

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ КАБІНЕТ ВИЩОЇ ОСВІТИ
ХАРКІВСЬКИЙ ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ**

**А. П. Голуб, Б. І. Кузнецов,
І. О. Опришко, В. П. Соляник**

СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДАМИ

Київ НМК ВО 1992

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ КАБІНЕТ ВИЩОЇ ОСВІТИ
ХАРКІВСЬКИЙ ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ

А.П.Голуб, В.І.Кузнецов,
І.О.Опришко, В.П.Соляник

СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДАМИ

За ред. В.П.Соляника

Затверджено Радою Навчально-методичного кабінету
вищої освіти Міністерства освіти України
як навчальний посібник
для студентів спеціальності 21.05
"Електропривод та автоматизація промислових
установок і технологічних комплексів"

НТБ ВНТУ



376430

62-83(075)

С 40

1992

Системи керування електроприводами

Київ НМК ВО 1992

Системи керування електроприводами: Навч. посібник / А.П.Голуб, В.І.Кузнецов, І.О.Опришко, В.П.Соляник. - К.: НМК ВО, 1992. - 352 с.

Розглянуто принципи побудови систем автоматичного керування електроприводами. Наведено математичний опис електричних двигунів, тиристорних перетворювачів та інших типових вузлів, які утворюють замкнені системи керування. Описано статичні й динамічні властивості типових систем керування швидкістю /регулятори швидкості/ і положенням /слідкувальний привод/, а також систем підпорядкованого керування електроприводами. Велику увагу приділено цифровим та мікропроцесорним системам керування, модальному керуванню й оптимальним системам керування електроприводами у випадку детермінованих та випадкових дій. Матеріал викладено на підставі як методу передавних і частотних характеристик, так і методу простору станів.

Іл. 149. Бібліогр.: 47 назв.

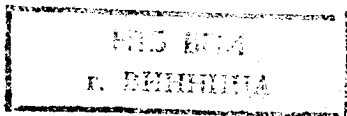
Рецензенти: Є.Є.Александров, д-р техн. наук /ХПІ/

І.І.Епштейн, д-р техн. наук /НДІ НВО ХЕМЗ/

376430

ISBN 5-7763-0794-5

© Навчально-методичний кабінет
вищої освіти, 1992



ПЕРЕДМОВА

Одним з основних курсів, які формують знання інженерів зі спеціальності "Електропривод та автоматизація промислових установок і технологічних комплексів", є курс "Системи керування електроприводами". З цього курсу зараз розроблено типову програму, а також написано навчальні посібники [6, 18 та ін.] /підручника немає/.

Проте і в типовій програмі, і в навчальних посібниках мало уваги приділено сучасним системам керування електроприводами /цифровим і мікропроцесорним системам, модальному керуванню електроприводами, системам, які ґрунтуються на використанні оптимальної лінійної фільтрації/, а також сучасним методам їх дослідження. Цей посібник є спробою хоча б частково виправити такий стан і відповідає програмі курсу "Системи керування електроприводами", розробленій на кафедрі систем керування й автоматизації промислових установок Харківського інженерно-педагогічного інституту ім. І.З.Соколова /ХІПІ/. Книжку написано на підставі досвіду викладання однойменного курсу протягом кількох останніх років у ХІПІ, а тому нові розділи курсу та їх методику було досить добре відпрацьовано й перевірено на практиці.

Навчальний посібник написали: А.П.Голуб - розд. 2, 3, 5 /крім підрозд. 5.1/, 7, 8; В.І.Кузнецов - розд. 9; А.І.Опришко - підрозд. 7.6 і 7.7; В.П.Соляник - розд. 1, 4, 6 і підрозд. 5.1.

Розділ І. ОСНОВИ ПОБУДОВИ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДАМИ

І.І. Основні поняття й означення

Сукупність машин і технічних засобів можна зобразити як певну технічну систему, що взаємодіє із зовнішнім середовищем, котре чинить на неї довільні, і організовані дії. Коли довільні дії не дають технічній системі правильно функціонувати, то тоді потрібно використати керування, справляючи на неї такі спеціальні дії іззовні, які забезпечують бажаний процес у ній. Типовий зразок технічної системи – система керування електроприводом.

Системою керування електроприводом /СКЕП/ називають сукупність об'єкта керування й автоматичного керувального пристрою, які взаємодіють одне з одним, а також із зовнішнім середовищем /рис. І.І/.

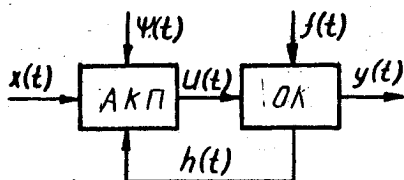


Рис. І.І. Узагальнена функціональна схема системи керування електроприводом

Об'єкт керування /ОК/ – пристрій /чи сукупність пристроїв/, який виконує технічний процес, що потребує спеціально організованих дій іззовні для виконання заданої мети керування. ОК у СКЕП є електричний двигун постійного чи змінного струму разом з деяким робочим механізмом, швидкість обертання котрого

у випадку зміни, наприклад, моменту статичного опору на його валі, необхідно підтримувати сталим або змінювати за заданим законом.

Автоматичний керувальний пристрій /АКП/ – пристрій, що виробляє таку керувальну дію, безпосередньо прикладену до ОК, яка забезпечує досягнення заданої мети керування. АКП часто називають регулятором.

У системах керування електроприводом є два види дій – зовнішні й внутрішні. Дії, що їх справляє на систему зовнішнє середовище, називають зовнішніми.

Задавальна дія /корисний сигнал/ $x(t)$ – дія на вході СКЕП, передбачена метою керування. Цю дію система перетворює й передає на вихід. Задавальна дія може мати різну фізичну природу – напруга, кут повороту, кутова швидкість обертання тощо.

Збурювальна дія /завади/ $f(t)$ - дія, прикладена до якогось пристрою, котра порушує нормальне функціонування системи. Прикладом можуть бути шуми $\psi(t)$ в електронних елементах АКТ, а також змінне в часі навантаження $f(t)$ в ОК /приміром, зміна моменту статичного опору на валі електричного двигуна/.

Дії, що їх окремі елементи системи передають один одному, називають внутрішніми; до них належать:

керувальна дія $u(t)$ - дія, що її виробляє АКТ і передає ОК;

керована дія /регульовна змінна/ $y(t)$ - змінна на виході ОК, бажану зміну якої передбачає мета керування /наприклад, підтримування сталої швидкості обертання двигуна/;

контрольна дія $x(t)$ - дія АКТ на ОК; як одну з конкретних дій використовують регульовну змінну $x(t) = y(t)$.

СКЕП призначена звичайно для того, аби забезпечити відповідність між регульовною вихідною змінною $y(t)$ і задавальною дією $x(t)$. Вільність СКЕП керувальну дію виробляють, порівнюючи $y(t)$ і $x(t)$, тобто керують за відхиленням $e(t) = x(t) - y(t)$.

Зовнішні дії можна зобразити у вигляді певних, типових для задаваної системи функцій часу; наприклад, для слідувального привода задавальну дію $x(t)$ - поліномом n -го степеня або гармонійною функцією. Такі функції є детерміновані /регулярні/. Для детермінованих функцій $x(t)$ кожному моментові часу t^* відповідає певне число $x(t^*)$, його значення можна передбачити.

Проте для багатьох реальних систем зовнішня дія має не детермінований, а випадковий характер, коли її значення в фіксований момент часу t^* є випадкове число, яке точно передбачити не можна. Випадковими звичайно є збурення $\psi(t)$ на окремі елементи АКТ, зокрема шумові складові напруги на виході різних давачів, електронних підсилювачів і перетворювачів. Навантаження $f(t)$ /наприклад, на електроприводи прокатних станів/ залежить від випадкових технологічних факторів.

Детерміновані дії задають типовими функціями часу, а випадкові - випадковими. Кожна серія вимірів випадкової функції має свою специфічну, не повторювану реалізацію. Коли виконати досить велику кількість таких вимірів, то за їх сукупністю можна визначити усереднені характеристики, які дають змогу зробити імовірнісну оцінку випадкової функції /імовірнісними характеристиками, зокрема, є математичне сподівання, дисперсія й кореляційна функція/.

Якщо зовнішня дія має випадковий характер, то вона спричинить і випадкові зміни внутрішніх змінних, зокрема керована змінна $y(t)$ буде випадковою функцією часу, і щоб оцінити її поведінку, треба знайти відповідні імовірнісні характеристики.

1.2. Алгоритми функціонування, класифікація СКЕП за призначенням

Згідно з алгоритмом функціонування, яким вважають сукупність настанов щодо правильного виконання технічного процесу, всі СКЕП за призначенням поділяють на такі основні класи: стабілізувальні, програмові й слідкувальні системи.

Стабілізувальною СКЕП називають автоматичну систему, алгоритм функціонування якої містить настанову підтримувати регульовну змінну $y(t)$ на сталому рівні:

$$y(t) = x_0, \quad x_0 = const. \quad /1.1/$$

Прикладом стабілізувальних СКЕП є регулятори швидкості, що їх ми докладно розглянемо в цьому навчальному посібнику.

Програмовою СКЕП називають автоматичну систему, алгоритм функціонування якої містить настанову змінювати регульовну змінну $y(t)$ згідно з наперед заданим законом:

$$y(t) = x_n(t), \quad /1.2/$$

де $x_n(t)$ - відома функція часу.

Система програмового керування має спеціальний програмовий пристрій, який формує заданий закон зміни програми $x_n(t)$.

Слідувальною СКЕП /слідкувальним приводом/ називають автоматичну систему, алгоритм функціонування якої містить настанову змінювати регульовну змінну відповідно до наперед відомого характеру зміни задавальної дії, тобто

$$y(t) = x(t), \quad /1.3/$$

де $x(t)$ - довільна, наперед невідома функція часу.

Слідкувальними є приводи керування положенням різних робочих механізмів.

1.3. Алгоритм керування й принципи побудови СКЕП

Алгоритм керування визначає сукупність вихідних дій АКП і спосіб, яким він утворює відповідну керувальну дію $u(t)$. За алгоритмом керування СКЕП можна поділити на такі основні групи: розімкнені, замкнені й комбіновані.

Розімкнена СКЕП /або система без зворотного зв'язку/ - це така система, яка керування $u(t)$ формує залежно тільки від зовнішніх дій /рис. 1.2/:

$$u(t) = \varphi[x(t), f(t)] \quad /1.4/$$

У стабілізувальних СКЕП задавальна дія - стала величина:

$x(t) = x_0 = \text{const}$. Припустимо, що регульовна величина $y(t)$ від заданого значення x_0 відхиляється головним чином внаслідок збурення $f(t)$, наприклад зміни моменту опору на валі виконавчого двигуна. У цьому разі в режимі керування за розімкненим

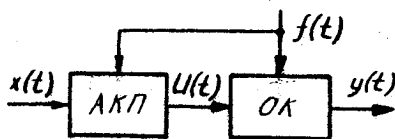


Рис. 1.2. Функціональна схема розімкненої системи керування електроприводом

циклом вимірюють збурювальну дію $f(t)$ і так її перетворюють в АКП, щоб компенсувати її вплив на регульовну змінну $y(t)$.

Прикладом СКЕП з принципом керування за збуренням може бути система стабілізації кутової швидкості двигуна M постійного струму з незалежним збудженням, навантаженням для якого є зв'язаний з валом двигуна робочий механізм РМ /рис. 1.3/. Потенціометр P_3 тут відіграє роль задавального пристрою. Напругу U_3 , яка пропорційна бажаному заданому значенню швидкості робочого механізму $\omega_3 / U_3 = K_3 \omega_3$, де K_3 - коефіцієнт пропорційності/, знімають з повзуну цього потенціометра і вона є задавальною дією /установленням/. Зв'язок за основною збурювальною дією - моментом статичного опору /моментом навантаження/ $M_{оп}$ - реалізовано за допомогою моментової муфти ММ і підсилювача постійного струму ППС /операційного підсилювача ОП/. Моментова муфта виконує функцію вимірювального елемента збурювальної дії; вихідна напруга муфти U_M , знята з повзуну потенціометра P_M , пропорційна моментові навантаження M_0 : $U_M = K_M M_{оп}$, де K_M - коефіцієнт підсилення муфти. Напруги U_M та U_3 під'єднують за допомогою опорів R_{ex} та R_M на вході ОП і підсилювача. Отже, ОП виконує функції суматора й підсилювача напруги. Тиристорний перетворю-

вач ТП складається з керованого випрямляча, який перетворює змінну напругу в постійну, і системи імпульсно-фазового керування /СІФК/, що формує послідовність імпульсів, котрі надходять на керувальні електроди випрямляча; він виконує функцію підсилювача потужності. Вхідна напруга ТП $U_{тп}$ є керувальною дією, її залежність від заданої швидкості ω_z й основної збудувальної дії M_o визначає алгоритм керування /І.4/ розімкненої системи:

$$U_{тп} = K_z \omega_z + K_M M_{оп} \quad /I.5/$$

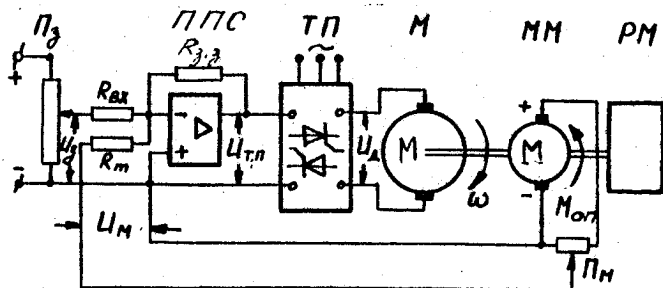


Рис. 1.3. Спрощена принципова схема регулятора швидкості з розімкненим циклом керування

До ОК звичайно зараховують незмінну з погляду реалізації різних алгоритмів керування частину СКЕП. У розглядуваному прикладі ОК – це ТП і двигун разом з РМ, а АКП утворюють елементи, які реалізують алгоритм керування /І.5/ – Π_z , ММ і ППС /рис. 1.4/.

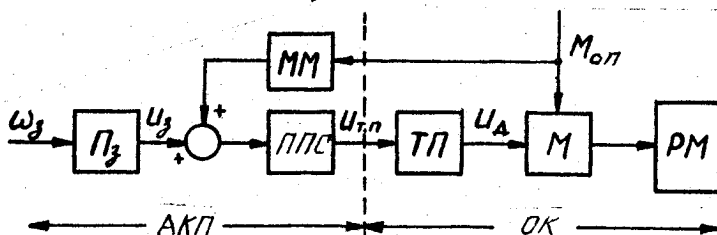


Рис. 1.4. Функціональна схема регулятора швидкості з розімкненим циклом керування

У системі без зв'язку за збуренням / $\chi_M = 0$ / напруга U_2 на вході двигуна залежить лише від задавальної напруги U_2 , знятої з потенціометра P_2 . Із збільшенням $M_{оп}$ вона не змінюється, тому швидкість обертання двигуна із збільшенням $M_{оп}$ зменшується. Якщо зв'язок за збуренням є / $\chi_M \neq 0$ /, то із збільшенням $M_{оп}$ збільшується U_M і сумарна напруга ТП $U_{\Sigma,П}$ зростає, а це, коли муфту налаштувати відповідним чином, може скомпенсувати вплив $M_{оп}$ і, отже, незалежність швидкості обертання двигуна від основної збурювальної дії на ОК – зміни моменту навантаження.

На рис. 1.5 зображено залежність швидкості обертання двигуна ω від моменту опору за різних значень коефіцієнта підсилення χ_M розімкненого зв'язку за моментом опору $M_{оп}$. Коли немає АКП, то із зростанням моменту навантаження $M_{оп}$ швидкість обертання двигуна ω спадає /крива 1/. Із збільшенням зв'язку за навантаженням χ_M /наприклад, за рахунок пересування повзуна потенціометра P_M / зменшується спад швидкості ω /крива 2/; відповідно вибравши цей зв'язок, можна досягти повної компенсації впливу навантаження /крива 3/ чи навіть перекомпенсації /крива 4/.

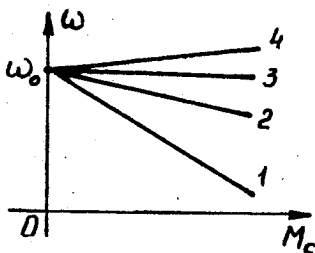
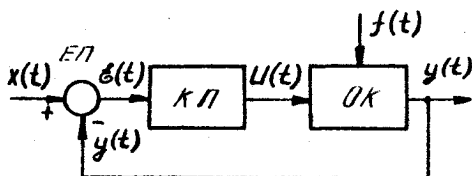


Рис. 1.5. Графік залежності $\omega = f(M_{оп})$ за різної величини зв'язку за навантаженням

Ступінь компенсації впливу збурювальної дії залежить від точності вимірювання останньої й задавання характеристик об'єкта. Тому принцип керування за збуренням можна застосовувати в тих випадках, коли відомі характеристики об'єкта й можна виміряти основні збурювальні дії. Проте на процеси в більшості технічних пристроїв впливає дуже багато зовнішніх дій, мало з яких можна виміряти. Крім того, під час експлуатації характеристики об'єкта змінюються, що за незмінного налаштування параметрів компенсаційного каналу призводить до відхилення керованої змінної від її заданого значення. Тому можливості систем з компенсацією, які не містять зворотних зв'язків, дуже обмежені, і вони не можуть для багатьох технічних пристроїв забезпечити потрібну точність керування чи й узагалі нероботоздатні. Необхідний перебіг процесів керування в загальному випадку можливий лише в системах із зворотним зв'язком.

Замкненою СКЕП, або системою із зворотним зв'язком /рис. 1.6/, називають таку систему, в якій керування $U(t)$ формується залежно від відхилення керованої змінної $y(t)$ від задавальної дії $x(t)$:



$$U(t) = \varphi[x(t) - y(t)] = \varphi[\varepsilon(t)], \quad /1.6/$$

це відхилення

$$\varepsilon(t) = x(t) - y(t). /1.7/$$

Рис. 1.6. Функціональна схема замкненої СКЕП

Згідно з алгоритмом керування /1.6/, /1.7/ АКП /див. рис. 1.6/ має містити: елемент порівняння ЕП, що визначає відхилення $\varepsilon(t)$; кола керування /на вході керувального пристрою КП/, які реалізують закон керування за відхиленням /1.6/.

Як приклад розглянемо замкнену систему стабілізації швидкості обертання двигуна постійного струму /рис. 1.7/, котра має той самий ОК, що й схема на рис. 1.3. Сигнал розузгодження $U_{\Sigma}(t)$, пропорційний відхиленню $\varepsilon(t) = \omega_{\Sigma} - \omega(t)$, формують задавальний потенціометр Π_{Σ} і тахогенератор ТГ, увімкнені так, що їх вихідні напруги U_{Σ} , $U_{T.G}$ напрямлені зустрічно:

$$U_{\Sigma} = U_{\Sigma} - U_{T.G}. \quad /1.8/$$

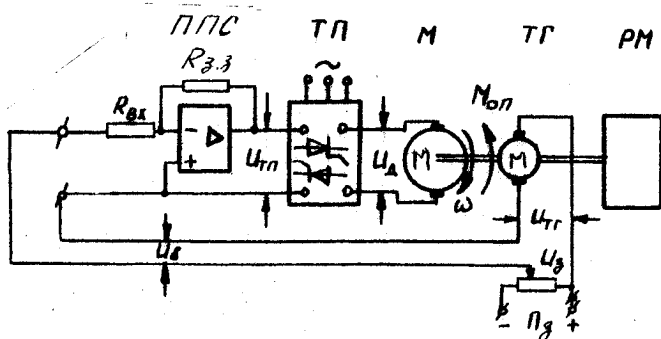


Рис. 1.7. Спрощена принципова схема регулятора швидкості з замкненим циклом керування

Підсилена за величиною й потужністю в ППС / $U_{т.г}$ - вихідна на-
пруга ППС/ і ТП /див. рис. I.7/ вихідна напруга U_g , прикладена до
кола якоря двигуна, відповідно змінюватиме швидкість обертання остан-
нього, зменшуючи виникле відхилення $\varepsilon(t)$.

Припускаючи, що

$$U_g = \kappa_g \omega_g, \quad U_{т.г} = \kappa_{т.г} \omega, \quad U_{т.п} = \kappa_{т.п.с} (U_g - U_{т.г}), \quad /I.9/$$

для випадку $\kappa_g = \kappa_{т.г}$ дістаємо такий вираз для керувальної напруги
на вході ТП:

$$U_{т.п}(t) = \kappa_n [\omega_g - \omega(t)] = \kappa_n \varepsilon(t), \quad /I.10/$$

$$\kappa_n = \kappa_{т.г} \kappa_{т.п.с}, \quad /I.11/$$

де κ_n , $\kappa_{т.г}$ і $\kappa_{т.п.с}$ - коефіцієнти підсилення відповідно АКП,
ТП і ППС.

АКП, що реалізує алгоритм керування /I.10/, як бачимо з рис. I.7,
тут доволі простий і складається із задавального потенціометра Π_g .
ТП і ППС.

Розглянемо, як працює система. Нехай $M_{оп}(t) = M_{оп0} = const$
і $U_g = const$, тоді $\omega(t) = \omega_0$, $U_g(t) = U_{g0}$, $U_{т.г} = U_{т.г0}$,
 $U_{т.п} = U_g - U_{т.г0} = U_{с0}$. Із збільшення моменту навантаження, при-
міром, до $M_{оп1} > M_{оп0}$ швидкість двигуна, як це впливає із ста-
тичних регульованих характеристик двигуна /рис. I.8/, зменшиться
на $\Delta\omega$, і становитиме $\omega_1 =$

$= \omega_0 - \Delta\omega$. Величина $\Delta\omega$, ви-
значила б спад швидкості двигуна,
коли б не було кола керування. Для
зворотного зв'язку полягає в тому,
що із зниженням швидкості зменшу-
ється напруга ТП ($U_{т.г} = U_{т.г0} -$
 $- \Delta U_{т.г}$). Відповідно зростає
сигнал розузгодження $U_{с} =$

$= U_{с0} + \Delta U_{т.г}$, а також напруга на
якорі двигуна U_g і його швидкість
обертання ω . Через певний промі-
жок часу перехідний процес закін-
читься і система перейде в новий
усталений режим з напругою $U_{g1} >$
 $> U_{g0}$ і швидкістю обертан-

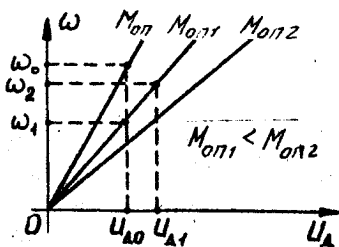


Рис. I.8. Регульовальні ха-
рактеристики $\omega =$
 $= f(U_g)$ двигуна
постійного струму

на ω_2 , яка відповідає цій напрузі /рис. 1.8/. Однак нове усталене значення швидкості буде менше того значення, яке було до початку процесу регулювання, тобто $\omega_2 < \omega_0$. Справді, із збільшенням моменту навантаження спадає швидкість обертання, а для того, щоб її збільшити, треба збільшити напругу U_g /див. рис. 1.8/, а це можливо тільки за зменшення напруги $U_{r,r}$, в отже, й швидкості обертання двигуна.

Таким чином, розглянута система в усталеному режимі дає похибку $\Delta\omega_2 = \omega_0 - \omega_2$ /див. рис. 1.8/, яка залежно від коефіцієнта підсилення керувального пристрою може мати величину, значно меншу за відхилення $\Delta\omega$, у разі його відсутності / $K_n = 0$ /. На рис. 1.9 зображено статичні характеристики системи у разі відсутності /крива 1/ і наявності /крива 2/ регулятора.

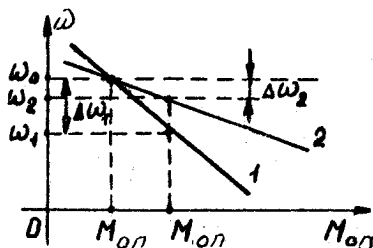


Рис. 1.9. Графік залежності $\omega = f(M_{оп})$ у разі відсутності /крива 1/ і наявності /крива 2/ регулятора

Аби зображена на рис. 1.7 замкнена СКЕП могла змінювати швидкість обертання двигуна за заданим законом $\omega(t)$, її треба доповнити програмовим пристроєм. Наприклад, система програмового керування швидкістю обертання потужного електродвигуна, застосовуваного в електроприводі прокатного стана, має спеціальний програмовий пристрій - задавач інтенсивності, який на ділянці розгону двигуна /від $\omega = 0$ до $\omega = \omega_{ном}$ / формує лінійно-змінний

вихідний сигнал $U_z(t) = K \cdot t$ /де K - коефіцієнт підсилення задавача інтенсивності/, а потім, після закінчення розгону, видає сталий сигнал $U_z(t) = U_{z0} = const$. Отже, на ділянці розгону швидкість двигуна змінюється в часі за лінійним законом /система розганяється із сталим прискоренням/, а тоді система працює в режимі стабілізації швидкості.

Щоб реалізувати принцип керування за відхиленням, коли керована змінна має будь-яку фізичну природу /кут повороту, швидкість, напруга тощо/, потрібно насамперед безперервно /або дискретно/ вимірювати її відхилення від бажаного значення. Здебільшого вихідною змінною вимірювального пристрою є напруга U_{ε} , пропорційна в зоні лінійності

вимірювача відхилення ε : $U_\varepsilon = K_\varepsilon \varepsilon$. Щоб підкреслити функціонування замкненої СКЕП, побудованої за принципом відхилення у виміральному пристрої, звичайно умовно вирізняють ЕП, який визначає різницю $\varepsilon = x - y$, і вимірвач розузгодження U_ε , який перетворює ε в напругу U_ε /рис. 1.10/. Напругу U_ε потім підсилюють за рівнем - підсилювач напруги ПН і за потужністю - підсилювач потужності ПП. Коефіцієнт підсилення за потужністю - це відношення потужностей на виході і вході пристрою.

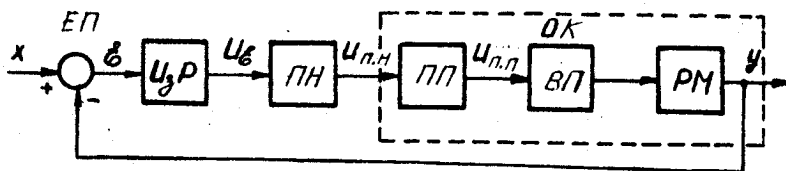


Рис. 1.10. Функціональна схема замкненої СКЕП з елементом порівняння ЕП

З погляду перетворення сигналів у СКЕП підсилювачі напруги й потужності мають на лінійній ділянці своєї статичної характеристики коефіцієнти підсилення за напругою й потужністю $K_{п.н}$ і $K_{п.п}$:

$U_{п.н} = K_{п.н} U_\varepsilon$, $U_{п.п} = K_{п.п} U_{п.н}$. Напруга з виходу ПП надходить на вхід виконавчого пристрою ЕП, в електромеханічних СКЕП - звичайно двигуна постійного чи змінного струму, за допомогою якого керують швидкістю або положенням РМ.

Зауважимо, що часто ПП, ВП і РМ являють собою єдину незмінну частину системи, а тому їх можна розглядати разом як ОК. Тоді стосовно до схеми рис. 1.10 до КП треба зарахувати ВП і ПП.

Замкнені СКЕП мають ту характерну особливість, що в них є зворотний зв'язок з виходу системи на її вхід. Цей зворотний зв'язок називають головним, або основним, на відміну від допоміжних зворотних зв'язків, запроваджених у системі для поліпшення її динамічних властивостей.

Як другий приклад замкненої системи розглянемо слідкувальний привод /рис. 1.11/. У ньому ОК є: двигун постійного струму з незалежним збудженням M , редуктор РЕД і РМ. Регулятор /АКП/ складається з потенціометричного вимірального пристрою $P_{вс}$ і $P_{вх}$, ППС і реверсивного ТП /що його, як і в регуляторі швидкості, можна було б

зарехувати до ОК/. Вихідним сигналом /керуваною величиною/ є кут повороту вала РМ β , або кут повороту повзуна потенціометра $\Pi_{вх}$, оскільки останній розташований на одному валі з РМ /на виконавчій осі ВВ/, а вхідним - кут повороту α повзуна потенціометра $\Pi_{вх}$, який розташований на командній осі КЕ.

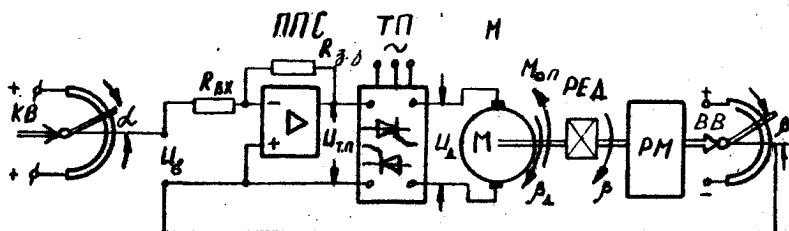


Рис. I.II. Спрощена принципова схема слідкувального привода

Алгоритм функціонування розглядуваного привода полягає в тому, щоб ВВ слідкувала за довільно змінним положенням КЕ, тобто щоб $\beta(t) = \alpha(t)$ у випадку дії на елементи системи різних збурень, зокрема моменту статичного опору $M_{оп}$.

БП системи /потенціометри $\Pi_{вх}$ і $\Pi_{вх}$ / визначає кутове розузгодження $\varepsilon(t)$ між заданим значенням кута повороту КЕ $\alpha(t)$ та справжнім значенням керованої величини - кутом повороту ВВ $\beta(t)$ і перетворює сигнал $\varepsilon(t) = \alpha(t) - \beta(t)$ в пропорційну йому напругу розузгодження $U_{\varepsilon}(t)$, тобто $U_{\varepsilon}(t) = U_{\alpha}(t) - U_{\beta}(t) = K_{\varepsilon}[\alpha(t) - \beta(t)] = K_{\varepsilon} \varepsilon(t)$, де U_{α} та U_{β} - потенціали повзунів потенціометрів $\Pi_{вх}$ та $\Pi_{вх}$; K_{ε} - коефіцієнт підсилення БП / $\Pi_{вх}$ і $\Pi_{вх}$ мають однакові конструкції й параметри/. Потім ППС та ТП сигнал $U_{\varepsilon}(t)$ підсилюють відповідно за напругою й потужністю і на виході регулятора формується керувальна дія - напруга $U_g(t)$, яку підводять до якірної обмотки двигуна. Значення керувальної напруги залежить від величини сигналу розузгодження й коефіцієнтів підсилення ТП $K_{т.п}$ і ППС $K_{п.п.с}$: $U_g(t) = K_{п.п.с} K_{т.п} U_{\varepsilon}(t) = K_{п.п.с} K_{т.п} K_{\varepsilon} \varepsilon(t)$.

Розглянемо, як працює слідкувальний привід. Коли КЕ і ВВ займають однакове положення, то кут розузгодження між ними дорівнює нулю. Дорівнюють нулю й напруги U_{ε} та U_g , тобто двигун і вся система перебувають у спокої. Повернімо тепер КЕ на деякий кут. Унаслідок

цього виникнуть кут розузгодження $\epsilon = \alpha - \beta$ і пропорційні йому напруги. Під дією напруги U_g двигун заобертається й через редуктор повертатиме БВ і повзун $П_{вх}$ у бік зменшення кута розузгодження, аж поки останній не буде дорівнювати нулю. Коли КВ повернеться в інший бік, полярність напруги, прикладеної до двигуна, зміниться, а отже, зміниться й напрям його обертання. Якщо кутове положення $\alpha(t)$ КВ змінюється в часі за довільним законом, то й кутове положення $\beta(t)$ БВ також змінюватиметься за тим самим законом.

Треба зауважити, що напрям обертання двигуна збігатиметься із знаком кута розузгодження тільки тоді, коли зворотний зв'язок від двигуна до БВ /повзуна $П_{вх}$ / буде від'ємний. Коли ж під час обертання двигуна кут розузгодження зростає, то це означає, що зворотний зв'язок додатний. Зробити його від'ємним можна, змінивши полярність напруги, прикладеної до двигуна.

Істотною особливістю замкненої СКЕП, на відміну від розімкненої, полягає в тому, що керувальна дія $U(t)$ змінюється незалежно від фізичної природи причин, котрі зумовили пожегу відхилення $\epsilon(t)$: зміни як зовнішніх дій /задавальної й збурювальних/, так і параметрів ОК. Одночасно у системах керування за відхиленням у зв'язку з наявністю основного зворотного зв'язку можуть виникати тривалі перехідні процеси з неприпустимо великими відхиленнями керованої змінної від заданого значення чи навіть незагасальних коливань. Тому насамперед необхідно забезпечити стійкість замкненої системи і потрібну якість перебігу перехідних процесів.

Принцип керування за відхиленням – основи побудови СКЕП різного призначення. Першою промисловою системою з цим принципом був поплавцевий регулятор у котлі парової машини, що його побудував 1765 р. видатний російський механік І.І.Ползунов, і відцентровий регулятор швидкості парової машини, патент на який 1784 р. одержав англійський механік Дж.Уатт.

Комбіновані СКЕП. Комбінованою /чи розімкнено-замкненою/ називають таку СКЕП, в якій керування $U(t)$ формується залежно і від відхилення $\epsilon(t)$, і від зовнішніх дій $x(t)$ і $f(t)$:

$$U(t) = \psi [\epsilon(t), x(t), f(t)] . \quad /1.12/$$

Комбіновані СКЕП за видом використовуваних зовнішніх дій поділяють на системи з розімкненим колом керування за збурювальною і за задавальною діями. У комбінованій системі за збуренням /рис. 1.12, а/

$$U(t) = U_f(t) + U_g(t)$$

/І.ІЗ/

залежить не тільки від відхилення $U_f(t)$, а й від збурення $f(t)$. Якщо $KП_f$ вибрати відповідним чином, то безпосередній вплив основного збурення $f(t)$ на ОК нейтралізує канал компенсації / $KП_f$, ОК/. Виконання умов компенсації фізично означає пригасовування цієї збурення $f(t)$ на об'єкт за допомогою розімкненого компенсаційного каналу, який створює рівний і супротивно напрямлений відносно вихідної координати $y(t)$ сигнал. Дію решти не таких важливих і безпосередньо не вимірюваних завад до певної міри пригасовує замкнений контур, що в ньому $KП_g$ формує складову $U_g(t)$, пропорційну відхиленню $\varepsilon(t)$.

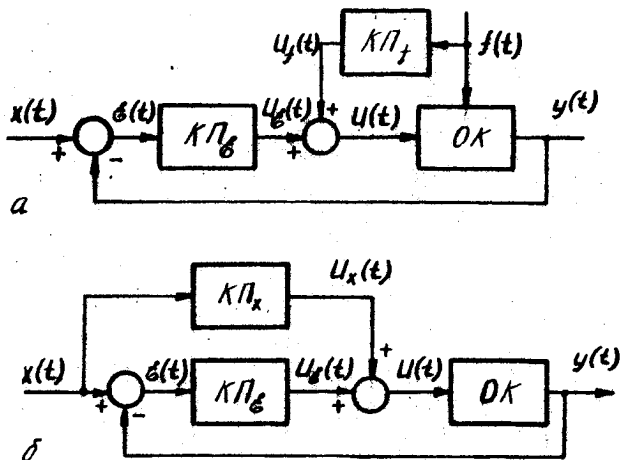


Рис. І.І2. Функціональні схеми комбінованих СКЕП: а - за збуренням $f(t)$; б - за задавальною дією $x(t)$

Прикладом комбінованої СКЕП може бути система стабілізації швидкості, обертання двигуна, котра являє собою поєднання схем на рис. І.3 і І.7. Компенсаційний зв'язок у повній системі за основним збуренням $M_{on}(t)$ виконує моментова муфта ММ /розімкнене коло/, а основний зворотний зв'язок - тахогенератор ТГ /замкнене коло/. Ураху-

вавши /I.5/, /I.10/ і /I.13/, дістанемо такий найпростіший алгоритм керування для комбінованої за збуренням $M_{on}(t)$ системи стабілізації швидкості $\omega(t)$:

$$U_{\Sigma}(t) = K_n [\omega_d - \omega(t)] + K_M M_{on}(t). \quad /I.14/$$

У комбінованій системі за задавальною дією /рис. I.12,б/ керування

$$U(t) = U_c(t) + U_x(t) \quad /I.15/$$

містить додаткову складову $U_x(t)$, що її виробляє $K\pi_x$ розімкненого кола, який вимірює задавальну дію і безпосередньо, поза колом зворотного зв'язку, керує об'єктом, грубо узгоджуючи вихідну величину $y(t)$ із вхідною $x(t)$. Похибки, котрі виникають під час керування за розімкненим циклом, вимірюються й перетворюються в керувальну напругу $U_c(t)$ для керування об'єктом за замкненим циклом. Більшої точності відтворення швидкозмінної задавальної дії $x(t)$ тут досягнуто завдяки спільній роботі грубої розімкненої й порівняно точної замкненої систем керування.

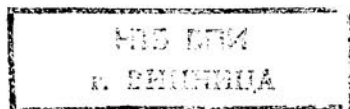
Коли в розглянутій системі /див. рис. I.12,б/ на об'єкт діє інтенсивна завада, яка зумовлює наявність значної складової похибки за задавою, то постає потреба створення додаткового розімкненого кола керування за збуренням, подібного до кола на рис. I.12,а. У цьому разі дія вихідної напруги $U_c(t)$ $K\pi_c$ може істотно компенсувати вплив основного збурення $f(t)$ на вихідну змінну $y(t)$. У комбінованій системі в даному випадку керувальна дія

$$U(t) = U_c(t) + U_x(t) + U_f(t) \quad /I.16/$$

реалізує алгоритм керування /I.12/.

Комбіновані системи поєднують переваги систем з керуванням за відхиленням і за збуренням, але технічно реалізувати їх важче, ніж замкнені системи, бо вони потребують створення додаткових розімкнених кіл керування /зокрема, вимірювачів зовнішніх збурювальних та задавальної дії/.

Ітераційні СКЕП. У комбінованій системі обидва канали керування - і розімкнений, і замкнений /керувальні пристрої $K\pi_x$ і $K\pi_c$ на рис. I.12/ - впливають на один і той самий ВП /в електромеханічних системах, наприклад, на двигун постійного струму з обмеженою потужністю/, що за форсованої зміни керування $U(t)$ не дозволяє розви-



вати відповідні швидкості й прискорення електропривода, а інерційність останнього призводить до запізнювання передавання керувальних дій. Ці обставини не завжди дають змогу реалізувати бажану зміну керуваної змінної $y(t)$, особливо у випадку швидкозмінної задавальної дії $x(t)$ та інтенсивних некомпенсованих завад як на ОК, так і на КЛ розімкненого й замкненого каналів. Подальшого підвищення точності можна досягти за допомогою багатоканальних ітераційних СКЕП, в яких процес відтворення задавальної дії $x(t)$ складається з послідовних наближень $y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, що їх реалізують відповідні канали. Алгоритм керування багатоканальною ітераційною системою описують такі рекурентні співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} u_k(t) &= \varphi[\varepsilon_{k-1}(t) - y_k^*(t)]; \\ \varepsilon_{k-1}(t) &= x(t) - y_{k-1}(t); \\ y_k(t) &= y_{k-1}(t) + y^*(t) \\ (k &= 1, 2, \dots, n); \\ \text{при } k=1 \quad y_0(t) &= 0, \quad \varepsilon_0(t) = x(t), \end{aligned} \right\} \quad /I.17/$$

де $u_k(t)$ і $y_k^*(t)$ - керувальна дія й вихідна змінна k -го каналу; $x(t)$ - задавальна дія; $y_k(t)$ - вихідна змінна ітераційної системи, яка містить перші k каналів.

Звичайно загальна кількість каналів n не перевищує трьох. На рис. I.13 зображено один з можливих варіантів побудови триканальної ітераційної системи, що відповідає алгоритмові послідовних наближень /I.17/. Тут $x_k^*(t)$ і $y_k^*(t)$ - відповідно вхідні й вихідні змінні кожного з каналів; $f_k(t)$ - завади, зведені до входу незмінної частини каналу /ОК/, $k = 1, 2, 3$. Перше наближення $y_1(t) = y_1^*(t)$ реалізує перший канал, на вхід якого надходить задавальна дія: $x_1^*(t) = x(t)$. Друге наближення $y_2(t)$ - другий канал, задавальною дією для якого є похибка першого каналу $x_2^*(t) = x(t) - y_1(t)$, а вихідна змінна $y_2(t)$ двоканальної системи дорівнює сумі вихідних змінних першого й другого каналів: $y_2(t) = y_1(t) + y_2^*(t)$. Третє наближення $y_3(t) = y_2(t) + y_3^*(t)$ реалізує третій канал, входом якого є похибка двоканальної системи $x_3^*(t) = x(t) - y_2(t)$. Звідси бачимо, що кожен k -й канал в ітераційній системі певною мірою компенсує похибки всіх попередніх каналів незалежно від фізичної природи їх виникнення /запізнювання передавання керувальних дій,

нелінійності, завади/. У двоканальному слідкувальному приводі перший /грубий/ канал розв'язує головним чином завдання необхідного підсилення за потужністю керувальної дії $u_1(t)$ і відтворення на виході $y_1(t)$ низькочастотних складових спектра задавальної дії $x(t)$. Другий /точний/ канал призначений для відтворення високочастотних складових спектра, що їх унаслідок обмежень не міг відтворити перший канал. Номінальна потужність силової частини цього каналу може становити близько 10% потужності грубого каналу, бо більша частина потужності передається звичайно на низьких частотах.

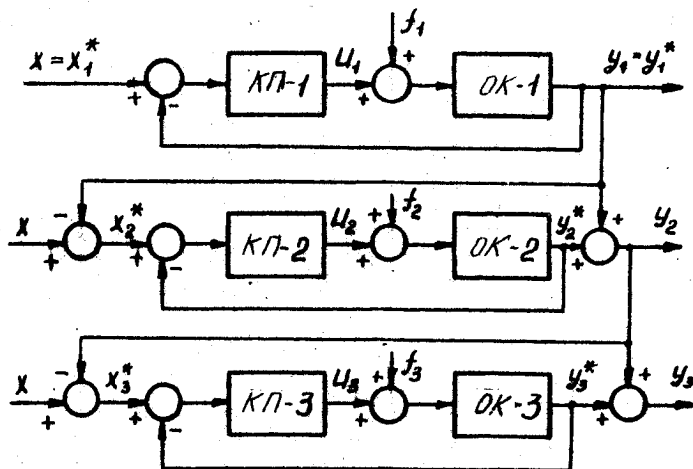


Рис. 1.13. Функціональна схема триканальної ітераційної СКЕП

Завдяки тому, що кожен наступний канал компенсує похибки попередніх, застосування ітераційних слідкувальних приводів дає змогу досягти високої точності відтворення швидкозмінної задавальної дії в разі наявності завад /наприклад, двоканальна система може мати похибку, на порядок меншу, ніж одноканальна/. Проте технічно реалізувати її набагато важче, бо треба мати кілька виконавчих та керувальних пристроїв.

І.4. Якість процесу керування

І.4.І. Якість процесу керування в перехідному режимі

Основною вимогою до процесу керування є збереження бажаної функціональної залежності між задавальною дією $x(t)$ і керованою змінною $y(t)$, тобто її алгоритму функціонування. АКП має забезпечити прийнятні значення похибки $\varepsilon(t) = x(t) - y(t)$ на різних інтервалах часу t .

Якщо в СКЕП використано контрольну дію $h(t)$ /див. рис. І.І/, то внаслідок наявності зворотного зв'язку в ній можуть виникнути незгадані коливання. Така система нестійка. Фізично стійкість – це властивість динамічної системи повертатися в початковий стан після усунення причин, які зумовили зміну цього стану. В стійкій системі коливання /вільні рухи внутрішніх змінних/, спричинені короткочасною збурювальною дією обмеженої величини, загасають. Стійкість є необхідною вимогою до якості процесу керування; нестійка система нероботоздатна. Необхідні й достатні умови стійкості, а також алгебричні й частотні критерії стійкості докладно вивчає курс "Теорія автоматичного керування".

Рівноважний стан, в який повертається стійка система з різних початкових станів, визначає її усталений режим. Процес зміни в часі внутрішніх змінних динамічної системи, що виникає, коли вона переходить з одного усталеного режиму в інший, називають перехідним.

У СКЕП узвичаєно розглядати перехідні процеси, зумовлені однією східчастою дією. Якщо початкові значення внутрішніх змінних нульові, то криву перехідного процесу називають перехідною функцією /характеристикою/ і звичайно позначають $h(t)$. Подробиці форм перехідного процесу не мають істотного значення, а його якість залежить від важливіших показників – тривалості й максимального динамічного відхилення. На рис. І.І4, а зображено графік коливної перехідної характеристики, коли задавальна дія змінюється стрибкоподібно:

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad /І.І8/$$

Тривалість перехідного процесу оцінюють за часом регулювання t_p , який дорівнює найменшому значенню часу, після якого регульована змінна $h(t)$ наближається до усталеного значення $h_{уст}$ [або $h(\infty)$] із заданим ступенем точності Δ :

$$|h(t) - h_{уст}| \leq \Delta$$

$$t > t_p, \quad /I.19/$$

де Δ - мала величина /котра становить 2-5% $h_{уст}$ /.

Максимальне динамічне відхилення дорівнює різниці $h_{max} - h_{уст}$ між найбільшим та усталеним значеннями перехідної характеристики; його відносне значення, подане у відсотках, називають перерегулюванням:

$$\sigma\% = \frac{h_{max} - h_{уст}}{h_{уст}} \cdot 100. \quad /I.20/$$

Щоб детальніше оцінити форму перехідної характеристики, запроваджують додаткові показники якості, наприклад кількість коливань перехідної характеристики N /кількість максимумів та мінімумів/ за час регулювання t_p , а також час першого угодження $t_{п.у}$ /рис. I.14/.

Коли до системи поставлено вимогу великої швидкості, то під час її проектування час регулювання t_p прагнуть зменшити до мінімуму. Для цього треба на початковому інтервалі часу підвищити швидкість $dh(t)/dt$. Але що вища ця швидкість, то далі за час $t_{п.у}$ /точка А/ пройде за інерцією система і дужче збільшиться h_{max} , а це може призвести до зростання t_p . Крім того, у випадку великих перерегулювань

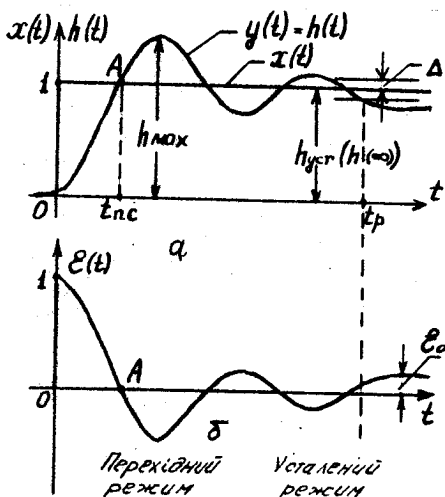


Рис. I.14. Графіки перехідного та усталеного режимів СКЕП у випадку стрибкуватої зміни задавальної дії: а - зміна в часі задавальної $x(t)$ й вихідної $y(t)$ дій; б - зміна в часі похибки $e(t)$

іноді виникають неприпустимо великі навантаження, наприклад, на електропвигун.

Звичайно рекомендують значення $\sigma = 10-30\%$; $N = 1-2$. Іноколи бажано мати процес без перерегулювання / $\sigma = 0$; $N = 0$ / , зокрема монотонний.

Неусталений режим роботи може спричинити також і збурювальна дія $f(t)$, у цьому разі його якість залежить від характеру перехідного процесу під час стрибкуваної зміни цієї дії /навантаження на ОК/.

1.4.2. Якість процесу керування в усталеному режимі

В усталеному режимі якість процесу керування оцінюють за усталеною похибкою, яку у випадку довільних детермінованих зовнішніх дій називають динамічною похибкою $\varepsilon_g(t)$. Практично можна вважати, що $\varepsilon_g(t)$ дорівнює $\varepsilon(t)$, коли $t > t_p$. Для заданої системи величина динамічної похибки залежить від вибраних законів зміни зовнішніх дій.

На рис. 1.14,б зображено зміну похибки $\varepsilon(t)$ під час стрибкуваної зміни задавальної дії та її значення ε_0 в усталеному режимі.

Статичним називають усталений режим у випадку сталих зовнішніх дій - задавальної й збурювальної: $x(t) = x_0 = const$; $f(t) = f_0 = const$, а відповідну похибку ε_0 - статичною. Статична похибка $\varepsilon_0 = x_0 - y_0$ - окремий випадок динамічної, коли зовнішні дії стали.

Для заданої системи статична похибка залежить, напевно, від величини зовнішніх дій x_0 і f_0 : $\varepsilon_0 = \varphi(x_0, y_0)$. Коли ця залежність лінійна, то

$$\varepsilon = S_x x_0 + S_f f_0, \quad /1.21/$$

де S_x і S_f - коефіцієнти пропорційності.

Статична похибка ε_0 складається з двох частин: ε_{0x} і ε_{0f} , зумовлених відповідно задавальною x_0 і заважальною f діями:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{0x} + \varepsilon_{0f}, \quad /1.22/$$

де $\varepsilon_{0x} = S_x x_0$; $\varepsilon_{0f} = S_f f_0$.

Коефіцієнти S_x і S_f , які визначають точність роботи системи в статичному режимі, називають статизмом системи відповідно за задавальною і за збурювальною діями.

СКЕП називають статичною за задавальною дією, коли в статичному режимі наявна похибка, що залежить від величини x_0 цієї дії / $S_x \neq 0$ / . Так само система є статична за збурювальною дією, коли статична похибка залежить від величини f_0 цієї дії / $S_f \neq 0$ / .

Далі буде доведено, що розглянутий регулятор швидкості /див. рис. 1.7/ є статичний як за керувальною дією ζ_f , так і за збуренням M_{op} .

СКЕП, в якій статична похибка за задавальною x_0 чи за збурювальною f_0 дією не залежить від величини останньої, називають астатичною за відповідною дією. В астатичній системі за задавальною дією статизм $S_x = 0$, а за збурювальною $S_f = 0$.

Для програмових та слідкувальних СКЕП як типову задавальну дію використовують стрибок не тільки за положенням /1.18/, а й за швидкістю, коли

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \Omega t, & t > 0. \end{cases} \quad /1.23/$$

На рис. 1.15 зображено графіки випрацювання $y(t)$ системою стрибка за швидкістю /1.23/ і похибки $\varepsilon(t) = \Omega t - y(t)$ у перехідному та усталеному режимах. Похибку в усталеному режимі у випадку лінійної змінної задавальної дії $x(t) = \Omega t$ й відсутності завад називають похибкою за швидкістю $\varepsilon_{\Omega x}$.

Якщо функція $x(t)$ змінюється із сталим прискоренням $d^2x(t)/dt^2 = a_0 = const$ і $d^3x(t)/dt^3 = 0$, то її можна зобразити у вигляді полінома другого порядку:

$$x(t) = x_0 + \Omega t + \frac{a_0 t^2}{2}. \quad /1.24/$$

Крім поліномних для аналізу динамічних похибок широко використовують апроксимацію вхідної дії гармонічним законом:

$$x(t) = X_m \sin \omega t. \quad /1.25/$$

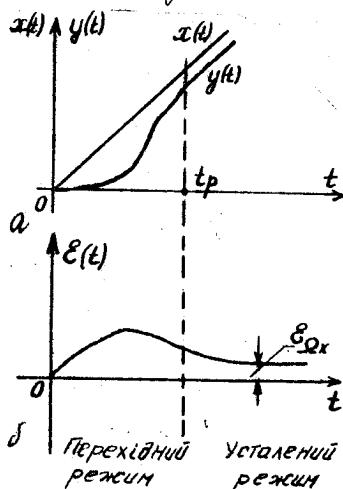


Рис. 1.15. Графіки перехідного й усталеного режимів СКЕП у випадку стрибкуватої зміни швидкості задавальної зміни: а - зміна в часі задавальної $x(t)$ і вихідної $y(t)$ дії; б - зміна в часі похибки $\varepsilon(t)$

У слідкувальному приводі в процесі обробки задавальної дії /I.25/ динамічна похибка $\varepsilon_{gx}(t)$ змінюватиметься також за періодичним законом, але максимальне її значення $\varepsilon_{gx\max}$ має бути набагато менше, ніж максимальне значення $x_{\max}$ задавальної дії, приміром не перевищувати 1%.

Якщо для основного збурення – навантаження $f(t)$ на ОК можна визначити типовий закон зміни, наприклад поліномний /I.24/ чи гармонійний /I.25/, то так само, як і попереду, вплив збурення $f(t)$ на якість процесу керування в усталеному режимі оцінюють за відповідною динамічною похибкою $\varepsilon_{gf}(t)$.

Зовнішні дії $x(t)$, $f(t)$, $\psi(t)$, як зазначалося попереду, не завжди можна описати детермінованими функціями часу, вони можуть мати загально непередбачуваний, випадковий характер. Зумовлені цими діями похибки $\varepsilon_x(t)$, $\varepsilon_f(t)$, $\varepsilon_\psi(t)$ також будуть випадковими функціями часу.

Динамічні похибки $\varepsilon_{gx}(t)$, $\varepsilon_{gf}(t)$, $\varepsilon_{g\psi}(t)$ являють собою середні значення /дії усереднення надалі позначатимемо ризикою вгорі/ випадкових похибок:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{gx}(t) &= \overline{\varepsilon_x(t)}, \\ \varepsilon_{gf}(t) &= \overline{\varepsilon_f(t)}, \\ \varepsilon_{g\psi}(t) &= \overline{\varepsilon_\psi(t)}. \end{aligned} \right\} \quad /I.26/$$

Тоді різниці

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_o(t) &= \varepsilon_x(t) - \varepsilon_{gx}(t), \\ \varepsilon_f(t) &= \varepsilon_f(t) - \varepsilon_{gf}(t), \\ \varepsilon_\psi(t) &= \varepsilon_\psi(t) - \varepsilon_{g\psi}(t) \end{aligned} \right\} \quad /I.27/$$

є "суто" випадкові процеси з нульовим середнім значенням. Звичайно $\varepsilon_{g\psi}(t) = 0$. Середні значення квадратів цих випадкових функцій

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ex}(t) &= \varepsilon_x^2(t), \\ \sigma_{ef}(t) &= \varepsilon_f^2(t), \\ \sigma_{e\psi}(t) &= \varepsilon_\psi^2(t) \end{aligned} \right\} \quad /I.28/$$

не дорівнюють нулю й характеризують у фіксований момент часу t міру розкиду випадкових складових похибок /I.27/ відносно динамічних похибок /I.26/:

$D_{\epsilon x}(t)$, $D_{\epsilon f}(t)$, $D_{\epsilon \psi}(t)$ - дисперсії похибок за корисним сигналом $x(t)$ і збуреннями $f(t)$, $\psi(t)$, в корінь з дисперсії

$$\sigma_{\epsilon x} = \sqrt{D_{\epsilon x}}, \quad \sigma_{\epsilon f} = \sqrt{D_{\epsilon f}}, \quad \sigma_{\epsilon \psi} = \sqrt{D_{\epsilon \psi}} \quad /I.29/$$

визначає середньоквадратичне значення похибок.

Дисперсії похибок /I.28/ визначають точність, з якою працює СКЕП, коли зовнішні дії не містять детермінованих складових. Якщо є і детерміновані, і випадкові складові, то мірою точності може бути величина сумарної похибки

$$\sigma_{\Sigma}(t) = \sqrt{\epsilon_A^2(t) + \sigma_{\epsilon}^2(t)}, \quad /I.30/$$

де $\epsilon_{\phi}(t)$ - динамічна похибка, зумовлена детермінованими складовими; $\sigma_{\epsilon}(t)$ - дисперсія похибки, зумовлена випадковими складовими зовнішніх дій $x(t)$, $f(t)$, $\psi(t)$.

Сумарна похибка $\epsilon_{\Sigma}(t)$ характеризує якість процесу керування в усталеному режимі, і в цьому розумінні що менша сумарна похибка, то краща якість системи.

Сукупність показників якості процесу керування в перехідному й усталеному режимах значною мірою визначає якість функціонування СКЕП.

Розрахунок динамічних похибок, поданих через коефіцієнти похибок та коефіцієнти передавної функції розімкненої системи, як і розрахунок середньоквадратичних похибок через задану спектральну щільність завади й коефіцієнти квадратів амплітудно-частотної характеристики замкненої системи аналітичним та графоаналітичним методом, було вивчено в курсі ТАК [17].

Розділ 2. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС СИСТЕМ КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДАМИ

2.1. Вступні зауваження

Сучасні методи математичного опису СКЕП ґрунтуються на двох способах зображення процесів у системах і самих систем - у змінних вхід-вихід і в змінних стану.

Зображення в змінних вхід-вихід ґрунтується на описі як елементів, так і систем загалом диференціальними рівняннями й передавними та частотними характеристиками, що відповідають цим рівнянням. Методи дослідження СКЕП, які ґрунтуються на використанні передавних та час-

тотних характеристик, зараз добре розроблено в інженерній практиці і, крім того, добре пов'язано з фізичною інтерпретацією явищ, котрі відбуваються в системах під час керування. Але математичний опис СКЕП у змінних вхід-вихід має й істотні обмеження, здебільшого пов'язані з поняттями керованості й спостережуваності, котрих не враховує цей спосіб.

Опис систем у змінних стану роблять системою диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно перших похідних, тобто рівнянь у нормальній формі Коші. Таку систему диференціальних рівнянь, записану у векторно-матрицевій формі, звичайно називають рівняннями стану. Цей спосіб не має попереднього обмеження, притаманного описові систем у змінних вхід-вихід. Бажливою перевагою способу змінних стану є те, що його добре пристосовано до дослідження СКЕП за допомогою ЕОМ, і зокрема персональних комп'ютерів, а також те, що з його допомогою можна одержати одноманітні методи математичного аналізу й синтезу систем керування.

2.2. Математичний опис систем керування електроприводами в змінних вхід-вихід

2.2.1. Основні означення й поняття

Є два види рівнянь систем автоматичного керування: рівняння статистики й рівняння динаміки.

Рівняння статистики описують фізичні процеси в системах в установлених режимах за сталих зовнішніх дій. Звичайно ці рівняння є алгебричними. Вони визначають зв'язок як між вихідними та вхідними величинами окремих елементів, що утворюють систему, так і між вихідними та вхідними величинами всієї системи. З рівнянь статистики замкненої системи можна знайти, зокрема, статичну похибку системи.

Рівняння динаміки описують фізичні процеси в системах як в установлених, так і в перехідних режимах за будь-яких зовнішніх дій. Ці рівняння звичайно є диференціальними, інтегрально-диференціальними чи різницевими. Вони пов'язують між собою вихідні та вхідні величини, їх похідні /різниці/ та інтеграли /суми/ як для окремих елементів, так і для системи загалом. З рівнянь динаміки можна визначити всі оцінки, які характеризують систему в перехідному й установлених режимах, зокрема стійкість, точність і якісні показники перехідного процесу системи.

Коли припустити, що всі похідні в рівняннях динаміки дорівнюють нулю, то вони перетворюються на рівняння статички. Це саме можна сказати й про рівняння динаміки, котре зв'язує вихід зі входом системи і містить, крім похідних вихідної величини, і саму її. Коли ж вихідної дії рівняння динаміки безпосередньо не містить, а лише її похідні різного порядку, то для одержання з нього рівняння статички треба припустити, що всі похідні дорівнюють нулеві, крім похідної вихідної ції найнижчого порядку. В цьому разі рівняння статички визначає зв'язок між цією похідною та вхідною цією.

2.2.2. Лінеаризація диференціальних рівнянь

Звичайно диференціальні рівняння елементів і СКЕП є нелінійні, розв'язати які дуже важко, а іноді й зовсім неможливо. Тому зазвичай одержане диференціальне рівняння зводять до лінійного.

Лінеаризація диференціальних рівнянь – це заміна нелінійних рівнянь лінійними. Є кілька методів лінеаризації.

Розглянемо метод, який ґрунтується на розкладанні нелінійних рівнянь у ряд Тейлора. Припустимо, що в досліджуваному динамічному процесі змінні, наприклад $x(t)$ і $y(t)$, які його характеризують, змінюються так, що їх відхилення $\Delta x(t)$ і $\Delta y(t)$ від робочої точки, описуваної сталими, наприклад номінальними, значеннями x_0 і y_0 , залишаються весь час досить малими /рис. 2.1/. Достатня мала величина відхилень змінних від ustalених значень СКЕП звичайно притаманна, бо цього потребує сам принцип побудови замкненої системи /принцип керування за відхиленням/.

Нехай властивості досліджуваної системи описує нелінійне рівняння виду

$$F[x(t), y(t), \dot{x}(t)] = 0 \quad /2.1/$$

Якщо нелінійна функція F в цьому рівнянні є аналітична /тобто неперервна й нескінченно диференційовна/ в околі робочої точки з координатами $x(t)$, $y(t)$, $\dot{x}(t)$, котрі відповідають ustalеному режимові, то /2.1/ лінеаризують в такій послідовності:

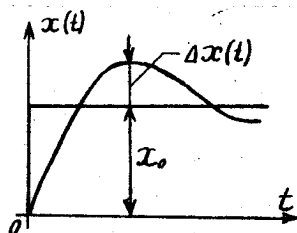


Рис. 2.1. Характер зміни змінної $x(t)$ відносно ustalеного значення x_0

а/ змінні $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ заміняють їхніми відхиленнями $\Delta x(t)$, $\Delta y(t)$, $\Delta z(t)$ і ustalеними /сталими/ значеннями x_0 , y_0 , z_0 , тобто

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_0 + \Delta x(t), \\ y(t) &= y_0 + \Delta y(t), \\ z(t) &= z_0 + \Delta z(t); \end{aligned} \right\} \quad /2.2/$$

б/ нелінійну функцію F розвивають у ряд Тейлора за степенями відхилень $\Delta x(t)$, $\Delta y(t)$, $\Delta z(t)$ в околі їхніх значень, які відповідають ustalеному режимові;

в/ відкидають від одержаного рівняння почленно рівняння ustalеного режиму:

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0; \quad /2.3/$$

г/ відкидають члени вищого порядку мализни, які складаються з добутоків і степенів з відповідними коефіцієнтами.

Таким чином, замість нелінійного рівняння /2.1/ дістали лінійне

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 \Delta x(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \Delta y(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0 \Delta z(t), \quad /2.4/$$

де $\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0$ позначено частинні похідні функ-

ції F , взяті для $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$, $z(t) = z_0$. Практично для того, щоб узяти кожен з частинних похідних, які містить рівняння /2.1/, треба здиференціювати функцію F по відповідній змінній і потім підставити сталі значення всіх інших змінних, зокрема і тисів, по якій виконували диференціювання.

Рівняння /2.4/ називають рівнянням у відхиленнях або у варіаціях. Від початкового воно відрізняється за такими ознаками:

воно є наближене, бо під час його виведення було відкинута члени вищого порядку мализни;

у ньому невідомими функціями є відхилення $\Delta x(t)$, $\Delta y(t)$, $\Delta z(t)$ замість повних змінних $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$;

воно є лінійне рівняння із сталими коефіцієнтами або рівняння із змінними коефіцієнтами, коли початкове рівняння /2.1/ містить явно час t або коли ustalений процес характеризують змінні в часі значення $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$ /програмова траєкторія/.

Демо геометричну інтерпретацію викладеного попереду способу лінеаризації. На рис. 2.2 зображено залежність F від $x(t)$, коли

$y(t) = y_0$, $z(t) = z_0$, у вигляді кривої AC . Тоді тангенс кута нехилу дотичної AB у точці A з координатами $x(t) = x_0$

$$F = F_0 = F(x_0, y_0, z_0)$$

порівнюватиме частинний похідний функції F по змінній $x(t)$:

$$\tan \alpha = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 \quad 12.5/$$

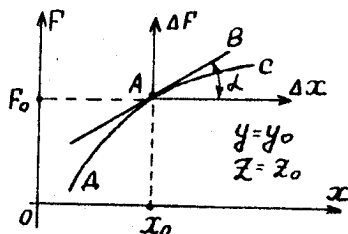


Рис. 2.2. До питання про геометричну інтерпретацію лінеаризації рівнянь

Порівнявши перший член лінеаризованого рівняння /2.4/ з рівнянням /2.5/, бачимо, що лінеаризацію нелінійного рівняння /2.1/ геометрично можна інтерпретувати як перехід від кривої AC до прямої AB , а заміна $x(t) = x_0 + \Delta x(t)$ на $\Delta x(t)$ й вилучення з розгляду рівняння усталеного режиму /2.3/ відповідає перенесенню початку координат у робочу точку A усталеного режиму /рис. 2.2/. З цього самого рисунка також випливає, що чим менші величини відхилень $\Delta x(t)$, з якими мають справу в досліджуваному динамічному процесі, тим точніше лінеаризоване рівняння описує процеси, що їх відбиває початкове рівняння. Лінеаризацію робити неприпустимо тоді, коли елемент має істотно нелінійну статичну характеристику, наприклад релейну, бо вона в цьому випадку означатиме спотворення принципу роботи цього елемента.

Лінеаризуючи, наприклад, нелінійне диференціальне рівняння

$$F[x(t), \dot{x}(t), y(t), \dot{y}(t)] = 0, \quad 12.6/$$

похідні $\dot{x}(t)$ та $\dot{y}(t)$ треба розглядати як самостійні змінні. Тоді лінеаризація відносно робочої точки з координатами $x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0$ лінійного диференціального рівняння матиме вигляд

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \frac{d\Delta y(t)}{dt} + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \Delta y(t) = - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_0 \frac{d\Delta x(t)}{dt} - \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 \Delta x(t). \quad 12.7/$$

З викладеного випливає, що лінеаризацію можна виконувати аналітичним способом, коли нелінійне рівняння задано аналітично, і графічним - коли нелінійну функцію задано графічно.

Приклад 2.1. Лінеаризувати рівняння, що визначає обертальний момент двигуна постійного струму.

Відомо, що цей момент

$$M_d(t) = c I_d(t) \Phi(t), \quad /2.8/$$

де c - конструктивна стала; $I_d(t)$ - струм якірного кола; $\Phi(t)$ - магнітний потік полюсів.

Рівняння /2.8/ нелінійне, бо містить добуток змінних $I_d(t)\Phi(t)$. Так само, як і /2.1/, його можна записати так:

$$F[M_d(t), I_d(t), \Phi(t)] = M_d(t) - c I_d(t) \Phi(t) = 0. \quad /2.9/$$

Відповідно до формули /2.4/

$$\left(\frac{\partial F}{\partial M_d}\right)_0 \Delta M_d(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial I_d}\right)_0 \Delta I_d(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial \Phi}\right)_0 \Delta \Phi(t). \quad /2.10/$$

Згідно з /2.8/

$$\left(\frac{\partial F}{\partial M_d}\right)_0 = 1, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial I_d}\right)_0 = -c\Phi_0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \Phi}\right)_0 = -cI_{d0}, \quad /2.11/$$

де I_{d0} і Φ_0 - усталені, наприклад номінальні, значення відповідно струму й магнітного потоку двигуна.

Підставивши вирази /2.11/ у /2.10/, дістанемо лінійне рівняння у варіаціях

$$\Delta M_d(t) - c\Phi_0 \Delta I_d(t) - cI_{d0} \Delta \Phi(t) = 0. \quad /2.12/$$

2.2.3. Запис диференціальних рівнянь в операторній формі

У загальному вигляді рівняння лінійної /або лінеаризованої; знай Δ біля змінних $x(t)$ і $y(t)$ пропускаємо/ СКЕП із сталими параметрами, яке визначає реакцію системи $y(t)$ на вхідну дію $x(t)$, можна записати так:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t), \quad /2.13/$$

де a_i та b_j - сталі коефіцієнти, що залежать від параметрів системи.

Рівняння динаміки зручно записувати в операторній /символічній/ формі, запровадивши оператор диференціювання:

$$\mathcal{D} = \frac{d}{dt}, \quad \mathcal{D}^2 = \frac{d^2}{dt^2}, \dots, \mathcal{D}^n = \frac{d^n}{dt^n}. \quad /2.14/$$

Такий запис означає виконання над функціями $y(t), x(t), \dots$, на які діє оператор $\mathcal{D}$, відповідних операцій диференціювання:

$$\mathcal{D}y(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \quad \mathcal{D}^2 y(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \dots; \quad \mathcal{D}x(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \dots$$

Тоді

$$\mathcal{D}^{-1} = \frac{1}{\mathcal{D}} \quad /2.15/$$

являтиме собою оператор інтегрування

$$\mathcal{D}^{-1} y(t) = \frac{1}{\mathcal{D}} y(t) = \int y(t) dt, \dots; \quad \mathcal{D}^{-1} x(t) = \int x(t) dt.$$

Треба мати на увазі, що властивість комутативності у випадку дії операторів на функції часу не має сенсу. Тому потрібно писати, наприклад, $\mathcal{D}x(t)$, бо вираз $x(t)\mathcal{D}$ беззмисловий.

Використовуючи символ $\mathcal{D}$, запишемо /2.13/ у символічній формі:

$$(a_n \mathcal{D}^n + a_{n-1} \mathcal{D}^{n-1} + \dots + a_1 \mathcal{D} + a_0) y(t) = (b_m \mathcal{D}^m + b_{m-1} \mathcal{D}^{m-1} + \dots + b_0) x(t). \quad /2.16/$$

або

$$A(\mathcal{D}) y(t) = B(\mathcal{D}) x(t), \quad /2.17/$$

це

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= a_n \omega^n + a_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + a_0, \\ B(\omega) &= b_m \omega^m + b_{m-1} \omega^{m-1} + \dots + b_0. \end{aligned} \right\} \quad /2.18/$$

Оператори /2.18/, які застосовують до функцій $y(t)$ і $x(t)$, є лінійні диференціальні оператори. Формально розв'язуючи рівняння /2.17/ відносно $y(t)$, дістаємо

$$y(t) = \frac{B(\omega)}{A(\omega)} x(t) \quad /2.19/$$

або

$$y(t) = K(\omega) x(t), \quad /2.20/$$

де $K(\omega)$ – оператор лінійної динамічної СКЕП із сталими параметрами, що являє собою дробово-раціональну функцію символу ω і параметрів системи:

$$K(\omega) = \frac{B(\omega)}{A(\omega)} = \frac{b_m \omega^m + b_{m-1} \omega^{m-1} + \dots + b_0}{a_n \omega^n + a_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + a_0} \quad /2.21/$$

Операторний запис диференціальних рівнянь часто використовують, зокрема у випадку згортання системи диференціальних рівнянь до одного рівняння, дослідження динамічних властивостей СКЕП із змінними параметрами і систем, котрі зазнають впливу випадкових дій.

2.2.4. Запис диференціальних рівнянь у зображеннях за Лапасом.

Передавна функція системи керування електроприводом

Зрівнюючи перетворення Лапласа з кожним членом правої та лівої частин диференціального рівняння /2.13/ і вважаючи початкові умови нульовими [до моменту прикладення дії система перебуває в спокої, а отже, $y(-0) = 0$, $\dot{y}(-0) = 0$, ..., $y^{(n-1)}(-0) = 0$], одержуємо таке алгебричне рівняння в зображеннях за Лапасом:

$$\begin{aligned} (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) y(p) &= \\ = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) x(p) \end{aligned} \quad /2.22/$$

$$A(\rho)y(\rho) = B(\rho)x(\rho), \quad /2.23/$$

де $\rho = \sigma + j\omega$ - комплексна змінна,

$$A(\rho) = \sum_{i=0}^n a_i \rho^i;$$

$$B(\rho) = \sum_{j=0}^m b_j \rho^j.$$

Передавною функцією лінійної системи із сталими параметрами, як відомо, називають відношення зображення $y(\rho)$ вихідної величини $y(t)$ до зображення $x(\rho)$ вхідної $x(t)$ за нульових початкових умов, тобто

$$K(\rho) = \frac{y(\rho)}{x(\rho)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j \rho^j}{\sum_{i=0}^n a_i \rho^i}. \quad /2.24/$$

Отже, передавна функція лінійної стаціонарної системи /елемента/ являє собою дробово-раціональну функцію комплексної змінної ρ . Вона повністю відображає тільки внутрішні динамічні властивості системи, що їх характеризують коефіцієнти підсилення, сталі часу та інші параметри /через коефіцієнти диференціального рівняння a_i, b_j / за нульових початкових умов, і не залежить від виду вхідної дії $x(t)$.

Коли відомі /визначені/ ρ_i - полюси і q_j - нулі передавної функції $K(\rho)$, які відповідають кореням рівняння $A(\rho) = 0$ та $B(\rho) = 0$, то тоді вираз /2.24/ можна записати у вигляді.

$$K(\rho) = \frac{B(\rho)}{A(\rho)} = \frac{b_m \sum_{j=0}^m (\rho - q_j)}{a_n \sum_{i=0}^n (\rho - \rho_i)}. \quad /2.25/$$

Припускають, що поліноми $A(\rho)$ та $B(\rho)$ не мають спільних коренів і дріб /2.25/ скоротити не можна.

Знаючи передавну функцію системи, можна знайти реакцію останньої $y(t)$ на дію $x(t)$ у загальному випадку довільного виду. Для цього треба спочатку знайти зображення $y(\rho) = K(\rho)x(\rho)$, а потім будь-яким відомим способом перейти до оригіналу $y(t)$.

Порівнявши вирази /2.17/ та /2.23/, бачимо, що записи рівнянь в операторній формі і в зображеннях за Лапласом збігаються за видом, коли перетворення Лапласа визначене для нульових початкових умов. Можна легко перейти від одного запису до іншого, замінивши символи $\rho = \mathcal{D}$ і $\rho^* = \mathcal{D}^*$. Проте ці рівняння так само, як оператор /2.21/ і передавна функція /2.24/, дуже відрізняються одне від одного, оскільки поняття оператора має ширший зміст, бо слушне і для нульових, і для ненульових початкових умов досліджуваної системи.

2.2.5. Структурні схеми систем керування електроприводами

Структурну схему СКЕП одержують з функціональної, коли в ній замість функціонального призначення окремих елементів, які утворюють систему, записати оператори чи передавні функції цих елементів. Кожна структурна схема складається з таких чотирьох груп елементів: суматорів /елементів порівняння/, в яких додаються чи віднімаються два або кілька сигналів; динамічних блоків напрямленої дії, що їх характеризують оператори чи передавні функції; точок розгалуження, в яких сигнал розгалужується на кілька до різних точок системи; зв'язків, або ліній, що вказують на напрям проходження сигналів /рис. 2.3/.

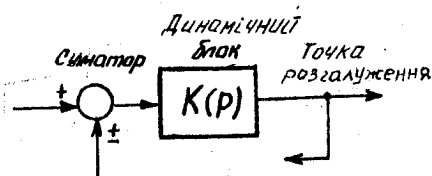


Рис. 2.3. Елементи структурної схеми

Структурна схема відбиває тільки динамічні властивості системи. Одній і тій самій структурній схемі може відповідати велика кількість функціональних схем з різними функціональними елементами, різним фізичним принципом їх роботи і різною конструкцією. Протилежне твердження невір-

не – конкретному фізичному пристроєві чи схемі відповідає тільки одна передавна функція і одна структурна схема, хоча останню графічно можна зобразити по-різному.

Побудовою структурної схеми закінчується найбільш трудомісткий процес формалізації /математичного опису/ СКЕП.

Приклад 2.2. На рис. 2.4 зображено структурну схему привода з одиничним зворотним зв'язком. На цій схемі використано такі позначення: $x(p)$, $y(p)$ і $f(p)$ – зображення відповідно вхідної, вихідної й збу-

рувальної дії; $R(p) = Z(p)/E(p) = B_1(p)/A_1(p)$ і $G(p) = Y(p)/Z_1(p) = B_2(p)/A_2(p)$ - передавні функції динамічних блоків. Треба визначити, користуючись цією схемою, передавні функції за керувальною $x(p)$ і збурювальною $f(p)$ ціями й накреслити відповідні структурні схеми, якщо

$$B_1(p) = K_1; \quad B_2(p) = K_2; \quad A_1(p) = (T_1 p + 1); \quad A_2(p) = T_2 p.$$

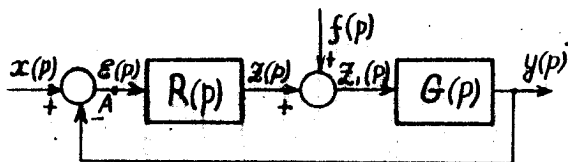


Рис. 2.4. Структурна схема привода з одним зв'язком.

Розв'язання. Передавні функції за керувальною дією /визначають за умови, що $f(p) = 0$ /:
розімкненої системи

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{y(p)}{x(p)} = R(p)G(p) = \frac{B_1(p)B_2(p)}{A_1(p)A_2(p)} = \\ &= \frac{K_1 K_2}{T_2 p (1 + T_1 p)} = \frac{K_v}{p} \cdot \frac{1}{T_1 p + 1}, \end{aligned} \quad /2.26/$$

замкненої системи

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{R(p)G(p)}{1 + R(p)G(p)} = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \\ &= \frac{B_1(p)B_2(p)}{A_1(p)A_2(p) + B_1(p)B_2(p)} = \frac{K_1 K_2}{T_1 T_2 p^2 + T_2 p + K_1 K_2} = \\ &= \frac{K_v}{T_1 p^2 + p + K_v}; \end{aligned} \quad /2.27/$$

замкненої системи за похибкою

$$E(p) = \frac{E(p)}{x(p)} = \frac{1}{1+R(p)G(p)} = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{A_1(p)A_2(p)}{A_1(p)A_2(p)+B_1(p)B_2(p)} =$$

$$= \frac{T_2\rho(1+T_1\rho)}{T_1T_2\rho^2+T_2\rho+K_1K_2} = \frac{\rho(1+T_1\rho)}{T_1\rho^2+\rho+K_v}, \quad /2.28/$$

де $K_v = K_1K_2/T_2$, c^{-1} .

Передавні функції за збурувальною дією /визначають за умови, що $x(p) = 0$;

розімкненої системи /розмикання зроблено в точці А; див. рис. 2.4/

$$W_f(p) = \frac{y(p)}{f(p)} = G(p) = \frac{B_2(p)}{A_2(p)} = \frac{K_2}{T_2\rho}; \quad /2.29/$$

замкненої системи

$$\Phi_f(p) = \frac{y(p)}{f(p)} = G(p) \frac{1}{1+R(p)G(p)} = G(p) \frac{1}{1+W(p)} =$$

$$= \frac{B_2(p)A_1(p)}{A_1(p)A_2(p)+B_1(p)B_2(p)} = \frac{K_2(1+T_1\rho)}{T_1T_2\rho^2+T_2\rho+K_1K_2}. \quad /2.30/$$

Структурні схеми СКЕП, які відповідають передавним функціям за керувальною дією /2.26/, /2.27/ і /2.28/, зображено на рис. 2.5, а схеми, що відповідають передавним функціям за збурувальною дією /2.29/ і /2.30/, - на рис. 2.6.

2.2.6. Частотні методи дослідження систем керування електроприводами

Досліджуючи СКЕП частотними методами, на її вхід подають гармонійний сигнал, наприклад синусоїдний $x(t) = X \sin \omega t$, частота якого ω змінюється від 0 до ∞ . Оскільки розглядають лінійну систему /ланку/, то в усталеному режимі вихідний сигнал також матиме синусоїдну форму і відрізнятиметься від вхідного амплітудою та фазою, тобто $y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi)$. За видом законів зміни амплітуди Y і фази φ вихідного сигналу порівняно з амплітудою X та фазою /звичайно порів-

ноє нулеві/ вхідного сигналу під час зміни частоти ω і роблять висновки про динамічні властивості системи. Щоб одержати аналітичний вираз частотних характеристик, треба в передавній функції /або в операторі/ замінити комплексну змінну $p = \sigma + j\omega$ значенням $p = j\omega$, тобто

$$K(p) \Big|_{p=j\omega} = K(j\omega). \quad /2.31/$$

Вираз /2.31/, як відомо, звичайно називають амплітудно-фазовою характеристикою /різше комплексною передавною функцією/. Для кожного значення частоти ω $K(j\omega)$ є комплексне число, а коли ω змінюється - комплексна функція, яку можна записати в декартовій чи в показниковій формі:

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= P(\omega) + jQ(\omega) = \\ &= \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} e^{j \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}} = \\ &= K(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad /2.32/ \end{aligned}$$

де $P(\omega) = \operatorname{Re} K(j\omega)$ - дійсна частотна характеристика; $Q(\omega) = \operatorname{Im} K(j\omega)$ - уявна частотна характеристика; $K(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = |K(j\omega)|$ -

амплітудно-частотна характеристика; $\varphi(\omega) = \operatorname{arg} K(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$ - фазочастотна характеристика.

Зазначимо, що заміна $p = \sigma + j\omega$ значенням $p = j\omega$ з погляду математики означає перехід від перетворення Лапласа до перетворення Фур'є, а годограф $K(j\omega)$ являє собою відображення уявної осі комплексної площини на комплексну площину

$$K(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega).$$

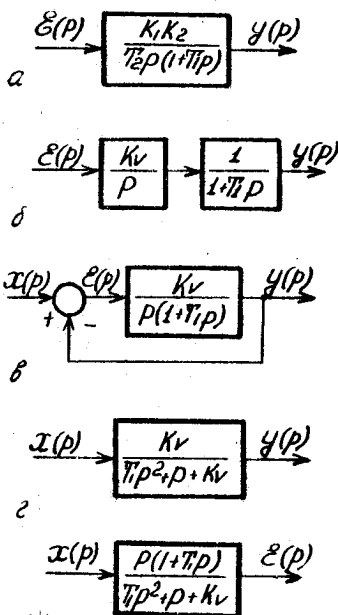


Рис. 2.5. Структурні схеми СКЕП за керувальною дією /до прикладу 2.2/: а, б - розімкненої системи; в, г - замкненої системи; д - замкненої системи за похибок

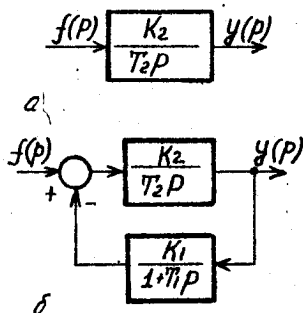


Рис. 2.6. Структурні схеми СКЕП за збурювальною дією /по прикладу 2.2/: а - розімкнена система; б - замкнена

Крім звичайних частотних характеристик $\kappa(j\omega)$, $\kappa(\omega)$, $\varphi(\omega)$ для дослідження СКЕП широко використовують логарифмічні: амплітудно-частотну /ЛАЧХ/, дБ:

$$L(\omega) = 20 \lg \kappa(\omega)$$

і фазочастотну $\varphi(\omega)$, яку будують за відповідним аналітичним виразом у логарифмічному масштабі.

Частотні методи дослідження якості систем керування на підставі використання звичайних і логарифмічних характеристик вивчає курс "Теорія автоматичного керування", і ми їх не розглядатимемо.

2.3. Математичний опис систем керування електроприводами в змінних стану

2.3.1. Основні означення й поняття

Метод змінної стану ґрунтується на понятті стану. Розглянемо лінійну стаціонарну систему з одним входом $u(t)$ і одним виходом $y(t)$. Її динамічні властивості описують лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку із сталими коефіцієнтами виду /2.13/. Щоб його розв'язати, треба задати n початкових значень /умов/:

$$y(t_0) = y(0); \dot{y}(t_0) = \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y^{(n-1)}(0).$$

Початкові умови визначають подальший рух системи. Тому їх можна розглядати як характеристику стану системи в початковий момент часу $t = t_0$.

Стан системи в момент часу t_0 - такий мінімальний набір відомостей про поведінку системи, інформації котрого разом з певною вхідною функцією $u(t)$, заданою для інтервалу часу $t_0 \leq t \leq t_k$, досить для однозначного знаходження єдиної вихідної функції $y(t)$ для $t_0 \leq t \leq t_k$ за будь-якого $t_k \geq t_0$.

Для характеристики стану системи запроваджують сукупність змінних $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)$, початкові значення яких $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ і вхідна дія $u(t)$ дають змогу однозначно знайти майбутній рух динамічної системи. Ці змінні й називають змінними стану.

У кожен момент часу t стан системи, що має m виходів і z виходів /багатовимірна система/, який характеризують змінні стану $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ /рис. 2.7/, є функцією початкового стану $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ і вхідних дій $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$:

$$x_i(t) = \psi_i [x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0);$$

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)],$$

де ψ_i - однозначні функції своїх аргументів, $i = 1, 2, \dots, n$.

Стан системи в момент часу t звичайно характеризують за допомогою вектора стану $x(t)$ із залежними від часу змінними стану $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$:

$$x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T, \quad /2.33/$$

де T - транспоновані матриці.

Множину всіх значень, що їх може набути вектор $x(t)$ у момент часу t , називають простором стану /фазовим простором/, котрий можна розглядати як певний абстрактний n -вимірний векторний простір. Точку, що визначає положення кінця вектора стану $x(t)$ у просторі стану, називають зображенням. Рух кінця вектора стану $x(t)$ у просторі станів називають траєкторією вектора стану /фазовою траєкторією/.

Вимірність вектора стану збігається з порядком диференціального рівняння, яке описує динамічні властивості системи.

Стан системи, що її описує диференціальне рівняння першого порядку, характеризує вектор стану з однією змінною стану. Фазовий простір у цьому разі називають одновимірним, і він являє собою лінію на площині, а фазова траєкторія - відрізок цієї прямої /рис. 2.8, а/, що його описує кінець вектора стану від значення $x(t_0)$ в початковий момент часу $t = t_0$ до значення $x(t_k)$ у кінцевий момент часу $t = t_k$. Стан системи другого порядку характеризує вектор стану з двома змінними $x_1(t)$ і $x_2(t)$. Фазовий простір у цьому випадку називають

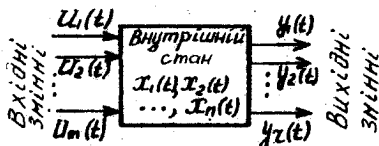


Рис. 2.7. Зображення багатовимірної системи в змінних стану

вають двовимірним, і він являє собою площину з прямокутними координатами x_1 і x_2 , а фазова траєкторія - крива на площині, що її описує кінець вектора стану $x(t)$ у процесі зміни часу від $t = t_0$ до $t = t_n$ /рис. 2.8,б/. На рис. 2.8,в зображено фазову траєкторію в три-вимірному фазовому просторі із системою координат x_1, x_2, x_3 і положення вектора стану $x(t_n)$ для певного моменту часу $t = t_n$. Три-вимірний фазовий простір використовують для характеристики рухів системи третього порядку. Для систем n -го порядку змінні стану $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ розглядають як координати вектора стану $x(t)$ у n -вимірному фазовому просторі, в який введено систему координат $x_1, x_2, \dots, x_n$.

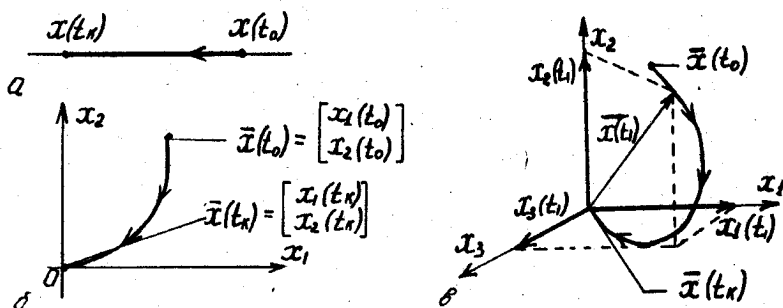


Рис. 2.8. Фазовий простір і фазові траєкторії системи, яку описують диференціальні рівняння першого /а/, другого /б/ і третього /в/ порядків

За аналогією з простором станів для багатовимірної системи керування запроваджують простір керувань /входів/ і простір виходів, розглядаючи керувальні дії $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ і вихідні /керувані/ координати $y_1(t), y_2(t), \dots, y_z(t)$ відповідно як координати вектора керування $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T$ у m -вимірному просторі і координати вектора виходу $y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_z(t)]^T$ у z -вимірному просторі.

Треба сказати про принципову відмінність у змістах таких понять, як вектори керування /входу/ $u(t)$, виходу $y(t)$ і вектор стану $x(t)$. Усі складові двох перших - це конкретні фізичні величини, а третій - це деяка в загальному випадку абстрактна характеристика системи.

Не відіграє ролі, яку фізичну природу мають змінні стану /фазові координати/. Вони залежать від вибору базису, що являє собою сукупність лінійно незалежних векторів, наприклад векторів одичинної довжини, напрямлених уздовж взаємно перпендикулярних осей n -вимірного векторного простору R_n , тобто сукупність ортів. Замінивши базис, можна запровадити нові змінні стану. Тому є досолі велика кількість способів вибору змінних стану. Звичайно користуються лише деякими з них: або тими, котрі надають перевагу в дослідженні математичної моделі системи, або ті, які мають зрозумілий фізичний зміст.

Коли на систему діють завади, що їх характеризує вектор завад $f(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_\ell(t)]^T$, то в цьому разі запроваджують ℓ -вимірний простір завад.

2.3.2. Рівняння стану

Аби зв'язати послідовні стани системи в часі, припустимо, що похідна $dx_i(t)/dt = \dot{x}_i(t)$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$ залежить тільки від поточного стану системи і не залежить від передісторії станів. Це просте припущення дає змогу описати динамічну систему диференціальними рівняннями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \varphi_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t); t], \\ \dot{x}_2(t) &= \varphi_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t); t], \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= \varphi_n[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t); t]. \end{aligned} \right\} / 2.34/$$

Праві частини цих рівнянь залежать від шуканих функцій $x_i(t)$ і не залежать від їхніх похідних. Систему рівнянь першого порядку виду /2.34/ називають системою n диференціальних рівнянь, записаною в нормальній формі Коші.

У загальному випадку кількість виходів /див. рис. 2.7/ $y_r(t)$, $y_z(t), \dots, y_z(t)$ не залежить від кількості n змінних стану, здебільшого останніх набагато більше, а надто від кількості керованих вихідних змінних. Знаючи змінні стану, можна знайти кожен з вихідних сигналів $y_i(t)$ як деяку функцію g_z від змінних стану й виходів:

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= g_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t); t], \\ y_2(t) &= g_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t); t], \\ &\vdots \\ y_l(t) &= g_l[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t); t]. \end{aligned} \right\} / 2.35$$

і $g_1, g_2, \dots, g_r$ - є однозначні.

Сукупність рівнянь /2.34/ і /2.35/ визначає стан динамічної системи, і її називають рівняннями стану.

У загальному випадку і диференціальні /2.34/, і алгебричні /2.35/ рівняння є нелінійні. Надалі припускатимемо, що їх лінеаризовано і що вони, крім того, описують динамічні процеси в детермінованих стаціонарних системах. Нагадаємо, що в такій системі кожному заданому векторові входу $u(t)$ відповідає єдиний вектор виходу $y(t)$, а в стаціонарній системі її змінні стану $x_i(t)$, а також вихідні змінні $y_i(t)$ не залежать від моменту t_0 прикладення вхідних пій $u_*(t)$. З такими припущеннями рівняння /2.34/ і /2.35/ можна перетворити так:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t); \\ b_{11}u_1(t) + \dots + b_{1m}u_m(t), \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t); \\ b_{21}u_1(t) + \dots + b_{2m}u_m(t), \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t); \\ b_{n1}u_1(t) + \dots + b_{nm}u_m(t); \end{aligned} \right\} /2.36/$$

[illegible]

У рівняннях $12.36/1, 12.37/1$ $a_{ij}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n; b_{ij}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m; c_{ij}, i = 1, 2, \dots, z; j = 1, 2, \dots, n; d_{ij}, i = 1, 2, \dots, z; j = 1, 2, \dots, m$ — сталі коефіцієнти, які одержують внаслідок розв'язання нелінійних функцій φ_i та g_i в ряд Тейлора під час лінеаризації рівнянь.

У векторно-матрицевій формі рівняння /2.36/ і /2.37/ мають такий вигляд:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t); \quad /2.38/$$

$$\dot{y}(t) = C x(t) + D u(t), \quad /2.39/$$

де

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{z1} & c_{z2} & \dots & c_{zn} \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{z1} & d_{z2} & \dots & d_{zm} \end{bmatrix}.$$

Оскільки елементи матриць A, B, C і D — сталі числа, то й самі ці матриці сталі. Квадратну матрицю A вимірністю $n \times n$ називають матрицею стану /динамічною/; її структура визначає характер як вільних, так і вимушених рухів системи. Матрицю B вимірністю $n \times m$ називають матрицею керувальних дій /матрицею входу/; її структура визначає характер зв'язку входу системи з різними змінними стану. Матрицю C вимірністю $z \times n$ називають матрицею вихідних координат /матрицею виходу/; її структура визначає характер зв'язку вихідних координат системи з окремими змінними стану. Матриця D вимірністю $z \times m$ характеризує прямий /не динамічний/ зв'язок вихідних координат з керувальними координатами; її структура визначає, яким чином спонукальні функції на вході безпосередньо впливають на різні складові виходу. Для багатьох фізичних систем матриця D нульова.

У випадку векторно-матрицевого запису диференціальних рівнянь основними ланками структурної схеми, як бачимо з рис. 2.9, є багатовимірні суматори, інтегратори й матрицеві динамічні блоки A, B, C і D . Оскільки визначені елементами схеми операції лінійні, а коефіцієнти матрицевих блоків сталі, то схема лінеаризованої моделі /рис. 2.9/ відповідає лінійній стаціонарній системі. Ця сама структурна схема, коли замінити матрицеві блоки із сталими матрицями матрицевими блоками із змінними матрицями $A(t), B(t), C(t)$ і $D(t)$, відповідатиме лінійній нестаціонарній системі.

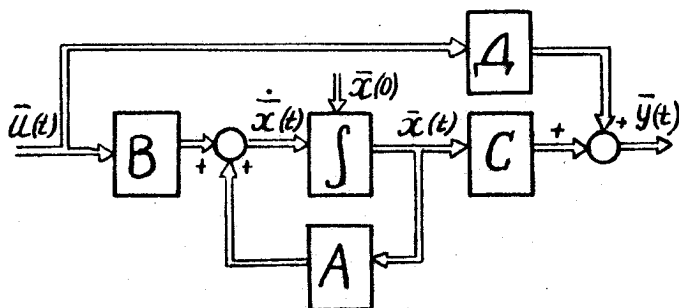


Рис. 2.9. Структурна схема багатовимірної лінійної стаціонарної системи, яка відповідає рівнянням стану /2.38/ і /2.39/

2.3.3. Рівняння стану в стандартній формі

Нехай відоме нормоване / $a_n = 1$ / диференціальне рівняння вхід-вихід, яке визначає зв'язок між виходом $y(t)$ і входом $u(t)$ одновимірної системи n -го порядку:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t). \quad /2.40/$$

Знайдемо рівняння стану, що відповідає диференціальному рівнянню /2.40/. Оскільки, знаючи початкові значення для виходу та його похідні $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$, можна зробити висновок про майбутній рух системи, то змінні $y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$, як уже вказувалося, можна вважати змінними стану:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= y(t), \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t), \\ x_3(t) &= \ddot{y}(t) = \dot{x}_2(t), \\ &\vdots \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) = \dot{x}_{n-1}(t). \end{aligned} \right\} \quad /2.41/$$

Розв'язавши рівняння /2.40/ відносно старшої похідної, дістанемо

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = -a_0 y(t) - a_1 \frac{dy(t)}{dt} - \dots - a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + b_0 u(t). \quad /2.42/$$

Тоді з /2.41/ та /2.42/ дістаємо таку систему диференціальних рівнянь першого порядку відносно змінних стану $x_1(t), x_2(t), \dots,$

$x_n(t)$ і алгебричне рівняння, яке зв'язує вихід системи $y(t)$ з відповідною змінною стану:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t), \\ &\dots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t), \\ \dot{x}_n(t) &= -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \dots - a_{n-1} x_n(t) + b_0 u(t), \\ y(t) &= x_1(t). \end{aligned} \right\} \quad /2.43/$$

Систему рівнянь /2.43/ зручно записати в векторно-матрицевій формі:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \end{aligned} \right\} \quad /2.44/$$

або

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + b u(t), \\ y(t) &= c x(t), \end{aligned} \right\} \quad /2.45/$$

де згідно з /2.44/ динамічна матриця A вимірністю $(n \times n)$, матриця входу b вимірністю $(n \times 1)$, матриця виходу c вимірністю $(1 \times n)$ і вектор стану $x(t)$ вимірністю $(n \times 1)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}; \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} /2.46/$$

$$C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]; \quad \overline{x(t)} = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$$

Рівняння /2.45/ з матрицями /2.46/ називають рівняннями стану в стандартній формі.

