

658.5

К 89

И. В. КУЗЬМИН, А. А. ЯВНА, В. Н. КЛЮЧКО

**ЭЛЕМЕНТЫ  
ВЕРОЯТНОСТНЫХ  
МОДЕЛЕЙ  
АСУ**

585  
K 81  
→

И. В. КУЗЬМИН, А. А. ЯВНА, В. И. КЛЮЧКО

# ЭЛЕМЕНТЫ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ АСУ

Под редакцией И. В. Кузьмина

ЭД 2561

ЧИТ. ЗАЛ

82 94

87 08

Наукова бібліотека  
Вінницького  
політехнічного інституту

89

16



МОСКВА «СОВЕТСКОЕ РАДИО» 1975

2/3

6Ф7.3

К 89

УДК 658.011.56:37.014.544

**Кузьмин И. В., Явна А. А., Ключко В. И.** Элементы вероятностных моделей автоматизированных систем управления. Под ред. И. В. Кузьмина. М., «Сов. радио», 1975, 336 с.

В книге приводится описание вероятностных моделей оценки эффективности работы АСУ и «включающих» операторов, моделей оценки вероятности выполнения задачи оператором и группой операторов при различных схемах включения с учетом ошибок и временных затрат. Рассматриваются также элементы вероятностных моделей АСУ обучением операторов. Показана возможность применения в процессе обучения тренажера и программированного класса.

Книга может быть полезна для инженеров при проектировании, а также при изучении и разработке теории оптимальных АСУ и для студентов вузов.

Рис. 82, табл. 70, библи. 205 назв.

**Редакция кибернетической литературы**

К  $\frac{30501-069}{046(01)-75}$  67-75

© Издательство «Советское радио», 1975 г.

## Предисловие

Решениями XXIV съезда КПСС и планом на IX пятилетку предусмотрено создание и внедрение в народное хозяйство СССР более 2000 автоматизированных систем управления (АСУ), основными особенностями которых являются:

— большая сложность, обусловливаемая включением в контур управления людей, ЭВМ, телемеханических систем и др.;

— наличие множества замкнутых контуров, прямых, обратных и перекрестных положительных и отрицательных связей;

— стохастическая природа систем;

— эргатический характер;

— многомерность;

— многокритериальность при анализе и синтезе;

— применение для анализа и синтеза систем множества статистических и детерминистских теорий.

Готовность к применению больших АСУ в значительной степени определяется готовностью автоматов или аппаратуры, а также специальной подготовкой операторов. В связи с этим могут быть определены три основные проблемы [55, 56, 72—79, 91—93];

— разработка аппаратуры с учетом требований инженерной психологии;

— оценка эффективности работы операторов;

— профессионально-технический отбор и обучение операторов.

Первый раздел книги посвящен изложению моделей некоторых принципов оценки эффективности АСУ с учетом работы операторов, оценке вероятности выполнения задачи операторами с учетом ошибок и временных затрат, а также синтезу схем включения операторов для достижения заданных показателей их работы.

В гл. I на основе информационного подхода [56, 91] изложены методы оценки эффективности работы АСУ и операторов по обобщенным функционально-статистическим критериям с учетом вероятности выполнения задачи и затрат. Определяются частные критерии, являющиеся аргументами обобщенных.

В гл. 2 приводится описание способов оценки и обеспечения вероятности выполнения операций управления в АСУ при группировании операторов.

В главах 3, 4 и 5 изложены методы выбора параметров схем группирования операторов без учета и с учетом времени отработки операций, а также при наличии органов отбоя.

В гл. 6 излагаются основы анализа функционирования большой системы с учетом характеристик работы операторов.

Главы 7 и 8 посвящены анализу эффективности линий управления с учетом характеристик работы обслуживающего персонала и оптимальности сопряжения операторов с машиной.

По первому разделу опубликовано сравнительно немного работ [48, 49, 52—55, 128].

Второй раздел книги посвящен элементам математических моделей разработки и внедрения АСУ обучением. Приводится описание методов:

- инженерно-психологического обоснования принципов обучения операторов;
- анализа алгоритмических основ технического обучения;
- исследования процессов формирования технических знаний, умений, навыков;
- разработки моделей и критериев оценки эффективности систем обучения и обученности операторов;
- инженерно-психологического программированного обучения;
- разработки и использования тренажеров и других технических средств обучения (ТСО);

Проблемы инженерно-технического воспитания, принципы построения курсов по инженерной психологии, подготовка специалистов по инженерной психологии, проблемы оценки психофизических характеристик операторов в книге не отражены.

В настоящее время имеется большое число работ, посвященных исследованию процессов обучения и построению моделей обучения.

В работах [123, 124] рассматриваются детерминистские модели процессов обучения и сохранения заученного в памяти человека. Эти модели являются результатом экспериментальных исследований, описывают конкретные процессы обучения и не обладают общностью.

Классическими могут быть признаны стохастические модели обучения, изложенные в монографии [11], которые используются и получили свое дальнейшее развитие в работах [40, 41, 57]. Стохастические модели обучения отличаются простотой, математической строгостью и большой общностью. Они позволяют исследовать многие практические задачи обучения. В числе наиболее известных следует отметить работы [35, 36], посвященные применению кибернетических методов в обучении, использованию статистических методов в педагогике, а также работы [66, 67, 68], в которых рассматриваются принципиальные возможности и целесообразность алгоритмического подхода к анализу процессов обучения.

Описание конкретных моделей содержится в работах [22, 96, 112]. В статье [22] процесс обучения описан сложной неоднородной марковской цепью с поглощающим состоянием. Такая модель позволяет производить количественную оценку различных программ, а также определять некоторые оптимальные характеристики технических средств обучения в зависимости от параметров учебного процесса.

Моделированию отдельных сторон процесса обучения посвящены работы [71, 104, 120].

Работы [85, 86] посвящены моделированию структуры знаний, формируемых в процессе обучения, и структуры информации, характеризующей знания обучаемого, а также обоснованию и синтезу ТСО.

Большинство из рассмотренных моделей являются вероятностными и описывают процесс распределения потоков учебной информации. В различных работах с разной степенью детализации с помощью теории вероятностей и математической статистики исследуются закономерности такого распределения.

Значительный интерес представляет работа [26], в которой процесс обучения представляется как процесс переработки и усвоения информации, для описания которого используется математический аппарат теории информации. Разработав информационную модель обучения, автор решает задачу по оптимизации процесса обучения, считая оптимальным такой процесс, при котором учащийся получает максимальное количество информации в единицу времени.

В большинстве упомянутых работ обучение рассматривается как одна из возможностей повышения готов-

ности выполнить задачу. Особо следует отметить работы [39, 41], где теоретическая часть подтверждается экспериментальным материалом. Однако оптимизация, как правило, осуществляется на этапе эксплуатации, т. е. считается, что аппаратура спроектирована и принята к эксплуатации.

С другой стороны, в известных работах по синтезу автоматизированных систем контроля и управления [56, 70, 109] не учитывается фактор обучения обслуживающего персонала. В связи с этим можно указать на необходимость оценки эффективности выполнения задачи АСУ в зависимости от степени обученности обслуживающего персонала с учетом этапов проектирования и эксплуатации аппаратуры.

Использование технических средств обучения позволяет повысить эффективность процесса обучения. В соответствии с работой [114] ТСО могут быть классифицированы следующим образом:

- информационные;
- контролирующие;
- информационно-контролирующие (обучающие).

Информационно-контролирующие устройства, в свою очередь, могут быть подразделены на:

- универсальные;
- специализированные (тренажеры), предназначенные для выработки определенных профессиональных навыков.

Обоснование технического ресурса, методов имитации и эффективности использования тренажеров производится в работе [127]. Повышение эффективности достигается использованием «принципа независимых цепей» при построении единых комплексных тренажеров. В работе [83] тренажеры относятся к общему классу информационно-логических автоматов, что дает возможность использовать при их проектировании достаточно хорошо разработанный аппарат теории цифровых автоматов.

В настоящее время отсутствует строгое количественное обоснование точности построения тренажеров [7, 9]. При этом, как показывает опыт, в тактико-технических требованиях на проектирование тренажеров преобладают требования описательного характера, что делает задачу синтеза тренажеров неопределенной и не дает возможности разработчикам проверить степень выполнения тактико-технических требований.

В связи с этим можно сформулировать весьма актуальные задачи, подлежащие изучению:

- обоснование точности построения тренажеров;
- исследование некоторых методов повышения эффективности обучения операторов;
- использование тренажеров при профессионально-техническом отборе;
- разработка критериев оценки эффективности тренажеров.

Изложение материала в книге ведется в соответствии с указанными задачами.

В гл. 9 изложены методы оценки степени обученности обслуживающего персонала и получения априорных оценок с использованием статистического материала предыстории обучения.

Описывается математическая модель, учитывающая стоимость обучения и позволяющая обучение рассматривать как составную часть единого процесса проектирования и изготовления аппаратуры, ее эксплуатации и технической подготовки личного состава. Изложен метод оптимизации распределения средств и обеспечения требуемого значения вероятности выполнения задачи.

В главе 10 тренажеры рассматриваются как информационные модели реальной аппаратуры, точность построения которых определяется психофизическими характеристиками человека. На основе статистической теории распознавания образов определяется точность работы тренажера. Для количественной характеристики точности вводится понятие надежности идентификации, функционально связанное с допусками на моделирование параметров и характеристик тренажера.

Глава 11 посвящена описанию элементов синтеза тренажеров. На базе нескольких вариантов разрабатывается инженерная методика синтеза тренажера с заданной надежностью идентификации при минимальной стоимости. Предлагаемые критерии позволяют не только оценивать спроектированные тренажеры, но и осуществлять элементы синтеза, определяя настройку датчика случайных событий и необходимое число циклов обучения и контроля для конкретных условий обучения.

Рассматриваются возможности использования тренажеров для профессионально-технического отбора операторов и математическая модель методики эксперимента и обработки экспериментальных данных при отборе.



В главе 12 описывается методика экспериментальных исследований по проверке гипотезы о статистическом механизме восприятия образов человеком, приводится описание устройства для обучения операторов АСУ со случайным вводом неисправностей и созданием аварийных ситуаций. Оценивается эффективность разработанной аппаратуры и методики по профессионально-техническому отбору специалистов требуемого профиля.

В главе 13 излагаются принципы построения класса программированного обучения операторов. В основу положен способ конструктивного ввода ответа. Описана структурная схема класса и алгоритм ее работы.

Под оператором в книге понимается человек, выполняющий элементарные операции типа нажатия кнопки или включения тумблера. Вероятности выполнения элементарных операций считаются известными.

В книге не приводятся сведения о величине психофизических характеристик операторов, их законы изменения, а также методы их получения, учет которых необходим при построении АСУ.

Эта задача успешно решается в широко известных фундаментальных научных трудах член-корреспондента АПН СССР Б. Ф. Ломова [72, 79], профессоров В. И. Николаева [91—93], В. П. Зинченко [29, 33], В. Ф. Рубахина [95, 106], а также в работах [2, 8, 12, 18, 19, 46, 50, 85, 86, 87, 90, 100].

Авторы книги выражают сердечную благодарность рецензентам профессору В. И. Николаеву и лауреату Ленинской премии, кандидату технических наук Р. П. Косенко, а также профессору В. Ф. Рубахину за внимательный просмотр рукописи, критические замечания и советы, которые помогли улучшить книгу. В написании гл. 5, 6 и 7 принимали участие канд. техн. наук Ю. А. Захаров и В. Н. Червяцов, которым авторы также выражают сердечную благодарность.

# ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИК АСУ С УЧЕТОМ РАБОТЫ ОПЕРАТОРОВ

---

### Глава 1

## ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ОПЕРАТОРОВ В АСУ

Сложные системы управления можно подразделить на автоматические и автоматизированные. В последних определенную роль в управлении играет оператор или группа операторов. Для автоматизированных систем, кроме пороговых характеристик материальных явлений, вызывающих ощущения [55, 56], практически необходима также оценка количества информации, которое может быть передано оператору или оператором посредством того или иного сигнала в определенные временные интервалы, вероятности выполнения задачи, ошибок и затрат при выполнении оператором задачи. В связи с этим оператора или его анализаторы можно рассматривать как канал связи. Правомерность такого подхода не вызывает сомнения, так как одним из компонентов деятельности первой системы является аппарат статистической обработки поступающих сигналов, «решающий» механизм [72, 91].

В главе описывается способ оценки эффективности работы системы с учетом оператора на основе математических моделей потенциальных и реальных возможностей. В основу построения модели положены вероятность выполнения задачи оператором, количество информации, получаемой оператором с учетом затрат [56].

При разработке сложных систем возможно осуществить математическое моделирование на непрерывных и дискретных ВМ идеальных и реальных процессов управления, осуществляемых оператором. Введение идеальных (потенциальных) моделей обусловлено необходимостью оценки эффективности и оптимизации реальных возможностей оператора относительно потенциальных.

## 1.1. Функциональная модель системы автомат — оператор

На рис. 1.1.1 приведена обобщенная функциональная модель оператора и автомата управления сложным объектом, на который воздействует некоторый вектор внешних и внутренних возмущений  $Z(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$ , носящих случайный характер. Эти возмущения обуславливают случайность вектора параметров объекта  $X(x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

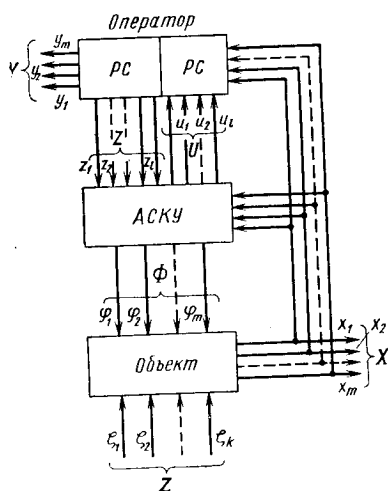


Рис. 1.1.1.

Вектор выходных параметров объекта может определять пространственное и временное положение объекта, а также нести информацию о его состоянии при воздействии на него вектора управляющих сигналов  $\Phi(\varphi_2, \dots, \varphi_m)$ , вырабатываемых автоматической системой контроля и управления (АСКУ). В определенных условиях на систему контроля и управ-

ления оператором может подаваться вектор сигналов  $Z(z_1, z_2, \dots, z_i)$ .

Анализаторы оператора измерительной системы (ИС) оценивают векторы  $X$  и  $U(u_1, u_2, \dots, u_i)$ , характеризующие состояние объекта и АСКУ. Решающая система (РС) оператора совместно с автоматом принимает решение о состоянии и положении объекта и АСКУ в пространстве и времени и формирует вектор  $Y(y_1, y_2, \dots, y_m)$ .

Векторы  $Z, X, Z, \Phi, U, Y$  имеют случайный характер, обусловленный конечной точностью и отказами работы оператора и аппаратуры.

На схеме показаны основные связи между оператором и элементами процесса управления, позволяющие построить обобщенные математические модели.

В дальнейшем основное внимание при изложении будет уделено вероятностным моделям оператора в АСКУ или группы операторов, а также моделям затрат.

## 1.2. Потенциальная модель оператора

Построение потенциальной модели идеального оператора удобнее начать с рассмотрения работы решающей системы. Рассмотрим одномерные решения, которые не составляет труда обобщить на многомерные.

Предположим, что измерительная система одного из анализаторов оператора измеряет параметр  $x_i$  и передает результат измерения на решающую систему для перевода  $x_i$  в некоторый результат решения  $y_i$  \*). В этом случае условная вероятность того, что параметр находится, например, в норме или объект не отказал (индекс 1), может быть определена по формуле

$$p_{1n}(x_{1i}/y_i) = \frac{p_{1n}(y_i/x_{1i}) p_{1n}(x_{1i})}{p_{1n}(y_i)}, \quad (1.2.1)$$

где  $p_{1n}(y_i/x_{1i})$  — условная вероятность принятия решения  $y_i$  при нахождении на входе события  $x_{1i}$ ;  $p_{1n}(x_{1i})$  — вероятность появления  $x_{1i}$ ;  $p_{1n}(y_i)$  — вероятность появления  $y_i$ .

Или с учетом закона распределения  $f_n(y_i/x_{1i})$

$$p_{1n}(x_{1i}/y_i) = \frac{f_n(y_i/x_{1i}) p_{1n}(x_{1i})}{p_{1n}(y_i)}, \quad (1.2.2)$$

Условная вероятность того, что параметр отклонился от нормы или объект отказал (индекс 0)

$$p_{0n}(x_{0i}/y_i) = \frac{p_{0n}(y_i/x_{0i}) p_{0n}(x_{0i})}{p_{0n}(y_i)}, \quad (1.2.3)$$

где  $p_{0n}(y_i/x_{0i})$  — условная вероятность принятия решения  $y_i$  при нахождении на входе  $x_{0i}$ ;  $p_{0n}(x_{0i})$  — вероятность появления события  $x_{0i}$ .

С учетом закона распределения  $f_n(y_i/x_{0i})$

$$p_{0n}(x_{0i}/y_i) = \frac{f_n(y_i/x_{0i}) p_{0n}(x_{0i})}{p_{0n}(y_i)}. \quad (1.2.4)$$

Решающая система принимает решения по определенному алгоритму, в основу которого можно положить

---

\*)  $y_i$  может включать в себя действия оператора по выполнению принятого решения.

функцию и отношение правдоподобия соответственно

$$\frac{p_{i\Pi}(x_{1i}/y_i)}{p_{i\Pi}(x_{0i}/y_i)} = \frac{f_{\Pi}(y_i/x_{1i}) p_{i\Pi}(x_{1i})}{f_{\Pi}(y_i/x_{0i}) p_{i\Pi}(x_{0i})}, \quad (1.2.5)$$

$$\Lambda_{\Pi} = f_{\Pi}(y_i/x_{1i})/f_{\Pi}(y_i/x_{0i}). \quad (1.2.6)$$

При  $p_{i\Pi}(x_{1i}/y_i) > p_{i\Pi}(x_{0i}/y_i)$  принимается решение 1, (1.2.7)

при  $p_{i\Pi}(x_{1i}/y_i) < p_{i\Pi}(x_{0i}/y_i)$  — решение 0

или при  $p_{i\Pi}(x_{1i}/y_i)/p_{i\Pi}(x_{0i}/y_i) > 1$  принимается решение 1,

при  $p_{i\Pi}(x_{1i}/y_i)/p_{i\Pi}(x_{0i}/y_i) < 1$  — решение 0.

С учетом (1.2.5) и (1.2.6) можно записать:

при  $\Lambda_{\Pi i} > \frac{p_{i\Pi}(x_{0i})}{p_{i\Pi}(x_{1i})} = \Lambda_{0i} = \frac{q_{\Pi i}}{p_{\Pi i}}$  принимается решение 1,

где  $q = 1 - p$ , (1.2.8)

при  $\Lambda_{\Pi i} < \Lambda_{0i}$  — решение 0.

Для потенциальной системы при двухальтернативных решениях

$$p_{i\Pi}(x_{0i}) = p_{i\Pi}(x_{1i}) = 1/2; \quad (1.2.9)$$

при многоальтернативных решениях

$$p_{i\Pi} = p_{2\Pi} = \dots = p_{m\Pi} = 1/m \quad (1.2.10)$$

решающая система представляет собой идеальный наблюдатель.

Если решение принимается относительно непрерывного параметра, то считается, что параметр распределен по нормальному закону.

Решающая система потенциальной системы при отнесении  $y$  к области  $V$  делает ошибки первого и второго рода. За ошибку первого рода, например, при контроле, принимается вероятность ложного отказа или события, когда параметр находится в пределе допуска, а анализатор принимает решение, что он вышел за допустимые пределы

$$p_{\text{лп}i} = p_{\Pi i}(y_i \supset V_0/x_{1i}). \quad (1.2.11)$$

За ошибку второго рода принимается вероятность необнаруженного отказа или события, когда параметр находится за допуском, а анализатор принимает решение, что параметр в допустимых пределах

$$p_{\text{нп}i} = p_{\Pi i}(y_i \supset V_1/x_{0i}). \quad (1.2.12)$$

Так как потенциальная система принимает решения по критерию идеального наблюдателя, то она минимизирует суммарную ошибку

$$p_{лпi} + p_{ппi} = \min. \quad (1.2.13)$$

В результате потенциальная система оператора переводит объект из неопределенного состояния, характеризованного вероятностью  $p_{in}(x_{1i}/y_i) = 0,5$  в более определенное, характеризованное вероятностью

$$p'_{in} = \frac{p_{in} \bar{p}_{лпi}}{p_{in} \bar{p}_{лпi} + p_{ппi} \bar{p}_{ппi}}, \quad (1.2.14)$$

получая при этом определенное количество информации \*)

$$I_{i,max} = H_{iоп} - H_{in}, \quad (1.2.15)$$

где

$$H_{iоп} = -p_{лпi} \log_2 p_{лпi} - \bar{p}_{лпi} \log_2 \bar{p}_{лпi}, \quad (1.2.16)$$

$$H_{in} = -p'_{in} \log_2 p'_{in} - \bar{p}'_{in} \log_2 \bar{p}'_{in} \quad (1.2.17)$$

— соответственно энтропия состояния объекта до и после решения.

Общее количество информации, получаемое потенциальной системой, состоящей из  $m$  анализаторов,

$$I_{max} = \sum_i^m I_{i,max}. \quad (1.2.18)$$

Потенциальная система отличается простотой, так как в ней работает один оператор, не предусмотрено комплексирования операторов для получения нужного быстрого действия, надежности работы и т. п. Следовательно, при выполнении указанных условий потенциальная система будет иметь минимальные затраты [56]

$$C_{min} = \sum_{i=1}^m c_{i,min}, \quad (1.2.19)$$

где  $c_{i,min}$  — математическое ожидание затрат, отнесенных к одному анализатору.

\*) Из практических соображений предполагается, что  $p_{in} > 0,5$ , тогда для информирующей системы  $I_{max} \geq 0$ .

Эффективность потенциальной системы оценивается коэффициентом

$$K_n = I_{\max} / C_{\min}, \quad (1.2.20)$$

представляющим отношение степени повышения достоверности состояния объекта в логарифмическом масштабе к затратам.

### 1.3. Реальная модель оператора

Математическая модель реального оператора строится аналогично потенциальной математической модели, при этом принимаются реальные законы распределения вероятностей и различные алгоритмы принятия решений, обусловленные выбранным критерием.

Условная вероятность того, что параметр находится в норме:

$$p_i(x_{1i}/y_i) = \frac{p(y_i/x_{1i}) p_i(x_{1i})}{p_i(y_i)}. \quad (1.3.1)$$

Или с учетом закона распределения вероятности  $f(y_i/x_{1i})$ :

$$p_i(x_{1i}/y_i) = \frac{f(y_i/x_{1i}) p_i(x_{1i})}{p_i(y_i)}. \quad (1.3.2)$$

Условная вероятность того, что параметр отклонился от нормы или устройство отказало:

$$p_i(x_{0i}/y_i) = \frac{p_i(y_i/x_{0i}) p_i(x_{0i})}{p_i(y_i)}. \quad (1.3.3)$$

Или с учетом закона распределения вероятностей:

$$p_i(x_{0i}/y_i) = \frac{f(y_i/x_{0i}) p_i(x_{0i})}{p_i(y_i)}. \quad (1.3.4)$$

Функция и отношение правдоподобия могут быть определены соответственно по формуле

$$\frac{p_i(x_{1i}/y_i)}{p_i(x_{0i}/y_i)} = \frac{f(y_i/x_{1i}) p_i(x_{1i})}{f(y_i/x_{0i}) p_i(x_{0i})}, \quad (1.3.5)$$

$$\Lambda = f(y_i/x_{1i}) / f(y_i/x_{0i}). \quad (1.3.6)$$

Если решение принимается по критерию правдоподобия, то при  $\Lambda > p_i(x_{0i})/p_i(x_{1i})$  принимается 1; при  $\Lambda < \Lambda_0$  принимается 0.

Решающая система может быть построена с учетом различных критериев: для критерия идеального наблюдателя  $\Lambda_0=1$ ; для критерия минимального риска  $\Lambda_0=L_1q/L_2p$ , где  $L_1$  и  $L_2$  — весовые коэффициенты; для критерия Неймана — Пирсона  $L_1=L_2$ .

Ошибками первого и второго рода являются соответственно

$$\begin{aligned} p_{li} &= p_i(y \supset V_0/x_{1i}), \\ p_{ni} &= p(y \supset V_1/x_{0i}), \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

которые рассчитываются с учетом всех ошибок оператора.

После принятия решения вероятность выполнения объектом задачи по  $i$ -му параметру

$$p'_i = p_i \bar{p}_{li} (p_i \bar{p}_{li} + \bar{p}_i p_{ni}). \quad (1.3.8)$$

Количество информации, полученное в результате решения по  $i$ -му параметру,

$$I_{i \max} = H_i - H'_i, \quad (1.3.9)$$

где

$$H_i = -p_i \log_2 p_i - \bar{p}_i \log_2 \bar{p}_i; \quad (1.3.10)$$

$$H'_i = -p'_i \log_2 p'_i - \bar{p}'_i \log_2 \bar{p}'_i. \quad (1.3.11)$$

Общее количество информации

$$I_{\max} = \sum_i^m I_{i \max}. \quad (1.3.12)$$

Общие затраты с учетом затрат на получение необходимой надежности, быстродействия оператора и т. п.

$$C = \sum_i^m c_i, \quad (1.3.13)$$

где

$$c_i = c_{i \min} + \Delta c_{iT} + \Delta c_{iP} + \dots; \quad (1.3.14)$$

$\Delta c_{iT}$  — дополнительные затраты на получение необходимого быстродействия;  $\Delta c_{iP}$  — дополнительные затраты на получение необходимой надежности.

Эффективность работы «реального» оператора

$$K = I_{\max}/C. \quad (1.3.15)$$



Эффективность оператора с учетом потенциальной и реальной моделей

$$\mathcal{E} = \frac{K_I}{K_{I_0}} = \frac{I_{max}}{I_{max}^{max}} \frac{C_{min}}{C}. \quad (1.3.16)$$

Достоинством обобщенного статистического критерия, полученного на основе потенциальной и реальной математических моделей оператора, является полнота, наглядность, сравнительная простота и общность, позволяющая одним числом характеризовать оператора как в целом, так и по частям, включающим отдельные анализаторы в совокупности со сложными и простыми устройствами, а также различные комбинации анализаторов оператора.

Диапазон изменения критерия для практических систем

$$0 \leq \mathcal{E} \leq 1.$$

Для несовершенных операторов  $\mathcal{E}$  близко к нулю, для совершенных — к единице.

Таким образом, для оценки эффективности работы операторов в АСУ по критерию (1.3.16) необходимо знать вероятность принятия решения, вероятности ошибок операторов, частные и обобщенные затраты. Изложению методов оценки и улучшения этих частных показателей посвящены последующие главы первого раздела.

## Глава 2

### ВЕРОЯТНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ ОПЕРАЦИЙ ПО УПРАВЛЕНИЮ ПРИ ГРУППИРОВАНИИ ОПЕРАТОРОВ

#### 2.1. Математическая модель процесса

В большой системе к произвольным операциям управления\*) относятся включение, переключение на требуемый режим, останов, выключение, отбой и т. д. Каждая из таких операций является результатом воздействия оператора на соответствующие органы управления:

\*) В дальнейшем вместо «операция управления» будем писать «управление».

кнопки, ключи и переключатели или целые системы управления. Указанием для проведения операции является сигнал, подаваемый с помощью приборов или по линиям связи. Предположим, что оператором, старшим по иерархической сети, подается сигнал на управление  $S$ .

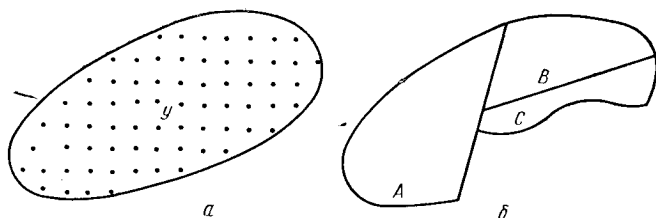


Рис. 2.1.1.

Функция  $S$  является двоичной, т. е.  $S=1$ , если сигнал на проведение операции подан,  $S=0$  — в противном случае.

Множество возможных управлений большой системы (рис. 2.1.1,а) разделим на подмножества (рис. 2.1.1,б):

$A$  — управления, проведенные по сигналу старшего оператора при  $S=1$ ;

$B$  — управления, проведенные при  $S=0$  из-за недостаточной квалификации обслуживающего персонала (сюда можно отнести ошибочные действия, вызванные невнимательностью, усталостью, неумением и т. д., часто усугубляемые недостатками конструирования аппаратуры управления) или по другим причинам;

$C$  — управления, происшедшие при  $S=0$  в результате случайно возникших в аппаратуре неисправностей.

Управления подмножества  $A$  назовем требуемыми управлениями (ТУ), управления подмножества  $B$  — ложными управлениями (ЛУ), управления подмножества  $C$  — ложными аппаратурными управлениями (ЛАУ). При рассмотрении любых операций, проводимых операторами больших систем, можно говорить о требуемых (ТО) и ложных (ЛО) операциях. Ниже рассматриваются только управления, проводимые обслуживающим персоналом, т. е. управления подмножества  $A$  и  $B$  (рис. 2.1.1,б).

Элементарная структурная схема управления (рис. 2.1.2,а) имеет звено старшего оператора  $K$ , звено опера-

тора  $\bar{O}$  и звено управляющего органа  $У$ , условно названного «кнопкой». Нас будет интересовать случай, когда персонал, управляющий аппаратурой (операторы), сформирован по определенному закону (рис. 2.1.2,б).

Для дальнейшего исследования целесообразно управляющие действия любого оператора из некоторой группы

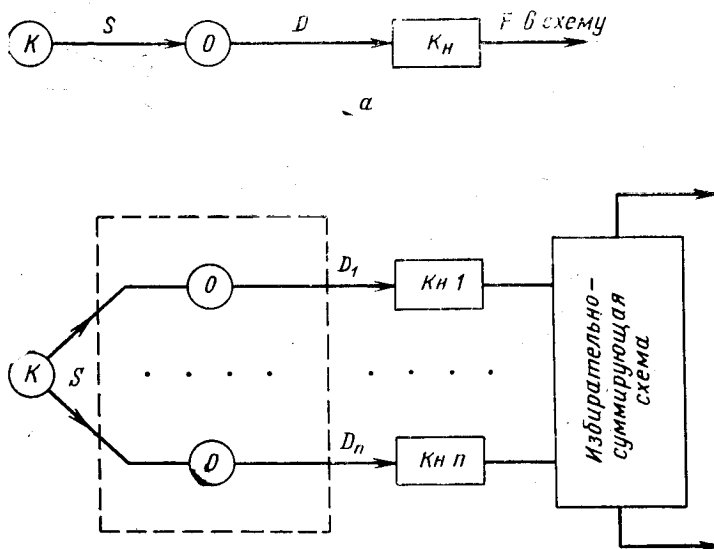


Рис. 2.1.2.

описать с помощью соответствующей функции действия  $D_i$ ;  $i=1, 2, \dots, n$ . Функция  $D_i$  является двоичной, т. е.  $D=1$ , если  $i$ -й оператор включает управляющий орган или, условно, свою кнопку.  $D=0$  в противном случае.

В свою очередь, состояние управляющих цепей схемы управления большой системы, образуемых «контактами кнопок» операторов, описывается с помощью двоичной функции  $F$ , причем  $F=F(D)$ ;  $i=1, 2, \dots, n$ . При  $n=1$  получаем  $F=D$ .

С вероятностной точки зрения события  $D_i=1$  и  $D_i=0$  составляют полную группу событий. К таким событиям относятся также требуемое управление (ТУ) и задержка требуемого управления (ЗТУ), ложное управление

(ЛЮ) и задержка ложного управления (ЗЛУ). Появление того или иного из рассматриваемых событий зависит от суммарного эффекта группы операторов или от закона работы группы  $F(D_i)$ .

Для записи вероятностных характеристик работы группы операторов удобно пользоваться таблицей вида:

$S$ \ $F$	$1$	$0$
$1$	$P_{то}$	$P_{зто}$
$0$	$P_{ло}$	$P_{зло}$

Здесь  $P_{то}$  — вероятность выполнения требуемой операции,  $P_{зто}$  — вероятность задержки требуемой операции,  $P_{ло}$  — вероятность выполнения ложной операции,  $P_{зло}$  — вероятность задержки ложной операции.

Можно записать

$$P_{то} + P_{зто} = 1, \quad P_{ло} + P_{зло} = 1. \quad (2.1.1)$$

При использовании числовой индексации возможна запись в виде:

$S$ \ $F$	$1$	$0$
$1$	$P_{11}$	$P_{10}$
$0$	$P_{01}$	$P_{00}$

Этой форме записи соответствуют наименования соотношений: требуемая единица (11), требуемый нуль (00), ложная единица (01), ложный нуль (10).

В тех случаях, когда управляет один оператор ( $F=D$ ), удобно пользоваться следующей записью:

$s \backslash D$	$1$	$0$
$1$	$p$	$1-p$
$0$	$v$	$1-v$

где  $p, v$  — вероятности обработки требуемой и ложной операций одним оператором.

Используемые вероятностные характеристики являются числовыми мерами способности оператора или группы операторов выполнять в определенный интервал времени отданное распоряжение (или совершать требуемые операции) в конкретных условиях работы, т. е. определяют надежность оператора.

Для «надежного», хорошо подготовленного, тренированного и психологически устойчивого оператора величина  $p$  обычно мало отличается от единицы, а  $v$  — от нуля. То же самое можно сказать и о характеристиках группы операторов  $P_{то}, P_{до}$  соответственно.

В предельном случае для «безотказного» оператора или для безотказной группы операторов таблица характеристик принимает вид:

$s \backslash D$	$1$	$0$
$1$	$1$	$0$
$0$	$0$	$1$

Наоборот, для плохо подготовленного, относительно ненадежного оператора или для группы, состоящей из ненадежных операторов, рассматриваемые вероятностные характеристики  $p, P_{то}, v, P_{до}$  могут зна-

чительно отличаться от единицы и нуля соответственно. В предельных случаях ненадежности записываются одной из следующих таблиц:

$S \backslash D$	1	0
1	1	0
0	1	0

$S \backslash D$	1	0
1	0	1
0	0	1

$S \backslash D$	1	0
1	0	1
0	1	0

Возможны также промежуточные (частично-предельные) случаи:

$S \backslash D$	1	0
1	1	0
0	$P_{л0}$	$P_{зл0}$

$S \backslash D$	1	0
1	$P_{т0}$	$P_{зт0}$
0	0	1

$S \backslash D$	1	0
1	$P_{то}$	$P_{зто}$
0	1	0

$S \backslash D$	1	0
1	0	1
0	$P_{ло}$	$P_{зло}$

Рассмотренные выше вероятностные характеристики определяют качество работы операторов, требования к которым могут быть установлены с помощью неравенств вида:

$$p \geq 1 - \alpha, \quad v \leq \beta \quad (2.1.2)$$

либо

$$P_{то} \geq 1 - \alpha, \quad P_{ло} \leq \beta, \quad (2.1.3)$$

где  $\alpha, \beta$  — величины малого порядка.

Наряду с этими могут рассматриваться и ограничения, налагаемые на некоторые статистические характеристики, например на среднюю квадратическую ошибку. При определении численных значений налагаемых ограничений необходимо учитывать такие факторы, как польза, получаемая от проведения требуемой операции, и ущерб, наносимый проведением ложной операции.

Для больших систем народного хозяйства эти величины получаются на основе анализа их экономического эффекта, а для больших систем военного назначения — на основе анализа эффективности операций.

Оператора или группу операторов, не удовлетворяющих условиям (2.1.2) и (2.1.3), можно отнести к ненадежным или неработоспособным. Ввиду все возрастающей ответственности больших систем последствия ненадежных операторов могут быть весьма опасными. Поэтому необходимо обеспечить функционирование системы при минимальном количестве ненадежных операторов.

Математическое описание ненадежного оператора в общем виде таково:

$S$ \ $D_n$	$1$	$0$
$1$	$p_n$	$1-p_n$
$0$	$v_n$	$1-v_n$

Для схем управления большими системами можно ввести понятие устойчивости против ненадежных операторов. Устойчивой будем называть схему, в которой при заданном количестве ненадежных операторов вероятность проведения требуемой операции остается выше необходимого предела.

Мерой устойчивости назовем наименьшее количество ненадежных операторов  $m$ , изменяющих состояние схемы. Необходимо различать меру устойчивости схемы управления на задержку от меры устойчивости на включение. Если ненадежных операторов меньше чем  $m$ , схема сохраняет устойчивость.

Принятие решения о целесообразности группирования операторов при проектировании в значительной мере зависит от возможности ухудшения характеристик оператора. В самом деле, если эта возможность практически ничтожна, то работоспособность схемы можно попытаться обеспечить в первую очередь путем улучшения характеристик операторов, число которых, если это допускается установленными требованиями (2.1.2), ограничивается одним.

Наоборот, если с возможностью потери работоспособности приходится считаться, схема управления с одним оператором оказывается принципиально непригодной. Поскольку при такой постановке задачи неработоспособность схемы управления с одним оператором становится очевидной, решение можно искать в разнообразии способов группирования. Целесообразно обратиться к группированию операторов и в тех случаях, когда рабочие характеристики системы «один оператор — аппа-



ратура» не отвечают установленным требованиям эффективности управления (2.1.2).

По способу соединения операторов схемы группирования можно разделить на схемы: с параллельным соединением, с последовательным соединением, прямоугольные и избирательно-суммирующие.

По степени равноправия схемы могут включать в себя равноправных и неравноправных операторов. В этой главе рассматриваются лишь схемы с равноправными операторами. Некоторые случаи неравноправных операторов рассматриваются в гл. 6 и 7.

## 2.2. Прямоугольные схемы группирования операторов

Рассмотрим два типа прямоугольных схем, отличающихся большей избыточностью операторов, но вместе с тем и простотой расчета. На рис. 2.2.1 представлена схема параллельно-последовательного, а на рис. 2.2.2 — последовательно-параллельного включения. Обе схемы отличаются высокой степенью устойчивости при воздействии предельно ненадежных операторов. В самом деле, при общем количестве операторов  $n = n_1 n_2$  понадобилось бы «согласованное» действие не менее  $n_1$  нена-

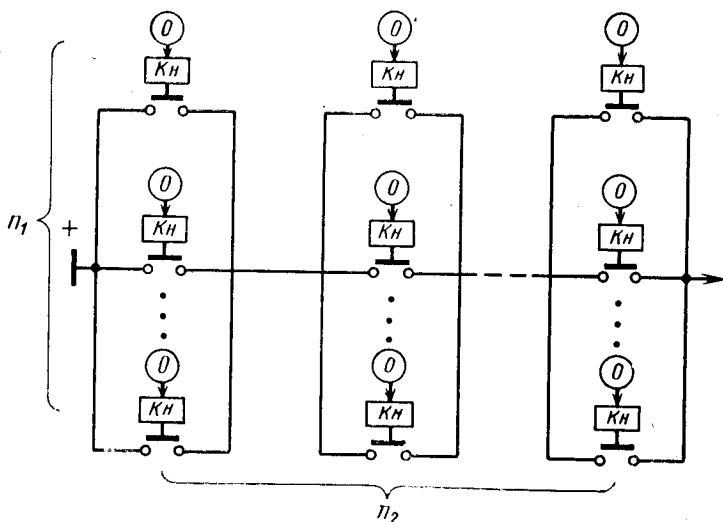


Рис. 2.2.1.

дежных для проведения задержки требуемой операции и не менее  $n_2$  ненадежных для проведения ложной операции. Это означает, что один или даже два предельно ненадежных оператора, учитывать появление которых обычно целесообразно, не в состоянии затруднить управление работой системы, если  $n_1$  и  $n_2$  достаточно велики.

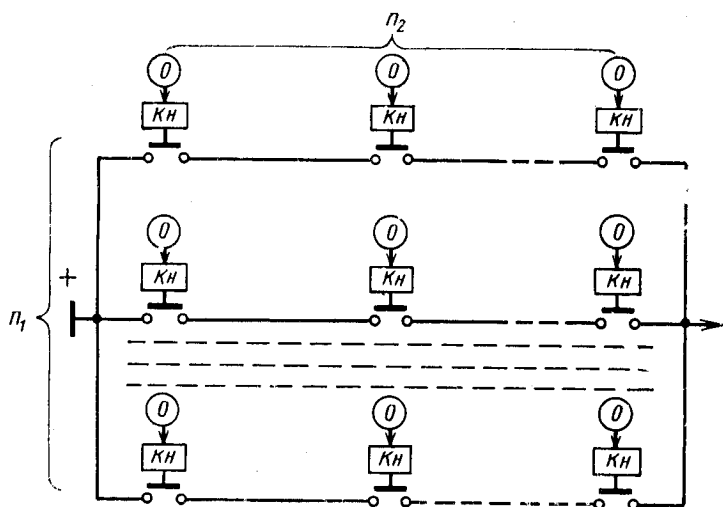


Рис. 2.2.2.

Для случая операторов с равными характеристиками получаем следующие условия, описывающие схему рис. 2.2.1:

$$\begin{aligned} P_{\text{то}} &= [1 - (1 - p)^{n_1}]^{n_2}, \\ P_{\text{ло}} &= [1 - (1 - v)^{n_1}]^{n_2}. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Для схемы рис. 2.2.2 эти условия таковы:

$$\begin{aligned} P_{\text{то}} &= 1 - (1 - p^{n_2})^{n_1}, \\ P_{\text{ло}} &= 1 - (1 - v^{n_2})^{n_1}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

При выводе формул для прямоугольных схем при наличии  $m$  ненадежных операторов с одинаковыми характеристиками  $p_{\text{н}}$ ,  $v_{\text{н}}$  будем исходить из того, что возможность ухудшения или полной потери профессиональ-

ных свойств любым оператором из группы равновероятна. В этом случае схема, в зависимости от расположения в ней ненадежных операторов, может иметь конечное число состояний, каждое из которых характеризуется своими вероятностными показателями.

Введем следующие обозначения:

$H_i$  — состояние, объединяющее схемы с такими вариантами расположения ненадежных операторов, в которых ее вероятностные характеристики одинаковы;

$P(H_i)$  — вероятность того, что схема находится в состоянии  $H_i$ ;

$P(ТО/H_i)$ ,  $P(ЛО/H_i)$  — вероятности выполнения группой операторов требуемой и ложной операции при  $H_i$ -м состоянии схемы.

Тогда характеристики прямоугольных схем группирования операторов при наличии среди них  $m$  ненадежных определяются по формулам [14]

$$P_{то} = \sum_i P(H_i) P(ТО/H_i),$$

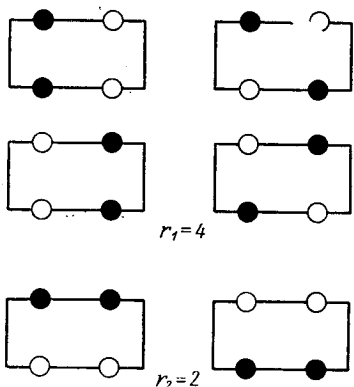
$$P_{ло} = \sum_i P(H_i) P(ЛО/H_i). \quad (2.2.3)$$

В свою очередь, вероятность  $P(H_i)$  определяется по формуле

$$P(H_i) = r_i/R, \quad (2.2.4)$$

где  $r_i$  — число вариантов расположения ненадежных операторов в группе, в которых схема имеет одинаковые вероятностные характеристики;  $R$  — общее количество возможных вариантов расположения ненадежных операторов в группе.

Число всех возможных вариантов расположения ненадежных операторов в схеме, состоящей из  $n = n_1 n_2$  операторов, представляется как число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$ , т. е.  $R = C_n^m$ . Значения  $r_i$  можно полу-



$$R = C_6^2 = 6; P(H_1) = r_1/R = 2/3; P(H_2) = r_2/R = 1/3$$

○ оператор

● ненадежный оператор

Рис. 2.2.3.

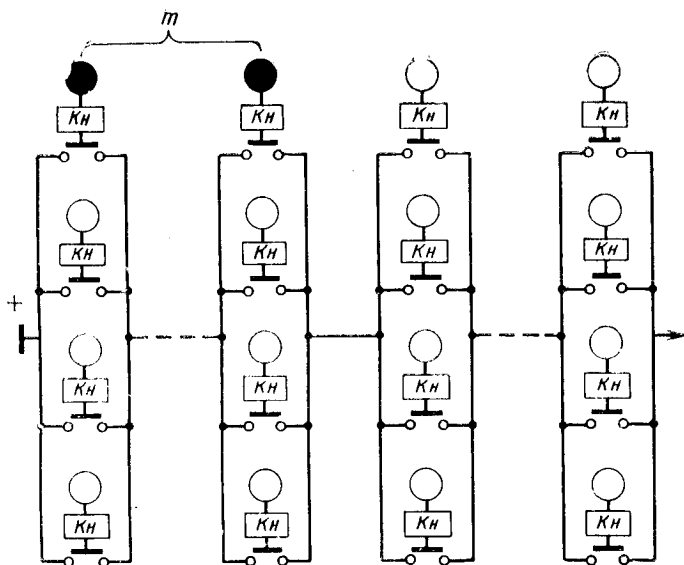


Рис. 2.2.4.

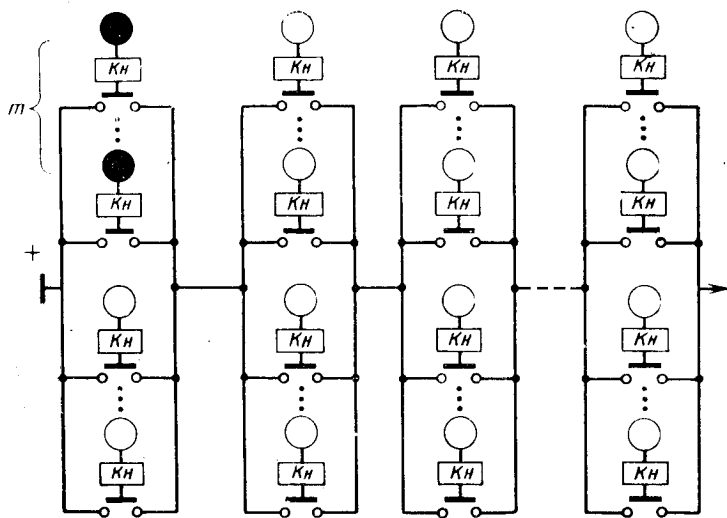


Рис. 2.2.5.

чить, например, методом перебора. Определение  $r_i$  и  $R(H_i)$  для простого случая приведено на рис. 2.2.3. Формулы для вычисления вероятностей  $P(ТО/H_i)$ ,  $P(ЛО/H_i)$  вытекают из логики работы прямоугольных схем с различным расположением в них ненадежных операторов.

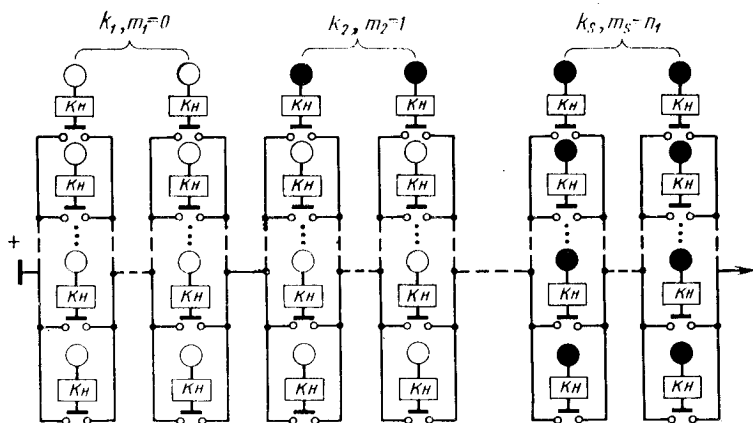


Рис. 2.2.6.

Рассмотрим вначале параллельно-последовательные схемы. Возможны три отличающиеся друг от друга ситуации расположения ненадежных операторов в группе:

— ненадежные операторы находятся по одному в параллельных ячейках (рис. 2.2.4), данная ситуация может иметь место при  $m \leq n_2$ ;

— все ненадежные операторы находятся в одной параллельной ячейке (рис. 2.2.5); это имеет место при  $m \leq n_1$ ;

— ненадежные операторы по одному или группой находятся в нескольких (или во всех) ячейках (рис. 2.2.6).

Исходя из условий возможного расположения ненадежных операторов, запишем выражения для определения вероятностей проведения требуемой и ложной операций.

