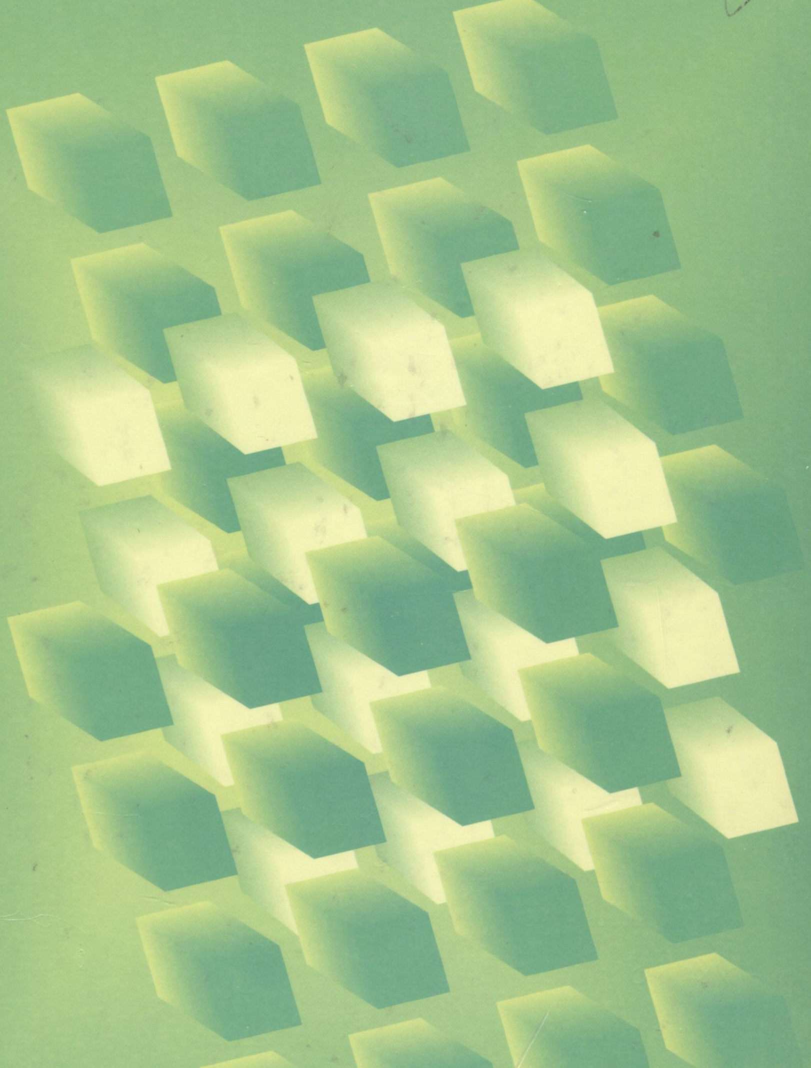
МАТЕМАТИКА ДЛЯ ІНЖЕНЕРІВ



ЗБІРНИК ЗАДАЧ
З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Львівська політехніка»

ЗБІРНИК

ЗАДАЧ З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Для студентів базових напрямків
інженерно-технічних спеціальностей

За редакцією Ю.К. Рудавського

Львів
Видавництво «Бескид Біт»
2002

УДК 516

Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії (Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Уханська Д.В., Батюк Ю.Р, Бойцун С.А., Гук В.М., Білонога Д.М., Слюсарчук О.З.). — Львів: Видавництво "Бескид Біт", 2002. — 256 с.

Збірник містить задачі з лінійної алгебри та аналітичної геометрії з таких розділів: матриці та визначники, системи лінійних рівнянь; елементи векторної алгебри; аналітична геометрія на площині та в просторі; елементи теорії лінійних просторів.

Кожен розділ збірника містить необхідний теоретичний матеріал (визначення, формули, теореми) і велику кількість детально розібраних прикладів, а також задачі для самостійного розв'язування, до яких подані відповіді.

Збірник задач призначений для забезпечення викладання курсу лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

За редакцією Ю.К.Рудавського

Рецензенти: Каленюк П.І. – проф., д-р. фіз.-мат. наук, Національний університет "Львівська політехніка",

Копич І. М. – проф., канд. фіз.-мат. наук, Львівська комерційна академія.

ISBN 966-96071-0-8

ЗМІСТ

Вступ

Ідея створення збірника належить Ю.К.Рудавському. Даний збірник задач підготовлений авторським колективом, який має великий методичний досвід роботи у ВЗО.

Загальна структура збірника задач відображає зміст програми курсу "Лінійна алгебра та аналітична геометрія" для студентів базових напрямів інженерно-технічних спеціальностей і охоплює лінійну алгебру (матриці та визначники; системи лінійних рівнянь; елементи теорії лінійних просторів – лінійний та евклідовий простори, лінійні оператори, власні вектори та власні значення лінійного перетворення, векторну алгебру, елементи аналітичної геометрії на площині та в просторі, а також зведення загального рівняння лінії другого до канонічного вигляду.

Вказаний матеріал розміщений в розділах, які поділені на параграфи та пункти. Нумерація окрема в кожному розділі по параграфах. В кінці кожного розділу подані відповіді до всіх задач, які вимагають обчислення.

Кожний розділ збірника задач містить необхідний теоретичний матеріал (визначення, формули, теореми) і велику кількість детально розібраних прикладів. Початок розв'язування прикладів помічений знаком $\lhd$, а кінець – знаком $\rhd$.

<u>РОЗДІЛ 1.</u> МАТРИЦІ ТА ВИЗНАЧНИКИ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

§1. МАТРИЦІ ТА ДІЇ НАД НИМИ

1. Матриця. Окремі види матриць

<u>Означення</u>. Матрицею розмірів m на n називається сукупність m x n чисел, які розміщені у вигляді прямокутної таблиці, що містить m рядків і n стовпців.

Ми будемо записувати матрицю у вигляді

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

або скорочено

$$A = \|a_{ij}\| \quad \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right).$$

Позначаються матриці великими буквами латинського алфавіту.

Числа a_{ij}, які утворюють дану матрицю, називаються її елементами. Перший індекс елемента вказує номер рядка, а другий – номер стовпця, на перетині яких знаходиться даний елемент.

Матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю, називають нульовою, і позначають 0.

Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості стовпців, то матриця називається квадратною і позначається $A = \|a_{ij}\|_1^n$. Квадратну матрицю, яка складається з n рядків і n стовпців, називають матрицею n-го порядку. Елементи a_{ii}, $(i = \overline{1,n})$ матриці утворюють її головну діагональ.

Квадратна матриця називається діагональною, якщо всі її елементи, за винятком елементів головної діагоналі, дорівнюють нулеві. Діагональна матриця з елементами $a_{ii} = 1\ (i = \overline{1,n})$ називається одиничною і позначається 1 або Е.

Матриця $A^{т} = \|a_{ij}^{т}\|$ називається транспонованою щодо матриці $A = \|a_{ij}\|$, якщо її елементи $a_{ij}^{T} = a_{ij}$, тобто рядок стає стовпцем.

Квадратна матриця називається трикутною, якщо всі елементи, що знаходяться вище (або нижче) від головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Зокрема, матриця

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{Vmatrix}$$

називається правою, або верхньою трикутною, а матриця

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{Vmatrix}$$

називається лівою, або нижньою трикутною.

2. Операції над матрицями.

Лінійні операції. До лінійних операцій над матрицями належить їх додавання і множення матриці на число.

Нехай матриці A і B – однакового розміру, тобто мають однакову кількість рядків і стовпців.

Дві матриці однакового розміру називають рівними, якщо рівні їх відповідні елементи, тобто якщо $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, то рівність A = B означає, що $a_{ij} = b_{ij}$ для всіх i, j.

Сумою A + B двох матриць $A = \|a_{ij}\|$ і $B = \|b_{ij}\|$ називається матриця $C = \|c_{ij}\|$, елементи якої $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

__Добутком__ αA матриці $A=\|a_{ij}\|$ на число α називається матриця, елементи якої отримуються з відповідних елементів матриці A множенням на α.

Зокрема, якщо $\alpha=-1$, то $(-1)\cdot A=-A$. Матриця $-A$ називається протилежною до матриці A.

Сума матриць B та $-A$ називається __різницею__ матриць B та A і позначається $B-A$.

Для довільних матриць A, B і C однакового розміру та будь-яких чисел α, β справедливі співвідношення:

1. $A + B = B + A$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. $A + 0 = A$.
4. $A + (-A) = 0$.
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
6. $(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$.
7. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
8. $E\cdot A = A$.

__Добуток матриць.__ Добуток AB матриці A на матрицю B визначений за умови, що кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B.

Нехай $A=\|a_{ij}\|$, $B=\|b_{jk}\|$, де $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$; $k=\overline{1,p}$.

__Добутком__ AB матриць $A=\|a_{ij}\|$ і $B=\|b_{jk}\|$ називається матриця $C=\|c_{ik}\|$, де

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}.$$

Множення матриць має такі властивості:

1. $A(B\cdot C) = (A\cdot B)C$.
2. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$.
3. $C(A + B) = C\cdot A + C\cdot B$.
4. $(A + B)C = AC + BC$.

Приклад 1. Знайти матрицю $C = 2A + 3B$, якщо:

$$A=\begin{Vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{Vmatrix},\ B=\begin{Vmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 4 & 1\end{Vmatrix}.$$

◁ Знайдемо матрицю 2A, помноживши всі елементи матриці A на 2

$$2A=\begin{Vmatrix}2 & 4 & 6\\ -2 & 4 & 2\end{Vmatrix},$$

і матрицю 3B, помноживши всі елементи матриці B на 3

$$3B=\begin{Vmatrix}6 & 3 & -3\\ 9 & 12 & 3\end{Vmatrix}.$$

Матриці 2A і 3B однакового розміру, тому їх можна додати.

Елементи матриці C – це сума відповідних елементів матриць 2A і 3B, тобто

$$C=\begin{Vmatrix}2 & 4 & 6\\ -2 & 4 & 2\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}6 & 3 & -3\\ 9 & 12 & 3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}2+6 & 4+3 & 6-3\\ -2+9 & 4+12 & 2+3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}8 & 7 & 3\\ 7 & 16 & 5\end{Vmatrix}. \triangleright$$

Приклад 2. Знайти елемент матриці D = AB, який стоїть в другому рядку і третьому стовпці, якщо:

$$A=\begin{Vmatrix}2 & 5 & 7 & 4\\ -1 & 2 & 0 & -3\end{Vmatrix},\ B=\begin{Vmatrix}5 & 7 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 0 & 2\\ -3 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -2\end{Vmatrix}.$$

$\triangleleft$ Знаємо, що елемент матриці D, який стоїть в другому рядку і третьому стовпці, позначається d_{23} і обчислюється як сума добутків елементів другого рядка матриці A на відповідні елементи третього стовпця матриці B, а саме:

$$d_{23}=\begin{Vmatrix}-1 & 2 & 0 & -3\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 2\end{Vmatrix}=-1\cdot 1+2\cdot 0+0\cdot 1+(-3)\cdot 2=-7,$$

$$d_{23}=-7. \triangleright$$

Приклад 3. Знайти матрицю C = AB, якщо:

$$A=\begin{Vmatrix}2 & -3 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1 & -2\end{Vmatrix}\ \text{і}\ B=\begin{Vmatrix}1 & 1 & 3\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{Vmatrix}.$$

$\triangleleft$ Множення матриці A на B можливе, тому що кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B.

Матриця C = AB матиме два рядки і три стовпці, тобто

$$C=\begin{Vmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\end{Vmatrix}.$$

Елементи матриці С будуть обчислюватися за формулою

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}.$$

Для знаходження елемента c_{11} потрібно знайти суму добутків елементів першого рядка матриці А на відповідні елементи першого стовпця матриці В:

$$c_{11} = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 9.$$

Для знаходження елемента c_{12} потрібно знайти суму добутків елементів першого рядка матриці А на відповідні елементи другого стовпця матриці В:

$$c_{12} = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{Vmatrix} = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = 0.$$

Щоб знайти c_{13}, потрібно перемножити перший рядок матриці А на третій стовпець матриці В:

$$c_{13} = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix} = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 13.$$

Перейдемо тепер до знаходження елементів другого рядка матриці С. Для цього потрібно взяти другий рядок матриці А і множити відповідно на всі стовпці матриці В:

$$c_{21} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 0 = 0,$$

$$c_{22}=\begin{Vmatrix}1 & 0 & -1 & -2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1\\1\\-3\\2\end{Vmatrix}=1\cdot1+0\cdot1+(-1)\cdot(-3)+(-2)\cdot2=0,$$

$$c_{23}=\begin{Vmatrix}1 & 0 & -1 & -2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}3\\0\\1\\3\end{Vmatrix}=1\cdot3+0\cdot0+(-1)\cdot1+(-2)\cdot3=-4.$$

Всі елементи матриці С знайдені. Отже, матриця С має вигляд

$$C=\begin{Vmatrix}9 & 0 & 13\\0 & 0 & 4\end{Vmatrix}. \triangleright$$

Приклад 4. Знайти значення f(A), якщо: $f(x)=x^2-2x+5$,

$$A=\begin{Vmatrix}1 & -2 & 3\\2 & -4 & 1\\3 & -5 & 2\end{Vmatrix}.$$

$\triangleleft$

$$f(A)=A^2-2A+5E=\begin{Vmatrix}1 & -2 & 3\\2 & -4 & 1\\3 & -5 & 2\end{Vmatrix}^2-2\begin{Vmatrix}1 & -2 & 3\\2 & -4 & 1\\3 & -5 & 2\end{Vmatrix}+5\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}1 & -2 & 3\\2 & -4 & 1\\3 & -5 & 2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & -2 & 3\\2 & -4 & 1\\3 & -5 & 2\end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix}2 & -4 & 6\\4 & -8 & 2\\6 & -10 & 4\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}5 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 5\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}1-4+9 & -2+8-15 & 3-2+6\\2-8+3 & -4+16-5 & 6-4+2\\3-10+6 & -6+20-10 & 9-5+4\end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix}2 & -4 & 6\\4 & -8 & 2\\6 & -10 & 4\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}5 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 5\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}6 & -9 & 7\\-3 & 7 & 4\\-1 & 4 & 8\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}-2 & 4 & -6\\-4 & 8 & -2\\-6 & 10 & -4\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}5 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 5\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}9 & -5 & 1\\-7 & 20 & 2\\-7 & 14 & 9\end{Vmatrix},$$

тобто $f(A)=\begin{Vmatrix}9 & -5 & 1\\-7 & 20 & 2\\-7 & 14 & 9\end{Vmatrix}. \triangleright$

1.1. Знайти матрицю $C = 3A + 2B$, якщо

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{Vmatrix}.$$

Знайти:

1.2. $\begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}.$

1.3. $\begin{Vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{Vmatrix}.$

1.4. $\begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}.$

1.5. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{Vmatrix}.$

1.6. $\begin{Vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{Vmatrix}.$

1.7. $\begin{Vmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{Vmatrix}.$

1.8. $\begin{Vmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{Vmatrix}.$

1.9. $\begin{Vmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{Vmatrix}.$

1.10. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$

1.11. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 4 \\ 1 \end{Vmatrix}.$

Перевірити рівність $A \cdot B = B \cdot A$ для матриць:

1.12. $A = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$ і $B = \begin{Vmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{Vmatrix}.$

1.13. $A = \begin{Vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$ і $B = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{Vmatrix}.$

Знайти A^n для матриці A, якщо:

1.14. $A=\begin{Vmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{Vmatrix}$, $n=3$.

1.15. $A=\begin{Vmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$. 1.16. $A=\begin{Vmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{Vmatrix}, \lambda\in R$.

1.17. $A=\begin{Vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{Vmatrix}$. 1.18. $A=\begin{Vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$.

Знайти значення f(A), якщо:

1.19. $f(x)=3x^2-4, \quad A=\begin{Vmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{Vmatrix}$.

1.20. $f(x)=x^2-3x+1, \quad A=\begin{Vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{Vmatrix}$.

1.21. $f(x)=x^2-2x+1, \quad A=\begin{Vmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{Vmatrix}$.

Знайти AB – BA, якщо:

1.22. $A=\begin{Vmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{Vmatrix}$.

1.23. $A=\begin{Vmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{Vmatrix}$.

1.24. $A=\begin{Vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix}7 & 5 & 3\\ 0 & 7 & 5\\ 0 & 0 & 7\end{Vmatrix}$.

Знайти найраціональнішим способом:

1.25. $A=\begin{Vmatrix}3 & 12\\ 4 & 3\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & -1 & 3\\ -2 & 4 & 0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1\\ 0\\ 5\end{Vmatrix}$.

1.26. $A=\begin{Vmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & 7 & 4\\ -2 & 1 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & -2\end{Vmatrix}$.

§2. ВИЗНАЧНИК МАТРИЦІ. ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКІВ ТА СПОСОБИ ОБЧИСЛЕННЯ

1. Визначник матриці

Визначник, або детермінант числової квадратної матриці (елементами матриці є числа) – це число, яке ставиться у відповідність матриці A і може бути виражене через її елементи. Визначник матриці будемо позначати det A, або $|A|$.

Означення. Визначником матриці $A = \|a_{ij}\|_1^n$ $(n > 1)$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \cdot M_{1k}, \qquad (2.1)$$

де M_{1k} – визначник матриці порядку n-1, утвореної з матриці A викреслюванням першого рядка і k-го стовпця.

Число M_{1k} називається мінором елемента a_{1k} матриці A.

Матриця порядку 1 складається з одного елемента і її визначник вважається таким, що дорівнює цьому елементу.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці A називається добуток $(-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} – мінор елемента a_{ij}.

Отже, $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k}$.

Застосуємо отримане співвідношення для визначників матриць 2-го і 3-го порядків. Для матриці $A = \|a_{ij}\|_1^2$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (2.2)$$

Для матриці $A = \|a_{ij}\|_1^3$:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \qquad (2.3).$$

Приклад 1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.

◁ Згідно з формулою (2.2) маємо $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 13$. ▷

Приклад 2. При яких значеннях a перетвориться в нуль визначник $\begin{vmatrix} a+4 & 3 \\ 3 & a-4 \end{vmatrix}$?

◁ Маємо

$$\begin{vmatrix} a+4 & 3 \\ 3 & a-4 \end{vmatrix} = (a+4)(a-4) - 3 \cdot 3 = a^2 - 25 = 0.$$

Звідси знаходимо, що $a = \pm 5$. ▷

Приклад 3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

◁ Згідно з формулою (2.3):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \cdot (-3) - (-1) \cdot 0 \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot 2 \cdot 2 = 12$$ ▷

2. Властивості визначників

1. При транспонуванні матриці значення її визначника не змінюється.

2. При перестановці двох рядків (стовпців) матриці знак її визначника змінюється на протилежний, а його абсолютне значення не змінюється.

3. Визначник матриці, що має два однакові рядки (стовпці), дорівнює нулю.

4. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) матриці мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

5. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) матриці дорівнюють нулю, то її визначник дорівнює нулю.

6. Якщо кожен елемент деякого рядка (стовпця) матриці є сумою двох доданків, то її визначник

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

7. Визначник матриці не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на деяке число.

8. Сума добутків елементів деякого рядка (стовпця) матриці на їх алгебраїчні доповнення дорівнює визначнику матриці, а сума добутків елементів деякого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} \det A, & \text{якщо} \quad i=j; \\ 0, & \text{якщо} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{2.4}$$

9. Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку визначників цих матриць.

Приклад 9. Використовуючи співвідношення (2.4), обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

◁ Маємо: $a_{11}=1$, $a_{12}=2$, $a_{13}=-3$. Знайдемо A_{11}, A_{12} та A_{13}. Алгебраїчне доповнення $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$, де M_{ij} – мінор, який відповідає елементові a_{ij}. Тому

$$A_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1, \quad A_{12}=(-1)\cdot M_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{13}=M_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-5.$$

Отже, визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}A_{1k} = 1\cdot 1 + 2(-2) + (-3)(-5) = 12. \triangleright$$

Приклад 5. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}.$$

◁ Зробимо перетворення над елементами даного визначника, користуючись властивістю 7. Помножимо елементи першого стовпця на (–1) і додамо до відповідних елементів четвертого стовпця. Отримаємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -8 \end{vmatrix} = |A|.$$

В отриманому визначнику всі елементи третього рядка, крім одного a_{31}, дорівнюють нулю. Тому, розкладаючи за елементами третього рядка, отримаємо:

$$|A| = \sum_{k=1}^{4} a_{3k}A_{3k} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34},$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -9 \\ 2 & -1 & -8 \end{vmatrix} = 12. \triangleright$$

3. Деякі методи обчислення визначників

1. Перетворення в нуль всіх елементів рядка (стовпця), крім одного.

Властивість 7 дає можливість перетворити в нуль всі елементи рядка (стовпця), крім одного, а властивість 8 – звести обчислення визначника n-го порядку до визначника (n-1) порядку.

Приклад 6. Обчислити визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

◁ Додамо до другого рядка перший, помножений на -2; до третього – перший, помножений на -3, а до четвертого – перший, помножений на -4. Отримаємо:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}.$$

Тепер розкладемо визначник за елементами першого стовпця. Отримаємо

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & -8 & -10 \\ -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-2)\begin{vmatrix} -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 5 \\ -7 & 5 & -13 \end{vmatrix}.$$

В отриманому визначнику додамо перший рядок до другого, а до третього – перший, помножений на -7. Тоді визначник набуває вигляду

$$|A| = 4\begin{vmatrix} -1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 36 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 36 \end{vmatrix} = 160\,.$$ ▷

2. Метод зведення до трикутного вигляду

Цей метод полягає в перетворенні визначника до такого вигляду, коли всі елементи, які розміщені по одну сторону від головної діагоналі, дорівнюють нулю. Отриманий так визначник дорівнює добуткові елементів головної діагоналі.

Приклад 7. Обчислити визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

◁ Додамо до кожного рядка, починаючи з другого, перший рядок. Тоді

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120\,. \triangleright$$

Обчислити визначники 2-го порядку:

2.1. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$. 2.2. $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$. 2.3. $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$.

2.4. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$.

2.5. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$. 2.6. $\begin{vmatrix} \mathrm{tg}\alpha & 1 \\ -1 & \mathrm{tg}\alpha \end{vmatrix}$.

Обчислити визначники 3-го порядку:

2.7. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}$. 2.8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$. 2.9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

2.10. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$. 2.11. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$. 2.12. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

2.13. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. 2.14. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$. 2.15. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$.

Обчислити визначники:

2.16. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.   2.17. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

2.18. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.   2.19. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 9 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

2.20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язати рівняння:

2.21. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$.   2.22. $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ 10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

2.23. $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0$.

Розв'язати нерівності:

2.24. $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$.   2.25. $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

2.26. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0$.

Обчислити визначники n-го порядку зведенням їх до трикутного вигляду:

2.27. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$. **2.28.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$.

Обчислити двома методами визначник

2.29. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & -4 \\ 5 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

§3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.

1. Матрична форма запису системи. Розв'язок системи

Систему m лінійних рівнянь з n невідомими запишемо так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.1}$$

Коефіцієнти a_{ij} при невідомих x_i мають два індекси. Перший індекс вказує порядковий номер рівняння, в якому знаходиться цей коефіцієнт, другий – номер невідомого. Величини $b_i \left(i = \overline{1,m}\right)$ називаються вільними членами.

Розв'язком системи (3.1) називається кожна сукупність чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$, яка, будучи підставлена в систему (3.1) замість невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$, перетворює всі рівняння системи в рівності (тотожності).

Систему рівнянь, яка має розв'язок, називаємо сумісною; систему, яка не має розв'язку, – несумісною.

Сумісна система, яка має тільки один розв'язок, називається визначеною. Система, що має більше ніж один розв'язок – невизначеною.

Якщо

$$A = \left\| a_{ij} \right\|, \quad X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \right\|,$$

де $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, то систему (3.1) можна записати так:

$$AX = B. \tag{3.2}$$

Цей запис зветься матричною формою запису системи (3.1).

Системі (3.1) відповідають дві матриці A та $\tilde{A}$:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix}.$$

Матриця A називається матрицею системи, матриця $\tilde{A}$ – розширеною матрицею.

2. Обернена матриця

Нехай A – квадратна матриця n-го порядку. Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A, якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де E – одинична матриця. Якщо $\det A \neq 0$, то обернена матриця існує і

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left\| A_{ij}^{T} \right\|, \tag{3.3}$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A, $A_{ij}^{T} = A_{ji}$.

Отже, матриця A має обернену тоді і тільки тоді, коли $|A| \neq 0$.

Приклад 1. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

◁ Обчислимо визначник матриці A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) \cdot 2 + (-3) \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot (-3) -$$

$$-(-1)(-4) \cdot 1 - 0 \cdot 3 \cdot 2 = 1 \neq 0.$$

Значить, матриця A має обернену. Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=3,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 0\end{vmatrix}=6,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=5,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-2,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-5,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-4.$$

Тому згідно з (3.3)

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix}-4 & 3 & -2\\ -8 & 6 & -5\\ -7 & 5 & -4\end{Vmatrix}.$$

Перевіримо, чи матриця A^{-1} знайдена правильно. Для цього знайдемо добуток A на A^{-1}. Маємо

$$A\cdot A^{-1}=\begin{Vmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-4 & 3 & -2\\ -8 & 6 & -5\\ -7 & 5 & -4\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

Перевірити, що $A^{-1}\cdot A=E$ ▷

Матричні рівняння

Матричними рівняннями називаються рівняння вигляду:

$$A\cdot X=B \quad \text{або} \quad X\cdot A=B,$$

де A та B – задані квадратні матриці n-го порядку, а X – невідома матриця того ж порядку.

Якщо $\det A\neq 0$, то задані матричні рівняння мають єдиний розв'язок

$$X=A^{-1}B \quad \text{або} \quad X=B\cdot A^{-1}.$$

Приклад 2. Розв'язати матричне рівняння $A\cdot X\cdot B=C$, якщо:

$$A=\begin{Vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}-2 & 3\\ -4 & 1\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\end{Vmatrix}.$$

◁ З рівняння $A\cdot X\cdot B=C$ знаходимо, що $X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$. Визначники матриць A і B:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=7\neq 0,\quad |B|=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -4 & 1\end{vmatrix}=10\neq 0.$$

Тому існують обернені матриці A^{-1} та B^{-1}. Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриць A та B:

$$A_{11} = 3,\ A_{12} = -2,\ A_{21} = 2,\ A_{22} = 1,$$
$$B_{11} = 1,\ B_{12} = 4,\ B_{21} = -3,\ B_{22} - 2.$$

Тоді

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix},\quad B^{-1} = \frac{1}{10}\begin{Vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix}.$$

Отже, невідома матриця

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \frac{1}{70}\begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix} = \frac{1}{70}\begin{Vmatrix} 25 & -25 \\ -26 & -2 \end{Vmatrix}. \triangleright$$

Знайти матриці, обернені до таких матриць:

3.1. $\begin{Vmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & \sin\varphi \end{Vmatrix}$. 3.2. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$. 3.3. $\begin{Vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{Vmatrix}$.

3.4. $\begin{Vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{Vmatrix}$. 3.5. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$.

Розв'язати матричні рівняння:

3.6. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}\cdot X = \begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{Vmatrix}$. 3.7. $X\cdot\begin{Vmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 1 \end{Vmatrix} = 2\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{Vmatrix}$.

3.8. $\begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix}\cdot X\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{Vmatrix}$.

3.9. $\begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{Vmatrix}\cdot X\cdot\begin{Vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{Vmatrix}$.

3.10. $\begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}\cdot X + \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$.

3.11. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 4 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 1 & 2 \end{Vmatrix} + X = \begin{Vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

3.12. Розв'язати матричні рівняння

$$A \cdot X = B \quad \text{та} \quad Y \cdot A = B, \text{ якщо},$$

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, B = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{Vmatrix}.$$

3. Матричний спосіб розв'язування системи лінійних рівнянь

Нехай в системі (3.1) m=n. Тоді A – квадратна матриця порядку n. Якщо $|A| \neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1} до матриці A. Помножимо співвідношення (3.2) зліва на A^{-1}. Тоді отримаємо

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Враховуючи, що $A^{-1} \cdot A = E$, $EX = X$, маємо

$$X = A^{-1}B. \tag{3.4}$$

Отже, якщо $|A| \neq 0$, то система (3.2) має єдиний розв'язок, який визначається співвідношенням(3.4). Знаходження розв'язку системи (3.2) за формулою (3.4) називається матричним способом розв'язування системи лінійних рівнянь.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь матричним способом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

◁ Запишемо матриці

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

Визначник $|A| = 3 \neq 0$, тому існує обернена матриця A^{-1}. Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A. Маємо

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Отже,

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{Vmatrix}.$$

Тоді згідно з (3.4):

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{Vmatrix}.$$

Тобто, $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -2$. ▷

Розв'язати матричним способом такі системи:

3.13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$ 3.14. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$ 3.16. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$ 3.18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 = -9. \end{cases}$

4. Правило Крамера

Нехай $A = \left\| a_{ij} \right\|_1^n$. Позначимо через Δ визначник матриці А. Замінимо і-й стовпець матриці А стовпцем вільних членів. Визначник такої матриці позначимо через Δ_i.

Якщо визначник $\Delta \neq 0$, то система (3.2) має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.5}$$

Формули (3.5) називаються формулами Крамера.

Приклад 4. Розв'язати за правилом Крамера систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

◁ Обчислюємо головний визначник системи Δ, елементами якого є коефіцієнти при невідомих

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Тому розв'язки системи шукаємо за формулами (3.5).

Обчислимо Δ_1 – визначник, утворений з головного визначника заміною першого стовпця стовпцем вільних членів. Маємо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix} = -4.$$

Аналогічно

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -4.$$

Отже, розв'язки системи

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1. \triangleright$$

3.20. Розв'язати за правилом Крамера системи 3.13-3.19.

5. Елементарні перетворення матриці. Канонічна матриця. Ранг матриці

Елементарними називаються такі перетворення матриць:

1) перестановка двох довільних рядків (стовпців);

2) множення рядка (стовпця) на відмінне від нуля число;

3) додавання до елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те ж число.

Дві матриці називаються еквівалентними, якщо одна з них одержується з другої за допомогою скінченної кількості елементарних перетворень.

Якщо матриці А та В еквівалентні, то це записується так:

$$A \sim B.$$

Канонічною матрицею називається матриця, у якої на початку головної діагоналі стоять підряд декілька одиниць (кількість яких може дорівнювати нулю), а всі інші елементи дорівнюють нулю, наприклад,

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

За допомогою елементарних перетворень кожну матрицю можна звести до канонічної.

Приклад 5. Звести до канонічного вигляду матрицю:

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{Vmatrix}.$$

◁ Віднімемо від другого рядка перший і переставимо ці рядки:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{Vmatrix}.$$

Тепер до другого рядка додамо перший, помножений на −2, а до третього – перший, помножений на −5:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Віднімемо від третього рядка другий. Отримаємо матрицю:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Додамо до другого стовпця перший, помножений на −1; до третього – перший, помножений на 2, до четвертого – перший, помножений на −2, а до п'ятого – перший. Маємо

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Якщо до третього стовпця додати другий, помножений на −9, а до четвертого – другий, помножений на 7, то отримаємо канонічну матрицю

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \triangleright$$

Нехай A – матриця розміру $m \times n$. Виберемо в цій матриці довільно k рядків і k стовпців. Елементи, які стоять на перетині вибраних рядків і стовпців, утворюють квадратну матрицю порядку k.

<u>Мінором</u> k-того порядку матриці A називається визначник квадратної матриці, елементи якої знаходяться на перетині вибраних довільних k рядків і k стовпців.

Самі елементи матриці можна розглядати як мінори першого порядку. Деякі з мінорів матриці можуть дорівнювати нулю, інші – відмінні від нуля.

Рангом матриці називається найбільший з порядків відмінних від нуля її мінорів.

Якщо ранг матриці А дорівнює r, то це означає, що матриця А має хоча б один відмінний від нуля мінор порядку r, але будь-який мінор порядку, більшого, ніж r, дорівнює нулеві. Ранг матриці А будемо позначати символом Rg A.

Нехай А – матриця розміру $m \times n$. Тоді $0 \le \mathrm{Rg}\, A \le \min(m; n)$. Якщо A~B, то Rg A=Rg B.

Ранг канонічної матриці дорівнює кількості одиниць на її головній діагоналі. Тому щоб знайти ранг матриці А, потрібно звести її до канонічного вигляду.

Приклад 6. Знайти ранг матриці:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

◁ Зведемо матрицю А до канонічного вигляду. Для цього поміняємо в матриці А перший і другий рядки, а тоді перший рядок помножимо на (–1). Отримаємо:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Тепер до елементів третього рядка додамо відповідні елементи першого рядка, помножені на (–3), а до елементів п'ятого рядка додамо елементи першого рядка, помножені на (–2). В утвореній матриці послідовно поділимо другий рядок на 2; третій - на 11, четвертий і п'ятий – на 5:

$$A \sim \begin{Vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 10 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

До елементів третього і п'ятого рядків додамо відповідні елементи другого рядка, а до елементів четвертого рядка додамо ці ж елементи, помножені на (–1):

$$A\sim\begin{Vmatrix}1&4&-5\\0&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix}.$$

Тепер до елементів другого стовпця додамо елементи першого стовпця, помножені на (–4), а до елементів третього стовпця додамо елементи першого стовпця, помножені на 5. Тоді:

$$A\sim\begin{Vmatrix}1&4&-5\\0&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix}.$$

Якщо до елементів третього стовпця додати елементи другого стовпця, помножені на 2, то отримаємо:

$$A\sim\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix},\quad \mathrm{Rg}A=2.\ \triangleright$$

Звести до канонічного вигляду і знайти ранг матриць:

3.20. $\begin{Vmatrix}1&1&3\\2&-3&1\\3&4&10\end{Vmatrix}$. 3.21. $\begin{Vmatrix}2&5&-3\\4&-1&2\\10&14&-7\end{Vmatrix}$. 3.22. $\begin{Vmatrix}1&3&-4\\2&-1&3\\3&2&2\end{Vmatrix}$.

3.23. $\begin{Vmatrix}3&1&4\\6&-2&-10\end{Vmatrix}$. 3.24. $\begin{Vmatrix}2&-3&1\\3&-1&5\\1&-4&3\end{Vmatrix}$.

3.25. $\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{Vmatrix}$. 3.26. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & -3 & 4 & 11 & 12 \end{Vmatrix}$.

3.27. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{Vmatrix}$.

6. Теорема Кронекера-Капеллі (існування розв'язку системи лінійних рівнянь)

Для того, щоб система лінійних рівнянь (3.1) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці A системи дорівнював рангу її розширеної матриці $\tilde{A}$.

<u>Наслідок 1.</u> Якщо ранг сумісної системи дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок.

<u>Наслідок 2.</u> Якщо ранг системи r менший від кількості невідомих n, то система має безліч розв'язків.

Приклад 7. Дослідити систему на сумісність. Якщо система сумісна, то знайти її розв'язок

$$\begin{cases} x + y - 2z = 6, \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16. \end{cases}$$

⊲ Знайдемо ранги основної та розширеної матриць, причому зробимо це одночасно. Маємо:

$$\tilde{A} = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -7 & 16 \\ 5 & 2 & 1 & 16 \end{array}\right|.$$

Основна матриця A системи розміщена ліворуч від вертикальної прямої. Розширена матриця $\tilde{A}$ отримується дописуванням до матриці A стовпця вільних членів. Не переставляючи останній стовпець, можна методом елементарних перетворень знайти одночасно ранги матриць $\tilde{A}$ і A. Маємо:

$$\tilde{A}=\left\|\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 6\\ 2 & 3 & -7 & 16\\ 5 & 2 & 1 & 16\end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 6\\ 0 & 1 & -3 & 4\\ 0 & -3 & 11 & -14\end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 6\\ 0 & 1 & -3 & 4\\ 0 & 0 & 2 & -2\end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 6\\ 0 & 1 & -3 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right\|.$$

Бачимо, що $RgA = Rg\tilde{A} = 3$. Отже, система сумісна і має єдиний розв'язок тому, що ранг дорівнює розмірності системи. Зведення матриці до трикутного вигляду з одиницями по головній діагоналі еквівалентне "прямому ходу" методу Гаусса. Запишемо систему, а потім виконаємо "обернений хід" (знаходження невідомих, починаючи з останньої і до першої):

$$\begin{cases} x+y-2z=6,\\ y-3z=4,\\ z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6-y+2z=3,\\ y=4+3z=1,\\ z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3,\\ y=1,\\ z=-1. \end{cases} \triangleright$$

Приклад 8. Дослідити систему на сумісність

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=-2,\\ x_1+2x_2+3x_3=-1,\\ x_1-3x_2-2x_3=3. \end{cases}$$

$\triangleleft$ Знайдемо ранги основної та розширеної матриць. Маємо:

$$\tilde{A}=\left\|\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 3 & -1\\ 1 & -3 & -2 & 3\end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1 & -2\\ 1 & -3 & -2 & 3\end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & -5 & -5 & 0\\ 0 & -5 & -5 & 4\end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -5 & -5 & 4\end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{array}\right\|.$$

Бачимо, що $RgA=2$, а $Rg\tilde{A}=3$ (якщо переставити третій та четвертий стовпчик місцями, то по головній діагоналі буде три ненульові елементи). Отже, система несумісна. $\triangleright$

Приклад 9. Дослідити на сумісність систему рівнянь. У випадку сумісності знайти її розв'язок.

$$\begin{cases} x+2y-4z=1, \\ 2x+y-5z=-1, \\ x-y-z=-2. \end{cases}$$

◁ Шукаємо ранги основної та розширеної матриць:

$$\tilde{A}\sim\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right\|\sim\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right\|\sim\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

$$RgA=Rg\tilde{A}=2$$

Ранги рівні, а, значить, система сумісна. Вона має безліч розв'язків, бо ранг менший, ніж кількість невідомих. Запишемо відповідну систему

$$\begin{cases} x+2y-4z=1, \\ y-z=1. \end{cases}$$

Перенесемо одне з невідомих, наприклад z, в праві частини рівнянь і через нього виразимо дві інші невідомі. Тоді

$$\begin{cases} x+2y=1+4z, \\ y=1+z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+4z-2y=2z-1, \\ y=1+z, \end{cases}$$

де $z\in R$. ▷

Дослідити на сумісність системи рівнянь. У випадку сумісності системи знайти її розв'язок:

3.28. $\begin{cases} -2x_1+2x_2+x_3=1, \\ -3x_1+3x_2=1, \\ 2x_1-x_2-5x_3=1. \end{cases}$ 3.29. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=2, \\ x_1-3x_2+2x_3=-3, \\ 3x_1+x_2=1. \end{cases}$

3.30. $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=5, \\ 2x_1-x_2-x_3=2, \\ 4x_1-2x_2-2x_3=-3. \end{cases}$ 3.31. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4, \\ 3x_1-5x_2+3x_3=1, \\ 2x_1+7x_2-x_3=8. \end{cases}$

3.32. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=9, \\ 3x_1-5x_2+x_3=-4, \\ 4x_1-7x_2+x_3=5. \end{cases}$ 3.33. $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2. \end{cases}$

3.34. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$ 3.35. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

3.36. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

3.37. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

3.38. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$

3.39. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

7. Системи лінійних однорідних рівнянь

Лінійна система (3.2) називається однорідною, якщо B=0, тобто

$$A \cdot X = 0, \tag{3.6}$$

де $A = \|a_{ij}\|$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, X – вектор-стовпець з невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ця система сумісна, бо ранг матриці системи дорівнює ранговi розширеної матриці. Система (3.6) завжди має нульовий розв'язок

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

який називають тривіальним.

Для того, щоб система (3.6) мала нетривіальний розв'язок, необхідно і достатньо, щоб ранг цієї системи був менший за кількість невідомих.

Довільна система лінійних однорідних рівнянь, в якій кількість рівнянь менша від кількості невідомих, має нетривіальний розв'язок.

Справедлива така теорема:

Для того, щоб система однорідних лінійних рівнянь, в якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, мала нетривіальний розв'язок, необхідно і достатньо, щоби її визначник дорівнював нулю.

Приклад 10. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

◁ Маємо однорідну систему лінійних рівнянь, в якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих. Визначник матриці A системи:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тому відповідно до теореми система має тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. ▷

Приклад 11. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\triangleleft\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{Vmatrix}1 & 2 & 4 & -3\\ 0 & 1 & 6 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}.$$

Значить, RgA=2.

Запишемо відповідну систему

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0,\\ \quad x_2+6x_3-5x_4=0.\end{cases}$$

Невідомі x_3 і x_4 перенесемо в праву частину

$$\begin{cases} x_1+2x_2=-4x_3+3x_4,\\ \quad x_2=-6x_3+5x_4.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-4x_3+3x_4-2x_2,\\ \quad x_2=-6x_3+5x_4\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=8x_3-7x_4,\\ x_2=-6x_3+5x_4,\end{cases} \quad x_3,\ x_4\in R. \triangleright$$

Розв'язати однорідні системи рівнянь:

3.40. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0,\\ 2x_1+9x_2-3x_3=0.\end{cases}$ 3.41. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=0,\\ x_1+x_2+x_3=0,\\ 3x_1-2x_2+5x_3=0.\end{cases}$

3.42. $\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3=0,\\ 2x_1-x_2+x_3=0,\\ 8x_1+x_2+4x_3=0.\end{cases}$ 3.43. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=0,\\ 4x_1-x_2+7x_3=0,\\ x_1+x_2+2x_3=0.\end{cases}$

3.44. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0,\\ x_1+2x_2+x_3=0,\\ 2x_1-x_2+x_3=0.\end{cases}$ 3.45. $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=0,\\ x_1+4x_2+2x_3=0,\\ 3x_1+7x_2+3x_3=0.\end{cases}$

3.46. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0,\\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0,\\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0.\end{cases}$

3.47. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0,\\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0,\\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0,\\ 3x_1+2x_2+4x_4+8x_5=0.\end{cases}$

Обчислити значення параметра a, для якого система має нетривіальний розв'язок, і знайти ці розв'язки:

3.48. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ ax_1 - 14x_2 + 15x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$ 3.49. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3.50. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + ax_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ 3.51. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

ВІДПОВІДІ ДО РОЗДІЛУ 1.

1.1. $C=\begin{Vmatrix}2 & 5 & -3\\ -6 & 7 & 8\end{Vmatrix}$. **1.2.** $\begin{Vmatrix}5 & 2\\ 7 & 0\end{Vmatrix}$. **1.3.** $\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix}$.

1.4. $\begin{Vmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{Vmatrix}$. **1.5.** $\begin{Vmatrix}5 & 1 & -3\\ -9 & -2 & 5\\ 5 & 2 & -1\end{Vmatrix}$. **1.6.** $\begin{Vmatrix}1 & 5 & -5\\ 3 & 10 & 0\\ 2 & 9 & -7\end{Vmatrix}$.

1.7. $\begin{Vmatrix}11 & -22 & 29\\ 9 & -27 & 32\\ 13 & -17 & 26\end{Vmatrix}$. **1.8.** $\begin{Vmatrix}56\\ 69\\ 17\end{Vmatrix}$. **1.9.** $\begin{Vmatrix}31\end{Vmatrix}$.

1.10. $\begin{Vmatrix}12 & 0 & -6 & 9 & 3\\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1\\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1\\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5\\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2\end{Vmatrix}$. **1.11.** $\begin{Vmatrix}5\\ 15\\ 25\\ 35\end{Vmatrix}$. **1.14.** $\begin{Vmatrix}13 & -14\\ 21 & -22\end{Vmatrix}$.

1.15. $\begin{Vmatrix}1 & na\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$. **1.16.** $\begin{Vmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{Vmatrix}$. **1.17.** $\begin{Vmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha\\ \sin n\alpha & \cos n\alpha\end{Vmatrix}$.

1.18. $\begin{Vmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$. **1.19.** $\begin{Vmatrix}8 & 15\\ 0 & 23\end{Vmatrix}$. **1.20.** $\begin{Vmatrix}-3 & 2\\ -1 & -1\end{Vmatrix}$. **1.21.** $\begin{Vmatrix}5 & 0 & 2\\ 5 & 1 & 1\\ -3 & 2 & 0\end{Vmatrix}$.

1.22. $\begin{Vmatrix}4 & -8\\ 12 & -4\end{Vmatrix}$. **1.23.** $\begin{Vmatrix}4 & 1 & 9\\ -2 & -6 & 3\\ -8 & -9 & 2\end{Vmatrix}$. **1.24.** $\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}$.

1.25. $\begin{Vmatrix}24\\ 58\end{Vmatrix}$. **1.26.** $\begin{Vmatrix}1 & -2\\ 4 & -8\\ 3 & -6\end{Vmatrix}$.

2.1. 18. **2.2.** 10. **2.3.** 0. **2.4.** $4ab$. **2.5.** 1. **2.6.** $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

2.7. -202. **2.8.** -28. **2.9.** 0. **2.10.** 0. **2.11.** –12. **2.12.** 29.
2.13. 0. **2.14.** 87. **2.15.** $(y-x)(z-x)(z-y)$. **2.16.** 0. **2.17.** 48.

2.18. –8. **2.19.** 465. **2.20.** 0. **2.21.** $x_1 = -4,\ x_2 = -1$.

2.22. $x = 3/4$. **2.23.** $x \in (-\infty, \infty)$. **2.24.** $x \in (-1, 7)$. **2.25.** $x \in (-6, -4)$.

2.26. $x \in (4, \infty)$. **2.27.** $n!$. **2.28.** $2n+1$. **2.29.** 0.

3.1. $\begin{Vmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{Vmatrix}$. **3.2.** $\frac{1}{10}\begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{Vmatrix}$. **3.3.** $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{Vmatrix}$.

3.4. $\begin{Vmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$. **3.5.** $\frac{1}{9}\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$. **3.6.** $\begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}$.

3.7. $\begin{Vmatrix} -4 & 9 \\ -19 & 43 \end{Vmatrix}$. **3.8.** $\begin{Vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$. **3.9.** $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$. **3.10.** $\begin{Vmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 13 \end{Vmatrix}$.

3.11. $\begin{Vmatrix} 2 & -7 \\ -4 & -6 \end{Vmatrix}$. **3.12.** $X = \begin{Vmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{Vmatrix}$, $Y = \begin{Vmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -105 & 77 & -58 \\ -152 & 112 & -87 \end{Vmatrix}$.

3.13. $x_1 = 2,\quad x_2 = -5,\quad x_3 = 3$.

3.14. $x_1 = 2,\quad x_2 = -1,\quad x_3 = 1$.

3.15. $x_1 = 2,\quad x_2 = -1,\quad x_3 = 0$.

3.16. $x_1 = 1,\quad x_2 = -1,\quad x_3 = 3$.

3.17. $x_1 = 1,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = 3$.

3.18. $x_1 = 1,\quad x_2 = -1,\quad x_3 = 2$.

3.19. $x_1 = -1,\quad x_2 = 2,\quad x_3 = 0$.

3.20. 2. **3.21.** 2. **3.22.** 3. **3.23.** 2. **3.24.** 3. **3.25.** 3. **3.26.** 4.

3.27. 2. **3.28.** $x_1 = 3,\quad x_2 = \frac{10}{3},\quad x_3 = \frac{1}{3}$. **3.29.** Несумісна.

3.30. Несумісна. **3.31.** $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. **3.32.** Несумісна.

3.33. $x_1 = \frac{1}{11}(-2 + x_3 - 9x_4),\ x_2 = \frac{1}{11}(10 - 5x_3 + x_4),\ x_3, x_4 \in R$.

3.34. $x_1 = -3,\quad x_2 = 2,\quad x_3 = 1$. **3.35.** Несумісна.

3.36. $x_1 = -1,\quad x_2 = 3,\quad x_3 = -2,\quad x_4 = 2$. **3.37.** Несумісна.

3.38. $x_3 = 5 - 8x_1 + 4x_2,\quad x_4 = -3,\quad x_5 = 1 + 2x_1 - x_2;\quad x_1, x_2 \in R$.

3.39. $x_1 = \frac{1}{4}(3 - x_3 + 7x_4), \quad x_2 = \frac{1}{2}(1 + 3x_3 - x_4); \quad x_3, x_4 \in R.$

3.40. $x_1 = 3x_2, \quad x_3 = 5x_2, \quad x_2 \in R.$

3.41. $x_1 = -\frac{7}{5}x_3, \quad x_2 = \frac{2}{5}x_3, \quad x_3 \in R.$

3.42. $x_2 = 0, \quad x_3 = -2x_1, \quad x_1 \in R.$ **3.43.** $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$

3.44. $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$ **3.45.** $x_1 = \frac{2}{5}x_3, \quad x_2 = -\frac{3}{5}x_3, \quad x_3 \in R.$

3.46. $x_1 = 2x_2 + \frac{2}{7}x_4, \quad x_3 = -\frac{5}{7}x_4, \quad x_2, x_4 \in R.$

3.47. $x_1 = -\frac{2}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_4 - \frac{8}{3}x_5, \quad x_3 = x_4 + 3x_5; \quad x_2, x_4, x_5 \in R.$

3.48. $a = 5; \quad x_1 = \frac{x_3}{2}, \quad x_2 = \frac{5}{4}x_3, \quad x_3 \in R.$

3.49. $a = 3; \quad x_1 = -2x_3, \quad x_2 = -x_3, \quad x_3 \in R.$

3.50. $a = 3; \quad x_1 = -\frac{3}{5}x_2, \quad x_3 = \frac{1}{5}x_2, \quad x_2 \in R.$

3.51. $a = -1, \quad x_1 = -\frac{5}{3}x_3, \quad x_2 = \frac{1}{3}x_3, \quad x_3 \in R.$

РОЗДІЛ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

§ 1. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

1.Поняття вектора. Лінійні операції над векторами

Означення. Вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, початок і кінець якого вказані.

Вектор, початком якого є точка A, а кінцем – точка B, позначається символом $\overrightarrow{AB}$. Часто вживається також позначення вектора однією малою буквою латинського алфавіту із стрілочкою зверху, наприклад, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$.

Початок вектора називається точкою його прикладання. Якщо точка A є початком вектора $\vec{a}$, то кажуть, що вектор $\vec{a}$ прикладений у точці A.

Довжиною, або модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка AB. Позначається вона символом $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор називається нульовим, якщо початок і кінець його збігаються. Позначається нульовий вектор символом $\vec{0}$.

Введемо важливе поняття колінеарності векторів.

Вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать або на одній прямій, або на паралельних прямих.

Два вектори називаються рівними, якщо вони колінеарні, спрямовані в один бік і мають однакову довжину.

З означення рівності векторів безпосередньо випливає таке твердження: якими б не були вектор $\vec{a}$ і точка P, існує єдиний вектор $\overrightarrow{PQ}$, що дорівнює векторові $\vec{a}$.

Іншими словами, точка прикладання даного вектора $\vec{a}$ може бути вибрана довільно. У зв'язку з цим вектори, які вивчаються в геометрії, називаються вільними.

Два колінеарні вектори, які мають однакову довжину і протилежні напрямки, називаються взаємно протилежними.

Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначається $-\vec{a}$.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається одиничним.

Три вектори називаються компланарними, якщо вони паралельні одній площині або лежать в одній площині.

Над векторами можна виконувати певні математичні операції. Найпростішими з них є додавання векторів і множення вектора на число. Ці операції називаються лінійними.

Додавання векторів

Сумою $\vec{a}+\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який з'єднує початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{b}$ за умови, що вектор $\vec{b}$ відкладено від кінця вектора $\vec{a}$.

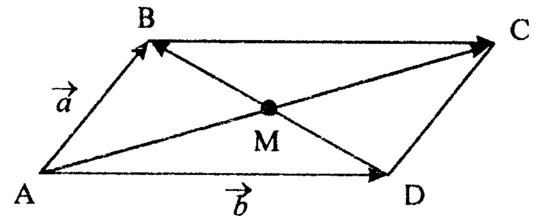


Рис. 1.

Додавати вектори геометрично можна за правилом паралелограма: вектор $\vec{a}+\vec{b}$ збігається за довжиною і напрямком з вектором $\overrightarrow{AC}$ – діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис.1).

Сформульоване вище правило додавання називають також "правилом трикутника". Використовуючи його, можна побудувати суму будь-якої кількості довільно розміщених у просторі векторів. Правило додавання можна сформулювати так: щоб побудувати суму будь-якої скінченної кількості векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, потрібно з довільної точки 0 відкласти вектор $\vec{a}_1$, з його кінця – вектор $\vec{a}_2$ і т.д. до $\vec{a}_n$. Вектор $\overrightarrow{OA_n}$ (рис. 2), що з'єднує початок O першого вектора з кінцем A_n останнього вектора, дорівнює їх сумі, тобто

$$\overrightarrow{OA_n} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n .$$

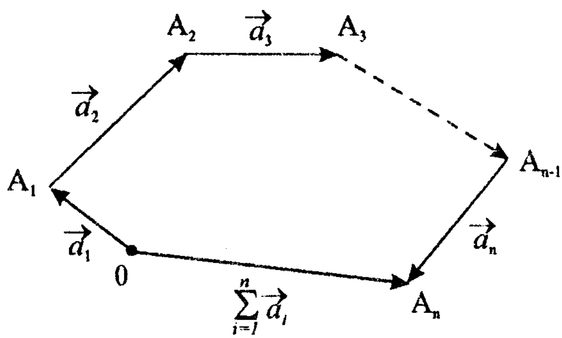


Рис. 2.

Якщо кінець A_n останнього вектора -доданка збігається з початком О першого, то в цьому випадку сумою векторів є нульовий вектор $\vec{0}$

Множення вектора на число

Добутком $\alpha\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на число α називається вектор $\vec{b}$, який задовольняє такі умови:

1) вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$;

2) $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;

3) вектори $\vec{b}$ та $\vec{a}$ однаково спрямовані, якщо $\alpha > 0$, і протилежно спрямовані, якщо $\alpha < 0$.

З цього означення випливає, що коли вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні, то

$$b = \alpha \cdot \vec{a} \tag{1.1}$$

і навпаки (довести).

Якщо $\vec{a}^{\circ}$ – одиничний вектор того самого напрямку, що і вектор $\vec{a}$, то

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^{\circ} \tag{1.2}$$

Віднімання векторів

Різницею $\vec{a} - \vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$, тобто $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

Правило побудови різниці $\vec{a} - \vec{b}$ показано на рис. 1, тобто $\overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b}$.

Операції додавання і множення вектора на число мають такі властивості

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.
4. $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$.
5. $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.
6. $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)=\left(\alpha\cdot\beta\right)\vec{a}$.
7. $\left(\alpha+\beta\right)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.
8. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Приклад 1. У паралелограмі ABCD введені позначення $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Виразити через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}$, де M – точка перетину діагоналей.

◁ Побудуємо паралелограм ABCD на заданих векторах (рис.1). Згідно з означенням суми та різниці векторів вектор $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$. Точка M перетину діагоналей є його центром симетрії, тобто серединою кожної діагоналі. Тому $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\overrightarrow{MC}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\overrightarrow{DM}=\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2},\overrightarrow{MB}=\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$. Вектор $\overrightarrow{MA}$ протилежний до вектора $\overrightarrow{AM}$, а вектор $\overrightarrow{MD}$ – до $\overrightarrow{DM}$.

Отже, вектор $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, а вектор $\overrightarrow{MD}=\dfrac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$. ▷

Приклад 2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут 60°, причому $\left|\vec{a}\right|=5$, $\left|\vec{b}\right|=8$. Обчислити $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

◁ Побудуємо паралелограм ABCD (рис.1) на заданих векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Згідно з означенням суми та різниці векторів маємо:

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b},\ \overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}.$$

Із трикутника ABD за теоремою косинусів

$$\left|\overrightarrow{DB}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos\angle BAD$$

Тому $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2$=25 + 64 –2·8· cos 60°=49, $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$=7.

Із трикутника ABC

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\angle ABC.$$

$$\angle ABC = 180° - 60° = 120°$$

Отже, $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2$ = 25 + 64 – 2,5· 8 cos 120° = 129,

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{129} \approx 11{,}4. \ ▷$$

Задачі

1.1. Довести рівності:

а) $\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$; б) $\vec{a} - \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$.

Який геометричний зміст цих рівностей?

1.2. Точки E і F – середини сторін $[AD]$ і $[BC]$ чотирикутника ABCD. Довести, що $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$.

1.3. Знайти рівнодійну двох сил $\vec{F_1}$ і $\vec{F_2}$, якщо $\left|\vec{F_1}\right| = \sqrt{2}, \left|\vec{F_2}\right| = 2$, а кут між ними – 45°.

1.4. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Обчислити $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$, якщо $|\vec{a}| = 5, \left|\vec{b}\right| = 12$.

1.5. Які умови повинні задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб справджувались співвідношення :

а) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$; б) $|\vec{a}+\vec{b}| \rangle |\vec{a}-\vec{b}|$; в) $|\vec{a}+\vec{b}| \langle |\vec{a}-\vec{b}|$.

1.6. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 60°$. Обчислити $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$.

1.7. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 120°$. Обчислити $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$.

2. Лінійна залежність векторів. Розклад вектора по базису

Розглянемо систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Означення 1. Вектор $\vec{a}$ називається лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_i\left(i = \overline{1,n}\right)$, якщо існують такі числа $\alpha_i\left(i = \overline{1,n}\right)$, що

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i \tag{1.3}$$

Означення 2. Вектори $\vec{a}_i\,(i = \overline{1,n})$ називаються лінійно залежними, якщо існують такі числа $\alpha_i\left(i = \overline{1,n}\right)$, серед яких не всі дорівнюють нулю (тобто $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0$), що справджується рівність

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i = 0 \tag{1.4}$$

Означення 3. Система векторів $\vec{a}_i = \left(i = \overline{1,n}\right)$ називається лінійно незалежною, якщо рівність

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0} \tag{1.5}$$

можлива лише при $\alpha_i = 0$ $(i = \overline{1,n})$.

Те, що система векторів лінійно залежна, рівносильно твердженню, що хоча б один з її векторів є лінійною комбінацією інших, тобто лінійно виражається через інші вектори системи.

Два вектори лінійно залежні лише тоді, коли вони колінеарні. Справді, нехай вектори $\vec{a},\vec{b}$ колінеарні. Тоді існує таке число α, що $\vec{b}=\alpha\vec{a}$, а це означає, що вектори лінійно залежні, і навпаки.

