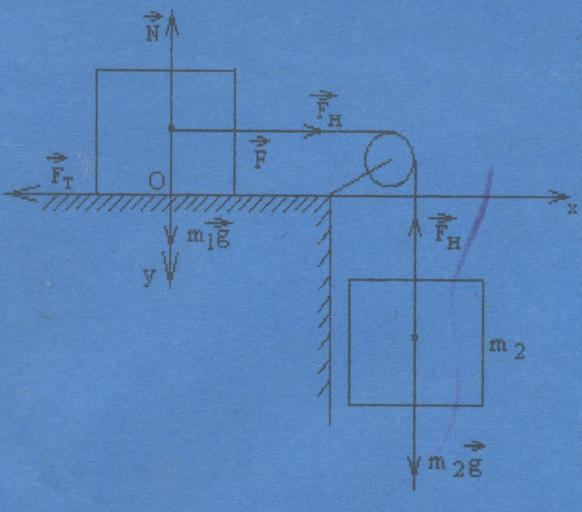
П.М.Зузяк, А.Д.Слободяник

ЗАДАЧІ З ФІЗИКИ

ПРОГРАМА КУРСУ, КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ ТА МЕТОДИЧНІ ПОРАДИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОКРЕМИХ ЗАДАЧ



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Зузяк П.М., Слободянпк А.Д.

ЗАДАЧІ З ФІЗИКИ
Програма курсу, контрольні завдання та методичні поради до розв'язування окремих задач

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник для студентів інженерних спеціальностей та студентів-заочників. Протокол N 10 від "29" травня 2003 р.

Вінниця ВНТУ 2003

УДК 53 (076.1)
С 50

Рецензенти:

В.Г.Колобродов, доктор технічних наук, професор
В.П.Кожем'яко, доктор технічних наук, професор
М.І.Сметанський, доктор педагогічних наук, професор

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Зузяк П.М., Слободяник А.Д.
С 50 **Задачі з фізики. Програма курсу, контрольні завдання та методичні поради до розв'язування окремих задач.** Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2003.- 172 с.

Збірник задач з фізики розроблено відповідно до програми курсу фізики у вищих інженерно-технічних навчальних закладах. До кожного розділу програми представлено відповідну кількість тематичних задач. На початку кожного параграфу приведені основні формули, необхідні для розв'язування запропонованих задач. До кожної теми розглянуті особливості розв'язування типових задач.

Рекомендовано для студентів інженерних спеціальностей та студентів-заочників.

УДК 53 (076.1)

ЗМІСТ

РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. В контрольних роботах умова задачі повністю записується в зошит, нижче скорочено, де всі відомі величини необхідно записати в одиницях СІ.

2. Виконати рисунок, де це можливо, що пояснює умову задачі.

3. Вказати основні формули та закони, на яких базується розв'язування. При використанні похідних формул їх треба вивести.

4. Розв'язування задачі необхідно супроводжувати короткими поясненнями.

5. Розв'язок задачі спочатку слід знайти в загальному вигляді, тобто шукану величину або ж рівняння записати в буквених позначеннях величин, які відомі з умови задачі.

6. Для контролю правильності виведеного виразу потрібно встановити розмірність правої та лівої частини рівняння.

7. Провести підстановку числових значень і вирахувати результат, дотримуючись правил наближених обчислень.

ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1. Контрольна робота виконується чорнилами в шкільному зошиті, на обкладинці якого записують дані про студента - спеціальність, курс, група, шифр, прізвище, ім'я та по батькові.

2. Кожна задача починається з нового листка. Після розв'язування задачі необхідно залишити місце для можливих зауважень рецензента.

3. Контрольна робота зараховується, якщо всі задачі розв'язано правильно і в їх розв'язках немає помилок принципового характеру. У випадку, коли контрольна робота не зарахована, вона повертається студенту на виправлення зауважень. Студент зобов'язаний подати її на повторне рецензування, виконавши розв'язування тих задач, в яких були допущені помилки. Повторна робота подається, як правило, разом з не зарахованою.

4. В контрольній роботі студент повинен розв'язати задачі того варіанта, номер якого співпадає з порядковим номером в журналі. Номери задач, які має розв'язати студент в контрольній роботі, визначаються за таблицею варіантів, яка подана в додатках.

5. Зарахована контрольна робота подається викладачеві на екзамені. Студент повинен бути готовий під час екзамену дати пояснення по суті розв'язання задач, що входять в контрольну роботу.

6. В кінці контрольної роботи необхідно вказати, які підручники чи посібники були використані при виконанні контрольної роботи (автор, назва підручника, рік видання). Це дозволить рецензенту, при необхідності, вказати конкретний матеріал для додаткового вивчення і завершення контрольної роботи.

ПРОГРАМА КУРСУ

Частина 1

Кінематика. Динаміка матеріальної точки. Швидкість, прискорення. Тангенціальне і нормальне прискорення. Рівномірний і рівнозмінний рух. Кутові швидкість і прискорення.

Закони Ньютона. Сили в механіці. Закон збереження імпульсу. Обертальний рух. Закон збереження енергії. Момент сили. Момент інерції. Основне рівняння динаміки обертального руху. Робота. Кінетична і потенціальна енергія. Закон збереження енергії.

Основні поняття електростатики. Закон Кулона. Напруженість поля. Теорема Гаусса. Поле точкового заряду, системи зарядів та зарядів, розподілених по об'єму, поверхні і нитці. Потенціал. Потенціал поля заряджених тіл. Зв'язок потенціалу і напруженості.

Електричне поле в провідниках. Постійний струм. Електроємність. Конденсатори. З'єднання конденсаторів. Енергія електричного поля.
Закони Ома та Джоуля-Ленца в інтегральній та в диференціальній формах
Правила Кірхгофа.

Магнітне поле в вакуумі. Дія магнітного поля на провідник з струмом.
Закон Біо-Савара-Лапласа. Магнітне поле прямого, колового струмів і соленоїда. Закон Ампера. Виток з струмом в магнітному полі. Робота переміщення провідника з струмом у магнітному полі.

Сила Лоренца. Електромагнітна індукція. Рух заряджених частинок у магнітному полі. Закон Фарадея. Правило Ленца. Самоіндукція, індуктивність. Взаємоіндукція.

Частина 2

Коливання і хвилі. Гармонічні коливання. Загальна характеристика гармонічних коливань. Пружинний і математичний маятник. Вільні коливання в контурі без активного опору. Зображення гармонічних коливань за допомогою векторної діаграми. Енергія гармонічних коливань.

Додавання коливань. Додавання однаково напрямлених коливань. Додавання взаємно перпендикулярних коливань.

Загасаючі і вимушені коливання. Механічні загасаючі коливання. Електромагнітні загасаючі коливання. Вимушені механічні коливання. Резонанс. Вимушені електромагнітні коливання. Поняття про змінний струм.

Хвилі. Пружні хвилі. Поздовжні і поперечні хвилі. Рівняння плоскої хвилі. Довжина хвилі. Хвильове рівняння. Фазова і групова швидкість хвилі. Електромагнітні хвилі та їх властивості. Вектор Пойнтінга.

Геометрична оптика. Світлові хвилі. Показник заломлення. Оптична довжина шляху. Закони геометричної оптики. Повне внутрішнє відбиття. Волоконна оптика.

Хвильова оптика. Інтерференція двох хвиль. Умови утворення максимумів і мінімумів. Стоячі хвилі. Інтерференція в тонких плівках. Кільця Ньютона. Інтерферометри. Принцип Гюйгенса-Френеля. Метод зон Френеля. Дифракція від щілини. Дифракційна гратка. Дифракція рентгенівських променів. Формула Вульфа-Брегів. Поняття про голографію. Поляризоване світло. Закон Брюстера. Закон Малюса. Штучна анізотропія.

Квантова фізика. Корпускулярно-хвильовий дуалізм. Теплове випромінювання. Закони Кірхгофа, Віна і Стефана-Больцмана. Розподіл енергії в спектрі абсолютно чорного тіла. Гіпотеза і формула Планка. Фотоефект. Рівняння Ейнштейна. Фотони. Імпульс фотона.

Елементи квантової механіки. Гіпотеза і формула де-Бройля. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга. Подання стану частинки в квантовій механіці. Хвильова функція. Рівняння Шредінгера. Вільна частинка. Частинка в одновимірному "потенціальному ящику". Гармонічний осцилятор. Тунельний ефект.

Частина 3

Прості задачі квантової механіки. Теорія атому. Частинка в нескінченно глибокій потенціальній ямі. Тунельний ефект. Теорія і спектр атома водню. Багатоелектронні атоми. Рентгенівські промені.

Атомне ядро. Нуклони. Ядерні сили. Енергія зав'яку, дефект маси. Радіоактивність. Закон радіоактивного розпаду. Ядерні реакції і закони збереження. Реакції ділення і синтезу.

Основні поняття термодинаміки. Рівняння стану ідеального газу. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії тиску. Ізопроцеси. Закон Дальтона. Перший і другий закони термодинаміки. Теплоємність. Робота розширення газу. Адіабатичний процес. І закон термодинаміки і його застосування до ізопроцесів. Цикл Карно і його к.к.д. ІІ закон термодинаміки. Ентропія.

Розподіл Максвела. Емпіричні закони Фіка, Фур'є, Ньютона. Молекулярно-кінетична теорія явищ переносу. Розподіл частинок за швидкостями. (Розподіл Максвела). Середня енергія теплового руху частинок.

Властивості кристалів. Термодинамічні властивості електронного газу. Будова ідеальних кристалів. Теплоємність кристалів. Енергія Фермі електронного газу. Внутрішня енергія електронного газу.

ЧАСТИНА І

РОЗДІЛ 1. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

§ 1. Кінематика матеріальної точки

У кінематиці рух тіл розглядають формально, без пояснення причин зміни руху і, отже, не використовують ні поняття сили $\vec{F}$, ні поняття маси m тіла. Найпростішою фізичною системою є або одна матеріальна точка, або їх відносно невелика сукупність.

Положення матеріальної точки відносно будь-якої системи відліку в довільний момент часу t визначається радіусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (рис.1.1).

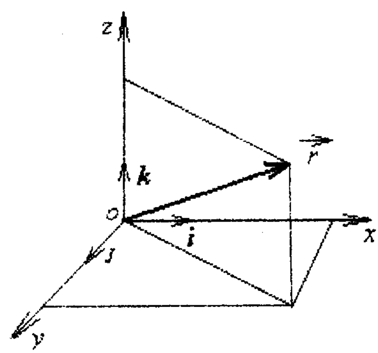


Рис.1.1

Якщо ввести одиничні вектори (орти) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направлені за відповідними осями (OX, OY, OZ) то радіус-вектор можна представити в такому вигляді:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z\,, \qquad (1.1)$$

де x, y, z - компоненти радіуса-вектора $\vec{r}$.

Вектор швидкості $\vec{V}$ і вектор прискорення $\vec{a}$ визначаються через відповідні похідні:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\,,\ \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \qquad (1.2)$$

З законом руху пов'язана основна задача кінематики. Формально цих задач дві: пряма і обернена. Пряма основна задача кінематики полягає в находженні будь-якого параметра руху за відомим законом руху. Вона розв'язується шляхом послідовного застосування основних законів кінематики (1.1) - (1.2). Обернене завдання кінематики полягає у визначенні закону руху за будь-яким відомим параметром руху (вектором швидкості $\vec{V}$ або прискорення $\vec{a}$).

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. Положення матеріальної точки задається радіус-вектором $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z.$$

2. Середня швидкість $\langle\vec{V}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$,

   де $\Delta\vec{r}$ - переміщення матеріальної точки за час Δt.

3. Миттєва швидкість $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}V_x + \vec{j}V_y + \vec{k}V_z$,

   де $V_x = \frac{dx}{dt}$; $V_y = \frac{dy}{dt}$; $V_z = \frac{dz}{dt}$ - проекції вектора швидкості $\vec{V}$ на осі координат.

Абсолютне значення швидкості $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$.

4. Прискорення $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$,

   де $a_x = \frac{dV_x}{dt}$; $a_y = \frac{dV_y}{dt}$; $a_z = \frac{dV_z}{dt}$ - проекції прискорення $\vec{a}$ на осі координат. Абсолютне значення прискорення $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

5. При криволінійному русі прискорення можна представляти як суму нормальної $\vec{a}_n$ і тангенціальної $\vec{a}_\tau$ складових $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$.

Абсолютні значення цих прискорень $a_n = \frac{V^2}{R}$; $a_\tau = \frac{dV}{dt}$; $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$, де R- радіус кривизни в даній точці траєкторії.

6. Кінематичне рівняння рівнозмінного руху (a=const) вздовж осі x: $x = x_0 + V_0 t \pm \frac{at^2}{2}$, V_0- початкова швидкість. Рівняння швидкості при рівнозмінному русі $V = V_0 \pm at$.

7. Положення матеріальної точки при обертальному русі визначається кутовим переміщенням φ.

Середня швидкість $\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

де $\Delta\varphi$- зміна кута обертання матеріальної точки за час Δt.

Миттєва кутова швидкість $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

8. Кутове прискорення $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$.

9. Кінематичне рівняння рівномірного обертального руху ($\omega = const$, $\varepsilon = 0$): $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, де φ_0 - початкове кутове переміщення.

Кінематичне рівняння рівнозмінного обертального руху ($\varepsilon = const$): $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$, ω_0 - початкова кутова швидкість. Рівняння швидкості при рівнозмінному обертальному русі $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$.

10. Зв'язок між лінійними та кутовими величинами.

Лінійна та кутова відстань пов'язані між собою таким співвідношенням $S = \varphi R$, де S – довжина дуги; R- радіус кола.

Лінійна та кутова швидкості - $V = \omega R$.

Лінійне та кутове прискорення - $a_\tau = \varepsilon R$, $a_n = \omega^2 R$, $a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

§ 2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Радіус-вектор матеріальної точки з часом змінюється за законом $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 7\vec{k}$. *Знайти: 1) швидкість* $\vec{V}$, *прискорення* $\vec{a}$; *2) модуль швидкості в момент часу* $t = 2c$; *3) шлях s, пройдений за перших 10 с руху; 4) модуль переміщення* $|\Delta\vec{r}|$ *за цей самий час; 5) пояснити знайдений результат.*

Розв'язування

1) $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}V_x + \vec{j}V_y + \vec{k}V_z$. З виразу для радіус-вектора знаходимо:

$V_x = \frac{dx}{dt} = 6t$, $V_y = \frac{dy}{dt} = 8t$, $V_z = \frac{dz}{dt} = 0$. Тоді $\vec{V} = 6t\vec{i} + 8t\vec{j}$.

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $a_x = \frac{dV_x}{dt} = 6$, $a_y = \frac{dV_y}{dt} = 8$, $a_z = \frac{dV_z}{dt} = 0$,

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.

Оскільки прискорення не залежить від часу, то рух рівноприскорений. Модуль прискорення $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 м/с$.

2) Модуль швидкості $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$, $V = 10t = 20 м/с$.

3) Шлях, пройдений за перших 10с: $s = \frac{at^2}{2}$, s=500 м.

4) Модуль переміщення за 10 с: $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \sqrt{(3t^2)^2 + (4t^2)^2} = 500 м$.

5) Рівність шляху s модулю радіус-вектора переміщення $\vec{r}$ вказує на те, що рух прямолінійний.

Приклад 2

Визначити модуль швидкості матеріальної точки в момент часу t=2c, якщо точка рухається за законом $\vec{r} = \alpha t^2\vec{i} + \beta\sin(\pi t)\vec{j}$, *де* $\alpha = 2$ *м/с*^{2}, $\beta = 3$*м.*

Розв'язування

Фізична система складається з одного ідеального об'єкта - матеріальної точки. Заданий формально закон її руху. Отже, наша задача - пряма задача кінематики (за відомим законом руху визначити один з параметрів руху - у даному випадку модуль вектора швидкості). Використовуючи відомий закон руху, знаходимо, що компоненти радіуса-вектора $\vec{r}(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha t^2 \\ y(t) &= \beta\sin(\pi t) \\ z(t) &= 0 \end{aligned} \qquad (1.3)$$

Таким чином, матеріальна точка рухається в площині XOY, тому кожний з векторів $\vec{r}(t)$, $\vec{V}(t)$ і $\vec{a}(t)$ має дві компоненти.

За означенням вектора швидкості з рівнянь (1.2) одержуємо проекції вектора швидкості на відповідні осі координат:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} = 2\alpha t \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = \beta\pi\cos(\pi t) \end{aligned} \qquad (1.4)$$

Звідси знаходимо шуканий модуль вектора швидкості:

$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{4\alpha^2 t^2 + \beta^2\pi^2\cos^2(\pi t)}$.

Підставивши числові значення, одержимо $\vec{V}$=12,4 м/с.

Приклад 3

Матеріальна точка рухається за законом $\vec{r} = \alpha\sin(5t)\vec{i} + \beta\cos^2(5t)\vec{j}$, *де* $\alpha = 2$ *м,* $\beta = 3$ *м. Визначити вектор швидкості матеріальної точки, вектор прискорення і траєкторію руху матеріальної точки..*

Розв'язування

Це пряма задача кінематики. Знаходимо проекції радіуса-вектора на відповідні координати:

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha\sin(5t) \\ y(t) &= \beta\cos^2(5t) \\ z(t) &= 0 \end{aligned} \qquad (1.5)$$

Таким чином, рух матеріальної точки відбувається в площині XOY. Далі, визначаємо проекції вектора швидкості на відповідні координати:

$$V_{x(t)} = 5\alpha\cos(5t)$$
$$V_{y(t)} = -5\beta\sin(10t) \qquad (1.6)$$

З отриманих рівнянь знаходимо проекції вектора прискорення на відповідні осі координат:

$$a_{x(t)} = -25\alpha\sin(5t)$$
$$a_{y(t)} = -50\beta\cos(10t) \qquad (1.7)$$

Для одержання рівняння траєкторії виключимо час t із системи рівнянь (1.5):

$$y = 3 - \frac{3}{4}x^2 \qquad (1.8)$$

Матеріальна точка рухається траєкторією, яка має вигляд параболи.

Приклад 4

Швидкість матеріальної точки змінюється за законом $\vec{V} = \alpha(2t^3 - \beta)\vec{i} - \gamma\sin(\frac{2\pi}{3}t)\vec{j}$, *де* $\alpha = 1м/c^4$, $\beta = 1c^3$, $\gamma = 1м/c$. *Визначити закон руху, якщо в початковий момент часу t=0 тіло знаходилося на початку координат, тобто* $\vec{r}_0 = \{0{,}0{,}0\}$.

Розв'язування

Фізична система складається з однієї матеріальної точки. Дана задача - обернена задача кінематики (за одним відомим параметром руху - швидкістю - знайти закон руху). Закон руху $\vec{r} = \vec{r}(t)$ і вектор швидкості $\vec{V}$ пов'язані за допомогою векторного диференціального рівняння (1.2). Підставляючи ці значення, отримаємо систему трьох диференціальних рівнянь для трьох невідомих функцій x(t), y(t) і z(t)- компонент радіуса-вектора $\vec{r}$:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(2t^3 - \beta),$$
$$\frac{dy}{dt} = -\gamma\sin\frac{2\pi}{3}t, \qquad (1.9)$$
$$\frac{dz}{dt} = 0$$

Після інтегрування, знаходимо

$$x = \alpha(\frac{1}{2}t^4 - \beta t) + C_1,$$
$$y = \frac{3\gamma}{2\pi}\cos(\frac{2\pi}{3}t) + C_2, \qquad (1.10)$$
$$z = C_3$$

Довільні постійні визначаються з початкових умов. Враховуючи, що x=0, y=0, z=0 в початковий момент часу (t=0), із системи рівнянь (1.10) отримаємо, що $C_1 = 0,\ C_2 = -\frac{3\gamma}{2\pi},\ C_3 = 0$.

Остаточно визначаємо координати радіуса-вектора:

$$x(t) = \alpha(\frac{1}{2}t^4 - \beta t),\ \ y(t) = \frac{3\gamma}{2\pi}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) - 1\right],\ \ z(t) = 0$$

У загальному вигляді закон руху має вигляд:

$$\vec{r}(t) = \alpha(\frac{1}{2}t^4 - \beta t)\vec{i} + \frac{3\gamma}{2\pi}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) - 1\right]\vec{j}$$

При розв'язуванні прямої задачі (дано закон руху - знайти швидкість), можна одержати вихідне значення вектора швидкості:

$$\vec{V} = \alpha(2t^3 - \beta)\vec{i} - \gamma\sin(\frac{2\pi}{3}t)\vec{j}$$

Приклад 5

Прискорення матеріальної точки змінюється за законом $\vec{a} = \alpha t^2\vec{i} - \beta\vec{j}$, *де* $\alpha = 3м/c^4,\ \beta = 3м/c^2$. *Знайти, на якій відстані від початку координат вона буде знаходитися в момент часу t=1 с, якщо* $\vec{V}_0 = 0,\ \vec{r}_0 = 0$ *при t=0.*

Розв'язування

Для того щоб визначити, на якій відстані від початку координат вона знаходилася в момент часу t=1 с, необхідно знати закон її руху. Таким чином, перед нами обернена задача кінематики: дано якийсь параметр руху (у цьому випадку прискорення), треба визначити закон руху $\vec{r} = \vec{r}(t)$ і далі знайти модуль радіуса-вектора $|\vec{r}|$ у момент часу t=1 с.

Спочатку визначимо вектор швидкості з рівняння (1.2):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \text{ або } \vec{a} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}$$

Порівнюючи закон зміни прискорення матеріальної точки з цим рівнянням, отримаємо два диференціальних рівняння:

$$\frac{dV_x}{dt} = \alpha t^2,\ \ \frac{dV_y}{dt} = -\beta.$$

Після інтегрування отримаємо відповідні координати вектора швидкості:

$$V_x = \frac{\alpha t^3}{3} + C_1,\ V_y = -\beta t + C_2$$

Враховуючи початкові умови (V_x=0, V_y =0 при t=0) знаходимо значення довільних констант C_1=0 і C_2=0.

З врахуванням того, що $\frac{dx}{dt}=\frac{\alpha t^3}{3}$, $\frac{dy}{dt}=-\beta t$ визначаємо координати x(t), y(t) радіуса-вектора $\vec{r}(t)$:

$$x(t)=\frac{\alpha t^4}{12}+C_3,\ y(t)=-\frac{\beta t^2}{2}+C_4,$$

де C_3 і C_4 – довільні константи, що визначаються з початкових умов (C_3=C_4=0).

Закон руху має такий вигляд:

$$\vec{r}(t)=\frac{\alpha t^4}{12}\vec{i}-\frac{\beta t^2}{2}\vec{j}$$

За формулою для модуля вектора визначаємо шукану відстань матеріальної точки від початку координат у момент часу t=1с:

$$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

Звідси одержуємо модуль радіуса-вектора $|\vec{r}|$=1.52 м.

Приклад 6

Потяг рухається прямолінійно зі швидкістю V_0=180км/год. Раптово на шляху виникає перешкода, і машиніст вмикає гальмовий механізм. З цього моменту швидкість потягу змінюється за законом $V=V_0-at^2$, де a=1м/с^3. Який гальмовий шлях потягу? Через який час після початку гальмування він зупиниться?

Розв'язування

Перед нами обернена задача кінематики. Розв'язання цієї оберненої задачі кінематики отримується уже відомим нам кінематичним методом. Оскільки рух тіла є одновимірним (уздовж осі OX), то для знаходження закону його руху маємо одне диференціальне рівняння:
$dx=Vdt$ або $dx=(V_0-at^2)dt$. Після інтегрування останнього рівняння з врахуванням початкових умов отримуємо закон руху $x=V_0t-\frac{at^3}{3}$. Час руху потягу визначається з умови рівності нулеві його швидкості: $0=V_0-at^2$. Тоді $t=\sqrt{\frac{V_0}{a}}$. Після підстановки числових значень отримаємо t=7 с. Гальмовий шлях з формули $x=V_0t-\frac{at^3}{3}$ буде рівним 230 м.

§ 3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1.1. Першу половину часу свого руху автомобіль рухався зі швидкістю 60 км/год, а другу половину часу - зі швидкістю 30 км/год. Яка середня швидкість руху автомобіля?

1.2. Першу половину свого шляху автомобіль рухався зі швидкістю 60км/год, а другу половину зі швидкістю 30 км/год. Яка середня швидкість руху автомобіля?

1.3. Пароплав пливе річкою від пункту А до пункту В зі швидкістю 10 км/год, а назад зі швидкістю 16 км/год. Знайти середню швидкість $\vec{V}$ пароплава і швидкість $\vec{u}$ течії річки.

1.4. Координати матеріальної точки змінюються з часом за законом $x = 4t, y = 3t, z = 0$. Знайти залежність пройденого точкою шляху від часу, відраховуючи відстань від початкового її положення. Який шлях пройде точка за 5 с?

1.5. Першу чверть шляху мотоцикліст проїхав зі швидкістю $\vec{V}_1 = 10\ м/с$, другу зі швидкістю $\vec{V}_2 = 15\ м/с$, третю зі швидкістю $\vec{V}_3 = 20\ м/с$ і останню зі швидкістю $\vec{V}_4 = 5\ м/с$. Визначити середню швидкість мотоцикліста на всьому шляху.

1.6. Знайти середню швидкість руху автомобіля, якщо відомо, що 1/4 частини часу він рухався зі швидкістю 16 м/с, а весь інший час зі швидкістю 8 м/с.

1.7. Пасажир електропоїзда, що рухається зі швидкістю 15 м/с, помітив, що зустрічний поїзд довжиною 210 м пройшов повз нього за 6,0 с. Визначити швидкість руху зустрічного поїзда.

1.8. Визначити швидкості велосипедиста і пішохода, якщо відомо, що при їх русі в одному напрямі за кожну хвилину руху пішохід відстає від велосипедиста на відстань S_1=210 м, а якщо, не змінюючи за модулем швидкості, вони рухаються назустріч один одному, то за кожні 2 хв відстань між ними зменшується на S_2=780 м.

1.9. При нерухомому ескалаторі метрополітену пасажир піднімається за час t_1=120 с, а на рухомому при тій же швидкості відносно східець, за t_2=30 с. Визначити час піднімання пасажира, що стоїть, на рухомому ескалаторі.

1.10. Моторний човен пливе річкою з одного пункту в інший і назад. В скільки разів час руху човна проти течії більше часу руху за течією, якщо швидкість течії $\vec{V}_1$ =2 м/с, а швидкість човна відносно води $\vec{V}_2$ =10 м/с?

1.11. Тіло кинуте вертикально вгору з початковою швидкістю 9,8 м/с. Побудувати графік залежності висоти h і швидкості $\vec{V}$ від часу t для інтервалу $0 \le t \le 2c$ через 0,2 с.

1.12. Тіло падає з висоти 19,6 м без початкової швидкості ($\vec{V}_0 = 0$). Який шлях пройде тіло за першу й останню 0.1 с свого руху?

1.13. Тіло падає з висоти 19,6 м без початкової швидкості ($\vec{V}_0 = 0$). За який час тіло пройде перший і останній 1 м свого шляху?

1.14. Вільно падаюче тіло в останню секунду руху проходить половину всього шляху. З якої висоти h падає тіло і який час t його падіння?

1.15. Визначити швидкість моторного човна відносно води, якщо при русі за течією річки його швидкість 10 м/с, а при русі проти течії 6,0 м/с. Чому дорівнює швидкість течії води в річці?

1.16. Визначити тривалість польоту літака між двома пунктами, розташованими на відстані 1000 км. якщо швидкість зустрічного вітру $\vec{V}_1$=25 м/с, а середня швидкість літака відносно повітря $\vec{V}_2$=250 м/с. Чому дорівнює час польоту літака при побіжному вітрі?

1.17. Потяг рухається зі швидкістю 36 км/год. Якщо вимкнути струм, то потяг, рухаючись рівносповільнено, зупиняється через час t=20 с. Яке прискорення $\vec{a}$ потягу? На якій відстані s до зупинки необхідно вимкнути струм?

1.18. Потяг, рухаючись рівносповільнено, протягом часу t=1,00 хв зменшує свою швидкість від 40.0 км/год до 28,0 км/год. Знайти прискорення $\vec{a}$ потягу і відстань s, пройдену ним за час гальмування.

1.19. Визначити швидкість зустрічного вітру, якщо при русі автомобіля зі швидкістю $\vec{V}_1$=15 м/с краплі дощу, що мають вертикальну складову швидкості $\vec{V}_2$= 10 м/с. утворять на шибці автомобіля смуги під кутом $\alpha = 30^\circ$.

1.20. Визначити час польоту літака між двома пунктами, що знаходяться на відстані 500 км, якщо швидкість літака відносно повітря $\vec{V}_1$=100 м/с, а швидкість зустрічного вітру, спрямованого під кутом до напряму руху, $\vec{V}_2$=30 м/с.

1.21. Рух матеріальної точки задано рівнянням $x = at + bt^2 + ct^3$ де a =5.0 м/с, b=0,20 м/с^2, c=0,10 м/с^3. Визначити швидкість точки в моменти часу t_1=2,0 с і t_2=4 с, а також середню швидкість в проміжку часу від t_1 до t_2.

1.22. Визначити траєкторію руху точки, заданого рівняннями: $x = 4t^2 + 2;\ y = 6t^2 - 3;\ z = 0$. Побудувати графік залежності шляху, пройденого точкою, від часу.

1.23. Рух матеріальної точки задано рівняннями: $x = 8t^2 + 4;\ y = 6t^2 - 3;\ z = 0$. Визначити модулі швидкості і прискорення точки в момент часу t=10 с.

1.24. Який шлях пройде тіло за час t=10 с від початку руху, якщо рівняння його руху $x = 2t^2 + 3t + 4,\ y = 3t^2 + 4t - 2,\ z = 0$?

1.25. Прямолінійний рух точки описується рівнянням $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 8t\vec{k}$. Знайти шлях, пройдений точкою за перші 4 с руху.

1.26. Швидкість матеріальної точки, що рухається уздовж осі X, визначається рівнянням $V_x = 0{,}2 - 0{,}1t$. Знайти координату точки в момент часу t=10 с, якщо в початковий момент часу вона знаходилася в точці x_0=1 м.

1.27. Тіло, що здійснює рівноприскорений рух, проходить однакові відрізки шляху довжиною S=15 м відповідно за t_1=2,0 с і t_2=1,0 с. Визначити модулі прискорення і швидкості тіла на початку першого відрізку шляху.

1.28. Визначити шлях, який проходить частинка, що рухається прямолінійною траєкторією протягом 10 с, якщо її швидкість змінюється за законом $v = 30 + 2t$. У момент часу t_0=0 s=0.

1.29. Визначити початкову швидкість тіла, кинутого вертикально вгору, якщо відмітку (висоту) 60 м воно проходило 2 рази з проміжком часу 4,0 с. Опір повітря не враховувати.

1.30. Камінь кинутий горизонтально зі швидкістю 15,0 м/с. Знайти нормальне і тангенціальне прискорення каменя через час t=1,00 с після початку руху.

1.31. Камінь кинутий горизонтально зі швидкістю 10,00 м/с. Знайти радіус кривизни траєкторії каменя через час t=3.00 с після початку руху.

1.32. М'яч кинутий зі швидкістю 10,00 м/с під кутом a=40° до горизонту. На яку висоту підніметься м'яч? На якій відстані від місця кидання він упаде на землю? Який час він буде в русі?

1.33. Тіло, кинуте вертикально вниз з початковою швидкістю 19,6 м/с, за останню секунду пройшло n=1/4 частину усього шляху. Визначити час падіння тіла і його кінцеву швидкість. З якої висоти кинуте тіло?

1.34. Частинка рухається з прискоренням. Визначити модуль швидкості частинки в момент часу t=2 с, якщо в початковий момент часу t=0 її швидкість була $\vec{v}_0 = 3\vec{i} + 1\vec{j} - 1\vec{k}$.

1.35. На похилій площині з кутом нахилу α=30° лежить тіло. Яке мінімальне прискорення необхідно надати похилій площині в

...ризонтальному напрямі, щоб тіло, яке лежить на ній, вільно падало?

1.36. Яка траєкторія точки, якщо її радіус-вектор відносно початку координат змінюється з часом за законом $\vec{r} = 2t\vec{i} + 8t^2\vec{j}$?

1.37. Радіус-вектор частинки визначається виразом $\vec{r} = 3t\vec{i} + 0{,}t^2\vec{j}$. Визначити модулі швидкості і прискорення частинки в момент t=5 с.

1.38. Під яким кутом до обрію потрібно направити струмінь води, щоб висота його підняття була рівна відстані, на яку б'є струмінь води?

1.39. Під яким кутом до обрію кинуте тіло, якщо відомо, що максимальна висота підйому дорівнює 1/4 частини дальності польоту? Опір повітря не враховувати.

1.40. З вежі висотою 19,6 м у горизонтальному напрямі кинуте тіло зі швидкістю 10 м/с. Записати рівняння траєкторії тіла. Чому дорівнює швидкість тіла в момент падіння? Який кут утворить ця швидкість з горизонтальним напрямом? Опір повітря не враховувати.

1.41. З однієї точки одночасно кинуті два тіла з однаковою швидкістю під різними кутами $\alpha_1 i \alpha_2$ до горизонту. Визначити відстань між тілами через час t=2,0 с після початку руху, якщо $\vec{V}_0$=10 м/с, а α_1=30° і α_2=60°.

1.42. На якій висоті вектор швидкості тіла, кинутого під кутом a=45° до обрію з початковою швидкістю $\vec{V}_0$=20 м/с, буде складати з горизонтом кут $\beta = 30^0$? Опір повітря не враховувати.

1.43. Тіло кинуто горизонтально зі швидкістю $\vec{V}_0$=15 м/с. Знайти нормальне a_n і тангенціальне a_τ, прискорення через час t=1 с після початку руху тіла.

1.44. Тіло кинуто під кутом α_0 до горизонту зі швидкістю $\vec{V}_0$. Визначити, як залежить від часу швидкість $\vec{V}$ тіла і кут β її нахилу до горизонту.

1.45. Тіло кинуто під кутом α_0 до горизонту зі швидкістю $\vec{V}_0$. Знайти залежність координат тіла від часу (закони руху тіла) і написати рівняння траєкторії.

1.46. З вершини гори кинуто тіло в горизонтальному напрямі зі швидкістю 19,6 м/с. Визначити тангенціальне і нормальне прискорення тіла через 2,0 с після початку руху. Який кут утворює вектор повного прискорення з вектором швидкості?

1.47. Матеріальна точка рухається у площині XOY, що описується рівняннями $x = 3\sin\omega t$, $y = 3\cos\omega t$. Записати рівняння траєкторії точки. Знайти залежність пройденого точкою шляху від часу, вважаючи, що при t=0: S=0.

1.48. Матеріальна точка рухається в площині XOY. Визначити траєкторію точки, якщо її рух заданий рівняннями: $x = 3\sin\omega t$, $y = 2\cos\omega t$.

1.49. На горизонтальному валу, що робить 200 об/с, на відстані 20 см один від одного закріплені два тонких диски. Для визначення швидкості польоту кулі зроблений постріл так, що куля пробила обидва диски на однаковій відстані від осі обертання. Визначити швидкість кулі, якщо кутовий зсув пробоїн виявився рівним 18°.

1.50. При повороті танка, що рухається зі швидкістю 24 км/год, його центр мас описує дугу радіусом R=9,0 м. Знайти різницю швидкостей гусениць танка, якщо відстань між ними d=1,5 м.

1.51. Скільки оборотів зробили колеса автомобіля після включення гальма до повної зупинки, якщо в момент початку гальмування автомобіль мав швидкість $\vec{V}_0$=60 км/год і зупинився за t = 3,0 с після початку гальмування? Діаметр коліс D= 0,70 м. Чому дорівнює середнє кутове прискорення коліс при гальмуванні?

1.52. Визначити кутове прискорення маховика, частота обертання якого за час N=20 повних оборотів зростає рівномірно від n_0=1,0 об/с до n=5,0 об/с.

1.53. Визначити кутову швидкість і кутове прискорення твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі Z за законом $\varphi = at - bt^2$, де a=20 c^{-1}, b=1 c^{-2}. Який характер руху цього тіла? Побудувати графіки залежності кутової швидкості і кутового прискорення від часу.

1.54. Матеріальна точка рухається траєкторією, що являє собою коло радіусом R=20 см, рівноприскорено з тангенціальним прискоренням a_τ = 5 м/с^2. Через який час t після початку руху нормальне (доцентрове) прискорення $a_д$ буде більшим від тангенціального a_τ в п = 2 рази?

1.55. Матеріальна точка почала рухатись рівноприскорено траєкторією, що являє собою коло радіусом R=1 м і за час t=10 с пройшла шлях s=50 м. З яким доцентровим прискоренням $a_д$ рухалась точка через час t=5 с після початку руху?

1.56. Вісь обертового диска рухається поступально в горизонтальному напрямі зі швидкістю $\vec{V}$. Вісь горизонтальна, напрям її руху перпендикулярний до неї. Визначити миттєву швидкість верхньої точки $\vec{V}_В$ диска, якщо миттєва швидкість нижньої точки $\vec{V}_Н$.

1.57. Під час обертання тіла траєкторією, що являє собою коло, кут між повним прискоренням a і лінійною швидкістю $\vec{V}$ дорівнює a= 30°. Яке числове значення відношення a_n/a_t?

1.58. Махове колесо, що оберталося зі швидкістю ω=240 об/хв, зупиняється протягом часу t=0,5 хв. Вважаючи його рух рівнозмінним, знайти, скільки обертів N воно зробило до повної зупинки.

1.59. Поїзд в'їжджає на закруглену ділянку з початковою швидкістю $\vec{V}_0$= 54 км/год і проходить шлях S=600 м за час t=30 с. Радіус закруглення дорівнює R= 1 км. Визначити швидкість $\vec{V}$ і повне прискорення a поїзда в кінці повороту.

1.60. На шків радіусом R=10 см намотана нитка, до одного краю якої прикріплено вантаж. Вантаж починає опускатися з прискоренням $\vec{a}$=0,02 м/с^2. Чому дорівнює кутова швидкість шківа в той момент, коли вантаж опуститься на h=1 м ?

§ 4. Динаміка матеріальної точки

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

Основне рівняння динаміки (другий закон Ньютона):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

де $\vec{p} = m\vec{v}$ - імпульс частинки, т- її маса, v - швидкість.

Імпульс системи дорівнює сумі імпульсів її окремих частинок:

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i$$

Поступальний рух системи частинок як цілого можна характеризувати рухом однієї точки - центра мас системи:

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F},$$

де $m = \sum m_i$ - сумарна маса всіх частинок розглянутої системи,

$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ - результуюча всіх зовнішніх сил, v_c швидкість руху центра мас.

Радіус-вектор, що визначає положення центра мас системи частинок у просторі відносно довільної точки 0:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}.$$

де m_i - маса і-частинки, $\vec{r}_i$ - її радіус-вектор з початком у точці 0.

Рівняння руху тіла змінної маси:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{u}\frac{dm}{dt}+\vec{F}.$$

де $\vec{u}$ - швидкість відокремлюваної речовини відносно рухомого тіла.

Швидкість ракети (формула Ціолковського):

$$v=u\ln\frac{M_0}{M},$$

де u- швидкість частинок відносно ракети, M_0 і M - початкова і поточна маси ракети.

Сила тертя ковзання:

$$F=\mu N,$$

де μ - коефіцієнт тертя, N - сила нормального тиску.

Сила пружності

$$F_{пр}=-kx,$$

де k-коефіцієнт пружності, x- абсолютна деформація.

Сила гравітаційної взаємодії

$$F=G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

де G- гравітаційна стала; m_1, m_2 – маси взаємодіючих тіл; r- відстань між ними.

Робота, що виконується постійною силою

$$\Delta A=F\cdot\Delta r, \text{ або } \Delta A=F\cdot\Delta r\cdot\cos\alpha,$$

де α - кут між напрямками векторів сили $\vec{F}$ і переміщення $\vec{r}$.

Робота, що виконується змінною силою

$$A=\int_L F(r)\cos\alpha dr,$$

де інтегрування проводиться вздовж траєкторії L.

Середня потужність за інтервал часу Δt

$$\langle N\rangle=\Delta A/\Delta t$$

Миттєва потужність

$$N=\frac{dA}{dt}, \text{ або } N=F\vartheta\cos\alpha.$$

Кінетична енергія матеріальної точки, що рухається поступально

$$T=m\vartheta^2/2, \text{ або } T=p^2/2m.$$

Потенціальна енергія і сила, що діє на тіло в даній точці поля, пов'язані співвідношенням

$$F=grad\Pi \text{ або } F=-(\frac{d\Pi}{dx}\vec{i}+\frac{d\Pi}{dy}\vec{j}+\frac{d\Pi}{dz}\vec{k}),$$

де $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ - одиничні вектори (орти).

Робота сил поля дорівнює зменшенню потенціальної енергії частинки в даному полі:

$$A = E_{p1} - E_{p2}$$

Приріст кінетичної енергії частинки:

$$E_{k2} - E_{k1} = A$$

де А - робота результуючої всіх сил, що діють на частинку. Збільшення повної механічної енергії частинки в потенціальному полі:

$$E_1 - E_2 = A_{стор},$$

де $A_{стор}$ - алгебраїчна сума робіт усіх сторонніх сил.

Закон зміни імпульсу системи:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

де $\vec{F}$ - результуюча всіх зовнішніх сил.

У замкнутій системі повний імпульс не змінюється (закон збереження імпульсу):

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = const$$

Момент сили $\vec{M}$ відносно деякої точки О:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}],$$

де $\vec{r}$ - радіус-вектор, проведений із точки О в точку прикладання сили $\vec{F}$.

Момент імпульсу частинки відносно деякої точки О:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}],$$

де $\vec{r}$ радіус-вектор, проведений із точки О в точку, де знаходиться частинка. $\vec{p} = m\vec{v}$ - імпульс частинки.

Закон зміни моменту імпульсу $\vec{L}$ системи:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

де $\vec{M}$ - сумарний момент усіх зовнішніх сил.

Закон збереження моменту імпульсу:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = const,$$

тобто, момент імпульсу замкнутої системи частинок залишається постійним.

Рівняння динаміки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі Z:

$$I\varepsilon_z = M_z,$$

де M_z - алгебраїчна сума моментів зовнішніх сил відносно Z.

Момент інерції деяких тіл:

1) точки масою m на відстані R від осі обертання:

$$I = mR^2;$$

2) однорідного стрижня довжиною l відносно осі, що проходить через його центр мас перпендикулярно стрижню:

$$I = \frac{1}{12} ml^2,$$

де m - маса стрижня. Якщо вісь обертання перпендикулярна стрижню і проходить через його кінець, то

$$I = \frac{1}{3} ml^2$$

3) однорідного диска (циліндра) радіусом R і масою m відносно осі, що збігається з віссю диска або циліндра:

$$I = \frac{1}{2} mR^2$$

4) тонкостінної труби або кільця відносно осі, що збігається з віссю труби або кільця:

$$I = mR^2$$

5) порожнього циліндра масою m відносно осі симетрії:

$$I = \frac{1}{2} m(R_2^2 - R_1^2),$$

де R_1 і R_2 - внутрішній і зовнішній радіуси;

6) однорідної кулі масою m і радіусом R відносно осі, що збігається з його діаметром:

$$I = \frac{2}{5} mR^2$$

7) тонкого диску радіусом R масою m відносно осі, що збігається з діаметром:

$$I = \frac{1}{4} mR^2$$

Момент інерції тіла I відносно довільної осі визначається за теоремою Штейнера:

$$I = I_0 + ma^2,$$

де I_0 - момент інерції тіла відносно осі, паралельної до даної і яка проходить через центр мас, a - відстань між осями.

Робота зовнішніх сил при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі:

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d_{\varphi}$$

Кінетична енергія тіла, що обертається навколо нерухомої осі:

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$$

Кінетична енергія твердого тіла при плоскому русі:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

де m - маса тіла, $\vec{V}_c$ - швидкість центру мас, I - момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас, - кутова швидкість обертання навколо тієї ж осі.

Момент імпульсу твердого тіла відносно нерухомої осі Z:

$$L_z = I_z\omega_z,$$

де I_z - момент інерції тіла відносно осі Z, ω - кутова швидкість.

Результуюча всіх зовнішніх сил, прикладених до тіла, повинна бути рівною нулю, тобто:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = 0$$

Сумарний момент зовнішніх сил відносно будь-якої точки повинний бути рівним нулю, тобто:

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i = 0$$

Відносна поздовжня деформація:

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l_0},$$

де Δl - збільшення довжини при розтяганні чи стиску, l_0 - довжина тіла до деформації.

Відносною деформацією кручення називається відношення кута закручування до довжини стрижня:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\varphi}{l}.$$

Відносна зміна об'єму при поздовжній деформації:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_l(1 - 2\mu),$$

де μ - коефіцієнт Пуассона, дорівнює відношенню відносної поперечної деформації до поздовжньої:

$$\mu = \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_l}$$

Напруга при пружній деформації:

$$\sigma = \frac{dF}{dS},$$

де d$\vec{F}$ - сила, що діє на елементарно малу ділянку даного перерізу.

Залежність між відносною поздовжньою деформацією і деформуючою силою (закон Гука):

$$\varepsilon_l = \alpha \frac{F}{S} = \frac{1}{E}\frac{F}{S},$$

де α - коефіцієнт пружності, Е- модуль Юнга.

Руйнівна сила:

$$F_m = \sigma_m S,$$

де σ_m - руйнівне напруження.

Відносна зміна товщини:

$$\varepsilon_d = \frac{\Delta d}{d} = \beta\sigma,$$

де β - коефіцієнт поперечного стиску при поздовжньому розтяганні.

Деформація зсуву, що характеризується кутом зсуву, визначається за формулою:

$$\Psi = n\frac{F_\tau}{S} = np_\tau = \frac{\sigma_\tau}{G},$$

де n- коефіцієнт зсуву, F_τ - сила, що зумовлює зсув, σ_τ- дотичне напруження, G- модуль зсуву.

Модуль Юнга E, модуль зсуву G і коефіцієнт Пуассона μ, пов'язані співвідношенням

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Кут закручування стрижня:

$$\varphi = \frac{2Ml}{\pi G R^4},$$

де М - обертальний момент, l- довжина стрижня, R- радіус стрижня.

Потенціальна енергія пружно деформованого стрижня:

$$E_p = \frac{E\varepsilon_l^2}{2}V,$$

де V- об'єм стрижня.

Щільність енергії пружно деформованого стрижня:

$$w = \frac{1}{2}E\varepsilon_l^2$$

Перетворення Лоренца:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\ y' = y, z' = z, t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

де с- швидкість світла у вакуумі.

Скорочення довжини рухомого тіла:

$$l' = l\sqrt{1 - v^2 / c^2}\ ,$$

де l' - довжина рухомого тіла, l – власна довжина.

Уповільнення ходу рухомого годинника:

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - v^2 / c^2}\ ,$$

де t- інтервал часу між подіями в рухомій системі відліку, Δt - інтервал часу між тими ж подіями в нерухомій системі.