Для схемы рис. 2.2.4:

$$\begin{aligned}
 P(ТО/H_i) &= [1 - (1 - p_n)(1 - p)^{n_1 - 1}]^m [1 - (1 - p)^{n_1}]^{n_2 - m}, \\
 P(ЛО/H_i) &= [1 - (1 - v_n)(1 - v)^{n_1 - 1}]^m [1 - (1 - v)^{n_1}]^{n_2 - m}.
 \end{aligned}
 \tag{2.2.5}$$

Для схемы рис. 2.2.5:

$$P(\text{ТО}/H_i) = [1 - (1 - p_{ii})^m (1 - p)^{n_1 - m}] [1 - (1 - p)^{n_1}]^{n_2 - 1},$$

$$P(\text{ЛО}/H_i) = [1 - (1 - v_{ii})^m (1 - v)^{n_1 - m}] [1 - (1 - v)^{n_1}]^{n_2 - 1}. \quad (2.2.6)$$

Для схемы рис. 2.2.6:

$$P(\text{ТО}/H_3) = [1 - (1 - p_{ii})^{m_1} (1 - p)^{n_1 - m_1}]^{k_1} [1 - (1 - p_{ii})^{m_2} \times$$

$$\times (1 - p)^{n_1 - m_2}]^{k_2} \dots [1 - (1 - p)^{n_1}]^{n_2 - \sum_{j=1}^s k_j}, \quad (2.2.7)$$

$$P(\text{ЛО}/H_3) = [1 - (1 - v_{ii})^{m_1} (1 - v)^{n_1 - m_1}]^{k_1} [1 - (1 - v_{ii})^{m_2} \times$$

$$\times (1 - v)^{n_1 - m_2}]^{k_2} \dots [1 - (1 - v)^{n_1}]^{n_2 - \sum_{j=1}^s k_j}.$$

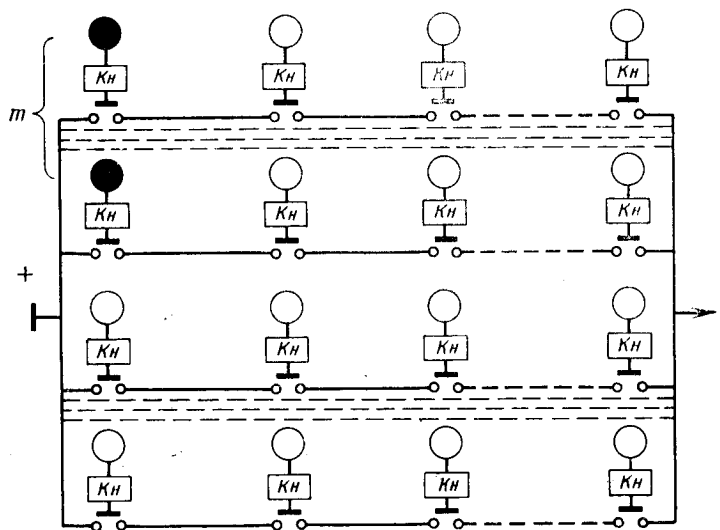


Рис. 2.2.7.

Здесь  $k_j$  — число ячеек, содержащих в точности по  $m_j$  ненадежных операторов. При этом

$$\sum_{j=1}^s k_j m_j = m.$$

Подставляя найденные по формулам (2.2.5)—(2.2.7) значения вероятностей в выражение (2.2.3), определяем вероятности проведения требуемой и ложной операций группой операторов, соединенных в параллельно-последовательную схему, с числом ненадежных операторов, равным  $m$ .

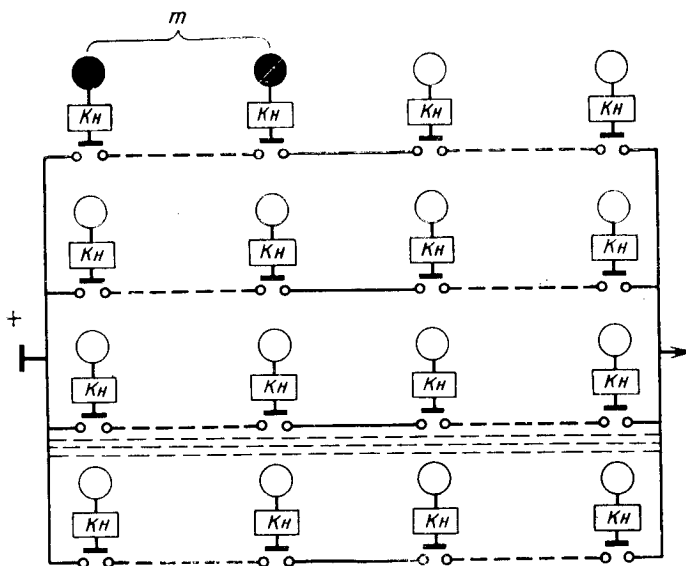


Рис. 2.2.8.

Далее переходим к получению расчетных формул вероятностей проведения требуемых и ложных операций для последовательно-параллельной схемы. Возможные случаи расположения ненадежных операторов в схеме приведены на рис. 2.2.7—2.2.9.

Формулы вероятностей  $P(ТО/H_i)$ ,  $P(ЛО/H_i)$  для каждой схемы запишутся следующим образом:

для схемы рис. 2.2.7

$$P(ТО/H_i) = 1 - (1 - p_{н}^m p^{n_2 - m}) (1 - p^{n_2})^{n_1 - 1}, \quad (2.2.8)$$

$$P(ЛО/H_i) = 1 - (1 - v_{н}^m v^{n_2 - m}) (1 - v^{n_2})^{n_1 - 1};$$

для схемы рис. 2.2.8

$$P(ТО/H_i) = 1 - (1 - p_{н} p^{n_2 - 1})^m (1 - p^{n_2})^{n_1 - m}, \quad (2.2.9)$$

$$P(ЛО/H_i) = 1 - (1 - v_{н} v^{n_2 - 1})^m (1 - v^{n_2})^{n_1 - m};$$

для схемы рис. 2.2.9

$$\begin{aligned}
 P(\text{ТО}/H_i) &= 1 - (1 - p_{ii}^{m_1} p^{n_2 - m_1})^{k_1} (1 - p_{ii}^{m_2} p^{n_2 - m_2})^{k_2} \dots \\
 &\dots (1 - p_{ii}^{m_s} p^{n_2 - m_s})^{k_s} (1 - p^{n_2})^{n_1 - \sum_{j=1}^s k_j}, \\
 P(\text{ЛО}/H_i) &= 1 - (1 - v_{ii}^{m_1} v^{n_2 - m_1})^{k_1} (1 - v_{ii}^{m_2} v^{n_2 - m_2})^{k_2} \dots \\
 &\dots (1 - v_{ii}^{m_s} v^{n_2 - m_s})^{k_s} (1 - v^{n_2})^{n_1 - \sum_{j=1}^s k_j}.
 \end{aligned}
 \tag{2.2.10}$$

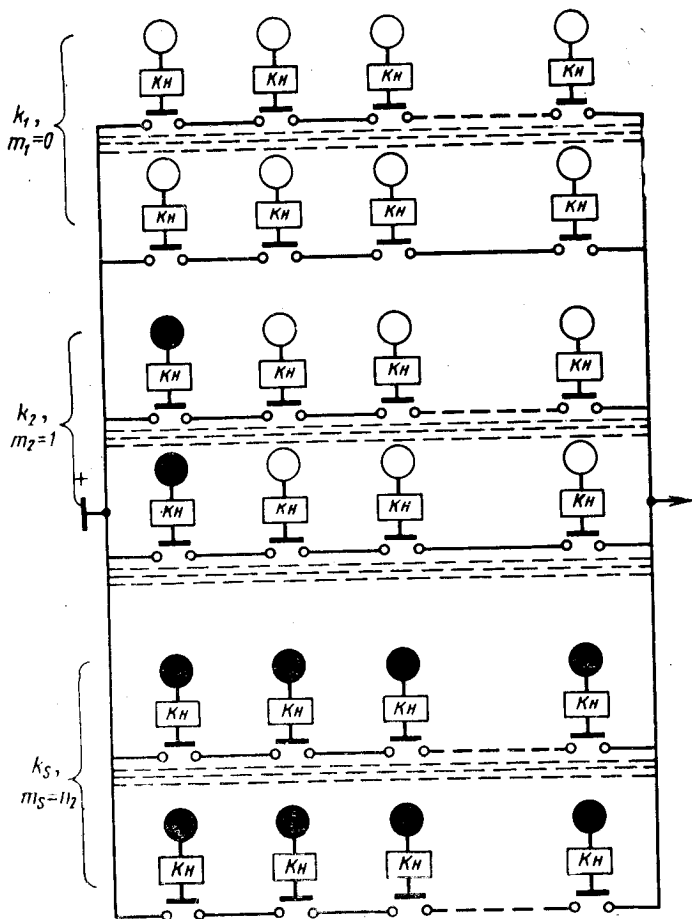


Рис. 2.2.9.



Таким образом, определив значения  $P(ТО/H_i)$ ,  $P(ЛО/H_i)$  по формулам (2.2.8) — (2.2.10) и подставив их в выражения (2.2.3), находим вероятности проведения требуемой и ложной операций для последовательно-параллельной схемы.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий последовательность расчета эффективности прямоугольных схем группирования операторов.

**Пример 2.2.1.** Определить вероятности проведения требуемой и ложной операций девятью операторами, объединенными в параллельно-последовательную схему, три из которых ненадежные с характеристиками  $p_n = v_n = 0$ . Примем, что характеристики надежных операторов подчиняются условию  $p = 0,9$ ;  $v = 0,1$ . Параметры схемы  $n_1 = n_2 = 3$ .

Возможны три различных варианта расположения ненадежных операторов в схеме: все в одной ячейке; по одному в каждой ячейке; два в одной и один в другой, т. е.  $i = 3$ .

Определяем для нашего случая:  $r_1 = 3$ ,  $r_2 = 27$ ,  $r_3 = 54$ . Число возможных комбинаций расположения ненадежных операторов в схеме  $R = C^3_9 = 84$ . Тогда из выражения (2.2.12) следует:  $P(H_1) = 0,036$ ;  $P(H_2) = 0,321$ ;  $P(H_3) = 0,643$ .

Пользуясь выражением (2.2.7), определим вероятности требуемой и запрещенной операций в каждом случае.

В первом случае при  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ ,  $m_1 = 3$ ,  $m_2 = 0$

$$P(ТО/H_1) = [1 - (1 - p_n)^3][1 - (1 - p)^3]^2 = 0,$$

$$P(ЛО/H_1) = [1 - (1 - v_n)] [1 - (1 - v)^3]^2 = 0.$$

Во втором случае при  $k_1 = 3$ ,  $m_1 = 1$

$$P(ТО/H_1) = [1 - (1 - p_n)(1 - p)^2]^3 = [1 - (1 - p)^2]^3 = 0,9703,$$

$$P(ЛО/H_1) = [1 - (1 - v_n)(1 - v)^2]^3 = [1 - (1 - v)^2]^3 = 0,0069.$$

В третьем случае при  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ ,  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 1$ ,  $m_3 = 0$

$$P(ТО/H_3) = [1 - (1 - p_n)^2(1 - p)][1 - (1 - p_n)(1 - p)^2][1 - (1 - p)^3] = 0,8901,$$

$$P(ЛО/H_3) = [1 - (1 - v)][1 - (1 - v)^2][1 - (1 - v)^3] = 0,0052.$$

Определим полные вероятности проведения операций схемой:

$$P_{тo} = 0,036 \cdot 0 + 0,321 \cdot 0,9703 + 0,643 \cdot 0,8901 = 0,8832,$$

$$P_{ло} = 0,036 \cdot 0 + 0,321 \cdot 0,0069 + 0,643 \cdot 0,0052 = 0,0055.$$

### 2.3. Избирательно-суммирующие схемы группирования операторов

Схемы соединения операторов в группы комбинированного типа, в которых управляющее действие образуется при отработке операции определенным числом операторов, но не меньшим установленного, называются избирательно-суммирующими. Такие схемы характеризуются законом работы или законом группирования, который записывается в виде « $k$  из  $n$ ». Здесь  $k$  — номинальное число операторов, при совместной работе которых выполняется требуемая операция ( $1 \leq k \leq n$ ).

Рассмотрим избирательно-суммирующие схемы с законом работы, представленным в виде « $n-l$  из  $n$ ». При этом порог срабатывания  $n-l$  является целочисленным параметром, принимающим при отсутствии ненадежных операторов в группе одно из значений  $0, 1, 2, \dots, n-1$ . При  $l=0$  комбинированная схема вырождается в схему с последовательным соединением, а при  $l=n-1$  — в схему с параллельным соединением операторов.

Могут представить интерес следующие случаи:

- ненадежные операторы в группе отсутствуют,
- в группе имеется один ненадежный оператор,
- в группе имеется  $m$  ненадежных операторов ( $m < n$ ),
- число ненадежных операторов в группе находится в заданных пределах.

Характеристики работы всех работоспособных  $p, v$  и ненадежных  $p_n, v_n$  операторов, если это не оговаривается особо, будем считать одинаковыми.

**Случай отсутствия ненадежных операторов в группе.** Вероятность появления события, состоящего в том, что ровно  $k$  операторов из  $n$ , получивших сигнал, произведут управляющее действие, может быть найдена по формуле распределения Бернулли. При этом вероятности проведения требуемой и ложной операции записываются соответственно в виде [118]

$$(\bar{P}_{\tau 0})_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad (2.3.1)$$

$$(\bar{P}_{\sigma 0})_k = C_n^k v^k (1-v)^{n-k}.$$

При нашем условии операция произойдет в каждом из следующих случаев:

- если отработают  $n-l$  операторов,
- если отработают  $n-l+1$  операторов,

- если отработают  $n-1$  операторов,
- если отработают все  $n$  операторов.

Для группы операторов, работающих по закону « $n-l$  из  $n$ », получаем следующие формулы вероятностей проведения операции:

$$(P_{\tau 0})_{n-l} = \sum_{k=0}^l (\bar{P}_{\tau 0})_k, \quad (2.3.2)$$

$$(P_{\sigma 0})_{n-l} = \sum_{k=0}^l (\bar{P}_{\sigma 0})_k,$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

С учетом выражения (2.3.1) имеем

$$(P_{то})_{n-l} = \sum_{k=0}^l C^k_n p^k (1-p)^{n-k}, \quad (2.3.3)$$

$$(P_{ло})_{n-l} = \sum_{k=0}^l C^k_n v^k (1-v)^{n-k}.$$

Пример графика вероятностей выполнения операции группой операторов, каждый из которых производит свое управляющее действие с вероятностью  $p=0,6$ , представлен на рис. 2.3.1.

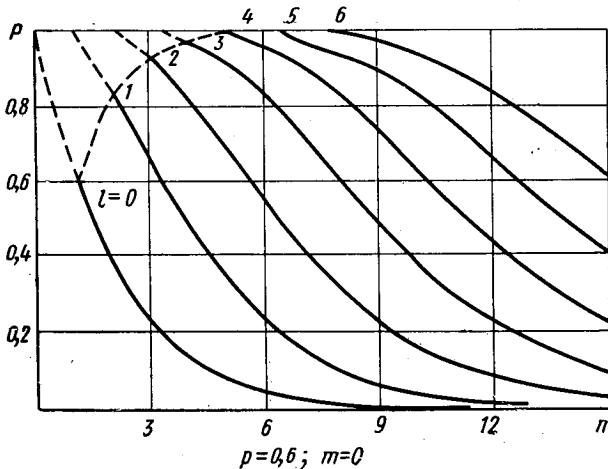


Рис. 2.3.1.

Для выбора параметров группы  $n$  и  $l$  необходимо использовать условие (2.1.3). Получаем:

$$\sum_{k=0}^l C^k_n p^k (1-p)^{n-k} \geq 1 - \alpha, \quad (2.3.4)$$

$$\sum_{k=0}^l C^k_n v^k (1-v)^{n-k} \leq \beta.$$

**Случай с одним ненадежным оператором в группе.** Отработка операции по-прежнему происходит при условиях, идентичных предыдущему случаю, т. е. при совпадении управляющих действий хотя бы  $n-l$  операторов из  $n$ . Однако необходимо учитывать, что теперь один оператор имеет характеристики  $p_n, v_n$ , отличающиеся от характеристик остальных операторов.

Логические условия обработки операции в точности  $k$  операторами таковы:

— либо операцию обрабатывает один ненадежный и  $k-1$  из  $n-1$  остальных операторов;

— либо операцию обработают  $k$  из  $n-1$  работоспособных операторов.

Используя формулы Бернулли и понятия о вероятностях сложных событий, можно записать интересующую нас формулу в виде

$$(\overline{P}_{\text{то}})_{k, 1} = p_n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} + (1-p_n) C_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-k-1}. \quad (2.3.5)$$

Здесь и далее число в обозначении  $(\overline{P}_{\text{то}})_{k, 1}$  указывает на количество отличающихся по своим характеристикам операторов в группе. Для различных значений  $k$  получаем:

$$(\overline{P}_{\text{то}})_{n-0, 1} = p_n C_{n-1}^{n-1} p^{n-1} (1-p)^0,$$

$$(\overline{P}_{\text{то}})_{n-1, 1} = p_n C_{n-1}^{n-2} p^{n-2} (1-p)^1 + (1-p_n) C_{n-1}^{n-1} p^{n-1} (1-p)^0,$$

$$(\overline{P}_{\text{то}})_{n-2, 1} = p_n C_{n-1}^{n-3} p^{n-3} (1-p)^2 + (1-p_n) C_{n-1}^{n-2} p^{n-2} (1-p)^1,$$

$$(\overline{P}_{\text{то}})_{n-3, 1} = p_n C_{n-1}^{n-4} p^{n-4} (1-p)^3 + (1-p_n) C_{n-1}^{n-3} p^{n-3} (1-p)^2, \quad (2.3.6)$$

.....

$$(\overline{P}_{\text{то}})_{n-l+1, 1} + p_n C_{n-1}^{n-l} p^{n-l} (1-p)^{l-1} +$$

$$+ (1-p_n) C_{n-1}^{n-l+1} p^{n-l+1} (1-p)^{l-2},$$

$$(\overline{P}_{\text{то}})_{n-l, 1} = p_n C_{n-1}^{n-l-1} p^{n-l-1} (1-p)^l +$$

$$+ (1-p_n) C_{n-1}^{n-l} p^{n-l} (1-p)^{l-1}.$$

Формулы вероятности проведения операции получаются на основе выражений

$$(P_{\text{то}})_{n-l, 1} = \sum_{k=0}^l (\overline{P}_{\text{то}})_{k, 1}, \quad (2.3.7)$$

$$(P_{\text{ло}})_{n-l, 1} = \sum_{k=0}^l (\overline{P}_{\text{ло}})_{k, 1}.$$

Важно помнить, что в ряду возможных значений для  $l \{0, 1, 2, \dots, n-2, n-1\}$  оба крайних значения выпадают из рассмотрения. В самом деле, при  $l=0$  оставался бы в силе принцип единогласия операторов, хотя заведомо известно, что один из них — ненадежный.

Таким образом, для величины  $l$  остаются значения множества  $\{1, 2, \dots, n-2\}$ .

Выражения (2.3.6), (2.3.7) позволяют записать

$$(P_{\text{То}})_{n-l, 1} = p_{\text{н}} \sum_{k=0}^l C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} + \\ + (1-p_{\text{н}}) \sum_{k=1}^l C_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-k-1} \quad (2.3.8)$$

и по аналогии

$$(P_{\text{Ло}})_{n-l, 1} = v_{\text{н}} \sum_{k=0}^l C_{n-1}^{k-1} v^{k-1} (1-v)^{n-k} + \\ + (1-v_{\text{н}}) \sum_{k=1}^l C_{n-1}^k v^k (1-v)^{n-k-1}. \quad (2.3.9)$$

Формулы (2.3.8), (2.3.9) могут быть записаны также в виде

$$(P_{\text{То}})_{n-l, 1} = \sum_{k=1}^l C_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-k-1} + p_{\text{н}} C_{n-1}^{n-l-1} p^{n-l-1} (1-p)^l, \quad (2.3.10)$$

$$(P_{\text{Ло}})_{n-l, 1} = \sum_{k=1}^l C_{n-1}^k v^k (1-v)^{n-k-1} + v_{\text{н}} C_{n-1}^{n-l-1} v^{n-l-1} (1-v)^l.$$

**Пример 2.3.1.** С целью проверки выкладок преобразовать выражение (2.3.8) для случая  $p_{\text{н}} = p$ . После преобразования выражение (2.3.8) должно совпасть с первым из выражений (2.3.3). Из (2.3.8) при нашем условии получаем

$$(P_{\text{То}})_{n-l, 1} = \sum_{k=0}^l C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^l C_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (2.3.11)$$

или

$$(P_{\text{То}})_{n-l, 1} = \sum_{k=0}^l p^k (1-p)^{n-k} [C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k].$$

Учтем тождество [10]

$$C_n^{n-k} = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1},$$

после чего можно записать

$$(P_{\text{То}})_{n-l, 1} = \sum_{k=0}^l C_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad (2.3.12)$$

что подтверждает предположение, сделанное в начале примера.

**Случай с  $m$  ненадежными операторами в группе.** Формулы вероятностей выполнения требуемой и проведения ложной операций  $(P_{\text{То}})_{n-l, m}$  и  $(P_{\text{Ло}})_{n-l, m}$ , которые необходимо получить, могут быть использованы при синтезе схем группирования, устойчивых под воздействием  $m$  ненадежных операторов.

Укажем область определения целочисленного параметра схемы группирования  $l$ :

$$m \leq l \leq n-1-m. \quad (2.3.13)$$

При  $l=m$  закон управления группы получается в виде « $n-m$  из  $n$ », а при  $l=n-1-m$  — в виде « $1+m$  из  $n$ ».

Оба случая должны предусматривать управление схемой с помощью такого числа операторов, которое превышает число ненадежных. Для этого необходимо потребовать выполнение условия  $n-m \geq m$  или

$$m \leq n/2, \quad (2.3.14)$$

обеспечивающего управление системой по крайней мере одним работоспособным оператором.

Обращаясь к условию (2.3.13), можно видеть, что возможность получения параметра  $l$ , а значит, и способа группирования связана с наблюдением условия  $m \leq n-1-m$  или

$$m \leq (n-1)/2 \quad (2.3.15)$$

более сильного, чем (2.3.14). Полученное условие уточняет понятие о допустимом числе ненадежных операторов в группе. Обратим внимание на общность выражения (2.3.13), из которого при  $m=0$  и  $m=1$  получают множества параметра  $l$ , рассмотренные выше.

Перейдем к выводу формул. Исходным является выражение

$$(P_{\text{то}})_{n-l,m} = \sum_{k=0}^l (\bar{P}_{\text{то}})_{k,m}, \quad (2.3.16)$$

в котором  $(\bar{P}_{\text{то}})_{k,m}$  есть вероятность того, что точно  $k$  операторов группы, среди которых имеются  $m$  ненадежных, выполняют операцию.

Учитывая полученные выше формулы (2.3.3), (2.3.8) и (2.3.9) для  $m=0$ ,  $m=1$ , рассмотрим процесс получения формулы для  $(P_{\text{то}})_{n-l,2}$ . Предварительно возвратимся к соотношению (2.3.13), из которого следует:  $m \leq n-1-l$ .

Поскольку  $0 \leq k \leq l$ , то можно записать  $m < k$ . Для нашего случая это означает  $k > 2$ . Поскольку в рассматриваемом случае  $m=2$ , то число работоспособных операторов в группе равно  $n-2$ .

Событие, состоящее в выполнении операции точно  $k$  операторами, является сложным. Оно возможно при следующих условиях:

- отработают два ненадежных и  $k-2$  из  $n-2$  работоспособных операторов;
- отработает один из двух ненадежных и  $k-1$  из  $n-2$  работоспособных операторов;
- отработает  $k$  из  $n-2$  работоспособных операторов.

Любое из трех приведенных условий в свою очередь связано с появлением сложного события, состоящего в одновременном появлении двух простых событий, вероятности которых могут быть найдены по формулам распределения Бернулли. Поэтому

$$\begin{aligned}
 (\bar{P}_{\text{То}})_{k, 2} &= C^2_2 p_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 C_{n-2}^{k-2} p^{k-2} (1 - p)^{n-k} + \\
 &+ C^1_2 p^1_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^1 C_{n-2}^{k-1} p^{k-1} (1 - p)^{n-k-1} + \\
 &+ C^0_2 p^0_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^2 C_{n-2}^k p^k (1 - p)^{n-k-2}. \quad (2.3.17)
 \end{aligned}$$

Для  $k = 0$

$$(\bar{P}_{\text{То}})_{n-0, 2} = C^2_2 p^2_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 C_{n-2}^{n-2} p^{n-2} (1 - p)^0.$$

Для  $k = 1$

$$\begin{aligned}
 (\bar{P}_{\text{То}})_{n-1, 2} &= C^2_2 p^2_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 C_{n-2}^{n-3} p^{n-3} (1 - p)^1 + \\
 &+ C^1_2 p^1_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^1 C_{n-2}^{n-2} p^{n-2} (1 - p)^0.
 \end{aligned}$$

Для  $k = 2$

$$\begin{aligned}
 (\bar{P}_{\text{То}})_{n-2, 2} &= C^2_2 p^2_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 C_{n-2}^{n-4} p^{n-4} (1 - p)^2 + \\
 &+ C^1_2 p^1_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^1 C_{n-2}^{n-3} p^{n-3} (1 - p)^1 + \\
 &+ C^0_2 p^0_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^2 C_{n-2}^{n-2} p^{n-2} (1 - p)^0.
 \end{aligned}$$

Производя суммирование в соответствии с выражением (2.3.16), получаем:

$$\begin{aligned}
 (P_{\text{То}})_{n-0, 2} &= C^2_2 p^2_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 C_{n-2}^{n-2} p^{n-2} (1 - p)^0, \\
 (P_{\text{То}})_{n-1, 2} &= [C^2_2 p^2_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 + C^1_2 p^1_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^1] C_{n-2}^{n-2} p^{n-4} (1 - p)^0 + \\
 &+ C^2_2 p^2_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 C_{n-2}^{n-3} p^{n-3} (1 - p)^1, \\
 (P_{\text{То}})_{n-2, 2} &= C_{n-2}^{n-2} p^{n-2} (1 - p)^0 + [C^2_2 p^2_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 + \\
 &+ C^1_2 p^1_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^1] C_{n-2}^{n-3} p^{n-3} (1 - p)^1 + \\
 &+ C^2_2 p^2_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 C_{n-2}^{n-4} p^{n-4} (1 - p)^2.
 \end{aligned}$$

Процесс образования формул можно продолжить. Переходя от  $k$  к  $l$ , можно записать:

$$\begin{aligned}
 (P_{\text{То}})_{n-l, 2} &= \sum_{k=2}^l C_{n-2}^{n-k} p^{n-k} (1 - p)^{k-2} + [C^2_2 p^2_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 + \\
 &+ C^1_2 p^1_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^1] C_{n-2}^{n-(l+1)} p^{n-(l+1)} (1 - p)^{l-1} + \\
 &+ C^2_2 p^2_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 C_{n-2}^{n-(l+2)} p^{n-(l+2)} (1 - p)^l. \quad (2.3.18)
 \end{aligned}$$

Далее перейдем к получению формулы  $(P_{\text{То}})_{n-l, 3}$ . Предварительно запишем выражение  $(P_{\text{То}})_{n-k, 3}$ , которое основано на логических условиях отработки точно  $n-k$  операторов из группы, содержащей трех ненадежных операторов ( $n-k > 3$ ):

— отработают все три ненадежных и  $n-k-3$  из  $n-3$  работоспособных операторов,

— отработают два ненадежных из трех и  $n-k-2$  из  $n-3$  работоспособных операторов,

— отработает один ненадежный из трех и  $n-k-1$  из  $n-3$  работоспособных операторов,

— отработает только  $n-k$  работоспособных операторов.

Подобно выражению (2.3.17) в данном случае запишем:

$$\begin{aligned} (\bar{P}_{\text{ТО}})_{n-k, z} = & C^3_3 p^3_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 C_{n-3}^{n-3-k} p^{n-3-k} (1 - p)^k + \\ & + C^2_3 p^2_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^1 C_{n-3}^{n-2-k} (1 - p)^{k-1} + C^1_3 p^1_{\text{H}} (1 - \\ & - p_{\text{H}})^2 C_{n-3}^{n-1-k} p^{n-1-k} (1 - p)^{k-2} + C^0_3 p^0_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^3 C_{n-3}^{n-k} p^{n-k} (1 - p)^{k-3}. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Для  $k = 0$

$$(\bar{P}_{\text{ТО}})_{n-0, z} = C^3_3 p^3_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 C_{n-3}^{n-3} p^{n-3} (1 - p)^0.$$

Для  $k = 1$

$$\begin{aligned} (\bar{P}_{\text{ТО}})_{n-1, z} = & C^3_3 p^3_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 C_{n-3}^{n-4} p^{n-4} (1 - p)^1 + \\ & + C^2_3 p^2_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^1 C_{n-3}^{n-3} p^{n-3} (1 - p)^0. \end{aligned}$$

Для  $k = 2$

$$\begin{aligned} (\bar{P}_{\text{ТО}})_{n-2, z} = & C^3_3 p^3_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 C_{n-3}^{n-5} (1 - p)^2 + \\ & + C^2_3 p^2_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^1 C_{n-3}^{n-4} p^{n-4} (1 - p)^1 + C^1_3 p^1_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^2 \times \\ & \times C_{n-3}^{n-3} p^{n-3} (1 - p)^0. \end{aligned}$$

Произведя суммирование в соответствии с (2.3.16), из последнего получим:

$$\begin{aligned} (P_{\text{ТО}})_{n-0, z} = & C^3_3 p^3_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 C_{n-3}^{n-3} p^{n-3} (1 - p)^0, \\ (P_{\text{ТО}})_{n-1, z} = & [C^3_3 p^3_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 + C^2_3 p^2_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^1] C_{n-3}^{n-3} p^{n-3} (1 - p)^0 + \\ & + C^3_3 p^3_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 C_{n-3}^{n-4} p^{n-4} (1 - p)^1, \\ (P_{\text{ТО}})_{n-2, z} = & [C^3_3 p^3_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 + C^2_3 p^2_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^1] C_{n-3}^{n-3} p^{n-3} (1 - p)^0 + \\ & + [C^3_3 p^3_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 + C^2_3 p^2_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^1] C_{n-3}^{n-4} p^{n-4} (1 - p)^1 + \\ & + C^3_3 p^3_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 C_{n-3}^{n-5} p^{n-5} (1 - p)^2. \end{aligned}$$

Заметив имеющиеся закономерности, можно записать формулу для любого  $l$ :

$$\begin{aligned} (P_{\text{ТО}})_{n-l, z} = & \sum_{k=3}^l C_{n-3}^{n-k} p^{n-k} (1 - p)^{k-3} + [C^3_3 p^3_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 + \\ & + C^2_3 p^2_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^1 + C^1_3 p^1_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^2] C_{n-3}^{n-(l+1)} p^{n-(l+1)} (1 - p)^{l-2} + \\ & + [C^3_3 p^3_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0 + C^2_3 p^2_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^1] C_{n-3}^{n-(l+2)} p^{n-(l+2)} (1 - p)^{l-1} + \\ & + [C^3_3 p^3_{\text{H}} (1 - p_{\text{H}})^0] C_{n-3}^{n-(l+3)} p^{n-(l+3)} (1 - p)^l. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$



Напомним, что выражения (2.3.3), (2.3.8), (2.3.18) и (2.3.20) определяют вероятности отработки операции для  $m=0, 1, 2, 3$  соответственно. Используя их, легко перейти к случаю произвольного  $m$ :

$$\begin{aligned}
 (P_{\text{то}})_{n-l, m} &= \sum_{k=m}^l C_{n-m}^{n-k} p^{n-k} (1-p)^{k-m} + \\
 &+ \sum_{j=1}^m C_{l_m} p^j (1-p_n)^{m-j} C_{n-m}^{n-(l+1)} p^{n-(l+1)} (1-p)^{l-(m-1)} + \\
 &+ \sum_{j=2}^m C_{l_m} p^j (1-p_n)^{m-j} C_{n-m}^{n-(l+2)} p^{n-(l+1)} (1-p)^{l-(m-2)} + \\
 &+ \sum_{j=3}^m C_{l_m} p^j (1-p_n)^{m-j} C_{n-m}^{n-(l+3)} p^{n-(l+3)} (1-p)^{l-(m-3)} + \\
 &\dots \dots \dots (2.3.21) \\
 &+ \sum_{j=m-1}^m C_{l_m} p^j (1-p_n)^{m-j} C_{n-m}^{n-(l+m-1)} p^{n-(l+m-1)} (1-p)^{l-1} + \\
 &+ \sum_{j=m}^m C_{l_m} p^j (1-p_n)^{m-j} C_{n-m}^{n-(l+m)} p^{n-(l+m)} (1-p)^l.
 \end{aligned}$$

Полученное выражение можно еще больше упростить, используя символ двойного суммирования:

$$\begin{aligned}
 (P_{\text{то}})_{n-l, m} &= \sum_{k=m}^l C_{n-m}^{n-k} p^{n-k} (1-p)^{k-m} + \\
 &+ \sum_{r=1}^m \sum_{j=r}^m C_{l_m} p^j (1-p_n)^{m-j} C_{n-m}^{n-(l+2)} p^{n-(l+2)} (1-p)^{l-(m-2)}. \quad (2.3.22)
 \end{aligned}$$

С помощью аналогичных рассуждений получаем формулу

$$\begin{aligned}
 (P_{\text{ло}})_{n-l, m} &= \sum_{k=m}^l C_{n-m}^{n-k} v^{n-k} (1-v)^{k-m} + \\
 &+ \sum_{r=1}^m \sum_{j=r}^m C_{l_m} v^j (1-v_n)^{m-j} C_{n-m}^{n-(l+r)} v^{n-(l+r)} (1-v)^{l-(m-r)}. \quad (2.3.23)
 \end{aligned}$$

Выражения (2.3.22), (2.3.23) являются общими. Из них следуют значения вероятностей, выведенные ранее при  $m=0, m=1$  и т. д. Рассмотрим эти выражения для различных предельных случаев ненадежных операторов.

Если характеристики ненадежных операторов  $p_n = v_n = 0$ , получаем следующие формулы:

$$(P_{\text{то}})_{n-l, m} = \sum_{k=m}^l C_{n-m}^{n-k} p^{n-k} (1-p)^{k-m},$$

$$(P_{\text{ло}})_{n-l, m} = \sum_{k=m}^l C_{n-m}^{n-k} v^{n-k} (1-v)^{k-m}.$$
(2.3.24)

Если характеристики ненадежных операторов  $p_n = v_n = 1$ , получаем

$$(P_{\text{то}})_{n-l, m} = \sum_{k=m}^l C_{n-m}^{n-k} p^{n-k} (1-p)^{k-m} +$$

$$+ C_{n-m}^{n-(l+1)} p^{n-(l+1)} (1-p)^{l-(m-1)} + C_{n-m}^{n-(l+2)} p^{n-(l+2)} \times$$

$$\times (1-p)^{l-(m-2)} + \dots + C_{n-m}^{n-(l+m+1)} p^{n-(l+m+1)} (1-p)^{l-1} +$$

$$+ C_{n-m}^{n-(l+m)} p^{n-(l+m)} (1-p)^l,$$

и далее:

$$(P_{\text{то}})_{n-l, m} = \sum_{k=m}^{l+m} C_{n-m}^{n-k} p^{n-k} (1-p)^{k-m}.$$
(2.3.25)

Кроме того, по аналогии имеем

$$(P_{\text{ло}})_{n-l, m} = \sum_{k=m}^{l+m} C_{n-m}^{n-k} v^{n-k} (1-v)^{k-m}.$$
(2.3.26)

Если, наконец, характеристики ненадежных операторов  $p_n = 0$ ,  $v_n = 1$ , получаем

$$(P_{\text{то}})_{n-l, m} = \sum_{k=m}^l C_{n-m}^{n-k} p^{n-k} (1-p)^{k-m},$$

$$(P_{\text{ло}})_{n-l, m} = \sum_{k=m}^{l+m} C_{n-m}^{n-k} v^{n-k} (1-v)^{k-m}.$$
(2.3.27)

**Случай, когда число ненадежных операторов находится в заданных пределах.** Когда число ненадежных операторов в группе не превышает или не меньше заданного числа  $m^*$ , а также если оно находится в заданном интервале значений от  $m_1$  до  $m_2$ , при расчете схем приходится пользоваться следующими обозначениями:

$$(P_{\text{то}})_{n-l, m \leq m^*}, (P_{\text{ло}})_{n-l, m \leq m^*};$$

$$(P_{\text{то}})_{n-l, m \geq m^*}, (P_{\text{ло}})_{n-l, m \geq m^*};$$

$$(P_{\text{то}})_{n-l, m_1 - m_2}, (P_{\text{ло}})_{n-l, m_1 - m_2}.$$

Практическое значение имеют формулы для предельных характеристик ненадежных операторов. Приведем две из них.

Для характеристик  $p_H = v_H = 0$

$$(P_{\text{то}})_{n-l, m \leq m^*} = \sum_{r=0}^{m^*} \sum_{k=r}^l C_{n-r}^{n-k} p^{n-k} (1-p)^{k-r}, \quad (2.3.28)$$

$$(P_{\text{ло}})_{n-l, m \leq m^*} = \sum_{r=0}^{m^*} \sum_{k=r}^l C_{n-r}^{n-k} v^{n-k} (1-v)^{k-r}.$$

Для характеристик  $p_H = v_H = 1$

$$(P_{\text{то}})_{n-l, m \leq m^*} = \sum_{r=0}^m \sum_{k=r}^{l+r} C_{n-r}^{n-k} p^{n-k} (1-p)^{k-r}, \quad (2.3.29)$$

$$(P_{\text{ло}})_{n-l, m \leq m^*} = \sum_{r=0}^m \sum_{k=r}^{l+r} C_{n-r}^{n-k} v^{n-k} (1-v)^{k-r}.$$

## Глава 3

### ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ СХЕМ ГРУППИРОВАНИЯ ОПЕРАТОРОВ

Основой расчета параметров схем группирования операторов является выбор объема группы и закона группирования операторов по заданным требованиям на характеристики работы операторов и эффективность управления.

#### 3.1. Расчет параметров прямоугольных схем группирования операторов

**Схемы с параллельным и последовательным соединением операторов.** В случае простейших схем группирования операторов, к которым относятся параллельные и последовательные схемы, расчет параметров сводится к определению величин  $n$  по заданным  $p$ ,  $v$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и данным о неработоспособных операторах.

Объем группы  $n$  параллельной схемы можно найти, используя условия (2.1.3). Получаем

$$1 - (1-p)^n \geq 1 - \alpha, \quad 1 - (1-v)^n \leq \beta, \quad (3.1.1)$$

откуда соответственно следуют новые условия:

$$(1-p)^n \leq \alpha, \quad (1-v)^n \geq 1 - \beta. \quad (3.1.2)$$

При рассмотрении последних условий нетрудно заметить, что удовлетворить первое из них можно, выбрав  $n$  достаточно большим, однако при этом может нарушиться второе условие.

Логарифмируя условия (3.1.2), получим пределы величины  $n$

$$\frac{|\ln \alpha|}{|\ln(1-p)|} \leq n \leq \frac{|\ln(1-\beta)|}{|\ln(1-v)|}. \quad (3.1.3)$$

Условия осуществимости (3.1.3) состоят в следующем:

— правая часть неравенства должна быть не меньше ее левой части;

— в интервале, определяющем объем группы  $n$ , должно содержаться хотя бы одно целое число.

Если условия осуществимости выполняются, имеются два числа, определяющие неравенство  $n_{min} \leq n \leq n_{max}$ . При этом:

$$\begin{aligned} \frac{|\ln(1-\beta)|}{|\ln(1-v)|} &\geq n_{max}, \\ \frac{|\ln \alpha|}{|\ln(1-p)|} &\leq n_{min}. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Отсюда легко получить зависимости для характеристик операторов:

$$\begin{aligned} p &\geq 1 - \sqrt[n_{min}]{\alpha}, \\ v &\leq 1 - \sqrt[n_{max}]{1-\beta}. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

С увеличением  $n_{min}$  требования первого неравенства в (3.1.6) ослабляются. Поэтому, выбирая объем группы, целесообразно брать  $n = n_{max}$ .

С увеличением  $n_{max}$  требования второго неравенства (3.1.5) становятся более жесткими. Поэтому целесообразно брать  $n_{max}$  по возможности меньше. Однако в самом легком случае, когда  $n_{max} = 1$ , имеем требование  $v \leq \beta$ . Таким образом, параллельные соединения в чистом виде можно применять для повышения вероятности отработки требуемой операции лишь в тех случаях, когда характеристика  $v$  оператора достаточно качественна ( $v < \beta$ ).

В случае последовательной схемы группирования операторов, используя (2.2.7), (2.1.3), получаем

$$\begin{aligned} p^n &\geq 1 - \alpha, \\ v^n &\leq \beta. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Выбрав  $n$  достаточно большим, всегда можно удовлетворить второе неравенство. Однако при этом может нарушиться первое.

Логарифмируя условия (3.1.6), определяем пределы величины  $n$

$$\frac{|\ln \beta|}{|\ln v|} \leq n \leq \frac{|\ln(1 - \alpha)|}{|\ln p|}, \quad (3.1.7)$$

условия осуществимости которой те же, что и у (3.1.3).

Введя в рассмотрение величины  $n_{min}$ ,  $n_{max}$ , заменим выражения (3.1.6) более жесткими:

$$\begin{aligned} p^{n_{max}} &\geq 1 - \alpha, \\ v^{n_{min}} &\leq \beta, \end{aligned}$$

решение которых дает

$$\begin{aligned} p &\geq \sqrt[n_{max}]{1 - \alpha}, \\ v &\leq \sqrt[n_{min}]{\beta}. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

С увеличением  $n_{min}$  требования второго неравенства (3.1.8) ослабляются. Поэтому при выборе объема группы целесообразно брать  $n = n_{max}$ . С увеличением же  $n_{max}$  требования первого неравенства (3.1.8) становятся более жесткими. Однако в самом легком случае, когда  $n_{max} = 1$ , имеем условия  $p \geq 1 - \alpha$ . Таким образом, последовательное соединение операторов можно применять для понижения вероятности проведения запрещенной операции в тех случаях, когда характеристика  $p$  операторов достаточно качественна ( $p > 1 - \alpha$ ).

### Прямоугольные схемы группирования операторов.

При расчете прямоугольных схем по заданным величинам  $p$ ,  $v$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  определяются объем группы  $n$  и параметры  $n_1$ ,  $n_2$ .

Рассмотрим более подробно схему рис. 2.2.1. Обращаясь с этой целью к выражению (2.2.1), обнаруживаем дополнительное ограничение:

$$1 - (1 - p)^{n_1} > 1 - \alpha,$$

откуда следует, что

$$n_1 > \frac{|\ln \alpha|}{|\ln(1-p)|}. \quad (3.1.9)$$

Кроме того, из (2.2.1) получаем двойное неравенство

$$\frac{|\ln \beta|}{|\ln[1-(1-v)^{n_1}]|} \leq n_2 \leq \frac{|\ln(1-\alpha)|}{|\ln[1-(1-p)^{n_1}]|}. \quad (3.1.10)$$

Необходимое условие существования положительного значения  $n_2$  таково:

$$\frac{|\ln \beta|}{|\ln[1-(1-v)^{n_1}]|} \leq \frac{|\ln(1-\alpha)|}{|\ln[1-(1-p)^{n_1}]|},$$

откуда имеем

$$\ln[1-(1-p)^{n_1}] \geq \ln[1-(1-v)^{n_1}] \frac{|\ln(1-\alpha)|}{|\ln \beta|}.$$

Можно также записать вытекающее отсюда условие

$$1-(1-p)^{n_1} \geq [1-(1-v)^{n_1}]^A, \quad (3.1.11)$$

где

$$A = \frac{\ln(1-\alpha)}{\ln \beta} \ll 1.$$

Ограничившись двумя членами разложения [45], запишем

$$1-(1-p)^{n_1} \geq 1-A(1-v)^{n_1}$$

или

$$(1-p)^{n_1} \leq A \cdot (1-v)^{n_1}.$$

Следовательно, получаем неравенство,

$$n_1 \geq \frac{|\ln A|}{\left| \ln \frac{1-p}{1-v} \right|}, \quad (3.1.12)$$

из которого видно, что значение  $n_1$  всегда может быть определено, если  $0 < p, v < 1$  (случаи предельных характеристик здесь не рассматриваются).

Приведем несколько примеров расчета прямоугольных схем.

**Пример 3.1.1.** Рассчитать схему при условии:  $p=0,7$ ;  $\alpha=0,2$ ;  $v=0,3$ ;  $\beta=0,2$ . Здесь, как видно, требования (2.1.2) для одного оператора не удовлетворяются и необходимо прибегнуть к группированию.

По формуле (3.1.11) находим

$$A = \frac{|\ln 0,8|}{|\ln 0,2|} = \frac{0,2232}{1,6095} = 0,139.$$

Обратившись к выражению (3.1.12), получаем

$$n_1 \geq \frac{|\ln 0,139|}{\frac{0,3}{|\ln 0,7|}} = \frac{1,9733}{0,8440}; \quad n_1 \geq 2,35.$$

По выражению (3.1.9) имеем

$$n_1 \geq \frac{|\ln 0,2|}{|\ln 0,3|} = 1,3.$$

Таким образом, необходимо выбрать  $n_1 \geq 2,35$ .

Пользуясь выражением (3.1.10), вычислим границы изменения величины  $n_2$ . Вычисления сведем в таблицу 3.1.1.

Таблица 3.1.1

$n_1$	3	4	5
$I_1 = 1 - (1 - v)^{n_1}$	$1 - 0,7^3 = 0,657,$	$1 - 0,7^4 = 0,760,$	$1 - 0,7^5 = 0,832,$
$\ln I_1$	$-0,4201,$	$-0,2745,$	$-0,1840,$
$n_{2min} = \frac{ \ln \beta }{ \ln I_1 }$	3,83	5,87	8,8
$I_2 = 1 - (1 - p)^{n_1}$	$1 - 0,3^3 = 0,973,$	$1 - 0,3^4 = 0,9919,$	$1 - 0,3^5 = 0,9957,$
$\ln I_2$	$-0,0274,$	$-0,0090,$	$-0,0024,$
$n_{2max} = \frac{ \ln(1-\alpha) }{ \ln I_2 }$	8,1	24,8	93

Здесь  $\ln \beta = -1,6095$ ;  $\ln(1-\alpha) = -0,2232$ ;  $\ln \alpha = -1,6095$ ;  $\ln(1-p) = -1,2040$ .

Из таблицы видно, что при увеличении выбранного значения  $n_1$  зона определения  $n_2$  расширяется. Для осуществления схемы с наименьшим числом операторов необходимо взять  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 4$ . Общее количество операторов  $n = 12$ .

При выводе формул для определения параметров прямоугольных схем группирования, устойчивых к воздействию  $m$  ненадежных операторов, будем иметь в виду самые жесткие условия работы схемы. Наиболее опасными противодействию для параллельно-последовательных схем являются следующие варианты расположения ненадежных операторов:

— ненадежные операторы по одному расположены в  $m$  ячейках (рис. 2.2.5);

— все  $m$  ненадежных операторов расположены в одной из параллельных ячеек (рис. 2.2.4).

Для указанных случаев расчетные формулы вероятностей были получены ранее (2.2.5)—(2.2.6).

Запишем выражения для оценки эффективности управления в том случае, когда в схеме имеется  $m$  предельно ненадежных операторов обоого рода. При этом учтем, что самыми тяжелыми условиями работы схемы являются такие, когда ненадежные операторы с характеристиками  $p_n = v_n = 1$  расположены по одному в  $m$  параллельных ячейках, а ненадежные операторы с характеристиками  $p_n = v_n = 0$  — в одной ячейке.

Учитывая сделанные замечания и подставляя в (2.2.5) значения  $p_n = v_n = 1$ , а в (2.2.6)  $p_n = v_n = 0$ , получаем формулы для определения вероятностей проведения требуемой и запрещенной операций при наличии в схеме  $m$  ненадежных операторов первого и второго рода соответственно:

$$P_{\text{то}} = [1 - (1 - p)^{n_1}]^{n_2 - m}, \quad (3.1.13)$$

$$P_{\text{зо}} = [1 - (1 - v)^{n_1}]^{n_2 - m},$$

$$P_{\text{то}} = [1 - (1 - p)^{n_1 - m}] [1 - (1 - p)^{n_1}]^{n_2 - 1}, \quad (3.1.14)$$

$$P_{\text{зо}} = [1 - (1 - v)^{n_1 - m}] [1 - (1 - v)^{n_1}]^{n_2 - 1}.$$

Для определения параметров параллельно-последовательной схемы, устойчивой к воздействию  $m$  ненадежных операторов обоого рода, составим следующие системы неравенств:

$$[1 - (1 - p)^{n_1}]^{n_2 - m} \geq 1 - \alpha, \quad (3.1.15)$$

$$[1 - (1 - v)^{n_1}]^{n_2 - m} \leq \beta;$$

$$[1 - (1 - p)^{n_1 - m}] [1 - (1 - p)^{n_1}]^{n_2 - 1} \geq 1 - \alpha, \quad (3.1.16)$$

$$[1 - (1 - v)^{n_1 - m}] [1 - (1 - v)^{n_1}]^{n_2 - 1} \leq \beta.$$

Последние должны удовлетворяться одновременно.

