, що лежать в одній площині і відокремлені непрозорими проміжками, однако-

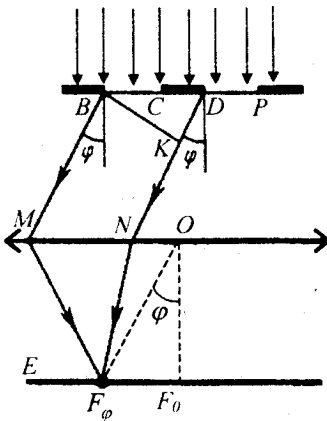


Рис.232

вими за шириною. $BC = DP = a$; $CD = b$; $d = a + b$ — період дифракційної ґрадки (рис.232). Розглянемо дифракцію плоскої монохроматичної хвилі, яка падає нормально на поверхню ґрадки. Коливання в усіх точках щілин відбуваються в одній фазі, оскільки ці точки лежать на тій самій хвильовій поверхні. Знайдемо результуючу амплітуду $E_{\text{ор}\varphi}$ коливань у точці F_φ екрана E , в якій збираються промені від усіх щілин ґрадки, що падають на лінзу під кутом φ до її оптичної осі OF_0 .

Очевидно, що в тих напрямках, в яких одна із щілин не поширює світла, воно не буде поширюватися і при двох щілинах, тобто головні мінімуми інтенсивності будуть спостерігатися в напрямках, що визначаються умовою:

$$a \sin \varphi = \pm k \lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Оскільки щілини знаходяться одна від одної на однакових відстанях, то різниця ходу променів, що йдуть від двох сусідніх щілин, будуть для даного напрямку φ однакові в межах всієї дифракційної ґрадки:

$$\Delta = KD = (a + b) \sin \varphi = d \sin \varphi.$$

Крім того, внаслідок взаємної інтерференції світлових променів, які посиляються двома щілинами, в деяких напрямках вони будуть гасити один одного, тобто виникнуть додаткові мінімуми. Ці додаткові мінімуми будуть спостерігатися в тих напрямках, яким відповідає різниця ходу променів $\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, \dots$, які поширюються від двох щілин.

Отже, з урахуванням $d \sin \varphi = \Delta$ умова *додаткових мінімумів*:

$$d \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Навпаки, дія одної щілини буде підсилювати дію другої, якщо

$$d \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} = \pm m\lambda (m = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

тобто – це умова **головних максимумів**.

Якщо дифракційна градка складається з N щілин, то інтенсивність світла, що поширюється під кутом φ до нормалі, після дифракції від дифракційної градки має вигляд:

$$I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi\right) \sin^2\left(N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right)},$$

де I_0 – інтенсивність світла, що проходить через одну щілину, коли $\varphi = 0$. Перший

множник $\frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi\right)^2}$ характеризує

розподіл інтенсивності при дифракції плоскої хвилі від кожної щілини. Другий

множник $\frac{\sin^2\left(N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right)}$ враховує ін-

терференцію між променями, що дифрагують під кутом φ від N щілин.

Перший множник перетворюється в нуль в точках, для яких

$$a \sin \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

В цих точках інтенсивність, яка створюється кожною із щілин зокрема, дорівнює нулю. **Це умова головного мінімуму.**

При умові $d \sin \varphi = \pm m\lambda$

$$\frac{\sin\left(N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right)} = \lim_{\alpha \rightarrow \pm m\pi} \frac{\sin(N\alpha)}{\sin \alpha} = N$$

$$i \quad I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi\right)^2} N^2.$$

Отже, якщо виконується умова $d \sin \varphi = \pm m\lambda$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), то інтенсивність світла, дифрагованого на N щілинах, зростає в N^2 разів порівняно з інтенсивністю світла, що проходить крізь одну щілину. Максимуми, що виникають за даної умови, називаються **головними максимумами**. Вони будуть лише тоді, коли одночасно

$$\sin\left(N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right) = 0 \quad \text{і} \quad \sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right) = 0.$$

Вираз для інтенсивності світла I_φ перетворюється на нуль, коли

$$\sin\left(N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right) = 0, \quad \text{а} \quad \sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right) \neq 0,$$

тобто за умови, що

$$N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi = \pm (Nm + m')\pi$$

$$i \quad d \sin \varphi = \pm \left(m + \frac{m'}{N}\right)\lambda$$

$$(m' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots),$$

тобто m' приймає всі цілочисельні значення, крім $0, N, 2N, \dots$, при яких дана умова переходить в $d \sin \varphi = \pm m\lambda$.

Умова

$$d \sin \varphi = \pm \left(m + \frac{m'}{N}\right)\lambda$$

визначає напрямки, в яких коливання від окремих щілин будуть взаємно гасити одне одного. Це умова **додаткових мінімумів**.

Між двома сусідніми додатковими мінімумами утворюються максимуми, які називаються *вторинними*. При великому N найближчий до головного максимуму вторинний максимум має інтенсивність в 22 рази меншу, ніж інтенсивність головного максимуму.

Отже, між двома сусідніми головними максимумами знаходиться $N - 1$ додаткових мінімумів і $N - 2$ вторинних максимумів. На них накладатимуться мінімуми, що виникають при дифракції від однієї щілини.

Із формул

$$a \sin \varphi = \pm k \lambda \quad \text{і} \quad d \sin \varphi = \pm m \lambda$$

видно, що головний максимум m -го порядку збігається з k -им мінімумом від одної щілини, якщо виконується рівність

$$\frac{k}{a} = \frac{m}{d}, \quad \text{або} \quad \frac{m}{k} = \frac{d}{a}.$$

На рис.233 наведено розподіл інтенсивності I_φ від $\sin \varphi$ для $N = 4$ і $\frac{d}{a} = 3$.

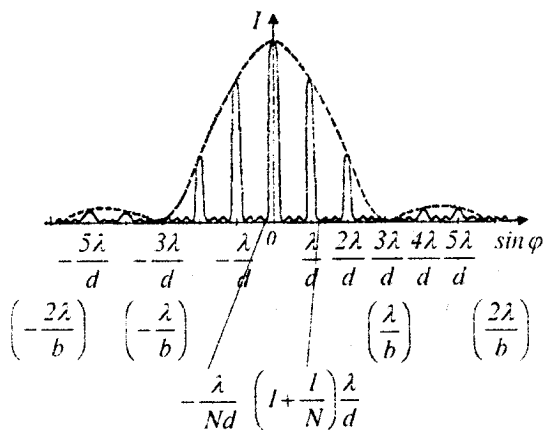


Рис. 233

Пунктирна крива, що проходить через вершини головних максимумів, зображує інтенсивність від однієї щілини, яка помножена на N^2 . Як видно з рис.233, при

відношенні $\frac{d}{a} = 3$ головні максимуми 3-го, 6-го тощо порядків збігаються з мінімумами інтенсивності від однієї щілини, тому ці максимуми зникають.

Чим більше щілини N , тим більша кількість світлової енергії пройде через решітку, тим більше мінімумів утворюється між сусідніми головними максимумами, тим інтенсивнішими і гострішими будуть максимуми.

Оскільки $\sin \varphi$ не може бути більше від одиниці, то кількість головних максимумів $m \leq \frac{d}{\lambda}$.

Якщо дифракційну решітку освітлюють білим світлом, то для різних значень λ положення всіх головних максимумів, крім центрального, не збігаються один з одним. Тому центральний максимум має вигляд білої смужки, а всі інші – райдужних смужок, які називають дифракційними спектрами першого першого, другого і тощо порядків. У межах кожної смужки забарвлення змінюється від фіолетового біля внутрішнього краю (найближчого до максимуму нульового порядку) до червоного – біля зовнішнього краю. На рис.234

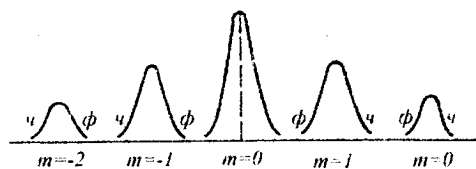


Рис.234

зображено центральний та два головні максимуми і зазначено їхнє забарвлення.

Основними характеристиками дифракційної ґратки є кутова або лінійна дисперсія, дисперсійна область і роздільна здатність.

Кутовою дисперсією називається величина $D = \frac{d\varphi}{d\lambda}$,

де $d\varphi$ – кутова відстань між двома спектральними лініями, яким відповідають довжини хвиль λ і $\lambda + d\lambda$.

Продиференціювавши формулу $d \sin \varphi = m\lambda$, отримаємо $d \cos \varphi d\varphi = md\lambda$. Звідси

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}.$$

Для малих кутів дифракції φ маємо $\cos \varphi \approx 1$ і

$$D = \frac{m}{d} = m \frac{N}{l},$$

де l – довжина робочої ділянки градки.

Звідси видно, що дифракційний спектр рівномірний для всіх довжин хвиль.

Лінійною дисперсією називають величину

$$D_{lin} = \frac{dl}{d\lambda},$$

де dl – лінійна відстань на екрані між двома максимумами одного й того самого порядку m для хвиль λ і $\lambda + d\lambda$.

Якщо фокусна відстань лінзи дорівнює F , у фокальній площині якої спостерігається дифракційна картина, то

$$D_{lin} = FD = F \frac{m}{d}.$$

Максимальна ширина спектрального інтервалу $\Delta\lambda$, в якому спектри не перебиваються, називається **дисперсійною областю** спектрального приладу. Нехай довжини світлових хвиль, що падають на решітку, знаходяться в інтервалі від λ до $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$. Інтервал $\Delta\lambda$ буде дисперсійною областю градки тоді, коли правий край спектра $(m+1)$ -го порядку для

довжини хвилі λ збігатиметься з лівим краєм спектра m -го порядку для довжини хвилі λ' .

Цю умову можна записати так:

$$d \sin \varphi = m\lambda', \quad d \sin \varphi = (m+1)\lambda,$$

звідси

$$m\lambda' = (m+1)\lambda, \quad \lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}.$$

Найменша різниця довжин хвиль двох спектральних ліній $\delta\lambda$, при яких спектральний прилад розділяє їх окремо, називається спектральною розділюючою відстанню, а величина

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$

– **роздільною здатністю** приладу.

Для дифракційної градки Релей запропонував такий критерій спектрального розділення: спектральні лінії з довжинами хвиль λ і $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$ вважаються розділеними, якщо головний максимум дифракційної картини для однієї довжини хвилі збігається за своїм розміщенням з першим дифракційним мінімумом того самого по-

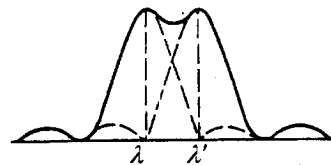


Рис. 235

рядку для другої довжини хвилі, а інтенсивність в проміжку між максимумами становить не більше ніж 80% від інтенсивності максимуму (рис.235).

Нехай головний максимум m -го порядку для хвиль $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$ знаходиться на місці першого мінімуму ($m' = 1$) спектра того самого порядку для хвилі λ :

$$d \sin \varphi = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda, \quad d \sin \varphi = m\lambda'.$$

Звідси

$$\left(m + \frac{l}{N}\right)\lambda = m(\lambda + \delta\lambda),$$

тобто
$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{mN}.$$

Роздільна здатність ґратки

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN.$$

Отже, роздільна здатність ґратки пропорційна порядку спектра m і кількості N щілин.

Оскільки $N = \frac{l}{d}$, а $m = \frac{d \sin \varphi}{\lambda}$, то

$$R = mN = \frac{l \sin \varphi}{d \lambda} = \frac{l \sin \varphi_{\max}}{\lambda},$$

де φ_{\max} – максимальний кут дифракції і $\varphi_{\max} \leq 90^\circ$. Тому, максимальна роздільна

здатність ґратки буде $\left(\frac{\lambda}{\delta\lambda}\right)_{\max} \leq \frac{l}{\lambda}$.

§96. Дифракція рентгенівського випромінювання

Як відомо, рентгенівське випромінювання являє собою електромагнітні хвилі, довжина яких лежить в інтервалі $10^{-10} \div 8 \times 10^{-8}$ м. Залежно від умов одержання рентгенівське випромінювання утворює *суцільний* або *лінійчастий* (характеристичний) спектр.

Щоб ґратка ефективно розклала випромінювання у спектр, її період d має бути того самого порядку, що й довжина хвилі падаючого випромінювання. Для спостереження дифракції рентгенівських хвиль слід мати просторову ґратку, період якої порядку 10^{-10} м. У природі існують такі просторові структури – кристали, де атоми та іони розміщено на відстанях по-

рядку 10^{-10} м. Кристалографічні дослідження показали, що у будь-якому кристалі можна виявити певні площини, де атоми або іони, які утворюють його кристалічну ґратку, розміщені найбільш густо. Такі площини відбиватимуть монохроматичне рентгенівське випромінювання, яке може інтерферувати від різних площин. Очевидно, підсилення хвиль при інтерференції відбудеться для тих значень кута φ , коли в різниці ходу $\Delta = AO + OB$ (рис.236)

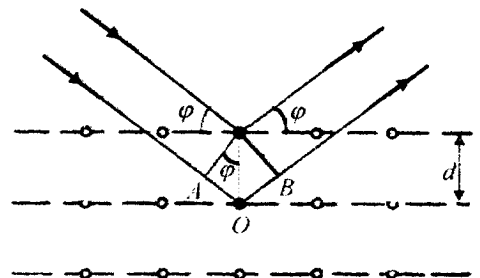


Рис.236

вміщується ціле число довжин хвиль: $2d \sin \varphi = m\lambda$, де φ – доповнюючий кут, або кут ковзання; $m = 1, 2, 3, \dots$; d – відстань між площинами.

Співвідношення $2d \sin \varphi = m\lambda$ є *формулою Вульфа-Брегга*, яка широко застосовується у рентгеноструктурних дослідженнях. Дифракція виникає не в довільному напрямку падіння монохроматичного випромінювання, тому для її спостереження треба повертати кристал так, щоб кут ковзання задовольняв умову $2d \sin \varphi = m\lambda$. Якщо обертати кристал або проводити експеримент з полікристалічною системою, в якій окремі кристалики орієнтовані довільно, то можна дістати певну систему інтерференційних картин від усіх можливих типів атомних площин певного кристала.

Дифракція рентгенівського випромінювання виявилась досить важливим засобом для вивчення структури кристалів, рідин, амфотерних твердих тіл, тощо. За її допомогою можна визначити міжатомні відстані, робити висновки про будову молекул та інших систем.

Розділ фізики і техніки, що використовує рентгенівське випромінювання для вивчення структури твердих тіл, рідин, молекул, називається **рентгеноструктурним аналізом**. Дифракція рентгенівського випромінювання у кристалах використовується також для вивчення рентгенівських спектрів, що дає змогу визначити хімічний склад речовин.

Метод визначення хімічного складу речовин через вивчення їх рентгенівських спектрів називається **рентгеноспектральним аналізом**. Рентгеноструктурний і рентгеноспектральний аналіз досить широко застосовується у багатьох галузях народного господарства.

§97. Дисперсія світла. Області нормальної і аномальної дисперсії

Дисперсією світла називається залежність показника заломлення n речовини від частоти ν (довжини хвилі λ) світла або залежність фазової швидкості v світла в середовищі від його частоти ν . Дисперсією світла представляють у вигляді залежності $n=f(\lambda)$.

Наслідком дисперсії є розклад у спектр пучка білого світла при проходженні його через призму.

Такий дослід вперше виконав в 1672 р. Ньютон. Схема дослідів наведена на рис.237. Промінь світла від Сонця

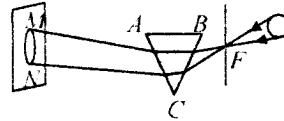


Рис.237

проходить через малий круглий отвір F ставні вікна, потім заломлюється в скляній призмі ABC і падає на аркуш білого паперу. При цьому кругле зображення отвору F розтягується в кольорову смугу MN , яку Ньютон назвав спектром.

Розглянемо дисперсію світла у призмі. Нехай монохроматичний пучок світла падає на призму з показником заломлення n під кутом α_1 (рис.238), δ – за-

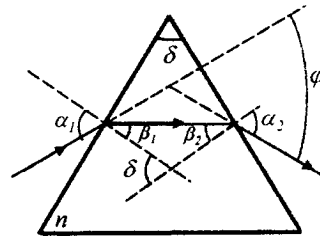


Рис.238

ломлюючий кут призми. Із рис.238 видно, що кут відхилення:

$$\begin{aligned} \varphi &= (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - \delta. \end{aligned}$$

Нехай кути δ і α_1 малі, тоді кути α_2 , β_1 і β_2 будуть малі і синуси цих кутів дорівнюватимуть кутам.

$$\text{Тому } \frac{\alpha_1}{\beta_1} = n, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{1}{n}.$$

Оскільки $\beta_1 + \beta_2 = \delta$, то

$$\alpha_2 = \beta_2 n = (\delta - \beta_1) n = n \left(\delta - \frac{\alpha_1}{n} \right) = n\delta - \alpha_1,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = n\delta \text{ і } \varphi = n\delta - \delta.$$

В результаті

$$\varphi = \delta(n - 1),$$

тобто кут відхилення променів призмою тим більший, чим більший заломлюючий

кут призми. Оскільки кут відхилення φ залежить від величини $n-1$, а n є функцією довжини хвилі, то промені різних довжин хвиль після проходження призми виявляються відхиленими на різні кути.

Величину

$$D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{dn} \frac{dn}{d\lambda},$$

що відповідає постійному значенню кута падіння α_1 , називають *кутовою дисперсією* призми.

Кут відхилення φ буде мінімальним, коли промінь проходить через призму паралельно до її основи. За такої умови $\beta_1 = \beta_2$ і $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, тоді

$$\alpha = \frac{\varphi_{min}}{2} + \frac{\delta}{2}, \text{ а } \beta_1 = \frac{\delta}{2}.$$

Згідно із законом заломлення

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta_1} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi_{min} + \delta)}{\sin \frac{1}{2}\delta}.$$

Звідси

$$\frac{dn}{d\varphi_{min}} = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi_{min} + \delta)}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

Тоді

$$D_\varphi = \frac{2 \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi_{min} + \delta)} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{2 \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi_{min} + \delta)}} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{2 \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}} \frac{dn}{d\lambda}.$$

Для спектральних приладів призми виготовляють здебільшого із заломлюючими кутами $\delta = 60^\circ$. Тоді

$$D_\varphi = \frac{1}{b} \frac{dn}{d\lambda}, \text{ де } b = \sqrt{1 - \frac{n^2}{4}}.$$

За допомогою призми, як і за допомогою дифракційної ґратки, розкладаючи світло у спектр, можна визначити його спектральний склад.

Розглянемо відмінності в дифракційному і призматичному спектрах:

а) дифракційна ґратка розміщує падаюче світло безпосередньо по довжинах хвиль, тому за вимірними кутами можна обчислити довжину хвилі.

Розклад білого світла в призмі відбувається за значеннями показника заломлення, тому для визначення довжини світла треба знати залежність $n=f(\lambda)$.

У дифракційному спектрі кольори розміщуються за порядком зростання довжини хвилі, а в дисперсійному – навпаки. Дифракційною решіткою червоні промені, що мають більшу довжину хвилі, ніж фіолетові, відхиляються сильніше.

На рис.239 наведені залежності показника заломлення n від довжини хвилі

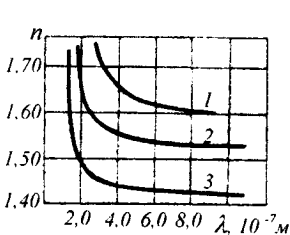


Рис.239

λ для скла (1), кварцу (2) і флюорита (3).

Як видно із рис.239, показник заломлення n монотонно

зростає зі зменшенням довжини хвилі λ . Отже, призмою червоні промені, що мають менший показник заломлення, ніж фіолетові промені, відхилюються на менший кут φ , ніж фіолетові.

б) дисперсійний спектр білого світла стиснутий у червоній області і розтягнутий у фіолетовій, тому що показник заломлення скла в області коротких хвиль при зміні довжини хвилі випромінювання змінюється швидко, а в області довгих хвиль – по-

вільно. Дифракційний спектр рівномірно розтягнутий на всіх своїх ділянках.

Величина $D = \frac{dn}{d\lambda}$ – дисперсія речовини, показує, як швидко змінюється показник заломлення з довжиною хвилі.

Дисперсію світла в середовищі називають *нормальною*, якщо із зростанням частоти ν абсолютний показник заломлення n середовища також зростає:

$$\frac{dn}{d\nu} > 0 \left(\frac{dn}{d\lambda} < 0 \right).$$

Така залежність показника заломлення n від ν буде в тих областях частот, для яких середовище прозоре. Наприклад, звичайне скло прозоре для видимого світла і в цьому інтервалі частот має нормальну дисперсію.

Дисперсію світла в середовищі називають *аномальною*, якщо із зростанням частоти абсолютний показник заломлення середовища зменшується:

$$\frac{dn}{d\nu} < 0 \left(\frac{dn}{d\lambda} > 0 \right).$$

Аномальна дисперсія буде в області частот, які відповідають смугам інтенсивного поглинання світла речовиною. Для скла ці смуги лежать в ультрафіолетовій й інфрачервоній частині спектра. Аномальній дисперсії відповідає інтервал частот від ν_1 до ν_2 (рис.240).

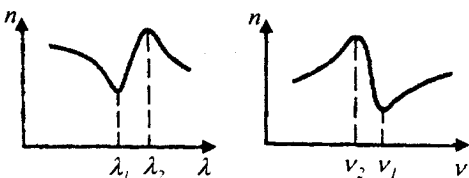


Рис.240

В різних ділянках спектра дисперсія характеризується тією зміною показника заломлення, яка припадає на одиничний

інтервал довжин хвиль. Ця величина $\frac{\Delta n}{\Delta \lambda}$ називається середньою дисперсією для ділянки спектра $\lambda, \lambda + \Delta \lambda$.

У довідникових таблицях показники заломлення різних речовин даються для жовтої лінії натрію $\lambda_D = 0,5893 \text{ мкм}$ і позначаються n_D . Середня дисперсія визначається за синьою $\lambda_F = 0,4861 \text{ мкм}$ і червоною $\lambda_C = 0,6563 \text{ мкм}$ лініях водню і позначається $n_F - n_C$. Величина $\frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$ називається *відносною дисперсією*, обернена її величина – *коефіцієнтом дисперсії*.

Залежність $n = n(\lambda)$ в оптичній області спектра має складний характер; для тих ділянок спектра, які слабо поглинаються даною речовиною, залежність показника заломлення від довжини хвилі може бути подана у вигляді *формули Коші*:

$$n = n_0 + \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda^4} \text{ або } n \approx n_0 + \frac{a}{\lambda^2}.$$

Оскільки показник заломлення світла залежить від частоти коливання світла, то швидкість його поширення також залежить від частоти коливань електромагнітного поля. А що слід розуміти під швидкістю поширення світлового сигналу, який вимірюють дослідним шляхом.

Усі приймачі світла реагують на енергію, тому в дослідах вимірюють *швидкість перенесення енергії світловим сигналом* і називають її *груповою швидкістю*. Вона відрізняється від швидкості поширення фази, яка називається *фазовою швидкістю*.

Розглянемо дві хвилі, амплітуди яких однакові, а різниця між частотами коливань незначна, тобто

$$E_1 = E_0 \cos(\omega t - kx),$$

$$E_2 = E_0 \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x].$$

Додаючи, дістанемо

$$E \approx 2E_0 \cos\left(\frac{t d\omega}{2} - \frac{x dk}{2}\right) \cos(\omega t - kx).$$

Отримали квазікосинусоїдну хвилю, яку називають групою хвиль, або хвильовим пакетом. Амплітуда E_p цієї хвилі не стала, а залежить від координати x і часу t :

$$E_p = 2E_0 \cos\left(\frac{t d\omega}{2} - \frac{x dk}{2}\right).$$

Знайдений вираз для амплітуди хвильового пакета є рівнянням плоскої косинусоїдної хвилі – хвилі амплітуди коливань, фаза якої

$$\Phi_A = \frac{1}{2}(t d\omega - x dk).$$

Об'ємна густина w енергії хвилі прямо пропорційна до квадрата амплітуди цієї хвилі. Отже, швидкість u поширення енергії хвильового пакета збігаються з фазовою швидкістю хвилі амплітуди. Диференціюючи вираз для Φ_A в припущенні, що $\Phi_A = \text{const}$, дістаємо

$$t d\omega - x dk = 0$$

і групова швидкість

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Оскільки $\omega = 2\pi\nu$, а $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi\nu}{c}$,

то

$$d\omega = 2\pi d\nu,$$

$$dk = \frac{2\pi}{c}(n d\nu + \nu dn).$$

Групова швидкість

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2\pi d\nu}{\frac{2\pi}{c}(n d\nu + \nu dn)} =$$

$$= \frac{c}{n + \nu \frac{dn}{d\nu}} = \frac{v}{1 + \frac{\nu}{n} \frac{dn}{d\nu}}.$$

Якщо $\frac{dn}{d\nu} = 0$, то $u = v$, тобто фазова і групова швидкості збігаються. Цей випадок має місце для вакууму.

При нормальній дисперсії $\frac{dn}{d\nu} > 0$ і $u < v$.

При аномальній дисперсії $\frac{dn}{d\nu} < 0$, $u > v$

і, зокрема, якщо $n + \nu \frac{dn}{d\nu} < 1$, то $u < c$.

Цей результат не протирічить твердженню спеціальної теорії відносності про те, що швидкість передачі будь-якого сигналу не може перевищувати c . Поняття групової швидкості правильно описує поширення тільки такого сигналу, "форма" якого, тобто поширення амплітуди і енергії по його "довжині" не міняється при переміщенні сигналу в середовищі. Однак для світла ця умова виконується лише наближено і тим точніше, чим вузьчий спектр частот сигналу і чим менша дисперсія світла в середовищі. В областях частот, що відповідають аномальній дисперсії, групова швидкість не збігається з швидкістю сигналу, оскільки внаслідок значної дисперсії світла "форма" сигналу швидко змінюється у міру його поширення в середовищі.

§98. Електронна теорія дисперсії світла

Дисперсія світла є результатом взаємодії електромагнітних хвиль із зарядженими частинками, що входять до складу речовини. Тому макроскопічна електромагнітна теорія Максвелла не може пояснити цього явища. Класичну теорію дис-

персії було розроблено лише після створення Г.Лоренцом електронної теорії будови речовини.

З теорії Максвелла випливає, що абсолютний показник заломлення середовища $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, ε – відносна діелектрична проникність середовища, μ – відносна магнітна проникність.

В оптичній області спектра для всіх речовин $\mu \approx 1$, тому $n = \sqrt{\varepsilon}$.

На перший погляд здається, що ця формула суперечить даним дослідів. Так, наприклад, для води $\varepsilon = 81$. Водночас для видимого світла $n = 1.33$, а не 9. Проте ця суперечність не пов'язана з якимись принциповими недоліками теорії Максвелла. Вона "з'явилася" внаслідок нехтування явищем дисперсії, тобто неправильного застосування формули $n = \sqrt{\varepsilon}$. Величина ε , як і n , повинна залежати від частоти змінного електромагнітного поля: $\varepsilon = \varepsilon(\nu)$. Справді, величина ε в стаціонарному полі $\varepsilon(0) = 81$ зумовлена орієнтаційною поляризацією. У змінному електричному полі молекули не можуть вмиг змінювати свою орієнтацію, бо їх момент інерції не дорівнює нулю. У змінному полі величина ε буде близькою до $\varepsilon(0)$ у випадку, коли ν не дуже велике. У змінних полях досить великої частоти орієнтаційної поляризації практично не буде. Тому для видимого світла ($\nu \sim 10^{15}$ Гц) величина ε зумовлюється лише електронною поляризацією цього середовища, тобто вимушеними коливаннями електронів у атомах, молекул під дією електромагнітної світлової хвилі. Відповідно $\varepsilon(\nu) < \varepsilon(0)$ і $n < 9$.

Розглянемо електронну теорію дисперсії світла для однорідного діелектрика. З формули $n = \sqrt{\varepsilon}$ випливає, що дисперсію світла можна формально розглядати як наслідок залежності відносної діелектричної проникності середовища ε від частоти ν світлових хвиль.

Відомо, що за визначенням

$$\varepsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E},$$

де χ – діелектрична сприйнятливість середовища, ε_0 – електрична стала, P – миттєве значення вектора поляризації. Отже,

$$n^2 = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}.$$

Внаслідок великої частоти світла поляризація середовища зумовлена лише зміщенням електронів (електронною поляризацією). Отже, $P_c = n_0 p_c$, де n_0 – кількість атомів в одиниці об'єму, p_c – наведений дипольний момент атома. У першому наближенні можна вважати, що величина p_c визначається зміщенням лише зовнішніх, найслабше зв'язаних з ядром електронів атома. Ці електрони називаються оптичними електронами.

Для атомів з одним оптичним електроном $p_c = -ex$ і $P_c = -n_0 ex$, де e – абсолютна величина заряду електрона, x – зміщення електрона під дією електричного поля світлової хвилі. Знак "–" у правих частинах виразів для p_c і P_c введено тому, що вектори \vec{p}_c і \vec{P}_c протилежні за напрямком вектору \vec{x} зміщення негативно зарядженого електрона. Тоді

$$n^2 = 1 - \frac{n_0 ex}{\varepsilon_0 E}.$$

Задача зводиться до визначення зміщення x електрона під дією зовнішнього поля E .

Оптичний електрон здійснює вимушені коливання в полі світлової хвилі під дією таких сил:

а) поперечної квазіпружної сили взаємодії оптичного електрона з іншою частиною атома $F_{\text{пов}} = -kx$, де k – коефіцієнт квазіпружної сили; $k = m\omega_0^2$, ω_0 – циклічна частота вільних незагасаючих коливань.

Отже $F_{\text{пов}} = -m\omega_0^2 x$;

б) сили опору, яка пропорційна до швидкості електрона: $F_{\text{оп}} = -r\dot{x}$, де r – коефіцієнт опору;

в) збуджуючої (вимушуючої) сили: $F = -eE$, де E – напруженість електричного поля світлової хвилі, яка змінюється з часом за законом $E = E_0 e^{i\omega t}$, а $\omega = 2\pi\nu$ – циклічна частота.

Рівняння вимушених коливань

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} - eE_0 e^{i\omega t},$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{eE_0}{m} e^{i\omega t},$$

де $\delta = \frac{r}{2m}$ – коефіцієнт загасання.

Система під дією зовнішньої періодичної сили здійснює вимушені коливання з частотою вимушуючої сили. Тому розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді: $x = x_0 e^{i\omega t}$. Оскільки

$$\dot{x} = i\omega x_0 e^{i\omega t} = i\omega x,$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 x,$$

то
$$-\omega^2 x + i2\delta\omega x + \omega_0^2 x = -\frac{eE}{m}.$$

Звідси

$$x = -\frac{eE}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}.$$

Підставивши це значення зміщення у вираз для n^2 , отримуємо

$$n^2 = 1 - \frac{n_0 e x}{\epsilon_0 E} = 1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}.$$

У випадку, коли є втрати енергії хвилі, показник заломлення є комплексною величиною і введемо його за формулою $n' = n - i\kappa$, де n – справжній показник заломлення, κ – показник поглинання середовища.

Тоді

$$(n - i\kappa)^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}.$$

Перепишемо цей вираз у такий спосіб, розділяючи дійсну і уявну частини:

$$\begin{aligned} (n^2 - \kappa^2) - i2n\kappa &= \\ = 1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i2\delta\omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\delta\omega][(\omega_0^2 - \omega^2) - i2\delta\omega]} &= \\ = 1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2} - & \\ - i \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}. & \end{aligned}$$

Звідси отримуємо

$$n^2 - \kappa^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2},$$

$$2n\kappa = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}.$$

Якщо поглинання незначне, то для частот, які значно відрізняються від власної частоти коливань ω_0 , має місце нерівність $\delta\omega \ll \omega_0^2 - \omega^2$ і співвідношення для показника заломлення буде дійсним і виражатиметься формулою

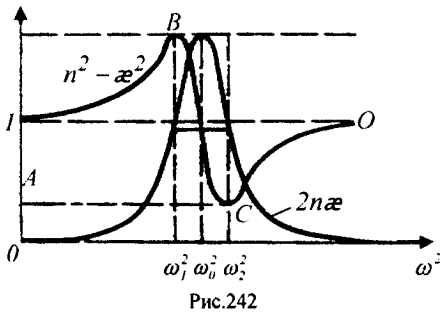
$$n^2 = 1 + \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Звідси видно, що $n > 1$, якщо $0 < \omega < \omega_0$; $n = \pm \infty$ при $\dot{u} = \dot{u}_0$ і $n < 1$, якщо $\omega_0 < \omega < \infty$.

На рис.241 наведена залежність функції $n^2 - 1$ від частоти ω . Для значень $\omega = \omega_0$ функція має розрив, а для всіх інших значень ω спостерігається нормальна

дисперсія, тобто $\frac{dn}{d\lambda} < 0$. Перетворення показника заломлення у нескінченність при $\omega = \omega_0$ не має фізичного змісту і пояснюється нехтуванням поглинання.

На рис.242 показані графіки залежності функцій $n^2 - \varepsilon^2$ і $2n\varepsilon$ від частоти ω .



В інтервалі частот від ω_1^2 до ω_2^2 (крива BC) показник заломлення зменшується зі збільшенням частоти, тобто дисперсія речовини аномальна.

Отримані формули для $n^2 - \varepsilon^2$ і $2n\varepsilon$ справедливі, коли ідентичні атоми або молекули мають лише по одній власній частоті коливань. Насправді атоми і молекули мають набір власних частот ω_{0i} , які спостерігаються у спектрах поглинання та випромінювання.

Нехай з n_0 атомів, що знаходяться в одиниці об'єму, f_1 осциляторів мають частоту ω_{01} і коефіцієнт загасання δ_1 , f_2 осциляторів – частоту ω_{02} і коефіцієнт загасання δ_2 і т.д.

Тоді кількість осциляторів з частотою ω_{0i} і коефіцієнтом загасання δ_i буде $n_{0i} = n_0 f_i$. Щоб врахувати вплив всіх осциляторів на показник заломлення n і показник поглинання у формулах для $n^2 - \varepsilon^2$ і $2n\varepsilon$ треба замість n_0 , ω_0 і δ підставити відповідно n_{0i} , ω_{0i} і δ_i та знайти суму за всіма можливими значеннями i . В результаті отримаємо

$$n^2 - \varepsilon^2 = 1 + \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m} \sum_i \frac{(\omega_{0i}^2 - \omega^2) f_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_i^2 \omega^2},$$

$$2n\varepsilon = \frac{2e^2 n_0}{\varepsilon_0 m} \sum_i \frac{\omega \delta_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_i^2 \omega^2}.$$

Величину f_i називають силою осцилятора. Вона виражає частку участі в явищі дисперсії осциляторів з власною частотою коливань \dot{u}_{0i} . За наявності декількох ліній поглинання графік залежності n від \dot{u} для газів, у яких $x \ll 1$ наведена на рис.243.

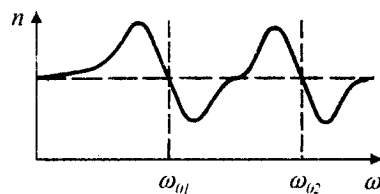


Рис.243

Поблизу кожної із частот \dot{u}_{0i} спостерігається аномальна дисперсія.

§99. Поглинання світла

При проходженні паралельного пучка світла крізь шар прозорого середовища його інтенсивність зменшується, тобто світло поглинається. Явище поглинання світла пояснюється на основі як класичної, так і квантової теорії. Поглинання світла може приводити до нагрівання, іонізації або збудження атомів і молекул речовини, до деформації та ін. Крім того, поглинання може супроводжуватись розсіянням світла та індуктивним випромінюванням.

Щоб отримати співвідношення, яке виражає закон поглинання світла, розглянемо шар прозорого середовища завтовшки l , на який падає паралельний пучок променів інтенсивністю I_0 . Виділимо в середовищі нескінченно тонкий шар dl (рис.244). Дослід показує, що зменшення

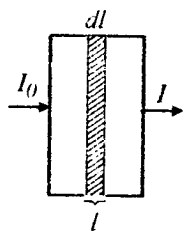


Рис.244

інтенсивності світла шаром середовища dl пропорційне до величини інтенсивності, що входить у цей шар, і товщини шару, тобто

$$dI = -\alpha I dl,$$

де α – коефіцієнт пропорційності, який не залежить від інтенсивності світла називається коефіцієнтом екстинції або коефіцієнтом поглинання. Знак мінус вказує на те, що із збільшенням товщини шару поглинаючого середовища інтенсивність світла, що проходить крізь нього, зменшується.

Після розділення змінних у рівнянні дістаємо

$$\frac{dI}{I} = -\alpha dl.$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\alpha \int_0^l dl.$$

При цьому маємо

$$I = I_0 e^{-\alpha l},$$

де I – інтенсивність світла, що виходить із шару поглинаючого середовища завтовшки l ; I_0 – інтенсивність світла, що входить у поглинаюче середовище. При $l = \frac{1}{\alpha}$

інтенсивність $I = \frac{I_0}{e}$. Отже, шар, товщина якого дорівнює $\frac{1}{\alpha}$, зменшує інтенсивність

світла в e разів. Отримане співвідношення було встановлене у 1729 р. П. Бугером і називається законом Бугера, або законом Бугера-Ламберта. А.Бер незалежно від П.Бугера встановив, що поглинання світла розчинами пропорційне молекулярній концентрації C_0 розчиненої речовини, тобто

$$\alpha = \alpha_0 C_0,$$

де α_0 – коефіцієнт пропорційності, який залежить від природи розчиненої речовини і не залежить від її концентрації.

Тоді закону Бугера-Ламберта-Бера можна надати вигляду

$$I = I_0 e^{-\alpha_0 C_0 l}.$$

Це співвідношення виражає закон Бугера-Ламберта-Бера, який справедливий для газів і розчинів малих концентрацій.

Коефіцієнт поглинання можна виразити через циклічну частоту світла ω і показник поглинання середовища:

$$a = 2 \frac{\omega}{c} \kappa = 2 \frac{2\pi\nu}{\lambda_0} T\kappa = \frac{4\pi}{\lambda_0} \kappa.$$

Отже, коефіцієнт поглинання залежить від довжини хвилі λ_0 (або частоти ω) і від хімічної природи речовини.

В одноатомних газах і парах металів, у яких атоми розміщені на значних відстанях один від одного і їх можна вважати ізольованими, коефіцієнт поглинання для більшості довжин хвиль близький до нуля і лише для дуже вузьких спектральних областей спостерігаються різні максимуми (так званий *лінійчастий спектр поглинання*) (рис.245). Ці лінії відповідають

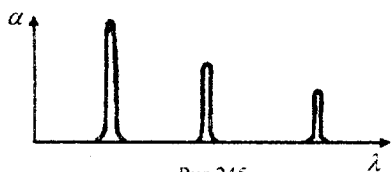


Рис.245

частотам власних коливань електронів в атомах.

У газів з багатоатомними молекулами є системи тісно розміщених ліній, які утворюють *смуги поглинання*. Структура цих смуг визначається складом і будовою молекул.

Рідкі і тверді діелектрики мають *суцільні спектри поглинання*, що складаються з порівняно широких смуг поглинання, в межах яких коефіцієнт поглинання змінюється плавно. За межами цих смуг $\alpha \approx 0$, тобто діелектрики прозорі.

Метали практично непрозорі для світла. Коефіцієнт α для них має значення порядку 10^7 м^{-1} , в той час як для скла $\alpha \approx 1 \text{ м}^{-1}$. Це обумовлено наявністю в металах вільних електронів. Під дією електричного поля світлової хвилі вільні електрони починають рухатись і в металі виникають швидкозмінні структури, що супроводжуються виділенням теплоти. В резуль-

таті енергія світлової хвилі швидко зменшується і перетворюється у внутрішню енергію металу.

Структура спектрів поглинання визначається складом і будовою молекул, тому вивчення спектрів поглинання є одним з основних методів кількісного і якісного дослідження речовин.

§100. Природне і поляризоване світло. Закон Малюса

Наслідком теорії Максвелла є поперечність світлових хвиль: вектори напруженості електричного \vec{E} і магнітного \vec{H} полів хвилі взаємно перпендикулярні і коливаються перпендикулярно до вектора швидкості \vec{v} поширення хвилі. Тому для повного опису стану поляризації світлового пучка необхідно знати поведінку лише одного з векторів. Звичайно всі міркування ведуться відносно *світлового вектора* – вектора напруженості \vec{E} електричного поля (ця назва зумовлена тим, що при дії світла на речовину основне значення має електрична складова поля хвилі, що діє на електрони в атомах речовини).

Світло є сумарним електромагнітним випромінюванням множини атомів. Атоми ж випромінюють світлові хвилі незалежно один від одного, тому світлова хвиля, що випромінюється тілом, характеризується різноманітними рівномірними коливаннями світлового вектора (рис.246). В даному випадку рівномірний



Рис. 246

розподіл векторів \vec{E} пояснюється великим числом атомарних випромінювачів, а рівність амплітудних значень векторів \vec{E} – однако-

вою (в середньому) інтенсивністю випромінювання кожного з атомів.

Світло з усіма можливими рівноймовірними орієнтаціями вектора \vec{E} (і, отже, \vec{H}) називається природним.

Світло, в якому напрями коливань вектора якимось чином упорядковані, називається поляризованим.

Розглянемо дві монохроматичні взаємно перпендикулярні хвилі, що поширюються вздовж додатного напрямку осі OX ,

$$E_y = E_{01} \cos(\omega t - kx),$$

$$E_z = E_{02} \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

де $\omega = 2\pi\nu$ – циклічна частота, $k = \frac{\omega}{v}$ – хвильове число, E_{01} , E_{02} – амплітуди E_y і E_z , φ – різниця фаз коливань E_y і E_z .

Щоб знайти траєкторію результуючого коливання світлового вектора при додаванні двох взаємно перпендикулярних коливань, визначимо $\cos(\omega t - kx)$ з рівняння для E_y :

$$\cos(\omega t - kx) = \frac{E_y}{E_{01}},$$

тоді

$$\sin(\omega t - kx) = \sqrt{1 - \left(\frac{E_y}{E_{01}}\right)^2}.$$

Оскільки

$$\cos(\omega t - kx + \varphi) = \cos(\omega t - kx) \cos \varphi - \sin(\omega t - kx) \sin \varphi,$$

то

$$\frac{E_z}{E_{02}} - \frac{E_y}{E_{01}} \cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{E_y}{E_{01}}\right)^2} \sin \varphi.$$

Піднесемо до квадрата це рівняння:

$$\frac{E_y^2}{E_{01}^2} + \frac{E_z^2}{E_{02}^2} - 2 \frac{E_y E_z}{E_{01} E_{02}} \cos \varphi = \sin^2 \varphi.$$

Отримане співвідношення є рівнянням еліпса, довільно орієнтованого відносно осей OY і OZ . Отже, кінець вектора \vec{E} в кожній точці поля описує еліпс, який лежить у площині, що перпендикулярна до осі OX . Така хвиля називається *еліптично поляризованою*.

$$\text{Якщо } \varphi = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2} \quad (m=0,1,2,\dots),$$

то отримуємо рівняння еліпса, орієнтованого відносно осей OX і OY :

$$\frac{E_y^2}{E_{01}^2} + \frac{E_z^2}{E_{02}^2} = 1.$$

Схематично на рис.247 зображено еліптично поляризовану хвилю.

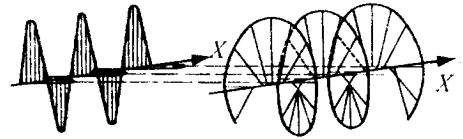


Рис.247

При $E_{01} = E_{02} = E_0$ еліпс перетворюється в коло. Така хвиля називається *циркулярно поляризованою (поляризованою по колу)*.

Залежно від напрямку обертання вектора \vec{E} розрізняють праву і ліву еліптичну і колову поляризацію. Якщо відносно напрямку променя вектор \vec{E} обертається проти годинникової стрілки, поляризація називається *правою*, в протилежному випадку – *лівою*.

Якщо $\varphi = \pm m\pi$ ($m=0,1,2,\dots$), то еліпс вироджується в пряму

$$\frac{E_y^2}{E_{01}^2} \pm \frac{E_z^2}{E_{02}^2} = 0.$$

Така хвиля називається *лінійно поляризованою (плоскополяризованою)* (рис.248).



Рис.248

Якщо внаслідок яких-небудь зовнішніх впливів появляється переважаючий напрямок коливань вектора \vec{E} , то *світло частково поляризоване*.

Площина, в якій відбувається коливання вектора \vec{E} , називається *площиною поляризації* а перпендикулярна до неї площина – *площиною коливань*.

За міру ступеня поляризації приймають вираз

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

де I_{\max} і I_{\min} – максимальна і мінімальна інтенсивність світла, що відповідають двом перпендикулярним компонентам вектора \vec{E} . Для природного світла $I_{\max} = I_{\min}$ і $P=0$. Для плоскополяризованого – $I_{\min} = 0$ і $P=1$. Для еліптично поляризованого світла поняття ступеня поляризації не застосовується (у такого світла коливання повністю впорядковані).

Плоскополяризоване світло можна отримати з природного за допомогою приладів, які називаються *поляризаторами*. Ці прилади вільно пропускають коливання, паралельні до площини поляризації, яка називається *головною площиною*, і повністю або частково затримують коливання, які перпендикулярні цій площині. В ролі поляризаторів можуть бути середовища, які анізотропні відносно коливань вектора \vec{E} , наприклад, кристали. Одним із природних кристалів, які використовуються як поляризатори, може бути турмалін.

Прилади, за допомогою яких аналізують ступінь поляризації світла, називають *аналізаторами*. Роль аналізаторів виконують прилади, за допомогою яких одержують лінійно поляризоване світло. Будь-який поляризатор може бути аналізатором і навпаки.

Нехай на поляризатор падає природне світло (рис.249). Виберемо хвилю,

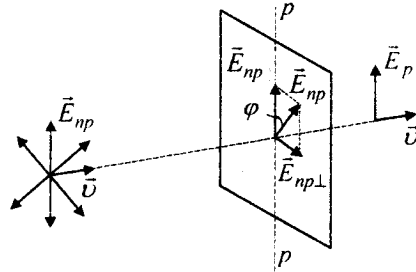


Рис.249

вектор напруженості електричного поля якої \vec{E}_{np} , коливається у площині, що утворює з головною площиною поляризатора p - p кут φ . При вході в поляризатор падаючу хвилю можна представити у вигляді двох коливань у взаємно перпендикулярних площинах:

$$E_{np\parallel} = E_{np} \cos \varphi, \quad E_{np\perp} = E_{np} \sin \varphi.$$

Перше коливання пройде через поляризатор, друге буде затримане. Інтенсивність хвилі, що пройшла, пропорційна до $E_{np\parallel}^2 = E_{np}^2 \cos^2 \varphi$, тобто дорівнює

$$I_p = I_{np} \cos^2 \varphi,$$

де I_{np} – інтенсивність коливань з амплітудою E_{np} .

В природному світлі всі значення φ рівноймовірні. Тому частка світла, що про-

йшло через поляризатор, буде дорівнювати середньому значенню $\cos^2 \varphi$, тобто $\frac{1}{2}$ і

$$I_p = \frac{1}{2} I_{np}.$$

Під час обертання поляризатора навколо напрямку природного світла інтенсивність світла, що пройшло, залишається однією і тією самою, змінюється лише орієнтація площини поляризації світла, що вийшло з поляризатора.

Нехай на аналізатор падає лінійно поляризоване світло, отримане за допомогою поляризатора, головна площина якого $p-p$ утворює кут φ з головною площиною аналізатора $a-a$ (рис.250). При вході в аналізатор лінійно поляризований промінь,

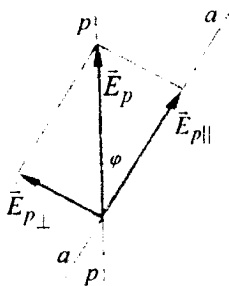


Рис.250

амплітуда електричного вектора якого E_p , поділиться на два лінійно поляризовані промені, площини поляризацій яких взаємно перпендикулярні. Амплітуди вектора напруженості електричного поля цих променів будуть

$$E_{p\perp} = E_p \sin \varphi, \quad E_{p\parallel} = E_p \cos \varphi.$$

Оскільки аналізатор пропускає коливання електричного вектора, що відбуваються в площині $a-a$, а інтенсивність пропорційна квадрату амплітуди $E_{p\perp}$, то

$$I_a = I_p \cos^2 \varphi.$$

Якщо аналізатор не абсолютно прозорий, то $I_a = k_a I_p \cos^2 \varphi$.

Отримані співвідношення виражають **закон Малюса**.

Отже, інтенсивність світла, що пройшла через аналізатор, змінюється від мінімуму (повне погашення світла) при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ до максимуму при $\varphi = 0$.

Якщо пропустити природне світло через поляризатор і аналізатор, площини яких утворюють кут φ , то з першого вийде плоскополяризоване світло, інтенсивність якого $I_p = \frac{1}{2} k_p I_{np}$, а з другого вийде світло інтенсивністю $I_a = k_a I_p \cos^2 \varphi$. Отже, інтенсивність світла, що пройшла через два поляризатори, $I_a = \frac{1}{2} k_p k_a I_{np} \cos^2 \varphi$.

Звідси $I_{max} = \frac{1}{2} I_{np} k_p k_a$ (поляризатори паралельні) і $I_{min} = 0$ ($\varphi = \frac{\pi}{2}$ – поляризатори схрещені).

Нехай еліптично поляризоване світло падає на аналізатор, який пропускає складову $\vec{E}_{p\parallel}$ вектора \vec{E}_p за напрямком площини $a-a$ (рис.251). Максимальне значення цієї складової досягається в точках 1 і 2.

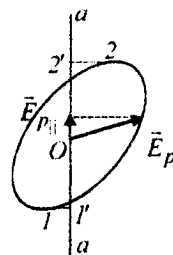


Рис.251

Отже, амплітуда E_a плоскополяризованого світла, що вийде з приладу, буде дорівнювати довжині відрізка OL' . При повертанні аналізатора навколо напрямку променя спостерігається зміна інтенсивності в межах від I_{amax} , яка отримується при збігу осі $a-a$ з великою віссю еліпса, до I_{amin} , яка має місце при збігу осі $a-a$ з малою віссю еліпса. У випадку світла.

поляризованого по колу, обертання аклізатора не супроводжується зміною інтенсивності світла, що пройшло через призо.

§101. Поляризація світла при відбиванні. Закон Брюстера

Якщо природне світло падає на границю поділу двох діелектриків (наприклад, повітря і скла), то частина його відбивається, а частина заломлюється і поширюється у другому середовищі. Якщо встановити на шляху відбитого і заломлюваного променів аналізатор, видно, що відбитий і заломлений промені частково поляризовані: при повертанні аналізатора навколо променів інтенсивність світла періодично посилюється і ослаблюється (повного гасіння не спостерігається).

Подальші дослідження показали, що у відбитому промені переважають коливання, перпендикулярні до площини падіння (•), в заломленому – коливання, паралельні площині падіння (⚡) (рис.252).

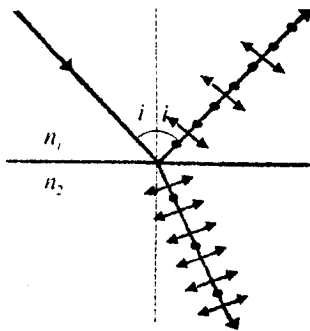


Рис.252

Ступінь поляризації – ступінь виділення світлових хвиль з певною орієнтацією електричного вектора – залежить від кута падіння променів і показника заломлення.

Шотландський фізик Д.Брюстер встановив закон, згідно з яким при куті падіння i_B (кут Брюстера), який задовільняє умову

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21},$$

відбитий промінь є плоскополяризованим. Тут n_{21} – показник заломлення другого середовища відносно першого. Ступінь поляризації заломленого променя при куті падіння i_B досягає найбільшого значення, проте цей промінь залишається поляризованим лише частково.

Якщо світло падає на границю поділу під кутом Брюстера, то відбитий і заломлений промені взаємно перпендикулярні:

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{\sin i_B}{\cos i_B} = n_{21} = \frac{\sin i_B}{\sin \hat{a}}.$$

Звідси $\cos i_B = \sin \hat{a}$. Отже, $i_B + \hat{a} = \frac{\delta}{2}$, але

$$i_B = i, \text{ тому } i + \hat{a} = \frac{\delta}{2}.$$

Відбивання під кутом Брюстера дає змогу отримати лінійно поляризоване світло, однак його інтенсивність невелика і для скла ($n=1.5$) дорівнює близько 15%, тобто основна його частина поширюється у напрямку заломлення хвилі, яка поляризована не повністю. Для збільшення ступеня поляризації заломлених хвиль їх треба пропустити крізь стопу скляних пластинок. Так, для $i = i_B$ стопа з десяти скляних пластинок дає змогу отримати майже сто-процентну поляризацію заломлених хвиль.

§102. Подвійне променезаломлення

Усі прозорі кристали (крім кристалів кубічної системи, які оптично ізотропні) є оптично анізотропні. Їх відносна діе-

лектрична проникність і показник заломлення залежать від напрямку електричного вектора \vec{E} світлової хвилі.

В оптично анізотропних кристалах спостерігається явище *подвійного променезаломлення*, яке полягає в тому, що промінь світла, який падає на поверхню кристала, роздвоюється в ньому на два заломлені промені, що поширюються з різними швидкостями.

Кристали, що мають подвійне променезаломлення, діляться на *одновісні* і *двовісні*. В одновісних кристалів для одного із заломлених променів виконується закон заломлення, зокрема заломлений промінь лежить в одній площині з падаючим променем і нормаллю до заломлючої поверхні. Цей промінь називається *звичайним* (o). Для другого променя, який називається *незвичайним* (e), відношення синусів кута падіння і кута заломлення не залишається постійним при зміні кута падіння. Незвичайний промінь не лежить в одній площині з падаючим променем і нормаллю до кристала поверхні.

На рис.253 показано явище подвійного променезаломлення в одновісному кристалі, коли пучок світла падає на кристал нормально. Один з променів (o) є продовженням падаючого, а другий (e) при проникненні в кристал відхиляється на якийсь кут.

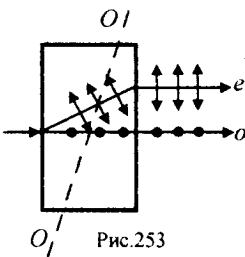


Рис.253

Одновісними кристалами є ісландський шпат, кварц, турмалін, а двовісними – слюда, гіпс. У двовісних кристалів обидва промені незвичайні.

В одновісних кристалах існує єдиний напрямок, вздовж якого подвійне променезаломлення не спостерігається.

Напрямок в кристалі, по якому поширюються звичайний і незвичайний промені не розділяючись і з однаковою швидкістю, називається оптичною віссю кристала. Оптична вісь – це не пряма лінія, що проходить через якусь точку кристала, а певний напрямок в кристалі. Довільна пряма, паралельна до цього напрямку, є оптичною віссю кристала.

Площина, яка проходить через промінь і оптичну вісь кристала, що перетинає промінь, називається *головною площиною* або головним перерізом кристала, що відповідає цьому променю. Через кристал можна провести нескінченну множину паралельних оптичних осей і нескінченну множину паралельних головних перерізів. Лінія перетину двох довільних головних перерізів завжди є оптичною віссю. На рис.253 оптична вісь OO' : промінь, що падає на кристал і поширюється в цьому напрямку не роздвоюється.

Дослідження звичайного і незвичайного променів показує, що обидва промені повністю поляризовані у взаємно перпендикулярних напрямках. Електричний вектор у звичайному промені перпендикулярний до площини головного перерізу (\bullet), а в незвичайному промені лежить у площині головного перерізу (\blacklozenge) (рис.253), тобто площина поляризації звичайного променя перпендикулярна до площини головного перерізу, а незвичайного збігається з площиною головного перерізу.

Після виходу з кристала, якщо не брати до уваги поляризацію у двох взаємно перпендикулярних напрямках (пло-

шинах), ці два промені нічим один від одного не відрізняються.

Подвійне променезаломлення пояснюється анізотропією кристалів. У кристалах некубічної системи діелектрична проникність ϵ виявляється залежною від напрямку дій електричного поля \vec{E} . В одновісних кристалах ϵ в напрямку оптичної осі і в напрямку, який перпендикулярний до неї, має різні значення ϵ_{11} і ϵ_{\perp} , які називаються повздовжньою і поперечною діелектричними проникностями кристала. В інших напрямках ϵ має проміжне значення. А, оскільки $n = \sqrt{\epsilon}$ і $v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$, то з анізотропії ϵ випливає, що світловим хвилям з різними напрямками коливання вектора \vec{E} відповідають різні значення показника заломлення і швидкості світлових хвиль.

Виділимо в кристалі площину головного перерізу і розглянемо промені, що виходять з деякої точки C (рис.254) в

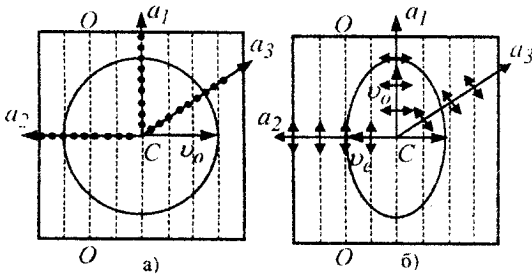


Рис.254

різних напрямках в цій площині. На рис.254а напрямки, які паралельні до оптичної осі, зображені пунктирними лініями, а напрямки коливань електричного вектора показані точками. При довільному напрямку звичайного променя, наприклад, Ca_1 , Ca_2 , Ca_3 , вектор \vec{E} утворює з оп-

тичною віссю кристала прямий кут і швидкість буде одна і та сама в усіх напрямках і дорівнюватиме $v_0 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\perp}}}$. Геометричне

місце точок, до яких промені, що виходять з центра C , будуть доходити за однаковий проміжок часу, є колом (рис.254 а). Якщо розглянути сукупність всіх можливих головних перерізів, що проходять через точку C , то геометричним місцем кінців всіх променів буде сфера.

Коливання вектора \vec{E} в незвичайному промені здійснюється в площині головного перерізу (рис.254б). Тому для різних напрямків коливання вектора \vec{E} утворюють з оптичною віссю OO різні кути α .

Для променя Ca_1 кут $\alpha = \frac{\pi}{2}$ і швидкість поширення коливань дорівнює $v_0 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\perp}}}$.

для променя Ca_2 кут $\alpha = 0$ і швидкість дорівнює $v_e = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{11}}}$. Для променя Ca_3

швидкість має проміжне значення між v_0 і v_e . У такому разі хвильова поверхня має вигляд еліпсоїда обертання навколо оптичної осі, переріз якого однією з головних площин зображено на рис. 254б.

Одновісні кристали характеризуються показником заломлення звичайного променя, який дорівнює $n_0 = \frac{c}{v_0}$, і показником заломлення незвичайного променя

$n_e = \frac{c}{v_e}$. Значення n_e найбільше відрізня-

ється від n_0 для напрямку, який перпендикулярний до оптичної осі.

Залежно від того, яка із швидкостей, v_o чи v_e , більша, розрізняють додатні і від'ємні одинвісні кристали (рис.255).

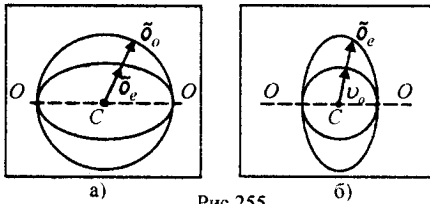


Рис.255

Якщо $v_o > v_e$ і, відповідно, $n_o < n_e$, то кристал називається оптично додатнім і еліпсоїд вписаний у сферу (рис.255а). Для від'ємного кристала $v_o < v_e$ і $n_o > n_e$. У такому разі еліпсоїд описаний навколо сфери (рис.255 б).

Хід звичайного і незвичайного променів в кристалі можна визначити за допомогою принципу Гюйгенса (рис.256).