Релятивістський закон додавання швидкостей:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x / c^2}, u_y = \frac{\sqrt{1 - v^2 / c^2 u'_y}}{1 + vu'_y / c^2}, u_z = \frac{\sqrt{1 - v^2 / c^2 u'_z}}{1 + vu'_z / c^2},$$

де u_x, u_y, u_z - проекції швидкості в нерухомій системі координат, u'_x, u'_y u'_z - проекції швидкості в рухомій системі.

Релятивістські маса й імпульс:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

де m_0 - маса спокою.

Повна енергія тіла:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

де $E_0 = m_0 c^2$ енергія спокою.

Кінетична енергія рухомого тіла:

$$E_k = E - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - 1\right).$$

§ 5. Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Брусок рухається горизонтальною площиною під дією сили $\vec{F}$, спрямованої під кутом $\alpha > 0$ до горизонту. Визначити прискорення бруска, якщо його маса m, а коефіцієнт тертя між бруском і площиною μ.

Розв'язування

Пов'яжемо систему координат із площиною, якою рухається брусок (рис.1.2).

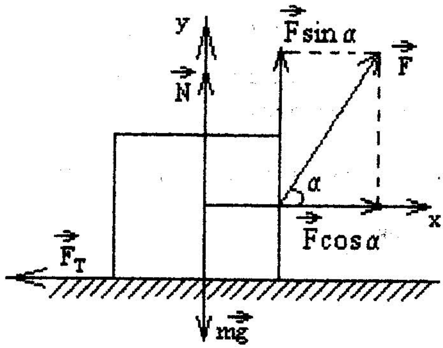


Рис.1.2.

Покажемо всі діючі на брусок сили: ваги $m\vec{g}$, реакції опори $\vec{N}$, тертя $\vec{F}_T$ і силу $\vec{F}$. Запишемо рівняння руху бруска в загальному вигляді: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_T + \vec{F}$ і в проекціях на координатні осі: $ma = F\cos\alpha - F_T$; $mg - N - F\sin\alpha = 0$. Враховуючи, що сила тертя $F_T = \mu N$ і $N = mg - F\sin\alpha$, перше рівняння запишемо

$ma = F\cos\alpha - \mu mg + \mu mg\sin\alpha$, звідки

$$a = \frac{F}{m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g = \frac{1}{m}\left[F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg\right].$$

Приклад 2

Два тіла масами m_1 і m_2 зв'язані невагомою ниткою і рухаються горизонтальною поверхнею (на Землі) під дією сили $\vec{F}$, спрямованої горизонтально і прикладеної до тіла m_1, (рис.1.3). Визначити сили, що діють на кожне тіло, якщо коефіцієнт тертя між кожним тілом m_1 і m_2 і горизонтальною поверхнею дорівнює μ.

Розв'язування

На тіло m_1 діє сила $\vec{F}$. Визначимо інші сили. Тіло m_1 взаємодіє з Землею, ниткою і тілом m_2. З Землею тіло m_1 взаємодіє за законом всесвітнього тяжіння і, отже, на нього діє сила ваги $m_1\vec{g}$, спрямована вниз. Далі, тіло m_1 взаємодіє з Землею пружно (з'являється пружна сила реакції опори $\vec{N}_1$, спрямована вгору). Крім того, у результаті взаємодії тіла m_1 із Землею виникає сила тертя $\vec{F}_{mp} = \mu \vec{N}_1$. Тіло m_1 взаємодіє з ниткою тільки пружно: на тіло m_1 діє сила натягу нитки $\vec{F}_н$, спрямована вліво (оскільки нитка невагома, то сила тяжіння між ниткою і тілом m_1 дорівнює нулю).

На тіло m_2 діють чотири сили: пружна сила натягу нитки $\vec{F}_н$, сила ваги $m_2\vec{g}$, пружна сила реакції опори $\vec{N}_2$ і сила тертя $\vec{F}_{mp} = \mu \vec{N}_2$.

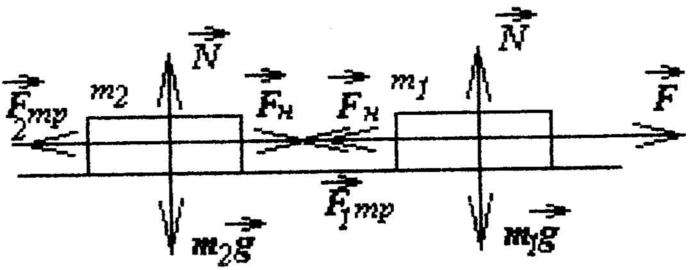


Рис.1.3.

Зміст фундаментальних законів полягає в тому, що зміна імпульсу або швидкості матеріальної точки обумовлені і визначаються дією сил. Отже, якщо відомі сили і початкові умови (положення і швидкість матеріальної точки в початковий момент часу), то можна знайти зміну її руху. У цьому і полягає основна (ідеальна) задача динаміки: в основній задачі динаміки за заданими силами і початковими умовами визначають зміну руху системи (механічний стан системи).

Щоб знайти зміну руху тіла, необхідно знати закон його руху. Визначення закону руху за будь-яким відомим параметром руху (і початковими умовами), як було показано вище, складає зміст оберненої задачі кінематики. Будь-який параметр руху матеріальної точки визначається в динаміці шляхом послідовного застосування другого закону Ньютона для опису руху кожного тіла системи. Цей закон записують або у формі $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ (тоді визначають вектор прискорення кожного тіла і, розв'язуючи далі обернену задачу кінематики, знаходять закон руху), або у вигляді $m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}$ (тоді знаходять вектор швидкості кожного тіла і після розв'язання оберненої задачі кінематики визначають закон руху), або у формі $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ (тоді одержують безпосередньо закон руху, розв'язавши це диференціальне рівняння).

Приклад 3

На вершині клина масою m_3=10 кг розташований невагомий блок (рис.1.4). Через блок перекинута невагома і нерозтяжна нитка, до кінців якої прикріплені вантажі масами m_1=1 кг і m_2=10 кг. Коефіцієнти тертя вантажів об площини клина відповідно рівні $\mu_1 = 0.2$ і $\mu_2 = 0.1$, а коефіцієнт тертя клина об горизонтальну поверхню $\mu_3 = 0.3$. Кути площин клина з горизонтальною площиною відповідно, рівні $\alpha_1 = 30^0$ і $\alpha_2 = 60^0$. Визначити силу натягу нитки.

Розв'язування

Припустимо, що: а) коефіцієнт тертя $\mu_1 = 0$, б) кут $\alpha_1 = 0$, в) кут $\alpha_2 = 90^0$, г) клин закріплений ($\mu_3 = \infty$). Тоді ми одержуємо порівняно просту задачу, яку можна сформулювати так: до кінців невагомої і нерозтяжної нитки, перекинутої через невагомий блок, прив'язані два тіла масами m_1=1кг і m_2=10 кг (рис.1.5): тіло може рухатися на гладкій горизонтальній і нерухомій поверхні; знайти силу натягу нитки.

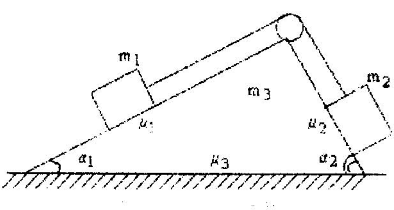


Рис.1.4

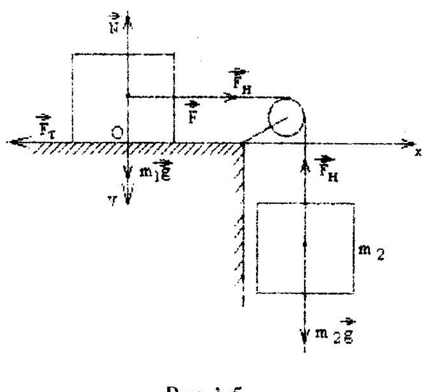


Рис.1.5.

У фізичну систему включимо чотири тіла: тіло m_1, тіло m_2, нитку і блок. Тіла m_1 і m_2 можна прийняти за матеріальні точки. Тіла системи взаємодіють як між собою, так із зовнішніми тілами (стіл і Земля). Під дією цих сил тіла системи (за винятком блока) рухаються прямолінійно і рівноприскоренно. Таким чином, перед нами основна задача динаміки. Для її рішення застосуємо другий закон Ньютона у формі $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$. Виберемо стіл як тіло відліку інерціальної системи відліку (ІСВ), а осі координат OX і OY направимо так, як показано на рис.1.5.

Розглянемо тіло m_1. На нього діють такі сили: сила ваги $m_1\vec{g}$ (у результаті взаємодії тіла m_1 з Землею за законом всесвітнього тяжіння), сила реакції опори $\vec{N}$ (пружна сила взаємодії тіла зі столом) і сила натягу нитки $\vec{F}_H$ (пружна сила взаємодії тіла і нитки). Інші сили малі. Знайдені сили вже спроектовані на осі OX і OY. Отже, можна відразу записати другий закон Ньютона у вигляді двох рівнянь у проекціях на осі координат OX і OY:

$$m_1 a_{1x} = F_н$$
$$m_1 a_{1y} = m_1 g - N$$

де a_{1x} і a_{1y} – проекції вектора прискорення $\vec{a}_1$ тіла m_1 на осі OX і OY.

Оскільки $a_{1y}=0$, то $N=m_1g$.

Розглянемо тіло m_2. На нього діють сила ваги $m_2\vec{g}$ і сила натягу нитки $\vec{F}_H$. З рис.1.5 видно, що проекції цих сил на вісь OX дорівнюють нулеві, а алгебраїчна сума проекцій цих сил на вісь OY дорівнює $m_2g-F_н$. Отже, за другим законом Ньютона для тіла m_2 одержуємо $m_2a_{2y} = m_2g - F_н$

Оскільки $a_{1x} = a_{2y} = a$, то можна отримати таку систему рівнянь

$$m_1 a = F_н$$
$$m_2 a = m_2 g - F_н$$

Розв'язавши отриману систему рівнянь, знаходимо відповідь у загальному вигляді:

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g,$$

$$F_н = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Після розрахунку одержуємо числову відповідь: $a=8{,}9$ м/с^2, $F_н=8{,}9$ Н.

Приклад 4

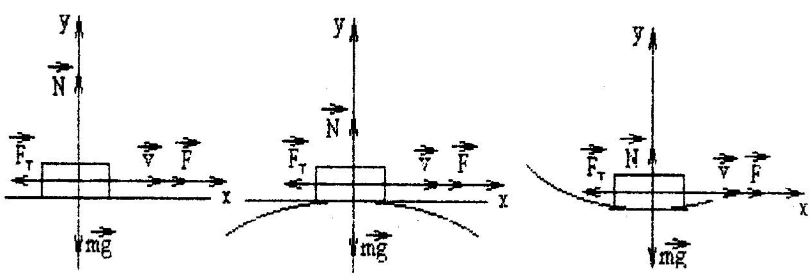
Знайти силу $\vec{F}_1$, з якою автомобіль масою $m=10^4$ кг, що рухається зі швидкістю $\vec{V} = 72$ км/год тисне на міст в одному із таких випадків: а) горизонтальний міст; б) випуклий міст; в) вгнутий міст. Радіуси кривизни моста в обох випадках $R=100$ м..

Розв'язування

На автомобіль діють сили: ваги $m\vec{g}$, реакції опори моста $\vec{N}$ і тертя коліс об поверхню моста $\vec{F}_T$ (рис.1.6). Автомобіль рухається під дією сили тяги $\vec{F}$. Задача зводиться до знаходження сили реакції опори моста $\vec{N}$ в усіх випадках, оскільки за другим законом Ньютон $F_T = N$. Розглянемо кожний випадок окремо.

а) Для руху автомобіля горизонтальним мостом рівняння другого закону Ньютона матиме вигляд

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_T + \vec{F} = 0. \qquad (1)$$



а) б) в)

Рис.1.6

Систему координат пов'яжемо з мостом і одну вісь координат направимо горизонтально в напрямі руху автомобіля, а другу вертикально вверх. Тоді рівняння (1) в проекціях на відповідні осі координат запишеться

$$F - F_T = 0$$

$$N - mg = 0$$

В цьому випадку сила тиску автомобіля на середину чисельно дорівнює силі його ваги: $F_T = mg = 9.8 \cdot 10^4\ H$.

б) Для випадку руху автомобіля випуклим мостом рівняння динаміки руху запишеться

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_T + \vec{F} = m\vec{a}.$$

Перепишемо це рівняння на відповідні осі координат:

$$ma = mg - N$$

$$0 = F - F_T$$

З першого рівняння знаходимо силу реакції опори моста

$$N = m(g - a).$$

Доцентрове прискорення $a = \frac{V^2}{R}$. З врахуванням виразу доцентрового прискорення остаточна формула набуде вигляду

$$N = m(g - \frac{V^2}{R}) = 5.8 \cdot 10^4\ H.$$

Таким чином, сила тиску автомобіля на середину випуклого моста менша сили його ваги.

в) Як і в другому випадку, записуємо рівняння динаміки руху автомобіля вгнутим мостом

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_T + \vec{F} = m\vec{a}.$$

В проекціях на відповідні осі координат для третього випадку це рівняння матиме вигляд

$$ma = N - mg$$

$$0 = F - F_T$$

З врахуванням виразу доцентрового прискорення остаточна формула набуде вигляду

$$N = m(g + \frac{V^2}{R}) = 13.8 \cdot 10^4\ H$$

Таким чином, сила тиску автомобіля на середину вгнутого моста більша сили його ваги.

Приклад 5

Визначити релятивістський імпульс p і кінетичну енергію T електрона, що рухається зі швидкістю $\vec{V} = 0.9\vec{c}$ (де $\vec{c}$ – швидкість світла у вакуумі).

Розв'язування

Релятивістський імпульс $p = \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$, враховуючи, що $\frac{V}{c} = \beta$

$$p = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta}} = \frac{m_0 c \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{0.9 m_0 c}{\sqrt{1 - 0.9^2}} = 5.6 \cdot 10^{-22}\ кг \frac{м}{c}$$

Кінетична енергія частинки $T = E - E_0$, де E – повна енергія, E_0 – енергія спокою частинки.

$$E = mc^2,\ E_0 = m_0c^2 \text{ і } m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \text{ тому } T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0c^2, \text{ або}$$

$$T = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right).$$

Враховуючи, що $m_0c^2 = 0.51$ МеВ, одержимо
$T = 0.66$ МеВ $= 1.06 \cdot 10^{-13}$Дж.

Приклад 6

Якою має бути швидкість частинки, щоб її кінетична енергія зрівнялась з енергією спокою цієї частинки? Яку різницю потенціалів повинен подолати електрон, щоб для нього була виконана ця умова?

Розв'язування

Енергія частинки виражається за формулою

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

а її енергія спокою дорівнює $E_0 = m_0c_1^2$, різниця обох енергій являє собою кінетичну енергію $E_к = E - E_0$. З умови задачі $E_0 = E_к$, тому

$$E = 2E_0 = 2m_0c^2 \rightarrow \frac{m_0c2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = 2m_0c^2 \rightarrow V = \frac{\sqrt{3}c}{2} = 0.866c.$$

При прискоренні електрона виконується закон збереження енергії, тому $E_к = m_0c^2 = eU \rightarrow U = \frac{m_0c^2}{e} = 0.511\,мВ.$

Приклад 7

Яку роботу необхідно виконати для збільшення швидкості електрона від 0.6 с до 0.8 с? Визначити відношення цієї роботи до *значення роботи відповідного прискорення, обчисленого за класичною формулою* $\frac{mV^2}{2}$.

Розв'язування

На швидкості $\vec{V}_1 = 0.6\vec{c}$ енергія частинки визначається за формулою

$$E_1 = m_0 c^2 \left(1 - \frac{V_1^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Аналогічною буде і формула для обчислення енергії при більшій швидкості. Необхідна робота визначається зміною енергії, отже

$$A = E_2 - E_1 \rightarrow A = m_0 c^2 \left[\left(1 - \frac{V_1^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{V_2^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right];$$

$E_0 = m_0c^2 = 0.511$ МеВ, тому A = 213 кеВ.

Обчислення за класичною формулою дають

$$A_{k} = \frac{m_0 V_2^2}{2} - \frac{m_0 V_1^2}{2} = \frac{m_0}{2}\left[(0.8c)^2 - (0.6c)^2\right] =$$
$$= 0.5 m_0 c^2 (0.64 - 0.36) = 71.54\ кеВ;$$

Відношення обох робіт $\frac{A}{A_{k}} = 2.98$.

§ 6. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

2.1 Під дією деякої сили тіло масою m=3 кг робить прямолінійний рух, описуваний рівнянням $x=2t^3-3t^2+5t+4$. Чому дорівнює діюча на тіло сила в момент часу t=5с? Побудувати графік залежності сили від часу.

2.1. Яка швидкість кулі при вильоті з рушниці, якщо її маса m = 2,5 кг, довжина ствола l= 0,70 м, калібр D = 5,0 мм, а середній тиск повітря під час пострілу p=9,8 МПа?

2.2. Вагон масою 10^4 кг відчепився від рухомого локомотива і, рухаючись рівносповільнено, за 20 с пройшов шлях 20 м, після чого зупинився. Знайти силу тертя, коефіцієнт тертя і початкову швидкість вагону.

2.3. Якої маси баласт треба скинути з аеростату, який рівномірно опускається, щоб він почав рівномірно підніматися з тією ж швидкістю? Маса аеростата з баластом 1600 кг, піднімальна сила аеростата 12,00 кН. Вважати силу опору повітря однією і тією ж при підніманні і при опусканні.

2.4. До нитки підвішений вантаж масою 1,000 кг. Знайти силу натягу нитки T, якщо нитка з вантажем: 1) піднімається з прискоренням 5,00 м/с^2; 2) опускається з тим же прискоренням.

2.5. Сталевий дріт витримує силу натягу 4,40 кН. З яким найбільшим прискоренням можна піднімати вантаж масою від 400 кг, підвішений на цьому дроті, щоб він не розірвався?

2.6. Маса ліфта з пасажиром m=800 кг. З яким прискоренням і в якому напрямі рухається ліфт, якщо відомо, що сила натягу троса, що підтримує ліфт: а) 12,0 кН; б) 6,0 кН?

2.7. До нитки підвішена гиря. Якщо піднімати гирю з прискоренням $\vec{a}$= 2,00 м/с^2, то сила натягу нитки $\vec{T}$ її буде вдвічі менша тієї сили натягу $\vec{T}_2$, при якій нитка розривається. З яким прискоренням a_2 треба піднімати гирю, щоб нитка розірвалася?

2.8. Потяг, маса якого m=500 т, після припинення дії сили тяги тепловоза зупиняється під дією сили тертя $\vec{F}=10^5$ Н через 1 хв. З якою швидкістю $\vec{V}$ йшов поїзд до моменту припинення дії сили тяги тепловоза?

2.9. Потяг на горизонтальному відрізку шляху довжиною s=600 м розвиває сталу силу тяги $\vec{F}=14.7\cdot10^4\,H$. Швидкість потягу зростає при цьому від V_0=36 км/год до V=54 км/год. Визначити силу опору руху F, вважаючи її сталою. Маса поїзда m=1000 т.

2.10. З якою силою треба діяти на тіло масою m=5 кг, щоб воно падало вертикально вниз з прискоренням $\vec{a}$=15 м/с^2?

2.11. Автомобіль рухається з прискоренням a=1 м/с^2. З якою силою F людина масою m=70 кг натискує на спинку сидіння?

2.12. Стальна дротина витримує вантаж, маса якого до 450 кг. З яким найбільшим прискоренням можна піднімати вантаж m=400 кг, підвішений на цій дротині, щоб вона не обірвалася?

√ **2.13.** Мотузка витримує вантаж масою m_1=110 кг при піднятті його з деяким прискоренням вертикально і вантаж масою m_2=690 кг при опусканні його з таким самим за величиною прискоренням. Яка максимальна маса m вантажу, що його можна підняти на цій мотузці з сталою швидкістю?

2.14. Автомобіль рухається нагору зі швидкістю V=10 м/с. Визначити шлях, пройдений автомобілем до зупинки, і час його руху, якщо коефіцієнт тертя μ=0,5, а кут нахилу α =10°.

2.15. Визначити коефіцієнт тертя між похилою площиною і рухомим на ній тілом, якщо відомо, що це тіло, маючи початкову швидкість $\vec{V}_0$=5,0 м/с і рухаючись нагору на похилій площині, проходить шлях S=2,0 м. Кут нахилу площини α =30°.

2.16. Тіло, якому надана початкова швидкість, паралельна похилій площині, піднімається на похилій площині і потім опускається. У якому випадку при підніманні чи при опусканні і в скільки раз час руху тіла більший, якщо воно повернулося в початкове положення? Чи буде кінцева швидкість при опусканні дорівнювати початковій швидкості при підніманні? Коефіцієнт тертя між тілом і похилою площиною μ =0,20. Кут нахилу площини α =45°.

2.17. Чому дорівнює коефіцієнт тертя коліс автомобіля об дорогу, якщо при швидкості автомобіля $\vec{V}$ = 10 м/с гальмовий шлях дорівнює S=8,0 м?

2.18. На візку масою m_1=20 кг лежить вантаж масою m_2=5,0 кг. До вантажу прикладена сила $\vec{F}$, що надає візку з вантажем прискорення a. Сила діє під кутом 30° до горизонту. Яке максимальне значення цієї сили, при якому вантаж не буде сковзати на візку? Коефіцієнт тертя між вантажем і візком μ= 0,20. Тертям між візком і дорогою знехтувати. З яким прискоренням буде рухатися візок під дією сили $\vec{F}$.

2.19. Однорідний стрижень довжиною L=5,0 м піднімається вертикально нагору під дією сили $\vec{F}$=500 Н, прикладеної до одного з його кінців. З якою силою розтягується стрижень у точці, що знаходиться на відстані l=1,0 м від його нижнього кінця?

2.20. Тіло масою m лежить на похилій площині з кутом нахилу α =30°. Який шлях пройде тіло на похилій площині за t=1,0 с, якщо похилій площині надати прискорення $\vec{a}$=3,8 м/с^2, спрямоване вертикально вниз? Коефіцієнт тертя вважати рівним μ=0,20.

2.21. Два вантажі масами m_1=4,0 кг і m_2=1,0 кг зв'язані ниткою, перекинутою через блок, що прикріплений до призми, і можуть сковзати на гранях цієї призми. Знайти прискорення вантажів, якщо α=60°, β =30°, а коефіцієнт тертя μ=0,20. Дослідити можливі випадки.

2.22. Яке найбільше прискорення може мати автомобіль при русі нагору з кутом нахилу α = 20°, якщо коефіцієнт тертя коліс об покриття дороги μ=0,5? Який шлях пройде автомобіль за t=10 с, якщо в момент початку підйому швидкість його $\vec{V}_0$=10 м/с?

2.23. На горизонтальній поверхні лежить тіло масою 5,0 кг. Який шлях пройде це тіло за t=1,0 с, якщо до нього прикласти силу $\vec{F}$=50 Н, що утворить кут α=60° з горизонтом? Коефіцієнт тертя між тілом і поверхнею μ=0,20.

2.24. З яким прискоренням буде рухатися тіло масою m=2,0 кг у горизонтальному напрямі, якщо до нього прикладена сила $\vec{F}$=5,0 Н, направлена під кутом α =45° до горизонту? Коефіцієнт тертя μ= 0,10.

2.25. До стелі кабіни ліфта прикріплений динамометр, на якому підвішений блок. Через блок перекинуто нерозтяжний шнур, до кінців якого прив'язані вантажі масами m_1=1,0 кг і m_2=2,0 кг. Які будуть покази динамометра при русі вантажів, якщо ліфт нерухомий чи рухається нагору з прискоренням 3,0 м/с^2? Масою блока і шнура знехтувати.

2.26. Бак з водою знаходиться на похилій площині з кутом нахилу α=30°. З яким спрямованим горизонтально прискоренням повинна рухатися похила площина, щоб поверхня води в баці була паралельна їй?

2.27. Яку силу треба прикласти до вагона, що стоїть на рейках, щоб вагон почав рухатися рівноприскорено і за час t=30,0 с пройшов шлях s=11,0 м? Маса вагона m=16,0 т. Під час руху на вагон діє сила тертя, рівна 0,05 діючої на нього сили ваги $\vec{F}$.

2.28. Потяг масою m=500 т після припинення тяги паровоза під дією сили тертя 98 кН зупиняється через час t=1,00 хв. З якою швидкістю йшов потяг?

2.29. Вагон масою m=20 т рухається рівносповільнено, маючи початкову швидкість 54 км/год і прискорення 0.300 м/с^2. Яка сила гальмування діє на вагон? Через який час вагон зупиниться? Яку відстань вагон пройде до зупинки?

2.30. Тіло масою 0,5 кг рухається прямолінійно, причому залежність пройденого тілом шляху s від часу t задається рівнянням $s=A-Bt+Ct^2-Dt^3$, де C=5 м/с^2 і D=1м/с^3. Знайти величину сили, що діє на тіло наприкінці першої секунди руху.

2.31. Під дією постійної сили 10 Н тіло рухається прямолінійно так, що залежність пройденого тілом шляху s від часу t задається рівнянням $s=A-Bt+Ct^2$, де C=1м/с^2. Знайти масу m тіла.

2.32. Тіло масою 0,5 кг рухається так, що залежність пройденого тілом шляху s від часу t задається рівнянням $s = A\sin\omega t$, де A=5 см і $\omega = \pi$ рад/с. Знайти силу $\vec{F}$, що діє на тіло через час t=1/6 с після початку руху.

2.33. На візку, що рухається в горизонтальному напрямі з прискоренням $\vec{a}$=9,8 м/с^2, установлений схил. Знайти натяг нитки схилу і кут, що утворить нитка з вертикаллю, якщо маса підвішеного на нитці вантажу m=0,10 кг.

2.34. Через нерухомий блок перекинута тонка нерозтяжна нитка, на кінцях якої підвішені вантажі масами m_1=1,0 кг і m_2=2,0 кг. У початковий момент часу обидва вантажі знаходилися на одній висоті. Визначити, на яку відстань зміститься центр мас вантажів через t=1,0 с від початку руху. Вважати, що тертя відсутнє, а масами блоку і нитки можна знехтувати. Знайти прискорення центра мас вантажів.

2.35. На яку відстань зміститься нерухомий на воді човен, якщо людина масою m_1= 70 кг пройде з носа човна на корму? Довжина човна 2,5 м, його маса m_2=100 кг. Опором води знехтувати.

2.36. Ракета з рідким пальним масою M=15x10^3 кг запускається у вертикальному напрямі. Витрата палива Q=150 кг/с. На яку висоту підніметься ракета за час роботи двигуна t=1 хв, якщо швидкість витікання газів із сопла $\vec{V}$=3,0 км/с?

2.37. Яку масу газів в одиницю часу повинна викидати ракета з початковою масою M, спрямована вертикально вгору, щоб через деякий час від початку руху вона могла залишатися нерухомою в полі тяжіння? Швидкість газового струменя відносно ракети $\vec{V}$. Зміну прискорення сили тяжіння з висотою не враховувати.

2.38. Горизонтально розташований диск обертається навколо вертикальної осі, що проходить через його центр. На диску лежить вантаж на відстані

R=10 см від осі обертання. Знайти коефіцієнт тертя спокою між диском і вантажем, якщо при частоті обертання диску n=0,5 об/с вантаж починає ковзати на поверхні диска.

2.39. Визначити максимальне значення швидкості, з якою автомобіль може рухатися на заокругленню асфальтованого шосе радіусом R=100 м, якщо коефіцієнт тертя між шинами автомобіля з асфальтом μ=0,60.

2.40. При якій швидкості автомобіля тиск, що робиться ним на вгнутий міст, у 2 рази більший тиску на випуклий міст? Радіус кривизни мостів в обох випадках R=30 м.

2.41. Визначити період обертання конічного маятника, якщо його довжина l=49см, а кут, утворений ниткою з вертикаллю, α =60°.

2.42. Тіло масою m=200 г підвішено на нитці довжиною l=80 см. Його відхилили від положення рівноваги до висоти точки підвісу і відпустили, у результаті чого нитка обірвалася. На якій висоті знаходилося тіло в момент розриву нитки, якщо вона розривається під дією сили $\bar{F}$ = 4,0 Н?

2.43. Посудина з водою, підвішена на мотузці довжиною l=1 м, обертається у вертикальній площині так, що вода з неї не виливається. Визначити максимальне значення періоду обертання.

2.44. Амплітуда гармонічного коливання дорівнює 5,0 см, період - 4,0 с. Визначити максимальні швидкість і прискорення коливної точки, якщо в початковий момент часу точка знаходилася в положенні максимального зміщення. Через який час від початку руху точка, що робить гармонічні коливання з періодом 12 с і початковою фазою, рівною 0, зміститься від положення рівноваги на відстань, що дорівнює половині амплітуди?

2.45. Написати рівняння коливального руху матеріальної точки, що робить коливання з амплітудою 5 см, періодом 2 с і початковою фазою 45°.

2.46. Коливання матеріальної точки описуються рівнянням $x = 0{,}03\sin\pi(t+0{,}5)$. Визначити найбільші значення швидкості і прискорення. Чому дорівнює фаза коливань через 5.0 с від початку руху?

2.47. Визначити початкову фазу гармонічного коливання тіла, якщо через 0,25 с від початку руху зміщення, що змінюється за законом синуса, було рівне половині амплітуди. Період коливання 6,0 с.

2.48. Вважаючи рух поршня в циліндрі автомобільного двигуна гармонічним коливанням, визначити максимальні значення його швидкості і прискорення, якщо автомобіль рухається зі швидкістю $\vec{V}$=72 км/год на прямій передачі, радіус коліс R=344 мм, хід поршня l=100 мм.

2.49. Написати рівняння коливального руху матеріальної точки, що робить два однаково спрямованих гармонічних коливання, які описуються рівняннями: $x_1 = 4\sin\pi(2t+1/3)$, $x_2 = 3\sin(2\pi t + \pi/2)$.

2.50. Яка частота зміни амплітуди складного коливання, отриманого в результаті додавання двох однаково спрямованих гармонічних коливань з частотами 440 і 440,5 Гц?

2.51. Знайти рівняння траєкторії руху матеріальної точки, що бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, заданих рівняннями: $x = 2\sin\pi(2t+1)$ $y = 2\sin(2\pi t + 90^\circ)$. Указати напрям руху.

2.52. Скласти графічно два взаємно перпендикулярних коливання з однаковими амплітудами і фазами, періоди яких відповідно рівні 1 і 2 с.

2.53. Знайти роботу, що виконується при підніманні вантажу масою m=10 кг на похилій площині з кутом нахилу α=45° на відстані S=2 м, якщо час піднімання t=2,0 с, а коефіцієнт тертя μ=0,10.

2.54. Парашутист масою m=70 кг робить затяжний стрибок і через t=14 с має швидкість $\vec{V}$=60 м/с. Вважаючи рух парашутиста рівноприскореним, знайти роботу з подолання опору повітря.

2.55. Яку потужність повинний розвивати трактор при переміщенні причепа масою m= 5 x10^3 кг нагору зі швидкістю $\vec{V}$=1,0 м/с, якщо кут нахилу α=20°, а коефіцієнт тертя причепа μ=0,20?

2.56. Тіло масою m=1,0 кг кинули з поверхні Землі під кутом α = 30° до обрію з початковою швидкістю $\vec{V}_0$= 8,0 м/с. Знайти потужність сили тяжіння в момент часу t=5,0 с. Чому дорівнює робота цієї сили за час t=5,0 с? Опором повітря знехтувати.

2.57. Яку роботу виконують двигуни електропотягу на шляху 100 м при розгоні з прискоренням 1,5 м/с^2 нагору з кутом нахилу 10°, якщо маса електропотягу 1,2•10^5 кг, а коефіцієнт тертя 0,05?

2.58. Визначити потужність двигуна шахтної кабіни, що піднімає із шахти глибиною 200 м вантаж масою 1,0•10^4 кг за 60 с, якщо ККД дорівнює 80%.

2.59. Потяг масою 1,0•10^6 кг піднімається нагору з кутом нахилу α=10° з швидкістю 15 м/с і проходить шлях 2,0 км. Визначити роботу і середню потужність, що розвивається тепловозом при русі потягу. Коефіцієнт тертя 0,05.

2.60. Знайти загальну потужність, що розвивається двигунами електропоїзда, що складається з n=6 вагонів масою m = 4,0•10^3 кг, якщо він протягом t=10 с від початку руху розвинув швидкість $\vec{V}$=10 м/с. Коефіцієнт тертя прийняти рівним 0,20. Яку роботу необхідно затратити, щоб перевернути куб масою 5 кг і ребром 0,1 м з однієї грані на іншу?

2.61. Яку роботу необхідно виконати, щоб телеграфний стовп масою 200 кг, до вершини якого прикріплена хрестовина масою 30,0 кг, перевести з горизонтального положення у вертикальне? Довжина стовпа 10,0 м.

2.62. Один раз камінь кидають зі швидкістю $\vec{V}_1$ на горизонтальній поверхні льоду, а другий раз зі швидкістю $\vec{V}_2$ у повітря під кутом 45° до горизонту. У якому випадку каменю надано більшу початкову швидкість і в скільки разів, якщо в обох випадках переміщення каменя однакове? Коефіцієнт тертя каменя об лід прийняти рівним 0,02. Опір повітря не враховувати.

2.63. Тіло масою 2,0 кг під дією сили 50 Н піднімається на похилій площині з кутом нахилу 30° на висоту 1,0 м. Коефіцієнт тертя тіла об похилу площину 0,20. Визначити значення зробленої роботи. На що піде ця робота?

2.64. На тонкій нитці довжиною 0,50 м підвішений пружинний пістолет так, що ствол розташований горизонтально. На який кут відхилиться нитка після пострілу, якщо куля масою m=20 г при вильоті зі ствола має швидкість $\vec{V}$ =10 м/с? Маса пістолета М=200 г.

2.65. Визначити потужність водоспаду, якщо його висота h=50 м, а середньорічна витрата води Q =5900 м^3/с.

2.66. Яку кінетичну енергію має тіло масою 2,0 кг, якщо воно піднялося на похилій площині з кутом нахилу 30° на висоту 1,0 м? Коефіцієнт тертя між тілом і похилою площиною 0,10.

2.67. Куля масою m вдаряється об балістичний маятник масою М і застряє в ньому. Яка частина кінетичної енергії кулі перейде в теплоту?

2.68. Дві кулі масами m_1=0,20 кг і m_2=0,80 кг, підвішені на двох паралельних нитках довжиною 2,0 м, дотикаються одна до одної. Менша куля відхиляється на 90° від початкового положення і відпускається. 1) Знайти швидкості куль після зіткнення, вважаючи удар абсолютно пружним. 2) Яка швидкість куль після зіткнення, якщо удар абсолютно непружний? Яка частина енергії піде на нагрівання куль?

2.69. Яка енергія пішла на деформацію двох куль, що зіткнулися, масами m_1=m_2= 4,0 кг, якщо вони рухалися назустріч одна одній зі швидкостями $\vec{V}_1$=3,0 м/с і $\vec{V}_2$=8,0 м/с, а удар був прямий непружний?

2.70. Дві кулі підвішені на тонких паралельних нитках, дотикаються одна до одної. Менша куля відхиляється на 90° від початкового положення і відпускається. Після удару кулі піднімаються на однакову висоту. Визначити масу меншої кулі, якщо маса більшої 0,6 кг, а удар абсолютно пружний.

2.71. Кулька масою m, що рухається горизонтально, вдаряється об поверхню призми масою М так, що відскакує вертикально вгору на висоту h. Вважаючи удар абсолютно пружним, визначити швидкість, отриману призмою в результаті удару. Тертям призми знехтувати.

2.72. Молоток масою 0,80 кг у момент удару об головку цвяха має швидкість 1,5 м/с і забиває його в колоду на глибину 5,0 мм. Якої маси вантаж необхідно покласти на головку цвяха, щоб він ввійшов у колоду на таку ж глибину?

2.73. Знайти миттєву потужність, що розвивається силою тяжіння, до кінця першої секунди падіння тіла масою 1,0 кг. Опір повітря не враховувати.

2.74. Кулька для гри в настільний теніс радіусом r=15 мм і масою m = 5,0 г занурена у воду на глибину h = 30 см. Коли кульку відпустили, вона вистрибує з води на висоту Н=10 см. Яка кількість теплоти виділилася внаслідок тертя кульки об воду?

2.75. Тіло ковзає на похилій площині, що утворює з горизонтом кут 45°. залежність пройденого тілом шляху s від часу t задається рівнянням $s = Ct^2$, де С=1,73 м/с^2. Знайти коефіцієнт тертя тіла об площину.

2.76. Вантаж масою m=5,0 кг піднімається похилою площиною з кутом нахилу α=30° під дією сили $\vec{F}$=40 Н, що утворює кут β=30° з напрямом переміщення. На яку відстань зміститься вантаж уздовж похилої площини до моменту, коли його швидкість $\vec{V}$=1,0 м/с, якщо початкова швидкість вантажу дорівнює нулю і коефіцієнт тертя μ=0,10?

2.77. М'яч кинули вертикально вгору. Що більше: час підйому чи час падіння?

2.78. З вишки кидають велику надувну кулю так, що один раз їй надають початкову швидкість, спрямовану вертикально вгору, а інший раз таку ж швидкість, але спрямовану вертикально вниз. У якому випадку в момент удару кулі об землю його вертикальна швидкість буде більшою?

2.79. Вантаж масою m піднімається на висоту h. Чи залежить при цьому робота, що виконується піднімальним механізмом, від швидкості підйому? Чому?

2.80. Брусок масою m і довжиною l лежить на горизонтальній поверхні столу. Яку роботу треба виконати, щоб повернути брусок навколо центру мас у горизонтальній площині на малий кут α, якщо коефіцієнт тертя бруска об стіл μ.

2.81. При вибуху гранати, що летить зі швидкістю 8,0 м/с, утворилися два осколки. Осколок, маса якого складала 0,3 маси гранати, продовжив рухатись в тому ж напрямі зі швидкістю 30 м/с. Визначити швидкість другого осколка.

2.82. М'яч масою 150 г, що рухається зі швидкістю 6 м/с, вдаряється об стінку так, що кут між векторами швидкості до удару і після удару дорівнює 60^0. Вважаючи удар пружним, визначити його тривалість, якщо відомо, що середня сила удару 20 Н.

2.83. Із труби перерізом S=5,0 $см^2$ горизонтальний струмінь води б'є зі швидкістю $\vec{V}$=10 м/с у вертикальну стінку вагонетки, що стоїть на рейках, і вільно стікає зі стінки вниз. З яким прискоренням буде рухатися вагонетка, якщо її маса m=200 кг, а напрям струменя води паралельний рейкам? Опір руху вагонетки прийняти рівним к=0,01 її сили ваги.

2.84. Знайти початкову швидкість хокейної шайби, якщо вона до удару об бортик пройшла шлях S=5,0 м, а після удару, який можна вважати абсолютно пружним, пройшла ще деякий шлях і через t=2,0 с зупинилася. Коефіцієнт тертя шайби об лід 0,10.

2.85. На підніжку вагонетки, що рухається прямолінійно зі швидкістю 2,0 м/с, стрибає людина масою m_2=60 кг у напрямі, перпендикулярному до ходу вагонетки. Маса вагонетки m_1=240 кг. Визначити швидкість вагонетки разом з людиною.

2.86. З гармати масою $1,1 \cdot 10^3$ кг зроблений постріл у горизонтальному напрямі. Маса снаряда 54 кг. Швидкість снаряда відносно Землі $\vec{V}$=900 м/с. Визначити швидкість вільного відкоту гармати в момент вильоту снаряда.

2.87. На платформі встановлена пушка, з якої зроблено постріл уздовж

...залізничної колії під кутом 45° до горизонту. Визначити початкову швидкість снаряда, якщо відомо, що після пострілу платформа відкотилася на відстань 3,0 м. Маса платформи з гарматою $M=2{,}0\cdot10^4$ кг, маса снаряда $m=10$ кг, коефіцієнт тертя кочення між колісьми платформи і рейками $\mu=0{,}002$.

2.88. Граната кинута під кутом 45° до горизонту зі швидкістю $\vec{V}_0=20$ м/с. Через 2,0 с після моменту кидання граната розривається на два осколки, маси яких відносяться як 1:2. Менший осколок у результаті вибуху одержав додаткову швидкість $\vec{V}_1=50$ м/с, спрямовану горизонтально уздовж напряму кидання гранати. Визначити дальність польоту більшого осколка, якщо відомо, що менший осколок упав на відстань $s_1=83$ м. Опір повітря не враховувати.

2.89. Три човни кожний масою $M=250$ кг йдуть один за одним зі швидкістю $\vec{V}=5{,}0$ м/с. З другого човна одночасно в перший і третій кидають вантажі масами $m=20$ кг кожний зі швидкістю $\vec{u}=2{,}0$ м/с відносно середнього човна. Визначити швидкості човнів після перекидання вантажів.

2.90. Два човни масою $M=100$ кг кожний йдуть паралельним курсом назустріч один одному з однаковою швидкістю 5,0 м/с. Коли човни зустрічаються, з першого в другий перекидають вантаж масою $m=25$ кг, а потім із другого човна в перший перекидають такий же вантаж. В інший раз вантажі перекидають з човна в човен одночасно. Визначити швидкості човнів в обох випадках.

2.91. Кувалда масою 20 кг піднята на висоту $h=1{,}2$ м і вільно падає на ковадло. Яка середня сила удару кувалди об ковадло, якщо удар непружний, а тривалість удару 0,005 с?

2.92. До матеріальної точки, положення якої визначається радіусом-вектором $\vec{r}=3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$, прикладена сила $\vec{F}=5\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$. Визначити момент сили $\vec{M}$ відносно початку координат, модуль вектора $\vec{M}$ і момент сили M_z відносно осі Z.

2.93. Тіло масою $m=100$ г кинуто під кутом 45° до горизонту з початковою швидкістю $\vec{V}_0=20$ м/с. Знайти модуль моменту імпульсу тіла відносно точки кидання в момент перебування його в найвищій точці траєкторії. Опір повітря не враховувати.

2.94. Довести, що при русі тіла під дією центральної сили момент імпульсу тіла відносно точки, яка є полюсом поля, є величина постійна.

2.95. Показати, що планети, які рухаються під дією центральних сил, мають плоску траєкторію. Силою опору руху знехтувати.

2.96. На гладкій горизонтальній площині лежить однорідний стрижень довжиною $l=0{,}50$ м і масою $m=1{,}0$ кг. На площині сковзає кулька масою $m_1=0{,}30$ кг зі швидкістю $\vec{V}=10$ м/с, спрямованою перпендикулярно стрижню. Кулька вдаряється об стрижень і зупиняється. Точка удару знаходиться на відстані $l_1=20$ см від середини стрижня. Діаметр кульки дорівнює діаметру стрижня. Визначити поступальну швидкість стрижня після удару і кутову швидкість відносно його центра мас.

2.97. Довести, що людина, яка стоїть на ідеально гладкій горизонтальній площині, може повернутися навколо вертикальної осі, якщо вона почне обертати руку над головою.

2.98. Показати, що другий закон Кеплера (радіус-вектор, проведений від Сонця до планети, в рівний час описує рівні площі) є наслідком закону збереження моменту імпульсу.

2.99. Тіло масою m кинуто під кутом α до горизонту зі швидкістю $\vec{V}$. Знайти залежність від часу модуля моменту імпульсу тіла відносно точки кидання. Опором повітря знехтувати.

2.100. Із точки з координатами (0, 3, 0) (м) вертикально вгору кинули тіло масою m=0,5 кг зі швидкістю $\vec{V}$=5 м/с. Знайти збільшення моменту імпульсу тіла відносно початку координат за час його польоту вгору і назад в початкову точку. Опором повітря знехтувати. Вісь спрямована вгору.

2.101. Визначити момент інерції кулі відносно осі, що збігається з дотичною до його поверхні. Радіус кулі 0,1 м, її маса 5 кг.

2.102. Чому дорівнює момент інерції тонкого прямого стрижня довжиною 0,5 м і масою 0,2 кг відносно осі, перпендикулярної до його довжини і що проходить через точку стрижня, яка віддалена на 0,15 м від одного з його кінців?

2.103. Визначити момент інерції Землі відносно осі обертання, прийнявши її за кулю радіусом 6,4 Мм і масою $6 \cdot 10^{24}$ кг.

2.104. На барабан радіусом R=10 см намотана нитка, до кінця якої прив'язаний вантаж масою m=0,50 кг. Знайти момент інерції барабана, якщо вантаж опускається з прискоренням $\vec{a}$=1,0 м/с^2.

2.105. Маховик, що представляє собою диск масою m=10 кг і радіусом R=10см, вільно обертається навколо осі, що проходить через центр, із круговою частотою 6 с$^{-1}$. При гальмуванні маховик зупиняється через t = 5 с. Визначити гальмівний момент.

2.106. Через блок, маса якого m=100 г, перекинута тонка гнучка нерозтяжна нитка, до кінців якої підвішені два вантажі масами m_1=200 кг і m_2=300 кг (рис. 1.7). Вантажі утримуються в нерухомому положенні. З яким прискоренням будуть рухатися вантажі, якщо їх відпустити? Чому дорівнює кутове прискорення блока, якщо його радіус 10 см? Тертям знехтувати.

2.107. З колодязя за допомогою ворота піднімалося відро з водою масою m=10 кг. У момент, коли відро знаходилося на висоті h =5.0 м від поверхні води, рукоятка звільнилася, і відро стало рухатися вниз. Визначити лінійну швидкість рукоятки в момент удару відра об поверхню води в колодязі, якщо радіус рукоятки R=30 см, радіус вала ворота R=10 см, його маса m_1=20 кг. Тертям і масою троса, на якому підвішено відро, знехтувати.

2.108. Маховик масою m_1=1,0 кг укріплений на шківі радіусом r =5,0 см і масою m_2=200 кг, приводиться в обертання за допомогою гирі, що опускається, масою m_3=500 г, прив'язаної до кінця намотаної на шків мотузки. Через який час швидкість маховика досягне n= 5,0 об/с? Вважати, що вся маса маховика розподілена на його ободу на відстані R= 40 см від осі обертання.

2.109. До кінця тонкої нерозтяжної нитки, намотаної на циліндричний суцільний нерухомий блок масою m_1=200 г, прикріплене тіло масою m_2=500 г, що знаходиться на похилій площині з кутом нахилу α = 45° (рис. 1.8). Нитка, що утримує тіло, паралельна похилій площині. Який шлях пройде тіло на похилій площині за t=1,0 с, якщо коефіцієнт тертя ковзання на похилій площині μ =0,10? Тертям у блоці знехтувати.

2.110. Який шлях пройде диск, що котиться без ковзання, піднімаючись нагору на похилій площині з кутом нахилу α=30°, якщо йому надана початкова швидкість 7,0 м/с, паралельна похилій площині?

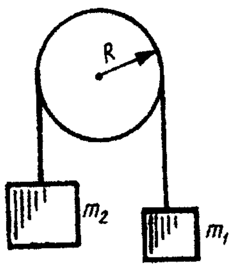


Рис.1.7

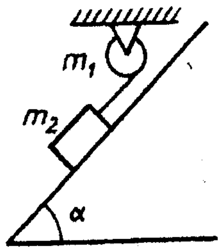


Рис.1.8

2.111. Куля скочується на похилій площині з кутом нахилу 30°. Яку швидкість буде мати центр кулі відносно похилої площини через 1,5 с, якщо її початкова швидкість була рівна нулю?

