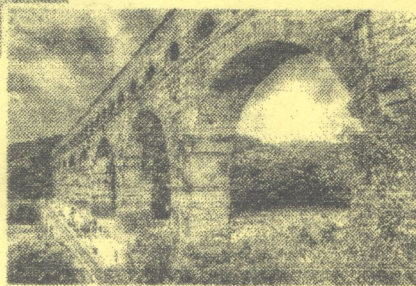


624(075)

M79

А.С. Моргун

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА



4035-51

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

А.С. Моргун

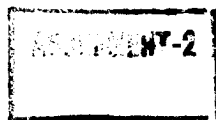
БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА



624(075) 624 2008

Вінницький національний технічний університет

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів напряму підготовки 0921 - "Будівництво" всіх спеціальностей. Протокол № 11 від 25 травня 2006 р.



Вінниця ВНТУ 2008

УДК 624.04
М 79

Рецензенти:

В.А. Огородніков, доктор технічних наук професор
І. Н. Дудар, доктор технічних наук професор
М. М. Сорока, кандидат технічних наук доцент

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Моргун А.С.

М 79 Будівельна механіка Навчальний посібник. - Вінниця: ВНТУ, 2007. - 102 с.

В навчальному посібнику викладено курс аналітичного розрахунку на міцність статично визначених та статично невизначених стержневих систем, розрахунки на стійкість, а також розрахунки будівельних конструкцій на дію динамічних навантажень. Посібник розроблений у відповідності з планом кафедри і програмами дисциплін "Будівельна механіка" та "Спецкурс з будівельної механіки".

УДК 624.04

© А.Моргун, 2007



Зміст

ВСТУП.....	5
1 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО ВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ.....	6
1.1 Розрахунок багатопрогонових статично визначених балок автодорожного моста (балок Семіколенова).....	6
1.1.1 Склад завдання.....	6
1.1.2 Приклад розрахунку.....	6
1.2 Розрахунок статично визначеної арки на сталі навантаження та побудова ліній впливу.....	10
1.2.1 Послідовність дій.....	10
1.2.2 Визначення реакцій.....	10
1.2.3 Перевірка реакцій за лініями впливу.....	10
1.2.4 Побудова кінцевих епюр згинальних моментів, поперечних сил та подовжених сил в арці від дії вертикальних сил... ..	11
1.2.5 Побудова ліній впливу в арці, визначення зусиль за лініями впливу та порівняння з аналітичним розрахунком.....	14
1.3 Розрахунок статично визначеної ферми на сталі навантаження та побудова ліній впливу.....	16
1.3.1 Послідовність дій.....	16
1.3.2 Розрахунок ферми на власну вагу.....	16
1.3.3 Розрахунок дії снігового навантаження зліва.....	17
1.3.4 Визначення переміщень середини нижнього поясу.....	17
1.3.5 Побудова діаграм Максвелла – Кремони.....	17
1.3.6 Компонування таблиці зусиль у фермі.....	19
1.3.7 Побудова ліній впливу в фермі.....	20
1.3.8 Визначення зусиль в стержнях ферми за лініями впливу... ..	20
1.4 Розрахунок переміщень в статично визначених системах від сталих навантажень.....	21
1.4.1 Склад завдання.....	21
1.4.2 Приклад розрахунку.....	21
1.5 Варіаційна задача будівельної механіки.....	35
1.5.1 Склад завдання.....	35
1.5.2 Короткі відомості з варіаційного числення. Поняття функціонала та необхідні умови екстремуму.....	35
1.5.3 Суть варіаційних методів розв'язування диференціальних рівнянь. Форма апроксимуючої функції.....	37
1.5.4 Метод Рітца.....	39
2 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ.....	49
2.1 Розрахунок статично невизначеної рами за методом сил.....	49
2.1.1. Склад завдання та приклад розрахунку.....	49
2.2 Розрахунок нерозрізної балки на постійне та тимчасове навантаження.....	53

2.2.1	Склад завдання	53
2.2.2	Розрахунок нерозрізної балки на зовнішнє постійне навантаження	53
2.2.3	Розрахунок нерозрізної балки на тимчасове навантаження. Побудова ліній впливу	62
2.3.	Розрахунок статично невизначеної рами за методом переміщень	67
2.3.1.	Склад завдання	67
2.3.2	Приклад розрахунку	67
2.4	Розрахунок статично невизначеної ферми	77
2.4.1	Склад завдання	77
2.4.2	Приклад розрахунку	77
2.5	Розрахунок стійкості статично невизначеної рами за методом переміщень	83
2.5.1	Склад завдання	83
2.5.2	Приклад розрахунку	83
2.6	Динамічний розрахунок статично невизначеної рами за методом сил на дію гармонійного навантаження	91
2.6.1	Склад завдання	91
2.6.2	Приклад розрахунку	91
ЛІТЕРАТУРА		100

ВСТУП

Науково-технічний прогрес в будівництві та викликана ним необхідність ознайомлення з новими ефективними методами розрахунку споруд приводить до збільшення об'єму учбового матеріалу, потрібного для підготовки висококваліфікованих молодих спеціалістів в галузі розрахунків та проектування. Один із шляхів підвищення якості підготовки випускників вузів є всебічна комп'ютеризація навчального процесу та індивідуалізація його на цій основі.

Та навіть при наявності сучасної електронної техніки, для якісної підготовки навчання необхідне методичне та програмне забезпечення дисципліни для виконання розрахунково – графічних робіт. Концепція застосування ЕОМ в навчальному процесі полягає в тому, що вона має суттєво доповнювати класичну форму навчання. Наявність ЕОМ має допомагати контролювати правильність виконання розрахунків, позбавляти студента виконання великих обчислювальних робіт, які не несуть смислового навантаження з погляду розуміння методів розрахунку.

Навчальний посібник рекомендується студентам будівельних спеціальностей при вивченні дисципліни будівельної механіки. Розділи навчального посібника відповідають діючій, на теперішній час, програмі.

Після прослуховування відповідних розділів дисципліни, студент може приступити до розв'язання задач, користуючись посібником, в якому наведені багаточисельні приклади.

1 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО ВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ

1.1 Розрахунок багатопрогнових статично визначених балок автодорожного моста (балок Семіколенова)

1.1.1 Склад завдання

1. Визначити реакції опор та побудувати епюри M і Q в багатопрогновій балці від дії постійного розрахункового навантаження.

2. Побудувати лінії впливу опорних реакцій для кожної опори та лінії впливу M і Q для перерізів, в яких епюри моментів і поперечних сил мають екстремальні значення.

3. За лініями впливу V , M , Q обчислити величини внутрішніх зусиль від розрахункового навантаження (розподіленого та зосереджених сил).

5. Зіставити величини відповідних зусиль, отриманих за допомогою епор та ліній впливу.

1.1.2 Приклад розрахунку

А. Накреслити розрахункову схему балки, вказати всі розміри та навантаження (рис. 1.1.1 а, 1.1.2 а).

Б. Дослідити геометричну незмінність та побудувати поверхову схему балки (рис. 1.1.1 б, 1.1.2 б). Для побудови схеми взаємодії елементів балки (поверхової схеми) уявно роз'єднують елементи балки, розділивши їх на основні та другорядні. Основні балки можуть самостійно сприймати зовнішнє навантаження. Другорядні мають опиратись на основні.

В. Розпочати побудову епор M і Q з балок, які лежать вище (рис. 1.1.1 в, 1.1.2 в). Визначивши реакції в балках, які лежать вище, прикласти їх в зворотному напрямку (згідно з законом Ньютона рівності сили дії силі протидії) до балок, які лежать нижче, та побудувати епюри M і Q (рис. 1.1.1 г, 1.1.2 г).

Г. Кінцеві епюри M і Q наведено на рис. 1.1.1 д, 1.1.1 е, 1.1.2 д, 1.1.2 е.

Д. На рис. 1.1.3 показано побудову ліній впливу опорних реакцій, ліній впливу згинальних моментів та поперечних сил. При розрахунку споруди на рухоме навантаження (поїзд, що рухається, автомобілі, трактори та інше) користуються лініями впливу (л.в.). Лінія впливу – це графік, який показує закон зміни будь-якого фактора (опорна реакція, момент, поперечна сила) при переміщенні по споруді навантаження $P=1$.

Ордината л.в. показує величину зусилля, для якого побудована л.в., якщо вантаж $P=1$ стоїть над цією ординатою на балці. Ординати л.в. реакцій і поперечних сил виражаються в безрозмірних мірах, а згинальних моментів

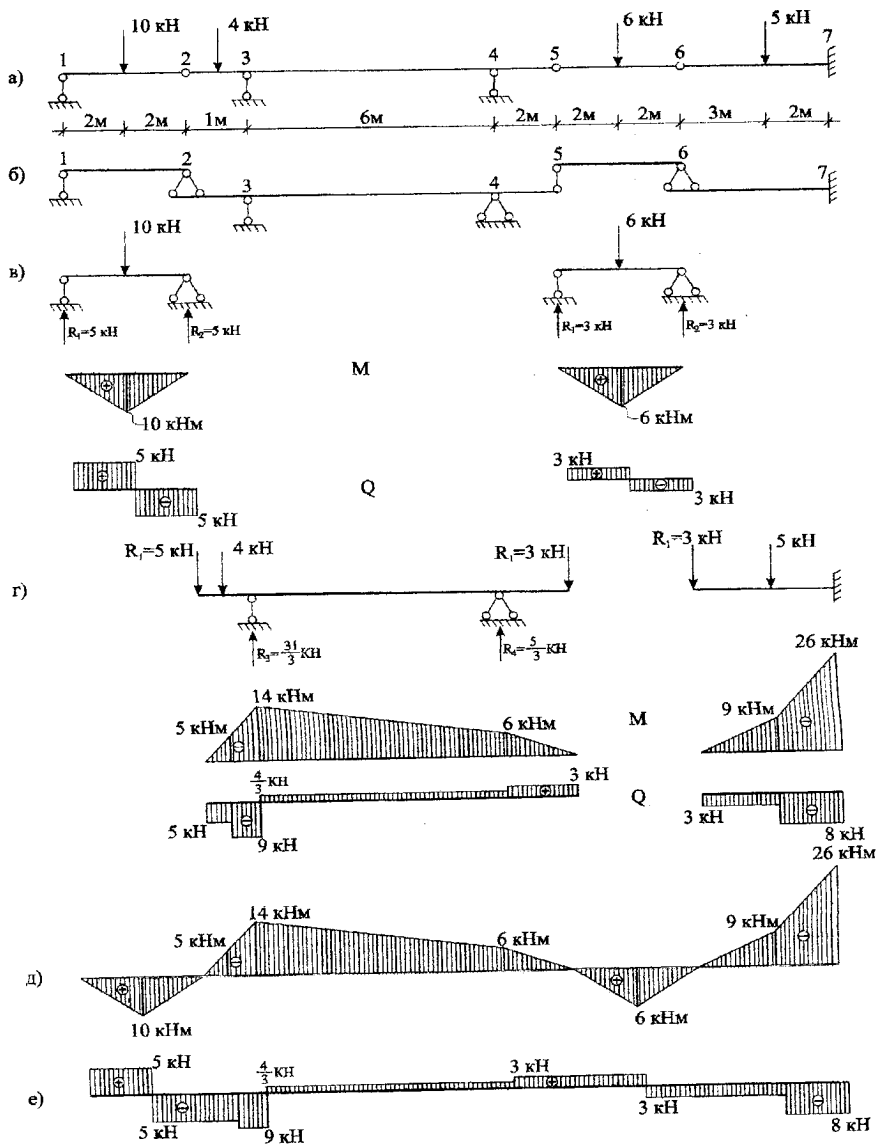


Рисунок 1.1.1 – Послідовність побудови епор M і Q в багатопрогоновій балці від дії довільних систем зосереджених сил

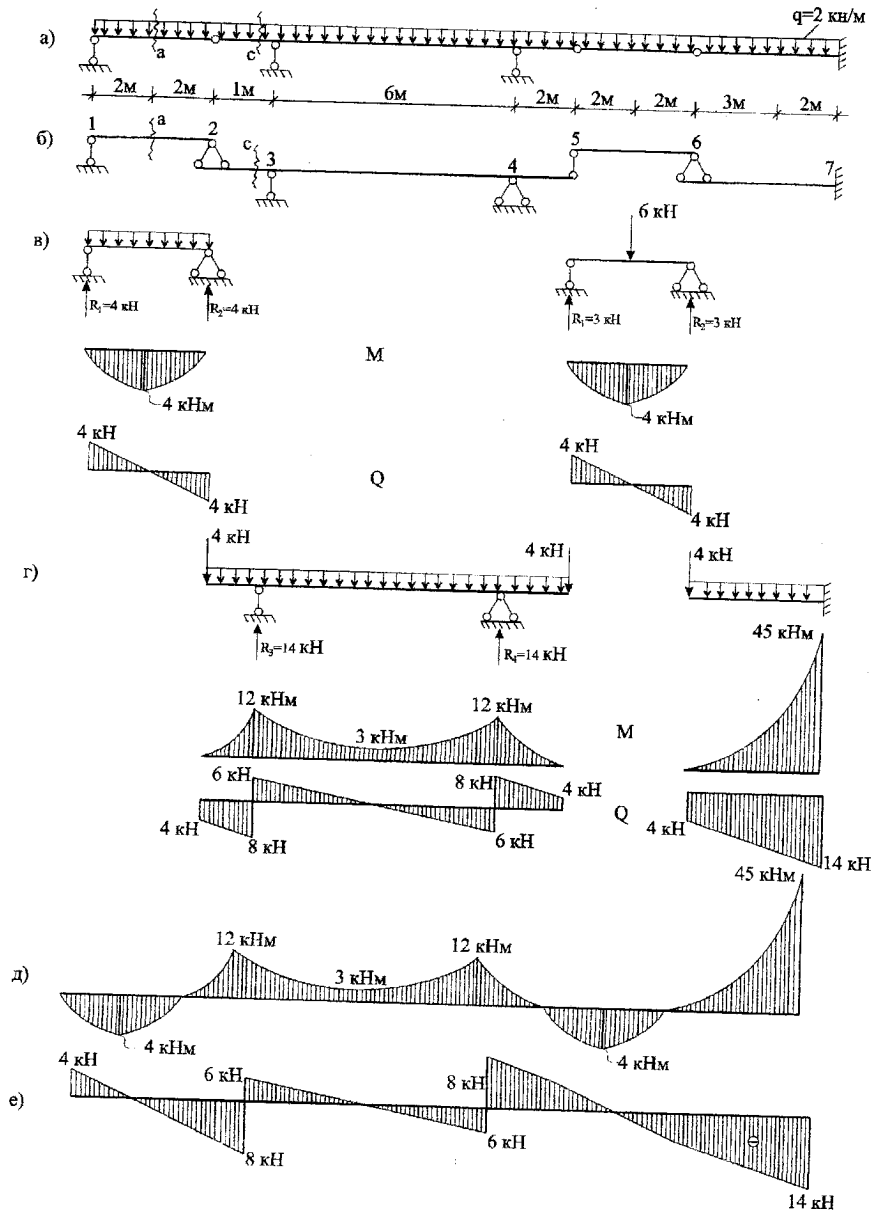


Рисунок 1.1.2 – Епюри M і Q в багатопрогоновій балці від постійного розрахункового навантаження

- в лінійній мірі. Для побудови ліній впливу зусиль в перерізах багатопрогової балки потрібно на початку побудувати лінії впливу зусиль для тієї однопрогової балки, на якій розташований заданий переріз, а потім врахувати вплив вищерозташованих другорядних балок.

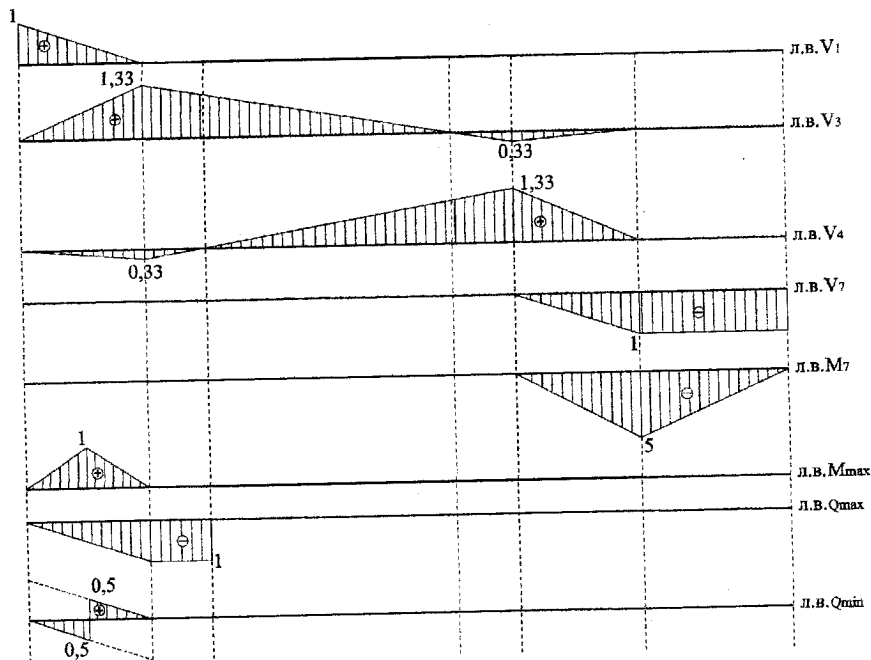


Рисунок 1.1.3 – Лінії впливу опорних реакцій, згинальних моментів та поперечних сил в багатопрогової балці

Перевірка зусиль за лініями впливу:

$$V_1 = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН}; \quad V_3 = 4/6 \cdot 10 + 1,167 \cdot 4 - 1/6 \cdot 6 = 10,33 \text{ кН};$$

$$V_4 = -0,65 \cdot 10 - 0,165 \cdot 4 + 4/6 \cdot 6 = 1,77 \text{ кН}; \quad V_7 = -5 \cdot 1 - 0,5 \cdot 6 = -8 \text{ кН};$$

$$M_7 = M_{\min} = 2 \cdot 5 - 2,5 \cdot 6 = 25 \text{ кНм};$$

$$M_{\max} = 1 \cdot 10 = 10 \text{ кНм};$$

$$Q_{\min} = -0,5 \cdot 10 - 1 \cdot 4 = -9 \text{ кН}; \quad Q_{\max} = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН}.$$

1.2 Розрахунок статично визначеної арки на сталі навантаження та побудова ліній впливу

1.2.1 Послідовність дій:

- Визначення реакцій в опорних зв'язках за допомогою рівнянь статки.
- Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів в аналогічній балці такого ж прогону, як в арці, що знаходиться під дією такого ж навантаження.
- Призначення характерних перерізів, визначення в них декартових координат та кутів нахилу їх до горизонту.
- Визначення зусиль в арці за формулами (1.2.1), заповнення таблиці 1.2.1 та побудова епюр M , Q , N .
- Побудова ліній впливу опорних реакцій та ліній впливу M , Q , N для довільного перерізу арки.
- Перевірка аналітичного розрахунку з розрахунком зусиль за лініями впливу.

1.2.2 Визначення реакцій

$$\sum M_A = 0$$

$$-V_B \cdot 22 - 9 \cdot 7.33 - 9 \cdot 14.64 - 2.2 \cdot \frac{11^2}{2} - 2.1 \cdot 7.33 \cdot 18.33 = 0; V_B = 27.883 \text{ Кн.}$$

$$\sum Y = 0; \quad V_A = 29.716.$$

$$\sum_{\text{ліс}} M_C = 0 \quad -29.72 \cdot 11 + H_A \cdot 10 + 9 \cdot 3.67 + 2.2 \cdot 11^2 / 2 = 0; H_A = 16.08 \text{ Кн.}$$

1.2.3 Перевірка реакцій за лініями впливу:

$$V_A = 0.67 \cdot 9 + 0.33 \cdot 9 + \frac{0.33}{2} \cdot 2.1 \cdot 7.3 + \frac{0.5+1}{2} \cdot 11 \cdot 2.2 = 29.714 \text{ Кн.}$$

$$V_B = 0.33 \cdot 9 + 0.67 \cdot 9 + \frac{0.5}{2} \cdot 11 \cdot 2.2 + \frac{0.67+1}{2} \cdot 7.33 \cdot 2.1 = 27.885 \text{ Кн.}$$

$$H = 0.37 \cdot 9 \cdot 2 + \frac{0.55}{2} \cdot 11 \cdot 2.2 + \frac{0.37}{2} \cdot 7.33 \cdot 2.1 = 16.087 \text{ Кн.}$$

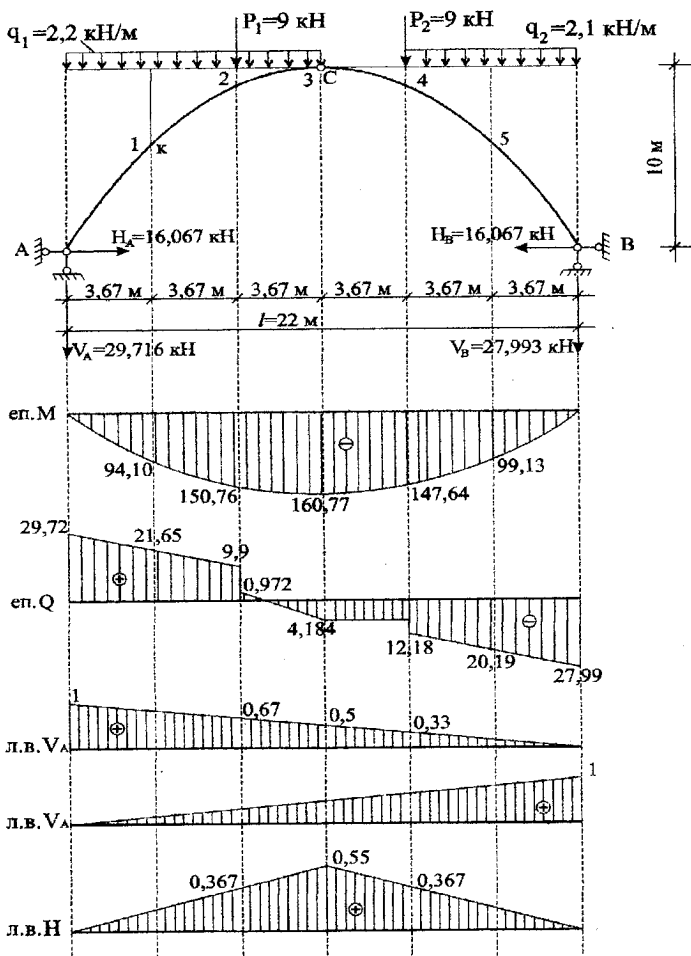


Рисунок 1.2.1 – Побудова епюр M^0 , Q^0 в аналогічній балці та лівій впливу опорних реакцій в арці

1.2.4 Побудова кінцевих епюр згинальних моментів, поперечних сил та поздовжніх сил в арці від дії вертикальних сил

$$\begin{aligned}
 M_k &= M_k^0 - H y_k, & Q_k &= Q_k^0 \cdot \cos \varphi - N \sin \varphi, \\
 N_k &= -Q_k^0 \cdot \sin \varphi - N \cdot \cos \varphi ; & & (1.2.1)
 \end{aligned}$$

а) визначаємо характерні перерізи, для яких, за формулами квадратної параболі, знаходимо відповідні координати x , y .

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) \quad (1.2.2)$$

Для знаходження кута нахилу φ дотичної до горизонту в характерних перерізах використано залежність

$$\operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{4f}{l^2} (l-2x); \quad (1.2.3)$$

б) дані розрахунків внутрішніх зусиль наведено в таблиці 1.2.1.

Таблиця 1.2.1

№ перерізу	Координати		φ градуси	$\operatorname{Sin} \varphi$	$\operatorname{Cos} \varphi$	M_p^0	M	Q_k^0	Q	N
	x	y								
A	0	0	61,2	0,876	0,482	0	0	29,7	0,24	-33,8
1(k)	3,67	5,55	50,5	0,782	0,636	94,2	4,93	21,65	1,36	-26,94
2	7,33	8,86	31,3	0,52	0,854	158,76	16,18	13,6	3,9	-20,8
C(3)	11	10	0	0	1	160,8	0	4,6	-4,45	-16,1
4	14,67	8,87	-31,3	-0,52	0,854	147,67	5,06	-3,48	-3,48	-16,08
5	12,33	5,55	-50,5	-0,772	0,636	88,13	-1,12	-3,48	5,38	-15,5
B	22	0	-61,2	-0,876	0,482	0	0	-20,18	-2,3	-20,2
									-	0,375
								-27,88	0,645	-32,19

$$H_A = H_B = H = 16,08 \text{ кН}$$

$$\text{т. А} \quad Q_a = 29,72 \cdot 0,49 - 16,078 \cdot 0,876 = 0,239$$

$$M = -29,72 \cdot 0,879 - 16,078 \cdot 0,482 = -33,78$$

$$\text{т. 1} \quad M = 97,18 - 16,08 \cdot 5,57 = 4,93 \quad Q = 21,65 \cdot 0,64 - 16,08 \cdot 0,77 = 1,357$$

$$N = -21,65 \cdot 0,77 - 16,08 \cdot 0,64 = -26,94$$

$$\text{т. 2} \quad M = 158,76 - 16,08 \cdot 8,87 = 16,18$$

$$Q^a = 13,58 \cdot 0,854 - 16,08 \cdot 0,52 = 3,24 \quad Q^b = 4,58 \cdot 0,85 - 16,08 \cdot 0,52 = -4,45$$

$$N^a = -13,58 \cdot 0,52 - 16,08 \cdot 0,85 = -20,79 \quad N^b = -4,58 \cdot 0,52 - 16,08 \cdot 0,85 = -16,11$$

$$\text{т. 3} \quad M = 160,8 - 16,08 \cdot 10 \approx 0$$

$$Q = -3,48 \cdot 1 - 16,08 \cdot 0 = -3,484, \quad N = 3,48 \cdot 0 - 16,08 \cdot 1 = -16,08$$

$$\begin{aligned} \text{т.А} \quad M &= 147.64 - 16.08 \cdot 8.87 = 5.06 & Q_a &= 3.48 \cdot 0.854 + 16.08 \cdot 0.52 = 5.385 \\ Q_b &= -12.48 \cdot 0.854 + 16.08 \cdot 0.52 = -2.301 \\ N_a &= -3.48 \cdot 0.52 - 16.08 \cdot 0.824 = -15.54 \\ N_b &= 12.48 \cdot 0.52 - 16.08 \cdot 0.854 = -20.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{т.С} \quad M &= 89.1 - 16.08 \cdot 5.55 = -1.121 & Q &= 20.182 \cdot 0.636 - 16.03 \cdot 0.77 = -0.375 \\ N &= -20.18 \cdot 0.772 - 16.08 \cdot 0.64 = -25.81 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{т.В} \quad Q &= -27.88 \cdot 0.48 + 16.08 \cdot 0.876 = 0.625 \\ N &= -27.88 \cdot 0.876 - 16.08 \cdot 0.48 = -32.19 \end{aligned}$$

За даними розрахунків таблиці 1.2.1 будемо кінцеві епюри Q , M , N в статично визначеній арці.