Три вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні Кожні чотири вектори в просторі є лінійно залежними.

Пару векторів назвемо впорядкованою, якщо вказано, який з цих векторів є першим, а який другим.

Означення 4. Впорядкована пара неколінеарних векторів $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ називається базою, або базисом системи векторів на площині.

Теорема 1. Кожен вектор $\vec{a}$ на площині єдиним способом розкладається по парі неколінеарних векторів

$$\vec{a}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2 .$$

Останнє співвідношення називають розкладом вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2$.

Числа α_1 і α_2 називають координатами вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ і записують $\vec{a}=\{\alpha_1;\alpha_2\}$.

Базисом у просторі називається будь-яка впорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$.

Якщо в просторі задано базис, то кожен вектор $\vec{a}$ можна однозначно подати як лінійну комбінацію базисних векторів, тобто у вигляді:

$$\vec{a}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\alpha_3\vec{e}_3. \quad (1.6)$$

Рівність (1.6) називається розкладом вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$.

Числа $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ називаються координатами вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ і записують це так $\vec{a}=\{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3\}$.

Лінійні операції над векторами, що задані своїми координатами

При додаванні векторів їх відповідні координати додаються, а при множенні на число їх координати множаться на це число.

Нехай $\vec{a} = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$ і $\vec{b} = \{\beta_1; \beta_2; \beta_3\}$

Тоді
$$\vec{a} + \vec{b} = \{\alpha_1 + \beta_1; \alpha_2 + \beta_2; \alpha_3 + \beta_3\}, \tag{1.7}$$
$$\lambda \cdot \vec{a} = \{\lambda \cdot \alpha_1; \lambda \cdot \alpha_2; \lambda \cdot \alpha_3\} \tag{1.8}$$

Співвідношення (1.7) та (1.8) випливають із (1.6) та із визначення лінійних операцій над векторами (довести самостійно).

Якщо вектори $\vec{a} = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$ та $\vec{b} = \{\beta_1; \beta_2; \beta_3\}$ колінеарні, то справедливе співвідношення (1.1) і, враховуючи (1.8), матимемо
$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} \tag{1.9}$$
тобто, якщо вектори колінеарні, то їх відповідні координати пропорційні, і навпаки (довести це твердження самостійно).

Приклад 3. З'ясувати, чи вектори $\vec{a}_1 = \{-3;1;5\}$ і $\vec{a}_2 = \{9;-3;-15\}$ будуть лінійно залежними.

◁ Два вектори є лінійно залежними, якщо існують такі два числа α_1, α_2 (хоча б одне з яких не дорівнює нулю), для яких справджується рівність (1.4), тобто $\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 = \vec{0}$, або $\alpha_1\{-3;1;5\} + \alpha_2\{9;-3;-15\} = \vec{0}$, $\{-3\alpha_1 + 9\alpha_2; \alpha_1 - 3\alpha_2; 5\alpha_1 - 15\alpha_2\} = \{0;0;0\}$.

Звідси отримуємо систему:
$$\begin{cases} -3\alpha_1 + 9\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 = 0, \\ 5\alpha_1 - 15\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Маємо $\alpha_1 = 3\alpha_2$. Отже, при довільному $\alpha_2 \neq 0$ для векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ справедлива рівність $3\alpha_2\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 = \vec{0}$, тобто $\vec{a}_2 = -3\vec{a}_1$. Отже, вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ – лінійно залежні. ▷

Приклад 4. Чи можуть вектори $\vec{a}_1 = \{2;-3;1\}, \vec{a}_2 = \{3;-1;5\}$, $\vec{a}_3 = \{1;-4;3\}$ утворювати базис ?

◁ Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворюють базис, якщо вони лінійно незалежні. Згідно з формулою (1.5) маємо:

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{a}_3 = \vec{0}, \alpha_1\{2;-3;1\} + \alpha_2\{3;-1;5\} + \alpha_3\{1;-4;3\} = \vec{0},$$

$$\{2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3;\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3;\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3\} = \{0;0;0\}$$

Для знаходження $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Визначник системи $\Delta \neq 0$ (перевірити!). Значить , дана однорідна система має тільки нульові розв'язки $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Отже, вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – лінійно незалежні, а тому можуть утворювати базис. ▷

Приклад 5. Вектори $\vec{a}_1 = \{1;0;0\}, \vec{a}_2 = \{1;1;0\}, \vec{a}_3 = \{1;1;1\}$ утворюють базис у просторі (перевірити!). Знайти координати вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$ ($\vec{i} = \{1;0;0\}$, $\vec{k} = \{0;0;1\}$ у базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

◁ Згідно з формулою (1.3)

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3,$$

тобто $\{2;0;-1\} = \alpha_1\{1;0;0\} + \alpha_2\{1;1;0\} + \alpha_3\{1;1;1\}$ або

$\{2;0;-1\} = \{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3; \alpha_2 + \alpha_3; \alpha_3\}$.

Якщо прирівняти координати векторів, то отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_3 = -1. \end{cases}$$

Розв'язками системи є $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$. Отже, вектор $\vec{a}$ у новому базисі має такі координати $\vec{a} = \{2;1;-1\}$, тобто $\vec{a} = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3$.

▷

Приклад 6. Знайти вектор $\vec{a} = 2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2$, якщо $\vec{a}_1 = \{1;2;3\}$, $\vec{a}_2 = \{-1;2;-5\}$.

◁ Вектори $2\vec{a}_1 = \{2;4;6\}$, $3\vec{a}_2 = \{-3;6;-15\}$.

Тому $\vec{a} = \{2;4;6\} + \{-3;6;-15\}$, $\vec{a} = \{-1;10;-9\}$.

Отже, шуканий вектор $\vec{a} = \{-1;10;-9\}$. ▷

Задачі

1.8. Довести,що три вектори лінійно залежні тоді і тількі тоді, коли вони компланарні.

1.9. Довести, що кожен вектор на площині єдиним способом розкладається по парі неколінеарних векторів.

1.10. Довести, що коли вектори колінеарні, то їх відповідні координати пропорційні.

1.11. Довести,що коли відповідні координати векторів пропорційні, то вектори колінеарні.

1.12. З'ясувати, чи вектори $\vec{a}_1 = \{1;1;1\}$ і $\vec{a}_2 = \{1;-1;2\}$ є лінійно залежними.

1.13. Чи можуть вектори $\vec{a}_1 = \{1;1;1\}$, $\vec{a}_2 = \{1;-1;2\}$ і $\vec{a}_3 = \{4;1;4\}$ утворювати базис?

1.14. З'ясувати, чи вектори $\vec{a}_1 = \{1;-2;0\}$, $\vec{a}_2 = \{1;2;-1\}$ і $\vec{a}_3 = \{-1;-6;2\}$ є лінійно залежними, і якщо це так, то виразити один із векторів через інші.

1.15. Задані чотири вектори $\vec{a}_1 = \{0;1;-2\}$, $\vec{a}_2 = \{2;1;1\}$, $\vec{a}_3 = \{1;0;1\}$, $\vec{a}_4 = \{2;1;3\}$. Знайти координати вектора $\vec{a}_4$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

1.16. Дано два вектори $\vec{a}_1 = \{3;-2\}$, $\vec{a}_2 = \{-2;1\}$. Знайти розклад вектора $\vec{a} = \{7;-4\}$ по базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2$.

1.17. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = \{-2;3;\alpha\}$ і $\vec{b} = \{\beta;-6;2\}$ колінеарні?

1.18. При якому значенні α вектори $\vec{a}_1 = \{1;2;-1\}$, $\vec{a}_2 = \{2;3;1\}$ і $\vec{a}_3 = \{\alpha;1;2\}$ будуть лінійно залежними?

1.19. Чи можуть вектори $\vec{e}_1=\{1;2;3\}$, $\vec{e}_2=\{1;-1;2\}$, $\vec{e}_3=\{4;1;4\}$ утворювати базис?

1.20. Дано три вектори $\vec{e}_1=\{3;-2;1\}, \vec{e}_2=\{-1;1;-2\}, \vec{e}_3=\{2;1;-3\}$. Знайти розклад вектора $\vec{a}=\{11;-6;5\}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

1.21. Знайти вектор $\vec{c}=\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\{6;-3;12\}, \vec{b}=\{2;3;-1\}$.

1.22. Знайти вектор $\vec{a}=\vec{a}_1-2\vec{a}_2+\frac{1}{3}\vec{a}_3$, якщо $\vec{a}_1=\{-1;2;0\}$, $\vec{a}_2=\{3;1;1\}, \vec{a}_3=\{2;0;2\}$.

1.23. На площині задані вектори $\vec{e}_1=\{-1;2\}, \vec{e}_2=\{2;1;\}$ і $\vec{a}=\{0;-2\}$. Переконатись, що вектори $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ утворюють базис на площині і знайти розклад вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

1.24. Задані вектори $\vec{e}=\{-1;1;\frac{1}{2}\}$ і $\vec{a}=\{2;-2;-1\}$. Переконатись, що вони колінеарні і знайти розклад вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{e}$.

1.25. В базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задані вектори: $\vec{a}_1=\{1;2;0\}, \vec{a}_2=\{-1;1;1\}$, $\vec{a}_3=\{2;0;1\}$. Показати, що вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ і $\vec{a}_3$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{a}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, якщо в базисі $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ і $\vec{a}_3$ вектор $\vec{a}=\{-1;2;1\}$.

3. Проекція вектора на вісь

Означення. Проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь l називається число, що дорівнює довжині відрізка осі l, який міститься між проекцією початкової точки і кінцевої, взятій зі знаком "+", якщо напрямки вектора $\vec{a}$ та осі l збігаються, і зі знаком "–", якщо ці напрямки протилежні.

Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь ℓ позначається $\text{Пр}_\ell \vec{a}$.

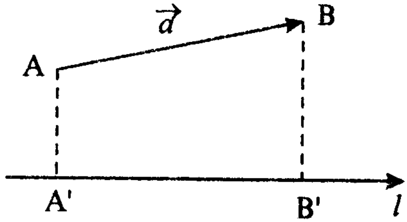


Рис. 3.

Якщо ввести позначення: $\left(\widehat{\vec{a},\ell}\right) = \varphi$, то

$$\text{Пр}_\ell\ \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi. \qquad (1.10)$$

Основні властивості проекції вектора на вісь полягають у тому, що лінійні операції над векторами приводять до відповідних лінійних операцій над проекціями цих векторів, а саме:

$$\text{Пр}_\ell(\alpha\vec{a}) = \alpha \cdot \text{Пр}_\ell \vec{a}. \quad \text{Пр}_\ell\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \text{Пр}_\ell \vec{a} + \text{Пр}_\ell \vec{b},$$

Приклад 7. Знайти $\text{Пр}_\ell \vec{a}$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $\varphi = 60°$.

◁ Згідно з формулою (1.10) $\text{Пр}_\ell \vec{a} = 3 \cdot \cos 60° = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. ▷

Приклад 8. Знайти $\text{Пр}_\ell\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$, якщо $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4, \varphi = 30°$.

◁ Відомо, що

$$\text{Пр}_\ell\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \text{Пр}_\ell \vec{a} + \text{Пр}_\ell \vec{b} = 2 \cdot \cos 30° + 4 \cdot \cos 30° = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}. \text{ ▷}$$

Приклад 9. Відомо,що $\text{Пр}_\ell \vec{a} = 3$, а $\varphi = 45°$. Обчислити $|\vec{a}|$.

◁ З формули (1.10) $|\vec{a}| = \dfrac{\text{Пр}_\ell \vec{a}}{\cos\varphi}$. Тому $|\vec{a}| = \dfrac{3}{\cos 45°} = \dfrac{3 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$. ▷

4. Прямокутна система координат

Зафіксуємо на площині точку O та виберемо базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

<u>Означення 1.</u> Сукупність точки O і базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ називається системою координат на площині.

Точка O називається <u>початком координат</u>; прямі, що проходять через початок координат у напрямі базисних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, називаються осями координат.

Нехай M – довільна точка площини. Вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ називається <u>радіус-вектором</u> точки M.

<u>Означення 2.</u> Координати радіус-вектора точки M називаються афінними координатами точки M (відносно базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$).

Оскільки кожен вектор $\overrightarrow{OM}$ єдиним способом розкладається по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, то кожній точці M площини однозначно відповідає пара афінних координат.

Якщо базисні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ перпендикулярні і $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$, то такий базис називається прямокутним декартовим. У цьому випадку базисні вектори позначають $\vec{i}$ та $\vec{j}$. Надалі цей базис будемо називати декартовим.

<u>Означення 3.</u> Сукупність точки O і базису $\vec{i}, \vec{j}$ називається декартовою прямокутною системою координат.

Дві взаємно перпендикулярні осі на площині, напрямки яких збігаються з напрямками базисних векторів $\vec{i}$ та $\vec{j}$, і які мають спільний початок O, називаються осями координат. Першу із вказаних осей називають віссю <u>абсцис</u> (або віссю Ox), а другу – віссю <u>ординат</u> (або віссю Oy).

Якщо точка M в базисі $\vec{i}, \vec{j}$ має координати x та y, то перша координата називається <u>абсцисою,</u> а друга – <u>ординатою</u>. Той факт, що точка M має координати x і y, символічно позначається так: M(x;y) або M(x,y).

Зафіксуємо тепер в просторі точку O та виберемо базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ та $\vec{e}_3$.

<u>Означення 4.</u> Сукупність точки O і базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ називається системою координат у просторі.

Точка O називається <u>початком</u> <u>координат</u>; прямі, що проходять через початок координат у напрямі базисних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ називаються <u>осями координат</u>. Площини, що проходять через початок координат та осі координат, називаються <u>координатними</u> <u>площинами.</u>

Нехай М – довільна точка простору. Вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ називають радіус-вектором точки М.

Означення 5. Координати радіус-вектора точки М називаються координатами точки М у вибраній системі координат.

Розрізняють ліву і праву системи координат. Розглянемо впорядковану трійку некомпланарних векторів. Ця трійка називається правою (лівою), коли поворот від першого до другого і від другого до третього здійснюється проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою). Система координат називається правою (лівою), якщо базисні вектори утворюють праву (ліву) базисну трійку.

Якщо базисні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$ взаємно перпендикулярні і $|\vec{e}_{1_1}| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$, то такий базис називають прямокутним декартовим. У цьому випадку базисні вектори позначаються відповідно $\vec{i}, \vec{j}$ та $\vec{k}$. Надалі цей базис будемо називати декартовим.

Означення 6. Сукупність точки О і базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ називається декартовою прямокутною системою координат (надалі будемо називати декартовою системою координат).

Три взаємно перпендикулярні осі в просторі, напрямки яких збігаються з напрямками базисних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ і які мають спільний початок О, називаються осями координат. Першу із вказаних осей називають віссю абсцис (або віссю Оx), другу – віссю ординат (або віссю Оy), третю – віссю аплікат (або віссю Оz).

Якщо точка М в базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ має координати x, y, та z., то перша координата називається абсцисою, друга – ординатою, а третя – аплікатою. Те, що точка М має координати x, y та z, символічно позначається так: М(x,y,z).

5. Розклад вектора по базисних векторах $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Розглянемо вектор $\vec{a}$. Розмістимо його початок у початку координат. Згідно з правилом додавання векторів

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}.$$

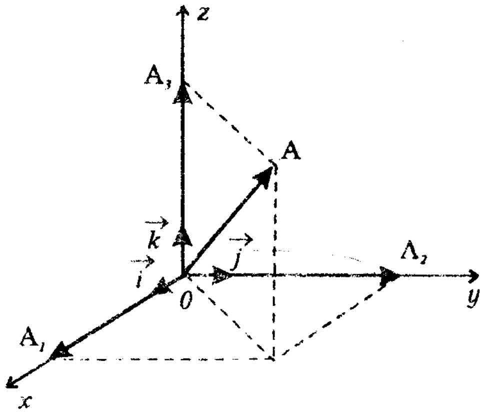


Рис. 4.

Вектори $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}$ колінеарні відповідно векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Враховуючи (1.1), маємо :

$$\overrightarrow{OA_1} = a_x \cdot \vec{i},\ \overrightarrow{OA_2} = a_y \cdot \vec{j},\ \overrightarrow{OA_3} = a_z \cdot \vec{k},$$

де , відповідно до співвідношення (1.8)

$$a_x = \text{Пр}_{Ox}\vec{a}, a_y = \text{Пр}_{Oy}\vec{a}, \vec{a}_z = \text{Пр}_{Oz}\vec{a}.$$

Отже,

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \{a_x; a_y; a_z\} \tag{1.11}$$

Співвідношення (1.11) – це розклад вектора $\vec{a}$ по базисних векторах $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; a_x, a_y, a_z – координати або проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі.

Вектор $\vec{a}$ (рис.4) є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ та $\overrightarrow{OA_3}$.

Тому

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left|\overrightarrow{OA_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OA_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OA_3}\right|^2} \quad \text{або}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ . \tag{1.12}$$

Приклад 10. Обчислити довжину вектора $\vec a = \vec a_1 - \frac{1}{5}\vec a_2$, якщо $\vec a_1 = \{1;2;1\}$, $\vec a_2 = \{4;8;3\}$.

◁ Вектор $\vec a = \{1;2;1\} - \frac{1}{5}\{4;8;3\} = \left\{\frac{1}{5};\frac{2}{5};\frac{2}{5}\right\}$. Згідно з (1.12)

$$|\vec a| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}. \ ▷$$

Приклад 11. Знайти орт $\vec a^\circ$ вектора $\vec a = \{3;4;-12\}$.

◁ Згідно з (1.11) маємо $\vec a^\circ = \frac{\vec a}{|\vec a|}$. Знайдемо довжину вектора $\vec a$: $|\vec a| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = 13$. Тоді орт $\vec a^\circ = \left\{\frac{3}{13};\frac{4}{13};-\frac{12}{13}\right\}$. ▷

6. Напрямні косинуса вектора

Нехай вектор $\vec a$ утворює з координатними осями кути α,β,γ. Тоді відповідно до (1.10) маємо:

$$a_x = \text{Пр}_{Ox}\vec a = |\vec a|\cdot\cos\alpha,\ a_y = |\vec a|\cdot\cos\beta,\ a_z = |\vec a|\cdot\cos\gamma \text{ , або}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec a|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec a|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec a|}. \qquad (1.13)$$

Косинуси кутів, які утворює вектор з осями координат, називаються його напрямними косинусами.

Знайдемо суму квадратів напрямних косинусів вектора $\vec a$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{{a_x}^2}{|\vec a|^2} + \frac{{a_y}^2}{|\vec a|^2} + \frac{{a_z}^2}{|\vec a|^2} = 1.$$

Отже,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (1.14).$$

Із співвідношення (1.14) випливає, що вектор $\vec a^\circ = \{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$ є одиничним вектором і має напрям вектора $\vec a$.

Отже, в прямокутній системі координати будь-якого одиничного вектора є його напрямними косинусами.

Приклад 12. Знайти напрямні косинуси вектора $\vec{a}=\left\{\frac{1}{5};\frac{2}{5};\frac{2}{5}\right\}$.

◁ Знайдемо довжину вектора $\vec{a}:|\vec{a}|=\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}+\frac{4}{15}}=\frac{3}{5}$. Тому згідно з (1.13):

$$\cos\alpha=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3},\cos\beta=\frac{2}{3},\cos\gamma=\frac{2}{3}. \ ▷$$

Приклад 13. Чи може вектор $\vec{a}$ утворювати з координатними осями кути $\alpha=45°,\beta=135°,\gamma=60°$?

◁ Оскільки $\cos\alpha=\cos 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta=\cos 135°=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\gamma=\cos 60°=\frac{1}{2}$, то $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$. Тому згідно з (1.4) вектор $\vec{a}$ не може утворювати з осями такі кути. ▷

Приклад 14. Вектор $\vec{a}$ утворює з осями координат однакові гострі кути. Знайти вектор $\vec{a}$, якщо $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$.

◁ Згідно з умовою задачі $\alpha=\beta=\gamma$. Тому

$3\cos^2\alpha=1,\cos^2\alpha=\frac{1}{3},\cos^2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Отже, $a_x=a_y=a_z=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=2$, тобто $\vec{a}=\{2;2;2\}$. ▷

Задачі

1.26. Відомо, що $|\vec{a}|=2$, а кути, які утворює цей вектор з координатними осями, $\alpha=45°,\beta=60°,\gamma=120°$. Обчислити проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі.

1.27. Чи може вектор утворювати з координатними осями такі кути

а) $\alpha = 135^\circ, \beta = 30^\circ, \gamma = 45^\circ$;

б) $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 60^\circ$?

1.28. Довжина вектора $\vec{a}$ дорівнює 8. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо він утворює кут 45° з віссю Оx, кут 60° з віссю Оz, а з віссю Оy – тупий кут.

1.29. Знайти вектор $\vec{x}$, який колінеарний вектору $\vec{a} = \{1;-2;-2\}$, утворює з віссю Оy гострий кут і має довжину $|\vec{x}| = 15$.

1.30. Знайти вектор $\vec{x}$, який утворює з осями координат однакові гострі кути, якщо $|\vec{x}| = 7\sqrt{3}$.

1.31. Знайти вектор $\vec{x}$, який утворює з віссю Оу кут 60°, з віссю Оz – 120°, якщо $|\vec{x}| = 5\sqrt{2}$.

1.32. Задані дві координати вектора $a_x = 4$, $a_y = -12$. Обчислити координату a_z, якщо $|\vec{a}| = 13$.

1.33. Обчислити напрямні косинуси вектора $\vec{a} = \{12;-15;-16\}$.

1.34. Задані модуль вектора $|\vec{a}| = 2$, кути $\alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 120^\circ$. Обчислити проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі.

1.35. Три сили $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$, які прикладені до однієї точки, мають взаємно перпендикулярні напрямки. Обчислити модуль їх рівнодійності $\vec{F}$, якщо $|\vec{F}_1| = 2, |\vec{F}_2| = 10$ і $|\vec{F}_3| = 11$.

7. Координати вектора,що заданий двома точками

Нехай у деякій прямокутній системі координат дано дві точки $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$. Знайдемо координати вектора $\vec{AB}$. Маємо $\vec{OA}=\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{OB}=\{x_2;y_2;z_2\}$, $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$. Отже,

$$\vec{AB}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}. \qquad (1.15)$$

Знайдемо відстань між точками $A(x_1,y_1,z_1)$ і $B(x_2,y_2,z_2)$. Шукана відстань $\rho(A,B)$ – це довжина вектора $\vec{AB}$. Отже,

$$\rho(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (1.16)$$

Приклад 15. Дано дві точки $A(1,1,3)$, $B(2,3,1)$. Знайти довжину та напрям вектора $\vec{AB}$

◁ Згідно з (1.15). $\vec{AB}=\{2-1;3-1;1-3\}=\{1;2;-2\}$.

Тоді, $\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{1+4+4}=3$, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{3}$. Отже,

$\left|\vec{AB}\right|=3, \cos\alpha=\frac{1}{3}, \cos\beta=\frac{2}{3}, \cos\gamma=-\frac{2}{3}$. ▷

Приклад 16. Знайти точку $A(x,y,z)$, в якій знаходиться початок вектора $\vec{a}=\{2;3;-1\}$, якщо кінець його збігається з точкою $B(1,2,-1\}$.

◁ Згідно з умовою задачі $\vec{a}=\vec{AB}$. Вектор $\vec{a}=\{2;3;-1\}$, $\vec{AB}=\{1-x;2-y;-1-z\}$.

Враховуючи, що $1 - x = 2$, $2 - y = 3$, $-1 - z = -1$, маємо $x = -1, y = -1, z = 0$, тобто $A(-1,-1,0)$. ⊳

Приклад 17. Перевірити, чи чотири точки $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,1,-3)$ і $D(3,-5,3)$ є вершинами трапеції.

⊲ Як відомо, трапеція – це чотирикутник, у якого дві протилежні сторони паралельні, а дві інші не паралельні. Знайдемо координати векторів $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ і $\vec{DA}$. Маємо:

$\vec{AB} = \{-2;3-3\}$, $\vec{BC} = \{-2;-1;-2\}$, $\vec{CD} = \{4;-6;6\}$, $\vec{DA} = \{0;4;-1\}$

Вектори $\vec{AB}$ та $\vec{CD}$ колінеарні (перевірити). Отже, дані точки є вершинами трапеції. ⊳

Задачі

1.36. Дані точки $A(2,0,1)$, $B(3,2,2)$, $C(3,1,5)$ і $D(2,3,0)$. Знайти вектор $\vec{a} = 2\vec{AB} - \vec{CD}$, його довжину та напрям.

1.37. Знайти довжину та напрям вектора $\vec{AB}$, якщо $A(0,2,2)$, $B(5,0,-2)$.

1.38. Знайти точку $A(x,y,z)$, в якій знаходиться початок вектора $\vec{a} = \{2;3;1\}$, якщо кінець його збігається з точкою B: а) $B(1,-1,2)$; б) $B(1,2,1)$.

1.39. Перевірити, чи чотири точки $A(2,0,1)$, $B(3,2,2)$, $C(3,1,5)$, $D(4,4,3)$ є вершинами трапеції.

1.40. Перевірити, чи точки $A(1,3,-3)$, $B(2,-5,5)$, $C(1,-1,5)$, $D(0,7,-3)$ є вершинами паралелограма.

1.41. Знайти точку, яка рівновіддалена від точок $O(0,0)$, $A(2,2)$, $B(0,2)$.

1.42. На осях координат знайти точки, кожна з яких рівновіддалена від точок $A(1,1)$ та $B(3,7)$.

1.43. Задані точки $A(-1,5,-10), B(5,-7,8), C(2,2,-7)$ і $D(5,-4,2)$. Перевірити, чи вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні.

1.44. Задані три вектори $\vec{a}=\{3;-1\}$, $\vec{b}=\{1;-2\}$, $\vec{c}=\{-1;7\}$. Знайти розклад вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ по базису $\vec{a},\vec{b}$.

1.45. На площині задані чотири точки $A(1,-2)$, $B(2,1)$, $C(3,2)$ і $D(-2,3)$ Знайти розклад вектора $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}$ по базису векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

1.46. Задані три вектори $\vec{a}=\{3;-2;1\}$, $\vec{b}=\{-1;1;-2\}$ і $\vec{c}=\{2;1;-3\}$. Знайти розклад вектора $\vec{m}=\{11;-6;5\}$ по базису $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

8. Поділ відрізка в заданому відношенні

Кажуть, що точка M ділить відрізок [AB] у відношенні λ, якщо $\overrightarrow{AM}=\lambda\,\overrightarrow{MB}$. Нехай $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$. Тоді координати точки $M(x,y,z)$ обчислюються за формулами

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{1.17}$$

Якщо точка M є серединою відрізка [AB], тобто $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$., то $\lambda=1$ і формула (1.17) набуває вигляду

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}. \qquad (1.18).$$

Приклад 18. Відрізок з кінцями в точках $A(3,-2)$ і $B(6,4)$ розділено на три рівні частини. Знайти координати точок поділу.

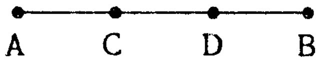


Рис. 5.

◁ Нехай C,D – точки поділу відрізка [AB] на три рівні частини (рис.5). Зрозуміло, що $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. Тому точка C ділить відрізок [AB] у відношенні $\lambda = \frac{1}{2}$. Використовуючи формули (1.17), знаходимо координати точки C:

$$x_c = \frac{3 + \frac{1}{2}\cdot 6}{1 + \frac{1}{2}} = 4, \; y_c = \frac{-2 + \frac{1}{2}\cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = 0,$$

тобто $C(4,0)$.

Із рівності $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$ випливає, що точка D ділить відрізок [AB] у відношенні $\lambda = 2$. Тому координати точки D:

$$x_D = \frac{3 + 2\cdot 6}{1 + 2} = 5, \; y_D = \frac{-2 + 2\cdot 4}{1 + 2} = 2, \; D(5,2). \; ▷$$

Приклад 19. Дано три послідовні вершини паралелограма $A(1,1,4)$, $B(2,3,-1)$, $C(-2,2,0)$. Знайти четверту вершину D, яка протилежна до вершини B.

◁ Відомо, що вектори, які збігаються з протилежними сторонами паралелограма, дорівнюють один одному, тобто $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Вектор $\overrightarrow{AB} = \{1;2;-5\}$, а вектор $\overrightarrow{DC} = \{-2 - x; 2 - y; -z\}$. Із рівності векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$ випливає рівність їх координат: $1 = -2 - x$, $2 = 2 - y$, $-5 = -z$, тобто $x = -3$, $y = 0$, $z = 5$. Отже, шукана вершина паралелограма знаходиться в точці $D(-3,0,5)$. ▷

Приклад 20. Знайти координати центра мас трикутника ABC, якщо A(5,1,13), B(11,3,8), C(2,5,0).

◁ Центром мас трикутника є точка перетину медіан. Медіана – це відрізок прямої, який сполучає будь-яку вершину трикутника із серединою протилежної сторони. Нехай [AK] – медіана трикутника ABC. Тоді точка K є серединою відрізка [BC] і її координати знаходимо за формулою (1.17):

$$x_K = \frac{11+2}{2} = \frac{13}{2},\ y_K = \frac{3+5}{2} = 4,\ z_K = \frac{8+0}{2} = 4.$$

Медіани трикутника перетинаються в точці, яка ділить їх у відношенні 2:1, починаючи від його вершини. Якщо O – точка перетину медіан, то $\vec{AO} = 2\vec{OK}$, тобто $\lambda=2$ і за формулами (1.17) маємо:

$$x_O = \frac{x_A + 2x_B}{1+2} = \frac{5+13}{3} = 6,\ y_O = 3,\ z_O = 7.$$

Отже, O(6,3,7). ▷

Задачі

1.47. Відрізок з кінцями в точках A(1,–3,2) і B(4,0,5) розділений на три рівні частини. Знайти координати точок поділу.

1.48. Проведено відрізок від точки A(1;–1) до точки B(–4;5). До якої точки потрібно його продовжити в тому ж напрямі, щоб його довжина подвоїлась?

1.49. Відрізок AD поділений на три рівні частини. Точками поділу є точки B(0,–1) і C(2,–3). Знайти координати кінців відрізка.

1.50. Дано вершини трикутника A(5,3), B(3,–2) і C(1,4). Визначити довжину медіани AM.

1.51. Дано середини сторін трикутника M(3,2), P(–2,0), Q(1,3). Знайти вершини трикутника.

1.52. Дані суміжні вершини паралелограма $A(1,3,-3)$, $B(2,-5,5)$ і точка $M(1,1,1)$ перетину його діагоналей. Знайти координати інших двох вершин.

1.53. Точки $A(1,1,1)$, $B(2,4,1)$ і $C(3,1,1)$ є послідовними вершинами ромба. Знайти координати вершини D.

1.54. Точка $A(1,4)$ є однією з вершин прямокутника, а $M(2,1)$ – точкою перетину його діагоналей. Знайти координати інших трьох вершин прямокутника.

1.55. Дані вершини $A(2,-1,4)$, $B(3,2,-6)$ і $C(-5,0,2)$ трикутника. Обчислити довжину його медіани, проведеної з вершини A.

1.56. Центр маси однорідного стержня знаходиться в точці $C(1,-1,5)$, одним із його кінців є точка $A(-2,-1,7)$. Знайти координати другого кінця стержня.

1.57. Знайти координати центра маси трикутника з вершинами в точках $A(1,-4)$, $B(-1,2)$ і $C(6,-1)$.

§2. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

1. Скалярний добуток і його властивості

Нехай задані вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

<u>Означення.</u> Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добуткові довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ позначається символом $(\vec{a},\vec{b})$ або $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Отже, на основі означення маємо

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi, \tag{2.1}$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Оскільки

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi, \text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\cos\varphi,$$

то

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} \tag{2.2}$$

Основні властивості скалярного добутку

1. $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$.
2. $(\lambda\vec{a},\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$.
3. $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$.
4. $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2$, звідки $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$.
5. $(\vec{a},\vec{b})=0$, якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$ або один з них є нульовим вектором, і навпаки.

Якщо вектор $\vec{F}$ зображує силу, точка прикладання якої переміщується з початку в кінець вектора $\vec{s}$, то робота A цієї сили визначається рівністю

$$A=(\vec{F},\vec{s}). \tag{2.3}$$

Приклад 1 . Обчислити $(\vec{a}+\vec{b})^2$, якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{3}$.

◁ Використовуючи властивості скалярного добутку, маємо

$$(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a},\vec{a})+(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{a})+(\vec{b},\vec{b})=|\vec{a}|^2+2(\vec{a},\vec{b})+|\vec{b}|^2=$$

$=9+2\cdot3\cdot4\cdot\dfrac{1}{2}+16=37$, тобто $(\vec{a}+\vec{b})^2=37$. ▷

Приклад 2. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{a}_1+\alpha\vec{a}_2$ і $\vec{a}_1-\alpha\vec{a}_2$ будуть перпендикулярними, якщо $|\vec{a}_1|=3$, $|\vec{a}_2|=5$.

◁ Згідно із властивістю 5 скалярного добутку маємо

$(\vec{a}_1+\alpha\vec{a}_2,\vec{a}_1-\alpha\vec{a}_2)=0$. Але $(\vec{a}_1+\alpha\vec{a}_2,\vec{a}_1-\alpha\vec{a}_2)=|\vec{a}_1|^2-\alpha^2\cdot|\vec{a}_2|^2$

(перевірити). Для знаходження α отримали рівняння $9-\alpha^2 25=0 \Rightarrow$

$\alpha_1=\frac{3}{5}$, $\alpha_2=-\frac{3}{5}$. ▷

Приклад 3. Знайти кут, який утворюють одиничні вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, якщо вектори $\vec{a}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$ та $\vec{b}=5\vec{e}_1-4\vec{e}_2$ перпендикулярні.

◁ Нехай φ – кут, який утворюють вектори $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$. Обчислимо скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$(\vec{a},\vec{b})=(\vec{e}_1+2\vec{e}_2,5\vec{e}_1-4\vec{e}_2)=5(\vec{e}_1,\vec{e}_1)-4(\vec{e}_1,\vec{e}_2)+10(\vec{e}_2,\vec{e}_1)-8(\vec{e}_2,\vec{e}_2)=$$

$$=5|\vec{e}_1|^2+6(\vec{e}_1,\vec{e}_2)+8|\vec{e}_2|^2.$$

Оскільки вектори $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ одиничні, тобто $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1$, то $(\vec{a},\vec{b})=5+6\cos\varphi-8=6\cos\varphi-3$.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні.Тоді $(\vec{a},\vec{b})=0$. Тому для знаходження кута φ маємо рівняння $6\cos\varphi-3=0\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}$. ▷

Задачі

2.1. $|\vec{a}_1| = 3$, $|\vec{a}_2| = 4$, $\varphi = {}^{2\pi}\!/_{3}$. Обчислити:

а) $(3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2, \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2)$, б) $(\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2, 2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2)$.

2.2. Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

2.3. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{a}_1 + \alpha\vec{a}_2$ та $\vec{a}_1 - \alpha\vec{a}_2$ будуть перпендикулярні, якщо $|\vec{a}_1| = 2$, $|\vec{a}_2| = 3$.

2.4. Задані три точки $A(1,1,1)$, $B(4,5,-3)$ і $C(2,3,4)$. Обчислити скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$.

2.5. Знайти кут, який утворюють одиничні вектори $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$, якщо вектори $\vec{a} = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ і $\vec{b} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ перпендикулярні.

2.6. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні; вектор $\vec{c}$ утворює з ними кути, які дорівнюють $\dfrac{\pi}{3}$, і $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$. Обчислити:

а) $(3\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{b} + 3\vec{c})$; б) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$. в) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$.

2.7. Довести тотожність $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$ і з'ясувати її геометричний зміст.

2.8. Задані одиничні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, які задовольняють умову $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = 0$. Обчислити $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + (\vec{e}_2, \vec{e}_3) + (\vec{e}_3, \vec{e}_1)$.

2.9. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задовольняють умову $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Обчислити $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$.

2.10. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 60^\circ$. Обчислити модуль вектора $\vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 4$ і $|\vec{b}| = 2$.

2.11. Знайти, при якому значенні α вектори $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ і $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ будуть перпендикулярними, якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=6$.

2. Вираження скалярного добутку через координати співмножників

Нехай $\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$. Тоді

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}, \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні попарно перпендикулярні вектори, тобто $(\vec{i},\vec{i})=(\vec{j},\vec{j})=(\vec{k},\vec{k})=1$, $(\vec{i},\vec{j})=(\vec{j},\vec{k})=(\vec{k},\vec{i})=0$.

Враховуючи властивості скалярного добутку, отримаємо

$$(\vec{a},\vec{b})=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z. \tag{2.4}$$

Отже, скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх однойменних координат.

3. Кут між двома векторами

Якщо відомі координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \tag{2.5}$$

4. Умови ортогональності (перпендикулярності) та колінеарності двох векторів

Якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $(\vec{a},\vec{b})=0$, тобто

$$a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0. \tag{2.6}$$

Якщо ж вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні, то

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}. \qquad (2.7)$$

Приклад 4. Обчислити $(\vec{a},\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{4;-2;-4\}$, $\vec{b}=\{6;-3;2\}$.

◁ Користуючись формулою (2.4), знаходимо

$$(\vec{a},\vec{b})=4\cdot 6+(-2)\cdot(-3)+(-4)\cdot 2=22. \ ▷$$

Приклад 5. При якому значенні m вектори $\vec{a}=\{m;3;4\}$ і $\vec{b}=\{4;m;-7\}$ будуть перпендикулярними?

◁ Маємо $(\vec{a},\vec{b})=4m+3m-28=7m-28$. Оскільки вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні, то $(\vec{a},\vec{b})=0$. Отже, $7m-28=0$. Звідси m=4. ▷

Приклад 6. Знайти вектор $\vec{c}=\{c_x;c_y;c_z\}$, який колінеарний до вектора $\vec{a}=\{2;1;-1\}$ і задовольняє умову $(\vec{c},\vec{a})=3$.

◁ З умови колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{c}$ маємо $\frac{c_x}{2}=\frac{c_y}{1}=\frac{c_z}{-1}$. Звідси $c_x=-2c_z$, $c_y=-c_z$. Згідно з умовою задачі вектор $\vec{c}$ задовольняє рівняння $2c_x+c_y-c_z=3$. Підставимо замість c_x та c_y їх значення в останнє рівняння:

$2(-2c_z)+(-c_z)-c_z=3 \Rightarrow c_z=-\frac{1}{2}$. Тоді $c_x=1, c_y=\frac{1}{2}$. Отже,

$$\vec{c}=\{1;\tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2}\}. \ ▷$$

Приклад 7. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F}=\{3;-2;-5\}$, коли її точка прикладання рухається прямолінійно, переміщуючись із положення $A(2,-3,5)$ в положення $B(3,-2,-1)$.

◁ Згідно з формулою (2.3) робота $A=(\vec{F},\overrightarrow{AB})$. Вектор переміщення $\overrightarrow{AB}=\{1;1;-6\}$. Тоді $A=3\cdot 1+(-2)\cdot 1+(-5)\cdot(-6)=31$. Отже, робота A, яку виконує сила $\vec{F}$, дорівнює 31. ▷

Приклад 8. Дано вершини трикутника $A(-1,-2,4), B(-4,-2,0)$ і $C(3,-2,1)$. Знайти його внутрішній кут при вершині B.

◁ Кут φ при вершині B – це кут між векторами $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$, де $\overrightarrow{BA}=\{3;0;4\}$, $\overrightarrow{BC}=\{7;0;1\}$. Згідно з (2.5):

$$\cos\varphi = \frac{3\cdot 7 + 0\cdot 0 + 4\cdot 1}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ.$$

Отже, шуканий кут дорівнює 45°. ⊳

Приклад 9. Дано три вектори $\vec{a} = \{1;-3;4\}, \vec{b} = \{3;-4;2\}$ і $\vec{c} = \{-1;1;4\}$. Знайти $\text{Пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

⊲ Вектор $\vec{b} + \vec{c} = \{2;-3;6\}$. Згідно з (2.3):

$$\text{Пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b}+\vec{c})}{\left|\vec{b}+\vec{c}\right|} = \frac{2+9+24}{\sqrt{4+9+36}} = 5.$$ Отже, $\text{Пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a} = 5$. ⊳

Приклад 10. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = \{\sqrt{2};-3;-5\}$ на вісь l, яка утворює з координатними осями Ox і Oy кути $\alpha=45°$, $\beta=60°$, а з віссю Oz – тупий кут.

⊲ Згідно з формулою (1.14) маємо $\cos^2\gamma = \frac{1}{4}$. Оскільки γ – тупий кут, то $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$. Позначивши через $\vec{e}$ одиничний вектор, який співнапрямлений з віссю l. З означення напрямних косинусів отримаємо

$\vec{e} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\} = \{\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\}$. $\cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{e}$:

$$\text{Пр}_{\vec{e}}\vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{e})}{|\vec{e}|} = \frac{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\cdot\frac{1}{2} + 5\cdot\frac{1}{2}}{1} = 2.$$ ⊳

Задачі

2.12. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F} = \{3;-5;2\}$ при прямолінійному переміщенні $\vec{s} = \{2;-5;-7\}$ матеріальної точки.

2.13. Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a} = \{1;2;-1\}$ і $\vec{b} = \{-3;4;1\}$.

2.14. Обчислити косинус кута φ між векторами $\vec{a} = \{2;-4;4\}$, $\vec{b} = \{-3;2;6\}$.

2.15. Обчислити кут між векторами $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2.16. Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a} = \{-4;3;0\}$ і $\vec{b} = \{2;-3;6\}$ та визначити, який кут(гострий, прямий чи тупий) вони утворюють.

2.17. Дано трикутник ABC: $A(4,0,-2), B(-2,-6,4), C(4,3,2)$. Знайти кут φ між стороною (AB) і медіаною (CD).

2.18. При якому значенні m вектори $\vec{a} = \{3; m; 4\}$ і $\vec{b} = \{m; 4; -7\}$ перпендикулярні?

2.19. При якому значенні α вектори $\vec{p} = \{2; 0; \alpha\}$ і $\vec{q} = \{3; 4; 2\}$ перпендикулярні?

2.20. Дано вершини чотирикутника A(1,2,3), B(7,–3,2), C(3,0,6) і D(9,2,4). Довести, що його діагоналі взаємно перпендикулярні.

2.21. Довести, що чотирикутник з вершинами $A(-3,5,6), B(1,-5,7)$, $C(8,-3,-1)$ і $D(4,7,-2)$ – квадрат.

2.22. Знайти косинус кута φ між діагоналями (AC) і (BD) паралелограма, якщо задані три його вершини $A(2,1,3)$, $B(5,2,-1)$ і $C(-3,3,-3)$.

2.23. Знайти вектор $\vec{b}$, який колінеарний до вектора $\vec{a} = \{6; -8; -7{,}5\}$, утворює гострий кут γ з віссю Oz і $|\vec{b}| = 50$.

2.24. Знайти вектор $\vec{d}$, якщо він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = \{2; 3; -1\}, \vec{b} = \{1; -2; 3\}$ та задовольняє умову $(\vec{d}, \vec{c}) = -6$, де $\vec{c} = \{2; -1; 1\}$.

2.25. Знайти вектор $\vec{c}$, якщо він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = \{3; 2; 2\}$ і $\vec{b} = \{18; -22; -5\}$, утворює з віссю Oy тупий кут β та $|\vec{c}| = 14$.

2.26. Задані два вектори: $\vec{a} = \{3; -1; 5\}$ і $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$. Знайти вектор $\vec{c}$, який перпендикулярний до осі Oz і задовольняє умови: $(\vec{c}, \vec{a}) = 9, (\vec{c}, \vec{b}) = -4$.

2.27. Задані три вектори: $\vec{a} = \{2; -1; 3\}, \vec{b} = \{1; -3; 2\}, \vec{c} = \{3; 2; -4\}$. Знайти вектор $\vec{d}$, який задовольняє такі умови: $(\vec{d}, \vec{a}) = -5, (\vec{d}, \vec{b}) = -11, (\vec{d}, \vec{c}) = 20$.

2.28. Дано точки $M(-5,7,-6)$ і $N(7,-9,9)$. Обчислити проекцію вектора $\vec{a} = \{1; -3; 1\}$ на вектор $\overrightarrow{MN}$.

2.29. Дано вершини трикутника $A(4,1,0), B(2,2,1)$ і $C(6,3,1)$. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

2.30. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = \{4; -3; 2\}$ на вісь l, яка утворює з осями координат однакові гострі кути.

2.31. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = \{\sqrt{2}; -1; 5\}$ на вісь l, яка утворює з координатними осями Ox, Oy кути $\alpha = 45°, \beta = 60°$ і гострий кут з віссю Oz.

2.32. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = \{\sqrt{2};-3;-5\}$ на вісь l, що утворює з координатними осями Ox,Oz кути $\alpha=45°,\gamma=60°$, а з віссю Oy – гострий кут β.

2.33. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l, яка утворює з координатними осями Ox,Oz кути $\alpha=120°,\gamma=45°$ і тупий кут β з віссю Oy, якщо $A(1,0,-3)$, $B(3,4,1)$.

2.34. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l, яка утворює з координатними осями Ox,Oy кути $\alpha=60°,\beta=120°$, а з віссю Oz – тупий кут γ, якщо $A(3,-4,-2)$, $B(2,5,-2)$.

2.35. Обчислити $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}$,якщо $\vec{a} = \{5;2;5\}, \vec{b} = \{2;-1;2\}$.

2.36. Обчислити $\text{Пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$, якщо $\vec{a} = \{3;-6;-1\}$, $\vec{b} = \{1;4;-5\}$ і $\vec{c} = \{3;-4;12\}$.

2.37. Обчислити $\text{Пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$, , якщо $\vec{a} = \{-2;1;1\}, \vec{b} = \{1;5;0\}, \vec{c} = \{4;4;-2\}$.

2.38. Дано точки $A(-2,3,4)$, $B(3,2,5)$, $C\ (1,-1,2)$ і $D(3,2,-4)$. Обчислити $\text{Пр}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.

2.39. На матеріальну точку діють дві сили $\vec{F_1} = \{1;1;3\}$, $\vec{F_2} = \{1;1;-2\}$. Знайти роботу,яку виконує рівнодійна цих сил при переміщенні точки із положення $A(2,-1,0)$ у положення $B(4,1,-1)$.

2.40. На матеріальну точку діє сила $\vec{F} = \{3;-2;-5\}$. Знайти роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні точки з положення $A(2,-3,5)$ у положення $B(3,-2,-1)$.

2.41. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна трьох сил $\vec{F_1} = \{1;0;3\}$, $\vec{F_2} = \{-1;4;3\}$ і $\vec{F_3} = \{-2;0;1\}$, які прикладені до матеріальної точки, що рухається прямолінійно від точки $A(1,-1,2)$ до точки $B(1,4,5)$.

2.42. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна трьох сил $\vec{F_1} = \{3;-4;2\}$, $\vec{F_2} = \{2;3;-5\}$ і $\vec{F_3} = \{-3;-2;4\}$, які прикладені до матеріальної точки, що рухається прямолінійно від точки $A(5,3,-7)$ до точки $B(4,-1,-4)$.

§3. ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

1. Векторний добуток і його властивості

Означення. Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається <u>вектор</u> $\vec{c}$, який задовольняє умови:

1. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

2. Напрям вектора $\vec{c}$ вибирається так,щоб трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ була правою (див.розділ 2,§1,п.4).

3. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, де $\varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}})$. (3.1)

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ позначається символами $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ або $\vec{a}\times\vec{b}$.

Властивості векторного добутку

1. Векторний добуток дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли вектори колінеарні або один з них нульовий, тобто,

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right] = \vec{0}, \tag{3.2}$$

2. Векторний добуток залежить від послідовності співмножників, а саме:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right]. \tag{3.3}$$

3.Асоціативність відносно скалярного множника:

$$\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right] = \left[\vec{a},\lambda\vec{b}\right] = \lambda\cdot\left[\vec{a},\vec{b}\right]. \tag{3.4}$$

4.Розподільна властивість відносно додавання:

$$\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right] = \left[\vec{a},\vec{c}\right] + \left[\vec{b},\vec{c}\right] \tag{3.5}$$

Приклад 1. Обчислити $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$, якщо $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$ і кут φ = $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

◁ Згідно з формулою (3.1) маємо:

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi = 1\cdot 2\cdot\sin\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}. \ \triangleright$$

Приклад 2. Обчислити $\left|\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]\right|$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ і $\varphi=30°$.

◁ Відповідно до властивостей 3 і 4 векторного добутку

$$\left[2\vec a+\vec b,\vec a+2\vec b\right]=2\left[\vec a,\vec a\right]+4\left[\vec a,\vec b\right]+\left[\vec b,\vec a\right]+2\left[\vec b,\vec b\right].$$

Враховуючи властивості 1 та 2, отримаємо

$\left[2\vec a+\vec b,\vec a+2\vec b\right]=3\left[\vec a,\vec b\right]$. Тоді $\left|\left[2\vec a+\vec b,\vec a+2\vec b\right]\right|=\left|3\left[\vec a,\vec b\right]\right|=3\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2}=6.$ ⊳

Приклад 3. Спростити вираз $\left[\vec i,\vec j+\vec k\right]-\left[\vec j,\vec i+\vec k\right]+\left[\vec k,\vec i+\vec j+\vec k\right]$.

⊲ Відповідно до означення векторного добутку:

$\left[\vec i,\vec j\right]=\vec k,\left[\vec j,\vec k\right]=\vec i,\left[\vec k,\vec i\right]=\vec j$ (перевірити). Тоді, згідно з властивостями 1-4:

$$\left[\vec i,\vec j+\vec k\right]-\left[\vec j,\vec i+\vec k\right]+\left[\vec k,\vec i+\vec j+\vec k\right]=\left[\vec i,\vec j\right]+\left[\vec i,\vec k\right]-\left[\vec j,\vec i\right]-$$

$$-\left[\vec j,\vec k\right]+\left[\vec k,\vec i\right]+\left[\vec k,\vec j\right]+\left[\vec k,\vec k\right]=2(\vec k-\vec i).\ ⊳$$

Приклад 4. Обчислити $\left|\left[\vec a,\vec b\right]\right|$, якщо $|\vec a|=6,\ |\vec b|=5,\ (\vec a,\vec b)=15\sqrt3$

⊲ Скалярний добуток $\left(\vec a,\vec b\right)=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos\varphi$, тобто

$15\sqrt3=6\cdot5\cdot\cos\varphi\Rightarrow\cos\varphi=\dfrac{\sqrt3}{2},\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. Тоді $\left|\left[\vec a,\vec b\right]\right|=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sin\varphi=6\cdot5\cdot\frac12=15.$

⊳

Задачі

3.1. Обчислити, $\left|\left[\vec a,\vec b\right]\right|$ якщо $|\vec a|=6,|\vec b|=5$ і кут $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

3.2. Обчислити $\left|\left[\vec a,\vec b\right]\right|$, якщо $|\vec a|=10,|\vec b|=2$ і $\left(\vec a,\vec b\right)=12.$

3.3. Обчислити $\left(\vec a,\vec b\right)$, якщо $|\vec a|=3,|\vec b|=26$ і $\left|\left[\vec a,\vec b\right]\right|=72.$

3.4. Вектори $\vec a$ і $\vec b$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$, крім того, $|\vec a|=1,|\vec b|=2.$ Обчислити: а) $\left[\vec a,\vec b\right]^2$; б) $\left[\vec a+2\vec b,2\vec a+\vec b\right]^2$; в) $\left|\left[\vec a+3\vec b,3\vec a-\vec b\right]\right|$.

3.5 Вектори $\vec a$ і $\vec b$ взаємно перпендикулярні $|\vec a|=3,\ |\vec b|=4.$ Обчислити а) $\left|\left[\vec a+\vec b,\vec a-\vec b\right]\right|$; б) $\left|\left[3\vec a-\vec b,\vec a-2\vec b\right]\right|$.

3.6. Яку умову повинні задовольняти вектори $\vec a$ і $\vec b$, щоб вектори $\vec a+\vec b$ та $\vec a-\vec b$ були колінеарними?

3.7. При якому значенні α вектори $\vec p=\alpha\vec a-4\vec b$ та $\vec q=2\vec a+5\vec b$ колінеарні?

3.8. Вектори $\vec{a}, \vec{b}$ та $\vec{c}$ задовольняють умову $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Довести, що $[\vec{a},\vec{b}]=[\vec{b},\vec{c}]=[\vec{c},\vec{a}]$.

3.9. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ зв'язані співвідношенням $[\vec{a},\vec{b}]=[\vec{c},\vec{d}]$ та $[\vec{a},\vec{c}]=[\vec{b},\vec{d}]$. Довести колінеарність векторів $\vec{a}-\vec{d}$ і $\vec{b}-\vec{c}$.

3.10. Спростити вирази:

а) $[\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\vec{c}]+[\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\vec{b}]+[\vec{b}-\vec{c},\vec{a}]$;

б) $[2\vec{a}+\vec{b},\vec{c}-\vec{a}]+[\vec{b}+\vec{c},\vec{a}+\vec{b}]$;

в) $(2\vec{i},[\vec{j},\vec{k}])+(3\vec{j},[\vec{i},\vec{k}])+(4\vec{k},[\vec{i},\vec{j}])$.

2. Вираження векторного добутку через координати співмножників

Нехай $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$. Тоді

$$[\vec{a},\vec{b}]=[a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}].$$

Враховуючи властивості векторного добутку, отримаємо

$$[\vec{a},\vec{b}]=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k},$$

або, якщо використати означення визначника 3-го порядку,

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \qquad (3.6)$$

Приклад 5. Дано точки A(2,–1,2), B(1,2,–1) і C(3,2,1). Знайти векторний добуток $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}]$.

◁ Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{BC}$. Маємо: $\overrightarrow{AB}=\{-1;3;-3\}$, $\overrightarrow{BC}=\{2;0;2\}$. Тоді згідно з (3.6) знаходимо

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 3 & -3\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=6\vec{i}-4\vec{j}-6\vec{k},\ \text{тобто}\ [\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}]=\{6;-4;6\}.\ ▷$$

Приклад 6. Знайти координати вектора $\vec{c}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=\{4;-2;-3\}$ та $\vec{b}=\{0;1;3\}$, утворює з віссю Oz тупий кут і $|\vec{c}|=26$.

◁ Оскільки $\vec{c}\perp\vec{a}$ і $\vec{c}\perp\vec{b}$, то $\vec{c}=\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, тобто вектор $\vec{c}$ колінеарний до вектора $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$. Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Згідно з формулою (3.6) маємо:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=-3\vec{i}-12\vec{j}+4\vec{k}.$$

Вектор $\vec{c}=\lambda\left(-3\vec{i}-12\vec{j}+4\vec{k}\right)=\{-3\lambda;-12\lambda;4\lambda\}$, а його модуль $|\vec{c}|=\sqrt{9\lambda^2+144\lambda^2+16\lambda^2}=26$, $26=\sqrt{169\lambda^2}$, тобто $\lambda=\pm2$. Вектор $\vec{c}$ з віссю Oz утворює тупий кут, тобто $c_z=4\lambda<0$. Отже, $\lambda=-2$ і шуканий вектор $\vec{c}=\{6;24;-8\}$. ▷

Задачі

3.11. Дано вектори $\vec{a}=\{1;0;-2\}$ та $\vec{b}=\{2;1;0\}$. Перевірити, чи виконується рівність $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$.

3.12. Дано вектори $\vec{a}=\{3;-1;2\}$ та $\vec{b}=\{1;2;-1\}$. Знайти векторні добутки:

а) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$; б) $\left[12\vec{a}+\vec{b},\vec{b}\right]$; в) $\left[2\vec{a}-\vec{b},2\vec{a}+\vec{b}\right]$.

3.13. Дані точки $A(2,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(3,2,1)$. Знайти векторний добуток $[\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB}]$.

3.14. Знайти одиничний вектор $\vec{c}^{\circ}$, який перпендикулярний до векторів $\vec{a}=\{2;2;1\}$ і $\vec{b}=\{4;5;3\}$.

3.15. Три ненульові вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ зв'язані співвідношеннями $\vec{a}=[\vec{b},\vec{c}]$, $\vec{b}=[\vec{c},\vec{a}]$, $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$. Знайти довжини цих векторів і кути між ними.

3.16. Знайти координати вектора $\vec{x}$, якщо він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=\{2;-3;1\}$, $\vec{b}=\{1;-2;3\}$, а також задовольняє умову $(\vec{x},\vec{c})=10$, де $\vec{c}=\{1;2;-7\}$.

3.17. Знайти вектор $\vec{b}$, який перпендикулярний до осі Oz і до вектора $\vec{a} = \{8;-15;3\}$, утворює гострий кут з віссю Ox і $|\vec{b}| = 51$.

3.18. Обчислити синус кута φ, який утворюють вектори $\vec{a} = \{2;-2;1\}$ і $\vec{b} = \{2;3;6\}$.

3.19. Нехай φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайти $tg\varphi$.

3. Застосування векторного добутку

1. Обчислення площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Модуль векторного добутку $[\vec{a}, \vec{b}]$ дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, які віднесені до спільного початку.

Справді, площа паралелограма дорівнює добуткові його суміжних сторін на синус кута між ними, тобто

$$S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi = |[\vec{a}, \vec{b}]|.$$

Отже,

$$S = |[\vec{a}, \vec{b}]|. \tag{3.7}$$

2. Момент сили $\vec{F}$, прикладеної в точці M, відносно фіксованої точки O.

Якщо вектор $\vec{F}$ зображає силу, прикладену до точки M, а вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$, то вектор $[\vec{a}, \vec{F}]$ є моментом сили $\vec{F}$ відносно точки O, тобто

$$\mathrm{mom}_o \vec{F} = [\vec{a}, \vec{F}]. \tag{3.8}$$

Приклад 7. Обчислити площу трикутника з вершинами в точках $A(1,-1,2), B(5,-6,2)$ і $C(1,3,-1)$.

◁ Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, які збігаються зі сторонами трикутника ABC. Маємо $\overrightarrow{AB} = \{4;-5;0\}$, $\overrightarrow{AC} = \{0;4;-3\}$. Тоді векторний добуток

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}.$$

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, тобто $S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{25}{2}$. ▷

Приклад 8. Сила $\vec{F} = \{1;-2;4\}$ прикладена до точки $M(1,2,3)$.. Знайти момент цієї сили відносно точки $A(3,2,-1)$.