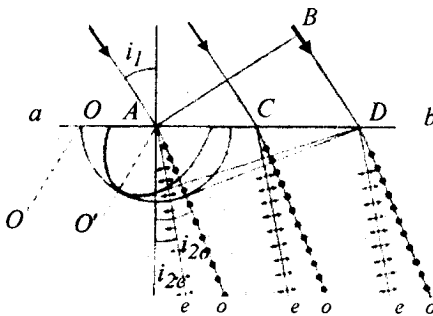


Рис.256

Нехай на плоску поверхню ab одинвісного оптично від'ємного кристала падає під кутом i плоска неполяризована світлова хвиля. Оптична вісь OO' з поверхнею кристала утворює гострий кут і лежить в площині рисунка. В момент часу t фронт AB падаючої хвилі досяг точки A поверхні кристала. За час, поки промінь з точки B досягне точки D , в кристалі з точки A виникнуть сферична та еліпсоїдальна хвильові поверхні. З проміжних точок, які лежать на поверхні кристала між

A і C , також утворяться подібні поверхні, але менших розмірів. Згідно з принципом Гюйгенса прямі DE і DF , які дотикаються відповідно до еліпсоїдальної та сферичної поверхонь, будуть фронтом незвичайної і звичайної хвиль. Промені Ao і Do – звичайні. Вони нормальні до хвильового фронту; промені Ae і De – незвичайні, вони не перпендикулярні до хвильового фронту.

Наведемо результати побудови звичайних і незвичайних променів одинвісних кристалів для ряду інших частинних випадків:

а) світло падає нормально до заломлюючої грані кристала. Оптична вісь OO' утворює гострий кут із заломлюючою гранню кристала (рис.257):

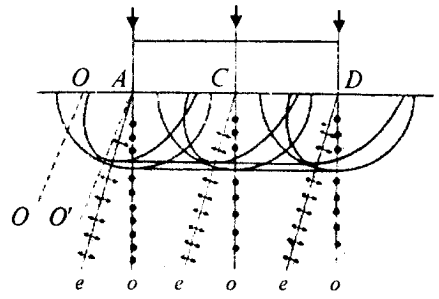


Рис.257

б) оптична вісь паралельна заломлюючій грані і перпендикулярна до площини падіння (рис.258):

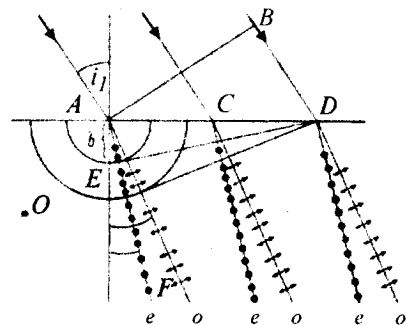


Рис.258

в) оптична вісь паралельна заломлюючій грані і площині падіння світла (рис.259):

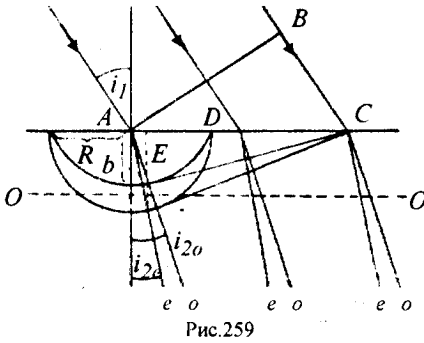


Рис.259

г) оптична вісь паралельна заломлюючій грані. Світло падає нормально на заломлюючу грань (рис.260):

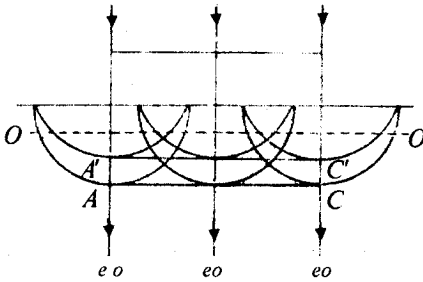


Рис. 260

Явище подвійного променезаломлення лежить в основі роботи поляризаційних пристроїв, які служать для отримання поляризованого світла. Найчастіше для цього застосовуються *призми* і *поляроїди*. Призми ділять на два класи:

- 1) призми, що дають лише плоскополяризований промінь (поляризаційні призми);
- 2) призми, що дають два поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах промені (двозаломні призми).

Типовий представник поляризаційних призм – *призма Ніколя* (ніколь) – подвійна призма з ісландського шпату, які склеєні вздовж лінії AB канадським бальзамом з $n=1,55$ (рис.261).

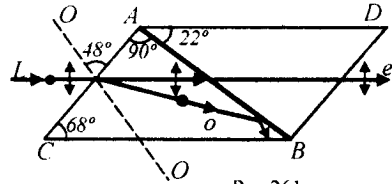


Рис.261

Оптична вісь OO' спрямована під кутом 48° до входної грані AC . Природний промінь L при падінні на грань AC внаслідок подвійного заломлення поділяється на звичайний o і незвичайний промінь e . При певному виборі кутів призми звичайний промінь падає на шар бальзаму під кутом 76° , який більший за граничний, зазнає повного внутрішнього відбивання, падає на зачорнену грань CB і нею поглинається. Незвичайний промінь виходить з призми паралельно до грані CB . Площина його поляризації збігається з площиною головного перерізу.

Прикладом двозаломної призми є *призма Волластона*, яка складається з двох прямокутних призм із ісландського шпату (рис.262). У призмі ABC оптична

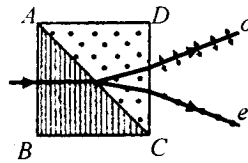


Рис.262

вісь паралельна до катета AB , а в призмі ACD – ребра C , яке перпендикулярне до площини рисунка.

Природне світло падає нормально на грань AB ; обидва промені, звичайний і незвичайний, що виникають в призмі ABC , ідуть по одному напрямку, відповідно з швидкостями v_o і v_e . У другій призмі вони також поширюються в напрямку, який перпендикулярний до оптичної осі, але, оскільки оптичні осі в обох призмах взаємно перпендикулярні, то зви-

чайний промінь в першій призмі перетворюється у незвичайний в другій і навпаки. Тому звичайний промінь в першій призмі заломиться на межі обох призм з відносним показником заломлення n_e/n_o , а промінь незвичайний – з n_o/n_e . Для ісландського шпату $n_o > n_e$ і тому $n_e/n_o < 1$, а $n_o/n_e > 1$. Перший промінь заломиться в бік ребра C призми ACD , а другий – в бік її основи AD . Цим досягається значне розходження променів. Обидва промені плоско поляризовані.

Всі двозаломлені кристали тією чи іншою мірою поглинають світло. Коефіцієнт поглинання неоднаковий для звичайного і незвичайного променів і залежить від напрямку поширення світла в кристалі. Ця явище називається дихроїзмом. Значний дихроїзм у видимій області спектра мають кристали турмаліну, в якому коефіцієнт поглинання для звичайного променя в багато разів більший, ніж для незвичайного. Пластинка турмаліну завтовшки 1 мм практично повністю поглинає звичайний промінь, і світло, що проходить крізь неї, буде лінійно поляризованим.

Плівка завтовшки $0,1\text{ мм}$, на яку нанесено кристалики гепатиту, повністю поглинає звичайний промінь видимої області спектра.

Поляризатори, для створення яких використане явище дихроїзму, називаються *поляроїдами*.

Якщо на одновісний кристал падає лінійно поляризоване світло, то звичайні і незвичайні хвилі, що при цьому виникають, когерентні. Розглянемо взаємодію двох когерентних лінійно поляризованих

хвиль, що поширюються в одному напрямку, площини поляризації яких взаємно перпендикулярні. Це реалізується за допомогою призми Ніколя N , на яку падає природне світло від джерела S і кристалічної пластинки, вирізаної з одновісного кристала, бокова грань якої паралельна оптичній осі (рис.263).

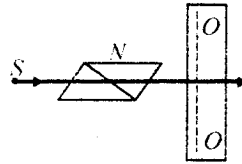


Рис.263

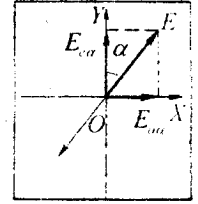


Рис.264

Площина поляризації світла, що виходить з поляризатора, утворює з оптичною віссю пластинки кут $\theta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ і у пластинці поширюватимуться звичайний і незвичайний промені в напрямку падаючого променя. Нехай E – амплітудне значення електричного вектора променя, що падає на пластинку (рис.264). Тоді амплітуди електричних векторів звичайного і незвичайного променів

$$E_{o\alpha} = E \sin \alpha, \quad E_{e\alpha} = E \cos \alpha.$$

Після проходження пластинки завтовшки d між звичайним і незвичайним променями виникає різниця ходу $\Delta = (n_o - n_e)d$ або різниця фаз

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_o - n_e) d,$$

де λ_0 – довжина хвилі у вакуумі.

Тоді коливання електричних векторів звичайного і незвичайного променів здійснюються за законом

$$E_o = E_{o\alpha} \cos(\omega t - \delta) = E \sin \alpha \cos(\omega t - \delta),$$

$$E_e = E_{e\alpha} \cos \omega t = E \cos \alpha \cos \omega t.$$

§103. Штучна оптична анізотропія

При додаванні цих коливань отримуємо рівняння еліпса, довільно орієнтованого відносно осей OX і OY :

$$\frac{E_o^2}{E_{o\alpha}^2} + \frac{E_c^2}{E_{c\alpha}^2} - 2 \frac{E_o E_c}{E_{o\alpha} E_{c\alpha}} \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

Отже, отримуємо еліптично поляризовану хвилю.

$$\text{Якщо } \Delta = (n_o - n_c)d = \frac{\lambda_0}{4}, \text{ то}$$

$\delta = \frac{\pi}{2}$ і еліпс орієнтований відносно головних осей кристала. При $E_o = E_c$ ($\alpha = 45^\circ$) на виході з пластини світло буде циркулярно поляризованим.

Пластинка, для якої

$$\Delta = (n_o - n_c)d = \pm \left(m + \frac{1}{4} \right) \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

називається пластинкою у чверть хвилі. Знак "+" відповідає негативним кристалом, а знак "-" – позитивним.

Пластинка, для якої

$$\Delta = (n_o - n_c)d = \pm \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

називається пластинкою в півхвилі. В цьому випадку зсув фаз $\delta = \pm \left(m + \frac{1}{2} \right) 2\pi$. Про-

йшовши таку пластинку, лінійно поляризоване світло залишається лінійно поляризованим, а електричний вектор змінює напрямок коливань на кут 2α за годинниковою стрілкою.

$$\text{Якщо } \Delta = (n_o - n_c)d = m\lambda_c \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

то $\delta = 2\pi$ і лінійно поляризоване світло після проходження пластинки в одну довжину хвилі буде також лінійно поляризованим без зміни орієнтації площини поляризації.

Подвійне променезаломлення має місце в природних анізотропних середовищах. Існують різні способи отримання *штучної оптичної анізотропії*, тобто надання оптичної анізотропії природно ізотропним речовинам.

Оптично ізотропні речовини стають оптично анізотропними під дією:

- 1) *одностороннього стиску або розтягу* (кристали кубічної системи, скла та ін.) (Т. Зеебек, Д. Брюстер);
- 2) *електричного поля* (рідини, аморфні тіла, гази) (Керр);
- 3) *магнітного поля* (рідини, скло, колоїди) (Коттон, Мутон);

У згаданих випадках речовина набуває властивості одновісного кристала, оптична вісь якого збігається з напрямком, відповідно, деформації, електричного чи магнітного полів.

Мірою оптичної анізотропії, яка виникає, служить різниця показників заломлення звичайного і незвичайного променів в напрямку, перпендикулярному до оптичної осі.

I. Оптичну анізотропію, яка виникає під впливом деформації, можна виявити, якщо помістити досліджуване тіло A між поляризатором p і аналізатором a , які схрещені (рис.265). Доки тіло не деформо-

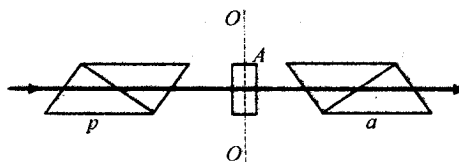


Рис.265

ване, така система світла не пропускає. При односторонньому стиску або розтязі тіла вздовж напрямку OO в ньому виникає

оптична анізотропія, яка еквівалентна анізотропії одноосного кристала з оптичною віссю OO . Звичайний і незвичайний промені будуть поширюватися в напрямку, який перпендикулярний до OO , із різними швидкостями v_o і v_e . Якщо головний переріз поляризатора не паралельний і не перпендикулярний до OO , то світло, яке пройшло через деформоване тіло, стане еліптично поляризованим і його не можна погасити аналізатором.

Різниця коефіцієнтів заломлення $n_o - n_e = \frac{v_o}{c} - \frac{v_e}{c}$ може служити мірою анізотропії, що виникла. Досвід показує, що різниця $n_o - n_e$ пропорційна напрузі σ в даній точці тіла:

$$n_o - n_e = k_I \sigma,$$

де k_I – коефіцієнт пропорційності, що залежить від властивостей речовини. Різниця фаз, яку матимуть звичайний і незвичайний промені, пройшовши тіло завтовшки l , дорівнює

$$\delta = \frac{2\pi l}{\lambda_0} (n_o - n_e) = 2\pi C \sigma l,$$

де λ_0 – довжина хвилі світла у вакуумі, а $C = \frac{k_I}{\lambda}$ – новий коефіцієнт. Залежно від роду речовини коефіцієнт C може бути позитивним або негативним.

Явище штучної оптичної анізотропії при деформаціях використовують для виявлення внутрішніх залишкових напруг, які можуть виникати у виробках зі скла та інших прозорих ізотропних матеріалів внаслідок порушення технології їх виготовлення. Оптичний метод вивчення на прозорих моделях розподілу внутрішніх напруг у різних напружених частинах ма-

шин і споруд широко застосовують у сучасній техніці. Для цього використовують моделі, виготовлені з целулоїду або іншої ізотропної речовини.

Оскільки величина оптичної анізотропії пропорційна напрузі σ , то за виглядом смуг однакового кольору (ізохром), що виникають при спостереженні моделі між схрещеними ніколями, можна зробити висновок про величину напруг.

Оптична анізотропія може виникнути теж і в рідині під впливом зовнішніх динамічних впливів. Виникнення оптичної анізотропії в потоці може бути використана для вивчення властивостей полімерів, що йдуть на виготовлення штучних каучуків і пластмас.

II. У 1875р. Д. Керр виявив, що рідкий або твердий ізотропний діелектрик, вміщений у дуже сильне однорідне електричне поле, стає оптично анізотропним. Це явище називають *ефектом Керра*. Принципову схему спостереження цього явища в рідинах зображено на рис.266, де p і a – поляризатор і схрещений з ним аналізатор.

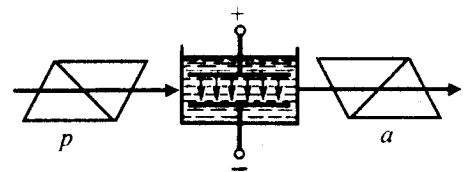


Рис.266

Між ними розміщена кювета з конденсатором ("комірка Керра"), між пластинами якого знаходиться досліджувана рідина. За відсутності електричного поля світло через систему не проходить.

Досліди показали, що під дією однорідного електричного поля в плоскому конденсаторі рідина набирає властивостей

одновісного двозаломлюючого кристала, оптична вісь якого збігається з напрямком вектора \vec{E} напруженості поля конденсатора. Різниця показників заломлення рідини для звичайного і незвичайного променів монохроматичного світла в напрямку, який перпендикулярний до вектора \vec{E} , пропорційна E^2 :

$$n_o - n_e = k_2 E^2,$$

де k_2 – коефіцієнт пропорційності.

Якщо довжина шляху променів між обкладками конденсатора l , то різниця фаз між звичайним і незвичайним променями дорівнює

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_o - n_e) l = \frac{2\pi}{\lambda_0} l k_2 E^2 = 2\pi B E^2,$$

де $B = \frac{k_2 l}{\lambda_0}$ – стала Керра, яка залежить від природи речовини, довжини хвилі λ_0 , температури і швидко зменшується з її збільшенням. Часто користуються іншою константою Керра K , яка пов'язана з B співвідношенням: $K = \frac{B\lambda}{n}$, n – абсолютний показник заломлення речовини за відсутності електричного поля.

У 1930 р. було виявлено існування ефекту Керра і в газах. Трудність спостереження цього явища пов'язана з тим, що значення B для газів на кілька порядків менше, ніж для рідин.

Для більшості речовин $B > 0$, тобто ці речовини за своїми оптичними властивостями в однорідному електричному полі подібні до оптично позитивних одновісних кристалів. Є речовини, для яких $B < 0$.

Ефект Керра пояснюється різною поляризацією молекул за різними напрямками. За відсутності поля молекули орієн-

товані довільно, тому рідина загалом не виявляє анізотропії. Під дією поля молекули повертаються так, щоб в напрямку поля були орієнтовані або їх дипольні електричні моменти (у полярних молекул), або напрям найбільшої поляризації (у неполярних молекул). В результаті речовина стає оптично анізотропною.

Ефект Керра практично безінерційний, тобто перехід речовини з ізотропного стану в анізотропний (і назад) при вмиканні поля становить $\sim 10^{-10}$ с. Тому цей ефект може бути ідеальним світловим затвором і застосовується в швидкоплинних процесах (звукозапис, відтворення звуку, швидкісне фото – і кінознімання), в оптичній локації.

III. Штучну анізотропію можна створити теж дією магнітного поля, яка може мати місце в речовинах, молекули яких анізотропні, тобто в парамагнетиках. За відсутності зовнішнього магнітного поля молекули розміщуються хаотично, результатом чого є статистична анізотропія. Якщо таку речовину помістити в досить сильні магнітні поля, то відбудеться напрямлена орієнтація власних магнітних моментів молекул. Це зумовлює анізотропію речовини, що приводить до подвійного заломлення променів. Таке середовище поводить себе як одновісний кристал, оптична вісь якого паралельна вектору індукції поля \vec{B} . Це явище називається явищем Коттона-Мутона, або магнітооптичним. Різниця показників заломлення середовища при цьому

$$n_o - n_e = k_3 B^2,$$

де k_3 – коефіцієнт пропорційності, а різниця фаз між звичайним і незвичайним променями становитиме

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_o - n_e)l = \frac{2\pi}{\lambda_0}k_3lB^2 = 2\pi DB^2l,$$

де $D = \frac{k_3}{\lambda_0}$ – стала, яка залежить від природи речовини, довжини хвилі світла λ_0 і температури.

§104. Обертання площини поляризації

У кристалічних тілах, а також в деяких ізотропних рідинах, крім подвійного заломлення променів, спостерігається явище, яке полягає в тому, що площина коливань електричного вектора світлової хвилі повертається на деякий кут при проходженні світла крізь такі речовини. Це явище називається обертанням площини поляризації або оптичною активністю. Якщо речовина не знаходиться у зовнішньому магнітному полі, то оптична активність буде природною.

Природна оптична активність була відкрита в 1811 р. Д.Араго на пластинках кварцу, вирізаних перпендикулярно до оптичної осі.

Прийнято визначати напрям обертання площини поляризації відносно спостерігача, погляд якого спрямований назустріч падаючому променю. Обертання називають правим (додатним), якщо площина поляризації повертається вправо (за годинниковою стрілкою) для спостерігача, і лівим (від'ємним), якщо вона повертається вліво.

Експериментально встановлено, що в природі існує два типи кристалів кварцу, які є дзеркальним відображенням один одного. Перші обертають площину поляриза-

ції вправо, другі – вліво і відповідно називаються право- і лівообертаючим кварцем. Кут обертання площини поляризації пропорційний товщині шару оптично активної речовини і для монохроматичного світла, довжина світлової хвилі якого λ визначається формулою

$$\varphi = \alpha l,$$

де l – довжина шляху променя в оптично активному середовищі; α – коефіцієнт пропорційності, який називають оберտальною здатністю, або питомим обертанням. Він залежить від природи речовини, від температури та довжини хвилі і дорівнює величині кута, на який повертається площина поляризації монохроматичного світла при проходженні шару завтовшки l м.

Для оптично активних рідин та розчинів Ж.Біо у 1831 р. встановив, що кут повороту площини поляризації прямо пропорційний товщині шару l і концентрації C оптично активної речовини, тобто

$$\varphi = [\alpha]Cl,$$

де $[\alpha]$ – коефіцієнт пропорційності, який називається *питомим обертанням розчину*. Коефіцієнт $[\alpha]$ залежить від природи оптично активної речовини і розчинника, температури та довжини хвилі світла.

Біо також експериментально встановив наближену залежність величини $[\alpha]$

$$\text{від довжини хвилі } \lambda : [\alpha] \sim \frac{1}{\lambda^2}$$

Для області довжини хвиль незначного поглинання П.Друде встановив, що

$$[\alpha] = \sum \frac{A_i}{\lambda^2 - \lambda_i^2},$$

де A_i – сталі; λ_i – довжини хвиль, що відповідають власним коливанням системи.

Властивості оптичної активності розчинів дають змогу визначити їх концентрації. *Прилади, за допомогою яких проводять такі вимірювання, називаються поляриметрами.* Оскільки для розчину цукру питома обертаність $[\alpha]$ значна, то поляриметри набули широкого застосування в цукрометрії.

Формальну теорію обертання площини поляризації оптично активними речовинами розробив О.Френель. Він вважав, що це явище зумовлене особливим видом подвійного заломлення променів, при якому швидкість поширення світла в активному середовищі різна для променів, що мають праву і ліву колові поляризації. Знак кута повертання площини поляризації визначається співвідношенням променів правої циркуляційної поляризації v_{np} і лівої циркуляційної поляризації v_l . Для $v_{np} > v_l$, оптично активне середовище, за Френелем, буде додатним, тобто обертає площину поляризації вправо і для $v_{np} < v_l$ буде від'ємним.

Лінійно поляризовану хвилю, як відомо, можна розкласти на дві поляризовані по колу хвилі з правим і лівим напрямками обертання з однаковими амплітудами і частотами. На основі таких уявлень лінійно поляризоване світло при

зході в оптично активну речовину можна вважати сумою право- і лівоциркуляційних хвиль (рис.267а). Якщо $v_{np} > v_l$, то при виході з оптично активного середовища з товщиною шару l електричний вектор правоциркуляційної хвилі буде повернутий на більший кут φ_{np} , ніж для лівоциркуляційної хвилі φ_l . Внаслідок цього площина, відносно якої електричні вектори цих хвиль розміщені симетрично, буде повернута вправо на кут φ відносно площини поляризації падаючої хвилі (рис.267б). Кут визначається з умови $\varphi_{np} - \varphi = \varphi_l + \varphi$, звідки маємо

$$\varphi = \frac{\varphi_{np} - \varphi_l}{2}.$$

Оскільки кути повороту електричного вектора правої і лівої хвиль виражаються відповідно через час t і довжину шляху хвиль в оптично активному середовищі, тобто

$$\varphi_{np} = \omega \left(t - \frac{l}{v_{np}} \right) \quad \text{і} \quad \varphi_l = \omega \left(t - \frac{l}{v_l} \right), \quad \text{то}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \left[\omega \left(t - \frac{l}{v_{np}} \right) - \omega \left(t - \frac{l}{v_l} \right) \right] = \frac{\omega l}{2} \left(\frac{1}{v_l} - \frac{1}{v_{np}} \right).$$

Фазові швидкості поширення лівої і правої хвиль виразимо відповідно через коефіцієнти заломлення n_l і n_{np} , $v_{np} = c/n_{np}$ і $v_l = c/n_l$ і підставимо в попередню формулу, тоді, враховуючи, що

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}, \quad \text{отримуємо}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2\pi l}{T} \frac{1}{2} \left(\frac{n_l}{c} - \frac{n_{np}}{c} \right) = \\ &= \frac{\pi l}{cT} (n_l - n_{np}) = \frac{\pi l}{\lambda_0} (n_l - n_{np}), \end{aligned}$$

де $\lambda_0 = cT$ — довжина світлової хвилі у вакуумі. З останнього виразу випливає, що

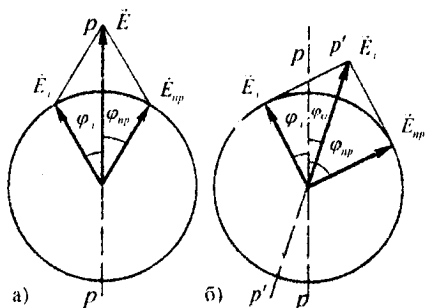


Рис.267

при $n_d > n_{np}$ ($\delta_d < \delta_{np}$) площина поляризації повертається вправо, а при $n_d < n_{np}$ ($\delta_d > \delta_{np}$) – вліво.

Крім природної оптичної активності, у 1845 р. М.Фарадей виявив повертання площини поляризації в оптично неактивних речовинах, розмішених у зовнішньому магнітному полі. Якщо лінійно поляризоване світло поширюється в середовищі у напрямку магнітного поля, то відбувається поворот площини поляризації на деякий кут. Напрямок обертання площини залежить від напрямку поширення світла. Якщо спостерігач дивиться у напрямку магнітного поля, то повертання праворуч вважається додатним, ліворуч – від’ємним. Досліди М.Фарадея та М.Верде показали, що кут повертання площини поляризації пропорційний довжині шляху l променя у речовині і магнітній індукції B , тобто

$$\varphi = VIB,$$

де V – стала Верде, яка залежить від природи речовини і довжини хвилі світла.

§105. Ефект Доплера

Якщо джерело світла і приймач світлових хвиль нерухомі один відносно одного, то частота коливань, що сприймається приймачем, дорівнюватиме частоті ν_0 коливань джерела. Якщо ж джерело або приймач рухаються один відносно одного, то частота ν , що сприймається приймачем, може виявитись відмінною від ν_0 . Це явище називається ефектом Доплера.

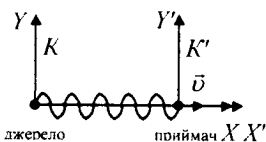


Рис.268

Зв’яжемо з джерелом світла початок координат системи K , а з приймачем –

початок координат системи K' . Осі X і X' спрямуємо вздовж вектора швидкості \vec{v} , з якою система K' рухається відносно системи K (рис.268).

Рівняння плоскої світлової хвилі, що випромінюється джерелом у напрямку до приймача, буде в системі K мати вигляд

$$E(x,t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \varphi \right].$$

Тут ω – частота хвилі, що фіксована в системі K , тобто частота з якою коливається джерело.

Згідно з принципом відносності закони природи мають однаковий вигляд у всіх інерціальних системах відліку. Тому в системі K' хвиля описується рівнянням:

$$E'(x',t') = A' \cos \left[\omega' \left(t' - \frac{x'}{c} \right) + \varphi' \right],$$

де ω' – частота, що фіксована в системі відліку K' , тобто частота, що сприймається приймачем.

Рівняння хвилі в системі K' можна отримати з рівняння в системі K , перейшовши від x і t до x' і t' за допомогою перетворень Лоренца:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, y = y', z = z', t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Отримуємо

$$E(x',t') = A \cos \left\{ \omega \left[\frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x' + vt'}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] + \varphi \right\} = A \cos \left\{ \omega \left[\frac{t' - \frac{v}{c} \frac{x'}{c} + \frac{t' - \frac{v}{c} \frac{x'}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{v}{c} \frac{x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] + \varphi \right\} =$$

$$= A \cos \left\{ \omega \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t' - \frac{x'}{c} \right) + \varphi \right\}.$$

Це рівняння описує в системі K' ту саму хвилю, що і рівняння $E'(x', t')$. Тому повинно виконуватися співвідношення.

$$\omega' = \omega \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \omega \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{c}\right)}} = \omega \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}$$

Змінимо позначення: частоту джерела ω позначимо ω_0 , а частоту приймача $\omega' - \omega$.

$$\text{В результаті } \omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Перейшовши від кругової частоти

$$\text{до лінійної, отримаємо } v = v_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

При віддаленні приймача $v > 0$ і $\omega < \omega_0$; при наближенні приймача до джерела $v < 0$ і $\omega > \omega_0$.

Якщо кут між напрямом спостереження і напрямом швидкості, що вимірюються в системі відліку, зв'язаній з спостережачем, дорівнює θ , то

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}.$$

Формула $v = v_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$ описує **поздовжній ефект Доплера**, який спостерігається

під час руху приймача вздовж лінії, що з'єднує його з приймачем. Якщо $v \ll c$, то

$$\omega \approx \omega_0 \frac{1 - \frac{1}{2} \frac{v}{c}}{1 + \frac{1}{2} \frac{v}{c}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v}{c} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v}{c} \right).$$

Обмежившись членами порядку v/c , отримаємо $\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{v}{c} \right)$, де $\frac{\Delta \omega}{\omega_0} = -\frac{v}{c}$ — відносна зміна частоти.

Значимо, що при віддаленні джерела і приймача один від одного спостерігається зсув в область довших хвиль ($v < v_0, \lambda > \lambda_0$), так зване червоне зміщення. При наближенні — зсув в область коротших хвиль ($v > v_0, \lambda < \lambda_0$), так зване фіолетове зміщення.

Крім поздовжнього ефекту, для світлових хвиль також існує **поперечний ефект Доплера**. Він полягає в зменшенні частоти, яка сприймається приймачем, і спостерігається в тому випадку, коли вектор відносної швидкості напрямлений перпендикулярно вздовж прямої, що проходить через приймач і джерело (наприклад, джерело рухається по колу, в центрі якого поміщено приймач).

У такому разі

$$v = v_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx v_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) < v_0.$$

Відносна зміна частоти при поперечному ефекті Доплера $\frac{\Delta \omega}{\omega_0} = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$, значно менша, ніж при поздовжньому ефекті.

Поперечний ефект Доплера залежить від $\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$, тобто при малих β є ефектом другого порядку малості порівняно з класичним поздовжнім ефектом, який залежить від β . Тому експериментальна перевірка існування поперечного ефекту Доплера пов'язана з великими труднощами.

§106. Теплове випромінювання.

Абсолютно чорне тіло. Закон Кірхгофа.

Закон Стефана – Больцмана

Тіла, нагріті до досить високої температури, набувають здатності світитися. Наприклад, розпечені тверді і рідкі тіла випромінюють біле світло, яке має суцільний спектр частот. Із зниженням температури тіла не лише зменшується інтенсивність його випромінювання, а й змінюється спектр випромінювання. У ньому дедалі більше переважають довгі хвилі (червоні та інфрачервоні). При подальшому охолодженні тіло взагалі припиняє випромінювати видиме світло – воно випромінює невидимі оком інфрачервоні промені.

Свічення тіл, зумовлене нагріванням, називається тепловим (температурним) випромінюванням. Теплове випромінювання є найпоширенішим у природі і здійснюється за рахунок енергії теплового руху атомів і молекул речовини, тобто за рахунок внутрішньої енергії і тому залежить від температури речовини.

Оточимо випромінююче тіло оболонкою з ідеально відбивальною поверхнею (рис.269). Повітря з оболонки відкачаємо. Відбите оболонкою випромінювання, потрапляючи на тіло, поглинається ним (частково або повністю).

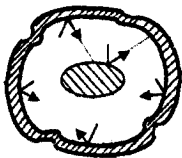


Рис. 269

Буде відбуватися неперервний обмін енергією між тілом і випромінюванням, яке заповнює оболонку. Якщо розподіл енергії між тілом і випромінюванням залишається незмінним при

кожній довжині хвилі, стан системи тіло – випромінювання буде рівноважним.

Дослід показує, що одним видом випромінювання, яке може знаходитися в рівновазі з випромінюючими тілами, є теплове випромінювання.

Здатність теплового випромінювання знаходитися в рівновазі з випромінюючими тілами зумовлена тим, що його інтенсивність зростає при підвищенні температури. Нехай рівновага між тілом і випромінюванням порушена і тіло випромінює енергії більше, ніж поглинає. Тоді внутрішня енергія тіла буде зменшуватись, що приведе до пониження температури. Це у свою чергу обумовить зменшення кількості випромінюваної тілом енергії. Температура тіла буде понижуватись доти, доки кількість випромінюваної тілом енергії не стане рівною кількості поглинутої енергії. Якщо рівновага порушиться в інший бік, тобто кількість випромінюваної енергії виявиться меншою, ніж поглинальної, то температура тіла буде зростати доти, доки знову не встановиться рівновага. Отже, порушення рівноваги в системі тіло – випромінювання викликає виникнення процесів, що відновлюють рівновагу.

Рівноважне випромінювання однорідне і неполяризоване, напрямки його поширення у порожнині рівноймовірні, напрямки векторів \vec{E} і \vec{H} у будь-яких точках простору з часом змінюються хаотично.

Будь-яке випромінювання характеризується *об'ємною густиною та спектральною густиною енергії випромінювання.*

Об'ємна густина w енергії випромінювання дорівнює сумарній енергії одиниці об'єму електромагнітних хвиль усіх

можливих частот ($0 \leq \nu \leq \infty$). Під спектральною густиною енергії випромінювання розуміють енергію в одиниці об'єму електромагнітних хвиль вузького інтервалу частот $\nu, \nu + d\nu$ або інтервалу довжин хвиль $\lambda, \lambda + d\lambda$. Для рівноважного випромінювання спектральна густина енергії є функцією частоти і температури - $\rho_{\nu,T}$ або функцією довжини хвилі і температури - $\rho_{\lambda,T}$.

Об'ємна густина енергії рівноважного випромінювання є універсальною функцією тільки температури і визначається інтегруванням функції $\rho_{\nu,T}$ або $\rho_{\lambda,T}$ в усьому інтервалі частот або довжин хвиль:

$$\varpi = \int_0^{\infty} \rho_{\nu,T} d\nu = \int_0^{\infty} \rho_{\lambda,T} d\lambda.$$

Введемо поняття, які характеризують теплове випромінювання і поглинання тіл.

Кількість R_T енергії, що випромінюється з 1 м^2 поверхні тіла за 1 с по всіх довжинах хвиль, називається інтегральною випромінювальною здатністю, або енергетичною світністю тіла.

Дослідження показують, що енергія випромінювання розподіляється між всіма частотами хвиль, які випромінюються нагрітим тілом.

Кількісною характеристикою теплового випромінювання служить *випромінювальна здатність тіла, яка числово дорівнює потужності випромінювання в одиниці площі поверхні цього тіла в одиничному інтервалі частот:*

$$r_{\nu,T} = \frac{dW_{\nu,\nu+d\nu}^e}{d\nu},$$

де $dW_{\nu,\nu+d\nu}^e$ - енергія електромагнітного випромінювання, що випромінюється за одиницю часу з одиниці площі поверхні тіла в інтервалі частот від ν до $\nu + d\nu$.

Випромінювальна здатність може бути представлена і як функція довжини хвилі. Ділянці спектра $d\nu$ буде відповідати інтервал довжин хвиль $d\lambda$. Величини $d\nu$ і $d\lambda$, що визначають одну і ту ж ділянку, зв'язані співвідношенням, яке випливає із формули $\lambda = \frac{c}{\nu}$. Диференціювання цього виразу дає:

$$d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu = -\frac{\lambda^2}{c} d\nu.$$

Знак "-" вказує на те, що зі зростанням однієї з величин, ν або λ , друга величина зменшується. Тому далі знак "-" опускають.

Якщо інтервали $d\nu$ і $d\lambda$ стосуються однієї і тієї самої ділянки спектра, то

$$r_{\nu,T} d\nu = r_{\lambda,T} d\lambda.$$

Звідси

$$r_{\lambda,T} = r_{\nu,T} \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{c}{\lambda^2} r_{\nu,T}.$$

Інтегральна випромінювальна здатність R_T тіла зв'язана з випромінювальною здатністю $r_{\nu,T}$ співвідношенням:

$$R_T = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu.$$

Усі тіла тією чи іншою мірою поглинають енергію електромагнітних хвиль, які падають на них.

Поглинальна здатність тіла A_T дорівнює відношенню енергії, що поглинається тілом за одиницю часу одиницею площі, до енергії, що падає на тіло при одній температурі.

Спектральна поглинальна здатність тіла $a_{\nu,T}$ показує, яка частина енергії $dW_{\nu,\nu+d\nu}$, що доставляється за одиницю часу на одиницю поверхні тіла електромагнітними хвилями з частотами від ν до $\nu+d\nu$, які падають на неї, поглинаються тілом:

$$a_{\nu,T} = \frac{dW_{\nu,\nu+d\nu}^n}{dW_{\nu,\nu+d\nu}}$$

Поглиналина здатність $a_{\nu,T}$ - величина безрозмірна.

Досліди показують, що випромінювальна здатність $r_{\nu,T}$ і поглинальна $a_{\nu,T}$ тіла залежать від частоти ν хвиль, які відповідно випромінюються або поглинаються, температури тіла, його хімічного складу і стану поверхні.

Тіло, яке здатне поглинути повністю при будь-якій температурі всю енергію електромагнітних хвиль, які падають на нього, незалежно від їх частоти, називається абсолютно чорним.

Отже, поглинальна здатність абсолютно чорного тіла дорівнює одиниці: $a_{\nu,T} = 1$ для всіх частот і температур.

Випромінювальну здатність абсолютно чорного тіла позначимо $r_{\nu,T}^*$. Вона залежить тільки від частоти ν і абсолютної температури тіла T .

Між спектральною густиною енергії рівноважного випромінювання і випромінювальною здатністю абсолютно чорного тіла а існує такий зв'язок:

$$\rho_{\nu,T} = \frac{4}{c} r_{\nu,T}^*$$

Найдосконалішою моделлю абсолютно чорного тіла може бути невеликий отвір O в непрозорій стінці замкненої

порожнини, внутрішня поверхня якої зачорнена (рис.270). Світло, яке потрапляє



Рис. 270

всередину порожнини через отвір O , багаторазово відбивається від стінок порожнини, перш ніж вийти з порожнини назад. При кожному відбиванні енергія світла частково поглинається стінками. Тому незалежно від матеріалу стінок інтенсивність світла, яке виходить з порожнини через отвір O , у багато разів менша за інтенсивність первинного світла, яке падає ззовні.

Поряд з поняттям абсолютно чорного тіла використовують поняття сірого тіла - тіла, поглинальна здатність якого менша від одиниці, але однакова для всіх частот і залежить лише від температури, матеріалу і стану поверхні тіла:

$$a_{\nu,T}^c = \text{const} < 1.$$

Кірхгоф, спираючись на закони термодинаміки й аналізуючи умови рівноважного випромінювання в ізолюваній системі тіл, встановив кількісний зв'язок між випромінювальною здатністю тіла і його поглинальною здатністю.

Розглянемо теплоізолювану систему, яка складається з двох нескінченно довгих пластин a і b , які можуть обмінюватися енергією у формі теплоти лише одна з одною, бо їх зовнішні поверхні покриті ідеально тепловою ізоляцією

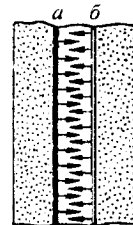


Рис.271

(рис.271). Нехай внутрішня поверхня пластини a абсолютно чорна, а випромінювальна і поглинальна здатності внутрішньої поверхні пластини b дорівнюють $r_{\nu,T}$ і

$a_{v,T}$. Якщо в цій системі встановилась термодинамічна рівновага, то температури обох пластин однакові і дорівнюють T , а випромінювання пластин – рівноважне.

Енергії, що випромінюються і поглинаються одиницею площі поверхні частот від ν до $\nu + d\nu$, становлять

$$dW_{\nu,\nu+d\nu}^{\epsilon} = r_{\nu,T} d\nu,$$

$$dW_{\nu,\nu+d\nu}^n = a_{\nu,T} dW_{\nu,\nu+d\nu}.$$

Енергія $W_{\nu,\nu+d\nu}^n$ електромагнітного випромінювання, яке падає за одиницю часу на одиницю площі пластини b , в інтервалі частот від ν до $\nu + d\nu$, дорівнює енергії, що випромінюється за той самий час і в тому самому інтервалі частот одиницею площі абсолютно чорної поверхні пластини a . Власного випромінювання пластини b в $dW_{\nu,\nu+d\nu}$ враховувати не треба, бо воно може знову повернутись до пластини b тільки після відбивання від пластини a . А абсолютно чорна поверхня a повністю поглинає випромінювання, яке падає на неї, нічого не відбиваючи.

Згідно з принципом детальної рівноваги будь-який мікроскопічний процес в рівноважній системі повинен проходити з такою самою швидкістю, що і зворотний йому, тобто

$$W_{\nu,\nu+d\nu}^{\epsilon} = W_{\nu,\nu+d\nu}^n.$$

Отже,

$$r_{\nu,T} d\nu = a_{\nu,T} r_{\nu,T}^* d\nu,$$

або
$$\frac{r_{\nu,T}}{a_{\nu,T}} = r_{\nu,T}^*.$$

Закон Кірхгофа: відношення випромінювальної здатності тіла до його поглинальної здатності не залежить від мате-

ріалу тіла; воно є для всіх тіл універсальною функцією частоти ν і температури T .

Для абсолютно чорного тіла $a_{\nu,T}^{\epsilon} = 1$, тому $r_{\nu,T}^* = r_{\nu,T}$, тобто універсальна функція Кірхгофа $r_{\nu,T}^*$, є не що інше, як випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла.

Для довільного тіла $a_{\nu,T} < 1$ і тому в довільній області спектра $r_{\nu,T}^* < r_{\nu,T}$.

Якщо тіло не поглинає електромагнітні хвилі якоїсь частоти, то воно їх і не випромінює, оскільки при $a_{\nu,T} = 0, r_{\nu,T} = 0$.

Використовуючи закон Кірхгофа, виразу для інтегральної випромінювальної здатності можна надати вигляду:

$$R_T = \int_0^{\infty} a_{\nu,T} r_{\nu,T}^* d\nu.$$

Для сірого тіла

$$R_T^{\epsilon} = a_{\nu,T}^{\epsilon} \int_0^{\infty} r_{\nu,T}^* d\nu = a_{\nu,T}^{\epsilon} R_T^*,$$

де $R_T^* = A_T \int_0^{\infty} r_{\nu,T}^* d\nu$ - інтегральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла, яке залежить лише від абсолютної температури T .

Після встановлення закону Кірхгофа стало очевидним, що першочергове завдання теорії теплового випромінювання полягає у визначенні вигляду функції Кірхгофа $r_{\nu,T}^*$. Однак спочатку було знайдено залежність інтегральної випромінювальної здатності R_T^* абсолютно чорного тіла від його температури.

У 1884 р. Л. Больцман, застосувавши термодинамічний метод для дослідження чорного випромінювання – рівноваж-

ного теплового випромінювання всередині замкненої порожнини – теоретично показав, що *інтегральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла пропорційна четвертому степеню його абсолютної температури.*

$$R_T^* = \sigma T^4.$$

Цей закон називають *законом Стефана-Больцмана*, бо Д.Стефан на основі експериментальних даних дійшов аналогічного висновку. Але Д.Стефан помилково вважав, що інтегральна випромінювальна здатність будь-якого тіла також пропорційна четвертому степеню його абсолютної температури.

Коефіцієнт пропорційності σ називають сталою Стефана-Больцмана. Внаслідок численних експериментів знайдено,

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{м^2 K^4}.$$

Енергія, яка випромінюється за час t абсолютно чорним тілом з поверхні S при постійній температурі T , дорівнює:

$$W = \sigma T^4 S t.$$

Якщо ж температура тіла змінюється з часом, тобто $T = T(t)$, то

$$W = \int_0^t \sigma T^4(t) S dt.$$

Якщо абсолютно чорне тіло оточене середовищем з температурою T_0 , то воно буде поглинати енергію, що випромінюється самим середовищем. В цьому випадку різниця між випускаючим і поглинаючим випромінюванням приблизно виражається формулою:

$$U = \sigma (T^4 - T_0^4).$$

До реальних тіл закон Стефана-Больцмана не застосовний, оскільки спостереження показують більш складну за-

лежність R_T від температури, а також від форми тіла і стану його поверхні.

**§107. Розподіл енергії в спектрі абсолютно чорного тіла.
Закон зміщення Віна**

Розподіл енергії в спектрі випромінювання абсолютно чорного тіла вивчено експериментально до кінця XVIII ст. В ролі абсолютно чорного тіла використовували порожнину з малим отвором, а також вугілля. З'ясування спектрального складу випромінювання абсолютно чорного тіла вийшло далеко за межі теорії теплового випромінювання і відіграло величезну роль у всьому подальшому розвитку фізики, бо привело до встановлення квантового характеру випромінювання і поглинання енергії атомами.

Експерименти показали, що залежність $r_{\nu, T}^*$ від частоти ν при різних температурах T абсолютно чорного тіла має вигляд, зображений на рис.272.

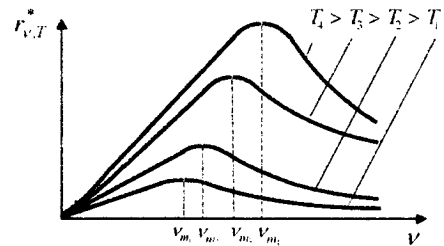


Рис.272

При малих частотах $r_{\nu, T}^* \sim \nu^2 T$, а в області великих частот залежність $r_{\nu, T}^*$ від частот має вигляд $r_{\nu, T}^* \sim \nu^3 e^{-a_1 \frac{\nu}{T}}$, де a_1 - сталий коефіцієнт, $[a_1] = K \cdot c$. Цю залежність встановив В.Він.

Існування на кожній кривій більш або менш чітко вираженого максимуму свідчить про те, що енергія випромінювання абсолютно чорного тіла розподілена по його спектру нерівномірно: абсолютно чорне тіло майже не випромінює енергії в області дуже малих і дуже великих частот. З підвищенням температури тіла максимум $r_{\nu,T}^*$ зміщується в область великих частот.

Площа, обмежена кривою залежності $r_{\nu,T}^*$ від ν і віссю абсцис, пропорційна до інтегральної випромінювальної здатності R_T^* абсолютно чорного тіла. Тому за законом Стефана-Больцмана вона зростає пропорційно до T^4 .

Використовуючи закони термодинаміки і електродинаміки, В.Він у 1893 р. встановив характер залежності випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла $r_{\nu,T}^*$ від частоти і температури. Було встановлено, що величина $r_{\nu,T}^*$ прямо пропорційна кубу частоти і є функцією відношення $\frac{\nu}{T}$, тобто $r_{\nu,T}^* = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$, де $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ - функція відношення частоти випромінювання абсолютно чорного тіла до його температури.

Віну не вдалося теоретично встановити вигляд функції $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$. Закон Віна дав змогу досягнути ряд важливих результатів.

Отримаємо закон Стефана-Больцмана:

$$\begin{aligned} R_T^* &= \int_0^{\infty} r_{\nu,T}^* d\nu = \int_0^{\infty} \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu = \\ &= T^4 \int_0^{\infty} \left(\frac{\nu^3}{T}\right) f\left(\frac{\nu}{T}\right) d\left(\frac{\nu}{T}\right) = \sigma T^4, \end{aligned}$$

де $\sigma = \int_0^{\infty} \left(\frac{\nu}{T}\right)^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) d\left(\frac{\nu}{T}\right)$ - сталий коефіцієнт.

Із закону Віна можна знайти залежність від температури частоти ν_m , яка відповідає максимальному значенню випромінювальної здатності $r_{\nu,T}^*$ абсолютно чорного тіла.

При $\nu = \nu_m$ частинна похідна

$$\frac{\partial r_{\nu,T}^*}{\partial \nu} = 3\nu^2 f\left(\frac{\nu}{T}\right) + \frac{\nu^3}{T} f'\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

має дорівнювати нулю

$$3\nu_m^2 f\left(\frac{\nu_m}{T}\right) + \frac{\nu_m^3}{T} f'\left(\frac{\nu_m}{T}\right) = 0;$$

$$3f\left(\frac{\nu_m}{T}\right) = -\frac{\nu_m}{T} f'\left(\frac{\nu_m}{T}\right).$$

Звідси $\frac{\nu_m}{T} = b_1$, де b_1 - стала величина, яка є коренем рівняння і залежить від вигляду функції $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$. Рівняння $\frac{\nu_m}{T} = b_1$ виражає

закон зміщення Віна:

частота, яка відповідає максимальному значенню випромінювальної здатності $r_{\nu,T}^*$ абсолютно чорного тіла, прямо пропорційна його абсолютній температурі.

Закон зміщення Віна записують в дещо іншій формі, розглядаючи максимум випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла $r_{\nu,T}^*$, віднесеної до інтервалу $d\lambda$ довжин хвиль (у вакуумі).

Оскільки

$$r_{\nu,T}^* = r_{\lambda,T}^* \frac{\lambda^2}{c}, \text{ або } r_{\lambda,T}^* = \frac{c}{\lambda^2} r_{\nu,T}^*,$$

$$\text{то } r_{\lambda,T}^* = \frac{c}{\lambda^2} \left(\frac{c}{\lambda}\right)^3 f\left(\frac{c}{\lambda T}\right) = \frac{c^4}{\lambda^5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right).$$

Це співвідношення дозволяє встановити залежність між довжиною хвилі λ_m , на яку приходиться максимум функції $r_{\lambda,T}^*$, і температурою.

Закон зміщення Віна:

довжина хвилі λ_m , яка відповідає максимальному значенню випромінювальної здатності $r_{\lambda,T}^$ абсолютно чорного тіла, обернено пропорційна його температурі:*

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

b - стала Віна, $b = 2,829 \cdot 10^{-3} \text{ мК}$.

Із закону Віна видно, що при зниженні температури чорного тіла максимум енергії його випромінювання зміщується в область великих довжин хвиль. Отже, стає зрозуміло, чому при зниженні температури світних тіл в їх спектрі все більше переважає довгохвильове випромінювання.

Слід відзначити, що випромінювальні здатності $r_{\nu,T}^*$ і $r_{\lambda,T}^*$ не пропорційні одна до одної. Тому їх максимуми лежать у різних частинах спектра, так що λ_m і ν_m не зв'язані співвідношенням $\lambda = \frac{c}{\nu}$.

Значення максимуму випромінювальної здатності $r_{\lambda,T}^*$ абсолютно чорного тіла пропорційне п'ятому степеню його абсолютної температури:

$$(r_{\lambda,T}^*)_{\text{max}} = \frac{c^4}{\lambda_m^5} f\left(\frac{c}{\lambda_m T}\right) = \frac{c^4}{b^5} f\left(\frac{c}{b}\right) T^5 = b_2 T^5,$$

де $b_2 = 1,29 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \text{К}^5}$.

З розгляду законів Стефана-Больцмана і Віна виходить, що термодинамічний підхід до розв'язання задачі про знаходження функції Кірхгофа $r_{\nu,T}^*$ не дає бажаних результатів. Наступна спроба теоретичного виведення залежності $r_{\nu,T}^*$ належить англійським вченим Д.Релею і Д.Джінсу, які застосували до теплового випромінювання методи статистичної фізики, використавши класичний закон розподілу енергії за ступенями вільності.

Формула Релея-Джінса для випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла має вигляд:

$$r_{\nu,T}^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT,$$

де k - стала Больцмана.

Цей вираз узгоджується з експериментальними даними лише в області малих частот і великих температур. Для великих частот формула була явно неправильною. Розбіжність між експериментальною кривою (суцільна лінія) і кривою, одержаною за допомогою формули Релея-Джінса

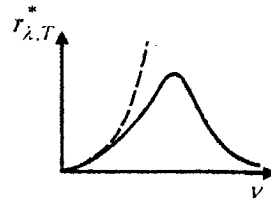


Рис.273

(штрихова лінія), видно з рис.273. Спроба отримати закон Стефана-Больцмана з формули Релея-Джінса не дає позитивного результату. Інтегральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла при будь-якій температурі перетворюється в нескінченність:

$$R_T^* = \int_0^\infty r_{\nu,T}^* d\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \int_0^\infty \nu^2 d\nu = \infty.$$

Водночас за законом Стефана-Больцмана $R_T^* \sim T^4$. Цей результат отримав назву "ультрафіолетової катастрофи".

Отже, в рамках класичної фізики не вдалося пояснити закони розподілу енергії в спектрі абсолютно чорного тіла.

Вперше правильний вираз для функції Кірхгофа знайшов і теоретично обґрунтував спектральні закономірності випромінювання абсолютно чорного тіла німецький фізик М. Планк у 1900 р.

Об'ємна густина енергії рівноважного випромінювання в замкненій порожнині і розподіл енергії цього випромінювання за частотами залежить лише від температури стінок порожнини. Матеріал стінок, тобто конкретні властивості системи, з якою пов'язане рівноважне випромінювання, не має значення. Тому в своїх розрахунках Планк вибрав найпростішу модель випромінювальної системи у вигляді сукупності лінійних гармонічних осциляторів (електричних диполів) з найрізноманітнішими частотами ν . Кожний з таких осциляторів відповідає монохроматичній компоненті чорного випромінювання.

Нехай $\langle \mathcal{E}_\nu \rangle$ - середнє значення енергії осцилятора з власною частотою ν . Тоді, як показав Планк, випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла

$$r_{\nu,T}^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \langle \mathcal{E}_\nu \rangle.$$

Правильний вираз для середньої енергії осцилятора $\langle \mathcal{E}_\nu \rangle$ і функції Кірхгофа вдалось знайти Планку шляхом введення *квантової гіпотези*, яка зовсім не притаманна класичній фізиці. У класичній фізиці припускається, що енергія будь-якої системи може змінюватись неперервно, набираючи будь-яких, як завгодно близьких

значень. За квантовою гіпотезою Планка енергія \mathcal{E}_ν осцилятора може набувати тільки певних дискретних значень, які дорівнюють цілому числу елементарних порцій - квантів енергії \mathcal{E}_{ν_n} :

$$\mathcal{E}_\nu = n\mathcal{E}_{\nu_n} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Вираз для $\langle \mathcal{E}_\nu \rangle$ Планк отримав в такому вигляді:

$$\langle \mathcal{E}_\nu \rangle = \frac{\mathcal{E}_{\nu_n}}{e^{\frac{\mathcal{E}_{\nu_n}}{kT}} - 1}.$$

Величину \mathcal{E}_{ν_n} Планк визначив з вимоги, щоб вираз $r_{\nu,T}^*$ задовольняв загальну термодинамічну формулу Віна $r_{\nu,T}^* = \nu^2 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$. Ця вимога зводиться до виконання співвідношення

$$\frac{2\pi}{c^2} \frac{\mathcal{E}_{\nu_n}}{\nu} = f\left(\frac{\nu}{T}\right).$$

Але \mathcal{E}_{ν_n} є характеристикою лише самого осцилятора, а тому не може залежати від температури T - макроскопічного параметра, що визначає стан речовини і випромінювання. Величина \mathcal{E}_{ν_n} може залежати лише від власної частоти ν осцилятора. В такому випадку, щоб ліва частина даного співвідношення була функцією лише аргумента $\frac{\nu}{T}$, необхідно і достатньо, щоб $\mathcal{E}_{\nu_n} = h\nu$, де h - постійна.

Тобто, згідно з гіпотезою Планка атоми і молекули випромінюють енергію окремими порціями, або квантами, величина яких $\mathcal{E} = h\nu$.

Величина h називається сталою Планка.

$$h = (6.626176 \pm 0.000036) \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

Отже, формула Планка для випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла має вигляд:

$$r_{\nu, T}^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{kT} - 1},$$

$$r_{\lambda, T}^* = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1}.$$

З формули Планка легко отримати закон Стефана-Больцмана і закон зміщення Віна.

Інтегральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла:

$$R_T = \int_0^\infty r_{\nu, T}^* d\nu = \int_0^\infty \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{kT} - 1} d\nu.$$

Введемо безрозмірну змінну інтегрування

$$x = \frac{h\nu}{kT}, \text{ тоді } dx = \frac{h}{kT} d\nu, \quad d\nu = \frac{kT}{h} dx;$$

$$\text{Звідси } R_T = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \sigma T^4,$$

$$\text{де } \sigma = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3},$$

оскільки $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$

Тоді, підставивши значення сталих отримуємо

$$\sigma = (5.67032 \pm 0.00071) \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{к}^4}.$$

Отже, формула Планка дає змогу не тільки встановити закон Стефана-Больцмана, але її знайти величину сталої σ .

Для отримання виразу закону змі-

щення Віна знайдемо $\frac{\partial r_{\lambda, T}^*}{\partial \lambda}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{\lambda, T}^*}{\partial \lambda} &= - \frac{2\pi c^2 h}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1 \right)} \frac{5}{\lambda^6} + \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{\frac{hc}{kT} \frac{1}{\lambda^2} e^{\frac{hc}{\lambda T}}}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1 \right)^2} = \\ &= \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^6 \left(e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1 \right)} \left[\frac{\frac{hc}{kT} e^{\frac{hc}{\lambda T}}}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1} - 5 \right] \end{aligned}$$

Довжину хвилі λ_m , яка відповідає максимальному значенню $r_{\lambda, T}^*$, знайдемо, пріврівнявши до нуля $\frac{\partial r_{\lambda, T}^*}{\partial \lambda}$.

Введемо змінну $y = \frac{hc}{kT\lambda_m}$ і отримаємо

$$ye^y - 5e^y + 5 = 0.$$

Розв'язання цього трансцендентного рівняння методом послідовних наближень дає $y = 4.965$. Отже, $\frac{hc}{kT\lambda_m} = 4.965$.

Звідси

$$\lambda_m = \frac{hc}{4.965kT} = \frac{b}{T}.$$

Таким чином, формула Планка є повним розв'язком основної задачі теплового випромінювання, сформульованої Кірхгофом.

§109. Зовнішній фотоелектрний ефект і його закони. Рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоелектрального ефекту

Поглинання оптичного випромінювання в речовині часто супроводжується електричними явищами, які отримали назву фотоелектричного ефекту.

Розрізняють: 1) *зовнішній фотоелектрний ефект* – виривання електронів з речовини під дією світла 2) *внутрішній фотоелектрний ефект*, при якому відбувається лише

збільшення кількості вільних електронів всередині речовини, але вони не виходять назовні; 3) **фотогальванічний ефект**, при якому на границі поділу напівпровідника і металу або на границі поділу двох напівпровідників під впливом опромінювання виникає електрорушійна сила (за відсутності зовнішнього електричного поля); 4) **фотоефект в газоподібному середовищі**, який полягає у фотоіонізації окремих молекул або атомів.

Розглянемо закономірності зовнішнього фотоефекту. Зовнішній фотоефект спостерігається у твердих тілах (металах, напівпровідниках, діелектриках), а також у газах. Фотоефект відкрив у 1887р. Г.Герц, який виявив, що при освітленні негативного електрода іскрового розрядника ультрафіолетовими променями розряд відбувається при меншій напрузі між електродами, ніж без такого освітлення.

Перші фундаментальні дослідження фотоефекту виконані в 1888 – 1889 р.р. О.Г.Столетовим за допомогою установки, що показана на рис.274. Конденсатор, утворений дрютяною сіткою з міді і суцільною цинковою пластинкою, був послідовно ввімкнений з гальванометром G

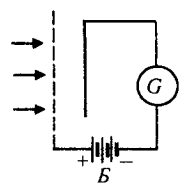


Рис.274

в коло акумуляторної батареї Б. При освітленні негативно зарядженої пластини світлом від джерела у колі виникав електричний струм, який називається фотострумом. На основі своїх дослідів Столетов дійшов таких висновків: 1) найбільшу дію чинять ультрафіолетові хвилі; 2) сила струму зростає із збільшенням освітленості пластини; 3) заряди, які

випускаються під дією світла, мають від'ємний знак.

У 1899 р. Леонард і Томпсон методом відхилення зарядів у електричному і магнітному полях визначили питомий заряд $\frac{e}{m}$ частинок, що вириваються світлом з катода, довівши, що ці частинки є електронами.

Леонард й інші дослідники удосконалили прилад Столетова, помістивши електроди у вакуумну трубку (рис.275).

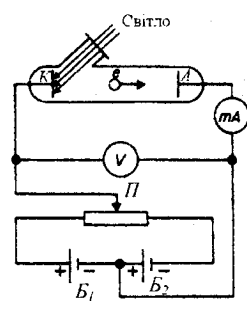


Рис.275

Катод K , покритий досліджуванним металом, освітлюється монохроматичним світлом, що проходить у трубку через кварцеве вікно. Напругу між катодом і анодом регулюють за допомогою потенціометра Π і вимірюють вольтметром V . Дві акумуляторні батареї B_1 і B_2 , увімкнуті “назустріч одна одній”, дають можливість за допомогою потенціометра змінювати не лише абсолютну величину, а й знак напруги U .