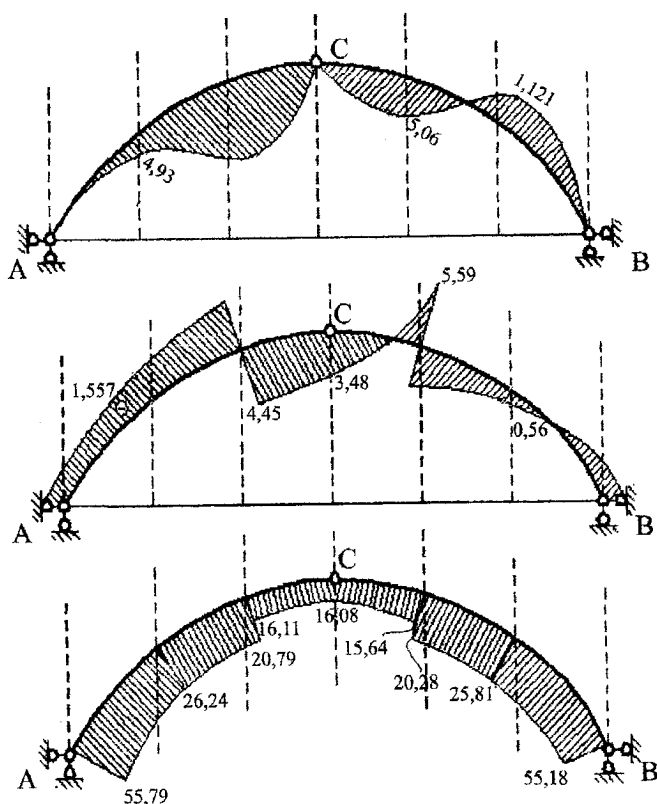


Рисунок 1.2.2 -- Кінцеві епюри M , Q , N в статично визначеній арці

1.2.5 Побудова ліній впливу в арці, визначення зусиль за лініями впливу та порівняння з аналітичним розрахунком

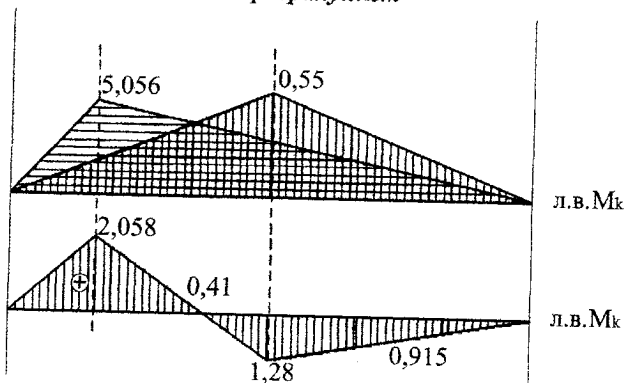


Рисунок 1.2.3 – Побудова ліній впливу згинального моменту в перерізі 1

Зусилля згинального моменту в арці в перерізі 1 за лінією впливу:

$$M_K = -0,813 \cdot 9 + 0,41 \cdot 9 - \frac{0,81}{2} \cdot 7,33 \cdot 2,7 - \frac{1,22}{2} \cdot 2,2 \cdot 2,74 + \frac{2,038}{2} \cdot 2,1 \cdot 8,26 = 4,94 \text{ КН}$$

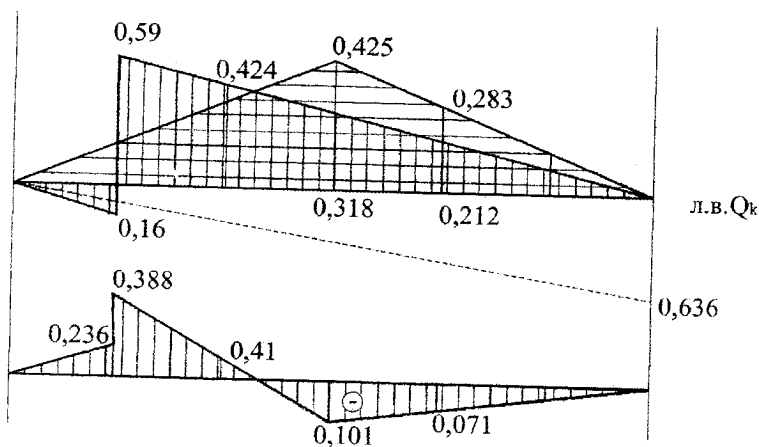


Рисунок 1.2.4 – Побудова ліній впливу поперечної сили в перерізі 1 арки

Поперечна сила в перерізі 1 в арці за лінією впливу:

$$Q_K = -\frac{0.071}{2} \cdot 7.33 \cdot 2.1 - 0.071 \cdot 9 + 0.141 \cdot 9 \frac{0.107}{2} \cdot 1.582 \cdot 2.2 + \frac{0.036}{2} \cdot 3.67 \cdot 2.2 + \frac{0.388}{2} \cdot 5.787 \cdot 2.2 = 1.397$$

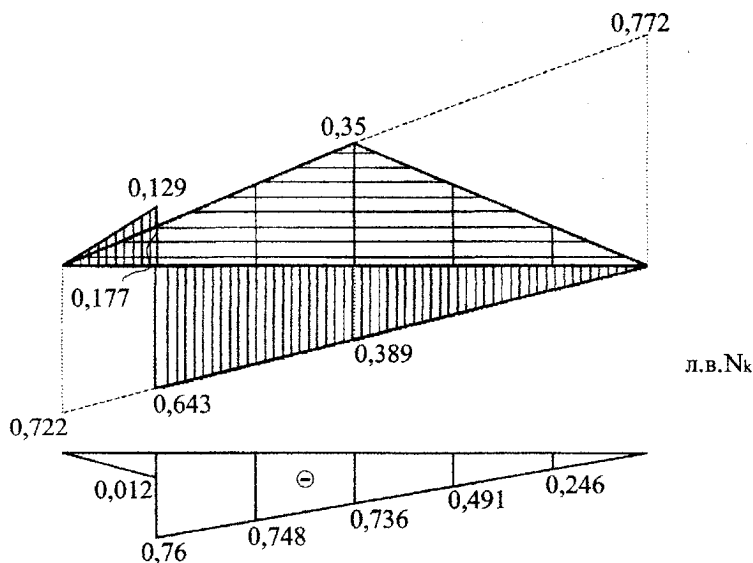


Рисунок 1.2.5 – Побудова лінії впливу поздовжньої сили в перерізі І арки

Зусилля поздовжньої сили в перерізі 1 в арці за лініями впливу:

$$N_K = -0.7489 - 0.499 \cdot \frac{0.491}{2} \cdot 2.1 \cdot 7.3 - \frac{0.736 + 0.76}{2} \cdot 2.2 \cdot 7.33 - \frac{0.012}{2} \cdot 3.66 \cdot 2.2 = 27.78 \text{ кН}$$

1.3 Розрахунок статично визначеної ферми на сталі навантаження та побудова ліній впливу

1.3.1 Послідовність дій:

- Збір навантаження.
- Визначення реакцій в опорах від:
 - дії власної ваги,
 - дії снігового навантаження зліва (одностороннє снігове навантаження дає екстремальні зусилля в стержнях ферми),
 - дії $P = 1$, прикладеного до шуканого напрямку переміщення.
- Графічний розрахунок зусиль в стержнях ферми від дій вказаних навантажень (побудова діаграм Максвелла-Кремони).
- Складання таблиці зусиль в стержнях ферми від дії власної ваги, снігового навантаження та визначення переміщення середини нижнього поясу (максимального переміщення по вертикалі).
- Побудова ліній впливу в 3-х стержнях ферми та визначення зусиль за лініями впливу.
- Порівняння даних аналітичного розрахунку зусиль в 3-х стержнях з розрахунком за лініями впливу.

1.3.2 Розрахунок ферми на власну вагу $P = q \cdot \frac{22}{8} = 4840 \text{ кН}$.

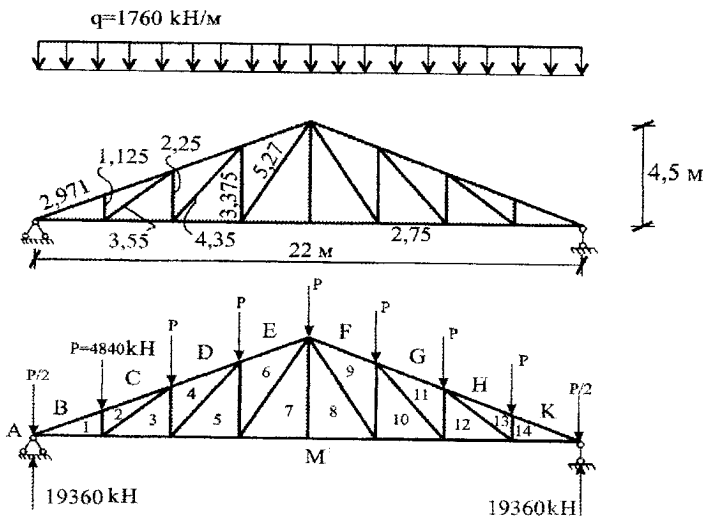


Рисунок 1.3.1 – Розрахункова схема, навантаження та реакції в фермі від дії власної ваги

1.3.3 Розрахунок дії снігового навантаження зліва

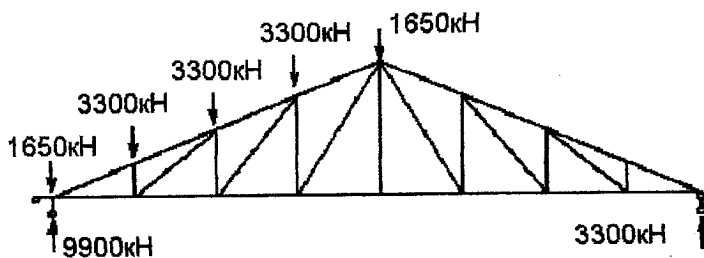


Рисунок 1.3.2 – Розрахункова схема, навантаження та реакції в фермі від дії снігу зліва

1.3.4 Визначення переміщення середини нижнього поясу ферми

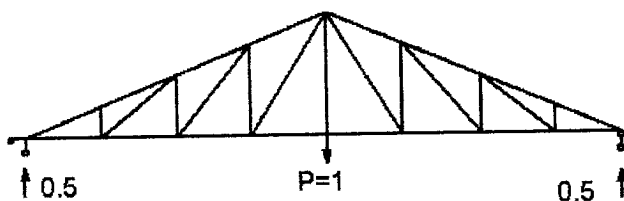


Рисунок 1.3.3 – Розрахункова схема, навантаження та реакції в фермі від дії одиничної сили за шуканим напрямком

1.3.5 Побудова діаграм Максвелла -Кремони

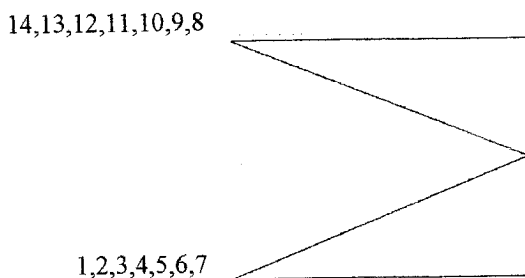


Рисунок 1.3.4 – Діаграма Максвелла – Кремони від дії одиничної сили $P=1$ за шуканим напрямком переміщення середини нижнього поясу

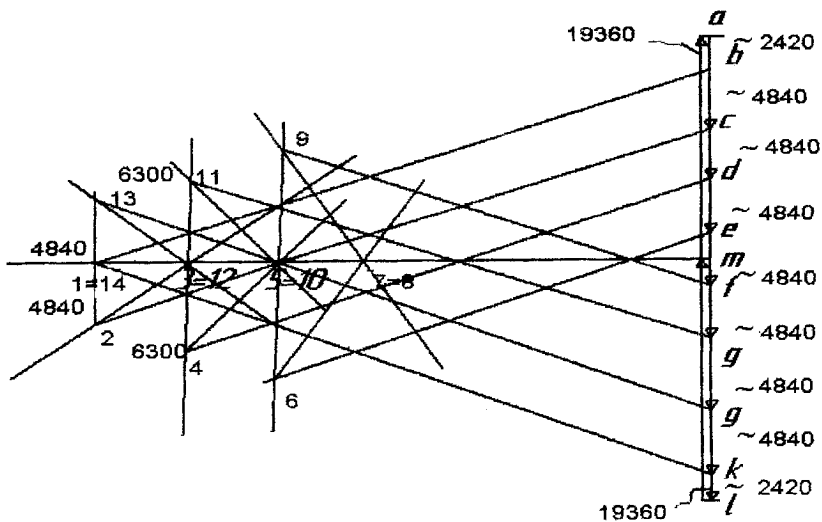


Рисунок 1.3.5 – Діаграма Максвела – Крeмони дії власної ваги

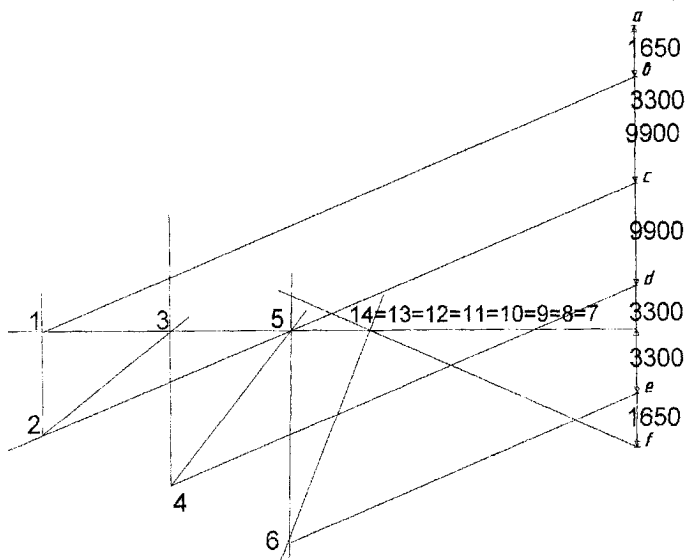


Рисунок 1.3.6 – Діаграма Максвела – Крeмони дії снігу зліва

1.3.6 Компонування таблиці зусиль в фермі

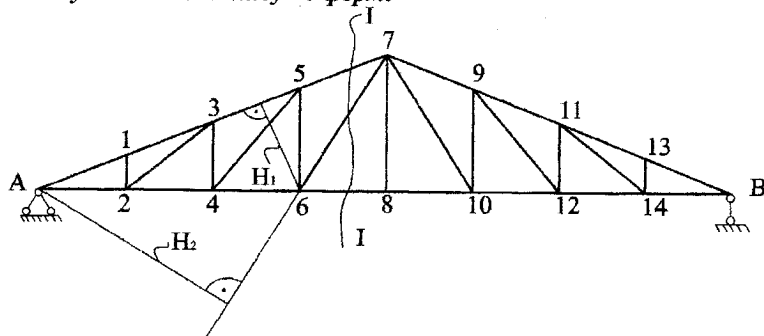
Таблиця 1.3.1

Назва стержня		l_i m	EA_i	№ кн	N_i	$N_{сміз}$	$N_i * N_p * l_i$ EA
Верхній пояс	S _{B-1}	2,971	1,5EA	-45280	-1.35	-20700	109095
	S _{C-2}	-	-	-45280	-1.35	-20700	109095
	S _{D-4}	-	-	-38621	-1.35	-16200	93052
	S _{E-6}	-	-	-31963	-1.35	-12300	77008
	S _{F-9}	-	-	-31963	-1.35	-9400	77008
	S _{G-11}	-	-	-38621	-1.35	-9400	93052
	S _{H-13}	-	-	-45280	-1.35	-9400	109095
	S _{K-14}	2,971	-	-45280	-1.35	-9400	109095
Нижній пояс	S _{1-м}	2,75	1,5EA	42283	+1.254	19450	87592
	S _{3-м}	-	-	35258	-	14100	74488
	S _{5-м}	-	-	29632	-	11500	61383
	S _{7-м}	-	-	23472	-	8700	48624
	S _{8-м}	-	-	23472	-	8700	48624
	S _{10-м}	-	-	29632	-	8700	61383
	S _{12-м}	-	-	35258	-	8700	74488
	S _{14-м}	2,75	1,5EA	42283	-	8700	87592
Стойки	S ₁₋₂	1,125	EA	-5371	0	-3300	0
	S ₃₋₄	2,250	-	-6992	0	-4800	0
	S ₅₋₆	3,375	-	-9489	0	-6550	0
	S ₇₋₈	4,500	-	0	1	0	0
	S ₉₋₁₀	3,375	-	-9489	0	0	0
	S ₁₁₋₁₂	2,250	-	-6992	0	0	0
	S ₁₃₋₁₄	1,125	-	-5371	0	0	0
Розкоси	S ₂₋₃	3,55	-	7991	0	5200	0
	S ₄₋₅	4,35	-	9655	0	6100	0
	S ₆₋₇	5,27	-	11320	0	7000	0
	S ₈₋₉	5,27	-	11320	0	0	0
	S ₁₀₋₁₁	4,35	-	9655	0	0	0
	S ₁₂₋₁₃	3,55	-	7991	0	0	0

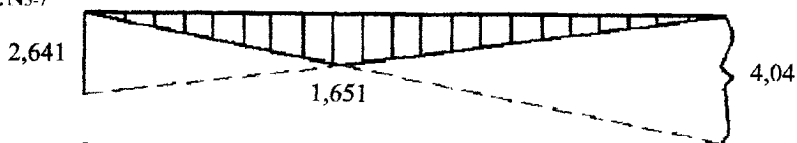
Переміщення середини нижнього поясу :

$$\Delta = \frac{1320674}{EA}$$

1.3.7 Побудова ліній впливу в фермі



л.в. N5-7

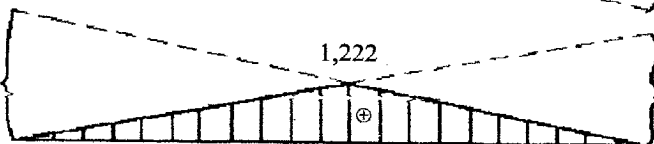


2,444

1,222

2,444

л.в. N6-8



л.в. N6-7



Рисунок 1.3.7 – Побудова ліній впливу поздовжніх сил в трьох стержнях ферми

1.3.8 Визначення зусиль в стержнях ферми за лініями впливу

$N_{5-7} = 0.5 \cdot 22 \text{ м} \cdot 1.651 \cdot 1760 \text{ кН/м} = 31963,36 \text{ кН} \approx 31963 \text{ кН}$ з графічного розрахунку.

$N_{6-8} = 0.5 \cdot 1.222 \cdot 22 \text{ м} \cdot 1760 \text{ кН/м} = 23659 \text{ кН} \approx 23472 \text{ кН}$.

$N_{6-7} = 0.5 \cdot 1.167 \cdot 11 \text{ м} \cdot 1760 \text{ кН/м} = 11297 \text{ кН} \approx 11320 \text{ кН}$.

1.4 Розрахунок переміщень в статично визначених системах від сталих навантажень

1.4.1 Склад завдання:

1. Провести кінематичний аналіз споруди, розділивши раму на основні та другорядні елементи.
2. Визначити опорні реакції і побудувати епюри M , Q , N , починаючи з другорядних елементів. Перевірити епюри.
3. Вибрати одиничний стан в заданій системі.
4. Побудувати епюри згинальних моментів від одиничних навантажень в заданій системі.
5. Визначити шукане переміщення.

1.4.2 Приклад розрахунку

– Накреслити розрахункову схему споруди, вказати розміри та навантаження.

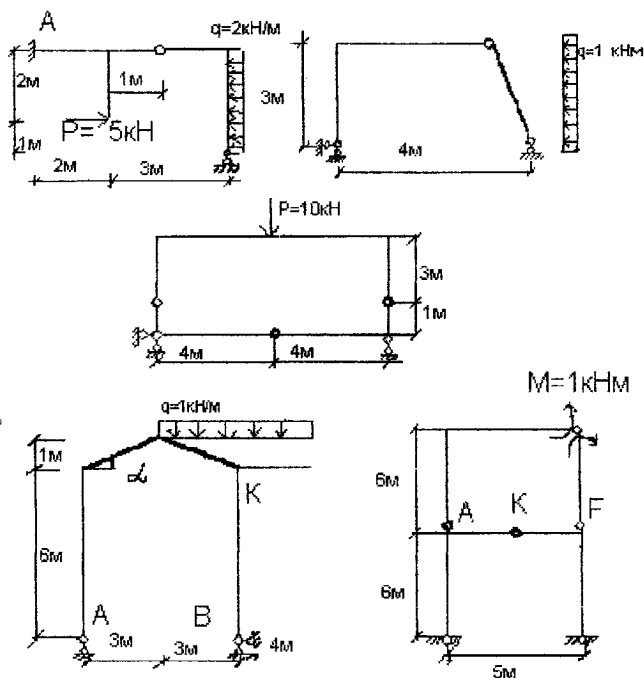


Рисунок 1.4.1 – Розрахункові схеми споруд

- Необхідною умовою кінематичного аналізу системи є перевірка її за формулою П. Л. Чебишева:

$$W = 3D - 2\Pi - C_0; \quad (1.4.1)$$

де D – ступінь вільності споруди;
 Π – кількість одиночних шарнірів, одиночний шарнір з'єднує два стержні;
 C_0 – кількість опорних стержнів системи.

Оскільки задані системи є несучими конструкціями, вони мають бути геометрично незмінними, тобто ступінь вільності споруди W має дорівнювати нулю.

$$W_1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0; \quad W_2 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0;$$

$$W_3 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 3 = 0; \quad W_4 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 3 = 0; \quad W_5 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 4 = 0.$$

- Достатньою умовою перевірки геометричної незмінності системи є перевірка її за способом утворення. Складові рами є комбінацією декількох простих рам. Складову раму можна розбити на прості лише одним способом. Для цього необхідно виділити основну раму (раму I поверху), до якої приєднується проста рама другого поверху і так далі.

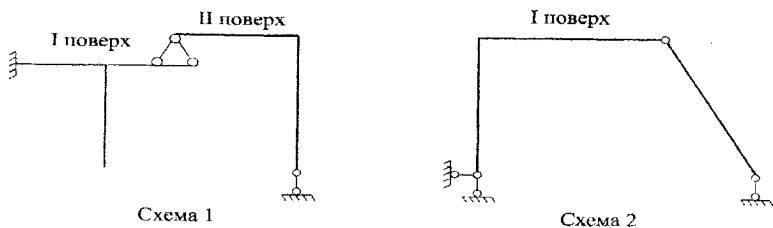


Рисунок 1.4.2 – Схеми взаємодії (поверхові схеми) для перших двох варіантів

- Визначення опорних реакцій в складових рамах розпочинається з простих рам вищого поверху. Записуються рівняння рівноваги статички. Знайдені опорні реакції рам вищого поверху прикладаються у вигляді відпору до рам нижнього поверху і при розрахунку рам нижнього поверху розглядаються у вигляді зовнішнього навантаження, рис. 1.4.3.

Для побудови епюр M, Q, N позначають характерні перерізи рам. Епюри моментів будуються зі сторони розтягнутого волокна. Згинальний момент в перерізі рами визначається як алгебрична сума моментів всіх сил, розташованих з однієї сторони перерізу.

Опорні реакції в рамах, які мають замкнений контур, визначаються загальним способом запису рівнянь статички:

$$\sum M = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum X = 0. \quad (1.4.2)$$

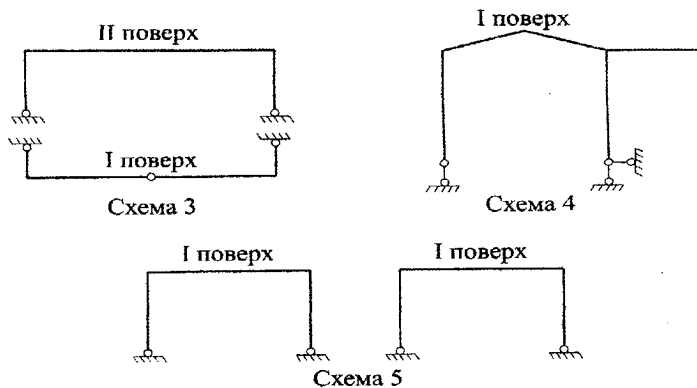


Рисунок 1.4.3 – Дослідження ступеня геометричної незмінності систем

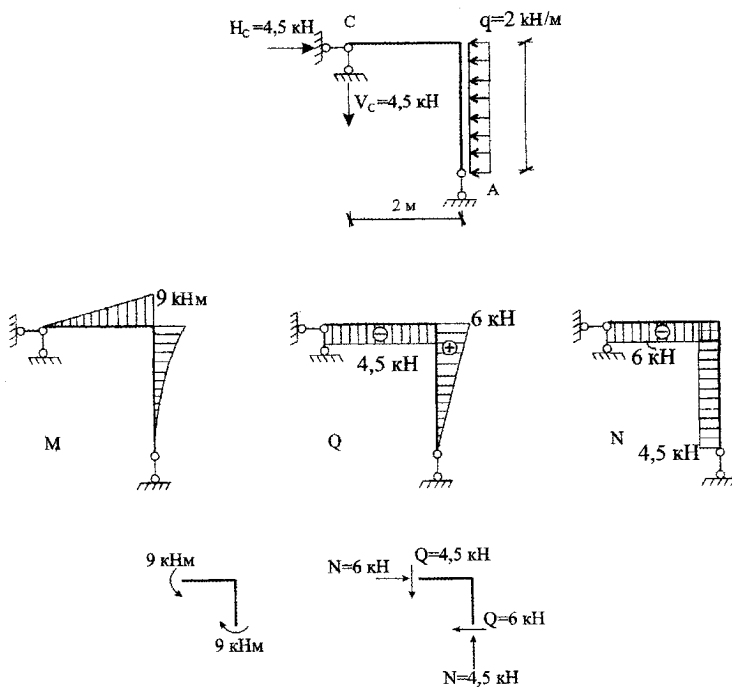


Рисунок 1.4.4 – Складова рама схеми 1

Розрахунок починається з балочної рами другого поверху, рис.1.4.4.

$$\begin{aligned} \sum M_c = 0; & \quad 2V_B - 3q \cdot 1,5 = 0; & \quad V_B = 4,5 \text{ кН}. \\ \sum Y = 0; & \quad H_C - 2 \cdot 3 = 0; & \quad H_C = 6 \text{ кН}. \\ \sum X = 0; & \quad -2V_C + 3H_C - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0; & \quad V_C = 4,5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Далі розраховуються консолі рами першого поверху схеми 1.