◁ Вектор $\overrightarrow{AM} = \{-2;0;4\}$, тому згідно з (3.8)

$$\text{mom}_A \vec{F} = \left[\overrightarrow{AM}, \vec{F}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k}. \ ▷$$

Задачі

3.20. Дано трикутник з вершинами $A(2,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(3,2,1)$. Обчислити його площу.

3.21. Сторони паралелограма $П_1$ є діагоналями паралелограма $П_2$. Яким співвідношенням зв'язані їх площі S_1 та S_2?

3.22. Обчислити площу паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n}$ та $\vec{b} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$, де $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, та кут між ними $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

3.23. Дано вершини трикутника $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$ і $C(1,3,-1)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

3.24. Сила $\vec{F} = \{3;2;-4\}$ прикладена до точки $M(2,-1,1)$. Знайти момент цієї сили відносно початку координат.

3.25. Сила $\vec{F} = \{2;-4;3\}$ прикладена до точки $A(1,5,-2)$. Знайти момент цієї сили відносно точки $B(5,-3,4)$.

3.26. Знайти момент сили $\vec{F}$, яка прикладена до точки $B(2,-1,3)$, відносно точки $A(3,-2,1)$, якщо $|\vec{F}| = 5$ і вектор $\vec{F}$ колінеарний вектору $\vec{a}$, де $\vec{a} = \{2;1;-2\}$.

3.27. Сила $\vec{F} = \{2;2;9\}$ прикладена до точки $A(4,2,-3)$. Обчислити значення та напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки $B(2,4,0)$.

3.28. Дано три сили $\vec{F_1} = \{2;-1;-3\}$, $\vec{F_2} = \{3;2;-1\}$ і $\vec{F_3} = \{-4;1;3\}$, які прикладені до точки $A(-1,4,-2)$. Обчислити величину і напрямні косинуси моменту рівнодійної цих сил відносно точки $B(2,3,-1)$.

§4. МІШАНИЙ ДОБУТОК ТРЬОХ ВЕКТОРІВ

1. Визначення мішаного добутку трьох векторів

Означення. Скалярний добуток вектора $\vec{c}$ на векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ позначається символом $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. Отже, згідно з означенням $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = ([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$.

Мішаний добуток, який є числом, має таке геометричне тлумачення: якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні, то їх мішаний добуток дорівнює об'ємові V паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (віднесених до спільного початку), якщо трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – права і мінус V паралелепіпеда, коли ця трійка ліва.

Отже,

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \pm V. \tag{4.1}$$

Згідно з означенням для довільних трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ маємо:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b}). \tag{4.2}$$

Мішаний добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли перемножувані вектори компланарні.

Приклад 1. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють ліву трійку, взаємно перпендикулярні і $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 4$. Обчислити $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

◁ Згідно із співвідношенням (4.1) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -V$.

Оскільки вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ взаємно перпендикулярні, то паралелепіпед, побудований на них, є прямокутним, отже $V = 3\cdot 2\cdot 4 = 24$. Значить, $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -24$. ▷

Приклад 2. Довести тотожність:

$$(\vec{a}+\vec{c},\vec{b},\vec{a}+\vec{b}) = -(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

◁ Згідно з означенням мішаного добутку та співвідношенням (4.2) маємо:

$$(\vec{a}+\vec{c},\vec{b},\vec{a}+\vec{b}) = ([\vec{a}+\vec{c},\vec{b}],\vec{a}+\vec{b}) = ([\vec{a},\vec{b}]+[\vec{c},\vec{b}],\vec{a}+\vec{b}) =$$

$$= ([\vec{a},\vec{b}],\vec{a}) + ([\vec{a},\vec{b}],\vec{b}) + ([\vec{c},\vec{b}],\vec{a}) + ([\vec{c},\vec{b}],\vec{b}) = (\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{b},\vec{c}). ▷$$

Задачі

4.1. Вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку, взаємно перпендикулярні і $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5, |\vec{c}| = 2$. Обчислити $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

4.2. Довести, що для будь-яких векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ вектори $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$ компланарні.

4.3. Довести тотожності:

а) $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}, \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) = 3(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

б) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}) = 2(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

с) $\forall \alpha, \beta \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

4.4. Обчислити $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, якщо $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$, кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює $30°$ і $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$.

4.5. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють ліву трійку, $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3$, $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 30°$. Обчислити $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

4.6. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ задовольняють умову $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = \vec{0}$. Довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарні.

2. Вираження мішаного добутку через координати перемножуваних векторів

Нехай $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ і $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$. Тоді

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (4.3)$$

Умова компланарності трьох векторів

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні, то $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$, тобто

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0. \qquad (4.4)$$

Приклад 3. Обчислити мішаний добуток векторів $\vec{a}=\{2;1;1\}$, $\vec{b}=\{2;3;2\}$ і $\vec{c}=\{3;3;4\}$.

◁ Згідно з формулою (4.3) маємо:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}=7. \ ▷$$

Приклад 4. Перевірити, чи чотири точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$ і $D(2,1,3)$ лежать в одній площині .

◁ Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB}=\{-1;-1;6\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-2;0;2\}$ і $\overrightarrow{AD}=\{1;-1;4\}$ і обчислимо їх мішаний добуток. Маємо:

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

Отже, (згідно з 4.4) вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ є компланарні, а точки A, B, C і D лежать в одній площині.▷

Задачі

4.7. Обчислити мішаний добуток векторів $\vec{a}=\{1;-1;3\}$, $\vec{b}=\{-2;2;1\}$ і $\vec{c}=\{3;-2;5\}$. Яка орієнтація трійок:а) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$; б) $(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$; в) $(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$.

4.8. Визначити, якою є трійка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (правою чи лівою), якщо:

а) $\vec{a}=\vec{k},\vec{b}=\vec{i},\vec{c}=\vec{j}$; б) $\vec{a}=\vec{i},\vec{b}=\vec{k},\vec{c}=\vec{j}$;

в) $\vec{a}=\vec{j},\vec{b}=\vec{i},\vec{c}=\vec{k}$; г) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j},\vec{b}=\vec{j},\vec{c}=\vec{k}$;

д) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j},\vec{b}=\vec{i}-\vec{j},\vec{c}=\vec{j}$; е) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j},\vec{b}=\vec{i}-\vec{j},\vec{c}=\vec{k}$.

4.9. З'ясувати, чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо:

а) $\vec{a}=\{2;3;-1\}$, $\vec{b}=\{1;-1;3\}$, $\vec{c}=\{1;9;-11\}$.

б) $\vec{a}=\{3;-2;1\}$, $\vec{b}=\{2;1;2\}$, $\vec{c}=\{3;-1;-2\}$.

в) $\vec{a}=\{2;-1;2\}$, $\vec{b}=\{1;2;-3\}$, $\vec{c}=\{3;-4;7\}$.

г) $\vec{a}=\{-1;2;3\}$, $\vec{b}=\{-2;-1;1\}$, $\vec{c}=\{4;-3;-7\}$.

д) $\vec{a}=\{-1;1;-1\}$, $\vec{b}=\{1;-1;1\}$, $\vec{c}=\{4;-3;7\}$.

4.10. При якому значенні α вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ будуть компланарні:

а) $\vec{a}=\{\alpha;3;1\}$, $\vec{b}=\{5;-1;2\}$, $\vec{c}=\{-1;5;4\}$;

б) $\vec{a}=\{1;2\alpha;1\}$, $\vec{b}=\{1;\alpha;0\}$, $\vec{c}=\{0;\alpha;1\}$.

4.11. Довести, що точки M_1, M_2, M_3, M_4 лежать в одній площині, якщо $\overrightarrow{OM_1}=\{4;-2;-2\}$, $\overrightarrow{OM_2}=\{3;1;1\}$, $\overrightarrow{OM_3}=\{4;2;0\}$ і $\overrightarrow{OM_4}=\{7;23;6\}$.

4.12. Точки $A(-1,2,-3)$, $B(-2,5,1)$, $C(-1,6,0)$ і $D(2,5,-6)$ є вершинами чотирикутника. Довести, що цей чотирикутник є плоский і обчислити його площу.

3. Застосування мішаного добутку

З геометричного тлумачення мішаного добутку векторів випливають такі залежності:

1. Чотири точки $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$ і $D(x_4,y_4,z_4)$ лежать в одній площині.

Шукана умова рівносильна умові компланарності векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, а отже, згідно з формулою (4.3) набуває вигляду

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{4.5}$$

2. Об'єм тетраедра (трикутної піраміди).

Об'єм трикутної піраміди ABCD становить одну шосту об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, тобто

$$V_{\text{пір}}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|. \tag{4.6}$$

Приклад 5. Обчислити об'єм тетраедра ABCD, вершини якого в точках $A(1,1,1)$, $B(4,4,4)$, $C(3,5,5)$ і $D(2,4,7)$.

◁ Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, які збігаються з ребрами піраміди. Маємо: $\overrightarrow{AB}=\{3;3;3\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2;4;4\}$ і $\overrightarrow{AD}=\{1;3;6\}$. Тоді

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}3&3&3\\2&4&4\\1&3&6\end{vmatrix}=18.$$ Згідно з формулою (4.5) отримаємо

$$V_{\text{пір}}=\tfrac{1}{6}\cdot 18=3. \ ▷$$

Приклад 6. У тетраедрі з вершинами в точках $A(1,1,1)$, $B(2,0,2)$, $C(2,2,2)$ і $D(3,4,-3)$ обчислити висоту $h=|DE|$.

◁ Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, які збігаються з ребрами тетраедра. Маємо: $\overrightarrow{AB}=\{1;-1;1\}$, $\overrightarrow{AC}=\{1;1;1\}$ і $\overrightarrow{AD}=\{2;3;-4\}$. Тоді мішаний добуток

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\2&3&-4\end{vmatrix}=-12.$$

Об'єм тетраедра $V_{\text{пір}}=\frac{1}{6}\cdot|-12|=2.$

З іншого боку, $V_{\text{пір}}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot h$. Площа ΔABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, тобто

$$S_{\Delta ABC}=\tfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\right]\right|=\tfrac{1}{2}\left|-2\vec{i}+2\vec{k}\right|=\sqrt{2}.$$

Отже, для знаходження висоти маємо співвідношення

$$2=\tfrac{1}{3}\cdot\sqrt{2}\cdot h\Rightarrow h=|DE|=3\sqrt{2}. \ ▷$$

Задачі

4.13. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках $A(2,-3,5)$, $B(0,2,1)$, $C(-2,-2,3)$ і $D(3,2,4)$.

4.14. Обчислити об'єм трикутної призми, вершини якої знаходяться в точках $A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$ і $D(4,1,3)$.

4.15. Дано вершини тетраедра: $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$ і $D(-5,-4,8)$. Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини D.

4.16. Об'єм тетраедра V=5, три його вершини знаходяться в точках $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$ і $C(2,-1,3)$. Знайти координати четвертої вершини, якщо відомо, що вона лежить на осі Oy.

4.17. У тетраедрі OABC з вершини O проведені медіани бічних граней. Беручи їх за ребра нового тетраедра, довести, що об'єм його становить $\frac{1}{4}$ об'єму тетраедра OABC.

4.18. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{q}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{r}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, де $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – довільні вектори.

4.19. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

4.20. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}=3\vec{m}+5\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, $\vec{c}=2\vec{m}+7\vec{n}$, де $|\vec{m}|=\frac{1}{2}$, $|\vec{n}|=3$, $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)=\frac{3\pi}{4}$.

4.21. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}=\{3;2;-5\}$, $\vec{b}=\{1;-1;4\}$, $\vec{c}=\{1;-3;1\}$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

§5. ПОДВІЙНИЙ ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК

Нехай задані вектори $\vec{a}, \vec{b}$ та $\vec{c}$.

Якщо вектор $\vec{b}$ векторно помножити на вектор $\vec{c}$, а вектор $\vec{a}$ також векторно помножити на векторний добуток $[\vec{b},\vec{c}]$ то отримаємо вектор $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]$, який називається подвійним векторним добутком.

Для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ справедливе співвідношення

$$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b}). \qquad (4.7)$$

Задачі

5.1. Дано вектори $\vec{a} = \{2;-3;1\}$, $\vec{b} = \{-3;1;2\}$, $\vec{c} = \{1;2;3\}$. Знайти $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]$ і $[[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}]$.

ВІДПОВІДІ ДО РОЗДІЛУ 2

1.3. $\sqrt{10}$. 1.4. $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}| = 13$.

1.5. а) $\varphi = 90°$, $\vec{a}\perp\vec{b}$; б) кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – гострий; в) кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – тупий.

1.6. $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{129}$, $|\vec{a}-\vec{b}| = 7$. 1.7. $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{19}$, $|\vec{a}-\vec{b}| = 7$.

1.12. Ні. 1.13. Так.

1.14. $\vec{a}_1 = 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3$. 1.15. $\vec{a}_4 = \{-2;3;-4\}$. 1.16. $\vec{a} = \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2$.

1.17. $\alpha = -1$; $\beta = 4$. 1.18. $\alpha = 1$. 1.19. Так.

1.20. $\vec{a} = \{2;-3;1\}$. 1.21. $\vec{c} = \{4;2;3\}$.

1.22. $\vec{a} = \{-\frac{19}{3};0;-\frac{4}{3}\}$. 1.23. $\vec{a} = \{-\frac{4}{5};-\frac{2}{5}\}$.

1.24. $\vec{a} = -2\vec{e}$. 1.25. $\vec{a} = \{-1;0;3\}$.

1.26. $a_x = \sqrt{2}$, $a_y = 1$, $a_z = -1$.

1.27. а) Ні. б) Так.

1.28. $a_x = 4\sqrt{2}$, $a_y = -4$, $a_z = 4$.

1.29. $\vec{x} = \{-5;10;10\}$. 1.30. $\vec{x} = \{7;7;7\}$. 1.31. $\vec{x} = \{\pm 5;\frac{5}{\sqrt{2}};-\frac{5}{\sqrt{2}}\}$.

1.32. $a_z = \pm 3$.

1.33. $\cos\alpha = \frac{12}{25}$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, $\cos\gamma = -\frac{16}{25}$.

1.34. $a_x = \sqrt{2}$, $a_y = 1$, $a_z = -1$.

1.35. $|\vec{F}| = 15$.

1.36. $\vec{a} = \{3;2;7\}$, $|\vec{a}| = \sqrt{62}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{62}}$, $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{62}}$, $\cos\gamma = \frac{7}{\sqrt{62}}$.

1.37. $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\beta = -\frac{2}{3\sqrt{5}}$, $\cos\gamma = -\frac{4}{3\sqrt{5}}$.

1.38. а) $A(-1,-4,1)$; б) $A(-1,-1,0)$.

1.39. Ні. 1.40. Так. 1.41. $M(1,1)$.

1.42. $(14,0)$, $(0, \frac{14}{3})$. 1.44. $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

1.45. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} = 32\overrightarrow{AB} - 22\overrightarrow{AC}$.

1.46. $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$. 1.47. $M(2,-2,3), N(3,-1,4)$.

1.48. $C(-9,11)$. 1.49. $A(-2,1), D(4,-5)$.

1.50. $\sqrt{13}$. 1.51. $A(6,5), B(0,-1), C(-4,1)$.

1.52. $C(1,-1{,}5), D(0{,}7,-3)$. 1.53. $D(2,-2,1)$.

1.54. $B(3,4)$, $C(3,-2)$, $D(1,-2)$ 1.55. 7. 1.56. $B(4,-1,3)$.

1.57. $M(2,-1)$.

2.1. а) -61. б) -204.

2.2. 3. 2.3. $\pm\frac{2}{3}$. 2.4. -1. 2.5. $\varphi=\pi$.

2.6. а) -62; б) 162; в) 373.

2.7. Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює подвоєній сумі квадратів його сторін.

2.8. $-\frac{3}{2}$. 2.9. -13. 2.10. $\sqrt{28}$. 2.11. $\alpha=\pm\frac{1}{2}$.

2.12. 17. 2.13. 4. 2.14. $\cos\varphi=\frac{5}{21}$. 2.15. 135°.

2.16. $(\vec{a},\vec{b})=-17$, тупий. 2.17. $\cos\varphi=\frac{4\sqrt{138}}{69}$.

2.18. $m=4$. 2.19. $\alpha=-3$. 2.22. $\cos\varphi=\frac{43}{25\sqrt{13}}$.

2.23. $\vec{b}=\{-24;32;30\}$. 2.24. $\vec{d}=\{-3;3;3\}$.

2.25. $\vec{c}=\{-4;-6;12\}$. 2.26. $\vec{c}=\{2;-3;0\}$.

2.27. $\vec{d}=\{2;3;-2\}$. 2.28. $\text{Пр}_{\overrightarrow{MN}}\vec{a}=3$.

2.29. $\text{Пр}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{3}$. 2.30. $\text{Пр}_{\ell}\vec{a}=\sqrt{3}$.

2.31. $\text{Пр}_{\ell}\vec{a}=3$. 2.32. $\text{Пр}_{\ell}\vec{a}=-3$.

2.33. $\text{Пр}_{\ell}\vec{a}=2\sqrt{2}-3$. 2.34. $\text{Пр}_{\ell}\vec{a}=-5$.

2.35. $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}=6$. 2.36. $\text{Пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=-4$.

2.37. $\text{Пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}=-\frac{3}{\sqrt{110}}$. 2.38. $\text{Пр}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}=-\frac{47}{7}$.

2.39. A=7. 2.40. A=31.

2.41. A=41. 2.42. A=13.

3.1. 15. 3.2. 16. 3.3. ±30. 3.4. а) 3; б) 27; в) $10\sqrt{3}$.

3.5. а) 24; б) 60.

3.6. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ повинні бути колінеарними.

3.7. $\alpha=-\frac{8}{5}$. 3.10. а) $2[\vec{a},\vec{c}]$; б) $[\vec{a},\vec{c}]$; в) 3. 3.11. Так

3.12. а) $\{-3;5;7\}$; б) $6\cdot\{-6;10;14\}$; в) $\{-12;20;28\}$.

3.13. $\{-12;8;12\}$. 3.14. $\vec{c}^{\circ}=\pm\frac{1}{3}\{1;-2;2\}$.

3.15. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1.$ Вектори попарно перпендикулярні.

3.16. $\vec{x} = \{7;5;1\}$. 3.17. $\vec{b} = \{45;24;0\}$.

3.18. $\sin\varphi = \frac{5\sqrt{17}}{21}$. 3.19. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|}{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}$.

3.20. $S = \sqrt{22}$. 3.21. $S_1 = 2S_2$. 3.22. $S = \frac{1}{2}$.

3.23. $h = |BD| = 5$. 3.24. $mom_O\vec{F} = \{2;11;7\}$.

3.25. $mom_B\vec{F} = \vec{0}$. 3.26. $mom_A\vec{F} = \pm\frac{5}{3}\{-4;2;-3\}$.

3.27. $\left|mom_B\vec{F}\right| = 28;\ \cos\alpha = -\frac{3}{7};\ \cos\beta = -\frac{6}{7};\ \cos\gamma = \frac{2}{7}$.

3.28. $\left|mom_B\vec{F}\right| = \sqrt{66};\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{66}};\ \cos\beta = \frac{-4}{\sqrt{66}};\ \cos\gamma = \frac{-7}{\sqrt{66}}$.

4.1. $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = 30$. 4.4. $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \pm 18$.

4.5. $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = -3$. 4.7. $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = -7$; а) ліва; б) права; в) права.

4.8. а) права; б) ліва; в) ліва; г) права; д) вектори компланарні; е) ліва.

4.9. а) компланарні; б) некомпланарні; в) компланарні; г) компланарні; д) компланарні.

4.10. а) $\alpha = -3$; б) при довільному α.

4.12. $2\sqrt{74}$. 4.13. V=6.

4.14. V=9. 4.15. h=11.

4.16. $D_1(0,8,0), D_2(0,-7,0)$. 4.18. $V = 4\left|\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right)\right|$.

4.19. $V = 25$. 4.20. Вектори компланарні.

4.21. $h = \frac{49}{\sqrt{323}}$.

5.1. $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right] = \{-7;14;-7\};\ \left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right] = \{10;13;19\}$.

<u>РОЗДІЛ 3.</u> АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

§1. РІВНЯННЯ ЛІНІЇ НА ПЛОЩИНІ

1.Поняття рівняння лінії

<u>Рівнянням лінії</u> L у декартовій системі координат на площині називається рівняння вигляду

$$F(x,y) = 0, \tag{1.1}$$

яке задовольняють координати x,y кожної точки цієї лінії і не задовольняють координати жодної іншої точки.

Лінія L розглядається як сукупність точок площини, координати x,y яких задовольняють рівняння (1.1).

Змінні x,y, які входять в рівняння (1.1), називаються довільними <u>координатами точки.</u>

Якщо рівняння (1.1) можна записати у вигляді

$$y = f(x), \tag{1.2}$$

то і в цьому випадку лінія L збігається з графіком функції y = f(x).

Лінію, яка лежить в площині, називають <u>плоскою</u>.

Приклад 1. З'ясувати, які з точок $M_1(0;2), M_2(-3;4), M_3(2;-1)$ належать лінії L, рівняння якої $x^2 + y^2 = 25$.

◁ Підставляючи в рівняння $x^2 + y^2 = 25$ відповідно значення координат x = 0 і y=2 точки M_1, одержимо $0^2 + 2^2 \neq 25$. Отже, точка $M_1 \notin L$. Для точки M_2 отримаємо $(-3)^2+4^2=25$. Це означає, що точка $M_2 \in L$. Аналогічно для точки M_3 маємо $2^2+(-1)^2 \neq 25$, тобто точка $M_3 \notin L$.

Отже, лише точка M_2 належить лінії L. ▷

Приклад 2. Написати рівняння лінії, кожна точка якої знаходиться на відстані R від точки $M_0(x_0;y_0)$.

◁ Очевидно, що потрібно написати рівняння кола. Нехай M(x,y) – довільна точка шуканої лінії. Тоді $|M_0M| = R$. Звідси

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R$$

або $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ – рівняння кола, радіус якого дорівнює R, а центр збігається з точкою $M_0(x_0;y_0)$. ▷

Приклад 3. Яка лінія визначається рівнянням $x^2+y^2-4x+6y-3$?

◁ Виділимо повні квадрати, об'єднуючи доданки відповідно з x та y :

$$\left(x^2-4x+4\right)-4+\left(y^2+6y+9\right)-9-3=0$$

або $(x-2)^2+(y+3)^2=16.$

З отриманого рівняння видно, що лінія L – коло радіуса R = 4 з центром в точці $M_0(2;-3)$. ▷

Задачі

1.1. Лінії задані рівняннями:

1) $x^2+y^2=4$; 2) $x^2-y^2+2x-y=0$;
3) $x^2+y^2-6xy=0$; 4) $3x-2y-6=0$.

З'ясуйте, які з ліній проходять через початок координат.

1.2. Встановіть, які лінії визначаються рівняннями:

1) $2x-y=0$; 2) $y=2$; 3) $x=-1$;
4) $y=0$; 5) $x=0$; 6) $x^2-xy=0$;
7) $y=|x|$; 8) $x-|y-1|=0$; 9) $x^2-6x+5=0$;
10) $x^2+y^2=1$; 11) $x^2+y^2+2x-4y-4=0$;
12) $(x-1)^2+(y+2)^2=0$;

1.3. З точки A(3;–4) проведені можливі промені до перетину з віссю Ox. Написати рівняння середини цих променів.

1.4. Написати рівняння кола в кожному з таких випадків (позначено: C – центр кола; R – радіус; M_1,M_2 – точки кола):

1) $C(2;-1)$,$M_1(-2;2)$;
2) $M_1(-1;0)$,$M_2(5;0)$ – кінці діаметра кола.

2.Класифікація плоских ліній

Лінії на площині поділяються на алгебраїчні та трансцендентні.

Лінія L, яка задана рівнянням (1.1) називається алгебраїчною, якщо F(x,y) є многочленом від x, y. Лінії, які не є алгебраїчними, називаються трансцендентними.

Степінь рівняння алгебраїчної лінії називається її порядком.

Приклад 4. Які з рівнянь :

1) $x^3 - 3xy + tgx = 0$; 2) $x + 3x^2y^2 - y^3 = 0$;

3) $5^x - y + lg(x + y) = 0$; 4) $2x + y + 5 = 0$

визначають алгебраїчну лінію?

◁ Рівняння 2,4 визначають алгебраїчні лінії. Лінія, яка задана рівнянням 2, є алгебраїчною четвертого порядку, а 4 – першого порядку. ▷

Зауваження. Іноді замість виразу "задано рівняння лінії" будемо вживати вираз "задана лінія".

3. Точки перетину ліній

Щоб знайти точки перетину ліній L_1 і L_2, які задані відповідно рівняннями $F_1(x,y) = 0$ і $F_2(x,y) = 0$, потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x,y) = 0, \\ F_2(x,y) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Приклад 5. Знайти точки перетину ліній, які задані рівняннями

$$2x^2 + 3y^2 + 6x + 4y - 40 = 0;\ x - y = 0.$$

◁ Запишемо систему рівнянь вигляду (1.3):

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + 6x + 4y - 40 = 0, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння системи маємо y = x. Підставляючи замість значення y значення x в перше рівняння системи, отримаємо $5x^2 + 10x - 40 = 0$ або $x^2 + 2x - 8 = 0$. Звідси $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

Відповідними значеннями y будуть $y_1 = -4$, $y_2 = 2$. Тоді $M_1(-4;-4)$, $M_2(2;2)$ – точки перетину заданих ліній. ▷

§ 2. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

У декартовій прямокутній системі координат на площині пряма – це алгебраїчна лінія першого порядку, і навпаки.

1.Рівняння прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого ненульового вектора

Якщо $M(x_0;y_0)$ і $\vec{n}=\{A;B\}$ – відповідно задані точка і ненульовий вектор, який перпендикулярний до прямої (його називають нормальним вектором), то вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{n}$ – перпендикулярні, де $M(x,y)$ – довільна точка прямої. Це означає, що скалярний добуток векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{n}$ дорівнює нулю, тобто

$$\left(\vec{n},\overrightarrow{M_0M}\right)=0. \qquad (2.1)$$

Рівняння (2.1) називається рівнянням прямої, яке записане у векторній формі.

У координатній формі рівняння (2.1) набуває вигляду

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \qquad (2.2)$$

і називається рівнянням прямої, що проходить через точку $M(x_0;y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=\{A;B\}$.

2.Загальне рівняння прямої

З рівняння (2.2) отримуємо так зване загальне рівняння прямої

$$Ax+By+C=0, \qquad (2.3)$$

де $C=-Ax_0-By_0$.

Загальне рівняння (2.3) називається повним, якщо всі його коефіцієнти A, B і C відмінні від нуля. Якщо хоча б один із вказаних коефіцієнтів дорівнює нулю, рівняння називається неповним.

Розглянемо всі можливі види неповних рівнянь.

1) $C=0$, рівняння $Ax+By=0$ визначає пряму, що проходить через початок координат (оскільки координати початку задовольняють це рівняння). Коефіцієнт C називається вільним членом;

2) $B=0$, рівняння $Ax+C=0$ визначає пряму, яка паралельна осі Oy (оскільки нормальний вектор цієї прямої $\vec{n}=\{A;0\}$ ортогональний до осі Oy);

3) $A = 0$, рівняння $By + C = 0$ визначає пряму, яка паралельна осі Ox (оскільки нормальний вектор цієї прямої $\vec{n} = \{0; B\}$ ортогональний до осі Ox);

4) $B = 0$ і $C = 0$, рівняння $Ax = 0$ визначає вісь Oy (справді, це пряма,паралельна осі Oy, і проходить через початок координат);

5) $A = 0$ і $C = 0$, рівняння $By = 0$ визначає вісь Ox (бо ця пряма паралельна осі Ox і проходить через початок координат).

Приклад 1. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1;-2)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \{3;1\}$.

◁ Підставляючи значення $A = 3$, $B = 1$, $x_0 = 1$, $y_0 = -2$ у рівняння (2.2), отримаємо

$3(x - 1) + 1(y + 2) = 0$, або $3x + y - 1 = 0$, яке і є шуканим рівнянням прямої. ▷

Нехай дві прямі задані рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ і } A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Тоді рівність відношень

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \tag{2.4}$$

є умовою паралельності цих прямих, оскільки вектори $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1\}$ і $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}$ – колінеарні.

Кут між прямими дорівнює кутові між нормальними векторами $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$. Тому

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{2.5}$$

З останньої формули випливає, що умовою перпендикулярності прямих ($\varphi = 90°$) буде співвідношення

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{2.6}$$

Приклад 2. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $3x - 4y - 29 = 0$ та $2x + 5y + 19 = 0$ паралельно до прямої
$x - y = 0$.

◁ Для того, щоб знайти точку $M(x_0;y_0)$ перетину двох прямих, потрібно розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x - 4y - 29 = 0, \\ 2x + 5y + 19 = 0. \end{cases}$

Розв'язок системи: $x = 3$, $y = -5$. Отже, точка $M_0(3;-5)$ – точка перетину прямих. Оскільки шукана пряма паралельна до прямої $x - y = 0$, нормальний вектор якої $\vec{n}_1 = \{1;-1\}$, то цей вектор можна взяти за нормальний вектор шуканої прямої. Використовуючи рівняння (2.2), отримаємо

$1(x-3)-1(y+5)=0$, або $x-y-8=0$ – рівняння прямої.

Зауважимо, що для знаходження отриманого рівняння можна використати загальне рівняння прямої (2.3). Оскільки нормальний вектор шуканої прямої колінеарний вектору $\vec{n}_1=\{1;-1\}$, то рівняння (2.3) набуває вигляду $x-y+C=0$. Точка $M_0(3;-5)$ належить отриманій прямій, отже, її координати задовольняють рівняння, тобто $3-(-5)+C=0$. Звідки $C=-8$. Отже, шукане рівняння прямої $x-y-8=0$. ⊳

Приклад 3. Знайти кут між прямими $3x-y+5=0$ і $2x+y-7=0$.

⊲ Підставимо $A_1=3$, $B_1=-1$, $A_2=2$, $B_2=1$ у співвідношення (2.5). Тоді

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot2-1\cdot1}{\sqrt{3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, кут між прямими $\varphi=45°$. ⊳

Приклад 4. З'ясувати, чи є перпендикулярними прямі $6x-15y+7=0$ і $10x+4y-3=0$.

⊲ Перевіримо, чи виконується умова (2.6). Маємо $A_1=6$, $B_1=-15$, $A_2=10$, $B_2=4$. Тоді $A_1A_2+B_1B_2=6\cdot10+(-15)\cdot4=0$. Отже, ці прямі перпендикулярні. ⊳

Задачі

2.1 Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(2,-5)$:

а) перпендикулярно до осі Ox;

б) перпендикулярно до осі Oy;

в) перпендикулярно до вектора, що з'єднує дану точку M_1 з точкою $M_2(3,0)$.

2.2. Точки $M_1(-2,0)$ і $M_2(4,0)$ є кінцями відрізка. Написати рівняння серединного перпендикуляра.

2.3. Обчислити, при якому значенні параметра a пряма

$$(a+2)x+\left(a^2-9\right)y+3a^2-8a+5=0:$$

а) паралельна осі абсцис;

б) паралельна осі ординат;

в) проходить через початок координат.

В кожному з цих випадків написати рівняння прямої.

2.4. Знайти кут між прямими:

а) $x\sqrt{2}-y\sqrt{3}-5=0$ і $(3+\sqrt{2})x+(\sqrt{6}-\sqrt{3})y+7=0$;

б) $x\sqrt{3}+y\sqrt{2}-2=0$ і $x\sqrt{6}-3y+3=0$.

2.5. Встановити, які з наведених пар прямих перпендикулярні:

а) $3x-y+5=0$ і $x+3y-1=0$;

б) $3x-4y+1=0$ і $4x-3y+7=0$.

3.Рівняння прямої у "відрізках"

Якщо в рівнянні (2.3) $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, то його можна записати у вигляді

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad (2.7)$$

де $a=-\dfrac{C}{A}$, $b=-\dfrac{C}{B}$.

Рівняння (2.7) називається рівнянням прямої у "відрізках" (a і b – "відрізки", які пряма відтинає на осях Ox і Oy відповідно).

Приклад 5. Звести рівняння прямої $2x-3y-6=0$ до рівняння прямої у "відрізках" і зробити рисунок.

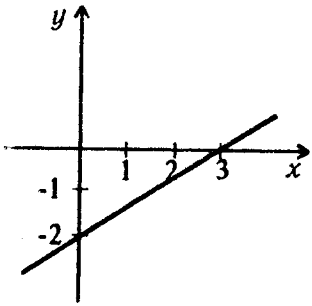


Рис. 6.

◁ Перенесемо вільний член заданого рівняння у праву частину і поділимо отримане рівняння на 6. Отримаємо $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}=1$. Це рівняння прямої у "відрізках", де $a=3$, $b=-2$.

На осі Ox від точки O (початок координат) відкладемо відрізок довжиною три одиниці (вправо) і на осі Oy – відрізок дві одиниці (вниз). Отримаємо дві точки A(3,0) та B(0,–2), які належать прямій. Проведемо через ці точки пряму, яка і буде шуканою (рис.6). ▷

Задачі

2.6. Знайти "відрізки" a і b прямої $3x-4y+12=0$.

2.7. Обчислити площу трикутника, який утворений осями координат і прямою $-2x+3y+6=0$.

2.8. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 (–2,2) і відтинає від одного з координатних кутів трикутник площею $S=4{,}5$ кв. одиниць.

4.Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Рівняння вигляду

$$y = kx + b \qquad (2.8)$$

називається рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.

В рівнянні (2.8) $k = \operatorname{tg}\alpha$, де α – кут, який утворює пряма з додатним напрямком осі Ох. Величину k називають <u>кутовим коефіцієнтом</u> прямої. Якщо пряма задана загальним рівнянням (2.3), то кутовий коефіцієнт знаходимо за формулою

$$k = -\frac{A}{B}.$$

Величина b у рівнянні (2.8) є "відрізком", який відтинає пряма на осі Оу, рахуючи від початку координат.

Якщо пряма проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k, то її рівняння має вигляд

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (2.9)$$

Якщо ж пряма проходить через точки $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$ то її кутовий коефіцієнт знаходимо за формулою

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (2.10)$$

Якщо прямі $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$ паралельні, то виконується рівність

$$k_1 = k_2 \qquad (2.11)$$

Рівність (2.11) називається умовою паралельності двох прямих.

Якщо прямі не паралельні, то кут між ними знаходиться за формулою

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \qquad (2.12)$$

Звідси отримаємо умову перпендикулярності прямих ($\theta=90°$, тобто $\operatorname{tg}\theta$ не існує):

$$1 + k_1k_2 = 0, \text{ або } k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (2.13)$$

Приклад 6. Звести рівняння прямої $2x+3y-6=0$ до рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

◁ Розв'яжемо рівняння $2x+3y-6=0$ відносно *у*. Маємо: $y = -\frac{2}{3}x + 2$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, де $k = -\frac{2}{3}$, $b = 2$. ▷

Приклад 7. Задана пряма $5x+3y-3=0$. Знайти кутовий коефіцієнт прямої, яка: а) паралельна заданій прямій; б) перпендикулярна до заданої прямої.

◁ Запишемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $y=-\frac{5}{3}x+1$, тобто $k_1=-\frac{5}{3}$.

а) за умовою паралельності прямих (2.11) маємо: $k_1=k_2=-\frac{5}{3}$.

б) за умовою перпендикулярності прямих (2.13) отримаємо: $k_2=-\frac{1}{k_1}=\frac{3}{5}$. ▷

Приклад 8. Точки A(0,1), B(6,5) і C(12,1) є вершинами трикутника. Написати рівняння висоти CD.

◁ Знайдемо кутовий коефіцієнт сторони AB. Згідно з формулою (2.10) маємо:

$$k_1=\frac{5-1}{6-0}=\frac{2}{3}.$$

Використовуючи умову перпендикулярності прямих (2.13), знайдемо кутовий коефіцієнт висоти CD, а саме $k_2=-\frac{3}{2}$. Тоді рівняння висоти CD (згідно з формулою (2.8)) має вигляд $y-1=-\frac{3}{2}(x-12)$. Звідки $3x+2y-38=0$ – шукане рівняння висоти CD. ▷

Задачі

2.9. Написати рівняння прямої, яка з віссю Ox утворює кут $\alpha=135°$ і відтинає на осі Oy відрізок $b=3$.

2.10. Під яким кутом до осі Ox нахилена пряма, що проходить через точки A(–1,3) та B(4,–2)?

2.11. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2,1)$:
а) паралельно до прямої $2x+3y+4=0$; б) перпендикулярно до цієї прямої.

2.12. Знайти проекцію точки P(–6,4) на пряму $4x-5y+3=0$.

5. Канонічне рівняння прямої

Якщо пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно до ненульового вектора $\vec{s} = \{m; n\}$, то її рівняння має вигляд

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{2.14}$$

Рівняння (2.14) називається канонічним рівнянням прямої.

Вектор $\vec{s}$ називається напрямним вектором прямої.

Якщо пряма проходить через точки $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$, то її рівняння має вигляд

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{2.15}$$

Рівняння (2.15) називається рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки.

У рівнянні (2.15) точка $M_1(x_1;y_1)$ належить прямій, а вектор $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ – напрямний вектор прямої.

Якщо прямі задані рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} \text{ і } \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2},$$

то рівність відношень

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \tag{2.16}$$

є умовою паралельності цих прямих (оскільки напрямні вектори $\vec{s}_1 = \{m_1; n_1\}$ і $\vec{s}_2 = \{m_2; n_2\}$ колінеарні).

Кут між двома прямими – це кут між їх напрямними векторами, тобто $\varphi = (\widehat{\vec{s}_1, \vec{s}_2})$.

Тоді

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}. \tag{2.17}$$

Якщо прямі перпендикулярні, то $\varphi = 90°$, тобто $\cos\varphi = 0$. Тоді

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \tag{2.18}$$

Умова (2.18) – це умова перпендикулярності прямих.

Приклад 9. Написати канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;-3)$ паралельно до бісектриси першого координатного кута.

◁ На бісектрисі $y = x$ візьмемо точку, наприклад, $M_1(1,1)$. Тоді вектор $\overrightarrow{OM_1} = \{1;1\}$ – напрямний вектор бісектриси і, разом з тим, шуканої прямої. Тому $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{1}$ – шукане рівняння прямої. ▷

Приклад 10. Звести рівняння прямої $3x + 4y - 5 = 0$ до канонічного вигляду.

◁ Перетворимо рівняння заданої прямої:

$3x + 3 = -4y + 8$ або $3(x+1) = -4(y-2)$. Звідси $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-3}$ – шукане рівняння прямої. ▷

6. Нормальне рівняння прямої

Рівняння

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \tag{2.19}$$

називається нормальним рівнянням прямої.

У рівнянні (2.19) $\vec{n}^{\circ} = \{\cos\alpha; \sin\alpha\}$ – одиничний вектор нормального вектора $\vec{n} = \{A; B\}$ прямої, p – довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму.

Якщо пряма задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, то її нормальне рівняння має вигляд

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0. \tag{2.20}$$

Знак перед коренем вибирається протилежним до знаку вільного члена.

Приклад 11. Знайти відстань від початку координат до прямої $3x - 4y + 10 = 0$.

◁ З рівняння прямої маємо $\vec{n} = \{3,-4\}$. Тоді $\vec{n}^0 = \{-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\}$ і $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0$ – нормальне рівняння прямої (згідно з формулами (2.20) і (2.19)).

Відстань від початку координат $p = 2$. ▷

Задачі

2.13. Пряма задана точкою $M_0(-1;2)$ і напрямним вектором $\vec{s} = \{3;-1\}$. Знайти:

а) канонічне рівняння прямої;

б) загальне рівняння прямої і звести його до нормального вигляду;

в) довжину перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму.

7. Відстань від точки до прямої

Нехай $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ – нормальне рівняння прямої, M_0 $(x_0;y_0)$ – задана точка, d – шукана відстань від точки до прямої.

Тоді

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|. \tag{2.21}$$

Якщо пряма задана загальним рівнянням, то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.22}$$

Приклад 12. Знайти відстань між прямими $4x - 3y - 7 = 0$ і $4x - 3y + 3 = 0$.

◁ Оскільки прямі паралельні, то для визначення відстані між ними досить знайти відстань від будь-якої точки однієї прямої до іншої прямої. Прийнявши в рівнянні першої прямої, наприклад $y = -1$, отримаємо $x = 1$. За формулою (2.22) знаходимо відстань від точки $M_0(1;-1)$ до іншої прямої $d = \frac{|4\cdot 1 - 3\cdot(-1) + 3|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{5} = 2$. Отже, $d = 2$. ▷

Задачі

2.14. Обчислити площу прямокутника, якщо відомі рівняння двох його сторін $3x-2y-5=0$ і $2x+3y+7=0$, а одна з вершин знаходиться в точці A(–2;1).

2.15. Дві сторони квадрата лежать на прямих $x-2y+2=0$ і $x-2y-5=0$. Обчислити його площу.

2.16. Дві сторони квадрата лежать на прямих $4x-3y+3=0$ і $4x-3y-17=0$. Одна з його вершин знаходиться в точці A(2;–3). Скласти рівняння двох інших сторін квадрата.

Іноді для розв'язування задач використовують поняття відхилення точки від прямої.

Нехай задана точка $M_0(x_0;y_0)$ і нормальне рівняння прямої $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$.

Відхиленням δ точки M_0 від прямої називається число d, якщо точка M_0 і початок координат лежать по різні сторони від заданої прямої, і число $-d$, якщо точка M_0 і початок координат лежать по одну сторону від заданої прямої, де d – відстань від точки M_0 до заданої прямої.

Отже, щоб знайти відхилення будь-якої точки M_0 від заданої прямої, потрібно в ліву частину нормального рівняння цієї прямої замість довільних координат внести координати точки M_0, тобто

$$\delta=x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p. \qquad (2.23)$$

Приклад 13. Написати рівняння бісектриси того кута між прямими $7x+y-3=0$ і $5x-5y-6=0$, що містить початок координат.

◁ Зведемо кожне з рівнянь прямих до нормального вигляду:

$$\vec{n}_1{}^o=\{\tfrac{7}{\sqrt{50}};\tfrac{1}{\sqrt{50}}\},\qquad \tfrac{7}{\sqrt{50}}x+\tfrac{1}{\sqrt{50}}y-\tfrac{3}{\sqrt{50}}=0,$$

$$\vec{n}_2{}^o=\{\tfrac{5}{\sqrt{50}};-\tfrac{5}{\sqrt{50}}\},\ \tfrac{5}{\sqrt{50}}x-\tfrac{5}{\sqrt{50}}y-\tfrac{6}{\sqrt{50}}=0.$$

Нехай $M_1(x_1;y_1)$ – будь-яка точка шуканої бісектриси. Згідно з умовою задачі точка $M_1(x_1;y_1)$ і початок координат належать одному куту, то $\delta=-d$ (для кожної з прямих) і $-\delta_1=-\delta_2$ (кожна точка бісектриси рівновіддалена від сторін цього кута), де $\delta_1=\frac{7}{\sqrt{50}}x_1+\frac{1}{\sqrt{50}}y_1-\frac{3}{\sqrt{50}}$ і $\delta_2=\frac{5}{\sqrt{50}}x_1-\frac{5}{\sqrt{50}}y_1-\frac{6}{\sqrt{50}}$.

Отже,

$$-\left(\frac{7}{\sqrt{50}}x_1+\frac{1}{\sqrt{50}}y_1-\frac{3}{\sqrt{50}}\right)=-\left(\frac{5}{\sqrt{50}}x_1-\frac{5}{\sqrt{50}}y_1-\frac{6}{\sqrt{50}}\right).$$

Звідси $2x_1 + 6y_1 + 3 = 0$. Отримана рівність виконується для будь-якої точки, яка лежить на бісектрисі, тому шукане рівняння має вигляд: $2x + 6y + 3 = 0$. ▷

Задачі

2.17. Задано паралельні прямі $10x + 15y - 3 = 0, 2x + 3y + 5 = 0$ і $2x + 3y - 9 = 0$. Довести, що перша з них лежить між двома іншими і обчислити відношення, в якому вона ділить відстань між ними.

2.18. Де лежить точка $M_1(-3;2)$: всередині чи зовні трикутника, обмеженого прямими $x + y - 4 = 0$; $3x - 7y + 8 = 0$ і $4x - y - 31 = 0$?

2.19. Вивести рівняння геометричного місця точок, відхилення яких від прямої $8x - 15y - 25 = 0$ дорівнює -2.

2.20. Відхилення точки M від прямих $5x - 12y - 13 = 0$ і $3x - 4y - 19 = 0$ відповідно дорівнюють -3 і -5. Знайти координати точки M.

2.21. Встановити, які з наведених трійок точок лежать на одній прямій:

а) $M_1(2;1)$, $M_2(-1;4)$, $M_3(-7;10)$;

б) $M_1(0;5)$, $M_2(7;1)$, $M_3(-2;3)$;

в) $M_1(1;0)$, $M_2(0;1)$, $M_3(-2;3)$;

г) $M_1(2;1)$, $M_2(10;3)$, $M_3(5;2)$.

2.22. Вершини трикутника містяться в точках $A(1;-2)$, $B(0;3)$ і $C(1;1)$. Через кожну з вершин проведені прямі, паралельні до протилежних сторін. Написати рівняння цих прямих.

2.23. Встановити, що чотирикутник ABCD, де $A(-2;-2)$, $B(-3;1)$, $C(\frac{5}{2};\frac{5}{2})$ і $D(3;1)$ є трапеція. Написати рівняння середньої лінії і діагоналей цієї трапеції.

2.24. Точка $M_1(-2;5)$ є основою перпендикуляра, який опущений з початку координат на пряму. Написати рівняння цієї прямої.

2.25. Точка $M_1(3;2)$ є основою перпендикуляра, який опущений з точки $M_2(1;-1)$ на пряму. Написати рівняння цієї прямої.

2.26. Знайти кутовий коефіцієнт k і відрізок b, який відтинає на осі Oy кожна з таких прямих: а) $2x + y + 5 = 0$; б) $x - 3y + 6 = 0$; в) $x + y = 0$.

2.27. Знайти кути нахилу до осі Ox прямих: а) $x + y - 7 = 0$; б) $x - y + 2 = 0$; в) $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$.

2.28. Вершини трикутника містяться в точках A(1;5), B(–1;2) і C(3;2). Написати рівняння висот цього трикутника.

2.29. Задані дві вершини A(–1;5), B(3;2) трикутника ABC і точка $O_1(5;-3)$ перетину його висот. Написати рівняння сторін цього трикутника.

2.30. Написати рівняння сторін квадрата, якщо довжина сторони дорівнює $\sqrt{2}$, а його діагоналі лежать на осях прямокутної декартової системи координат.

2.31. Знайти проекцію точки $M_1(5;-2)$ на пряму $2x-3y-3=0$.

2.32. Знайти точку, яка симетрична до початку координат відносно прямої $x-4y+17=0$.

2.33. Знайти точку, яка симетрична до точки P(2;–5) відносно прямої $2x+8y-15=0$.

2.34. Вершини трикутника містяться в точках A(–4;–5), B(4;1) і $C(-\frac{1}{2};7)$. Написати:

а) рівняння бісектриси внутрішнього кута A;

б) рівняння медіани, яка проходить через вершину A.

2.35. Знайти вершини ромба, якщо відомі дві його сторони $x+3y+12=0$, $x+3y-8=0$ і рівняння однієї з його діагоналей $2x+y+4=0$.

2.36. Підібрати α і β так, щоб прямі $3x-2y+1=0$ і $\alpha x+\beta y-3=0$ збігались.

2.37. Через точку $M_0(1;6)$ провести пряму так, щоб середина її відрізка, який міститься між прямими $x-5y+23=0, x-5y+11=0$, лежала на прямій $2x-y-2=0$.

2.38. Провести пряму так, щоб точка $M_0(1;2)$ була серединою відрізка, який міститься між осями координат.

2.39. Через точку перетину прямих $3x-y=0$, $x+4y-2=0$ провести пряму, перпендикулярну до прямої $x+y=0$.

2.40. Задано рівняння сторін трикутника $x+2y-1=0$, $5x+4y-17=0$ і $x-4y+11=0$. Написати рівняння висот цього трикутника.

2.41. Задано суміжні вершини A(1;–2) і B(3;2) паралелограма ABCD і точка $O_1(1,1)$ перетину його діагоналей. Написати рівняння сторін цього паралелограма.

2.42. Задано рівняння двох суміжних сторін паралелограма $x-y-1=0$, $x-2y=0$ і точка $O_1(3;-1)$ перетину його діагоналей. Написати рівняння двох інших його сторін.

2.43. Через точку $P(1;2)$ провести пряму так, щоб вона відтинала на осях координат однакові відрізки.

2.44. Точки $P(2;-1)$, $Q(-3;-3)$ і $R(-1;0)$ – це середини сторін трикутника. Написати рівняння його сторін.

2.45. Знайти довжини висот трикутника, сторони якого задані рівняннями: $y-2=0$, $2x-y-12=0$, $4x-11y+30=0$.

2.46. На прямій $x+2y-12=0$ знайти точки, які рівновіддалені від прямих $x+y-5=0$ і $7x-y+11=0$.

2.47. Точки $A(3;-9)$ і $B(8;-14)$ – суміжні вершини квадрата. Знайти інші вершини квадрата і написати рівняння його сторін.

2.48. Написати рівняння катетів рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо відоме рівняння гіпотенузи $3x-y+5=0$ і вершина прямого кута міститься в точці $C(4;-1)$.

2.49. Задані рівняння однієї із сторін квадрата $x+3y-3=0$ і точка $O_1(-2;0)$ перетину його діагоналей. Написати рівняння діагоналей і решти сторін цього квадрата.

2.50. Задані рівняння $x+2y-3=0$, $x+y-2=0$ двох сторін трикутника і рівняння $5x+6y-15=0$ однієї з його медіан. Написати рівняння третьої сторони цього трикутника.

2.51. Задані рівняння $9x+2y+37=0$, $9x+10y+5=0$ двох сторін трикутника і точка $M_1(-1;-2)$ перетину його медіан. Написати рівняння третьої сторони трикутника.

2.52. Написати рівняння сторін трикутника ABC, знаючи одну з його вершин $A(3;0)$ і рівняння двох медіан $7x-5y+15=0$, $4x+y+6=0$.

2.53. Написати рівняння сторін трикутника ABC, знаючи одну з його вершин $A(7;8)$ і рівняння двох бісектрис $x+2y-13=0$, $x-y-5=0$.

§ 3. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Лініями другого порядку на площині називаються лінії, які в декартовій прямокутній системі координат зображаються алгебраїчними рівняннями другого степеня вигляду

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0, \qquad (3.1)$$

якщо хоча б один з коефіцієнтів a_{11}, a_{12}, a_{22} не дорівнює нулеві.

Окремими випадками цього рівняння є так звані канонічні (найпростіші) рівняння другого степеня.

1. Коло

Колом називається множина точок площини, відстань кожної з яких від заданої точки (центра) є сталою величиною.

Якщо центр кола міститься в початку координат і радіус його дорівнює R, то рівняння кола має вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (3.2)$$

Якщо ж центр кола міститься в точці $M_0(x_0; y_0)$, то рівняння кола має вигляд

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (3.3)$$

Приклад 1. Написати рівняння кола, яке дотикається до прямої $x - 6 = 0$, і центр якого міститься в початку координат.

◁ Рівняння кола має вигляд $x^2 + y^2 = R^2$. Радіус буде дорівнювати відстані від точки $O(0,0)$ до прямої $x - 6 = 0$: $R = \dfrac{|0-6|}{1} = 6.$

Тоді $x^2 + y^2 = 36$ – шукане рівняння кола. ▷

Приклад 2. Яка лінія визначається рівнянням $y = -1 + \sqrt{4 - x^2}$?

◁ Задане рівняння перепишемо у вигляді $y + 1 = \sqrt{4 - x^2}$. При $y \geq -1$ рівняння буде рівносильне такому рівнянню $x^2 + (y+1)^2 = 4$, яке визначає коло з центром в точці $C(0,-1)$ і радіус $R = 2$.

Отже, враховуючи умову $y \geq -1$, рівняння $y = -1 + \sqrt{4 - x^2}$ – це верхня частина кола $x^2 + (y+1)^2 = 4$. ▷

Задачі

3.1. Написати рівняння кола в кожному з таких випадків:

а) центр кола знаходиться в початку координат і його радіус $R = 3$;

б) центр кола знаходиться в точці $C(2;-3)$ і його радіус $R = 7$;

в) коло проходить через точки $A(1;2)$, $B(0;-1)$ і $C(-3;0)$.

3.2. Точка $M_1(x_1, y_1)$ лежить на колі $x^2 + y^2 = R^2$. Довести, що $x_1x + y_1y = R^2$ – рівняння дотичної.

3.3. Написати рівняння дотичних до кола $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$ в точках перетину з прямою $x - y + 2 = 0$.

3.4. Написати рівняння ліній центрів двох кіл, заданих рівняннями:

а) $(x-3)^2 + y^2 = 9$ і $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$;

б) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ і $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

3.5. Написати рівняння діаметра кола $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$, що проходить через середину хорди, відсіченої на прямій $x - 2y - 3 = 0$.

3.6. Знайти довжину спільної хорди кіл $x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0$, $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0$.

3.7. З точки $A(4;2)$ проведено дотичні до кола $x^2 + y^2 = 10$. Визначити кут між ними.

2. Еліпс

Еліпсом називається множина точок площини, сума відстаней яких від двох заданих точок F_1 і F_2 (фокусів) є сталою величиною, що дорівнює $2a$

Канонічне рівняння еліпса: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$ (3.4)

де $b^2 = a^2 - c^2$, $2c = |F_1F_2|$, $a > b > 0$.

Точки $A(-a;0)$, $B(a;0)$, $C(0;-b)$, $D(0;b)$ – вершини еліпса, $|AB| = 2a$ –велика вісь, $|CD| = 2b$ – мала вісь. Відношення $\dfrac{|F_1F_2|}{|AB|}$ називається ексцентриситетом еліпса і позначається через ε, тобто $\dfrac{c}{a} = \varepsilon < 1$.

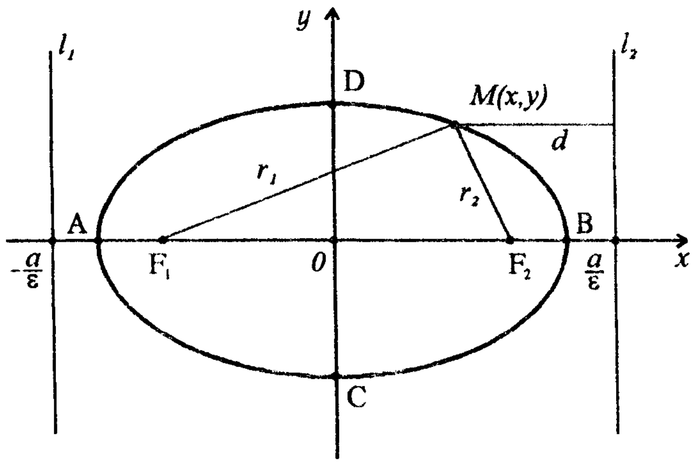


Рис. 7.

Відстані точки $M(x, y)$ еліпса від його фокусів (фокальні радіуси) визначаються формулами

$$r_1 = a + \varepsilon x, r_2 = a - \varepsilon x. \tag{3.5}$$

Директрисами еліпса називаються прямі, які перпендикулярні до фокальної осі і віддалені від центра еліпса на відстань $\frac{a}{\varepsilon}$.

Якщо еліпс задається рівнянням (3.4), то рівняння директрис має вигляд

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}. \tag{3.6}$$

за умови, що $a > b$ (на рис.7 прямі ℓ_1, ℓ_2 – директриси).

Директриси мають таку властивість: відношення відстаней точки кривої від фокуса і відповідної директриси є величиною сталою і дорівнює ексцентриситету кривої, тобто

$$\frac{r}{d} = \varepsilon. \tag{3.7}$$

Зауваження:

1. Якщо фокуси еліпса розміщені на осі Oy (симетрично відносно початку координат), то рівняння еліпса має вигляд (3.4), але тоді $a < b$, тому, якщо ми хочемо буквою a позначити велику піввісь, то в рівнянні (3.4) потрібно букви a і b поміняти місцями. Для зручності формулювання задач будемо позначати піввісь, яка лежить на осі Ox, буквою a, буквою b – піввісь, що лежить на осі Oy, незалежно від того, що більше: a чи b. Якщо $a = b$, то рівняння (3.4) визначає коло $x^2 + y^2 = a^2$ (див. формулу (3.2)).

2. Якщо осі еліпса паралельні до осей координат, а центр еліпса міститься в точці $M_0(x_0, y_0)$, то рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \tag{3.8}$$

Приклад 3. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо відомо: а) відстань між фокусами дорівнює 8, а мала піввісь $b = 3$; б) велика піввісь $a = 6$, $\varepsilon = 0{,}5$.

◁ а) За умовою задачі $2c = 8$, $b = 3$. Із співвідношення $b^2 = a^2 - c^2$ знаходимо $a^2 = 9 + 16 = 25$. Отже, рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$;

б) згідно з умовою $a = 6$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$. Отже, $c = \frac{a}{2} = 3$. Із співвідношення $b^2 = a^2 - c^2$, $b^2 = 27$. Тому рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$. ▷

Приклад 4. Написати рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо відома точка еліпса $M_1(8;12)$ та відстань $r_1 = 20$ від неї до лівого фокуса.

◁ Відстань від точки $M_1(8;12)$ до фокуса $F_1(-c;0)$ дорівнює 20. З іншого боку, ця відстань дорівнює $\sqrt{(8+c)^2+144}$. Отже, отримуємо співвідношення $20=\sqrt{(8+c)^2+144}$, звідси $c = 8$. Згідно з формулою (3.5) маємо, що $20 = a + \frac{64}{a}$ або $a^2 - 20a + 64 = 0$. Звідси $a_1 = 16$, $a_2 = 4$. Тоді $b^2 = a^2 - c^2 = 16^2 - 8^2 = 192$. Друге значення $a_2 = 4$ не годиться, бо фокуси містяться на осі абсцис (a повинно бути більшим за b). Тому $\frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{192}=1$ – шукане рівняння еліпса. ▷

Приклад 5. Встановити, чи рівняння $2x^2 + y^2 - 4x + 4y - 10 = 0$ визначає еліпс, і знайти координати його центра C, півосі і ексцентриситет.

