

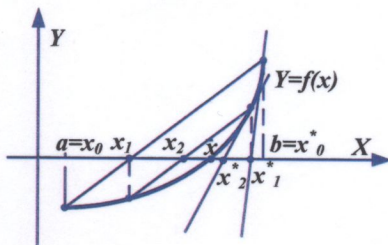
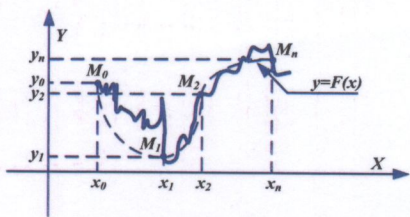
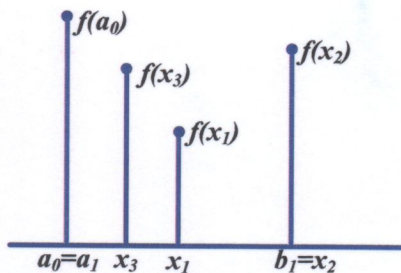
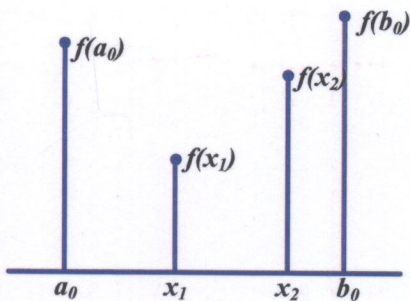
519.6(075)

3-12

Н. І. Заболотна, В. В. Шолота, І. В. Мусійчук



ТЕОРІЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ЧИСЛОВІ МЕТОДИ В ЛАЗЕРНІЙ ТЕХНІЦІ ТА ФОТОНІЦІ



519.6(075)

3-12

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Н. І. Заболотна, В. В. Шолота, І. В. Мусяйчук

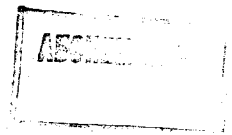
ТЕОРІЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ЧИСЛОВІ МЕТОДИ В ЛАЗЕРНІЙ ТЕХНІЦІ ТА ФОТОНІЦІ

Лабораторний практикум



519.6(075) 3-12 2014

Заболотна Н.І. Теорія оптимізації та числові



Вінниця
ВНТУ
2014

УДК 519.6: 621.383: 621.384 (075)

ББК [22.19 : 32.86]я73

312

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (протокол № 11 від 21.06.2012 р.).

Рецензенти:

С. Г. Антошук, доктор технічних наук

О. Г. Ушенко, доктор фізико-технічних наук

С. В. Павлов, доктор технічних наук

465 890

Заболотна, Н. І.

312 Теорія оптимізації та числові методи в лазерній техніці та фотоніці. Лабораторний практикум / Н. І. Заболотна, В. В. Шолота, І. В. Мусійчук. – Вінниця : ВНТУ, 2014. – 104 с.

Метою лабораторного практикуму є набуття практичних навичок з побудови блок-схем і написання програм для обчислювальних алгоритмів за класичними числовими методами та методами теорії оптимізації для задач лазерної техніки та фотоніки. Водночас розглянуто паралельні інтерпретації окремих числових методів, зокрема паралельне розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що орієнтовані на сучасні паралельні системи програмування.

Лабораторний практикум призначений для студентів напрямку 6.051004 «Опtotехніка» і може бути корисним для аспірантів і спеціалістів, що займаються моделюванням оптико-електронних інформаційних та лазерних систем.

УДК 519.6: 621.383: 621.384 (075)

ББК [22.19 : 32.86]я73

ІНТБ ВНТУ
м.Вінниця

© Н. Заболотна, В. Шолота, І. Мусійчук, 2014

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	6
Лабораторна робота № 1 ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ	7
1.1 Основні теоретичні відомості	7
1.2 Контрольні запитання	18
1.3 Зміст завдання	19
1.4 Порядок виконання роботи	19
1.5 Оформлення звіту	19
Лабораторна робота № 2 РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІТЕРАЦІЙНИМ МЕТОДОМ	21
2.1 Основні теоретичні відомості. Метод ітерацій	21
2.2 Контрольні запитання	28
2.3 Зміст завдання	28
2.4 Порядок виконання роботи	28
2.5 Оформлення звіту	29
Лабораторна робота № 3 ПРЯМІ ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СЛАР	30
3.1 Основні теоретичні відомості	30
3.2 Контрольні запитання	33
3.3 Зміст завдання	33
3.4 Порядок виконання роботи	33
3.5 Оформлення звіту	34
Лабораторна робота № 4 ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СЛАР	36
4.1 Основні теоретичні відомості	36
4.2 Контрольні запитання	42
4.3 Зміст завдання	42
4.4 Порядок виконання роботи	43
4.5 Оформлення звіту	43

Лабораторна робота № 5 ПАРАЛЕЛЬНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ СЛАР.....	44
5.1 Основні теоретичні відомості.....	44
5.2 Контрольні запитання.....	52
5.3 Зміст завдання.....	52
5.4 Порядок виконання роботи.....	53
5.5 Оформлення звіту.....	53
Лабораторна робота № 6 НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА МНОГОЧ- ЛЕНОМ ЛАГРАНЖА ТА НЬЮТОНА.....	54
6.1 Основні теоретичні відомості.....	54
6.2 Контрольні запитання.....	61
6.3 Зміст завдання.....	61
6.4 Порядок виконання роботи.....	61
6.5 Оформлення звіту.....	62
Лабораторна робота № 7 АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ ЗА МЕТО- ДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ.....	65
7.1 Основні теоретичні відомості.....	65
7.2 Контрольні запитання.....	68
7.3 Зміст завдання.....	68
7.4 Порядок виконання роботи.....	68
7.5 Оформлення звіту.....	69
Лабораторна робота № 8 ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ.....	72
8.1 Основні теоретичні відомості.....	72
8.2 Контрольні запитання.....	76
8.3 Зміст завдання.....	77
8.4 Порядок виконання роботи.....	77
8.5 Оформлення звіту.....	77
Лабораторна робота № 9 ЧИСЕЛЬНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ПРОСТОГО ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ЗА ОДНОКРОКОВИМИ ТА БА- ГАТОКРОКОВИМИ МЕТОДАМИ.....	79
9.1 Основні теоретичні відомості.....	79

9.2 Контрольні запитання.....	84
9.3 Зміст завдання.....	84
9.4 Порядок виконання роботи.....	85
9.5 Оформлення звіту.....	85
Лабораторна робота № 10 ОДНОВИМІРНА ОПТИМІЗАЦІЯ.....	87
10.1 Основні теоретичні відомості.....	87
10.2 Контрольні запитання.....	92
10.3 Зміст завдання.....	92
10.4 Порядок виконання роботи.....	92
10.5 Оформлення звіту.....	93
Лабораторна робота № 11 БАГАТОВИМІРНА ОПТИМІЗАЦІЯ.....	95
11.1 Основні теоретичні відомості.....	95
11.2 Контрольні запитання.....	100
11.3 Зміст завдання.....	100
11.4 Порядок виконання роботи.....	100
11.5 Оформлення звіту.....	101
ЛІТЕРАТУРА.....	102

ПЕРЕДМОВА

Лазерні та оптоелектронні технології, що останнім часом розвиваються дуже швидкими темпами і активно впроваджуються в науку, техніку та багато інших сфер життя, неможливі без використання розрахунково-теоретичної бази, що включає дослідження різних фізичних процесів, визначення основних параметрів роботи та різноманітні енергетичні розрахунки оптичних систем. Високий рівень розвитку обчислювальної техніки дозволяє проводити розрахунки з використанням чисельних методів.

Метою лабораторного практикуму є допомога студентам засвоїти необхідні теоретичні знання та оволодіти практичними навичками з теорії оптимізації та чисельних методів, що застосовуються при моделюванні та проектуванні лазерних та оптоелектронних приладів, систем та технологій.

В практикумі детально описані методи та алгоритми для розв'язань нелінійних рівнянь, систем лінійних рівнянь, інтерполяційні методи, методи чисельного інтегрування та диференціювання функцій, необхідність використання яких досить часто виникає при розрахунках лазерних систем, оптичних вимірюваннях та ін. Одна робота присвячена паралельній інтерпретації ітераційних методів розв'язання СЛАР, що якнайкраще описує переваги світла як носія інформації з його можливістю паралельно, без перешкод передавати величезні об'єми інформації. Крім того, розглянуто елементи теорії оптимізації, зокрема дві лабораторні роботи присвячені методам одновимірної та багатовимірної оптимізації.

Більшість лабораторних робіт містять графічні інтерпретації та блок-схеми методів, що покращує розуміння студентами матеріалу, а також спрощує виконання лабораторних робіт.

Посібник складений відповідно до програми дисципліни «Теорія оптимізації та числові методи в лазерній техніці та фотоніці» і розрахований на виконання 11 лабораторних робіт, що відповідає всій програмі дисципліни за навчальним планом бакалаврського напрямку підготовки 6.051004 «Оптехніка». Виконуючи завдання, студенти повинні опиратися за здобуті знання з вищої математики, програмування та застосування систем прикладних програм.

Доцент к.т.н. Заболотна Н. І. підготувала лабораторні роботи № 6-11, к.т.н. доц. Шолота В. В. підготував лабораторні роботи № 1-3, Мусійчук І. В. підготувала лабораторні роботи № 4, 5 та склала варіанти завдань до лабораторних робіт.

Лабораторна робота № 1

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Мета роботи: оволодіти основними методами чисельного розв'язання алгебраїчних і трансцендентних нелінійних рівнянь; навчитися вибирати найбільш ефективний метод розв'язання, складати алгоритм і програмно реалізувати його на ЕОМ.

1.1 Основні теоретичні відомості

1.1.1 Визначення алгебраїчних і трансцендентних рівнянь і загальна постановка задачі їх розв'язання чисельними методами

При розв'язанні багатьох практичних задач постає необхідність розв'язання рівнянь. Будь-яке рівняння з одним невідомим можна записати у вигляді [1]

$$f(x) = 0, \quad (1.1)$$

де функція $f(x)$ визначена і неперервна на деякому проміжку $[a; b]$.

Розв'язати рівняння означає знайти множину його коренів, тобто таких значень $x \in [a; b]$, при яких рівняння (1.1) перетвориться в тотожність. Якщо функція $f(x)$ – алгебраїчний многочлен, то рівняння (1.1) називається *алгебраїчним*. Якщо функція $f(x)$ містить тригонометричні, показникові або логарифмічні функції, тоді рівняння (1.1) називають *трансцендентним*.

Відомо, що будь-яке алгебраїчне рівняння має, принаймні, один корінь дійсний або комплексний. Шляхом алгебраїчних перетворень із будь-якого алгебраїчного рівняння можна одержати рівняння в канонічній формі [1]:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (1.2)$$

де a_0, a_1, \dots, a_n – коефіцієнти рівняння, x – невідоме. Показник n – порядок алгебраїчного рівняння.

Наприклад, рівняння $\sqrt{2 \cdot x^2 - 1} + x = \sqrt{2 \cdot x^2 + 1} - 1$ може бути зведене до канонічної форми $7 \cdot x^4 + 12 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 5 = 0$.

У деяких випадках розв'язання трансцендентних рівнянь можна звести до розв'язання алгебраїчних рівнянь. Приклади трансцендентних рівнянь: $x - 10 \sin(x) = 0$; $2^x - 2 \cos(x) = 0$; $\lg(x+5) = \cos(x)$.

Для розв'язання більшості рівнянь виду (1.1) використовують методи чисельного (наближеного) обчислення коренів, що є зручними для реалізації на ЕОМ.

Наближеним значенням кореня x_0 , з точністю до ε , будемо вважати будь-яке число, що знаходиться на відрізку $[a; b]$ і при якому виконується умова $b - a \leq \varepsilon$.

1.1.2 Відокремлення коренів

Знаходження наближених коренів рівняння (1.1) складається з двох етапів:

- відокремлення коренів, тобто знаходження досить малих відрізків, на кожному з яких міститься один і тільки один корінь рівняння;
- уточнення коренів, тобто обчислення коренів із заданим ступенем точності в деякому околі.

Відокремлення коренів можна зробити двома способами: графічно; аналітично.

При *графічному* методі будують графік функції $y = f(x)$ для рівняння (1.1). Абсиси точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю OX – значення коренів рівняння. Оскільки побудова графіка функції $y = f(x)$ за точками – трудомісткий процес, то часто рівняння (1.1) записують у вигляді $\phi(x) = g(x)$ і будують графіки функцій $y_1 = \phi(x)$ та $y_2 = g(x)$, потім знаходять межі, в яких містяться абсиси точок перетину графіків функцій y_1 і y_2 .

Приклад: рівняння має вигляд $e^x - x^2 = 0$. Перепишемо рівняння у вигляді $e^x = x^2$ та побудуємо графіки кожної з функцій (рис. 1.1).

Відрізком ізоляції кореня є проміжок $[-1; 0]$.

Графічний метод не дає великої точності.

Аналітичний метод відокремлення коренів ґрунтується на теоремах з курсу математичного аналізу.

Теорема 1 (теорема існування кореня). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і набуває на кінцях цього відрізка значень протилежних знаків, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$, то усередині відрізка $[a; b]$ існує принаймні один корінь рівняння $f(x) = 0$.

Теорема 2 (теорема існування і єдиності кореня). Якщо функція $f(x)$, неперервна і диференційована на $[a; b]$, набуває на кінцях цього відрізка значень різних знаків, а похідна $f'(x)$ зберігає сталий знак всередині відрізка $[a; b]$, то рівняння $f(x) = 0$ на цьому відрізку має корінь, причому єдиний.

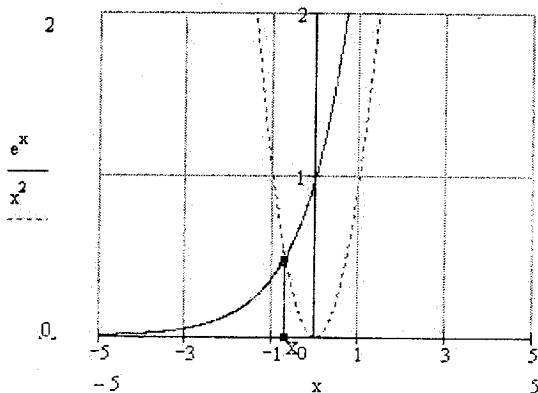


Рисунок 1.1 – Відокремлення коренів графічним методом

Приклад. Нехай $f(x)=0$, на відрізку $[\alpha; \beta]$ (рис. 1.2) знаходяться всі корені рівняння, тому що $f(x)$ визначена, неперервна на цьому відрізку і $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$. Складемо алгоритм відокремлення коренів рівняння, визначивши всі відрізки $[a; b] \in [\alpha; \beta]$, що містять по одному кореню [1].

Починаючи з точки $x = \alpha$ рухаємося вправо з кроком h . Як тільки пара сусідніх значень $f(x_1), f(x_2)$ будуть мати різні знаки, то x_1, x_2 – кінці відокремлених відрізків (рис. 1.3).

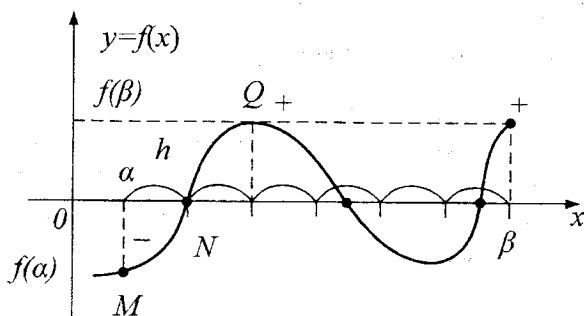


Рисунок 1.2 – Графічна інтерпретація аналітичного методу відокремлення коренів

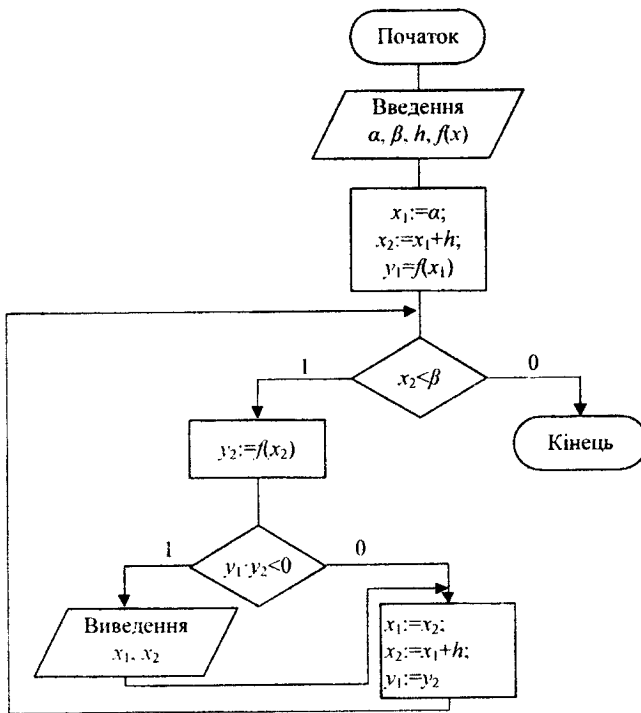


Рисунок 1.3 – Блок-схема етапу відокремлення коренів

1.1.3 Методи уточнення коренів

Другий етап чисельного розв'язання рівняння – уточнення коренів, тобто доведення до заданого ступеня точності. Це значить, що якщо на етапі відокремлення коренів знайдено відрізок $[a; b]$, на якому перебуває корінь x_0 рівняння (1.1), то для знаходження значення кореня із заданою точністю ε необхідно визначити більш вузький інтервал $[a^*; b^*]$ такий, щоб виконувалася умова $b^* - a^* \leq \varepsilon$.

1.1.3.1 Метод ділення навпіл (дихотомії)

Нехай рівняння (1.1) має на відрізку $[a; b]$ єдиний корінь, причому $f(x)$ – неперервна на $[a; b]$. Розділимо відрізок $[a; b]$ навпіл точкою $c = (a + b) / 2$. Якщо $f(c) = 0$, то c – точний корінь рівняння (1.1). Якщо $f(c) \neq 0$, то можливі два випадки:

- або $f(x)$ змінює знак на відрізку $[a; c]$ (рис. 1.4, а);
- або $f(x)$ змінює знак на відрізку $[c; b]$ (рис. 1.4, б).

Вибираючи в кожному випадку той з відрізків, на кінцях якого функція має різні знаки і продовжуючи процес ділення навпіл далі, можна дійти до як завгодно малого відрізка, що містить корінь рівняння.

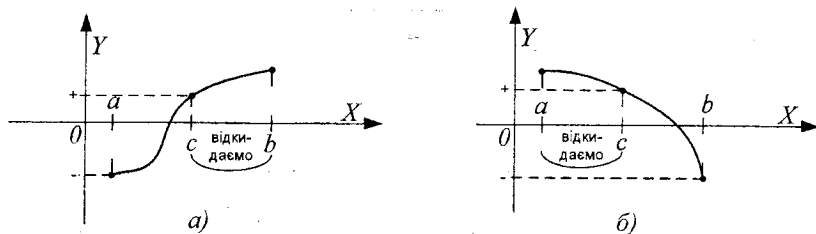


Рисунок 1.4 – Графічна інтерпретація методу дихотомії

Відрізок ділимо навпіл доти, поки на n -му етапі не буде отримано відрізок $[a_n; b_n]$ такий, що [2]

$$a_n - b_n = (b - a) / 2^n \leq \varepsilon \text{ та } a_n \leq x_0 \leq b_n, \quad (1.3)$$

де n дорівнює кількості ділень.

Числа a_n та b_n – корені рівняння (1.1) з точністю до ε . За наближене значення кореня варто взяти $x_0 = (a_n + b_n) / 2$, і при цьому похибка не перевищує значення $(b - a) / 2^{n+1}$. Алгоритм уточнення одного кореня x_0 рівняння (1.1) на відрізку $[a; b]$ до заданої точності ε методом ділення навпіл з похибкою δ показано на рис. 1.5.

1.1.3.2 Метод хорд (пропорційних частин)

Ідея методу полягає в тому, що на досить малому проміжку $[a; b]$ дуга кривої $y = f(x)$ замінюється стягуючою її хордою. Як наближене значення кореня береться значення абсциси точки перетину хорди з віссю OX . Згадаємо деякі математичні властивості диференціювання функції:

- якщо $f'(x) > 0$, то $f(x)$ зростає на $[a; b]$;
- якщо $f'(x) < 0$, то $f(x)$ спадає на $[a; b]$;
- якщо $f''(x) > 0$, то $f(x)$ увігнута або опукла вниз на $[a; b]$;
- якщо $f''(x) < 0$, то $f(x)$ опукла вверх на $[a; b]$.

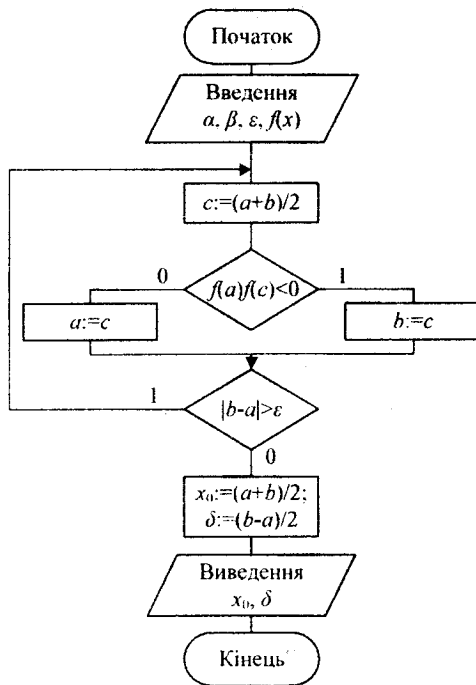


Рисунок 1.5 – Алгоритм уточнення кореня x_0 нелінійного рівняння на відрізьку методом ділення навпіл

Згідно з методом кожне значення x_{n+1} – точка перетину осі абсцис із хордою, проведеною через точки $f(a)$ і $f(b)$, причому одна із точок фіксується (нерухома) – та, для якої знаки функції $f(x)$ і її другої похідної $f''(x)$ однакові (рис. 1.6).

Якщо нерухомий кінець хорди a , то послідовні наближення: $x_0 = b$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.4)$$

утворюють обмежену монотонно спадаючу послідовність, причому

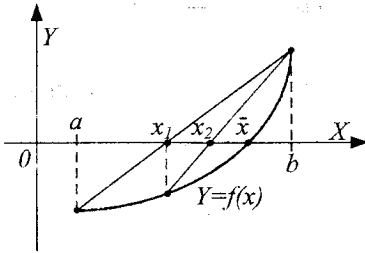
$$a < \bar{x} < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_1 < x_0.$$

Якщо нерухомий кінець хорди b , то послідовні наближення: $x_0 = a$

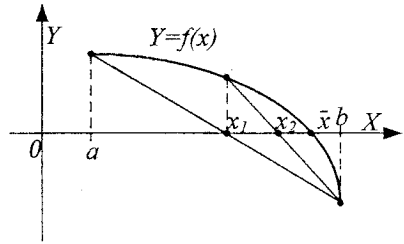
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.5)$$

утворюють обмежену монотонно зростаючу послідовність, причому

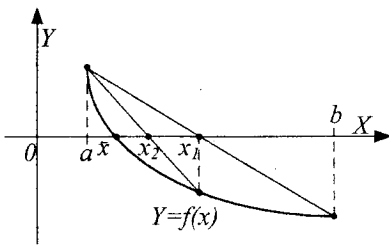
$$x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < \bar{x} < b.$$



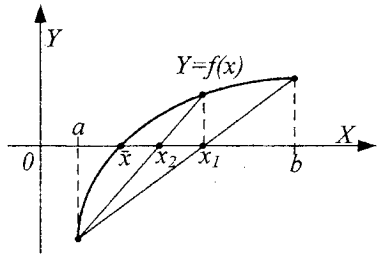
а) $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0,$
 $f''(x) > 0$, тобто $f(x)$ – увігнута
 $f(a)f''(x) < 0, f(b)f''(x) < 0$
 кінець b – нерухомий



б) $f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0,$
 $f''(x) < 0$, тобто $f(x)$ – виупукла
 $f(a)f''(x) < 0, f(b)f''(x) > 0$
 кінець b – нерухомий



в) $f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0,$
 $f''(x) > 0$, тобто $f(x)$ – увігнута
 $f(a)f''(x) > 0, f(b)f''(x) < 0$
 кінець a – нерухомий



г) $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0,$
 $f''(x) < 0$, тобто $f(x)$ – увігнута
 $f(a)f''(x) > 0, f(b)f''(x) < 0$
 кінець a – нерухомий

Рисунок 1.6 – Геометрична інтерпретація методу хорд

Узагальнюючи результати, маємо:

1) нерухомий той кінець, для якого знаки $f(x)$ і $f''(x)$ збігаються;

2) послідовні наближення x_n лежать по ту сторону кореня \bar{x} , де функція $f(x)$ має знак, протилежний знаку її другої похідної $f''(x)$.