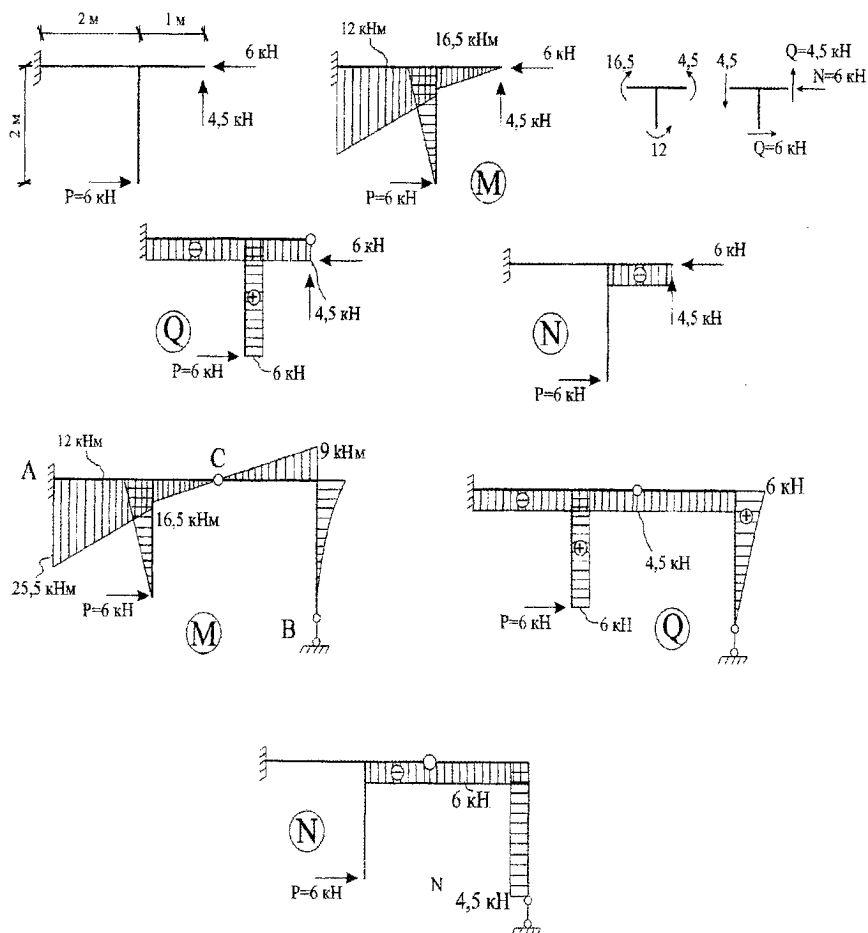
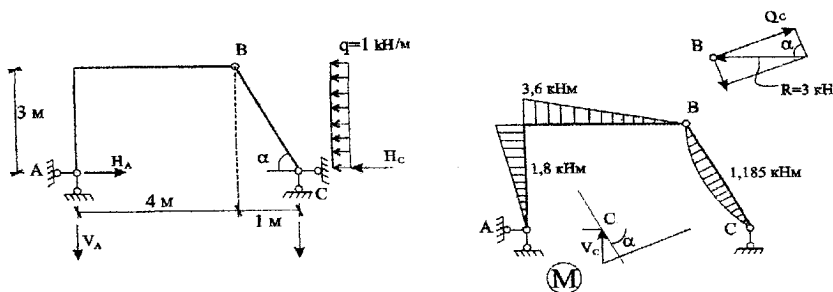


Рисунок 1.4.5 – Побудова епюр M,Q,N в рамі схеми 1

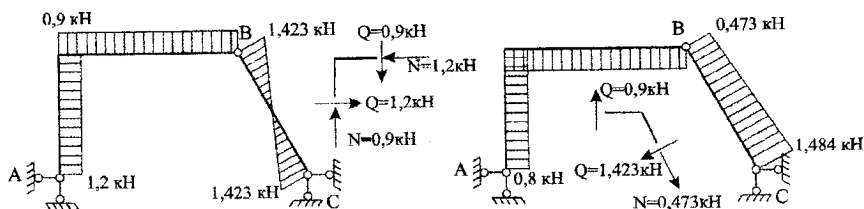


$$\Sigma M_A = 0; 5 \cdot V_C - 3 \cdot q \cdot 1,5 = 0; V_C = 0,9 \text{ кН}$$

$$\Sigma M_C = 0; 5 \cdot V_A - 3 \cdot q \cdot 1,5 = 0; V_A = 0,9 \text{ кН}$$

$$\text{п.с.} \quad \Sigma M_B = 0; 4 \cdot V_A - 3 \cdot H_A = 0; H_A = 1,2 \text{ кН}$$

$$\text{п.с.} \quad \Sigma M_B = 0; 3 \cdot q \cdot 1,5 + 1 \cdot V_C - 3 \cdot H_C = 0; H_C = 1,8 \text{ кН}$$



$$Q_C = -H_C \sin \alpha + V_C \cos \alpha = -1,8 \cdot 0,948 + 0,9 \cdot 0,317 = -1,42 \text{ кН};$$

$$N_C = H_C \cos \alpha + V_C \sin \alpha = -1,8 \cdot 0,317 + 0,9 \cdot 0,948 = 1,4238 \text{ кН};$$

$$Q_B = -Q_C + R \sin \alpha = -1,42 + 3 \cdot 0,948 = 1,4229 \text{ кН};$$

$$N_C = H_C - R \cos \alpha = -1,4238 - 3 \cdot 0,317 = 0,473 \text{ кН};$$

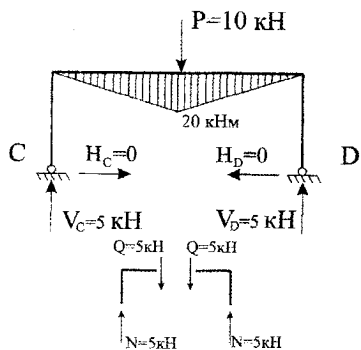
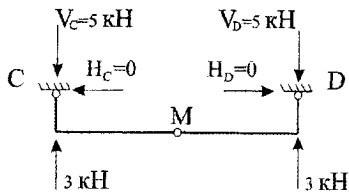
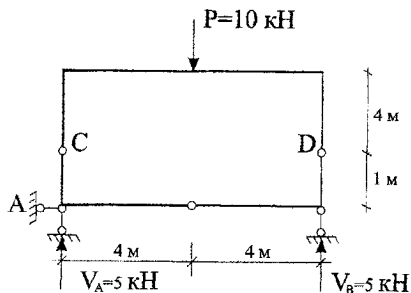
$$\Sigma X = 0; 1,2 - Q \sin \alpha + N \cos \alpha = 1,2 - 1,35 + 0,15 = 0$$

$$\Sigma Y = 0; 0,9 - Q \cos \alpha + N \sin \alpha = 0,9 - 0,451 + 0,449 = 0$$

Рисунок 1.4.6 – Побудова епюр M, Q, N в простій арокній рамі з нахиленим стержнем (схема 2)

Для побудови епюр в складовій рамі, що має вигляд замкнутого контура, зручно розкласти на прості рами. В даному випадку немає можливості провести поверхове розділення складової рами, та для зручності розрахунку першою розраховується арокня рама АКВ. Опорні реакції H_C, V_C, H_D, V_D , які визначаються із розрахунку цієї арокної рами,

прикладаються в зворотному напрямку до верхньої рами. Тоді опорні реакції в верхній рамі будуть уже відомі, можна проводити розрахунок.



$$\sum M_A = 0; 10 \cdot 4 - 8V_B = 0; V_B = 5 \text{ kH}$$

$$\sum M_B = 0; 8V_A - 10 \cdot 4 = 0; V_A = 5 \text{ kH}$$

Л.С.

$$\sum M_K = 0; 4 \cdot V_A + 0 \cdot H_A = 0; H_A = 0.$$

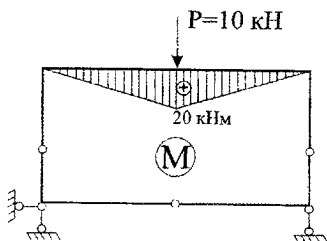
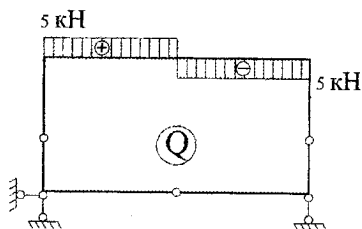
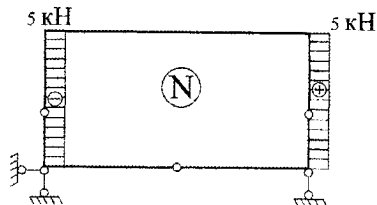
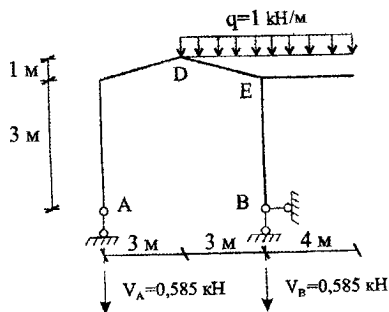


Рисунок 1.4.7 – Побудова епюр M, Q, N в складовій рамі, яка має замкнений контур



$$\begin{aligned}
 Q_C &= V_A \cos \alpha = 0,585 \cdot 0,94 = -0,55 \text{ kH}; \\
 N_C &= V_A \sin \alpha = 0,585 \cdot 0,31 = 0,18 \text{ kH}; \\
 Q_D &= -V_A \cos \alpha = 0,585 \cdot 0,94 = -0,55 \text{ kH}; \\
 N_D &= -V_A \sin \alpha = 0,585 \cdot 0,31 = -0,18 \text{ kH}; \\
 Q_E &= -Q_D - R \cos \alpha = -0,55 - 3 \cdot 0,94 = -3,37 \text{ kH}; \\
 N_E &= -N_D - R \sin \alpha = -0,18 - 3 \cdot 0,31 = -1,11 \text{ kH};
 \end{aligned}$$

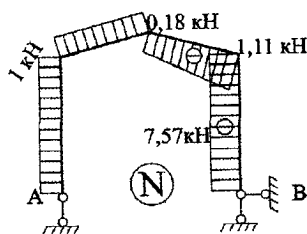
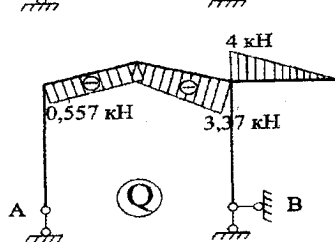
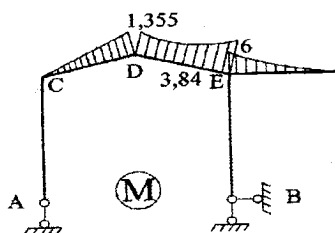
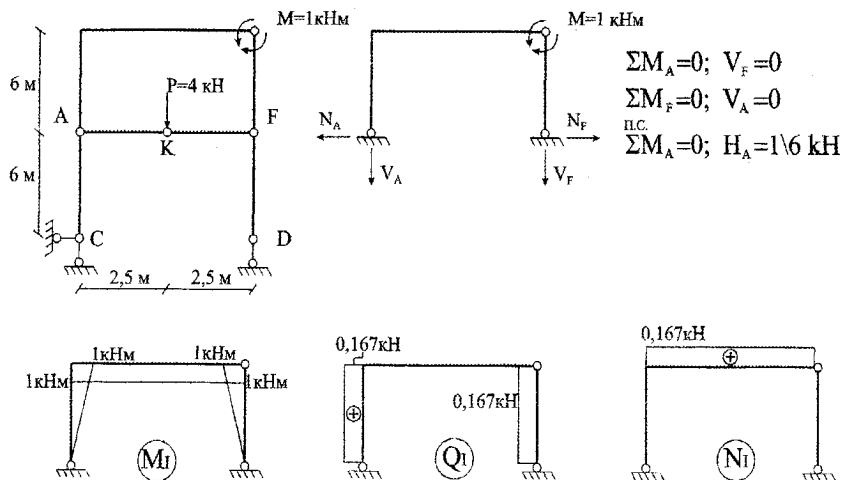


Рисунок 1.4.8 – Побудова епюр M, Q, N в простій балочній рамі з нахиленим елементом (схема 4)



Розрахунок арочної рами 1 поверху

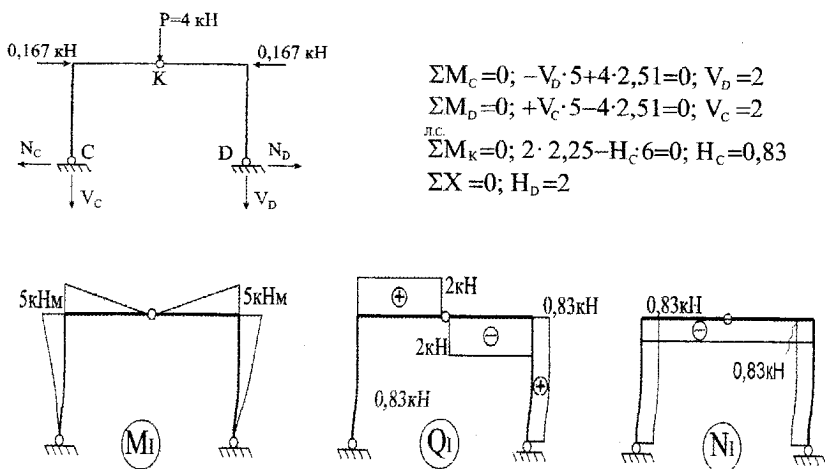


Рисунок 1.4.9 – Побудова епюр M, Q, N в другому та першому поверху складової рами схеми 5

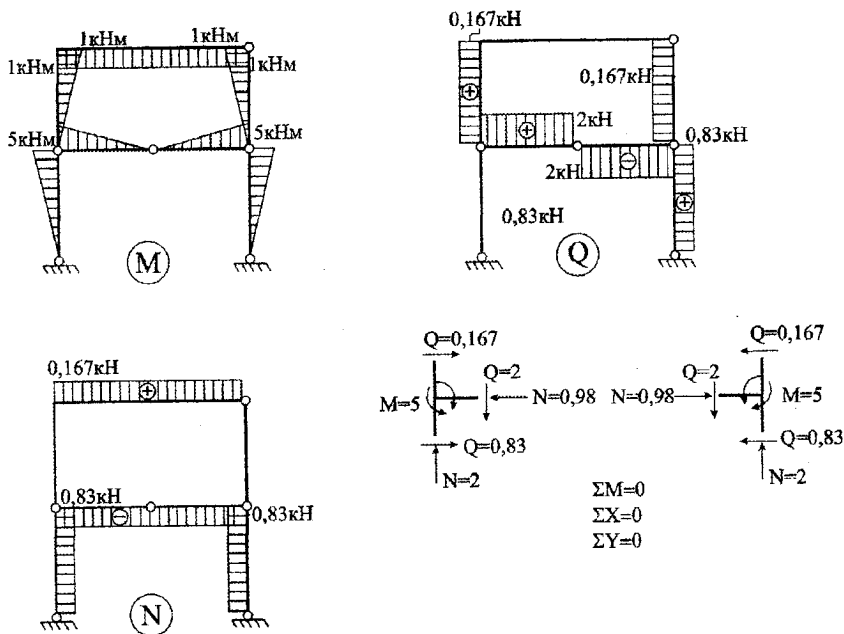


Рисунок 1.4.10 – Побудова епюр M, Q, N в складовій рамі схеми 5

Для визначення шуканого переміщення необхідно вибрати одиничний стан системи. Навантаження одиничного стану має прийматись таким, щоб воно здійснювало роботу на шуканому переміщенні.

Щоб визначити лінійні зміщення точок системи, наприклад, вертикальне зміщення точки E в схемі 1, в шуканому напрямку прикладається одинична зосереджена сила $P=1$ (рис. 1.4.11).

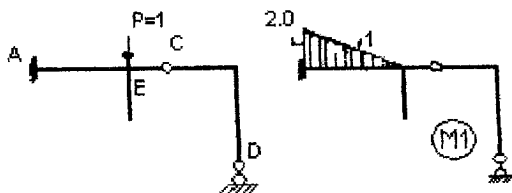
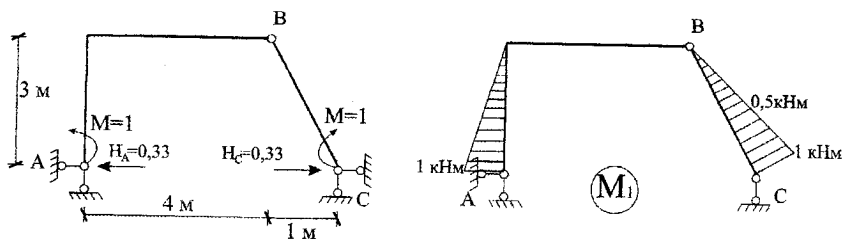


Рисунок 1.4.11 – Епора M_1 від одиничного навантаження рами силою $P=1$ в точці E в схемі 1

Для знаходження спільного кута повертання перетинів А і С в схемі 2 прикладаються два одиничних зосереджених моменти в шуканих точках (рис. 1.4.12).



$$\sum M_A = 0; \quad -V_C * 5 + 1 - 1 = 0; \quad V_C = 0.$$

$$\sum M_C = 0; \quad V_A * 5 - 1 + 1 = 0; \quad V_A = 0;$$

$$\sum M_B^{II.C.} = 0; \quad -1 + H_A * 3 = 0; \quad H_A = 1/3;$$

$$\sum M_B^{II.C.} = 0; \quad 1 - H_C * 3 = 0; \quad H_C = 1/3.$$

Рисунок 1.4.12 – Епюра M_I від одиничного навантаження точок А і С одиничними моментами в схемі 2

Для визначення кута перелому перетинів в шарнірі (наприклад, в шарнірі С в схемі 3) прикладається пара одиничних зосереджених моментів (рис. 1.4.13).

Для знаходження кутового переміщення системи, наприклад, кута повертання точки К в схемі 4, до шуканої точки прикладається одиничний зосереджений момент $M=1$ (рис. 1.4.14).

Щоб знайти зближення точок системи, яке знаходиться під дією зовнішніх навантажень, наприклад, зближення точок А і В в схемі 5, достатньо в шуканому напрямку прикласти дві одиничні зосереджені сили (рис. 1.4.15).

Шукане переміщення визначається за формулою Мора:

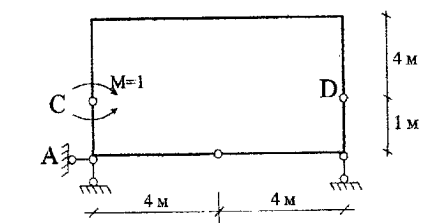
$$\Delta_{IP} = \sum \int_L \frac{\bar{M}_I M_P}{EI} dx + \sum \int_L \frac{\bar{Q}_I Q_P}{EA} dx + \rho \sum \int_L \frac{\bar{N}_I M_P}{GA} dx + \quad (1.4.3)$$

де $\bar{M}_I, \bar{Q}_I, \bar{N}_I$ – внутрішні зусилля в одиничному стані; M_P, Q_P, N_P – зусилля від зовнішнього навантаження в дійсному (вантажному) стані;

EI – згинальна жорсткість; EA – жорсткість при розтягу чи стисненні;
 GA – жорсткість при зсуві;
 ρ – коефіцієнт форми перерізу.

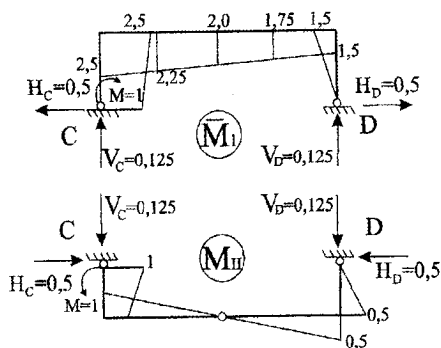
При визначенні переміщень в рамах, балках з достатньою для інженерних розрахунків точністю, в формулі Мора можна залишити лише першу складову:

$$\Delta_{IP} = \sum \int_L \frac{\bar{M}_I M_P}{EI} dx. \quad (1.4.4)$$



$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0 \quad V_B = 0 \\ \Sigma M_B = 0 \quad V_A = 0 \end{aligned}$$

$$\Sigma M_C = 0$$



$$\begin{aligned} \Sigma M_C = 0; \quad V_D \cdot 8 - 1 = 0; \quad V_D = 1/8 \\ \Sigma M_D = 0; \quad V_C \cdot 8 - 1 = 0; \quad V_C = 1/8 \\ \text{п.с.} \\ \Sigma M_K = 0; \quad V_D \cdot 4 - H_D \cdot 1 = 0; \quad H_D = 1/2 \\ \text{л.с.} \\ \Sigma M_K = 0; \quad H_C = 1/2 \end{aligned}$$

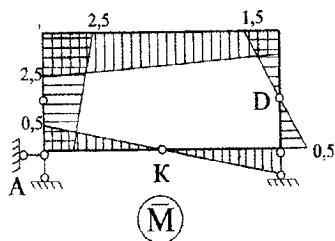
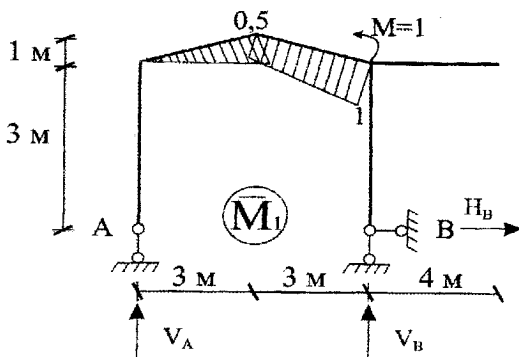


Рисунок 1.4.13 – Епюра M_I від одиничного навантаження шарніра С одиничними зосередженими моментами $M=1$ в схемі 3



$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= 0; V_B \cdot 6 - 1 = 0; V_B = 1/6 \\ \Sigma M_B &= 0; V_A \cdot 6 - 1 = 0; V_A = 1/6 \\ \Sigma Y &= 0; H_B = 1/2 \end{aligned}$$

Рисунок 1.4.14 – Епюра M_1 від одиничного навантаження точки К одиничним зосередженим моментом $M=1$ у схемі 4

При цьому потрібно мати 2 стани системи: дійсний стан та одиничний стан.

Техніка обчислення інтегралів за формулою Мора полягає в наступному:

I. Перемноження дійсної і одиничної епюр можна проводити за правилом А.Н. Верещагіна:

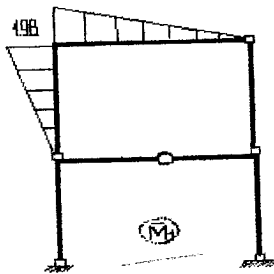
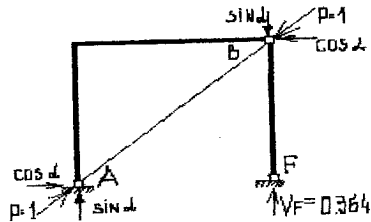
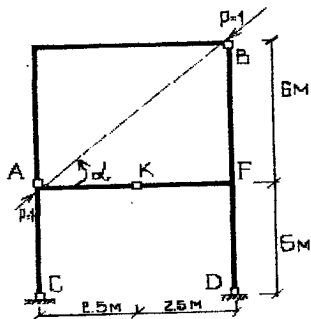
$$\sum \int \frac{\bar{M}_1 M_p}{EI} dx = \frac{1}{EI} \omega_p y_1, \quad (1.4.5)$$

де ω_p – площа вантажної епюри ;

y_1 – ордината на епюрі M_1 під центром ваги площі вантажної епюри.

Обмеження при використанні (1.4.5) полягає в тому, що:

- жорсткість стержня по його довжині має бути постійною;
- одна із епюр має бути прямолінійною, тоді друга може бути криволінійною, при цьому площу потрібно брати з криволінійної епюри.



$$\alpha = 50^{\circ}10'; \quad \sin \alpha = 0.76; \quad \cos \alpha = 0.33$$

$$V_A = 0.364.$$

$$\sum M_F = 0; \quad -6 \cos \alpha + 5 \sin \alpha - 5V_A.$$

$$\sum M_A = 0; \quad -5V_F + 5 \sin \alpha - 6 \cos \alpha = 0.$$

$$V_F = 0.364.$$

$$\sum^{n.c.} M_K = 0; \quad 6H_D + 0.364 \cdot 2.5 - 0.364 \cdot 2.5 = 0; \quad H_D = 0.$$

$$\sum M_C = 0; \quad 0.364 \cdot 5 - 5V_D = 0; \quad V_D = 0.364.$$

$$\sum M_D = 0; \quad 0.364 \cdot 5 - 5V_C = 0; \quad V_C = 0.364.$$

Рисунок 1.4.15 – Епора М1 від одиничного навантаження точок А і В одиничними силами $P=1$ за напрямком їх зближення у схемі 5

II. Перемножити епюри можна користуючись формулою Карноухова-Сімпсона:

$$\sum \int_L \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} dx = \frac{L}{6EI} [\bar{M}_i^A M_P^A + 4\bar{M}_i^C M_P^C + \bar{M}_i^B M_P^B], \quad (1.4.6)$$

де $-M_I^A, M_I^C, M_I^B$ – ординати епюр моментів одиничного стану на початку, посередині, в кінці стержня;

M_P^A, M_P^C, M_P^B – ординати епюр моментів вантажного стану на початку, посередині, в кінці стержня;

l – довжина стержня.

Значення обчислених переміщень для схем:

Схема 1.

$$\Delta_{E}^{BEPT} = \int_l \frac{M_I M_P}{EI} dx = \frac{2}{6EI} \left[-2 \cdot 25.5 - 4 \cdot 1 \left(\frac{25.5 + 16.5}{2} \right) + 0 \cdot 16.5 \right] = \frac{45}{EI} (M)$$

Схема 2.

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{A-B} &= \frac{3}{6EI} [0 \cdot 3.6 + 4 \cdot 1.8 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0] + \frac{3.162}{2 \cdot 6EI} \left[0 \cdot 0 - 4 \cdot 0.25 \cdot 0.889 - \frac{1.185}{2} \right] + \\ &+ \frac{3.185}{2 \cdot 6EI} [-1.185 \cdot 0.5 - 4 \cdot 0.75 \cdot 0.889 - 1 \cdot 0] = \frac{0.55}{EI} (рад). \end{aligned}$$

Схема 3.

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_C &= \frac{4}{6EI} [0 \cdot 2.5 + 4 \cdot 2.25 \cdot 10 + 20 \cdot 2] + \frac{4}{6EI} [20 \cdot 2 + 4 \cdot 1.75 \cdot 10 + 0 \cdot 1.5] = \\ &= \frac{146.7}{EI} (рад). \end{aligned}$$

Схема 4.

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_K &= \frac{3.162}{6EI} \left[0 \cdot 0 - 4 \cdot \frac{1.755}{2} \cdot \frac{1}{4} - 1.755 \cdot 0.5 \right] + \frac{3.162}{6EI} [-1.755 \cdot 0.5 - \\ &- 4 \cdot 3.94 \cdot 0.75 - 8 \cdot 1] = -\frac{11.83}{EI} (рад). \end{aligned}$$

Схема 5.

$$\Delta_{A-B} = -\frac{1.98 \cdot 5}{2EI} 1 - \frac{1.98 \cdot 6 \cdot 2}{2EI} \frac{2}{3} 1 = -\frac{6.95}{EI} (M)$$

1.5 Варіаційна задача будівельної механіки. Дослідження екстремуму функціонала (виразу потенційної енергії балки) за методом Рітца

1.5.1 Склад завдання

1. Для конкретної розрахункової схеми підібрати координатну функцію.
2. Визначити першу і другу похідні від координатної функції по довжині балки та підставити у вираз потенційної енергії балки (в функціонал).
3. Інтегрування виразу дає функціональну залежність, невідомими в якій є ступені вільності системи.
4. Диференціювання за ступенями вільності системи дає систему лінійних алгебричних рівнянь, корені якої визначають шукані ступені вільності в координатних функціях. Таким чином, прогин конструкції буде знайдено.

1.5.2 Короткі відомості з варіаційного числення. Поняття функціонала та необхідні умови екстремуму

Розглянемо деякий визначений інтеграл

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (1.5.1)$$

з граничними умовами $y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (1.5.2)$

Вираз типу (1.5.1) у варіаційному численні називають функціоналом (функція від функції).

Пошук умов, при яких функціонали набувають стаціонарного значення і становлять зміст задачі варіаційного числення. Вважається, що функція в точці має стаціонарне значення, якщо швидкість її зміни в цій точці дорівнює нулю (тобто дорівнюють нулю перші часткові похідні функції за всіма незалежними змінними).