2.112. На горизонтальній обертовій платформі на відстані R=50 см від її вертикальної осі обертання лежить вантаж. Коефіцієнт тертя між вантажем і платформою k=0,05. При якій кількості її обертів за секунду вантаж почне ковзати?

2.113. На краю горизонтальної платформи радіусом R=1 м, яка обертається, лежить вантаж. Коефіцієнт тертя між вантажем і платформою k = 0,05. В який момент часу t після початку обертання платформи вантаж зсковзне з неї, якщо її обертання рівноприскорене і в момент часу t=2 хв вона має кутову швидкість ω = 1,4 рад/с?

2.114. Яким має бути мінімальний коефіцієнт тертя k між шинами автомобіля і асфальтом, щоб автомобіль міг пройти без ковзання закруглення радіусом R=100 м при швидкості $\vec{V}$ = 50 км/год ?

2.115. Тіло масою m=200 г рівномірно обертається в горизонтальній площині по колу радіусом r=0,5 м і робить n_1=3 оберти за секунду. Яку роботу A треба виконати, щоб збільшити кількість обертів до n_2=5 за секунду?

2.116. Барабан сушильної машини діаметром D=1,96 м обертається з кутовою швидкістю ω= 20 рад/с. Визначити, у скільки разів сила $\vec{F}$, з якою тканина притискується до стінки, більша від сили тяжіння $\vec{P}$.

2.117. Літак робить „мертву петлю" радіусом R=255 м. Яку найменшу швидкість $\vec{V}$ повинен мати літак у верхній точці петлі, щоб пілот не повиснув на ремінцях, якими він пристебнутий до пілотського крісла?

2.118. З яким максимальним періодом T можна рівномірно обертати у вертикальній площині кульку, прив'язану до нитки довжиною l=2,45 м?

2.119. Невагомий стрижень рівномірно обертається в горизонтальній площині і робить n обертів за секунду. На відстанях l_1 і l_2 від осі обертання закріплені вантажі з масами m_1 і m_2. Яка горизонтальна сила $\vec{F}$ діє на вісь обертання, якщо вісь знаходиться між вантажами?

2.120. Автомобіль масою m=1000 кг рухається на опуклому мосту, що має радіус кривизни R = 50 м, з швидкістю $\vec{V}_1$= 36 км/год. З якою силою $\vec{F}$ тисне автомобіль на середину моста? З якою найменшою швидкістю $\vec{V}_2$ повинен рухатись автомобіль, щоб у верхній точці він перестав тиснути на міст?

2.121. Автомобіль масою m=2 000 кг рухається з швидкістю $\vec{V}$=36 км/год на вгнутому мосту. Радіус кривизни моста R=100 м. З якою силою $\vec{F}$ тисне автомобіль на міст, проїжджаючи його середину?

2.122. Автомобіль масою m рухається опуклим мостом, радіус кривизни якого R, з швидкістю $\vec{V}$. З якою силою $\vec{F}$ тисне автомобіль на міст у точці, напрям на яку з центра кривизни мосту утворює з напрямом на вершину мосту кут α ?

2.123. Через річку шириною d=100 м перекинуто опуклий міст, що має форму дуги кола. Найвища точка моста піднімається над берегом на H=10 м. Максимальне навантаження, яке може витримати міст $\vec{F}$= 44 100 Н. Через міст треба пройти вантажному автомобілю масою m=5000 кг. При яких швидкостях руху це неможливо?

2.124. Людина масою m=70 кг сидить на середині трапеції. Палицю трапеції підвішено на мотузках довжиною l=8 м. Під час гойдання людина проходить положення рівноваги з швидкістю 6 м/с. Який натяг $\vec{T}$ кожної мотузки в цей момент?

2.125. Кульку масою m, підвішену на нитці, відхилили від положення рівноваги на кут α=90° і відпустили. Якою має бути міцність нитки, щоб кулька під час руху не обірвала її?

2.126. Вантаж масою m=20 г прикріплено до кінця невагомого стержня довжиною l=40 см, який рівномірно обертається у вертикальній площині навколо іншого кінця, роблячи 10 обертів за секунду. Чому дорівнює натяг стержня, коли тягарець проходить верхню і нижню точки своєї траєкторії?

2.127. Тіло масою m обертається у вертикальній площині на жорсткій невагомій штанзі. Знайти різницю сил натягу штанги у двох випадках: а) швидкість обертання стала; б) швидкість обертання не стала, її зміна зумовлюється силою тяжіння.

2.128. Яку потужність повинний розвити мотор, що приводить у рух стабілізуючий гіроскоп, який має форму диска радіусом R=1,0 м і масою m=1000кг, якщо протягом t=1 хв кутова швидкість збільшується до ω=31 рад/с? Тертям і опором повітря знехтувати.

2.129. Обчислити кінетичну енергію диска масою 2 кг, що котиться без ковзання горизонтальною поверхнею з відносною швидкістю 2 м/с.

2.130. Яку роботу потрібно зробити, щоб маховику у вигляді диска масою 100 кг і радіусом 0,4 м надати частоту обертання n=10 рад/с, якщо він знаходився в стані спокою?

2.131. Визначити гальмівний момент, яким можна зупинити за t=20 с махове колесо масою m=50 кг і радіусом R=0,30 м, що обертається з частотою *n*=20 об/с. Масу маховика вважати розподіленою на ободі. Чому дорівнює робота, що виконується гальмівним моментом?

2.132. Знайти корисну потужність двигуна, що приводить у рух платформу у вигляді диска масою m_1=280 кг і радіусом R=1,0 м, на краю якої стоїть людина масою m_2=60 кг, якщо за t= 30 с платформа набуває швидкість, що відповідає частоті n=1,2 об/с.

2.133. Диск масою m_1=5 кг і радіусом R=5 см, що обертається з частотою *n*=10 об/хв, приводиться в зчеплення з нерухомим диском масою m_2=10 кг такого ж радіуса. Визначити енергію, що піде на нагрівання дисків, якщо при їхньому зчепленні ковзання відсутнє.

2.134. При наявності тертя обруч скочується з похилої площини, а при відсутності - ковзає на ній. У якому випадку і в скільки разів швидкість, яку буде мати обруч при основі похилої площини, більша?

2.135. Кулька, що скочується без ковзання на похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30^0$, вдаряється об горизонтальну площину і після удару підскакує на висоту h=12,5 см (рис 1.9). Нехтуючи тертям і вважаючи удар абсолютно пружним, визначити шлях s, пройдений кулькою на похилій площині.

2.136. Диск радіусом R розкручується навколо вертикальної осі за допомогою мотузки довжиною l, яку тягнуть з постійною силою $\vec{F}$ (рис. 1.10). Після цього диск зіскакує з осі і попадає на горизонтальну площину. Скільки оборотів зробить диск на площині до повної зупинки, якщо його маса M, а коефіцієнт тертя диска об площину μ?

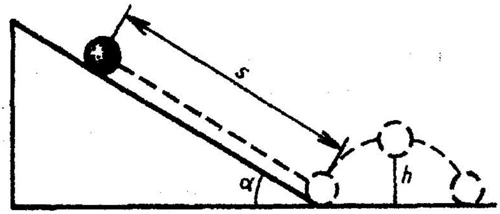


Рис.1.9

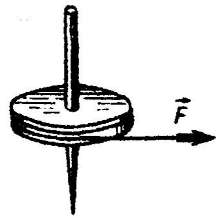


Рис.1.10

2.137. Дві кулі однакового розміру, виготовлені з алюмінію і міді, обертаються незалежно одна від одної навколо загальної нерухомої осі, що проходить через їхні центри, з кутовими швидкостями ω_1=5,0 рад/с, ω_2=10 рад/с. З якою кутовою швидкістю оберталися б обидві кулі, якби їх жорстко з'єднали?

2.138. Однорідна куля масою 2 кг прикріплена до вертикальної стіни за допомогою нитки (рис. 1.11). З якою силою куля давить на стіну, якщо нитка утворює з нею кут α =30°? Тертя не враховувати.

2.139. При якому найменшому значенні коефіцієнта тертя між стіною і кулею (рис. 1.11) точка А, в якій закріплена нитка, і центр кулі будуть знаходитись на одній вертикалі?

2.140. Однорідний стрижень довжиною 1,0 м і масою 5,0 кг підвішений горизонтально на двох паралельних мотузках однакової довжини. До стрижня прикріплений вантаж масою 10 кг на відстані 0,25 м від одного з його кінців. Визначити натяг мотузок.

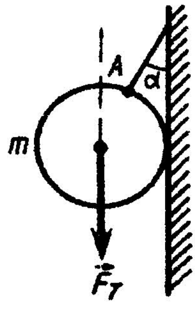


Рис.1.11

2.141. На похилій площині з кутом нахилу 35° знаходиться однорідний прямий циліндр радіусом 10 см. Чому дорівнює найбільша висота циліндра, при якій він ще не перекинеться?

2.142. Визначити положення центра мас стрижня, що складається з двох частин однакової довжини й однакового поперечного перерізу, одна з яких свинцева, а друга залізна, якщо його загальна довжина 0,50 м.

2.143. Вантаж, підвішений на гумовому шнурі довжиною 50 см, обертають у горизонтальній площині з постійною швидкістю так, що шнур описує конічну поверхню з кутом при вершині 120°. Визначити відносне видовження шнура при обертанні, якщо при нерухомому вантажі видовження шнура 1 см. Видовження вважати пропорційним прикладеній силі.

2.144. Яке навантаження необхідно прикласти до алюмінієвого стрижня, щоб він при температурі 10°С мав ту ж довжину, що і при 0°С? Площа поперечного перерізу стрижня $S=1.5$ см^2. Модуль Юнга $E=70$ ГПа.

2.145. Гумовий шнур розтягнули так, що його довжина збільшилася в 2 рази. Який діаметр розтягнутого шнура, якщо до розтягання він був 1 см, а коефіцієнт Пуассона для гуми 0,5?

2.146. Визначити відносну зміну об'єму сталевого дроту діаметром 2 мм при розтяганні його силою 1 кН. Коефіцієнт Пуассона $\mu=0{,}3$.

2.147. При якій довжині підвішений вертикально сталевий дріт починає рватися під дією власної ваги? Межа міцності сталі $p_m=0{,}69$ ГПа.

2.148. Відносна зміна об'єму при поздовжній деформації стрижня дорівнює нулю. Визначити коефіцієнт Пуассона матеріалу стрижня.

2.149. Прямий дріт довжиною l піднімається вертикально вгору під дією сили, прикладеної до її верхнього кінця. При якому прискоренні наступить розрив дроту?

2.150. Знайти відносне видовження дроту довжиною l, що піднімається вертикально вгору з прискоренням a, під дією постійної сили, що прикладена до верхнього кінця.

2.151. Визначити коефіцієнт Пуассона алюмінієвого стрижня, якщо відомо, що під дією деякої сили, перпендикулярної перерізу стрижня, відносна поздовжня деформація дорівнює $\varepsilon_l=0{,}001$, а при дотичному напрямі такої ж сили відносний зсув дорівнює $\Psi=0.0027$.

2.152. Визначити товщину нитки, на якій підвішена рамка дзеркального гальванометра, якщо під дією обертального моменту $M=0{,}3$ Н•м вона повертається на кут $\varphi=2°$. Довжина нитки $l=10$ см. Модуль зсуву матеріалу нитки $G=6{,}5$ ГПа.

2.153. Визначити відносне видовження мідного стрижня, якщо при його розтяганні виконується робота 0,12 Дж. Довжина стрижня 2 м, площа його поперечного перерізу 1 мм^2.

2.154. Чому дорівнює щільність пружної енергії розтягнутого сталевого стрижня, якщо відносне видовження 0,001?

2.155. Два вагони масами $m=2.0\bullet10^4$ кг, що рухаються назустріч один одному зі швидкостями $\vec{V}=2$ м/с, зіштовхуються. Визначити стиск пружини буферів вагонів, якщо під дією сили $\vec{F}=40$ кН пружина стискується на $x_0=1$ см. Вважати, що стиск пружини пропорційний силі.

2.156. Визначити силу, з якою гімнаст масою m=60 кг діє на пружну сітку при стрибку з висоти h=8,0 м, якщо під дією сили тяжіння гімнаста сітка прогинається на x_0=16 см.

2.157. Яку силу необхідно розвити при натягу лука на x=0,20 м, якщо вся робота йде на надання стрілі кінетичної енергії, а найбільша дальність польоту стріли s= 36 м? Маса стріли m = 50 г.

2.158. На яку висоту піднімається камінь масою m=30 м, випущений вертикально вгору з рогатки, гумовий джгут якої перерізом S=0,20 см^2 і довжиною l=30 см був розтягнутий на Δl=20 см? Опір повітря не враховувати. Модуль Юнга для гуми E=7,8 МПа.

2.159. Літак сідає на палубу авіаносця зі швидкістю 100 км/год. Зачепившись за канат гальмування, літак пробігає до повної зупинки 50 м. Визначити перевантаження, якщо жорсткість канату не змінюється із розтяганням.

2.160. Підставку, на якій тіло, підвішене на пружині, опускають із прискоренням $\vec{a} < \vec{g}$. До якої максимальної довжини розтягнеться пружина, якщо в початковий момент вона була не розтягнута? Маса тіла m, твердість пружини k.

2.161. Одержати обернені перетворення Лоренца:

$$x = \frac{x' - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \; y = y', z = z', \; t = \frac{t' - (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

2.162. Стрижень рухається з деякою постійною швидкістю $\vec{V}$. Його довжина в нерухомій системі l_1=3 м, а в системі відліку, пов'язаній зі стрижнем, l_2=6,0 м. Визначити власну довжину стрижня і його швидкість відносно нерухомої системи відліку.

V **2.163.** Швидкість руху Землі навколо Сонця $\vec{V}$=30 км/с. Знайти скорочення діаметра Землі в системі координат, пов'язаній із Сонцем.

2.164. Реактивний літак летить зі швидкістю 1000 м/с. На скільки годинник, що знаходиться в літаку, буде відставати від годинника на Землі?

2.165. Один із близнюків у віці 20 років відправляється в далеку космічну подорож до зірки на кораблі зі швидкістю $\vec{V}$= 0,99 с. Для жителів Землі відстань до зірки складає 40 світлових років (тобто таку відстань, що світло від зірки доходить до Землі за 40 років). На скільки років космічний мандрівник виявиться молодшим свого брата, що залишився на Землі?

2.166. Користуючись перетвореннями Лоренца, вивести релятивістський закон додавання швидкостей.

2.167. Користуючись формулами додавання швидкостей теорії відносності, довести, що додавання швидкостей ніколи не приводить до швидкостей, більших швидкості світла.

2.168. Показати, що фотон, випромінюваний у напрямі Землі зі швидкістю $\vec{c}$ зіркою, що рухається до Землі зі швидкістю $\vec{V}$, наближається до неї не зі швидкістю $\vec{c}+\vec{V}$, а зі швидкістю $\vec{c}$.

2.169. Дві ракети віддаляються від Землі в протилежні боки зі швидкістю $0{,}8\ \vec{c}$ відносно Землі. Знайти, з якою швидкістю рухається одна ракета в системі відліку, пов'язаній з іншою ракетою.

2.170. Прискорювач надав радіоактивному ядру швидкість $\vec{V}=0{,}4\ \vec{c}$. У момент вильоту з прискорювача ядро викинуло в напрямі свого руху α - частинку зі швидкістю $0{,}75\ \vec{c}$ відносно прискорювача. Знайти швидкість частинки відносно ядра.

2.171. Який вік космонавта за годинником Землі, якщо він у 30-літньому віці полетів на відстань до 20 св. років? Вважати його вік за годинником космонавта 35 років.

2.172. У скільки раз релятивістська маса електрона, що рухається зі швидкістю $\vec{V}=0{,}999\ \vec{c}$, більша його маси спокою?

2.173. Релятивістська маса тіла, що рухається з визначеною швидкістю, зросла в порівнянні з його масою спокою на 20 %. В скільки разів при цьому зменшилася його довжина?

2.174. Релятивістська маса рухомого протона у 10^2 разів більша його маси спокою. Знайти швидкість протона.

2.175. Тіло рухається зі швидкістю 200,0 Мм/с. В скільки разів збільшилася щільність тіла, що рухається, у порівнянні з щільністю того ж тіла, що знаходиться в спокої? (Розміри тіла, перпендикулярні до напряму руху, не скорочуються.) При розв'язанні задачі використовувати визначення щільності як відношення маси спокою тіла до його об'єму.

2.176. Електрон рухається зі швидкістю 200,0 Мм/с. Визначити кінетичну енергію за класичною і релятивістською формулами. Порівняти результати.

2.177. Знайти відношення кінетичної енергії електрона до його енергії спокою, якщо швидкість електрона 150,0 Мм/с. Який релятивістський імпульс електрона?

2.178. Повна енергія мезона в 8 разів більша його енергії спокою. Яка швидкість мезона?

2.179. Якій зміні маси відповідає зміна енергії на 1,0 Дж?

2.180. Показати, що кінетична енергія в релятивістському випадку $E_k = E - m_0c^2 = m_0c^2(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1)$ **при малих швидкостях руху переходить у класичний вираз для кінетичної енергії:** $\frac{mv^2}{2}$.

РОЗДІЛ 2. ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ

§ 7. Електростатика

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. Напруженість електричного поля $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{Q}$,

де $\vec{F}$ - сила, що діє на точковий позитивний заряд Q, поміщений в дану точку поля.

2. Потік вектора напруженості $\vec{E}$ електричного поля:

а) через довільну поверхню S поміщену в неоднорідне поле,

$$\Phi_E = \int_S E\cos\alpha\, dS,$$

де α - кут між вектором напруженості $\vec{E}$ і нормаллю $\vec{n}$ до елемента поверхні; dS - площа елемента поверхні.

3. Потік вектора напруженості через довільну замкнену поверхню

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS,$$

де інтегрування проводиться в межах усієї поверхні.

4. Теорема Остроградського-Гаусса

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i,$$

де $\sum_{i=1}^{n} Q_i$ - алгебраїчна сума зарядів, розміщених всередині замкнутої поверхні, n- число зарядів.

5. Напруженість поля, створеного металевою сферою радіусом R, що має заряд Q, на відстані r від центру сфери:

всередині сфери(r<R) - $\vec{E} = 0$;

на поверхні сфери (r=R) - $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\dfrac{Q}{R^2}$;

поза сферою (r>R) - $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\dfrac{Q}{r^2}$.

6. Напруженість поля, створеного нескінченно довгою рівномірно зарядженою ниткою (або циліндром) на відстані r від неї

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{2\tau}{r},$$

де τ - лінійна густина заряду.

7. Напруженість поля, створеного нескінченною рівномірно зарядженою площиною

$$E = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon},$$

де σ - поверхнева густина заряду.

8. Напруженість поля створеного двома паралельними нескінченними рівномірно зарядженими площинами, з однаковою за абсолютним значенням поверхневою густиною заряду

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

9. Вектор електростатичного зміщення $\vec{D}$ пов'язаний з напруженістю електричного поля $\vec{E}$ співвідношенням $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$.

10. Потенціал електростатичного поля

$$\varphi = \frac{A}{Q}$$

11. Потенціал поля точкового заряду на відстані r від нього

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 r}$$

12. Потенціал поля, створеного металевою сферою радіусом R, що має заряд Q, на відстані r від центру сфери:

всередині сфери(r<R) - $\varphi = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \frac{Q}{R}$

на поверхні сфери (r=R) - $\varphi = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \frac{Q}{R}$;

поза сферою (r>R) - $\varphi = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \frac{Q}{r}$.

13. Зв'язок напруженості з потенціалом електричного поля

$$\vec{E} = -grad\varphi .$$

14. Робота, що виконується електричним полем при переміщенні електричного заряду Q з однієї точки поля в іншу

$$A = Q(\varphi_1 - \varphi_2), \text{ або } A = Q\int_l E_l dl$$

§ 8. Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Два точкових заряди Q_1 = 2 нКл і Q_2 = -1 нКл перебувають закріплені на відстані l = 20 см один від одного. Яка сила діє на заряд Q = 1,5 нКл, якщо він знаходиться на прямій, що проходить через заряди Q_1 і Q_2, а) в точці А, б) в точці В, в) в точці С? (рис. 1.12). Відомо також, що l_1 = 5 см, l_2 = 3см, l_3=3 см.

Розв'язування

Оскільки заряд Q у всіх випадках знаходиться на прямій, яка проходить через заряди Q_1 і Q_2, то сила, що діє на цей заряд Q, буде дорівнювати алгебраїчній сумі сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Напрям сил в кожному з випадків показано на рис. 1.12 Додатними будемо вважати сили, які спрямовані праворуч вздовж осі X. Враховуючи, що напрям сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ визначений, при розрахунках сили $\vec{F}$ треба брати модуль зарядів Q_1 і Q_2.

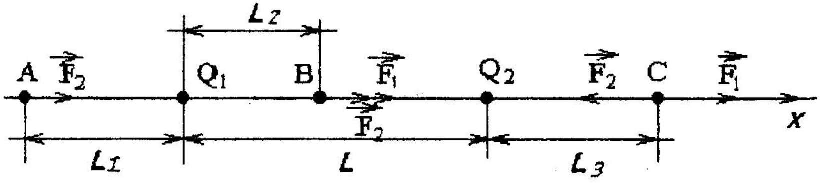


Рис.1.12

Сила, з якою заряд Q_1, діє на заряд Q визначається за законом Кулона:

$$F_1 = Q_1 Q / (4\pi \varepsilon_0 r_1^2), \tag{1}$$

де r_1 - відстань між зарядами Q_1 і Q_2. Аналогічно, для сили взаємодії зарядів Q_1 і Q_2 маємо:

$$F_2 = Q_2 Q / (4\pi \varepsilon_0 r_2^2) \tag{2}$$

а) сила, що діє на заряд Q в точці A визначається за допомогою співвідношення:

$$F = F_1 - F_2 \tag{3}$$

З рис. 1.12 видно, що:

$$r_1 = l_1 = 5 \text{ см}; \tag{4}$$

$$r_2 = l + l_1 = 25 \text{ см}, \tag{5}$$

Після підстановки (1), (2), (4), (5) в (3) отримаємо:

$$F = \frac{Q_2 Q}{4\pi \varepsilon_0 r_2^2} - \frac{Q_1 Q}{4\pi \varepsilon_0 r_1^2} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0}\left(\frac{|Q_2|}{r_2^2} + \frac{Q_1}{r_1^2}\right)$$

Звідки:

$$F = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\left(\frac{1 \cdot 10^{-9}}{25 \cdot 10^{-4}} - \frac{2 \cdot 10^{-9}}{625 \cdot 10^{-4}}\right) = 5 \text{ мкН}$$

б) сила, яка діє на заряд Q в точці B, дорівнює

$$F = F_1 + F_2$$

Для відстаней r_1 і r_2 в цьому випадку можна записати

$r_1 = l_2 = 3$ см; $\quad r_2 = l - l_2 = 17$ см.

Таким чином, отримуємо:

$$F=\frac{Q_1Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}-\frac{Q_2Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{l_2^2}+\frac{Q_2}{(l-l^2)^2}\right)=$$

$$=\frac{1.5\cdot10^{-9}}{4\cdot3{,}14\cdot8.85\cdot10^{-12}}\left(\frac{2\cdot10^{-9}}{9\cdot10^{-4}}-\frac{1\cdot10^{-9}}{289\cdot10^{-4}}\right)=30.4 \text{ мкН}$$

c) для точки C маємо:

$F=F_1-F_2$; $\qquad r_3 = l+l_3=22$ см; $\qquad r_2 = l_3=2$ см.

Звідки

$$F=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1^2}+\frac{Q_2}{r_2^2}\right)=-33{,}2 \text{ мкН}$$

Знак "-" показує на те, що в цьому випадку сила $\vec{F}$ спрямована ліворуч.

Приклад 2

Три точкових заряди $Q_1=Q_2=Q_3=1$ нКл розташовані у вершинах рівностороннього трикутника. Який заряд Q_4 треба розмістити в центрі трикутника для того, щоб ця система зарядів перебувала в рівновазі?

Розв'язування

Всі три заряди, що розташовані у вершинах трикутника, знаходяться в однакових умовах. Тому достатньо з'ясувати, який заряд треба розмістити в центрі трикутника, щоб будь-який один з трьох зарядів, наприклад Q_1, знаходився в рівновазі. Заряд Q_1 буде перебувати у рівновазі, якщо векторна сума діючих на нього сил дорівнює нулю (рис. 1.13.).

$$\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4=\vec{F}+\vec{F}_4=0 \qquad (1)$$

де $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ - сили, з якими відповідно діють на заряд Q_1 заряди Q_2, Q_3, Q_4; $\vec{F}$ - рівнодійна сил $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$.

Оскільки сили $\vec{F}$ і $\vec{F}_4$ напрямлені вздовж однієї прямої, але діють в протилежних напрямах, то векторне рівняння (1) можна замінити скалярним: $\vec{F}$ - $\vec{F}_4=0$, звідки $\vec{F}$ = $\vec{F}_4$. Якщо виразити $\vec{F}$ через $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$ та врахувати, що $\vec{F}_2$ = $\vec{F}_3$, то отримаємо:

$$F_4=F\sqrt{2(1+\cos\alpha)}=2F_2\cos\frac{\alpha}{2}$$

Використавши закон Кулона і прийнявши до уваги, що $Q_1=Q_2=Q_3$, знайдемо:

$$\frac{Q_1 Q_4}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{2Q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

Звідки

$$Q_4 = \frac{2Q_1 r_1^2}{r^2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \tag{2}$$

З рис. 1.13 випливає, що

$$\alpha = 60^0; \qquad r_1 = \frac{r/2}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} \tag{3}$$

Підставляючи (3) в (2), визначимо Q_4:

$$Q_4 = \frac{Q_1}{2\cdot\cos(\alpha/2)} = \frac{Q_1\cdot 2}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{Q_1}{\sqrt{3}}. \tag{4}$$

Звідки

$$Q_4 = \frac{10^{-9}}{\sqrt{3}} = 577\,\text{нКл}$$

Приклад 3

На тонкому стрижні довжиною l=20 см знаходиться рівномірно розподілений електричний заряд. На продовженні осі стрижня на відстані a=10 см від ближчого кінця знаходиться точковий заряд Q_1 = 40 нКл, який взаємодіє з стрижнем з силою $\vec{F}$=6 мкН. Визначити лінійну густину τ заряду стрижня.

Розв'язування

Сила взаємодії F зарядженого стрижня з точковим зарядом Q_1 залежить від лінійної густини τ. Заряджений стрижень не можна розглядати як точковий заряд. Тому виділимо із стрижня (рис.1.14) малу частинку dr з зарядом $dQ = \tau\, dr$.

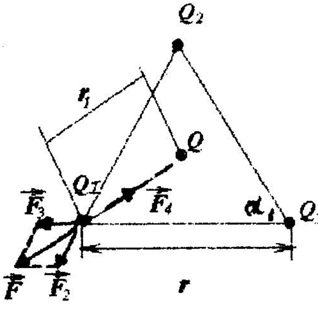


Рис.1.13

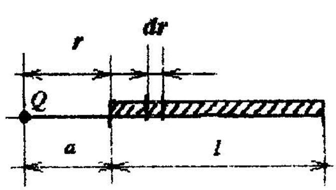


Рис.1.14

Цей заряд можна вважати точковим. Тоді згідно із законом Кулона

$$dF = Q_1 \cdot \tau \cdot dr/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$$

Інтегруючи цей вираз в межах від a до $a+l$, одержимо

$$F = \frac{Q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{a+l}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1\cdot\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right) = \frac{Q_1\cdot\tau\cdot l}{4\pi\varepsilon_0 a(a+l)}$$

Звідки

$$\tau = 4\pi\,\varepsilon_0 a(a+l)\cdot F/(a_1\cdot l) =$$

$$= \frac{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}3\cdot 6\cdot 10^{-6}}{4\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}2}\ \text{Кл/м} = 2.5\ \text{нКл/м}$$

Приклад 4

Два точкових електричних заряди Q_1 =1 нКл і Q_2 = -2 нКл знаходяться в повітрі на відстані α =10 см один від одного. Визначити напруженість $\vec{E}$ і потенціал φ поля, створеного цими зарядами в точці А, яка знаходиться від заряду Q_1 на відстані r_1 = 9 см, а від заряду Q_2 на r_2 = 7 см..

Розв'язування

Згідно з принципом суперпозиції електричних полів кожен заряд створює поле незалежне від присутності в просторі інших зарядів. Тому напруженість $\vec{E}$ електричного поля в точці A може бути знайдена як геометрична сума напруженостей $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ полів, що утворені кожним зарядом:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Абсолютні значення напруженості полів, утворених в повітрі ($\varepsilon = 1$) точковими зарядами Q_1 і Q_2, відповідно:

$$E_1 = Q_1/(4\pi\,\varepsilon_0 r_1^2) \quad (1)$$

$$E_2 = Q_2/(4\pi\,\varepsilon_0 r_2^2) \quad (2)$$

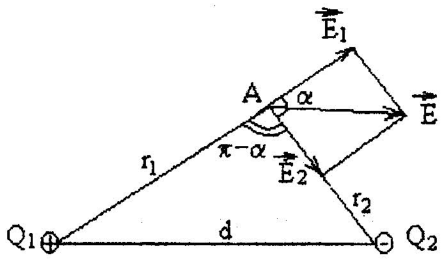


Рис.1.15

Вектор $\vec{E}_1$ (рис. 1.15) спрямований вздовж силової лінії від заряду Q_1, тому що заряд Q_1 додатний і вектор $\vec{E}_2$ спрямований також вздовж силової лінії, але до заряду Q_2, тому що заряд Q_2 – від'ємний. Модуль вектора $\vec{E}$ знайдемо згідно з теоремою косинусів:

$$E = (E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha)^{1/2} \qquad (3)$$

де α - кут між векторами $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ і який можна знайти з трикутника Q_1AQ_2:

$$\cos\alpha = (d^2 - r_1^2 - r_2^2)/(2r_1r_2)$$

В даному випадку, щоб запобігти громіздким записам, зручно значення $\cos\alpha$ розрахувати окремо:

$\cos\alpha = \dfrac{(0{,}1)^2 - (0{,}09)^2 - (0{,}07)^2}{2\cdot 0{,}09\cdot 0{,}07} = -0{,}238$ підставивши (1) і (2) в (3), отримуємо:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{Q_2^2}{r_2^4} + 2\frac{Q_1Q_2}{r_1^4r_2^4}\cdot\cos\alpha\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\left(\frac{(10^{-9})^2}{(0{,}09)^4} + \frac{(2\cdot 10^{-9})^2}{(0{,}07)^4} + 2\frac{10^9\cdot 2\cdot 10^9}{(0{,}07)^4(0{,}09)^4}\cdot(-0{,}238)\right)^{1/2} =$$

$$= 3{,}58\cdot 10^3\, B/M = 3{,}58 кB/м$$

Потенціал φ результуючого поля дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів φ_1 і φ_2: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Потенціал точкового заряду Q_i (i = 1,2) визначається за формулою

$$\varphi_1 = Q_i / 4\pi\varepsilon_0 r_i$$

Тому в нашому випадку маємо:

$$\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi/(4\pi\cdot 9\cdot 10^9)}\left(\frac{10^{-9}}{0.09} + \frac{-2\cdot 10^{-9}}{0.07}\right)B = -157B$$

Приклад 5

Розрахувати напруженість поля прямої нескінченної нитки, рівномірно заряодженої з лінійною густиною γ, в точці О, віддаленій від нитки на відстань r_0.

Розв'язування

Заряд нитки неточковий, тому застосовувати формулу закону Кулона не можна.

Для розв'язування цієї задачі необхідно розділити нитку на досить малі елементи, щоб заряд на кожному з цих елементів був точковим. Розглянемо один такий елемент довжиною dl з зарядом $dQ=\gamma\, dl$ (рис.1.16).

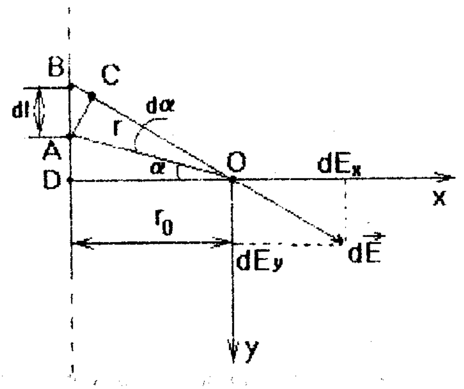


Рис.1.16

В точці О елементарна напруженість поля цього заряду

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r_0^{\ 2}} = \frac{\gamma\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r_0^{\ 2}} \qquad (1)$$

З трикутника АДО розраховуємо $r = r_0 / \cos\alpha$.

Оскільки $|AC| = r d\alpha = r_0 d\alpha / \cos\alpha$, то із трикутника АВС

визначаємо $dl = |AC| / \cos\alpha = r_0 d\alpha / \cos^2\alpha$.

Підставляючи значення r і dl в рівняння (1), отримаємо

$$dE = \frac{\gamma\, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}.$$

Проекції вектора dE на осі ОХ і ОУ:

$$dE_x = \frac{\gamma \cos\alpha\, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0};\ dE_y = \frac{\gamma \sin\alpha\, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}.$$

Звідси після інтегрування отримаємо

$$E_x = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\gamma \cos\alpha\, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0 r_0};\ E_y = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\gamma \sin\alpha\, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = 0.$$

Таким чином, остаточно $E = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0 r_0}$.

Приклад 6

Розрахувати напруженість поля відрізка, рівномірно зарядженого з лінійною густиною γ, в точці О, віддаленій від відрізка на відстань r_0. Кути α_1 і α_2 задані.

Розв'язування

Для розв'язування цієї задачі необхідно розділити відрізок на досить малі елементи, щоб заряд на кожному з цих елементів був точковим. Розглянемо один такий елемент довжиною dl з зарядом $dQ = \gamma\, dl$ (рис.1.17).

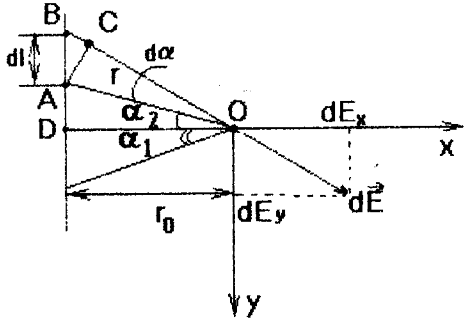


Рис.1.17

Подібно до попередньої задачі проекції вектора dE на осі OX і OY:

$$dE_x = \frac{\gamma \cos\alpha \, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}; \; dE_y = \frac{\gamma \sin\alpha \, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}.$$

Звідси після інтегрування отримаємо

$$E_x = \int_{-\alpha_1}^{+\alpha_2} \frac{\gamma \cos\alpha \, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{\gamma}{4\pi\,\varepsilon_0 r_0}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)$$

$$E_y = \int_{-\alpha_1}^{+\alpha_2} \frac{\gamma \sin\alpha \, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{\gamma}{4\pi\,\varepsilon_0 r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

Загальна напруженість електричного поля відрізка певної довжини буде визначатись за формулою $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$

З рисунка (1.17) видно, що поле прямої нескінченної нитки є частковим випадком поля відрізка заданої довжини. Дійсно, при $\alpha_1 = -\pi/2$ і $\alpha_2 = +\pi/2$ з формул $E_x = \int_{-\alpha_1}^{+\alpha_2} \frac{\gamma \cos\alpha \, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{\gamma}{4\pi\,\varepsilon_0 r_0}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)$ і

$$E_y = \int_{-\alpha_1}^{+\alpha_2} \frac{\gamma \sin\alpha \, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{\gamma}{4\pi\,\varepsilon_0 r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

отримаємо $E_x = \int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\gamma \cos\alpha\, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0 r_0}$ і $E_y = \int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\gamma \sin\alpha\, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = 0$, що відповідає напруженості електричного поля нескінченно довгої зарядженої нитки.

Приклад 7

Тонкою ниткою зігнутою дугою кола рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\tau = 10 нКл/м$. Визначити напруженість і потенціал електричного поля, що утворене цим зарядом в точці, яка збігається з центром кривизни дуги. Довжина l нитки складає одну третину довжини кола і рівна $l = 15$ см.

Розв'язування

Виберемо осі координат так, щоб початок координат збігався з центром кривизни дуги, а вісь y була б розташована симетрично відносно кінців дуги (рис.1.18).

Візьмемо на нитці елемент довжиною dl. Заряд dQ, що знаходиться на ньому, можна вважати точковим. Визначимо напруженість електричного поля в точці 0. Для цього знайдемо спочатку напруженість $d\vec{E}$ поля, створеного зарядом dQ: $d\vec{E} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

де $\vec{r}$ - радіус-вектор, що спрямований від елемента dl до точки, в якій визначається напруженість. Виразимо вектор $d\vec{E}$ через проекції dE_x і dE_y на осі координат

$$d\vec{E} = \vec{i} \cdot dE_x + \vec{j} \cdot dE_y,$$

де $\vec{i}$ і $\vec{j}$ - орти вздовж осей X і Y.

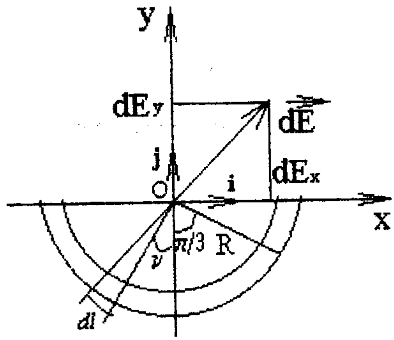


Рис.1.18.

Напруженість $\vec{E}$ знайдемо інтегруванням:

$$\vec{E} = \int_l d\vec{E} = \vec{i}\int_l dE_x + \vec{j}\int_l dE_y$$

Завдяки симетрії $\int_l dE_x = 0$.

Тоді $\vec{E} = \vec{j}\int_l dE_y$, (1)

де $dE_y = dE \cdot \cos\nu = \tau \cdot dl \cdot \cos\nu / (4\pi\varepsilon_0 r^2)$.

Оскільки $r = R = const$, а $dl = R \cdot d\nu$, то

$$dE_y = \frac{\tau \cdot R \cdot d\nu}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot \cos\nu = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R} \cdot \cos\nu \cdot d\nu \qquad (2)$$

Підставимо (1) в (2) і, враховуючи симетричне положення дуги відносно осі y, межі інтегрування візьмемо від 0 до $\frac{\pi}{3}$ і результат помножимо на 2:

$$\vec{E} = \vec{j}\,\frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi/3}\cos\nu d\nu = \vec{j}\,\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\left|\sin\nu\right|_0^{\pi/3} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}\sqrt{3}$$

Якщо виразимо R через довжину l ($l = 2\pi R$), отримаємо

$$\vec{E} = \vec{j}\frac{\tau}{3\varepsilon_0 l}\sqrt{3}$$

Звідки

$$E = \frac{10^{-8}\cdot 1{,}73}{3\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}15}\frac{В}{м} = 4{,}36\frac{кВ}{м}$$

Знайдемо потенціал електричного поля в точці *0*. Спочатку знайдемо потенціал $d\varphi$, що створюється точковим зарядом в точці 0:

$$d\varphi = \frac{\tau\cdot dl}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Звідки

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^l dl = \frac{\tau\cdot l}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Оскільки $l = 2\pi R/3$, то

$$\varphi = \frac{\tau}{6\varepsilon_0} = \frac{10^{-8}}{6\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}В = 188В$$

Приклад 8

Електричне поле створено довгим циліндром радіусом R=1 см, який рівномірно заряджений з лінійною густиною $\tau = 20$ *нКл/м. Визначити різницю потенціалів двох точок цього поля, які знаходяться на відстані* a_1 *= 0,5 см і* a_2 *= 2 см від поверхні циліндра в середній його частині.*

Розв'язування

Для визначення різниці потенціалів скористаємось співвідношенням між напруженістю і потенціалом $\vec{E} = -grad\varphi$. Для поля з осьовою симетрією, яким є поле циліндра, це співвідношення можна записати у вигляді

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \qquad \text{чи} \qquad d\varphi = -E \cdot dr$$

Інтегруючи цей вираз, знайдемо різницю потенціалів двох точок, які знаходяться на відстанях r_1 і r_2 від осі циліндра:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E \cdot dr \qquad (1)$$

Оскільки циліндр довгий і точки знаходяться поблизу його середньої частини, можна скористуватися формулою і для напруженості поля, що створюється нескінченим циліндром

$$E = \tau /(2\pi\varepsilon_0 r) \qquad (2)$$

Підставивши (2) в (1) одержимо

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

Звідки

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{20 \cdot 10^{-9}}{2\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\ln\frac{(1+2)\cdot 10^{-2}}{(1+0{,}5)\cdot 10^{-2}} =$$

$$=250\ В$$

Приклад 9

Визначити прискорювальну різницю потенціалів U, яку повинен пройти в електричному полі електрон, що рухався з швидкістю $\vec{V}_1=10^6$ м/с, щоб його швидкість зросла в $n=2$ рази.

Розв'язування

Прискорювальну різницю потенціалів можна знайти, якщо визначити роботу A сил електростатичного поля. Ця робота визначається добутком заряду електрона на різницю потенціалів

$$A = eU \qquad (1)$$

Робота сил поля в даному випадку дорівнює зростанню кінетичної енергії електрона:

$$A = T_2 - T_1 = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2}, \tag{2}$$

де T_1 і T_2 - кінетична енергія електрона до і після проходження прискорювального поля;

m - маса електрона;

$\vec{V}_1$ і $\vec{V}_2$ - початкова і кінцева швидкості.

Після підстановки (1) в (2), отримаємо:

$$eU = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \frac{m \cdot n^2 \cdot V_1^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2},$$

де $n = V_2 / V_1$.

Таким чином, маємо:

$$U = \frac{mV_1^2(n^2 - 1)}{2e} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}(10^6)^2(2^2 - 1)}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} B = 8{,}53\ B$$

Приклад 10

Конденсатор ємністю C_1=3 мкФ був заряджений до різниці потенціалів U_1=40 В. Після від'єднання від джерела струму конденсатор з'єднали паралельно з другим незарядженим конденсатором ємністю C_2=5 мкФ. Яка енергія W витрачається на створення іскри в момент приєднання другого конденсатора?

Розв'язування

Енергія, яка витрачена на утворення іскри

$$W' = W_1 - W_2 \tag{1}$$

W' - енергія, яку мав перший конденсатор до приєднання до нього другого конденсатора ;

W_2 - енергія, яку має батарея, що складається з двох конденсаторів.

Енергія зарядженого конденсатора визначається за формулою

$$W = \frac{1}{2}CU^2 \qquad (2)$$

де C - ємність конденсатора чи батареї конденсаторів.

Якщо виразити в формулі (1) енергії W_1 і W_2 за формулою (2) і прийняти до уваги, що загальна ємність паралельно з'єднаних конденсаторів дорівнює сумі ємностей окремих конденсаторів, отримаємо:

$$W' = \frac{1}{2}C_1U_1^2 - \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U_2^2 \qquad (3)$$

де U_2 - різниця потенціалів на клемах батареї конденсаторів.

Враховуючи, що заряд після приєднання другого конденсатора залишився попереднім, виразимо різницю потенціалів U_2 таким чином:

$$U_2 = Q/(C_1 + C_2) = C_1U_1/(C_1 + C_2) \qquad (4)$$

Якщо підставимо U_2, в (3), знайдемо:

$$W' = \frac{C_1U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2)C_1^2U_1^2}{2(C_1 + C_2)^2}$$

Звідки $W' = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\cdot U_1^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot10^{-6}\cdot5\cdot10^{-6}}{3\cdot10^{-6} + 5\cdot10^{-6}}\cdot1600\,Дж =$

$=1,5$мДж.

§ 9. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

3.1. Точкові заряди $Q_1=50$ *мкКл*, $Q_2=-20$ *мкКл*, знаходяться на відстані $d=15$ *см* один від одного. Визначити напруженість поля в точці віддаленій на $r_1=3$ *см* від першого і $r_2=4$ *см* від другого заряду. Визначити також силу F, яка діє в цій точці на точковий заряд $Q=2$ *мкКл*.

3.2. Три однакових точкових заряди $Q_1=Q_2=Q_3=5$ *нКл* знаходяться в вершинах рівностороннього трикутника зі стороною $Q=15$ *см*. Визначити модуль і напрям сили $\vec{F}$, яка діє на один із зарядів з боку інших двох.

3.3. Два позитивних точкових заряди Q і $8Q$ закріплені на відстані $l=100$ *см* один від одного. Визначити, в якій точці на прямій, що проходить через заряди, слід розмістити третій заряд так, щоб він знаходився в рівновазі. Який знак повинен мати цей заряд для того, щоб рівновага була стійкою, якщо переміщення заряду можливе лише вздовж прямої, що проходить через закріплені заряди.

3.4. Дві однакові заряджені кульки підвішені в одній точці на нитках однакової довжини, при цьому нитки розійшлися на кут α. Кульки занурені в олію. Яка густина олії ρ_0, якщо кут α при зануренні не змінюється. Густина матеріалу кульок $\rho=1,5\ 10^3$ *кг/м*^{3} ; діелектрична проникливість олії $\varepsilon=2,3$.

3.5. Чотири однакових заряди $Q_1=Q_2=Q_3=Q_4=50$ *нКл* закріплені в вершинах квадрата зі стороною $a=10$ *см*. Знайти силу $\vec{F}$, яка діє на один з цих зарядів з боку трьох інших.

3.6. На вершинах квадрата знаходяться однакові заряди $Q_1=Q_2=Q_3=Q_4=8\cdot10^{-10}$ *Кл*. Який від'ємний заряд Q треба розмістити в центрі квадрата, щоб сила взаємного відштовхування позитивних зарядів була зрівноважена силою притягання від'ємного заряду?

3.7. На відстані $d=20$ *см* знаходяться два точкових заряди $Q_1=-50$ *нКл* і $Q_2=100$ *нКл*. Визначити силу $\vec{F}$, яка діє на заряд $Q_3=-10$ *нКл*, який знаходиться на відстані $d=20$ *см* від обох зарядів.

3.8. Відстань d між двома точковими зарядами $Q_1=2$ *нКл* і $Q_2=4$ *нКл* дорівнює 60 *см*. Визначити точку, в якій треба розмістити третій заряд Q_3 так, щоб система зарядів знаходилась в рівновазі. Визначити розмір та знак заряду. Стійка чи нестійка буде рівновага?

3.9. На тонкому кільці рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\tau=0,2$ *нКл/см*. Радіус кільця $R=15$ *см*. На осі кільця знаходиться точковий заряд $Q=10$ *нКл*. Визначити силу $\vec{F}$, яка діє на точковий заряд з боку зарядженого кільця, якщо він знаходиться від центру кільця на відстані: 1) $R_1=20$ *см*; 2) $R_2=10$ *м*.

3.10. На тонкій нитці, зігнутій в дугу кола радіусом $R=10$ *см*, рівномірно розповсюджений заряд $Q=20$ *нКл*. Визначити напруженість $\vec{E}$ поля, створеного цим зарядом у точці, яка збігається з центром кривизни дуги, якщо довжина нитки дорівнює чверті довжини кола.