Для оцінювання похибки наближення (збіжності) можна скористатися формулою [2]

$$|\bar{x} - x_n| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}| \quad \text{або} \quad |\bar{x} - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \quad (1.6)$$

де \bar{x} – наближений корінь, x_n і x_{n-1} – два послідовних наближення, M_1 і m_1 – найбільше та найменше значення модуля похідної $f(x)$ на відрітку $[a; b]$.

Таким чином, як тільки виявлено, що

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon, \quad (1.7)$$

де ε – задана гранична абсолютна похибка, то гарантовано, що

$$|\bar{x} - x_n| < \varepsilon. \quad (1.8)$$

Блок-схема алгоритму обчислення наближеного кореня рівняння на відрізьку $[a; b]$ за методом хорд подана рис. 1.7.

1.1.3.3 Метод дотичних (метод Ньютона)

Геометричний зміст методу полягає в тому, що дуга кривої $y = f(x)$ замінюється дотичною до цієї кривої в точці початкового наближення $x = x_0$. Перетин дотичної з віссю X дає перше наближення x_1 й т. д. (рис. 1.8).

Як початкове наближення x_0 вибираємо таке, для якого виконується нерівність

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0. \quad (1.9)$$

Наступні наближення обчислюються за допомогою методу Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1.10)$$

до тих пір, поки не виконається умова (1.7).

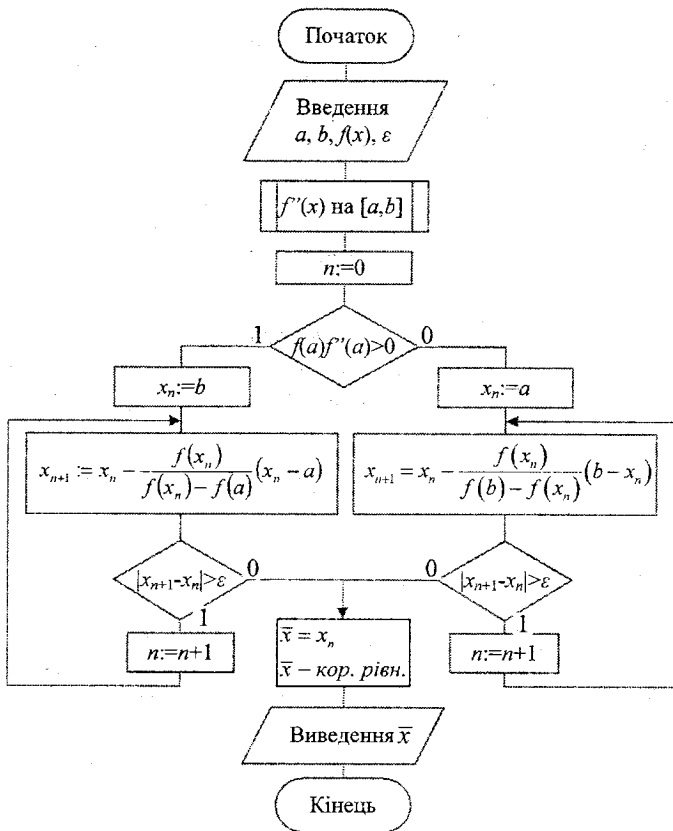


Рисунок 1.7 – Блок-схема уточнення коренів рівняння за методом хорд

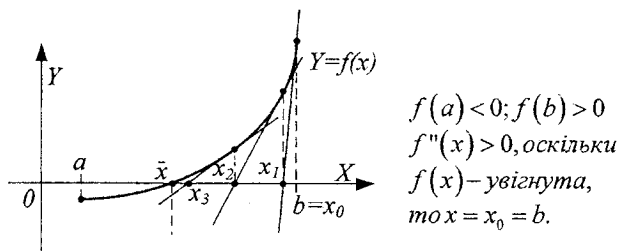


Рисунок 1.8 – Геометрична інтерпретація методу дотичних

Теорема [2]. Якщо $f(a) \cdot f(b) < 0$, а $f'(x)$ і $f''(x)$ відмінні від нуля і зберігають певні знаки на відрізку $[a; b]$, то виходячи з початкового наближення $x_0 \in [a; b]$, що задовольняє нерівності (1.7), можна обчислити методом Ньютона (1.10) єдиний корінь \bar{x} рівняння (1.1) із заданою точністю ε .

Для оцінки збіжності (похибки) n -го наближення x_n справедлива формула

$$|\bar{x} - x_n| \leq \frac{M_2}{2 \cdot m_1} (x_n - x_{n-1})^2, \quad (1.11)$$

де M_2 – найбільше значення $|f''(x)|$ на відрізку $[a; b]$.

Метод забезпечує швидку (квадратичну) збіжність і за рахунок цього дає вигоду у часі обчислення. Однак вигода втрачається через необхідність обчислення окрім $f(x_n)$ похідної $f'(x_n)$.

Блок-схема алгоритму обчислення згідно з методом Ньютона подана на рис. 1.9.

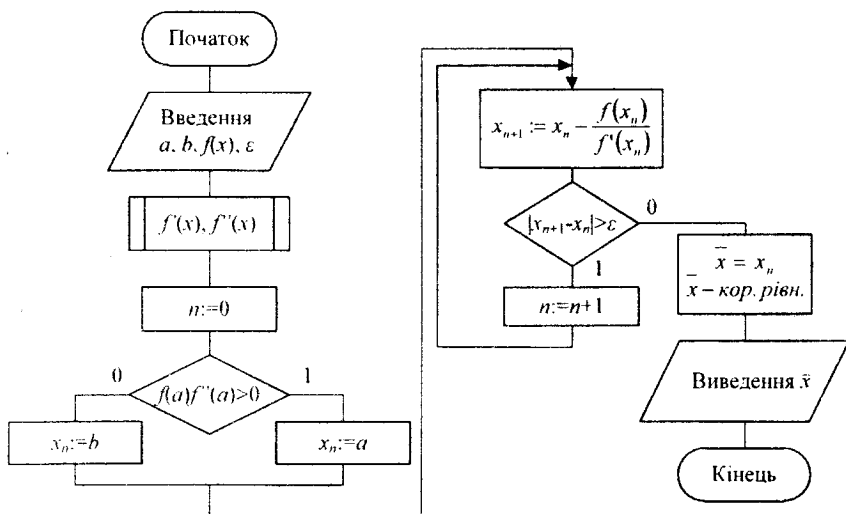


Рисунок 1.9 – Блок-схема уточнення коренів рівняння за методом Ньютона

1.1.3.4 Комбінований метод січних-хорд

Нехай $f(a) \cdot f(b) < 0$, а $f'(x)$ і $f''(x)$ зберігають постійні знаки на $[a, b]$. Об'єднуючи метод хорд і дотичних, одержуємо метод, на кожному етапі якого знаходимо наближення з недостачею (x_n) і з надлишком x_n^* до точного кореня x рівняння $f(x) = 0$. Цифри загальні для x_n і x_n^* обов'язково належать точному кореню x .

Графічно можливі 4 випадки властивостей функції при використанні методу хорд (див. рис. 1.6, а-г):

Обмежимося поясненням першого випадку (рис. 1.10), що відповідає випадку, зображеному на рис. 1.6, а [2].

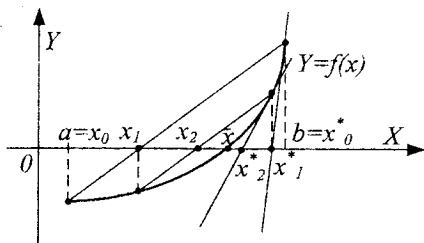


Рисунок 1.10 – Геометрична інтерпретація комбінованого методу

Вважаємо, що одночасно $x_0 = a$ та $x_0^* = b$. Тоді організуємо паралельні обчислення за формулами (1.10) і (1.11).

Відповідно до методу хорд і ситуації $x_0 = a$ маємо:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n^*) - f(x_n)} \cdot (x_n^* - x_n), \text{ де } n = 0, 1, \dots \quad (1.12)$$

Відповідно до методу дотичних і ситуації $x_0^* = b$ маємо:

$$x_{n+1}^* = x_n^* - \frac{f(x_n^*)}{f'(x_n^*)} \cdot f(x_n^*), \text{ де } n = 0, 1, \dots \quad (1.13)$$

На кожному кроці метод хорд застосовується до нового відрізка $[x_n; x_n^*]$.

З (1.12) і (1.13) випливає, що значення точного кореня \bar{x}_n лежить у межах $x_n < \bar{x}_n < x_n^*$.

Якщо допустима абсолютна похибка наближеного кореня x_n задана задалегідь, і порівняно з нею процес обчислень припиниться, коли буде вияв-

НТБ ВІТУ
м. Вінниця

465-899

лено, що $|\bar{x}_n - x_n| < \varepsilon$.

Після закінчення процесу за значення кореня \bar{x} найкраще взяти середнє арифметичне отриманих останніх значень:

$$\bar{x} = (x_n + x^*_n) / 2. \quad (1.14)$$

Блок-схема алгоритму обчислень згідно з методом наведена на рис. 1.11.

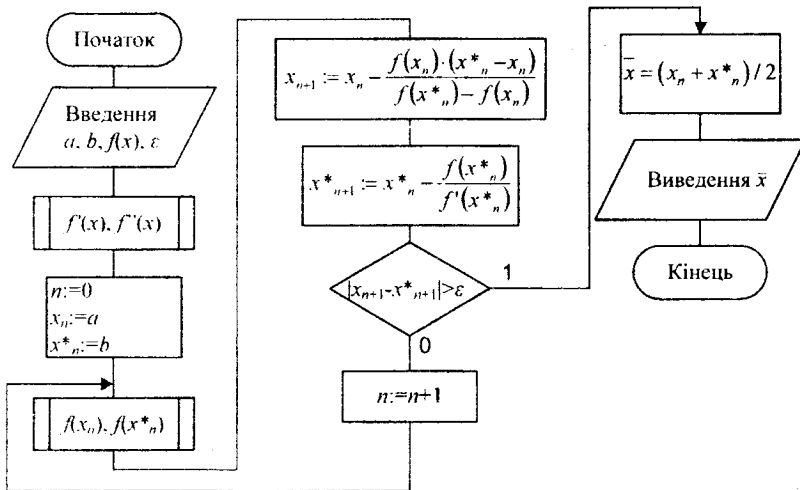


Рисунок 1.11 – Блок-схема уточнення коренів рівняння за комбінованим методом

1.2 Контрольні запитання

1. В чому полягає суть етапу відокремлення коренів при використанні чисельних методів розв'язання нелінійних рівнянь?
2. Яким чином графічне відокремлення коренів уточнюється за рахунок обчислень? Які властивості функції однієї змінної при цьому використовуються?
3. Яка суть методів уточнення коренів?
4. Яким чином в схемі алгоритму поділу навпіл реалізується усунення тієї половини відрізка, на якому строго монотонна функція не змінює знак, тобто не має коренів?
5. Поясніть геометричну інтерпретацію методів хорд та дотичних.
6. В чому перевага комбінованого методу над методами хорд та дотичних?

1.3 Зміст завдання

Лабораторна робота призначена для розв'язання нелінійних рівнянь основними методами, що наведені в теоретичній частині роботи.

Індивідуальні завдання містять задані функції, з якими потрібно буде працювати.

При виконанні роботи необхідно скласти алгоритми відокремлення та уточнення коренів рівняння, відокремити корені та перевірити отримані результати за допомогою графічного методу, скласти програму для обчислення за допомогою ЕОМ коренів рівняння основними методами. Роздрукувати: початкові дані, результуючі дані та тексти програм.

1.4 Порядок виконання роботи

1. Ознайомитися з теоретичною частиною роботи.
2. Скласти блок-схему алгоритму відокремлення коренів рівняння $f(x) = 0$ та його програмну реалізацію.
3. Відокремити корені в рівнянні, запропонованому згідно з варіантом за таблицею 1.1, та перевірити їх правильність за допомогою графічного методу.
4. Скласти блок-схему алгоритму подальшого уточнення одного відокремленого кореня рівняння методом ділення навпіл і реалізувати його на ЕОМ згідно з даними таблиці 1.1, результатами обчислень п. 3 та самостійно обраною точністю обчислень ε .
5. Виконати дії, описані в п. 4, застосовуючи метод розв'язання нелінійного рівняння (хорд; дотичних; комбінований метод) відповідно до табл. 1.1. Порівняти отримані результати з результатами п. 4.
6. Скласти програму для обчислення за допомогою ЕОМ всіх коренів заданого рівняння за методом згідно з п. 5, самостійно обравши точність обчислень ε .
7. Роздрукувати початкові дані (точність обчислень, вид рівняння), результуючі дані та тексти програм до п. 3 - 9.
8. Оформити звіт.

1.5 Оформлення звіту

Звіт про виконання лабораторної роботи повинен бути поданий у вигляді роздрукованого документа, який повинен містити:

1. Індивідуальний варіант завдання, графіки, блок-схеми, текст програми, а також результати роботи;
2. Текстові коментарі до математичних обчислень, блок-схем, програм, виконані за вказаними правилами;
3. Висновки.

Таблиця 1.1 – Індивідуальні варіанти завдань

	№ варіанта	a	b	c	d	метод уточнення
$ax^5 + bx^4 + cx + d$	1	1	1	-3		хорд
	2	1	3	-2		дотичних
	3		1	-1	-1	комбінований
$ax^3 + bx^2 + cx + d$	4	1	1	1	-2	хорд
	5	1	-1	-3	2	дотичних
	6	1	-2	-1	1	комбінований
	7	2.1	-6.4	-3.2	15.1	хорд
	8	9.3	-11.8	-1.6	18.7	дотичних
$tg(ax) - bx$	9	1	1			комбінований
	10	1	2			хорд
	11	1	1.5			дотичних
$x^2 - \cos(\pi x)$	12					комбінований
$\ln(x) - 1/x^2$	13					хорд
$2\ln(x) - x/2 + 1$	14					дотичних
$\sin(2x) - \ln(x)$	15					комбінований
$\ln(x) + (x+1)^3$	16					хорд
$tg(ax) + bx$	17	1	3			дотичних
	18	1	1.2			комбінований
	19	1	4.5			хорд
	20	1	3.7			дотичних
$ax^4 + bx^3 + cx + d$	21	1	4	2	7	комбінований
	22	2		2		хорд
	23	1	-1.2	3	-5	дотичних
	24		3	-4	7	комбінований
	25	0.5		6	2	хорд
$\sin(x) - \ln(x)$	26					дотичних
$\cos(2x) + \ln(x)$	27					комбінований
$ax - \ln(x)$	28	1				хорд
	29	2				дотичних
	30	5				комбінований

Лабораторна робота № 2 РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІТЕРАЦІЙНИМ МЕТОДОМ

Мета роботи: оволодіти ітераційним методом чисельного розв'язання алгебраїчних і трансцендентних нелінійних рівнянь; навчитися вибирати найбільш ефективний метод розв'язання, складати алгоритм і програмно реалізувати його на ЕОМ.

2.1 Основні теоретичні відомості. Метод ітерацій

Одним із найкращих способів чисельного розв'язання рівняння є метод ітерацій, оскільки він є самокорегувальним. Суть методу полягає в такому.

Нехай рівняння $f(x) = 0$ має на відрізку $[a; b]$ єдиний корінь, причому $f(x)$ – неперервна на $[a; b]$.

Замінімо це рівняння рівносильним рівнянням

$$x = \phi(x). \quad (2.1)$$

Тепер, щоб розв'язати рівняння (2.1), застосовують *метод послідовних наближень (метод ітерацій)*. Вибирають деяке початкове наближення x_0 і послідовно обчислюють наступні наближення:

$$x_n = \phi(x_{n-1}), \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.2)$$

що називають ітераційною послідовністю.

Збіжність ітераційної послідовності $\{x_n\}$ забезпечується відповідним вибором функції $\phi(x)$ і початкового наближення x_0 . Вибираючи порізному функцію $\phi(x)$, можна дістати різні ітераційні методи розв'язання рівняння (2.1).

Метод ітерацій має простий геометричний зміст. Побудуємо графіки функцій $y = x$ і $y = \phi(x)$. Абсциса точки перетину графіків цих функцій є коренем рівняння (2.1) (рис. 2.1).

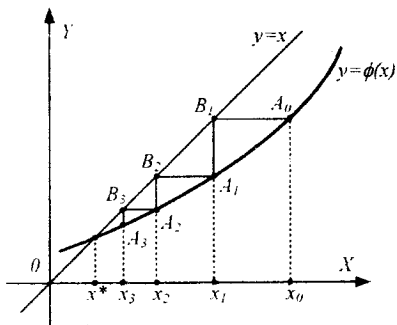
На відрізку $[a; b]$ довільно вибираємо точку x_0 і проводимо через неї пряму, паралельну осі ординат до перетину з кривою $y = \phi(x)$ в точці $A_0(x_0, \phi(x_0))$. З точки A_0 проведемо пряму, паралельну осі абсцис, до перетину з прямою $y = x$. В результаті отримаємо точку B_1 з ординатою $\phi(x_0)$. Спроектувавши точку B_1 на вісь ОХ, знаходимо абсцису $x_1 = \phi(x_0)$.

Аналогічно через x_1 проводимо пряму, паралельну осі ординат, до перетину з кривою $y = \phi(x)$ в точці $A_1(x_1, \phi(x_1))$. З точки A_1 проводимо пря-

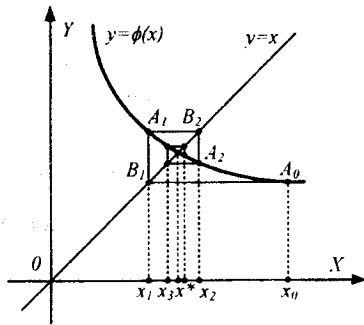
му, паралельну осі абсцис, до перетину з прямою $y=x$ в точці $B_2(x_2, \phi(x_1))$, абсциса якої $x_2 = \phi(x_1)$ і т. д. В результаті спільні абсциси точок A_1 і B_1 , A_2 і B_2 ... є послідовними наближеннями x_1, x_2, x_3, \dots кореня x^* .

На рис. 2.1 зображено випадки: а) $0 < \phi'(x) < 1$; б) $-1 < \phi'(x) < 0$; в) $\phi'(x) > 1$; г) $\phi'(x) < -1$.

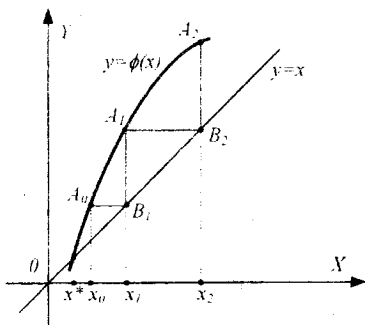
Якщо $|\phi'(x)| < 1$, то послідовні наближення x_n збігаються до кореня x^* .
Якщо $|\phi'(x)| > 1$, то послідовні наближення віддаляються від нього.



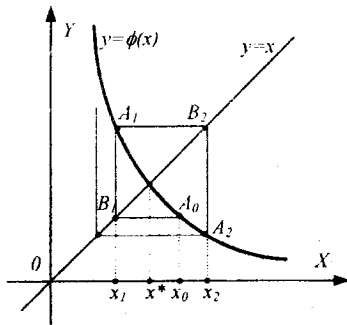
а)



б)



в)



г)

Рисунок 2.1 – Геометричний зміст методу ітерацій

Достатні умови збіжності методу ітерацій дає теорема.

Теорема. Нехай рівняння $x = \phi(x)$ має корінь x^* і в деякому околі цього кореня (на відрізку $[a, b]$) функція $\phi(x)$ задовольняє умову Ліпшиця $|\phi(x) - \phi'(x)| \leq q|x - x'|$, де $0 < q < 1$. Тоді для будь-якого $x_0 \in [a; b]$ послідовність $\{x_n\}$, обчислена за формулою (2.2), збігається до кореня x^* , причому швидкість збіжності характеризується нерівністю

$$|x_n - x^*| \leq q^n |x_0 - x^*|. \quad (2.3)$$

Отже, послідовність $\{x_n\}$ збігається до кореня x^* . Метод ітерацій є саморегульним методом, тобто він виправляє помилки, допущені при обчисленні наближень x_n (якщо вони не виходять за межі відрізка $[a; b]$), оскільки помилкові значення можна розглядати як нові початкові наближення. Тому при ручних обчисленнях не потрібно весь час виконувати ітерації з великою кількістю значущих цифр. Точність обчислень треба поступово збільшувати з наближенням до кореня.

Розглянемо оцінку похибки методу ітерацій.

В умовах теореми метод ітерацій сходиться при будь-якому виборі початкового значення $x_0 \in [a; b]$. Але систематичні помилки не усуваються.

Для оцінювання абсолютної похибки $\Delta x = |x - x_n|$ (x – точний корінь) n -го наближення застосовуємо формулу

$$\Delta x_n \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|. \quad (2.4)$$

На практиці зручніше користуватися модифікацією формули (2.4)

$$x_n \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|. \quad (2.5)$$

Практично число q визначається як верхня границя модуля похідної $|\phi'(x)|$ при $x_0 \in [a; b]$.

$$q = \max |\phi'(x)|, \quad x_0 \in [a; b]. \quad (2.6)$$

Що ж служить критерієм для припинення обчислень при досягненні заданої точності ε ? Такою умовою є $\Delta x_n \leq \varepsilon$. З огляду на оцінку (2.5), для цього необхідно

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon(1-q)/q. \quad (2.7)$$

Блок-схема алгоритму розв'язання нелінійного рівняння за методом ітерацій наведена на рис. 2.2.

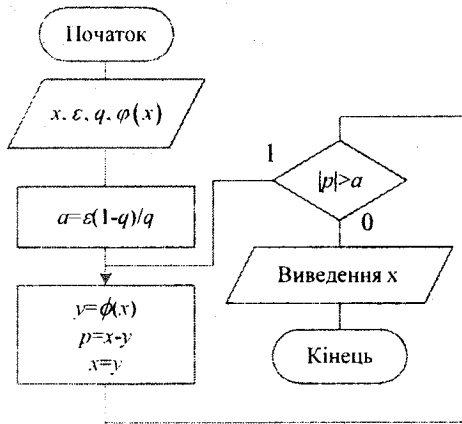


Рисунок 2.2 – Блок-схема уточнення коренів рівняння за методом ітерацій

Рівняння (1.1) до рівносильного рівняння (2.1) перетворюють так, щоб в околі кореня x^* виконувалась нерівність

$$|\phi'(x)| \leq q < 1, \quad x \in [a; b]. \quad (2.8)$$

Розглянемо деякі загальні прийоми такого перетворення.

Нехай корінь рівняння x^* лежить на відрізку $[a; b]$. Замінімо рівняння (1.1) рівносильним йому

$$x = x - \lambda f(x) = \phi(x), \quad \lambda \neq 0. \quad (2.9)$$

Підберемо сталу λ так, щоб в околі $[a; b]$ кореня x^* виконувалась нерівність

$$|\phi'(x)| = |1 - \lambda f'(x)| \leq q < 1.$$

звідси маємо

$$-1 < 1 - \lambda f'(x) < 1$$

або

$$0 < \lambda f'(x) < 2.$$

Якщо знак $f'(x)$ на $[a; b]$ не змінюється, то λ повинна мати однаковий знак з $f'(x)$ і задовольняти умову

$$\lambda \leq \frac{2}{\max_{x \in [a, b]} |f'(x)|}. \quad (2.10)$$

При такому виборі λ нерівність (2.8) виконуватиметься. Іноді рівняння (1.1) замінюють рівносильним йому

$$x = x - \frac{1}{\mu} f(x), \quad \mu \neq 0. \quad (2.11)$$

Сталу μ вибирають так, щоб в околі $[a, b]$ кореня x^* справджувалась нерівність

$$|\phi'(x)| = \left| 1 - \frac{1}{\mu} f'(x) \right| \leq q < 1,$$

тобто виконувались умови

$$-1 < 1 - \frac{1}{\mu} f'(x) < 1$$

або

$$0 < \frac{1}{\mu} f'(x) < 2.$$

Остання подвійна нерівність виконуватиметься, якщо

$$\frac{f'(x)}{\mu} > 0 \quad \text{і} \quad |\mu| \geq \frac{1}{2} \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|. \quad (2.12)$$

Таким чином, якщо на відрізьку $[a; b]$ функція $f'(x)$ зберігає знак і обмежена, то завжди можна вказати число μ того самого знака, що й $f'(x)$, яке задовольнятиме нерівності (2.12) і цим самим забезпечуватиме виконання нерівності (2.8) для рівняння (2.11).