Нехай маємо деяку функцію $y(x)$, яка надає інтегралу (1.5.1) стаціонарного значення. Для того, щоб показати, що справді маємо стаціонарне значення, розглянемо деяку функцію $y(x)$, відмінну від $y(x)$ але водночас нескінченно близьку до неї (рис. 1.5.1).

$$\bar{y}(x) = y(x) + \varepsilon \varphi(x), \quad (1.5.3)$$

де ε - довільна як завгодно мала величина, $\varphi(x)$ деяка функція, що задовольняє умови неперервності й диференційованості. Різниця $\bar{y}(x) - y(x) = \varepsilon \varphi(x)$ називається варіацією функції $y(x)$. Лагранж ввів для

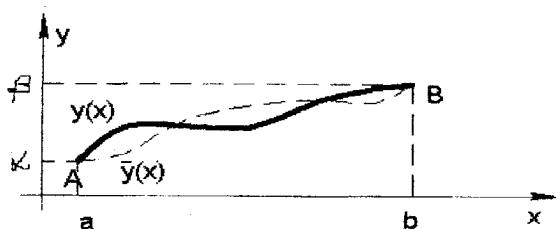


Рисунок 1.5.1 – До поняття варіації функції

неї позначення δy .

Дуже важливо, що величина δy має, так званий, віртуальний (можливий) характер, тобто, не пов'язана з жодними умовами і може бути довільною. Якщо функцію $y(x)$ тлумачити як переміщення, то δy називатиметься можливим переміщенням.

Більшість методів розв'язування варіаційних задач ґрунтується на використанні необхідних умов екстремуму, якими зазвичай бувають диференціальні рівняння (рівняння Ейлера) і граничні умови. Отже, варіаційна задача виявляється еквівалентною крайовій задачі для диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0, \quad x \in [a, b] \quad (1.5.4)$$

виражає необхідну й достатню умову стаціонарності інтеграла при заданих граничних умовах. Тобто коли підінтегральна функція задовольняє рівняння (1.5.4), тоді функціонал (1.5.1) має стаціонарне значення.

Рівняння (1.5.4) отримали незалежно Л. Ейлер та Ж. Лагранж, тому воно називається рівнянням Ейлера - Лагранжа і відіграє фундаментальну роль у варіаційному численні.

Як приклад, можна навести варіаційну задачу Лагранжа про пошук мінімуму потенціальної енергії пружного стержня, еквівалентну диференціальному рівнянню рівноваги, записаному в переміщеннях з відповідними граничними умовами. Рівняння рівноваги вигнутого стержня (балки) має вигляд :

$$y'' = \pm \frac{M}{EI} \quad (1.5.6)$$

Знак "+" відповідає випадку, коли вісь y спрямована вгору. Тоді знаки моменту M та другої похідної y'' збігаються.

Функціоналом для рівняння (1.5.6) при розв'язуванні цієї задачі буде вираз повної потенціальної енергії пружної балки, розв'язок рівняння (1.5.6) - знайдена пружна лінія балки $y(x)$ - забезпечить мінімум потенціальної енергії балки. Іншими словами, рівняння рівноваги це рівняння Ейлера - Лагранжа для відповідного функціонала. До них потрібно ще приєднати граничні умови, які можна отримати з виразу енергії.

Отже, повна потенціальна енергія системи дає повну інформацію про систему, оскільки дозволяє отримати не тільки рівняння рівноваги, а й конкретні граничні умови задачі.

1.5.3 Суть варіаційних методів розв'язування диференціальних рівнянь. Форма апроксимуючої функції

Суть варіаційних методів розв'язування диференціальних рівнянь полягає в тому, що функція, яка задовольняє диференціальне рівняння при заданих граничних умовах, замінюється наближеним аналітичним виразом. Цей вираз добирається так, щоб він найкраще апроксимував дану функцію, тобто, щоб відхилення від істинного значення функції було найменшим.

При розв'язуванні цієї задачі зазвичай виникають два питання:

- а) про вибір форми апроксимуючої функції;
- б) про спосіб наближення цієї функції.

Кожне з цих питань потрібно досліджувати окремо, оскільки від форми апроксимуючої функції та від способу наближення залежить швидкість процесу збіжності результатів.

Практичне застосування варіаційних методів показує, що найзручнішою формою вираження апроксимуючої функції для будь-якого числа незалежних змінних є подання функції у вигляді ряду:

$$W_n = \sum_{i=1}^n a_i u_i \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (1.5.7)$$

де a_i - невизначені сталі параметри, які варіюються згідно з прийнятим способом наближення; u_i - "підходящі" функції, які в сукупності найкраще зображують досліджувану функцію.

Розглянемо перше питання. Припустимо для визначеності, що йдеться про функцію від однієї незалежної змінної в проміжку $[a, b]$, для якої відоме диференціальне рівняння

$$F(x, W, W', \dots, W^{(n)}) = 0, \quad (1.5.8)$$

та граничні умови $W(a)=W_a$; $W(b)=W_b$; $W'(a)=W'_a$; $W'(b)=W'_b$,
 або інакше $W(a)-W_a=0$; $W'(a)-W'_a=0$; $W(b)-W_b=0$; $W'(b)-W'_b=0$;

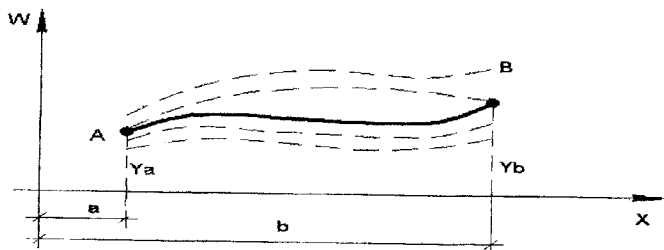


Рисунок 1.5.2 – Точний і наближений розв’язок диференціального рівняння (1.5.8)

Нехай $W = f(x)$ - точний розв’язок цього рівняння (рис. 1.5.2, суцільна лінія AB), а $W_n = \sum_{i=1}^n a_i u_i$ - довільний з наближених розв’язків (пунктир на рис. 1.5.2). Яку з ліній слід узяти за наближений розв’язок?

1-й спосіб. Вибираємо функції u_i так, щоб кожна з них окремо задовольняла частину граничних умов. Диференціальне рівняння при цьому не задовольняється. Параметри a_i визначаємо з умови, коли весь ряд в цілому найкраще апроксимує функцію як всередині, так і на кінцях проміжку.

2-й спосіб. Вибираємо функції u_i так, щоб кожна з них окремо задовольняла всі граничні умови. Диференціальне рівняння при цьому не задовольняється. Параметри a_i знаходимо з умови, коли весь ряд в цілому найкраще апроксимує функцію всередині проміжку.

3-й спосіб. Вибираємо функції u_i так, щоб кожна з них окремо задовольняла диференціальне рівняння, тобто, була його частинним інтегралом. Граничні умови при цьому не задовольняються. Параметри a_i знаходимо з умови, коли весь ряд в цілому найкраще апроксимує функцію на кінцях проміжку.

З вказаних способів побудови ряду перший найпростіший, оскільки він накладає на функцію найменше число обмежень. Проте умова для знаходження параметрів при цьому виходить менш простою.

Наведені міркування для випадку однієї змінної поширюються на випадок двох незалежних змінних. Відмінність лише в тому, що тут проміжок замінюється зоною площини, граничні точки - замкненим контуром цієї зони, а інтегральна лінія - інтегральною поверхнею.

Завжди весь ряд в цілому повинен якомога повніше відповідати очікуваному характеру зміни функції. Зауважимо, що при розв'язуванні практичних задач потрібні певні навички. Добре мати під руками довідкову таблицю, так званих, "підходящих" координатних функцій.

Так, наприклад, для вигину шарнірно обпертої балки координатну функцію можна записати у вигляді:

$$W_y = \sum_m \sin \frac{m\gamma x}{l}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (1.5.10)$$

Для більшості практичних випадків рівняння Ейлера - Лагранжа не можливо розв'язати точно, тому доводиться використовувати чисельні методи. У таких випадках докладають зусиль, щоб уникнути розв'язування диференціальних рівнянь, а спробувати побудувати мінімізуючу послідовність.

1.5.4 Метод Рітца

Метод Рітца - один з чисельних методів розв'язування диференціального рівняння Ейлера. За його допомогою варіаційна задача зводиться до задачі пошуку екстремуму функції. Основна ідея полягає ось у чому. Нехай y_1, y_2, \dots - повна система функцій в зоні визначення функціонала $I(y)$, тобто кожна функція "у" з цієї зони може бути наближена з будь-яким ступенем точності лінійною комбінацією деяких функцій u_i , які називають координатними:

$$y_n(x) = \sum_1^n a_i u_i, \quad (1.5.11)$$

(n залежить від потрібної точності).

Якщо цю лінійну комбінацію підставити у функціонал $I(y)$, то він буде функцією лише параметрів a_i :

$$I\left(\sum_1^n a_i u_i\right) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (1.5.12)$$

Необхідною умовою того, що ця функція набуває екстремального значення відносно параметрів a_1, a_2, \dots, a_n , є виконання систем співвідношень

$$f'(a_1) = 0; \quad f'(a_2) = 0; \quad f'(a_n) = 0. \quad (1.5.13)$$

З цієї системи нелінійних рівнянь визначаються параметри a_i , їх ще називають ступенями вільності. Як правило, за фізичним змістом вони є вузловими лінійними та кутовими переміщеннями.

Ступінь вільності системи - це число незалежних геометричних параметрів, які повністю визначають можливі переміщення всіх її точок. Реальна пружна система завжди має нескінченне число ступенів вільності. Щоб чисельно розв'язати реальну задачу, деформований стан слід охарактеризувати переміщеннями скінченного числа точок, тобто число ступенів вільності вважається скінченим.

Координатні функції u_i добираються так, щоб функція $y_n = \sum_i^n a_i u_i$

задовольняла граничні умови задачі. Так, координатні функції описують розподіл переміщень по зоні протнутого стержня, коли одне з переміщень дорівнює одиниці, а інші дорівнюють нулю. Вирази для координатних функцій, застосовних в основних випадках розрахунків, вміщені в табл. 1.5.1.

Приклад 1. Знайти екстремум функціонала

$$I(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Розв'язання. Припустимо, що використовуються координатні функції

$$u_1(x) = x^2 - x, \quad u_2(x) = x^3 - x^2, \dots, \quad u_n(x) = x^{n-1} - x^n$$

Нехай $n = 2$, тобто,

$$y_2(x) = a_1(x^2 - x) + a_2(x^3 - x^2), \quad y_2(0) = y_2(1) = 0.$$

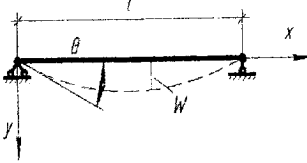
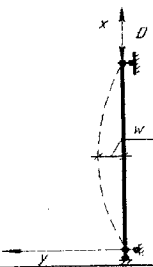

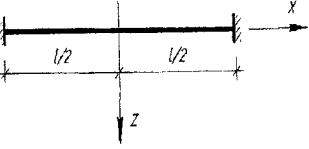
Тоді

$$I(y_2(x)) = \int_0^1 [a_1(2x-1) + a_2(3x^2 - 2x)]^2 + (a_1(x^2 - x) + a_2(x^3 - x^2))^2 + 2x(a_1(x^2 - x) + a_2(x^3 - x^2))] dx = f(a_1, a_2)$$

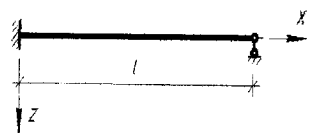
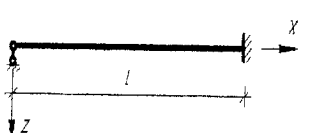
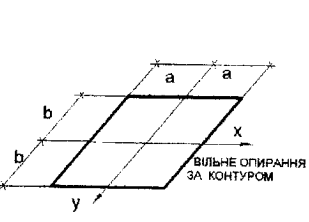
З умови $f(a_1)' = 0$ і $f(a_2)' = 0$ маємо:

$$\begin{cases} \frac{11}{15}a_1 + \frac{11}{30}a_2 = \frac{1}{6}; \\ \frac{11}{30}a_1 + \frac{2}{7}a_2 = \frac{1}{10}. \end{cases}$$

Таблиця 1.5.1 – Координатні функції

Граничні умови	Координатні функції
 <p>1</p>	$W, Q = a_1 x(l-x) + a_2 x^2(l-x) + a_3 x(l-x)^2 + a_4 x^2(l-x)^2 + \dots$ <p>(довільне навантаження)</p> $W, Q = a_1 x(l-x) + a_2 x^2(l-x)^2 + a_3 x^3(l-x)^3 + \dots$ <p>(симетричне навантаження)</p> $W = \sum \sin \frac{m\pi x}{l}; \quad (m=1,2,3,\dots)$
 <p>2</p>	$W, Q = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{3\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{5\pi x}{l} + \dots$ <p>(симетричне навантаження)</p> $W, Q = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots$ <p>(довільне навантаження)</p>
 <p>3</p>	$W_m = \sum \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{l} \right) \quad (m=1,3,5,\dots)$ $W_m = \frac{x}{l} \left(\frac{x}{l} - 1 \right)^2 - \sum (-1)^m \frac{x^2}{l^2} \left(\frac{x}{l} - 1 \right) - \sum \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{l} + \dots$
 <p>4</p>	$W_m = \sum (l^2 - 4x^2)^2 x^m \quad (m=0,1,2,3,\dots)$ $W_m = \sum \left[1 - (-1)^m \cos \frac{2m\pi x}{l} \right] \quad (m=1,3,5,\dots)$

Продовження таблиці 1.5.1

 <p>5</p>	$W_m = \frac{x}{l} \left(\frac{x}{l} - 1 \right) \left(\frac{x}{2l} - 1 \right) - \sum_m \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{l}$
 <p>6</p>	$W_m = \sum \frac{x}{2l} \left(\frac{x^2}{l^2} - 1 \right) (-1)^m - \sum_m \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{l}$
 <p>7</p>	$W = a_1 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} + a_2 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b} +$ $+ a_3 \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} + a_4 \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b} + \dots$ <p>(довільне навантаження)</p> $W = a_1(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) + a_2(x^2 - a^2)x^2(y^2 - b^2) \cdot y^2 + \dots$ <p>(симетричне навантаження)</p>

Звідси:

$$a_1 = 69/473; \quad a_2 = 77/473;$$

$$y_2(x) = (77x^3 - 8x^2 - 69x)/473.$$

Отже, точний розв'язок:

$$y(x) = \frac{e}{e^2 - 1} (e^x - e^{-x}) - x.$$

Таблиця 1.5.2 – Результати порівняння точного та наближеного розв'язків

i	$y_2(2i)$	Точний розв'язок $y(2i)$
1	-0,0285	-0,0287
2	-0,0506	-0,0506

Приклад II. Крайова задача прогину балки.

Знайти лінію прогину в балці, зображеній на рис. 1.5.3.

Граничні умови:

$$W(-l/2) = 0; \quad W(l/2) = 0; \quad W'(-l/2) = 0; \quad W'(l/2) = 0;$$

Розв'язати задачу у варіаційній постановці – означає знайти таку систему переміщень, яка мінімізує функціонал повної потенціальної енергії системи.

Розв'язання.

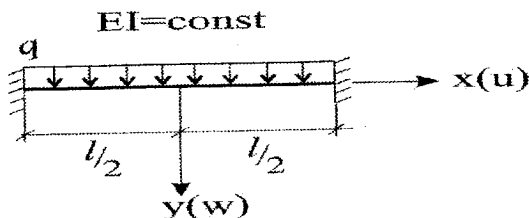


Рисунок 1.5.3 – Розрахункова схема навантаження балки

Цей функціонал для даної задачі

$$I(y) = \Pi = \frac{EI}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\frac{d^2 W_y}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} q W_y dx \quad (1.5.14)$$

Перший доданок в (1.5.14) є потенційною енергією пружних деформацій, що дорівнює роботі внутрішніх сил, які діють на балку:

$$A = \sum \int_0^S \frac{M^2 ds}{2EI} + \sum \int_0^S \frac{N^2 ds}{2EF} + \sum \int_0^S \frac{Q^2 ds}{2GF} \quad (1.5.15)$$

У даному випадку другим і третім доданками в (1.5.15) можна знехтувати, оскільки за модулем вони досить малі. Другий доданок у (1.5.14) є потенціалом зовнішніх сил. Щоб розв'язати задачу, можна скористатися двома способами: 1) – мінімізувати функціонал; 2) – розв'язати диференціальне рівняння Ейлера - Лагранжа.

Наведемо приклад розв'язання першим способом. Доберемо координатну функцію у вигляді:

$$u_n(x) = \sum_n (l^2 - 4x^2)^2 x_n, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Нехай \$n=1\$, тоді

$$u_1(x) = (l^2 - 4x^2)^2$$

$$\text{і переміщення } W_n = \sum_n u_i a_i ;$$

Координатна функція задовольняє такі граничні умови:

$$W_1(x) = a_1(l^2 - 4x^2)^2; \quad W_1(x) = a_1(l^4 - 8l^2x^2 + 16x^4);$$

$$W_1'(x) = -16a_1l^2x + 64x^3a_1;$$

$$W_1'(x) \text{ при } x = \frac{-l}{2} = a_1l^2 \frac{l}{2} - 64 \frac{a_1l^3}{8} = 8a_1l^3 - 8a_1l^3 = 0; \quad W_1'(x) \text{ при } x = \frac{l}{2} = 0;$$

$$W_1''(x) = -16a_1l^2 + 192a_1x^2 = 16[a_1(12x^2 - l^2)];$$

$$W_1''(x) \text{ при } x = \frac{l}{2} = a_1(l^2 - 4 \frac{l^2}{4})^2 + a_2(l^2 - 4 \frac{l^2}{4})(-\frac{l}{2}) = 0;$$

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_{-l/2}^{l/2} [16a_1(12x^2 - l^2)]^2 dx - \frac{q}{2} \int_{-l/2}^{l/2} a_1(l^2 - 4x^2)^2 dx =$$

$$= 128EI \int_{-l/2}^{l/2} a_1^2(12x^2 - l^2) dx - \frac{q}{2} \int_{-l/2}^{l/2} a_1(l^4 - bl^2x^2 + 16x^4) dx =$$

$$= 128EI \int_{-l/2}^{l/2} a_1^2(144x^4 + 24x^2l^2 + l^4) dx - \frac{q}{2} \int_{-l/2}^{l/2} a_1(l^4 - 8l^2x^2 + 16x^4) dx =$$

$$= 128EI \int_{-l/2}^{l/2} a_1^2(144 \frac{x^5}{5} - 24 \frac{l^2x^3}{3} + xl^4) dx - \frac{q}{2} \int_{-l/2}^{l/2} a_1(l^4x - bl^2x \frac{x}{3} + 16 \frac{x^5}{6}) dx =$$

$$= 128EI \left[a_1^2 \left(\frac{144}{5} \frac{l^5}{32} - \frac{8l^2l^3}{8} + \frac{l^4l}{2} \right) - a_1^2 \left(\frac{144}{5} \left(-\frac{l^5}{32} \right) + 8 \frac{bl^2l^3}{8} + \frac{l^4l}{2} \right) \right] =$$

$$= -\frac{q}{2} \left[a_1 \left(l^4 \frac{l}{2} - \frac{8l^2l^3}{3 \cdot 8} + \frac{16l^5}{5 \cdot 32} \right) - a_1 \left(l^4 \left(-\frac{l}{2} \right) + \frac{8}{3} l^2 \left(\frac{l^3}{8} \right) - \frac{16l^5}{5 \cdot 32} \right) \right] =$$

$$= 128EI \left[a_1^2 \left(\frac{9 \cdot 2l^5}{10} - 2l^5 + \frac{l^5}{2} \cdot 2 \right) \right] - \frac{q}{2} \left[a_1 \left(\frac{l^5}{2} \cdot 2 - \frac{2l^5}{3} + \frac{2l^5}{10} \right) \right] =$$

$$= 128EI \left[a_1^2 (1.8l^5 - l^5) \right] - \frac{q}{2} \left[a_1 (1.2l^5 - \frac{2}{3}l^5) \right] =$$

$$= 128EI a_1^2 \cdot 0.8l^5 - \frac{qa_1l^5 \cdot 16}{30} = f(a_1);$$

$$\frac{df}{da_1} = 0; \quad \frac{2a_1 \cdot 128EI \cdot 8l^5}{10} - \frac{ql^5 \cdot 16}{30} = 0;$$

$$\frac{ql^5 \cdot 16 \cdot 10}{30 \cdot 2 \cdot 128EI \cdot 8l^5} = \frac{q}{3 \cdot 128EI}; \quad W_1(x) = \frac{q}{384EI} (l^2 - 4x^2)^2.$$

При $x=0$ (в середині балки) $W_1(x) = \frac{ql^4}{384EI}$, що повністю відповідає точному розв'язку задачі згідно з класичним методом сил. Наведемо це розв'язання.

Балка, зображена на рис. 1.5.3, згідно з методом сил, тричі статично невизначена.

Запишемо канонічні рівняння за цим методом:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \Delta_{13} = 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \Delta_{23} = 0 \\ \delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + \Delta_{33} = 0 \end{cases}$$

Щоб визначити коефіцієнти цих рівнянь, виберемо основну систему методу сил і побудуємо одиничні й вантажні епюри.

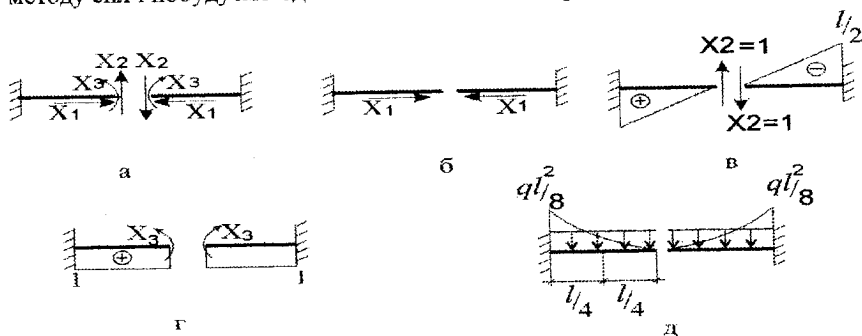


Рисунок 1.5.4 – Основна система методу сил (а) та епюри: M_1^0 (б);

$$M_2^0$$
(в); M_3^0 (г); M_4^0 (д);

Визначаємо коефіцієнти канонічних рівнянь:

$$\delta_{11} = M_1^0 \cdot M_1^0 = 0; \quad \Delta_{1P} = 0; \quad \Delta_{2P} = 0; \quad \delta_{23} = \delta_{32} = 0; \quad \delta_{12} = 0; \quad \delta_{13} = 0;$$

$$\Delta_{2P} = 0; \quad \delta_{33} = M_3^0 \cdot M_3^0 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 1}{EI} = \frac{l}{EI}; \quad \delta_{22} = \left(\frac{1}{2} \cdot 1\right) \cdot 1 \cdot \frac{2}{EI} = \frac{l}{EI};$$

$$\Delta_{зр} = 2\left(-\frac{l}{2 \cdot 6EI} \left[\frac{ql^2}{8} \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{ql^2}{32} \right] \right) = -\frac{2l \cdot ql^2 \cdot 2}{2 \cdot 6EI \cdot 8} = \frac{-ql^2 \cdot 2}{6 \cdot 8EI} = \frac{-ql^3}{24EI};$$

Отже, канонічна система запишеться у вигляді

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 = 0; \\ 0 \cdot x_1 + \frac{l}{EI} x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 = 0; \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{l}{EI} x_3 + \left(\frac{-ql^3}{24EI} \right) = 0. \end{cases}$$

Корені системи: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = \frac{ql^2}{24}$.

Далі маємо: $M_p = M_p^0 + M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3$;

$$M_{0n} = \frac{ql^2}{8} - \frac{ql^2}{24} = \frac{ql^2}{12}; \quad M_{(x=l/4)} = \frac{ql^2}{24} - \frac{ql^2}{32} = \frac{ql^2}{96}$$

Шукані епюри зображено на рис. 1.5.5.

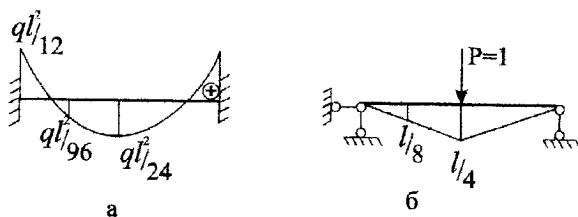


Рисунок 1.5.5 – Остаточні вантажна епора M_p (а) та одинична епора M_1 в основній системі (б)

Щоб визначити переміщення середини балки, скористаємось формулою Сімсона - Карнаухова

$$\Delta = \frac{l}{6EI} [M_p^A M_1^A + 4M_p^C M_1^C + M_p^B M_1^B], \quad (1.5.16)$$

де А, С, В – відповідно, початок, середина та кінець стержня.

Побудуємо одиничну епору в основній системі (див. рис. 1.5.5. б) і перемножимо за (1.5.16) з вантажною епурою моментів M_p (див. рис. 1.5.5. а):

$$\Delta = 2 \left\{ \frac{l}{2 \cdot 6EI} \left[4 \frac{l}{8} \frac{ql^2}{96} + \frac{ql^2}{24} \frac{l}{4} \right] \right\} = \frac{ql^4}{384EI}$$

Приклад III. Визначення стійкості системи з двома ступенями вільності.

Для системи з двома ступенями вільності, показаної на рис. 1.5.6, знайти критичні сили, при яких можливе відхилення від рівноважного стану системи. Опори C і D – пружно-піддатливі з коефіцієнтом твердості r (r – це реакція в опорі при одиничному переміщенні її по вертикалі).

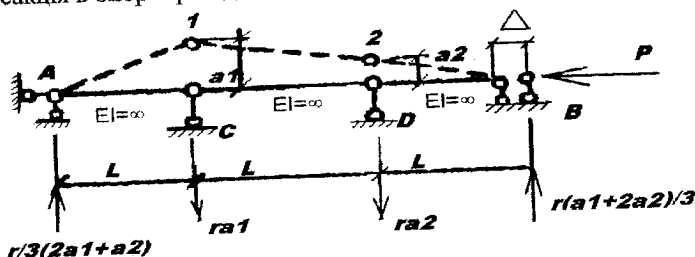


Рисунок 1.5.6 – Розрахункова схема системи з двома ступенями вільності

Розв'язання. Розв'яжемо задачу, так званим, методом варіацій функції

$$U = A + W,$$

(варіацією називають нескінченно малу зміну функції при фіксованому значенні належної змінної x).

Виконуємо дії за таким планом:

I. Обумовлюємо форму втрати стійкості з точністю до двох ступенів вільності a_1 і a_2 (їх фізична суть це віртуальні лінійні переміщення точок C і D). Тоді робота зовнішніх сил

$$A = -P\Delta,$$

де Δ – поворот системи при зміщенні її кінця $\Delta = l/2(y')^2$.