Цей пристрій дає можливість дослідити вольт-амперну характеристику фотоефекту – залежність фотоструму I від напруги між електродами (рис.276). Така залежність відповідає двом різним освітленостям E катода. У міру збільшення U фо-

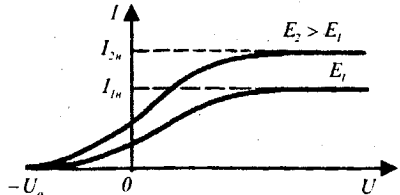


Рис.276

Цей пристрій дає можливість дослідити вольт-амперну характеристику фотоефекту – залежність фотоструму I від напруги між електродами (рис.276). Така залежність відповідає двом різним освітленостям E катода. У міру збільшення U фо-

тострум поступово зростає, тобто все більша кількість фотоелектронів досягає анода. Максимальне значення фотоструму I_n , яке називається фотострумом насичення, відповідає таким значенням U , при яких усі електрони, що вибиваються з катода, досягають анода: $I_n = en$, де n – кількість електронів, які вилітають з катода за $1c$.

З вольт-амперної характеристики виходить, що при $U=0$ фотострум не зникає. Електрони, вибиті з катода світлом, мають деяку початкову швидкість v , а отже, і відмінну від нуля кінетичну енергію і можуть досягати анода без зовнішнього поля. Для того, щоб фотострум став нульовим, необхідно прикласти *затримуючу напругу* U_0 . При $U = U_0$ жоден з електронів не може подолати затримуючі поля і досягнути анода. Отже, $\frac{mv_{max}^2}{2} = eU_0$, тобто, вимірявши U_0 , можна знайти максимальне значення швидкості і кінетичної енергії фотоелектронів.

Дослідами встановлено такі основні *закони зовнішнього фотоелефекту*:

I. Закон Столетова: при фіксованій частоті падаючого світла кількість фотоелектронів, що вириваються з катода за одиницю часу, пропорційне до інтенсивності світла (сила фотоструму насичення пропорційна до енергетичної освітленості E катода – $I_n = \gamma E$, γ – спектральна густина фотокаатода).

II. Максимальна початкова швидкість фотоелектронів не залежить від інтенсивності падаючого світла, а визначається лише його частотою ν , а саме лінійно зростає із збільшенням частоти.

III. Для кожної речовини існує "червона межа" фотоелефекту, тобто максимальна довжина хвилі λ_{max} , при якій спостерігається фотоелефект. Величина λ_{max} залежить від хімічної природи речовини і стану його поверхні.

Важливе значення має спектральна характеристика фотокаатода, тобто залеж-

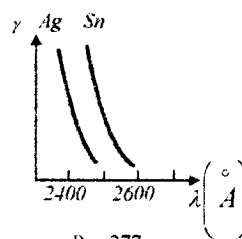


Рис.277

ність спектральної чутливості від довжини світлової хвилі. З рис.277 видно, що, починаючи від "червоної межі", із зменшенням λ від-

бувається зростання чутливості фотокаатода.

Столетовим була встановлена фактична безінерційність зовнішнього фотоелефекту. Проміжок часу між початком освітлення і початком фотоструму не перевищує $10^{-9} c$.

Фотоелефект не можна пояснити з погляду хвильової теорії світла.

A. Ейнштейн в 1905 р. показав, що явище фотоелефекту і його закономірності можуть бути пояснені на основі запропонованої ним квантової теорії фотоелефекту.

Згідно з Ейнштейном світло частотою ν не лише випромінюється, але і поширюється в просторі і поглинається речовиною окремими порціями, енергія яких $\epsilon = h\nu$. Поширення світла треба розглядати не як неперервний хвильовий процес, а як потік локалізованих у просторі дискретних світлових квантів, що рухаються зі швидкістю поширення світла у вакуумі. Ці кванти електромагнітного випромінювання отримали назву *фотонів*.

За Ейнштейном кожний квант поглинається лише одним електроном. Тому кількість вирваних фотоелектронів повинна бути пропорційна до кількості поглинутих фотонів, тобто пропорційне до інтенсивності світла (I закон фотоелекту). Безінерційність фотоелекту пояснюється тим, що передача енергії при зіткненні фотона з електроном відбувається майже миттєво.

Енергія падаючого фотона витрачається на виконання електроном роботи виходу A з металу і на надання електрону, який вилетів, кінетичної енергії $\frac{mv_{max}^2}{2}$. За законом збереження енергії

$$h\nu = A + \frac{mv_{max}^2}{2}.$$

Це рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоелекту.

Рівняння Ейнштейна дає змогу пояснити II і III закони фотоелекту. Максимальна кінетична енергія фотоелектрона лінійно зростає із збільшенням частоти падаючого випромінювання і не залежить від його інтенсивності, оскільки ні робота виходу A , ні ν від інтенсивності світла не залежать (II закон). Оскільки із зменшенням частоти світла кінетична енергія фотоелектронів зменшується, то при деякій досить малій частоті $\nu = \nu_{min}$ кінетична енергія фотоелектронів стане дорівнювати нулю. Енергії кванта вистачає тільки, щоб вирвати електрон з металу.

Отже,

$$h \frac{c}{\lambda_{max}} = A.$$

Величина λ_{max} залежить лише від роботи виходу електрона, тобто від хімія-

мічної природи речовини і стану її поверхні.

Якщо створити поле, яке затримує рух електронів, тобто на катод подати "+", а на анод "-", то фотострум буде зменшуватись і при напрузі U_0 струм дорівнюватиме нулю. Ця напруга називається затримуючим потенціалом. Робота поля

$$eU_0 = \frac{mv_{max}^2}{2}.$$

Тоді формула Ейнштейна матиме вигляд: $h\nu = A + eU_0$.

Якщо замість роботи виходу підставити значення енергії кванта, що відповідає червоній межі фотоелекту, тобто

$$A = h \frac{c}{\lambda_{max}} = h\nu_{min},$$

тоді $h\nu = h\nu_{min} + eU_0$

і $eU_0 = h(\nu - \nu_{min})$.

§110. Маса та імпульс фотона.

Тиск світла

Згідно з гіпотезою світлових квантів Ейнштейна світло випромінюється, поглинається і поширюється дискретними порціями, які названі фотонами. Енергія фотона $\varepsilon = h\nu$.

Формулу для маси фотона можна безпосередньо вивести з формули, яка виражає взаємозв'язок маси і енергії в теорії відносності:

$$m = \frac{h\nu}{c^2}.$$

Маса фотона значною мірою відрізняється від маси макроскопічних тіл і мас інших "елементарних" частинок. Ця відмінність полягає в тому, що фотон не має маси спокою m_0 .

Справді, для фотона, який рухається у вакуумі з швидкістю $v=c$, і застосування формули $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ приводить до

абсурду ($m=\infty$), коли вважати, що у фотона є відмінна від нуля маса спокою. Отже, для фотона $m_0 = 0$, тобто фотонів, які перебувають у спокої, не існує. Тоді очевидно, що фотон завжди рухається зі швидкістю $v=c$, бо при $v \neq c$ маса і енергія фотона дорівнювали б нулю, що суперечить формулі $m = \frac{h\nu}{c^2}$.

Зв'язок імпульса фотона p_γ з його енергією ε можна вивести з формули, одержаної в теорії відносності:

$$\varepsilon = c\sqrt{p_\gamma^2 + m_0^2 c^2}.$$

Для фотона $m_0 = 0$ і $p_\gamma = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = mc$, де m – маса фотона. Введемо хвильове число

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$, тоді

$$p_\gamma = h\frac{\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}k = \hbar k,$$

де $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Імпульс фотона є векторною величиною. Напрямок імпульсу збігається з напрямком поширення світла, що характеризується хвильовим вектором \vec{k} , який числово дорівнює хвильовому числу.

Фотон, подібно до будь-якої рухомої частинки або тіла, має енергію, масу та імпульс. Усі ці корпускулярні характеристики пов'язані з хвильовою характеристикою світла – його частотою ν .

Одним з експериментальних підтверджень наявності у фотонів маси та імпульсу є існування світлового тиску.

Вперше експериментально виявив і виміряв тиск світла на тверді тіла і гази П.М.Лебедев (1901р.).

Прилад Лебедева – це досить чутливі крутильні терези, рухома система яких складалась з легкого каркаса із закріпленими на ньому тонкими кружками, розміщеними симетрично відносно осі підвісу

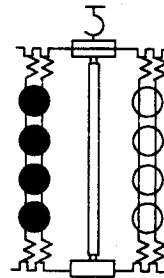


Рис. 278

(рис.278). Деякі крильця були зачорнені, а поверхня інших була дзеркальною. Усю цю систему підвішували на тонкій пружній нитці всередині закритого скляного балона, повітря з якого було відкачане. Крильця освітлювали вольтовою дугою, напрямленою на них за допомогою системи лінз і дзеркал. Величину світлового тиску на крильця визначали за кутом закручування нитки підвісу.

Тиск світла такий малий, що для його надійного вимірювання треба було усунути вплив на крильця всіх інших факторів. Вплив конвекційних струмин повітря Лебедев усунув, створивши в балоні досить високий вакуум. Однак і в такому разі не було усунуто так званий радіометричний ефект. Причина його в тому, що зачорнене крильце нагрівається внаслідок поглинання світла, яке падає на нього, причому температури освітленої і неосвітленої (задньої) поверхонь крильця неоднакові. Ця відмінність пов'язана з передаванням енергії всередині крильця способом теплопровідності та залежить від товщини і ма-

теріалу крилець. Молекули розрідженого повітря в балоні, вдаряючись об поверхні крильця і відбиваючись від них, створюють тиск на крилець. Під час удару об більш нагріту світлом передню поверхню крильця молекули збільшують свою енергію і відстрибують від неї з більшими швидкостями, ніж молекули, які відбиваються від задньої поверхні. Тому молекули повітря створюють результуючий тиск на зачорнену поверхню крильця, який додається до тиску світла. Радіометричний ефект може призвести до того, що в досліді тиск на зачорнене крилець буде більший за тиск на дзеркальне крилець тих самих розмірів. Лебедєв усунув вплив радіометричного ефекту, використавши у своїх дослідках дуже тонкі крильця різної товщини від 0,01 до 0,1 мм.

Тиск світла на дзеркальне крилець з коефіцієнтом відбиття $\rho = 1$ виявився у два рази більший, ніж тиск на зачорнене крилець ($\rho = 0$).

Розрахуємо з погляду квантової теорії світловий тиск, що чинить на поверхню тіла потік монохроматичного випромінювання.

З квантової точки зору тиск світла на поверхню якого-небудь тіла зумовлений тим, що при ударі з цією поверхнею кожний фотон передає їй свій імпульс. Фотон може рухатися лише з швидкістю світла у вакуумі. Тому відбивання світла від поверхні тіла треба розглядати як складний процес "перевипромінювання" фотонів – падаючий фотон поглинається поверхнею, а потім знову випромінюється нею з протилежним напрямком імпульсу. При цьому тиск світла на відбиту поверхню повинен бути таким самим, яким він був би тоді,

коли б фотони дзеркально відбивалися від поверхні подібно до абсолютно пружних кульок.

Знайдемо тиск, який чинить на ідеально відбивні стінки замкненої порожнини ізотропне монохроматичне випромінювання в цій порожнині. Для спрощення припустимо що порожнина має форму куба з ребром, яке дорівнює l . Внаслідок ізотропності випромінювання можна вважати, що всі напрями руху фотонів рівноімовірні, тобто фотони рухаються як молекули ідеального одноатомного газу. Тиск ідеального газу на стінки порожнини можна знайти з основного рівняння кінетичної теорії газів:

$$pV = \frac{1}{3} \sum m_i v_i^2.$$

Для фотонів $m_i = \frac{h\nu_i}{c^2}$, $c = v_i$, тому

$$m_i v_i^2 = h\nu_i.$$

$$\text{Отже, } \sum_i m_i v_i^2 = \sum_i h\nu_i = W, \text{ де } W -$$

повна енергія фотонів у порожнині, а тиск на стінки порожнини

$$p = \frac{W}{3V} = \frac{w}{3},$$

де $w = \frac{W}{V}$ - об'ємна густина енергії випромінювання, що падає на поверхню під кутом i .

Як другий приклад розглянемо світловий тиск, який чинить на поверхню тіла потік монохроматичного випромінювання,

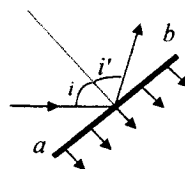


Рис.279

що падає на поверхню ab під кутом i (рис.279). Нехай за одиницю часу на поверхню ab падає N фотонів. Якщо ρ - коефіцієнт відбивання світ-

ла від поверхні, то з N фотонів ρN дзеркально відбиваються, а $(1-\rho)N$ поглинаються.

Фотони, що відбиваються, передають тілу сумарний за одиницю часу імпульс, який напрямлений перпендикулярно до поверхні ab і числово дорівнює

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \rho N \frac{2h\nu}{c} \cos i.$$

Поглинуті фотони передають тілу сумарний імпульс за одиницю часу, нормальна складова до ab якого числово становить

$$\frac{\Delta p_2}{\Delta t} = (1-\rho)n \frac{h\nu}{c} \cos i.$$

Отже, тиск світла на поверхню визначається формулою

$$\begin{aligned} p &= \frac{F}{S} = \frac{\Delta p}{S \Delta t} = \frac{\Delta p_1 + \Delta p_2}{S \Delta t} = \\ &= \rho N \frac{2h\nu}{Sc} \cos i + (1-\rho)N \frac{h\nu}{Sc} \cos i = \\ &= (1+\rho) \frac{N}{S} \frac{h\nu}{c} \cos i = \frac{J}{c} (1+\rho) \cos i. \end{aligned}$$

де $J = \frac{Nh\nu}{S}$ – енергія всіх фотонів, що падають на одиницю площі поверхні за одиницю часу, тобто інтенсивність світла.

Величина $w = \frac{J}{c}$ – об'ємна густина енергії падаючого випромінювання. Отже,

$$p = w(1+\rho) \cos i.$$

Для абсолютно відбивної поверхні $\rho = 1$ тиск випромінювання вдвічі більший, ніж для абсолютно поглинаючої поверхні $\rho = 0$.

Тиск сонячного випромінювання (в ясний день) на поглинаючу поверхню, що орієнтована перпендикулярно до променів, приблизно становить $4 \cdot 10^{-6}$ Па.

Д. Максвелл, виходячи з розробленої ним теорії електромагнетизму, вперше показав необхідність існування тиску світла.

Якісно механізм тиску світла можна пояснити з хвильових властивостей світла. Нехай на плоску поверхню тіла падає перпендикулярно до неї монохроматична хвиля (рис.280). Під дією сили \vec{F}_{el} електричного поля електромагнітної хвилі позитивні і негативні заряди зміщуються вздовж

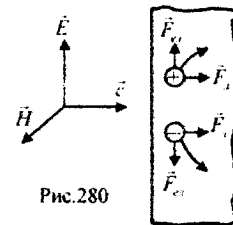


Рис.280

поверхні тіла у протилежні сторони. А з боку магнітного поля на ці заряди діє сила Лоренца \vec{F}_L , яка "втискає" ці заряди в речовину. Сила Лоренца пропорційна $[\vec{v}, \vec{H}]$, і, зрештою, добутку $[\vec{E}, \vec{H}]$, а він у свою чергу пропорційний до густини енергії падаючої хвилі w .

Отже, світло одночасно має властивості безперервних електромагнітних хвиль і властивості дискретних фотонів. Воно являє собою діалектричну єдність цих протилежних властивостей. Корпускулярні і хвильові властивості світла не виключають, а навпаки, взаємно доповнюють одне одного. Дослідження у ХХ ст. показали, що така єдність корпускулярної і хвильової природи властива всім формам матерії.

§111. Ефект Комптона і його теорія

Чіткіше характер взаємодії випромінювання з речовиною проявляється в явищі розсіяння рентгенівських променів. Американський фізик А.Комптон, досліджуючи у 1923 р. розсіяння монохроматич-

них рентгенівських променів речовинами з легкими атомами (парафін, бор), виявив, що у складі розсіяного випромінювання, поряд з випромінюванням початкової довжини хвилі, спостерігається також випромінювання довших хвиль.

Схема досліду Комптона зображена на рис.281. Вузький діафрагмований пучок

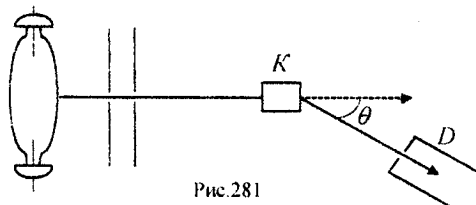


Рис.281

монохроматичних рентгенівських променів падає на "легку" розсіювальну речовину K і після розсіяння на кут θ потрапляє в приймач – рентгенівський спектрограф D , де вимірюється довжина хвилі розсіяного випромінювання.

Досліди Комптона показали, що довжина хвилі λ' розсіяного випромінювання більша за довжину хвилі λ падаючого випромінювання, причому різниця $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ не залежить від довжини хвилі λ падаючого випромінювання і природи розсіювальної речовини, а визначається лише величиною кута розсіяння θ :

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

де $\lambda_c = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$ - комптонівська довжина хвилі, стала величина для всіх речовин.

Пояснити ефект Комптона можна на основі квантових уявлень про природу світла. Якщо вважати, що випромінювання являє собою потік фотонів, то ефект Комптона – результат пружного зіткнення рентгенівських фотонів з вільними електронами речовини (для легких атомів електрони слабо зв'язані з ядрами атомів, тому їх можна вважати вільними). У процесі

цього зіткнення фотон передає електрону частину своїх енергії й імпульсу відповідно до законів їх збереження.

Розглянемо пружне зіткнення двох частинок - налітаючого фотона, що має імпульс $p_\gamma = \frac{h\nu}{c}$ і енергію $\mathcal{E}_\gamma = h\nu$ з вільним електроном, що знаходиться у спокої (енергія спокою $W_0 = m_0c^2$, m_0 - маса спокою електрона) (рис.282). Фотон, зіткнувшись з електроном, передає йому частину своєї енергії й імпульсу та змінює напрямок руху (розсіюється).

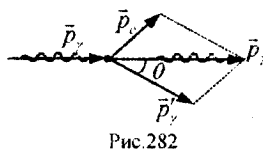


Рис.282

Зменшення енергії фотона і означає збільшення довжини хвилі.

Нехай імпульс і енергія розсіяного фотона дорівнюють $p'_\gamma = \frac{h\nu'}{c}$ і $\mathcal{E}'_\gamma = h\nu'$.

Електрон, який раніше знаходився у стані спокою, отримує імпульс $p_e = m\nu$ і енергію $W = mc^2 = c\sqrt{p_e^2 + m_0^2c^2}$.

При кожному такому зіткненні виконуються закони збереження енергії та імпульсу.

Згідно із законом збереження енергії

$$m_0c^2 + h\nu = c\sqrt{p_e^2 + m_0^2c^2} + h\nu',$$

а згідно із законом збереження імпульсу

$$\frac{h\nu}{c} = p_e + \frac{h\nu'}{c}, \text{ або } \vec{p}'_\gamma = \vec{p}_e + \vec{p}'_\gamma.$$

Розділимо перший вираз на c і запишемо його у вигляді:

$$\sqrt{p_e^2 + m_0^2c^2} = \frac{h}{c}(\nu - \nu') + m_0c,$$

$$p_e^2 + m_0^2c^2 =$$

$$= \frac{h^2}{c^2}(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu') + 2\frac{h}{c}(\nu - \nu')m_0c + m_0^2c^2.$$

$$p_e^2 = \frac{h^2}{c^2}(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu') + 2\frac{h}{c}(\nu - \nu')m_0c.$$

Із закону збереження імпульсу:

$$p_e^2 = (\vec{p}_\gamma - \vec{p}'_\gamma)^2.$$

Відповідно до теореми косинуса для трикутника імпульсів рівняння $\vec{p}_\gamma = \vec{p}_e + \vec{p}'_\gamma$ перепишемо так:

$$p_e^2 = \frac{h^2}{c^2} (v^2 + v'^2 - 2vv' \cos \theta).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{c^2} (v^2 + v'^2) - \frac{h^2}{c^2} 2vv' + 2 \frac{h}{c} (v - v') m_e c &= \\ = \frac{h^2}{c^2} (v^2 + v'^2) - \frac{h^2}{c^2} 2vv' \cos \theta, \end{aligned}$$

звідси

$$m_e c (v - v') = h v v' (1 - \cos \theta)$$

Оскільки

$$v = \frac{c}{\lambda}, \quad v' = \frac{c}{\lambda'},$$

$$\text{то, } \frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'} = \frac{h}{m_e c^2} \frac{c}{\lambda} \frac{c}{\lambda'} (1 - \cos \theta);$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta),$$

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) = 2 \lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Розрахуємо тепер кінетичну енергію електрона віддачі: $E_k = (m - m_0)c^2$.

Із закону збереження енергії $h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + mc^2$ маємо:

$$\begin{aligned} E_k &= (m - m_0)c^2 = h(v - v') = h v v' \left(\frac{1}{v'} - \frac{1}{v} \right) = \\ &= h \frac{c}{\lambda} \frac{c}{\lambda'} \left(\frac{\lambda'}{c} - \frac{\lambda}{c} \right) = \frac{hc}{\lambda \lambda'} (\lambda' - \lambda) = \frac{hc}{\lambda} \frac{\Delta \lambda}{\lambda + \Delta \lambda} = \end{aligned}$$

$$= h\nu \frac{2\lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\lambda + 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Енергія E_k максимальна при $\theta = \pi$:

$$E_k^{\max} = h\nu \frac{2\lambda_c}{\lambda + 2\lambda_c}.$$

Якщо електрон сильно зв'язаний з атомом, то при розсіянні на ньому фотона останній передає енергію й імпульс не електрону, а атому загалом. Маса атома в багато разів більша від маси електрона. Тому атому передається лише незначна частина енергії фотона, так що довжина хвилі λ' розсіяного випромінювання практично не відрізняється від довжини хвилі λ падаючого випромінювання. Частка електронів, сильно зв'язаних в атомах, збільшується із зростанням порядкового номера елемента і відповідно із зростанням маси атомів. Тому, чим важчі атоми розсіювальної речовини, тим більша інтенсивність незміщеної компоненти ($\lambda' = \lambda$) в розсіяному випромінюванні.

Ефект Комптона спостерігається не лише на електронах, але і на інших заряджених частинках, наприклад, протонах, але внаслідок великої маси протона його віддача відчувається лише при розсіянні електронів дуже великих енергій.

VIII. ФІЗИКА АТОМІВ І МОЛЕКУЛ

§112. Досліди Резерфорда.

Ядерна модель атома

Перша спроба створення моделі атома на основі нагромаджених експериментальних даних належить Дж. Томсону (1903р.). Згідно з цією моделлю атом являє собою рівномірно заряджену кулю радіусом $\sim 10^{-10}$ м, всередині якої біля своїх положень рівноваги коливаються електрони; сумарний від'ємний заряд електронів дорівнює додатному заряду кулі. Модель Томсона виявилась неправильною.

Велику роль у розвитку уявлень про будову атома відіграли досліди Е. Резерфорда із вивчення розсіювання α -частинок в речовині.

α -частинки утворюються під час природного радіоактивного розпаду деяких важких елементів – це позитивно заряджені частинки з зарядом $2e$ і масою, яка приблизно в чотири рази більша за масу атома водню.

Спрощена схема досліду Резерфорда зображена на рис.283. Джерело α -частинок поміщене всередині свинцевої порожнини з вузьким каналом. Усі α -частинки, крім тих, що рухаються всередині вузького каналу, поглинаються свинцем. Потік α -частинок, пройшовши через вузь-

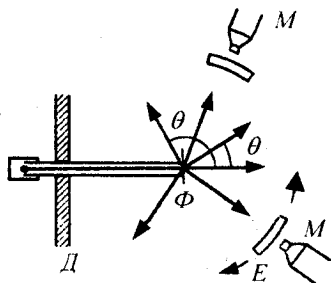


Рис.283

ку діафрагму D , потрапляє на тонку золоту фольгу Φ завтовшки $10^{-6} - 10^{-7}$ м, що складається з декількох атомних шарів. При проходженні через фольгу α -частинки відхиляються на різні кути θ і потрапляють на екран E , який можна поміщати в різних положеннях відносно фольги. Екран покритий флюоресцентною речовиною. За допомогою мікроскопа M можна спостерігати місця потраплення α -частинок за свіченням екрану. Поведінку α -частинок після проходження через фольгу вивчали в камері Вільсона.

Резерфорд з'ясував, що потік α -частинок, пройшовши крізь фольгу, майже не відхиляється від прямолінійного напрямку і лише деякі частинки змінюють напрямку руху, відхиляючись на дуже великі кути, порядку $135 - 150^\circ$ (рис.284).

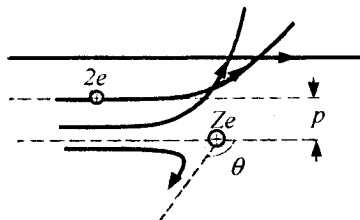


Рис.284

На підставі досліду Резерфорд зробив такі висновки.

- 1) Оскільки переважна більшість α -частинок проходить через атоми, не змінюючи свого напрямку, то атом прозорий і частинки, на яких відбувається розсіювання, займають об'єм значно менший за об'єм атома.
- 2) Оскільки при розсіюванні спостерігаються кути відхилення α -частинок порядку 150° , то взаємодіють одноіменно заряджені частинки, тобто розсію-

вання відбувається на позитивно заряджених частинках.

- 3) Після проходження α -частинкою фольги в камері Вільсона спостерігалися треки однакової довжини, які належать лише α -частинці. Отже, маса частинки, на якій відбувається розсіювання, значно більша від маси α -частинки і через це вона не отримує прискорення.
- 4) Резерфорд приблизно розрахував розмір частинки, на якій відбувається розсіювання. Розглянемо центральний удар α -частинки з невідомою частинкою, який відповідає куту розсіяння $\theta = 180^\circ$. Із закону збереження енергії випливає, що в момент найбільшого зближення α -частинки з невідомою частинкою її кінетична енергія $E_{k\alpha}$ цілком перейде в потенціальну енергію їх взаємодії:

$$\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} = \frac{q_\alpha q_0}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Якщо припустити, що маса α -частинки $m_\alpha = 6.6 \cdot 10^{-27}$ кг, її швидкість $v_\alpha \approx 10^7$ м/с, заряд $q_0 = 3.2 \cdot 10^{-19}$ Кл, а заряд невідомої частинки взяти мінімальний і рівний $q_0 = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, то

$$\begin{aligned} R &= \frac{q_\alpha q_0}{2\pi\epsilon_0 m_\alpha v_\alpha^2} = \\ &= \frac{3.2 \cdot 10^{-19} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 3.14 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 6.6 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{14}} \approx \\ &\approx 1.4 \cdot 10^{-15} \text{ м.} \end{aligned}$$

В той же час, радіус атома $r \approx 10^{-10}$ м.

Таким чином, частинка на якій відбувається розсіювання α -частинок займає

в атомі об'єм, який значно менший від об'єму атома.

Резерфорд теоретично розглянув задачу про розсіювання α -частинок у кулонівському електричному полі частинки, що має заряд Q . Кут відхилення α -частинок θ тим більший, чим менша віддаль ρ від ядра до початкового напрямку руху α -частинки (рис.284). Віддаль ρ називається "параметром удару".

Закони динаміки дозволяють розрахувати залежність кута відхилення θ від параметра удару ρ , а методами теорії ймовірностей можна знайти ймовірність пролітання α -частинки на даній відстані ρ від частинки і тим самим ймовірність її відхилення на кут θ . Розрахунок показує, що із загального числа розсіяних N α -частинок в тілесному куті $d\Omega$, що утворює кут θ з початковим напрямком їх руху, розсіюється така кількість α -частинок:

$$dN = nN \left(\frac{Qq_\alpha}{m_\alpha v_\alpha^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

де n – кількість α -частинок, які налітають на частинку через одиницю площі поперечного перерізу пучка за одиницю.

Для певної розсіюючої речовини при певній енергії α -частинок і заданій густині їх потоку добуток $\frac{dN}{d\Omega} \sin^4 \frac{\theta}{2}$ повинен бути сталим, що було експериментально підтверджено в дослідах Гейгера і Мардсена.

Наведена формула дозволяє за виміряним числом частинок, які розсіяні під певним кутом θ , визначити величину по-

зитивного заряду Q , оскільки всі інші величини, що входять у цю формулу, доступні вимірюванню. Оскільки атоми в нормальному стані нейтральні, то позитивний заряд Q повинен бути цілим кратним від початкового значення заряду електрона: $Q = Z|e|$, де Z – ціле число. На основі вимірювань Резерфорда виникла гіпотеза, що величина Z дорівнює порядковому номеру елементу в таблиці Менделєєва. Пізніше ця гіпотеза підтвердилася.

Знаючи заряд частинки $Q = Z|e|$, можна знайти, який “параметр удару” відповідає різним кутам удару θ .

На підставі результатів дослідів з розсіянням α -частинок тонкими фольгами Резерфорд запропонував *ядерну модель атома*. Згідно з цією моделлю в ядрі атома – малій, порівняно з об’ємом усього атома, області з лінійними розмірами $10^{-14} - 10^{-15}$ м – зосереджено його позитивний заряд Ze і практично вся маса атома.

Навколо ядра в області з лінійними розмірами $\sim 10^{-10}$ м по замкнених орбітах рухаються електрони, маса яких становить дуже малу частку маси атома. Внаслідок того, що атом електрично нейтральний, заряд ядра дорівнює сумарному заряду електронів, тобто навколо ядра обертається Z електронів. Статична ядерна модель атома, в якій електрони були б нерухомі, беззмістовна, адже внаслідок сили кулонівського притягання електрони відразу ж впали б на ядро. Ядерна модель Резерфорда зовні дуже нагадує Сонячну систему: у центрі – ядро, навколо нього по орбітах рухаються електрони. Тому цю модель

називають планетарною. Орбіти електронів в атомі стаціонарні, атому властива виняткова стійкість.

Стійкість атома не можна погодити з класичним поясненням ядерної моделі. Електрон по коловій орбіті рухається з доцентровим прискоренням $a = \frac{v^2}{r}$, а згідно із законами електродинаміки він повинен випромінювати електромагнітні хвилі. За класичними уявленнями це випромінювання (і пов’язана з ним втрата електроном енергії) повинно відбуватися безперервно. Тому електрон не зможе триматись на коловій орбіті – він повинен по спіралі наближатись до ядра, і частота його обертання навколо ядра (і частота випромінювання ним електромагнітних хвиль) повинна безперервно змінюватись. Електромагнітне випромінювання атома повинно мати неперервний, а не лінійчастий спектр.

Отже, застосування класичної електродинаміки до ядерної моделі атома привело до суперечності з експериментальними фактами. Згідно з класичною теорією повинно спостерігатись наступне:

- безперервна втрата електроном енергії у вигляді випромінювання електромагнітних хвиль і нестійкість атома;
- існування лише неперервного спектра випромінювання.

Насправді виявляється, що:

- атом є стійкою системою;
- атом випромінює енергію лише за певних умов;
- випромінювання атома має лінійчастий спектр.

§113. Атом водню

і його спектр за теорією Бора

Дослідження спектрів випромінювання розріджених газів (тобто спектрів випромінювання окремих атомів) показали, що кожному газу властивий певний лінійчастий спектр, який складається з окремих спектральних ліній. Найбільш вивченим є спектр атома водню.

Швейцарський вчений І. Бальмер у 1885р. встановив, що довжини хвиль відомих на той час дев'яти ліній спектра атома водню можна обчислити за формулою:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{n^2}{n^2 - 4},$$

де $\lambda_0 = 3,65 \cdot 10^{-7} \text{ м}$, $n = 3, 4, 5, \dots, 9$.

Цю формулу записують в іншому вигляді:

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, \dots$$

де $R' = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$, R' – стала Рідберга.

Оскільки $\nu = \frac{c}{\lambda}$, то

$$\nu = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

де $R = R'c = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, яку також називають сталою Рідберга.

Спектральні лінії, що відрізняються різними значеннями n , утворюють серію ліній, яка називається серією Бальмера. Із збільшенням n лінії серії зближуються; значення $n = \infty$ визначає границю серії, до якої з боку більших частот прилягає суцільний спектр: $\lambda_{\text{гран}} = 3,65 \cdot 10^{-7} \text{ м}$. Крім того, виявляється, що зі збільшенням номера лінії її інтенсивність зменшується.

Якщо схематично зобразити розміщення спектральних ліній відповідно до формули $\nu = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, а довжиною штриха вивести інтенсивність спектральної лінії, то отримуємо картину, зображену на рис.285.

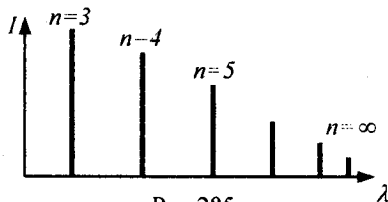


Рис.285

На початку ХХст. у спектрі водню було виявлено ще декілька серій спектра випромінювання, які знаходяться у невидимій ділянці.

В ультрафіолетовій ділянці –

серія *Лаймана*: $\nu = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right),$

($n = 2, 3, 4, \dots$);

в інфрачервоної області ділянці –

серія *Пашена*: $\nu = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right),$

($n = 4, 5, 6, \dots$);

серія *Брекета*: $\nu = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right),$

($n = 5, 6, 7, \dots$);

серія *Пфунда*: $\nu = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right),$

($n = 6, 7, 8, \dots$);

серія *Хемфрі*: $\nu = R \left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{n^2} \right),$

($n = 7, 8, 9, \dots$).

Всі серії у спектрі водню можуть бути описані однією формулою, яка називається *узагальненою формулою Бальмера*:

$$\nu = R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

де $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. і визначає серію,
а $n = k + 1, k + 2, k + 3, \dots$ і визначає окремі
лінії серії.

Р.Рідберг показав, що в лінійчастих
спектрах не лише водню, а й інших еле-
ментів є спектральні серії, причому
 $\nu = T(n_2) - T(n_1)$, де n_1 і n_2 – деякі цілі
числа. Функції $T(n_2)$ і $T(n_1)$ називаються
спектральними термами.

У 1908 р. В. Рітц установив спра-
ведливість положення, яке називають ком-
бінаційним принципом Рітца: частоти спе-
ктральних ліній випромінювання будь-
якого атома можна подати у вигляді різни-
ці двох термів; укладаючи різні комбінації
термів, можна знайти всі можливі частоти
спектральних ліній цього атома.

Наведені серіальні формули підіб-
рані емпірично і довгий час не мали теоре-
тичного обґрунтування.

Перша спроба побудови якісно но-
вої теорії атома була зроблена в 1913р.
Н.Бором. Він поставив перед собою мету
зв'язати в єдине ціле емпіричні закономір-
ності лінійчастих спектрів, ядерну модель
атома Резерфорда і квантовий характер
випромінювання та поглинання світла.

Теорія Бора застосовна до атома
водню і воднеподібної системи, яка скла-
дається з ядра з зарядом Ze і одного елек-
трона, що обертається навколо ядра: He^+ ,
 Li^{++} ,

В основу своєї теорії Бор поклав
три постулати.

**Перший постулат Бора (посту-
лат стаціонарних станів):** існують деякі
стаціонарні стани атома з відповідними

значеннями енергії $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$, перебу-
ваючи в яких, він не випромінює енергії.

Цим стаціонарним станам відпові-
дають цілком визначені (стаціонарні) орбі-
ти, по яких рухаються електрони, які, нез-
важаючи на наявність у них прискорення,
електромагнітних хвиль не випромінюють.

**Другий постулат Бора (правило
квантування орбіт):** в стаціонарному
стані атома електрон, рухаючись по ко-
лової орбіті, повинен мати квантові зна-
чення моменту імпульсу, які задовольня-
ють умову

$$L_n = m v r_n = n \hbar, (n = 1, 2, \dots), \hbar = \frac{h}{2\pi},$$

де m – маса електрона, v – його швид-
кість, r – радіус орбіти електрона.

**Третій постулат Бора (правило
частот):** при переході атома з одного
стаціонарного стану в інший випроміню-
ється або поглинається один фотон з
енергією $h\nu_{nk} = E_n - E_k$, яка дорівнює різ-
ниці енергій відповідних стаціонарних
станів.

Випромінювання фотона відбува-
ється при переході атома зі стану з біль-
шою енергією E_n у стан з меншою енергі-
єю E_k , тобто при переході електрона з ор-
біти більш віддаленої від ядра на ближчу
до ядра орбіту. Поглинання енергії супро-
воджується переходом атома у стан з біль-
шою енергією, і електрон переходить на
віддаленішу від ядра орбіту. Набір можли-
вих частот $\nu_{nk} = \frac{E_n - E_k}{h}$ квантових пере-
ходів і визначає лінійчастий спектр атома.

Постулати, висунуті Бором, дозво-
лили розрахувати спектр атома водню і

воднеподібних систем, а також теоретично розрахувати сталу Рідберга.

Враховуючи припущення Резерфорда, що електрон у воднеподібній системі рухається по коловій орбіті радіусом r під дією кулонівської сили притягання електрона до ядра, яка створює доцентрове прискорення, запишемо:

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = \frac{mv^2}{r_n}$$

Звідси

$$r_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2}$$

Підставивши сюди величину v з виразу $mv r_n = n\hbar$, отримаємо:

$$r_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m} \cdot \frac{m^2 r_n^2}{n^2 \hbar^2} \text{ і } r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Zme^2} n^2,$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$

Радіуси орбіт зростають пропорційно квадратам цілих чисел.

Для атома водню ($Z=1$) радіус першої орбіти електрона при $n=1$ називається першим борівським радіусом (a_0) і дорівнює

$$r_1 = a_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2} = 0,528 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Тоді $r_n = a_0 n^2 \frac{1}{Z}$.

Оскільки експериментально виміряти радіуси орбіт неможливо, то для перевірки правильності теорії потрібно знайти такі величини, які можна виміряти експериментально. Такою величиною може бути, зокрема, енергія, яку випромінюють або поглинають атоми.

Енергія електрона у воднеподібній системі дорівнює сумі його кінетичної і

потенціальної енергій в електростатичному полі ядра:

$$E_n = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}$$

Враховавши, що $\frac{mv^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}$,

отримаємо: $\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}$.

Тоді $E_n = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}$.

Підставимо в цей вираз значення r_n .

Тоді

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{mZe^2}{n^2 \hbar^2 4\pi\epsilon_0} = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 me^4}{8h^2 \epsilon_0^2}$$

Знак “-” означає, що електрон знаходиться у зв’язаному стані.

Енергетичні стани атома утворюють послідовність енергетичних рівнів, що змінюються залежно від значення n , яке виражає номер енергетичного рівня атома.

Надаючи n різні цілочислові значення, отримаємо для атома водню ($Z=1$)

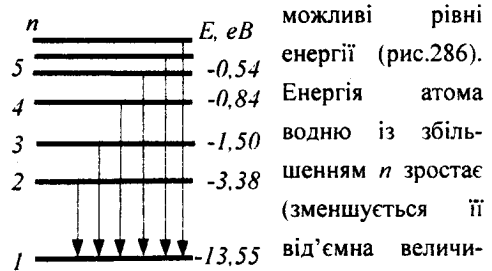


Рис.286

можливі рівні енергії (рис.286). Енергія атома водню із збільшенням n зростає (зменшується її від'ємна величина), і енергетичні рівні наближаються до границі, що відповідає значенню $n = \infty$. Атом водню має мінімальну енергію $E_1 = -13,55 \text{ eV}$ при $n=1$ і максимальну $E_\infty = 0$ при $n = \infty$. Отже, значення $E_\infty = 0$ відповідає енергії іонізації атома (відриву від нього електрона). Енергія іонізації з певного стану дорі-

внює за абсолютною величиною енергії зв'язку електрона в атомі в цьому стані E_n . Енергія іонізації E_i пов'язана з потенціалом іонізації ϕ_i :

$$E_i = e\phi_i.$$

Згідно з третім постулатом Бора

$$h\nu_{nk} = E_n - E_k = -\frac{Z^2 me^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

звідки частота випромінювання

$$\nu_{nk} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

де $R = \frac{Z^2 me^4}{8h^3 \epsilon_0^2}$. Значення $R_{теор} = R_{експер}$.

Це підтверджує правильність отриманої Бором формули для енергетичних рівнів воднеподібної системи.

Теорія Бора не позбавлена внутрішніх протиріч (з одного боку, застосовує закони класичної фізики, з іншого – ґрунтується на квантових постулатах). Вона змогла пояснити спектри водню і воднеподібних систем і обчислити частоти спектральних ліній, але не змогла пояснити їх інтенсивність і не дала відповіді на запитання: чому здійснюються ті чи інші переходи? У теорії Бора не описано атом гелію – один з простих атомів, що безпосередньо слідує за атомом водню.

Створюючи свою теорію, Бор керувався важливою ідеєю наступності в розвитку фізичних теорій. Цю ідею він сформулював стосовно співвідношення між його теорією атома та класичною механікою і назвав її принципом відповідності. Згідно з **принципом відповідності Бора** при досить великих квантових числах квантові співвідношення переходять у класичні.

За принципом відповідності будь-яка нова теорія, яка претендує на більшу загальність, цілком не відкидає стару теорію, основу на дослідних даних, а включає її в себе і вказує межі її застосування.

Німецькі фізики Д.Франк і Г.Герц, вивчаючи методом затримуючого потенціалу зіткнення електронів з атомами газів (1913р.), експериментально довели дискретність значень енергій атомів.

Схема їх установки наведена на рис.287. Трубка, яка заповнена парою ртуті при низькому тиску ($\sim 130 Па$), містить катод K , анод A і сітку C . Електрони, які вилітають з катода внаслідок термоелектронної емісії, прискорюються різни-

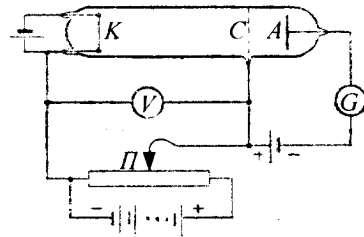
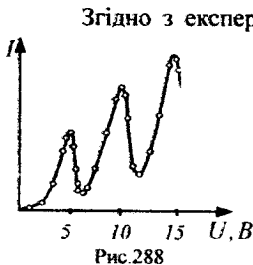


Рис.287

цею потенціалів U , що прикладена між катодом і сіткою. Цю різницю потенціалів можна змінювати за допомогою потенціометра Π . Між сіткою C і анодом A створювалося невелике електричне поле (різниця потенціалів порядку $0,5 В$), яке гальмувало рух електронів до анода. Д.Франк і Г.Герц досліджували залежність сили струму I в колі анода від напруги U між катодом і сіткою. Сила струму вимірюється гальванометром G , напруга – вольтметром V .

Електрони в області між катодом і сіткою співударяються з атомами парів ртуті. Ті електрони, які після співударів мають достатню енергію, щоб подолати

гальмівне поле, досягають анода. При непружних ударах електронів з атомами ртуті останні можуть збуджуватися. Згідно з теорією Бора кожен з атомів ртуті може отримати лише певну енергію, переходячи при цьому в один із збуджених станів. Тому, якщо в атомах дійсно існують стаціонарні стани, то електрони, стикаючись з атомами ртуті, повинні втрачати енергію дискретно, певними порціями, рівними різниці енергій відповідних стаціонарних станів атома.



Згідно з експериментом при збільшенні напруги до $4,86\text{В}$, сила анодного струму зростає монотонно, проходить через максимум ($4,86\text{В}$), потім різко падає і зростає знову (рис.288). Наступні максимуми спостерігаються при $2 \cdot 4,86\text{В}$ і $3 \cdot 4,86\text{В}$.

Доки напруга між катодом K і сіткою S менша $4,86\text{В}$, електрони, зустрічаючи на своєму шляху атоми ртуті, співударяються пружно. При $eU = 4,86\text{еВ}$ енергія електрона достатня, щоб викликати непружний удар, при якому електрон віддає атому ртуті всю кінетичну енергію, збуджуючи перехід одного з електронів атома на вищий енергетичний рівень, тобто атом переходить у збуджений стан. Електрони, які втратили свою кінетичну енергію, уже не зможуть подолати гальмівного поля і досягнути анода. При значеннях енергій, кратних $4,86\text{еВ}$, електрони можуть $2, 3, \dots$ рази співударятися непружно з атомами ртуті, втрачаючи при цьому

повністю свою енергію, і не долетять до анода.

Досліди Франка і Герца показали, що електрони при зіткненні з атомами ртуті передають атомам лише певні порції енергії, причому $4,86\text{еВ}$ - найменша можлива порція енергії, яка може бути поглинена атомом ртуті в основному енергетичному стані.

Атоми ртуті, які отримали при ударі з електроном енергію ΔE , переходять у збуджений стан і, повертаючись в основний, випромінюють світловий квант $\nu = \frac{\Delta E}{h}$ або $\lambda = \frac{hc}{\Delta E}$, де $\Delta E = 4,86\text{еВ}$. Тоді $\lambda = 0,2537 \cdot 10^6 \text{ м}$. Ця лінія виявлена експериментально.

Отже, досліди Франка і Герца експериментально підтвердили постулати Бора.

§114. Формула де Бройля.

Дослідне обґрунтування корпускулярно-хвильового дуалізму властивостей речовин

Теорія Бора була значним кроком у розвитку атомної фізики, однак володіла рядом внутрішніх протиріч. Тому необхідно було переглянути уявлення про природу елементарних частинок (електронів, протонів і т.д.). Оскільки було переконливо доведено, що світло проявляє корпускулярно-хвильовий дуалізм, французький вчений Луї де Бройль у 1924р. висунув гіпотезу про те, що частинки речовини поряд з корпускулярними властивостями мають також і хвильові.

Як відомо, фотон має квант енергії

$$\varepsilon = h\nu, \text{ імпульс } p = \frac{h}{\lambda}, \text{ масу } m = \frac{h\nu}{c^2}.$$

За де Бройлем, між корпускулярними і хвильовими характеристиками електрона існує такий самий зв'язок, як і між відповідними характеристиками фотона.

Інакше кажучи, рух електрона з швидкістю v пов'язаний з деяким хвильовим процесом, довжина хвилі якого визначається

$$\text{рівнянням } \lambda = \frac{h}{p}, \text{ де імпульс } P = mv. \text{ Це}$$

формула де Бройля.

Якщо частинка має кінетичну енергію E_k , то замінюючи її імпульс P енергією E_k за формулою $P = \sqrt{2mE_k}$, можна записати

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}}.$$

Зокрема, для електрона, що прискорюється в електричному полі з різницею

$$\text{потенціалів } \Delta\varphi, \text{ маємо } E_k = \frac{mv^2}{2} = e\Delta\varphi.$$

$$\text{Тоді } \lambda = \frac{h}{\sqrt{2me\Delta\varphi}} = \frac{12,25}{\sqrt{\Delta\varphi}} \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Для електричних полів з напругою 1-10В довжини хвиль де Бройля належать інтервалу $(10 \div 0,1)10^{-10}$ м, тобто мають довжини хвиль звичайних рентгенівських променів.

Цікавий результат дало порівняння гіпотези де Бройля і теорії атома Бора.

$$\text{Згідно з II постулатом Бора: } mvr = n \frac{h}{2\pi}.$$

З цього рівняння можна визначити

$$\text{довжину стаціонарної орбіти } 2\pi r = n \frac{h}{mv},$$

$$\text{де згідно з гіпотезою де Бройля } \frac{h}{mv} = \lambda.$$

Отже, довжина стаціонарної орбіти

$$2\pi r = n\lambda.$$

Ціле число n дорівнює числу довжини хвиль де Бройля для електрона, яке укладається на довжині колової орбіти.

Гіпотезу де Бройля експериментально підтвердили *К.Девіссон і Л.Джермер* (1927р.), які спостерігали розсіювання електронів монокристалом нікелю.

Пучок електронів з електронної гар-

мати спрямовували на поверхню заземленого кристала нікелю, від якого він відбивався (рис.289).

Будова гармати давала змогу надавати

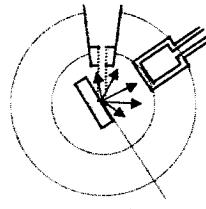


Рис.289

електронам певної швидкості. Електрони, розсіяні монокристалом, реєстрували приймачем-циліндром Фарадея. Конструкція приладу дозволяла фіксувати електрони, розсіяні під різними кутами.

Кількість електронів, що потрапляли в циліндр Фарадея, визначалась за величиною струму в колі циліндра. Із класичного погляду електрони, що мають різну кінетичну енергію, можуть розсіюватися під різними кутами згідно з законами відбивання геометричної оптики.

На рис.290 показано кристалічну

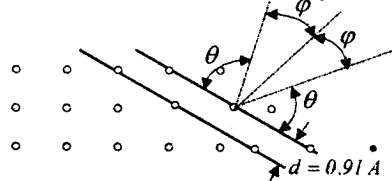


Рис.290

гратку нікелю, на якому проводили дослід на розсіювання під кутом $\theta = 65^\circ$. При енергії $E_k = 54\text{eV}$ виявився максимум числа відбитих електронів, цілком несподіваний

з класичної точки зору. З результатів дослідження випливає, що розсіювання електронів монокристалом нікелю нагадує відбивання таким кристалом рентгенівських променів. Рентгенівські промені відбиваються лише при певних довжинах хвиль, які задовольняють умову Вульфа-Брегга $n\lambda = 2d \sin \theta$. Звідси

$$\lambda = 2 \cdot 0,91 \sin 65^\circ = 1,65 \text{ \AA} \quad (n=1).$$

Розсіяння електронів пов'язане з їх хвильовими властивостями, і довжина хвилі, яка пов'язана з рухомим електроном, визначається його кінетичною енергією:

$$\lambda = \frac{12,25}{\sqrt{54}} = 1,67 \text{ \AA}.$$

Цей збіг підтвердився при інших значеннях енергії електронів і кутів розсіювання.

Для виявлення дифракції електронних пучків було використано метод дифракції рентгенівського випромінювання Дебая-Шеррера. Якщо вузький пучок рентгенівського випромінювання проходить крізь дрібнокристалічний порошок або тонку металеву пластинку, то після його проходження на фотографічній пластинці утворюється дифракційна картина у вигляді кілець. На рис.291 подано фотографію дифракційної картини, отриманої при розсіюванні рентгенівських променів пластинкою алюмінію.



Рис.291

Рис.292

Аналогічну картину спостерігали у 1928р. Д.Томсон і П.Тартаковський при пропусканні крізь металеві плівки потоків

електронів. На рис.292 зображені фотографії дифракційних картин, отриманих при розсіюванні пучка електронів, що пройшли крізь тонкі плівки золота і міді.

У методі Дебая-Шеррера діаметр D дифракційного кільця певного порядку прямо пропорційний довжині хвилі і тому відношення D/λ для певного матеріалу при незмінній відстані від зразка до фотопластинки повинно бути сталим. Аналогічні результати було отримано при дифракції електронів.

Протягом тривалого часу залишалось нез'ясованим, чи є хвильові властивості окремо у кожній мікрочастинки, чи їх має лише потік багатьох мікрочастинок. У 1949р. радянські вчені **В.Фабрикант**, **М.Сушкін**, **Л.Біберман** провели дослід з дифракції потоку електронів настільки незначної інтенсивності, що інтервал часу між пролітанням наступних електронів був приблизно в 30000 разів більший від часу, який необхідний для проходження через увесь прилад, тобто реєструвалось проходження окремих електронів. При досить тривалій експозиції отримували таку ж дифракційну картину, як і для інтенсивних пучків електронів. Цей дослід переконав, що хвильові властивості притаманні кожному електрону.

Відкриття хвильових властивостей електрона показало, що електрон не можна уявити у вигляді маленької кульки як матеріальної точки. Він має складну структуру з корпускулярними і хвильовими властивостями одночасно.

Відповідно до гіпотези де Бройля хвильові властивості повинні мати не тіль-

ки електрони, але й будь-які частинки – протони, нейтрони, атоми і молекули.

У 1929р. О.Штерн провів серію дослідів для вивчення дифракції нейтральних атомів і молекул. При відбиванні пучків атомів і молекул від поверхонь твердих тіл повинні спостерігатись дифракційні явища, що описуються тими самими співвідношеннями, які справедливі для плоскої двовимірної дифракційної ґратки.

Досліди, в яких була вивчена дифракція нейтронів на кристалах, теж є доказом справедливості формули де Бройля. Нейтрони від кристалів твердих тіл відбиваються і розсіюються в речовині відповідно до умови Вульфа-Брегга $n\lambda = 2d \sin\theta$, де λ – довжина хвилі, яка пов'язана з рухомим нейтроном і задовільняє формулу де Бройля.

Для тіл, маса яких дуже велика порівняно з масою атомів і молекул, ніяких хвильових властивостей виявити не можна. Наприклад, якщо куля масою $m = 10^{-3}$ кг рухається зі швидкістю $v = 10^2$ м/с, то

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{10^{-3} \cdot 10^2} \text{ м} = 6,62 \cdot 10^{-33} \text{ м}.$$

Таку довжину хвилі не можна встановити у жодному дифракційному досліді. Тому макроскопічні тіла хвильових властивостей практично не мають.

§115. Співвідношення невизначеностей як прояв корпускулярно-хвильового дуалізму властивостей матерії.
Обмеженість механічного детермінізму

Розглянемо, наслідки що впливають з корпускулярно-хвильової двоїстості електронів, фотонів, протонів та інших

об'єктів мікросвіту, і які обмеження накладає цей дуалізм на класичний метод описування їх руху і, зокрема, на можливість одночасного визначення їх імпульсів і координат.

У класичній механіці всяка частинка рухається певною траєкторією так, що фіксовані її координати та імпульс. Мікročастинки внаслідок наявності в них хвильових властивостей відрізняються від класичних частинок. Одна з основних відмінностей полягає в тому, що мікročастинка не має чіткої траєкторії, і неправомірно говорити одночасно про точні значення її координат та імпульсу.

Як відомо, будь-яка хвиля, незалежно від її природи, є процесом, що заповнює більшу чи меншу область простору, а через це не може локалізуватися в одній точці. Наприклад, уздовж осі OX рухається фотон, для якого точно відомий імпульс $P = P_x$, тобто $\Delta P_x \rightarrow 0$. Такому фотону відповідає хвиля, довжина якої однозначно визначається величиною імпульсу $\lambda = \frac{h}{P}$.

Така монохроматична хвиля в просторі нічим не обмежена, область її існування – вся вісь OX . Це означає, що в цьому випадку просторовий інтервал Δx , в якому замкнено об'єкт з хвильовими властивостями – фотон, дорівнює нескінченності. Іншими словами, при $\Delta P_x \rightarrow 0$ маємо $\Delta x \rightarrow \infty$. Отже, якщо точно відомий імпульс, локалізація фотона стає цілком невизначеною.

Якщо ж область локалізації фотона є обмеженою, то це означає, що амплітуда відповідного хвильового процесу відрізняється від нуля тільки всередині скінчен-

ного інтервалу Δx і дорівнює нулю позанім. Такий хвильовий процес уже не можна зобразити якою-небудь монохроматичною хвилею. Його можна уявити як суперпозицію ряду монохроматичних хвиль різної довжини. На рис.393 наведено простий

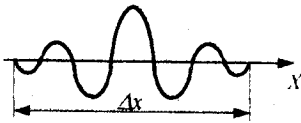


Рис.393

приклад суперпозиції трьох синусоїдальних

хвиль, внаслідок чого відбувається хвильовий процес – так званий хвильовий пакет, амплітуда якого відрізняється від нуля в скінченному інтервалі Δx .

Оскільки в хвильовому пакеті є набір значень λ , які містяться в деякому інтервалі $\Delta\lambda > 0$, то набір значень імпульсів P знаходиться в інтервалі

$$\Delta P = \Delta \left(\frac{h}{\lambda} \right) = \frac{h}{\lambda^2} |\Delta\lambda|.$$

Чим ширший інтервал $\Delta\lambda$ можливих значень інтерферуючих хвиль (а разом з тим інтервал ΔP_x можливих значень імпульсів), тим вужча область локалізації Δx результуючого пакета. Інакше кажучи, чим більша невизначеність імпульсу фотона, тим точніше можна визначити його координати. При $\Delta P_x \rightarrow \infty$ маємо $\Delta x \rightarrow 0$,

тобто *точно значення координат фотона можливе тільки при повній невизначеності його імпульсу*. Такі висновки справедливі не тільки для фотонів, а й для електронів, протонів та інших мікрочастинок.

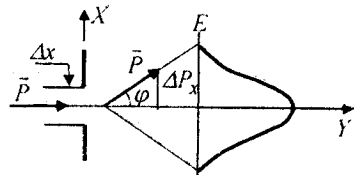
У 1927р. В.Гейзенберг, враховуючи хвильові властивості мікрочастинок, дійшов висновку, що об'єкт мікросвіту неможливо одночасно з однаковим ступенем

точності характеризувати і координатами, й імпульсом. Згідно з співвідношенням невизначеностей Гейзенберга *мікрочастинка не може одночасно мати і певну координату (x, y, z) і певну відповідну проекцію імпульсу (P_x, P_y, P_z) , причому невизначеності в значеннях цих всіх величин задовольняють умови*

$$\Delta x \Delta P_x \geq \hbar, \quad \Delta y \Delta P_y \geq \hbar, \quad \Delta z \Delta P_z \geq \hbar,$$

тобто *добуток невизначеностей координати і відповідної їй проекції імпульсу не може бути меншим від величини \hbar* .

Співвідношення невизначеностей впливає з хвильових властивостей мікрочастинок. Нехай потік електронів проходить через вузьку щілину завширшки Δx , яка розміщена перпендикулярно напрямку їх руху (рис.294). Оскільки електрони ма-



ють хвильові властивості, то при розмірах щілини, яка порівняна з довжиною хвиль де Бройля для електрона, при їх проходженні через щілину відбувається дифракція, яка спостерігається на екрані E .

До проходження через щілину електрони рухалися вздовж осі OY , тому складові імпульсу $P_x = 0$ так, що $\Delta P_x = 0$, а координата x точки є цілком невизначеною. В момент проходження електронів через щілину їх положення в напрямку осі Ox визначається з точністю до ширини щілини, тобто з точністю Δx . У той самий момент внаслідок дифракції електрони відхиляються від початкового напрямку і починають рухатися в границях кута 2ϕ .

Отже, появиться невизначеність в значенні складової імпульсу вздовж осі OX , яка дорівнює

$$\Delta P_x = P \sin \varphi = \frac{h}{\lambda} \sin \varphi.$$

З теорії дифракції відомо, що перший мінімум відповідає куту φ , що задовольняє умову $\Delta x \sin \varphi = \lambda$. З цих формул

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{h} \Delta P_x, \quad \sin \varphi = \frac{\lambda}{\Delta x}.$$

$$\Delta x \Delta P_x = h.$$

Якщо врахувати максимуми дифракційної картини вищих порядків, то

$$\Delta x \Delta P_x \geq h \quad \text{або} \quad \Delta x \Delta p_x \geq \hbar.$$

Неможливість одночасно точно визначити координату і відповідну складову імпульсу не пов'язана з недосконалістю методів вимірювання та вимірювальних приладів, а є наслідком подвійної корпускулярно-хвильової природи мікрооб'єктів. Співвідношення невизначеностей отримано при одночасному використанні класичних характеристик руху частинки (координати, імпульсу) і наявності у неї хвильових властивостей.

Оскільки в класичній механіці приймається, що вимірювання координати та імпульсу може бути проведено з будь-якою точністю, то, таким чином, співвідношення невизначеностей є квантовим обмеженням застосовності класичної механіки до мікрооб'єктів.

Класичні уявлення про рух частинки вздовж деякої траєкторії в квантовій механіці треба застосовувати, ураховуючи співвідношення невизначеності. У класичній теорії в кожній точці траєкторії частинка має певні координати x, y, z і певну швидкість \vec{v} , якій відповідають проекції

по координатних осях v_x, v_y, v_z . Траєкторію руху електрона можна визначити за слідом, який він залишив на фотопластині. Положення електрона можна зафіксувати з точністю, яка визначається лінійними розмірами зерна фотоемульсії, що зазнало дії електрона. Припустимо, що ці розміри мають величину порядку $\Delta x \sim 10^{-6}$ м. Тоді зі співвідношення невизначеностей

$$\Delta x \Delta P_x = \Delta x m \Delta v_x \geq \hbar$$

неточність, з якою можна визначити швидкість електрона, дорівнює

$$\begin{aligned} \Delta v_x &\geq \frac{\hbar}{m \Delta x} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{2,314 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-6}} \frac{\text{м}}{\text{с}} = \\ &= 1,2 \cdot 10^2 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Звичайно слід на фотопластинці залишають швидкі електрони з швидкостями $v \gg \Delta v_x$ ($v \sim 10^6 \div 10^7 \frac{\text{м}}{\text{с}}$). У цьому випадку можна говорити про рух електрона по певній траєкторії з точно заданою в кожній точці швидкістю.