Якщо рівняння $x = \phi(x)$ таке, що в околі $[a; b]$ кореня x^* має місце нерівність

$$|\phi'(x)| \geq \nu > 1, \quad (2.13)$$

то ітераційний процес буде розбіжний. Тоді таке рівняння замінюють рівносильним йому $x = \psi(x)$, де $\psi(x)$ – функція, обернена до $\phi(x)$. Для останнього рівняння метод ітерацій буде збіжним, оскільки

$$|\psi'(x)| = \left| \frac{1}{\phi'(\psi(x))} \right| \leq \frac{1}{\nu} = q < 1.$$

Приклад. Перетворити рівняння $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ до вигляду $x = \phi(x)$, якщо його корінь $x^* \in [2;3]$.

Розв'язання. Застосуємо послідовно всі три способи.

1 - й с п о с і б. Оскільки $f'(x) = 3x^2 - 2$ неперервна і монотонна на відрізьку $[2;3]$, то

$$\max_{x \in [2;3]} |f'(x)| = f'(3) = 25.$$

Згідно з (2.10) знаходимо $\lambda < \frac{2}{25} = 0,08$. Тоді можна взяти, наприклад, $\lambda = 0,078$, і шукане рівняння матиме вигляд

$$x = -0,078x^3 + 1,156x + 0,39.$$

При цьому для усіх $x \in [a;b]$ справджуватиметься нерівність

$$|\phi'(x)| \leq 0,95.$$

2 - й с п о с і б. Оскільки $f'(x) > 0$ на $[2;3]$, то згідно з (2.12) маємо

$$\mu > 0, \quad \mu > \frac{25}{2}.$$

Наприклад, можна взяти $\mu = 13$, тоді дане рівняння набере вигляду:

$$x = -\frac{1}{13}x^3 + \frac{15}{13}x + \frac{5}{13}.$$

При цьому

$$\phi'(x) = -\frac{3}{13}x^2 + \frac{5}{13}.$$

Легко впевнитися, що на відрізьку $[2;3]$

$$\left| \phi'(x) \leq \frac{12}{13} < 1 \right|$$

3 - й с п о с і б. Якщо дане рівняння записати у вигляді

$$x = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2},$$

то

$$\phi(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}.$$

На відрізку [2;3] похідна

$$\phi'(x) = \frac{3}{2}x^2 > 1$$

і умова збіжності ітерацій не виконується. Для функції $\phi(x)$ оберненою буде функція

$$\psi(x) = \sqrt[3]{2x+5}$$

і заміна рівняння $x = \phi(x)$ рівносильним йому рівнянням $x = \psi(x)$ приведе до рівняння

$$x = \sqrt[3]{2x+5}.$$

Для нього

$$\psi'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+5)^2}}$$

і на відрізку [2;3]

$$\psi'(x) \leq \frac{2}{3\sqrt[3]{81}} < 0,154.$$

З розглянутих вище трьох варіантів рівнянь $x = \phi(x)$ третій найбільш доцільний, оскільки має найменше значення q .

Отже, кількість ітерацій методу залежить від наперед заданої точності наближеного кореня, параметра q , який характеризує величину модуля

похідної $\phi'(x)$ в околі кореня рівняння, а також вибору початкового наближення.

2.2 Контрольні запитання

1. В чому полягає суть методу ітерацій для розв'язання нелінійних рівнянь?
2. Поясніть геометричний зміст методу ітерацій.
3. Які достатні умови збіжності ітераційної послідовності для рівняння $x = \phi(x)$ на відрізку $[a; b]$, що містить один корінь? Яким чином графічне відокремлення коренів уточнюється за рахунок обчислень? Які властивості функції однієї змінної при цьому використовуються?
4. Поясніть три способи отримання рівняння $x = \phi(x)$ з рівняння $f(x) = 0$.
5. За яким критерієм обирається оптимальна для методу ітерацій функція $x = \phi(x)$?

2.3 Зміст завдання

Лабораторна робота призначена для розв'язання нелінійних рівнянь ітераційним методом, що наведений в теоретичній частині роботи.

Індивідуальні завдання містять задані функції, з якими потрібно буде працювати.

При виконанні роботи необхідно скласти алгоритми відокремлення та уточнення коренів рівняння, відокремити корені та перевірити отримані результати за допомогою графічного методу, скласти програму для обчислення за допомогою ЕОМ коренів рівняння основними методами. Роздрукувати: початкові дані, результуючі дані та тексти програм.

2.4 Порядок виконання роботи

1. Ознайомитися з теоретичною частиною роботи.
2. Скласти блок-схему алгоритму відокремлення коренів рівняння $f(x) = 0$ та його програмну реалізацію.
3. Відокремити корені в рівнянні, запропонованому згідно з варіантом за таблицею 1.1, та перевірити їх правильність за допомогою графічного методу.
4. Трьома способами звести функцію (згідно з даними таблиці 1.1) до виду, придатного для розв'язання нелінійних рівнянь методом ітерацій.
5. Знайти оптимальну функцію для застосування в методі ітерацій.
6. Скласти блок-схему алгоритму розв'язання нелінійних рівнянь методом ітерацій та його програмну реалізацію.

7. Роздрукувати початкові дані (точність обчислень, вид рівняння), результуючі дані та тексти програм до п. 3 - 9.
8. Оформити звіт.

2.5 Оформлення звіту

Звіт про виконання лабораторної роботи повинен бути поданий у вигляді роздрукованого документа, який повинен містити:

1. Індивідуальний варіант завдання, графіки, блок-схеми, текст програми, а також результати роботи;
2. Текстові коментарі до математичних обчислень, блок-схем, програм, виконані за вказаними правилами;
3. Висновки.

Лабораторна робота № 3

ПРЯМІ ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СЛАР

Мета роботи: оволодіти прямими методами розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь; складати їх алгоритми та програмно реалізувати на ЕОМ.

3.1 Основні теоретичні відомості

3.1.1 Розв'язання СЛАР прямими методами

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) називається система виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (3.1)$$

де n – кількість невідомих.

Розв'язком системи (3.1) називається така сукупність чисел a_1, a_2, \dots, a_n , підстановка яких на місце невідомих x_1, x_2, \dots, x_n всі рівняння системи перетворює у тотожність.

Методи розв'язання СЛАР поділяються на прямі та наближені.

Прямі методи дозволяють розв'язати систему за скінченну кількість арифметичних дій (правило Крамера, метод Гаусса та ін.).

Правило Крамера на ЕОМ не застосовується, оскільки потребує значно більшої кількості арифметичних дій, ніж метод Гаусса. Метод Гаусса використовується в ЕОМ при розв'язанні систем до порядку 10^3 , а ітераційні методи – до порядку 10^6 .

3.1.2 Метод Гаусса

Метод Гаусса складається з двох етапів: прямого та зворотного ходу. При прямому ході систему (3.1) за допомогою еквівалентних перетворень приводять до трикутного вигляду, при зворотному ході обчислюють всі невідомі системи, починаючи з останньої.

Наведемо алгоритм розв'язання СЛАР [3, 5].

Етап 1. Коефіцієнти a_{ij} ($i=1, n; j=1, n+1$) системи (3.1) розміщуються у пам'яті ЕОМ у вигляді матриці вигляду:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

де $a_{1,n+1} = b_1, a_{2,n+1} = b_2, \dots, a_{n,n+1} = b_n$ – вільні члени СЛАР.

Етап 2. Перший рядок матриці ділиться на a_{11} , потім множиться на a_{k1} та віднімається від k -го рядка ($k = 2, 3, \dots, n$) матриці. При цьому елементи першого стовпця матриці, починаючи з a_{21} до a_{n1} , дорівнюють 0:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 & a_{1,n+1}^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 & a_{2,n+1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^1 & \dots & a_{nn}^1 & a_{n,n+1}^1 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

де позначення A^1 застосовано для матриці перетворення, яка має такі елементи

$$\begin{aligned} a_{1j}^1 &= a_{1j} / a_{11}, \quad (j = 1, n); \\ a_{kj}^1 &= a_{kj} - a_{k1} \cdot a_{1j}^1, \quad (k = 2, n). \end{aligned}$$

Етап 3. Перший рядок матриці (3.3) переписується без змін. Другий рядок ділиться на a_{22} , а потім помноживши його на a_{k2}^1 та віднявши від усіх рядків, що знаходяться вище ($k = 3, 4, \dots, n$), отримаємо матрицю A^2 .

Етап 4. Аналогічні дії повторюються до тих пір, поки не буде оброблено всі рядки матриці, включно $(n-1)$ -й. Тоді вхідна матриця буде мати трикутний вигляд

$$A^{(n-1)} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(n-1)} & \dots & a_{1n}^{(n-1)} & a_{1,n+1}^{(n-1)} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n}^{(n-1)} & a_{2,n+1}^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & a_{n,n+1}^{(n-1)} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Етап 5. Елементи останнього рядка матриці (3.4) дозволяють обчислити значення

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}. \quad (3.5)$$

Етап 6. Значення кореня x_n використовується для пошуку x_{n-1} при підстановці в $(n-1)$ -й рядок трикутної матриці A^{n-1} , потім послідовно обчислюються корені x_{n-2}, \dots, x_1 за формулою:

$$x_k = a^{n-1}_{k,n+1} - \sum_{j=k+1}^n a^{n-1}_{kj} \cdot x_j, \quad (3.6)$$

де $k = (n-1), \dots, 1$.

Метод Гауса дозволяє побудувати економічний алгоритм (рис. 3.1), оскільки елементи матриці перетворюються за простими формулами.

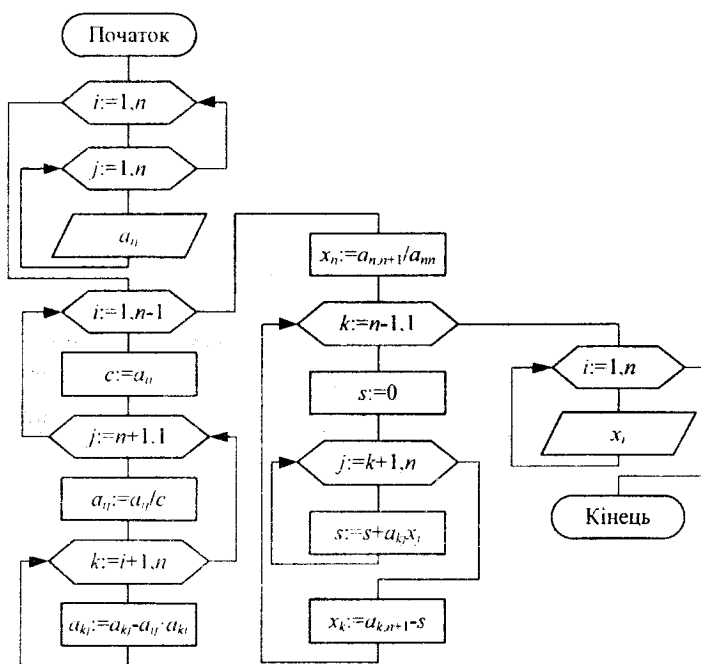


Рисунок 3.1 – Блок-схема алгоритму за методом Гауса

3.2 Контрольні запитання

1. В чому недоліки та переваги прямих методів розв'язання СЛАР?
2. Суть прямого та зворотного ходу методу Гаусса.
3. За скільки кроків обчислень можна розв'язати СЛАР N-го порядку за методом Гаусса?
4. В чому подібність та відмінність прямих та ітераційних методів розв'язання СЛАР?
5. В яких випадках перевагу віддають точним методам, а в яких – ітераційним?
6. Дайте визначення таких термінів: погано та добре обумовлена СЛАР, вироджена система, ітерація, збіжність процесу.
7. Що таке трикутна матриця та як її отримують із заданої матриці коефіцієнтів СЛАР за методом Гаусса?

3.3 Зміст завдання

1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь прямими та ітераційними методами.
2. Індивідуальні завдання містять системи рівнянь, які мають бути розв'язані.
3. При виконанні роботи потрібно скласти схему алгоритму розв'язання СЛАР методом Гаусса. За складеним алгоритмом скласти програму, а також роздрукувати її та результати її роботи. Зробити оцінювання часової складності алгоритму розв'язання СЛАР за використаним методом.

3.4 Порядок виконання роботи

1. Ознайомитись з відомими чисельними методами розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, використовуючи рекомендовану літературу.
2. Скласти блок-схеми алгоритмів розв'язання трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

методом Гаусса з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

3. За алгоритмом скласти відповідну програму обчислень розв'язання СЛАР.

4. Використовуючи дані відповідного варіанта (коефіцієнти та вільні члени СЛАР, наведені в таблиці 3.1) роздрукувати програм та результати їх роботи.
5. Необхідно оцінити часову складність алгоритму розв'язання СЛАР використаними методом.
6. Оформити звіт.

3.5 Оформлення звіту

Звіт про виконання лабораторної роботи повинен бути поданий у вигляді роздрукованого документа, який повинен містити:

1. Індивідуальний варіант завдання, блок-схему, текст програми, а також результати роботи;
2. Текстові коментарі до математичних обчислень, блок-схем, програм, виконані за вказаними правилами;
3. Висновки.

Таблиця 3.1 – Індивідуальні варіанти завдань

№ вар.	A			b	№ вар.	A			b
1	0.21	-0.45	-0.2	1.91	16	-9.11	1.02	-0.73	-1.25
	0.3	0.25	0.43	0.32		7.61	6.25	-2.32	2.33
	0.6	-0.35	-0.25	1.83		-4.64	1.13	-8.88	-3.75
2	-3	0.5	0.5	-56.5	17	1.02	-0.73	-9.11	-1.25
	0.5	-6	0.5	-100		6.25	-2.32	7.62	2.33
	0.5	0.5	-3	-210		1.13	-8.88	4.64	-3.75
3	0.45	-0.94	-0.15	-0.15	18	0.06	0.92	0.03	-0.82
	-0.01	0.34	0.06	0.31		0.99	0.01	0.07	0.66
	-0.35	0.05	0.63	0.37		1.01	0.02	0.99	-0.98
4	0.63	0.05	0.15	0.34	19	0.1	-0.07	-0.96	-2.04
	0.15	0.1	0.71	0.42		0.04	-0.99	-0.85	-3.73
	0.03	0.34	0.1	0.32		0.91	1.04	0.19	-1.67
5	-0.2	1.6	-0.1	0.3	20	0.62	0.81	0.77	-8.18
	-0.3	0.1	-1.5	0.4		0.03	-1.11	-1.08	0.08
	1.2	-0.2	0.3	-0.6		0.97	0.02	-1.08	0.06
6	0.3	1.2	-0.2	-0.6	21	0.63	-0.37	1.76	-9.29
	-0.1	-0.2	1.6	0.3		0.9	0.99	0.05	0.12
	0.05	0.34	0.1	0.32		0.13	-0.95	0.69	0.69
7	0.2	0.44	0.81	0.74	22	0.98	0.88	-0.24	1.36
	0.58	-0.29	0.05	0.02		0.16	-0.44	-0.88	-1.27
	0.05	0.34	0.1	0.32		9.74	-10	1.71	-5.31

Продовження таблиці 3.1

№ вар.	A			b	№ вар.	A			b
8	6.36	11.75	10	-41.49	23	0.21	-0.94	-0.94	-0.25
	7.42	19.03	11.75	-49.49		0.98	-0.19	0.93	0.23
	5.77	7.48	6.36	-27.67		0.87	0.87	-0.14	0.33
9	0.3	0.25	0.43	0.32	24	9.7	2.04	-0.73	-1.5
	0.21	-0.45	-0.2	1.91		7.6	7.25	-2.48	2.8
	0.6	-0.35	-0.25	1.83		5.4	1.03	-8.81	-3.5
10	0.5	0.5	-3	-210	25	6.25	-2.32	7.62	2.33
	-3	0.5	0.5	-56.5		1.02	-0.73	-9.11	-1.25
	0.5	-6	0.5	-100		1.13	-8.88	4.64	-3.75
11	-0.35	0.05	0.63	0.37	26	1.01	0.02	0.99	-0.98
	-0.01	0.34	0.06	0.31		0.06	0.92	0.03	-0.82
	0.45	-0.94	-0.15	-0.15		0.99	0.01	0.07	0.66
12	0.7	0.1	0.1	0.4	27	0.04	-0.99	-0.85	-3.73
	0.2	0.1	0.7	0.48		0.91	1.04	0.19	-1.67
	0.02	0.7	0.2	0.3		0.1	-0.07	-0.96	-2.04
13	-0.4	1.7	-0.9	0.76	28	0.94	0.34	0.21	-4.56
	-0.3	0.1	-1.5	0.4		0.7	-1.4	-1.8	0.08
	2.2	-0.6	0.3	-0.3		0.72	0.62	-1.84	0.23
14	0.5	1.5	-0.5	-0.7	29	0.89	-0.34	1.12	-5.76
	-0.1	-0.2	1.5	0.3		0.96	0.91	0.55	0.29
	0.03	0.34	0.1	0.3		0.45	-0.15	0.89	0.92
15	0.3	0.8	0.9	0.65	30	0.87	0.9	-0.34	9.76
	0.08	-0.6	0.5	0.4		0.4	-0.94	-0.86	-3.27
	0.4	0.34	0.1	0.3		9.84	-11.4	1.51	-9.38

Лабораторна робота № 4 ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СЛАР

Мета роботи: оволодіти ітераційними методами розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь; скласти їх алгоритми та програмно реалізувати на ЕОМ.

4.1 Основні теоретичні відомості

4.1.1 Метод простих ітерацій

При значній кількості невідомих лінійної системи для знаходження коренів системи зручніше користуватися ітераційними методами, які мають властивість самокорегування.

Метод простих ітерацій – один з найбільш простих наближених методів, які доцільно застосовувати в особливих випадках, наприклад, коли матриця коефіцієнтів a_{ij} дуже розріджена.

Нехай дана лінійна система (3.1).

Вводячи до розгляду матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

систему (3.1) запишемо в матричному вигляді:

$$A \times x = b. \quad (4.2)$$

Припускаючи, що діагональні коефіцієнти $a_{ii} \neq 0$. ($i = 1, n$), розв'яжемо перше рівняння системи (3.1) відносно x_1 , друге відносно x_2 і т. д.

Отримаємо [1]

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n, \\ \dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}. \end{cases} \quad (4.3)$$

де

$$\beta_i = \frac{a_{i,n+1}}{a_{ii}}, \quad \alpha_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & \text{якщо } i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}, \\ 0, & \text{якщо } i = j, \quad i, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Ввівши матриці $\alpha = [\alpha_{ij}]_{n \times n}$ і $\beta = [\beta]_n$, систему (4.3) запишемо в матричній формі

$$x = \beta + \alpha x. \quad (4.4)$$

Систему (4.4) будемо розв'язувати методом послідовних наближень. За нульове наближення приймаємо, наприклад, стовпець вільних членів $x^{(0)} = \beta$.

Далі, послідовно маємо перше наближення

$$x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)},$$

друге наближення

$$x^{(2)} = \beta + \alpha x^{(1)},$$

будь-яке $(k+1)$ -е наближення [1]

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.5)$$

Якщо послідовність наближень $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ має границю

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)},$$

то ця границя є розв'язком системи (4.4) [1].

Процес ітерації (4.5) добре збігається, якщо елементи матриці α малі за абсолютною величиною.

Теорема [1]. Якщо для системи (4.4) виконується хоча б одна із умов

$$1) \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, \quad (j = \overline{1, n})$$

або

$$2) \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, \quad (i = \overline{1, n}),$$

то процес ітерації (4.5) збігається до єдиного розв'язку системи, незалежно від вибору початкового наближення.

Після забезпечення умов збіжності виконуються обчислення за формулою (4.5). Оскільки збіжність процесу ітерацій залежить тільки від властивостей матриці a , то початковий вектор $x^{(0)}$ можна обрати довільним.

Схема алгоритму за методом ітерацій для розв'язання СЛАР аналогічна схемі за методом ітерацій для одного рівняння (рис. 1.13). За умову отримання розв'язку береться близькість сусідніх наближень всіх невідомих системи в межах встановленої точності [2]:

$$\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.6)$$

Якщо умови збіжності не виконуються, то необхідно звести СЛАР до виду, придатного для ітерації.

4.1.2 Метод Зейделя

Це модифікація методу ітерації, яка дає кращу збіжність, але приводить до більш громіздких обчислень.

На кожному кроці ітераційного процесу при обчисленні значення $(k+1)$ -го наближення невідомої x_i враховуються вже обчислені раніше $(k+1)$ -і наближення невідомих x_1, x_2, \dots, x_{i-1} .

Подана теорема збіжності для простої ітерації є істинною для ітерації за методом Зейделя.

В разі невиконання умов збіжності використовують на практиці процедуру [2] зведення початкової системи (4.3) до виду, який гарантує збіжність ітераційного процесу для системи

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.7)$$

А саме, запишемо систему (4.4) в матричній формі:

$$A \times x = b. \quad (4.8)$$

Помножимо її ліву та праву частини на транспоновану матрицю A^T :

$$A^T \times A \times x = A^T \times b.$$

Позначимо:

$$A^T \times A = C, \quad A^T \times b = D.$$

Тоді:

$$C \times x = D. \quad (4.9)$$

Система виду (4.9) називається нормальною. Для нормальних систем всі елементи головної діагоналі матриці C додатні [1]. Це дає можливість звести нормальну систему до виду [2, 3]:

$$x_i = \beta_i + \sum_{j \neq i}^n \alpha_{ij} x_j, \quad (4.10)$$

де

$$\alpha_{ij} = -\frac{c_{ij}}{c_{ii}} \quad (j \neq i); \quad \beta = \frac{d_i}{c_{ii}} \quad (4.11)$$

Доцільність здійснення описаних дій витікає з такої теореми.

Теорема [1]. Ітераційний процес Зейделя для зведеної системи (4.11), еквівалентної нормальній системі (4.10), завжди збігається до єдиного розв'язку системи при будь-якому початковому наближенні.

Суть методу полягає в такому. Нехай лінійна система (4.3) подана у вигляді (4.7).

Оберемо довільно початкові наближення коренів $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, намагаючись, щоб вони деякою мірою відповідали шуканим невідомим x_1, x_2, \dots, x_n .

Далі, припускаючи, що k -е наближення $x_j^{(k)}$ коренів відоме, визначаємо $(k+1)$ -е наближення коренів за формулами [2, 3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_{1j} x_j^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=1}^n \alpha_{2j} x_j^{(k)}, \\ \dots \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)}, \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Алгоритм ітераційного процесу Зейделя для зведеної системи подано на рис. 4.1. Передбачено введення значень матриць коефіцієнтів a, β , значень вектора початкового наближення $x[1:n]$, розмірності n і заданої точності ε .

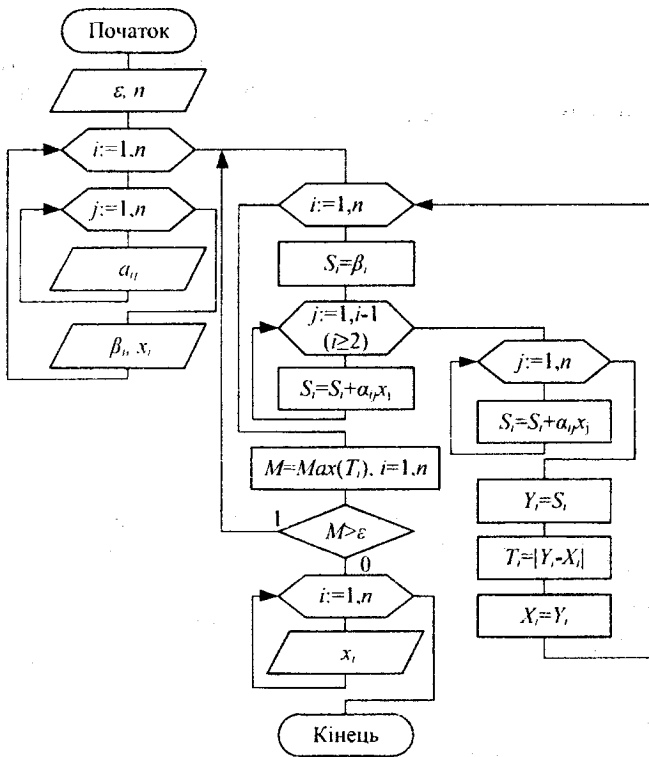


Рисунок 4.1 – Блок-схема алгоритму розв'язання СЛАР методом Зейделя

4.1.3 Метод релаксації

Нехай ми маємо систему рівнянь (3.1). Перетворимо її таким чином: перенесемо вільні члени вліво та розділимо перше рівняння на a_{11} , друге – на a_{22} і т. д. Тоді отримаємо систему, що найкраще підходить для методу релаксації.

$$\left. \begin{aligned} -x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n + c_1 &= 0, \\ b_{21}x_1 - x_2 + \dots + b_{2n}x_n + c_2 &= 0, \\ \dots & \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots - x_n + c_n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

$$\text{де } b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (i \neq j) \text{ та } c_i = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

Нехай $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_1^{(0)}, \dots, x_1^{(0)})$ – початкове наближення розв'язку системи (4.13). Підставивши значення в систему (4.13), одержимо нев'язки

$$\left. \begin{aligned} R_1^{(0)} &= c_1 - x_1^{(0)} + \sum_{j=2}^n b_{1j} x_j^{(0)}, \\ R_2^{(0)} &= c_2 - x_2^{(0)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n b_{2j} x_j^{(0)}, \\ &\dots \\ R_n^{(0)} &= c_n - x_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{nj} x_j^{(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Якщо одному із невідомих $x_s^{(0)}$ дати приріст $\delta x_s^{(0)}$, то відповідна нев'язка $R_s^{(0)}$ зменшиться на величину $\delta x_s^{(0)}$ та всі наступні нев'язки $R_i^{(0)}$ ($i \neq s$) збільшаться на величину $b_{is} \delta x_s^{(0)}$. Таким чином, щоб перетворити наступну нев'язку $R_s^{(1)}$ в нуль, достатньо величині $x_s^{(0)}$ дати приріст

$$\delta x_s^{(0)} = R_s^{(0)},$$

звідки ми отримуємо $R_s^{(1)} = 0$ та $R_i^{(1)} = R_i^{(0)} + b_{is} \delta x_s^{(0)}$ при ($i \neq s$).