Так как имеют место условия

$$[1 - (1 - p)^{n_1}]^{n_2 - m} > [1 - (1 - p)^{n_1 - m}] [1 - (1 - p)^{n_1}]^{n_2 - 1},$$

$$[1 - (1 - v)^{n_1}]^{n_2 - m} > [1 - (1 - v)^{n_1 - m}] [1 - (1 - v)^{n_1}]^{n_2 - 1},$$



то для выбора параметров схемы достаточно оставить одну систему неравенств:

$$\begin{aligned} [1 - (1 - p)^{n_1 - m}] [1 - (1 - p)^{n_2 - 1}] &\geq 1 - \alpha, & (3.1.17) \\ [1 - (1 - v)^{n_1}]^{n_2 - m} &\leq \beta, \end{aligned}$$

соблюдение которой, в свою очередь, обеспечивает выполнение условий и для систем (3.1.15), (3.1.16). Из первого неравенства (3.1.17) вытекает:  $1 - (1 - p)^{n_1 - m} > 1 - \alpha$ , откуда можно записать выражение для ориентировочной оценки величины параметра  $n_1$ :

$$n_1 > \frac{|\ln \alpha|}{|\ln(1 - p)|} + m. \quad (3.1.18)$$

Кроме того, из (3.1.16) следует:

$$\frac{|\ln \beta|}{|\ln [1 - (1 - v)^{n_1}]|} + m \leq n_2 \leq \frac{\left| \ln \frac{1 - \alpha}{1 - (1 - p)^{n_1 - m}} \right|}{|\ln [1 - (1 - p)^{n_1}]|} + 1. \quad (3.1.19)$$

Заметим, что при  $m=0$  выражения (3.1.18), (3.1.19) и (3.1.9), (3.1.10) соответственно совпадают. Подставляя в выражение (3.1.19) значение параметра  $n_1$ , найденное из (3.1.18), можно определить второй параметр схемы  $n_2$ .

Далее получим формулы для определения параметров последовательно-параллельной схемы при наличии в ней  $m$  предельно-ненадежных операторов. При записи формул будем иметь в виду, что наиболее тяжелыми условиями работы схемы будут такие, когда:

- все  $m$  ненадежных операторов находятся в одном ряду (рис. 2.2.7);
- ненадежные операторы по одному расположены в  $m$  рядах схемы (рис. 2.2.8).

Для рассматриваемых случаев расчетные формулы вероятности получены ранее в (2.2.8), (2.2.9).

Следуя рассуждениям, приведенным при выводе формул для параллельно-последовательной схемы, запишем формулы для последовательно-параллельной схемы при наличии  $m$  ненадежных операторов с характеристиками

$p_H = v_H = 1$  и  $p_H = v_H = 0$  соответственно:

$$\begin{aligned} P_{\text{го}} &= 1 - (1 - p^{n_2 - m})(1 - p^{n_2})^{n_1 - 1}, \\ P_{\text{ло}} &= 1 - (1 - v^{n_2 - m})(1 - v^{n_2})^{n_1 - 1}, \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

$$\begin{aligned} P_{\text{го}} &= 1 - (1 - p^{n_2})^{n_1 - m}, \\ P_{\text{ло}} &= 1 - (1 - v^{n_2})^{n_1 - m}. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Для определения параметров схемы, устойчивой к воздействию ненадежных операторов обоого рода, составим следующие системы неравенств:

$$1 - (1 - p^{n_2 - m})(1 - p^{n_2})^{n_1 - 1} \geq 1 - \alpha, \quad (3.1.22)$$

$$1 - (1 - v^{n_2 - m})(1 - v^{n_2})^{n_1 - 1} \leq \beta;$$

$$1 - (1 - p^{n_2})^{n_1 - m} \geq 1 - \alpha, \quad (3.1.23)$$

$$1 - (1 - v^{n_2})^{n_1 - m} \leq \beta.$$

Далее, так как имеют место условия

$$1 - (1 - p^{n_2 - m})(1 - p^{n_2})^{n_1 - 1} > 1 - (1 - p^{n_2})^{n_1 - m},$$

$$1 - (1 - v^{n_2 - m})(1 - v^{n_2})^{n_1 - 1} > 1 - (1 - v^{n_2})^{n_1 - m},$$

то вместо (3.1.22), (3.1.23) запишем одну систему неравенств:

$$1 - (1 - p^{n_2})^{n_1 - m} \geq 1 - \alpha, \quad (3.1.24)$$

$$1 - (1 - v^{n_2 - m})(1 - v^{n_2})^{n_1 - 1} \leq \beta,$$

решая которую, определяем параметры схемы  $n_1$ ,  $n_2$ , обеспечивающие выполнение условий и для систем (3.1.22), (3.1.23).

Из второго неравенства системы (3.1.24) запишем формулу для приближенной оценки параметра  $n_2$ :

$$n_2 > \frac{|\ln \beta|}{|\ln v|} + m. \quad (3.1.25)$$

И далее из той же системы получаем выражение для определения границ изменения параметра  $n_1$ :

$$\frac{|\ln \alpha|}{|\ln(1 - p^{n_2})|} + m \leq n_1 \leq \frac{\left| \ln \frac{1 - \beta}{1 - v^{n_2 - m}} \right|}{|\ln(1 - v^{n_2})|} + 1. \quad (3.1.26)$$

Таким образом, формулы (3.1.25) — (3.1.26) позволяют определить значения параметров последовательно-параллельных схем, устойчивых к воздействию предельно ненадежных операторов обоого рода.

Из этих же формул получаются выражения для выбора параметров схем в случае  $m=0$ :

$$n_2 \geq \frac{|\ln \beta|}{|\ln v|}, \quad (3.1.27)$$

$$\frac{|\ln \alpha|}{|\ln(1-p^{n_2})|} \leq n_1 \leq \frac{|\ln(1-\beta)|}{|\ln(1-v^{n_2})|}. \quad (3.1.28)$$

Из (3.1.28) имеем

$$\ln(1-v^{n_2}) \geq B \ln(1-p^{n_2}),$$

и далее

$$1-v^{n_2} > (1-p^{n_2})^B,$$

где

$$B = \frac{|\ln(1-\beta)|}{\ln \alpha} \ll 1.$$

Ограничившись двумя членами разложения, запишем

$$U^{n_2} \leq B p^{n_2}.$$

Это дает

$$n_2 \geq \frac{|\ln B|}{\left| \ln \frac{v}{p} \right|}. \quad (3.1.29)$$

**Пример 3.1.2.** Определить параметры параллельно-последовательной схемы, устойчивой к воздействию двух ненадежных операторов обоого рода и обеспечивающей следующие требования:  $\alpha=0,00015$ ;  $\beta=0,0001$ . Характеристики оператора  $p=0,9$ ;  $v=0,01$ .

Определим вначале параметр  $n_1$ . Используя формулу (3.1.17) при значениях  $|\ln \alpha|=8,8088$ ;  $|\ln(1-p)|=4,6052$ , получаем

$$n_1 \geq \frac{8,8088}{4,6052} + 2 = 3,9.$$

Выбираем  $n_1=4$ .

Для определения параметра  $n_2$  по формуле (3.1.19) предварительно вычислим следующие величины:

$$Q_1 = |\ln \beta| = 9,2103; \quad Q_2 = |\ln [1 - (1-v)^4]| = 3,234,$$

$$Q_3 = \left| \ln \frac{1-\alpha}{1-(1-p)^2} \right| = 0,01001; \quad Q_4 = |\ln [1 - (1-p)^4]| = 0,0001,$$

$$Q_1/Q_2 \approx 2,9; \quad Q_3/Q_4 \approx 101.$$

Находим границы изменения параметра  $n_2$  при  $n_1=4$ :

$$Q_1/Q_2 + m \leq n_2 \leq Q_3/Q_4 + 1,$$

$$4,9 \leq n_2 \leq 102.$$

Выбираем минимальное значение параметра  $n_2=5$ .

Проверим выполнение схемой с параметрами  $n_1=4$ ,  $n_2=5$  заданных условий (3.1.17):

$$P_{\tau 0} = [1 - (1-p)^2][1 - (1-p^4)]^4 = 0,9999,$$

$$P_{\lambda 0} = [1 - (1-v)^4]^3 = 0,000064.$$

Проверка показывает, что схема с параметрами  $n_2=4$ ,  $n_1=5$  удовлетворяет заданным требованиям.

Для определения параметра  $n_1$  по формуле (3.1.25) произведем предварительные расчеты:

$$Q_1 = |\ln \alpha| = 8,8080, \quad Q_2 = |\ln(1-p^4)| = 3,234,$$

$$Q_3 = \left| \ln \frac{1-\beta}{1-v^2} \right| \approx 0, \quad Q_4 = |\ln(1-v^4)| \approx 0,$$

$$Q_1/Q_2 = 27; \quad Q_3/Q_4 - \text{неопределенность.}$$

При выбранном значении параметра  $n_2$  находится только нижняя граница для величины  $n_2$ , равная 5.

Проверим, удовлетворяет ли схема с параметрами  $n_1=5$ ,  $n_2=4$  заданным условиям:

$$P_{\tau 0} = 1 - (1-p^4)^3 = 1 - 0,0394^3 = 0,99994,$$

$$P_{\lambda 0} = 1 - (1-v^2)(1-v^4)^4 = 1 - 0,9999 \cdot 0,999999999^4 = 0,0001.$$

Проверка показывает, что схема с параметрами  $n_1=5$ ,  $n_2=4$  удовлетворяет заданным требованиям.

### 3.2. Расчет параметров избирательно-суммирующих схем

Расчет параметров в этом случае сводится к выбору величин  $n$ ,  $l$  по заданным  $p$ ,  $v$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и данным о неработоспособных операторах.

Наряду с этой может рассматриваться и задача расчета требуемых характеристик операторов  $p$ ,  $v$ , а также задача определения допустимых величин  $\alpha$ ,  $\beta$ .

**Приближенная методика выбора параметров** основана на оценке биномиальной суммы

$$W_{n,l} = \sum_{k=0}^l C_n^{n-k} v^{n-k} (1-v)^k, \quad (3.2.1)$$

$$0 < v < 1,$$

которую можно записать и так:

$$W_{n,l} = v^n \sum_{k=0}^l C_n^k R^k, \quad (3.2.2)$$

где  $R = (1 - v)/v$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

Рассмотрим выражение

$$\bar{W}_{n,l} = v^n \sum_{k=0}^l C_n^k R^k, \quad (3.2.3)$$

полученное заменой чисел  $C_n^k$  меньшими числами  $C_n^{k,l}$ . Следовательно, имеет место соотношение  $W_{n,l} \geq \bar{W}_{n,l}$ .

Выражение (3.2.3) можно преобразовать к виду

$$\bar{W}_{n,l} = v^n (1 + R)^l$$

или  $\bar{W}_{n,l} = v^{n-l}$ . Таким образом, получаем

$$\bar{W}_{n,l} \geq v^{n-l}.$$

Вместо (3.2.1) можно записать

$$W_{n,l} = 1 - \sum_{k=l+1}^n C_n^{n-k} v^{n-k} (1 - v)^k \quad (3.2.4)$$

или

$$W_{n,l} = 1 - [C_n^0 v^n (1 - v)^0 + C_n^1 v^{n-1} (1 - v)^1 + \dots \\ \dots + C_n^{n-(l+1)} v^{n-(l+1)} (1 - v)^{l+1}].$$

Это дает

$$W_{n,l} = 1 - (1 - v)^n [1 + C_n^1 (1/R)^1 + C_n^2 (1/R)^2 + \dots \\ \dots + C_n^{n-(l+1)} (1/R)^{n-(l+1)}],$$

что записывается в виде

$$W_{n,l} = 1 - (1 - v)^n \sum_{k=0}^{n-(l+1)} C_n^k (1/R)^k. \quad (3.2.5)$$

Рассмотрим выражение

$$\underline{W}_{n,l} = 1 - (1 - v)^n \sum_{k=0}^{n-(l+1)} C_n^{k-(l+1)} (1/R)^k, \quad (3.2.6)$$

полученное из (3.2.5) заменой чисел  $C_n^k$  небольшими  $C_n^{k-(l+1)}$ . Следовательно, получаем соотношение  $W_{n,l} \leq \underline{W}_{n,l}$  или

$$W_{n,l} \leq 1 - (1 - v)^n (1 + 1/R)^{n-(l+1)},$$

откуда следует

$$W_{n,l} \leq 1 - (1 - v)^k \frac{1}{1 - v^{n-(l+1)}} \quad (3.2.7)$$

и окончательно

$$W_{n,l} \leq 1 - (1 - v)^{(l+1)}.$$

Объединяя полученные оценки, запишем

$$v^{n-l} \leq \sum_{k=0}^l C_n^{n-k} v^{n-k} (1 - v)^k \leq 1 - (1 - v)^{l+1}. \quad (3.2.8)$$

Используя этот результат для оценки (2.3.3), имеем

$$p^{n-l} \leq \sum_{k=0}^l C_n^{n-k} p^{n-k} (1 - p)^k \leq 1 - (1 - p)^{l+1}, \quad (3.2.9)$$

$$v^{n-l} \leq \sum_{k=0}^l C_n^{n-k} v^{n-k} (1 - v)^k \leq 1 - (1 - v)^{l+1}.$$

Область, образуемая границами двойного неравенства первого из выражений (3.2.9), показана на рис. 3.2.1 [6].

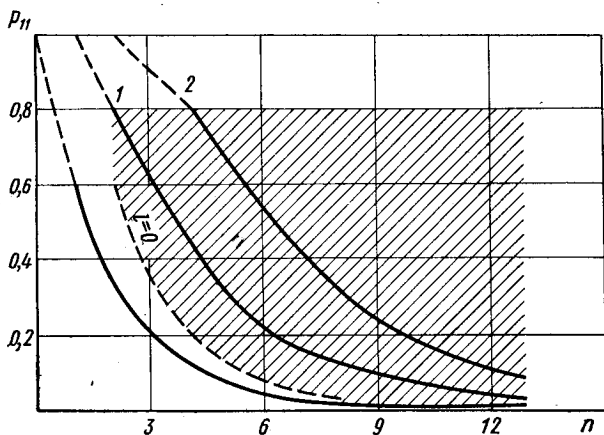


Рис. 3.2.1.

Применим выражение (3.2.9) для выбора параметров группы. Получим

$$\begin{aligned} [p^{n-l} \leq 1 - (1 - p)^{l+1}] &\geq 1 - \alpha, \\ [v^{n-l} \leq 1 - (1 - v)^{l+1}] &\leq \beta. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Определяемые при расчетах значения параметров должны удовлетворять двум системам неравенств:

$$\begin{aligned} p^{n-l} &\geq 1-\alpha, \\ v^{n-l} &\leq \beta; \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

$$\begin{aligned} 1-(1-p)^{l+1} &\geq 1-\alpha, \\ 1-(1-v)^{l+1} &\leq \beta, \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

по виду которых можно сделать вывод о существовании дополнительных ограничений, уже известных нам:  $p \geq 1-\alpha$ ,  $v \leq \beta$ . Эти ограничения появились в ходе получения приближенных оценок. Они существенно сужают область применения приближенной методики расчета, поскольку в тех случаях, когда эти ограничения выполняются, прибегать к группированию имеет смысл только тогда, когда ожидается потеря работоспособности операторами.

Не останавливаясь на способах получения менее грубых оценок, просмотрим ход расчета при одном ненадежном операторе в группе. Для характеристик  $p_H = v_H = 1$  из формул (2.3.29) с учетом выражений (3.2.9) имеем

$$p^{n-(l+1)} \leq \sum_{k=0}^l C_{n-1}^{n-1-k} p^{n-1-k} (1-p)^k \leq 1 - (1-p)^{l+1},$$

$$v^{n-(l+1)} \leq \sum_{k=0}^l C_{n-1}^{n-1-k} v^{n-1-k} (1-v)^k \leq 1 - (1-v)^{l+1},$$

причем условия для выбора параметров таковы:

$$p^{n-(l+1)} \geq 1-\alpha, \quad 1-(1-p)^{l+1} \geq 1-\alpha, \quad (3.2.13)$$

$$v^{n-(l+1)} \leq \beta; \quad 1-(1-v)^{l+1} \leq \beta.$$

Для ненадежного оператора с характеристиками  $p_H = v_H = 0$  из формул (2.3.11) получаем

$$p^{n-1-(l-1)} \geq 1-\alpha, \quad 1-(1-p)^{(l-1)+1} \geq 1-\alpha, \quad (3.2.14)$$

$$v^{n-1-(l-1)} \leq \beta, \quad 1-(1-v)^{(l-1)+1} \leq \beta.$$

Система неравенств (3.2.13) имеет следующие решения:

$$\frac{|\ln \beta|}{|\ln v|} + \frac{|\ln \alpha|}{|\ln(1-p)|} \leq n \leq \frac{|\ln(1-\alpha)|}{|\ln p|} + \frac{|\ln(1-\beta)|}{|\ln(1-v)|}, \quad (3.2.15)$$

$$-1 + \frac{|\ln \alpha|}{|\ln(1-p)|} \leq l \leq -1 + \frac{|\ln(1-\beta)|}{|\ln(1-v)|},$$

а система (3.2.14) приводит к условиям

$$\frac{|\ln \beta|}{|\ln v|} + \frac{|\ln \alpha|}{|\ln(1-p)|} \leq n \leq \frac{|\ln(1-\alpha)|}{|\ln p|} + \frac{|\ln(1-\beta)|}{|\ln(1-v)|}, \quad (3.2.16)$$

$$\frac{|\ln \alpha|}{|\ln(1-p)|} \leq l \leq \frac{|\ln(1-\beta)|}{|\ln(1-v)|}.$$

Поскольку схема группирования должна быть рассчитана при работе с ненадежным оператором, имеющим любые из рассмотренных характеристик, параметры схемы  $n$ ,  $l$  должны удовлетворять обеим системам неравенств (3.2.15), (3.2.16). Решение получаем в виде

$$\frac{|\ln \beta|}{|\ln v|} + \frac{|\ln \alpha|}{|\ln(1-p)|} \leq n \leq \frac{|\ln(1-\alpha)|}{|\ln p|} + \frac{|\ln(1-\beta)|}{|\ln(1-v)|}, \quad (3.2.17)$$

$$\frac{|\ln \alpha|}{|\ln(1-p)|} \leq l \leq -1 + \frac{|\ln(1-\beta)|}{|\ln(1-v)|},$$

$$l = 1, 2, \dots, n-2.$$

Рассмотрим примеры.

**Пример 3.2.1.** Определить параметры схемы группирования, устойчивой к воздействию одного ненадежного оператора, при условиях:  $p=0,95$ ;  $\alpha=0,1$ ;  $v=0,05$ ;  $\beta=0,15$ . Поскольку условия  $p \geq 1-\alpha$ ,  $\alpha \leq \beta$  соблюдены, можно воспользоваться полученными выше оценками.

Для нашего случая имеем:

$$\begin{array}{ll} \ln(1-\beta) = -0,1625; & \ln \alpha = -2,3026; \\ \ln(1-v) = -0,05134; & \ln(1-p) = -2,9958; \\ \ln(1-\alpha) = -0,1054; & \ln \beta = -1,8971; \\ \ln p = -0,0513; & \ln v = -2,9958. \end{array}$$

Для условий (3.2.11) получаем

$$\frac{2,3026}{2,9958} + \frac{1,8971}{2,9958} \leq n \leq \frac{0,1625}{0,0513} + \frac{0,1054}{0,0513},$$



$$\frac{2,3026}{2,9958} \leq l \leq \frac{0,1625}{0,0513} - 1$$

или  $1,34 \leq n \leq 5,2$ ;  $0,76 \leq l \leq 2,2$ .

Таким образом, имеются следующие множества целочисленных значений параметров:  $n = \{2, 3, 4, 5\}$ ;  $l = \{1, 2\}$ . С учетом требований для  $l$  ( $l=1, 2, \dots, n-2$ ) можно наметить варианты:  $l=1$ ;  $n = \{3, 4, 5\}$  либо  $l=2, n = \{4, 5\}$ .

Оптимальным является вариант с наименьшим значением числа параметров. Таким образом, целесообразно принять значения искомым параметров:  $l=1, n=3$ . Закон работы избирательно-суммирующей схемы получаем в виде «два из трех».

Рассмотрим далее наши зависимости для общего случая. Вначале обратимся к формуле (2.3.24) для случая  $p_n = v_n = 0$ . Воспользовавшись заменой

$$k-m=K, \quad n-k=N-K, \quad n-m=N, \quad L=l-m, \quad (3.2.18)$$

выражения (2.3.24) запишем в виде

$$(P_{\text{то}})_{n-l, m} = \sum_{K=0}^L C_N^{N-K} p^{N-K} (1-p)^K, \quad (3.2.19)$$

$$(P_{\text{но}})_{n-l, m} = \sum_{K=0}^L C_N^{N-K} v^{N-K} (1-v)^K.$$

Выражения (3.2.19) с точностью до обозначений совпадают с выражениями (2.3.3), для которых уже были получены оценки (3.2.9). Поэтому, воспользовавшись ими, можно записать

$$p^{N-L} \leq \sum_{K=0}^L C_N^{N-K} p^{N-K} (1-p)^K \leq 1 - (1-p)^{L+1}, \quad (3.2.20)$$

$$v^{N-L} \leq \sum_{K=0}^L C_N^{N-K} v^{N-K} (1-v)^K \leq 1 - (1-v)^{L+1},$$

а возвратившись к исходным обозначениям, запишем следующее:

$$p^{n-l} \leq \sum_{k=m}^l C_{n-m}^{n-k} p^{n-k} (1-p)^{k-m} \leq 1 - (1-p)^{l+m+1}, \quad (3.2.21)$$

$$v^{n-l} \leq \sum_{k=m}^l C_{n-m}^{n-k} v^{n-k} (1-v)^{k-m} \leq 1 - (1-v)^{l+m+1},$$

где  $m \leq l \leq n-1-m$ .

При  $m=0$  из (3.2.21) получают выражения (3.2.9).

Для выбора параметров необходимо рассмотреть систему следующих неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{|\ln \beta|}{|\ln v|} &\leq n-l \leq \frac{|\ln(1-\alpha)|}{|\ln p|}, \\ (m+1) + \frac{|\ln \alpha|}{|\ln(1-p)|} &\leq l \leq \frac{|\ln(1-\beta)|}{|\ln(1-v)|} + (m-1). \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Для случая  $p_n = v_n = 1$  с помощью подстановок (3.2.18) выражения (2.3.25), (2.3.26) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} (P_{\text{то}})_{n-l, m} &= \sum_{K=0}^L C_N^{N-K} p^{N-K} (1-p)^K, \\ (P_{\text{ло}})_{n-l, m} &= \sum_{K=0}^L C_N^{N-K} v^{N-K} (1-v)^K. \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

С помощью оценок (3.2.9) получаем

$$\begin{aligned} p^{N-l} &\leq \sum_{K=0}^L C_N^{N-K} p^{N-K} (1-p)^K \leq 1 - (1-p)^{l+1}, \\ v^{N-l} &\leq \sum_{K=0}^L C_N^{N-K} v^{N-K} (1-v)^K \leq 1 - (1-v)^{l+1}, \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

а возвратившись к исходным обозначениям, получаем следующее:

$$\begin{aligned} p^{n-m-l} &\leq \sum_{K=0}^L C_N^{N-K} p^{N-K} (1-p)^K \leq 1 - (1-p)^{l+1}, \\ v^{n-m-l} &\leq \sum_{K=0}^L C_N^{N-K} v^{N-K} (1-v)^K \leq 1 - (1-v)^{l+1}. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Здесь  $m \leq l \leq n-1-m$ .

При  $m=0$  из (3.2.25) также получают выражения (3.2.9).

Опуская промежуточные преобразования, приведем результирующие неравенства, необходимые для выбора параметров:

$$\begin{aligned} m + \frac{|\ln \beta|}{|\ln v|} &\leq n-l \leq m + \frac{|\ln(1-\alpha)|}{|\ln p|}, \\ -1 + \frac{|\ln \alpha|}{|\ln(1-p)|} &\leq l \leq -1 + \frac{|\ln(1-\beta)|}{|\ln(1-v)|}. \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

Повторим утверждение о том, что поскольку схема группирования должна работать в любых условиях, зна-

чения параметров  $n$  и  $l$  должны удовлетворять обеим системам неравенств (3.2.22), (3.2.26). Это дает

$$(m-1) + \frac{|\ln \alpha|}{|\ln(1-p)|} + \frac{|\ln \beta|}{|\ln v|} \leq n \leq \frac{|\ln(1-\beta)|}{|\ln(1-v)|} + \frac{|\ln(1-\alpha)|}{|\ln p|} + (m-1), \quad (3.2.27)$$

$$(m-1) + \frac{|\ln \alpha|}{|\ln(1-p)|} \leq l \leq -1 + \frac{|\ln(1-\beta)|}{|\ln(1-v)|}; \quad m \leq l \leq n-1-m.$$

Напомним, что в качестве необходимых условий существования решения остаются ранее записанные:  $p \geq 1-\alpha$ ,  $v \leq \beta$ .

**Выбор параметров группы графоаналитическим способом.** Рассмотрим теперь общий случай выбора параметров, не требующий соблюдения сграницивающих условий.

Пусть вначале  $m=0$  и выбор параметров связан с решением неравенства (2.3.4), которое перепишем так:

$$p^n \sum_{k=0}^l C_n^k X^k \geq 1-\alpha, \quad X = \frac{1-p}{p}, \quad (3.2.28)$$

$$v^n \sum_{k=0}^l C_n^k Y^k \leq \beta, \quad Y = \frac{1-v}{v}.$$

При логарифмировании обеих неравенств получаем следующую область для параметра  $n$ :

$$\frac{\left| \frac{\ln \frac{\beta}{l}}{\sum_0^l C_n^k Y^k} \right|}{|\ln v|} \leq n \leq \frac{\left| \frac{\ln \frac{1-\alpha}{l}}{\sum_0^l C_n^k X^k} \right|}{|\ln p|}. \quad (3.2.29)$$

Условия существования этой области, в свою очередь, требуют выполнения неравенства

$$\frac{\left| \frac{\ln \frac{\beta}{l}}{\sum_0^l C_n^k Y^k} \right|}{|\ln v|} \leq \frac{\left| \frac{\ln \frac{1-\alpha}{l}}{\sum_0^l C_n^k X^k} \right|}{|\ln p|}. \quad (3.2.30)$$

В этом выражении  $X \ll 1$ ,  $Y \gg 1$ . При заданных  $\rho$ ,  $v$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  требования (3.2.23) соблюдаются при соответствующем увеличении параметра  $l$ . Вводя обозначения

$$W = \frac{\left| \ln \frac{\beta}{l} \right|}{|\ln v|} \sum_0^k C_{W^*}^k Y^k; U = \frac{\left| \ln \frac{1-\alpha}{l} \right|}{|\ln \rho|} \sum_0^k C_{U^*}^k X^k, \quad (3.2.31)$$

получаем следующую область:  $W^* \leq n \leq U^*$ , границами которой являются корни трансцендентных уравнений, численные значения которых удобно определять графоаналитическим способом с учетом условия  $0 \leq l \leq n-1$ . Расчет целесообразно проводить по этапам, начиная с  $l=0$  и каждый раз при необходимости увеличивая  $l$  на единицу до получения результата  $W^* \leq U^*$ , при котором в образующейся области имеется по крайней мере одно целое число. При наличии нескольких целых значений, исходя из принципа минимальности группы, следует взять наименьшее.

**Пример 3.2.2.** Рассчитать параметры схемы по данным:  $\alpha=0,1$ ;  $\rho=0,7$ ;  $v=0,1$ ;  $\beta=0,05$ . В этом случае условия  $\rho \geq 1-\alpha$ ,  $v \leq \beta$  не выполняются, поэтому необходимо прибегнуть к приближенному определению корней  $W^*$ ,  $U^*$ .

Рассмотрим случай с  $l=1$ . С учетом требования  $0 \leq l \leq n-1$  наименьшее значение  $n=2$ . При расчетах об этом следует помнить. Результаты вычислений помещены в табл. 3.2.1.

Таблица 3.2.1

$U$	2	2,5
$I = \frac{1-\alpha}{1+XU}$	$\frac{0,9}{1 + \frac{3}{7} 2} = 0,485$	$\frac{0,9}{1 + \frac{3}{7} 2,5} = 0,435$
$\ln l$	-0,7237	-0,8325
$U = \frac{ \ln l }{ \ln \rho }$	2,04	2,35

Здесь  $X=3/7$ ;  $|\ln \rho|=0,3564$ .

С помощью графа получаем  $U^*=2,24$ . Как видим, здесь область значений  $n$  весьма мала:  $2 \leq n \leq 2,24$ . Однако надежда на получение решения при  $l=1$  пока остается, поскольку значение  $W^*$  может

быть заключено в этой же области. Расчеты величины  $W^*$  помещены в табл. 3.2.2.

Таблица 3.2.2

$W$	2	3
$I = \frac{\beta}{1 + YW}$	$\frac{0,05}{1 + 9 \cdot 2} = 0,00263$	$\frac{0,05}{1 + 9 \cdot 3} = 0,00178$
$\ln I$	-5,9408	-6,3286
$W = \frac{ \ln I }{ \ln v }$	2,55	2,77

Графическим путем уточняем решение:  $W^* = 2,7$ . Это устанавливает требование  $n \geq 2,7$ . Таким образом, можно сделать вывод о необходимости продолжать расчет при новом значении  $l = 2$ . Соответствующие выкладки сведены в табл. 3.2.3, 3.2.4. При этом наименьшее значение  $n = 3$ .

Таблица 3.2.3

$U$	3	4
$I = \frac{1 - \alpha}{1 + C^1_U X + C^2_U X^2}$	$\frac{0,9}{1 + 3 \frac{3}{7} + 3 \frac{9}{49}} = 0,368$	$\frac{0,9}{2 + 4 \frac{3}{7} + 6 \frac{9}{49}} = 0,236$
$\ln I$	-0,9997	-1,4440
$U = \frac{ \ln I }{ \ln p }$	2,72	4,05

Здесь  $Y = 9$ ;  $|\ln v| = 2,3026$ .  
 Можно принять  $U^* = 4$ , что дает первое условие для выбора  $3 \leq n \leq 4$ . Отсюда получаем  $W^* = 3,44$ , что дает второе условие  $n \geq 3,44$ . Пересечение двух условий:

$$3 \leq n \leq 4, 3,44 \leq n,$$

дает целочисленное значение для  $n$  ( $n = 4$ ), удовлетворяющее требованиям задачи. При этом закон управления группы операторов получается в виде «два из четырех».

$W$	3	4
$I = \frac{\beta}{1 + C^1_W Y + C^2_W Y^2}$	$\frac{0,05}{1 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 81} =$ $= 0,000184$	$\frac{0,05}{1 + 4 \cdot 9 + 6 \cdot 81} =$ $= 0,0000925$
$\ln I$	-8,6007	-6,9858
$W = \frac{ \ln I }{ \ln v }$	3,73	3,04

Остановимся на особенностях методики расчета параметров для общего случая  $m > 0$ .

Для группы с ненадежными операторами, имеющими характеристики  $p_H = v_H = 1$  или  $p_H = v_H = 0$ , ранее получены формулы соответственно (3.2.23), (3.2.19). Условия для выбора параметров при этом таковы:

$$\sum_0^l C_N^{N-K} p^{N-K} (1-p)^K \geq 1 - \alpha, \quad (3.2.32)$$

$$\sum_0^l C_N^{N-K} v^{N-K} (1-v)^K \leq \beta,$$

$$\sum_0^L C_N^{N-K} p^{N-K} (1-p)^K \geq 1 - \alpha, \quad (3.2.33)$$

$$\sum_0^L C_N^{N-K} v^{N-K} (1-v)^K \leq \beta.$$

Здесь  $m \leq l \leq n - 1 - m$ .

Особенностью расчетов по сравнению со случаем с  $m = 0$  является необходимость получения решения, одновременно удовлетворяющего обеим приведенным системам неравенств. При этом имеют место формулы:

$$U_1 = \frac{\left| \ln \frac{1 - \alpha}{\sum_0^l C_{v_1}^K X^K} \right|}{|\ln p|}, \quad W_1 = \frac{\left| \ln \frac{\beta}{\sum_0^L C_{W_1}^K Y^K} \right|}{|\ln v|},$$

$$W^*_1 \leq n \leq U^*_1,$$

$$U_2 = \frac{\left| \ln \frac{1-\alpha}{L} \right|}{|\ln p|}, \quad W_2 = \frac{\left| \ln \frac{\beta}{L} \right|}{|\ln v|},$$

$$W^*_2 \leq n \leq U^*_2. \quad (3.2.34)$$

Пусть при расчетах обеих систем получены соответственно значения  $U^*_1$ ,  $U^*_2$ ,  $W^*_1$  и  $W^*_2$ . Тогда для величины  $n$  можно записать условие

$$\max(W^*_1, W^*_2) \leq n \leq \min(U^*_1, U^*_2). \quad (3.2.35)$$

Расчет прекращается при наименьшем значении  $l$ , обеспечивающем последнее неравенство.

**Пример 3.2.3.** Определить параметры схемы группирования, заданной условиями:  $m=2$ ,  $p=0,95$ ;  $\alpha=0,1$ ;  $v=0,05$ ;  $\beta=0,15$ .

Последовательность решения такова. При  $L=0$  (или  $l=m$ ) необходимо определить область значений параметра, удовлетворяющих условиям (3.2.22), (3.2.23). Если полученная область не содержит ни одного целочисленного значения, необходимо перейти к решению задачи при  $L=1$  ( $l=m+1$ ) и т. д.

Применяя указанную последовательность, изложим решение по шагам.

*Шаг 1.*  $l=l_{min}=m=2$ ;  $p_n=v_n=1$  ( $L=0$ ).

Результаты расчетов сведены в табл. 3.2.5, 3.2.6.

Таблица 3.2.5

$U_1$	10	20	30
$I = \frac{1-\alpha}{1+C^1_{U_1}X+C^2_{U_1}X^2}$	$\frac{0,9}{1 + \frac{10}{19} + \frac{45}{361}} = 0,535$	$\frac{0,9}{1 + \frac{20}{19} + \frac{190}{361}}$	$\frac{0,9}{1 + \frac{30}{19} + \frac{435}{361}}$
$\ln I$	-0,6255	-1,0614	-1,4355
$U_1 = \frac{ \ln I }{ \ln p }$	12,2	20,6	28,0

Здесь  $X=(1-p)/p=1/19$ ;  $\ln p=-0,0513$ . По графику находим  $U^*_1=22,4$ . Поскольку из условия (2.3.15) следует  $n_{min}=2m+1$ , то одна из областей, определяющих величину  $n$ , такова:  $5 \leq n \leq 24,4$ .

Таблица 3.2.6

$W_1$	2	4
$I = \frac{\beta}{1 + C^1_{W_1} Y + C^2_{W_1} Y^2}$	$\frac{0,15}{1 + 2 \cdot 19 + 1 \cdot 361} = 0,000375$	$\frac{0,15}{1 + 4 \cdot 19 + 6 \cdot 361} = 0,0000668$
$\ln I$	-7,8886	-9,6138
$W_1 = \frac{ \ln I }{ \ln v }$	2,64	3,20

Здесь  $Y=19$ ;  $\ln v = -2,9958$ . По графику получается  $W^* = 2,9$ , чему соответствует второе условие:  $4,9 \leq n$ .

Пересечение двух полученных областей дает условие

$$5 \leq n \leq 24,4. \quad (3.2.36)$$

Шаг 2.  $l = l_{min} = m = 2$ ;  $p_n = v_n = 0$  ( $L=0$ ).

Обратившись к неравенствам (3.2.26), уточним их для  $L=0$ . При этом получается система:  $p^N \geq 1 - \alpha$ ;  $v^N \leq \beta$ , существование решения которой связано с выполнением условия  $p \geq 1 - \alpha$ , которое в рассматриваемой задаче выполняется. Значение  $N$  лежит в области

$$\frac{|\ln \beta|}{|\ln v|} \leq N \leq \frac{|\ln(1 - \alpha)|}{|\ln p|}$$

или  $0,63 \leq N \leq 2,05$ , чему соответствует область

$$2,63 \leq n \leq 4,05. \quad (3.2.37)$$

Совместное рассмотрение полученных областей (3.2.36), (3.2.37) делает очевидным вывод об отсутствии решения для случая  $l=2$ . Поэтому расчет должен быть продолжен при значении  $l=3$ .

Шаг 3.  $L=1$ ;  $l=m+1=3$ ;  $p_n=v_n=0$ .

Из выражения (2.3.13) следует:  $n_{min} = l + m + 1$ . Следовательно,  $n_{min} = 6$ . Результаты расчетов сведены в табл. 3.2.7, 3.2.8.

Таблица 3.2.7

$U_2$	10	14
$I = \frac{1 - \alpha}{1 + C^1_{U_2} X}$	$\frac{0,9}{1 + \frac{10}{19}} = 0,58$	$\frac{0,9}{1 + \frac{14}{19}} = 0,52$
$\ln I$	-0,5448	-0,6636
$U_2 = \frac{ \ln I }{ \ln p }$	10,6	12,9



По графику уточняется значение  $U^*_2=1,1,5$ . Область значений  $n$  такова:  $6 \leq n \leq 13,5$ .

Таблица 3.2.8

$W_2$	1	2
$I = \frac{\beta}{1 + C_1 W_2 Y}$	$\frac{0,15}{1 + 1,19} = 0,0075$	$\frac{0,15}{1 + 2,19} = 0,00386$
$\ln I$	-4,8928	-5,5571
$W_2 = \frac{ \ln I }{ \ln \nu }$	1,6	1,85

Здесь получаем  $W^*=1,8$ . Область значений для  $n$ :  $3,8 \leq n$ . Пересечение двух областей дает следующую область:

$$6 \leq n \leq 13,5. \quad (3.2.38)$$

Шаг 4.  $L=1$ ;  $l=3$ ;  $p_n = v_n = 1$ . В отличие от шага 1 таблица расчетов имеет следующий вид (табл. 3.2.9).

Таблица 3.2.9

$U_1$	30	40
$I = \frac{1}{1 - \alpha}$	0,9	0,9
$I = \frac{1}{1 + C_1 U_1 X + C_2 U_1 X^2 + C_3 U_1 X^3}$	$\frac{30 \cdot 435 + 12180}{19 + 361 + 20577} = 0,205$	$\frac{40 \cdot 780 + 31640}{19 + 361 + 20577} = 0,134$
$\ln I$	-1,5848	-2,0100
$U_1 = \frac{ \ln I }{ \ln p }$	30,8	39,2

После уточнения получено  $U^*_1=29$ , чему соответствует область значений  $6 \leq n \leq 31$ .

Наконец, для величины  $W_1$  получена табл. 3.2.10. Здесь  $W^*_1 = 4,15$ ;  $6,15 \leq n$ .

Пересечение двух областей шага 4 дает область

$$6,15 \leq n \leq 31. \quad (3.2.39)$$

Теперь необходимо наложить области шагов 3 и 4 [(3.2.38) и (3.2.39)]. При этом получаем следующую область:

$$6,15 \leq n \leq 13,5, \quad (3.2.40)$$

Таблица 3.2.10

$W_1$	4	6
$I = \frac{1}{\beta}$	0,15	0,15
$\frac{1+C^1_{W_1}Y+C^2_{W_1}Y^2+C^3_{W_1}Y^3}{1+4 \cdot 19+6 \cdot 361+}$	$\frac{+4 \cdot 361 \cdot 9}{=0,00000505}$	$\frac{1+6 \cdot 19+15 \cdot 361+}{+20 \cdot 361 \cdot 19} =$ $=0,00000105$
$\ln I$	-12,1961	-13,7667
$W_1 = \frac{ \ln I }{ \ln \sigma }$	4,07	4,61

содержащую целочисленные значения  $n = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ , каждое из которых при  $l=3$  дает схему, устойчивую при двух неработоспособных операторах с любыми предельными характеристиками. Минимальной является схема с  $n=7$ , при которой закон управления принимает вид «четыре из семи».

### 3.3. Расчет параметров избирательно-суммирующих схем группирования (методом малого параметра)

Избежать сложных расчетов, присущих графоаналитическому способу, можно, применяя формулы для определения корней трансцендентных уравнений (3.2.31). Последние могут быть получены, например, методом малого параметра [88].

Этот метод иллюстрируется на примере решения одного из двух уравнений (3.2.31):

$$U = \frac{\left| \ln \frac{1-\alpha}{\sum C_U^k X^k} \right|}{|\ln p|},$$

которое удобно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^l C_U^{U-k} p^{U-k} (1-p)^k = 1-\alpha, \quad (3.3.1)$$

причем  $0 \leq l \leq U-1$ .

Решение будем искать в виде ряда

$$U^* = U_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + a_3 \alpha^3 + \dots, \quad (3.3.2)$$

в котором  $\alpha$  — малый параметр. Задача будет решена после определения неизвестных значений  $U_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  и т. д.

С целью упрощения дальнейшее изложение будем вести для укороченного ряда

$$U^* = U_0 + a_1 \alpha. \quad (3.3.3)$$

Заметим, что параметры  $U_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  и т. д. должны зависеть от величины  $l$ . Поэтому удобно находить их путем обобщения результатов, полученных при последовательном наращивании значений  $l$ , начиная с  $l=0$ . Целесообразно изменить и обозначение самих параметров, используя вместо (3.3.2) новую форму представления:

$$U^* = U_{l_0} + a_{l_1} \alpha + a_{l_2} \alpha^2 + a_{l_3} \alpha^3 + \dots, \quad (3.3.4)$$

а при ограничении разложения двумя членами — форму

$$U^* = U_{l_0} + a_{l_1} \alpha. \quad (3.3.5)$$

При  $l=0$  уравнение (3.3.1) принимает следующий вид:

$$p^U = 1 - \alpha. \quad (3.3.6)$$

Кроме того, при  $\alpha=0$ , как это следует из (3.3.6),  $U_{l_0} = 0$ . Заменяя далее  $p^U$  двумя членами разложения в ряд Тейлора:

$$p^U = 1 - A_1 U + A_2 U^2 + \dots, \quad \text{где } A_k = (|\ln p|)^k / k!;$$

$$k = 1, 2, 3 \dots,$$

получаем вместо (3.3.6) выражение  $1 - A_1 U = 1 - \alpha$ .

С учетом (3.3.5) из последнего выражения имеем

$$1 - A_1 a_{01} \alpha = 1 - \alpha,$$

и следовательно:

$$a_{01} = 1/A_1. \quad (3.3.7)$$

Для  $l=1$  из (3.3.1) получаем уравнение

$$p^{U-1} [p + U(1-p)] = 1 - \alpha, \quad (3.3.8)$$

решение которого находим в виде  $U^* = U_{10} + a_{11} \alpha$ .

Из выражения (3.3.8) видно, что  $U_{10} = 1$ . Применяв разложение в ряд Тейлора функции  $p^{U-1}$  и ограничившись при этом двумя членами, получаем уравнение

$$[1 - A_1(U-1)][p + U(1-p)] = 1 - \alpha$$

или

$$(1 + A_1)p + [(1 + A_1)(1-p) - A_1 p]U - A_1(1-p)U^2 = 1 - \alpha,$$

Подставив сюда значения  $U=1+a_{11}\alpha$ ,  $U^2=1+2a_{11}\alpha$ , получаем выражение

$$a_{11}=[A_1-(1-p)]^{-1}. \quad (3.3.9)$$

Наконец, для  $l=2$  вместо (3.3.1) имеем

$$p^{U-2} \left[ p^2 + Up(1-p) + \frac{U(U-1)}{2} (1-p)^2 \right] = 1 - \alpha. \quad (3.3.10)$$

Решение последнего уравнения запишем в виде  $U^* = U_{20} + a_{21}\alpha$ . Из выражения (3.3.10) видно, что  $U_{20}=2$ .

Применив разложение в ряд функции  $p^{U-2}$  и ограничившись при этом двумя членами, получим выражение

$$\left[ 1 - A_1(U-2) \right] \left\{ p^2 \left[ p(1-p) - \frac{(1-p)^2}{2} \right] U + \frac{(1-p)^2}{2} U^2 \right\} = 1 - \alpha$$

и далее

$$\begin{aligned} & (1+2A_1)p^2 + \left\{ (1+2A_1) \left[ p(1-p) - \frac{(1-p)^2}{2} \right] - \right. \\ & \quad \left. - Ap^2 \right\} U + \left\{ (1+2A_1) \frac{(1-p)^2}{2} - \right. \\ & \left. - A_1 \left[ p(1-p) - \frac{(1-p)^2}{2} \right] \right\} U^2 - \frac{A_1(1-p)^2}{2} U^3 = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Подставляя сюда значения  $U=2+a_{21}\alpha$ ,  $U^2=4+4a_{21}\alpha$ ,  $U^3=8+12a_{21}\alpha$ , после несложных преобразований получаем выражение

$$a_{21} = \frac{1}{A_1 - (1-p) - \frac{(1-p)^2}{2}}. \quad (3.3.11)$$

При  $l=3$  получаем следующее выражение:

$$a_{31} = \left[ A_1 - (1-p) - \frac{(1-p)^2}{2} - \frac{(1-p)^3}{3} \right]^{-1}, \quad (3.3.12)$$

причем  $U_{30}=3$ .

На этом основании для произвольного  $l$  записываем значение коэффициента при  $\alpha$  в виде

$$a_{l1} = \left[ A_1 - \sum_{k=1}^l \frac{(1-p)^k}{k} \right]^{-1}. \quad (3.3.13)$$

Кроме того,  $U_{l0}=l$ .

Приведем значения остальных четырех коэффициентов выражения  $U^* = l + a_{i_1}\alpha + a_{i_2}\alpha^2 + a_{i_3}\alpha^3 + a_{i_4}\alpha^4 + a_{i_5}\alpha^5$ :

$$a_{i_1} = \left[ \sum_{k=2}^l \frac{(1-p)^k}{k} (-1)^{k+1} - A_1 \sum_{k=1}^l \frac{(1-p)^k}{k} (-1)^{k+1} \right] (a_{i_1})^3,$$

$$a_{i_2} = \left[ \sum_{k=3}^l \frac{(1-p)^k}{k} (-1)^{k+1} - A_1 \sum_{k=2}^l \frac{(1-p)^k}{k} (-1)^{k+1} \right] (a_{i_1})^4,$$

$$a_{i_3} = \left[ \sum_{k=4}^l \frac{(1-p)^k}{k} (-1)^{k+1} - A_1 \sum_{k=3}^l \frac{(1-p)^k}{k} (-1)^{k+1} \right] (a_{i_1})^5,$$

$$a_{i_4} = \left[ \sum_{k=5}^l \frac{(1-p)^k}{k} (-1)^{k+1} - A_1 \sum_{k=4}^l \frac{(1-p)^k}{k} (-1)^{k+1} \right] (a_{i_1})^6.$$

В самом общем виде любой коэффициент представления решения с помощью ряда от малого параметра  $a_{i_r}$  ( $r=2, 3, \dots$ ) может быть записан следующим образом:

$$a_{i_r} = \left[ \sum_{k=r}^l \frac{(1-p)^k}{k} (-1)^{k+1} - A_1 \sum_{k=r-1}^l \frac{(1-p)^k}{k} (-1)^{k+1} \right] (a_{i_1})^{r+1}. \quad (3.3.14)$$

Далее переходим к получению выражения для  $W^*$ . С этой целью второе уравнение (3.2.30) перепишем в виде

$$\sum_{k=0}^l C_W^{W-k} v^{W-k} (1-v)^k = \beta. \quad (3.3.15)$$

Затем путем искусственного преобразования придадим последнему вид, совпадающий с выражением (3.3.1):

$$\sum_{k=0}^l C_W^{W-k} v^{W-k} (1-v)^k = 1 - (1-\beta). \quad (3.3.16)$$

На основании формального совпадения последнего с выражением (2.3.1) можно записать выражения для корня уравнения (3.3.16):

$$W^* = l + b_{i_1}(1-\beta) + b_{i_2}(1-\beta)^2 + b_{i_3}(1-\beta)^3 + \dots, \quad (3.3.17)$$

в котором коэффициенты всех  $b_{l_r}$  ( $r=1, 2, \dots$ ) определяются из выражений

$$b_{l_r} = \left[ \sum_{k=r}^l \frac{(1-v)^k}{k} (-1)^{k+1} - B_1 \sum_{k=r-1}^l \frac{(1-v)^k}{k} (-1)^{k+1} \right] (b_{l_1})^{r+1}, \quad (3.3.18)$$

$$b_{l_1} = \frac{1}{B_1 - \sum_{k=1}^l \frac{(1-v)^k}{k}}, \quad B_1 = |\ln v|. \quad (3.3.19)$$

Применение формул для  $U^*$  и  $W^*$  дает возможность получить решение, начиная с  $l=0$ . Расчет необходимо остановить на значении  $l$ , при котором обеспечивается условие  $W^* \leq U^*$ , содержащее по крайней мере одно целое число.