На рис. 2.10 зображено схему аналогового моделювання системи з одним входом і одним виходом, побудовану за рівняннями в змінних стану /2.45/. Вона відповідає схемі аналогів моделювання диференціального рівняння /2.40/ методом зниження порядку похідних. На рис. 2.10 зображено змінні $x_i(0)$, які характеризують початкові умови.

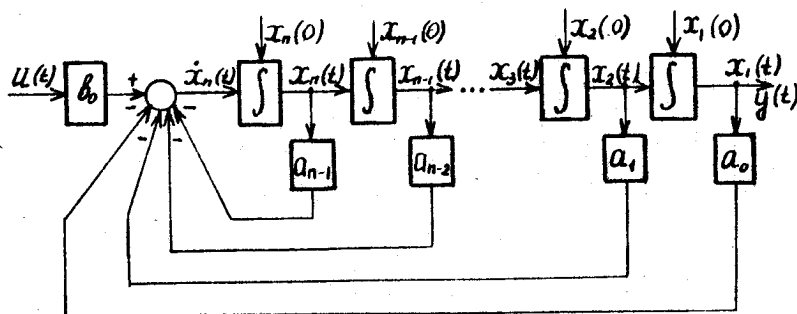


Рис. 2.10. Схема аналогового моделювання одновимірної лінійної стаціонарної системи, яка відповідає рівнянням стану /2.45/ і /2.46/, записаним у стандартній формі

Приклад 2.3. Для розімкненого слідувального привода /рис. I.II/ треба скласти рівняння стану в стандартній формі, якщо відомий його оператор

$$K(\omega) = \frac{K_{\mathcal{D}}}{\mathcal{D}(T_0 T_M \mathcal{D}^2 + T_M \mathcal{D} + 1)} = \frac{\beta(\mathcal{D})}{\mathcal{U}_2(\mathcal{D})}, \quad /2.47/$$

де T_e і T_M - відповідно електромагнітна й електромеханічна сталі часу двигуна постійного струму.

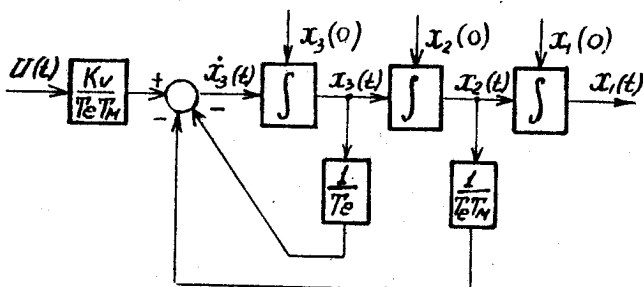


Рис. 2.II. Схема аналогового моделювання слідкувального привода, яка відповідає рівнянням стану /2.49/, записаним у стандартній формі

Розв'язання. Оператору /2.47/ відповідає диференціальне рівняння розімкненого привода

$$T_e T_M \frac{d^3 \beta(t)}{dt^3} + T_M \frac{d^2 \beta(t)}{dt^2} + \frac{d\beta(t)}{dt} = K_M U_c(t)$$

або

$$\frac{d^3 \beta(t)}{dt^3} + \frac{1}{T_e} \frac{d^2 \beta(t)}{dt^2} + \frac{1}{T_e T_M} \frac{d\beta(t)}{dt} = \frac{K_M}{T_e T_M} U_c(t). \quad /2.48/$$

Як змінні стану виберемо $\beta(t)$, $\dot{\beta}(t)$ і $\ddot{\beta}(t)$:

$$x_1(t) = \beta(t),$$

$$x_2(t) = \dot{\beta}(t) = \dot{x}_1(t),$$

$$x_3(t) = \ddot{\beta}(t) = \dot{x}_2(t).$$

Крім того, безпосередньо з рівняння /2.48/ знайдемо

$$\dot{x}_3(t) = \ddot{\beta}(t) = -\frac{1}{T_e} \dot{\beta}(t) - \frac{1}{T_e T_M} \beta(t) + \frac{K_M}{T_e T_M} U_c(t).$$

Перепишемо ці рівняння в такому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 0 \cdot x_1(t) + 1 \cdot x_2(t) + 0 \cdot x_3(t) + 0 \cdot U_e(t), \\ \dot{x}_2(t) &= 0 \cdot x_1(t) + 0 \cdot x_2(t) + 1 \cdot x_3(t) + 0 \cdot U_e(t), \\ \dot{x}_3(t) &= 0 \cdot x_1(t) - \frac{1}{T_0 T_M} x_2(t) - \frac{1}{T_0} x_3(t) + \frac{K_U}{T_0 T_M} U_e(t). \end{aligned} \right\} \quad /2.49/$$

У рівняннях /2.49/ на місці коефіцієнтів $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, b_{11}, b_{21}$ з метою наочнішого визначення матриць A, B і C записано нулі.

Отже, стандартна форма рівнянь стану слідкувального привода має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= A \bar{x}(t) + B U(t), \\ y(t) &= C \bar{x}(t), \end{aligned}$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_0 T_M} & -\frac{1}{T_0} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_U}{T_0 T_M} \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0].$$

На рис. 2.II зображено схему аналогового моделювання електро-механічного слідкувального привода, побудовану за рівнянням /2.49/.

Оскільки розглядувана система має один вхід і один вихід, то $y(t) = \beta(t)$ і $U(t) = U_e(t)$ є скаляри, а матриця D вимірністю $(I \times I)$ в одержаних рівняннях нульова.

Розглянемо тепер питання визначення рівнянь стану для лінійної стаціонарної системи з одним входом $U(t)$ і одним виходом $y(t)$, що її описує диференціальне рівняння із сталими коефіцієнтами виду

$$\begin{aligned} \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y(t)}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) &= \\ = b_n \frac{d^n U(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{(n-1)} U(t)}{dt^{(n-1)}} + \dots + b_1 \frac{dU(t)}{dt} + b_0 U(t). \end{aligned} \quad /2.50/$$

Оскільки $u(t)$ - відома функція часу, то можна визначити і функцію

$$z(t) = \frac{1}{b_0} \sum_{j=1}^n b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j}, \quad /2.51/$$

що дає змогу звести /2.50/ до вже розглянутого рівняння. Тоді структурну схему, що її описує диференціальне рівняння вхід-вихід /2.50/, можна подати в змінних стану, як зображено на рис. 2.10, де вхідною змінною є функція $y(t) = u(t) + z(t)$ замість $u(t)$. Але щоб перетворити еквівалентну вхідну функцію $y(t)$, треба виконати операцію багаторазового диференціювання дії $u(t)$, а це вкрай небажано, бо неможливо точно побудувати відповідні диференціатори, а також через вплив шумів та інших факторів. Операції введення похідних можна уникнути, коли праві частини системи диференціальних рівнянь першого порядку /2.43/ доповнити членами, пропорційними вхідній змінній $u(t)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) + h_1 u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_3(t) + h_2 u(t), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_{n-1}(t)}{dt} &= x_n(t) + h_{n-1} u(t), \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \dots - a_{n-1} x_n(t) + h_n u(t) \end{aligned} \right\} /2.52/$$

або в векторно-матрицевій формі

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= A \bar{x}(t) + \bar{b} u(t), \\ y(t) &= C \bar{x}(t) + d u(t). \end{aligned} \right\} /2.53/$$

У рівняннях стану /2.53/ матриці A, C і вектор стану $\bar{x}(t)$ збігаються з одержаними попередню виразами /2.46/, матриця $\bar{b}$ - вектор-стовпець, а матриця d - скаляр:

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}, \quad d = h_0. \quad /2.54/$$

Звівши систему /2.52/ до одного рівняння n -го порядку відносно вихідної змінної $y(t)$ й зрівнявши коефіцієнти біля змінної $u(t)$ та

Її похідних з відповідними коефіцієнтами $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$ початкового рівняння /2.50/, дістанемо систему n лінійних алгебричних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів $h_0, h_1, \dots, h_n$, розв'язавши яку, знайдемо:

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= \delta_n; \\ h_1 &= \delta_{n-1} - a_{n-1} h_0; \\ h_2 &= \delta_{n-2} - a_{n-1} h_1 - a_{n-2} h_0; \\ &\dots \dots \dots \\ h_n &= \delta_0 - a_{n-1} h_{n-1} - a_{n-2} h_{n-2} - \dots - a_0 h_0. \end{aligned} \right\} \quad /2.55/$$

Схему аналогового моделювання, яка відповідає рівнянням стану /2.52/, зображено на рис. 2.12. На відміну від рис. 2.10, тут до сигналу на виході кожного з n інтеграторів подано сигнал, пропорційний вхідній змінній $u(t)$ з коефіцієнтами пропорційності $h_0, h_1, \dots, h_n$, визначеними за формулами /2.55/. Це дає змогу виконати операцію диференціювання сигналу $u(t)$, необхідну для утворення еквівалентного вхідного сигналу $y(t)$.

Коли найвища похідна в правій частині диференціального рівняння /2.51/ має порядок $m < n$, то в цьому разі коефіцієнти h_i визначають з виразів

$$h_{n-k} = \delta_k - \sum_{j=n-m}^{n-k-1} a_{j+k} h_j; \quad k=0,1,2,\dots,m. \quad /2.56/$$

Матриці A і C , як і раніше, визначають вирази /2.46/; матриця D є нульова, а елементи матриці B $h_0, h_1, \dots, h_{n-m-1}$ дорівнюють нулеві, тобто вона має вигляд

$$B = [0 \ 0 \ \dots \ h_{n-m} \ h_{n-1} \ h_n]^T.$$

Приклад 2.4. Треба визначити рівняння стану системи, що її задано таким оператором:

$$K(s) = \frac{2s^3 + 3s^2 + s + 2}{s^3 + 3s^2 + 4s + 1}.$$

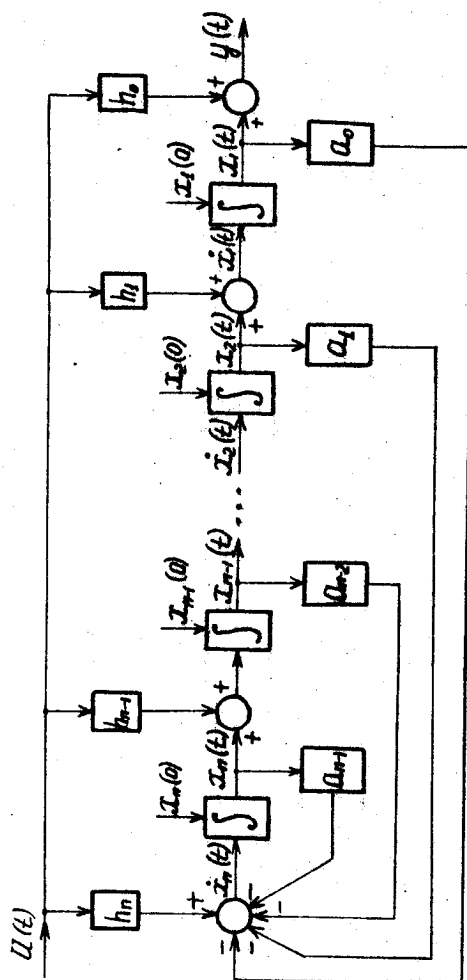


Рис. 2.12. Схема аналогового моделювання одновимірної лінійної стаціонарної системи, яка відповідає рівнянням стану /2.52/

Розв'язання. Цьому операторові відповідає диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) &= \\ = 2 \frac{d^3 u(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{du(t)}{dt} + 2u(t). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Тут $n = m = 3$. Для розрахунку коефіцієнтів h_i скористаємося формулами /2.55/. Ураховуючи, що $a_0 = 1$; $a_1 = 4$; $a_{n-1} = a_2 = 3$; $b_0 = 2$; $b_1 = 1$; $b_2 = 3$; $b_n = b_3 = 2$, знаходимо:

$$h_0 = b_3 = 2,$$

$$h_1 = b_2 - a_2 h_0 = -3,$$

$$h_2 = b_1 - a_2 h_1 - a_1 h_0 = 2,$$

$$h_3 = b_0 - a_2 h_2 - a_1 h_1 - a_0 h_0 = 6.$$

Рівняння /2.57/ зводять до рівнянь стану /2.53/, де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0] \quad D = [2].$$

2.3.4. Розв'язання рівнянь стану

Розв'язання однорічних рівнянь стану

Вільні рухи лінійної стаціонарної системи /ОК/, зумовлені нульовими початковими умовами, описують рівняннями стану виду

$$\dot{\bar{x}}(t) = A \bar{x}(t). \quad (2.58)$$

Щоб розв'язати векторно-матрицеве рівняння /2.58/, треба знати початкові умови - значення змінних стану $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, коли $t = 0$ /початкові значення/. Позначимо їх $x_1(0)$, $x_2(0)$, ..., $x_n(0)$, а їх вектор

$$\bar{x}(0) = [x_1(0) \ x_2(0) \dots \ x_n(0)]^T. \quad (2.59)$$

Спочатку розглянемо скалярне диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t), \quad /2.60/$$

де $a = \text{const}$ з початковими значеннями $x(0)$. Відокремлюючи змінні в /2.60/, дістаємо

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx(t)}{dt} = a \int_0^t dt. \quad /2.61/$$

Інтегруючи /2.61/, маємо

$$\ln \frac{x(t)}{x(0)} = at. \quad /2.62/$$

Із /2.62/ випливає, що

$$x(t) = e^{at} x(0),$$

або, розвиваючи експоненціальну функцію e^{at} в збіжний /рівномірно й абсолютно/ ряд за степенями at , одержуємо

$$x(t) = e^{at} x(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (at)^k x(0). \quad /2.63/$$

Використавши відому з матрицевого числення формулу для розвивання матрицевої функції e^{At} в збіжний ряд виду

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k, \quad /2.64/$$

де A і I - відповідно динамічна й одинична матриці вимірністю $n \times n$, розв'язок векторно-матрицевого рівняння /2.58/ можна записати у вигляді такому самому, як і розв'язок скалярного рівняння /2.63/:

$$x(t) = e^{At} \overline{x(0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k \overline{x(0)}. \quad /2.65/$$

Доведемо, що вираз /2.65/ задовольняє векторно-матрицеве рівняння /2.58/. Диференціюючи /2.65/ по часові, знаходимо

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^k t^{k-1} \overline{x(0)} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k \overline{x(0)}, \quad /2.66/$$

де $A_t = A - I$. Підставивши /2.66/ в ліву частину /2.58/, а /2.65/ - у праву, одержимо тотожність. Отже, вираз /2.65/ справді визначає формулу загального розв'язку векторно-матрицевого рівняння.

Матрицеву функцію e^{At} звичайно називають перехідною матрицею стану /інколи - фундаментальною матрицею/ і позначають $\Phi(t)$. Таким чином, розв'язком однорідного векторно-матрицевого рівняння /2.58/ є векторна функція /вектор-стовпець чи матриця-стовпець вимірності $(n \times 1)$ /

$$\overline{x(t)} = e^{At} \overline{x(0)}, \quad /2.67/$$

де для лінійних стаціонарних систем $\Phi(t) = e^{At}$. Надалі через те, що розглядатимемо тільки лінійні стаціонарні СКЕП, користуватимемося найчастіше позначенням перехідної матриці стану e^{At} і розв'язок /2.58/ запишуватимемо у вигляді

$$\overline{x(t)} = e^{At} \overline{x(0)}. \quad /2.68/$$

Розглянемо деякі властивості перехідної матриці стану.

Властивість 1. Вимірність перехідної матриці стану залежить від вимірності динамічної матриці A і дорівнює $n \times n$, бо остання звідси квадратна. Із /2.64/ випливає, що елементами матриці e^{At} є функції часу.

Властивість 2. Якщо $t = 0$, то

$$e^{A \cdot 0} = I. \quad /2.69/$$

Рівність /2.69/ випливає безпосередньо з /2.64/.

Властивість 3. Перехідна матриця стану e^{At} є неособливою /не-вираженою/ матрицею, що може бути тільки тоді, коли

$$\det e^{At} \neq 0. \quad /2.70/$$

Цю властивість можна строго довести, врахувавши, що визначник будь-якої фундаментальної матриці, названий визначником Вронського, за жодних значень t не перетворюється на нуль.

Зауважимо, що властивості /2.69/ і /2.70/ звичайно використовують для перевірки правильності одержаного виразу для e^{At} .

Властивість 4.

$$e^{At} \cdot e^{Bt} = e^{(A+B)t}, \quad /2.71/$$

коли тільки $AB = BA$. Цю властивість можна довести, розвиваючи матрицеві експоненти e^{At} і e^{Bt} в нескінченні ряди.

Властивість 5.

$$[e^{At}]^{-1} = e^{-At}. \quad /2.72/$$

Цю властивість доводять, застосовуючи відоме правило множення матриць /неособливої/ на її обернену матрицю. Такий добуток має дорівнювати одиничній матриці, тобто в даному разі

$$e^{At} \cdot e^{-At} = e^{-At} \cdot e^{At} = e^{A(t-t)} = e^{A \cdot 0} = I.$$

Властивість 6. За аналогією із скалярною функцією похідна по часові

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} \cdot A. \quad /2.73/$$

Властивість 7.

$$\int_0^t e^{At} dt = A^{-1} (e^{At} - I) = (e^{At} - I) A^{-1}. \quad /2.74/$$

Рівність /2.74/ - це безпосередній наслідок рівності /2.73/.

Розв'язання неоднорідних рівнянь стану

Розглянемо стаціонарне неоднорідне векторно-матрицеве рівняння стану

$$\dot{\vec{x}}(t) = A \vec{x}(t) + B \vec{u}(t) \quad /2.75/$$

з початковими умовами, визначеними вектором початкових умов /2.59/, і рівняння виходу

$$\dot{\vec{y}}(t) = C \vec{x}(t) + D \vec{u}(t). \quad /2.76/$$

Помноживши ліворуч обидві частини /2.75/ на e^{-At} , одержимо

$$e^{-At} \dot{\vec{x}}(t) = e^{-At} A \vec{x}(t) + e^{-At} B \vec{u}(t)$$

або

$$e^{-At} \dot{\vec{x}}(t) - A e^{-At} \vec{x}(t) = e^{-At} B \vec{u}(t). \quad /2.77/$$

Оскільки

$$\frac{d}{dt} e^{-At} = -e^{-At} A = -A e^{-At}, \quad /2.78/$$

то, зрівнявши формули /2.78/ і /2.77/, матимемо

$$\frac{d}{dt} [e^{-At} \vec{x}(t)] = e^{-At} B \vec{u}(t). \quad /2.79/$$

Інтегруючи обидві частини в межах від 0 до t , дістаємо рівність

$$e^{-At} \vec{x}(t) - \vec{x}(0) = \int_0^t e^{-A\tau} B \vec{u}(\tau) d\tau, \quad /2.80/$$

Із /2.80/ з урахуванням /2.72/ остаточно одержимо

$$\vec{x}(t) = e^{At} \vec{x}(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B \vec{u}(\tau) d\tau \quad /2.81/$$

або відповідно до властивості /2.71/

$$\vec{x}(t) = e^{At} \vec{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \vec{u}(\tau) d\tau, \quad /2.82/$$

Перший член правої частини /2.82/ описує вільні рухи системи, спричинені нульовими початковими умовами, або, як кажуть, реакцію системи з нульовим входом, а другий – вільні й вимушені рухи системи, зумовлені вектором керування $\vec{u}(t)$ /реакцію системи з нульовим станом/.

Підставивши /2.82/ в /2.76/, дістанемо таке рівняння, яке описує рух вихідних координат системи:

$$\vec{y}(t) = C e^{At} \vec{x}(0) + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B \vec{u}(\tau) d\tau. \quad /2.83/$$

Оскільки реакція стаціонарної системи не залежить від моменту прикладення до неї дії t_0 , то рівняння /2.82/ і /2.83/ можна переписати в такому вигляді:

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \vec{u}(\tau) d\tau; \quad /2.84/$$

$$\vec{y}(t) = C e^{A(t-t_0)} \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t C e^{A(t-\tau)} B \vec{u}(\tau) d\tau. \quad /2.85/$$

Зауважимо, що одержаний розв'язок неоднорідного рівняння стану за формою повністю збігається з розв'язком скалярного рівняння першого порядку

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b u(t), \quad 12.86/$$

що, як відомо, має вигляд

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau. \quad 12.87/$$

Функція ваги і перехідна функція лінійної стаціонарної системи

Звичайно динамічні властивості досліджуваної СКЕП /чи об'єкта/ оцінюють за функцією ваги та перехідною функцією. У зв'язку з цим цікаво визначити ці функції з одержаних розв'язків рівнянь стану.

Функція ваги. У цьому разі до m виходів системи в момент часу $t = 0$ прикладено одиничні δ -функції, тобто вектор входу

$$\bar{u}(t) = \delta(t) \bar{W}, \quad 12.88/$$

де $\bar{W}$ - вектор вимірності $m \times 1$ з компонентами, що дорівнюють одиниці. Тоді

$$\bar{x}(t) = e^{At} \bar{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \delta(\tau) \bar{W} d\tau = e^{At} \bar{x}(0) + e^{At} B. \quad 12.89/$$

Вираз 12.89/ одержано на підставі використання так званої "фільтрувальної" властивості δ -функції, яка полягає в тому, що інтеграл від добутку певної функції $f(t-\tau)$ на одиничну імпульсну функцію $\delta(\tau)$ дорівнює значенню функції $f(t-\tau)$ для моменту τ , котрий перетворює на нуль аргумент δ -функції, тобто дорівнює $f(t)$. Ураховано також і те, що матриця B стала.

Оскільки за означенням функція ваги, яку позначитимемо $k(t)$, є реакція системи $y(t)$ на δ -функцію за нульових початкових умов [вектор $x(0)$ у 12.89/ є нульовий], то, отже,

$$k(t) = y(t) = C \bar{x}(t) = C e^{At} B. \quad 12.90/$$

Визначимо тепер функцію ваги $k(t)$ одновимірної системи через елементи перехідної матриці стану $\Phi(t)$. Припускаємо, що рівняння

Зауважимо, що у випадку одновимірної системи $h(t)$ можна обчислювати так:

$$h(t) = \phi_0 \int_0^t \phi_{1n}(t-\tau) d\tau. \quad /2.96/$$

Визначення перехідної матриці стану стаціонарної лінійної системи

Динамічні властивості систем керування, як було доведено попередню, описують рівняннями /2.82/, /2.83/ або /2.84/, /2.85/, що є розв'язками рівнянь стану /2.75/ та /2.76/. Тому постають принаймні дві задачі, пов'язані з вивченням динамічних властивостей систем керування за допомогою рівнянь стану. Перше завдання полягає у вивченні основних методів визначення перехідної матриці стану e^{At} , і зокрема сучасних методів, які ґрунтуються на використанні ЕОМ і є єдино можливими у випадку великих вимірностей n динамічної матриці A . Знати ці методи важливо ще й тому, що елементи перехідної матриці стану містять інформацію про такі найважливіші характеристики системи, як функція ваги й перехідна функція.

Друге завдання пов'язане з вивченням основних методів розв'язання рівнянь стану /2.84/ і /2.85/, насамперед методів, які ґрунтуються на використанні ЕОМ. Дуже важливо, що основні методи розв'язання другого завдання ґрунтуються на відомих розв'язках першого.

Розглянемо деякі методи визначення перехідної матриці стану.

Методи, які ґрунтуються на розвиванні e^{At} в нескінченний ряд

Якщо A - стала матриця, а t - скалярна змінна, то матрицю експоненту e^{At} визначають у вигляді нескінченного ряду /2.64/:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots \quad /2.97/$$

Формулу /2.97/ іноді використовують для визначення e^{At} у замкненій формі. Для цього після підсумовування треба знайти в замкненому вигляді кожен елемент матриці e^{At} . Ця непроста задача в багатьох випадках є нерозв'язна. Покажемо це на такому прикладі.

Приклад 2.3. Визначити e^{At} , а також $x(t)$ і $h(t)$ для об'єкта ТП-Д /див. рис. 1.11/, керованого за колом обмотки якоря, диференціальні рівняння якого з урахуванням тільки однієї електромеханічної сталої часу $T_M = 0,5$ с і $k_{r,n} k_g = 2$ рад/с має вигляд

$$\frac{d^2\beta(t)}{dt^2} + 2 \frac{d\beta(t)}{dt} = u_{r,n}(t).$$

Розв'язання. Рівняння стану, що відповідають зведеному диференціальному рівнянню в стандартній формі, мають вигляд

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= A \bar{x}(t) + B u(t); \\ y(t) &= C \bar{x}(t),\end{aligned}$$

де

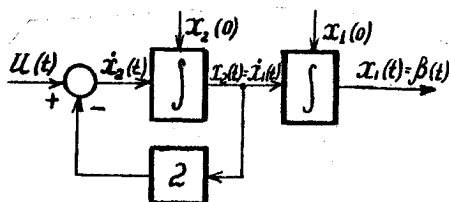
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0];$$

$$\bar{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T = [\beta(t) \ \omega(t)]^T;$$

$$y(t) \text{ і } u(t) = u_{r,n}(t) - \text{скаляри.}$$

Одержаним рівнянням стану відповідає схема аналогового моделювання привода постійного струму, зображена на рис. 2.13.

Використавши [2.97],
дістаємо



$$\begin{aligned}e^{At} &= I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} t +\end{aligned}$$

Рис. 2.13. Схема аналогового моделювання слідкувального привода постійного струму в разі керування за колом якоря й з урахуванням тільки однієї сталої часу T_M (Мот = 0)

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} t^2 + \dots =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2t + \frac{2t^2}{2!} - \frac{2t^3}{3!} + \dots) \\ 0 & 1 - 2t + \frac{2t^2}{2!} - \frac{2t^3}{3!} + \frac{2t^4}{4!} + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Неважко перевірити, що e^{At} задовольняє основні властивості перехідної матриці стану, зокрема

$$e^{At} \Big|_{t=0} = e^{A \cdot 0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \det e^{At} = e^{-2t} \neq 0.$$

Функція ваги розглядуваної системи

$$K(t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}),$$

а перехідна функція

$$h(t) = \int_0^t K(t-\tau) d\tau = \frac{1}{4} e^{-2t} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} t.$$

Незважаючи на те, що ряд для e^{At} збігається абсолютно й рівномірно для будь-яких t , визначати цю матрицеву функцію важко, особливо коли матриця A має велику вимірність або додатні чи дуже від'ємні за модулем власні значення. Тому на підставі формули /2.97/ було розроблено кілька ефективних і важливих для застосування алгоритмів та програм, що цим зможу наближено /чисельно/ знаходити e^{At} за допомогою ЕОМ.

Найпростіший алгоритм можна одержати, коли e^{At} за одного певного значення $t=T$ зобразити першими $k+1$ членами ряду /2.97/:

$$e^{AT} \approx e^{AT} = I + AT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \frac{A^3 T^3}{3!} + \dots + \frac{A^k T^k}{k!} = Q = [q_{ij}]. \quad /2.98/$$

Тоді матриця похибок R порівнюватиме різниці між рядом /2.97/ і многочленом /2.98/:

$$R = \frac{1}{(k+1)!} (AT)^{k+1} + \frac{1}{(k+2)!} (AT)^{k+2} + \dots = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{(AT)^L}{L!}, \quad /2.99/$$

де $L = k+1$.

Щоб обчислити e^{At} в інші послідовні моменти часу, потрібно в формулі /2.98/ вважати $t=iT$, де $i = 1, 2, 3, \dots$

Користуючись /2.99/, можна знайти верхню межу значень елементів $[z_{ij}]$ матриці R :

$$(z_{ij}) \leq \frac{\|AT\|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{1}{1-\|AT\|} = S, \quad /2.100/$$

де $\|A\| = \max_{j=1}^n [a_{ij}]$ - норма квадратної матриці A порядку n ; вона є найбільшою з n величин, кожна з яких становить суму елементів $[a_{ij}]$ одного рядка. Оцінка /2.100/ дає верхнє значення похибки зображення e^{At} матрицею Q /2.98/. Коли задано верхню межу S , точність Q визначають, порівнюючи S з усіма елементами q_{ij} . Збільшити точність можна, збільшивши кількість членів у розкладі /2.98/. Ряд /2.99/, коли $\|AT\| < 1$, збігається. У цьому випадку формула /2.98/ справджується.

Приклад 2.6. Для електропривода постійного струму /рис. 2.14/ треба визначити e^{At} , користуючись формулою /2.98/, з точністю до перших восьми значущих цифр /числові значення сталих часу і коефіцієнт підсилення привода вибрано тільки з міркувань зручного розрахунку/.

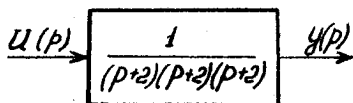


Рис. 2.14. Структурна схема привода постійного струму /до прикладу 2.6/

Розв'язання. Еобираємо $T = 0,1$ с, тоді норма матриці A

$$\|A\| = \max \sum_{j=1}^3 [a_{ij}] = 2 + 1 = 3.$$

Норма матриці

$$\|TA\| = 3 \cdot 0,1 = 0,3 < 1.$$

Якщо взяти 11 членів ряду /2.98/, тобто $k = 10$, то

$$e^{AT} = Q = \begin{bmatrix} 8,1873075 \cdot 10^{-1} & 8,1873075 \cdot 10^{-2} & 4,0936538 \cdot 10^{-3} \\ 0 & 8,1873075 \cdot 10^{-1} & 8,1873075 \cdot 10^{-2} \\ 0 & 0 & 8,1873075 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

Згідно з оцінкою /2.100/ верхня межа похибки $S = 6,33986 \cdot 10^{-14}$. Порівнюючи S з усіма значеннями q_{ij} , бачимо, що найбільша відносна похибка приблизно дорівнює

$$\frac{6,33986 \cdot 10^{-14}}{4,0936538 \cdot 10^{-3}} = 1,549 \cdot 10^{-11}.$$

Відомо, що коли відносна похибка деякої величини X менша за $0,5 \cdot 10^{-n}$, то X обчислено з точністю до n значущих цифр. Отже, матриця Q в розглянутому прикладі дає зображення e^{At} з точністю до 10 значущих цифр. Правильність цього розрахунку можна порівняти з таким точним значенням:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2}e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} = e^{At} \Big|_{t=T} = \begin{bmatrix} e^{-0,2} & 0,1e^{-0,2} & 0,005e^{-0,2} \\ 0 & e^{-0,2} & 0,1e^{-0,2} \\ 0 & 0 & e^{-0,2} \end{bmatrix}.$$

Розглянемо тепер інший ефективний алгоритм, який також ґрунтується на розвиванні матрицевої експоненти e^{At} в нескінченний ряд. Цей алгоритм, що його зараз дуже широко застосовують на практиці, для $t=T$ має вигляд

$$e^{At} \approx e^{AT} = [12I - 6AT + A^2T^2]^{-1} [12I + 6AT + T^2A^2]. \quad /2.101/$$

Щоб обчислити e^{At} в інші послідовні моменти часу, треба в формулі /2.101/ припускати, що $t=iT$, $i=1, 2, 3, \dots$. Розв'язання задачі, яке відповідає алгоритмові /2.101/, легко запрограмувати на ЕОМ. Для цього можна використати стандартні підпрограми додавання, множення й перетворення матриць, що їх має пам'ять кожної сучасної ЕОМ. Докладніше алгоритм /2.101/ описано в [4], де, зокрема, доведено, що точність обчислення залежить від величини змінного кроку T у n -й степені [позначають $O(T^5)$].

Розглянуті алгоритми /2.98/ і /2.101/ обчислення перехідної матриці стану використовують під час побудови алгоритмів числового розв'язання рівнянь стану.

Метод визначення перехідної матриці стану,
який ґрунтується на застосуванні
перетворення Лапласа

Застосовавши до лівої й правої частин /2.58/ перетворення Лапласа, одержуємо

$$p \overline{x(p)} - \overline{x(0)} = A \overline{x(p)}, \quad /2.102/$$

або

$$[\rho I - A] \overline{x(\rho)} = \overline{x(0)}. \quad /2.103/$$

З останнього рівняння знаходимо

$$\overline{x(\rho)} = [\rho I - A]^{-1} \overline{x(0)}. \quad /2.104/$$

Застосувавши до обох частин /2.104/ обернене перетворення Лапласа, дістаємо

$$\overline{x(t)} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ [\rho I - A]^{-1} \right\} \overline{x(0)}. \quad /2.105/$$

Порівнявши /2.68/ і /2.105/, бачимо, що

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ [\rho I - A]^{-1} \right\}. \quad /2.106/$$

Отже, щоб знайти e^{At} , потрібно, по-перше, скласти матрицю $[\rho I - A]$, по-друге, визначити обернену матрицю $[\rho I - A]^{-1}$ і, по-третє, знайти відповідний оригінал.

Приклад 2.7. Визначити e^{At} для системи, розглянутої в прикладі 2.5.

Розв'язання. Складемо матрицю

$$[\rho I - A] = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & -1 \\ 0 & \rho+2 \end{bmatrix}.$$

Знаходимо обернену матрицю

$$\begin{bmatrix} \rho & -1 \\ 0 & \rho+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\text{Adj}[\rho I - A]}{\det[\rho I - A]} = \frac{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}}{\rho(\rho+2)},$$

де алгебричні доповнення C_{ij} матриці $[\rho I - A]$ такі:

$$C_{11} = \rho+2; \quad C_{12} = 0; \quad C_{21} = 1; \quad C_{22} = \rho.$$

Отже,

$$\begin{bmatrix} \rho & -1 \\ 0 & \rho+2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\rho & 1/\rho(\rho+2) \\ 0 & 1/(\rho+2) \end{bmatrix}.$$

Ураховуючи, що

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\rho+2} \right\} = e^{-2t}; \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\rho} \right\} = 1; \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\rho(\rho+2)} \right\} = \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}),$$

дістаємо вираз для e^{At} , подібний до знайденого в прикладі 2.5.

Звідси випливає, що застосовувати цей метод доцільно тоді, коли матриця A має невелику вимірність n . Якщо $n > 3$, то обернену матрицю визначити дуже важко. А тому було розроблено кілька алгоритмів, які дають змогу за допомогою ЕОМ значно спростити визначення цієї матриці [14; 43].

Метод експериментального визначення
перехідної матриці стану,
який ґрунтується на використанні АОМ

Не звужуючи загальності, розглянемо суть цього методу на прикладі ОК ТП-Д, динамічні властивості якого описує диференціальне рівняння третього порядку

$$a_3 \frac{d^3 \omega(t)}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d\omega(t)}{dt} + a_0 \omega(t) = b_0 u(t), \quad 12.107/$$

Вибравши як змінні стану $x_1(t) = \omega(t)$, $x_2(t) = I_d(t)$, $x_3(t) = U_d(t)$, одержимо таке рівняння стану, що відповідає наведеному поперед:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A \bar{x}(t) + b u(t),$$

$$y(t) = c \bar{x}(t),$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_3} & -\frac{a_1}{a_3} & -\frac{a_2}{a_3} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{b_0}{a_3} \end{bmatrix}; \quad c = [1 \ 0 \ 0].$$

$$\bar{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T = [\omega(t) \ I_d(t) \ U_d(t)]^T.$$

Схему аналогового моделювання розглянутого об'єкта зображено на рис. 2.15.

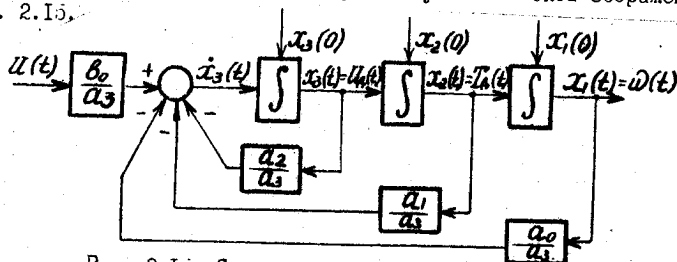


Рис. 2.15. Схема аналогового моделювання СКЕП третього порядку

Розв'язок рівнянь стану, як доведено попередню, має вигляд

$$\overline{x(t)} = \Phi(t) \overline{x(0)}, \quad /2.108/$$

де $\Phi(t)$ - перехідна матриця стану, або в розгорненому вигляді

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) & \Phi_{13}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) & \Phi_{23}(t) \\ \Phi_{31}(t) & \Phi_{32}(t) & \Phi_{33}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}. \quad /2.109/$$

Виберемо тепер початкові умови на інтеграторах: $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0$. Тоді з /2.109/ одержимо

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) x_1(0) \\ \Phi_{21}(t) x_1(0) \\ \Phi_{31}(t) x_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) \\ \Phi_{21}(t) \\ \Phi_{31}(t) \end{bmatrix}$$

або

$$x_1(t) = \Phi_{11}(t), \quad x_2(t) = \Phi_{21}(t), \quad x_3(t) = \Phi_{31}(t),$$

тобто вихідні сигнали 1, 2 і 3 інтеграторів $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ являтимуть собою відповідно елементи першого стовпця $\Phi_{11}(t), \Phi_{21}(t), \Phi_{31}(t)$ перехідної матриці стану $\Phi(t)$. Коли початкові умови вибрати так, щоб $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$ і $x_3(0) = 0$, то в цьому разі виходи інтеграторів дорівнюватимуть елементам другого стовпця перехідної матриці стану. Якщо $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0,$

$x_3(0) = 1$, виходи інтеграторів із змінними стану $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ являтимуть собою елементи третього стовпця перехідної матриці стану $\Phi(t)$. Треба зауважити, що змінна стану $x_1(t)$ для розглядуваної структури являтиме собою функцію ваги системи, тобто $\pi(t) = (\delta_0 / a_n) = \Phi_{13}(t)$, коли $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 1$, а це цілком узгоджується з означенням функції ваги системи як реакції останньої за нульових початкових умов на δ -функцію.

Розглядуваний метод має ту перевагу, що він прийнятний у всіх тих випадках, коли жоден з інших методів застосувати не можна.

Коротка характеристика інших методів
визначення перехідної матриці стану

Матрицю e^{At} обчислюють не тільки розглянутим, а й іншими методами. До них належать методи Келлі - Гамільтона (Cayley - Hamilton), діагоналізації і Сільвестра (Sylvester).

Метод Келлі - Гамільтона ґрунтується на використанні теореми матрицевого аналізу Келлі - Гамільтона, згідно з якою кожна матриця A порядку n є коренем свого характеристичного рівняння. Метод дає змогу доволі просто обчислити e^{At} в замкненій формі для невеликих вимірностей матриці A / $n \leq 3$ /. Він, у порівнянні з іншими методами, наприклад з методом Сільвестра, досить простий, коли треба обчислити e^{At} у випадку кратних власних значень матриці A . Саме в цьому разі його й треба застосовувати. Якщо $n > 3$, тоді доцільно користуватися числовим алгоритмом, розробленим на підставі теореми Келлі - Гамільтона [14].

Метод діагоналізації ґрунтується на перетворенні матриці A в діагональну /канонічну/ форму за допомогою матриць Вандермонда V та V^{-1} або модальних матриць M та M^{-1} [1]. У цьому разі

$$e^{At} = V e^{\Lambda t} V^{-1}$$

або

$$e^{At} = M e^{\Lambda t} M^{-1},$$

де

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Метод діагоналізації можна застосовувати тільки тоді, коли матриця A має дійсні власні значення. Така його вада. Відповідно до цього методу перехідна матриця стану e^{At} виходить у замкненій формі. Якщо $n > 4$, то дуже важко обчислювати обернену матрицю.

Метод Сільвестра дає змогу обчислити e^{At} згідно з відомою теоремою Сільвестра [13] для випадку, коли матриця A має тільки дійсні власні значення і її вимірність не перевищує 3. Якщо власні значення кратні, формули складнішають.

Рівняння стану /2.84/ і /2.85/ звичайно розв'язують числовими методами, викладеними в п. 7.3.2.

Розділ 3. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДАМИ

У цьому розділі розглянуто математичні об'єкти ОК, які складаються з тиристорних перетворювачів, двигунів постійного струму з незалежним збудженням і трифазних асинхронних двигунів. Саме ці ОК нині найчастіше застосовують у СІЕП.

3.1. Математична модель тиристорного перетворювача

Тиристорний перетворювач /ТП/ складається із системи імпульсно-фазового керування /СІФК/ і власне ТП, основним елементом якого є силова схема перетворення енергії змінного струму в енергію постійного /керований випрямляч/ за допомогою тиристорів. Як навантаження перетворювача взято якірне коло двигуна постійного струму. СІФК - неперервний сигнал керування $U_{\text{кер}}(t)$, який напходить на її вхід, перетворює на послідовність відкривальних імпульсів $\alpha_i(t)$ /що їх формує генератор імпульсів/, зсувених за фазою відносно моменту природного відкривання тиристорів. Потім за допомогою власного ТП виконують зворотне перетворення дискретних значень $\alpha_i(t)$ в кусково-неперервний сигнал вихідної координати - ЕРС перетворювача $E_{\text{пер}}(t)$.

Інтервал /фазовий зсув/ проходження імпульсів $\alpha_i(t)$, що напхождать на кожен тиристор, залежить від $U_{\text{кер}}(t)$ і є величина змінна. Таким чином, ТП - це нелінійний дискретний пристрій. Досить повний математичний опис ТП як нелінійного дискретного елемента системи керування можна зробити, використавши теорію нелінійних імпульсних систем з широтно-імпульсною модуляцією другого роду /ШІМ-П/ [15; 29]. Але такий спосіб описування ТП дуже неукладистий, і його майже не застосовують на практиці.

ТП як дискретний елемент передавання інформації підлягає теоремі Котельникова, тобто пропускає без втрати інформації лише ті сигнали, частоти яких менші за межу частоту

$$\omega_{\text{неж}} = \pi \omega_{\text{н}} / 2, \quad /3.1/$$

де π - кількість фаз перетворювача; $\omega_{\text{н}}$ - колова частота напруги мережі.

Коли частота проходження дискретних імпульсів $\omega_i = 1/T_i$, де T_i - період проходження /період квантування/ імпульсів керування, $\alpha_i(t)$ менша за межу частоту $\omega_{\text{неж}}$, тобто $\omega_i < \omega_{\text{неж}}$, то ТП,

Який являє собою нелінійну дискретну ланку, можна апроксимувати лінійною безінерційною ланкою з коефіцієнтом підсилення $k_{г.п.}$. Але треба мати на увазі, що у випадку такої апроксимації ТП і значного збільшення коефіцієнта підсилення системи з метою одержання високої швидкодії в замкненому контурі, однією з ланок якого є ТП, часто виникає режим автоколивань з частотою основної субгармоніки відповідно до формули /3.1/. Такі коливання в системі мати небажано, бо вони, зокрема, спричиняють нерівномірне навантаження тиристорів.

Другою важливою особливістю ТП є його неповна керованість. Вона виявляється в тому, що, коли кут керування $\alpha(t)$ змінюється з швидкістю, більшою від колової частоти живильної напруги ω_H , тобто коли $(d\alpha/dt) > \omega_H$, процеси в ТП під час збільшення й зменшення $\alpha(t)$ відбуваються по-різному. Із зменшенням $\alpha(t)$ з будь-якою швидкістю ЕРС ТП повністю залежить від зміни $\alpha(t)$. У випадку збільшення $\alpha(t)$ і $(d\alpha/dt) > \omega_H$ комутації тиристорів немає, через що ЕРС ТП $E_{пер}(t)$ не підлягає законові зміни $\alpha(t)$ і являє собою відрізок синусоїдної анодної напруги вентиля, який було відкрито в останню чергу /рис. 3.1, t_1 - момент зміни кута керування/. Отже, у випадку $(d\alpha/dt) < \omega_H$ ТП можна зобразити як неперерв-

ну безінерційну ланку, а коли $(d\alpha/dt) > \omega_H$, то ТП уже не можна вважати безінерційною ланкою. Невідповідність між виходом $E_{пер}(t)$ і входом $\alpha(t)$ є причиною збільшення сталої складової ЕРС $E_g(t)$ /див. рис. 3.1/ і появи фазових зсувів у випадку гармонійних вхідних дій. Максимальний фазовий зсув, переданий у ТП, відповідає зсувові цієї ланки з чистим запізнюванням на час $\tau = 2/4 \omega_H$, де 2 - діапазон зміни кута керування. Через неповну керованість,

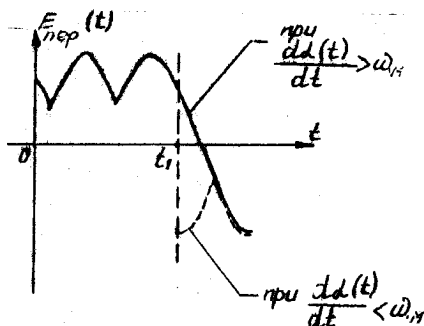


Рис. 3.1. Зміна ЕРС перетворювача за різних швидкостей зміни кута керування

дискретність і нелінійність ТП у замкненій системі можуть виникати автоколивання на найнижчих /одній чи кількох найближчих/ субгармоніках з великою амплітудою й порівняно невеликою частотою. Такі автоколивання мати небажано не лише через те, що система працюватиме з по-

рушеннями, а й тому, що внаслідок великих переважень можуть вийти з ладу її елементи. Швидкість зміни керувальної напруги $U_{кер}(t)$, яка визначає швидкість зміни кута керування $\alpha(t)$, обмежують, умикаючи на вході СЧК аперіодичну ланку, котра розв'язує й інше завдання. Справа в тому, що в реверсивному приводі із спільним узгодженням керуванням ТП у перехідному режимі внаслідок неповної керованості тиристорів /або різної швидкості СЧК/ рівність середніх значень ЕРС випрямляльної й інверторної вентильних груп ТП порушується і в реверсивних контурах виникає динамічний зрівняльний струм, сила якого в багато разів перевищує статичний зрівняльний струм. Коли вибрано насичувальні обмежувальні реактори, то внаслідок появи динамічного зрівняльного струму може виявитися, що буде насичено обидва реактори і зрівняльний струм, який обмежують лише малий активний опір реверсивного контуру та внутрішні опори перетворювача, досягне аварійних значень. Припускають, що стала часу аперіодичної ланки $T_p = 0,006...0,01$ с на промисловій частоті ω_M живильної мережі.

Треба зауважити, що питання про опис динамічних властивостей ТП з урахуванням дискретного характеру процесу керування й неповної керованості тиристорів зараз трактують по-різному. Найчастіше [10; 34] ТП у режимі безперервного струму описують ланкою, яка складається з послідовно з'єднаних ланок лінійної безінерційної з коефіцієнтом підсилення $K_{гп}$ і чистого запізнювання, тобто

$$K_{гп}(p) = \frac{E_d(p)}{U_{кер}(p)} = K_{гп} e^{-\tau p}, \quad /3.2/$$

де τ - випадковий час, названий середньостатистичним запізнюванням; таку назву зумовлено тим, що в випадку обмеження смуги пропускання ТП [невиконання умов /3.1/] його вихідна координата $E_{кер}(t)$ при вхідному сигналі типу одиничного стрибка запізнюється на випадковий час τ , який на інтервалі дискретності вважають розподіленим за законом рівномірної щільності.

Беличина τ залежить від кількості фаз перетворювача m і частоти мережі f_M і найчастіше дорівнює періоду природної комутації, тобто

$$\tau = \frac{1}{mf_M} = \frac{2\pi}{m\omega_M}. \quad /3.3/$$

Звичайно функцію $e^{-\varepsilon p}$ розвивають у степеневий ряд і враховують тільки два його перших члени. Тоді передавна функція /3.2/ набере вигляду

$$K_{T, n}(p) = \frac{K_{T, n}}{1 + \varepsilon p} \quad /3.4/$$

Якщо активний опір $R_{пер}$ та індуктивність $L_{пер}$ ТП звести до якірного кола двигуна, тоді ЕРС ТП $\mathcal{E}_g(t)$ порівнюватиме напрузі $U_g(t)$, прикладеній до кола обмотки якоря двигуна, і, отже, динамічні ланки ТП та двигун постійного струму стануть ланками напрямленої дії. Урахувавши це й перейшовши до приростів змінних $\Delta U_{пер}$ і ΔU_g , остаточно дістанемо такий вираз передавної функції ТП /разом з СІФК/:

$$K_{T, n}(p) = \frac{\Delta U_g(p)}{\Delta U_{пер}(p)} = \frac{K_{T, n}}{1 + \varepsilon p} \quad /3.5/$$

Використовуючи для розрахунку параметрів регулятора передавну функцію /3.5/, одержують задовільні практичні результати, хоча вони обґрунтовані із суто формальних позицій як середньостатистичне запізнення перетворювача.

3.2. Математична модель двигуна постійного струму з незалежним збудженням

3.2.1. Рівняння динаміки двигуна та їх лінеаризація

Рівняння динаміки двигуна визначимо для загального випадку керування /рис. 3.2/ як за колом якоря, виконуваного за допомогою змінної напруги $U_g(t)$, так і за колом збудження, виконуваного за допомогою змінної напруги збудження $U_z(t)$ у випадку дії на двигун збурення у вигляді моменту статичного опору $M_{оп}(t)$. Запровадимо крім згаданих такі позначення: $I_g(t)$, R_g , L_g , $\omega(t)$ - відповідно струм силового кола, активний опір та індуктивність кола якоря і кутова швидкість обертання вала якоря; $I_z(t)$, R_z , L_z - відповідно струм, активний опір та індуктивність кола обмотки збудження; J - момент інерції всіх обертючих мас, який порівнює сумі моментів інерції якоря двигуна J_g і зведеного до вала двигуна моменту інерції робочого механізму /навантаження/ J_o , тобто $J = J_g + J_o$.

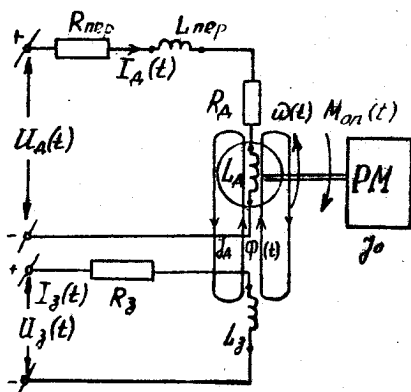


Рис. 3.2. Спрощена принципова схема двигуна постійного струму з керуванням зв'язаними колами якоря й збудження

Визначаючи рівняння динаміки, припустимо, що параметри $R_d, L_d, R_f, L_f, R_{per}, L_{per}$ сталі, робочий механізм з валом двигуна зв'язано без повітряного проміжку /люфту/ і абсолютно жорстко; статична регульовальна характеристика $\omega = f(U_d)$ лінійна /а це означає, що реакцію якоря повністю компенсовано, напруга зрушування порівнює нулю/; залежність магнітного потоку від струму збудження можна зобразити однозначною кривою намагнічування /гістерезис не урахують/ $\Phi = \Phi(I_f)$; зведений до вала двигуна момент опору M_{op} не залежить від швидкості. Окрім того, впливом вихрових струмів

у статорі та полюсах двигуна, а також в'язкого /швидкісного/ тертя нехтуватимемо.

За вхідні сигнали /координати/ вважатимемо $U_d(t), U_f(t)$ і $M_{op}(t)$, а за вихідні - $I_d(t), \omega(t)$ і $\Phi(t)$.

Рівняння рівноваги ЕРС для кола обмотки якоря має вигляд

$$U_d(t) = E(t) + R_{\Sigma} I_d(t) + L_{\Sigma} \frac{dI_d(t)}{dt}, \quad (3.6)$$

де $R_{\Sigma} = R_d + R_{per}$ і $L_{\Sigma} = L_d + L_{per}$ - відповідно активний опір та індуктивність силового кола електропривода.

Як відомо, ЕРС двигуна

$$E_d(t) = C \omega(t) \Phi(t). \quad (3.7)$$

Лінеаризація нелінійного рівняння /3.7/, виконана так само, як і для рівняння /2.8/, дає

$$\Delta E_d(t) = C \omega_0 \Delta \Phi(t) + C \Phi_0 \Delta \omega(t), \quad (3.8)$$

де ω_0 і Φ_0 - сталі, наприклад номінальні значення швидкості й магнітного потоку.

Ураховуючи, що $\alpha[I_{g0} + \Delta I_g(t)]/dt = \alpha \Delta I_g t / dt$, і підставляючи /3.8/ у /3.6/, останнє в зображеннях за Лапласом запишемо так:

$$c\Phi_0 \Delta \omega(p) + R_x (1 + T_e p) \Delta I_x(p) = \Delta \mathcal{U}_x(p) - c\omega_0 \Delta \Phi(p), \quad /3.9/$$

де $T_e = L_x / R_x$ - електромагнітна стала часу силового кола електропривода.

Рівняння рівноваги моментів має вигляд

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = M_x(t) - M_{on}(t). \quad /3.10/$$

Ураховуючи /2.12/, лінеаризоване рівняння /3.10/ у зображеннях можна записати так:

$$T_H p \Delta \omega(p) - \frac{R_x}{c\Phi_0} \Delta I_x(p) = \frac{R_x I_{A0}}{c\Phi_0^2} \Delta \Phi(p) - \frac{R_x}{c^2 \Phi_0^2} \Delta M_{on}(p), \quad /3.11/$$

де $T_H = J R_x / (c^2 \Phi_0^2)$ - електромеханічна стала часу силового кола електропривода.

Рівняння рівноваги ЕРС для кола збудження

$$\mathcal{U}_g(t) = R_g I_g(t) + L_g \frac{dI_g(t)}{dt}. \quad /3.12/$$

Залежність між потоком $\Phi(t)$ і струмом збудження $I_g(t)$ [чи пропорційною йому МРС $F(t)$], яку визначає крива намагнічування, є лінійна.

Після лінеаризації рівняння $\Phi = \Phi(I_g)$ одержимо

$$\Delta \Phi(t) = K_g \Delta I_g(t), \quad /3.13/$$

де $K_g = (\partial \Phi / \partial I_g)_0$ - коефіцієнт пропорційності між приростами потоку $\Delta \Phi(t)$ і струму $\Delta I_g(t)$. Після лінеаризації рівняння /3.12/ підставимо формулу /3.13/ в одержаний результат:

$$(1 + T_g p) \Delta \Phi(p) = (K_g / R_g) \Delta \mathcal{U}_g(p). \quad /3.14/$$

З урахуванням рівняння /3.14/ і зв'язку між приростами моменту статичного опору та струму статичного навантаження $\Delta M_{on}(p) = c\Phi_0 \Delta I_c(p)$ лінеаризовані рівняння динаміки двигуна постійного струму з незалежним збудженням /3.9/ і /3.11/ перепишемо так:

$$C\Phi_0 \Delta \omega(p) + R_E (1 + T_E p) \Delta I_A(p) = \Delta U_A(p) - \frac{\omega_0 K_2 C}{R_E (1 + T_E p)} \Delta U_E(p), \quad /3.15/$$

$$T_M p \Delta \omega(p) - \frac{R_E}{C\Phi_0} \Delta I_A(p) = \frac{R_E I_{A0}}{C\Phi_0} \frac{K_2}{R_E} \frac{1}{1 + T_E p} \Delta U_E(p) - \frac{R_E}{C\Phi_0} \Delta I_{cr}(p), \quad /3.16/$$

3.2.2. Рівняння динаміки і структурна схема двигуна у випадку керування за колом якоря

У цьому випадку напруга прикладена до обмотки збудження, стала, тобто $U_E(t) = U_{E0} = \text{const}$, $\Delta U_E(t) = 0$. Тоді рівняння динаміки /3.15/ і /3.16/ набувають вигляду

$$\Delta \omega(p) + K_A R_E (1 + T_E p) \Delta I_A(p) = K_A \Delta U_A(p), \quad /3.17/$$

де $K_A = 1/(C\Phi_0)$ - коефіцієнт підсилення двигуна;

$$T_M p \Delta \omega(p) - K_A R_E \Delta I_A(p) = -K_A R_E \Delta I_{cr}(p). \quad /3.18/$$

За цими рівняннями побудовано структурну схему /рис. 3.3/ в урахуванням зв'язку між швидкістю обертання $\omega(t)$ і кутом повороту $\beta(t) = \int_0^t \omega(t) dt$.

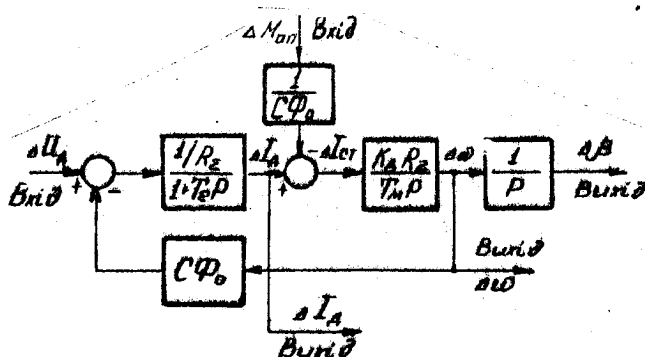


Рис. 3.3. Структурна схема двигуна постійного струму з незалежним збудженням у випадку керування за колом якоря

3.2.3. Матриця передавних функцій двигуна з керуванням за колом якоря

Двигун постійного струму /рис. 3.3/ являє собою складну багато-вимірну систему, що має два входи - керувальну ΔU_d та збурувальну $\Delta M_{\text{ол}}$ чи пропорційний їй струм статичного навантаження $\Delta I_{\text{ст}}$ і три виходи - струм силового кола ПІ-Д ΔI_d , швидкість обертання двигуна $\Delta \omega$, кут повороту вала двигуна $\Delta \beta$. Система має від'ємний зворотний зв'язок за швидкістю. Це свідчить про те, що в самій конструкції двигуна наявний регулятор швидкості обертання, роль якого виконує протиЕРС двигуна $\Delta E_d = C\Phi_0 \Delta \omega$. Із структурної схеми також випливає, що двигун - це астатична система з астатизмом першого порядку за керувальною дією ΔU_d та виходом $\Delta \omega$ і статичною системою за збуренням $\Delta I_{\text{ст}}$, оскільки ідеальну інтегровальну ланку розташовано після точки прикладення збурення $\Delta I_{\text{ст}}$ та вузла порівняння.

Динамічні властивості двигуна повністю описує квадратна матриця передавних функцій, яка має вимірність (3x3), оскільки двигун має три входи [коли враховувати вхідну керувальну дію $U_d(t)$] і три виходи:

$$\overline{G}_u(p) = \begin{bmatrix} G_{11}(p) & G_{12}(p) & G_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 \\ G_{21}(p) & G_{22}(p) & G_{23}(p) \end{bmatrix} \quad /3.19/$$

Верхній рядок матриці містить передавні функції за керувальною дією, а нижній - за збурувальною. Перший індекс біля передавної функції позначає вихідний сигнал, а другий - вхідний. Оскільки в розглянутому випадку вхідна дія $\Delta U_d(t) = 0$, то на місці передавних функцій $G_{11}(p)$, $G_{12}(p)$ і $G_{13}(p)$ записано нулі. Кожну передавну функцію, що її містить матриця $\overline{G}_u(p)$, можна визначити або з рівнянь /3.17/, /3.18/ шляхом визначення зв'язку між вихідною та вхідною величинами й вилучення проміжних змінних, або із структурної схеми рис. 3.3 шляхом відповідного її перетворення. Ці передавні функції мають такий вигляд:

$$G_{12}(p) = \frac{\Delta I_d(p)}{\Delta U_d(p)} \bigg|_{\substack{\Delta \Phi = 0 \\ \Delta I_{\text{ст}} = 0}} = \frac{(T_H / R_z) p}{T_e T_H p^2 + T_H p + 1} \quad ; \quad /3.20/$$

$$G_{\omega\omega}(\rho) = \frac{\Delta\omega(\rho)}{\Delta U_A(\rho)} \bigg|_{\substack{\Delta\Phi=0 \\ \Delta I_{cr}=0}} = \frac{\kappa_A}{T_e T_H \rho^2 + T_H \rho + 1} ; \quad /3.21/$$

$$G_{\beta\omega}(\rho) = \frac{\Delta\beta(\rho)}{\Delta U_A(\rho)} \bigg|_{\substack{\Delta\Phi=0 \\ \Delta I_{cr}=0}} = \frac{\kappa_A}{\rho (T_e T_H \rho^2 + T_H \rho + 1)} ; \quad /3.22/$$

$$G_{II}(\rho) = \frac{\Delta I_A(\rho)}{\Delta I_{cr}(\rho)} \bigg|_{\substack{\Delta\Phi=0 \\ \Delta U_A=0}} = \frac{1}{T_e T_H \rho^2 + T_H \rho + 1} ; \quad /3.23/$$

$$G_{\omega I}(\rho) = \frac{\Delta\omega(\rho)}{\Delta I_{cr}(\rho)} \bigg|_{\substack{\Delta\Phi=0 \\ \Delta U_A=0}} = - \frac{R_z \kappa_A (1 + T_e \rho)}{T_e T_H \rho^2 + T_H \rho + 1} ; \quad /3.24/$$

$$G_{\beta I}(\rho) = \frac{\Delta\beta(\rho)}{\Delta I_{cr}(\rho)} \bigg|_{\substack{\Delta\Phi=0 \\ \Delta U_A=0}} = - \frac{R_z \kappa_A (1 + T_e \rho)}{T_e T_H \rho^2 + T_H \rho + 1} . \quad /3.25/$$

Позначення означають умови, за яких їх одержано: $\Delta\Phi = 0$ - що магнітний потік двигуна сталий і дорівнює, наприклад, номінальному: $\Phi(t) = \Phi_0 = const$; $\Delta I_{cr} = 0$ - що струм статичного навантаження двигуна сталий і дорівнює, наприклад, номінальному: $I_{cr}(t) = I_{cto} = const$; $\Delta U_g = 0$ - що напруга, прикладена до кола обмотки якоря, стала і дорівнює, наприклад, номінальній: $U_g(t) = U_{go} = const$. Отже, одержані передавні функції характеризують динамічні властивості працюючого двигуна. Через те що процеси, котрі перебігають у двигуні, в цьому разі характеризуються не нульовими початковими умовами, то застосовувати для їх описування передавні функції, як за нульових початкових умов, здавалося б, не можна. Але оскільки внаслідок лінеаризації зроблено перехід від повних змінних до їх приростів, то це дає змогу вважати, що в момент часу $t = 0$ прирости всіх змінних досліджуваного процесу дорівнюють нулю, тобто початкові умови для приростів змінних є нульові. Це можна побачити на прикладі зміни приростів швидкості $\Delta\omega(t)$ /рис. 3.4,а/ і струму силового кола $\Delta I_g(t)$ /рис. 3.4,б/ під час навантаження, коли дане коло характеризує момент статичного опору /або, як зображено на рисунку, приріст статичного струму ΔI_{cr} /, прикладеного до вала двигуна в момент часу

$t = t_0$. До цього моменту двигун працював в установленим режимі із сталою швидкістю обертання $\omega = \omega_0$ і сталим значенням струму силового кола $I_g = I_{g0}$. Перехідні процеси, зображені на рис. 3.4, відповідають передавним функціям /3.24/ і /3.23/. Зауважимо, що знак "-" у виразі /3.24/ означає зменшення $\Delta\omega$ із збільшенням ΔI_{cr} , а рівність вільних членів у чисельнику та знаменнику передавної функції виразу /3.23/ - що двигун є астатична система за вхідною ΔI_{cr} та вихідною ΔI_g ціями. Астатизм у розглядуваному випадку повністю узгоджується з фізикою явищ: в установленим статичному режимі струм двигуна I_g порівнює струмові статичного навантаження I_{cr} .

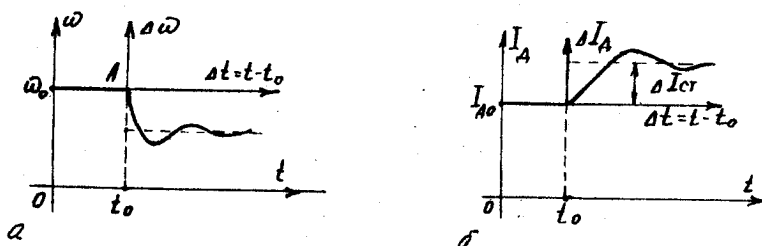


Рис. 3.4. Характер зміни приростів швидкості $\Delta\omega$ /а/ і струму силового кола ΔI_g /б/ під час навантажування

Потрібно також зауважити, що передавні функції /3.20/, /3.21/, /3.22/ за керувальною дією, які характеризують відхилення приростів ΔI_g , $\Delta\omega$, $\Delta\beta$ від їхніх установлених значень, справджуються і для повних відповідних змінних, оскільки зазначені передавні функції одержано з рівнянь /3.17/, /3.16/ для $\varphi(t) = \varphi_0 = \text{const}$, тобто з лінійних рівнянь.

Характер вільних рухів двигуна залежить, як відомо, від розташування полюсів наведених попереду передавних функцій на комплексній площині коренів. Для передавних функцій /3.20/, /3.21/, /3.23/, /3.24/ полюси визначають з розв'язку характеристичного рівняння $T_0 T_M p^2 + T_M p + 1 = 0$:

$$p_{1,2} = -\xi \Omega_0 \pm \Omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}, \quad /3.26/$$

де $\xi = T_M / (2 \sqrt{T_0 T_M})$ - відносний коефіцієнт демпфування; $\Omega_0 = 1 / \sqrt{T_0 T_M}$ - власна частота недемпфованих /коли $\xi = 0$ / коливань.

Величина ζ залежить від співвідношення між сталими часу T_e й T_H і описує характер перехідного процесу в двигуні. Коли $\zeta > 1$, тобто коли $T_H/T_e > 4$, то $p_{1,2}$ - дійсні, від'ємні і різні /перехідний процес - аперіодичний/. Коли $\zeta < 1$, тобто коли $T_H/T_e < 4$, то $p_{1,2}$ - комплексні, спряжені з від'ємною дійсною частиною /перехідний процес - коливний загасальний - саме цей випадок зображено на рис. 3.4, а/. Коли $\zeta = 1$, тобто коли $T_e = T_H$, то $p_{1,2}$ - дійсні, від'ємні й однакові /перехідний процес - критичний аперіодичний/.

У передавних функціях /3.22/, /3.25/, окрім полюсів $p_{1,2}$, що їх визначає вираз /3.26/, є ще один, нульовий пояс, який відповідає ідеальній інтегровальній ланці. Цей полюс, розташований у початку координат комплексної площини коренів, дуже змінює характер перехідного процесу: на усталений рух $\Delta\beta$, визначений тільки ідеальною інтегровальною ланкою, накладаються вільні рухи, визначені полюсами $p_{1,2}$ згідно з /3.26/, які з часом загасають.

3.2.4. Рівняння динаміки і структурна схема двигуна з керуванням за колом збудження

У цьому випадку керування провадять, змінюючи напругу $U_z(t)$, прикладену до кола збудження, а $U_{g0} = \text{const}$ і $\Delta U_g = 0$. З урахуванням цього рівняння динаміки /3.15/ запишемо у вигляді

$$C\Phi_0 \Delta\omega(p) + R_z(1+T_e p) \Delta I_d(p) = - \frac{\omega_0 T_z C}{R_z(1+T_e p)} \Delta U_z(p), \quad /3.27/$$

а рівняння /3.16/ не зміниться.

За рівняннями /3.16/, /3.27/ з урахуванням зв'язку між кутом $\beta(t)$ і швидкістю обертання $\omega(t) = d\beta(t)/dt$ побудовано структурну схему двигуна з керуванням за колом обмотки збудження /рис. 3.5/. На схемі зображено точки прикладення вхідних дій ΔU_z та ΔM_{op} , хоча самі ці дії у випадку керування лише за колом обмотки збудження дорівнюють нулю. Окрім того, на схемах /див. рис. 3.3 і 3.5/ аргумент p біля зовнішніх та внутрішніх змінних пропущено.

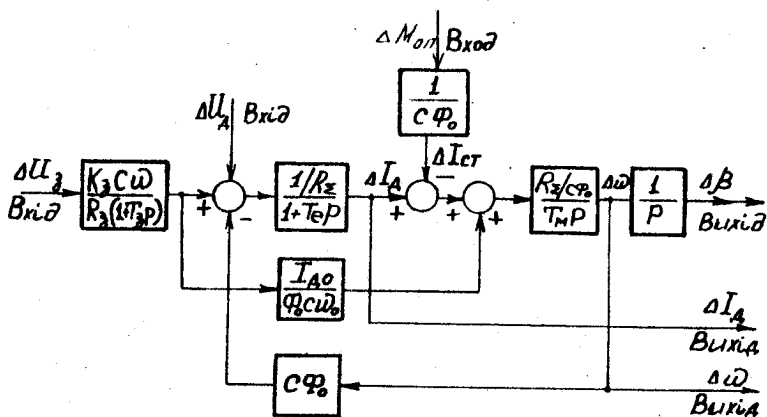


Рис. 3.5. Структурна схема двигуна постійного струму з незалежним збудженням і керуванням за колами якоря і збудження

3.2.5. Матриця передавних функцій двигуна з керуванням за колом збудження

Динамічні властивості двигуна з керуванням за колом збудження описує така матриця передавних функцій:

$$\overline{G_{\Phi}}(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ G_{I\omega_{\Phi}}(p) & G_{\omega\omega_{\Phi}}(p) & G_{\beta\omega_{\Phi}}(p) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad /3.28/$$

де

$$G_{I\omega_{\Phi}}(p) = \frac{\Delta I_A(p)}{\Delta U_2(p)} \bigg|_{\substack{\Delta \omega = 0 \\ \Delta I_{\sigma} = 0}} = - \frac{(K_2/R_2) \left[\frac{C\omega_0}{R_2} T_M p + \frac{I_{A0}}{\Phi_0} \right]}{(1+T_2 p)(T_e T_M p^2 + T_M p + 1)}; \quad /3.29/$$

$$\sigma_{\omega\omega_3}(\rho) = \frac{\Delta\omega(\rho)}{\Delta\omega_3(\rho)} \bigg|_{\substack{\Delta\omega_d=0 \\ \Delta I_{cr}=0}} = - \frac{\frac{K_2}{R_2} \left[\frac{\omega_0}{\varphi_0} - \frac{I_{d0}}{\varphi_0} K_d R_2 (1+T_0\rho) \right]}{(1+T_3\rho)(T_0 T_H \rho^2 + T_H \rho + 1)}; \quad /3.30/$$

$$\sigma_{\beta\omega_3}(\rho) = \frac{\Delta\beta(\rho)}{\Delta\omega_3(\rho)} \bigg|_{\substack{\Delta\omega_d=0 \\ \Delta I_{cr}=0}} = - \frac{\frac{K_2}{R_2} \left[\frac{\omega_0}{\varphi_0} - \frac{I_{d0}}{\varphi_0} K_d R_2 (1+T_0\rho) \right]}{\rho(1+T_3\rho)(T_0 T_H \rho^2 + T_H \rho + 1)}; \quad /3.31/$$

Передавні функції /3.29/-/3.31/ можна визначити або з рівнянь /3.16/, /3.27/, або із структурної схеми /див. рис. 3.5/, відповідним чином її перетворивши.

Порядок передавних функцій, визначений матрицею $\overline{\sigma_\varphi(\rho)}$, на одиницю більший, ніж порядок передавних функцій, визначений матрицею

$\overline{\sigma_u(\rho)}$, а це у випадку великих значень сталої часу T_0 дуже позначається на швидкості системи з керуванням за колом обмотки збудження і впливає на структуру побудови системи керування загалом.

3.2.6. Рівняння динаміки й структурна схема двигуна з керуванням за колами якоря й збудження

Рівняння динаміки, що описують процеси з керуванням як за колом якоря, так і за колом збудження, визначають вирази /3.15/ і /3.16/. Структурну схему, котра відповідає цим виразам, зображено на рис.3.5. У цьому разі на двигун діють усі три вхідні сигнали - $\Delta\omega_d, \Delta\omega_3, \Delta M_{оп}$.

3.2.7. Матриця передавних функцій двигуна з керуванням за колами якоря й збудження

Матриця передавних функцій $\overline{\sigma_d(\rho)}$ для розглядуваного випадку дорівнює сумі матриць $\overline{\sigma_u(\rho)}$ і $\overline{\sigma_\varphi(\rho)}$:

$$\overline{\sigma_d(\rho)} = \overline{\sigma_u(\rho)} + \overline{\sigma_\varphi(\rho)} = \begin{bmatrix} \sigma_{iu}(\rho) & \sigma_{\omega u}(\rho) & \sigma_{\beta u}(\rho) \\ \sigma_{i\omega_3}(\rho) & \sigma_{\omega\omega_3}(\rho) & \sigma_{\beta\omega_3}(\rho) \\ \sigma_{iI}(\rho) & \sigma_{\omega I}(\rho) & \sigma_{\beta I}(\rho) \end{bmatrix}; \quad /3.32/$$

3.3. Рівняння стану двигуна постійного струму в незалежних збудженнях.

Матрицева передавна функція

3.3.1. Рівняння стану двигуна в поелементній формі

Двигун постійного струму, як уже зазначалося, - це багатовимір-
на взаємозв'язана система /див., наприклад, рис. 3.5/. Для таких сис-
тем зручно використати методику визначення рівнянь стану в так зва-
ній поелементній /скалярній/ формі. Викладемо суть цієї методики сто-
совно до двигуна, що має три входи - $U_g(t)$, $U_z(t)$, $M_{оп}(t)$ або
 $I_{ст}(t)$ і два виходи - $\omega(t)$, $I_d(t)$.

Запишемо одержані рівняння динаміки двигуна /3.9/, /3.II/, /3.14/
з керуванням за колами якоря й обмотки збудження в зображеннях за
Лапласом:

$$\Delta \omega(p) + \kappa_d R_z (1 + T_p p) \Delta I_d(p) = \kappa_d \Delta U_d(p) - \frac{\omega_0}{\Phi_0} \Delta \Phi(p); \quad /3.33/$$

$$T_H p \Delta \omega(p) - \kappa_d R_z \Delta I_d(p) = \kappa_d R_z \frac{I_{до}}{\Phi_0} \Delta \Phi(p) - \kappa_z \Delta I_{ст}(p); \quad /3.34/$$

$$(1 + T_z p) \Delta \Phi(p) = (\kappa_z / R_z) \Delta U_z(p). \quad /3.35/$$

Виберемо такі змінні стану:

$$x_1(t) = \Delta \omega(t); \quad x_2(t) = \Delta I_d(t); \quad x_3(t) = \Delta \Phi(t). \quad /3.36/$$

Тоді вектор стану

$$\overline{x(t)} = [\Delta \omega(t) \quad \Delta I_d(t) \quad \Delta \Phi(t)]^T. \quad /3.37/$$

Рівняння стану двигуна в поелементній формі одержимо, коли
/3.33/-/3.35/ запишемо у вигляді диференціальних рівнянь першого по-
рядку, до того ж так, щоб ліві їхні частини містили похідні від ви-
браних змінних стану, а праві - всі змінні стану і всі входи. Окрім
того, коли праві частини рівнянь не містять усіх змінних стану чи
всіх входів, то відсутні параметри треба записати у вигляді добутків
нуля на відповідну змінну стану чи відповідний вхід. Останню опера-
цію виконують з методичною метою, щоб зрозуміти суть формування мат-

риць A та B у рівняннях стану, а також щоб уникнути помилок під час визначення рівнянь стану. У розглядуваному випадку рівняння /3.33/- /3.35/ після нескладних перетворень набувають вигляду:

$$\left. \begin{aligned} p\Delta\omega(p) &= 0 \cdot \Delta\omega(p) + \frac{\kappa_A R_E}{T_H} \Delta I_A(p) + \frac{\kappa_A R_E I_{A0}}{T_H \Phi_0} \Delta\Phi(p) + \\ &\quad (p) + 0 \cdot \Delta U_g(p) - \frac{\kappa_A R_E}{T_H} \Delta I_{cr}(p); \\ p\Delta I_A(p) &= -\frac{1}{\kappa_A R_E T_e} \Delta\omega(p) - \frac{1}{T_e} \Delta I_A(p) - \frac{\omega_0}{\Phi_0 \kappa_A R_E T_e} \Delta\Phi(p) + \\ &\quad + \frac{1}{R_E T_e} \Delta U_g(p) + 0 \cdot \Delta U_g(p) + 0 \cdot \Delta I_{cr}(p); \\ p\Delta\Phi(p) &= 0 \cdot \Delta\omega(p) + 0 \cdot \Delta I_A(p) - \frac{1}{T_g} \Delta\Phi(p) + 0 \cdot \Delta U_g(p) + \\ &\quad + (\kappa_g / T_g R_g) \Delta U_g(p) + 0 \cdot \Delta I_{cr}(p). \end{aligned} \right\} /3.38/$$

Із /3.38/ знаходимо рівняння стану

$$\dot{\bar{x}}(t) = A \bar{x}(t) + B \bar{u}(t), \quad /3.39/$$

а рівняння виходу

$$\bar{y}(t) = C \bar{x}(t), \quad /3.40/$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\kappa_A R_E}{T_H} & \frac{\kappa_A I_{A0} R_E}{T_H \Phi_0} \\ -\frac{1}{\kappa_A R_E T_e} & -\frac{1}{T_e} & -\frac{\omega_0}{\Phi_0 \kappa_A R_E T_e} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_g} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\kappa_A R_E}{T_H} \\ -\frac{1}{R_E T_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa_g}{T_g R_g} & 0 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{u}(t) = \begin{bmatrix} \Delta U_g(t) \\ \Delta U_g(t) \\ \Delta I_{cr}(t) \end{bmatrix};$$

$$\bar{y} = [y_1(t) \ y_2(t) \ 0]^T.$$

Регулювальною координатою в слідкувальних приводах є кутове положення вала двигуна $\vartheta(t)$. У цьому разі рівняння стану, додавши до /3.38/ рівняння $\rho \Delta \beta(\rho) = \Delta \omega(\rho)$, визначають за такою самою методикою.

Приклад 3.1. Для двигуна постійного струму, динамічні властивості якого характеризує передавна функція /3.24/, треба визначити рівняння стану в стандартній формі, накреслити схему аналогового моделювання й фазові траєкторії, що відповідають вільним рухам двигуна.

Розв'язання. Диференціальне рівняння, яке відповідає передавній функції /3.24/, має вигляд

$$T_e T_M \frac{d^2 \Delta \omega(t)}{dt^2} + T_M \frac{d \Delta \omega(t)}{dt} + \Delta \omega(t) = -R_z K_A T_e \frac{d \Delta I_{cr}(t)}{dt} - R_z K_A \Delta I_{cr}(t).$$

Для розв'язання задачі скористаймося методикою, викладеною в попередньому розділі, і зокрема формулою /2.56/ та схемою аналогового моделювання, зображеною на рис. 2.12.

У розглядуваному випадку $n = 2$; $m = 1$; $n - m = 1$. Звівши дане диференціальне рівняння до виду /2.50/, одержимо

$$a_n(a_2) = 1; \quad a_{n-1}(a_1) = 1/T_e; \quad a_{n-2}(a_0) = 1/T_e T_M;$$

$$b_n(b_2) = 0; \quad b_{n-1}(b_1) = -(R_z K_A)/T_M; \quad b_{n-2}(b_0) = -(R_z K_A)/T_e T_M.$$

Відповідно до формули /2.56/ знаходимо

$$k_0 = b_n = 0;$$

$$\text{при } k_1 = b_1 - \sum_{j=n-m}^{n-1} a_{j+1} \cdot k_j = b_1;$$

$$\text{при } k_2 = b_0 - \sum_{j=1}^n a_{j+1} \cdot k_j = b_0 - a_1 k_1.$$

Тоді рівняння стану в стандартній формі матимуть такий вигляд:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A \bar{x}(t) + B u(t);$$

$$y(t) = C \bar{x}(t),$$

де
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_e T_H} & -\frac{1}{T_e} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 - \alpha, h_1 \end{bmatrix};$$

$$C = [1 \ 0]; \quad D = [h_0] = [0];$$

$$\bar{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T = [\omega(t) \ \dot{\omega}(t)]^T;$$

$$u(t) = I_{cr}(t), \quad y(t) = \omega(t) - \text{скаляри.}$$

Схему аналогового моделювання, яка відповідає наведеним рівнянням стану, зображено на рис. 3.6.

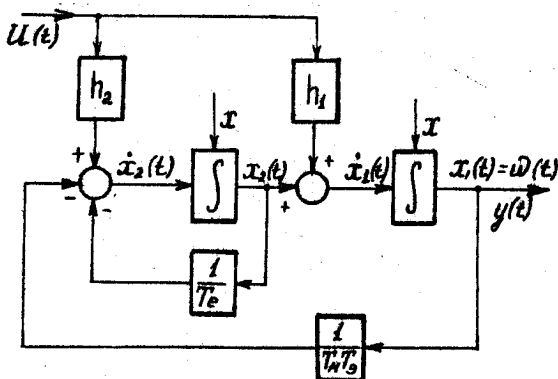


Рис. 3.6. Схема аналогового моделювання двигуна постійного струму / до прикладу 3.1/

Більші рухи двигуна, спричинені ненульовими початковими умовами, описують такі диференціальні рівняння:

$$\frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + 2\varphi \Omega_0 \frac{d\omega(t)}{dt} + \Omega_0^2 \omega(t) = 0,$$

де $\varphi = T_H / 2 \sqrt{T_e T_H}$; $\Omega_0 = 1 / \sqrt{T_e T_H}$.

Коли $\varphi = 0$ /теоретично випадок можливий, якщо активний опір якірного кола двигуна порівнює нулеві/, розв'язок рівняння $d^2\omega(t)/dt^2 + \Omega_0^2 \omega(t) = 0$ має вигляд

$$x_1(t) = \omega(t) = K \sin(\Omega_0 t + \varphi).$$

Диференціюючи це рівняння, знаходимо

$$x_2(t) = \dot{\omega}(t) = \Omega_0 K \cos(\Omega_0 t + \varphi),$$

де K і φ - довільні сталі, визначені з початкових умов.

Вилучаючи з цих рівнянь $\Omega_0 t + \varphi$, дістаємо рівняння фазових траєкторій, що являють собою параметричне рівняння еліпса з півосями K та $K\Omega_0$ /рис. 3.7, а/:

$$\frac{x_1^2}{K^2} + \frac{x_2^2}{\Omega_0^2 K^2} = 1.$$

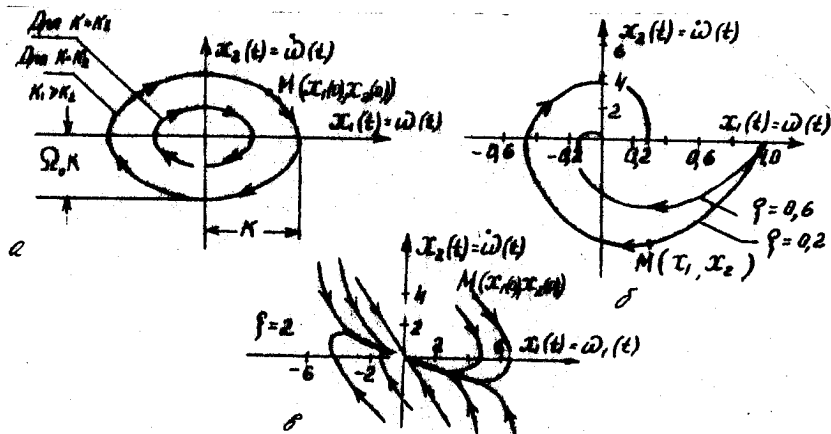


Рис. 3.7. Фазові траєкторії двигуна постійного струму при $\varphi = 0$ /а/, $\varphi < I/6$ /б/ і $\varphi > I/6$ /в/

З початкових умов /коли $t = 0$ $x_1(t) = \omega(t) = x_1(0) = \omega_0$,
 $x_2(t) = \dot{\omega}(t) = \dot{x}_2(0) = \omega_0$ / знаходимо

$$\kappa = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\dot{\omega}_0^2}{\Omega_0^2}}; \quad \varphi = \arctg \frac{\Omega_0 \omega_0}{\dot{\omega}_0}.$$

Різним величинам сталої κ на фазовій площині однозначно відповідають різні еліпси, а різним величинам φ - різні початкові положення зображувальної точки $M_0[x_1(0), x_2(0)]$ на даному еліпсі. Зображальна точка M фазовою траєкторією рухається за стрілкою годинника. Замкненій траєкторії на фазовій площині відповідають періодичні рухи двигуна. Увесь еліпс зображальна точка проходить за один період $T = 2\pi / \Omega_0$.

На рис. 3.7,б зображено фазові траєкторії двигуна для $\xi < 1$, що являють собою логарифмічні спіралі, вкладені одна в одну і асимптотично збіжні, коли $t \rightarrow \infty$, до початку координат фазової площини, який є точкою рівноваги. Фазові траєкторії двигуна для $\xi > 1$ зображено на рис. 3.7,в.

Точки рівноваги, куди збігаються всі фазові траєкторії /у розглянутому випадку це початок координат фазової площини/, називають: $\varphi = 0$ - центром, $\varphi < 1$ - стійким фокусом, $\varphi > 1$ - стійким вузлом.

3.3.2. Матрицева передавна функція

Застосовуючи до рівнянь /2.75/ і /2.83/ перетворення Лапласа і припускаючи, що перший план правої частини /2.83/, яка характеризує вільні рухи системи, спричинені ненульовими початковими умовами, дорівнює нулю, після нескладних перетворень дістаємо [1]

$$\bar{Y}(p) = \bar{H}(p) \bar{U}(p), \quad /3.41/$$

де

$$\bar{H}(p) = C [pI - A]^{-1} B. \quad /3.42/$$

Матрицю $H(p)$ називають матрицевою передавною функцією лінійної /лінеаризованої/ стаціонарної багатовимірної системи. Кожен елемент $H_{ij}(p)$ функції $H(p)$ - це скалярна передавна функція від i -ї компоненти виходу до j -ї компоненти входу. Якщо $H(p)$ і $\bar{U}(p)$ відомі, то реакцію системи з нульовим початковим станом можна знайти внаслідок оберненого перетворення Лапласа виразу /3.41/.

Приклад 3.2. Треба визначити матрицеву функцію двигуна постійного струму, вихідними координатами якого є $\omega(t)$ та $I_d(t)$, а вхідними - $U_d(t)$ та $I_{cr}(t)$.

Розв'язання. У розглядуваному випадку, припустивши, що в /3.38/ $\Delta \Phi(t) = 0$, знаходимо такі вирази матриць, що їх містять рівняння стану /3.39/, /3.40/:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\kappa_d R_x}{T_H} \\ -\frac{1}{\kappa_d R_x T_e} & -\frac{1}{T_e} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\kappa_d R_e}{T_H} \\ \frac{1}{R_x T_e} & 0 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \overline{x(t)} = [\omega(t) \quad I_d(t)]^T;$$

$$\overline{U(t)} = \begin{bmatrix} I_{cr}(t) \\ U_d(t) \end{bmatrix}; \quad \overline{y(t)} = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ I_d(t) \end{bmatrix}.$$

Визначимо тепер обернену матрицю $[\rho I - A]^{-1}$, яку містить вираз матрицевої передаточної функції /3.42/:

$$[\rho I - A]^{-1} = \frac{\text{Adj}[\rho I - A]}{\det[\rho I - A]},$$

де

$$[\rho I - A] = \begin{bmatrix} \rho & -\frac{\kappa_d R_x}{T_H} \\ \frac{1}{R_x \kappa_d T_e} & \rho + \frac{1}{T_e} \end{bmatrix}.$$

Характеристичний поліном матриці A

$$\det[\rho I - A] = \rho^2 + \frac{1}{T_e} \rho + \frac{1}{T_e T_H}.$$

Приєднана матриця

$$\text{Adj} \begin{bmatrix} p & -\frac{\kappa_A R_I}{T_H} \\ \frac{1}{\kappa_A R_I T_e} & p + \frac{1}{T_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + \frac{1}{T_e} & \frac{\kappa_A R_I}{T_H} \\ -\frac{1}{\kappa_A R_I T_e} & p \end{bmatrix},$$

де C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} - алгебричні доповнення приєднаної матриці.
Отже,

$$[pI - A]^{-1} = \frac{1}{p^2 + \frac{1}{T_e} p + \frac{1}{T_e T_H}} \begin{bmatrix} p + \frac{1}{T_e} & \frac{\kappa_A R_I}{T_H} \\ -\frac{1}{\kappa_A R_I T_e} & p \end{bmatrix}.$$

Урахувавши одержані вирази, визначасмо матрицеву передавну функцію двигуна:

$$\overline{H(p)} = C [pI - A]^{-1} B = \begin{bmatrix} \frac{\kappa_A}{A(p)} & -\frac{\kappa_A R_I (1 + T_e p)}{A(p)} \\ \frac{(T_H / R_I) p}{A(p)} & \frac{1}{A(p)} \end{bmatrix},$$

де $A(p) = p^2 + \frac{1}{T_e} p + \frac{1}{T_e T_H} = T_e T_H p^2 + T_H p + 1.$

Неважко переконатися, що елементи $H_{11}(p)$, $H_{12}(p)$, $H_{21}(p)$, $H_{22}(p)$ матрицевої передавної функції $H(p)$ повністю збігаються з відповідними передавними функціями /3.21/, /3.24/, /3.20/, /3.23/, одержаними попереду класичним способом, тобто $H_{11}(p) = G_{\omega I}(p)$;

$$H_{12}(p) = G_{\omega I}(p); \quad H_{21}(p) = G_{I\omega}(p); \quad H_{22}(p) = G_{II}(p).$$

3.4. Математична модель двигуна постійного струму з урахуванням пружних деформацій механічної передачі

Розв'яземо задачу для випадку керування двигуном за колом обмотки ягора, припустивши, що $\Phi(t) = \Phi_0 = \text{const} [\Delta \Phi(t) = 0].$

Одержані попереду рівняння динаміки двигуна постійного струму справляються у випадку, коли механічна передача між двигуном та робочим механізмом абсолютно жорстка і, крім того, в ній немає повітряного проміжку /люфту/. За такої умови кутове положення двигуна й робочого механізму однакові як в усталеному, так і в перехідному режимі.

Але насправді всі елементи механічної передачі, які перебувають під впливом моменту, деформуються. У межах закону Гука виниклий у механічній передачі момент M_n , що його звичайно називають пружним, пропорційний кутовій деформації $\Delta \alpha$:

$$M_n = C \Delta \alpha.$$

/3.43/

Коефіцієнт пропорційності C називають коефіцієнтом жорсткості. Для вала зовдовжки ℓ /м/

$$C = J_B G / \ell \text{ [Н.м / рад]},$$

де J_B - момент інерції поперечного перерізу вала, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$; G - модуль пружності кручення, Па.

Розглянемо, як пружна механічна передача з коефіцієнтом жорсткості C впливає на механічну частину електропривода. На рис. 3.8 зображено узагальнену двомасову механічну частину електропривода з пружною механічною передачею. До такої розрахункової схеми /моделі/ можна звести велику кількість різних приводів. На схемі позначено: α_d , $\alpha_p = \alpha_d / i$, α_0 - кути повороту відповідно вала двигуна, вихідного вала редуктора й вала робочого механізму; i - коефіцієнт редукції, який дорівнює відношенню кутових швидкостей обертання вала двигуна ω_d і вихідного вала редуктора ω_p ; $C_0 = C i^2$ - зведений до вала робочого механізму еквівалентний коефіцієнт жорсткості редуктора й вала, який зв'язує двигун та робочий механізм; $C = C_0 C_p / (C_0 + C_p)$; C_0 - жорсткість вала; C_p - жорсткість редуктора [21]; J_d , J_0 - моменти інерції відповідно вала двигуна разом з редуктором і робочого механізму; M_d , $M_{оп}$ - моменти відповідно електромагнітний, що його розвиває двигун, і статичного опору робочого механізму.

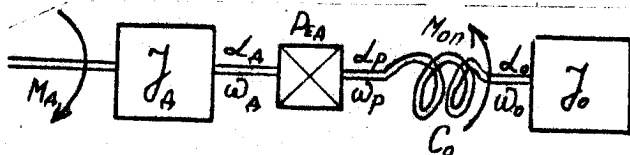


Рис. 3.8. Узагальнена двомасова система механічної частини електропривода

Складаючи рівняння динаміки розглядуваної механічної частини привода /рис. 3.6/, зробимо такі основні припущення: сили та моменти, які діють у системі, прикладено до зосереджених мас, що не зазнають деформації; пружні ланки негаомі й мають сталу жорсткість; деформації пружних ланок лінійна і підлягає законові Гука.

Рівняння динаміки в приростах, записані в зображеннях за Лапласом, з урахуванням зроблених припущень, набудуть вигляду:

$$j_d p^2 \Delta \alpha_d(p) = \Delta M_d(p) - C_0 [\Delta \alpha_p(p) - \Delta \alpha_0(p)] / i, \quad /3.44/$$

$$j_0 p^2 \Delta \alpha_0(p) = C_0 [\Delta \alpha_p(p) - \Delta \alpha_0(p)] - \Delta M_{on}(p). \quad /3.45/$$

Перше з них записано для вала двигуна, на який діють момент M_d і зведений до вала двигуна пружний момент $M_n = C_0 (\alpha_p - \alpha_0) / i$, а друге – для вала робочого механізму, що на нього діють моменти M_{on} і M_n .

Рівнянням /3.44/, /3.45/ відповідає структурна схема деомасової механічної частини електропривода /рис. 3.9,а/, яку за допомогою структурного перетворення зведено до виду, зображеного на рис. 3.9,б. На цих схемах аргумент p для змінних M_d , M_n , M_{on} , ω_d , ω_0 , α_d , α_0 пропущено /з метою спрощення/, передавні функції механічної частини робочого механізму /ОК/ $G_0(p)$, механічної частини двигуна $G_d(p)$ і відношення моментів $G_{on}(p)$ /рис. 3.9,б/:

$$G_0(p) = \frac{i \Delta \omega_0(p)}{\Delta \omega_d(p)} = \frac{\Delta \alpha_0(p)}{\Delta \alpha_p(p)} = \frac{1}{T_0^2 p^2 + 1}, \quad /3.46/$$

$$G_d(p) = \frac{\Delta \omega_d(p)}{\Delta M_d(p)} = \frac{T_0^2 p^2 + 1}{j_d' (T_0^2 p^2 + 1) p}, \quad /3.47/$$

$$G_{on}(p) = \frac{\Delta M_{on}(p)}{\Delta M_{on}(p)} = \frac{T_0^2 p^2 + 1}{i}, \quad /3.48/$$

де

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= \sqrt{j_0 / C}; \quad T_{01} = T_0^2 i^2 j_d / j_0'; \quad T_{0d} = 1 / \sqrt{j_d / C}; \\ j_0' &= j_0 + i^2 j_d; \quad j_d' = j_0' / i^2 \end{aligned} \right\} \quad /3.49/$$

Припустивши, що у виразі /3.47/ $C = \infty$, дістанемо передавну функцію механічної частини привода з абсолютно жорсткою механічною передачею:

$$G_A(p) = \frac{\Delta \omega(p)}{\Delta M_A(p)} = \frac{1}{J_{\Sigma} p}$$

/3.50/

де сумарний момент інерції $J_{\Sigma} = J_0 + i^2 J_A$.