Метод полягає в постійному зведенні до нуля поточної максимальної за модулем нев'язки шляхом змінення значення відповідної компоненти наближення. Процес завершиться при досягненні максимальною нев'язкою заданої точності ε .

Алгоритм ітераційного процесу методу релаксації показано на рис. 4.2.

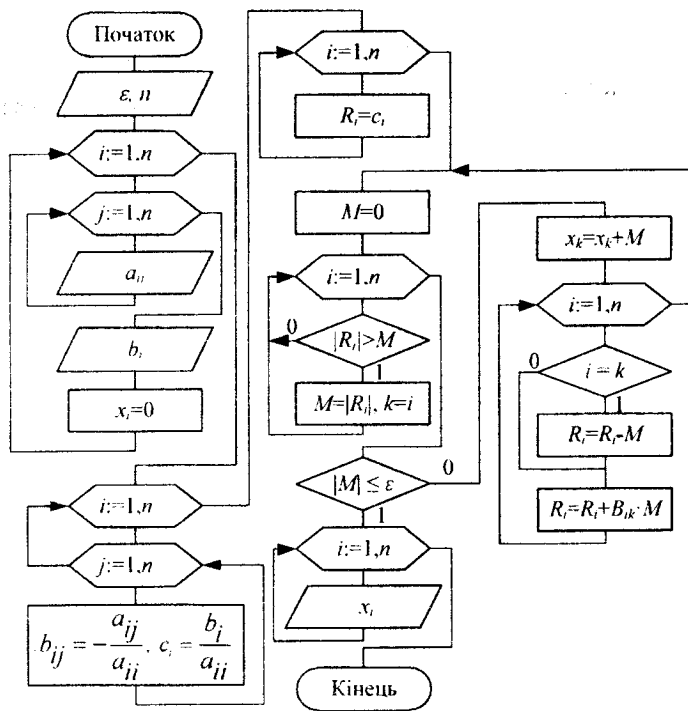


Рисунок 4.2 – Блок-схема алгоритму розв'язання СЛАР методом релаксації

4.2 Контрольні запитання

1. Поясніть суть методу простої ітерації.
2. Наведіть достатню умову збіжності ітераційного процесу.
3. В чому удосконаленість методу Зейделя порівняно з методом простої ітерації.
4. В чому суть методу релаксації?
5. Що таке масив нев'язок за методом релаксації та як його обчислити?
6. Вкажіть на прийоми зведення вхідної СЛАР, що не задовольняє достатній умові збіжності, до виду, який гарантує збіжність ітераційного процесу обчислень для відповідної СЛАР.
7. Назвіть умови закінчення ітераційного процесу розв'язання СЛАР.

4.3 Зміст завдання

1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь ітераційними методами.

2. Індивідуальні завдання містять системи рівнянь, які мають бути розв'язані.
3. При виконанні роботи потрібно скласти схему алгоритму розв'язання СЛАР методом релаксації, а також простої ітерації або Зейделя (відповідно для непарного або парного варіанту завдань). За кожним алгоритмом скласти програму, а також роздрукувати її та результати її роботи. Зробити оцінювання часової складності алгоритмів.

4.4 Порядок виконання роботи

1. Ознайомитись з відомими чисельними методами розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, використовуючи рекомендовану літературу.
2. Скласти блок-схеми алгоритмів розв'язання трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

методом простої ітерації або Зейделя (відповідно до парності варіанта) з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$;

методом релаксації з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

При використанні методу простої ітерації та методу Зейделя дану систему необхідно перетворити у вигляд, для якого виконуються умови збіжності.

3. За алгоритмами скласти відповідні програми обчислень розв'язання СЛАР.
4. Використовуючи дані відповідного варіанта (коефіцієнти та вільні члени СЛАР, наведені в таблиці 3.1) роздрукувати програми та результати їх роботи.
5. Оцінити часову складність алгоритму розв'язання СЛАР використаним методом.
6. Оформити звіт.

4.5 Оформлення звіту

Звіт про виконання лабораторної роботи повинен бути поданий у вигляді роздрукованого документа, який повинен містити:

1. Індивідуальний варіант завдання, блок-схему, текст програми, а також результати роботи;
2. Текстові коментарі до математичних обчислень, блок-схем, програм, виконані за вказаними правилами;
3. Висновки.

Лабораторна робота № 5 ПАРАЛЕЛЬНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ СЛАР

Мета роботи: оволодіти основними принципами розпаралелювання ітераційних методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь; скласти їх алгоритми та програмно реалізувати на ЕОМ.

5.1 Основні теоретичні відомості

5.1.1 Область застосування паралельних ітераційних методів

Досягнення сучасної елементної бази відкрило нові можливості для розвитку високопродуктивних обчислювальних систем. Це досягається завдяки розпаралелюванню обчислювального процесу. Збільшення обчислювальної потужності мотивується, в основному, числовими моделюваннями складних систем для таких прикладних областей, як: передбачення погоди, клімату та глобальних змін в атмосфері; структурна біологія; генетика людини; астрономія; розпізнавання та синтез мови; розпізнавання зображень. Незважаючи на належність названих задач до різних предметних областей і розходження в прийнятих способах опису явищ і термінології, методи розв'язання їх на ЕОМ подібні [16, 17]. Необхідними, як правило, є алгоритми формування матриць спеціального виду, об'єднання, переформування матриць і виконання певного набору матричних операцій, зокрема, векторно-матричного множення, матрично-матричного множення, розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Всі ці алгоритми повинні бути реалізовані у швидкодіючих спеціалізованих оптико-електронних процесорах для розв'язання задач матричної алгебри для забезпечення розв'язання цих задач в реальному часі.

Важливою ланкою в процесі медичного діагностування є реконструкція томографічних зображень [18-21]. Задача реконструкції (рис. 5.1) полягає в тому, щоб розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

$$p = M \cdot f \quad (5.1)$$

відносно f . Як правило, розв'язок цієї оберненої задачі шукається ітераційними методами, що зумовлене наявністю помилок вимірювань, величезними, з обчислювальної точки зору, розмірами матриці M та її розмірністю і математично надлишковою або недостатньою визначеністю самої задачі.

Задача обчислювальної томографії [22] в дискретній формі може бути записана в такому вигляді:

$$Ax = y + e, \quad (5.2)$$

де $y^T = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ – вектор результатів вимірювань (відліки проєкцій);
 $e^T = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ – вектор похибок вимірювань;
 $A = (a_{ij}; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ – матриця, елемент a_{ij} якої описує внесок j -ї компоненти в i -е вимірювання y_i .

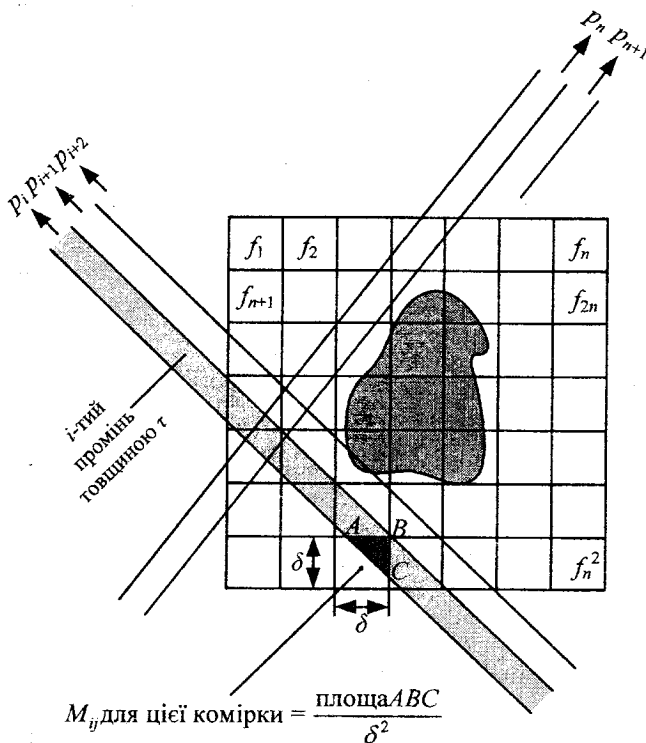


Рисунок 5.1 – Подання зображення для алгебраїчного методу реконструкції

В томографії непридатні прямі методи розв'язання СЛАР (5.2) з таких причин:

- велика розмірність системи (матриця A містить $10^8 - 10^{10}$ елементів, хоча елементів, відмінних від нуля, менше 1%);
- погана обумовленість матриці системи, що робить процедуру обернення матриці A нестійкою – відбиття загальної некоректності задачі томографічної реконструкції;

- похибки у визначенні елементів матриці A і у вимірюванні даних, що призводять до неприпустимих відхилень точного розв'язку від істинного;
- використання неквадратних матриць системи, як перевизначених, так і недовизначених;
- складність врахування в прямих методах апріорної інформації, такої як невід'ємність і максимальне значення компонент шуканого вектора x та ін.

Таким чином, в томографії застосовують, як правило, ітераційні методи розв'язання СЛАР.

5.1.2 Паралельна інтерпретація методу Якобі (простої ітерації) для розв'язання СЛАР

Для отримання паралельної інтерпретації методу Якобі (простої ітерації) для розв'язання СЛАР необхідно дотримуватись вимоги подання в матричній(векторній) формі як вихідної інформації, так і її проміжних та результуючих даних при паралельних обчисленнях згідно з обраним підходом.

Нехай дано СЛАР вигляду

$$A \cdot x = b. \quad (5.3)$$

Її розв'язання складається з двох етапів:

- 1) зведення системи до вигляду, придатного для методу Якобі;
- 2) безпосереднє розв'язання зведеної системи шляхом виконання ітерацій до моменту досягнення необхідної точності.

Для реалізації першого етапу початкові дані на нульовому кроці $t = 0$ обчислень подаються у вигляді квадратної неособливої матриці коефіцієнтів $A_{t=0}$ розмірністю $[1:N; 1:N]$ та вектора вільних членів $b_{t=0}$ розмірністю $[1:N; 1]$.

Припускаючи, що діагональні коефіцієнти $a_{ii} \neq 0, (i = \overline{1, n})$, здійснимо паралельні перетворення, які зводять систему (5.3) до вигляду, придатного для методу Якобі:

$$x^{(t+1)} = C^{(t)} x^{(t)} + d^{(t)}, \quad (5.4)$$

де $C^{(t)}$ – матриця, елементи якої визначаються як

$$i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}. \quad (5.5)$$

$$c_{ij}^{(t)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i = j, \\ \frac{a_{ij}^{t=0}}{a_{ii}^{t=0}} & \text{якщо } i \neq j, \end{cases} \quad (5.6)$$

$d^{(t)}$ – вектор, елементи якого формуються так:

$$d_i^{(t)} = \frac{b_i^{t=0}}{a_{ii}^{t=0}}. \quad (5.7)$$

Операція виділення елементів головної діагоналі a_{ii} ($i = \overline{1, n}$) матриці A в поточний момент часу t визначається в матричній формі як результат логічного множення матриці A на одиничну матрицю E розмірністю $[1:N; 1:N]$

$$A1^{(t)} = A1^{(t)} \wedge E = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

За допомогою оператора $Rep[]$ здійснюється розмноження (тиражування, дублювання) виділених діагональних елементів масиву A до розміру рядка.

$$Rep(A1^{(t)}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{11} \\ a_{22} & a_{22} & \dots & a_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{NN} & a_{NN} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Оскільки виділення діагональних елементів з їх наступним тиражуванням здійснюється миттєво, то при записі цих операцій в операторній формі параметр часу зберігає сталі значення. Тоді умову (5.6) із формування матриці $C^{(t)}$ можна записати у адекватній паралельній формі

$$C^{(t)}[1:N; 1:N] = \left(- \frac{A^{(t)}[1:N; 1:N]}{Rep(A1^{(t)})[1:N; 1:N]} \right), \quad (5.10)$$

причому в виразі використовується операція поелементного ділення двох матриць чисел з плаваючою комою.

Оскільки діагональні елементи сформованої матриці повинні набувати

значення нуль, виконаємо логічне множення отриманої матриці $C^{(t)}$ на проінвертовану одиничну матрицю E розмірністю $[1:N; 1:N]$.

$$C^{(t+1)}[1:N; 1:N] = \bar{E} \wedge C^{(t)}[1:N; 1:N]. \quad (5.11)$$

Умова (5.8) із формування вектора $d^{(t)}$ також може бути записана у адекватній паралельній формі

$$d^{(t)}[1:N; 1:N] = \frac{b^{(t)}[1:N; 1]}{a1^{(t)}[1:N; 1]}, \quad (5.12)$$

де вектор $a1^{(t)} = \text{diag}(A^{(t)})$ – вектор-стовпець, сформований з діагональних елементів матриці A .

Другий етап полягає в паралельному обчисленні вектора невідомих x на кожній ітерації за формулою (5.4). Причому обчислення проводяться до тих пір, поки $|x^{(t+1)} - x^{(t)}| > \varepsilon$, де ε – вектор точності розмірністю $[1:N; 1]$.

Для реалізації методу Якобі необхідно організувати паралельне виконання трьох головних операцій:

1) матрично-векторного множення матриці $C[1:N; 1:N]$ на вектор початкових значень (значень на кожній наступній ітерації) невідомих $x[1:N; 1]$, враховуючи особливості множення чисел з плаваючою комою, з формуванням матриці часткових добутків $S[1:N; 1:N]$;

2) додавання стовпців отриманої матриці часткових добутків $S[1:N; 1:N]$ та вектора вільних членів $d[1:N; 1]$ з формуванням результату – вектора невідомих $x[1:N; 1]$ наступної ітерації;

3) паралельне порівняння двох векторів значень невідомих на сусідніх ітераціях з заданою точністю ε .

Паралельну інтерпретацію методу Якобі можна описати такими виразами.

На першому кроці обчислень $t=1$ за допомогою оператора $Rep[]$ здійснюється розмноження елементів попередньо транспонованого вектора невідомих $x[1:N; 1]$, що на нульовій ітерації набуває значення вектора вільних членів $d[1:N; 1]$, до розміру матриці.

$$Rep(x^{T(t)}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Далі виконується поелементне множення новоутвореної матриці і матриці коефіцієнтів $C[1:N; 1:N]$ з утворенням матриці часткових добутоків $S[1:N; 1:N]$.

$$S^{(t)}[1:N; 1:N] = C^{(t)}[1:N; 1:N] \times \text{Rep}\left(x^{T(t)}[1:N; 1:N]\right). \quad (5.14)$$

Таким чином, на кроці $t = N$ отримаємо значення вектора невідомих $x[1:N; 1]$, що описуватиметься таким виразом:

$$x^{(t=N)}[1:N; 1] = \sum_{i=1}^N S^{(i)(t)}[1:N; 1] + d^{(t)}[1:N; 1], \quad (5.15)$$

де $S^{(i)(t)}[1:N; 1]$ – i -ий стовпець матриці часткових добутоків $S[1:N; 1:N]$.

Далі виконується порівняння двох векторів невідомих, отриманих на сусідніх ітераціях, що може бути описане виразом:

$$\left| x^{(t)}[1:N; 1] - x^{(t-1)}[1:N; 1] \right| < \varepsilon. \quad (5.16)$$

Таким чином, завдяки використанню паралельного методу розв'язання СЛАР можна значно скоротити час розв'язання оберненої задачі томографії та будь-якої задачі, що потребує розв'язання СЛАР великих розмірностей в реальному часі.

5.1.3 Паралельна інтерпретація методу релаксації для розв'язання СЛАР

Метод Якобі добре розпаралелюється завдяки незалежності отримання кожного елемента вектора невідомих на одному кроці обчислень, і залежності лише від знайдених на попередньому кроці елементів вектора невідомих. Однак виконання операції матрично-векторного множення в методі Якобі має залежність від порядку вхідної системи N та становить більшу частину часу розв'язання системи рівнянь. А тому пропонується розглянути ітераційний метод розв'язання СЛАР, в якому б не було необхідності виконання матрично-векторного множення. Таким ітераційним методом може бути метод релаксації, який крім того, що використовує менші за рангом арифметичні операції, має також кращу збіжність при тій же точності обчислень [23].

Для отримання паралельної інтерпретації методу релаксації, як і методу Якобі, для розв'язання СЛАР необхідно дотримуватись вимоги подання в матричній (векторній) формі як вихідної інформації, так і її проміжних і результуючих даних при паралельних обчисленнях згідно з обраною методикою.

Розв'язання СЛАР виду (5.3) за методом релаксації також складається з двох етапів:

зведення системи до вигляду, придатного для методу релаксації;

безпосереднє розв'язання зведеної системи шляхом виконання ітерацій до моменту досягнення необхідної точності.

Вигляд системи, придатний для методу релаксації є подібний до її вигляду для методу Якобі, а тому детальний опис першого етапу можна опустити, висвітливши лише відмінності.

На першому етапі необхідно з вхідної матриці коефіцієнтів $A^{(t=0)}$ розмірністю $[1:N; 1:N]$ та вектора вільних членів $b^{(t=0)}$ розмірністю $[1:N; 1]$ отримати відповідно матрицю $C^{(t)}$ розмірністю $[1:N; 1:N]$ та вектор $d^{(t)}$ розмірністю $[1:N; 1]$, а систему (5.3) перетворити в систему вигляду

$$C^{(t)} \cdot x^{(t)} + d^{(t)} = 0, \quad (5.17)$$

де $C^{(t)}$ – матриця, елементи якої визначаються як

$$i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}, \quad (5.18)$$

$$C_{ij}^{(t=0)} \begin{cases} -1, \text{ якщо } i = j, \\ \frac{a_{ij}^{(t=0)}}{a_{ii}^{(t=0)}} \text{ якщо } i \neq j, \end{cases} \quad (5.19)$$

$d^{(t)}$ – вектор, елементи якого формуються так:

$$d_i^{(t=0)} = \frac{b_i^{(t=0)}}{a_{ii}^{(t=0)}} \quad (5.20)$$

Паралельна модель процесу формування матриці $C^{(t)}$ описуватиметься виразами (5.8) – (5.11), а вектора $d^{(t)}$ – виразом (5.13).

Другий етап полягає в отриманні на кожному кроці нев'язок, порівнянні нев'язок з точністю, знаходженні серед них максимальної та збільшенні елемента вектора невідомих на приріст, що дорівнює значенню максимальної нев'язки.

Отже, на нульовому кроці вектор початкових значень невідомих $x^{(t=0)}$ розмірністю $[1:N; 1]$ візьмемо нульовим, тоді вектор початкових нев'язок $r^{(t=0)}$ розмірністю $[1:N; 1]$ набуде значення вектора $d^{(t=0)}$ тієї ж розмірності.

$$r^{(t=0)}[1:N; 1:N] = d^{(t=0)}[1:N; 1:N]. \quad (5.21)$$

Далі порівняння вектора нев'язок із вектором точності матиме вигляд

$$\|r^{(t)}[1:N; 1]\| \leq \varepsilon[1:N; 1]. \quad (5.22)$$

Умова (5.22) є не чим іншим, як умовою завершення ітераційного процесу.

Далі необхідно знайти значення та положення максимального елемента вектора нев'язок $r^{(t)}$. Для цього позначимо через оператор $mx[\]$ (анг. *Maximal* – максимальний) такий оператор, що знаходить максимальний елемент вектора, а оператор $mxNum[\]$ знаходить індекс максимального елемента вектора, причому $mxNum[r^{(t)}]$ є бінарний вектор, елементами якого будуть всі нулі, а на місці максимального стоятиме одиниця, а $mx[r^{(t)}]$ – відповідно вектор, розмірністю $[1:N; 1]$, всі елементи якого набувають нульових значень, а максимальний елемент вектора $r^{(t)}$ залишить своє значення та положення. Ці оператори описуються виразами

$$mxNum[r^{(t)}] = \begin{cases} 0, & \text{якщо } r_i^{(t)} \neq \max(r^{(t)}), i = \overline{1, N}, \\ 1, & \text{якщо } r_i^{(t)} = \max(r^{(t)}), i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (5.23)$$

$$mx[r^{(t)}[1:N; 1]] = mxNum[r^{(t)}] \wedge r^{(t)}[1:N; 1]. \quad (5.24)$$

Тоді вектор невідомих зміниться на величину $mx[r^{(t)}]$ за виразом

$$x^{(t)}[1:N; 1] = x^{(t-1)}[1:N; 1] + mx[r^{(t)}[1:N; 1]]. \quad (5.25)$$

А пошук нового вектора нев'язок відбуватиметься за виразом

$$r^{(t+1)}[1:N; 1] = r^{(t)}[1:N; 1] + k^{(t)}[1:N; 1], \quad (5.26)$$

де

$$\begin{aligned} k^{(t)}[1:N; 1] &= Rep\left(mx[r^{(t)}[1:N; 1]]\right) \times C^{(k)(t)}[1:N; 1:N], \\ C^{(k)(t)}[1:N; 1:N] &= \left(mxNum[r^{(t)}]\right)^T \wedge C^{(t)}[1:N; 1:N]. \end{aligned} \quad (5.27)$$

В виразі (5.27) використовується поелементне множення двох векторів чисел з плаваючою комою, за допомогою оператора $Rep[]$ відбувається тиражування максимального елемента вектора нев'язок, тобто заміна всіх нульових елементів вектора $mx[r^{(t)}]$ на максимальний елемент цього вектора. $C^{(k)(t)}[1:N; 1:N]$ – стовпець матриці $C^{(t)}$, номер k якого відповідає номеру максимального елемента вектора нев'язок $r^{(t)}$, $(mxNum[r^{(t)}])^T$ – транспонований бінарний вектор $mxNum[r^{(t)}]$.

За рахунок одночасного виконання дій над усіма елементами матриць та векторів вдається значно пришвидшити час розв'язання великорозмірних СЛАР.

5.2 Контрольні запитання

1. В чому переваги ітераційних методів розв'язання СЛАР?
2. Суть розпаралелення?
3. Вкажіть на області застосування паралельних методів розв'язання СЛАР.
4. В чому подібність та відмінність методів релаксації та Якобі розв'язання СЛАР?
5. В яких випадках перевагу віддають точним методам, а в яких ітераційним?
6. Суть паралельного методу простої ітерації.
7. Наведіть достатню умову збіжності ітераційного процесу.
8. В чому суть паралельного методу релаксації?
9. Для чого потрібно підготовлювати систему для методу релаксації?

5.3 Зміст завдання

1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь паралельними ітераційними методами.
2. Індивідуальні завдання містять системи рівнянь, які мають бути розв'язані.
3. При виконанні роботи потрібно скласти блок-схему алгоритму розв'язання СЛАР паралельним методом Якобі та релаксації. За кожним алгоритмом скласти програму, а також роздрукувати її та результати її роботи. Зробити оцінювання часу роботи методу.

5.4 Порядок виконання роботи

1. Ознайомитись з відомими чисельними методами розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, використовуючи рекомендовану літературу.
2. Скласти блок-схеми алгоритмів розв'язання трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

за паралельною інтерпретацією методу простої ітерації з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$;

за паралельною інтерпретацією методу релаксації з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

3. За алгоритмами скласти відповідні програми обчислень розв'язання СЛАР.
4. Використовуючи дані відповідного варіанта (коефіцієнти та вільні члени СЛАР, наведені в таблиці 3.1), роздрукувати програми та результати їх роботи.
5. Оцінити часову складність алгоритму розв'язання СЛАР за використаними методом.
6. Оформити звіт.