Для першої ланки маємо $y' = a_1/l$, для другої $y' = a_1 - a_2/l$, для третьої $y' = a_2/l$.

$$\text{Отже, } \Delta = \frac{l}{2} \left(\frac{a_1^2}{l^2} + \frac{a_2^2}{l^2} + \frac{(a_1 - a_2)^2}{l^2} \right) = \frac{a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2}{l}$$

Робота внутрішніх сил:
$$W = \frac{1}{2}ra_1^2 + \frac{1}{2}ra_2a_2 = \frac{r}{2}(a_1^2 + a_2^2).$$

2. Запишемо вираз для потенційної енергії системи

$$u = F(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

у вигляді

$$u = A + W = -P \frac{(a_1^2 - a_1a_2 + a_2^2)}{l} + \frac{r}{2}(a_1^2 + a_2^2).$$

3. З умов екстремуму функції u маємо: $\frac{du}{da_1} = 0$; $\frac{du}{da_2} = 0$.

Тому отримуємо систему однорідних лінійних рівнянь відносно a_1 і a_2 ;

$$\begin{cases} -\frac{P}{l}(2a_1 - a_2) + ra_1 = 0 \\ -\frac{P}{l}(-a_1 + 2a_2) + ra_2 = 0 \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} (\frac{2P}{l} - r)a_1 - \frac{P}{l}a_2 = 0; \\ -\frac{P}{l}a_1 + (\frac{2P}{l} - r)a_2 = 0. \end{cases}$$

Щоб ця система мала відмінний від нуля розв'язок, необхідно, щоб її визначник дорівнював нулю, тобто:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{2P}{l} - r & -\frac{P}{l} \\ -\frac{P}{l} & \frac{2P}{l} - r \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{Або } \left(\frac{2P}{l} - r\right)^2 - \frac{P^2}{l^2} = 0.$$

$$\text{Отже, } P_1 = \frac{rl}{3}; \quad P_2 = rl.$$

2 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ

2.1 Розрахунок статично невизначеної рами за методом сил

2.1.1 *Склад завдання та приклад розрахунку*

Рама – система зі стержнів, які жорстко або шарнірно з'єднані у вузлах.

Одним із перших методів розрахунку статично невизначених систем є метод сил. За основні (зайві) невідомі в методі сил приймають узагальнені реактивні сили в відкинутих зв'язках системи.

Число зайвих невідомих називають ступенем статичної невизначеності та визначають за формулою Чебишева :

$$L = n_c = 3D - 2Ш - C_0 , \quad (2.1.1)$$

де L – число зайвих зв'язків, D – кількість жорстких дисків, C_0 – число опор, $Ш$ – кількість одиночних шарнірів (одиночний шарнір з'єднує два стержні).

Розрахунок внутрішніх зусиль за методом сил в статично невизначеній рамі, зображеній на рис. 2.1.1, проводиться в такій послідовності:

а) оскільки в заданій рамі відсутні шарніри, ступінь статичної невизначеності рами можна визначити за формулою:

$$L = n_c = c_0 - 3, \quad (2.1.2)$$

де C_0 - число опор (зв'язків з землею).

$$n_c = 9 - 3 = 6;$$

б) для вибору основної системи методу сил відкинемо зайві зв'язки. При цьому скористаємось симетрією рами, рис.2.1.2. Це дасть можливість взяти до розгляду три парних невідомих X_1, X_2, X_3 ;

в) запишемо канонічні рівняння методу сил, які вказують на те, що переміщення за напрямком відкинутих зв'язків мають бути нулевими, оскільки в заданій рамі в цих точках знаходяться опори, які не допускають переміщень по вертикалі. В результаті отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь третього порядку (2.1.3).

$$\begin{aligned}
\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} &= 0; \\
\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} &= 0; \\
\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.1.3}$$

де δ_{ij} – одиничні переміщення в основній системі методу сил в напрямку “i” від дії одиничної сили $X_j = 1$ в напрямку “j”.

Δ_{ip} – вантажні переміщення в напрямку “i” від дії зовнішнього навантаження P, визначаються інтегруванням відповідних епюр за залежностями Максвела-Мора, або за формулами числового інтегрування (за формулами Верещагіна, Мюллера-Бреслау чи Сімпсона-Карнаухова);

г) для визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь методу сил будуються епюри згинальних моментів в основній системі від одиничних лишніх невідомих $X_1=1$, $X_2=1$, $X_3=1$, та від зовнішнього навантаження, рис.2.1.3;

д) знаходження коренів системи канонічних рівнянь методу сил;

е) кінцеві епюри згинальних моментів та поперечних сил будуюмо за формулами:

$$M_p = M_p^0 + X_1 M_1^0 + X_2 M_2^0 + X_3 M_3^0, \tag{2.1.4}$$

$$Q_p = Q_p^0 + \frac{M_{np}}{L} \frac{M_{лів}}{L}, \tag{2.1.5}$$

де Q_p^0 – еюра поперечних сил в окремому стержні від зовнішнього навантаження побудована в припущенні, що цей стержень шарнірно обпертий: M_{np} , $M_{л}$ – кінцеві значення згинальних моментів в окремому взятому стержні справа і зліва;

ж) для побудови епюри поздовжних сил доцільно розглядати рівняння рівноваги для кожного вузла (рис.2.1.6) в кінцевій епюрі.

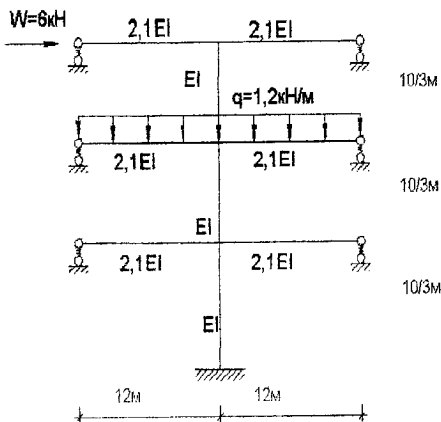


Рисунок 2.1.1 – Розрахункова схема

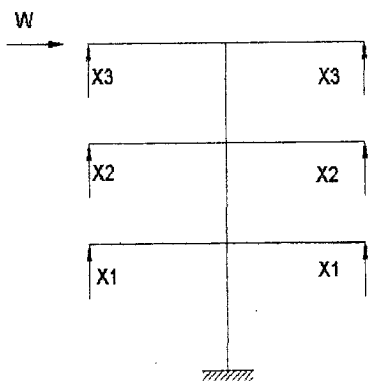


Рисунок 2.1.2 – Основна система методу сил

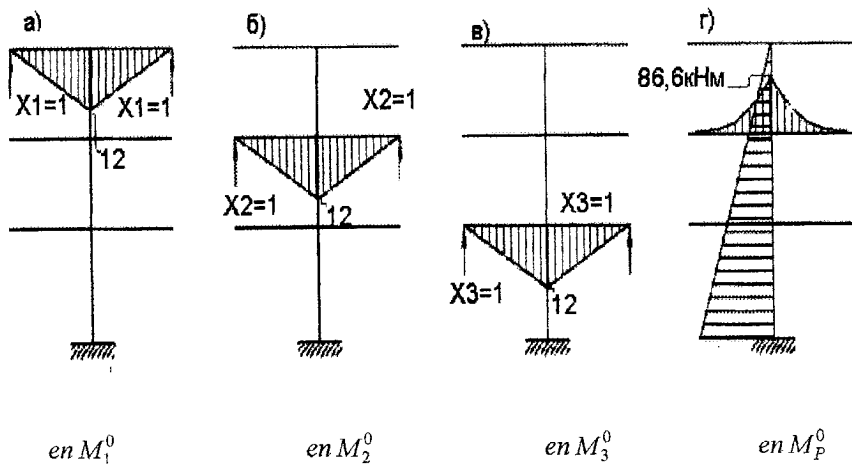


Рисунок 2.1.3 – Епюри згинальних моментів в основній системі методу сил від: а, б, в – лінійних одиничних невідомих $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ та з – від зовнішнього навантаження

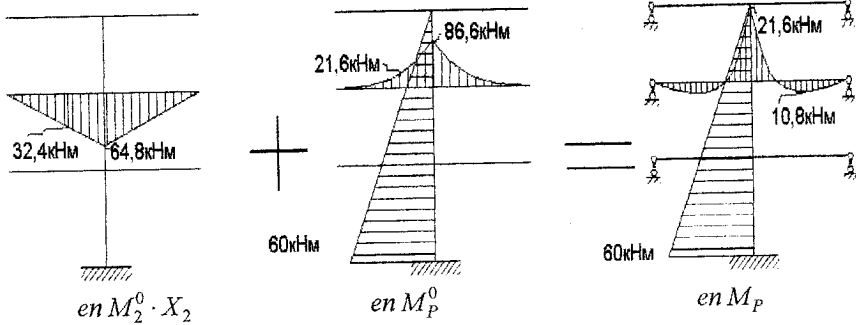


Рисунок 2.1.4 – Етапи отримання кінцевої епюри згинальних моментів M_P

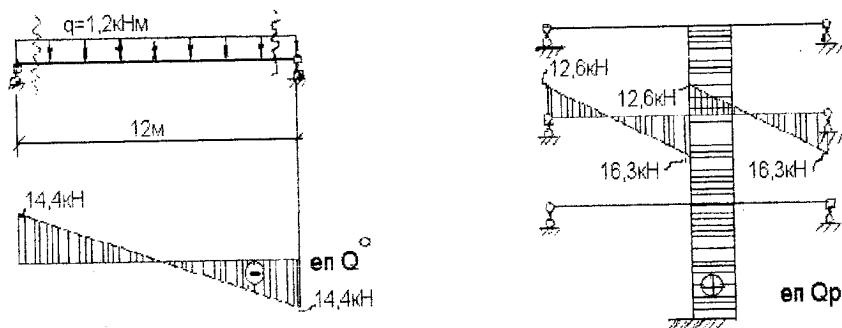


Рисунок 2.1.5 – Етапи отримання епюри поперечних сил Q_P

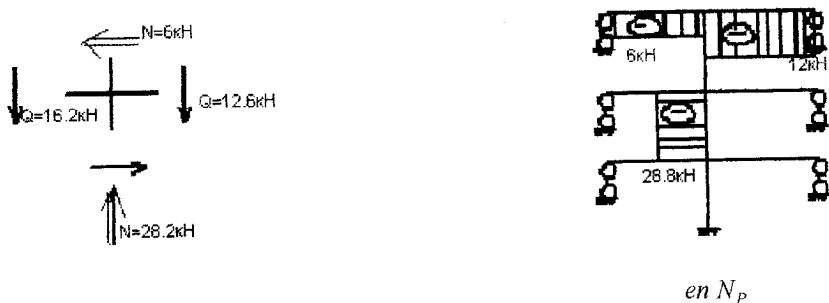


Рисунок 2.1.6 – Етапи побудови епюри поздовжніх сил N_P

2.2 Розрахунок нерозрізної балки на постійне та тимчасове навантаження

2.2.1 Склад завдання

1. Визначення ступеня статичної невизначеності балки і вибір основної системи.
2. Побудова епюр згинальних моментів в основній системі від зовнішнього навантаження (постійного і тимчасового).
3. Побудова епюр згинальних моментів в характерних перерізах основної системи від одиничного навантаження $P = 1$.
4. Компонування вихідних матриць $L_m^0, B, L_{mp}^0, P, A_{mp}^0$.
5. Розрахунок на ЕОМ по розроблених алгоритмах.

2.2.2 Розрахунок нерозрізної балки на зовнішнє постійне навантаження

Початкова стадія розрахунку нерозрізних балок на зовнішнє навантаження в матричній формі пов'язана з визначенням ступеня статичної невизначеності і вибором основної системи. Ця стадія розрахунку нічим не відрізняється від розрахунку нерозрізних балок звичайним способом.

Нехай для нерозрізної балки виконана перша стадія розрахунку. Для n разів статично невизначної нерозрізної балки при навантаженні її одним варіантом зовнішніх сил система канонічних рівнянь в матричній формі має вигляд:

$$\begin{array}{c|c|c|c} \delta_{11} & \delta_{12} \dots & \delta_{1n} & x_1 \\ \delta_{21} & \delta_{22} \dots & \delta_{2n} & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} \dots & \delta_{nn} & x_n \end{array} + \begin{array}{c} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \dots \\ \Delta_{np} \end{array} = 0$$

$$\text{або} \quad A_{\delta} x + \Delta p = 0 \quad (2.2.1)$$

де A_{δ} - матриця одиничних переміщень в основній системі від $X_1 = X_2 = X_3 = X_n = 1$;

X - вектор невідомих зусиль;

Δ_p - вектор переміщень в основній системі від зовнішнього навантаження за всіма напрямками X_1, X_2, \dots, X_n .

Матрицю одиничних переміщень можна записати:

$$A_{\delta} = L_m^{01} \cdot B \cdot L_m^0, \quad (2.2.2)$$

де L_m^{01} - матриця, транспонована по відношенню до L_m^0 ;

B - матриця піддатливості окремих елементів (ділянок), на які розділяють задану систему, характеризує геометричні розміри і матеріал конструкції;

L_m^0 - матриця впливу згинальних моментів в основній системі від кожної сили $X_1 = X_2 = \dots = X_{N-1}$ окремо.

Вектор $\bar{\Delta}_p$ можна подати у вигляді

$$\bar{\Delta}_p = L_m^0 B L_{mp}^0 \bar{P} = L_m^0 B \bar{M}_p^0. \quad (2.2.3)$$

Розв'язання матричного рівняння (2.2.1) дає вектор невідомих

$$\bar{x} = -A_{\delta}^{-1} \bar{\Delta}_p = -(L_m^0 B L_m^0)^{-1} L_m^0 B L_{mp}^0 \bar{P}. \quad (2.2.4)$$

Вектор згинальних моментів в пронумерованих перерізах нерозрізної балки

$$\bar{M} = L_{mp}^0 \bar{P} + L_m^0 B \bar{x}, \quad (2.2.5)$$

$$\bar{M} = [L_{mp}^0 - L_m^0 (L_m^0 B L_m^0)^{-1} L_m^0 B L_{mp}^0] \bar{P}, \quad (2.2.6)$$

або

$$\bar{M} = \bar{M}_p^0 - L_m^0 A_{\delta}^{-1} \bar{\Delta}_p. \quad (2.2.7)$$

За вектором M будується кінцева епюра згинальних моментів. Вираз (2.2.6) - алгоритм розрахунку статично невизначених систем методом сил в матричній формі. Для його реалізації на ЕОМ треба скласти чотири початкові матриці L_m^0 , B , L_{mp}^0 , P .

Після отримання значення M проводиться деформаційна перевірка правильності отриманої епюри:

$$L_m^0 * B * \bar{M} = 0. \quad (2.2.8)$$

При дії на статично невизначену систему кожного з t варіантів зовнішніх дій (до них відносяться постійні навантаження, тимчасові, осідання опор і температура) система канонічних рівнянь має вигляд:

$$A_{\delta} * X + \Delta = 0, \quad (2.2.9)$$

де X – матриця невідомих, має t стовпців;
 A_{δ} – матриця одиничних переміщень в основній системі від $X_1,$

$$X_2, \dots, X_n = 1;$$

$\Delta = L_m^0 B A_{mP}^0 P$ – матриця переміщень від всіх t варіантів навантажень в основній системі;

A_{mP}^0 – матриця впливу згинальних моментів в основній системі від всіх t варіантів навантажень

$$P_1^I = P_2^I = \dots P_1^{II} = P_2^{II} = P_k^I = 1, \text{ прикладених роздільно;}$$

P – матриця всіх t варіантів зовнішніх дій.

Розв'язання системи (2.2.9) аналогічне розв'язанню (2.2.4):

$$X = -A_{\delta}^{-1} \Delta, \quad (2.2.10)$$

де X і Δ – матриці.

Згинальні моменти для всіх k перерізів від всіх t варіантів зовнішніх навантажень отримаємо у вигляді матриці:

$$M = \begin{vmatrix} M_1^{(1)} & M_1^{(2)} & \dots & M_1^{(t)} \\ M_2^{(1)} & M_2^{(2)} & \dots & M_2^{(t)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_k^{(1)} & M_k^{(2)} & \dots & M_k^{(t)} \end{vmatrix} = A_{mP}^0 P + L_m^0 X \quad (2.2.11)$$

Розглянемо приклад матричного розрахунку нерозрізної балки на постійне і тимчасове навантаження (рис. 2.2.1). Схему балки показано на рис. 2.2.1,а. Розділимо I і II прогони на 5 рівних частин, консоль – на 2 частини і пронумеруємо перерізи, в яких будемо визначати згинальні моменти. Основна система і характерні перерізи зображені на рис. 2.2.1,б.

Для визначення початкових матриць L_m^0 , B , A_{mP}^0 , P побудуємо епюри моментів в основній системі окремо від наступних величин:

- 1) $X_1=I$ (рис. 2.2.1,в) – \bar{M}_1 ;
- 2) $X_2=1$ (рис. 2.2.1,г) – \bar{M}_2 ;
- 3) постійного одиничного розподіленого навантаження (рис. 2.2.1,д) – M_q^0 пост;

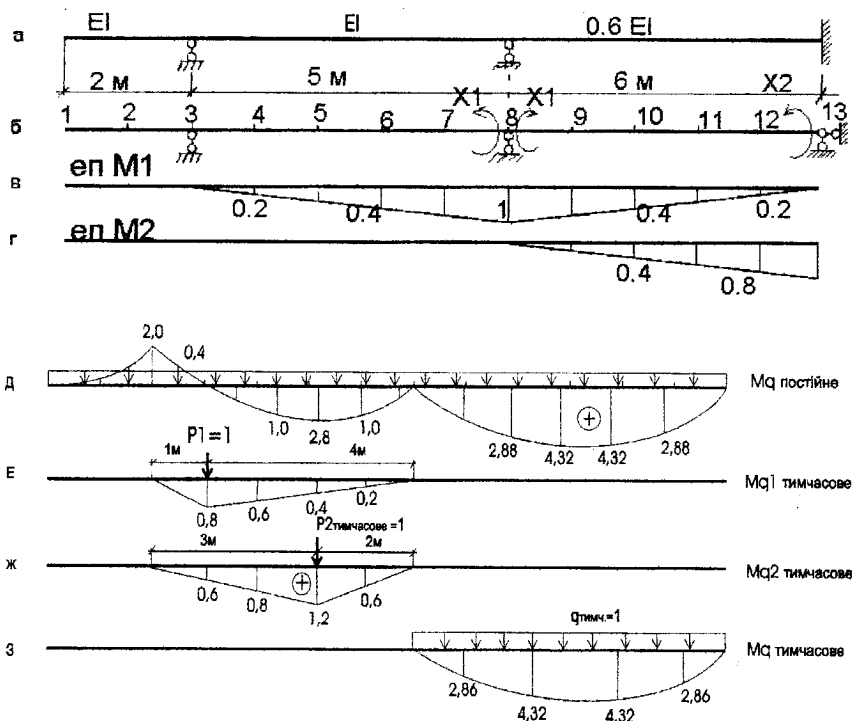


Рисунок 2.2.1 – Розрахункова схема і епори моментів: а – схема нерозрізної балки; б – основна системи балки; в – еп. моментів M1; еп. моментів M2; д – епора M від одиничного постійного навантаження ($q_{\text{постійне}} = 1$); е – епора M від одиничної тимчасової зосередженої сили ($P_1 = 1$); ж – епора M від одиничної тимчасової зосередженої сили ($P_2 = 1$); з – епора M від одиничного тимчасового навантаження ($q_{\text{тимчасове}} = 1$)

- 4) тимчасової одиничної зосередженої сили P_1 (рис. 2.2.1,е) - $M_{P_1}^0$ тимч.;
 5) тимчасової одиничної зосередженої сили P_2 (рис. 2.2.1,ж) - $M_{P_2}^0$ тимч.;
 6) тимчасового одиничного розподіленого навантаження $q_{\text{тимч.}}$ (рис. 2.2.1,з) - $M_{q_{\text{тимч.}}}^0$ і обчислимо ординати цих епор в характерних перерізах.

Для зручності побудови епор моментів від розподіленого навантаження на рис. 2.2.2 показано проміжні точки квадратної параболы (посередині $a = ql^2/8$). Матриця впливу згинальних моментів $L_{\text{тп}}^0$ складена за епорами \bar{M}_1 та \bar{M}_2 від $X_1 = X_2 = 1$ (рис. 2.2.1,г):

$$L_m^0 = \frac{1}{10} \begin{matrix} 0 & 0 & /1/ \\ 0 & 0 & /2/ \\ 0 & 0 & /3/ \\ 2 & 0 & /4/ \\ 4 & 0 & /5/ \\ 6 & 0 & /6/ \\ 8 & 0 & /7/ \\ 10 & 0 & /8/ \\ 8 & 2 & /9/ \\ 6 & 4 & /10/ \\ 4 & 6 & /11/ \\ 2 & 8 & /12/ \\ 0 & 10 & /13/ \end{matrix} \quad (2.2.12)$$

де k, n - порядок прямокутної матриці L_m^0 .

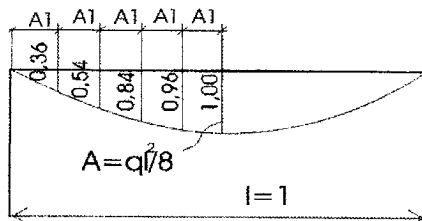


Рисунок 2.2.2 – Проміжні точки квадратної параболі

Матрицю піддатливості B для всієї балки подамо у вигляді трьох матриць B_I, B_{II}, B_{III} для : консолі, 1 і 2 прогонів

$$B = \begin{matrix} \left\| \begin{matrix} B_I \\ B_{II} \\ B_{III} \end{matrix} \right\| \end{matrix} \quad (2.2.13)$$

Матриця B_I складається з двох матриць другого порядку B_{I1} і B_{I2} , що відповідають двом ділянкам консолі:

$$B_1 = \begin{vmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{vmatrix}; \quad B_1 = \frac{1}{6EI} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad B_2 = \frac{1}{6EI} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad B_1 = \frac{1}{6EI} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (2.2.14)$$

Матриці B_I і B_{II} складаються кожна з п'яти матриць другого порядку:

$$B_{II} = \begin{vmatrix} b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_7 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & & & 0 \\ & & 2 & 1 & \\ & & 1 & 2 & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & & & \\ 2 & 4 & & & \\ & & 4 & 2 & 0 \\ & & 2 & 4 & \\ & & & & 4 & 2 \\ & & & & 2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$B_{III} = \begin{vmatrix} b_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{12} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} & & & & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \\ & & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 \\ & & & & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} & & & & & & & & & & 4 & 2 \\ & & & & & & & & & & 2 & 4 \\ & & & & & & & & & & & & 4 & 2 \\ & & & & & & & & & & & & 2 & 4 \\ & & & & & & & & & & & & & & 4 & 2 \\ & & & & & & & & & & & & & & 2 & 4 \end{vmatrix}; \quad (2.2.15)$$

Зважаючи на велике число ділянок розділення (нерозрізна балка має 13 характерних перерізів) матриця піддатливості B виходить дуже громіздкою, що ускладнює процес розрахунку. Для полегшення розрахунків знизимо її порядок. Це можливо, оскільки одиничні і вантажні епюри безперервні на межі ділянок b_i і b_{i+1} .

Складемо кутові елементи суміжних матриць b_i і b_{i+1} за схемою

$$B_I = \begin{vmatrix} b_1 & & \\ & & \\ & & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6EJ} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$B_{II} = \begin{vmatrix} b_3 & & & 0 \\ & +b_4 & & \\ & & +b_5 & \\ & & & +b_6 \\ 0 & & & & +b_7 \end{vmatrix} = \frac{1}{6EJ} \begin{vmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \\ & 1 & 4 & 1 \\ & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & & & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

Для обчислення добутку матриць зручно скористатися ЕОМ. Якщо розміри матриць, що перемножуються, невеликі, то

$$L_m^0 * B * L_m^{01} = A_\delta,$$

і можна скористатися зворотною матрицею одиничних переміщень A_δ^{-1} . Матриця обернена до одиничної:

$$A_\delta^{-1} = \frac{3EI}{125} \begin{vmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 10 \end{vmatrix}. \quad (2.2.18)$$

При складанні матриці впливу згинальних моментів від одиничних значень навантажень $A_{\text{мр}}^0$ звернемо увагу на епюри

$$M_{q_постійне}^0, M_{P1_тимчас.}^0, M_{P2_тимчас.}^0, M_{q_тимчас.}^0.$$

Матриця $A_{\text{мр}}^0$ буде складатися з 4 стовпців - за числом епюр моментів від заданих навантажень: $q_{\text{постійне}}$, $P1$, $P2$, q ;

і 13 рядків - за числом вибраних характерних перерізів.

В даному прикладі перший стовпець матриці $A_{\text{мр}}^0$ відповідає епюрі M в балці в 13 характерних перерізах від навантаження власної ваги $q_{\text{пост.}}$, другий стовпець - епюрі M від зосередженої сили $P1$ і т.д.

$$A_{(ксп)_{\text{мр}}}^0 = \begin{vmatrix} /1/ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ /2/ & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ /3/ & -2 & 0 & 0 & 0 \\ /4/ & +0,4 & +0,8 & +0,4 & 0 \\ /5/ & +1,8 & +0,6 & +0,8 & 0 \\ /6/ & +2,2 & +0,4 & +1,2 & 0 \\ /7/ & +1,6 & +0,2 & +0,6 & 0 \\ /8/ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ /9/ & +2,88 & 0 & 0 & +2,88 \\ /10/ & +4,32 & 0 & 0 & +4,32 \\ /11/ & +4,32 & 0 & 0 & +4,32 \\ /12/ & +2,88 & 0 & 0 & +2,88 \\ /13/ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.2.19)$$

Матриця P від чотирьох варіантів заданих навантажень

$$P_{(pxp)} = \begin{vmatrix} q_{пост} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{сп} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (2.2.20)$$

Матрицю невідомих X отримаємо за (2.2.10):

$$X_{(nxp)} = -A_{\delta}^0 L_m^{01} B_{(kzk)} A_{mp}^0 P_{(pxp)} = \begin{vmatrix} -9,554 & -1,536 & -5,851 & -3,456 \\ -5,536 & +0,768 & +2,112 & -3,456 \end{vmatrix} \quad (2.2.21)$$

Матриця шуканих згинальних моментів визначається за (2.2.15):

$$M_{(kxp)} = A_{mp}^0 P_{(pxp)} + L_m^0 X_{(nxp)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0.333 & +8.093 & +3.228 & 0.691 \\ +3.334 & +4.186 & +6.456 & 1.382 \\ +3.0 & +2.278 & +9.683 & 2.074 \\ 1.331 & +0.371 & +1.911 & 2.465 \\ 9.664 & 1.336 & 3.851 & 3.456 \\ +2.682 & 1.075 & 4.266 & +24.787 \\ +9.267 & 0.614 & 2.672 & +38.88 \\ +10.093 & 0.154 & 1.077 & +38.88 \\ +5.158 & +0.230 & +0.517 & +24.767 \\ 5.336 & +0.758 & +2.112 & 3.456 \end{vmatrix} \quad (2.2.22)$$

Епюри від заданих навантажень приведені на рис. 2.2.3.