При расчете параметров группы, учитывающем возможное противодействие  $m$  ненадежных операторов, в соответствии с условиями (3.2.28) можно записать

$$U^* = (l-m) + a_{l_1} \alpha + a_{l_2} \alpha^2 + a_{l_3} \alpha^3 + \dots, \quad (3.3.20)$$

$$W^* = l + b_{l_1} (1-\beta) + b_{l_2} (1-\beta)^2 + b_{l_3} (1-\beta)^3 \dots$$

Здесь

$$a_{l_r} = \left[ \sum_{k=r}^{l-m} \frac{(1-p)^k}{k} (-1)^{k+1} - A_1 \sum_{k=r-1}^{l-m} \frac{(1-p)^k}{k} (-1)^{k+1} \right] (a_{l_1})^{r+1},$$

$$a_{l_1} = \frac{1}{A_1 - \sum_{k=1}^{l-m} \frac{(1-p)^k}{k}}, \quad m \leq l \leq n-1-m.$$

Заметим также, что при проведении вычислений выражение (3.3.17) часто целесообразно свести к следующему виду:

$$W^* = C_0 - C_1 \beta + C_2 \beta^2 - C_3 \beta^3 + \dots, \quad (3.3.21)$$

где

$$\begin{aligned} C_0 &= l + b_{l_1} + b_{l_2} + b_{l_3}; \\ C_1 &= b_{l_1} + 2b_{l_2} + 3b_{l_3}; \\ C_2 &= b_{l_2} + 3b_{l_3}; \\ C_3 &= b_{l_3}. \end{aligned}$$

При необходимости остальные коэффициенты  $C_r$  ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ) ряда (3.3.21) могут быть получены с учетом следующих соображений:

$$\begin{aligned} C_0 &= l + C_{0_1}b_{l_1} + C_{0_2}b_{l_2} + C_{0_3}b_{l_3} + C_{0_4}b_{l_4} + \dots + C_{0_r}b_{l_r}, \\ C_1 &= C_{1_1}b_{l_1} + C_{1_2}b_{l_2} + C_{1_3}b_{l_3} + C_{1_4}b_{l_4} + \dots + C_{1_r}b_{l_r}, \\ C_2 &= C_{2_2}b_{l_2} + C_{2_3}b_{l_3} + C_{2_4}b_{l_4} + \dots + C_{2_r}b_{l_r}, \\ C_3 &= C_{3_3}b_{l_3} + C_{3_4}b_{l_4} + \dots + C_{3_r}b_{l_r}, \\ &\dots \\ C_{r-1} &= C_{r-1}^{r-1}b_{l_{(r-1)}} + C_r^{r-1}b_{l_r}, \\ C_r &= C_r^r b_{l_r}. \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

### 3.4. Сравнительная оценка схем группирования операторов

Группирование операторов является одним из способов обеспечения требуемой эффективности и защищенности системы управления от воздействия ненадежных операторов. Приведенные выше методики позволяют определять параметры избирательно-суммирующих и прямоугольных схем, удовлетворяющих заданным требованиям.

Сравнительная оценка схем группировки преследует цель получения рекомендаций по применению того или иного типа схемы в зависимости от конкретных условий эксплуатации, наличия ограничивающих факторов экономического и конструктивного характера, а также требований по надежности управления.

Показателями эффективности, по которым может производиться сравнение схем группирования, являются:

— вероятность выполнения группой требуемой операции;

— вероятность проведения ложной операции;

— число ненадежных операторов, при котором нарушается работоспособность схемы.

Дополнительными характеристиками схем могут служить число операторов в группе и сложность аппаратурной реализации способа группирования.

Чтобы не возвращаться в дальнейшем к конструктивным особенностям различных схем группирования, заметим, что в техническом отношении избирательно-суммирующие схемы несколько сложнее прямоугольных. Это обстоятельство вызвано наличием в них устройства «голосования», предназначенного для формирования сигнала на выходе избирательно-суммирующей схемы по закону « $n - l$  из  $n$ ». Однако логика работы этого устройства проста, и его техническая реализация не представляет труда.

Перед проведением сравнительных расчетов показателей эффективности различных схем группирования необходимо установить значения исходных величин  $p$ ,  $v$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ .

Расчетные характеристики  $p$ ,  $v$  работоспособных операторов будем выбирать в предположении равенства их реакций на различные сигналы. Пользуясь при этом приводимой ниже таблицей,

	1	0
1	$p$	$1-p$
0	$v$	$1-v$

для случая равных реакций на различные сигналы получаем зависимости  $p = 1 - v$ . Кроме того, сравнение различных схем группирования целесообразно проводить для четырех уровней характеристик:  $p = 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999$ .

Допустимые значения требований по надежности управления — величины  $\alpha$  и  $\beta$  — зависят от конкретного назначения аппаратуры управления. При расчетах, в предположении  $\alpha = \beta$ , целесообразно изменять их значения в широких пределах, начиная с 0,1. Получаемые



таким образом данные смогут характеризовать эффективность схем в различных условиях.

Результаты расчетов минимальных значений параметров избирательно-суммирующих схем приведены на рис. 3.4.1—3.4.10, прямоугольных схем — на рис. 3.4.11—3.4.16.

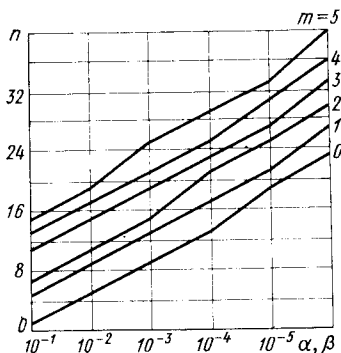


Рис. 3.4.1.

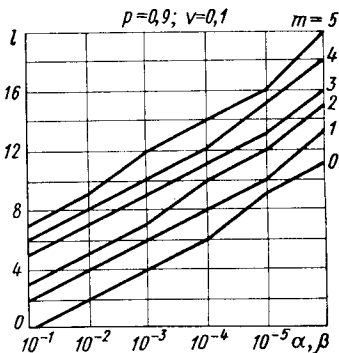


Рис. 3.4.2.

На графиках везде отмечены дискретные величины полученных значений. Число ненадежных операторов обоего рода достигает  $m=5$ .

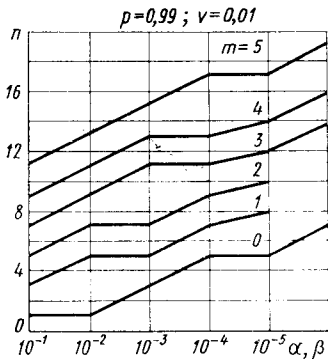


Рис. 3.4.3.

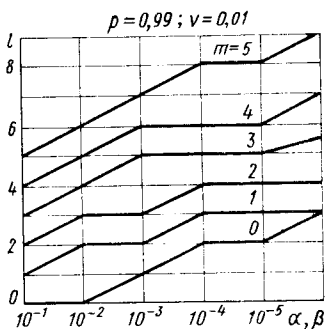


Рис. 3.4.4.

С учетом  $n$  и  $l$  можно установить формулу закона управления избирательно-суммирующей схемы « $n-l$  из  $n$ ». Так, при  $\alpha=\beta=10^{-4}$ ,  $p=1-v=0,99$ ,  $m=2$  получаем  $n=9$ ,  $l=4$ . Следовательно, группа операторов, состоя-

щая из девяти человек, соединенных в схему с законом управления «пять из девяти», будет устойчиво работать даже в случае, если два из них станут предельно ненадежными.

Характер изменения параметров  $n$  и  $l$  для  $m=5$  в зависимости от уровня профессиональной подготовки операторов показан на рис. 3.4.9 и 3.4.10.

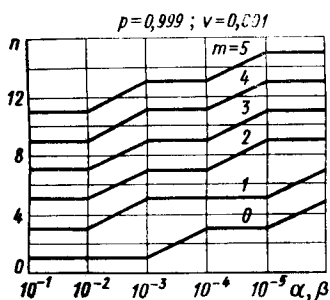


Рис. 3.4.5.

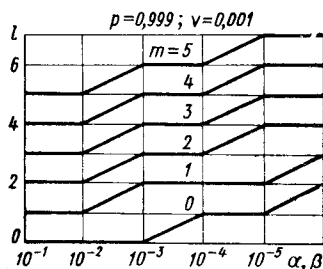


Рис. 3.4.6.

Расчет минимальных параметров прямоугольных схем проведен по формулам (3.1.18), (3.1.19) и (3.1.25), (3.1.26). При расчетных условиях ( $p=1-v$ ,  $\alpha=\beta$ ) значения  $n_1$  и  $n_2$  параллельно-последовательной схемы и соответственно  $n_2$  и  $n_1$  последовательно-параллельной схемы совпадают, поэтому их графики на рис. 3.4.11—3.4.16 совмещены.

По результатам расчетов можно сказать, что избираемо-суммирующие схемы, обеспечивающие заданную эффективность и устойчивые к действиям установленно-

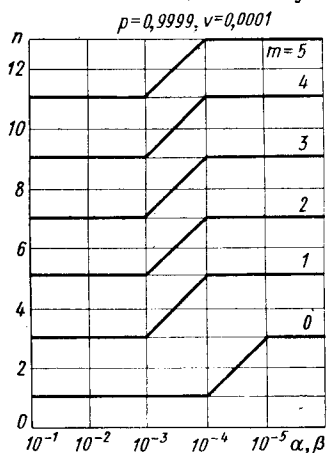


Рис. 3.4.7.

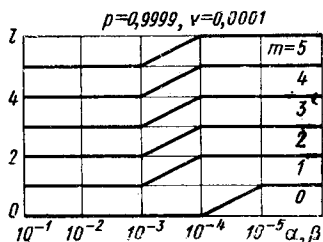


Рис. 3.4.8.

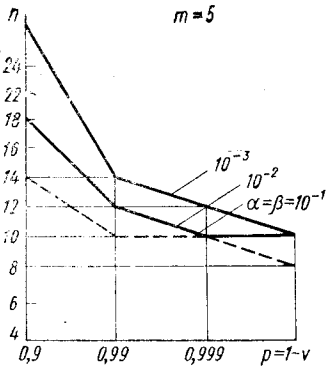


Рис. 3.4.9.

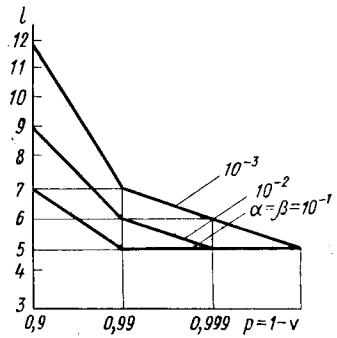


Рис. 3.4.10.

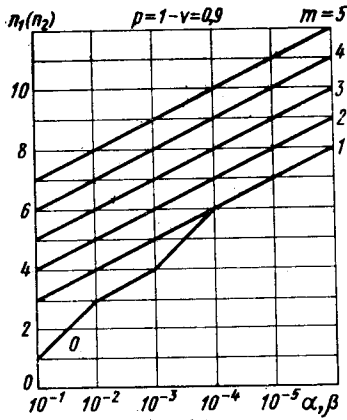


Рис. 3.4.11.

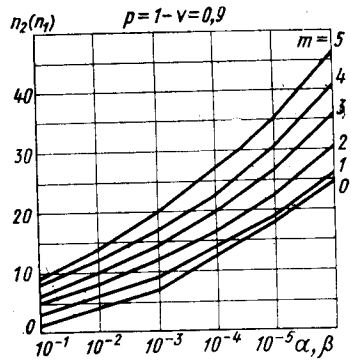


Рис. 3.4.12.

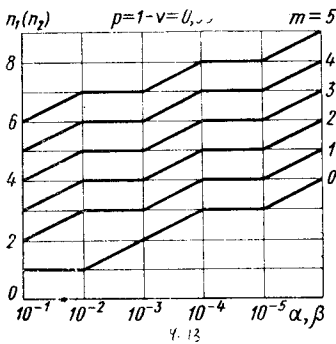


Рис. 3.4.13.

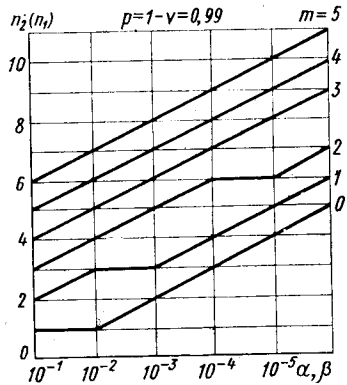


Рис. 3.4.14.

го числа неработоспособных операторов, имеют в своем составе меньшее количество операторов, чем прямоугольные схемы. Так, например, при  $\alpha = \beta = 10^{-3}$ ,  $m = 2$ ,  $p = 1 - v = 0,99$  количество операторов в избирательно-суммирующей схеме  $n = 7$  (рис. 3.4.3), в прямоугольных схемах  $n = 20$  (рис. 3.4.13). Следовательно, если учиты-

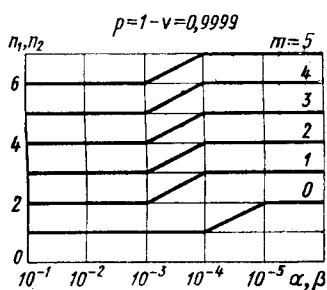


Рис. 3.4.15.

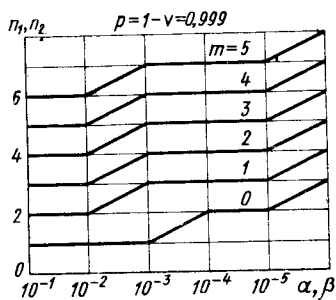


Рис. 3.4.16.

вать расходы на содержание операторов, то избирательно-суммирующие схемы экономически выгоднее прямоугольных.

Производя дальнейшее сравнение схем по критериям эффективности управления, учтем, что параметры прямоугольных схем группирования определялись для самых тяжелых режимов работы, обусловленных расположением ненадежных операторов в схеме. Однако в действительности указанные условия могут возникнуть с некоторой вероятностью, значение которой зависит от состава группы и количества неработоспособных операторов в ней.

С учетом сказанного показателя эффективности прямоугольных схем с параметрами, удовлетворяющими наиболее жестким условиям, будут несколько выше. Заметим, что в этом случае вероятности  $P_{\text{то}}$  и  $P_{\text{до}}$  прямоугольных схем определяются по формулам (2.2.3). Покажем это на примере ранее рассмотренных избирательно-суммирующей схемы с параметрами  $n=7$ ,  $l=3$ , параллельно-последовательной и последовательно-параллельной схем с параметрами  $n_1=4$ ,  $n_2=5$  и  $n_1=5$ ,  $n_2=4$  соответственно.

В табл. 3.4.1—3.4.3 сведены значения выполнения требуемой и ложной операций избирательно-суммирующей и прямоугольными схемами с приведенными выше

Таблица 3.4.1  
Избирательно-суммирующая схема

$m$	$P_{то}$	$P_{это}$	$P_{ло}$
0	0,9999997	$3 \cdot 10^{-7}$	$3,5 \cdot 10^{-7}$
1	0,99998	$2 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$
2	0,999	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$
4	0	1	1
6	0	1	1

Таблица 3.4.2  
Параллельно-последовательная  
схема

$m$	$P_{то}$	$P_{это}$	$P_{ло}$
0	0,99999995	$5 \cdot 10^{-8}$	$7 \cdot 10^{-8}$
1	0,999999	$1 \cdot 10^{-6}$	$2,5 \cdot 10^{-6}$
2	0,99998	$2 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$
4	0,998	$2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$
6	0,98	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$

Таблица 3.4.3  
Последовательно-параллельная  
схема

$m$	$P_{то}$	$P_{это}$	$P_{ло}$
0	0,99999993	$7 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-8}$
1	0,999998	$2 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$
2	0,99995	$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$
4	0,99	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$
6	0,8	$2 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-2}$

параметрами при наличии в группе 0, 1, 2, 4, 6 неработоспособных операторов с характеристиками  $p_H = v_H = 0$  и  $p_H = v_H = 1$ . По данным таблицы построены графики (рис. 3.4.17, 3.4.18)  $P_{зто}$ ,  $P_{ло}$ , где  $P_{зто} = 1 - P_{то}$  (1 — избирательно-суммирующая схема, 2 — параллельно-последовательная, 3 — последовательно-параллельная).

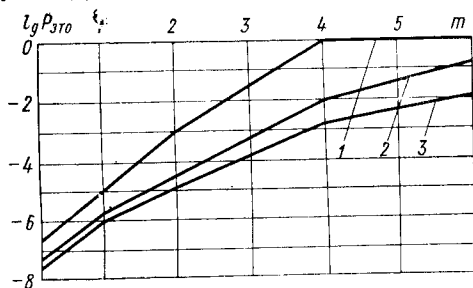


Рис. 3.4.17.

довательная, 3 — последовательно-параллельная). На графиках вероятности выполнения операций приведены в логарифмической шкале.

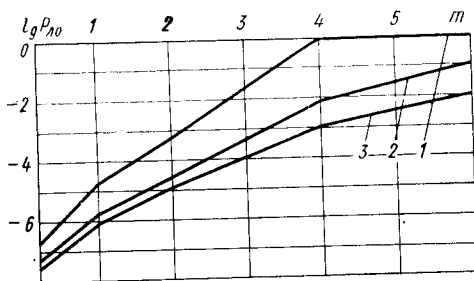


Рис. 3.4.18.

Как видно из графиков, вероятность выполнения требуемой операции параллельно-последовательной схемой несколько выше, чем остальными, вероятность проведения ложной операции последовательно-параллельной схемой ниже, чем параллельно-последовательной и избирательно-суммирующей. Следовательно, параллельно-последовательная схема более устойчива к воздействиям ненадежных операторов, задерживающих проведение требуемой операции, а последовательно-параллельная схема — к воздействиям ненадежных операторов, выполняющих запрещенную операцию.

Далее, при числе ненадежных операторов  $m \geq 4$  избыточно-суммирующая схема становится неработоспособной ( $P_{\text{то}}=0$ ,  $P_{\text{ло}}=1$ ), в то время как эффективность управления параллельно-последовательной и последовательно-параллельной схем характеризуется следующими показателями:  $P_{\text{то}}=0,998$ ;  $P_{\text{ло}}=0,01$  и  $P_{\text{то}}=0,99$ ;  $P_{\text{ло}}=0,002$  соответственно.

Однако следует учесть, что при  $m=4$  появляется возможность нарушения работоспособности прямоугольных схем. Определим ее вероятность. Результаты предварительного расчета сведены в табл. 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 3.4.4.

Таблица 3.4.4

Параллельно-последовательная схема					Последовательно-параллельная схема				
R	$r_t$	$P_{H_t}$	$P(\text{ТО}/H_t)$	$P(\text{ЛО}/H_t)$	R	$r_t$	$P(H_t)$	$P(\text{ТО}/H_t)$	$P(\text{ЛО}/H_t)$
4845	5	0,001	0	$2,4 \cdot 10^{-6}$	4845	5	0,001	0,999998	1
	320	0,061	0,989999	$6,1 \cdot 10^{-5}$		320	0,066	0,999994	0,01
	360	0,074	0,9998	$6,1 \cdot 10^{-5}$		360	0,074	0,99994	$2 \cdot 10^{-4}$
	2880	0,595	0,9999	$1,6 \cdot 10^{-5}$		2880	0,595	0,9985	$1 \cdot 10^{-4}$
	1280	0,264	0,999996	0,0394		1280	0,264	0,9606	$3 \cdot 10^{-6}$

Из таблицы видно, что с вероятностью 0,001 параллельно-последовательная схема может быть выведена из строя четырьмя ненадежными операторами, задерживающими проведение требуемой операции, а последовательно-параллельная схема с той же вероятностью может стать неработоспособной под воздействием четырех ненадежных операторов, выполняющих запрещенную операцию. Так как параметры схем были рассчитаны для случая, когда эффективность управления задавалась величинами  $\alpha = \beta = 10^{-3}$ ,  $m=2$ , то, исходя из установленных допусков, можно сказать, что прямоугольные схемы обладают достаточной устойчивостью при наличии в группе четырех ненадежных операторов обоих родов. При этом параллельно-последовательная схема имеет большие вероятности выполнения требуемой и запрещенной операций, чем последовательно-параллельная.

Рассмотрим далее показатели эффективности управления и степень устойчивости к воздействию ненадежных

операторов одинаковых по своему составу избирательно-суммирующей и прямоугольных схем. В качестве примера исследуем схемы, включающие в себя девять операторов. Очевидно, при выборе закона управления избирательно-суммирующей схемой, сохраняющей работоспособность при наличии максимально возможного числа ненадежных операторов обоого рода, необходимо остановиться на законе «пять из девяти». В этом случае

Таблица 3.4.5

**Избирательно-суммирующая  
схема с параметрами  $n=9, l=4$**

$m$	$P_{то}$	$P_{зто}$	$P_{ло}$
0	0,999999998	$2 \cdot 10^{-9}$	$8 \cdot 10^{-9}$
1	0,9999997	$3 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-7}$
2	0,99997	$3 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$
3	0,999	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$
4	0,95	$5 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-2}$
5	0	1	1

схема устойчива при воздействии четырех ненадежных операторов. Оптимальными параметрами прямоугольных схем, сохраняющих работоспособность при воздействии ненадежных операторов обоого рода, являются  $n_1=n_2=3$ . В табл. 3.4.5—3.4.7 сведены показатели эффек-

Таблица 3.4.6

**Параллельно-последовательная  
схема с параметрами  $n_1=n_2=3$**

$m$	$P_{то}$	$P_{зто}$	$P_{ло}$
0	0,999997	$3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-5}$
1	0,9999	$1 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-4}$
2	0,997	$3 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-2}$
3	0,957	$\sim 4 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-1}$
4	0,834	$\sim 2 \cdot 10^{-1}$	$7 \cdot 10^{-1}$
5	0,629	$\sim 4 \cdot 10^{-1}$	0,86

тивности функционирования указанных схем при наличии в них 0, 1, 3, 4, 5 предельно ненадежных операторов с характеристиками  $p_H=v_H=0$  и  $p_H=v_H=1$ . Графически функции  $P_{зто}$ ,  $P_{ло}$  представлены на рис. 3.4.19, 3.4.20.



Как видно из рисунков, вероятность выполнения требуемой операции избирательно-суммирующей схемой при  $m=0, 1, 2, 3, 4$  выше, а вероятность проведения

Таблица 3.4.7

Последовательно-параллельная  
схема с параметрами  $n_1=n_2=3$

$m$	$P_{\text{то}}$	$P_{\text{зто}}$	$P_{\text{ло}}$
0	0,99997	$3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-6}$
1	0,9991	$9 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$
2	0,978	$\sim 2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-3}$
3	0,659	$\sim 3 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-2}$
4	0,347	$\sim 6 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$
5	0,139	$\sim 9 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-1}$

ложной операции ниже, чем у прямоугольных схем. Однако при  $m=5$  избирательно-суммирующая схема становится неработоспособной, а параллельно-последо-

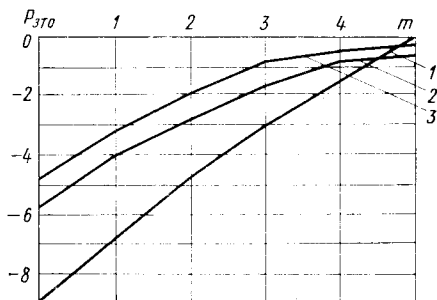


Рис. 3.4.19.

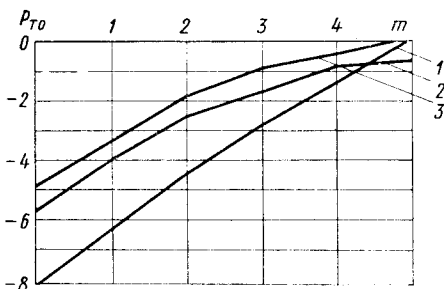


Рис. 3.4.20.

вательная и последовательно-параллельная схемы сохраняют устойчивость управления ( $P_{\text{то}}=0,629$ ;  $P_{\text{ло}}=0,86$ ;  $P_{\text{то}}=0,139$ ;  $P_{\text{ло}}=0,4$  соответственно) со следующими вероятностями:

— при воздействии ненадежных операторов, задерживающих требуемую операцию, соответственно 0,64 и 0,14;

— при воздействии ненадежных операторов, проводящих запрещенную операцию, 0,14 и 0,64 соответственно.

Это еще раз подтверждает тот факт, что параллельно-последовательные схемы более устойчивы к воздействию ненадежных операторов, задерживающих выполнение требуемой операции, а последовательно-параллельные схемы — к действиям ненадежных операторов, осуществляющих ложную операцию. В целом же прямоугольные схемы, имея более низкие показатели эффективности, чем избирательно-суммирующие, сохраняют устойчивость управления в тех случаях, когда ненадежные операторы нарушают работоспособность последних.

Группирование операторов по избирательно-суммирующим схемам целесообразно использовать в тех случаях, когда возможность потери профессиональных свойств операторами, количество которых превышает расчетные значения, ограничена какими-либо дополнительными мерами (например, созданием условий работы операторам, исключаящих экстремальные ситуации; тщательным профессиональным отбором операторов).

В тех случаях, когда основным требованием является выполнение требуемой операции, целесообразнее всего использовать параллельно-последовательные схемы, обладающие большей устойчивостью к воздействиям неработоспособных операторов, препятствующих ее проведению.

Последовательно-параллельные схемы успешнее всего противодействуют неработоспособным операторам, проводящим ложные операции; поэтому там, где ложные операции приводят к тяжелым последствиям, целесообразно применять последовательно-параллельные схемы.

## МЕТОДИКА ВЫБОРА ПАРАМЕТРОВ СХЕМ ГРУППИРОВАНИЯ ОПЕРАТОРОВ С УЧЕТОМ ВРЕМЕНИ ОТРАБОТКИ ОПЕРАЦИЙ

### 4.1. Вероятностно-временная модель оператора

Рассмотренные ранее вероятностные показатели работы группы операторов базировались на представлении характеристик работы оператора логико-вероятностной моделью. Между тем представляют интерес вероятностно-временные характеристики работы группы операторов, поскольку время отработки управляющих действий оператором случайно [72, 15, 119]. Такими показателями для систем управления могут служить:

— вероятность  $P_{\text{то}}(t)$  выполнения требуемой операции за время  $t$ ;

— вероятность  $P_{\text{ло}}(t)$  выполнения ложной операции за время  $t$ .

Для записи расчетных формул необходимо уточнить модель оператора с тем, чтобы она учитывала зависимость отработки оператором управляющих действий от времени, отводимого на их выполнение. Такая модель (назовем ее вероятностно-временной) может быть получена на основе логико-вероятностной модели и временных характеристик оператора. Для образования вероятностно-временной модели воспользуемся функцией распределения  $F(t)$  времени выполнения оператором управляющего действия (времени моторного компонента простой сенсомоторной реакции).

Предполагается, что отработка оператором требуемого и ложного управляющих действий выполняется в три этапа: фиксация поступившего сигнала, принятие решения и совершение управляющего действия. В свою очередь, структура поведения человека до момента принятия решения состоит из трех компонентов: стимула, состояния организма, реакции.

Естественно, в силу психофизиологических свойств человека вероятность принятия решения на проведение операции при наличии стимула гораздо выше. Эти вероятности обозначим соответственно через  $p$  и  $v$ . Заметим, что ранее аналогичными индексами обозначались вероятности проведения требуемой и ложной операций

без учета времени их обработки. После принятия решения оператор совершает управляющее действие, причем выполнение этого действия связано со временем функцией распределения  $F(t)$ .

При описанном представлении механизма обработки оператором управляющих действий запишем:

$$p(t) = pF(t), \quad v(t) = vF(t), \quad (4.1.1)$$

где  $p(t)$  — вероятность выполнения оператором требуемой операции за время  $t$ ;  $v(t)$  — вероятность выполнения оператором ложной операции за время  $t$ .

Имея в виду свойства функции распределения [13], получаем: при  $t \rightarrow 0$   $p(t) \rightarrow 0$ ,  $v(t) \rightarrow 0$ , при  $t \rightarrow \infty$   $p(t) \rightarrow p$ ,  $v(t) \rightarrow v$ . Последнее практически имеет место при  $t \rightarrow t^*$ , где  $t^*$  — время, начиная с которого  $P(t^* \leq t < \infty) = F(\infty) - F(t^*) \approx 0$ .

Используя выражения (4.1.1), представим вероятностно-временную модель оператора следующей таблицей:

$S$	$D$	$1$	$0$
$1$	$p(t)$	$1-p(t)$	
$0$	$v(t)$	$1-v(t)$	

Для идеально надежного оператора на основании (4.1.1) и матрицы вероятностей запишем следующие выражения, характеризующие его профессиональные свойства:

$$p(t) = 1 \cdot F(t) = F(t), \quad (4.1.2)$$

$$v(t) = 0 \cdot F(t) = 0.$$

В случае предельно ненадежных операторов выражения (4.1.1) примут вид

$$p(t) = 1 \cdot F(t) = F(t), \quad (4.1.3)$$

$$v(t) = 1 \cdot F(t) = F(t);$$

$$p(t) = 0 \cdot F(t) = 0, \quad (4.1.4)$$

$$v(t) = 0 \cdot F(t) = 0.$$

При этом оператор с характеристиками, определяемыми выражением (4.1.3), в любом случае стремится провести операцию, а оператор с характеристиками  $p(t) = v(t) = 0$  — задержать операцию.

На основе (4.1.2)—(4.1.4) матрицы характеристик идеального и предельно ненадежного операторов примут следующий вид:

$S \backslash D$	1	0
1	$F(t)$	$1-F(t)$
0	0	1

$S \backslash D$	1	0
1	$F(t)$	$1-F(t)$
0	$F(t)$	$1-F(t)$

$S \backslash D$	1	0
1	0	1
0	0	1

Приведенные в таблицах характеристики являются числовой мерой способности оператора выполнять операцию в конкретных условиях за определенное время.

#### 4.2. Определение параметров схем группирования с учетом времени отработки операций

Методика выбора параметров схем группирования операторов с учетом времени отработки ими операций основана на использовании выражений для  $P_{то}(t)$ ,  $P_{ло}(t)$ , описывающих соответствующие схемы.

**Избирательно-суммирующие схемы.** Многие математические зависимости, полученные при рассмотрении избирательно-суммирующих схем без учета времени

отработки операций, справедливы и для их исследования при использовании вероятностно-временной модели оператора. Так, когда характеристики операторов в группе одинаковы, формулы для  $P_{\text{То}}(t)$ ,  $P_{\text{Ло}}(t)$  можно записать по аналогии с (2.3.3) в следующем виде:

$$P_{\text{То}}(t) = \sum_{k=0}^l C_n^{n-k} p(t)^{n-k} [1 - p(t)]^k, \quad (4.2.1)$$

$$P_{\text{Ло}}(t) = \sum_{k=0}^l C_n^{n-k} v(t)^{n-k} [1 - v(t)]^k.$$

Далее, используя (2.3.22) (2.3.23), запишем выражения для  $P_{\text{То}}(t)$ ,  $P_{\text{Ло}}(t)$  при наличии в группе  $m$  ненадежных операторов первого и второго рода соответственно:

$$P_{\text{То}}(t) = \sum_{k=m}^l C_{n-m}^{n-k} p(t)^{n-k} [1 - p(t)]^{k-m} + \\ + \sum_{r=1}^m \sum_{j=r}^m C_{j-m}^j p_H(t)^j [1 - p_H(t)]^{m-j} C_{n-m}^{n-(l+r)} p(t)^{n-(l+r)} \times \\ \times [1 - p(t)]^{l-(m+r)}, \quad (4.2.2)$$

$$P_{\text{Ло}}(t) = \sum_{k=m}^l C_{n-m}^{n-k} v(t)^{n-k} [1 - v(t)]^{k-m} + \\ + \sum_{r=1}^m \sum_{j=r}^m C_{j-m}^j v_H(t)^j [1 - v_H(t)]^{m-j} C_{n-m}^{n-(l+r)} v(t)^{n-(l+r)} \times \\ \times [1 - v(t)]^{l-(m+r)};$$

$$P_{\text{То}}(t) = \sum_{k=0}^{l-m} C_{n-m}^{n-m-k} p(t)^{n-m-k} [1 - p(t)]^k, \quad (4.2.3)$$

$$P_{\text{Ло}}(t) = \sum_{k=0}^{l-m} C_{n-m}^{n-m-k} v(t)^{n-m-k} [1 - v(t)]^k.$$

Здесь  $p_H(t) = F(t)$ ;  $v_H(t) = F(t)$ .

Рассмотрим характер изменения вероятностей требуемой и ложной операций во времени при фиксированных значениях  $n$  и  $l$ . Так как характеристики оператора

$p(t)$  и  $v(t)$  при увеличении  $t$  возрастают от 0 до  $p$ ,  $v$  соответственно, то и  $P_{\text{то}}(t)$ ,  $P_{\text{ло}}(t)$  являются монотонно возрастающими и ограниченными функциями времени выполнения операций.

Для доказательства сказанного, обозначив  $p(t) = u$ , возьмем первую производную от  $P_{\text{то}}(t)$  по  $u$ . Сначала продифференцируем  $P_{\text{то}}(t)$ , определяемую выражением (4.2.1):

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\text{то}}(u)}{du} = & nC_0^n u^{n-1} + (n-1)C_1^n u^{n-2}(1-u) - C_1^n u^{n-1} + \\ & + (n-2)C_2^n u^{n-3}(1-u)^2 - 2C_2^n u^{n-2}(1-u) + \\ & + (n-3)C_3^n u^{n-4}(1-u)^3 - 3C_3^n u^{n-3}(1-u)^2 + \dots \\ & \dots + (n-l+1)C_n^{l-1} u^{n-l}(1-u)^{l-1} - \\ & - (l-1)C_n^{l-1} u^{n-l+1}(1-u)^{l-2} - (n-l)C_l^n u^{n-l-1}(1-u)^l - \\ & - lC_l^n u^{n-l}(1-u)^{l-1} = (n-l)C_l^n u^{n-l-1}(1-u)^l, \end{aligned}$$

так как только предпоследнему положительному члену не найдется равного по абсолютной величине отрицательного члена.

Проведя обратную замену, получим

$$P'_{\text{то}}(t) = (n-l)C_l^n p(t)^{n-l-1}[1-p(t)]^l. \quad (4.2.4)$$

Производная от выражения (4.2.1) имеет вид

$$P'_{\text{ло}}(t) = (n-l)C_l^n v(t)^{n-l-1}[1-v(t)]^l. \quad (4.2.5)$$

По аналогии с рассмотренным выше порядком дифференцирования можно взять первые производные от выражений (4.2.2), (4.2.3).

Для упрощения дифференцирования заменим в выражении (4.2.2) большие величины  $p_n(t)$ ,  $v_n(t)$  заведомо меньшими  $p(t)$  и  $v(t)$ . Это не влияет на характер зависимости вероятностей проведения операций группой, так как  $p_n(t)$ ,  $v_n(t)$  и  $p(t)$ ,  $v(t)$  имеют один и тот же закон распределения времени выполнения операции.

С учетом сказанного производные от (4.2.2) имеют вид выражений (4.2.4), (4.2.5). Производные от (4.2.3) можно записать в виде

$$P'_{\text{то}}(t) = (n-l)C_{n-m}^{l-m} p(t)^{n-l-1}[1-p(t)]^{l-m}, \quad (4.2.6)$$

$$P'_{\text{ло}}(t) = (n-l)C_{n-m}^{l-m} v(t)^{n-l-1}[1-v(t)]^{l-m}.$$

Производные от  $P_{\text{то}}(t)$  и  $P_{\text{ло}}(t)$  при  $0 \leq p(t) \leq p$ ,  $0 \leq v(t) \leq v$  положительны, так как для работоспособной схемы всегда выполняется условие  $n-l > 0$ . Следовательно, функции  $P_{\text{то}}(t)$  и  $P_{\text{ло}}(t)$  монотонно возрастают, переходя от 0 при  $p(t) = v(t) = 0$  к  $P_{\text{то}}^*$  и  $P_{\text{ло}}^*$  при  $p(t) = p$ ,  $v(t) = v$  (рис. 4.2.1, 4.2.2). При этом величины

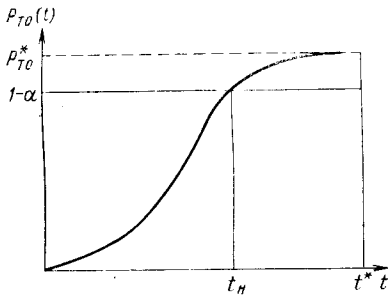


Рис. 4.2.1.

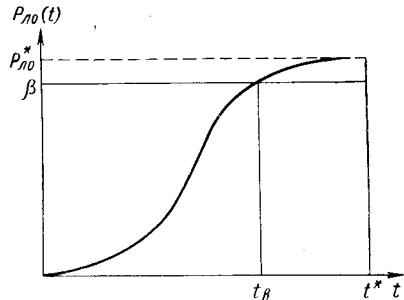


Рис. 4.2.2.

$P_{\text{то}}^*$  и  $P_{\text{ло}}^*$  вычисляются по известным уже формулам, которые были получены при рассмотрении задачи выбора параметров и оценке эффективности схем без учета времени отработки оператором управляющих действий.

При заданных значениях  $\alpha$  и  $\beta$  на вероятности проведения требуемой и ложной операций на кривых  $P_{\text{то}}(t)$  и  $P_{\text{ло}}(t)$  можно выделить характерные точки, которым соответствуют времена  $t = t_H$  и  $t = t_B$  (рис. 4.2.1, 4.2.2). Как видно из рисунков, неравенства

$$P_{\text{то}}(t) \geq 1 - \alpha, \quad P_{\text{ло}}(t) \leq \beta \quad (4.2.7)$$

удовлетворяются не на всем промежутке времени, а только на интервале  $t_H \leq t \leq \infty$  и  $0 \leq t \leq t_B$  соответственно. При этом одновременное соблюдение обоих неравенств системы (4.2.7) требует выполнения следующего условия (рис. 4.2.3):

$$t_H \leq t \leq t_B. \quad (4.2.8)$$

Учитывая последнее, запишем более жесткую систему неравенств, соблюдение которой обеспечит удовлетворение системы (4.2.7):

$$P_{\text{то}}(t = t_H) \geq 1 - \alpha, \quad P_{\text{ло}}(t = t_B) \leq \beta, \quad t_H \leq t_B. \quad (4.2.9)$$

В самом деле, если неравенство  $P_{\text{то}}(t) \geq 1 - \alpha$  выполняется при  $t = t_H$ , то при  $t > t_H$  в силу возрастания функ-



ции оно и подавно выполняется. Далее, если неравенство  $P_{\text{ло}}(t) \leq \beta$  выполняется при  $t = t_{\text{в}}$ , то оно выполняется и при  $t < t_{\text{в}}$ . При этом границы изменения  $t$  определяются неравенством (4.2.8). Последнее означает, что параметры группы, выбранные из условий (4.2.9), обеспечивают заданные требования к вероятности требуемой и ложной операций лишь в определенном интер-

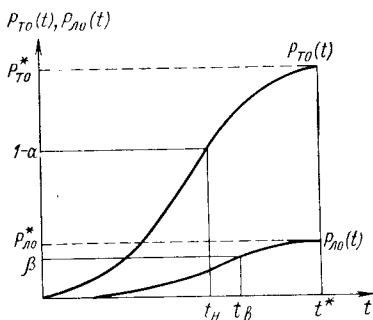


Рис. 4.2.3.

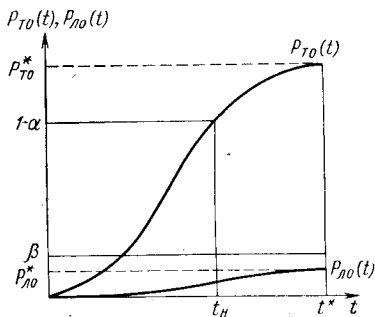


Рис. 4.2.4.

вале времени. В частности, при  $t > t_{\text{в}}$  нарушается выполнение требований об ограничении вероятности проведения ложной операции. Следовательно, практического значения для выбора параметров система неравенств (4.2.9) не имеет. Она должна быть изменена таким образом, чтобы вероятность проведения ложной операции была ниже допуска при любом значении  $t$ .

Второе требование, ограничивающее снизу вероятность проведения требуемой операции, реализуется с момента  $t \geq t_{\text{н}}$ . В связи с этим укажем, что в силу непрерывности функции  $P_{\text{то}}(t)$  условие  $t_{\text{н}} \leq t_{\text{но}}$  не может иметь места, т. е. необходимо выполнение условия  $t_{\text{н}} \geq t_{\text{но}}$ ,  $t_{\text{но}}$  — минимальное время выполнения операции.

Чтобы получить практически пригодные условия для выбора параметров группы, заменим второе неравенство в (4.2.9) более жестким, переводящим момент  $t_{\text{в}}$  в бесконечность, т. е.  $t_{\text{в}} \leq \infty$  (рис. 4.2.4). При этом с учетом того, что  $t_{\text{но}} < t_{\text{в}}$ , условия принимают следующий вид:

$$P_{\text{то}}(t) \geq 1 - \alpha; \quad P_{\text{ло}}^* \leq \beta; \quad t_{\text{но}} \leq t_{\text{н}} \leq \infty \quad (4.2.10)$$

или же при  $m=0$

$$\sum_{k=0}^l C_n^{n-k} p(t_H)^{n-k} [1 - p(t_H)]^k \geq 1 - \alpha, \quad (4.2.11)$$

$$\sum_{k=0}^l C_n^{n-k} v^{n-k} (1 - v)^k \leq \beta,$$

$$t_{HO} < t_H \leq \infty.$$

При наличии  $m$  нарушителей обоого рода система (4.2.10) представляется следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{l-m} C_{n-m}^{n-m-k} p(t_H)^{n-m-k} [1 - p(t_H)]^k \geq 1 - \alpha, \quad (4.2.12)$$

$$\sum_{k=0}^l C_{n-m}^{n-m-k} v^{n-m-k} (1 - v)^k \leq \beta,$$

$$t_{HO} < t_H \leq \infty.$$

Таким образом, системы неравенств (4.2.11), (4.2.12) служат основой для выбора параметров избирательно-суммирующих схем. В данном случае параметрами схемы являются: количество операторов в группе ( $n$ ), параметр закона управления ( $l$ ) и момент времени ( $t_H$ ), начиная с которого группа удовлетворяет заданным требованиям эффективности.

При выборе параметров схем группирования операторов с учетом времени отработки операции могут иметь место следующие случаи: необходимо определить параметры  $n$ ,  $l$ ,  $t_H$  группы, удовлетворяющие заданным требованиям эффективности  $\alpha$ ,  $\beta$ , при условии, что ограничение на величину  $t_H$  не налагается; необходимо определить параметры  $n$ ,  $l$  группы при дополнительных ограничениях величины  $t_H$ . В обоих случаях из-за соображения экономичности определяются минимальные значения  $n$  и  $l$ .

Изложим порядок определения параметров схем группирования в первом случае.

1. Составим вспомогательную систему неравенств, отличающуюся от системы (4.2.11) первым неравенством и отсутствием ограничения на параметр  $t_H$ . Если не-

обходимо рассчитать параметры схемы, когда  $m \neq 0$ , то используется измененная система неравенств (4.2.12):

$$\sum_{k=0}^l C_n^{n-k} p^{n-k} (1-p)^k \geq 1 - \alpha, \quad (4.2.13)$$

$$\sum_{k=0}^l C_n^{n-k} v^{n-k} (1-v)^k \leq \beta.$$

Система (4.2.13) составляется с использованием формул, применявшихся в случаях, когда время обработки операций не учитывалось.

2. Решая вспомогательную систему, находим параметры схемы  $n, l$ .

3. Записываем уравнение для определения третьего параметра схемы  $t_H$ :

$$\sum_{k=0}^l C_n^{n-k} p(t_H)^{n-k} [1 - p(t_H)]^k = 1 - \alpha. \quad (4.2.14)$$

При этом  $t_H = \arg p(t_H)$ , где  $p(t_H)$  — корень уравнения (4.2.14). Решить уравнение можно методом Ньютона, суть которого заключена в использовании формулы Тейлора [28]. Для этого уравнение (4.2.14) представим в виде

$$f[p(t_H)] = \sum_{k=0}^l C_n^{n-k} p(t_H)^{n-k} [1 - p(t_H)]^k - (1 - \alpha) = 0. \quad (4.2.15)$$

Первая производная от данного уравнения была получена (4.2.4).

За нулевое приближение берется значение корня  $p_0(t_H) = p$ . Определив корень уравнения  $p(t_H)$ , найдем значение параметра  $t_H$ :  $t_H = \arg p(t_H)$ .

Рассмотрим порядок определения параметров во втором случае.

1. По заданному значению  $t_{H3}$  и параметрам функции распределения  $F(t)$  находим значение  $p(t_{H3})$ .

2. Исходя из условий задачи, решая систему неравенств (4.2.11), либо (4.2.12), определяем параметры  $n, l$ .

3. Решая уравнение вида (4.2.5), находим действительное значение параметра  $t_H$ . При этом должно со-

блюдаться условие  $t_{нд} \leq t_{нз}$ , служащее проверкой найденных величин параметров  $n, l$ .

Методику определения параметров избирательно-суммирующих схем поясним на примерах. Для простоты вычислений примем нормальный закон распределения для функции  $F(t)$  с параметрами  $m(t) = 0,89$  с,  $\sigma = 0,27$  с.

**Пример 4.2.1.** Определить параметры схемы  $n, l, t_{н}$ , удовлетворяющей следующим требованиям:  $\alpha = 10^{-6}$ ;  $\beta = 10^{-5}$ ;  $p = 1 - v = 0,999$ .

1. Составляем систему неравенств вида (4.2.13):

$$\sum_{k=0}^l C_n^{n-k} \cdot 0,999^{n-k} \cdot 0,001^k \geq 0,999999999,$$

$$\sum_{k=0}^l C_n^{n-k} \cdot 0,001^{n-k} \cdot 0,999^k \leq 0,00001.$$

Решая систему, находим  $n=4, l=2$ .

2. Для определения параметра  $t_{н}$  составляем уравнение (4.2.5):

$$\sum_{k=0}^2 C_4^{4-k} p(t_{н})^{4-k} [1 - p(t_{н})]^k - 0,999999 = 0.$$

Первое приближение корня находим по выражению

$$p_1(t_{н}) = p_0(t_{н}) - \frac{\sum_{k=0}^2 C_4^{4-k} p_0^k(t_{н})^{4-k} [1 - p(t_{н})]^k - 0,999999}{2C_2^2 p_0(t_{н}) [1 - p_0(t_{н})]^2},$$

в котором знаменатель дроби есть первая производная от левой части уравнения (4.2.4).

Подставляя в выражение значение  $p_0(t_{н}) = 0,999$ , находим  $p_1(t_{н}) = 0,916$ . Производя аналогичные вычисления, находим  $p_2(t_{н}) = 0,945$ . Ограничиваясь третьим приближением корня, определяем его значение  $p_3(t_{н}) = 0,947$ . По  $p(t_{н}) = 0,947$  находим значение  $t_{н} = 1,4$  с.

Следовательно, параметры группы, удовлетворяющие заданным требованиям, следующие:  $n=4, l=2, t_{н} = 1,4$  с.

**Пример 4.2.2.** Заданы следующие требования на эффективность управления:  $\alpha = \beta = 10^{-4}$ ;  $t_{нз} = 1,6$  с;  $p = 1 - v = 0,99$ . Схема должна устойчиво работать при воздействии двух ненадежных операторов обоого рода.

1. По  $t_{нз} = 1,6$  с находим  $t_{нз} = 0,986$ .

2. Составляем систему неравенств вида (4.2.12):

$$\sum_{k=0}^{l-2} C_{n-2}^{n-2-k} \cdot 0,986^{n-2-k} \cdot 0,014^k \geq 0,9999,$$

$$\sum_{k=0}^{l-1} C_{n-2}^{n-2-k} \cdot 0,01^{n-2-k} \cdot 0,99^k \leq 0,0001.$$

Решая систему, находим  $n=9, l=4$ .

3. Определим значение параметра схемы  $t_{\text{нд}}$ , для чего составим уравнение вида (4.2.16):

$$\sum_{k=0}^l C_7^{7-k} p (t_{\text{нд}})^{7-k} [1 - p (t_{\text{нд}})]^k - 0,9999 = 0.$$

Находим корень уравнения по выражению

$$p_{i+1}(t_{\text{нд}}) = p_i(t_{\text{нд}}) - \frac{\sum_{k=0}^2 C_7^{7-k} p_i(t_{\text{нд}})^{7-k} [1 - p_i(t_{\text{нд}})]^k - 0,9999}{5C^{2,7} p_i(t_{\text{нд}})^4 [1 - p_i(t_{\text{нд}})]^2},$$

где знаменатель дроби — первая производная по  $p_i(t_{\text{нд}})$ , определяемая из выражения (4.2.6).

Вычисляя далее, получаем:

$$p_1(t_{\text{нд}}) = 0,986 - 0,005 = 0,981,$$

$$p_2(t_{\text{нд}}) = 0,981 + 0,04 = 0,985,$$

$$p_3(t_{\text{нд}}) = 0,985 + 0,001 = 0,986.$$

Ограничиваясь третьим приближением, находим, что  $t_{\text{нд}} = 1,6$  с.

Таким образом, параметры схемы, удовлетворяющие заданным требованиям, следующие:  $n=9; l=4; t_{\text{н}} = 1,6$  с. Как видим, здесь  $t_{\text{нд}} = t_{\text{нз}}$ .

### Прямоугольные схемы группирования операторов.

Используя полученные ранее выражения, описывающие прямоугольные схемы группирования без учета времени отработки операций, и вероятностно-временные характеристики операторов, запишем формулы для вероятностей проведения требуемой и запрещенной операций.