5.5 Оформлення звіту

Звіт про виконання лабораторної роботи повинен бути поданий у вигляді роздрукованого документа, який повинен містити:

1. Індивідуальний варіант завдання, блок-схему, текст програми, а також результати роботи;
2. Текстові коментарі до математичних обчислень, блок-схем, програм, виконані за вказаними правилами;
3. Висновки.

Лабораторна робота № 6 НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА МНОГОЧЛЕНОМ ЛАГРАНЖА ТА НЬЮТОНА

Мета роботи: оволодіти методами інтерполювання функцій, заданих таблицно; скласти відповідний алгоритм та програмно реалізувати його на ЕОМ.

6.1 Основні теоретичні відомості

6.1.1 Суть інтерполювання та його геометричний зміст

Нехай функція f задана таблицею.

Таблиця 6.1 – Таблиця початкових значень

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	...	y_n

Потрібно визначити значення функції f для такого значення аргументу x , яке знаходиться всередині відрізка $[x_0, x_n]$, проте не збігається ні з одним значенням x_i ($i = 0, 1, \dots, n$).

Оскільки аналітичний вираз f невідомий, то застосовують особливий прийом – побудову за початковою інформацією (таблиця 6.1) наближеної функції F . Аналітичний вираз якої можна обчислити, беручи до уваги, що

$$f(x) = F(x). \quad (6.1)$$

Класичний підхід до розв'язання цієї задачі ґрунтується на дотриманні строгого збігу значень $y = f(x)$ і $F(x)$ в точках x , (вузли інтерполяції, $i = 0, 1, \dots, n$), тобто

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_i) = y_i, \dots, F(x_n) = y_n, \quad (6.2)$$

де $y_i = f(x_i)$.

Геометрично це означає, що потрібно знайти криву $y_i = f(x_i)$, яка проходить через систему точок $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$), (рис. 6.1).

В загальному випадку ця задача має нескінченну множину розв'язків або зовсім не має їх. Однак вона стає однозначною, якщо замість довільної функції $F(x)$ шукати поліном $P_n(x)$ степеня не вище n , який задовольнятиме умову (6.2), тобто

$$P_n(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n. \quad (6.3)$$

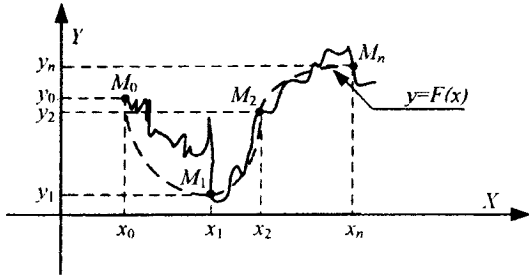


Рисунок 6.1 – Геометричний зміст процесу інтерполявання

$$\begin{cases} P_n(x_0) = y_0, \\ P_n(x_1) = y_1, \\ \dots \\ P_n(x_n) = y_n. \end{cases} \quad (6.4)$$

Розв'язання цієї задачі з використанням наближеного обчислення значень функції $f(x) - F(x)$ в точках $x \neq x_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) називають інтерполяцією.

Розрізняють власне інтерполяцію [1, 3], коли $x \in [x_0; x_n]$, і екстраполяцію [1, 3], коли $x \notin [x_0; x_n]$. В першому випадку x – проміжне значення всередині таблиці чи відрізка $[x_0; x_n]$, в другому випадку x – значення поза відрізком $[x_0; x_n]$.

6.1.2 Інтерполяція за Лагранжем

Використовується для довільно заданих вузлів інтерполяції. Нехай на відрізку $[a; b]$ (рис. 6.1) дано $(n+1)$ різних значень аргументів x_0, x_1, \dots, x_n та відповідні їм значення функції $y = F(x)$:

$$f(x_0) = y_0; f(x_1) = y_1; \dots; f(x_n) = y_n. \quad (6.5)$$

Треба побудувати поліном $L_n(x)$ степеня не вище n , що має в вузлах x_0, x_1, \dots, x_n такі ж значення, що і функція $f(x)$

$$L_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (6.6)$$

За шуканий поліном оберемо поліном n -го степеня виду

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n P_i(x), \quad (6.7)$$

де $P_i(x)$ – многочлен степеня n такий, що перетворюється в нуль у вузлах j ($j \neq i$):

$$P_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j = i; \\ 0, & \text{якщо } j \neq i. \end{cases} \quad (6.8)$$

Тоді многочлени $P_i(x)$ утворюються таким чином:

$$P_i(x) = C_i(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n), \quad (6.9)$$

де C_i – сталий коефіцієнт.

Визначимо коефіцієнти C_i так, щоб задовольнялась умова (6.6)

$$P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n. \quad (6.10)$$

Тоді при $x = x_i$ отримаємо:

$$C_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}. \quad (6.11)$$

Підставляючи в (6.7) співвідношення (6.9), (6.11), отримаємо інтерполяційну формулу Лагранжа [1-3]

$$L_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} y_1 + \dots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} y_n = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}, \quad (6.12)$$

де \prod – знак добутку.

За таблицею вхідної функції $f(x)$ формула (6.12) дозволяє досить просто скласти "зовнішній вигляд" полінома $L_n(x)$.

В блок-схемі алгоритму інтерполявання за Лагранжем (рис. 6.2) використовується формула (6.12).

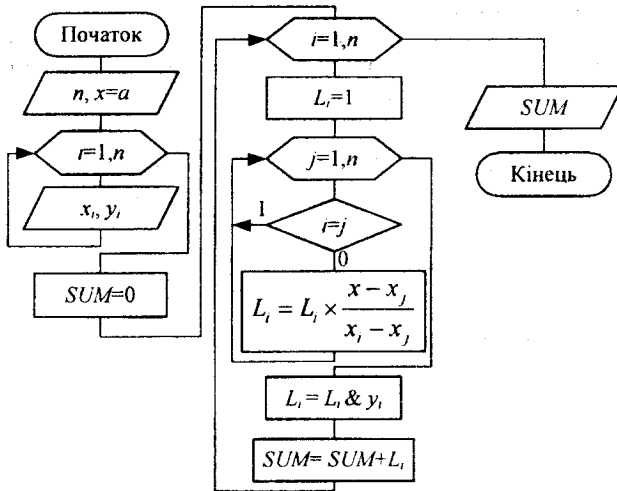


Рисунок 6.2 – Блок-схема алгоритму інтерполявання за Лагранжем

Основна частина алгоритму складається з подвійного циклу – у внутрішньому циклі обчислюються $(n+1)$ значення многочленів доданків виду (індекс j)

$$L_i(x) = y_i \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}, \quad (6.13)$$

(в чисельнику і знаменнику n співмножників), а в зовнішньому – накопчується загальна сума (індекс i)

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x). \quad (6.14)$$

Остаточний результат описується значенням змінної SUM . Похибка інтерполяції за Лагранжем може бути оцінена так:

$$\left| \Delta_n^{(x)} \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n), \quad (6.15)$$

де $M_{n+1} = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.

6.1.3 Кінцеві різниці

Часто інтерполювання ведеться для функцій, заданих таблицями з рівновіддаленими значеннями. В цьому випадку крок $h = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) – стала величина. Для таких випадків побудова інтерполяційних формул спрощується.

Нехай функція задана таблицею 8.1 зі сталим кроком.

Різниці між значеннями функції в сусідніх вузлах інтерполяції називаються *кінцевими різницями першого порядку* [1-3]

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i.$$

3 кінцевих різниць першого порядку утворюються *кінцеві різниці другого порядку* [1-3]

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i.$$

Продовжуючи цей процес, за таблицею 6.1 можна скласти таблицю 6.2 кінцевих різниць.

Подамо кінцеві різниці через значення вхідної функції за табл. 6.2:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2 \cdot y_{i+1} + y_i.$$

Таблиця 6.2 – Таблиця кінцевих різниць

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$...
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$...	
x_3	y_3	Δy_3	...		
x_4	y_4	...			

Аналогічно для різниць третього порядку

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_i &= \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = (y_{i+3} - 2 \cdot y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2 \cdot y_{i+1} + y_i) = \\ &= y_{i+3} - 3 \cdot y_{i+2} + 3 \cdot y_{i+1} - y_i. \end{aligned}$$

Методом математичної індукції можна довести, що [1-3]:

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - \frac{k}{1!} y_{i+k-1} + \frac{k(k+1)}{2!} y_{i+k-2} - \dots + (-1)^k y_i. \quad (6.16)$$

6.1.4 Перша інтерполяційна формула Ньютона

Функція $y = f(x)$ задана таблицею 6.1 зі сталим кроком $h = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) і складена таблиця 6.2 кінцевих різниць.

Знайдемо поліном $P_n(x)$ степеня n , для якого $P_n(x_i) = y_i$:

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + C_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1}). \quad (6.17)$$

Значення C_0, C_1, \dots, C_n знайдемо з умови збігу значень вхідної функції і многочлена у вузлах.

$$x = x_0, \quad P_n(x_0) = y_0 = C_0 \Rightarrow C_0 = y_0;$$

$$x = x_1, \quad P_n(x_1) = y_1 = C_0 + C_1(x_1 - x_0) \Rightarrow C_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h};$$

$$x = x_2, \quad P_n(x_2) = C_0 + C_1(x_2 - x_0) + C_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \Rightarrow C_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}.$$

В загальному випадку C_i має вигляд:

$$C_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!h^i}. \quad (6.18)$$

Підставивши (6.18) у вираз (6.17), отримаємо [1]:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}). \quad (6.19)$$

Практично формула (6.19) використовується в іншому вигляді.

Нехай

$$q = \frac{(x - x_0)}{h}, \quad (6.20)$$

де q – число кроків, необхідних для досягнення точки x , виходячи з початкового значення x_0 з кроком h .

Тоді, підставивши (6.20) в (6.19), маємо [2, 3]:

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 q + \frac{\Delta^2 y_0 (q-1)q}{2!} + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (6.21)$$

Формула (6.21) називається першою інтерполяційною формулою Ньютона. Її зручно використовувати для інтерполювання на початку відрізка інтерполяції в околі початкового значення x_0 , коли q мале за абсолютною величиною (інтерполювання "вперед").

Формула (6.21) використовується також для екстраполяції "назад", якщо $x > x_0$, причому $(x - x_0)/h < 0$.

6.1.5 Друга інтерполяційна формула Ньютона

Коли значення аргументу знаходиться ближче до кінця x_n відрізка інтерполяції $[x_0; x_n]$, використовують другу інтерполяційну формулу Ньютона у вигляді:

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x - x_n) + C_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + C_n(x - x_n)\dots(x - x_1), \quad (6.22)$$

яка отримана за допомогою лівих різниць від останнього значення $(x_n; y_n)$ (інтерполювання "назад"). Остаточний вираз для другої інтерполяційної формули Ньютона [2, 3]

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1). \quad (6.23)$$

Вводячи таку характеристику, як число кроків

$$q = \frac{x - x_n}{h}, \quad (6.24)$$

маємо

$$P_n(x) = y_n + \Delta y_{n-1} \cdot q + \frac{\Delta^2 y_{n-2}(q+1)q}{2!} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (6.25)$$

Формула (6.25) використовується також для екстраполяції "вперед", якщо $x > x_0$, причому $(x - x_0)/h > 0$.

Похибки інтерполяції для формул Ньютона можна оцінити, відповідно, за виразами [5]:

$$\Delta_n(x) \approx \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_0, \quad (6.26)$$

$$\Delta_n(x) \approx \frac{q(q+1)\dots(q+n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_n. \quad (6.27)$$

6.2 Контрольні запитання

1. Поясніть математичний та геометричний зміст процесу інтерполяції.
2. Дайте визначення екстраполяції та її зв'язок з інтерполяцією.
3. Суть інтерполяції за Лагранжем.
4. Поясніть блок-схему алгоритму інтерполювання за Лагранжем.
5. Яким чином визначається теоретична похибка в інтерполюванні за Лагранжем?
6. Поясніть математичний та геометричний зміст процесу інтерполяції.
7. Дайте визначення екстраполяції та її зв'язок з інтерполяцією.
8. Поясніть зв'язок між кінцевими різницями та інтерполяційними формулами Ньютона.
9. Вкажіть умови використання першої та другої інтерполяційної формули Ньютона.

6.3 Зміст завдання

1. Побудова інтерполяційних поліномів для функцій, заданих у вигляді таблиць. Обчислити похибку побудованих поліномів, складання блок-схеми та відповідних програм для обчислення функцій за побудованими поліномами.
2. Початкові дані задані у вигляді відповідних таблиць та функцій інтерполювання.

6.4 Порядок виконання роботи

1. Ознайомитись з відомими методами інтерполювання функцій, заданих таблично, використовуючи рекомендовану літературу.
2. Для таблично заданої функції (таблиця 6.3) побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа. Побудувати його графік та відмітити на ньому вузлові точки $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, 5$.
3. Скласти блок-схему алгоритму та програму обчислення значення таблично заданої функції $f(x)$ в заданій проміжній точці x (таблиця 6.3) за інтерполяційним поліномом Лагранжа.
4. Оцінити похибку побудованого полінома Лагранжа в точці x .
5. Обчислити точне значення заданої функції в точці x , беручи до уваги, що для інтерполювання взято функції для відповідних таблиць.

6. Порівняти фактичну помилку обчислень з теоретичною.
7. Скласти блок-схему алгоритму ущільнення частини заданої функції (таблиця 6.3) за інтерполяційними поліномами Ньютона. Ущільнення таблиці – це обчислення за даною таблицею нової таблиці з більшим числом значень аргументу на тому ж відрізку. Крок субтабулювання H обрати самостійно.
8. Роздрукувати початкові дані, результати та тексти програм.
9. Оформити звіт.

6.5 Оформлення звіту

Звіт про виконання лабораторної роботи повинен бути поданий у вигляді роздрукованого документа, який повинен містити:

1. Індивідуальний варіант завдання, графіки, блок-схеми, текст програми, а також результати роботи;
2. Текстові коментарі до математичних обчислень, графіків, блок-схем, програм, виконані за вказаними правилами;
3. Висновки.

Таблиця 6.3 – Індивідуальні варіанти завдань

№ вар	Табл.	x	№ вар	Табл.	x	№ вар	Табл.	x
1	6.4	4.5	11	6.14	1.1	21	6.9	1.0
2	6.5	4.7	12	6.15	1.4	22	6.10	0.15
3	6.6	2.8	13	6.4	7.7	23	6.7	8.2
4	6.7	6.1	14	6.5	6.8	24	6.12	1.2
5	6.8	0.7	15	6.6	-0.8	25	6.13	1.5
6	6.9	1.0	16	6.4	4.5	26	6.14	1.1
7	6.10	0.15	17	6.5	4.7	27	6.15	1.4
8	6.11	0.45	18	6.6	2.8	28	6.4	7.7
9	6.12	1.2	19	6.7	6.1	29	6.5	6.8
10	6.13	1.5	20	6.8	0.7	30	6.6	-0.8

Таблица 6.4

x	f(x)
1,3	1,7777
2,1	4,5634
3,7	13,8436
6,1	37,3387
8,5	72,3593

Таблица 6.5

x	f(x)
1,2	0,3486
1,9	1,0537
3,3	1,7844
5,4	2,3712
7,5	2,7411

Таблица 6.6

x	f(x)
-3,2	-1,9449
0,4	0,3097
4,0	2,0913
6,4	1,4673
7,6	0,6797

Таблица 6.7

x	f(x)
2,6	2,1874
3,3	2,8637
4,7	3,8161
7,5	3,1905
9,6	2,6137

Таблица 6.8

x	f(x)
0,6	0,56464
0,65	0,60519
0,75	0,68164
0,8	0,71736
0,85	0,75128

Таблица 6.9

x	f(x)
0,85	0,75128
0,9	0,78333
0,95	0,81342
1,05	0,86742
1,10	0,89121

Таблица 6.10

x	f(x)
0,05	0,99375
0,10	0,99500
0,20	0,98007
0,25	0,96891
0,30	0,95534

Таблица 6.11

x	f(x)
0,3	0,95534
0,35	0,93937
0,40	0,92106
0,50	0,87758
0,55	0,85252

Таблица 6.12

x	f(x)
1,10	0,89121
1,15	0,91276
1,25	0,94898
1,30	0,96356
1,35	0,97572

Таблица 6.13

x	f(x)
1,35	0,97572
1,40	0,98545
1,45	0,99271
1,55	0,99973
1,60	0,99957

Таблица 6.14

x	f(x)
1,00	0,54090
1,05	0,49757
1,15	0,40849
1,20	0,36236
1,25	0,31532

Таблица 6.15

x	f(x)
1,25	0,31532
1,30	0,26750
1,35	0,21901
1,45	0,12050
1,50	0,07074

Таблиця 6.16 – Аналітичні функції, використані для інтерполювання даних в таблично заданих функціях із таблиць 6.4 – 6.15

№ табл.	Аналітичні функції
6.4	$f(x) = 1/x * \lg(x) + x^2;$
6.5	$f(x) = \ln(2,3 \cdot x) - 0,8/x;$
6.6	$f(x) = 2,1 * \sin(0,37 \cdot x);$
6.7	$f(x) = 1,7 \cdot x^{1/3} - \cos(0,4 - 0,7 \cdot x);$
6.8	$f(x) = \sin(x);$
6.9	$f(x) = \sin(x);$
6.10	$f(x) = \cos(x);$
6.11	$f(x) = \cos(x);$
6.12	$f(x) = \sin(x);$
6.13	$f(x) = \sin(x);$
6.14	$f(x) = \cos(x);$
6.15	$f(x) = \cos(x).$

Лабораторна робота № 7 АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ ЗА МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Мета роботи: оволодіти методикою обробки результатів дослідів за методом найменших квадратів, скласти алгоритм і програмно реалізувати його на ЕОМ.

7.1 Основні теоретичні відомості

Апроксимація даних – процес побудови функціональної аналітичної залежності даних, отриманих в процесі дослідів.

Нехай одержана таблиця 7.1 деякої залежності $f(x)$. Потрібно знайти формулу, що виражає цю залежність аналітично.

Таблиця 7.1 – Таблиця експериментальних даних

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	...	y_n

Існує два основних підходи до апроксимації табличних даних.

При одному із них вимагають, щоб апроксимаційна крива проходила через всі точки, визначені таблицею (інтерполяційні методи Лагранжа, Ньютона) [2, 6].

При іншому підході дані апроксимують простою функцією, яка використовується на всьому діапазоні табличних даних, але не обов'язково проходить через всі точки. Такий підхід називається підготовкою кривої, яку прагнуть провести так, щоб її відхилення від табличних даних були мінімальні. В цьому випадку користуються методом найменших квадратів: зводять до мінімуму суму квадратів різниць між значеннями функції, що визначаються обраною кривою, і таблицею [2].

Нехай в таблиці задана $(n+1)$ точка $(x_0, y_0), \dots, (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ і необхідно знайти апроксимувальну криву $g(x)$ в діапазоні $x_0 \leq x \leq x_n$.

В цьому випадку похибка в кожній табличній точці буде

$$\xi_i = g(x_i) - y_i. \quad (7.1)$$

Тоді сума квадратів похибок визначається виразом [2, 6]

$$E = \sum_{i=0}^n [g(x_i) - y_i]^2. \quad (7.2)$$

Необхідно, щоб функція E набувала мінімального значення.

Функцію $g(x)$ обирають у вигляді лінійної комбінації функцій

$$g(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) + \dots + C_k g_k(x). \quad (7.3)$$

Умова мінімуму E задається рівняннями, що визначаються необхідною умовою існування екстремуму функції E :

$$\frac{\partial E}{\partial C_1} = \frac{\partial E}{\partial C_2} = \dots = \frac{\partial E}{\partial C_k} = 0. \quad (7.4)$$

Оскільки $E = \sum_{i=1}^n [C_1 g_1(x_i) + C_2 g_2(x_i) + \dots + C_k g_k(x_i) - y_i]^2$, то умова (7.4) еквівалентна системі рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial C_1} = 2 \sum [C_1 g_1(x_i) + C_2 g_2(x_i) + \dots + C_k g_k(x_i) - y_i] \cdot g_1(x_i) = 0; \\ \frac{\partial E}{\partial C_k} = 2 \sum [C_1 g_1(x_i) + C_2 g_2(x_i) + \dots + C_k g_k(x_i) - y_i] \cdot g_k(x_i) = 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

Вирішуючи систему (7.5), знаходимо всі параметри C_1, C_2, \dots . Будемо шукати функцію наближення у вигляді лінійної функції:

$$F(x, a, b) = ax + b. \quad (7.6)$$

Знайдемо частинні похідні за параметрами

$$\frac{\partial F}{\partial a} = x, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 1.$$

Складемо тепер систему виду (7.5):

$$\begin{cases} \sum (y_i - ax_i - b)x_i = 0, \\ \sum (y_i - ax_i - b) = 0. \end{cases}$$

(Сума тут і далі береться за параметром i в межах від 1 до n).

Далі маємо:

$$\begin{cases} \sum y_i x_i - a \sum x_i^2 - b \sum x_i = 0, \\ \sum y_i - a \sum x_i - nb = 0 \end{cases} \quad (7.7)$$

або поділивши кожне рівняння на n :

$$\frac{a}{n} \sum x_i^2 + \frac{b}{n} \sum x_i = \frac{1}{n} \sum y_i x_i,$$

$$\frac{a}{n} \sum x_i + b = \frac{1}{n} \sum y_i.$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum x_i &= M_x, & \frac{1}{n} \sum y_i &= M_y, \\ \frac{1}{n} \sum y_i x_i &= M_{xy}, & \frac{1}{n} \sum x_i^2 &= M_{x^2}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Тоді остання система має вигляд:

$$\begin{aligned} M_{x^2} \cdot a + M_x b &= M_{xy}, \\ M_x \cdot a + b &= M_y. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Коефіцієнти цієї системи $M_x, M_{x^2}, M_{xy}, M_y$ – значення з (7.8), де y_0, x_0 – значення із таблиці. Розв'язавши систему (7.9) одержимо значення параметрів a і b , а отже, і вид лінійної функції.

В разі знаходження функції наближення у вигляді квадратного тричлена маємо:

$$F(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c. \quad (7.10)$$

Знаходимо частині похідні: $\frac{F}{a} = x^2, \frac{F}{b} = x, \frac{F}{c} = 1.$

Складемо систему виду (7.5):

$$\begin{aligned} \sum (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) x_i^2 &= 0, \\ \sum (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) x_i &= 0, \\ \sum (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) &= 0. \end{aligned}$$

Після нескладних перетворень одержуємо систему трьох лінійних рівнянь з невідомими a, b і c . Коефіцієнти системи, також як і в разі лінійної функції, виражаються тільки через відомі дані з таблиці 7.1:

$$\begin{aligned} M_{x^4} \cdot a + M_{x^3} \cdot b + M_{x^2} \cdot c &= M_{x^2 y}, \\ M_{x^3} \cdot a + M_{x^2} \cdot b + M_x \cdot c &= M_{xy}, \\ M_{x^2} \cdot a + M_x \cdot b + c &= M_y. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Тут використані значення з (7.8), а також

$$\frac{1}{n} \sum x_i^4 = M_{x^4}, \quad \frac{1}{n} \sum x_i^3 = M_{x^3}, \quad \frac{1}{n} \sum x_i^2 y_i = M_{x^2 y}$$

Розв'язання системи (7.11) дає значення параметрів a , b і c для функції наближення (7.10).

7.2 Контрольні запитання

1. Суть процесу апроксимації даних та різниця з процесом інтерполяції.
2. Сформулюйте суть методу найменших квадратів.
3. Які функції використовують як функції наближення $g(x)$?
4. Дайте визначення термінів математичне сподівання та дисперсія.
5. Запишіть необхідну умову існування екстремуму функції E .

7.3 Зміст завдання

1. Лабораторна робота призначена для апроксимації функцій різними методами, що наведені в теоретичній частині роботи.
2. Індивідуальні завдання містять дані, з якими потрібно буде працювати (див. табл. 7.2).
3. При виконанні роботи необхідно скласти алгоритми для методів, описаних в теоретичній частині, скласти програму, що реалізує складені алгоритми. Роздрукувати: початкові дані, результуючі дані та тексти програм.