◁ Згрупуємо члени рівняння з x та y і виділимо повні квадрати. Маємо

$$2(x^2-2x+1)-2+(y^2+4y+4)-4-10=0\text{, або}$$
$$2(x-1)^2+(y+2)^2-16=0.$$

Звідси $\dfrac{(x-1)^2}{8}+\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$ – рівняння еліпса (див. формулу (3.8)).

Центр еліпса знаходиться в точці $C(1;-2)$, мала піввісь дорівнює $2\sqrt{2}$, а велика — 4. Оскільки велика вісь міститься на прямій, паралельній осі Оу, то $c^2=b^2-a^2=16-8=8, c=2\sqrt{2}$. Тоді $\varepsilon=\dfrac{c}{b}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ▷

Задачі

3.8. Написати рівняння еліпса, якщо його велика вісь дорівнює 26, а фокуси містяться в точках $F_1(-10;0)$, $F_2(14;0)$.

3.9. Написати рівняння еліпса, фокуси якого містяться на осі ординат симетрично відносно початку координат, знаючи, крім цього, що відстань між його директрисами дорівнює $\dfrac{32}{3}$ і ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{3}{4}$.

3.10. Задано еліпс $9x^2+25y^2=225$. Знайти: 1) півосі; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння директрис.

3.11. Обчислити площу чотирикутника, дві вершини якого містяться в фокусах еліпса $x^2+5y^2=20$, а дві інші збігаються з кінцями його малої осі.

3.12. На еліпсі $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$ знайти точки, абсциса яких дорівнює –3.

3.13. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon=\dfrac{2}{3}$, фокальний радіус точки М еліпса дорівнює 10. Обчислити відстань точки М від односторонньої з цим фокусом директриси.

3.14. Задано точку $M_1(2;-\dfrac{5}{3})$ на еліпсі $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$. Написати рівняння прямих, на яких містяться фокальні радіуси точки M_1.

3.15. Еліпс дотикається осі абсцис в точці A(3;0) і осі ординат в точці B(0;–4). Написати рівняння цього еліпса, знаючи, що його осі симетрії паралельні до осей координат.

3.16. Точка $M_1(x_1,y_1)$ лежить на еліпсі $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Довести, що $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ – рівняння дотичної до еліпса в цій точці.

3.17. Написати рівняння еліпса, якщо відомі його ексцентриситет $\varepsilon=\frac{2}{3}$, фокус $F(2;1)$ і рівняння відповідної директриси $x-5=0$.

3.Гіпербола

Гіперболою називається множина точок площини, різниця відстаней кожної з яких (за абсолютним значенням) від двох заданих точок (фокусів) є сталою величиною, що дорівнює $2a(0<2a<|F_1F_2|=2c)$.

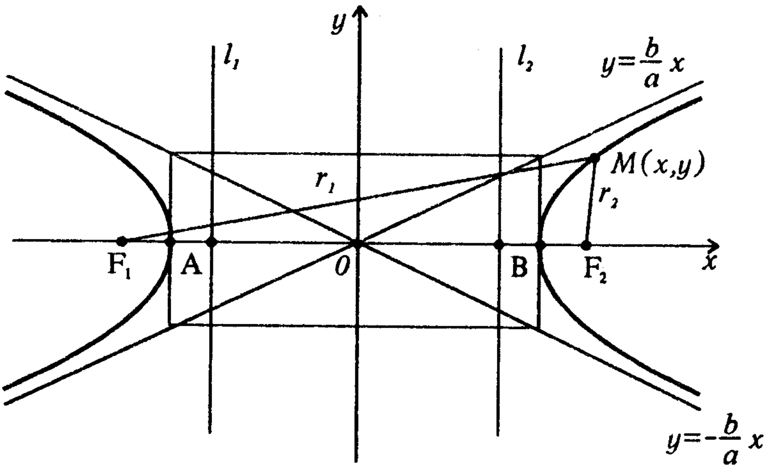


Рис. 8.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{3.9}$$

де $b^2=c^2-a^2$. Точки $A(-a;0)$, $B(a;0)$ – вершини гіперболи.

Параметр a називається дійсною піввіссю, b – уявною піввіссю. Параметр $c=\sqrt{a^2+b^2}$ – відстань фокуса від центра O гіперболи. Як і для еліпса, ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}(\varepsilon>1)$. Прямі $y=\pm\frac{b}{a}x$ називаються асимптотами гіперболи. Відстані точки $M(x;y)$ від її фокусів (фокальні радіуси) визначаються за формулами:

а) для $x > 0$ (для точок правої вітки)

$$r_1 = a + \varepsilon \cdot x, r_2 = -a + \varepsilon \cdot x; \tag{3.10}$$

б) для $x < 0$ (для точок лівої вітки)

$$r_1 = -a - \varepsilon \cdot x, r_2 = a - \varepsilon \cdot x. \tag{3.11}$$

Аналогічно, як і для еліпса, рівняння директрис

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}. \tag{3.12}$$

Прямі ℓ_1 та ℓ_2 (рис.8) – директриси гіперболи.

Гіпербола, в якої $a = b$ називається рівнобічною, її рівняння $x^2 - y^2 = a^2$, а рівняння асимптот $y = \pm x$.

Гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ та $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ називаються спряженими.

Якщо дійсна вісь гіперболи розміщена на прямій, паралельній осі абсцис, а точка $M_0(x_0, y_0)$ – центр гіперболи, то її рівняння має вигляд

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{3.13}$$

Приклад 6. Написати рівняння гіперболи, фокуси якої містяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо відомо:

а) Рівняння асимптот $y = \pm \frac{4}{3} x$ і відстань між фокусами дорівнює 26;

б) відстань між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$, а ексцентриситет — $\frac{3}{2}$.

◁ а) рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, де $a^2 + b^2 = c^2$. За умовою $c = 13$ З рівняння асимптот $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$. Отже, для визначення a і b маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \\ a^2 + b^2 = 13^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{39}{5}, \\ b = \frac{52}{5} \end{cases}.$$

Тому $\frac{x^2}{\left(\frac{39}{5}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{52}{5}\right)^2} = 1$ – шукане рівняння гіперболи.

б) За умовою відстань між директрисами $d = \frac{8}{3}$ і $\varepsilon = \frac{3}{2}$. Тому, враховуючи (3.6), маємо $\frac{2a}{\varepsilon} = \frac{8}{3}$ або $\frac{2a}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}$. Звідси $a = 2$ і $c = a \cdot \varepsilon = 3$.

Отже, $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$ і $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ – шукане рівняння гіперболи.

▷

Приклад 7. Встановити, яка лінія визначається рівнянням $x = -2\sqrt{y^2 + 1}$.

◁ Враховуючи, що $x < 0$, отримаємо $x^2 = 4(y^2 + 1)$ або $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ – рівняння гіперболи з півосями $a = 2$, $b = 1$. Отже, $x = -2\sqrt{y^2 + 1}$ – ліва вітка гіперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$. ▷

Задачі

3.18. Задано гіперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайти: 1) півосі; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння асимптот; 5)рівняння директрис.

3.19. Обчислити площу трикутника, який обмежений асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ і прямою $9x + 2y - 24 = 0$.

3.20. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = 3$, відстань точки M гіперболи від директриси дорівнює 4. Знайти відстань точки M від фокуса, одностороннього з цією директрисою.

3.21. Через лівий фокус гіперболи $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ проведений перпендикуляр до її осі, яка містить вершини. Визначити відстань фокусів від точок перетину цього перпендикуляра з гіперболою.

3.22. Написати рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет дорівнює $\frac{13}{12}$, фокус міститься в точці (0;13), а рівняння відповідної директриси $13y - 144 = 0$.

3.23. Яку абсцису має точка гіперболи, відстань якої від лівого фокуса в два рази більша, ніж відстань від правого фокуса, якщо дійсна піввісь $a = 2$, а ексцентриситет $\varepsilon = 1{,}5$?

3.24. Точка $M_1(x_1, y_1)$ лежить на гіперболі $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Довести, що $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ – рівняння дотичної до гіперболи в цій точці.

4.Парабола

Параболою називається множина точок площини, кожна з яких рівновіддалена від заданої точки F (фокуса) і заданої прямої l (директриси).

Канонічне рівняння параболи має вигляд

$$y^2 = 2px, \qquad (3.14)$$

де p – параметр параболи.

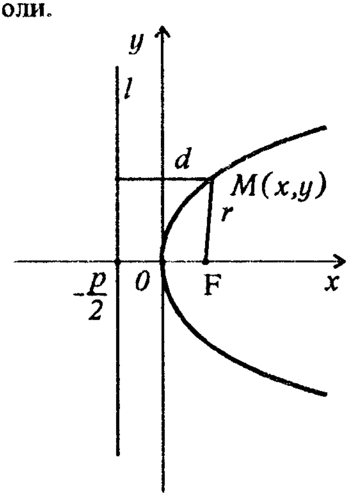


Рис. 9.

Парабола (3.14) симетрична відносно осі Ох. Вершина міститься в початку координат. $F(\frac{p}{2};0)$ – фокус. Рівняння директриси (на рис.9 – пряма l) $x = -\frac{p}{2}$.

Для будь-якої точки $M(x, y)$ параболи $r = d$ (d – відстань точки M від директриси) і $r = x + \frac{p}{2}$.

Якщо парабола симетрична відносно осі Оу, а вершина міститься в початку координат, то її рівняння має вигляд

$$x^2 = 2py. \qquad (3.15)$$

Якщо парабола симетрична відносно прямої $y = y_0$, а вершина міститься в точці $M_0(x_0, y_0)$, то її рівняння має вигляд

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \qquad (3.16)$$

Якщо ж парабола симетрична відносно прямої $x = x_0$, а вершина міститься в точці $M_0(x_0;y_0)$, то її рівняння має вигляд

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0). \qquad (3.17)$$

Приклад 8. Написати канонічне рівняння параболи, яка проходить через точку $M_1(2;4)$.

◁ Згідно з (3.14), рівняння параболи має вигляд $y^2 = 2px$. Параметр p знайдемо з умови, що точка M_1 належить параболі, тобто $4^2 = 2 \cdot 2 \cdot p$ Звідси p = 4. Отже, $y^2 = 8x$ – рівняння параболи. ▷

Приклад 9. Встановити, що рівняння $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 3$ визначає параболу, знайти координати її вершин і значення параметра p.

◁ Якщо виділити повний квадрат, то отримаємо $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 - 2$ або $(x-2)^2 = -4(y+2)$. Параметр p знаходимо з умови 2p = 4. Звідси p = 2. Отже, вершина параболи знаходиться в точці $M_0(2;-2)$ (див.(3.17)), а параметр p = 2. ▷

Приклад 10. Написати рівняння дотичної до параболи $y^2 = 8x$, яка паралельна прямій $2x + 2y - 3 = 0$.

◁ Рівняння прямих, паралельних до прямої 2x +2y – 3 = 0, має вигляд $2x + 2y + c = 0$. Запишемо систему рівнянь $\begin{cases} 2x + 2y + c = 0 \\ y^2 = 8x \end{cases}$. Звідси $y = -\dfrac{2x+c}{2}$ і $\left(\dfrac{2x+c}{2}\right)^2 = 8x$. Останнє рівняння перетворимо до вигляду $4x^2 + 4(c-8)x + c^2 = 0$. Для того, щоб пряма дотикалася до параболи, дискримінант повинен дорівнювати нулеві, тобто $D = 16(c-8)^2 - 16c^2 =$ $= -256(c-4) = 0$. Звідси c = 4. Рівняння дотичної буде 2x +2y +4 = 0 або x + y +2 = 0. ▷

Задачі

3.25. Написати рівняння параболи, вершина якої міститься в початку координат, знаючи,що:

1) парабола розміщена у правій півплощині симетрично відносно осі Ох і її параметр $p = 3$;

2) парабола розміщена в нижній півплощині симетрично відносно осі Оу і її параметр $p = 3$.

3.26. Написати рівняння параболи з віссю симетрії Оу, фокусом у точці $(0;-3)$ (парабола містить початок координат).

3.27. Знайти координати фокуса і рівняння директриси параболи $y^2 = 24x$.

3.28. На параболі $y^2 = 16x$ знайти точки, фокальний радіус яких дорівнює 13.

3.29. Написати рівняння параболи, якщо відомі фокус $F(-7;0)$ і рівняння директриси $x - 7 = 0$.

3.30. Написати рівняння дотичних до параболи $y^2 = 36x$, проведених з точки $M_1(2;9)$.

3.31. Точка $M_1(x_1, y_1)$ міститься на параболі $y^2 = 2px$. Довести, $y_1y = p(x + x_1)$ – це рівняння дотичної до параболи в цій точці.

3.32. Написати рівняння кіл, які дотикаються до прямої $2x - y - 5 = 0$, містять точку $M_1(2;3)$ і мають радіус $R = 2\sqrt{5}$.

3.33. Написати рівняння кіл, які дотикаються до прямих $x - 2y + 4 = 0$, $x + 2y = 0$ і проходять через точку $M_1(1;0)$.

3.34. Написати рівняння кіл, які дотикаються до прямих $x - 2y + 3 = 0, x - 2y + 13 = 0$ і проходять через точку $M_1(-1;2)$.

3.35. Задано рівняння сторін трикутника: $x - 2 = 0$, $y + 3 = 0$, $4x + 3y - 11 = 0$. Написати рівняння вписаного кола.

3.36. Задано еліпс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Знайти відстань від кінців великої осі до однієї з директрис.

3.37. Написати рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, яка містить точку $M_1(10;-8)$.

3.38. Написати рівняння дотичних до еліпса $x^2 + 4y^2 = 20$, які паралельні до прямої $x + y - 4 = 0$.

3.39. Через точку $P(1;-1)$ проведена січна до еліпса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ так, що точка P є серединою отриманої хорди. Написати рівняння січної.

3.40. На еліпсі $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ знайти точку, яка віддалена від малої осі на 5 одиниць.

3.41. На еліпсі $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ знайти точку M_1, яка знаходиться найближче до прямої $2x-3y+25=0$, і знайти відстань d від точки M_1 до цієї прямої.

3.42. Задана гіпербола $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{12}=1$. Написати рівняння спряженої гіперболи. Знайти ексцентриситети, директриси і асимптоти заданої і спряженої гіпербол.

3.43. Написати канонічне рівняння гіперболи, яка проходить через точку $P(4\sqrt{2};2)$ і дотикається до прямої $\sqrt{2}x-2y-4=0$.

3.44. Довести, що відрізок асимптоти, який міститься між центром гіперболи і директрисою, дорівнює дійсній півосі.

3.45. Визначити кут між асимптотами гіперболи, якщо ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{2}$.

3.46. Написати канонічне рівняння параболи, якщо відомо: а) фокус $F(0;5)$; б) директриса $x+15=0$.

3.47. Записати рівняння дотичної до параболи $y^2 = 2px$ в її точці $M_0(x_0;y_0)$.

3.48. Написати рівняння директриси параболи $y^2-2x-2y-5=0$.

3.49. На параболі $y^2=64x$ знайти точку M_1, яка знаходиться найближче до прямої $4x+3x-14=0$, і обчислити відстань d точки M_1 від цієї прямої.

3.50. Через фокус параболи $y^2=12x$ проведена хорда перпендикулярно до її осі. Обчислити довжину цієї хорди.

ВІДПОВІДІ ДО РОЗДІЛУ 3

1.1. 2); 3).

1.2. 1) Пряма, яка містить початок координат і лежить в першому і третьому квадрантах; 2) пряма паралельна до осі Ox і містить точку (0;2);
3) пряма паралельна до осі Oy і містить точку (–1;0); 4) вісь Ox; 5) вісь Oy;
6) прямі x = 0 і y = x; 7) промені, які виходять з початку координат і є бісектрисами першого та другого координатних кутів; 8) промені, які виходять з точки (0;1) і паралельні до бісектрис першого і четвертого координатних кутів; 9) прямі $x-1=0$ і $x-5=0$; 10) коло, центр якого міститься в початку координат і радіус $R=1$; 11) коло, центр якого міститься в точці $C(-1;2)$ і радіус $R=3$; 12) точка (1;–2).

1.3. Пряма $y+2=0$.

1.4. 1) $(x-2)^2+(y+1)^2=25$; 2) $(x-2)^2+y^2=9$

2.1. а) $x-2=0$; б) $y+5=0$; в) $x+5y+23=0$.

2.2. Пряма $x-1=0$.

2.3. а) $a=-2$, $5y-33=0$; б) $a_1=-3$, $x-56=0$; $a_2=3$, $5x+8=0$;
в) $a_1=1$, $3x-8y=0$; $a_2=\frac{5}{3}$, $33x-56y=0$.

2.4. а) 60°; б) 90°.

2.5. а) перпендикулярні; б) не перпендикулярні.

2.6. $a=-4$, $b=3$. 2.7. 3 кв. од.

2.8. $x+4y-6=0$, $4x+y+6=0$. 2.9. $y=-x+3$.

2.10. 135°. 2.11. а) $2x+3y-7=0$; б) $3x-2y-4=0$.

2.12. (–2;–1).

2.13. а) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}$; б) $x+3y-5=0$; $\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{\sqrt{10}}{2}=0$;
в) $p=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 2.14. 6 кв. од. 2.15. 9,8 кв. од.

2.16. $3x+4y+6=0$; $3x+4y-14=0$ або $3x+4y+6=0$; $3x+4y+26=0$.

2.17. У відношенні 2:3, починаючи від другої прямої. 2.18. Зовні.

2.19. Пряма $8x-15y+9=0$. 2.20. M(2;3). 2.21. а), в).

2.22. $2x+y=0$, $x=0$, $5x+y-6=0$.

2.23. $3x+y-1=0$, $x-y=0$, $y-1=0$.

2.24. $2x-5y+29=0$. 2.25. $2x+3y-12=0$.

2.26. а) $k=-2$, $b=-5$; б) $k=\frac{1}{3}$, $b=2$; в) $k=-1$, $b=0$.

2.27. а) 135°.б) 45°. в) 150°.

2.28. $x-1=0$, $2x-3y+8=0$, $2x+3y-12=0$.

2.29. $3x+4y-17=0$, $3x-4y-1=0$, $2x-5y+27=0$.

2.30. $x-y+1=0$, $x+y-1=0$, $x+y+1=0$.

2.31. (3;1). 2.32. (–2;8). 2.33. (5;7).

2.34. а) $13x-9y+7=0$; б) $36x-23y+29=0$.

2.35. (0;–4), (–4;4), (2;2), (–6;–2). 2.36. $\alpha=-9$, $\beta=6$.

2.37. $x+y-7=0$. 2.38. $2x+y-4=0$.

2.39. $13x-13y+4=0$.

2.40. $4x-5y+22=0$, $4x+y-18=0$, $2x-y+1=0$.

2.41. $2x-y-4=0$, $x+y-5=0$, $2x-y+2=0$, $x+y+1=0$.

2.42. $x-y-7=0$, $x-2y-10=0$.

2.43. $x+y-3=0$, $x-y+1=0$.

2.44. $3x-2y-8=0$, $x+3y+12=0$, $2x-5y+2=0$.

2.45. $\frac{18\sqrt{5}}{5}$, $\frac{36\sqrt{137}}{137}$, 4. 2.46. (0;6), $(-1;\frac{13}{2})$.

2.47. Два розв'язки:

а) $C_1(13;-9)$, $D_1(8;-4)$, $x+y+6=0$, $x-y-12=0$, $x+y-4=0$, $x-y-22=0$.

б) $C_2(3;-19)$, $D_2(-2;-14)$, $x+y+6=0$, $x-y-12=0$, $x+y+16=0$, $x-y-22=0$.

2.48. $2x+y-7=0$, $x-2y-6=0$.

2.49. $x-2y+2=0$, $2x+y+4=0$, $x+3y+7=0$, $3x-y+11=0$, $3x-y+1=0$.

2.50. Два розв'язки: а) $3x+4y-11=0$; б) $9x+10y-27=0$.

2.51. $y+5=0$.

2.52. $x+y-3=0$, $x-2y-3=0$, $5x-y+21=0$.

2.53. $x-5y-3=0$, $5x-y-27=0$, $23x+11y-249=0$.

3.1. а) $x^2+y^2=9$; б) $(x-2)^2+(y+3)^2=49$; в) $(x+1)^2+(y-1)^2=5$.

3.3. $3x-4y+8=0$, $4x-3y+7=0$.

3.4. а) $x+5y-3=0$; б) $3x-y-9=0$.

3.5. $2x+y-3=0$.

3.6. 10. 3.7. 90°.

3.8. $\frac{(x-2)^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$. 3.9. $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$.

3.10. 1) 5 і 3; 2) $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$; 3) $\varepsilon=\frac{4}{5}$; 4) $x=\pm\frac{25}{4}$.

3.11. 16 кв. од. 3.12. $(-3;-\frac{8}{5});(-3;\frac{8}{5})$. 3.13. 15.

3.14. $5x+12y+10=0$; $x-2=0$. 3.15. $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$.

3.17. $5x^2+9y^2+4x-18y-55=0$.

3.18. 1) $a=3$, $b=4$; 2) $F_1(0;-5)$, $F_2(0;5)$; 3) $\varepsilon=\frac{5}{3}$; 4) $y=\pm\frac{4}{3}x$; 5) $x=\pm\frac{9}{5}$.

3.19. 12 кв. од. 3.20. 12. 3.21. $\frac{25}{12}$, $\frac{313}{12}$.

3.22. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=-1$. 3.23. 4.

3.25. 1) $y^2=6x$; 2) $x^2=-6y$. 3.26. $x^2=-12y$.

3.27. (6;0), $x+6=0$. 3.28. (9;12), (9;–12). 3.29. $y^2=-28x$.

3.30. $3x-y+3=0$, $3x-2y+12=0$.

3.32. $(x+2)^2+(y-1)^2=20$; $(x-1{,}2)^2+(y-7{,}4)^2=20$.

3.33. $(x-3)^2+(y-1)^2=5$; $(x-0{,}5)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$.

3.34. $x^2+(y-4)^2=5$, $(x+\frac{16}{5})^2+(y-\frac{12}{5})^2=5$.

3.35. $(x-3)^2+(y+2)^2=1$. 3.36. $\frac{5}{4}$, $\frac{45}{4}$.

3.37. $\frac{1+\sqrt{7}}{20}x+\frac{\sqrt{7}-1}{16}y=1$, $\frac{1-\sqrt{7}}{20}x-\frac{1+\sqrt{7}}{16}y=1$.

3.38. $x+y-5=0$, $x+y+5=0$. 3.39. $4x-9y-13=0$.

3.40. (–5;–2), (–5;2), (5;–2), (5;2). 3.41. $M_1(-3;2)$, $d=\sqrt{13}$.

3.42. $-\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{12}=1$; $\varepsilon=\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x=\pm4$; для спряженої гіперболи $\varepsilon=\sqrt{3}$, $y=\pm2$, $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x$.

3.43. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$. 3.45. 90°.

3.46. а) $x^2=20y$; б) $y^2=60x$. 3.47. $y_0y=p(x+x_0)$.

3.48. $2x+7=0$. 3.49. $M_1(9;-24)$, $d=10$. 3.50. 12.

§1. РІВНЯННЯ ПОВЕРХНІ І РІВНЯННЯ ЛІНІЇ У ПРОСТОРІ

1. Поняття про рівняння поверхні

Рівнянням поверхні S відносно заданої системи координат називається рівняння

$$F(x,y,z)=0, \tag{1.1}$$

яке задовольняють координати кожної точки $M(x,y,z)$, що лежить на поверхні, і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на ній.

Звичайно поверхні задаються як множина точок, що мають спільну для всіх них геометричну властивість. Щоб отримати рівняння заданої таким способом поверхні, достатньо аналітично записати умови, що входять в її визначення.

Приклад 1. Скласти рівняння сфери радіусом R з центром в точці $M(x,y,z)$.

◁ Сфера – множина точок, відстань яких від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ дорівнює R. Нехай $M(x,y,z)$ – довільна точка сфери. Відповідно до означення сфери маємо: $\rho(M_0,M)=R$, де $\rho(M_0,M)$ – відстань від точки M_0 до точки M, або в координатній формі

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R, \text{ тобто}$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{1.2}$$

Рівняння (1.2) – це рівняння сфери, центр якої лежить в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ і радіус дорівнює R. ▷

Приклад 2. Написати рівняння поверхні, кожна точка якої розміщена вдвоє ближче до точки A(2,0,0) ніж до точки B(–4,0,0).

◁ Нехай S – шукана поверхня. Якщо $M(x,y,z)\in S$ то $\rho(M,B)=2\rho(M,A)$ тобто

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2+z^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}.$$

Звідки $(x+4)^2+y^2+z^2=4((x-2)^2+y^2+z^2)$, або, після спрощення, отримаємо

$$x^2-8x+y^2+z^2=0.$$

Якщо виділити повний квадрат в доданках, які містять x, то рівняння набуває вигляд

$(x-4)^2+y^2+z^2=16$, тобто поверхня S – це сфера з центром у точці $M_0(4,0,0)$ і радіусом R=4. ▷

Якщо рівняння (1.1) можна записати у вигляді

$$z=f(x,y), \tag{1.3}$$

то в цьому випадку поверхня S збігається з графіком функції двох змінних $f(x,y)$.

Задачі

В завданнях 1.1 – 1.6 з'ясувати, які геометричні образи визначаються рівняннями:

1.1. $x^2+y^2+z^2=4$.

1.2. $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=16$.

1.3. $2x^2+y^2+3z^2=0$.

1.4. $x^2-2x+y^2-4y+z^2=0$.

1.5. $x^2+y^2+z^2-6z=0$.

1.6. $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19=0$.

1.7. Скласти рівняння поверхні, сума квадратів відстаней від кожної точки якої до точок $F_1(-a,0,0)$ і $F_2(a,0,0)$ дорівнює сталому числу $4a^2$.

1.8. Скласти рівняння сфери радіуса R=2 з центром у точці $M_0(-1,2,0)$.

1.9. Скласти рівняння сфери з центром в точці $M_0(3,-2,1)$,якщо точка $M_1(2,-1,-3)$ лежить на ній.

1.10. Скласти рівняння сфери, якщо точки $M_1(2,-3,5)$ і $M_2(4,1,-3)$ – кінці її діаметра.

2. Класифікація поверхонь

Поверхні поділяються на алгебраїчні й неалгебраїчні.

Алгебраїчні поверхні визначаються щодо декартових прямокутних координат алгебраїчними рівняннями.

Поверхня, яка в деякій системі декартових координат визначається алгебраїчним рівнянням степеня n, називається алгебраїчною поверхнею n-го порядку.

Будемо розглядати лише поверхні першого та другого порядків.

Прикладами алгебраїчних поверхонь є : $x+y-3z=0$ – першого порядку, $x^2+xy-3yz+z^2+7=0$ – другого порядку, а неалгебраїчними: $z-\sin(x+y)=0$, $z=\ln xy$, $z=10^{xy}$, $2^z-x-y=0$.

3. Рівняння циліндричної поверхні з твірними, паралельними до однієї з координатних осей

Циліндричною поверхнею називається поверхня, утворена рухом прямої, яка перетинає задану лінію L і паралельна заданому напрямку.

Лінія L називається напрямною лінією циліндричної поверхні, а прямі, що її описують, - твірними.

Рівняння $F(x,y)=0$ в просторовій системі координат визначає циліндричну поверхню з твірними, паралельними осі Oz, і напрямною α, яка лежить в площині Oxy і задана рівнянням $F(x,y)=0$. Аналогічно рівняння $F(x,z)=0$ визначає в просторі циліндричну поверхню з твірними, паралельними осі Oy, і напрямною лінією $F(x,z)=0$ в площині Oxz, а рівняння $F(y,z)=0$ визначає циліндричну поверхню з твірними, паралельними осі Ox.

Наприклад, рівняння $x^2+y^2=9$ визначає круговий циліндр з твірними, паралельними осі Oz; $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ – гіперболічний циліндр з твірними, паралельними осі Oy; $y=3z^2$ – параболічний циліндр з твірними, паралельними осі Ox.

Задачі

У завданнях 1.11 – 1.18 встановити, які геометричні образи визначають в просторовій системі координат рівняння:

1.11. $x^2+z^2=25$. 1.12. $\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$. 1.13. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

1.14. $6z=x^2$. 1.15. $x^2+y^2=ax$. 1.16. $z=4-x^2$.

1.17. $y=5x^2$. 1.18. $z^2+y^2=by$.

4. Рівняння лінії в просторі

Лінію L в просторі розглядають як перетин двох поверхонь S_1 і S_2, тобто заданням системи двох рівнянь

$$F_1(x,y,z)=0, F_2(x,y,z)=0. \qquad (1.4)$$

Зауважимо, що лінія в просторі може бути задана як перетин двох поверхонь не єдиним способом, оскільки замість даних двох поверхонь можна взяти будь-яку іншу пару поверхонь, які перетинаються по тій же лінії L. Аналітично це означає, що замість системи (1.4) можна взяти будь-яку еквівалентну їй систему.

Приклад 3. Дослідити форму лінії L, заданої системою рівнянь

$$x^2+y^2+z^2=1,\ \ x^2+y^2+(z-3)^2=10.$$

◁ З другого рівняння системи маємо:

$x^2+y^2+z^2-6z+9=10 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-6z=1.$

Враховуючи, що $x^2+y^2+z^2=1$, одержимо, що $z=0$. Тоді лінію L можна записати

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z=0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$$

Кожна з отриманих систем визначає коло радіуса $R=1$ з центром в точці O(0,0,0). Оскільки останні системи еквівалентні заданій системі, то ця система також визначає коло. ▷

Задачі

В задачах 1.19 – 1.23 дослідити форму лінії L, заданої системою рівнянь:

1.19. $x^2+y^2+z^2=5, x^2+y^2=1$.

1.20. $x^2+y^2+z^2=4, z=0$.

1.21. $x^2+y^2+z^2=49, y=0$.

1.22. $x^2+y^2+z^2=49,\ x^2+y^2+z^2-4z-25=0$.

1.23. $x^2+y^2+z^2=20,\ z-2=0$.

1.24. Скласти рівняння лінії перетину двох сфер, одна з яких має радіус $R_1=6$ і центр в початку координат, а друга має радіус R_2=5 і центр в точці M_0(1,–2,2).

1.25. На лінії, яка задана в завданні 1.22, знайти точку: 1) абсциса якої дорівнює 3; 2) ордината якої дорівнює 2; 3) апліката якої дорівнює 8.

1.26. Знайти центри та радіуси кіл:

1) $x^2 + y^2 = 9, z = 4$;

2) $y^2 + z^2 = 16, x = 5$;

3) $x^2 + z^2 = 1, y = -2$.

1.27. Знайти рівняння циліндра, який проектує коло $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2 = 25$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ на площину: 1) Oxy; 2)Oxz.

1.28. Знайти рівняння проекції кола $(x +1)^2 +(y+2)^2 +(z-2)^2 = 36$, $x^2+(y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$ на площину: 1)Oxy; 2) Oyz.

§2. ПЛОЩИНА

1. Загальне рівняння площини

Кожна площина може бути виражена лінійним рівнянням відносно вибраної декартової системи координат і, навпаки, кожне лінійне рівняння відносно декартової системи координат визначає площину.

Іншими словами, площина є єдиною алгебраїчною поверхнею першого порядку.

Дійсно, нехай π – довільна площина, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – одна з її точок, $\vec{n} = \{A, B, C\}$ – перпендикулярний до неї вектор. Тоді, якщо точка $M(x, y, z)$ належить площині π, то вектори $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ та $\vec{n}$ – перпендикулярні, тобто $\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\right) = 0$ або в координатній формі

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{2.1}$$

Отже, рівняння (2.1) визначає площину, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$. Вектор $\vec{n}$ називають нормальним вектором площини.

Якщо в рівнянні (2.1) розкрити дужки та ввести позначення $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, то воно набуває вигляду

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2.2}$$

Рівняння (2.2) називається загальним рівнянням площини.

Приклад 1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2,1,-1)$ перпендикулярно до вектора $\vec{a} = \{1;2;3\}$.

◁ Згідно з умовою задачі вектор $\vec{a}$ перпендикулярний до площини, а тому є її нормальним вектором $\vec{n} = \{1;2;3\}$. Використавши рівняння (2.1), матимемо

$1 \cdot (x - 2) + 2 \cdot (y - 1) + 3 \cdot (z + 1) = 0$ або $x + 2y + 3z - 1 = 0$. ▷

Приклад 2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2,1,-1)$ перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, де $M_1(4,2,3)$, $M_0(5,-2,1)$.

◁ Оскільки площина перпендикулярна до вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = \{1;-4;-2\}$, то цей вектор є її нормальним вектором $\vec{n} = \{1;-4;2\}$, а тому згідно з формулою (2.1) маємо: $1(x-2) - 4(y-1) - 2(z+2) = 0$ або $x - 4y - 2z - 2 = 0$. ⊳

Приклад 3. Скласти рівняння площини π, яка проходить через точки $M_0(2,4,1)$ і $M_1(0,-2,4)$ паралельно вектору $\vec{a} = \{2;1;-1\}$.

⊲ Точка $M(x,y,z)$ належить шуканій площині π тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ та $\vec{a}$ компланарні, тобто

$$\left(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M_1}\, \vec{a}\right) = \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z-1 \\ -2 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \text{ або } 3x + 4y + 10z - 32 = 0 \ ⊳$$

Приклад 4. Скласти рівняння площини π, яка проходить через точку $M_0(3,4,-5)$ паралельно двом векторам $\vec{a}_1 = \{3;1;-1\}$ і $\vec{a}_2 = \{1;-2;1\}$.

⊲ Точка $M(x,y,z)$ належить шуканій площині π тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M} = \{x-3; y-4; z+5\}, \vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ компланарні. Отже,

$$\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}_1, \vec{a}_2\right) = \begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто $x + 4y + 7z + 16 = 0$. ⊳

Задачі

2.1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_0 і має нормальний вектор $\vec{n}$, якщо:

а) $M_0(2,1,-1), \vec{n} = \{1,-2,3\}$;

б) $M_0(-1,2,3), \vec{n} = \{-1,2,-1\}$;

в) $M_0(0,0,-6), \vec{n} = \{2,3,-1\}$.

2.2. Точка M_0 – основа перпендикуляра, який опущено з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини, якщо: а) $M_0(2,-1,-1)$; б) $M_0(-1,2,1)$; в) $M_0(2,0,-1)$.

2.3. Дано дві точки M_1 та M_2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, якщо:

а) $M_1(3,-1,2)$, $M_2(4,-2,-1)$; б) $M_1(4,1,-2)$, $M_2(0,2,1)$;

в) $M_1(-1,0,2)$, $M_2(1,3,-4)$;

2.4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_0 паралельно векторам $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$, якщо:

а) $M_0(1,1,1), \vec{a}_1 = \{0,1,2\}, \vec{a}_2 = \{-1,0,1\}$;

б) $M_0(0,1,2)$, $\vec{a}_1 = \{2,0,1\}$, $\vec{a}_2 = \{1,1,0\}$;

в) $M_0(1,2,3)$, $\vec{a}_1 = \{1,-1,0\}$, $\vec{a}_2 = \{-1,2,1\}$;

2.5. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 і M_2 паралельно вектору $\vec{a}$, якщо:

а) $M_1(1,2,0), M_2(2,1,1), \vec{a} = \{3,0,1\}$;

б) $M_1(1,1,1), M_2(2,3,-1), \vec{a} = \{0;-1;2\}$;

в) $M_1(2,-1,3), M_2(3,1,2), \vec{a} = \{3,-1,4\}$.

2. Неповні рівняння площини

Виходячи із геометричного тлумачення коефіцієнтів A,B,C в загальному рівнянні площини (2.2) як координат вектора її нормалі, питання про вплив коефіцієнтів рівняння на розміщення площини відносно системи координат розв'язується просто.

а). Зміна коефіцієнта D при незмінних коефіцієнтах A,B і C приводить до паралельного переміщення площини і, зокрема, при D = 0 отримаємо рівняння

$$Ax + By + Cz = 0 \qquad (2.3)$$

площини, що проходить через початок координат.

б). Те, що один з коефіцієнтів A, B чи C дорівнює нулеві, означає перпендикулярність вектора $\vec{n}$ нормалі до відповідної осі, тобто паралельність площини до цієї осі.

Отже, якщо A = 0, то площина $By + Cz + D = 0$ паралельна осі Ox. Відповідно, якщо B = 0, площина $Ax + Cz + D = 0$ паралельна осі Oy, а якщо C = 0, площина $Ax + By + D = 0$ паралельна осі Oz.

в). Якщо два коефіцієнти A і B, A і C чи B і C дорівнюють нулеві, це означає паралельність площини відповідній координатній площині Oxy, Oxz,чи Oyz.

г). Якщо три коефіцієнти A,B і D, A,C і D чи B,C і D дорівнюють нулеві, це означає, що площина збігається з відповідною координатною площиною Oxy, Oxz чи Oyz, тобто рівняння z = 0 визначає площину Oxy, y = 0 – площину Oxz, x = 0 – площину Oyz.

Приклад 5. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(3,-5,4)$ паралельно площині Oxy.

◁ Оскільки площина паралельна площині Oxy, то в загальному рівнянні площини (2.2) коефіцієнти A та B дорівнюють нулеві, тобто рівняння шуканої площини має вигляд $Cz + D = 0$. Але $C \neq 0$. Тому маємо:

$$z - c = 0\text{, де } c = -\frac{D}{C}. \tag{2.4}$$

Якщо площина проходить через точку $M_0(3,-5,4)$, то координати цієї точки задовольняють рівняння площини. $4 - c = 0 \Rightarrow c = 4$ і рівняння шуканої площини має вигляд: $z - 4 = 0$. ▷

Приклад 6. Скласти рівняння площини, що проходить через вісь Oz і точку $M_0(2,-3,-2)$.

◁ Шукана площина проходить через вісь Oz. Тому її рівняння має вигляд:

$$Ax + By = 0\text{, або } x + \frac{B}{A}y = 0. \tag{2.5}$$

Але точка $M_0(2,-3,-2)$ належить площині (2.5). Тому $2 - 3\frac{B}{A} = 0 \Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{2}{3}$, тобто $x + \frac{2}{3}y = 0 \Rightarrow 3x + 2y = 0$. ▷

Приклад 7. Скласти рівняння площини,що проходить через точки $M_1(1,3,4)$ і $M_2(2,-5,-6)$ паралельно осі Oy.

◁ Шукана площина паралельна осі Oy. Тому в загальному рівнянні (2.2) коефіцієнт $B = 0$, тобто рівняння площини має вигляд

$$Ax + Cz + D = 0 \quad\text{або}\quad \frac{A}{D}x + \frac{C}{D}z + 1 = 0 \tag{2.6}$$

Підставивши в (2.6) координати точок M_1 та M_2, отримаємо систему рівнянь $\frac{A}{D} + 4\frac{C}{D} + 1 = 0;\ 2\frac{A}{D} - 6\frac{C}{D} + 1 = 0$.

Звідси знаходимо: $\frac{A}{D} = -\frac{5}{7}, \frac{C}{D} = -\frac{1}{14}$. Отже, шукане рівняння площини: $10x + z - 14 = 0$. ▷

Задачі

2.6. Скласти рівняння площини, що проходить:

а) через точку $M_0(2,-3,3)$ паралельно площині Oxy;

б) через точку $M_0(1,-2,4)$ паралельно площині Oxz;

в) через точку $M_0(-5,2,-1)$ паралельно площині Oyz.

2.7. Скласти рівняння площини, що проходить:

а) через вісь Ox і точку $M_0(4,-1,2)$;

б) через вісь Oy і точку $M_0(1,4,-3)$;

в) через вісь Oz і точку $M_0(3,-4,7)$.

2.8. Скласти рівняння площини, що проходить:

а) через точки $M_1(7,2,-3)$ і $M_2(5,6,-4)$ паралельно осі Ox;

б) через точки $M_1(2,-1,1)$ і $M_2(3,1,2)$ паралельно осі Oy;

в) через точки $M_1(3,-2,5)$ і $M_2(2,3,1)$ паралельно осі Oz.

3. Рівняння площини "у відрізках"

Якщо в рівнянні (2.2) жоден з коефіцієнтів A,B,C,D не дорівнює нулю, то таке рівняння можна звести до вигляду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{2.7}$$

де $a=-\frac{D}{A}, b=-\frac{D}{B}, c=-\frac{D}{C}$ це величини відрізків, які відтинає площина на координатних осях, якщо рахувати кожен від початку координат. Рівнян-
ня (2.7) називається рівнянням площини "у відрізках".

Приклад 8. Площина проходить через точки $M_1(1;2;-1)$ та $M_2(-3;2;1)$ і відтинає на осі ординат відрізок $b = 3$. Скласти рівняння цієї площини "у відрізках".

◁ Рівняння шуканої площини має вигляд $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Параметри a та c визначають з умови, що точки M_1 та M_2 лежать на площині. Отже, $\frac{1}{a}+\frac{2}{3}-\frac{1}{c}=1, -\frac{3}{a}+\frac{2}{3}+\frac{1}{c}=1$. Звідси $a=-3, c=-\frac{3}{2}$.

Тому шукане рівняння має вигляд $\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-3/2}=1$. ▷

Приклад 9. Знайти точки перетину площини $2x-3y-4z-24=0$ з осями координат.

◁ Запишемо для заданої площини її рівняння "у відрізках". Маємо:

$$\frac{2x}{24}-\frac{3y}{24}-\frac{4z}{24}=1 \text{ або } \frac{x}{12}+\frac{y}{-8}+\frac{z}{-6}=1.$$

Отже, шуканими точками є такі: (12;0;0), (0;–8;0), (0;0;–6). ▷

Приклад 10. Скласти рівняння площини, яка перпендикулярна до площини $2x-2y+4z-5=0$ і відтинає на координатних осях Ox і Oy відрізки $a=-2, b=\frac{2}{3}$.

◁ Враховуючи задані значення a та b, запишемо рівняння даної площини

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{\frac{2}{3}}+\frac{z}{c}=1 \text{ або } -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y+\frac{1}{c}z-1=0,$$

тобто її нормальний вектор $\vec{n}_1=\{-\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{1}{c}\}$. За умовою нормальним вектором заданої площини є $\vec{n}_2=\{2;-2;4\}$. Ці площини, а тому і їх нормальні вектори є перпендикулярними, тобто їх скалярний добуток дорівнює нулю $-\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{3}{2}\cdot(-2)+\frac{1}{c}\cdot 4=0 \Rightarrow \frac{1}{c}=1$.

Отже, шукане рівняння площини

$$-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y+z-1=0 \text{ або } x-3y-2z+2=0. \triangleright$$

Задачі

2.9. Задані рівняння площин. Написати для них рівняння " у відрізках":

а) $x+2y-3z-6=0$; б) $2x-3y+4z+48=0$.

2.10. Знайти відрізки, які відтинає площина $3x-4y-24z+12=0$ на координатних осях.

2.11. Обчислити площу трикутника, який відтинається від координатного кута xOy площинами

а) $6x-5y+3z-30=0$; б) $5x - 6y + 3z + 120 = 0$.

2.12. Обчислити об'єм піраміди, обмеженої координатними площинами і площиною:

а) $2x-3y+6z-12=0$; б) $5x-2y+4z+60=0$.

2.13. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-1;4;-1)$, $M_2(-13;2;-10)$ і відтинає на осях абсцис і аплікат відмінні від нуля відрізки однакової величини.

2.14. Скласти рівняння площини, яка відтинає на осі Oz відрізок $c=-5$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}=\{-2;1;3\}$.

2.15. Скласти рівняння площини, яка паралельна вектору $\vec{a}=\{2;1;-1\}$ і відтинає на координатних осях Ox і Oy відрізки $a = 3$, $b = -2$.

4. Рівняння площини, яка проходить через три точки

Нехай площина задана трьома своїми точками $M_1(x_1,y_1z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ і $M_3(x_3,y_3,z_3)$, які не лежать на одній прямій. Якщо

$M(x,y,z)$ – довільна точка площини, то вектори $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ – компланарні і тому їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\left(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right) = 0, \qquad (2.8)$$

або в координатній формі

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.9)$$

Рівняння (2.8) визначає рівняння площини, що проходить через три точки у векторній формі, а (2.9) – у координатній.

Приклад 11. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(3,0,4)$, $M_2(5,2,6)$ і $M_3(2,3,-3)$.

◁ Нехай $M(x,y,z)$ – довільна точка площини. Тоді вектори $\overrightarrow{M_1M} = \{x-3; y; z-4\}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{2;2;2\}$ і $\overrightarrow{M_1M_3} = \{-1;3;-7\}$ є компланарними. Тому їх мішаний добуток дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-4 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси маємо $5x - 3y - 2z - 7 = 0$. ▷

Задачі

2.16. Скласти рівняння площини,яка проходить через точки M_1, M_2 і M_3, якщо:

а) $M_1(3,-1,2)$, $M_2(4,-1,-1)$, $M_3(2,0,2)$;
б) $M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$, $M_3(3,0,1)$;
в) $M_1(1,1,1)$, $M_2(0,-1,2)$, $M_3(2,3,-1)$;
г) $M_1(2,-1,3)$, $M_2(3,1,2)$, $M_3(5,-2,7)$.

5. Нормальне рівняння площини

Нормальним рівнянням площини називається її рівняння, записане у вигляді

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \qquad (2.10)$$

де $\vec{n}^{o} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ – одиничний вектор нормалі до площини, p – довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на дану площину.

Щоб звести загальне рівняння площини (2.2) до нормального вигляду (2.10), треба перемножити всі його коефіцієнти на число

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

яке називається нормувальним множником рівняння. Знак нормувального множника λ протилежний до знака вільного члена D. Отже, нормальне рівняння площини (2.2) буде мати вигляд

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \qquad (2.11)$$

Приклад 12. Звести до нормального вигляду рівняння площини $2x + 3y - 6z + 21 = 0$.

◁ На основі формули (2.11) маємо: $\frac{2x + 3y - 6z + 21}{-\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{2x + 3y - 6z + 21}{-7} = 0$, або $-\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z - 3 = 0$, тобто отримали нормальне рівняння площини, де

$$\cos\alpha = -\tfrac{2}{7}, \cos\beta = -\tfrac{3}{7}, \cos\gamma = \tfrac{6}{7},\ p = 3. \ ▷$$

Задачі

2.17. Визначити, які з рівнянь площини є нормальними:

1) $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 5 = 0$; 2) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z - 3 = 0$;

3) $\frac{6}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{2}{7}z + 5 = 0$; 4) $-\frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z - 5 = 0$;

5) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$; 6) $-\frac{5}{13}y + \frac{12}{13}z + 1 = 0$;

7) $\frac{5}{13}y - \frac{12}{13}z - 1 = 0$; 8) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 3 = 0$;

9) $x - 1 = 0$; 10) $y + 2 = 0$;

11) $-y - 2 = 0$; 12) $z - 5 = 0$.

2.18. Звести кожне з рівнянь площини до нормального вигляду:

1) $2x + 9y - 6z + 33 = 0$; 2) $x + y\sqrt{2} + z - 10 = 0$;

3) $x + z - 6 = 0$; 4) $x - 2y + 2z - 6 = 0$;

5) $2x + 1 = 0$; 6) $3x - 4y - 1 = 0$;

7) $2z - 1 = 0$.

6. Відстань від точки до площини

Нехай $Ax+By+Cz+D=0$ – рівняння площини, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – задана точка, d – відстань точки M_0 від площини. Тоді

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{2.12}$$

або

$$d=\left|\text{Пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M_1}\right|=\frac{\left|\left(\overrightarrow{M_0M_1},\vec{n}\right)\right|}{|\vec{n}|}, \tag{2.13}$$

де $\vec{n}$ – нормальний вектор даної площини, M_1 – будь-яка точка, що належить площині.

Приклад 13. Обчислити відстань від точки $M_0(-1,1,-2)$ до площини $2x-3y+6z-11=0$.

◁ 1-й спосіб. Використавши формулу (2.12), отримаємо:

$$d=\frac{|2\cdot(-1)-3\cdot1+6\cdot(-2)-11|}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{|-28|}{7}=4.$$

2-й спосіб. Знайдемо будь-яку точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$, що належить даній площині. Прийнявши в рівнянні площини, наприклад, $x_1=1, y_1=-1$, знайдемо $z_1=1$.

Тоді $\overrightarrow{M_0M_1}=\{2;-2;3\}, \vec{n}=\{2;-3;6\}$ і на основі формули (2.13):

$$d=\frac{|4+6+18|}{|7|}=4.\ ▷$$

Приклад 14. Обчислити відстань d між паралельними площинами $3x-y+\frac{3}{2}z-9=0$, $-6x+2y-3z+4=0$.

◁ Візьмемо довільну точку на першій площині, наприклад, $x_0=0,\ y_0=0,\ z_0=6$. Тоді шукана відстань d дорівнює відстані точки $M_0(0,0,6)$ до другої площини, тобто

$$d=\frac{|-18+4|}{\sqrt{36+4+9}}=\frac{14}{7}=2.\ ▷$$

Приклад 15. На осі Oz знайти точку, яка рівновіддалена від двох площин: $x-\sqrt{2}y-z+3=0,\ 2x-2y+z+2=0$.

◁ Візьмемо довільну точку на осі Oz, наприклад, M(0,0,z). Тоді відстань від точки M(0,0,z) до першої площини $d_1 = \frac{|-z+3|}{\sqrt{1+2+1}} = \frac{|-z+3|}{2}$, а відстань d_2 від точки M(0,0,z) до другої площини $d_2 = \frac{|z+2|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|z+2|}{3}$. Отже, $d_1 = d_2$, тобто $\frac{|-z+3|}{2} = \frac{|z+2|}{3} \Rightarrow \frac{-z+3}{2} = \pm\frac{z+2}{3}$, звідки $z_1 = 1$, $z_2 = 13$.

Отже, $M_1(0,0,1)$ і $M_2(0,0,13)$. ▷

Задачі

2.19. Обчислити відстань від точки M_0 до площини π, якщо:

1) $M_0(0,0,0), \pi$: $3x - 4y + 5z - 10\sqrt{2} = 0$;
2) $M_0(-2,-4,3)$, $\pi : 2x - y + 2z + 3 = 0$;
3) $M_0(2,-4,2)$, $\pi : 2x + 11y + 10z - 10 = 0$;
4) $M_0(3,-6,7)$, $\pi : 4x - 3z - 1 = 0$;
5) $M_0(1,1,2)$, $\pi : x - y - 1 = 0$.

2.20. Обчислити відстань d від точки $M_0(-1,1,-2)$ до площини, яка проходить через точки $M_1(1,-1,1)$, $M_2(-2,1,3)$ і $M_3(4,-5,-2)$.

2.21. Обчислити відстань між паралельними площинами:

1) $x - 2y - 2z - 12 = 0$, $x - 2y - 2z - 6 = 0$;
2) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$, $2x - 3y + 6z + 28 = 0$;
3) $2x - y + 2z + 9 = 0$, $4x - 2y + 4z - 21 = 0$;
4) $6x - 18y - 9z - 28 = 0$, $4x - 12y - 6z - 7 = 0$.

2.22. Дві грані куба лежать на площинах $2x - 2y + z + 8 = 0$, $2x - 2y + z - 1 = 0$. Обчислити об'єм цього куба.

2.23. На осі Oy знайти точку, яка знаходиться від площини $x + 2y - 2z - 2 = 0$ на відстані $d = 4$.

2.24. На осі Oz знайти точку, яка рівновіддалена від точки $M(1,-2,0)$ і від площини $3x - 2y + 6z - 9 = 0$.

2.25. На осі Ox знайти точку, яка рівновіддалена від двох площин: $12x - 16y + 15z + 1 = 0$, $2x + 2y - z - 1 = 0$.

7. Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності двох площин

Нехай дві площини задано загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ і } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 .$$

Двогранний кут θ між двома площинами вимірюється лінійним кутом, який дорівнює кутові між нормальними векторами $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ і $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ цих площин. Тому

$$\cos\theta = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} . \qquad (2.14)$$

Якщо площини паралельні, то вектори $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$ – колінеарні. Тому умова паралельності двох площин має вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} . \qquad (2.15)$$

Умова перпендикулярності:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 . \qquad (2.16)$$

Приклад 16. Через дві точки $M_1(1,1,-2)$ і $M_2(-2,4,1)$ провести площину під кутом 60° до площини $x - z = 1$.

◁ Оскільки площина проходить через точку $M_1(1,1,-2)$, то її рівняння має вигляд $A(x-1) + B(y-1) + C(z+2) = 0$. Але точка $M_2(-2,4,1)$ також належить площині. Тому її координати задовольняють рівняння записаної площини, тобто $A(-2-1) + B(4-1) + C(1+2) = 0 \Rightarrow A - B - C = 0$. Шукана площина утворює кут 60° з площиною $x - z = 1$.

Отже, $\cos 60° = \dfrac{1}{2} = \dfrac{A - C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{1^2 + (1)^2}}$,

тобто $\dfrac{1}{2} = \dfrac{A - C}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ або $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{A - C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Для знаходження коефіцієнтів A,B і C отримаємо таку систему рівнянь

$$\begin{cases} A - B - C = 0, \\ \dfrac{A - C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - B - C = 0, \\ 2(A - C)^2 = A^2 + B^2 + C^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A-B-C=0, \\ A^2-4AC+C^2-B^2=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{A}{C}-\dfrac{B}{C}=1, \\ \left(\dfrac{A}{C}\right)^2-4\left(\dfrac{A}{C}\right)-\left(\dfrac{B}{C}\right)^2=-1. \end{cases}$$

Розв'язками системи є $\dfrac{A}{C}=0$, $\dfrac{B}{C}=-1$. Отже, шукане рівняння має вигляд $y-z-3=0$. ▷

Приклад 17. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2,-1,-5)$ і перпендикулярна до площин $3x-2y+z-7=0$, $5x-2y+3z+1=0$.

◁ Нехай $M(x,y,z)$ – довільна точка шуканої площини. Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$ – компланарні, а мішаний добуток векторів

$$\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}_1, \vec{n}_2\right)=0 \text{ або } \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

Звідси отримаємо: $x+2y+z+5=0$. ▷

Задачі

2.26. Обчислити кути між площинами:

1) $4x-5y+3z=0$ і $x-4y-z+9=0$;

2) $3x-y+2z+15=0$ і $5x+9y-3z-1=0$;

3) $6x+2y-4z+17=0$ і $9x+3y-6z-4=0$;

4) $x+\sqrt{2}y+z+1=0$ і $x+\sqrt{2}y-z+3=0$;

5) $2x+y-2z-3=0$ і $x=0$.

2.27. Встановити, які з наведених площин перетинаються, паралельні або збігаються:

1) $3x+y-5z-12=0$ і $2x+6y-3=0$;

2) $2x-3y+z+8=0$ і $4x-6y-3z-7=0$;

3) $5x+2y-3z-5=0$ і $10x+4y-6z+5=0$;

4) $3x+7y+z+4=0$ і $9x+21y+3z+12=0$.

2.28. Скільки площин задані наведеними рівняннями? Які з них перетинаються і які паралельні?

1) $6x-12y+4z-6=0$; 2) $3x-6y+3z-6=0$;

3) $-x+2y-z+2=0$; 4) $3x-4y+2z+5=0$.

2.29. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3,-2,-7)$ паралельно до площини $2x-3z+5=0$.

2.30. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-1,-2,0)$ і $M_2(1,1,2)$ перпендикулярно до площини $x+2y+2z-4=0$.

2.31. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2,-1,4)$ і $M_2(3,2,-1)$ перпендикулярно до площини $x+y+z-3=0$.

2.32. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до площин:

1) $x+2y+3z+5=0$ і $x-5z-1=0$;

2) $2x-y+5z+3=0$ і $x+3y-z-7=0$.

2.33. Дані рівняння трьох граней паралелепіпеда $x-3y+4z-12=0$, $y+2z-5=0$, $x+4=0$ і одна з його вершин $(4,-3,2)$. Знайти рівняння трьох інших граней.

2.34. Через початок координат провести площину, яка утворює з площиною $x-4y-8z-3=0$ кут $\frac{3\pi}{4}$ і є перпендикулярною до площини $7x-z+3=0$.

2.35. Знайти кут між площинами, які проходять через точку $M_0(1,-1,-1)$ і одна з них проходить через вісь Ox, а друга – через вісь Oz.

2.36. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-2,+7,3)$ паралельно площині $x-4y+5z-1=0$.

2.37. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(0,0,1)$ і $M_2(3,0,0)$ і утворює кут $\frac{\pi}{3}$ з площиною Oxy.

2.38. Через вісь Oz провести площину, яка утворює з площиною $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ кут $\frac{\pi}{3}$.

2.39. Перевірити, чи можна провести площину через чотири точки:

1) $(3,1,0)$, $(0,7,2)$, $(-1,0,5)$ і $(4,1,5)$;

2) $(1,-1,1)$, $(0,2,4)$, $(1,3,3)$ і $(4,0,-3)$.

2.40. Знайти точку перетину трьох площин:

1) $5x+8y-z-7=0$, $x+2y+3z-1=0$, $2x-3y+2z-9=0$;

2) $x-4y-2z+3=0, 3x+y+z-5=0, -3x+12y+6z-7=0$;

3) $2x-y+5z-4=0, 5x+2y-13z+23=0, 3x-z+5=0$;

4) $7x+2y+3z-15=0, 5x-3y+2z-15=0, 10x-11y+5z-36=0$.

§3. ПРЯМА В ПРОСТОРІ

1. Векторне рівняння прямої

Нехай пряма L задана в просторі точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямним вектором $\vec{s} = \{m, n, p\}$, тобто вектором, паралельним прямій L. Якщо $\vec{r}$ та $\vec{r}_0$ – радіус-вектори точок M і M_0, то рівняння

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t \tag{3.1}$$

є рівнянням прямої L у векторній формі, t – змінний параметр.

2. Параметричні рівняння прямої

З рівняння (3.1) маємо: $\vec{r} - r_0 = \vec{s}t$.Звідси отримаємо

$$x = x_0 + mt,\ y = y_0 + nt,\ z = z_0 + pt. \tag{3.2}$$

Рівняння (3.2) називається параметричними рівняннями прямої.