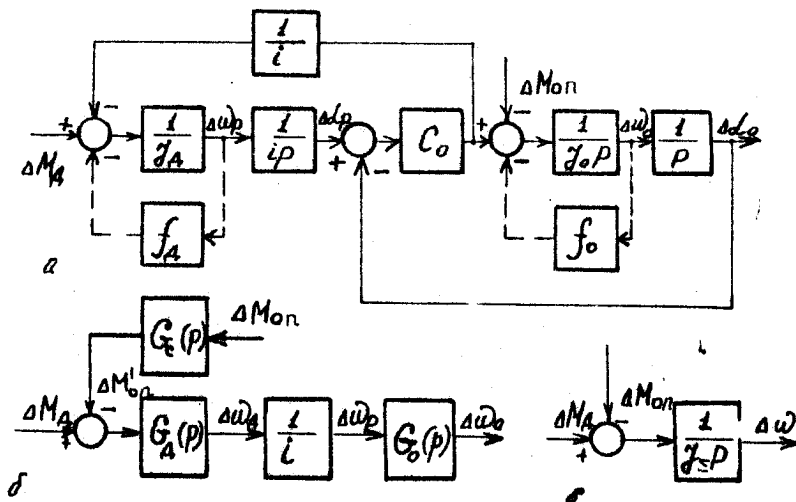


Рис. 3.9. Структурні схеми механічної частини електропривода: а - без урахування тертя; б - повторена без урахування тертя; в - для абсолютно жорсткої механічної передачі

Структурну схему абсолютно жорсткого привода, що відповідає виразу /3.50/, зображено на рис. 3.9,в, а його логарифмічна амплітудно-частотна характеристика /ЛАЧХ/ $4(\omega) = 20 \lg G_y(\omega) = 20 \lg (1/J_{\Sigma}) \omega$ являє собою, як відомо, пряму лінію з нахилом 20 дБ/дек, котра перетинає вісь частот при $\omega = \omega_{ср} = 1/J_{\Sigma}$. Використавши структурні схеми рис. 3.9, можна визначити різні передавні функції, які пов'язують вихідні величини $\Delta \omega_y$, $\Delta \omega_0$ або $\Delta \alpha_y$, $\Delta \alpha_0$ з вхідними ΔM_y і ΔM_{0n} .

Оцінимо вплив коефіцієнта жорсткості C_0 на властивості механічної частини електропривода /механізму/. Для цього скористаємося функцією $G_g(p)$, а також передавною функцією

$$G_{AO}(p) = \frac{\Delta \omega_g(p)}{\Delta M_g(p)} = i G_g(p) G_0(p) = \frac{1}{i J_A' (T_0^2 p^2 + 1) p}. \quad /3.51/$$

Оскільки передавні функції $G_g(p)$ і $G_{g0}(p)$ складаються з консервативних ланок другого порядку, то, отже, на власних частотах робочого механізму

$$\Omega_0 = 1/T_0 = \sqrt{C_0/J_0} \quad /3.52/$$

і всієї механічної частини електропривода

$$\Omega_0' = 1/T_0' = \Omega_0 \sqrt{\gamma}, \quad /3.53/$$

де $\gamma = J_0' / (i^2 J_g)$, можуть виникати незгасальні гармонійні коливання. Якщо вхідний сигнал $\Delta M_g(t)$ змінюватиметься за гармонійним законом, то в разі збігу частоти цього сигналу з частотою Ω_0' в приводі виникне резонанс, коли амплітуда сигналу на виході привода необмежено зростатиме. На рис. 3.10 якісно зображено ЛАЧХ $L_{g0}(\omega) = 20 \lg |G_{g0}(j\omega)|$ та $L_g(\omega) = 20 \lg |G_g(j\omega)|$, побудовані для $i = 1$ /редуктора в механічній передачі немає/. Характеристика $L_{g0}(\omega)$ на частоті Ω_0' має розрив неперервності, а це означає, що амплітуда вихідного сигналу $\Delta \omega_g$ зростає до нескінченності і, крім того, на цій частоті виникає стрибок фази $\varphi_{g0}(\omega) = \arctan G_{g0}(j\omega)$ від $-\pi/2$ до $+\pi/2$. А тому можуть виникнути резонансні явища, і механічна частина привода втрачить стійкість. Щоб цього уникнути, привод проектувати треба так, аби резонансна частота Ω_0' розташовувалася якомога далі від частоти зріє, $\Omega_{gr} = 1/T_g'$. З виразу /3.53/ випливає, що мінімал не значення Ω_0' матиме при $C_0 = \text{const}$, коли $\gamma = 2$. Із зростанням коефіцієнта жорсткості C_0 збільшуються значення Ω_0 та Ω_0' .

ЛАЧХ $L_g(\omega)$, крім розриву неперервності й від'ємного стрибка фази на частоті Ω_0' , на резонансній частоті Ω_0 має ще й від'ємний розрив неперервності і додатний стрибок фази $\varphi_g(\omega)$ від $-\pi/2$ до $+\pi/2$, спричинений консервативною форсувальною ланкою другого порядку $(T_0^2 p^2 + 1)$. На властивості механічної частини електропривода з передавною функцією $G_g(p)$ особливості частотних характеристик $L_g(\omega)$ і $\varphi_g(\omega)$ на частоті Ω_0 впливають так само, як і в попередньому ви-

падку. Розрив ЛАЧХ $L_g(\omega)$ на частоті Ω_0 небезпеки не становить, бо коливання сигналу $\Delta\omega$ під час резонансу матимуть дуже малу амплітуду. Додатний стрибок фази $\varphi_g(\omega)$ на частоті Ω_0 сприятливо позначиться на стійкості механічної частини двигуна.

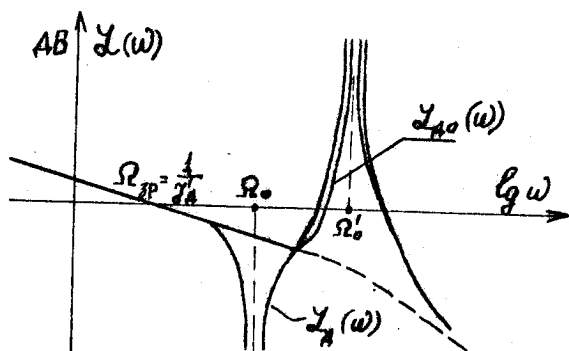


Рис. 3.10. Логарифмічні характеристики всієї механічної частини електропривода $L_{g0}(\omega)$ і механічної частини двигуна $L_g(\omega)$ без урахування тертя

Зуважимо також, що ЛАЧХ $L_{g0}(\omega)$ і $L_0(\omega)$ на ділянках низьких частот і частоти зрізу Ω_{zp} збігаються.

На відміну від ідеальної пружної механічної передачі, розглянутої попереду, в реальній передачі завжди є сили тертя, які справляють демпфувальну дію на коливання, зумовлені пружними деформаціями. Такі сили в механіці називають дисипативними на протилежність консервативним, чи потенціальним, силам, які зберігають енергію коливної системи незмінною. Прикладом дисипативних сил може бути сухе й в'язке тертя. Сухе тертя демпфує тільки такі коливання, в яких швидкість змінює свій знак /реверс/. В'язке тертя виникає під час роботи обертових елементів у рідинному чи повітряному середовищі /підшипники, зубчасті передачі, що працюють у масі, крильчатка вентилятора двигуна, тертя

колектора об шіткі/. Сили в'язкого тертя спричиняють момент в'язкого тертя, пропорційний швидкості. З урахуванням моментів в'язкого тертя в двигуні $\Delta M_{\delta g} = f_g \Delta \omega_g$ і робочому механізмі /опори й ущільнення/ $\Delta M_{\delta o} = f_o \Delta \omega_o$, де f_g, f_o - коефіцієнти в'язкого тертя, рівняння /3.44/ і /3.45/ в зображеннях запишемо так:

$$J_A p^2 \Delta \alpha_A(p) = \Delta M_A(p) - C_o [\Delta \alpha_p(p) - \Delta \alpha_o(p)] / i - f_A p \Delta \alpha_A(p), \quad /3.54/$$

$$J_o p^2 \Delta \alpha_o(p) = C_o [\Delta \alpha_p(p) - \Delta \alpha_o(p)] - \Delta M_{on}(p) - f_o p \Delta \alpha_o(p). \quad /3.55/$$

Динамічні блоки з коефіцієнтами f_g і f_o на структурній схемі рис. 3.9,а враховують вплив в'язкого тертя. У цьому разі передавні функції:

$$G_o(p) = \frac{i \Delta \omega_o(p)}{\Delta \omega_A(p)} = \frac{\Delta \alpha_o(p)}{\Delta \alpha_p(p)} = \frac{1}{T_o^2 p^2 + 2 f_o T_o p + 1}, \quad /3.56/$$

$$G_A(p) = \frac{\Delta \omega_A(p)}{\Delta M_A(p)} = \frac{i / f_o' (T_o^2 p^2 + 2 f_o T_o p + 1)}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}, \quad /3.57/$$

$$G_{on}(p) = \frac{\Delta M_{on}(p)}{\Delta M_{on}(p)} = \frac{T_o^2 p^2 + 2 f_o T_o p + 1}{i}, \quad /3.58/$$

$$G_{\Delta o}(p) = \frac{\Delta \omega_o(p)}{\Delta M_A(p)} = \frac{i / f_o'}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}, \quad /3.59/$$

де

$$\left. \begin{aligned} f_o &= \frac{f_o}{2 \sqrt{J_o C_o}}; \quad f_A = \frac{i \cdot f_A}{2 \sqrt{J_A C_o}}; \quad f_o' = f_o + i^2 f_A; \\ a_1 &= \frac{J_o' + 2 f_o T_o i^2 f_A}{f_o'}; \quad a_2 = \frac{i^2 T_o (2 f_o J_A + f_A T_o)}{f_o'}; \quad a_3 = \frac{T_o^2 i^2 J_A}{f_o'} \end{aligned} \right\} \quad /3.60/$$

Коефіцієнти $T_o, \log, J_o'$ ті самі, що і в виразах /3.49/. Не змінюється й власна частота механічної частини привода $\Omega_o = 1/T_o$. Власна частота механічної частини всього привода

$$\Omega_o' = \sqrt{a_1 / a_3} = \sqrt{\frac{J_o' + 2 f_o T_o i^2 f_A}{T_o^2 i^2 J_A}}. \quad /3.61/$$

Оскільки $\beta'_0 \gg 2\gamma_0 \tau_0 i^2 J_A$, то, отже, як і в попередньому випадку,

$$\Omega'_0 \approx \Omega \sqrt{\beta'_0 / i^2 J_A} \approx \Omega_0 \sqrt{\gamma}.$$

Вплив в'язкого тертя виявляється в тому, що резонансні піки ЛАЧХ $\mathcal{L}_{\beta 0}(\omega)$ і $\mathcal{L}_{\beta}(\omega)$ на частоті Ω'_0 мають скінченне значення. Якщо $\gamma = 2$, то резонансні піки мають максимальні амплітуди [25]:

$$\mathcal{L}_{\beta 0 \max}(\omega) = i / (f_0 + i^2 J_A), \quad /3.62/$$

$$\mathcal{L}_{\beta \max}(\omega) = \gamma \mathcal{L}_{\beta 0 \max}(\omega). \quad /3.63/$$

На резонансній частоті Ω_0 ЛАЧХ $\mathcal{L}_{\beta}(\omega)$ має провал

$$\mathcal{L}_{\beta \min}(\omega) = f_0 / C_0 i^2 J_A.$$

З рівняння /3.62/ випливає, що на величину резонансного піка дужче впливає в'язке тертя в двигуні, ніж тертя в робочому механізмі.

Фазова характеристика $\mathcal{L}_{\beta 0}(\omega)$ на частоті Ω'_0 має крутий спад, а це зменшує стійкість механізму. Крутне підняття фазової характеристики $\mathcal{L}_{\beta}(\omega)$ на частоті Ω_0 поліпшує стійкість.

На практиці в силових слідкувальних системах, де звичайно виникають явища резонансу, привод виготовляють з відношенням моментів інерції $\gamma = 2$.

Розглянемо тепер, як впливають пружні деформації механічної передачі на динамічні властивості двигуна постійного струму. З цією метою з'єднаємо електричну частину структурної схеми двигуна без урахування пружних деформацій /див. рис. 3.3/ із структурною схемою механічної частини електропривода /див. рис. 3.9,б/. Унаслідок цього дістанемо структурну схему двигуна постійного струму з урахуванням впливу пружних деформацій /рис. 3.11/. Динамічний блок з коефіцієнтом підсилення C_{β} призначений для перетворення струму якоря двигуна ΔI_d у момент ΔM_d , який є входним сигналом механічної частини електропривода. Користуючись схемою на рис. 3.11, можна визначити сукупність передавальних функцій двигуна, котрі пов'язують його вихідні координати ΔI_d , $\Delta \omega_d$, $\Delta \omega_0$, $\Delta \alpha_d$, $\Delta \alpha_0$ з входними $\Delta \mathcal{L}_{\beta}$ і $\Delta M_{оп}$. Визначимо такі передавальні функції з керуванням $\mathcal{L}_{\beta}$ й збудуванням $M_{оп}$ діями, які необхідні насамперед для оцінювання впливу пружних деформацій на динамічні властивості двигуна:

$$G_{\omega_{AH}}(p) = \frac{\Delta \omega_A(p)}{\Delta \omega_R(p)} \bigg|_{\substack{\Delta \varphi_0 = 0 \\ M_{0H} = 0}} = \frac{G_{AH}(p) G_R(p)}{1 + G_{AH}(p) G_R(p) C \varphi_0} =$$

$$= \frac{C \varphi_0 / R_{\Sigma} J_A' \cdot T_N' (T_0^2 p^2 + 1)}{T_N T_0 T_{01}^2 p^4 + T_N' T_{01}^2 p^3 + (T_0 + T_0') T_N' p^2 + T_N' p + 1}, \quad /3.64/$$

де $G_{AH}(p) = \frac{C \varphi_0 / R_{\Sigma}}{1 + T_0 p}$, $T_N' = (R_{\Sigma} J_A') / (C \varphi_0)^2$;

$$G_{\omega_{0H}}(p) = \frac{\Delta \omega_0(p)}{\Delta \omega_R(p)} \bigg|_{\substack{\Delta \varphi_0 = 0 \\ M_{0H} = 0}} = G_{AH}(p) \cdot G_0(p) / i; \quad /3.65/$$

$$G_{\omega_{AH}}(p) = \frac{\Delta \omega_A(p)}{\Delta M_{0H}(p)} \bigg|_{\substack{\Delta \varphi_0 = 0 \\ \Delta \omega_A = 0}} = \frac{G_A(p) G_{0H}(p)}{1 + G_{AH}(p) G_R(p) C \varphi_0} =$$

$$= \frac{T_N' / (i J_A') [(T_0^2 p^2 + 1) (T_{0H}^2 p^2 + 1) (T_0 p + 1) (T_{01}^2 p^2 + 1)]}{(T_{01}^2 p^2 + 1) [T_N' T_0 T_{01}^2 p^4 + T_N' T_{01}^2 p^3 + T_N' (T_0 + T_0') p^2 + T_N' p + 1]}, \quad /3.66/$$

$$G_{\omega_{0H}}(p) = \frac{\Delta \omega_0(p)}{\Delta M_0(p)} \bigg|_{\substack{\Delta \varphi_0 = 0 \\ \Delta \omega_A = 0}} = G_{AH}(p) G_0(p) / i. \quad /3.67/$$

Порівнявши передавні функції /3.21/, /3.24/ з /3.64/, /3.66/, бачимо, що коли $C = 0$, то вони збігаються, бо в цьому разі $T_0 = 0$, $T_{01} = 0$, $T_N' = T_N = R_{\Sigma} J_A' / (C \varphi_0)^2$, $J_{\Sigma} = J_d + J_0$.

У слідкувальних системах вихідною величиною є кут повороту вала двигуна α_d або робочого механізму α_0 . Тому відповідні передавні функції визначають, помноживши знаменники виразів /3.64/-/3.67/ на комплексну змінну p .

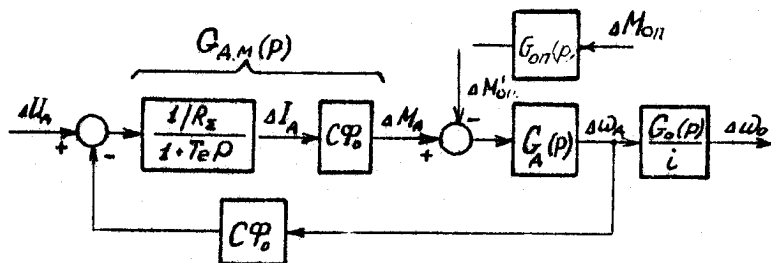


Рис. 3.II. Структурна схема двигуна постійного струму з урахуванням пружних деформацій у механічній передачі

3.5. Математична модель трифазного асинхронного двигуна

Динамічні властивості трифазних асинхронних двигунів залежать від електромагнітних і електромеханічних процесів, які характеризують електромагнітний T_e і електромеханічний T_M сталими часу, спричиненими відповідно індуктивностями електричних кіл двигуна і механічною інерційністю всіх рухомих частин двигуна - робочий механізм. Звичайно $T_e \ll T_M$. Тому, визначаючи рівняння динаміки асинхронного двигуна та їх лінеаризуючи, впливом електромагнітних перехідних процесів нехтують. Крім того, припускають, що зв'язок двигуна з робочим механізмом абсолютно хорсткий і без люфту.

Механ. чна характеристика трифазного асинхронного двигуна [25]

$$M = \frac{3 U_1^2 R_2' S}{\omega_0 S [(R_1 + R_2' / S)^2 + X_{\Sigma}^2]}, \quad /3.68/$$

де U_1 - діюче значення фазної напруги мережі, В; $R_2' S$ - зведений до обмотки статора сумарний фазний опір обмотки ротора і послідовно увімкненого в фазу додаткового опору, Ом; $\omega_0 = 2\pi f_1 / p$ - кутова швидкість обертового магнітного поля, що її звичайно називають синхронною, рад/с; f_1 - частота струму, який живить обмотки статора, Гц; p - кількість пар полюсів двигуна; $S = \omega_0 / (\omega_0 - \omega)$ - ков-

зання ротора двигуна; ω - кутова швидкість ротора, рад/с; R_s - активний фазний опір обмотки статора, Ом; x_s - індуктивний опір короткого замикання, Ом.

Рівняння /3.68/ одержано за таких припущень: параметри двигуна не залежать від режиму роботи; не враховували втрат у сталі статора й ротора, насичення магнітопроводу, а також впливу просторових та часових найвищих гармонійних складових намагнічувальних сил обмоток статора й ротора.

З рівняння /3.68/ бачимо, що коли $p = const$, то електромагнітний момент двигуна є нелінійна функція u, f, ω , яку можна записати у вигляді нелінійного рівняння

$$F[M_d(t), u(t), f(t), \omega(t)] = 0. \quad /3.69/$$

Лінеаризуємо нелінійне рівняння /3.69/ у точці, яка відповідає номінальному ковзанню $S = S_H$. Замінюючи змінні $M_d(t), u(t), f(t), \omega(t)$ їхніми усталеними значеннями й відхиленнями, тобто

$$M_d(t) = M_{d0} + \Delta M_d(t), \quad u(t) = u_0 + \Delta u(t),$$

$$f(t) = f_{10} + \Delta f(t), \quad \omega(t) = \omega_H + \Delta \omega(t),$$

дістаємо згідно з формулою /2.4/

$$K_M \Delta M_d(t) + K_u \Delta u(t) + K_f \Delta f(t) + K_\omega \Delta \omega(t), \quad /3.70/$$

де коефіцієнти K_M, K_u, K_f, K_ω являють собою частинні похідні нелінійної функції F за умови, що $M_d(t) = M_{d0}, u(t) = u_0, f(t) = f_{10}, \omega(t) = \omega_H$, тобто

$$K_M = \left(\frac{\partial F}{\partial M_d} \right)_0, \quad K_u = \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)_0, \quad K_f = \left(\frac{\partial F}{\partial f} \right)_0, \quad K_\omega = \left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right)_0.$$

Щоб знайти частинні похідні в рівнянні /3.70/, скористаймося уточненою формулою Кюсса [25]:

$$M_d = \frac{2M_K(1 + aS_K)}{S/S_K + S_K/S + 2aS_K}, \quad /3.71/$$

де $a = R_s/R'_{2z}$, в критичне ковзання S_K і критичний момент M_K :

$$M_K = \frac{3u_0^2}{2\omega_0[R_s \pm \sqrt{R_s^2 + x_s^2}]}, \quad /3.72/$$

$$S_K = \pm R'_{2z} / \sqrt{R_s^2 + x_s^2}. \quad /3.73/$$

Коли $S \ll S_x$, як це впливає з виразу /3.71/, то механічну характеристику двигуна можна апроксимувати лінійною залежністю

$$M_d = 2 M_x S_x / S. \quad /3.74/$$

Тоді лінеаризовані коефіцієнти нелінійного рівняння

$$F[M_d(t), u_1(t), f_1(t), \omega(t)] = 2 M_x S_x / S - M_d = 0 \quad /3.75/$$

з урахуванням /3.72/ і /3.73/ набудуть вигляду:

$$K_M = \left(\frac{\partial F}{\partial M_d} \right)_0 = 1;$$

$$K_u = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1} \right)_0 = \frac{\omega_H d u_{10}}{(2\pi)^2 f_{10}^2 - 2\pi p f_{10} \omega_H};$$

$$K_f = \left(\frac{\partial F}{\partial f_1} \right)_0 = \frac{\omega_H d u_{10}^2}{2\pi f_{10}^2 [2\pi f_{10} - p \omega_H]^2};$$

$$K_\omega = \left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right)_0 = \frac{u_{10}^2 d_1}{(2\pi)^2 f_{10}^2 + 4\pi p f_{10} \omega_H + \omega_H^2 p^2},$$

де $d = \delta S_x / (R, \pm \sqrt{R^2 + x_k^2})$, $d_1 = 3 S_x p^2 / (R, \pm \sqrt{R^2 + x_k^2})$.

Коефіцієнти K_u , K_f , K_ω можна визначити експериментально за відповідними характеристиками. Як приклад розглянемо визначення коефіцієнта передавання за напругою K_u . На рис. 3.12 зображено серію механічних характеристик асинхронного двигуна $\omega = f(M_d)$, зняту за незмінної частоти f_1 й різних фіксованих значень напруги $u_{11} >$

$u_{12} > u_{13}$. Коли фіксовані значення швидкості й напруги відповідають номінальним $\omega = \omega_H$ і $u_{11} = u_H$, двигун розвиває номінальний момент M_{dH} /точка 1 на рис. 3.12/. Якщо тепер, не змінюючи значення швидкості $\omega = \omega_H$, змінити напругу на статорі до u_{12} , то величина моменту M_{d1} перейде в точку 2 /див. рис. 3.12/. Тоді в зоні малих відхилень від точки рівноваги 1

$$K_u = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1} \right) \bigg|_{\substack{f_1 = f_{10} \\ \omega = \omega_H}} = \frac{M_{d1} - M_{dH}}{u_{12} - u_{11}}. \quad /3.76/$$

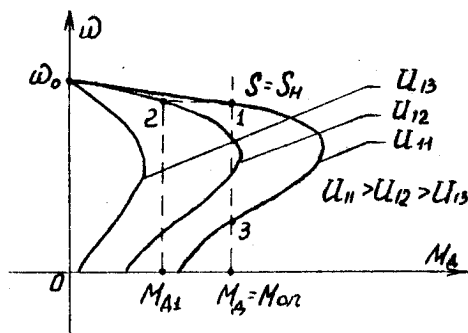


Рис. 3.12. Механічні характеристики трифазного асинхронного двигуна для різних фазних напруг

Цей коефіцієнт у режимі стабілізації швидкості практично не змінюватиметься. Але в загальному випадку, як можна бачити з рис. 3.12 і формули /3.76/, величина K_u залежить від поточного значення швидкості ω і напруги на статорі.

Отже, замість нелінійного рівняння /3.64/ трифазного асинхронного двигуна одержано таке лінійне рівняння із сталими коефіцієнтами K_u , K_f , K_ω у приростах:

$$\Delta M_d(t) = K_u \Delta U_s(t) + K_f \Delta f_s(t) + K_\omega \Delta \omega(t). \quad /3.77/$$

Якщо тепер до рівняння /3.76/ додати лінеаризоване рівняння моментів на валі двигуна

$$\Delta M_d(t) = J_z \frac{d\Delta \omega(t)}{dt} + \Delta M_{0n}(t), \quad /3.78/$$

де J_z - сумарний момент інерції ротора АД і всіх зв'язаних з ним обертових частин, то дістанемо систему з двох рівнянь, котра повністю описує динамічні властивості трифазного асинхронного двигуна.

За рівняннями /3.76/ та /3.77/ побудовано структурну схему двигуна, на якій зображено від'ємний зворотний зв'язок за швидкістю, бо коефіцієнт підсилення K_ω для лінійної ділянки механічної характеристики від'ємний /рис. 3.13, а/. Це впливає, зокрема, з геометричної інтерпретації лінеаризації рівнянь [див. /2.14/], оскільки тангенс кута нахилу дотичної, проведеної до механічної характеристики в точці $S = S_n$, від'ємний. Механічна стала часу двигуна, що її містить вираз аперіодичної ланки перетвореної структурної схеми /рис. 3.13, б/, $T_M = J_z / K_\omega$.

Кли лінеаризацію виконати на нижній ділянці механічної характеристики двигуна $\omega = f(M_d)$, наприклад у точці 3 /див. рис. 3.12/, де, як і в точці 1, $M_d = M_{0n}$, то K_ω матиме додатне значення і

зворотний зв'язок у схемі рис. 3.13,б буде також додатний і, отже, двигун описуватиме нестійка аперіодична ланка.

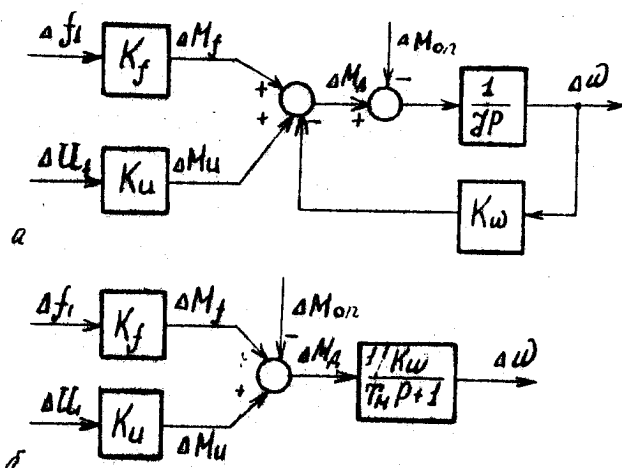


Рис. 3.13. Лінеаризована структурна схема трифазного асинхронного двигуна: а - початкова; б - перетворена

Визначимо передавні функції трифазного асинхронного двигуна за керувальними u_1 , f_1 і збурувальною M_{0n} діями, скориставшись із структурною схемою рис. 3.13,б:

$$G_{\omega u}(p) = \frac{\Delta \omega(p)}{\Delta u_1(p)} = -\frac{K_u / K_\omega}{T_M p + 1}, \quad /3.79/$$

$$G_{\omega f}(p) = \frac{\Delta \omega(p)}{\Delta f_1(p)} = \frac{K_f / K_\omega}{T_M p + 1}, \quad /3.80/$$

$$G_{\omega M}(p) = \frac{\Delta \omega(p)}{\Delta M_{0n}(p)} = \frac{1 / K_\omega}{T_M p + 1}, \quad /3.81/$$

Нагадаємо ще раз, що передавні функції /3.78/-/3.80/ одержано без урахування впливу електромагнітної інерції кіл статора й ротора асинхронного двигуна.

Розділ 4. СИСТЕМИ РЕГУЛЮВАННЯ КУТОВОЇ ШВИДКОСТІ

4.1. Призначення і функціональна схема систем регулювання кутової швидкості

Принципи побудови розімкнених і замкнених систем автоматичної стабілізації, зокрема стабілізації кутової швидкості, та опис їх роботи наведено в розд. 1.

Системи регулювання кутової швидкості електроприводів постійного і змінного струму /регулятори швидкості/ призначені для стабілізації із заданим ступенем точності кутової швидкості електричного двигуна і зв'язаного з ним робочого механізму під час дії на систему різного роду збурень. Однією з основних збурювальних дій, вплив якої має компенсувати /пригальмувати/ система, є момент статичного опору на валі двигуна $M_{оп}(t)$, що його значення залежить від типу й властивостей робочого механізму.

Регулятори швидкості з високими статичними й динамічними властивостями /точність, стійкість, якість перехідного процесу/ зараз проєктують за допомогою багатоконтурних систем підпорядкованого регулювання, розглядуваних у розд. 5, а також одно- та двоконтурних систем з різними вилами зворотних зв'язків. В одноконтурних системах застосовують такі зворотні зв'язки: від'ємний за швидкістю, від'ємний чи додатний за струмом і від'ємний за напругою, а в двоконтурних – поєднання різних зворотних зв'язків одноконтурних систем /наприклад, система з від'ємним зворотним зв'язком за швидкістю й додатним за струмом/.

На рис. 4.1 зображено спрощену принципову схему регулятора швидкості електропривода постійного струму із зворотними зв'язками за напругою, струмом і швидкістю. Вона складається з двигуна постійного струму з незалежним збудженням M , керуваного тиристорного перетворювача ТП, двох підсилювачів постійного струму $ППС_1$ і $ППС_2$, шунта Ш, високоомного опору /подільника/ R_n , тахогенератора ТГ, підсилювачів напруги ПН, фільтрів ФЗЗН, ФЗЗС, ФЗЗШ та робочого механізму РМ. Ш, R_n , ТГ призначені для вимірювання регульованих параметрів відповідно струму силового кола I_d , підведеної до якоря двигуна напруги U_d й кутової швидкості ω . ПН підсилюють сиг.али U_n , $R_{цд}$, $U_{тг}$, що надходять на їх входи. Для згладжування випрямленої напруги й струму, а також колекторних пульсацій призначено фільтри ФЗЗН, ФЗЗС, ФЗЗШ.



Рис. 4.1. Спрощена принципова схема системи регулювання кутової швидкості з різними видами зворотних зв'язків

Звичайно ПН і ФЗЗ об'єднують в один пристрій. Прикладом таких пристроїв є аналогові давач струму ДС-3АІ і давач напруги ДН-2АІ [32], розроблені на Харківському електромеханічному заводі /ХЕМЗ/. Давач струму, який підімкнено до шунта, забезпечує гальванічне розв'язування між вхідними й вихідними колами. Вихідна напруга давача ± 10 В, а коефіцієнт підсилення може змінюватися в межах 35...135. Похибка давача не більш як 1%, смуга пропускання не менш як 1,5 кГц, високочастотні пульсації вихідної напруги /подвійна амплітуда/ не більш як 60 мВ. Температурний дрейф нуля не більш як 2 мВ/°С.

Звичайно фільтр ФЗЗШ виготовляють у вигляді RC-ланцюжка, стала часу якого $\tau_F = RC$ не перевищує 2 мс.

На інвертувальному підсилювачі ППС підсумовують задавальний /вхідний/ сигнал U_z і сигнали зворотних зв'язків $U_{z.z.c}$, $U_{z.z.n}$, $U_{z.z.w}$. У разі від'ємних зворотних зв'язків, як зображено на рис.4.1, коли $R_z = R_{оп} = R_n = R_c = R_{z.z}$, сигнал на виході ППС

$$U_e = -U_z + U_{оп} + U_n + U_n.$$

Проміжний підсилювач постійного струму ППСх, увімкнений між ППС та системою імпульсно-фазового керування ПІ, виконує функції інвертора напруги U_e /якщо комплексні опори $Z_{ex} = R_{ex}$, $Z_{z.z} = R_{z.z}$ і $R_{ex} = R_{z.z}$ /, підсилювача напруги з коефіцієнтом підсилення $K = R_{z.z} / R_{ex}$ ($Z_{z.z} = R_{z.z}$, $Z_{ex} = R_{ex}$) і коригувального пристрою, структуру й параметри якого визначає характер комплексних опорів Z_{ex} і $Z_{z.z}$. Якщо, наприклад, у вхідному колі увімкнено резистор з опором R_{ex} , а в колі зворотного зв'язку послідовно з'єднано резистор з опором $R_{z.z}$ і конденсатор ємністю $C_{z.z}$, то в цьому разі передавна функція коригувального пристрою

$$K(p) = \frac{Z_{z.z}(p)}{Z_{ex}(p)} = \frac{1 + \tau_p p}{\tau_o p}, \quad /4.1/$$

де $\tau_o = R_{ex} C_{z.z}$; $\tau_p = R_{z.z} C_{z.z}$; $p = \sigma + j\omega$ - комплексна змінна.

Такий коригувальний пристрій називають інтегрально-пропорційним регулятором. Його властивості, як і властивості інших регуляторів, докладно розглянуто в підрозд. 5.3.

Розглянемо статичні й динамічні характеристики регуляторів швидкості з різними видами зворотних зв'язків, припускаючи, що всі елементи, які утворюють систему, лінійні й стаціонарні.

4.2. Регулятор швидкості з від'ємним зворотним зв'язком за швидкістю

Спрощену принципову схему системи регулювання швидкості із зворотним зв'язком за швидкістю зображено на рис. 4.1 /зворотних зв'язків за напругою й струмом немає/, а на рис. 4.2 - структурну схему. На цьому рисунку через $R(p)$ позначено передавну функцію коригувального пристрою, виготовленого на підсилювачі $\mu\mu C_x$, а всі інші позначення ті самі, що й під час виведення диференціальних рівнянь двигуна і тиристорного перетворювача /розд. 3/.

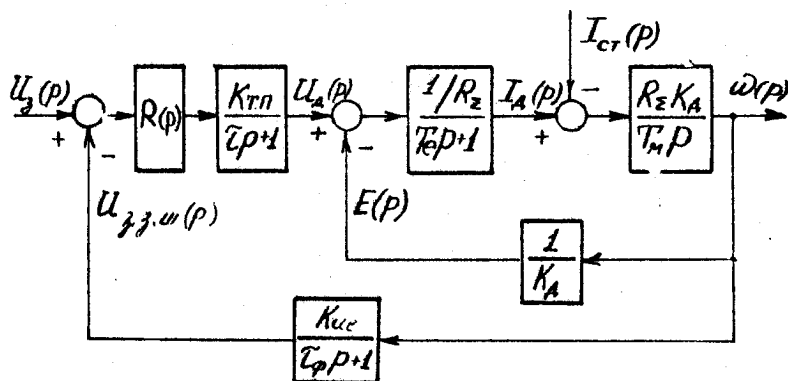


Рис. 4.2. Структурна схема регулятора швидкості з від'ємним зворотним зв'язком за швидкістю

Статичні характеристики. Знайдемо залежність швидкості ω від задавальної U_d і збурювальної I_{cr} дій. З цією метою перетворимо структурну схему системи /див. рис. 4.2/ так: винесемо збурення I_{cr} із замкненого контуру; потім перетворимо замкнений контур двигуна в динамічну ланку без зворотного зв'язку, внаслідок чого дістанемо структурну схему двигуна у вигляді, зображеному на рис. 4.3. Нехай в одержаній структурній схемі системи $p = 0$, що відповідає усталеному режимові. Тоді одержимо структурну схему, зображену на рис. 4.4.

З цієї схеми

$$\omega = K_A (U_d - U_{on}) = K_A [K_{Tn} K_{xn} (U_d - K_u \omega) - R_z I_{cr}], \quad (4.2)$$

або після перетворення

$$\omega = \frac{\kappa_A \kappa_{\kappa.п} \kappa_{\tau.п}}{1+\kappa} U_{\text{з}} - \frac{\kappa_A R_{\Sigma}}{1+\kappa} I_{\text{ст}}, \quad /4.3/$$

де $\kappa = \kappa_A \kappa_{\kappa.п} \kappa_{\tau.п} \kappa_{\omega}$ - коефіцієнт підсилення розімкненої системи;
 $\kappa_{\omega} = \kappa_{\tau.г} \kappa_{\tau.п}$ - коефіцієнт підсилення кола зворотного зв'язку за швидкістю;
 $\kappa_{\tau.п}$ - коефіцієнт підсилення підсилювача напруги ПН.

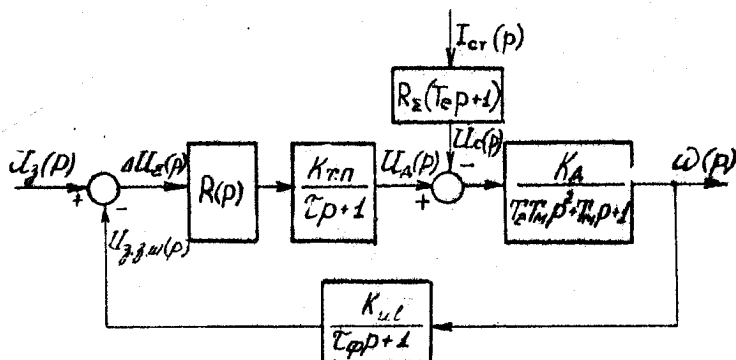


Рис. 4.3. Перетворена структурна схема регулятора швидкості з від'ємним зворотним зв'язком за швидкістю

Вираз /4.3/ можна записати в такому вигляді:

$$\omega = \omega_0 - \Delta\omega_{\text{з}}, \quad /4.4/$$

де

$$\omega_0 = \frac{\kappa_A \kappa_{\tau.п} \kappa_{\kappa.п}}{1+\kappa} U_{\text{з}} - \quad /4.5/$$

швидкість ідеального сліпого ходу замкненої системи із зворотним зв'язком за швидкістю /коли $I_{\text{ст}} = 0$ або $M_{оп} = C\Phi_0 I_{\text{ст}} = 0$;

$$\Delta\omega_{\text{з}} = \frac{\kappa_A R_{\Sigma}}{1+\kappa} I_{\text{ст}} - \quad /4.6/$$

абсолютне значення спаду швидкості в замкненій системі, спричинене струмом статичного навантаження I_{cr} .

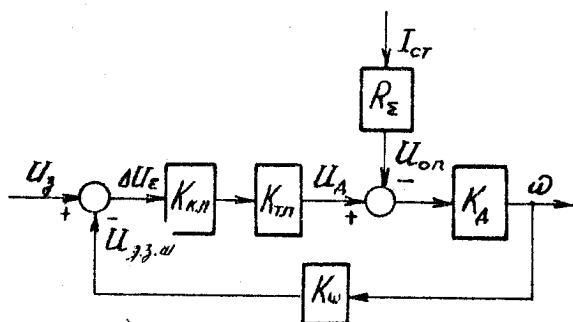


Рис. 4.4. Структурна схема, яка відповідає усталеному режимові роботи регулятора швидкості із зворотним зв'язком за швидкістю

Швидкість ідеального сліпого ходу

$$\omega_{op} = K_A K_{A.N} K_{T.N} U_d; \quad /4.7/$$

спад швидкості розімкненої системи

$$\Delta \omega_p = K_A R_\Sigma I_{cr}. \quad /4.8/$$

Порівнюючи /4.5/ з /4.7/ і /4.6/ з /4.8/, дістаємо

$$\omega_{\epsilon.\omega} = \frac{\omega_{op}}{1+K}; \quad /4.9/$$

$$\Delta \omega_{\epsilon.\omega} = \frac{\Delta \omega_p}{1+K}. \quad /4.10/$$

Оскільки в прямому колі замкненого контуру системи ідеальної інтегрувальної ланки немає /див. рис. 4.3/, то, отже, розглядувана система є статична як за збурювальною M_{on} /або I_{cr} /, так і за керу-

вальною U_3 діями і має статичні похибки за ними. Знайдемо ці похибки.

Статична похибка за збурювальною дією I_{cr}

$$\Delta \omega_I = \omega_0 - \omega, \quad /4.11/$$

або з врахуванням виразів /4.3/, /4.5/

$$\Delta \omega_I = \frac{K_2 R_2}{1+K} I_{cr}. \quad /4.12/$$

Отже, вираз для статичної похибки за збуренням /4.12/ збігається з попередню одержаним виразом /4.6/, який описує спад швидкості в замкненій системі, тобто $\Delta \omega_I = \Delta \omega_3$.

На рис. 4.5 зображено статичну електромеханічну характеристику $\omega = f(I_{cr})$, коли $U_3 = const$, для різних значень коефіцієнта підсилення K з виразу /4.12/

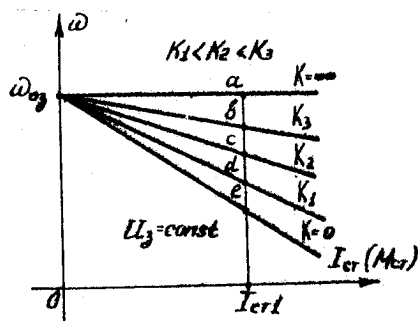


Рис. 4.5. Залежність усталеного значення кутової швидкості регулятора від навантаження за різних коефіцієнтів підсилення

і рис. 4.4 впливає, що статична похибка за збурювальною дією прямо пропорційна величині навантаження, яку характеризує струм I_{cr} , і обернено – коефіцієнту підсилення K [звичайно $K \gg 1$, тому в знаменнику виразів /4.12/ одиницею можна знехтувати]. Величину $\Delta \omega_I$, як бачимо з рис.4.5, визначають при $I_{cr} = I_{cr1}$ відрізки /у відповідному масштабі/: ab при $K=K_3$, ac при $K=K_2$, ad при $K=K_1$, ae при $K=0$ /рівнянна система, $\Delta \omega_I = \Delta \omega_3$ /. Залежність $\Delta \omega_I$ від I_{cr} краще можна побачити з рис. 4.6.

Статична похибка за керувальною дією /див. рис.4.4/,

зумовлена зміною задавальної дії U_3 ,

$$\Delta U_c = U_3 - U_3 \cdot \omega = \frac{1}{1+K} U_3 + \frac{K_2 K_2 R_2}{1+K} I_{cr}, \quad /4.13/$$

або

$$\Delta U_E = U_{EO} + \Delta U_{EI}, \quad /4.14/$$

де $\Delta U_{EO} = U_3 / (1 + K)$ - статична похибка замкненої системи, коли $I_{cr} = 0$;

$$\Delta U_{EI} = \frac{K_1 K_2 R_2}{1 + K} I_{cr} -$$

приріст статичної похибки замкненої системи, спричинений струмом навантаження I_{cr} .

На рис. 4.7 побудовано залежність $\Delta U_E = f(U_3)$, коли $I_{cr} = 0$ і коефіцієнт підсилення K має різні значення; її величину при $U_3 = U_{31}$ визначають відрізки:

ad , якщо $K = 0$ /розімкнена система, $\Delta U_E = \Delta U_{p1}$;
 bd , якщо $K = K_1$; cd , якщо $K = K_2$; $\Delta U_E = 0$, якщо $K = \infty$. На цьому самому рисунку зображено залежність $\Delta U_E = f(U_3)$, коли $I_{cr} > 0$ і $K = K_2$; її величина при $U_3 = U_{31}$ дорівнює відрізку ed .

Треба зауважити, що розглянуті статичні похибки $\Delta \omega_T$ і ΔU_E , які мають розмірність відповідно рад/сек і вольт, спричинює принцип побудови системи керування. Крім них, кожна система має ще й інструментальні похибки, зумовлені технологією виготовлення окремих елементів, що з них побудовано систему. Таких похибок ми не розглядатимемо.

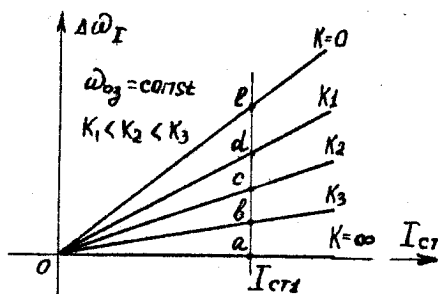


Рис. 4.6. Залежність статичної похибки за збуренням регулятора швидкості із зворотним зв'язком за швидкістю з різними коефіцієнтами підсилення

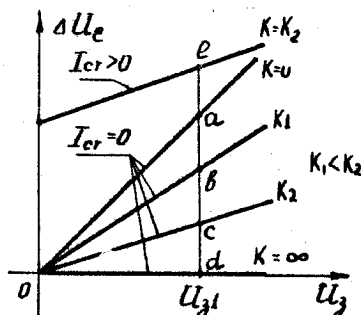


Рис. 4.7. Залежність статичної похибки за керувальною дією регулятора швидкості із зворотним зв'язком за швидкістю з різних коефіцієнтів підсилення й струму навантаження

Динамічні характеристики. Оцінімо, як впливають від'ємний зворотний зв'язок, тип і параметри коригувального пристрою на властивості регулятора швидкості. З цією метою порівняємо передавні функції розімкнених та замкнених систем регулювання кутової швидкості, припустивши, що сталі часу τ_φ і τ дорівнюють нулю, оскільки дуже малі порівняно з T_M і T_C .

Спочатку розглянемо випадок, коли коригувальний пристрій є звичайний підсилювач, тобто $R(p) = K_{к.п}$; $K_{к.п} = R_{з.з} / R_{вх}$ / див.

рис. 4.1/; $Z_{з.з} = R_{з.з}$; $Z_{вх} = R_{вх}$.

Передавна функція розімкненої системи за керувальною дією /див. рис. 4.3/

$$W(p) = \frac{\omega(p)}{\Delta \omega(p)} = \frac{K_{к.п} K_{т.п} K_A}{T_C T_M p^2 + T_M p + 1} \quad /4.15/$$

Лінійна стаціонарна система другого порядку, як відомо, завжди стійка; граничний коефіцієнт її підсилення $K_{р} = \infty$, а якість перехідних процесів повністю визначають відносний коефіцієнт демпфування ζ і власна частота коливань /коли $\zeta = 0$ / Ω_0 . Ці значення для розімкненої системи:

$$\zeta_p = \frac{T_M}{2\sqrt{T_C T_M}}; \quad \Omega_{0p} = \frac{1}{\sqrt{T_C T_M}} \quad /4.16/$$

Якщо $\zeta_p < 1$, корені $p_{1,2}$ характеристичного рівняння розімкненої системи $T_C T_M p^2 + T_M p + 1 = 0$ комплексно спряжені з від'ємною дійсною частиною; перехідний процес - коливний загасальний, якщо $\zeta_p > 1$ - дійсні від'ємні й різні; перехідний процес - аперіодичний, а якщо $\zeta_p = 0$ - суто уявні; перехідний процес - незагасальні гармонійні коливання. Власна частота коливань Ω_{0p} характеризує швидкість системи; що більше Ω_{0p} , то швидше, за інших однакових умов, загасає перехідний процес.

Передавна функція замкненої системи за керувальною дією

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \frac{\omega(p)}{\omega_z(p)} = \frac{W_1(p)}{1 + W(p)} = \\ &= \frac{(K_{к.п} K_{т.п} K_A) / (1 + K)}{\frac{T_C T_M p^2 + \frac{T_M}{1+K} p + 1}{1+K}}, \end{aligned} \quad /4.17/$$

де, як і раніше, $K = K_{с} K_{к.п} K_{т.п} K_A$.

Для замкненої системи

$$\xi_z = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa}} \cdot \frac{T_M}{2\sqrt{T_e T_M}} = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa}} \xi_p, \quad /4.18/$$

$$\Omega_{0z} = \frac{\sqrt{1+\kappa}}{\sqrt{T_e T_M}} = \sqrt{1+\kappa} \cdot \Omega_{0p}. \quad /4.19/$$

Порівнявши $W(p)$ з $\Phi(p)$, $\xi(p)$ з ξ_z , Ω_{0p} з Ω_{0z} , бачимо, що твердий від'ємний зворотний зв'язок збільшує Ω і зменшує ξ_z в $\sqrt{1+\kappa}$ разів. Отже, із зростанням κ , наприклад за рахунок збільшення κ_e , підвищується швидкість загасання й зменшується коливальність /перерегулювання/ перехідних процесів. Твердий зворотний зв'язок за швидкості поліпшує стійкість, оскільки зменшуються T_M і $T_e T_M$ у $1+\kappa$ разів. Зменшення коефіцієнтів підсилення $\kappa_{\kappa.p}$, $\kappa_{\kappa.p}$, κ_g в $1+\kappa$ разів і, отже, зростання статичних похибок легко усунути, відповідним чином збільшивши $\kappa_{\kappa.p}$ ППС_к.

Розглянемо випадок, коли на ППС_к складено інтегрально-пропорційний регулятор з передаточною функцією /4.1/. У цьому разі передвні функції за керувальною дією розімкненої й замкненої систем

$$W(p) = \frac{\omega(p)}{\Delta U_e(p)} = \frac{\kappa_p \kappa_{\kappa.p} \kappa_d (1 + \varepsilon_d p)}{p (T_e T_M p^2 + T_M p + 1)}, \quad /4.20/$$

де $\kappa_p = 1/T_e = 1/R_{ex} C_{g.z}$;

$$\Phi(p) = \frac{\omega(p)}{U_g(p)} = \frac{\kappa_p \kappa_{\kappa.p} \kappa_d (1 + \varepsilon_d p)}{T_M T_e p^3 + T_M p^2 + (1 + \varepsilon_d \kappa_v) p + \kappa_v}; \quad /4.21/$$

$\kappa_v = \kappa_p \kappa_{\kappa.p} \kappa_g$ - коефіцієнт підсилення розімкненої системи за швидкістю; $\kappa_v = (dU_{g.z}/dt)/U_{e.ust}$, рад/с.

Із структурної схеми /див. рис. 4.3/ і передаточної функції /4.20/ випливає, що регулятор швидкості є астатична система з астатизмом першого порядку як за керувальною U_g , так і за збурвальною I_{cr} дією. Отже, статичні похибки системи $\Delta \omega_I$ і U_e порівнюють нулю. Проте стійкість системи погіршується, бо інтегратор робить фазовий зсув -90° у замкненому контурі на всіх частотах. Це також впливає з виразу для граничного коефіцієнта системи

$$\kappa_{v.p} = \frac{1}{T_e - \varepsilon_R}. \quad /4.22/$$

Формулу /4.22/ одержано з розв'язку рівняння $\Delta_2 = C_1 C_2 - C_0 C_3 = 0$, де Δ_2 - передостанній визначник Гурвіца; C_i - коефіцієнти характеристичного рівняння замкненої системи:

$$C_0 = T_M T_P; \quad C_1 = T_M; \quad C_2 = (1 + \varepsilon_R K_{VLP}); \quad C_3 = K_{VLP}.$$

Із /4.22/ бачимо, що K_{VLP} в астатичній системі має скінченне значення. Оптимальне значення стала часу ε_{Ropt} з погляду стійкості матиме тоді, коли $\varepsilon_R = T_P$; у цьому разі $K_{VLP} = \infty$.

Так само можна дослідити перехідні процеси, зумовлені дією на регулятор швидкості навантаження, внаслідок раптового /ударного/ прикладення моменту статичного пору $M_{оп}$ /або струму $I_{ст} = K_g M_{оп}$ / до вала двигуна. З цією метою треба використати передавні функції замкненої системи за збурювальною дією $\Phi_{\omega_I}(p) = \omega(p) / I_{ст}(p)$ і $\Phi_{I_I}(p) = I_g(p) / I_{ст}(p)$. Їх можна визначити із структурної схеми (див. рис. 4.2). Щоб було легше розв'язувати задачу, структурну схему двигуна на цьому рисунку треба зобразити послідовним з'єднанням двох динамічних блоків. Тоді, припускаючи, що $\varepsilon_\varphi = \varepsilon = 0$ і $R(p) = K_{х.п.}$, після нескладних структурних перетворень дістаємо

$$\Phi_{\omega_I}(p) = \frac{K_A R_x (1 + T_P p)}{T_P T_M p^2 + T_M p + (1 + K)} \quad , \quad /4.23/$$

$$\Phi_{I_I}(p) = \frac{I_A(p)}{I_{ст}(p)} = \frac{M_A(p)}{M_{ст}(p)} = \frac{K}{T_P T_M p^2 + T_M p + K} \quad . \quad /4.24/$$

Із /4.23/ і /4.24/ випливає, що коли $p = 0$, тобто в установившому режимі, то $I_g = I_{ст}$ ($M_g = M_{ст}$), а абсолютне значення статичної похибки за збуренням $\Delta \omega_I$ збігається з раніше одержаним її значенням з виразу /4.12/.

На рис. 4.8 якісно зображено залежності зміни в часі швидкості $\omega(t)$ і моменту $M_g(t)$, або, в іншому масштабі струму $I_g(t)$, зумовлені ударним прикладенням моменту $M_{оп}(t) = M_{оп} = const$ у момент часу $t = t_0$. Найбільше відхилення швидкості $\Delta \omega_{дин}$ від початкового значення, наприклад ω_0 , називають динамічним спадом, а статичну похибку $\Delta \omega_I$ - статичним спадом швидкості. Відношення $\Delta \omega_{дин} / \Delta \omega_I$ характеризує перерегулювання за швидкістю, а відношення $\Delta M_g / \Delta M_{густ}$ - за моментом.

У регуляторах швидкості іноді замість зворотного зв'язку за швидкістю, здійснюваного за допомогою тахогенератора, використовують зворотний зв'язок за ЕРС. Принципову схему вала вимірювання протиЕРС

двигуна зображено на рис. 4.9.
Давачем протиЕРС у цій схемі є зрівноважений міст ($R_1 R_3 = R_2 R_4$).

В усталеному режимі напруга зворотного зв'язку за ЕРС двигуна

$$U_{з.з.Е} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_A =$$

$$= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{\tau_A} \omega.$$

Зворотний зв'язок за ЕРС двигуна забезпечує стабілізацію швидкості системи з меншою точністю, ніж зворотний зв'язок з тахогенератором, бо не враховує впливу перехідного опору щіткового контакту й реакції якоря двигуна. Використовують такий зворотний зв'язок, коли неможливо чи небажано ставити тахогенератор. У підрозд. 3.9 докладно розглянуто системи підпорядкованого регулювання швидкості із зворотним зв'язком за ЕРС.

4.3. Регулятор швидкості із зворотними зв'язками за струмом

Спрощену принципову схему регулятора зображено на рис. 4.1 /зворотних зв'язків за напругою й швидкістю немає/, а структурну схему - на рис. 4.10. Останню побудовано з урахуванням зображення двигуна послідовним з'єднанням двох динамічних ланок з

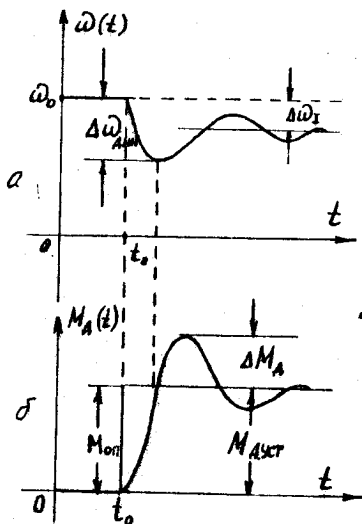


Рис. 4.8. Криві перехідних процесів $\omega = f(t)$ /а/ і $M_A = f(t)$ /б/ регулятора швидкості із зворотним зв'язком за швидкістю у випадку ударного прикладення моменту статичного опору $M_{ст}$

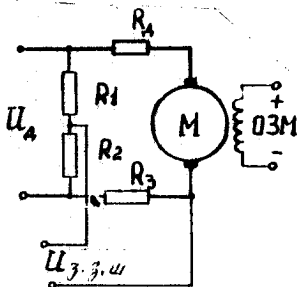


Рис. 4.9. Принципова схема вузла формування зворотного зв'язку за ЕРС

передавними функціями:

$$G_{IU}(p) = \Delta I(p) / \Delta U_d(p) = (T_M / R_z) / (T_e T_M p^2 + T_M p + 1),$$

$$G_{\omega I}(p) = \Delta \omega(p) / \Delta I_d(p) = K_A R_z / T_M p.$$

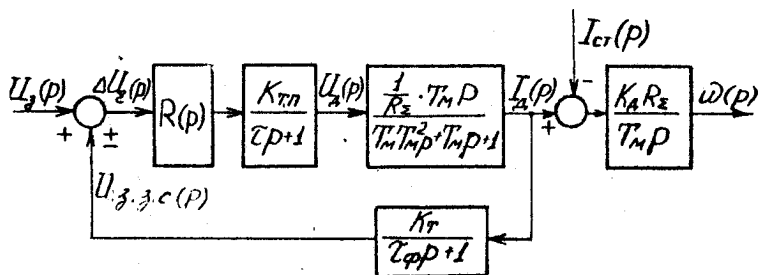


Рис. 4.10. Структурна схема регулятора швидкості із зворотним зв'язком за струмом

Статичні характеристики. Визначимо статичні характеристики $\omega = f(I_{cr})$ із структурної схеми на рис. 4.11. Її одержали із схеми на рис. 4.4, замінивши зворотний зв'язок за швидкістю зворотним зв'язком за струмом. На цій схемі коефіцієнт підсилення кола зворотного зв'язку за струмом позначено через $K_{гп}$: $K_{гп} = K_{ш} K_n$, де $K_{ш} = U_{ш} / I_g$ - коефіцієнт підсилення шунта; K_n - коефіцієнт підсилювача напруги.

Ураховуючи, що в усталеному режимі роботи $I_g = I_{cr}$, з рис. 4.11 знаходимо

$$\omega = K_A K_{к.п} K_{т.п} U_d - K_A R_z I_{cr} \left(1 \pm \frac{K_{к.п} K_{т.п} K_{гп}}{R_z} \right). \quad /4.25/$$

У дужках /4.25/ знак "-" відповідає додатному зворотному зв'язку за струмом, а знак "+" - від'ємному. Цей вираз можна записати так:

$$\omega = \omega_{oc} - \Delta \omega_{з.с}, \quad /4.26/$$

де $\omega_{oc} = K_A K_{к.п} K_{т.п} U_d$ - швидкість ідеального сліпого ходу /коли $I_g = I_{cr} = 0$; $\Delta \omega$ - абсолютна величина швидкості, зумовлена дією

струмового зворотного зв'язку;

$$\Delta \omega_{z.c} = \left(1 \pm \frac{K_{\kappa.п} K_{\tau.п} K_{стр}}{R_{\Sigma}} \right) \Delta \omega_p; \quad 14.271$$

$\Delta \omega_p = K_g R_{\Sigma} I_g$ - спад швидкості в розімкненій системі ($K_{стр} = 0$).

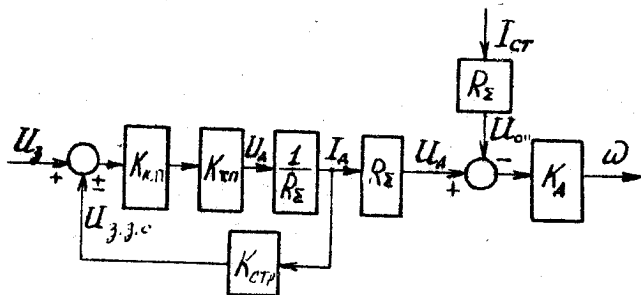


Рис. 4.11. Структурна схема, яка відповідає усталеному режимові роботи регулятора швидкості із зворотним зв'язком за струмом

Зуважимо, що швидкості ідеального сліпого ходу в замкненій ω_{0z} і розімкненій ω_{0p} системах однакові і, до того ж, якщо $K_{стр} = 0$, то $\Delta \omega_z = \Delta \omega_p$.

На рис. 4.12 побудовано залежності кутової швидкості ω від струму навантаження $I_{ст} = I_g$ для додатного /а/ й від'ємного /б/ зворотних зв'язків за струмом за різних коефіцієнтів підсилення $K_{стр}$ і $U_z = \text{const}$.

У випадку додатного зворотного зв'язку привод може працювати в трьох характерних режимах:

недокомпенсації, коли $0 < (K_{\kappa.п} K_{\tau.п} K_{стр}) / R_{\Sigma} < 1$; $\Delta \omega_z$ від'ємне, і з підвищенням струму навантаження ω зменшується;

повної компенсації, коли $(K_{\kappa.п} K_{\tau.п} K_{стр}) / R_{\Sigma} = 1$; $\Delta \omega_z = 0$, і ω із зміною струму навантаження лишається сталою;

перекомпенсації, коли $(K_{\kappa.п} K_{\tau.п} K_{стр}) / R_{\Sigma} > 1$; з урахуванням знака в /4.25/ $\Delta \omega_z$ додатне, і швидкість ω із зростанням навантаження збільшується.

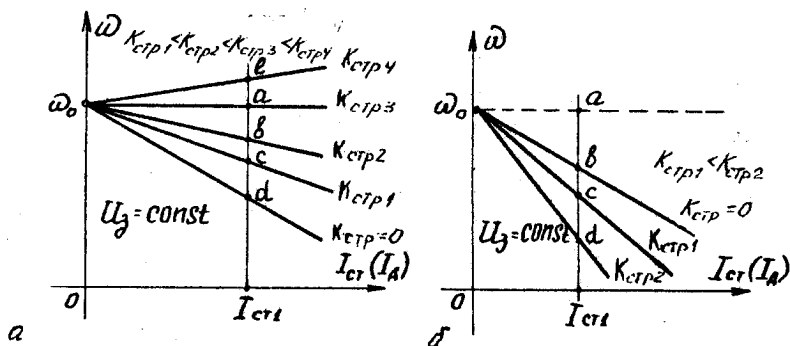


Рис. 4.12. Залежність кутової швидкості регулятора швидкості від навантаження

Зазначені режими можуть виникати внаслідок зміни коефіцієнта підсилення коригувального пристрою $K_{х.п}$, коли $K_{стр} = const$.

У режимі повної компенсації, як показано далі, система перебуває на межі стійкості, а перекомпенсації – нестійка. Хоча в режимі недокомпенсації система й стійка, але регулятор швидкості і в цьому режимі самостійного практичного застосування не дістав; його широко використовують разом з від'ємним зворотним зв'язком зі швидкістю.

Статична похибка за збуренням /навантаженням/ у режимі недокомпенсації

$$\Delta \omega_I = \left(1 - \frac{K_{х.п} K_{г.п} K_{стр}}{R_{\Sigma}}\right) K_A R_2 I_A. \quad /4.28/$$

На рис. 4.12,а величина похибки при $I_{ст} = I_{ст1}$ дорівнює відрізкам /у відповідному масштабі/ ab , коли $K_{стр} = K_{стр1}$, ac , коли $K_{стр} = K_{стр1}$, і ad , коли $K_{стр} = 0$ /зворотного зв'язку немає/. Коли $K_{стр} = K_{стр3}$, статична похибка дорівнює нулю, а коли $K_{стр} = K_{стр4}$, що відповідає режимові перекомпенсації, – відрізку ae , але її знак супротивний знаку похибки в режимі недокомпенсації.

У випадку від'ємного зворотного зв'язку $\Delta \omega_I$ завжди більше за нуль. Тому з підвищенням $K_{стр}$ статичні характеристики розташовуються нижче від характеристики, яка відповідає розімкненій системі,

тобто при $K_{стр} = 0$. Статична похибка в замкненій системі $\Delta\omega_{з.с}$ при $K_{стр} > 0$, що її визначає вираз /4.28/, в якому замість знака "-" у дужках треба поставити знак "+", завжди більша від $\Delta\omega_p$.

На рис. 4.12,б відрізки ab, ac, ad відповідають $\Delta\omega_{з.с}$, коли $K_{стр} = 0, K_{стр} = K_{стр1}, K_{стр} = K_{стр2} (K_{стр1} < K_{стр2})$.

Від'ємний зворотний зв'язок за струмом звичайно застосовують, поєднуючи з від'ємним зворотним зв'язком за швидкістю. Властивості такого регулятора швидкості розглянемо далі.

Звернімо увагу на те, що швидкості ідеального сліпого ходу в розімкненій і замкненій системах однакові, тобто $\omega_{ор} = \omega_{оз} = K_d K_{г.п} K_{з.п} U_c$. Це можна пояснити тим, що коли струм навантаження $I_{ст} = 0$, струмовий зворотний зв'язок /замкнена система/ не працює.

Динамічні характеристики. Розглянемо, як впливають зворотні зв'язки за струмом на якість перехідних процесів регулятора швидкості. Припустимо, що $\varepsilon_p = \varepsilon_{оз} = 0; I_{ст} = 0, R(p) = K_{г.п}$.

Передавні функції розімкненого й замкненого регулятора швидкості згідно з рис. 4.10 мають вигляд:

$$W(p) = \frac{\omega(p)}{\Delta U_c(p)} = \frac{K_{г.п} K_{г.п} K_d}{T_e T_M p^2 + T_M p + 1}, \quad /4.29/$$

$$\Phi(p) = \frac{\omega(p)}{U_c(p)} = \frac{K_{г.п} K_{г.п} K_d}{T_e T_M p^2 + T_M (1 \mp \frac{K_{г.п} K_{з.п} K_{стр}}{R_z}) p + 1}. \quad /4.30/$$

Відносний коефіцієнт демпфування і власна частота коливань розімкненої й замкненої систем:

$$\xi_p = \frac{T_M}{2\sqrt{T_e T_M}}; \quad \Omega_{ор} = \frac{1}{\sqrt{T_e T_M}}; \quad /4.31/$$

$$\xi_z = (1 \mp \frac{K_{г.п} K_{з.п} K_z}{R_z}) \frac{T_M}{2\sqrt{T_e T_M}}; \quad \Omega_{оз} = \frac{1}{\sqrt{T_e T_M}}. \quad /4.32/$$

Порівнюючи вирази /4.31/, /4.32/, знаходимо:

$$\xi_z = (1 \mp \frac{K_{г.п} K_{з.п} K_{стр}}{R_z}) \xi_p; \quad /4.33/$$

$$\Omega_{оз} = \Omega_{ор}. \quad /4.34/$$

У формулах /4.32/ і /4.33/ знак "-" відповідає додатному, а "+" - від'ємному струмовим зворотним зв'язкам.

У випадку додатного зворотного зв'язку коефіцієнт у характеристичному рівнянні замкненої системи при ρ в режимі недокомпенсації додатний, повної компенсації - нульовий, а перекомпенсації - від'ємний. Згідно з критерієм Гурвіца система стабілізації кутової швидкості в першому випадку стійка, в другому - перебуває на межі стійкості /корені характеристичного рівняння суто уявні, спряжені/ і в третьому - нестійка. У випадку від'ємного струмового зворотного зв'язку система завжди стійка, оскільки всі корені характеристичного рівняння додатні.

Характер переходних процесів у системі залежить від коефіцієнтів ξ_3 та Ω_{03} . Оскільки $\Omega_{03} = \Omega_{0\rho}$, то швидкості загасання переходних процесів у замкненій і розімкненій системах однакові. Відносний коефіцієнт демпфування ξ_3 для додатного зворотного зв'язку $/K_{стр} > 0/$ у режимі недокомпенсації $/\xi_\rho = 1/$ менший за одиницю, повної компенсації - дорівнює нулю і перекомпенсації - від'ємний. Отже, в першому випадку коливальність переходного процесу тим більша порівняно з розімкненою системою, чим більше $K_{стр}$ за інших однакових умов; у другому випадку в системі виникають гармонійні незагасальні коливання /перерегулювання $\sigma = 100\%$ /, а в третьому - переходний процес розбіжний. У разі від'ємного зворотного зв'язку, коли, як і раніше, припустити, що $\xi_\rho = 1$, ξ_3 завжди більше за одиницю; переходний процес у системі аперіодичний.

4.4. Регулятор швидкості

з від'ємним зворотним зв'язком за напругою

Спрощену принципову схему системи зображено на рис. 4.1 /зворотних зв'язків за швидкістю й струмом немає/. За цією схемою для усталеного режиму складено структурну схему системи /рис. 4.13/.

Розглядувана система, як і кожна інша, стабілізує параметр, що з його виходу беруть зворотний зв'язок, тобто в даному разі напругу, підведену до кола обмотки якоря двигуна U_d . Справді, із схеми на рис. 4.13, вважаючи за вихідний сигнал цю напругу, знаходимо

$$U_d = \frac{K_{т.п} K_{к.п}}{1 + K_{т.п} K_{к.п}} U_g - \frac{R_a}{1 + K_{т.п} K_{к.п}} I_d = U_{d0} - \Delta U_{d3} \quad (4.35)$$

де $U_{d0} = K_{к.п} K_{т.п} / (1 + K_{т.п} K_{к.п})$ - напруга на вході двигуна при $I_d = I_{cr} = 0$; $\Delta U_{d3} = R_a I_d / (1 + K_{т.п} K_{к.п}) = \Delta U_{d\rho} / (1 + K_{т.п} K_{к.п})$ - спад напруги в перетворювачі в замкненій системі при $I_d = I_{cr} > 0$;

$\Delta U_{g,p} = R_n I_g$ - спад напруги в перетворювачі в розімкненій системі /при $K_H = 0$ /; R_n - внутрішній опір перетворювача; $\rho U_g K_n = K_H$ - коефіцієнт підсилення кола зворотного зв'язку за напругою; ρ - коефіцієнт поділу напруги.

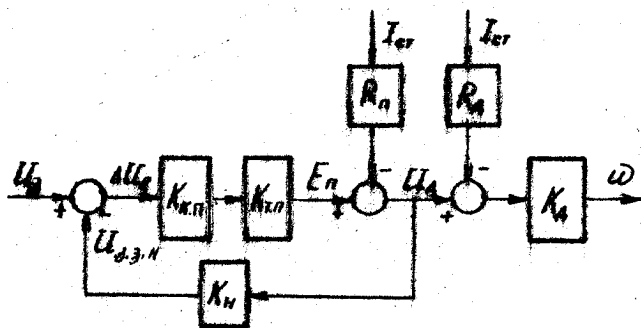


Рис. 4.13. Структурна схема для усталеного режиму регулятора швидкості із зворотним зв'язком за напругою

З виразів для $\Delta U_{g,з}$ і $\Delta U_{g,p}$ бачимо, що спад напруги в замкненій системі за однакових струмів навантаження в $1 + K_{г,п} K_H K_{н,п}$ разів менший, ніж у розімкненій. Отже, замкнена система забезпечує стабілізацію напруги двигуна U_g , компенсуючи спад напруги в силовому колі перетворювача. Величина $\Delta U_{g,з}$ - це статична похибка за навантаженням.

Визначимо тепер статичну характеристику регулятора швидкості із зворотним зв'язком за напругою. Підставимо /4.35/ у $\omega = k_g (U_g - I_g R_g)$:

$$\omega = \frac{K_{г,п} K_{н,п} K_H}{1 + K_{г,п} K_{н,п} K_H} U_g - \left[\frac{R_n K_H}{1 + K_{г,п} K_{н,п} K_H} + K_H R_g \right] I_g = \omega_0 - \Delta \omega_g / 4.36 /$$

де $\omega_0 = [K_{г,п} K_{н,п} K_H / (1 + K_{г,п} K_{н,п} K_H)] U_g$ - швидкість ідеально-го сліпого ходу; $\Delta \omega_g$ - спад швидкості в замкненій системі, зумовлений струмом навантаження ($I_{сг} = I_g$):

$$\Delta \omega_g = \left[\frac{R_n K_H}{1 + K_{г,п} K_{н,п} K_H} + K_H R_g \right] I_g$$

Отже, як бачимо з виразу для $\Delta\omega_3$, спад швидкості в замкненій системі із зворотним зв'язком за напругою зменшується відносно до спаду швидкості в розімкненій системі $\Delta\omega_p = (R_n + R_g) \cdot K_g I_g$ /коли $K_H = 0$ / та більшою мірою, що за інших однакових умов більший коефіцієнт зворотного зв'язку за напругою K_H .

Коли коефіцієнт підсилення K_H зростає гранично, спад швидкості прямуватиме до спаду швидкості на природній характеристиці двигуна:

$$\lim_{K_H \rightarrow \infty} \Delta\omega_3 = \lim_{K_H \rightarrow \infty} \left[\frac{R_n K_A}{1 + K_{T,n} K_{H,n} K_H} + K_A R_A \right] I_A =$$

$$= I_A R_A K_A = \Delta\omega_p,$$

/4.37/

де $\Delta\omega_p$ - спад швидкості на природній характеристиці двигуна.

На рис. 4.14 зображено статичні характеристики регулятора швидкості із зворотним зв'язком за напругою. Відрізки ab , ac , ad на цьому рисунку при $I_{cr} = I_{cr1}$ відповідно дорівнюють /у певному масштабі/ статичним похибкам регулятора швидкості за навантаженням $\Delta\omega_p$ /коли $K_H = \infty$ /, $\Delta\omega_3$ /коли $K_H = K_{H1}$ / і $\Delta\omega_p$ /коли $K_H = 0$ /.

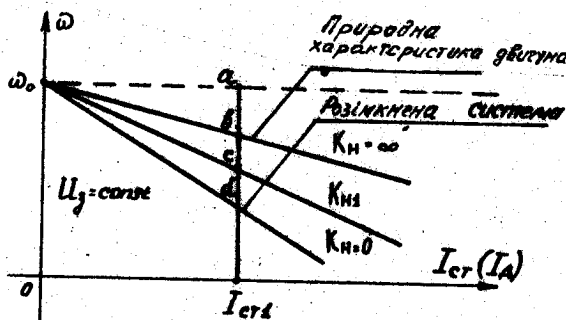


Рис. 4.14. Статичні характеристики регулятора швидкості із зворотним зв'язком за напругою

Характер перехідних процесів у регуляторі швидкості із зворотним зв'язком за напругою повністю залежить від характеру перехідних процесів двигуна, бо зворотний зв'язок впливає тільки на коефіцієнти підсилення $K_{\kappa, n}$ і $K_{\tau, n}$ охоплених ним елементів.

З викладеного можна зробити висновок: зворотний зв'язок за напругою не можна використовувати для стабілізації кутової швидкості електропривода. Його звичайно застосовують у регуляторах швидкості, поєднуючи з іншими видами зворотних зв'язків.

4.5. Регулятор швидкості

з від'ємним зворотним зв'язком за швидкістю
й додатним за струмом

Відповідну спрощену принципову схему зображено на рис. 4.1 /зворотного зв'язку за напругою немає/. Рівняння статичної характеристики $\omega = f(I_{cr})$ при $U_g = const$ і $R(p) = K_{\kappa, n}$, записане у випадку дії зворотних зв'язків за швидкістю /див. рис. 4.4/ і струмом /див. рис. 4.11/, має вигляд

$$\omega = \frac{K_{\kappa, n} K_n K_{\tau, n}}{1 + K} U_g - \frac{1 - \left(\frac{K_{\tau} K_{\tau, n} K_{\kappa, n}}{R_z} \right)}{1 + K} R_z K_n I_{cr} = \omega_0 - \Delta \omega_z, \quad 14.38/$$

де $K = K_{\kappa, n} K_{\tau, n} K_n K_{\tau}$ - коефіцієнт підсилення системи;

$\omega_0 = (K_{\kappa, n} K_{\tau, n} K_n U_g) / (K_n K)$ - швидкість ідеального сліпого ходу;

$\Delta \omega_z$ - спад швидкості в замкненій системі, зумовлений струмом навантаження; $I_{cr} = I_n$;

$$\Delta \omega_z = \Delta \omega_p \frac{1 - (K_{\tau} K_{\tau, n} K_{\kappa, n}) / R_z}{1 + K}, \quad 14.39/$$

$\Delta \omega_p = R_z K_n I_{cr}$ - спад швидкості в розімкненій системі.

Характеристичне рівняння розглядуваної замкненої системи з від'ємним зворотним зв'язком за швидкістю й додатним за струмом

$$\frac{T_e T_n}{1 + K} p^2 + T_n \frac{1 - \frac{K_{\tau} K_{\tau, n} K_{\kappa, n}}{R_z}}{1 + K} p + 1 = 0. \quad 14.40/$$

З цього рівняння визначаємо відносний коефіцієнт демпфування ξ і власну частоту коливань Ω_{03} :

$$\xi = T_M \frac{[1 - (K_{стр} K_{к.п} K_{н.п}) / R_E]}{2 \sqrt{T_E T_M / (1 + k)}} ; \quad \Omega_{03} = \frac{1}{\sqrt{T_E T_M / (1 + k)}} \quad / 4.41/$$

Припустивши, що в /4.40/ і /4.38/ $K_{стр} = 0$, знайдемо раніше одержані рівняння, які описують процеси в одноконтурній системі з від'ємним зворотним зв'язком за швидкістю, а коли $K_0(k) = 0$ - рівняння одноконтурної системи з додатним зворотним зв'язком за струмом.

З наведених виразів випливає, що, змінюючи параметри $K_c, K_{стр}$ та $K_{к.п.}$, можна дістати бажані якісні показники роботи регулятора швидкості з від'ємним зворотним зв'язком за швидкістю й додатним за струмом /у режимі недокомпенсації/ як в усталеному, так і в перехідному режимі. Зокрема, за рахунок глибокого зворотного зв'язку за швидкістю /коли велике K_c / можна досягти дуже малих статичних похибок, а належним чином вибравши коефіцієнти підсилення $K_{стр}$ і $K_{к.п.}$ бажаної якості перехідного процесу, що його характеризують перерегулювання $\sigma\%$, час регулювання t_p і час першого узгодження $t_{п.у.}$

Розглянуту систему звичайно застосовують у випадку великих діапазонів регулювання швидкості $D = \omega_{max} / \omega_{min}$, коли з одним зворотним зв'язком за швидкістю з використанням конкретних перетворювачів та давачів швидкості, тобто якщо коефіцієнт підсилення K має обмежене значення, не можна забезпечити потрібної статичної точності на нижній статичній регульовальній характеристиці електропривода.

4.6. Регулятор швидкості з від'ємним зворотним зв'язком за швидкістю й струмовим відтином

Під час проектування систем регулювання кутової швидкості дуже важливо обмежити на заданому рівні струму силового кола I_A чи пропорційного йому момента. Сила струму I_g залежить як від напруги, котра надходить на СІІК тиристорного перетворювача і при $R(p) = 1$ дорівнює напрузі розузгодження $U_c = U_2 - U_{г.з.}$, так і від значення момента статичного опору $M_{оп.}$, що його зумовлює робочий механізм. Обмежувати струм I_g надзвичайно важливо для електроприводів механізмів, котрі працюють з різко змінним навантаженням чи на упирання /екскаватори/.

Коли систему розімнено, що має місце під час її пуску, $U_{z,2} = 0$ і напруга розузгодження U_c може в десятки і сотні разів перевищувати своє номінальне значення /оскільки $U_{z,2}$ під час роботи системи одного порядку з U_g /. Обмежувати напругу U_c важливо не тільки з погляду обмеження струму навантаження, а ще й тому, що в тиристорних електроприводах рівень вислідного сигналу керування має не перевищувати значень, за яких кут регулювання $\alpha < 0$ /для нерeverсивних ТП/ або $\alpha_{max} < \alpha < \alpha_{min}$ /для реверсивних ТП/.

Сформульоване завдання розв'язує система стабілізації кутової швидкості із зворотними зв'язками комбінованим за швидкістю й від'ємним за струмом /див. рис. 4.1, зворотний зв'язок за напругою від'єднано/, коли в колі зворотного зв'язку за струмом поставлено спеціальний нелінійний пристрій, який "відтинає" струм. Відтин струму означає від'єднання кола зворотного зв'язку за струмом при $I_g < I_{g,заг}$ і приєднання його та стабілізацію струму I_g , коли $I_g > I_{g,заг}$, де $I_{g,заг}$ - задане, наприклад припустимо, значення струму. Найпростішу схему такого нелінійного пристрою зображено на рис. 4.15,а, його статичну характеристику - на рис. 4.15,б. Відтину досягнуто завдяки введенням у коло зворотного зв'язку опорної напруги U_{oc} , знятої з потенціометра R_{cp} і діода A /див. рис. 4.15,а/. Напруга на виході давача струму ДС U_{gc} , пропорційна струмові силового кола I_g /вхід ДС приєднано до шунта, рис. 4.1/, порівнюється з напругою U_{oc} і різниця між ними $U_{g,g.c} = U_{gc} - U_{oc}$ надходить на вхід ПІДС.

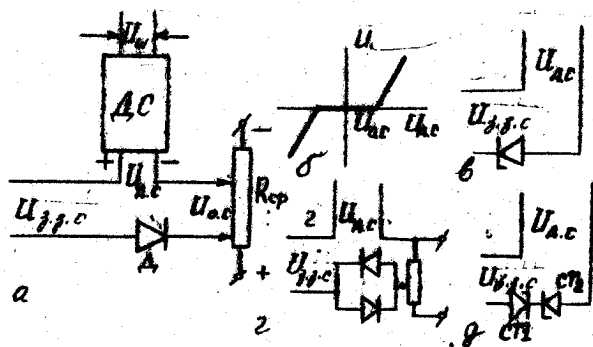


Рис. 4.15. Принципові схеми вузлів відтину струму: а, в - нерeverсивні; г, д - реверсивні; статична характеристика вузла відтину струму /б/

Якщо $U_{дс} > U_{ос}$, то напруга $U_{зс}$ надходить на вхід ППС₂; коли ж $U_{дс} < U_{ос}$, то коло зворотного зв'язку від'єднано /див. рис. 4.13,б/. Діод Д забезпечує проходження струму тільки в одному напрямі. Замість діода можна використати стабілітрон СТ /див. рис. 4.15,в/, тоді не потрібні додаткові джерела живлення. Струм двигуна I_d , при якому $U_{дс} = U_{ос}$ і, отже, починає діяти від'ємний зворотний зв'язок за струмом, називають струмом відтйгу $I_{відт}$. Силу цього струму вибирають таку ж саму, як і $I_{дзг}$, тобто $I_{відт} = I_{дзг}$. Струм $I_{відт}$ можна регулювати, змінюючи напругу $U_{ос}$. Напругу від'ємного зворотного зв'язку за струмом з відтйгом визначають так:

$$U_{зс} = (U_{дс} - U_{ос}) = K_{ср} (I_d - I_{відт}) f(\Delta I),$$

де $f(\Delta I)$ - одинична функція за струмом, яка дорівнює нулю, коли

$$I_d < I_{відт}, \text{ і одиниці, коли } I_d > I_{відт}.$$

Отже, розглядувана система може перебувати в двох режимах: коли від'ємний зворотний зв'язок за струмом від'єднано ($U_{дс} < U_{ос}$, $I_d < I_{відт}$) і система працює тільки з від'ємним зворотним зв'язком за швидкістю, і коли зворотний зв'язок за струмом під'єднано ($U_{дс} > U_{ос}$, $I_d > I_{відт}$) і система працює з від'ємним зворотним зв'язком як за швидкістю, так і за струмом. Таким чином, статичні й динамічні властивості регулятора швидкості в першому режимі повністю описують ті самі рівняння, які було одержано попередю для регулятора швидкості з від'ємним зворотним зв'язком за швидкістю /див. підрозд. 4.2/. Зокрема, статичні властивості регулятора описують рівняння /4.3/, /4.12/, /4.13/, а динамічні - передавні функції /4.17/, /4.23/ і /4.24/.

Щоб визначити статичні й динамічні властивості регулятора швидкості в другому режимі його роботи, скористаємося результатами, одержаними під час розгляду двоконтурної системи із зворотними зв'язками від'ємним за швидкістю і додатним за струмом /див. підрозд. 4.4/. Тоді, амінівши в чисельнику /4.38/-/4.41/ знак "-" на "+", бо розглядаємо від'ємний зворотний зв'язок за струмом, одержимо:

статичну електро механічну характеристику

$$\omega = \frac{K_{к.п} K_{т.п} K_d}{1 + K} U_g - \frac{1 + \left(\frac{K_{ср} K_{т.п} K_{к.п}}{R_2} \right)}{1 + K} R_2 K_d I_{ср}; \quad /4.42/$$

статична похибка за збуренням

$$\Delta \omega_3 = \frac{1 + \left(\frac{K_{стр} K_{х.п} K_{т.п}}{R_{\Sigma}} \right)}{1 + K} R_{\Sigma} K_d I_{cr}; \quad /4.43/$$

характеристичне рівняння замкненої системи

$$\left[\frac{T_e T_M}{1 + K} p^2 + T_M \left[1 + \frac{K_{стр} K_{х.п} K_{т.п}}{R_{\Sigma}} \right] p + 1 = 0; \quad /4.44/$$

відносний коефіцієнт демпфування

$$\xi_3 = T_M \left[1 + \frac{K_{стр} K_{х.п} K_{т.п}}{R_{\Sigma}} \right] / \sqrt{T_e T_M (1 + K)}. \quad /4.45/$$

Із /4.42/-/4.45/ випливає, що розглядуваний регулятор у другому режимі роботи - стійкий з аперіодичним характером перехідного процесу і великою статичною похибкою.

На рис. 4.16 зображено статичні механічні характеристики регулятора швидкості із зворотним зв'язком за швидкістю й струмовим відтинком, побудовані за /4.3/ та /4.42/. На цьому рисунку через $I_{г.ст}$ позначено струм стопоріння, тобто значення струму, який проходить по силовому колі електропривода, коли його швидкість $\omega = 0$. Змінюючи значення коефіцієнтів підсилення K_c і $K_{стр}$, можна дістати бажані твердості характеристик у першій і другій зонах.

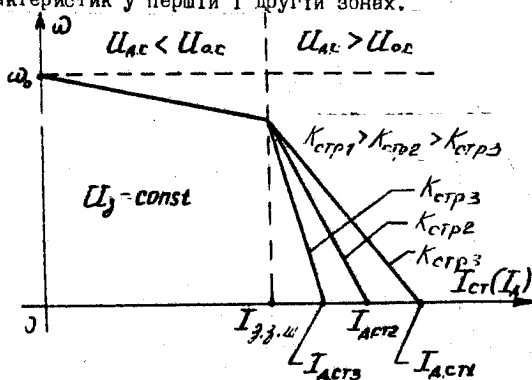


Рис. 4.16. Статичні характеристики регулятора швидкості з від'ємним зворотним зв'язком за швидкістю й струмовим відтинком

У табл. 4.1 наведено основні характеристики регуляторів швидкості з різними видами зворотних зв'язків. Аналіз відповідних виразів дає змогу оцінити властивості кожного виду зворотного зв'язку і, крім того, порівняти їх.

Зараз у практиці електропривода розроблено дво- й триконтурні системи з відтинками за струмом, напругою та швидкістю за різних поєднань відтинків одноконтурних регуляторів [16].

Розділ 5. АНАЛОГОВІ СИСТЕМИ ПІДПОРЯДКОВАНОГО РЕГУЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДАМИ З ДВИГУНАМИ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

5.1. Основні поняття й принципи побудови систем підпорядкованого регулювання електроприводами

Системами підпорядкованого регулювання називають багатоконтурні системи з послідовними коригувальними пристроями й твердими від'ємними зворотними зв'язками в кожному з контурів, оптимальним налагодженням кожного з них і каскадним увімкненням послідовних коригувальних пристроїв /регуляторів/.

Як типовий приклад на рис. 5.1 зображено структурну схему системи підпорядкованого регулювання положенням робочого механізму. Система містить три регульовних параметри: струм головного кола тиристорний перетворювач - двигун I_d , швидкість обертання електроприводу ω і кутове β /чи лінійне ℓ / положення робочого механізму. Відповідно до цих параметрів система має три замкнених контури: регулювання струму, швидкості й положення. У системах підпорядкованого регулювання один з параметрів, який визначає мету регулювання /алгоритм функціонування системи/, називають головним, або регульовною величиною. Решта параметрів - допоміжні, підпорядковані головному. Допоміжні параметри, крім того, підпорядковані ще й один одному. Розрізняють також основний /головний/ і допоміжні контури регулювання, підпорядковані головному й один одному. Наприклад, у системі на рис. 5.1 головним параметром регулювання є кутове положення робочого механізму β , а допоміжними - струм головного кола I_d і швидкість обертання електроприводу ω . Струм I_d підпорядкований швидкості обертання ω , а вона в свою чергу підпорядкована положенню β робочого механізму. Основний контур регулювання - контур положення, допоміжні /контури місцевого

Таблиця 4.1

Основні характеристики регуляторів швидкості
з різними видами зворотних зв'язків

Тип регулятора швидкості	Швидкість ідеального сліпого ходу системи		Статична похибка системи		Відносний коефіцієнт демпфування розімкненої замкненої систем	Еквівалентна частота коливань розімкненої замкненої систем	Власна частота коливань розімкненої замкненої систем
	розімкненої	замкненої	розімкненої	замкненої			
	ω_{op}	ω_{oz}	$\Delta \omega_p$	$\Delta \omega_z$			
I	2	3	4	5	6	7	
З від'ємним зворотним зв'язком	$K_d K_{n,n} K_{t,n} U_z$	$K_d K_{t,n} K_{n,n} U_z$ $K = K_d K_{n,n} K_{t,n} K_c$	$K_d R_z I_{ct}$	$\frac{1}{1+K} \Delta \omega_p$	$\xi_p = T_H / (2 \sqrt{1 + K})$ $\xi_z = \frac{1}{1+K} \xi_p$	$\Omega_{op} = \sqrt{1 + K} T_H$ $\Omega_{oz} = \sqrt{1 + K} \Omega_{op}$	
	$K_d K_{n,n} K_{t,n} U_z$	$K_d K_{n,n} K_{t,n} U_z$	$K_d R_z I_{ct}$	$\left[1 \pm \frac{K_{n,n} K_{t,n} K_c}{R_z} \right] \times \Delta \omega_p$	$\xi_p = 1/2 \sqrt{1 + K}$ $\xi_z = \left(1 - \frac{K_{n,n} K_{t,n} K_c}{R_z} \right) \xi_p$	$\Omega_{op} = \Omega_{op} = 1/\sqrt{1 + K} T_H$	
З від'ємним зворотним зв'язком за струмом	$K_d K_{n,n} K_{t,n} U_z$	$K_d K_{t,n} K_{n,n} U_z$	$K_d R_z I_{ct}$	$\left[1 \pm \frac{R_n K_{n,n} K_{t,n} K_c}{R_z} \right] \times \Delta \omega_p$	$\xi_z = \xi_p = T_H / (2 \sqrt{1 + K})$	$\Omega_{oz} = \Omega_{op} = 1/\sqrt{1 + K} T_H$	
	$K_d K_{n,n} K_{t,n} U_z$	$K_d K_{t,n} K_{n,n} U_z$	$K_d R_z I_{ct}$	$\left[1 \pm \frac{R_n K_{n,n} K_{t,n} K_c}{R_z} \right] \times \Delta \omega_p$			

Закінчення табл. 4.1

I	2	3	4	5	6	7
З від'ємним зворотним зв'язком за швидкодію й потужним за струмом	$K_A K_{n,n} K_{T,n} U_g$	$\frac{K_g K_{n,n} K_{T,n}}{1+k}$ $K = K_g K_{n,n} K_{T,n} K_c$	$K_g R_g I_{CT}$	$1 - \frac{K_g K_{n,n} K_{T,n}}{R_g}$ $1+k$	$\gamma_p = T_n / 2 \sqrt{T_c T_n}$ $\gamma_g = \frac{T_n \sqrt{1 - (K_{cp} K_{n,n} K_{T,n}) / R_g}}{2 \sqrt{T_c T_n} / (1+k)}$	$S_{op} = \sqrt{1/T_c T_n}$ $S_{oz} = 1$ $= \sqrt{T_c T_n} / (1+k)$
З від'ємним зворотним зв'язком за швидкодію й струмовим підсилювачем	$K_g K_{n,n} K_{T,n} U_g$	$\frac{K_g K_{n,n} K_{T,n}}{1+k}$ $K = K_g K_{n,n} K_{T,n} K_c$	$K_g R_g I_{CT}$	$1 + \frac{K_g K_{n,n} K_{T,n}}{R_g}$ $1-k$	$\gamma_p = T_n / 2 \sqrt{T_c T_n}$ $\gamma_g = \frac{T_n \sqrt{1 - (K_{cp} K_{n,n} K_{T,n}) / R_g}}{2 \sqrt{T_c T_n} / (1+k)}$	$S_{op} = \sqrt{1/T_c T_n}$ $S_{oz} = 1$ $= \sqrt{T_c T_n} / (1+k)$

зворотного зв'язку/ - контури струму й швидкості. Внутрішній контур - контур струму - підпорядковано контуру швидкості. Останній є зовнішнім для контуру струму й внутрішнім для контуру положення, і його підпорядковано контуру положення. Основний контур регулювання - завжди зовнішній.

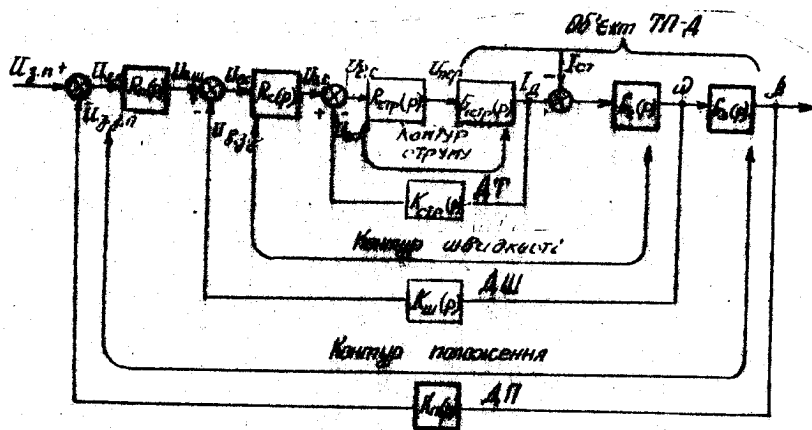


Рис. 5.1. Структурна схема триконтурної системи підпорядкованого регулювання

Будуючи системи підпорядкованого регулювання, об'єкт регулювання системи загалом з передаточною функцією $G(p)$ поділяють на низку послідовно з'єднаних динамічних ланок з передатними функціями $G_i(p)$, $i = 1, 2, \dots, n$, кількість яких дорівнює кількості регульованих параметрів чи кількості контурів регулювання n , тобто $G(p) = G_1(p) G_2(p) \dots G_n(p)$. Скажімо, об'єкт регулювання в розглянутому прикладі /див. рис. 5.1/, який складається з двигуна постійного струму з незалежним збудженням і керованого тиристорного перетворювача, поділено на три динамічні ланки з передатними функціями $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$, тобто $G(p) = G_1(p) G_2(p) G_3(p)$, де $G_1(p) = I_d(p)/U_{кер}(p)$, $G_2(p) = \omega(p)/I_d(p)$ і $G_3(p) = \beta(p)/\omega(p)$ - передатні функції відповідно тиристорного перетворювача разом із системою імпульсно-фазового керування й якірного кола двигуна постійного струму, відповідної частини його двигуна, визначаювана механічною інерційністю привода, і відповідної частини двигуна постійного струму

та редуктора /коли такий є/, визначувані зв'язком між кутовим положенням робочого механізму й швидкістю обертання двигуна.

Кожен з контурів багатоконтурної системи підпорядкованого регулювання будують, використовуючи принципи регулювання за відхиленням регульовної величини, і, отже, він містить об'єкт регулювання й регулятор. Як об'єкти регулювання кожен контур містить складовими частинами динамічні ланки з передавними функціями $G_i(p)$, а регулятори кожного контуру утворено з вузлів порівняння /суматорів/, послідовних коригувальних пристроїв з передавними функціями $R_i(p)$, $i = 1, 2, \dots, n$ і від'ємних твердих зворотних зв'язків за допомогою відповідних давачів зворотних зв'язків з передавними функціями $K_i(p)$, $i = 1, 2, \dots, n$. На кожен контур, що являє собою по суті звичайну одноконтурну систему регулювання, надходить вхідна /задавальна/ дія, яку він має бажаним /оптимальним/ способом відпрацювати. Вхідним сигналом першого внутрішнього контуру є вихідний сигнал регулятора вищого контуру. Так само вхідним сигналом другого контуру є вихідна величина третього /вищого відносно нього/ контуру і т.д. Таке увімкнення регуляторів називають каскадним.

Розглянемо докладніше структуру контурів регулювання струму, швидкості й положення.

Контур струму. Вхідна величина цього контуру - напруга задавання на струм $U_{г.с}(t)$, яка надходить з виходу регулятора швидкості, а вихідна /регульовний параметр/ - струм головного кола $I_g(t)$.

Об'єктом регулювання в контурі струму є керований тиристорний перетворювач і якорне коло двигуна постійного струму з передачею функцією $G_{стр}(p)$, де індекс "стр" означає назву контуру.