7.4 Порядок виконання роботи

1. Ознайомитись з методами апроксимації табличних функцій, використовуючи рекомендовану літературу.
2. Вивчити метод найменших квадратів (МНК) та методи знаходження наближеної функції в вигляді лінійної функції та квадратного тричлена.
3. За таблицею 7.2 побудувати точковий графік емпіричної функції, користуючись вибором правильного поєднання масштабів по осі OX та OY .
4. Розглянути спосіб знаходження наближеної до емпіричної функції в вигляді лінійної функції $y = ax + b$ та розробити блок-схему алгоритму визначення коефіцієнтів a і b .
5. Розглянути спосіб знаходження наближеної до емпіричної функції в вигляді квадратного тричлена $y = ax^2 + bx + c$ та розробити блок-схему алгоритму визначення коефіцієнтів a , b і c .
6. Порівняти якість варіантів наближення до емпіричної формули, отриманих в пунктах 4 та 5, використовуючи метод найменших квадратів. З цією метою обчислити значення суми квадратів відхилень

(ξ^2) наближених значень $y_i^{(j)}$ ($j=1, 2$ – номер варіанта функції наближення) від емпіричної величини y_i .

7. Скласти програму для обчислення результатів виконання пунктів 4-6. Використати при цьому процедуру розв'язання системи N лінійних алгебраїчних рівнянь, наприклад, методом Гаусса, формування елементів якої відбувається згідно з алгоритмами п. 5 та 6. Результати роботи програми представити в вигляді таблиці:

x_i	y_i	$y_i^{(1)} = ax_1 + b$	ξ_i	ξ_i^2	$y_i^{(2)} = ax_i^2 + bx_i + c$	ξ_i	ξ_i^2
-------	-------	------------------------	---------	-----------	---------------------------------	---------	-----------

8. Оформити звіт.

7.5 Оформлення звіту

Звіт про виконання лабораторної роботи повинен бути поданий у вигляді роздрукованого документа, який повинен містити:

1. Індивідуальний варіант завдання, графіки, блок-схеми, текст програми, а також результати роботи;
2. Текстові коментарі до математичних обчислень, блок-схем, програм, виконані за вказаними правилами;
3. Висновки.

Таблиця 7.2 – Індивідуальні варіанти завдань

1	y	79.31	57.43	60.66	92.55	90.12	71.30	70.50	91.52	68.31
	x	5.84	3.82	5.19	9.22	7.87	6.29	4.33	8.91	5.34
2	y	82.16	61.02	44.56	82.52	99.17	70.24	63.23	66.48	48.35
	x	0.12	-3.48	-4.45	-6.19	1.81	-3.81	0.84	-2.08	-1.28
3	y	113.84	119.66	106.28	120.68	107.43	114.88	115.53	117.40	120.24
	x	2.95	2.60	2.69	3.01	2.44	2.51	3.37	2.98	3.20
4	y	65.72	58.05	60.05	55.79	50.83	47.69	44.49	59.74	56.81
	x	5.14	5.59	4.33	4.59	4.21	3.78	4.23	5.61	4.87
5	y	55.65	67.68	105.20	85.02	52.76	58.86	72.19	61.09	70.44
	x	9.11	9.35	8.90	9.22	8.74	8.98	8.77	9.31	8.81
6	y	22.81	28.42	24.95	26.96	8.78	36.55	15.77	22.89	27.99
	x	0.06	2.36	-3.14	2.10	-4.89	0.74	-0.22	1.63	-0.13

Продовження таблиці 7.2

7	y	18.31	21.92	16.93	-8.23	10.90	24.18	38.45	24.11	36.62
	x	-1.96	-0.76	-1.06	-2.95	-4.36	0.16	-2.66	-3.14	-2.12
8	y	80.93	109.10	87.80	83.95	70.99	87.36	84.71	96.63	59.70
	x	1.65	2.43	0.94	1.29	-0.61	-1.14	2.45	2.80	-1.78
9	y	-19.23	-21.41	-9.90	-19.56	-0.30	-12.04	1.14	11.26	-24.64
	x	3.80	0.25	0.48	5.78	4.91	1.56	0.91	5.73	1.98
10	y	18.93	-22.13	-10.07	20.59	7.09	4.04	-20.78	-12.98	3.69
	x	2.00	2.60	3.66	1.70	3.79	2.08	1.97	1.93	2.02
11	y	63.96	44.39	51.20	58.44	50.15	44.51	47.25	35.24	43.28
	x	3.05	2.20	0.65	1.65	1.92	1.92	0.89	0.75	2.79
12	y	11.13	3.49	8.91	14.83	1.80	13.50	3.70	-2.40	10.00
	x	-0.05	-0.04	-0.88	0.32	-0.24	-1.05	0.57	0.01	0.40
13	y	58.46	36.05	31.17	16.17	11.16	69.23	58.08	43.13	73.24
	x	0.22	-3.05	-1.76	-1.25	-0.45	-0.80	-0.26	-3.07	-1.27
14	y	66.58	36.05	64.63	33.19	26.70	55.31	18.70	22.95	38.24
	x	3.44	1.72	2.06	3.07	0.99	7.65	2.92	3.53	4.10
15	y	79.31	57.43	60.66	92.55	90.12	71.30	70.50	91.52	68.31
	x	6.04	6.33	4.86	5.91	4.96	5.58	6.15	6.13	4.65
16	y	82.16	61.02	44.56	82.52	99.17	70.24	63.23	66.48	48.35
	x	2.91	2.94	6.35	6.58	3.80	6.43	0.57	5.96	3.40
17	y	79.31	57.43	60.66	92.55	90.12	71.30	70.50	91.52	68.31
	x	5.84	3.82	5.19	9.22	7.87	6.29	4.33	8.91	5.34
18	y	82.16	61.02	44.56	82.52	99.17	70.24	63.23	66.48	48.35
	x	0.12	-3.48	-4.45	-6.19	1.81	-3.81	0.84	-2.08	-1.28
19	y	113.84	119.66	106.28	120.68	107.43	114.88	115.53	117.40	120.24
	x	2.95	2.60	2.69	3.01	2.44	2.51	3.37	2.98	3.20

Продовження таблиці 7.2

20	y	65.72	58.05	60.05	55.79	50.83	47.69	44.49	59.74	56.81
	x	5.14	5.59	4.33	4.59	4.21	3.78	4.23	5.61	4.87
21	y	55.65	67.68	105.20	85.02	52.76	58.86	72.19	61.09	70.44
	x	9.11	9.35	8.90	9.22	8.74	8.98	8.77	9.31	8.81
22	y	18.31	21.92	16.93	-8.23	10.90	24.18	38.45	24.11	36.62
	x	-1.96	-0.76	-1.06	-2.95	-4.36	0.16	-2.66	-3.14	-2.12
23	y	80.93	109.10	87.80	83.95	70.99	87.36	84.71	96.63	59.70
	x	1.65	2.43	0.94	1.29	-0.61	-1.14	2.45	2.80	-1.78
24	y	-19.23	-21.41	-9.90	-19.56	-0.30	-12.04	1.14	11.26	-24.64
	x	3.80	0.25	0.48	5.78	4.91	1.56	0.91	5.73	1.98
25	y	18.93	-22.13	-10.07	20.59	7.09	4.04	-20.78	-12.98	3.69
	x	2.00	2.60	3.66	1.70	3.79	2.08	1.97	1.93	2.02
26	y	63.96	44.39	51.20	58.44	50.15	44.51	47.25	35.24	43.28
	x	3.05	2.20	0.65	1.65	1.92	1.92	0.89	0.75	2.79
27	y	11.13	3.49	8.91	14.83	1.80	13.50	3.70	-2.40	10.00
	x	-0.05	-0.04	-0.88	0.32	-0.24	-1.05	0.57	0.01	0.40
28	y	58.46	36.05	31.17	16.17	11.16	69.23	58.08	43.13	73.24
	x	0.22	-3.05	-1.76	-1.25	-0.45	-0.80	-0.26	-3.07	-1.27
29	y	66.58	36.05	64.63	33.19	26.70	55.31	18.70	22.95	38.24
	x	3.44	1.72	2.06	3.07	0.99	7.65	2.92	3.53	4.10
30	y	79.31	57.43	60.66	92.55	90.12	71.30	70.50	91.52	68.31
	x	6.04	6.33	4.86	5.91	4.96	5.58	6.15	6.13	4.65

Лабораторна робота № 8 ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ

Мета роботи: оволодіти методами чисельного інтегрування; навчитись обирати найефективніший метод обчислень, скласти його алгоритм і реалізувати програмно на ЕОМ.

8.1 Основні теоретичні відомості

8.1.1 Інтегрування функцій

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$ і відома її первісна $F(x)$, то визначений інтеграл від цієї функції в межах від a до b може бути визначений за формулою Ньютона-Лейбніца [1]

$$I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \dots, F'(x) = f(x). \quad (8.1)$$

Але в ряді випадків точне визначення інтеграла за формулою (8.1) неможливе. В випадку, коли підінтегральна функція задана таблично (масивом значень), поняття первісної втрачає зміст і інтеграл може бути обчислений тільки чисельними наближеними методами. Найбільш відомі такі методи знаходження визначених інтегралів, як метод Ньютона-Котеса [4], Гаусса [1, 4], Чебишева [4, 5], що базуються на використанні так званих квадратурних формул, отриманих заміною $f(x)$ інтерполяційними многочленами.

Для побудови квадратурних формул підінтегральна функція заміняється на $[a; b]$ інтерполяційним многочленом, наприклад $H_n(x)$:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b H_n(x) dx. \quad (8.2)$$

8.1.2 Формула трапецій

Формула трапецій – один із найпростіших способів обчислення визначеного інтеграла

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} (y_0 + y_1), \quad (8.3)$$

де h – крок інтегрування $h = \frac{x_1 - x_0}{n}$, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$,

$$H_{n-1}(x) = h(y_0 + y_1) / 2.$$

3 точки зору геометрії це означає, що площа криволінійної фігури заміняється площею трапеції (рис. 8.1)

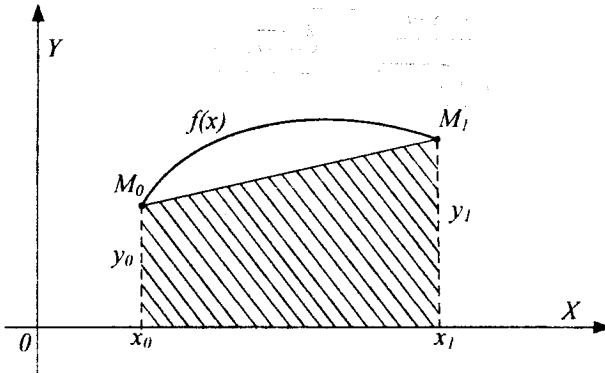


Рисунок 8.1 – Геометрична інтерпретація методу трапецій

Використовуючи формулу (8.3) на всіх відрізках розбиття, маємо загальну формулу трапецій для відрізка $[a; b]$ [2, 6]:

$$I = \int_a^b f(x) dx = h(y_0/2 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n/2), \quad (8.4)$$

де $y_i = f(x_i)$, $x_i = a + h \cdot i$.

Похибка методу чисельного інтерполювання функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ оцінюється в вигляді [2,6]:

$$|R_n| \leq M \cdot |b - a| \cdot h^2 / 12, \quad (8.5)$$

де $M = \max|f''(x)|$, $x \in [a; b]$.

На рис. 8.2 подана відповідна блок-схема алгоритму. Крок інтегрування $h = (b - a) / n$ вказано в блоці 4 алгоритму; початкове значення функцій $S = 0$ і $x_0 = A$. В блоках 5 – 7 формується сума функцій від $f(x_i)$ до $f(x_{n-1})$, обчислюючи наступні точки $x_{i+1} = x_i + h$. В блоці 8 і 9 розраховується інтеграл за формулою (8.4).

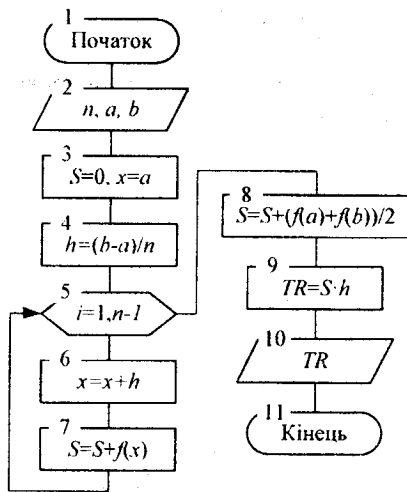


Рисунок 8.2 – Блок-схема алгоритму чисельного інтегрування за методом трапецій

8.1.3 Метод Сімпсона

Оберемо n (n – непарне) послідовних точок, рівновіддалених одна від одної, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$; $x_2 = x_1 + h$, $x_3 = x_1 + 2h$, ..., $x_n = x_1 + (n-1)h$. Нехай в цих точках встановлені значення функції $y = f(x)$ і необхідно знайти інтеграл

$$S = \int_{x_1}^{x_n} f(x) dx. \quad (8.6)$$

Метод Сімпсона полягає в такому: через кожні послідовні три точки проводиться парабола $y = a + bx + cx^2$ та обчислюється інтеграл від функції, визначеної у вигляді цієї параболи (рис. 8.3). Сума цих інтегралів по всіх точках і є наближене значення шуканого інтеграла.

Проведемо через перші три точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) параболу

$$y = a_1 + b_1x + c_1x^2 \quad (8.7)$$

та обчислимо інтеграл, беручи до уваги, що $(x_3 + x_1)/2 = x_2$.

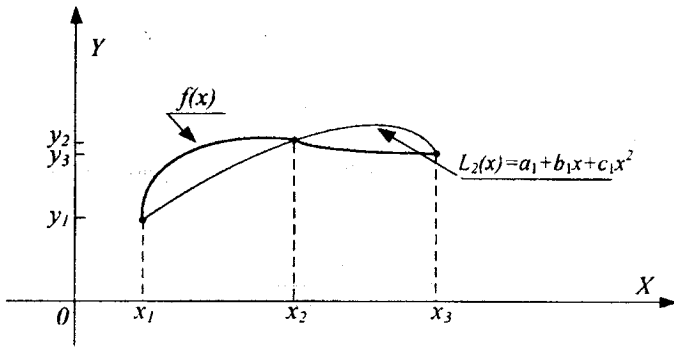


Рисунок 8.3 – Геометричний зміст методу Сімпсона

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_{x_1}^{x_3} (a_1 + b_1x + c_1x^2) dx = a_1(x_3 - x_1) + b_1 \frac{x_3^2 - x_1^2}{2} + c_1 \frac{x_3^3 - x_1^3}{3} = \\
 &= \frac{x_3 - x_1}{6} \left[a_1 + b_1x_1 + c_1x_1^2 + 4 \left(a_1 + b_1 \frac{x_3 + x_1}{2} + c_1 \left(\frac{x_3 + x_1}{2} \right)^2 \right) \right] + \\
 &+ a_1 + b_1x_3 + c_1x_3^2 = \frac{x_3 - x_1}{6} (y_1 + 4y_2 + y_3) = \frac{h}{3} (y_3 + 4y_2 + y_1).
 \end{aligned}$$

Через наступні три точки $(x_3; y_3)$, $(x_4; y_4)$, $(x_5; y_5)$ проводимо параболу і обчислюємо інтеграл

$$S_2 = \frac{h}{3} (y_3 + 4y_4 + y_5).$$

Виконуючи аналогічні дії для інших трійок точок, одержуємо ряд наближених значень інтеграла S_1, S_2, \dots, S_{n-1} .

Підсумовуючи відповідні значення по всій області від x_1 до x_n ,

$$\begin{aligned}
 S &= S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1} = \\
 &= \frac{h}{3} [y_1 + y_n + 4(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_3 + y_5 + \dots + y_{n-2})],
 \end{aligned}$$

маємо кінцеву формулу Сімпсона [2, 6]

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{3} [y_1 + y_n + 4(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_3 + y_5 + \dots + y_{n-2})], \quad (8.8)$$

де $y_i = f(x_i) (i=1, 2, \dots, n)$.

Слід розрізнити парні та непарні значення x та відповідно y . Позначимо парні значення x як $XС$: $x_0, x_2, x_4, \dots, x_{n-1}$ (n – непарне); а через XNC – непарні: $x_1, x_3, x_5, \dots, x_{n-2}$, тоді маємо просту схему алгоритму обчислень за методом Сімпсона (рис. 8.4).

Похибка інтегрування ε обчислюється за формулою оцінки залишкового члена $|R_n|$ [2. 6]

$$|R_n| < \frac{(x_n - x_1)h^4 M}{180}, \quad (8.9)$$

де M – максимальне значення $f^{(4)}(x)$ на відрізку (x_1, x_n) .

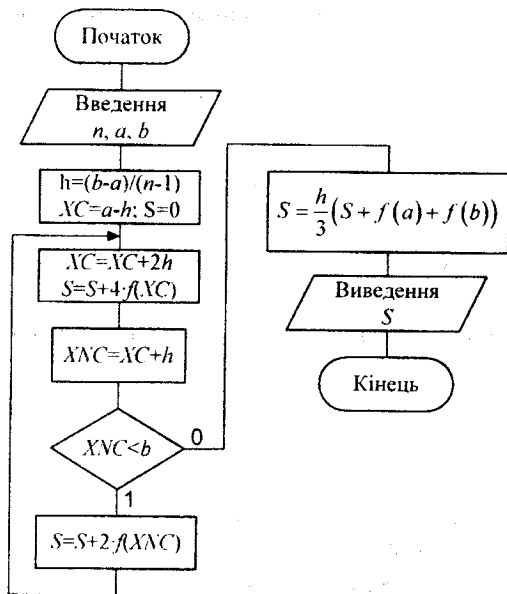


Рисунок 8.4 – Блок-схема алгоритму чисельного інтегрування методом Сімпсона

8.2 Контрольні запитання

1. В яких випадках виникає необхідність виконання інтегрування чисельними методами?
2. Поясніть засіб побудови квадратурних формул для чисельного інтегрування.

3. Особливість алгоритмів методів трапеції та Сімпсона.
4. Порівняйте точність методів Сімпсона та трапецій.
5. Який зв'язок між кроком інтегрування h та точністю l за методом Сімпсона?

8.3 Зміст завдання

1. Ознайомитися з відомими чисельними методами інтегрування функцій, скласти алгоритми наближеного обчислення інтеграла функцій за розглянутими раніше методами.
2. Написати програму, яка реалізує відповідні алгоритми.
3. Початкові дані задати у вигляді таблиці.

8.4 Порядок виконання роботи

1. Ознайомитись з відомими чисельними методами інтегрування функцій, використовуючи рекомендовану літературу.
2. Скласти алгоритм обчислення наближеного значення інтеграла функції за узагальненою формулою трапецій та написати відповідну програму.
3. Скласти алгоритм обчислення наближеного значення інтеграла за узагальненою формулою Сімпсона та написати відповідну програму.
4. За програмами пп. 2, 3 обчислити наближене значення інтеграла функції з таблиці 8.1 при заданій кількості відрізків інтегрування $N = 11$ на проміжку $[a; b]$ та самостійно обраній точності обчислень ε .
5. Роздрукувати вхідні дані, проміжні і кінцеві результати та тексти програм чисельного інтегрування функцій методом трапецій та Сімпсона.
6. Оцінити похибку обчислень обома методами та порівняти її.
7. Оформити звіт.

8.5 Оформлення звіту

Звіт про виконання лабораторної роботи повинен бути поданий у вигляді роздрукованого документа, який повинен містити:

1. Індивідуальний варіант завдання, блок-схеми, текст програми, а також результати роботи;
2. Текстові коментарі до математичних обчислень, блок-схем, програм, виконані за вказаними правилами;
3. Висновки.

Таблиця 8.1 – Індивідуальні варіанти завдань

№ вар.	$f(x)$	a	b
1	$0,37 \cdot e^{\sin(x)}$	0	1
2	$0,5 \cdot x + x \cdot \lg(x)$	1	2
3	$(x+1,9) \cdot \sin(x/3)$	1	2
4	$(1/x) \cdot \ln(x+2)$	2	3
5	$(3 \cdot \cos(x)) / (2 \cdot x + 1,7)$	0	1
6	$(2 \cdot x + 0,6) \cdot \cos(x/2)$	1	2
7	$2,6 \cdot x^2 \cdot \ln(x)$	1,2	2,2
8	$(x^2 + 1) \cdot \sin(x - 0,5)$	0,5	1,5
9	$x^2 \cdot \cos(x/4)$	2	3
10	$(\sin(0,2 \cdot x - 3)) / (x^2 + 1)$	3	4
11	$3 \cdot x + \ln(x)$	1	2
12	$4 \cdot x \cdot e^{x^2}$	-1	0
13	$3 \cdot x^2 + \lg(x)$	-0,5	0,5
14	$(3 \cdot x^2 + \sin(x)) / x^2$	0	1
15	$3 \cdot x \cdot e^{\cos(x)}$	0,2	1,2
16	$x^2 \cdot \lg(x/2)$	1,5	2,5
17	$0,45 \cdot e^{\sin(x)}$	0	2
18	$x + x \cdot \lg(x)$	1	2
19	$(x+4) \cdot \sin(x/2)$	0	2
20	$(1/x) \cdot \ln(x+4)$	2	4
21	$(2 \cdot \cos(x)) / (2 \cdot x + 2,4)$	0	1,5
22	$(3 \cdot x + 0,2) \cdot \cos(x/2)$	1	2
23	$2,1 \cdot x^2 \cdot \ln(2x)$	1	3
24	$(x^2 + 1) \cdot \cos(x - 0,5)$	0	2
25	$x^2 \cdot \sin(x/2)$	2	3
26	$(\sin(0,2 \cdot x - 4)) / (x^2 + 2)$	5	6
27	$1,5 \cdot x + \ln(x)$	0	2
28	$5 \cdot x \cdot e^{x^2}$	-2	0
29	$4 \cdot x^2 + \lg(x)$	-0,2	0,7
30	$(4 \cdot x^2 + \sin(2x)) / x^2$	0	1

Лабораторна робота № 9

ЧИСЕЛЬНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ПРОСТОГО ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ЗА ОДНОКРОКОВИМИ ТА БАГАТОКРОКОВИМИ МЕТОДАМИ

Мета роботи: оволодіти методами чисельного розв'язання диференціальних рівнянь; навчитися обирати найефективніший метод, скласти його алгоритм і реалізувати на ЕОМ.

9.1 Основні теоретичні відомості

9.1.1 Звичайне диференціальне рівняння та методи його обчислення

Звичайне диференціальне рівняння (ДР) – це рівняння, яке має одну незалежну змінну та її похідну.

$$y' = f(x, y). \quad (9.1)$$

Рівняння, яке має декілька змінних та їх частинні похідні, називається диференціальним рівнянням з частинними похідними.

Звичайне диференціальне рівняння має нескінченну множину розв'язків. Для встановлення конкретного розв'язку необхідні допоміжні умови. Якщо допоміжні умови задаються при одному значенні незалежної змінної, наприклад,

$$y(x_0) = y_0, \quad (9.2)$$

то має місце задача Коші (задача з початковими умовами) [8, 9].

Якщо ж умови задаються хоча б для двох значень незалежної змінної, то задача називається крайовою (задача з граничними умовами) [8, 9].

Чисельні методи розв'язання ДР подають розв'язання у вигляді таблиці числових значень функції залежно від значень аргументу.

Існують однокрокові та багатокрокові методи розв'язання звичайних ДР. В однокрокових методах для знаходження $(n+1)$ -го значення функції використовується тільки n -е значення, а в багатокрокових – значення в декількох попередніх точках.

9.1.2 Однокрокові методи Рунге-Кутта

Методи характеризуються такими властивостями:

в основі лежить розкладання функції у в ряд Тейлора в околі точки x_0 , де степінь h (крок) різний для різних методів і визначає точність або порядок методу:

$$y(h_0 + h) = y(x_0) + h \cdot y'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_0) + \dots + \frac{1}{i!} h^i y^{(i)}(x_0), \quad (9.3)$$

не потрібне обчислення частинних похідних від $f(x, y)$.

Метод Ейлера (Рунге-Кутта першого порядку) [5, 6] – найпростіший з однокрокових методів розв'язання ДР, потребує мінімальних затрат обчислювальних ресурсів, але має низьку точність. Нехай дано рівняння (9.1) з початковими умовами (9.2). Обираючи достатньо малий крок h , побудуємо, починаючи з точки x_0 , систему рівновіддалених точок $x_i = x_0 + i \cdot h$ ($i = 0, 1, 2, \dots$).

Тоді отримання шуканої таблиці значень функції $y(x_i)$ за методом Ейлера полягає в циклічному використанні пари формул:

$$\begin{aligned} \Delta y_k &= h \cdot f(x_k, y_k), \\ y_{k+1} &= y_k + \Delta y_k, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (9.4)$$

Оскільки метод Ейлера узгоджується з рядом Тейлора включно до членів порядку h , то метод відноситься до методів Рунге-Кутта першого порядку. Помилка обмеження методу становить $\eta \cdot h^2$.

До недоліків методу, окрім значної похибки, яка з кожним новим кроком систематично збільшується, належить нестійкість розв'язку.

На практиці використовується оцінка точності розв'язку за методом Ейлера за допомогою подвійного прорахунку – з кроком h і з кроком $h/2$. Збіг десяткових знаків в отриманих двома способами результатах дає змогу вважати їх достовірними.