3.11. Визначити напруженість $\vec{E}$ поля, яка створюється зарядом, рівномірно розподіленим на тонкому прямому стрижню з лінійною густиною заряду $\tau=200$ *нКл/м*, в точці, яка лежить на продовжені осі стрижня на відстані $Q=20$ *см* від ближнього кінця. Довжина стрижня $l=40$ *см*.

3.12. На продовженні осі тонкого прямого стрижня, рівномірно зарядженого з лінійною густиною заряду $\tau=15$ *нКл/см*, на відстані $a=40$ *см* від кінця стрижня знаходиться точковий заряд $Q=10$ *мкКл*. Другий кінець стрижня спрямований до нескінченності. Визначити силу взаємодії стрижня і заряду Q.

3.13. Тонким кільцем радіусом $R=10$ *см* рівномірно розподілений заряд $Q_1=10$ *нКл*. Яка напруженість $\vec{E}$ поля в точці, яка знаходиться на осі кільця на відстані $a=20$ *см* від центра кільця?

3.14. Два довгих тонких рівномірно заряджених ($\tau=1$ *мкКл/м*) стрижня розташовані перпендикулярно один до одного так, що точка перетину їх осей знаходиться на відстані $a=10$ *см* і $b=15$ *см* від ближчих кінців стрижней. Знайти силу $\vec{F}$, що діє на заряд $Q=10$ *нКл*, розміщений в точці перетину осей стрижней.

3.15. Тонке півкільце радіусом $R=20$ *см* має рівномірно розподілений заряд $Q_1=2$ *мкКл*. Визначити силу $\vec{F}$, яка діє на точковий заряд $Q_2=40$ *нКл*, розташований в центрі кривизни півкільця.

3.16. Визначити напруженість $\vec{E}$ поля, утвореного тонким довгим стрижнем, рівномірно зарядженим з лінійною густиною заряду $\tau=20$ *мкКл/м* в точці, яка знаходиться на відстані $a=2$ *см* від стрижня біля його середини.

3.17. Паралельно нескінченній площині, зарядженій з поверхневою густиною заряду $\delta=4$ *мкКл/м*^{2}, розташована нескінченно довга пряма нитка, заряджена з лінійною густиною заряду $\tau=100$ *нКл/м*. Визначити силу $\vec{F}$, що діє з боку площини на відрізок нитки довжиною $l=1$ *м*.

3.18. У точці A, розташованій на відстані 5 см від нескінченно довгої зарядженої нитки, напруженість електричного поля 150 кВ/м. При якій граничній довжині нитки знайдене значення напруженості буде вірним з точністю до 2 %, якщо точка А розташована на нормалі до середини нитки? Яка напруженість $\vec{E}$ електричного поля в точці A, якщо довжина нитки 20 см ? Лінійну густину заряду на нитці кінцевої довжини вважати рівною лінійній густині заряду на нескінченно довгій нитці. Знайти лінійну густину заряду на нитці.

3.19. Кільце з дроту радіусом 10 см має негативний заряд 5 нКл. Знайти напруженості $\vec{E}$ електричного поля на осі кільця в точках, розташованих від центра кільця на відстанях L, рівних 0, 5, 8, 10 і 15 см. Побудувати графік $\vec{E}=f(L)$. На якій відстані L від центра кільця напруженість $\vec{E}$ електричного поля буде мати максимальне значення?

3.20. Напруженість електричного поля на осі зарядженого кільця має максимальне значення на відстані L від центру кільця. В скільки разів напруженість електричного поля в точці, яка розташована на відстані 0,5L від центру кільця, буде менша максимального значення напруженості?

3.21. Показати, що електричне поле, утворене зарядженим диском, у граничних випадках переходить в електричне поле: а) нескінченно протяжної площини; б) точкового заряду.

3.22. Діаметр зарядженого диска D=25 см. При якій граничній відстані a від диска електричне поле можна розглядати як поле нескінченно протяжної площини? Погрішність при такому допущенні не повинна перевищувати δ=0,05.

3.23. На відстані 4 см від безмежно довгої зарядженої нитки знаходиться точковий заряд 0.55 пКл. Під дією поля заряд наближається до нитки на відстань 2 см; при цьому здійснюється робота 50 мДж. Знайти лінійну густину заряду нитки.

3.24. Дві довгі однойменно заряджені нитки розташовані на відстані 5 см одна від одної. Лінійна густина заряду на нитках 15 мкКл/м. Знайти модуль і напрям напруженості $\vec{E}$ результуючого електричного поля в точці, що знаходиться на відстані 20 см від кожної нитки.

3.25. З якою силою на одиницю площі відштовхуються дві однойменно заряджені нескінченно протяжні площини? Поверхнева густина заряду на площинах 5 мКл/м .

3.26.. Дві однакові круглі пластини площею $S=200\ см^2$ кожна розташована паралельно одна до одної. Заряд однієї пластини $Q_1=200\ нКл$, другої $Q_2=-200\ нКл$. Визначити силу $\vec{F}$ взаємного притягання пластин, якщо відстань між ними: а) $r_1=5\ мм$; б) $r_2=20\ м$.

3.27. На нескінченному тонкостінному циліндрі діаметром $d=20\ см$ рівномірно розподілений заряд з поверхневою густиною $\delta=4мкКл/м^2$ Визначити напруженість поля в точці, яка віддалена від поверхні циліндра на $a=15\ см$.

3.28. З якою силою (на одиницю площі) взаємодіють дві нескінченні паралельні площини, заряджені з однаковою поверхневою густиною заряду $\delta=5\ мкКл/м^2$?

3.29. Дві довгі прямі паралельні нитки знаходяться на відстані $d=5\ см$ одна від одної. На нитках рівномірно розподілені заряди з лінійною густиною заряду $\tau_1=-5нКл/см$ і $\tau_2=10\ нКл/см$. Визначити напруженість $\vec{E}$ електричного поля в точці, яка знаходиться на відстані $r_1=3\ см$ від першої нитки і на відстані $r_2=4\ см$ від другої нитки.

3.30. До нескінченної рівномірно зарядженої вертикальної площини підвішена на нитці однойменно заряджена кулька масою $m=30\ мг$ і зарядом $Q=0,5\ нКл$. Сила натягу нитки, на якій висить кулька, $\vec{F}=0,9\ мН$. Знайти поверхневу густину заряду δ на площині.

3.31. З якою силою (на одиницю довжини) взаємодіють дві заряджені нескінченно довгі паралельні нитки з однаковою лінійною густиною заряду $\tau=20\ мкКл/м$, які знаходяться на відстані $r=10\ см$ одна від одної?

3.32. Поверхнева густина заряду δ нескінченної вертикальної площини дорівнює $400\ мкКл/м^2$ До площини на нитці підвішено заряджену кульку масою $m=10\ г$. Визначити заряд Q кульки, якщо нитка створює з площиною кут $\varphi=30^0$.

3.33. Визначити потенціальну енергію W системи двох точкових зарядів $Q_1=400\ нКл$ і $Q_2=20\ нКл$, які знаходяться на відстані $r=5\ см$ один від одного. Побудувати графік залежності енергії електростатичної взаємодії двох точкових зарядів від відстані між ними в інтервалі $2 \le r \le 10$ см через кожні 2 см. Заряди Q_1=1 нКл і Q_2=3 нКл; ε=1. Графік побудувати для: а) однойменних зарядів; б) різнойменних зарядів.

3.34. Знайти напруженість електричного поля в точці, що лежить посередині між точковими зарядами Q_1=8 нКл і Q_2=-6 нКл. Відстань між зарядами r=10 см; ε=1.

3.35. Дві паралельні заряджені площини, поверхнева густина заряду яких δ_1=*2мкКл/м*^{2} і δ_2=*-0,8 мкКл/м*^{2}, знаходяться на відстані *d=0,6 см* одна від одної. Визначити різницю потенціалів *U* між площинами.

3.36. Поле утворене нескінченною рівномірно зарядженою площиною з поверхневою густиною заряду δ=*40 нКл/м*^{2}. Визначити різницю потенціалів *U* двох точок поля, віддалених від площини на r_1=*15 см* і r_2=*20 см*.

3.37. Чотири однакових краплі ртуті, заряджені до потенціалу φ=*10 В* з'єднуються в одну. Який буде потенціал φ_1 краплі, що виникла?

3.38. Тонкий стрижень зігнутий в кільце радіусом *R=10 см*. Він рівномірно заряджений з лінійною густиною заряду τ=*800 нКл/м*. Визначити потенціал φ в точці, яка знаходиться на осі кільця на відстані *h=10 см* від його центру.

3.39. Поле, створене точковим диполем з електричним моментом *p=200 нКл·м*. Визначити різницю потенціалів *U* двох точок поля, розташованих симетрично відносно диполя на його осі на відстані *r=40 см* від центра диполя.

3,40. Електричне поле створене нескінченно довгою зарядженою ниткою, лінійна густина заряду якої τ=*20 нКл/м*. Визначити різницю потенціалів *U* двох точок поля, віддалених від нитки на відстань r_1=*8 см* і r_2=*12 см*.

3.41. Тонка квадратна рамка рівномірно заряджена з лінійною густиною τ=*200 нКл/м*. Визначити потенціал φ поля в точці перетину діагоналей.

3.42. Пилинка масою *200 мкг*, яка несе на собі заряд *Q=40 нКл*, влетіла в електричне поле в напрямі силових ліній. Після проходження різниці потенціалів *U=200 В* пилинка мала швидкість $\vec{V}_0$=*10 м/с*. Визначити швидкість пилинки до того, як вона влетіла в поле.

3.43. Електрон з кінетичною енергією *T=10 еВ* влетів в однорідне електричне поле в напрямі силових ліній поля. Яку швидкість буде мати електрон, пройшовши в цьому полі різницю потенціалів *U=8 В*?

3.44..Знайти відношення швидкостей іонів *Cu* і *K*, що пройшли однакову різницю потенціалів.

3.45. Електрон з енергією *T=400 еВ* (в нескінченності) рухається вздовж силової лінії до поверхні металевої зарядженої сфери радіусом *R=10 см*. Визначити мінімальну відстань, на яку наблизиться електрон до поверхні сфери, якщо заряд її *Q=-10 нКл*.

3.46. Електрон, пройшовши в плоскому конденсаторі шлях від однієї пластини до другої, мав швидкість $\vec{V}=10$ *м/с*. Відстань між пластинами $d=8$ *мм*. Знайти: 1) різницю потенціалів U між пластинами; 2) поверхневу густину заряду δ на пластинах.

3.47. Електрон з деякою початковою швидкістю влітає в плоский конденсатор паралельно до пластин на однаковій відстані від них. До пластин конденсатора прикладена різниця потенціалів 300 В. Відстань між пластинами 2 см, довжина конденсатора 10 см. Якою повинна бути гранична початкова швидкість електрона, щоб електрон не вилетів із конденсатора?

3.48. Частинка масою 5 *кг*, яка несе на собі $N=10$ електронів, пройшла в вакуумі прискорювальну різницю потенціалів $U=1$ *мВ*, яка кінетична енергія частинки? Яку швидкість здобула частинка?

3.49. Іон атому Li^{+} пройшов різницю потенціалів $U=400$ *В*, іон атому Na^{+} - різницю потенціалів $U=300$ *В*. Знайти відношення швидкостей цих іонів.

3.50. При бомбардуванні нерухомого ядра K^{+} α-частинкою сила відштовхування між ними досягає $\vec{F}=100$ *Н*. На яку найменшу відстань наблизилась α- частинка до ядра атома калію? Яку швидкість мала α- частинка на великій відстані від ядра? Впливом електронної оболонки атома калію знехтувати.

3.51. Відстань між пластинами плоского конденсатора $d=2$ *мм*, різниця потенціалів $U=600$ *В*. Заряд кожної пластини $Q=40$ *нКл*. Визначити енергію W поля конденсатора та силу $\vec{F}$ взаємного притягання пластин.

3.52. У плоскому горизонтально розташованому конденсаторі заряджена крапелька ртуті знаходиться в рівновазі при напруженості електричного поля 60 кВ/м. Заряд краплі Q=5 мкКл. Знайти радіус краплі.

3.53. Два однакових плоских повітряних конденсатори ємністю $C=100$ *мкФ* кожний з'єднані послідовно. Визначити, наскільки зміниться ємність батареї, якщо простір між пластинами одного з конденсаторів заповнити парафіном.

3.54. Два конденсатори ємністю $C_1=5$ *мкФ* і $C_2=8$ *мкФ* з'єднані послідовно і приєднані до батареї з е.р.с. $E=80$ *В*. Визначити заряди Q_1 і Q_2 конденсаторів та різницю потенціалів U_1 і U_2 між їх обкладками.

3.55. Плоский конденсатор складається з двох круглих пластин радіусом $R=10$*см* кожна. Відстань між пластинами $d=2$ *мм*. Конденсатор приєднаний до джерела струму з напругою $U=80$ *В*. Визначити заряд Q і напруженість E поля конденсатора в двох випадках: а) діелектрик – повітря; в) діелектрик - скло.

3.56. Два однакових плоских повітряних конденсатори з'єднали послідовно в батарею, яка під'єднана до джерела струму з е.р.с. Е$=12$ *В*

3.57. Визначити, наскільки зміниться напруга на одному з конденсаторів, якщо другий занурити в трансформаторну оливу.

3.58. Дві металеві кульки радіусами $R_1=5$ *см* і $R_1=10$ *см* мають заряди $Q_1=40$ *нКл* і $Q_2=-20$ *нКл*, відповідно, знайти енергію, яка виділяється при розряді, якщо кульки з'єднані провідником.

3.59. Простір між пластинами плоского конденсатора заповнений двома шарами діелектрика: скла товщиною d_1 = 0,2 см і парафіну товщиною d_2 = 0,3 см. Різниця потенціалів між обкладками U = 300 В. Визначити напруженість поля і падіння потенціалу в кожному шарі.

3.60. Плоский конденсатор, з площею пластин S=200 см^2 кожна, заряджений до різниці потенціалів U = 2 кВ. Відстань між пластинами d = 2 см. Діелектрик - скло. Визначити енергію W поля конденсатора і густину енергії ω поля.

§ 10. Закони постійного струму

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. Сила постійного струму

$$I = \frac{q}{t},$$

де q - електричний заряд, що проходить через поперечний переріз провідника за час t.

2. Густина електричного струму

$$\vec{j} = \frac{I}{S}\vec{k},$$

де $\vec{k}$ - одиничний вектор, що збігається за напрямом руху позитивного заряду.

3. Опір однорідного провідника

$$R = \rho\frac{l}{S},$$

де ρ - питомий опір провідника, l — його довжина

4. Залежність питомого опору провідника від температури

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

де ρ і ρ_0 - питомі опори відповідно при температурі t і 0^0C, α - температурний коефіцієнт опору.

5. Опір послідовно з'єднаних провідників: $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$; опір паралельно з'єднаних провідників: $\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}$.

6. Закон Ома:

а) для неоднорідної ділянки кола: $I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + E_{12}}{R} = \frac{U}{R}$;

б) для однорідної ділянки кола: $(E_{12}=0)$ - $I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{R} = \frac{U}{R}$;

в) для замкнутого кола $(\varphi_1 = \varphi_2)$: $I = \frac{E}{R}$.

7. Правила Кірхгофа.

Перше правило – алгебраїчна сума струмів в електричному вузлі дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0.$$

Друге правило - в замкнутому контурі алгебраїчна сума спадів напруг на всіх ділянках контуру дорівнює алгебраїчній сумі електрорушійних сил:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{m} E_i.$$

8. Робота, що виконується електричним полем на ділянці кола постійного струму за час t:

$$A = IUt.$$

9. Потужність струму:

$$P = IU.$$

10. Закон Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2 Rt.$$

§ 11. Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Сила струму в провіднику з опором R=20 Ом зростає протягом часу Δt =2 с за лінійним законом від I_0=0 до I= 6 А. Визначити кількість теплоти Q_1, яка виділяється в цьому провіднику протягом першої секунди і Q_2- протягом другої секунди, а також знайти відношення Q_1 / Q_2.

Розв'язування

Закон Джоуля-Ленца у вигляді $Q=I^2 \cdot R \cdot t$ справедливий, якщо струм сталий ($I=const$). Якщо ж сила струму в провіднику змінюється, то цей закон слід записати для нескінченно малого інтервалу часу:

$$dQ=I^2 \cdot R \cdot dt \qquad (1)$$

Тут сила струму I є функцією часу. В даному випадку

$$I=k \cdot t, \qquad (2)$$

де k - коефіцієнт, який дорівнює

$$K = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{6}{2} \cdot \frac{A}{c} = 3A/c$$

З врахуванням (2) формула (1) приймає вигляд:

$$dQ=k^2 \cdot R \cdot t^2 \cdot dt \qquad (3)$$

Для визначення кількості теплоти, що виділяється за інтервал часу Δt_i, вираз (3) проінтегруємо в межах від t_1 і до t_2 :

$$Q = k^2 R \int_{t_1}^{t_2} t^2 dt = \frac{1}{3} k^2 R (t_2^3 - t_1^3)$$

Виконаємо розрахунки:

$$Q_2 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 20 \cdot (8-1) Дж = 420 Дж$$

$$Q_1 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 20 \cdot (1-0) Дж = 60 Дж$$

Таким чином $Q_1/Q_2=420/6=7$, тобто за другу секунду виділиться у 7 разів більше тепла, ніж за першу.

Приклад 2

Електричне коло складається з двох гальванічних елеметів, трьох резисторів та гальванометра (рис.1.19.). В цьому колі $R_1=100$ Ом, $R_2=50$ Ом, $R_3=20$ Ом, $E_1= 2$ В. Гальванометр реєструє силу струму $I_3=50$ мА. Визначити е.р.с. E_2 другого елемента. Опором гальванометра і внутрішнім опором елементів знехтувати. Для розрахунку розгалужених кіл використати закони Кірхгофа.

1. Перед складанням рівнянь необхідно вибрати: а) напрям струмів (якщо вони не задані умовою задачі) і вказати їх стрілкою на рисунку; б) напрям обходу контурів.

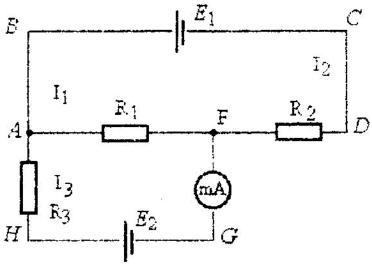


Рис.1.19.

2. При складанні рівнянь за першим законом Кірхгофа вважати струми, які підходять до вузла, додатними; струми, які виходять з вузла – від'ємними. Кількість рівнянь, які складається за першим законом Кірхгофа, повинна бути на одиницю меншою кількості вузлів у колі.

3. При складанні рівняння за другим законом Кірхгофа слід прийняти до уваги, що а) спад напруги (тобто IR) входить в рівняння з додатним знаком, якщо напрям струму на даній ділянці збігається з напрямом обходу контуру; в протилежному випадку додаток IR входить до рівняння зі знаком мінус; б) е.р.с. входить у рівняння зі знаком плюс, якщо вона підвищує потенціал в напрямі обходу контура, тобто, якщо під час обходу йдемо до плюса всередині джерела струму; в іншому випадку е р.с. треба брати зі знаком мінус.

Кількість незалежних рівнянь, які можуть бути складені за другим законом Кірхгофа, дорівнює кількості незалежних контурів. Незалежним є контур, який містить хоча б одну вітку кола, яка не входить до складу інших контурів. Якщо після розв'язування одержаних рівнянь, отримані від'ємні значення струму, то це означає, що цей струм має напрям протилежний вибраному.

Розв'язування

За першим законом Кірхгофа для вузла F маємо:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \qquad (1)$$

За другим законом Кірхгофа для контура $ABCDFA$ маємо

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = -E_1 \qquad \text{або} \quad I_1 R_1 + I_2 R_2 = E_1 \qquad (2)$$

Відповідно для контура $AFGHA$

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 = E_2 \qquad (3)$$

Після підстановки чисельних значень отримаємо

$$I_1 - I_2 - 0{,}05 = 0; \;\; 50\, I_1 + 25\, I_2 = 1; \;\; 100 \cdot I_1 + 20 \cdot 0{,}05 = E_2$$

Якщо перенести в цих рівняннях невідомі величини в ліву частину, а відомі - в праву, одержимо таку систему рівнянь:

$$I_1 - I_2 = 0{,}05$$

$$50\, I_1 + 25\, I_2 = 1$$

$$100\, I_1 - E_2 = -1$$

Цю систему з трьома невідомими можна розв`язати. Складемо і обчислимо визначник Δ системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 50 & 25 & 0 \\ 100 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 100 & -1 \end{vmatrix} = -25 - 50 = -75$$

Складемо і обчислимо визначник ΔE_2:

$$\Delta E_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0{,}05 \\ 50 & 25 & 1 \\ 100 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 25 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 100 & -1 \end{vmatrix} + 0{,}05 \cdot \begin{vmatrix} 50 & 25 \\ 100 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -25 - 50 - 100 - 125 = -300$$

Звідки отримаємо:

$$\{E_2\} = \Delta E_2 / \Delta = -300/(-75) = 4$$

Таким чином, $E_2 = 4$ *В*.

Приклад 3

Простір між пластинами плоского конденсатора має об'єм $V = 376$ см^3 і заповнений воднем, який частково іонізований.. Площа пластин конденсатора $S = 250$ см^2. При якій напрузі U сила струму, що *протікає крізь конденсатор, досягає $I=2$ мкА, якщо концентрація іонів у газі $n=5{,}3\ 10^7$ см$^{-3}$?*

Розв'язування

Напруга U на пластинах конденсатора пов'язана з напруженістю електричного поля і відстанню між пластинами співвідношенням

$$U=E\cdot d \qquad (1)$$

Напруженість поля можна знайти із виразу для густини струму

$$J=Q\cdot n\cdot(b_+ + b_-)\cdot E,$$

де Q - заряд іона, n - концентрація іонів, b_+ і b_- - рухливість додатних і від'ємних іонів. Звідси $E=\dfrac{j}{Q\cdot n\cdot(b_+ + b_-)}=\dfrac{I}{Q\cdot n\cdot(b_+ + b_-)S}$.

Оскільки об'єм простору, що знаходиться між пластинами, дорівнює Sd, то $d=V/S$.

Якщо підставимо вирази для E і d в формулу (1), одержимо

$$U=\frac{I\cdot V}{Q\cdot n\cdot(b_+ + b_-)\cdot S^2}$$

Враховуючи, що $b_+=5{,}4\cdot10^{-4}$ м^2/(с·в); $b_-=7{,}4\cdot10^{-4}$ м^2/(с·в),

отримаємо: $U=\dfrac{2\cdot10^{-6}\cdot3{,}75\cdot10^{-4}}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot5{,}3\cdot10^{13}\cdot(5{,}4+7{,}4)\cdot10^{-4}\cdot6{,}26\cdot10^{-4}}=110\ B$.

Приклад 4

Електричне коло постійного струму складається з резисторів, що з'єднані змішано. Схема з'єднання подається на рисунку (1.20.).

Перевірити справедливість першого закону Кірхгофа для всіх електричних вузлів.

Розв'язування

Розраховуємо загальний опір електричного кола:

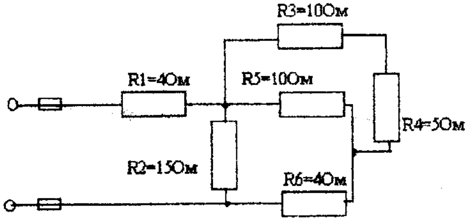


Рис.1.20.

$R' = R_3 + R_4 = 10 + 5 = 15\ Ом$; $R'' = \dfrac{R_5 \cdot R'}{R_5 + R'} = \dfrac{15 \cdot 10}{15 + 10} = 6\ Ом$, $R''' = R'' + R_6 = 6 + 4 = 10\ Ом$,

$R^{IV} = \dfrac{R''' \cdot R_2}{R''' + R_2} = \dfrac{10 \cdot 15}{10 + 15} = 6\ Ом$, $R_{зас} = R_1 + R^{IV} = 4 + 6 = 10\ Ом$.

Струм, що проходить через резистор R_1: $I_1 = \dfrac{U_1}{R_1} = \dfrac{40}{4} = 10\ A$.

Напруга , що прикладена до електричного кола:

$U_{зас} = I_1 \cdot R_{зас} = 10 \cdot 10 = 100\ B$.

Спад напруги на резисторі R_2: $U_2 = U_{заг} - U_1 = 100 - 40 = 60\ B$.

Струм, що протікає через другий резистор: $I_2 = \dfrac{U_2}{R_2} = \dfrac{60}{15} = 4\ A$.

Струм, що протікає через резистор R_6: $I_6 = I_1 - I_2 = 10 - 4 = 6$ A

§ 12. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

4.1. Котушка і амперметр з'єднані послідовно і приєднані до джерела струму. До клем котушки приєднані вольтметр з опором r = 4 кОм. Амперметр показує силу струму I=0,3 А, вольтметр - напругу U = 120 В. Визначити опір R котушки. Визначити відносну похибку ε, яка буде зроблена при вимірюванні опору, якщо знехтувати силою струму, що тече через вольтметр.

4.2. Е.р.с. батареї Е = 80 В, внутрішній опір r_i = 5 Ом. Зовнішнє коло споживає потужність P=100 Вт, Визначити силу струму в колі, напругу U, під якою знаходиться зовнішнє коло та її опір R.

4.3. Від батареї, е.р.с. якої Е=600 В треба передати енергію на відстань l=1 км. Споживча потужність P=5 кВт. Визначити мінімальні втрати потужності в колі, якщо діаметр мідних підвідних дротів d = 0,5 см.

4.4. Визначити кількість електронів, що проходять за час t = 1 с через поперечний переріз площею S =1 мм^2 залізного дроту довжиною l = 20 м при напрузі на його кінцях U = 16 В.

4.5. Е.р.с. батареї Е=24 В. Найбільша сила струму, яку може дати батарея I_{max} =10 А. Визначити максимальну потужність P_{max}, яка може виділитися в зовнішньому колі.

4.6. При зовнішньому опорі R_1 = 8 Ом сила струму в колі I_1 = 0,8 А, при опорі R_2 = 15 Ом сила струму I_2 = 0,5 А. Визначити силу струму короткого замикання джерела е.р.с.

4.7. В мережу з напругою U = 100 В під'єднали котушку з опором R_1 = 2кОм і вольтметр, з'єднані послідовно. Вольтметр показує U_1 = 80 В. Коли котушку замінили другою вольтметр показував U = 60 В. Визначити опір R_2 другої котушки. Е.р.с. батареї Е = 12 В. При силі струму I = 4 А к.к.д. батареї η = 0,6. Визначити внутрішній опір батареї R_i.

4.8. За час t = 20 с при рівномірно зростаючій силі струму від нуля до деякого максимуму в провіднику з опором R = 5 Ом виділилась кількість теплоти Q = 4 кДж. Визначити швидкість зростання сили струму, якщо опір провідника R = 5 Ом.

4.9. Сила струму в провіднику змінюється з часом за законом $I = I_0 e^{-\alpha t}$, де I_0 = 20 А, α = 10^2 с$^{-1}$. Визначити кількість теплоти, що виділиться в провіднику за час t = 10^{-2} с.

4.10. Сила струму в провіднику з опором R = 10 Ом за час t = 50 с рівномірно зростає від I_1 = 5 А до I_2 = 10 А. Визначити кількість теплоти Q яка виділиться за цей час у провіднику.

4.11. В провіднику за час t = 10 с при рівномірному зростанні сили струму від I_1 = 1А до I_2 = 2 А виділилось кількість теплоти Q = 5 кДж. Знайти опір R провідника.

4.12. Сила струму в провіднику змінюється з часом за законом $I = I_0 \sin\omega t$ Знайти заряд Q, що проходить через поперечний переріз провідника за час t, рівний половині періоду T, якщо початкова сила струму I_0 = 10 А, циклічна частота ω = 50π с$^{-1}$.

4.13. За час t = 10 с при силі струму, що рівномірно зростає від нуля до деякого максимуму у провіднику виділилась кількість теплоти Q = 40 кДж. Визначити середню силу струму $\langle I \rangle$ в провіднику, якщо його опір R = 2 Ом.

4.14. За час t = 8 с при силі струму, що рівномірно зростає в провіднику з опором R = 8 Ом виділилась кількість теплоти Q = 500 Дж. Визначити заряд q, що пройшов через провідник, якщо сила струму в момент t = 0 дорівнює нулю.

4.15. Визначити кількість теплоти, яка виділилась за час t = 10 с в провіднику з опором R = 10 Ом, якщо сила струму в ньому рівномірно зменшувалась від I_1 = 10 А до I_2 = 0.

4.16. Резистор з опором R = 6 Ом підключено до двох паралельно з'єднаних джерел струму з е.р.с. E_1 = 2,2 В і E_2 = 2,4 В і з внутрішнім опором R_1 = 0,8 Ом та R_2 = 0,2 Ом. Визначити силу струму I в цьому резисторі і напругу U на клемах другого джерела струму.

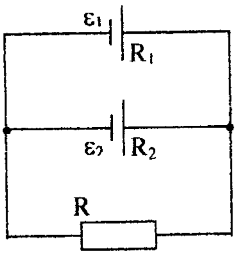


Рис.1.21

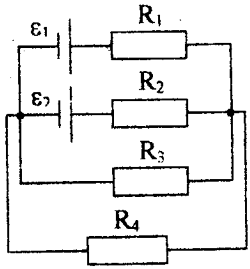


Рис.1.22

4.17. Визначити силу струму в кожному елементі і напругу на реостаті (рис.1.21), якщо E_1 = 12 В, R_1 = 1 Ом, E_2 = 6 В, R_2 = 1,5 Ом і R = 20 Ом.

4.18. Визначити силу струму на всіх ділянках електричної мережі (рис.1.22), якщо E_1 = 8 В, E_2 = 12 В, R_1 = 1 Ом, R_2 = 1 Ом, R_3 = 4 Ом, R_4 = 2 Ом. Внутрішнім опором джерел струму знехтувати.

4.19. Два джерела струму з е.р.с. E_1 = 12 В та E_2 = 8 В і внутрішніми опорами R_1 = 4 Ом та R_2 = 2 Ом, а також провідник з опором R = 20 Ом з'єднані, як показано на рис.1.21. Визначити силу струму в резисторі та в джерелах струму.

4.20. Дві батареї (E_1 = 12 В, R_1 = 2 Ом, E_2 = 24 В, R_2 = 6 Ом) і провідник з опором R = 16 Ом з'єднані, як показано на рис. 1.21. Визначити силу струму в батареях та резисторі.

4.21. Три резистори з опорами R_1 = 6 Ом, R_2 = 3 Ом і R_3 = 2 Ом, а також джерело струму E_1= 2,2 В з'єднані, як показано на рис.1.23. Визначити е.р.с. E_2 джерела, яке треба під'єднати в мережу між точками А і В, щоб у провіднику з опором R_3 йшов струм силою I_3 = 1 А в напрямі, показаному стрілкою. Внутрішніми опорами джерел струму знехтувати.

4.22. Визначити різницю потенціалів між точками А і В (рис. 1.23), якщо E_1 = 8 В, E_2 = 6 В, R_1 = 4 Ом, R_2 = 8 Ом, R_3 = 6 Ом. Внутрішніми опорами джерел струму знехтувати.

4.23. Визначити силу струму I_3 в провіднику з опором R_3 (рис. 1.24) і напругою на кінцях цього провідника U_3, якщо E_1 = 6 В, E_2 = 8 В, R_1 = 4 Ом, R_2 = 8 Ом, R_3 = 6 Ом. Внутрішніми опорами джерел струму знехтувати.

4.24. Об'єм газу, який знаходиться між електродами іонізаційної камери, V=0,8 л. Газ іонізується рентгенівським випромінюванням. Сила струму насичення $I_{нас}$ = 6 нА. Скільки пар іонів утворюється за час t = 1 с в об'ємі V = 1 см^3 газу? Заряд кожного іона дорівнює елементарному заряду.

4.25. На відстані d = 1 см одна від одної розташовані дві пластини площею S=400 см^2 кожна. Водень між пластинами іонізують рентгенівським випромінюванням. При напрузі U = 100 В між пластинами йде далекий від насичення струм силою I = 2 мкА. Визначити концентрацію іонів одного знаку між пластинами. Заряд кожного іона вважати рівним елементарному заряду.

4.26. Посередині між електродами іонізаційної камери пролетіла α - частинка, яка рухалась паралельно електродам і створила на своєму шляху ланцюжок іонів, через який час τ після прольоту α - частинки іони дійдуть до електродів, якщо відстань між електродами d=2 см, різниця потенціалів U = 6 кВ і рухливість іонів обох знаків в середньому дорівнює b = 1,5 см^2/В с?

4.27. Визначити опір трубки довжиною l = 0,5 м і площею поперечного перерізу S = 5 мм^2, якщо вона наповнена азотом, іонізованим так, що в об'ємі V = 1 см^3 знаходиться при рівновазі n = 10^8 пар іонів. Іони одновалентні.

4.28. До електродів розрядної трубки, яка вміщує водень, прикладена різниця потенціалів U = 10 В. Відстань між електродами d = 25 см. Іонізатор створює в об'ємі V = 1 см^3 водню n = 10^8 пар іонів за секунду. Визначити густину струму j в трубці. Визначити також, яка частина сили струму створюється рухом позитивних іонів. Коефіцієнт рекомбінації β= 10 м$^{-2}$·с$^{-3}$.

4.29. Повітря іонізується рентгенівським випромінюванням. Визначити питому провідність γ повітря, якщо в об'ємі V = 1 см^3 газу знаходиться при рівновазі n = 10^8 пар іонів.

4.30. Азот між плоскими електродами іонізаційної камери іонізується рентгенівським випромінюванням. Сила струму, що тече через камеру I = 1,5 мкА. Площа кожного електрода S = 200 см^2, відстань між ними

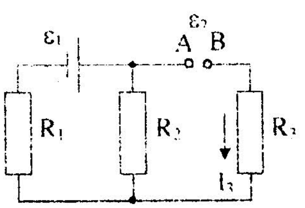


Рис.1.23

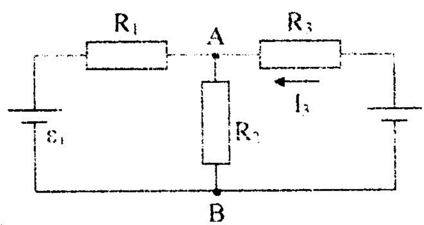


Рис.1.24

l = 1,5 см, різниця потенціалів U=150 В. Визначити концентрацію n іонів між пластинками, якщо струм є далекий від насичення. Заряд кожного іона дорівнює елементарному заряду.

§ 13. Електромагнетизм. Магнітне поле постійного струму

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. Закон Біо-Савара-Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{r^3} \left[d\vec{l}, \vec{r} \right],$$

де $d\vec{B}$ - магнітна індукція поля, створена елементом струму Idl, $d\vec{l}$ - вектор, рівний за модулем довжині провідника dl і збігається за напрямом з струмом, $\vec{r}$ - радіус-вектор, проведений з середини елемента струму до точки, в якій визначається магнітна індукція.

Модуль вектора $d\vec{B}$ визначається за формулою

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I \sin\alpha}{r^2} dl,$$

де α - кут між векторами $d\vec{l}$ і $\vec{r}$.

2. Магнітна індукція $\vec{B}$ пов'язана з напруженістю магнітного поля співвідношенням:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

3. Магнітна індукція в центрі колового провідника зі струмом:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2} \frac{I}{R},$$

де R - радіус кривизни провідника.

4. Магнітна індукція поля, створеного нескінченно довгим прямим провідником з струмом:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I}{r},$$

де r- відстань від осі провідника.

5. Магнітна індукція поля, створеного відрізком провідника зі струмом:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{r_0} (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2).$$

При симетричному розміщенні провідника відносно точки, в якій визначається індукція:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I}{r_0} \cos\varphi.$$

6. Магнітна індукція поля, створеного соленоїдом в середній його частині:

$$B = \mu \mu_0 n I,$$

де n - число витків, що припадає на одиницю довжини провідника.

7. Принцип суперпозиції для магнітних полів:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i.$$

8. Сила, що діє на провідник зі струмом в магнітному полі (сила Ампера):

$$\vec{F}_A = I \cdot [\vec{l}, \vec{B}],$$

де $\vec{l}$ - вектор, рівний за модулем довжині провідника і збігається за напрямом з струмом, $\vec{B}$ - магнітна індукція поля.

Модуль вектора $\vec{B}$ визначається за формулою:

$$F = BIl\sin\alpha,$$

α - кут між векторами $\vec{l}$ і $\vec{B}$.

9. Сила взаємодії двох нескінченно довгих паралельних провідників зі струмами I_1 і I_2, що знаходяться на відстані d один від одного, розрахована на одиницю довжини провідника l:

$$F = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d} l.$$

10. Магнітний момент контуру зі струмом

$$\vec{p} = I\vec{S},$$

$\vec{S}$ - вектор, рівний за модулем площі контуру S і збігається за напрямом з нормаллю до його площини.

11. Сила, що діє на заряд, який рухається в магнітному полі зі швидкістю $\vec{V}$ (сила Лоренца):

$$\vec{F} = q\left[\vec{V}, \vec{B}\right].$$

Модуль сили Лоренца:

$$F = qVB\sin\alpha,$$

де α - кут між вектором швидкості $\vec{V}$ і вектором магнітної індукції $\vec{B}$ магнітного поля.

12. Закон повного струму:

$$\oint_l H_l dl = I.$$

13. Магнітний потік Ф через плоский контур площею S:

$$\Phi = BS\cos\alpha,$$

де α - кут між нормаллю до площини контуру і вектором магнітної індукції $\vec{B}$.

14. Магнітна індукція на середній лінії тороїда, серцевина якого складається з двох частин, що мають різну магнітну проникливість:

$$B = \frac{IN}{l_1/(\mu_1\mu_0) + l_2/(\mu_2\mu_0)},$$

де I – сила струму в обмотці тороїда, N – число її витків, l_1 і l_2 - довжини першої та другої частин серцевини тороїда.

15. Закон електромагнітної індукції (закон Фарадея):

$$E_i = -N\frac{d\Phi}{dt},$$

де E_i – електрорушійна сила індукції, N – число витків контуру.

16. Електрорушійна сила самоіндукції, що виникає в замкнутому контурі при зміні сили струму в ньому:

$$E_i = -L\frac{dI}{dt},$$

де L – індуктивність контуру.

17. Індуктивність соленоїда:

$$L = \mu\mu_0 n^2 V.$$

18. Енергія магнітного поля W, створеного струмом в замкнутому контурі індуктивністю L, визначається за формулою:

$$W = \frac{1}{2}LI^2,$$

де I – сила струму в контурі.

19. Об'ємна густина енергії однорідного магнітного поля соленоїда:

$$w = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}.$$

§ 14. Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Визначити модуль вектора магнітної індукції $\vec{B}$ магнітного поля, створеного системою тонких провідників, в яких протікає струм I, у точці A{O,R,0}, що є центром кругового провідника радіусом R. (рис.1.25.).

Розв'язування

Магнітне поле створюється трьома джерелами: напівнескінченним прямим провідником XO, круговим провідником радіусом R, центр якого розташований у точці A{O,R,0}, а його площина збігається з площиною ZOY, і напівнескінченним прямим провідником OZ. В усіх провідниках тече той самий струм I.

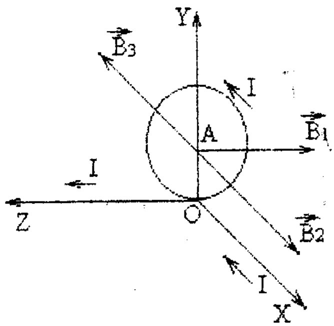


Рис.1.25.

Вектор $\vec{B}_1$ магнітної індукції поля провідника XO лежить у площині ZOY і спрямований проти осі OZ; вектор $\vec{B}_2$ магнітної індукції кругового струму лежить у площині XOY і збігається з напрямком осі OX, вектор $\vec{B}_3$ магнітної індукції провідника OZ лежить у тій же площині XOY, але спрямований протилежно вектору $\vec{B}_2$. За формулою $B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)$ знаходимо модулі векторів $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_3$: $B_1=B_3=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$, а за формулою $B=\frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$ - модуль вектора $\vec{B}_2$: $B_2=\frac{\mu_0 I}{2R}$.

За принципом суперпозиції.

$$B=\sqrt{B_1^2+\left(B_2-B_3\right)^2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\sqrt{2\left(2\pi^2-2\pi+1\right)}$$

Приклад 2

Суцільним нескінченним циліндричним провідником радіусом R протікає струм густиною $\vec{j}$. Розрахувати магнітне поле всередині і поза провідником (Рис.1.26.).

Розв'язування

В цьому випадку закон Біо-Савара-Лапласа застосовувати не можна. Використаємо теорему про циркуляцію вектора індукції магнітного поля $\vec{B}$ $\oint B dl = \mu_0 \sum I$.

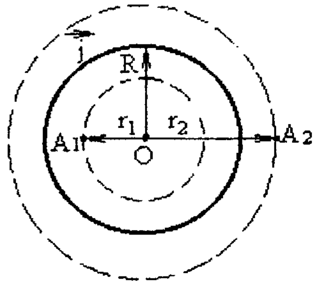


Рис.1.26.

Розглянемо точку A_1, розташовану на відстані r_1 від осі провідника. Проведемо коло радіусом r_1 із центром O на осі провідника. Внаслідок симетрії модуль вектора $\vec{B}_1$ в кожній точці кола однаковий. Сума струмів $\sum I$, охоплена цим контуром (колом), дорівнює $j\pi r_1^2$. Таким чином, за теоремою про циркуляцію $\oint B dl = \mu_0 \sum I$, $B_1 \cdot 2\pi r_1 = \mu_0 j \pi r_1^2$.

Звідси визначаємо модуль вектора $\vec{B}_1$ магнітної індукції в точці A_1: $B_1 = 1/2 \mu_0 j r_1$.

Розглянемо точку A_2, розташовану на відстані r_2>R від осі провідника. Застосовуючи теорему про циркуляцію, знаходимо $B_2 \cdot 2\pi r_2 = \mu_0 j \pi R^2$.

Отже, магнітне поле поза провідником $B_2 = \dfrac{\mu_0 j R^2}{2r_2}$.

Приклад 3

В однорідному магнітному полі з індукцією B={0.B$_o$,0} розташований тонкий провідник у вигляді півкола радіусом R, яким протікає струм I (Рис..1.27.). Визначити силу, що діє на провідник.

Розв'язування

Розділимо провідник на малі ділянки, щоб кожну з них можна було вважати елементом струму.

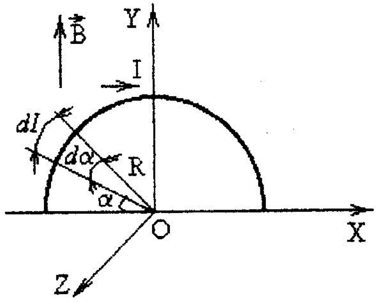


Рис.1.27.

Розглянемо одну таку ділянку, довжина якої дорівнює dl. Модуль вектора $d\vec{F}$ елементарної сили, що діє на цю ділянку, за законом Ампера складає $dF = IdlB_0 \sin\alpha$.

Очевидно, що всі елементарні вектори $d\vec{F}$, спрямовані уздовж осі OZ. Тому векторне підсумовування зводиться до арифметичного. Оскільки $dl = Rd\alpha$, то після інтегрування $dF = IdlB_0 \sin\alpha$ за кутом α одержуємо

$$F = \int_0^{\pi} IRB_0 \sin\alpha d\alpha = 2IRB_0.$$

Приклад 4

Квадратна рамка з тонкого дроту масою $m=10$ г може без тертя обертатися відносно вертикальної осі OO_1, що проходить через її центр перпендикулярно двом протилежним сторонам рамки. Рамка поміщена в однорідне магнітне поле з індукцією $B = 10^{-1}$ Тл, спрямованою перпендикулярно площині рисунка. В рамці протікає струм $I=2$ А. Визначити період малих коливань рамки біля положення її стійкої рівноваги.

Розв'язування

Фізична система складається з магнітного поля (однорідного), провідника у вигляді рамки і вільних зарядів, що рухаються в рамці.

...зичне явище полягає в малих коливаннях рамки під дією сил, що діють на кожний її елемент струму з боку магнітного поля. Оскільки індукція поля відома, то можна знайти ці сили і їхній результуючий момент.

При відхиленні рамки на малий кут α від положення рівноваги виникає момент сил Ампера $M = p_m B \sin\alpha$, де $P_m IS = Ia^2$ - магнітний момент рамки, а – її сторона.

Застосовуючи до рамки рівняння руху , одержуємо $j\beta = M$, де j - момент інерції рамки відносно осі OO_1, $\beta = \ddot{\alpha}$ - кутове прискорення рамки.

Момент інерції рамки $j = 2 \cdot \frac{m}{4} \cdot \frac{\alpha^2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{m}{4} \cdot \alpha^2 = \frac{1}{6} m\alpha^2$.

Підставляючи в рівняння $j\beta = M$ значення моменту сил Ампера і значення моменту інерції рамки, знаходимо $\ddot{\alpha} + \frac{6IB}{m} \sin\alpha = 0$.

Враховуючи, що для малих коливань $\sin\alpha \approx \alpha$, одержуємо диференціальне рівняння гармонічних коливань рамки: $\ddot{\alpha} + \frac{6IB}{m}\alpha = 0$.

Порівнюючи отримане рівняння із загальним рівнянням гармонічних коливань, визначаємо кутову частоту коливань рамки: $\omega_0 = \sqrt{\frac{6IB}{m}}$ та період її коливань: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{6IB}}$, $T_0 \approx 0.57c$.

Відомо, що при переміщенні плоского контуру зі струмом I у магнітному полі виконується робота $A = I\Delta\phi$, де $\Delta\phi$ - зміна магнітного потоку через контур. Якщо переміщається точковий магнітний диполь (плоский контур зі струмом I досить малих геометричних розмірів), вектор магнітного моменту якого $\vec{P}_m = IS\vec{n}$ паралельний вектору $\vec{B}$ індукції магнітного поля, то розрахунок роботи в цьому випадку зводиться до розрахунку магнітного поля:

$$A = I\Delta\Phi = I(\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{P_m}{S}(B_1 - B_2)S = p_m(B_1 - B_2).$$

Приклад 5

Прямий нескінченний струм $I_1=5A$ і прямокутна рамка зі струмом $I_2=3A$ розташовані в одній площині так, що сторона рамки $l=1м$ паралельна прямому струму і знаходиться від нього на відстані $r=0,1b$, де b - довжина іншої сторони рамки (Рис.1.28.). Визначити, яку роботу необхідно виконати для того, щоб повернути рамку на кут $\alpha=90^0$ відносно осі OO_1, паралельній прямому струму і що проходить через середини протилежних сторін рамки b.

Розв'язування

Очевидно, що в другому положенні магнітний потік через рамку дорівнює нулю: $\Phi_2=0$. Таким чином, необхідно розрахувати магнітний потік Φ_1 через рамку в першому положенні.