Розглянемо тепер електрон, який рухається в атомі. Положення електрона можна визначити з точністю до розмірів атома, тобто $\Delta x \sim 10^{-10}$ м. В цьому випадку

$$\begin{aligned} \Delta v_x &\geq \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{2,314 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-10}} \frac{\text{м}}{\text{с}} = \\ &= 1,2 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Використовуючи закони класичної фізики, можна показати, що під час руху електрона навколо ядра по коловій орбіті радіуса $r = 0,5 \cdot 10^{-10}$ м його швидкість $v = 2,3 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Отже, величина невизначеності

ності швидкості Δv_x одного порядку з швидкістю електрона і тому не можна говорити про рух електрона в атомі по певній траєкторії, іншими словами, для опису руху електрона в атомі не можна користуватись законами класичної фізики.

Співвідношення невизначеності $\Delta x \Delta P_x \geq \hbar$ можна подати у такому вигляді:

$$\Delta x \Delta P_x = (v_x \Delta t)(m \Delta v_x) = \Delta \left(\frac{m v_x^2}{2} \right) \Delta t = \Delta E_x \Delta t \geq \hbar,$$

де ΔE_x – невизначеність кінетичної енергії частинки в деякому стані; Δt – час її перебування в цьому стані.

Отримане співвідношення справедливе не тільки для кінетичної, але і для повної енергії:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar.$$

Система, що має середній час життя Δt , не може бути охарактеризована чіткими значеннями енергії; розкид енергії

$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t}$ зростає зі зменшенням середнього часу життя. Частота випромінюваного фотона повинна мати невизначеність

$\Delta \nu = \frac{\Delta E}{h}$, тобто лінії спектра повинні характеризуватися частотою, яка дорівнює

$\nu \pm \frac{\Delta E}{h}$.

§116. Хвильова функція і її статистичний зміст

Встановлення хвильових властивостей електрона вимагало з'ясування фізичної природи хвиль де Бройля. Для вирі-

шення цієї проблеми порівнюємо дифракцію світлових хвиль і мікрочастинок.

Дифракційна картина, яка спостерігається для світлових хвиль, характеризується тим, що в результаті накладання дифрагуючих хвиль одна на одну в різних точках простору проходить підсилення або ослаблення амплітуди коливань. Інтенсивність дифракційної картини пропорційна квадрату амплітуди світлової хвилі.

З точки зору корпускулярних властивостей інтенсивність визначається числом фотонів, що потрапляє в дану точку дифракційної картини. Отже, число фотонів у даній точці дифракційної картини визначається квадратом амплітуди світлової хвилі. Тобто для кожного фотона квадрат амплітуди визначає ймовірність потрапляння фотона в ту чи іншу точку.

Дифракційна картина, що спостерігається для мікрочастинок, також характеризується нерівномірним розподілом потоків мікрочастинок, які розсіяні або відбиті в різних напрямках. Наявність максимумів у дифракційній картині з точки зору хвильової теорії означає, що ці напрямки відповідають найбільшій інтенсивності хвиль де Бройля. З іншого боку, інтенсивність хвиль де Бройля виявляється більшою там, де є більше число частинок, тобто інтенсивність хвиль де Бройля в даній точці простору визначає число частинок, що потрапили в цю точку. Таким чином, *дифракційна картина для мікрочастинок є проявом статистичної закономірності, згідно з якою частинки потрапляють в ті місця, де інтенсивність хвиль де Бройля найбільша.*

Необхідність ймовірнісного підходу до опису мікрочастинок є важливою особ-

лівістю квантової теорії. Однак, якщо хвилі де Бройля трактувати як хвилі ймовірності, тобто вважати, що хвилі характеризують ймовірність виявлення частинки в деяких точках простору, то при від'ємному значенні хвиль ймовірність може бути від'ємна, що не має сенсу.

У 1926р. німецький фізик Борн припустив, що за хвильовим законом змінюється не сама ймовірність, а деяка величина, яка названа амплітудою ймовірності, і позначається $\Psi(x, y, z, t)$. Цю величину називають також *хвильовою функцією*. Амплітуда ймовірності може бути комплексною і ймовірність W пропорційна квадрату її модуля:

$$W \sim |\Psi(x, y, z, t)|^2$$

($|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$, де Ψ^* – функція, яка комплексно спряжена з Ψ).

Опис стану мікрооб'єкта за допомогою хвильової функції має статистичний, ймовірнісний характер: *квадрат модуля хвильової функції (квадрат модуля амплітуди хвиль де Бройля) визначає ймовірність знаходження частинки в момент часу t в області з координатами x і $x+dx$, y і $y+dy$, z і $z+dz$.*

Отже, в квантовій механіці стан мікрочастинок описується принципово повному – за допомогою хвильової функції, яка є основним носієм інформації про їх корпускулярні і хвильові властивості.

Ймовірність знаходження частинки в елементарному об'ємі dV дорівнює:

$$dW = |\Psi|^2 dV,$$

де величина $|\Psi|^2 = \frac{dW}{dV}$ має зміст густини ймовірності, тобто визначає ймовірність

знаходження частинки в одиничному об'ємі в околі точки з координатами x, y, z .

Таким чином, фізичний сенс має не сама функція Ψ , а квадрат її модуля $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$, яким визначається інтенсивність хвиль де Бройля.

Ймовірність знайти частинку в момент часу t в скінченному об'ємі V згідно з теоремою додавання ймовірностей, дорівнює

$$W = \int_V dW = \int_V |\Psi|^2 dV.$$

Оскільки $|\Psi|^2 dV$ визначається як ймовірність, то хвильову функцію Ψ необхідно нормувати так, щоб ймовірність W достовірної події перетворювалась в одиницю, якщо за об'єм V прийняти нескінченний об'єм всього простору. Це означає, що при даній умові частинка повинна знаходитись десь в просторі. Отже, *умова нормування ймовірностей:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx dy dz = 1,$$

де потрібний інтеграл обчислюють по всьому нескінченному простору. Ця формула означає, що перебування частинки у просторі є достовірною подією і її ймовірність повинна дорівнювати одиниці.

Щоб хвильова функція була об'єктивною характеристикою стану мікрочастинок, вона повинна задовольняти ряд обмежуючих умов:

- 1) Функція Ψ , що характеризує ймовірність виявлення мікрочастинки в елементі об'єму, повинна бути *скінченною* (ймовірність не може бути більшою від одиниці), *однозначною* (ймовірність не може бути неоднозначною

величиною) і *неперервною* (ймовірність не може змінюватись стрибком).

- 2) Похідні $\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ повинні бути неперервні.
- 3) Функція $|\Psi|^2$ повинна бути інтегрованою.

Хвильова функція задовольняє принцип *суперпозицій*: якщо система може знаходитись в різних станах, що описуються хвильовими функціями $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$, то вона також може знаходитись в стані Ψ , що описується лінійною комбінацією цих функцій: $\Psi = \sum_n C_n \Psi_n$,

де C_n – деякі комплексні числа.

За допомогою хвильової функції в квантовій механіці можна обчислити середні значення фізичних величин, які характеризують певний об'єкт, що перебуває в стані, який описує хвильова функція Ψ . Обчислимо, наприклад, середню відстань від електрона до ядра в атомі. Ймовірність виявлення електрона в атомі в елементі об'єму dV дорівнює $|\Psi|^2 dV$. Величина $S = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r |\Psi|^2 dx dy dz$ є сумою добутків різних відстаней r від електрона до ядра на ймовірність цих відстаней. Середнє значення $\langle r \rangle$ відстані електрона від ядра буде визначене відношенням величини S до повної ймовірності виявлення електрона в якійсь точці простору:

$$\langle r \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r |\Psi|^2 dx dy dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx dy dz}$$

Знаменник цього дробу дорівнює одиниці. Тому

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r |\Psi|^2 dx dy dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r \Psi \Psi^* dx dy dz \end{aligned}$$

§117. Рівняння Шредінгера. Принцип причинності в квантовій механіці

Статистичне трактування хвиль де Бройля і співвідношення невизначеностей Гейзенберга привели до висновку, що рівнянням руху в квантовій механіці, яке описує рух мікрочастинок в різних силових полях, повинно бути рівняння, з якого би виходили хвильові властивості частинок, які спостерігаються під час досліду. Основне рівняння повинно бути рівнянням відносно хвильової функції $\Psi(x, y, z, t)$, оскільки саме вона, або, точніше, величина $|\Psi|^2$, визначає ймовірність перебування частинок в момент часу t в об'ємі dV . Оскільки шукане рівняння повинно враховувати хвильові властивості частинок, то воно повинно бути хвильовим рівнянням.

Основне рівняння нерелятивістської квантової механіки сформульовано в 1926р. Е.Шредінгером. Рівняння Шредінгера, як і всі основні рівняння фізики, не виводиться, а постулюється. Правильність цього рівняння підтверджується узгодженням з експериментами, що, у свою чергу, надає йому характер закону природи.

Рівняння Шредінгера має такий вигляд:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(x, y, z, t) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

де $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, m – маса частинки, Δ – опера-

тор Лапласа, $(\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2})$,

$U(x, y, z, t)$ – потенціальна енергія частинки в силовому полі, в якому рухається частинка, $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

З погляду математики рівняння Шредінгера являє собою лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними. З теорії диференціальних рівнянь відомо, що кожне лінійне рівняння з частинними похідними має багато розв'язків, причому таких, що лінійна комбінація будь-якої сукупності розв'язків рівняння також буде розв'язком рівняння.

Це рівняння справедливе для довільної частинки, яка рухається з малою швидкістю ($v \ll c$).

Щоб прийти до рівняння Шредінгера, розглянемо вільну рухома частинку, якій згідно з ідеєю де Бройля відповідає плоска хвиля. Для простоти розглянемо одномірний випадок. Рівняння плоскої хвилі, що поширюється вздовж осі OX , має вигляд:

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx) = A e^{-i(\omega t - kx)}.$$

Отже, враховуючи, що

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi E}{h} = \frac{E}{\hbar} \quad i \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi P}{h} = \frac{P}{\hbar},$$

отримуємо плоску хвилю де Бройля в такому вигляді:

$$\Psi(x, y, z, t) = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - Px)}$$

У квантовій механіці показник експоненти беруть зі знаком мінус, але оскільки фізичний зміст має лише $|\Psi|^2$, то знак “-” в експоненті неістотний. Тоді

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E\Psi;$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \left(\frac{i P}{\hbar}\right)^2 \Psi = -\frac{1}{\hbar^2} P^2\Psi.$$

$$\text{Звідси} \quad E = -\frac{\hbar}{i} \frac{1}{\Psi} \frac{\partial\Psi}{\partial t}; \quad E = \frac{1}{\Psi} i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t};$$

$$P^2 = -\frac{1}{\Psi} \hbar^2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}.$$

$$\text{Оскільки} \quad E = \frac{P^2}{2m}, \quad \text{то отримаємо}$$

диференціальне рівняння

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t},$$

яке збігається з рівнянням Шредінгера для випадку $U = 0$ (вільна частинка).

Якщо частинка рухається в силовому полі, що характеризується потенціальною енергією U , то повна енергія E складається з кінетичної і потенціальної енергії. Міркуючи аналогічно і використовуючи взаємозв'язок між E і p для даного випадку

$$\frac{P^2}{2m} = E - U, \quad \text{прийдемо до диференціаль-$$

ного рівняння Шредінгера.

Наведені міркування не повинні сприйматися як виведення рівняння Шредінгера. Вони лише пояснюють, як можна прийти до цього рівняння. Доказом правильності рівняння Шредінгера є його узгодження з результатами експерименту.

Записане вище рівняння Шредінгера називають рівнянням Шредінгера, що залежить від часу, бо воно містить похідну від функції Ψ по часу.

Проте для значної кількості фізичних явищ, які відбуваються в мікросвіті, наприклад, для опису поведінки електрона в атомі у ряді випадків важливо вміти зна-

ходити стаціонарні розв'язки рівняння Шредінгера, які не містять часу.

Щоб розв'язати цю задачу, треба знайти так зване *стаціонарне рівняння Шредінгера*, в якому виключено залежність Ψ від часу. Воно має сенс для тих задач, в яких потенціальна енергія U не залежить від часу: $U = U(x, y, z)$. Шукатимемо розв'язок рівняння Шредінгера у вигляді добутку:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i \frac{E}{\hbar} t},$$

де $\psi(x, y, z, t)$ є функцією лише координат, а E – повна енергія частинки.

Підставимо вираз для $\Psi(x, y, z, t)$ у рівняння Шредінгера

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi e^{-i \frac{E}{\hbar} t} + U(x, y, z) \psi e^{-i \frac{E}{\hbar} t} = \\ = i\hbar \psi (-i) \frac{E}{\hbar} e^{-i \frac{E}{\hbar} t}. \end{aligned}$$

Скоротивши на множник $e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$, дістанемо

$$\Delta \psi(x, y, z) + (E - U) \psi(x, y, z) = 0.$$

Це *стаціонарне рівняння Шредінгера*.

Наведене рівняння – найважливіше співвідношення нерелятивістської квантової механіки. Функції ψ , які задовольняють рівняння Шредінгера при певному E , називають *власними функціями*. В рівнянні Шредінгера як параметр входить повна енергія частинки. В теорії диференціальних рівнянь доводиться, що подібні рівняння мають розв'язок не при довільних значеннях параметра, а лише при певних значеннях E . Ці значення *енергії* називають *власними*.

Власні значення E можуть утворювати як неперервний, так і дискретний ряд. У першому випадку говорять про неперер-

вний, або суцільний спектр, у другому – про дискретний спектр.

Стан частинки в певний момент часу описується періодичною функцією часу з циклічною частотою $\omega = \frac{E}{\hbar}$, яка визначається повною енергією частинки.

Рівняння Шредінгера дає змогу знайти не тільки конкретний вигляд функції $\Psi(x, y, z, t)$ у заданому зовнішньому полі $U(x, y, z)$, а й визначити її зміну з часом $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$. Отже, рівняння Шредінгера виступає як свого роду “причина” того, який вигляд має Ψ – функція в тому чи іншому випадку і як вона змінюється з часом. Знання ж Ψ – функції дає змогу знайти всі можливі значення важливих фізичних параметрів фізичної системи у будь-який момент часу.

Отже, *рівняння Шредінгера є математичним виразом принципу причинності в квантовій механіці*. Але на відміну від класичної фізики, квантова механіка не дає чіткої відповіді на запитання, які точні значення параметрів у даний момент часу. Ψ – функція, вказуючи цілий спектр можливих значень параметрів системи, дає змогу обчислити лише ймовірність появи кожного значення під час вимірювання.

§118. Рух вільної частинки. Частинка в прямокутній потенціальній ямі.

Принцип відповідності Бора.

Тунельний ефект

Розглянемо декілька порівняно простих прикладів застосування рівняння Шредінгера до руху частинки в конкретних умовах.

1. Рух вільної частинки

Під час руху вільної частинки ($U(x) = 0$) повна енергія збігається з кінетичною $E = E_K$. Для вільної частинки, що рухається вздовж осі OX , рівняння Шредингера для стаціонарних станів набирає вигляду

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0.$$

Прямою підстановкою можна переконатися в тому, що частковим розв'язком рівняння є функція

$$\psi = A e^{\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mEx}} + B e^{-\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mEx}},$$

де A і B – сталі. Функція $\psi(x)$ є тільки координатною частиною хвильової функції $\psi(x, t)$ стаціонарного стану. Розв'язок повного рівняння Шредингера отримаємо у формі

$$\psi(x, t) = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \sqrt{2mEx})} + B e^{-\frac{i}{\hbar}(Et + \sqrt{2mEx})}$$

Цей розв'язок є суперпозицією двох плоских монохроматичних хвиль однакової частоти $\omega = \frac{E}{\hbar}$, хвиля з амплітудою A поширюється в додатному напрямі осі OX , хвиля з амплітудою B у протилежному напрямку. Порівнюючи знайдені розв'язки з загальним виразом плоскої монохроматичної хвилі $\xi = A e^{-i(\omega t - kx)}$, бачимо, що хвильове число k для вільної частинки дорівнює $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$.

Отже, вільній частинці в квантовій механіці відповідає плоска монохроматична хвиля де Бройля. Вона характеризує ймовірність знаходження частинки в певній точці простору і $|\psi|^2 = |A|^2$.

Власні значення енергії частинки

$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{P_x^2}{2m}$. Енергія вільної частинки може набувати довільне значення, тобто її енергетичний спектр неперервний.

2. Частинка в одновимірній прямокутній потенціальній ямі

У цьому випадку потенціальна енергія частинки $U(x)$ набуватиме такі значення (для простоти приймаємо, що частинка рухається вздовж осі OX) (рис.295):

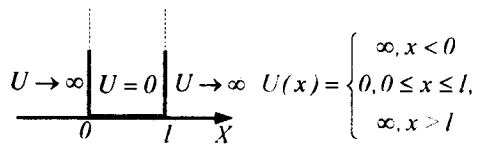


Рис.295

де l – ширина "ями", а енергія відраховується від дна ями.

Рівняння Шредингера у випадку одновимірної ями запишемо у вигляді

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0.$$

За умовою задачі (нескінченно високі "стінки") частинка не проникає за границі "ями", тому ймовірність її виявлення за границями "ями" дорівнює нулю. На границях "ями" (при $x=0$ і $x=l$) неперервна хвильова функція повинна перетворюватися в нуль. Отже, граничні умови мають вигляд $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

В границях "ями" ($0 \leq x \leq l$) рівняння Шредингера має вигляд

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0,$$

де $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$.

Загальний розв'язок цього диференціального рівняння:

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx.$$

Оскільки $\psi(0) = 0$, то $B = 0$. Отже,

$$\psi(x) = A \sin kx.$$

Умова $\psi(l) = A \sin kl = 0$ виконується лише при $kl = n\pi$, де n - цілі числа, тобто необхідно, щоб $k = \frac{n\pi}{l}$. Тоді

$$\frac{n^2 \pi^2}{l^2} = \frac{2m}{\hbar^2} E_n \quad \text{і} \quad E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ml^2}.$$

Рівняння Шредінгера задовольняється лише при значеннях E_n , що залежать від цілого числа n .

Отже, енергія E_n частинки в потенціальній "ямі" з нескінченно високими стінками не може бути довільною, а набуває лише певні дискретні значення, тобто квантується. Квантові значення енергії E_n називають рівнями енергії, а число n , яке визначає енергетичні рівні частинки, називають квантовим числом.

Умова $k_n = \frac{n\pi}{l}$ має простий фізичний зміст. Оскільки $k_n = \frac{2\pi}{\lambda}$, де λ_n - довжина хвилі де Бройля для електрона в "ямі", то

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{l}, \quad \text{або} \quad \lambda_n = \frac{2l}{n},$$

тобто на ширині "ям" повинно вкладатися ціле число півхвиль де Бройля.

Знайдемо власні хвильові функції

$$\psi(x) = A \sin kx = A \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Сталу інтегрування A визначаємо з

умови нормування $A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = 1.$

Звідси $A = \sqrt{\frac{2}{l}}$. Тоді власна хвильова функція має вигляд:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

На рис.296а наведені графіки функції $\psi_n(x)$ при $n = 1, 2, 3$, рис.296б - густини ймовірності знаходження частинки на різних відстанях від "стінок" ями для $n = 1, 2, 3$.

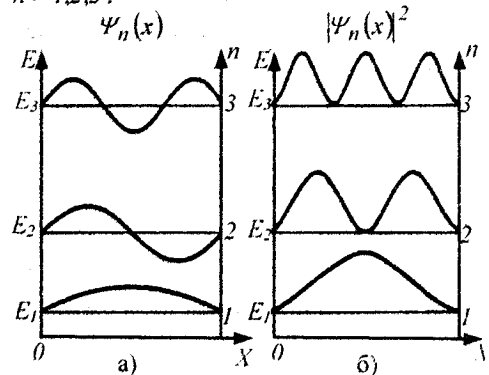


Рис.296

Наприклад, у квантовому стані з $n=2$ частинка не може знаходитись в середині "ям" і в той же час однаково часто може перебувати в її лівій або правій частині.

Оцінимо різницю енергій двох сусідніх рівнів:

$$\begin{aligned} \Delta E_n = E_{n+1} - E_n &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (n+1)^2 - \\ &- \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n+1). \end{aligned}$$

Для електрона при розмірах ями $l = 10^{-1} \text{ м}$ (вільні електрони в металі)

$$\begin{aligned} \Delta E_n &= (2n+1) \cdot 6 \cdot 10^{-36} \text{ Дж} = \\ &= (2n+1) \cdot 3,7 \cdot 10^{-17} \text{ еВ}. \end{aligned}$$

Енергетичні рівні розміщені так тісно, що спектр практично можна вважати неперервним. Якщо область, в якій

рухається електрон, порядку атомних розмірів ($l \sim 10^{-10} \text{ м}$), то

$$\begin{aligned} \Delta E_n &= (2n+1) \cdot 6 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = \\ &= (2n+1) \cdot 3,7 \cdot 10 \text{ eВ}. \end{aligned}$$

Отже, дискретність енергетичних рівнів в цьому випадку буде досить помітною і отримуємо лінійчастий спектр.

При великих квантових числах ($n \gg 1$)

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{2n+1}{n^2} \approx \frac{2}{n} \ll 1,$$

тобто сусідні рівні розміщені тим густіше, чим більше n . Якщо n дуже велике, то можна говорити про практично неперервну послідовність рівнів, і характерна особливість квантових процесів – дискретність – згладжується. Цей результат є частковим випадком **принципу відповідності Бора**, згідно з яким закони квантової механіки повинні при великих значеннях квантових чисел переходити в закони класичної фізики.

Загальніше трактування **принципу відповідності**: всяка нова, більш загальна теорія, є розвитком класичної, не відповідає їй повністю, а включає класичну теорію, вказуючи межі її застосування, причому в окремих граничних випадках нова теорія переходить у стару.

3. Тунельний ефект

Розглянемо потенціальний бар'єр простої прямокутної форми для одномірного (по осі x) руху частинки. Для потенціального бар'єра прямокутної форми висоти U і ширини l (рис.297) можна записати:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ U, & 0 \leq x \leq l; \\ 0, & x > l \end{cases}$$

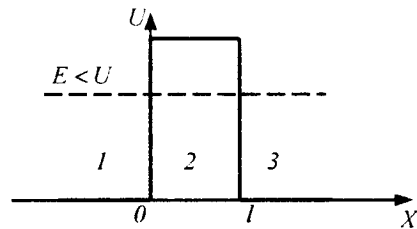


Рис.297

При даних умовах задачі класична частинка, маючи енергію E , або пройде над бар'єром (при $E > U$), або відіб'ється від нього (при $E < U$) і буде рухатися в зворотний бік.

Для мікрочастинки навіть при $E > U$ є відмінна від нуля ймовірність того, що частинка відіб'ється від бар'єра і буде рухатися у зворотний бік. При $E < U$ є також відмінна від нуля ймовірність того, що частинка виявиться в області $x > l$, тобто проникне через бар'єр.

Рівняння Шредінгера для кожної з виділених областей має вигляд:

$$1 \text{ і } 3: \frac{\partial^2 \psi_{1,3}}{\partial x^2} + k^2 \psi_{1,3} = 0; \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E,$$

$$2: \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + q^2 \psi_2 = 0; \quad q^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - U).$$

Загальні розв'язки цих диференціальних рівнянь:

$$1: \psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx},$$

$$2: \psi_2(x) = A_2 e^{iqx} + B_2 e^{-iqx},$$

$$3: \psi_3(x) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}.$$

Зокрема, для області 1 повна хвильова функція має вигляд:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x,t) &= \psi_1(x) e^{-\frac{i}{\hbar} Et} = \\ &= A_1 e^{-\frac{i}{\hbar} (Et - p_1 x)} + B_1 e^{-\frac{i}{\hbar} (Et + p_1 x)}. \end{aligned}$$

У цьому виразі перший член є плоскою хвилею, що поширюється в додатньому напрямі осі X , а другий – хвилею, що поширюється в протилежному напрямку,

тобто відбитою від бар'єра. Розглянемо в цій задачі дві хвилі: ту що падає і ту, що проходить крізь потенціальний бар'єр. Тому вважатимемо, що $B_1 = 0$.

Розв'язок для області 3 містить також хвилі, що поширюються в обидві сторони. Однак в області 3 є лише хвиля, що пройшла через бар'єр і поширюється зліва направо. Тому коефіцієнт B_3 слід приймати таким, що дорівнює нулю.

В області 2 розв'язок залежить від співвідношень $E > U$ або $E < U$. Інтерес становить, коли $E < U$. Тут $q = i\beta$ – уявне

$$\text{число, де } \beta = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}.$$

У результаті

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ikx}; \quad \psi_2(x) = A_2 e^{-\beta x} + B_2 e^{\beta x};$$

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ikx}.$$

В області 2 функція $\psi_2(x)$ вже не відповідає плоским хвилям, що поширюються в обидві сторони, оскільки показники степенів експонент не уявні, а дійсні. B_2 вибирають таким, що дорівнює нулеві через умови скінченності, що накладаються на хвильову функцію.

Отже, хвильова функція не дорівнює нулю і в середині бар'єра, а в області 3 буде мати вигляд хвиль де Бройля з тим самим імпульсом, але меншою амплітудою.

Якісний вигляд функції $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ і $\psi_3(x)$ наведений на рис.298.

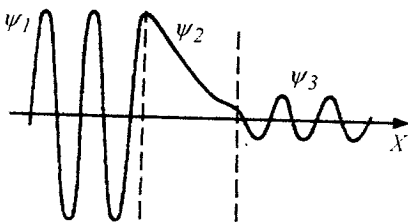


Рис.298

Таким чином, квантова механіка приводить до принципово нового явища, яке називається *тунельним ефектом*, в результаті якого мікрооб'єкт може пройти через потенціальний бар'єр.

Знайдемо ймовірність проходження мікрочастинки крізь потенціальний бар'єр, або *коефіцієнт пропускання*. Цей коефіцієнт також називають *коефіцієнтом прозорості*. За означенням він дорівнює відношенню інтенсивності хвилі, що проходить через бар'єр, до інтенсивності хвилі, що падає на межу поділу областей 1 і 2. Оскільки інтенсивність хвилі пропорційна квадрату амплітуди коливань, то коефіцієнт прозорості бар'єра

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}.$$

Для того, щоб знайти відношення

$$\frac{|A_3|^2}{|A_1|^2},$$

необхідно використати умови неперервності функції ψ у всій області змін x від $-\infty$ до $+\infty$, тобто $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, $\psi_2(l) = \psi_3(l)$. Для того, щоб функція ψ була гладкою, повинні виконуватися умови $\psi_2'(0) = \psi_3'(l)$, $\psi_2'(l) = \psi_3'(l)$. Ці умови дають змогу виразити коефіцієнти A_2 і A_3 через A_1 .

В результаті $A_1 = A_2$, $A_2 e^{-\beta l} = A_3 e^{ikl}$ і

$$D = \frac{|A_3 e^{ikl}|^2}{|A_1|^2} = e^{-2\beta l} = \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_0^l \sqrt{2m(U-E)} dx\right].$$

Для потенціального бар'єра довільної форми:

$$D \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(E-U)} dx\right],$$

де $U = U(x)$.

Із виразів для D видно, що коефіцієнт прозорості залежить від маси мікрочастинки, ширини бар'єра і від різниці $(U - E)$.

Тунельний ефект є специфічним квантовим ефектом. Проходження мікрочастинки крізь область, в яку, згідно із законами класичної механіки, вона не може проникнути, можна пояснити співвідношенням невизначеностей. Невизначеність імпульсу Δp на відрізку $\Delta x = l$ дорівнює $\Delta p > \hbar/l$. Зв'язана з цим розкидом в значеннях імпульсу кінетична енергія $\Delta p^2 / (2m)$ може виявитися достатньою для того, щоб повна енергія мікрочастинки виявилася більшою за потенціальну.

Проходження частинок через потенціальний бар'єр експериментально підтверджено в явищі холодної емісії електронів з металу. Тунельний ефект відіграє основну роль у явищах радіоактивного α -розпаду, перебігу термоядерних реакцій.

§119. Атом водню у квантовій механіці

Розв'язання задачі про енергетичні рівні електрона для атома водню (а також воднеподібних систем: іон гелію He^+ , двократно іонізований літій Li^{++} та ін.) зводиться до задачі про рух електрона в кулонівському полі ядра.

Потенціальна енергія взаємодії електрона з ядром, що має заряд Ze ,

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r - \text{відносна відстань між електроном і ядром.}$$

Графічно функція $U(r)$ зображена на рис.316.

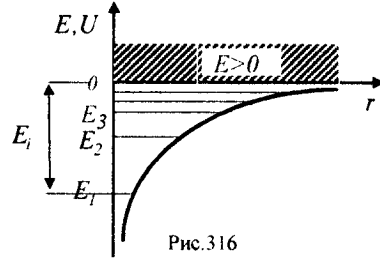


Рис.316

Стан електрона в атомі водню описується хвильовою функцією ψ , яка є розв'язком стаціонарного рівняння Шредінгера

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0,$$

де E – повна енергія електрона в атомі. Оскільки поле, в якому рухається електрон, є центрально-симетричним, то для розв'язання рівняння Шредінгера використовують сферичну систему координат: r, θ, φ . Підставляючи в рівняння Шредінгера оператор Лапласа в сферичних координатах, прийдемо до рівняння:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0.$$

Функцію $\psi(r, \theta, \varphi)$ можна зобразити добутком трьох функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi).$$

Не вдаючись до математичного розв'язання цієї задачі, обмежимося розглядом важливих результатів, які з нього отримують, пояснивши їх основний зміст.

1. Енергія

Рівняння Шредінгера має розв'язки, що задовольняють вимоги однозначності,

скінченності і неперервності хвильової функції ψ лише при власних значеннях енергії

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m e^4}{8 h^2 \varepsilon_0^2} = -\frac{Z^2}{n^2} R h \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

де $R = \frac{m e^2}{8 h^3 \varepsilon_0^2}$ – стала Рідберга.

Розв'язок рівняння Шредінгера для атома водню приводить до появи дискретних енергетичних рівнів. Нижній рівень E_1 , що відповідає мінімально можливій енергії – основний, всі інші ($E_n > E_1$) збуджені. При $E < 0$ рух електрона є зв'язаним – він знаходиться всередині гіперболічної "потенціальної ями". У міру зростання головного квантового числа n енергетичні рівні розміщуються тісніше і при $n = \infty$ $E_n = 0$. При $E > 0$ рух електрона є вільний – він може покинути межі атома. Енергія іонізації атома водню дорівнює:

$$E_i = -E_1 = \frac{m e^4}{8 h^2 \varepsilon_0^2} = 13,55 \text{ eV}.$$

У квантовій механіці дискретні значення енергій є наслідком самої теорії, вони впливають безпосередньо з розв'язків рівняння Шредінгера.

2. Квантові числа

Рівняння Шредінгера задовольняють власні функції $\psi = \psi_{nlm_l}(r, \theta, \varphi)$, що визначаються трьома квантовими числами: головним n , орбітальним l і магнітним m_l .

Головне квантове число n визначає енергетичні рівні електрона в атомі і може набувати довільних цілочислових значень, починаючи з одиниці: $n = 1, 2, 3, \dots$

З розв'язків рівняння Шредінгера випливає, що момент імпульсу (механічний орбітальний момент) електрона квантується, тобто не може бути довільним, а набуває дискретних значень, які обчислюють за формулою $L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)}$, де l – орбітальне квантове число, що визначає величину модуля вектора моменту імпульсу електрона в атомі і при заданому n набуває значення $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$, тобто разом n значень.

З розв'язків рівняння Шредінгера виходить також, що вектор \vec{L}_l моменту імпульсу електрона може мати лише таку орієнтацію в просторі, при якій проекція L_{l_z} на напрямок Z зовнішнього магнітного поля набуває квантових значень, кратних \hbar :

$$L_{l_z} = \hbar m_l,$$

де m_l – магнітне квантове число, яке визначає проекцію моменту імпульсу електрона на заданий напрямок. Магнітне квантоване число при заданому l може набувати значення

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l,$$

тобто разом $2l + 1$ значень. Фізичний сенс обмеження m_l за величиною полягає в тому, що проекція вектора моменту не може бути більшою за довжину самого вектора.

На рис.300 наведені можливі орієнтації векторів \vec{L}_l для електронів у випадку $l = 1$ і $l = 2$.

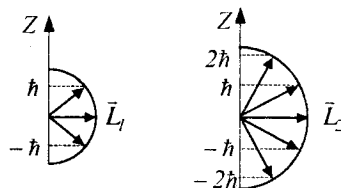


Рис.300

Наявність квантового числа m_l повинна привести в магнітному полі до розщеплення рівня з головним квантовим числом n на $(2l + 1)$ підрівнів. Відповідно у спектрі атома повинно спостерігатися розщеплення спектральних ліній. Розщеплення енергетичних рівнів в магнітному полі було виявлено Т.Зееманом і отримало назву *ефекту Зеемана*. Розщеплення рівнів енергій у зовнішньому електричному полі називається *ефектом Штарка*.

Хоча енергія електрона і залежить від головного квантового числа n , але кожному значенню E_n (при E_l) відповідає декілька власних функцій ψ_{nlm_l} , що відрізняються значеннями l і m_l . Отже, атом водню може мати одне і те ж значення енергії, але знаходитись в декількох різних станах. Оскільки при даному n орбітальне квантове число l може змінюватись від 0 до $n - 1$, а кожному значенню l відповідає $2l + 1$ різних значень m_l , то число різних станів, що відповідають даному n , дорівнює

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2.$$

Стани з однаковою енергією називаються *виродженими*, а число станів з певним значенням енергії називають *кратністю виродження* відповідного енергетичного рівня.

Ймовірність виявлення електрона в різних частинах атома різна. Електрон при своєму русі ніби "розмазаний" по всьому об'єму, створюючи електронну хмару, густина якої характеризує ймовірність знаходження електрона в різних точках об'єму атома. *Квантові числа n і l характеризують розмір і форму електронної хмари, а*

квантове число m_l характеризує орієнтацію електронної хмари в просторі (рис.301).

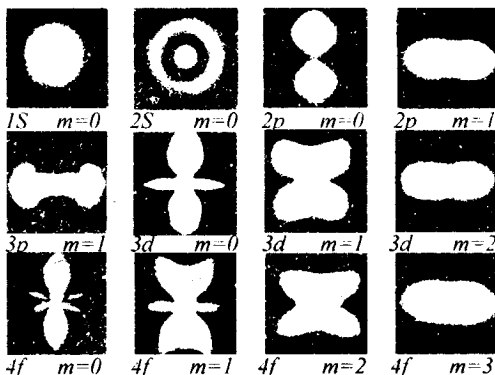


Рис.301

Стан електрона, що характеризується квантовим числом $l = 0$, називається *s*-станом (електрон в цьому стані називається *s*-електроном), $l = 1$ – *p*-станом; $l = 2$ – *d*-станом; $l = 3$ – *f*-станом і так далі.

Значення головного квантового числа вказується перед умовним позначенням орбітального квантового числа:

$1s; 2s2p; 3s3p3d; 4s4p4d4f; \dots$

3. Снекmp

Квантові числа n, e і m_l дозволяють повністю описати спектр випромінювання атома водню, отриманий в теорії Бора.

У квантовій механіці появляються правила відбору, що обмежують число можливих переходів електронів в атомі, зв'язаних з випромінюванням і поглинанням світла. Теоретично доведено і експериментально підтверджено, що для дипольного випромінювання електрона, який рухається в центрально-симетричному полі ядра атома, можуть здійснюватися лише такі переходи, для яких: 1) зміна орбітального квантового числа Δl задовольняє умову $\Delta l = \pm 1$; 2) зміна магнітного кван-

того числа Δm_l задовольняє умову $\Delta m_l = 0, \pm 1$

У спектральних лініях атома водню серії Лаймана відповідають переходи $np \rightarrow 1s$ ($n = 2, 3, \dots$), серії Бальмера - $np \rightarrow 2s, ns \rightarrow 2p, nd \rightarrow 2p$ ($n = 3, 4, \dots$) (рис.302).

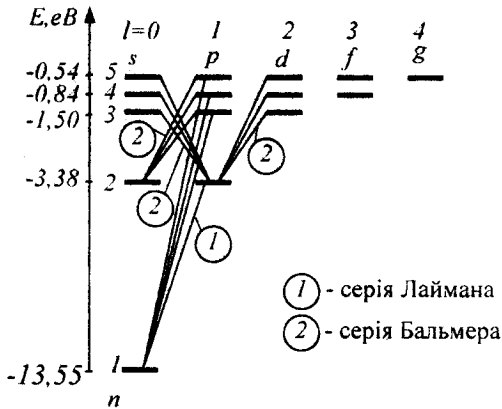


Рис.302

§119. Дослід Штерна і Герлаха. Спін електрона

У 1921 р. О.Штерн і В.Герлах поставили досліди, метою яких було вимірювання магнітних моментів \vec{p}_m атомів різних хімічних елементів.

Для визначення орбітального моменту імпульсу \vec{L}_l , та магнітного моменту \vec{p}_m одного електрона треба було поставити дослід з атомами, в яких орбітальні механічні (магнітні) моменти всіх електронів, крім одного, взаємно компенсують один одного. Такими є атоми хімічних елементів, які утворюють першу групу Періодичної системи елементів Менделєєва і мають один валентний електрон на зовнішній оболонці. Отже, моменти ім-

пульсу і магнітні моменти таких атомів збігаються з моментами валентного електрона.

Використаємо зв'язок між векторами \vec{p}_m і \vec{L}_l , який отриманий в §75:

$$\vec{p}_m = -g_l \vec{L}_l = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}_l,$$

де $g_l = \frac{|e|\hbar}{2m_e} -$ орбітальне гіромагнітне відношення. Підставимо сюди вираз

$$L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)}.$$

Тоді

$$p_m = -\frac{e}{2m_e} L_l = -\frac{e\hbar}{2m_e} \sqrt{l(l+1)} = -\mu_B \sqrt{l(l+1)}.$$

Величина $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 0,927 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$

називається магнетоном Бора.

Схема досліду Штерна і Герлаха зображена на рис.303. У трубку, де було створено вакуум

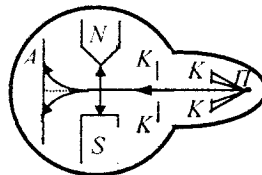


Рис.303

порядку 10^{-3} Па, вміщували срібну кульку, яку нагрівали до високої температури. Атоми срібла вилітали з поверхні кульки з середньою тепловою швидкістю порядку 100 м/с . З цих атомів за допомогою щілинних коліматорів K вирізали вузький пучок, що проходив крізь сильне і неоднорідне магнітне поле, яке напрямлене перпендикулярно до пучка. Необхідна неоднорідність була досягнута за рахунок застосування потужного електромагніту SN з полюсним наконечником спеціальної форми. Приймачем атомів

срібла була фотопластинка *A*. За відсутності поля між полюсами електромагніту атоми реєструвались на пластинці у вигляді вузької смуги.

У сильно неоднорідному полі на атом діє сила, числове значення якої визначається формулою:

$$F = p_{mz} \frac{dB}{dz},$$

де *B* – індукція магнітного поля, яка напрямлена вздовж осі *Z* і неоднорідна лише вздовж тієї самої осі.

Коли б момент імпульсу \vec{I}_l атома (і його магнітний момент \vec{p}_m) міг набирати довільних орієнтацій у магнітному полі, то слід було б чекати безперервного розподілу атомів. На фотопластинці це фіксувалось би у вигляді розмитої смуги з більшою густиною влучань на середині пластинки і зменшенням числа влучань біля її країв. Досліди, виконані зі сріблом та іншими елементами періодичної системи, привели до зовсім іншого результату.

Виявилося, що залежно від досліджуваного елемента на пластинці спостерігається декілька тонких смужок, чітко відділених одна від одної і симетрично розміщених відносно початкового положення (при $\vec{B}=0$) (рис.304). Наприклад, атоми

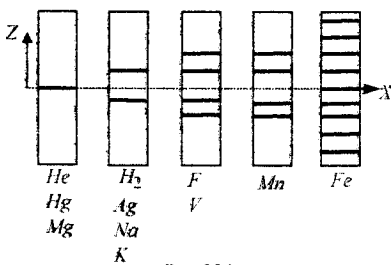


Рис.304

водню відхилялися в магнітному полі у двох напрямках, що відповідає лише двом

можливим орієнтаціям магнітного моменту атома у зовнішньому полі. Момент імпульсу атома і його магнітний момент дорівнюють сумарним моментам електронів, бо магнітні моменти ядер мають значно меншу величину, ніж магнітні моменти електронів. А магнітні моменти електронів дорівнюють сумарним моментам валентних електронів, бо моменти електронів заповнених оболонок компенсуються.

За відомою величиною $\frac{dB}{dz}$ неоднорідності магнітного поля, напрямленої по осі *Z*, і за визначеною з відхилення атомів у магнітному полі силою *F*, яка діє на атом, можна визначити p_{mz} . Для срібла Штерна і Герлах знайшли, що проекція магнітного моменту атома на напрямок поля числово дорівнює магнетону Бора.

Досліди Штерна і Герлаха підтвердили не лише просторове квантування моментів імпульсу в магнітному полі, але і висновок про те, що магнітні моменти електронів і атомів складаються з деякого числа елементарних моментів, тобто мають дискретну природу, пов'язану з квантуванням моменту імпульсу.

Важливою особливістю атомів першої групи є те, що валентний електрон в основному стані атома має орбітальне квантове число, яке дорівнює нулю, тобто електрон перебуває в *s*-стані. Атомний пучок у досліді мав атоми в основному стані. Однак у стані з $l=0$ електрон не має моменту імпульсу, як це випливає з формули $L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$. Тому виникає питання про пояснення результатів дослідів Штерна і Герлаха. Просторове квантування якого моменту імпульсу було вияв-

лено в цих дослідах і проекція якого магнітного моменту дорівнює одному магнетону Бора?

Для пояснення цього результату треба припустити, що в електрона, крім орбітального моменту імпульсу \vec{L}_l і відповідного йому магнітного моменту \vec{p}_m , є власний механічний момент імпульсу \vec{L}_s , який називається *спіном електрона*, і *власний магнітний момент* \vec{p}_{ms} , що відповідає йому. Припущення про існування спіну висловили в 1925р. С.Гоудсміт і Г.Уленбек.

Спін – власний незнищуваний механічний момент імпульсу, не зв'язаний з рухом електрона в просторі. Спін електрона – квантова величина, у неї немає класичного аналога; це внутрішня невід'ємна властивість електрона, як його заряд і маса.

Якщо електрону приписати власний механічний момент імпульсу \vec{L}_s , то з ним буде зв'язаний деякий власний магнітний момент \vec{p}_{ms} електрона. Із загальних законів квантової механіки випливає, що спін повинен бути квантований за законом $L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}$, де s – квантове число, яке називається *спіновим квантовим числом*.

За аналогією з орбітальним моментом імпульсу проекція L_{sz} квантується так, що вектор \vec{L}_s може набувати $2s+1$ орієнтацій. Оскільки в дослідах Штерна і Герлаха для водню спостерігались лише дві орієнтації, то $2s+1=2$, звідси $s = \frac{1}{2}$.

Для атомів першої групи періодичної системи, що мають один валентний електрон, який перебуває в стані з $l=0$,

момент імпульсу всього атома дорівнює спіну валентного електрона. Тому виявлення для таких атомів просторове квантування моменту імпульсу атома у магнітному полі було доказом наявності в спіну лише двох орієнтацій у зовнішньому полі.

Спінове квантове число на відміну від введених головного n , орбітального l і магнітного m_l не є цілим числом.

Власний механічний момент електрона L_s може набувати лише одного значення:

$$L_s = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)} \hbar = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar.$$

Проекція спіна на напрямок зовнішнього магнітного поля, будучи квантовою величиною, визначається формулою

$L_{sz} = m_s \hbar$, де m_s – магнітне спінове число, яке визначає проекцію власного імпульсу електрона на заданий напрямок. Магнітне спінове число може мати лише два значення: $m_s = \pm \frac{1}{2}$.

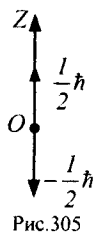


Рис.305

Отже, проекція спінового механічного моменту імпульсу на напрямок поля може набувати двох значень (рис.305):

$$L_{sz} = \pm \frac{1}{2} \hbar.$$

З дослідів Штерна і Герлаха випливає, що проекція p_{msz} власного магнітного моменту електрона дорівнює магнетону Бора:

$$p_{msz} = \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}.$$

Розглянемо відношення L_{sz} і p_{msz} :

$$\frac{p_{msz}}{L_{sz}} = \frac{e}{m_e} = g_s.$$

Відношення числових значень проєкцій векторів, напрямлених у взаємно протилежні сторони, дорівнює відношенню числових значень самих векторів:

$$\frac{p_{ms}}{L_s} = \frac{e}{m_e} = g_s.$$

У векторному записі $\vec{p}_{ms} = -g_s \vec{L}_s$,

$g_s = \frac{e}{m_e}$ – спінове гіромагнітне відношен-

ня, причому $g_s = 2g_l$.

§120. Принцип Паулі.

Розподіл електронів в атомі за станами

Якщо перейти від розгляду руху однієї мікрочастинки до багатоелектронних систем, то проявляються особливі властивості, що не мають аналога в класичній фізиці. Нехай квантово-механічна система складається з однакових частинок, наприклад, електронів. Всі електрони мають однакові фізичні властивості – масу, електричний заряд, spin і т. д. Такі частинки називаються *тотожними*.

Незвичайні властивості системи однакових тотожних частинок проявляються у фундаментальному принципі квантової механіки – *принципі нерозрізнимості тотожних частинок, згідно з яким неможливо експериментально відрізнити тотожні частинки*.

У квантовій механіці тотожні частинки повністю втрачають свою індивідуальність і стають нерозрізними.

Беручи до уваги фізичний зміст величини $|\psi|^2$, принцип нерозрізнимості тотожних частинок можна записати у вигляді

$$|\psi(x_1, x_2)|^2 = |\psi(x_2, x_1)|^2,$$

де x_1 і x_2 – відповідно сукупність просторових і спінових координат першої і другої частинки. З цього виразу випливає, що можливі два випадки:

$$\psi(x_1, x_2) = \pm \psi(x_2, x_1),$$

тобто принцип нерозрізнимості тотожних частинок веде до певних властивостей симетрії хвильової функції. Якщо при обміні частинок місцями хвильова функція не змінює знака, то вона називається *симетричною*, якщо змінює – *антисиметричною*. Характер симетрії хвильової функції не міняється з часом. Це є доказом того, що властивість симетрії чи антисиметрії – ознака даного типу мікрочастинок.

Симетрія чи антисиметрія хвильових функцій визначається спіном частинок. Залежно від характеру симетрії всі елементарні частинки і побудовані з них системи діляться на два класи. Частинки з півцілим спіном (електрони, протони, нейтрони) описуються антисиметричними хвильовими функціями. Ці частинки називаються *ферміонами*. Частинки з нульовим і цілочисловим спіном (π -мезони, фотони) описуються симетричними хвильовими функціями і називаються *бозонами*.

Якщо тотожні частинки мають однакові квантові числа, то їх хвильова функція симетрична відносно перестановки частинок. Звідси виходить, що два однакові ферміони, що входять в одну систему, не можуть знаходитись в однакових станах, оскільки для ферміонів хвильова функція повинна бути антисиметричною. Узагальнюючи дослідні дані, В.Паулі у 1925р. сформулював принцип, згідно з яким *системи ферміонів зустрічаються в природі лише у станах, що описуються антисиметричними функціями*.

метричними хвильовими функціями (квантово-механічне формулювання принципу Паулі).

Із сформульованого положення випливає і *елементарне формулювання* принципу Паулі, яке і було введено ним у квантову теорію (1925р.) ще до побудови квантової механіки: *в системі однакових ферміонів довільні два з них не можуть одночасно знаходитися в одному і тому ж стані.*

Число однотипних бозонів, що знаходяться в одному і тому ж стані, не лімітується.

Розподіл електронів в атомі відповідає принципу Паулі, який може бути використаний в його простішому формулюванні: *в одному і тому ж атомі не може бути більше від одного електрона з однаковим набором чотирьох квантових чисел n, l, m_l і m_s , тобто*

$$Z_1(n, l, m_l, m_s) = 0, \text{ або } 1,$$

де $Z_1(n, l, m_l, m_s)$ – число електронів, що перебувають у стані, який описується набором квантових чисел n, l, m_l і m_s .

Користуючись принципом Паулі, можна знайти максимальне число електронів в атомі, що мають задані значення трьох (n, l, m) , двох (n, l) і одного (n) квантових чисел. Знайдемо максимальне число $Z_2(n, l, m_l)$ електронів, що перебувають у станах, які визначаються набором трьох квантових чисел n, l, m_l , тобто відрізняються лише орієнтацією спінів електронів. Оскільки $m_s = \pm \frac{1}{2}$, то маємо

$$Z_2(n, l, m_l) = 2.$$

Обчислимо максимальне число електронів $Z_3(n, l)$, що перебувають у станах, які визначаються двома квантовими числами n і l . Оскільки при заданому числовому значенні l , вектор моменту імпульсу \vec{L}_l може мати $(2l + 1)$ різних орієнтацій у просторі, то число електронів $Z_3(n, l)$ визначається так:

$$Z_3(n, l) = 2(2l + 1).$$

Значення $Z_3(n, l)$ для різних значень l наведено в таблиці

l	0	1	2	3	4
символ відповідного стану електронів	s	p	d	f	g
$Z_3(n, l)$	2	6	10	14	18

Знайдемо, користуючись принципом Паулі, максимальне число $Z(n)$ електронів, що перебувають у станах, які визначаються значенням n головного квантового числа. Оскільки число l при заданому n змінюється від 0 до $(n-1)$, то, підсумовуючи $Z(n, l)$ по l від 0 до $n-1$, отримаємо

$$Z(n) = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = [2(n-1) + 2]n = 2n^2.$$

Сукупність електронів, що мають однакові значення квантового числа n , утворює оболонку. Оболонки поділяються на підоболонки, що відрізняються значенням квантового числа l . Відповідно до значення n оболонкам дають позначення, які взяті зі спектроскопії рентгенівських променів:

n	1	2	3	4	5	6	7
позначення оболонки	K	L	M	N	O	P	Q...

Оскільки орбітальне квантове число набуває значення від 0 до $n-1$, число підоболонок дорівнює порядковому номеру n оболонки. Кількість електронів в підоболонці визначається магнітним і магнітним спіновим квантовими числами: максимальне число електронів в підоболонці з даними l дорівнює $2(2l+1)$.

оболонка	n	l	m_l	m_s	підоболонка	число електронів
K	1	0	0	$\uparrow\downarrow$	$K(1s)$	2
			0	$\uparrow\downarrow$	$L_1(2s)$	2
L	2	-1	0	$\uparrow\downarrow$	$L_2(2s)$	6
			1	$\uparrow\downarrow$		
			-1	$\uparrow\downarrow$		
		0	0	$\uparrow\downarrow$	$M_1(3s)$	2
			-1	$\uparrow\downarrow$		
			1	$\uparrow\downarrow$		
M	3	-2	0	$\uparrow\downarrow$	$M_3(3d)$	10
			-1	$\uparrow\downarrow$		
			1	$\uparrow\downarrow$		
		2	0	$\uparrow\downarrow$	$M_2(3p)$	6
			-1	$\uparrow\downarrow$		
			1	$\uparrow\downarrow$		

§121. Рентгенівські промені

У 1895р. В.Рентген відкрив випромінювання, яке було названо "ікс-променями". Рентгенівські хвилі охоплюють широкий інтервал довжин від $0,01$ до 10^8 мкм.

Джерелом рентгенівського випромінювання є рентгенівські трубки, які в простих випадках являють собою двоелектродні вакуумні прилади різних конструкцій і розмірів. На рис.306 наведена схема рентгенівської трубки. У скляну трубку введено електроди: K (катод) і A (анод). Катод розжарення є джерелом електронів. Між катодом і анодом підтримується різниця потенціалів U в десятки і сотні

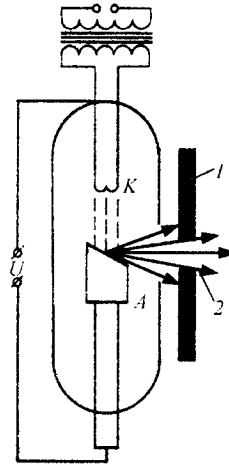


Рис.306

кіловольтів. Електрони, які набули високих енергій у прискорюючому електричному полі, бомбардують анод A , площина якого утворює з напрямком руху електронів кут 45° . Внаслідок цього рентгенівське випромінювання 2 , що виникає при гальмуванні електронів анодом, виходить із трубки через отвір захисного свинцевого екрану 1 . Оскільки напруга на трубі досить висока, то вона завжди працює в режимі струму насичення. Щоб змінити інтенсивність рентгенівського випромінювання, змінюють струм розжарення катода. Коефіцієнт корисної дії рентгенівських трубок становить близько 1% , тобто 99% кінетичної енергії електронів перетворюється в тепло. За принципом отримання електронних пучків рентгенівські трубки поділяють на три типи: іонні, електронні, індукційні. Джерелами рентгенівського випромінювання можуть бути природні або штучні радіоактивні елементи, а також ряд небесних тіл. Так, сонячна корона дає потужне рентгенівське випромінювання в інтервалі $10^{-3} - 10^{-2}$ мкм, а Місяць під впливом потоку протонів (особливо в роки активного Сонця) дає інтенсивне характеристичне випромінювання.

Досліди показали, що при порівняно низьких напругах рентгенівське випромінювання утворює суцільний спектр. Електрони, що вилітають з катода, під ді-

єю зовнішнього електричного поля набувають високих енергій, при досягненні анода гальмуються, внаслідок чого виникає рентгенівське випромінювання.

Суцільний спектр рентгенівського випромінювання пояснюється гальмуванням електронів у момент досягнення ними анода. Таке випромінювання називають *гальмівним*. На рис.307 показано експери-

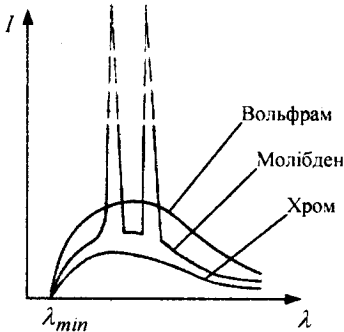


Рис.307

ментальні криві розподілу інтенсивності рентгенівського випромінювання за довжинами хвиль. Криві отримали за допомогою трубок, які працюють при однакових напругах з різними матеріалами анода (вольфрам, молибден, хром).

Характерною особливістю суцільних рентгенівських спектрів є наявність чіткої короткохвильової межі λ_{min} та її незалежність від речовини анода. При підвищенні напруги інтенсивність випромінювання збільшується, а короткохвильова межа зміщується у бік коротких хвиль.

Між прискорюючою напругою U і частотою ν_{max} існує лінійна залежність (рис.308):

$$\nu_{max} = \frac{c}{\lambda_{min}}$$
 Виникнення суцільного рентгенівського спектра у класичній

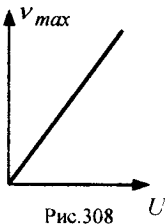


Рис.308

електродинаміці пояснюється гальмуванням електронів у полі кристалічної ґратки анода.

Класична теорія не може пояснити існування короткохвильової межі λ_{min} . З погляду фотонної теорії кожний електрон при гальмуванні породжує один фотон. При повному переході енергії електрона в енергію випромінювання виникає фотон із максимальним значенням енергії, тобто

$$eU = h\nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}}$$

При зіткненнях електронів з анодом частину енергії буде витрачено на нагрівання анода. При цьому народжуються фотони з частотами $\nu < \nu_{max}$. Оскільки зіткнення електронів з атомами анода мають випадковий характер, то розподіл енергії електронів на теплоту та випромінювання буде довільним і гальмівне випромінювання має суцільний спектр. Крім того, фотонна теорія пояснює залежність короткохвильової межі λ_{min} (ν_{max}) від речовини анода, а з виразу $eU = h\nu_{max}$ безпосередньо впливає лінійна залежність λ_{max} від U (рис.308).

При підвищенні напруги на рентгенівській трубці до величини, більшої за деяке критичне значення, що залежить від речовини анода, на фоні суцільного спектра виникають лінійчасті спектри, інтенсивність яких у тисячі разів перевищує інтенсивність суцільного спектра. Оскільки лінійчастий спектр визначається природою речовини, з якої виготовлено анод, то його називають *характеристичним*.

З рис.307 видно, що для напруги, при якій рентгенівська трубка з анодом вольфраму і хрому випромінює суцільний

спектр, трубка з молібденовим анодом, крім суцільного, випромінює ще лінійчастий спектр. Виникнення характеристичного рентгенівського випромінювання фотонна теорія пояснює вибиванням електронів із внутрішніх електронних шарів атомів анода швидкими електронами або фотонами високих енергій.

Перехід електронів з вищих шарів на шар, з якого вибито електрон, супроводжується випромінюванням рентгенівського кванта.

Існування характеристичного випромінювання підтверджує наявність дискретних рівнів енергії атомів.

На відміну від лінійчастих спектрів розріджених газів, які також характеризують речовину, кожний хімічний елемент дає характеристичне рентгенівське випромінювання незалежно від того, чи атоми вільні, чи входять до складу хімічних сполук.

Спектральні лінії утворюють певні групи, або серії. Їх позначають буквами K, L, M, N, O і т. д. Кожна серія має невелику кількість ліній, які позначають у порядку зменшення довжини хвилі індексами α, β, γ і т. д. Із усіх серій рентгенівських спектрів найпростішою за своєю структурою є K -серія. Вона складається з трьох ліній: $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma$. Найбільшу інтенсивність і найбільшу довжину хвилі має K_α -лінія. Лінійчасті рентгенівські спектри різних речовин подібні між собою. Це зумовлено подібністю будови нижніх (найближчих до ядра) підшарів електронів в атомах. При збільшенні атомного номеру речовини антикатада весь рентгенівський спектр лише зміщується в корот-

кохвильову частину спектра, не змінюючи своєї структури. Це можна пояснити тим, що лінійчасті рентгенівські спектри утворюються внаслідок переходів електронів у внутрішніх підшарах атомів. Механізм виникнення лінійчастих спектрів можна пояснити так. Якщо під впливом падаючих електронів високих енергій на атоми антикатада вибивається один із двох електронів $1s$ -стану K -шару, то звільнене місце може зайняти електрон з якогонебудь зовнішнього шару (L, M, N , і т. д.). При цьому виникає K -серія. Аналогічно виникають й інші серії. Схема виникнення електронних серій показана на рис.309.

Для прикладу на рис.310 показані $E = 0$

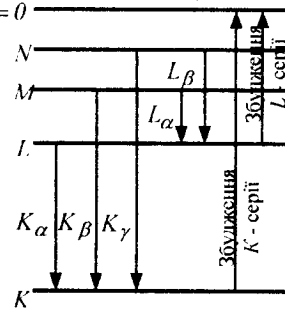


Рис.309

енергетичні рівні в електронвольтах для атома молібдену, побудовані на основі

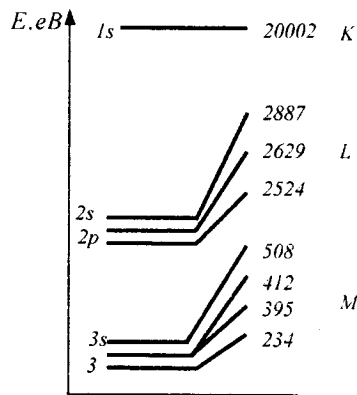


Рис.310

дослідних даних про довжини хвиль ліній випромінювання. Щоб отримати одну із спектральних ліній K -серії молібдену, треба вирвати електрон з K -шару, для чого потрібна енергія не менш як 20000 eV . Отже, напруга 20000 eV – це та найменша напруга, при якій рентгенівська трубка з молібденовим анодом випромінюватиме спектральні лінії K -серії.

Вирвати електрон з K - чи L - шару можна також внаслідок рентгенівського фотоефекту. Якщо на атом падають рентгенівські фотони досить високих енергій, то один з них зможе вибити електрон з K - чи L - шару. Для реалізації цього процесу, очевидно, гранична енергія падаючого рентгенівського фотона має бути однаковою з граничною енергією бомбардуючого електрона, який здатний вирвати електрон з K - чи L - шару. Це означає, що поглинання рентгенівського випромінювання різко зростає при переході енергії фотона через граничне значення.