3. Канонічні рівняння прямої

Якщо з системи рівнянь (3.2) виключити параметр t, то матимемо

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{3.3}$$

Рівняння (3.3) називають канонічними рівняннями прямої.

Нехай пряма L утворює з осями координат кути α, β та γ. Тоді координати напрямного вектора $\vec{s}$ пропорційні напрямним косинусам прямої: $m{:}n{:}p = \cos\alpha{:}\cos\beta{:}\cos\gamma$.

Напрямні косинуси визначаються за формулами

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \cos\gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{3.4}$$

Приклад 1. Скласти канонічні і параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3,2,1)$ паралельно до вектора $\vec{s} = \{2;-1;4\}$.

◁ Відповідно до рівняння (3.3) маємо: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{4}$.

Тому згідно з (3.2) параметричні рівняння шуканої прямої мають вигляд $x = 3 + 2t,\ y = 2 - t,\ z = 1 + 4t$. ▷

Приклад 2. Знайти напрямні косинуси прямої $\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{-1}$.

◁ Відповідно до формул (3.4) отримаємо:

$$\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{30}},\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{30}},\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{30}}.\ ▷$$

Приклад 3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1,1,1)$ і перпендикулярна до векторів $\vec{s}_1=\{2;3;1\}$ і $\vec{s}_2=\{3;1;2\}$.

◁ Нехай M(x,y,z) – довільна точка шуканої прямої. Оскільки пряма L перпендикулярна до векторів $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$, то напрямний вектор $\vec{s}$ прямої перпендикулярний до векторів $\vec{s}_1$ та $\vec{s}_2$, тобто $\vec{s}\parallel\left[\vec{s}_1,\vec{s}_2\right]$.

Знайдемо векторний добуток $\left[\vec{s}_1,\vec{s}_2\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}=5\vec{i}-\vec{j}-7\vec{k}$.

Тому шукане рівняння згідно з (3.3) має вигляд $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-7}$.

▷

Задачі

3.1. Скласти параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-2,1,-1)$ паралельно до вектора $\vec{s}=\{1,-2,3\}$.

3.2. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(5,3,4)$ і паралельна до вектора $\vec{s}=\{2,5,-8\}$.

3.3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1,-1,-3)$ паралельно до прямої $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{5}$.

3.4. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3,2,-1)$ перпендикулярно до осі Ox.

3.5. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1,1,1)$ паралельно до осі Oz.

3.6. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1,-2,3)$ і утворює з осями Ox та Oy кути $\alpha=45°$ та $\beta=60°$.

3.7. Знайти напрямні косинуси прямих:

1) $\frac{x-1}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{12}$; 2) $\frac{x}{12}=\frac{y-7}{9}=\frac{z+3}{20}$.

4. Рівняння прямої, яка проходить через дві точки

Канонічні рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$, мають вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3.5)$$

Приклад 4. Скласти канонічні та параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(1,-2,1)$ та $M_2(3,1,-1)$.

◁ Для знаходження канонічних рівнянь прямої використаємо співвідношення (3.5). Маємо $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+2}{1+2}=\frac{z-1}{-1-1}$, тобто $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$.

Звідси $x=1+2t,\ y=-2+3t,\ z=1-2t$ – параметричні рівняння прямої. ▷

Приклад 5. Скласти параметричні рівняння середньої лінії трикутника з вершинами в точках $A(-1,2,3), B(3,0,1), C(1,-4,-3)$, яка паралельна стороні AB.

◁ Запишемо рівняння прямої, що проходить через середини відрізків [AC] та [BC]. Координати точки D (середини відрізка [AC]) знайдемо як середнє арифметичне відповідних координат точок A та C:

$$x_D=\frac{-1+1}{2}=0;\ y_D=\frac{2-4}{2}=-1;\ z_D=\frac{3-3}{2}=0.$$

Аналогічно серединою відрізка [BC] є точка $K(2,-2,-1)$. Із співвідношення (3.5) канонічні рівняння середньої лінії DK мають вигляд: $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{-1}$. Згідно з (3.2) шукані параметричні рівняння середньої лінії $x=2t,\ y=-t-1,\ z=-t$. ▷

Задачі

3.8. Скласти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(-1,2,3)$ і $M_2(2,6,-2)$ і знайти її напрямні косинуси.

3.9. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві точки M_1 та M_2, якщо:

1) $M_1(3,4,0)$, $M_2(2,3,-1)$; 2) $M_1(1,2,4)$, $M_2(-1,2,-4)$;
3) $M_1(2,4,5)$, $M_2(-1,-2,3)$; 4) $M_1(7,8,-9)$, $M_2(3,1,-5)$;

3.10. Через точки $M_1(-6,6,-5)$ і $M_2(12,-6,1)$ проведена пряма. Знайти точки перетину цієї прямої з координатними площинами.

3.11. Дані вершини трикутника A(3,6,–7), B(–5,2,3) і C(4,–7,–2). Скласти параметричні рівняння його медіани, проведеної з вершини C.

3.12. Дані три вершини паралелограма: A(3,0,–1), B(1,2,–4) і C(0,7,2). Скласти рівняння сторін AD і CD.

3.13. Знайти рівняння прямої, що проходить через початок координат та середину відрізка [AB], якщо A(4,0,2), B(2,6,–4).

5. Загальне рівняння прямої

Пряму можна розглядати як лінію перерізу (перетину) двох непаралельних площин, заданих загальними рівняннями, тобто пряму в просторі можна задати системою двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (3.6)$$

Рівняння (3.6) називають загальним рівнянням прямої.

Приклад 6. Звести до канонічного вигляду загальне рівняння прямої

$$x - 2y + 3z - 4 = 0{,}3x + 2y - 5z - 4 = 0 .$$

◁ Оскільки пряма перпендикулярна до нормальних векторів $\vec{n}_1 = \{1;-2;3\}$ і $\vec{n}_2 = \{3;2;-5\}$, то за напрямний вектор $\vec{s}$ прямої можна взяти векторний добуток $[\vec{n}_1, \vec{n}_2]$, тобто

$$\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 14\vec{j} + 8\vec{k}$$ і тому m=4, n=14, p=8. Точку

M_0 на прямій знайдемо, якщо приймемо в обох рівняннях, наприклад, x = 0:

$$\begin{cases} -2y + 3z - 4 = 0, \\ 2y - 5z - 4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -8, \\ z = -4. \end{cases}$$

Тому, $M_0(0;-8;-4)$. Отже, канонічні рівняння прямої мають вигляд

$$\frac{x}{4} = \frac{y+8}{14} = \frac{z+4}{8} \text{ або } \frac{x}{2} = \frac{y+8}{7} = \frac{z+4}{4}. \triangleright$$

Задачі

3.14. Скласти канонічні рівняння таких прямих:

1) $\begin{cases} x+2y+3z-13=0, \\ 3x+y+4z-14=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y-z-6=0, \\ 2x-y+z+1=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0, \\ 3x-5y+2z+1=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0, \\ 2x+y-4z-8=0. \end{cases}$

6. Кут між двома прямими

Кут θ між двома прямими, які задані канонічними рівняннями $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$, $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$, визначається як кут між їх напрямними векторами $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ тобто з формули

$$\cos\theta=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \quad (3.7)$$

Умова перпендикулярності прямих має вигляд

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \quad (3.8)$$

Прямі паралельні, якщо їх напрямні вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ колінеарні, тобто

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \quad (3.9)$$

Приклад 7. Знайти кут між прямими $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+5}{0}=\frac{z-3}{1}$ і $x=t-1,\ y=-2t-2,\ z=-2t$.

◁ Щоб застосувати формулу (3.7), необхідно параметричні рівняння другої прямої перевести в канонічні. Оскільки $t=x+1=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-2}$, то канонічні рівняння другої прямої мають вигляд $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-2}$, тому $\cos\theta=\frac{1\cdot(-1)+0\cdot(-2)+1\cdot(-2)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Шуканий кут дорівнює

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\tfrac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}. \ ▷$$

Приклад 8. Довести, що умова, за якої дві непаралельні прямі

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \quad (3.10)$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}. \quad (3.11)$$

перетинаються, може бути записана у вигляді

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.12)$$

◁ Оскільки точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$ лежать на заданих прямих, то вектори $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ є компланарними. Умовою компланарності трьох векторів є те, що їх мішаний добуток дорівнює нулеві, що і записано в умові (3.12). ▷

Задачі

3.15. Знайти кут між прямими:
$x = 3t-2,\ y = 0,\ z = -t+3$ і $x = 2t-1,\ y = 0,\ z = t-3$.

3.16. Знайти тупий кут між прямими: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$; $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{\sqrt{2}}$.

3.17. Довести паралельність прямих:

1) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$ і $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0; \end{cases}$

2) $x = 2t+5, y = -t+2, z = t-7$ і $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0; \end{cases}$

3.18. Довести перпендикулярність прямих:

1) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ і $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0; \end{cases}$

2) $x = 2t+1,\ y = 3t-2,\ z = -6t+1$ і $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0. \end{cases}$

3.19. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2,0,-3)$ паралельно прямій $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

3.20. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $(5,5,-2)$ і утворює з осями координат кути $\alpha = 45°, \beta = 60°, \gamma = 120°$.

3.21. Знайти кут між прямими:

1) $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y+2z+2=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x-z+4=0, \\ y+2z-1=0; \end{cases}$;

2) $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+5}{-1}$ і $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+3}{-4}$.

3.22. При якому значенні l прямі $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$, $\frac{x-3}{l}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$ перетинаються?

§ 4. ДЕЯКІ ЗАДАЧІ НА ПРЯМУ І ПЛОЩИНУ В ПРОСТОРІ

1. Кут між прямою та площиною

Кут θ між прямою і площиною – це гострий кут між прямою та її проекцією на площину.

Якщо пряма і площина задані рівняннями

$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, $Ax+By+Cz+D=0$, то

$$\sin\theta=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (4.1)$$

Умова паралельності прямої і площини

$$Am+Bn+Cp=0. \qquad (4.2)$$

Умова перпендикулярності

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \qquad (4.3)$$

Приклад 1. Знайти кут між прямою $x = 9 + t$, $y = 5 - 2t$, $z = -1 - t$ і площиною $4x-2y+2z+7 = 0$.

◅ Перейдемо від параметричних рівнянь до канонічних: $\dfrac{x-9}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$. Тоді згідно з формулою (4.1) отримаємо, що $\sin\theta=\dfrac{|4\cdot 1+(-2)\cdot(-2)+2\cdot(-1)|}{\sqrt{4^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{24}\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$. Отже, $\theta=\dfrac{\pi}{6}$. ▻

Приклад 2. При якому значенні *n* пряма $x=2-7t$, $y=-3+nt$, $z=4-15t$ паралельна площині $6x-9y+5z-11=0$?

◅ Використовуємо умову паралельності прямої і площини. Підставимо у співвідношення (4.2) відповідні значення і отримаємо рівняння: $-7\cdot 6+n\cdot(-9)-15\cdot 5=0$, $9n+117=0$, звідки маємо $n=-13$. ▻

Задачі

4.1. Знайти кут між прямою і площиною, якщо пряма і площина задані рівняннями:

а) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-6}=\dfrac{z-1}{3}$, $2x+y+z-5=0$;

б) $\frac{x-2}{5}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-8}{3}$, $2x+4y-6z+7=0$;

в) $x = 4 - t$, $y = 5 - 2t$, $z = 3t$, $2x + 4y - 6z + 7 = 0$;

г) $\begin{cases} y = 3x - 1, \\ 2z = -3x + 2 \end{cases}$, $2x+y+z-4=0$.

4.2. При яких значеннях B і p пряма $x=5-3t,\ y=9+4t,\ z=-2+pt$ перпендикулярна до площини $6x+By-10z+9=0$?

2. Перетин прямої і площини

Нехай потрібно знайти точку перетину прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \tag{4.4}$$

з площиною

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{4.5}$$

Розв'язуючи систему рівнянь (4.4) і (4.5), отримаємо

$$(Am+Bn+Cp)t+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0. \tag{4.6}$$

З рівняння (4.6) знайдемо значення параметра t, яке відповідає точці перетину прямої і площини.

Тут можливі такі випадки:

1. $Am+Bn+Cp \neq 0$ – пряма перетинає площину в одній точці.
2. $Am+Bn+Cp=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D \neq 0$ – пряма паралельна площині.
3. $Am+Bn+Cp=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ – пряма належить площині.

Приклад 3. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}$ і площини $3x-2y+z-3=0$.

◁ Перейдемо від канонічних рівнянь прямої до параметричних: $x=-1+2t,\ y=2+t,\ z=1-t$. Підставимо значення x, y і z в рівняння площини:

$3(-1+2t)-2(2+t)+(1-t)-3=0$, звідки знайдемо, що $t = 3$. Підставивши отримане значення t в параметричні рівняння прямої, знайдемо координати точки перетину: $x=5,\ y=5,\ z=-2$. ▷

Приклад 4. При яких значеннях A та D пряма $x = 3 + 4t$, $y = 1 - 4t$, $z = -3 + t$ належить площині $Ax + 2y - 4z + D = 0$?

◁ Якщо пряма належить площині, то $Am + Bn + Cp = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, тобто $4A - 8 - 4 = 0{,}3A + 2 + 12 + D = 0$, звідки $A = 3$, $D = -23$. ▷

Задачі

4.3. Знайти точку перетину прямої і площини:

а) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{6}$, $2x + 3y + z - 1 = 0$;

б) $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{-5}$, $x - 2y + z - 15 = 0$;

в) $\dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{2}$, $x + 2y - 2z + 6 = 0$;

г) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3}$, $3x - 3y + 2z - 5 = 0$;

д) $\dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{4}$, $3x - y + 2z - 5 = 0$.

4.4. Перевірити, чи належить пряма:

а) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z+2}{5}$ площині $4x + 3y - z + 3 = 0$;

б) $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z-2}{3}$ площині $5x - 8y - 2z - 1 = 0$;

в) $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-5}{4} = \dfrac{z}{1}$ площині $3x - 2y - z + 15 = 0$.

3. Рівняння прямої, яка проходить через точку перпендикулярно до даної площини

Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно до площини $Ax + By + Cz + D = 0$, має вигляд

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}. \qquad (4.7)$$

Приклад 5. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(2,-3,-5)$ перпендикулярно до площини $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.

◁ Приймемо у співвідношенні (4.7) $x_1 = 2, y_1 = -3, z_1 = -5, A = 6, B = -3, C = -5$. Тоді рівняння шуканої прямої набуває вигляду $\frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-5}$. ▷

Задачі

4.5. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(1,-3,5)$ перпендикулярно до площини $x + 6y - 5z - 17 = 0$.

4.6. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(3,-6,7)$ перпендикулярно до площини $x + 4y - 8z - 4 = 0$, і знайти точку їх перетину.

4. Рівняння площини, яка проходить через точку паралельно до заданої площини

Рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно до площини $Ax + By + Cz + D = 0$, має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (4.8)$$

Приклад 6. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2,3,-1)$ паралельно до площини $5x - 3y + 2z - 10 = 0$.

◁ Згідно зі співвідношенням (4.8) маємо: $5(x-2) - 3(y-3) + +2(z+1) = 0$ або $5x - 3y + 2z + 1 = 0$. ▷

Задачі

4.7. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно до заданої площини, якщо:

а) $M_0(-4,3,-7)$, $6x - 5y + 4z - 15 = 0$;

б) $M_0(4,1,0)$, $5x - y - 6z + 2 = 0$.

4.8. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-2,4,1)$ паралельно до площини, проведеної через точки $M_1(0,-3,2)$, $M_2(4,-6,1)$ і $M_3(-7,5,-2)$.

5. Рівняння площини, яка проходить через точку перпендикулярно до даної прямої

Рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, має вигляд

$$m(x-x_1)+n(y-y_1)+p(z-z_1)=0. \qquad (4.9)$$

Приклад 7. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1,2,-1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{4}$.

◁ Підставимо в рівняння (4.9) відповідні значення $x_1=1$, $y_1=2$, $z_1=-1$, $m=1$, $n=-3$, $p=4$. Тоді рівнянням шуканої площини буде $1(x-1)-3(y-2)+4(z+1)=0 \Rightarrow x-3y+4z+9=0$. ▷

Задачі

4.9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно до прямої, якщо:

а) $M_1(5,7,-1)$, $\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+3}{-2}$;

б) $M_1(1,-2,1)$, $\quad \begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0; \end{cases}$

в) $M_1(1,-1,-1)$, $\quad x=-3+2t,\ y=1-3t,\ z=-2+4t$.

6. Рівняння площини, яка проходить через задану пряму і задану точку

Нехай шукана площина проходить через точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і пряму $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$. Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ та $\vec{s}=\{m,n,p\}$ (тут $M(x,y,z)$ – довільна точка площини) компланарні, тобто мішаний добуток $\left(\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{M_0M_1},\vec{s}\right)=0$ або, в координатній формі

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0. \qquad (4.10)$$

Приклад 8. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $x = 2t + 1$, $y = -3t + 2$, $z = 2t - 3$ і точку $M_1(2,-2,1)$.

◁ Канонічні рівняння заданої прямої мають вигляд: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{2}$. Тому, враховуючи (4.10), отримаємо рівняння шуканої площини

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 2-1 & -2-2 & 1+3 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \ 4x + 6y + 5z - 1 = 0 \ . \ \triangleright$$

Задачі

4.10. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_1 та пряму, якщо:

а) $M_1(3,1,-2)$, $\qquad \frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$;

б) $M_1(1,1,1)$, $\qquad \begin{cases} 4x - y + 3z - 1 = 0, \\ x + 5y - z + 2 = 0; \end{cases}$

в) $M_1(2,-2,1)$, $\qquad x = 1 + 2t, \ y = 2 - 3t, \ z = -3 + 2t$.

7. Рівняння площини, яка проходить через пряму паралельно іншій прямій

Нехай площина проходить через пряму $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ і паралельна до прямої $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$. Якщо $M(x,y,z)$ – довільна точка площини, то вектори $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}, \vec{s}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ та $\vec{s}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ – компланарні, тобто $\left(\overrightarrow{M_1M}, \vec{s}_1, \vec{s}_2\right) = 0$ або

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \ . \qquad (4.11)$$

Рівняння (4.11) – шукане рівняння площини.

Приклад 9. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{-3}$ паралельно прямій $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{2}$.

◁ Враховуючи рівність (4.11), отримаємо $\begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix}=0$

або $23x-16y+10z-153=0$. ▷

Задачі

4.11. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $x=3t+1,\ y=2t+3,\ z=-t-2$ паралельно прямій $\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+2y-z-5=0. \end{cases}$

4.12. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-1}$ паралельно прямій x= 2– t, y = 1+ 3t, z=–2 + 4t.

8. Рівняння площини, яка проходить через задану пряму перпендикулярно до заданої площини

Нехай площина проходить через пряму $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ перпендикулярно до площини $Ax+By+Cz+D=0$. Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}, \vec{s}$ та $\vec{n}$ – компланарні, тобто $\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{s}, \vec{n}\right)=0$ або

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m & n & p \\ A & B & C \end{vmatrix}=0. \qquad (4.12)$$

Приклад 10. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ перпендикулярно до площини $3x+2y-z-3=0$.

◁ Використовуючи рівність (4.12), отримаємо

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0 \text{ або } x-8y-13z+9=0. \ ▷$$

Задачі

4.13. Скласти рівняння площини , яка проходить через пряму перпендикулярно до заданої площини, якщо:

а) $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{1}$, $\quad 3x+4y-z-1=0$;

б) $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{2}$, $\quad x+4y-3z+7=0$.

9. Рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі

Нехай площина проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p},\quad \frac{x-x_2}{m}=\frac{y-y_2}{n}=\frac{z-z_2}{p}.$$

Тоді вектори $\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}$ ($M(x,y,z)$ – довільна точка площини), $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$ та $\vec{s}=\{m,n,p\}$ – компланарні. Тому мішаний добуток $\left(\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_2},\vec{s}\right)=0$ або в координатній формі

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0. \tag{4.13}$$

Рівняння (4.13) і є шуканим рівнянням площини.

Приклад 11. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-1}$, $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

◁ Перша пряма проходить через точку $M_1(1,-2,0)$, а друга пряма – через $M_2(-1,2,1)$. Тоді $\overrightarrow{M_1M}=\{x-1;y+2;z\}$, $\overrightarrow{M_1M_2}=\{-2;4;-1\}$ і $\vec{s}=\{3;2;-1\}$. Відповідно до співвідношення (4.13) маємо: $\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$. Розкривши визначник, отримаємо шукане рівняння площини:

$$2x+5y+16z+8=0. \ \triangleright$$

Задачі

4.14. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі:

а) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ і $\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{2}$;

б) $x=2t+5,\ y=-t+2,\ z=t-7$ і $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0; \end{cases}$

в) $x = 3 - 4t,\ y = 5 + 3t,\ z = -2 + 12t$ і $\frac{x-1}{-4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{12}$;

г) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ і $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

10. Рівняння площини, яка проходить через дві прямі, що перетинаються

Нехай прямі $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ та $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$

перетинаються. Тоді вектори $\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}$ ($M(x,y,z)$ – довільна точка площини, $M_1(x_1,y_1,z_1)$ – точка, через яку проходить перша пряма), $\vec{s}_1=\{m_1;n_1;p_1\}$ та $\vec{s}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$ – компланарні. Тому їх мішаний добуток $\left(\overrightarrow{M_1M},\vec{s}_1,\vec{s}_2\right)=0$ або

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (4.14)$$

Рівняння (4.14) є шуканим рівнянням площини.

Приклад 12. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві прямі $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{1}$ та $\frac{x-6}{-3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$, що перетинаються.

◁ Прямі проходять відповідно через точки $M_1(1,7,5)$ і $M_2(6,-1,0)$, а їх напрямні вектори $\vec{s}_1=\{2;1;1\}$ та $\vec{s}_2=\{-3;2;1\}$. Мішаний добуток векторів $\vec{s}_1,\vec{s}_2,\overrightarrow{M_1M_2}$ — $\left(\vec{s}_1,\vec{s}_2,\overrightarrow{M_1M_2}\right)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix}=0$, отже, вектори

компланарні, а це означає, що прямі перетинаються, тобто лежать в одній площині. Тоді відповідно до співвідношення (4.14) маємо
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-7 & z-5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
або

$x + 5y - 7z - 1 = 0$, що і є шуканим рівнянням площини. ▷

Задачі

4.15. Довести, що наведені прямі лежать в одній площині та скласти її рівняння, якщо:

а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ та $\frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$;

б) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$ та $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$;

в) $x = 2t-3,\ y = 3t-2,\ z = -4t+6$ та $x = t+5,\ y = -4t-1,\ z = t-4$;

г) $\frac{x}{2} = \frac{y-\frac{3}{2}}{1} = \frac{z-1}{-2}$ та $\frac{x+7}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z}{1}$.

11. Рівняння перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму

Для того, щоб вивести рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на пряму $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, потрібно:

1) через точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$ провести площину перпендикулярно до заданої прямої, яка згідно з формулою (4.9) має вигляд: $m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0$;

2) знайти точку $M_2(x_2,y_2,z_2)$ перетину прямої $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ з площиною $m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0$;

3) через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$ проводимо пряму, рівняння якої $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ і буде рівнянням перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму.

Приклад 13. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $M_1(1,3,5)$ на пряму $\frac{x+30}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+2{,}5}{-1}$.

◁ Рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1,3,5)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x+30}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z+2,5}{-1}$ має вигляд:

$$6(x-1)+2(y-3)-(z-5)=0 \text{ або } 6x+2y-z-7=0.$$

Знайдемо точку перетину даної площини із заданою прямою. Для цього необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6x+2y-z-7=0, \\ x=6t-30, y=2t, z=-t-2,5. \end{cases}$$

Одержимо точку $M_2(-3,9,-7)$.

Рівняння шуканого перпендикуляра – це рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(1,3,5)$ і $M_2(-3,9,-7)$:

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-3}{6}=\frac{z-5}{-12} \text{ або } \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-5}{6}. \ ▷$$

Задачі

4.16. Скласти параметричні рівняння висоти трикутника, опущеної з вершини $B(3,1,-3)$ на протилежну сторону AC, якщо $A(1,-2,-4)$ та $C(5,1,-7)$.

4.17. Знайти проекцію точки $M_1(3,-4,-2)$ на площину, яка проходить через дві паралельні прямі $\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}$.

12. Відстань від точки до прямої

Відстань від точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ до прямої $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ обчислюється за формулою

$$d=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{s}\right]\right|}{|\vec{s}|}, \tag{4.15}$$

де $\overrightarrow{M_0M_1}=\{x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0\}$, $\vec{s}=\{m,n,p\}$.

Приклад 14. Обчислити відстань від точки $M_1(2,3,-1)$ до прямої $\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{1}$.

◁ Згідно з умовою задачі маємо $M_0(0,1,-2)$, $\vec{s}=\{-2;2;1\}$ і $\overrightarrow{M_0M_1}=\{2;2;1\}$. Щоб використати формулу (4.13), знайдемо $\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{s}\right]\right|$ та $|\vec{s}|$. Маємо $\left[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{s}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{vmatrix}=0\cdot\vec{i}-4\vec{j}+8\vec{k}$.

Тоді $\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{s}\right]\right|=\sqrt{(-4)^2+8^2}=4\sqrt{5}$, $|\vec{s}|=\sqrt{4+4+1}=3$. Отже, шукана відстань $d=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$. ▷

Приклад 15. Обчислити відстань від точки $M_1(1,3,5)$ до прямої $\dfrac{x+30}{6}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2{,}5}{-1}$.

◁ Відповідно до умови задачі маємо: $M_0(-30,0,-2{,}5)$, $\vec{s}=\{6,2,-1\}$ і $\overrightarrow{M_0M_1}=\{31;3;7{,}5\}$.

Тоді $\left[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{s}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 31 & 3 & 7{,}5\\ 6 & 2 & -1\end{vmatrix}=-18\vec{i}+76\vec{j}+44\vec{k}$,

$\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{s}\right]\right|=\sqrt{324+5776+1936}=\sqrt{8036}$ і $|\vec{s}|=\sqrt{36+4+1}=\sqrt{41}$.

Отже, шукана відстань $d=\sqrt{\dfrac{8036}{41}}=\sqrt{196}=14$.

Але цю задачу можна розв'язати і іншим способом. В прикладі 13 знайдено точку $M_2(-3,9,-7)$ перетину заданої прямої і площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно до неї, тобто точка $M_2(-3,9,-7)$ є основою перпендикуляра, проведеного з точки M_1 на задану пряму. Тому

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(-3-1)^2+(9-3)^2+(-7-5)^2}=\sqrt{196}=14\text{. ▷}$$

Задачі

4.18. Обчислити відстань від точки $M_1(1,2,-1)$ до прямої:

а) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1}$; б) $x=1+3t,\ y=2-t,\ z=3-2t$;

в) $\begin{cases} x-2y+z=0, \\ 2x+y+2z-1=0. \end{cases}$

4.19. Обчислити відстань d від точки M_1 до прямих:

а) $M_1(1,-1,-2)$, $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-8}{-2}$;

б) $M_1(2,3,-1)$, $x=t+1, y=t+2, z=4t+13$;

в) $M_1(2,3,-1)$, $\begin{cases} 2x-2y+z+3=0, \\ 3x-2y+2z+17=0. \end{cases}$

13. Відстань між паралельними прямими

Нехай прямі $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$, $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$ – паралельні. Тоді вектори $\vec{s}_1=\{m_1,n_1,p_1\}$ та $\vec{s}_2=\{m_2,n_2,p_2\}$ – колінеарні. Тому відстань між цими прямими можна знайти як відстань від довільної точки першої прямої до другої, тобто

$$d=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2},\vec{s}_2\right]\right|}{|\vec{s}_2|}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2},\vec{s}_1\right]\right|}{|\vec{s}_1|}. \qquad (4.16)$$

Приклад 16. Обчислити відстань між двома паралельними прямими $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{2}$ та $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{2}$.

◁ Точка $M_1(2,-1,0)$ належить першій прямій, а точка $M_2(7,1,3)$ – другій прямій. Тоді

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{5;2;3\},\ \vec{s}=\{3;4;2\},\ \left[\overrightarrow{M_1M_2},\vec{s}\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-8\vec{i}-\vec{j}+14\vec{k},$$

$\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}\right]\right| = \sqrt{64+1+196} = \sqrt{261}$, $|\vec{s}| = \sqrt{29}$. Отже, згідно з формулою (4.16) шукана відстань $d = \dfrac{\sqrt{261}}{\sqrt{29}} = 3$. ▷

Задачі

4.20. Обчислити відстань між двома паралельними прямими:
$\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{1}$, $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$.

4.21. Переконавшись, що прямі $\begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$ і $\dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-9}{4}$ паралельні, обчислити відстань d між ними.

14. Найкоротша відстань між двома мимобіжними прямими

Дві прямі, які не належать одній площині, називаються мимобіжними. Якщо прямі $\dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} = \dfrac{z-z_1}{p_1}$, $\dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{n_2} = \dfrac{z-z_2}{p_2}$ мимобіжні, то можна провести єдину пару паралельних площин, до кожної з яких належить одна із прямих. Тому найкоротша відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані між двома паралельними площинами, до яких вони належать. Отже, щоб знайти відстань між мимобіжними прямими, потрібно:

1) скласти рівняння площини, яка проходить через першу пряму паралельно другій;

2) знайти відстань від будь-якої точки другої прямої до цієї площини.

З іншого боку, вектори $\vec{s}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$, $\vec{s}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ і $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ – некомпланарні. Тому на цих векторах можна побудувати паралелепіпед. Тоді довжина висоти паралелепіпеда і буде шуканою відстанню, тобто

$$d = \frac{\left|\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}\right)\right|}{\left|\left[\vec{s}_1, \vec{s}_2\right]\right|}. \tag{4.17}$$

Приклад17. Знайти найкоротшу відстань між двома прямими

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1} \text{ і } \frac{x+2}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{-1}.$$

◁ 1) Складемо рівняння площини, яка проходить через першу пряму паралельно другій. Згідно із співвідношенням (4.11) отримаємо

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0 \text{ або } x-3y-7z+1=0.$$

2) Знайдемо відстань від точки $M_2(-2,0,3)$ до отриманої площини. Згідно з формулою (2.12): $d=\frac{|-2\cdot1-3\cdot0-7\cdot3+1|}{\sqrt{1+9+49}}=\frac{22}{\sqrt{59}}$.

Тепер знайдемо відстань d, використовуючи формулу (4.17). Маємо:

$$d=\frac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|\vec{i}-3\vec{j}-7\vec{k}|}=\frac{|-6+10-2-15-1-8|}{\sqrt{59}}=\frac{22}{\sqrt{59}}. \triangleright$$

Задачі

4.22. Знайти найкоротшу відстань d між двома прямими:

1) $\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$, $\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$;

2) $\frac{x-6}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+3}{4}$, $\frac{x+1}{3}=\frac{y+7}{-3}=\frac{z-4}{8}$;

3) $\frac{x}{1}=\frac{y-9}{4}=\frac{z+2}{-3}$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+7}{9}$;

4) $\frac{x+7}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-4}{3}$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y+8}{2}=\frac{z+12}{-1}$;

5) $x=2t-4,\ y=-t+4,\ z=-2t-1,$
$x=4t-5,\ y=-3t+5,\ z=-5t+5;$

6) $\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$, $x=6t+9,\ y=-2t,\ z=-5t+5$;

7) $\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$, $\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$;

8) $\frac{x+3}{4}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-3}{2}$, $\frac{x-4}{8}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+7}{3}$.

15. Знаходження точки, симетричної даній точці відносно заданої площини або заданої прямої

Для того, щоб знайти точку Q, яка симетрична точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ відносно площини $Ax+By+Cz+D=0$, потрібно:

1) через точку M_0 провести пряму перпендикулярно площині $Ax+By+Cz+D=0$. Її рівняння (див. §4, п.3) має вигляд $\dfrac{x-x_0}{A}=\dfrac{y-y_0}{B}=\dfrac{z-z_0}{C}$;

2) знайти точку P перетину отриманої прямої і площини. Точка P – це проекція точки M_0 на площину;

3) враховуючи, що точка P – середина відрізка M_0Q, тобто

$$\frac{x_Q+x_0}{2}=x_p,\ \frac{y_Q+y_0}{2}=y_p,\ \frac{z_Q+z_0}{2}=z_p, \tag{4.18}$$

із співвідношень (4.18) знайдемо координати точки $Q(x_Q,y_Q,z_Q)$.

Приклад 18. Знайти точку, яка симетрична точці $M_0(1,1,-1)$ відносно площини $3x-2y+z-14=0$.

◁ Складемо параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 паралельно нормальному вектору площини $\vec{n}=\{3;-2;1\}$. Маємо $x=1+3t,\ y=1-2t,\ z=-1+t$. Підставимо отримані значення x, y і z в рівняння площини: $3(1+3t)-2(1-2t)+(-1+t)-14=0$, звідки $t=1$.

Підставивши значення $t=1$ в параметричні рівняння прямої, одержимо точку P(4,–1,0), яка є проекцією точки M_0 на площину. Координати симетричної їй точки Q знайдемо із співвідношення (4.18): $x_Q=2x_p-x_0,\ \ y_Q=2y_p-y_0,\ z_Q=2z_p-z_0$. Отже, $Q(7,-3,1)$. ▷

Задачі

4.23. Знайти точку Q, яка симетрична точці $M_0(1,3,-4)$ відносно площини $3x+y-2z=0$.

4.24. Знайти точку Q, яка симетрична точці точці $M_0(3,-4,-6)$ відносно площини, що проходить через точки $M_1(-6,1,-5)$, $M_2(7,-2,-1)$ і $M_3(10,-7,1)$.

4.25. Знайти точку Q, яка симетрична точці точці $M_0(1;1;1)$ відносно площини $x+y-2z-6=0$.

Приклад 19. Знайти точку Q, яка симетрична точці $M_0(2,-5,7)$ відносно прямої, що проходить через точки $M_1(5,4,6)$ і $M_2(6,7,8)$

◁ Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2:

$$\frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-6}{2}.$$

Через точку M_0 проведемо площину, перпендикулярну до прямої M_1M_2:

$$1(x-2)+3(y+5)+2(z-7)=0 \text{ або } x+3y+2z-1=0.$$

Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases}\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-6}{2}, \\ x+3y+2z-1=0\end{cases}$ отримаємо точку $P(3,-2,2)$ – проекцію точки M_0 на пряму M_1M_2. Із співвідношень (4.18) знайдемо $Q(4,1,-3)$. ▷

Задачі

4.26. Знайти точку Q, яка симетрична точці $M_0(4,3,10)$ відносно прямої $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$.

4.27. Знайти точку Q, яка симетрична точці $M_0(4,1,6)$ відносно прямої $\begin{cases}x-y-4z+12=0, \\ 2x+y-2z+3=0.\end{cases}$

4.28. Знайти точку Q, яка симетрична точці $M_0(1;1;1)$ відносно прямої $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$.

4.29. Знайти точку Q, яка симетрична точці $M_0(1,-2,-6)$ відносно прямої $\begin{cases}x-y+2z-1=0, \\ x-z+2=0.\end{cases}$

§ 5. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Поверхнями другого порядку називають поверхні, які в заданій декартовій системі координат записуються алгебраїчними рівняннями другого степеня, тобто рівняннями вигляду

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y +$$
$$+ 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

Обмежимось розглядом найпростіших (канонічних) рівнянь поверхонь другого порядку і з'ясуємо питання про їх форму.

1. Циліндри другого порядку

Циліндрами другого порядку називаються циліндричні поверхні, напрямними яких є лінії другого порядку.

Розглянемо рівняння циліндрів з твірними, паралельними осі Oz. Їх рівняння, як вже було вказано раніше, не містить координати z. Якщо за напрямну лінію в площині z = 0 взяти одну з кривих другого порядку

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.1}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.2}$$

$$y^2 = 2px, \tag{5.3}$$

то кожне з цих рівнянь стосовно до просторової системи координат, зображатиме циліндр другого порядку з твірними,паралельними осі Oz.

Рівняння (5.1) буде зображати циліндр, перерізи якого площинами, паралельними площині Oxy, будуть еліпсами з півосями a і b. Такий циліндр називають еліптичним (рис.10). Рівняння (5.2) визначає гіперболічний циліндр (рис.11), а (5.3) – параболічний циліндр (рис.12).

2. Поверхні обертання

Нехай в площині Oyz задана лінія L, рівняння якої має вигляд

$$\begin{cases} F(y,z) = 0, \\ x = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

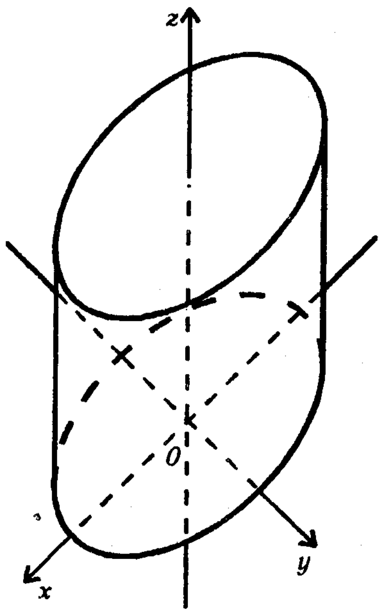


Рис. 10.

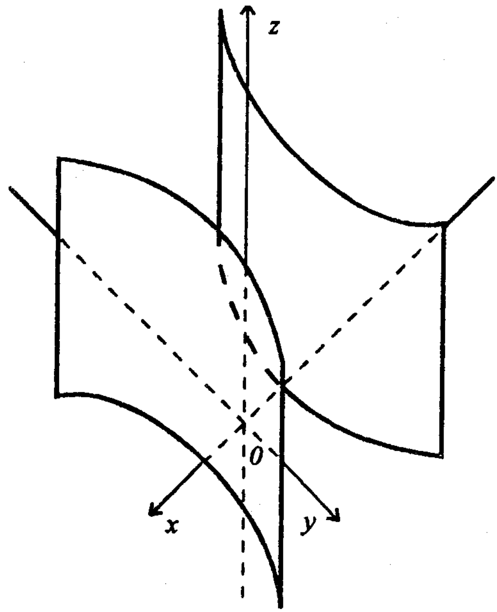


Рис. 11.

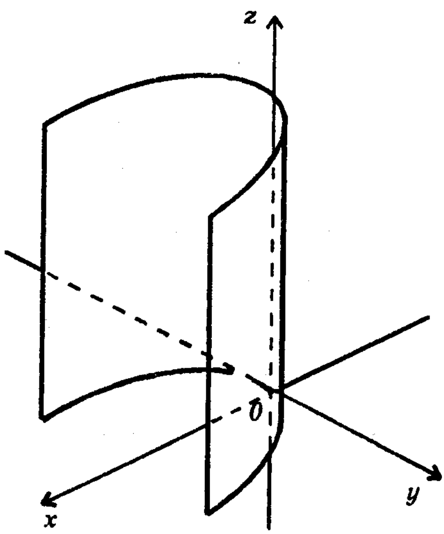


Рис. 12.

Потрібно знайти рівняння поверхні σ, яка отримується обертанням лінії L навколо осі Oy. Для отримання рівняння поверхні σ потрібно у рівнянні (5.4) лінії L координату, одноіменну з віссю обертання, залишити без зміни, а іншу координату (z) замінити на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$. Тоді шукане рівняння має вигляд

$$F(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0. \qquad (5.5)$$

Аналогічні правила справедливі і щодо поверхонь, які одержуються обертанням плоских ліній навколо інших координатних осей.

Приклад 1. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{z^2}{4} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ навколо осі Oz.

◁ Оскільки поверхня σ отримується обертанням заданої гіперболи навколо осі Oz, то координату z в рівнянні лінії залишимо без зміни, а координату x заміняємо на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

Тоді рівняння поверхні набуває вигляду $\dfrac{x^2+y^2}{9} - \dfrac{z^2}{4} = 1$. ▷

Задачі

5.1. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням параболи $\begin{cases} y^2 = \dfrac{z}{2}, \\ x = 0 \end{cases}$ навколо осі Oz.

5.2. Скласти рівняння поверхні, що утворюється обертанням прямої $\begin{cases} x + z = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ навколо осі Oz.

3. Конус другого порядку

Конусом другого порядку називається поверхня, задана рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \qquad (5.6)$$

Розглянемо перерізи конуса площинами, паралельними координатним площинам.

Переріз площиною z=h зображається рівняннями
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\cdot\dfrac{h^2}{c^2}}+\dfrac{y^2}{b^2\cdot\dfrac{h^2}{c^2}}=1, \\ z=h. \end{cases}$$

Перше з цих рівнянь визначає еліптичний циліндр, друге – площину, паралельну площині Oxy. Отже, перерізами конуса площинами z = h є еліпси з півосями $a_1=\dfrac{ah}{c}$, $b_1=\dfrac{bh}{c}$.

Еліпс, який отримуємо при перерізі конуса площиною z = 0, вироджується в точку.

Лінії перерізу конуса площинами x = m чи y = n є гіперболами, які вироджуються в пару прямих, якщо m = 0 чи n = 0.

Приклад 2. Вісь Oz є віссю кругового конуса з вершиною в початку координат, точка $M_0(3,-4,7)$ лежить на його поверхні. Скласти рівняння цього конуса.

◁ Оскільки вісь Oz є віссю кругового конуса, то його рівняння шукаємо у вигляді $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ (бо площина z = h перетинає конус по колу, тобто $a = b$). Точка $M_0(3;-4;7)$ лежить на поверхні конуса. Тому її координати задовольняють рівняння конуса, тобто $\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{16}{a^2}-\dfrac{49}{c^2}=0\Rightarrow c^2=\dfrac{49a^2}{25}$. Отже, шукане рівняння конуса має вигляд $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{z^2}{49}=0$. ▷

Задачі

5.3. Скласти рівняння поверхні, яка утворена обертанням прямої $\begin{cases} y=x, \\ z=0 \end{cases}$ навколо осі Oy.

5.4. Скласти рівняння поверхні, яка утворена обертанням прямої $\begin{cases} z=x, \\ y=0 \end{cases}$ навколо осі Ox.

5.5. Дано канонічне рівняння конуса $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{25}=0$. Знайти його перерізи в площинах yOz і xOz, а також переріз площиною z = 10.

5.6. З'ясувати, яка з точок $M_1(16,14,0)$, $M_2(16,7,0)$ і $M_3(16,17,1)$ лежить на конусі $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{49}+\frac{z^2}{64}=0$, всередині чи зовні його.

4. Еліпсоїд

Еліпсоїдом називається поверхня, яка в прямокутній декартовій системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{5.7}$$

де a,b,c – додатні числа, що називаються півосями еліпсоїда. Оскільки сума трьох додатних доданків лівої частини рівняння (5.7) дорівнює одиниці, то кожен з них (при дійсних значеннях координат) не може перевищувати одиниці:

$$\frac{x^2}{a^2}\le 1,\ \frac{y^2}{b^2}\le 1,\ \frac{z^2}{c^2}\le 1.$$

Звідси випливає, що координати точок еліпсоїда задовольняють нерівності

$$-a\le x\le a,\ -b\le y\le b,\ -c\le z\le c.$$

Отже, еліпсоїд – це скінченна поверхня, яка цілком лежить всередині паралелепіпеда, розміри якого відповідно дорівнюють $2a$, 2b, 2c.

Щоб уявити собі форму еліпсоїда і побудувати його, використаємо метод паралельних перерізів. Перерізами еліпсоїда з площинами $z=h_1$, $y=h_2$, $x=h_3$ є еліпси (рис.13).

Лінії перетину еліпсоїда (5.7) з координатними площинами $x=0, y=0, z=0$ називаються його головними перерізами. Об'єм еліпсоїда дорівнює $\frac{4}{3}\pi a bc$.

Приклад 3. Знайти півосі еліпса, утвореного при перетині еліпсоїда $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$ площиною $z=2$.

◁ В рівняння еліпсоїда підставимо $z=2$.

Отримаємо: $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}+\frac{4}{16}=1$ або $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$.

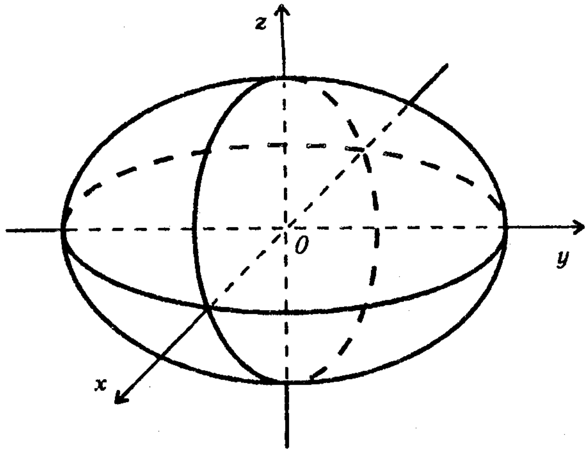


Рис. 13.

Отже, рівняння еліпса має вигляд $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{3} = 1, \\ z = 2. \end{cases}$ Тому півосі дорівнюють $a = 3$, $b = \sqrt{3}$. ⊳

Приклад 4. Визначити головні перерізи еліпсоїда $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{9} = 1$ і знайти точки перетину поверхні з прямою $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-4}{-6} = \dfrac{z+2}{4}$.

⊲ Прийнявши в рівнянні еліпсоїда $z = 0$, одержимо рівняння лінії перетину поверхні з площиною Oxy: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{36} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$, яке в площині Oxy визначає еліпс з півосями $a = 9$, $b = 6$.

В перетині з площиною $y = 0$ отримаємо еліпс $\begin{cases} \dfrac{x^2}{81} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$, з півосями $a = 9$, $c = 3$.

Координатна площина $x = 0$ перетинає даний еліпсоїд по еліпсу $\begin{cases} \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ з півосями $b = 6$, $c = 3$.

Для знаходження точки перетину треба розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{9}=1, \\ x=3t+3, y=-6t+4, z=4t-2. \end{cases}$$

Маємо $\dfrac{(3t+3)^2}{81}+\dfrac{(-6t+4)^2}{36}+\dfrac{(4t-2)^2}{9}=1$.

Звідси $t_1=0$, $t_2=1$. Підставивши t_1 і t_2 в параметричні рівняння прямої, знаходимо точки перетину $M_1(3,4,-2)$ і $M_2(6,-2,2)$. ▷

Задачі

5.7. Знайти об'єм еліпсоїда, якщо еліпси $\begin{cases} 4x^2+9y^2=25 \\ z=0 \end{cases}$, і $\begin{cases} \dfrac{4x^2}{5}+\dfrac{20z^2}{9}=5 \\ y=0 \end{cases}$, є його головними перерізами.

5.8. Чи перетинає площина $y=-4$ еліпсоїд $x^2+4y^2+z^2=64$?

5.9. Знайти головні перерізи еліпсоїда $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{49}+\dfrac{z^2}{4}=1$.

5.10. Знайти об'єм еліпсоїда, якщо ексцентриситет еліпса його перерізу площиною $z=0$ дорівнює $\varepsilon=\frac{3}{5}$, а рівняння головного перерізу площиною $x=0$: $y^2+4z^2=64$.

5.11. З'ясувати, яка з точок $M_1(7,\frac{33}{4},4)$, $M_2(\frac{11}{4},2,-15)$, $M_3(3,-5,\frac{55}{4})$ лежить на еліпсоїді $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{100}+\dfrac{z^2}{275}=1$, яка всередині нього, а яка зовні.

5. Однопорожнинний гіперболоїд

Однопорожнинний гіперболоїд – це поверхня, яка відносно деякої прямокутної декартової системи координат зображається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{5.8}$$

де $a>0$, $b>0$, $c>0$ – числові параметри.

Числа a, b називають дійсними півосями, число c – уявною піввіссю гіперболоїда. Головними перерізами однопорожнинного гіперболоїда (рис.14) є еліпс $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0, \end{cases}$ гіпербола $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0, \end{cases}$

гіпербола $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0. \end{cases}$

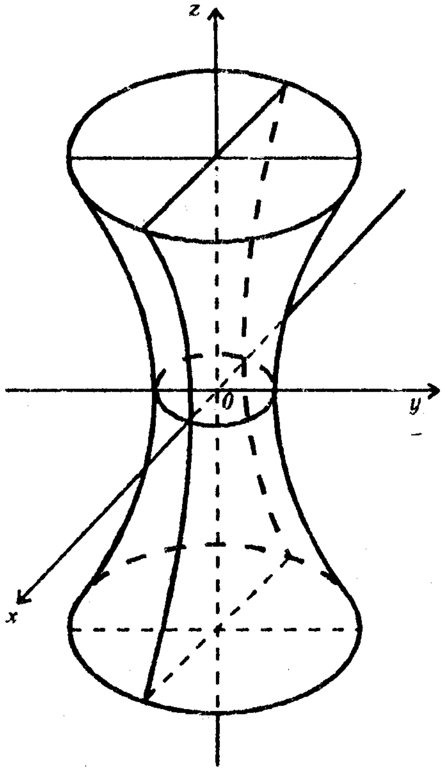


Рис. 14.

Задачі

5.12. Знайти перерізи гіперболоїда (5.8) площинами z=h, y=n та x=m.

5.13. Скласти рівняння поверхні, яка отримується обертанням гіперболи $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0, \end{cases}$ навколо осі Oz.

5.14. Знайти лінію перетину однопорожнинного гіперболоїда $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} - \dfrac{z^2}{121} = 1$ з площиною $z = -11\sqrt{3}$.

5.15. Знайти точки перетину гіперболоїда $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{16} = 1$ з прямою $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{2}$.

5.16. Знайти ексцентриситет еліпса, утвореного при перетині гіперболоїда $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{144} + \dfrac{z^2}{16} = 1$ з площиною $y = 24$.

6. Двопорожнинний гіперболоїд

Двопорожнинний гіперболоїд – це поверхня, канонічне рівняння якої має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{5.9}$$

Ця поверхня є симетричною відносно початку координат, а координатні площини є площинами симетрії.

Розглянемо її перерізи площинами, паралельними до координатних площин.

Площина z = h перетинає поверхню (5.9) лише тоді, коли $|h| \ge c$. Лінії перерізу площинами $z = h(|h| \ge c)$ є еліпсами

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases} \tag{5.10}$$

Якщо $h = \pm c$, то еліпси вироджуються в точки $(0,0,\pm c)$, які називаються вершинами двопорожнинного гіперболоїда.

Перерізи площинами x=m чи y=n є гіперболамии (перевірити) (рис.15).

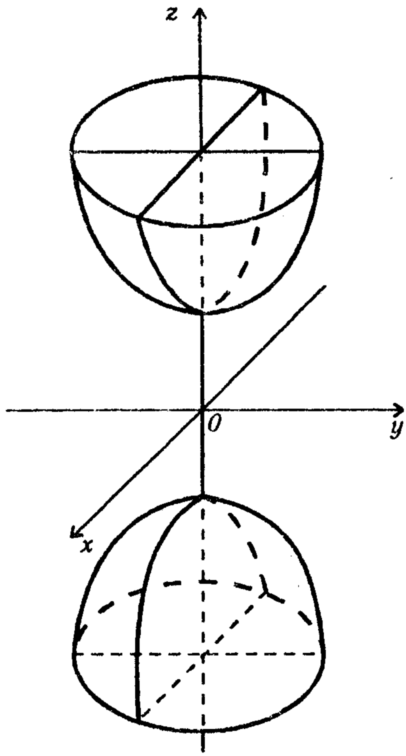


Рис. 15.

Приклад 5. Знайти головні перерізи поверхні, яка утворена обертанням гіперболи $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі Ох.

◁ Оскільки поверхня σ отримується обертанням заданої гіперболи навколо осі Ох, то координату x в рівнянні лінії залишаємо без зміни, а координату у заміняємо на $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$. Тоді рівняння поверхні σ набуває вигляду $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$, тобто поверхня σ – двопорожнинний гіперболоїд обертання. Прийнявши в отриманому рівнянні z = 0, одержимо рівняння лінії перетину з площиною Oxy: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$ яке в площині Oxy визначає гіперболу.

В перетині з площиною y=0 маємо гіперболу $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$

Площина x=0 не перетинає отриманої поверхні, бо рівняння $\begin{cases} \frac{y^2 + z^2}{b^2} = -1, \\ x = 0 \end{cases}$ не визначає жодної лінії. ▷

Задачі

5.17. Знайти головні перерізи поверхні $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1$. Написати рівняння площин, що дотикаються до даної поверхні і є паралельними до однієї з координатних площин.

5.18. Знайти точки перетину двопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{10} = -1$ з прямою $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-10}{0}$.

7. Еліптичний параболоїд

Еліптичний параболоїд – це поверхня, канонічне рівняння якої має вигляд

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, p > 0, q > 0 . \qquad (5.11)$$

Координатні площини Oxy і Oxz є площинами симетрії поверхні. Якщо z<0, рівняння (5.11) не може задовольнятись при жодних дійсних значеннях x і y. Отже, вся поверхня розташована над площиною Oxy.

Площина z = 0 має з поверхнею одну спільну точку O(0,0,0) – вершину параболоїда.

Площина z = h , $h > 0$ перетинає поверхню по еліпсу $\begin{cases} \frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1, \\ z = h. \end{cases}$

Площини x=m і y=n перетинають поверхню по параболах (перевірити) (рис.16).

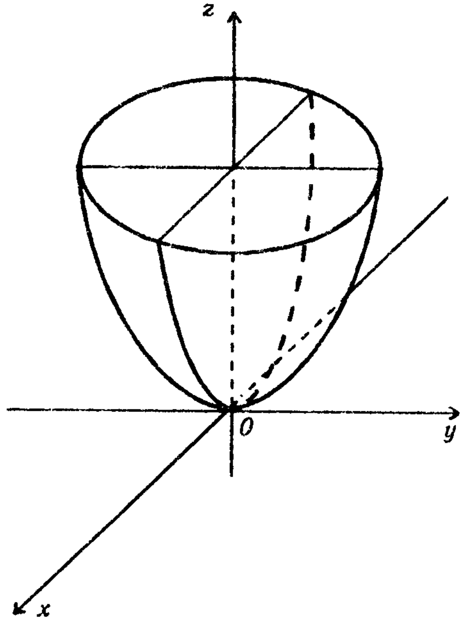


Рис. 16.

Якщо p=q, то маємо параболоїд обертання.

Задачі

5.19. Скласти рівняння поверхні, яка отримується обертанням параболи $\begin{cases} z = 2py^2 \\ x = 0 \end{cases}$ навколо осі Oz.

5.20. Знайти головні перерізи поверхні $2z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8}$ та переріз площиною $z = 1$.

8. Гіперболічний параболоїд

Гіперболічний параболоїд – це поверхня, канонічне рівняння якої має вигляд

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \; p > 0, q > 0. \qquad (5.12)$$

Як бачимо з рівняння (5.12), поверхня симетрична відносно координатних площин Oxz та Oyz.

Площина $z = 0$ перетинає поверхню по лінії $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0,\ z = 0$ або

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 0,\ z = 0,$$ тобто по двох прямих: $$\begin{cases} y = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}x \\ z = 0. \end{cases}$$

Площина $z = h$ перетинає поверхню по гіперболі

$$\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1, z = h,\ h \neq 0.$$

Площини $x=m$ і $y=n$ перетинають поверхню (5.12) по параболах (перевірити) (рис.17).

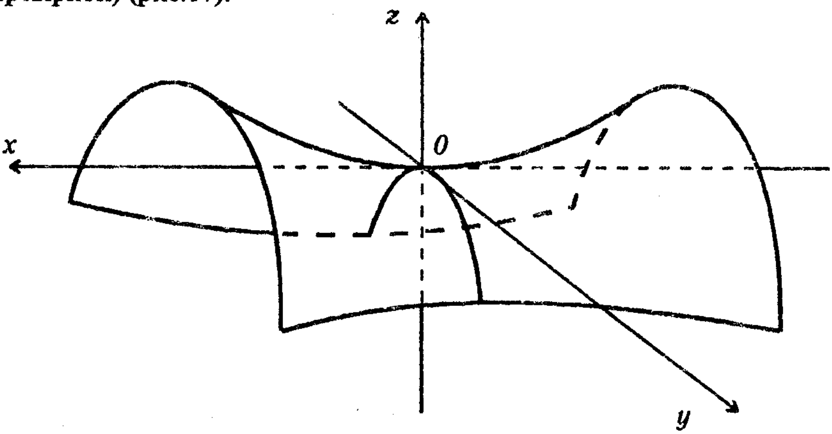


Рис. 17.

Задачі

5.21. Дослідити та побудувати поверхню $x^2 + y^2 = 4z$.

5.22. При перетині гіперболічного параболоїда площиною $z=-2$ отримали гіперболу $\frac{y^2}{72} - \frac{x^2}{18} = 1$. Написати канонічне рівняння цього параболоїда.

5.23. Перетином гіперболічного параболоїда площиною $z=4$ є гіпербола, дійсна вісь якої дорівнює 10, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{41}}{5}$. Написати канонічне рівняння цього параболоїда.

ВІДПОВІДІ ДО РОЗДІЛУ 4.

1.1. Сфера радіуса R = 2 з центром в початку координат.

1.2. Сфера радіуса R = 4 з центром в точці $M_0(2,0,-1)$.

1.3. Точка O(0,0,0).

1.4. Сфера радіуса R = $\sqrt{5}$ з центром в точці $M_0(1,2,0)$.

1.5. Сфера радіуса R = 3 з центром в точці $M_0(0,0,3)$.

1.6. Сфера радіуса R = 5 з центром в точці $M_0(2,1,-1)$.

1.7. $x^2+y^2+z^2=a^2$.

1.8. $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=4$.

1.9. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=18$.

1.10. $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$.

1.11. Круговий циліндр з твірними, паралельними осі Oy.

1.12. Еліптичний циліндр з твірними, паралельними осі Ox.

1.13. Гіперболічний циліндр з твірними, паралельними осі Oz.

1.14. Параболічний циліндр з твірними, паралельними осі Oy.

1.15. Круговий циліндр з твірними, паралельними осі Oz.

1.16. Параболічний циліндр з твірними, паралельними осі Oy.

1.17. Параболічний циліндр з твірними, паралельними осі Oz.

1.18. Круговий циліндр з твірними, паралельними осі Ox.

1.19. Кола радіуса R= 1 в площинах z = 2 та z = –2 з центрами у точках (0,0,2) та (0,0,–2).