Звичайно передавна функція $G_{стр}(p)$ містить одну аперіодичну ланку з "великою" сталою часу і кілька з малими, тобто сталими часу, сума яких не перевищує "велику". У контурі регулювання струму "великою" сталою часу є електромагнітна стала часу T_e силового кола якоря електродвигуна - тиристорний перетворювач, а до малих належать: стала часу $T_{г.с}$ зумовлена середньостатистичним запізненням тиристорного перетворювача, стала часу $T_{г.с}$ давача струму разом з фільтром на його виході, стала часу $T_{ф}$ системи імпульсно-фазового керування разом з фільтром на її вході. Фільтри із сталими часу $T_{г.с}$ та $T_{ф}$ звичайно виготовляють у вигляді RC -ланцюжків. Ці фільтри призначено: з $T_{г.с}$ - для згладжування пульсацій якорного струму, з $T_{ф}$ - для обмеження швидкості зміни якорного струму. Суму малих сталих часу $T_{г.с}$, $T_{г.с}$ і $T_{ф}$ позначають через $T_{м.с}$ і називають малою некомпенсов-

ною сталою часу контуру струму. Таким чином, передавна функція $G_r(p)$ звичайно містить дві аперіодичні ланки із сталими часу T_e та $T_{мс}$:

$$G_r(p) = G_r(p) = \frac{K_{об.с}}{(T_e p + 1)(T_{мс} p + 1)}, \quad /5.1/$$

де $K_{об.с}$ - коефіцієнт підсилення об'єкта регулювання контуру струму /зауважимо, що стала часу $T_{мс}$ як один з доданків містить сталу часу $T_{г.с}$, яка належить до регулятора контуру струму, а не до об'єкта регулювання/.

Регулятор контуру струму складається з елемента порівняння, на виході якого утворюється сигнал $u_{г.с}(t) = u_{г.с}(t) - u_{д.г.с}(t)$, послідовного коригувального пристрою з передавною функцією $R_{стр}(p)$ і твердого від'ємного зворотного зв'язку за допомогою давача струму з передавною функцією $K_{стр}(p)$.

Суть оптимізації контуру струму полягає у виборі /синтезі/ структури й параметрів передавної функції $R_{стр}(p)$ для одержання бажаних динамічних властивостей оптимізованого контуру. Розглянемо це питання докладніше.

Передавні функції розімкненого й замкненого контурів струму з одиничним зворотним зв'язком за струмом, тобто коли $K_{стр}(p) = 1$:

$$W_r(p) = \frac{I_d(p)}{U_{г.с}(p)} = R_{стр}(p) G_{стр}(p), \quad /5.2/$$

$$\Phi_{стр}(p) = \frac{I_d(p)}{U_{г.с}(p)} = \frac{W_{стр}(p)}{1 + W_{стр}(p)} = \frac{R_{стр}(p) G_{стр}(p)}{1 + R_{стр}(p) G_{стр}(p)}. \quad /5.3/$$

Звичайно структура передавної функції $R_{стр}(p)$, одержувана внаслідок синтезу /див. підрозд. 5.5/, має вигляд

$$R_{стр}(p) = \frac{U_{пер}(p)}{U_{г.с}(p)} = \frac{1 + \varepsilon_{кр} p}{\varepsilon_{ор}}, \quad /5.4/$$

де $\varepsilon_{ор}$ і $\varepsilon_{кр}$ - відповідно сталі часу інтегрування регулятора.

Передавну функцію /5.4/ можна реалізувати за допомогою типового пропорційно-інтегрального регулятора /ПІ-регулятора, див. підрозд. 3.3, рис. 3.13,а/, числові значення параметрів якого для оптимального налаштування вибирають так, щоб

$$\varepsilon_{кр} = T_e, \quad /5.5/$$

компенсуючи цим "велику" сталу часу контуру струму, а коефіцієнт під-

силення регулятора становив

$$K_{\Sigma} = \frac{1}{\bar{G}_0} = \frac{1}{2T_{\Sigma c} K_{об.с}} \quad /5.6/$$

Тоді передавна функція замкненого оптимізованого контуру струму /5.3/ з урахуванням /5.1/, /5.4/-/5.6/ набере вигляду

$$\Phi_{стр}(\rho) = \frac{1}{2T_{\Sigma c} \rho^2 + 2T_{\Sigma c} \rho + 1} \quad /5.7/$$

Передавна функція /5.7/ відповідає модульному критерієві оптимізації, що його широко використовують для оптимізації контурів систем підпорядкованого регулювання електроприводами.

Основні властивості контурів регулювання, оптимізовані згідно з модульним критерієм, буде розглянуто далі. А тут цей критерій ми одержали без строгих доведень, щоб конкретизувати викладену основну ідею оптимізації.

Контур швидкості. Вхідна величина цього контуру - напруга задання на швидкість $U_{г.ш}(t)$, а вихідна /регульовний параметр/ - швидкість обертання вала двигуна $\omega(t)$.

Об'єктами регулювання в контурі швидкості є відповідна частина двигуна постійного струму з передавною функцією $G_2(\rho)$ і оптимізований замкнений контур струму з передавною функцією $\Phi_{стр}(\rho)$. Отже, передавна функція об'єкта регулювання для контуру швидкості матиме вигляд

$$G_{ш}(\rho) = \frac{\omega(\rho)}{U_{г.ш}(\rho)} = \Phi_{стр}(\rho) G_2(\rho). \quad /5.8/$$

Звичайно передавна функція /5.8/ містить послідовне з'єднання ідеальної інтегрувальної і кількох аперіодичних ланок з малими сталими часу. До них належать ланка із сталом часу $2T_{\Sigma c}$, яку можна дістати з /5.7/, знехтувавши членом $2T_{\Sigma c}^2$ через його мализну [відповідно до [10] для реальних систем $T_{\Sigma c} = (0,5 - 1) \cdot 10^{-3}$ с], і ланка із сталом часу $T_{г.ш}$, зумовленою наявністю RC-фільтра на виході давача швидкості. Суму малих сталих часу $2T_{\Sigma c}$ і $T_{г.ш}$ позначають через $T_{м.ш}$ і називають малом /порівняно з "великом" сталом часу, якою в контурі швидкості є електро механічна стала часу T_H /некомпенсованою сталом часу контуру швидкості/. Таким чином,

$$G_{\omega}(p) = \frac{\kappa_{об.ш}}{T_N p (1 + T_{ш} p)} \quad , \quad /5.9/$$

де $\kappa_{об.ш}$ - коефіцієнт підсилення об'єкта в контурі швидкості.

Регулятор контуру швидкості складається з вузла порівняння, на виході якого утворюється сигнал розузгодження $\omega_{ш}(t) = \omega_{д}(t) - \omega_{з.ш}(t)$, послідовного коригувального пристрою з передавною функцією $R_{ш}(p)$ і від'ємного твердого зворотного зв'язку за допомогою давача швидкості з передавною функцією $\kappa_{ш}(p)$.

Оптимізація контуру швидкості полягає в такому виборі /синтезі/ структури й параметрів передавної функції регулятора $R_{ш}(p)$, щоб дістати бажані динамічні властивості оптимізованого контуру. Практично реалізувати цю основну ідею оптимізації можна двома способами.

У першому випадку, коли бажані динамічні властивості оптимізованого контуру можна одержати за допомогою реалізації передавної функції виду /5.7/, яка відповідає модульному критерію оптимізації, внаслідок синтезу /див. підрозд. 5.6/ структура передавної функції $R_{ш}(p)$ являє собою підсилювальну ланку /типовий пропорційний регулятор, чи П-регулятор/, коефіцієнт підсилення якої треба вибирати так:

$$\kappa_r = \frac{T_N}{2T_{ш} \kappa_{об.ш}} \quad . \quad /5.10/$$

Справді, у випадку одиничного зворотного зв'язку за швидкістю, тобто коли $\kappa_{ш}(p) = 1$, передавна функція замкненого оптимізованого контуру швидкості

$$\Phi_{\omega}(p) = \frac{\omega(p)}{\omega_{з.ш}(p)} = \frac{R_{ш}(p) G_{\omega}(p)}{1 + R_{ш}(p) G_{\omega}(p)} \quad . \quad /5.11/$$

Ураховуючи /5.9/ та /5.10/, одержуємо

$$\Phi_{\omega}(p) = \frac{1}{2T_{ш}^2 p^2 + 2T_{ш} p + 1} \quad ,$$

звідки випливає, що контур, оптимізований згідно з модульним критерієм за керувальною дією, є астатичний з астатизмом першого порядку /бо чисельник і вільний член знаменника передавних функцій порівнюють один одному/. Під час оптимізації контуру швидкості часто постає потреба дістати контур з астатизмом другого порядку. У цьому разі внаслідок синтезу одержують структуру, яка відповідає ПІ-регуляторіві, тобто

$$P_{\psi}(\rho) = \frac{1 + \tilde{\varepsilon}_R \rho}{\tilde{\varepsilon}_0 \rho} = \kappa_R \frac{1 + \tilde{\varepsilon}_R \rho}{\tilde{\varepsilon}_R \rho},$$

де $\kappa_R = \tilde{\varepsilon}_R / \tilde{\varepsilon}_0$.

Числові значення параметрів $\tilde{\varepsilon}_R$ і κ_R вибирають так:

$$\tilde{\varepsilon}_R = 4 T_{\mu\psi}, \quad /5.12/$$

а κ_R , як і раніше, визначають з /5.10/. Тоді

$$\Phi_{\psi}(\rho) = \frac{1 + 4 T_{\mu\psi} \rho}{8 T_{\mu\psi}^3 \rho^3 + 8 T_{\mu\psi}^2 \rho^2 + 4 T_{\mu\psi} \rho + 1} \quad /5.13/$$

Передавна функція /5.13/ відповідає симетричному критерію оптимізації. Динамічні властивості контурів регулювання, оптимізованих згідно з /5.13/, розглянуто далі. А тут зауважимо, що спосіб оптимізації, який ґрунтується на використанні симетричного критерію, дає змогу дістати за керувальною дією контур з астатизмом другого порядку, бо в передавній функції $\Phi_{\psi}(\rho)$ вільний член і коефіцієнт біля ρ чисельника дорівнюють вільному членові й коефіцієнту біля ρ знаменника, а це еквівалентно наявності в передавній функції розімкненого контуру $W_{\psi}(\rho)$ двох ідеальних інтегровальних ланок.

Контур положення. Вхідна величина цього контуру - напруга задання на положення $U_{z.n}(t)$, а вихідна - кутове /чи лінійне/ положення робочого механізму $\beta(t)$.

Передавна функція об'єкта регулювання контуру положення

$$G_n(\rho) = \frac{\beta(\rho)}{U_{z.n}(\rho)} = \Phi_{\psi}(\rho) G_3(\rho). \quad /5.14/$$

Пристрої з передавними функціями $R_n(\rho)$ і $\kappa_n(\rho)$ разом із суматором сигналів $U_{z.n}$ та $U_{z3.n}$ утворюють регулятор положення /див. рис. 5.1/.

Передавні функції розімкненого й замкненого контурів положення, або, що те саме, систем регулювання положенням робочого механізму, коли $\kappa_n(\rho) = 1$, мають вигляд:

$$W_n(\rho) = \frac{\beta(\rho)}{U_{z.n}(\rho)} = R_n(\rho) G_n(\rho) = R_n(\rho) \Phi_{\psi}(\rho) G_3(\rho), \quad /5.15/$$

$$\Phi_n(\rho) = \frac{\beta(\rho)}{U_{z3.n}(\rho)} = \frac{R_n(\rho) \Phi_{\psi}(\rho) G_3(\rho)}{1 + R_n(\rho) \Phi_{\psi}(\rho) G_3(\rho)} \quad /5.16/$$

Динамічні властивості контуру положення оптимізують, вибираючи відповідні структуру й параметри передавної функції $R_n(p)$.

Під час побудови системи підпорядкованого регулювання постає важливе питання - як вибрати кількість її контурів регулювання. З викладеного попередю випливає, що їх кількість дорівнює кількості регульовних параметрів, які утворюються внаслідок поділу об'єкта регулювання на низку динамічних ланок. Отже, кількість контурів регулювання системи залежить насамперед від типу об'єкта регулювання. Звичайно останній розчленовують так, щоб вихідні величини динамічних ланок були такими фізичними величинами, які, по-перше, визначали б якість роботи системи загалом і які, по-друге, можна було б досить просто виміряти за допомогою наявних датчиків, утворюючи відповідні контури регулювання. Окрім того, бажано, щоб кожна динамічна ланка містила, як правило, одну "велику" сталу часу, компенсовану відповідним вибором структури й параметрів регулятора. Приміром, коли об'єкт регулювання складається з тиристорного перетворювача і двигуна постійного струму з незалежним збудженням /об'єкти типу ПІ-Д/, то регульовними параметрами звичайно є струм головного кола двигуна $I_g(t)$ і швидкість обертання двигуна $\omega(t)$. Коли замість тиристорного перетворювача використано генератор постійного струму /об'єкти типу Г-Б/ з живленням кола збудження генератора, наприклад, від вентильного перетворювача, то в цьому разі як регульовні параметри доцільно вибрати напруження генератора постійного струму $U_g(t)$, струм головного кола двигуна $I_g(t)$ і швидкість обертання двигуна $\omega(t)$. Відповідно кількість контурів регулювання для об'єкта першого типу порівнюватиме двом, а другого - трьом. Іноді об'єкт регулювання може містити параметр, який характеризує певний технологічний процес /наприклад, натягу штаби на дільниці кліть-металка багатовалкового прокатного стану/. У таких системах створюють окремий контур регулювання відповідного технологічного параметра /наприклад, контур натягу штаби вальцюваного металу/.

Спосіб керування реверсивним тиристорним перетворювачем також впливає на кількість контурів регулювання системи. Зокрема, у випадку спільного неузгодженого керування вентильними групами регульовальна характеристика реверсивного перетворювача має, як відомо, зону нечутливості. Ця зона справляє негативний вплив на динамічні властивості контуру регулювання струму. Тому, щоб його зменшити й поліпшити статичні та динамічні характеристики системи підпорядкованого регулювання з об'єктом ПІ-Д, перетворювач охоплюють від'ємним зворотним зв'яз-

ком за напругою, утворюючи, таким чином, ще один додатковий контур регулювання – контур напруги, який підпорядковано контуруві струму.

Кількість контурів регулювання залежить також від призначення системи підпорядкованого регулювання. Коли систему з об'єктом ТП-Д призначено для роботи як регулятора швидкості, то в разі однозонного регулювання швидкості способом зміни напруги, прикляеної до кола обмотки якоря, звичайно передбачають або два контури регулювання /контури струму і швидкості/, або, коли вимоги до якості процесів регулювання високі й керування перетворювачем здійснюють без зрівняльних струмів /наприклад, спільне неузгоджене керування/, три контури – напруги, струму й швидкості. Коли система працює як регулятор положення, то в цьому разі, окрім контурів напруги, струму й швидкості, є ще контур регулювання положення.

Системи підпорядкованого регулювання поєднують у собі переваги систем з послідовними коригувальними пристроями /простість технічної реалізації, зручні методи синтезу й налагодження тощо/ з можливістю обмеження регульованих координат /параметрів/, зумовленою каскадним увімкненням регуляторів.

Розглянемо питання обмеження регульованих координат на прикладі регулятора швидкості з об'єктом ТП-Д і двома контурами регулювання: струму й швидкості /див. рис. 3.1/. Нехай треба обмежити силу струму якоря двигуна на рівні $I_{д.обн} = 2I_{д.н}$. Для обмеження струму силового кола /вихідна величина контуру струму/ на заданому рівні посить обмежити вихідну величину регулятора швидкості, або, що те саме, вхідну величину замкненого контуру струму $U_{д.с}$. Технічно реалізують цю умову, тим чи тим способом формуючи нелінійну статичну характеристику регулятора швидкості /рис. 5.2/. Нехай $K_{стр}(\rho) = K_{стр}$, де $K_{стр}$ – коефіцієнт підсилення кола зворотного зв'язку за струмом. Оптимізуємо контур струму за модульним критерієм і перетворимо структурну схему цього контуру /див.

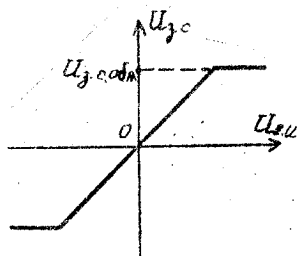


Рис. 5.2. Статична характеристика регулятора швидкості

рис. 5.1/ в схему з одиничним зворотним зв'язком /рис. 5.3/. Тоді, наприклад, якщо $I_{д.н} = 50$ А, $I_{д.обн} = 100$ А. Оскільки контур астатичний за керуваною дією $I_{д.з}$, то, отже, в усталеному режимі $I_{д.обн} = I_{д.з} = 100$ А. Нехай $K_{стр} = 0,05$ В/А. Тоді, щоб $I_{д.обн} \leq 100$ А, треба обмежити $U_{д.с}$ на рівні $U_{д.с} = I_{д.обн} / K_{стр} = 20$ В. Отже, коли $U_{д.с.обн} \leq 20$ В, усталене значен-

ня струму силового кола $I_g \leq 100$ А. Спосіб формування статичної характеристики з обмеженням /див. рис. 5.2/ за допомогою стабілітронів викладено в розд. 5.

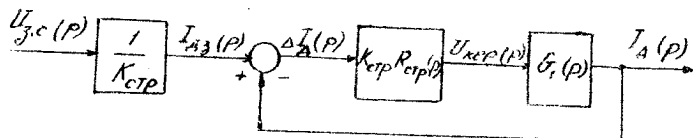


Рис. 5.3. Перетворена структурна схема контуру струму з однічним зворотним зв'язком

Так само можна обмежити й інші координати системи підпорядкованого регулювання, наприклад β , ω .

З викладеного випливає, що статика й динаміка даної регульованої координати залежать як від властивостей відкритого контуру, так і від вхідної величини, сформованої попереднім контуром. Інакше кажучи, процеси у внутрішніх контурах підпорядковано властивостям зовнішніх. Тому розглянуту структуру побудови системи керування узвичаєно називати системою з підпорядкованим регулюванням.

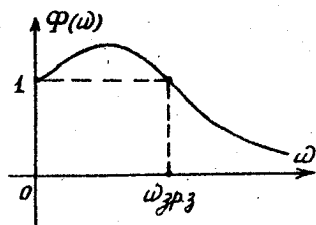
Структура побудови /каскадне увімкнення регуляторів/ систем підпорядкованого регулювання в принципі забезпечує можливість налагоджувати кожен внутрішній контур незалежно від наладження зовнішніх контурів, що не тільки обмежує координати, а й забезпечує інші переваги таких систем. Тому вони здобули широке практичне застосування.

Треба зауважити, що створювати й упроваджувати системи підпорядкованого регулювання зробилося можливим лише після того, як було розроблено практично безінерційні тиристорні перетворювачі з малою потужністю керування і високоякісних аналогових підсилювачів постійного струму, за допомогою яких дуже просто з високим ступенем точності реалізувати складні передавні функції $R_i(s)$ регуляторів, необхідні для послідовної корекції контурів регулювання.

5.2. Критерії оптимальності

5.2.1. Основні теоретичні положення

Для оптимізації окремих контурів системи підпорядкованого регулювання зараз переважно застосовують два критерії - модульний і симетричний, доведення яких ґрунтується на використанні частотного критерію оптимальності. Суть цього критерію полягає в тому, що якість процесів регулювання в оптимізованому контурі з одиничним зворотним зв'язком і керувальною дією типу одиничного стрибка буде оптимальна, коли амплітудно-частотна характеристика замкненого контуру $\Phi(\omega)$ або, що те саме, модуль його передавної функції/ на досить широкій ділянці частот ω , починаючи з нульової, дорівнює одиниці. Наближення до ідеального фільтра нижніх частот /рис. 5.4/, коли



$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \left| \Phi(p) = \frac{y(p)}{x(p)} \right|_{p=j\omega} = \\ &= \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_{крз} \\ 0 & \omega > \omega_{крз} \end{cases}, \end{aligned} \quad /5.17/$$

можна зробити, якщо виконується така умова:

Рис. 5.4. Амплітудно-частотна характеристика замкненого контуру

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega^k}{\omega^k} |\Phi(j\omega)| = 0, \quad /5.18/$$

де $k = 0, 1, 2, \dots$

У [42] формулу /5.18/ називають критерієм припасовування модуля передавної функції замкненого контуру до одиниці.

Нехай передавна функція замкненої системи має вид

$$\Phi(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{b_0 + \sum_{n=1}^m b_n p^n}{a_0 + \sum_{y=1}^n a_y p^y}. \quad /5.19/$$

Тоді, застосувавши критерій /5.18/ до виразу /5.19/, дістанемо такі співвідношення для коефіцієнтів поліномів чисельника й знаменника [43]:

$$\left. \begin{aligned} (\theta_1^2 - 2\theta_0\theta_2) a_0^2 &= \theta_0^2 (a_1^2 - 2a_0a_2); \\ (\theta_2^2 - 2\theta_1\theta_3 + 2\theta_0\theta_4) a_0^2 &= \theta_0^2 (a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4); \\ (\theta_3^2 - 2\theta_2\theta_4 + 2\theta_1\theta_5 - 2\theta_0\theta_6) a_0^2 &= \theta_0^2 (a_3^2 - 2a_2a_4 + 2a_1a_5 - 2a_0a_6); \\ &\dots\dots\dots \\ (\theta_1^2 + 2 \sum_{e=1}^2 (-1)^e \theta_{2-e} \theta_{2+e}) a_0^2 &= \theta_0^2 (a_2^2 + \sum_{e=1}^2 (-1)^e a_{2-e} a_{2+e}). \end{aligned} \right\} /5.20/$$

Якщо ця система має 2 вільно призначуваних коефіцієнтів, то 2 рівнянь можна задовольнити, і передавна функція /5.19/ за таких умов є оптимальна. Досягнений завдяки цьому оптимум називають оптимумом за модулем. Модульний оптимум уперше використав для оптимізації контурів систем підпорядкованого регулювання Кеслер і назвав *Betragsoptimum* [42].

5.2.2. Модульний критерій оптимізації

Застосуємо критерій /5.18/ і систему рівнянь /5.20/ до оптимізованого контуру /рис. 5.5/. Припустимо, що передавні функції об'єкта регулювання й регулятора мають вигляд

$$G(p) = K_{об} / \prod_{k=1}^m (1 + \tau_{бк} p) (1 + T_{\mu} p), \quad /5.21/$$

де $\tau_{бк}$ - велика стала часу об'єкта регулювання; T_{μ} - мала некомпенсована стала часу ($\tau_{бк} \gg T_{\mu}$);

$$R(p) = \prod_{i=1}^n (1 + \tau_{ri} p) / \varepsilon_0 p. \quad /5.22/$$

Отже, передавна функція замкненої системи за керувальною дією

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \frac{y(p)}{x(p)} \Big|_{F(p)=0} = \\ &= \frac{K_{об} \prod_{i=1}^n (1 + \tau_{ri} p)}{\varepsilon_0 p \prod_{k=1}^m (1 + \tau_{бк} p) (1 + T_{\mu} p) + K_{об} \prod_{i=1}^n (1 + \tau_{ri} p)}. \end{aligned} \quad /5.23/$$

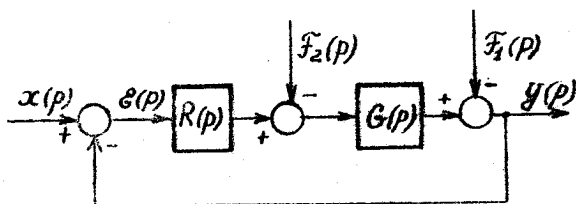


Рис. 5.5. Структурна схема оптимізованого контуру

Аналіз рівнянь /5.20/ стосовно до передавної функції /5.23/, виконаний у [42; 43], дає змогу сформулювати модульний критерій оптимізації так:

по-перше, кількість "великих" сталих часу в поліномі чисельника передавної функції регулятора має дорівнювати кількості великих сталих часу передавної функції об'єкта регулювання, до того ж ці сталі повинні парами дорівнювати однієї за абсолютною величиною:

$$\tau_{\kappa i} = \tau_{\kappa k} \quad (i = k); \quad /5.24/$$

по-друге, сталу часу інтегрування τ_0 потрібно вибирати з умови

$$\tau_0 = 2T_{\mu} \kappa_{0\delta}. \quad /5.25/$$

Доведемо слушність виразу /5.21/. Скоротивши відповідні поліноми в чисельнику та знаменнику з великими сталими часу в передавній функції $W(p) = R(p)G(p)$, дістанемо такий вираз передавної функції замкненої системи:

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= \frac{R(p)G(p)}{1+R(p)G(p)} = \frac{\kappa_{0\delta}}{\tau_0 p (1+T_{\mu} p) + \kappa_{0\delta}} = \\ &= \frac{\delta_0}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2} = \frac{\delta_0 / a_0}{1 + \frac{a_1}{a_0} p + \frac{a_2}{a_0} p^2}, \quad /5.26/ \end{aligned}$$

де $\delta_0 = a_0 = \kappa_{0\delta}$; $a_1 = \tau_0$; $a_2 = \tau_0 T_{\mu}$.

Застосуємо до /5.26/ умову оптимальності, визначувану першим рівнянням системи /5.20/:

$$(\delta_1^2 - 2\delta_0\delta_2) a_0^2 = \delta_0^2 (a_1 - 2a_0 a_2). \quad /5.27/$$

із /5.27/ одержуємо з урахуванням того, що в /5.26/ $\sigma_1 = 0$,
 $\sigma_2 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \sigma_0, \\ a_1^2 &= 2a_0 a_2 \end{aligned} \right\} \quad /5.28/$$

Підставивши в друге рівняння значення a_1 , a_2 , a_0 , подані через параметри об'єкта й регулятора, дістанемо вираз /5.25/.

Сформульований критерій слушний також і в тому випадку, коли об'єкт регулювання являє собою коливну ланку з двома великими сталими часу $\tau_{\delta 1}$ та $\tau_{\delta 2}$ і аперіодичну ланку з малою некомпенсованою сталою часу T_M , тобто

$$G(p) = \frac{K_{08}}{(1 + \tau_{\delta 1} p + \tau_{\delta 1} \tau_{\delta 2} p^2)(1 + T_M p)} \quad /5.29/$$

У цьому випадку для компенсації $\tau_{\delta 1}$ і $\tau_{\delta 2}$ треба застосувати пропорційно-інтегрально-диференціальний /ПІД/ регулятор з передаточною функцією

$$R(p) = \frac{1 + 2d\tau p + \tau^2 p^2}{\tau_0 p} \quad /5.30/$$

Порівнявши коефіцієнти біля p поліномів у чисельнику та знаменнику, згідно з /5.29/ і /5.30/ визначимо коефіцієнти τ^2 і $2d$ полінома ПІД-регулятора:

$$\tau^2 = \tau_{\delta 1} \tau_{\delta 2}; \quad 2d = \tau_{\delta 1} / \sqrt{\tau_{\delta 1} \tau_{\delta 2}} \quad (d < 1),$$

а сталу інтегрування τ_0 ПІД-регулятора, як і раніше, визначатиме вираз /5.25/, тобто $\tau_0 = 2T_M K_{08}$.

Модульний критерій оптимізації застосовувати не можна, якщо об'єкт регулювання містить ідеальну інтегровальну ланку. В цьому разі потрібно користуватися наладженням контуру на симетричний оптимум.

Отже, для структури об'єкта регулювання й регуляторів, що їх визначають вирази відповідно /5.21/, /5.29/ і /5.22/, /5.30/, передані функції розімкненого й замкненого оптимізованих контурів матимуть такий вигляд:

$$W(p) = R(p)G(p) = \frac{1}{2T_M p (1 + T_M p)}; \quad /5.31/$$

$$\Phi(p) = \frac{R(p)G(p)}{1 + R(p)G(p)} = \frac{1}{2T_M^2 p^2 + 2T_M p + 1} \quad /5.32/$$

Визначимо тепер запаси стійкості за амплітудою $A_{\text{зеп}}$ та фазою $\varphi_{\text{зеп}}$, якість перехідного процесу $\sigma\%$, t_p , $t_{п.с.}$, а також точність для детермінованих і випадкових дій контуру, оптимізованого відносно до модульного критерію.

Щоб знайти $A_{\text{зеп}}$ і $\varphi_{\text{зеп}}$, скористаймося логарифмічними амплітудно-частотною й фазочастотною характеристиками розімкненого контуру:

$$L(\omega) = 20 \lg W(\omega) = 20 \lg K_v - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + T_{\mu}^2 \omega^2}, \quad /5.33/$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctg T_{\mu} \omega, \quad /5.34/$$

де $K_v = 1/2T_{\mu}$ - коефіцієнт підсилення за швидкістю розімкненого контуру.

За /5.33/, /5.34/ на рис. 5.6 побудовано $L(\omega)$ і $\varphi(\omega)$. З рисунка бачимо, що $A_{\text{зеп}} = \infty$, а $\varphi_{\text{зеп}} = 180^\circ - |\varphi(\omega_{\text{зр}})| = 180^\circ - 90^\circ - \arctg \omega_{\text{зр}} T_{\mu} = 180^\circ - 90^\circ - \arctg 2 \sim 63^\circ$, де $\omega_{\text{зр}} = K_v / 2T_{\mu}$ - частота зрізу розімкненої системи [її не треба змішувати з частотою зрізу замкненої системи $\omega_{\text{зр.з}}$, зображеною на рис. 5.4; звичайно $\omega_{\text{зр.з}} = (0,5 - 0,7) \omega_{\text{зр.з}}$]. На цьому рисунку, а також цілі цифрами 0, +1, +2, ..., -1, -2, ... позначено нахили ЛАЧХ, які дорівнюють відповідно 0 дБ/дек, +20 дБ/дек, +40 дБ/дек, ..., -20 дБ/дек, -40 дБ/дек і т.д.

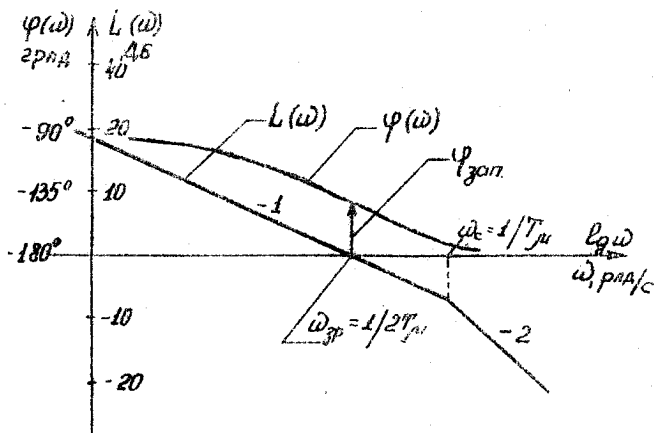


Рис. 5.6. Логарифмічні амплітудно- й фазочастотна характеристики контуру, оптимізованого за модульним критерієм

Розв'язавши диференціальне рівняння

$$2T_{\mu}^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2T_{\mu} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

для випадку, коли на систему діє одиничний вхідний сигнал $x(t)$ [коли $x(t) = 1(t)$, $y(t) = h(t)$], дістанемо

$$h\left(\frac{t}{T_{\mu}}\right) = 1 - e^{-\frac{t}{2T_{\mu}}} \left(\cos \frac{t}{2T_{\mu}} + \sin \frac{t}{2T_{\mu}} \right). \quad 15.35/$$

З перехідної функції $h(t/T_{\mu})$ побудованої за виразом 15.35/ і

зображеної на рис. 5.7, визначаємо: $\sigma = 4,35\%$, $t_{п.с} = 4,7 T_{\mu}$; $t_p = 8,4 T_{\mu}$ [у випадку $\pm 2\%$ -го відхилення $h(t/T_{\mu})$ від

усталеного режиму].

З виразів для передавальних функцій /5.31/, /5.32/ бачимо, що оптимізований контур за керуванням дією є астатичний з астатизмом першого порядку. Отже, статична похибка $\epsilon_{ст} = 0$, кінетична похибка $\epsilon_k = A/K_v = A 2 T_{\mu}$, де A - швидкість зміни лінійно на-ростального вхідного сигналу.

Як відомо, дисперсія випадкової похибки, спричи-нена завадою типу білого шуму, прикладеного до входу контуру,

$$\sigma^2 = S_{f_0} T,$$

де S_{f_0} - спектральна щіль-ність завади / S_{f_0} для бі-лого шуму в діапазоні частот від $\omega = -\infty$ до $\omega = +\infty$ стала/, а T - інтегральна

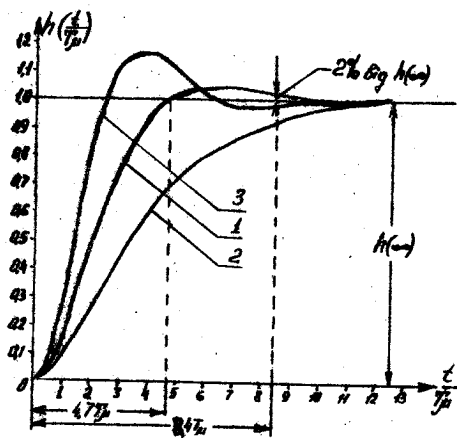


Рис. 5.7. Нормовані перехідні функції контуру, оптимізованого за модульним критерієм; 1 - коли $K_v = 1/2 T_{\mu}$ /модуль-ний оптимум/; 2 - коли $K_v = 1/4 T_{\mu}$ /лінійний опти-мум/; 3 - коли $K_v = 1/T_{\mu}$

квадратична оцінка. Вона, як відомо [17], становить

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \phi(p)\phi(-p)dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{C(p)C(-p)}{d(p)d(-p)} dp,$$

де передавна функція досліджуваної системи /контуру/

$$\phi(p) = \frac{C(p)}{d(p)} = \frac{C_0 + C_1 p + \dots + C_{n-1} p^{n-1}}{d_0 + d_1 p + \dots + d_n p^n}.$$

Інтеграл для $\mathcal{I}$ табульовано й зображено у вигляді явної функції від коефіцієнтів /параметрів/ системи C_i та d_j для різних значень n від 1 до 10. Для контуру з передаточною функцією /5.32/ $n = 2$, а тому

$$\mathcal{I}_2 = \frac{C_1^2 d_0 + C_0^2 d_2}{2 d_0 d_1 d_2} = \frac{1}{4 T_{\mu}}.$$

Отже, середньоквадратична похибка

$$\varepsilon_{cl} = +\sqrt{\mathcal{I}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S_{\sigma}}{T_{\mu}}}.$$

Треба звернути увагу, що ε_{λ} та ε_{cl} залежать від T_{μ} , до того ж що більше T_{μ} , то менше ε_{cl} , і навпаки.

Розглянемо тепер, як на якісні показники контуру впливають збурювальні дії $\mathcal{F}_1$ та $\mathcal{F}_2$ /див. рис. 5.5/. Звернемо, що збурення $\mathcal{F}_1$, яке діє на виході контуру і надходить на вхід замкнутого контуру без запізнювання, відповідає моменту статичного опору M_{01} в системі підпорядкованого регулювання з об'єктом ТП-Д /див. рис. 5.1/.

Передавна функція за збуренням $\mathcal{F}_1$

$$\phi_{F_1}(p) = \left. \frac{y(p)}{x(p)} \right|_{\substack{F_2(p)=0 \\ x(p)=0}} = \frac{2 T_{\mu} c p (1 + T_{\mu} c p)}{1 + 2 T_{\mu} c p + 2 T_{\mu}^2 c^2 p^2}. \quad /5.36/$$

Збурення $\mathcal{F}_2$ система може погамувати тоді, коли амплітудно-частотна характеристика $\Phi_{F_2}(\omega)$ для максимально широкого діапазону частот дорівнюватиме нулю. Асимптотична ЛАЧХ $\mathcal{L}(\omega) = 20 \lg \Phi_{F_2}(\omega)$, яка відповідає передатній функції /5.36/, складається з трьох відрізків прямих ліній: низькочастотного з нахилом $+1/+20$ дБ/дек, зумовленого диференціальною ланкою; з нахилом -1 від частоти $\omega = 1/\sqrt{2} T_{\mu}$.

/частота спряження коливної ланки/ до частоти $\omega = 1/T_M$, зумовленого частотою спряження форсувальної ланки, і паралельного осі частот, розташованого в діапазоні частот від $\omega = 1/T_M$ до $\omega = \infty$. Уся характеристика лежить під віссю нуль децибелів. Отже, заваду $\mathcal{F}_1$ контур пригамовує повністю. Фазова характеристика $\varphi(\omega) = 90^\circ$, коли $\omega = 0$, і $\varphi(\omega) = 0^\circ$, коли $\omega = \infty$. Отже, збурення $\mathcal{F}_1$ сприяє поліпшенню стійкості контуру.

Передавна функція за збуренням $\mathcal{F}_2$

$$\Phi_{F_2}(p) = \frac{y(p)}{F_2(p)} \Big|_{\substack{F_1(p)=0 \\ x(p)=0}} = \frac{2T_{MC}p(1+T_{MC}p)}{1+2T_{MC}p+2T_{MC}^2p^2} \quad /5.37/$$

Щоб оцінити вплив збурення $\mathcal{F}_2$ на властивості контуру, оптимізованого як за модульним, так і за симетричним оптимумом /розглянуто далі/, виберемо як передавну функцію $G(p)$ механічну частину двигуна, тобто $G(p) = K_d R_z / T_M(p)$. Тоді $\Phi_{F_2}(p)$ перетвориться на передавну функцію коливної ланки:

$$\Phi_{F_2}(p) = \frac{2T_{MC} K_d R_z / T_M}{1+2T_{MC}p+2T_{MC}^2p^2} \quad /5.38/$$

Перехідну функцію контуру, оптимізованого за модульним критерієм за збурувальною дією $\mathcal{F}_2$ у безрозмірних координатах, зображено на рис. 5.8 /крива 1/. Контур у цьому разі є статична система; заваду $\mathcal{F}_2$ він ефективно пригамовує тільки у високочастотному діапазоні, де нахил ЛАЧХ після частоти $\omega_0 = 1/T_{MC} \sqrt{2}$ становить -40 дБ/дек.

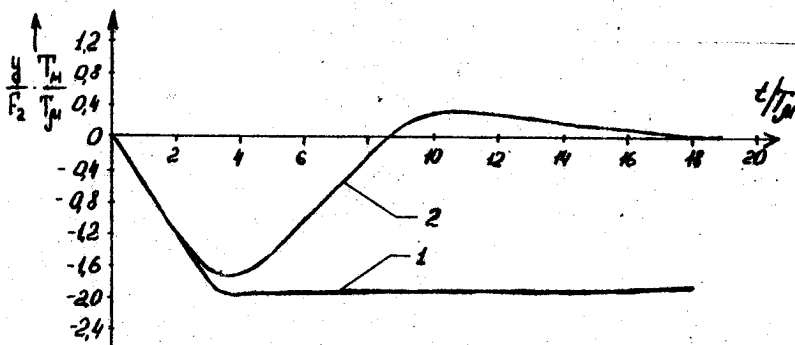


Рис. 5.8. Нормовані перехідні функції за збурувальною дією $\mathcal{F}_2$: 1 - модульний оптимум; 2 - симетричний оптимум

Наладження оптимізовуваних контурів згідно з передавною функцією /5.32/ вважають, як уже зазначалося попередньо, оптимальним. У більшості практичних випадків воно задовольняє технічні вимоги, що їх ставлять до якості процесу регулювання контуру. Завдяки цьому, а також простоті реалізації наладження за модульним оптимумом зараз є найпоширенішим способом оптимізації контурів регулювання. Але на практиці виникають ситуації, коли треба знижувати чи підвищувати підсилення контуру порівняно з оптимальним: $K_v = 1/2 T_M$. Це можна пояснити тим, що з погляду якості перехідного процесу оптимізований контур в одних випадках не повинен мати перерегулювання, яке знижують, зменшуючи підсилення контуру, а в інших повинен мати більшу швидкодію, котру підвищують, збільшуючи коефіцієнт підсилення контуру.

Якщо $K_v = 1/4 T_M$, критерій оптимальності називають лінійним. Для лінійного критерію $A_{\text{зан}} = \infty$, $\varphi_{\text{зан}} \approx 76^\circ$; $G = 0$; $t_p \approx 12,3 T_M$.
Якщо $K_v = 1/T_M$, $A_{\text{зан}} = \infty$; $\varphi_{\text{зан}} \approx 33^\circ$; $G = 16,5\%$; $t_{п.у} = 2,42 T_M$; $t_p = 7,1 T_M$.

Перехідні функції при $K_v = 1/4 T_M$ /крива 2/ і $K_v = 1/T_M$ /крива 3/ зображено на рис. 5.7.

5.2.3. Симетричний критерій оптимізації

Суть симетричного критерію оптимізації розглянемо стосовно до структурної схеми, зображеної на рис. 5.9. На цій схемі динамічний блок з передавною функцією $W(p)$ являє собою задавач інтенсивності у вигляді інтегратора з передавною функцією

$$W(p) = \frac{1}{T_0 p}$$

чи аперіодичної ланки з передавною функцією

$$W(p) = \frac{1}{1 + T_W p}, \quad /5.39/$$

а збуренням F_2 для об'єкта типу ТП-Д є момент статичного опору на валі двигуна.

Надалі припускаємо, що передавна функція об'єкта регулювання містить лише одну велику сталу часу T_M і що в поліномі чисельника передавної функції регулятора /5.22/ є тільки одна велика стала часу T_p , тобто

$$G(p) = \frac{K_{05}}{T_M p (1 + T_M p)}, \quad /5.40/$$

$$R(p) = \frac{1 + \varepsilon_R p}{\varepsilon_0 p}. \quad /5.41/$$

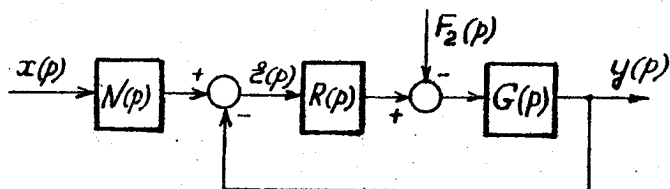


Рис. 5.9. Структурна схема оптимізованого контуру із згладжувальним пристроєм $N(p)$ на вході

Урахувавши /5.39/-/5.41/, дістанемо таку передавну функцію оптимізованого контуру за керувальною дією:

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \frac{y(p)}{x(p)} \Big|_{F_2(p)=0} = \frac{W(p) R(p) G(p)}{1 + R(p) G(p)} = \\ &= \frac{K_{05} (1 + \varepsilon_R p)}{(1 + T_M p) [\varepsilon_0 p T_M (1 + T_M p)] + K_{05} (1 + \varepsilon_R p)}. \end{aligned} \quad /5.42/$$

Звичайно $(1 + \varepsilon_R p) / (1 + T_M p) = 1$ або, для значного діапазону частот, ε_R / T_M . Тоді

$$\Phi(p) = \frac{\varepsilon_R}{T_M} = \frac{1}{p^2 \frac{T_M}{K_{05}} \varepsilon_0 (1 + T_M p) + (1 + \varepsilon_R p)}. \quad /5.43/$$

Оптимізуючи контур з передавною функцією /5.43/ за модульним критерієм, внаслідок порівняння коефіцієнтів виразу /5.43/ з коефіцієнтами перших двох рівнянь /5.20/, дістаємо такі правила налагодження:

$$\varepsilon_R = 4 T_M; \quad \varepsilon_0 / K_{05} = 2 T_M \frac{\varepsilon_R}{T_M} = \frac{8 T_M^2}{T_M}. \quad /5.44/$$

Якщо передавна функція об'єкта керування /5.40/ містить ще одну аперіодичну ланку з великою сталою часу T_r , то чисельник передаточної функції регулятора /5.41/ має містити дві форсувальні ланки з великими сталими часу τ_{R1} і τ_{R2} . Правила наладження контуру на модульний оптимум:

$$\tau_{R1} = \tau_{R2} = 8T_{\mu}; \quad \tau_o / K_{05} = 2T_{\mu} \tau_{R1} \tau_{R2} / (T_r T_{\mu}). \quad /5.45/$$

Розглядуваний критерій справджується й тоді, коли передавна функція $G(p)$ містить не тільки аперіодичну ланку з малою некомпенсованою сталою часу T_{μ} , а й колибну ланку з двома великими сталими часу, наприклад двигун постійного струму із сталими часу T_M і T_e .

Для двоконтурних систем підпорядкованого регулювання з об'єктами типу ПП-Д передавну функцію об'єкта $G(p)$ визначає вираз /5.40/. Тому розглянемо цей випадок докладніше.

Передатні функції розімкненого й замкненого оптимізованого за симетричним критерієм контуру за керувальною дією з урахуванням параметрів наладження /5.44/ і за умови $N(p) = 1$:

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{y(p)}{e(p)} \Big|_{F_2(p)=0} = R(p) G(p) = \\ &= \frac{1+4T_{\mu}p}{8T_{\mu}^2 p^2 (1+T_{\mu}p)} = \frac{K_a}{p^2} \frac{(1+4T_{\mu}p)}{(1+T_{\mu}p)}, \end{aligned} \quad /5.46/$$

де $K_a = 1/8T_{\mu}^2$ - коефіцієнт підсилення контуру за прискоренням, s^{-2} ;

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \frac{y(p)}{z(p)} \Big|_{F_2(p)=0} = \frac{R(p) G(p)}{1+R(p) G(p)} = \\ &= \frac{1+4T_{\mu}p}{1+4T_{\mu}p + 8T_{\mu}^2 p^2 + 8T_{\mu}^3 p^3}. \end{aligned} \quad /5.47/$$

Розглянемо динамічні властивості контуру регулювання з передатними функціями /5.46/, /5.47/, оптимізованими за симетричним критерієм. Розпочнемо з визначення запасів стійкості. ДАЧХ розімкненого контуру

$$L(\omega) = 20 \lg K_a - 20 \lg \omega^2 + 20 \lg \sqrt{1+16T_{\mu}^2 \omega^2} + 20 \lg \sqrt{1+T_{\mu}^2 \omega^2} \quad /5.48/$$

і фазочастотну характеристику

$$\varphi(\omega) = -\pi + \operatorname{arctg} (4T_{\mu}\omega) - \operatorname{arctg} T_{\mu}\omega \quad /5.49/$$

зображено на рис. 5.10. Характеристики $L(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ симетричні відносно частоти зрізу $\omega_{зр} = 1/2T_{\mu}$ / частоти спряження $\omega_{сп} = \frac{1}{2T_{\mu}}$

і $\omega_{сп} = \frac{1}{T_{\mu}}$ удвічі менші й удвічі більші за частоту зрізу $\omega_{зр}$.

Завдяки цій властивості такий спосіб налаштування контурів дістав назву симетричного оптимуму (*Symmetrisches optimum*) [43].

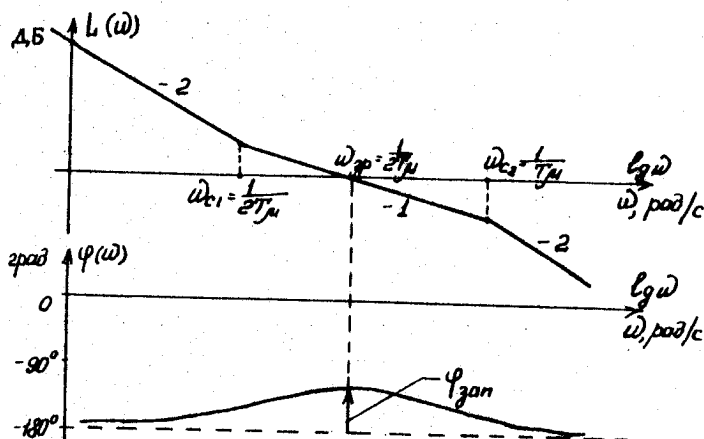


Рис. 5.10. Логарифмічні амплітудно-частотна і фазочастотна характеристики контуру, оптимізованого за симетричним критерієм

Запаси стійкості за амплітудою $A_{зан} = \infty$; за фазою

$$\begin{aligned} \varphi_{зан} &= 180^\circ - \varphi(\omega_{зр}) = 180^\circ - 180^\circ + \operatorname{arctg} (4T_{\mu}\omega_{зр}) - \\ &- \operatorname{arctg} T_{\mu}\omega_{зр} = \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 0,5 \approx 37^\circ. \end{aligned}$$

Нормована перехідна функція налаштованого на симетричний оптимум контуру

$$h(t/T_n) = 1 + e^{-\frac{t}{2T_n}} - 2e^{-\frac{t}{4T_n}} \cos \frac{\sqrt{3}}{4T_n} t. \quad /5.50/$$

З графіка перехідної функції $h(t/T_n)$, зображеного на рис. 5.II /крива I/, визначимо: $\sigma = 43,4\%$; $t_{n.g} = 3/T_n$; $t_p = 16,5 T_n$.

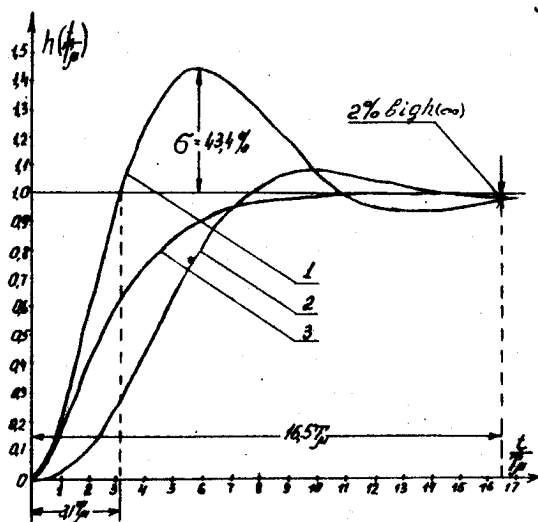


Рис. 5.II. Нормовані перехідні функції контуру, оптимізованого за симетричним критерієм, які відповідають передавним функціям: /5.47/ - крива 1; /5.52/ - крива 2; /5.54/ - крива 3

Із структурної схеми /див. рис. 5.9/ і передавних функцій /5.46/, /5.47/ випливає, що контур, оптимізований за симетричним критерієм, є астатичним з астатизмом другого порядку за збуренням $F_2(t)$, оскільки між входом і точкою прикладення $F_2(t)$ є тільки одна ідеальна інтегровальна ланка. Отже, статична $\varepsilon_{ст}$ і кінетична ε_k похибки за керу-

вальною дією порівнюють нулеві; є тільки похибки за вищими похідними керувальної дії, починаючи з похибки за прискоренням, величина якої прямо пропорційна прискоренню, що з ним змінюється керувальна дія, і обернено пропорційна коефіцієнтові підсилення контуру за прискоренням λ_2 .

Методика розрахунку випадкової похибки така ж сама, як і у випадку наладження контуру на модульний оптимум. Але тут порядок системи $n = 3$. Тому інтегральна квадратична оцінка

$$J_g = \frac{C_2 d_0 d_1 + (C_1^2 - 2C_0 C_3) d_0 d_3 + C_0^2 d_2 d_3}{2d_0 d_3 (-d_0 d_3 + d_1 d_2)} = \frac{1}{2T_{\mu}}$$

Оскільки J_g в 2 рази більше, ніж J_2 , то, отже, дисперсія й середньоквадратична похибка контуру, наладженого за симетричним критерієм за однакових S_{f_0} , в 2 рази більша, ніж контуру, наладженого за модульним критерієм. Пояснити це можна тим, що амплітудно-частотна характеристика контуру в першому випадку має значно більший викид; тому за однакових частот зрізу $\omega_{зр} = 1/2T_{\mu}$ "ефективна" смуга пропускання контуру із симетричним критерієм значно /в 2 рази/ ширша, ніж контуру з модульним критерієм.

Передавна функція контуру за збуренням F_2 /див. рис. 5.9/

$$\begin{aligned} \Phi_{F_2}(p) &= \frac{Y(p)}{F_2(p)} \Big|_{x(p)=0} = N(p) \frac{1}{1+R(p)G(p)} = \\ &= \frac{8T_{\mu}^2 p^2 (1+T_{\mu} p)}{1+4T_{\mu} p+8T_{\mu}^2 p^2+8T_{\mu}^3 p^3} \quad /5.51/ \end{aligned}$$

Нормовану перехідну функцію за збуренням F_2 , яка відповідає виразу /5.51/ при $N(p) = 1$, зображено на рис. 5.8 /крива 2/. Порівнявши криві 1 /модульний критерій/ і 2, бачимо, що збурення F_2 у випадку симетричного наладження контуру повністю пригасується; контур у цьому разі є астатичним з астатизмом першого порядку. Такий самий висновок впливає з ЛАЧХ, яка відповідає /5.51/. Справді, в діапазоні низьких частот ЛАЧХ визначає диференціальна ланка другого порядку: $L(\omega) = 20 \lg 8T_{\mu}^2 \omega^2$; від частоти $\omega = 0$ до $\omega = T_{\mu} \sqrt{8}$, де $L(\omega)$ перетинає вісь нуль децибелів, її нахил становить +40 дБ/дек, і тому збурення F_2 контур пригасує. Отже, порівняно з наладженням на оптимум за модулем наладження на симетричний оптимум ефективніше щодо відпрацювання збурувальних дій F_2 , особливо їхніх низькочастотних

складових. Тому симетричний критерій застосовують для наладження зовнішніх контурів регулювання, наприклад систем автоматичної стабілізації швидкості, характерним режимом яких є частий накид і скид навантаження.

Порівняльну характеристику модульного й симетричного оптимумів наведено в табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Якісні показники модульного
й симетричного оптимумів

№ п/п	Показник	Критерій	
		модульний	симетричний
1	Запас за амплітудою $A_{зап}$	∞	∞
2	Запас за фазою $\varphi_{зап}$, град	63	37
3	Перерегулювання, %	4,35	43,4
4	Час першого узгодження	4,7	3,1
5	Час регулювання [при 2%-му відхиленні $h(t)$ від $h(\infty)$] $t_{\%}$	8,4	16,5
6	Порядок астатизму γ /див. рис. 5.5 і 5.9/:		
	за керувальною дією x	1	2
	за збурювальною дією F_z	0	1
7	Дисперсія, зумовлена "білим" шумом	$S_{f_0} \frac{1}{4T_{\mu}}$	$S_{f_0} \frac{1}{2T_{\mu}}$

У випадку, коли вхідний сигнал надходить на вхід замкненого контуру без запізнювання /див. рис. 5.9, $N(p) = 1/$, симетричний критерій має ту ваду, що спричинює занадто велике перерегулювання. Це пов'язано з тим, що в передавній функції /5.47/ є форсувальна ланка $(1 + 4T_{\mu})$. У зв'язку з цим розроблено кілька способів, що знижують перерегулювання за прийнятих для практики інших показників якості процесу регулювання. Розглянемо деякі з цих способів.

Перший спосіб - згладжують вхідний сигнал згідно з [42] за допомогою пасивного RC -фільтра з передавною функцією $N(p) = 1/(1 + 4T_{\mu})$, увімкненого на вході замкненого оптимізованого контуру. В цьому разі передавна функція контуру разом з фільтром

$$\Phi(p) = \frac{1}{1 + 4T_{\mu}p + 8T_{\mu}^2p^2 + 8T_{\mu}^3p^3} \quad /5.52/$$

Передавній функції /5.52/ відповідає перехідна функція

$$h(t/T_n) = 1 - e^{-\frac{t}{2T_n}} - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{4T_n}} \sin \frac{\sqrt{3}}{4T_n} t. \quad /5.53/$$

Якісні показники перехідного процесу, що їх визначає перехідна функція /5.53/, такі /див. рис. 5.II, крива 2/: перерегулювання $\sigma = 61\%$, час першого узгодження $t_{п.у} = 7,6 T_n$, час регулювання $t_p = 15,3 T_n$. Запаси стійкості: $A_{зап} \sim 9$ дБ; $\varphi_{зап} \sim 60^\circ$. Таким чином, зменшення перерегулювання контуру до величини $\sigma = 8,1\%$ досягнуто тут завдяки істотному зниженню як швидкодії системи, так і запасу стійкості за амплітудою.

У [42] запропоновано другий спосіб зменшення перерегулювання, який полягає у паралельному з'єднанні аперіодичних згладжувальних ланок, увімкнених на вході оптимізованого за симетричним критерієм контуру, а також наведено схему його технічної реалізації. Доведено, що коли відповідним чином вибрати параметри схеми, то загальна передавна функція оптимізованого контуру матиме вигляд

$$\Phi(p) = \frac{1}{1 + 3T_n p + 2T_n^2 p^2}. \quad /5.54/$$

З перехідної функції /рис. 5.II, крива 3/

$$h(t/T_n) = 1 + e^{-\frac{t}{T_n}} - 2e^{-\frac{t}{2T_n}}, \quad /5.55/$$

яка відповідає /5.54/, бачимо, що $\sigma = 0$, а $t_p = 9,2 T_n$.

5.3. Типові аналогові регулятори

Системи керування електроприводами будуть на типових елементах уніфікованої блокової системи регуляторів УБСР-АІ аналогової дії в інтегральному виконанні, яка містить: джерела живлення, задавачі вхідних сигналів, давачі для вимірювання регульовних параметрів, підсилювачі, регулятори, потенціальні подільники, пристрої захисту й комутації, технологічної логіки тощо. Сукупність усіх цих елементів утворює функціонально повний набір, який дає змогу будувати системи керування будь-якої структури. Звичайно елементи УБСР-АІ виготовляють у вигляді двобічних друкованих плат з широким застосуванням напівпровідникових та гібридних мікросхем із штепсельним рознімачем.

Номенклатуру й основні технічні дані аналогових елементів АБСР-АІ наведено в [23; 25].

Основний елемент аналогової серії АБСР-АІ - підсилювач постійного струму ПКС /операційний підсилювач ОП/. Радянську серію АБСР-АІ побудовано на основі ОП типів К53ЗУД2 і КІ403Д7. Ці ПКС мають коефіцієнт підсилення $/2...3 \cdot 10^4$, напругу живлення ± 15 В, вихідну напругу ± 10 В для опору навантаження не менш як 2 кОм, вхідний опір 400 кОм, смугу пропускання в режимі з одиничним зворотним зв'язком до 0,8 мГц.

Схему ОП з інвертувальним входом зображено на рис. 5.12. Для ідеального ОП, що має нескінченно великий коефіцієнт підсилення за

напругою κ_u , нескінченно великий вхідний z_p і нескінченно малий вихідний z_g опори, передавна функція

$$R(p) = - \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{z_{g.g}(p)}{z_{g.x}(p)} \cdot /5.56/$$

Знак "-" відбиває інвертувальну дію підсилювача /коли $U_{\text{вх}} > 0$, $U_{\text{вих}} < 0$ /, необхідну для здійснення від'ємного зворотного зв'язку в схемах ОП.

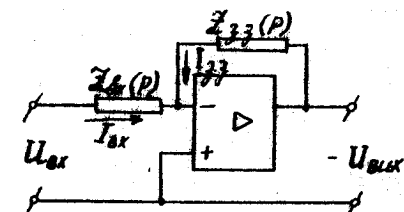


Рис. 5.12. Принципова схема ОП з інвертувальним входом

У реальних ОП із скінченними значеннями κ_u , z_p , z_g передавна функція /5.56/ має складніший вигляд [42]. Залежно від характеру вхідного комплексного опору $z_{g.x}(p)$ і комплексного опору зворотного зв'язку $z_{g.g}(p)$ підсилювач являє собою пристрій /регулятор/ з різними динамічними властивостями. Розглянемо основні типи регуляторів.

Пропорційний регулятор /П-регулятор/

Коли $z_{g.x}(p) = R_{g.x}$ і $z_{g.g} = R_{g.g}$ /рис. 5.12/, передавна функція регулятора має вигляд

$$R(p) = \frac{z_{g.g}(p)}{z_{g.x}(p)} = \frac{R_{g.g}}{R_{g.x}} = \kappa_p, \quad /5.57/$$

тобто є відношенням двох активних опорів і, отже, безрозмірна величина. В цьому разі відбувається пропорційне підсилення з коефіцієнтом підсилення κ_p . Реальна передавна функція П-регулятора

$$R(p) = \frac{\kappa_p}{1+\Delta} \cdot \frac{1}{\frac{\Delta}{1+\Delta} T_p p + 1}, \quad /5.58/$$

де Δ - коефіцієнт похибки; T_p - стала часу фільтра на виході підсилювача.

Беличини Δ і T_p залежать від реальних значень κ_u , z_e , z_o і активного опору навантаження z_H [42]:

$$\Delta = \frac{1}{\kappa_u} \frac{z_o + z_H}{z_H} \left(\frac{R_{z.z}}{R_{ex}} + \frac{R_{z.z}}{z_e} + 1 \right); \quad T_p = \frac{z_o z_H}{z_o + z_H} C_F.$$

ПР належить до регуляторів з дуже великою швидкістю. На стрибкуватий вхідний сигнал він реагує стрибкуватим вихідним сигналом, який відрізняється від вхідного в κ_p разів.

Якщо вважати, що в момент подавання вхідної напруги вихідна напруга підсилювача дорівнює нулеві, то лише за умови

$$|U_{ex}| \leq \left| \frac{U_{вих max}}{\kappa_p} \right|$$

П-регулятор працюватиме в керованій зоні. Коли ж вхідна напруга перевищує значення, що його визначає вираз для $|U_{ex}|$, то вихідна напруга вже не може повторювати вхідну. Регулятор у цьому випадку перебуває в режимі насичення.

Інтегральний регулятор /І-регулятор/

Якщо в коло зворотного зв'язку /рис. 5.12/ увімкнути конденсатор з ємністю $C_{z.z}$, а у вхідне - активний опір R_{ex} , то в цьому разі $z_{ex}(p) = R_{ex}$; $z_{z.z}(p) = 1/C_{z.z} p$ і передавна функція регулятора

$$R(p) = \frac{z_{z.z}(p)}{z_{ex}(p)} = \frac{1}{z_o p} = \frac{\kappa_v}{p}, \quad /5.59/$$

де $z_o = R_{ex} C_{z.z}$ і $\kappa_v = 1/z_o$ - відповідно стала інтегрування й коефіцієнт підсилення регулятора.

Такий регулятор має інтегровальні властивості, тобто

$$U_{вих}(t) = -\kappa_v \int_0^t U_{ex}(t) dt + U_{вих}(0).$$

Скорочено його називають І-регулятор.

Якщо сигнал $U_{BX}(t)$ підтримувати сталим тривалий час, то регулятор може увійти в режим насичення. Це станеться тоді, коли цей час

$$t \gg \left| \frac{U_{BX, \max} - U_{BX}(0)}{U_{BX, \text{стр}}} \right|.$$

Після цього регулятор перебуватиме в стані насичення доти, поки вхідний сигнал не тільки зменшиться до нуля, а й змінить знак.

Інтегрально-пропорційний регулятор /ПІ-регулятор/

Якщо $\alpha_{BX}(p) = R_{BX}$, а $\alpha_{ЗЗ}(p) = R_{ЗЗ} + \frac{1}{C_{ЗЗ}p}$ /рис. 5.13, а/, то в цьому разі передавна функція регулятора має вигляд

$$R(p) = \frac{\alpha_{ЗЗ}(p)}{\alpha_{BX}(p)} = \frac{R_{ЗЗ}}{R_{BX}} + \frac{1}{T_0 p} = K_P + \frac{1}{T_0 p}, \quad /5.60/$$

де стала часу інтегрування $T_0 = R_{BX} C_{ЗЗ}$, а коефіцієнт підсилення пропорційної частини $K_P = R_{ЗЗ} / R_{BX}$.

Регулятор, як це випливає з /5.60/, поєднує в собі властивості П- та І-регуляторів, а тому його називають ПІ-регулятором.

Звичайно передавну функцію /5.60/ записують так:

$$R(p) = \frac{1 + T_R p}{T_0 p} = \frac{K_R}{p} (1 + T_R p), \quad /5.61/$$

де $T_R = R_{ЗЗ} C_{ЗЗ}$; $K_R = 1/T_0 = 1/R_{BX} C_{ЗЗ}$.

Закон змни вихідного сигналу, який відповідає передавній функції /5.60/ у випадку стрибкової зміни вхідного сигналу, зображено на рис. 5.14, а, б.

Логарифмічні амплітудно-частотна

$$L(\omega) = 20 \lg K_R - 20 \lg \sqrt{1 + T_R^2 \omega^2}$$

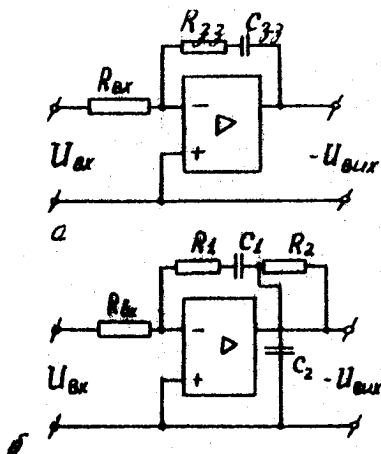


Рис. 5.13. Принципові схеми ПІ-регулятора /а/ і ПІД-регулятора /б/

і фазочастотна

$$\varphi(\omega) = -90^\circ + \arctg \varepsilon_R \omega$$

характеристики зображено на рис. 5.14, в.

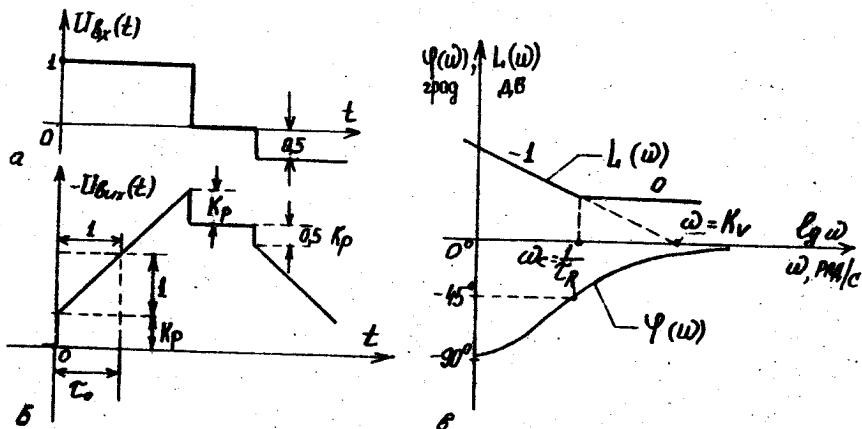


Рис. 5.14. Закон зміни вхідного /а/, вихідного /б/ сигналів і логарифмічні $L(\omega)$, $\varphi(\omega)$ характеристики ПІ-регулятора

Диференціальний регулятор /Д-регулятор/

Якщо в коло зворотного зв'язку увімкнути резистор з активним опором $R_{\Sigma.з}$, а у вхідне - конденсатор з ємністю $C_{\Sigma.х}$, то $Z_{\Sigma.х}(p) = 1/(C_{\Sigma.х} p)$, $Z_{\Sigma.з}(p) = R_{\Sigma.з}$ і передавна функція регулятора

$$R(p) = \frac{Z_{\Sigma.з}(p)}{Z_{\Sigma.х}(p)} = R_{\Sigma.з} C_{\Sigma.х} p = \varepsilon_d p, \quad /5.62/$$

де стала часу, яку звичайно називають часом диференціювання, $\varepsilon_d = R_{\Sigma.з} C_{\Sigma.х}$.

Із /5.62/ випливає, що регулятор у цьому разі диференціює вхідний сигнал, і тому його називають диференціальним.

Треба зазначити, що передавна функція /5.62/ фізично нереалізована, бо порядок правої частини диференціального рівняння, яке відповідає /5.62/, більший, ніж лівої. У [42] доведено, що з урахуванням вхідного опору Z_p підсилювача передавна функція реального Д-регулятора має вигляд

$$R(p) = \frac{Z_{AP}}{1 + Z^* p},$$

де $Z^* = (1 + R_{33}/Z_p) Z_A / K_u$.

Сталу часу Z^* узвичаєно називати "шкідливою". Під час синтезу регуляторів систем підпорядкованого регулювання її бажано враховувати як одну із складових малої некомпенсованої сталої часу синтезовуваної контуру T_u .

Треба також зауважити, що через обмеження $U_{64x}(t)$ неідеального підсилювача регулятор точно відпрацьовує тільки малі стрибки чи порівняно повільні зміни вхідного сигналу. За різкіших змін чи за більших амплітуд $U_{6x}(t)$ вихідний сигнал $U_{64x}(t)$ досягає насичення. Це означає, що конденсатор у вхідному колі заряджається й далі, а $U_{64x}(t)$ уже не може зростати. У цьому полягає одна з причин рідкого застосування Д-регулятора.

Пропорційно-диференціальний регулятор /ПД-регулятор/

Якщо в коло зворотного зв'язку увімкнути резистор з активним опором R_{33} , а у вхідне коло - резистор з активним опором R_{6x} і конденсатор ємністю C_{6x} , з'єднані паралельно, то, враховуючи рівності $Z_{6x}(p) = R_{6x} / (1 + R_{6x} C_{6x} p)$ та $Z_{33}(p) = R_{33}$, дістаємо передавну функцію ПД-регулятора:

$$R(p) = \frac{Z_{33}(p)}{Z_{6x}(p)} = \frac{R_{33}}{R_{6x}} (1 + R_{6x} C_{6x} p) = K_p (1 + T_d p), \quad /5.63/$$

де коефіцієнт пропорційного підсилення $K_p = R_{33} / R_{6x}$, а стала часу диференціювання $T_d = R_{6x} C_{6x}$.

Із /5.63/ випливає, що ПД-регулятор у стаціонарному режимі працює як пропорційний, а в разі зміни напруги на його вході до вихідної напруги додається ще й напруга, пропорційна швидкості зміни

вхідного сигналу. Отже, вхідний сигнал регулятор диференціює. Порівняно з Д-регулятором "шкідлива" стала часу ПД-регулятора зростає за рахунок вхідного опору $R_{\delta x}$:

$$\varepsilon_x = \frac{1 + R_{\delta x} / \tau_0 + R_{\delta x} / R_{\delta x}}{K_u} \varepsilon_d$$

Інтегрально-пропорційний диференціальний регулятор /ПІД-регулятор/

Принципову схему регулятора зображено на рис. 5.13,б. Можна довести, що передавна функція ПІД-регулятора, коли $R_1 \gg R_2$, $C_2 \gg C_1$ і $K_u \gg 1$, має вигляд [42]

$$R(p) = \frac{\tilde{\varepsilon}_{\delta x}(p)}{\tilde{\varepsilon}_0 p} = \frac{(1 + \varepsilon_R p)(1 + \varepsilon_{кер} p)}{\tilde{\varepsilon}_0 p}, \quad /5.64/$$

де сталі часу $\tilde{\varepsilon}_0 = R_{\delta x} C_1$, $\varepsilon_R = (R_1 + R_2) C_1$, $\varepsilon_{кер} = R_1 R_2 C_2 / (R_1 + R_2)$.

Ураховуючи, що коефіцієнт пропорційного підсилення ПІД-регулятора $K_p = (R_1 + R_2) / R_{\delta x}$, а стала часу $\tilde{\varepsilon}_0 = R_{\delta x} C_1 = \varepsilon_R / K_p$, передавну функцію /5.64/ звичайно записують так:

$$R(p) = \frac{\varepsilon_R + \varepsilon_{кер}}{\tilde{\varepsilon}_0} + \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_0 p} + \frac{\varepsilon_R \varepsilon_{кер}}{\tilde{\varepsilon}_0} p$$

Таким чином, ПІД-регулятор містить: П-складову $(\varepsilon_R + \varepsilon_{кер}) / \tilde{\varepsilon}_0$; І-складову $1 / \tilde{\varepsilon}_0 p$; Д-складову $\varepsilon_R \varepsilon_{кер} / \tilde{\varepsilon}_0 p^2$. Оскільки ці складові підсумовують, то можна додавати й відповідні складові для вихідного сигналу. Треба зауважити, що Д-складова тут, як і в Д та ПД-регуляторах, містить "шкідливу" сталу часу.

Посаднання типових регуляторів

Бажану передавну функцію регулятора можна дістати, послідовно чи паралельно увімкнувши типові регулятори. Наприклад, передавна функція ПІД-регулятора виходить, коли паралельно й узгоджено увімкнути І- та ПД-регулятори:

$$\begin{aligned} R_{\text{заг}}(p) &= \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_0 p} + K_p (1 + \varepsilon_R p) = \frac{(1 + \varepsilon_R p)(1 + \varepsilon_{кер} p)}{\tilde{\varepsilon}_0 p} = \\ &= \frac{1 + (\varepsilon_R + \varepsilon_{кер}) p + \varepsilon_R \varepsilon_{кер} p^2}{\tilde{\varepsilon}_0 p} \end{aligned} \quad /5.65/$$

/де $(\varepsilon_R + \varepsilon_{\kappa p}) = \kappa_p \varepsilon_0$; $\varepsilon_R \varepsilon_{\kappa p} = \varepsilon_0 \varepsilon_A \kappa_p$ / або шляхом послідовного ввімкнення ПІ- та ПД-регуляторів.

3.4. Синтез послідовних коригувальних пристроїв /регуляторів/

3.4.1. Основні теоретичні положення

Розглянемо синтез послідовних коригувальних пристроїв стосовно до системи /контуру/, структурну схему якої зображено на рис. 3.3, припустивши, що $F_1(p) = F_2(p) = 0$.

Задача синтезу полягає у визначенні такої передавної функції послідовного коригувального пристрою /регулятора/ $R(p)$, щоб із заданою передавною функцією об'єкта регулювання $G(p)$ передавна функція розімкненої скоригованої системи /контуру/ $W_K(p)$ мала б бажану передавну функцію $W_K(p)$, яка відповідала б модульному чи симетричному критерію оптимізації, тобто

$$W_K(p) = W_d(p). \quad /5.66/$$

Цю задачу можна розв'язати кількома методами. Зараз часто користуються методом логарифмічних амплітудно-частотних характеристик /метод ЛАЧХ/. Оскільки розглядуваний клас систем підпорядкованого регулювання належить до мінімально фазових систем, яким, зокрема, властива одна значна залежність між амплітудно-частотними /АЧХ/ і фазочастотними /ФЧХ/ характеристиками, то це дає право застосовувати метод ЛАЧХ.

Із структурної схеми на рис. 5.5 маємо

$$W_K(p) = R(p) G(p). \quad /5.67/$$

Тоді, врахувавши /5.66/, дістанемо

$$W_d(p) = R(p) G(p). \quad /5.68/$$

Припустивши, що в /5.68/ $p = j\omega$, знайдемо такі вирази частотних характеристик скоригованого бажаним чином розімкненого контуру: амплітудно-фазової

$$W_d(j\omega) = R(j\omega) G(j\omega); \quad /5.69/$$

$$W_g(\omega) = R(\omega) G(\omega); \quad /5.70/$$

логарифмічної амплітудно-частотної

$$L_g(\omega) = L_R(\omega) + L_G(\omega), \quad /5.71/$$

де $L_R(\omega) = 20 \lg R(\omega)$ - ЛАЧХ послідовного коригувального пристрою /контуру/; $L_G(\omega) = 20 \lg G(\omega)$ - ЛАЧХ об'єкта регулювання.

Із /5.71/ знаходимо

$$L_R(\omega) = L_g(\omega) - L_G(\omega). \quad /5.72/$$

Отже, ЛАЧХ послідовного коригувального пристрою /регулятора/ дорівнює бажаній ЛАЧХ мінус ЛАЧХ об'єкта регулювання.

Знайшовши ЛАЧХ регулятора $L_R(\omega)$, можна за нею визначити передавну функцію регулятора та його параметри, а тоді вибрати типовий регулятор і розрахувати параметри його вхідного кола й кола зворотного зв'язку.

Отже, регулятор синтезують у такій наступності.

1. Визначають передавну функцію об'єкта регулювання $G(p)$ і будують $L_g(\omega)$.

2. На підставі вибраного критерію оптимальності /модульний чи симетричний/ знаходять бажану передавну функцію $W_g(p)$, що її повинен мати контур унаслідок корекції, і будують бажану ЛАЧХ $L_g(\omega)$.

3. Визначають ЛАЧХ регулятора $L_R(\omega)$, віднімаючи ординати $L_g(\omega)$ від ординат $L_g(\omega)$.

4. За ЛАЧХ $L_R(\omega)$ знаходять передавну функцію регулятора R_p та її параметри.

5. За $R(p)$ вибирають типовий регулятор і розраховують його параметри /параметри вхідного кола й кола зворотного зв'язку/.

Зауважимо, що передавну функцію регулятора можна знайти, не будуючи ЛАЧХ, з /5.67/ та /5.68/:

$$R(p) = \frac{W_g(p)}{G(p)}. \quad /5.73/$$

5.4.2. Приклади синтезу послідовних коригувальних пристроїв

Приклад 5.1. Об'єкт регулювання з багатьма малими сталими часу. Потрібно визначити передавну функцію регулятора $R(p)$, вибрати типовий регулятор і визначити його параметри, коли задано таку передавну функцію об'єкта регулювання:

$$G(p) = K_{об} \frac{1}{1+T_{\mu 1} p} \frac{1}{1+T_{\mu 2} p} \dots \frac{1}{1+T_{\mu n} p} \quad /5.74/$$

Розв'язання. Розглянемо насамперед питання про послідовне з'єднання аперіодичних ланок з малими сталими часу $T_{\mu 1}, T_{\mu 2}, \dots, T_{\mu n}$. У [42] доведено, що передавну функцію /5.74/ з достатньою для практичних розрахунків точністю можна замінити зрізаною передачею функцією

$$G(p) = \frac{1}{1+T_{\mu} p} \quad , \quad /5.75/$$

де $T_{\mu} = \sum_{i=1}^n T_{\mu i}$ за умови, що послідовно з аперіодичними ланками з малими сталими часу буде ввімкнено ідеальну інтегровальну ланку, одержану, наприклад, унаслідок синтезу, або аперіодичну ланку із сталим часом $T \gg \sum_{i=1}^n T_{\mu i}$.

ЛАЧХ об'єкта регулювання з передачею функцією /5.75/ $L_G(\omega) = 20 \lg K_{об} - 20 \lg \sqrt{T_{\mu}^2 \omega^2 + 1}$ побудовано на рис. 5.15.

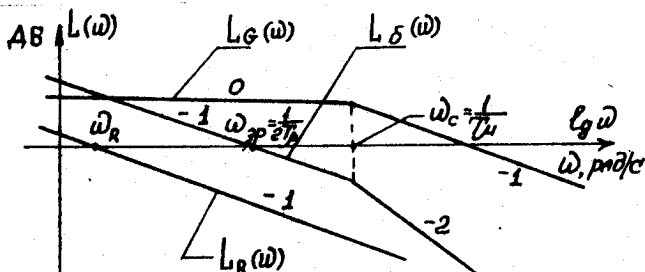


Рис. 5.15. До питання синтезу П-регулятора методом ЛАЧХ

Оскільки об'єкт регулювання - це ~~періодична~~ ланка, то для оптимізації контуру найкраще використати модульний критерій. Бажану ЛАЧХ, яка відповідає модульному критерію $L_S(\omega) = 20 \lg K_{vS} - 20 \lg \sqrt{T_M^2 \omega^2 + 1}$, де коефіцієнт підсилення за швидкістю бажаного розімкненого контуру $K_{vS} = 1/2 T_M$, побудовано на рис. 5.15.

За видом ЛАЧХ регулятора $L_R(\omega)$, одержаної відніманням ЛАЧХ об'єкта $L_S(\omega)$ від бажаної ЛАЧХ $L_S(\omega)$, знаходимо передавну функцію регулятора

$$R(p) = \frac{K_{v.per}}{p}, \quad /5.76/$$

де коефіцієнт підсилення за швидкістю регулятора $K_{v.per}$ дорівнює значенню частоти ω_R , яка відповідає перетину лінією $L_R(\omega)$ осі частот /див. рис. 5.15/, тобто $K_{v.per} = \omega_R$.

Отже, для оптимізації розглядуваної системи [як це бачимо з /5.76/] треба застосувати І-регулятор, передавну функцію якого, записану через параметри вхідного кола R_{BX} і кола зворотного зв'язку $C_{ЗЗ}$, визначає вираз /5.59/. Зрівнявши чисельники передавних функцій /5.76/ та /5.59/, дістанемо таке рівняння для визначення параметрів:

$$\frac{1}{R_{BX} C_{ЗЗ}} = \omega_R.$$

Задавши величину $C_{ЗЗ}$ і визначивши з ЛАЧХ величину ω_R , розраховують потім величину опору R_{BX} .

Приклад 5.2. Об'єкт регулювання з однією великою й багатьма малими сталими часу. Потрібно визначити передавну функцію регулятора $R(p)$, вибрати типовий регулятор і розрахувати його параметри, якщо задано таку передавну функцію об'єкта регулювання:

$$G(p) = \frac{K_{OS}}{(1+T_1 p)(1+T_{M1} p)(1+T_{M2} p) \dots (1+T_{Mn} p)},$$

де $T \gg \sum_{i=1}^n T_{Mi}$.

Розв'язання. Так само, як і в попередньому прикладі, замінимо добуток аперіодичних ланок з малими сталими часу однією аперіодичною ланкою із сталою часу $T_M = \sum_{i=1}^n T_{Mi}$. Тоді передавна функція об'єк-

та являтиме собою дві аперіодичні ланки із сталими часу T_i і T_μ . Для оптимізації розглядуваного контуру використаємо модульний критерій.

Розв'язання цієї задачі методом ЛАЧХ зображено на рис. 5.16. За видом ЛАЧХ регулятора $L_R(\omega)$, одержаної як різниця між $L_\delta(\omega)$

$$L_\delta(\omega) = 20 \lg K_{0.5} - 20 \lg \sqrt{T^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_\mu^2 \omega^2 + 1},$$

визначимо передавну функцію регулятора

$$R(p) = \frac{K_{aper}}{p} (1 + \varepsilon_R p) \approx \frac{\omega_R}{p} \left(1 + \frac{1}{\omega_{c2}} p\right). \quad /5.77/$$

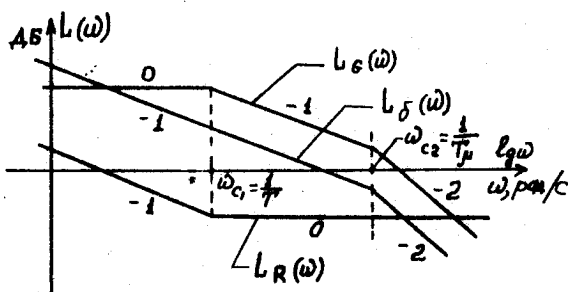


Рис. 5.16. До питання синтезу ПІ-регулятора методом ЛАЧХ

Передавну функцію /5.77/ реалізують за допомогою типового ПІ-регулятора, параметри якого $R_{\delta x}$, $R_{\beta z}$ і $C_{\beta z}$ можна знайти з такої системи рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_{\beta z}}{R_{\delta x}} &= \frac{\omega_R}{\omega_{c1}}; \\ \frac{1}{R_{\delta x} C_{\beta z}} &= \omega_R. \end{aligned} \right\} \quad /5.78/$$

Систему /5.78/ одержано зрівнюванням коефіцієнтів біля однакових степенів p передавної функції /5.61/, виражених через параметри $R_{\delta x}$, $R_{\beta z}$ і $C_{\beta z}$, і коефіцієнтів передавної функції /5.77/, поданих через спряжувальні частоти ЛАЧХ регулятора $L_R(\omega)$.

Знайшовши числові значення ω_R і ω_C , за ЛАЧХ і задавши величину $C_{3,3}$, розраховують за $15.78/R_{\delta, \lambda}$ та $R_{3,3}$.

5.5. Системи підпорядкованого регулювання
кутової швидкості
із зворотним зв'язком за швидкістю

5.5.1. Синтез коригувального пристрою
і розрахунок параметрів контуру струму

Контур струму в більшості систем підпорядкованого регулювання - це внутрішній контур, тому розраховувати параметри та їх остаточно вибирати під час експериментального доведення багатоконтурної системи розпочинають саме з даного контуру. Оскільки швидкодія системи загалом багато в чому залежить від внутрішнього контуру, то, отже, правильне налаштування струмового контуру - найвідповідальніший етап проектування систем підпорядкованого регулювання.

Параметри контуру струму оптимізують з такими припущеннями. Розглядатимемо реверсивну схему керування електроприводом із спільним узгодженим способом керування вентильними групами, наявність безперервних зрівняльних струмів в якій повністю виключає режим переривчастих струмів навантаження перетворювача; на виході давача струму поставлено фільтр у вигляді аперіодичної ланки, сталу часу якого $T_{\delta, c}$ вибрано так, щоб обмежити пульсації вихідної напруги давача до рівня, коли СІФК працює без перебоїв, а аналогові підсилювачі контуру - із сталим коефіцієнтом підсилення; на вході СІФК поставлено фільтр із сталою часу T_{δ} , призначення й параметри якого наведено попереду; впливу протиЕРС двигуна не враховано /оцінимо його далі/; динамічні властивості ТП разом із СІФК характеризує передавна функція /3.5/.

Об'єкт регулювання контуру струму складається з якірного кола двигуна, що являє собою з погляду динаміки аперіодичну ланку з коефіцієнтом підсилення $1/R_{\Sigma}$ і "великою" сталою часу T_{θ} тиристорного перетворювача разом із СІФК і фільтром на її вході та давача струму разом з фільтром на його виході.

Спрощену принципову схему контуру струму в одноканальній системі регулювання швидкості зображено на рис. 5.17. Силове коло нарисовано умовно в однолінійному вигляді. Вхідний сигнал на СІФК1 і СІФК2, які за входом з'єднано зустрічно, надходить від спільного ПІ-регулятора

струму. Контур зворотного зв'язку за струмом складається з вимірювального пристрою, виготовленого у вигляді шунта Ш, увімкненого в силове коло, і давача струму ДС. Вимірювальний пристрій вимірює регульовний параметр, яким у контурі струму є струм силового кола I_d , і перетворює цей параметр у пропорційну йому напругу U_w . Давач струму забезпечує підсилення напруги U_w і гальванічне розв'язування входних та вихідних кіл. Технічні характеристики давача струму ДС-ЗАІ, що його містить як окремий блок в УБСР-АІ, описано в розд. 4. З рис. 5.17 бачимо, що ця схема має один канал вимірювання струму й один канал регулювання, і тому її називають одноканальною.

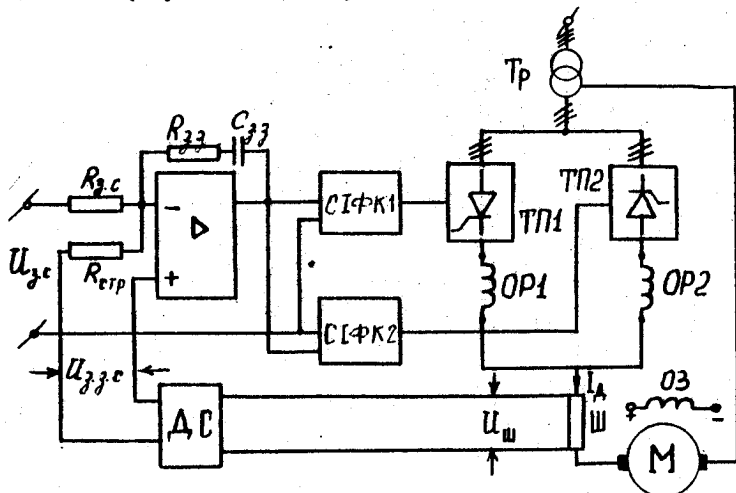


Рис. 5.17. Спрощена принципова схема контуру струму в одноканальній системі регулювання швидкості

На рис. 5.18,а зображено структурну схему контуру струму, побудовану відповідно до рис. 5.17 і з урахуванням зроблених попередніх припущень. З цієї схеми випливає, що об'єкт регулювання містить одну аперіодичну ланку з великою сталою часу і три аперіодичні ланки з малими сталими часу, дві з яких містяться в прямому каналі контуру регулювання, а третя - в каналі зворотного зв'язку. Щоб можна було користуватися методикой синтезу послідовних коригувальних пристроїв, треба цю схему перетворити в структурну схему з одиничним зворотним зв'язком. Таке перетворення зображено на рис. 5.18,б. У цій схемі

три аперіодичні ланки з малими сталими часу T_{φ} , τ і $T_{\text{д.с}}$ замінено однією аперіодичною ланкою з малою некомпенсованою сталою часу контуру струму $T_{\text{мс}} = \tau + T_{\varphi} + T_{\text{д.с}}$. Зауважимо, що форсувальної ланки $(1 + T_{\text{д.т.р}})$ у блоці, який стоїть на вході замкненого контуру струму, згідно з узвичаєною методикою не враховано і тому на схемі не зображено.

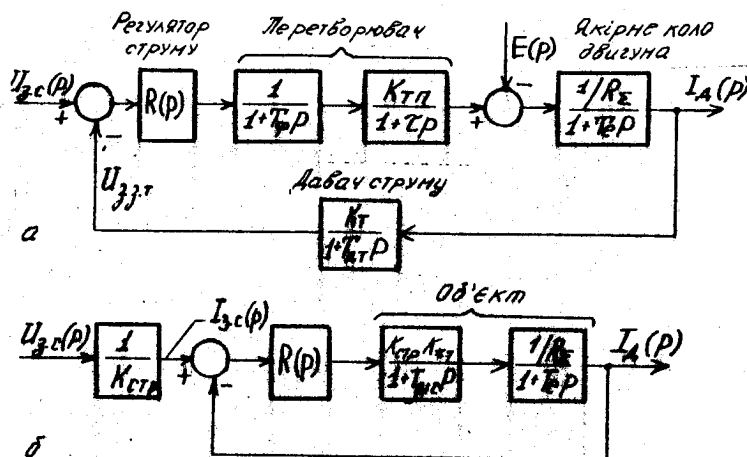


Рис. 5.18. Структурні схеми контуру струму: а - початкова; б - перетворена до схеми з одиничним зворотним зв'язком

Розраховувачи параметри регулятора струму в реальних системах регулювання, побудованих на елементах УБСР-А1, значення $T_{\text{мс}}$ доводиться задавати у визначених практикою межах 4...10 мс [10]. Нижня межа цього діапазону стосується АТП з безінерційною СІФК, а верхня - системи електроприводів з фільтрами на виході давача струму і на вході СІФК.

Відповідно до раніше викладеної методики синтезу послідовних коригувальних пристроїв із структурної схеми /рис. 5.18,б/ маємо

$$W_{\delta}(p) = R(p) \delta(p), \quad /5.79/$$

де $W_d(p)$, $R(p)$, $G(p)$ - передавні функції відповідно бажана, регулятора струму та об'єкта керування.

Контур струму звичайно оптимізують на підставі використання модульного критерію. Тому

$$W_d(p) = \frac{1}{2T_{мс}p(1+T_{мс}p)} \quad /5.80/$$

Передавна функція об'єкта керування згідно з рис. 5.18,6

$$G(p) = \frac{K_{об}}{(1+T_{об}p)(1+T_{мс}p)} \quad /5.81/$$

де $K_{об} = K_{стр} K_{тл} / R_z$ - коефіцієнт підсилення об'єкта керування контуру струму.

З виразу /5.79/ з урахуванням формул /5.80/, /5.81/ знаходимо

$$R(p) = \frac{W_d(p)}{G(p)} = K_{р.с} \frac{1+T_{об}p}{p} \quad /5.82/$$

де $K_{р.с} = R_z / 2T_{мс} K_{тл} K_{стр}$ - коефіцієнт підсилення регулятора струму. Тоді одержимо передавну функцію замкненого оптимізованого за модульним критерієм контуру струму

$$\Phi(p) = \frac{T_d(p)}{U_{з.с}(p)} = \frac{1/K_{стр}}{1+2T_{мс}p+2T_{мс}^2p^2} \quad /5.83/$$

Передавну функцію /5.82/ можна реалізувати за допомогою типового ПІ-регулятора, принципову схему ввімкнення якого в одноканальну систему регулювання швидкості з реверсивним перетворювачем зображено на рис. 5.17.

Розпочнемо тепер розраховувати параметри ПІ-регулятора і параметри кола зворотного зв'язку.

Передавна функція ПІ-регулятора струму /рис. 5.17/

$$R(p) = \frac{z_{з.з}(p)}{z_{вх}(p)} = \frac{1+R_{з.з}C_{з.з}p}{C_{з.з}R_{р.с}p} \quad /5.84/$$

Порівнюючи передавні функції /5.84/ та /5.82/, знаходимо системи рівнянь:

$$R_{з.з}C_{з.з} = T_{об} \quad /5.85/$$

$$R_{р.с}C_{з.з} = 2T_{мс}K_{стр}K_{тл}/R_z \quad /5.86/$$

Коефіцієнт підсилення кола зворотного зв'язку за струмом

$$K_{стр} = K_{ш} K_{д.с} R_{з.с} / R_{стр}, \quad /5.87/$$

де $K_{ш} = U_{ш} / I_{г}$ і $K_{д.с} = U_{з.с} / U_{ш}$ - коефіцієнти підсилення відносно шунта і давача струму; $R_{з.с} / R_{стр}$ - коефіцієнт зведення напруги зворотного зв'язку за струмом до кола задавального сигналу регулятора струму; $R_{з.с}$ і $R_{стр}$ - входні опори регулятора струму відповідно в каналах задавання й зворотного зв'язку за струмом.

Підставляючи в /5.86/ $K_{стр}$ з /5.87/, одержуємо

$$R_{стр} = \frac{2T_{м.с} K_{т.п} K_{д.с} K_{ш}}{R_{г} C_{з.з}}. \quad /5.88/$$

З виразів /5.88/ і /5.85/ визначають параметри регулятора струму $R_{стр}$, $R_{з.з}$, $C_{з.з}$. Ємність $C_{з.з}$ звичайно задають, а опори $R_{стр}$ і $R_{з.з}$ розраховують. Величини $R_{стр}$, $R_{з.з}$ і $C_{з.з}$ мають перебувати у межах $10 \text{ кОм} \leq R \leq 100 \text{ кОм}$, $0,1 \text{ мкФ} \leq C \leq 1 \text{ мкФ}$.

Опір $R_{з.с}$ вибирають з умови обмеження вихідної координати контуру струму - струму двигуна $I_{г}$, чого досягають, регламентуючи вихідну напругу $U_{з.с.мах}$ регулятора попереднього контуру - контуру швидкості:

$$I_{г.мах} = \frac{1}{K_{стр}} U_{з.с.мах}, \quad /5.89/$$

де $I_{г.мах}$ - струм максимального робочого перевантаження двигуна; $U_{з.с.мах}$ - максимальна вихідна напруга контуру швидкості /напруга обмеження/.

Із /5.87/ та /5.89/ знаходимо

$$R_{з.с} = \frac{U_{з.с.мах}}{K_{ш} K_{д.с} I_{г.мах}} R_{г}. \quad /5.90/$$

Коли вихідну напругу регулятора попереднього контуру обмежувати за допомогою стабілітронів, то можна вважати, що $U_{з.с.мах}$ дорівнює напрузі стабілізації останніх. Коли ж сигнал обмежено завдяки використанню регульовного джерела опорної напруги [40], то в цьому разі зручно припустити, що $R_{з.с} = R_{стр}$, і

$$U_{з.с.мах} = U_{д.с.мах} = K_{ш} K_{д.с} I_{г.мах}. \quad /5.91/$$

Визначивши $R_{стр}$ і $R_{з.с}$, а також $K_{ш}$ і $K_{д.с}$, розраховують $K_{стр}$ за /5.87/.

Звичайно в інженерній практиці параметри контуру струму знаходять за допомогою ЛАЧХ. Розв'язання задачі методом ЛАЧХ, яке повністю відповідає розглянуваному випадку, наведено в прикладі 5.2.

Числові приклади розрахунку параметрів контуру струму наведено в [2; 12; 40].

Контур струму, якщо $T_p / 4T_{мс} < 1$, іноді наладжують за симетричним оптимумом. Зокрема, у випадку різних коливань напруги живильної мережі синтез регулятора струму відповідно до симетричного критерію й застосування згладжувального фільтра в каналі задавання регулятора струму дає змогу зменшувати коливання струму якоря та часу його загасання.

5.5.2. Синтез коригувального пристрою й розрахунок параметрів контуру швидкості, оптимізованого за модульним критерієм

Вимірювальним пристроєм у контурі швидкості в регуляторах швидкості із зворотним зв'язком за швидкістю звичайно є тахогенератор, вихідний сигнал якого у вигляді напруги від'ємного зворотного зв'язку $U_{з.ш}$ надходить на вхід вузла порівняння, де порівнюється з напругою задавання на швидкість $U_{з.ш}$. Як вузол порівняння використовують ОК, що одночасно виконує функції послідовного коригувального пристрою.