Для параллельно-последовательной схемы при  $m=0$  имеем

$$P_{\text{то}}(t) = \{1 - [1 - p(t)]^{n_1}\}^{n_2}, \quad (4.2.16)$$

$$P_{\text{ло}}(t) = \{1 - [1 - v(t)]^{n_1}\}^{n_2}.$$

При наличии  $m$  предельно ненадежных операторов с характеристиками  $p_n(t) = v_n(t) = 1 \cdot F(t)$  запишем

$$P_{\text{то}}(t) = \{1 - [1 - p_n(t)] [1 - p(t)]^{n_1-1}\}^m \{1 - [1 - p(t)]^{n_1}\}^{n_2-m}, \quad (4.2.17)$$

$$P_{\text{ло}}(t) = \{1 - [1 - v_n(t)] [1 - v(t)]^{n_1-1}\}^m \{1 - [1 - v(t)]^{n_1}\}^{n_2-m}.$$

Если в группе имеется  $m$  операторов с характеристиками  $p_n(t) = v_n(t) = 0$ , то формулы для  $P_{то}(t)$  и  $P_{ло}(t)$  примут вид

$$P_{то}(t) = \{1 - [1 - p(t)]^{n_1 - m}\} \{1 - [1 - p(t)]^{n_1}\}^{n_2 - 1}, \quad (4.2.18)$$

$$P_{ло}(t) = \{1 - [1 - v(t)]^{n_1 - m}\} \{1 - [1 - v(t)]^{n_1}\}^{n_2 - 1}.$$

При тех же условиях для последовательно параллельной схемы группирования имеем

$$P_{то}(t) = 1 - [1 - p(t)^{n_2}]^{n_1}, \quad (4.2.19)$$

$$P_{ло}(t) = 1 - [1 - v(t)^{n_2}]^{n_1};$$

$$P_{то}(t) = 1 - [1 - p_n(t)^m p(t)^{n_2 - m}] [1 - p(t)^{n_2}]^{n_1 - 1}, \quad (4.2.20)$$

$$P_{ло}(t) = 1 - [1 - v_n(t)^m v(t)^{n_2 - m}] [1 - v(t)^{n_2}]^{n_1 - 1};$$

$$P_{то}(t) = 1 - [1 - p(t)^{n_2}]^{n_1 - m}, \quad (4.2.21)$$

$$P_{ло}(t) = 1 - [1 - v(t)^{n_2}]^{n_1 - m}.$$

Так как  $p(t)$ ,  $v(t)$ ,  $p_n(t)$ ,  $v_n(t)$  с увеличением времени обработки операций возрастают от нуля до  $p$ ,  $v$  и  $p_n$ ,  $v_n$  соответственно, то и  $P_{то}(t)$ ,  $P_{ло}(t)$  также являются монотонно возрастающими по времени, причем  $P_{то}(t) = P_{ло}(t) = 0$  при  $t = 0$ , а  $P_{то}(t) = P_{то}^*$ ,  $P_{ло}(t) = P_{ло}^*$  при  $t = t^*$ . Величины  $P_{то}^*$  и  $P_{ло}^*$  определяются по формулам (2.2.1) — (2.2.10), полученным без учета времени обработки операций.

В связи с тем, что характер изменения  $P_{то}(t)$ ,  $P_{ло}(t)$  для прямоугольных и избирательно-суммирующих схем одинаков, используем результаты, полученные при исследовании последних, для определения параметров прямоугольных схем группирования операторов.

Заметим, что формулы (4.2.17), (4.2.18), (4.2.20) и (4.2.21) записаны для наиболее неблагоприятных условий работы прямоугольных схем, определяемых расположением в них ненадежных операторов.

Для параллельно-последовательных схем при  $m = 0$

$$\begin{aligned} \{1 - [1 - p(t_n)]^{n_1}\}^{n_2} &\geq 1 - \alpha, \\ [1 - (1 - v)^{n_1}]^{n_2} &\leq \beta, \\ t_{но} < t_n \leq \infty. \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Для выбора параметров параллельно-последовательной схемы, устойчивой от действия  $m$  неработоспособных операторов обоого рода, исходной системой неравенства является

$$\begin{aligned} \{1 - [1 - p(t_H)]^{n_1 - m}\} \{1 - [1 - p(t_H)]^{n_1}\}^{n_2 - 1} &\geq 1 - \alpha, \\ [1 - (1 - v)^{n_1}]^{n_2 - m} &\leq \beta, \\ t_{HO} < t_H &\leq \infty. \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

Для последовательно-параллельных схем при выборе параметров необходимо использовать следующие системы неравенств:

$$\begin{aligned} 1 - [1 - p(t_H)]^{n_2} &\geq 1 - \alpha, \\ 1 - (1 - v)^{n_2} &\leq \beta, \\ t_{HO} < t_H &\leq \infty \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

или

$$\begin{aligned} 1 - [1 - p(t_H)]^{n_2} &\geq 1 - \alpha, \\ 1 - (1 - v)^{n_2 - m} (1 - v)^{n_1 - 1} &\leq \beta, \\ t_{HO} < t_H &\leq \infty. \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

В остальном порядок выбора параметров прямоугольных схем группирования операторов идентичен рассмотренной ранее методике определения параметров избирательно-суммирующих схем.

**Пример 4.2.3.** Определить параметры параллельно-последовательной схемы группирования  $n_1, n_2, t_H$ , удовлетворяющей следующим требованиям:  $\alpha = 10^{-4}$ ;  $\beta = 10^{-5}$ ;  $p = 1 - v = 0,99$ .

1. Составим вспомогательную систему неравенств, отличающуюся от (4.2.22) первым неравенством и отсутствием ограничений на параметр  $t_H$ :

$$\begin{aligned} [1 - (1 - p)^{n_1}]^{n_2} &\geq 1 - \alpha, \\ [1 - (1 - v)^{n_1}]^{n_2} &\leq \beta. \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

Подставляя в (4.2.26) значения  $p, v, \alpha, \beta$  и решая систему, находим  $n_1 = 3, n_2 = 4$ .

Для определения параметра  $t_H$  составим уравнение

$$f[p(t_H)] = \{1 - [1 - p(t_H)]^3\}^4 - 0,9999 = 0.$$

Корень уравнения  $t_H$  находим из выражения

$$p_{i+1}(t_H) = p_i(t_H) - \frac{f[p_i(t_H)]}{f'[p_i(t_H)]},$$

которое в нашем случае имеет вид

$$p_{i+1}(t_H) = p_i(t_H) - \frac{\{1 - [1 - p_i(t_H)]^3\}^4}{12 \{1 - [1 - p_i(t_H)]^3\}^3 [1 - p_i(t_H)]^2}.$$

Ограничиваясь третьим приближением, находим  $t_n=0,96$ ;  $t_n=1,4$  с. Следовательно, параметры схемы следующие:  $n_1=3$ ;  $n_2=4$ ;  $t_n=1,4$  с.

**Пример 4.2.4.** Определить параметры последовательно-параллельной схемы  $n_1, n_2$  при следующих условиях:  $\alpha=10^{-3}$ ;  $\beta=10^{-4}$ ;  $t_{нз}=1,5$  с,  $p=1-v=0,999$ . Схема должна устойчиво работать при наличии двух ненадежных операторов.

1. По  $t_{нз}$  определяем значение  $p(t_{нз})=0,987$ .
2. Составляем систему неравенств вида

$$1 - (1 - 0,987^{n_2})^{n_1-2} \geq 0,999,$$

$$1 - (1 - 0,001^{n_2-2}) (1 - 0,001^{n_2})^{n_1-1} \leq 0,0001,$$

$$0 < t_{нд} \leq t_{нз},$$

решая которую находим  $n_1=5$ ;  $n_2=4$ .

Для определения параметра  $t_{нд}$  составляем уравнение

$$1 - [1 - p(t_{нд})^4]^3 - 0,999 = 0.$$

Корнем данного уравнения является  $p(t_{нд})=0,959$ . Находим

$$t_{нд} = \arg p(t_{нд}) = 1,4 \text{ с.}$$

Таким образом, параметры схемы, устойчивой от воздействия двух ненадежных операторов и удовлетворяющей заданным требованиям, следующие:  $n_1=5$ ;  $n_2=4$ ;  $t_n=1,4$  с.

### 4.3. Выбор параметров схем группирования при наличии временных ограничений на отработку операций

В некоторых технических системах на отработку операторами управляющих действий накладываются временные ограничения оперативного или технического характера.

Временные ограничения оперативного характера вызваны, как правило, необходимостью ускорения проведения операций. При этом в аппаратуре управления отсутствует устройство, накладывающее ограничение на время проведения оператором управляющих действий. В этом случае задержка выполнения отдельных операций приводит к задержке всего процесса, но не к его срыву.

Временные ограничения технического характера определяются принципом устройства или работы аппаратуры системы или объекта управления. Следовательно, задержка выполнения отдельных операций или, напротив, их преждевременное проведение приводит к срыву всего процесса.



В отдельных случаях, когда процесс управления предусматривает согласование действий нескольких операторов, на их совместную работу могут накладываться временные ограничения с помощью специальных технических устройств. В этом случае при оценке эффективности существующих или при выборе параметров проектируемых структур систем управления необходимо учитывать наличие временных ограничений.

**Выбор параметров схем группирования при наличии временных ограничений оперативного характера.** При наличии временных ограничений такого рода решение задачи по определению параметров схем аналогично рассмотренному ранее случаю с ограничением на величину  $t_n$ .

В этом случае необходимо использовать выражения

$$\begin{aligned} P_{\text{ТО}}(t_n) &\leq 1 - \alpha, \\ P^*_{\text{ЛО}} &\leq \beta, \\ t_{\text{НО}} < t_n &\leq t_{\text{НЗ}}, \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

где  $t_{\text{НЗ}}$  — время, отводимое на операцию графиком, инструкцией и т. д.

Подставляя в (4.3.1) расчетные формулы вероятностных характеристик для избирательно-суммирующей схемы либо для прямоугольных схем, можно определить значение параметров схемы, удовлетворяющей заданным требованиям.

**Выбор параметров схем группирования при наличии временных ограничений технического характера.** На рис. 4.3.1 изображена схема, поясняющая принцип отработки операций группой операторов при наличии временного ограничения на их работу.

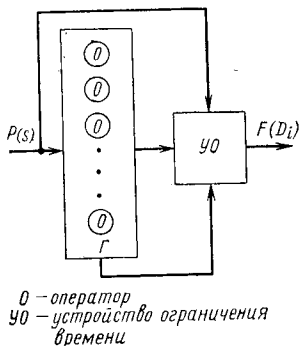


Рис. 4.3.1.

Схема функционирует следующим образом. Одновременно с приходом сигнала группе операторов открывается устройство ограничения (УО), обеспечивающее прохождение сигнала, формируемого группой, в течение определенного промежутка времени  $t$ . Для надежности включение устройства ограничения может осуществляться

любым оператором группы, обрабатывающим первым пришедший сигнал.

Учитывая логику работы схемы, запишем систему неравенств, служащую для определения параметров схемы:

$$\begin{aligned} P_{\text{То}}(t) &\geq 1 - \alpha, \\ P_{\text{Ло}}(t) &\leq \beta, \\ t_{\text{н}} &\leq t \leq t_3 \leq t_{\text{в}}. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Здесь  $t_3$  определяет величину промежутка времени, в течение которого устройство ограничения обеспечивает прохождение сигнала.

Поскольку функции  $P_{\text{То}}(t)$ ,  $P_{\text{Ло}}(t)$  возрастают со временем, то

$$\begin{aligned} \max P_{\text{То}}(t) &= P_{\text{То}}(t_3), \\ \max P_{\text{Ло}}(t) &= P_{\text{Ло}}(t_3). \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

На основе (4.3.3) для выбора параметров схемы можно составить следующую систему неравенств:

$$\begin{aligned} P_{\text{То}}(t_3) &\geq 1 - \alpha, \\ P_{\text{Ло}}(t_3) &\leq \beta, \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

в которой расчетные формулы для  $P_{\text{То}}(t_3)$ ,  $P_{\text{Ло}}(t_3)$  берутся в зависимости от вида схемы группирования. При этом будем иметь в виду, что первое неравенство удовлетворяется лишь в интервале времени  $t_{\text{н}} - t_3$ , а второе — на всем интервале  $0 - t_{\text{в}}$ .

Поясним на примере порядок выбора параметров схем группирования при наличии временных ограничений технического характера.

**Пример 4.3.1.** Определить параметры схемы, обеспечивающей следующие требования:  $\alpha = 0,15$ ;  $\beta = 3 \cdot 10^{-6}$ ;  $p = 1 - v = 0,999$ .

Определим параметры избирательно-суммирующей и прямоугольной схем.

1. Задаемся интервалом времени  $\Delta t = 1$  с, т. е.  $t_3 = 1$  с. В данном случае  $p(t_3) = 0,659$ ;  $v(t_3) = 0,66 \cdot 10^{-3}$ .

2. Составляем системы неравенств типа (2.3.4) для избирательно-суммирующей и прямоугольной схем:

$$\sum_{k=0}^l C_n^{n-k} \cdot 0,659^{n-k} \cdot 0,341^k \geq 0,85,$$

$$\sum_{k=0}^l C_n^{n-k} (0,66 \cdot 10^{-3})^{n-k} \cdot 0,99934^k \leq 0,000003;$$

$$(1 - 0,341^{n_1})^{n_2} \geq 0,85,$$

$$(1 - 0,99934^{n_1})^{n_2} \leq 0,000003.$$

Решая первую систему, определяем параметры избирательно-суммирующей схемы:  $n=4$ ;  $l=2$ . Решая вторую систему, находим параметры параллельно-последовательной схемы:  $n_1=3$ ;  $n_2=3$ .

Сравнивая между собой обе схемы, можно увидеть следующее: число операторов в избирательно-суммирующей — четыре, в то время как в прямоугольной схеме — девять. Вероятности выполнения требуемой операции у той и у другой схемы примерно одинаковы: 0,882 и 0,884 соответственно. Однако вероятность проведения ложной операции у прямоугольной схемы значительно ниже, чем у избирательно-суммирующей:  $8 \cdot 10^{-9}$  и  $2,5 \cdot 10^{-6}$  соответственно.

Используя результаты примеров, можно сказать, что введение временного ограничения для избирательно-суммирующей схемы, имеющей одинаковые параметры, значительно (примерно с 1 до 0,882) снижает вероятность выполнения требуемой операции и лишь в четыре раза уменьшает вероятность ложной операции. Это еще раз подтверждает вывод о том, что необходимо учитывать наличие временных ограничений на проведение операций и выбирать ограничительный временной интервал в разумных пределах.

## Глава 5

### СХЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ОРГАНАМИ ОТБОЯ

#### 5.1. Математическая модель и исходные соотношения

Рассмотрим случай, когда в схемах управления используются два исполнительных органа для отработки двух различных операций. Будем называть их условно операциями управления ( $y$ ) и отбоя ( $o$ ). Схема управления приведена на рис. 5.1.1. Здесь  $K$  — старший оператор;  $O$  — оператор; индексом « $y$ » помечен канал управления, индексом « $o$ » — канал отбоя. Двоичные функции  $S_y$ ,  $S_o$  — функции сигналов, а  $D_y$ ,  $D_o$  — функции управляющих действий оператора по каналам управления и отбоя \*).

---

\* Описываемые модели являются справедливыми как для простейших систем управления, так и для сложных, где в качестве каналов отбоя и управления могут использоваться весьма сложные устройства.

Работа схемы состоит в подаче сигналов  $(S_y, S_o)$  и в отработке их оператором. В отличие от схемы с одним исполнительным органом, предназначенной для отработки одной операции, данная схема управления предназначена для отработки нескольких комбинаций, каждая из которых состоит из двух операций (элементарных операций), т. е. для отработки определенных процессов. В принципе возможно распространение исследования на процессы, состоящие из любого количества элементарных операций.

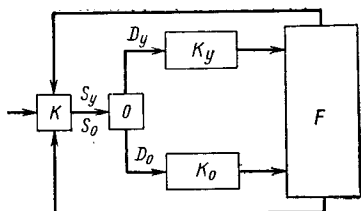


Рис. 5.1.1.

Математическая модель рассматриваемой схемы является вероятностной. В ней поведение оператора под воздействием получаемых сигналов описывается с помощью характеристик, числовые величины которых в процессе анализа предполагаются известными, а при синтезе — искомыми.

Поскольку отработка оператором сигналов по каналам управления и отбоя предполагается независимой, можно для удобства считать, что в схеме имеются два оператора: оператор управления и оператор отбоя (в необходимых случаях — две группы операторов соответственно).

Операторы управления и операторы отбоя описываются следующими таблицами вероятностных характеристик:

$S_y \backslash D_y$	$1$	$0$
$1$	$p_y$	$1-p_y$
$0$	$v_y$	$1-v_y$

$S_o \backslash D_o$	$1$	$0$
$1$	$p_o$	$1-p_o$
$0$	$v_o$	$1-v_o$

Состояния органов управления определяются логическими уравнениями связи:

$$y = D_y, \quad o = D_o. \quad (5.1.1)$$

В рассматриваемой задаче состояния выходных цепей схемы управления в свою очередь зависят от комбинации состояний органов управления и полностью задаются следующей таблицей:

y	o	$F_{\text{вых}}$
0	0	и
0	1	и
1	0	y
1	1	оу

Здесь состояния  $F_{\text{вых}}$  схемы означают: и — исходное состояние, y — управление, оу — отбой управления.

Сформулируем правила функционирования схемы с двумя органами управления, учитываемые при дальнейшем исследовании.

1. Работа схемы начинается с подачи сигнала на ее включение:  $S_y = 1$ . В этом случае действие оператора  $D_y = 1$  при  $S_y = 1$  является требуемым. Следующий за этим сигнал  $S_o = 0$  обеспечивает проведение требуемого управления. Имеется возможность прекратить работу схемы путем подачи сигнала  $S_o = 1$ . Действие оператора  $D_o = 1$  при  $S_o = 1$  также является требуемым, обеспечивающим требуемый отбой требуемого управления.

2. Действие оператора  $D_y = 1$  при  $S_y = 0$  является ложным. Вслед за ним с вероятностью, равной единице, подается сигнал  $S_o = 1$ , обеспечивающий отбой ложного управления. Таким образом, все возможные комбинации входных сигналов задаются табл. 5.1.1.

Таблица 5.1.1

Наименование сигнала	$S_y$	$S_o$
Требуемый отбой требуемого управления	1	1
Требуемое управление	1	0
Требуемый отбой ложного управления	0	1
Исходное состояние	0	0

Таблица 5.1.2

$D_y$	$S_0$	
	1	0
$1/S_y=1$ $1/S_y=0$	$P(S_0=1/D_y=1/S_y=1)$ 1	$P(S_0=0/D_y=1/S_y=1)$ 0
$0/S_y=1$ $0/S_y=0$	0 0	1 1

При дальнейших исследованиях правила функционирования можно уточнить с учетом временных показателей работы операторов и аппаратуры. Но при первоначальном рассмотрении задачи без этого можно обойтись.

Система с операторами является вероятностной, каждой комбинации входных сигналов могут отвечать четыре различных состояния выхода [107]. Всего, следовательно, возможны 16 сочетаний, представленных в табл. 5.1.2, часть из которых соответствует требуемым или ложным состояниям выхода, а остальные — исходным состояниям схемы.

Для рассмотрения возможных состояний схемы удобно воспользоваться деревом логических возможностей. При построении дерева сигналы на проведение операций полезно рассматривать как события, поступающие с определенной вероятностью. Тогда получаем дерево четвертого порядка, пути которого соответствуют определенным исходам. Ло-

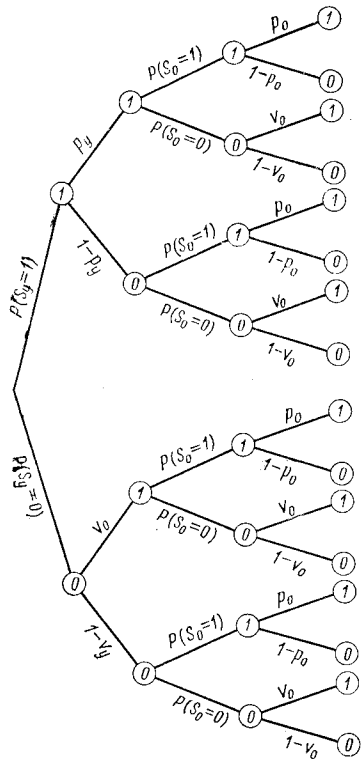


Рис. 5.1.2.

гическое дерево для рассматриваемого процесса показано на рис. 5.1.2.

При построении дерева неизвестными являются величины вероятности подачи сигналов управления

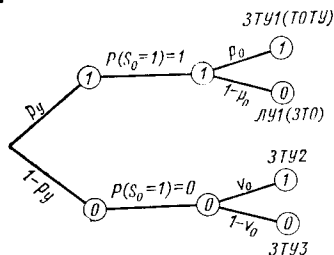


Рис. 5.1.3.

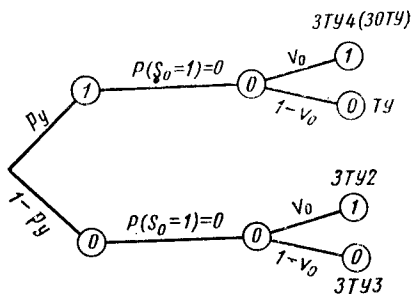


Рис. 5.1.4.

$P(S_y=1)$ . Поэтому рассмотрим два случая, когда  $P(S_y=1)=1$  и  $P(S_y=1)=0$ . Таким образом, дерево логических возможностей

рассекается на две части, соответствующие двум гипотезам. Кроме того, в некоторых случаях приходится учитывать возможность подачи сигналов на отбой ( $S_0=1$ ) после предварительно поданного сигнала на управление ( $S_y=1$ ). Поэтому необходимо рассмотреть в отдельности дерево для случая  $P(S_0=1/D_y=1/S_y=1)=1$  и дерево для случая  $P(S_0=1/D_y=1/S_y=1)=0$ .

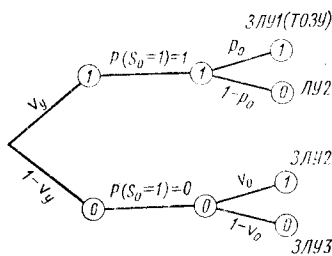


Рис. 5.1.5.

Целесообразно учесть также бессмысленность таких комбинаций при управлении работой схемы, как  $S_0=1/D_y=0$  и  $S_0=0/D_y=1/S_y=0$ . Последнее означает равенство  $P(S_0=1/D_y=0)=P(S_0=0/D_y=1/S_y=0)=0$ .

Указанные условия приведены в табл. 5.1.2.

Здесь  $P(S_0=1/D_y=1/S_y=1) + P(S_0=0/D_y=1/S_y=1) = 1$ .

Части дерева, соответствующие сформулированным выше условиям, изображены на рис. 5.1.3—5.1.5.

Всего получается двенадцать исходов управления, причем два из них повторяются. Как и в случае с одним

органом управления, применение двух органов приводит к одному из следующих результатов:

- требуемому управлению (ТУ),
- задержке требуемого управления (ЗТУ),
- ложному управлению (ЛУ),
- задержке ложного управления (ЗЛУ).

Эти результаты могут быть следствием различных причин, поэтому вершины деревьев помечаются следующим образом:

ЗТУ1 (ТОТУ) — задержка требуемого управления первая, требуемый отбой требуемого управления;

ЛУ1 (ЗТО) — ложное управление первое, задержка требуемого отбоя;

ЗТУ2, 3 — задержки требуемого управления вторая и третья;

ЗТУ4 (ЗОТУ) — задержка требуемого управления четвертая, запрещенный отбой требуемого управления;

ТУ — требуемое управление;

ЗЛУ1 (ТОЛУ) — задержка ложного управления, требуемый отбой ложного управления;

ЛУ2 — ложное управление второе;

ЗЛУ2, 3 — задержка ложного управления вторая и третья.

Появление указанных результатов зависит от исходных процессов управления.

С учетом рисунков можно записать выражения для вероятностей появления различных исходов процесса управления:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{тоту}} &= p_y p_o, \\
 P_{\text{лу1}} &= p_y (1 - p_o), \\
 P_{\text{зту2}} &= (1 - p_y) v_o, \\
 P_{\text{зту3}} &= (1 - p_y) (1 - v_o);
 \end{aligned}
 \tag{5.1.2}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\text{зоту}} &= p_y v_o, \\
 P_{\text{ту}} &= p_y (1 - v_o), \\
 P_{\text{зту2}} &= (1 - p_y) v_o, \\
 P_{\text{зту3}} &= (1 - p_y) (1 - v_o);
 \end{aligned}
 \tag{5.1.3}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\text{толуп}} &= v_y p_o, \\
 P_{\text{лу2}} &= v_y (1 - p_o), \\
 P_{\text{злу2}} &= (1 - v_y) v_o, \\
 P_{\text{злу3}} &= (1 - v_y) (1 - v_o).
 \end{aligned}
 \tag{5.1.4}$$



## 5.2. Оценка целесообразности применения органа отбоя

Сравним выражения (5.1.2)—(5.1.4) с выражениями, полученными при применении только одного органа управления, т. е. при отсутствии органа отбоя. Из этих выражений в предположении  $p_0 = v_0 = 0$  получаем:

*случай 1.*  $P(S_y = 1) = 1$ ;  $P(S_0 = 1/D_y = 1/S_y = 1) = 1$ :

$$\begin{aligned} P_{\text{тогу}} &= p_y p_0, & \bar{P}_{\text{тогу}} &= 0, \\ P_{\text{лу}_1} &= p_y (1 - p_0), & \bar{P}_{\text{лу}_1} &= p_y, \\ P_{\text{зту}_1} &= (1 - p_y) v_0, & \bar{P}_{\text{зту}_1} &= 0, \\ P_{\text{зту}_3} &= (1 - p_y) (1 - v_0); & \bar{P}_{\text{зту}_3} &= 1 - p_y; \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

*случай 2.*  $P(S_y = 1)$ ;  $P(S_0 = 1) = 0$ :

$$\begin{aligned} P_{\text{зоту}} &= p_y v_0, & \bar{P}_{\text{зоту}} &= 0, \\ P_{\text{ту}} &= p_y (1 - v_0), & \bar{P}_{\text{ту}} &= p_y, \\ P_{\text{зту}_2} &= (1 - p_0) v_0, & \bar{P}_{\text{зту}_2} &= 0, \\ P_{\text{зту}_3} &= (1 - p_y) (1 - v_0); & \bar{P}_{\text{зту}_3} &= 1 - p_y; \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

*случай 3.*  $P(S_y = 0) = 1$ ;  $P(S_0 = 1/D_y = 1) = 1$ ;  $P(S_0 = 1/D_y = 0) = 0$ :

$$\begin{aligned} P_{\text{толу}} &= v_y p_0, & \bar{P}_{\text{толу}} &= 0, \\ P_{\text{лу}_2} &= v_y (1 - p_0), & \bar{P}_{\text{лу}_2} &= v_y, \\ P_{\text{злу}_1} &= (1 - v_y) v_0, & \bar{P}_{\text{злу}_1} &= 0, \\ P_{\text{злу}_3} &= (1 - v_y) (1 - v_0); & \bar{P}_{\text{злу}_3} &= 1 - v_y. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

При сравнении формул (5.2.1)—(5.2.3) видно, что введение органа отбоя обеспечивает осуществление существенно новой операции (ТО), следовательно, увеличивает эксплуатационные возможности схемы управления. Далее, существенно уменьшается вероятность ложного управления. Вместе с тем вероятность проведения требуемого управления уменьшается незначительно, а суммарные вероятности задержек управления не изменяются. Однако наряду с этим приходится считаться и с возможностью проведения операции ложного отбоя.

С помощью двух вероятностных таблиц покажем характеристику работы предельно ненадежного оператора, управляющего органами управления и отбоя. В том слу-

Чае, когда ненадежный оператор осуществляет включение системы, можно записать:

$S_y \backslash D_y$	1	0
1	1	0
0	1	0

$S_o \backslash D_o$	1	0
1	0	1
0	0	1

Когда ненадежный оператор обрабатывает задержку включения системы, получаем:

$S_y \backslash D_y$	1	0
1	0	1
0	0	1

$S_o \backslash D_o$	1	0
1	1	0
0	1	0

Таким образом видно, что если на месте оператора находится предельно ненадежный, то введение в схему органа отбоя снижает ее устойчивость, практически делая непригодной к эксплуатации.

Можно привести и другие схемы неработоспособных операторов.

В первом случае оператор может правильно обработать сигнал на управление, но затем самостоятельно, без сигнала, произвести отбой:

$S_y \backslash D_y$	1	0
1	1	0

$S_o \backslash D_o$	1	0
0	1	0

Во втором случае оператор может произвести ложное включение органа управления, но затем самостоятельно

(до поступления сигнала от старшего оператора) произвести отбой схемы, исправляя свою ошибку:

$S_y$	$Z_y$	1	0
0	1	0	0

$S_0$	$Z_0$	1	0
0	1	0	0

Второй случай вряд ли предпочтительнее первого, поскольку он часто связан с возникновением в аппаратуре необратимых процессов.

Необходимо учесть, что подобное поведение (можно сказать — непоследовательное поведение) оператора зачастую обуславливается психофизиологическими перегрузками. Упрощение задач, уменьшение объема функциональных обязанностей должно способствовать ослаблению психофизических нагрузок и улучшению вероятностных характеристик операторов. В этом отношении разделение обязанностей по управлению и отбою на практике может существенно повысить эффективность систем управления.

Более того, распределение обязанностей между оператором управления и оператором отбоя приводит к повышению эффективности схемы в условиях появления ненадежных операторов, поскольку отработка ложного управления возможна лишь при совпадении действий обоих операторов. В то же время остается возможным появление задержки операции. Поэтому для повышения устойчивости работы схемы в условиях возможного воздействия неработоспособных операторов можно рекомендовать принцип группирования как операторов канала управления, так и операторов канала отбоя.

### 5.3. Методика анализа эффективности функционирования систем с двумя органами управления

При расчетах схем управления с двумя органами возможно рассмотрение двух задач. Одна из них — прямая задача (задача анализа) — состоит в вычислении характеристик эффективности управления по известным характеристикам операторов. Другая — обратная зада-

ча — связана с расчетом требуемых характеристик операторов по задаваемым допускам на характеристики эффективности (т. е. на вероятности различных исходов).

Остановимся на первой задаче. Здесь заданными обычно являются положительные предельные значения вероятностей отработки операторами или группами операторов различных функций управления:

$$\begin{aligned} Ap_y \leq p_y \leq Bp_y, \quad Av_y \leq v_y \leq Bv_y, \\ Ap_0 \leq p_0 \leq Bp_0, \quad Av_0 \leq v_0 \leq Bv_0, \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

причем соблюдаются условия существования следующих неравенств:

$$Ap_y \leq Bp_y, \quad Av_y < Bv_y, \quad Ap_0 \leq Bp_0, \quad Av_0 \leq Bv_0.$$

Пользуясь выражениями (5.1.1) — (5.1.3), можно найти ограничения вероятностей различных исходов процесса управления. Однако для этого необходимо записать следующие неравенства, вытекающие из выражений (5.3.1):

$$\begin{aligned} 1 - Bp_y \leq 1 - p_y \leq 1 - Ap_y, \quad 1 - Bv_y \leq 1 - v_y \leq 1 - Av_y, \\ 1 - Bp_0 \leq 1 - p_0 \leq 1 - Ap_0, \quad 1 - Bv_0 \leq 1 - v_0 \leq 1 - Av_0. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Переменная (5.3.2) соответственно со всеми выражениями (5.1.2) — (5.1.4) и вводя новые обозначения, получаем:

$$\begin{aligned} A_1 \leq p_y p_0 \leq B_1, \\ A_2 \leq p_y (1 - p_0) \leq B_2, \\ A_3 \leq (1 - p_y) v_0 \leq B_3, \\ A_4 \leq (1 - p_y) (1 - v_0) \leq B_4; \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

$$\begin{aligned} A_5 \leq p_y v_0 \leq B_5, \\ A_6 \leq p_y (1 - v_0) \leq B_6, \\ A_3 \leq (1 - p_y) v_0 \leq B_3, \\ A_4 \leq (1 - p_y) (1 - v_0) \leq B_4; \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

$$\begin{aligned} A_7 \leq v_y p_0 \leq B_7, \\ A_8 \leq v_y (1 - p_0) \leq B_8, \\ A_9 \leq (1 - v_y) v_0 \leq B_9, \\ A_{10} \leq (1 - v_y) (1 - v_0) \leq B_{10}. \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_1 &= Ap_y Ap_0, \\ A_2 &= Ap_y (1 - Bp_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= Av_0(1-Bp_y), \\
A_4 &= (1-Bp_y)(1-Bv_0), \\
A_5 &= Ap_yAv_0, \\
A_6 &= Ap_y(1-Bv_0), \\
A_7 &= Av_yAp_0, \\
A_8 &= Av_y(1-Bp_0), \\
A_9 &= Av_0(1-Bv_y), \\
A_{10} &= (1-Bv_y)(1-Bv_0); \\
B_1 &= Bp_yBp_0, \\
B_2 &= Bp_y(1-Ap_0), \\
B_3 &= Bv_0(1-Ap_y), \\
B_4 &= (1-Ap_y)(1-Av_0), \\
B_5 &= Bp_yBv_0, \\
B_6 &= Bp_yBv_0, \\
B_7 &= Bv_yBp_0, \\
B_8 &= Bv_y(1-Ap_0), \\
B_9 &= Bv_0(1-Av_y), \\
B_{10} &= (1-Av_y)(1-Av_0).
\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Условия существования неравенств (5.3.3) — (5.3.5) соблюдены всюду. Вычислив все выражения в (5.3.6), можно получить допуски на все исходы процесса управления, характеризующие его эффективность.

Более сложной является вторая задача. Ее сущность состоит в том, что в системах неравенств (5.3.3) — (5.3.5) предельные значения  $A_1$ — $A_{10}$ ,  $B_1$ — $B_{10}$  заданы, неизвестны же области определения величин  $p_y$ ,  $v_y$ ,  $p_0$ ,  $v_0$ .

Для решения этой обратной задачи необходимо, во-первых, выяснить закономерности, связанные с операцией назначения допусков на различные исходы вероятностного процесса управления, и, во-вторых, найти способ решения получаемых в результате назначения величин  $A_i$ ,  $B_i$  ( $i=1, 2, \dots, 10$ ) систем нелинейных неравенств (5.3.3) — (5.3.5).

#### **5.4. Некоторые свойства процессов, вероятности появления исходов в которых заданы**

Рассмотрим события, появившиеся в качестве исходов вероятностных процессов и составляющие полные группы. Вероятности появления различных исходов зависят от вероятностей элементарных операций, составляющих процесс, изменяясь от нуля до единицы.

При исследовании реальных схем для некоторых важных процессов управления можно указать верхние

или нижние (иногда обе) границы значений вероятностей их появления. Возникает вопрос о существующих ограничениях назначаемых допусков и о связях между ними.

Пусть для начала рассматриваемый процесс состоит в появлении или не появлении какого-либо события с вероятностью  $p_1$  и  $p_2$  соответственно ( $p_1 + p_2 = 1$ ), как в случае с одним органом управления. Области определения этих вероятностей зададим в общем виде с помощью двух неравенств

$$a_1 \leq p \leq b_1, \quad a_2 \leq p_2 \leq b_2, \quad (5.4.1)$$

в которых  $a_i \leq b_i$  ( $i=1, 2$ ).

Для ответа на вопрос о том, сколько величин из четырех пока неизвестных  $a_1, a_2, b_1, b_2$  можно выбирать произвольно, воспользуемся условием  $p_1 = 1 - p_2$  и преобразуем второе из неравенств (5.4.1). Получаем  $a_1 \leq 1 - p_2 \leq b_1$  и далее

$$1 - b_1 \leq p_2 \leq 1 - a_1. \quad (5.4.2)$$

Сравнивая соответственно обе части нового неравенства со вторым неравенством из выражения (5.4.1), получаем следующие условия, связывающие допусковые значения:

$$a_2 = 1 - b_1, \quad b_2 = 1 - a_1. \quad (5.4.3)$$

Последнее означает, что лишь два из четырех предельных значений могут выбираться произвольно, но с учетом требования

$$b_1 \leq 1. \quad (5.4.4)$$

Значения двух остальных параметров следуют из выражений (5.4.3).

Подобные связи можно установить и для процессов с числом исходов, большим двух.

**Пример 5.4.1.** Найти зависимости между предельными значениями вероятностей трех несовместных исходов, составляющих полную группу ( $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ ).

В общем виде вероятности исходов определяются следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} a_1 &\leq p_1 \leq b_1, \\ a_2 &\leq p_2 \leq b_2, \\ a_3 &\leq p_3 \leq b_3, \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

причем  $a_i \leq b_i$  ( $i=1, 2, 3$ ).

Воспользовавшись условием  $p_3 = 1 - (p_1 + p_2)$ , последнее из этих неравенств преобразуем к виду  $a_3 \leq 1 - (p_1 + p_2) \leq b_3$ , откуда следует новое неравенство:

$$1 - b_3 \leq p_1 + p_2 \leq 1 - a_3. \quad (5.4.6)$$

Сложив далее два первых неравенства (5.4.5), получим

$$a_1 + a_2 \leq p_1 + p_2 \leq b_1 + b_2. \quad (5.4.7)$$

Приравняв соответствующие части выражений (5.4.6), (5.4.7), имеем

$$a_3 = 1 - (b_1 + b_2), \quad b_3 = 1 - (a_1 + a_2). \quad (5.4.8)$$

Таким образом, видно, что, задав, например, два параметра  $b_1, b_2$  или  $a_1, a_2$ , можно однозначно определить и третий. При этом должно соблюдаться условие  $b_1 + b_2 \leq 1$ .

Если задать три параметра  $b_1, b_2, b_3$  с учетом требований

$$b_1 + b_2 \leq 1, \quad b_1 + b_2 + b_3 \geq 1, \quad (5.4.9)$$

то остальные три параметра можно определить по формулам

$$\begin{aligned} a_3 &= 1 - (b_1 + b_2), \\ a_1 + a_2 &= 1 - b_3, \\ a_1 &\leq b_1, \quad a_2 \leq b_2. \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

Пусть, например,  $b_1 = 0,3$ ;  $b_2 = 0,4$ ;  $b_3 = 0,8$ . Теперь легко определить  $a_3 = 0,3$ ;  $a_1 + a_2 = 0,2$ . Можно взять  $a_1 = 0,05$ ;  $a_2 = 0,15$ . Подставляя эти значения в (5.4.5), получаем

$$\begin{aligned} 0,05 &\leq p_1 \leq 0,3, \\ 0,15 &\leq p_2 \leq 0,4, \\ 0,3 &\leq p_3 \leq 0,8. \end{aligned}$$

Задача определения недостающих допустимых значений легко решается при любых других комбинациях трех задаваемых параметров, кроме тех, которые связаны формулами (5.4.8).

Переходим теперь к анализу связей между вероятностями появления различных исходов в процессах, описываемых логическими деревьями [42]. Для определен-

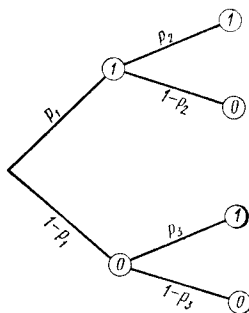


Рис. 5.4.1.

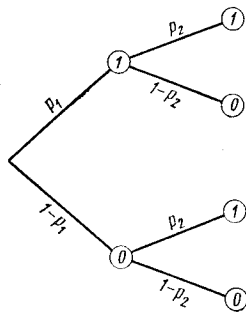


Рис. 5.4.2.

ности ограничимся рассмотрением логических деревьев второго порядка двух типов: для процесса с независимыми числами (рис. 5.4.1) и для марковского процесса (рис. 5.4.2). К первому типу относится процесс, изображенный на рис. 5.1.4, а ко второму — на рис. 5.1.3 и 5.1.5.

Рассмотрим нашу задачу прежде всего при точечных оценках для вероятностей исходов.

Для рис. 5.4.1 получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} p_1 p_2 &= a_1, \\ p_1 (1 - p_2) &= a_2, \\ (1 - p_1) p_2 &= a_3, \\ (1 - p_1) (1 - p_2) &= a_4. \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

Здесь  $\sum_{i=1}^4 a_i = 1$ ,  $p_1$  и  $p_2$  неизвестны. Следовательно, всего два значения из  $a_1 - a_4$  можно задать произвольно.

Рассмотрим четыре из шести возможных случаев.

**Пример 5.4.2.** Заданы значения  $a_1$  и  $a_2$ . Тогда из двух первых уравнений (5.4.11) получаем

$$p_1 = a_1 + a_2; \quad p_2 = a_1 / (a_1 + a_2). \quad (5.4.12)$$

Два последних служат для вычисления параметров  $a_3$ ,  $a_4$  по заданным

$$a_3 = \frac{a_1}{a_1 + a_2} - a_1; \quad a_4 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} - a_2. \quad (5.4.13)$$

Формулы (5.4.12) определяют требуемые значения вероятностей  $p_1$ ,  $p_2$ .

**Пример 5.4.3.** Заданы значения  $a_3$  и  $a_4$ . Воспользовавшись подстановкой  $k = 1 - p_1$ , два последних уравнения системы (5.1.11) приведем к виду

$$\begin{aligned} k p_2 &= a_3, \\ k (1 - p_2) &= a_4. \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

Решения получаем в следующей форме:

$$p_1 = 1 - (a_3 + a_4), \quad p_2 = a_3 / (a_3 + a_4). \quad (5.4.15)$$

Связь между собой всех параметров таква:

$$a_1 = a_3 / (a_3 + a_4) - a_3, \quad a_2 = a_4 / (a_3 + a_4) - a_2. \quad (5.4.16)$$

**Пример 5.4.4.** Заданы значения  $a_1$  и  $a_3$ . Получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} p_1 p_2 &= a_1, \\ (1 - p_1) p_2 &= a_3, \end{aligned}$$

дающую следующие результаты:



$$p_2 = a_1 + a_3, \quad p_1 = a_1 / (a_1 + a_3), \quad (5.4.17)$$

а также

$$a_2 = a_1 / (a_1 + a_3) - a_1, \quad a_4 = a_3 / (a_1 + a_3) - a_3. \quad (5.4.18)$$

**Пример 5.4.5.** Заданы параметры  $a_2$  и  $a_4$ . Получаем

$$p_1 = a_2 / (a_2 + a_4), \quad p_2 = 1 - (a_2 + a_4), \quad (5.4.19)$$

и кроме того

$$a_1 = a_2 / (a_2 + a_4) - a_2, \quad a_3 = a_4 / (a_2 + a_4) - a_4. \quad (5.4.20)$$

Рассматривая полученные выражения для связи значений  $a_1, a_2, a_3, a_4$  из (5.4.13), (5.4.16), (5.4.19), (5.4.20), можно видеть, что путем несложных преобразований они приводятся к одинаковому результату, который и описывается соотношением

$$a_1/a_2 = a_3/a_4. \quad (5.4.21)$$

Для рисунка 5.4.2 система уравнений

$$\begin{aligned} p_1 p_2 &= a_1, \\ p_1 (1 - p_2) &= a_2, \\ (1 - p_1) p_3 &= a_3, \\ (1 - p_1) (1 - p_3) &= a_4 \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

содержит уже три неизвестных:  $p_1, p_2, p_3$ , причем

$$\sum_1^4 a_i = 1. \quad \text{В отличие от ранее рассматривавшихся слу-}$$

чаев, теперь можно задавать три из четырех ограничивающих параметра.

Таким образом, исследование системы для рис. 5.4.2 не многим сложнее, чем в случае с рис. 5.4.1. Общим для этих систем является возможность независимого задания такого количества вероятностей исходов, которое равно числу степеней свободы рассматриваемого процесса (число степеней свободы в данном случае равно числу искомых вероятностей элементарных операций).

В тех случаях, когда вероятности исходов задаются с помощью неравенств, количество предельных значений, которое можно назначать произвольно, равно удвоенному числу степеней свободы.

### 5.5. Определение требуемых вероятностей элементарных операций по допускам, установленным на вероятности исходов

В тех случаях, когда на вероятности некоторых исходов процесса устанавливаются допустимые предельные значения, вместо систем уравнений (5.4.11) и (5.4.22)

получаются системы неравенств вида

$$\begin{aligned} a_1 &\leq p_1 p_2 \leq b_1, \\ a_2 &\leq p_1 (1-p_2) \leq b_2, \\ a_3 &\leq (1-p_1) p_2 \leq b_3, \\ a_4 &\leq (1-p_1) (1-p_2) \leq b_4, \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

или

$$\begin{aligned} a_1 &\leq p_1 p_2 \leq b_1, \\ a_2 &\leq p_1 (1-p_2) \leq b_2, \\ a_3 &\leq (1-p_1) p_3 \leq b_3, \\ a_4 &\leq (1-p_1) (1-p_3) \leq b_4, \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

причем  $0 \leq a_i, b_i \leq 1; i=1, 2, 3, 4; a_i \leq b_i$ .

Каждая из приведенных систем, в свою очередь, состоит из двух подсистем неравенств следующего вида:

$$\begin{aligned} a_1 &\leq xy \leq b_1, \\ a_2 &\leq x(1-y) \leq b_2, \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

в которых  $x$  и  $y$  — неизвестные.

Ввиду трудностей, обычно связанных с решением нелинейных неравенств, а также для контроля получаемых при этом выражений, на рис. 5.5.1 построены области их определения (построение охватывает задачи, для которых имеет место условие  $b_1 a_2 > a_1 b_2$ ).

Переходим к получению областей, определяющих границы значений для неизвестных  $x, y$ .

С этой целью прежде всего сложим оба выражения (5.5.3). Получим  $a_1 + a_2 \leq x \leq b_1 + b_2$ , причем дополнительно имеем условие существования  $b_1 + b_2 \leq 1$ . Далее почленно разделим первое неравенство (5.5.1) на обращенное второе

$$\frac{a_1}{b_2} \leq \frac{y}{1-y} \leq \frac{b_1}{a_2}$$

и затем на

$$\frac{a_1}{a_1 + b_2} \leq y \leq \frac{b_1}{b_1 + a_2}$$

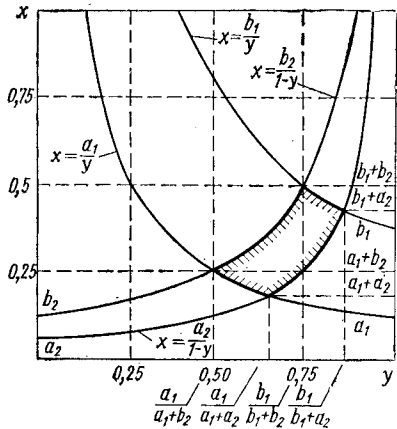


Рис. 5.5.1.

Таким образом, получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &\leq x \leq b_1 + b_2, \\ \frac{a_1}{a_1 + b_2} &\leq y \leq \frac{b_1}{b_1 + a_2}. \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

Как видно из рис. 5.5.2, прямоугольник I, соответствующий этим условиям, больше заштрихованной области, определяемой системой (5.5.3). Поэтому выражениям (5.5.4) соответствуют лишние куски, не являющиеся решениями.

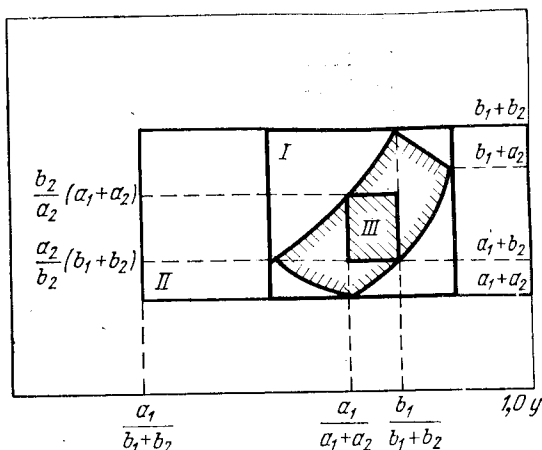


Рис. 5.5.2.

Попробуем получить решение иным способом [89]. Разделим первое неравенство (5.5.3) на обращенное неравенство, определяющее неизвестное  $x$ , т. е. на выражение  $b_1 + b_2 \geq x \geq a_1 + a_2$ . Получаем

$$\frac{a_1}{b_1 + b_2} \leq y \leq \frac{b_1}{a_1 + a_2}. \quad (5.5.5)$$

При построении новой области II (рис. 5.5.2) необходимо учитывать следующие соотношения:

$$\frac{a_1}{b_1 + b_2} < \frac{a_2}{a_1 + b_2}, \quad \frac{b_1}{b_1 + a_2} < \frac{b_1}{a_1 + a_2}.$$

В нашем случае, поскольку  $b_1/(a_1 + a_2) > 1$ , вместо (5.5.5) следует записать  $a_1/(b_1 + b_2) \leq y \leq 1$ . В результате

область II получается шире области I. Следовательно, и второй способ дает лишние куски, не обеспечивая строгого получения решения.

Напомним, что нас может устроить только такое решение, все точки области определения которого удовлетворяют неравенству (5.5.3). Очевидно, задача не является однозначной, решений может быть множество. Одним из них, например, является решение, описываемое прямоугольной областью III (рис. 5.5.2), заключающей все точки с координатами

$$\frac{a_2}{b_2} (b_1 + b_2) \leq x \leq \frac{b_2}{a_2} (a_1 + a_2),$$

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} \leq y \leq \frac{b_1}{b_1 + b_2}.$$
(5.5.6)

Однако следует учесть, что приемлемыми будут решения, для которых граничные значения неизвестных образуют достаточно широкие интервалы, поскольку при этом техническая реализация требуемых параметров становится более доступной.

В этом смысле представляет интерес решение, получаемое из некоторых общих соображений, основанных на применении неопределенных неравенств. Процедура получения решения состоит в следующем. Запишем решение в виде

$$\begin{aligned} A_x \leq x \leq B_x, \\ A_y \leq y \leq B_y, \end{aligned}$$
(5.5.7)

причем  $A_x, A_y, B_x, B_y$  — неопределенные числа.