1.20. Коло радіуса R= 2 з центром в точці O(0,0,0) в площині Oxy.

1.21. Коло в площині Oxz з центром в початку координат і радіусом R=7.

1.22. Коло в площині z = 6 радіуса R = $\sqrt{13}$ з центром в точці $M_0(0,0,6)$.

1.23. Коло в площині z = 2 з центром в точці $M_0(0,0,2)$ і радіусом R=4.

1.24. $x^2+y^2+z^2=36$, $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=25$.

1.25. 1) (3,2,6) і (3,–2,6); 2) (3,2,6) і (–3,2,6); 3) на даній лінії немає такої точки.

1.26. 1) $M_0(0,0,4)$; R = 3; 2) $M_0(5,0,0)$; R = 4; 3) $M_0(0,-2,0)$; R = 1.

1.27. 1) $x^2+5y^2-8y-12=0$; 2) $4x^2+5z^2+4z-60=0$.

1.28. 1) $8x^2+4y^2-36x+16y-3=0,\ z=0$;

2) $4y^2+8z^2+16y+20z-31=0, x=0$.

2.1. а) $x-2y+3z+3=0$; б) $x-2y+z+2=0$; в) $2x+3y-z-6=0$.

2.2. а) $2x-y-z-6=0$; б) $x-2y-z+6=0$; в) $2x-z-5=0$.

2.3. а) $x-y-3z+2=0$; б) $4x-y-3z-21=0$;
в) $2x+3y-6z+14=0$.

2.4. а) $x-2y+z=0$; б) $x-y-2z+5=0$; в) $x+y-z=0$.

2.5. а) $x-2y-3z+3=0$; б) $2x-2y-z+1=0$; в) $x-y-z=0$.

2.6. а) $z-3=0$; б) $y+2=0$; в) $x+5=0$.

2.7. а) $2y+z=0$; б) $3x+z=0$; в) $4x+3y=0$.

2.8. а) $y+4z+10=0$; б) $x-z-1=0$; в) $5x+y-13=0$.

2.9. а) $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-2}=1$; б) $\frac{x}{-24}+\frac{y}{16}+\frac{z}{-12}=1$.

2.10. $a=-4$, $b=3$, $c=\frac{1}{2}$.

2.11. а) 15 кв. од.; б) 240 кв. од.

2.12. а) 8 куб. од.; б) 900 куб. од.

2.13. $2x-21y+2z+88=0$, $2x-3y-2z+12=0$.

2.14. $2x-y-3z-15=0$.

2.15. $2x-3y+z-6=0$.

2.16. а) $3x+3y+z-8=0$; б) $x+y-3=0$; в) $2x-y-1=0$;
г) $x-y-z=0$.

2.17. Площини 1,4,5,7,9,11 і 12 задані нормальними рівняннями.

2.18. 1) $-\frac{2}{11}x-\frac{9}{11}y+\frac{6}{11}z-3=0$; 2) $\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{1}{2}z-5=0$;

3) $\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}z-\frac{6}{\sqrt{2}}=0$; 4) $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-2=0$;

5) $-x-\frac{1}{2}=0$; 6) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{1}{5}=0$; 7) $z-\frac{1}{2}=0$.

2.19. 1) $d=2$; 2) $d=3$; 3) $d=2$; 4) $d=2$: 5) $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 2.20. $d=4$.

2.21. 1) $d=2$; 2) $d=6$; 3) $d=6{,}5$; 4) $d=\frac{5}{6}$. 2.22. 27 куб. од.

2.23. Умові задачі задовольняють дві точки (0,7,0) і (0,–5,0).

2.24. Умові задачі задовольняють дві точки (0,0,–2) і $(0,0,-\frac{82}{13})$.

2.25. Умові задачі задовольняють дві точки (2,0,0) і $(\frac{11}{43},0,0)$.

2.26. 1) $\theta=\arccos\frac{7}{10}$; 2) $\theta=\frac{\pi}{2}$; 3) $\theta=0$; 4) $\theta=\frac{\pi}{3}$;
5) $\theta=\arccos\frac{2}{3}$.

2.27. 1) Перетинаються; 2) перетинаються; 3) паралельні; 4) збігаються.

2.28. Три площини. Площини 1 і 4 паралельні; площини 2 і 3 збігаються.

2.29. $2x - 3z - 27 = 0$. 2.30. $2x - 2y + z - 2 = 0$.

2.31. $4x - 3y - z - 7 = 0$.

2.32. 1) $5x - 4y + z = 0$; 2) $2x - y - z = 0$.

2.33. $x - 3y + 4z - 21 = 0$, $y + 2z - 1 = 0$, $x - 4 = 0$.

2.34. $x + 20y + 7z = 0$. 2.35. $\theta = 60°$. 2.36. $x - 4y + 5z + 15 = 0$.

2.37. $x \pm \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$. 2.38. $x + 3y = 0$, $3x - y = 0$.

2.39. 1) Ні; 2) так.

2.40. 1) (3,–1,0); 2) площини не перетинаються; 3) площини перетинаються по прямій; 4) (2,–1,1).

3.1. $x = t - 2$; $y = -2t + 1$; $z = 3t - 1$. 3.2. $\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-4}{-8}$.

3.3. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+3}{5}$. 3.4. $\frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}$.

3.5. $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$.

3.6. $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$, $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$.

3.7. 1) $\cos\alpha = \frac{4}{13}$; $\cos\beta = -\frac{3}{13}$; $\cos\gamma = \frac{12}{13}$.

2) $\cos\alpha = \frac{12}{25}$; $\cos\beta = \frac{9}{25}$; $\cos\gamma = \frac{4}{5}$.

3.8. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-5}$; $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{10}$; $\cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{5}$; $\cos\gamma = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.

3.9. 1) $x = t + 2$; $y = t + 3$; $z = t - 1$; 2) $x = 2t+1$; $y = 2$; $z = 8t+4$;

3) $x = 3t-1$; $y = 6t-2$; $z = 2t+3$; 4) $x = 4t+3$; $y = 7t+1$; $z = -4t-5$.

3.10. $M_1(0,2,-3)$, $M_2(3,0,-2)$, $M_3(9,-4,0)$.

3.11. $x = 4 - 5t$; $y = 11t - 7$; $z = -2$.

3.12. AD: $\frac{x-3}{-1} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{6}$; CD: $\frac{x}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z-2}{3}$. 3.13. $\frac{x}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$.

3.14. 1) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{-1}$; 2) $\frac{x}{1} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-4}{-5}$;

3) $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-7}=\frac{z+2}{-19}$; 4) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1}$.

3.15. 45°.

3.16. 120°.

3.19. $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$.

3.20. $\frac{x-5}{\sqrt{2}}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+2}{-1}$.

3.21. 1) $\Theta=\arccos\frac{5\sqrt{21}}{42}\approx 56°56'$;

2) $\Theta=\arccos\left(\frac{-\sqrt{7}}{14}\right)\approx 100°54'$.

3.22. $l=3$.

4.1. а) $\theta=\arcsin(\frac{1}{7\sqrt{6}})$; б) пряма паралельна площині; в) $\theta=\frac{\pi}{2}$; г) $\theta=\arcsin(\frac{1}{\sqrt{6}})$.

4.2. B = –8; p =5.

4.3. а) (2,–3,6); б) пряма паралельна площині; в) пряма належить площині; г) пряма паралельна площині; д) (2,3,1).

4.4. а) так; б) ні; в) ні.

4.5. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{6}=\frac{z-5}{-5}$.

4.6. x = 3+t, y = –6 +4t, z = 7 –8t; (4,–2,–1).

4.7. а) $6x-5y+4z+67=0$; б) $5x-y-6z-19=0$.

4.8. $20x+23y+11z-63=0$.

4.9. а) $2x-y-2z-5=0$; б) $x+2y+3z=0$; в) $2x-3y+4z-1=0$.

4.10. а)8x–9y–22z–59=0; б) $23x-32y+26z-17=0$; в) 4x+6y+5z–1=0.

4.11. $13x-14y+11z+51=0$.

4.12. $15x-7y+9z-3=0$.

4.13. а) $8x-y+20z-8=0$; б) $11x-17y-19z+10=0$.

4.14. а) $x-3z+2=0$; б) $2x+9y+5z+7=0$;
в) $21x-8y+9z-5=0$; г) $6x-20y-11z+1=0$.

4.15. а) $2x-16y-13z+31=0$;б) $6x-20y-11z+1=0$;
в) $13x+6y+11z-15=0$; г) $3x+4y+5z-11=0$.

4.16. $x=3t+3,\ y=15t+1,\ z=19t-3$.

4.17. (2,–3,–5).

4.18. а) $d=\frac{\sqrt{66}}{3}$; б) $d=\frac{4\sqrt{35}}{7}$; в) $d=\frac{\sqrt{83}}{5}$.

4.19. а) $d=7$; б) $d=6$; в) $d=15$.

4.20. $d=\frac{5}{6}\sqrt{30}$.

4.21. $d=25$.

4.22. 1) $d = 13$; 2) $d = \frac{127}{13}$; 3) $d = 7$; 4) $d = 4\sqrt{29}$; 5) $d = 3$; 6) $d = 11$);
7) $d = 7$; 8) $d = 13$.

4.23. $Q(-5,1,0)$. 4.24. $Q(1,-2,2)$. 4.25. $Q(3,3,-3)$. 4.26. $Q(2,9,6)$.

4.27. $Q(2,-3,2)$. 4.28. $Q\left(\frac{9}{7},-\frac{4}{7},-\frac{22}{7}\right)$. 4.29. $Q(-5,-4,6)$.

5.1. $z = 2(x^2 + y^2)$. 5.2. $x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0$. 5.3. $y^2 = x^2 + z^2$.

5.4. $x^2 = y^2 + z^2$. 5.5. $\begin{cases} z = \pm\frac{5}{4}y, \\ x = 0, \end{cases}$; $\begin{cases} z = \pm\frac{1}{2}x, \\ y = 0, \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{64} = 1, \\ z = 10. \end{cases}$

5.6. Точка M_1 лежить на поверхні конуса; M_2 – зовні; M_3 – всередині.

5.7. $V = \frac{25\pi}{3}$.

5.8. Площина $y = -4$ є дотичною площиною до еліпсоїда.

5.9. $\begin{cases} \frac{y^2}{49} + \frac{z^2}{4} = 1, \\ x = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1, \\ y = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$ 5.10. $V = \frac{1280 \cdot \pi}{3}$.

5.11. Точка M_1 лежить зовні еліпсоїда, M_2 – всередині; M_3 – на поверхні.

5.12. Перерізи гіперболоїда площинами $z=h$ є еліпсами $\begin{cases} \frac{x^2}{(a^*)^2} + \frac{y^2}{(b^*)^2} = 1, \\ z = h \end{cases}$ з півосями $a^* = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$, $b^* = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$;

Перерізи площинами $y=n$ і $x=m$ є відповідно гіперболи

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{n^2}{b^2}, \\ y = n, \ n \neq \pm b, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2}{a^2}. \\ z = m, \ m \neq \pm a, \end{cases}$$

5.13. $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. 5.14. $\begin{cases} \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1, \\ z = -11\sqrt{3}. \end{cases}$ 5.15. $M_1(0,2,0)$; $M_2(6,1,2)$.

5.16. $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$. 5.17. $\begin{cases} \frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{25} = 1, \\ y = 0, \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$ $x = 5, x = -5$.

5.18. $M_1(0,3,10)$; $M_2(6,0,10)$. 5.19. $z = 2p(x^2 + y^2)$.

5.20. $\begin{cases} y^2 = 16z, \\ x = 0, \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 = 4z, \\ y = 0, \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1, \\ z = 1. \end{cases}$.

5.21. Параболоїд обертання. Вісь обертання – Oz.

5.22. $2z = \dfrac{x^2}{4{,}5} - \dfrac{y^2}{18}$.

5.23. $2z = \dfrac{x^2}{3{,}125} - \dfrac{y^2}{2}$.

<u>РОЗДІЛ 5.</u> ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЛІНІЙНИХ ПРОСТОРІВ

§ 1. ЛІНІЙНИЙ ТА ЕВКЛІДОВИЙ ПРОСТОРИ

1. Означення лінійного простору та його властивості

Нехай L – множина елементів $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$ довільної природи.

Означення. Множина L називається <u>лінійним простором</u>, якщо:

1) визначена операція додавання, яка кожній парі елементів $\bar{x}, \bar{y} \in L$ ставить у відповідність елемент $\bar{z} \in L$, що називається сумою елементів $\bar{x}$ і $\bar{y}$ та позначається $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$;

2) визначена операція множення елементів з L на число λ, яка кожному елементу $\bar{x} \in L$ ставить у відповідність елемент $\bar{y} \in L$, що називається добутком елемента на число λ і позначається $\bar{y} = \lambda \cdot \bar{x}$;

3) введені операції додавання і множення на число задовольняють такі аксіоми:

3.1. $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$;

3.2. $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$;

3.3. Існує елемент $\bar{o} \in L$, такий, що $\bar{x} + \bar{o} = \bar{x}$ $\forall \bar{x} \in L$ (елемент $\bar{O}$ називають <u>нульовим</u> елементом);

3.4. Для кожного $\bar{x} \in L$ існує такий елемент $\bar{y} \in L$, що $\bar{x} + \bar{y} = \bar{o}$.

Елемент $\bar{y}$ називається <u>протилежним</u> елементові $\bar{x}$ і позначається $-\bar{x}$;

3.5. $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$ $\forall \bar{x} \in L$;

3.6. $\lambda(\mu\bar{x}) = (\lambda\mu)\bar{x}$;

3.7. $\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda\bar{x} + \lambda\bar{y}$;

3.8. $(\lambda + \mu)\bar{x} = \lambda\bar{x} + \mu\bar{x}$.

Елементи лінійного простору прийнято називати <u>векторами</u>.

Зауваження. Вводячи поняття лінійного простору абстрагуємось не тільки від природи об'єктів, які вивчаються, а й від конкретного вигляду правил утворення суми елементів і добутку елемента на число.

Властивості лінійного простору:

1. У довільному лінійному просторі існує єдиний нульовий елемент $\bar{o}$ і для кожного елемента $\bar{x}$ існує єдиний протилежний елемент $-\bar{x}$.

2. У довільному лінійному просторі нульовий елемент $\bar{o} = 0 \cdot \bar{x}$, де $\bar{x}$ – довільний елемент, а протилежний елемент $-\bar{x} = (-1) \cdot \bar{x}$.

Приклад 1. Нехай $\widetilde{R}_2$ – множина всіх впорядкованих пар дійсних чисел $\overline{x}=(\alpha_1,\alpha_2)$ з операціями додавання і множення на число, визначених так:

1) Якщо $\overline{x}=(\alpha_1,\alpha_2)$ і $\overline{y}=(\beta_1,\beta_2)$, то $\overline{x}+\overline{y}=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2)$;

2) $\forall\lambda\in R:\lambda\overline{x}=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2)$.

Чи буде $\widetilde{R}_2$ дійсним лінійним простором?

◁ Переконаємось, що так введені операції додавання і множення на дійсне число задовольняють аксіоми 3.1. – 3.8. :

$\overline{y}+\overline{x}=(\beta_1+\alpha_1,\beta_2+\alpha_2)=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2)=\overline{x}+\overline{y}$,

$(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2)+(\gamma_1+\gamma_2)=(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1,\alpha_2+\beta_2+\gamma_2)=$

$(\alpha_1+(\beta_1+\gamma_1),\alpha_2+(\beta_2+\gamma_2))=\overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})$.

Існує $\overline{o}=(0,0)$ такий, що $\overline{x}+\overline{o}=(\alpha_1,\alpha_2)+(0,0)=(\alpha_1,\alpha_2)=\overline{x}$, а також $-\overline{x}=(-\alpha_1,-\alpha_2)$, що

$\overline{x}+(-\overline{x})=(\alpha_1,\alpha_2)+(-\alpha_1,-\alpha_2)=(\alpha_1-\alpha_1)+(\alpha_2-\alpha_2)=(0,0)=\overline{o}$.

$$1\cdot\overline{x}=1\cdot(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)=\overline{x};$$

$$\lambda(\mu\overline{x})=\lambda(\mu\alpha_1,\mu\alpha_2)=(\lambda\mu\alpha_1,\lambda\mu\alpha_2)=(\lambda\mu)(\alpha_1,\alpha_2)=(\lambda\mu)\overline{x};$$

$$\lambda(\overline{x}+\overline{y})=\lambda((\alpha_1,\alpha_2)+(\beta_1,\beta_2))=\lambda(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2)=$$

$$=(\lambda\alpha_1+\lambda\beta_1,\lambda\alpha_2+\lambda\beta_2)=\lambda(\alpha_1,\alpha_2)+\lambda(\beta_1,\beta_2)=\lambda(\overline{x}+\overline{y});$$

$$(\lambda+\mu)\overline{x}=(\lambda+\mu)(\alpha_1,\alpha_2)=((\lambda+\mu)\alpha_1,(\lambda+\mu)\alpha_2)=$$

$$=(\lambda\alpha_1+\mu\alpha_1,\lambda\alpha_2+\mu\alpha_2)=\lambda(\alpha_1,\alpha_1)+\mu(\alpha_1,\alpha_1)=\lambda\overline{x}+\mu\overline{x}.$$ ▷

Задачі

Перевірити, чи такі множини утворюють лінійний простір:

1.1. Множина вільних векторів на площині чи в просторі.

1.2. Множина $C_{[a,b]}$ всіх функцій $f(x)$, які неперервні на відрізку $[a,b]$.

1.3. Множина $M_{m,n}$ матриць розміру $m\times n$.

1.4. Множина P_n многочленів $P_n(t)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_it^{n-i}$ степеня $\leq n$.

1.5. Множина C комплексних чисел.

1.6. Множина R дійсних чисел.

1.7. Нехай R^+ – множина додатних дійсних чисел, в якій визначені такі операції:

а) «додавання» $\bar{x}+\bar{y}=\bar{x}\cdot\bar{y}$ (тобто звичайне множення чисел $\bar{x}$ і $\bar{y}$);

б) «множення на дійсне число» $\lambda\cdot\bar{x}=\bar{x}^{\lambda}$ (тобто піднесення числа $\bar{x}$ до степеня λ).

Перевірити, чи R^+ є лінійним простором.

2. Лінійний підпростір

Означення. <u>Підпростором</u> лінійного простору L називається підмножина $L'\subset L$, яка має такі властивості:

1) $\bar{x},\bar{y}\in L'\Rightarrow\bar{x}+\bar{y}\in L'$;

2) $\bar{x}\in L'\Rightarrow\lambda\bar{x}\in L'$ для будь-якого λ .

Приклад 2. Довести, що будь-який підпростір L' лінійного простору L також є лінійним простором.

◁ Переконаємось, що операції додавання елементів підпростору L' задовольняють аксіоми 3.2–3.8 Всі аксіоми, крім 3.3 і.3.4, справедливі для елементів простору L', бо вони справедливі для всіх елементів простору L. Залишається перевірити виконання аксіом 3.3 і 3.4 Нехай $\bar{x}$ – довільний елемент L', а λ – довільне число. Тоді згідно з вимогою 2 $\lambda\bar{x}\in L'$. Але, оскільки λ – довільне, то прийнявши $\lambda=0$ і $\lambda=-1$, отримаємо $0\cdot\bar{x}=\bar{o}\in L'$, $(-1)\cdot\bar{x}=-\bar{x}\in L'$.

Отже, підмножина L' є лінійним простором. ▷

Задачі

1.8. Довести, що множина, яка складається тільки з нульового елемента $\bar{o}$, є лінійним підпростором довільного лінійного простору.

1.9. Довести, що множина компланарних чи колінеарних векторів щодо множини всіх звичайних векторів є лінійним підпростором.

1.10. Нехай простір L – це множина векторів на площині, а M – множина таких векторів, у яких координати – парні числа. Чи утворює множина M підпростір простору L?

1.11. Нехай L – лінійний простір векторів вигляду $\bar{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, де операції додавання і множення на число вводяться так

$$\bar{x}+\bar{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)\ ,\alpha\cdot\bar{x}=(\alpha x_1,\alpha x_2,\dots,\alpha x_n)\,.$$

Множина M – сукупність таких самих векторів, для яких $x_i\ge 0,(i=\overline{1,n})$. Чи утворює множина M підпростір простору L?

3. *Вимірність та базис лінійного простору. n-вимірний арифметичний простір*

Означення 1. Вектори $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ лінійного простору L називаються лінійно незалежними, якщо рівність

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i = \bar{0} \qquad (1.1)$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_i = 0 (i = \overline{1,n})$ (або $\sum_{i=1}^{n} \alpha^2{}_i = 0$).

В протилежному випадку вектори $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$ називають лінійно залежними.

Означення 2. Якщо в лінійному просторі L існує n лінійно незалежних векторів, а будь-які n + 1 векторів цього простору лінійно залежні, то простір називають <u>n-вимірним</u>.

n-вимірний лінійний простір L позначають символом L_n. Число n – розмірність лінійного простору.

Означення 3. Впорядкована система n лінійно незалежних векторів $\{\bar{e}\} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ простору L_n називається <u>базисом цього простору</u>.

Будь-який вектор $\bar{x}$ n – вимірного лінійного простору L_n єдиним способом можна подати у вигляді

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i \qquad (1.2)$$

Рівність (1.2) називається розкладом вектора $\bar{x}$ по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2 \ldots \bar{e}_n$, а числа $x_1, x_2, \ldots x_n$ називаються координатами вектора $\bar{x} \in L_n$ (відносно базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$).

Приклад 3. Довести, що будь-який вектор $\bar{x}$ лінійного простору L_n розкладається по базису $\{\bar{e}\}$ єдиним способом.

◁ Нехай існує інший розклад, тобто

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \bar{e}_i \qquad (1.3)$$

Віднімемо почленно співвідношення (1.2) і (1.3). Маємо

$$\bar{0} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i') \bar{e}_i \,. \qquad (1.4)$$

Але вектори $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$ – лінійно незалежні. Тому, згідно з (1.1) отримаємо, що $x_i - x_i' = 0, (i = \overline{1,n})$, тобто $x_i = x_i'$ $(i = \overline{1,n})$. ▷

n-вимірний арифметичний простір

Будь-яка впорядкована сукупність із n дійсних (комплексних) чисел називається дійсним (комплексним) арифметичним вектором і позначається символом

$$\bar{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right).$$

Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ називаються компонентами арифметичного вектора $\bar{x}$.

Над арифметичними векторами виконуються такі операції.

Додавання: якщо $\bar{x} = \left(x_1, x_2, ..., _n\right), \bar{y} = \left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$, то

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n). \quad (1.5)$$

Множення на число: якщо λ – число (дійсне чи комплексне) і $\bar{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, то

$$\lambda \cdot \bar{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n). \quad (1.6)$$

Множина всіх дійсних (комплексних) векторів із введеними вище операціями додавання (1.5) і множення на число (1.6) називається n-вимірним дійсним (комплексним) арифметичним простором.

Позначається n-вимірний арифметичний простір символом $R^n, (C^n)$.

Якщо за базис в R^n взята система векторів

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= (1,0,0,...,0), \\ \bar{e}_2 &= (0,1,0,...,0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{e}_n &= (0,0,0,...,1) \end{aligned} \quad (1.7)$$

то такий базис називають канонічним.

Якщо зафіксувати в R^n довільний базис $\{\bar{e}\} = \left(\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\right)$, то кожному вектору $\bar{x}$ згідно з (1.2) відповідають його координати в цьому базисі.

Приклад 4. Чи є лінійно залежною система векторів $\bar{x}_1 = (2;0;1)$, $\bar{x}_2 = (1;-1;2)$ і $\bar{x}_3 = (3;1;1)$?

◁ Складемо лінійну комбінацію заданих векторів і прирівняємо її до нульового вектора: $\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + \lambda_3\bar{x}_3 = \bar{0}$. В координатній формі останнє співвідношення набирає вигляду:

$$\alpha_1(2;0;1) + \alpha_2(1;-1;2) + \alpha_3(3;1;1) = (0;0;0).$$

Для знаходження α_1, α_2 і α_3 отримали однорідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ 0\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Визначник матриці системи відмінний від нуля. Отже, система має єдиний розв'язок $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, а тому вектори $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ і $\bar{x}_3$ (згідно з означенням 1) є лінійно незалежними. ▷

Приклад 5. Чи є лінійно незалежною система векторів $\bar{x}_1 = (-3;2;1)$, $\bar{x}_2 = (2;-1;0)$ і $\bar{x}_3 = (-1;1;1)$?

◁ Складемо лінійну комбінацію векторів $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ і $\bar{x}_3$ та прирівняємо її до нульового вектора $\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \alpha_3\bar{x}_3 = \bar{0}$, або

$$\begin{cases} -3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - 0 \cdot \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Визначник системи $\Delta = 0$ (перевірити).

Отже, система має відмінні від нуля розв'язки α_1, α_2 та α_3. А тому (згідно з означенням 1) вектори $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ і $\bar{x}_3$ є лінійно залежними. ▷

Приклад 6. Показати, що вектори $\bar{e}_1 = (3;-2;1)$, $\bar{e}_2 = (-1;1;-2)$ і $\bar{e}_3 = (2;1;-3)$ утворюють базис та знайти розклад вектора $\bar{x} = (11;-6;5)$ по цьому базису.

◁ Покажемо, що вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ і $\bar{e}_3$ – лінійно незалежні. Нехай

$$\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3 = \bar{0}, \text{ або } \begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Визначник системи $\Delta \neq 0$ (перевірити).

Отже, система має єдиний розв'язок $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, а тому (згідно з означенням 1) вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ і $\bar{e}_3$ – лінійно незалежні, а отже, утворюють базис. Тоді згідно із співвідношенням (1.2) маємо:

$\bar{x} = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2 + x_3 \cdot \bar{e}_3$, тобто

$(11,-6,5) = x_1(3;-2;1) + x_2(-1;1;-2) + x_3(2;1;-3)$ або

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -6, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $x_1=2$, $x_2=-3$ і $x_3=1$ (перевірити).

Отже, $\overline{x} = 2\overline{e}_1 - 3\overline{e}_2 + \overline{e}_3$.

Числа 2,–3,1 є координатами вектора $\overline{x}$ в базисі $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$. ▷

Приклад 7. Довести, що система многочленів $t^2+1, -t^2+2t$ і t^2-t утворює базис в просторі P_3 та знайти розклад многочлена $-2t^2+t-1$ по цьому базису.

◁ Покажемо, що система многочленів $t^2+1, -t^2+2t$ і t^2-t – лінійно незалежна. Дійсно, нехай $\alpha_1(t^2+1)+\alpha_2(-t^2+2t)+\alpha_3(t^2-t)=0$.

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях t:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 0\cdot\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Визначник системи $\Delta \neq 0$, отже, система має єдиний розв'язок $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ і згідно з означенням 1 є лінійно незалежною, а тому утворює базис. Тоді

$$-2t^2+t-1 = x_1(t^2+1)+x_2(-t^2+2t)+x_3(t^2-t) \text{ або } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 = -1. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = -1$, отже

$$-2t^2+t-1 = -1\cdot(t^2+1)+0\cdot(-t^2+2t)-1(t^2-t). \ ▷$$

Задачі

З'ясувати, чи є лінійно залежною система векторів:

1.12. $\overline{x}_1 = (-3;1;5)$, $\overline{x}_2 = (6;-2;15)$.

1.13. $\overline{x}_1 = (1, j, 2-j, 3+j)$, $\overline{x}_2 = (1-j, 1+j, 1-3j, 4-2j)$, $(j^2=-1)$.

1.14. $\overline{x}_1 = (1;2;3)$, $\overline{x}_2 = (2;5;7)$, $\overline{x}_3 = (3;7;10)$.

1.15. $\overline{x}_1 = (5;4;3)$, $\overline{x}_2 = (3;3;2)$, $\overline{x}_3 = (8;1;3)$.

З'ясувати, чи можна в просторі многочленів, степені яких не вищі від другого, вибрати за базис многочлени:

1.16. $1+t^2$, $1-t^2$, $1+2t^2$.

1.17. $1+t^2,\ 1-t^2,\ 1+2t$.

1.18. Чи можна в тривимірному просторі вибрати за базис трійку векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, якщо:

а) $\bar{a}=(1,2,3), \bar{b}=(0,-1,2), \bar{c}=(3,1,4)$;

б) $\bar{a}=(1,-2,-3), \bar{b}=(2,0,2), \bar{c}=(3,-2,-1)$;

в) $\bar{a}=(0,1,2), \bar{b}=(-1,2,3), \bar{c}=(-1,3,7)$;

г) $\bar{a}=(-5,-4,-3), \bar{b}=(1,1,1), \bar{c}=(-4,-3,-2)$.

1.19. Довести, що система многочленів $1,t,t^2,\ldots,t^{n-1},t^n$ утворює базис в просторі P_{n+1} всіх многочленів степеня $\le n$, і, отже, розмірність P_{n+1} дорівнює $n+1$ (цей базис називають канонічним).

Знайти координати:

а) многочлена $-3t^2+1$ в канонічному базисі простору P_3;

б) многочлена t^2-2t в канонічному базисі простору P_3.

1.20. Довести, що система многочленів $t^3+t^2+t+1, t^2+t+1, t+1, 1$ лінійно незалежна.

1.21. Довести, що система матриць вигляду

$$A_{\alpha\beta}=\begin{array}{cc}\left\|\begin{matrix}0&.&.&.&0&0&0&.&.&.&0\\0&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.\\0&.&.&.&0&0&0&.&.&.&0\\0&.&.&.&0&1&0&.&.&.&0\\0&.&.&.&0&0&0&.&.&.&0\\.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.\\0&.&.&.&0&0&0&.&.&.&0\end{matrix}\right\| & \begin{matrix}\\ \\ \\ \alpha\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\\ \beta & \end{array}$$

$\alpha=\overline{1,m},\ \beta=\overline{1,n}$

утворює базис в просторі $M_{m,n}$ всіх матриць розміру $m\times n$ і розмірність простору $M_{m,n}$ дорівнює $m\cdot n$. Знайти координати довільної матриці $A=\|a_{ij}\|\in M_{m,n}$ в цьому базисі.

1.22. Знайти розмірність лінійного простору, утвореного квадратними матрицями n-го порядку.

1.23. Чи утворюють лінійний простір вектори n – вимірного простору, якщо їх координати – цілі числа?

1.24. Довести, що вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ утворюють базис та знайти координати вектора $\bar{x}$ в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$:

а) $\bar{e}_1 = (1;3;5), \bar{e}_2 = (0;4;5), \bar{e}_3 = (7;-8;4), \bar{x} = (2;-1;3)$;

б) $\bar{e}_1 = (1;2;5), \bar{e}_2 = (-1;6;3), \bar{e}_3 = (0;0;2), \bar{x} = (1;0;4)$;

в) $\bar{e}_1 = (-1;2;1), \bar{e}_2 = (2;1;-1), \bar{e}_3 = (1;2;-1), \bar{x} = (7;9;-4)$;

г) $\bar{e}_1 = (2;3;4), \bar{e}_2 = (3;-2;1), \bar{e}_3 = (-1;2;1), \bar{x} = (4;3;6)$;

д) $\bar{e}_1 = (1;-1;1), \bar{e}_2 = (2;1;1), \bar{e}_3 = (1;3;1), \bar{x} = (3;-4;2)$.

1.25. Нехай $A_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}; A_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}; A_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}; A_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. Довести, що дані матриці утворюють базис і знайти розклад матриці $B = \begin{Vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 0 \end{Vmatrix}$ по цьому базису.

1.26.* Довести, що в будь-якому дійсному лінійному просторі можна визначити скалярний добуток.

1.27. Нехай $\bar{x} = (x_1, x_2)$ і $\bar{y} = (y_1, y_2)$ – довільні вектори арифметичного простору R^2. Показати, що скалярний добуток в R^2 можна визначити таким способом:

а) $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$;

б) $(\bar{x}, \bar{y}) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2$;

в) $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

Обчислити скалярний добуток векторів $\bar{x} = (1,1)$ і $\bar{y} = (-3,2)$ кожним із цих способів.

1.28. Довести, що в просторі P_n многочленів степеня $\le n-1$ скалярний добуток многочленів $p(t) = a_0 + a_1t + ... + a_{n-1}t^{n-1}$ і $q(t) = b_0 + b_1t + ... + b_{n-1}t^{n-1}$ можна ввести таким способом: $(p, q) = a_0b_0 + a_1b_1 + ... + a_{n-1}b_{n-1}$. Обчислити скалярний добуток многочленів p(t) і q(t), якщо:

а) $p(t) = 1 + t + t^2$, $q(t) = t - 2t^2 + 3t^3$;

б) $p(t) = 4 - 2t + 3t^2 - t^3$, $q(t) = 2 + t + t^2$;

в) $p(t) = t^3 - 2t$, $q(t) = 2 + 6t + t^2 + 8t^3$.

4. Евклідовий простір: означення , основні поняття

Означення 1. Дійсний лінійний простір L називається евклідовим, якщо існує правило, згідно з яким будь-яким двом елементам $\bar{x},\bar{y}\in L$ ставиться у відповідність дійсне число, яке називається скалярним добутком цих елементів і позначається символом $(\bar{x},\bar{y})$. Вказане правило задовольняє такі вимоги (аксіоми):

1. $(\bar{x},\bar{y})=(\bar{y},\bar{x})$;

2. $(\bar{x}+\bar{y},\bar{z})=(\bar{x},\bar{z})+(\bar{y},\bar{z})$;

3. $(\lambda\bar{x},\bar{y})=\lambda(\bar{x},\bar{y}),\ \lambda\in R$;

4. $(\bar{x},\bar{x})\geq 0$,причому $(\bar{x},\bar{x})=0$ тоді і тільки тоді, коли $\bar{x}=\bar{0}$.

Евклідовий простір будемо позначати буквою Е.

Означення 2. Лінійний простір L називається нормованим, якщо:

а) задане правило, згідно з яким кожному елементові $\bar{x}\in L$ ставиться у відповідність дійсне число, яке називається <u>нормою</u> (або довжиною) вказаного елемента і позначається символом $\|\bar{x}\|$;

б) вказане правило задовольняє вказані вимоги (аксіоми):

1. $\|\bar{x}\|\geq 0$, якщо $\bar{x}\neq\bar{0}$ і $\|\bar{x}\|=0$, якщо $\bar{x}=\bar{0}$.

2. $\|\lambda\bar{x}\|=|\lambda|\cdot\|\bar{x}\|$ для довільних $\bar{x}$ і λ .

3. $\|\bar{x}+\bar{y}\|\leq\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|$ (нерівність трикутника).

4. $\|(\bar{x},\bar{y})\|\leq\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|$ (нерівність Коші-Буняковського).

Якщо L=E, то $\|\bar{x}\|=\sqrt{(\bar{x},\bar{x})}$.

Якщо в евклідовому просторі Е задані вектори $\bar{x}$ і $\bar{y}$, то можна ввести кут φ між ними $(0\leq\varphi\leq\pi)$, косинус якого визначається співвідношенням

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{x},\bar{y})}{\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|}. \qquad (1.8)$$

Приклад 8. Обчислити косинус кута між векторами $\bar{x}$, $\bar{y}$ простору R^4, де $\bar{x}=(0,1,1,1)$, $\bar{y}=(\sqrt{7},1,2,0)$, якщо скалярний добуток в даному базисі

$(\bar{x},\bar{y})=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4$.

⊲ Згідно з формулою (1.8)

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{x},\bar{y})}{\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|}=\frac{0\cdot\sqrt{7}+1\cdot1+1\cdot2+1\cdot0}{\sqrt{0+1+1+1}\cdot\sqrt{7+1+4+0}}=\frac{3}{\sqrt{36}}=\frac{1}{2},\ \triangleright$$

Два вектори $\bar{x}$ і $\bar{y}$ евклідового простору E називаються ортогональними (або перпендикулярними), якщо

$$(\bar{x},\bar{y})=0. \tag{1.9}$$

Приклад 9. Довести, що коли вектори $\bar{x}$ і $\bar{y}$ евклідового простору E ортогональні, то $\|\bar{x}+\bar{y}\|^2=\|\bar{x}\|^2+\|\bar{y}\|^2$.

$\triangleleft$ Згідно з означенням норми вектора $\|\bar{x}+\bar{y}\|^2=(\bar{x}+\bar{y},\bar{x}+\bar{y})$.

Використавши властивості скалярного добутку, отримаємо:

$$(\bar{x}+\bar{y},\bar{x}+\bar{y})=(\bar{x},\bar{x})+(\bar{x},\bar{y})+(\bar{y},\bar{x})+(\bar{y},\bar{y}).$$

Але, $(\bar{x},\bar{x})=\|\bar{x}\|^2,(\bar{y},\bar{y})=\|\bar{y}\|^2,(\bar{x},\bar{y})=(\bar{y},\bar{x})=0$.

Тому $\|\bar{x}+\bar{y}\|^2=\|\bar{x}\|^2+\|\bar{y}\|^2$. $\triangleright$

5. Ортонормований базис в E_n

Нехай вектори $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\dots,\bar{e}_n$ утворюють базис в n – вимірному евклідовому просторі E_n. Якщо

$$(\bar{e}_i,\bar{e}_k)=\begin{cases}1, \text{ як що } i=k,\\0, \text{ як що } i\neq k,\end{cases} \tag{1.10}$$

то базис $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\dots,\bar{e}_n$ називається ортонормованим.

Властивості ортонормованого базису:

1. В ортонормованому базисі скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів, тобто

$$(\bar{x},\bar{y})=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i \tag{1.11}$$

2. В ортонормованому базисі координати довільного вектора дорівнюють скалярному добуткові цього вектора на відповідні базисні вектори, тобто

$$x_k=(\bar{x},\bar{e}_k),k=\overline{1,n}. \tag{1.12}$$

Приклад 10. Довести, що ортогональна система ненульових векторів лінійно незалежна.

$\triangleleft$ Нехай $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\dots,\bar{e}_n$ ортогональна система ненульових векторів, тобто $(\bar{e}_i,\bar{e}_k)=0$, якщо $i\neq k=\overline{1,n}$, а $\|\bar{e}_i\|\neq0$. Розглянемо рівність $\alpha_1\bar{e}_1+\alpha_2\bar{e}_2+\dots+\alpha_2\bar{e}_n=\bar{0}$.

Помножимо останнє співвідношення скалярно на $\bar{e}_k$. Отримаємо
$\alpha_1(\bar{e}_1,\bar{e}_k)+...+\alpha_{k-1}(\bar{e}_{k-1},\bar{e}_k)+\alpha_k(\bar{e}_k,\bar{e}_k)+\alpha_{k+1}(\bar{e}_{k+1},\bar{e}_k)+...+\alpha_n(\bar{e}_n,\bar{e}_k)=(\bar{0},\bar{e}_k)$.

Враховуючи, що система векторів $\bar{e}_i(i=\overline{1,n})$ ортогональна, отримаємо, що $\alpha_k=0,(k=\overline{1,n})$, тобто система векторів є лінійно незалежна. ▷

Приклад 11. Показати, що вектори $\bar{x}=(1,-2,2,-3)$ і $\bar{y}=(2,-3,2,4)$, які задані в ортонормованому базисі, є ортогональні і знайти норму кожного з них.

◁ Оскільки вектори $\bar{x}$ і $\bar{y}$ задані в ортонормованому базисі, то їх скалярний добуток дорівнює сумі добутків відповідних координат, тобто $(\bar{x},\bar{y})=1\cdot 2+(-2)\cdot(-3)+2\cdot 2+(-3)\cdot 4=0$, а це означає,що вектори $\bar{x}$ і $\bar{y}$ ортогональні.

Знайдемо норми даних векторів.

Маємо: $\|\bar{x}\|=\sqrt{(\bar{x},\bar{x})}=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{18}$. Аналогічно $\|\bar{y}\|=\sqrt{33}$. ▷

Приклад 12. Перевірити ортогональність системи векторів $\bar{e}_1=(1,-2,1,3);\bar{e}_2=(2,1,-3,1)$. Доповнити її до ортогонального базису і на його основі знайти ортонормований базис.

◁ Вважаємо, що вектори $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$ задані в ортонормованому базисі. Тоді їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $(\bar{e}_1,\bar{e}_2)=2-2-3+3=0$, а отже, ортогональність цих векторів доведена.

Необхідно тепер знайти вектор $\bar{e}_3=(x_3,y_3,z_3,t_3)$, ортогональний з векторами $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$.

$$\begin{cases}(\bar{e}_1,\bar{e}_3)=0,\\(\bar{e}_2,\bar{e}_3)=0\end{cases} \text{або} \begin{cases}x_3-2y_3+z_3+3t_3=0,\\2x_3+y_3-3z_3+t_3=0.\end{cases}$$

Отриману систему розв'яжемо методом Гаусса. Множенням першого рівняння на 2 і відніманням від нього другого рівняння одержимо:

$$\begin{cases}x_3-2y_3+z_3+3t_3=0,\\ \quad y_3-z_3-t_3=0.\end{cases}$$

Звідси $y_3=z_3+t_3$; $x_3=z_3-t_3$, де z_3 і t_3 – вільні невідомі. Надамо z_3 і t_3 довільного ненульового значення $z_3=1$; $t_3=1$. Тоді $y_3=2;x_3=0$.

Вектор $\bar{e}_3=(0,2,1,1)$ за побудовою є ортогональним до $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$. Знайдемо тепер вектор $\bar{e}_4=(x_4,y_4,z_4,t_4)$, ортогональний до $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ та $\bar{e}_3$. Маємо:

$$\begin{cases}(\bar{e}_1,\bar{e}_4)=0,\\(\bar{e}_2,\bar{e}_4)=0,\\(\bar{e}_3,\bar{e}_4)=0,\end{cases}\quad \text{або}\quad \begin{cases}x_4-2y_4+z_4+3t_4=0,\\2x_4+y_4-3z_4+t_4=0,\\2y_4+z_4+t_4=0.\end{cases}$$

За методом Гаусса $\begin{cases}x_4-2y_4+z_4+3t_4=0,\\ \quad y_4-z_4-t_4=0,\\ \quad z_4+t_4=0.\end{cases}$

Звідси $z_4=-t_4;\ y_4=0;\ x_4=-2t_4$, де t_4 – вільне невідоме. Нехай $t_4=-1$. Тоді $\bar{e}_4=(2,0,1,-1)$.

Вектори $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3,\bar{e}_4$ утворюють ортогональний базис.

Якщо поділити кожен вектор на його довжину, отримаємо ортонормований базис. Оскільки $\|\bar{e}_1\|=\sqrt{15};\ \|\bar{e}_2\|=\sqrt{15};\ \|\bar{e}_3\|=\sqrt{6};\ \|\bar{e}_4\|=\sqrt{6}$, то

$$\bar{e}_1^{\,0}=\frac{1}{\sqrt{15}}\bar{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{15}};\frac{-2}{\sqrt{15}};\frac{1}{\sqrt{15}};\frac{3}{\sqrt{15}}\right),\qquad \bar{e}_2^{\,0}=\left(\frac{2}{\sqrt{15}};\frac{1}{\sqrt{15}};\frac{-3}{\sqrt{15}};\frac{1}{\sqrt{15}}\right),$$

$$\bar{e}_3^{\,0}=\left(0;\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\qquad \bar{e}_4^{\,0}=\left(\frac{2}{\sqrt{6}};0;\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

утворюють ортонормований базис простору. ▷

Задачі

1.29. Нехай вектори $\bar{x}$ і $\bar{y}$ задані в ортонормованому базисі. Знайти їх скалярний добуток:

а) $\bar{x}=(2,1,-1,2);\ \bar{y}=(3,-1,-2,1)$; б) $\bar{x}=(1,2,1,-1);\ \bar{y}=(-2,3,-5,-1)$.

1.30. Знайти норму вектора в ортонормованому базисі:

а) $\bar{x}=(-1,3,5,1)$; б) $\bar{x}=(-5,2,4,2)$.

1.31. Знайти кут між векторами $\bar{x}$ і $\bar{y}$:

а) $\bar{x}=(2,1,3,2);\bar{y}=(1,2,-2,1)$; б) $\bar{x}=(1,2,2,3);\bar{y}=(3,1,5,1)$;

в) $\bar{x}=(1,-1,1,-1);\bar{y}=(2,-2,4,5)$.

1.32. Перевірити ортогональність векторів $\bar{x}$ і $\bar{y}$. Доповнити систему до ортогонального базису і знайти відповідний ортонормований базис:

а) $\bar{x}=(2,1,3);\bar{y}=(-1,-4,2)$; б) $\bar{x}=(-4,2,2);\ \bar{y}=(2,1,3)$.

§2. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

1. Означення лінійного оператора

Нехай задано два лінійні простори L і L'. Якщо кожному елементові $\overline{x} \in L$ ставиться у відповідність елемент $\overline{x}' = \hat{A}(\overline{x}) \in L'$, то кажуть, що задано перетворення або відображення $\hat{A}$ простору L в L' Елемент x називають прообразом (оригіналом), а відповідний йому елемент $\overline{x}'$ – його образом (зображенням). Відображення $\hat{A}$ простору L в L' будемо позначати символом $\hat{A}: L \to L'$.

Означення 1. Відображення $\hat{A}: L \to L'$, яке кожному елементові $\overline{x} \in L$ ставить у відповідність елемент $\overline{x}' \in L'$, називається оператором $\hat{A}$, що діє з L в L'.

Означення 2. Оператор $\hat{A}: L \to L'$ називається лінійним, якщо для довільних елементів $\overline{x}_1$ і $\overline{x}_2$ простору L і довільного числа α справедливі співвідношення:

1. $\hat{A}(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = \hat{A}(\overline{x}_1) + \hat{A}(\overline{x}_2)$,

2. $\hat{A}(\alpha\overline{x}) = \alpha\hat{A}(\overline{x})$. $\qquad$ (2.1)

З означення 2 випливає, що

$$\hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\hat{A}(\overline{x}_i). \tag{2.2}$$

Приклад 1. Оператор $\hat{0}$, який будь-який елемент простору L переводить в нульовий елемент, називається <u>нульовим оператором</u>. Показати, що оператор $\hat{0}$ – лінійний.

◁ Згідно з означенням нульового оператора $\hat{0}$ маємо: $\hat{0}(\overline{x}) = \overline{0}$, де $\overline{x}$ – довільний елемент простору L. Тоді $\hat{0}(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = \overline{0} = \overline{0} + \overline{0} = \hat{0}(\overline{x}_1) + \hat{0}(\overline{x}_2)$, $\hat{0}(\alpha\overline{x}) = \overline{0} = \alpha \cdot \overline{0} = \alpha\hat{0}(\overline{x})$, тобто виконуються умови (2.1), а це означає, що оператор $\hat{0}$ – лінійний. ▷

Приклад 2. Оператор $\hat{E}$, який будь-який елемент $\overline{x} \in L$ переводить в той самий елемент $\overline{x}$, називається <u>одиничним</u>, або <u>тотожнім</u> оператором. Показати, що оператор $\hat{E}$ – лінійний.

◁ Згідно з означенням одиничного оператора маємо: $\hat{E}(\overline{x}) = \overline{x}$, де $\overline{x}$ – довільний елемент простору L. Тоді $\hat{E}(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 = \hat{E}(\overline{x}_1) + \hat{E}(\overline{x}_2)$, $\hat{E}(\alpha\overline{x}) = \alpha \cdot \overline{x} = \alpha \cdot \hat{E}(\overline{x})$. ▷

Приклад 3. Нехай $\hat{A}$ – оператор множення довільної матриці X із простору квадратних матриць порядку 2 справа на матрицю $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}$. Показати, що цей оператор лінійний.

◁ Нехай B,C – дві довільні матриці простору квадратних матриць другого порядку, тоді $\hat{A}(B) = B\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}$; $\hat{A}(C) = C\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}$.

Враховуючи властивості добутку матриць і множення матриці на число, маємо:

1) $\hat{A}(B+C) = (B+C)\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} = B\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} + C\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} = \hat{A}(B) + \hat{A}(C)$;

2) $\hat{A}(\alpha B) = (\alpha B)\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} = \alpha\left(B\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}\right) = \alpha\hat{A}(B)$.

Отже, умови означення 2 виконуються і оператор $\hat{A}$ – лінійний. ▷

Приклад 4. Перевірити, чи відображення $\hat{A}$ простору арифметичних векторів R^3, де $\hat{A}(\overline{x}) = (x_1 - 2x_3; x_2 + x_3 - 5; 2x_1 - 7)$, буде лінійним оператором.

◁ Перевіримо виконання умов 1 і 2 означення лінійного оператора. Для цього розглянемо образ суми векторів $\overline{z} = (z_1, z_2, z_3), \overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$:

$$\hat{A}(\overline{z} + \overline{y}) = \hat{A}(z_1 + y_1; z_2 + y_2; z_3 + y_3) = ((z_1 + y_1) - 2(z_3 + y_3); (z_2 + y_2) + (z_3 + y_3) - 5; 2(z_1 + y_1) - 7) =$$

$$= (z_1 + y_1 - 2z_3 - 2y_3; z_2 + y_2 + z_3 + y_3 - 5; 2z_1 + 2y_1 - 7).$$

Але $\hat{A}(\overline{z}) = (z_1 - 2z_3; z_2 + z_3 - 5; 2z_1 - 7)$,

$\hat{A}(\overline{y}) = (y_1 - 2y_3; y_2 + y_3 - 5; 2y_1 - 7)$.

$\hat{A}(\overline{z}) + \hat{A}(\overline{y}) = (z_1 - 2z_3 + y_1 - 2y_3; z_2 + z_3 - 5 + y_2 + y_3 - 5; 2z_1 - 7 + 2y_1 - 7) = (z_1 + y_1 - 2z_3 - 2y_3; z_2 + z_3 + y_2 + y_3 - 10; 2z_1 + 2y_1 - 14)$.

Отже, $\hat{A}(\overline{z} + \overline{y}) \neq \hat{A}(\overline{z}) + \hat{A}(\overline{y})$, і дане перетворення не є лінійним. ▷

Приклад 5. Довести, що проектування тривимірного простору R^3 на координатну вісь вектора $\bar{e}_2$ паралельно координатній площині векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_3$ є лінійним перетворенням (оператором).

◁ Згідно із співвідношенням (1.20) (розділ 2), маємо $\text{пр}_{\bar{e}}\bar{x} = (\bar{e}, \bar{x})$.

Якщо $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ довільний вектор простору R^3, то $\text{пр}_{\bar{e}_2}\bar{x} = \bar{e}_2 \cdot \bar{x} = x_2$.

Отже, оператор проектування на вісь $\bar{e}_2$ паралельно площині $\bar{e}_1, \bar{e}_3$ кожному вектору $\bar{x}$ ставить у відповідність координату x_2. Покажемо, що цей оператор – лінійний. Справді:

$$\hat{A}(\bar{x} + \bar{y}) = x_2 + y_2 = \hat{A}(\bar{x}) + \hat{A}(\bar{y}),$$

$$\hat{A}(\lambda\bar{x}) = \lambda x_2 = \lambda\hat{A}(\bar{x}).$$

Отже, $\hat{A}$ – лінійний оператор. ▷

Задачі

2.1. Оператор $\hat{A}(\bar{x}) = \lambda \cdot \bar{x}$, який довільний елемент $\bar{x} \in L$, переводить в елемент $\lambda\bar{x}$, де λ – фіксоване число, називається <u>оператором</u> <u>подібного розтягу</u>, або <u>оператором</u> <u>подібності</u>. Показати, що оператор подібності є лінійним оператором.

2.2. Довести, що в просторі $C_{[a,b]}$ множення заданої функції на будь-яку фіксовану неперервну функцію $\varphi(t)$ є лінійним оператором.

2.3. Оператор $\hat{A}(\bar{x}) = \bar{a}$ будь-який елемент $\bar{x} \in L$ переводить у фіксований елемент $\bar{a}$. Чи буде цей оператор лінійним?

2.4. Оператор $\hat{A}(\bar{x}) = \bar{x} + \bar{a}$, де $\bar{a}$ – фіксований елемент. Чи буде цей оператор лінійним?

В задачах 2.5.–2.13 встановити, які з заданих перетворень є лінійними:

2.5. $\hat{A}(\bar{x}) = |\bar{x}|\bar{a}$; $\bar{a}$ – фіксований вектор.

2.6. $\hat{A}(\bar{x}) = (\bar{a}, \bar{x})\bar{a}$; $\bar{a}$ – фіксований вектор.

2.7. $\hat{A}(\bar{x}) = (\bar{x}, \bar{e})\bar{e}$; $\bar{e}$ – заданий одиничний вектор. З'ясувати геометричний зміст цього перетворення.

2.8. $\hat{A}(\bar{x}) = [\bar{a}, \bar{x}]$; $\bar{a}$ – фіксований вектор.

2.9. $\hat{A}(\bar{x}) = (\bar{a}, \bar{x})\bar{x}$; $\bar{a}$ – фіксований вектор.

2.10. Якщо $\bar{x} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, то $\hat{A}(\bar{x}) = (y + z)\bar{i} + (2x + z)\bar{j} + (3x - y + z)\bar{k}$.

2.11. $\hat{A}(\overline{x})=(\sin x_1, \cos x_2, 0)$, де $\overline{x}=\{x_1, x_2\}$.

2.12. Оператор $\hat{A}$ – множення довільної матриці X із простору квадратних матриць порядку 2 : а) зліва на матрицю $A=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$; б) справа на матрицю A.

2.13. Оператор $\hat{A}$ – транспонування, тобто оператор, який кожній матриці X ставить у відповідність транспоновану матрицю.

В задачах 2.14–2.20 встановити, які з заданих перетворень простору R^3 арифметичних векторів в себе є лінійними:

2.14. $\hat{A}(\overline{x})=(x_2+x_3; 2x_1+x_3; 3x_1-x_2+x_3)$.

2.15. $\hat{A}(\overline{x})=(x_1; x_2+1; x_3+2)$.

2.16. $\hat{A}(\overline{x})=(0; x_2-x_3; 0)$.

2.17. $\hat{A}(\overline{x})=(x_1+2x_2+2x_3; -3x_2+x_3; 2x_1+3x_3)$.

2.18. $\hat{A}(\overline{x})=(3x_1+5x_3; x_1+x_2+1; 3x_2-6x_3)$.

2.19. $\hat{A}(\overline{x})=\left(x_1; x_2^3; x_1+x_2\right)$.

2.20. $\hat{A}(\overline{x})=(x_3; x_1; x_1+3x_2-x_3)$.

2.21. Довести, що поворот площини на кут α навколо початку координат є лінійним перетворенням.

2.22. Довести, що проектування тривимірного простору на координатну вісь вектора $\overline{e}_1$ паралельно координатній площині векторів $\overline{e}_2, \overline{e}_3$ є лінійним перетворенням.

2.23. Довести, що проектування тривимірного простору на координатну площину векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ паралельно осі координат вектора $\overline{e}_3$ є лінійним перетворенням.

2.24. Довести, що ортогональне проектування тривимірного простору на вісь, яка утворює однакові кути з осями прямокутної системи координат, є лінійним перетворенням.

2.25. Довести, що диференціювання є лінійним оператором простору всіх многочленів степеня $\le n$ від одного невідомого.

2. Матриця лінійного оператора

Нехай L і L' відповідно n-вимірний і m-вимірний лінійні простори, $\hat{A}$ – лінійний оператор з L в L', тобто якщо $\overline{x}\in L$, а $\overline{x}'\in L'$, то

$$\overline{x}'=\hat{A}(\overline{x}). \tag{2.3}$$

Виберемо базиси $\{\bar{e}\}:\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n$ і $\{\bar{e}'\}:\bar{e}'_1,\bar{e}'_2,\ldots,\bar{e}'_m$ в просторах L і L'. Тоді

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{e}_i,\quad \bar{x}'=\sum_{i=1}^{m}\alpha'_i\bar{e}'_i\,. \tag{2.4}$$

Розглянемо задачу – знайти вираження координат образу $\bar{x}'$ через координати прообразу $\bar{x}$.

Згідно з (2.2) маємо

$$\bar{x}'=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\hat{A}(\bar{e}_i). \tag{2.5}$$

Нехай

$$\hat{A}(\bar{e}_i)=\sum_{j=1}^{m}a_{ji}\bar{e}'_j\quad (i=\overline{1,n}). \tag{2.6}$$

Підставляючи (2.6) в (2.5) та прирівнюючи коефіцієнти при $\bar{e}'_j$ $(j=\overline{1,m})$ в лівій та правій частинах, отримаємо

$$\alpha'_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\alpha_i\,. \tag{2.7}$$

Формули (2.7) є розв'язком поставленої вище задачі, тобто це формули перетворення координат елемента $\bar{x}$ при відображенні $\hat{A}$ простору L в L'. Запишемо їх у матричному вигляді

$$X'=A\cdot X, \tag{2.8}$$

де

$$A=\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{Vmatrix},\quad X=\begin{Vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdot\\ \alpha_n\end{Vmatrix},\quad X'=\begin{Vmatrix}\alpha'_1\\ \alpha'_2\\ \cdot\\ \alpha'_m\end{Vmatrix}.$$

Матриця A називається матрицею лінійного оператора $\hat{A}:L\to L'$.

Кожному лінійному оператору $\hat{A}:L\to L'$ (у вибраному базисі) відповідає матриця A, і, навпаки, кожна числова матриця (відповідних розмірів) є матрицею лінійного оператора. Стовпці матриці A є координатами образів базисних векторів.

Операторові $\hat{A}:L\to L$ відповідає квадратна матриця $A=\|a_{ij}\|_1^n$.

Отже, кожному лінійному оператору $\hat{A}$ в n-вимірному просторі у вибраному базисі відповідає деяка квадратна матриця A n-го порядку.

Справедливе і обернене твердження: кожній матриці А n -го порядку у заданому базисі відповідає деякий лінійний оператор $\hat{A}$.

Отже, встановлена взаємно однозначна відповідність між лінійними операторами в n-вимірному просторі і матрицями n-го порядку. Особливо необхідно звернути увагу на різницю між виразами $\bar{x}' = \hat{A}(\bar{x})$ і $X' = A \cdot X$. Перший з них – це символічний запис правила, згідно з яким елемент $\bar{x}$ перетворюється в елемент $\bar{x}'$ (незалежно від вибору базису), а другий встановлює відповідність між координатами елементів $\bar{x}$ і $\bar{x}'$ у вибраному базисі.