Оптимізуючи параметри контуру швидкості, припускаємо, що, по-перше, контур струму оптимізовано згідно з модульним критерієм і, отже, його характеризує передатна функція /5.83/ і, по-друге, на виході давача швидкості поставлено фільтр у вигляді аперіодичної ланки із сталою часу $T_{г.ш}$. Об'єктом регулювання в контурі швидкості є механічна частина двигуна постійного струму й оптимізований замкнений контур струму.

Структурну схему контуру швидкості зображено на рис. 5.19,а, а цю саму схему, перетворену до схеми з одиничним зворотним зв'язком, - на рис. 5.19,б.

Некомпенсована мала стала часу контуру швидкості [34]

$$T_{г.ш} = 2T_{мс} + T_{д.ш} + \sqrt{(2T_{мс} + T_{д.ш})^2 + T_{д.ш}^2} / 2 \quad /5.92/$$

або з достатньою для практики точністю відповідно до узвичаєної методики за формулою

$$T_{г.ш} = 2T_{мс} + T_{д.ш} \quad /5.93/$$

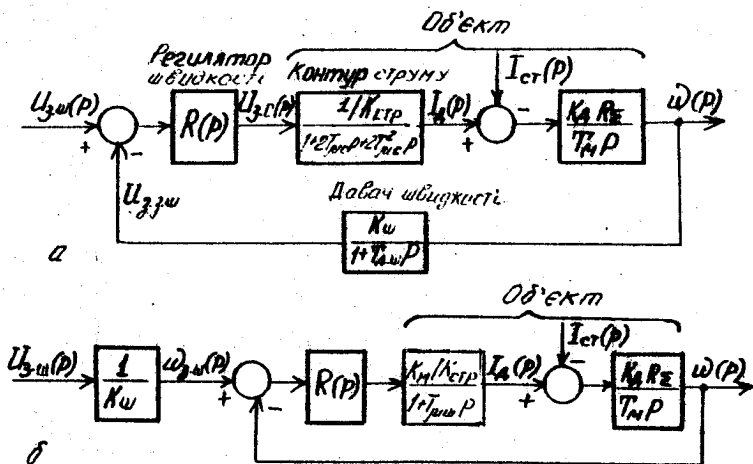


Рис. 5.19. Структурні схеми контуру швидкості: а - початкова; б - перетворена до схеми з одиничним зворотним зв'язком

Залежно від технологічних вимог, що їх ставлять до регуляторів швидкості, контур швидкості оптимізують або за модульним, або за симетричним критерієм.

Синтез послідовного коригувального пристрою /регулятора/ контуру швидкості, налаштованого на модульний оптимум, і розрахунок його параметрів методом ЛАЧХ зображено на рис. 5.20, на якому вжито такі позначення:

бажана ЛАЧХ

$$L_d(\omega) = 20 \lg \left| \frac{1}{2 T_{\mu \omega}} (j\omega) \cdot [1 + T_{\mu i} (j\omega)] \right| =$$

$$= 20 \lg \frac{1}{2 T_{\mu \omega}} - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + T_{\mu \omega}^2 \omega^2};$$

ЛАЧХ об'єкта регулювання контуру швидкості

$$L_b(\omega) = 20 \lg \left| K_{ob} / (j\omega) \cdot [1 + T_{\mu i} (j\omega)] \right| =$$

$$= 20 \lg (K_w K_A R_E / K_{tr} T_M) - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{T_{\mu \omega}^2 \omega^2 + 1};$$

$$L_R(\omega) = L_G(\omega) - L_G(\omega).$$

/5.94/

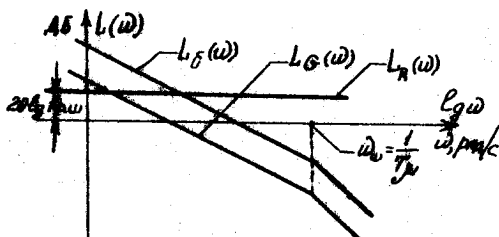


Рис. 5.20. До питання синтезу П-регулятора струму методом ЛАЧХ

За виразом для $L_R(\omega)$ записуємо передавну функцію регулятора швидкості:

$$R(p) = K_{p.\omega}$$

/5.95/

де $K_{p.\omega}$ - коефіцієнт підсилення регулятора швидкості. На рис. 5.21 зображено схему П-регулятора, яка реалізує передавну функцію /5.95/.

З цієї схеми знаходимо, дБ:

$$20 \lg K_{p.\omega} = A$$

/5.96/

або

$$K_{p.\omega} = 10^{\frac{A}{20}}$$

/5.97/

Із схеми П-регулятора /рис. 5.21/ з урахуванням формули /5.97/ маємо

$$\frac{R_{2,3}}{R_{\omega}} = 10^{\frac{A}{20}}$$

/5.98/

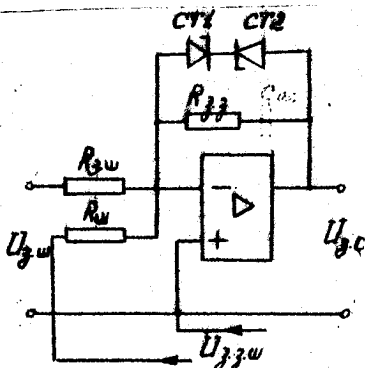


Рис. 5.21. Принципова схема П-регулятора швидкості з обмеженням вихідного сигналу

Регулятор швидкості має обмеження вихідної напруги, рівень якого відповідає гранично припустимій силі струму двигуна /"струмовому відтинкові"/. У найпростішому випадку обмеження роблять двома стабілітронами /рис. 5.21/; напругу обмеження тут розраховано на реверсивну роботу операційного підсилювача. Неабияка вада цієї схеми полягає в тому, що рівень обмеження залежить від напруги стабілізації стабілітрона, і його не можна плавно регулювати залежно від режиму роботи електропривода.

Коефіцієнт підсилення кола зворотного зв'язку за швидкістю

$$K_{\omega} = K_{r.r} \frac{R_{z.\omega}}{R_{\omega}}, \quad /5.99/$$

де $K_{r.r} = U_{z.\omega} / \omega$ - коефіцієнт підсилення техогенератора; $R_{z.\omega} / R_{\omega}$ - коефіцієнт зведення напруги зворотного зв'язку за швидкістю до кола задавального сигналу регулятора; $R_{z.\omega}$, R_{ω} - вхідні опори регулятора в каналах відповідно задавання й зворотного зв'язку.

Відношення опорів $R_{z.\omega} / R_{\omega}$ знаходять з рівняння

$$U_{z.\omega \max} = K_{\omega} \omega_{\max} = K_{r.r} \frac{R_{z.\omega}}{R_{\omega}} \omega_{\max}. \quad /5.100/$$

З рівняння /5.100/ дістаємо

$$\frac{R_{z.\omega}}{R_{\omega}} = \frac{U_{z.\omega \max}}{K_{r.r} \omega_{\max}}, \quad /5.101/$$

де $\omega_{\max}$ - максимальна задана швидкість обертання двигуна; $U_{z.\omega \max}$ - вихідна напруга задавального елемента, яка відповідає $\omega_{\max}$.

Звичайно задають, наприклад, $U_{z.\omega \max} = 24 \text{ В}$, $R_{z.\omega} = 50 \dots 100 \text{ кОм}$ і з /5.98/ та /5.101/ знаходять $R_{z.\omega}$ і R_{ω} .

Структурну схему контуру швидкості, оптимізованого відповідно до модульного критерію, зображено на рис. 5.22.

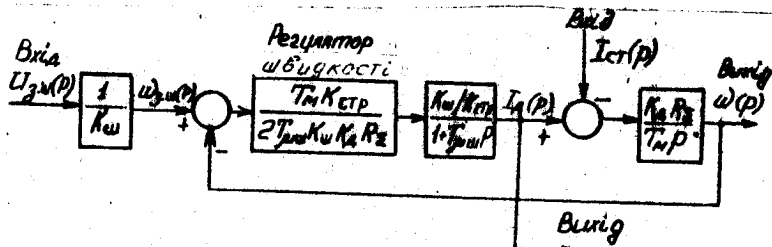


Рис. 5.22. Структурна схема регулятора швидкості з астатизмом першого порядку

5.5.3. Синтез коригувального пристрою
й розрахунків параметрів контуру швидкості,
оптимізованого за симетричним критерієм

Коригувальний пристрій контуру швидкості, оптимізованого за симетричним критерієм, синтезують за умов, аналогічних попередньому випадкові.

Контур швидкості, наладжений за симетричним оптимумом /див. рис. 5.19,б/, має бажану передавну функцію

$$W_0(p) = \frac{1 + 4T_{\text{ш}} p}{8T_{\text{ш}}^2 p^2 (1 + T_{\text{ш}} p)}, \quad /5.102/$$

Ураховуючи, що /див. рис. 5.19,б/

$$G(p) = \frac{K_{\text{ш}} K_{\text{г}} R_{\Sigma}}{K_{\text{стр}} T_{\text{ш}}} \cdot \frac{1}{p(1 + T_{\text{ш}} p)},$$

дістаємо

$$R(p) = \frac{W_0(p)}{G(p)} = K_{\text{р.ш}} \frac{1 + 4T_{\text{ш}} p}{p}, \quad /5.103/$$

де $K_{\text{р.ш}} = T_{\text{ш}} K_{\text{стр}} / 8T_{\text{ш}}^2 K_{\text{г}} K_{\text{ш}} R_{\Sigma}$ - коефіцієнт підсилення регулятора швидкості.

Передавну функцію /5.103/ реалізовано за допомогою типового ПІ-регулятора /рис. 5.23/

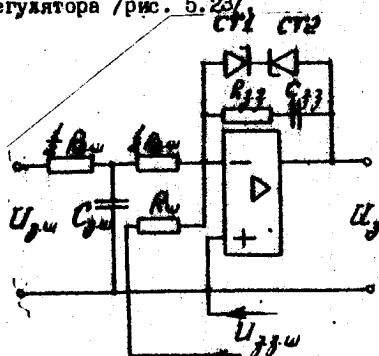


Рис. 5.23. Принципова схема ПІ-регулятора швидкості з обмеженням вихідного сигналу

Неважко довести, що пропорційна частина ПІ-регулятора швидкості /5.103/, яка дорівнює $T_{\text{ш}} K_{\text{стр}} (8T_{\text{ш}}^2 K_{\text{г}} K_{\text{ш}} R_{\Sigma})$, точно збігається з виразом ПІ-регулятора в контурі швидкості, оптимізованому за модульним критерієм. Опори R_{Σ} , $R_{\text{з.ш}}$ і $R_{\text{ш}}$ розраховують, як і ці самі опори в контурі, оптимізованому за модульним критерієм.

Стала часу зворотного зв'язку регулятора швидкості

ті $\varepsilon_R = R_{\Sigma} C_{\Sigma}$ дорівнює $4T_{\Sigma}$, тобто

$$C_{\Sigma} R_{\Sigma} = 4T_{\Sigma} \quad /5.104/$$

Рівність /5.104/ випливає з порівняння коефіцієнта коло ρ у виразі форсувального члена $(1 + 4T_{\Sigma}\rho)$ /5.103/ і передавної функції ПІ-регулятора, визначеної з рис. 5.23 і записаної аналогічно /5.61/.

Структурну схему контуру швидкості, оптимізованого відповідно до симетричного критерію, зображено на рис. 5.24.

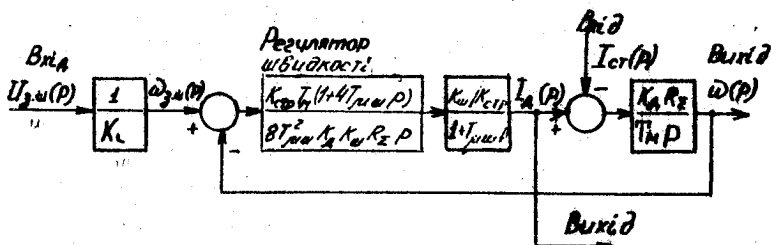


Рис. 5.24. Структурна схема регулятора швидкості з астатизмом другого порядку

5.5.4. Динамічні характеристики одноразово інтегрувальної системи регулювання швидкості

Розглянемо динамічні характеристики двоконтурної системи регулювання швидкості із зворотним зв'язком за швидкістю, в якій як контур струму, так і контур швидкості оптимізовано за модульним критерієм /рис. 5.22/. З цієї схеми знаходимо рівняння динаміки, які пов'язують вихідні сигнали ω , I_{Σ} з вхідними $U_{\Sigma\omega}$, I_{Σ} :

$$T_{\Sigma} \omega(p) + 2T_{\Sigma} K_{\Sigma} R_{\Sigma} (1 + T_{\Sigma} p) I_{\Sigma}(p) = T_{\Sigma} K_{\Sigma} U_{\Sigma\omega}(p); \quad /5.105/$$

$$T_{\Sigma} p \omega(p) = K_{\Sigma} R_{\Sigma} [I_{\Sigma}(p) - I_{\Sigma}(p)], \quad /5.106/$$

де $K_{\Sigma\omega} = 1/K_{\Sigma} = (1/K_{\Sigma}) (R_{\Sigma}/R_{\Sigma})$ - коефіцієнт підсилення замкненої системи.

Із /5.105/ та /5.106/ або відповідно перетворивши структурну схему /див. рис. 5.22/, визначаємо матрицю передавних функцій $\overline{\Phi}(p)$ оптимізованої системи

$$\overline{\Phi}(p) = \begin{bmatrix} \Phi_{1u}(p) & \Phi_{wu}(p) \\ \Phi_{1i}(p) & \Phi_{wi}(p) \end{bmatrix}, \quad /5.107/$$

де

$$\Phi_{1u}(p) = \frac{I_d(p)}{U_{3,u}(p)} \left| \begin{array}{l} \Delta I_{ct}=0 \\ \Delta U_3=0 \end{array} \right. = \frac{T_M K_{3,u}}{K_d R_z} \frac{p}{1+2T_{\mu u}p+2T_{\mu u}^2 p^2}, \quad /5.108/$$

$$\Phi_{wu}(p) = \frac{\omega(p)}{U_{3,u}(p)} \left| \begin{array}{l} \Delta I_{ct}=0 \\ \Delta U_3=0 \end{array} \right. = \frac{K_{3,u}}{1+2T_{\mu u}p+2T_{\mu u}^2 p^2}; \quad /5.109/$$

$$\Phi_{1i}(p) = \frac{I_d(p)}{I_{ct}(p)} \left| \begin{array}{l} \Delta U_{3,u}=0 \\ \Delta U_3=0 \end{array} \right. = \frac{1}{1+2T_{\mu u}p+2T_{\mu u}^2 p^2}; \quad /5.110/$$

$$\Phi_{wi}(p) = \frac{\omega(p)}{I_{ct}(p)} \left| \begin{array}{l} \Delta U_{3,u}=0 \\ \Delta U_3=0 \end{array} \right. = -\frac{(2T_{\mu u} K_d R_z / T_M) (1+T_{\mu u}p)}{1+2T_{\mu u}p+2T_{\mu u}^2 p^2}. \quad /5.111/$$

Ці передавні функції зручно записати через відносний коефіцієнт демпфування замкненого контуру швидкості ξ_u , наприклад:

$$\Phi_{wc}(p) = -\frac{4\xi_u^2 T_{\mu u} K_d R_z}{T_M} \cdot \frac{1+T_{\mu u}p}{1+4\xi_u^2 T_{\mu u}p+4\xi_u^2 T_{\mu u}^2 p^2}. \quad /5.112/$$

Наладженню контуру швидкості за модульним оптимумом відповідає $\xi_u = \sqrt{2}/2$.

Для кожної з наведених передавних функцій можна кожним з відомих способів визначити відповідну перехідну функцію. Зокрема, передавній функції /5.109/ відповідає перехідна функція /5.35/ /див. рис. 5.7/. Цей випадок досить докладно проаналізовано в п. 5.2.2 з погляду запасів стійкості, якості перехідного процесу й точності в разі детермінованих та випадкових дій. Передавній функції /5.112/ відповідає така перехідна функція /коли вхідна дія одинична: $L_{ct}(t) = 1(t)$ при $t > 0$ /:

$$\omega(t) = I_{cr} \frac{R_z K_A}{T_H} 4\zeta_{\omega}^2 T_{\mu\omega} \left[1 + e^{-\frac{t}{2T_{\mu\omega}}} \left(\frac{1-2\zeta_{\omega}^2}{2\zeta_{\omega} \sqrt{1-\zeta_{\omega}^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\zeta_{\omega}^2}}{2\zeta_{\omega} T_{\mu\omega}} t - \cos \frac{\sqrt{1-\zeta_{\omega}^2}}{2\zeta_{\omega} T_{\mu\omega}} t \right) \right] / 5.113/$$

Із структурної схеми /див. рис. 5.22/ і передавних характеристик /5.109/ та /5.110/ випливає, що розглядувана система за вибраних припущень є за задавальною цією $\mathcal{U}_{\omega}$ та виходом ω , а також за виходом I_g та входом I_{cr} астатичною з астатизмом першого порядку і статичною за збуренням I_{cr} та виходом ω .

Астатизм забезпечує механічна частина двигуна постійного струму, що являє собою /за вибраних припущень/ ідеальну інтегровальну ланку /рис. 5.22/. Із /5.113/ випливає, що в усталеному режимі ($I_g = I_{cr}$) статична похибка

$$\varepsilon_{cr} = I_{cr} \frac{K_A R_z 4\zeta_{\omega}^2 T_{\mu\omega}}{T_H} / 5.114/$$

Аналіз /5.114/ засвідчує, що статична похибка одноразово інтегровальної системи керування швидкістю обертання /"просідання швидкості"/ прямо пропорційна величинам I_g , K_d , R_z , $T_{\mu\omega}$, ζ_{ω} і обернено - електромеханічній сталій часу T_H . Вона менша, ніж статична похибка, притаманна приводові без регулятора ($I_g R_z K_d$), у $4\zeta_{\omega}^2 T_{\mu\omega} / T_H$ разів. Наявність цієї похибки - одна з основних вад систем регулювання швидкості з астатизмом першого порядку.

Регулятори кутової швидкості обертання з одноразово інтегровальним контуром швидкості застосовують тоді, коли швидкість підтримувати необов'язково, а також коли електропривод працює під "відтин".

5.5.5. Динамічні характеристики дворазово інтегровальної системи регулювання швидкості

Скориставшись алгоритмічною схемою /рис. 5.24/, визначимо динамічні характеристики двоконтурної системи регулювання швидкості із зворотним зв'язком за швидкістю, в якій контур струму оптимізовано за модульним, а швидкості - за симетричним критеріями. На підставі цієї схеми знаходимо такі рівняння динаміки в зображеннях за Лапласом:

$$T_H (1 + 4T_{\mu\omega} p) \omega(p) + K_A R_z 8T_{\mu\omega}^2 (1 + T_{\mu\omega} p) I_g(p) = T_H K_d \omega (1 + 4T_{\mu\omega} p) \mathcal{U}_{\omega}(p); / 5.115/$$

$$T_H p \omega(p) - K_A R_z \frac{I_g}{177}(p) = -K_A R_z I_{cr}(p). / 5.116/$$

Передавні функції, які утворюють матрицю передавних функцій /5.107/, визначені за /5.115/ та /5.116/ чи шляхом перетворення структурної схеми на рис. 5.24, мають вигляд:

$$\Phi_{1u}(p) = \frac{I_u(p)}{U_{g.w}(p)} \left| \begin{array}{l} \Delta I_{cr} = 0 \\ \Delta U_g = 0 \end{array} \right. = K_{g.w} \frac{T_H}{K_A R_\Sigma} \frac{p \cdot B(p)}{A(p)}; \quad /5.117/$$

$$\Phi_{\omega u}(p) = \frac{\omega(p)}{U_{g.w}(p)} \left| \begin{array}{l} \Delta I_{cr} = 0 \\ \Delta U_g = 0 \end{array} \right. = K_{g.w} \frac{B(p)}{A(p)}; \quad /5.118/$$

$$\Phi_{1I}(p) = \frac{I_A(p)}{I_{cr}(p)} \left| \begin{array}{l} \Delta U_{g.w} = 0 \\ \Delta U_g = 0 \end{array} \right. = \frac{B(p)}{A(p)}; \quad /5.119/$$

$$\Phi_{\omega I}(p) = \frac{\omega(p)}{I_{cr}(p)} \left| \begin{array}{l} \Delta U_{g.w} = 0 \\ \Delta U_g = 0 \end{array} \right. = - \frac{R_\Sigma K_A 8 T_{мш}^2 p (1 + T_{мш} p)}{T_H A(p)}, \quad /5.120/$$

де $A(p) = 1 + 4 T_{мш} p + 8 T_{мш}^2 p^2 + 8 T_{мш}^3 p^3$; $B(p) = 1 + 4 T_{мш} p$.

Оскільки характеристичне рівняння $A(p) = 0$ завжди має один дійсний від'ємний корінь і два або комплексно спряжені з від'ємними дійсними частинами, або дійсні від'ємні, то многочлени $A(p)$ і $B(p)$ зручно записувати так:

$$A(p) = (1 + a T_{мш} p) [a^2 T_{мш}^2 p^2 + (a-1) a T_{мш} p + 1]; \quad B(p) = 1 + a^2 T_{мш} p. \quad /5.121/$$

Параметр a , який з коефіцієнтом підсилення за прискоренням пов'язує вираз $K_A = 1/a^2 2 T_{мш}^2$ [34], звичайно вибирають у межах від 2 /симетричний оптимум/ до 4. Іноді постає потреба знижувати коефіцієнт підсилення за прискоренням, наприклад за високого рівня пульсацій напружки тахогенератора. Характер перехідного процесу оптимізованої системи залежить від коренів характеристичного рівняння $A(p) = 0$. Якщо $a = 1$, то $A(p) = 0$ має один від'ємний дійсний корінь $p_1 = -1/T_{мш}$ та два комплексно-спражених уявних $p_{2,3} = \pm j1/T_{мш}$, і система перебуває на межі стійкості. Значення $a = 2$ відповідає симетричному оптимуму. Якщо $a = 3$, усі три корені дійсні від'ємні однакові, а перехідний процес у системі - критичний, аперіодичний. Якщо $a > 3$, то корені $p_{1,2,3}$ від'ємні дійсні різні, а перехідний процес - аперіодичний.

Повну характеристику процесів у системі керування кутовою швидкістю, зовнішній контур якої оптимізовано за симетричним критерієм, можна дістати, знайшовши перехідні й частотні характеристики за /5.117/-/5.121/. Це дуже легко зробити на персональному комп'ютері.

Перехідні процеси, які відповідають передавним функціям /5.118/ та /5.120/, описують такі аналітичні вирази:

$$\omega(t) = \omega_{2\omega} K_{3\omega} \left[1 - \frac{a-1}{a-3} e^{-\frac{t}{aT_{\mu\omega}}} + \frac{2}{a-3} e^{-\frac{a-1}{2a} \frac{t}{T_{\mu\omega}}} \cos \frac{\sqrt{3+2a-a^2}}{2a} \frac{t}{T_{\mu\omega}} \right]; \quad /5.122/$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) = I_{cr} \frac{R_1 K_d a^3 T_{\mu\omega}}{T_H} & \left\{ \frac{a(a-1)}{3-a} e^{-\frac{t}{aT_{\mu\omega}}} + \frac{a}{3-a} e^{-\frac{a-1}{2a} \frac{t}{T_{\mu\omega}}} \right. \\ & \times \left. (1-a) \cos \frac{\sqrt{3+2a-a^2}}{2a} \frac{t}{T_{\mu\omega}} + \sqrt{3+2a-a^2} \sin \frac{\sqrt{3+2a-a^2}}{2a} \frac{t}{T_{\mu\omega}} \right\}. \quad /5.123/ \end{aligned}$$

Із структурної схеми на рис. 5.24 та виразів /5.122/, /5.123/ випливає, що розглядуваний регулятор швидкості - це система з астатизмом другого порядку за задавальною дією $\omega_{2\omega}$ і першого - за збурювальною I_{cr} . Порядок астатизму за задавальною й збурювальною діями порівняно з одноразово інтегрувальною системою збільшено завдяки інтеграторові регулятора швидкості з передавною функцією /5.103/. Хоча в усталеному режимі просідання швидкості обертання /статична похибка/ в дворазово інтегрувальній системі у випадку накидання навантаження й немає, однак динамічне просідання швидкості приблизно дорівнює статичному в одноразово інтегрувальній системі /див. рис. 5.8/.

Передавна /5.118/ та перехідна /5.122/ функції системи з астатизмом другого порядку збігаються з передавною /5.47/ та перехідною /5.50/ функціями контуру із симетричним налаштуванням. Тому запаси стійкості $A_{зап}$, $\varphi_{зап}$, якісні показники перехідного процесу $\sigma\%$, t_p , $t_{\mu\omega}$, точність у випадку детермінованих та випадкових дій у системі такі ж самі, як і в контурі /див. п. 5.2.3/, і тут їх не повторюватимемо.

На закінчення зауважимо, що систему регулювання швидкості обертання з астатизмом першого чи другого порядку вибирають залежно від технологічних вимог, поставлених до електропривода. Треба враховувати також і обмеження, що їх накладає сам електропривод: переважну здатність та нагрівання електродвигуна; припустима за умовами комутації на колекторі швидкість наростання струму якоря тощо.

Якщо потрібно забезпечити нульову статичну похибку у випадку збурень на навантаженні /режим стабілізації швидкості обертання/, звичайно застосовують систему з астатизмом другого порядку. Коли основним є режим відпрацьовування збурення за зовнішнім, то, як було зазначено попереду, треба застосовувати систему з астатизмом першого порядку, бо вона простіша.

Системи з підпорядкованим регулюванням мають ту спільну ваду, що в них неможливо знизити статичний /у системах з астатизмом першого порядку/ та динамічний /у системах з астатизмом другого порядку/ спад швидкості в разі накопичення навантаження. Тому їх не можна застосовувати в електроприводах, де швидкість потрібно регулювати в широкому діапазоні, особливо коли до них ставлять великі вимоги щодо підтримання швидкості обертання в усьому діапазоні регулювання.

5.5.6. Вплив внутрішнього зворотного зв'язку за ЕРС двигуна на динаміку процесів у регуляторі швидкості

Усі розрахункові співвідношення для контуру регулювання струму, наведені попереду, було одержано без урахування внутрішнього зворотного зв'язку за ЕРС двигуна. Таке припущення дуже спрощує синтез регулятора струму, але справджується лише для загальмованого двигуна. Його було зроблено з огляду на те, що для багатьох електроприводів середньої та великої потужності з вибраним тут об'єктом регулювання характер зміни струму якоря двигуна в перехідному режимі визначає, головним чином, характер зміни ЕРС тиристорного перетворювача, яка залежить від сталої інтегрування регулятора струму $\tau_0 = R_{\Sigma} C_{\Sigma}$ [див. /5.84/] і мало залежить від ЕРС двигуна внаслідок значної інерційності контуру зворотного зв'язку за ЕРС завдяки великій електромеханічній сталій часу привода T_M .

Вплив зворотного зв'язку за ЕРС двигуна на динамічні властивості електропривода докладно розглянуто в [10; 34; 40]. У цих працях доведено, що, по-перше, контур струму, оптимізований за модульним критерієм, за керувальною дією є статичною системою, і його статична похибка

$$\Delta I = I_{\Sigma, c} - I_A = \frac{1}{1 + T_M / 2\tau_{mc}} I_{\Sigma, c};$$

по-друге, збільшується перерегулювання $I_g(t)$ під час відпрацьовуван-

ня стрибка задавання й зменшується запас стійкості за фазою. Проте на динаміку контуру струму, наладженого на модульний оптимум, ці відхилення впливають не дуже, коли не враховувати впливу ЕРС двигуна. Виявлено також вплив ЕРС двигуна на динамічні процеси в контурі швидкості. Зокрема, з'ясовано, що у випадку наладження контурів струму й швидкості за модульним критерієм зменшується перерегулювання швидкості $\omega(t)$, однак перехідний процес стає тривалішим. У режимі відпрацьовування збурення за навантаженням ефект впливу ЕРС двигуна позитивний. Оскільки в разі збурення за навантаженням систему замкнено за швидкістю, то ЕРС не змінює заданої статичної точності системи. Але в перехідному режимі демпфувальна дія ЕРС двигуна виявляється в зменшенні динамічного просідання й коливальності процесів відновлення швидкості обертання. Доведено, що єдине негативне явище, спричинене дією ЕРС двигуна, яке треба враховувати в реальних системах, полягає в зменшенні усталеного значення струму I_g порівняно із заданим у $T_M / (T_M + 2T_{mc})$ разів. Наслідком цього явища є відповідне зниження темпу зміни швидкості обертання привода $d\omega(t)/dt$ у порівнянні з розрахунковим. Однак треба зауважити, що таке явище виникає тільки тоді, коли прискорення привода задають не за допомогою задавача інтенсивності, а сталим сигналом на вході регулятора струму, утвореним внаслідок обмеження вихідної напруги регулятора швидкості, тобто коли система працює в режимі регулювання струму, перебуваючи розімкненою за швидкістю.

Зовсім усунути вплив ЕРС на динамічні процеси в контурі струму можна, як неважко довести, коли застосувати регулятор струму з передавною функцією

$$R(p) = \frac{R_z (T_M T_e p^2 + T_M p + 1)}{2T_{mc} + T_M K_{z,л} K_{стр} p^2} \quad /5.124/$$

Реалізувати практично регулятор струму з астатизмом другого порядку /5.124/, що його звичайно називають Π^2 -регулятором, важко. Якщо $T_M / T_e < 4$, то чисельник /5.124/ має комплексно-спряжені корені. У цьому випадку Π^2 -регулятор реалізують за допомогою чотирьох підсилювачів: Π , двох послідовно увімкнених І та Π . Якщо $T_M / T_e > 4$, чисельник /5.124/ має дійсні корені, і Π^2 -регулятор можна скласти тільки з двох послідовно увімкнених Π -підсилювачів. Проте в цьому разі відношення параметрів $2T_{mc} / T_M$ досить мале, і впливом ЕРС двигуна можна знехтувати.

Є й інші способи компенсації впливу ЕРС двигуна на динаміку привода [24].

5.6. Системи підпорядкованого регулювання швидкості із зворотним зв'язком за ЕРС

Системи регулювання швидкості із зворотним зв'язком за ЕРС двигуна застосовують для електроприводів з нерегульовним потоком збудження тоді, коли вимоги до швидкості й точності регулювання швидкості відносно невеликі.

Системи із зворотним зв'язком за ЕРС відрізняються від розглянутих систем підпорядкованого регулювання швидкості із зворотним зв'язком за швидкістю тим, що в них замість тахогенератора поставлено вузол вимірювання ЕРС.

Є кілька структур, де використовують зворотний зв'язок за ЕРС двигуна. На рис. 5.25 зображено принципову схему з давачем ЕРС ДЕ, що являє собою операційний підсилювач з гальванічно відокремленими входом та виходом. ЕРС двигуна в цій схемі вимірюють, підсумовуючи на вході ДЕ два сигнали - пропорційний напрузі двигуна й пропорційний спадові напруги в активному опорі кола якоря двигуна /сигнал струмової компенсації/. Сигнал, пропорційний напрузі двигуна, знімається з подільника напруги $R_{под}$ і подається на один із входів ДЕ через фільтр R_H, C_H , увімкнений у коло зворотного зв'язку за напругою контуру регулювання ЕРС. Цей фільтр з погляду динаміки являє собою аперіодичну ланку із сталою часу $T_a = R_H C_H / 4$. На другий вхід ДЕ надходить сигнал струмової компенсації, знятий з шунта Ш, увімкненого в силове коло ТП-Д. Операційний підсилювач, що є основою ДЕ, має два виходи: для охоплення підсилювача зворотним зв'язком через умонтований опір $R_{г.е}$ і для зв'язку з регулятором ЕРС РЕ /гальванічно відокремлений від першого/. На вході РЕ поставлено фільтр - аперіодичну ланку із сталою часу $T_a = R_{г.е} C_{г.е} / 4$, призначену для компенсації підвищеного перегулювання струму в разі збурювальних дій за заданням, спричинених аперіодичною ланкою $K_H / (1 + T_a p)$, розташованою в колі зворотного зв'язку контуру ЕРС /див. рис. 5.25/.

На рис. 5.26, а оптимізований за модульним критерієм контур струму зображено в згорненому вигляді - у вигляді аперіодичної ланки з коефіцієнтом підсилення $1/K_{стр}$ і сталою часу $T_{стр} = 2T_{мс}$. Його оптимізовано для випадку, коли внутрішнього зворотного зв'язку в двигуні немає. У цьому разі двигун являє собою послідовне з'єднання трьох типових динамічних ланок - аперіодичної, ідеально інтегровальної й підсилювальної з переданими функціями відповідно $(1/R_E)$: $:(1/T_{стр}), R_E / T_{HP}$ і $K_{под}$.

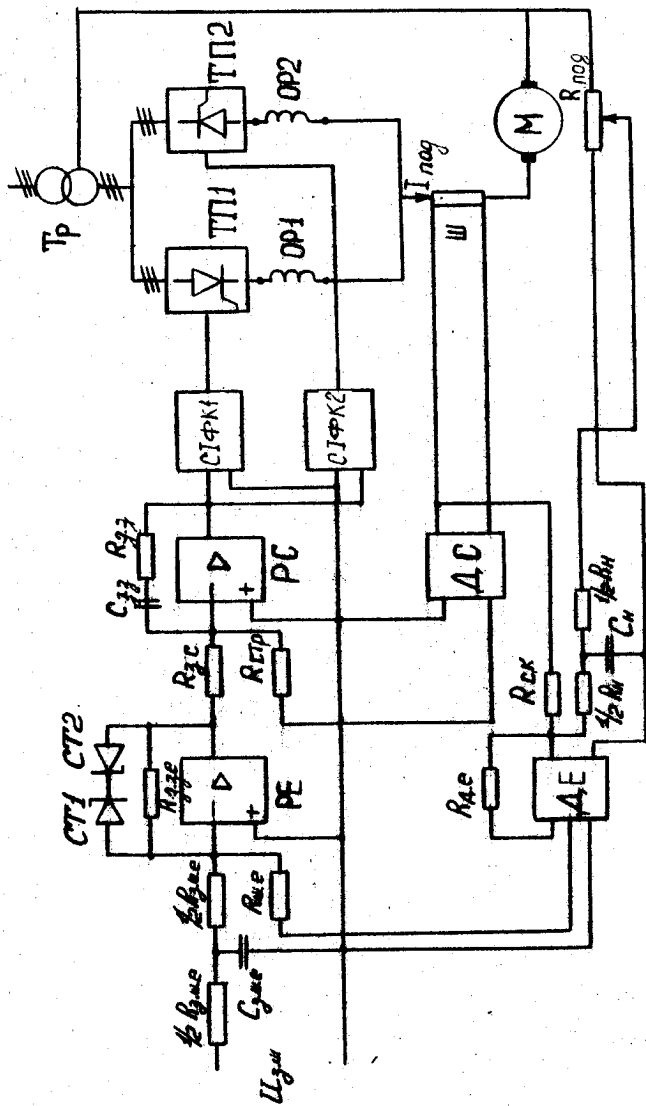


Рис. 5.25. Спрощена принципова схема системи підпорядкованого регулювання із зворотним зв'язком за ЕРС

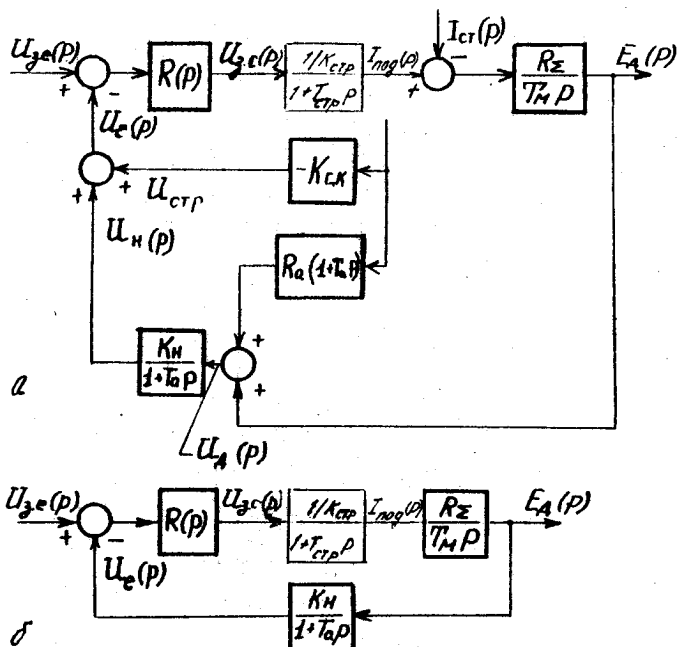


Рис. 5.26. Структурні схеми системи підпорядкованого регулювання із зворотним зв'язком за ЕРС: а - початкова; б - перетворена

Структуру регулятора струму та його параметри, а також параметри кола зворотного зв'язку за струмом визначають як і для контуру струму системи регулювання швидкості із зворотним зв'язком за швидкістю /див. п. 5.5.1/.

Якщо коефіцієнт підсилення кола струмової компенсації

$$K_{cK} = K_H R_a, \quad /5.125/$$

де K_H - коефіцієнт підсилення кола зворотного зв'язку за напругою;
 R_a - активний опір якорного кола двигуна, то сигнал на виході вимірю-

$$u_e(t) = u_n(t) - u_{ср}(t) = \frac{k_n}{1 + T_a D} E_d(t). \quad /5.126/$$

Зауважимо, що на схемі рис. 5.26,а і у виразі /5.126/ знак струмової компенсації відповідає пвигуновому режимові. Якщо умова /5.123/ виконується, то схему на рис. 5.26,а можна перетворити в схему на рис. 5.26,б.

Звичайно контур ЕРС оптимізують за модульним критерієм. Унаслідок синтезу, виконаного аналогічно синтезові контуру швидкості в системі підпорядкованого регулювання швидкості із зворотним зв'язком за швидкістю /див. п. 5.5.2/, дістаємо передавну функцію замкненого контуру у вигляді

$$\Phi(p) = \frac{E_d(p)}{E_{з.е}(p)} = \frac{1}{1 + 2T_{пе}p + 2T_{пе}^2 p^2}, \quad /5.127/$$

де $E_{з.е} = u_{з.е} / k_n$ - задана ЕРС двигуна; $T_{пе} = T_a + T_{ср} = T_a + 2T_{мс}$ - мала некомпенсована стала часу контуру ЕРС.

Таким чином, система із зворотним зв'язком за ЕРС двигуна є астатичною за задавальною цією $u_{з.е}$ і статичною за збуренням $M_{оп}$, прикладеним на вході інтегратора.

Вираз /5.127/ за своєю структурою повністю збігається з аналогічним виразом для передавної функції одноразово інтегрувальної системи із зворотним зв'язком за швидкістю, розглянутої попередю. Проте $T_{пе}$ системи із зворотним зв'язком за ЕРС більше на величину T_a порівняно із системою зі зворотним зв'язком за швидкістю. Тому властивості системи із зворотним зв'язком за ЕРС за інших однакових умов гірші, ніж системи із зворотним зв'язком за швидкістю. Це виявляється в зниженні швидкості системи, оскільки частота зрізу ЛАЧХ зменшується, а також у збільшенні статичної похибки системи $\Delta\omega = I_{пог} R_{\Sigma} 2T_{пе} \times k_{пог} / T_n$.

Отже, динамічні й статичні властивості системи із зворотним зв'язком за ЕРС - то більше наближатимуться до властивостей системи із зворотним зв'язком за швидкістю, що менша величина T_a . З цієї причини сигнал зворотного зв'язку за напругою бажано знімати з тієї ділянки якорного кола, в якій електромагнітна стала часу T_e менша. Звичайно цей сигнал знімають із затискачів якоря, щоб усунути індуктивність обшинування та індуктивність згладжувальних проселів. У двигунах з компенсаційними обмотками сигнал зворотного зв'язку іноді до-

цільно знімати безпосередньо із затискачів якоря, проминувши обмотку додаткових полюсів і компенсаційну обмотку.

Розділ 6. СИСТЕМИ РЕГУЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДІВ З ДВИГУНАМИ ЗМІННОГО СТРУМУ

У цьому розділі розглянуто регулятори швидкості тільки з трифазними асинхронними двигунами, що їх нині найчастіше застосовують у промисловості.

6.1. Системи регулювання кутової швидкості з тиристорними регуляторами напруги

Замкнений регулятор швидкості з трифазним асинхронним двигуном /АД/, крім трифазного АД M з фазним чи короткозамкненим ротором, містить тиристорний регулятор напруги /ТРН/, систему імпульсно-фазового керування /СІФК/, підсилювач постійного струму /ПІС/, тахогенератор /ТГ/, зв'язаний з валом двигуна та робочим механізмом /РМ/, і RC -фільтр на вході ТГ /рис. 6.1/. ТРН складається з тиристорів $T_1 - T_6$, увімкнених по два в коло кожної фази за зустрічно-паралельною схемою, а також тиристорів $T_7 - T_{10}$. Вихідну напругу ТРН, а отже, й напругу, підведену до фаз АД, регулюють так само, як і для ТП постійного струму на підставі природної комутації тиристорів за рахунок запізнювання їх відкривання для кожної півхвилі фазної напруги мережі. Тиристири $T_1, \dots, T_6$ у схемі на рис. 6.1 занумеровано відповідно до черговості їх відкривання, починаючи від фази А. Змінюючи їхній кут керування, можна впливати на амплітуду напруги, підводжуваної до фаз АД, і, отже, регулювати швидкість обертання двигуна. Тиристири $T_7 - T_{10}$ призначено для зміни напрямку обертання магнітного поля /наступності проходження фаз/ і, отже, для реверсу АД, СІФК, так само, як і в системах керування з двигунами постійного струму, звичайно будують за вертикальним принципом. Вона формує керувальні імпульси тривалістю не менш як 60° /це необхідно для нормального відкривання тиристорів у двох півперіодах/, які надходять на керувальні електроди тиристорів. Кут керування α залежить від величини керувального сигналу $U_{кер}$ /див. рис. 6.1/. Коли $U_{кер} = U_{кер\max}$, по фаз АД надходить повна фазна напруга мережі; коли $U_{кер} < U_{кер\max}$, $\alpha > 0$ і перша гармоніка фазної напруги, одержана внаслідок розвинення несинусоїдної фазної напруги /непарної функції/ в ряд Фур'є, зменшується;

коли $U_{кер} = 0$, $\alpha = \alpha_{max} \approx 170^\circ$, перша гармоніка фазної напруги і швидкість двигуна порівнюються нулеві. У СІФК є логічний пристрій, який дає змогу робити динамічне гальмування АД та його реверс. У першому випадку по обмотках статора пропускають випрямлений струм, наприклад, відкриваючи T_1 та T_4 й закриваючи решту тиристорів. У цьому разі блок логіки відокремлює режими стабілізації кутової швидкості, коли працюють $T_1 - T_6$, і динамічного гальмування, коли увімкнено тільки тиристири T_1 та T_4 . Коли знак керувального сигналу змінюється, тобто коли $U_{кер} < 0$, відбувається реверс двигуна. У цьому разі блок логіки СІФК закриває тиристири T_1, T_2 та T_3, T_6 і відкриває тиристири T_7, T_8 і T_9, T_{10} . Наступність проходження фаз /фаз А та В на рис. 6.І/ перемикається, коли фазні струми порівнюються нулю. Вимірюють фазні струми датчиками нульового струму /на рис. 6.І не зображено/.

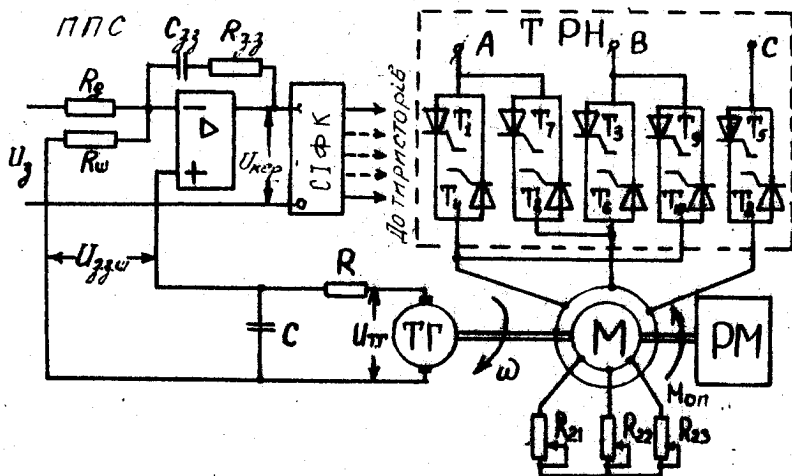


Рис. 6.І. Спрощена принципова схема регулятора швидкості з тиристорним регулятором напруги

Підсилювач постійного струму виконує функцію алгебричного підсумовування задавального сигналу U_z та сигналу від'ємного зворотного зв'язку $U_{з.з.}$, знятого з тахогенератора ТГ, і функцію коригувального пристрою. На ППС, зображеному на рис. 6.І, складено інтегрально-про-

порційний регулятор з передавною функцією $R(p) = U_{кер}(p) / U_{\epsilon}(p) = (1 + \epsilon_R p) / \tau_0 p$, де $U_{\epsilon}(p) = U_{\beta}(p) - U_{\beta, \omega}(p)$, $\epsilon_R = R_{\beta, \beta} / C_{\beta, \beta}$; $\tau_0 = R_{\beta} C_{\beta, \beta}$, RC -фільтр у колі зворотного зв'язку з передавною функцією $1/(1 + T_{\phi} p)$, де $T_{\phi} = RC$, призначений для згладжування колекторних пульсацій ТТ постійного струму, що необхідно для нормальної роботи ППС. Структурну схему регулятора швидкості з ТРН зображено на рис. 6.2. Під час складання цієї схеми пристрій, що містить ТРН та СІФК, зображено аперіодичною ланкою із сталою часу τ /середньостатистичне запізнювання/ і коефіцієнтом підсилення $K_{Т.Р.Н.}$, а двигун – передавною функцією /3.79/, одержаною в розд. 3, коли складали рівняння динаміки трифазного АД та їх лінеаризовували.

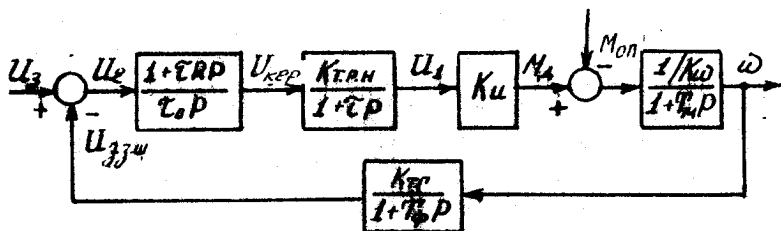


Рис. 6.2. Структурна схема лінеаризованої в точці $S = S_H$ системи регулювання швидкості трифазного АД з ТРН

Параметри регулятора швидкості синтезують так само, як і у випадку систем підпорядкованого регулювання з двигунами постійного струму. Зокрема, коли $\tau_R = T_M$ і $K_{П.П.С.} = R_{\beta, \beta} / R_{\beta} = \frac{K_{\omega} \tau_0}{2T_M K_{Т.Р.Н.} K_{Т.П.} K_M}$, то

в цьому разі дістанемо замкнену систему регулювання швидкості, яка відповідає модульному критерієві оптимізації з передавною функцією

$$\Phi(p) = \frac{\omega(p)}{U_{\beta}(p)} = \frac{1/K_{Т.П.}}{2T_M^2 p^2 + 2T_M p + 1},$$

де $K_{Т.П.} = U_{\beta, \omega} / \omega$ – коефіцієнт підсилення тахогенератора; $T_M = \tau + T_{\phi}$.

Остаточні параметри регулятора з метою компенсації впливу електромагнітних перехідних процесів визначають, експериментально добираючи величини $K_{П.П.С.}$ та τ_R .

На рис. 6.3 зображено механічні характеристики замкненої системи регулювання швидкості з ТРН і трифазним асинхронним двигуном з фаз-

ним ротором /у фазі ротора увімкнено резистори R_{21}, R_{22}, R_{23} /. На цьому рисунку пунктиром зображено механічні характеристики розімкненої системи для різних кутів керування α , а суцільними лініями - механічні характеристики замкненої системи для різних значень завдячного сигналу U_z .

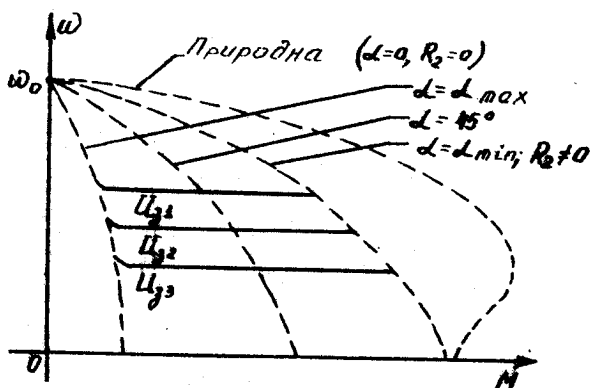


Рис. 6.3. Механічні характеристики замкненої системи регулювання швидкості трифазного АД з ТРН

Діапазон регулювання регуляторів швидкості з АД з короткозамкненим ротором становить приблизно 10:1. Але для АД з фазним ротором його можна розширити не менш як у 2 рази завдяки штучному пом'якшенню механічних характеристик увімкненням у роторне коло резисторів R_2 /див. рис. 6.1/. Неабияка вада регуляторів швидкості з ТРН полягає в неекономічності, пов'язаній із втратами від найвищих гармонійних складових напруги U_z та струму I_z . Тому такі регулятори промисловість випускає на невеликі потужності для, головним чином, короткочасного режиму роботи. До вад даної системи належить також і те, що у випадку перевантаження електропривода неможливо обмежити регульовні координати /момент, струм статора/. Кращі динамічні властивості мають регулятори швидкості з ТРН, побудовані за принципом підпорядкованого регулювання з кількома контурами. Як приклад розглянемо двоконтурну систему підпорядкованого регулювання швидкості з трифазним АД, яку, крім

зовнішнього контуру швидкості, виготовлено аналогічно розглянутої попередню одноконтурної системи /див. рис. 6.1/, містить підпорядкований контур струму /рис. 6.4 і 6.5/. Регульовним параметром контуру струму є струм статорної обмотки АД I_s . Струм I_s у фазах статора вимірює трансформатор струму /ТС/, а потім випрямляч В, виготовлений за трифазною мостовою схемою, перетворює в постійну напругу. Пульсації випрямленої напруги згладжує фільтр із сталою часу $T_{\phi 1} = R_1 C_1$. Навантаженням випрямляча є резистор R_H . Спад напруги $U_{зд.н}$ на резисторі R_H знімається й подається у вигляді від'ємного зворотного зв'язку на РС, за який використано ППС. Коло зворотного зв'язку за струмом налаштовують так: коефіцієнт трансформації ТС вибирають такий, щоб за номінального струму статора I_{Hn} по колу навантаження з опором R_H проходив струм І А. Добираючи відповідну величину опору R_H , одержують потрібне значення $U_{зд.с}$. Коефіцієнт підсилення кола зворотного зв'язку за струмом $K_{стр} = U_{зд.с} / I_{Hn}$ [В/А]. У структурній схемі пристрій ТРН разом із СІФК зображено двома аперіодичними ланками з коефіцієнтом підсилення $K_{т.р.н}$ і сталими часу: середньостатистичним запізненням T та електромагнітною сталою часу асинхронного двигуна [21]

$T_p = 1/(\omega_{0.с.н} S_K) = 1/2\pi f_1 S_K$. Звичайно критичне ковзання S_K лежить у межах 0,05...0,5. Тому для трифазних АД $T_p = 0,06...0,006$ с. Динамічна ланка на схемі рис. 6.4 з коефіцієнтом підсилення $K_2 =$

$= \left(\frac{\partial M}{\partial I_1} \right)_0$ враховує передавні властивості двигуна в каналі передавання дії "струм статора двигуна I_1 - момент M ". Аби обчислити коефіцієнт підсилення $K_{стр}$, наближено припускаємо, що приріст струму статора ΔI_1 спричинює зміну момента АД, пропорційну активній складовій ΔI_1 , тобто

$$K_2 = \Delta I_1 \cdot \cos \varphi_0,$$

де $\cos \varphi_0$ - коефіцієнт потужності АД у точці лінеаризації.

Параметри регуляторів струму й швидкості синтезують так само, як і системи підпорядкованого регулювання з двигунами постійного струму.

Розглянуту систему регулювання швидкості АД від перевантажень захищають, обмежуючи /наприклад, за допомогою стабілітронів/ вихідний сигнал регулятора швидкості $U_{з.с}$.

Зв'язано, що аналогічним способом контур струму можна виконати за роторним колом АД. Регульовним параметром у цьому разі буде струм ротора I_r .

6.2. Регулятори швидкості з частотним регулюванням швидкості асинхронних двигунів з короткозамкненим ротором

Нині широко застосовують регулятори швидкості з частотним регулюванням кутової швидкості АД. Зумовили це кілька їх переваг, зокрема широкий діапазон регулювання швидкості, плавність регулювання та економічність. Принцип частотного регулювання полягає в тому, що, змінюючи частоту напруги $\mathcal{U}_1$, яка живить статор АД, можна відповідно до формули $\omega_0 = 2\pi f_1 / p$ змінювати його синхронну швидкість ω_0 і одержувати завдяки цьому штучні механічні характеристики. Під час регулювання частоти f_1 постає також потреба регулювати напругу $\mathcal{U}_1$. Справді, ЕРС обмотки статора АД пропорційна частоті і потоку:

$$E_1 = 4,44 f_1 W_1 K_{0\delta 1} \Phi = K f_1 \Phi, \quad /6.1/$$

де W_1 - кількість витків однієї фази статора; $K_{0\delta 1}$ - обмотковий коефіцієнт обмотки статора; $K = 4,44 W_1 K_{0\delta 1}$ - стала.

Нехтуючи спадом напруги на опорах обмотки статора, дістаємо

$$\mathcal{U}_1 \cong E_1 = K f_1 \Phi. \quad /6.2/$$

Із /6.2/ випливає, що за незмінної напруги $\mathcal{U}_1$ регулюванням частоти можна змінити магнітний потік Φ двигуна. Зокрема, зменшення f_1 спричинює зростання потоку і як наслідок - насичення двигуна й збільшення струму намагнічування, внаслідок чого погіршуються енергетичні показники двигуна, а іноді він навіть неприпустимо нагрівається. Збільшення f_1 спричинює зниження потоку двигуна, що за сталого моменту навантаження на валі згідно з виразом $M = K \Phi I_2 \cos \varphi_2$ призводить до зростання струму ротора, тобто до перевантаження його обмоток. З цим також пов'язане зниження максимального моменту і перевантажної здатності двигуна. Отже, для кращого використання АД й одержання високих енергетичних показників його роботи одночасно із зміною частоти f_1 напруги $\mathcal{U}_1$, яка живить статор, треба змінювати й значення цієї напруги за законом, що залежить від характеру моменту навантаження. Доведено, що за сталого моменту навантаження $M_0 = const$ напруга на статорі $\mathcal{U}_1$ має змінюватися пропорційно її частоті f_1 , тобто

$$\mathcal{U}_1 / f_1 = const, \quad /6.3/$$

а коли момент навантаження обернено пропорційний швидкості, то потрібно, щоб

$$\omega_1 / \sqrt{f_1} = \text{const.} \quad /6.4/$$

На рис. 6.6 зображено теоретичні /коли $R_1 = 0$ / механічні характеристики АД у випадку виконання співвідношення /6.3/. Для частот, нижчих за номінальну ($f_{1i} < f_{1n}$), критичний момент АД сталий, що забезпечує незмінну перевантажну здатність двигуна. Пунктиром накреслено практичні /коли $R_1 \neq 0$ / механічні характеристики, які за малих частот мають спадний критичний момент. За частот, вищих від номінальної ($f_{1i} > f_{1n}$), коли відповідно до технічних умов ω_1 , не може перевищувати ω_{1n} , критичний момент АД зменшується.

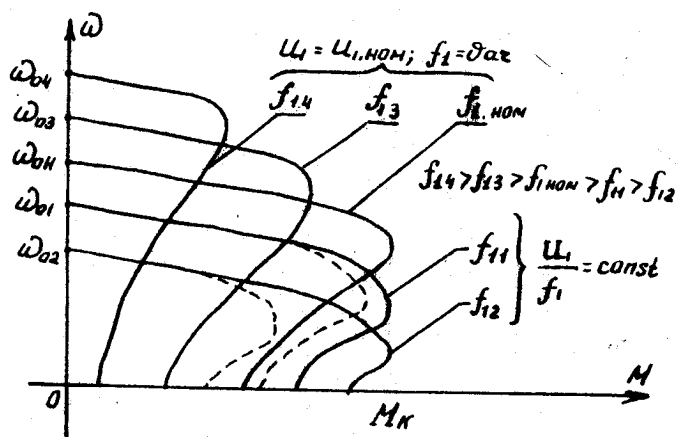


Рис. 6.6. Механічні характеристики регулятора швидкості трифазного АД у випадку частотного регулювання координат

На рис. 6.7 зображено спрощену функціональну схему регулятора швидкості з регулюванням швидкості АД, яке відповідає рівнянню /6.3/. Силова частина схеми складається з асинхронного двигуна з короткозамкненим ротором, керованого випрямляча /КЕ/, що електричну енергію змінного струму стандартної напруги ω_1 і частоти f_1 перетворює в напругу постійного струму ω_0 ; автономного інвертора напруги /АІ/, який

напругу U_0 перетворює на енергію змінного струму з регульовною змінною напругою U_{1per} , амплітуда котрої пропорційна /або порівнює/ U_0 , й регульовною частотою f_{1per} , і ланки постійного струму, виготовленої у вигляді фільтра L, C_0 , для згладжування пульсацій напруги на виході випрямляча. Пристрій, який складається з КВ, фільтра L, C_0 , та АІ, звичайно називають тиристорним перетворювачем частоти /ТПЧ/ з ланкою постійного струму. Систему побудовано за принципом підпорядкованого регулювання, і вона містить три контури регулювання - напруги /КРН/, струму /КРС/ і швидкості /КРШ/. Блоки керування випрямлячем /БКВ/ та інвертором /БКІ/ формують керувальні імпульси для тиристорів перетворювача частоти. Аби реалізувати закон регулювання $U_1/f_1 = \text{const}$, перетворювачем частоти керують так, що один і той самий керувальний сигнал /напруга $U_{г.н}$ / з виходу регулятора струму /РС/ надходить одночасно на два паралельних входи - КРН, за допомогою якого регулюють напругу U_0 , та БКІ і далі на АІ, за допомогою якого на статорі АД змінюють частоту f_1 й амплітуду змінної напруги U_1 , пропорційної U_0 . Контур КРН містить КВ, давач /ДН/ і регулятор /РН/ напруги. Завдяки тому, що контур наладжено на високу швидкодію, підтримують задане співвідношення між частотою f_{1per} та напругою U_{1per} на статорі АД як в усталеному, так і в перехідному режимі.

Другий, внутрішній, контур КРС містить оптимізований КРН, АІ з каналами регулювання амплітуди та частоти напруги на статорі АД, ДС і РС. Цей контур допомагає захистити перетворювач частоти від перевантажень.

КРШ - це зовнішній контур з від'ємним зворотним зв'язком за швидкістю через ТТ і давач швидкості /ДШ/.

В усталеному режимі роботи регулятора швидкості потрібне значення швидкості звичайно задають за допомогою задавача інтенсивності /ЗІ/. Із зростанням моменту навантаження $M_{оп}$ напруга $U_{г.н}$ на виході регулятора струму збільшується, бо зменшується кутова швидкість АД. З підвищенням навантаження збільшується також спад напруги U_n на шунті $R_{ш}$, що спричинює зменшення $U_{г.н}$. Однак переважний вплив на напругу $U_{г.н}$ справляє контур швидкості. У новому усталеному режимі із зрослим струмом I_3 /який відповідає зрослому моментові $M_{оп}$ / напруга $U_{г.н}$ перевищуватиме те значення, котре вона мала до збільшення навантаження. Із зростанням $U_{г.н}$ пропорційно зростає амплітуда U_1 та частота f_1 напруги, підводжуваної до обмоток статора АД. Коли вихідна напруга РС досягне рівня обмеження, що відповідає заданому струмові перевантаження КВ, КРШ розімкнеться, й система перейде в режим

підтримування сталого значення I_2 , обмежуючи перевантаження електропривода.

У розглядуваному регуляторі швидкості в усьому діапазоні швидкостей та навантажень АД виконується співвідношення $\omega_1/f_1 = \text{const}$. Тому і в режимі стабілізації кутової швидкості АД, і в режимі обмеження навантаження двигун працює із сталим потоком.

У схемі на рис. 6.7 вжито інтегрально-пропорційні РШ, РС і РН. Під час складання структурної схеми системи й розрахунку параметрів регуляторів КВ з блоком БКВ і автономний інвертор з блоком БКІ звичайно апроксимують неперервними підсилювальними безінерційними ланками з відповідними коефіцієнтами підсилення.

Рівняння динаміки та структурну схему трифазного АД разом з ТПЧ з ланкою постійного струму одержано в [6; 21] і в цьому посібнику їх не наведено.

Широкі перспективи розвитку й удосконалення електроприводів з частотним керуванням відкриває застосування так званого частотно-струмового керування АД. Щоб його реалізувати, в схемі ТПЧ замість автономного інвертора напруги /АІН/ використовують автономний інвертор струму /АІС/, який формує змінний струм регульованої амплітуди й частоти, підведений до фаз АД. АІС технічно реалізувати простіше, ніж АІН. Крім того, в ТПЧ з АІС можна рекуперувати енергію в мережу, а це дуже важливо в електроприводах, які працюють у повторно-короткочасних режимах.

Функціональну схему двоконтурного регулятора швидкості з КРШ та КРС зображено на рис. 6.8. Кожен контур містить не тільки об'єкт керування, а й відповідний давач та регулятор. КВ разом з КРС утворюють джерело струму. Швидкість АД керують, задаючи струм статора I_1 та частоту $f_{a.i.c}$ АІС. Завдання на частоту $f_{a.i.c}$, а отже, і на величину регульованої швидкості двигуна ω надходить від задавача інтенсивності /ЗІ/ у вигляді напруги $U_{3.\omega}$, а на струм статора I_1 - за допомогою напруги $U_{3.i.c}$, знятої з функціонального перетворювача /ФП/. Струм статора I_1 зв'язаний з навантаженням двигуна. Цей зв'язок, що його звичайно подають через абсолютне ковзання $S_2 = f_2/f_n = \alpha S$, де $\alpha = f_1/f_n$, є нелінійний (див. рис. 6.8, під блоком ФП). Блок ФП, який реалізує залежність $I_1 = F(S_2)$, потрібний для того, аби потік двигуна $\Phi = \Phi(I_1, S_2)$ у разі зміни навантаження двигуна в процесі роботи системи лишався сталим. Технічно ФП реалізують за допомогою операційних підсилювачів, апроксимуючи функцію $I_1 = F(S_2)$ відрізками прямих ліній.

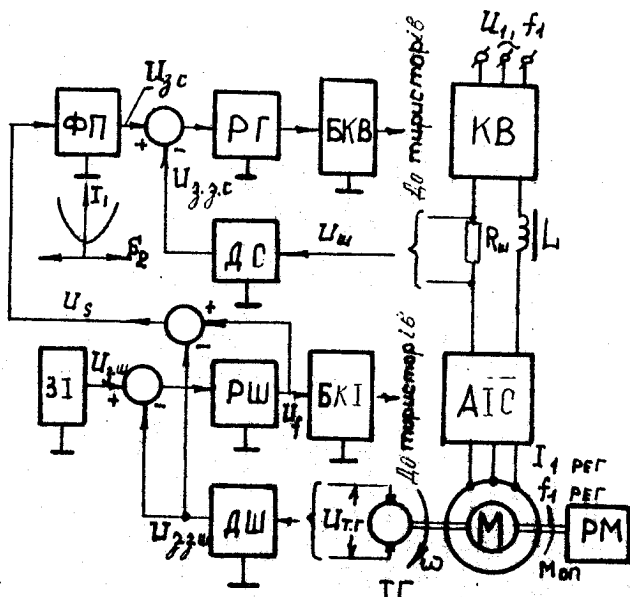


Рис. 6.8. Функціональна схема регулятора швидкості з частотно-струмовим керуванням швидкістю трифазного АД

Вихідним сигналом блока ФЧ є напруга $U_{z.c}$, а вхідним – напруга U_s , пропорційна абсолютному ковзанню S_2 . Справді, $U_s = U_s - U_{z.z.w}$ / див. рис. 6.8/, де U_s і $U_{z.z.w}$ – напруги, пропорційні відповідно частоті напруги статора f_1 /коли АІС має лінійну регульовальну характеристику/ і частоті обертання ротора f_2 . Оскільки сигнал завдання на струм статора, а отже, і на момент, пропорційний абсолютному ковзанню S_2 , то розглянутий спосіб керування іноді називають керуванням за абсолютним ковзанням. У розглядуваному регуляторі швидкості є два взаємозв'язаних контури – струму й швидкості. Під час роботи системи контур струму підтримує сталим магнітний потік двигуна Φ , а контур швидкості забезпечує необхідну твердість механічних характеристик і, отже, необхідну /задану/ точність підтримання швидкості ω у випадку зміни навантаження двигуна.

6.3. Регулятори швидкості з частотним регулюванням швидкості асинхронними двигунами з фазним ротором

Неабиякою вадою всіх розглянутих способів регулювання швидкості АД, коли $\omega_0 = \text{const}$, є зростання втрат у роторному колі із зниженням швидкості пропорційно ковзання. Цю ваду в електроприводах з АД з фазним ротором можна усунути.

Асинхронно-вентильний каскад /АВК/ дає змогу регулювати кутову швидкість обертання АД і, крім того, використовувати втрати енергії ковзання для виконання корисної роботи /рис. 6.9/. У роторному колі

двигуна поставлено некерований випрямляч В, складений за трифазною мостовою схемою, залежний керований інвертор І і дросель $\mathcal{D}_p$. За допомогою В перетворюють змінну напругу роторного кола в постійну, а за допомогою І в коло ротора введено додаткову ЕРС $\mathcal{E}_i$, напругу зустрівно до випрямленої ЕРС $\mathcal{E}_p$. Дроселем $\mathcal{D}_p$ згладжують пульсації випрямленого струму. Для узгодження напруги мережі та інвертора використано трансформатор $\mathcal{T}_p$.

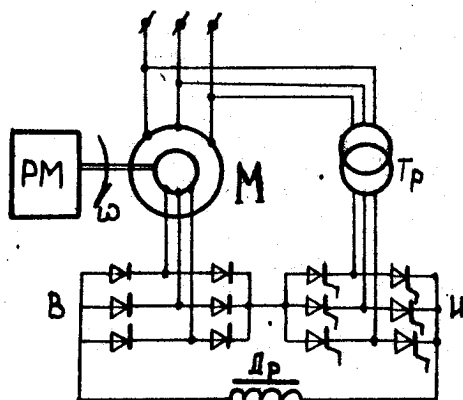


Рис. 6.9. Принципова схема асинхронно-вентильного каскаду

ційний магнітному потокові Φ і активній складовій струму ротора $I_2 \cos \varphi_2$, тобто

$$M_d = C \Phi I_2 \cos \varphi_2, \quad /6.5/$$

де C - стала.

Ураховуючи, що номінальне ковзання $S_n \ll 1$, а також зв'язок між випрямленим I_p та діючим I_2 значеннями струму ротора /для трифазної мостової схеми $I_2 / I_p = 0,817/$, вираз /6.5/ перепишемо так:

$$M_d \approx C, \varphi I_B, \quad /6.6/$$

де $C_1 = 0,817 C$.

Випрямлений струм ротора без урахування спаду напруги у випрямлячі, інверторі та щоселі, а також реактивного опору розсіювання АД

$$I_B = (E_B - E_i) R_\Sigma, \quad /6.7/$$

де R_Σ - сумарний активний опір кола випрямленого струму; $E_B = E_{B0} S$ - випрямлена ЕРС; E_{B0} - середнє значення випрямленої ЕРС, коли $S = 1$ і $I_B = 0$; $E_i = E_{max} \sin \alpha$ - ЕРС інвертора; α - кут керування; E_{max} - максимальна ЕРС, яка може бути теоретично, коли $\alpha = 180^\circ$ [коли каскад працює, то α лежить у межах $90-150^\circ$, а тому в режимі безперервного струму ЕРС інвертора E_i від'ємна, що і відбиває формула /6.7/].

У режимі сліпого ходу момент на валі двигуна і струм ротора порівнюють нулеві. Тому потрібно взаємно зрівноважувати ЕРС E_B та E_i , тобто

$$E_{B0} \cdot S = E_{max} \sin \alpha$$

або

$$S = (E_{max} / E_{B0}) \sin \alpha = K_T \sin \alpha, \quad /6.8/$$

де K_T - коефіцієнт трансформації АД.

Із /6.8/ випливає, що, змінюючи кут керування α , коли $K_T = 1$, можна регулювати швидкість сліпого ходу двигуна майже від нуля до номінального значення. Коли двигун навантажено, а кут керування сталий,

$K_T < 1$, до того ж що більше навантаження, то менший K_T , то більша E_B порівняно з E_i і то більші струми I_B та I_2 , а це може бути тільки тоді, коли швидкість двигуна ω за нових зрослих рівностей

M_{01} і M_g знижується /збільшується відносна швидкість перетинання витків обмотки якоря магнітним полем; зростають ЕРС E_2 , струм I_2 і момент M_g . Теоретично механічні характеристики АБК мають такий самий вигляд, що й для двигуна постійного струму з незалежним збудженням і керуванням за колом обмотки якоря, коли потік Φ сталий. Насправді ж механічні характеристики в розімкненій системі АБК мають вигляд, зображений на рис. 6.10.

Таким чином, для стабілізації кутової швидкості двигуна із змінною навантаженням на його валі треба змінювати кут керування α . Наприклад, коли двигун в усталеному режимі при $M_g / M_{gH} = 0,5$, $\alpha = 120^\circ$

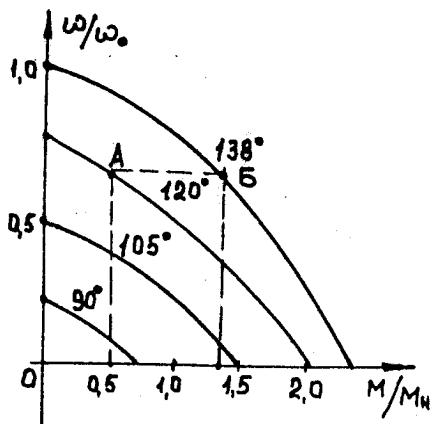


Рис. 6.10. Механічні характеристики двигуна в розімкненій системі регулювання АБК

ній системі підпорядкованого регулювання швидкості двигуна постійного струму з незалежним збудженням.

Динамічні властивості лінеаризованого АД у випадку його використання в АБК [6] досить добре узгоджуються з властивостями двигуна постійного струму, структурну схему якого зображено на рис. 3.3 /див. розд. 3/, коли в ній електромагнітну сталу часу $T_0 = L_\Sigma / R_\Sigma$ замінити сталою часу роторного кола в точці лінеаризації /індекс "поч" / $T_{р.к.поч} = L_{р.к.поч} / R_{р.к.поч}$, а коефіцієнт підсилення K_g - коефіцієнтом підсилення асинхронного двигуна C_g у схемі АБК: $C_g = e_{g2} / \omega_{нн}$, де $e_{g2} = K_{сх} E_{2н} S$ - ЕРС ротора, зведена до кола постійного струму; $K_{сх}$ - коефіцієнт схеми випрямлення; $\omega_1 = 2\pi f_1$ - кутова частота напруги статора, рад/с; f_1 - частота напруги статора, Гц. Вхідним сигналом у структурній схемі АД на рис. 6.12 є ЕРС інвертора E_i , а вихідним - кутова швидкість ω . Зауважимо, що схема двигуна на рис. 6.12, коли $T_{р.к.поч} = 0$, за своєю структурою аналогічна структурній схемі АД на рис. 3.13,а. Інвертор разом з БКВ на структурній схемі рис. 6.12 апроксимовано неперервною аперіодичною ланкою з коефіцієнтом підсилення K_i й сталою часу T_i .

і $S = S_r$ /точка А на рис. 6.10/ навантажити до значення $M_g / M_{гн} = 1,3$, то щоб ковзання двигуна не змінилося, потрібно збільшити α до значення 138° /точка Б на рис. 6.10/. У замкнених регуляторах швидкості з АБК кут керування α залежно від зміни навантаження на валі двигуна змінюється автоматично.

Спрощену функціональну схему замкненої системи регулювання швидкості АД з використанням АБК зображено на рис. 6.11, а структурну схему - на рис. 6.12. Система двоконтурна із зовнішнім контуром швидкості і внутрішнім підпорядкованим контуром струму. За своєю структурою вона зовсім аналогічна двоконтур-



Рис. 6.11. Функціональна схема регулятора швидкості з введенням додаткової ЕРС у роторне коло

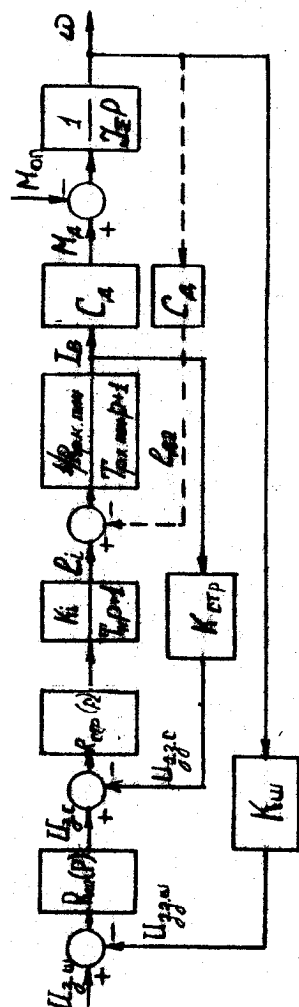


Рис. 6.12. Структурна схема регулятора швидкості з введенням податкової ЕРС у коло ротора

Регулятори струму й швидкості синтезують так само, як і системи підпорядкованого регулювання електроприводів постійного струму. Оптимізують контури, не ураховуючи зворотного зв'язку за ЕРС двигуна /на рис. 6.12 цей зв'язок зображено пунктиром/. Контур струму звичайно оптимізують згідно з модульним критерієм. Об'єктом регулювання в контурі струму є інвертор і частина АД, що їх характеризує аперіодична ланка з коефіцієнтом підсилення $1/R_{\Sigma} \cdot \tau_{\Sigma}$ і сталою часу $T_{\Sigma} = T_i$. Мала некомпенсована стала часу контуру струму

Контур швидкості оптимізують або за модульним, або за симетричним критеріями. У першому випадку внаслідок синтезу дістають пропорційний регулятор, а в другому – інтегрально-пропорційний. Об'єктом регулювання в контурі швидкості є оптимізований контур струму й механічна частина АД з передаточною функцією $G_p / T_{\Sigma} s$. Мала некомпенсована стала часу контуру швидкості $T_{\Sigma sh} = 2T_{\Sigma}$.

У [6] доведено, що коли T_{Σ} сумірна з T_{Σ} і контур наладжено за модульним критерієм, то динамічні характеристики контуру дуже змінюватимуться. Щоб цього уникнути, треба одночасно змінювати опори

$R_{\Sigma c}$, $R_{\Sigma r}$, $R_{\Sigma s}$ регулятора струму пропорційно ковзання двигуна. Роблять це, вводячи в систему кола самоналадження.

Розглянутий регулятор швидкості з АБК має змогу регулювати кутову швидкість АД у бік зменшення порівняно з синхронною в діапазоні не більш як два. Є й інші схеми АБК, за допомогою яких регулюють швидкість АД у бік як зменшення синхронної, так і її збільшення, але вони складніші й дорожчі. Варто зауважити, що розглянутий спосіб регулювання швидкості АД шляхом введення додаткової ЕРС у коло ротора забезпечує можливість керування електроприводом з доволі високими енергетичними показниками. Спричинено це тим, що енергію ковзання змінного струму з частотою f_2 випрямляч перетворює на енергію постійного струму, яку потім інвертор та трансформатор перетворюють на енергію змінного струму з частотою f_1 , котра і надходить у мережу. Це дуже важливо для електроприводів з великою й середньою потужностями.

Для електроприводів з малою потужністю застосовують спосіб керування АД з фазним ротором, коли енергія ковзання не перетворюється на енергію мережі, а витрачається в додатковому опорі R_g , увімкненому на виході випрямляча роторного кола. Швидкість АД у цьому разі регулюють, плавно й безконтактно змінюючи опір R_g за допомогою широтно-імпульсного модулятора. Такі системи звичайно будують з двома контурами – контуром швидкості й підпорядкованим контуром струму [6]. Структурна схема системи в цьому разі зовсім аналогічна схемі на рис. 6.12, але з іншими числовими значеннями параметрів аперіодичних ланок.

Розділ 7. ЦИФРОВІ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДАМИ

7.1. Загальні відомості про цифрові системи керування

7.1.1. Принципи побудови цифрових систем автоматичного керування електроприводами

Відповідно до алгоритму керування цифрові системи автоматичного керування електроприводами /ЦСКЕП/, так само як і безперервні /аналогові/ системи, поділяють на такі групи: розімкнені, замкнені й комбіновані. Нині найчастіше застосовують замкнені ЦСКЕП, дія яких ґрунтується на використанні принципу керування за відхиленням керованої величини, і комбіновані, побудовані згідно з принципами керування за відхиленням керованої величини і за збуренням. Залежно від алгоритму функціонування всі ЦСКЕП поділяють на системи автоматичної стабілізації кутової швидкості /регулятори швидкості/, автоматичного керування положенням /силовий слідкувальний електропривод/ і програмового керування.

Розглянуті принципи керування за відхиленням та збуренням, означення розімкнених, замкнених та комбінованих систем, систем автоматичної стабілізації, слідкувальних систем, систем програмового керування, а також деякі інші поняття, що стосуються принципів побудови безперервних систем /див. розд. I/, слухні й для ЦСКЕП.

7.1.2. Означення й основні моменти цифрової системи керування

Цифровою називають таку систему керування, в замкненому контурі якої є хоча б один цифровий елемент, тобто елемент, що перетворює безперервний сигнал, поданий на його вхід, у цифрову форму. Суть такого перетворення полягає в тому, що безперервний сигнал зображують у вигляді певних фіксованих рівнів, котрі відрізняються один від одного на величину певної одиниці дискретності q , названої кроком квантування.

Зобразимо безперервний сигнал у вигляді

$$X = X^* + \delta, \quad /7.1/$$

де X^* містить ціле число одиниць q , $|\delta| < q$. Згідно з /7.1/ кожній

величині безперервного сигналу X відповідає його дискретне значення X^* . Похибку заокруглення безперервного сигналу $\epsilon = X - X^*$, що виникає внаслідок цього, називають похибкою квантування. Отже, коли безперервний сигнал X може набувати всіх значень на певному інтервалі $[a, b]$, то сигнал X^* — лише дискретних. Процес зображення аналогового сигналу X дискретним X^* називають квантуванням за рівнем /амплітудним квантуванням/, а технічні пристрої, які виконують цю операцію, — аналого-цифровими перетворювачами /АЦП/.

Статичну характеристику АЦП /рис. 7.1/ побудовано за рівнянням

$$X^* = nq \quad (nq - q/2 < X \leq nq + q/2), \quad 17.21$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

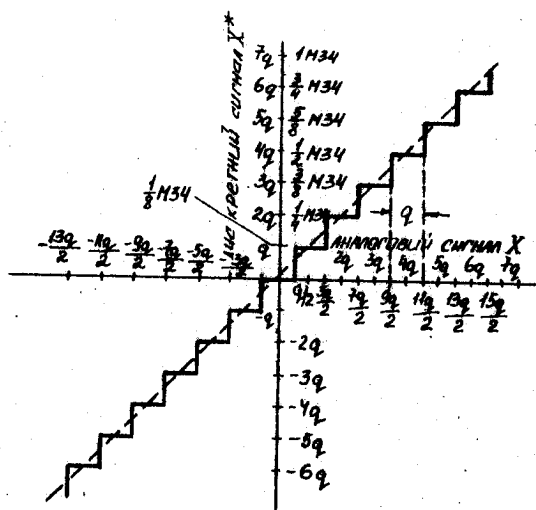


Рис. 7.1. Статична характеристика вхід - вихід трирозрядного аналого-цифрового перетворювача

З рис. 7.1 випливає, що безперервному вхідному сигналові X , котрий у робочому діапазоні статичної характеристики може набирати будь-яких значень, відповідає вісім $/2^3/$ дискретних значень вихідного сигналу X^* .

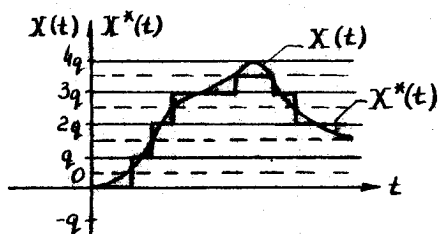


Рис. 7.2. Квантування аналогового сигналу за рівнем

На рис. 7.2 зображено квантування за рівнем аналогового сигналу $X(t)$, який змінюється в часі за певним законом. З цього рисунка можна зробити висновок про те, що за своєю суттю квантування за рівнем являє собою операцію заокруглення до найближчого дискретного значення вихідного сигналу $X^*(t)$. АЦП безперервний

вхідний сигнал перетворює в цифровий код. Практичні схеми АЦП базуються на двійковому зображенні чисел, часто з використанням двійкового коду. На рис. 7.1 зображено, а в табл. 7.1 [26] наведено співвідношення між аналоговим сигналом X та відповідними значеннями дискретного сигналу X^* , поданими в цифровому двійковому коді.

Таблиця 7.1

Співвідношення між безперервним та дискретним сигналами і двійковим цифровим кодом

Аналоговий сигнал	Двійковий цифровий сигнал			
	Двійковий код			Дискретний сигнал X^*
	СВ (х4q)	(х2q)	МБ (хq)	
$ X < 0,5q$	0	0	0	
$0,5q \leq X < 1,5q$	0	0	1	$1/8 M34 = q = MB$
$1,5q \leq X < 2,5q$	0	1	0	$1/4 M34 = 2q$
$2,5q \leq X < 3,5q$	0	1	1	$3/8 M34 = 3q$
$3,5q \leq X < 4,5q$	1	0	0	$1/2 M34 = 4q$
$4,5q \leq X < 5,5q$	1	0	1	$5/8 M34 = 5q$
$5,5q \leq X < 6,5q$	1	1	0	$3/4 M34 = 6q$
$6,5q \leq X < \infty$	1	1	1	$7/8 M34 - MB = 7q$

Молодший біт /МБ/ трирозрядного числа порівнює крокові квантування q . Як бачимо з табл. 7.1, МБ трирозрядного двійкового числа має вагу $1/8$ максимального значення числа /МЗЧ/, другий біт - вагу $1/4$ МЗЧ = $2q$ і старший біт /СБ/ - $1/2$ МЗЧ = $4q$. Звіжди зрозуміло, що точно перетворити аналоговий сигнал X можна тільки тоді, коли він має значення $0,5q$; $1,5q$; $2,5q$; ... $6,5q$. За інших значень X у перетворенні виникне похибка. Похибка квантування залежить від кількості рівнів квантування або роздільної здатності АЦП. Варто зазначити, що робочий діапазон квантувача, зображеного на рис. 7.1, відповідає двійковому числу 111, або $7/8$ МЗЧ, а не МЗЧ. Ця обставина не позначатиметься на точності перетворення, поки аналоговий сигнал не перевищить $7/8$ МЗЧ + $q/2$; за цієї умови максимальна похибка квантування порівнюватиме $\pm q/2$. Приміром, коли максимальна напруга вхідного аналогового сигналу порівнює 10 В, то МЗЧ = 10 В, а $q = 1/8$ МЗЧ = 1,25 В. Отже, максимальне значення аналогового сигналу, що його можна перетворити з похибкою, яка не перевищує $\pm 0,625$ В, становитиме $7/8$ МЗЧ + $q/2 = 9,375$ В.

Точність перетворення підвищують, збільшуючи кількість розрядів у вихідному сигналі. Нині виготовляють АЦП, які мають 16 і більше двійкових розрядів. Роздільна здатність АЦП порівнює $1/2^{\lambda}$, де λ - кількість двійкових розрядів. Треба зазначити, що аналого-цифрове перетворення не забезпечує взаємно однозначної відповідності між X та X^* . Наприклад, аналоговому сигналові X , що набирає будь-яких значень в інтервалі $1,5q \leq X < 2,5q$ /див. рис. 7.1 і табл. 7.1/, відповідає єдине значення дискретного сигналу X^* , яке порівнює $1/4$ МЗЧ з двійковим кодом 010, і навпаки, єдиному значенню X^* , наприклад $1/2$ МЗЧ з двійковим кодом 100, відповідає множина аналогових сигналів на інтервалі $3,5q \leq X < 4,5q$.

Окрім двійкового цифрового коду, який здобув широке практичне застосування завдяки простоті й тому, що його легко реалізовувати в цифрових пристроях, розроблено код Грея, двійково-десятковий та інші коди.

Головне призначення АЦП полягає в перетворенні інформації, що її містить аналоговий сигнал, у цифровий, приміром двійковий, код. Звичайно квантування аналогового сигналу за рівнем - це виконання комплексу логічних та арифметичних операцій, що потребують певного часу. Цифрові значення перетворюваного аналогового сигналу АЦП видає не безперервно, а лише в дискретні моменти часу, а в інтервалах між ними виконує операції перетворення в двійковий код. Проміжок часу, який визначає тривалість перетворення аналогового сигналу X /див. рис. 7.3/

з інтервалу $(n - 1/2)T \leq X < (n + 1/2)T$ в одне дискретне значення $\pm nT X^*$ і цифровий код, що відповідає останньому, називають періодом квантування T , або періодом переривання. Процес дискретизації аналогового сигналу за часом називають квантуванням за часом, а пристрої, які виконують цей процес, - імпульсними модуляторами, або імпульсними елементами.

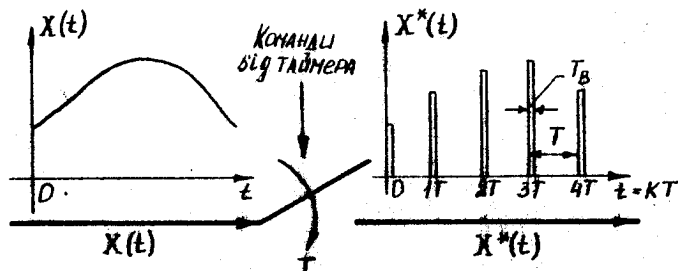


Рис. 7.3. Імпульсний модулятор

Варто зауважити, що квантування аналогового сигналу за рівнем завжди супроводить квантування цього самого сигналу за часом.

На рис. 7.3 зображено амплітудно-імпульсний модулятор у вигляді ключа з періодом замикання T . Замикають і розмикають ключ періодичні командні сигнали, які надходять від таймера в моменти часу $t = nT$, де $n = 0, 1, 2, \dots$. На вхід ключа надходить безперервний сигнал $X(t)$, а на його виході утворюється послідовність імпульсів з тривалістю $T_B \ll T$. Час T_B називають часом вибирання. Амплітуда вихідних імпульсів $X^*(t)$ у моменти вибирання дорівнює відповідним значенням вхідного аналогового сигналу $X(t)$. У цьому разі кажуть, що амплітуду вихідних сигналів $X^*(t)$ промодульовано вхідним сигналом $X(t)$.

Оскільки тривалість перетворення АЦП не дорівнює нулю, то, отже, протягом цього часу аналоговий сигнал змінюватиметься і його перетворення в цифровий код потребує ускладнення будови АЦП. Щоб усунути це явище, квантований за часом сигнал зберігають сталим до завершення перетворення. Технічно цю операцію виконує фіксатор /рис. 7.4/, який називають також відновлювачем нульового порядку, або запам'ятовувальним пристроєм нульового порядку. Фіксатор нульового порядку зберігає /запам'ятовує/ квантований за часом сигнал сталим протягом часу кван-

тування /тобто від моменту розмикання ключа і до моменту надходження наступної команди на вибирання/. Імпульсний модулятор /ключ/ і фіксатор конструктивно об'єднують в один пристрій, що його узвичасно називати пристроєм вибирання й зберігання /ПЕЗ/. Хоча ПЕЗ виготовляють як єдиний блок і на функціональних схемах його зображують єдиним елементом /рис. 7.5/, аналітично розглядати процеси вибирання й зберігання зручно окремо. Функціональну схему, в якій процеси вибирання й зберігання відокремлено, зображено на рис. 7.6. Блок часової затримки характеризує передавну функція $e^{-\rho s}$, де ρ - комплексна змінна; T_z - час затримки, який складається з двох складових - інтервалу T_a від моменту надходження команди на вибирання до моменту розмикання ключа і інтервалу T_y від моменту розмикання ключа до моменту загасання коливань до певної величини, що її визначає припустима похибка, тобто $T_z = T_a + T_y$. Час T_y зумовлює те, що під час розмикання ключа й переходу до режиму фіксації виникає перехідний процес через наявність реактивних елементів у схемах цифрової логіки. Зауважимо, що $T_a \approx T_b + T_p$, де T_p - апертурний час, який визначає час спрацювання перемикальної схеми всередині ПЕЗ. Імпульсний елемент, зображений на рис. 7.2, називають квантувачем із скінченною тривалістю імпульсу. На практиці час затримки T_z малий, тому з урахуванням динаміки системи керування цим можна знехтувати. Наприклад, $T_p = 10$ нс, $T_b = 300$ нс, $T_y = 10$ нс [26]. Отже, $T_z = 410$ нс; зрозуміло, що цим часом можна знехтувати, позаяк навряд чи система керування може швидше відреагувати на вхідний сигнал. Тому на практиці, коли $T_z \ll T$, ПЕЗ можна зобразити функціональною схемою на рис. 7.7. У цьому разі імпульсний елемент називають ідеальним квантувачем, бо припускають, що час вибирання дорівнює нулеві і ключ замикається й розмикається миттю через кожні T секунд. Функціональну схему АЦП, який складається з ідеального ПЕЗ /ідеальний імпульсний елемент і фіксатор нульового порядку/, квантувача за рівнем Q , що перетворює X в X^* , і шифратора, призначеного для перетворення X^* у цифровий код, зображено на рис. 7.8. Зауважимо, що наступність операцій квантування аналогового сигналу за часом та рівнем можна змінити на зворотну.

Під час проектування цифрових систем керування, й зокрема АЦП, важливо вибрати період квантування T , який дуже впливає на їхню стійкість.

Запровадимо частоту квантування f_k /Гц/, або ω_k /рад/с/, що її з періодом квантування T пов'язує співвідношення

$$f_k = 1/T; \quad \omega_k = 2\pi f_k = 2\pi/T.$$

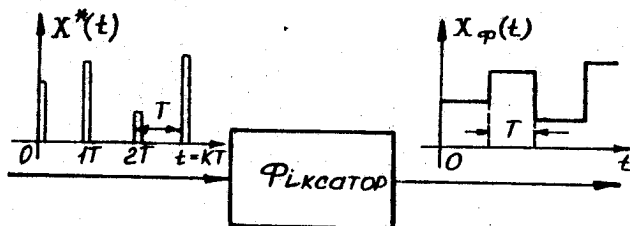


Рис. 7.4. Фіксатор нульового порядку

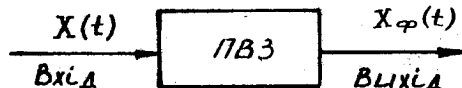


Рис. 7.5. Пристрій вибирання й зберігання

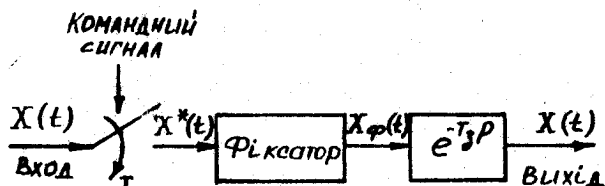


Рис. 7.6. Функціональна схема ПВЗ

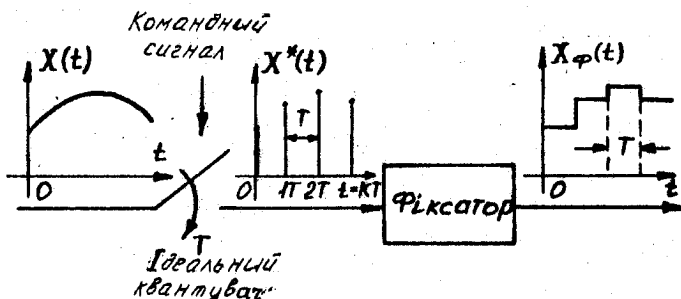


Рис. 7.7. Ідеальний ПВЗ

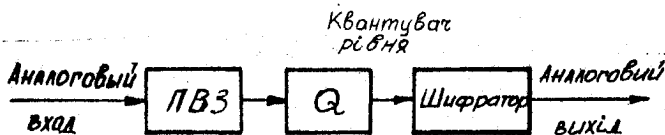


Рис. 7.8. Функціональна схема АЦП

Частота квантування залежить від багатьох факторів, пов'язаних і з характеристиками /будовою/ АЦП, і з характеристиками аналогового сигналу /величиною та частотним спектром/. Теоретично верхньої межі частота квантування не має. Якщо $\omega_x = \infty$, то сигнал на виході імпульсного елемента перетворюється в безперервний. Але реально кожен квантувач повинен мати скінченне значення ω_x . Максимальну частоту квантування $\omega_{x \max}$ обмежують час перетворення АЦП і часові затримки ПЕЗ. Для АЦП з рівномірною компенсацією, які являють собою типову слідкувальну систему,

$$f_k = (2^n - 1) T_n. \quad /7.3/$$

f_k і час перетворення T_n пов'язує рівняння /7.3/.

Наприклад, припускаючи, що $T = T_n = 10^6 = 1 \text{ мкс}$ і $n = 10$, дістаємо максимальну частоту квантування $f_k \approx 10^9 \text{ Гц} = 1 \text{ ГГц}$. Проте на практиці максимальна частота квантування або мінімальний період квантування T залежить від швидкодії й інших елементів системи керування. Зокрема, якщо в системі цифрові дані потрібно відрацьовувати за допомогою мікропроцесора, тобто $\omega_{x \max}$ обмежуватиме швидкість обробки цих даних. Мікропроцесор, як відомо, - це досить повільний цифровий пристрій /звичайно $n = 4$ або $n = 8$ /. З іншого боку, є обмеження і на мінімальну частоту квантування ω_x . А тому інтуїтивно можна зрозуміти, що коли безперервний сигнал, який надходить на вхід імпульсного елемента, змінюється з великою швидкістю, то, квантуючи його із занадто малою швидкістю, тобто з великим періодом квантування T , можна втратити важливу інформацію про сигнал між моментами вибирання. Відповідно до теореми Котельникова, коли аналоговий сигнал $x(t)$ не містить у своєму спектрі частот понад ω_c /радіан на секунду/, то його повністю описують власні значення, виміряні в дискретні моменти часу з інтервалом $T = 1/2(2\pi/\omega_c)$ секунд. По-іншому кажучи, для точного зображення аналогового сигналу треба мати частоту квантування ω_x , що більш як у 2 рази перевищує частоту вхідного сигналу ω_c . Наприклад, коли для розглянутого АЦП з періодом квантування $T = 1 \text{ мкс}$ вибрати частоту квантування $\omega_x = 1 \text{ МГц}$ /теоретичний максимум при $n = 10$ /, то вхідний сигнал не має містити гармонік з частотою ω_c , яка перевищує 0,5 МГц.