При дослідженні лінійчастих рентгенівських спектрів Г.Мозелі в 1913р. встановив закон, який виражає зв'язок між хвильовим числом спектральної лінії $\nu_0 = \frac{1}{\lambda}$ і атомним номером Z елемента, який випромінює ці лінії. Так, для K_{α} -лінії ця залежність має вигляд

$$\nu_{0K_{\alpha}} = R(Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right),$$

де R - стала Рідберга.

Для ліній інших серій ця залежність виражається подібними формулами. Так, для ліній L -серії закон Мозелі має вигляд

$$\nu_{0L} = R(Z-\sigma)^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (n=3,4,5,\dots),$$

де σ – стала екранування, яка має певне значення в межах однієї серії.

Зміст сталої екранування полягає в тому, що у важкому атомі, який має Z електронів, на електрон, що здійснює, наприклад, перехід, який відповідає лінії K_{α} , діє не весь заряд ядра Ze , а заряд $(Z-\sigma)e$, ослаблений екрануючою дією одного електрона, що залишився на K -оболонці.

Узагальнений закон Мозелі має вигляд

$$\nu_0 = R(Z-\sigma)^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

де $m=1, n=2,3,4,\dots$ для ліній K -серії,
 $m=2, n=2,3,4,\dots$ для ліній L -серії,
 $m=3, n=2,3,4,\dots$ для ліній M -серії.

Для K -серії $\sigma=1$, для L -серії $\sigma=7.5$.

У загальному вигляді закон Мозелі записують і так:

$$\sqrt{\nu} = a(Z-\sigma),$$

де ν – частота, a – стала для певної серії ліній. Закон Мозелі можна сформулювати так: *корінь квадратний із частоти є лінійною функцією атомного номера Z .*

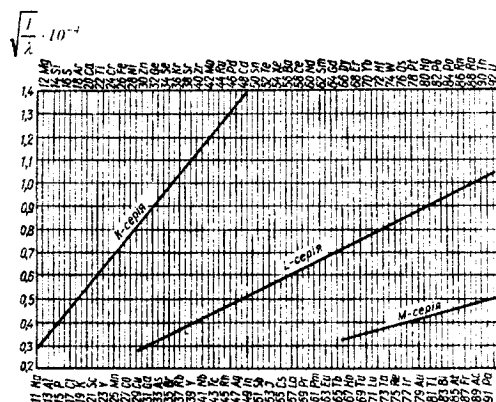


Рис.311

На рис.311 наведений загальний хід залежності $\sqrt{\frac{I}{\lambda}}$ для K_{α} -, L_{α} - і M_{α} - ліній від атомного номера Z .

Закон Мозелі дозволяє за виміряною довжиною хвилі рентгенівських ліній точно встановити атомний номер даного елемента. Цей закон відіграв велику роль при розміщенні елементів в Періодичній системі. На основі цього закону вперше було показано, що не атомна маса, а атомний номер, який дорівнює заряду ядра, визначає хімічні властивості атомів.

§122. Поняття про енергетичні рівні молекул. Спектри молекул

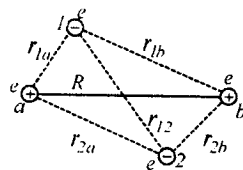
Молекула – найменша частинка речовини, що складається з однакових або різних атомів, з'єднаних між собою хімічними зв'язками, яка є носієм хімічних і фізичних властивостей цієї речовини.

Хімічні зв'язки обумовлені взаємодією зовнішніх валентних електронів атомів. Електрони внутрішніх оболонок при об'єднанні атомів в молекулу залишаються в попередніх станах.

Обмежимося розглядом лише двох-атомних молекул. Розрізняють два види зв'язку між атомами в молекулі. Один з них здійснюється в тому випадку, коли електрони в молекулі розподіляються так, що навколо першого з ядер утворюється надлишок електронів, а навколо іншого – їх недостача. Таким чином, молекула якби складалася з двох іонів протилежних знаків, що притягуються один до одного. Зв'язок цього типу називається **гетерополярним** (або іонним): $NaCl$, KBr , HCl і т. д.

Другий тип зв'язку спостерігається в тих молекул, в яких частина електронів рухається навколо обох ядер. Такий зв'язок називається **гомополярним** (ковалентним). Він утворюється парою електронів з протилежно напрямленими спінами. Серед молекул цього типу слід розрізняти молекули з однаковими ядрами (H_2 , N_2 , O_2) і молекули з різними ядрами (CO).

Найпростішою молекулою з гомополярним зв'язком є молекула водню. Після створення квантової механіки Гайтлер і Лондон (1927р.) здійснили успішну спробу квантово-механічного розрахунку основного стану молекули H_2 . Їм вдалось розв'язати рівняння Шредінгера для системи, що складається з двох протонів (ядер атома водню) і двох електронів



(рис.312). Потенціальна енергія такої системи дорівнює

$$U = \left(-\frac{e^2}{r_{1a}} - \frac{e^2}{r_{2a}} - \frac{e^2}{r_{1b}} - \frac{e^2}{r_{2b}} + \frac{e^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{R} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Ядра мають масу приблизно у 2000 разів більшу від маси електрона. Тому вони рухаються значно повільніше від електронів і в першому наближенні їх можна вважати нерухомими. В цьому наближенні рівняння Шредінгера має вигляд

$$\Delta_1 \psi + \Delta_2 \psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

Тут Δ_1 – оператор Лапласа, що містить координати одного електрона, а Δ_2 – оператор Лапласа, що містить координати другого електрона.

Власні значення енергії, що отримують з цього рівняння, виявляються залежними від відстані між ядрами R , тобто $E=E(R)$, причому у випадку паралельної і антипаралельної орієнтації спінів електронів

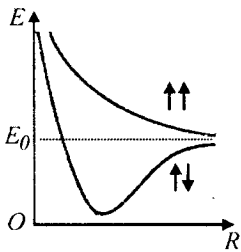


Рис.313

характер цієї залежності істотно відрізняється. Утворення молекули можливе лише при наближенні атомів з антипаралельними спінами (рис.313).

Енергія, обумовлена електронною конфігурацією (електронна енергія) має при деякому значенні R мінімум. Зміна електронної конфігурації молекули приводить до зміни кривої залежності електронної енергії від відстані між ядрами R .

В основному зміна енергетичного запасу молекули відбувається внаслідок зміни в електронній конфігурації, що утворює периферійну частину молекули. Однак при заданій електронній конфігурації ядра молекули можуть різним чином коливатися і обертатися навколо загального центра мас. З цими видами руху зв'язані запаси коливальної і оберտальної енергій, які повинні бути враховані в загальному балансі.

Введемо позначення:

E_{el} – енергія, обумовлена електронною конфігурацією (*електронна енергія*);

$E_{кол}$ – енергія, що відповідає коливанням молекули (*коливальна, або вібраційна енергія*);

$E_{об}$ – енергія, зв'язана з обертанням молекули (*обертальна, або ротаційна енергія*).

В першому наближенні окремі види молекулярних рухів – рух електронів, коливання і обертання молекули – можна вважати незалежними один від одного. Тому повну енергію молекули можна подати у вигляді

$$E = E_{el} + E_{кол} + E_{об}$$

Відношення $E_{el} : E_{кол} : E_{об} = 1 : \frac{m}{M} : \sqrt{\frac{m}{M}}$,

де m – маса електрона, M – величина порядку маси ядер атомів в молекулі,

$$\frac{m}{M} \approx 10^{-5} \div 10^{-3}.$$

Тому $E_{el} \gg E_{кол} \gg E_{об}$. Доведено, що

$$E_{el} \approx 1 \div 10 eV, \quad E_{кол} = 10^{-2} \div 10^{-1} eV,$$

$$E_{об} \approx 10^{-1} \div 10^{-3} eV.$$

За правилом Бора частота ν кванта, який випускає молекула при зміні її енергетичного стану, дорівнює

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{\Delta E_{el}}{h} + \frac{\Delta E_{кол}}{h} + \frac{\Delta E_{об}}{h},$$

де $\Delta E_{el}, \Delta E_{кол}, \Delta E_{об}$ – зміни відповідних частин енергії молекули. Оскільки кожний з доданків $\Delta E_{el}, \Delta E_{кол}, \Delta E_{об}$ набуває ряду дискретних квантованих значень, то їх зміни також дають дискретні значення, тому спектр молекули складається з густо розміщених ліній, які утворюють смуги.

Енергію коливального руху описує вираз

$$E_{кол\nu} = \left(\nu + \frac{1}{2}\right) h\nu_0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

де ν – квантне число, яке визначає величину коливального енергетичного рівня; ν_0 – власна частота коливань ядер атомів відносно положень їх рівноваги і

$$v_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}},$$

де $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – зведена маса двохатомної молекули, а m_1, m_2 – маси атомів у молекулі.

Для коливного квантового числа існує правило відбору $\Delta v = \pm 1$, тобто можливі лише переходи між сусідніми рівнями, причому перехід при $\Delta v = +1$ відбувається з поглинанням, а перехід $\Delta v = -1$ – з випромінюванням світла.

Різницю енергій двох послідовних коливальних рівнів знаходять так:

$$E_{\text{кол}(v+1)} - E_{\text{кол}(v)} = h\nu_0.$$

В основному коливальному стані з коливальним квантовим числом $v = 0$ молекула має енергію $E_{\text{кол}}(0) = \frac{1}{2} h\nu_0$. Це означає, що ні при яких умовах ядра в молекулі не можуть знаходитись в стані спокою, вони завжди коливаються з різною амплітудою.

Якщо вважати двохатомну молекулу ідеально твердою, то кінетична енергія $E_{\text{об}}$ оберտального руху такої молекули має вигляд

$$E_{\text{об},J} = \frac{J_0 \omega_r^2}{2} = \frac{(J_0 \omega_r)^2}{2J_0} = \frac{L^2}{2J_0},$$

де ω_r – кутова швидкість, J_0 – момент інерції молекули, обчислений відносно осі, яка перпендикулярна до лінії, що сполучає атоми і проходить через центр інерції молекули і

$$J_0 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = m r^2,$$

де m – зведена маса молекули, r_1 і r_2 – відстані від атомів до центра інерції, а

$r = r_1 + r_2$ – відстань між ядрами в молекулі.

Обертання двохатомної молекули можна розглядати як обертання однієї частинки з моментом інерції J_0 , що має масу, яка дорівнює зведеній масі молекули.

Момент імпульсу $L = J_0 \omega_r$ молекули частинки може набувати тільки дискретні значення:

$$L = \hbar \sqrt{J(J+1)} \quad (J = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

де J – оберտальне квантове число, яке визначає оберտальний енергетичний рівень. Отже, оберտальна енергія молекули може мати лише квантові значення:

$$E_{\text{об},J} = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{8\pi^2 J_0} = B J(J+1),$$

де $B = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 J_0}$ – оберտальна стала молекули.

Можливі лише такі переходи між оберտальними енергетичними рівнями, які підпорядковані такому правилу відбору за орбітальним квантовим числом:

$$\Delta J = \pm 1,$$

тобто переходи можливі лише між сусідніми оберտальними енергетичними рівнями. Переходу при умові $\Delta J = +1$ відповідає поглинання світла, а перехід, що відповідає $\Delta J = -1$, супроводжується випромінюванням світла.

Отже, повна енергія молекули дорівнює

$$E = E_{\text{ел}} + \left(v + \frac{1}{2} \right) h\nu_0 + \frac{\hbar^2 J(J+1)}{8\pi^2 J_0}.$$

Дослід і теорія показують, що відстані між оберտальними рівнями $\Delta E_{\text{об}}$ значно менші, ніж відстані між коливальними рівнями $\Delta E_{\text{кол}}$, які є в свою чергу значно менші, ніж відстані між електрон-

ними рівнями $\Delta E_{ел}$. Схема енергетичних рівнів двохатомної молекули виглядає так, як показано на рис.314.

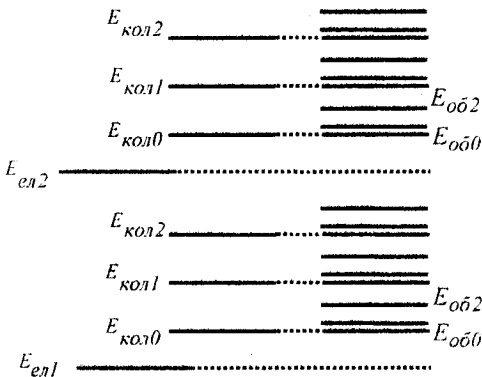


Рис.314

Будова молекул і властивості їх енергетичних рівнів проявляються в молекулярних спектрах – спектрах випромінювання (поглинання), що виникають при квантових переходах молекули на різні енергетичні рівні. Спектр випромінювання молекули визначається структурою її енергетичних рівнів і відповідними правилами відбору.

При різних типах переходів між рівнями виникають різні типи молекулярних спектрів. Якщо спостерігати спектр випромінювання-поглинання в тому діапазоні, який відповідає частоті $\nu_{об} = \frac{\Delta E_{об}}{h}$, то тут

з'являтимуться тільки переходи між оберतालними рівнями. Особливо ефективним інструментом дослідження в далекій інфрачервоній області є спектр поглинання.

Якщо довжина хвилі λ пучка променів настільки велика, що енергії фотонів $h\nu$ не вистачає для переведення молекули з одного обертального рівня на інший, то поглинання не буде. Поступове збільшення частоти падаючих променів приведе до того, що окремі фотони будуть поглинатися

молекулами, які переходитимуть при тому на що раз вищі обертальні рівні. В цьому випадку виникає суто *обертальний спектр* поглинання. Він лежить в області мікрохвиль ($\lambda = 0,1-1\text{ мм}$) або, інакше, в діапазоні далекого інфрачервоного спектра.

Частоти ліній поглинання при переходах між обертальними рівнями знаходять з виразу

$$\nu = \frac{\Delta E_{об}}{h} = B[(J+1)(J+2) - J(J+1)] = 2B(J+1) = \nu_J(J+1),$$

де J – квантове число рівня, на який здійснюється перехід, а

$$\lambda_J = \frac{h^2}{4\pi^2 J_0}.$$

На рис.315 показана схема виникнення обертального спектра поглинання, який

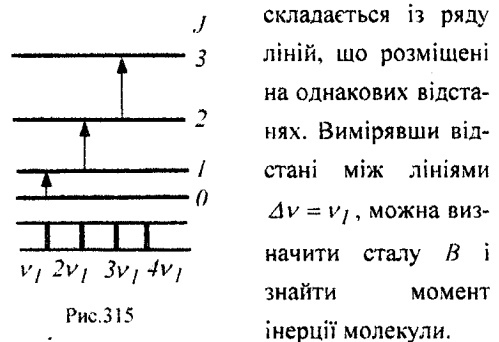


Рис.315

Якщо далі збільшувати частоту падаючих променів, обертальний спектр проявляється краще. Однак він залишиться суто обертальним доти, доки енергія падаючих квантів не буде настільки велика, що зможе перевести молекули з одного коливального рівня ν на інший ν' . Якщо пройти цю межу, то поглинання фотонів супроводжується зміною як обертальної, так і коливальної енергії молекул.

Енергія поглинутого фотона дорівнюватиме:

$$\nu = \frac{\Delta E_{\text{кол}}}{h} + \frac{\Delta E_{\text{об}}}{h} = \nu_0 + B[J'(J'+1) - J(J+1)]$$

За правилом відбору $\Delta J = J' - J = \pm 1$. У випадку $\Delta J = +1$ маємо $J = J' + 1$ і $\nu = \nu_0 + 2BJ'$, де $J' = 1, 2, 3, \dots$

У випадку $\Delta J = -1$ $J = J' - 1$ і $\nu = \nu_0 - 2B(J' + 1)$, де $J' = 0, 1, 2, \dots$

На рис.316 наведена схема утворення коливально-обертального спектра.

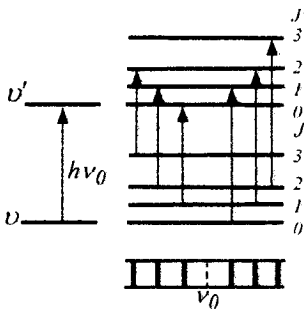


Рис.316

Коливально-обертальний спектр

лежить в інфрачервоній області ($\lambda \approx 3-50$ мкм). Переходові між заданою парою коливальних рівнів відповідає велика сукупність комбінацій різних обертальних станів, які дають багато дуже близько розташованих ліній. Так виникає одна смуга. Лінії в смузі розташовані симетрично відносно ν_0 ліній і знаходяться на відстані одна від одної на $\Delta\nu = \nu_J$. Лише в середині смуги відстань в два рази більша, оскільки ліній з частотою ν_0 не виникає. Різним парам коливальних рівнів відповідають різні смуги, які у своїй сукупності утворюють коливально-обертальний спектр, що має вигляд групи смуг.

Продовжимо далі збільшувати частоту променів. Досягаючи видимої та ультрафіолетової частини спектра, отримуємо фотони, енергія яких є достатньою для збудження не тільки коливальних та обертальних процесів, але й електронних рівнів. З'являються електронно-коливально-обертальні переходи, при яких змінюються всі три види енергії молекули. Відповідний спектр називають *електронно-коливально-обертальним* або просто електронним. Переходові між заданою парою електронних рівнів відповідає цілий коливально-обертальний спектр молекули, тобто певна група смуг. Перебираючи всі можливі комбінації електронних рівнів, одержимо повний спектр молекули, тобто набір груп смуг.

Отже, в оптичному діапазоні молекулярні спектри є смугастими – вони складаються з величезного числа ліній, що утворюють ряд дуже густих скупчень-смуг.

Структура молекулярних спектрів неоднакова для різних молекул і зі збільшенням числа станів у молекулі ускладнюється.

§123. Поглинання, спонтанне і вимушене випромінювання

Атоми можуть знаходитися лише у квантових станах з дискретними значеннями енергії E_1, E_2, E_3, \dots . Задля простоти розглянемо два з цих станів (n і m) з енергіями E_n і E_m . Якщо атом знаходиться в основному стані E_n , то під дією зовнішнього випромінювання може здійснитися вимушений перехід у збуджений стан m ,

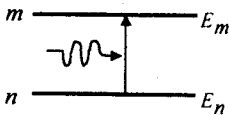


Рис.317

що приводить до поглинання випромінювання (рис.317). Ймовірність таких переходів пропорційна густині випромінювання, що викликає ці переходи.

Дослід показує, що атом в збудженому енергетичному стані сам собою переходить у нормальний, незбуджений стан, випромінюючи світло. *Таке випромінювання, яке відбувається без зовнішніх причин, що змінюють енергію атома, називають самочинним або спонтанним випромінюванням.* Для точного пояснення спонтанних переходів атома з вищих енергетичних рівнів на нижчі недостатньо одних законів квантової механіки і доводиться вдаватися до квантової електродинаміки. Проте в 1926р., задовго до створення квантової електродинаміки, А.Ейнштейн створив теорію випромінювання, яка базується на законах збереження енергії та імпульсу при взаємодії квантових систем з електромагнітним полем.

Розглянемо спонтанне випромінювання атома за Ейнштейном. Якщо атом у деякий момент часу t перебуває в квантовому стані m і має енергію E_m , то під дією внутрішніх впливів, механізм яких не можна простежити, атом може спонтанно перейти в деякий стан n , що характеризується меншою енергією E_n (рис.318).

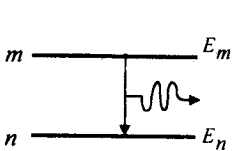


Рис.318

Введемо ймовірність A_{mn} того, що протягом $1c$ здійснюється спонтанний перехід атома

зі стану m в стан n . Величину A_{mn}

називають коефіцієнтом Ейнштейна для спонтанного випромінювання. Якщо N_m є число атомів, які перебувають на енергетичному рівні E_m в момент часу t , то число $-dN_m$ атомів, що перейшли за проміжок часу від t до $t+dt$ в стан n , пропорційне ймовірності A_{mn} спонтанного переходу, числу атомів і проміжку часу dt : $-dN_m = A_{mn}N_m dt$.

Знак "-" свідчить про зменшення числа атомів на рівні m .

Тоді після інтегрування отримаємо

$$N_m = N_{m0} e^{-A_{mn}t},$$

де N_{m0} – число атомів на рівні m в момент часу $t=0$.

Кожний перехід зі стану m в стан n супроводжується випромінюванням спектральної лінії з частотою $h\nu_{mn}$, що визначається правилом частот Бора:

$$E_m - E_n = h\nu_{mn}.$$

Енергія, яка випускається за час dt , дорівнюватиме

$$dE = h\nu_{mn} |dN_m| = h\nu_{mn} A_{mn} N_m dt.$$

Інтенсивність випромінювання J , тобто енергію, яка випускається за одиницю часу, можна визначити так:

$$J = \frac{dE}{dt} = h\nu_{mn} N_{m0} A_{mn} e^{-A_{mn}t} = J_0 e^{-A_{mn}t},$$

де J_0 – початкова інтенсивність випромінювання.

Середньою тривалістю τ_m життя атома у збудженому стані називається час, протягом якого число атомів N_{m0} , які спочатку були на збудженому рівні t , зменшується в e разів:

$$N_m = \frac{N_{m0}}{e} = N_{m0} e^{-A_{mn}\tau_m}.$$

Звідси $A_{mn}\tau_m = I$, тобто $\tau_m = \frac{I}{A_{mn}}$.

Отже, коефіцієнт Ейнштейна A_{mn} є величина, обернена до середнього часу життя атома в збудженому стані.

Тоді $J = J_0 e^{-\frac{t}{\tau_m}}$.

Перевірку цього закону і вимірювання часу τ_m було здійснено В.Віном у дослідах зі світінням каналових променів.

Порядок величини $\tau_m \approx 10^{-8}$ с є характерним для часу перебування атомів у збудженому стані, після чого вони спонтанно переходять на розміщені нижче енергетичні стани. Скінченність часу життя τ_m атома в збудженому стані призводить до того, що енергію E_m атома в збудженому стані можна визначити лише з деякою невизначеністю ΔE_m , що випливає зі співвідношення невизначеностей Гейзенберга $\Delta E_m \geq \frac{\hbar}{\tau_m}$. Величину

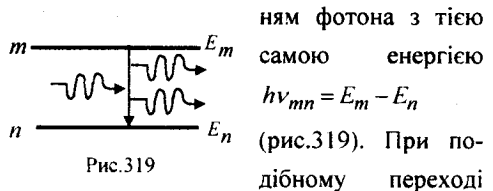
$\Delta E_m = \Gamma_m$ називають природною шириною енергетичного рівня E_m . Значення ΔE_m або τ_m визначає природну ширину $\Delta \nu_{mn}$ спектральної лінії, яка виникає при переході з рівня m на рівень n .

$\Delta \nu_{mn} = \frac{\Delta E_m}{2\pi\hbar} \geq \frac{I}{2\pi\tau_m}$, що відповідає за шкалою довжин хвиль величині $\Delta \lambda \approx 10^{-4}$ А.

Спонтанні переходи взаємно не зв'язані, тому спонтанне випромінювання некогерентне.

У 1916р. Ейнштейн для пояснення спостережуваної під час досліду термодинамічної рівноваги між речовиною і випромінюванням, що випускається і поглинається нею, постулював, що крім поглинан-

ня і спонтанного випромінювання повинен існувати третій, якісно інший тип взаємодії. Якщо на атом, що знаходиться у збудженому стані m , діє зовнішнє випромінювання з частотою, що задовольняє умову $h\nu_{mn} = E_m - E_n$, то виникає вимушений перехід в основний стан n з випромінюван-



ням фотона з тією самою енергією $h\nu_{mn} = E_m - E_n$ (рис.319). При подібному переході відбувається випромінювання атомом фотона, додатково до того фотона, під дією якого відбувається перехід.

Отже, атом, який перебуває на деякому збудженому енергетичному рівні m , може з деякою ймовірністю перейти під дією поля передчасно в нижчий стан n . Поле ніби "скидає" атом із збудженого рівня "вниз".

Ймовірність вимушеного випромінювання під дією поля пропорційна електронній густині $\rho(\nu)$ енергії поля і деякому коефіцієнту B_{mn} , який називається коефіцієнтом Ейнштейна для вимушеного (індукованого) випромінювання.

Повну ймовірність того, що збуджений атом, який перебуває на рівні m , за одиницю часу перейде на нижчий рівень n з випусканням кванта $h\nu$ спонтанно або вимушено, можна визначити сумою $A_{mn} + B_{mn}\rho(\nu)$.

Число dN'_m атомів, які із загального числа N_m атомів, що перебувають на рівні m , перейдуть у стан n за час dt , можна записати так:

$$dN'_m = [A_{mn} + B_{mn}\rho(\nu)]N_m dt.$$

З іншого боку, взаємодія з електромагнітним полем атомів, що перебувають на рівні n , може привести до того, що атом, поглинаючи квант енергії $h\nu_{nm} = E_m - E_n$, перейде у вищий енергетичний стан m . Імовірність того, що за одну секунду відбудеться поглинання, за аналогією з попереднім, можна записати так: $B_{nm}\rho(\nu)$, тут B_{nm} – коефіцієнт Ейнштейна для поглинання атома. Число актів dN'_n збудження атомів за час dt дорівнюватиме:

$$dN'_n = B_{nm}\rho(\nu)N_n dt,$$

де N_n – число атомів на рівні n в момент часу t .

У стані термодинамічної рівноваги речовини і електромагнітного поля повинна бути рівновага між процесами випускання і поглинання світла, тобто рівновага повного числа актів випускання світла і числа актів його поглинання.

Оскільки мова йде про переходи між двома довільно обраними рівнями m і n , то має принцип *детальної рівноваги*, для якої можна записати

$$[A_{mn} + B_{mn}\rho(\nu)]N_m = B_{nm}\rho(\nu)N_n.$$

Така рівновага встановлюється в замкненій порожнині, температура T якої підтримується сталою. Рівновага, яка виникає в результаті випромінювання і поглинання електромагнітних хвиль атомами стінки, приводить у такому разі, як показав Ейнштейн, до формули Планка.

Ейнштейн і Дірак показали, що вимушене випромінювання (вторинні фотони) тотожне вимушуючому випромінюванню (первинні фотони) і воно має таку ж частоту, фазу, поляризацію і напрямок по-

ширення, як і вимушуюче випромінювання.

Вторинні фотони, рухаючись в одному напрямку і зустрічаючи інші збуджені атоми, стимулюють наступні індуковані переходи і число фотонів росте лавиноподібно. Однак поряд з вимушеним випромінюванням можливий і конкуруючий процес – поглинання. Тому для підсилення падаючого випромінювання необхідно, щоб число актів вимушеного випромінювання фотонів (воно пропорційне заселеності збуджених станів) перевищувало число актів поглинання фотонів (воно пропорційне заселеності основних станів).

У системі атомів, що знаходяться в термодинамічній рівновазі, поглинання падаючого випромінювання буде перевищувати вимушене, тобто падаюче випромінювання при проходженні через речовину буде ослаблятися.

Щоб середовище підсилювало падаюче на нього випромінювання, необхідно створити нерівноважний стан системи, при якому число атомів у збудженому стані було би більше, ніж їх число в основному стані. Такі стани називаються станами з *інверсною заселеністю*. Процес створення нерівноважного стану речовини називається *накачкою*. Накачку можна здійснити оптичним, електричним й іншими способами.

У середовищах, які перебувають в інверсному стані, вимушене випромінювання може перевищувати поглинання, внаслідок чого падаючий пучок світла при проходженні через ці середовища буде підсилюватися.

§124. Оптичні квантові генератори

Практично інверсний стан середовища здійснено в *оптичних квантових генераторах* (ОКГ), або *лазерах*. Слово "лазер" скорочено означає підсилення світла за допомогою вимушеного випромінювання. Лазери генерують у видимій, інфрачервоній і ближній ультрафіолетовій областях.

Радянські фізики М.Басов і О.Прохоров і американський вчений Ч.Таунс створили квантові генератори електромагнітних хвиль сантиметрового діапазону — *мазери*. Слово "мазер" — підсилення мікрохвиль за допомогою індукованого випромінювання. Мазер — квантовий генератор ультракоротких хвиль у сантиметровому діапазоні.

Залежно від типу активного середовища лазери поділяються на *твердотільні, газові, напівпровідникові і рідинні*.

Класифікують лазери і за методами накачки — *оптичні, теплові, хімічні, електроіонізаційні та ін.*

Лазери обов'язково мають три основні компоненти: 1) *активне середовище*, в якому створюється стан з інверсною заселеністю енергетичних рівнів; 2) *систему накачки* — пристрій для створення інверсії в активному середовищі; 3) *оптичний резонатор* — пристрій, який формує вихідний світловий пучок.

Інверсну заселеність рівнів в ОКГ практично здійснюють за трирівневою схемою, яку запропонували М.Басов і О.Прохоров в 1955р.

Один з перших ОКГ, що працюють за схемою трьох рівнів з твердим тілом як

активним підсилюючим середовищем, був створений у 1960р. Т.Мейманом. Підсилюючим середовищем у ньому є кристал рубіну, який за хімічним складом є окисом алюмінію Al_2O_3 з домішкою оксиду хрому Cr_2O_3 у кількості від 0,03 до 0,05%. При цьому в кристалічній ґратці оксиду алюмінію певну частку атомів Al замінено Cr^{+3} . Активною речовиною, в якій здійснюються вимушені переходи, в рубіні є іони Cr^{+3} .

На рис.320 показана схема енергетичних рівнів іона хрому Cr^{+3} . У ньому над нормальним рівнем E_1 розміщені дві енергетичні смуги E_3 і E_4 , а між рівнем E_1 і смугою E_3 знаходиться метастабільний

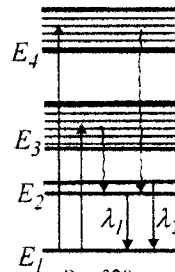


Рис.320

рівень E_2 , який складається з двох енергетичних станів. Підкачування в лазері здійснюється потужним спалахом ксенонової лампи. Атоми хрому, які до спалаху знаходились на основному рівні E_1 , внаслідок поглинання зеленого або синього світла, яке випромінює ксенонова лампа, переходять у збуджені стани E_3 і E_4 . Час перебування атомів у збуджених станах становить $\sim 10^{-8} c$, і вони здійснюють релаксаційний перехід на збуджений рівень E_2 без випромінювання. Рівень E_2 метастабільний, і час життя на ньому становить $\sim 10^{-3} c$, тобто в $\sim 10^5$ разів більший за час перебування іона у звичайному збудженому стані E_3 і E_4 . Так можна створити умови, за яких заселеність іонами

подвійного рівня E_2 перевищуватиме за-селеність основного рівня E_1 . При пере-ході іонів хрому з метастабільного стану в основний рубіновий лазер випромінює світло двох хвиль: $\lambda_1 = 0.6929 \text{ мкм}$ і $\lambda_2 = 0.6943 \text{ мкм}$, що лежать в червоній частині спектра. Більш інтенсивна лінія $\lambda_2 = 0.6943 \text{ мкм}$. Тому вона і підсилюється при роботі лазера. Виникненню інверсії рівнів E_1 і E_2 сприяє мала імовірність спонтанних переходів іону хрому з рівнів E_2 на рівень E_1 .

Кожний фотон, який випадково на-роджується при спонтанних переходах, мо-же породжувати в активному середовищі множини вимушених переходів, в ре-зультаті чого виникає ціла лавина вторинних фотонів, що є копією первин-них. Однак спонтанні переходи мають ви-падковий характер, і фотони, що народжу-ються, спонтанно випромінюються в різ-них напрямках. Тому в різних напрямках поширюються і лавини вторинних фото-нів. Отже, випромінювання, що складаєть-ся з подібних лавин, не може мати високі когерентні властивості.

Для виділення напрямку лазерної генерації використовується елемент лазера — *оптичний резонатор*. Ним служить пара дзеркал, які встановлені паралельно одне одному. Найчастіше використовують дзеркала угнуті.

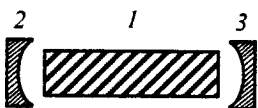


Рис.321

Принципова схема ОКГ зображена на рис.321, де 1 — ак-тивне середовище, 2 і 3 — суцільне і напів-прозоре дзеркала.

Розглянемо фотон, який рухається паралельно осі кристала. Він породжує ла-вину фотонів, які летять у тому самому напрямку (рис.322а). Частина цієї лавини частково пройде крізь напівпрозоре дзер-кало 3 назовні, а частина відіб'ється і на-ростатиме в активному середовищі (рис.322б). Коли лавина електронів дійде до суцільного дзеркала 2, во-на частково по-глинеться, але після відбиван-ня від дзеркала 2 підсилений потік фотонів знову рухати-меться так само, як і початковий, "затра-вочний" фотон (рис.322в). Потік фотонів, який був багато разів підсилений і вийшов з генератора крізь напівпрозоре дзеркало, утворює точно напрямлений пучок променів світла.

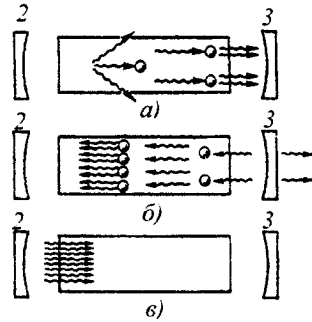


Рис.322

до суцільного дзеркала 2, во-на частково по-глинеться, але після відбиван-ня від дзеркала 2 підсилений потік фотонів знову рухати-

меться так само, як і початковий, "затра-вочний" фотон (рис.322в). Потік фотонів, який був багато разів підсилений і вийшов з генератора крізь напівпрозоре дзеркало, утворює точно напрямлений пучок променів світла.

Довжина шляху, який проходить хвиля між двома відбиваннями, повинна становити ціле число довжин хвиль:

$$2L = n\lambda,$$

або

$$L = n \frac{\lambda}{2},$$

де $n = 1, 2, \dots$

Якщо виконано цю умову, то хвилі, які при кожному відбиванні виходять з ге-нератора через дзеркало 3, когерентні між собою.

Першим газовим лазером неперер-вної дії був створений в 1960р. Джованом лазер на суміші атомів неону і гелію. В газових лазерах інверсна заселеність рівнів

здійснюється електричним розрядом, що збуджується в газах.

В гелій-неоновому лазері накачка відбувається в два етапи: гелій (*He*) слугує носієм енергії збудження, а лазерне випромінювання дає неон (*Ne*). Із всіх рівнів *He*, крім основного E_1' , для роботи лазера мають значення метастабільні рівні E_2' і E_3' з енергіями 19,82 і 20,61 eV відповідно (рис.323).

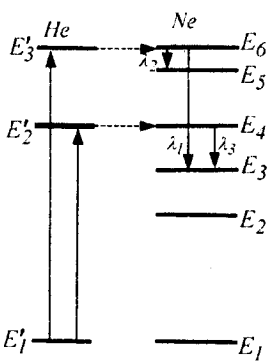


Рис.323

рівнів на основний рівень E_1' "заборонений", тобто відбувається з дуже малою імовірністю. Тому час життя атома на цих рівнях E_2' і E_3' дуже великий. На цих

метастабільних рівнях атоми *He* нагромаджуються в результаті зіткнень з електронами, що утворюються в розряді. Але рівні гелію E_2' і E_3' майже збігаються з рівнями E_4 і E_6 неону (рис.323). Завдяки цьому при зіткненнях збуджених атомів гелію з незбудженими атомами іону інтенсивно відбуваються безвипромінювальні переходи атомів гелію у незбуджений стан з передачею енергії атомам неону. Цей процес збудження атомів *Ne* на рис.323 символічно показаний горизонтальними пунктирними стрілками. В результаті концентрація атомів *Ne* на рівнях E_4 і E_6 сильно зростає, і виникає інверсна залежність відносно рівнів E_3 і E_5 , а різниця заселеності рівнів E_6 і E_3 збільшується в декілька разів. Перехід атомів неону з

рівня E_6 на рівень E_3 супроводжується генерацією червоного світла з довжиною хвилі $\lambda_1 = 0,6328 \text{ мкм}$. Цей лазер може генерувати й інфрачервоне випромінювання з довжинами хвиль $\lambda_2 = 3,390 \text{ мкм}$ і $\lambda_3 = 1,150 \text{ мкм}$.

Принципова схема гелій-неоновому лазера наведена на рис.324.

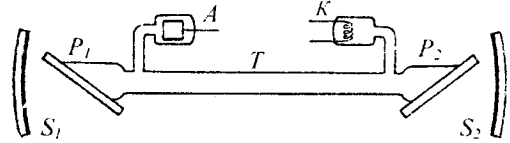


Рис.324

Лазер складається з газорозрядної трубки *T* діаметром 7–10 мм. Трубка заповнена сумішшю гелію (тиск ~1 мм рт.ст.) і неону (тиск ~0,1 мм рт.ст.). Кінці трубки закриті плоскопаралельними скляними або кварцовими пластинами P_1 і P_2 , які встановлені під кутом Брюстера до її осі. Це створює лінійну поляризацію лазерного випромінювання з електричним вектором, який паралельний площині падіння. Дзеркала S_1 і S_2 , між якими розміщена трубка, виконуються сферичними з багат шаровими діелектричними покриттями. Вони мають високі коефіцієнти відбивання і практично не поглинають світла. Пропускна здатність дзеркала, через яке виходить випромінювання лазера, становить 2%, а другого – менше 1%. Між електродами трубки прикладається постійна напруга 1–2 кВ. Розрядний струм в трубці становить декілька десятків міліампер.

Лазерне випромінювання характеризується такими властивостями:

- високою часовою і просторовою когерентністю;

- строгою монохроматичністю ($\Delta\lambda \sim 10^{-11} \text{ м}$);
- великою густиною потоку випромінювання;
- дуже малим кутовим розходженням в пучку.

Незвичайні властивості лазерного випромінювання знаходять широке застосування. ОГК можна з великою ефективністю використовувати для зв'язку, локації. Випромінюванням ОГК можна пробивати найдрібніші отвори в найтвердіших речовинах, зварювати мікродеталі, використовувати механічну обробку, впливати на хід хімічних реакцій. Застосування лазерів значно підвищило точність виміральної техніки.

§126. Комбінаційне розсіяння світла

Крім процесів випромінювання та збирання світла атомними системами, зокрема молекулами, існує ще одне явище, яке відіграє важливу роль у вивченні будови молекул. Це так зване *комбінаційне розсіяння*, яке полягає у зміні спектрального складу світла при його розсіянні в речовині.

У твердих тілах воно було вивчено Л.Мандельштамом і Г.Ландсбергом, в рідинях – Раманом.

Схема досліду для спостереження

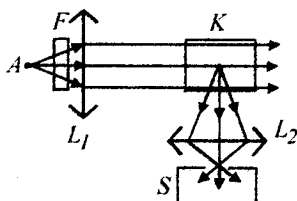


Рис.325

комбінаційного розсіяння зображена на рис.325. Джерелом світла служить ртутна лампа А, спектр якої містить декілька інтенсивних ліній. За допомогою фільтра F із спектра виділяється одна лінія з частотою ν_0 . Світло, яке пройшло через фільтр, спрямовується за допомогою лінзи L_1 на кристал К. Промені, які розсіяні в напрямку, перпендикулярному до напрямку первинного пучка за допомогою лінзи L_2 , спрямовуються на щілину спектрографа S.

Наведемо отримані таким шляхом експериментальні дані:

1. Розсіяне світло вже не є монохроматичним – в його спектрі, крім інтенсивної лінії з незмінною частотою ν_0 присутні ще декілька більш слабких ліній (“супутників”, або “сателітів”), які розмішені з обох сторін основної лінії (рис.326). Їх частоти можна записати у вигляді $\nu'_i = \nu_0 - \Delta\nu_i$,

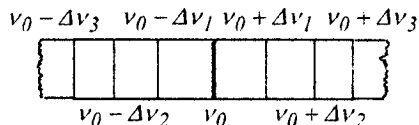


Рис.326

$\nu'_i = \nu_0 + \Delta\nu_i$. Супутники з частотами, меншими від ν_0 , називають *червоними або стоксівськими*, а з частотами, більшими від ν_0 , – *фіолетовими або антистоксівськими*.

2. Розміщення супутників відносно ліній з частотою ν_0 є характерним для даної речовини, що розсіює світло, і не залежить від частоти ν_0 . Число різних супутників залежить від речовини, що розсіює світло.

3. Величини змішень супутників $\Delta\nu_i$ збігаються, як правило, з частотами інфрачер-

воних коливальних ліній в спектрах випромінювання та поглинання речовини, з якої виготовлений розсіювач. Частоти ліній супутників виражаються комбінаціями початкової частоти ν_0 з власними коливальними частотами молекул розсіювача. Звідси походить термін “комбінаційне розсіяння”.

4. Інтенсивність фіолетових супутників є меншою від інтенсивності червоних. При підвищенні температури розсіювача інтенсивність фіолетових супутників зростає, тоді як для червоних вона залишається практично сталою. Інтенсивність супутників зменшується при збільшенні $\Delta\nu_i$.

5. Лінії комбінаційного розсіяння більш чи менш поляризовані. Характер поляризації червоних і фіолетових супутників, що відповідають даному значенню $\Delta\nu_i$, завжди однаковий і не залежить від частоти основної лінії.

Повне пояснення закономірності комбінаційного розсіяння дає квантова теорія. Нехай квант світла з енергією $h\nu_0$ падає на речовину, молекули якої можуть бути в різних коливальних енергетичних станах з енергією $E_{ji} = E_{ел1} + E_{кол i}$. У квантовій теорії випромінювання комбінаційне розсіяння світла розглядається як двоетапний процес. Спочатку поглинається падаючий фотон $h\nu_0$, а потім випромінюється фотон за рахунок взаємодії електронних шарів молекули з полем світлової хвилі.

Якщо квант падаючого світла $h\nu_0$ досить великий (видима або ультрафіолетова область спектра), то молекула яка перебувала у незбудженому стані з енергією

$E_{10} = E_{ел1} + E_{кол 0}$, поглинувши цей квант, може перейти у збуджений електронний стан. Через $10^{-8} c$ збуджена молекула може перейти в основний стан з енергією E_{10} і при цьому випромінюється фотон тієї самої частоти ν_0 (рис.327а).

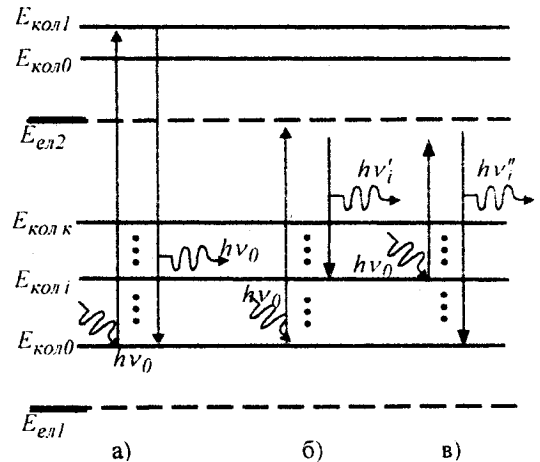


Рис.327

Можливий випадок, коли молекула, що перебувала у незбудженому стаціонарному стані, поглинувши фотон з енергією $h\nu_0$, через проміжний (нестационарний, віртуальний) електронний стан, випромінює квант $h\nu'_i$ і переходить на i -й коливальний рівень (рис.327б). За законом збереження енергії

$$h\nu_0 + E_{ел1} + E_{кол0} = h\nu'_i + E_{ел1} + E_{кол i}$$

Звідси

$$\nu'_i = \nu_0 - \frac{E_{кол i} - E_{кол0}}{h} = \nu_0 - \Delta\nu_i$$

Так виникають червоні супутники.

Поява фіолетових супутників з квантової точки зору пояснюється можливістю того, що молекула, яка перебуває в одному із збуджених коливальних станів з

енергією $E_{ji} = E_{елl} + E_{колi}$, під дією фотона з енергією $h\nu_0$ перейде у стан з енергією $E_{ji} + h\nu_0$. При переході в основний стан з енергією E_{j0} молекула випромінює фотон з енергією $h\nu''$ (рис.327в). За законом збереження енергії

$$h\nu_0 + E_{елl} + E_{колi} = h\nu'' + E_{елl} + E_{кол0}$$

Тоді

$$\nu'' = \nu_0 + \frac{E_{колi} - E_{кол0}}{h} = \nu_0 + \Delta\nu_i.$$

Інтенсивність супутників визначається кількістю відповідних актів взаємодії фотонів з молекулами розсіювача. При кімнатній температурі більшість молекул перебувають в нормальному стані і тільки невелика частина – в збуджених станах. Тому зіткнення фотонів із збудженими молекулами є значно рідшим явищем, ніж з молекулами в нормальному стані. Відповідно, кількість переходів, що супроводжуються збільшенням частоти фотонів, є в багато разів меншою від кількості

процесів із зменшенням частоти. Звідси випливає, в згоді з експериментом, що інтенсивність фіолетових супутників повинна бути значно меншою від інтенсивності червоних компонент комбінаційного розсіяння.

При підвищенні температури розсіювача збільшується число молекул, що перебувають в збуджених станах. Разом з тим повинно зростати число актів розсіяння, при яких частота фотонів збільшується. Отже, інтенсивність фіолетових супутників зростає з підвищенням температури. У комбінаційному розсіянні світла можуть брати участь не тільки коливальні рівні молекул, але й обертальні та електронно-обертальні рівні, переходи між якими характеризуються мінімальними значеннями енергії, так що відповідні лінії комбінаційного спектра розташовуються дуже близько до початкової лінії. Якщо комбінаційне розсіяння виникає при зміні і коливальних, і обертальних рівнів, то замість описаного вище лінійчастого спектра спостерігаються смуги комбінаційного розсіяння.

ІХ. ФІЗИКА АТОМНОГО ЯДРА ТА ЕЛЕМЕНТАРНИХ ЧАСТИНОК

§126. Розмір, склад і заряд ядра.

Масове і зарядове число

Резерфорд, досліджуючи проходження α -частинок з енергією декілька MeV крізь тонкі пластинки золота, дійшов висновку про те, що атом складається з позитивно зарядженого ядра і електронів, які його оточують. Розмір ядра $\sim 10^{-14} - 10^{-15} m$ (розмір атома $\approx 10^{-10} m$).

Атомне ядро складається з елементарних частинок-протонів і нейтронів. Протон (p) має позитивний заряд, що дорівнює заряду електрона, і масу спокою $m_p = 1.672 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1836 m_e$. Нейтрон (n)-нейтральна частинка з масою спокою $m_n = 1.675 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1839 m_e$. **Протони і нейтрони називають нуклонами** (від латинського *nucleus* – ядро). Загальне число нуклонів в ядрі називається масовим числом A . До складу ядра входять Z протонів та N нейтронів, тому $A = Z + N$.

Ядро позначають тим самим символом, що і атом ${}_Z^A X$, де X – символ хімічного елементу.

Атомні ядра, що відрізняються числом протонів Z і нейтронів N , називаються **нуклідами**.

Атомне ядро характеризується зарядом Ze , e – заряд протона, Z – зарядове число ядра, яке дорівнює числу протонів у ядрі і збігається з порядковим номером в Періодичній системі Менделєєва.

Виходячи з того факту, що атом нейтральний, стає очевидним, що заряд ядра визначає і число електронів у атомі.

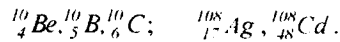
Ядра з однаковим Z , але різними A (різна кількість нейтронів) називаються

ізотопами, а ядра з однаковим A , але різними Z називаються ізобарами.

Наприклад, водень ($Z=1$), має три ізотопи ${}_1^1H$ -протій ($Z=1; N=0$), ${}_1^2H$ -дейтерій ($Z=1; N=1$), ${}_1^3H$ - тритій ($Z=1; N=2$), олово - 10 ізотопів і т. д.

Здебільшого ізотопи одного і того самого елементу мають однакові хімічні і фізичні властивості (виняток – ізотопи водню). Це пояснюється тим, що фізичні та хімічні властивості визначаються, переважно, електронною будовою атома, тобто структурою електронних оболонок, яка для всіх ізотопів є однаковою.

Прикладом ядер-ізобар можуть бути ядра



Ядра з однаковим числом нейтронів $N=A-Z$ називаються ізотонами. Існують радіоактивні ядра з однаковим Z і A , які відрізняються за періодом піврозпаду. Вони називаються ізомерами.

Прикладом ядер ізотонів є ${}_{20}^{44}\text{Ca}$ і ${}_{22}^{46}\text{Ti}$.

Нині відомо близько 300 стійких ізотопів хімічних елементів і приблизно 2000 ядер природних і штучних елементів, які відрізняються або одним, або ж іншим числом.

Радіус ядра визначається емпіричною формулою:

$$R = R_0 A^{1/3}, \text{ де } R_0 = (1.3 \div 1.7) \cdot 10^{-15} \text{ м.}$$

Радіус ядра, враховуючи його розмірність, визначається в певних межах. З формули видно, що радіус пропорційний до числа нуклонів. Отже, густина ядерної

речовини є приблизно однакова для всіх ядер ($\approx 10^{17} \text{ Кг} / \text{М}^3$).

Прилади високої роздільної здатності дозволили виявити надтонку структуру спектральних ліній ядерного випромінювання.

Існування такої структури було пояснено наявністю у ядер власного моменту імпульсу (спіну) та магнітного моменту.

Власний момент імпульсу ядра – спін – складається із спінів нуклонів та орбітальних моментів імпульсу нуклонів. Обидві ці величини є векторними, тому спін є їх векторною сумою. Спін ядра квантується за законом: $L_n = \hbar \sqrt{I(I+1)}$, I – спінове ядерне квантове число (або спін ядра), яке набуває цілі або напівцілі значення $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$, ядра з парними значеннями I мають цілі значення I , з непарними – напівцілі значення I .

Атомне ядро, крім спіна, має магнітний момент $\vec{p}_{ми}$. Магнітний момент зв'язаний зі спіном співвідношенням $\vec{p}_{ми} = g_n \vec{L}_n$, де g_n – коефіцієнт пропорційності, який називається ядерним гіромагнітним відношенням.

Одиницею магнітного моменту ядра служить ядерний магнетон

$$\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.0508 \cdot 10^{-27} \text{ Дж} / \text{Тл},$$

вираз для якого аналогічний магнетону Бора, але маса електрона замінена масою протона m_p . Ядерний магнетон в 1836 разів менший, ніж магнетон Бора, тому магнітні властивості атома, переважно, визна-

чаються магнітними властивостями електронів.

Атомне ядро є квантово-механічною системою, яка має значне число різних квантових станів. Квантові стани характеризуються енергетичними рівнями ядра, які можуть набувати лише дискретні значення $E_0, E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$. Таку систему

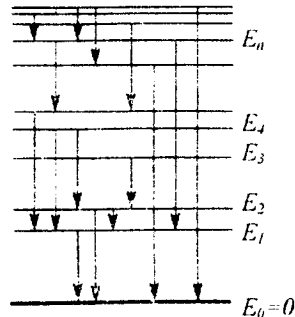


Рис. 328

певних енергетичних рівнів називають енергетичним спектром ядра (рис.328). Якщо на ядро не діють зовнішні сили, то

воно знаходиться в основному стані – на найнижчому енергетичному рівні E_0 , який приймають за початок відліку ($E_0 = 0$). Вертикальні стрілки на рис.328, напрямлені зверху вниз, показують переходи між енергетичними рівнями з випромінюванням γ -квантів.

Якщо ядро отримує певну порцію енергії, воно переходить у збуджений стан на вищий енергетичний рівень. Середній час життя ядра у збудженому стані дорівнює $\tau = 10^{-14} \div 10^{-13} \text{ с}$. Після перебування у збудженому стані ядро переходить на один із рівнів, з меншою енергією або зразу в основний стан, випромінюючи один γ -квант або послідовно кілька γ -квантів.

Чим більше нуклонів у складі ядра і чим вища енергія збудження, тим менша середня відстань між рівнями.

Маса і енергія є важливими характеристиками атомного ядра, зміна яких визначає характер перебігу будь-яких ядерних процесів. Застосування законів збереження маси і енергії дозволяє проводити розрахунок ядерних взаємодій.

Масу атомів і ядер в ядерній фізиці виражають в атомних одиницях маси (а.о.м.). За атомну одиницю маси приймається $1/12$ частинка маси атома вуглецю ^{12}C .

$$1 \text{ а.о.м.} = \frac{1}{12} \frac{12 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{моль}^{-1}}{N_A} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Згідно із співвідношенням Ейнштейна $E = mc^2$ масу атомів визначають також в одиницях енергії:

$$1 \text{ а.о.м.} = 931,50 \text{ Мев.}$$

§128. Дефект маси і енергія зв'язку ядра

Атомні ядра є стійкими утвореннями. Це означає, що в ядрі між нуклонами існують сили притягання, які забезпечують зв'язки між нуклонами.

Мас-спектрометричні дослідження показали, що маса ядра менша, ніж сума мас нуклонів, з яких воно складається.

Зменшення маси нуклонів викликано переходом їх із вільного стану у зв'язаний стан в атомному ядрі. Виникнення зв'язаного стану нуклонів відбувається під дією ядерних сил притягання. Як тільки нуклони виявляються в області дії ядерних сил, вони швидко починають зближатися і набувають великої кінетичної енергії. При переході нуклонів у зв'язаний стан (утворення ядра) вони потрапляють в потенціальну яму з мінімальними для даного ядра

значеннями енергії спокою E_0 . На рис.329 наведена залежність потенціальної енергії (а) протона і нейтрона (б) від відстані від ядра.

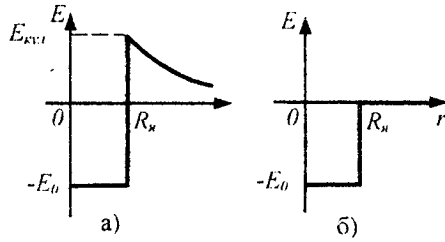


Рис.329

Отримана раніше нуклонами кінетична енергія виділяється у вигляді γ -квантів або переходить до інших частинок.

Енергію $E_{зв}$, яка виділяється при утворенні ядра, називають енергією зв'язку ядра.

Із закону збереження енергії випливає і зворотний висновок: для розділення ядра необхідно затратити таку саму кількість енергії, яка виділяється при його утворенні.

Зменшення енергії спокою нуклонів при переході їх у зв'язаний стан (утворення ядра) і виділення її у вигляді енергії зв'язку $E_{зв}$ супроводжується відповідно

до закону Ейнштейна $\Delta E = \Delta m c^2$ зменшенням сумарної маси спокою нуклонів. Це приводить до *дефекту маси ядра, що дорівнює різниці між масою нуклонів, що утворюють ядро, і масою ядра.*

$$\Delta m = Z m_p + (A - Z) m_n - m_{\text{я}},$$

де $m_p, m_n, m_{\text{я}}$ – маси протона, нейтрона, ядра відповідно.

Оскільки в таблицях наводять масу атомів, а не ядер, то Δm виражають через масу атома:

$$\Delta m = Zm_{1H} + (A-Z)m_n - m_{am}$$

де $m_{1H} = m_p + m_e$, $m_{am} = m_a + Zm_e$, m_{1H} – маса атома водню, m_e – маса електрона.

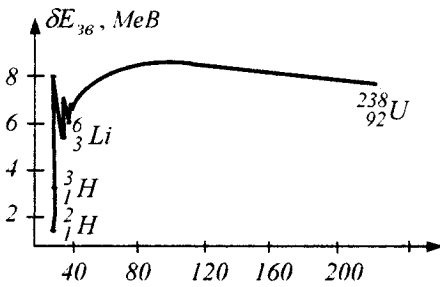
Отже, стійкість ядра як сукупність нуклонів у зв'язаному стані, підтримується відносним зменшенням енергії системи на

$$E_{зв} = \Delta mc^2$$

Дефект маси служить мірою енергії зв'язку ядра.

Переважно розглядають і використовують *питому енергію зв'язку – енергію зв'язку* $\delta E_{зв}$, що припадає на один нуклон.

Питома енергія зв'язку залежить від масового числа і характеризує стійкість атомних ядер. Чим більша питома енергія зв'язку, тим стійкіше атомне ядро. Залежність питомої енергії зв'язку від масового числа наведена на рис.329.



В області невеликих масових чисел питома енергія зв'язку виявляє характерні гострі "піки" – максимуми і мінімуми. Мінімуми для енергії зв'язку на один нуклон спостерігаються в області ядер з непарними кількостями протонів і нейтронів – ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{14}_7\text{N}$. Максимуми питомої енергії зв'язку відповідають ядрам з парними числами протонів і нейтронів

$({}^4_2\text{He}, {}^{12}_8\text{C}, {}^{16}_8\text{O})$ Найбільші значення *питомої енергії зв'язку* мають *парно-парні ядра*, тобто ядра з парним числом протонів Z і парним числом нейтронів $N = A - Z$. *Найменшу енергію зв'язку* на один нуклон мають *непарно-непарні ядра*. Проміжні значення питомої енергії зв'язку мають парно-непарні і непарно-парні ядра.

Питома енергія зв'язку $\delta E_{зв}$ різко зростає для легких елементів від 1MeV до $\sim 6-7\text{MeV}$ (з різкими стрибками для деяких елементів), потім повільно збільшується до 8.7MeV (елементи з $A = 50-60$) і повільно зменшується (до 7.6MeV у ${}^{238}_{92}\text{U}$) для важких елементів.

Ядра елементів в середній частині таблиці Менделєєва ($28 < A < 138$) від ${}^{28}_{14}\text{Si}$ до ${}^{138}_{56}\text{Ba}$ найбільш стійкі, в цих ядрах $\delta E_{зв} \sim 8.7 \frac{\text{MeV}}{\text{нуклон}}$. Найстійкішими виявились так звані "магічні ядра", у яких число протонів або нейтронів дорівнює одному з "магічних чисел": 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.

Особливо стійкі двічі "магічні" ядра, в яких "магічним" є і число протонів і число нейтронів. (Таких ядер лише п'ять – ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, ${}^{48}_{20}\text{Ca}$, ${}^{208}_{82}\text{Pb}$).

Зменшення питомої енергії зв'язку у важких атомних ядер пояснюється тим, що при зростанні числа протонів у ядрі збільшується й енергія їх кулонівського відштовхування. Тому зв'язок між нуклонами стає слабшим, а ядра менш міцними.

Отже, важкі і легкі ядра менш стійкі. Це означає, що енергетично вигідні такі процеси:

1) поділ важких ядер на більш легкі;

2) злиття легких ядер у важчі (синтез).

Під час обох процесів виділяється величезна кількість енергії. Ці процеси здійснені практично.

Крім енергії зв'язку ядра відносно всіх нуклонів, які входять у ядро, можна ввести у розгляд енергію зв'язку ядра відносно яких-небудь складових частин. В деяких випадках енергія зв'язку ядра, розрахована відносно яких-небудь його складових частин, стає особливо малою. Це спостерігається у легких ядер відносно вільно у з них нейтрона. Так, енергія зв'язку ${}^9_4\text{Be}$ відносно до його розпаду на нейтрон і $2{}^4_2\text{He}$ дорівнює приблизно 2MeV . хоча енергія зв'язку ядра ${}^9_4\text{Be}$ відносно всіх дев'яти нуклонів, які входять в ядро, дорівнює

$$E_{зв}({}^9_4\text{Be}) \cong 5,8\text{MeV}.$$

Ядра важких елементів, наприклад, урану, мають дуже велику енергію зв'язку відносно всіх нуклонів, але якщо для ${}^{238}_{92}\text{U}$ підрахувати значення енергії зв'язку відносно ${}^4_2\text{He}$ і ${}^{234}_{90}\text{Th}$, то отримуємо від'ємну величину

$$E_{зв}({}^{234}_{90}\text{Th} + {}^4_2\text{He})({}^{238}_{92}\text{U}) = -4,25\text{MeV}.$$

Це означає, що ядро урану є нестійкою системою відносно до розпаду на ядро ${}^4_2\text{He}$ і ${}^{234}_{90}\text{Th}$.

Енергія зв'язку ${}^{238}_{92}\text{U}$ відносно ядер ${}^4_2\text{He}$ і ${}^{234}_{90}\text{Th}$ має фізичний сенс енергії, яку треба затратити на відокремлення α -частинки від ядра урану. Тому її можна назвати *енергією відокремлення* або енергією зв'язку α -частинки в ядрі урану.