Висновок: у вибраному базисі оператору $\hat{A}$ відповідає лінійне перетворення $X' = A \cdot X$.

Приклад 6. Знайти матрицю, яка відповідає нульовому оператору $\hat{0}$.

◁ Нехай $\hat{0}: L \to L$, тобто $\hat{0}(\bar{x}) = \bar{0}$, де $\bar{x}$ – довільний елемент простору L.

Тоді для будь-якого базису $\{\bar{e}\}$ простору L маємо: $\hat{0}(\bar{e}_i) = \bar{0} (i = \overline{1,n})$, а тому матриця А нульового оператора $\hat{0}$ у будь-якому базисі є нульовою матрицею, тобто A=0. ▷

Для ілюстрації того, як вибір базису впливає на вигляд матриці лінійного оператора, розглянемо лінійний простір всіх функцій вигляду

$$\bar{x} = f(t) = ae^t + be^{-t}.$$

Оператор $\hat{A}$ задамо співвідношенням $\hat{A}(\bar{x}) = ae^t$.

Тоді в базисі $\bar{e}_1 = e^t, \bar{e}_2 = e^{-t}$ маємо

$$\hat{A}(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 = 1 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2, \qquad \hat{A}(\bar{e}_2) = \bar{0} = 0 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2,$$

тобто $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

Водночас в базисі

$$\bar{e}_1' = \operatorname{ch} t = \tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{1}{2}e^{-t}, \ \bar{e}_2' = \operatorname{sh} t = \tfrac{1}{2}e^t - \tfrac{1}{2}e^{-t},$$

$$\hat{A}(\bar{e}_1') = \tfrac{1}{2}e^t = \tfrac{1}{2}\bar{e}_1' + \tfrac{1}{2}\bar{e}_2', \ \hat{A}(\bar{e}_2') = \tfrac{1}{2}e^t = \tfrac{1}{2}\bar{e}_1' + \tfrac{1}{2}\bar{e}_2',$$

і, отже, $A' = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}$. ▷

Приклад 7. $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \hat{A}(\bar{x}) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$. Перевірити, чи оператор $\hat{A}$ – лінійний і знайти його матрицю в базисі $\bar{e}_1 = (1,0,0), \bar{e}_2 = (0,1,0), \bar{e}_3 = (0,0,1)$.

◁ Перевіримо, чи виконуються умови (2.1). Маємо

$\hat{A}(\bar{x} + \bar{y}) = (x_2 + y_2 + x_3 + y_3, 2x_1 + 2y_1 + x_3 + y_3, 3x_1 + 3y_1 - x_2 - y_2 + x_3 + y_3) =$

$(x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3) + (y_2 + y_3, 2y_1 + y_3, 3y_1 - y_2 + y_3) = \hat{A}(\bar{x}) + \hat{A}(\bar{y})$,

$\hat{A}(\lambda\bar{x}) = (\lambda x_2 + \lambda x_3, 2\lambda x_1 + \lambda x_3, 3\lambda x_1 - \lambda x_2 + \lambda x_3) = \lambda(x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3) =$

$= \lambda\hat{A}(\bar{x})$.

Отже, $\hat{A}$ – лінійний оператор.

Тоді $\hat{A}(\bar{e}_1) = \hat{A}(1,0,0) = (0,2,3) = 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$,

$\hat{A}(\bar{e}_2) = \hat{A}(0,1,0) = (1,0,-1) = \bar{e}_1 - \bar{e}_3$,

$\hat{A}(\bar{e}_3) = \hat{A}(0,0,1) = (1,1,1) = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$.

Враховуючи, що стовпці матриці A є координатами образів базисних векторів, маємо

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{Vmatrix}. \triangleright$$

Приклад 8. Знайти координати вектора $\bar{x}'$, де $\bar{x}' = \hat{A}(\bar{x})$, якщо $\bar{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$ і матриця оператора має вигляд $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$.

◁ Згідно з (2.8) маємо

$$\begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ 2x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 3x_3 \end{Vmatrix},$$

тобто $x_1' = x_1, x_2' = 2x_1 + 2x_2, x_3' = 3x_1 + 3x_3$. ▷

Приклад 9. Знайти лінійне перетворення, яке переводить вектори $\bar{a}_1 = (1,0,3)$, $\bar{a}_2 = (2,1,0)$ та $\bar{a}_3 = (0,0,1)$, що задані в канонічному базисі, відповідно у вектори $\bar{b}_1 = (2,2,1), \bar{b}_2 = (2,1,0)$ і $\bar{b}_3 = (1,2,3)$. Знайти матрицю цього перетворення.

◁ Нехай А – матриця перетворення , яке переводить вектори $\bar{a}_i$ в $\bar{b}_i$ (i=1,2.3).

Тоді

$$A\cdot\begin{Vmatrix}1\\0\\3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}2\\2\\1\end{Vmatrix}, A\cdot\begin{Vmatrix}2\\1\\0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}2\\1\\0\end{Vmatrix}, A\cdot\begin{Vmatrix}0\\0\\1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1\\2\\3\end{Vmatrix},$$

або, в матричній формі $A\cdot\begin{Vmatrix}1&2&0\\0&1&0\\3&0&1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}2&2&1\\2&1&2\\1&0&3\end{Vmatrix}$. Оскільки

$$\begin{vmatrix}1&0&3\\2&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

то

$$A=\begin{Vmatrix}2&2&1\\2&1&2\\1&0&3\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&2&0\\0&1&0\\3&0&1\end{Vmatrix}^{-1}=\begin{Vmatrix}-1&4&1\\-4&9&2\\-8&16&3\end{Vmatrix}. \triangleright$$

Приклад 10. Нехай дано простір усіх квадратних матриць порядку 2 з дійсними елементами і $\hat{A}$ – оператор множення всіх матриць простору справа на матрицю $\begin{Vmatrix}1&-1\\2&4\end{Vmatrix}$. Знайти матрицю оператора $\hat{A}$ в базисі $\overline{E}_1=\begin{Vmatrix}1&0\\0&0\end{Vmatrix}, \overline{E}_2=\begin{Vmatrix}0&1\\0&0\end{Vmatrix}, \overline{E}_3=\begin{Vmatrix}0&0\\1&0\end{Vmatrix}, \overline{E}_4=\begin{Vmatrix}0&0\\0&1\end{Vmatrix}$.

◁ Знайдемо дію оператора на базисні матриці

$$\hat{A}(\overline{E}_1)=\begin{Vmatrix}1&0\\0&0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&-1\\2&4\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1&-1\\0&0\end{Vmatrix}=1\cdot\overline{E}_1-1\cdot\overline{E}_2+0\cdot\overline{E}_3+0\cdot\overline{E}_4,$$

$$\hat{A}(\overline{E}_2)=\begin{Vmatrix}0&1\\0&0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&-1\\2&4\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}2&4\\0&0\end{Vmatrix}=2\cdot\overline{E}_1+4\cdot\overline{E}_2+0\cdot\overline{E}_3+0\cdot\overline{E}_4,$$

$$\hat{A}(\overline{E}_3)=\begin{Vmatrix}0&0\\1&0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&-1\\2&4\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0&0\\1&-1\end{Vmatrix}=0\cdot\overline{E}_1+0\cdot\overline{E}_2+1\cdot\overline{E}_3-1\cdot\overline{E}_4,$$

$$\hat{A}(\overline{E}_4)=\begin{Vmatrix}0&0\\0&1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&-1\\2&4\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0&0\\2&4\end{Vmatrix}=0\cdot\overline{E}_1+0\cdot\overline{E}_2+2\cdot\overline{E}_3+4\cdot\overline{E}_4.$$

Отже, оператор $\hat{A}$ в базисі $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \overline{E}_3, \overline{E}_4$ має матрицю

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{Vmatrix}. \rhd$$

Приклад 11. Нехай $\hat{A}$ – лінійний оператор, який кожному вектору $\overline{x}$ ставить у відповідність вектор $(\overline{x},\overline{e})\overline{e}$, де $\overline{e}$ – заданий одиничний вектор, що утворює з координатними осями відповідно кути α,β,γ. Знайти матрицю оператора $\hat{A}$ в прямокутному декартовому базисі $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

$\lhd$ $\hat{A}(\overline{x}) = (\overline{x},\overline{e})\overline{e}$. Довільний одиничний вектор $\overline{e}$ в базисі $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ має координати $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Тобто $\overline{e} = \cos\alpha\overline{i} + \cos\beta\overline{j} + \cos\gamma\overline{k}$. Тоді

$\hat{A}(\overline{i}) = (\overline{i},\overline{e})\overline{e} = \cos\alpha(\cos\alpha\overline{i} + \cos\beta\overline{j} + \cos\gamma\overline{k}) = \cos^2\alpha\overline{i} + \cos\alpha\cos\beta\overline{j} + \cos\alpha\cos\gamma\overline{k}$

$\hat{A}(\overline{j}) = (\overline{j},\overline{e})\overline{e} = \cos\beta(\cos\alpha\overline{i} + \cos\beta\overline{j} + \cos\gamma\overline{k}) = \cos\beta\cos\alpha\overline{i} + \cos^2\beta\overline{j} + \cos\beta\cos\gamma\overline{k}$

$\hat{A}(\overline{k}) = (\overline{k},\overline{e})\overline{e} = \cos\gamma(\cos\alpha\overline{i} + \cos\beta\overline{j} + \cos\gamma\overline{k}) = \cos\gamma\cos\alpha\overline{i} + \cos\gamma\cos\beta + \overline{j}\cos^2\gamma\overline{k}$.

Отже, в базисі $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ матриця оператора $\hat{A}$ має вигляд

$$A = \begin{Vmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\gamma \\ \cos\alpha\cos\beta & \cos^2\beta & \cos\beta\cos\gamma \\ \cos\alpha\cos\gamma & \cos\beta\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{Vmatrix}. \rhd$$

Приклад 12. Нехай оператор $\hat{A}$ кожній функції $p(t)$ із простору неперервних функцій ставить у відповідність $\int\limits_0^1 (t+\tau)p(\tau)d\tau$. Показати, що оператор $\hat{A}$ – лінійний і знайти його матрицю в базисі $1, t, t^2, t^3$.

$$\lhd \ \hat{A}(p(t)) = \int\limits_0^1 (t+\tau)p(\tau)d\tau.$$

Покажемо, що оператор $\hat{A}$ – лінійний. Використовуючи властивості визначеного інтеграла, маємо:

$$\hat{A}(p_1(t) + p(t)) = \int\limits_0^1 (t+\tau)(p_1(\tau) + p_2(\tau))d\tau = \int\limits_0^1 (t+\tau)p_1(\tau)d\tau + \int\limits_0^1 (t+\tau)p_2(\tau)d\tau =$$

$$= \hat{A}(p_1(t)) + \hat{A}(p_2(t));$$

$$\hat{A}(\alpha p(t)) = \int_0^1 (t+\tau)(\alpha p(\tau))d\tau = \alpha\int_0^1 (t+\tau)p(\tau)d\tau = \alpha\hat{A}(p(t)).$$

Отже, оператор $\hat{A}$ – лінійний. Знайдемо його матрицю:

$$\hat{A}(1) = \int_0^1 (t+\tau)\cdot 1d\tau = \left(t\tau + \frac{\tau^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot 1 + 1\cdot t + 0\cdot t^2 + 0\cdot t^3,$$

$$\hat{A}(t) = \int_0^1 (t+\tau)\cdot \tau d\tau = \int_0^1 (t\tau + \tau^2)d\tau = \left(t\frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{t}{2} + \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot t + 0\cdot t^2 + 0\cdot t^3;$$

$$\hat{A}(t^2) = \int_0^1 (t+\tau)\cdot \tau^2 d\tau = \int_0^1 (t\tau^2 + \tau^3)d\tau = \left(t\frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{t}{3} + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot t + 0\cdot t^2 + 0\cdot t^3;$$

$$\hat{A}(t^3) = \int_0^1 (t+\tau)\cdot \tau^3 d\tau = \int_0^1 (t\tau^3 + \tau^4)d\tau = \left(t\frac{\tau^4}{4} + \frac{\tau^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{t}{4} + \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot t + 0\cdot t^2 + 0\cdot t^3.$$

Отже, $A = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. ▷

Задачі

2.26. Знайти матрицю, яка відповідає одиничному оператору $\hat{E}$.

2.27. Знайти матрицю, яка відповідає оператору подібності.

В задачах 2.28–2.32 знайти матриці лінійних операторів в канонічному базисі $\bar{e}_1 = (1,0,0), \bar{e}_2 = (0,1,0), \bar{e}_3 = (0,0,1)$:

2.28. $\hat{A}(\bar{x}) = (x_1, x_3, x_2 - 2x_3)$. 2.29. $\hat{A}(\bar{x}) = (0, x_2 - x_3, 0)$.

2.30. $\hat{A}(\bar{x}) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$.

2.31. $\hat{A}(\bar{x}) = (x_1, x_2 + 3x_1, x_3)$. 2.32. $\hat{A}(\bar{x}) = (x_3, x_2, x_1 + 3x_2 - x_3)$.

В задачах 2.33–2.36 знайти лінійне перетворення тривимірного простору R^3, що переводить вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ відповідно у вектори $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$. Знайти матрицю цього перетворення в базисі, в якому задані координати всіх векторів:

2.33.
$\bar{a}_1 = (1,-1,4)$, $\bar{a}_2 = (0,3,-1)$, $\bar{a}_3 = (-1,3,-5)$, $\bar{b}_1 = (3,-8,5)$, $\bar{b}_2 = (6,-1,7)$, $\bar{b}_3 = (1,-2,-3)$.

2.34. $\bar{a}_1 = (1,2,3)$, $\bar{a}_2 = (1,1,2)$, $\bar{a}_3 = (3,1,1)$, $\bar{b}_1 = (-2,4,9)$, $\bar{b}_2 = (-1,2,6)$, $\bar{b}_3 = (2,-1,6)$.

2.35. $\bar{a}_1 = (-1,2,3)$, $\bar{a}_2 = (1,-2,-1)$, $\bar{a}_3 = (2,1,1)$, $\bar{b}_1 = (6,9,8)$, $\bar{b}_2 = (-4,-3,-6)$, $\bar{b}_3 = (5,8,6)$.

2.36. $\bar{a}_1 = (1,0,0)$, $\bar{a}_2 = (0,1,0)$, $\bar{a}_3 = (0,0,2)$, $\bar{b}_1 = (1,2,0)$, $\bar{b}_2 = (4,1,1)$, $\bar{b}_3 = (1,2,3)$.

В задачах 2.37–2.40 знайти координати вектора $\bar{x}'$, де $\bar{x}' = \hat{A}(\bar{x})$, якщо задана матриця A оператора $\hat{A}$ і $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$.

2.37. $A = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$.   2.38. $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

2.39. $A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.   2.40. $A = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

2.41. Нехай заданий простір квадратних матриць другого порядку з дійсними елементами. Знайти матрицю оператора $\hat{A}$-множення матриць простору зліва на матрицю $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$ в базисі

$$\bar{E}_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \bar{E}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \bar{E}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \ \bar{E}_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

2.42. Знайти матрицю лінійного оператора $\hat{A}(\bar{x}) = [\bar{a}, \bar{x}]$, де $\bar{a} = (1,1,1)$, в канонічному базисі.

2.43. Нехай лінійний оператор $\hat{A}$ – це поворот на кут α декартової системи координат (на площині) проти годинникової стрілки. Знайти матрицю оператора $\hat{A}$.

2.44. Нехай лінійний оператор $\hat{A}$ – проектування простору R^3 на координатну вісь вектора $\bar{e}_1$ паралельно координатній площині векторів $\bar{e}_2, \bar{e}_3$. Знайти матрицю A оператора $\hat{A}$.

2.45. Задане перетворення нерівномірного розтягу простору $x_1 = \alpha x, y_1 = \beta y, z_1 = \gamma z$, де $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Знайти матрицю цього перетворення. З'ясувати, як перетворюється при цьому сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

2.46. Знайти матрицю оператора диференціювання всіх многочленів степеня $\le n$ від одного невідомого в базисі :

а) $1, x, x^2, x^3$; б) $1, (x-a), \frac{(x-a)^2}{2}, \dots, \frac{(x-a)^n}{n!}$.

2.47. Як зміниться матриця лінійного оператора, якщо в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ поміняти місцями $\bar{e}_i$ та $\bar{e}_j$?

3. Дії над лінійними операторами

Нехай $\hat{A}$ і $\hat{B}$ – два лінійні оператори, які діють в просторі L.

1. **Рівність операторів**. Оператори $\hat{A}$ і $\hat{B}$ називаються рівними, що позначається $\hat{A} = \hat{B}$, якщо для будь-якого $\bar{x} \in L$ справедлива рівність

$$\hat{A}(\bar{x}) = \hat{B}(\bar{x}).$$

Якщо $A = \|a_{ij}\|_1^n$ і $B = \|b_{ij}\|_1^n$ – матриці, які відповідають лінійним операторам $\hat{A}$ і $\hat{B}$ в деякому базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ простору L, то $a_{ij} = b_{ij} (i, j = \overline{1, n})$, тобто рівним лінійним операторам відповідають в даному базисі однакові матриці. Очевидно, що справедливе і обернене твердження.

2. **Додавання операторів.** Сумою двох лінійних операторів $\hat{A}$ і $\hat{B}$ називається оператор $\hat{C}$, що позначається $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$, якщо для будь-якого $\bar{x} \in L$ справедливе співвідношення:

$$\hat{C}(\bar{x}) = (\hat{A} + \hat{B})(\bar{x}) = \hat{A}(\bar{x}) + \hat{B}(\bar{x}).$$

Перевірити, чи оператор $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$ є лінійним оператором, а його матриця $C = A + B$, тобто при додаванні лінійних операторів їх матриці додаються.

3. **Множення оператора на число.** Добутком оператора $\hat{A}$ на число λ називається оператор $\hat{B}$, що позначається $\hat{B} = \lambda\hat{A}$, якщо для будь-якого $\bar{x} \in L$ справедлива рівність

$$\hat{B}(\bar{x}) = \left(\lambda\hat{A}(\bar{x})\right).$$

Показати, що оператор $\hat{B}$ є лінійним, а його матриця має вигляд: $B = \lambda \cdot A$.

4. **Множення операторів.** Добутком лінійних операторів $\hat{A}$ та $\hat{B}$ називається оператор $\hat{C}$, що позначається $\hat{C} = \hat{A} \cdot \hat{B}$, якщо для будь-якого $\bar{x} \in L$ справедлива рівність

$$\hat{C}(\bar{x}) = \hat{A}\left(\hat{B}(\bar{x})\right),$$

тобто спершу елемент $\bar{x}$ перетворюється в елемент $\bar{y} = \hat{B}(\bar{x})$, а потім – в елемент $\bar{z} = \hat{A}(\bar{y})$.

Оператор $\hat{C}$ – лінійний, оскільки для довільних $\bar{x}_1 \in L, \bar{x}_2 \in L$ та довільного числа λ:

$$\hat{C}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \hat{A}\left(\hat{B}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\right) = \hat{A}\left(\hat{B}(\bar{x}_1) + \hat{B}(\bar{x}_2)\right) = \hat{A}\left(\hat{B}(\bar{x}_1)\right) + \hat{A}\left(\hat{B}(\bar{x}_2)\right) =$$
$$= \hat{C}(\bar{x}_1) + \hat{C}(\bar{x}_2)$$

і $$\hat{C}(\lambda\bar{x}_1) = \hat{A}\left(\hat{B}(\lambda\bar{x}_1)\right) = \hat{A}\left(\lambda\hat{B}(\bar{x}_1)\right) = \lambda\hat{A}\left(\hat{B}(\bar{x}_1)\right) = \lambda\hat{C}(\bar{x}_1).$$

Оператору $\hat{C}$ відповідає матриця C = A·B, тобто при множенні лінійних операторів відповідні їм матриці перемножуються.

Задачі

2.48. Довести, що введені над лінійними операторами операції мають такі властивості:

1) $\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A}$;
2) $\left(\hat{A} + \hat{B}\right) + \hat{C} = \hat{A} + \left(\hat{B} + \hat{C}\right)$;
3) $\hat{A} + \hat{0} = \hat{A}$;
4) $\hat{A} + (-1)\hat{A} = \hat{0}$;
5) $\lambda_1\left(\lambda_2\hat{A}\right) = (\lambda_1\lambda_2)\hat{A}$;
6) $1 \cdot \hat{A} = \hat{A}$;
7) $(\lambda_1 + \lambda_2)\hat{A} = \lambda_1\hat{A} + \lambda_2\hat{A}$;

8) $\lambda\left(\hat{A}+\hat{B}\right)=\lambda\hat{A}+\lambda\hat{B}$;

9) $\lambda\left(\hat{A}\hat{B}\right)=\left(\lambda\hat{A}\right)\hat{B}$;

10) $\left(\hat{A}\hat{B}\right)\hat{C}=\hat{A}\left(\hat{B}\hat{C}\right)$;

11) $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\hat{C}=\hat{A}\hat{C}+\hat{B}\hat{C}$;

12) $\hat{A}\left(\hat{B}+\hat{C}\right)=\hat{A}\hat{B}+\hat{A}\hat{C}$.

2.49. Довести, що множина лінійних операторів утворює лінійний простір.

5. Обернений оператор.

Оператор $\hat{B}$ називається оберненим щодо оператора $\hat{A}$, якщо $\hat{A}\hat{B}=\hat{B}\hat{A}=\hat{E}$. В цьому випадку записують: $\hat{B}=\hat{A}^{-1}$. З означення випливає: якщо $\bar{x}'=\hat{A}(\bar{x})$, то $\bar{x}=\hat{A}^{-1}(\bar{x}')$. Якщо оператор $\hat{A}$ є лінійним, то лінійним є і оператор $\hat{A}^{-1}$. Обернений оператор $\hat{A}^{-1}$ існує тоді і тільки тоді, коли $\det A\neq 0$, де A – матриця оператора $\hat{A}$. Оберненому операторові $\hat{A}^{-1}$ відповідає матриця A^{-1}, яка обернена до матриці A.

Приклад 13. Лінійні оператори $\hat{A}$ і $\hat{B}$ задані матрицями $A=\begin{Vmatrix}2 & 4\\ 3 & -2\end{Vmatrix}$, $B=\begin{Vmatrix}3 & -1\\ -2 & 4\end{Vmatrix}$. Знайти матрицю C оператора $\hat{C}=\hat{A}+\hat{B}$.

◁ Оскільки при додаванні лінійних операторів їх матриці додаються, то матриця C = A + B, тобто $C=\begin{Vmatrix}5 & 3\\ 1 & 2\end{Vmatrix}$. ▷

Приклад 14. Задано лінійні перетворення
$\begin{cases}x_1'=2x_1+x_2,\\ x_2'=3x_1-x_2,\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=x_1''-3x_2'',\\ x_2=2x_1''-4x_2''.\end{cases}$ Знайти матрицю перетворення $\hat{C}$, яке переводить вектор $\bar{x}''=\left(x_1'',x_2''\right)$ у вектор $\bar{x}'=\left(x_1',x_2'\right)$.

◁ Маємо: $\bar{x}'=\hat{A}(\bar{x}')$, $\bar{x}''=\hat{B}(\bar{x}'')$. Тому $\bar{x}'=\hat{A}\left(\hat{B}(\bar{x}'')\right)=\hat{A}\hat{B}(\bar{x}'')$. Матриці операторів $\hat{A}$ та $\hat{B}$ відповідно дорівнюють: $A=\begin{Vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{Vmatrix}$, $B=\begin{Vmatrix}1 & -3\\ 2 & -4\end{Vmatrix}$. Враховуючи, що оператор $\hat{C}=\hat{A}\cdot\hat{B}$, то його матриця

$$C = A\cdot B = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & -10 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}. \triangleright$$

Приклад 15. Показати, що лінійне перетворення $x_1' = -x_1 + 3x_2 - x_3$, $x_2' = -3x_1 + 5x_2 - x_3$, $x_3' = -3x_1 + 3x_2 + x_3$ невироджене і знайти обернене перетворення.

$\triangleleft$ Нехай $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \bar{x}' = (x_1', x_2', x_3')$. Тоді $\bar{x}' = \hat{A}(\bar{x})$, де матриця перетворення $A = \begin{Vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$.

Оскільки визначник матриці не дорівнює нулеві (перевірити), то існує обернене перетворення $\hat{A}^{-1}$, матриця якого $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{Vmatrix}$.

Отже, $\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = A^{-1}\cdot\begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix}$, тобто

$$x_1 = 2x_1' - \tfrac{3}{2}x_2' + \tfrac{1}{2}x_3', \quad x_2 = \tfrac{3}{2}x_1' - x_2' + \tfrac{1}{2}x_3', \quad x_3 = \tfrac{3}{2}x_1' - \tfrac{3}{2}x_2' + x_3'. \triangleright$$

Приклад 16. Перевірити, чи буде оператор $\hat{A}$ невиродженим і знайти для нього обернений, якщо:

а) $\hat{A}(\bar{x}) = [\bar{e}, \bar{x}]$, де $\bar{e}$ – фіксований одиничний вектор, $\bar{x} = (x, y, z)$ – довільний, що задані в декартовому базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$;

б) $\hat{A}(\bar{x}) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3, -3x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_3)$.

$\triangleleft$ а) Знайдемо матрицю оператора $\hat{A}$ в канонічному базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Нехай $\bar{e} = \cos\alpha\bar{i} + \cos\beta\bar{j} + \cos\gamma\bar{k}$. Тоді

$$\hat{A}(\bar{i}) = [\bar{e}, \bar{i}] = \begin{Vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \cos\gamma\bar{j} - \cos\beta\bar{k}.$$

Аналогічно

$$\hat{A}(\bar{j}) = [\bar{e}, \bar{j}] = -\cos\gamma\bar{i} + \cos\alpha\bar{k},$$
$$\hat{A}(\bar{k}) = [\bar{e}, \bar{k}] = \cos\beta\bar{i} - \cos\alpha\bar{j}.$$

Отже, матриця оператора $\hat{A}$:

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & -\cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 0 & -\cos\alpha \\ -\cos\beta & \cos\alpha & 0 \end{Vmatrix},$$

$\det A = 0$, а це означає, що оператор $\hat{A}$ не має оберненого.

б) Знайдемо матрицю оператора $\hat{A}$ в декартовому базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

$$\hat{A}(\bar{i}) = (1,0,2),\ \hat{A}(\bar{j}) = (2,-3,0),\ \hat{A}(\bar{k}) = (2,1,3).$$

Отже, $A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$. Оскільки $\det A = 7 \neq 0$, то оператор $\hat{A}$ є невироджений і для нього існує обернений $\hat{A}^{-1}$, матриця якого

$$A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{Vmatrix} -9 & -6 & 8 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & 4 & -3 \end{Vmatrix}.$$

Отже, $\hat{A}^{-1}(\bar{x}) = \frac{1}{7}(-9x_1 - 6x_2 + 8x_3, 2x_1 - x_2 - x_3, 6x_1 + 4x_2 - 3x_3)$. ⊳

Приклад 17. В просторі диференційованих на всій осі функцій задані: оператор диференціювання $\hat{D} = \frac{d}{dt}$ і оператор $\hat{A}$ множення на функцію $e^{\lambda t}$. Перевірити, чи справджується рівність $\hat{D}\hat{A} - \hat{A}\hat{D} = \lambda\hat{A}$.

⊲ Нехай p(t) – довільна функція із простору функцій, диференційованих на всій осі.

Тоді

$$\hat{D}\hat{A}p(t) = \hat{D}\left(e^{\lambda t}p(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}p(t)\right) = \lambda e^{\lambda t}p(t) + e^{\lambda t}\frac{d}{dt}p(t), \hat{D}\hat{A}(p(t)) = e^{\lambda t}\frac{d}{dt}(p(t)),$$

і $\left(\hat{D}\hat{A} - \hat{A}\hat{D}\right)p(t) = \lambda e^{\lambda t}p(t) + e^{\lambda t}\frac{d}{dt}p(t) - e^{\lambda t}\frac{d}{dt}p(t) = \lambda e^{\lambda t}p(t) == \lambda\hat{A}\left(p(t)\right)$. ⊳

Приклад 18. В просторі R^3 задані два лінійні оператори $\hat{A}$ і $\hat{B}$. Знайти матрицю C лінійного оператора $\hat{C} = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ і його явний вигляд в канонічному базисі, якщо

$$\hat{A}(\bar{x}) = \left(2x_2,\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3,\ 4x_1 - x_2 + 5x_3\right),$$

$$\hat{B}(\bar{x}) = \left(-3x_1 + x_3,\ 2x_2 + x_3,\ -x_2 + 3x_3\right).$$

⊲ Оскільки

$\hat{A}(\bar{i}) = (0,-2,4)$, $\hat{A}(\bar{j}) = (2,3,-1)$, $\hat{A}(\bar{k}) = (0,2,5)$,

$\hat{B}(\bar{i}) = (-3,0,0)$, $\hat{B}(\bar{j}) = (0,2,-1)$, $\hat{B}(\bar{k}) = (1,1,3)$,

то $A = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$.

$$AB = \begin{Vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \\ -12 & -7 & 18 \end{Vmatrix}; \quad BA = \begin{Vmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 0 & 5 & 9 \\ 14 & -6 & 13 \end{Vmatrix};$$

$$C = AB - BA = \begin{Vmatrix} -4 & 11 & -3 \\ 6 & -1 & -2 \\ -26 & -1 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Згідно з означенням матриці лінійного оператора її стовпчики є координатами образів базисних векторів, тобто $\hat{C}(\bar{i}) = (-4,6,-26)$, $\hat{C}(\bar{j}) = (11,-1,-1)$, $\hat{C}(\bar{k}) = (-3,-2,5)$.

Звідси знаходимо, що

$\hat{C}(\bar{x}) = \hat{C}(x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}) = x_1\hat{C}(\bar{i}) + x_2\hat{C}(\bar{j}) + x_3\hat{C}(\bar{k}) =$

$(-4x_1 + 11x_2 - 3x_3, 6x_1 - x_2 - 2x_3, -26x_1 - x_2 + 5x_3)$. ▷

Задачі

2.50. Лінійні оператори $\hat{A}$ і $\hat{B}$ задані матрицями $A = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{Vmatrix}$. Знайти матрицю C оператора $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$.

2.51. Дано лінійні перетворення $\bar{u} = A \cdot \bar{v}$, $\bar{v} = B \cdot \bar{w}$, де $A = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{Vmatrix}$. Знайти матрицю C перетворення $\hat{C}$, що переводить елемент $\bar{w}$ в $\bar{u}$.

2.52. Знайти матрицю лінійного оператора, що повертає площину навколо початку координат спочатку на кут φ, а потім на кут ψ.

2.53. Знайти лінійне перетворення, що відповідає матриці $A=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{Vmatrix}$ і з'ясувати, як змінюються координати перетворюваного вектора.

2.54. Знайти добуток таких лінійних перетворень:

$u_1 = 2v_1 - v_2 + 3v_3, v_1 = 3w_1 - 2w_2 + w_3$,

$u_2 = 3v_1 - 2v_2 + v_3, v_2 = 2w_1 - w_2 + 3w_3$,

$u_3 = 4v_1 - 3v_2 - 2v_3, v_3 = w_1 - w_2 - 3w_3$.

2.55. Знайти матрицю перетворення, оберненого до перетворення $U = A \cdot V$, де $A=\begin{Vmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{Vmatrix}$.

2.56. Знайти обернене перетворення до перетворення $u_1 = v_2$, $u_2 = -4v_1 + 4v_2$, $u_3 = -2v_1 + v_2 + 2v_3$.

2.57. Нехай $p(t) = a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0$ – деякий многочлен і $\hat{A}$ – лінійний оператор. Розглянемо оператор $p(\hat{A}) = a_{n-1}\hat{A}^{n-1} + ... + a_1\hat{A} + a_0\hat{E}$. Знайти матрицю оператора $p(\hat{A})$, якщо $p(t) = 3t^2 - 2t + 5$, а оператор $\hat{A}$ заданий матрицею $A=\begin{Vmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{Vmatrix}$.

В задачах 2.58 – 2.60 в просторі R^3 задані два лінійні оператори $\hat{A}$ і $\hat{B}$. Знайти матрицю C лінійного оператора $\hat{C} = \hat{A} \cdot \hat{B} - \hat{B} \cdot \hat{A}$ і явний вигляд $\hat{C}(\bar{x})$ в канонічному базисі:

2.58. $\hat{A}(\bar{x}) = (7x_1 + 4x_3, 4x_2 - 9x_3, 3x_1 + x_2)$,

$\hat{B}(\bar{x}) = (x_2 - 6x_3, 3x_1 + 7x_3, x_1 + x_2 - x_3)$.

2.59. $\hat{A}(\bar{x}) = (2x_1 - x_2 + 5x_3, x_1 + 4x_2 - x_3, 3x_1 - 5x_2 + 2x_3)$,

$\hat{B}(\bar{x}) = (x_1 + 4x_2 + 3x_3, 2x_1 + x_3, 3x_2 - x_3)$.

2.60. $\hat{A}(\bar{x}) = (3x_1 + x_2 - 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + 4x_3, -3x_1 + 5x_2 - x_3)$,

$\hat{B}(\bar{x}) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_2 + 2x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3)$.

В задачах 2.61– 2.67 перевірити, чи буде оператор $\hat{A}$ невиродженим і якщо так, то знайти обернений оператор $\hat{A}^{-1}$:

2.61. $\hat{A}(\bar{x}) = \lambda \cdot \bar{x}$, λ- фіксоване число.

2.62. $\hat{A}(\bar{x}) = (\bar{x}, \bar{e})\bar{e}$, $\bar{e}$ – одиничний вектор.

2.63. $\hat{A}(\bar{x}) = 2z\bar{i} + (x - z)\bar{j} + (2x + 3z)\bar{k}$.

2.64. $\hat{A}(\bar{x}) = (y + z)\bar{i} + (2x + z)\bar{j} + (3x - y + z)\bar{k}$.

2.65. $\hat{A}(\bar{x}) = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$.

2.66. $\hat{A}(\bar{x}) = (x_2 + 2x_3, -x_2, 2x_2 - x_3)$.

2.67. $\hat{A}(\bar{x}) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + x_3)$.

4. Перетворення матриці лінійного оператора при переході до нового базису. Перетворення координат

Відомо, що координати елемента залежать від вибраного базису. З'ясуємо, як зв'язані координати одного і того самого елемента в різних базисах.

Нехай в n-вимірному лінійному просторі вибрані два базиси: $\{\bar{e}\} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ – назвемо його старим, і $\{\bar{e}'\} = (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \ldots \bar{e}'_n)$, який назвемо новим.

Нехай $\hat{H}$ – оператор, який переводить базис $\{\bar{e}\}$ в базис $\{\bar{e}'\}$, тобто

$$\bar{e}'_k = \hat{H}(\bar{e}_k), k = (\overline{1, n}). \tag{2.9}$$

Оператор $\hat{H}$ – невироджений, отже, йому відповідає невироджена матриця $H = \left\| h_{ij} \right\|_1^n$, що називається матрицею переходу від старого базису $\{\bar{e}\}$ до нового базису $\{\bar{e}'\}$.

Розкладемо елемент $\bar{x}$ за старим і новим базисами:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i; \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \bar{e}'.$$

Враховуючи співвідношення (2.9), отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \hat{H}(\bar{e}_i),$$

або, в матричному записі

$$X = HX', \tag{2.10}$$

де $X=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix}$, $X'=\begin{Vmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{Vmatrix}$, $H=\begin{Vmatrix} h_{11} & . & . & h_{1n} \\ . & . & . & . \\ h_{n1} & . & . & h_{nn} \end{Vmatrix}$.

Формули (2.10) виражають старі координати елемента $\bar{x}$ через нові. Оскільки матриця H – невироджена, то з (2.10) маємо:

$$X' = H^{-1}X. \tag{2.11}$$

Формула (2.11) виражає нові координати елемента $\bar{x}$ через старі.

Нехай L_n – n-вимірний лінійний простір, $\hat{A}: L_n \to L_n$; $\{\bar{e}\}$ та $\{\bar{e}'\}$ – два базиси в L_n. Нехай A – матриця лінійного оператора $\hat{A}$ в базисі $\{\bar{e}\}$, а A' – в базисі $\{\bar{e}'\}$. Якщо матриця $H = \|h_{ki}\|_1^n$ – матриця переходу від базису $\{\bar{e}\}$ до базису $\{\bar{e}'\}$, тобто

$$\bar{e}'_i = \sum_{i=1}^{n} h_{ik}\bar{e}_i, \quad k = \left(\overline{1,n}\right), \tag{2.12}$$

то матриці A та A' зв'язані співвідношенням

$$A' = H^{-1}AH. \tag{2.13}$$

Приклад 19. Заданий двовимірний простір функцій вигляду $f(t) = ae^t + be^{-t}$, а також базиси $\{\bar{e}\} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, де $\bar{e}_1 = e^t, \bar{e}_2 = e^{-t}$, та $\{\bar{e}'\} = (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2)$, де $\bar{e}'_1 = \operatorname{ch}t, \bar{e}'_2 = \operatorname{sh}t$. Знайти координати елемента $f(t)$ в базисах $\{\bar{e}\}$ та $\{\bar{e}'\}$.

◁ Маємо

$$\bar{e}'_1 = \operatorname{ch}t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{1}{2}e^{-t} = \tfrac{1}{2}\bar{e}_1 + \tfrac{1}{2}\bar{e}_2,$$

$$\bar{e}'_2 = \operatorname{sh}t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \tfrac{1}{2}e^t - \tfrac{1}{2}e^{-t} = \tfrac{1}{2}\bar{e}_1 - \tfrac{1}{2}\bar{e}_2.$$

Звідси $H = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix}$, $H^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$. ▷

Тому координати елемента $f(t)$ в старому та новому базисах зв'язані співвідношенням: $\begin{Vmatrix} a \\ b \end{Vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a' \\ b' \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} a' \\ b' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a \\ b \end{Vmatrix}$.

Приклад 20. В базисі $\bar{e}_1=(1,0)$, $\bar{e}_2'=(0,1)$ на площині Oxy матриця $A=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}$ задає оператор $\hat{A}$ дзеркального відображення відносно прямої y=x. Знайти матрицю A' оператора $\hat{A}$ в базисі $\bar{e}_1'=(2,-1), \bar{e}_2'=(-3,2)$.

◁ Згідно з (2.13) матриця $A'=H^{-1}AH$, де H -матриця переходу від базису $\{\bar{e}\}$ до базису $\{\bar{e}'\}$. Елементами матриці H є координати базисних векторів $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$, записаних у стовпцях, тобто $H=\begin{Vmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{Vmatrix}$. Тоді $H^{-1}=\begin{Vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{Vmatrix}$ і $A'=\begin{Vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}4 & -5\\ 3 & -4\end{Vmatrix}$. ▷

Приклад 21. Оператору $\hat{A}$ в базисі $\{\bar{e}\}=(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ відповідає матриця $A=\begin{Vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{Vmatrix}$. Знайти матрицю цього оператора в базисі $\{\bar{e}'\}=(\bar{e}_1',\bar{e}_2',\bar{e}_3')$, де $\bar{e}_1'=\bar{e}_1+\bar{e}_2$, $\bar{e}_2'=\bar{e}_3$, $\bar{e}_3'=\bar{e}_1-\bar{e}_3$.

◁ Знайдемо матрицю переходу від базису $\{\bar{e}\}$ до базису $\{\bar{e}'\}$. Вектори $\bar{e}_1',\bar{e}_2',\bar{e}_3'$ виражаються через вектори $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$, тому $\bar{e}_1'=(1,1,0), \bar{e}_2'=(0,0,1)$, $\bar{e}_3'=(1,0,-1)$.

Оскільки стовпчики матриці H – це координати векторів $\bar{e}_1',\bar{e}_2',\bar{e}_3'$, то $H=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{Vmatrix}$, $\det H=1$, $H^{-1}=\begin{Vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{Vmatrix}$.

Тоді матриця оператора $\hat{A}$ в базисі $\{e'\}$ має вигляд $A'=H^{-1}AH$, тобто

$$A'=\begin{Vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}3 & 2 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{Vmatrix}. \triangleright$$

Приклад 22. В просторі L_2 оператор $\hat{A}$ в базисі $\{\bar{e}'\}=(\bar{e}_1',\bar{e}_2')$, де $\bar{e}_1'=\bar{e}_1$, $\bar{e}_2'=\bar{e}_1-\bar{e}_2$ має матрицю $A'=\begin{Vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{Vmatrix}$. Оператор $\hat{B}$ в базисі

$\{\bar{e}''\} = (\bar{e}_1'', \bar{e}_2'')$, де $\bar{e}_1'' = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{e}_2'' = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$ має матрицю $B'' = \begin{Vmatrix} 0 & 6 \\ 5 & -10 \end{Vmatrix}$.

Знайти матрицю оператора $\hat{C} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}$ в базисі $\{\bar{e}''\}$.

◁ Знайдемо матрицю A'' оператора $\hat{A}$ в базисі $\{\bar{e}''\}$. Для цього знайдемо матрицю переходу $H = \begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{Vmatrix}$ від базису $\{\bar{e}'\}$ до базису $\{\bar{e}''\}$. Виразимо вектори $\bar{e}_1''$, $\bar{e}_2''$ через вектори $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$: $\bar{e}_1'' = h_{11}\bar{e}_1' + h_{21}\bar{e}_2'$, $\bar{e}_2'' = h_{12}\bar{e}_1' + h_{22}\bar{e}_2'$.

Оскільки $\bar{e}_1' = \bar{e}_1, \bar{e}_2' = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$, то $\bar{e}_1 = \bar{e}_1', \bar{e}_2 = \bar{e}_1' - \bar{e}_2'$.

$$\bar{e}_1'' = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 = \bar{e}_1' + \bar{e}_1' - \bar{e}_2' = 2\bar{e}_1' - \bar{e}_2',$$

$$\bar{e}_2'' = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 = \bar{e}_1' - 2(\bar{e}_1' - \bar{e}_2') = -\bar{e}_1' + 2\bar{e}_2'.$$

Отже,

$$h_{11} = 2, h_{21} = -1, h_{12} = -1, h_{22} = 2,\ H = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}, \det H = 3,\ H^{-1} = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Матриці оператора $\hat{A}$ в базисі $\{\bar{e}'\} - A'$ і A'' – в базисі $\{\bar{e}''\}$ зв'язані співвідношенням: $A'' = H^{-1}A'H$, тобто

$$A'' = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Тепер матриці операторів $\hat{A}$ і $\hat{B}$ задані в одному базисі $\{\bar{e}''\}$, тому матриця C'' оператора $\hat{C} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}$ в базисі $\{\bar{e}''\}$:

$$C'' = A''B'' + B'' = \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 6 \\ 5 & -10 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 6 \\ 5 & -10 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -5 & 34 \\ 15 & -24 \end{Vmatrix}. \ \triangleright$$

Приклад 23. Знайти формули перетворення координат при переході від базису $\{\bar{e}\} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ до базису $\{\bar{e}'\} = (\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3')$, якщо: $\bar{e}_1 = (1,0,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0)$, $\bar{e}_3 = (0,0,1)$; $\bar{e}_1' = (2,-1,0)$, $\bar{e}_2' = (1,-1,1)$, $\bar{e}_3' = (1,2,-4)$.

◁ Оскільки: $\bar{e}_1' = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$, $\bar{e}_2' = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{e}_3' = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 4\bar{e}_3$, то матриця переходу H від базису $\{e\}$ до $\{e'\}$ має вигляд:

$$H = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{Vmatrix}, \det H = -1.$$

Згідно з формулою (2.11) зв'язок між старими і новими координатами $X' = H^{-1}X$, де $H^{-1} = -\begin{Vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -4 & -8 & -5 \\ -1 & -2 & -1 \end{Vmatrix}$, тому:

$$\begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix} = -\begin{Vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -4 & -8 & -5 \\ -1 & -2 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix},$$ звідси

$$x_1' = -(2x_1 + 5x_2 + 3x_3),$$
$$x_2' = 4x_1 + 8x_2 + 5x_3,$$
$$x_3' = x_1 + 2x_2 + x_3. \triangleright$$

Задачі

2.68. Лінійний оператор $\hat{A}$ в базисі $\{\bar{e}\} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ має матрицю $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$. Знайти матрицю A' цього оператора в базисі $\{\bar{e}'\} = (\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3')$, якщо:

а) $\bar{e}_1' = \bar{e}_1, \bar{e}_2' = \bar{e}_3, \bar{e}_3' = \bar{e}_2$;

б) $\bar{e}_1' = \bar{e}_1, \bar{e}_2' = \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_3' = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$.

2.69. Лінійний оператор $\hat{A}$ в базисі $\{\bar{e}\} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, де $\bar{e}_1 = (3,7), \bar{e}_2 = (2,5)$ має матрицю $A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$. Знайти його матрицю A' в базисі $\{e'\} = (\bar{e}_1', \bar{e}_2')$, де $\bar{e}_1' = (1,2), \bar{e}_2' = (-3,-5)$.

2.70. Задано матрицю A оператора $\hat{A}$ в базисі $(\bar{i}, \bar{j})$. Знайти матрицю A' оператора $\hat{A}$ в базисі $\{\bar{e}\} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, якщо:

а) $A = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \bar{e}_1 = \bar{i} + \bar{j}, \bar{e}_2 = \bar{i} - \bar{j}$;

б) $A = \begin{Vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix}, \bar{e}_1 = \bar{i}, \bar{e}_2 = 2\bar{i} + \bar{j}$.

2.71. Задано матрицю A оператора $\hat{A}$ в базисі $(\bar{i},\bar{j},\bar{k})$. Знайти матрицю A' оператора $\hat{A}$ в базисі $\{\bar{e}\}=(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$, якщо:

а) $A=\begin{Vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{Vmatrix}, \bar{e}_1=\bar{i}, \bar{e}_2=\bar{k}, \bar{e}_3=\bar{j}$;

б) $A=\begin{Vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{Vmatrix}, \bar{e}_1=\bar{i}+\bar{j}, \bar{e}_2=2\bar{k}, \bar{e}_3=\bar{i}-\bar{k}$.

2.72. Матриця лінійного оператора $\hat{A}$ в базисі $\{\bar{e}\}=(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3,\bar{e}_4)$ дорівнює $A=\begin{Vmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{Vmatrix}$. Знайти матрицю A' цього оператора в базисі $\{\bar{e}'\}=(\bar{e}_1',\bar{e}_2',\bar{e}_3',\bar{e}_4')$, якщо:

а) $\bar{e}_1'=\bar{e}_1, \bar{e}_2'=\bar{e}_3, \bar{e}_3'=\bar{e}_2, \bar{e}_4'=\bar{e}_4$;

б) $\bar{e}_1'=\bar{e}_1, \bar{e}_2'=\bar{e}_1+\bar{e}_2, \bar{e}_3'=\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3, \bar{e}_4'=\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3+\bar{e}_4$.

2.73. Знайти формули перетворення координат при переході від базису $\{\bar{e}\}=(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3,\bar{e}_4)$ до базису $\{\bar{e}'\}=(\bar{e}_1',\bar{e}_2',\bar{e}_3',\bar{e}_4')$, якщо:

а) $\begin{matrix}\bar{e}_1=(1,0,0,0), \bar{e}_1'=(1,1,0,0),\\ \bar{e}_2=(0,1,0,0), \bar{e}_2'=(1,0,1,0),\\ \bar{e}_3=(0,0,1,0), \bar{e}_3'=(1,0,0,1),\\ \bar{e}_3=(0,0,0,1), \bar{e}_4'=(1,1,1,1);\end{matrix}$

б) $\begin{matrix}\bar{e}_1=(1,2,-1,0), \bar{e}_1'=(2,1,0,1),\\ \bar{e}_2=(1,-1,1,1), \bar{e}_2'=(0,1,2,2),\\ \bar{e}_3=(-1,2,1,1), \bar{e}_3'=(-2,1,1,2),\\ \bar{e}_3=(-1,-1,0,1), \bar{e}_4'=(1,3,1,2).\end{matrix}$

2.74. В просторі L_2 оператор $\hat{A}$ в базисі $\{\bar{e}'\}=(\bar{e}_1',\bar{e}_2')$, де $\bar{e}_1'=\bar{e}_1+2\bar{e}_2, \bar{e}_2'=2\bar{e}_1+3\bar{e}_2$ має матрицю $A'=\begin{Vmatrix}3 & 5\\ 4 & 3\end{Vmatrix}$. Оператор $\hat{B}$ в базисі $\{\bar{e}''\}=(\bar{e}_1'',\bar{e}_2'')$, де $\bar{e}_1''=3\bar{e}_1+\bar{e}_2, \bar{e}_2''=4\bar{e}_1+2\bar{e}_2$ має матрицю $B''=\begin{Vmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{Vmatrix}$.

Знайти:

а) матрицю C'' оператора $\hat{C}=\hat{A}+\hat{B}$ в базисі $\{\bar{e}''\}$;

б) матрицю C' оператора $\hat{C}=\hat{A}+\frac{1}{2}\hat{B}$ в базисі $\{\bar{e}'\}$.

2.75. Оператор $\hat{A}$ в базисі $\{\bar{e}'\} = (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2)$, де $\bar{e}'_1 = (-3,7), \bar{e}'_2 = (-1,2)$ має матрицю $A' = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{Vmatrix}$, а оператор $\hat{B}$ в базисі $\{\bar{e}''\} = (\bar{e}''_1, \bar{e}''_2)$, де $\bar{e}''_1 = (1,-1)$, $\bar{e}''_2 = (4,-5)$ має матрицю $B'' = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{Vmatrix}$. Знайти матрицю C оператора $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ в тому ж базисі, в якому задано координати всіх векторів.

2.76. Нехай лінійний оператор $\hat{A}$ простору R^n переводить лінійно-незалежні вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ відповідно у вектори $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n$. Показати, що матрицю A_e цього оператора в деякому базисі $\{\bar{e}\} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ можна знайти за формулою $A_e = BA^{-1}$, де стовпці матриць A та B складаються з координат векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ та $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n$.

5. Матриця переходу від одного ортонормованого базису до іншого ортонормованого базису. Спряжені оператори

Нехай E_n – n-вимірний евклідовий простір; $\{\bar{e}\} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ та $\{\bar{e}'\} = (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \ldots, \bar{e}'_n)$ – ортонормовані базиси; $\hat{H}$ – лінійний оператор, який переводить ортонормований базис $\{\bar{e}\}$ в ортонормований базис $\{\bar{e}'\}$ того самого простору E_n; H – матриця лінійного оператора $\hat{H}: E_n \to E_n$. Тоді матриця H має таку властивість $H \cdot H^T = H^T \cdot H = E$, тобто $H^T = H^{-1}$. Така матриця H називається ортогональною.

З означення ортогональної матриці випливає, що вона невироджена, бо існує обернена до неї матриця, і, оскільки $\det H^T = \det H$, а $\det H^{-1} = \dfrac{1}{\det H}$, то визначник ортогональної матриці $\det H = \pm 1$.

Означення 1. Лінійне перетворення $\hat{A}: E_n \to E_n$ називається ортогональним, якщо його матриця в довільному ортонормованому базисі є ортогональною.

Означення 2. Лінійний оператор $\hat{A}^*: E_n \to E_n$ називається спряженим до оператора $\hat{A}$, якщо для довільних $\bar{x}$ та $\bar{y}$ справедливе співвідношення

$$\left(\hat{A}(\bar{x}),\bar{y}\right)=\left(\bar{x},\hat{A}^{*}(\bar{y})\right). \tag{2.14}$$

Для кожного оператора $\hat{A}$ існує єдиний спряжений оператор $\hat{A}^{*}$.

Якщо $A=\left\|a_{ij}\right\|_1^n$ матриця оператора $\hat{A}$ в ортонормованому базисі, то матрицею спряженого оператора $\hat{A}^{*}$ є матриця $A^{*}=\left\|a^{*}_{ij}\right\|_1^n$, де $a^{*}_{ij}=a_{ji}$, тобто

$$A^{*}=A^{T}. \tag{2.15}$$

Приклад 24. Знайти матрицю лінійного перетворення, яке здійснює поворот на кут α декартової системи координат (на площині) проти годинникової стрілки.

◁ Нехай E_2 – двовимірний евклідовий простір, H – матриця лінійного оператора $\hat{A}:E_2\to E_2,\{\bar{e}\}=(\vec{i},\vec{j})$ та $\{\bar{e}'\}=(\vec{i}',\vec{j}')$ – два ортонормовані базиси.

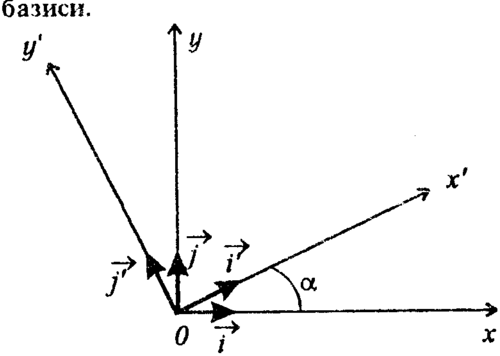


Рис. 18.

Розкладемо новий базис по старому: $\vec{i}'=h_{11}\vec{i}+h_{21}\vec{j},\ \vec{j}'=h_{12}\vec{i}+h_{22}\vec{j}$. Тоді

$\left(\vec{i}',\vec{i}\right)=\left(h_{11}\vec{i}+h_{21}\vec{j},\vec{i}\right)=h_{11}\left(\vec{i},\vec{i}\right)+h_{21}\left(\vec{j},\vec{i}\right)=h_{11}$.

З іншого боку, $\left(\vec{i}',\vec{i}\right)=\left|\vec{i}'\right|\cdot\left|\vec{i}\right|\cos\alpha=\cos\alpha$, тобто $h_{11}=\cos\alpha$.

Аналогічно отримаємо:

$\left(\vec{i}',\vec{j}\right)=h_{21}=\sin\alpha,\left(\vec{j}',\vec{i}\right)=h_{12}=-\sin\alpha,\left(\vec{j}',\vec{j}\right)=h_{22}=\cos\alpha$ (перевірити).

Маємо $H=\begin{Vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{Vmatrix}$.

Знайдемо H^{-1}. Визначник матриці H $\det H = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Тоді $H^{-1} = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix} = H^T$.

Отже, матриця H лінійного перетворення, яке здійснює поворот декартової системи координат навколо фіксованої точки, є ортогональним перетворенням. ▷

Приклад 25. Лінійний оператор $\hat{A}$ в просторі R^3 переводить вектори $\bar{e}_1 = (1,0,0), \bar{e}_2 = (0,1,0), \bar{e}_3 = (0,0,1)$ відповідно у $e_1' = (0,1,0), e_2' = (0,0,1)$, $e_3' = (1,0,0)$. Чи буде оператор $\hat{A}$ ортогональним?

◁ Матриця H оператора $\hat{A}$ має вигляд $H = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. Визначник матриці H дорівнює одиниці. Обернена матриця H^{-1} і транспонована H^T: $H^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $H^T = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, тобто $H^{-1} = H^T$. Отже, оператор $\hat{A}$ – ортогональний. ▷

Приклад 26. Лінійний оператор $\hat{A}: E_3 \to E_3$ в базисі $\{\bar{e}'\} = (\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3')$ заданий матрицею $A' = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{Vmatrix}$. Відомо, що $e_1' = e_1 + 2e_2 + e_3$, $\bar{e}_2' = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3, \bar{e}_3' = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$, де базис $\{\bar{e}\} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ – ортонормований Знайти матрицю A^* спряженого оператора $\hat{A}^*$ в базисі $\{\bar{e}'\}$.

◁ Оскільки базис $\{\bar{e}'\}$ не ортонормований (перевірте), то, щоб використати формулу (2.15), потрібно знайти матрицю A оператора $\hat{A}$ в ортонормованому базисі $\{\bar{e}\}$. Враховуючи співвідношення (2.13), маємо $A = HA'H^{-1}$, де H – матриця переходу від базису $\{\bar{e}\}$ до базису $\{\bar{e}'\}$. Матриця $H = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$, $H^{-1} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$.

Отже, $A = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 6 & -4 & 6 \\ 6 & -5 & 5 \end{Vmatrix}$,

тоді $A^* = A^T = \begin{Vmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -4 & -5 \\ 7 & 6 & 5 \end{Vmatrix}$.

Отже, матриця $A^{*'}$ оператора $\hat{A}^*$ в базисі $\{\bar{e}'\}$:

$$A^{*'} = H^{-1} \cdot A^* \cdot H = \begin{Vmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{Vmatrix}. \triangleright$$

Приклад 27. Знайти матрицю A^* лінійного оператора $\hat{A}^*$, який спряжений до оператора $\hat{A}$ в ортонормованому базисі $\{\bar{e}\} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, якщо оператор $\hat{A}$ переводить вектори $\bar{a}_1 = (0,0,1), \bar{a}_2 = (0,1,1), \bar{a}_3 = (1,1,1)$ відповідно у вектори $\bar{b}_1 = (1,2,1), \bar{b}_2 = (3,1,2), \bar{b}_3 = (7,-1,4)$. Координати всіх векторів задані в базисі $\{\bar{e}\}$.

$\triangleleft$ Знайдемо матрицю A оператора $\hat{A}$, де $\hat{A}(\bar{a}) = \bar{b}$. Маємо:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} = (-1)\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Тоді $A^* = A^T = \begin{Vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$. $\triangleright$

Задачі

2.77. За яких умов діагональна матриця буде ортогональною?

2.78. Показати, що матриця $\begin{Vmatrix} \cos 2 & -\sin 2 \\ \sin 2 & \cos 2 \end{Vmatrix}$ ортогональна.

2.79. Матриця A задана в канонічному базисі $\{\bar{e}\}$. Знайти матрицю A' в базисі $\{\bar{e}'\}$, якщо:

а) $A = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \bar{e}_1' = \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_2' = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$;

б) $A=\begin{Vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{Vmatrix}$, $\bar{e}_1'=\bar{e}_1$, $\bar{e}_2'=\bar{e}_3$, $\bar{e}_3'=\bar{e}_2$.

2.80. Лінійний оператор $\hat{A}$ в базисі $\{\bar{e}'\}$ має матрицю A'. Знайти матрицю спряженого оператора $\hat{A}^*$ в тому самому базисі $\{\bar{e}'\}$, якщо $A'=\begin{Vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{Vmatrix}$, $\bar{e}_1'=\bar{e}_1$, $\bar{e}_2'=\bar{e}_1+\bar{e}_2$.