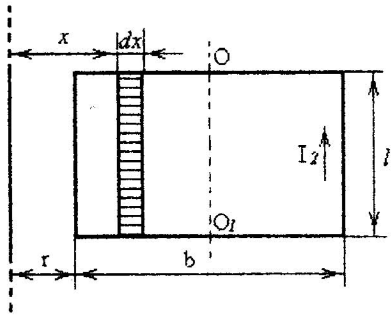


Рис.1.28.

Оскільки поле прямого нескінченного струму I_1 $B_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$ є неоднорідним, то рішення $\Phi_1=B_1S$(де $S=lb$- площа рамки) не вірне.

Розділимо площу рамки на вузькі смужки, щоб у межах кожної такої смуги магнітне поле можна було б приблизно вважати однорідним. Розглянемо одну таку смужку шириною dx, що знаходиться на відстані x від прямого струму I_1.Елементарний магнітний потік через цю смужку $d\Phi=BdS=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}ldx$.

Звідси після інтегрування знаходимо магнітний потік:

$\Phi_1 = \int_{0,05}^{0,05+b} \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} Ln11$. Таким чином, $A = I_2 \Delta\Phi_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi} Ln11$.

Після підстановки числових значень отримаємо $A \approx 7{,}1 \cdot 10^{-[illegible]}$ Дж.

Приклад 6

У площині квадратної рамки з омічним опором $R=7$Ом і стороною $a=20$ см розташований на відстані $r_0=20$ см від рамки прямий нескінченний провідник. Сила струму в провіднику змінюється за законом $I=\alpha t^3$, де $\alpha=2A/c^3$. Провідник паралельний одній із сторін рамки (Рис.1.29.). Визначити силу струму в рамці в момент часу $t=10$с.

Розв'язування

Внаслідок зміни сили струму в провіднику магнітний потік через рамку змінюється і в ній виникає індукційний струм.

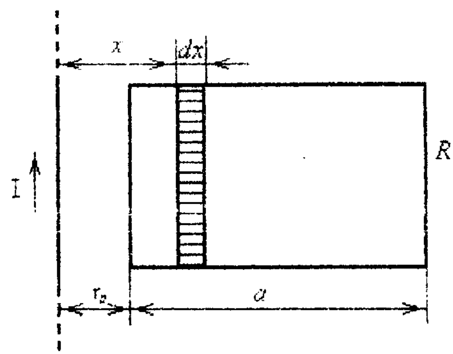


Рис.1.29.

Рамка знаходиться в неоднорідному магнітному полі.

Розділимо площу рамки на такі вузькі смужки, щоб у межах кожної смужки магнітне поле можна було вважати однорідним. Елементарний магнітний потік скрізь вузьку смужку $d\Phi = Badx = \frac{\mu_0 Ia dx}{2\pi x}$.

Інтегруючи це рівняння у межах від r_0 до $r_0 + a$, знаходимо

$$\Phi = \int_{r_0}^{r_0+a} \frac{\mu_0 I a dx}{x} = \frac{\mu_0 a \alpha Ln(1 + a/r_0)}{2\pi} t^3.$$

За законом Фарадея $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ знаходимо е.р.с. індукції: $\varepsilon_i = \frac{3\mu_0 a \alpha Ln(1 + a/r_0)}{2\pi} t^2$ і силу струму: $I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{3\mu_0 a \alpha Ln(1 + a/r_0)}{2\pi} t^2$.

$I \approx 2{,}4 \cdot 10^{-6}$ A.

§ 15. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

5.1. Два прямолінійних довгих провідники розташовані паралельно на відстані $d=10$ *см* один від одного. Провідниками течуть струми $I_1=I_2=5$ A в протилежних напрямах. Знайти модуль і напрям напруженості $\vec{H}$ магнітного поля в точці, що знаходиться на віддалі $a=10$ *см* від кожного провідника.

5.2. Довгим вертикальним провідником зверху вниз протікає струм $I=8$ A. На якій відстані a від нього напруженість поля, що утворюється від додавання земного магнітного поля і поля струму, спрямована вертикально вгору? Горизонтальна складова напруженості земного поля $\vec{H}_r = 16$ $A/м$.

5.3. Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля, створеного відрізком AB прямолінійного провідника зі струмом, у точці С, розташованій на перпендикулярі до середини цього відрізка на відстані $a=5$ *см* від нього. В провіднику тече струм $I=20$ A. Відрізок AB провідника видно із точки С під кутом 60°.

5.4. Відрізок прямолінійного провідника зі струмом має довжину 30 см. При якій граничній відстані a від нього для точок, що лежать на перпендикулярі до його середини, магнітне поле можна розглядати як поле нескінченно довгого прямолінійного струму? Похибка при такому припущені не повинна перевищувати 5%. Вказівка. Похибка, що допускається, $\delta = (H_2 - H_1)/H_2$, де H_1 - напруженість поля від відрізка провідника зі струмом, H_2 - напруженість поля від нескінченно довгого прямолінійного струму.

5.5. У точці С, розташованій на відстані $a=5$ см від нескінченно довгого прямолінійного провідника зі струмом, напруженість магнітного поля $H=400$ *А/м*. При якій граничній довжині провідника це значення напруженості буде вірним з точністю до 2 %? Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля в точці С, якщо провідник зі струмом має довжину 20 см і точка С розташована на перпендикулярі до середини цього провідника.

5.6. Струм $I=20$ *А* протікає в довгому провіднику, зігнутому під прямим кутом. Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля в точці , що лежить на бісектрисі цього кута і віддаленій від вершини кута на відстань $a=10$ *см*.

5.7. Знайти магнітну індукцію в центрі тонкого кільця, в якому проходить струм силою I=10 А. Радіус r кільця дорівнює 5 см.

5.8. Струм $I=20$ *А*, протікаючи кільцем з мідного дроту перерізом $S=1.0$ *мм*^{2}, створює в центрі кільця напруженість магнітного поля $H=178$ *А/м*. Яка різниця потенціалів U прикладена до кінців дроту, що утворив кільце?

5.9. Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля на осі кругового контуру на відстані $a=3$ *см* від його площини. Радіус контуру $R=4$ *см*, струм у контурі $I=2$ *А*.

5.10. Напруженість магнітного поля в центрі кругового витка $\vec{H}_0=0.8$ *А/м*. Радіус витка $R=11$ *см*. Знайти напруженість магнітного поля на осі витка на відстані $a=10$ *см* від його площини.

5.11. Два кругових витки радіусом $R=4$ см кожний розташовані в паралельних площинах на відстані $d=10$ *см* один від одного. Витками течуть струми $I_1=I_2=2$ *А*. Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля на осі витків у точці, що знаходиться на рівній відстані від них. Задачу розв'язати, коли: а) струми у витках течуть в одному напрямку; б) струми у витках течуть у протилежних напрямках.

5.12. Два кругових витки радіусом $R=4$ *см* кожний розташовані в паралельних площинах на відстані $d=5$ см один від одного. Витками течуть струми $I_1=I_2=4$ *А*. Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля в центрі одного з витків. Задачу розв'язати, коли: а) струми у витках течуть в одному напрямі; б) струми у витках течуть у протилежних напрямах.

5.13. Знайти напруженість Н магнітного поля в точках осі кругового витка діаметром $D=10$ *см*, в якому тече струм $I=10$ А. Скласти таблицю значень $\vec{H}$ і побудувати графік для значень x в інтервалі $0 \le x \le 10$ см через кожні 2 см.

5.14. Два кругових витки розташовані в двох взаємно перпендикулярних площинах так, що центри цих витків збігаються. Радіус кожного витка

$R=2$ *см*, струми у витках $I_1=I_2=5$ *А*. Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля в центрі цих витків.

5.15. Із дроту довжиною *l* м зроблена квадратна рамка. В рамці тече струм $I=10$ *А*. Знайти напруженість $\vec{H}$ магнітного поля в центрі рамки.

5.16. У центрі кругового витка із дроту створюється магнітне поле напруженістю $\vec{H}$ при різниці потенціалів U_1 на кінцях витка. Яку треба прикласти різницю потенціалів U_2, щоб одержати таку ж напруженість магнітного поля в центрі витка вдвічі більшого радіуса, зробленого з того ж дроту?

5.17. В дротяній рамці, що має форму правильного шестикутника, протікає струм $I=2$ *А*. При цьому в центрі рамки утвориться магнітне поле напруженістю $\vec{H}=33$ *А/м*. Знайти довжину дроту, з якого зроблена рамка.

5.18. В обмотці дуже короткої котушки радіусом $r=16$ *см* проходить струм силою $I=5$ А. Скільки витків *N* дроту намотано на котушку, якщо напруженість *H* магнітного поля в її центрі дорівнює 800 *А/м* ?

5.19. Котушка довжиною $l=20$ *см* має $N=100$ витків. В обмотці котушки проходить струм силою $I=5$ *А*. Діаметр *d* котушки дорівнює 20 *см*. Визначити магнітну індукцію *B* в точці , що лежить на осі котушки на відстані $a=10$ *см* від її краю.

5.20. Довгий прямий соленоїд із дроту діаметром $d=0.5$ *мм* намотаний так, що витки щільно прилягають один до одного. Яка напруженість $\vec{H}$ магнітного поля всередині соленоїда при силі струму $I=4$ *А*? Товщиною ізоляції знехтувати.

5.21. Обмотка котушки діаметром $d=10$ *см* складається з витків дроту, що щільно прилягають один до одного. Визначити мінімальну довжину l_{min} котушки, при якій магнітна індукція в середині її відрізняється від магнітної індукції нескінченного соленоїда, що має таку ж кількість витків на одиницю довжини, не більшу ніж на 5,0 %. Сила струму , що проходить в обмотці , в обох випадках однакова.

5.22. Довгий прямий соленоїд , що має $n=5$ витків на кожний сантиметр довжини, розташований перпендикулярно до площини магнітного меридіана. (Горизонтальну складову $B_Г$ магнітної індукції поля Землі вважати рівною 20 *мкТл*). Всередині соленоїда , в його внутрішній частині, знаходиться магнітна стрілка, що встановилася в магнітному полі Землі. Коли в соленоїді проходить струм, стрілка відхиляється на кут $\alpha=60^0$. Знайти силу струму *I*.

5.23. Квадратна рамка з провідника розташована в одній площині з довгим прямим провідником. Дві сторони рамки паралельні провіднику. В рамці і провіднику проходить однаковий струм величиною I=1 кА. Визначити силу, що діє на рамку, якщо найближча до провідника сторона рамки знаходиться на віддалі, рівній її довжині.

5.24. Провідник має форму півкільця радіусом R=10 см і знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією $\vec{B}$=50 мТл. В провіднику тече струм величиною I=10 А. Знайти силу $\vec{F}$, яка діє на провідник, якщо площина півкільця перпендикулярна лініям індукції.

5.25. В провіднику, який має форму кільця радіусом R=20 см проходить струм величиною I=100 А. Перпендикулярно площині кільця виникає однорідне магнітне поле з індукцією $\vec{B}$=20 мТл. Розрахувати силу, з якою розтягується кільце.

5.26. В кільці радіусом R проходить струм. На осі кільця на віддалі d=1 *м* від його площини магнітна індукція B=10 нТл. Розрахувати силу струму у витку і його радіус.

5.27. Тонке кільце радіусом R=10 см несе заряд Q=10 нКл. Кільце рівномірно обертається з частотою f=10 c^{-1} відносно осі, що перпендикулярна площині кільця та проходить через його центр. Знайти: 1) магнітний момент кругового струму, обумовленого кільцем; 2) відношення магнітного моменту до моменту імпульсу, якщо маса кільця дорівнює 10 г.

5.28. При подвійному обході магнітним полюсом навколо провідника з струмом в 100 А була виконана робота A=1 мДж. Знайти магнітний потік Ф, створений полюсом.

5.29. Електрон зі швидкістю $\vec{V}$=1 *Мм/с*, влетів до однорідного магнітного поля з індукцією $\vec{B}$=30 *мТл* під кутом $\alpha = 30^0$ до напряму лінії індукції. Визначити радіус R і крок h гвинтової лінії, якою буде рухатися електрон.

5.30. Рамка з провідника площею S рівномірно обертається в однорідному магнітному полі з індукцією $\vec{B}$ навколо осі, яка перпендикулярна напряму поля. Період обертання рівний Т. Виразити магнітний потік Ф, який перетинає рамку, і ЕРС індукції в рамці як функцію часу.

ЧАСТИНА ІІ

РОЗДІЛ 1. КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

§ 16. Механічні гармонічні коливання

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

Рівняння гармонічних коливань: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$,

де x, A, ω, φ - відповідно зміщення, амплітуда, циклічна частота, початкова фаза.

Швидкість матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання:

$$V = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi).$$

Прискорення матеріальної точки при гармонічному коливанні:

$$a = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi).$$

Амплітуда результуючого коливання, що утворюється при додаванні двох коливань однакового напряму визначається за формулою:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

де A_1 і A_2 – амплітуди складових коливань; φ_1 *і* φ_2 - їх початкові фази.

Початкова фаза результуючого коливання визначається за формулою:

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

Рівняння траєкторії точки, що здійснює коливання у двох взаємно перпендикулярних напрямах з амплітудами A_1 і A_2 та початковими фазами φ_1 *і* φ_2:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Рівняння загасаючих коливань і його розв'язування :

$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$, $x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$, де β - коефіцієнт загасання, ω - частота загасаючих коливань: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Логарифмічний декремент загасання : $\Theta = \ln\frac{A_n}{A_{n+1}} = \beta T$.

Період малих коливань математичного маятника: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$;

де l- довжина маятника, g- прискорення сили тяжіння.

Період коливань тіла, підвішеного на пружині: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

де m – маса тіла, к - жорсткість пружини.

Період малих коливань фізичного маятника: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$,

де $L = \frac{I}{md}$ - приведена довжина фізичного маятника, I- момент інерції маятника відносно осі коливання, m – маса маятника, d – найкоротша відстань від центра мас до осі коливання.

Період крутильних коливань: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$,

де I - момент інерції, $k = \frac{M}{\varphi}$ (М- момент сили, φ - кут закручування).

Період загасаючих коливань: $T = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m - \beta^2}}$,

де $\beta = \frac{r}{2m}$ **коефіцієнт загасання.**

Амплітуда змушених коливань при дії примусової сили $F = F_0\cos\omega t$:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

де $f_0 = \frac{F_0}{m}$, $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \sqrt{k/m}$, $\omega = 2\pi\nu$, ν і ν_0- **частоти власних** коливань при відсутності загасання і примусової сили.

Період коливань однорідної струни: $T = 2l\sqrt{\frac{m}{F}}$.

де l- довжина струни, m - маса одиниці довжини струни. F - сила натягу струни.

Повна енергія матеріальної точки масою m, що робить гармонічні коливання: $E = E_k + E_p = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$.

Швидкість поширення хвилі: $v = \lambda\,\nu$, де λ - довжина хвилі.

Швидкість поширення поздовжніх хвиль у тонких стрижнях:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

де E - модуль Юнга середовища, ρ - його щільність. Швидкість поширення поперечних хвиль: $v=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$, де G - модуль зсуву.

Швидкість поздовжніх хвиль у необмеженому пружному середовищі:

$v=\sqrt{\frac{k}{\rho}}$, де k- модуль усебічного стискання.

Рівень гучності звуку, дБ: $L_N=10\lg\frac{I}{I_0}$,

де I інтенсивність звуку, I_0 - інтенсивність на порозі чутності.

Частота звуку, сприймана спостерігачем, відповідно до принципу Доплера, визначається за формулою: $\nu'=\frac{c\pm v}{c\mp u}\nu$,

де c - швидкість поширення звуку, v - швидкість руху спостерігача, u- швидкість джерела звуку, ν частота звуку, що посилається джерелом. Верхні знаки беруться при зближенні джерела і спостерігача, нижні - при їхньому віддаленні.

§ 17. Приклади розв'язування задач

Приклад 1

За яку частину періоду частинка, яка здійснює гармонічні коливання, проходить першу половину шляху від середнього положення до крайнього? Другу половину цього шляху?

Розв'язування

Вибираючи початок відліку часу в момент проходження тілом середнього положення, можна записати закон зміни його координати в вигляді: $x=A\sin\omega t=A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$.

На середині шляху від середнього положення до крайнього $x_1=\frac{A}{2}$ тіло знаходиться в моменти часу, що визначається з рівняння: $\frac{A}{2}=A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$.

Найменше додатне значення t_1, що відповідає цій умові, можна знайти з рівняння $\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)=\frac{1}{2}$, звідси $2\pi\frac{t_1}{T}=\frac{\pi}{6}$, $t_1=\frac{T}{12}$.

В крайньому положенні ($x_2 = A$) тіло знаходиться в момент часу t_2, який відповідає умові $\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) = 1$, звідси $2\pi\frac{t_2}{T} = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = \frac{T}{4}$.

Отже, другу половину шляху тіло проходить за проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \frac{T}{6}$.

Приклад 2

Середина струни, яка здійснює гармонічні коливання, має максимальне прискорення $a_{max} = 2.02 \cdot 10^3$ м/с^2. Визначити частоту коливань, якщо амплітуда коливань 2.00 мм.

Розв'язування

Максимальне прискорення відповідає максимальному зміщенню точки від положення рівноваги: $a_{max} = \omega^2 A = 4\pi^2 \nu^2 A$, звідси:

$$\nu = \sqrt{\frac{a_{max}}{4\pi^2 A}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a_{max}}{A}} \approx 160 c^{-1}.$$

Приклад 3

Пружинний маятник здійснює гармонічні коливання з амплітудою $A = 0.04$ м. При зміщенні $x = 0,03$ м сила пружності дорівнює $F = 9 \cdot 10^{-5}$ Н. Визначити потенціальну і кінетичну енергії, що відповідають заданому зміщенню, і повну енергію маятника.

Розв'язування

Повна енергія маятника дорівнює: $E = E_k + E_p$, де E_k - кінетична енергія, E_p - потенціальна енергія.

Повна енергія дорівнює: $E = \frac{kA^2}{2}$, де k - коефіцієнт квазіпружної сили: $k = \frac{F}{x}$.

Тоді повну енергію коливань маятника можна знайти за формулою: $E = \frac{FA^2}{2x} = 2.4 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Потенціальна енергія маятника дорівнює:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{Fx}{2} = 1.35 \cdot 10^{-6}\ Дж.$$

Отже, кінетична енергія дорівнює:

$E_к = E - E_p = 2.4 \cdot 10^{-6} - 1.35 \cdot 10^{-6} = 1.05 \cdot 10^{-6}\ Дж.$

Приклад 4

Два маятника, довжини яких відрізняються на 22 см, здійснюють в одному і тому ж місці за деякий час: перший - 30 коливань, другий - 36 коливань. Знайти довжини маятників.

Розв'язування

Очевидно, що маятник більшої довжини здійснює меншу кількість коливань. Періоди коливань першого і другого маятників: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$; $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$.

Їх співвідношення: $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}$. З іншої сторони: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{N_1}{N_2}$.

Прирівнюємо праві частини цих двох виразів $\sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{N_1}{N_2}$, або $\frac{l_1}{l_2} = 1.44$, тобто $l_1 = 1.44\, l_2$.

За умовою задачі: $\Delta l = l_1 - l_2$.

Розв'язуючи систему рівнянь, знаходимо $l_1 = 72$ *см*, $l_2 = 50$ *см*..

Приклад 5

Матеріальна точка масою $m=5$ г здійснює гармонічні коливання з частотою $\nu = 0.5\ Гц$. Амплітуда коливань $A=3$ см. Визначити: 1) швидкість точки в момент часу, коли зміщення $x=1,5$ см; 2) повну енергію E точки.

Розв'язування

1) Рівняння гармонічних коливань має вигляд $x = A\cos(\omega t + \varphi)$. Швидкість є першою похідною від зміщення за часом: $V = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$. Щоб виразити швидкість через зміщення необхідно виключити з цих двох рівнянь час. Для цього піднесемо до квадрату ці рівняння і результат додамо: $\frac{x^2}{A^2} + \frac{V^2}{4\pi^2 \nu^2 A^2} = 1$.

Розв'язавши отриманий вираз відносно V, отримаємо $V = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}$.

Виконавши обчислення, отримаємо $V = \pm 8{,}2 см/с$.

Знак плюс відповідає випадку, коли напрямок швидкості збігається з додатним напрямком осі Ox.

2) Повна енергія точки визначається сумою кінетичної і потенціальної енергій, обчислених для будь-якого моменту часу.

За законом збереження енергії повна енергія дорівнює максимальному значенню кінетичної енергії. В цей момент часу потенціальна енергія дорівнює нулю. Максимальне значення кінетичної енергії: $T_{max} = \frac{mV_{2\max}}{2}$.

Максимальне значення швидкості $V_{max} = A\omega = 2\pi\nu A$. Тоді вираз для повної енергії точки прийме вигляд $E = 2\pi^2 m\nu^2 A^2$.

Виконавши обчислення, отримаємо E=22,1 мкДж.

§ 18. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

6.1. Тіло масою 5 кг робить коливання, що описується рівнянням: $x = 0{,}1\sin\frac{\pi}{2}(t + \frac{1}{3})$. Знайти значення кінетичної і потенціальної енергій тіла через 20 с від моменту часу t= 0. Чому дорівнює повна енергія тіла?

6.2. Визначити масу тіла, що робить гармонічні коливання з амплітудою 0,10 м, частотою 2,0 Гц і початковою фазою 30°, якщо повна енергія коливань 7,7 мДж. Через скільки секунд від початку відліку часу кінетична енергія буде дорівнювати потенціальній?

6.3. Визначити амплітуду гармонічних коливань матеріальної точки, якщо її повна коливальна енергія 40 мДж, а сила, що діє на неї при зміщенні, рівному половині амплітуди, 2,0 Н.

6.4. У скільки разів зменшиться повна енергія коливань секундного маятника за 5 хв, якщо логарифмічний декремент загасання 0,031?

6.5. Амплітуда коливань камертона за 15 с зменшилася в 100 разів. Знайти коефіцієнт загасання коливань.

6.6. Амплітуда загасаючих коливань маятника за час t_1=5 хв зменшилась в два рази. За який час t_2 від початкового моменту амплітуда зменшиться в 10 разів.

6.7. За час t=8 хв амплітуда загасаючих коливань маятника зменшилась в 3 рази. Визначити коефіцієнт загасання β.

6.8. Побудувати графік загасаючого гармонічного коливання, частота якого 10 Гц, початкова амплітуда 6 см і логарифмічний декремент загасання 0,01.

6.9. Амплітуда коливань маятника довжиною l=1 м за час t=10 хв зменшилась в два рази. Визначити логарифмічний декремент загасання Θ.

6.10. Логарифмічний декремент загасання маятника 0,003. Визначити число N повних коливань, яке необхідно зробити маятнику, щоб амплітуда зменшилась в два рази.

6.11. Знайти число N повних коливань системи, під час яких енергія системи зменшилась в n=2 рази. Логарифмічний декремент загасання Θ=0,01.

6.12. Визначити період Т загасаючих коливань, якщо період T_0 власних коливань системи дорівнює 1 с і логарифмічний декремент загасання Θ=0,01.

6.13. Амплітуди вимушених гармонічних коливань при частоті $\nu_1 = 400\,Гц$ і $\nu_2 = 600\,Гц$ рівні між собою. Визначити резонансну частоту $\nu_{рез}$. Загасанням знехтувати.

6.14. Як зміниться хід маятникового годинника при піднятті його на висоту 20 км над поверхнею Землі?

6.15. Математичний маятник підвішений до стелі вагона електропоїзда. В скільки разів зміниться його період коливань, якщо вагону надати горизонтальне прискорення а?

6.16. Кулька масою m=200 г, підвішена на пружині, коливається з частотою ν=5,0 Гц. Визначити коефіцієнт пружності пружини.

6.17. Визначити період коливань вантажу на пружинних вагах, якщо в стані рівноваги він зміщає стрілку ваг на Δx=2,0 см від нульової поділки, що відповідає ненавантаженій пружині.

6.18. Визначити мінімальну частоту коливань похилої площини (у поздовжньому напрямі), при якій тіло, що знаходиться на ній, почне сковзати. Кут нахилу площини α=10°, амплітуда коливань A=10 см, коефіцієнт тертя тіла об похилу площину μ =0,4.

6.19. Склянка масою m_1=*20 г* і площею поперечного перерізу S=5 $см^2$ містить ртуть масою m_2=80 г і плаває на поверхні води. Під дією вертикальної сили склянка виводиться з положення рівноваги і відпускається. Визначити період коливань системи.

6.20. Знайти частоту коливань вантажу масою *m*=0,20 кг, підвішеного на пружині і поміщеного в олію, якщо коефіцієнт тертя в олії r=0,50 кг/с, а жорсткість пружини k=50 Н/м.

6.21. Стрижень довжиною *l*=50 см робить коливання біля горизонтальної осі, що проходить через точку, яка розташована на відстані d=12.5 см від кінця стрижня. Визначити частоту коливань стрижня.

6.22. На кінцях стрижня, маса якого *m*=60 кг і довжина *l*=49 см, укріплені дві кульки масами m_1=70 г і m_2=90 г, а стрижень підвішений так, що може робити коливання навколо горизонтальної осі, що проходить через його середину. Визначити період малих коливань стрижня.

6.23. До стелі ліфта підвішений стрижень за один кінець так, що може робити коливання. Довжина стрижня 50 см. Визначити період коливань стрижня, якщо ліфт рухається з прискоренням 1.2 м/$с^2$, спрямованим вгору.

6.24. Однорідний диск радіусом R=0,10 м робить коливання навколо горизонтальної осі , що проходить через точку, розташовану на відстані R/2 від центру диска, і перпендикулярну до площини диска. Визначити частоту коливань диска.

6.25. Визначити період крутильних коливань залізної кулі радіусом R=0,1 м, підвішеної на сталевому дроті радіусом r=1 мм і довжиною *l*=1 м. Модуль зсуву сталі прийняти рівним G=80 ГПа.

6.26. Визначити амплітуду змушених коливань вантажу масою 0,2 кг, підвішеного на пружині жорсткістю 20 Н/м, якщо діє примусова сила, з амплітудою 2 Н і частотою в 2 рази більшою власної частоти коливань вантажу, а коефіцієнт загасання 0,5 $с^{-1}$.

6.27. Дві кульки масами m_1 і m_2 скріплені між собою пружиною, жорсткість якої k, лежать на горизонтальній площині. Пружина розтягується і відпускається. Визначити період виниклих коливань кульок. Тертя не враховувати.

6.28. Як визначити невідому масу тіла m_x, маючи секундомір, пружину й інше тіло відомої маси m_0?

6.29. Два однаково направлених гармонічних коливання однакової частоти з амплітудами A_1=5 см та A_2=3 см додаються в одне коливання з амплітудою A=7 см. Визначити різницю фаз $\Delta\varphi$ результуючого коливання.

6.30. Два гармонічних коливання однакового напряму, що мають однакові амплітуди та частоти, утворюють одне коливання тієї ж амплітуди. Визначити різницю фаз $\Delta\varphi$ цих коливань.

6.31. Визначити амплітуду A і початкову фазу φ результуючого коливання, що утворюється при додаванні двох однаково направлених коливань з однаковим періодом: $x_1 = A_1 \sin\omega t$ і $x_2 = A_2 \sin\omega(t+\tau)$, якщо $A_1=A_2$=5 см; $\omega = \pi\ c^{-1}$; $\tau = 0{,}5 c$. Знайти рівняння результуючого коливання.

6.32. Точка бере участь в двох однаково направлених коливаннях: $x_1 = A_1 \sin\omega t$ і $x_2 = A_2 \cos\omega t$, де A_1=5 см; A_2=10 см; $\omega = 3c^{-1}$. Визначити амплітуду результуючого коливання, його частоту ν і початкову фазу φ. Записати рівняння цього руху.

6.33. Точка бере участь в двох однаково направлених гармонічних коливаннях з однаковими частотами $\omega_1 = \omega_2 = \pi\ c^{-1}$ та амплітудами $A_1=A_2$=10 см. Початкові фази коливань $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ і $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. Визначити амплітуду результуючого коливання і початкову фазу φ. Записати рівняння цього руху. Побудувати векторну діаграму додавання амплітуд.

6.34. Додаються три гармонічних коливання однакового напряму з однаковими періодами $T_1=T_2=T_3$=5 с та амплітудами $A_1=A_2=A_3$=10 см. Початкові фази коливань $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$; $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$; $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$. Побудувати векторну діаграму додавання амплітуд. Визначити амплітуду A та початкову фазу φ результуючого коливання.

6.35. Додаються два взаємно перпендикулярних коливання, що виражаються рівняннями: $x = A_1 \sin\omega t$ і $y = A_2 \cos\omega(t+\tau)$, де A_1=5 см; A_2=10 см; $\omega = \pi\ c^{-1}$; $\tau = 2c$. Визначити рівняння траєкторії та побудувати її.

6.36. Додаються два взаємно перпендикулярних коливання, що виражаються рівняннями: $x = A_1 \cos\omega t$ і $y = A_2 \cos\omega(t+\tau)$, де A_1=6 см; A_2=12 см; $\omega = \pi\ c^{-1}$; $\tau = 2c$. Визначити рівняння траєкторії та побудувати її.

6.37. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, що виражаються рівняннями: $x = A_1 \cos\omega t$, $y = A_2 \sin\omega t$, де A_1=4 см і A_2=3 см. Визначити рівняння траєкторії та вказати напрям руху точки.

6.38. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, що виражаються рівняннями: $x = A_1 \sin\omega t$ $y = A_2 \cos\omega t$, , де A_1=3 см і A_2=5 см. Визначити рівняння траєкторії та вказати напрям руху точки.

6.39. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, що виражаються рівняннями: $x = A_1 \cos\omega t$, $y = -A_2 \cos 2\omega t$, де A_1=7 см і A_2=6 см. Визначити рівняння траєкторії та вказати напрямок руху точки.

6.40. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, що виражаються рівняннями: $x = A_1 \cos\omega t$, $y = A_2 \sin\frac{1}{2}\omega t$, де A_1=9 см і A_2=10 см. Визначити рівняння траєкторії та вказати напрям руху точки.

6.41. Знайти швидкість поширення звукових коливань у повітрі, довжина хвилі яких 1,0 м, а частота коливань 340 Гц. Чому дорівнює максимальна швидкість зсуву часток повітря, якщо амплітуда коливань 0,2 мм?

6.42. На якій відстані від джерела коливань, що відбуваються за законом синуса, у момент часу t=T/2 зміщення точки від положення рівноваги дорівнює половині амплітуди? Швидкість поширення коливань 340 м/с. Період коливань 10^{-3} с.

6.43. Визначити швидкість поширення хвиль в озері, якщо період хитання човна, що знаходиться на поверхні води, 4,0 с, а відстань між найближчими гребенями хвиль 6,0 м.

6.44. У скільки разів змінюється довжина ультразвукової хвилі при переході хвилі зі сталі в мідь, якщо швидкості поширення ультразвуку в міді і сталі, відповідно, 3600 і 5500 м/с?

6.45. Знайти швидкість поширення ультразвуку в залізі, якщо модуль Юнга для заліза 20 ГПа, а щільність 7800 кг/м^3.

6.46. Визначити швидкість поширення поперечних звукових хвиль у міді. Модуль зсуву для міді 12,0 ГПа, щільність міді 8900 кг/м^3.

6.47. Визначити швидкість звуку у воді, якщо відомо, що модуль усебічного стиску води 1,98 ГПа.

6.48. Чому дорівнює коефіцієнт усебічного стиску води, якщо посланий з корабля ультразвуковий сигнал, відбившись на глибині h=1,5 км, повернувся через t=2,1 с?

6.49. Визначити натяг сталевої струни довжиною 0,50 м і діаметром 0,20 мм, якщо відомо, що вона налаштована в унісон з камертоном, частота якого 430Гц.

6.50. Знайти швидкість поширення поперечних звукових хвиль у сталевій струні діаметром 1,0 мм, натягнутій із силою 100 Н.

6.51. Чому дорівнює швидкість поширення звукової хвилі в мідному дроті довжиною 10 м, що натягнутий силою 200 Н? Маса дроту 50 г.

6.52. Скільки биттів у секунду дає натягнута сталева струна з камертоном, частота коливань якого 430 Гц, якщо натяг струни 100 Н, її довжина 0,5 м, а діаметр 0,3 мм?

6.53. Визначити частоту основного тону відкритої труби довжиною 1,0 м, що заповнена повітрям.

6.54. Чому дорівнює частота основного тону закритої з одного кінця труби довжиною 1,5 м, якщо вона заповнена водою? Швидкість поширення звуку у воді прийняти рівною 1,5 км/с.

6.55. Рівень гучності шуму літака на відстані 5 м дорівнює 120 дБ, а тихої розмови на тій же відстані - 40 дБ. Визначити відношення інтенсивностей і абсолютні значення інтенсивностей цих звуків.

6.56. На скільки децибелів відрізняються звуки, що відповідають порогові чутності ($I_0=10^{-2}$Вт/м^2) і порогові болючих відчуттів ($I=10^2$ Вт/м^2)?

6.57. Підводний човен, що рухається зі швидкістю $\vec{V}=10$ м/с, посилає ультразвуковий сигнал частотою $\nu=30$ кГц, що, відбившись від перешкоди, повертається назад. Визначити різницю між частотами сигналу, що посилається і прийнятого сигналу.

6.58. Два катери рухаються назустріч один одному з однаковою швидкістю, рівною $\vec{V}=10{,}0$ м/с. З першого катера посилається ультразвуковий сигнал частотою $\nu=50{,}0$ кГц, що відбивається від другого катера і приймається на першому. Визначити частоту прийнятого сигналу.

6.59. Два електропоїзди йдуть назустріч один одному зі швидкостями $\vec{V}_1=30{,}0$м/с і $\vec{V}_2=10{,}0$ м/с. Перший потяг дає свисток, висота тону якого відповідає частоті $\nu=500$ Гц. Визначити частоту, яка сприймається пасажиром другого електропоїзда перед зустріччю і після зустрічі потягів. Чому були б рівні відповідні частоти, якби пасажир знаходився на першому електропоїзді, а сигнал давав другий?

6.60. Човен, занурюючись вертикально, випромінює короткі звукові імпульси сигналу гідролокатора тривалістю τ_0 в напрямі дна. Тривалість відбитих сигналів, виміряних гідроакустиком на човні, дорівнює τ. Яка швидкість занурення човна? Швидкість звуку у воді $\vec{V}$, дно горизонтальне.

§ 19. Електромагнітні коливання

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

Рівняння власних коливань LC-контуру: $Q=Q_0\sin(\omega t+\varphi_0)$.

Рівняння загасаючих коливань LC-контуру: $Q=Q_0e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi_0)$.

Декремент загасання : $2\beta=\dfrac{R}{L}$.

Логарифмічний декремент загасання : $\Theta = \frac{R}{2L}T$.

Період LC- контуру: $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}$, якщо $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 << \frac{1}{LC}$, то $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Зв'язок довжини хвилі з швидкістю і періодом коливань: $\lambda = cT$ або $\lambda = \frac{c}{v}$, де $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ - швидкість хвилі в середовищі.

§ 20. Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Контур складається з котушки з опором $R=14$ Ом, індуктивністю $L=10^{-5}$ Гн і конденсатора ємністю $C=0{,}002$ мкФ. Конденсатор С заряджається від батареї акумуляторів, а тоді приєднується до котушки L. 1) Знайти логарифмічний декремент загасання коливань, які будуть в контурі. 2) Розрахувати відношення між енергіями магнітного поля в котушці і електричного поля в конденсаторі в момент максимального струму.

Розв'язування

1) Логарифмічний декремент дорівнює $\Theta = \frac{R}{2L}T$, де T період вільних коливань: $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}$.

Отже , логарифмічний декремент загасання дорівнює :

$$\Theta = 2\pi\sqrt{\frac{R^2C}{4L^2 - R^2C}}.$$

Провівши розрахунки, отримаємо $\Theta = 0{,}63$..

2) Енергія магнітного поля дорівнює $W_H = \frac{LI^2}{2}$. У момент максимального струму можемо записати, що $U = I_{max}R$.

Отже, $W_H = \frac{LU^2}{2R^2}$.

З іншого боку, енергія електростатичного поля в конденсаторі дорівнює: $W_E = \frac{CU^2}{2}$.

Отже, відношення між енергіями магнітного поля в котушці і електричного поля в конденсаторі в момент максимального струму

буде: $\frac{W_H}{W_E} = \frac{L}{CR^2}$.

Підставляючи числові значення, отримаємо: $\frac{W_H}{W_E} = 25$.

Приклад 2

Коливальний контур, що складається з повітряного конденсатора з двома пластинами площею $S=100$ см^2 кожна і котушки з індуктивністю $L=1$ мкГн, резонує на хвилю довжиною $\lambda = 10$ м. Визначити відстань d між пластинами конденсатора..

Розв'язування

За формулою Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$ знаходимо електроємність плоского конденсатора $C = \frac{T^2}{4\pi^2 L}$. З іншого боку $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$.

Отже, тепер $d = \frac{4\pi^2\varepsilon_0 S L}{T^2}$.

Невідомий період коливань визначаємо, знаючи довжину хвилі λ, на яку реагує контур, із співвідношення $\lambda = cT$.

Отже, $d = c^2\frac{4\pi^2\varepsilon_0 S L}{\lambda^2}$.

Виконуючи розрахунки, знаходимо d =3,14 *мм*.

Приклад 3

На екрані осцилографа спостерігається осцилограма загасаючого електромагнітного коливання. Максимальне значення напруги $U_0 = 1{,}2\,B$, а значення напруги через інтервал часу, що дорівнює одному періоду $U(t) = 0{,}6\,B$. Визначити логарифмічний декремент загасання.

Розв'язування

Амплітуда загасаючих коливань дорівнює: $A = A_0 \exp(-\beta t)$.

Прологарифмуємо цей вираз і отримаємо $\ln A = \ln A_0 - \beta t$. Оскільки $\beta T = \Theta$, то $\Theta = \ln\dfrac{U_0}{U} = \ln\dfrac{1.2}{0.6} = 0{,}693$.

Приклад 4

Коливальний контур повинен працювати у передавачі, який випромінює хвилі довжиною 300 м. Яким має бути період його коливань? Як забезпечити цей період, якщо індуктивність котушки дорівнює 1 мкГн ?

Розв'язування

Швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі можна виразити через їх довжину і період: $c = \lambda\nu = \dfrac{\lambda}{T}$.

Отже, період коливань контуру: $T = \dfrac{\lambda}{c} = 1\cdot10^{-6}c = 1\text{“ђђ}$.

Використовуючи формулу періоду коливань контуру $T = 2\pi\sqrt{LC}$, знаходимо необхідну для цього електроємність:

$$C = \frac{T^2}{4\pi^2 L} = \frac{\lambda^2}{4\pi c^2 L} = 2.5\cdot10^{-8}\Phi = 0.025\,мкф.$$

§ 21. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

7.1. Котушка індуктивністю $L = 1$ *мГн* і повітряний конденсатор, що складається з двох круглих пластин діаметром $D=20$ *см*, з'єднані паралельно. Відстань d між пластинами дорівнює 1 *см*. Визначити період T коливального контуру.

7.2. Конденсатор електроємністю C=500 *пФ* з'єднаний паралельно з котушкою довжиною l=*40 см* і площею перерізу S=*5 см*^{2}. Котушка має N =1000 витків. Сердечник немагнітний. Знайти період T коливального контуру.

7.3. Коливальний контур складається із котушки індуктивністю L =*20 мкГн* і конденсатора C =*80 нФ*. Величина ємності може відхилятися від указаного значення на 2%. Визначити, в яких межах може змінюватися довжина хвилі, на яку резонує контур.

7.4. Коливальний контур має індуктивність L =*1,6 мГн*, електроємність С=0,004 *мкФ*, і максимальна напруга U_{max} на затискачах дорівнює 200 В. Визначити максимальну силу струму I_{max} в контурі. Опір контуру дуже малий.

7.5. Коливальний контур має конденсатор електроємністю C =*8 пФ* і котушку індуктивністю L=*0,5 мГн*. Яка максимальна напруга U_{max} на обкладках конденсатора, якщо максимальна сила струму I_{max}=40 *мА*?

7.6. Котушка (без сердечника) довжиною L=*50 см* та площею перерізу S_1=*3 см*^{2} має N =1000 витків та з'єднана паралельно з конденсатором. Конденсатор складається з двох пластин площею S_2=*75 см*^{2} кожна. Відстань d між пластинами дорівнює 5 *мм*. Діелектрик - повітря. Визначити період T коливань контуру.

7.7. Коливальний контур складається з паралельно з'єднаних конденсатора електроємністю С=1 *мкФ* і котушки індуктивністю L=1 *мГн*. Опір контуру дуже малий. Знайти частоту ν коливань.

7.8. Індуктивність L коливального контуру дорівнює 0,5 *мГн*. Яка повинна бути електроємність C контуру, щоб він резонував на довжину хвилі $\lambda = 300\,м$?

7.9. На яку довжину хвилі λ буде резонувати контур, що складається з котушки індуктивністю L=*4 мкГн* і конденсатора електроємністю С=1,11 *нФ*?

21.10. Для демонстрації дослідів Герца із заломленням електромагнітних хвиль беруть велику призму, що виготовлена з парафіну. Визначити показник заломлення парафіну, якщо його діелектрична проникність $\varepsilon = 2$ і магнітна проникність μ=1.

РОЗДІЛ 2. ГЕОМЕТРИЧНА ТА ХВИЛЬОВА ОПТИКА

§ 22. Геометрична оптика

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. Закон заломлення світла $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$,

де α - кут падіння, β - кут заломлення, $V_1 = \frac{c}{n_1}$ і $V_2 = \frac{c}{n_2}$ - фазова швидкість світла в першому і другому середовищах, $c = 3\cdot10^8$ *м/с* - швидкість світла в вакуумі, n_{21} - відносний показник заломлення другого середовища відносно першого.

2. Граничний кут α_0 повного відбиття визначається із співвідношення $\sin\alpha_0 = \frac{n_2}{n_1}$, де n_1 і n_2 - абсолютні показники заломлення першого і другого середовища.

3. Формула тонкої лінзи $\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}$, де F - фокусна відстань, f - відстань від лінзи до зображення, d - відстань від лінзи до предмета. Для збиральної лінзи $F > 0$, $d > 0$, для дійсного зображення $f > 0$, для уявного зображення $f < 0$.

Оптична сила лінзи $D = \frac{1}{F} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, де F - фокусна відстань, n - відносний показник заломлення речовини лінзи відносно зовнішнього середовища, R_1 і R_2 - радіуси кривизни заломлювальних поверхонь лінзи, для опуклої поверхні $R>0$, для плоскої поверхні $R=\infty$, для увігнутої поверхні $R<0$.

5. Лінійне збільшення лінзи $\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d}$, де f і d - відстань від лінзи до зображення і від лінзи до предмета, H - висота зображення, h - висота предмета.

§ 23. Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Свічка стоїть на відстані L = 3,75 м від стіни. Переміщаючи між ними лінзу, двічі одержали чітке зображення полум'я на стіні. Відстань між двома положеннями лінзи, у яких вона дає чітке зображення, l = 75 см. Обчислити фокусну відстань лінзи.

Розв'язування

Запишемо для цих положень рівняння лінзи:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} \qquad (2)$$

Одночасно виконується пара таких рівностей:

$d_1 + f_1 = L$; $d_2 + f_2 = L$, а за умовою задачі $|d_1 - d_2| = |f_1 - f_2| = l$.

Якщо знайти $f_1 = L - d_1$ і підставити це значення в рівняння (1), то приходимо до квадратного рівняння для d_1, корені якого дають нам d_1 і d_2, а саме : $d^2 - Ld + Fl = 0 \to d_{1,2} = 0.5L \pm \sqrt{0.25L^2 - FL}.$

Звідси: $l^2 = (d_2 - d_1)^2 = 0.25L^2 - FL \to F = \frac{L^2 - l^2}{4L} = 0.9м$

Приклад 2

Знайти фокусну відстань двоопуклої скляної лінзи, що знаходиться у воді, якщо відомо, що її фокусна відстань в повітрі 20 см.

Розв'язування

Фокусна відстань двоопуклої лінзи пов'язана з абсолютними показниками заломлення речовини лінзи n_1 і навколишнього середовища n_2 таким співвідношенням: $\frac{1}{F} = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, де R_1 і R_2 - радіуси кривизни сферичних поверхонь.

Для лінзи, яка знаходиться в повітрі,

$$\frac{1}{F_1} = (n_1 - 1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (1)$$

Аналогічно, для лінзи, яка знаходиться у воді,

$$\frac{1}{F_2} = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{n_1 - n_2}{n_2}\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (2)$$

Поділивши почленно співвідношення (1) і (2), одержимо:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{(n_1 - 1)n_2}{n_1 - n_2}, \text{ звідси: } F_2 = \frac{F_1 \cdot n_2(n_1 - 1)}{n_1 - n_2} = 0{,}78\ м.$$

Приклад 3

У короткозорої людини відстань найкращого бачення дорівнює $d = 10$ *см* замість $d_0 = 25$ *см*. Які окуляри необхідні цій людині для корекції короткозорості?

Розв'язування

Позначимо через D - оптичну силу ока людини, f – відстань від сітківки до кришталика, тоді для $d_0 = 25$ *см* можна застосувати формулу тонкої лінзи: $\frac{1}{d_0} + \frac{1}{f} = D$.

Якщо людина одягне окуляри з оптичною силою D_x, то внаслідок розташування лінзи окулярів близько до ока можна додати їх оптичні сили:

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{f} = D + D_x.$$

Віднімаючи від другого рівняння перше, знаходимо необхідну оптичну силу окулярів для читання з віддалі найкращого бачення (25 см):

$$D_1 = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} = \frac{d - d_0}{d \cdot d_0} = 6 \text{ дптр.}$$

Приклад 4

Зображення предмета на матовому склі фотоапарату з відстані, що дорівнює 15 м, має висоту 30 мм, а з відстані 9 м - висоту 51 мм. Знайти фокусну відстань об`єктива.

Розв'язування

Застосовуючи формулу збиральної лінзи для відстаней d_1 і d_2, одержимо:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}; \quad \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}. \qquad (1)$$

Використовуючи формулу збільшення лінзи для тих же відстаней, знайдемо :

$$\frac{h}{h_1} = \frac{d_1}{f_1}; \quad \frac{h}{h_2} = \frac{d_2}{f_2},$$

звідси :

$$f_1 = \frac{h_1 d_1}{h}; \quad f_2 = \frac{h_2 d_2}{h},$$

де h - висота предмета.

Підставляючи вирази для f_1 і f_2 в рівняння (1), одержимо:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{h}{h_1 d_1} = \frac{1}{F}; \quad \frac{1}{d_2} + \frac{h}{h_2 d_2} = \frac{1}{F}. \qquad (2)$$

Сумісно розв`язуючи рівняння (2), одержимо:

$$F = \frac{d_2 h_2 - d_1 h_1}{h_2 - h_1} = 0.43 \text{ м.}$$

§ 24. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

8.1. Горизонтальний промінь світла падає на вертикально розташоване дзеркало. Дзеркало повертається на кут α біля вертикальної осі. На який кут повернеться відбитий промінь?

8.2. Світло, що має в повітрі довжину хвилі 665 нм у воді має довжину хвилі 500 нм. Чи означає це, що колірне сприйняття оком цього світла в повітрі й у воді буде різним?