У цифрових системах керування, крім АЦП, завжди є ще й цифроаналоговий перетворювач /ЦАП/, оскільки в їхньому основному контурі є аналогові елементи, наприклад електродвигун у системах керування електродвигном. ЦАП призначені для перетворення цифрових сигналів у без-

перервні, а також для узгодження /зменшення навантаження/ цифрових елементів та їх надмірного спрацювання/ цифрових сигналів з безперервними. Порівняно з АЦП ЦАП, як звичайно, мають простішу будову та більшу швидкодію за тієї ж самої точності і дешевші. Оскільки під час аналогового перетворення цифровий сигнал трансформується в аналоговий відповідної величини, то ЦАП як систему /рис. 7.9/ можна зобразити декодувальним пристроєм, котрий цифрове слово перетворює в число або амплітудно-модульований імпульс, і фіксатором нульового порядку, що перетворює входні імпульси в послідовність прямокутних імпульсів тривалістю T . Імпульсний елемент у зображеній на рис. 7.9 схемі не потрібний. Але, оскільки квантувач і фіксатор виготовлено у вигляді єдиного конструктивного блока, то замість фіксатора звичайно використовують ПВЗ. Доцільність цього можна пояснити ще й тим, що на практиці цей пристрій використовують для усунення коливань та пульсацій, спричинених роботою операційного підсилювача, який містить ЦАП. Декодер з погляду динаміки являє собою підсилювальну ланку з коефіцієнтом підсилення, що в ідеальному випадку дорівнює одиниці.

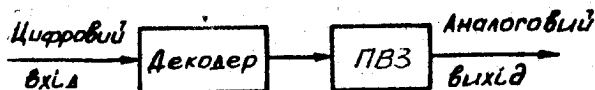


Рис. 7.9. Функціональна схема ЦАП

Цікаво порівняти функціональні схеми АЦП /див. рис. 7.8/ і ЦАП /див. рис. 7.9/. Оскільки роздільна здатність АЦП на практиці велика / $n = 16$ і більше/, то нелінійними ефектами квантування аналогового сигналу за рівнем можна знехтувати. Тоді декодер та шифратор можна зобразити підсилювальними ланками з коефіцієнтом підсилення, який дорівнює одиниці, і обидві схеми звести до ПВЗ, що справджується у випадку аналітичного дослідження цифрових систем керування.

7.1.3. Класифікація дискретних систем керування

У системах автоматичного керування сигнали в одній чи кількох точках можуть бути дискретними за часом, дискретними рівнем або дискретними за часом та рівнем.

За характером дискретного сигналу всі САК поділяють на імпульсні, релейні й цифрові.

Коли кажуть про дискретну систему керування, то звичайно мають на увазі або всі перелічені системи, або одну чи кілька з них. Наприклад, імпульсна система дискретна; релейна і цифрова системи також дискретні.

Наведена класифікація умовна. Зокрема, релейні системи /реле - найпростіший дворівневий квантизатор/ належать до класу звичайних нелінійних систем, і їх можна дослідити нелінійними методами, розвиненими в теорії безперервних систем. Зображену на рис. 7.10 розімкнену імпульсну систему, навіть коли в ПЕЗ немає фіксатора, також можна дослідити звичайними методами теорії автоматичного керування. Розроблювати спеціальну теорію для дослідження дискретних, і зокрема цифрових, систем керування потрібно тоді, коли дискретний сигнал утворюється всередині замкненого контуру системи керування.

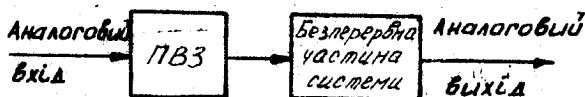


Рис. 7.10. Функціональна схема розімкненої імпульсної системи

Цифрові системи керування за типу квантувачів /модуляторів/, що квантують аналоговий сигнал за часом, поділяють на системи з амплітудно-імпульсною /АІМ/, широтно-імпульсною /ШІМ/ і частотно-імпульсною /ЧІМ/ модуляцією. Коли, наприклад, квантувач виготовлено за схемою ШІМ, то вихідний сигнал являє собою послідовність імпульсів, тривалість яких є функцією амплітуди вхідного аналогового сигналу в моменти вибирання. Є й інші закони керування роботами квантувачів. Наприклад, період квантування може бути несталим, змінюватися циклічно чи за випадковим законом. У попередньому розділі було розглянуто цифрові системи з АІМ. Було доведено, що квантування аналогового сигналу за рівнем завжди супроводжує квантування за часом і що необхідною й достатньою умовою цифрового способу керування є квантування сигналу як за часом, так і за рівнем. Надалі розглядатимемо лише цифрові САК з АІМ.

Об'єктом керування в сучасних системах керування електроприводами є найчастіше двигун постійного струму, якірне коло якого живиться від тиристорного перетворювача /ТП/. Керує ТП система імпульсно-фазового керування /СІФК/.

Цифрові системи керування тиристорним електроприводом /ТЕП/ поділяють на дві групи: цифроаналогові й прямого цифрового керування. Цифроаналогові системи керування звичайно будують за принципом підпорядкованого регулювання [2] так, щоб основний /зовнішній/ контур регулювання був цифровим, а всі підпорядковані - аналоговими /рис. 7.II/. Оскільки кількість розрядів сучасних перетворювачів доволі велика, то, отже, АЦП і ЦАП у цих системах можна замінити на ПВЗ. Окрім того, в схемі на рис. 7.II,а замість ЕОМ часто використовують цифровий коригувальний пристрій.

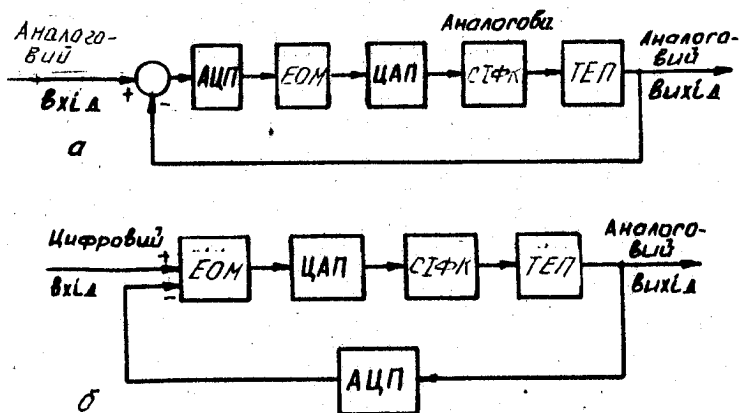


Рис. 7.II. Функціональні схеми цифроаналогових систем керування тиристорним електроприводом: а - з аналоговими СІФК і з аналоговими входом та виходом; б - з аналоговими СІФК і цифровими входом та виходом

Пряме цифрове керування ТЕП виконують за допомогою мікроЕОМ чи мікропроцесора. МікроЕОМ у цьому разі на підставі інформації, яка надходить через певні проміжки часу на її вхід у вигляді цифрового коду, розраховує за заданим алгоритмом керування необхідні кути керування ТП

і видає інформацію про них у вигляді цифрового коду. Цифровий код на виході мікроЕОМ цифрова СІФК перетворює на керувальні сигнали, які потім надходять на керувальні електроди ТП. МікроЕОМ не тільки розв'язує сформульовану задачу, а й дає змогу завдяки введенню спеціальних програм реалізувати деякі інші закони керування /оптимізація процесу керування електроприводом, прогнозування тощо/. Функціональну схему цифрової системи керування, що відповідає прямому цифровому керуванню, зображено на рис. 7.12.

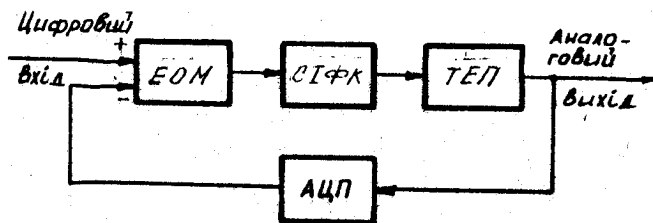


Рис. 7.12. Функціональна схема прямого цифрового керування тиристорним електроприводом

7.1.4. Приклади цифрових систем керування електроприводами [33; 39]

Цифроаналогова система стабілізації кутової швидкості електропривода /рис. 7.13/. Цю систему побудовано за принципом підпорядкованого регулювання. Вона містить три контури: один - струму і два - швидкості. Зовнішній контур швидкості - цифровий, а підпорядкований йому середній контур швидкості і внутрішній контур струму - аналогові. В аналогових регуляторах швидкості з підпорядкованим струмовим контуром, як відомо, для одержання астатизму другого порядку за керувальною дією треба мати інтегрально-пропорційний регулятор швидкості. Останній легко реалізувати на аналоговому операційному підсилювачі /для цього у вхідне коло необхідно увімкнути резистор R_{Σ} , а в коло зворотного зв'язку - послідовно з'єднані резистор R_{Σ} і конденсатор C_{Σ} /. Цифрова реалізація ПІ-регулятора технічно складніша через досить великий час, необхідний для формування пропорційно-інтегрального закону керування в цифровій формі. Тому, будучи швидкодієйні

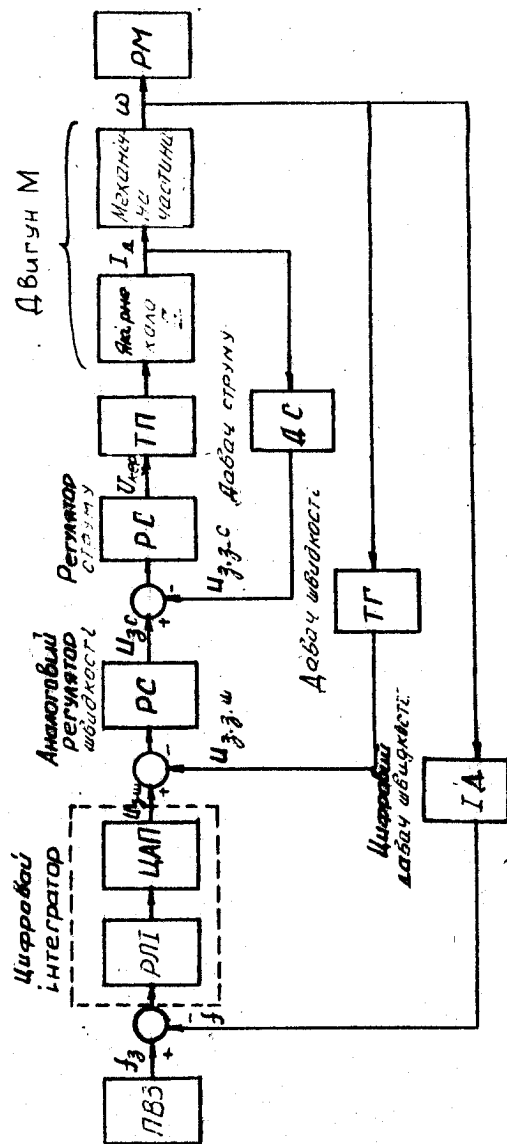


Рис. 7.13. Функціональна схема цифрової системи регулювання кутової швидкості електродвигача

системи керування кутовою швидкістю з великою роздільною здатністю /з малим кроком квантування за рівнем q /, пропорційну частину Пі-регулятора реалізують аналоговим контуром швидкості, а інтегральну - зовнішнім цифровим контуром швидкості.

Вимірювальним пристроєм у цифровому контурі швидкості є реверсивний лічильник імпульсів /РЛІ/, на один вхід /підсумовувальний/ якого надходять імпульси з частотою проходження f_3 , пропорційною заданому значенню кутової швидкості ω_3 , а на другий /віднімальний/ - імпульси зворотного зв'язку, частота проходження яких f пропорційна справжньому значенню швидкості обертання двигуна ω . Імпульси з частотами проходження f_3 і f формують відповідно пристрій введення завдання /ПЕЗ/ та імпульсний давач /ІД/, поставлені на валі двигуна. Щоб імпульси на обидва входи РЛІ одночасно не надходили, використано спеціальну схему блокування, яка зсуває ці імпульси на період повторення. На виході РЛІ утворюється різниця між кількістю імпульсів, що надходять від ПЕЗ та ІД. Частота проходження цих імпульсів $\Delta f = f_3 - f$ являє собою сигнал розузгодження, який у вигляді різниці імпульсів надходить на вхід ЦАП і перетворюється в ньому на аналоговий сигнал.

Аналогова напруга на виході ЦАП - це задавальний сигнал $U_{\text{за}}(t)$ для аналогового контуру швидкості.

РЛІ та ЦАП утворюють цифровий інтегратор. Справді, коли виникає різниця Δf , то її записує РЛІ, безперервно змінюючи свій зміст /або безперервно збільшуючи під час навантаження, або безперервно зменшуючи під час скидання навантаження/, а це спричинює лінійну зміну аналогової напруги на виході ЦАП. Швидкість зміни цієї напруги залежить від крутості статичної характеристики /див. рис. 7.1/. Тільки коли $\Delta f = 0$, число, записане в лічильнику, буде стале. За цієї умови буде стала напруга на виході цифрового інтегратора, значення якої відповідатиме заданому значенню кутової швидкості обертання двигуна ω . Насправді ж в усталеному режимі роботи привода, навіть коли $\Delta f = 0$, стан РЛІ змінюється. З надходженням імпульсу на підсумовувальний вхід у лічильнику попадається одиниця, а на віднімальний - віднімається. Такий процес підсумовування й віднімання триває безперервно, але середнє значення числа, записаного в лічильнику, не змінюється. Отже, усталеним режимом роботи цифрового інтегратора є режим автоколивань, амплітуда яких дорівнює крокові квантування q вихідної величини за рівнем, тобто швидкості обертання двигуна, котра відповідає одиниці, записаній у лічильнику. Оскільки звичайно q мале, то

амплітуда автоколивань незначна і її вплив виявляється тільки у вигляді високочастотного фону, накладеного на безперервний вихідний сигнал.

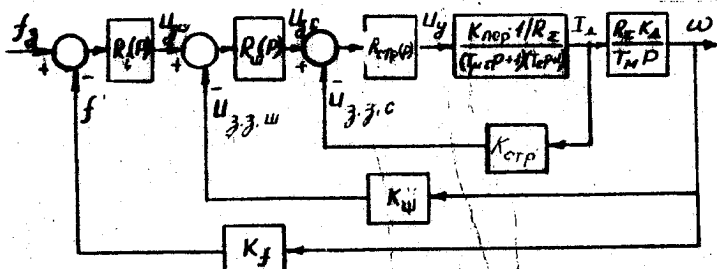


Рис. 7.14. Структурна схема цифроаналогової системи регулювання кутової швидкості електропривода

Передавну функцію цифрового регулятора $R_i(\rho)$ визначають за методикою синтезу аналогових регуляторів. Слушність такого способу зумовлює те, що звичайно f_2 та f великі і, отже, крок квантування за рівнем вихідної величини φ малий; пульсації напруги на виході цифрового інтегратора, як уже ми зазначали, невеликі. Оскільки цифровий інтегратор і інтегратор у порівнюваній аналоговій системі регулювання

швидкості з астатизмом другого порядку виконують однакові функції, то для системи, наладженої за симетричним критерієм [33],

$$R_i(p) = \frac{K_D}{p}, \quad /7.4/$$

де $K_D = K_{\omega} / 8T_{\mu\omega} K_f$ і $K_f = f/\omega$ - коефіцієнти підсилення відповідно цифрового інтегратора й імпульсного давача швидкості.

Коефіцієнт підсилення цифрового інтегратора можна визначити як дискретний приріст α вихідної величини ЦАП у разі збільшення числа, записаного в лічильнику, на одиницю, тобто як відношення максимальної напруги на виході ЦАП U_{max} , коли лічильник заповнено повністю, до об'єму лічильника N /до кількості імпульсів на вході інтегратора, необхідних для його повного заповнення/:

$$\alpha = U_{max} / N. \quad /7.5/$$

Таким чином, налаштувавши цифрованалогову систему за симетричним оптимумом, коефіцієнт підсилення цифрового інтегратора треба розраховувати за формулою

$$K_D = \alpha = \frac{K_{\omega}}{8T_{\mu\omega} K_f}. \quad /7.6/$$

Об'єм лічильника цифрового інтегратора визначають на підставі умови, що має виконуватися для будь-якого режиму роботи привода:

$$N \geq A_{max}, \quad /7.7/$$

де A_{max} - найбільша сподівана кількість імпульсів на вході інтегратора за час регулювання.

У загальному випадку $A_{max} = A_{max, кер} + A_{max, збур}$, де $A_{max, кер}$ і $A_{max, збур}$ - максимальні кількості імпульсів у випадку дії відповідно за керуванням і збуренням. Для розглядуваної системи

$$A_{max, кер} \approx 8,56 T_{\mu c} K_f \omega_{max}, \quad /7.8/$$

$$A_{max, збур} \approx 12 T_{\mu c} I_{ст} K_f \omega_{ном} / T_n, \quad /7.9/$$

де $I_{ст}$ - струм навантаження, спричинений моментом статичного опору. Цифрованалогова система керування лінійним положенням робочого механізму /рис. 7.13/. Цю систему побудовано за принципом підпорядко-

ваного регулювання. Бона звичайно містить три контури: аналогові - струму й швидкості і цифровий - положення. Структура й параметри аналогових контурів струму й швидкості найчастіше подібні до контурів розглянутого регулятора швидкості. Зовнішній цифровий контур побудовано так. Задаче лінійне переміщення S_z надходить від ПЕЗ у вигляді числа N_z в паралельному двійковому коді на один із входів арифметичного пристрою /АП/ мікроЕОМ. На другий його вхід по колу зворотного зв'язку надходить число N також у паралельному двійковому коді. Це число пропорційне справжньому лінійному положенню робочого механізму S . Безперервний вихідний сигнал S кодовий давач положення /КДП/ перетворює в число N , а потім перетворювач кодів /ПК/ - в паралельний двійковий код в одному із завадозахищених кодів /наприклад, Грея/. АП безперервно обчислює величину й знак розузгодження між заданим входом і справжнім виходом: $\Delta N = N_z - N$. З виходу АП сигнал у вигляді імпульсів, кількість яких пропорційна похибці $\Delta S = S_z - S$, надходить на вхід ЦАП, перетворюється в ньому в аналогову напругу, використовувану надалі для керування електроприводом.

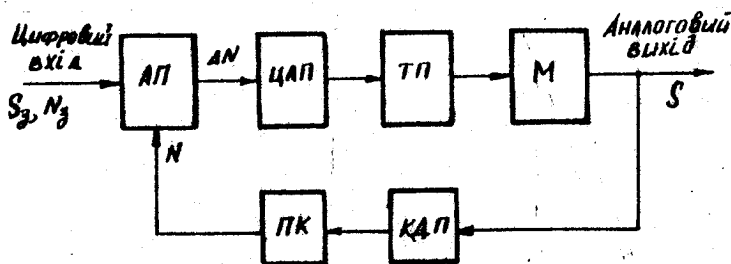


Рис. 7.15. Функціональна схема цифроаналогової системи регулювання положення робочого механізму

Як АП, який обчислює різницю $\Delta N = N_z - N$, застосовують суматор, що виконує дії з числами N_z і N в оберненому двійковому коді. Число завжди додатне, і, отже, його обернений код збігається з прямим, а цифра в знаковому розряді завжди дорівнює 0. Число N , як бачимо з виразу $\Delta N = N_z - N$, від'ємне. Тому для того, щоб зобразити N в оберненому двійковому коді, ПК має інвертувати всі значущі розряди, а в знаковому розряді видати 1.

АП і ЦАП утворюють цифровий інтегратор. Отже, розглядувана система має астатизм першого порядку за керувальною дією S_z і є статичною за збуренням $I_{ст}$ /або $M_{ст}$ /.

Крок квантування системи за рівнем /ціна одиниці молодшого розряду цифрових пристроїв/

$$q \leq \Delta S,$$

де $\Delta S = \Delta S_{ст\ max} - \Delta S_{мех}$; $\Delta S_{ст\ max}$ - максимальна припустима похибка відпрацювання переміщення; $\Delta S_{мех}$ - максимальна похибка передачі в численуванні НДП з РМ.

Розраховане за формулою $q \leq \Delta S$ значення q має не перевищувати дискретність задання положення об'єкта d , тобто $q \leq d$.

Числові ємності ПЕЗ, АП і КДП

$$N = \Delta S_{max} / q,$$

де ΔS_{max} - максимальний робочий хід РМ.

Мінімальна кількість двійкових розрядів цих пристроїв

$$n = [\log_2 (N+1)] + 1.$$

Максимальну частоту роботи цифрових пристроїв визначають максимальна швидкість переміщення v_{max} РМ і крок квантування q :

$$f_{max} = v_{max} / q.$$

Система прямого цифрового керування кутовою швидкістю електропривода /рис. 7.16/. Безперервна частина системи складається з реверсивного тиристорного перетворювача /П/, складеного за зустрічно-паралельною схемою, двигуна постійного струму М з незалежним збудженням і зв'язаного з його валом робочого механізму /РМ/.

ТП являє собою дискретний пристрій, вихідною /випрямленою/ напругою $U_g(t)$ якого керують, подаючи імпульси з потрібним фазовим зсувом на керувальні електроди тиристорів. Тому вхідну інформацію, яка в аналогових регуляторах швидкості /див. рис. 7.13/ надходила на СІФК у вигляді сталої напруги керування $U_{кер}(t)$ і знак останньої визначав напрям обертання двигуна, можна виробити в цифровій формі, наприклад у цифровому двійковому коді $N_{кер}$, перетворити цей код у керувальні імпульси і, подавши їх на керувальні електроди тиристорів, організувати пряме цифрове керування напругою $U_g(t)$, а отже, і швидкістю обертання електропривода $\omega(t)$.

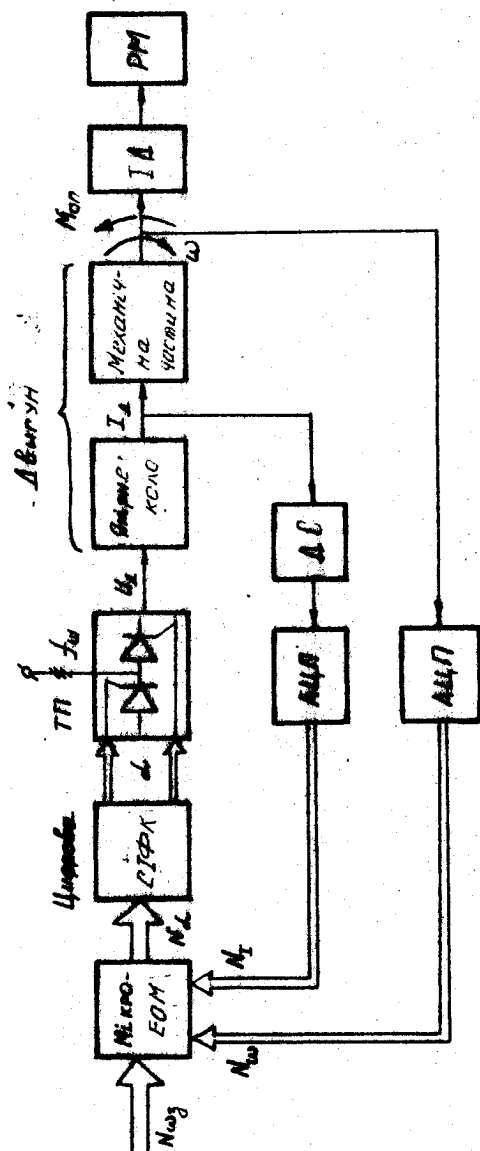


Рис. 7.16. Функціональна схема прямого цифрового керування кутною швидкістю електродвигуна

Пряме цифрове керування в схемі на рис. 7.16 виконують за допомогою мікро-ЕОМ, наприклад "Електроніка-60". Алгоритм для неї можна розробити на підставі алгоритму, за яким працюють аналогові двоконтурні регулятори швидкості. У таких аналогових системах керувальну напругу $U_{кер}(t)$ формував ПІ-регулятор струму, задавальним сигналом для якого була напруга $U_{г.с}(t)$, вироблена П- або ПІ-регулятором швидкості /див. рис. 7.13/. Цей алгоритм і реалізує мікро-ЕОМ на підставі інформації, що надходить у цифровій формі каналами зворотних зв'язків за струмом та швидкістю. Зворотний зв'язок за струмом здійснено вимірюванням струму силового кола $I_g(t)$ за допомогою безперервних елементів - шунта й давача струму /ДС/ та АЦП, який перетворює безперервний сигнал у цифровий код N_I . Коло зворотного зв'язку за швидкістю складається з імпульсного давача /ІД/, що його задавальний елемент /наприклад, феромагнітний диск із зубцями в індукційних давачах/ зв'язаний з валом двигуна і АЦП, який перетворює частоту проходження імпульсів f , Гц /для індукційного давача $f = \omega Z / 2\pi$, де Z - кількість зубців/ у цифровий код N_ω . Таким чином, на вхід мікро-ЕОМ надходять цифрові сигнали N_I , N_ω і цифровий сигнал завдання швидкості $N_{\omega з}$. За цими сигналами мікро-ЕОМ на підставі сформульованого алгоритму керування розраховує керувальну дію, що її видає машина в цифровій формі N_α . Із силовим блоком ТП мікро-ЕОМ сприяють за допомогою цифрової системи імпульсно-фазового керування, яка за цифровим сигналом N_α виробляє керувальні імпульси α і видає їх на тиристори. Роботу мікро-ЕОМ і цифрової СІФК синхронізовано з напругою живильної мережі.

У випадку прямого цифрового керування ТП, одну перетворювальну групу якого побудовано за трифазною мостовою схемою випрямлення, період квантування сигналу за часом T , що забезпечує максимальну швидкодію системи керування електроприводом за частоти живильної мережі $f_H = 50$ Гц, становить 3,3 мс. Така величина T , коли відомий алгоритм керування електроприводом, дає змогу сформулювати вимоги до швидкодії мікро-ЕОМ. Орієнтовне значення тривалості розрахунку алгоритму прямого цифрового керування за допомогою мікро-ЕОМ "Електроніка-60", яка реалізує ПІ-закони керування за струмом з обмеженням останнього на заданому рівні та швидкістю, дорівнює приблизно 1,5 мс, що дає змогу використовувати цю мікро-ЕОМ у системах прямого цифрового керування електроприводом.

7.1.5. Переваги цифрових систем керування

Цифрові системи керування, побудовані на базі сучасних схем з великим ступенем інтеграції /VLSI/, мають неабиякі переваги порівняно з аналоговими. Насамперед це висока точність, завадозахищеність, можливість реалізувати дуже складні алгоритми керування, швидкодія, висока стабільність характеристик тощо.

Високу точність цифрові системи мають завдяки цифровій формі зображення сигналів керування. Точність введення задавальної дії й виконання всіх операцій цифровими пристроями системи теоретично не має меж і залежить лише від кількості розрядів цифрового коду. Підвищену завадозахищеність забезпечує кодоімпульсне зображення сигналів і використання спеціальних завадозахищених кодів /V-код, циклічний код Грея та ін./.

Переваги цифрових систем керування в порівнянні з аналоговими особливо даються взнаки, коли в основний контур ввести мікро-ЕОМ чи мікропроцесор. Мікропроцесорні системи дають змогу реалізувати різноманітні закони керування, зокрема робити оптимізацію, адаптацію, прогнозування, обробляти різноманітну інформацію, що важче виконувати за допомогою аналогових систем. Застосування мікро-ЕОМ допомагає не тільки значно збільшити швидкодію системи керування, а й, що не менш важливо, з'являється можливість швидкої функціональної перебудови системи, а це дає змогу дуже скоротити тривалість налаштовувальних робіт і змінити їх характер, оскільки необхідні експерименти з визначення характеристик та параметрів системи, а також налаштування регуляторів може виконати автоматично сама мікро-ЕОМ за наперед розробленою програмою. Легше також аналізувати аварійні режими та перехідні процеси, які без втрати інформації можна зареєструвати в пам'яті мікро-ЕОМ. Застосування мікропроцесорної техніки й мікро-ЕОМ потребує змін у методах проектування, налаштування й експлуатації автоматизованих систем керування електроприводами, а отже, і в підготовці фахівців у цій галузі. Фахівець має знати основні положення теорії мікропроцесорних систем та мікро-ЕОМ, вміти працювати з мікропроцесорною технікою та мікро-ЕОМ, складати алгоритми і розробляти програми й математичні моделі.

Для створення цифрових та цифроаналогових систем керування електроприводами БНДІЕлектропривод розробив уніфіковану блокову систему регуляторів УБСР-Д і УБСР-ДІ. Як базу пристроїв УБСР-ДІ взято: цифрові

інтегральні схеми серії КІ72 та КІ55 – для виконання арифметичних та логічних операцій, аналогові інтегральні схеми серій КІ24, КІ40, КІ53 та КІ90 – для виконання аналогових операцій, оптронні ключі, герконні реле для узгодження із зовнішніми колами. Будову й характеристики приладів /обчислювальних пристроїв, перетворювачів кодів, ЦАП тощо/, давачів і типових вузлів /пристроїв введення завдання, цифрових інтеграторів, арифметичних пристроїв, цифрових задавачів інтенсивності тощо/ серії УВСП-Д та УВСП-ДІ описано в [35]. Але треба мати на увазі, що за роки після опублікування цієї праці стався значний прогрес у розробці цифрових пристроїв [32; 36; 40].

Важкою цифрою систем є те, що вони складніші й дорожчі порівняно з аналоговими.

7.2. Математичний опис процесів у цифрових системах керування електроприводами на підставі різницьових рівнянь і Z -перетворення

7.2.1. Основні відомості про лінійні різницьові рівняння

Коли крок квантування q малий, то, як уже було зазначено попередню, ЦСКЕП можна описати лінійними різницьовими рівняннями із сталими коефіцієнтами виду

$$a_0 \Delta^n y(t) + a_1 \Delta^{n-1} y(t) + \dots + a_{n-1} \Delta y(t) + a_n \Delta^0 y(t) = \\ = b_0 \Delta^m x(t) + b_1 \Delta^{m-1} x(t) + \dots + b_{m-1} \Delta x(t) + b_m \Delta^0 x(t), \quad /7.10/$$

де $y(t)$ і $x(t)$ – відповідно вихідний /невідома функція/ і вхідний /задана функція/ сигнали елемента чи системи; $a_i, b_i, i = 0, 1, \dots, n, m$ – сталі коефіцієнти, що їх визначають параметри системи; n і m – цілі додатні числа.

Вирази

$$\Delta y(t) = y(t+h) - y(t),$$

$$\Delta x(t) = x(t+h) - x(t),$$

де h – стале число /крок/, називають першими скінченними різницями першого порядку функцій відповідно $y(t)$ і $x(t)$ у точці t .

Вирази

$$\Delta^2 y(t) = \Delta [\Delta y(t)] = [y(t+2h) - y(t+h)] - [y(t+h) - y(t)] = y(t+2h) - 2y(t+h) + y(t);$$

$$\Delta^2 x(t) = \Delta [\Delta x(t)] = x(t+2h) - 2x(t+h) + x(t)$$

називають другими скінченними різницями.

Оператор Δ для дискретних функцій - це своєрідний аналог диференціального оператора $\mathcal{D} = d/dt$ для неперервних функцій. Можна довести, що k -та похідна неперервної функції $f(t)$

$$\frac{d^k f(t)}{dt^k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^k f(t)}{h^k}.$$

Цю формулу можна використати для наближеної заміни лінійного диференціального рівняння лінійним різницевою рівнянням. Покажемо, як її застосовувати, на конкретному прикладі.

Приклад 7.1. Дістати різницеве рівняння з диференціального

$$2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t).$$

Розв'язання. Припустивши для спрощення, що $h=1$, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= y(t+1) - y(t), \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= y(t+2) - 2y(t+1) + y(t). \end{aligned}$$

Підставляючи ці значення в задане диференціальне рівняння, після невеликих перетворень одержуємо

$$2y(t+2) - 4y(t+1) + 2y(t) + 3y(t+1) - 3y(t) = x(t).$$

Різницеве рівняння /7.10/ можна записати ще й так:

$$\begin{aligned} a_0 y[t+nh] + a_1 y[t+(n-1)h] + \dots + a_{n-1} y(t+h) + a_n y(t) = \\ = b_0 x[t+mh] + b_1 x[t+(m-1)h] + \dots + b_{m-1} x(t+h) + b_m x(t). \end{aligned} \quad /7.11/$$

Рівняння /7.10/ - ближчий аналог диференціального рівняння, але рівняння /7.11/ легше використати, і тому його частіше вживають.

Якщо $a_0 = 0$ і $a_n \neq 0$, то число n називають порядком різничевого рівняння. Якщо $a_n = 0$, то /7.II/ можна лінійною заміною незалежної змінної $t' = t + \kappa t$ звести до рівняння нижчого порядку. Цєю властивістю лінійні різницеві рівняння відрізняються від лінійних диференціальних, в яких лінійною заміною незалежної змінної не можна знизити порядок рівняння.

Різницевиими рівняннями описують системи керування з ЦОМ /або мікро-ЕОМ/. ЦОМ у контурі регулювання функціонує так [28]. На її вхід находить послідовність чисел у двійковому коді $x(0)$, $x(T)$, $x(2T)$, ..., $x(\kappa T)$ з періодом квантування за часом T , а на виході, коли вона працює без запізнювання, з'являється з тим самим періодом T послідовність чисел $y(0)$, $y(T)$, $y(2T)$, ..., $y(\kappa T)$. Це означає, що $y(\kappa T)$ машина видає в той самий момент часу κT , коли на її вхід надійшло значення $x(\kappa T)$. Різницеве рівняння ЦОМ, коли програма лінійна і $T = 1$ та $m = n$,

$$a_0 y(\kappa) + a_1 y(\kappa-1) + \dots + a_{n-1} y(\kappa-n+1) + a_n y(\kappa-n) = \\ = b_0 x(\kappa) + b_1 x(\kappa-1) + \dots + b_n x(\kappa-n). \quad /7.12/$$

Рівняння /7.12/ виражає той факт, що поточне значення вихідного сигналу ЦОМ $y(\kappa)$ машина розраховує як лінійну комбінацію поточного значення вхідного сигналу $x(\kappa)$, n минулих його значень $x(\kappa-n)$ і n минулих значень самого вихідного сигналу $y(\kappa-n)$ /усі ці значення зберігають в пам'яті ЦОМ/.

З теорії відомо, що до аргументів усіх членів різничевого рівняння можна подати будь-яке ціле число. Це спричинить лише зміну початку відліку дискретного часу. Бявши n як таке число, перейдемо від /7.12/ до різничевого рівняння виду

$$a_0 y(\kappa+n) + a_1 y(\kappa+n-1) + \dots + a_{n-1} y(\kappa+1) + \\ + a_n y(\kappa) = b_0 x(\kappa+n) + \dots + b_n x(\kappa). \quad /7.13/$$

Коли тепер порівняти /7.13/ з /7.II/, то неважко помітити, що /7.13/ можна одержати з /7.II/, припустивши, що в ньому $t = \kappa t$ /або $T = 1$, $t = \kappa$ і $\kappa = 1$./

Розглянуті рівняння, і зокрема /7.II/ та /7.13/, - це лінійні різницеві рівняння із сталими коефіцієнтами. Лінійні вони тому, що всі члени лівої частини - лінійні функції ординат вихідної послідовності $y(\kappa)$. Термін "різницеве" походить від того, що прирости функцій $y(t)$ та $x(t)$ характеризуються скінченними різницями дискретних орди-

нат $\Delta y(k), \Delta^2 y(k), \dots, \Delta x(k), \Delta^2 x(k)$. Методи розв'язання лінійних різницьових рівнянь викладено в підрозд. 7.2.7.

7.2.2. Дискретне перетворення Лапласа

Неперервну функцію часу $f(t)$ в функцію комплексної змінної $F(p)$ перетворюють за допомогою одностороннього перетворення Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad /7.14/$$

де $p = \sigma + j\omega$ - комплексна змінна.

Дискретний сигнал $f^*(t)$, одержаний квантуванням за часом неперервного сигналу $f(t)$, виконаного за допомогою ідеального квантувача /ключа/, можна подати в такому вигляді [26]:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) = f(t) \delta_T(t), \quad /7.15/$$

де $f(t)$ - вхідний сигнал квантувача; T - період квантування сигналу $f(t)$ за часом, $k = 0, 1, 2, \dots$. Вихід ідеального квантувача являє собою послідовність імпульсів, площа яких дорівнює значенню вхідного сигналу у відповідні моменти часу $t = kT$ замикання ключа /рис.7.17/.

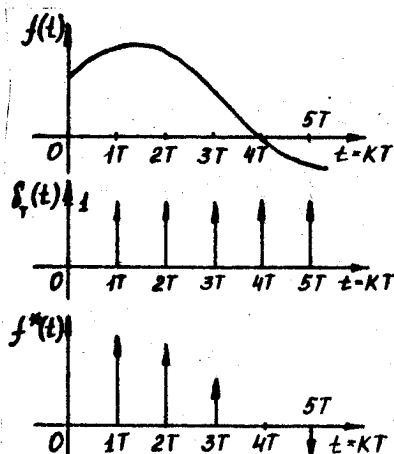


Рис. 7.17. Сигнали ідеального квантувача: а - вхідний; б - несучий; в - вихідний $f^*(t) = f(t) \delta_T(t)$

(Оскільки, за означенням, дельта-функція $\delta_T(t)$ має нульову тривалість, нескінченну амплітуду і одиничну площу, то імпульси $\delta_T(t)$ на рис. 7.17 зображено стрілками, одинична довжина яких відповідає площі імпульсів.

Застосуємо до /7.15/ перетворення /7.14/

$$\begin{aligned} F^*(p) &= \mathcal{L} [f^*(t)] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTp}, \quad /7.16/ \end{aligned}$$

де $\mathcal{L}$ - оператор перетворення Лапласа.

Вираз /7.16/ називають дискретним перетворенням Лапласа /ДПЛ/. Порівнявши /7.14/

з /7.15/, бачимо, що ДПЛ рихопить із звичайного /неперервного/ перетворення внаслідок заміни в останньому інтеграла нескінченною сумою і неперервного часу t дискретним: $t = kT$.

Основні властивості ДПЛ:

1. Оскільки ДПЛ визначає зв'язок між $F^*(p)$ і $f(t)$ у момент часу $t = kT$, то різним часовим функціям $f(t)$, які збігаються одна з одною в момент часу $t = kT$, відповідатиме одне й те саме $F^*(p)$. Отже, за $F^*(p)$ не можна однозначно відновити функцію $f(t)$ для будь-якого значення її аргументу t .

2. Незавжди довести, що $F^*(p)$ є періодична функція вздовж уявної осі $j\omega$ комплексної площини p з періодом $\omega_k = 2\pi/T$, тобто $F^*(p + j\omega_k) = F^*(p)$, де $\gamma = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Періодичність ДПЛ спричинює те, що площина p , зображена на рис. 7.18, складається з нескінченної кількості періодичних смуг.

Смугу між $\omega = -\omega_k/2$ і $\omega = \omega_k/2$ називають основною, а решту - доплатковими. Доплаткові смуги розташовані в діапазоні від $-\omega_k/2$ по $-3\omega_k/2$, від $-3\omega_k/2$ до $-5\omega_k/2$ і т.д. для від'ємних частот і від $\omega_k/2$ до $3\omega_k/2$ і т.д. для додатних частот.

3. Функція $F^*(p)$ ірраціональна відносно p , бо /7.16/ містить множник e^{-pT} . Отже, $F^*(p)$ міститиме як у чисельнику, так і в знаменнику члени з множителем e^{-pT} , не властиві більшості функцій безперервних систем.

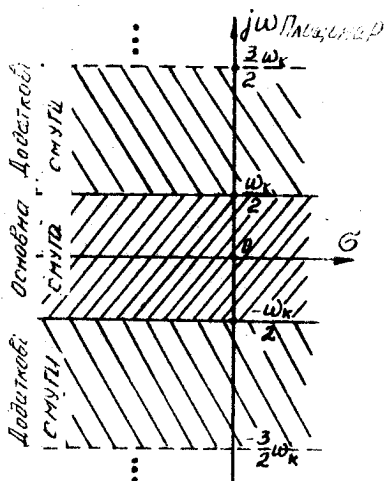


Рис. 7.18. Періодичні смуги на p -площині

7.2.3. $\mathcal{Z}$ -перетворення

Зв'язок між комплексними змінними $\mathcal{Z}$ і p вибирають так:

$$\mathcal{Z} = e^{pT} \quad /7.17/$$

Розв'язуючи /7.17/ відносно p , знаходимо

$$p = \frac{1}{T} \ln \mathcal{Z} \quad /7.18/$$

Підставивши /7.18/ у /7.16/, дістанемо

$$\mathcal{F}^*[p = \frac{1}{T} \ln z] = \mathcal{F}(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} f(\kappa T) z^{-\kappa}, \quad /7.19/$$

Вираз /7.19/ називають z -перетворенням функції $f(t)$. Згідно з /7.16/ та /7.19/ можна записати

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z) &= [\text{перетворення Лапласа } f^*(t)]_{p = \frac{1}{T} \ln z} = \\ &= [\mathcal{F}^*(p)]_{p = \frac{1}{T} \ln z}. \end{aligned} \quad /7.20/$$

Рівняння /7.19/ визначає $\mathcal{F}(z)$ тільки для тих z , для яких нескінченний ряд збігається. Для інших z $\mathcal{F}(z)$ визначають на підставі принципу аналітичного продовження.

Основні властивості z -перетворення:

1/ для існування $\mathcal{F}(z)$ необхідно, щоб функція $f(t)$ була визначена при всіх $t = \kappa T$ / $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ /;

2/ вираз $\mathcal{F}(z)$ збігається абсолютно, коли $|z| > C$, де C - радіус збіжності;

3/ функція $\mathcal{F}(z)$, як впливає з /7.19/, раціональна відносно комплексної змінної z ;

4/ для будь-якої функції $f(t)$, що має перетворення Лапласа, існує також і z -перетворення;

5/ одній і тій самій функції $\mathcal{F}(z)$ відповідає незліченна множина часу функцій $f(t)$, які збігаються в моменти часу $t = \kappa T$; $\mathcal{F}(z)$ не містить інформації про значення між моментами квантування. Для вивчення поведінки часової функції $f(t)$ між цими моментами розроблено низку методів, наприклад метод модифікованого z -перетворення [26; 41];

6/ перетворення $z = e^{pT}$ відображає всю ліву півплощину комплексної площини p , яка складається з незліченної множини смуг, усеїдину круга з одиничним радіусом комплексної площини z з центром у початку координат /рис. 7.19/ [26; II];

7/ властивість лінійності полягає в тому, що

$$\mathcal{J}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{J}[f_1(t)] + \mathcal{J}[f_2(t)]; \quad /7.21/$$

8/ множення на константу

$$\mathcal{J}[a f(t)] = a \mathcal{J}[f(t)] = a \mathcal{F}(z), \quad /7.22/$$

де a - константа;

9/ зсув на часовій ділянці. Якщо $f(t)$ має $\mathcal{Z}$ -перетворення $F(z)$, то

$$\mathcal{Z}[f(t - \pi T)] = z^n F(z), \quad /7.23/$$

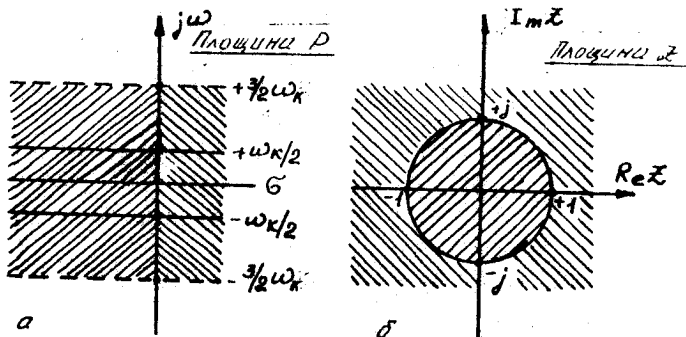


Рис. 7.19. Відображення основної й додаткових смуг площини ρ /а/ на площину z /б/ за допомогою перетворення $z = e^{sT}$

У /7.23/ зроблено припущення, що $f(t)$ дорівнює нулю, коли $t < 0$;

$$\mathcal{Z}[f(t + \pi T)] = z^n \left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{-k} \right], \quad /7.24/$$

де n - ціле додатне число.

Властивості /7.23/ та /7.24/ мають важливе значення для знаходження зв'язків між різницевими рівняннями і $\mathcal{Z}$ -переданими функціями. Звичайно теорему /7.23/ називають зсувом на часовій ділянці назад /ліворуч/, а /7.24/ - уперед /праворуч/;

ІО/ $\mathcal{Z}$ -перетворення не залежить від періоду квантування T . Згідно з /7.19/

$$\mathcal{Z}[f(t/T)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}. \quad /7.25/$$

Ця властивість стає в нагоді під час знаходження оберненого $\mathcal{Z}$ -перетворення за допомогою розкладу $F(z)$ на елементарні дроби, коли наявні таблиці $\mathcal{Z}$ -перетворень складено для $T = 1$.

Процедура знаходження $\mathcal{Z}$ -перетворення $F(z)$ неперервної функції $f(t)$ складається з таких трьох етапів: визначення $f^*(t)$ як вихідного сигналу ідеального квантувача, що його вхідним сигналом є $f(t)$, визначення функції $F^*(p) = \mathcal{L}[f^*(t)]$ відповідно до /7.16/; визначення $F(z)$ заміном в $F^*(p)$ e^{pT} на z .

$\mathcal{Z}$ -Перетворення функції $f(t)$ можна визначати безпосередньо за /7.19/. Ця функція незручна тим, що є нескінченним рядом, а не ланкою еквівалентною функцією, вираженою в компактній формі. Проте коли ряд збігається, то $F(z)$ можна виразити в комплексній формі.

Приклад 7.2. Визначити $\mathcal{Z}$ -перетворення одиначної східчастої функції $1(t)$, коли $t > 0$.

Розв'язання. Згідно з викладеною методикою знаходимо:

1/ функції $f^*(t)$ на виході ідеального квантувача:

$$f^*(t) = 1 \cdot \delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT); \quad /7.26/$$

2/ функції $F^*(p)$ шляхом застосування перетворення Лапласа до обох частин /7.26/

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTp}. \quad /7.27/$$

Ряд /7.27/ збігається для $|e^{-Tp}| < 1$. Щоб виразити цей нескінченний ряд у компактній формі, помножимо обидві частини /7.27/ на e^{-Tp} і віднімемо результат з /7.27/. Тоді одержимо

$$F^*(p) = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \quad \text{для } |e^{-Tp}| < 1; \quad /7.28/$$

3/ замінивши в /7.28/ e^{-Tp} на z , дістанемо

$$F(z) = \mathcal{Z}[1(t)] = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

Цей вираз справджується для $|z^{-1}| < 1$ або $|z| > 1$.

Під час аналізу цифрових систем іноді знаходять $F(z)$ за відомих перетворенням Лапласа $F(p)$, а не за $f(t)$. Цю задачу розв'язують на підставі використання теореми про лишки [13].

Використання цього методу дає змогу визначити $F(z)$ в замкненій формі, не обчислюючи суми нескінченного ряду.

В інженерній практиці дуже часто для знаходження $F(z)$ за $f(t)$ користуються таблицями z -перетворень [7; 19]. У табл. 7.2 наведено низку функцій $F(z)$ і перетворення Лапласа $F(p)$, що їм відповідають, для деяких, найчастіше вживаних функцій $f(t)$.

Таблиця 7.2

Перетворення Лапласа $F(p)$ і z -перетворення деяких часових функцій $f(t)$

Функція $f(t)$	Перетворення Лапласа $F(p)$	z -перетворення $F(z)$	Ділянки збіжності
$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
t^2	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2 z (z+1)}{2(z-1)^3}$	$ z > 1$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{z}{z-e^{\alpha T}}$	$ z > e^{\alpha T}$
$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$\frac{(1-e^{-\alpha T})z}{(z-1)(z-e^{-\alpha T})}$	$ z > 1$

7.2.5. Обернене z -перетворення

Процес знаходження послідовності $f(kT)$ у моменти квантування $t=kT$ за заданою функцією $F(z)$ називають оберненим z -перетворенням.

Обернене z -перетворення звичайно позначають так:

$$f(kT) = z^{-1} [F(z)] - \text{обернене перетворення } F(z). \quad /7.29/$$

Треба підкреслити ще раз, що обернене z -перетворення неперервної функції $f(t)$ неоднозначне. Коректний результат оберненого пере-

творення функції $F(z)$ є $f(\kappa T)$, який дорівнює $f(t)$ тільки в моменти квантування $t = \kappa T$.

Обернене перетворення можна визначити трьома методами:

1/ на підставі використання формули обернення має вигляд [13]

$$f(\kappa T) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{\kappa-1} dz, \quad /7.30/$$

де Γ - замкнений контур на z -площині /який є звичайно колом/, що вміщує всі особливі точки $F(z)z^{\kappa-1}$. Обчислюють $f(\kappa T)$ на підставі теореми про лишки;

2/ на підставі розвинення $F(z)$ у степеневий ряд.

Формулу /7.19/ можна переписати так:

$$F(z) = f(0)z^0 + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots + f(\kappa T)z^{-\kappa}. \quad /7.31/$$

Із /7.31/ випливає, що коефіцієнти цього ряду відповідають значенням $f(t)$ у моменти квантування $t(\kappa T)$.

Щоб визначити $f(\kappa T)$, треба чисельник та знаменник $F(z)$ записати за зростаючими степенями (z^{-1}) і поділити чисельник на знаменник. Цей метод часто застосовують в інженерній практиці;

3/ на підставі використання таблиць z -перетворень.

Цей метод ґрунтується на розкладі $F(z)/z$ на суму елементарних дробів і подальшому застосуванні таблиць z -перетворень до кожного члена. Оскільки таблиці z -перетворень у чисельнику містять z , то на прості дробі зручніше розкладати функцію $F(z)/z$. Після розкладання обидві частини виразу $F(z)/z$ множать на z для одержання $F(z)$.

7.2.6. Перетворення різницевого рівняння на алгебричні.

Імпульсна передавна функція

Різницеві рівняння, що описують процеси на часовій ділянці, можна перетворити в комплексну діянку або, як кажуть, у діянку z -зображень. Для цього необхідно скористатися теоремами z -перетворення /7.23/ та /7.24/ про зсув на часовій ділянці. Застосовуючи /7.23/ до кожного члена лівої й правої частин різницевого рівняння /7.12/, дістаємо:

$$\begin{aligned} [a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}] y(z) = \\ = [\delta_0 + \delta_1 z^{-1} + \delta_2 z^{-2} + \dots + \delta_n z^{-n}] x(z). \end{aligned} \quad /7.32/$$

Рівняння /7.32/ алгебричне. За ним можна визначити імпульсну /дискретну, z -передавну/ функцію цифрової системи як z -перетворення вихідного сигналу $y(z)$ до z -перетворення вхідного сигналу $x(z)$ за нульових початкових умов, тобто

$$K(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad /7.33/$$

Імпульсну передавну функцію $K(z)$ можна фізично реалізувати, коли нескінченний ряд $K(z) = K(0) z^0 + K(1) z^{-1} + \dots$, одержаний діленням полінома чисельника $B(z^{-1})$ на поліном знаменника $A(z^{-1})$, не містить членів з додатними степенями z . Наявність хоча б одного такого члена означає, що вихідний сигнал випереджає вхідний і, отже, порушується діалектичний закон причинності. Звідси знаходимо такі умови фізичної реалізованості: по-перше, коли $b_0 \neq 0$, то $a_0 \neq 0$, коли $b_1 \neq 0$, то $a_1 \neq 0$ і т.д.; по-друге, степінь n полінома $B(z^{-1})$ має дорівнювати, як у виразі /7.33/, або не перевищувати степеня n полінома $A(z^{-1})$, тобто $m \leq n$.

Так само, застосовуючи до /7.13/ формулу /7.24/ і враховуючи нульові початкові умови, дістаємо імпульсну передавну функцію як відношення поліномів $B(z)$ і $A(z)$ з додатними степенями z , а саме

$$K(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{b_n + b_{n-1} z + \dots + b_0 z^n}{a_n + a_{n-1} z + \dots + a_0 z^n} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad /7.34/$$

Коли в /7.34/ кожен член $B(z)$ і $A(z)$ поділити на z^n , то в цьому випадку буде одержано попередню структуру імпульсної передавної функції у вигляді /7.33/.

7.2.7. Розв'язання різницевих рівнянь за допомогою z -перетворення

В інженерній практиці найчастіше застосовують методи розв'язання різницевих рівнянь, які ґрунтуються на використанні z -перетворення. Алгоритм розв'язання в цьому разі такий: по-перше, за різницеvim рівнянням знаходять імпульсну передавну функцію цифрової системи, наприклад у вигляді /7.33/; по-друге, знаходять z -перетворення вхідної дії $x(z)$; по-третє, за виразом $y(z) = K(z) x(z)$ з уже визначеними $K(z)$ та $x(z)$ знаходять z -зображення вихідного сигналу $y(z)$ і за ним будь-яким з трьох основних способів, викладених у п. 7.2.5,

переходять від $y(x)$ до $y(xT)$. Числовий приклад визначення перехідної функції цифрового регулятора швидкості наведено в підрозд. 7.4.

Інший спосіб розв'язання різницьових рівнянь полягає в знаходженні за ними дискретних рівнянь стану, а потім від цих рівнянь переходять до знаходження вихідного сигналу $y(xT)$. Такий спосіб розв'язання викладено в п. 7.3.2.

7.2.8. Імпульсні передавні функції

розімкненої та замкнутої систем і похибки

Звичайно цифрові СКЕП будують за принципом регулювання за відхиленням, і, отже, вони є системи з від'ємним зворотним зв'язком /рис. 7.20/. У зв'язку з цим доцільно визначити імпульсні передавні функції розімкненої $W(x)$ та замкнутої $\Phi(x)$ систем і похибки $E(x)$.

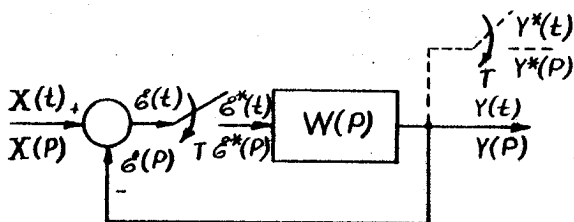


Рис. 7.20. Замкнена лінійна дискретна система керування

Можна строго довести [II], що основні зв'язки між $W(x)$, $\Phi(x)$ та $E(x)$ для систем з одиничним зворотним зв'язком /див. рис. 7.20/ такі ж самі, як і для неперервних систем, а саме:

$$W(x) = \frac{y(x)}{e(x)} = \frac{b_0 + b_1 x^{-1} + \dots + b_m x^{-m}}{a_0 + a_1 x^{-1} + \dots + a_n x^{-n}} = \frac{B(x^{-1})}{A(x^{-1})}; \quad /7.35/$$

$$\Phi(x) = \frac{y(x)}{x(x)} = \frac{b_0 + b_1 x^{-1} + \dots + b_m x^{-m}}{c_0 + c_1 x^{-1} + \dots + c_n x^{-n}} = \frac{B(x^{-1})}{C(x^{-1})}, \quad /7.36/$$

де $C(x^{-1}) = A(x^{-1}) + B(x^{-1})$ - характеристичний поліном замкнутої системи;

$$E(x) = \frac{e(x)}{x(x)} = \frac{a_0 + a_1 x^{-1} + \dots + a_n x^{-n}}{c_0 + c_1 x^{-1} + \dots + c_n x^{-n}} = \frac{A(x^{-1})}{C(x^{-1})}. \quad /7.37/$$

Треба зазначити, що вихідний сигнал $y(t)$ у схемі на рис. 7.20 є неперервна функція, а сигнал $y^*(p)$, так само, як і сигнал $y(x)$, містить інформацію тільки в дискретні моменти часу $t = kT$. Аби підкреслити дискретність вихідного сигналу, на виході системи пунктиром зображено фіктивний ключ з періодом замикання T .

Вивчаючи принципи побудови ЦЖЕН, ми зазначали, що неперервну лінійну частину системи /об'єкт керування/ з цифровою спрягають за допомогою ЦАП /див. рис. 7.9/. Вихідним елементом ПЕЗ є фіксатор нульового порядку. У зв'язку з викладеним доцільно визначити $\mathcal{Z}$ -передаткову функцію /ЗПФ/ послідовного з'єднання ідеального пристрою ПЕЗ /див. рис. 7.7/ і неперервної лінійної частини системи з передатковою функцією $G(p)$.

Визначимо спочатку передаткову функцію фіксатора нульового порядку, який перетворює входні імпульси в послідовність прямокутних імпульсів тривалістю T . Вихідний і входний сигнали ідеального фіксатора нульового порядку зображено на рис. 7.21. Імпульс $x_\phi(t)$ на виході /наприклад, з одиничною висотою/ можна сформувати як різницю одиничних функцій $X(t)$ і $X(t-T)$, зсунутих одна відносно одної на один період квантування T , тобто

$$x_\phi(t) = x(t) - x(t-T).$$

Перетворення Лапласа сигналу $x_\phi(t)$

$$X_\phi(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pT} = \frac{1 - e^{-pT}}{p}. \quad /7.38/$$

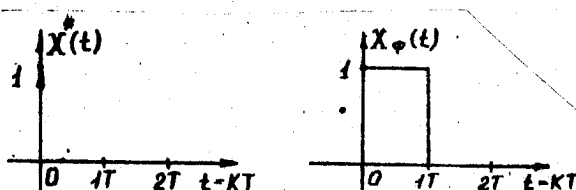


Рис. 7.21. Одиничний імпульс на вході ідеального фіксатора нульового порядку /а/ і прямокутний імпульс /реакція/ на його виході /б/

Оскільки перетворення Лапласа δ -функції на вході фіксатора дорівнює одиниці, то, отже, передавну функцію фіксатора нульового порядку, як відношення перетворених за Лапласом вихідного сигналу до вхідного за нульових початкових умов, визначає /7.38/.

Тоді ЗП розімкненої системи

$$W(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \mathcal{Z} [X_p(p) G(p)] = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-Tp}}{p} G(p) \right].$$

Відповідно до теореми про зсув на часовій ділянці /7.23/ z -перетворення чисельника передавної функції фіксатора можна винести за дужки. Отже,

$$W(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{G(p)}{p} \right]. \quad /7.39/$$

Передавні функції /7.36/ та /7.37/ записано для випадку одиничного зворотного зв'язку. Якщо коло зворотного зв'язку замкненої ЦСКЕП містить динамічну ланку з передавною функцією $H(p)$, не відокремлену від ланки $G(p)$ квантувачем /рис. 7.22/, то в цьому разі

$$\Phi(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{W(z)}{1 + WH(z)}. \quad /7.40/$$

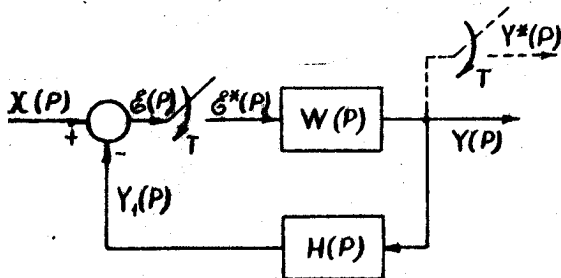


Рис. 7.22. Структурна схема замкненої цифрової системи з неодиначним зворотним зв'язком

Вираз $WH(z)$ у /7.40/ означає, що треба знайти спочатку вислідну передавну функцію $G(p)H(p)$ і потім узяти від неї z -перетворення, тобто $WH(z) \in \mathcal{Z} [G(p)H(p)]$.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad /7.46/$$

і рівняння виходу

$$y(k) = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad /7.47/$$

або

$$\overline{x(k+1)} = A \overline{x(k)} + \mathcal{B} u(k); \quad /7.48/$$

$$y(k) = C \overline{x(k)}, \quad /7.49/$$

де вектор стану $\overline{x(k)}$, динамічна матриця A , матриці входу $\mathcal{B}$ та виходу C

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]; \quad \overline{x(k)} = [x_1(k) \ x_2(k) \ \dots \ x_n(k)]^T.$$

Рівняння /7.48/ і /7.49/ називають дискретними /різницеvими/ рівняннями стану, записаними в стандартній формі.

З виразу /7.42/ знаходимо

$$y(z) = \frac{1}{a_n + a_{n-1}z + \dots + z^n} u(z) = x_1(z). \quad /7.50/$$

За /7.43/-/7.45/ складено схему аналогового моделювання цифрових систем /рис. 7.23/. Позначення z^{-1} у середині динамічних блоків на цей

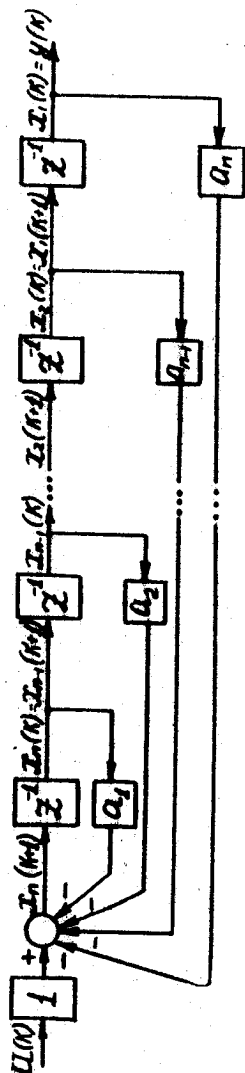


Рис. 7.23. Структурна схема моделювання цифрової системи, яка відповідає рівнянням стану /7.43/, /7.44/, /7.45/

схемі означає зсув /затримку/ на один період квантування між вихідними та входними змінними. Іноді, особливо коли період квантування $T \neq 1$ [13], усередині блоків замість z^{-1} записують "ланка затримки T ". Ланка затримки для різницевого рівняння у певному розумінні подібна до ідеальної інтегрувальної ланки /рис. 7.24/. Її вхідна величина

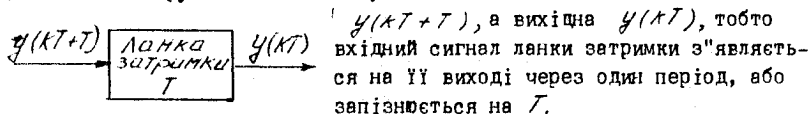


Рис. 7.24. Схема ланки затримки на період T

Приклад 7.3. Для об'єкта керування, що його описує різницеве рівняння $y(kT+2) + ay(kT+1) + by(kT) = u(kT)$, потрібно побудувати схему аналогового моделювання і визначити рівняння стану.

Розв'язання. Побудуємо спочатку схему аналогового моделювання розглянутого об'єкта. Перший етап полягає в зображенні $y(kT+2)$ у вигляді $y(kT+2) = u(kT) - ay(kT+1) - by(kT)$. Члени $y(kT+1)$ і $y(kT)$ одержуємо, як зображено на рис. 7.25, а. Повну схему моделювання /рис. 7.25, б/ одержимо з умови виконання початкового різницевого рівняння. Коли початкові умови задано у вигляді $y(0)$, $y(T)$, то $y(0)$ і $y(T)$ - початкові значення виходів відповідно першої та другої ланок затримки. Через період $y(T)$ з'явиться на виході першої ланки затримки, а через два вихід першої ланки затримки становитиме $y(2T) = u(0) - ay(T) - by(0)$.

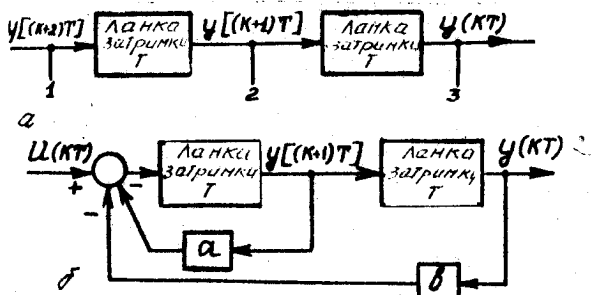


Рис. 7.25. До питання моделювання різницевого рівняння другого порядку /приклад 7.3/

З викладеного випливає, що правила побудови схем моделювання для різницевого рівняння такі ж самі, як і для диференціальних.

Знайдемо тепер рівняння стану. Запровадимо змінні стану:

$$x_1(kT) = y(kT);$$

Тоді

$$x_2(kT) = x_1[(k+1)T] = y[(k+1)T].$$

$$\begin{bmatrix} x_1(kT+T) \\ x_2(kT+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT)$$

$$y(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix},$$

або

$$\overline{x(kT+T)} = A \overline{x(kT)} + b u(kT),$$

$$y(kT) = c \overline{x(kT)} + d u(kT),$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}; \quad \overline{x(kT)} = [x_1(kT) \ x_2(kT)]^T.$$

Розпочнемо розглядати випадок, коли $b_n \neq 1$, $b_0 \neq 0$, $b_i \neq 0$, ..., $b_{n-1} \neq 0$. Тоді рівняння /7.42/ і /7.44/ з урахуванням /7.50/ набувають вигляду

$$y(x) = b_n x_1(x) + b_{n-1} x_2(x) + \dots + b_0 x_n(x) \quad /7.51/$$

або, перейшовши на часову ділянку,

$$y(k) = b_n x_1(k) + b_{n-1} x_2(k+1) + \dots + b_0 x_n(k+n). \quad /7.52/$$

На рис. 7.26 зображено схему аналогового моделювання цифрової системи, складену за /7.44/ та /7.52/. У цьому разі у векторно-матричній формі запису рівнянь стану /7.48/ і виходу /7.49/ матриці A'

та $\mathcal{B}$ не змінюються, а матриця $\mathcal{C}$ набуває вигляду

$$\mathcal{C} = [\mathcal{C}_n \ \mathcal{C}_{n-1} \dots \mathcal{C}_1]. \quad /7.53/$$

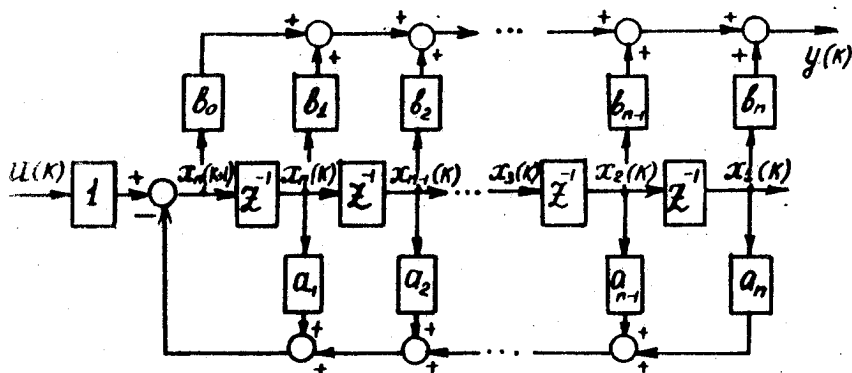


Рис. 7.26. Структурна схема моделювання цифрової системи, яка відповідає рівнянням стану /7.44/, /7.52/

Нарешті, розглянемо найзагальніший випадок, коли всі коефіцієнти $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ у /7.41/ не дорівнюють нулеві і, крім того, є прямий зв'язок між виходом $y(k)$ та входом $U(k)$.

Визначивши $x_n(k+1)$ з /7.45/ і підставивши його в /7.52/, дістанемо

$$y(k) = (\mathcal{C}_n - \mathcal{C}_0 a_n) x_1(k) + (\mathcal{C}_{n-1} - \mathcal{C}_0 a_{n-1}) x_2(k) + \dots + (\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_0 a_1) x_n(k) + \mathcal{C}_0 U(k). \quad /7.54/$$

Тоді узагальнене рівняння виходу можна записати так:

$$y(k) = [(\mathcal{C}_n - \mathcal{C}_0 a_n) \dots (\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_0 a_1)] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \mathcal{C}_0 U(k)$$

або

$$y(k) = \mathcal{C} \overline{x(k)} + \mathcal{C}_0 U(k), \quad /7.55/$$

де матриця $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$.

За рівняннями стану /7.48/ і виходу /7.55/ на рис. 7.27 побудовано структурну схему цифрової системи з одним входом і одним виходом.

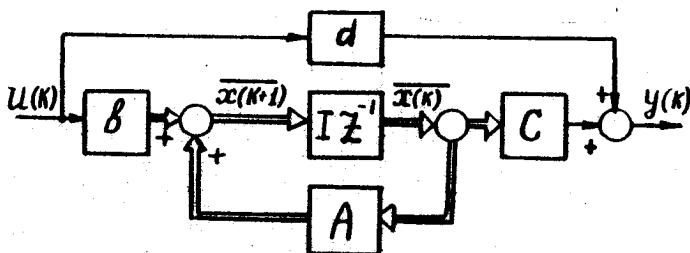


Рис. 7.27. Структурна схема цифрової системи з одним входом і одним виходом, яка відповідає рівнянням стану /7.48/ і виходу /7.55/

Приклад 7.4. Відома імпульсна передавна функція об'єкта керування електроприводом разом з коригувальним пристроєм

$$K(z) = \frac{2 + 3,6z^{-1} - 0,8z^{-2}}{1 + 0,7z^{-1} + 0,1z^{-2}} = \frac{y(z)}{U(z)}.$$

Потрібно визначити рівняння стану.

Розв'язання. З виразу для $K(z)$ знаходимо різницеве рівняння

$$0,1y(k-2) + 0,7y(k-1) + y(k) = -0,8U(k-2) + 3,6U(k-1) + 2U(k).$$

Запровадивши змінні стану $x_1(k)$ та $x_2(k)$, після відповідних перетворень різничевого рівняння одержуємо:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,1 & -0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(k);$$

$$y(k) = [-1 \ 2 \ 2] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + 2U(k)$$

або

$$\overline{x(k+1)} = A \overline{x(k)} + B U(k);$$

$$y(k) = C \overline{x(k)} + d U(k),$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,1 & -0,7 \end{bmatrix}; \quad \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [-1 \ 2 \ 2]; \quad \alpha = 2.$$

7.3.2. Розв'язання рівнянь стану в дискретному часі

Наведемо деякі способи розв'язання різницьових рівнянь стану:

$$\overline{x(k+1)} = A \overline{x(k)} + \theta u(k); \quad /7.56/$$

$$y(k) = C \overline{x(k)} + \alpha u(k), \quad /7.57/$$

де $u(k)$ і $y(k)$ - скаляри.

Розв'язання на часовій ділянці. Цей спосіб полягає в побудові рекурентної процедури безпосереднього розв'язання різницьових рівнянь /7.56/ та /7.57/ для заданої послідовності вхідних сигналів $u(k)$ і заданого вектора початкових умов $\overline{x(0)}$. Цю процедуру описують співвідношеннями

$$x(1) = A x(0) + \theta u(0);$$

$$x(2) = A x(1) + \theta u(1) = A^2 x(0) + A \theta u(0) + \theta u(1);$$

$$x(3) = A x(2) + \theta u(2) = A^3 x(0) + A^2 \theta u(0) + A \theta u(1) + \theta u(2); \quad /7.58/$$

$$\vdots$$

$$\overline{x(k)} = A^k \overline{x(0)} + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} \theta u(i),$$

де $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_k$.

Перший член у /7.58/ - це розв'язок однорідного різницьового рівняння стану, який характеризує вільні рухи системи, спричинені нульовими початковими умовами, а другий - частинний розв'язок /сума згортки/, що характеризує і вільні, і вимушені рухи системи, спричинені вхідною дією $u(k)$.

Вихідний сигнал $y(k)$ обчислюють з /7.57/, урахувавши одержаний розв'язок /7.58/ для $\overline{x(k)}$.

Викладеним методом добре розв'язувати різницьові рівняння високого порядку на ЕОМ.

Розв'язання на частотній ділянці. Для цифрових систем з одним входом і одним виходом найпростіше скористатися методом z -перетворення.

Запишемо z -перетворення для вектора стану:

$$\mathcal{Z} \{ \overline{x(k)} \} = \overline{x(z)}.$$

Відповідно до теореми про зсув на часовій ділянці праворуч

$$\mathcal{Z} [\overline{x(k+1)}] = \mathcal{Z} [\overline{x(z)} - \overline{x(0)}].$$

З іншого боку, з /7.56/ випливає, що

$$\mathcal{Z} [\overline{x(z)} - \overline{x(0)}] = A \overline{x(z)} + B U(z) \quad /7.59/$$

або

$$\overline{x(z)} = [zI - A]^{-1} z \overline{x(0)} + [zI - A]^{-1} B U(z). \quad /7.60/$$

Підставивши /7.60/ у /7.57/, дістанемо

$$y(z) = C [zI - A]^{-1} z \overline{x(0)} + \{ C [zI - A]^{-1} B + d \} U(z). \quad /7.61/$$

Застосувавши до /7.61/ будь-який з методів оберненого z -перетворення, знайдемо $y(k)$.

Із /7.61/ за нульових початкових умов $\overline{x(0)} = [0]$ одержимо вираз для імпульсної передавної функції

$$K(z) = \frac{y(z)}{U(z)} = C [zI - A]^{-1} B + d = \frac{C \operatorname{adj}[zI - A] B + d \det[zI - A]}{\det[zI - A]}. \quad /7.62/$$

Знаменник одержаної передавної функції $K(z)$ утворює ліву частину характеристичного рівняння системи

$$\det [zI - A] = 0. \quad /7.63/$$

Зауважимо, що вираз /7.62/ справджується й для багатовимірних цифрових систем, коли вимірності матриць B /позначають B / та C і скалярів $y(k)$ та $u(k)$ замінити відповідними векторами.

Приклад 7.5. Для цифрової системи, що її описують дискретні рівняння стану /7.56/ та /7.57/, в яких задано матриці A, B і C :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0],$$

і початкові умови $y(0), y(1)$, потрібно визначити $y(k)$.

Розв'язання. Щоб знайти $y(k)$, спочатку визначимо $y(z)$, скориставшись для цього /7.61/. У цьому випадку

$$[zI - A] = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 6 & z+5 \end{bmatrix},$$

а тому

$$[zI - A]^{-1} = \frac{\text{Adj}[zI - A]}{\det[zI - A]} = \frac{\begin{bmatrix} z+5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix}}{(z+2)(z+3)}.$$

Вважаючи вхідну дію $u(k)$ за одиничну, z -зображення якої дорівнює $z/(z-1)$, і підставляючи цей вираз, так само, як і одержані раніше вирази для матриць $[zI - A]$ та $[zI - A]^{-1}$, у формулу /7.61/, після нескладних перетворень дістаємо:

$$y(z) = \frac{z(z+5)}{(z+2)(z+3)} y(0) + \frac{z}{(z+2)(z+3)} y(1) + \frac{z}{(z-1)(z+2)(z+3)}$$

або

$$y(z) = \frac{z/(z-1) + z[z y(0) + y(1) + 5y(0)]}{(z+2)(z+3)}.$$

Полюси функції $y(z)$ дорівнюють $z = 1$; $z = -2$; $z = -3$.

Щоб обчислити $y(k)$, скористаймося теоремою про лишки:

$$y(k) = \sum \text{вычетов } y(z) z^{k-1} \text{ в полюсах } y(z);$$

$$R_1 = (z-1) y(z) z^{k-1} \Big|_{z=1} = 1/12;$$

$$R_2 = (z+2) y(z) z^{k-1} \Big|_{z=-2} = \left[-\frac{1}{3} + 3y(0) + y(1)\right] (-2)^k;$$

$$R_3 = (z+3) y(z) z^{k-1} \Big|_{z=-3} = \left[\frac{1}{4} - 2y(0) - y(1)\right] (-3)^k.$$

Тоді загальний розв'язок матиме вигляд

$$y(k) = [3(-2)^k - 2(-3)^k] y(0) + [(-2)^k - (-3)^k] y(1) + \left[\frac{1}{4}(-3)^k - \frac{1}{3}(-2)^k - y(1)\right] (-3)^k. \quad /7.64/$$

Задаючи у /7.64/ значення $k = 0, 1, 2, \dots$, дістаємо значення ординат вихідного сигналу $y(k)$ в моменти часу $t = k$. За нульових

початкових умов, тобто коли $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, матимемо дискретну перехідну функцію $h(k)$.

Основні відомості про алгоритми числового розв'язання рівнянь стану. Точно розв'язати рівняння стану методами, розглянутими попереду, можна тільки тоді, коли матриця A має невелику вимірність /практично коли $n \leq 3$ /. Якщо ж $n > 3$, то доцільно користуватися числовими методами розв'язання. Зараз з огляду на широке впровадження в інженерну практику ЕОМ та персональних комп'ютерів розроблено досить багато алгоритмів і програм розв'язання диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь стану.

Наведемо короткий опис лише одного числового методу розв'язання дискретних рівнянь стану, який ґрунтується на їх записові через дискретну перехідну матрицю стану $\varphi(kT)$, яку в даному разі визначає нескінченний ряд /2.98/, тобто $\varphi(kT) = e^{AT}$. Питань, пов'язаних з методами числового аналізу й теоретичним обґрунтуванням розглядуваного алгоритму, тут не розглядатимемо.

Розглядуваний алгоритм можна використати для розв'язання як неперервних рівнянь стану /2.84/, /2.85/ після їх зведення до дискретної форми, так і дискретних /різницевих/ рівнянь стану.

Наведемо насамперед спосіб зведення рівняння /2.84/ до різницевого. Припустивши, що в /2.84/ $t_0 = kT$ і $t = (k+1)T$, де $k = 0, 1, 2, \dots$, одержимо:

$$\bar{x}[(k+1)T] = e^{AT} \bar{x}(kT) + e^{A(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\varepsilon} B \bar{u}(\varepsilon) d\varepsilon. \quad /7.65/$$

Треба зауважити, що хоча вираз /7.65/ і описує стан протягом одного інтервалу квантування $kT \leq t \leq (k+1)T$, він після подальших перетворень справджується і для всього інтервалу квантування.

Коли вхідний сигнал $u(t) = 0$, з /7.65/ одержуємо алгоритм розв'язання однорідного рівняння стану $\bar{x}(t) = A \bar{x}(t)$, спричиненого нульовими початковими умовами $\bar{x}(t_0) = \bar{x}(0)$:

$$\bar{x}[(k+1)T] = e^{AT} \bar{x}(kT), \quad /7.66/$$

де матрицю e^{AT} визначає вираз /2.98/.

Формула /7.66/ являє собою рекурентне співвідношення: обчислення $\bar{x}(t)$ в послідовні моменти часу $t = (k+1)T$ можна замінити множенням вектора $\bar{x}(kT)$, одержаного на попередньому кроці, на матри-

що e^{At} . Наприклад, коли задано вектор початкових значень $\overline{x(t_0)} = \overline{x(0)}$, то

$$\text{при } \kappa = 0 \quad x(T) = e^{AT} x(0);$$

$$\text{при } \kappa = 1 \quad x(2T) = e^{AT} x(T);$$

$$\text{при } \kappa = 2 \quad x(3T) = e^{AT} x(2T);$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\text{при } \kappa = n-1 \quad x(nT) = e^{AT} x[(n-1)T].$$

Точність апроксимації $\overline{x}[(\kappa+1)T]$ у точці $t = (\kappa+1)T$, як і матрицевої експоненти e^{AT} , становить $O(T^5)$.

Розглянемо інший спосіб визначення вільного руху, що його визначає алгоритм /7.66/. Коли $\kappa = 0$, $x(T) = e^{AT} x(0)$; коли $\kappa = 1$, $x(2T) = e^{AT} x(T) = e^{AT} e^{AT} x(0) = e^{A^2 T^2} x(0)$; коли $\kappa = n$, $x(nT) = e^{A^n T^n} x(0)$, або, замінивши n на κ , остаточно одержимо

$$\overline{x}(\kappa T) = e^{A \kappa T} \overline{x}(0). \quad /7.67/$$

Під час розрахунків згідно з /7.67/ матрицю $e^{A \kappa T}$ обчислюють для значень $\kappa = 1, 2, 3$ і т.д. Одержані значення $e^{AT}, e^{A^2 T^2}, \dots$, потім множать на сталий заданий вектор $x(0)$ і одержують вектор $x(\kappa T)$. Алгоритм /7.67/ так само, як і /7.66/, часто застосовують на практиці, замінюючи звичайно матрицеву експоненту e^{AT} кількома членами ряду /2.98/. Приміром, для двох перших членів /2.98/

$$\overline{x}(\kappa T) = [I + AT]^{\kappa} \overline{x}(0). \quad /7.68/$$

Якщо матрицеву функцію e^{At} апроксимувати трьома першими членами ряду /2.98/, то

$$\overline{x}(\kappa T) = [I + AT + \frac{1}{2} A^2 T^2]^{\kappa} \overline{x}(0). \quad /7.69/$$

Неважко довести, що алгоритми /7.68/ та /7.69/ можна дістати, коли однорідне диференціальне рівняння стану $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(t_0) = x(0)$ наближено розв'язати, застосувавши формули відповідно прямокутників та трапецій.

У загальному випадку, коли матрицеву експоненту e^{At} апроксимовано μ членами ряду /2.98/, алгоритм розв'язання однорідного рівняння має вигляд

$$\overline{x}(\kappa T) = \left[I + AT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \frac{A^3 T^3}{3!} + \dots + \frac{A^{\mu} T^{\mu}}{\mu!} \right]^{\kappa} \overline{x}(0). \quad /7.70/$$

Розпочнемо тепер розв'язувати неоднорідне рівняння /7.65/. Розглянемо спочатку випадок, коли $U(t)$ - стала /кусково-стала/ на кожному з часових інтервалів, тобто $U(t) = U(kT) = \text{const}$ для $kT \leq t \leq (k+1)T$, де $k = 0, 1, 2, \dots$

Використавши властивість перехідної матриці стану /2.74/, маємо

$$\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau} B \overline{U(\tau)} d\tau = \left[\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau} d\tau \right] B \overline{U(kT)} =$$

$$= \left[-e^{-A\tau} \right]_{kT}^{(k+1)T} A^{-1} B \overline{U(kT)} = \left[-e^{-A(k+1)T} + e^{-AkT} \right] A^{-1} B \overline{U(kT)}.$$

Після цього рівняння /7.65/ набуде такого вигляду:

$$\bar{x}[(k+1)T] = e^{AT} \bar{x}(kT) + [e^{AT} - I] A^{-1} B \overline{U(kT)}, \quad /7.71/$$

що і є шуканим різницевим рівнянням. Зауважимо, що значення $\overline{U(kT)}$ треба брати в моменти часу $kT \neq 0$.

Рівняння /7.71/, що по суті є рекурентна формула, легко розв'язати на ЦОМ. Перший член його правої частини характеризує рух системи за нульового входу, а другий - рух, зумовлений вектором керування $U(kT)$. Ураховуючи, що

$$\bar{y}[(k+1)T] = c \bar{x}[(k+1)T], \quad /7.72/$$

із /7.71/ за нульових початкових умов дістаємо формулу для обчислення перехідної функції:

$$\bar{h}[(k+1)T] = c [e^{AT} - I] A^{-1} B. \quad /7.73/$$

Для обчислення перехідної функції за /7.73/ не потрібно, щоб матриця A була неособлива. Це пов'язано з тим, що фактично обчислюємо e^{AT} підсумовуванням ряду /2.98/. Отже,

$$[e^{AT} - I] A^{-1} = \left[\left(I + AT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \dots \right) - I \right] A^{-1} = IT + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2 T^3}{3!} + \dots \quad /7.74/$$

У /7.74/ обчислювати A^{-1} не потрібно.

Коли в /7.71/ як грубе наближення для e^{At} взяти два члени розкладу, тобто припустити, що $e^{At} \cong I + At$, то дістанемо так звану формулу Ейлера:

$$\bar{x}[(k+1)T] = [I + AT] \bar{x}(kT) + TB \overline{U(kT)}. \quad /7.75/$$

Інші алгоритми числового розв'язання рівнянь стану, і зокрема алгоритм, який ґрунтується на використанні матриці Φ^{At} і виду /2.101/, наведено в [1; 4; 11].

Низку конкретних прикладів застосування числових алгоритмів для розв'язання рівнянь стану привода подано в [11].

7.3.3. Дослідження якості процесів керування в цифровому регуляторі швидкості

Якість процесів у ЦКЕП, так само як і в неперервних СКЕП, містить такі поняття, як стійкість ($A_{\text{зп}}, \zeta_{\text{зп}}$), точність у випадку детермінованих та випадкових дій /динамічні й випадкові похибки/ і якість перехідного процесу ($\sigma\%$, t_p , $t_{n.y}$).

Питання якості процесу керування розглянемо на прикладі цифрового регулятора швидкості /рис. 7.28/. Неперервна частина системи з передавною функцією

$$G(p) = K_v / p(T_{mc}p + 1),$$

де $K_v = K_g R_z / K_{\text{отр}} T_M$ - коефіцієнт підсилення за швидкістю, являє собою послідовне з'єднання передавної функції контуру струму /див. рис. 1.13 та 1.14/, оптимізованого за модульним критерієм /коли $2T_{mc}^2 = 0$ /, і передавної функції механічної частини двигуна постійного струму $K_g R_z / T_M p$. У цифровому контурі вихідний сигнал давача швидкості, так само як і вхідний сигнал системи, оброблюють пристрої вибирання й зберігання. У [11] зроблено докладний висновок і одержано такі дискретні передавні функції розімкненого й замкненого регуляторів швидкості:

$$W(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \mathcal{Z}[W_p(p) G(p)] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{K_v}{p^2(T_{mc}p + 1)}\right] =$$

$$= \frac{(K_v T - K_v T_{mc})z - K_v T_{mc}}{z(z - 1)};$$

$$\Phi(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{\mathcal{Z}[W_p(p) G(p)]}{1 + \mathcal{Z}[W_p(p) G_H(p)]} = \frac{W(z)}{1 + G_H(z)} =$$

$$= \frac{K_v T_{mc} - (K_v T - K_v T_{mc})z}{K_v K_{\text{ш}} T_{mc} + (K_v K_{\text{ш}} T - K_v K_{\text{ш}} T_{mc} - 1)z + z^2}, \quad /7.76/$$

де K_{ω} - коефіцієнт підсилення кола зворотного зв'язку контуру швидкості.

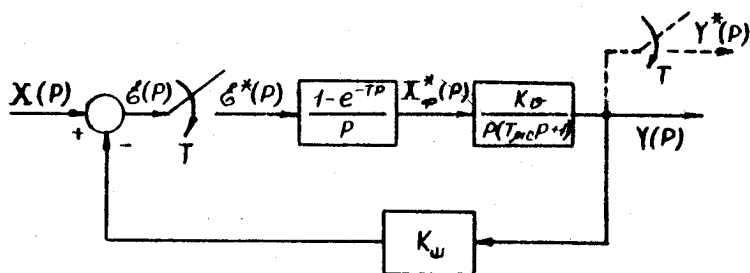


Рис. 7.28. Структурна схема цифрової системи керування кутовою швидкістю обертання електродвигуна постійного струму

Стійкість. Для стійкості замкненої стаціонарної лінійної цифрової системи необхідно й досить, щоб корені характеристичного рівняння замкненої системи лежали всередині круга з одиничним радіусом на z -площині, маючи центр у початку координат /див. властивості z -перетворення/. Коли хоча б один корінь міститься на колі, тобто $|z_i| = 1$, а решта - всередині кола, то в цьому разі система перебуває на межі стійкості. Характеристичним рівнянням є знаменник $\Phi(z)$, тобто $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, де $\alpha = (K_v K_{\omega} T - K_v K_{\omega} T_{nc} - 1)$; $\beta = K_v K_{\omega} T_{nc}$.

У табл. 7.3 наведено результати розрахунку коренів характеристичного рівняння замкненої системи для таких числових значень параметрів: $K_{\omega} = 1$ В·с/рад; $K_v = 5$ с⁻¹; $T_{nc} = 1 \cdot 10^{-3}$ с. З неї випливає, що із зменшенням періоду квантування T стійкість привода підіпсується. Для вибраних значень параметрів граничне значення T_{gr} , за якого система перебуває на межі стійкості, дорівнює приблизно 0,425 с. На стійкість впливають і інші параметри (K_v , T_{nc}) системи. Щоб оцінити стійкість ЦСКЕП, застосовують алгебричні й частотні критерії стійкості [11].

Вплив періоду квантування T
на стійкість цифрового регулятора швидкості

T, c	Характеристичне рівняння $z^2 + az + b = 0$	Корені рівняння замкненої системи z_1, z_2
0,5	$z^2 + 1,495 z + 0,005 = 0$	$z_1 = -0,003352;$ $z_2 = -1,4916.$
0,4	$z^2 + 0,995 z + 0,005 = 0$	$z_1 = -0,0050508;$ $z_2 = -0,98996$
0,3	$z^2 + 0,495 z + 0,005 = 0$	$z_1 = -0,010316;$ $z_2 = -0,48$
0,2	$z^2 - 0,005 z + 0,005 = 0$	$z_{1,2} = 0,025 \pm j 0,070606$

Оцінювання якості перехідного процесу. Якість перехідного процесу цифрових систем ($\sigma\%$, t_p , t_n , y), так само як і неперервних СКСП, оцінюють за перехідною функцією $h(kT)$. Щоб визначити останню, скористаймося широко застосовуваним в інженерній практиці методом ділення многочленів чисельника та знаменника /заздалегідь записаних за оберненими степенями z^{-1} / z -зображення перехідної функції:

$$h(z) = \varphi(z) \frac{z}{z-1},$$

де $z/(z-1)z$ - зображення одиничної вхідної функції.

Унаслідок такого ділення одержимо;

$$h(z) = a_0 z^0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}. \quad /7.77/$$

З іншого боку, за означенням z -перетворення /7.19/, маємо:

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT) z^{-k} = h(0) z^0 + h(1T) z^{-1} + \dots + h(kT) z^{-k} \quad /7.78/$$

Порівнявши вирази /7.77/ та /7.78/, бачимо, що ординати перехідної функції $h(kT)$ в дискретні моменти часу $t = kT$:

$$h(0) = a_0; \quad h(1T) = a_1; \quad h(2T) = a_2, \dots, h(kT) = a_k.$$

Визначимо $h(kT)$ для цифрового регулятора, з метою спрощення й наочності припустивши, що у /7.76/ $T_{мс} = 0$; $K_{ш} = 1$. Тоді

$$\varphi(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{K_{ш}T}{z + (K_{ш}T - 1)};$$

$$h(z^{-1}) = \varphi(z) \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{K_{ш}Tz^{-1}}{(1-K_{ш}T)z^2 + (K_{ш}T-2)z^{-1} + 1}.$$

Результати розвинування в ряд функції $h(z^{-1})$ для різних числових значень параметрів $K_{ш}T$ наведено в табл. 7.4.

Таблиця 7.4

Ординати перехідної функції $h(kT)$
в моменти часу $t = kT$
цифрового регулятора швидкості
для $K_{ш} = 1$ і $T_{мс} = 0$

$K_{ш}T$	$h(z^{-1}) = h_0 z^0 + h_1(1T)z^{-1} + h_2(2T)z^{-2} + h_3(3T)z^{-3} + h_4(4T)z^{-4} + h_5(5T)z^{-5} + \dots$
0,1	$0 \cdot z^0 + 0,1 z^{-1} + 0,199 z^{-2} + 0,297 z^{-3} + 0,394 z^{-4} + 0,49 z^{-5} + \dots$
0,5	$0 \cdot z^0 + 0,5 z^{-1} + 0,75 z^{-2} + 0,875 z^{-3} + 0,9375 z^{-4} + 0,96875 z^{-5} + \dots$
1,0	$0 \cdot z^0 + 1,0 z^{-1} + 1,0 z^{-2} + 1,0 z^{-3} + 1,0 z^{-4} + 1,0 z^{-5} + \dots$
1,5	$0 \cdot z^0 + 1,5 z^{-1} + 0,75 z^{-2} + 1,125 z^{-3} + 0,9375 z^{-4} + 1,0312 z^{-5} + \dots$
2,0	$0 \cdot z^0 + 2,0 z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + 2,0 z^{-3} + 0 \cdot z^{-4} + 2,0 z^{-5} + \dots$
2,2	$0 \cdot z^0 + 2,2 z^{-1} - 0,44 z^{-2} + 2,728 z^{-3} - 1,074 z^{-4} + 3,49 z^{-5} + \dots$

За даними табл. 7.4 на рис. 7.29 побудовано графіки перехідних функцій $h(kT)$ цифрового регулятора швидкості для різних значень параметрів $K_{ш}T$.

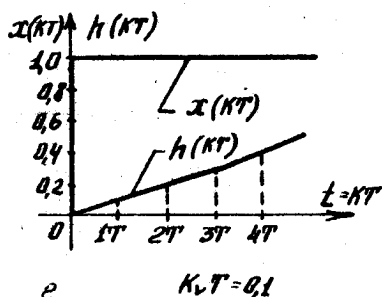
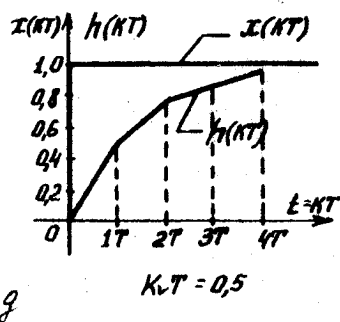
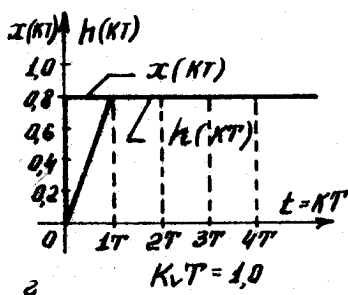
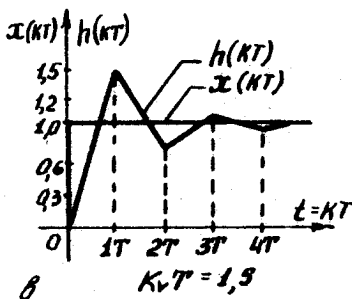
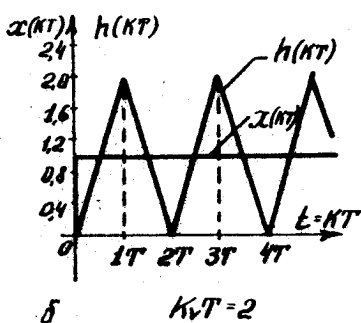
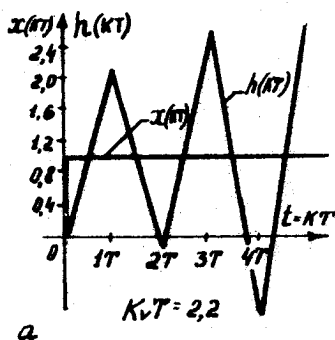


Рис. 7.29. Перехідні функції цифрової системи керування з ЗПФ $\Phi(z) = K_v / (z^2 + (K_v T - 1)z)$ для різних числових значень параметрів: а - $K_v T = 2,2$; б - $K_v T = 2$; в - $K_v T = 1,5$; г - $K_v T = 1$; д - $K_v T = 0,5$; е - $K_v T = 0,1$

Коли $K_v T = 2$, система перебуває на межі стійкості, а коли $K_v T > 2$ - нестійка.

Точність. Точність ЦСКП узвичаєсно оцінювати за динамічною $\varepsilon_d(kT)$ і випадковою $\varepsilon_{вип}(kT)$ похибками. Динамічна похибка в дискретні моменти часу $t = kT$ в усталеному режимі

$$\varepsilon_d(kT) = C_0 x(kT) + C_1 \frac{dx(kT)}{dt} + \frac{C_2}{2!} \frac{d^2 x(kT)}{dt^2} + \dots, \quad /7.79/$$

де $x(kT)$, $\dot{x}(kT)$, $\ddot{x}(kT)$, ... - значення відповідно вхідного сигналу замкненої системи, його першої, другої похідної і т.д. в дискретні моменти часу $t = kT$, а $C_0, C_1, C_2, \dots$ - коефіцієнти похибок, що їх визначають параметри цифрової системи.

Коефіцієнти похибок являють собою коефіцієнти розвинення $E(z)$ в ряд Маклорена за степенями p :

$$C_n = \left[\frac{d^n E(e^{pT})}{dp^n} \right]_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad /7.80/$$

У [26] доведено, що $\varepsilon_d(kT)$ у цифровій системі з квантувачем і відновником нульового порядку /рис. 7.28/ залежить тільки від параметрів неперервної частини системи з передавними функціями $G(p)$ та $H(p)$ і не залежить від періоду квантування T . Коефіцієнти похибок C_i , виражені через коефіцієнти $G(p)$, коли $H(p) = 1$, можна розраховувати за тими ж самими формулами, що і у випадку неперервних СКП.