В алгоритмі (рис. 9.1) вихідними даними є початкові значення x_0, y_0 , крок інтегрування h та значення абсциси x_n кінця відрізка інтегрування. В алгоритмі передбачено обчислення проміжних значень змінних x, y , які набувають значень x_k, y_k .

Покращений метод Ейлера (метод Рунге-Кутта 2-го порядку) [5, 6] дає меншу похибку, ніж метод Ейлера.

Шукана таблиця значень функції $y(x_i)$ буде отримана в ході виконання циклічних обчислень, враховуючи початкову умову (9.2):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h \cdot f(x_i, y_i))]. \quad (9.5)$$

Метод узгоджується з рядом Тейлора включно до членів степеня h^2 . Тому метод називають методом Рунге-Кутта 2-го порядку.

Оцінка похибки визначається як h^2 .

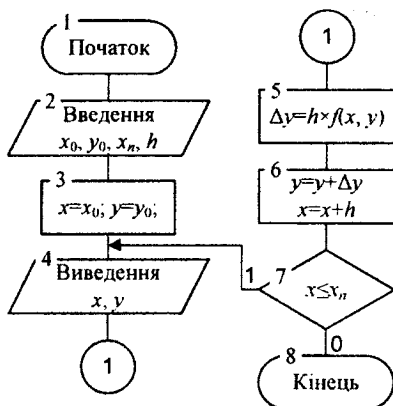


Рисунок 9.1 – Блок-схема алгоритму методу Ейлера

Для складання блок-схеми алгоритму покращеного методу Ейлера можна скористатись схемою на рис. 9.1, змінюючи вираз в блоці 5 на інший вираз:

$$\Delta y = \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h \cdot f(x_i, y_i))].$$

Метод Рунге-Кутта (класичний) [4, 5].

Метод Рунге-Кутта 3-го порядку узгоджується з розкладанням в ряд Тейлора включно до порядку h^3 і описується системою чотирьох співвідношень:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + (k_1 + 4 \cdot k_2 + k_3) / 6, \\ k_1 = h \cdot f(x_i, y_i), \\ k_2 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_1/2), \\ k_3 = h \cdot f(x_i + h, y_i + 2k_2 - k_1). \end{cases} \quad (9.6)$$

Метод Рунге-Кутта 4-го порядку описується системою п'яти співвідношень:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) / 6, \\ k_1 = h \cdot f(x_i, y_i), \\ k_2 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_1/2), \\ k_3 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_2/2), \\ k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3). \end{cases} \quad (9.7)$$

Похибка обмеження останнього методу оцінюється величиною h^5 . Цей метод є досить поширеним за рахунок своєї порівняної нескладності при достатньо високій точності.

Складемо блок-схему алгоритму розв'язання ДР з початковими умовами $y(0)=1$ методом Рунге-Кутта 4-го порядку на інтервалі $[0; 1]$:

$$y' = y(1-x).$$

Вводимо з початкових умов значення x_0, y_0 , кінцеве значення проміжку інтегрування x_n , крок h (рис. 9.2). Згідно з прикладом $x_0=0, y_0=1, x_n=1, h=0,1$.

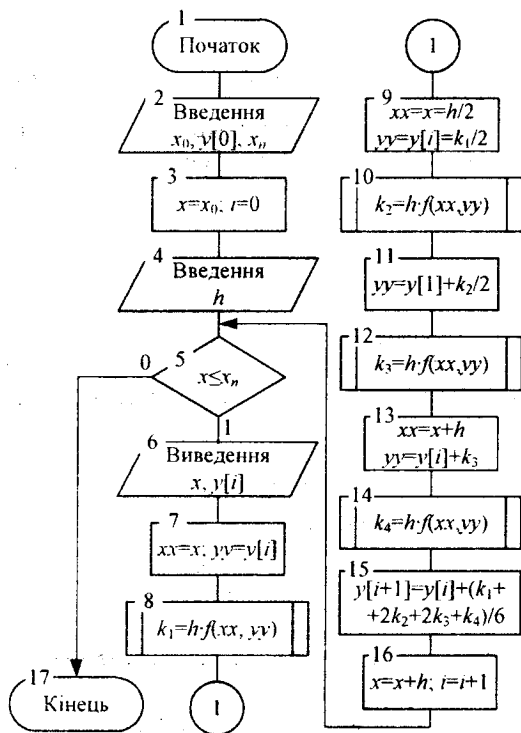


Рисунок 9.2 – Схема алгоритму обчислень за методом Рунге-Кутта

Для зручності обчислень в блок-схемі (рис. 9.2) використовується під-програма-функція $f(xx, yy)$ з двома аргументами, яким під час обчислення присвоюються послідовність значень, відображених відповідно в блоках 8,

10, 12, 14, повертаючи значення відповідних коефіцієнтів k_1, k_2, k_3, k_4 . За початковими умовами значення функції $f(x, y) = f(x_0, y_0) - y_0(1 - x_0)$, а саме, $1(1 - 0) = 1$.

На практиці для оцінювання похибки обчислень за методом Рунге-Кутта 4-го порядку використовують правило Рунге. Для цього спочатку проводять обчислення з кроком h , а потім – з кроком $h/2$. Якщо y_i^h – наближення з кроком h , а $y_i^{h/2}$ – відповідне наближення з кроком $h/2$, то оцінювання похибки відбувається за формулою:

$$\left| y_i^{(h/2)} - y(x_i) \right| \leq \frac{16}{15} \left| y_i^{(h/2)} - y_i^{(h)} \right|. \quad (9.8)$$

9.1.3 Багатокрокові методи

Серед них найпоширеніші кінцево-різницеві методи [9]

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n-i} - h \sum_{i=0}^k \beta_i f(x_{n-i}, y_{n-i}) = 0, \quad (9.9)$$

де α_i, β_i – сталі коефіцієнти.

На практиці формула (9.9), використана зі значеннями $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 0$ – явна, а формула з $\alpha_0 \neq 0, \beta_0 \neq 0$ – неявна.

З рівнянням (9.9) пов'язують таке характеристичне рівняння

$$\rho(\lambda) = h \sum_{i=0}^{i=k} \alpha_i \lambda^i, \quad (9.10)$$

де λ – корінь.

Найбільшу популярність серед багатокрокових методів отримали методи *прогнозу та корекції*.

В методах прогнозу та корекції кожне значення y_i визначають за два етапи. На першому знаходять початкове (нульове) наближення для y_i , цей етап називають прогнозом. На другому етапі початкове наближення уточнюють за допомогою ітераційного процесу корекції.

Для прогнозу використовують одну з таких формул [4]:

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \quad (9.11)$$

або

$$y_{i+1}^0 = y_{i-1} + 2 \cdot h \cdot f(x_i, y_i). \quad (9.12)$$

Для корекції використовують такий ітераційний процес [4]:

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2} \left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k+1)}) \right]. \quad (9.13)$$

Ітераційний процес продовжують до тих пір, поки $y_{i+1}^{(k)}$ і $y_{i+1}^{(k-1)}$ не збігаються з заданою точністю. Прийнято вважати, що задана точність повинна бути досягнута за дві-три ітерації. При більшій кількості ітерацій необхідно зменшити крок h .

Якщо для прогнозу використовується формула (9.11), то оцінювання похибки методу виконується за формулою:

$$\left| y(x_i) - y_i^{(k)} \right| \approx \frac{1}{5} |y_i^0 - y_i^k|. \quad (9.14)$$

Методи прогнозу та корекції потребують майже вдвічі менше машинного часу, ніж метод Рунге-Кутта порівнянної точності, що може сильно впливати на вибір алгоритму.

Через складність програмної реалізації багатокрокових методів вони досить рідко використовуються при розв'язанні задач на персональних ЕОМ. Але у випадках скорочення витрат машинного часу і урахування допустимої похибки їх використання доцільне.

9.2 Контрольні запитання

1. Які особливості однокрокових і багатокрокових методів? Їх основні відмінності.
2. Чим визначається похибка однокрокового методу?
3. Суть явних і неявних різницевих схем задачі Коші.
4. Поясніть блок-схеми алгоритмів розв'язання ДР за методом Ейлера та Рунге-Кутта 4-го порядку.
5. В чому суть методу прогнозу та корекції?
6. Як обчислюється похибка методу прогнозу та корекції?

9.3 Зміст завдання

1. Ознайомитися з відомими методами чисельного розв'язання ДР.
2. Скласти блок-схеми для методів, розглянутих в теоретичній частині. Написати програму для відповідних методів.
3. Варіанти завдань наведено в таблиці 9.1.
4. Роздрукувати: початкові дані, результуючі дані та тексти програм.

9.4 Порядок виконання роботи

1. Ознайомитись з відомими методами чисельного розв'язку диференційних рівнянь, використовуючи рекомендовану літературу.
2. Скласти блок-схему алгоритму розв'язання задачі Коші для диференційного рівняння $y' = f(x, y)$ на відрізку $[a; b]$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0$ та кроком інтегрування h :
 - методом Ейлера;
 - методом Рунге-Кутта 4-го порядку;
 - методом прогнозу то корекції.
3. За кожним алгоритмом п. 2 скласти відповідну програму обчислень розв'язку диференційного рівняння.
4. Використовуючи дані відповідного варіанта (таблиця 9.1), роздрукувати програми, вхідні дані та результати обчислень.
5. Оцінити похибки обчислень за вказаними методом.
6. Оформити звіт.

9.5 Оформлення звіту

Звіт про виконання лабораторної роботи повинен бути поданий у вигляді роздрукованого документа, який повинен містити:

1. Індивідуальний варіант завдання, блок-схеми, текст програми, а також результати роботи;
2. Текстові коментарі до математичних обчислень, блок-схем, програм, виконані за вказаними правилами;
3. Висновки.

Таблиця 9.1 – Індивідуальні варіанти завдань

№ вар.	Функція $f(x, y)$	a	b	y_0	h
1	$2 \cdot x + x \cdot y$	0	2	0,1	0,2
2	$e^x + \sin(y)$	0	1	0,1	0,1
3	$x \cdot y \cdot \sin(x)$	0	1	1	0,1
4	$x \cdot y + 2 \cdot y^2$	0	1	0,01	0,1
5	$x + x^2 + 0,1 \cdot x^3$	0	1	0	0,1
6	$2 + 3 \cdot x^2 + 0,5 \cdot y^2$	0	1	0	0,1
7	$x \cdot y^3 - x^2$	0	1	0,7	0,1
8	$x + \cos(y/2)$	-2	-1	3	0,1
9	$x^2 + x \cdot y + y^2$	-2	-1	1,2	0,1

Продовження таблиці 9.1

№ вар.	Функція $f(x, y)$	a	b	y_0	h
10	$x+1+2 \cdot y^2$	-2	-1	0,5	0,1
11	$1,4 \cdot x - \sin(x+2 \cdot y^2)$	1	2	1,2	0,1
12	$2 \cdot x + \cos(x^2 + y)$	2	3	1,4	0,1
13	$1,5 \cdot y + \sin(y^2 + 0,7 \cdot x)$	1	2	1,6	0,1
14	$e^{(-x-y)} + 0,5 \cdot y$	0,5	1	2	0,05
15	$x + \sqrt{y^2 + 1,5 \cdot x^2}$	0	1	0,5	0,1
16	$0,5 \cdot x + \sqrt[3]{2 \cdot x + y^3}$	0	1	0,4	0,1
17	$2 \cdot x + x \cdot y$	0	2	0,1	0,2
18	$e^x + \sin(y)$	0	1	0,1	0,1
19	$x \cdot y \cdot \sin(x)$	0	1	1	0,1
20	$x \cdot y + 2 \cdot y^2$	0	1	0,01	0,1
21	$x + x^2 + 0,1 \cdot x^3$	0	1	0	0,1
22	$2 + 3 \cdot x^2 + 0,5 \cdot y^2$	0	1	0	0,1
23	$x \cdot y^3 - x^2$	0	1	0,7	0,1
24	$x + \cos(y/2)$	-2	-1	3	0,1
25	$x^2 + x \cdot y + y^2$	-2	-1	1,2	0,1
26	$x+1+2 \cdot y^2$	-2	-1	0,5	0,1
27	$1,4 \cdot x - \sin(x+2 \cdot y^2)$	1	2	1,2	0,1
28	$2 \cdot x + \cos(x^2 + y)$	2	3	1,4	0,1
29	$1,5 \cdot y + \sin(y^2 + 0,7 \cdot x)$	1	2	1,6	0,1
30	$e^{(-x-y)} + 0,5 \cdot y$	0,5	1	2	0,05

Лабораторна робота № 10 ОДНОВИМІРНА ОПТИМІЗАЦІЯ

Мета роботи: вивчення алгоритмів оптимізації функції однієї змінної.

10.1 Основні теоретичні відомості

10.1.1 Задачі оптимізації

Під оптимізацією розуміють процес вибору найкращого варіанта з усіх можливих.

В процесі розв'язування задачі оптимізації необхідно знайти оптимальні значення параметрів (проектні параметри), які визначають дану задачу [7].

Вибір оптимального розв'язання проводиться за допомогою деякої залежної величини, що визначається проектними параметрами і називається функцією мети (або критерієм якості). В процесі розв'язання задач і оптимізації повинні бути знайдені такі значення проектних параметрів, при яких функція мети має мінімум (або максимум).

Функцію мети можна записати в вигляді

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (10.1)$$

У випадку одного проектного параметра функція мети (10.1) є функцією однієї змінної, її графік – деяка крива на площині. При $n=2$ цільова функція є функцією двох змінних, її графік – поверхня.

Виділяють два типи задач оптимізації – безумовні та умовні. *Безумовна задача оптимізації* полягає в пошуку максимуму або мінімуму дійсної функції (10.1) від n дійсних змінних і визначенні відповідних значень аргументів на деякій множині δ n -вимірного простору. Частіше розглядають задачі мінімізації; до них легко зводяться й задачі пошуку максимуму шляхом заміни знака цільової функції на протилежний.

Умовні задачі оптимізації або задачі з обмеженнями – це такі, при формулюванні яких задаються умови (обмеження) на множині δ . Ці обмеження задаються сукупністю функцій, які задовольняють систему рівнянь або систему нерівностей.

Одновимірна оптимізація. Необхідно знайти найменше (найбільше) значення функції мети $y = f(x)$, заданої на множині δ , та визначити значення параметра x із множини δ , при якому функція мети набуває екстремального значення.

Функція мети називається унімодальною, якщо на даному відрізку вона має один екстремум (рис. 10.1, а). Для функції, що має декілька максимумів, (рис. 10.1, б) визначають глобальний та локальний екстремуми.

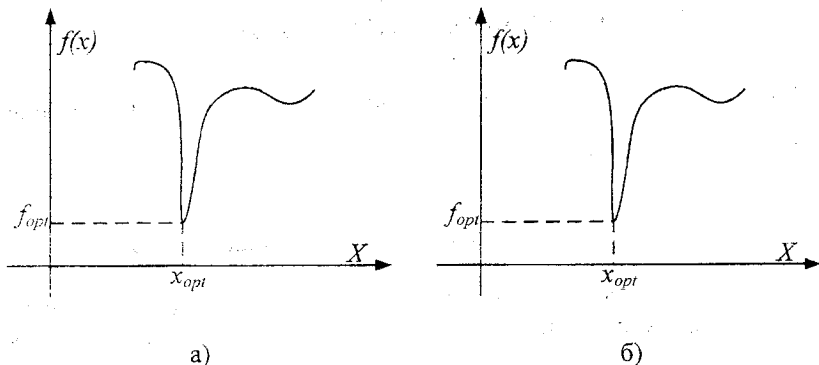


Рисунок 10.1 – Функція унімодальна (а) і з кількома екстремумами (б)

Тому далі розглядаються чисельні методи оптимізації для функцій мети, похідні яких не можуть бути обчислені або функції є перервними. Вони базуються на обчисленні функції мети в окремих точках та визначенні серед них найбільшого чи найменшого значення.

Методи, орієнтовані на розв'язання задач безумовної оптимізації, поділяють на три класи [5]:

- методи прямого пошуку, які основані на обчисленні тільки значень функції мети;
- градієнтні методи, в яких використовуються точні значення перших похідних функції $f(x)$;
- методи другого порядку, в яких поряд з першими похідними використовуються другі похідні функції $f(x)$.

10.1.2 Методи пошуку

Постановка задачі: функція $f(x)$ – унімодальна на $[a; b]$. Необхідно знайти, наприклад, значення максимуму функції на даному відрізку при досягненні заданої точності ε .

Процес розв'язання полягає в послідовному звужуванні інтервалу змінування проектного параметра, названого інтервалом невизначеності. На початку процесу оптимізації його довжина дорівнює різниці $b - a$, а наприкінці вона повинна стати менше заданого допустимого параметра ε . Таким чином, відбувається поступове звуження інтервалу невизначеності до деякого відрізка $[x_n; x_{n+1}]$, причому $x_{n+1} - x_n < \varepsilon$.

Далі розглянуто такі методи пошуку як: метод порозрядного пошуку; метод дихотомії; метод золотого перерізу.

10.1.3 Метод порозрядного пошуку

Дано унімодальну функцію $f(x)$, початкове наближення x_0 , початковий крок пошуку h і точність обчислення ε .

Блок-схема методу обчислення максимуму функції подана на рис. 10.2 [5]. Максимум функції позначимо як F_{max} з відповідним значенням аргументу x_{max} . В блоках 5 і 8 звертаємось до підпрограми, яка обчислює значення функції залежно від вказаного аргументу.

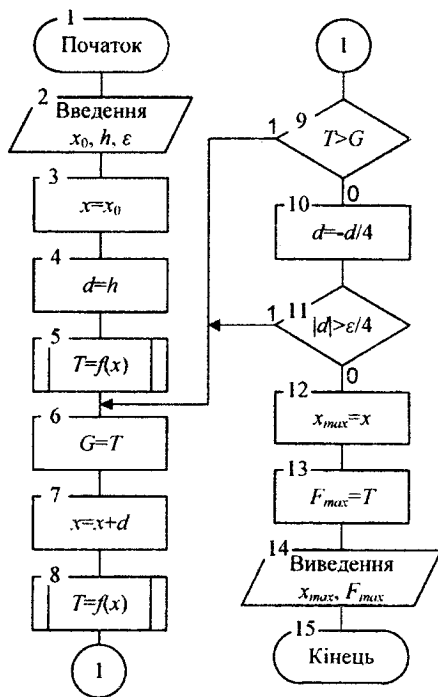


Рисунок 10.2 – Блок-схема методу порозрядного пошуку

10.1.4 Метод дихотомії

Метод реалізується таким алгоритмом [5].

Перевіримо умову $|b - a| < 2\varepsilon$, де ε – задана похибка обчислення x_{max} . Якщо ця умова виконується, то переходимо до п. 6, якщо не виконується, то переходимо до п. 2.

Ділимо інтервал пошуку $[a; b]$ навпіл і обчислимо обидві абсциси, які симетрично розташовані відносно точки $x = (a + b)/2$: $x_1 = (a + b - \varepsilon)/2$ і $x_2 = (a + b + \varepsilon)/2$.

Для цих значень x обчислимо значення функції $f(x_1)$, $f(x_2)$.

Перевіримо умову $f(x_1) > f(x_2)$. Якщо вона виконується, вважатимемо $b = x_2$ і перейдемо до п. 1. Якщо не виконується, то переходимо до п. 5.

Вважатимемо $a = x_1$ і перейдемо до п. 1.

Виводимо на друк $x_{max} = (a + b)/2$ і обчислюємо $f(x_{max})$.

10.1.5 Метод золотого перерізу

Метод базується на діленні відрізка $[a; b]$ за правилом "золотого перерізу". Він дозволяє на кожному кроці обчислень, крім першого, обчислювати значення функції $f(x)$ тільки один раз, а не два, як в методі дихотомії.

Пояснимо ідею методу з геометричної точки зору. На першому кроці пропесу оптимізації всередині відрізка $[a_0; b_0]$ (рис. 10.3, а), де $a = a_0$, $b = b_0$, обираємо дві внутрішні точки x_1 і x_2 та обчислюємо значення функції $f(x_1)$, $f(x_2)$. Оскільки в даному випадку $f(x_1) < f(x_2)$, то відрізок $[x_2; b_0]$ можна відкинути, звужуючи тим самим початковий відрізок невизначеності.

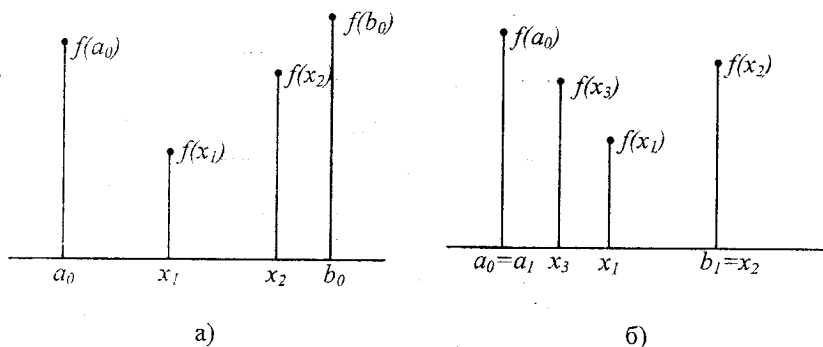


Рисунок 10.3 – Геометрична інтерпретація методу золотого перерізу

Другий крок виконуємо на відріжку $[a_1; b_1]$ (рис. 10.3, б), де $a_1 = a_0$, $b_1 = x_2$. Необхідно знову обрати дві внутрішні точки, але одна з них (x_1) залишилась з попереднього кроку, тому досить обрати лише одну точку x_3 , обчислити $f(x_3)$ і виконати порівняння. Оскільки на рис. 10.3, б $f(x_3) > f(x_1)$, то мінімум знаходиться на відріжку $[x_3; b_1]$. Позначимо цей відрізок як $[a_2; b_2]$ і виконаємо знову обчислення.

Процес оптимізації повторюється до тих пір, поки довжина чергового відрізка $[a_n, b_n]$ не стане менше заданої величини ϵ .

На рис. 10.4 подано блок-схему процесу одновимірної оптимізації за методом золотого перерізу. Здійснюється пошук мінімуму на відрізку $[a; b]$, де точки y, z – точки ділення відрізка $[a; b]$, ($y < z$).

Розглянемо спосіб розміщення внутрішніх точок на кожному відрізку $[a_k; b_k]$. Нехай довжина інтервалу невизначеності дорівнює l , а точка ділення ділить його на частини $l_1, l_2 : l_1 > l_2, l = l_1 + l_2$.

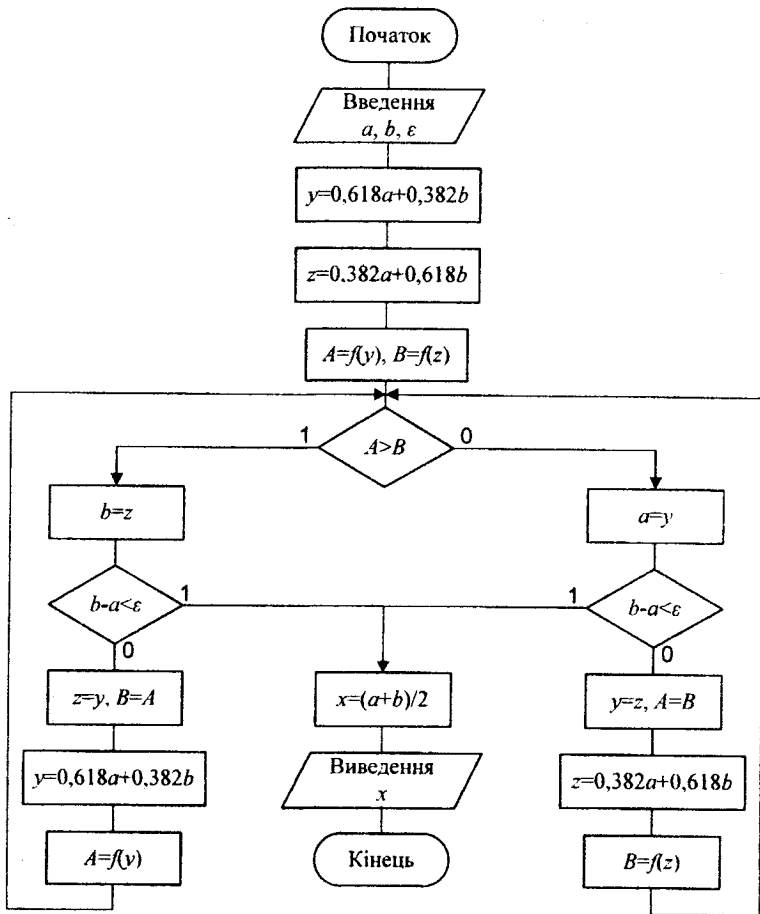


Рисунок 10.4 – Блок-схема алгоритму за методом золотого перерізу

Золотий переріз інтервалу невизначеності здійснюється так, щоб відношення довжини більшого відрізка до довжини всього інтервалу дорівнювало б відношенню меншого відрізка до довжини більшого відрізка [5]:

$$l_1/l = l_2/l_1 = (-1 + \sqrt{5})/2 \approx 0,618. \quad (10.2)$$

$$l_1 \approx 0,618 \cdot l; \quad l_2 = 0,382 \cdot l. \quad (10.3)$$

Тоді отримаємо координати точок ділення y і z відрізка $[a_k; b_k]$ на $(k+1)$ -му кроці оптимізації ($y < z$):

$$\begin{aligned} y &= 0,618 \cdot a_k + 0,382 \cdot b_k, \\ z &= 0,382 \cdot a_k + 0,618 \cdot b_k. \end{aligned} \quad (10.4)$$

10.2 Контрольні запитання

1. Дайте визначення термінів: оптимізація, функція мети, локальний та глобальний екстремум, унімодальна функція.
2. В чому різниця між одновимірною та багатовимірною функцією?
3. Назвіть відомі методи пошуку та їх суть.
4. Суть методів порозрядного пошуку: метод дихотомії, метод золотого перерізу.
5. Поясніть схему алгоритму за методом золотого перерізу.