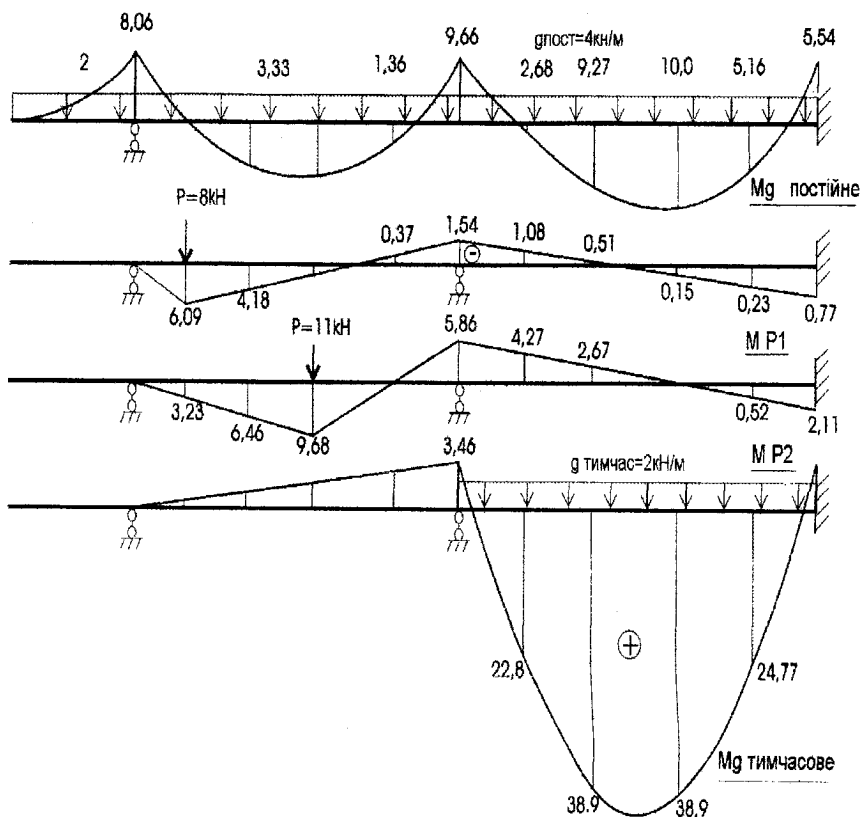


Рисунок 2.2.3 – Ешори моментів від постійних та тимчасових навантажень

2.2.3 Розрахунок нерозрізної балки на тимчасове навантаження. Побудова ліній впливу

Задача про побудову ліній впливу /л.в./ зводиться до знаходження функціональної залежності між шуканим зусиллям і вантажем, що переміщається по нерозрізній балці $P = 1$.

Оскільки нерозрізна балка статично невизначена, спочатку визначають залежність між зусиллями в "зайвих" зв'язках (вектор X). За знайденим значенням X будують лінії впливу заданого зусилля.

Лінії впливу зусиль в "зайвих" зв'язках \bar{X} для n разів статично

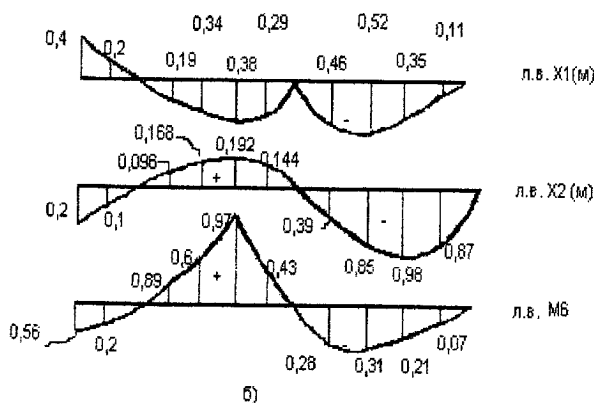
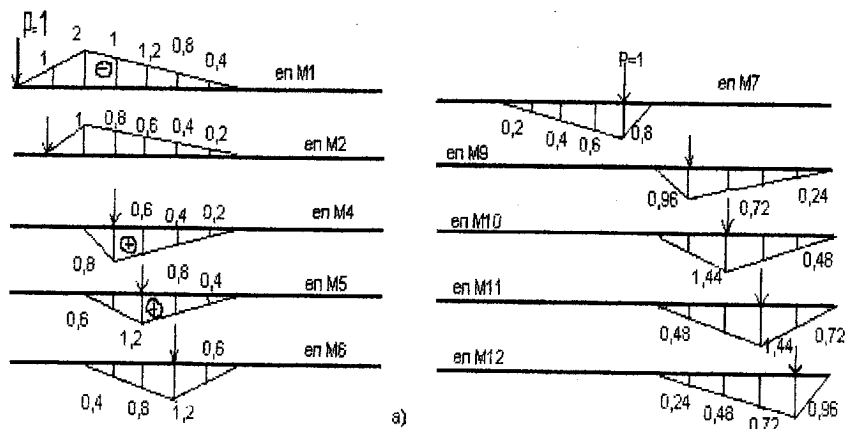


Рисунок 2.2.4 – Епюра моментів і ліній впливу:
 а - епюри моментів від нерухомого навантаження;
 б - лінії впливу X_1 , X_2 , M_6

Підставимо обчислені значення B , A_S^{-1} , A_{tr}^0 , L_{tr}^{01} в (2.2.23):

$$л.в. X = \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \begin{matrix} 3E \\ 125 \end{matrix} \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ x \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{vmatrix} *$$

$$\lambda M = \frac{1}{1250}$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(1)
1250	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(2)
2500	1250	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(3)
1900	950	0	952	666	404	178	0	115	129	86	29	0	(4)
1300	650	0	654	1332	808	356	0	230	259	176	58	0	(5)
700	350	0	356	748	1212	534	0	345	389	259	85	0	(6)
100	50	0	58	164	366	712	0	461	518	345	115	0	(7)
500	250	0	240	420	480	350	0	576	648	432	144	0	(8)
350	175	0	168	294	336	252	0	653	194	29	17	0	(9)
200	100	0	96	168	192	144	0	382	1036	451	110	0	(10)
50	25	0	24	42	48	36	0	110	379	893	237	0	(11)
100	50	0	48	84	96	72	0	101	278	165	365	0	(12)
250	125	0	120	210	240	180	0	432	936	1224	1008	0	(13)

Лінії впливів опорних моментів, X_1, X_2 і прогонового M_v показані на рис. 2.2.4,б.

Побудову ліній впливу X та M зручно виконувати за допомогою ЕОМ.

2.3 Розрахунок статично невизначеної рами за методом переміщень

2.3.1 Склад завдання

1. Визначити ступінь статичної невизначеності за методом переміщень. Визначити невідомі за методом переміщень – вибрати основну систему.
2. В основній системі побудувати епюри M_i^n від одиничних значень лінійних і кутових вимушених переміщень, а також епюру M_p^n від заданого зовнішнього навантаження.
3. Записати систему канонічних рівнянь методу переміщень, визначити її коефіцієнти і вантажні члени.
4. Розв'язати систему і перевірити отримані результати.
5. Побудувати епюру M .
6. Виконати перевірку побудови епюри M статичним і кінематичним методами.
7. Побудувати епюри Q, N і перевірити їх.

2.3.2 Приклад розрахунку

1. Накреслити розрахункову схему рами (рис. 2.3.1), вказати задані розміри та навантаження.

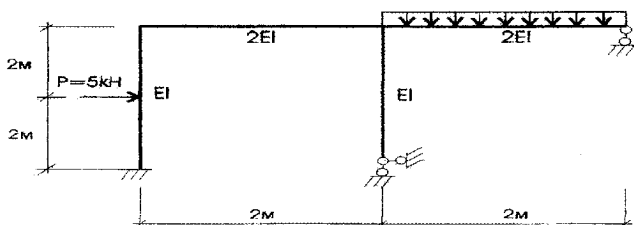


Рисунок 2.3.1 – Розрахункова схема рами

Для розрахунку рами методом переміщень необхідно визначити число невідомих кутових і лінійних переміщень. З цією метою підраховується число жорстких вузлів рами. Жорстким вважається вузол, в якому сходяться жорстко закріплені кінці стрижнів. Число жорстких вузлів для наведеної рами $n^{\text{ж}} = 2$ рис. 2.3.2.

У всі жорсткі вузли рами, включаючи опорні, вводять шарніри. Далі досліджується ступінь геометричної змінності такої модифікованої рами.

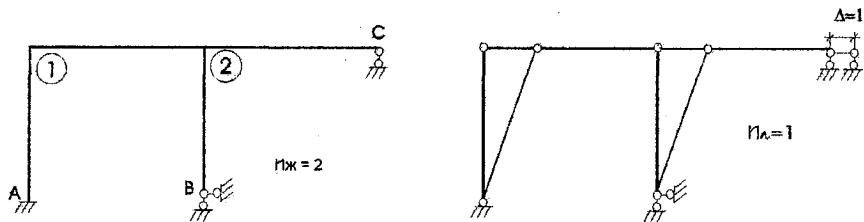


Рисунок 2.3.2 – Послідовність визначення кінематичної невизначеності при розрахунку методом переміщень: а - визначення числа жорстких вузлів; б - підрахунок числа лінійних переміщень рами

Задана рама після встановлення в неї шарнірів отримує можливість вільного переміщення по горизонталі, отже, ступінь її геометричної змінності $n^г = 1$.

Ступінь кінематичної невизначеності за методом переміщень

$$n = n^ж + n^л = 2 + 1 = 3. \quad (2.3.1)$$

Для вибору основної системи методу переміщень в жорсткі вузли рами і за можливими напрямками лінійних зсувів вводимо додаткові зв'язки, що перешкоджатимуть кутовим і лінійним переміщенням.

Після накладання додаткових зв'язків рама перетворюється на сукупність стержнів, жорстко закріплених двома або одним кінцем. За невідомі, в основній системі методу переміщень, приймаємо невідомі кутові і лінійні переміщення, які виникли в додатково накладених зв'язках після прикладання навантаження.

До остаточного визначення приймаємо їх рівними одиниці.

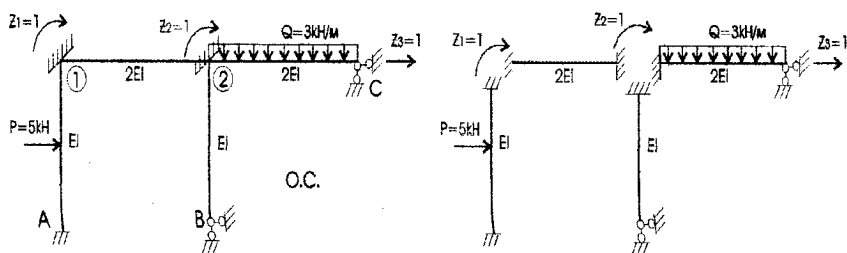


Рисунок 2.3.3 – Вибір основної системи: а - основна система методу переміщень; б - сукупність стержнів, жорстко затиснених двома або одним кінцем

Заздалегідь напрям повороту приймаємо за рухом годинникової стрілки, можливе лінійне переміщення вважаємо зміщення зліва направо.

Дійсні напрями кутових і лінійних переміщень уточнюються розрахунком.

2. Основну систему методу переміщень (рис. 2.3.3) завантажують по черзі кутовими і лінійними одиничними зсувами, а також зовнішнім навантаженням. За таблицями реактивних зусиль зігнутих стрижнів будуються епюри моментів $M_1^n, M_2^n, M_3^n, M_p^n$ в основній системі від одиничних вимушених переміщень і силового навантаження (рис. 2.3.4).

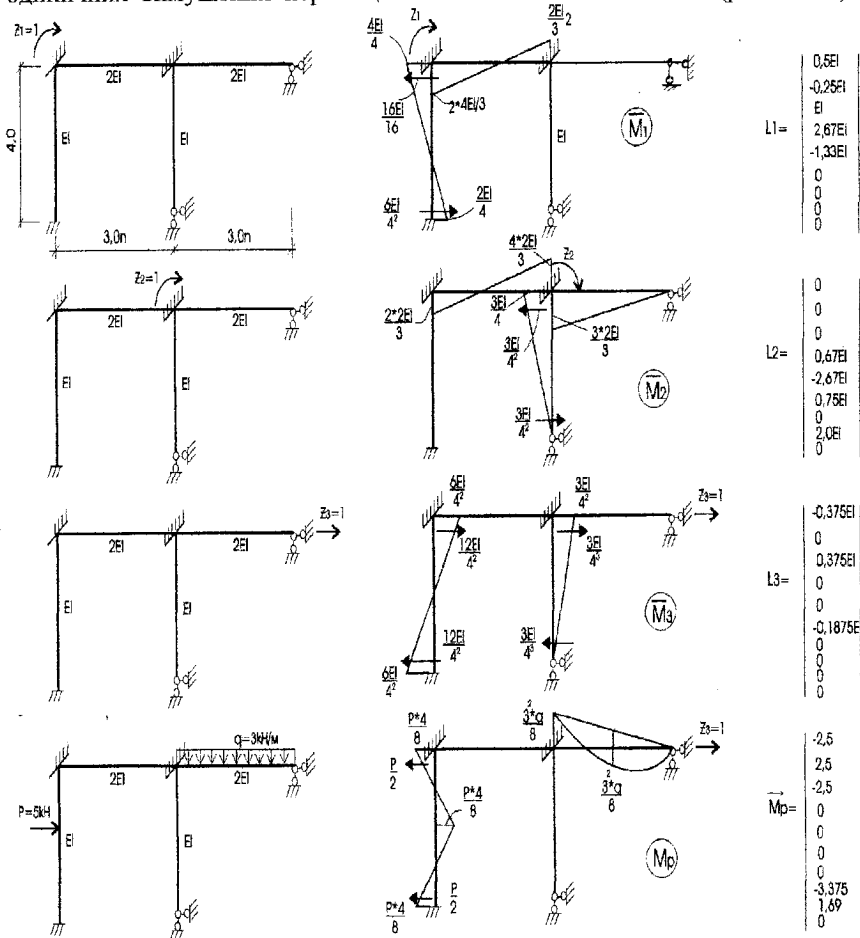


Рисунок 2.3.4 – Одиничні і вантажні епюри моментів в основній системі методу переміщень. Матриці впливу одиничних переміщень

3. Система канонічних рівнянь методу переміщень, яка виражає умову рівності нулю реакцій в додаткових зв'язках, має такий вигляд:

$$\begin{cases} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + r_{13}z_3 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + \dots + r_{2n}z_n + R_{2p} = 0 \\ r_{n1}z_1 + r_{n2}z_2 + \dots + r_{nn}z_n + R_{np} = 0 \end{cases} \quad (2.3.2)$$

де r_{ij} – реактивне зусилля в i -тому додатковому зв'язку, викликане одиничним вимушеним переміщенням j -го зв'язку;

$i=1,2,3,\dots,n$; $j=1,2,3,\dots,n$; z_i – реактивне зусилля i -го зв'язку;

R_{ip} – вантажний коефіцієнт, реактивне зусилля в i -му зв'язку, викликане навантаженням.

В матричній формі система канонічних рівнянь:

$$R \cdot Z + R_p = 0; \quad (2.3.3)$$

$$R = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix}; \quad R_p = \begin{vmatrix} R_{1p} \\ R_{2p} \\ \dots \\ R_{np} \end{vmatrix}; \quad Z = \begin{vmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_n \end{vmatrix};$$

де R – матриця, складається з коефіцієнтів канонічних рівнянь;

R_p – вектор, включає вантажні складові;

Z – вектор шуканих переміщень.

Стосовно даного прикладу система канонічних рівнянь

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0 \end{cases}; \quad \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_{1p} \\ R_{2p} \\ R_{3p} \end{vmatrix} = 0,$$

де $r_{11}, r_{12}, r_{13}, R_{1p}$ – реактивні моменти, які виникають в першому додатково накладеному зв'язку від одиничних зсувів і навантаження. Визначаються при розгляді рівноваги відповідного вузла (рис.2.3.5)

$$\Sigma M_1 = 0;$$

Γ_{21} , Γ_{22} , Γ_{23} , R_{2p} - реактивні моменти в додатково введеному жорсткому записненні вузла 2 від одиничних зсувів і навантаження. Визначаються при розгляді рівноваги відповідного вузла (рис.2.3.5)

$$\Sigma M_2 = 0;$$

Γ_{31} , Γ_{32} , Γ_{33} , R_{3p} - реактивні сили, які виникають в третьому додатково введеному зв'язку - в опорному горизонтальному стержні. Визначаються при розгляді рівноваги всіх сил на вісь додатково введеного стержня (рис.2.3.5)

$$\Sigma x = 0.$$

Реактивне зусилля в додатковому зв'язку вважається додатнім, якщо напрям його дії збігається з вибраним напрямом повороту або лінійним зміщенням вузла.

4. Розв'язання системи канонічних рівнянь проводять за допомогою ЕОМ

$$\begin{aligned} 3,67EIz_1 + 1,33EIz_2 - 0,375EIz_3 + 2,5 &= 0; \\ 1,33EIz_1 + 5,42EIz_2 - 0,188EIz_3 - 3,38 &= 0; \\ -0,375EIz_1 - 0,19EIz_2 + 0,235EIz_3 - 2,5 &= 0; \end{aligned}$$

Перевірка правильності розв'язання системи здійснюється шляхом підстановки знайдених невідомих в СЛАР (дозволяється похибка 1-1,5%).

$$4,625EIz_1 + 6,56EIz_2 - 0,328EIz_3 - 3,38 = 0$$

$$0,722 + 6,519 - 3,844 - 3,38 = 0; \quad 3,861 - 3,844 = 0;$$

5. Елюра згинальних моментів (рис. 2.3.6) будується за формулою

$$M = \sum_{i=1}^n M_i Z_i + M_p, \quad (2.3.4)$$

де M_i – епори згинальних моментів в основній системі від одиничних значень i -х переміщень;

n – число одиничних переміщень, тобто ступінь статичної невизначеності за методом переміщень;

Z_i – знайдені значення кутових і лінійних переміщень вузлів рами;

M_p - ешора згинальних моментів в основній системі від зовнішнього навантаження.

$\Sigma M_2 = 0 \quad r_{21} - \frac{4}{3}EI = 0; \quad r_{21} = 1,333.$
 $\Sigma M_2 = 0 \quad r_{22} - 2EI - \frac{3}{4}EI - \frac{8}{3}EI = 0; \quad r_{22} = 5,42EI.$
 $\Sigma M_2 = 0 \quad r_{23} + \frac{3}{16}EI = 0; \quad r_{23} = -0,188EI.$
 $\Sigma M_2 = 0 \quad R_{2p} + 3,38 = 0; \quad R_{2p} = -3,38.$

$\Sigma X = 0; \quad r_{31} + \frac{3}{8}EI = 0; \quad r_{31} = -0,375EI.$
 $\Sigma X = 0; \quad r_{32} + \frac{3}{16}EI = 0; \quad r_{32} = -0,188EI.$
 $\Sigma X = 0; \quad r_{33} - \frac{3}{4}EI - \frac{12}{4^3}EI = 0; \quad r_{33} = 0,215EI.$
 $\Sigma X = 0; \quad R_{3p} - 2,5 + 5 = 0; \quad R_{3p} = -2,5.$

$\Sigma M_1 = 0 \quad r_{13} + \frac{3}{8}EI = 0; \quad r_{13} = -0,375EI.$

$\Sigma M_1 = 0 \quad R_{1p} - \frac{5}{2} = 0; \quad R_{1p} = 2,5.$

$\Sigma M_1 = 0 \quad r_{11} = \frac{4}{3}EI - EI = 0; \quad r_{11} = 3,667EI.$

$\Sigma M_1 = 0 \quad r_{12} - \frac{8}{3}EI = 0; \quad r_{12} = 1,333EI.$

Рисунок 2.3.5 – Визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь методу переміщень

Для даної рами:

$$M = M^{\text{II}}_1 Z_1 + M^{\text{II}}_2 Z_2 + M^{\text{II}}_3 Z_3 + M^{\text{II}}_p. \quad (2.3.5)$$

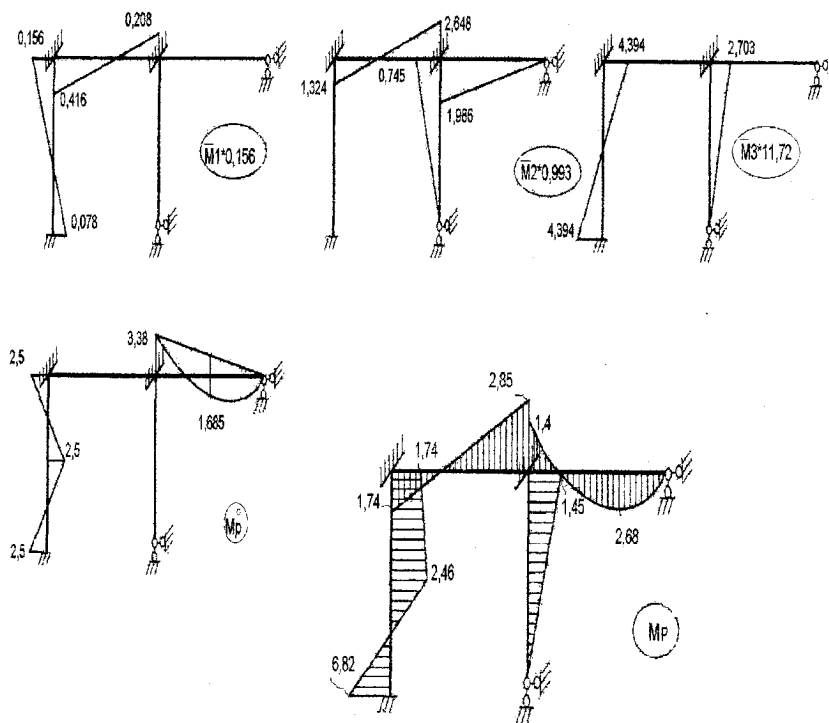


Рисунок 2.3.6 – Етапи побудови епюри моментів

Епюра моментів в матричній формі

$$\vec{M} = \vec{M}^n p + \vec{M}^n z = L_0 \vec{P} + L_z \vec{Z}, \quad (2.3.6)$$

де L_0 – матриця, елементи якої є ординатами епюри моментів в характерних перерізах основної системи при $P = I$;

\vec{P} – вектор зовнішнього навантаження;

$$L_z = \begin{vmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{vmatrix}, \quad (2.3.7)$$

- матриця впливу одиничних переміщень, складається з матриць впливу.

6. Статична перевірка включає розгляд рівноваги вузлів рами (рис.2.3.7).

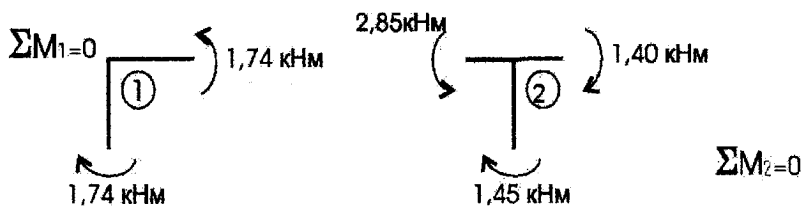


Рисунок 2.3.7 – Статична перевірка рівноваги вузлів

Правильність отриманої епюри моментів необхідно підтвердити також кінематичною перевіркою визначення будь-якого переміщення в дійсності явно рівного нулю. Для цього вибирається основна система методу сил і будується епюра моментів в одному з одиничних станів (рис. 2.3.8). Обчислення переміщення виконується за формулою Максвела – Мора. Розбіжність між додатною і від’ємною величинами не повинна перевищувати 3% від більшої з них.

$$\Delta_1 = \frac{3 \cdot 3}{2EI \cdot 6} (2 \cdot 1,74 - 2,85) + \frac{2 \cdot 3}{2EI} (1,74 + 2,46) + \frac{2 \cdot 3}{2EI} (-6,32 + 2,46) = \frac{0,4725}{EI} +$$

$$\frac{12,6}{EI} - \frac{13,08}{EI} \approx 0.$$

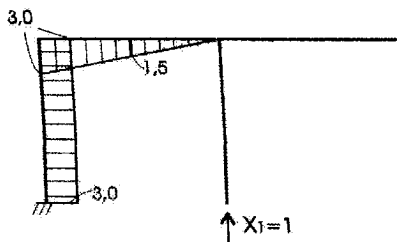


Рисунок 2.3.8 – Одинична епюра моментів в основній системі методу сил

Помилка складає: $(|+13,73| - |-13,08|)$ від $(+13,73)$ 1,82% , що < 3%.

7. Поперечні сили (рис.2.3.9) визначаються за формулою:

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M_{пр} - M_{лев}}{l}, \quad (2.3.8)$$

- де Q_x - поперечна сила в будь-якому перерізі стержня;
 Q_x^0 - поперечна сила в простій балці;
 $M_{пр}$, $M_{лів}$ - згинальні моменти на правому і лівому кінцях даного стержня;
 l - довжина даного стержня.

Стояк лівий:

$$Q_{ліве} = \frac{6,32 - (-2,46)}{2} = 4,64;$$

$$Q_{праве} = \frac{-2,46 - (-1,74)}{2} = -0,36;$$

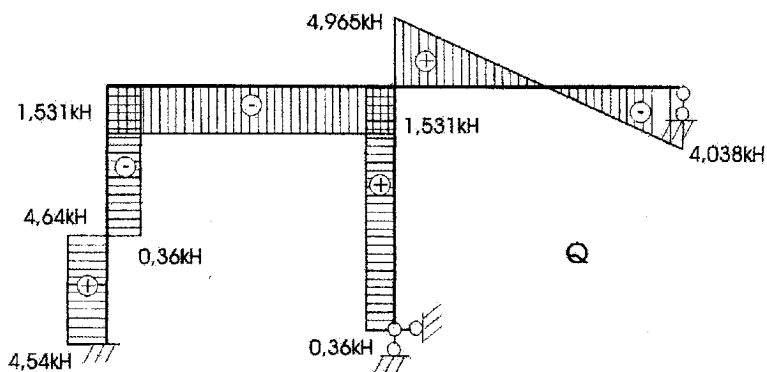


Рисунок 2.3.9 – Ешора поперечних сил в заданій рамі

Ригель лівий

$$Q_1 = Q_2 = \frac{-1,74 - 2,85}{3} = -1,531 \text{ кН}.$$

Стояк правий

$$Q_B = Q_2 = \frac{1,45}{4} = 0,36 \text{ кН}.$$

$$Q_2 = \frac{0 - (-1,4)}{3} = 4,965 \text{ кН},$$

Ригель правий

$$Q_C = -4,5 + \frac{0 - (-1,4)}{3} = -4,038 \text{ кН}.$$

Поздовжні сили в стержнях обчислюються з розгляду рівноваги вузлів (рис. 2.3.10).