Порядок астатизму γ визначають за структурою ЗП розімкненої системи:

$$W(z) = \frac{1}{(z-1)^\gamma} W_0(z), \quad /7.81/$$

де $W_0(z)$ - ЗП, яка не має в точці $z = 1$ комплексної площини z полюсів та нулів. З викладеного випливає, що цифровий регулятор швидкості /рис. 7.28/, коли $K_v = 1$ і $T_{мс} = 0$, є астатичним з астатизмом першого порядку. Отже, статична похибка $\varepsilon_{ст}(kT) = 0$, а кінетична $\varepsilon_k(kT) = S / K_v$, де S - швидкість зміни вхідного сигналу.

Випадкова похибка в дискретні моменти часу, спричинена центрованою випадковою зовнішньою дією $F(kT)$,

$$\varepsilon_{вип}(kT) = \pm \sqrt{A_{эф}(kT)},$$

де дисперсія сигналу похибки

$$D_{\varepsilon p}(\lambda T) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} |\Phi(z)|^2 S_F(z) z^{-\lambda-1} dz. \quad /7.82/$$

У /7.82/ $|\Phi(z)|^2$ - квадрат модуля замкненої системи; $S_F(z)$ - спектральна щільність завади $L^2(\lambda T)$.

Перейшовши до білінійного перетворення $W = (z-1)/(z+1)$, обчислення інтеграла в /7.82/ можна замінити обчисленням інтегральної квадратичної оцінки I_Z подібно до того, як це ми робили для неперервних систем. Якщо завада є "білий шум", то $S_F(z) = S_{F0} = \text{const}$ і інтеграл /7.82/ можна обчислити також графо-аналітичним способом. У протилежному разі треба використати фільтр, на вході якого діє реальний випадковий сигнал, а на виході - випадковий сигнал типу "білого шуму".

7.4. Мікропроцесорні пристрої керування електроприводами

7.4.1. Еступні зауваження

Бурхливий розвиток мікроелектронної технології спричинив створення 16- та 32-розрядних мікропроцесорних наборів і широке їх упровадження в усі сфери людської діяльності. Зараз розроблено теоретичні засади побудови мікропроцесорних систем керування тиристорними електроприводами /МП СКТЕП/ і практичні рекомендації щодо їх реалізації. Деякі фірми вже організували серійне виробництво таких систем.

Повсюдне впровадження МПСК завдяки їхнім перевагам /див. підрозд. 7.1/ витіснило аналогові й апаратні цифрові системи керування.

Архітектуру мікропроцесорних пристроїв, принципи побудови МП СКТЕП та їх основні властивості вивчають у курсі "Моделювання й мікропроцесорні системи керування електроприводами". Тому тут наведено опис МП СКТЕП, розробленої БНДІЕлектропривод і сформульовано теоретичні засади регулювання синтезу МП СКТЕП для реалізації регуляторів струму та швидкості. Крім того, наведено приклад застосування мікропроцесора для оцінки зміни швидкості в разі раптових зумовлених змін момента опору в системі підпорядкованого регулювання швидкості.

7.4.2. Мікропроцесорна система керування електроприводом та алгоритм її функціонування

На рис. 7.30 зображено функціональну схему мікропроцесорної системи керування тиристорним електроприводом.

Технічна реалізація МПСК являє собою блоковий уставний каркас з 20 уніфікованих функціональних елементів /ФЕ/. Найчастіше використовують всуwnу монтажну плату з типорозміром 235x160 мм, який наближається до рекомендованого МЕК типорозміру Європа-2 /233,4x160 мм/.

Силова частина ТЕП складається з реверсивного тиристорного перетворювача ТПН, який живить якірне коло двигуна постійного струму М, і нереверсивного тиристорного збуджувача ТПЗ, який живить обмотку збуджувача двигуна ОЗМ. Струми якоря й збудження вимірюють за допомогою шунтів, увімкнених у відповідних колах, і давачів струму якоря ДСЯ і струму збудження ДСЗ. Напруги з виходів ДСЯ і ДСЗ надходять на аналого-цифровий перетворювач АЦП. Кутову швидкість ω вимірюють тахогенератором ТГ та імпульсним давачем ІД.

Сигнали з апаратів захисту /реле підвищеної температури підчіпків двигуна РТП, реле мінімальної напруги РМН та ін./, із сигнальних контактів комутаційних апаратів /автоматичного вимикача силової напруги змінного струму A_1 , автоматичного вимикача A_2 в колі захисту від перенапруги РПН, автоматичного вимикача A_3 в силовому колі ТПЗ, контактора в якірному колі двигуна КНС, контактора динамічного гальмування КДГ/, з блокувальних апаратів /реле ЕРС РЕ, кінцевих вимикачів/ вводять за допомогою периферійної ланки AB_p групами по 8 сигналів.

МПСК виготовляють на базі 16- і 32-розрядних мікропроцесорних наборів /*Intel* 80286, 8086 або радянських К810ВМ86 та ін./.

Для реалізації обчислювальних пристроїв МПСК застосовують синфазно-синхронний принцип керування /МП працює синхронно й синфазно з мережею/, який дає змогу спростити програми, підвищити надійність і скоротити час обчислень за рахунок спрощення програм. Досягають цього завдяки організації циклічної програми із сталим інтервалом повторення обчислень /ІПО/, що дає змогу обійтися без операцій множення й ділення на тривалість ІПО і спростити масштабування.

Система синхронізації ССК /див. рис. 7.30/ формує синхронізуючі імпульси в моменти, коли перша гармоніка анодних напруг вентилів проходить через нульове значення. ССК можна виготовити як одно- або багатоканальною з фільтрами першої гармоніки. Багатоканальна система

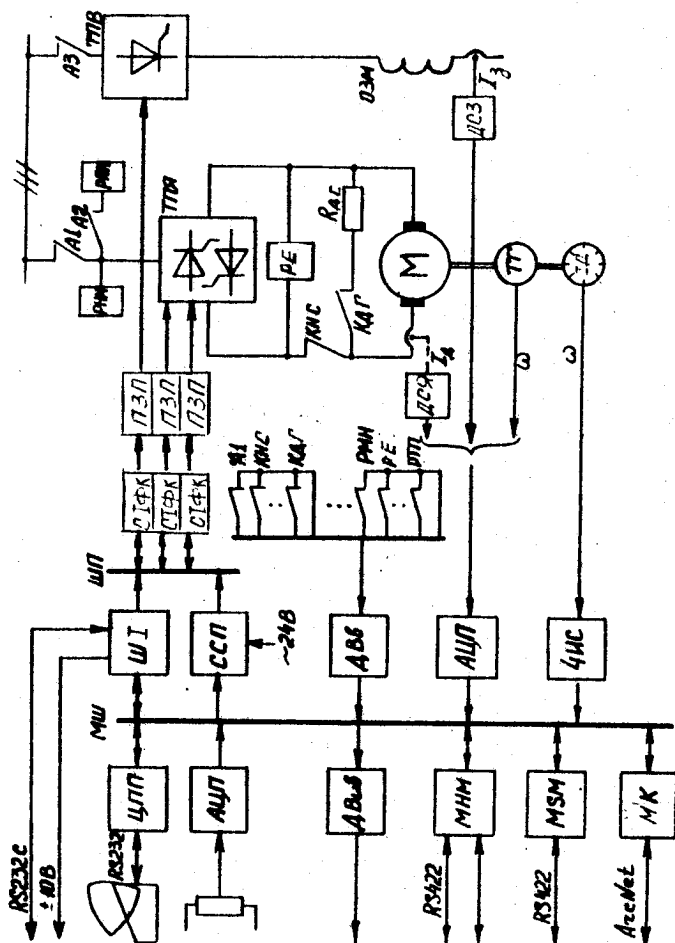


Рис. 7.30. Функціональна схема мікропроцесорної системи керування тиристорним електроприводом

за один період основної частоти виконує m разів синхронізацію обчислень, а одноканальна - один раз.

Центральний процесорний пристрій /ЦПП/ містить 16-розрядний мікропроцесор /наприклад, *Intel* 80286/, програмований комунікаційний інтерфейс /мікросхема *Intel* 8251 універсального синхронно-асинхронного приймача-передавача/, 6Ік ОЗП і 6Ік програмованого постійного запам'ятовувального пристрою /ППЗП/, керовані пам'яттю порти введення-виведення, програмований інтегральний таймер /*Intel* 8254/ з трьома ідентичними лічильниками, програмований контролер переривань /*Intel* 8259A/ з вісьмома перериваннями за пріоритетом, а також послідовний радіальний порт *RS 232c*.

У пристрої МПСК на рис. 7.30 крім згаданого внутрішньоблокового програмованого комунікаційного інтерфейса використано місцеву шину /МШ/, яка забезпечує передавання сигналів до інших /від інших/ функціональних елементів через рознімачі каркаса, шину розширення /РШ/, що дає змогу двом і більше ЦПП працювати із спільною пам'яттю, а також шину перетворювача /ШП/.

Модуль шинного інтерфейса /ШІ/ містить мікросхему контролера переривань /*Intel* 8259/, послідовний радіальний порт *RS 232C* і аналоговий вихід ± 10 В.

Модулі цифрової системи імпульсно-фазового керування СІФК забезпечують усі режими роботи тиристорних перетворювачів електропривода /групи вперед і назад кола якоря і нереверсивного перетворювача збудження/.

Пристрої узгодження /УПП/ виконують гальванічне відокремлення й узгодження вихідних кіл цифрових СІФК і кіл керування тиристорних перетворювачів.

Аналого-цифровий перетворювач /АЦП/ містить 8 входів ± 10 В /максимум ± 15 В/. Максимальний час перетворення 20 мкс.

Модуль введення дискретних сигналів *DS* містить до 30 гальванічно відокремлюваних входів /оптронне розв'язування/.

Модуль ЧИС зв'язку з імпульсним тахогенератором ІД містить один канал і 12-розрядний позиційний лічильник. Працює з напругою /імпульсна/ $+12$ В і частотою до 25 кГц.

Модуль виведення дискретних сигналів ДВив містить 16 вихідних каналів типу відкритий колектор.

За допомогою модулів МНМ (*master highway*) і МСМ (*slave highway*) забезпечено реалізацію лінійної мережі з послідовним інтерфейсом *RS 422* і протоколи *IBM SDC*.

За допомогою мережного контролера МК вмикають МПСК у локальну обчислювальну мережу *Arinet* або *Ethernet*, що може містити інші електроприводи, персональні комп'ютери та інші керувальні обчислювальні комплекси.

Програмове забезпечення МПСК реалізують за допомогою програмових модулів. Основною мовою програмування є *PL/M*, а для частини допоміжних модулів - *ASM86*.

Бібліотека програмових модулів може містити до 40 назв, наприклад: регуляторів струму якоря, швидкості та магнітного поля; керування реверсом електродвигуна й синфазного керування; зворотного зв'язку за струмом якоря; розрахунку кутів запалювання тиристорних перетворювачів якірного кола та обмотки збудження; масштабування параметрів; оголошення змінних, реалізації процедур спільного з іншими модулями призначення; тестування процесора; ОЗП і ПЗП; ставлення на чергу функцій віщов, похибок, сигналізації й друку; тестування електронних ФЕ і фонових процедур, привода; повернення електронних ФЕ в початковий стан; установлення режиму електропривода, головної програми; стикування монітора з функцією перетворення параметрів; роботи з таблицями, друкування, командного монітора, інтерпретатора команд, перетворювача кодів в *ASCII*, змінних загального призначення, головного монітора, інтерпретатора символів, передавача *RS 232*, приймача *RS 232*, режиму налаштування модулів, застосування мови асемблера тощо /рис. 7.31/.

Розглянемо головний алгоритм керування /рис. 7.32/, який реалізує основні функції МПСК ТЕП: СІФК регуляторів струму, швидкості, положення, спостерігача стану, контролю стану захисних та комутаційних апаратів і обслуговування пультового термінала, за основу якого взято алгоритм МП СКТЕП, розробленої БНДІЕлектропривод [38].

За сигналом синхронізації в кожен момент природного відкривання робиться початкове встановлення програми в нульовій ланці ПЗП і блок I /ТПЗ/ виконує запуск у точці природного відкривання. Блок 2 перевіряє, чи складено схему якірного кола електродвигуна за ознакою ОСЯ /ознака стану якірного кола/, сформованою завдяки опитуванню стану захисних та комутаційних апаратів. Коли якірне коло не складене, то ланки, в яких на попередніх ІПО нагромаджено інформацію для використання на наступних ІПО, спорожняються - блок 9. Потім виконуються програми, які забезпечують роботу пультового термінала й регулювання струму збудження двигуна - блоки І0-І4. Якщо якірне коло складено, то виконання програми розпочинається з видавання інформації в таймер для

відлічування кута керування - блок 3. Далі в блоці 4 виконуються програми введення потрібних завдань швидкості /а також, можливо, положення, натягу, товщини тощо/ і виміряних значень регулювальних параметрів струму, швидкості та інших, коли потрібно за технологією /положення, натяг тощо/. Потім виконуються спеціальні алгоритми керування, до яких можуть належати регулятор положення, спостерігач стану, регулятори натягу і товщини, типові нелінійності тощо - блок 5. Після цього виконуються програми регулювання швидкості /блок 6/, регулювання струму якоря /блок 7/ і СІФК ТП якоря /блок 8/, а далі - програми регулювання струму збудження й обслуговування пультового терміналу /блоки ІІ-І4/.

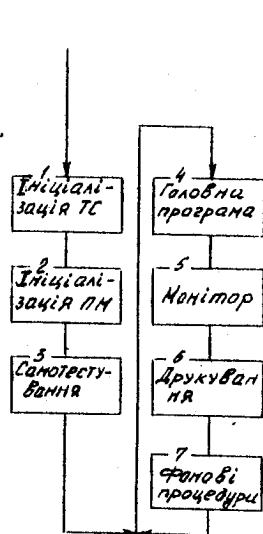


Рис. 7.31. Головний алгоритм керування, який реалізує основні функції МП СКТЕП

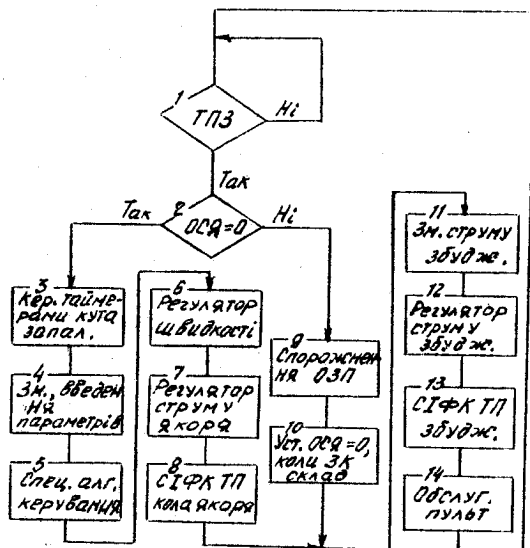


Рис. 7.32. Головний алгоритм керування

7.4.3. Синтез регуляторів струму й швидкості мікропроцесорної системи керування кутовою швидкістю

Мікропроцесорні системи керування ТЕП звичайно будуть за принципом підпорядкованого регулювання, виконуючи синтез послідовно за контурами, починаючи з внутрішнього. Синтезуючи МП СК ТЕП, користуватимемося дискретним перетворенням Лапласа за формулою /7.16/.

Завдання синтезу полягає в тому, щоб за заданою імпульсною передавальною функцією об'єкта керування $G^*(p)$ та її параметрами визначити імпульсну передавально функцію регулятора /струму та швидкості/ $R^*(p)$. Знаючи $R^*(p)$, можна потім розробити алгоритм і програму роботи мікропроцесора відповідного контуру.

Синтез регулятора струму. Структурну схему контуру струму зображено на рис. 7.33. Як регульовний параметр вибрано середнє значення

струму $i(t)$ за κ -й інтервал дискретності $(\kappa-1)T_i, \kappa T_i$ /показано рисочкою вгорі, не змішувати з вектором/, тобто

$$\bar{i}^*(t) = \int_{(\kappa-1)T_i}^{\kappa T_i} i(t) dt$$

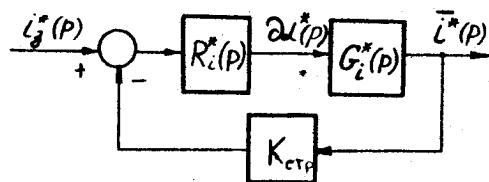


Рис. 7.33. Структурна схема контуру струму

Такий вибір регульовного параметра спрощує спряження контурів струму й швидкості ω ; крім того, керування за інтегралом струму має кращу завадозахищеність порівняно з керуванням за миттєвими значеннями струму $i(t)$. Зірочка внизу відповідної змінної означає, що останню подано у відносних одиницях, а вгорі - дискретне перетворення Лапласа цієї змінної /Д-перетворення/. Таким чином, $\bar{i}_\kappa^*(p)$ - Д-перетворення середнього значення струму за інтервал дискретності, подане у відносних одиницях [$\bar{i}_\kappa^*(t) = I_g (\omega_m / R_\Sigma)$]; I_g - випрямлене значення струму якоря; ω_m - амплітудне значення випрямленої напруги; R_Σ - сумарний активний опір силового кола; $\bar{i}_\kappa^*$ - Д-перетворення заданого у відносних одиницях струму; $\Delta\alpha_\kappa(p)$ - Д-перетворення приросту кута керування у відносних одиницях; $R_i^*(p)$, $G_i^*(p)$ - імпульсні передавні функції відповідно об'єкта керування й регулятора струму в контурі струму.

Лінеаризована математична модель об'єкта керування, що її характеризує імпульсна передавна функція $G_i^*(p)$, має вигляд

$$G_i^*(p) = \frac{\bar{i}_*^*(p)}{\Delta \alpha_*(p)} = -C_B \frac{1 - e^{-1/T_{e*}}}{e^p - e^{-1/T_{e*}}}, \quad /7.83/$$

де $C_B = 2 \sin \pi \frac{\bar{n}}{n} \sin \pi \frac{2\bar{n}}{m_n} \alpha_*(0)$ - коефіцієнт підсилення об'єкта керування; $T_{e*} = T_e / T_n = L_{\Sigma} / R_{\Sigma} T_n$ - електромагнітна стала часу у відносних одиницях; $T_n = T_0 / m_n = 2\pi / \omega_0 m_n$ - інтервал повторювання обчислень ІПО / T_n дорівнює проміжкам часу T між моментами природного відкривання вентилів/; T_0 - період живильної напруги; m_n - фазність перетворювача.

Формулу /7.83/ одержано в [39] для режиму неперервного струму без урахування запізнювання на один інтервал дискретності, наявного в тиристорному перетворювачі, а також без урахування протиЕРС двигуна.

Щоб визначити структуру й параметри послідовного коригувального пристрою, треба задати /вибрати/ бажану передавну функцію замкненого контуру. Якщо струм на вході контуру змінюється стрибкувато [$i_g^*(p) = I(p)$], а на виході потрібно дістати експоненціальний закон його зміни, тобто

$$\bar{i}_*(\lambda) = 1 - e^{-\lambda},$$

де λ - деяка стала, то в цьому разі бажана імпульсна передавна функція замкненого контуру дорівнюватиме /коли $\lambda_{стр} = 1$ /

$$\Phi_{i\delta}^*(p) = \frac{\bar{i}_*^*(p)}{i_g^*(p)} = \frac{1 - e^{-\lambda}}{e^p - e^{-\lambda}}. \quad /7.84/$$

Такий вибір $\Phi_{i\delta}^*(p)$ дає змогу обмежити величину $\bar{i}_*(\lambda)$, а отже електричні й механічні перевантаження електропривода. Крім того, коли належним чином вибрати показник експоненти λ , то під час проектування цифрового електропривода можна не враховувати впливу протиЕРС двигуна.

Урахувавши /7.83/ і /7.84/, дістанемо

$$\begin{aligned} R_i^*(p) &= \frac{1}{G_i^*(p)} \frac{\Phi_{i\delta}^*(p)}{1 - \Phi_{i\delta}^*(p)} = \\ &= \frac{(1 - e^{-\lambda})(e^p - e^{-1/T_{e*}})}{C_B (1 - e^{-1/T_{e\delta}})(e^p - 1)} = -\lambda_n - \lambda_n (e^p - 1). \quad /7.85/ \end{aligned}$$

Із /7.85/ випливає, що $R_i^*(p)$ являє собою цифровий аналог ПІ-регулятора з коефіцієнтами підсилення відповідно пропорційного й інтегрального регуляторів:

$$K_n = \frac{1 - e^{-T}}{C_B (1 - e^{-1/T_{en}})} ; \quad /7.86/$$

$$K_i = K_n (1 - e^{-1/T_{en}}). \quad /7.87/$$

Синтез регулятора швидкості /рис. 7.34/. Перетворимо передавну функцію $G_\omega(p) = 1/T_M p$ механічної частини електродвигуна за допомогою ДП:

$$G_\omega^*(p) = \frac{\bar{\omega}^*(p)}{[i^*(p) - i_\omega^*(p)]} = \frac{e^p}{(e^p - 1) T_{M*}} , \quad /7.88/$$

де $T_{M*} = T_M / T_i = m \eta \omega_0 R_x / 2\pi (C\Phi)^2$ - електромеханічна стала часу електропривода у відносних одиницях.

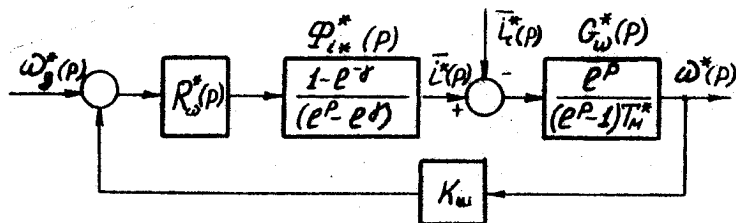


Рис. 7.34. Структурна схема регулятора швидкості

Тоді дискретна передавна функція об'єкта керування в контурі швидкості з урахуванням замкненого оптимізованого контуру струму

$$G^*(p) = \Phi_{i\delta}^*(p) \cdot G_\omega^*(p) = \frac{(1 - e^{-T}) e^p}{(e^p - e^{-T})(e^p - 1) T_{M*}} . \quad /7.89/$$

Виберемо бажану дискретну передавну функцію замкненого контуру швидкості:

$$\Phi_{\omega\delta}^*(p) = \frac{1}{2e^p - 1} . \quad /7.90/$$

Тоді дістанемо

$$K_{\omega}^*(p) = K_{\omega} \frac{(e^p - e^{-p})}{e^p}, \quad /7.91/$$

де $K_{\omega} = T_{\text{нх}} / (1 - e^{-p})$ - коефіцієнт підсилення цифрового регулятора в контурі швидкості.

Визначимо перехідну функцію замкненої мікропроцесорної системи керування швидкістю. З цією метою перейдемо від ДПЛ до z -перетворення. Ураховуючи, що $z = e^p$, а j -зображення одиничного сигналу дорівнює $z/(z-1)$, одержуємо j -зображення перехідної функції в такому вигляді:

$$H(z) = \frac{1}{2z-1} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z}{2z^2-3z+1}$$

або

$$H(z^{-1}) = \frac{0,5z^{-1}}{1-1,75z^{-1}+0,5z^{-2}}. \quad /7.92/$$

Поділивши поліном чисельника на поліном знаменника, знайдемо ординати перехідної функції в дискретні моменти часу: $t_{\text{н}}(0) = 0$; $t_{\text{н}}(1) = 0,5$; $t_{\text{н}}(2) = 0,75$; $t_{\text{н}}(3) = 0,875$ і т.д., де відносний час $t_{\text{н}} = t/T_i$. Отже, перехідний процес у розглядуваному випадку аперіодичний. Практично за чотири інтервали дискретності вихід досягає свого заданого усталеного значення.

У [16] докладно описано методику синтезу оптимальних цифрових СКЕП з аперіодичним перехідним процесом. Інший спосіб оптимізації ЦСКЕП з астатизмом першого й другого порядку наведено в [39], до того ж задачу розв'язано і з урахуванням запізнювання в тиристорному перетворювачі.

7.4.4. Приклад застосування мікропроцесора в системі регулювання кутової швидкості

Розглянемо приклад застосування мікропроцесора в двоконтурній системі підпорядкованого регулювання кутової швидкості, який використовують для пригасювання її коливань, спричинених ударним прикладенням моменту статичного опору $N_{\text{оп}}(t)$ [чи струму $I_{\text{ст}}(t)$] до вала двигуна постійного струму. Задачу розв'язують методом побудови спостерігача стану. За рівняннями стану спостерігача визначають алгоритм

функціонування мікропроцесора. Принципи побудови спостерігачів стану та їх рівняння стану розглянуто в розд. 8 цього посібника. Тому цей приклад можна розглядати або тут, або після вивчення спостерігачів стану.

Рівняння стану об'єкта. Рівняння ТП-Д

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{\omega}(t) \\ \dot{I}_{cr}(t) \end{bmatrix} = A \bar{x}(t) + \theta u(t); \\ y(t) &= C \bar{x}(t), \end{aligned} \right\} \quad /7.93/$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\phi/\gamma_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \theta = \begin{bmatrix} \phi/\gamma_2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$C = [1 \ 0]; \quad \bar{x}(t) = [\omega(t) \ I_{cr}(t)]^T;$$

$$y(t), \quad u(t) = I_A(t) - \text{скаляр.}$$

Оскільки розглядаємо ударне прикладення навантаження у вигляді східчастої функції, то, отже, $I_{cr}(t) = 0$. У рівнянні /7.93/ всі змінні й параметри подано у відносних одиницях. Перетворивши /7.93/ в лінійні різницеві рівняння, дістанемо

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= A \bar{x}(k) + \theta I_{cr}(k); \\ y(k) &= C \bar{x}(k), \end{aligned} \right\} \quad /7.94/$$

де

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} \omega(k) \\ I_{cr}(k) \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -T_H/T_M \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \theta = \begin{bmatrix} T_H/T_M \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0].$$

Для /7.94/ одержуємо оцінки стану й змінних за допомогою спостерігача стану [див. підрозд. 8.5 і, зокрема, /8.45/, /8.46/]:

$$\hat{\bar{x}}(k+1) = A \hat{\bar{x}}(k) + \theta \hat{I}_A(k) + G(y(k) - \hat{y}(k)); \quad /7.95/$$

$$\hat{y}(k+1) = C \hat{\bar{x}}(k+1),$$

де G - вектор підсилення для корекції оцінки вектора стану $G = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix}$.

За /7.95/ на рис. 7.35 побудовано цифровий спостерігач стану.

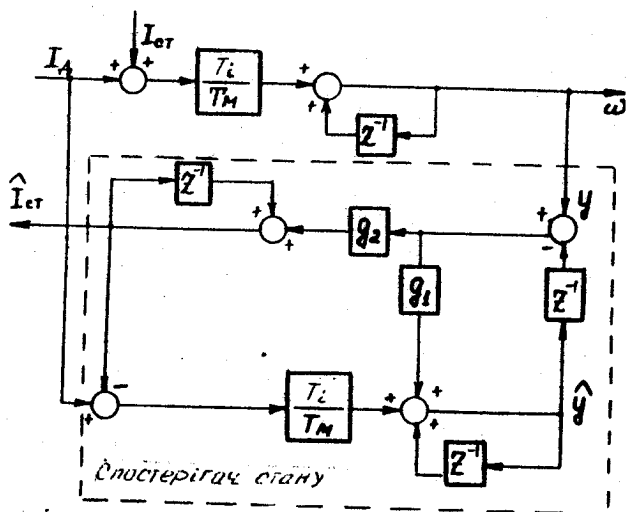


Рис. 7.35. Схема цифрового спостерігача стану

Із /7.94/ та /7.95/ знаходимо

$$\frac{\hat{x}}{x(k+1)} - \frac{\hat{x}}{x(k+1)} = [A - GC] \left(\frac{\hat{x}}{x(k)} - \frac{\hat{x}}{x(k)} \right), \quad /7.96/$$

$$G = A [CA]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad /7.97/$$

Звідси бачимо, що оцінка вектора стану $\frac{\hat{x}}{x(k)}$ у такому спостерігачі стану наближається до істинного вектора стану $x(k)$ за один період ІПО.

Проте, як відомо, виміряна вихідна змінна $y(k)$, і керування $I_g(k)$ містять затримку за часом, спричинену роботом вимірвальних перетворювачів і системи керування. Коли не вжити спеціальних заходів, то через ці затримки характеристики спостерігача стану можуть набагато погіршитися.

Для зменшення затримки під час вимірювання середнього струму якоря в [46] пропонують відмовитися від фільтрації в колі давача

струму, а середнє значення струму обчислювати за допомогою одного вимірювання в момент, коли істинне значення струму збігається із середнім, забезпечуючи, природна річ, синфазність вимірювання з перемиканням тиристорів.

Вимірюючи швидкість за допомогою імпульсного давача, її визначають вимірюванням тривалості часу між двома сусідніми імпульсами або знаходженням кількості імпульсів за певний проміжок часу. В обох випадках виміряна швидкість є середня за певний проміжок часу. Оскільки точність вимірювання пропорційна тривалості останнього, запізнювання вимірювання може бути істотним, і його потрібно враховувати під час синтезу СКТЕП.

Еквівалентна затримка τ_{SD} вимірювання швидкості - це сума затримки квантування й запам'ятовувального пристрою.

У [46] запропоновано спеціальний алгоритм у поєднанні з відокремленим регулюванням періоду квантування й тривалості часу вимірювання швидкості, які забезпечують мінімальну затримку з високою точністю вимірювання.

На рис. 7.36 зображено діаграму, яка ілюструє принцип вимірювання швидкості. Тут T_i , як і раніше, період квантування, тривалість часу вимірювання τ_D становить $1/2$ періодів квантування. Тоді час затримки вимірювання швидкості

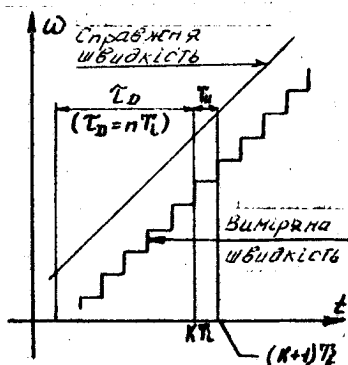


Рис. 7.36. Діаграма, яка ілюструє принцип вимірювання швидкості

$$\tau_{SD} = (n+1) \frac{T_i}{2}, \quad /7.98/$$

це $1/2 = 2, 3, 4, 5$.

Коли припустити, що $1/2 = 5$, то передавна функція давача швидкості в цифровій СК
/рис. 7.37/

$$G_w(z) =$$

$$= \frac{(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4})}{5} \cdot /7.99/$$

Еквівалентну затримку часу вимірювання тут зменшено на 60% порівняно з випадком, коли період квантування дорівнює тривалості часу вимі-

рування швидкості τ_D з тією самою точністю вимірювання швидкості.

Отже, можна побудувати спостерігач стану з урахуванням затримки вимірювання параметрів. Цей спостерігач стану міститиме змінну

$\omega_0(k)$ яка є істинною швидкістю обертання, а також гадані змінні $\omega_1(k) - \omega_5(k)$, що їх спричинила затримка часу вимірювання, згідно з /7.99/ і рис. 7.37. Ці змінні пов'язані одна з одною такими співвідношеннями:

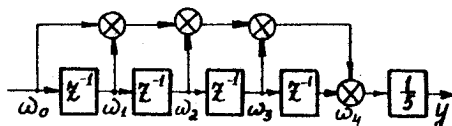


Рис. 7.37. Структурна схема давача швидкості

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_1(k+1) &= \omega_0(k); \\ \dot{\omega}_2(k+1) &= \omega_1(k); \\ \dot{\omega}_3(k+1) &= \omega_2(k); \\ \dot{\omega}_4(k+1) &= \omega_3(k). \end{aligned} \right\} \quad /7.100/$$

Перетворивши /7.94/ з урахуванням /7.100/, дістанемо різницеві рівняння:

$$\begin{aligned} \dot{x}(k+1) &= A \dot{x}(k) + \delta I_n(k); \\ y(k) &= C \dot{x}(k), \end{aligned} \quad /7.101/$$

де

$$\dot{x}(k) = \begin{bmatrix} \omega_0(k) \\ \omega_1(k) \\ \omega_2(k) \\ \omega_3(k) \\ \omega_4(k) \\ I_{cr}(k) \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 10000 & -\frac{T_n}{T_n} \\ 10000 & 0 \\ 01000 & 0 \\ 00100 & 0 \\ 00010 & 0 \\ 00000 & 1 \end{bmatrix}; \quad \delta = \begin{bmatrix} T_n/T_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \\ 0 \end{bmatrix}^T.$$

На рис. 7.38 зображено структурну схему СК ТЕП, яка реалізує описаний спостерігач стану для оцінки коливань моменту навантаження й компенсації ударного спаду швидкості.

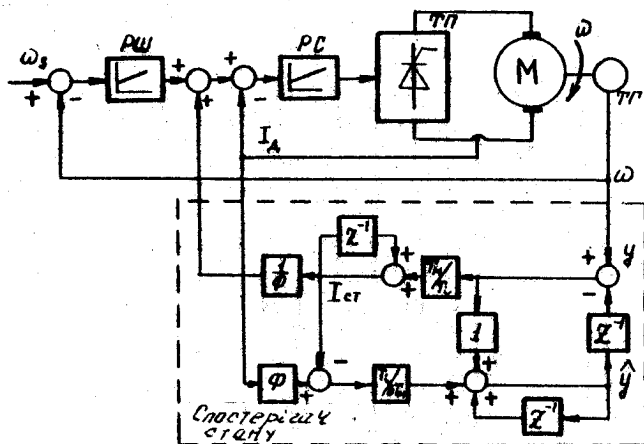


Рис. 7.38. Структурна схема СК ТЕП

Експериментальні дані засвідчили, що в такій МП СК ТЕП, яка використовує 16-бітовий мікропроцесор, можна приблизно на порядок зменшити добуток ударного спаду швидкості на час відновлення швидкості порівняно з МП СК без спостерігача стану або з аналоговою СКТЕП, котра також реалізує спостерігач стану.

7.5. Системи технічної діагностики електроприводів /СТДЕП/

Технічна діагностика складається з теорії, методів і засобів виявлення й пошуку дефектів технічної природи, за які вважають кожну невідповідність заданим, потрібним чи сподіваним властивостям об'єкта [47].

Основне призначення технічної діагностики полягає в підвищенні надійності об'єктів на етапі експлуатації, котре досягають поліпшенням таких показників, як коефіцієнт готовності й технічного використання, час відновлення роботоздатного стану, ресурс чи термін служби і напрацювання до відмови.

Технічна діагностика розв'язує три типи задач визначення стану об'єктів: діагностування - визначення технічного стану, в якому перебуває об'єкт; прогнозування - передбачення технічного стану, що в нього потрапить об'єкт у певний майбутній момент часу; генез - визначення технічного стану, в якому перебував об'єкт у певний момент часу в минулому.

У технічній діагностиці вирізняють два класи об'єктів - дискретні й аналогові. Для дискретних об'єктів одним з основних завдань є побудова тестів. Поява ЕІС і НЕІС, мікропроцесорних наборів та інших виробів з високим рівнем інтеграції спричинила збільшення вимірності задач і необхідність функціонального зображення дискретних об'єктів на мікрорівні, розгляду функціональних розладів замість константних, широкого застосування імовірнісного підходу до побудови тестів.

Питання технічної діагностики в цьому курсі розглянуто з таких причин:

одні й ті самі математичні моделі об'єкта керування й діагностування можна використовувати як у СК, так і в СТД /наприклад, визначення статичного струму, середньоквадратичного струму тощо/;

реалізуючи програмове забезпечення МП СК ТЕП, треба мати на увазі, що без залучення окремих програмових модулів чи блоків, які розв'язують функції технічної діагностики, не можна побудувати роботоздатну систему керування;

у МП СК ТЕП деякі функції діагностування електропривода реалізують у тому самому обчислювальному пристрої, що й система керування;

деякі розробки СТД, що реалізують, наприклад, так званий електронний осцилограф, можна використовувати не лише для діагностики, а й для дослідження динаміки електропривода.

Наприклад, розроблений у Київському інституті автоматики "автоматичний реєстратор передаварійного стану технологічного устаткування" /АРПС ТУ/ видає обслуговувальному персоналові графічну й текстову діагностичну інформацію про аварійні /передаварійні/ ситуації, що виникають у технологічному устаткуванні різного призначення, з метою подальшого її аналізу й визначення причин несправностей. Переважна галязь застосування АРПС ТУ - електроприводи клітей прокатних станів.

АРПС ТУ забезпечує безперервний контроль основних технологічних та фізичних параметрів устаткування, запис значень цих параметрів в оперативну пам'ять системи, автоматичне припинення запису в разі виникнення аварійної /передаварійної/ ситуації й видавання графічної інформації на пристрій друкування про передаварійний стан діагностованого устаткування.

До складу АРПС ТУ входять мікропроцесорний обчислювальний комплекс /МОК/ КТС ЛМУС-2 /одна шафа/, пристрій друкування знакосинтезувальний А52І/4, пульт керування й індикації. АРПС ТУ може функціонувати як автономно, так і в складі системи контролю й технічного діагностування технологічного устаткування /дворівнева відміна/. В останньому випадку поряд з графічною інформацією на пристрій друкування видається також і текстова інформація /протоколи діагностики повідомлень про аварійний і поточний стани діагностованого устаткування/.

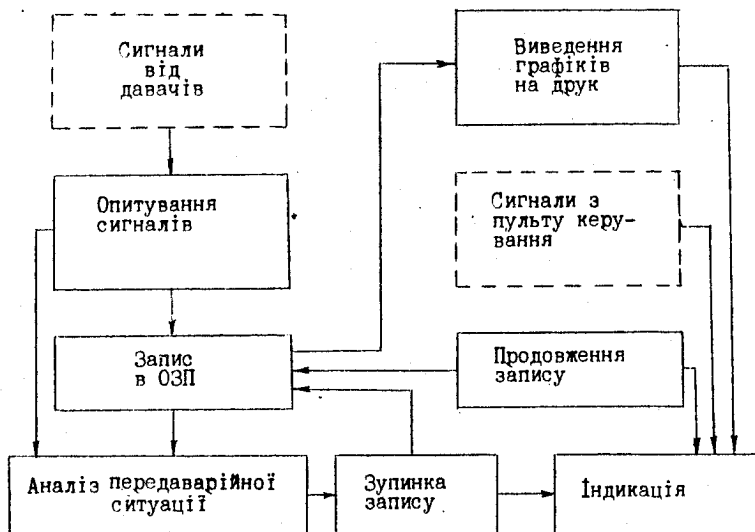


Рис. 7.39. Функціональна схема "електронного осцилографа"

АРПС ТУ функціонує в двох режимах: запису в оперативну пам'ять системи діагностичної інформації і видавання графічної інформації /осцилограми/ на пристрій друкування. Регистратор у першому режимі функціонує автоматично, а в другому ініціюється з пульта керування.

Графічний документ /осцилограма/ має такий формат:
 повідомлення "початок осцилограми";
 дата й час видавання осцилограми;
 дата, час і місце виникнення аварійної /передаварійної/ ситуації в діагностованому устаткуванні;
 назва параметрів і масштаби видовжуваної графічної інформації;
 графічна інформація /до шести графіків/;
 повідомлення "кінець осцилограми".

Технічна характеристика

Кількість контрольованих параметрів	42
Діапазон зміни сигналів від давачів, В	-10,24...+10,24
Мінімальний період опитування давачів, мс	20
Максимальна кількість:	
точок у графіку	1200
графіків в осцилограмі	6
Максимальна тривалість роздруковування осцилограм, хв	3

З огляду на викладене попереду, а також на брак підручників та посібників з технічної діагностики електроприводів автори вважають за потрібне вмістити основні положення з останньої в даному курсі. Діагностика електроприводів має забезпечувати визначення робоздатності устаткування, видавання оперативної інформації про відімкнення режимних параметрів, а також інформації для оперативного пошуку несправностей, спрацьовування блокувань та захисту в разі досягнення параметрами граничних відхилень.

Конструктивно і/або функціонально СТД електроприводів можна поділити на такі підсистеми /ПСТД/: електричних машин та прилеглої технологічного устаткування; систем керування тиристорних перетворювачів; тиристорних перетворювачів.

Для вирішення завдань технічної діагностики електричних машин вимірюють такі параметри: температуру додаткових полюсів, компенсаційної обмотки, обмотки збудження, охолоджувального повітря на вході й виході, води повітроохолоджувача, підчіпків, обмотки якоря; струми якоря і збудження; напругу якоря; момент навантаження; кутову швидкість обертання; витрату охолоджувального повітря й мастила в

підшипках; вібрації якоря, підшипків і статора; опір ізоляцій обмоток; умови комутації.

Більшість параметрів вимірювати неважко, але в деяких випадках зробити це з достатньою точністю й надійністю неможливо, наприклад, коли вимірювати температуру обмотки якоря міцними термометрами опору або струмозняття за допомогою контактних кілець. Тому зараз працюють коло створення вимірювачів температури обмотки якоря з безконтактним каналом передавання інформації [44]. Певні труднощі становить також вимірювання низькочастотних вібрацій тихохідних машин. А щодо умов комутації, то прийнятних для практики способів їх визначення ще не знайдено.

Деякі параметри визначають способом обчислень, скажімо статичний та середньоквадратичний струми. Як визначати статичний струм, було описано в попередньому розділі. Під час синтезу спостерігача стану середньоквадратичний струм обчислюють на інтервалі 5...30 хв залежно від потужності електричної машини та умов її роботи за відомими залежностями.

Оскільки, як бачимо, для технічної діагностики електричних машин треба вимірювати дуже багато параметрів /до 50/ і робити важку статичну їх обробку й обчислення, зберігати великі масиви інформації й надавати її оперативному персоналові, то зараз провадять роботи щодо створення спеціалізованих мікропроцесорних контролерів, аби можна було обладнати ними машини з середньою та великою потужністю.

Система технічної діагностики тиристорних перетворювачів має використовувати інформацію про стан захисту:

від виходу з ладу тиристорів під дією надструмів в аварійних режимах /зовнішні та внутрішні короткі замикання, відкривання тиристорів у непрацюючій групі інверторів, перекидання й проривання інверторів/;

від перевантажень тиристорного випрямляча й двигуна і у випадку стояння під струмом;

у випадку зникнення напруги силових кіл і зникнення чи неприпустимого зниження напруги власних потреб;

від зникнення й перевищення струму в колі збудження електро-двигуна;

від перенапруги обмотки збудження;

від зовнішніх та внутрішніх напруг на тиристорах;

від перевищення напруги на якорі електродвигуна;

силового трансформатора чи мережного реактора;

від виходу з ладу двох чи більше паралелей в одному плечі випрямляча;

у випадку аварійного вимкнення примусового охолодження;

від коротких замикань та перевантажень у колі власних потреб і живлення двигунів вентиляторів;

від перевищення припустимої швидкості обертання електродвигуна;

від замикань на землю силових кіл;

у випадку перегрівання групових охолоджувачів, охолоджуваних водою;

від розладу системи мастилозмазування;

у випадку зникнення чи неприпустимого зниження струму збудження тахогенератора;

від неприпустимого перевищення температури силового трансформатора;

СТД має забезпечувати врахування стану блокувань від увімкнення, коли є аварійні попереджувальні сигнали;

від увімкнення на обертовий електродвигун;

у випадку неправильно складеної схеми електропривода;

від увімкнення вимикача чи контактора в якірному колі двигуна, коли на вхід випрямляча надійшло завдання;

від увімкнення електропривода, коли надійшов зовнішній аварійний сигнал від давачів контролю охолодження двигуна;

СТД має здійснювати контроль ізоляції силових кіл;

перегоряння запобіжників системи захисту від перенапруг;

перегоряння запобіжників у силовому колі випрямляча.

Таким чином, щоб електропривод працював надійно, в СКТЕП і/або СТД треба подати багато логічних сигналів, обсяг інформації яких може становити 500 біт. Тому здебільшого роблять комбіноване введення й обробку захисної та сигнальної інформації, аналіз з метою визначення відхилень від норми виконуючи апаратно, а аналіз інформації після виявлення такого відхилення – програмово. Сумарний час затримки виконавчого сигналу відносно одержаного вхідного в цьому разі дорівнює близько 100 мкс.

Система технічної діагностики СКТЕП виявляє пошкодження окремих функціональних елементів. Під час проектування системи керування багато зусиль витрачають на розробку програми тестів. Так, для МП СКТЕП /див. рис. 7.30/ функціональні елементи перевіряють у такій наступності: ЦП, ШІ, АЦП, ЦІЖК групи "Б" і групи "Н", ЦІЖК ОЗД, ДБв, ДБив. Наступність тестування може змінити оператор. Виконання

всієї програми самотестування триває приблизно 20 с. Результати тестування друкуються на підімкненому до МП СК ТЕП чи на вмонтованому принтері. Відмови попереду згаданих ФЕ діагностувати легко, і в роздруківці зазначається принаймні один спосіб усунення відмови. Рекомендації щодо лагоження ФЕ не видаються, бо це завдання вирішують у ремонтній лабораторії за допомогою її СТД.

Окремі підсистеми технічної діагностики можна об'єднувати за допомогою локальної обчислювальної мережі в систему технічної діагностики групи приводів або машинного залу.

Розділ 8. МОДАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДАМИ

8.1. Основні означення й поняття

Модальним керуванням вважають один з методів синтезу аналогових та цифрових регуляторів, за допомогою якого на комплексній площині можна розташувати власні значення λ_i замкненої системи, що складається з об'єкта керування й зворотних зв'язків за змінним стану, бажаним /заданим/ чином. Термін "модальне керування" походить від того, що власним значенням λ_i відповідають складові перехідного процесу $\lambda_i t$, названі модами.

Як бажане /оптимальне/ розташування власних значень замкненої системи λ_i /коренів характеристичного рівняння замкненої системи/ звичайно використовують розподіл Баттерворта, коли корені системи лежать на колі в лівій половині комплексної площини й перебувають на однаковій кутовій відстані один від одного; стандартний і біномний розподіли тощо [27].

Коли всі змінні стану відомі, приміром виміряні відповідними давачами, то сформульовану задачу для лінійної системи розв'язати неважко. Регулятор, який складається із зворотних зв'язків за змінними стану й синтезованих коефіцієнтів підсилення в кожному з них, у цьому випадку називають регулятором стану. Коли ж деякі змінні стану з тих чи тих причин виміряти неможливо, то будують так званий спостерігач стану, котрий відновлює змінні стану, що їх виміряти не можна. Спостерігач, вихідними координатами якого є всі змінні стану /і відновлені, і виміряні/ об'єкта керування разом з регулятором стану утворюють модальний регулятор.

Ідеї модального керування часто використовують під час синтезу стохастичних систем, і зокрема коли будують оптимальні спостерігачі у вигляді фільтрів Калмана - Б"всі.

Синтез модальних регуляторів ґрунтується на математичному описі системи в просторі станів. Розв'язуючи завдання керування методами простору станів, ураховують деякі фундаментальні властивості динамічних систем, котрі не трапляються в класичній теорії керування, що оперує тільки з вхідними та вихідними сигналами. Це, зокрема, керовність і спостережність, суть яких і розглянемо.

8.2. Керовність і спостережність стаціонарних лінійних систем керування

Поняття керовності системи означає здатність входу $\overline{u(t)}$ діяти на всі змінні стану $x_i(t)$, а спостережності – можливість визначення всіх змінних стану $x_i(t)$ за результатами спостереження /вимірювання/ виходу $\overline{y(t)}$.

8.2.1. Керовність

Розглянемо лінійну багатовимірну з m входами і z виходами стаціонарну неперервну систему з такими рівняннями стану:

$$\dot{\overline{x(t)}} = A \overline{x(t)} + B \overline{u(t)}, \quad /8.1/$$

де A і B – сталі матриці вимірностей відповідно $n \times n$ і $m \times n$;
 $\overline{x(t)} = [x_1(t) \ x_2(t) \dots x_n(t)]^T$ – вектор стану системи.

Лінійна стаціонарна система /8.1/ є повністю керована за станом, коли з початкового стану $\overline{x(t_0)}$, що відповідає будь-якому t_0 , її можна перевести в будь-який кінцевий стан $\overline{x_N}$ за скінченний час $t_N - t_0$, обмежений кусково-неперервним вхідним сигналом $\overline{u(t)}$ з нормою $\|\overline{u(t)}\| < \infty$. Отже, є таке t_N , $t_0 < t_N < \infty$, що $\overline{x(t_N)} = \overline{x_N}$. У цьому означенні повної керовності зроблено припущення, що до системи прикладено вхід $\overline{u(t)}$ на скінченному інтервалі часу $[t_0, t_N]$, до того ж момент t_N апіорі не визначено.

Оскільки керовність системи залежить від будови матриць A і B , то поняття керовності стосується також і цих матриць. Тоді кажуть, що пара /або система/ A, B повністю керовна, коли система /8.1/ повністю керовна.

Так само формулюють повну керовність для лінійної стаціонарної цифрової системи, що її описують рівняння стану виду

$$\overline{x(k+1)} = A \overline{x(k)} + B \overline{u(k)}, \quad /8.2/$$

коли в наведеному формулюванні замінити t_0 на t_0 , t_n на t_n , $x(t_0)$ на $x(t_0)$ і $u(t)$ на послідовність вхідних дій $u(k)$.

Є низка критеріїв, які дають змогу за матрицями A і B визначити керовність неперервної /8.1/ й цифрової /8.2/ систем. Один з них можна сформулювати так: лінійна неперервна /8.1/ або дискретна /8.2/ система повністю керовна тоді і тільки тоді, коли матриця керовності

$$Q_{кер} = [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B] \quad /8.3/$$

вимірністю $n \times n \times m$ має ранг, який дорівнює вимірності простору станів n , тобто

$$\text{Ранг } Q_{кер} = n \quad /8.4/$$

або, інакше кажучи, тоді, коли в матриці керовності $Q_{кер}$ є n лінійно незалежних векторів-стовпців.

Коли ж є тільки одне керування $u(t)$ і, отже, B -матриця-стовпець вимірністю $n \times 1$, тобто $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$, то матриця керовності $Q_{кер}$ робиться квадратною з вимірністю $n \times n$.

Керовність не пов'язана із стійкістю об'єкта керування. Нестійкий об'єкт може бути керовним. Наприклад, пара (A, B) , де $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, керовна, оскільки $\det [BA^0B] = 1$, тобто не дорівнює нулеві. Але власні значення динамічної матриці A становлять:

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = +2$, що впливає з виразу для характеристичного рівняння $[\lambda I - A] = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$. Отже, ця система нестійка; додатному кореневі $\lambda_2 = +2$ відповідає додатна мода e^{2t} .

Крім керовності за станом запроваджено також поняття керовності за виходом. Лінійна стаціонарна неперервна або дискретна система, яку описують рівняння стану /8.1/ і /8.2/ та рівняння виходу:

$$\dot{y}(t) = C \overline{x(t)}, \quad /8.5/$$

або для цифрової системи

$$\bar{y}(k) = C \overline{x(k)}, \quad /8.6/$$

повністю керовна за виходом тоді і тільки тоді, коли $n \times n \times m$ -матриця керовності за виходом,

$$Q_{к.в} = [CB \mid CAB \mid CA^2B \mid \dots \mid CA^{(n-1)}B] \quad /8.7/$$

має ранг, що дорівнює кількості виходів системи /кількості рядків матриці Z /, тобто

$$\text{Ранг } Q_{\lambda, B} = Z. \quad /8.8/$$

Відповідно до критерію /8.8/ одна й та сама система може бути керовною за виходом та некеровною за станом, і навпаки [5].

8.2.2. Спостережність

Для керування треба мати інформацію про поточний стан системи, тобто про значення змінних стану в кожен момент часу про неперервну систему або ж у моменти квантування в системі з дискретним часом. Проте деякі із змінних стану є абстрактні, не мають фізичного аналога в реальній системі, а тому виміряти їх неможливо. Вимірними й спостережними в системі є фізичні вихідні змінні $y_i(t)$, $i \leq n$, через які можна однозначно виразити всі складові $x_i(t)$ вектора стану $x(t)$. Бачимо, що коли керовність за станом визначають з /8.1/ або з /8.2/ для цифрових систем з керувальною дією $u(t)$ або $u(k)$, до того ж рівняння виходу не використано, то спостережність – з рівняння стану, яке визначає вільні рухи системи:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A \bar{x}(t) \quad \text{або} \quad \bar{x}(k+1) = A \bar{x}(k), \quad /8.9/$$

і рівняння виходу /8.3/ або /8.6/, тобто системи, яка не містить збудовального члена $u(t)$ або $u(k)$.

Систему $\dot{\bar{x}}(t) = A \bar{x}(t)$, $y(t) = C \bar{x}(t)$ називають повністю спостережною, коли є таке $t_k > t_0$, що початковий стан $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ вільної системи /8.9/ можна визначити за відомим на скінченному інтервалі $[t_k - t_0]$ виходом $y(t)$. У цьому означенні зроблено припущення, що t_k – будь-який не заданий момент часу, котрий підлягає умові $t_k > t_0$, тобто майбутній момент часу.

Нехай A і C – матриці з вимірностями відповідно $n \times n$ і $z \times n$. Тоді пару A і C називають повністю спостережною, коли система $\dot{\bar{x}}(t) = A \bar{x}(t)$, $y(t) = C \bar{x}(t)$ є повністю спостережна.

Наведене формулювання спостережності слушне й для цифрових систем.

Критерій спостережності: щоб лінійна стаціонарна неперервна чи дискретна система була повністю спостережна, необхідно й досить, аби матриця спостережності

$$Q_n = [C^T | A^T C^T | (A^T)^2 C^T | \dots | (A^T)^{(n-1)} C^T]$$

вимірності 2×2 мала ранг n , тобто

$$\text{Ранг } Q_n = n. \quad /8.10/$$

Приклад 8.1. Визначити керовність і спостережність системи

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \quad /8.11a/$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \quad /8.11b/$$

Розв'язання. Згідно з /8.4/ і /8.10/ маємо

$$Q_{\text{кер}} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad Q_c = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}.$$

Оскільки ранг $Q_{\text{кер}} = 2$, а ранг $Q_c = 1 < 2$, то ця система повністю керувна й спостережна. Останнє означає, що за вимірними значеннями виходу $y(t)$ не можна визначити початкові значення x_{10}, x_{20} змінних стану $x_1(t), x_2(t)$. Дослідимо докладніше причини неспостережності. З цією метою знайдемо розв'язок вільного руху системи /8.11/: $x(t) = e^{At} \bar{x}_0$, де e^{At} - перехідна матриця стану. Для даної системи

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} e^t + \frac{1}{3} e^{-5t} & -\frac{2}{3} e^t + \frac{2}{3} e^{-5t} \\ \frac{1}{3} (e^{-5t} - e^t) & \frac{1}{3} e^t + \frac{2}{3} e^{-5t} \end{bmatrix}. \quad /8.12/$$

Тоді

$$\bar{x}(t) = e^{At} [x_{10} \ x_{20}]^T. \quad /8.13/$$

Знайшовши з рівності матриць правої й лівої частин /8.13/ $x_1(t)$ та $x_2(t)$ і підставивши їх у рівняння виходу, остаточно дістанемо

$$y(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) = -e^{-5t} (x_{10} + 2x_{20}). \quad /8.14/$$

Щоб визначити x_{10} і x_{20} з /8.14/, треба двічі виміряти вихідний сигнал $y(t)$ у моменти часу $t = t_1$ та $t = t_2$ і скласти

систему з двох рівнянь $y(t_1) = -e^{-5t_1}(x_{10} + 2x_{20})$ і $y(t_2) = -e^{-5t_2}(x_{10} + 2x_{20})$. Проте ця система лінійно незалежна і з неї не можна визначити окремо x_{10} і x_{20} , в чому і виявляється спостережність змінних стану $x_1(t)$ і $x_2(t)$. Коли б система була повністю спостережна, тобто коли б у правій частині рівняння /8.14/ були члени від обох власних значень /членів з e^t і e^{-5t} /, то, зробивши два відліки $y(t_1)$ і $y(t_2)$, можна було б розв'язати одержану лінійно незалежну систему відносно x_{10} і x_{20} . Знаючи останні, а також e^{At} , можна потім визначити $x_1(t)$ і $x_2(t)$.

Приклад 8.2. Дослідимо керовність і спостережність слідувального привода, рівняння стану й перехідну матрицю стану якого було визначено в прикладі 2.5 /див. розд. 2/. Схему аналогового моделювання цього привода зображено на рис. 2.13.

Матриці A , B і C дорівнюють:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0]. \quad /8.15/$$

Розв'язання. Бизначимо матриці керовності за станом $Q_{кер}$ та виходом $Q_{х,в}$, а також матрицю спостережності Q_c :

$$Q_{кер} = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Оскільки $\det Q_{кер} = -1$, тобто не дорівнює нулю, то слідувальний привод повністю керувний. Це означає, що за допомогою вхідного сигналу $u(t)$ можна впливати на обидві змінні стану: $x_1(t) = \beta(t)$ і $x_2(t) = \omega(t)$:

$$Q_{х,в} = [CB \ CAB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ранг матриці $Q_{х,в}$ дорівнює 1, тобто кількості виходів привода. Отже, система повністю спостережна за виходом. Це означає, що сигналом $u(t)$ можна керувати виходом $x_1(t) = \beta(t)$:

$$Q_c = [C^T A^T C^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \det Q_c = 1.$$

Оскільки ранг Q_c дорівнює 2, то, отже, привод повністю спостережний. Це означає, що за вимірними значеннями виходу $\beta(t)$ можна обчислити /відновити/ початкові значення $x_{10} = \beta_{10}$ і $x_{20} = \omega_{10}$.

Змінимо тепер структуру матриці C , вважаючи, що $C = [0 \ 1]$. У цьому разі виходом привода буде не кут $\beta(t)$, а кутова швидкість $\omega(t)$.

Тоді дістанемо

$$Q_{\kappa, \theta} = [C\theta \quad C A \theta] = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad \text{Ранг } Q_{\kappa, \theta} = 1.$$

$$Q_c = [C^T \quad A^T C^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \text{Ранг } Q_c = 1.$$

Отже, в розглядуваному випадку привод повністю керувний за станом /матриця $Q_{\text{кер}}$ не змінилася/ та виходом і неспостережний, бо в формуванні виходу /див. рис. 2.13/ бере участь тільки одна змінна стану $x_2(t)$, яку і можна відновити за вимірюваннями виходу $w(t)$. У цьому разі кажуть, що привод є не повністю спостережним.

Нехай тепер $\theta = [10]^T$, а матриці A і C ті ж самі, що й у початковій системі. Цей випадок відповідає тому, що вхід $u(t)$ діє тільки на другий інтегратор, тобто впливає тільки на $x_2(t)$ /див. рис. 2.13/. Тоді

$$Q_{\text{кер}} = [\theta \quad A\theta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \det Q_{\text{кер}} = 0$$

/матриця $Q_{\text{кер}}$ є вироджена/:

$$Q_{\kappa, \theta} = [C\theta \quad C A \theta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{Ранг } Q_{\kappa, \theta} = 1.$$

$$Q_c = [C^T \quad A^T C^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{Ранг } Q_c = 2.$$

Отже, в цьому випадку привод не повністю керувний за станом, повністю керувний за виходом і повністю спостережний.

За результатами цього прикладу можна зробити такі загальні висновки. Керовність за виходом не залежить від того, які і скільки змінних стану беруть участь у формуванні виходу, тобто не залежить від структури матриці C . Коли задано матрицю A , то керовність залежить від структури матриці θ , а спостережність - від структури матриці C .

8.2.3. Зв'язок керовності й спостережності з передавною функцією

Лінійна стаціонарна неперервна /або цифрова/ система /об'єкт/ повністю керувна і спостережна тільки тоді, коли передавна функція

$$G(p) = C [pI - A]^{-1} B, \quad /8.16/$$

яка пов'язує вихідні сигнали з вхідними, є невироджена, тобто коли неможливо скоротити полюси передавної функції з її нулями.

Коли передавна функція вироджена, то система або повністю керовна і не повністю спостережна, або повністю спостережна і не повністю керовна, або повністю некеровна і повністю неспостережна.

Приклад 8.3. Потрібно визначити передавні функції слідкувального електропривода, керовність і спостережність якого розглянуто в попередньому прикладі.

Розв'язання. Згідно з /8.16/ визначимо $g(p)$ для різної структури матриць B і C та матриці A з незмінною структурою, яку визначає /8.15/.

1. $B = [0 \ 1]^T$; $C = [1 \ 0]$. Цей випадок відповідає повній керовності за станом та виходом і повній спостережності привода. Матрицю $[pI - A]^{-1}$ було визначено в прикладі 2.7:

$$[pI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & \frac{1}{p(p+2)} \\ 0 & \frac{1}{(p+2)} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$g(p) = \frac{\beta(p)}{u(p)} = C[pI - A]^{-1} B = \frac{1}{p(p+2)}.$$

Тут матриця $g(p)$ невироджена. На рис. 8.1,а зображено структурну схему привода, яка відповідає одержаній передавній функції $g(p)$. Безпосередньо із схеми аналогового моделювання /див. рис. 2.13/ випливає, що привод у цьому разі являє собою послідовне з'єднання двох ланок, а саме:

$$g(p) = \frac{\beta(p)}{u(p)} = \frac{\beta(p)}{\omega(p)} \cdot \frac{\omega(p)}{u(p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+2} = \frac{1}{p(p+2)}.$$

2. $B = [0 \ 1]^T$; $C = [0 \ 1]$ - цей випадок відповідає приводу, повністю керовному за станом та виходом і неповністю спостережному. Передавна функція в цьому разі вироджена. Справді,

$$g(p) = C[pI - A]^{-1} B = \frac{1}{p+2}.$$

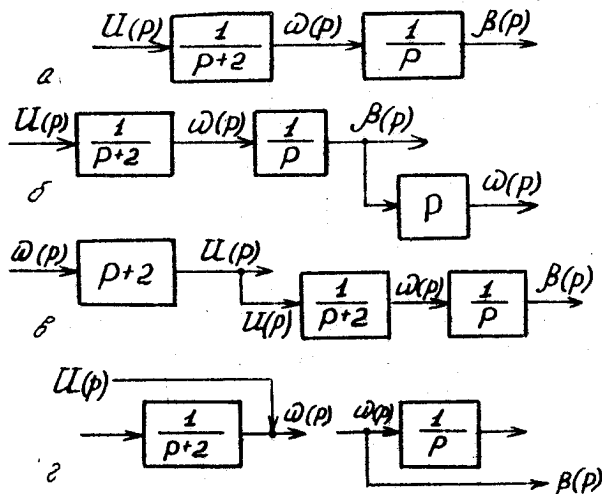


Рис. 8.1. Структурні схеми розімкненого слідкувального електропривода: а - повністю керовного й повністю спостережного; б - повністю керовного й не повністю спостережного; в - не повністю керовного й повністю спостережного; г - повністю некеровного й повністю неспостережного

Пояснити виродженість $g(p)$ можна так. Коли $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, то з виразу для вихідного сигналу $y(t) = Cx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$ випливає,

що виходом привода є кутова швидкість $\omega(t)$. Отже, $g(p) = \omega(p)/U(p)$.

На рис. 8.1,б зображено перетворення початкової структурної схеми рис. 8.1,а, з якої випливає, що $g(p)$ дорівнює добутку трьох динамічних ланок:

$$g(p) = \frac{\omega(p)}{U(p)} \cdot \frac{\beta(p)}{\omega(p)} \cdot \frac{\omega(p)}{\beta(p)} = \frac{1}{p+2} \cdot \frac{1}{p} \cdot \rho = \frac{1}{p+2} = \frac{\omega(p)}{U(p)}.$$

Таким чином, виродженість $g(p)$ спричинює поява в її структурі нуля $p = 0$, який компенсує полюс $p = 0$.

3. $\mathcal{B} = [10]^T$; $C = [10]$. Цей випадок відповідає приводу з неповною керовністю за станом, повною спостережністю й повною керовністю за виходом.

З виразу /8.16/ знаходимо

$$g(p) = C[pI - A]^{-1} \mathcal{B} = \frac{1}{p}.$$

Виродженість $g(p)$ пояснює структурна схема, зображена на рис. 8.1, в, з якого дістаємо

$$g(p) = \frac{u(p)}{w(p)} \cdot \frac{\omega(p)}{u(p)} \cdot \frac{\beta(p)}{\omega(p)} = (p+2) \cdot \frac{1}{p+2} \cdot \frac{1}{p} = \frac{\beta(p)}{\omega(p)}.$$

4. $\mathcal{B} = [10]^T$; $C = [01]$. Цей випадок відповідає повністю некеровному й повністю неспостережному приводові. Передавна функція

$$g(p) = C[pI - A]^{-1} \mathcal{B} = 0$$

є повністю вироджена. Фізично це означає розрив між динамічними ланками /рис. 8.1, г/.

З наведеного прикладу випливає, що зміну властивостей керовності й спостережності залежно від вибору змінних стану можна пояснити тим, що в передавній функції слідкувального привода відбувається компенсація полюса та нуля. Керовність за виходом не залежить від вибору змінних стану.

У класичних методах аналізу й синтезу систем керування для опису їх динамічних властивостей звичайно використовують передавні функції, які відповідають повністю керовній і повністю спостережній системі. Коли з тих чи тих причин у передавній функції не скорочено однакові нулі й полюси, то результат дослідження за такою передавною функцією буде невірний. У цьому полягає вада класичного методу дослідження систем керування, якої не має метод простору станів.

Ситуація із скороченням нуля й полюса наявна в разі оптимізації за модульним критерієм контурів струму та швидкості системи підпорядкованого регулювання [див. /5.24/]. Проте надалі, після скорочення нуля й полюса, для аналізу використовують передавні функції розімкненого /5.31/ і замкненого /5.32/ контурів, які є повністю керовними й повністю спостережними.

8.2.4. Інваріантність понять керовності й спостережності

Іноколи аналіз і синтез систем керування методом простору станів можна спростити, якщо рівняння стану перетворити з одного базису в інший за допомогою так званого перетворення подібності. Прикладом такого перетворення є метод діагоналізації /запис рівнянь стану в нормальній формі/, про який уже йшлося в п. 2.2.4, коли розглядалися методи знаходження перехідної матриці стану. Інший приклад перетворення подібності – перетворення рівнянь стану до канонічної форми фазової змінної – розглянуто в наступному пункті цього розділу. Тут лише зауважимо, що поняття керовності й спостережності – це внутрішні властивості системи, які характеризує динамічна матриця A , і вони не залежать від перетворення подібності цієї матриці й рівнянь стану, котрі їй відповідають.

8.2.5. Дуальний зв'язок між спостережністю й керовністю

Такий зв'язок між умовами керовності й спостережності наявний і для цифрових, і для неперервних систем.

Лінійна стаціонарна система /система Σ_1 /, рівняння стану якої задано у вигляді

$$\dot{\bar{x}}(t) = A \bar{x}(t) + B \bar{u}(t),$$

$$\bar{y}(t) = C \bar{x}(t),$$

спостережна тоді й тільки тоді, коли спряжена система /система Σ_2 /

$$\dot{\bar{x}}(t) = A^T \bar{x}(t) + C^T \bar{u}(t),$$

$$\bar{y}(t) = B^T \bar{x}(t)$$

є керовна за станом. Тут матриці A , B і C мають вимірність відповідно $n \times n$, $n \times m$ і $z \times n$. Вектор $\bar{u}(t)$ у системі Σ_1 має вимірність $m \times 1$, а в системі Σ_2 вектор $\bar{u}(t)$ має вимірність $z \times 1$. Властивість дуальності справджується й тоді, коли системи Σ_1 і Σ_2 поміняти місцями.

Дуальність керовності й спостережності дає змогу скористатися результатами, одержаними під час розв'язування задач керування за допомогою зворотного зв'язку в стаціонарній системі, для розв'язування задач побудови спостерігачів стану цієї системи /див. підрозд. 8.4/.

8.3. Синтез аналогових і цифрових регуляторів стану з повною інформацією про об'єкт керування

8.3.1. Синтез регуляторів за рівняннями стану, заданими в канонічній формі фазовою змінною

Зображення об'єкта керування в канонічній формі фазовою змінною

Розглянемо лінійний стаціонарний, повністю керований об'єкт /систему/ з одним входом, рівняння стану якого мають вигляд

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b u(t), \quad /8.17/$$

або для цифрової системи

$$x(k+1) = A x(k) + b u(k), \quad /8.18/$$

де A і b - числові матриці вимірністю відповідно $n \times n$, $n \times 1$; $u(t)$, $u(k)$ - скалярні входні змінні; $x(t)$, $x(k)$ - n -вимірні вектори стану.

Нехай

$$\varphi_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad /8.19/$$

є характеристичний поліном матриці A . Тоді пару матриць

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad /8.20/$$

називають канонічною формою фазової змінної об'єкта /8.17/ або /8.18/ з одним входом. Якщо пара матриць A, b є некеровна, тоді не існує зображення цієї пари в канонічній формі фазової змінної. Наприклад, коли вектор $b = 0$, то він дорівнюватиме нулю і в будь-якому іншому базисі і, отже, для нього не існуватиме канонічної форми зображення.

Коли порівняти матриці A^* , θ^* з A , θ для об'єкта, рівняння стану якого записано в стандартній формі [див. п. 2.2.3, формулу /2.46/], то неважко помітити, що матриці A і A^* повністю збігаються, а вектори θ і θ^* відрізняються тільки елементом останнього рядка; у векторі θ^* він завжди дорівнює 1.

Доведемо, що система, зображена в канонічній формі фазовою змінною, має деякі специфічні властивості, які полегшують проектування регуляторів стану.

Перетворення до канонічної форми фазової змінної

Можна строго довести, що коли пара матриць A , θ є повністю керуєвною, то завжди можна знайти таку неособливу матрицю P , за допомогою якої цю пару можна перетворити до канонічної форми фазової змінної A^* , θ^* [4; 26].

Розглянемо один з алгоритмів такого перетворення. Нехай рівняння стану лінійної стаціонарної системи зображено у вигляді /8.17/ або /8.18/. Тоді існує невироджене перетворення подібності

$$\overline{x^*(t)} = P \overline{x(t)}; \quad \overline{x^*(k)} = P \overline{x(k)} \quad /8.21/$$

або

$$\overline{x(t)} = P^{-1} \overline{x^*(t)}; \quad \overline{x(k)} = P^{-1} \overline{x^*(k)}, \quad /8.22/$$

яке перетворює рівняння /8.17/ і /8.18/ до канонічної форми фазової змінної

$$\dot{\overline{x^*(t)}} = A^* \overline{x^*(t)} + \theta^* U(t) \quad /8.23/$$

або

$$\overline{x^*(k+1)} = A^* \overline{x^*(k)} + \theta^* U(k), \quad /8.24/$$

де

$$A^* = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \theta^* = P\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad /8.25/$$

Неособлива матриця

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 A \\ \vdots \\ P_n A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (n \times n), \quad /8.26/$$

де

$$P_1 = [0 \ 0 \dots 1] [B \ A B \dots A^{n-1} B]^{-1} = [0 \ 0 \dots 1] Q^{-1}. \quad /8.27/$$

Наведемо без доведення ще два практичних способи перетворення матриць A, B до канонічної форми фазової змінної A^*, B^* .

1. Коли пару матриць A, B повністю керовного об'єкта /системи/ задано, то, щоб обчислити їх канонічне зображення A^*, B^* , досить обчислити коефіцієнти характеристичного многочлена матриці A :

$$\chi_A(\lambda) = [\lambda I - A] = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad /8.28/$$

і відразу записати матриці A^*, B^* у вигляді /8.20/.

2. Коли опис об'єкта з одним виходом задано за допомогою передавальної функції виду

$$K(p) = \frac{d_{n-1} p^{n-1} + d_{n-2} p^{n-2} + \dots + d_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0},$$

то тоді, оскільки об'єкт повністю керувний, канонічне зображення матриць A^*, B^* має вигляд /8.20/, а матриця C , яка пов'язує вихідний сигнал з вхідним, становить $C = [d_0 \ d_1 \dots \ d_{n-1}]$.

Тут варто зауважити, що матриці A й A^* в початковій і перетвореній системах мають одні й ті самі власні значення.

Приклад 8.4. Задано матриці A і B такими виразами:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Цю пару матриць потрібно перетворити до канонічної форми фазової змінної.

Розв'язання.

$$\text{Ранг } Q_{\text{кер}} = \text{Ранг } [B \ A B] = \text{Ранг } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

Отже, пара A, B повністю керувна.

Матриця ρ -перетворення в канонічній формі

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_1 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

де

$$\rho_1 = [0 \ 1] Q_{\text{пер}}^{-1} = [-1 \ 1]; \quad \rho_1 A = [-1 \ 2].$$

Тоді

$$\dot{x}^*(t) = A^* x^*(t) + \theta^* u(t),$$

де

$$A^* = \rho A \rho^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \theta^* = \rho \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Обчислимо характеристичний поліном матриці A :

$$\varphi_A(\lambda) = \det [\lambda I - A] = \lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

За коефіцієнтами цього полінома, знаючи структуру матриць A^* , θ^* , яку визначають вирази /8.20/, можна було б відразу записати і ці матриці, і рівняння стану в канонічній формі, а не виконувати трудомісткі обчислення матриці перетворення ρ і матриць $A^* = \rho A \rho^{-1}$, $\theta^* = \rho \theta$. Але далі буде доведено, що матрицю ρ необхідно визначити для розрахунку коефіцієнтів регулятора стану, хоча матриць A^* і θ^* можна й не обчислювати, а записати за коефіцієнтами полінома $\varphi_A(\lambda)$.

Зворотний зв'язок за станом

Побудова замкнених систем керування електроприводами ґрунтується на використанні зворотного зв'язку. Під час проектування систем керування із зворотним зв'язком дуже важливо забезпечити їх стійкість в усіх режимах роботи. Окрім того, зворотний зв'язок дає змогу забезпечити потрібну якість перехідного процесу системи та її точність.

Розглянемо лінійну стаціонарну, повністю керовну систему /об'єкт/ з одним входом, яку описують рівняння стану /8.17/. Зауважимо, що наведені далі міркування слушні й для цифрових систем. Припустимо, що всі змінні стану $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, можна виміряти за допомогою відповідних датчиків і використати надалі для побудови регулятора стану. Систему в цьому разі називають системою з повною інформацією про стан. Утворимо тепер лінійний закон керування за допомогою

зворотного зв'язку за всіма змінними стану виду

$$u(t) = -L \bar{x}(t), \quad /8.29/$$

де L - матриця коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку вимірністю $1 \times n$. Якщо цей закон керування використати в системі /8.17/, то замкнену систему керування можна описати такими рівняннями стану:

$$\dot{\bar{x}}(t) = [A - BL] \bar{x}(t). \quad /8.30/$$

Структурну схему об'єкта керування з регулятором стану, складену за рівняннями /8.30/, зображено на рис. 8.2.

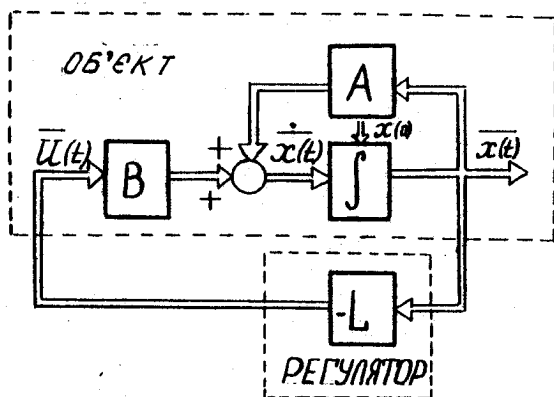


Рис. 8.2. Структурна схема об'єкта керування з регулятором стану /випадок кількох керувальних сигналів/

Проектування регулятора стану полягає в такому виборі матриці коефіцієнтів підсилення L , щоб можна було дістати бажані /задані/ динамічні властивості замкненої системи. Один з методів синтезу регулятора стану полягає в бажаному розташуванні коефіцієнтів характеристичного рівняння системи /8.30/, тобто власних значень матриці замкненої системи $[A - BL]$, на комплексній площині коренів. Розв'язуючи цю задачу синтезу, припускати, що матриці A, B системи /8.17/ подано в канонічній формі фазової змінної і їх визначають вира-

зи /8.20/. Перевага подання матриць A, B в канонічній формі A^*, B^* полягає, по-перше, в простішому способі аналогового моделювання рівнянь стану $\dot{x}^*(t) = A^*x^*(t) + B^*u(t)$, бо вони містять мінімальну кількість ненульових елементів /порівняйте схеми аналогового моделювання на рис. 2.10 і 2.12/, і, по-друге, а це важливіше, в тому, що в цьому випадку можна найпростіше сформулювати алгоритм синтезу регулятора стану, який допомагає бажаним чином розташувати власні значення матриці $[A^* - B^*L^*]$ у лівій півплощині комплексної площини коренів. Цей алгоритм дає змогу сформулювати така теорема.

Нехай лінійна стаціонарна система з одним входом $\dot{x}^*(t) = A^*x^*(t) + B^*u(t)$ повністю керовна і нехай $\varphi_{кер}(\lambda) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \beta_1\lambda + \beta_0$ - заданий /бажаний/ нормований / $\beta_n = 1$ / поліном n -го порядку з дійсними коефіцієнтами. Тоді є такий вектор зворотного зв'язку L^* , що замкнена за допомогою зворотного зв'язку $u(t) = -L^*x^*(t)$ система $\dot{x}^*(t) = [A^* - B^*L^*]x^*(t)$ має $\varphi_{кер}(\lambda)$ своїм характеристичним поліномом. Доведемо цю теорему.

Нехай характеристичний поліном матриці A^* $\varphi_{A^*}(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$.

Виберемо тепер компоненти вектора зворотного зв'язку за формулою

$$l_{n-i+1}^* = \beta_i - a_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad /8.31/$$

Підставивши вектор зворотного зв'язку $L^* = [l_0^* \ l_1^* \ \dots \ l_{n-1}^*]$ у вираз для матриці замкненої системи $[A^* - B^*L^*]$, з урахуванням /8.31/ одержимо

$$[A^* - B^*L^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [l_0^* \ l_1^* \ \dots \ l_{n-1}^*] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & \dots & -\beta_{n-1} \end{bmatrix}. \quad /8.32/$$

Із /В.32/ випливає, що характеристичний поліном матриці замкненої системи $[A^* - \mathcal{B}^* \mathcal{L}^*]$ дорівнює бажаному характеристичному поліному, тобто $\varphi_{[A^* - \mathcal{B}^* \mathcal{L}^*]}(\lambda) = \lambda^n + \gamma_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_1 \lambda + \gamma_0 = \varphi_{\text{кер}}(\lambda)$. Отже, за допомогою зворотного зв'язку за станом можна потрібним способом змінювати динаміку замкненої системи, вибираючи її власні значення на свій розсуд. Проте на вільний вибір власних значень накладено таке обмеження. З умов фізичної реалізованості коефіцієнти полінома $\varphi_{\text{кер}}(\lambda)$ мають бути дійсні. Тому кожне комплексне число, що його містить набір власних значень полінома $\varphi_{\text{кер}}(\lambda)$, має бути разом зі своїм спряженим.

Визначивши коефіцієнти $\ell_0^*, \ell_1^*, \dots, \ell_{n-1}^*$ матриці зворотного зв'язку $\mathcal{L}^*$, треба перетворити їх з канонічного базису, в якому вони визначені, в природний, тобто в базис, що в ньому записано початкові рівняння стану. Таке перетворення роблять за формулою

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^* \rho, \quad /В.33/$$

де ρ - неособлива матриця, за допомогою якої виконували перетворення з природного базису в канонічний.

На підставі викладеного можна сформулювати такий алгоритм синтезу лінійних стаціонарних неперервних та цифрових систем керування з одним входом.

1. За відомими початковими даними /структурна схема, передавна функція тощо/ складають рівняння стану:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + \mathcal{B} u(t).$$

2. Обчислюють матрицю керовності:

$$Q_{\text{кер}} = [\mathcal{B} \quad A\mathcal{B} \quad A^2\mathcal{B} \dots A^{n-1}\mathcal{B}] \quad /В.34/$$

і перевіряють, чи збігається її ранг з вимірністю системи.

3. Обчислюють характеристичний многочлен матриці A :

$$\varphi_A(\lambda) = [I\lambda - A] = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0. \quad /В.35/$$

4. За коефіцієнтами $\varphi_A(\lambda)$ записують пару матриць $A, \mathcal{B}$ в канонічній формі фазової змінної $A^*, \mathcal{B}^*$.

5. Задають бажаний характеристичний поліном замкненої системи:

$$\varphi_{\text{кер}}(\lambda) = \lambda^n + \gamma_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_1 \lambda + \gamma_0. \quad /В.36/$$

6. За формулами $\ell^{*}_{n-i+1} = \rho_i - a_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, обчислюють компоненти $\ell^{*}_0, \ell^{*}_1, \dots, \ell^{*}_{n-1}$ вектора зворотного зв'язку ℓ^{*} , записаного в канонічній формі фазової змінної.

7. Обчислюють матрицю перетворення ρ до канонічної форми фазової змінної і розраховують коефіцієнти матриці $L = \rho \ell^{*}$ у початковому базисі.

Приклад 8.3. Для об'єкта керування, що складається з безінерційного / $\tau = 0$ / тиристорного перетворювача і двигуна постійного струму з незалежним збудженням, з'єднаного з робочим механізмом через знижувальний редуктор, треба скласти рівняння стану й побудувати регулятор стану.

Розв'язання. За змінні стану виберемо кутову швидкість двигуна $\omega(t)$ і струм $I_A(t)$ силового кола ПД, виміряні відповідно тахометром і давачем струму. Коли змінні стану задано, то для складання рівняння стану потрібно скористатися насамперед з поелементної / скалярної / форми їх зображення, суть якої розглянуто в розд. 3. У цьому випадку, припустивши, що $M_{on}(t) = 0$, а це зробити можна, бо між двигуном та робочим механізмом поставлено знижувальний редуктор, і $\Phi(t) = \Phi_0 = const$, з рівнянь /3.33/, /3.34/ і передаточної функції /3.5/ /див. розд. 3/:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{R_z K_A}{T_M} I_A(t);$$

$$\frac{dI_A(t)}{dt} = -\frac{1}{K_A R_z T_e} \omega(t) - \frac{1}{T_e} I_A(t) + \frac{K_{r,n}}{R_z T_e} U_{rep}(t),$$

або

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B U(t),$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R_z K_A}{T_M} \\ -\frac{1}{K_A R_z T_e} & -\frac{1}{T_e} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_{r,n}}{R_z T_e} \end{bmatrix};$$

$$\overline{x(t)} = [\omega(t) \ I_A(t)]^T, \quad u(t) = U_y(t).$$

Визначаємо матрицю керовності:

$$Q_{\text{кер}} = \begin{bmatrix} \theta & A\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\kappa_{\tau, n} \kappa_A}{T_e T_M} \\ \frac{\kappa_{\tau, n}}{R_{\tau} T_e} & -\frac{\kappa_{\tau, n}}{R_{\tau} T_e^2} \end{bmatrix}.$$

Оскільки $\det Q_{\text{кер}} \neq 0$, то, отже, розглядуваний об'єкт повністю керований.

Визначаємо характеристичний поліном матриці A :

$$\varphi_A(\lambda) = [I\lambda - A] = \lambda^2 + \frac{1}{T_e} \lambda + \frac{1}{T_e T_M}.$$

Отже, коефіцієнти полінома: $a_0 = 1/T_e T_M$; $a_1 = 1/T_e$. Власне значення матриці A :

$$\lambda_{1,2} = (-T_M \pm \sqrt{T_M^2 - 4T_e T_M}) / 2T_e T_M.$$

Біdnосний коефіцієнт демпфування ξ і власна частота коливань об'єкта керування Ω_0 як динамічної ланки другого порядку

$$\xi = T_M / 2\sqrt{T_e T_M}; \quad \Omega_0 = 1/\sqrt{T_e T_M}.$$

Наприклад, коли $T_e = 0,1$ с, а $T_M = 0,5$ с, то

$$\lambda_1 = -2,77 \text{ с}^{-1}; \quad \lambda_2 = -7,23 \text{ с}^{-1}; \quad \xi = 1,095;$$

$$\Omega_0 = 4,5 \text{ рад/с}.$$

За коефіцієнтами полінома $\varphi_A(\lambda)$ записуємо пару матриць A, θ в канонічній формі фазової змінної:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_e T_M} & -\frac{1}{T_e} \end{bmatrix}; \quad \theta^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Задаємо бажаний поліном замкненого за допомогою зворотного зв'язку за станом об'єкта керування у вигляді такого полінома. Баттерворта другого порядку:

$$\varphi_{\text{кер}}(\lambda) = \lambda^2 + 1,4\omega_0 \lambda + \omega_0^2 = \lambda^2 + \gamma_1 \lambda + \gamma_0,$$

де $\gamma_1 = 1,4\omega_0$; $\gamma_0 = \omega_0^2$; ω_0 - радіус півкола, на якому лежать корені λ_1, λ_2 полінома $\varphi_{\text{кер}}(\lambda)$.

Тут варто зауважити, що характеристичний поліном замкненого контуру струму чи швидкості, оптимізованого за модульним критерієм системи підпорядкованого регулювання швидкості, - це окремий випадок полінома Баттерворта другого порядку, а характеристичний поліном контуру швидкості, оптимізованого за симетричним критерієм - окремий випадок полінома Баттерворта третього порядку. Справді, порівнявши характеристичний поліном замкненого контуру швидкості, який становить

$2T_{\mu\omega} p^2 + 2T_{\mu\omega} p + 1$, із зведеним поліномом Баттерворта другого порядку, бачимо, що відносні коефіцієнти демпфування ξ в обох системах практично однакові і дорівнюють 0,7, а власні частоти будуть однакові, коли зрівняти коефіцієнти біля p^2 , тобто коли в поліномі Баттерворта $\omega_0 = 1/(T_{\mu\omega} \sqrt{2}) = 1/(2T_{\mu\omega} \sqrt{2})$. Це означає, що за допомогою зворотного зв'язку за станом, вибравши в поліномі Баттерворта $\omega_0 = \Omega_0 = 1/2 T_{\mu\omega} \sqrt{2}$, можна побудувати систему, теоретично адекватну системі підпорядкованого регулювання, оптимізованій за модульним критерієм. Коли, приміром, припустити, що мала некомпенсована стала часу контуру струму $T_{\mu\omega} = 10 \cdot 10^{-3}$ с [10], то $\omega_0 = 1/2 \cdot 10^{-2} \sqrt{2} = 35,5$ рад/с. Отже, $\gamma_0 = \omega_0^2 = 1260$ рад/с², $\gamma_1 = 1,4 \omega_0 = 49,7$ рад/с.

Знаходимо коефіцієнти підсилення ℓ_0^* , ℓ_1^* матриці зворотного зв'язку $L^* = [\ell_0^* \ell_1^*]$:

$$\ell_0^* = \gamma_0 - a_0 = \gamma_0 - 1/T_e T_{\mu};$$

$$\ell_1^* = \gamma_1 - a_1 = \gamma_1 - 1/T_e.$$

Визначаємо матрицю перетворення P :

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_{\mu} T_e}{K_{\tau, n} K_A} & 0 \\ 0 & \frac{R_2 T_e}{K_{\tau, n}} \end{bmatrix},$$

де

$$P_1 = [0 \ 1] Q_{\kappa\sigma p}^{-1} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} \frac{T_{\mu}}{K_{\tau, n} K_A} & \frac{R_2 T_e}{K_{\tau, n}} \\ \frac{T_{\mu} T_e}{K_{\tau, n} K_A} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_{\mu} T_e}{K_{\tau, n} K_A} & 0 \end{bmatrix};$$

$$P_1 A = \begin{bmatrix} \frac{T_{\mu} T_e}{K_{\tau, n} K_A} & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R_2 T_e}{K_{\tau, n}} \end{bmatrix}.$$

Неважко перевірити, що

$$A^* = P A P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_e T_M} & -\frac{1}{T_e} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B}^* = P \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Визначасмо матрицю коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку $\mathcal{L}$ для початкової системи:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{T_M T_e}{K_{T,n} K_A} & 0 \\ 0 & \frac{R_E T_e}{K_{T,n}} \end{bmatrix} [\ell_0^* \ell_1^*] = [\ell_0 \ell_1],$$

де

$$\ell_0 = \frac{1}{K_{T,n} K_A} (\gamma_0 T_e T_M - 1),$$

$$\ell_1 = \frac{R_E}{K_{T,n}} (\gamma_1 T_e - 1).$$

Коли взяти попередні значення T_e , T_M , ω_0 , а $R_E = 1$ Ом, $K_{T,n} = 10$, $K_A = 1$ рад/В·с, то

$$\mathcal{L} = [\ell_0 \ell_1] = [6,3 \quad 0,397].$$

Рівняння стану регулятора /8.30/ з урахуванням одержаних виразів для матриці зворотного зв'язку $\mathcal{L}$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R_E K_A}{T_M} \\ -\frac{T_M}{R_E K_A} \gamma_0 & -\gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

За цими рівняннями на рис. 8.3,а побудовано структурну схему регулятора стану, яку можна використати для аналогового моделювання перехідних процесів у регуляторі, зумовлених ненульовими початковими умовами $x_1(0)$, $x_2(0)$. На рис. 8.3,б зображено принципову схему підімкнення регулятора стану до об'єкта ПП-Д. Коефіцієнти підсилення $\ell_0 = R_{3,3} / R_w$ і $\ell_1 = R_{3,3} / R_{сп}$ реалізовано на одному операційному

підсилювачі. Треба мати на увазі, що за одних і тих самих давачів струму та швидкості система із зворотними зв'язками за станом хоча й матиме на один операційний підсилювач менше, ніж система підпорядкованого регулювання, однак матиме й дуже великі вади, пов'язані головним чином з відсутністю обмеження регульовних координат.

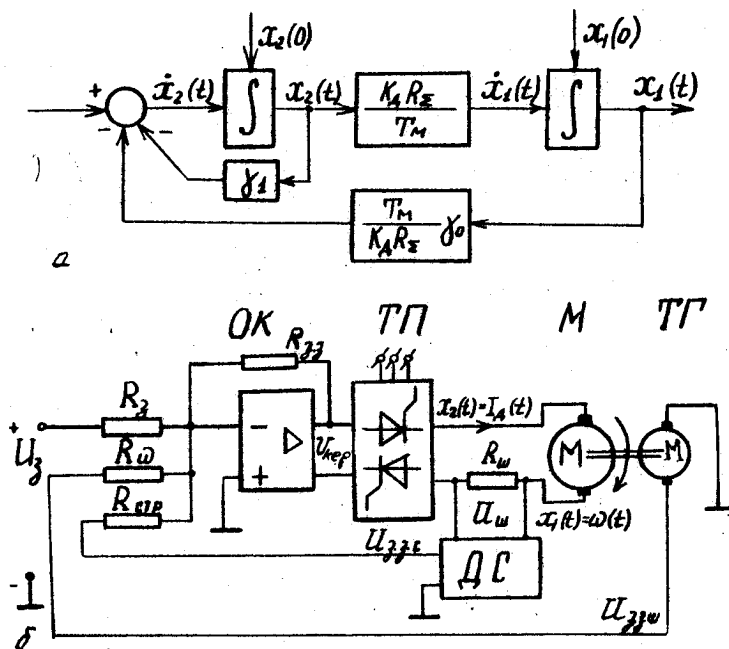


Рис. 8.3. Структурна схема аналогового моделювання регулятора швидкості /а/ і принципова схема його підімкнення до об'єкта ТП-Д/б/

Для вибраних значень параметрів T_e , T_M і ω_0 у табл. 8.1 наведено порівняння параметрів розімкненої системи /об'єкта ТП-Д/ і замкненої з регулятором стану, адекватної за своїми властивостями, принаймні в принципі, двоконтурній системі підпорядкованого регулювання швидкості.

Параметри розімкненої й замкненої
систем регулювання швидкості

Система	Параметри	
	Власні значення λ_1, λ_2 , рад/с	Відносний коефіцієнт демпфування ξ і власна частота Ω_0
Розімкнена	$\lambda_1 = -7,23$; $\lambda_2 = -2,77$	$\xi = 1,095$; $\Omega_0 = 4,5$ рад/с
Замкнена	$\lambda_{1,2} = -24,81 \pm j 24,7$	$\xi = 0,7$; $\Omega_0 = 35,5$ рад/с

З розглянутого прикладу випливає, що хоча теоретично корені замкненої системи можна довільно розташувати в лівій частині комплексної площини, тобто забезпечити будь-яку швидкість системи, однак це неминуче призводить до збільшення амплітуди керувальної дії й надмірного форсування перехідного процесу в системі. У кожній практичній задачі амплітуду керувальної дії обмежено, внаслідок чого обмежене й розташування полюсів. Тому викладений метод побудови зворотних зв'язків за станом звичайно використовують у задачі аналітичного конструювання регуляторів, під час розв'язування якої синтезують такий закон керування системою, котрий мінімізує інтегральну квадратичну похибку із заданим інтегральним квадратичним обмеженням на вектор керувальної дії $u(t)$.

Приклад 8.6. Задано рівняння стану цифрової СЧЕП у вигляді

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k),$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Потрібно визначити таку матрицю коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку L , необхідну для організації зворотного зв'язку за станом $u(k) = -Lx(k)$, щоб власні значення замкненої системи дорівнювали $\lambda_1 = 0,3$ і $\lambda_2 = 0,7$.

Розв'язання. Визначаємо матрицю керовності:

$$Q_{\text{кер}} = [\delta \quad A\delta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Оскільки ранг $Q_{\text{кер}} = 2$, то, отже, задана система повністю керовна.

Визначимо характеристичний поліном матриці A :

$$\varphi_A(\lambda) = [I\lambda - A] = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

або

$$\varphi_A(\lambda) = [I\lambda - A] = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)(\lambda - 1).$$

З рівняння $\varphi_A(\lambda) = 0$ знаходимо власні значення матриці A :

$\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 1$. Отже, задана система перебуває на межі стійкості.

Проте, оскільки вона повністю керовна, то за допомогою зворотного зв'язку за станом її можна зробити не лише асимптотично стійкою, а й з потрібною якістю процесу керування.

Визначаємо бажаний характеристичний поліном замкненої системи, враховуючи задані в умові задачі власні значення:

$$\varphi_{\text{кер}}(\lambda) = (\lambda - 0,3)(\lambda - 0,7) = \lambda^2 - \lambda + 0,21.$$

За поліномом $\varphi_A(\lambda)$ записуємо пару матриць A, δ у канонічній формі фазової змінної:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \delta^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Розраховуємо коефіцієнти ℓ_0^*, ℓ_1^* матриці L^* у канонічному базисі фазової змінної:

$$\ell_0^* = \delta_0^* - a_0 = 0,21 - 1 = -0,79 \text{ с}^{-2};$$

$$\ell_1^* = \delta_1^* - a_1 = -1 + 2 = 1 \text{ с}^{-1}.$$

$$\text{Тоді } L^* = [\ell_0^* \quad \ell_1^*] = [-0,79 \quad 1].$$

Визначаємо матрицю коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку L початкової системи з урахуванням одержаного в прикладі 8.4 значення для матриці P :

$$L = L^*P = [-0,79 \quad 1] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = [-0,21 \quad 1,21].$$

Неважко перевірити, що власні значення замкнутої системи, визначені з її характеристичного рівняння,

$$[zI - A + bL] = z^2 - z + 0,21 = (z - 0,3)(z - 0,7) = 0$$

дорівнюють заданим, а саме: $z_1 = 0,3$ і $z_2 = 0,7$. Оскільки z_1 і z_2 лежать на z -площині всередині круга з одиничним радіусом, то система стійка.