10.3 Зміст завдання

1. Лабораторна робота призначена для ознайомлення із відомими методами оптимізації функцій, видами оптимізації, побудови алгоритмів та написання програми на мові програмування.
2. Індивідуальні завдання містять дані, з якими потрібно буде працювати (див. таблицю 10.1).
3. При виконанні роботи необхідно скласти алгоритми для методів, описаних в теоретичній частині, скласти програму, що реалізовує складені алгоритми. Роздрукувати: початкові дані, результуючі дані та тексти програм.

10.4 Порядок виконання роботи

1. Ознайомитись з відомими методами оптимізації функцій, використовуючи рекомендовану літературу.
2. Скласти блок-схеми алгоритмів одновимірної оптимізації функції методом, запропонованим викладачем.
3. Скласти програму одновимірної оптимізації функції (табл. 10.1) згідно з розробленими алгоритмами.

- Використовуючи дані відповідного варіанта, знайти оптимум заданої функції (початкові дані та результати обчислень роздрукувати).
- Оформити звіт.

10.5 Оформлення звіту

Звіт про виконання лабораторної роботи повинен бути поданий у вигляді роздрукованого документа, який повинен містити:

- Індивідуальний варіант завдання, блок-схеми, текст програми, а також результати роботи;
- Текстові коментарі до математичних обчислень, блок-схем, програм, виконані за вказаними правилами;
- Висновки.

Таблиця 10.1 – Індивідуальні варіанти завдань

№	Метод		a	b
Мінімізувати унімодальну функцію $f(x)$ на її області визначення				
1	Порозрядного наближення	$f(x) = x^2 + a \cdot e^{b \cdot x}$	1.0	-0.85
2		$f(x) = b \cdot x + e^{(1x-d)}$	0.2	-4.0
3		$f(x) = a \cdot x^3 - b \cdot x^2 + 10 \cdot x$	0.1	2
4		$f(x) = a \cdot x^3 - e^x + 1$	1	
5	Дихотомії	$f(x) = x^2 + a \cdot e^{b \cdot x}$	1.0	-0.85
6		$f(x) = b \cdot x + e^{(1x-d)}$	0.2	-4.0
7		$f(x) = a \cdot x^3 - b \cdot x^2 + 10 \cdot x$	0.1	2
8		$f(x) = a \cdot x^3 - e^x + 1$	1	
9	Золотого перерізу	$f(x) = x^2 + a \cdot e^{b \cdot x}$	3.0	-0.45
10		$f(x) = b \cdot x + e^{(1x-d)}$	0.6	-2.8
11		$f(x) = a \cdot x^3 - b \cdot x^2 + 10 \cdot x$	0.3	4
12		$f(x) = x^2 + a \cdot e^{b \cdot x}$	-1	1

Продовження таблиці 10.1

№	Метод		a	b
13	Порозрядного наближення	$f(x) = x^2 + a \cdot e^{b \cdot x}$	3.0	-0.45
14		$f(x) = b \cdot x + e^{(x-d)}$	0.6	-2.8
15		$f(x) = a \cdot x^3 - b \cdot x^2 + 10 \cdot x$	0.3	4
16		$f(x) = x^2 + a \cdot e^{b \cdot x}$	-1	1
17	Дихотомії	$f(x) = a \cdot x^3 - b \cdot x^2 + 10 \cdot x$	0.1	2
18		$f(x) = a \cdot x^3 - e^x + 1$	1	
19	Золотого пере- різу	$f(x) = x^2 + a \cdot e^{b \cdot x}$	1.0	-0.85
20		$f(x) = b \cdot x + e^{(x-d)}$	0.2	-4.0
21		$f(x) = a \cdot x^3 - b \cdot x^2 + 10 \cdot x$	0.1	2
22		$f(x) = a \cdot x^3 - e^x + 1$	1	
23	Порозрядного наближення	$f(x) = x^2 + a \cdot e^{b \cdot x}$	3.0	-0.45
24		$f(x) = b \cdot x + e^{(x-d)}$	0.6	-2.8
25		$f(x) = a \cdot x^3 - b \cdot x^2 + 10 \cdot x$	0.3	4
26		$f(x) = x^2 + a \cdot e^{b \cdot x}$	-1	1
27	Дихотомії	$f(x) = x^2 + a \cdot e^{b \cdot x}$	3.0	-0.45
28		$f(x) = b \cdot x + e^{(x-d)}$	0.6	-2.8
29		$f(x) = a \cdot x^3 - b \cdot x^2 + 10 \cdot x$	0.3	4
30		$f(x) = x^2 + a \cdot e^{b \cdot x}$	-1	1

Лабораторна робота № 11 БАГАТОВИМІРНА ОПТИМІЗАЦІЯ

Мета роботи: вивчення алгоритмів оптимізації функції однієї та декількох змінних.

11.1 Основні теоретичні відомості

11.1.1 Задачі та методи багатовимірної оптимізації

Під оптимізацією розуміють процес вибору найкращого варіанта з усіх можливих.

В процесі розв'язку задачі оптимізації необхідно знайти оптимальні значення параметрів (проектні параметри), які визначають дану задачу [7].

Вибір оптимального розв'язання проводиться за допомогою деякої залежної величини, що визначається проектними параметрами і називається функцією мети (або критерієм якості). В процесі розв'язання задач і оптимізації повинні бути знайдені такі значення проектних параметрів, при яких функція мети має мінімум (або максимум).

Функцію мети можна записати в вигляді

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (11.1)$$

У випадку одного проектного параметра функція мети (11.1) є функцією однієї змінної, її графік – деяка крива на площині. При $n=2$ цільова функція є функцією двох змінних, її графік – поверхня.

Виділяють два типи задач оптимізації – безумовні та умовні. *Безумовна задача оптимізації* полягає в пошуку максимуму або мінімуму дійсної функції (11.1) від n дійсних змінних і визначенні відповідних значень аргументів на деякій множині δ n -вимірного простору. Частіше розглядають задачі мінімізації; до них легко зводяться й задачі пошуку максимуму шляхом заміни знака цільової функції на протилежний.

Умовні задачі оптимізації або задачі з обмеженнями – це такі, при формулюванні яких задаються умови (обмеження) на множині δ . Ці обмеження задаються сукупністю функцій, які задовольняють систему рівнянь або систему нерівностей.

Методи багатовимірної оптимізації

В більшості реальних задач оптимізації функція мети залежить від багатьох параметрів.

Мінімум диференційованої функції багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ знаходять, досліджуючи її значення в критичних точках, які визначаються з розв'язку систем диференційних рівнянь [8, 9]

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \quad (11.2)$$

Коли не існує аналітичної форми запису функції, то використовують чисельні методи багатомірної оптимізації.

11.1.2 Метод покоординатного спуску

Нехай в області D відоме нульове наближення

$$x^0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}). \quad (11.3)$$

Розглянемо функцію $\Phi(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ при фіксованих значеннях $x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ як функцію змінної x_1 (рис. 11.1).

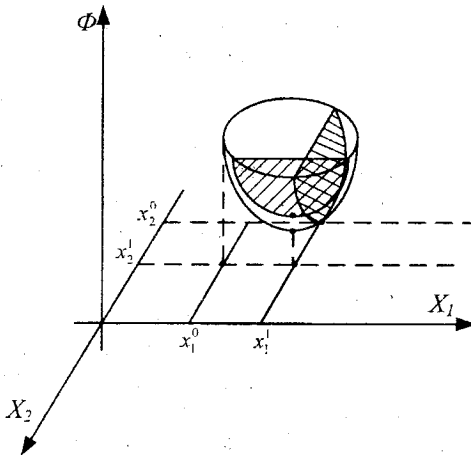


Рисунок 11.1 – Геометрична інтерпретація методу покоординатного спуску

Знаходимо $\min_{x \in D} \Phi(x_1, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ [5, 9]. Значення x_1 , що дає мінімум, позначимо як $x_1^{(1)}$:

$$\Phi(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \leq \Phi(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}). \quad (11.4)$$

Далі при фіксованих $x_1^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ розглянемо $\Phi(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ як функцію однієї змінної x_2 .

Знаходимо $\min_{x \in D} \Phi(x_1^{(1)}, x_2, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$.

Значення x_2 , що дає мінімум, позначимо як $x_2^{(1)}$:

$$\Phi(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \leq \Phi(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}). \quad (11.5)$$

Після виконання n кроків маємо

$$\Phi(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) \leq \Phi(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}). \quad (11.6)$$

В результаті одного кроку покоординатного спуску переходимо з початкової точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ в точку $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, якщо при цьому з'ясується, що

$$\Phi(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) = \Phi(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}),$$

то початковий елемент $x^{(0)}$ – точка, що дає екстремум $\Phi(x)$.

Якщо $\Phi(x^{(1)}) < \Phi(x^{(0)})$, то виконується наступний крок покоординатного спуску, в якому за початкову точку береться $x^{(1)}$, при цьому отримаємо $x^{(2)}$ і т. д. Процес продовжується до тих пір, поки не виконається умова закінчення алгоритму, наприклад, така:

$$|\Phi(x^{(k+1)}) - \Phi(x^{(k)})| < \varepsilon, \quad (11.7)$$

де ε – задана точність.

Центральною ланкою розглянутого алгоритму (рис. 11.2) є пошук мінімуму функції однієї змінної.

11.1.3 Метод градієнтного спуску

Градієнт функції $\Phi(x)$ визначається за формулою

$$\text{grad}(\Phi(x)) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(x) \right). \quad (11.8)$$

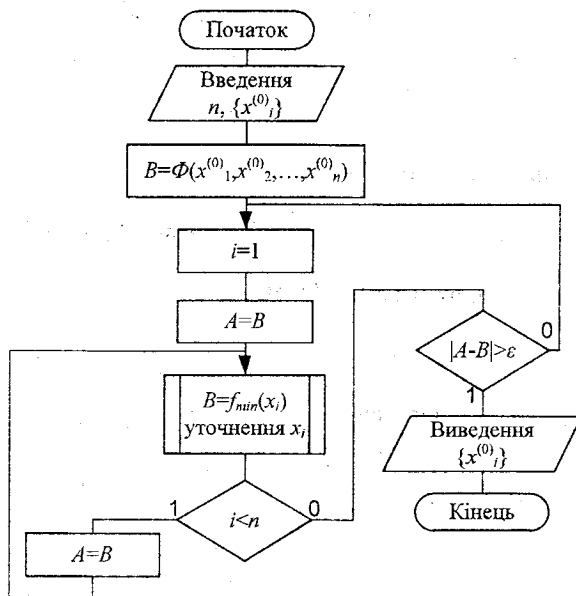


Рисунок 11.2 – Блок-схема методу покоординатного спуску

Напрямок найшвидшого збільшення функції n змінних характеризується її градієнтом. Вектор $grad(\Phi(x))$ ортогональний лініям рівня $\Phi(x) = const$, а його напрямок вказує напрямок найшвидшого “підйому” (зросту) по найкрутішій поверхні. Напрямок, протилежний вектору градієнта, тобто, $-grad(\Phi(x))$, вказує напрямок найшвидшого спуску по крутій поверхні. В точці мінімуму функції $grad(\Phi(x)) = 0$.

Методи, основані на виборі шляху оптимізації за допомогою градієнта, називаються градієнтними. Ідея методу така [5-9].

Обираємо початкову точку і обчислюємо в ній градієнт функції за формулою (11.8), якщо функція мети задана аналітично. В іншому випадку частинні похідні функції обчислюють наближеними методами.

Потім робимо крок в напрямку, протилежному градієнтному, організовуючи ітераційний процес обчислень за формулою:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h \cdot grad(\Phi(x^{(k)})), \quad (11.9)$$

де $h > 0$ – крок спуску, $x^{(0)}$ – початкове наближення в точці мінімуму. В результаті приходимо в точку, значення функції в якій, як правило, менше

початкового. Якщо $\text{grad}(\Phi(x^{(k)})) \neq 0$, то для досить малих значень h

$$\dots < \Phi(x^{(k)}) < \dots < \Phi(x^{(1)}) < \Phi(x^{(0)}). \quad (11.10)$$

Формула (11.10) описує метод градієнтного спуску з постійним кроком h . Ітераційний процес (11.9) продовжуємо до виконання умови закінчення алгоритму, наприклад, одного з нижченаведених:

$$\left| \Phi(x^{(k+1)}) - \Phi(x^{(k)}) \right| < \varepsilon \quad (11.11)$$

або

$$\left\| \text{grad}(\Phi(x^{(k+1)})) \right\| < \varepsilon. \quad (11.12)$$

Параметр ε означає задану точність.

Але в ряді випадків умова (11.10) при використанні процесу (11.9) не виконується, тобто значення функції на новому кроці не змінюється або навіть зростає. Тоді обирають новий крок.

Різні стратегії вибору кроку $h = h(k)$ визначають різні варіанти градієнтного спуску.

11.1.4 Метод найшвидшого градієнтного спуску

З (11.9) можна визначити значення $\Phi(x)$ в точці $x^{(k+1)}$:

$$\Phi(x^{(k+1)}) = \Phi(x^{(k)} - h \cdot \text{grad}(\Phi(x^{(k)}))). \quad (11.13)$$

Якщо $x^{(k)}$ визначено, то значення функції мети Φ в наступній точці $x^{(k+1)}$ є функцією тільки кроку спуску (рис. 11.3).

Будемо обирати $h = h^*$ з умови, щоб функція Φ за цей крок максимально зменшила своє значення [8, 9]:

$$\Phi(x^{(k+1)}) = \min_h \left(\Phi(x^{(k)} - h \cdot \text{grad}(\Phi(x^{(k)}))) \right). \quad (11.14)$$

Вибір кроку h^* вводиться до пошуку мінімуму функції однієї змінної.

Таким чином, основна перевага методу в тому, що порівняно з іншими тут відбувається спуск більш вагомими кроками і градієнт функції обчислюється в меншій кількості точок.

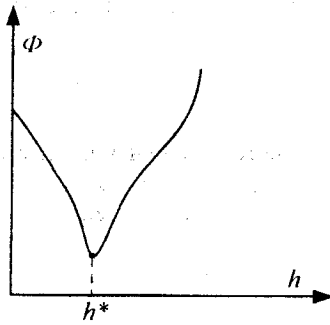


Рисунок 11.3 – Геометрична інтерпретація методу найшвидшого градієнтного спуску

11.2 Контрольні запитання

1. Дайте визначення термінів: оптимізація, функція мети, локальний та глобальний екстремум, унімодальна функція.
2. В чому різниця між одновимірною та багатовимірною функцією?
3. Назвіть відомі методи пошуку та їх суть.
4. Суть методів порозрядного пошуку метод дихотомії, метод золотого перерізу.
5. Поясніть схему алгоритму за методом золотого перерізу.
6. Порівняйте метод покоординатного спуску та метод градієнтного спуску.

11.3 Зміст завдання

1. Лабораторна робота призначена для ознайомлення із відомими методами оптимізації функцій, видами оптимізації, побудови алгоритмів та написання програми мовою програмування.
2. Індивідуальні завдання містять дані, з якими потрібно буде працювати (див. табл. 11.1).
3. При виконанні роботи необхідно скласти алгоритми для методів описаних в теоретичній частині, скласти програму, що реалізує складені алгоритми. Роздрукувати: початкові дані, результуючі дані та тексти програм.

11.4 Порядок виконання роботи

1. Ознайомитись з відомими методами оптимізації функцій, використовуючи рекомендовану літературу.

2. Скласти блок-схеми алгоритмів багатовимірної оптимізації функції методом, запропонованим викладачем.
3. Скласти програму багатовимірної оптимізації функції згідно з розробленими алгоритмами.
4. Використовуючи дані відповідного варіанта, знайти оптимум функції $F(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2 + \exp(Cx_1^2 + Dx_2^2)$ в квадраті $|x_1| \leq 2, |x_2| \leq 2$, використовуючи дані відповідного варіанта (табл. 11.1) та складену в п. 3 програму.
5. Оформити звіт.

11.5 Оформлення звіту

Звіт про виконання лабораторної роботи повинен бути поданий у вигляді роздрукованого документа, який повинен містити:

1. Індивідуальний варіант завдання, блок-схеми, текст програми, а також результати роботи;
2. Текстові коментарі до математичних обчислень, блок-схем, програм, виконані за вказаними правилами;
3. Висновки.

Таблиця 11.1 – Індивідуальні варіанти завдань

№	A	B	C	D	№	A	B	C	D
1	1,2	-1,4	0,01	0,11	16	11,2	-0,4	1,00	0,21
2	2,2	-1,3	0,04	0,12	17	12,2	-0,3	1,21	0,22
3	3,2	-1,2	0,02	0,13	18	13,2	-0,2	1,42	0,23
4	4,2	-1,1	0,16	0,14	19	4,2	-0,1	1,69	0,24
5	5,2	-1,0	0,25	0,15	20	15,2	0,0	1,06	0,25
6	6,2	-0,9	0,36	0,16	21	6,2	0,0	1,99	0,26
7	7,2	-0,8	0,49	0,17	22	17,2	0,1	2,56	0,27
8	8,2	-0,7	0,64	0,18	23	8,2	0,2	2,48	0,68
9	2,2	-1,3	0,04	0,12	24	12,2	-0,3	1,21	0,22
10	3,2	-1,2	0,04	0,13	25	13,2	-0,7	1,49	0,39
11	5,2	-1,2	0,16	0,14	26	16,2	-0,1	1,91	0,24
12	7,2	-1,0	0,25	0,15	27	15,2	0,0	1,96	0,35
13	9,2	-0,9	0,36	0,16	28	6,2	0,0	1,45	0,26
14	3,2	-0,6	0,48	0,17	29	17,2	0,1	2,56	0,97
15	9,2	-0,7	0,64	0,18	30	8,2	0,2	2,94	0,28

ЛІТЕРАТУРА

1. Ляшенко М. Я. Чисельні методи : підруч. для студ. виш. навч. закл. / Я. М. Ляшенко, М. С. Головань. – К. : Либідь, 1996. – 288 с.
2. Турчак Л. И. Основы численных методов : учеб. пособие / Турчак Л. И. – М. : Наука, 1987. – 320 с.
3. Бахвалов Н. С. Численные методы в задачах и упражнениях : учеб. пособие / Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. ; под ред. В. А. Садовниченко. – М. : Высш. шк., 2000. – 190 с.
4. Мотиґін В. В. Чисельні методи в інженерних дослідженнях. Ч.1: Теретичні відомості / В. В. Мотиґін, В. І. Роптанов, Ф. Ф. Дудатьєв. – Вннїця : ВНТУ, 2004. – 106 с.
5. Кветний Р.Н. Основы моделювання та обчислювальних методів : навч. посібник / Кветний Р. Н. – Вінниця : ВНТУ, 2007. – 150 с.
6. Дубовой В. М. Моделювання систем контролю та керування : навч. посібник / Дубовой В. М. – Вінниця : ВНТУ, 2005. – 176 с.
7. Амосов А. А. Вычислительные методы для инженеров : учеб. пособие / Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченлова Н. В. – М. : Высш. шк., 1994. – 544 с.
8. Линьков В. М. Высшая математика в примерах и задачах. Компьютерный практикум : учеб. пособие / В. М. Линьков, Н. Н. Яремко ; под ред. А. А. Емельянова. – М. : Финансы и статистика, 2006. – 320 с.
9. Мирошниченко Г. П. Численные методы : учеб. пособие / Г. П. Мирошниченко, А. Г. Петрашень. – СПб. : СПбГУ ИТМО, 2007. – 120 с.
10. Рашиков В. И. Численные методы решения физических задач : учеб. пособие / В. И. Рашиков, А. С. Рошаль. – СПб. : Лань, 2005. – 208 с.
11. Вержбицкий В. М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения) : учеб. пособие / Вержбицкий В. М. – М. : Высш. шк., 2000. – 266 с.
12. Бабенко К. И. Основы численного анализа / Бабенко К. И. – Москва – Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002. – 848 с.
13. Исаков В. Б. Элементы численных методов : учеб. пособие / Исаков В. Б. – М. : Академия, 2003. – 192 с.
14. Петров И. Б. Лекции по вычислительной математике : учеб. пособие / И. Б. Петров, А. И. Лобанов. – М. : БИНОМ, 2006. – 523 с.
15. Численные методы, параллельные вычисления и информационные технологии: Сборник научных трудов / Под ред. В. В. Воеводина и Е. Е. Тыртышниковой. – М. : МГУ, 2008. – 320 с.
16. Воеводин В. В. Вычислительная математика и структура алгоритмов / Воеводин В. В. – М. : МГУ, 2006. – 112 с.

17. Абдель Малик Джихан. Разработка алгоритмического и программного обеспечения библиотеки программ для решения итерационными методами некоторых классов систем линейных алгебраических уравнений большой размерности : автореф. дис. на соискание науч. степени канд. техн. наук : спец. 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» / Малик Джихан Абдель. – М., 2008. – 18 с.
18. Заболотна Н. І. Паралельний матричний спецобчислювач для системи томографії / Н. І. Заболотна, В. В. Шолота, І. В. Мусійчук, Я. М. Бондарчук // Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології. – Вінниця, 2009. – № 1 (17). – С. 13 – 21.
19. Заболотна Н. І. Архітектурні особливості та перспективи застосування розрядно-зрізових лінійно-алгебраїчних процесорів з плаваючою комою / Н. І. Заболотна, І. В. Мусійчук // Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології. – Вінниця, 2011. – № 1 (21). – С. 55 - 60.
20. Musiichuk Iryna. Parallel Interpretation of Relaxation Method for Algebraic Image Reconstruction in Optical Tomographs / Iryna Musiichuk, Anton Tishchenko, Yaroslav Bondarchuk, Natalia Kostyuk // Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science TSCET 2010, Lviv –Slavske, Ukraine. – Lviv, 2010. – P. 130.
21. Musiichuk Iryna. Optical-Electronic Matrix Computing System for Parallel Solving Systems of Linear Algebraic Equations / Iryna Musiichuk, Natalia Zabolotna // Book of abstracts IONS-9, Salamanca, April 7-9 2011. – Salamanca, Spain. – 2011. – P. 92.
22. Патент України № 53678, МПК8 А01В 8/13. Оптичний двохвилевий томограф / Н. І. Заболотна, С. Є. Тужанський, І. В. Мусійчук, В. В. Шолота, Б. П. Олійниченко; заявник та патентовласник ВНТУ. – № u201005394; заявл. 05.05.10; опубл. 11.10.10, Бюл. № 19.
23. Терещенко С. А. Методы вычислительной томографии / Терещенко С. А. – М. : Физматлит, 2004. – 320 с.
24. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432 с.
25. Шахно Е. А. Аналитические методы расчета лазерных микро- и нанотехнологий : учеб. пособие / Шахно Е. А. – СПб. : СПбГУ ИТМО, 2009. – 77 с.

**Заболотна Наталія Іванівна
Шолота Владіслав Васильович
Мусійчук Ірина Вікторівна**

ТЕОРІЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ЧИСЛОВІ МЕТОДИ В ЛАЗЕРНІЙ ТЕХНІЦІ ТА ФОТОНІЦІ

Лабораторний практикум

Редактор Т. Старічек

Оригінал-макет підготовлено Н. Заболотною

Підписано до друку 07.11.2014 р.

Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.

Гарнітура Times New Roman.

Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 6,5.

Наклад 75 пр. Зам. № 2014-092.

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,

ВНТУ, к. 2201.

Тел. (0432) 59-87-36.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Тел. (0432) 59-87-38.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.