Відповідно фізичний сенс енергії зв'язку (енергії відокремлення) нейтрона такий: це енергія, яку треба надати ядру, щоб відокремити від нього нейтрон.

§129. Взаємодія нуклонів і поняття про властивості і природу ядерних сил

До складу атомного ядра входить Z протонів і $A - Z$ нейтронів. Незважаючи на те, що між протонами діють сили кулонівського відштовхування, атомні ядра являють собою досить стійкі системи. Це вказує на те, що в ядрах атомів діють специфічні сили притягання, які називають *ядерними силами*. Ядерні сили не можуть бути зведені ні до кулонівських, ні до молекулярних, ні до магнітних, ні до гравітаційних сил.

Основні властивості ядерних сил:

1. Ядерні сили є *силами притягання*
2. Ядерні сили *досить значні*, тому таку взаємодію називають *сильною*. Енергія зв'язку, що припадає на один нуклон у ядрі, досягає $7 - 8,5\text{MeV}$. Сили взаємодії ядра з електронами атома забезпечують енергію зв'язку від десятків до тисяч електрон-вольт, а сили зв'язку між атомами в молекулах забезпечують енергію зв'язку в кілька електрон-вольт.
3. Ядерні сили є *короткодійними* на відміну від електромагнітних і гравітаційних сил. Радіус дії ядерних сил приблизно дорівнює розміру нуклона (10^{-15}м). При $r > 10^{-14}\text{м}$ ядерні сили практично дорівнюють нулю.
4. Ядерні сили мають *властивість зарядової незалежності*, тобто величина ядерних сил не залежить від електричного

заряду взаємодіючих нуклонів. Ядерні взаємодії між двома протонами або між двома нейтронами, або між протоном і нейтроном однакові.

5. Ядерні сили мають *властивість насичення*, тобто кожен нуклон в ядрі взаємодіє лише з обмеженим числом найближчих до нього нуклонів. Насичення проявляється в тому, що питома енергія зв'язку нуклонів у ядрі при збільшенні числа нуклонів не росте, а залишається приблизно постійною (якщо не враховувати легкі ядра).

Властивості насичення ядерних сил приводять до такого важливого висновку: взаємодія між нуклонами не зводиться тільки до сил притягання. На відстанях між нуклонами $r < 0,5 \cdot 10^{-10}$ м притягання між ними переходить у відштовхування. За відсутності у ядрі сили відштовхування між нуклонами ядра повинні б колапсувати, тобто стискатись у точку.

6. Ядерні сили залежать від *орієнтації спінів нуклонів*, які взаємодіють. Система з протона і нейтрона утворює ядро-дейтрон лише у випадку, коли спіни протона і нейтрона паралельні. Якщо ж спіни протилежно напрямлені, то нейтрон і протон ядра не утворюють. Отже, ядерні сили мають спіновий характер.

7. Величина ядерних сил також *залежить від взаємної орієнтації спіна та орбітального моменту кожного нуклона*, тобто ядерні сили мають спін-орбітальний характер.

8. Ядерні сили *не є центральними силами*, тобто силами, які можна уявити такими, що діють по лінії, яка з'єднує центри взаємодіючих нуклонів.

Для пояснення властивостей ядерних сил – насичення і короткодії – В.Гейзенберг висунув гіпотезу про те, що ядерні сили є "обмінні сили", тобто що ядерні сили між двома нуклонами забезпечуються третьою частинкою.

Довжина хвилі $\lambda_{o.c.}$ обмінної частинки повинна відповідати радіусу R_n дії ядерних сил. Виходячи із формули де Бройля

$$\lambda_{o.c.} = \frac{h}{m_{o.c.}c} = R_n,$$

можна оцінити масу обмінної частинки:

$$m_{o.c.} \cong \frac{h}{R_n c}.$$

Ця маса повинна у 300 разів перевищувати масу електрона.

У 1935 р. японський фізик Х.Юкава висунув гіпотезу, що ядерні сили зумовлені невідомою на той час частинкою, маса якої становить 200-300 мас електрона. Оскільки ці гіпотетичні частинки за величиною маси займали проміжне місце між масою електрона і протона, то їх назвали мезонами ("мезос" – грецьке слово – середній). Такі частинки дійсно було виявлено у 1947 році в космічному випромінюванні.

Виявилось, що існує три типи π -мезонів: π^+ , π^- , π^0 . Заряди π^+ і π^- за абсолютною величиною дорівнюють заряду електрона, маса зарядженого мезона $m_{\pi^\pm} = 273m_e$, маса π^0 -мезона $m_{\pi^0} = 264m_e$. Спін π -мезонів дорівнює нулю.

Ядерну взаємодію двох нуклонів, що знаходяться на відстані радіуса дії ядерних сил, можна представити у такий спосіб. Один нуклон випромінює π -мезон,

а другий нуклон його поглинає упродовж 10^{-23} с (час прольоту частинки з швидкістю світла відстані між нуклонами – ядерний час). Частинки, які існують лише в області дії ядерних сил протягом ядерного часу, називаються *віртуальними*.

Розглянемо обмінну взаємодію між нуклонами. В результаті віртуальних процесів

$$p \Leftrightarrow n + \pi^+,$$

$$n \Leftrightarrow p + \pi^-,$$

$$p \Leftrightarrow p + \pi^0, n \Leftrightarrow n + \pi^0$$

нуклон виявляється оточеним хмарою віртуальних π -мезонів, які утворюють поле ядерних сил. Поглинання цих мезонів іншим нуклоном приводить до сильної взаємодії між нуклонами, яка здійснюється за однією із таких схем:

$$1) \quad p + n \Leftrightarrow n + \pi^+ + n \Leftrightarrow n + p.$$

Протон випромінює віртуальний π^+ -мезон і перетворюється в нейтрон. Мезон поглинається нейтроном, який внаслідок цього перетворюється у протон. Потім такий процес відбувається у зворотному напрямку. Кожний із взаємодіючих нуклонів частину часу проводить в зарядженому стані, а частину в нейтральному.

$$2) \quad n + p \Leftrightarrow p + \pi^- + p \Leftrightarrow p + n.$$

Нейтрон і протон обмінюються π^- -мезонами.

$$3) \quad p + p \Leftrightarrow p + \pi^0 + p \Leftrightarrow p + p.$$

$$n + n \Leftrightarrow n + \pi^0 + n \Leftrightarrow n + n.$$

Два протони або два нуклони обмінюються нейтральними π^0 -мезонами.

Перша із цих трьох схем обміну π -мезонами нуклонів експериментально під-

тверджується при вивченні розсіяння нейтронів на протонах.

Безперечно, процес взаємодії між нуклонами значно складніший і наведені схеми є не що інше, як намагання унаочнити дії обмінних сил. Обмінні сили – це суто квантово-механічні поняття.

Складний характер ядерних сил і значні труднощі, що виникають при розв'язанні рівнянь руху всіх нуклонів у ядрі, є причиною того, що донині не створена єдина послідовна теорія атомного ядра. Тому сьогодні користуються наближеними ядерними моделями, які досить добре описують лише деякі властивості ядра при використанні порівняно простого математичного апарату. З багатьох моделей, кожна з яких описує лише певні властивості ядра, згідно з експериментальними даними, найбільш використовувані дві: краплинна та оболонкова.

1. *Краплинна модель ядра* (1936 р., Н. Бор, Я. Френкель) є першою моделлю. Вона ґрунтується на аналогії між поведінкою нуклонів у ядрі та молекул в краплині рідини. В обох випадках сили, що діють між складовими частинами короткодійчі та мають властивість насичення. Рідина має постійну густину, ядерна речовина також характеризується постійною густиною, незалежною від числа нуклонів у ядрі. Об'єм краплини, як і об'єм ядра, пропорційний до числа частинок, що в них знаходяться. Істотна відмінність ядра від краплини рідини в цій моделі в тому, що вона трактує ядро як краплину електрично зарядженої нестискуваної рідини (з такою самою густиною, як ядерна), яка підкоряється законам квантової механіки. Крап-

линна модель ядра дозволила отримати напівемпіричну формулу для енергії зв'язку нуклонів у ядрі, пояснила механізм реакцій поділу ядер. Однак не змогла пояснити, наприклад, підвищену стійкість ядер, які містять магічні числа протонів і нейтронів.

2.Оболонкова модель ядра (1949-50 р., німецький фізик Х.Йенсен, американський фізик Гелперт-Меєр) базується на припущенні, що нуклони в ядрі розташовуються на дискретних рівнях (оболонках), заповнюючи їх згідно з принципом Паулі. Стійкість ядер залежить від ступеня заповнення таких оболонок. Вважається, що ядра з повністю заповненими оболонками найбільш стійкі. Дослідами підтверджено існування найбільш стійких (магічних) ядер. Оболонкова модель ядра дозволила пояснити спіни і магнітні моменти ядер, різну стійкість атомних ядер, періодичність зміни їх властивостей. Нові експериментальні дані про властивості атомних ядер, які появились в результаті подальших досліджень, виходили за рамки обох теорій. Так виникла узагальнена модель (синтез краплинної і оболонкової) – оптична модель ядра (пояснює взаємодію ядер з елементарними частинками і та ін.).

§130. Радіоактивність. Основний закон радіоактивного перетворення атомних ядер

Радіоактивністю називають самовільне (спонтанне) перетворення ядер нестійких ізотопів одних елементів у ядра ізотопів інших елементів, що зумовлено внутрішніми причинами та супроводжується α -, β -, γ -випромінюванням, а та-

кож інших частинок (нейтронів, протонів).

До радіоактивних процесів належать:

- 1) α -розпад;
- 2) β -розпад;
- 3) γ -випромінювання;
- 4) спонтанний поділ тяжких ядер;
- 5) протонна радіоактивність.

Радіоактивність, яка спостерігається у ядер, що існують у природних умовах, називається *природною*. Радіоактивність ядер, які отримані за допомогою ядерних реакцій, називається *штучною*. Між природною та штучною радіоактивністю немає принципової різниці.

Природні радіоактивні перетворення ядер, які відбуваються самочинно, називаються *радіоактивним розпадом*. Ядро, що виникло внаслідок розпаду, називають *дочірнім* ядром, а ядро, яке розпалось – *материнським*.

Теорія, яка пояснює це явище, ґрунтується на припущенні, що радіоактивний розпад є спонтанним процесом.

Численні досліди показали, що на швидкість радіоактивного розпаду не впливають ніякі зовнішні зміни температури, тиску, наявність електричних і магнітних полів, вид хімічної сполуки, її агрегатний стан. З цього випливає, що радіоактивний процес відбувається в глибинних частинах атома, тобто в його ядрі. Радіоактивний розпад – це властивість самого атомного ядра, і залежить вона тільки від його внутрішнього стану.

Внаслідок самочинності цього процесу природно припустити, що число ядер dN , які розпадаються за інтервал часу від

t до $t + dt$, пропорційне проміжку часу dt і кількості N наявних ядер, які ще не розпались на момент часу t :

$$dN = -\lambda N dt.$$

Тут λ – стала величина, яку називають *сталою розпаду або радіоактивною сталою*. Знак “–” вказує на те, що загальна кількість радіоактивних ядер в процесі розпаду зменшується.

Стала розпаду

$$\lambda = -\frac{dN}{N dt}$$

дорівнює відносному зменшенню кількості ядер, які зазнають розпаду, за одиницю часу. Стала λ визначає швидкість радіоактивного розпаду.

Відокремивши в рівнянні $dN = -\lambda N dt$ змінні, та проінтегрувавши отримуємо

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt;$$

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t.$$

Звідси
$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Цей вираз виражає *закон радіоактивного розпаду*, згідно з яким кількість атомів, які не розпались, зменшується за експонентою. У цій формулі N_0 – початкова кількість ядер, які не розпались (в момент часу $t = 0$), N – кількість ядер, які не розпались в момент часу t .

Кількість ядер, які розпались за час t , визначається виразом

$$N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}).$$

На рис.330 зображено залежність $\ln \frac{N}{N_0}$ від часу t . Вона дає змогу експе-

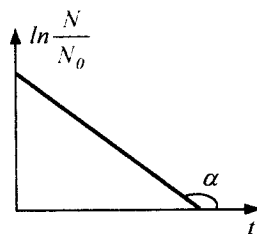


Рис.330

риментально за нахилом прямої визначити сталу розпаду λ , бо $tg \alpha = \lambda$.

Знайдемо

середній час життя

радіоактивного ядра. Кількість ядер $dN(t)$, що розпалися за проміжок часу від t до $t + dt$, визначається модулем виразу

$$dN(t) = \lambda N(t) dt.$$

Час життя кожного з цих ядер дорівнює t .

Отже, суму життів всіх N_0 ядер, що було спочатку, одержують інтегруванням виразу $t dN(t)$. Поділивши цю суму на число ядер N_0 , одержимо середній час життя τ радіоактивного ядра:

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t dN(t) = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \lambda N(t) dt =$$

$$= \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Стала розпаду λ є оберненою величиною середнього часу життя τ певного радіоактивного елементу.

Тому

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

де τ – це час, за який кількість ядер при радіоактивному розпаді зменшиться в e разів.

Для характеристики стійкості ядер відносно розпаду, для оцінки тривалості життя певного радіоактивного ізотопу вводять поняття про *період піврозпаду T* . Так називається час, протягом якого початкова кількість ядер певної речовини розпадається наполовину.

З визначення T випливає

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda T}$$

Звідси отримуємо

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} = 0,693\tau.$$

Періоди піврозпаду різних природних ізотопів досить відрізняються один від одного. Так, $T = 4,51 \cdot 10^9$ років для ${}^{238}_{92}\text{U}$ і $T = 3 \cdot 10^{-7}$ с для ${}^{212}_{84}\text{Po}$.

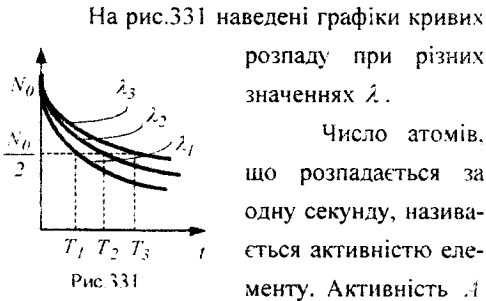


Рис. 331

описують такими формулами:

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \frac{N \ln 2}{T}.$$

Отже, активність обернено пропорційна до періоду піврозпаду і зменшується з часом за експоненціальним законом.

За одиницю активності препарату беруть один розпад за секунду-Бекерель (Бк). Часто користуються позасистемною одиницею, яку називають Кюрі (Ки):

$$1\text{Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{Бк}.$$

Якщо відбувається ланцюжок радіоактивних перетворень, то закон розпаду дає змогу робити висновок лише про зменшення з часом материнської речовини. Якщо ж дочірня речовина також радіоактивна, то зміна її кількості з часом потребує аналізу. Одночасно відбувається і нагромадження цієї речовини і її зменшен-

ня внаслідок розпаду. За час dt розпадеться $\lambda_M N_M dt$ ядер атомів материнської речовини, із загальної кількості N_M цих ядер, що були на момент часу t . Якщо з кожного ядра материнської речовини утворюється одне ядро дочірньої, то за час dt кількість ядер дочірньої речовини збільшиться на $\lambda_M N_M dt$. Водночас з кількості ядер N_D дочірньої речовини, що були на момент часу t , за проміжок dt розпадеться $\lambda_D N_D dt$. Загальна зміна dN_D кількості ядер дочірньої речовини за одиницю часу дорівнюватиме:

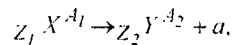
$$\frac{dN_D}{dt} = \lambda_M N_M - \lambda_D N_D.$$

У випадку рухомої рівноваги між материнською і дочірньою речовинами $\frac{dN_D}{dt} = 0$ і $\lambda_M N_M = \lambda_D N_D$ — умова радіоактивної рівноваги.

$$\frac{N_M}{N_D} = \frac{\lambda_D}{\lambda_M} = \frac{T_M}{T_D}.$$

Числа атомів обох речовин прямо пропорційні до періодів їх піврозпадів.

Радіоактивний розпад записують у вигляді рівняння



де $Z_1 X^{A_1}$ — материнське радіоактивне ядро, $Z_2 Y^{A_2}$ — дочірнє ядро (продукт розпаду), a — частинка, яка випускається.

При радіоактивному розпаді справджується закон збереження енергії, згідно з яким повна енергія материнського ядра дорівнює повній енергії продуктів розпаду:

$$m_X c^2 = (m_Y + m_a) c^2 + E_p.$$

E_p — повна енергія розпаду, яка дорівнює зміні енергії спокою материнського ядра,

що перетворюється в кінетичну енергію дочірньо. о ядра, вилітаючої частинки і γ -квантів.

При радіоактивному розпаді ядер виконується закон збереження електричних зарядів:

$$Z_{\text{я}} = \sum_i Z_i,$$

де $Z_{\text{я}}$ – заряд ядра, яке зазнало розпаду, Z_i – заряди ядер і частинок, що виникли внаслідок розпаду.

Крім того, виконується правило збереження масових чисел:

$$A_{\text{я}} = \sum_i A_i.$$

Ці співвідношення при радіоактивному розпаді формулюють у вигляді правил зміщення, які дають змогу встановити, яке ядро виникає внаслідок розпаду певного материнського ядра. При цьому розрізняють правила зміщення для випадків можливого α - або β -розпаду:

при α -розпаді: ${}_Z X^A \rightarrow {}_{Z-2} Y^{A-4} + {}_2 \text{He}^4$,

при β -розпаді: ${}_Z X^A \rightarrow {}_{Z+1} Y^A + {}_{-1} e^0$.

Ядро, яке зазнало α -розпаду, зміщується на два місця лівіше в Періодичній системі елементів. Вилітання α -частинки супроводжується зменшенням масового числа на 4 одиниці. При β -розпаді позитивний заряд ядра збільшується на одну одиницю і ядро зміщується на одне місце правіше в періодичній системі. При цьому масове число ядра не змінюється.

Ядра, які виникають внаслідок радіоактивного розпаду, також можуть бути радіоактивними. Послідовність такого процесу приводить до виникнення ланцюжка радіоактивних перетворень, який за-

кінчується стабільним елементом. Сукупність елементів, яка утворює такий ланцюжок, називається радіоактивним сімейством.

Сімейства називають за найбільш довгоживучим "родоначальником": сімейство торію (${}^{232}_{90}\text{Th}$), нептунію (${}^{237}_{93}\text{Np}$), урану (${}^{238}_{92}\text{U}$) і актинідію (${}^{235}_{89}\text{Ac}$). Кінцевими продуктами такого розпаду відповідно є: ${}^{208}_{82}\text{Pb}$, ${}^{209}_{83}\text{Bi}$, ${}^{206}_{82}\text{Pb}$, ${}^{207}_{82}\text{Pb}$, тобто єдине сімейство нептунію (штучно радіоактивного ядра) закінчується нуклідом Bi , всі інші (природно - радіоактивні ядра) – нуклідами Pb .

§131. Закономірності радіоактивного випромінювання атомних ядер

Альфа - розпад

α -розпадом називається випускання ядрами деяких хімічних елементів α -частинок.

Альфа-випромінювання відхиляється електричними і магнітними полями, має високу іонізуючу здатність і малу проникну здатність (поглинається шаром алюмінію завтовшки $\sim 0,05\text{мм}$). α -випромінювання – це потік іонізованих атомів, тобто ядер гелію. Заряд α -частинки дорівнює $+2e$, а маса рівна масі ядра ізотопу гелію ${}^4_2\text{He}$.

Відомо більше ніж дві сотні α -активних ядер, в основному важких елементів ($A > 200, Z > 82$). Лише невелика група α -активних ядер знаходиться в області з масовими числами $A = 140-160$ (рідкісноземельні). Швидкості α -частинок, які випромінюються при розпаді, дуже великі і ко-

ливаються в межах від $1,4 \cdot 10^7 \text{ м/с}$ до $2 \cdot 10^7 \text{ м/с}$, що відповідає енергіям від 4 до 8,8 MeV.

Всередині важких ядер утворюються α -частинки, кожна з яких складається з двох протонів і двох нейтронів. Відокремленню цих чотирьох нуклонів сприяє властивість насичення ядерних сил. Можливість α -розпаду викликана тим, що маса материнського ядра m_M більша від суми мас дочірнього ядра m_D і α -частинки.

$$\Delta m = m_M - (m_D + m_\alpha).$$

Отже, при α -розпаді виділяється енергія

$$E_\alpha = \Delta mc^2.$$

Енергія α -розпаду (4–9 MeV) виділяється у вигляді кінетичної енергії продуктів розпаду: α -частинки і дочірнього ядра. Кінетична енергія між ними розподіляється обернено пропорційно до їх маси, тому практично всю енергію розпаду отримує α -частинка.

В ядрі α -частинок немає, вони утворюються з 4 нуклонів лише в момент α -розпаду.

Здійсненню α -розпаду перешкоджає значний кулонівський потенціальний бар'єр (25–30 MeV), який виник при утворенні ядра N (рис.332). Значення E_K

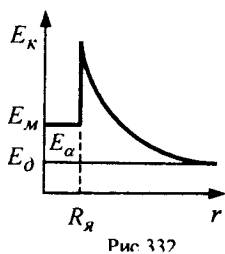


Рис. 332

в декілька разів перевищує різницю енергій E_α між початковим і кінцевими станами системи при α -розпаді.

Отже, α -частинка, неспроможна подолати бар'єр, виходить з ядра, проходячи крізь заборонену область, де її повна енергія E значно менша за потенціальну. Таке проходження частинки крізь потенціальний бар'єр – тунельний ефект – характеризується певною прозорістю потенціального бар'єра

$$D = D_0 \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m_\alpha |U(x) - E|} dx \right].$$

Ця формула свідчить про велику чутливість прозорості бар'єра до найменших змін енергії α -частинки, що перебуває всередині потенціальної ями. Навіть незначні зміни в значеннях E приводять до того, що величина D буде дуже змінюватись. При найменших змінах енергії E α -частинки в ядрі значно змінюється прозорість D потенціального бар'єра. Цим пояснюються великі відмінності в періодах піврозпаду α -випромінювачів – від 10^9 років до 10^{-7} с при порівняно невеликому зростанні енергії α -частинок (4–9 MeV).

Коефіцієнт прозорості потенціального бар'єра D має фізичний зміст імовірності проходження α -частинки через потенціальний бар'єр. Для того, щоб зв'язати цю величину з експериментально спостережуваним значенням сталої розпаду λ , треба врахувати імовірність утворення α -частинки всередині ядра і швидкість її руху. Це приводить до співвідношення: $\lambda = nD$, де n – передекспоненціальний множник. Він дає число співударів в границю ядра (бар'єру) α -частинки за одиницю часу. Якщо $v = \sqrt{\frac{2E}{m_\alpha}}$ – швидкість

α -частинки в ядрі, то $n = \frac{v}{2L}$, бо

$2L$ – відстань, яку проходить α -частинка від одного удару об стінку бар'єра до іншого.

Тоді у випадку прямокутного бар'єра дістанемо

$$\lambda = n \cdot \exp\left\{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_\alpha(U_0 - E)}L\right\} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{2E}{m_\alpha}} \exp\left\{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_\alpha(U_0 - E)}L\right\}.$$

Ця формула свідчить про існування залежності між сталою розпаду і початковою енергією α -частинки.

Дослідження кривих питомої іонізації, яку здійснюють α -частинки в різних газах, показало, що залежність числа α -частинок від довжини відрізків шляху R , які ці частинки проходять у певній речовині, зображується кривою, поданою на рис.333. Довжини пробігів α -частинок

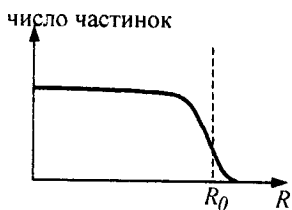


Рис.333

мало відрізняються від деякої величини R_0 , що є експериментальним значенням пробігу α -частинок.

Пройдячи через речовину, α -частинка витрачає свою енергію на непружні зіткнення з атомами, переважно на їх іонізацію. Оскільки енергії α -частинок, які вилітають з ядра, значно перевищують потенціали іонізації атомів, α -частинка витрачає свою енергію внаслідок безлічі зіткнень з атомами. Очевидно, що довжина пробігу α -частинки повинна залежати від її початкової енергії. Дослідним шляхом Гейгер знайшов емпіричну формулу, яка пов'язує початкову швидкість v α -час-

тинки з її пробігом R у повітрі при $\theta^0 C$:

$$R = b v^3,$$

b – деяка стала, $b = 9,7 \cdot 10^{-28} \frac{c^3}{m^2}$.

Г.Гейгер і Дж.Неттол на підставі аналізу численних дослідів установили співвідношення, яке називають **законом Гейгера-Неттола**: чим менший період піврозпаду радіоактивного елементу, тим більший пробіг α -частинок, які він випускає. Закон Гейгера-Неттола записують формулою

$$\ln R = A' \ln \lambda + B'$$

або

$$\ln \lambda = A + B \ln R,$$

A, B, A', B' – емпіричні константи.

Дослідження показують, що здебільшого ядра випромінюють не одну, а кілька груп α -частинок, енергії яких утворюють дискретний спектр. Його називають тонкою структурою γ -спектра. На рис.334

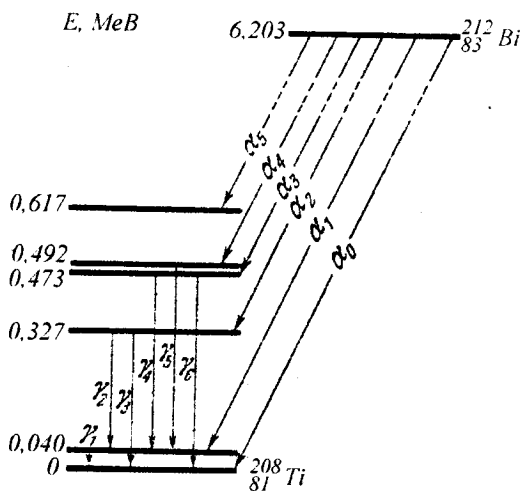


Рис.334

показано схематичне пояснення виникнення різних груп α -частинок, що випромінюються при розпаді ядра $^{212}_{83}Bi$. Зліва на рисунку наведено енергетичні рів-

ні дочірнього ядра ${}_{81}^{208}Tl$. Енергія основного стану прийнята за нуль. Надлишок енергії спокою материнського ядра порівняно з енергією α -частинки і дочірнього ядра в нормальному стані дорівнює $6,203 \text{ MeV}$. Якщо дочірнє ядро виникає не у збудженому стані, то вся енергія виділяється у вигляді кінетичної енергії, причому на α -частинку припадає

$$E_K = 6,203 \frac{208}{212} = 6,086 \text{ MeV}.$$

Якщо ж дочірнє ядро виникає у п'ятому збудженому стані, то енергія, яка виділяється, дорівнює $6,203 - 0,617 = 5,586 \text{ MeV}$ і на α -частинку припадає

$$E_K = 5,586 \frac{208}{212} = 5,481 \text{ MeV}.$$

Відносна кількість α -частинок для α_0 дорівнює 27,2%, для α_1 - 69,9%, для α_2 - 1,7%, α_3 - 0,15%, α_4 - 1,1%, α_5 - 0,016%.

У збуджених станах дочірнє ядро знаходиться доволі малий проміжок часу ($10^{-8} - 10^{-12} \text{ c}$) і переходить у стани з меншою енергією або в основний стан. При цьому відбувається випромінювання фотонів. На рис. показано виникнення γ -фотонів шести різних енергій.

Бета-розпад

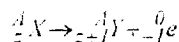
β -розпадом називається процес самочинного перетворення нестабільного ядра в ядро-ізобар із зарядом, який відмінний на $\Delta Z = \pm 1$, за рахунок випускання електрона (позитрона) або захоплення електрона. Період піврозпаду β -радіоактивних ядер змінюється від $\approx 10^{-2} \text{ c}$ до

$2 \cdot 10^{15}$ років. Енергія β -розпаду знаходиться в межах від 18 KeV (для ${}_{11}^3\text{H}$) до $16,6 \text{ MeV}$ (для ${}_{7}^{14}\text{N}$).

β -випромінювання відхиляється електричними і магнітними полями; його іонізуюча здатність значно менша (приблизно на два порядки), а проникна здатність значно більша (поглинається шаром алюмінію 2мм), ніж у α -частинок. β -випромінювання - це потік швидких електронів.

Терміном β -розпад називають три типи ядерних перетворень: електронний β^- -розпад, позитронний β^+ -розпад, а також електронне захоплення (e^- або K -захоплення).

Явище електронного β^- -розпаду відбувається за правилом зміщення



і супроводжується випромінюванням електрона. Електрони, що випромінюються в процесі β^- -розпаду, мають широкий спектр енергій від нуля до деякого максимального значення (рис.335).

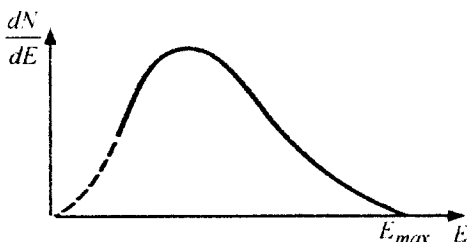


Рис.335

При β^- -розпаді кількість нуклонів в ядрі не змінюється. Однак, якщо з ядра випромінюється електрон, який має спин $\frac{\hbar}{2}$, то спин ядра повинен змінитися на $\frac{\hbar}{2}$. Таке неузгодження спіню ядра до і після роз-

паду, а також наявність суцільного енергетичного спектра випромінюваних електронів (рис.335) привели В. Паулі до гіпотези (1931 р.) про те, що при β^- -розпаді разом з електроном випускається ще одна нейтральна частинка – нейтрино. Нейтрино має нульовий заряд, спин $\frac{\hbar}{2}$ і нульову масу спокою. Нейтрино позначають ${}^0_0\nu_e$.

Виявилось, що при β^- -розпаді випускається не нейтрино, а антинейтрино, (античастинка за відношенням до нейтрино, яка позначається ${}^0_0\bar{\nu}_e$).

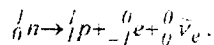
Гіпотеза про існування нейтрино дала змогу Е. Фермі створити теорію β^- -розпаду (1934), а через 20 років (1956 р.) нейтрино було виявлено експериментально. Такі довгі пошуки нейтрино пов'язані з відсутністю у цієї частинки заряду та маси спокою, а також тим, що іонізуюча здатність нейтрино надзвичайно мала (один акт іонізації припадає на пробіг 500км в повітрі), а проникна здатність – дуже висока (пробіг нейтрино з енергією 1МеВ в свинцю порядку 10^{18} м).

Для експериментального виявлення нейтрино використовували метод, який ґрунтується на тому, що в ядерних реакціях виконується закон збереження імпульсу.

Введення нейтрино дозволило пояснити не лише збереження спіна ядра, а й неперервність енергетичного спектра випромінюваних електронів. Суцільний спектр β^- -частинок зумовлений розподілом енергії між електронами і антинейтрино, причому сума енергій обох частинок становить E_{max} .

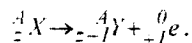
Оскільки електрони в ядрі відсутні, то було зроблено припущення, що β^- -електрони народжуються (утворюються) в ядрі внаслідок процесів, що там відбуваються.

Оскільки при β^- -розпаді кількість нуклонів в ядрі не змінюється, а Z збільшується на одиницю, то єдиний шлях, яким може відбуватись цей процес, це перетворення одного з нейтронів ядра в протон з одночасним утворенням електрона і антинейтрино:

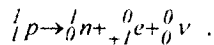


Цей процес супроводжується виконанням законів збереження електричних зарядів, імпульсу і масових чисел. Чудовим підтвердженням даного припущення слугує експериментально виявлений розпад вільних нейтронів за вказаною схемою.

Явище β^- -розпаду характерне лише для штучно радіоактивних ядер і було вперше виявлено Фредерико та Ірен Жоліо-Кюрі при бомбардуванні різних ядер α -частинками. Цей вид радіоактивного розпаду відбувається за таким правилом зміщення:



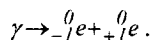
Процес β^+ -розпаду проходить за такою схемою, ніби один з протонів ядра перетворюється у нейтрон, випромінюючи при цьому позитрон і нейтрино:



Оскільки маса спокою протона менша, ніж маса спокою нейтрона, то для вільного протона реакція відбуватися не може. Однак для протона, який знаходиться в ядрі, внаслідок ядерної взаємодії частинок, ця реакція є енергетично можливою.

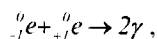
Позитрон - ${}^0_{+1}e$ - частинка з масою спокою, яка точно дорівнює масі спокою електрона, і спіном $\frac{\hbar}{2}$, яка має додатний електричний заряд $+e$.

Позитрони можуть народжуватись при взаємодії γ -квантів великих енергій ($E_\gamma > 1.02 \text{ MeV} = 2m_e c^2$) з речовиною. Цей процес відбувається за схемою



З цього співвідношення випливає, що для виконання законів збереження необхідно, щоб спін фотона дорівнював 0 або \hbar , тому що спін позитрона і електрона дорівнює $\frac{\hbar}{2}$. Ряд експериментів і теоретичних міркувань привели до висновку, що спін фотона дійсно дорівнює \hbar .

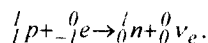
При зіткненні позитрона і електрона відбувається їх анігіляція:



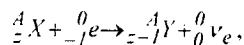
в її процесі електронно-позитронна пара перетворюється у два γ -кванти, причому енергія пари перетворюється в енергію фотонів.

Процеси виникнення і перетворення електронно-позитронних пар є прикладом взаємозв'язку різних форм матерії: в цих процесах матерія у формі речовини перетворюється в матерію у формі поля і навпаки.

Для багатьох ядер перетворення протона в нейтрон, крім описаного вище процесу, може відбуватись через електронне захоплення, або e -захоплення, при якому ядро спонтанно захоплює електрон з однієї із внутрішніх оболонок атома, випускаючи нейтрино:

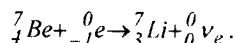


Необхідність появи нейтрино випливає із закону збереження спіна. Схема e -захоплення:



тобто один з протонів ядра перетворюється у нейтрон, заряд ядра зменшується на одиницю і воно зміщується вліво, так само, як і при позитронному розпаді.

Електронне захоплення супроводжується характеристичним рентгенівським випромінюванням, що виникає при заповненні вакансій, які утворюються в електронній оболонці атома. При e -захопленні, крім нейтрино, ніякі інші частинки не випромінюються. Прикладом електронного захоплення може служити перетворення радіоактивного ядра берилію у стабільне ядро літію:



γ - випромінювання і його властивості.

γ -випромінювання не відхиляється електричними і магнітними полями, володіє відносно слабкою іонізуючою і надзвичайно великою проникною здатністю (проходить крізь шар свинцю завтовшки 5см), дифрагує на кристалах. γ -випромінювання - це короткохвильове електромагнітне випромінювання з дуже малою довжиною хвилі $\lambda < 10^{-10} \text{ м}$ і внаслідок цього - яскраво вираженими корпускулярними властивостями.

Експериментально встановлено, що γ -випромінювання не є самостійним видом радіоактивності, а лише супроводжує α - та β - розпади; виникає також під час ядерних реакцій, гальмування заряджених

частинок, їх розпаду та ін. Встановлено, що γ -випромінювання не викликає зміни заряду і масового числа ядер, воно випускається дочірнім ядром, яке в момент свого утворення перебуває у збудженому стані.

Повертаючись в основний стан, збуджене ядро може пройти через ряд проміжних станів, тому γ -випромінювання одного і того самого радіоактивного ізотопу може містити кілька груп γ -квантів, що відрізняються одна від одної своєю енергією. Отже, спектр γ -випромінювання дискретний.

Ядро, яке знаходиться у збудженому стані, може передати енергію E при переході в основний стан одному з електронів атома (без випускання γ -кванта). При цьому випромінюється електрон конверсії, а саме явище називається внутрішньою конверсією. Якщо енергія збудженого ядра виділяється у вигляді γ -кванта, то його частота визначається з $\varepsilon = h\nu$. Якщо випромінюються електрони конверсії, то їх енергія буде $E - A_K, E - A_L, \dots$, де A_K, A_L - робота виходу електронів з відповідних електронних оболонок. Вакантні місця, що виникли внаслідок випромінювання електронів конверсії, будуть заповнюватись електронами з верхніх оболонок. Тому внутрішня конверсія завжди супроводжується характеристичним рентгенівським випромінюванням.

γ -кванти мають нульову масу спокою, тому під час проходження крізь речовину вони або поглинаються, або розсіюються речовиною, але їх енергія не змінюється. Внаслідок поглинання інтенсивність γ -випромінювання зменшується за експо-

ненціальним законом: $I = I_0 e^{-\mu x}$, де I_0 та I - інтенсивність γ -випромінювання на вході і виході речовини завтовшки x , μ - коефіцієнт поглинання, який залежить від властивостей речовини та енергії γ -квантів.

γ -кванти, проходячи через речовину, можуть взаємодіяти як з електронами атомів речовини, так із їх ядрами.

Основними процесами, які супроводжують проходження γ -квантів крізь речовину, є фотоефект, комптонівське розсіювання і утворення електрон-позитронних пар.

Фотоефект - це процес, при якому атом поглинає γ -квант і випромінює електрон. Оскільки електрони вибиваються з внутрішніх оболонок атома, він супроводжується характеристичним рентгенівським випромінюванням. Фотоефект відбувається в області малих енергій γ -квантів ($E_\gamma \leq 100 \text{ keV}$).

Зі збільшенням енергії γ -квантів ($E_\gamma \sim 0,5 \text{ MeV}$) основним механізмом взаємодії з речовиною є **комтонівське розсіювання**.

При $E_\gamma > 1,02 \text{ MeV} = 2m_e c^2$ стає можливим процес утворення електронно-позитронних пар в електричних полях ядер. Ймовірність цього процесу пропорційна до Z^2 і збільшується з ростом E_γ . Тому при $E_\gamma = 10 \text{ MeV}$ основним процесом взаємодії γ -випромінювання в довільній речовині є утворення електрон-позитронних пар.

Якщо енергія γ -кванта перевищує енергію зв'язку нуклонів у ядрі

($\sim 7-8 \text{ MeV}$), то може спостерігатись *ядерний фотоефект* – виривання з ядра одного з нуклонів, найчастіше нейтрона. Велика проникна здатність γ -випромінювання використовується в γ -дефектоскопії – методи спектроскопії, який ґрунтується на відмінності в інтенсивності випромінювання, що пройшло різні ділянки речовини.

Дія γ -випромінювання (а також інших видів іонізуючого випромінювання) на речовину характеризується дозою іонізуючого випромінювання. Розрізняють такі одиниці випромінювання:

Поглинута доза випромінювання – фізична величина, що дорівнює відношенню енергії випромінювання до маси опромінюваної речовини. Одиниця поглинутої дози випромінювання – грей

(Гр): $1 \text{ Гр} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$ – доза випромінювання, при якій опромінюваній речовині масою 1 кг передається енергія довільного іонізуючого випромінювання 1 Дж .

Експозиційна доза випромінювання – фізична величина, що дорівнює відношенню суми електричних зарядів всіх іонів одного знака, створених електронами, звільненими в опромінюваному повітрі (при повному використанні іонізуючої здатності електронів), до маси цього повітря.

Одиниця експозиційної дози випромінювання – кулон, поділений на кілограм ($\text{Кл}/\text{кг}$), часто користуються позасистемною одиницею – рентген (Р):

$$1 \text{ Р} = 2,58 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$$

При експозиційній дозі, яка дорівнює одному рентгену, в 1 м^3 сухого повітря

при нормальному атмосферному тиску виникає сумарний заряд іонів одного знака величиною $0,33 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$.

Біологічна доза – величина, яка вказує вплив випромінювання на організм.

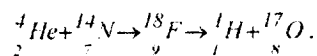
Одиниця біологічної дози – біологічний еквівалент рентгена (*бер*): 1 бер – доза довільного виду іонізуючого випромінювання, яка здійснює таку саму біологічну дію, яку здійснює доза рентгенівського або γ -випромінювання в 1 Р ($1 \text{ бер} = 1 \text{ Р} \cdot \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$).

Потужність дози випромінювання – величина, яка дорівнює відношенню дози випромінювання до часу опромінювання.

§132. Ядерні реакції

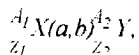
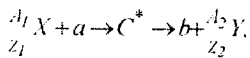
Частинки, рухаючись в речовині, взаємодіють з її атомами, тобто з ядрами і електронами. *Характер ядерної взаємодії визначається видом частинки, її енергією, властивостями речовини і умовами взаємодії.* Зокрема, зіткнення частинок з ядром викликає різні ядерні реакції, в результаті яких відбувається зміна заряду або маси частинки або випускаються γ -кванти.

Типовим прикладом ядерної реакції є процес взаємодії швидких α -частинок з ядрами азоту, при якому спостерігається виліт протонів:



Вперше ядерну реакцію такого типу здійснив Резерфорд в 1919р. Кількість відомих нині ядерних реакцій сягає уже тисяч.

Ядерні реакції записують у вигляді рівняння



де C^* – проміжне ядро у збудженому стані.

Тип ядерної реакції визначається видом взаємодіючої і виділеної частинок (a, b). Якщо вони збігаються (a, a), реакцію називають розсіянням частинки a . У такому разі склад ядер не змінюється. Якщо в ядерній реакції частинка a зникає (поглинається ядром), а замість неї з'являється нова частинка b , склад ядра змінюється: відбувається ядерне перетворення.

За механізмом взаємодії ядерні реакції можна поділити на два види:

- прямі ядерні реакції;
- реакції з утворенням проміжного ядра.

Прямі ядерні реакції відбуваються при дуже високій енергії частинок і за дуже короткий час, необхідний для того, щоб частинка пролетіла через ядро ($10^{-23} - 10^{-21} c$). Наприклад, швидкий протон може вибити з поверхні ядра один з нуклонів і полетіти разом з ним.

Більшість же ядерних реакцій з кінетичною енергією частинок $< 10 MeV$ проходить з утворенням проміжного ядра. Така ядерна взаємодія відбувається у два етапи.

На першому етапі відбувається захоплення частинки ядром і виникнення проміжного ядра, яке знаходиться у збудженому стані. Енергія збудження E^* складається з кінетичної енергії частинки E_K і енергії зв'язку нуклона $E_{зв}$, який приєднався:

$$E^* = E_K + E_{зв}.$$

Енергія зв'язку нуклона в середньому дорівнює $8 MeV$. Тому складове ядро отримує досить велику енергію збудження.

В ядерній взаємодії беруть участь лише ближні до частинки нуклони, тому до них переходить основна частина енергії збудження. Енергія, отримана такими нуклонами, передається потім за участю ядерних сил сусіднім і поступово статистично розподіляється між всіма нуклонами ядра. При цьому відбувається значний розігрів ядра. Енергія збудження, розподілена рівномірно між всіма нуклонами, недостатня для подолання енергії зв'язку нуклона. Однак з часом флуктуації збудженого ядра приводять до того, що в одному нуклоні зосереджується енергія, достатня для відриву його від ядра ($E_{нук} > E_{зв}$). Тоді настає другий етап ядерної реакції – викидання нуклона з ядра.

При захопленні нейтрона з утворенням складового ядра швидкість нейтрона, який вилетів, звичайно менша, ніж швидкість захопленого первинного нейтрона. Оскільки первинні і вторинні нейтрони не можна розрізнити, таке явище сприймається як дещо сповільнене розсіяння нейтрона з втратою частини його енергії. Такий процес має назву *непружного (резонансного) розсіяння частинки*: $E_K \neq E_a$.

У деяких випадках розпад проміжного ядра з випусканням нейтрона може затриматися настільки, що починає переважати конкуруючий процес – розпад з випромінюванням γ -квантів під дією більш слабких електромагнітних сил. Після випускання γ -квантів збуджене ядро переходить в основний енергетичний стан. Такий процес взаємодії частинки з ядром називають *радіаційним захопленням частинки*.

Існують певні обмеження енергії для ядерної реакції з утворенням складового ядра. Наявність енергетичних рівнів ядра строго лімітує порції енергії, які можуть бути передані ядру. Оскільки енергія зв'язку має цілком певне значення для системи ядро-нуклон, передача енергії збудження може відбуватися через зміну кінетичної енергії частинки. Отже, утворення проміжного ядра можливе лише при певних значеннях кінетичної енергії частинки. Якщо кінетична енергія частинки відрізняється від цих значень, проміжне ядро не утворюється. В цьому випадку при зіткненні частинки з ядром відбувається її пружне (потенціальне) розсіяння: $E_R = E_a$.

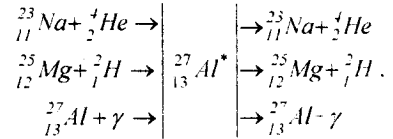
Проміжок часу, який потрібний нуклону з енергією порядку $1 \text{ MeV} (v \sim 10^7 \frac{\text{M}}{\text{c}})$ для того, щоб пройти відстань, яка дорівнює діаметру ядра ($\sim 10^{-14} \text{ м}$), називається ядерним часом (або ядерним часом прольоту):

$$\tau_{\text{я}} \cong \frac{10^{-14} \text{ м}}{10^7 \frac{\text{M}}{\text{c}}} = 10^{-21} \text{ с}.$$

Середній час життя складового ядра ($10^{-1} - 10^{-2} \text{ с}$) на багато порядків перевищує ядерний час $\tau_{\text{я}}$. Отже, розпад проміжного ядра являє собою процес, який не залежить від першого етапу реакції, що полягає в захопленні частинки A (проміжне ядро якби забуває спосіб свого утворення). Одне і те саме ядро може розпадатися різними шляхами, причому характер цих шляхів і їх відносна імовірність не залежить від способу утворення проміжного ядра.

Ядерну реакцію, що приводить до утворення проміжного ядра, називають вхідним каналом ядерної реакції, а кожний окремий вид розпаду проміжного ядра - вихідним каналом.

Наприклад, проміжне ядро ${}_{13}^{27}\text{Al}$ має три вхідні канали його утворення і три вихідні канали його розпаду:



Здійснення того чи іншого виду вихідного каналу залежить від енергії збудження проміжного ядра E^* . Якщо енергія збудження перевищує енергію зв'язку ${}^4_2\text{He}$ -частинки або дейтрона ${}^2_1\text{H}$, проміжне ядро може перейти в основний стан, випустивши одну з цих частинок. Якщо ж E^* менша від енергії цих частинок, то перехід в основний стан відбувається через випускання одного або декількох γ -квантів.

Під час ядерної реакції зберігається загальна кількість нуклонів і сумарний заряд, а відбувається лише перерозподіл нуклонів і заряду між ядрами і частинками. Збереження заряду і кількості нуклонів дозволяє якісно визначити можливі напрямки перебігу ядерної реакції.

Ядерні реакції супроводжуються зміною кінетичної енергії взаємодіючих частинок. *Для ядерних реакцій виконуються закони збереження енергії і імпульсу.*

Зapiшемо баланс енергії в реакції ${}_{Z_1}^{A_1}X(a, b) {}_{Z_2}^{A_2}Y$, враховуючи, що повна енергія ядра і частинок дорівнює сумі енергій спокою mc^2 і кінетичної енергії:

$$m_x c^2 + m_a c^2 + E_x + E_a = m_y c^2 + m_b c^2 + E_y + E_b.$$

З цього рівняння можна визначити енергію ядерної реакції (або тепловий ефект Q) як зміну кінетичної енергії процесів реакції:

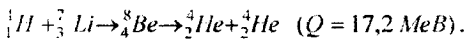
$$Q = (E_y + E_b) - (E_x + E_a) = [(m_y + m_b) - (m_x + m_a)]c^2 = \Delta mc^2.$$

Якщо масу вимірювати в а.о.м., то $Q = 931 \Delta m \text{ MeV}$.

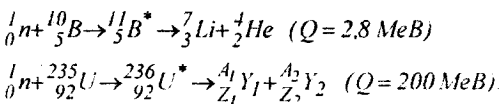
Маси спокою для даного набору ядер і частинок мають цілком певне значення, тому Q набуває характерного значення для кожної ядерної реакції.

Залежно від зміни маси ядер і частинок, що беруть участь в реакції, Q може набувати значення $Q > 0$, $Q \leq 0$.

Реакції з $Q > 0$ називають екзоенергетичними (екзотермічними). В цьому випадку частина енергії спокою вихідного ядра X і взаємодіючої частинки a перетворюються в кінетичну енергію продуктів реакції, при цьому маса останніх зменшується. Прикладом такої реакції є



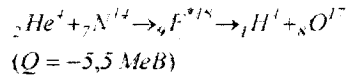
Екзоенергетичні реакції можуть відбуватись при нульовій кінетичній енергії взаємодіючих частинок, якщо їх наближенню не заважають кулонівські сили відштовхування:



Реакції з від'ємними значеннями Q називають *ендоенергетичними* (ендотермічними). Для таких реакцій при умові $E_x = 0$ (вихідне ядро є нерухомим)

$$E_y + E_b = E_a - |Q|.$$

Оскільки $E_y + E_b > 0$, ендоенергетичні реакції мають порогову енергію. Вони можуть відбуватися лише в тому випадку, коли кінетична енергія частинки E_a більша від деякого порогового значення реакції ($E_a > |Q|$). Прикладом такої реакції є реакції виду



Рівняння ядерної реакції показує лише якісний характер взаємодії частинки з ядром, за його видом нічого не можна сказати про кількісні характеристики ядерної реакції.

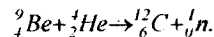
Всі ядерні реакції підпорядковані законам квантової механіки. Тому можна розглядати лише ймовірнісні характеристики перебігу тих чи інших реакцій. Ця ймовірність в ядерній фізиці визначається значенням ефективного перерізу реакції G :

$$G = \frac{1}{n\delta} \ln \frac{N_0}{N(\delta)},$$

де n – концентрація ядер, δ – товщина мішені, N_0 – первинний потік, $N(\delta)$ – потік на глибині δ .

Ефективні перерізи ядерних процесів виражаються в одиницях, які називаються барн: $1 \text{ барн} = 10^{-28} \text{ м}^2$.

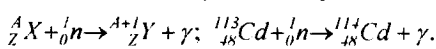
Найбільше значення мають реакції, які викликаються нейтронами. Нейтрони не відчувають кулонівського відштовхування, внаслідок чого вони можуть проникати в ядра, маючи доволі малу енергію. Нейтрони були виявлені в такій ядерній реакції (1930):



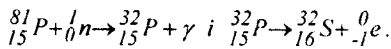
Характер ядерних реакцій під дією нейтронів істотно залежить від їх швид-

кості. Залежно від енергії нейтрони умовно діляться на повільні і швидкі. Повільні - $10^{-7} - 10^4 \text{ eV}$, швидкі - $10^4 - 10^{10} \text{ eV}$.

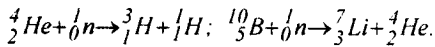
Повільні нейтрони ефективні для збудження ядерних реакцій, оскільки вони відносно довго знаходяться поблизу атомного ядра. Завдяки цьому імовірність захоплення нейтрона ядром стає доволі великою, для повільних нейтронів характерне пружне розсіяння на ядрах (реакції типу (n, n)). Реакція (n, γ) приводить до утворення нового ізотопу вихідної речовини:



Часто в результаті (n, γ) -реакції утворюються штучно - радіоактивні ізотопи, які дають β -розпад:

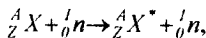


Під дією повільних нейтронів на деяких легких ядрах спостерігаються такі реакції захоплення нейтронів з випусканням заряджених частинок - ${}^1_1 \text{H}, {}^4_2 \text{He}$:



Реакції типу (n, p) і (n, α) , тобто реакції з утворенням заряджених частинок відбуваються в основному під дією швидких n , оскільки у випадку повільних нейтронів енергії атомного ядра недостатньо для подолання потенціального бар'єра, що перешкоджає вильоту протонів і α -частинок.

Для швидких нейтронів спостерігається непружне їх розсіяння, що здійснюється за схемою

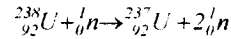


де нейтрон, який вилітає з ядра, позначений як ${}^1_0 n$, оскільки це не той нейтрон, який проник в ядро. ${}^1_0 n$ має енергію, мен-

шу енергії ${}^1_0 n$, а ядро, що залишається після вильоту нейтрона, знаходиться у збудженому стані, тому його перехід в нормальний стан супроводжується випусканням γ -кванта.

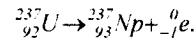
Коли енергія нейтронів досягає значень 10 MeV , стає можливою реакція типу $(n, 2n)$.

Наприклад, в реакції



утворюється штучно β -активний ізотоп

${}^{237}_{92} \text{U}$, що розпадається за схемою



Ядерні реакції класифікуються за такими ознаками:

1) *за родом частинок, що беруть в них участь:*

- реакції під дією нейтронів;
- реакції під дією заряджених частинок;
- реакції під дією γ -квантів;

2) *за енергією частинок, що їх викликають:*

- реакції при малих енергіях ($\approx 1 \text{ eV}$), що проходять за участю нейтронів;
- реакції при середніх енергіях (до 10 MeV), що проходять за участю γ -квантів і заряджених частинок (${}^1_1 \text{H}, {}^4_2 \text{He}$);
- реакції при високих енергіях ($10 - 100 \text{ MeV}$), які приводять до народження елементарних частинок, що відсутні у вільному стані.

3) *за родом ядер, що беруть участь в реакції:*

- реакції на легких ядрах ($A < 50$);
- реакції на середніх ядрах ($50 < A < 100$);
- реакції на важких ядрах ($A > 100$).

4) за характером ядерних перетворень, що відбуваються:

- реакції з випусканням нейтронів;
- реакції з випусканням заряджених частинок;
- реакції захоплення (під час цих реакцій складове ядро переходить в основний стан, випромінюючи один або кілька γ -квантів.

§133. Реакція ядерного поділу.

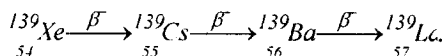
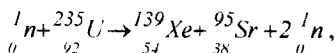
Ланцюгова реакція поділу.

Ядерний реактор

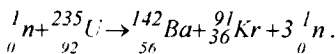
До початку 40-х років роботами багатьох учених було доведено, що під час опромінення урану нейтронами утворюються елементи із середини періодичної системи – лантан і барій. Цей результат поклав початок дослідженню ядерних реакцій нового типу – реакцій поділу ядра, суть яких в тому, що важке ядро під дією нейтронів, а також інших частинок ділиться на декілька більш легких ядер, частіше всього на два близькі за масою ядра.

Особливістю поділу ядра є те, що він супроводжується випусканням двох-трьох вторинних нейтронів, які називаються нейтронами поділу. Оскільки для середніх ядер кількість нейтронів приблизно дорівнює кількості протонів $\left(\frac{N}{Z} \approx 1\right)$, а для важких ядер кількість нейтронів значно перевищує кількість протонів $\left(\frac{N}{Z} \approx 1,6\right)$, то осколки поділу, які утворилися, перенасичені нейтронами, внаслідок чого виділяються нейтрони поділу. Осколки радіоактивні, вони можуть пройти ряд β^- -перетворень,

що супроводжуються випромінюванням γ -квантів. Оскільки β^- -розпад супроводжується перетворенням нейтрона в протон, то після ланцюжка β^- -перетворень співвідношення між нейтронами і протонами в осколку досягає величини, що відповідає стабільному ізотопу. Наприклад,



Осколки поділу можуть бути різними. Можлива, наприклад, і реакція



Більшість нейтронів при поділі випускаються практично миттєво ($t \leq 10^{-14} \text{ c}$), а частина (близько 0.7%) випускаються осколками поділу через деякий час після поділу ($0,05 \text{ c} \leq t \leq 60 \text{ c}$). Перші з них називаються миттєвими, другі – такими, що запізнюються. Загалом на кожний акт поділу припадає 2.5 випущеного нейтрона. Вони мають порівняно широкий енергетичний спектр в межах від 0 до 7MeB, на один нейтрон в середньому припадає енергія близько 2MeB.

Розрахунки показують, що поділ ядер повинен супроводжуватися виділенням великої кількості енергії, яку можна обчислити за дефектом маси ядерної реакції:

$$E = \Delta m \cdot 931 \text{ MeB} = (235,124 + 1,0089) - (95,945 + 139,955 + 2 \cdot 1,0089) = 0,215 \cdot 931 = 200 \text{ MeB}$$

Ця енергія розподіляється так: кінетична енергія осколків ($\approx 166 \text{ MeB}$), кінетична енергія нейтронів поділу ($\approx 10 \text{ MeB}$),

енергія γ -випромінювання ($\approx 15 \text{ MeB}$).
енергія антинейтрино ($\approx 10 \text{ MeB}$).

Теорію поділу важких ядер запропонували Нільс Бор і Я. Френкель, в основу її покладено краплинну модель ядра. В ядрі між нуклонами існують два типи сил: електростатичні сили відштовхування, що діють між протонами, і ядерні сили притягання дуже малого радіуса дії, що діють між всіма сусідніми нуклонами.

Внаслідок дії цих сил ядро набуває сферичної форми, яка стійка відносно до деформацій так, як і крапля рідини, що знаходиться під впливом молекулярних сил поверхневого натягу. Якщо ядру надати достатню енергію, то воно може розділитися на дві частини.

Нейтрон, що проникнув у ядро, вносить туди енергію, яка за дуже короткий час поширюється між всіма нуклонами і в результаті утворюється нове ядро у збудженому стані. Якщо енергія збудження невелика, то поділ ядра не відбувається. Таке ядро, втративши надлишок енергії через випускання γ -кванта, протона або нейтрона, повернеться в рівноважний стан. Якщо ж енергія, яку вносить нейтрон, велика, то збуджене ядро – крапля

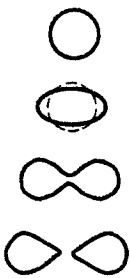


Рис.336

починає деформуватися, в результаті відбувається поділ на два осколки, що розлітаються з великими швидкостями внаслідок дії між ними сил електростатичного відштовхування (рис.336).

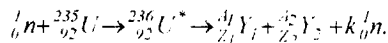
Ймовірність поділу ядер визначається енергією нейтронів. Наприклад, якщо високоенергетичні нейтрони викликають поділ практично

всіх ядер, то нейтрони з енергією в декілька MeB - лише важких ядер ($A > 210$).

Нейтрони, що мають енергію активації (мінімальну енергію, необхідну для здійснення реакції поділу ядра) порядку 1 MeB , викликають поділ ядра урану $^{238}_{92}\text{U}$, торію $^{232}_{90}\text{Th}$, протактинію $^{231}_{91}\text{Pa}$ і плутонію $^{239}_{94}\text{Pu}$.

Тепловими нейтронами діляться ядра $^{235}_{92}\text{U}$, $^{239}_{94}\text{Pu}$, $^{233}_{92}\text{U}$, $^{230}_{90}\text{Th}$. Два останні ізотопи в природі не зустрічаються, їх отримують штучно.

Поділ атомних ядер може відбуватися різними шляхами. Спостерігається більше ніж 30 різних варіантів реалізації процесу поділу:



Серед осколків поділу є нукліди з масовими числами від 72 до 161 і значеннями z від 30 до 65. Криві виходу продуктів поділу наведені на рис.337, де крива 1 відповідає дії теплових нейтронів, а крива

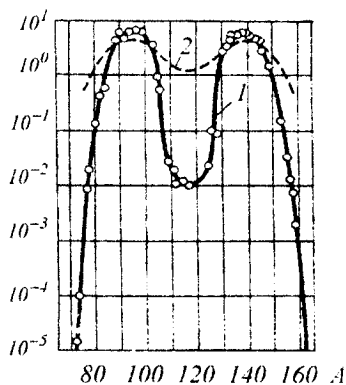


Рис.337

2 - швидких. При поділі на теплових нейтронах утворюються переважно осколки зі співвідношенням мас 2:3. Найімовірніши-

ми продуктами поділу з виходом $\approx 6,5\%$ є осколки з масовими числами 95 і 139.

Поділ на два рівні осколки є мало-ймовірним ($\approx 0,01\%$).

Для практичного застосування поділу важких ядер найважливіше значення має виділення великої енергії при кожному акті поділу і поява при цьому 2-3 нейтронів. Кожен з цих нейтронів взаємодіє з сусідніми ядрами речовини, що у свою чергу спричиняє в них реакцію поділу, тобто відбувається лавиноподібне зростання кількості актів поділу. *Така реакція поділу називається ланцюговою.*

Схематично ланцюгова реакція поділу ядер зображена на рис.338.