Пользуясь этим, составим выражения для  $xy$  и  $x(1-y)$  подобно тому, как это делалось в § 5.3:

$$\begin{aligned} A_x A_y \leq xy \leq B_x B_y, \\ A_x (1 - B_y) \leq x(1 - y) \leq B_x (1 - A_y). \end{aligned}$$
(5.5.8)

Эти неравенства по форме подобны неравенствам (5.5.3). Сравнивая системы (5.5.3) и (5.5.8), потребуем соблюдения следующих условий:

$$\begin{aligned} A_x A_y = a_1, \quad B_x B_y = b_1, \\ A_x (1 - B_y) = a_2, \quad B_x (1 - A_y) = b_2. \end{aligned}$$
(5.5.9)

Почленным делением этих выражений переходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} a_2 A_x + a_1 B_y = a_1, \\ b_1 A_x + b_2 B_y = b_1, \end{aligned}$$
(5.5.10)

в которой неизвестные  $A_x$  и  $A_y$  могут быть вычислены по формулам

$$A_y = \frac{a_1(b_2 - b_1)}{a_2b_2 - a_1b_1}, \quad B_y = \frac{b_1(a_2 - a_1)}{a_2b_2 - a_1b_1}.$$

Кроме того, получаем

$$A_x = \frac{a_2b_2 - a_1b_1}{b_2 - b_1}, \quad B_x = \frac{a_2b_2 - a_1b_1}{a_2 - a_1}.$$

Искомые неравенства приобретают вид

$$\frac{a_2b_2 - a_1b_1}{b_2 - b_1} \leq x \leq \frac{a_2b_2 - a_1b_1}{a_2 - a_1}, \quad (5.5.11)$$

$$\frac{a_1(b_2 - b_1)}{a_2b_2 - a_1b_1} \leq y \leq \frac{b_1(a_2 - a_1)}{a_2b_2 - a_1b_1}.$$

**Пример 5.5.1.** Выражения (5.5.11) упростить для случая задания точечных ограничений, когда  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$ .

Преобразуем предельные значения

$$\frac{a_2b_2 - a_1b_1}{b_2 - b_1} = \frac{a_2^2 - b_1^2}{a_2 - a_1} = a_1 + a_2,$$

$$\frac{a_2b_2 - a_1b_1}{a_2 - a_1} = a_1 + a_2,$$

$$\frac{a_1(b_2 - b_1)}{a_2b_2 - a_1b_1} = \frac{a_1(a_2 - a_1)}{a_2^2 - a_1^2} = \frac{a_1}{a_1 + a_2}, \quad \frac{b_1(a_2 - a_1)}{a_2b_2 - a_1b_1} = \frac{a_1}{a_1 + a_2}.$$

В результате имеем

$$x = a_1 + a_2, \quad y = a_1 / (a_1 + a_2).$$

Результат по своему смыслу полностью совпадает с выражениями для  $p_1$ ,  $p_2$  в примере 5.4.2 (5.4.15).

Условия осуществимости полученных выражений (5.5.11) можно записать в виде тройных неравенств следующим образом:

$$0 \leq \frac{a_2b_2 - a_1b_1}{b_2 - b_1} \leq \frac{a_2b_2 - a_1b_1}{a_2 - a_1} \leq 1, \quad (5.5.12)$$

$$0 \leq \frac{a_1(b_2 - b_1)}{a_2b_2 - a_1b_1} \leq \frac{b_1(a_2 - a_1)}{a_2b_2 - a_1b_1} \leq 1.$$

Требование положительности здесь (левые неравенства) обеспечивается одним из двух условий:

$$\begin{aligned} b_2 &\geq b_1; & a_2 &\geq a_1; \\ b_2 &\leq b_1; & a_2 &\leq a_1. \end{aligned} \quad (5.5.13)$$

Средние неравенства приводят к условиям

$$\left| \frac{a_1}{b_1} (b_2 - b_1) \right| \leq |a_2 - a_1| \leq |b_2 - b_1|, \quad (5.5.14)$$

$$|a_2 - a_1| \leq |b_2 - b_1| \leq \left| \frac{b_1}{a_1} (a_2 - a_1) \right|.$$

Наконец, правые неравенства соблюдаются при условиях

$$|b_1(a_2 - a_1)| \leq |a_2 b_2 - a_1 b_1| \leq |a_2 - a_1|, \quad (5.5.15)$$

которые при выполнении требований (5.5.13) соблюдаются всегда. В самом деле, опустив модули, запишем требования:  $b_1 a_2 - b_1 a_1 \leq a_2 b_2 - a_1 b_1$  и  $a_2 b_2 - a_1 b_1 \leq a_2 - a_1$ . Первое неравенство очевидно. Второе преобразуем:  $a_1(1 - b_1) \leq a_2(1 - b_2)$ . Здесь  $a_1 \leq a_2$ . Кроме того,  $1 - b_1 \leq 1 - b_2$ , поэтому и второе выполняется. Следовательно, условия (5.5.15) можно в дальнейшем не учитывать.

Пользуясь (5.5.14), можно по заданным значениям трех параметров определить четвертый.

**Пример 5.5.2.** При условиях рис. 5.5.1 проверить выполнение условий (5.5.14). Дано:  $a_1 = 1/8$ ,  $a_2 = 1/16$ ,  $b_1 = 3/8$ ,  $b_2 = 1/8$ .

Здесь  $a_1 > a_2$ ,  $b_1 > b_2$ . Неравенства (5.5.11) записываются в следующем виде:

$$\frac{a_1 b_1 - a_2 b_2}{b_1 - b_2} \leq x \leq \frac{a_1 b_1 - a_2 b_2}{a_1 - a_2},$$

$$\frac{a_1 (b_1 - b_2)}{a_1 b_1 - a_2 b_2} \leq y \leq \frac{b_1 (a_1 - a_2)}{a_1 b_1 - a_2 b_2}. \quad (5.5.16)$$

Второе неравенство (5.5.14) дает условие

$$a_1 - a_2 \leq b_1 - b_2 \leq \frac{b_1}{a_1} (a_1 - a_2), \quad (5.5.17)$$

откуда в числах получаем

$$\frac{1}{16} \leq \frac{4}{16} \not\leq \frac{3}{16}.$$

При непосредственном подсчете пределов имеем

$$\frac{5}{32} \leq x \leq \frac{20}{32}, \quad \frac{4}{5} \leq y \not\leq \frac{3}{5}. \quad (5.5.18)$$

Как видно из последнего, условия существования второго неравенства не выполняются.

Чтобы довести пример до конца, изменим значение предела  $b_2$ . Следуя (5.5.17), определим допустимые пределы для последнего:

$$b_1 - (a_1 - a_2) \geq b_2 \geq b_1 \frac{a_2}{a_1}.$$

При подсчете получим

$$\frac{5}{16} \geq b_2 \geq \frac{3}{16}. \quad (5.5.19)$$

На рис. 5.5.3 приведены кривые системы (5.5.16) — область IV — для  $b_2=4/16$ . При подсчете пределов (5.5.16) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &\leq x \leq \frac{2}{4}, \\ \frac{2}{4} &\leq y \leq \frac{3}{4}. \end{aligned} \quad (5.5.20)$$

Отличие области IV от III (рис. 5.5.3) состоит в том, что теперь требования по параметру  $y$  менее жестки. Это может иметь определенное преимущество при технической реализации проектируемого

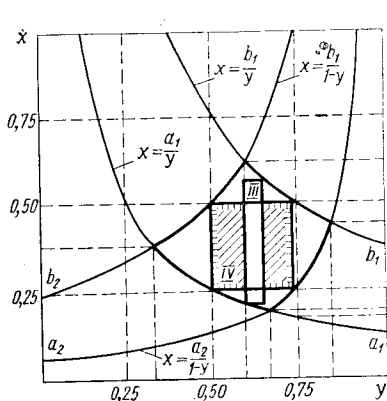


Рис. 5.5.3.

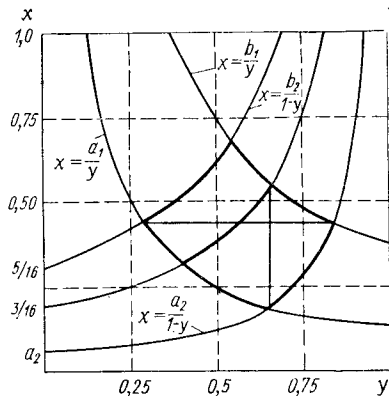


Рис. 5.5.4.

процесса. Однако напомним, что в этом случае приходится учитывать возникающие ограничения (5.5.14).

Наконец, ниже приведены результаты подсчетов для крайних значений  $b_2$  из (5.5.19). Так, при  $b_2=3/16$  имеем

$$\frac{3}{16} \leq x \leq \frac{9}{16}, \quad \frac{2}{3} \leq y \leq \frac{2}{3}.$$

При  $b_2=5/16$  получаем

$$\frac{7}{16} \leq x \leq \frac{7}{16}, \quad \frac{2}{7} \leq y \leq \frac{6}{7}.$$

Два последних случая показаны на рис. 5.5.4. С точки зрения технической реализации они чрезвычайно жестки, так как один из параметров должен обладать нулевым полем допуска (точечная оценка).

После отыскания допустимых пределов изменения вероятностей отработки элементарных операций можно вычислить пределы изменения остальных вероятностей различных исходов.

Возвращаясь, например, к задаче рис. 5.5.1 и для определенности считая заданными предельные значения  $a_1, a_2, b_1, b_2$ , можно, пользуясь результатами (5.5.11), записать следующие требования:

$$\frac{a_2 b_2 - a_1 b_1}{b_2 - b_1} \leq p_1 \leq \frac{a_2 b_2 - a_1 b_1}{a_2 - a_1},$$

$$\frac{a_1 (b_2 - b_1)}{a_2 b_2 - a_1 b_1} \leq p_2 \leq \frac{b_1 (a_2 - a_1)}{a_2 b_2 - a_1 b_1}.$$

Здесь  $a_2 \geq a_1, b_2 \geq b_1$ .

$$\left| \frac{a_1}{b_1} (b_2 - b_1) \right| \leq |a_2 - a_1| \leq |b_2 - b_1| \leq \left| \frac{b_1}{a_1} (a_2 - a_1) \right|.$$

Далее, пользуясь последней парой в системе неравенств (5.5.1), получаем выражения для искомых предельных значений:

$$a_3 = \frac{a_1 (b_2 - b_1)}{a_2 b_2 - a_1 b_1} \left[ 1 - \frac{a_2 b_2 - a_1 b_1}{a_2 - a_1} \right],$$

$$b_3 = \frac{b_1 (a_2 - a_1)}{a_2 b_2 - a_1 b_1} \left[ 1 - \frac{a_2 b_2 - a_1 b_1}{b_2 - b_1} \right],$$

$$a_4 = \left( 1 - \frac{a_2 b_2 - a_1 b_1}{a_2 - a_1} \right) \left[ 1 - \frac{b_1 (a_2 - a_1)}{a_2 b_2 - a_1 b_1} \right], \quad (5.5.21)$$

$$b_4 = \left( 1 - \frac{a_2 b_2 - a_1 b_1}{b_2 - b_1} \right) \left[ 1 - \frac{a_1 (b_2 - b_1)}{a_2 b_2 - a_1 b_1} \right].$$

Здесь  $a_3 \leq b_3, a_4 \leq b_4$ .

Можно показать также, что при любых  $a_1, a_2, b_1, b_2$  имеют место условия  $0 \leq a_3, a_4, b_3, b_4 \leq 1$ , важные с точки зрения осуществимости процесса управления. Обратимся непосредственно к задаче с двумя органами управления. Будем полагать, что по соображениям полезности можно всегда указать пределы для вероятностей важнейших исходов.

Число ограничиваемых исходов можно установить следующим образом. При подробном рассмотрении де-



рева рис. 5.1.2 всегда получаем десять неравенств, содержащих четыре неизвестных:  $p_y, v_y, p_o, v_o$ . Последнее означает, что могут быть ограничены четыре вероятности исходов. Вероятности остальных исходов вычисляются. Например, можно задать ограничения на вероятности  $P_{зоту}, P_{ту}, P_{толу}, P_{лу}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 \leq P_{зоту} \leq \delta_1, \quad 1 \geq P_{ту} \geq \delta_2, \\ 1 \geq P_{толу} \geq \delta_3, \quad 0 \leq P_{лу} \leq \delta_4. \end{aligned} \quad (5.5.22)$$

Здесь  $\delta_1 - \delta_4$  — заранее устанавливаемые величины, заключенные между 0 и 1.

Введем двустороннее ограничение более общего характера, переписав систему (5.5.22) путем упорядочивания символов в соответствии с выражениями (5.3.4), (5.3.5):

$$\begin{aligned} A_5 \leq P_{зоту} \leq \bar{B}_5, \\ A_6 \leq P_{ту} \leq B_6, \\ A_7 \leq P_{толу} \leq B_7, \\ A_8 \leq P_{лу} \leq B_8. \end{aligned} \quad (5.5.23)$$

Здесь и ниже чертой сверху обозначены допуски, значения которых имеют существенное влияние на эффективность систем и могут быть установлены более или менее обоснованно.

Систему (5.5.23) перепишем в развернутом виде:

$$\begin{aligned} A_5 \leq p_y v_o \leq \bar{B}_5, \\ \bar{A}_6 \leq p_y (1 - v_o) \leq B_6, \\ \bar{A}_7 \leq v_y p_o \leq B_7, \\ A_8 \leq v_y (1 - p_o) \leq \bar{B}_8. \end{aligned} \quad (5.5.24)$$

Остальные вероятности:  $P_{тоут}; P_{зу(зто)}; P_{зту1,2}; P_{зу1,2}$ , будут вычислены по выражениям (5.1.2) — (5.1.4) после нахождения неизвестных системы (5.5.24).

Решение же получается с учетом выражений (5.5.11) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{A}_6 B_6 - A_5 \bar{B}_5}{B_6 - \bar{B}_5} \leq p_y \leq \frac{\bar{A}_5 B_5 - A_5 \bar{B}_5}{\bar{A}_6 - A_5}; \\ \frac{A_5 (B_6 - \bar{B}_5)}{\bar{A}_6 B_6 - A_5 \bar{B}_5} \leq v_o \leq \frac{\bar{B}_5 (\bar{A}_6 - A_5)}{\bar{A}_6 B_6 - A_5 \bar{B}_5}, \end{aligned} \quad (5.5.25)$$

а также

$$\begin{aligned} \frac{A_8 \bar{B}_8 - \bar{A}_7 B_7}{\bar{B}_8 - B_7} &\leq v_y \leq \frac{A_8 \bar{B}_8 - \bar{A}_7 B_7}{A_8 - \bar{B}_8}, \\ \frac{\bar{A}_7 (\bar{B}_8 - B_7)}{A_8 \bar{B}_8 - \bar{A}_7 B_7} &\leq p_0 \leq \frac{\bar{B}_7 (A_8 - \bar{A}_7)}{A_8 \bar{B}_8 - \bar{A}_7 B_7}, \end{aligned} \quad (5.5.26)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \left| \frac{A_5}{\bar{B}_5} (B_6 - \bar{B}_5) \right| &\leq |\bar{A}_6 - A_5| \leq |B_6 - \bar{B}_5| \leq \left| \frac{\bar{B}_5}{A_5} (\bar{A}_6 - A_5) \right|, \\ \left| \frac{\bar{A}_7}{\bar{B}_7} (\bar{B}_8 - B_7) \right| &\leq |A_8 - \bar{A}_7| \leq |\bar{B}_8 - B_7| \leq \left| \frac{B_7}{\bar{A}_7} (A_8 - \bar{A}_7) \right|. \end{aligned} \quad (5.5.27)$$

Таким образом, в общем случае требуется двустороннее ограничение вероятностных характеристик работы операторов.

**Пример 5.5.3.** Получить решение системы (5.5.24) при следующих значениях допусков на исходы процесса:  $A_5=0$ ,  $B_6=1$ ,  $B_7=1$ ,  $A_8=0$ .

Для получения ответа воспользуемся выражениями (5.5.16), положив поочередно

$$\begin{aligned} a_1 = A_5 = 0, & \quad b_1 = \bar{B}_5, \\ a_2 = \bar{A}_6, & \quad b_2 = B_6 = 1 \end{aligned}$$

и далее

$$\begin{aligned} a_1 = \bar{A}_7, & \quad b_1 = B_7 = 1, \\ a_2 = A_8 = 0, & \quad b_2 = \bar{B}_8. \end{aligned}$$

В результате получаем решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{A}_6}{1 - B_5} &\leq p_y \leq 1; & 1 - \bar{B}_8 &\leq v_y < 1, \\ \frac{\bar{A}_7}{1 - B_8} &\leq p_0 \leq 1, & 0 &\leq v_0 \leq \bar{B}_5. \end{aligned} \quad (5.5.28)$$

причем должны соблюдаться дополнительные условия:  $\bar{A}_6 \leq 1 - B_5$ ,  $\bar{A}_7 \leq 1 - B_8$ .

## АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ БОЛЬШОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ХАРАКТЕРИСТИК РАБОТЫ ОПЕРАТОРОВ

### 6.1. Математическая модель структуры большой системы

Анализ структур систем, применяемых в различных областях науки и техники, часто проводится специфическими методами, применимыми лишь в данной области. Однако в последнее время появились новые методы исследования больших систем, базирующиеся на более высоком уровне общности, позволяющие преодолеть рамки специализации. Примером может служить теория логических графов [14, 94], которая с успехом применяется при решении многих теоретических и практических задач.

В теории структур объектом изучения являются графы, элементам которых приписываются определенные математические выражения (функции передачи). В общем случае функцией передачи элемента структуры называют величину  $d_{ij}$ , умножение на которую входного воздействия  $x_i$  дает выходное воздействие  $y_j$ . Существующая зависимость между входным и выходным воздействием описывается уравнением  $y = d_{ij}x_i$ . Однако следует заметить, что такое понятие функции передачи является достаточным для описания технических элементов структуры, а также применительно к элементам оператора без раскрытия их специфических особенностей.

Распространим основные положения теории логических графов на случаи, когда при исследовании структуры большой системы необходимо учесть влияние оператора. Используя логико-вероятностную модель оператора, определим функцию передачи обслуживаемого узла (пульта управления) при условии, что сигналы через пульт могут передаваться как аппаратурой без участия операторов, так и операторами, т. е. аппаратура и операторы рассматриваются как дублирующие друг друга элементы при приеме и передаче сигналов. Рассмотрим возможные условия появления сигнала на выходе узла с помощью диаграммы, изображенной на рис. 6.1.1. Здесь введены следующие обозначения:

$w_i$  — событие, состоящее в передаче сигнала оператором;  $z_i$  — событие, состоящее в передаче сигнала аппаратурой;

$x_i$  — событие, состоящее в поступлении сигнала на вход пульта;

$r_i$  — событие, состоящее в передаче сигнала оператором при условии, что событие  $x_i$  не произошло;

$w_i - r_i$  — событие, состоящее в передаче сигнала оператором при условии, что событие  $x_i$  произошло;

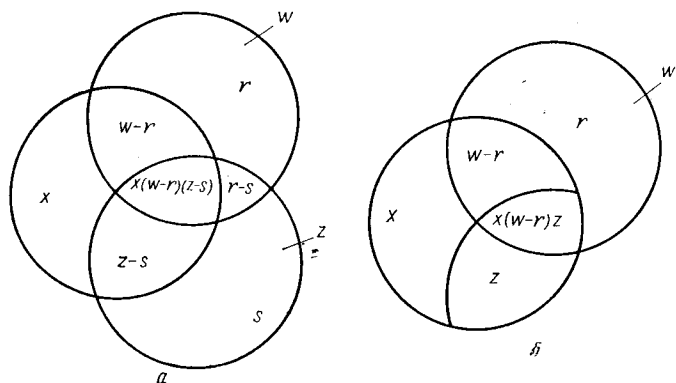


Рис. 6.1.1.

$s_i$  — событие, состоящее в передаче сигнала аппаратурой при условии, что событие  $x_i$  не произошло;

$z_i - s_i$  — событие, состоящее в передаче сигнала аппаратурой при условии, что событие  $x_i$  произошло;

$y_i$  — событие, состоящее в появлении сигнала на выходе узла.

На основании диаграммы связь входного сигнала  $x_i$  с выходным  $y_i$  можно записать с помощью формулы

$$y_i = x_i [(w_i - r_i) + (z_i - s_i)] + r_i + s_i. \quad (6.1.1)$$

Поскольку в поставленной задаче событие  $s_i$  можно считать практически невозможным, то выражение (6.1.1) упрощается:

$$y_i = x_i [(w_i - r_i) + z_i] \quad (6.1.2)$$

или

$$y_i = x_i q_i + r_i, \quad (6.1.3)$$

где  $q_i = (w_i - r_i) + z_i$  — функция передачи узла при наличии сигнала на его входе;  $r_i$  — функция передачи узла при отсутствии сигнала на его входе.

Из диаграммы рис. 6.1.1 можно установить, что события  $\omega_i, r_i, z_i, q_i$  связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} q_i \cap r_i &= 0, \\ (\omega_i - r_i) \cap r_i &= 0, \\ z_i \cap r_i &= 0, \\ \omega_i \cap z_i &\neq 0, \\ (\omega_i - r_i) \cap z_i &\neq 0. \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

Таким образом, узлам структуры с учетом характеристик работы операторов и аппаратуры можно приписать величины  $z_i, \omega_i, r_i$ , имея в виду при этом, что они связаны между собой зависимостью (6.1.3).

Самым общим случаем графа [14], отображающего структуру большой системы, является  $(m, n)$ -полюсный, невырожденный, полностью связанный, неориентированный граф, представленный на рис. 6.1.2, где

$y_{0i}$  — задающий узел ( $i=1, 2, \dots, m$ );

$y_{pi}$  — промежуточный узел ( $i=1, 2, \dots, k$ );

$y_i$  — принимающий узел ( $i=1, 2, \dots, n$ );

$z_{0i}, \omega_{0i}, r_{0i}$  — функции передачи задающего узла;

$z_{pi}, \omega_{pi}, r_{pi}$  — функции передачи промежуточного узла;

$z_i, \omega_i, r_i$  — функции передачи принимающего узла;

$c_{ij}$  — функции передачи ветви, ориентированной в направлении от задающего узла  $y_{0j}$  к задающему узлу  $y_{0i}$ ;

$f_{ij}$  — функция передачи ветви, ориентированной в направлении от задающего узла  $y_{0j}$  к промежуточному узлу  $y_{pi}$ ;

$b_{ij}$  — функция передачи ветви, ориентированной в направлении от задающего узла  $y_{0j}$  к принимающему узлу  $y_i$ ;

$d_{ij}$  — функция передачи ветви, ориентированной в направлении от промежуточного узла  $y_{pj}$  к промежуточному узлу  $y_{pi}$ ;

$l_{ij}$  — функция передачи ветви, ориентированной в направлении от промежуточного узла  $y_{pj}$  к принимающему узлу  $y_i$ ;

$a_{ij}$  — функция передачи ветви, ориентированной в направлении от принимающего узла  $y_j$  к принимающему узлу  $y_i$ ;

Ветвям, ориентированным в обратных направлениях, соответствуют те же символы с измененным порядком написания индексов.

В каждом узле графа (рис. 6.1.3,а) будем различать входной сигнал  $x_i$ , выходной сигнал  $y_i$ , функции передачи узла  $z_i$ ,  $w_i$ ,  $r_i$  или на основании (6.1.3) —  $q_i$ ,  $r_i$ . Связь входного сигнала с выходным выражается формулой  $y_i = x_i q_i + r_i$ , где  $y_i$ ,  $x_i$ ,  $q_i$ ,  $r_i$  — двоичные переменные. Символы выходных сигналов совпадают с символа-

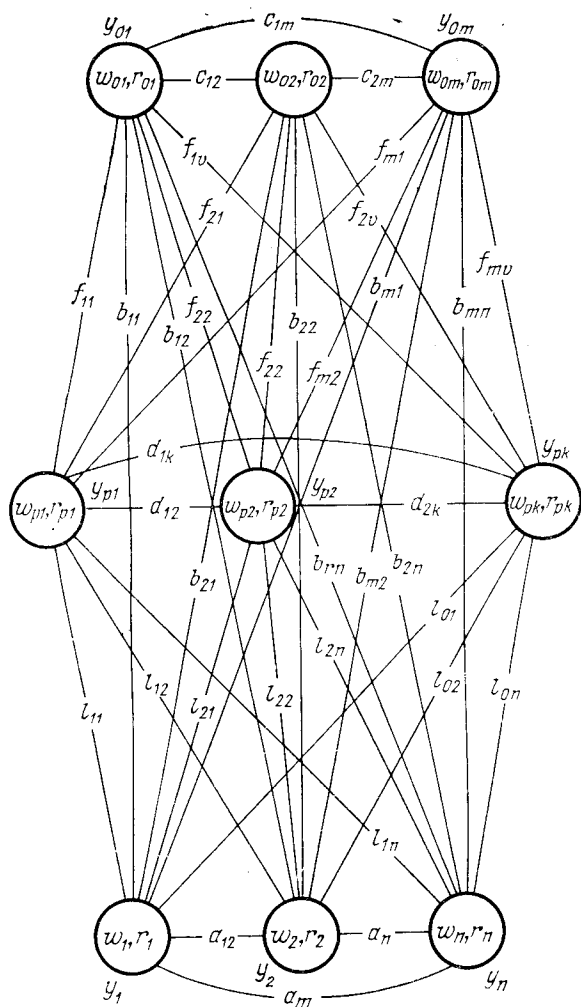


Рис. 6.1.2.

ми узлов. Сигналы, отвечающие задающим узлам, считаются независимыми двоичными величинами, а сигналы, отвечающие промежуточным и принимающим узлам, — зависимыми двоичными величинами.

Символы выходных сигналов совпадают с символами самих узлов. Узлу  $y_j$  с выходящей из него ветвью

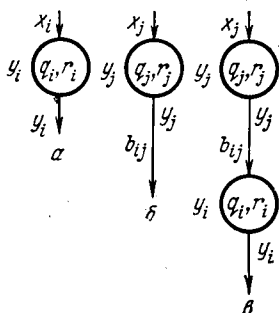


Рис. 6.1.3.

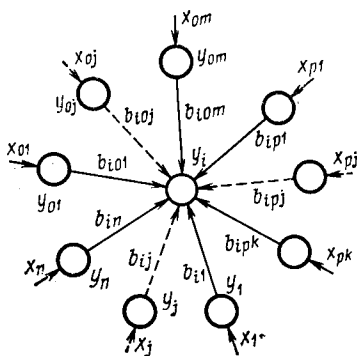


Рис. 6.1.4.

с функцией передачи  $b_{ij}$  приписывается символ  $b_{ij}y_j$  или с учетом (6.1.3) —  $b_{ij}(x_jq_j+r_j)$ . Система, состоящая из одного узла с выходящей из него ветвью, называется однополюсным графом (рис. 6.1.3,б). Если в узел  $y_i$  (рис. 6.1.3,в) с функциями передачи  $q_i, r_i$ , входным сигналом  $x_i$  и выходным сигналом  $y_i$  подходит однополюсный граф  $b_{ij}(x_jq_i+r_j)$ , то входному сигналу этого узла приписывается символ

$$x_i = b_{ij}(x_jq_j+r_j), \quad (6.1.5)$$

а выходному сигналу — символ

$$y_i = [b_{ij}(x_jq_j+r_j)] q_i + r_i. \quad (6.1.6)$$

Если в узел  $y_i$  входят (рис. 6.1.4)  $m$  однополюсных графов  $b_{i01}(x_{01}q_{01}+r_{01}), b_{i02}(x_{02}q_{02}+r_{02}) \dots b_{i0m}(x_{0m}q_{0m}+r_{0m})$ , выходящих из задающих узлов  $y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0m}$ ,  $k$  однополюсных графов  $b_{ip1}(x_{p1}q_{p1}+r_{p1}), b_{ip2}(x_{p2}q_{p2}+r_{p2}), \dots, b_{ipk}(x_{pk}q_{pk}+r_{pk})$  выходящих из промежуточных узлов  $y_{p1}, y_{p2}, y_{pk}$ ;  $n$  однополюсных графов  $a_{i1}(x_1q_1+r_1), a_{i2}(x_2q_2+r_2), \dots, a_{in}(x_nq_n+r_n)$ , выходящих

из принимающих узлов  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , то входному сигналу узла  $x_i$  приписывается символ

$$x_i = \sum_{s=1}^m b_{ios} x_{os} q_{os} + \sum_{j=1}^k l_{ipj} x_{pj} q_{pj} + \sum_{h=1}^n a_{ih} x_h q_h + \\ + \sum_{s=1}^m b_{ios} r_{os} + \sum_{j=1}^k l_{ipj} r_{pj} + \sum_{h=1}^n a_{ih} r_h. \quad (6.1.7)$$

Этот узел  $y_i$  рассматривается как сумма  $(m+k+n)$  однополюсных графов и называется  $(m+k+n)$ -полюсным графом, который обозначается символом  $y_i$  (в свою очередь,  $y_i = x_i q_i + r_i$ ).

Таким образом, выходным сигналам графа, изображенного на рис. 6.1.2, можно поставить в соответствие следующую подсистему логических уравнений:

$$y_{01} = x_{01} q_{01} + r_{01}, \\ y_{02} = x_{02} q_{02} + r_{02}, \\ \dots \\ y_{0m} = x_{0m} q_{0m} + r_{0m}, \\ y_{p1} = x_{p1} q_{p1} + r_{p1}, \\ y_{p2} = x_{p2} q_{p2} + r_{p2}, \\ \dots \\ y_{pk} = x_{pk} q_{pk} + r_{pk}, \\ y_1 = x_1 q_1 + r_1, \\ y_2 = x_2 q_2 + r_2, \\ \dots \\ y_n = x_n q_n + r_n. \quad (6.1.8)$$

Входные сигналы узлов графа описываются подсистемой логических уравнений

$$x_{01} = c_{12} y_{02} + c_{13} y_{03} + \dots + c_{1m} y_{0m} + f_{11} y_{p1} + \\ + f_{12} y_{p2} + \dots + f_{1k} y_{pk} + b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + \dots + b_{1n} y_n, \\ x_{02} = c_{21} y_{01} + c_{23} y_{03} + \dots + c_{2m} y_{0m} + f_{21} y_{p1} + \\ + f_{22} y_{p2} + \dots + f_{2k} y_{pk} + b_{21} y_1 + b_{22} y_2 + \dots + b_{2n} y_n, \\ \dots \\ x_{0m} = c_{m1} y_{01} + c_{m2} y_{02} + \dots + c_{m(m-1)} y_{0(m-1)} + f_{m1} y_{p1} + \\ + f_{m2} y_{p2} + \dots + f_{mk} y_{pk} + b_{m1} y_1 + b_{m2} y_2 + \dots + b_{mn} y_n, \\ x_{p1} = f_{11} y_{01} + f_{12} y_{02} + \dots + f_{1m} y_{0m} + d_{12} y_{p2} + \\ + d_{13} y_{p3} + \dots + d_{1k} y_{pk} + l_{11} y_1 + l_{12} y_2 + \dots + l_{1n} y_n,$$



$$\begin{aligned}
x_{p2} &= f_{21}y_{01} + f_{22}y_{02} + \dots + f_{2m}y_{0m} + d_{21}y_{p1} + \\
&\quad + d_{23}y_{p3} + \dots + d_{2k}y_{pk} + l_{21}y_1 + l_{22}y_2 + \dots + l_{2n}y_n, \\
x_{pk} &= f_{k1}y_{01} + f_{k2}y_{02} + \dots + f_{km}y_{0m} + d_{k1}y_{p1} + \\
&\quad + d_{k2}y_{p2} + \dots + d_{k(h-1)}y_{p(h-1)} + l_{k1}y_1 + \\
&\quad + l_{k2}y_2 + \dots + l_{kn}y_n, \\
x_1 &= b_{11}y_{01} + b_{12}y_{02} + \dots + b_{1m}y_{0m} + l_{11}y_{p1} + l_{12}y_{02} + \dots \\
&\quad \dots + l_{1k}y_{pk} + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + \dots + a_{1n}y_n, \\
x_2 &= b_{21}y_{01} + b_{22}y_{02} + \dots + b_{2m}y_{0m} + l_{21}y_{p1} + \\
&\quad + l_{22}y_{p2} + \dots + l_{2k}y_{pk} + a_{21}y_1 + a_{23}y_3 + \dots + a_{2n}y_n, \\
&\quad \dots \\
x_n &= b_{n1}y_{01} + b_{n2}y_{02} + \dots + b_{nm}y_{0m} + l_{n1}y_{p1} + \\
&\quad + l_{n2}y_{p2} + \dots + l_{nk}y_{pk} + a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots \\
&\quad \dots + a_{n(n-1)}y_{n-1}.
\end{aligned}$$

(6.1.9)

Подсистемы уравнений (6.1.8), (6.1.9), содержащие  $2(m+k+n)$  равенств, сводятся к системе уравнений, содержащей  $(m+k+n)$  равенств (6.1.10), путем подстановки значений  $x_{0i}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ),  $x_{pj}$  ( $j=1, 2, \dots, k$ ),  $x_h$  ( $h=1, 2, \dots, n$ ) из подсистемы (6.1.8) в подсистему (6.1.9):

$$\begin{aligned}
y_{01} &= q_{01}c_{12}y_{02} + q_{01}c_{13}y_{03} + \dots + q_{01}c_{1m}y_{0m} + \\
&\quad + q_{01}f_{11}y_{p1} + q_{01}f_{12}y_{p2} + \dots + q_{01}f_{1k}y_{pk} + \\
&\quad + q_{01}b_{11}y_1 + q_{01}b_{12}y_2 + \dots + q_{01}b_{1n}y_n + r_{01}, \\
y_{02} &= q_{02}c_{21}y_{01} + q_{02}c_{23}y_{03} + \dots + q_{02}c_{2m}y_{0m} + \\
&\quad + q_{02}f_{21}y_{p1} + q_{02}f_{22}y_{p2} + \dots + q_{02}f_{2k}y_{pk} + \\
&\quad + q_{02}b_{21}y_1 + q_{02}b_{22}y_2 + \dots + q_{02}b_{2n}y_n + r_{02}, \\
&\quad \dots \\
y_{0m} &= q_{0m}c_{m1}y_{01} + q_{0m}c_{m2}y_{02} + \dots + q_{0m}c_{m(m-1)}y_{0(m-1)} + \\
&\quad + q_{0m}f_{m1}y_{p1} + q_{0m}f_{m2}y_{p2} + \dots + q_{0m}f_{mk}y_{pk} + \\
&\quad + q_{0m}b_{m1}y_1 + q_{0m}b_{m2}y_2 + \dots + q_{0m}b_{mn}y_n + r_{0m}, \\
y_{p1} &= q_{p1}f_{11}y_{01} + q_{p1}f_{12}y_{02} + \dots + q_{p1}f_{1m}y_{0m} + \\
&\quad + q_{p1}d_{12}y_{p2} + r_{p1}d_{13}y_{p3} + \dots + q_{p1}d_{1k}y_{pk} + \\
&\quad + q_{p1}l_{11}y_1 + q_{p1}l_{12}y_2 + \dots + q_{p1}l_{1n}y_n + r_{p1}, \\
y_{p2} &= q_{p2}f_{21}y_{01} + q_{p2}f_{22}y_{02} + \dots + q_{p2}f_{2m}y_{0m} + \\
&\quad + q_{p2}d_{21}y_{p1} + q_{p2}d_{23}y_{p3} + \dots + q_{p2}d_{2k}y_{pk} + \\
&\quad + q_{p2}l_{21}y_1 + q_{p2}l_{22}y_2 + \dots + q_{p2}l_{2n}y_n + r_{p2}, \\
&\quad \dots \\
y_{pk} &= q_{pk}f_{k1}y_{01} + q_{pk}f_{k2}y_{02} + \dots + q_{pk}f_{km}y_{0m} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ q_{pk} d_{k1} y_{p1} + q_{pk} d_{k2} y_{p2} + \dots + q_{pk} d_{k(k-1)} y_{p(k-1)} + \\
 &+ q_{pk} l_{k1} y_1 + q_{pk} l_{k2} y_2 + \dots + q_{pk} l_{kn} y_n + r_{pk}, \\
 y_1 = &q_1 b_{11} y_{01} + q_1 b_{12} y_{02} + \dots + q_1 b_{1m} y_{0m} + \\
 &+ q_1 l_{11} y_{p1} + q_1 l_{12} y_{p2} + \dots + q_1 l_{1k} y_{pk} + \\
 &+ q_1 a_{12} y_2 + q_1 a_{13} y_3 + \dots + q_1 a_{1n} y_n + r_1, \\
 y_2 = &q_2 b_{21} y_{01} + q_2 b_{22} y_{02} + \dots + q_2 b_{2m} y_{0m} + \\
 &+ q_2 l_{21} y_{p1} + q_2 l_{22} y_{p2} + \dots + q_2 l_{2k} y_{pk} + \\
 &+ q_2 a_{21} y_1 + q_2 a_{23} y_3 + \dots + q_2 a_{2n} y_n + r_2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_n = &q_n b_{n1} y_{01} + q_n b_{n2} y_{02} + \dots + q_n b_{nm} y_{0m} + \\
 &+ q_n l_{n1} y_{p1} + q_n l_{n2} y_{p2} + \dots + q_n l_{nk} y_{pk} + \\
 &+ q_n a_{n1} y_1 + q_n a_{n2} y_2 + \dots + q_n a_{n(n-1)} y_{n-1} + r_n.
 \end{aligned} \tag{6.1.10}$$

Система линейных логических уравнений (6.1.10) имеет такое число равенств, сколько имеется в графе принимающих, промежуточных и задающих узлов. Данная система однозначно описывает самый общий  $(m, n)$ -полюсный граф.

В сложном графе, отображающем структуру большой системы (БС), задающие узлы соответствуют центральным пунктам управления (УЗ), промежуточные — промежуточным пунктам управления (ПУ), принимающие — исполнительным пунктам (ИП).

Система линейных логических уравнений (6.1.10) принимается в качестве математической модели структуры большой системы, учитывающей в функциях передачи узлов основные характеристики работы операторов пунктов управления, которая описана двухпараметрической логико-вероятностной моделью.

Последовательность получения математической модели структуры большой системы покажем на примере.

**Пример 6.1.1.** Пусть задан граф, отображающий некоторую структуру большой системы (рис. 6.1.5). Требуется аналитически описать этот граф системой логических уравнений. На рис. 6.1.5  $y_1, y_2$  — выходные сигналы задающих узлов;  $y_3$  — выходной сигнал принимающего узла;  $q_1, r_1, q_2, r_2, q_3, r_3$  — функции передачи узлов;

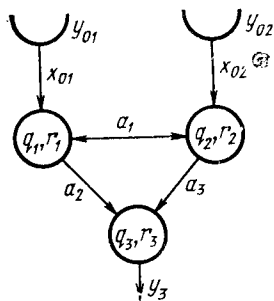


Рис. 6.1.5.

$a_1, a_2, a_3$  — функции передачи ветвей;  $x_{01}, x_{02}$  — входные сигналы системы. Запишем подсистемы логических уравнений относительно входных и выходных сигналов:

$$\begin{aligned}x_1 &= y_{01} + y_2 a_1, \\x_2 &= y_{02} + y_1 a_1, \\x_3 &= y_1 a_2 + y_2 a_3;\end{aligned}\tag{6.1.11}$$

$$\begin{aligned}y_{01} &= 1(0), \\y_{02} &= 1(0), \\y_1 &= x_1 q_1 + r_1, \\y_2 &= x_2 q_2 + r_2, \\y_3 &= x_3 q_3 + r_3.\end{aligned}\tag{6.1.12}$$

Подставляя подсистему (6.1.11) в (6.1.12), получаем исходную систему уравнений:

$$\begin{aligned}y_{01} &= y_{01}, \\y_{02} &= y_{02}, \\y_1 &= y_{01} q_1 + y_2 a_1 q_1 + r_1, \\y_2 &= y_{02} q_2 + y_1 a_1 q_2 + r_2, \\y_3 &= y_1 a_2 q_3 + y_2 a_3 q_3 + r_3.\end{aligned}\tag{6.1.13}$$

Система логических уравнений однозначно отображает число узлов и ветвей в графе и их соединения.

## 6.2. Некоторые способы решения систем логических уравнений

Как следует из рассмотрения критериев эффективности (5.1.2) — (5.1.4), основой для их построения являются вероятности отработки требуемых и ложных сигналов  $j$ -м исполнительным элементом. Определение указанных вероятностей связано с анализом графа структуры БС для выявления условий события передачи и отработки требуемого и ложного сигналов исполнительным элементом и получения аналитического описания этого события в виде функции алгебры логики. С целью нахождения всех путей передачи требуемого и ложного сигналов исполнительному элементу можно применить метод, разработанный в [14], и обобщить его для случая, когда узлам графа приписываются функции алгебры логики, отображающие основные характеристики работ операторских звеньев структуры.

Указанный метод обладает рядом преимуществ по сравнению с другими методами решения логических уравнений, так как позволяет проводить преобразование и контроль решения простыми и наглядными способами алгебры логических графов. Системы уравнений, отве-

чающие графам с одним задающим узлом, в алгебре логических графов рассматриваются как системы логических уравнений с нулевыми начальными условиями. Система уравнений с  $m$  задающими узлами рассматривается как система логических уравнений с ненулевыми начальными условиями.

Система логических уравнений с нулевыми начальными условиями содержит столько уравнений, сколько имеется неизвестных, так как она получается из системы равенств алгебры графов, каждое из которых отвечает одному промежуточному или принимающему узлу. Система логических уравнений с ненулевыми начальными условиями содержит больше уравнений, чем неизвестных.

Неизвестными в системе логических уравнений (6.1.10) будем считать символы выходных сигналов принимающих и промежуточных узлов, а известными — символы выходных сигналов задающих узлов и функции передачи узлов и ветвей.

В алгебре логических графов слагаемые, отвечающие задающим узлам, называются свободными членами, а сомножители при неизвестных — коэффициентами уравнений. Отличительная черта системы логических уравнений (6.2.10) состоит в том, что она кроме свободных членов, отвечающих задающим узлам, содержит свободные члены, отвечающие функциям передачи запрещенных сигналов задающими, промежуточными и принимающими узлами (при условии, что все они обслуживаются операторским персоналом).

Решение системы вида (6.1.10) заключается в том, чтобы найти неизвестные функции  $y_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ),  $y_{pj}$  ( $j=1, 2, \dots, k$ ), которые при заданных функциях передач элементов графа обращают уравнения в тождества.

Частное решение, отвечающее системе логических уравнений с одним задающим узлом, может быть представлено в виде равенства

$$y_j^{0i} = x_{0i} f_j^{0i}(q) \vee f_j^{0i}(r), \quad (6.2.1)$$

где  $y_j^{0i}$  — функция алгебры логики в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ), описывающая пути поступления сигнала от  $i$ -го задающего узла к  $j$ -му принимающему;  $f_j^{0i}(q)$  — логическая функция, определяемая путями пе-

передачи сигнала  $j$ -му принимающему узлу под воздействием  $i$ -го задающего узла;  $f_j^{0i}(r)$  — логическая функция, определяемая путями передачи сигнала  $j$ -му принимающему узлу при отсутствии воздействия  $i$ -го задающего узла;  $x_{0i}$  — функция, определяемая состоянием входа  $i$ -го задающего узла.

Общее решение системы логических уравнений (6.1.10) с ненулевыми начальными условиями может осуществляться методом суперпозиции [14]. По этому методу общее решение для каждого из неизвестных есть сумма частных решений, число которых равно числу задающих узлов в системе и определяется выражением

$$y_j = y_j^{01} \vee y_j^{02} \vee \dots \vee y_j^{0m} \quad (6.2.2)$$

или с учетом (6.2.1)

$$y_j = \bigvee_{i=1}^m [x_{0i} f_j^{0i}(q) \vee f_j^{0i}(r)], \quad (6.2.3)$$

или

$$y_j = y_j(x, q, r). \quad (6.2.4)$$

Логическую функцию (6.2.4) будем также называть функцией передачи сигнала (ФПС).

Решение системы логических уравнений с ненулевыми начальными условиями по методу суперпозиции заключается в замене системы уравнений вида (6.1.10) системами уравнений с нулевыми начальными условиями, число которых равно числу задающих узлов в системе.

Существует несколько способов решения систем логических уравнений с нулевыми начальными условиями [14, 94]. Наибольшее распространение в инженерной практике получил метод подстановки. Покажем возможность распространения этих методов для решения систем логических уравнений вида (6.1.10).

Следует отметить, что процесс решения систем логических уравнений обычно сопровождается выполнением ряда преобразований, связанных с поглощением цепей, являющихся расширением других цепей. Особенности логических уравнений (6.1.10) требуют учитывать при проведении преобразований соотношения (6.1.4) между аргументами логических уравнений. Это позволит исключить члены, содержащие произведения двоичных переменных  $q_i, r_i$ .

**Решение системы логических уравнений методом определителей.** Приведем некоторые определения, необходимые для дальнейшего изложения.

Определителем  $n$ -го порядка булевой алгебры называется функция  $n^2$  переменных  $a_{ij}$  ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ), называемых элементами определителя и записываемых в виде квадратной таблицы [80]:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель  $n$ -го порядка булевой алгебры с единичными элементами на главной диагонали называется единичным определителем.

Определитель булевой алгебры, в котором все элементы главной диагонали, кроме одного, равны единице, называется нормальным определителем.

Определитель булевой алгебры, в котором все элементы главной диагонали, кроме элемента, стоящего на пересечении последней строки и последнего столбца, равны единице, называется приведенным нормальным определителем. Приведенный нормальный определитель, в котором  $a_{nn}=0$ , называется нормированным.

Определителем  $n$ -го порядка алгебры графов называется определитель, получаемый из единичного определителя алгебры графов путем замены элементов одного из столбцов однополюсным графом [14].

Отметим некоторые свойства определителей, которые оказываются полезными при решении систем логических уравнений [14].

*Свойство 1.* Определитель не изменяется при повороте вокруг главной диагонали. Иными словами, транспонированный определитель равен исходному.

*Свойство 2.* Сумма произведений элементов любого ряда на миноры этих элементов равна определителю.

*Свойство 3.* Если элемент какого-нибудь ряда есть сумма двух слагаемых, то определитель представляется как сумма двух определителей.

*Свойство 4.* Минор элемента первого столбца  $j$ -й строки единичного определителя булевой алгебры равен сумме произведений миноров остальных элементов  $j$ -й

строки на соответствующие элементы первой строки:

$$A_{j1} = a_{12}A_{j2} + a_{13}A_{j3} + \dots + a_{1(j-1)}A_{j(j-1)} + a_{1n}A_{jn}, \quad (6.2.5)$$

где  $A_{j2}$  — минор элемента  $a_{ji}$ .

*Свойство 5.* Приведенный нормальный определитель булевой алгебры равен сумме элемента  $a_{nn}$ , стоящего на пересечении последней строки и последнего столбца, и нормированного определителя, получающегося из исходного путем замены в нем элемента  $a_{nn}$  нулем:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \dots & 1 & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & \dots & 1 & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 & \dots \end{vmatrix}.$$

Распространим применение метода определителей для решения систем логических уравнений специального класса, описывающих графы, узлам которых приписываются функции передачи, учитывающие основные характеристики работы операторов.

Из системы уравнений с нулевыми начальными условиями исключим равенство, отвечающее какому-либо выходному сигналу задающего узла, например  $y_{01}$ . Оставшуюся систему будем рассматривать как систему уравнений с нулевыми начальными условиями, в которой неизвестными считаются символы выходных сигналов всех узлов, кроме  $y_{01}$ .