2.81. Довести, що спряжений оператор має такі властивості:

а) $\left(\hat{A}^*\right)^*=\hat{A}$;

б) $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^*=\hat{B}^*\hat{A}^*$;

в) $\left(\alpha\hat{A}\right)^*=\alpha\hat{A}^*$;

г) якщо $\hat{A}$ – невироджений оператор, то $\left(\hat{A}^{-1}\right)^*=\left(\hat{A}^*\right)^{-1}$.

2.82. Знайти матрицю лінійного оператора $\hat{A}^*$, спряженого до оператора $\hat{A}$ в ортонормованому базисі $\{\bar{e}\}=(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$, якщо $\hat{A}$ переводить вектори $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$ у вектори $\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3$ відповідно. Тут координати всіх векторів задані в базисі $\{\bar{e}\}$:

а) $\bar{a}_1=(2,3,5), \bar{b}_1=(1,1,1), \bar{a}_2=(0,1,2), \bar{b}_2=(1,1,-1), \bar{a}_3=(1,0,0)$, $\bar{b}_3=(2,1,2)$;

б) $\bar{a}_1=(2,0,3), \bar{b}_1=(1,2,-1), \bar{a}_2=(4,1,5), \bar{b}_2=(4,5,-2), \bar{a}_3=(3,1,2)$, $\bar{b}_3=(1,-1,1)$.

§ 3. ВЛАСНІ ВЕКТОРИ І ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ ЛІНІЙНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

1. Власні вектори і власні значення лінійного перетворення

Нехай L – лінійний простір, $\hat{A}$ – лінійне перетворення простору L, тобто $\hat{A}:L \to L$.

Означення. Власним вектором лінійного перетворення $\hat{A}$ простору L називається ненульовий вектор $\bar{x} \in L$, який задовольняє умову:

$$\hat{A}(\bar{x}) = \lambda \cdot \bar{x}, \tag{3.1}$$

де λ – число.

Число λ називається <u>власним числом,</u> або <u>власним значенням</u> перетворення $\hat{A}$, що відповідає власному вектору $\bar{x}$.

Якщо $L = L_n$ n-вимірний лінійний простір, в якому задано базис $\{\bar{e}\} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$, то рівність (3.1) рівносильна матричній рівності $A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x}$ або

$$(A - \lambda E)\bar{x} = 0, (\bar{x} \neq \bar{0}), \tag{3.2}$$

де A – квадратна матриця порядку n лінійного перетворення $\hat{A}$; E – одинична матриця того самого порядку, що і матриця A; $\bar{x}$ – матриця-стовпець $\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}$, елементами якої є координати власного вектора $\bar{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ в базисі $\{\bar{e}\}$.

Із співвідношення (3.2) випливає, що число λ є власним числом лінійного перетворення $\hat{A}$ або матриці A, тоді і тільки тоді, коли $\det(A - \lambda E) = 0$, тобто якщо λ є коренем рівняння:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{3.3}$$

яке називається характеристичним рівняння матриці A (довести самостійно).

Власному числу λ відповідає власний вектор $\bar{x}=(x_1;x_2;...;x_n)$, координати якого є розв'язком однорідної системи (3.2), тобто системи

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+...+a_{2n}x_n=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+(a_{nn}-\lambda)x_n=0\end{cases} \tag{3.4}$$

Необхідно зауважити, що власні вектори визначаються з точністю до сталого множника.

Властивості власних векторів:

1. Кожному власному вектору відповідає єдине власне число .

2. Якщо $\bar{x}$ – власний вектор лінійного перетворення $\hat{A}$ з власним числом λ, то будь-який вектор $\alpha\bar{x}$, який колінеарний до вектора $\bar{x}$, також є власним вектором лінійного перетворення $\hat{A}$ з тим самим власним числом λ.

3. Власні вектори $\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_m$ лінійного оператора з попарно різними власними значеннями $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ лінійно незалежні.

Наслідок. Якщо всі n коренів характеристичного рівняння (3.3) різні, то відповідні їм власні вектори $\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n$ можна прийняти за базис n-вимірного простору L_n, оскільки ці вектори лінійно незалежні (це випливає з властивості 3).

Приклад 1. Знайти власні значення і власні вектори лінійного перетворення $\hat{A}$, матриця якого $A=\begin{Vmatrix}5 & 2\\ 4 & 3\end{Vmatrix}$.

◅ Характеристичне рівняння $\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-8\lambda+7=0$ має корені $\lambda_1=1$, $\lambda_2=7$. Знайдемо власний вектор $\bar{x}_1=(x_1',x_2')$, який відповідає власному числу $\lambda_1=1$.

Система (3.4) набирає вигляд

$$\begin{cases}(5-1)x_1'+2x_2'=0,\\ 4x_1'+(3-1)x_2'=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x_1'+2x_2'=0,\\ 4x_1'+2x_2'=0,\end{cases}\Rightarrow x_2'=-2x_1',$$

тобто $\bar{x}_1=(x_1';-2x_1')=x_1'(1;-2)$. Оскільки власний вектор $\bar{x}_1$ визначається з точністю до сталого множника x_1', то прийнявши $x_1'=1$, отримаємо, що $\bar{x}_1=(1;-2)$.

Аналогічно знаходимо власний вектор $\overline{x}_2 = (x_1''; x_2'')$, який відповідає власному числу λ_2=7. Для знаходження x_1'' та x_2'' одержимо систему

$$\begin{cases}(5-7)x_1''+2x_2''=0,\\ 4x_1''+(3-7)x_2''=0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2x_1''+2x_2''=0,\\ 4x_1''-4x_2''=0,\end{cases} \Rightarrow x_1''=x_2''=\beta.$$

Отже, $\overline{x}_2 = (\beta;\beta) = \beta(1;1)$. Нехай β=1 .Тоді $\overline{x}_2 = (1;1)$. ▷

Приклад 2. Знайти власні вектори та власні значення матриці $A = \begin{Vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{Vmatrix}$.

◁ Складемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$,

або $-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6=0$, $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$.

Один із коренів цього рівняння λ_1=1. Тому многочлен $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6$ ділиться без остачі на λ–1, тобто $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6)$. Отже, коренями характеристичного рівняння є λ_1=1, λ_2=2, λ_3=3.

Нехай $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3)$. Для знаходження власних векторів потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}(5-\lambda)x_1-3x_2+2x_3=0,\\ 6x_1-(4+\lambda)x_2+4x_3=0,\\ 4x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=0,\end{cases} \text{якщо } \lambda=\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3.$$

Нехай λ_1=1. Тоді система набирає вигляду

$$\begin{cases}4x_1-3x_2+2x_3=0,\\ 6x_1-5x_2+4x_3=0,\\ 4x_1-4x_2+4x_3=0.\end{cases}$$

Прийнявши $x_1=\alpha(\alpha\neq0)$, знайдемо, що $x_2=2\alpha, x_3=\alpha$. Отже, $\overline{x}_1=(\alpha;2\alpha;\alpha)=\alpha(1;2;1)$. Якщо α=1, то власний вектор $\overline{x}_1=(1;2;1)$.

Власні вектори, які відповідають власним значенням λ_2=2 та λ_3=3, відповідно будуть $\overline{x}_2=(1;1;0), \overline{x}_3=(1;2;2)$. ▷

Задачі

В задачах 3.1–3.9 знайти власні значення та власні вектори лінійних перетворень, які задані своїми матрицями:

3.1. $A=\begin{Vmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{Vmatrix}$. 3.2. $A=\begin{Vmatrix}3 & 5\\ 4 & 2\end{Vmatrix}$. 3.3. $A=\begin{Vmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{Vmatrix}$.

3.4. $A=\begin{Vmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{Vmatrix}$. 3.5. $A=\begin{Vmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{Vmatrix}$. 3.6. $A=\begin{Vmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{Vmatrix}$.

3.7. $A=\begin{Vmatrix}1 & -3 & 3\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -4 & 8\end{Vmatrix}$. 3.8. $A=\begin{Vmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{Vmatrix}$. 3.9. $A=\begin{Vmatrix}1 & -3 & 1\\ 3 & -3 & -1\\ 3 & -5 & 1\end{Vmatrix}$.

3.10. Задані матриці $A=\begin{Vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{Vmatrix}$ і $B=\begin{Vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{Vmatrix}$. Показати, що: 1) $A\cdot B\neq B\cdot A$; 2) Власні числа матриць AB та BA збігаються.

В задачах 3.11–3.14 знайти нормовані власні вектори оператора $\hat{A}$, матриця якого A, якщо:

3.11. $A=\begin{Vmatrix}7 & 4\\ 5 & 6\end{Vmatrix}$. 3.12. $A=\begin{Vmatrix}1 & -3 & 1\\ 3 & -3 & -1\\ 3 & -5 & 1\end{Vmatrix}$.

3.13. $A=\begin{Vmatrix}4 & -1 & -2\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{Vmatrix}$. 3.14. $A=\begin{Vmatrix}4 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{Vmatrix}$.

2. Матриця лінійного перетворення в базисі з власних векторів

Нехай $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n$ – власні вектори лінійного оператора $\hat{A}:L_n\to L_n$, які відповідають власним значенням $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$.

Якщо вектори $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n$ – лінійно незалежні, то в базисі з цих векторів матриця A лінійного оператора $\hat{A}:L_n\to L_n$ має діагональний вигляд:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \lambda_n \end{vmatrix}. \tag{3.5}$$

Приклад 3. Звести до діагонального вигляду матрицю $A = \begin{Vmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -5 \end{Vmatrix}$.

◁ Знайдемо власні значення матриці A. Характеристичне рівняння матриці A

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -7 \\ 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ або } \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

має корені $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=2$.

Власні вектори $\overline{x}_1$ та $\overline{x}_2$ матриці A, які відповідають власним значенням $\lambda_1=-3$ та $\lambda_2=2$: $\overline{x}_1 = (1;1)$, $\overline{x}_2 = (7;2)$ – лінійно незалежні (перевірити). Отже, вони утворюють базис. В цьому базисі матриця A матиме вигляд $\begin{Vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

Матриця T переходу до нового базису $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ має вигляд $T = \begin{Vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$.

Обернена матриця $T^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

Отже, $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{Vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

Якщо змінити нумерацію власних значень (тобто, $\lambda_1 = 2$, а $\lambda_2 = -3$), то отримаємо $A' = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{Vmatrix}$. ▷

Приклад 4. Звести до діагонального вигляду матрицю $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

◁ Власні значення матриці A: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-2$ (перевірити). Власні вектори, які відповідають власним значенням,

$\overline{x}_1 = (5;-3;2), \overline{x}_2 = (2;0;1)$, $\overline{x}_3 = (2;0;-1)$. Матриця переходу до нового базису $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ має вигляд: $T = \begin{Vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$. Тоді

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix}. \triangleright$$

Приклад 5. Звести до діагонального вигляду матрицю

$$A = \begin{Vmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{Vmatrix}.$$

$\triangleleft$ Власні значення матриці A: $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$.

Запишемо систему (3.4): $\begin{cases} (7-\lambda)x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0, \\ 10x_1 - (19+\lambda)x_2 + 10x_3 = 0, \\ 12x_1 - 24x_2 + (13-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$

Підставимо $\lambda = 1$. Маємо

$$\begin{cases} 6x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0, \\ 10x_1 - 20x_2 + 10x_3 = 0, \\ 12x_1 - 24x_2 + 12x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

Нехай $x_3=6$, $x_2=5$. Тоді $x_1=4$. Якщо прийняти $x_3=7$, $x_2=5$, то $x_1=3$. Отже, власному значенню $\lambda=1$ кратності 2 відповідають два лінійно незалежні вектори $\overline{x}_1 = (4;5;6)$ і $\overline{x}_2 = (3;5;7)$ (перевірити, що вектори $\overline{x}_1$ і $\overline{x}_2$ лінійно незалежні).

Якщо $\lambda=-1$, то для знаходження власного вектора $\overline{x}_3$ маємо систему:

$$\begin{cases} 8x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0, \\ 10x_1 - 18x_2 + 10x_3 = 0, \\ 12x_1 - 24x_2 + 14x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 0, \\ 6x_1 - 12x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Віднімемо від другого рівняння перше і одержане рівняння візьмемо за перше рівняння системи, а друге і третє – залишимо без змін.

Отримаємо систему, еквівалентну даній, вигляду

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 0, \\ 6x_1 - 12x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Якщо перше рівняння системи послідовно помножити на –5 та –6, та додати до другого та третього рівнянь, то матимемо $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ \quad 6x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

Прийнявши $x_3=6$, знайдемо: $x_2=5$, $x_1=3$. Отже $\overline{x}_3 = (3;5;6)$. Тоді

$$T = \begin{Vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \\ 6 & 7 & 6 \end{Vmatrix} \text{ і } A' = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}. \triangleright$$

Задачі

В задачах 3.15–3.19 звести матриці лінійних операторів до діагонального вигляду і знайти матрицю переходу до базису з власних векторів:

3.15. $A = \begin{Vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{Vmatrix}$. 3.16. $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \end{Vmatrix}$.

3.17. $A = \begin{Vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{Vmatrix}$. 3.18. $A = \begin{Vmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$. 3.19. $A = \begin{Vmatrix} 144 & -60 \\ -60 & 25 \end{Vmatrix}$.

В задачах 3.20–3.24 з'ясувати, які з заданих матриць лінійних операторів можна звести до діагонального вигляду шляхом переходу до іншого базису. Знайти цей нормований базис і відповідну йому діагональну форму матриці:

3.20. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$. 3.21. $\begin{Vmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{Vmatrix}$. 3.22. $\begin{Vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$.

3.23. $\begin{Vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{Vmatrix}$. 3.24. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{Vmatrix}$.

3. Симетричні перетворення і їх матриці

Означення. Симетричною матрицею називається матриця, яка збігається зі своєю транспонованою, тобто

$$A^T = A. \tag{3.6}$$

Лінійне перетворення, що задається в деякому базисі симетричною матрицею, називається симетричним.

Симетричні перетворення в евклідовому просторі мають такі властивості:

1. Власні значення симетричного перетворення дійсні.

2. Власні вектори, що відповідають різним власним значенням симетричного перетворенням, ортогональні.

3. Для кожного лінійного перетворення $\hat{A}$ дійсного n-вимірного евклідового простору E_n існує ортонормований базис з власних векторів, в якому матриця перетворення є діагональною. Елементи головної діагоналі цієї матриці є власними значеннями перетворення, тобто існує така ортогональна матриця H, що матриця

$$A' = H^T \cdot A \cdot H = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \lambda_n \end{Vmatrix}, \tag{3.7}$$

де стовпці матриці H – координати ортонормованих власних векторів матриці A.

Знайти ортонормований базис із власних векторів і матрицю в цьому базисі для симетричного оператора $\hat{A}$, що заданий в деякому ортонормованому базисі матрицею A:

Приклад 6. $A = \begin{Vmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{Vmatrix}$.

◁ Знайдемо власні значення та власні вектори матриці A:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 12 \\ 12 & 11-\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 - 15\lambda - 100 = 0, \lambda_1 = 20, \lambda_2 = -5.$$

Для знаходження власних векторів розв'яжемо систему

$$\begin{cases} (4-\lambda)x_1 + 12x_2 = 0, \\ 12x_1 + (11-\lambda)x_2 = 0, \end{cases} \text{ якщо } \lambda=20 \text{ і } \lambda=-5.$$

Якщо λ=20, то система має вигляд

$$\begin{cases} -16x_1 + 12x_2 = 0, \\ 12x_1 - 9x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 + 3x_2 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Отже, $x_1 = \frac{3}{4}x_2$. Приймемо $x_2 = 4$, тоді $x_1 = 3$, тобто $\overline{x}_1 = (3;4)$.

Якщо ж λ=–5, то $\overline{x}_2 = (4;-3)$.

Ортонормований базис із власних векторів

$$\overline{x}_1{}^0 = \frac{\overline{x}_1}{\|\overline{x}_1\|} = \left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right), \overline{x}_2{}^0 = \left(\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right).$$

Тоді $H = \begin{Vmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{Vmatrix}$; $H^T = \begin{Vmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{Vmatrix}$ і матриця $A' = H^T \cdot A \cdot H = \begin{Vmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{Vmatrix}$.

▷

Приклад 7. $A = \begin{Vmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{Vmatrix}$.

◁ Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & 2 & -8 \\ 2 & 2-\lambda & 10 \\ -8 & 10 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^3 - 18\lambda^2 - 81\lambda + 1458 = 0.$$

Один з коренів цього рівняння λ_1=9, тому многочлен ділиться без остачі на $\lambda - 9$: $\lambda^3 - 18\lambda^2 - 81\lambda + 1458 = (\lambda - 9)(\lambda^2 - 9\lambda - 162) = 0$, тому $\lambda_2 = -9, \lambda_3 = 18$.

Для знаходження власних векторів розв'яжемо систему

$$\begin{cases} (11-\lambda)x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 0, \\ 2x_1 + (2-\lambda)x_2 + 10x_3 = 0, \\ -8x_1 + 10x_2 + (5-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Нехай λ_1=9. Тоді система набуває вигляду

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 0, \\ 2x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 0, \\ -8x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ -9x_2 + 18x_3 = 0, \\ -9x_2 + 18x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = 2x_3, x_1 = 4x_3 - x_2$$

Якщо прийняти x_3=1, то x_2=2, x_1=2, тобто $\overline{x}_1 = (2;2;1)$ і $\overline{x}_1{}^0 = (\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3})$.

Перевірити, чи $\bar{x}_2{}^0 = (\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3})$, $\bar{x}_3{}^0 = (-\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3})$.

Тоді $H = \begin{Vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{Vmatrix}$ і матриця $A' = H^T \cdot A \cdot H = \begin{Vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{Vmatrix}$. ▷

Приклад 8. $A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$.

◁ Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda - 10 = 0.$$

Один із коренів цього рівняння $\lambda_1=1$. Тому многочлен ділиться без остачі на $\lambda - 1$, тобто $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda - 10 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 11\lambda + 10)$. Тоді $\lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$. Отже, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 10$.

Для знаходження власних векторів отримаємо систему:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Нехай $\lambda_1=\lambda_2=1$. Тоді система набуває вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \Rightarrow x_1 = -2x_2 + 2x_3.$$

Приймемо $x_2 = 0, x_3 = 1$. Тоді $x_1 = 2$ і $\bar{x}_1 = (2;0;1)$. Знайдемо власний вектор $\bar{x}_2$, який відповідає значенню $\lambda=1$. Нехай $\bar{x}_2 = (\alpha,\beta,\gamma)$. Тоді

$\alpha=-2\beta+2\gamma$. Але вектори $\bar{x}_1$ і $\bar{x}_2$ мають бути ортогональними. Тоді $2\alpha + \gamma = 0$. Отже, $\alpha = -2\beta - 4\alpha$, тобто $\alpha = -\frac{2}{5}\beta$. Тому, прийнявши $\beta = 5$, отримаємо, що $\alpha = -2, \gamma = 4$. Отже, $\bar{x}_2 = (-2,5,4)$.

Пронормуємо вектори $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$. Отримаємо: $\bar{x}_1{}^0 = (\frac{2}{\sqrt{5}};0;\frac{1}{\sqrt{5}})$,

$\bar{x}_2{}^0 = (-\frac{2}{\sqrt{45}};\frac{5}{\sqrt{45}};\frac{4}{\sqrt{45}})$.

Якщо $\lambda_3=10$, то $\bar{x}_3=(1,2,-2)$ і $\bar{x}_3^{\,0}=(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3})$. Вектори $\bar{x}_1^{\,0}$, $\bar{x}_2^{\,0}$ і $\bar{x}_3^{\,0}$ – ортогональні (перевірити).

Тоді $H=\begin{Vmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3} \end{Vmatrix}$ і $A'=H^T\cdot A\cdot H=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{Vmatrix}$. ▷

Задачі

В задачах 3.25–3.28 знайти ортонормований базис із власних векторів і матрицю A' в цьому базисі для симетричного оператора $\hat{A}$, що заданий в деякому ортонормованому базисі матрицею A:

3.25. $A=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{Vmatrix}$.

3.26. $A=\begin{Vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

3.27. $A=\begin{Vmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{Vmatrix}$.

3.28. $A=\begin{Vmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{Vmatrix}$.

§4. ЗВЕДЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ КВАДРАТИЧНИХ ФОРМ

1. Квадратичні форми і їх зведення до канонічного вигляду

Означення. Квадратичною формою від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається однорідний многочлен 2-го степеня від цих змінних, тобто

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j , \qquad (4.1)$$

де $a_{ij} = a_{ji}$.

Якщо ввести матриці

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{Vmatrix} (a_{ij} = a_{ji}; i, j = \overline{1,n}), \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix}, \text{ то}$$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T \cdot A \cdot X . \qquad (4.2)$$

Квадратична форма (4.1) повністю визначається симетричною матрицею A, яка називається <u>матрицею квадратичної форми</u>.

Основне завдання теорії квадратичних форм полягає в тому, щоб за допомогою невироджених лінійних перетворень змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ звести форму до вигляду

$$F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 , \qquad (4.3)$$

який називається <u>канонічним</u>.

Розглянемо квадратичну форму (4.1) в просторі E_n. Тоді $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координати вектора $\overline{x}$ в ортонормованому базисі $\{\overline{e}\} = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n)$ і квадратична форма (4.1) набуває вигляду

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x^T \cdot A \cdot x , \qquad (4.4)$$

де $\overline{x} = \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|^T$, $\overline{x}^T = \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|$ – відповідно стовпець і рядок, утворені з координат вектора $\overline{x}$; A – симетрична матриця заданої форми. При переході до нового ортонормованого базису $\{\overline{e}'\} = (\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \ldots, \overline{e}'_n)$ квадратична форма набуває вигляду

$$F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \overline{x}'^T \cdot A' \cdot \overline{x}' ,$$

де $A' = H^{-1} \cdot A \cdot H = H^{T} \cdot A \cdot H$, H – матриця переходу від базису $\{\bar{e}\}$ до $\{\bar{e}'\}$, $\bar{x}' = \|x_1', x_2', \ldots, x_n'\|^{T}$, $\bar{x}'^{T} = \|x_1', x_2', \ldots, x_n'\|$.

Якщо за новий базис $\{\bar{e}'\}$ взяти базис із власних ортонормованих векторів матриці A, то матриця A' буде діагональною (див.§ 2,п.2):

$$A' = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{Vmatrix},$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – власні значення матриці A, стовпці матриці H є координатами ортонормованих власних векторів, а квадратична форма набуває вигляду:

$$F(x_1', x_2', \ldots, x_n') = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 . \tag{4.5}$$

Отриманий вигляд (4.5) квадратичної форми називається канонічним. Відповідне перетворення координат визначається співвідношенням

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = H \cdot \begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{Vmatrix}. \tag{4.6}$$

Оскільки матриця H є ортогональною, то перетворення (4.6) називається ортогональним.

Приклад 1. Знайти ортогональне перетворення, яке зводить квадратичну форму $F(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$, що задана в просторі R^3, до канонічного вигляду.

◁ 1. Складемо матрицю квадратичної форми $A = \begin{Vmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{Vmatrix}$.

2. Знайдемо власні числа матриці A:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9 .$$

3. Знайдемо ортонормований базис із власних векторів матриці A, в якому квадратична форма має канонічний вигляд: $\lambda_1 = 3, \bar{e}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $A \cdot \bar{e}_1 = \lambda_1 \cdot \bar{e}_1$,

$$\begin{Vmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Vmatrix} = 3 \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{cases} 6\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 3\alpha_1, \\ -2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 3\alpha_2, \\ 2\alpha_1 + 7\alpha_3 = 3\alpha_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1, \\ \alpha_3 = -\dfrac{\alpha_1}{2}. \end{cases}$$

тобто

$$\bar{e}_1 = (\alpha_1, \alpha_1, -\frac{\alpha_1}{2}),\ \|\bar{e}_1\| = \sqrt{\alpha_1{}^2 + \alpha_1{}^2 + \frac{\alpha^2{}_1}{4}} = \tfrac{3}{2}|\alpha_1|;\ \bar{e}_1' = \frac{\bar{e}_1}{\|\bar{e}_1\|} = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}).$$

Аналогічно знайдемо, що $\bar{e}_2' = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $\bar{e}_3' = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, і, отже,

$$H = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix},\ H^T = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

4. В базисі $\{\bar{e}'\} = (\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3')$ задана квадратична форма має вигляд $F(x_1', x_2', x_3') = 3x_1'^2 + 6x_2'^2 + 9x_3'^2$.

5. Відповідне ортогональне перетворення координат $x_1 = \frac{1}{3}(2x_1' - x_2' + 2x_3')$,

$x_2 = \frac{1}{3}(2x_1' + 2x_2' - x_3')$, $x_3 = \frac{1}{3}(-x_1' + 2x_2' + 2x_3')$. ▷

Приклад 2. Звести квадратичну форму $F(x,y) = 5x^2 + 4xy + 8y^2$ до канонічного вигляду та знайти відповідне ортогональне перетворення.

◁ 1. Складемо матрицю квадратичної форми $A = \begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{Vmatrix}$.

2. Знайдемо власні числа матриці A: $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$,

$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$.

3. Знайдемо власні вектори матриці:

$$\lambda_1 = 4,\ \bar{e}_1 = (\alpha_1, \alpha_2),\ A \cdot \bar{e}_1 = \lambda \cdot \bar{e}_1,\ \begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Vmatrix} = 4 \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{cases}5\alpha_1+2\alpha_2=4\alpha_1,\\ 2\alpha_1+8\alpha_2=4\alpha_2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=0,\\ 2\alpha_1+4\alpha_2=0,\end{cases}\Rightarrow\alpha_2=-\frac{\alpha_1}{2},$$

тобто $\bar{e}_1=(\alpha_1,-\frac{\alpha_1}{2})$, $\bar{e}_1'=\frac{\bar{e}_1}{\|\bar{e}_1\|}=(\frac{2}{\sqrt5},-\frac{1}{\sqrt5})$.

Відповідно, $\bar{e}_2'=(\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5})$. Отже,

$$H=\frac{1}{\sqrt5}\begin{Vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{Vmatrix},\ H^T=\frac{1}{\sqrt5}\begin{Vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{Vmatrix}.$$

4. В базисі $\{\bar{e}'\}=(\bar{e}_1',\bar{e}_2')$ задана квадратична форма набуває вигляду $F(x',y')=4x'^2+9y'^2$.

5. Відповідне ортогональне перетворення $x=\frac{1}{\sqrt5}(2x'+y')$, $y=\frac{1}{\sqrt5}(-x'+2y')$. ▷

Задачі

В задачах 4.1–4.14 звести квадратичну форму до канонічного вигляду і знайти відповідне ортогональне перетворення:

4.1. $F(x,y)=29x^2+144xy+71y^2$.

4.2. $F(x,y)=9x^2-6xy+y^2$.

4.3. $F(x,y)=x^2+2xy+y^2$.

4.4. $F(x,y)=12xy+5y^2$.

4.5. $F(x,y)=4x^2+24xy+11y^2$.

4.6. $F(x,y)=8x^2-12xy+17y^2$.

4.7. $F(x,y)=9x^2+24xy+16y^2$.

4.8. $F(x,y)=x^2-3xy+y^2$.

4.9. $F(x,y)=3x^2+10xy+3y^2$.

4.10. $F(x_1,x_2,x_3)=11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3$.

4.11. $F(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$.

4.12. $F(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$.

4.13. $F(x_1,x_2,x_3)=3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$.

4.14. $F(x_1,x_2,x_3)=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$.

2. Зведення загального рівняння лінії другого порядку до канонічного вигляду

Одним з важливих застосувань теорії квадратичних форм є задача спрощення кривих і поверхонь другого порядку.

Розглянемо зведення до канонічного вигляду рівняння лінії другого порядку:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2ax + 2bx + c = 0\,, \tag{4.7}$$

де a_{ij}, a, b, c – дійсні, i,j=1,2.

Розглянемо квадратичну форму $F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, що відповідає лінії, яка задана рівнянням (4.7). Вона визначається матрицею

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{Vmatrix}.$$

Перейдемо до нової системи координат $x'Oy'$, осі якої спрямовані по напрямках власних векторів матриці A. Тоді квадратична форма набуває вигляду

$$F(x',y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2\,,$$

де – λ_1, λ_2 власні значення матриці A.

Рівняння (4.7) має вигляд:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'x' + 2b'y' + c = 0\,, \tag{4.8}$$

де a', b' – нові коефіцієнти, а нумерацію власних чисел λ_1 і λ_2 вибираємо так, щоб detH=1 (H – матриця переходу до канонічного базису).

Подальше спрощення досягається паралельним перенесенням початку координат.

Тут можливі два випадки:

I. Нехай $\lambda_1 \neq 0$ та $\lambda_2 \neq 0$. У цьому випадку, виділяючи в рівнянні (4.8) повні квадрати, отримаємо:

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{b'}{\lambda_2}\right)^2 + c - \frac{a'^2}{\lambda_1} - \frac{b'^2}{\lambda_2} = 0 \text{ або}$$

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{b'}{\lambda_2}\right)^2 = k\,, \tag{4.9}$$

де $k = \dfrac{a'^2}{\lambda_1} + \dfrac{b'^2}{\lambda_2} - c$.

Перенесемо початок координат в точку $O'\left(-\frac{a'}{\lambda_1},-\frac{b'}{\lambda_2}\right)$ за допомогою формул $x''=x'+\frac{a'}{\lambda_1}$, $y''=y'+\frac{b'}{\lambda_2}$.

В результаті цих перетворень рівняння (4.9) набере вигляду

$$\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2=k. \tag{4.10}$$

1. Якщо $k\neq 0$, то,поділивши рівняння (4.10) на k, отримаємо

$$\frac{x''^2}{\frac{k}{\lambda_1}}+\frac{y''^2}{\frac{k}{\lambda_2}}=1. \tag{4.11}$$

а) Якщо обидві величини $\frac{k}{\lambda_1}$ і $\frac{k}{\lambda_2}$ додатні, то рівняння (4.11), а отже, і рівняння (4.7) зображають еліпс.

б) Якщо обидві величини $\frac{k}{\lambda_1}$ і $\frac{k}{\lambda_2}$ від'ємні – маємо уявний еліпс, тобто рівняння не зображає жодної лінії.

в) Якщо одна з цих величин додатна, а друга від'ємна, то маємо гіперболу.

2. Якщо $k=0$, то рівняння (4.10) має вигляд:

$$\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2=0. \tag{4.12}$$

При цьому можливі два випадки:

а) якщо λ_1 і λ_2 мають різні знаки, то ліва частина рівняння (4.12) розкладається на два дійсні лінійні множники як різниця квадратів. В цьому випадку рівняння (4.12), а тим самим і рівняння (4.7) визначає пару прямих, які перетинаються.

б) якщо λ_1 і λ_2 мають однакові знаки, то рівняння (4.12), а отже, і рівняння (4.7) зображає точку.

II. Нехай $\lambda_1=0$ або $\lambda_2=0$. Тоді рівняння (4.8) набуває вигляду

$$\lambda_1 x'^2+2a'x'+2b'y'+c=0,\ (\lambda_2=0). \tag{4.13}$$

або

$$\lambda_2 y'^2+2a'x'+2b'y'+c=0,\ (\lambda_1=0). \tag{4.14}$$

Розглянемо одне з цих рівнянь, наприклад, рівняння (4.13). В рівнянні (4.14) x' та y' тільки міняються місцями. Якщо $b' \neq 0$, то рівняння (4.13) має вигляд

$$y' = -\left(\frac{\lambda_1}{2b'}x'^2 + \frac{a'}{b'}x' + \frac{c}{b'}\right),$$

яке визначає параболу.

Якщо $b' = 0$, то рівняння (4.13) набуває вигляду

$$\lambda_1 x'^2 + 2a'x' + c = 0. \tag{4.15}$$

Залежно від знака дискримінанта $D = a'^2 - \lambda_1 c$ рівняння (4.15) визначає пару паралельних прямих (дійсних, якщо D>0, або уявних, якщо D<0) або пару прямих, які збігаються, якщо D=0.

Отже, загальне рівняння лінії другого порядку (4.7) при всіх можливих значеннях коефіцієнтів визначає або еліпс (дійсний чи уявний), або гіперболу, або параболу, або пару прямих. Крім цих ліній, жодних інших ліній другого порядку не існує.

До канонічного вигляду загальне рівняння поверхні другого порядку

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

зводиться аналогічно.

Звести до канонічного вигляду рівняння кривих та побудувати їх графіки:

Приклад 3. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$.

◁ Матрицею квадратичної форми $F(x,y) = 5x^2 + 8xy + 5y^2$ є матриця $A = \begin{Vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$, а характеристичним рівнянням цієї матриці є рівняння $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$ або $\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$.

Власними числами є $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$. Тоді $F(x', y') = x'^2 + 9y'^2$. Нормовані власні вектори матриці A: $\bar{x}_1{}^0 = (\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\bar{x}_2{}^0 = (\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$, а отже, $H = \begin{Vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Vmatrix}$ і $\det H = 1$. В цьому випадку орієнтація нових осей координат збігається з орієнтацією старих.

Виразимо змінні x, y через нові змінні x', y':

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix},$$

тобто $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y', y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$. Тепер можемо виразити через нові змінні x', y' лінійну частину заданого рівняння:

$$-18x - 18y + 9 = -18\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) - 18\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) + 9 = -18\sqrt{2}y' + 9.$$

Враховуючи вигляд квадратичної форми заданого рівняння, отримаємо: $x'^2 + 9y'^2 - 18\sqrt{2}y' + 9 = 0$. Виділимо повні квадрати у лівій його частині: $x'^2 + 9(y'^2 - \sqrt{2})^2 + 9 - 18 = 0$ або $x'^2 + 9(y' - \sqrt{2})^2 = 9$.

Здійснюючи паралельне перенесення початку координат в точку $O'(0, \sqrt{2})$ за формулами $x'' = x', y'' = y' - \sqrt{2}$, отримаємо канонічне рівняння еліпса $\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{1} = 1$. Щоб побудувати цю криву, повертаємо систему XOY на кут $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ і, потім, переносимо початок координат в точку $O'(0, \sqrt{2})$. Побудувавши систему $X''O'Y''$, будуємо криву (рис.19). ▷

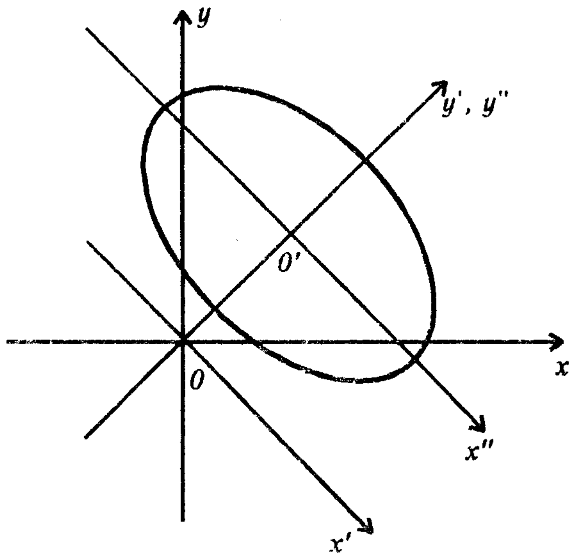


Рис. 19.

Приклад 4. $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$.

◁ Матрицею квадратичної форми $F(x,y)=3x^2+10xy+3y^2$ є матриця $A=\begin{Vmatrix}3 & 5\\ 5 & 3\end{Vmatrix}$, а характеристичним рівнянням цієї матриці є рівняння $\begin{vmatrix}3-\lambda & 5\\ 5 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$ або $\lambda^2-6\lambda-16=0$. Власними числами є $\lambda_1=8$, $\lambda_2=-2$. Тоді $F(x',y')=8x'^2-2y'^2$. Нормовані власні вектори матриці A: $\bar{x}_1{}^0=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\bar{x}_2{}^0=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, а отже, $H=\begin{Vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{Vmatrix}$ і detH=1. В цьому випадку орієнтація нових осей збігається з орієнтацією старих.

Виразимо змінні x, y через нові змінні x',y': $\begin{Vmatrix}x\\ y\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}x'\\ y'\end{Vmatrix}$, тобто $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$. Тепер лінійна частина заданого рівняння

$-2x-14y-13=-\sqrt{2}(x'-y')-7\sqrt{2}(x'+y')-13=-8\sqrt{2}x'-6\sqrt{2}y'-13$, а початкове рівняння набере вигляду $8x'^2-2y'^2-8\sqrt{2}x'-6\sqrt{2}y'-13=0$ або, після виділення повних квадратів $8\left(x'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\left(y'+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=8$. Здійснюючи паралельне перенесення за формулами $x''=x'-\frac{\sqrt{2}}{2}, y''=y'+\frac{3\sqrt{2}}{2}$, отримаємо рівняння гіперболи $\frac{x''^2}{1}-\frac{y''^2}{4}=1$. Для побудови графіка кривої систему Oxy повертаємо на кут $\alpha=45°$ і переносимо початок координат в точку $O'(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2})$ (рис.20). ▷

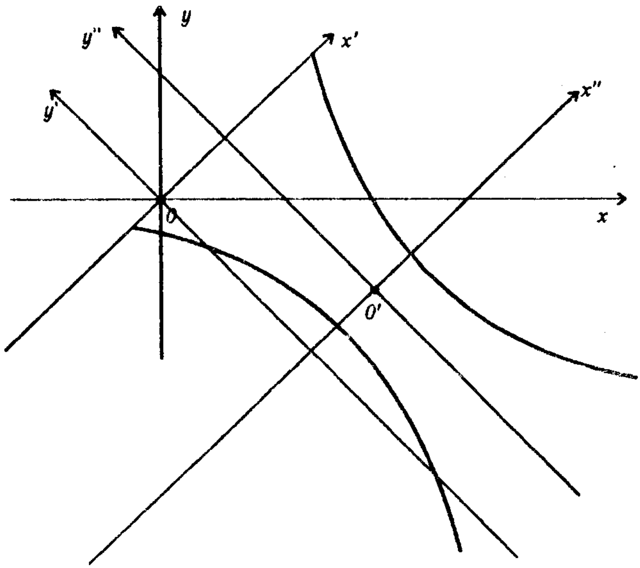


Рис. 20.

Приклад 5. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$.

◁ Для квадратичної форми $F(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$ матриця $A = \begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$ має характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ або $\lambda^2 - 5\lambda = 0$. Оскільки $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0$, то $F(x', y') = 5x'^2$. Знаходимо нормовані власні вектори $\bar{x}_1{}^0 = (\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}})$, $\bar{x}_2{}^0 = (\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}})$, звідки $H = \begin{Vmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{Vmatrix}$. Орієнтація нових осей координат збігається з орієнтацією старих, бо detH=1.

Змінні x, y можна записати через нові змінні x', y', і, отже $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix}$ або $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y')$. Тепер виразимо лінійну частину рівняння $-6x + 3y - 4 = -\frac{6}{\sqrt{5}}(2x' + y') + \frac{3}{\sqrt{5}}(-x' + 2y') - 4 =$

$=-3\sqrt{5}x'-4$, а тому задане рівняння набирає вигляд $5x'^2-3\sqrt{5}x'-4=0$. Виділимо повний квадрат $5\left(x'-\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2=\frac{25}{4}$ або $\left(x'-\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2=\frac{5}{4}$.

Здійснюючи паралельне перенесення початку координат в точку $O'(\frac{3\sqrt{5}}{10},0)$ за формулами $x''=x'-\frac{3\sqrt{5}}{10}, y''=y'$, одержимо канонічне рівняння $x''^2=\frac{5}{4}$ або $x''=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. Це рівняння визначає пару паралельних прямих.

Для побудови графіка систему XOY повертаємо на кут $\alpha=-\operatorname{arctg}2=-65°$ і переносимо початок координат в точку O′ (рис.21). ▷

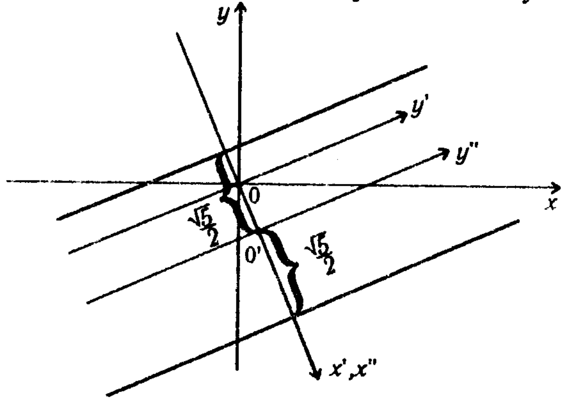


Рис. 21.

Задачі

В задачах 4.15–4.26 звести до канонічного вигляду рівняння кривих та побудувати їх графіки:

4.15. $2x^2+10xy+2y^2+9x+12y-2=0$.

4.16. $4x^2-4xy+y^2+6x+2y+1=0$.

4.17. $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$.

4.18. $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.

4.19. $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$.

4.20. $25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-224=0$.

4.21. $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$.

4.22. $7x^2+6xy-y^2+28x+12y+28=0$.

4.23. $19x^2+6xy+11y^2+38x+6y+29=0$.

4.24. $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$.

4.25. $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$.

4.26. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$.

ВІДПОВІДІ ДО РОЗДІЛУ 5

1.1. Так. 1.2. Так. 1.3. Так. 1.4. Так.
1.5. Так. 1.6. Так. 1.7. Так.
1.10. Так. 1.11. Ні. 1.12. Ні.
1.13. Так.
1.14.Так. 1.15. Так. 1.16. Ні. 1.17. Так.
1.18.а) так; б)ні; в) так; г) ні.
1.19.а) (1,0,–3); б) (0,–2,1).
1.21. Координати матриці в цьому базисі збігаються з її елементами.
1.22. Розмірність простору дорівнює n^2.
1.23. Ні.
1.24. а) $\bar{x} = -\frac{1}{3}\bar{e}_1 + \frac{2}{3}\bar{e}_2 + \frac{1}{3}\bar{e}_3$; б) $\bar{x} = \frac{3}{4}\bar{e}_1 - \frac{1}{4}\bar{e}_2 + \frac{1}{2}\bar{e}_3$;
в) $\bar{x} = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$; г) $\bar{x} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$; д) $\bar{x} = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3$.
1.25. $B=-2A_1+2A_2+5A_3$.
1.26. Нехай $\{\bar{e}\} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ – базис лінійного простору, Для довільних елементів $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i$ і $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \bar{e}_i$ приймемо $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$. Перевірити, чи всі властивості скалярного добутку будуть виконуватись.
1.27. а) $(\bar{x}, \bar{y}) = -1$; б) $(\bar{x}, \bar{y}) = 4$; в) $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.
1.28. а) $(\bar{p}, \bar{q}) = -1$; б) $(\bar{p}, \bar{q}) = 9$; в) $(\bar{p}, \bar{q}) = -4$.
1.29. а) $(\bar{x}, \bar{y}) = 9$; б) $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.
1.30. а) $\|\bar{x}\| = 6$; б) $\|\bar{x}\| = 7$.
1.31. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\arccos\frac{3}{14}$.
1.32. а) $\bar{z} = \alpha(-2,1,1), \alpha \neq 0$; $\bar{e}_1 = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$,
$\bar{e}_2 = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{-4}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\right)$, $\bar{e}_3 = \frac{\bar{z}}{\|\bar{z}\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$;
б) $\bar{z} = \alpha(-\frac{1}{2}, -2, 1), \alpha \neq 0; \bar{e}_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\bar{e}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$,
$\bar{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}\right)$.
2.3. Ні. 2.4. Ні. 2.5. Ні. 2.6. Так.
2.7. Так. Цей оператор є оператором проектування на вісь, що задається вектором $\bar{e}$.

2.8. Так. 2.9. Ні. 2.10. Так. 2.11. Ні.

2.12. а) Так; б) Так. 2.13. Так. 2.14. Так. 2.15. Ні.

2.16. Так. 2.17. Так. 2.18. Ні.

2.19. Ні.

2.20. Так. 2.26. Одинична матриця.

2.27. $A=\begin{Vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{Vmatrix}$. 2.28. $A=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{Vmatrix}$. 2.29. $A=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}$.

2.30. $A=\begin{Vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{Vmatrix}$. 2.31. $A=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}$. 2.32. $A=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -1\end{Vmatrix}$.

2.33. $A=\begin{Vmatrix}5 & 2 & 0\\ -111 & 9 & 28\\ -22 & 5 & 8\end{Vmatrix}$. 2.34. $A=\begin{Vmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{Vmatrix}$. 2.35. $A=\begin{Vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{Vmatrix}$.

2.36. $A=\begin{Vmatrix}1 & 4 & \frac{1}{2}\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2}\end{Vmatrix}$. 2.37. $\hat{A}(\overline{x})=(2x_1-3x_2;x_1-x_3;2x_2)$.

2.38. $\hat{A}(\overline{x})=(x_2;x_1+x_3;x_1)$. 2.39. $\hat{A}(\overline{x})=(0;x_2)$.

2.40. $\hat{A}(\overline{x})=(-x_1;x_2)$. 2.41. $A=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 4\end{Vmatrix}$.

2.42. $A=\begin{Vmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{Vmatrix}$. 2.43. $A=\begin{Vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{Vmatrix}$.

2.44. $A=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}$. 2.45. $A=\begin{Vmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{Vmatrix}$. Дане перетворення переводить сферу в еліпсоїд з півосями $a=\alpha R$, $b=\beta R$, $c=\gamma R$.

2.46. а) $A=\begin{Vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}$; б) $A=\begin{Vmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\end{Vmatrix}$.

2.47. У матриці поміняються місцями і-й і j-й рядки та і-й та j-й стовпці.

2.50. $C=\begin{Vmatrix}8 & -1\\ 4 & 1\end{Vmatrix}$. 2.51. $C=\begin{Vmatrix}21 & -8\\ -2 & 0\end{Vmatrix}$. 2.52. $\begin{Vmatrix}\cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi)\\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi)\end{Vmatrix}$.

2.53. $x_1'=x_3, x_2'=x_2+2x_3, x_3'=x_1+2x_2+3x_3$.

2.54. $u_1=7w_1-6w_2-10w_3, u_2=6w_1-5w_2-6w_3, u_3=4w_1-3w_2+$ $+w_3$.

2.55. $A^{-1}=\begin{Vmatrix}1 & \frac{1}{4} & 0\\ 1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{Vmatrix}$.

2.56. $v_1=u_1-\frac{1}{4}u_2, v_2=u_1, v_3=\frac{1}{2}u_1-\frac{1}{4}u_2+\frac{1}{2}u_3$.

2.57. $\begin{Vmatrix}-6 & 22\\ -22 & 49\end{Vmatrix}$.

2.58. $C=\begin{Vmatrix}22 & 13 & -37\\ -39 & -16 & 25\\ -1 & 0 & -6\end{Vmatrix}$;

$\hat{C}(\overline{x})=(22x_1+13x_2-37x_3;-39x_1-16x_2+25x_3;-x_1-6x_3)$.

2.59. $C=\begin{Vmatrix}-15 & 23 & -7\\ 2 & 8 & -4\\ -7 & 1 & 7\end{Vmatrix}$;

$\hat{C}(\overline{x})=(-15x_1+23x_2-7x_3;2x_1+8x_2-4x_3;-7x_1+x_2+7x_3)$.

2.60. $C=0, \hat{C}(\overline{x})=\overline{0}$.

2.61. $\hat{A}^{-1}(\overline{x})=\frac{1}{\lambda}\cdot\overline{x}$.

2.62. Немає оберненого.

2.63. Немає оберненого.

2.64. $\hat{A}^{-1}=(\overline{x})=(-x+2y-z)\vec{i}+(-x+3y-2z)\vec{j}+(2x-3y+2z)\vec{k}$.

2.65. $A^{-1}=A$.

2.66. Немає оберненого.

2.67. $\hat{A}^{-1}(\bar{x}) = \frac{1}{9}(x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 - 2x_3; 2x_1 - 2x_2 + x_3)$.

2.68. а) $A' = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$; б) $A' = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{Vmatrix}$. 2.69. $A' = \begin{Vmatrix} 75 & -31 \\ 179 & -74 \end{Vmatrix}$.

2.70. а) $A' = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$; б) $A' = \begin{Vmatrix} -6 & -23 \\ 4 & 11 \end{Vmatrix}$.

2.71. а) $A' = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$; б) $A' = \begin{Vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -6 & 2 \end{Vmatrix}$.

2.72. а) $A' = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$; б) $A' = \begin{Vmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{Vmatrix}$.

2.73. а) $x_1' = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$, $x_2' = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$,
$x_3' = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$, $x_4' = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$;

б) $x_1' = x_2 - x_3 + x_4$, $x_2' = -x_1 + x_2$, $x_3' = x_4$, $x_4' = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$.

2.74. а) $C'' = A'' + B'', A'' = H^{-1}A'H, C'' = \begin{Vmatrix} 44 & 44 \\ -29{,}5 & -25 \end{Vmatrix}$;

б) $C' = A' + \frac{1}{2}B' = \begin{Vmatrix} -57 & -95 \\ 42 & 70 \end{Vmatrix}$.

2.75. $C = A \cdot B = \begin{Vmatrix} -403 & -146 \\ 875 & 317 \end{Vmatrix}$.

2.77. Діагональні елементи дорівнюють ± 1.

2.79.а) $A' = H^{-1}AH = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$; б) $A' = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$.

2.80. $A^{*'} = \begin{Vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{Vmatrix}$.

2.82. а) $A^* = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -11 & -7 & -1 \\ 6 & 4 & 0 \end{Vmatrix}$; б) $A^* = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} -6 & -12 & 6 \\ 11 & 13 & -5 \\ 5 & 10 & -5 \end{Vmatrix}$.

3.1. $\lambda_1 = 2, \bar{x}_1 = (1;-1), \lambda_2 = 3, \bar{x}_2 = (1;-2)$.

3.2. $\lambda_1 = -2, \bar{x}_1 = (1;-1), \lambda_2 = 7, \bar{x}_2 = (5;4)$.

3.3. $\lambda_1 = 2, \bar{x}_1 = (1;0;-1), \lambda_2 = 3, \bar{x}_2 = (1;1;1), \lambda_3 = 6, \bar{x}_3 = (1;-2;1)$.

3.4. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1, \bar{x} = \alpha(1;1;-1), \alpha \neq 0$.

3.5. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \bar{x} = (\alpha_1, 2\alpha_1, \alpha_2)$, α_1 і α_2 одночасно не дорівнюють нулю.

3.6. $\lambda_1 = 1, \bar{x}_1 = \alpha(1;1;1), \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = \alpha(1;2;3), \alpha \neq 0$.

3.7. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \bar{x} = \alpha(3;1;1), \alpha \neq 0$.

3.8. $\lambda_1 = 3, \bar{x}_1 = \alpha(\frac{1}{2};1;1), \alpha \neq 0;\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1, \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = \alpha(1;2;1), \alpha \neq 0$.

3.9. $\lambda_1 = -1, \bar{x}_1 = \alpha(1;1;1), \lambda_2 = 2, \bar{x}_2 = \alpha(4;1;7), \lambda_3 = -2, \bar{x}_3 = \alpha(2;3;3)$, $\alpha \neq 0$.

3.10. $\lambda_1=0$, $\lambda_2=4$.

3.11. $\bar{x}_1{}^0 = \left(\frac{4}{\sqrt{41}}; \frac{-5}{\sqrt{41}}\right)$, $\bar{x}_2{}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3.12. $\bar{x}_1{}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \bar{x}_2{}^0 = \left(\frac{4}{\sqrt{66}}; \frac{1}{\sqrt{66}}; \frac{7}{\sqrt{66}}\right), \bar{x}_3{}^0 = \left(\frac{2}{\sqrt{22}}; \frac{3}{\sqrt{22}}; \frac{3}{\sqrt{22}}\right)$.

3.13. $\bar{x}_1{}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\bar{x}_2{}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\bar{x}_3{}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$.

3.15. $\bar{x}_1{}^0 = \bar{x}_2{}^0 = \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \bar{x}_3{}^0 = \left(\frac{3}{\sqrt{29}}; \frac{4}{\sqrt{29}}; \frac{2}{\sqrt{29}}\right)$.

3.15. $A' = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}, T = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$.

3.16. $A' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{Vmatrix}, T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & -8 \end{vmatrix}$.

3.17. $A' = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{Vmatrix}, T = \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$.

3.18. $A' = \begin{Vmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}, T = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix}$.

3.19. $A' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 169 \end{Vmatrix}, T = \begin{vmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{vmatrix}$.

3.20. $A' = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $\bar{x}_1{}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\bar{x}_2{}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$\bar{x}_3{}^0 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3.21. $A' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $\bar{x}_1{}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\bar{x}_2{}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\bar{x}_3{}^0 = (0,1,0)$.

3.22. $A' = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $\bar{x}_1{}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\bar{x}_2{}^0 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$,

$\bar{x}_3{}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3.23. $A' = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{Vmatrix}$, $\bar{x}_1{}^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\bar{x}_2{}^0 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\bar{x}_3{}^0 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

3.24. Матриця не може бути діагоналізована.

3.25. $A' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{Vmatrix}$, $\bar{x}_1{}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\bar{x}_2{}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,

$\bar{x}_3{}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

3.26. $A' = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$, $\bar{x}_1{}^0 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\bar{x}_2{}^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\bar{x}_3{}^0 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

3.27. $A' = \begin{Vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{Vmatrix}$, $\bar{x}_1{}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\bar{x}_2{}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{4}{\sqrt{18}}\right)$,

$\bar{x}_3{}^0 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

3.28. $A' = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{Vmatrix}$, $\bar{x}_1{}^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $\bar{x}_2{}^0 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\bar{x}_3{}^0 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

4.1. $F(x', y') = 125x'^2 - 25y'^2, x = \frac{1}{5}(3x' + 4y'), y = \frac{1}{5}(4x' - 3y')$.

4.2. $F(x', y') = 10y'^2, x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y'), y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' - y')$.

4.3. $F(x',y')=2x'^2, x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y'), y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$.

4.4. $F(x',y')=-4x'^2+9y'^2, x=\frac{1}{\sqrt{13}}(3x'+2y'), y=\frac{1}{\sqrt{13}}(-2x'+3y')$.

4.5. $F(x',y')=-5x'^2+20y'^2, x=\frac{1}{5}(4x'+3y'), y=\frac{1}{5}(-3x'+4y')$.

4.6. $F(x',y')=20x'^2+5y'^2, x=\frac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y'), y=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x'+y')$.

4.7. $F(x',y')=25y'^2, x=\frac{1}{5}(4x'+3y'), y=\frac{1}{5}(-3x'+4y')$.

4.8. $F(x',y')=\frac{5}{2}x'^2-\frac{1}{2}y'^2, x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y'), y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y')$.

4.9. $F(x',y')=8x'^2-2y'^2, x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y'), y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$.

4.10. $F(x_1',x_2',x_3')=9x_1'^2+18x_2'^2-9x_3'^2, x_1=\frac{1}{3}(2x_1'+2x_2'-x_3')$,
$x_2=\frac{1}{3}(-x_1'+2x_2'+2x_3'), x_3=\frac{1}{3}(2x_1'-x_2'+2x_3')$.

4.11. $F(x_1',x_2',x_3')=3x_1'^2+6x_2'^2-2x_3'^2, x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}x_1'+\frac{1}{\sqrt{6}}x_2'+\frac{1}{\sqrt{2}}x_3'$,
$x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}x_1'-\frac{1}{\sqrt{6}}x_2'+\frac{1}{\sqrt{2}}x_3', x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}x_1'-\frac{2}{\sqrt{6}}x_2'$.

4.12. $F(x_1',x_2',x_3')=5x_1'^2-x_2'^2-x_3'^2, x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}x_1'+\frac{1}{\sqrt{6}}x_2'+\frac{1}{\sqrt{2}}x_3'$,
$x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}x_1'+\frac{1}{\sqrt{6}}x_2'-\frac{1}{\sqrt{2}}x_3', x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}x_1'-\frac{2}{\sqrt{6}}x_2'$.

4.13. $F(x_1',x_2',x_3')=4x_1'^2+4x_2'^2-2x_3'^2, x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}x_1'-\frac{2}{\sqrt{6}}x_3'$,
$x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}x_1'+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2'+\frac{1}{\sqrt{6}}x_3', x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}x_1'-\frac{1}{\sqrt{2}}x_2'+\frac{1}{\sqrt{6}}x_2'$.

4.14. $F(x_1',x_2',x_3')=3x_1'^2+6x_2'^2+9x_3'^2, x_1=\frac{1}{3}(2x_1'-x_2'+2x_3')$,
$x_2=\frac{1}{3}(2x_1'+2x_2'-x_3'), x_3=\frac{1}{3}(-x_1'+2x_2'+2x_3')$.

4.15. $\frac{x''^2}{\frac{19}{14}}-\frac{y''^2}{\frac{19}{6}}=1$. 4.16. $y''^2=-\frac{2\sqrt{5}}{5}x''$. 4.17. $\frac{x''^2}{2}+y''^2=1$.

4.18. $y''^2=4\sqrt{2}x''$. 4.19. $\frac{x''^2}{4}-\frac{y''^2}{9}=1$. 4.20. $\frac{x''^2}{16}+\frac{y''^2}{9}=1$.

4.21. $\frac{x''^2}{9}-\frac{y''^2}{36}=1$. 4.22. $-2x''^2+8y''^2=0$. 4.23. $x''^2+\frac{y''^2}{\frac{1}{2}}=-1$.

4.24. $4x''^2+6y''^2=0$. 4.25. $x''^2=1$. 4.26. $y''^2=-1$.

Навчальне видання

Рудавський Юрій Кирилович

Костробій Петро Петрович

Уханська Дарія Василівна

Батюк Юрій Романович

Бойцун Степан Андрійович

Гук Володимир Михайлович

Білонога Дарія Михайлівна

Слюсарчук Ольга Зиновіївна

Збірник
задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії

Для студентів базових напрямків інженерно-технічних спеціальностей

Редактор Чернигевич О.Б.

Здано у видавництво 7.11.2001. Підписано до друку 19.12.2001.
Формат 60x84 1/16. Папір офсетний. Гарнітура Times.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 15,1. Обл.-вид. арк. 15,2.
Наклад 5 000 прим.

Видавництво "Бескид Біт"

м. Львів, вул. Городоцька, 85/21

тел.: (0322) 72-88-29, факс: (0322) 72-16-94

Друк ПТ ВФ "Афіша"