Ланцюгова реакція поділу характеризується коефіцієнтом розмноження k нейтронів, який дорівнює відношенню кількості нейтронів у даному поколінні до їх кількості в попередньому поколінні. Необ-

зменшення k . По-перше, внаслідок скінченних розмірів активної зони (простір, де відбувається ланцюгова реакція) і великої проникної здатності нейтронів, частина з них покине активну зону раніше, ніж буде захоплена яким-небудь ядром. По-друге, частина нейтронів захоплюється ядрами домішок, що не діляться і які завжди присутні в активній зоні.

Коефіцієнт розмноження залежить від природи речовини, що ділиться, а для даного ізотопу – від його кількості, а також від розмірів і форми активної зони.

Мінімальні розміри активної зони, при яких можливе здійснення ланцюгової реакції, називають *критичними розмірами*. Мінімальна маса речовини, що ділиться, яка необхідна для здійснення ланцюгової реакції, називається *критичною масою*. Для зменшення втрат нейтронів і критичних параметрів речовини її оточують відбивачем - шаром неподільної речовини, яка має малий ефективний поперечний переріз для захоплення нейтронів і великий переріз для їх розсіяння.

Обчислимо швидкість розвитку ланцюгової реакції. Нехай T – середній час життя одного покоління, а N - число нейтронів у даному поколінні. В наступному поколінні їх кількість дорівнює kN , тобто кількості нейтронів за одне покоління $dN = kN - N = N(k - 1)$.

Приріст кількості нейтронів за одиницю часу, тобто швидкість наростання ланцюгової реакції

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(k-1)}{T}, \quad \frac{dN}{N} = \frac{k-1}{T} dt.$$

Інтегруючи цей вираз, отримуємо

$$N = N_0 e^{\frac{(k-1)t}{T}},$$

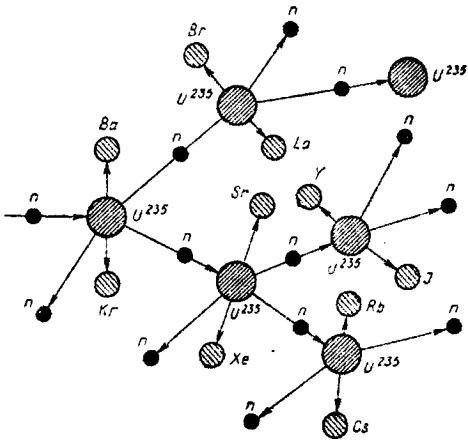


Рис.338

хідною умовою для розвитку ланцюгової реакції поділу є вимога $k \geq 1$.

Виявляється, що не всі вторинні нейтрони, які утворюються, викликають наступний поділ ядер, що приводить до

де N_0 - кількість нейтронів в початковий момент часу, а N - їх кількість в момент часу t . При $k > 1$ йде наростаюча реакція, кількість поділів безперервно росте, і реакція може стати вибуховою.

При $k = 1$ йде самопідтримуюча реакція, при якій кількість нейтронів з часом не змінюється. При $k < 1$ йде загасаюча реакція.

Ланцюгові реакції діляться на *керовані* і *некеровані*. Вибух атомної бомби є некерованою реакцією. Щоб атомна бомба при зберіганні не вибухнула, в ній $^{235}_{92}\text{U}$ ділиться на дві віддалені одна від одної частини з масами менше критичних. Потім за допомогою звичайного вибуху ці маси зближуються, загальна маса урану стає більше від критичної і виникає вибухова ланцюгова реакція, що супроводжується миттєвим виділенням великої кількості енергії. Керовані ланцюгові реакції здійснюються в ядерних реакторах.

Як сировинні і подільні речовини в реакторах використовуються $^{235}_{92}\text{U}$, $^{239}_{94}\text{Pu}$, $^{238}_{92}\text{U}$, а також $^{232}_{90}\text{Th}$. У природній суміші ізоотопів урану ізоотопу $^{238}_{92}\text{U}$ у 140 разів більше, ніж ізоотопу $^{235}_{92}\text{U}$.

Велике значення в ядерній енергетиці має не лише здійснення ланцюгової реакції поділу, але і керування нею. *Пристрій, в якому здійснюється і підтримується керована ланцюгова реакція поділу, називається ядерним реактором.*

Розглянемо типову схему реактора на теплових нейтронах (рис. 363). В активній зоні реактора розміщені тепловиділяючі елементи 1 і сповільнювачі 2, в яких нейтрони сповільнюються до теплових

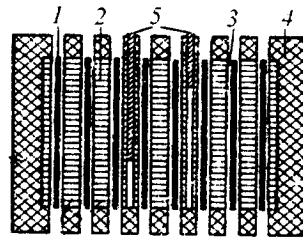


Рис.339

швидкостей. Тепловиділяючі елементи (твєли) - це блоки з радіоактивного матеріалу, що знаходиться в герметичній оболонці, яка слабо поглинає нейтрони. За рахунок енергії, що виділяється при поділі ядер, твєли розігріваються, а тому для охолодження їх поміщають в потік теплоносія (3 - канал для протікання теплоносія). Активна зона оточується тепловідбивачем 4, що зменшує витік нейтронів.

Керування ланцюговою реакцією здійснюється спеціальними керуючими стрижнями 5 з матеріалів, що сильно поглинають нейтрони. При повністю вставлених стрижнях реакція не йде. При поступовому вийманні стрижнів k росте і при певному положенні доходить до одиниці. В цей момент реактор починає працювати. В міру його роботи кількість матеріалу, який ділиться, в активній зоні зменшується і відбувається її забруднення осколками поділу. Щоб реакція не припинилась, з активної зони за допомогою автоматичного пристрою поступово виймаються керуючі стрижні. В реакторі є аварійні стрижні, введення яких при збільшенні інтенсивності реакції зразу її припиняє. Довільний реактор має біологічний захист - систему екранів із захисних матеріалів.

Ядерні реактори розрізняють:

1) за характером основних матеріалів, що знаходяться в активній зоні (ядерне пали-

во, сповільнювач, теплоносій); в ролі подільних і сировинних речовин використовують ${}_{92}U^{235}$, ${}_{94}Pu^{239}$, ${}_{92}U^{233}$, ${}_{92}U^{238}$, ${}_{90}Th^{232}$, в ролі сповільнювачів - воду (звичайну і важку), графіт, берилій, кадмій; в ролі теплоносіїв – повітря, воду, водяну пару, He, Co тощо.

2) за характером розміщення ядерного палива і сповільнювача в активній зоні: гомогенні (обидві речовини рівномірно змішані одна з одною) і гетерогенні (обидві речовини розміщуються окремо у вигляді блоків);

3) за енергією нейтронів (реактори на теплових і швидких нейтронах);

4) за типом режиму (неперервний й імпульсний);

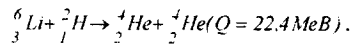
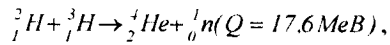
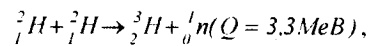
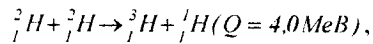
5) за призначенням (енергетичні, дослідні реактори виробництва нових подільних матеріалів, радіоактивних ізотопів і та ін.).

§134. Реакція синтезу атомних ядер.

Проблема керування термоядерних реакцій

Ядерний синтез, тобто злиття легких ядер в одне ядро супроводжується, як і поділ важких ядер, виділенням великих кількостей енергії. Оскільки для синтезу ядер необхідні дуже високі температури, цей процес називається *термоядерною реакцією*.

Питома енергія зв'язку ядер різко збільшується при переході від ядер важкого водню (${}^2_1H, {}^3_1H$) до літію 6_3Li і особливо до гелію 4_2He , тобто реакції синтезу легких ядер в більш важкі повинні супроводжуватись виділенням великої кількості енергії, що підтверджується розрахунками. Як приклади розглянемо реакції синтезу:

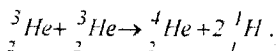
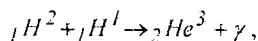
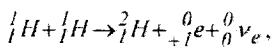


Реакції синтезу атомних ядер мають ту особливість, що в них енергія, яка виділяється на один нуклон, значно більша, ніж в реакціях поділу важких ядер. Справді, якщо під час поділу ядра ${}^{238}_{92}U$ виділяється енергії близько $\sim 200 \text{ MeV}$, що становить на 1 нуклон приблизно $0,84 \text{ MeV}$, то в реакції синтезу приблизно $3,5 \text{ MeV}$, тобто в 4 рази більше. Ще ефективнішою в розумінні питомого виділення енергії є реакція синтезу ядра гелію 4_2He з чотирьох протонів 1_1H . Виділена при цьому енергія дорівнює $26,5 \text{ MeV}$, що становить $6,4 \text{ MeV}$ на одну частинку.

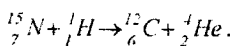
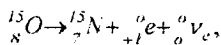
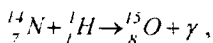
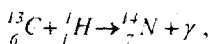
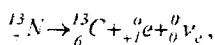
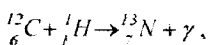
Оцінимо на прикладі реакції синтезу ядра дейтерію 2_1H температуру її перебігу. Для об'єднання ядер дейтерію їх треба наблизити на відстань $2 \cdot 10^{-15} \text{ м}$, що дорівнює радіусу дії ядерних сил, долаючи при цьому потенціальну енергію відштовхування $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \approx 0,7 \text{ MeV}$. На кожне ядро, що стикається, припадає $0,35 \text{ MeV}$. Середній енергії теплового руху $\frac{3}{2} kT$, яка дорівнює $0,35 \text{ MeV}$, відповідає температура порядку $2 \cdot 10^9 \text{ K}$. Отже, реакція синтезу ядер дейтерію може відбуватися лише при температурі, що перевищує на два порядки температуру центральних областей Сонця ($1,3 \cdot 10^7 \text{ K}$).

Однак для перебігу реакції синтезу атомних ядер достатньо температури порядку $10^7 K$. Це пов'язано з двома факторами: 1) при температурах, характерних для реакцій синтезу атомних ядер, речовина знаходиться в стані плазми, розподіл частинок якої описується законом Максвелла, тому завжди є деяка кількість ядер, енергія яких набагато перевищує середнє значення; 2) синтез ядер може відбуватися внаслідок тунельного ефекту. Термоядерні реакції є, можливо, одним з джерел енергії Сонця і зірок. В принципі висловлено два припущення про можливі способи перебігу термоядерних реакцій на Сонці:

1) *протонно-протонний або водневий цикл*, характерний для температур $\sim 10^7 K$:



2) *вуглецево-азотний або вуглецевий цикл*, характерний для більш високих температур ($\sim 2 \cdot 10^7 K$)



В результаті цього циклу 4 протони перетворюються в ядро гелію і виділяється енергія, яка дорівнює $26,7 MeV$. Ядра ж вуглецю, кількість яких залишається незмінною, беруть участь у реакції в ролі каталізатора.

З наведених вище рівнянь реакції видно, що синтез протонів супроводжується виникненням нейтрино, кількість яких можна оцінити. Однак проведені вимірювання показали, що кількість нейтрино, що виділяються на Сонці, дуже мала. В зв'язку з цим питання про природу сонячної енергії залишається дискусійним.

Термоядерні реакції дають більший вихід енергії на одиницю маси "пального", ніж будь-які інші перетворення, в тому числі і поділ важких ядер. Наприклад, кількість дейтерію в скляній простій воді енергетично еквівалентна $60l$ бензину. Тому перспективним є здійснення термоядерних реакцій штучним шляхом.

Вперше штучна термоядерна реакція здійснена в СРСР (1953), а потім в США у вигляді вибуху водневої (термоядерної бомби), що є некерованою реакцією. Вибуховою речовиною, в якій проходила реакція ${}_1^3H + {}_1^2H \rightarrow {}_2^4He + {}_0^1n$, є суміш дейтерію і тритію, а запалом - звичайна атомна бомба, при вибуху якої виникає необхідна для перебігу термоядерної реакції температура.

Теоретичною основою для перебігу штучних керованих термоядерних реакцій є реакції типу ${}_1^2H + {}_1^3H \rightarrow {}_2^4He + {}_0^1n$, що відбуваються у високотемпературній плазмі. Однак завдання полягає не тільки в створенні умов, потрібних для інтенсивного виділення енергії в термоядерних процесах, а здебільшого в підтриманні цих умов. Для здійснення самопідтримної термоядерної реакції потрібно, щоб швидкість виділення енергії в системі, де відбувається реакція, була не менша за швидкість відведення енергії від системи.

Розрахунки показують, що для забезпечення самопідтримної керованої термоядерної реакції температуру дейтерієвої плазми треба довести до кількох сотень мільйонів градусів. При температурах $\sim 10^8 \text{ K}$ реакція має повну інтенсивність і супроводжується виділенням великої енергії. Так, при температурі $1,17 \cdot 10^8$ потужність, яка виділяється в одиниці об'єму плазми при сполученні дейтерієвих ядер, становить $3 \frac{\kappa B m}{M^3}$, у той час як при температурі $1,17 \cdot 10^6$ вона дорівнює лише $10^{-17} \frac{B m}{M^3}$.

Основною причиною втрат енергії високотемпературною плазмою є її велика теплопровідність, яка швидко зростає ($\sim T^{5/2}$) при високих температурах. Енергія з плазми може відводитися завдяки дифузії гарячих частинок з області, де відбувається реакція, на стінки апарата, в якому міститься плазма. Якщо плазму не теплоізулювати від контакту з будь-якими навколишніми речовинами, то її можна нагрівати лише до кількох сотень тисяч градусів, тому що енергія, яка виділяється внаслідок реакції синтезу, виходитиме на стінки. Інакше кажучи, треба втримати плазму в заданому об'ємі, не допускаючи її розширення. Ідею ефективної магнітної теплоізоляції плазми стосовно проблеми керованого термоядерного синтезу запропонували в СРСР А.Д.Сахаров і І.І.Тамм у 1950р. Якщо пропустити через плазму у формі стовпа вздовж його осі великий електричний струм, то магнітне поле цього струму створює електродинамічні сили, які

прагнуть стиснути плазмовий стовп. Отже, стовп плазми буде відірваний від стінок і стягнутий у плазмовий шнур. Однак утримувати плазмовий шнур в такому стані не вдається: відбуваються швидкі радіальні коливання - він то розширюється, то знову стискається.

Внаслідок нестабільності, нестійкості плазми у плазмовому шнурі виникають деформації, які змінюють геометричну форму шнура. Результатом цього є порушення термоізоляції, інтенсивна взаємодія плазми із стінками, що приводить до забруднення дейтерію речовиною стінок і швидкого охолодження плазми.

Основним питанням, розв'язання якого дозволить здійснити керовані термоядерні реакції, є з'ясування умов, за яких високотемпературна плазма в магнітному полі належної конфігурації може зберегти стійкість. Розв'язання цього питання поряд з пошуками шляхів підвищення температури плазми є головним напрямом, в якому розвиваються дослідження керованих термоядерних реакцій.

Можливість реалізації термоядерної реакції зводиться до необхідності виконання двох вимог: наявності деякої мінімальної температури і певного обмеження для добутку $n\tau$: *критерій Лоусона*

$$n\tau > 10^{16} \frac{c}{\text{см}^3}, T > 10^8 \text{ K} - {}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$$

$$n\tau > 10^{14} \frac{c}{\text{см}^3}, T > 10^8 \text{ K} - {}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_1\text{H} + {}^1_1\text{H}$$

Тут n – концентрація речовини у плазмі, τ – час утримання речовини у плазмі.

§135. Елементарні частинки.

Їх класифікація і взаємна перетворюваність

Елементарними частинками називаються такі частинки, які не мають внутрішньої структури, що є простим з'єднанням інших стабільних частинок. При взаємодії з іншими частинками і полями елементарна частинка веде себе як одне ціле. Елементарні частинки можуть перетворюватись одна в одну.

В області енергій, менших від $2m_0c^2$ (m_0 – маса спокою частинки), структура елементарних частинок не впливає на взаємодії між ними та іншими частинками і полями. В цих випадках елементарні частинки розглядаються як безструктурні матеріальні точки, що мають ряд властивостей: масу спокою, електричний заряд, спін та ін.

Із співвідношень невизначеностей виходить, що для вивчення структури елементарних частинок необхідно досліджувати процеси, що відбуваються на досить малих відстанях δ , яким відповідає невизначеність імпульсу $\Delta p \geq \frac{\hbar}{\delta}$. Чим менші відстані δ , зв'язані зі структурою елементарних частинок, тим більшим повинен бути імпульс p частинок, він не може бути меншим, ніж Δp . Отже, з'ясування структури елементарних частинок можливе лише в галузі фізики високих енергій. Тому в сучасній фізиці елементарні частинки вивчаються в новій царині фізики, яка називається фізикою високих енергій.

На основі великого експериментального матеріалу встановлено, що кожна

частинка має свою античастинку, яка має таку саму масу і спін, але відрізняється протилежним зарядом. Крім електричного заряду, введені лептонні (\pm) і баріонні (\pm) заряди, які властиві певним категоріям елементарних частинок.

Елементарні частинки діляться на такі групи:

1. Фотони

Вони не мають електричного заряду і маси спокою. Їх основні характеристики: енергія $h\nu$ і спін, який дорівнює одиниці. Фотони оптичного випромінювання мають малі енергії – декілька eV ; вони появляються при переходах атомів і молекул із збуджених станів в стани з меншою енергією. Гамма-фотони появляються в результаті аналогічних процесів, що відбуваються в середині атомних ядер. При гальмуванні електронів високих енергій можуть бути отримані фотони дуже великих енергій - до $1000 MeV$, що майже у 2000 разів перевищує власну енергію електрона. У зворотному процесі, коли фотон "гальмується" при прямому ударі об ядро, відбувається утворення пари електрон-позитрон

$$\gamma \rightarrow e^+ + e^-.$$

При цьому енергія $E = h\nu$ фотона, що зникає, повинна бути не менша, ніж сума власних енергій частинок, що появилися, тобто $h\nu \geq 2m_0c^2$.

2. Лептони

До них належать 4 пари елементарних частинок:

- а) пара електронних нейтрино ν_e і антинейтрино $\bar{\nu}_e$;
- б) пара мюонних нейтрино ν_μ і антинейтрино $\bar{\nu}_\mu$;

- в) пара електрон e^- і позитрон e^+ ;
 г) пара мю-мезонів (мюонів) - позитивний μ^+ і негати́вний μ^- .

Усі чотири різновидності нейтрино не мають електричного заряду і маси спокою; рухаються з швидкістю світла. На відміну від фотонів вони мають спі́н, який дорівнює $1/2$. Електронні нейтрино появляються в процесах розпаду разом з електроном (антинейтрино) або з позитроном (нейтрино):

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad p \rightarrow n + e^+ + \nu_e.$$

Мюонні нейтрино появляються в процесі розпаду мю-мезонів:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu; \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu.$$

Існування мюонних нейтрино було виявлено при бомбардуванні потоком нейтрино високих енергій (більше 100 MeV) алюмінієвої мішені. Були виявлені реакції утворення мюонів $\nu + n \rightarrow p + \mu^-$.

Електрон і позитрон мають однако́ві маси і спі́н, але протилежні електричні ($\pm e$) і лептонні (± 1) заряди. Внаслідок цього вони здатні до "анігіляції", тобто до "зникнення", з утворенням двох або трьох фотонів.

Мюони мають електричні і одиничні лептонні заряди; їх спі́н дорівнює $1/2$. Маса спокою мюонів перевищує в 206,76 рази масу електрона. Середній час існування мюона $\sim 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ с}$.

3. Мезони

До них належать π -мезони (піони), K -мезони (каони). Загальна їх характеристика – це відсутність спі́на. π -мезони відіграють важливу роль в ядерних взаємодіях нуклонів і у визначенні магнітних моментів. Існують:

а) нейтральні (π^0) π -мезони; їх маса $m = 264 m_e$ (m_e – маса спокою електрона). Вони мають малий час життя (приблизно 10^{-16} с) і перетворюються переважно у два фотони $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ (приблизно в 1% випадків спостерігаються перетворення за схемою $\pi^0 \rightarrow \gamma + e^- + e^+$).

б) заряджені (π^\pm) π -мезони; їх маса $m = 273 m_e$, середній час життя – $2,6 \cdot 10^{-8} \text{ с}$, вони перетворюються за схемою

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu; \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu.$$

Піони в остаточному рахунку перетворюються на дві пари лептонів, які мають протилежні лептонні заряди:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \rightarrow (e^- + \bar{\nu}_e) + (\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu),$$

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \rightarrow (e^+ + \nu_e) + (\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu).$$

На цьому прикладі ілюструється важливий закон фізики елементарних частинок: алгебраїчна сума довільних зарядів (в даному випадку – електричних і лептонних) у всіх реакціях зберігається постійною. Піони не мають лептонного заряду, тому сума лептонного заряду електрона (+1) і електронного антинейтрино, а також мюонних нейтрино (+1) і антинейтрино (-1) дорівнює нулю. Парне число продуктів розпаду необхідно і для одержання сумарного спі́ну, оскільки спі́н вихідної частинки – піона – дорівнює одиниці.

K -мезони відрізняються від піонів більшою масою. Нейтральні (K_1^0 і K_2^0) мають $m = 974,8 m_e$, заряджені K^+ і K^- мають $m = 966,5 m_e$, де m_0 – маса спокою електрона.

Середній час життя τ і схеми перетворення наведені нижче

	τ, c	
K_1^0	10^{-10}	$K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$
K_2^0	$6 \cdot 10^{-8}$	$K_2^0 \rightarrow 3\pi^0$
K^\pm	$12 \cdot 10^{-8}$	$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu (\sim 63,1\%)$
		$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 (\sim 21,5\%)$
		$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- (\sim 5,5\%)$
		$K^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu + \pi^0 (\approx 3,4\%)$
		$K^- \rightarrow e^- + \pi^0 + \nu_e (\sim 4,8\%)$

4. Баріони

До них належать: пара стабільних частинок - протон+антипротон, пара - нейтрон + антинейтрон і три типи гіперонів, названих лямбда-, сігма - і ксі-гіперонами (кожен з них має відповідну античастинку). Заряди q , маси m , час інтенсивності τ і схеми перетворень гіперонів наведені нижче:

	q	m	τ	
Лямбда	0	$2183 m_0$	$2,151 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda^0 \rightarrow \begin{cases} n + \pi^0 \\ p + \pi^- \end{cases}$
Сігма-нуль	0	$2331,8 m_0$	10^{-11}	$\Sigma^0 = \Lambda^0 + \gamma$
Сігма-плюс	-	$2327,7 m_0$	$0,81 \cdot 10^{-10}$	$\Sigma^+ \rightarrow \begin{cases} p + \pi^0 \\ n + \pi^+ \end{cases}$
Сігма-мінус	-	$2340,5 m_0$	$1,6 \cdot 10^{-10}$	$\Sigma^- = n + \pi^-$
Ксі-нуль	0	$2565 m_0$	10^{-10}	$\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$
Ксі-мінус	-	$2580 m_0$	10^{-10}	$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$

Всі баріони мають спіни, який дорівнює половині. Баріонам приписується баріонний заряд (частинкам $+1$, а античастинкам -1), який теж підпорядкований закону збереження. Дію цього закону разом із дією закону збереження спіна і елек-

тричного заряду можна простежити у процесах перетворення, народження і анігіляції пар баріонів, наприклад:

$$p + p \rightarrow \begin{cases} p + p + (p + \bar{p}) & p + \Lambda^0 \rightarrow n + p + K^0 \\ p + p + (n + \bar{n}) & p + \bar{p} \rightarrow \Lambda^0 + \bar{\Lambda}^0 \\ p + \Lambda^0 + K^+ \\ p + \Sigma^+ + K^0 \\ p + n + \pi^+ \end{cases}$$

Крім перерахованих вище частинок, виявлено численні сильно взаємодіючі короткоживучі частинки, які отримали назву резонансів. Ці частинки являють собою резонансні стани, утворені двома або більшою кількістю елементарних частинок. Час життя резонансів становить лише $\sim 10^{-23} - 10^{-22} c$.

X. ЕЛЕМЕНТИ ФІЗИКИ ТВЕРДОГО ТІЛА

§136. Поняття про квантові статистики

Бозе-Ейнштейна і Фермі-Дірака

Властивості твердих тіл можна пояснити на основі *квантової статистики* – розділу статистичної фізики, який досліджує системи з великого числа частинок, які підпорядковуються законам квантової механіки.

В основу квантової статистики покладено два принципи, які не мають нічого спільного з уявленнями класичної фізики:

1) *Принцип тотожності*, або принцип нерозрізненості мікрочастинок: всі однакові частинки (наприклад, всі електрони в металі, всі протони в ядрах атомів) принципово не відрізняються одна від одної.

2) *Принцип Паулі* (справедливий лише для ферміонів): у кожному квантовому стані не може перебувати більш як одна частинка.

Основна задача статистичної фізики в квантових статистиках полягає в знаходженні функції розподілу частинок системи за тими чи іншими параметрами – координатами, імпульсами, енергіями і т.д., а також у розрахунку середніх значень цих параметрів, що характеризують макроскопічний стан всієї системи частинок.

Для цього введемо *повну статистичну функцію розподілу* $N(E)dE$, яка відображає число частинок з енергією від E до $E+dE$ в системі, стан якої описується певними термодинамічними параметрами.

Повну статистичну функцію розподілу можна подати у вигляді добутку числа станів $g(E)dE$, що припадають на інтервал енергії dE , на функцію розподілу $f(E)$:

$$N(E)dE = f(E)g(E)dE.$$

Функція розподілу $f(E)$ визначає ймовірність заповнення частинками станів, що припадають на інтервал енергії dE . Якщо, наприклад, на 100 близько розміщених станів припадає в середньому 10 частинок, то ймовірність заповнення цих станів $f(E) = 0.1$. Оскільки на кожний стан припадає в середньому 0.1 частинки, то $f(E)$ можна трактувати як середнє число частинок, що знаходяться в даному стані:

$$f(E) = N(E) \cdot$$

Отже, щоб знайти повну функцію розподілу, необхідно розрахувати функції $g(E)dE$ і $f(E)$.

Нехай система складається із N частинок. Введемо в розгляд багатомірний простір всіх координат й імпульсів частинок системи. Стан кожної частинки визначається трьома координатами x, y, z і трьома відповідними проекціями імпульсу P_x, P_y, P_z . Тоді стан системи з N частинок визначається заданням $6N$ змінних. Цей $6N$ -мірний простір називається *фазовим простором*. Кожному мікростану системи відповідає точка в $6N$ -мірному фазовому просторі. Величина

$$\Delta\Gamma = \Delta\Gamma_V \Delta\Gamma_p = dx dy dz dP_x dP_y dP_z$$

називається елементом об'єму фазового простору. Тут $\Delta\Gamma_V = dx dy dz$ - елемент об'єму простору координат, $\Delta\Gamma_p = dP_x dP_y dP_z$ - елемент об'єму простору імпульсів. Беручи до уваги співвідношення невизначеностей Гейзенберга, елементарний об'єм $\Delta\Gamma$ не може бути меншим від h^3 : $\Delta\Gamma = h^3$, де h - стала Планка.

Для вільних мікрочастинок, які не взаємодіють і на які не діють зовнішні поля, $\Delta\Gamma_V = V$ і елемент тримірного простору імпульсів дорівнює

$$\Delta\Gamma_P = \frac{h^3}{V}.$$

Підрахуємо число станів мікрочастинки в інтервалі енергій від E до $E+dE$. Для цього проведемо в просторі імпульсів дві сфери радіусами P та $P+dP$ (рис.340). Між

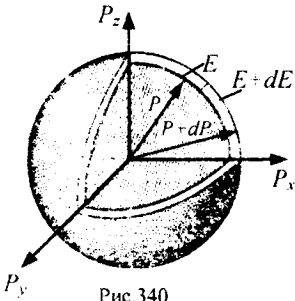


Рис.340

цими сферами знаходиться шаровий проміжок, що має об'єм $4\pi P^2 dP$. Число елементарних фазових комірок, що знаходяться в цьому шарі, дорівнює:

$$dz = \frac{4\pi P^2 dP}{\Delta\Gamma_P} = \frac{4\pi V}{h^3} P^2 dP.$$

Оскільки кожній комірниці відповідає один стан мікрочастинки, то число станів, що припадає на інтервал dP , що знаходиться між P і $P+dP$, дорівнює:

$$g(P) dP = \frac{4\pi V}{h^3} P^2 dP.$$

Для вільних частинок

$$E = \frac{P^2}{2m}, \quad dE = \frac{P}{m} dP.$$

$$\text{Звідси } P = \sqrt{2mE} \text{ і } dP = \frac{m}{\sqrt{2mE}} dE.$$

Тоді число станів мікрочастинки в інтервалі енергій dE , що знаходиться між E та $E+dE$:

$$g(E)dE = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E} dE.$$

Поділивши праву і ліву частини цього співвідношення на dE , отримаємо *густину станів* $g(E)$, що виражає число станів мікрочастинки, що міститься в одиничному інтервалі енергії:

$$g(E) = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E}.$$

У випадку електронів кожній фазовій комірниці відповідають два стани, що відрізняються один від одного напрямком спіну. Тому для електронів

$$g(E)dE = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E} dE.$$

$$g(E) = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E}.$$

З'ясуємо тепер, який вигляд може мати функція розподілу $f(E)$, яка визначає ймовірність заповнення частинками станів.

При розгляді принципу нерозрізненості тотожних частинок було встановлено, що залежно від симетрії хвильової функції всі елементарні частинки діляться на два класи: частинки з півцілим спіном – ферміони і частинки з цілим спіном – бозони. Ферміони і бозони відрізняються між собою поведінкою стосовно мікростанів: в кожній комірниці (в кожному квантовому стані) не може бути більше одного ферміона з даним набором квантових чисел або двох з антипаралельними спінами, а число бозонів в комірниці може бути довільним.

Ідеальний газ із ферміонів – фермі-газ – описується *квантовою статистикою Фермі-Дірака*. Функція розподілу ферміонів

за станами з різною енергією має такий вигляд:

$$f(E) = \frac{1}{\frac{E-\mu}{e^{kT}} + 1}$$

Цей вираз називається **функцією розподілу Фермі-Дірака**. Тут μ – хімічний потенціал. Він визначає зміну внутрішньої енергії системи при додаванні до неї однієї частинки за умови, що всі інші величини, від яких залежить внутрішня енергія, фіксовані.

Величина $f(E_i)$ дорівнює середньому числу $\langle N(E_i) \rangle$ ферміонів, що знаходяться в стані з енергією E_i . Тому

$$\langle N(E_i) \rangle = \frac{1}{\frac{E_i-\mu}{e^{kT}} + 1}$$

Ідеальний газ із бозонів – бозе-газ – описують квантовою **статистикою Бозе-Ейнштейна**. Розподіл бозонів за енергіями впливає із так званого великого канонічного розподілу Гіббса (із змінним числом частинок) при умові, що число тотожних бозонів у даному квантовому стані може бути довільним:

$$\langle N(E_i) \rangle = \frac{1}{\frac{E_i-\mu}{e^{kT}} - 1}$$

Цей розподіл називається **розподілом Бозе-Ейнштейна**. Значення хімічного потенціалу μ знаходять з умови, що сума всіх $\langle N(E_i) \rangle$ дорівнює повному числу N частинок в системі:

$$\sum_i \langle N(E_i) \rangle = N.$$

З формули Бозе-Ейнштейна і з безпосередньої вимоги $\langle N(E_i) \rangle > 0$ видно, що

хімічний потенціал бозе-газу не більший від нуля: $\mu \leq 0$, бо тільки при цій умові експонента в знаменнику розподілу не буде меншою від одиниці навіть при $i=0$ ($E_i = 0$).

Якщо $e^{\frac{E_i-\mu}{kT}} \gg 1$, то розподіл Бозе-Ейнштейна і Фермі-Дірака переходять у класичний розподіл Максвелла-Больцмана:

$$\langle N_i \rangle = A e^{-\frac{E_i}{kT}}, \text{ де } A = e^{\frac{\mu}{kT}}.$$

Отже, при великих температурах обидва “квантові” гази ведуть себе так, як класичний ідеальний газ.

Система частинок називається **виродженою**, якщо її властивості істотно відрізняються від властивостей систем, що підпорядковуються класичній статистиці. Поведінка як бозе-газу, так і фермі-газу відрізняється від класичного газу, вони є виродженими газами. Виродження газу стає істотним при досить низьких температурах і великих густинах. Параметром виродження називається величина A . При $A \ll 1$, тобто при малому ступені виродження розподіли Бозе-Ейнштейна і Фермі-Дірака переходять в класичний розподіл Максвелла-Больцмана.

Температурою виродження T_0 називається температура, нижче якої проявляються квантові властивості ідеального газу, обумовлені тотожністю частинок, тобто T_0 – температура, при якій виродження стає істотним. Якщо $T \gg T_0$, то поведінка системи частинок описується класично.

§137. Розподіл електронів провідності в металі за енергіями. Енергія Фермі

Метал для вільних електронів є своєрідною потенціальною ямою, вихід з якої вимагає затрати роботи з подолання сил

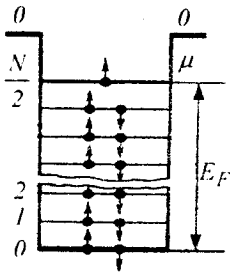


Рис. 341

зв'язку, що утримують електрони в металі. На рис.341 наведена схема такої потенціальної ями. Горизонтальними лініями показані енергетичні рівні, які можуть займати електрони.

Розподіл електронів на різних енергетичних рівнях здійснюється за принципом Паулі, згідно з яким на одному рівні не може бути двох однакових (з однаковим набором чотирьох квантових чисел) електронів, вони повинні відрізнитися якоюсь характеристикою, наприклад, напрямком спіну. Отже, за квантовою теорією, електрони в металі не можуть розміщуватися на найнижчому енергетичному рівні навіть при температурі $T=0K$. Принцип Паулі вимушує електрони підніматися вгору по "енергетичній драбині".

Якщо електронний газ містить N електронів, то останнім зайнятим виявиться рівень $\frac{N}{2}$. Найвищий енергетичний рівень, зайнятий електронами, називається рівнем Фермі для виродженого електронного газу.

Рівень Фермі буде тим вищим, чим більша густина електронного газу. Роботу виходу електрона з металу треба відраховувати не від дна потенціальної ями, як це робилось в класичній теорії, а від рівня Фермі.

Рівень Фермі відповідає максимальній кінетичній енергії E_F , яку може мати електрон в металі при абсолютному нулі. Її називають *енергією Фермі*.

Електрони провідності в металі можна розглядати як ідеальний газ, що описується розподілом Фермі-Дірака. Середнє число $N(E)$ електронів у квантовому стані на енергетичному рівні з енергією E дорівнює

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{e^{kT} + 1} \frac{1}{E - \mu}$$

При абсолютному нулі всі стани з енергією $E < E_F$ зайняті електронами, стани з енергією $E > E_F$ вільні. Іншими словами, при $T=0K$ ймовірність заповнення електронами станів з енергією $E < E_F$ дорівнює 1, ймовірність заповнення станів з енергією $E > E_F$ дорівнює нулю:

$$\langle N(E) \rangle = \begin{cases} 1, & E < E_F \\ 0, & E > E_F \end{cases}$$

Щоб отримати цей результат з допомогою розподілу Фермі-Дірака, необхідно вважати, що при $T=0K$ хімічний потенціал електронного газу, який відрахований від дна потенціальної ями, дорівнює енергії Фермі E_F :

$$\mu_0 = E_F$$

$$\text{Тоді } \langle N(E) \rangle = \frac{1}{e^{kT} + 1} \frac{1}{E - E_F}$$

Якщо $E < E_F$, то при $T = 0K$

$$e^{-\frac{E-E_F}{kT}} = \frac{1}{e^{\frac{E_F-E}{kT}}} \rightarrow 0 \quad i < N(E) > = 1.$$

Якщо $E > E_F$, то при $T = 0K$

$$e^{-\frac{E-E_F}{kT}} \rightarrow \infty \quad i < N(E) > = 0.$$

На рис.342 наведений графік функції розподілу Фермі-Дірака при абсолютному нулі. Він має вигляд сходинки, що обривається при

$$E = \mu_0 = E_F.$$

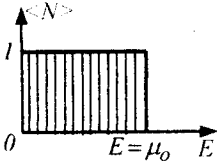


Рис.342

Розрахунок дає такий вираз для енергії Фермі:

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}},$$

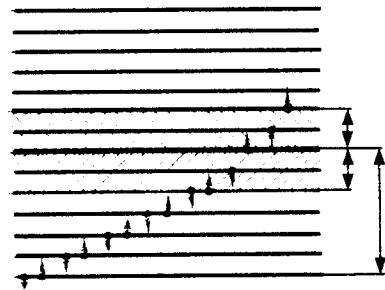
де $n = \frac{N}{V}$ - концентрація електронного газу в металі.

Введемо *температуру Фермі*, яка визначається із співвідношення $T_F = \frac{E_F}{k}$, де k - стала Больцмана. Вона показує, при якій температурі невироджений газ з масою молекул, що дорівнює масі електрона, мав би енергію теплового руху kT , що дорівнює енергії Фермі. Для електронів в металі $T_F \approx 10^4 K$. Жоден метал при таких температурах не може існувати в конденсованому стані. Тому для всіх температур, при яких метал може існувати у твердому стані, електронний газ у металі - вироджений.

При температурі $T \neq 0K$ якщо $E = E_F$, функція розподілу Фермі-Дірака $< N(E) > = \frac{1}{2}$. Тому зі статистичної точки зору рівень Фермі являє собою рівень, ймовірність заповнення якого $\frac{1}{2}$.

При підвищенні температури електрони піддаються тепловому збудженню і переходять на вищі енергетичні рівні, внаслідок чого змінюється характер їх розподілу за станами.

При кімнатній температурі $kT \approx 0,025eV$, а енергія Фермі $E_F = 3 - 10eV$. В інтервалі температур, в якому енергія kT теплового руху значно менша, тепловому збудженню можуть піддаватись електрони лише вузького



прошарку kT , безпосередньо розмішеного біля рівня Фермі (рис.343). Енергія kT теплового руху недостатня для збудження електронів глибоких рівнів.

В результаті теплового збудження частина електронів, що мають енергію, меншу E_F , переходить на рівні з енергією, більшою E_F , встановлюється новий їх розподіл за станами. На рис.344 показані криві розподілу електронів за станами при $T = 0 K$ (крива 1) і при $T > 0 K$ (крива 2). Підвищення темпе-

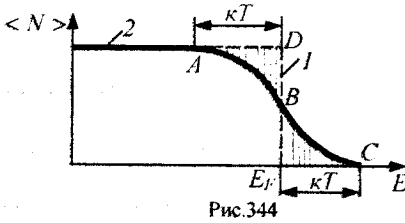


Рис.344

ратури викликає розмивання розподілу на глибину kT і появу "хвоста" розподілу BC , що розміщується правіше E_F . У першому випадку середнє число електронів менше одиниці, а в другому – більше нуля. Чим вища температура, тим суттєвіше змінюється функція розподілу. Сам хвіст BC описується уже максвеллівським розподілом.

На рис.344 заштриховані площадки, пропорційні числу електронів ΔN , що покидають стани з енергією $E < E_F$ (площадка ABD) і що переходять на рівні, які розміщені вище E_F (площадка $E_F BC$). За величиною ці площадки рівні, оскільки вони виражають одне і те ж число електронів. Розрахунок дає таке наближене співвідношення для ΔN :

$$\Delta N \approx \frac{kT}{2E_F} N.$$

При кімнатній температурі $\frac{\Delta N}{N} < 1\%$, при $T=1000$ К $\frac{\Delta N}{N} \approx 1-2\%$.

Тому у всьому діапазоні температур, в якому електронний газ в металі є виродженим, його розподіл мало відрізняється від розподілу при абсолютному нулі.

Якщо $(E - E_F) \gg kT$, то одиницею в знаменнику можна нехтувати порівняно з експонентою і тоді розподіл Фермі-Дірака переходить у розподіл Максвелла-Больцмана:

$$\langle N(E) \rangle = e^{\frac{\mu}{kT}} e^{-\frac{E}{kT}}.$$

Таким чином, при $(E - E_F) \gg kT$, тобто при високих температурах до електронів в металі застосовна класична статистика, в той час коли $E - E_F \ll E_F$, до них застосовна лише квантова статистика Фермі-Дірака.

Невиродженим електронним газом є сукупність вільних електронів у власних і незначно домішкових напівпровідників.

§138. Енергетичні зони в кристалах

Використовуючи рівняння Шредінгера – основне рівняння в нерелятивістській квантовій механіці, у принципі, можна розглянути задачу про кристал, наприклад, знайти можливі значення енергії, а також відповідні енергетичні стани електронів та ядер.

Рівняння Шредінгера для кристала має такий вигляд:

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \Delta_i - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_k \Delta_k \right] \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots) + \left[\frac{1}{2} K \sum_{i,j} \frac{e^2}{r_{ij}} + V(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots) \right] \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots) + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots) \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots) = E \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots)$$

Тут $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$ – координати електронів, а $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots$ – координати ядер, m – маса електронів, M – маса ядер. Перший і другий доданки відповідають сумарній кінетичній енергії всіх електронів та ядер. Наступні

доданки описують кулонівську взаємодію між електронами, взаємодію між ядрами і взаємодію між електронами та ядрами. У правій частині рівняння E – повна енергія системи, яка складається із енергії електронів і ядер.

Але як у класичній, так і у квантовій механіці відсутні методи точного розв'язання динамічної задачі для системи багатьох частинок. Тому цю задачу розв'язують наближено, зведенням задачі багатьох частинок до одноелектронної задачі – задачі про один електрон, що рухається в заданому зовнішньому полі. Цей шлях приводить до зонної теорії твердого тіла.

В основі зонної теорії лежить *адіабатичне наближення*. Квантово-механічна система поділяється на важкі і легкі частинки – ядра і електрони. Оскільки маси і швидкості цих частинок значно відрізняються, можна вважати, що рух електронів відбувається в полі нерухомих ядер, а ядра, що повільно рухаються, знаходяться в усередненому полі всіх електронів. Вважаючи, що ядра у вузлах кристалічної ґратки нерухомі, рух електрона розглядається в постійному періодичному полі ядер.

Адіабатичне наближення математично приводить до того, що рівняння Шредингера розпадається на два окремі рівняння, перше з яких описує рух легких електронів, а друге – важких ядер. В результаті рівняння для електронів має вигляд:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \Delta_i \psi + \left[\frac{1}{2} K \sum_{i,j} \frac{e^2}{r_{i,j}} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots) \right] \psi = E \psi.$$

Тут хвильова функція ψ залежить лише від координат електронів, $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots)$ – енергія взаємодії електронів з періодичним полем ядер.

Далі використовується *наближення самоузгодженого поля*. Взаємодія даного електрона з усіма іншими електронами замінюється дією на нього стаціонарного електричного поля, що має періодичність кристалічної ґратки. Це поле створюється усередненим в просторі зарядом усіх інших електронів і ядер. Таким чином, багатоелектронна задача зводиться до задачі про рух одного електрона в зовнішньому періодичному полі – усередненому і узгодженому полі всіх ядер і електронів.

Рівняння Шредингера в цьому випадку набуває вигляду:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(\vec{r}) \Psi = E \Psi,$$

де $U(\vec{r})$ – потенціальна енергія одного електрона не лише в періодичному полі ядер ґратки, але і в усередненому періодичному полі всіх інших електронів.

Існують два наближені методи розв'язання цього рівняння. В першому з них передбачається, що енергія $U(\vec{r})$ мала порівняно з повною енергією електронів E (рис.345). Це означає, що повна енергія електрона або, точніше, його кінетична енергія значно більша за його потенціальну енергію.

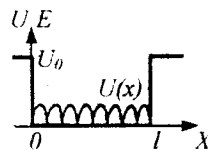


Рис.345

Іншими словами, електрон є майже вільний, силоне поле ґратки чинить на нього лише незначну збурюючу дію

(метод слабкого зв'язку). В результаті розв'язування рівняння Шредінгера виявляється, що спектр можливих значень енергій валентних електронів розпадається на ряд дозволених і заборонених зон, які чергуються. В межах дозволених зон енергія змінюється квазінеперервно. Значення енергії, що належать забороненим зонам, не можуть реалізуватися (рис.346).

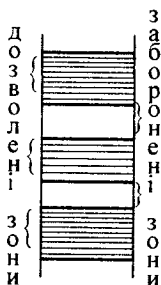


Рис.346

У другому наближенні, навпаки, вважається, що електрон сильно зв'язаний зі своїм атомом (ядром) і не може вільно перемішатися по гратці (метод сильного зв'язку). Якісно задача розв'язується так. Із окремих атомів будується кристалічна гратка і з'ясується, як впливають сусідні атоми кристала на поведінку електрона в окремому атомі, тобто досліджується вплив поля сусідніх атомів на енергетичні рівні.

Розмістимо N атомів натрію у вигляді просторової гратки, яка властива кристалу натрію, але на великих віддальх один від одного, щоб взаємодією між ними можна було знехтувати. В цьому випадку енергетичні стани електронів в кожному атомі можна вважати такими, як і в окремо взятому ізолюваному атомі. На рис.347 наведена енергетична схема двох таких атомів.

Кожний з них зображений у вигляді потенціальної ями, всередині якої проведені рівні $1s, 2s, 2p, 3s, \dots$. Рівні $1s, 2s$ і $2p$ у натрію укомплектовані повністю, рівень $3s$ – напо-

ловину; рівні, які розміщені вище $3s$, – вільні.

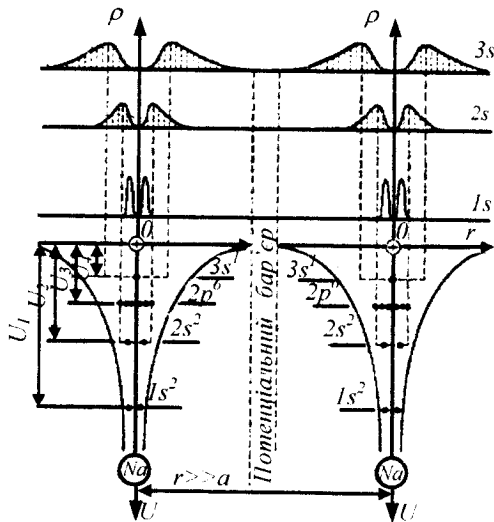


Рис.347

Із рис.347 видно, що ізолювані атоми відокремлені один від одного потенціальними бар'єрами завтовшки $r \gg a$, де a – стала гратки. Висота U бар'єрів для електронів, що знаходяться на різних рівнях, неоднорівна. Вона дорівнює відстані від цих рівнів до нульового рівня 00 . Потенціальний бар'єр перешкоджає вільному переходу електронів від одного атома до іншого.

У верхній частині рис.370 показана якісна картина розподілу густини ймовірності $\rho = 4\pi r^2 \Psi \Psi^*$ виявлення електронів на даній відстані від ядра. Максимуми кривих відповідають приблизно положенню борівських орбіт для цих електронів.

Тепер будемо повільно стискати гратку, не порушуючи її симетрію. У міру зближення атомів взаємодія між ними зростає і на відстанях, що дорівнюють параметру

гратки a , досягає значення, яке характерне для кристала. На рис.348 наведена картина, яка відповідає такому зближенню. З цього рисунка видно, що потенціальні криві, які відділяють сусідні атоми (показані пунктиром), частково накладаються одна на одну і дають результуючі криві, які проходять ниж-

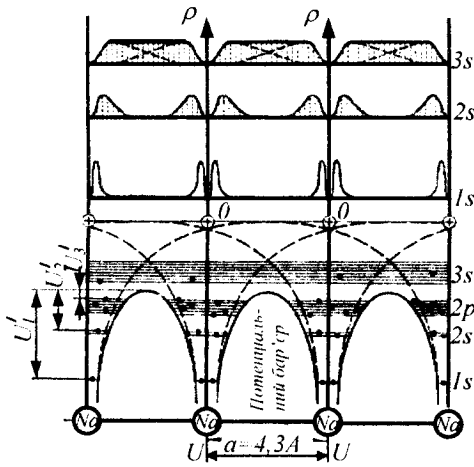


Рис.348

че нульового рівня $\theta\theta$ (на рисунку вони показані суцільними лініями).

Отже, зближення атомів чинить подвійну дію на потенціальний бар'єр: воно зменшує його товщину до значення порядку a і зменшує висоту. Для електронів рівня $1s$ висота бар'єра стає U'_1 , для електронів $2s$ - U'_2 , для електронів $2p$ - U'_3 . Для електронів рівня $3s$ висота бар'єра виявляється нижчою від початкового положення рівня $3s$ в атомі натрію. Тому валентні електрони цього рівня отримують можливість практично без перешкод переходити від одного атома до іншого. Про це свідчить і характер електронних хмар валентних електронів, вони перекриваються настільки сильно, що створюють

результуючу хмару рівномірної густини (рис.348). Це відповідає стану повної їх колективізації в ґратці. Такі колективні електрони називаються вільними, а їх сукупність - електронним газом.

Внаслідок різкого зменшення товщини і висоти потенціального бар'єра при зближенні атомів можливість переміщення по кристалу отримують не лише валентні електрони, але й електрони, що розміщені на інших рівнях атомів. Переміщення відбувається шляхом тунельного переходу електронів через бар'єри, що відокремлюють сусідні атоми.

Якщо колективні електрони зберігають досить сильний зв'язок з атомами, то їх потенціальну енергію можна подати у такому вигляді:

$$U = U_a + \delta U,$$

де U_a - потенціальна енергія електрона в ізолюваному атомі. Для кристала вона є періодичною функцією з періодом, що дорівнює параметру ґратки, оскільки енергія електрона повторюється при переході його від одного атома до іншого (рис.349); δU - доданок, який враховує вплив сусідніх атомів на цю енергію.

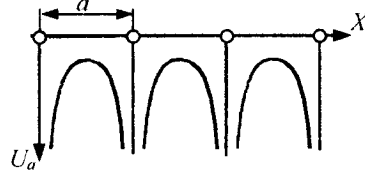


Рис.349

Якщо знехтувати доданком δU , тобто розглядати так зване нульове наближення, то в ролі хвильової функції і енергії електрона в кристалі слід взяти хвильову функцію

Ψ_a і енергію $E_a(n,l)$ електрона в ізолюваному атомі.

Відмінність між кристалом й атомом полягає в цьому випадку в наступному: в той час як в ізолюваному атомі даний енергетичний рівень $E_a(n,l)$ є єдиним, в кристалі, що складається з N атомів, він повторюється N разів (рис.350). Кожний рівень ізолюваного атома в кристалі N -кратно вироджений.

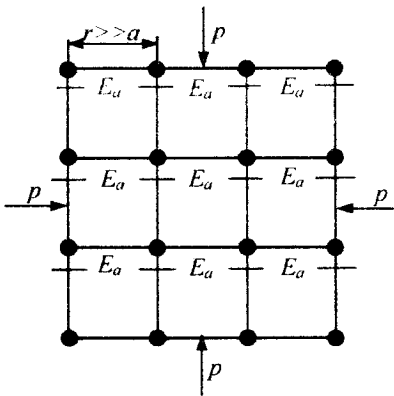


Рис.350

Якщо врахувати доданок δU в потенціальній енергії, то у міру зближення ізолюваних атомів і утворення з них ґратки кожний атом потрапляє у поле своїх сусідів, яке зростає. Така взаємодія приводить до зняття виродження. Тому кожний енергетичний рівень, не вироджений в ізолюваному атомі, розщеплюється на N близько розмішених один від одного підрівнів, що утворюють енергетичну зону. На кожному підрівні згідно з принципом Паулі може знаходитись не більше двох електронів з антипаралельними спінами.

Якщо енергетичний рівень мав в атомі $(2l+1)$ – кратне виродження, то відпо-

відна йому енергетична зона буде складатися із $N(2l+1)$ підрівнів. Так, рівень S дає зону S , яка складається із N підрівнів і здатна вмістити $2N$ електронів; рівень p дає зону p , яка складається із $3N$ підрівнів і здатна вмістити $6N$ електронів, і т.д.

Найбільший вплив поле ґратки чинить на зовнішні валентні електрони атомів. Тому стани цих електронів в кристалі відчувають найбільші зміни, а енергетичні зони, які утворені з енергетичних рівнів цих електронів, виявляються найбільш широкими.

Внутрішні ж електрони, які сильно зв'язані з ядром, відчувають лише незначні збурення від інших атомів, внаслідок чого їх енергетичні рівні в кристалі залишаються практично такими ж вузькими, як і в ізолюваних атомах. На рис.351 наведена схематична картина утворення енергетичних зон в кристалі із дискретних атомних рівнів.

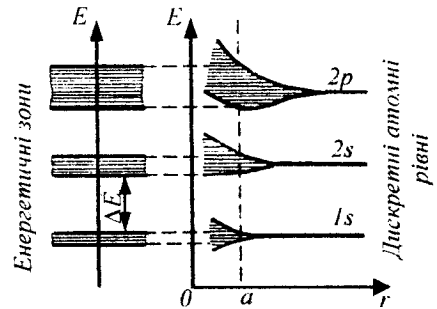


Рис.351

Отже, кожному енергетичному рівню ізолюваного атома в кристалі відповідає зона дозволених рівнів: рівню $1s$ – зона $1s$, рівню $2p$ – зона $2p$ і т.д.

Зони дозволених енергій розділені областями заборонених енергій – забороне-

ними зонами ΔE . Із збільшенням енергій електрона в атомі ширина дозволених зон збільшується, ширина заборонених – зменшується.

Дозволені енергетичні зони в твердому тілі можуть бути різним чином заповнені електронами. У граничних випадках вони можуть бути цілком заповнені або цілком вільні. Електрони в твердих тілах можуть переходити з однієї дозволеної зони в іншу. Для переходу електрона з нижньої зони в сусідню верхню зону необхідно затратити енергію, що дорівнює ширині забороненої зони, яка розміщена між ними.

Для внутрішніх переходів електронів в межах зони необхідна досить мала енергія. Наприклад, для цього достатньо енергії $10^{-4} - 10^{-8} \text{ eV}$, що отримує електрон в металі під дією електричного поля на довжині вільного пробігу при звичайних різницях потенціалів. Під дією спеціального збудження електронам може бути надана енергія, достатня як для внутрішньозонних, так і для міжзонних переходів.

§139. Розподіл електронів по енергетичних зонах.

Валентна зона і зона провідності.

Метали, діелектрики і напівпровідники

Зонна теорія твердих тіл дозволила з єдиної точки зору пояснити існування металів, діелектриків і напівпровідників, пояснюючи відмінності в їх електричних властивостях неоднаковим заповненням електронами дозволених зон і різною шириною заборонених зон.

Ступінь заповнення електронами енергетичних рівнів у зоні визначається заповненням відповідного атомного рівня. Якщо, наприклад, якийсь рівень атома повністю заповнений електронами відповідно до принципу Паулі, то утворена з таких рівнів зона також повністю заповнена. В загальному випадку можна говорити *про валентну зону*, яка повністю заповнена електронами і утворена з енергетичних рівнів електронів внутрішніх оболонок вільних атомів, і *про зону провідності*, яка або частково заповнена електронами, або вільна і утворена з енергетичних рівнів зовнішніх, колективізованих електронів ізольованих атомів.

Залежно від ступеня заповнення зон електронами і ширини забороненої зони можливі чотири випадки (рис.352). У першо-

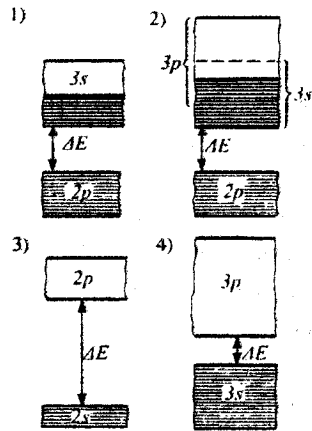


Рис.352

му випадку зона, що містить електрони, заповнена лише частково, тобто в ній є вакантні рівні. У такому разі електрон, отримавши малу енергетичну добавку (за рахунок теплового руху або електричного поля), зможе перейти на вищий енергетичний рівень самої

зони, тобто стати вільним і брати участь в провідності. Внутрішній перехід можливий, оскільки, наприклад, при $T=1\text{ K}$ енергія теплового руху $kT \approx 10^{-4}\text{ eV}$, тобто більша від різниці енергій між сусідніми енергетичними рівнями зони (10^{-22} eV). Отже, тіло буде провідником електричного струму. Саме це властиве металам.

Тверде тіло є провідником електричного струму і в тому випадку, коли валентна зона перекривається вільною зоною, що приводить до неповного заповнення зони. Це має місце для лужно-земельних елементів, що утворюють II групу таблиці Менделєєва. У даному випадку утворюється так звана "гібридна" зона, яка заповнюється валентними електронами лише частково.

Можливий також перерозподіл електронів між зонами, що виникають із рівнів різних атомів, який може привести до того, що замість двох частково заповнених зон в кристалі виявиться одна цілком заповнена (валентна) зона і одна вільна зона (зона провідності). Тверді тіла, у яких енергетичний спектр електронних станів складається лише з валентної зони і зони провідності, є діелектриками або напівпровідниками залежно від ширини забороненої зони ΔE .

Якщо ширина забороненої зони кристала порядку декількох електрон-вольт, то тепловий рух не може перекинути електрони з вільної зони в зону провідності і кристал є діелектриком, залишаючись ним при всіх реальних температурах.

У типових діелектриків $\Delta E > 3\text{ eV}$. Так, в алмазу $\Delta E \approx 5.2\text{ eV}$, у нітриду бору $\Delta E \approx 4.6\text{ eV}$, у Al_2O_3 $\Delta E \approx 7\text{ eV}$ і т. д.

Якщо заборонена зона досить вузька $\Delta E \leq 1\text{ eV}$, перекид електронів з валентної зони в зону провідності може бути здійснений порівняно легко: або тепловим збудженням, або за рахунок зовнішнього джерела здатного, передати електронам енергію ΔE . Такий кристал буде напівпровідником. При температурах, близьких до 0 K , напівпровідники ведуть себе як діелектрики, оскільки перекиду електронів у зону провідності не відбувається.

У типових напівпровідників $\Delta E \leq 1\text{ eV}$. Так, у германію $\Delta E = 0.66\text{ eV}$, у кремнію $\Delta E = 1.08\text{ eV}$, у антимоніду індію $\Delta E = 0.17\text{ eV}$ і т. д.

Іноді речовини поділяють на провідники, напівпровідники і діелектрики за величиною питомого опору при кімнатній температурі:

провідники	$\rho = 10^{-8} \div 10^{-6}\text{ Ом}\cdot\text{м}$	–
напівпровідники	$\rho = 10^8 \div 10^{-5}\text{ Ом}\cdot\text{м}$	–
ізолятори	$\rho = 10^9 \div 10^{17}\text{ Ом}\cdot\text{м}$	–

§140. Власна провідність напівпровідників

Напівпровідниками є тверді тіла, які при $T=0$ характеризуються повністю зайнятою електронами валентною зоною, відокремленою від зони провідності порівняно вузькою ($\Delta E \leq 1\text{ eV}$) забороненою зоною.

У природі напівпровідники існують у вигляді хімічних елементів (елементи IV, V, VI груп), наприклад, *Si, Ge, As, Se, Te*, і хімічних сполук, (оксиди, сульфіді, селеніди, сплави елементів різних груп).

Розрізняють власні і домішкові напівпровідники. Власними напівпровідниками є хімічно чисті напівпровідники, їх провідність називається власною провідністю.

На рис.353 наведена спрощена схема

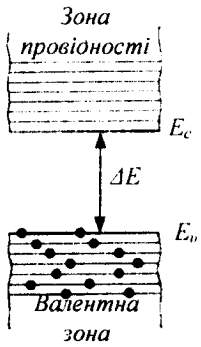


Рис.353

структури власного напівпровідника. При абсолютному нулі його валентна зона укомплектована повністю, зона провідності, яка розміщена над валентною зоною на відстані ΔE , є порожньою.

Отже, при $T=0$ і за відсутності інших зовнішніх факторів

власні напівпровідники ведуть себе як діелектрики. При підвищенні температури електрони з верхніх рівнів валентної зони можуть бути перекинуті на нижні рівні зони провідності (рис.354). При накладанні на

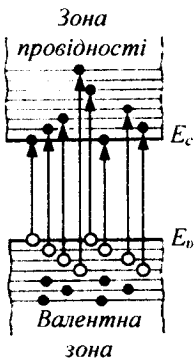


Рис.354

кристал електричного поля вони переміщуються проти поля і створюють електричний струм. Таким чином, зона внаслідок часткового укомплектування електронами

стає зоною провідності.