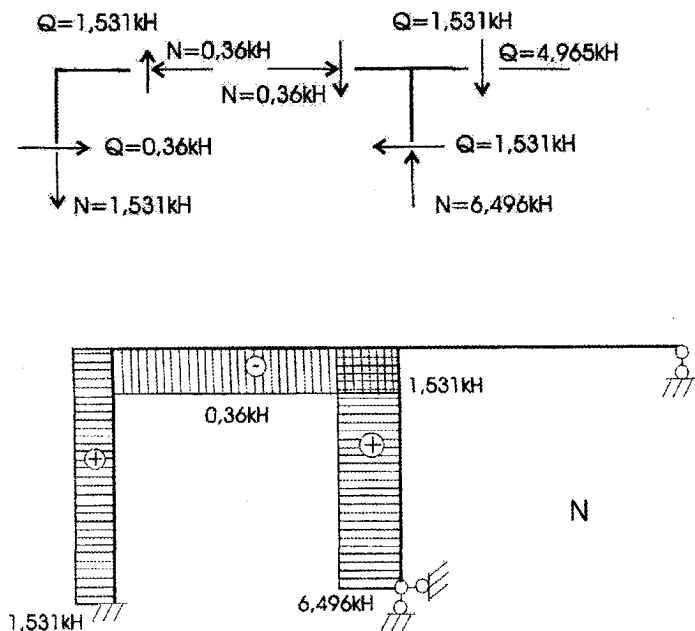


Рисунок 2.3.10 – Епюра поздовжніх сил в заданій рамі

2.4 Розрахунок статично невизначеної ферми

2.4.1 Склад завдання

1. Проведення кінематичного аналізу споруди, визначення ступеня статичної невизначеності.
2. Вибір раціональної основної системи.
3. Запис канонічних рівнянь методу сил.
4. Визначення зусиль в стержнях основної системи від одиничних зайвих невідомих $X_1 = I; \dots; X_n = I$ (аналітично або побудовою діаграми Максвелла - Кремони).
5. Визначення зусиль в стержнях основної системи від зовнішнього навантаження (аналітично чи графічно).
6. Визначення одиничних коефіцієнтів при невідомих і вільних членах, а також розв'язання системи канонічних рівнянь.
7. Вирахування дійсних зусиль в стержнях заданої ферми.
6. Перевірка правильності отриманих зусиль.
9. Аналіз процесу розв'язування, визначення причинно-наслідкових взаємозв'язків окремих операцій.

2.4.2 Приклад розрахунку

Перед рішенням заданої проблеми слід повторити теми, призначені розрахунку статично визначених плоских ферм, а також методу сил.

Статично невизначеними є ферми, які мають зайві стержні. Тому це вид статично невизначених систем. Таким чином, розрахунок можна виконувати дедуктивним виводом основних принципів та правил із, уже відомого, методу сил.

Ступінь статичної невизначеності заданої ферми визначається за формулою:

$$n = C + C_0 - 2U, \quad (2.4.1)$$

де C – число стержнів ферми;
 C_0 – число опорних стержнів;
 U – число вузлів ферми.

Ферма зображена на рис. 2.4.1,а внутрішньо один раз статично невизначена:

$$N = 18 + 3 - 2 \cdot 10 = 1.$$

Ферма зображена на рис. 2.4.1,б зовнішньо два рази статично невизначена:

$$N = 13 + 5 - 2 \cdot 8 = 2.$$

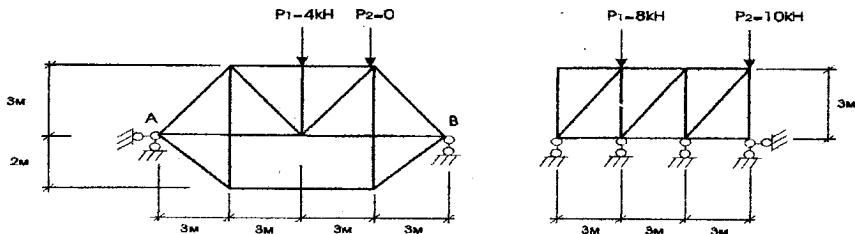


Рисунок 2.4.1 – Розрахункові схеми ферм

Основну систему вибирають розрізанням зайвих стержнів ферми (рис. 2.4.2,а) або відкиданням зайвих опорних стержнів (рис. 2.4.2,б) (можливі випадки використання обох рекомендацій одночасно).

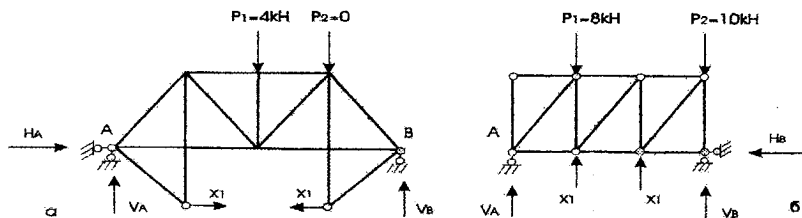


Рисунок 2.4.2 – Варіанти основних систем

Записуються канонічні рівняння методу сил для обох основних систем:

Рис. 2.4.2,а - $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0,$

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Рис. 2.4.2,б -

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Коефіцієнти при невідомих і вільні члени рівнянь визначаються з урахуванням дії лише поздовжніх сил:

$$\delta_{ik} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i N_k}{E_i F_i} l_k; \quad \Delta_{iP} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i N_P}{E_i F_i} l_k;$$

де N_i , N_k - зусилля в основній системі при дії одиничного зайвого невідомого, відповідно, $X_i=1$, $X_k=1$;

N_P - зусилля в основній системі від дії зовнішнього навантаження.

Покажемо подальший хід розрахунку для ферми, зображеної на рис.2.4.1,а. Для цього в основній системі (рис. 2.4.3) пронумеруємо зовнішні і внутрішні поля.

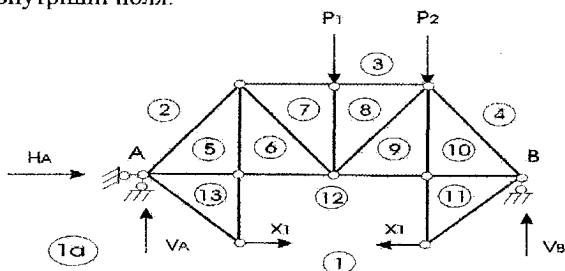


Рисунок 2.4.3 – Нумерація полів в основній системі

Далі завантажимо основну систему лише одиничною дією зайвого невідомого $X_1 = I$ (рис. 2.4.4).

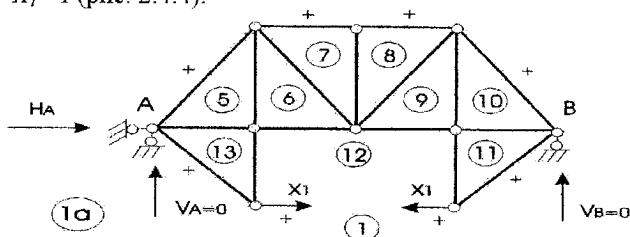


Рисунок 2.4. – Завантаження основної системи $X_1 = I$

Опорні реакції $V_a=H_a=V_B=0$. Побудову розпочнемо з зображення в вибраному масштабі рівнодійної сил зовнішнього навантаження (в даному випадку $X_1=I$). Далі необхідно за годинниковою стрілкою вузол, в якому сходиться не більше двох невідомих стержнів і т.д. При правильній побудові діаграма повинна замкнутися (рис.2.4.5).

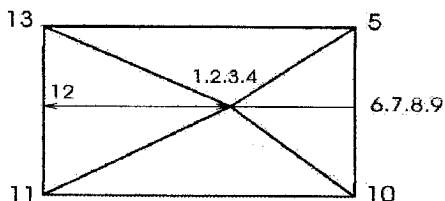


Рисунок 2.4.5 – Діаграма Максвелла - Кремони при навантаженні $X_1 = 1$

Прикладемо до основної системи тільки зовнішнє навантаження та виконаємо її розрахунок графічно (рис. 2.4.6).

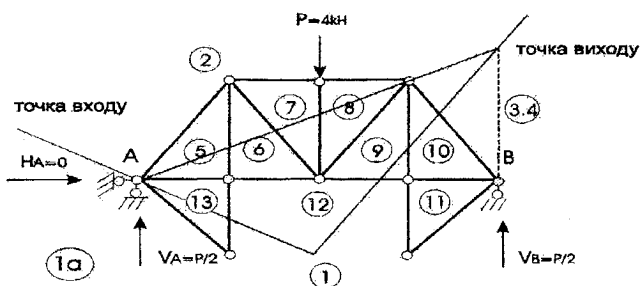


Рисунок 2.4.6 – Завантаження основної системи зовнішнім навантаженням

Опорні реакції визначимо також графічно за допомогою побудови замкнутого багатокутника зовнішніх сил. Правильність побудови опорних реакцій можна перевірити аналітично ($\Sigma M_a = 0$, $\Sigma M_b = 0$). Побудову діаграми від дії $P=4$ кН показано на рис. 2.4.7.

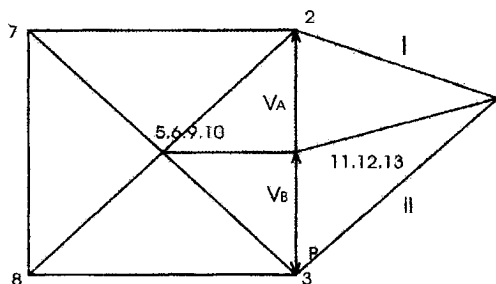


Рисунок 2.4.7 – Діаграма Максвела - Кремони від завантаження основної системи зовнішнім навантаженням

Розрахунок статично невизначеної ферми потребує великої кількості обчислень, які зручно робити в табличній формі (дивись таблицю 2.4.1). Припустимо, що відношення площ поперечних перерізів поясів ферми до площ поперечних перерізів решітки $F_{\text{пояс}}/F_{\text{реш}} = 2$. При заповненні графі 3 це потрібно врахувати. Графи 4 і 6 заповнюються відповідно до рисунків 2.4.6, 2.4.7.

Якщо ферма внутрішньо статично невизначена, додавання в графі 5 розповсюджується і на розсічений стержень (в нашому випадку і на стержень 1-12).

Додавання в графі 5 дає одиничний коефіцієнт δ_{11} . Додавання в графі 7 дає вантажний коефіцієнт Δ_{1P} . Розв'язуємо рівняння 2.4.1:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}},$$

$$X_1 = -\frac{-50,63}{43,4} = 1,17 \text{ kH}.$$

Для визначення дійсних зусиль у вузлах ферми скористаємось формулою:

$$N^I = N_1^I * X_1 + N_2^I * X_2 + N_3^I * X_3 + \dots + N_P^O. \quad (2.4.2)$$

Для нашого випадку (графа 8):

$$N = N_1 X_1 + N_P^O. \quad (2.4.3)$$

Правильність розв'язку перевіряємо виконанням умови:

$$\sum \frac{N_\sigma^i N^i}{E_i A_i} l_i = 0, \quad (2.4.4)$$

$$N_\sigma^i = N_1^i + N_2^i + N_3^i + \dots + N_n^i.$$

Для нашого випадку

$$\sum \frac{N_1 N_P}{EF} l_i = 0,$$

тобто, переміщення за напрямком зайвого невідомого $X_1=0$.

Основне питання нашої проблеми вирішене. Ферма розрахована, зроблено кінематичну перевірку. Проте ніяка проблема не може бути вичерпана до кінця. Пропонується критично оцінити спосіб рішення даної проблеми. Можливі більш прості рішення, можливі помилки в проведених розрахунках, переосмислення поставленої проблеми. Дуже важливо повторити весь хід розв'язування, установити зв'язок між його етапами.

Таблица 2.4.1 – Загальна таблиця зусиль

Номер стержня		L_I , м	A_I , M^2	N_I^o	$\frac{N_I^o * L_I}{EA_I}$	N_P^o кН	$\frac{N_P^o * N_P^o * L_I}{EA_I}$	$N_I = N_I^o * X_I + N_{P,кН}^o$	$\frac{N_I^o * N_I^o * L_I}{EA_I}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
ВП	2-7	3	$2A_I$	0,67	0,67	-4	-4	-3,22	-3,22
ВП	3-8		$2A_I$	0,67	0,67	-4	-4	-3,22	-3,22
НП	5-13	3	$2A_I$	-1,67	4,17	2	-5	0,06	-0,14
НП	6-12	3	$2A_I$	-1,67	4,17	2	-5	0,06	-0,14
НП	9-12	3	$2A_I$	-1,67	4,17	2	-5	0,06	-0,14
НП	10-11	3	$2A_I$	-1,67	4,17	2	-5	0,06	-0,14
НП	1-12	6	$2A_I$	+1	3	0	0	1,17	3,50
С	5-6	3	A_I	-0,67	1,33	0	0	-0,78	1,56
С	7-8	3	A_I	0	0	-4	0	-4	0
С	9-10	3	A_I	-0,67	1,33	0	0	-0,78	1,56
С	13-12	2	A_I	-0,67	0,89	0	0	-0,78	1,04
С	12-11	2		-0,67	0,89	0	0	-0,78	1,04
Р	2-5	3,2	A_I	0,94	3,77	-2,83	-11,31	-1,73	-6,91
Р	6-7	3,2	A_I	0	0	2,83	0	2,83	0
Р	8-9	3,2	A_I	0	0	2,83	0	2,83	0
Р	3-10	3,2	A_I	0,94	3,77	-2,83	-11,31	-1,73	-6,92
Р	1-13	13	A_I	1,20	5,31	0	0	1,40	6,08
Р	1-11	13	A_I	2,20	5,31	0	0	1,40	6,08

$$\sum = \delta_{11}$$

$$+43,40295$$

$$\sum = \Delta_{1P}$$

$$-50,6274$$

$$\sum \leq 3\%$$

$$\sum = -20,8334+$$

$$+20,8334 = 0$$

2.5 Розрахунок стійкості статично невизначеної рами за методом переміщень

2.5.1 Склад завдання

1. Вибрати розрахункову схему.
2. Встановити число невідомих за методом переміщень.
3. Вибрати основну систему методу переміщень для розрахунку на стійкість.
4. В основній системі методу переміщень побудувати одиничні епюри від вимушених кутів повертання та лінійних зміщень (вантажна епора буде нулева, оскільки зовнішнє навантаження прикладається лише на кінцях стержнів).
5. Записати рівняння стійкості (вікове рівняння) і обчислити його коефіцієнти при розгляді рівнянь статички в вузлах одиничних епор, побудованих в основній системі методу переміщень.
6. Розв'язати нелінійне рівняння стійкості і обчислити критичні сили P^{KP} , а також коефіцієнти вільних довжин стояків рами.

2.5.2 Приклад розрахунку

– Визначити критичний параметр навантаження P^{KP} для рами, показаної на рис. 2.5.1.

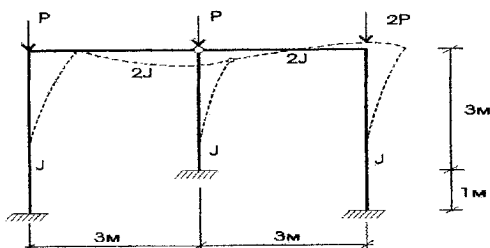


Рисунок 2.5.1 – Розрахункова схема рами

До втрати стійкості в стержнях рами не виникає вигину. При досягненні навантаженням критичного значення, вузли рами можуть отримати як кутові, так і лінійні зсуви (можлива форма втрати стійкості показана на рис. 2.5.1 пунктиром). При розрахунку рами за методом переміщень, рама має три невідомі - два кути повороту і одне лінійне зміщення.

Основну систему методу переміщень при розрахунку стійкості подано на рис.2.5.2.

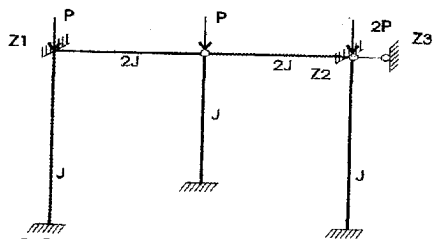


Рисунок 2.5.2 – Основна система методу переміщень

На рис. 2.5.3 показано епюри згинальних моментів від одиничних поворотів вузлів (рис. 2.5.3,а,б) і від одиничного горизонтального зсуву (рис. 2.5.3,в).

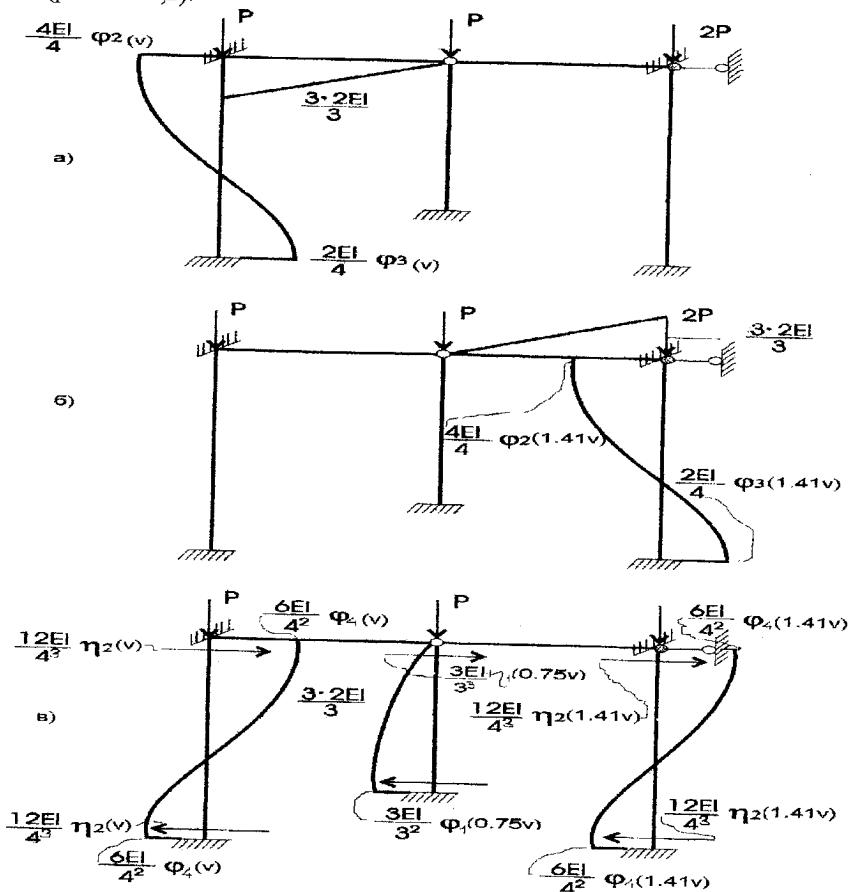


Рисунок 2.5.3 – Епюри моментів в основній системі методу переміщень

Для всіх трьох стоеків рами значення параметра V матимуть різні величини, оскільки поздовжні сили і довжини стоеків неоднакові:

для лівого стаяка

$$V_1 = 4\sqrt{\frac{P}{EI}} = V;$$

для правого стаяка

$$V_3 = 4\sqrt{\frac{2P}{EI}} = 1,41V;$$

для середнього стаяка

$$V_2 = 3\sqrt{\frac{P}{EI}} = 0,75V.$$

На одиничних епюрах при функціях $\varphi_2(v)$, $\varphi_3(v)$, $\varphi_4(v)$ і т.д. в дужках записані ті значення V , яким ці функції відповідають. Оскільки до втрати стійкості вигину не було, то канонічні рівняння однорідні (тобто, вільні члени дорівнюють нулю) і система розрахункових рівнянь для заданої рами матиме вигляд:

$$\begin{aligned} r_{11}^* z_1 + r_{12}^* z_2 + r_{13}^* z_3 &= 0; \\ r_{21}^* z_1 + r_{22}^* z_2 + r_{23}^* z_3 &= 0; \\ r_{31}^* z_1 + r_{32}^* z_2 + r_{33}^* z_3 &= 0; \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Значення коефіцієнтів обчислюють за правилами методу переміщень:

$$r_{11}^* = \frac{4EI}{4} \varphi_2(v_1) + 2EI = EI[\varphi_2(v) + 2];$$

$$r_{22}^* = \frac{4EI}{4} \varphi_2(v_3) + 2EI = EI[\varphi_2(1.41v) + 2];$$

$$r_{33}^* = \frac{12EI}{4^3} [\eta_2(v_1) + \eta_2(v_3)] + \frac{3EI}{3^3} \eta_1(v_2) = EI\{0.187[\eta_2(v) + \eta_2(1.41v) + 0.111\eta_1(0.75v)]\}$$

$$r_{12}^* = r_{21}^* = 0;$$

$$r_{13}^* = r_{31}^* = -\frac{6EI}{4^2} \varphi_4(v_1) = -0.375\varphi_4(v);$$

$$r_{23}^* = r_{32}^* = -\frac{6EI}{4^2} \varphi_4(v_3) = -0.375\varphi_4(1.41v);$$

Рівняння стійкості:

(2.5.2)

$$\begin{vmatrix} r_{11}^* & r_{12}^* & r_{13}^* \\ r_{21}^* & r_{22}^* & r_{23}^* \\ r_{31}^* & r_{32}^* & r_{33}^* \end{vmatrix} = 0.$$

Після підстановки величин коефіцієнтів одержуємо трансцендентне рівняння стійкості, яке розв'язується за допомогою методу підбору:

$$12[\eta_2(v) + \eta_2(1.41v)] + 7.11\eta_1(0.75v) = \frac{9[\varphi_4(v)]^2}{2 + \varphi_2(v)} - \frac{[2\varphi_2(1.41v) + \varphi_3(1.41v)]^2}{2 + \varphi_2(1.41v)} \quad (2.5.3)$$

Перш ніж задатися якимись значеннями V , доцільно подивитися, в яких межах вони можуть змінюватися. Лівий стоек рами, до параметра функції V якого наведені параметри всієї решти стоек, знаходиться в умовах, коли її верхній кінець може зміщуватися по горизонталі (при зміщенні чиниться опір жорсткості інших стоек) і пружно повертатися (повертання чинить опір жорсткість ригеля). Отже, критична сила лівого стоек рами буде вище, ніж для стержня, вид якого показаний на рис. 2.5.4,а, і нижче, ніж для стержня, показаного на рис. 2.5.4,б.

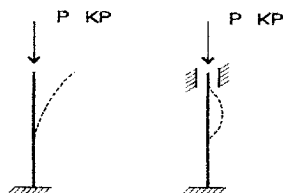


Рисунок 2.5.4 – Вид деформованого стержня при втраті стійкості

Для цих двох граничних випадків знаходимо значення V :

$$P^{KP} = \pi^2 EJ / 4h^2 = V^2 EJ / h^2,$$

де $V = \pi / 2 = 1,57$;

$$P^{KP} = 4\pi^2 EJ / h^2 = V^2 EJ / h^2,$$

де $V = 2\pi = 6,28$.

Отже,

$$1,57 < V < 6,28.$$

Зазначимо, що можливість горизонтальних зсувів значно зменшує жорсткість системи і тому доцільно задатись значенням V більш близьким до нижньої межі, а не до верхньої.

$$I. \quad V = 2; \quad 1,41 V = 2,82; \quad 0,75 V = 1,5.$$

За таблицею 1 визначаємо:

$$\varphi_2(v) = 0,859; \quad \varphi_2(1,41V) = 0,7016$$

$$\varphi_3(1,41v) = 1,1744; \quad \varphi_4(v) = 0,9313;$$

$$\eta_1(0,75v) = 0,0893; \quad \eta_2(v) = 0,598;$$

$$\eta_1(1,41v) = 0,1965.$$

Ліва частина рівняння стійкості:

$$A = 12(0,598 + 0,197) + 7,11 * 0,0893 = 10,167;$$

$$B = \frac{9 * 0,9313^2}{0,895 + 2} + \frac{(2 * 0,7016 + 1,1745)^2}{0,7016 + 2} = 5,2;$$

$$A \neq B.$$

$$2. \quad v = 2,5; \quad 1,41v = 3,52; \quad 0,75v = 1,88;$$

$$\varphi_2(v) = 0,772; \quad \varphi_2(1,41V) = 0,495;$$

$$\varphi_3(1,41v) = 1,327; \quad \varphi_4(v) = 0,8909;$$

$$\eta_1(0,75v) = -0,442; \quad \eta_2(v) = 0,3701;$$

$$\eta_2(1,41v) = -0,2602.$$

$$A = -1,84, \quad B = 4,73, \quad A \neq B.$$

Побудуємо графік зміни величин A , B , вважаючи, що вони змінюються за лінійним законом в діапазоні $2 \leq V \leq 2,5$.

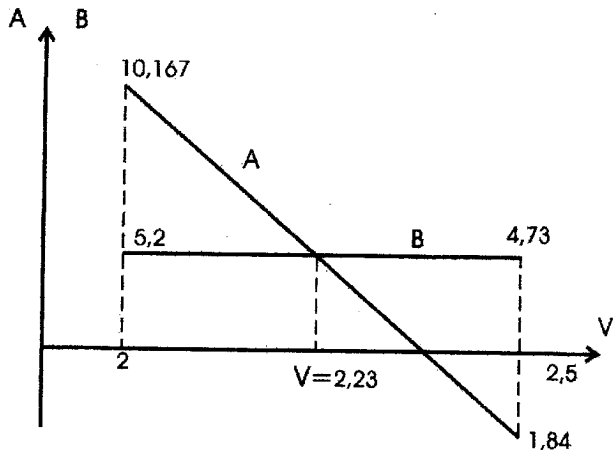


Рисунок 2.5.5 – Графічний метод розв’язання трансцендентного рівняння стійкості рами

Приймаємо за корінь рівняння $V_0 = 2,23$.

Критичний параметр навантаження

$$P^{кр} = \frac{v_0^2 EI}{h^2} = \frac{2,23^2 EI}{4^2} = 0,311 EJ \text{ кН}.$$

Коефіцієнти вільних довжин стояків рами:

$$\mu_1 = \frac{\pi}{v_1} = \frac{3,14}{2,23} = 1,41;$$

$$\mu_2 = \frac{\pi}{v_2} = \frac{3,14}{0,75 * 2,23} = 1,87;$$

$$\mu_3 = \frac{\pi}{v_3} = \frac{3,14}{1,41 * 2,23} = 1.$$

Таблиця 2.5.1 – Значення функцій методу переміщень для стиснуто – зігнутих стержнів

γ	$\varphi_1(\gamma)$	$\varphi_2(\gamma)$	$\varphi_3(\gamma)$	$\varphi_4(\gamma)$	$\eta_1(\gamma)$	$\eta_2(\gamma)$
1	2	3	4	5	6	7
0,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	0,997	0,998	1,001	0,999	0,984	0,996
0,4	0,989	0,994	1,003	0,997	0,936	0,984
0,6	0,986	0,988	1,006	0,994	0,856	0,964
0,8	0,957	0,979	1,011	0,989	0,743	0,936
1,00	0,931	0,966	1,017	0,983	0,598	0,900
1,10	0,916	0,959	1,021	0,980	0,513	0,879
1,2	0,900	0,951	1,025	0,975	0,420	0,856
1,3	0,881	0,942	1,030	0,971	0,318	0,831
1,4	0,861	0,933	1,035	0,967	0,208	0,803
1,5	0,833	0,923	1,040	0,962	0,089	0,774
1,6	0,815	0,912	1,046	0,957	-0,038	0,743
1,7	0,789	0,900	1,053	0,951	-0,174	0,710
1,8	0,761	0,877	1,060	0,945	-0,319	0,675
1,9	0,730	0,873	1,068	0,938	-0,474	0,637
2,0	0,696	0,859	1,076	0,931	-0,637	0,598
2,10	0,660	0,844	1,085	0,924	-0,810	0,556
2,2	0,620	0,827	1,095	0,916	-0,993	0,513
2,3	0,577	0,810	1,105	0,908	-1,186	0,467
2,4	0,530	0,791	1,116	0,900	-1,389	0,420
2,5	0,479	0,772	1,129	0,891	-1,604	0,370
2,6	0,423	0,751	1,142	0,881	-1,830	0,318
2,7	0,362	0,729	1,156	0,872	-2,068	0,264
2,8	0,294	0,706	1,171	0,861	-2,319	0,208
2,9	0,219	0,682	1,188	0,851	-2,584	0,150
3,00	0,136	0,656	1,206	0,840	-2,864	0,089
3,10	0,042	0,629	1,225	0,827	-3,161	0,021
3,2	-0,063	0,600	1,246	0,815	-3,478	-0,038
3,3	-0,185	0,569	1,269	0,802	-3,815	-0,105

Продовження таблиці 2.5.1.