8.3. Радіус кривизни ввігнутого дзеркала 20 см. На відстані 30 см від дзеркала поставлений предмет висотою 1 см. Знайти положення і висоту зображення. Виконати креслення.

8.4. Для деякої довжини хвилі показник заломлення плоскопаралельної прозорої пластинки змінюється від значення n_1=1,40 на одній з поверхонь до n_2= 1,60 на іншій. Товщина пластинки d=10,0 мм. а) Який час t затрачає світло на проходження пластинки в перпендикулярному до неї напрямі? б) З якою середньою швидкістю $\langle V \rangle$ поширюється світло в пластинці (виразити її через c)?

8.5. На якій відстані від дзеркала буде зображення предмета в опуклому дзеркалі з радіусом кривизни 40 см, якщо предмет поміщений на відстані 30 см від дзеркала? Яка буде висота зображення, якщо предмет має висоту 2 см?

8.6. Промінь світла падає під кутом α на тіло з показником заломлення n. Як повинні бути позв'язані між собою величини α і n, щоб відбитий промінь був перпендикулярний до заломленого?

8.7. В увігнутому дзеркалі з радіусом кривизни 40 см хочуть одержати дійсне зображення, висота якого вдвічі менша висоти самого предмета. Де потрібно помістити предмет і де буде його зображення?

8.8. Висота зображення предмета в ввігнутому дзеркалі вдвічі більша висоти самого предмета. Відстань між предметом і зображенням 15 см. Знайти фокусну відстань F і оптичну силу D дзеркала.

8.9. Скориставшись принципом Гюйгенса, довести, що відношення показників заломлення двох середовищ обернене відношенню швидкостей світла в цих середовищах. $\frac{n_1}{n_2} = \frac{V_2}{V_1}$.

8.10. При якому значенні кута падіння світлового променя на границю поділу двох середовищ (з показниками заломлення n_1 і n_2) відбитий і заломлений промені утворять кут $\pi/2$?

8.11. Промінь світла падає під кутом 30° на плоскопаралельну скляну пластинку і виходить з неї паралельно до початкового променя. Показник заломлення 1,5. Яка товщина пластинки, якщо відстань між променями 1.94 см?

8.12. Промінь світла виходить зі скипидару в повітря. Граничний кут повного внутрішнього відбиття для цього променя 42°23'. Знайти швидкість поширення світла в скипидарі.

8.13. На плоскопаралельну скляну пластинку товщиною 1 см падає промінь світла під кутом 60°. Показник заломлення скла $n=1,73$. Частина світла відбивається, а частина, заломлюючись, проходить у скло, відбивається від нижньої поверхні пластинки і, заломлюючись вдруге, виходить назад у повітря паралельно першому відбитому променю. Знайти відстань між променями.

8.14. Задня фокусна відстань f' лінзи дорівнює: а) 200 мм, б) 400 мм. Чому дорівнює оптична сила D лінзи?

8.15. У якому випадку світловий промінь проходить через центр тонкої лінзи, не змінюючи свого напряму?

8.16. На склянку, наповнену водою, покладена пластинка із скла. Під яким кутом повинен падати на пластинку промінь світла, щоб від поверхні розділу вода-скло відбулося повне внутрішнє відбиття? Показник заломлення скла 1,5.

8.17. На дно посудини, наповненої водою до висоти 10 см, поміщене точкове джерело світла. На поверхні води плаває кругла непрозора пластинка так, що її центр знаходиться над джерелом світла. Який найменший радіус повинна мати ця пластинка, щоб жоден промінь не міг вийти через поверхню води?

8.18. Світловому потокові в 1 лм, утвореному випромінюванням з $\lambda=555$ нм, відповідає потік енергії, рівний 0,00160 Вт. Який потік енергії відповідає світловому потокові в 100 лм, утвореному випромінюванням, для якого відносна спектральна чутливість ока $V=0,762$?

8.19. Який світловий потік відповідає потокові енергії в 1,00 Вт, утвореному випромінюванням, для якого відносна спектральна чутливість ока $V=0,342$?

8.20. Пов'язаний зі світловою хвилею потік енергії розподілений рівномірно на довжинах хвиль, тобто $\frac{d\Phi}{d\lambda}=const$. Як виглядала б у цьому випадку крива розподілу світлового потоку на довжинах хвиль?

8.21. Показники заломлення деякого сорту скла для червоного і фіолетового променів рівні 1,51 і 1,53. Знайти граничні кути повного внутрішнього відбиття при падінні цих променів на поверхню розділу скло-повітря.

8.22. Що відбудеться при падінні білого променя під кутом 41° на поверхню розділу скло-повітря? Показники заломлення скла для червоного і фіолетового променів рівні 1,51 і 1,53.

8.23. Монохроматичний промінь падає нормально на бічну поверхню призми кут заломлення якої 40°. Показник заломлення матеріалу призми для цього променя 1,5. Знайти кут відхилення променя, що виходить із призми, від початкового напряму.

8.24. Монохроматичний промінь падає нормально на бічну поверхню призми і виходить з неї відхиленим на кут 25°. Показник заломлення матеріалу призми для цього променя 1,7. Знайти заломлювальний кут призми.

8.25. Заломлювальний кут рівнобедреної призми 10°. Монохроматичний промінь падає на бічну грань під кутом 10°. Показник заломлення матеріалу призми для цього променя 1,6. Знайти кут відхилення променя від початкового напряму.

8.26. Заломлювальний кут призми 45°. Показник заломлення матеріалу призми для деякого монохроматичного променя 1.6. Яким повинен бути найбільший кут падіння цього променя на призму, щоб при виході променя з неї наступило повне внутрішнє відбиття?

8.27. Пучок світла ковзає уздовж бічної грані рівнобедреної призми. При якому граничному заломлювальному куті призми заломлені промені зазнають повного внутрішнього відбиття на другій бічній грані? Показник заломлення матеріалу призми для цих променів 1,6.

8.28. Монохроматичний промінь падає на бічну поверхню прямокутної рівнобедреної призми. Ввійшовши в призму, промінь зазнає повного внутрішнього відбиття від основи призми і виходить через другу бічну поверхню призми. Яким повинний бути найменший кут падіння променя на призму, щоб ще відбувалося повне внутрішнє відбивання? Показник заломлення матеріалу призми для цього променя 1,5.

8.29. Промінь білого світла падає на бічну поверхню рівнобедреної призми під таким кутом, що червоний промінь виходить з неї перпендикулярно до другої грані. Знайти кути відхилення червоного і фіолетового променів від початкового напряму, якщо заломлюючий кут призми 45°. Показники заломлення матеріалу призми для червоного і фіолетового променів рівні 1,37 і 1.42.

8.30. Якщо відстань предмета від лінзи 36 см, то висота зображення 10 см. Якщо ж відстань від лінзи до предмета 24 см, то висота зображення 20 см. Визначити фокусне збільшення лінзи.

8.31. Радіуси кривизни поверхонь двоопуклої лінзи $R_1=R_2=50$ см. Показник заломлення матеріалу лінзи $n=1.5$. Знайти оптичну силу D лінзи.

8.32. Яка головна фокусна відстань лінзи, якщо для отримання зображення предмета в натуральну величину він повинен бути поміщеним на відстані 25 см від лінзи? Яка оптична сила лінзи?

8.33. Монохроматична світлова хвиля з $\lambda=510$ нм при нормальному падінні на деяку поверхню створює освітленість E=100 лк. Визначити тиск p, що створює світло на поверхню, яка відбиває половину падаючого світла.

8.34. Інтенсивність (середня щільність світлового потоку) монохроматичної світлової хвилі $I=100$ $лм/м^2$. Частота хвилі ω=3,69х$10^{15}$$с^{-1}$. Показник заломлення середовища, у якому поширюється хвиля, n=1,50, магнітна проникність μ=1. Знайти значення амплітуд E_m і H_m напруженостей електричного і магнітного полів цієї хвилі.

8.35. Точкове ізотропне джерело світла випромінює в усіх напрямах потік Ф=1257 лм. Чому дорівнює сила світла I цього джерела?

8.36. Паралельний пучок променів, що несе однорідний світловий потік густиною $j=200$ лм/м^2, падає на плоску поверхню, зовнішня нормаль до якої утворює з напрямом променів кут α=120°. Яка освітленість E цієї поверхні?

8.37. На висоті h=3,00 м над підлогою висить точкове джерело, сила світла якого описується функцією $I(\vartheta)=I_0\cos^2\vartheta$ в межах $0<<\vartheta<<\pi/2$ і дорівнює нулеві при $\vartheta>\pi/2$ (I_0 - константа, ϑ-кут, утворений світловим променем з вертикаллю). Освітленість підлоги під джерелом E=100 лк. Визначити світловий потік Ф, випромінюваний джерелом.

8.38. Точкове ізотропне джерело світла знаходиться над центром круглого столу. Сила світла джерела $I=50,0$ *кд*, радіус столу R=0,500 м, висота джерела над столом h=1,00 м. Визначити: 1) залежність освітленості E столу від відстані до центру; 2) значення освітленості: а) у центрі, б) на краю столу; 3) потік світла Ф, що падає на стіл. Яка частина повного потоку, що випромінюється джерелом, падає на стіл?

8.39. Яскравість однорідної світної плоскої поверхні описується функцією $L(\vartheta,\varphi)$ (р) (ϑ- кут з нормаллю до поверхні, φ - азимутальний кут). Написати вираз для світності M цієї поверхні.

8.40. Однорідний світний диск радіусом R=10,0 см, яскравість якого $L=L_0\cos\vartheta$ (L_0 - константа, рівна 1,00х10^3 кд/м^2, ϑ- кут з нормаллю до поверхні). Знайти світловий потік Ф, що випромінюється диском.

§ 25. Хвильова оптика

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. Швидкість світла в середовищі $V=\frac{c}{n}$, де с – швидкість світла у вакуумі, n – абсолютний показник заломлення середовища.

2. Оптична різниця ходу світлових хвиль відбитих від верхньої та нижньої поверхонь плоско паралельної пластинки $\Delta=2d\sqrt{n^2-\sin^2 i_1}+\frac{\lambda}{2}$, *або* $\Delta=2dn\cos i_2+\frac{\lambda}{2}$, де d – товщина пластинки, i_1, i_2 – відповідно, кут падіння та заломлення.

3. Зв'язок різниці фаз $\Delta\varphi$ коливань з оптичною різницею ходу світлових хвиль $\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}$.

4. Умова максимумів інтенсивності світла при інтерференції $\Delta = \pm k\lambda$, (k=0,1,2,3, ...).

5. Умова мінімумів інтенсивності світла при інтерференції $\Delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$, ($k$=0,1,2,3, ...).

6. Радіуси світлих кілець Ньютона в відбитому світлі $r_k = \sqrt{(2k-1)R(\lambda/2)}$,

де k – номер кільця (k=1,2,3,...).

7. Радіуси темних кілець Ньютона в відбитому світлі $r_k = \sqrt{kR\lambda}$

8. Радіус k-ї зони Френеля: для сферичної хвилі - $r_k = \sqrt{\frac{ab}{a+b}k\lambda}$, a – відстань від джерела до перешкоди, b – відстань від перешкоди до екрана, k- номер зони Френеля, λ - довжина хвилі; для плоскої хвилі - $r_k = \sqrt{bk\lambda}$

9. Дифракція світла на одній щілині: умова мінімумів інтенсивності - $a\sin\varphi = \pm 2k\frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda$, k =1,2,3,..., де a – ширина щілини, φ - кут дифракції, k – номер мінімуму; умова максимумів інтенсивності - $a\sin\varphi' = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$.

10. Дифракція світла на дифракційній ґратці: умова головних максимумів інтенсивності $d\sin\varphi = \pm k\lambda$, k=0,1,2,3,..... де d – період дифракційної ґратки, k – номер головного максимуму.

11. Формула Вульфа-Брегів

$$2d\sin\theta = k\lambda,$$

d – відстань між атомними площинами кристалу, θ - кут ковзання.

12. Закон Брюстера: $tg i_B = n_{21}$, де i_B - кут падіння, при якому відбита світлова хвиля цілком поляризована; n- відносний показник заломлення.

13. Закон Малюса: $I = I_0 \cos^2 \varphi$, де I - інтенсивність плоскополяризованого світла, що пройшло через аналізатор; I_0 - інтенсивність плоскополяризованого світла, що падає на аналізатор; α - кут між напрямом коливань світлового вектора хвилі, що падає на аналізатор, і площиною пропускання аналізатора.

14. Ступінь поляризації світла: $P = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$, де I_{max} і I_{min} - максимальна і мінімальна інтенсивності частково-поляризованого світла, що пропускається аналізатором.

15. Кут повороту φ площини поляризації оптично активними речовинами визначається співвідношеннями: у твердих тілах - $\varphi = \alpha d$, де α - постійна обертання; d - довжина шляху, пройденого світлом в оптично активній речовині; у чистих рідинах $\varphi = [\alpha] \rho d$, де $[\alpha]$ - питоме обертання; ρ - щільність рідини; у розчинах $\varphi = [\alpha] C d$, де C - масова концентрація оптично активної речовини в розчині.

§ 26. Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Відстань між двома когерентними джерелами S_1 і S_2 $d = 2$ мм. Вони випромінюють хвилі довжиною $\lambda = 500 нм$. Знайти різницю ходу до точки, що знаходиться напроти джерела на екрані, віддаленого від площини джерел хвиль на відстань 2 м. Максимум чи мінімум інтерференції спостерігається у цій точці?

Розв'язування

На рис. 2.1 показано взаємне розташування джерел S_1 і S_2, екрана.

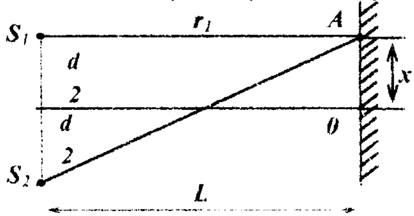


Рис.2.1

точки центрального максимуму O, точки A "навпроти S_1". Позначимо відстань OA через x. Різниця ходу хвиль від джерел у точку A обчислимо таким чином:

$$r_2^2 - r_1^2 = = [L^2 + (x + 0{,}5d)^2] - [L^2 + (x - 0{,}5d)^2] \rightarrow (r_2 + r_1)\cdot(r_2 - r_1) \approx$$

$2xd$, $2L\,(r_2 - r_1) \approx 2x\,d$. *Тоді* $\Delta = r_2 - r_1 = \dfrac{2xd}{2L} = \dfrac{xd}{L}$.

Тут враховано, що $L >> d$, $L >> x$; $x = 1$ *мм*, тому $\Delta_A = 1 \cdot 10^{-6}$ *м=1000 нм*. Вона дорівнює двом довжинам хвиль. Очевидно хвилі, що приходять у цю точку від S_1 і S_2, додаються, і в точці A має бути максимум.

Приклад 2

Пучок паралельних променів з довжиною хвилі 700 нм падає на мильну плівку під кутом 45^0. *При якій найменшій товщині плівки у відбитому склі спостерігається максимум (мінімум)?*

Розв'язування

Хід променів зображено на рис.2.2. Промені *1* і *2* посилюють або гасять один одного, що залежить від різниці їх ходу Δ : $\Delta = AB + BC - AD$.

Умови відбиття променів *1* і *2* різні, в результаті чого додатково виникає різниця фаз π і різниця ходу $\dfrac{\lambda}{2}$, а також зменшення довжини хвилі у плівці, де $n = 1.33$.

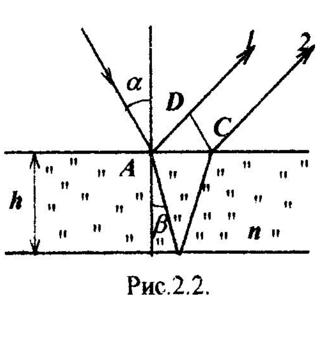


Рис.2.2.

$$\Delta = 2AB \cdot n + \frac{\lambda}{2} - AD,\; AB = \frac{h}{\cos\beta};\; AD = AC \cdot \sin\alpha = 2h \cdot tg\beta \cdot \sin\alpha.$$

За законом заломлення $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \to \sin\alpha = n \cdot \sin\beta$.

Тому

$$\Delta = \frac{2hn}{\cos\beta} + \frac{\lambda}{2} - 2htg\beta \cdot n\sin\beta = 2hn\left(1 - \sin^2\beta\right)\cos^{-1}\beta + \frac{\lambda}{2} =$$

$$= \frac{\lambda}{2} + 2h\sqrt{h^2 - \sin^2\beta}.$$

Максимум спостерігається тоді, коли $\Delta = \lambda$, а мінімум, коли $\Delta = \frac{\lambda}{2}$.

В нашому випадку максимум спостерігається на товщині h:

$$\lambda = \frac{\beta}{2} + 2h_{max}\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} \to h = \lambda\left(4\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}\right)^{-1} = 0.3 мкм.$$

Мінімум спостерігається при вдвічі тоншій плівці – *0.15мкм.*

Приклад 3

На дифракційну гратку, нормально до її поверхні, падає паралельний пучок світла з довжиною хвилі 0.5 мкм. Розміщена поблизу гратки лінза проектує дифракційну картину на плоский екран, віддалений на відстань L = 1 м. Відстань між двома максимумами інтенсивності першого порядку, що спостерігається на екрані дорівнює 20.2 см. Знайти: 1) постійну d дифракційної гратки; 2) число n штрихів на 1 см; 3) число максимумів, які дає при цьому дифракційна гратка; 4) максимальний кут відхилення променів, що відповідають останньому дифракційному максимуму.

Розв'язування

1. З формули дифракційної гратки $d\sin\varphi = k\lambda$, знайдемо $d = \frac{k\lambda}{\sin\varphi}$

В даному випадку $k = 1$, $\sin\varphi = tg\,\varphi$ (тому що $\frac{l}{2} << L$), $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\frac{l}{2}}{L}$ (рис.2.3.).

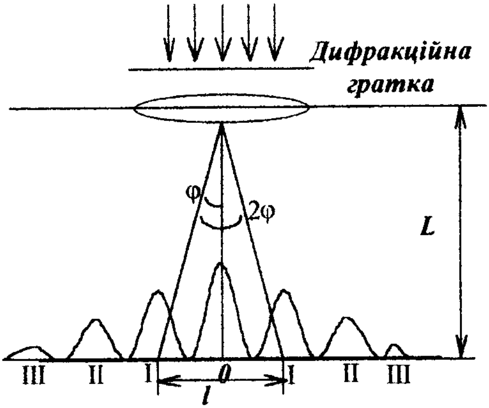


Рис.2.3.

З урахуванням цього $d = \frac{2\lambda L}{l} = 4.59\,мкм.$.

2. Число штрихів на *1 см* знайдемо з формули $n = \frac{1}{d} = 2.02 \cdot 10^3 см^{-1}$.

3. Для визначення числа максимумів, обчислимо спочатку максимальне значення k_{max}, виходячи з того, що максимальний кут відхилення променів граткою не може перевищувати 90^0, тому $k_{max} = \frac{d \sin 90°}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} = 9.9$.

Число k повинно бути цілим, тому $k_{max} = 9$. Загальне число максимумів, враховуючи центральний нульовий максимум $N = 2k_{max} + 1 = 19$.

4. Визначимо максимальний кут відхилення променів, що відповідають останньому дифракційному максимуму $sin\varphi_{max} = k_{max} \cdot \frac{\lambda}{d}$.

Звідси $\varphi_{max} = arcsin\left(k_{max} \cdot \frac{\lambda}{d}\right) = 65,4^0$.

Приклад 4

Пучок природного світла падає на поліровану поверхню скляної пластини, зануреної в рідину. Відбитий від пластини пучок світла складає кут φ = 97° з падаючим пучком (рис.2.4.). Визначити показник заломлення n рідини, якщо відбите світло повністю поляризоване.

Розв'язування

Відповідно до закону Брюстера, світло, відбите від діелектрика, повністю поляризоване у тому випадку, якщо тангенс кута падіння $tgi_Б = n_{21}$, де n_{21} - відносний показник заломлення другого середовища (скла) відносно першого (рідини).

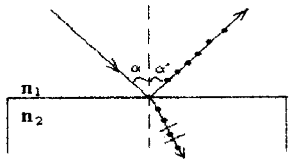


Рис.2.4.

Відносний показник заломлення дорівнює відношенню абсолютних показників заломлення цих середовищ. Отже, $tgi_Б = n_2 / n_1$.

Оскільки кут падіння дорівнює кутові відбивання, то $i_Б = \varphi / 2$, отже, $tg(\varphi / 2) = n_2 / n_1$. Тоді $n_1 = \dfrac{n_2}{tg(\varphi / 2)}$.

Приклад 5

Пучок частково-поляризованого світла розглядається через ніколь. Спочатку ніколь установлений так, що його площина пропускання рівнобіжна площині коливань лінійно-поляризованого світла. При повороті ніколя на кут φ = 60° інтенсивність світла, що пропускається ним, зменшилася в k=2 рази. Визначити відношення інтенсивностей природного і лінійно-поляризованого світла, що складають дане частково-поляризоване світло, а також ступінь поляризації P пучка світла.

Розв'язування

Відношення інтенсивності природного світла до інтенсивності поляризованого світла знайдемо з таких міркувань. При початковому положенні ніколя він цілком пропустить лінійно-поляризоване світло і половину інтенсивності природного світла. Загальна інтенсивність пропущеного при цьому світла $I_1=I_{пол}+1/2I_{пр}$.

При другому положенні ніколя інтенсивність пропущеного поляризованого світла визначиться за законом Малюса, а інтенсивність пропущеного природного світла, як і в першому випадку, буде дорівнювати половині інтенсивності природного світла, що падає на ніколь. Загальна інтенсивність у другому випадку $I_2=I_{пол}\cos^2\varphi+1/2\cdot I_{пр}$.

Відповідно до умови задачі $I_1=k\cdot I_2$ або $I_{пол}+1/2I_{пр}=k(I_{пол}\cos^2\varphi+1/2\cdot I_{пр})$.

Підставивши сюди значення кута φ, k і зробивши обчислення, одержимо $I_{пр}/I_{пол}=1$, або $I_{пр}=I_{пол}$, тобто, інтенсивності природного і поляризованого світла в заданому пучку рівні між собою.

Ступінь поляризації частково-поляризованого світла визначається співвідношенням $P=\dfrac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}}$, де I_{max} і I_{min} - максимальна і мінімальна інтенсивності частково-поляризованого світла, що пропускається аналізатором. Максимальна інтенсивність $I_{max}=I_1=I_{пол}+1/2I_{пр}$, або, враховуючи, що $I_{пр}=I_{пол}$, $I_{max}=3/2I_{пол}$.

Мінімальна інтенсивність відповідає положенню ніколя, при якому площина пропускання його перпендикулярна площині коливань лінійно-поляризованого світла. При такому положенні ніколя поляризоване світло буде цілком погашеним і через ніколь пройде тільки половина інтенсивності природного світла. Загальна інтенсивність виразиться рівністю $I_{min}=1/2\ I_{пр}=1/2\ I_{пол}$.

Підставивши знайдені вирази I_{max} і I_{min} у формулу визначення ступеня поляризації, одержимо $P=\dfrac{3/2I_{пр}-1/2I_{пр}}{3/2I_{пр}+1/2I_{пр}}=1/2$.

§ 27. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

9.1. Лазер випромінює монохроматичне світло з частотою $\nu = 2{,}83 \cdot 10^{14} c^{-1}$. Скільки довжин хвиль цього світла вміщається на шляху l=1 мм: а) у вакуумі; б) у воді; в) у склі (n=1,6)?

9.2. Лазер випромінює монохроматичні хвилі λ=10,6 мкм. Визначити частоту цих електромагнітних коливань. Яка довжина хвилі і частота цього випромінювання у воді?

9.3. Який шлях пройде фронт хвилі монохроматичного світла в склі (n=1,6) за той же час, за який воно проходить шлях l=1 м у воді?

9.4. Різниця ходу двох когерентних променів 2,5 мкм. Визначити довжини хвиль видимого випромінювання (0,400 мкм < λ < 760 мкм), що дадуть інтерференційні максимуми.

9.5. У повітрі поширюються два паралельних монохроматичних когерентних промені (λ= 0,63 мкм). На шляху одного з них поставили скляну плоскопаралельну кювету з розчином цукру так, що промінь падає на її стінку перпендикулярно. Знайти: а) оптичну різницю ходу променів; б) довжину хвилі світла в розчині цукру; в) зміну різниці фаз коливань. Товщина стінок кювети d=1 мм, її довжина $l = 7 см$. Показники заломлення повітря, скла, з якого виготовлено кювету, і розчину цукру відповідно n_1=1, n_2= 1,57, n_3 = 1,397.

9.6. На шляху променя світла поставлена скляна пластинка (n=1,5) товщиною d=1 мм так, що кут падіння променя дорівнює i=30°. На скільки зміниться оптична довжина шляху променя?

9.7. Відстань між двома щілинами в методі Юнга l= 0,5 мм. Відстань від щілин до екрана L=3 м. Визначити відстань між світлими інтерференційними смугами на екрані, якщо дослід проводиться з зеленим світлом (λ = 0,555 мкм).

9.8. Визначити відстань між уявними джерелами світла в досліді з дзеркалами Френеля, якщо відстань між темними смугами на екрані d=3 мм, а відстань від уявних джерел до екрана L=2 м. Довжина світлової хвилі точкового джерела λ=0,6 мкм.

9.9. Відстань між двома когерентними джерелами світла l= 0,9 мм. Джерела випромінюють монохроматичне світло з довжиною хвилі λ = 0,64 мкм. Відстань від джерел до екрана L = 3,5 м. Визначити число світлих смуг на 1 см довжини.

9.10. Знайти інтенсивність I хвилі, утвореної накладенням двох когерентних хвиль, поляризованих у взаємно перпендикулярних напрямах. Значення інтенсивності цих хвиль рівні I_1 і I_2. У деяку точку приходять N паралельних одне одному світлових коливань $E_m = a\cos[\omega t + (m-1)\delta]$, (m=1,2,...,N). Методом графічного додавання коливань визначити амплітуду А результуючого коливання.

9.11. На скляний клин падає перпендикулярно до його поверхні пучок монохроматичних променів (λ=0,6 мкм). Відстань між світлими інтерференційними смугами d=2 мм. Визначити кут між поверхнями клина.

9.12. Між краями двох відшліфованих скляних пластинок покладена смужка паперу. Два протилежних краї пластинок впритул притиснуті один до одного. Визначити число N інтерференційних смуг, що спостерігаються на одиниці довжини пластинок, якщо відбите світло (λ=0,63 мкм) розглядають під кутом i. Товщина паперу h=0,1 мм; довжина пластинок l=10 см; кут падіння променів і = 45°.

9.13. Джерело світла діаметром d=30,0 см знаходиться від місця спостереження на відстані l=*200* м. У випромінюванні джерела містяться довжини хвиль в інтервалі від 490 до 510 нм. Оцінити для випромінювання: а) час когерентності t, б) довжину когерентності l, в) радіус когерентності ρ, г) об'єм когерентності V.

9.14. Хвильові вектори $\vec{k}_1$ і $\vec{k}_2$ двох плоских когерентних хвиль однакової інтенсивності утворюють кут φ, набагато менший одиниці. Хвилі падають на екран, розміщений так, що вектори $\vec{k}_1$ і $\vec{k}_2$ симетричні відносно нормалі до екрана. Визначити ширину Δx інтерференційних смуг, що спостерігаються на екрані.

9.15. Дві світлові хвилі створюють у деякій точці простору коливання однакового напряму, що описуються функціями $A\cos\omega t$ і $A\cos[(\omega+\Delta\omega)t]$, де $\Delta\omega$=0,628 с$^{-1}$. Яка буде інтенсивність світла в цій точці?

9.16. Яка довжина хвилі береться до уваги у виразі для різниці фаз δ інтерферуючих світлових хвиль, оптична різниця ходу яких дорівнює $\Delta(\delta = 2\pi\Delta/\lambda)$, - довжина хвилі у вакуумі чи довжина хвилі в середовищі, в якому поширюється хвиля?

9.17. У деякому інтерференційному приладі на шляху білого світла був встановлений один раз червоний, інший раз зелений світлофільтр. Смуга пропускання $\Delta\lambda$ в обох світлофільтрів однакова. У якому світлі - червоному або зеленому - число помітних інтерференційних смуг буде більше?

9.18. На яку величину a змінюється оптична різниця ходу інтерферуючих променів при переході від середини однієї інтерференційної смуги до середини іншої?

9.19. Пучок лазерного випромінювання з λ = 632,8 нм падає нормально на перешкоду з двома вузькими паралельними щілинами. На екрані, розміщеному за перешкодою, спостерігається система інтерференційних смуг. У який бік і на яке число смуг зміститься інтерференційна картина, якщо одну з щілин перекрити прозорою пластинкою товщиною d=10,0 мкм, виготовленою з матеріалу з показником заломлення n= 1,633?

9.20. Плоска світлова хвиля довжиною λ_0 у вакуумі падає нормально на прозору пластинку з показником заломлення n. При яких товщинах b пластинки відбита хвиля буде мати а) максимальну, б) мінімальну інтенсивність?

9.21. Два світлових пучки однакової довжини хвилі й однакової інтенсивності I_0=100лм/м^2. Один пучок випромінюється лазером, інший - газорозрядною лампою. Визначити інтенсивність I кожного з пучків після проходження ними пластинки товщиною приблизно 1 мм із показником заломлення n=1,600, якщо товщина пластинки дорівнює: а) $N\lambda$, б) $(N+1/4)\lambda$. (N - ціле число, λ - довжина хвилі в пластинці). Поглинання світла в пластинці не враховувати.

9.22. На плівку товщиною b=367 нм падає під кутом α паралельний пучок білого світла. Показник заломлення плівки n=1,40. У який колір буде пофарбоване світло, відбите плівкою у випадку, якщо α дорівнює: а) 30°, б) 60°?

9.23. Клиноподібна пластинка шириною a =100,0 мм має з одного краю товщину b_1=0,358 мм, а з іншого b_2=0,381 мм. Показник заломлення пластинки n=1,50. Під кутом $\vartheta=30^0$ до нормалі на пластинку падає пучок паралельних променів. Довжина хвилі падаючого світла $\lambda=655$ нм (червоний колір). Визначити ширину інтерференційних смуг (виміряну в площині пластинки), що спостерігаються у відбитому світлі, для випадку, коли ступінь монохроматичності світла $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ дорівнює: а) 5000, б) 500.

9.24. Розташована вертикально дротяна рамка затягнута мильною плівкою. При освітленні плівки зеленим світлом з λ_0=530 нм і ступенем монохроматичності $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$=40 на верхній частині плівки спостерігаються інтерференційні смуги рівної товщини. Визначити товщину b плівки.

9.25. При освітленні клиноподібної прозорої пластинки зеленим світлом (λ_0=550 нм) на частині пластинки спостерігаються 36 інтерференційних смуг рівної товщини (інша частина пластинки освітлена рівномірно). Яке число смуг N буде спостерігатися, якщо освітити пластинку замість зеленого червоним світлом (λ_0=660 нм), ступінь монохроматичності якого $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ в 1,20 рази менше, ніж у зеленого світла?

9.26. На скляну пластинку покладена опуклою стороною плоско-опукла лінза. При нормальному падінні на плоску границю лінзи червоного світла (λ_0=610 нм) радіус 5-го світлого кільця Ньютона виявляється рівним r_5 =5,00 мм. Визначити: а) радіус кривизни R опуклої границі лінзи, б) оптичну силу Ф лінзи (показник заломлення лінзи n=1,50; лінзу вважати тонкою, в) радіус r_3 3-го світлого кільця.

9.27. У скільки разів зросте радіус m-го кільця Ньютона при збільшенні довжини світлової хвилі в 1,5 разу?

9.28. Точкове джерело світла з λ=500 нм поміщене на відстані a=0,500 м перед непрозорою перешкодою з отвором радіусом r=0,500 мм. Визначити відстань b від перешкоди до точки, для якої число m зон Френеля, що відкриваються отвором, буде дорівнювати: а) 1; б) 5; в) 10.

9.29. Точкове джерело світла з λ=550 нм поміщене на відстані a=1,00 м перед непрозорою перешкодою з отвором радіусом r=2,00 мм. а) Яке мінімальне число m_{min} відкритих зон Френеля може спостерігатися при цих умовах? б) При якому значенні відстані b від перешкоди до точки спостереження утвориться мінімально можливе число відкритих зон? в) При якому радіусі r отвору може виявитися в умовах даної задачі відкритою тільки одна центральна зона Френеля?

9.30. Дано круглий отвір у непрозорій перешкоді, на яку падає плоска світлова хвиля. За отвором розташований екран. Як буде змінюватись інтенсивність в центрі спостереження на екрані дифракційної картини, якщо екран віддаляти від перешкоди?

9.31. Виходячи з визначення зон Френеля, знайти число m зон Френеля, що відкриває отвір радіусом r для точки, яка знаходиться на відстані b від центра отвору для випадку плоскої хвилі.

9.32. На непрозору перешкоду з отвором радіусом r=1,000 мм падає монохроматична плоска світлова хвиля. Коли відстань від перешкоди до розміщеного за нею екрана b_1=0,575 м, у центрі дифракційної картини спостерігається максимум інтенсивності. При збільшенні відстані до значення b_2=0,862 м максимум інтенсивності змінюється мінімумом. Визначити довжину хвилі λ світла.

9.33. Побудувати графік залежності інтенсивності I від $\sin\varphi$ для дифракційної гратки з числом штрихів N=5 і відношенням періоду гратки до ширини щілини d/b=2.

9.34. Визначити, при якому значенні відношення $x=b/d$ (d - період дифракційної гратки, b - ширина щілини) дифракційний максимум m-го порядку, буде мати а) максимальну інтенсивність, б) інтенсивність, рівну нулю. Інтенсивність світла, що падає на гратку і її період відомі

9.35. У спектрі, що утворюється дифракційною граткою з періодом d=2300 нм, видно при λ=500 нм тільки два максимуми (крім центрального). Яка ширина щілин b цієї гратки?

9.36. На плоску дифракційну гратку падає нормально пучок монохроматичного світла (λ=0,59 мкм). Під якими кутами до початкового напрямку променів будуть видні дифракційні максимуми першого і другого порядків, якщо гратка має 500 штрихів на 1 см?

9.37. На плоску дифракційну гратку падає перпендикулярно світло натрію (λ=0,590 мкм). Скільки штрихів на 1 мм довжини містить гратка, якщо кут між двома спектрами першого порядку рівний φ = 13°34'.

9.38. На дифракційну ґратку перпендикулярно падає світло, довжина хвилі якого λ=0,589 мкм. При цьому для спектра третього порядку утворюється кут відхилення $\varphi_1 = 10^0 11'$. Яка довжина хвилі світла, для якого кут відхилення в спектрі другого порядку $\varphi_2 = 6^0 16'$?

9.39. На дифракційну ґратку, період якої d=6 мкм, перпендикулярно падає монохроматичне світло. Кут між спектрами першого і другого порядків 4°36'. Визначити довжину світлової хвилі.

9.40. При освітленні дифракційної ґратки білим світлом (0,40 мкм $<\lambda<$ 0,76 мкм) у спектрі третього порядку під кутом φ спостерігається спектральна лінія, що відповідає довжині хвилі λ=0,72 мкм. Чи будуть видні під цим кутом ще які-небудь спектральні лінії?

9.41. Світло, що падає на дифракційну ґратку, складається з двох спектральних ліній з довжинами хвиль λ_1= 0,490 мкм (синє світло) і λ_2= 0,600 мкм (жовтогаряче світло). Перший дифракційний максимум для лінії з довжиною хвилі λ_1 розташовується під кутом $\varphi = 10^0$. Знайти кутову відстань $\Delta\varphi$ між лініями в спектрі другого порядку.

9.42. На дифракційну ґратку з періодом d = $2\cdot10^{-5}$ м перпендикулярно падає пучок білого світла. Визначити різницю кутів відхилення початку і кінця спектра першого порядку.

9.43. Пучок світла, що поширюється в повітрі, падає на поверхню рідини під кутом 54°. Визначити кут заломлення пучка, якщо відбитий пучок повністю поляризований.

9.44. На якій кутовій висоті φ над горизонтом повинне знаходитися Сонце, щоб сонячне світло, відбите від поверхні води, було повністю поляризованим?

9.45. Пучок природного світла, що поширюється у воді, відбивається від грані алмазу, зануреного у воду. При якому куті падіння відбите світло повністю поляризоване?

9.46. Кут Брюстера при падінні світла з повітря на кристал камінної солі дорівнює 57°. Визначити швидкість світла в цьому кристалі. Граничний кут α повного відбиття пучка світла на границі рідини з повітрям дорівнює 43°. Визначити кут Брюстера для падіння променя з повітря на поверхню цієї рідини.

9.47. Пучок природного світла падає на скляну (n = 1,6) призму (рис.2.5.). Визначити двогранний кут α призми, якщо відбитий пучок максимально поляризований.

9.48. Алмазна призма знаходиться в деякому середовищі з показником заломлення n_2. Пучок природного світла падає на призму так, як це показано на рис.2.6. Визначити показник заломлення n_1 середовища, якщо відбитий пучок максимально поляризований.

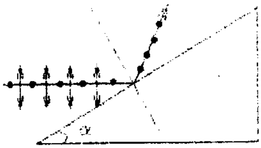


Рис.2.5.

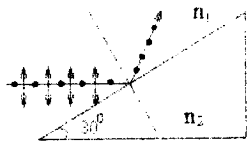


Рис.2.6.

9.49. Аналізатор у k= 2 рази зменшує інтенсивність світла, що приходить до нього від поляризатора. Визначити кут α між площинами пропускання поляризатора й аналізатора. Втратами інтенсивності світла в аналізаторі знехтувати.

9.50. Кут α між площинами пропускання поляризатора й аналізатора дорівнює 45°. В скільки разів зменшиться інтенсивність світла, що виходить з аналізатора, якщо кут збільшити до 60°?

9.51. У скільки разів послабляється інтенсивність світла, що проходить через два ніколя, площини пропускання яких утворюють кут 30°, якщо в кожному з ніколів втрачається 10% інтенсивності світла, що падає на нього?

9.52. У фотометрі одночасно розглядають дві половини поля зору: з однієї видна еталонна світна поверхня з яскравістю B_1= 5 ккд/м^2, в іншій – досліджувана поверхня, світло від якої проходить через два ніколі. Границя між обома половинами поля зору зникає, якщо другий ніколь повернути відносно першого на кут 45°. Знайти яскравість B_2 досліджуваної поверхні, якщо відомо, що в кожному з ніколей інтенсивність світла, що падає на нього, зменшується на 8%.

9.53. У частково-поляризованому світлі амплітуда світлового вектора, яка відповідає максимальній інтенсивності світла, у n= 2 рази більша амплітуди, що відповідає мінімальній інтенсивності. Визначити ступінь поляризації P світла.

9.54. Ступінь поляризації P частково-поляризованого світла дорівнює 0,5. У скільки разів відрізняється максимальна інтенсивність світла, що проходить через аналізатор, від мінімальної?

9.55. На шляху частково-поляризованого світла, ступінь поляризації P якого дорівнює 0,6, поставили аналізатор так, що інтенсивність світла, яке проходить через нього, стала максимальною. В скільки разів зменшиться інтенсивність світла, якщо площину пропускання аналізатора повернути на кут α = 30°?

9.56. На ніколь падає пучок частково-поляризованого світла. При деякому положенні ніколя інтенсивність світла, що пройшло через нього, стала мінімальною. Коли площину пропускання ніколя повернули на кут $\beta = 45^0$, інтенсивність світла зросла в k=1,5 раз. Визначити ступінь поляризації P світла.

9.57. Пластинку кварцу товщиною d=2 мм, вирізану перпендикулярно оптичній осі, помістили між рівнобіжними ніколями, у результаті чого площина поляризації світла повернулася на кут φ= 53°. Визначити товщину h пластинки, при якій дане монохроматичне світло не проходить через аналізатор.

9.58. Нікотин (чиста рідина), що утримується в скляній трубці довжиною *l=8см*, повертає площину поляризації жовтого світла натрію на кут φ=137°. Щільність нікотину $\rho=1{,}01\cdot10^3$ кг/м^3. Визначити питоме обертання $[\alpha]$ нікотину.

9.59. Розчин глюкози з масовою концентрацією C_1=280 кг/м^3, що утримується в скляній трубці, повертає площину поляризації монохроматичного світла, що проходить через цей розчин, на кут φ_1= 32°. Визначити масову концентрацію C_2 глюкози в іншому розчині, налитому в трубку такої ж довжини, якщо він повертає площину поляризації на кут φ_2=24°.

9.60. Кут φ повороту площини поляризації жовтого світла натрію при проходженні через трубку з розчином цукру дорівнює 40°. Довжина трубки *l*=15 см. Питоме обертання $[\alpha]$ цукру дорівнює $1{,}17\cdot10^{-2}$ рад·м^3/ (м·кг).

§ 28. Основи квантової фізики

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. Енергія фотона $E = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$, де h = $6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с – стала Планка, ν - частота, λ - довжина хвилі світла, c – швидкість світла в вакуумі.

2. Імпульс фотона $p = \dfrac{E}{c} = \dfrac{h\nu}{c} = \dfrac{h}{\lambda}$.

3. Рівняння Ейнштейна для фотоефекту $h\nu = A + \dfrac{mV^2}{2}$, де A – робота виходу електрона з металу, m – маса і V – швидкість електрона.

4. Червона границя фотоефекту $\nu_{min} = \dfrac{A}{h}, \lambda_{max} = \dfrac{hc}{A}$.

5. Тиск світла $p = \frac{E_e}{c}(1+\rho)$, *або* $p = w(1+\rho)$, де w – об'ємна густина енергії випромінювання, ρ - коефіцієнт відбиття, с – швидкість світла у вакуумі.

6. Ефект Компотна. Зміна довжини хвилі фотона при розсіюванні його на електроні на кут θ: $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2\pi h}{mc}(1-\cos\theta) = 2\frac{2\pi h}{mc}\sin^2\frac{\theta}{2}$,

$\lambda_C = \frac{2\pi h}{mc} = 2.436$ *пм* - комптонівська довжина хвилі.

7. Співвідношення невизначеностей:

а) для координати і імпульсу частинки $\Delta p_x \Delta x \geq h$, де Δp_x - невизначеність проекції імпульсу частинки на вісь x; Δx - невизначеність її координати;

б) для енергії і часу: $\Delta E \Delta t \geq h$, де ΔE - невизначеність енергії даного квантового стану; Δt - час перебування системи в цьому стані.

8. Одновимірне рівняння Шредінгера: $ih\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$, де $\Psi(x,t)$ - хвильова функція, що описує стан частинки.

9. Одновимірне рівняння Шредінгера для стаціонарних станів $\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + \frac{2m}{h^2}(E-U)\Psi = 0$, де Е – повна енергія частинки; $U(x)$ - потенціальна енергія; $\Psi(x)$ - хвильова функція, що залежить від координати x.

10. Власне значення енергії E_n частинки, що знаходиться на n-му енергетичному рівні в нескінченно глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі, визначається формулою $E_n = \frac{\pi^2 h^2}{2ml^2}n^2$, ($n$=1, 2, 3, ...), l – ширина потенціальної ями.

11. Власна хвильова функція, що відповідає цій енергії має вигляд $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x$.

12. Коефіцієнт прозорості D прямокутного потенціального бар'єра кінцевої ширини $D \approx \exp[-\frac{2}{h}\sqrt{2m(E-U)}d]$, де U – висота потенціального бар'єра; E – енергія частинки; d – ширина бар'єра.

§ 29. Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Найбільша довжина світлової хвилі, при якій може мати місце фотоефект для вольфраму, дорівнює $2.75 \cdot 10^{-7}$ м. Знайти роботу виходу електронів з вольфраму; найбільшу швидкість електронів, що вириваються з вольфраму світлом з довжиною хвилі, яка дорівнює $1.8 \cdot 10^{-7}$ м, найбільшу енергію цих електронів.

Розв'язування

Найбільша довжина хвилі λ_{max}, при якій може мати місце фотоефект для даного металу, пов'язана з червоною границею фотоефекту ν_{min} для цього металу співвідношенням $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_{max}}$.

Робота виходу електронів з металу $A = h\nu_0$, або $A = \frac{hc}{\lambda_{max}} = 7.2 \cdot 10^{-19}$ *Дж.*

За формулою Ейнштейна для фотоефекту $\frac{h\nu}{\lambda} = A + \frac{mV_{max}^2}{2}$;

враховуючи, що $\nu = \frac{c}{\lambda}$, одержимо $\frac{hc}{\lambda} = A + \frac{mV_{max}^2}{2}$; звідси $V_{max} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)} = 9.1 \cdot 10^5 \, м/с$.

Знаючи найбільшу швидкість електронів, що вилетіли, знайдемо найбільшу кінетичну енергію, яка їм відповідає $W_m = \frac{mV_m^2}{2} = 3{,}8 \cdot 10^{19}$ *Дж.*

Приклад 2

Кульку з цинку радіусом $R = 5$ см опромінюють хвилями довжиною $\lambda = 4$ нм. До якого максимального потенціалу зарядиться кулька, якщо робота виходу з цинку $A_0 = 4$ еВ? Обчислити напруженість поля біля її поверхні і кількість електронів, які вирвались з неї.

Розв'язування

Потенціал поверхні кульки знаходимо з умови гальмування тих електронів, що мають максимальну кінетичну енергію після поглинання фотонів: $eU = E_к \rightarrow eU = hc\lambda^{-1} - A \rightarrow U = e^{-1}(hc\lambda^{-1} - A_0) = 308$ *В.*

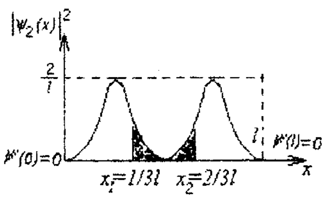
З формул потенціалу $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R}$ і напруженості $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R^2}$, обчислюємо заряд і напруженість: $q=4\pi\varepsilon_0 RU=1.7\cdot10^{-9}$ *Кл*; $E = \frac{U}{R} = 6.16$ В/м, звідси число електронів дорівнює $n = \frac{q}{|e|} = 1.06\cdot10^{10}$.

Приклад 3

Електрон знаходиться в нескінченно глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі шириною l. Визначити ймовірність того, що електрон, який знаходиться в збудженому стані (n=2), буде виявлено в середній третій частині потенціальної ями.

Розв'язування

Ймовірність виявити частинку в інтервалі $x_1 < x < x_2$ визначається рівністю $W = \int_{x_1}^{x_2} |\Psi_n(x)|^2 dx$, де $\Psi_n(x)$ - нормована власна хвильова функція, що відповідає даному стану.



Нормована власна хвильова функція, що описує стан електрона в потенціальній ямі, має вигляд $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x$.

Збудженому стані ($n=2$) відповідає власна функція $\Psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2\pi}{l}x$.

Підставляючи значення власної функції $\Psi_2(x)$ у вираз $W = \int_{x_1}^{x_2} |\Psi_n(x)|^2 dx$, отримаємо: $W = \frac{2}{l}\int_{x_1}^{x_2}\sin^2\frac{2\pi}{l}x dx$.

За умовою задачі, $x_1 = \frac{1}{3}l$ і $x_2 = \frac{2}{3}l$.