Провідність власних напівпровідників, обумовлена електронами, називається електронною провідністю або провідністю n-типу.

Внаслідок теплових переходів електронів із валентної зони в зону провідності у валентній зоні виникають вакантні стани, які отримали назву дірок. У зовнішньому електричному полі на місце, яке звільнилось від електрона – дірку – може переміститися електрон із сусіднього рівня, а дірка з'явиться в тому місці, яке звільнив електрон і т.д. Такий процес заповнення дірок електронами рівнозначний переміщенню дірки в напрямі, протилежному до руху електрона, так, як би дірка мала позитивний заряд, рівний за величиною заряду електрона.

Провідність власних напівпровідників, обумовлена квазічастинками-дірками, називається дірковою провідністю або провідністю p-типу.

Отже, у власних напівпровідниках спостерігаються два механізми провідності – електронна і діркова. Число електронів в зоні провідності дорівнює числу дірок у валентній зоні, тобто $N_e = N_p$.

Провідність напівпровідників завжди є збудженою, тобто появляється лише під дією зовнішніх факторів (температури, опромінювання, сильних електричних полів і т.д.).

У власному напівпровіднику рівень Фермі знаходиться на середині забороненої зони (рис.355). Дійсно, для перекиду електрона з верхнього рівня валентної зони на нижній рівень зони провідності затрачається енергія активації, яка дорівнює ширині забо-

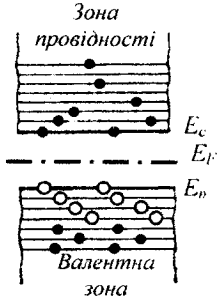


Рис.355

роненої зони ΔE . При появі електрона в зоні провідності у валентній зоні виникає дірка. Оскільки енергія, затрачена на утворення пари носіїв струму, повинна ділитися на

дві рівні частини, то енергія, що відповідає половині ширини забороненої зони, іде на перекидання електрона і така сама енергія затрачається на утворення дірки. Початок відліку для кожного з цих процесів повинен знаходитися в середині забороненої зони.

Енергія Фермі у власному напівпровіднику – це енергія, від якої відбувається збудження електронів і дірок.

Оскільки для власних напівпровідників $\Delta E \gg kT$, то розподіл Фермі-Дірака переходить в зоні провідності в розподіл Максвелла-Больцмана

$$\langle N(E) \rangle \cong e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}$$

Кількість електронів, перекинутих у зону провідності, а отже, і кількість утворених дірок пропорційна $\langle N(E) \rangle$.

Розрахунок концентрації електронів у зоні провідності дає такий результат:

$$n_e = 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_F}{kT}},$$

а розрахунок, який виконаний для дірок, що виникають у валентній зоні, приводить до виразу:

$$n_p = 2 \left(\frac{2\pi m_p kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta E + E_F}{kT}},$$

де m_e і m_p – ефективна маса електрона і дірки. Ця маса вводиться так, щоб у ній враховувалася дія на електрон чи дірку внутрішнього періодичного поля кристала і щоб можна було вважати, що ці частинки з ефективною масою рухаються лише під впливом одного зовнішнього поля.

З виразів для n_e та n_p видно, що концентрація вільних носіїв заряду в даній зоні визначається відстанню цієї зони від рівня Фермі: чим більша ця відстань, тим нижча концентрація носіїв.

Добуток n_e на n_p для довільного напівпровідника дорівнює:

$$n_e n_p = 4 \left(\frac{2\pi kT}{h^2} \right)^3 (m_e m_p)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$$

Ця формула показує, що при фіксованій температурі добуток концентрації електронів і дірок для даного напівпровідника є величиною сталою.

У власних напівпровідниках концентрація електронів провідності n_e в зоні провідності дорівнює концентрації дірок n_p у валентній зоні: $n_e = n_p$ і

$$2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_F}{kT}} = 2 \left(\frac{2\pi m_p kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta E + E_F}{kT}}$$

Звідси
$$e^{-\frac{2E_F}{kT}} = \left(\frac{m_p}{m_e} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$$

$$i \quad E_F = -\frac{\Delta E}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \frac{m_p}{m_e}.$$

Цей вираз і визначає положення рівня Фермі у власних напівпровідниках при абсолютному нулі ($T = 0$)

$$E_F = -\frac{\Delta E}{2},$$

тобто рівень Фермі розміщується якраз посередині забороненої зони.

Враховуючи, що $n_e = n_p$, з виразу

$n_e = n_p$ отримуємо:

$$n_e = n_p = 2 \left(\frac{2\pi \sqrt{m_e m_p} kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}.$$

Звідси видно, що концентрація носіїв струму у власному напівпровіднику визначається шириною забороненої зони ΔE і температурою напівпровідника T .

Внаслідок наявності у власному напівпровіднику двох типів носіїв – електронів і дірок – його питома електропровідність складається з провідності $\sigma_e = n_e e u_e$, обумовленої наявністю вільних електронів, що мають рухливість u_e , і провідності $\sigma_p = n_p e u_p$, яка обумовлена наявністю дірок, що мають рухливість u_p . Оскільки $n_e = n_p$, то повна питома провідність власного напівпровідника

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_e + \sigma_p = \\ &= 2 \left(\frac{2\pi \sqrt{m_e m_p} kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{4}} \cdot e (u_e + u_p) e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}. \end{aligned}$$

Рухливість носіїв заряду визначається їх розсіюванням на теплових коливаннях ґратки, і розрахунок показує, що

$$u_e \approx m_e^{-3/2} T^{-3/2} \quad i \quad u_p \approx m_p^{-3/2} T^{-3/2}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \sigma &= \text{const} (m_p m_p)^{3/2} \left(m_e^{-3/2} + m_p^{-3/2} \right) e^{-\frac{\Delta E}{2kT}} = \\ &= \sigma_{\infty} e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}. \end{aligned}$$

З цього виразу видно, що при $T \rightarrow \infty$, $\sigma \rightarrow \sigma_{\infty}$, тобто σ_{∞} визначає питому провідність напівпровідника при $T \rightarrow \infty$.

Характерною особливістю власних напівпровідників є збільшення їх питомої провідності із підвищенням температури. З погляду зонної теорії ця обставина пояснюється так: при підвищенні температури росте число електронів, які внаслідок теплового збудження переходять в зону провідності і беруть участь у перенесенні електричного заряду.

Залежність σ від T зручно представляти у напівлогарифмічних координатах. Логарифмуючи вираз $\sigma = \sigma_{\infty} \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT}\right)$, знайдемо:

$$\ln \sigma = \ln \sigma_{\infty} - \frac{\Delta E}{2kT}.$$

Якщо по осі абсцис відкласти $\frac{1}{T}$, а по осі ординат $\ln \sigma$, то отримуємо пряму (рис.356), тангенс кута нахилу якої до осі абсцис дорівнює $\frac{\Delta E}{2k}$. Звідси ширина забороненої зони становить $\Delta E = 2k \operatorname{tg} \alpha$.

§141. Домішкова провідність напівпровідників

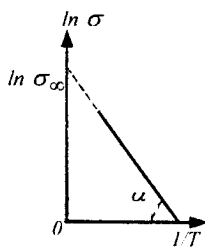


Рис.356

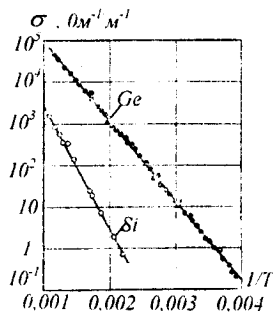


Рис.357

На рис.357 наведена залежність $\ln \sigma$ від $\frac{1}{T}$ для чистого германію і кремнію, які отримані експериментально. Ширина забороненої зони, визначена за нахилом кривих, виявилася для $Ge \Delta E = 0,72 eV$; для $Si \Delta E = 1,2 eV$.

Найбільш поширеним напівпровідниковим елементом є германій, що має решітку типу алмазу, в якій кожен атом зв'язаний ковалентними зв'язками з чотирма сусідами. В ідеальному кристалі при $T=0 K$ така структура являє собою діелектрик, оскільки всі валентні електрони беруть участь в утворенні зв'язків і не беруть участі в провідності.

У напівпровідниках поряд з процесом генерації електронів і дірок іде процес регенерації: електрони переходять із зони провідності у валентну зону, віддаючи енергію ґратці і випускаючи кванти електромагнітного випромінювання. В результаті для кожної температури встановлюється певна рівноважна концентрація електронів і дірок.

Провідність напівпровідників, обумовлена домішками, називається домішковою провідністю, а самі напівпровідники - домішковими напівпровідниками. Домішками є атоми сторонніх елементів, надлишкові атоми, теплові (пусті вузли або атоми в міжвузольях) і механічні (тріщини, дислокації і т. д.) дефекти. Наявність в напівпровіднику домішки суттєво змінює його провідність.

При заміщенні атома германію Ge п'ятивалентним атомом миш'яку (As) один електрон не може утворити ковалентний зв'язок, він виявляється зайвим і може бути при теплових коливаннях ґратки легко

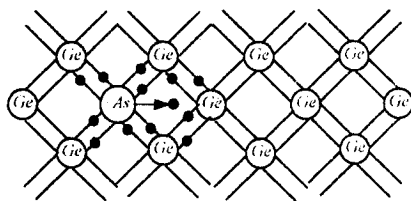
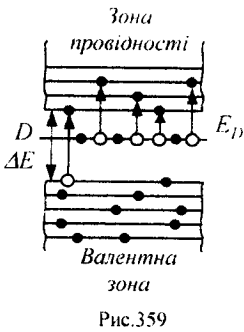


Рис.358

відшпелений від атома, тобто стати вільним (рис.358).

Утворення вільного електрона не супроводжується порушенням ковалентного зв'язку, дірка не виникає. Надлишковий позитивний заряд, що виникає поблизу атома домішки, зв'язаний з атомом домішки, і тому перемішатися по ґратці не може.

З точки зору зонної теорії цей процес можна представити так. Введення домішки спотворює поле ґратки, що приводить до



виникнення в забороненій зоні енергетичного рівня D валентних електронів миш'яку, який називається домішковим рівнем (рис.359). У випадку Ge з домішкою As цей рівень роз-

міщується від дна зони провідності на відстані $\Delta E_D = 0,015eV$. Оскільки $\Delta E_D \ll \Delta E$, то уже при звичайних температурах енергія теплового руху достатня для того, щоб перекинути електрони з домішкового рівня в зону провідності. Дірки, які утворюються при цьому, локалізуються на нерухомих атомах миш'яку і у провідності участі не беруть.

Отже, в напівпровідниках з домішкою, валентність якої на одиницю більша, ніж валентність основних атомів, носіями струму є електрони, виникає електронна домішкова провідність n -типу. *Напівпровідники з такою провідністю називаються електронними (n -типу)*. Домішки, що є джерелом електронів, називаються *донорами*, а енергетичні рівні цих домішок – *донорними рівнями*.

Припустимо, що в ґратку кремнію (Si) введено домішковий атом бору (B) з трьома валентними електронами (рис.360).

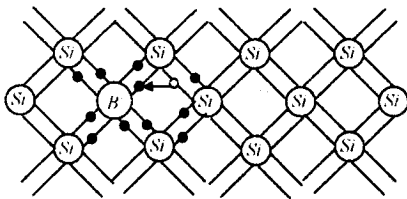
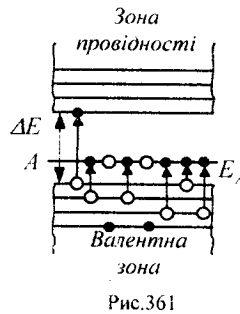


Рис.360

Для утворення зв'язків з чотирма сусідами

в атома бору не вистачає одного електрона, один із зв'язків залишається некомплектованим і четвертий електрон може бути захоплений від сусіднього атома основної речовини, де утворюється дірка (рис.360). Дірки не залишаються локалізованими, а переміщуються в ґратці Si як вільні позитивні заряди. Надлишковий від'ємний заряд, що виникає поблизу атома домішки, зв'язаний з атомом домішки і по ґратці перемішатися не може.

Згідно із зонною теорією введення тривалентного атома в ґратку Si приводить до виникнення в забороненій зоні домішкового рівня A , не зайнятого електронами (рис.361). У випадку Si з домішкою B цей



рівень локалізується вище верхнього краю валентної зони на

$$\Delta E_a = 0,08eV.$$

При порівняно низьких температурах електрони з валентної зони переходять на домішкові рівні і, зв'язуючись з атомами бору, втрачають здатність перемішатися по ґратці кремнію, тобто в провідності участі не беруть. Носіями струму є лише дірки, що виникають у валентній зоні.

Отже, в напівпровідниках з домішкою, валентність якої на одиницю менша, ніж валентність основних атомів, носіями струму є дірки – виникає діркова провідність. *Напівпровідники з такою провідністю називаються дірковими (p -типу)*. Домішки, що захоплюються електронами з валентної зони напівпровідника, назива-

ються *акцепторами*, а енергетичні рівні цих домішок – *акцепторними рівнями*.

Домішкова провідність напівпровідників обумовлена, в основному, носіями одного знака: електронами – у випадку донорної домішки і дірками у випадку акцепторної. Ці носії струму називаються основними.

Крім основних носіїв, у напівпровіднику є неосновні носії: у напівпровідника *n*-типу – дірки, а у напівпровідника *p*-типу – електрони. Концентрація основних носіїв більша, ніж концентрація неосновних носіїв.

На рис.362 показано зміну положення рівня Фермі при підвищенні температури в домішкових напівпровідниках донорного (а) та акцепторного (б) типів.

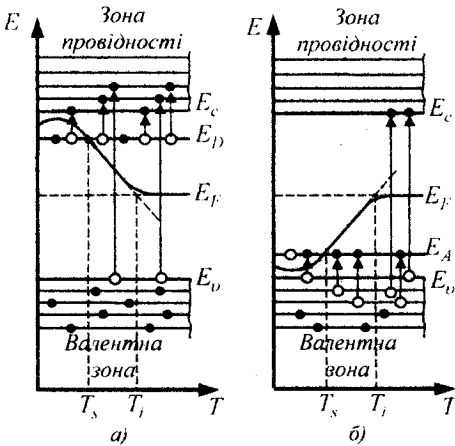


Рис.362

При низьких температурах середня енергія теплових коливань ґратки kT достатня для збудження і перекиду електронів у зону провідності з донорних рівнів E_D і дірок з акцепторних рівнів E_A у валентну зону.

При $T = 0K$ рівень Фермі у напівпровідниках *n*-типу розміщується посере-

дині між нижнім рівнем E_C зони провідності і донорним рівнем E_D , а у напівпровідниках *p*-типу – між акцепторним рівнем E_A і верхнім рівнем E_V валентної зони.

У міру підвищення температури концентрація електронів у зоні провідності збільшується, концентрація електронів на донорних рівнях зменшується – донорні рівні спустошуються. При повному спустошенні домішок концентрація електронів у зоні провідності напівпровідника *n*-типу стає такою, що практично дорівнює концентрації донорної домішки, а концентрація дірок в напівпровіднику *p*-типу – концентрації акцепторної домішки.

Температура спустошення домішок T_S тим вища, чим вища енергія активації домішок E_D і E_A і її концентрація. Для германію, наприклад, що містить $N_D = 10^{22} \text{ м}^{-3}$ і має $E_D = 0,01 \text{ eV}$, температура спустошення домішки $T_S = 30K$.

При наступному підвищенні температури починається все інтенсивніше збудження власних носіїв, напівпровідник все більше наближається до стану власного напівпровідника, внаслідок чого рівень Фермі наближається до положення рівня Фермі у власному напівпровіднику.

Температура T_i відповідає переходу до власної провідності напівпровідника. Температура T_i тим більша, чим більша ширина забороненої зони напівпровідника і концентрації домішок у ньому. Для германію, що містить $N_D = 10^{22} \text{ м}^{-3}$, $T_i = 450K$.

Провідність домішкового напівпровідника, як і провідність будь-якого провідника визначається концентрацією носіїв і їх рухливістю. Зі зміною температури рухливість носіїв змінюється за порівняно слабким степеневим законом, а концентрація носіїв - за досить сильним експоненціальним законом. У зв'язку з тим залежність провідності домішкових напівпровідників від температури визначається, в основному, температурною залежністю концентрації носіїв струму в ньому.

На рис.363 наведена схематична крива залежності $\ln \sigma$ від $\left(\frac{1}{T}\right)$ для доміш-

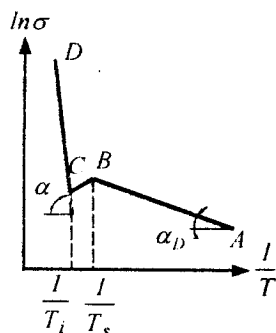


Рис.363

кового напівпровідника. Область AB відповідає низьким температурам від $T = 0K$ до температури T_S спустошення домішки. Питома провідність у цій

області дорівнює:

$$\sigma_D = \sigma_x^D e^{-\frac{E_D}{2kT}}$$

або

$$\sigma_A = \sigma_x^A e^{-\frac{E_A}{2kT}},$$

де σ_x^D і σ_x^A - коефіцієнти, які слабо залежать від температури (порівняно з експонентою). Логарифмуючи ці вирази, отримуємо:

$$\ln \sigma_{D,A} = \ln \sigma_x^{D,A} - \frac{E_{D,A}}{2kT}.$$

Відкладаючи по осі абсцис $\frac{1}{T}$, а по осі ординат $\ln \sigma_{D,A}$, отримаємо пряму, яка

утворює з віссю абсцис кут $\alpha_{D,A}$, тангенс

якого $\operatorname{tg} \alpha_{D,A} = \frac{E_{D,A}}{2k}$ пропорційний енергії іонізації домішки $E_{D,A}$.

Отже, область AB відповідає домішковій провідності напівпровідника.

Область BC спостерігається від температури спустошення домішок T_S до температури переходу до власної провідності T_i . У цій області всі домішкові атоми іонізовані, але ще не відбувається помітне збудження власних носіїв, внаслідок чого концентрація носіїв зберігається приблизно постійною і дорівнює концентрації домішок. Температурна залежність провідності напівпровідника у цій області визначається температурною залежністю рухливості носіїв. При розсіянні носіїв на теплових коливаннях ґратки рухливість носіїв зменшується із зростанням температури і провідність на ділянці BC зменшується.

Область CD описує власну провідність напівпровідника:

$$\sigma = \sigma_x e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}.$$

Тангенс кута α прямої CD пропорційний ширині забороненої зони ΔE :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta E}{2k}.$$

§142. P-n перехід і його вольт-амперна характеристика

Границя дотику двох напівпровідників, один з яких має електронну, а інший діркову провідність, називається електронно-дірковим переходом (або p-n переходом). Ці переходи мають велике практичне значення, будучи основою

роботи багатьох напівпровідникових приладів.

Отримати p - n перехід безпосереднім дотиком двох напівпровідників практично неможливо, оскільки їх поверхні містять величезну кількість домішок, різноманітних дефектів, що змінюють властивості напівпровідників.

Одним із поширених методів виготовлення p - n переходів є *метод сплавлення*. Кристал германію n -типу з «таблеткою» індію, яка покладена на нього, нагрівається в печі при температурі $500-600^\circ\text{C}$ в атмосфері водню або аргону. При цьому індій розплавляється і розчиняє в собі германій. При повільному охолодженні із розплаву випадає германій, який насичений індієм. Він кристалізується у формі монокристала. Оскільки германій, що містить індій, має p -провідність, то на границі розплаву, що закристалізувався, і монокристала германію, що має n -провідність, утворюється p - n перехід.

Електронно-дірковий перехід може бути отриманий також *дифузійно* акцепторної домішки у донорний напівпровідник або донорної домішки в акцепторний напівпровідник. Глибина проникнення домішки і залягання p - n переходу визначається температурою і часом проведення дифузії. Власне переходом служить границя, що відділяє області з різними типами провідності.

Для створення p - n переходу використовують також *метод іонного легування*, при якому поверхневий шар напівпровідника даного типу провідності за допомогою іонного пучка легують домішкою,

що надає цьому шару провідність протилежного знака.

Розглянемо фізичні процеси, що відбуваються в p - n переході (рис.364). Будемо вважати, що концентрація донорів



Рис.364

N_D і концентрація акцепторів N_A однакові. Для n -області основними носіями є

електрони і при не дуже низьких температурах концентрація електронів в n -області практично дорівнює концентрації донорних атомів - $n_{en} = N_D$. В p -області основні носії - дірки, і концентрація дірок в цій області дорівнює концентрації акцепторних атомів - $n_{op} = N_A$.

Крім основних носіїв, ці області містять неосновні носії: n -область - дірки (n_{on}), p -область - електрони (n_{ep}). Розрахунок показує, що концентрація n_{op} у 10^6 разів більша за n_{on} в n -області, а концентрація n_{en} в 10^6 разів більша за концентрацію електронів n_{ep} p -області.

На рис.365 показана енергетична схема n і p областей у момент, коли їх подумки склали.

Відмінність у концентрації одностипних носіїв в контактуючих областях напівпровідника приводить до виникнення дифузійних потоків електронів з n -області в p -область ($n_{en \rightarrow p}$) і дифузійного потоку дірок із p -області в n -область ($n_{op \rightarrow n}$).

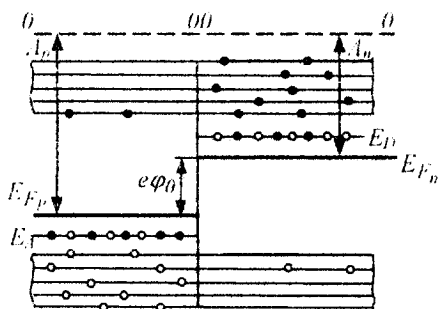


Рис.365

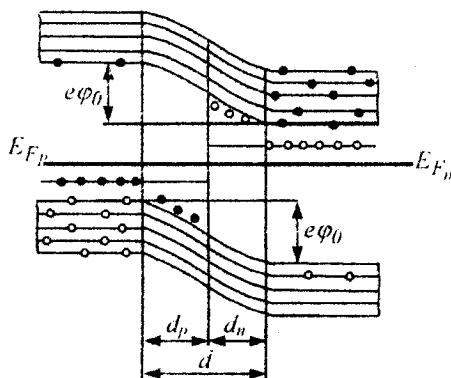


Рис.366

Область n , із якої дифундували електрони, заряджається позитивно, а p -область, із якої дифундували дірки – негативно. Це приводить до того, що рівень Фермі E_{F_n} знижується, а рівень Фермі E_{F_p} підвищується. Перетікання електронів справа наліво і дірок зліва направо відбувається доти, доки рівень Фермі E_{F_n} в n -області не встановиться на однаковій висоті з рівнем Фермі в p -області (рис.366). При розміщенні цих рівнів на однаковій висоті між n - і p -областями встановлюється рівновага, при якій потік електронів із n -області в p -область ($n_{en \rightarrow p}$) зрівноважується потоком електронів із p -області в n -область ($n_{ep \rightarrow n}$) зрівноважується потоком дірок із n в p -область:

$$n_{en \rightarrow p} = n_{ep \rightarrow n}; n_{op \rightarrow n} = n_{on \rightarrow p}.$$

Позначимо густини струмів, що відповідають потоку $n_{en \rightarrow p}$ через J_{en} ; потоку $n_{ep \rightarrow n} - J_{ep}$; потоку $n_{op \rightarrow n} - J_{op}$; потоку $n_{on \rightarrow p} - J_{on}$. Розрахунки показують, що для рівноважного стану p - n переходу:

$$J_{en} = J_{ep} = e \frac{L_e}{\tau_e} n_{ep},$$

$$J_{op} = J_{on} = e \frac{L_o}{\tau_o} n_{on},$$

де L_e і L_o – дифузійна довжина електронів в n -області і дірок в p -області відповідно, τ_e і τ_o – середній час їх життя.

У n -області напівпровідника внаслідок переходу електронів поблизу границі залишається некомпенсований позитивний об'ємний заряд нерухомих іонізованих донорних атомів. У p -області напівпровідника, внаслідок переходу дірок, поблизу границі утворюється від'ємний об'ємний заряд нерухомих іонізованих акцепторів. Ці об'ємні заряди утворюють біля границі подвійний електричний шар, який характеризується контактною різницею потенціалів φ_0 , що не дозволяє подальший перехід електронів у напрямку $n \rightarrow p$ і дірок у напрямку $p \rightarrow n$. Контактна різниця потенціалів між n і p областями дорівнює різниці робіт виходу A_p і A_n , яка поділена на елементарний заряд:

$$\varphi_0 = \frac{1}{e}(A_p - A_n).$$

Якщо концентрація донорів і акцепторів у n і p -областях однакова, то товщини шарів d_n і d_p , в яких локалізуються рухомі заряди, рівні.

В області p - n -переходу енергетичні зони деформуються, внаслідок чого виникають потенціальні бар'єри як для електронів, так і для дірок. Висота потенціального бар'єра $e\phi_0$, яка визначається початковою різницею положення рівня Фермі в обох напівпровідниках, тим більша, чим більше відношення концентрації основних носіїв до концентрації цих носіїв в іншій області напівпровідника.

Перехід електронів із n -області в p -область зв'язаний з подоланням потенціального бар'єра $e\phi_0$ і виконанням роботи, яка перетворюється в потенціальну енергію електронів. Тому енергетичні рівні акцепторного напівпровідника підняті відносно рівнів донорного напівпровідника на висоту, яка дорівнює $e\phi_0$, і підйом відбувається на товщині подвійного шару d . Товщина подвійного шару тим більша, чим менша концентрація основних носіїв в n і p областях напівпровідника.

Товщина d шару p - n переходу в напівпровідниках становить $\sim 10^{-6} - 10^{-10}$ м, а контактна різниця потенціалів – десяті частки вольт. Носії струму здатні подолати таку різницю потенціалів лише при температурі в декілька тисяч градусів, тобто при звичайних температурах рівноважний контактний шар є запірним.

Опір запірного шару можна змінити за допомогою зовнішнього електричного поля. Прикладемо до p - n переходу зовніш-

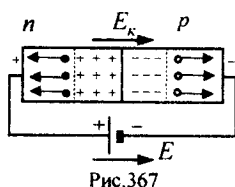


Рис.367

не електричне поле, яке напрямлене від n -провідника до p -провідника, тобто поле, яке

співпадає з полем контактного шару (рис.367). Плюсовий полюс джерела струму підключений до n -області, а мінус – до p -області. Під дією цієї різниці потенціалів потенціальний бар'єр p - n переходу підвищується до $e\phi_0 + e\phi$, що викличе зменшення в $e^{e\phi/kT}$ разів потоку основних носіїв $n_{en \rightarrow p}$ і $n_{dp \rightarrow n}$ і густини струмів j_{en} і j_{dp} , що відповідають цим потокам. У результаті

$$j_{en} = e \frac{L_e}{\tau_e} n_{ep} e^{-\frac{e\phi}{kT}}, j_{dp} = e \frac{L_d}{\tau_d} n_{dp} e^{-\frac{e\phi}{kT}}.$$

Зміна висоти бар'єра не змінить потоків електронів $n_{ep \rightarrow n}$ і дірок $n_{dp \rightarrow p}$.

Густина повного струму через p - n перехід дорівнює:

$$j_{зв.} = (j_{en} + j_{dp}) - (j_{ep} + j_{dn}) = e \left(\frac{L_e}{\tau_e} n_{ep} + \frac{L_d}{\tau_d} n_{dp} \right) \left(e^{-\frac{e\phi}{kT}} - 1 \right).$$

Цей струм називається *зворотним*.

При збільшенні ϕ $e^{-\frac{e\phi}{kT}} \rightarrow 0$, а густина струму $j_{зв.}$ прямує до граничного значення $-e \left(\frac{L_e}{\tau_e} n_{ep} + \frac{L_d}{\tau_d} n_{dp} \right)$, абсолютну величину якого

$$j_n = e \left(\frac{L_e}{\tau_e} n_{ep} + \frac{L_d}{\tau_d} n_{dp} \right)$$

називають *густиною струму насичення*. Як видно, j_n визначається потоком через p - n перехід неосновних носіїв. Оскільки концентрація цих носіїв невисока, то j_n є незначною величиною. Для германієвих

p - n переходів вона становить порядку

$$10^{-2} \frac{A}{m^2}.$$

Напрямок зовнішнього поля, що розширює запірний шар, називається запіраючим (зворотним).

Прикладемо до p - n переходу, що знаходиться в рівновазі, зовнішнє електричне поле, яке направлене протилежно полю контактного шару, підключивши до p -області позитивний полюс джерела напруги, а до n -області – негативний

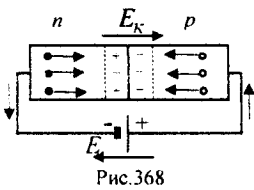


Рис.368

(рис.368). Це поле, напрямком якого називається прямим, викликає пониження потенціального бар'єра

для основних носіїв до $e\varphi_0 - e\varphi$. Тому потік електронів із n -області в p -область і потік дірок із p у n -область збільшаться в

$\frac{e\varphi}{e^{kT}}$ разів, що приведе до збільшення в

$\frac{e\varphi}{e^{kT}}$ разів густини струмів основних носіїв

j_{en} і j_{dp} :

$$j_{en} = e \frac{L_e}{\tau_e} n_{ep} e^{\frac{e\varphi}{kT}}, j_{dp} = e \frac{L_d}{\tau} n_{dp} e^{\frac{e\varphi}{kT}}.$$

Густини ж неосновних носіїв струму j_{ep} і j_{dn} залишаються незмінними.

Густина повного струму

$$j_{np} = e \left(\frac{L_e}{\tau_e} n_{ep} + \frac{L_d}{\tau} n_{dp} \right) \left(e^{\frac{e\varphi}{kT}} - 1 \right) = j_n \left(e^{\frac{e\varphi}{kT}} - 1 \right).$$

Цей струм називається **прямим**.

При прикладанні до p - n переходу зовнішньої різниці потенціалів у прямому напрямку сила струму через перехід зростає за експоненціальним законом і вже при незначних напругах досягає великих значень.

При $\varphi_{зв} = -0.5B$ густина зворотного струму $j_{зв} \approx j_n$, а при $\varphi_{np} = +0.5B$

$$j_{np} \approx j_n e^{20}. \text{Відношення } \frac{j_{np}}{j_{зв}} \approx e^{20} \approx 10^9.$$

Отже, p - n перехід має односторонню провідність. Вольт-амперна характеристика p - n переходу має вигляд, зображений на рис.369.

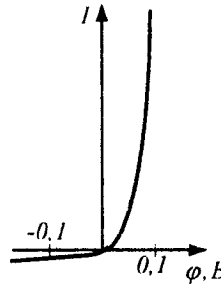


Рис.369

§143. Люмінесценція твердих тіл

У природі існує випромінювання, яке відрізняється за своїм характером від всіх відомих видів випромінювання (теплого випромінювання, відбивання, розсіювання світла і т.д.). Це люмінесцентне випромінювання. Воно має такі особливості:

1) при одній і тій самій температурі люмінесцентне випромінювання має більшу інтенсивність порівняно з тепловим (для того ж спектрального інтервалу). Наприклад, багато люмінесцентних речовин дають видиме й ультрафіолетове випромінювання при кімнатній температурі, у той час як теплове випромінювання тіл при цій

температурі практично не містить ні ультрафіолетових, ні видимих променів.

2) люмінесцентне свічення речовини продовжується деякий час після припинення опромінення. Тривалість люмінесценції змінюється для різних речовин залежно, від умов, в широких границях, від мільярдних часток секунди до багатьох годин і навіть діб. У першому випадку це флуоресценція ($t \leq 10^{-8} \text{ c}$), а в другому – фосфоресценція ($t > 10^{-8} \text{ c}$);

3) люмінесценція є власне випромінювання тіл, кожна речовина має певний характерний для неї спектр люмінесценції.

Об'єднуючи ці всі ознаки, С.І.Вавілов дав таке визначення люмінесценції: *люмінесценція – це оптичне випромінювання тіла, що є надлишковим над тепловим того самого тіла в даній спектральній області при тій же температурі, що має тривалість свічення більше 10^{-10} c , тобто не припиняється одразу після усунення причини, що викликала свічення.*

Залежно від способу збудження люмінесценції розрізняють декілька її видів:

- свічення, що виникає під дією світлового випромінювання як видимого, так і більш короткохвильового (*фотолюмінесценція*);
- свічення, що виникає при електричних розрядах (*електролюмінесценція*);
- свічення, що збуджується ударами електронів (*катодолюмінесценція*);
- свічення, яке викликане хімічними перетвореннями всередині тіла (*хемілюмінесценція*).

Дослідне вивчення спектрів люмінесценції показало, що вони відрізняється

від спектрів збуджуючого випромінювання. Згідно з *правилом Стокса спектр люмінесценції в цілому і його максимум завжди виявляються в довгих хвилях порівняно зі спектром поглинутого випромінювання, зокладати цю люмінесценцію (рис.370).*

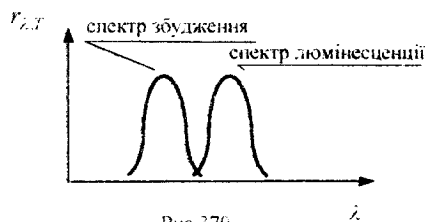


Рис.370

Це правило з точки зору квантової теорії означає, що енергія $h\nu$ передавального фотона частково витрачається на неоптичні процеси, тобто

$$h\nu = h\nu_{\text{люм}} + \Delta E,$$

звідки $\nu_{\text{люм}} < \nu$, або $\lambda_{\text{люм}} > \lambda$, що і виходить із сформульованого правила.

Основною електричною характеристикою люмінесценції є *енергетичний вихід, відношення енергій, яка випромінюється люмінофором при повному висвічуванні, до енергій, поглинутої ним:*

$$B_c = \frac{E_d}{E_n},$$

а також *квантовий вихід – відношення числа квантів N_d , випромінених речовиною, до числа N_n поглинутих квантів:*

$$B_k = \frac{N_d}{N_n}.$$

С.І.Вавілов встановив такий закон: величина енергетичного виходу спочатку росте пропорційно довжині хвилі збуджуючого світла, а потім швидко падає до нуля.

Пропорційне збільшення енергетичного виходу із збільшенням λ збуджуючо-

го світла означає, що в цьому інтервалі довжин хвиль квантовий вихід люмінесценції залишається постійним (рис.371).

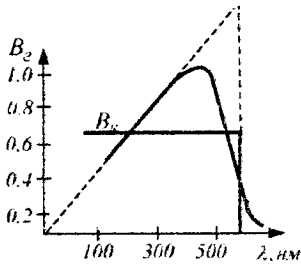


Рис.371

Справді, допустимо, що кожний фотон збуджуючого світла створює фотон люмінесценції, тобто $B_q = 1$. У цьому випадку енергетичний вихід дорівнює відношенню енергії фотона люмінесценції $h\nu_{\text{люм}}$ до енергії збуджуючого світла $h\nu_{\text{зб}}$:

$$B_e = \frac{h\nu_{\text{люм}}}{h\nu_{\text{зб}}} = \frac{h\nu_{\text{люм}}}{hc} \lambda_{\text{зб}}$$

тобто енергетичний вихід пропорційний довжині хвилі збуджуючого світла. Однак як тільки енергія падаючого фотона виявиться недостатньою для збудження атома, люмінесценція припиняється, квантовий і енергетичний виходи дорівнюють нулю, про що свідчить швидке падіння кривих на рис.371.

Розглянемо механізм виникнення люмінесценції у твердих кристалічних тілах. Дослід показує, що кристали з високим ступенем досконалості ґратки практично не люмінесціюють. Для надання люмінесцентних властивостей в їх структурі необхідно створити дефекти. Найбільш ефективними дефектами є домішки чужорідних атомів. Ці домішки називаються **активаторами**.

Складні, виготовлені штучно кристалічні речовини з дефектами внутрішньої структури, які мають високі люмінесцентні властивості, називаються **кристалофосфорами**.

До складу кристалофосфорів входять звичайно три компоненти: основна речовина, активатор і плавні. У ролі основної речовини використовують ZnS, CdS, CaS та ін., у ролі активаторів – важкі метали: Ag, Cu, Bi, Mn і т.д.; у ролі плавнів – легкоплавкі солі.

Розглянемо механізми виникнення люмінесценції з погляду зонної теорії твердих тіл. Між валентною зоною I і зоною провідності II кристала фосфора розміщуються домішкові рівні активатора (рис.372). При поглинанні атомом активатора фотона з енергією $h\nu$ електрон з до-

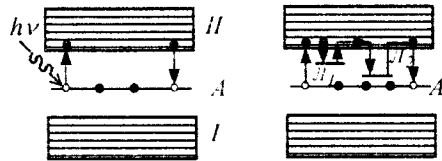


Рис.372

мішкового рівня переводиться в зону провідності, вільно переміщується по кристалу доти, доки не зустрінеться з іоном активатора і рекомбінує з ним, перейшовши знову на домішковий рівень. Рекомбінація супроводжується випромінюванням кванта люмінесцентного випромінювання. Час випромінювання люмінофора визначається часом життя збудженого стану атомів активатора, який не перевищує мільярдних часток секунди. Тому свічення є короточасним і зникає швидко після припинення опромінення.

Для виникнення тривалого свічення кристалофосфор повинен містити також

центри захоплення або пастки для електронів, якими є незаповнені локальні рівні (L_1 і L_2), що лежать поблизу дна зон провідності. Вони можуть бути утворені атомами домішок, атомами в міжвузловинах. Під дією світла атоми активатора збуджуються, тобто електрони з домішкового рівня переходять в зону провідності і стають вільними. Однак вони захоплюються пастками, внаслідок чого втрачають свою рухливість, тобто здатність рекомбінувати з іонами активатора. Звільнення електрона з пастки вимагає певної енергії, яку електрони можуть отримати, наприклад, від теплових коливань ґратки. Звільнений з пастки електрон потрапляє в зону провідності і рухається вільно до того часу, доки не буде захоплений пасткою знову або не рекомбінує з іоном активатора. В останньому випадку виникає квант люмінесцентного випромінювання. Трива

лість цього процесу визначається часом перебування електрона в пастках.

Явище люмінесценції отримало широкое застосування в практиці, наприклад, люмінесцентний аналіз – метод визначення складу речовини за характерним для неї світінням. Цей метод, будучи досить чутливим (10^{-10}), дозволяє виявляти наявність незначних домішок. Люмінесцентна дефектоскопія дозволяє виявляти тріщини на поверхні деталей машин та інших виробів (досліджувана поверхня покривається для цього люмінесцентним розчином, який після усунення залишається в тріщинах).

Люмінофори використовуються в люмінесцентних лампах, є активним середовищем активних квантових генераторів і сцинтиляторів, застосовуються в електронно-оптичних перетворювачах тощо.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Абсолютно чорне тіло	246	Густина заряду об'ємна	105
Активатор	365	Густина заряду поверхнева	103
Акцептори	358	Густина потоку енергії	42
Аналіз рентгеноспектральний	219	Густина струму	123
Аналіз рентгеноструктурний	219	Густина теплової потужності струму	127
Аналізатори	229,235		
Анізотропія штучна	237	Двигун тепловий	79
Антинейтрино	323	Дефект маси	311
Атом водню	264	Джерело електрорушійної сили	123,124
Атомна модель	261	Джерело струму	123
Атомна одиниця маси	311	Диполь електричний	97
		Дисперсійна область	217
Бар'єр потенціальний	133	Дисперсія атомальна	221
Баріон	340	Дисперсія відносна	221
Барометрична формула	60	Дисперсія кутова	217,220
Биття	31	Дисперсія лінійна	217
Бозони	289	Дисперсія нормальна	226
		Дисперсія світла	219,221
Вектор переміщення	7	Дифракція світла	205
Вектор поляризації	109	Дифракція Фраунгофера	211
Вектор Умова-Пойтінга	192	Дифракція Френеля	209
Випромінювання вимушене	299	Дифузія у газах	72
Випромінювання гама	324	Діамагнетизм	163
Випромінювання спонтанне	299	Діаметр молекули ефективний	71
Випромінювання теплове		Діелектрики	107
Відносність довжин і проміжків часу	50	Діелектрики іонні	107
Вітер електричний	116	Діелектрики неполярні	107
Внутрішнє тертя у газах	76	Діелектрики полярні	107
Вольт-амперна характеристика діода	134	Ділянка кола неоднорідна	124
		Ділянка кола однорідна	124
Генератор електростатичний	117	Добротність коливної системи	35
Генератор оптичний квантовий	303	Довжина вільного пробігу	72
Гіпотеза Планка	250	Довжина вільного пробігу електронів	129
Гістерезис діелектричний	114	Довжина вільного пробігу електронів в металах	132
Гістерезис магнітний	169	Довжина когерентності	193
Гратка дифракційна	214	Довжина шляху	7
Густина енергії випромінювання об'ємна	244	Доза біологічна	326
Густина енергії об'ємна	122	Доза випромінювання експозиційна	326
Густина зарядів зв'язаних поверхнево	110	Доза випромінювання поглинута	326
Густина заряду лінійна	106	Домен	114

Домени магнітні	171	Ефект Доплера	242
Дослід Лоренца	127	Ефект Керра	238
Дослід Мандельштама і Папалексі	128	Ефект Комптона	257
Дослід Рінке	127	Ефект Когтона-Мутона	239
Дослід Штерна і Герлаха	286	Ефект тунельний	278
Дослід Девіссона і Джермера	269	Ефект Холла	154
Дослід Резерфорда	261		
Дослід Фарадея та Верде	242	Ємність електрична	118
Дослід Франка і Герца	267	Ємність конденсатора	118
Дуалізм корпускулярно-хвильовий	271	Ємність кулі	118
		Ємність плоского конденсатора	119
Електрична стала	96	Ємність сферичного конденсатора	120
Електроємність відокремленого провідника	118	Ємність циліндричного конденсатора	119
Електролюмінесценція	364	Закон Ампера	146
Електропровідність питомі	130	Закон Біо-Савара-Лапласа	146
Емісія вторинна	138	Закон Богуславського-Ленгмюра	135
Емісія термоелектронна	134	Закон Больцмана про рівномірний розподіл енергії за ступенем вільності	63
Енергія внутрішня	63	Закон Брюстера	231
Енергія електричного поля	122	Закон Бугера-Ламберта-Бера	226
Енергія електромагнітної хвилі	191	Закон взаємозв'язку маси і енергії	53
Енергія зарядженого провідника	122	Закон Відемана-Франца	131
Енергія зв'язку	311	Закон Гейгера-Неттола	321
Енергія кінетична	12	Закон Джоуля-Ленца	126
Енергія кінетична в коливальному русі	26	Закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі	131, 127
Енергія кінетична в обергальному русі	24	Закон додавання швидкостей релятивістський	51
Енергія конденсатора	122	Закон збереження електричних зарядів	95
Енергія магнітного поля	179	Закон збереження імпульсу	10
Енергія потенціальна	13	Закон збереження механічної енергії	15
Енергія потенціальна в коливальному русі	26	Закон збереження моменту імпульсу	24
Енергія потенціальна матеріальної точки в однорідному силовому полі	14	Закон зміни моменту імпульсу	23
Енергія потенціальна матеріальної точки в полі центральних сил	14	Закон зміщення Віна	250
Енергія потенціальна пружнодеформованого тіла	15	Закон Кірхгофа	247
Енергія реального газу внутрішня	94	Закон Кулона	95
Енергія реального газу зведена	94	Закон Кюрі	166
Енергія Фермі	344	Закон Кюрі-Вейса	170
Енергія потенціальна заряду	98	Закон Ленца	172
Ентропія	84	Закон Малюса	230

Закон Мозелі	294	Зона провідності	351
Закон Ньютона другий	9	Зони енергетичні	346
Закон Ньютона перший	8	Зонна пластинка	209
Закон Ньютона третій	9		
Закон Ома	129	Ідеальний газ	55
Закон Ома в диференціальній формі для неоднорідної ділянки кола	125	Ізобари	309
Закон Ома в диференціальній формі для однорідної ділянки кола	125	Ізотери	309
Закон Ома для густини струму	130	Ізотерма критична	92
Закон Ома для неоднорідної ділянки кола	126	Ізотони	309
Закон Ома для однорідної ділянки кола	124	Ізотопи	309
Закон Ома межі застосування	130	Імпульс	9
Закон повного струму	149	Індуктивність	176
Закон повного струму узагальнений	184	Індуктивність взаємна	178
Закон радіоактивного розпаду	317	Індукція електростатична	115
Закон Стефана-Больцмана	248	Індукція магнітна	145
Закон термодинаміки другий	82.85.87	Інертність	9
Закон термодинаміки перший	65	Інтерференційний максимум, мінімум	195
Закон Фарадея	173	Інтерференція хвиль	43
Закон Фіка	72	Інтерференція світла	193
Закон Фур'є	75	Інтерферометр Жамена	203
Закони фотоелектру	254	Інтерферометр Майкельсона	204
Заряд зв'язаний	110	Іонізація газу	136
Заряд питомий	127	Іонізація ударна	138
Заряд точковий	95	Іонізація фотонна	138
Заряди електричні зв'язані	109		
Заселеність інверсна	302	Ймовірність розподілу	86
Захист електростатичний	117	Ймовірність термодинамічна	87
Захоплення електронне	324		
Захоплення частинок радіаційне	327	Катодолумінесценція	364
Зв'язок гетерополярний	295	Клаузауза рівність	84
Зв'язок гомеополярний	295	Класична електронна теорія провідності Друде-Лоренца	129
Здатність випромінююча	245	Класична електронна теорія електропровідності металів	127
Здатність інтегральна випромінююча	245	Коефіцієнт дисперсії	221
Здатність поглинаюча	246	Коефіцієнт корисної дії циклу Карно	81
З'єднання паралельне конденсаторів	120	Коефіцієнт питомого обертання	240
З'єднання послідовне конденсаторів	121	Коефіцієнт прозорості	282
Зміщення	112	Коливання	25
Зона валентна	351	Коливання вимушене	35
Зона заборонена	351	Коливання вимушені резонанс	37
		Коливання гармонічні додавання	32

взаємно перпендикулярних		Момент диполя	97
Коливання гармонічні додавання однаково напрямлених	30	Момент імпульсу відносно нерухомої осі	20
Коливання електромагнітні	187	Момент імпульсу матеріальної точки відносно нерухомої точки	20
Коливання загасаючі	33	Момент імпульсу тіла відносно нерухомої осі	21
Коливання коефіцієнт загасання	34	Момент імпульсу тіла відносно точки	21
Коливання логарифмічний декремент загасання	34	Момент інерції тіла відносно осі	21
Конденсатор	118	Момент механічний власний	161
Конденсатор плоский	118	Момент орбітальний магнітний	160
Конденсатор сферичний	119	Момент сили відносно нерухомої осі	19
Конденсатор циліндричний	119	Момент сили відносно нерухомої точки	19
Контур коливальний	186		
Кут повороту площини поляризації	240	Наближення адиабатичне	347
Кюрі точка	170	Намагніченість	161
		Напруга	124
Лазер	303	Напруга запалювання	138
Лептон	338	Напруга пробивна	120
Лермора прецесія	162	Напруженість електричного поля як градієнт потенціалу	100
Лінії індукції магнітного поля	145	Напруженість електричного поля	96
Лінії напруженості	96	Напруженість поля поблизу зарядженого провідника	116
Лінійчастий спектр поглинання	227	Напруженість поля точкового заряду	97
Люмінесценція	363	Напрямок електричного струму	123
		Насиченості явище магнітне	165
Магнетон Бора	161,286	Недоліки класичної електронної теорії провідності металів	131
Магнетон ядерний	310	Нейтрино	323
Магнітна напруженість поля	168	Нейтрон	309
Мазер	303	Нукліди	309
Маса інертна	9	Нуклон	309
Маса критична	333		
Маса гравітаційна	9	Обертальний вектор амплітуди	29
Машина холодильна	80	Обертання абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі	16
Маятник математичний	28	Одиниця потенціалу	99
Маятник пружний	27	Опір внутрішній	126
Маятник фізичний	28	Опір питомий	125, 130
Мезон	339	Опір провідника	125
Метод дослідження статистичний	54	Опір хвильовий	187
Метод дослідження термодинамічний	54	Оптична вісь	232
Метод зон Френеля	207		
Модель ядра краплинна	315		
Модель ядра оболонкова	315		
Момент головний зовнішніх сил відносно точки	20		

Оптична різниця ходу	195	Поляризація іонна	109
Пара насичена	91	Поляризація орієнтаційна	108
Пара перенасичена	91	Поляризація спонтанна	115
Паромагнетизм	164	Поляриметри	241
Перетворення Лоренца	50	Поперечний ефект Доплера	243
Перехід електронно-дірковий	359	Постулати Бора	265
Перехід фазовий	115	Постулати Енштейна	49
Період коливання	25	Потенціал електричного поля	98
Період обертання	17	Потенціал іонізації	136
Період півропаду	317	Потенціал поля системи зарядів	99
Плазма	142	Потенціал точкового заряду	99
Плазма ідеальна	142	Потік вектора напруженості	101
Плазма неізотермічна	143	Потік енергії	42, 191
Плече диполя	97	Потік магнітний	157
Площина коливань	229	Потужність дози випромінювання	326
Площина поляризації	229	Правило знаків	150
Поверхні еквіпотенціальні	100	Правої руки правило	173
Поглинання світла	226	Принцип відповідності	281
Подвійне променезаломлення	231	Принцип Гюйгенса	205
Поздовжній ефект Доплера	243	Принцип незалежності дії електричних полів	97
Позитрон	324	Принцип незалежності дії сил	9
Поле електричне	96	Принцип Паулі	290
Поле електричне в діелектрику	110	Принцип суперпозиції	147
Поле електричне в речовині	110	Принцип суперпозиції електричних полів	97
Поле електричне вихрове	182	Принцип суперпозицій хвиль	43
Поле електричне однорідне	97	Принцип відносності механічний	49
Поле електричне потенціальне	100	Прискорення кутове миттєве	18
Поле електростатичне двох площин заряджених різнойменно	104	Прискорення кутове середнє	18
Поле електростатичне зарядженого циліндра	106	Прискорення миттєве	7
Поле електростатичне зарядженої кулі	105	Прискорення нормальне	8
Поле електростатичне зарядженої сфери	104	Прискорення середнє	7
Поле електростатичне потенціальне	98	Прискорення тенгенціальне	8
Поле магнітне	144	Провідник відокремлений	117
Поляризатори	229,235	Провідники в електричному полі	115
Поляризації площина	191	Провідність діркова	353
Поляризація дипольна	108	Провідність домішкова	356
Поляризація електронна	108	Провідність електрична	125
Поляризація залишкова	114	Провідність електрична питома	125
		Провідність електронна	353
		Провідність напівпровідників власна	352

Промені рентгенівські	291	Рівняння хвильове	41, 189
Промінь звичайний	232	Рівняння Шредінгера	276
Промінь незвичайний	232	Рідина перегріта	91
Проникність магнітна	168	Рідина розтягнута	91
Проникність діелектрична відносна	111	Різниця ходу хвиль геометрична	43
Просвітлення оптики	203	Робота	11, 64
Просторова когерентність	194	Робота виходу	255
Протон	309	Робота виходу електронів	133
Процес адіабатний	69	Робота газу	65
Процес ізобарний	68	Робота іонізації	136
Процес ізотермічний	68	Робота сторонніх сил над зарядом	124
Процес ізохорний	68	Роздільна здатність	217
Процес коловий	78	Розміри критичні	333
Процес необоротний	80	Розпад альфа	319
Процес оборотний	80	Розпад бета	322
		Розпад радіоактивний	316
Радіоактивність	316	Розподіл Больцмана	61
Радіус екранування дебаївський	142	Розрахунок електричних полів	103
Радіус когерентності	194	Розряд газовий	137
Реактор ядерний	331	Розряд газовий несамоістийний	137
Реакції екзоенергетичні	329	Розряд газовий самоістийний	138
Реакції ендоенергетичні	329	Розряд дуговий	141
Реакції ядерні	326	Розряд іскровий	140
Реакції ядерного поділу	331	Розряд коронний	141
Реакція поділу ланцюгова	331	Розряд тліючий	139
Реакція термоядерна	335	Розсіювання комбінаційне	306
Резонатор оптичний	304	Розсіювання комптонівське	325
Рекомбінація іонів	137	Розсіювання частинок резонансне	327
Рівні акцепторні	358	Рухливість носіїв заряду	125
Рівновага динамічна	137		
Рівняння Бернуллі	48	Самоіндукція	176
Рівняння Ван-дер-Ваальса	89	Світло поляризоване лінійно	228
Рівняння Ван-дер-Ваальса зведене	94	Світло поляризоване еліптично	228
Рівняння Ейнштейна для фотоэффекту	255	Світло поляризоване частково	229
Рівняння Майєра	67	Сегнетоелектрики	113
Рівняння Максвелла	184	Середовище активне	303
Рівняння Менделєєва-Клапейрона	57	Середовище пружне	38
Рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу для тиску	56	Серія Бальмера	264
Рівняння нерозривності струмину	46	Серія Брекета	264
Рівняння перетворення координат Галілея	48	Серія Лаймана	264
		Серія Пашена	264

Серія Фунда	264	Струм постійний	123
Серія Хемфрі	264	Струм провідності	123
Сила	9	Струм термоелектронний	134
Сила коерцетивна	114,170	Струмина	46
Сила консервативна	12	Ступінь іонізації	137
Сила Лоренца	152	Ступінь іонізації плазми	143
Сила струму	123	Супутники антистоківські	306
Сили сторонні	124	Супутники стоківські	306
Сили ядерні	313		
Силова характеристика поля	96	Температурна залежність опору	132
Система замкнена	10	Теорема Карно	80
Система механічна	10	Теорема Клаузіуса	84
Система термодинамічна	54	Теорема Кюнінга	13
Системи дисипативні	16	Теорема Лермора	162
Сімейство радіоактивне	319	Теорема Остроградського-Гаусса	102
Сітка Кольбе	116	Теорема Остроградського-Гаусса для електростатичного поля в діелектрику	113
Соленоїд	151	Теорема Остроградського-Гаусса для магнітного поля	158
Спектр характеристичний	292	Теорема Штейнера	22
Співвідношення невизначеностей Гейзенберга	271	Теорія Максвелла	180
Спін електрона	161	Теплоємність	66
Спін електрона	286	Теплоємність газів	74
Спін ядра	310	Теплоємність металу молярна	132
Сприйнятливність магнітна	164	Теплоємність молярна	66
Сприйнятливність діелектрична	109	Теплоємність питомо	66
Стала радіоактивна	317	Теплота	64
Стала Рідберга	264	Теплота кількість зведена	83
Стан критичний	92	Течія рідини	46
Стан системи рівноважний	54	Тиск світла	258
Стан системи стаціонарний	54	Тороїда магнітнеполе	151
Статистика квантова	341	Траскторія точки	7
Статистика квантова Бозе-Енштейна	343	Трубка течії	46
Статистика квантова Фермі-Дірака	342		
Стримери	140	Умови існування електричного струму	123
Струм в газах	135	Умови максимумів та мінімумів дифракційної ґратки	215
Струм електричний	123		
Струм зміщення	183	Ферміонн	289,290
Струм індукційний	172	Феромагнетизм	169
Струм конвекційний	123	Флуоресценція	364
Струм насичення	135, 138	Формула Бальмера	264
Струм повний	183		

Формула Больцмана	87	Циркуляція вектора індукції магнітного поля	149
Формула Вульфа-Брега	218	Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля	100
Формула де Бройля	268	Циркуляція вектора напруженості сторонніх сил	124
Формула Коші	221	Циркуляція напруженості магнітного поля	168
Формула Планка	251,252	Цуг хвильовий	193
Формула Релея-Джінса	250	Час когерентності	193
Формула Річардсона	135	Час ядерний	328
Формула Річардсона-Дешмена	135	Частинка елементарна	338
Формула Томсона	187	Частота обертання	17
Фосфоресценція	364	Частота резонансна	37
Фотогальванічний ефект	253	Числа квантові	284
Фотоефект		Число зарядове	309
Фотоефект в газоподібному середовищі	253	Число масове	309
Фотоефект внутрішній	252	Число степенів вільності	61
Фотоефект зовнішній	252,255	Число хвильове	40
Фотолюмінесценція	364	Шар запірний	362
Фотон	254, 338	Швидкість коливної точки	25
Функції власні	278	Швидкість кутова	17
Функція розподілу молекул за швидкостями	58	Швидкість митєва	7
Функція хвильова	274	Швидкість поширення енергії хвилі	42
Хвилі біжучі	39	Швидкість середня	7
Хвилі електромагнітні	188	Швидкість середня арифметична	59
Хвилі когерентні	43, 193	Швидкість середня квадратична	56
Хвилі поперечні	190	Швидкість фазова	40, 221
Хвилі стоячі	44	Ширина дифракційного максимуму	213
Хвиля довжина	39	Ширина інтерференційної смуги	197
Хвиля інтенсивність	42	Явище електромагнітної індукції	172
Хвиля механічна	38	Явище Столстова	169
Хвиля плоска	39	Ядро атома	309
Хвиля поздовжня механічна	38	Ядро дочірнє	316
Хвиля поперечна механічна	38	Ядро материнське	316
Хвиля сферична	39	Ядро проміжне	328
Хемілюмінесценція	364	Яма потенціальна	133, 279
Хмарка електронна	133		
Центр мас	10		
Цикл (процес) зворотній	80		
Цикл водневий	336		
Цикл(процес) прямий	79		

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ф.Ф. Детлаф, Б.М. Яворский. Курс физики.-М.: Высш. шк., 1989. 609 с.
2. Б.М. Яворський, А.А. Детлаф, Л.Б. Милковська, Г.П. Сергеев. Курс фізики I, - К.: Вища школа, 1970. 356 с.
3. Б.М. Яворський, А.А. Детлаф, Л.Б. Милковська. Курс фізики II, - К.: Вища школа, 1972. 434 с.
4. Б.М. Яворський, А.А. Детлаф. Курс фізики III, - К.: Вища школа, 1973. 499 с.
5. Т.И. Трофимова. Курс физики. – М.: Высш шк., 1990. 478 с.
6. И.В. Савельев. Курс общей физики, т. I, II, III - М.: Наука, 1986.-432 с, 496 с, 318 с.
7. С.Э. Ферми, А.В. Тиморева. Курс общей физики, т. I, II, III. – М.: Физматгиз, 1962. 466 с., 547 с., 644 с.
8. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Механика. – М.: Наука, 1979. 520 с.
9. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная физика. – М.: Наука, 1979. 552 с.
10. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Электричество. – М.: Наука, 1983. 688 с.
11. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Оптика. – М.: Наука, 1985. 752 с.
12. Р.Г. Чеворкян, В. В. Шепель. Курс общей физики. – М.: Высш шк., 1972. 599 с.
13. М.Е. Меньяйлов. Загальна фізика. Електрика і магнетизм. – К.: Вища школа, 1974. 391 с.
14. І.М. Кучерук, В.П. Душенко. Загальна фізика. Оптика. Квантова фізика. – К.: Вища школа, 1991. 463 с.
15. Ф.А. Королев. Курс физики. Оптика, атомная и ядерная физика. – М.: Просвещение, 1974. 608 с.
16. К.Д. Хмельюк, Д.Д. Цициліано. Фізика атома і твердого тіла. – Київ.: Вища школа, 1974. 231 с.
17. Г.И. Епифанов. Физика твердого тела. – Москва.: Высш шк, 1982. 288 с.
18. М.Х. Ибрагимов. Атомная энергетика. Физические основы. – М.: Высш шк, 1987. 125 с.

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

Зачек Ігор Романович
Кравчук Ігор Миронович
Романишин Борис Михайлович
Габа Володимир Миколайович
Гончар Федір Михайлович

КУРС ФІЗИКИ

Редактор *О. Губарєва*

Ком'ютерне складання *М. Мигаль, А. Марценюк*

Художник *А. Наволовський*

Здано у видавництво 12.11.2001, Підписано до друку 18.12.2001.

Формат 70x100 1/16. Папір офсетний. Гарнітура Times.

Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 30,3. Обл.-вид. арк. 29,3.

Тираж 5 000 прим.

Видавництво «Бескид Біт»

м. Львів, вул. Городоцька, 85/21

тел.: (0322) 72-88-29, факс: (0322) 72-16-94

Друк ПТ ВФ «Афіша»



Бескид БІТ