Определитель булевой алгебры  $\Delta^{0i}$  ( $i=1$ ), составленный из коэффициентов при неизвестных, имеет вид (6.2.7) и является единичным, так как система логических уравнений получается из системы равенств, составленных относительно какого-либо одного узла. Частный определитель  $\Delta^{0ij}$  для неизвестного  $j$  получается из определителя  $\Delta^{0i}$  путем замены коэффициентов при этом

$$\Delta_n^{01} = \begin{vmatrix} 1 & q_{02}c_{23} & \dots & q_{02}c_{2m} & q_{02}f_{21} & q_{02}f_{22} & \dots & q_{02}f_{2k} & q_{02}b_{21} & q_{02}b_{22} & \dots & q_{02}b_{2n} \\ q_{03}c_{32} & 1 & \dots & q_{03}c_{3m} & q_{03}f_{31} & q_{03}f_{32} & \dots & q_{03}f_{3k} & q_{03}b_{31} & q_{03}b_{32} & \dots & q_{03}b_{3n} \\ q_{0m}c_{m2} & q_{0m}c_{m3} & \dots & 1 & q_{0m}f_{m1} & q_{0m}f_{m2} & \dots & q_{0m}f_{mk} & q_{0m}b_{m1} & q_{0m}b_{m2} & \dots & q_{0m}b_{mn} \\ q_{p1}f_{12} & q_{p1}f_{13} & \dots & q_{p1}f_{1m} & 1 & q_{p1}d_{12} & \dots & q_{p1}d_{1k} & q_{p1}l_{11} & q_{p1}l_{12} & \dots & q_{p1}l_{1n} \\ q_{p2}f_{22} & q_{p2}f_{23} & \dots & q_{p2}f_{2m} & q_{p2}d_{21} & 1 & \dots & q_{p2}d_{2k} & q_{p2}l_{21} & q_{p2}l_{22} & \dots & q_{p2}l_{2n} \\ q_{pk}f_{k2} & q_{pk}f_{k3} & \dots & q_{pk}f_{km} & q_{pk}d_{k1} & q_{pk}d_{k2} & \dots & 1 & q_{pk}l_{k1} & q_{pk}l_{k2} & \dots & q_{pk}l_{kn} \\ q_1b_{12} & q_1b_{13} & \dots & q_1b_{1m} & q_1l_{11} & q_1l_{12} & \dots & q_1l_{1k} & 1 & q_1a_{12} & \dots & q_1a_{1n} \\ q_2b_{22} & q_2b_{23} & \dots & q_2b_{2m} & q_2l_{21} & q_2l_{22} & \dots & q_2l_{2k} & q_2a_{21} & 1 & \dots & q_2a_{2n} \\ q_nb_{n2} & q_nb_{n3} & \dots & q_nb_{nm} & q_nl_{n1} & q_nl_{n2} & \dots & q_nl_{nk} & q_na_{n1} & q_na_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (6.2.7)$$

$$\Delta_n^{01} = \begin{vmatrix} 1 & q_{02}c_{23} & \dots & q_{02}c_{2m} & q_{02}f_{21} & q_{02}f_{22} & \dots & q_{02}f_{2k} & q_{02}b_{21} & q_{02}b_{22} & \dots & q_{02}c_{21} & \gamma_{01} + r_{02} \\ q_{03}c_{32} & 1 & \dots & q_{03}c_{3m} & q_{03}f_{31} & q_{03}f_{32} & \dots & q_{03}f_{3k} & q_{03}b_{31} & q_{03}b_{32} & \dots & q_{03}c_{31} & \gamma_{01} + r_{03} \\ q_{0m}c_{m2} & q_{0m}c_{m3} & \dots & 1 & q_{0m}f_{m1} & q_{0m}f_{m2} & \dots & q_{0m}f_{mk} & q_{0m}b_{m1} & q_{0m}b_{m2} & \dots & q_{0m}c_{m1} & \gamma_{01} + r_{0m} \\ q_{p1}f_{12} & q_{p1}f_{13} & \dots & q_{p1}f_{1m} & 1 & q_{p1}d_{12} & \dots & q_{p1}d_{1k} & q_{p1}l_{11} & q_{p1}l_{12} & \dots & q_{p1}l_{1n} & \gamma_{01} + r_{p1} \\ q_{p2}f_{22} & q_{p2}f_{23} & \dots & q_{p2}f_{2m} & q_{p2}d_{21} & 1 & \dots & q_{p2}d_{2k} & q_{p2}l_{21} & q_{p2}l_{22} & \dots & q_{p2}l_{2n} & \gamma_{01} + r_{p2} \\ q_{pk}f_{k2} & q_{pk}f_{k3} & \dots & q_{pk}f_{km} & q_{pk}d_{k1} & q_{pk}d_{k2} & \dots & 1 & q_{pk}l_{k1} & q_{pk}l_{k2} & \dots & q_{pk}l_{kn} & \gamma_{01} + r_{pk} \\ q_1b_{12} & q_1b_{13} & \dots & q_1b_{1m} & q_1l_{11} & q_1l_{12} & \dots & q_1l_{1k} & 1 & q_1a_{12} & \dots & q_1b_{1n} & \gamma_{01} + r_1 \\ q_2b_{22} & q_2b_{23} & \dots & q_2b_{2m} & q_2l_{21} & q_2l_{22} & \dots & q_2l_{2k} & q_2a_{21} & 1 & \dots & q_2b_{2n} & \gamma_{01} + r_2 \\ q_nb_{n2} & q_nb_{n3} & \dots & q_nb_{nm} & q_nl_{n1} & q_nl_{n2} & \dots & q_nl_{nk} & q_na_{n1} & q_na_{n2} & \dots & q_nb_{nn} & \gamma_{01} + r_n \end{vmatrix} \quad (6.2.8)$$

неизвестном свободными членами (однополюсными графами) и является определителем алгебры графов. Частный определитель  $\Delta_n^{01}$  имеет вид (6.2.8).



Получение развернутого выражения для нормального определителя алгебры графов проводится понижением порядка. Это достигается путем разложения определителя по элементам любого рода (свойство 2).

Получим частное решение в общем виде. Пусть дана система логических уравнений с нулевыми начальными условиями, которая описывает граф с одним задающим и  $n$  принимающими узлами:

$$\begin{aligned} y_1 &= q_1 b_{11} y_{01} + q_1 a_{12} y_2 + \dots + q_1 a_{1n} y_n + r_1, \\ y_2 &= q_2 b_{21} y_{01} + q_2 a_{21} y_1 + \dots + q_2 a_{2n} y_n + r_2, \\ &\dots \\ y_n &= q_n b_{n1} y_{01} + q_n a_{n1} y_1 + \dots + q_n a_{n(n-1)} y_{n-1} + r_n. \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Определитель системы уравнений (6.2.9), составленный из коэффициентов при неизвестных, имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & q_1 a_{12} & q_1 a_{13} & \dots & q_1 a_{1n} \\ q_2 a_{21} & 1 & q_2 a_{23} & \dots & q_2 a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_n a_{n1} & q_n a_{n2} & q_n a_{n3} & \dots & q_n a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (6.2.10)$$

Заменяя коэффициенты при соответствующих неизвестных однополосными графами и проводя разложение определителей, получаем

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{01} (q_1 b_{11} + q_2 b_{21} A_{21} + \dots + q_n b_{n1} A_{n1}) + \\ &\quad + r_1 + r_2 A_{21} + \dots + r_n A_{n1}, \\ y_2 &= y_{01} (q_1 b_{11} A_{12} + q_2 b_{21} + \dots + q_n b_{n1} A_{n2}) + \\ &\quad + r_1 A_{12} + r_2 + \dots + r_n A_{n2}, \\ &\dots \\ y_n &= y_{01} (q_1 b_{11} A_{1n} + q_2 b_{21} A_{2n} + \dots + q_n b_{n1}) + \\ &\quad + r_1 A_{1n} + r_2 A_{2n} + \dots + r_n, \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

где  $A_{ij}$  — минор элемента, стоящего на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) определителя для неизвестного  $y_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Если (6.2.11) есть решение системы уравнений (6.2.9), то при подстановке (6.2.11) в (6.2.9) последняя должна обращаться в систему тождеств. Осуществим подстановку (6.2.11) в первое равенство системы (6.2.9)

и после преобразований на основе законов алгебры графов получим

$$\begin{aligned}
 & y_{01} (q_1 b_{11} + q_2 b_{21} A_{21} + \dots + q_n b_{n1} A_{n1}) + r_1 + \\
 & + r_2 A_{21} + \dots + r_n A_{n1} = y_{01} [q_1 b_{11} + q_2 b_{21} (q_1 a_{12} + \\
 & + q_1 a_1 A_{23} + \dots + q_1 a_{1n} A_{2n}) + \dots + \\
 & + q_n b_{n1} (q_1 a_{12} A_{n2} + q_1 a_{13} A_{n3} + \dots + q_1 a_{1n})] + \\
 & + r_1 + r_2 (q_1 a_{12} + q_1 a_{13} A_{23} + \dots + q_1 a_{1n} A_{2n}) + \dots + \\
 & + r_n (q_1 a_{12} A_{n2} + q_1 a_{13} A_{n3} + \dots + q_1 a_{1n}). \quad (6.2.12)
 \end{aligned}$$

В равенстве (6.2.12) левая часть будет тождественно равна правой части, если сомножители при  $q_j b_{j1}$  и  $r_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) будут одинаковы, т. е.

$$\begin{aligned}
 & A_{21} = q_1 a_{12} A_{22} + q_1 a_{13} A_{23} + \dots + q_1 a_{1n} A_{2n}; \\
 & A_{31} = q_1 a_{12} A_{32} + q_1 a_{13} A_{33} + \dots + q_1 a_{1n} A_{3n}; \quad (6.2.13) \\
 & \dots \\
 & A_{n1} = q_1 a_{12} A_{n2} + q_1 a_{13} A_{n3} + \dots + q_1 a_{1n} A_{nn}.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что левая часть каждого из равенств есть не что иное, как минор элемента, стоящего на пересечении  $j$ -й строки и первого столбца в определителе (6.2.10), а правая часть каждого равенства есть сумма произведений миноров остальных элементов  $j$ -й строки на соответствующие элементы первой строки определителя. На основании свойства 4 [14] все равенства системы (6.2.13) есть тождества. Таким образом, можно считать доказанным, что равенство (6.2.11) есть решение системы логических уравнений (6.2.9).

**Пример 6.2.1.** Решить систему логических уравнений (6.1.13) относительно выходного сигнала  $y_3$  методом определителей.

Последовательно исключая равенства, отвечающие входным сигналам  $y_{01}, y_{02}$ , составим определители  $\Delta^1, \Delta^2$ :

$$\Delta^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 q_1 & 0 \\ q_2 & a_2 q_2 & 1 & 0 \\ 0 & a_2 q_3 & a_3 q_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad (6.2.14)$$

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & 1 & a_1 q_1 & 0 \\ 0 & a_1 q_1 & 1 & 0 \\ 0 & a_2 q_3 & a_3 q_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (6.2.15)$$

Заменяя в (6.2.14) и (6.2.15) коэффициенты при  $y_3$  на свободные члены, получаем частные решения

$$y_3^{(1)} = \Delta^1_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{02} \\ 0 & 1 & a_1q_1 & x_{01}q_1 + r_1 \\ q_2 & a_1q_2 & 1 & r_2 \\ 0 & a_2q_3 & a_3q_3 & r_3 \end{vmatrix},$$

$$y_3^{(2)} = \Delta^2_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{01} \\ q_1 & 1 & a_1q_1 & r_1 \\ 0 & a_1q_2 & 1 & x_{02}q_2 + r_2 \\ 0 & a_2q_3 & a_3q_3 & r_3 \end{vmatrix}. \quad (6.2.16)$$

После раскрытия частных определителей и проведения операций поглощения и склеивания получим

$$y_3^{(1)} = y_3^{(2)} = r_3 + r_1a_2q_3 + r_2a_3q_3 + r_2a_1q_1a_2q_3 + r_1a_1q_2a_3q_3 + \\ + x_{01}q_1a_2q_3 + x_{01}q_1a_1q_2a_3q_3 + x_{02}q_2a_3q_3 + x_{02}q_2a_1q_1a_2q_3. \quad (6.2.17)$$

Общее решение представляет логическую сумму частных решений

$$y_3 = y_3^{(1)} \vee y_3^{(2)}.$$

**Решение системы логических уравнений методом подстановки.** Решение системы уравнений (6.1.10) состоит в последовательном исключении из системы одного уравнения, а в оставшихся уравнениях — одного неизвестного. В результате последовательного исключения неизвестных и уравнений придем к равенству, являющемуся решением системы уравнений относительно одного неизвестного. Многократно повторяя операции исключения неизвестных и уравнений, можно получить выражения для всех неизвестных, которые будут служить решениями системы логических уравнений.

Пусть требуется решить систему (6.2.9) методом подстановки. Подставим первое равенство во все другие равенства системы (6.2.9). Получим систему  $n-1$  уравнений с  $n-1$  неизвестными ( $y_2, y_3, \dots, y_n$ ), которая после преобразования примет вид

$$y_2 = \alpha'_{20}y_{01} + \alpha'_{23}y_3 + \dots + \alpha'_{2n}y_n + \beta'_{21}r_1 + r_2,$$

$$y_3 = \alpha'_{30}y_{01} + \alpha'_{32}y_2 + \dots + \alpha'_{3n}y_n + \beta'_{31}r_1 + r_3,$$

$$\dots$$

$$y_n = \alpha'_{n0}y_{01} + \alpha'_{n2}y_2 + \dots + \alpha'_{n(n-1)}y_{n-1} + \beta'_{n1}r_1 + r_n,$$

$$(6.2.18)$$

где  $\alpha'_{i0}$ ,  $\alpha'_{ij}$ ,  $\beta'_{i1}$  — функции булевой алгебры, определяемые коэффициентами системы уравнений (6.2.9).

Продолжая последовательное исключение уравнений и неизвестных, придем к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} y_{(n-1)} &= \alpha_{n_0}^{(n-2)} y_{01} + \alpha_{(n-1)n}^{(n-2)} y_n + \beta_{(n-1)1}^{(n-2)} r_1 + \\ &+ \beta_{(n-1)2}^{(n-2)} r_2 + \dots + \beta_{(n-1)(n-2)}^{(n-2)} r_{(n-2)} + r_{(n-1)}; \\ y_n &= \alpha_{n_0}^{(n-2)} y_{01} + \alpha_{n(n-1)}^{(n-2)} y_{n-1} + \beta_{n1}^{n-2} r_1 + \\ &+ \beta_{n2}^{(n-2)} r_2 + \dots + \beta_{n(n-2)}^{(n-2)} r_{(n-2)} + r_n, \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

где  $\alpha_{i_0}^{(n-2)}$ ,  $\alpha_{ij}^{(n-2)}$ ,  $\beta_{ij}^{(n-2)}$  — функции булевой алгебры, которые определяются коэффициентами предшествующей системы из трех уравнений.

Наконец, подставим первое равенство системы (6.2.19) во второе и после преобразования получим

$$y_n = \alpha_{n_0}^{(n-1)} y_{01} + \beta_{n1}^{(n-1)} r_1 + \beta_{n2}^{(n-1)} r_2 + \dots + \beta_{n(n-1)}^{(n-1)} r_{(n-1)} + r_n, \quad (6.2.20)$$

где  $\alpha_{n_0}^{(n-1)}$ ,  $\beta_{n1}^{(n-1)}$  — функции булевой алгебры, определяемые коэффициентами системы (6.2.19).

Выражение (6.2.20) является решением системы (6.2.9) относительно неизвестного  $y_n$ .

Подставляя найденное значение  $y_n$  в систему (6.2.9) и исключая из нее последнее уравнение, получаем систему  $n-1$  уравнений с  $n-1$  неизвестными ( $y_0 y_2, \dots, y_{(n-1)}$ ). Затем снова применяя способ подстановки, получим значение для неизвестного  $y_{(n-1)}$ . Аналогичным образом определяем остальные неизвестные.

Следует отметить, что решение системы логических уравнений способом подстановки связано с большим объемом промежуточных преобразований по сравнению с решением системы уравнений с помощью определителей.

Основой для построения критериев эффективности являются вероятности требуемых и ложных сигналов. Для определения этих вероятностей необходимо вначале получить из функции передачи сигнала (ФПС) соответ-

ственно функцию передачи требуемого сигнала (ФПТС) и функцию передачи ложного сигнала (ФПЛС).

Множество наборов значений входных сигналов  $S$  состоит из подмножества  $S_1$  рабочих наборов и подмножества  $S_0$  ложных наборов  $S = S_1 \cup S_0$ ,  $S_1 \cap S_0 = \emptyset$ .

На каждом ложном (рабочем) наборе входных сигналов получаем частное значение ФПЛС (ФПТС):

$$y_{\text{лк}} = y(x, q, r)_{S_0, j \in S_0}, \quad (6.2.21)$$

$$y_{\text{тк}} = y(x, q_1, r)_{S_1, j \in S_1}. \quad (6.2.22)$$

**Пример 6.2.2.** Дана ФПС, которая отличается от выражения (6.2.17) тем, что в ней функции передачи ветвей для простоты приняты равными единице и проведены операции склеивания и поглощения:

$$y(x, q, r) = r_3 + r_1 q_3 + r_2 q_3 + x_{01} q_1 q_3 + x_{02} q_2 q_3.$$

Известны рабочие и ложные наборы:  $S_1 = \{01, 10, 11\}$ ,  $S_0 = \{00\}$ . Требуется найти ФПТС и ФПЛС. Решение имеет вид:

$$y_{\text{тк}}(q, r)_{01} = r_3 + r_1 q_3 + r_2 q_3 + q_2 q_3,$$

$$y_{\text{тк}}(q, r)_{10} = r_3 + r_1 q_3 + r_2 q_3 + q_1 q_3,$$

$$y_{\text{тк}}(q, r)_{11} = r_3 + r_1 q_3 + r_2 q_3 + q_1 q_3 + q_2 q_3, \quad (6.2.23)$$

$$y_{\text{лк}}(q, r)_{00} = r_3 + r_1 q_3 + r_2 q_3.$$

Следующим шагом получения расчетных формул для вероятностей требуемых (ложных) сигналов является переход от логических форм функции ФПТС (ФПЛС) к функциям вероятностей логики (ФВЛ).

### 6.3. Некоторые аналитические методы определения функций вероятностей логики

Булева функция, описывающая событие отработки сигнала исполнительным элементом, содержит функции передачи узлов, зависимость которых обуславливается логикой функционирования узлов. При осуществлении преобразований ЛФ, учитывающих работу операторских звеньев, полезно использовать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 1) \quad q_i \wedge r_i &= 0, & 4) \quad \bar{q}_i \wedge \bar{r}_i &= \overline{q_i \vee r_i}, \\ 2) \quad \bar{q}_i \wedge r_i &= r_i, & 5) \quad (q_i \vee r_i) \vee (\bar{q}_i \wedge \bar{r}_i) &= 1. \quad (6.3.1) \\ 3) \quad q_i \vee \bar{r}_i &= q_i, \end{aligned}$$

Первое равенство следует из логики функционирования узла, согласно которой узел не может одновременно отработать требуемый и ложный сигналы, потому

что в каждый момент времени всегда можно установить, имеется или отсутствует сигнал на входе узла.

В правомочности второго равенства можно убедиться, если умножить правую часть на  $(q \vee \bar{q})$ . После раскрытия скобок, учитывая первое равенство, получим тождество  $\bar{q}r = \bar{q}r$ . Аналогичным образом устанавливается справедливость третьего равенства.

Четвертое равенство записано на основании теоремы де Моргана. После его подстановки в пятое равенство левая часть последнего представляет дизъюнкцию функции и ее отрицания, которая всегда равна единице.

Переход к ФВЛ осуществляется на основе имеющейся аналогии между событийной теорией вероятностей и математической логикой [[14, 13, 70]. Эта аналогия основывается на том, что вероятность истинности высказывания обладает теми же формальными свойствами, что и логическое высказывание, но может принимать все значения в замкнутом интервале  $[0, 1]$ . На основании указанной аналогии логическую функцию можно рассматривать как сложные события, а ее аргументы — как элементарные случайные события [23].

В теории вероятностей основными понятиями являются зависимость (независимость) и несовместимость (совместимость) событий. Применительно к ЛФ эти понятия имеют следующий смысл.

Две булевы функции  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называются независимыми, если они не зависят существенно от одних и тех же переменных. Считается, что функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  существенно зависит от переменной  $x_i$ , если имеет место соотношение  $f(x_1, x_2, \dots, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \neq f(x_1, \dots, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$  [98].

Две булевы функции  $f_1$  и  $f_2$  называются полностью независимыми, если они не зависят от одних и тех же переменных, а существенные переменные одной функции являются независимыми в обычном вероятностном смысле [14, 80] по отношению к существенным переменным другой функции.

Для упрощения работы с функциями большого числа переменных, функции  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  представляются в виде декомпозиции подфункций  $f = f(y_1, y_0, \dots, y_m)$ , где  $y_j$  есть булевы функции от меньшего числа переменных. Они рассматриваются как обобщенные переменные и являются фрагментами исходной функции [98]. Такая форма функции называется функциональной декомпози-

цией. В частном случае некоторые подфункции равны одной переменной. Декомпозиция функции  $f(y_1, y_2, \dots, y_m)$ , в которой все подфункции независимы, называется разделимой, а в противном случае — неразделимой.

Рассмотрим некоторые способы перехода от ЛФ к ФВЛ.

Универсальный метод определения ФВЛ основывается на применении теоремы Д. Неймана, согласно которой вероятность истинности любой ЛФ, зависящей от  $n$  аргументов, может быть определена по формуле

$$P[f(x) = 1] = \sum_{x_v \in S_1} P_v, \quad (6.3.2)$$

где  $x_v = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \rangle$  — наборы значений переменных  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) из области определения этой функции;  $S_1$  — множество рабочих наборов;  $P_v$  — вероятность, с которой переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  образуют наборы значений  $x_v$ .

В силу большого числа слагаемых в этой формуле использовать ее для сколько-нибудь сложных функций трудно.

Определение вероятности истинности ЛФ, представленной непосредственно в логической форме, в общем случае не представляется возможным и требует определенных преобразований этих форм. Необходимо выполнить следующие преобразования. Исходная логическая функция  $y_j$  (6.2. 21) преобразуется к виду  $y_j^*$  (свернутая либо ортогональная форма), допускающему удобный переход к арифметической форме. Арифметическая форма (АФ) получается путем замены в функции  $y_j^*$  логических операторов (И, ИЛИ, НЕ) арифметическими ( $\cdot, +, -$ ). Для получения формулы вероятности истинности логической функции производится замена в арифметической форме символа логических переменных на вероятности их истинности. Порядок определения вероятности истинности логической функции можно отобразить символической записью:

$$y_l = y_j^* \xrightarrow{(\text{и, или, не}) \rightarrow (\cdot, +, -)} Y \xrightarrow{x_l \rightarrow P(x_l)} p(y_l). \quad (6.3.3)$$

Арифметическая форма (АФ) является расчетной формулой вероятности истинности ЛФ. Арифметическая форма получается с помощью определенных правил за-

мены логических операторов дизъюнкции, конъюнкции и отрицания арифметическими операторами сложения, умножения и вычитания. Общие правила получения арифметических форм ЛФ совпадают с правилами вычисления вероятностей сложных событий [94, 98]:

1. Арифметическая форма  $F$  дизъюнкции двух функций  $f_1$  и  $f_2$  равна сумме арифметических форм каждой из них минус арифметическая форма конъюнкции этих функций:

$$F(f_1 \vee f_2) = F(f_1) + F(f_2) - F(f_1 \wedge f_2). \quad (6.3.4)$$

Если  $f_1$  и  $f_2$  ортогональны, то

$$F(f_1 \vee f_2) = F(f_1) + F(f_2). \quad (6.3.5)$$

2. Арифметическая форма конъюнкции двух функций  $f_1$  и  $f_2$  равна арифметической форме функции, полученной в результате их логического умножения. Если  $f_1$  и  $f_2$  независимы, то

$$F(f_1 \wedge f_2) = F(f_1) \cdot F(f_2). \quad (6.3.5a)$$

3. Арифметическая форма отрицания функции  $f$  равна дополнению до единицы ее арифметической формы:

$$F(\bar{f}) = 1 - F(f). \quad (6.3.6)$$

4. Оператор дизъюнкции ( $\vee$ ) заменяется оператором арифметического сложения ( $+$ ), если он связывает ортогональные функции либо произведено вычитание логического произведения связываемых им функций.

5. Оператор конъюнкции ( $\wedge$ ) заменяется оператором арифметического умножения ( $\times$ ,  $\cdot$ ), если он связывает независимые функции.

6. Оператор отрицания заменяется разностью от вычитания из единицы функции, находящейся под знаком отрицания.

Таким образом, определение вероятности истинности ЛФ сводится к определению ее АФ и замены в ней символов логических переменных на вероятности их истинности.

Разработке методов преобразования ЛФ в значительной мере способствуют работы [52, 94, 98, 70]. В основе аналитических методов преобразования лежит теорема



разложения функции по ее переменным (либо по подфункциям) [44]:

$$f(y) = \bigvee_{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k} y_1^{\tau_1} y_2^{\tau_2} \dots y_k^{\tau_k} f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, y_{k+1}, \dots, y_m). \quad (6.3.7)$$

Символ  $\bigvee_{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k}$  означает сумму по всем наборам  $\langle \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k \rangle$  значений обобщенных переменных. Функция  $f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, y_{k+1}, \dots, y_m)$  называется остатком разложения и образуется путем замены подфункций в исходной функции их значениями. Заметим, что все слагаемые выражения (6.3.7) ортогональны, так как они отличаются друг от друга отрицанием по крайней мере одной подфункции.

Вместе с тем, конъюнкция  $y_1^{\tau_1} y_2^{\tau_2} \dots y_k^{\tau_k}$  и соответствующий ей остаток являются независимыми по подфункциям  $y_1, y_2, \dots, y_k$ , так как в остатке вместо этих подфункций стоят их значения  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ . Процесс разложения необходимо проводить до тех пор, пока каждый остаток не будет бесповторным относительно подфункций  $y_{k+1}, \dots, y_m$ . В итоге такого разложения получим ортогональную дизъюнктивную скобочную форму (ОДСФ) функции  $f$ , в которой все слагаемые бесповторны по всем  $y_j^{\tau_j}$  и ортогональны.

Рассмотрим применение теоремы разложения функций, в которых часть подфункций (перемешных) ортогональна по условию задачи.

Пусть функция  $f(y_1, y_2, \dots, y_m)$  содержит пару подфункций  $y_1$  и  $y_2$ , которые ортогональны по условию задачи  $y_1 \wedge y_2 = 0$ . Разложив функцию  $f$  по переменным  $y_1$  и  $y_2$ , получим

$$f(y_1, y_2, \dots, y_m) = y_1 y_2 f(1, 1, \dots, y_m) + \bar{y}_1 y_2 f(0, 1, \dots, y_m) + y_1 \bar{y}_2 f(1, 0, \dots, y_m) + \bar{y}_1 \bar{y}_2 f(0, 0, \dots, y_m). \quad (6.3.8)$$

Используя соотношения, вытекающие из условия ортогональности подфункций  $y_1 \cdot y_2 = 0$ ,  $y_1 \cdot \bar{y}_2 = y_1$ ,  $\bar{y}_1 \cdot y_2 = y_2$ ,  $\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_2 = y_1 + y_2$ , получаем

$$f(y_1, y_2, \dots, y_m) = y_1 f(1, 0, \dots, y_m) + y_2 f(0, 1, \dots, y_m) + y_1 + y_2 f(0, 0, \dots, y_m). \quad (6.3.9)$$

В общем случае, если функция  $f$  содержит  $k$  ортогональных подфункций, разложение по этим подфункциям имеет вид

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, \dots, y_m) = & y_1 f(1, 0, \dots, y_{k+1}, \dots, y_m) + \\ & + y_2 f(0, 1, \dots, 0, y_{k+1}, \dots, y_m) + \dots + \\ & + y_k f(0, 0, \dots, 1, y_{k+1}, \dots, y_m) + \\ & + \overline{y_1 + y_2 + \dots + y_k} f(0, 0, \dots, 0, y_{k+1}, \dots, y_m). \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

Из рассмотрения (6.3.9), (6.3.10) следует, что число членов разложения по  $k$  ортогональным подфункциям равно  $k+1$  вместо  $2^k$ , которое имеет место при разложении по  $k$  неортогональным подфункциям. Получаемый в результате разложения по  $k$  ортогональным подфункциям остаток значительно упрощается. Проведя разложение по ортогональным переменным с учетом индекса повторяемости, можно добиться улучшения сходимости процесса разложения.

Часто встречающимся на практике случаем является представление ЛФ в дизъюнктивной форме:  $f = \bigvee_{j=1}^m y_j$ . Подфункции  $y_j$  в общем случае зависимы и неортогональны. Применяя упорядоченное разложение функции  $f$  по ее подфункциям, можно представить исходную функцию через дизъюнкцию ортогональных членов. Разложение на каждом этапе проводится по подфункциям меньшего ранга, если  $f$  представлена в ДНФ, либо по подфункции, допускающей наипростейший переход к своей АФ. Пусть на первом этапе разложения такому условию отвечает подфункция  $y_1$ . Проведем разложение по  $y_1$ :

$$f = y_1 + \bar{y}_1 (y_2 \vee y_3 \vee \dots \vee y_m) = y_1 + \bar{y}_1 \bigvee_{j=2}^m y_j.$$

На втором этапе проводится разложение остатка при  $\bar{y}_1$  по другой подфункции, удовлетворяющей сформулированному условию. Пусть это будет подфункция  $y_2$ , тогда имеем

$$f = y_1 + \bar{y}_1 y_2 + \bar{y}_1 \bar{y}_2 \bigvee_{j=3}^m y_j.$$

Продолжая разложение аналогичным образом, после  $(m-1)$ -го этапа получаем

$$f = y_1 + \bar{y}_1 y_2 + \bar{y}_1 \bar{y}_2 y_3 + \dots + \bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots,$$

$$\dots, \bar{y}_{m-1}, y_m = \bigvee_{j=1}^m \left[ y_j \bigwedge_{\tau=1}^{j-1} \bar{y}_\tau \right]. \quad (6.3.11)$$

Выражение (6.3.11) представлено суммой ортогональных слагаемых. Рассмотрим определение АФ по выражению (6.3.11) для некоторых частных случаев.

1. Все подфункции  $y_\tau$  независимы. АФ слагаемого  $y^*_j = y_j \bigwedge_{\tau=1}^{j-1} \bar{y}_\tau$  будет  $F^*_j = F_j \prod_{\tau=1}^{j-1} (1 - F_\tau)$ .

АФ функции примет вид

$$F = \sum_{j=1}^m \prod_{\tau=1}^{j-1} (1 - F_\tau) F_j. \quad (6.3.12)$$

2. Все или часть подфункций  $y_\tau$  зависимы. Тогда в  $y^*_j = y_j \bigwedge_{\tau=1}^{j-1} \bar{y}_\tau$  содержится произведение зависимых подфункций. Для получения АФ необходимо разложить  $y^*_j$  по повторяющимся переменным.

3. Если в функции  $f$  подфункции  $y_j$  и  $y_{j+1}$  ортогональны, то при получении  $(j+1)$ -го члена разложения нецелесообразно умножать  $y_{j+1}$  на  $y_j$ , так как из ортогональности следует, что  $y_{j+1} \subset \bar{y}_j$ , а поэтому  $y_{j+1} \wedge \bar{y}_j = y_{j+1}$ . При наличии групп подфункций, ортогональных между собой, преобразованию (6.3.11) следует подвергать каждую группу.

4. При наличии в функции группы независимых подфункций к этой группе можно применить формулу свертки. Оставшиеся подфункции подвергаются преобразованию (6.3.11) и умножаются на отрицания всех независимых подфункций. Для определенности считаем первые  $K$  подфункций независимыми, тогда с учетом изложенного можно записать

$$f = \overline{y_1 y_2 \dots y_k} + \bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_k (y_{k+1} + \bar{y}_{k+1} y_{k+2} + \dots \\ \dots + \bar{y}_{k+1} \bar{y}_{k+2} + \dots + \bar{y}_{m-1} y_m)$$

или в общем виде

$$f = \bigwedge_{\xi=1}^k \bar{y}_\xi + \bigvee_{j=k+1}^m y_j \bigwedge_{\tau=1}^{j-1} \bar{y}_\tau. \quad (6.3.13)$$

Запишем АФ выражения (6.3.13)

$$F = 1 - \prod_{\xi=1}^k (1 - F_\xi) + \sum_{j=k+1}^m F^*_j. \quad (6.3.14)$$

Пусть функция  $f$  представлена в ДНФ, тогда  $y_j$  есть элементарные конъюнкции. Предположим, что в слагаемом  $y_j^* = y_j \bigwedge_{\gamma=1}^{j-1} \bar{y}_\gamma$  конъюнкция  $y_j$  зависит от  $y_\gamma$  по некоторым переменным  $x_i^{\sigma_i}$  ( $i = \overline{1, k}$ ). Представим  $y_j$  и  $y_\gamma$  в виде произведений  $y_j = y'_j \cdot y''_j$ ,  $y_\gamma = y'_\gamma \cdot y''_\gamma$ , где  $y'_j$ ,  $y'_\gamma$  не содержат переменных  $x_i^{\sigma_i}$  ( $i = \overline{1, k}$ ),  $y''_\gamma$  содержит только эти переменные (часть или все), а  $y''_j = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_k^{\sigma_k}$ . Поскольку  $y''_j \subseteq y''_\gamma$ , можно записать  $y_j^* = y'_j y''_j \bigwedge_{\gamma=1}^{j-1} \overline{y'_\gamma \cdot 1}$ .

АФ такого слагаемого запишется  $F_j^* = F_j \prod_{\gamma=1}^{j-1} (1 - F'_\gamma)$ .

Пусть функция  $f$  представлена в ДНФ, а  $y_j$  есть элементарные конъюнкции. Предположим, что в слагаемом  $y_j^* = y_j \bigwedge_{\gamma=1}^{j-1} y_\gamma$  не зависит от  $y_j$  ( $\gamma = \overline{1, j-1}$ ), а все или часть  $y_\gamma$  зависимы между собой. АФ члена  $\bigwedge_{\gamma=1}^{j-1} y_\gamma$  можно получить разложением по переменным до представления его в ОДСФ. Другим путем получения АФ  $f_j = \bigwedge_{\gamma=1}^{j-1} \bar{y}_\gamma$  является многократное применение к отрицанию функции  $f_j$  преобразования (6.3.11). Процесс получения АФ функции  $f_j = \bigwedge_{\gamma=1}^{j-1} \bar{y}_\gamma$  покажем в общем виде.

Представим  $f$  через ее отрицание  $\bar{f} = \bigwedge_{\gamma=1}^{j-1} y_\gamma$ . Поскольку  $\bar{f}$  представлена в ДНФ, к ней можно применить преобразование (6.3.11)  $\bar{f} = \bigvee_{\gamma=1}^{j-1} y_\gamma = \bigwedge_{\gamma=1}^{j-1} y_\gamma \bigwedge_{\xi=1}^{\gamma-1} \bar{y}_\xi$ . Если некоторые  $f_\gamma = y_\gamma \bigwedge_{\xi=1}^{\gamma-1} \bar{y}_\xi$  остаются зависимыми, то конъюнкцию  $f_\xi = \bigwedge_{\xi=1}^{\gamma-1} \bar{y}_\xi$  вновь необходимо представить через ее отрицание и снова применить преобразование (6.3.11).

Указанное преобразование в общем виде можно записать следующим образом:

$$f_j = \bigwedge_{\gamma=1}^{j-1} y_\gamma = \bigvee_{\gamma=1}^{j-1} y_\gamma \bigvee_{\xi=1}^{\gamma-1} y_\xi \dots \bigvee_{t=1}^{\beta-1} y_t, \quad (6.3.15)$$

где  $y_\xi, \dots, y_t$  — конъюнкции, получаемые после упрощения, изложенного в предыдущем пункте.

Процесс заканчивается в том случае, если вид  $f_j = \bigwedge_{\gamma=1}^{j-1} y_\gamma$  позволяет перейти к ее АФ. АФ выражения (6.3.15) можно записать в виде

$$F_j = 1 - \sum_{\gamma=1}^{j-1} F_\gamma \left\{ 1 - \sum_{\xi=1}^{\gamma-1} F_\xi \left\{ \dots \left\{ 1 - \sum_{t=1}^{\beta-1} F_t \right\} \dots \right\} \right\}. \quad (6.3.16)$$

Применение рассмотренных методов получения арифметических форм булевых функций покажем на примере.

**Пример 6.3.1.** Получить ФВЛ на основе логических форм (6.2.23). Для получения АФ применим преобразование (6.3.11). При этом учтем соотношения (6.3.1):

$$\begin{aligned} y_{\text{TK}}(q, r)_{01} &= r_3 + r_1 q_3 + r_2 q_3 \bar{r}_1 + q_2 q_3 \bar{r}_1, \\ y_{\text{TK}}(q, r)_{10} &= r_3 + r_1 q_3 + r_2 q_3 \bar{r}_1 + q_1 q_3 \bar{r}_2, \\ y_{\text{TK}}(q, r)_{11} &= r_3 + r_1 q_3 + r_2 q_3 \bar{r}_1 + q_1 q_3 \bar{r}_2 + q_2 q_3 \bar{r}_1 \bar{q}_1, \\ y_{\text{ЛК}}(q, r)_{00} &= r_3 + r_1 q_3 + r_2 q_3 \bar{r}_1. \end{aligned}$$

Слагаемые всех равенств, кроме  $q_2 q_3 \bar{r}_1 \bar{q}_1$  в третьем равенстве, допускают простой переход к АФ. Преобразование этого члена к виду  $q_2 q_3 r_1 + q_1$  представляет его также в форме, удобной для перехода к АФ. Полагая  $r_1 = r_2 = r_3 = r$ ,  $q_1 = q_2 = q_3 = q$ , запишем:

$$\begin{aligned} Y_{\text{TK},10} &= Y_{\text{TK},01} = r + rq + rq(1-r) + q^2(1-r), \\ Y_{\text{TK},11} &= r + rq + rq(1-r) + q^2(1-r) + q^2(1-r-q), \\ Y_{\text{ЛК},00} &= r + rq + rq(1-r). \end{aligned}$$

Заменяя в АФ символы логических переменных вероятностями их истинности, получаем ФВЛ  $P_{\text{TK},01}$ ,  $P_{\text{TK},10}$ ,  $P_{\text{TK},11}$ ,  $P_{\text{TK},00}$ .

#### 6.4. Формирование критериев эффективности

Каждое частное значение  $P_{\text{TK},S'_j}$  ( $P_{\text{ЛК},S^0_j}$ ) есть вероятность возникновения ТС (ЛС) на одном, вполне определенном наборе значений входных сигналов  $S'_j$  ( $S^0_j$ ). Вероятность  $P_{\text{ТС},S'_j}$  ( $P_{\text{ЛС},S^0_j}$ ) носит характер условной вероятности, так как она определена при условии по-

ступления на вход структуры определенного входного набора сигналов  $S'_j (S^0_j)$ .

Если мы задаемся входным набором, не учитывая случайного характера его появления, то найденные значения  $P_{тс, S'_j} (P_{лс, S^0_j})$  есть количественная оценка схемы с точки зрения ее структурной надежности. Подобная оценка вполне приемлема, если случайным характером входных сигналов можно пренебречь.

В таком случае значения вероятностей ТС (ЛС), подставляемые в выражения (5.1.2) — (5.1.4), определяются как среднее геометрическое от частных значений [8]:

$$P_{тс} = \sqrt[S_j]{P_{тс, S'_1} P_{тс, S'_2} \dots P_{тс, S'_S_j}}, \quad (6.4.1)$$

$$P_{лс} = \sqrt[S^0_j]{P_{лс, S^0_1} P_{лс, S^0_2} \dots P_{лс, S^0_{S^0_j}}}.$$

Критерии (5.1.2) — (5.1.4), построенные на основе выражений (6.4.1), будем называть структурными. Более полная оценка структуры может быть получена с учетом случайного характера входных сигналов.

$S_j$	00...00	00...01	...	11...11
$P(S_j)$	$P(00...00)$	$P(00...01)$	...	$P(11...11)$

Если известно распределение наборов входных сигналов, то полная оценка возможности возникновения ТС (ЛС) может быть получена на основе формулы полной вероятности:

$$P_{тс}^{\Phi} = \sum_j P(S'_j) P_{тс, S'_j}^c, \quad (6.4.2)$$

$$P_{лс}^{\Phi} = \sum_j P(S^0_j) P_{лс, S^0_j}^c,$$

где  $P(S'_j)$ ,  $P(S^0_j)$  — вероятность появления  $j$ -го требуемого (6.4.2) (ложного) набора значений входных сигналов;  $P_{тс, S'_j}^c$ ,  $(P_{лс, S^0_j}^c)$  — вероятность отработки  $j$ -го требуемого (ложного) набора входных сигналов структурой.

Критерии (5.1.2) — (5.1.4), построенные на основе выражений (6.4.2), будем называть функциональными.

Закон распределения вероятностей входных наборов может быть найден, если известен закон распределения вероятностей появления входных сигналов для каждого отдельного входа. Если учесть, что на вход структуры может поступать требуемый (ложный) сигнал с вероятностью  $P_{тс}$  ( $P_{лс}$ ), то закон распределения вероятностей входных сигналов на отдельном входе для ТС и ЛС соответственно будет иметь вид

$\sigma_i$	0	1	$\sigma_i$	0	1
$P(\sigma_i)$	$1 - P_{тс}(x_i)$	$P_{тс}(x_i)$	$P(\sigma_i)$	$1 - P_{лс}(x_i)$	$P_{лс}(x_i)$

Если появления сигналов на отдельных входах есть события независимые, то вероятность ложного события (появление набора)  $\sigma_j = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  определится как произведение вероятностей независимых событий:

$$P(S_j) = P(\sigma_1)P(\sigma_2) \dots P(\sigma_n). \quad (6.4.3)$$

С учетом таблиц для ТС (ЛС) имеем

$$P(S^1_j) = P_{тс}^{\sigma_1}(x_1) P_{тс}^{\sigma_2}(x_2) \dots P_{тс}^{\sigma_n}(x_n),$$

$$P(S^0_j) = P_{лс}^{\sigma_1}(x_1) P_{лс}^{\sigma_2}(x_2) \dots P_{лс}^{\sigma_n}(x_n),$$

где

$$P_{тс}^{\sigma_i}(x_i) = \begin{cases} P_{тс}(x_i) & \text{при } \sigma_i = 1, \\ 1 - P_{тс}(x_i) & \text{при } \sigma_i = 0; \end{cases}$$

$$P_{лс}^{\sigma_i}(x_i) = \begin{cases} P_{лс}(x_i) & \text{при } \sigma_i = 1, \\ 1 - P_{лс}(x_i) & \text{при } \sigma_i = 0. \end{cases}$$

Так, например, при определении возможности возникновения ТС (ЛС) значение вероятности входного набора  $S_j = (01)$  при базе входов  $x_1, x_2$  будет определена из выражений

$$P_{тс}(01) = [1 - P_{тс}(x_1)]P_{тс}(x_2),$$

$$P_{лс}(01) = [1 - P_{лс}(x_1)]P_{лс}(x_2).$$

В случае, если появления сигналов на входах структур есть независимые события, вероятность появления, например, ложного набора определится из выражения

$$P(S^0_j) = P_{лс}^{\sigma_1}(x_1) P_{лс}^{\sigma_2}(x_2/x_1) \dots P_{лс}^{\sigma_n}(x_n/x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

где  $P_{лс}^{\sigma_1}(x_1)$  — безусловная вероятность появления сигналов на первом входе;

$$P_{лк}^{\sigma_1}(x_2/x_1), \dots, P_{лк}^{\sigma_n}(x_n/x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

— условные вероятности появления сигнала на всех остальных входах, начиная со второго, при условии, что на предшествующие входы сигнал поступил.

## Глава 7

### ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИЗА ЭФФЕКТИВНОСТИ ЛИНИЙ УПРАВЛЕНИЯ С УЧЕТОМ ХАРАКТЕРИСТИК ОПЕРАТОРОВ

Существенным элементом сложной иерархической структуры большой технической системы является линия управления. Поэтому эффективность функционирования системы зависит от эффективности работы таких линий.

При исследовании линий управления обычно ограничиваются технической стороной, рассматривая лишь линии связи. Наряду с этим возникает необходимость в учете профессиональных свойств операторов, обслуживающих отдельные пункты линии. Это объясняется прежде всего тем, что под влиянием больших физических и психологических нагрузок характеристики работы персонала, обслуживающего технические системы, имеют тенденцию к ухудшению, что таит в себе угрозу отказов.

#### 7.1. Анализ простых трансляционных линий управления

Под простыми трансляционными линиями управления (ТЛУ) понимаются линии последовательно соединенных ретрансляционных пунктов, операторы которых передают сигналы в одном направлении (рис. 7.1.1), определяющем их подчиненность\*).

\*) В отличие от этого операторы функциональных линий управления (ФЛУ) перед передачей сигнала очередному номеру производят операции по изменению состояния участка схемы. Здесь такие линии не рассматриваются.



Для простоты вначале рассмотрим случай, когда на вход линии от оператора  $O$  (старшего оператора), может поступать лишь один сигнал. Тогда каждый из операторов в ответ на пришедший (или не пришедший) сигнал с вероятностями, являющимися его специфическими характеристиками, может принять одно из двух состояний:

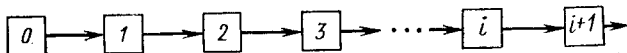


Рис. 7.1.1.

передать сигнал дальше; не передавать сигнал. Таким образом, получаем линию, называемую в дальнейшем простой трансляционной линией управления с двумя состояниями, или линией управления с двумя состояниями [34].

В общем случае линия с  $m$  состояниями предназначена для передачи с помощью операторов  $(m-1)$ -го сигнала.

При исследовании простой ТЛУ прежде всего возникают две задачи:

1) определение вероятности выполнения операции на конце линии, когда на ее вход поступает сигнал, т. е. если операция является требуемой ( $P_{то}$ );

2) определение вероятности проведения операции на конце линии, когда на ее вход не поступает сигнал, т. е. если операция оказывается ложной ( $P_{ло}$ ).

При анализе можно рассматривать и вероятностные характеристики начального участка (отрезка) линии, включающего любое число ретрансляционных пунктов.

Обозначим через  $S_i$  входной сигнал, воспринимаемый  $i$ -м оператором, а через  $D_i$  — его реакцию на воспринятый сигнал. Функции  $S_i, D_i$  являются двоичными. Условимся считать  $S_i=1$ , если оператору отдается сигнал на выполнение операции,  $S_i=0$  — в противном случае. Кроме того,  $D_i=1$ , если оператор передает дальше сигнал о выполнении операции,  $D_i=0$  — в противном случае.

Для характеристики состояний выхода ТЛУ или выхода начального участка (отрезка) ТЛУ возможно применение терминов «разрешенный 1», «разрешенный 0», «ложный 1», «ложный 0» и использование обозначений

$P_{11}^{(i)}, P_{00}^{(i)}, P_{01}^{(i)}, P_{10}^{(i)}$  соответственно, причем индекс  $(i)$

обозначает длину линии, считая от ее начала.

Вероятности реализации функций  $S_i, D_i$  обозначим через  $P(S_i=1), P(S_i=0), P(D_i=1), P(D_i=0)$ . Будем пользоваться следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} P(S_i=1) + P(S_i=0) &= 1, & P(D_i=1) + P(D_i=0) &= 1, \\ P(S_i=1) &= P(D_{i-1}=1), & P(S_i=0) &= P(D_{i-1}=0). \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

Оператор линии изображается в виде схемы рис. 7.1.2. Таблица вероятностей выполнения операторами входных сигналов имеет вид

$S_i \backslash D_i$	$1$	$0$
$1$	$p_i$	$1-p_i$
$0$	$v_i$	$1-v_i$

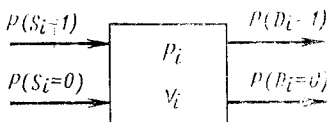


Рис. 7.1.2.

Здесь  $i=0, 1, 2, \dots$ . Рассматривая  $i$  как дискретное время, можно процесс передачи сигнала интерпретировать как простую неоднородную цепь Маркова [42].

Пользуясь формулой полной вероятности, для рис. 7.1.2 запишем  $P(D_i=1) = P(S_i=1)P_i + P(S_i=0)V_i$ , откуда с учетом (5.1.1) получаем

$$P(D_i=1) = P(S_i=1)(P_i - V_i) + V_i.$$

Последнее выражение является рекуррентной формулой, пользуясь которой можно получить

$$\begin{aligned} P(D_i=1) &= \{[P(D_0=1)(p_1 - v_1) + v_1](p_2 - v_2) + \\ &+ v_2\} \dots (p_i - v_i) + v_i. \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Отсюда непосредственно следуют формулы для вычисления вероятностей выполнения требуемых и проведения ложной операций. Для этого лишь надо положить либо  $P(D_0=1) = 1$ , либо  $P(D_0=1) = 0$ :

$$P_{11}^{(i)} = \{[p_1(p_2 - v_2) + v_2](p_3 - v_3) + v_3\} \dots (p_i - v_i) + v_i, \quad (7.1.3)$$

$$P_{01}^{(i)} = \{[v_1(p_2 - v_2) + v_2](p_3 - v_3) + v_3\} \dots (p_i - v_i) + v_i. \quad (7.1.4)$$

В практически важном случае, когда линия обслуживается операторами с одинаковыми характеристиками,  $p_i = p$ , а  $v_i = v$ . Тогда вместо выражений (7.1.3), (7.1.4) имеем такие:

$$P_{11}^{(i)} = p(p-v)^{i-1} + v(p-v)^{i-2} + v(p-v)^{i-3} + \dots \\ \dots + v(p-v) + v,$$

$$P_{01}^{(i)} = v(p-v)^{i-1} + v(p-v)^{i-2} + v(p-v)^{i-3} + \dots \\ \dots + v(p-v) + v,$$

а с использованием формул для суммы геометрической прогрессии — следующие:

$$P_{11}^{(i)} = \frac{v + (1-p)(p-v)^i}{1 - (p-v)}, \quad (7.1.5)$$

$$P_{01}^{(i)} = v \frac{1 - (p-v)^i}{1 - (p-v)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.1.6)$$

Такие же результаты получаются при рассмотрении процесса передачи сигнала как простой однородной цепи Маркова с конечным числом состояний и с дискретным временем [43].

Рассмотрим простой пример.

**Пример 7.1.1.** Линия управления содержит пять операторов с характеристиками  $p=0,9$ ;  $v=0,1$ . Необходимо найти характеристики ввода линии. Результаты расчета по формулам (7.1.5) и (7.1.6) сведены в табл. 7.1.1.

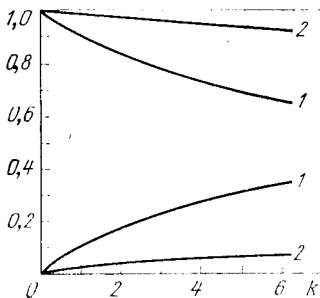


Рис. 7.1.3.