Після інтегрування, отримаємо остаточну формулу:

$$W = \frac{2}{l}\int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}(\sin\frac{8\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3})$$

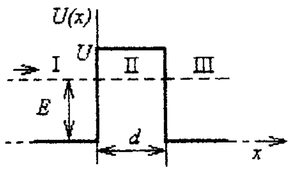
Провівши розрахунки, отримаємо W=0,195. Отже, електрон можна виявити в середній третій частині потенціальної ями при таких умовах з ймовірністю 0,195.

Приклад 3

Електрон з енергією E=4,9 еВ рухається в напрямку осі Ox. Висота потенціального бар'єра U=5 еВ. При якій ширині d бар'єра ймовірність W проходження електрона через нього буде 0,2.

Розв'язування

Ймовірність W проходження частинки через потенціальний бар'єр за своїм фізичним змістом збігається з коефіцієнтом прозорості D.



Враховуючи, ймовірність того, що електрон пройде крізь прямокутний потенціальний бар'єр буде визначатись за формулою

$$W = D \approx \exp[-\frac{2}{h}\sqrt{2m(E-U)}d].$$

Виконавши математичні перетворення, отримаємо

$$\ln W = -\frac{2}{h}\sqrt{2m(E-U)}d.$$

Звідси отримуємо остаточну формулу для розрахунку ширини бар'єра, при якій можлива така ймовірність проходження електрона крізь цей бар'єр

$$d = \frac{h\ln(1/W)}{\sqrt{2m(U-E)}} = 4{,}95 \cdot 10^{-10} м.$$

§ 30. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

10.1. Знайти імпульс p фотона: а) червоних променів світла (λ = 700 нм); б) рентгенівських променів (λ=25пм); в) гамма-променів (λ = 1,24 пм).

10.2. Визначити енергію, масу й імпульс фотона рентгенівского випромінювання з довжиною хвилі λ=0,1 нм.

10.3. Скільки фотонів падає в 1 с на 1 см^2 поверхні, якщо вона опромінюється з потужністю N=10^{-3} Вт/см^2 γ-випромінюванням з довжиною хвилі λ = 10^{-14} м?

10.4. У деякого металу фотоефект починається при частоті світла, що падає ν=1,14·10^{15} Гц. Знайти роботу виходу електрона.

10.5. На поверхню літієвої пластинки падають фіолетові промені (λ=0,4 мкм). Робота виходу електронів з літію А=2,4 еВ. Визначити червону границю фотоефекту. Чи буде відбуватися фотоефект?

10.6. Знайти енергію, імпульс і масу фотона, якщо відповідна йому довжина хвилі λ = 1,6 пм.

10.7. З якою швидкістю повинен рухатися електрон, щоб його кінетична енергія була рівна енергії фотона з довжиною хвилі λ =520 нм?

10.8. З якою швидкістю повинен рухатися електрон, щоб його імпульс був рівний імпульсу фотона з довжиною хвилі λ =520 нм?

10.9. Яку енергію повинен мати фотон, щоб його маса була рівна масі спокою електрона?

10.10. Імпульс, який переноситься монохроматичним пучком фотонів через площадку S=2 см^2 за час t=5 хв, дорівнює p=3 10^{-9} кгм/с. Знайти для цього пучка енергію Е, що падає на одиницю площі за одиницю часу.

10.11. При якій температурі Т кінетична енергія молекули двоатомного газу буде рівною енергії фотона з довжиною хвилі λ =589 нм?

10.12. Знайти масу фотона, кількість руху якого рівна кількості руху молекули водню при температурі 20 °С. Швидкість молекул вважати рівною середній квадратичній швидкості.

10.13. При високих енергіях важко здійснити умови для вимірювання експозиційної дози рентгенівського і гамма-випромінювань у рентгенах, тому допускається застосування рентгена як одиниці дози для випромінювань з енергією квантів до 3 МеВ. До якої граничної довжини хвилі λ рентгенівського випромінювання можна вживати рентген?

10.14. Знайти довжину хвилі λ_0 світла, що відповідає червоній границі фотоефекту, для літію, натрію, калію і цезію.

10.15. Довжина хвилі світла, що відповідає червоній границі фотоефекту, для деякого металу λ=275 нм. Знайти мінімальну енергію фотона, що викликає фотоефект.

10.16. Довжина хвилі світла, що відповідає червоній границі фотоефекту, для деякого металу λ_0=275 нм. Знайти роботу виходу електрона з металу, максимальну швидкість електронів, що виривються з металу світлом з довжиною хвилі λ=180 нм, і максимальну кінетичну енергію електронів.

10.17. Знайти частоту світла, що виривас з металу електрони, які цілком затримуються різницею потенціалів 3 В. Фотоефект розпочинається при частоті світла 6-10^{14} Гц. Знайти роботу виходу A електрона з металу.

10.18. Знайти затримувальну різницю потенціалів для електронів, що виривються при освітленні калію світлом з довжиною хвилі λ = 330 нм.

10.19. При фотоефекті з платинової поверхні електрони цілком затримуються різницею потенціалів U=0,8 В. Знайти довжину хвилі світла, що застосовується при опроміненні і граничну довжину хвилі, при якій ще можливий фотоефект.

10.20. Фотони з енергією 4,9 еВ виривають електрони з металу з роботою виходу 4,5еВ. Знайти максимальний імпульс, переданий поверхні металу при вильоті кожного електрона.

10.21. Знайти сталу Планка, якщо відомо, що електрони, які виривються з металу світлом з частотою 2.2 10^{15} Гц цілком затримуються різницею потенціалів 6,6 В, а які виривються світлом з частотою 4,6-10 Гц - різницею потенціалів 16,5 В.

10.22. Вакуумний фотоелемент складається з центрального катода (вольфрамової кульки) і анода (внутрішньої поверхні посрібленої зсередини колби). Контактна різниця потенціалів між електродами 0.8 В прискорює електрони, що вилітають. Фотоелемент освітлюється світлом з довжиною хвилі λ=450 нм. Яку затримувальну різницю потенціалів треба прикласти між електродами, щоб фотострум зменшився до нуля? Яку швидкість одержать електрони, коли вони долетять до анода, якщо не прикладати між катодом і анодом різниці потенціалів?

10.23. Написати рівняння Шредінгера для електрона, що знаходиться в воднеподібному атомі.

10.24. Частинка знаходиться в потенціальній прямокутній ямі шириною l в збудженому стані (n=2). Визначити, в яких точках інтервалу $(0 < x < l)$ густина ймовірності $|\psi(x)|^2$ знаходження частинки максимальна і мінімальна.

10.25. Електрон знаходиться в потенціальній прямокутній ямі шириною l. Визначити, в яких точках інтервалу $(0 < x < l)$ густина ймовірності $|\psi(x)|^2$ знаходження електрона на першому і другому енергетичних рівнях однакова? Визначити густину ймовірності для цих точок.

10.26. Знайти ймовірність проходження електрона через прямокутній потенціальний бар`єр при різниці енергій $U - E = 1 eB$, якщо ширина бар`єра: 1) *d=0,1 нм*; 2) *d=0,5 нм*.

10.27. Ширина бар`єра *d=0,5 нм*. Різниця енергій $U - E = 1 eB$. В скільки раз зміниться ймовірність проходження електрона через бар`єр, якщо різниця енергій зросте в n=10 разів?

10.28. При якій ширині d прямокутного потенціального бар`єра коефіцієнт прозорості D для електрона рівний 0,01? Різниця енергій $U - E = 1 eB$.

10.29. Електрон з енергією E=9 eB рухається в напрямку осі Ox. Оцінити ймовірність того, що електрон пройде через потенціальний бар`єр, якщо його висота U=10 eB і ширина d=0,1 нм.

10.30. Прямокутній потенціальний бар`єр має ширину *d=0,5 нм*. При якій різниці енергій $U - E$ ймовірність W проходження електрона через бар`єр рівна 0,99?

ЧАСТИНА III

РОЗДІЛ 1. Атомна фізика

§ 31. Будова атома. Атомне ядро

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. Момент імпульсу електрона на стаціонарних орбітах $L = mVr = n\hbar$ (n=1,2,3,...), де m – маса електрона, V – швидкість електрона на орбіті, r – радіус орбіти, n – головне квантове число, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ - стала Планка.

2. Енергія фотона, що випромінюється атомом водню при переході із одного стаціонарного стану в інший $\varepsilon = h\nu = E_2 - E_1$.

3. Енергія електрона, що знаходиться на n-й орбіті $E_n = -\dfrac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 n^2}$.

4. Радіус стаціонарних орбіт атома водню $r = n^2\dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$.

5. Узагальнювальна формула Бальмера $\dfrac{1}{\lambda} = R'(\dfrac{1}{n_1^2} - \dfrac{1}{n_2^2})$, де R' – стала Ридберга ($R'=1{,}10\cdot10^7$ м$^{-1}$).

6. Формула де Бройля $\lambda = \dfrac{2\pi h}{p}$ *або* $\lambda = \dfrac{2\pi h}{m_0 V}\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

7. Енергія зв'язку атомного ядра $E_{зв} = \Delta mc^2$,

де $\Delta m = Zm_p + (A-z)m_n - M_я = zM_{1H}^1 + (A-z)m_n - M_A$ - дефект маси, c - швидкість світла в вакуумі, A – масове число (число протонів і нейтронів в ядрі), z – зарядове число (число протонів в ядрі), $M_я$ – маса ядра, M_H – маса атома водню, m_p – маса протона, m_n – маса нейтрона, M_A – маса атома.

8. Закон радіоактивного розпаду $N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = N_0 e^{-\lambda t}$, де N_0 – число радіоактивних ядер в початковий момент часу ($t = 0$) N - число радіоактивних ядер в момент часу t, T – період піврозпаду, $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T}$ - стала радіоактивного розпаду.

9. На основі дослідних фактів Резерфорд запропонував

планетарну модель атома. Отримав гіперболічне рівняння траєкторії α-частинки:

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \delta\,\frac{q_1 q_2}{2bW}$$

Де θ - кут, на який заряджена частинка розсіюється кулонівським полем нерухомого ядра; q_2 і q_2 - заряди частинок, які взаємодіють; W - кінетична енергія частинки, що налітає; b - прицільна відстань, тобто довжина перпендикуляра, опущеного з ядра на початкову прямолінійну траєкторію - частинок, $\delta = 1$ в (СГС) або $\frac{1}{4\pi\varepsilon}$ (в СІ).

Резерфорд також отримав формулу для визначення кількості частинок, що розсіюються в елементарному тілесному куті $d\Omega$ під кутом θ до початкового напрямку їх руху:

$$\frac{dN}{N} = n\left(\delta\,\frac{q_1 q_2}{4W}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

де n - число ядер фольги на одиницю площі її поверхні. $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$. Дана модель пояснювала розсіяння α-частинок, при проходженні металевої фольги, проте, з погляду законів класичної фізики вона була неспроможна пояснити закономірності в лінійчастих спектрах атомів і навіть самого факту випромінювання атомом монохроматичного світла; не могла пояснити характерної стійкості атома.

§ 32. Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Знайти в мегаелектронвольтах енергію зв'язку ядра ізотопу літію ^7_3Li.

Розв'язування

Енергія зв'язку ядра

$$\Delta E = \Delta mc^2. \qquad (1)$$

Оскільки $\Delta m = Zm_p + (A - z)m_n - M_я$, рівність (1) можна привести до вигляду $\Delta E = (zm_p + (A - z)m_n - M_я)c^2$. Підставивши $A = 7$ і $Z = 3$ в вираз (1), одержимо $\Delta E = (3m_p + 4\ m_n - M_я)c^2 = 6.2 \cdot 10^{-12}$ Дж = 39 МеВ. Тут враховується, що $1 МеВ = 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ Дж.

Приклад 2

Радіоактивний натрій $^{24}_{11}Na$ розпадається з періодом піврозпаду 14,8 год. Обчислити кількість атомів, що розпались в 1кг даного радіоактивного препарату за 10 год.

Розв'язування

Число атомів, які розпалися за час t $\Delta N = N_0 - N_t$ (1), де N_0 – число атомів, які не розпалися в початковий момент часу в *1 мг* $^{24}_{11}Na$, N – число атомів, які не розпалися через час t.

Оскільки $N = N_0 e^{-\lambda t}$, формулу (1) можна привести до вигляду

$$\Delta N = N - N_t = N_0 e^{-\lambda t} = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right). \qquad (2)$$

Враховуючи, що $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$, перетворимо вираз (2) :

$$\Delta N = N_0\left(1 - e^{-\ln\frac{2t}{T}}\right) = N_0\left[1 - \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{T}}\right] = N_0\left(1 - 2^{-\frac{t}{T}}\right). \qquad (3)$$

Оскільки в одному молі $^{24}_{11}Na$ знаходиться число атомів, що дорівнює сталій Авогадро N_A, то в даній масі m знаходиться число N_0 атомів:

$$N_0 = \frac{m}{\mu} \cdot N_A \qquad (4)$$

Підставивши формулу (4) в (3) одержимо $\Delta N = \frac{m}{\mu} N_A\left(1 - 2^{-\frac{t}{T}}\right) = 9{,}3 \cdot 10^{18}$.

Приклад 3

Кінетична енергія α - частинки в досліді Резерфорда W_α=7,7 МеВ.

а) Визначити відстань максимального наближення D до ядра атома золота (Z=79).

б) Враховуючи, що в досліді Резерфорда використовувалась золота фольга, розрахувати, якою повинна бути прицільна відстань b, щоб отримати кути розсіювання α-частинок $\theta \geq 90^\circ$.

в)Який в цьому випадку ефективний переріз ядра.

г)Визначити відносне число α-частинок, що відхиляються на кут 90° і більше, якщо товщина золотої фольги $l = 6 \cdot 10^{-7}$ м.

Розв'язування

а) На відстані максимального наближення кінетична енергія α -частинки W_a перейде в потенціальну енергію системи (лобовий удар)

$$W_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Ze^2}{D}.$$

Тоді відстань максимального наближення D:

$$D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Ze^2}{W_n} = \frac{2\cdot 79\cdot(1.6\cdot 10^{-19})^2}{4\cdot 3.14\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\cdot 7.78\cdot 1.6\cdot 10^{-13}} = 2.96\cdot 10^{-14}\,м.$$

б) Прицільна відстань b для отриманого значення D і кута розсіяння $\theta \geq 90^0$ визначається за формулою $b = \frac{D}{2}ctg\frac{\theta}{2} = \frac{2.96\cdot 10^{-14}}{2}ctg\frac{90^0}{2} = 1.48\cdot 10^{-14}\,м.$

Звідки b= 1,48·10^{-14} м.

Всі α-частинки, що наближаються до ядра з прицільною відстанню меншою за b, будуть розсіяні під кутом більшим ніж θ.

в) Площа області навколо ядра, замкнена всередині кола радіусом рівним прицільній відстані b називається ефективним перерізом розсіювання. Його можна записати $\sigma = \pi b^2$. Отже. $\sigma = 3.14(1.48\cdot 10^{-14})^2 = 6.87\cdot 10^{-28}\,м^2$.

г) Число ядер в одиниці об'єму $n = \frac{\rho N_A}{M}$.

(Для золота $\rho = 1.93\cdot 10^4\,кг/м^3$, M=0,197 кг/моль).

Після розрахунку, отримаємо $n = \frac{1.93\cdot 10^4\cdot 6.02\cdot 10^{23}}{197\cdot 10^{-3}} = 5.9\cdot 10^{28}\,м^{-3}$.

Відносне число частинок, що відхиляються на кут 90° і більше

$$f = \frac{N}{N_0} = n\sigma l = 5.91\cdot 10^{28}\cdot 6.87\cdot 10^{-28}\cdot 6\cdot 10^{-7} = 2.44\cdot 10^{-5}$$

А це означає, що приблизно 2 із 100000 α-частинок відхиляться на кут $\theta > 90^0$.

Приклад 4

Визначити потенціал іонізації і перший потенціал збудження атома водню.

Розв'язування

Потенціалом іонізації U_i називають ту найменшу різницю потенціалів, яку потрібно пройти в прискорювальному полі електрону, щоб при зіткненні з даним не збудженим атомом іонізувати його.

Робота для виривання електрона з атома A_i рівна роботі сил електричного поля $A_i = eU_i$.

Враховуючи квантовий характер поглинання енергії атомом, можна стверджувати, що робота іонізації A_i рівна кванту енергії $h\nu$, що поглинається атомом водню при переході електрона з першої борівської орбіти на нескінченно віддалену орбіту. Використавши формулу $A_i = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = hR\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$, $n = 1, m = \infty$. $A_i = eU_i = hR \Rightarrow U_i = \frac{hR}{e} = 13.6\,B$.

Перший потенціал збудження U_i, - це найменша різниця потенціалів, яку потрібно пройти в прискорювальному полі електрону, щоб при зіткненні з не збудженим атомом перевести його в перший збуджений стан. Застосувавши роботи прискорювального поля і поклавши n=1, m=2, отримаємо:

$$eU_i = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = hR\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}hR \Rightarrow U_i = \frac{3}{4}\cdot\frac{hR}{e} = 10.2\,B.$$

§ 33. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

11.1. При переході електрона в атомі водню з третьої стаціонарної орбіти на другу випромінюються фотони, що відповідають довжині хвилі $\lambda = 6{,}52\text{x}10^{-7}$ м. Яку енергію втрачає атом водню при випромінюванні цього фотона?

11.2. Електрон у не збудженому атомі водню одержав енергію E = 12 еВ. На який енергетичний рівень він перейшов? Скільки ліній можна буде побачити в спектрі випромінювання при переході електрона на більш низькі енергетичні рівні? Енергія основного стану атома водню E =13,5 еВ.

11.3. Атом водню при переході з одного стаціонарного стану в інший випромінює послідовно два кванти з довжинами хвиль λ_1 = 40 510-10^{-10} м і λ_2 = 972,5-10^{-10} м. Визначити зміну енергії атома водню.

11.4. Електрон, що рухається зі швидкістю $V = 1{,}875\cdot10^6$ м/с, захоплюється протоном, у результаті чого утворюється збуджений атом водню. Визначити довжину хвилі фотона, що випромінюється при переході атома в нормальний стан.

11.5. При лобовому зіткненні атома водню, що рухався зі швидкістю V_0 = 7-10^4 м/с, з нерухомим атомом водню випромінюється світловий квант із довжиною хвилі $\lambda = 0{,}122$ мкм. Нехтуючи імпульсом фотона, визначити швидкості атомів після зіткнення. Альфа-частинка з імпульсом

$53\ \frac{MeB}{c}$ (с - швидкість світла) розсіялась під кутом $60°$ в кулонівському полі нерухомого ядра атома урану. Знайти прицільну відстань.

11.6. Оцінити час, протягом якого електрон, що рухається навколо ядра атома водню на орбіті з радіусом $0.5\cdot10^{10}\ м$, впав би на ядро, якщо він втрачав би енергію на випромінювання відповідно до теорії класичної електродинаміки $\frac{dE}{dt}=-\frac{2}{3}\frac{e_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\vec{r}}^2$, $\ddot{\vec{r}}$ - вектор прискорення електрона, с - швидкість світла.

11.7. Вузький пучок α-частинок з кінетичною енергією W=1,0 МеВ падає нормально на золоту фольгу, товщина якої d=1,0 мкм. Потік частинок $I=3.6\cdot10^4\ c^{-1}$. Знайти число α-частинок, розсіяних фольгою протягом $\tau=2\ хв$ під кутами: а) в інтервалі 59-61°; б) більшим за $\theta=60°$.

11.8. Визначити частоту f обертання електрона на другій орбіті атома водню.

11.9. Атомарний водень збуджений світлом певної довжини хвилі, при переході в основний стан випромінює тільки три спектральних лінії. Визначити довжини хвиль цих ліній і вказати, яким серіям вони належать.

11.10. Обчислити потенціали іонізації іонів He^+, Li^{++}.

11.11. Енергія зв'язку електрона в атомі гелію рівна E_0=24,6 еВ. Знайти енергію, необхідну для виривання обох електронів з даного атома.

11.12. Атом водню в основному стані поглинув квант світла довжиною хвилі λ=121,5 нм. Визначити радіус електронної орбіти збудженого атома водню.

11.13. Визначити квантове число n-го збудженого стану атома водню, якщо відомо, що в процесі переходу в основний стан атом випромінює: а) фотон, довжина хвилі якого λ=97,25 нм; б) два фотони, довжина хвиль яких λ_1=656,3 нм і λ_2=121,6 нм.

11.14. Визначити рівні енергії частинки, яка знаходиться в одновимірній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками, ширина ями a. (Використати умову Бора - Зомерфельда).

11.15. Частинка масою m вертикально падає на горизонтальну пластинку і пружно від неї відбивається. Проквантувати рух частинки, визначити допустимі висоти H_n і знайти рівні енергії.

11.16. Визначити енергію зв'язку, що припадає на один нуклон у ядрі атома $^{23}_{11}N$, якщо маса останнього m= 22,99714 а. о. м.

11.17. При бомбардуванні алюмінію $^{27}_{13}Al$ α-частинками утвориться фосфор $^{30}_{15}P$. Записати рівняння реакції і визначити енергію, що виділилася. Маси ізотопів $^{27}_{13}Al$ і $^{30}_{15}P$ рівні відповідно 26,99010 і 29,97867 а. о. м., а маси α-частинки і нейтрона - 4,00260 і 1,00894 а. о. м.

11.18. Яку мінімальну енергію повинний мати γ- квант для виривання нейтрона з ядра $^{12}_{6}C$?

11.19. Знайти енергію зв'язку ядра, що має однакове число протонів і нейтронів і радіус якого в півтора рази менший радіуса ядра $^{27}_{13}Al$.

11.20. При опроміненні берилію α-частинками утворяться невідомий елемент і нейтрон. Записати реакцію і визначити невідомий елемент.

11.21. При опроміненні алюмінію α-частинками утворяться невідомий елемент і нейтрон. Записати реакцію і визначити невідомий елемент.

11.22. При термоядерній реакції злиття дейтерію $^{2}_{1}H$ і тритію $^{3}_{1}H$ утворяться нейтрон, невідома частинка і виділяється E_0 = 17,6 МеВ енергії. Визначити невідому частинку і повну енергію, що виділиться, якщо прореагує m=1 *г* дейтерію.

11.23. Ядро урану $^{235}_{92}U$, захопивши один нейтрон, розпалося на два осколки і викинуло два нейтрони. Одним з осколків є ядро барію $^{139}_{56}Ba$. Записати реакцію і визначити, який ще хімічний елемент утвориться при цьому розпаді.

11.24. При взаємодії ядер алюмінію $^{27}_{13}Al$ із x - частинками утворяться ядра ізотопу магнію $^{27}_{12}Mg$ і y-частинки. При взаємодії ж x- частинок з ядрами алюмінію $^{27}_{13}Al$ утворяться ядра ізотопу магнію $^{24}_{12}Mg$ і z-частинки. Які відомі частинки x, y і z беруть участь у цих ядерних реакціях?

11.25. При бомбардуванні ізотопу азоту $^{14}_{7}N$ нейтронами виходить ізотоп вуглецю $^{14}_{6}C$, який є β- радіоактивним. Написати рівняння цих реакцій.

11.26. У результаті взаємодії ядер дейтерію і тритію утворяться ядро гелію і нейтрон: $^{2}_{1}H + ^{3}_{1}H = ^{4}_{2}He + n$. При цьому виділяється значна енергія. Яку частину цієї енергії несе із собою нейтрон? Кінетичними енергіями дейтерію і тритію до реакції можна знехтувати в порівнянні з енергією, що виділилася.

11.27. Визначити енергію зв'язку $E_{зв}/A$ (у МеВ), що приходиться на один нуклон, для ядра: а) $^{11}_{5}B$, б) $^{20}_{10}He$, в) $^{28}_{14}Si$, г) $^{56}_{26}Fe$, д) $^{66}_{30}Zn$, е) $^{137}_{56}Ba$, ж) $^{207}_{82}Pb$, з) $^{235}_{92}U$. Побудувати графік залежності $E_{зв}/A$ від масового числа А.

11.28. Ядро атома радію $^{226}_{88}Ra$, що знаходиться в стані спокою, зазнає α-розпад. Енергія зв'язку ядра $^{226}_{88}Ra$ дорівнює 1731,6 МеВ, ядра $^{222}_{88}Rn$ дорівнює 1708,2 МеВ, α-частинки 28,3 МеВ. Вважаючи, що дочірнє ядро радону $^{226}_{88}Ra$ утвориться в не збудженому стані, визначити: а) швидкість V_α α-частинки, що утворилася, б) швидкість утвореного атома.

11.29. Виходячи з закону радіоактивного розпаду, знайти: а) період піврозпаду Т радіоактивного ядра, б) середній час життя τ ядра, в) співвідношення між T і τ. Вважати сталу розпаду λ відомою величиною.

11.30. Що більше - середній час життя τ радіоактивного ядра або період піврозпаду Т? В скільки разів?

11.31. Яка частина η атомів радіоактивної речовини ще не розпалася протягом часу t, рівному трьом середнім значенням часу життя τ атома?

11.32. Яка частина η атомів радіоактивної речовини розпадається за час t, рівний трьом періодам піврозпаду Т ?

11.33. Яка частина η атомів радіоактивної речовини розпадається за час t, рівний двом періодам піврозпаду Т ?

11.34. Чому дорівнює імовірність P того, що радіоактивний атом розпадеться за час t, рівний періодові піврозпаду Т ?

11.35. Чому дорівнює імовірність P того, що радіоактивний атом розпадеться за час t, рівний двом періодам піврозпаду Т?

11.36. Середній час життя атомів деякої радіоактивної речовини τ =1,00 с. Визначити імовірність P того, що ядро розпадеться за проміжок часу t, рівний: а) 1,00 с, б) 10,0 с, в) 0,100 с.

11.37. Радіоактивні ядра X з сталою розпаду λ_1 перетворюються в радіоактивні ядра $У$ з сталою розпаду λ_2. Вважаючи, що в момент $t=0$ є тільки N_{X0} ядер X,

а) знайти залежність числа N_Y ядер Y від часу t,

б) визначити час t_m протягом якого N_Y досягає максимального значення.

11.38. Записати відсутні позначення в таких ядерних реакціях: ${}^{27}_{13}Al + {}^{1}_{0}n \rightarrow X + {}^{4}_{2}He$; ${}^{14}_{6}C + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{17}_{8}O + X$; ${}^{6}_{3}Li + X \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He$; $X + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{11}_{19}K + {}^{4}_{2}He$.

11.39. Яка кількість урану ${}^{235}_{92}U$ витрачається в добу на атомній електростанції потужністю P=5000 кВт ? К. к. д. η прийняти рівним 17 %. Вважати, що при кожному акті розпаду виділяється енергія E_0 = 200 МеВ.

11.40. Визначити місячну витрату палива ядерним реактором потужністю P = 4800 МВт, вважаючи, що при розпаді одного ядра ${}^{235}_{92}U$ виділяється ΔE = 200 МеВ енергії. Внаслідок захоплення нейтронів розпаду зазнають тільки η = 80 % усіх ядер.

РОЗДІЛ 2. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

§ 34. Рівняння стану ідеального газу

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. Рівняння стану ідеального газу (рівняння Клапейрона-Менделєєва): $pV = \frac{m}{M}RT$, або $pV = \nu RT$, де m - маса газу; M - його молярна маса; R - молярна газова постійна; ν = m/M - кількість речовини; Т - термодинамічна температура.

2. Закон Дальтона: $p = p_1 + p_2 + ... + p_n$, де p - тиск суміші газів; p_i - парціальний тиск i-го компоненту суміші; n - число компонентів суміші.

3. Молярна маса суміші газів $M = (m_1 + m_2 + ... + m_k)/(\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_k)$, де m_i - маса i-го компоненту суміші; ν_i - кількість речовини i-го компоненту суміші; k - число компонентів суміші.

4. Масова частка i-го компоненту суміші газу $\omega_i = m_i / m$, де m_i - маса i-го компоненту суміші; m - маса суміші.

§ 35. Приклади розв'язування задач

Приклад 1

У балоні об'ємом V – 10 л знаходиться гелій під тиском p_1 – 1 МПа при температурі T_1 = 300 К. Після того як з балону був витрачений гелій масою m - 10 г, температура в балоні понизилася до T_2 = 290 К. Визначити тиск p_2 гелію, що залишився в балоні

Розв'язування

Скористаємося рівнянням Клапейрона-Менделєєва, застосувавши його двічі до початкового і кінцевого станів газу. Для початкового стану рівняння має вигляд

$$p_1 V = \frac{m_1}{M} R T_1 \qquad (1)$$

а для кінцевого стану –

$$p_2 V = \frac{m_2}{M} R T_2, \qquad (2)$$

де m_1 і m_2 - маси гелію в початковому і кінцевому станах. Виразимо маси m_1 і m_2 гелію з рівнянь (1) і (2):

$$m_1 = \frac{M p_1 V}{R T_1}, \qquad (3)$$

$$m_2 = \frac{M p_2 V}{R T_2}. \qquad (4)$$

Віднімаючи з (3) рівність (4), отримаємо

$$m = m_1 - m_2 = \frac{M p_1 V}{R T_1} - \frac{M p_2 V}{R T_2}$$

Звідси знайдемо шуканий тиск:

$$p_2 = \frac{R T_2}{M V}\left(\frac{M p_1 V}{R T_1} - m\right) = \frac{T_2}{T_1} p_1 - \frac{m}{M}\frac{R T_2}{V}$$

Після обчислення отримаємо

$P_2 = 3,64 \cdot 10^5$ Па = 364 кПа.

Приклад 2

Знайти молярну масу М суміші кисню масою m_1 =25 г і азоту масою m_2 = 75 г.

Розв'язування

Молярна маса суміші $M_{см}$ є відношення маси суміші $m_{см}$ до кількості речовини суміші $\nu_{см}$, тобто

$$M_{см} = m_{см} / \nu_{см} \qquad (1)$$

Маса суміші дорівнює сумі мас компонентів суміші: $m_{см} = m_1+m_2$. Кількість речовини суміші дорівнює сумі кількостей речовини компонентів:

$$\nu_{см} = \nu_1 + \nu_2 = m_1 / M_1 + m_2 / M_2$$

Підставивши у формулу (1) вираз $m_{см}$ і $\nu_{см}$, отримаємо

$$M_{см} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 / M_1 + m_2 / M_2}$$

Після обчислень знайдемо $M_{см} = 30 \times 10^{-3}$ кг/моль.

§ 36. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

12.1. У циліндр довжиною l = 1,6 м, заповнений повітрям при нормальному атмосферному тиску p_0, почали повільно всувати поршень площею S = 200 см^2. Визначити силу F, що буде діяти на поршень, якщо його зупинити на відстані l_1 = 10 см від дна циліндра.

12.2. Колба об'ємом V - 300 см^3, закрита пробкою з краном, містить розріджене повітря. Для вимірювання тиску в колбі горловину колби занурили у воду на незначну глибину і відкрили кран, у результаті чого в колбу увійшла вода масою m = 292 г. Визначити початковий тиск p у колбі, якщо атмосферний тиск p_0 = 100 кПа

12.3. У U-образний манометр налита ртуть. Відкрите коліно манометра з'єднане з навколишнім простором при нормальному атмосферному тиску p_0, і ртуть у відкритому коліні стоїть вище, ніж у закритому, на Δh = 10 см. При цьому вільна від ртуті частина трубки закритого коліна має довжину l = 20 см. Коли відкрите коліно приєднали до балона з повітрям, різниця рівнів ртуті збільшилася і досягла значення Δh_1 = 26 см. Знайти тиск p повітря в балоні.

12.4. В балоні міститься газ при температурі t_1 = 100° C. До якої температури t_2 потрібно нагріти газ, щоб його тиск збільшився в два рази?

12.5. При нагріванні ідеального газу на ΔT = 1 К при постійному тиску об'єм його збільшився на 1/350 початкового об'єму. Знайти початкову температуру T газу.

12.6. Порожню кулю об'ємом V - 10 $см^3$, заповнену повітрям при температурі T_1 = 573 K, з'єднали трубкою з чашкою, заповненою ртуттю. Визначити масу m ртуті, що ввійшла в кулю при остиганні повітря в ній до температури T_2 = 293 К. Зміною об'єму кулі знехтувати.

12.7. Оболонка повітряної кулі об'ємом V = 800 $м^3$ повністю заповнена воднем при температурі T_1 = 273 К. На скільки зміниться піднімальна сила кулі при підвищенні температури до T_2 = 293 К? Вважати об'єм V оболонки незмінним і зовнішній тиск нормальним. У нижній частині оболонки є отвір, через який водень може виходити в навколишнє середовище.

12.8. В оболонці сферичного аеростата знаходиться газ об'ємом V = 1500 $м^3$, що заповнює оболонку лише частково. На скільки зміниться піднімальна сила аеростата, якщо газ в аеростаті нагріти від T_0 = 273 К до T = 293 К? Тиск газу в оболонці і навколишнього середовища сталі і рівні нормальному атмосферному тиску.

12.9. Балон об'ємом V = 12 л містить вуглекислий газ. Тиск p газу дорівнює 1 МПа, температура T - 300 К. Визначити масу m газу в балоні.

12.10. Який об'єм V займає ідеальний газ, що містить кількість речовини ν = 1 кмоль при тиску p = 1 МПа і температурі T = 400 К?

12.11. Казан об'ємом V = 2 $м^3$ містить перегріту водяну пару масою m = 10 кг при температурі T = 500 К. Визначити тиск p пари в казані.

12.12. Балон об'ємом V = 20 л містить вуглекислий газ масою m = 500 г під тиском p = 1,3 МПа. Визначити температуру T газу.

12.13. Газ при температурі T = 309 К і тиску p = 0,7 МПа має щільність ρ = 12 $кг/м^3$. Визначити відносну молекулярну масу M_r газу.

12.14. Визначити щільність ρ насиченої водяної пари в повітрі при температурі T = 300 К. Тиск p насиченої водяної пари при цій температурі дорівнює 3,55 кПа.

12.15. Оболонка повітряної кулі має об'єм V = 1600 $м^3$. Знайти піднімальну силу F водню, що наповнює оболонку, на висоті, де тиск p = 60 кПа і температура T = 280 К. При підйомі кулі водень може виходити через отвір у нижній частині кулі.

12.16. У балоні об'ємом V = 25 л знаходиться водень при температурі T=290 К. Після того як частину водню витратили, тиск у балоні понизився на Δp = 0,4 МПа. Визначити масу m витраченого водню.

12.17. Оболонка аеростата об'ємом V = 1600 $м^3$, що знаходиться на поверхні Землі, на k= 7/8 наповнена воднем при тиску p = 100 кПа і температурі T = 290 К. Аеростат підняли на деяку висоту, де тиск p_1 = 80 кПа і температура T_1 = 280 К. Визначити масу m водню, що вийшов з оболонки аеростата при його підніманні.

12.18. Який об'єм V займає суміш газів - азоту масою m_1 = 1 кг і гелію масою m_2 = 1 кг - при нормальних умовах?

12.19. У балонах об'ємом V_1 = 20 л і V_2 = 44 л міститься газ. Тиск у першому балоні p_1 = 2,4 МПа, у другому – p_2 = 1,6 МПа. Визначити загальний тиск p і парціальні p'_1 і p'_2 після з'єднання балонів, якщо температура газу залишилася попередньою.

12.20. У ємності об'ємом $V = 0{,}01$ м^3 міститься суміш газів - азоту масою $m_1 = 7$г і водню масою $m_2 = 1$г - при температурі $T = 280$ К. Визначити тиск p суміші газів.

12.21. Знайти щільність ρ газової суміші водню і кисню, якщо їхні масові частки w_1 і w_2 рівні відповідно 1/9 і 8/9. Тиск p суміші дорівнює 100 кПа, температура $T = 300$ К.

12.22. Газова суміш, що складається з кисню й азоту, знаходиться в балоні під тиском $p = 1$ МПа. Визначити парціальні тиски p_1 кисню і p_2 азоту, якщо масова частка w_1 кисню в суміші дорівнює 0,2.

12.23. У 1 кг сухого повітря міститься $m_1 = 232$ г кисню і $m_2 = 768$ г азоту (масами інших газів знехтуємо). Визначити відносну молекулярну масу M_r повітря.

12.24. Балон об'ємом $V = 30$ л містить суміш водню і гелію при температурі $T = 300$ К і тиску $p = 828$ кПа. Маса m суміші дорівнює 24 г. Визначити масу m_1 водню і масу m_2 гелію.

12.25. У ємності об'ємом $V = 15$ л знаходиться суміш азоту і водню при температурі $t = 23°$ С і тиску p=200 кПа. Визначити маси суміші і її компонентів, якщо масова частка w_1 азоту в суміші дорівнює 0,7.

12.26. Балон місткістю $V = 5$ л містить суміш гелію і водню при тиску $p = 600$ кПа. Маса m суміші дорівнює 4 г, масова частка w_1 гелію дорівнює 0,6. Визначити температуру T суміші.

12.27. Визначити число n молекул повітря в одиниці об'єму (м^3 і см^3) при температурі 0 °С и тиску $1{,}013\times10^5$ Па (1 атм).

12.28. Знайти масу: а) одного кубічного метра, б) одного літра повітря при температурі 0°С і тиску $1{,}013\cdot10^5$ Па (1 атм).

12.29. Поблизу поверхні Землі 78,08 % молекул повітря приходиться на частку азоту (N_2), 20,95%-на частку кисню (O_2), 0,93 % - на частку аргону (Ar), 0,04% - на частку інших газів. а) Вважаючи тиск повітря рівним $1{,}013\times10^5$ Па, знайти парціальний тиск азоту, кисню й аргону;б) Визначити середню молекулярну масу Mr повітря.

12.30. Ротаційний насос захоплює за один оберт об'єм газу V і виштовхує його в атмосферу. Скільки обертів n повинний зробити насос, щоб понизити тиск повітря в посудині об'ємом V від значення p_0 до p?

12.31. Вакуумний насос (насос попереднього розрідження), підключений до посудини об'ємом V, видаляє із посудини за час dt об'єм газу $dV=C\cdot dt$ (константу C називають швидкістю відкачування). Вважаючи, що під час відкачування тиск газу у всіх точках посудини однаковий, і нехтуючи перепадом тиску на патрубку, що з'єднує посудину з насосом, знайти закон p(t), за яким змінюється тиск газу в посудині. Початковий тиск p_0. Газ вважати ідеальним.

12.32. Скориставшись результатом попередньої задачі, визначити, скільки часу t буде потрібно, щоб за допомогою насоса, що має швидкість відкачування C=1,00 л/с, знизити в посудині об'ємом V=10,0 л тиск від $p_0=1{,}00\cdot10^5$ Па до p=0,300 Па.

12.33. Зобразити для ідеального газу наближені графіки ізохоричного, ізобаричного, ізотермічного й адіабатичного процесів на діаграмах: а) p, V; б) T, V; в) T, p. Графіки зобразити так, щоб проходили через загальну для них точку.

12.34. Зобразити для ідеального газу наближені графіки: а) ізохорного, ізобаричного й адіабатичного процесів на діаграмі U, T; б) ізохорного, ізобаричного, ізотермічного й адіабатичного процесів на діаграмах U, V і U, p; U відкладати по осі ординат. Для всіх графіків прийняти загальну точку.

12.35. Температура одного моля ідеального газу з відомим γ підвищується на ΔT при ізобаричному, ізохорному і адіабатичному процесах. Визначити збільшення внутрішньої енергії ΔU газу для всіх трьох випадків.

12.36. Чому дорівнює теплоємність C ідеального газу при процесі: а) ізотермічному, б) адіабатичному?

12.37. Деяка кількість ідеального газу з триатомними молекулами перейшла адіабатично зі стану з температурою T_1=280 K в стан, що характеризується такими параметрами: T_2=320 K, $p_2=2{,}00\cdot10^5$ Па, V_2=50,0 л. Яку роботу A виконує при цьому газ?

12.38. Деяка кількість газу перейшла зі стану з U_1=600 кДж у стан з U_2=200кДж, виконавши при цьому роботу A=300 кДж. Яку кількість теплоти Q отримав газ, якщо процес переходу: а) оборотний, б) необоротний?

12.39. Деяку кількість одноатомного ідеального газу стискають адіабатично доти, поки тиск не перевищить початковий тиск p_1 в 10 разів. Потім газ розширюється ізотермічно до початкового об'єму. В скільки разів кінцевий тиск p_2 газу перевищує початковий тиск p_1?

12.40. Ідеальний газ (γ=1,40), що знаходився спочатку при температурі t_1=0°C, піддається стиску, в результаті чого: а) об'єм газу зменшується в 10 разів, б) тиск газу збільшується в 10 разів. Вважаючи процес стиску адіабатичним, визначити, до якої температури t_2 нагрівається газ внаслідок стиску.

12.41. Температура в кімнаті об'ємом V піднялася від значення T_1 до значення T_2. Як змінилася при цьому внутрішня енергія повітря, що утримується в кімнаті? Атмосферний тиск вважати незмінним.

12.42. Атмосферний тиск змінився від p_1=983 гПа до p_2=1003 гПа. Який приріст ΔU одержує при цьому внутрішня енергія повітря, що утримується в кімнаті об'ємом V=50,0 $м^3$? Температура в кімнаті вважається незмінною.

12.43. Закритий циліндр розділений на дві частини поршнем радіуса r=10,0 см і масою m=1,00 кг, що може переміщатися без тертя.

…становивши поршень у середнє положення, обидві частини циліндра …повняють газом до однакового тиску $p_0 = 1{,}00\times10^5$ Па. Об'єм газу в …жній з половин Vo=5,00 л. Газ можна вважати ідеальним, його γ =1,40. …хтуючи теплообміном через стінки циліндра і через поршень, знайти …стоту ν коливань поршня, що виникають при невеликому зсуві поршня … середнього положення.

12.44. Деяка кількість ідеального газу з одноатомними молекулами …иконала при $p = 1{,}00\cdot10^5$ Па зворотний ізобаричний процес, у ході якого об'єм газу змінився від значення V_1=10,0 л до V_2=20,0 л. Визначити: а) збільшення внутрішньої енергії газу ΔU, б) виконану газом роботу A, в) отриману газом кількість теплоти Q.

12.45. Ідеальний газ (γ =1,40) розширюється ізотермічно від об'єму V_1=0,100 $м^3$ до об'єму V_2=0,300 $м^3$. Кінцевий тиск газу $p_2 = 2{,}00\cdot10^5$ Па. Визначити: а) збільшення внутрішньої енергії газу ΔU, б) роботу A, виконану газом, в) отриману газом кількість теплоти Q.

12.46. При ізобаричному нагріванні від 0 до 100 °C моль ідеального газу поглинає кількість теплоти Q=3,35 кДж. Визначити: а) значення γ, б) збільшення внутрішньої енергії газу ΔU, в) роботу A, виконану газом.

12.47. Моль ідеального газу, що мав спочатку температуру T_1=290 К, розширюється ізобарно доти, поки його об'єм не зросте в 2,00 рази. Тоді газ охолоджується ізохорно до початкової температури T_1. Визначити: а) збільшення внутрішньої енергії газу ΔU, б) роботу A, виконану газом, в) одержану газом кількість теплоти Q. г) Який знак мають роботи A_I і A_{II}, зроблені газом у ході кожного з процесів? д) У ході якого з процесів кількість теплоти, отримана газом, більша?

12.48. Спочатку 1,00 кг азоту (N_2) знаходиться в об'ємі V_1=0,300 $м^3$ під тиском $p_1 = 5{,}00\cdot10^5$ Па. Потім газ розширюється, у результаті чого його об'єм стає рівним V_2=1,00 $м^3$, а тиск рівним $p_2 = 1{,}00\cdot10^5$ Па. а) Визначити збільшення внутрішньої енергії газу ΔU. б) Чи можна обчислити роботу, виконану газом при розширенні?

12.49. У результаті оборотного ізотермічного (при T=300К) розширення 531 г азоту (N_2) тиск газу зменшується від $p_1 = 20{,}0\cdot10^5$ Па до $p_2 = 2{,}00\cdot10^5$ Па. Визначити: а) роботу A, виконану газом при розширенні, б) одержану газом кількість теплоти Q.

12.50. У результаті оборотного адіабатичного розширення температура 1,00 кг азоту (N_2) знижується на 20,0 К. Визначити роботу A, виконану газом при розширенні. Врахувати, що коливальні ступені вільності молекул азоту при розглянутих температурах не збуджуються.

§ 37. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ ТЕРМОДИНАМІКИ

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

1. Зв'язок між молярною (C_m) і питомою (c) теплоємностями газу

$$C_m = cM,$$

де M - молярна маса газу.

2. Молярні теплоємності при постійному об'ємі і постійному тиску відповідно, рівні:

$$C_V = iR/2 \quad, \; C_p = (i+2)R/2,$$

де i - число ступенів волі; R — молярна газова стала.

3. Питомі теплоємності при постійному об'ємі й постійному тиску відповідно, рівні:

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M} \quad, \; c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}$$

4. Рівняння Р. Майєра

$$C_p - C_V = R$$

5. Показник адіабати

$$\gamma = c_p / c_V, \text{або } \gamma = C_p / C_V, \text{ або } \gamma = (i+2)/i$$

6. Внутрішня енергія ідеального газу

$$U = N < \varepsilon >, \text{ або } U = \nu C_V T,$$

де <ε>-середня кінетична енергія молекули; N - число молекул газу, ν-кількість речовини.

7. Робота, пов'язана зі зміною об'єму газу, у загальному випадку обчислюється за формулою

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV,$$

де V_1 - початковий об'єм газу; V_2 - його кінцевий об'єм.

Робота газу при ізобаричному процесі (p = const)

$$A = p(V_2 - V_1);$$

при ізотермічному процесі (T = const)

$$A = (m/M)RT\ln(V_2/V_1);$$

при адіабатичному процесі

$$A = \frac{m}{M}C_V(T_1 - T_2), \text{ або } A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{M}\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right),$$

де T_1 - початкова температура газу: T_2, - його кінцева температура.

8. Рівняння Пуассона (рівняння газового стану при адіабатичному процесі)

$$pV^{\gamma} = const$$

9. Зв'язок між початковим і кінцевим значеннями параметрів станів газу при адіабатичному процесі:

$$\frac{p_2}{p_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}, \quad \frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}, \quad \frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

10. Перший закон термодинаміки в загальному випадку записується у вигляді

$$Q=\Delta U+A,$$

де Q - кількість теплоти, надана газу; ΔU - зміна його внутрішньої енергії, A - робота, здійснена газом проти зовнішніх сил.

Перший закон термодинаміки при ізобаричному процесі

$$Q=\Delta U+A=\frac{m}{M}C_V\Delta T+\frac{m}{M}R\Delta T=\frac{m}{M}C_p\Delta T;$$

при ізохоричному процесі $(A=0)$

$$Q=\Delta U=(m/M)C_V\Delta T;$$

при ізотермічному процесі $(\Delta U=0)$

$$Q=A=(m/M)RT\ln(V_2/V_1);$$

при адіабатичному процесі $(Q=0)$

$$A=-\Delta U=-(m/M)C_V\Delta T$$

11. Термічний коефіцієнт корисної дії (к. к. д.) циклу в загальному випадку

$$\eta=(Q_1-Q_2)/Q_1,$$

де Q_1 - кількість теплоти, отримана робочим тілом (газом) від нагрівача; Q_2 - кількість теплоти, передана робочим тілом охолоджувачу.