Таким чином, керування з використанням зворотного зв'язку за станом, яке забезпечує задані власні значення замкнутої системи, має такий вигляд:

$$U(x) = [-0,21 \quad 1,21] \bar{x}(x).$$

8.3.2. Синтез регуляторів за рівняннями стану, заданими в довільній формі

Зараз розроблено низку алгоритмів синтезу аналогових та цифрових регуляторів стану, які дають змогу розв'язати задачу, не перетворюючи початкових рівнянь стану в канонічну форму фазової змінної. Наведемо один з таких алгоритмів, коли рівняння стану системи /об'єкта/ з одним входом /8.17/ або /8.18/ задано в довільній формі [26]. У цьому разі коефіцієнти $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ матриці зворотного зв'язку за всіма змінними стану:

$$L = [(MQ_{\text{кер}})^T (\bar{p} - \bar{a})]^T, \quad /8.37/$$

де

$$M = \begin{bmatrix} a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{bmatrix};$$

$$Q_{\text{кер}} = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b]$$

$$\bar{a} = [a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \dots \quad a_1];$$

$$\bar{p} = [p_{n-1} \quad p_{n-2} \quad \dots \quad p_1].$$

Коефіцієнти матриць $M, \bar{a}, \bar{p}$ визначають з характеристичних поліномів розімкнутої системи

$$\varphi_A(z) = [Iz - A] = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

і замкнутої системи

$$\varphi_{\text{кер}}(z) = [Iz - A + bL] = z^n + \beta_{n-1}z^{n-1} + \dots + \beta_1z + \beta_0,$$

а для аналогової системи – за характеристичними поліномами /8.33/ і /8.36/.

Оскільки матриця M трикутна з одиницями на головній діагоналі [поліном $\varphi_{\text{кер}}(z)$ нормовано], то вона завжди є невироджена. Тому, щоб існував розв'язок задачі, який визначає формула /8.37/, необхідно й досить, аби пара матриць A, b була повністю керовна.

Перші три пункти алгоритму синтезу в розглядуваному випадку такі ж самі, як і в алгоритмі, сформульованому в попередньому підрозділі; четвертий пункт потрібно пропустити; потім за /8.37/ визначають матрицю зворотного зв'язку L , заздалегідь знайшовши матриці $M, Q_{\text{кер}}^T, \beta, \bar{a}$ і $[MQ_{\text{кер}}^T]^{-1}$.

Неважко перекоонатися, що для привода, докладно розглянутого в прикладі 8.5, матриці L , розраховані за формулами /8.37/ і /8.33/, повністю збігаються.

Матрицю зворотного зв'язку L у виразі /8.37/ зображено як функцію коефіцієнтів бажаного характеристичного полінома замкнутої системи $\beta_i, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Інший алгоритм для визначення матриці L , вираженої через бажані власні значення замкнутої системи, наведено в [26].

8.4. Синтез аналогових і цифрових регуляторів стану з неповною інформацією про об'єкт керування

Під час побудови регуляторів стану з повною інформацією про об'єкт керування всі змінні стану $x_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, вектора стану $x(t)$ вимірювали й використовували для організації зворотних зв'язків. Рівняння виходу $y(t) = Cx(t)$ при цьому не використовували. Припускали, що будь-яку із складових $y_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, вектора виходу $y(t)$ або їх комбінацію, залежно від структури матриці C , можна використати як вихідний сигнал.

Однак на практиці не завжди можливо або доцільно використовувати всі змінні стану для побудови регуляторів стану, бо, по-перше, не можна виміряти деякі змінні стану через їх абстрактний характер і, по-друге, важко технічно виготовити деякі вимірювачі /давачі/ через дорожнечу та інші причини. Тому постало завдання побудови регулято-

рів за неповною інформацією про об'єкт керування, тобто коли для цього використовувати не всі змінні $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, вектора стану $x(t)$, а тільки їх частину. Прикладом такого способу є розглядуване далі питання, пов'язане з проектуванням аналогових та цифрових регуляторів стану з неповним зворотним зв'язком за виходом.

Розглянемо таку систему /об'єкт/ з одним входом $u(t)$ і ρ виходами, що їх потім буде використано як зворотні зв'язки для побудови регулятора стану:

$$\dot{\overline{x(t)}} = A \overline{x(t)} + B u(t); \quad /8.38/$$

$$\overline{y(t)} = C \overline{x(t)}, \quad /8.39/$$

де вектори $\overline{x(t)}$ і $\overline{y(t)}$ мають розмірність відповідно $n \times 1$ і $\rho \times 1$ ($\rho \leq n$). Розмірність матриць A , B і C дорівнює відповідно $n \times n$, $n \times 1$ і $\rho \times n$.

Зворотний зв'язок за виходом

$$u(t) = -L \overline{y(t)}, \quad /8.40/$$

де L - матриця зворотного зв'язку за виходом вимірності $\rho \times \rho$.

Задача синтезу регулятора стану полягає в такому виборі матриці L , коли внаслідок синтезу буде одержано запані /бажані/ власні значення замкненої системи. Але, оскільки кількість виходів ρ менша від кількості змінних стану n , то не всі n власних значень можна задавати довільно. Доведемо, що кількість власних значень замкненої системи, які можна задавати довільно, для систем з одним входом залежить від рангу матриці C .

Синтезувати регулятори стану із зворотним зв'язком за виходом можна тим самим методом, що й у випадку зворотного зв'язку за станом. Підставивши /8.40/ у /8.39/, а тоді в /8.38/, дістанемо

$$\dot{\overline{x(t)}} = [A - BLC] \overline{x(t)}. \quad /8.41/$$

Рівняння /8.41/ еквівалентне рівнянню замкненої системи із зворотним зв'язком за станом, в якому матриця зворотного зв'язку являє собою добуток матриць LC . Отже, коли пара матриць A, B повністю керує, то розв'язок для LC можна відразу одержати, використавши /8.37/:

$$LC = [(M Q_y^T)^{-1} (\bar{p} - \bar{a})]^T. \quad /8.42/$$

Коли вхідна дія єдина, добуток матриць $\mathcal{L}C$ завжди являє собою матрицю-рядок вимірністю $1 \times n$. Матриця C містить ρ елементів, але тільки S з них відповідають незалежним параметрам, які можна використати для побудови регулятора стану /тут S - ранг матриці C , $S \leq \rho$ /. Наприклад, якщо

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

то ранг цієї матриці дорівнює 2. Якщо до того ж $\mathcal{L} = [l_0 \ l_1 \ l_2]$, то $\mathcal{L}C = [l_0 \ l_1 \ 2l_1]$, тобто матриця $\mathcal{L}C$ має тільки два незалежних параметри. Це означає, що за допомогою зворотного зв'язку за виходом довільно задавати можна тільки два з трьох власних значень замкненої системи. Коли ж ранг матриці C дорівнює порядковій системі, тобто

$S = n$, то, як випливає з [8.39], з урахуванням того, що $\rho = n$,
 $y_i(t) = x_i(t), i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Отже, зворотний зв'язок за виходом дає той самий наслідок, що й повний зворотний зв'язок за станом, а саме: коли пара матриць A, B повністю керовна, то всі власні значення замкненої системи можна задавати довільно. Це можна підтвердити попереднім прикладом, вважаючи матрицю C за одиничну, її ранг у цьому разі дорівнює 3. Тоді, коли $\mathcal{L} = [l_0 \ l_1 \ l_2]$, $\mathcal{L}C = [l_0 \ l_1 \ l_2]$, а $u(t) = -\mathcal{L}C x(t) = -[l_0 x_1(t) + l_1 x_2(t) + l_2 x_3(t)]$. Треба зауважити, що коли $S = n$, то знову маємо випадок побудови регулятора стану з повною інформацією, але тепер уже за вектором вихідних змінних $y_i(t) = x_i(t)$. У цьому разі також необхідно вимірювати всі змінні стану $x_i(t) = y_i(t)$.

Таким чином, коли пара матриць A, B повністю керовна, то кількість власних значень матриці замкненої системи $[A - B\mathcal{L}C]$, що їх можна довільно розташувати в лівій півплощині комплексної площини коренів, дорівнює рангові матриці C .

Викладений попередню метод синтезу слушний і для проектування цифрових регуляторів.

Зараз під час проектування й побудови слідкувальних приводів застосовують методи синтезу регуляторів стану, які поєднують і зворотний зв'язок за змінними стану, і неповний зворотний зв'язок за виходом з допомогою динамічного регулятора [26; 27]. Зокрема, динамічний регулятор може виконувати операцію інтегрування в аналоговій чи цифровій формі.

8.5. Синтез аналогових і цифрових регуляторів з використанням спостерігачів повного порядку

8.5.1. Постановка задачі синтезу

Під час побудови регуляторів стану, метою синтезу яких для випадку повної інформації про об'єкт керування викладено попередню, треба було вимірювати всі змінні стану $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, вектора стану $x(t)$ за допомогою спеціальних давачів, розташованих безпосередньо на об'єкті керування /давачі швидкості, положення, струму, напруги, моменту опору тощо в системах керування електроприладами/. Таке вимірювання координат об'єкта не завжди можна зробити, а в багатьох випадках і недоцільно. Тому зараз замість сукупності давачів застосовують електронні пристрої, які дістали назву спостерігачів стану. Вхідними сигналами для них є виміряні безпосередньо на фізичному об'єкті вхідний $u(t)$ і вихідний $y(t)$ сигнали об'єкта /в регуляторі струму це найчастіше напруга $u_{кер}(t)$, яка надходить на вхід СІУК, і кутова швидкість обертання двигуна ω /, а вихідними - відновлені /вироблені спостерігачем/ змінні стану $x_i(t)$. Побудувати спостерігач, який би точно виробляв змінні стану, неможливо, оскільки вимірювальне коло містить інерційні елементи. На практиці спостерігач стану розв'язує цю задачу, наближено, тобто замість вектора стану $x(t)$ виробляє його оцінки $\hat{x}(t)$, які надалі позначатимемо тими самими літерами, але із значком „^“ над ними. Вироблені спостерігачем оцінки потрібні не самі із себе, а для подальшого їх використання; вони потім надходять на вхід регулятора стану з матрицею зворотного зв'язку за станом L /рис. 8.4/ і далі у вигляді сигналу зворотного зв'язку $u(t) = -L \hat{x}(t)$ на вхід об'єкта. Регулятор стану разом із спостерігачем утворюють регулятор, який надалі називатимемо модальним регулятором стану.

Математичне формулювання задачі синтезу параметрів спостерігача таке. Задано математичну модель об'єкта /системи/ керування у вигляді рівнянь стану й рівняння виходу в такому вигляді:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A \hat{x}(t) + B u(t); \quad /8.43/$$

$$y(t) = C \hat{x}(t). \quad /8.44/$$

Відомі, крім матриць A , B і C , також виміряні безпосередньо на об'єкті керування вхідний $u(t)$ та вихідний $y(t)$ сигнали. Потрібно

побудувати спостерігач, який замість $\dot{x}(t)$ видавав би оцінку $\hat{x}(t)$.
Зуважимо, що безпосередньо видобути $\dot{x}(t)$ з математичної моделі /8.43/ не можна.

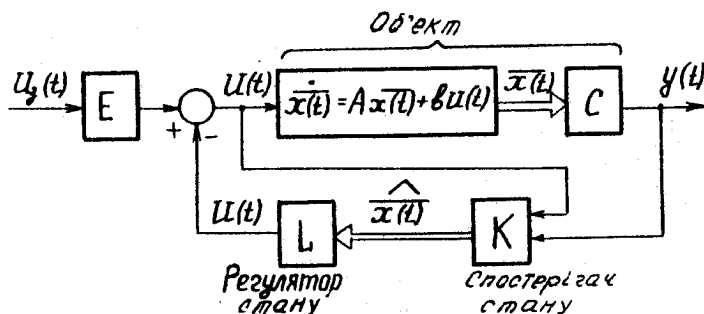


Рис. 8.4. Структурна схема модального регулятора стану

Якщо спостерігач відновлює /оцінює/ весь вектор стану $\bar{x}(t)$, то його називають спостерігачем повного порядку, а коли тільки частину, наприклад $n-1$, - спостерігачем зниженого порядку, або редукованим спостерігачем.

8.5.2: Принципи побудови спостерігачів стану

Структурну схему найпростішого спостерігача стану для системи /об'єкта/ з одним входом і одним виходом зображено на рис. 8.5. Горішня частина цього рисунка являє собою математичну модель об'єкта за /8.43/-/8.44/. Це абстрактна модель, що з тією чи тією точністю /принаймні якісно/ відображає процеси, які реально відбуваються в об'єкті. Нижня частина рисунка, позначена пунктирною лінією, - це спостерігач стану /фізичний пристрій/, який виробляє оцінку $\hat{x}(t)$ вектора стану $\bar{x}(t)$. На вхід моделі й спостерігача надходить реально вимірний на об'єкті вхідний сигнал $u(t)$.

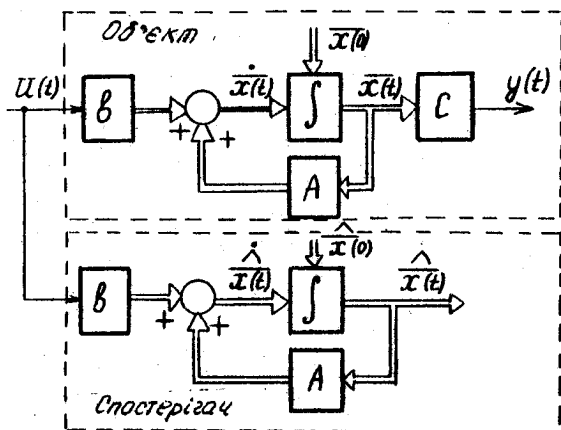


Рис. 8.5. Структурна схема найпростішого спостерігача стану

З наведених міркувань випливає, що коли початкові умови моделі й спостерігача, які характеризують вектори відповідно $\bar{x}(0)$ і $\hat{\bar{x}}(0)$, однакові, то процеси в об'єкті й спостерігачі перебігають однаково, тобто $\bar{x}(t) = \hat{\bar{x}}(t)$. Проте такий найпростіший спостерігач на практиці не застосовують через дві вади. По-перше, необхідно визначати початкові умови об'єкта $\bar{x}(0)$ за допомогою спеціального пристрою і передавати їх на інтегратори спостерігача щоразу, коли він розпочинає вимірювати вектор $\bar{x}(t)$. Зауважимо, що визначити початкові умови $\bar{x}(0)$ за вимірами виходу об'єкта $y(t)$ принципово можливо, коли пара матриць A, C останнього повністю спостережна /див. приклад 8.1/. По-друге, найпростіший спостерігач працює за розімкненим циклом. Тому навіть дуже мале відхилення $\hat{\bar{x}}(0)$ від $\bar{x}(t)$ у момент початку вимірювання, яке можуть спричинити неточні дані про матриці A, C та вхідний сигнал $u(t)$, з часом, унаслідок дії на спостерігач різних завад, може істотно відрізнятись від істинного. Цих вад не має асимптотичний спостерігач стану, в якому використано вимірюваний вихідний сигнал об'єкта $y(t)$ /рис. 8.6, а/.

У схемі передбачено автоматичну мінімізацію відхилення $\hat{\bar{x}}(t)$ від $\bar{x}(t)$ за рахунок того, що спостерігач побудовано як замкнену сис-

тему із від'ємним зворотним зв'язком. Вихід $y(t) = C\bar{x}(t)$ порівнюється з виходом спостерігача $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$ і їх різниця, яка є сигналом розузгодження, через матрицю коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку спостерігача K подається на вхід його інтеграторів. Ще краще було б побудувати спостерігач, який працює безпосередньо за похибкою $x(t) - \hat{x}(t)$, але цього зробити не можна, бо вектор $\hat{x}(t)$ об'єкта не вимірюється. Проектування спостерігача полягає в такому виборі структури й параметрів матриці K , щоб похибка $\hat{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t)$, а отже, й похибка $\Delta \hat{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ за мінімально короткий проміжок часу прямувала до нуля. Спостерігач, в якого $\Delta \hat{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$, коли $t \rightarrow \infty$, називають асимптотичним.

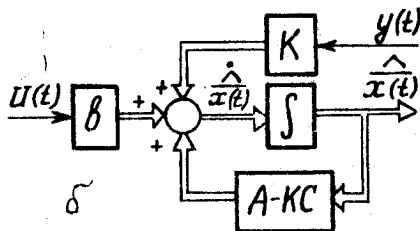
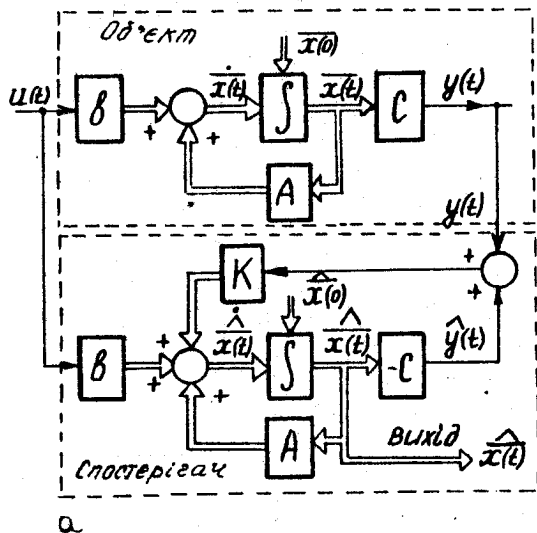


Рис. 8.6. Структурна схема об'єкта з асимптотичним спостерігачем стану /а/ і власне спостерігача /б/

Вимірність спостерігача, зображеного на рис. 8.6,а, порівнює вимірності системи $\mathcal{L}$. Рівняння стану цього $\mathcal{L}$ -вимірного спостерігача має вигляд

$$\dot{\hat{x}}(t) = A \hat{x}(t) + \kappa [y(t) - C \hat{x}(t)] + \mathcal{L} U(t) \quad /8.45/$$

або

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A - \kappa C] \hat{x}(t) + \kappa y(t) + \mathcal{L} U(t). \quad /8.46/$$

За рівняннями /8.46/ на рис. 8.6,б побудовано структурну схему спостерігача як замкненої системи з двома виходами. З рівнянь /8.46/ випливає, що коли б можна було довільно бажаним чином задавати власні значення матриці замкненого спостерігача $[A - \kappa C]$, то це означало б можливість бажаним чином мінімізувати похибку $\Delta \hat{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$.

8.5.3. Модальний регулятор стану

Одержані раніше рівняння стану спостерігача /8.45/, /8.46/ відповідають випадкові, коли зворотного зв'язку $U(t)$ /див. рис. 8.4/ немає, тобто це рівняння окремо взятого спостерігача /рис. 8.6,б/. Для загального випадку, коли регулятор стану й спостерігач увімкнено в замкнений контур, як зображено на рис. 8.4, рівняння стану замкненої системи електропривода з регулятором стану й спостерігачем у колі зворотного зв'язку такі:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A \hat{x}(t) - \mathcal{L} \hat{x}(t) + \mathcal{L} E U_3(t); \quad /8.47/$$

$$\dot{x}(t) = [A - \kappa C - \mathcal{L}] \hat{x}(t) + \kappa C \hat{x}(t) + \mathcal{L} E U_3(t). \quad /8.48/$$

Рівняння /8.47/ являють собою рівняння стану замкненого регулятора стану, а /8.48/ - рівняння стану замкненого спостерігача. Їх одержано відповідно з рівнянь стану /8.17/ і /8.46/ з урахуванням того, що в замкненій системі електропривода /див. рис. 8.4/ $y = C \hat{x}(t)$, а $U(t) = E U_3(t) - \mathcal{L} \hat{x}(t)$. Вектори $\hat{x}(t)$ і $\hat{\hat{x}}(t)$ у рівняннях /8.47/ і /8.48/ взаємопов'язані, тому для дослідження процесів у замкненій системі електропривода треба використати відповідно рівняння /8.47/ і /8.48/.

З'ясуємо характер вільних рухів замкненої системи, спричинених ненульовими початковими умовами, припустивши, що в /8.47/ і /8.48/

задавальна дія $U_g(t)$ дорівнює нулю, а також вплив цих двох систем одна на одну.

Запровадивши нові змінні в /8.47/, /8.48/ за формулою $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, дістанемо

$$\dot{\tilde{x}}(t) = [A - \beta L] \tilde{x}(t) - \beta L \hat{x}(t); \quad /8.49/$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A - \kappa C] \hat{x}(t), \quad /8.50/$$

або

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - \beta L & -\beta L \\ 0 & A - \kappa C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}. \quad /8.51/$$

Рівняння /8.50/ одержано відніманням /8.47/ від /8.48/. Вектор $\tilde{x}(t)$ характеризує точність /похибку/ оцінки спостерігачем вектора стану $x(t)$, коли в замкненому контурі є регулятор стану. З цього рівняння випливає, що похибка $\tilde{x}(t)$ оцінки вектора стану $x(t)$ не залежить від параметрів /коефіцієнтів $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}$ вектора L / регулятора стану.

Власні рухи системи /8.51/ визначає характеристичне рівняння

$$\det[\lambda I - \tilde{A}] = \det[\lambda I - A + \beta L] \det[\lambda I - A + \kappa C] = 0. \quad /8.52/$$

Отже, повний набір власних значень системи керування з регулятором стану й спостерігачем складається з власних значень системи керування без спостерігача і власних значень останнього. Таким чином, оскільки власні значення регулятора стану й спостерігача не впливають одне на одне, то це означає, що синтез параметрів регулятора стану й спостерігача можна робити незалежно один від одного, тобто спочатку синтезувати регулятор, припустивши, що всі змінні стану об'єкта вимірюються, а потім – спостерігач як незалежну замкнену систему.

З рівнянь стану /8.52/ бачимо, що порядок характеристичного рівняння замкненої системи дорівнює добутку порядків регулятора стану й спостерігача. Якщо матриця A об'єкта керування має вимірність n , то контур керування із спостерігачем повного порядку й регулятором стану мають порядок $2n$. Спостерігач має власну динаміку й тому робить додаткові затримки в замкненій системі керування. Тому замкнена система з одним регулятором стану матиме більшу швидкість, ніж система з регулятором та спостерігачем. Коли власні значення спостерігача вибрано так, що їх дійсні частини від'ємні, то не має значення, який почат-

ковий стан $\hat{x}(0)$ має спостерігач, бо його вихід $\hat{x}(t)$ прямуватиме до $x(t)$ асимптотично. До того ж що більші модулі від"ємних власних значень спостерігача, то швидше оцінка $\hat{x}(t)$ прямує до дійсних значень $x(t)$, то чутливіший спостерігач до шумів, які діють у каналі вимірювання стану системи. Під час практичного проектування спостерігачів стану у випадку, коли, наприклад, бажані поліноми $\varphi_{\text{ср}}(\lambda)$ і $\varphi_c(\lambda)$ є поліномами Баттерворта, то ω_0 спостерігача вибирають трохи більшу, ніж ω_0 регулятора стану.

8.5.4. Алгоритм побудови аналогових і цифрових асимптотичних спостерігачів n -го порядку

Порівнявши рівняння стану /8.30/ і /8.46/, бачимо, що структури матриць спостерігача $[A - \lambda C]$ й регулятора стану $[A - \lambda L]$ однакові. У зв'язку з цим постає питання, чи не можна скористатися методикою, розвинутою для проектування регулятора стану, яка дає змогу розташовувати власні значення матриці $[A - \lambda L]$ у лівій частині комплексної площини коренів бажаним чином для проектування спостерігача. Відповідь на це запитання подано в доведенні такої теореми: коли лінійна стаціонарна система з одним входом і одним виходом повністю спостережна, то тоді можна побудувати асимптотичний спостерігач n -го порядку з довільним бажаним набором власних чисел $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ /комплексні числа входять у цей набір із своїми спряженими/ матриці $[A - \lambda C]$, до того ж $\text{Re}(\lambda_i) < 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Доведемо цю теорему. Оскільки пара матриць A, C неспостережна, то спряжена пара матриць A^T, C^T з огляду на теорему про дуальність /див. п. 8.2.5/ є повністю керовна й, отже, існує базис у просторі станів X , в якому цю пару можна зобразити в канонічній формі фазової змінної:

$$(A^T)^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad (C^T)^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad /8.53/$$

де a_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ - коефіцієнти характеристичного полінома матриці A :

$$\varphi_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0.$$

У цьому базисі пара матриць об'єкта A, C матиме такий вигляд:

$$A_* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad C_* = [0 \ 0 \ \dots \ 1]. \quad /8.54/$$

Це зображення пари матриць A_*, C_* називають спряженою канонічною формою фазової змінної. Така назва походить від того, що матриці A_*, C_* пов'язані з матрицями $(A^T)^*$, $(C^T)^*$ операцією транспонування. Системи з транспонованими матрицями /див. п. 8.2.5/ називають спряженими.

Нехай тепер задано довільний бажаний нормований поліном спостерігача з дійсними коефіцієнтами:

$$\varphi_c(\lambda) = \lambda^n + \beta_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \beta_1 \lambda + \beta_0. \quad /8.55/$$

Виберемо як компоненти вектора K_* вимірністю $n \times 1$ числа $\beta_i - a_i$ / $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ /, тобто

$$K_* = [\beta_0 - a_0 \quad \beta_1 - a_1 \quad \dots \quad \beta_{n-1} - a_{n-1}].$$

Якщо тепер у матрицю $[A_* - K_* C_*]$ підставити вирази A_* і K_* , а потім обчислити характеристичний поліном цієї матриці, то дістанемо

$$[\lambda I - A_* + K_* C_*] = \lambda^n + \beta_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \beta_1 \lambda + \beta_0,$$

тобто характеристичний поліном спостерігача, в якому матриці A, K і C записано в спряженій канонічній формі фазової змінної, яка збігається із заданим /бажаним/ поліномом $\varphi_c(\lambda)$.

Неважно перекоонатися /наприклад, прямими обчисленнями для системи другого порядку/ в тому, що матриця перетворення P_c рівнянь стану об'єкта /парі матриць A, C / до рівнянь стану, записаних у спряженій канонічній формі фазової змінної /до пари матриць A_*, C_* /, має вигляд

$$P_c = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ a_3 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \quad /8.56/$$

Тоді

$$A_* = P_c A P_c^{-1}; \quad /8.57/$$

$$B_* = P_c B; \quad /8.58/$$

$$C_* = c P_c^{-1}; \quad /8.59/$$

$$K = P_c^{-1} K_* = [K_0 \ K_1 \ \dots \ K_{n-1}]^T. \quad /8.60/$$

Рівняння стану спостерігача /8.46/ у спряженій канонічній формі фазової змінної, урахувавши /8.57/-/8.60/, запишемо так:

$$\frac{\lambda}{x_*(t)} = A_* \frac{\lambda}{x_*(t)} + K [y(t) - C_* \frac{\lambda}{x_*(t)}] + B_* u(t). \quad /8.61/$$

Сформулюємо тепер алгоритм синтезу параметрів асимптотичного спостерігача n -го порядку:

- 1/ складають рівняння стану об'єкта керування;
- 2/ обчислюють матрицю спостережності Q_c ;
- 3/ знаходять характеристичний поліном $\varphi_A(\lambda)$ матриці A ;
- 4/ за /8.54/ записують пару матриць A, C у спряженій канонічній формі фазової змінної A_*, C_* ;
- 5/ задають бажаний характеристичний поліном замкненого спостерігача $\varphi_c(\lambda)$.

Зауваження щодо вибору полінома $\varphi_c(\lambda)$ для неперервних систем, наведені попередню, слушні й для цифрових систем. Однак, проектуючи цифрові спостерігачі, треба враховувати ось що. У теорії цифрових систем доведено, що коли характеристичне рівняння замкненої системи

$z^p = 0$, де p - ціле додатне число, яке звичайно дорівнює порядкові системи, тобто всі корені нульові, то перехідний процес у системі аперіодичний, а сигнал похибки наближатиметься до нуля за скінченну кількість періодів квантування;

6/ за формулами $\beta_i = \alpha_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, розрахують коефіцієнти підсилення матриці K_x , записаної в спряженій канонічній формі фазової змінної;

7/ обчислюють матрицю P_c перетворення початкових рівнянь стану /пари матриць A, C / до рівнянь стану, записаних у спряженій канонічній формі фазової змінної /до пари матриць A_x, C_x /;

8/ обчислюють коефіцієнти $\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ матриці зворотного зв'язку спостерігача K за /8.60/.

Приклад 8.7. Для об'єкта керування ТП-Д, матриці A і B якого визначено в прикладі 8.5:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R_z K_d}{T_M} \\ -\frac{1}{R_z K_d T_e} & -\frac{1}{T_e} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\kappa_{T, \Pi}}{R_z T_e} \end{bmatrix},$$

потрібно спроектувати асимптотичний спостерігач другого порядку.

Розв'язання. 1. Обчислюємо матрицю спостережності Q_c , взявши до уваги, що $C = [1 \ 0]$:

$$Q_c = [C^T A^T C^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{R_z K_d}{T_M} \end{bmatrix}.$$

Оскільки ранг Q_c дорівнює 2, то даний об'єкт повністю спостережний.

2. Характеристичний поліном матриці A обчислено в прикладі 8.5:

$$\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0,$$

де $a_1 = \frac{1}{T_e}$, $a_0 = \frac{1}{T_e T_M}$.

3. За /8.54/ запишемо пару матриць об'єкта A, C у спряженій канонічній формі фазової змінної:

$$A_x = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{T_e T_M} \\ 1 & -\frac{1}{T_e} \end{bmatrix}; \quad C_x = [0 \ 1].$$

4. Як бажаний характеристичний поліном спостерігача виберемо поліном Баттерворта другого порядку, тобто $\varphi_c = \lambda^2 + 1,4\omega_0 \lambda + \omega_0^2 = \lambda^2 + \beta_1 \lambda + \beta_0$, де $\beta_1 = 1,4\omega_0$; $\beta_0 = \omega_0^2$.

5. Знаходимо коефіцієнти матриці K_* :

$$K_* = \begin{bmatrix} K_{*0} \\ K_{*1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 - a_0 \\ \beta_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0^2 - 1/T_e T_H \\ 1,4\omega_0 - 1/T_e \end{bmatrix}.$$

6. Обчислимо матрицю P_c перетворення рівнянь стану об'єкта до рівнянь, записаних у спряженій канонічній формі фазової змінної:

$$P_c = \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{R_I K_A}{T_H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/T_e & \frac{R_I K_A}{T_H} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Неважко перевірити, чи правильно [за структурою матриць /8.54/] записано матриці A_* і C_* , обчисливши їх за /8.57/, /8.59/, коли врахувати, що

$$P_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{T_H}{R_I K_A} & -\frac{T_H}{T_e R_I K_A} \end{bmatrix}.$$

Обчислимо матрицю зворотного зв'язку спостерігача в початковому базисі:

$$K = P_c^{-1} K_* = P_c^{-1} \begin{bmatrix} K_{*0} \\ K_{*1} \end{bmatrix} = P_c^{-1} \begin{bmatrix} \beta_0 - a_0 \\ \beta_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \end{bmatrix},$$

де

$$K_0 = \beta_1 - 1/T_e;$$

$$K_1 = \frac{T_H}{R_I K_A} \left[(\beta_0 - 1/T_e T_H) - \frac{T}{T_e} (\beta_1 - \frac{1}{T_e}) \right].$$

Коли, наприклад, припустити, що числові значення параметрів об'єкта й спостерігача: $\omega_0 = 40$ рад/с [замість 35,5 рад/с у випадку проектування регулятора стану], $K_0 = 1$ рад/(с·В), $K_{1,0} = 10$, $R_I = 1$ Ом, $T_e = 0,1$ с, $T_H = 0,5$ с, то тоді рівняння стану спостерігача /8.46/ з урахуванням одержаних попереду значень коефіцієнтів K_0 , K_1 матриці зворотного зв'язку спостерігача K :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_0 & \frac{R_I K_A}{T_H} \\ -(K_1 + \frac{1}{R_I K_A T_e}) & -\frac{1}{T_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_{1,0}}{R_I T_e} \end{bmatrix} U(t).$$

На рис. 8.7 зображено структурну схему побудови /технічної реалізації/ асимптотичного спостерігача другого порядку для об'єкта ТП-Д.

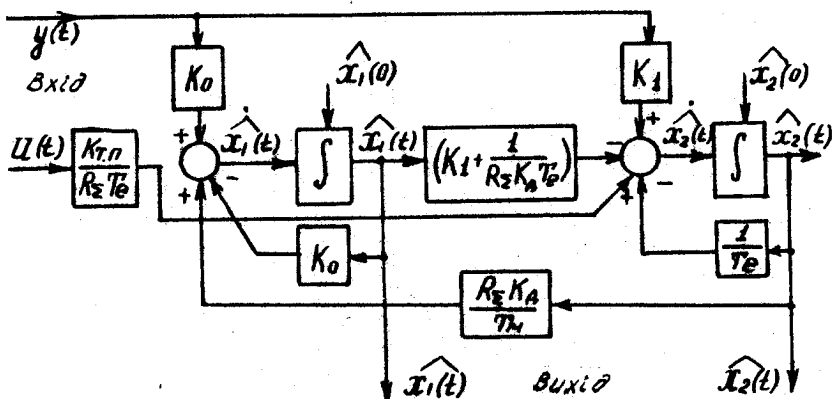


Рис. 8.7. Структурна схема побудови асимптотичного спостерігача другого порядку для оцінювання параметрів об'єкта ТП-Д

Головна мета розглянутого тут прикладу - проілюструвати методику синтезу спостерігача стану n -го порядку. Тому числові значення параметрів об'єкта ТП-Д вибрано з огляду на простість розрахунків. Окрім того, треба мати на увазі, що спостерігач стану повного порядку особливо ефективний, коли кількість оцінюваних параметрів більша, ніж два, наприклад, коли в об'єкті ТП-Д ураховано пружні деформації механічної передачі.

8.5.5. Синтез аналогових і цифрових асимптотичних спостерігачів зниженого порядку

У попередньому пункті викладено методику синтезу спостерігача стану, порядок якого дорівнював порядкові системи /об'єкта/. З рівнянь стану /8.43/, /8.44/, в яких матриці A і C відповідно до /8.54/ записано в спряженій канонічній формі фазової змінної A_n , C_n , впли-

ває, що вихідний сигнал $y(t)$ має єдину ненульову компоненту, яка дорівнює $x_n(t)$. У зв'язку з цим постає питання, чи не можна побудувати спостерігач, який оцінював би лише змінні стану $x_{n-1}(t)$, $x_{n-2}(t)$, ..., $x_1(t)$, взявши за оцінку змінної стану $x_n(t)$ результат вимірювання безпосередньо на виході об'єкта, тобто припустивши, що $\hat{x}_n(t) = y(t) = x_n(t)$. Виявляється, що такий $(n-1)$ -вимірний спостерігач стану можна побудувати, до того ж власні значення цього спостерігача, як і раніше, можна вибирати довільно.

Принцип побудови модального регулятора із спостерігачем $(n-1)$ -го порядку для об'єкта з одним входом $u(t)$ і одним виходом $y(t)$ проілюстровано на рис. 8.8. Компоненти n -вимірного вектора стану $\hat{x}(t)$ утворено з $n-1$ відновлених змінних стану у вигляді вектора $\hat{x}_0(t)$ і вимірюваного вихідного сигналу об'єкта $y(t)$.

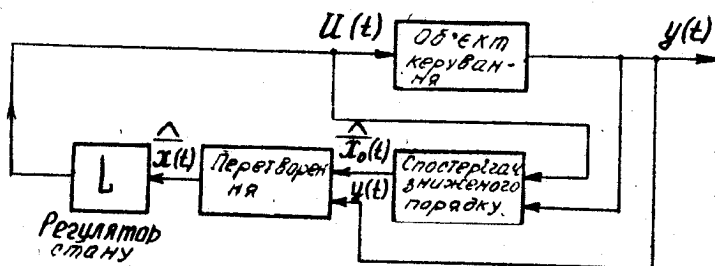


Рис. 8.8. Схема побудови асимптотичного спостерігача стану $n-1$ -го порядку

Викладена далі методика проектування $(n-1)$ -вимірного спостерігача ґрунтується на використанні принципу перетворення рівнянь стану до канонічної форми фазової змінної. Розглянемо повністю керовану й спостережну систему n -го порядку з одним входом і одним виходом:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A \bar{x}(t) + b u(t), \quad /8.62/$$

$$y(t) = c \bar{x}(t). \quad /8.63/$$

Характеристичне рівняння матриці A , як і раніше, має вигляд

$$\varphi_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad /8.64/$$

Щоб можна було вихідний сигнал об'єкта $y(t)$ використати як оцінку $x_n(t)$ змінної стану $x_n(t)$, перетворимо рівняння стану /8.62/ до спряженої канонічної форми за допомогою неособливої матриці P_c , яку визначає /8.56/:

$$\dot{\hat{x}}_*(t) = A_* \hat{x}(t) + \delta_* U(t), \quad /8.65/$$

де матриці $A_* = P_c A P_c^{-1}$ і $\delta_* = P_c \delta$ визначають вирази відповідно /8.64/ і /8.58/.

Спостерігач повного порядку для системи, зображеної в спряженій канонічній формі фазової змінної /8.65/, як було доведено попередю [див. /8.61/], описує рівняння стану

$$\dot{\hat{x}}_*(t) = [A_* - K C_*] \hat{x}_*(t) + K y(t) + \delta_* U(t), \quad /8.66/$$

де K - $(n \times 1)$ -вимірний матриця зворотного зв'язку спостерігача, і рівняння виходу

$$y(t) = C_* \hat{x}(t), \quad /8.67/$$

де $C_* = C P_c^{-1} = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \quad (1 \times n)$.

Оскільки $y(t) = x_n(t)$, що випливає з /8.67/, то відновлювати $x_n(t)$ не потрібно. Щоб побудувати спостерігач $(n-1)$ -го порядку, який відновлював би решту $n-1$ змінних стану $x_{n-1}(t), \dots, x_1(t)$, і мати змогу довільно задавати власні значення цього спостерігача, котрі характеризує нормований характеристичний многочлен

$$\psi_{n-1}(\lambda) = \lambda^{n-1} + \beta_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + \beta_1 \lambda + \beta_0, \quad /8.68/$$

перетворимо матриці A_* , δ_* за допомогою неособливої матриці

$$Q = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & -\beta_0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\beta_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\beta_{n-2} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (n \times n) \quad /8.69/$$

до виду $A_1 = Q A_* Q^{-1}$ і $\delta_1 = Q \delta_*$.

Ураховуючи, що

$$Q^{-1} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & & \beta_0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & & \beta_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & & \beta_{n-2} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & & 1 \end{array} \right], \quad /8.70/$$

$$\text{дістаємо } A_1 = Q A_n Q^{-1} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta_0 & -\beta_{n-2} \beta_0 - a_0 + a_{n-1} \beta_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\beta_1 & \beta_0 - \beta_{n-2} \beta_1 - a_1 + a_{n-1} \beta_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\beta_2 & \beta_1 - \beta_{n-2} \beta_2 - a_2 + a_{n-1} \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\beta_{n-2} & \beta_{n-2}^2 - a_{n-2} + a_{n-1} \beta_{n-2} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} + \beta_{n-2} \end{array} \right], \quad /8.71/$$

$$b_1 = Q b_n = Q p_c b. \quad /8.72/$$

Матриці A_1 і b_1 мають вимірність відповідно $n \times n$ і $n \times 1$.

Зроблені перетворення дають змогу записати рівняння спостереження $(n-1)$ -го порядку в такому вигляді:

$$\dot{\hat{x}}_0(t) = A_0 \hat{x}_0(t) + E_0 y(t) + b_0 u(t), \quad /8.73/$$

де

$$A_0 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\beta_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\beta_{n-2} \end{array} \right], \quad /8.74/$$

$$E_0 = \left[\begin{array}{c} -\beta_{n-2} \beta_0 - a_0 + a_{n-1} \beta_0 \\ \beta_0 - \beta_{n-2} \beta_1 - a_1 + a_{n-1} \beta_1 \\ \dots \\ -\beta_{n-2}^2 - a_{n-2} + a_{n-1} \beta_{n-1} \end{array} \right] \quad (n-1) \times 1, \quad /8.75/$$

$$\mathcal{E}_0 = [\mathcal{E}_{10} \mathcal{E}_{20} \mathcal{E}_{30} \dots \mathcal{E}_{(n-1)0}]^T \quad (n-1) \times 1. \quad /8.76/$$

Матриця A_0 вимірністю $(n-1) \times (n-1)$ являє собою матрицю, розташовану в горішньому лівому кутку матриці A_1 , а $\mathcal{E}_0$ - останній стовпець матриці A_1 без нижньої компоненти. Матрицю $\mathcal{E}_0$ одержано відкиданням нижньої компоненти вектора $\mathcal{E}_1$.

Можна строго довести, що власні значення $(n-1)$ -вимірною спостерігача /8.73/ збігаються з власними значеннями матриці A_0 , які визначає вираз $[I\lambda - A_0]$. Оскільки матрицю A_0 зображено в спряженій канонічній формі фазової змінної, то її останній стовпець складається з коефіцієнтів заданого характеристичного полінома $\varphi_{n-1}(\lambda)$, тобто

$$[I\lambda - A_0] = \lambda^{n-1} + \beta_{n-1} \lambda^{n-2} + \dots + \beta_1 \lambda + \beta_0. \quad /8.77/$$

Вираз /8.77/ свідчить про те, що власні значення спостерігача $(n-1)$ -го порядку /8.73/ можна задавати бажаним чином, і зокрема так, аби мінімізувати похибку оцінки параметрів об'єкта керування.

Визначивши відновлюваний вектор стану зниженого порядку $\hat{x}_0(t)$, треба перетворити вектор $[\hat{x}_0(t) \ y(t)]^T$ вимірністю $n \times 1$ до вектора $\hat{x}(t)$, який є оцінкою вектора змінних стану $x(t)$ початкових рівнянь стану об'єкта /8.62/. Спочатку потрібно перетворити вектор $[\hat{x}_0(t) \ y(t)]^T$ до вектора $\hat{x}_*(t)$, а потім - вектор $\hat{x}_*(t)$ до вектора $\hat{x}(t)$. Одержимо

$$\hat{x}(t) = [QP_c]^{-1} [\hat{x}_0(t) \ y(t)]^T. \quad /8.78/$$

На рис. 8.8 перетворення /8.78/ зображено у вигляді реально неіснуючого блока "перетворювач".

Структурну схему асимптотичного спостерігача стану $(n-1)$ -го порядку, побудовану за /8.73/, /8.77/, зображено на рис. 8.9.

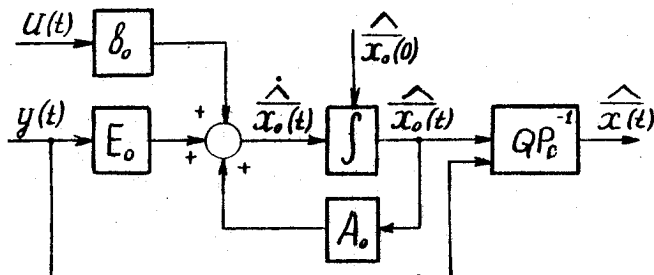


Рис. 8.9. Структурна схема асимптотичного спостерігача стану $(n-1)$ -го порядку стану

Алгоритм побудови асимптотичного спостерігача стану $(n-1)$ -го порядку

Початкові частини цього алгоритму й алгоритму побудови асимптотичного спостерігача n -го порядку збігаються. А подальший порядок синтезу такий:

1/ задають бажаний характеристичний поліном спостерігача $\varphi_{n-1}(\lambda)$ згідно з /8.76/;

2/ за /8.74/, /8.75/, /8.72/, /8.76/ визначають матриці A_0 , E_0 , B_1 , B_0 і відповідно до /8.73/ записують рівняння стану спостерігача стану $(n-1)$ -го порядку;

3/ обчислюють матрицю Q за /8.69/ і згідно з /8.78/ перетворюють вектор $[x_0(t) \ y(t)]^T$ до вектора $x(t)$;

4/ будують структурну схему спостерігача.

Приклад 8.8. Треба спроектувати асимптотичний спостерігач $(n-1)$ -го порядку для об'єкта ПІ-Д. Рівняння стану цього об'єкта одержано в прикладі 8.5, а синтез спостерігача n -го порядку наведено в прикладі 8.7.

Розв'язання. Задамо бажаний характеристичний поліном спостерігача у вигляді полінома Баттерворта першого порядку:

$$\varphi_{(n-1)}(\lambda) = \lambda + \omega_0 = \lambda + \beta_0, \quad \beta_0 = \omega_0.$$

Визначаємо матриці A_0 , E_0 , Q , β_1 , β_0 за формулами /8.74/, /8.69/, /8.75/, /8.72/, /8.76/:

$$A_0 = -\beta_0 ;$$

$$E_0 = -\beta_0^2 - a_0 + a_1 \beta_0 = -\beta_0^2 + \frac{1}{T_e} \beta_0 - \frac{1}{T_e T_M} + \frac{1}{T_e} ;$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$$\beta_1 = Q P_c \beta = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{T_e} & -\frac{R_z K_A}{T_M} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_z T_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_A}{T_e T_M} \\ 0 \end{bmatrix} ;$$

$$\beta_0 = \beta_{10} = \frac{K_A}{T_e T_M} .$$

Тоді рівняння стану спостерігача першого порядку

$$\frac{d\hat{x}_0(t)}{dt} = -\beta_0 \hat{x}_0(t) + \left[\frac{1}{T_e} \beta_0 - \beta_0^2 - \frac{1}{T_e T_M} + \frac{1}{T_e} \right] y(t) + \frac{K_A}{T_e T_M} u(t) . \quad /8.79/$$

Визначаємо вектор $\hat{x}(t)$, який є оцінкою змінних стану $x_0(t)$ і $x_1(t) = y(t)$, за формулою /8.78/:

$$\hat{x}(t) = [Q P_c]^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_0(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

або

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_1(t) &= y(t) ; \\ \hat{x}_2(t) &= h_1 \hat{x}_0(t) + h_2 y(t) , \end{aligned} \right\} \quad /8.80/$$

де

$$h_1 = \frac{T_M}{R_z K_A} ;$$

$$h_2 = \frac{T_M}{T_e R_z K_A} (T_e \beta_0 - 1) .$$

З рівнянь /8.80/ випливає, що в розглядуваній системі $\hat{x}_1(t)$ збігається з $y(t) = \omega(t)$, а єдиною змінною стану, яку відновлює спостерігач першого порядку, є $\hat{x}_2(t)$. Змінна стану $\hat{x}_2(t)$ - це оцінка змінної стану $x_2(t) = I_g(t)$ об'єкта керування ПІ-Д.

На рис. 8.10 зображено структурну схему спостерігача стану першого порядку для попередніх /див. приклад 8.7/ числових значень параметрів об'єкта ПІ-Д.

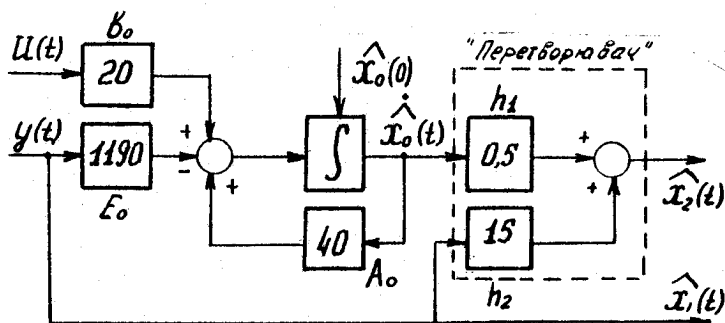


Рис. 8.10. Структурна схема спостерігача стану першого порядку

Розділ 9. ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДАМИ

9.1. Оптимізація в частотній зоні

Розглянуті в розд. 8 методи модального керування дають змогу реалізувати будь-яке розташування власних значень λ_i замкненої системи введенням твердих зворотних зв'язків за змінними стану. Однак питання вибору такого розташування й досі не вирішено. Коректно вирішити це питання допомагають методи оптимізації, які ґрунтуються найчастіше на квадратичному критерії якості. Їх можна поділити на дві групи. Перша група методів, в яких використано ідеї теорії оптимальної фільтрації Колмогорова - Вінера, пов'язана з розв'язанням рівнянь Вінера - Хопфа в частотній зоні. Друга група методів, що використовує математичний апарат диференціальних рівнянь Ріккати, розв'язує поставлену задачу в просторі станів у часовій зоні.

Рівняння Вінера - Хопфа в частотній зоні було розв'язано раніше, ніж у часовій, у зв'язку з операціями сепарації й факторизації відповідних матриць спектральних щільностей, коли треба було розв'язувати систему алгебричних рівнянь. Методи розв'язання рівнянь Вінера - Хопфа в часовій зоні дають змогу розв'язувати задачі оптимізації як для стаціонарних, так і для нестаціонарних систем керування й пов'язані з розв'язанням системи нелінійних диференціальних рівнянь Ріккати або системи лінійних диференціальних рівнянь подвійного розміру. Знаходження усталеного розв'язку рівняння Ріккати для стаціонарних систем полягає в розв'язанні нелінійної системи алгебричних рівнянь Дур'є. Таким чином, розв'язання задачі оптимізації, принаймні для стаціонарних систем керування, і в частотній, і в часовій зоні - це схожі алгебричні проблеми, хоча й розв'язують їх різними математичними методами.

Спочатку розглянемо синтез оптимальної системи керування електроприводами в частотній зоні. Система керування складається з деякої незмінної частини /об'єкта керування/ $z_0(\omega)$ і власне регулятора $z(\omega)$, структуру й параметри якого до певної міри можна вибрати довільно /рис. 9.1/.

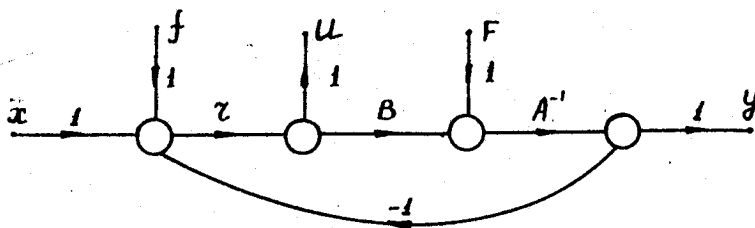


Рис. 9.1. Граф синтезованої системи

Потрібно визначити оптимальний оператор $z(\omega)$, який перетворює сигнал похибки i -го каналу $\varepsilon(t) = x(t) - y(t)$, виміряний з випадковою завадою $f(t)$, в керувальну дію

$$u(t) = z(\omega)(\varepsilon(t) + f(t)) \quad /9.1/$$

таким чином, щоб критерій якості $J_i = M^2\{R^2\varepsilon^2 + u^2\}$ набував мінімального значення.

Зобразимо оператор об'єкта $Z_0(\omega)$ у вигляді відношення поліномів $B_0(\omega)$ і $A_0(\omega)$:

$$Z_0(\omega) = -B(\omega)/A(\omega). \quad /9.2/$$

Тоді дістанемо

$$A(\omega) \varepsilon(t) = \varphi(t) + B(\omega) u(t),$$

де $\varphi(t) = A(\omega) X(t)$.

Спектральні щільності потужності корисного сигналу $S_X(\omega)$ і завади вимірювання $S_f(\omega)$ відомі. Отже, можна визначити спектральну щільність потужності $S_\varphi(\omega)$ еквівалентного сигналу $\varphi(t)$ у вигляді відношення поліномів:

$$S_\varphi(\omega) = \frac{a_{\varphi p} \omega^{2p} + a_{\varphi p-1} \omega^{2p-2} + \dots + a_{\varphi 0}}{b_{\varphi q} \omega^{2q} + b_{\varphi q-1} \omega^{2q-2} + \dots + b_{\varphi 0}}. \quad /9.3/$$

Роблять також припущення, що спектральну щільність S_f завади вимірювання $f(t)$ можна зобразити у вигляді відношення поліномів:

$$S_f(\omega) = \frac{a_{fz} \omega^{2z} + a_{fz-1} \omega^{2z-2} + \dots + a_{f0}}{b_{fs} \omega^{2s} + b_{fs-1} \omega^{2s-2} + \dots + b_{f0}}. \quad /9.4/$$

Тоді оптимальний оператор

$$Z(\omega) = \frac{A(\omega) \Phi(\omega) - \alpha(\omega)}{B(\omega) \Phi(\omega) - \beta(\omega)}, \quad /9.5/$$

де допоміжна функція

$$\Phi(\omega) = -\frac{Q(\omega)}{G(\omega) \omega(\omega)} (K_0(\omega) + L_0(\omega) + K^+(\omega) + L^+(\omega)), \quad /9.6/$$

$K_0 \omega$ і $L_0 \omega$ - цілі поліноми; $K^+(\omega)$ і $L^+(\omega)$ - правильні дроби з полюсами в лівій півплощині, а $K^-(\omega)$ і $L^-(\omega)$ - правильні дроби з полюсами в правій півплощині, одержані внаслідок сепарації виразу

$$\frac{R^2 B(-\omega) Q(\omega) - G(\omega) G(-\omega) \alpha(\omega)}{G(-\omega) Q(\omega) A(\omega)} \omega(\omega) = K_0(\omega) + K^+(\omega) + K^-(\omega); \quad /9.7/$$

$$L_0(\omega) + L^+(\omega) + L^-(\omega) = -\frac{R^2 S_f(\omega) A(-\omega) B(-\omega)}{G(-\omega) \omega(-\omega)}; \quad /9.8/$$

поліноми $G(\omega)$, $G(-\omega)$ і $\omega(\omega)$, $\omega(-\omega)$ опержано внаслідок факторизації функцій

$$A(\omega)A(-\omega) + R^2 B(\omega)B(-\omega) = G(\omega)G(-\omega); \quad /9.9/$$

$$S_f(\omega) + A(\omega)A(-\omega)S_f(\omega) = \Phi(\omega)\Phi(-\omega), \quad /9.10/$$

а в поліномі $Q(\omega) = A(\omega)\beta(\omega) + B(\omega)\alpha(\omega)$ поліноми $\alpha(\omega)$ і $\beta(\omega)$ дібрано так, щоб поліном $Q(\omega)$ був гурвіцевим.

Приклад 9.1. Розглянемо синтез оптимального оператора для електромеханічної слідкувальної системи вимірювання координат рухомих об'єктів з виконавчим двигуном постійного струму. Припускаємо, що контур струму налашдовано за принципом підпорядкованого регулювання на модульний оптимум з компенсацією електромагнітної сталої часу якірного кола. В цьому випадку кут повороту $\theta(t)$ робочого механізму пов"язує із струмом якірного кола $I(t)$ привода/без урахування малої некомпенсованої сталої часу T_{mc} замкненого контуру струму/ таке рівняння:

$$\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = K I(t).$$

Биберемо як керувальну цію привода струм якірного кола. Тоді операторні поліноми об"єкта керування

$$B(\omega) = 1, \quad A(\omega) = \omega^2,$$

в яких коефіцієнт пропорційності K не враховано.

Оператори формованих фільтрів випадкових входних сигналів для задач додавання мають такий вигляд:

$$V_x(\omega) = \frac{V_x}{\omega(T_\omega + 1)}; \quad V_{f\gamma}(\omega) = V_{f\gamma}.$$

Щоб спростити подальші розрахунки, запровадимо досить малі числа E_1 , E_2 , E_3 і зобразимо поліном $A(\omega)$ та формувальний фільтр $V_x(\omega)$ у вигляді

$$A(\omega) = (E_1 + \omega)(E_2 + \omega),$$

$$V_x(\omega) = \frac{V_x}{(E_3 + \omega)(T_\omega + 1)}.$$

Тоді спектральна щільність потужності еквівалентна сигналу першого каналу

$$S_{\psi_f}(s) = \frac{V_x^2 (E_1^2 - s^2) (E_2^2 - s^2)}{(E_3^2 - s^2) (1 - T^2 s^2)}.$$

Бважатимемо, що $\alpha(\omega) = 0$ і $\beta(\omega) = 1$, а отже,

$$O(\omega) = A(\omega) = (E_1 + \omega)(E_2 + \omega).$$

Факторизуємо функцію

$$\omega(\omega) \omega(-\omega) = \frac{V_x^2 (E_1^2 - \omega^2) (E_2^2 - \omega^2)}{(E_3^2 - \omega^2) (1 - T^2 \omega^2)} + (E_1^2 - \omega^2) (E_2^2 - \omega^2) V_f^2.$$

Одержимо

$$\omega(\omega) = (E_1 + \omega)(E_2 + \omega) \frac{(A\omega^2 + B\omega + C)}{(E_3 + \omega)(1 + T\omega)},$$

де

$$A = V_f T, \quad B = \sqrt{(1 + E_3^2 T^2)} V_f^2 + 2AS',$$

$$C = \sqrt{V_f^2 E_3^2 + V_x^2}.$$

Факторизувавши функцію $G(\omega)G(-\omega) = (E_1^2 - \omega^2)(E_2^2 - \omega^2) + M_f^2$, дістанемо $G(\omega) = \omega^2 + N\omega + K$, де

$$N = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2K}, \quad K = \sqrt{E_1^2 E_2^2 + M_f^2}.$$

Виконаємо першу операцію:

$$K_0(\omega) + K_+(\omega) + K_-(\omega) = \frac{M_f^2 (E_1 + \omega)(E_2 + \omega)}{(s^2 - N\omega + K)(E_1 + \omega)(E_2 + \omega)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{(E_1 + \omega)(E_2 + \omega)(A\omega^2 + B\omega + C)}{(E_1 + \omega)(E_2 + \omega)(E_3 + \omega)(1 + T\omega)} = \frac{V_1 \omega + N_0}{\omega^2 + N\omega + K} + \frac{\gamma_1 \omega + \gamma_0}{(E_3 + \omega)(1 + T\omega)}.$$

Коефіцієнти V_1, V_0, γ_1 і γ_0 знайдемо, розв'язавши систему рівнянь, записану в матрицевій формі:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 & 0 & 1 & 0 \\ U_1 & U_2 & -N & 1 \\ U_0 & U_1 & K & -N \\ 0 & U_0 & 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ M_f^2 A \\ M_f^2 B \\ M_f^2 C \end{bmatrix},$$

де $U_0 = E_3, U_1 = (1 + TE_3), U_2 = T$.

Тоді

$$K_{10} = 0, \quad K_{1+} = \frac{\gamma_1 \omega + \gamma_0}{(E_3 + \omega)(1 + T\omega)},$$

$$K_{1-} = \frac{V_1 \omega + V_0}{\omega^2 - N\omega + K}.$$

Виконаємо другу операцію:

$$L_{10} + L_{1+} + L_{1-} = \frac{M_1^2 V_{f1}^2 (E_1 - \omega)(E_2 - \omega)(E_3 - \omega)(1 + T\omega)}{(\omega^2 - N\omega + K)(E_1 - \omega)(E_2 - \omega)(A\omega^2 - B\omega + C)},$$

звідки одержимо

$$L_{10} = 0, \quad L_{1+}, \quad L_{1-} = \frac{M_1^2 V_{f1}^2 (E_3 - \omega)(1 + T\omega)}{(\omega^2 - N\omega + K)(A\omega^2 - B\omega + C)}.$$

Тоді допоміжна функція

$$\Phi_1(\omega) = - \frac{(S + E_1)(S + E_2)(E_3 + S)(1 + TS)(\gamma_1 S + \gamma_0)}{(\omega^2 + N\omega + K)(A\omega^2 + B\omega^2 + C)(E_1 + \omega)(E_2 + \omega)(E_3 + \omega)(1 + T\omega)},$$

а оптимальний оператор першого каналу має такий вигляд:

$$Z(\omega) = - \frac{(\omega + E_1)(\omega + E_2)(\gamma_1 \omega + \gamma_1)}{(\omega^2 + N\omega + K)(A\omega^2 + B\omega + C) - (\gamma_1 \omega + \gamma_0)}.$$

Розглянемо технічну реалізацію оптимального оператора методами модального керування. У цьому разі звичайно розглядають реалізацію стандартної форми, що не містить нулів, тоді як оптимальний оператор у замкненому вигляді

$$W(\omega) = \frac{b_1 \omega + b_0}{\omega^4 + c_3 \omega^3 + c_2 \omega^2 + c_1 \omega + c_0} \quad /9.II/$$

має нулі.

Реалізуючи оптимальний оператор, модель виконавчого двигуна від входу системи імпульсно-фазового керування тиристорного перетворювача за виходом кута повороту платформи без урахування досить малої сталої часу, яку визначає середньостатистичний час запізнювання тиристорного перетворювача, виберемо у вигляді оператора третього порядку, а власне регулятор – у вигляді інтегрувального підсилювача /рис. 9.2/. Щоб розташувати чотири корені характеристичного рівняння в заданих точках комплексної площини згідно з принципами модального керування, на вхід системи треба подати чотири змінні стану з деякими коефіцієнтами

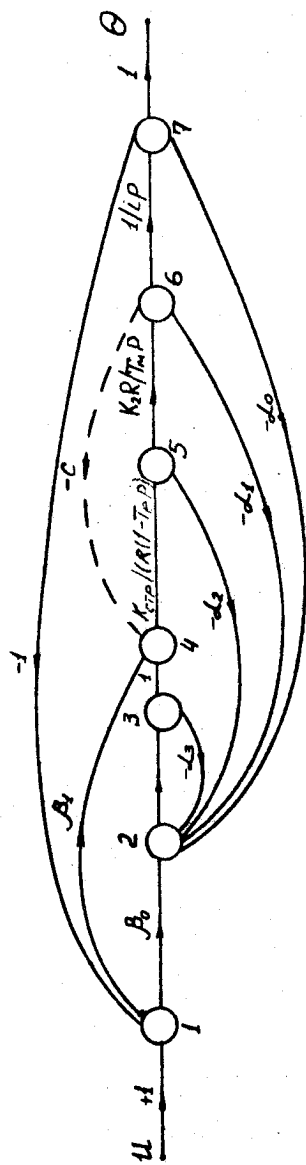


Рис. 9.2. Граф оптимальной системы

підсилення. Технічно в системі найпростіше змінити кут повороту платформи θ , швидкість обертання цвигуна ω , струм якорного кола I , а також вихідну напругу операційного підсилювача V , які і вважатимемо змінними стану $x\{\theta, \omega, I, V\}^T$.

У системі потрібно розташувати в заданих точках чотири полюси й один нуль. Щоб уникнути диференціювання сигналу похибки системи, укарай небажаного, коли є завади вимірювання, використаємо одну із схем моделювання систем, які містять похідні від вхідного сигналу. Подамо сигнал похибки системи на вхід тиристорного перетворювача з деяким коефіцієнтом підсилення β , проминувши інтегровальний підсилювач регулятора. Тоді на підставі алгоритмічної схеми (див. рис. 9.2/ запишемо рівняння системи в змінних стану:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}, \quad /9.12/$$

$$y = C\bar{x}, \quad /9.13/$$

де

$$A = \begin{vmatrix} \frac{K_g R}{T_M} & & & \\ -\frac{\beta K T}{T_e R} & -\frac{1}{T_e} & \frac{K T}{T_e R} & \\ & & & \\ -(\beta_0 + \alpha_0) & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ \frac{\beta_1 K T}{T_e R} \\ \\ \beta_0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 \\ \\ \\ \beta_0 \end{vmatrix} \quad /9.14/$$

Зрівнявши відповідні коефіцієнти бажаного й реалізованого оптимального оператора, дістанемо шукану систему рівнянь, розв'язок якої подано у вигляді рекурентних співвідношень:

$$\begin{cases} \beta_1 = \sigma_{1i} T_M T_e / (K_g K_{стр}) \\ \alpha_3 = (C_3 T_e - 1) / T_e \\ \alpha_2 = (C_2 R T_e) - \alpha_3 R / K_{стр} \\ \alpha_1 = (C_{1i} T_M T_e - \beta_1 K_g K_{стр}) / (i K_g K_{стр}) \\ \beta_0 = (\sigma_{0i} T_M T_e - \beta_1 \alpha_3 K_g K_{стр}) / (K_g K_{стр}) \\ \alpha_0 = (C_{0i} T_M T_e - \beta_0 K_g K_{стр} - \beta_1 \alpha_3 K_g K_{стр}) / (K_g K_{стр}). \end{cases} \quad /9.15/$$

Треба мати на увазі, що фактично в системі є підсилювач радіотракту, а також що вимірювальні пристрої кута швидкості й струму мають

відповідні коефіцієнти передавання, тому фактично в регуляторі потрібно реалізувати коефіцієнти підсилення

$$\beta_0^* = \beta_0 / K_p, \quad \beta_1^* = \beta_1 / K_p, \quad \alpha_0^* = \alpha_0 / K_0,$$

$$\alpha_1^* = \alpha_1 / K_\omega, \quad \alpha_2^* = \alpha_2 / K_T.$$

Приклад 9.2. Розрахуємо коефіцієнти підсилення регулятора для таких параметрів:

$$K_{\text{стр}} = 10; R = K_g = K_e = 1; T_e = T_M = 0,2; i = 10^3; K_p = 10^4; K = 10^5.$$

Тоді одержимо

$$\beta_0^* = -3,5; \beta_1^* = 0,12; \alpha_0^* = 6,9; \alpha_1^* = 0; \alpha_2^* = 1; \alpha_3 = 9.$$

Розраховані коефіцієнти підсилення можна легко реалізувати за допомогою розв'язувальних кіл операційних підсилювачів уніфікованих блокових систем регулювання, які є в системі комплектних тиристорних перетворювачів.

Треба зауважити, що практично нульове значення коефіцієнта підсилення $\alpha = 0$ було одержано тому, що в системі потрібно реалізувати за керуванням дією астатизм другого порядку, бо в першому $C_0 \approx C_0$, $C_1 \approx C_1$.

Коли в системі треба враховувати вплив протиЕРС двигуна, подавану з коефіцієнтом передавання $-C$ для спрощення розрахункових формул на вхід тиристорного перетворювача /зображено пунктиром на рис. 9.2/, то зміняться лише коефіцієнти

$$\alpha_1 = (C_1 T_M T_e i - \beta_1 K_{\text{стр}} K_g - C \alpha_3 K_{\text{стр}} K_g i) / K_{\text{стр}} K_g i; \quad 19.16/$$

$$\alpha_2 = (C_2 T_M T_e R - \alpha_3 T_M R - C K_{\text{стр}} K_g R) / K_{\text{стр}} T_M.$$

У цьому разі, коли $C = 0,08$, то величини коефіцієнтів підсилення регуляторів $\alpha_1^* = 0,72$ і $\alpha_2^* = 0,6$, тобто для компенсації дії протиЕРС двигуна треба подати на вхід системи напругу, пропорційну швидкості обертання двигуна ω .

9.2. Оптимізація в часовій зоні

Зараз частіше застосовують методи оптимального синтезу систем автоматичного керування в часовій зоні. Розглянемо оптимізацію систем керування електроприводів цими методами.

Припустимо, що об'єкт керування в просторі стану $\vec{x}(t)$ можна описати системою

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\vec{x}(t) + B_o(t)u_o(t), & /9.17/ \\ y_o(t) = C_o(t)\vec{x}_o(t), & /9.18/ \end{cases}$$

а задавальну дію $\theta(t)$ можна зобразити у вигляді вихідної змінної лінійної системи /формуального фільтра $\Phi\Phi$ /:

$$\dot{\vec{x}}_g(t) = A_g(t)\vec{x}_g(t) + \vec{W}_g(t); \quad /9.19/$$

$$\theta(t) = C_g(t)\vec{x}_g(t), \quad /9.20/$$

збуджуваної "білим шумом" $\vec{W}_g(t)$ з матрицею дисперсії $V_g(t)$.

Запровадимо вектор $\vec{x}(t) = \{\vec{x}_o(t), \vec{x}_g(t)\}^T$ розширеного простору стану системи, в якому початкову систему можна описати рівнянням

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) + B(t)u(t) + \vec{W}_t(t), \quad /9.21/$$

де

$$A(t) = \begin{Bmatrix} A_o(t) & \\ & A_g(t) \end{Bmatrix}, \quad B(t) = \begin{Bmatrix} B_o(t) \\ - & - & - \end{Bmatrix}, \quad \vec{W}_t(t) = \begin{Bmatrix} \vec{W}_o(t) \\ \vec{W}_g(t) \end{Bmatrix}, \quad /9.22/$$

а матриця дисперсій $V_t(t)$ сигналу $\vec{W}_t(t)$ має правий нижній блок, який дорівнює $V_{g_x}(t)$.

Похибку привода $\varepsilon(t) = Q(t) - y(t)$ можна визначити так:

$$\varepsilon(t) = C(t)\vec{x}_x(t),$$

де згідно з /9.17/-/9.21/

$$C(t) = \begin{Bmatrix} -C_o(t) & C_g(t) \end{Bmatrix}.$$

Тоді оптимальний синтез можна звести до мінімізації критерію

$$J = M \left\{ \int_{t_0}^{t_1} [\vec{x}^T(t) R_g(t) \vec{x}(t) + R_e(t) u_x^2(t)] dt \right\}, \quad /9.23/$$

де компоненти вектора $\vec{x}(t) = \vec{x}(t)\vec{x}(t)$ є похибка $\varepsilon(t)$ привода і деякі компоненти $\vec{x}_j(t)$ вектора стану $\vec{x}_x(t)$, що їх необхідно обме-

жувати під час синтезу: $R_3(t)$ - вагова невід'ємно визначена матриця;
 $R_2(t)$ - додатний ваговий множник.

Мінімуму критерієві /9.23/ надає лінійний регулятор

$$u(t) = -F(t) \bar{x}(t), \quad /9.24/$$

де

$$F(t) = R_2^{-1}(t) B^T(t) P(t). \quad /9.25/$$

Тут $P(t)$ - розв'язок рівняння Ріккати

$$-P(t) = A^T(t) R_3(t) P(t) - P(t) B^T(t) R_2(t) P(t) + A^T(t) P(t) + P(t) A^T(t) \quad /9.26/$$

з нульовою кінцевою умовою.

Для реалізації оптимального регулятора /9.24/ потрібні змінні стану $\bar{x}(t)$ розширеної системи, що їх можна відновити за сигналами $\varepsilon^*(t) = \varepsilon(t) + f(t)$ вимірювача похибки $f(t)$, вимірюваної з адитивною завадою $\varepsilon(t)$ типу "білого шуму" інтенсивністю $V_2(t)$ за допомогою оптимального спостерігача типу фільтра Калмана - Б'юсі

$$\hat{x}(t) = A^T(t) \hat{x}(t) + B^T(t) u(t) + K(t) [\varepsilon^*(t) - C^T(t) \hat{x}(t)], \quad /9.27/$$

де

$$K(t) = Q(t) C(t) V_2^{-1}(t).$$

Матриця дисперсій є розв'язком рівняння Ріккати

$$Q(t) = V_1(t) - Q(t) C^T(t) V_2^{-1}(t) Q_*(t) C^T(t) + A(t) Q(t) + Q(t) A^T(t) \quad /9.28/$$

з нульовою початковою умовою.

Приклад 9.3. Розглянемо оптимальний синтез електромеханічної слідувальної системи з прикладу 9.1.

У цьому випадку

$$A_0 = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad A_3 = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & -0,1 \end{array} \right\|, \\ B = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array} \right\|; \quad C_0 = C_3 = \left\| 1 \mid 0 \right\| \\ V_1 = 5 \cdot 10^{-2}, \quad V_2 = 10^{-6}.$$

Для виконавчого двигуна МН-42 установлені значення регулятора $\bar{K}$ і спостерігача $\bar{K}$

$$\bar{K} = \| 5,05 \ 3,1 \ 5,05 \ 3,1 \|; \quad \bar{K} = \| 1 \ 6,5 \ 2 \ 1 \|.$$

Дисперсія похибки одноканальної системи становить $21 \cdot 10^{-6}$ рад². Зауважимо, що дисперсія похибки одноканальної системи має мінімально можливе значення $\bar{\epsilon}_{1x}^2 = 6,5 \cdot 10^{-6}$. Дисперсія відновлення змінної стану за допомогою оптимального фільтра Калмана - Б'юсі, але це потребує неабиякого збільшення потужності керування $\mathcal{U}$.

На рис. 9.3, а зображено граф алгоритмічної схеми оптимального першого каналу з повним спостерігачем і моделлю збурювальної дії. Оскільки в об'єкті керування змінні стану /кут повороту та швидкість повороту платформи/ можна досить точно виміряти й використати для формування керувальної дії, то схему можна спростити завдяки використанню тільки спостерігача збурювальної дії /рис. 9.3, б/.

9.3. Оптимізація цифрових систем у частотній зоні

Розглянемо методи синтезу в частотній зоні оптимальних цифрових систем керування, рух яких описують лінійні різницеві рівняння із сталими коефіцієнтами. Перейшовши в частотну зону, використовують дискретний аналог перетворення Лапласа і z -перетворення. Вхідні сигнали - задавальні й збурювальні дії, а також завади вимірювання - є стаціонарні випадкові дискретні послідовності з нульовими математичними сподіваннями й відомими кореляційними коефіцієнтами.

Розглянемо дискретний аналог неперервної багатоканальної системи /див. рис. 9.1/.

Електропривод складається з деякої незмінної частини об'єкта керування, заданого дискретною передавочною функцією $A^{-1}(z) \mathcal{P}(z)$, і власне регулятора $Z(z)$, структуру й параметри якого до певної міри можна вибирати довільно. Зараз цифровий регулятор, як звичайно, реалізують на мікропроцесорній елементній базі за допомогою керувальної ЕОМ.

Оптимальний оператор $Z(z)$ треба вибирати так, щоб мінімізувати критерій

$$J = M \{ R \epsilon^2(t) + \mathcal{U}^2(t) \}. \quad /9.29/$$

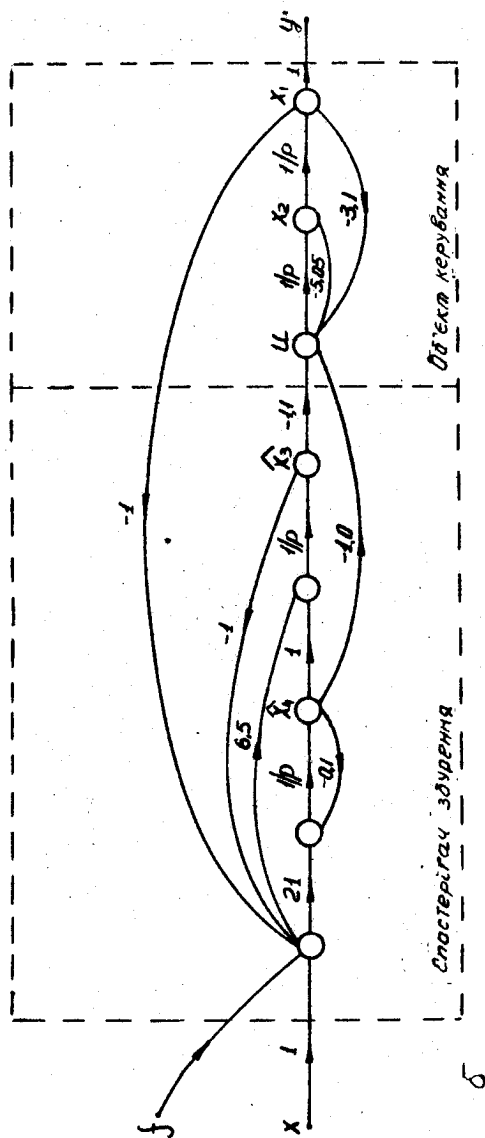


Рис. 9.3. Закінчення

Цю задачу можна звести до синтезу оптимального регулятора $\mathcal{Z}_K$ одноканальної системи стабілізації

$$A(z) \varepsilon(i) = \psi(i) + \theta(z) u(i), \quad /9.30/$$

$$u(i) = \tau(z) (\varepsilon(i) + f(i)), \quad /9.31/$$

де еквівалентна збурювальна дія

$$\psi(i) = A(z) x(i), \quad /9.32/$$

мінімум функціоналу розглядатимемо на множині лінійних матрицевих функцій $Z(z) [z - \text{комплексна змінна дискретного перетворення Лапласа}]$, які забезпечують стійкість замкненої системи "об'єкт + регулятор". Для стійкості дискретної системи необхідно й досить, щоб усі нулі відповідного характеристичного рівняння замкненої системи лежали всередині круга $|z| = 1$. Згідно з ідеєю Вінера - Колмогорова, яка базується на спеціальному виборі матриці варійованої функції в рівнянні Вінера - Колфа, але не пов'язана із заміною замкненої системи із зворотним зв'язком еквівалентною розімкненою системою, виберемо матрицю варійованих функцій у вигляді

$$\varphi(z) = (\alpha(z) + \beta(z) \tau(z)) (A(z) + \theta(z) \tau(z))^{-1}, \quad /9.33/$$

де на поліноми $\alpha(z)$ і $\beta(z)$ накладено єдине обмеження забезпечення аналітичності поза одиничним кругом матриці

$$\mathcal{Z} = \begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \quad /9.34/$$

разом з оберненою.

Тоді відповідно до методики розв'язання рівняння Вінера - Хопфа варіація функції φ , яка перетворює на нуль першу варіацію функціоналу і аналітична поза одиничним кругом $|z| = 1$:

$$\varphi = - \frac{Q}{G\mathcal{D}} [K_0 + \alpha_0 + K_f + \alpha_f], \quad /9.35/$$

де нулі полінома мають лежати всередині одиничного круга, що забезпечують, належним чином вибираючи поліноми $\alpha(z)$ та $\beta(z)$.

Функції $\mathcal{D}(z)$ і $G(z)$, які мають нулі й полюси тільки всередині одиничного круга, визначає факторизація

$$\mathcal{D}\bar{\mathcal{D}} = S_\psi + A\bar{A} S_f, \quad /9.36/$$

$$G\bar{G} = A\bar{A} + M\bar{M} \bar{G}, \quad /9.37/$$

де κ_0 і α_0 - поліноми від z , κ і α - правильні дробы, які мають полюси тільки поза одиничним кругом, κ_+ і α_+ - правильні дробы, які мають полюси тільки всередині одиничного круга, що їх визначає розклад /сепарація/

$$\frac{M\bar{P}Q - G\bar{G}\alpha}{GQA} z = \kappa_0 + \kappa_+ + \kappa; \quad /9.38/$$

$$- \frac{MS_f \bar{A}B}{\bar{P}z} = \alpha_0 + \alpha_+ + \alpha; \quad /9.39/$$

Оптимальна передавна функція регулятора z

$$z = \frac{A\Phi - \alpha}{\beta - \Phi B} \quad /9.40/$$

Вибираючи поліноми $\alpha(z)$ і $\beta(z)$, які забезпечують розташування нулів полінома $\det Q = \beta(z)A(z) + \alpha(z)B(z)$ усередині одиничного круга, треба прагнути до якомога простішого виду полінома $Q(z)$ оскільки це полегшить обчислення оптимального оператора. Зокрема, коли об'єкт керування стійкий, а це звичайно саме так і є, то поліном $A(z)$ аналітичний поза одиничним кругом, і, отже, найпростіший вигляд $Q(z)$ матиме, коли $\alpha = 0$ і $\beta = 1$.

Приклад 9.4. Синтезувати оптимальну дискретну систему, в якій рух об'єкта керування описує рівняння

$$E(i) = \beta E(i-1) + u(i-1) + \psi(i),$$

а критерій якості має вигляд $J = M\{u^2\}$. Тут $\psi(i)$ - стаціонарна випадкова некорельована послідовність з одиничною дисперсією $K_\psi(z) = 1$.

Така постановка задачі має сенс, коли в діапазоні частот смуги пропускання електропривода спектральна щільність потужності вхідного сигналу практично не змінюється і, отже, вхідний сигнал можна вважати дискретним "білим шумом". Окрім того, критерій якості містить лише компоненту керування, що можна виправдати в разі синтезу досить вузькосмугового інерційного привода з дуже обмеженими енергетичними можливостями.

Згідно з вибраними позначеннями

$$A(z) = 1 - \beta z; \quad B(z) = z.$$

Найпростіший вид полінома $Q(z)$, коли $\alpha(z) = \beta$ і $\beta(z) = 1$,

$$\det z = A(z)\beta(z) + \beta(z)\alpha(z) = 1.$$

Виконуючи всі необхідні операції факторизації й сепарації відповідних виразів

$$G(z) = z - \theta, \quad \theta^+(z) = \frac{\theta^2 - 1}{1 - \theta z},$$

дістаємо статичний регулятор

$$z(z) = (1 - \theta^2) / \theta,$$

який має найпростішу технічну реалізацію.

9.4. Оптимізація цифрових систем у часовій зоні

Розглянемо оптимізацію цифрової системи керування електроприводом у часовій зоні. Припустимо, що об'єкт керування електропривода в просторі стану $\vec{X}(t)$ можна описати лінійною дискретною системою

$$\vec{X}(i+1) = A(i) \vec{X}(i) + B_o(i) u_o(i), \quad /9.41/$$

$$y_o(i) = C_o(i) \vec{X}_o(i), \quad /9.42/$$

а задавальну дію $Q(i)$ можна зобразити у вигляді вихідної змінної лінійної дискретної системи формувального фільтра ФФ:

$$\vec{X}_j(i+1) = A_j(i) \vec{X}_j(i) + W_j(i), \quad /9.43/$$

$$Q(i) = C_j(i) \vec{X}_j(i), \quad /9.44/$$

збуджуваної дискретним "білим шумом" $\vec{W}_j(i)$ з матрицею дисперсій $V_j(i)$.

Запровадимо вектор розширеного простору стану

$$\vec{X}(i) = \{ \vec{X}_o^T(i), \vec{X}_j^T(i) \}^T,$$

в якому розширену систему описує рівняння

$$\vec{X}(i+1) = A(i) \vec{X}(i) + B(i) u(i) + \vec{W}_j(i), \quad /9.45/$$

де

$$A_{\kappa}(i) = \begin{bmatrix} A_o(i) & 0 \\ 0 & A_j(i) \end{bmatrix}, \quad B_{\kappa}(i) = \begin{bmatrix} B_o(i) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{W}_{\kappa}(i) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{W}_j(i) \end{bmatrix}, \quad /9.46/$$

а матриця дисперсій $V_i(i)$ "білого шуму" $\bar{W}_i(i)$

$$V_i(i) = \left\| - \frac{1}{V_i(i)} \right\|. \quad /9.47/$$

Похибку системи $\mathcal{E}(i) = Q(i) - Y(i)$ можна визначити так:

$$\mathcal{E}(i) = C(i) \bar{X}(i), \quad /9.48/$$

де

$$C(i) = \left\| - C_0(i) \mid C_2(i) \right\|. \quad /9.49/$$

Тоді оптимальний синтез можна звести до мінімізації критерію

$$J = M \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} [\bar{\alpha}^T(i+1) R_3(i+1) \bar{\alpha}(i+1) + R_2(i) u^2(i)] \right\}, \quad /9.50/$$

де компонентами вектора $\mathcal{Q}(i) = \mathcal{Q}(i) X(i)$ є похибка $\mathcal{E}(i)$ системи і деякі змінні $X(i)$ стану $\bar{X}_0(i)$, які треба під час синтезу обмежувати; $R_3(i)$ - вагова невід'ємна визначена матриця; $R_2(i)$ - додатний ваговий множник.

Мінімуму критерію /9.50/ надає лінійний регулятор

$$u_x(i) = -F_x(i) X_x(i), \quad /9.51/$$

де

$$F(i) = \left\{ R_2(i) + B^T(i) [R_1(i+1) + P(i+1)] \times \right. \\ \left. \times B(i) \right\}^{-1} B^T(i) [R_1(i+1) + P(i+1)] A(i) \quad /9.52/$$

послідовність матриць $Q(i)$ є розв'язком матрицевого різницевого рівняння

$$P(i) = A^T(i) [R_1(i+1) + P(i+1)] [A(i) - B(i) F(i)] \quad /9.53/$$

з нульовою кінцевою умовою, а $R_1(i) = \mathcal{Q}^T(i) R_3(i) \mathcal{Q}(i)$.

Для реалізації оптимального регулятора /9.51/ потрібний вектор стану $\bar{X}(i)$, який можна відновити за сигналами $\mathcal{E}^*(i) = \mathcal{E}(i) + f(i)$, вимірювача похибки $\mathcal{E}^*(i)$ системи з адитивною завадою $f(i)$ типу дискретного "білого шуму" інтенсивністю $V_2(i)$ за допомогою оптимального спостерігача типу фільтра Калмана - Б"юсі

$$\hat{X}(i+1) = A(i) \hat{X}(i) + B(i) u(i) + K(i) [\mathcal{E}^*(i) - \tilde{C}(i) \hat{X}(i)], \quad /9.54/$$

де

$$K(i) = [A(i)Q(i)C^T(i) + V_{12}(i)] [V_2(i) + C(i)Q(i)C^T(i)]^{-1}, \quad 9.55/$$

матриця $Q(i)$ є розв'язком дисперсійного рівняння

$$Q_{\kappa}(i+1) = [\hat{A}_{\kappa}(i) - K_{\kappa}(i)\hat{C}_{\kappa}(i)] Q_{\kappa}(i) \hat{A}_{\kappa}^T(i) + \\ + V_{1\kappa}(i) - K_{\kappa}(i) V_{12\kappa}^T(i)] \quad 9.56/$$

за нульової початкової умови $Q_{\kappa}(i_0)$.

Приклад 9.5. Розглянемо дискретну відміну електромеханічної слідувальної системи /див. приклад 9.1/ з періодом дискретності 20 мс.

Тоді

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0,02 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0,02 \\ 0 & 0,998 \end{bmatrix};$$

$$C_0 = C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$V_3^2 = 5 \cdot 10^{-2}; \quad V_2 = 10^{-6}.$$

Усталені значення матриць оптимальних регулятора й спостерігача:

$$F = \begin{bmatrix} 4,06 & 0,44 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,89 & 13,7 \end{bmatrix}.$$

Оптимальна дискретна система має алгоритмічну схему, аналогічну неперервній системі, але роль інтеграторів у ній відіграють лінії затримки на один такт. Дискретну систему реалізують звичайно на цифровій мікропроцесорній елементній базі безпосередньо за алгоритмом керування. Коли ж спрощення технічної реалізації потребує виконання системи на логічних елементах, то схему можна відновити за її аналоговим варіантом.

Зауважимо, що застосування мікропроцесорного керування дає змогу не тільки реалізувати оптимальні регулятори й спостерігачі, а й виконати інші функції, наприклад діагностики роботоздатності устаткування, підготовки системи до роботи, перемикання технологічних режимів системи, зміни коефіцієнтів підсилення та інших параметрів з метою адаптації тощо.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Абакумов В.И., Голубь А.П., Друбецкий В.Г., Осмоловский П.Ф. Оптимальные по быстродействию системы автоматического управления электроприводами. - Харьков, 1981. - 102 с.
2. Абакумов В.И., Голубь А.П., Осмоловский П.Ф. Системы подчиненного регулирования электроприводами. - Харьков, 1985. - 101 с.
3. Автоматизированное проектирование систем управления / Под ред. М. Джамшиди, Ч. Дж. Хергета. - М.: Машиностроение, 1989. - 342 с.
4. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. - М.: Наука, 1976. - 423 с.
5. Атвнс М., Фалб П. Оптимальное управление. - М.: Машиностроение, 1968. - 763 с.
6. Вешарин А.Б., Новиков Б.А., Соколовский Г.Г. Управление электроприводами. - Л.: Энергоиздат, 1982. - 391 с.
7. Бесекерский В.А. Цифровые автоматические системы. - М.: Наука, 1976. - 375 с.
8. Ворцов Ю.А., Соколовский Г.Г. Тиристорные системы электропривода с упругими связями. - Л.: Энергия, 1979. - 159 с.
9. Ворцов Ю.А., Поляхов Н.Д., Путов В.В. Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением. - Л.: Энергоатомиздат, 1984. - 214 с.
10. Гарнов В.К. и др. Унифицированные системы авторегулирования электроприводом в металлургии. - М.: Металлургия, 1977. - 190 с.
11. Голубь А.П., Соляник Б.П. Цифровые системы управления электроприводами. - К.: УМК ЕО, 1988. - 116 с.
12. Голубь А.П., Осмоловский П.Ф. Системы подчиненного регулирования электроприводов. - Харьков, 1979.
13. Даруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. - М.: Наука, 1970.
14. Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем. - М.: Мир, 1974. - 463 с.
15. Донской Н.В. и др. Управляемый выпрямитель в системах автоматического управления. - М.: Энергоатомиздат, 1984. - 351 с.
16. Егоров В.Н., Корженевский-Яковлев О.В. Цифровое моделирование систем электропривода. - М.: Энергоатомиздат, 1986. - 164 с.
17. Зайцев И.Ф. Теория автоматического управления и регулирования. - К.: Ёща шк., 1975. - 424 с.
18. Зимин Е.Н., Яковлев В.И. Автоматическое управление электроприводами. - М.: Ёсш. шк., 1979. - 317 с.

19. Изерман Р. Цифровые системы управления. - М.: Мир, 1984. - 341 с.
20. Квакернак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. - М.: Мир, 1977. - 650 с.
21. Ключев Б.И. Теория электропривода. - М.: Энергоатомиздат, 1983. - 332 с.
22. Козьмерковский М., Буйцек А. Схемы управления и измерения в промышленной электронике. - М.: Энергоатомиздат, 1983. - 223 с.
23. Комплектные тиристорные электроприводы. Справочник / Под ред. Б.М.Перельмутера. - М.: Энергоатомиздат, 1988. - 318 с.
24. Коцегуб П.Х. Способ компенсации ЭДС двигателя в системе вентильного привода // Известия вузов: Электромеханика. - 1980. - № 1.
25. Кочергин Б.Б. Следящие системы с двигателями постоянного тока. - Л.: Энергоатомиздат, 1988. - 165 с.
26. Куо В. Теория и проектирование цифровых систем управления. - М.: Машиностроение, 1986. - 447 с.
27. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. - М.: Машиностроение, 1976. - 184 с.
28. Кузовков Г.Т., Карабанов С.Б., Салычев О.С. Непрерывные и дискретные системы управления и методы идентификации. - М.: Машиностроение, 1978. - 219 с.
29. Кунцевич Б.М., Чеховой Ю.А. Нелинейные импульсные системы с частотно- и широтно-импульсной модуляцией. - К.: Техника, 1975.
30. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. - М.: Энергия, 1973. - 440 с.
31. Михайлов О.П. Динамика электромеханического привода металло-режущих станков. - М.: Машиностроение, 1989. - 223 с.
32. Перельмутер В.М., Сидоренко В.А. Системы управления тиристорными электроприводами постоянного тока. - М.: Энергоатомиздат, 1988. - 302 с.
33. Попович Н.П., Ковальчук А.В., Красовский Е.П. Автоматизация производственных процессов и установок. - К.: Бьща шк., 1986. - 310 с.
34. Решмин В.И., Ямпольский Д.С. Проектирование и наладка систем подчиненного регулирования электроприводов. - М.: Энергия, 1975. - 183 с.
35. Слежановский О.В., Бирюков А.В., Хуторецкий В.М. Устройства унифицированной блочной системы регулирования дискретного типа /УБСР-Д/. - М.: Энергия, 1975. - 255 с.
36. Справочник по автоматизированному электроприводу / Под ред. В.А.Елисеева и А.В.Шинянского. - М.: Энергоатомиздат, 1983. - 613 с.

37. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. - М.: Наука, 1985. - 295 с.
38. Терехов В.М. Элементы автоматизированного электропривода. - М.: Энергоатомиздат, 1987. - 221 с.
39. Файнштейн В.Г., Файнштейн Э.Г. Микропроцессорные системы управления тиристорными электроприводами. - М.: Энергоатомиздат, 1986. - 237 с.
40. Фишбейн В.П. Расчет систем подчиненного регулирования вентильного электропривода постоянного тока. - М.: Энергия, 1972. - 134 с.
41. Ту Ю.Т. Цифровые и импульсные системы управления. - М.: Машиностроение, 1964. - 701 с.
42. Фрер Ф., Ортенбургер Ф. Введение в электронную технику регулирования. - М.: Энергия, 1973. - 187 с.
43. Шенфельд Р., Хобигер Э. Автоматизированные электроприводы. - Л.: Энергоатомиздат, 1985. - 463 с.
44. Богаенко И.Н. Контроль температуры электрических машин. - К.: Техника, 1975. - 175 с.
45. Опрышко И.А., Олефир Ф.Ф. Определение оптимальных передаточных функций систем автоматического регулирования скорости электроприводов чистовых клетей тонколистовых станов горячей прокатки // Известия вузов: Электромеханика. - 1968. - № 12.
46. *Satoru Ozaki, Masak Ohara, Koichi Ishida. A microprocessor based DC motor drive with a state observer for impact drop suppression / Fuji Electric Co, Ltd. - 1985, - p. 771-775.*
47. Клеев В.Е., Пархоменко П.П. и др. Технические средства диагностирования. - М.: Машиностроение, 1989. - 672 с.

ЗМІСТ

Передмова	3
Розділ 1. Основи побудови систем керування електроприводами	4
1.1. Основні поняття й означення	4
1.2. Алгоритм функціонування, класифікація СКЕП за призначенням	6
1.3. Алгоритм керування й принципи побудови СКЕП	7
1.4. Якість процесу керування	20
Розділ 2. Математичний опис систем керування електроприводами	25
2.1. Їступні зауваження.....	25
2.2. Математичний опис систем керування електроприводами в змінних вхід-вихід	26
2.3. Математичний опис систем керування електроприводами в змінних стану	38
Розділ 3. Математичні моделі об'єктів керування систем керування електроприводами	68
3.1. Математична модель тиристорного перетворювача	68
3.2. Математична модель двигуна постійного струму з незалежним збудженням	71
3.3. Рівняння стану двигуна постійного струму з незалежним збудженням. Матрицева передавна функція	81
3.4. Математична модель двигуна постійного струму з урахуванням пружних деформацій механічної передачі	88
3.5. Математична модель трифазного асинхронного двигуна	97
Розділ 4. Системи регулювання кутової швидкості	102
4.1. Призначення й функціональна схема систем регулювання кутової швидкості	102
4.2. Регулятор швидкості з від'ємним зворотним зв'язком за швидкістю	105
4.3. Регулятор швидкості із зворотними зв'язками за струмом	113

4.4. Регулятор швидкості з від"ємним зворотним зв"язком за напругою	I18
4.5. Регулятор швидкості з від"ємним зворотним зв"язком за швидкістю й додатним за струмом	I21
4.6. Регулятор швидкості з від"ємним зворотним зв"язком за швидкістю й струмовим відхином	I22
Розділ 5. Аналогові системи підпорядкованого регулювання електроприводами з двигунами постійного струму	I26
5.1. Основні поняття й принципи побудови систем підпорядкованого регулювання електроприводами ..	I26
5.2. Критерії оптимальності	I38
5.3. Типові аналогові регулятори	I53
5.4. Синтез послідовних коригувальних пристроїв /регуляторів/	I60
5.5. Системи підпорядкованого регулювання кутової швидкості із зворотним зв"язком за швидкістю	I65
5.6. Системи підпорядкованого регулювання швидкості із зворотним зв"язком за ЕРС	I82
Розділ 6. Системи регулювання електроприводів з двигунами змінного струму	I86
6.1. Системи регулювання кутової швидкості з тиристорними регуляторами напруги	I86
6.2. Регулятори швидкості з частотним регулюванням швидкості асинхронних двигунів з короткозамкненим ротором	I92
6.3. Регулятори швидкості з частотним регулюванням швидкості асинхронних двигунів з фазним ротором	I98
Розділ 7. Цифрові системи керування електроприводами	204
7.1. Загальні відомості про цифрові системи керування	204
7.2. Математичний опис процесів у цифрових системах керування електроприводами на підставі різницевих рівнянь та $\mathcal{Z}$ -перетворення	225
7.3. Математичний опис процесів у цифрових системах керування електроприводами в просторі станів	239

7.4. Мікропроцесорні пристрої керування електроприводами	258
7.5. Системи технічної діагностики електроприводів	272
Розділ 8. Модальне керування електроприводами	278
8.1. Основні означення й поняття	278
8.2. Керовність і спостережність стаціонарних лінійних систем керування	279
8.3. Синтез аналогових і цифрових регуляторів стану з повною інформацією про об'єкт керування	289
8.4. Синтез аналогових і цифрових регуляторів стану з неповною інформацією про об'єкт керування	304
8.5. Синтез аналогових і цифрових регуляторів з використанням спостерігачів повного порядку	307
Розділ 9. Оптиміальне керування електроприводами	325
9.1. Оптимізація в частотній зоні	325
9.2. Оптимізація в часовій зоні	333
9.3. Оптимізація цифрових систем у частотній зоні	336
9.4. Оптимізація цифрових систем у часовій зоні	341
Список літератури	344

Навчальне видання

Голуб А.П., Кузнецов Б.І.,
Опришко І.О., Соляник В.П.

Системи керування електроприводами

За ред. В.П.Соляника

Навчальний посібник