1	2	3	4	5	6	7
3,4	-0,325	0,537	1,294	0,789	-4,178	-0,174
3,5	-0,489	0,502	1,321	0,775	-4,573	-0,246
3,6	-0,686	0,466	1,351	0,761	-5,006	-0,319
3,7	-0,9,27	0,426	1,383	0,746	-5,490	-0,395
3,8	-1,230	0,325	1,419	0,730	-6,044	-0,474
3,9	-1,627	0,341	1,458	0,713	-6,697	-0,554
4,00	-2,173	0,293	1,502	0,696	-7,506	-0,637
4,10	-2,981	0,242	1,550	0,678	-8,584	-0,722
4,2	-4,315	0,188	1,604	0,660	-10,20	-0,810
4,3	-6,995	0,129	1,664	0,640	-13,14	-0,900
4,4	-15,33	0,065	1,731	0,620	-27,78	-0,993
4,5	227,8	-0,005	1,807	0,599	221,05	-1,088
4,6	14,67	-0,081	1,893	0,577	7,616	-1,186
4,7	7,818	-0,165	1,992	0,554	0,455	-1,286
4,8	5,402	-0,257	2,106	0,530	-2,278	-1,389
4,9	4,146	-0,361	2,235	0,505	-3,8557	-1,495
5,00	3,361	-0,477	2,392	0,479	-4,972	-1,604
5,10	2,813	-0,610	2,576	0,452	-5,857	-1,715
5,2	2,399	-0,763	2,796	0,423	-6,655	-1,830
5,3	2,067	-0,942	3,065	0,393	-7,296	-1,947
5,4	1,788	-0,156	3,399	0,362	-7,932	-2,068
5,5	1,545	-1,418	3,823	0,329	-8,538	-2,192
5,6	1,326	-1,748	4,379	0,294	-9,127	-2,319
5,7	1,123	-2,180	5,135	0,258	-9,706	-2,449
5,8	0,930	-2,778	6,214	0,219	-10,28	-2,584
5,9	0,742	-3,668	7,873	0,179	-10,86	-2,723
6,00	0,555	-5,159	10,73	0,136	-10,44	-2,864
6,1	0,366	-8,2355	16,74	0,091	-12,04	-3,010
6,2	0,170	-18,59	37,31	0,042	-12,64	-3,161
6,28	0,000	-∞	+∞	0,000	-13,03	-3,290

2.6 Динамічний розрахунок статично невизначеної рами за методом сил на дію гармонійного навантаження

2.6.1 Склад завдання

- * Вибрати розрахункову схему.
- * Встановити ступінь статичної невизначності і число динамічних ступенів вільності.
- * Побудувати епюри згинальних моментів M_1 , M_2 і M_p від роздільно діючих одиничних інерційних сил і збудувальної сили в статично невизначеній рамі.
- * Записати вікове рівняння.
- * Обчислити коефіцієнти вікового рівняння.
- * Обчислити власні частоти коливань.
- * Виконати перевірку власних чисел і власних векторів.
- * Обчислити коефіцієнти головних форм коливань.
- * Побудувати головні форми коливань.
- * Записати систему амплітудних рівнянь.
- * Розрахувати і побудувати графіки розвитку амплітуд вимушених коливань від вібраційного навантаження.
- * Побудувати графіки динамічних коефіцієнтів.
- * Обчислити частоти віброгасіння.
- * Обчислити інерційні сили для заданої частоти збудувальної сили.
- * Розрахувати і побудувати динамічну епюру згинальних моментів.

2.6.2. Приклад розрахунку

Розрахункова схема (рис.2.6.1) і початкові дані:

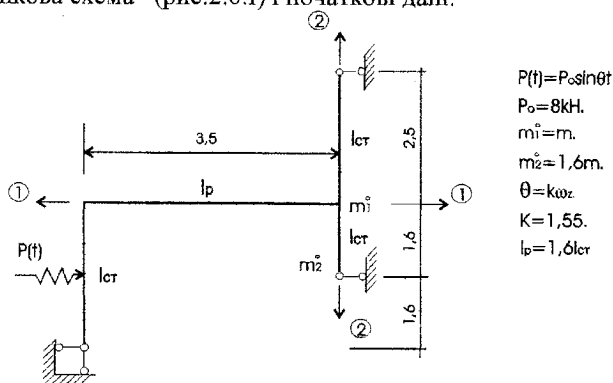


Рисунок 2.6.1 – Розрахункова схема та напрями коливань точкових мас

Ступінь статичної невизначеності:

$$L = 2Ш + C_0 - 3D = 1.$$

Число динамічних ступенів вільності (рис.2.6. I):

(1) - перший можливий напрям коливань маси $m_1 = m_1^0 = m$,

(2) - другий можливий напрям коливань маси $m_2 = m_1^0 + m_2^0 = 2.6m$.

Отже, число динамічних ступенів вільності рівне двом.

За методом сил розраховуємо епюри згинальних моментів від роздільно діючих одиничних інерційних сил і збурювальної сили одиничної величини:

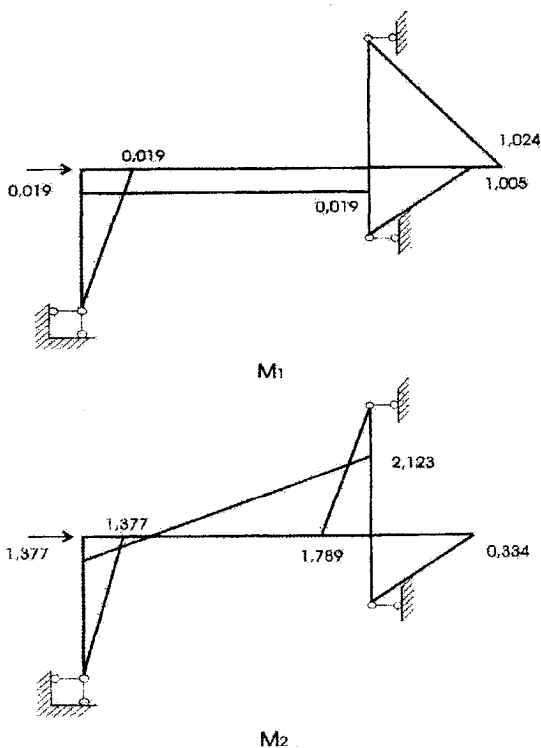


Рисунок 2.6.2 – Епюри моментів у статично невизначеній рамі від дії одиничних інерційних сил $I_1=1$, $I_2=1$ (після розкриття статичної невизначеності за методом сил)

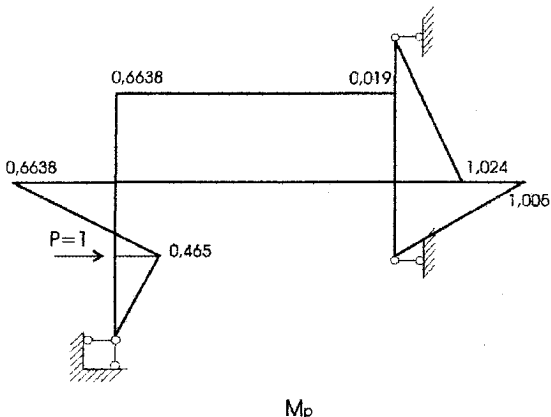


Рисунок 2.6.3 – Елора моментів в статично невизначеній рамі від дії одиничного зовнішнього навантаження (після розкриття статичної невизначеності за методом сил)

Запис вікового рівняння:

$$\begin{vmatrix} (m_1 \delta_{11} \omega^2 - 1) m_2 \delta_{12} \omega^2 & \\ m_2 \delta_{21} \omega^2 (m_2 \delta_{22} \omega^2 - 1) & \end{vmatrix} = 0. \quad (2.6.1)$$

Коефіцієнти вікового рівняння:

$$\begin{aligned} EJ \delta_{11} &= M_1 * M_1 = 1,5185 \\ EJ \delta_{22} &= M_2 * M_2 = 7,6059 \\ EJ \delta_{12} &= EJ \delta_{21} = M_1 * M_2 = -1,5184 \\ EJ \delta_{1p} &= M_1 * M_p = 0,7713 \\ EJ \delta_{2p} &= M_2 * M_p = 0,1218. \end{aligned}$$

Частоти власних коливань обчислюються за формулою:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22}) \pm \sqrt{(m_1 \delta_{11} - m_2 \delta_{22})^2 + 4 m_1 m_2 \delta_{12}^2}}{2 m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)} \quad (2.6.2)$$

Після підстановки коефіцієнтів δ_{ij} отримаємо:

$$\omega_1^2 = 0,0497557 \frac{EJ}{m}; \quad \omega_2^2 = 0,8362143 \frac{EJ}{m};$$

$$\omega_1 = 0,22306 \sqrt{\frac{EJ}{m}}; \quad \omega_2 = 0,914447 \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Перевірка властивостей власних чисел за формулою

$$\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} = m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} \quad (2.6.3)$$

Після підстановки коефіцієнтів отримаємо:

$$\left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} = 21,294065 \frac{m}{EI} \right) \approx \left(m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} = 21,29384 \frac{m}{EI} \right).$$

Коефіцієнти головних форм коливань обчислюються за формулами

$$\rho_{21}^{-1} = - \frac{m_1 \delta_{21} \omega_1^2}{m_2 \delta_{22} \omega_2^2 - 1}, \quad \rho_{22}^{-1} = - \frac{m_1 \delta_{12} \omega_2^2}{m_2 \delta_{22} \omega_2^2 - 1},$$

Після обчислень одержуємо:

$$\rho_{21} = -4,702968 \quad \rho_{22} = 0,0817246.$$

Перевірка ортогональності головних форм коливань за відомими їх коефіцієнтами за рівністю:

$$m_1 + m_2 \rho_{21} \rho_{22} = 0, \quad (2.6.4)$$

яка після підстановки коефіцієнтів приводить до тотожності:

$$m + 2,6m(-4,702968)0,0817246 = m(1 - 0,99928) \approx 0.$$

Побудова головних форм коливань виконується за допомогою їхніх коефіцієнтів, для цього у напрямі першого коливання відкладається амплітуда, рівна одиниці (в довільному масштабі). Для викреслювання першої головної форми коливань необхідно відкласти амплітуду за напрямом другого коливання рівну коефіцієнту ρ_{21} , а для отримання другої головної форми коливань необхідно відкласти за напрямом другого коливання амплітуду, рівну коефіцієнту ρ_{22} . Деформований стан рами

викреслюється з дотриманням таких правил: прямі жорсткі вузли рами до деформації залишаються прямими і після деформації; на першій головній формі коливань не повинно бути точок перегину пружних осей ригелів і стояків; на другій головній формі коливань можлива поява однієї точки перегину.

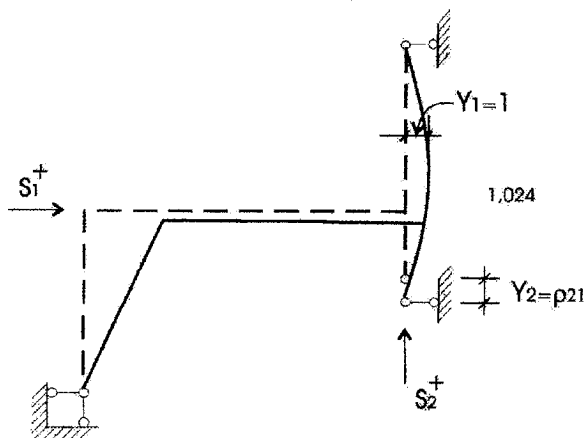


Рисунок 2.6.4 – Перша головна форма коливань

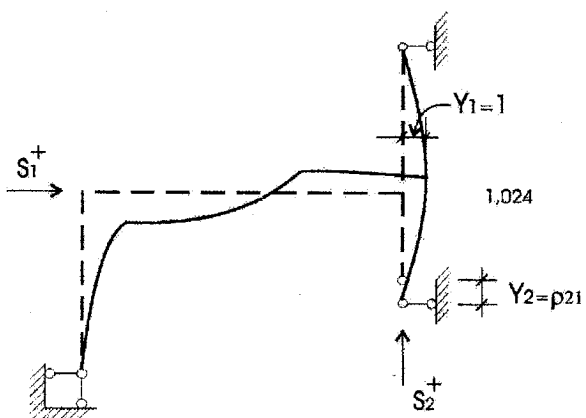


Рисунок 2.6.5 – Друга головна форма коливань

Система амплітудних рівнянь рівноваги Безухова:

$$\begin{cases} (m_1\delta_{11}\theta^2 - 1)c_1 + m_2\delta_{12}\theta^2 c_2 = -\delta_{1p}P_0 \\ m_1\delta_{21}\theta^2 c_1 + (m_2\delta_{22}\theta^2 - 1)c_2 = -\delta_{2p}P_0 \end{cases} \quad (2.6.5)$$

Побудова і розрахунок графіків розвитку амплітуд вимушених коливань проводиться за наступними формулами:

$$c_1(\theta) = \Delta_1 / \Delta, \quad c_2(\theta) = \Delta_2 / \Delta,$$

$$\Delta_1 = -\delta_{1p}P_0(m_2\delta_{22}\theta^2 - 1) + \delta_{2p}P_0 m_2\delta_{12}\theta^2,$$

$$\Delta_2 = -\delta_{2p}P_0(m_1\delta_{11}\theta^2 - 1) + \delta_{1p}P_0 m_1\delta_{21}\theta^2,$$

$$\Delta = (m_1\delta_{11}\theta^2 - 1)(m_2\delta_{22}\theta^2 - 1) - m_1m_2\delta_{12}^2\theta^4. \quad (2.6.6)$$

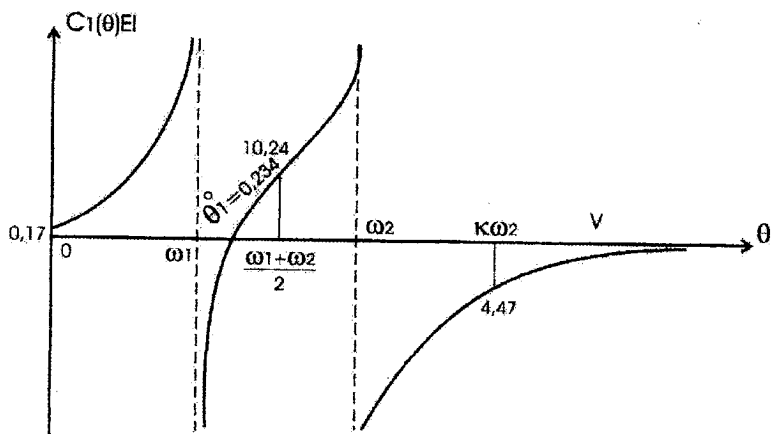


Рисунок 2.6.6 -- Графік розвитку амплітуди за напрямом першого коливання

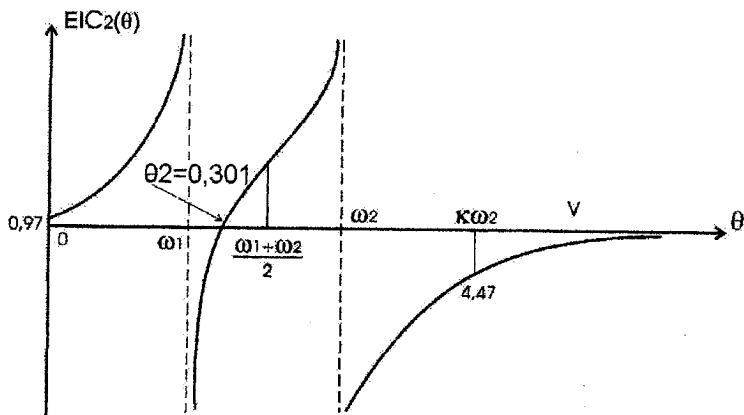


Рисунок 2.6.7 – Графік розвитку амплітуди за напрямом другого коливання

Графіки розвитку динамічних коефіцієнтів розраховують за формулами:

$$\mu_1(\theta) = \frac{c_1(\theta)}{c_1^0(\theta)}, \quad \mu_2(\theta) = \frac{c_2(\theta)}{c_2^0(\theta)} \quad (2.6.7)$$

де $c_1(\theta), c_2(\theta)$ амплітуди вимушених коливань, відповідно, за першим і другим напрямом при заданій частоті θ ;

$c_1^0(\theta), c_2^0(\theta)$ - переміщення мас, які коливаються, відповідно, за першим і другим напрямом, викликані статичною дією збудовальної сили P .

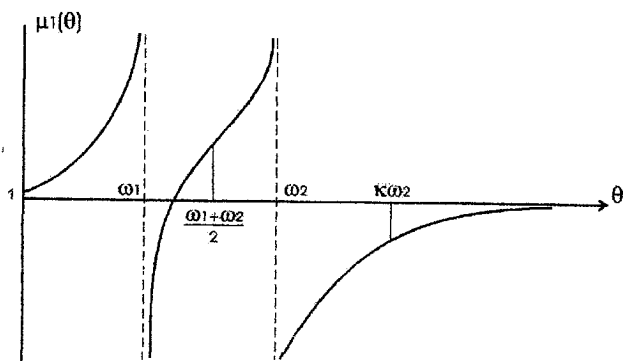


Рисунок 2.6.8 – Графік розвитку першого динамічного коефіцієнта

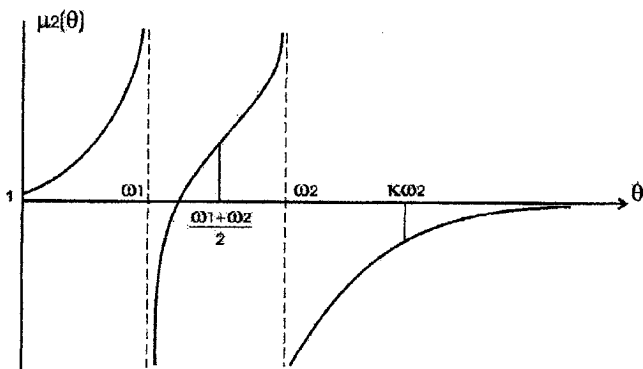


Рисунок 2.6.9 – Графік розвитку другого динамічного коефіцієнта

Частоти віброгасіння обчислюємо за формулами:

$$\theta_1^0 = \sqrt{\frac{\delta_{1p}}{\delta_{1p}m_2\delta_{22} \quad \delta_{2p}m_2\delta_{12}}} = 0,234 \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad (2.6.8)$$

$$\theta_2^0 = \sqrt{\frac{\delta_{2p}}{\delta_{2p}m_1\delta_{11} \quad \delta_{1p}m_1\delta_{21}}} = 0,301 \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Інерційні сили розраховуємо для частоти збудовальної сили, заданої в початкових даних:

$$\theta_k = k\omega_2 = 1,55 * 0,914447 \sqrt{\frac{EI}{m}} = 1,417 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

При цьому:

а) інерційна сила за напрямом першого коливання:

$$S_1 = m_1 c_1 \theta_k^2 = m \left(-\frac{4,467}{EI} \right) * 1,417^2 \frac{EI}{m} = -8,974;$$

б) інерційна сила за напрямом другого коливання:

$$S_2 = m_2 c_2 \theta_k^2 = m * 2,6 \left(-\frac{0,377}{EI} \right) * 1,417^2 \frac{EI}{m} = -1,969;$$

$$M_{\text{дин}} = M_p + M_1 * S_1 + M_2 * S_2, \quad (2.6.9)$$

яка остаточно має такий вигляд:

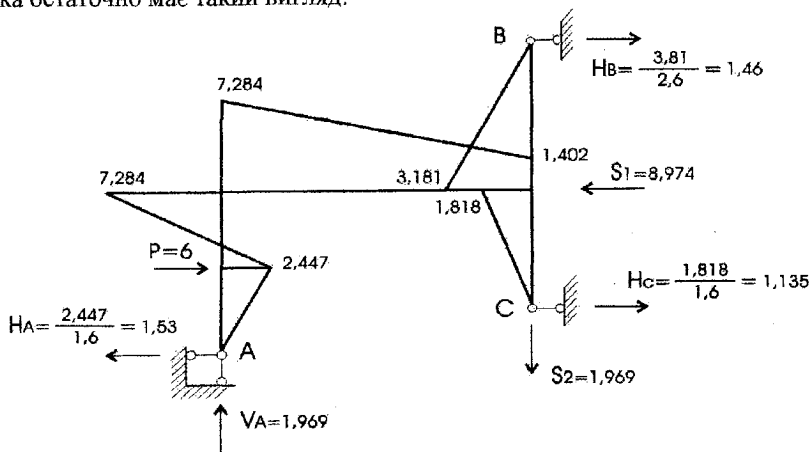


Рисунок 2.6.10 – Кінцева динамічна епора згинальних моментів $M_{\text{дин}}$

Для перевірки динамічної епори згинальних моментів необхідно обчислити за величинами ординат моментів реакції в опорних стержнях ($M_{\text{дин}}$) і вимагати виконання рівнянь статyki:

а) вузли рами повинні перебувати в рівновазі:

$$\begin{array}{c} \curvearrowright 7.284 \\ \curvearrowleft 7.284 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \curvearrowright 1.402 \\ \curvearrowleft 3.181 \\ \curvearrowright 1.816 \end{array}$$

$$7,284 - 7,284 = 0.$$

$$\begin{aligned} 3,181 - 1,816 - 1,402 &= \\ 3,181 - 3,218 &= -0,037. \end{aligned}$$

$$\Delta\% = 100 \frac{0,037}{3,218} = 1,15\%.$$

б) сума проєкцій на горизонтальну вісь:

$$8 + 1,36 + 1,135 - 8,974 - 1,530 = 10,495 - 10,504 \approx 0.$$

в) сума проєкцій всіх сил на вертикальну вісь:

$$1,969 - 1,969 = 0.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Баженов В.А., Иванченко Г.М., Шишов О.В. Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування.-К.: "Каравелла", 2006.-344с.
2. Баженов В.А., Гранат С.Я., Шишов О.В. Будівельна механіка. Комп'ютерний курс.-К.: Вища школа, 1999.-540с.
3. Баженов В.А. Будівельна механіка.-К.: Вища школа, 2000.-670с.
4. Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Коломиєць Л.В., Оробей В.Ф. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов.-Одесса, "Астропринт", 2001.-580с.
5. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции. - М.: Стройиздат, 1978.- 767 с.
6. Бартенев В. С. Практический способ решения пологих железобетонных оболочек положительной гауссовой кривизны на прямоугольном плане. СБ. "Тонкостенные железобетонные пространственные конструкции", НИИЖБ Госстроя СССР.-М.: Стройиздат,1970.
7. Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах: Учебное пособие для строительных специальностей вузов – М., Высшая школа, 1987. – 264с.
8. Бутенко Ю.Н. Строительная механика. – К.: "Вища школа", 1989,- 480с.
9. Бутенко Ю.И. Строительная механика. Руководство к практическим занятиям. - К.: Вища школа, 1984.- 327 с
10. Власов В.З. «Общая теория оболочек и её приложение в технике». – М: Гостехтеориздат, 1949.- 784 с.
11. Воробьев Н.Н. Теория рядов, М.: Наука, 1976. -367с.
12. Дарков А.В. Шапошников Н.Н. Строительная механика. - М.: "Высшая школа", 1986,-607с.
13. ДБН В.1.1-12:2006 «Будівництво в сейсмічних районах України».
14. Клейн Г.К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем). – М.: "Высшая школа", 1980, -384с.
15. Клейн Г.К., Рекач В.Г., Розенблат Г.И. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (Основы теории устойчивости, динамики сооружений и расчета пространственных систем). – М.: "Высшая школа", 1972, -318с.
16. Колкунов Н.В. «Основы расчета упругих оболочек».- М: ВШ, 1972.- 183с.
17. Моргун А.С. Теорія споруд, ч. III, Будівельна механіка – Вінниця: ВДТУ, 1997, 90 с.
18. Моргун А.С. Практикум з будівельної механіки. – Вінниця: ВДТУ, 1997, 90 с.

19. Моргун А.С., Сорока М.М. Механіка тонких оболонок подвійної кривизни. – Вінниця: ВНТУ, 2007, 120с.

20. Назаров А.А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек. – Л-М.: Стройиздат, 1966.-301с.

21. Немчинов Ю.И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов).-К.: "Будівельник",1980.-231с.

22. Орлов А.М., Сорока М.М., Т.О. Калініна Т.О. Методичні вказівки та вихідні дані до розрахунково-проектувальних робіт по IV частині курсу «Будівельна механіка» - Одеса, 2001. – 76с.

23. Прокопович Р.Е., Яременко А.Ф. «Методические указания по изучению плоской задачи теории упругости».-Одесса: Издательство ОИСИ, 1978.- 31 с.

24. Прокопович И.Е., Яременко А.Ф. Методические указания по изучению раздела курса теории упругости «Изгиб пластинок».-Одесса: Издательство ОИСИ, 1979.-74с.

25. Прокопович И.Е., Малахова Н.А., Штейнберг. Методические указания по разделу курса «Строительная механика», - «Основы расчета пространственных тонкостенных систем» - «Расчет систем, состоящих из пологих оболочек двоякой кривизны и бортовых балок».-Одесса: ОГАСА, 1981.- 52 с.

26. Піскунов В.Г. Опір матеріалів з основами теорії пружності і пластичності. Ч.І. Книга 3. Опір дво- і тривимірних тіл. - К.: Вища школа, 1995.- 272 с.

27. Піскунов В.Г. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності Ч. II. Книга 5.- К.: Вища школа, 1995.- 207 с.

28. Піскунов В.Г., Шевченко В.Д., Рубан М.М. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності. Книга III. - К.: ВШ, 1995.- 320 с.

29. Руководство по проектированию железобетонных пространственных конструкций покрытий и перекрытий. НИИЖБ Госстрой СССР.- М.: Стройиздат, 1979.-147 с.

30. Смирнов А.Ф., А.В. Александров А.В., Б.Я. Лашеников Б.Я., Н.Н. Шапошников Н.Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений – М., Стройиздат, 1984. - 416с.

31. Сорока Н.Н., Малахова Н.А., Штейнберг М.В. Методические указания по выполнению расчетно-проектировочной работы «Расчет пологой оболочки двоякой кривизны». - Одесса: Издательство ОИСИ, 1983.- 27 с.

32. СНиП 2.01.07 – 85. «Нагрузки и воздействия».

33. СНиП 2.03.01 – 84* «Бетонные и железобетонные конструкции».

34. Чирас А.А. и др. Строительная механика. Программы и решения задач на ЭВМ. – М.: "Стройиздат", 1990, 360с.

35. Шкодія М.М., Моргун А.І., Моргун А.С. Програмування та чисельні методи в розрахунках інженерних споруд. К.:НМК ВО, 1992, 207 с.

Навчальне видання

Алла Серафимівна Моргун

Будівельна механіка

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено автором

Редактор В.О. Дружиніна

Коректор Ю.І. Франко

Науково-методичний відділ ВНТУ

Свідоцтво Держкомінформу України

серія ДК № 746 від 25.12.2001

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 29.04.08 р. Гарнітура Times New Roman

Формат 29,7x42 1/4

Папір офсетний

Друк різнографічний

Ум. друк. арк. 6.3

Тираж 75 прим.

Зам. № 2008-048

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі

Вінницького національного технічного університету

Свідоцтво Держкомінформу України

серія ДК № 746 від 25.12.2001

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