К. к. д. цикла Карно

$$\eta=(Q_1-Q_2)/Q_1, \text{ або } \eta=(T_1-T_2)/T_1,$$

де T_1 - температура нагрівача; T_2 - температура охолоджувача.

12. Зміна ентропії

$$\Delta S=\int_A^B\frac{dQ}{T},$$

де A і B межі інтегрування, що відповідають початковому і кінцевому станам системи. Оскільки процес рівноважний, то інтегрування проводиться за будь-яким напрямком.

13. Формула Больцмана $S=k\ln W$, де S - ентропія системи; W- термодинамічна імовірність її стану, k- стала Больцмана.

14. Молярна внутрішня енергія хімічно простих твердих тіл (що складаються з однакових атомів) у класичній теорії теплоємності виражається формулою $U_m=3RT$, де R - молярна газова стала; T - термодинамічна температура.

15. Теплоємність C системи (тіла) при постійному об'ємі визначається як похідна від внутрішньої енергії U за температурою, тобто $C=\frac{dU}{dT}$.

16. Закон Дюлонга і Пті. Молярна теплоємність C_m хімічно простих твердих тіл $U_m = 3R$.

17. Закон Неймана - Коппа. Молярна теплоємність хімічно складних тіл (що складаються з різних атомів) $U_m = n \cdot 3R$, де *n* - загальне число частинок у хімічній формулі з'єднання.

18. Середнє значення енергії $\langle \varepsilon \rangle$ квантового осцилятора, що припадає на одну ступінь вільності, у квантовій теорії Ейнштейна виражається формулою $\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon_0 + \dfrac{\hbar\omega}{\exp[\hbar\omega/(kT)] - 1}$, де $\langle \varepsilon_0 \rangle$ - нульова енергія ($\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}\hbar\omega$); $\hbar$ - стала Планка; ω - кругова частота коливань осцилятора; k - стала Больцмана; T - термодинамічна температура.

19. Молярна внутрішня енергія кристала в квантовій теорії теплоємності Ейнштейна визначається за формулою $U_m = U_{m0} + 3R\dfrac{\theta_E}{\exp(\theta_E/T) - 1}$, де $U_{m0} = \dfrac{3}{2}R\theta_E$ - молярна нульова енергія за Ейнштейном; $\theta_E = \dfrac{\hbar\omega}{k}$ - характеристична температура Ейнштейна.

20. Молярна теплоємність кристала в квантовій теорії теплоємності Ейнштейна $C_m = 3R\left(\dfrac{\theta_E}{T}\right)^2 \dfrac{\exp(\theta_E/T)}{(\exp(\theta_E/T) - 1)^2}$. При низьких температурах $(T << \theta_E$ $C_m = 3R\left(\dfrac{\theta_E}{T}\right)\exp(-\dfrac{\theta_E}{T})$.

21. Молярна внутрішня енергія кристала за Дебаєм $U_m = U_{m0} + 3RT \cdot 3\left(\dfrac{T}{\theta_D}\right)^3 \int\limits_0^{\theta_D/T} \dfrac{x^3}{\exp(x) - 1}dx$, де $U_{m0} = \dfrac{9}{8}R\theta_D$ - молярна нульова енергія кристалу за Дебаєм; $\theta_D = \dfrac{\hbar\omega_{max}}{k}$ - характеристична температура Дебая.

22. Молярна теплоємність кристала за Дебаєм

$$C_m = 3R\left(12\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \cdot \int\limits_0^{\theta_D/T} \frac{x^3}{\exp(x) - 1}dx - \frac{3\left(\frac{\theta_D}{T}\right)}{\exp\left(\frac{\theta_D}{T}\right) - 1}\right).$$

Граничний закон Дебая. В області низьких температур $(T << \theta,\ \textit{якщо} \dfrac{T}{\theta_D} < 0.1)$ остання формула приймає вигляд

$$C_m = \frac{12\pi^4}{5}R\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3.$$

Приклад 1

Обчислити питомі теплоємності неону і водню при постійних об'ємі (c_V) і тиску (c_p), приймаючи ці гази за ідеальні.

Розв'язування

Питомі теплоємності ідеальних газів виражаються формулами

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{T}, \qquad (1)$$

$$c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{T} \qquad (2)$$

Для неону (одноатомний газ) $i_1 = 3$, $M_1 = 20\cdot10^{-3}$ кг/моль. Підставивши у формули (1) і (2) значення i_1, M_1 і R і зробивши обчислення, знайдемо;

$c_{V1} = 624$ Дж/ (кг К); $c_{p1} = 1{,}04$ кДж / (кг·К).

Для водню (двоатомний газ) $i_2 = 5$, $M_2 = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Обчислення за формулами (1) і (2) дає такі значення питомих теплоємностей водню:

$c_{V2} = 10.4$ кДж/ (кг·К), $c_{p1} = 14.6$ кДж/ (кг·К).

Приклад 2

Обчислити питомі теплоємності c_V і c_p суміші неону і водню. Масові частки газів відповідно рівні $w_1 = 0{,}8$ і $w_2 = 0{,}2$. Значення питомих теплоємностей газів взяти з прикладу 1.

Розв'язування

Питому теплоємність суміші при постійному об'ємі c_V знайдемо з таких міркувань. Теплоту, необхідну для нагрівання суміші на ΔT, виразимо двома співвідношеннями:

$$Q = c_V(m_1 + m_2)\Delta T\ , \qquad (1)$$

де c_V - питома теплоємність суміші, m_1 = маса неону, m_2 - маса водню, і

$$Q = (c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2)\Delta T\ , \qquad (2)$$

де c_{V1} і c_{V2} - питомі теплоємності неону і водню, відповідно.

Порівнявши праві частини виразів (1) і (2) і розділивши обидві частини отриманої рівності на ΔT, знайдемо

$$c_V(m_1 + m_2) = c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2$$

звідки

$$c_V = c_{V1}\frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{V2}\frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Відношення $w_1 = m_1/(m_1 + m_2)$ і $w_2 = m_2/(m_1 + m_2)$ виражають масові частки, відповідно, неону і водню. З урахуванням цих позначень остання формула прийме вигляд

$$c_V = c_{V1}\omega_1 + c_{V2}\omega_2 .$$

Підставивши в цю формулу числові значення величин, знайдемо

$$c_V = 2{,}58 \text{ кДж/(кг·К)}$$

Аналогічно отримаємо формулу для обчислення питомої теплоємості суміші при постійному тиску:

$$c_p = c_{p1}\omega_1 + c_{p2}\omega_2$$

Зробивши обчислення за цією формулою, знайдемо

$$C_p = 3{,}73 \text{ кДж/(кг·К)}.$$

Приклад 3

Визначити кількість теплоти, що поглинається воднем масою $m = 0{,}2$ кг при нагріванні його від температури $t_1 = 0°$ С до температури $t_2 = 100°$ С при постійному тиску. Знайти також зміну внутрішньої енергії газу і виконану ним роботу.

Розв'язування

Кількість теплоти Q, що поглинається газом при ізобаричному нагріванні, визначається за формулою:

$$Q = mc_p\Delta T \qquad (1)$$

де m - маса газу, що нагрівається; c_p - його питома теплоємність при постійному тиску; ΔT - зміна температури газу

Як відомо $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}$. Підставивши цей вираз c_p у формулу (1), отримаємо $Q = m\frac{i+2}{2}\frac{R}{M}\Delta T$

Зробивши обчислення за цією формулою, знайдемо

$$Q = 291 \text{ кДж}$$

Внутрішня енергія виражається формулою $\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT$, отже, зміна внутрішньої енергії

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\Delta T$$

Після підстановки в цю формулу числових значень величин і обчислень одержимо

$$\Delta U = 208 \text{ кДж}.$$

Роботу розширення газу визначимо за формулою, що виражає перший закон термодинаміки: $Q = \Delta U + A$, звідки

$$A = Q - \Delta U$$

Підставивши значення Q і ΔU, знайдемо $A = 83$ кДж.

Приклад 4

Кисень займає об'єм $V_1 = м^3$ і знаходиться під тиском $p_1 = 200$ кПа. Газ нагріли спочатку при постійному тиску до об'єму $V_2 = 3$ $м^3$, а

...потім при постійному об'ємі до тиску $p_2 = 500$ кПа. Побудувати графік процесу і знайти: 1) зміну ΔU внутрішньої енергії газу; 2) виконану ним роботу A; 3) кількість теплоти Q, передану газу.

Розв'язування

Побудуємо графік процесу (рис. 3.1). На графіку точками *1, 2, 3* позначені стани газу, що характеризують параметрами (p_1, V_1, T_1), (p_1, V_2, T_2), (p_2, V_2, T_3).

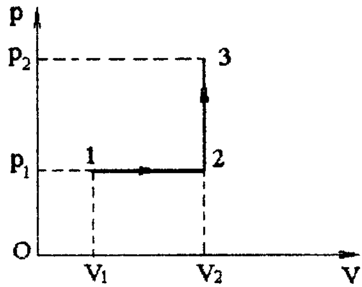


Рис.3.1.

1. Зміна внутрішньої енергії газу при переході його зі стану 1 у стан *3* виражається формулою

$$\Delta U = c_V m \Delta T,$$

де c_V - питома теплоємність газу при постійному об'ємі; m- маса газу; ΔT - різниця температур, що відповідають кінцевому *3* і початковому 1 станам, тобто $\Delta T = T_3 - T_1$

Оскільки $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}$, де M- молярна маса газу, то

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R(T_3 - T_1) \qquad (1)$$

Температури T_1 і T_3 виразимо з рівняння Менделєєва-Клапейрона $pV = \frac{m}{M}RT$; $T_1 = \frac{Mp_1V_1}{mR}$ та $T_3 = \frac{Mp_2V_2}{mR}$.

З врахуванням цього рівність (1) перепишемо у вигляді

$$\Delta U = (i/2)(p_2V_2 - p_1V_1)$$

Підставимо сюди значення величин (врахуємо, що для кисню, як двоатомного газу, $i = 5$) і зробимо обчислення:

$$\Delta U = 3{,}25 \text{ МДж}.$$

2. Повна робота, виконана газом, дорівнює $A = A_1 + A_2$, де A_1 - робота на ділянці *1-2*, A_2 - робота на ділянці *2-3*.

На ділянці *1-2* тиск постійний (p = const). Робота в цьому випадку виражається формулою $A = p_1\Delta V = p_1(V_2 - V_1)$. На ділянці 2-3 об'єм газу не змінюється і, отже, робота газу на цій ділянці дорівнює нулю ($A_2 = 0$). Таким чином, $A = A_1 = p_1(V_2 - V_1)$.

Підставимо в цю формулу значення фізичних величин і зробимо обчислення: A = 0,4 МДж.

3. Відповідно до першого закону термодинаміки кількість теплоти Q, передана газу, дорівнює сумі роботи A, виконаної газом, і зміні ΔU внутрішньої енергії: $Q = \Delta U + A$, або Q = 3.65 МДж.

§ 39. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

13.1. Обчислити питомі теплоємності c_V і c_p газів. 1) гелію, 2) водню; 3) вуглекислого газу.

13.2. Які питомі теплоємності c_V і c_p суміші газів, що містить кисень масою m_1 = 10 г і азот масою m_2 = 20 г?

13.3. Різниця питомих теплоємностей $c_p - c_V$ деякого двоатомного газу дорівнює 260 Дж/(кг·К). Знайти молярну масу М газу і його питомі теплоємності c_V і c_p.

13.4. Визначити питому теплоємність c_V суміші газів, що містить V_1 = 5 л водню і V_2 = 3 л гелію. Гази знаходяться при однакових умовах.

13.5. Визначити питому теплоємність c_p суміші кисню й азоту, якщо кількість речовини ν_1 першого компонента дорівнює 2 моля, а кількість речовини ν_2 другого дорівнює 4 моля.

13.6. У балоні знаходяться аргон і азот. Визначити питому теплоємність c_V суміші цих газів, якщо масові частки аргону (w_1) і азоту (w_2) однакові і рівні w = 0,5

13.7. Суміш газів складається з хлору і криптону, взятих при однакових умовах і в рівних об'ємах. Визначити питому теплоємність c_p суміші.

13.8. Визначити питому теплоємність c_V суміші ксенону і кисню, якщо кількості речовини газів у суміші однакові і рівні ν.

13.9. Знайти показник адіабати γ для суміші газів, що містить гелій масою m_1 = 10 г і водень масою m_2 = 4 г.

13.10. Суміш газів складається з аргону й азоту, взятих при однакових умовах і в однакових об'ємах. Визначити показник адіабати γ такої суміші.

13.11. Знайти показник адіабати γ суміші водню і неону, якщо масові частки обох газів у суміші однакові і рівні w = 0,5.

13.12. Знайти показник адіабати γ суміші газів, що містить кисень і аргон, якщо кількості речовини того й іншого газу в суміші однакові і рівні ν.

13.13. Ступінь дисоціації a газоподібного водню дорівнює 0,6. Знайти питому теплоємність c_V такого частково дисоційованого водню.

13.14. Азот масою m = 5 кг, нагрітий на ΔT = 150 К зберіг незмінний об'єм V. Знайти: 1) кількість теплоти Q, що надана газу; 2) зміну ΔU внутрішньої енергії; 3) виконану газом роботу A.

13.15. Водень займає об'єм V_1 = 10 м^3 при тиску p_1 = 100 кПа. Газ нагріли при постійному об'ємі до тиску p_2 = 300 кПа. Визначити: 1) зміну ΔU внутрішньої енергії газу; 2) роботу А, виконану газом; 3) кількість теплоти

Q, надану газу.

13.16. При ізохоричному нагріванні кисню об'ємом V = 50 л тиск газу змінився на Δp = 0,5 МПа. Знайти кількість теплоти Q, що надана газу.

13.17. Балон об'ємом V = 20 л містить водень при температурі T = 300 К під тиском p = 0,4 МПа. Які будуть температура T_1 і тиск p_1 якщо газу надати кількість теплоти Q = 6 кДж?

13.18. Кисень при незмінному тиску p= 80 кПа нагрівається. Його об'єм збільшується від V_1 = 1 $м^3$ до V_2 = 3 $м^3$. Визначити: 1) зміну ΔU внутрішньої енергії кисню, 2) роботу A, виконану ним при розширенні; 3) кількість теплоти Q, що надана газу.

13.19. Азот нагрівався при постійному тиску, причому йому була надана кількість теплоти Q = 21 кДж. Визначити роботу A, що виконав при цьому газ, і зміну ΔU його внутрішньої енергії.

13.20. Кисень масою m = 2 кг займає об'єм V_1 = 1 $м^3$ і знаходиться під тиском p_1 = 0,2 МПа. Газ був нагрітий спочатку при постійному тиску до об'єму V_2 = 3 $м^3$, а потім при постійному об'ємі до тиску p_2 = 0,5 МПа. Знайти: 1) зміну ΔU внутрішньої енергії газу; 2) виконану ним роботу A; 3) кількість теплоти Q, що надана газу. Побудувати графік процесу.

13.21. Гелій масою m = 1 г був нагрітий на ΔT=100 К при постійному тиску p. Визначити: 1) кількість теплоти Q, надану газу; 2) роботу A розширення; 3) збільшення ΔU внутрішньої енергії газу.

13.22. Водень масою m = 4 г був нагрітий на ΔU = 10 К при постійному тиску. Визначити роботу A розширення газу.

13.23. Газ, що займав об'єм V = 12 л під тиском p = 100 кПа, був ізобарично нагрітий від T_1 = 300 К до T_2 = 400 К. Визначити роботу A розширення газу.

13.24. Водяна пара розширюється при постійному тиску. Визначити роботу A розширення, якщо пару передана кількість теплоти Q = 4 кДж.

13.25. На нагрівання кисню масою m = 160 г на ΔT = 12 К була витрачена кількість теплоти Q = 1,76 кДж. Як протікав процес: при постійному об'ємі чи постійному тиску?

13.26. Яка робота A виконується при ізотермічному розширенні водню масою m = 5 г, взятого при температурі T = 290 К, якщо об'єм газу збільшується в три рази?

13.27. Азот масою m = 200 г розширюється ізотермічно при температурі T = 280 К, при цьому об'єм газу збільшується в два рази. Знайти: 1) зміну ΔU внутрішньої енергії газу; 2) виконану при розширенні газу роботу A; 2) кількість теплоти Q, отриману газом.

13.28. У циліндрі під поршнем знаходиться азот масою m = 0,6 кг, що займає об'єм V_1 = 1,2 $м^3$ при температурі T = 560 К. У результаті підведення теплоти газ розширився і зайняв об'єм V_2 = 4,2 $м^3$, при цьому температура залишилася незмінною. Знайти: 1) зміну ΔU внутрішньої енергії газу; 2) виконану ним роботу A; 3) кількість теплоти Q, надану газу.

13.29. Водень масою m = 10 г нагріли на ΔT = 200 К, при цьому газу була передана кількість теплоти Q = 40 кДж. Знайти зміну ΔU внутрішньої енергії водню і виконану ним роботу A.

13.30. При ізотермічному розширенні водню масою m = 1 г, що мав температуру T = 280 К, об'єм газу збільшився в три рази. Визначити роботу A розширення газу.

13.31. Азот, що займав об'єм V_1 = 10л під тиском p_1 = 0,2МПа, ізотермічно розширився до об'єму V_2 = 28 л. Визначити роботу A розширення газу.

13.32. При ізотермічному розширенні кисню, що містив кількість речовини ν = 1 моль і мав температуру T = 300 К, газу була передана кількість теплоти Q = 2 кДж. В скільки раз збільшився об'єм газу?

13.33. Яка кількість теплоти Q виділиться, якщо азот масою m = 1 г, взятий при температурі T = 280 К під тиском p_1 = 0,1 МПа, ізотермічно стиснути до тиску p_2 = 1 МПа?

13.34. Розширюючись, водень виконав роботу A=6 кДж. Визначити кількість теплоти Q, підведену до газу, якщо процес протікав: 1) ізобарично; 2) ізотермічно.

13.35. Автомобільна шина накачана до тиску p_1= 220 кПа при температурі T_1 = 290 К. Під час руху вона нагрілася до температури T_2 = 330 К і лопнула. Вважаючи процес, що відбувається після ушкодження шини, адіабатичним, визначити зміну температури ΔT повітря, що вийшло з неї. Зовнішній тиск p_0 повітря дорівнює 100 кПа.

13.36. При адіабатичному стисканні кисню масою m = 1 кг виконана робота A = 100 кДж. Визначити кінцеву температуру T_2 газу, якщо до стискання кисень знаходився при температурі T_1 = 300 К.

13.37. При адіабатичному розширенні кисню з початковою температурою T_1 = 320 К внутрішня енергія зменшилася на ΔU = 8,4 кДж, а його об'єм збільшився в n = 10 разів. Визначити масу m кисню.

13.38. Водень при нормальних умовах мав об'єм V_1 = 100 $м^3$. Знайти зміну ΔU внутрішньої енергії газу при його адіабатичному розширенні до об'єму V_2 = 150 $м^3$.

13.39. У циліндрі під поршнем знаходиться водень масою m = 0,02 кг при температурі T_1 = 300 К. Водень спочатку розширився адіабатично, збільшивши свій об'єм у п'ять разів, а потім був стиснутий ізотермічно, при цьому об'єм газу зменшився в п'ять разів. Знайти температуру T_2 наприкінці адіабатичного розширення і повну робота A, виконану газом. Зобразити процес графічно.

13.40. При адіабатичному стисканні кисню масою m = 20 г його внутрішня енергія збільшилась на ΔU = 8 кДж і температура підвищилася до T_2 = 900 К. Знайти: 1) підвищення температури ΔT; 2) кінцевий тиск газу p_2, якщо початковий тиск p_1 = 200 кПа.

13.41. Повітря, що займало об'єм V_1 = 10 л при тискові p_1 = 100 кПа, було адіабатично стиснуте до об'єму V_2 = 1 л. Під яким тиском p_2 знаходиться повітря після стискання?

13.42. Пальна суміш у двигуні дизеля загоряється при температурі T_2 = 1,1 кК. Початкова температура суміші T_1 = 350 К. В скільки разів потрібно зменшити об'єм суміші при стисканні, щоб вона загорілась? Стискання вважати адіабатичним. Показник адіабати γ для суміші прийняти рівним 1,4.

13.43. Вуглекислий газ, що знаходився під тиском p_1=100 кПа при температурі T_1 = 290 К, був адіабатично стиснутий до тиску p_2=200 кПа. Яка температура T_2 газу після стискання?

13.44. При адіабатичному стисканні газу його об'єм зменшився в n = 10 разів, а тиск збільшився в k = 21,4 рази. Визначити відношення c_p/c_V теплоємностей газу.

13.45. З балона, що містить водень під тиском p_1 = 1 МПа при температурі T_1 = 300 К, випустили половину газу, що знаходився в ньому. Визначити кінцеву температуру T_2 і тиск p_2, вважаючи процес адіабатичним.

13.46. Повітря, що знаходилося під тиском p_1 = 100 кПа, було адіабатично стиснуте до тиску p_2 = 1 МПа. Знайти тиск p_2, що встановиться, коли стиснене повітря, зберігаючи об'єм незмінним, охолоне до початкової температури.

13.47. Визначити роботу A адіабатичного розширення водню масою m = 4 г, якщо температура газу понизилася на ΔT = 10 К.

13.48. Азот масою m = 2 г, що мав температуру T_1 = 300 К, був адіабатично стиснутий так, що його об'єм зменшився в n = 10 разів. Визначити кінцеву температуру T_2 газу і роботу A стискання.

13.49. Кисень, що займав об'єм V_1 = 1 л під тиском p_1=1,2 МПа, адіабатично розширився до об'єму V_2 =10 л. Визначити роботу A розширення газу.

13.50. У результаті кругового процесу газ виконав роботу A = 1 Дж і передав охолоджувачу кількість теплоти Q_2 = 4,2 Дж. Визначити термічний к. к. д. η циклу.

13.51. Виконуючи замкнутий процес, газ одержав від нагрівача кількість теплоти Q_1=4 кДж. Визначити роботу A газу при протіканні циклу, якщо його термічний к. к. д. η = 0,1.

13.52. Ідеальний двоатомний газ, що містить кількість речовини ν = 1 моль, виконує цикл, що складається з двох ізохор і двох ізобар. Найменший об'єм V_{min}=10 л, найбільший V_{max} = 20 л, найменший тиск p_{min} = 246 кПа, найбільший p_{max}=410 кПа. Побудувати графік циклу. Визначити температуру T газу для характерних точок циклу і його термічний к. к. д. η.

13.53. Ідеальний двоатомний газ, що містить кількість речовини ν = 1 моль знаходиться під тиском p_1 = 0,1 МПа при температурі T_1 = 300 К, нагрівають при постійному об'ємі до тиску p_2 = 0,2 МПа. Тоді цей газ ізотермічно розширився до початкового тиску і ізобарично був стиснутий до початкового об'єму V_1. Побудувати графік циклу. Визначити температуру T газу для характерних точок циклу і його термічний к. к. д. η.

13.54. Одноатомний газ, що містить кількість речовини ν = 0,1 кмоль, під тиском p_1 = 100 кПа займав об'єм V_1=5 $м^3$. Газ стискувався ізобарично до об'єму V_2 = 1 $м^3$ потім стискувався адіабатично і розширювався при постійній температурі до початкових об'єму і тиску. Побудувати графік процесу. Знайти: 1) температури T_1, T_2, об'єми V_2, V_3 і тиск p_3 відповідний характерним точкам циклу; 2) кількість теплоти Q_1 - отриману газом від нагрівача; 3) кількість теплоти Q_2, передану газом охолоджувачу; 4) роботу A, виконану газом за весь цикл; 6)термічний к. к. д. η циклу.

13.55. Ідеальний багатоатомний газ виконує цикл, що складається з двох ізохор і двох ізобар, причому найбільший тиск газу в два рази більший найменшого, а найбільший об'єм у чотири рази більший найменшого. Визначити термічний к. к. д. η циклу.

13.56. Ідеальний газ, що виконує цикл Карно, 2/3 кількості теплоти Q_1 отриманої від нагрівача, віддає охолоджувачу. Температура T_2 охолоджувача дорівнює 280 К. Визначити температуру T_1 нагрівача.

13.57. Ідеальний газ виконує цикл Карно. Температура T_2 охолоджувача дорівнює 290 К. В скільки разів збільшиться к. к. д. циклу, якщо температура нагрівача підвищиться від T_1 = 400 К до T_3 = 600 К?

13.58. Ідеальний газ виконує цикл Карно. Температура T_1 нагрівача в три рази вище температури T_2 охолоджувача. Нагрівач передав газу кількість теплоти Q_1 = 42 кДж. Яку роботу A зробив газ?

13.59. Ідеальний газ робить цикл Карно. Температура T_1 нагрівача дорівнює 470 К, температура T_2 холодильника дорівнює 280 К. При ізотермічному розширенні газ виконує роботу А = 100 Дж. Визначити термічний к. к. д. η циклу, а також кількість теплоти Q_2, яку газ віддає охолоджувачу при ізотермічному стисканні.

13.60. Ідеальний газ виконує цикл Карно. Температура T_1 нагрівача в чотири рази вища температури T_2 охолоджувача. Яку частку w кількості теплоти, одержану за один цикл від нагрівача, газ віддає охолоджувачу?

13.61. Ідеальний газ, що виконує цикл Карно, одержавши від нагрівача кількість теплоти Q_1 = 4.2 кДж, виконав роботу A = 590 Дж. Знайти термічний к. к. д. η цього циклу. В скільки разів температура T_1 нагрівача більша температури T_2 охолоджувача?

13.62. Ідеальний газ виконує цикл Карно. Робота A_1 ізотермічного розширення газу дорівнює 5 Дж. Визначити роботу А ізотермічного стискання, якщо термічний к. к. д. η циклу дорівнює 0,2.

13.63. Найменший об'єм V_1 газу, що виконує цикл Карно, дорівнює 163 л. Визначити найбільший об'єм V_3, якщо об'єм V_2 наприкінці ізотермічного розширення й об'єм V_4 наприкінці ізотермічного стиску рівні відповідно 600 і 189 л.

13.64. Змішали воду масою m_1 = 5 кг при температурі T_1 = 280 К з водою масою m_2 = 8 кг при температурі T_2 = 350 К. Знайти: 1) температуру θ суміші; 2) зміну ΔS ентропії, що відбувається при змішуванні.

13.65. У результаті ізохорного нагрівання водню масою m_1 = 1 г тиск p

...зу збільшився в два рази. Визначити зміну ΔS ентропії газу.

13.66. Знайти зміну ΔS ентропії при ізобаричному розширенні азоту масою $m = 4$ г від об'єму $V_1 = 5$ л до об'єму $V_2 = 9$ л.

13.67. Шматок льоду масою $m = 200$ г, взятий при температурі $t_1 = -10°$ C, був нагрітий до температури $t_2 = 0°$ C і розтоплений, після чого вода, що утворилася, була нагріта до температури $t = 10^0$ C. Визначити зміну ΔS ентропії в ході зазначених процесів.

13.68. Лід масою $m_1 = 2$ кг при температурі $t_1 = 0°$ C був перетворений у воду тієї ж температури за допомогою пари, що має температуру $t_2 = 100°$ C. Визначити масу m_2 витраченої пари. Яка зміна ΔS ентропії системи лід-пара?

13.69. Кисень масою $m = 2$ кг збільшив свій об'єм у $n = 5$ разів один раз ізотермічно, інший - адіабатично. Знайти зміну ентропії в кожному із зазначених процесів.

13.70. Водень масою $m = 100$ г був ізобарно нагрітий так, що об'єм його збільшився в $n = 3$ рази, потім водень був ізохорно охолоджений так, що тиск його зменшився в $n = 3$ рази. Знайти зміну ΔS ентропії в ході зазначених процесів.

13.71. Обчислити питомі теплоємності c кристалів алюмінію і міді за класичною теорією теплоємності.

13.72. Користаючись класичною теорією, обчислити питомі теплоємності c кристалів $NaCl$ і $CaCl_2$.

13.73. Обчислити за класичною теорією теплоємності теплоємність C кристалу $NaCl$ об'ємом $V=1$ м^3. Щільність ρ кристалу дорівнює $3{,}01 \cdot 10^3$ кг/м^3.

13.74. Визначити зміну ΔU внутрішньої енергії кристалу міді при нагріванні його від $t_1=0°$ C до $t_2=200°$ C. Маса m кристалу дорівнює 20 г. Теплоємність C обчислити.

13.75. Вивести формулу для середньої енергії $\langle\varepsilon\rangle$ класичного лінійного гармонічного осцилятора при тепловій рівновазі. Обчислити значення $\langle\varepsilon\rangle$ при T=300 K.

13.76. Визначити: 1) середню енергію $\langle\varepsilon\rangle$ лінійного одновимірного квантового осцилятора при температурі $T = \theta_E$ ($\theta_E = 200\,K$); 2) енергію U системи, що складається з $N = 10^{25}$ квантових тривимірних незалежних осциляторів, при температурі $T = \theta_E$ ($\theta_E = 400\,K$).

13.77. В скільки разів зміниться середня енергія $\langle\varepsilon\rangle$ квантового осцилятора, що припадає на одну ступінь вільності, при підвищенні температури від $T_1 = \frac{\theta_E}{2}$ до $T_2 = \theta_E$? Врахувати нульову енергію.

13.78. Використовуючи квантову теорію теплоємності Ейнштейна, визначити зміну ΔU_m молярної внутрішньої енергії кристалу при нагріванні його на $\Delta T = 5K$ від температури $T_1 = \frac{\theta_E}{2}$.

13.79. Користаючись теорією теплоємності Ейнштейна, визначити зміну ΔU_m молярної внутрішньої енергії кристалу при нагріванні його від нуля до $T_1 = 0.1\theta_E$. Характеристичну температуру Ейнштейна θ_E прийняти для даного кристалу рівною 300 К.

13.80. Обчислити за теорією Ейнштейна молярну нульову енергію U_{m0} кристалу цинку. Характеристична температура θ_E для цинку дорівнює 230 К.

13.81. Використовуючи формулу енергії тривимірного кристалу $U_m = 3RT \cdot 3\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \int\limits_0^{\theta_D/T} \frac{x^3}{\exp(x)-1}dx$, одержати вираз для молярної теплоємності.

13.82. Молярна теплоємність тривимірного кристалу $C_m = 3R\left(12\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \cdot \int\limits_0^{\theta_D/T} \frac{x^3}{\exp(x)-1}dx - \frac{3\left(\frac{\theta_D}{T}\right)}{\exp\left(\frac{\theta_D}{T}\right)-1}\right)$. Знайти граничне вираження молярної теплоємності при низьких температурах ($T \ll \theta$, *якщо* $\frac{T}{\theta_D} < 0.1$).

13.83. Обчислити за теорією Дебая молярну нульову енергію U_{m0} кристалу міді. Характеристична температура міді θ_D дорівнює 320 К.

13.84. Знайти відношення $\frac{\theta_E}{\theta_D}$ характеристичних температур Ейнштейна і Дебая.

13.85. Використовуючи формулу енергії двовимірного кристалу $U_m = 3RT \cdot 2\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^2 \int\limits_0^{\theta_D/T} \frac{x^2}{\exp(x)-1}dx$, одержати вираз для молярної теплоємності.

13.86. Молярна теплоємність двовимірного кристалу $C_m = 3R\left(6\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^2 \cdot \int\limits_0^{\theta_D/T} \frac{x^2}{\exp(x)-1}dx - \frac{2\left(\frac{\theta_D}{T}\right)}{\exp\left(\frac{\theta_D}{T}\right)-1}\right)$. Знайти граничне вираження молярної теплоємності при низьких температурах ($T \ll \theta$, *якщо* $\frac{T}{\theta_D} < 0.1$).

13.87. Обчислити за теорією Дебая молярну нульову енергію U_{m0} кристалу з двовимірною граткою. Характеристична температура кристалу θ_D дорівнює 320 К.

13.88. Використовуючи формулу енергії одновимірного кристалу $U_m = 3RT \cdot \left(\frac{T}{\theta_D}\right) \int\limits_0^{\theta_D/T} \frac{x}{\exp(x)-1}dx$, одержати вираз для молярної теплоємності.

13.89. Молярна теплоємність одновимірного кристалу $C_m = 3R\left(2\left(\frac{T}{\theta_D}\right)\cdot\int_0^{\theta_D/T}\frac{x}{\exp(x)-1}dx-\frac{\left(\frac{\theta_D}{T}\right)}{\exp\left(\frac{\theta_D}{T}\right)-1}\right)$. Знайти граничне вираження молярної теплоємності при низьких температурах ($T \ll \theta$, *якщо* $\frac{T}{\theta_D} < 0.1$).

13.90. Обчислити за теорією Дебая молярну нульову енергію U_{m0} одновимірного кристалу. Характеристична температура кристалу θ_D дорівнює 320 К.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бланк А.Я. Физика. Учебное пособие для студентов нефизических специальностей вузов -Х.: Каравелла, 1996.
2. Зисман Г. А., Тодес О. М. Курс физики. -М. 1994. т. 1,2.
3. Савельев Й. В. Курс общей физики. Т. 1-3. -М. : Наука. 1988.
4. Трофимова Т. Й. Курс физики. -М. : Высш. шк.. 1990.
5. Яворский Б. М., Пинский А. А. Основы физики. -М. : Наука, 1981.
6. Физический знциклопедический словарь. (Гл. ред. А.М. Прохоров, М.: Сов. энцикл., 1984).
7. Лабораторний практикум по физике. (Под ред. А. С. Ахматова. -М.: Высш. шк., 1980).
8. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики.-М.: Наука, 1985.
9. Дмітрієв В.Ф. Фізика. К.: Вища школа. 1992.
10. Горбачук І.Т. Загальна фізика (збірник задач). К.: Вища школа. 1993.
11. Чертов А.Г., Воробьев А.А., Федоров М.Ф. Задачник по физике. М.: Высш. шк., 1981.
12. Стогова Т.В., Сафронова А.П. Тексты лекций по физике. Х., 1996.

ОСНОВНІ ФІЗИЧНІ СТАЛІ

Нормальне прискорення вільного падіння.... $g = 9.81\ м/с^2$
Гравітаційна стала...$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ м^3/(кг \cdot с^2)$
Стала Авогадро...$N_A = 6.02 \cdot 10^{23}\ моль^{-1}$
Молярна газова стала...$R = 8.31(Дж/моль \cdot K)$
Молярний об'єм газів при н.у. ....$V_{0m} = 22.4 \cdot 10^{-3}\ м^3/моль$
Стала Больцмана..$k = 1.38 \cdot 10^{-23}\ Дж/K$
Стала Фарадея...$F = 9.65 \cdot 10^7\ Кл/моль$
Елементарний заряд..$e = 1.60 \cdot 10^{-19}\ Кл$
Маса електрона..$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\ кг$
Питомий заряд електрона...................................$e/m = 1.76 \cdot 10^{11}\ Кл/кг$
Швидкість світла у вакуумі...............................$3.00 \cdot 10^8\ м/с$
Стала Стефана-Больцмана...................................$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\ Вт/(м^2 \cdot K^4)$
Стала закону зміщення Віна...............................$b = 2.90 \cdot 10^{-3}\ м \cdot K$
Стала Планка..$h = 6.63 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot с$
$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot с$
Стала Ридберга..$R = 2.07 \cdot 10^{-16}\ с^{-1}$
$R' = 1.10 \cdot 10^7\ м^{-1}$
Борівський радіус..$a = 5.29 \cdot 10^{-11}\ м$
Комптонівська довжина хвилі
Електрона...$\lambda_C = 2.43 \cdot 10^{-12}\ м$
Магнетон Бора...$\mu_B = 9.27 \cdot 10^{-24}\ Дж/Тл$
Енергія іонізації атому водню..........................$E_i = 2.18 \cdot 10^{-18}\ Дж$
Атомна одиниця маси..$1\ а.о.м. = 1.66 \cdot 10^{-27}\ кг$
Ядерний магнетон...$\mu_N = 5.05 \cdot 10^{-27}\ А \cdot м^2$
Електрична стала..$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ Ф/м$
Магнітна стала..$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ Гн/м$

Таблиці фізичних величин

Густина ρ твердих тіл і рідин
(Мг/м^3, або г/см^3)
Тверді тіла

Алюміній	2,70
Вісмут	9,80
Вольфрам	19,3
Залізо (чавун, сталь)	7,87
Золото	19,3
Кам'яна сіль	2,20

Латунь..........................8,55
Марганець....................7,40
Мідь..............................8,93
Нікель...........................8,80
Платина........................21,4
Свинець........................11,3
Срібло..........................10,5
Уран.............................18,7

Рідини (при 15° С)

Вода (дистильована при 4° С)..........1,00
Гліцерин..1,26
Гас..0,8
Олія (маслинове, мастильне)...........0,9
Олія касторова....................................0,96
Ртуть..13,6
Сірковуглець..1,26
Спирт..0,8
Ефір..0,7

Густина газів при нормальних умовах (кг/м^3)

Азот..1,25
Аргон..1,78
Водень..0,09
Повітря...1,29
Гелій...0,18
Кисень..1,43

Діелектрична проникність ε

Вода...81
Олія (трансформаторна)....................2,2
Парафін...2,0
Слюда...7,0
Скло..7,0
Фарфор...5,0
Ебоніт...3,0

Показник заломлення n

Алмаз...................................2,42
Вода.....................................1,63
Сірковуглець........................1,33
Скло.....................................1,50

Додаток А
Таблиці варіантів

Таблиця 1 – Частина І

Номер в журналі	Задача №1	Задача №2	Задача №3	Задача №4	Задача №5	Задача №6	Задача №7	Задача №8	Задача №9	Задача №10	Задача №11	Задача №12
1	1.1	1.2	2.1	2.31	2.61	2.91	2.121	2.151	3.1	3.31	4.1	5.1
2	1.3	1.4	2.2	2.32	2.62	2.92	2.122	2.152	3.2	3.32	4.2	5.2
3	1.5	1.6	2.3	2.33	2.63	2.93	2.123	2.153	3.3	3.33	4.3	5.3
4	1.7	1.8	2.4	2.34	2.64	2.94	2.124	2.154	3.4	3.34	4.4	5.4
5	1.9	1.10	2.5	2.35	2.65	2.95	2.125	2.155	3.5	3.35	4.5	5.5
6	1.11	1.12	2.6	2.36	2.66	2.96	2.126	2.156	3.6	3.36	4.6	5.6
7	1.13	1.14	2.7	2.37	2.67	2.97	2.127	2.157	3.7	3.37	4.7	5.7
8	1.15	1.16	2.8	2.38	2.68	2.98	2.128	2.158	3.8	3.38	4.8	5.8
9	1.17	1.18	2.9	2.39	2.69	2.99	2.129	2.159	3.9	3.39	4.9	5.9
10	1.19	1.20	2.10	2.40	2.70	2.100	2.130	2.160	3.10	3.40	4.10	5.10
11	1.21	1.22	2.11	2.41	2.71	2.101	2.131	2.161	3.11	3.41	4.11	5.11
12	1.23	1.24	2.12	2.42	2.72	2.102	2.132	2.162	3.12	3.42	4.12	5.12
13	1.25	1.26	2.13	2.43	2.73	2.103	2.133	2.163	3.13	3.43	4.13	5.13
14	1.27	1.28	2.14	2.44	2.74	2.104	2.134	2.164	3.14	3.44	4.14	5.14
15	1.29	1.30	2.15	2.45	2.75	2.105	2.135	2.165	3.15	3.45	4.15	5.15
16	1.31	1.32	2.16	2.46	2.76	2.106	2.136	2.166	3.16	3.46	4.16	5.16
17	1.33	1.34	2.17	2.47	2.77	2.107	2.137	2.167	3.17	3.47	4.17	5.17
18	1.35	1.36	2.18	2.48	2.78	2.108	2.138	2.168	3.18	3.48	4.18	5.18
19	1.37	1.38	2.19	2.49	2.79	2.109	2.139	2.169	3.19	3.49	4.19	5.19
20	1.39	1.40	2.20	2.50	2.80	2.110	2.140	2.170	3.20	3.50	4.20	5.20
21	1.41	1.42	2.21	2.51	2.81	2.111	2.141	2.171	3.21	3.51	4.21	5.21
22	1.43	1.44	2.22	2.52	2.82	2.112	2.142	2.172	3.22	3.52	4.22	5.22
23	1.45	1.46	2.23	2.53	2.83	2.113	2.143	2.173	3.23	3.53	4.23	5.23
24	1.47	1.48	2.24	2.54	2.84	2.114	2.144	2.174	3.24	3.54	4.24	5.24
25	1.49	1.50	2.25	2.55	2.85	2.115	2.145	2.175	3.25	3.55	4.25	5.25
26	1.51	1.52	2.26	2.56	2.86	2.116	2.146	2.176	3.26	3.56	4.26	5.26
27	1.53	1.54	2.27	2.57	2.87	2.117	2.147	2.177	3.27	3.57	4.27	5.27
28	1.55	1.56	2.28	2.58	2.88	2.118	2.148	2.178	3.28	3.58	4.28	5.28
29	1.57	1.58	2.29	2.59	2.89	2.119	2.149	2.179	3.29	3.59	4.29	5.29
30	1.59	1.60	2.30	2.60	2.90	2.120	2.150	2.180	3.30	3.60	4.30	5.30

Таблиця 2 – Частина II

Номер в журналі	Задача №1	Задача №2	Задача №3	Задача №4	Задача №5	Задача №6	Задача №7	Задача №8
1	6.1	6.31	6.51	8.11	9.1	9.31	9.41	10.1
2	6.2	6.32	6.52	8.12	9.2	9.32	9.42	10.2
3	6.3	6.33	6.53	8.13	9.3	9.33	9.43	10.3
4	6.4	6.34	6.54	8.14	9.4	9.34	9.44	10.4
5	6.5	6.35	6.55	8.15	9.5	9.35	9.45	10.5
6	6.6	6.36	6.56	8.16	9.6	9.36	9.46	10.6
7	6.7	6.37	6.57	8.17	9.7	9.37	9.47	10.7
8	6.8	6.38	6.58	8.18	9.8	9.38	9.48	10.8
9	6.9	6.39	6.59	8.19	9.9	9.39	9.49	10.9
10	6.10	6.40	6.60	8.20	9.10	9.40	9.50	10.10
11	6.11	6.41	7.1.	8.21	9.11	9.41	9.31	10.11
12	6.12	6.42	7.2.	8.22	9.12	9.42	9.32	10.12
13	6.13	6.43	7.3.	8.23	9.13	9.43	9.33	10.13
14	6.14	6.44	7.4.	8.24	9.14	9.44	9.34	10.14
15	6.15	6.45	7.5.	8.25	9.15	9.45	9.35	10.15
16	6.16	6.46	7.6.	8.26	9.16	9.46	9.36	10.16
17	6.17	6.47	7.7.	8.27	9.17	9.47	9.37	10.17
18	6.18	6.48	7.8.	8.28	9.18	9.48	9.38	10.18
19	6.19	6.49	7.9.	8.29	9.19	9.49	9.39	10.19
20	6.20	6.50	7.10.	8.30	9.20	9.50	9.40	10.20
21	6.21	6.51	8.1	8.31	9.21	9.51	10.1	10.21
22	6.22	6.52	8.2	8.32	9.22	9.52	10.2	10.22
23	6.23	6.53	8.3	8.33	9.23	9.53	10.3	10.23
24	6.24	6.54	8.4	8.34	9.24	9.54	10.4	10.24
25	6.25	6.55	8.5	8.35	9.25	9.55	10.5	10.25
26	6.26	6.56	8.6	8.36	9.26	9.56	10.6	10.26
27	6.27	6.57	8.7	8.37	9.27	9.57	10.7	10.27
28	6.28	6.58	8.8	8.38	9.28	9.58	10.8	10.28
29	6.29	6.59	8.9	8.39	9.29	9.59	10.9	10.29
30	6.30	6.60	8.10	8.40	9.30	9.60	10.10	10.30

Таблиця 3 – Частина III

Номер в журналі	Задача №1	Задача №2	Задача №3	Задача №4	Задача №5	Задача №6	Задача №7	Задача №8
1	11.1	11.31	12.1	12.31	13.1	13.31	13.46	13.61
2	11.2	11.32	12.2	12.32	13.2	13.32	13.47	13.62
3	11.3	11.33	12.3	12.33	13.3	13.33	13.48	13.63
4	11.4	11.34	12.4	12.34	13.4	13.34	13.49	13.64
5	11.5	11.35	12.5	12.35	13.5	13.35	13.50	13.65
6	11.6	11.36	12.6	12.36	13.6	13.36	13.51	13.66
7	11.7	11.37	12.7	12.37	13.7	13.37	13.52	13.67
8	11.8	11.38	12.8	12.38	13.8	13.38	13.53	13.68
9	11.9	11.39	12.9	12.39	13.9	13.39	13.54	13.69
10	11.10	11.40	12.10	12.40	13.10	13.40	13.55	13.70
11	11.11	11.21	12.11	12.41	13.11	13.41	13.56	13.71
12	11.12	11.22	12.12	12.42	13.12	13.42	13.57	13.72
13	11.13	11.23	12.13	12.43	13.13	13.43	13.58	13.73
14	11.14	11.24	12.14	12.44	13.14	13.44	13.59	13.74
15	11.15	11.25	12.15	12.45	13.15	13.45	13.60	13.75
16	11.16	11.26	12.16	12.46	13.16	13.46	13.31	13.76
17	11.17	11.27	12.17	12.47	13.17	13.47	13.32	13.77
18	11.18	11.28	12.18	12.48	13.18	13.48	13.33	13.78
19	11.19	11.29	12.19	12.49	13.19	13.49	13.34	13.79
20	11.20	11.30	12.20	12.50	13.20	13.50	13.35	13.80
21	11.21	11.1	12.21	12.1	13.21	13.51	13.36	13.81
22	11.22	11.2	12.22	12.2	13.22	13.52	13.37	13.82
23	11.23	11.3	12.23	12.3	13.23	13.53	13.38	13.83
24	11.24	11.4	12.24	12.4	13.24	13.54	13.39	13.84
25	11.25	11.5	12.25	12.5	13.25	13.55	13.40	13.85
26	11.26	11.6	12.26	12.6	13.26	13.56	13.41	13.86
27	11.27	11.7	12.27	12.7	13.27	13.57	13.42	13.87
28	11.28	11.8	12.28	12.8	13.28	13.58	13.43	13.88
29	11.29	11.9	12.29	12.9	13.29	13.59	13.44	13.89
30	11.30	11.10	12.30	12.10	13.30	13.60	13.45	13.90

Навчальне видання

Зузяк П.М., Слободянюк А.Д.

ЗАДАЧІ З ФІЗИКИ

Програма курсу, контрольні завдання та методичні поради до розв'язування окремих задач

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Слободянюком А.Д.

Редактор В.О.Дружиніна
Коректор З.В.Поліщук

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 20.11.03
Формат 29,7x42 1/4 Гарнітура Times New Roman
Друк різографічний Папір офсетний
Тираж 115 прим. Ум. друк. арк. 9.69
Зам. № 2003-180

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