Таблица 7.1.1

$i$	$P_{11}^{(i)}$	$P_{01}^{(i)}$
0	1,00	0,00
1	0,90	0,10
2	0,82	0,18
3	0,76	0,24
4	0,71	0,29
5	0,67	0,33

Как видно из таблицы, при наших условиях значение  $P_{11}^{(i)}$  уменьшается, а  $P_{01}^{(i)}$  — увеличивается. Несложный анализ формул (7.1.5), (7.1.6) показывает имеющуюся закономерность.

В самом деле, при  $i \rightarrow \infty$  получаем

$$P^*_{11} = P^*_{01} \frac{v}{1 - (p - v)}, \quad (7.1.7)$$

что свидетельствует об имеющемся предельном значении (кривые 1 рис. 7.1.3).

Далее рассмотрим идеализированного оператора с крайне важным свойством, состоящим в равенстве его реакций на любой поступающий к нему сигнал ( $S_i=1, S_i=0$ ). Из таблицы вероятностей выполнения входных сигналов при этом получаем соотношение

$$p=1-v, \quad (7.1.8)$$

при котором значения вероятностей  $P^*_{11}, P^*_{01}$  на выходе линии управления бесконечной длины равны 0,5 независимо от конкретных значений  $p$  и  $v$ . При других соотношениях, нежели (7.1.8), установившиеся значения могут быть иными.

Используя выражения (7.1.5), (7.1.6) совместно с (7.1.1), получаем

$$P^{(i)}_{10} = \frac{(1-p)[1-(p-v)^i]}{1-(p-v)}, \quad (7.1.9)$$

$$P^{(i)}_{00} = \frac{(1-p)+v(p-v)^i}{1-(p-v)} \quad (7.1.10)$$

и далее при  $i \rightarrow \infty$

$$P^*_{10} = P^*_{00} = \frac{1-p}{1-(p-v)}. \quad (7.1.11)$$

Из (7.1.11) для операторов с равными реакциями на любые входные сигналы вновь следует  $P^*_{10} = P^*_{00} = 0,5$ .

При произвольных значениях  $i$  и условии (7.1.8) формулы принимают вид

$$P^{(i)}_{11} = \frac{1+(1-2v)^i}{2}; \quad P^{(i)}_{01} = \frac{1-(1-2v)^i}{2}. \quad (7.1.12)$$

Вероятностные характеристики работы линии  $P^{(i)}_{11}, P^{(i)}_{01}$  являются мерой ее эффективности. Поскольку число  $i$  ретрансляционных пунктов можно считать заданным, возникает задача определения требований к характеристикам работы операторов, обеспечивающих необходимую эффективность ТЛУ. С помощью полученных формул эта задача решается довольно просто.

В самом деле, придадим условиям эффективной работы линии управления форму двух неравенств, выполнение которых необходимо одновременно:

$$P^{(i)}_{11} \geq 1 - \alpha,$$

$$P^{(i)}_{01} \leq \beta.$$

В этих неравенствах  $\alpha$  и  $\beta$  — допустимые величины, задаваемые на основании каких-либо соображений.

Можно также записать

$$\frac{v + (1-p)(p-v)^i}{1-(p-v)} \geq 1 - \alpha, \quad (7.1.13)$$

$$v \frac{1-(p-v)^i}{1-(p-v)} \leq \beta; \quad (7.1.14)$$

отсюда следуют неравенства

$$\begin{aligned} v + (1-p)(p-v)^i &\geq (1-\alpha)[1-(p-v)], \\ v - v(p-v)^i &\leq \beta[1-(p-v)], \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

которые после взаимного вычитания [37] приводятся к одному:

$$(p-v)^i \geq 1 - \alpha - \beta. \quad (7.1.16)$$

Обращаясь ко второму из неравенств (7.1.15), получаем выражение

$$v \leq v(p-v)^i + \beta[1-(p-v)],$$

а после замены  $(p-v)^i$  меньшей величиной выражение

$$v \leq v(1-\alpha-\beta) + \beta[1-(p-v)],$$

из которого следует

$$v \leq \frac{\beta}{\alpha} (1-p). \quad (7.1.17)$$

При совместном рассмотрении выражений (7.1.16), (7.1.17) и путем перехода к более жестким условиям получаем

$$\begin{aligned} p &\geq \frac{\beta}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \sqrt[i]{1 - \alpha - \beta}, \\ v &\leq \frac{\beta}{\alpha + \beta} - \frac{\beta}{\alpha + \beta} \sqrt[i]{1 - \alpha - \beta} \end{aligned} \quad (7.1.18)$$

или приближенно

$$p \geq 1 - \alpha/i, \quad v \leq \beta/i. \quad (7.1.19)$$

Выражения (7.1.18), (7.1.19) показывают, как изменяются требования к характеристикам операторов с увеличением числа ретрансляционных пунктов. В тех случаях, когда предъявляемые требования оказываются чрезмерными и подобрать операторов с такими характеристиками не представляется возможным, необходимо прибегнуть к группированию операторов, рассмотренному выше.

## 7.2. Анализ трансляционных линий управления с местными обратными связями

Линиями управления с местными обратными связями (МОС) будем называть такие линии, в которых каждый оператор перед передачей сигнала очередному оператору докладывает о нем предшествующему. При этом старший оператор получает возможность проконтролировать усвоение сигнала младшим оператором перед исполнением и в случае необходимости вносит соответствующие поправки.

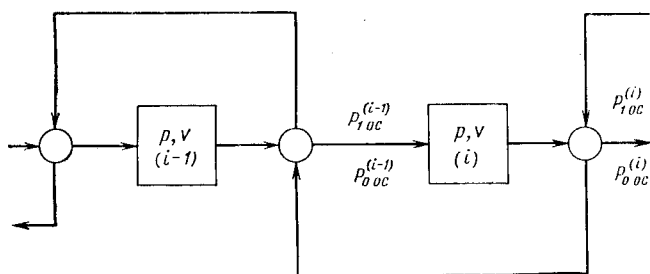


Рис. 7.2.1.

В линиях с МОС процесс передачи сигнала от пункта к пункту распадается на такты, в каждом из которых имеется по три элемента:

- передача сигнала старшим оператором  $i$  младшему  $i+1$ ;
  - контроль усвоения сигнала оператором  $i+1$ ; повторение старшим оператором при необходимости исходного сигнала или разрешение на передачу правильно усвоенного сигнала следующему оператору;
  - передача сигнала  $(i+1)$ -м оператором  $(i+2)$ -му.
- При такой схеме функционирования предполагается:
- передача сигнала подчиненному оператору не наступит до получения разрешения от старшего;
  - контроль подчиненного (местная обратная связь) осуществляется принятием доклада;
  - доклады подчиненных правдивы, т. е. соответствуют их действиям на линии.

Результаты анализа линии зависят от принятой гипотезы о структуре оператора. Один из вариантов схемы участка ТЛУ с МОС приведен на рис. 7.2.1. Здесь с выхода  $(i-1)$ -го на вход  $i$ -го оператора (блока) с ве-

роятностью  $P_{\text{ос}}^{(i-1)}$  поступает сигнал 1, который затем с вероятностью, определяемой таблицей

$S$	$D$		
	$1$	$0$	
$1$	$p$	$1-p$	
$0$	$v$	$1-v$	

подается по линии обратной связи на вход  $(i-1)$ -го блока. При расхождении сигнала ОС и входного сигнала  $(i-1)$ -го оператора следует повторение сигнала, принимаемого  $(i-1)$ -м оператором в качестве правильного,

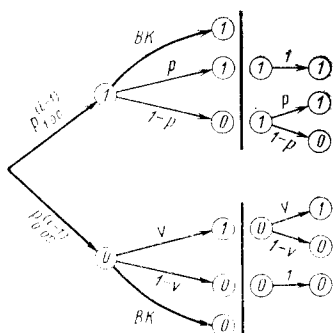


Рис. 7.2.2.

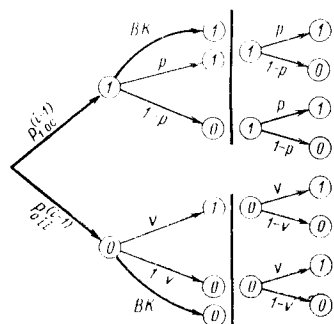


Рис. 7.2.3.

а при совпадении этих сигналов следует разрешение на передачу сигнала следующему оператору. Вслед за этим происходит передача сигнала на вход блока  $i+1$  и т. д.

Рассматриваемую схему можно отнести к схемам с однократным контролем усвоения отданного сигнала. Наряду с этим могут быть рассмотрены схемы и иных кратностей контроля.

Для определения величины вероятности  $P_{\text{ос}}^{(i)}$  удобно воспользоваться логическим деревом. Приведем логические

деревья для двух случаев: когда после совпадения сравниваемых сигналов искажений нет (рис. 7.2.2), когда разрешение на выход сигнала к очередному  $(i+1)$ -му оператору подается таким же образом, как и основной сигнал (рис. 7.2.3). На приведенных рисунках кроме логических деревьев изображены ветви контроля (ВК), с исходами которых  $(1, 0)$  сравниваются соответственно исходы ветвей деревьев.

Обратившись вначале к рис. 7.2.2, запишем выражение для вероятности появления на выходе  $(i)$  блока сигнала 1:

$$P_{10c}^{(i)} = P_{10c}^{(i-1)} [p + (1-p)p] + P_{00c}^{(i-1)} v^2$$

или же в иной форме:

$$P_{10c}^{(i)} = P_{10c}^{(i-1)} [p + (1-p)p - v^2] + v^2.$$

Последнее перепишем в виде рекуррентного уравнения

$$P_{10c}^{(i)} = [p + (1-p)p - v^2] P_{10c}^{(i-1)} + v^2. \quad (7.2.1)$$

Решение рекуррентного уравнения вида  $x^{(i)} + ax^{(i-1)} = b$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные положительные числа, обычно записывают в форме  $x^{(i)} = c\beta^i + x^{(\infty)}$ , причем  $c$  — произвольная постоянная, а  $\beta$  есть решение соответствующего однородного уравнения  $x^{(i)} + ax^{(i-1)} = 0$ .

В нашем случае  $\beta = -a$ . Поскольку при  $i \rightarrow \infty$  имеем  $x^{(i)} = x^{(i-1)} = x^{(\infty)}$ , можно записать  $x^{(\infty)} = b/(1+a)$ . Кроме того, при условии  $x^{(0)} = 1$  получаем

$$c = 1 - \frac{b}{1+a} = \frac{1+(a-b)}{1+a}.$$

Таким образом, имеем решение  $x^{(i)} = \frac{b + [1+(a-b)](-a)^i}{1-a}$ .

При условии  $x^{(0)} = 0$  получаем  $c = -b/(1-a)$ . Следовательно,  $x^{(i)} = b[1 - (-a)^i]/(1+a)$ .

На основании изложенного решения уравнения (7.2.1) таковы:

$$P_{10c}^{(i)} = \frac{v^2 + (1-p)^2 [p + (1-p)p - v^2]^i}{(1-p)^2 + v^2}, \quad (7.2.2)$$

$$P_{01c}^{(i)} = v^2 \frac{1 - [p + (1-p)p - v^2]^i}{(1-p)^2 + v^2}. \quad (7.2.3)$$



С помощью подстановок  $\bar{v}=v^2$ ,  $\bar{p}=2p-p^2$  эти выражения сводятся к следующим:

$$P_{1100}^{(i)} = \frac{\bar{v} + (1 - \bar{p})(\bar{p} - \bar{v})^i}{1 - (\bar{p} - \bar{v})}, \quad (7.2.4)$$

$$P_{0100}^{(i)} = \bar{v} \frac{1 - (\bar{p} - \bar{v})^i}{1 - (\bar{p} - \bar{v})}, \quad (7.2.5)$$

что с точностью до обозначений совпадает с уже известными выражениями (7.1.5), (7.1.6). При операторах с равными характеристиками на прием входящих сигналов последнее можно записать в виде

$$P_{1100}^{(i)} = \frac{1 + (1 - 2\bar{v})^i}{2}, \quad P_{0100}^{(i)} = \frac{1 - (1 - 2\bar{v})^i}{2}. \quad (7.2.6)$$

Теперь можно сравнить характеристики эффективности двух процессов с использованием МОС и без нее. С этой целью сравним выражения

$$\frac{1 + (1 - 2\bar{v})^i}{2} \cup \frac{1 + (1 - 2\bar{v})^i}{1^2},$$

$$\frac{1 - (1 - 2\bar{v})^i}{2} \cup \frac{1 - (1 - 2\bar{v})^i}{2}.$$

Из сравнения видно, что использование МОС по схеме рис. 7.2.2 приводит к увеличению вероятности приведения требуемой единицы и уменьшению вероятности отработки ложной единицы. Таким образом, качество процесса с введением МОС улучшается. На основании сравнения выражений (7.2.4) и (7.2.5) и результатов (7.1.5) и (7.1.6) можно записать условия для выбора характеристик операторов:

$$2p - p^2 \geq 1 - \alpha/i, \quad v^2 \leq \beta/i. \quad (7.2.7)$$

Применяя несложные преобразования, приведем (7.2.7) к виду

$$p \geq 1 - \sqrt{\alpha/i}; \quad v \leq \sqrt{\beta/i}. \quad (7.2.8)$$

Сравнив результаты (6.2.7), (6.2.8) с выражениями (6.1.19), сделаем вывод о том, что при использовании МОС требования к характеристикам операторов ослабляются.

**Пример 7.2.1.** По условиям примера 7.1.1 ( $p=0,9$ ;  $v=0,1$ ) рассчитать характеристики процесса с МОС по схеме рис. 7.2.2.

Результаты расчета по выражениям (7.2.4), (7.2.5) даны в табл. 7.2.1 и на рис. 7.1.3 (кривые 2). Можно сделать вывод о том, что введение МОС значительно улучшает характеристики работы линии.

Таблица 7.2.1

$i$	$P_{1loc}^{(i)}$	$P_{0loc}^{(i)}$
0	1,00	0,00
1	0,99	0,01
2	0,98	0,02
3	0,97	0,03
4	0,96	0,04
5	0,95	0,05

Рассмотрим далее схему с МОС, работающую по закону, соответствующему рис. 7.2.3. Здесь получаем соотношение

$$P_{1oc}^{(i)} = P_{1oc}^{i-1} [p^2 + (1-p)p] + P_{0oc}^{i-1} [v^2 + (1-v)v].$$

Ему соответствует рекуррентное уравнение

$$P_{1oc}^{(i)} = (p-v) P_{1oc}^{(i-1)} + v. \quad (7.2.9)$$

Используя начальные условия  $P_1^{(0)} = 1$ ,  $P_0^{(0)} = 0$ , запишем непосредственно формулы

$$P_{1oc}^{(i)} = \frac{v + (1-p)(p-v)^i}{1 - (p-v)}, \quad P_{0oc}^{(i)} = v \frac{1 - (p-v)^i}{1 - (p-v)}.$$

Последнее полностью совпадает с аналогичными выражениями простой ТЛУ.

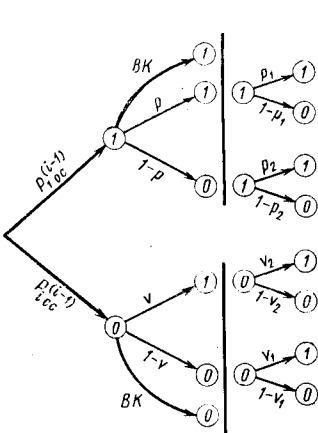


Рис. 7.2.4.

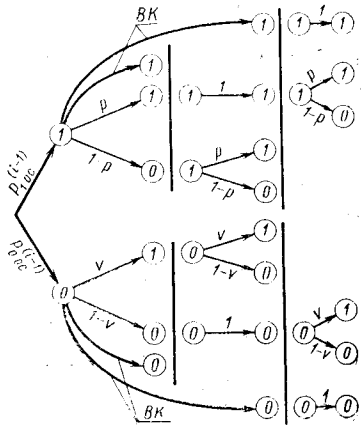


Рис. 7.2.5.

Однако механизм оператора устроен так, что сигналы коррекции (акцентируемые) он выполняет более уверенно, чем исходные, и схема рис. 7.2.3 практически встречаться не будет. Тем не менее и рис. 7.2.2 изображает предельный случай.

Промежуточный случай изображен на рис. 7.2.4, где  $1 \geq p_1 \geq p_2 \geq p$ ;  $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq v$ . Запись его рекуррентного уравнения не представляет затруднений.

Переходим к рассмотрению случая двухкратного контроля в ТЛУ с двумя состояниями и МОС. Логика работы линии, полученная на основе рис. 7.2.2, изображена на рис. 7.2.5. Для данного случая

$$P_{10c}^{(i)} = P_{10c}^{(i-1)} \{p + (1-p)[p + (1-p)p]\} + P_{00c}^{(i-1)} v^2$$

или

$$P_{10c}^{(i)} = P_{10c}^{(i-1)} p [(1-p)^0 + (1-p)^1 + (1-p)^2] + P_{00c}^{(i-1)} v^2.$$

Можно записать аналогичное уравнение для общего случая  $m$ -кратного контроля:

$$P_{10c}^{(i)} = P_{10c}^{(i-1)} p [(1-p)^0 + (1-p)^1 + \dots + (1-p)^m] + P_{00c}^{(i-1)} v^{m+1}$$

или в более компактной форме

$$P_{10c}^{(i)} = P_{10c}^{(i-1)} [1 - (1-p)^{m+1}] + P_{00c}^{(i-1)} v^{m+1}. \quad (7.2.10)$$

Последнее дает рекуррентное уравнение

$$P_{10c}^{(i)} = [1 - (1-p)^{m+1} - v^{m+1}] P_{10c}^{(i-1)} + v^{m+1}, \quad (7.2.11)$$

имеющее следующие решения при наших начальных условиях:

$$P_{10c}^{(i)} = \frac{v^{m+1} + (1-p)^{m+1} [1 - (1-p)^{m+1} - v^{m+1}]^i}{(1-p)^{m+1} + v^{m+1}}, \quad (7.2.12)$$

$$P_{00c}^{(i)} = v^{m+1} \frac{1 - [1 - (1-p)^{m+1} - v^{m+1}]^i}{(1-p)^{m+1} + v^{m+1}}. \quad (7.2.13)$$

При значении  $m=1$ , когда осуществляется однократный контроль с помощью МОС, из выражений (7.2.12),

(7.2.13) получаются записанные выше (7.2.2), (7.2.3), а при  $m=0$  в отсутствие МОС — выражения (7.1.5), (7.1.6).

Рассмотрим зависимости, поясняющие требования к характеристикам операторов. С этой целью с помощью подстановки  $\bar{v}=v^{m+1}$ ,  $\bar{p}=1-(1-p)^{m+1}$  выражения (7.2.12), (7.2.13) сведем к виду (7.2.4), (7.2.5). Поэтому можно записать

$$\begin{aligned} 1-(1-p)^{m+1} &\geq 1-\alpha/i, \\ v^{m+1} &\leq \beta/i. \end{aligned} \quad (7.2.14)$$

Следовательно, к характеристикам операторов, с учетом условий эффективности работы линии, предъявляются следующие требования:

$$(1-p)^{m+1} \leq \alpha/i, \quad v^{m+1} \leq \beta/i$$

или же

$$p \geq 1 - \sqrt[m+1]{\alpha/i}; \quad v \leq \sqrt[m+1]{\beta/i}. \quad (7.2.15)$$

Таким образом, увеличение кратности контроля ослабляет требования, предъявляемые к характеристикам операторов.

Наоборот, установив допустимые пределы для характеристик  $p$ ,  $v$ , можно определить минимально необходимую кратность контроля.

В самом деле, если, например, известно  $p^*$  такое, что  $p > p^* \geq 1 - \sqrt[m+1]{\alpha/i}$ , то  $m$  находим из выражения

$$m+1 \geq \frac{|\ln \alpha/i|}{|\ln(1-p^*)|}. \quad (7.2.16)$$

Если к тому же известна величина  $v^*$  такая, что  $v \leq v^* < \sqrt[m+1]{\beta/i}$ , то  $m$  находят из условия

$$m+1 \geq \max \left[ \frac{|\ln \alpha/i|}{|\ln(1-p^*)|}, \frac{|\ln(\beta/i)|}{|\ln v|} \right]. \quad (7.2.17)$$

Напомним, что в соответствии с изложенным выше наши выводы справедливы для  $a > 0$ , т. е.  $1-(1-p)^{m+1} > v^{m+1}$  или же приближенно  $p > v^{m+1}/(m+1)$ . Заметим, что в практически важных случаях соблюдается условие  $p \gg v$ . Поэтому при введении кратности  $m$  условие положительности числа  $a$  не нарушается.

### 7.3. Трансляционные линии управления с внешними обратными связями

Линиями управления с внешними обратными связями (ВОС) будем называть такие линии, в которых оператор перед передачей сигнала последующему оператору докладывает о нем предшествующему, имеющему номер, превышающий собственный номер на число  $r$ ,  $r > 1$  (при  $r=1$  получаем линию с МОС). Отклонения в выполнении этого правила имеются лишь в начале линии, поскольку все первые  $(r-1)$  операторы могут докладывать только нулевому.

Рангом линии управления с ВОС назовем число  $r$ . Схема линии с ВОС ранга  $r$  показана на рис. 7.3.1, а логика работы при однократном контроле и  $r=2$  — на рис. 7.3.2. Здесь, в отличие от рис. 7.2.2, корректирую-

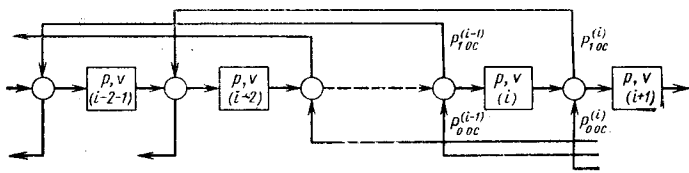


Рис. 7.3.1.

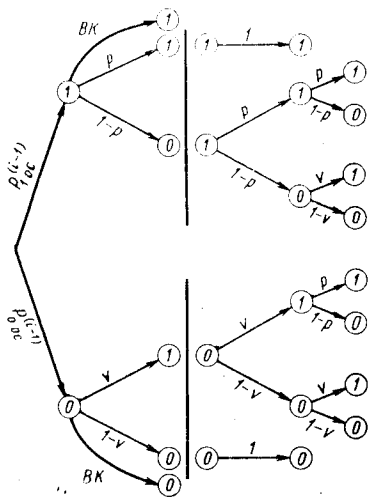


Рис. 7.3.2.

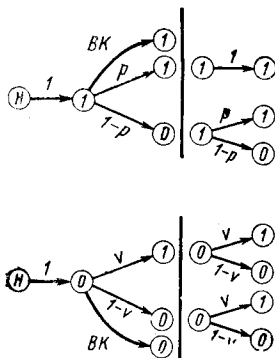


Рис. 7.3.3.

щий сигнал (1 или 0) проходит через линию, состоящую из двух операторов. В общем случае сигнал коррекции проходит через линию, состоящую из  $r$  операторов.

Именно поэтому качество сигнала коррекции ухудшается и эффективность ТЛУ с ВОС ослабляется по мере увеличения ранга  $r$ . Однако внешние обратные связи являются мощным средством для выявления предельно ненадежных операторов в ТЛУ. Об этом более подробно будет сказано ниже. Сейчас же остановимся на оценке эффективности линии управления с наиболее эффективной из внешних ОС, т. е. с рангом  $r=2$ .

Логическое дерево процесса показано на рис. 7.3.2. Можно записать

$$P_{10c}^{(i)} = P_{10c}^{(i-1)} [p + (1-p) A_i] + P_{01c}^{(i-1)} v B_i, \quad (7.3.1)$$

причем для всех  $i \geq 2$   $A_i = p(p-v) + v = A$ ,  $B_i = v(p-v) + v = B$ . Для начала линии участок дерева изображен на рис. 7.3.3, где точка  $H$  (начало) соответствует выходу нулевого блока. Здесь получаем

$$P_{110c}^{(1)} = p + (1-p) A_1; \quad P_{010c}^{(1)} = v B_1,$$

причем  $A_1 = p$ ,  $B_1 = v$ .

Ввиду особенности начала линии процесс становится однородным с точки  $i=2$ . В общем случае для ранга ВОС  $r$  однородность наступает при  $i=r-1$ . Поэтому, если задать начальное условие не при  $i=0$ , как это делалось ранее, а при  $i=2-1$ , то можно будет рассматривать рекуррентное уравнение как уравнение с постоянными коэффициентами. Решение этого уравнения записывается следующим образом:

$$P_{10c}^{(i)} = \frac{vB + \{P_{10c}^{(1)} [(1-p)(1-A) + vB] - vB\} [p + (1-p)A - vB]^{(i-1)}}{(1-p)(1-A) + vB} \quad (7.3.2)$$

Для получения выражений  $P_{110c}^{(i)}$  и  $P_{010c}^{(i)}$  вместо  $P_{10c}^{(1)}$  надо поставить  $P_{110c}^{(1)}$  либо  $P_{010c}^{(1)}$  соответственно. Здесь, однако, ограничимся лишь приведением в табл. 7.3.1 результатов расчетов характеристики ТЛУ при характеристиках операторов  $p=0,9$  и  $v=0,1$ , применявшихся в примерах 6.1.2.

Таблица 7.3.1

$i$	$P_{1loc}^{(i)}$	$P_{0loc}^{(i)}$
0	1,000	0,000
1	0,990	0,010
2	0,972	0,028
3	0,955	0,045
4	0,940	0,060
5	0,923	0,077

Таблица 7.3.2

$i$	$P_{1loc}^{(i)}$	$P_{0loc}^{(i)}$
0	1,000	0,000
1	0,990	0,010
2	0,972	0,028
3	0,950	0,050
4	0,927	0,073
5	0,900	0,100

Сравнение данных табл. 7.3.1 с табл. 7.2.1 подтверждает замечание о снижении эффективности ТЛУ при использовании ВОС ( $r=2$ ) по сравнению со случаем применения МОС.

Наряду с этим можно утверждать, что применение неоднократного контроля способствует улучшению характеристик линии. Поэтому в тех случаях, когда ранг

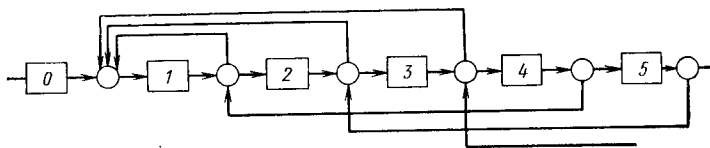


Рис. 7.3.4.

обратной связи необходимо увеличивать\*), это можно делать, применяя контроль обоснованной кратности.

В заключение в табл. 7.3.2 приведем результаты расчета участка ТЛУ с ВОС при  $r=3$ , схема которой изображена на рис. 7.3.4.

#### 7.4. Анализ свойств простой линии управления с одним оператором, отличающимся своими характеристиками от других

Исследование линий управления с оператором, характеристики которого отличны от других, имеет важное значение, поскольку результаты в этом случае дают возможность оценить эффективность принятой схемы

\*) Необходимо помнить о том, что увеличение ранга ограничивается дальностью связи. Использование с этой целью ретрансляционных пунктов порождает новые задачи для исследования.

управления с учетом возможности появления на одном из ретрансляционных пунктов ненадежных операторов. С целью упрощения выкладок здесь приводится анализ для простой линии управления, в каждом из ретрансляционных пунктов которой помещается один оператор.

Будем называть помехой отрицательное воздействие, оказываемое на процесс передачи сигналов ненадежным оператором. Под помехоустойчивостью, как это принято [117], будем понимать способность ТЛУ правильно передавать сигнал при наличии помех.

Введем также понятие меры помехоустойчивости ( $W$ ), подразумевая под последней минимальное количество предельно ненадежных операторов, при котором вероятность правильной передачи сигнала на выходе линии становится меньше допустимой величины. Естественно считать, что, чем больше мера  $W$ , тем линия управления совершеннее. Простая ТЛУ имеет меру  $W=1$ .

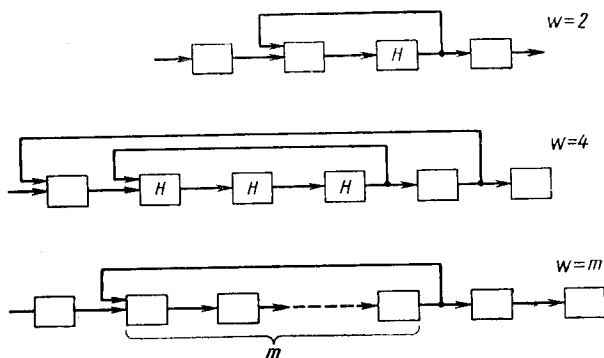


Рис. 7.4.1.

В самом деле, здесь предельно ненадежный оператор, находящийся в любом из ретрансляционных пунктов линии, оказывается в состоянии нарушить работу, исказив принятый им сигнал.

Коротко укажем на возможность повышения помехоустойчивости линии управления путем введения дополнительных внешних обратных связей, охватывающих несколько смежных ретрансляционных пунктов.

Линия управления, использующая только местные ОС, также имеет меру  $W=1$ , так как один ненадежный



оператор, восприняв сигнал, может правильно доложить о его принятии, отдав следующему за ним оператору совершенно иной сигнал. Введение дополнительной ОС дает возможность контролировать действие любого оператора по действиям оператора, следующего по линии после него.

Введение дополнительных ОС, охватывающих  $m$  соседних ретрансляционных пунктов (рис. 7.4.1), обеспечивает возможность контроля  $m-1$  рядом расположенных и «согласующих» свои действия ненадежных операторов. Слабым местом в решении проблемы помехоустойчивости с помощью дополнительных ОС является невозможность контроля операторов, размещающихся на концах линии управления. Однако этот недостаток в значительной степени может компенсироваться специальными мерами (например, группированием операторов).

Если, например, разрабатывается линия управления, рассчитанная на устойчивость под действием пяти рядом расположенных операторов, обеспечиваемую с помощью дополнительных обратных связей, охватывающих по шесть операторов, то такие меры должны быть особо продуманы для ближайших к выходу линии пяти ретрансляционных пунктов.

Для вывода формул воспользуемся приведенным в § 7.1 выражением

$$P(D_i=1) = \{ \dots \{ [P(D_0=1) (p_1-v_1) + v_1] (p_2-v_2) + v_2 \} (p_3-v_3) + v_3 \dots \} (p_i-v_i) + v_i$$

и для удобства выделим в нем характеристики одного  $q$ -го оператора:

$$P(D_i=1) = \{ \dots \{ [P(D_0=1) (p_1-v_2) + v_1] (p_2-v_2) + v_2 \} \dots \} (p_q-v_q) + v_q \dots \} (p_i-v_i) + v_i. \quad (7.4.1)$$

Последнее удобно переписать в виде

$$P(D_i=1) = \left\{ \dots \left\{ P(D_0=1) \prod_1^{q-1} (p_i-v_i) + v_1 \prod_2^{q-1} (p_i-v_i) + \dots + v_{q-2} \prod_{q-1}^{q-1} (p_i-v_i) + v_{q-1} \right\} (p_q-v_q) + v_q \right\} \prod_{q+1}^i (p_i-v_i) + v_{q+1} \prod_{q+2}^i (p_i-v_i) +$$

$$+ \dots + v_{i-1} \prod_i (p_i - v_i) + v_i. \quad (7.4.2)$$

В рассматриваемом случае только один оператор  $q$  имеет характеристики, отличные от других  $(p_q, v_q)$ . Поэтому из (7.4.2) получаем

$$P(D_i=1) = \{ \dots [P(D_0=1) (p-v)^{q-1} + v (p-v)^{q-2} + \dots \\ \dots + v (p-v) + v] (p_q - v_q) + v_q \} (p-v)^{i-q} + \\ + v (p-v)^{i-q-1} + \dots + v (p-v) + v.$$

Если и здесь принять  $p_q=p, v_q=v$ , то для случаев  $P(D_0=1)=1$  или  $P(D_0=1)=0$  получаются выражения (7.1.5) или (7.1.6) соответственно. Последнее запишем в более удобном виде:

$$P(D_i=1) = \left\{ [P(D_0=1) (p-v)^{q-1} + v \frac{1-(p-v)^{q-1}}{1-(p-v)}] \times \right. \\ \left. \times (p_q - v_q) + v_q \right\} (p-v)^{i-q} + v \frac{1-(p-v)^{i-q}}{1-(p-v)}. \quad (7.4.3)$$

Отсюда непосредственно следует

$$P_{11}^{(i)} = \left\{ \left[ (p-v)^{q-1} + v \frac{1-(p-v)^{q-1}}{1-(p-v)} \right] (p_q - v_q) + \right. \\ \left. + v_q \right\} (p-v)^{i-q} + v \frac{1-(p-v)^{i-q}}{1-(p-v)}$$

или

$$P_{11}^{(i)} = \left\{ \left[ \frac{v + (1-p)(p-v)^{q-1}}{1-(p-v)} \right] (p_q - v_q) + \right. \\ \left. + v_q \right\} (p-v)^{i-q} + v \frac{1-(p-v)^{i-q}}{1-(p-v)}, \quad (7.4.4)$$

а также

$$P_{01}^{(i)} = \left\{ \left[ v \frac{1-(p-v)^{q-1}}{1-(p-v)} \right] (p_q - v_q) + \right. \\ \left. + v_q \right\} (p-v)^{i-q} + v \frac{1-(p-v)^{i-q}}{1-(p-v)}. \quad (7.4.5)$$

Рассматривая положение  $q$ -оператора заданным, введем текущее значение номера оператора  $N$ . Тогда при всех номерах  $N=0, 1, 2, \dots, q-1$  для расчетов необходимо пользоваться формулами

$$P_{11}^{(i)} = \frac{v + (1-p)(p-v)^N}{1-(p-v)}, \quad P_{01}^{(i)} = v \frac{1-(p-v)^N}{1-(p-v)}; \quad (7.4.6)$$

при  $N = q$  — формулами

$$\begin{aligned} P_{11}^{(i)} &= \frac{v + (1-p)(p-v)^{q-1}}{1-(p-v)} (p_q - v_q) + v_q, \\ P_{01}^{(i)} &= v \frac{1 - (p-v)^{q-1}}{1-(p-v)} (p_q - v_q) + v_q; \end{aligned} \quad (7.4.7)$$

наконец, при  $N = q+1, q+2, \dots, i$  — выражениями (7.4.4), (7.4.5).

Пользуясь полученными выражениями, можно показать, что если под отличающимся оператором подразумевается предельно ненадежный, эффективность его действий по осуществлению на выходе линии управления состояния 1 или состояния 0 возрастает с приближением к концу ТЛУ. Можно решить и не столь очевидную задачу о выборе оптимального места расположения оператора с мало отличающимися характеристиками (т. е. не предельно ненадежного и, возможно, даже лучше остальных подготовленного в профессиональном отношении оператора). С этой целью рассмотрим приращения

$$\Delta P_{11}^{(i)} = P_{11}^{(i)} - \tilde{P}_{11}^{(i)}; \quad \Delta P_{01}^{(i)} = P_{01}^{(i)} - \tilde{P}_{01}^{(i)},$$

в которых  $\tilde{P}_{11}^{(i)}$  и  $\tilde{P}_{01}^{(i)}$  вычислены в предположении равенства  $p_q = p$  по выражениям (7.1.5), (7.1.6).

Значения приращений непосредственно указывают степень влияния  $q$ -оператора:

1) для точек с  $N < q$

$$\Delta P_{11}^{(i)} = \Delta P_{01}^{(i)} = 0;$$

2) для точек  $N = q$

$$\begin{aligned} \Delta P_{11} &= \frac{v + (1-p)(p-v)^{q-1}}{1-(p-v)} (\Delta p - \Delta v) + \Delta v, \\ \Delta P_{01} &= v \frac{1 - (p-v)^{q-1}}{1-(p-v)} (\Delta p - \Delta v) + \Delta v, \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

где  $\Delta p = p_q - p$ ,  $\Delta v = v_q - v$ ;

3) для точек с  $N > q$

$$\Delta P_{11} = \left[ \frac{v + (1-p)(p-v)^{q-1}}{1-(p-v)} (\Delta p - \Delta v) + \Delta v \right] (p-v)^{i-q},$$

$$\Delta P_{01} = \left[ v \frac{1-(p-v)^{q-1}}{1-(p-v)} (\Delta p - \Delta v) + \Delta v \right] (p-v)^{i-q}.$$
(7.4.9)

Задача состоит в выборе такого значения для  $q$ , при котором на конце линии величина  $\Delta P_{11}^{(i)}$  становится наибольшей, а  $\Delta P_{01}^{(i)}$  — наименьшей. Для решения составим новые разности, вычисляемые для двух соседних значений  $q$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma P_{11}^{(i)} &= \Delta P_{11}^{(i)}(q_2) - \Delta P_{11}^{(i)}(q_1), \\ \sigma P_{01}^{(i)} &= \Delta P_{01}^{(i)}(q_2) - \Delta P_{01}^{(i)}(q_1). \end{aligned} \right\} \quad (7.4.10)$$

Поскольку подразумеваем  $N > q$ , получаем

$$\begin{aligned} \sigma P_{11}^{(i)} &= \left[ \frac{v + (1-p)(p-v)^q}{1-(p-v)} (\Delta p - \Delta v) + \Delta v \right] (p-v)^{i-q-1} - \\ &- \left[ \frac{v + (1-p)(p-v)^{q-1}}{1-(p-v)} (\Delta p - \Delta v) + \Delta v \right] (p-v)^{i-q}. \end{aligned}$$

Это дает

$$\sigma P_{11}^{(i)} = [v\Delta p + (1-p)\Delta v] (p-v)^{i-q-1}. \quad (7.4.11)$$

В точности такое же условие получаем и для  $\sigma P_{01}^{(i)}$ . Это значит, что обеспечение условий, при которых величина  $\Delta P_{11}^{(i)}$  становится максимальной, приводит к нежелательному увеличению  $\Delta P_{01}^{(i)}$ .

Ввиду этого представляется необходимым решать задачу с учетом конкретной обстановки, т. е. исходя из оценок важности выигрыша (проигрыша) в этих величинах. Если эти оценки остаются неизменными во времени, то задача решается проще, поскольку  $q$ -оператору можно указать фиксированное место. Тогда же, когда оценки со временем изменяются, должно изменяться и его положение.

Таким образом, руководитель, знающий свойства оператора, в состоянии указать ему такое место на линии

управления, при котором задача управления будет выполняться с наибольшей вероятностью.

Пусть, к примеру, необходимо максимизировать  $\Delta p_{11}^{(i)}$ .

Для этого требуется максимизировать разность  $\sigma P_{11}^{(i)}$  (7.4.11). Тогда:

1) если  $[v\Delta p + (1-p)\Delta v > 0]$ , то необходимо получить  $q+1=1$  или  $q=i-1$ , ставя отличающегося оператора перед окончанием линии управления;

2) если  $[v\Delta p + (1-p)\Delta v < 0]$ , необходимо получить  $q+1=2$  или  $q=1$ , ставя отличающегося оператора сразу после руководителя.

При  $v\Delta p + (1-p)\Delta v = 0$  оптимум по  $q$  отсутствует. Именно такой случай имеет место при использовании операторов с одинаковыми реакциями на различные сигналы, для которых характеристики связаны уже известным условием  $p=1-v$ .

В самом деле, здесь  $\Delta p = -\Delta v$ ,  $1-p=v$ . Тогда при любых значениях  $p, v$  получаем  $v\Delta p - v\Delta p = 0$ .

### 7.5. Некоторые свойства простых трансляционных линий управления со многими состояниями на их выходах

Рассмотрим простую ТЛУ, предназначенную для передачи некоторого числа сигналов, обслуживаемую оператором ретрансляционных пунктов.

Будем полагать свойства операторов по передаче пришедших сигналов, описываемые их вероятностными характеристиками, одинаковыми. Тогда для каждого ретрансляционного пункта может быть составлена матрица вероятностей передачи сигналов вида

$D \backslash S$	1	2	3	...	$m-1$	$m$
1	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	...	$P_{1(m-1)}$	$P_{1m}$
2	$P_{21}$	$P_{22}$	$P_{23}$	...	$P_{2(m-1)}$	$P_{2m}$
3	$P_{31}$	$P_{32}$	$P_{33}$	...	$P_{3(m-1)}$	$P_{3m}$
...	...	...	...	...	...	...
$m-1$	$P_{(m-1)1}$	$P_{(m-1)2}$	$P_{(m-1)3}$	...	$P_{(m-1)(m-1)}$	$P_{(m-1)m}$
$m$	$P_{m1}$	$P_{m2}$	$P_{m3}$	...	$P_{m(m-1)}$	$P_{mm}$

Здесь  $S=m$  соответствует отсутствию сигнала (нулевой сигнал), а  $D=m$  — отсутствию действия. Таким образом, каждый оператор в ответ на любой из пришедших  $m$  сигналов оказывается в состоянии передать дальше или обработать те же  $m$  сигналов, принимая соответствующее состояние. Напомним, что сумма вероятностей каждой строки матрицы равна единице.

Рассмотрим для простоты ТЛУ с тремя состояниями и матрицей операторов вида

$S \backslash D$	1	2	3
1	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$
2	$p_{21}$	$p_{22}$	$p_{23}$
3	$p_{31}$	$p_{32}$	$p_{33}$

Обозначая вероятности перехода ( $i$ -го оператора в состоянии  $D=1; 2; 3$  через  $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, p_3^{(i)}$  соответственно, составим расширенную матрицу оператора:

		$p_1^{(i)}$	$p_2^{(i)}$	$p_3^{(i)}$
	$S \backslash D$	1	2	3
$p_1^{(i-1)}$	1	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$
$p_2^{(i-1)}$	2	$p_{21}$	$p_{22}$	$p_{23}$
$p_3^{(i-1)}$	3	$p_{31}$	$p_{32}$	$p_{33}$

Пользуясь формулами полных вероятностей, можно записать следующие вероятностные соотношения:

$$\begin{aligned} p_1^{(i)} &= p_1^{(i-1)} p_{11} + p_2^{(i-1)} p_{21} + p_3^{(i-1)} p_{31}, \\ p_2^{(i)} &= p_1^{(i-1)} p_{12} + p_2^{(i-1)} p_{22} + p_3^{(i-1)} p_{32}, \\ p_3^{(i)} &= p_1^{(i-1)} p_{13} + p_2^{(i-1)} p_{23} + p_3^{(i-1)} p_{33}, \end{aligned} \quad (7.5.1)$$

которым в силу  $p_1^{(k)} + p_2^{(k)} + p_3^{(k)} = 1$ ;  $k=0, 1, 2, \dots, i$ , придадим вид

$$\begin{aligned} p_1^{(i)} &= p_1^{(i-1)} (p_{11} - p_{31}) + p_2^{(i-1)} (p_{21} - p_{31}) + p_{31}, \\ p_2^{(i)} &= p_1^{(i-1)} (p_{12} - p_{32}) + p_2^{(i-1)} (p_{22} - p_{32}) + p_{32}, \\ p_3^{(i)} &= p_1^{(i-1)} (p_{13} - p_{33}) + p_2^{(i-1)} (p_{23} - p_{33}) + p_{33}. \end{aligned} \quad (7.5.2)$$

При такой записи два первых соотношения могут рассматриваться как система разностных уравнений, которую более удобно переписать в виде

$$\begin{aligned} p_1^{(i)} &= a_{11} p_1^{(i-1)} + a_{12} p_2^{(i-1)} + a_{13}, \\ p_2^{(i)} &= a_{21} p_1^{(i-1)} + a_{22} p_2^{(i-1)} + a_{23}, \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= p_{11} - p_{31}; & a_{21} &= p_{12} - p_{32}; \\ a_{12} &= p_{21} - p_{31}; & a_{22} &= p_{22} - p_{32}; \\ a_{13} &= p_{31}; & a_{23} &= p_{33}. \end{aligned}$$

Из двух уравнений (7.5.3) с помощью элементарных операций исключим известные  $p_2^{(i-1)}$  и  $p_2^{(i)}$ . Для этого из первого уравнения находим

$$p_2^{(i-1)} = \frac{1}{a_{12}} p_1^{(i)} - \frac{a_{11}}{a_{12}} p_1^{(i-1)} - \frac{a_{13}}{a_{12}}.$$

Увеличивая значение аргумента на единицу, получаем:

$$p_2^{(i)} = \frac{1}{a_{12}} p_1^{(i+1)} - \frac{a_{11}}{a_{12}} p_1^{(i)} - \frac{a_{13}}{a_{12}}.$$

Обратившись далее ко второму уравнению (7.5.3), с помощью последних выражений получаем

$$q_1^{(i+1)} + b q_1^{(i)} + c p_1^{(i-1)} = d_1, \quad (7.5.4)$$

где

$$\begin{aligned} b &= (a_{11} + a_{22}), \\ c &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}, \\ d_1 &= a_{13}(1 - a_{22}) + a_{23}a_{12}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем и уравнение

$$p_2^{(i+1)} + bp_2^{(i)} + cp_2^{(i-1)} = d_1, \quad (7.5.5)$$

где  $d_2 = a_{13}a_{21} - a_{11}a_{22} + a_{23}$ .

После решения уравнений (7.5.4), (7.5.5), можно вычислить и функцию  $p_3^{(i)}$  как разность  $p_3^{(i)} = 1 - (p_1^{(i)} + p_2^{(i)})$ .

Рассматривая полученные уравнения (7.5.4), (7.5.5), можно заметить, что линия с тремя состояниями описывается разностными уравнениями второго порядка. Напомним, что линия с двумя состояниями, исследовавшаяся выше, описывалась разностными уравнениями первого порядка. Можно сделать вывод о том, что линия с  $m$  состояниями будет описываться системой разностных уравнений  $(m-1)$ -го порядка.

Рассмотрим частный случай, имеющий важное практическое значение, когда операторы ретрансляционных пунктов обладают равенством реакций на любой из сигналов. Этому отвечает равенство вероятностей выполнения требуемых операций ( $R$ ). Кроме того, для определенности будем полагать вероятности проведения ложных операций также равными между собой ( $l$ ).

При таких условиях матрица вероятностей для линии управления с тремя состояниями принимает вид

$S \backslash D$	1	2	3
1	$R$	$l$	$l$
2	$l$	$R$	$l$
3	$l$	$l$	$R$

Здесь  $R + 2l = 1$ .



Обращаясь теперь к уравнению (7.5.4), получаем

$$p_1^{(i+1)} - 2(R-l)p_1^{(i)} + (R-l)^2 p_1^{(i-1)} = l[1 - (R-l)]. \quad (7.5.6)$$

Характеристическое уравнение соответствующего (7.5.6) однородного уравнения таково:

$$\beta^2 - 2(R-l)\beta + (R-l)^2 = 0, \quad (7.5.7)$$

откуда следует  $[\beta - (R-l)]^2 = 0$ , а также  $\beta_1 = \beta_2 = R-l$ .

Частное решение уравнения (7.5.6) для случая  $i \rightarrow \infty$  получаем в виде

$$p^*_1 = \frac{l[1 - (R-l)]}{[1 - (R-l)]^2}$$

или

$$p^*_1 = \frac{l}{1 - (R-l)}. \quad (7.5.8)$$

Общее решение запишем так:

$$p_1^{(i)} = (c_1 + ic_2)(R-l)^i + \frac{l}{1 - (R-l)}. \quad (7.5.9)$$

Теперь остается определить постоянные  $c_1, c_2$ , что делается с учетом начальных условий, которые в нашем случае таковы:

$$p_1^{(0)} = 1 [p_2^{(0)} = p_3^{(0)} = 0],$$

$$p_1^{(1)} = p_{11}^{(1)} = p_{11} = R.$$

С учетом последнего из выражений (7.5.9) получаем

$$1 = c_1 + \frac{l}{1 - (R-l)}, \quad c_1 = \frac{1-R}{1 - (R-l)},$$

$$R = \left[ \frac{1-R}{1 - (R-l)} + c_2 \right] (R-l) + \frac{l}{1 - (R-l)}, \quad c_2 = 0. \quad (7.5.10)$$

Возвращаясь к (7.5.9), запишем

$$p_{11}^{(i)} = \frac{(1-R)(R-l)^i}{1 - (R-l)} + \frac{l}{1 - (R-l)}. \quad (7.5.11)$$

Полученное можно упростить, используя свойства строк матрицы вероятностей  $R + 2l = 1$ . Тогда

$$p_{11}^{(i)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1 - 3l)^i. \quad (7.5.12)$$

Можно также получить

$$p_{12}^{(i)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} (1 - 3l)^i, \quad (7.5.13)$$

$$p_{13}^{(i)} = p_{12}^{(i)} \frac{1}{3} - \frac{1}{3} (1 - 3l)^i. \quad (7.5.14)$$

При суммировании обеих частей получаем, естественно, тождество.

Теперь можно перейти к определению функций  $p_{21}^{(i)}$ ,  $p_{22}^{(i)}$ ,  $p_{23}^{(i)}$ . Сделаем это, исходя из общих соображений. Обратившись к матрице вероятностей оператора с равными реакциями

$\begin{matrix} D \\ S \end{matrix}$	1	2	3	$\vdots$	$m-1$	$m$
1	$R$	$l$	$l$	$\vdots$	$l$	$l$
2	$l$	$R$	$l$	$\vdots$	$l$	$l$
3	$l$	$l$	$R$	$\vdots$	$l$	$l$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$m-1$	$l$	$l$	$l$	$\vdots$	$R$	$l$
$m$	$l$	$l$	$l$	$\vdots$	$l$	$R$

и используя формулы полных вероятностей, можем записать

$$\begin{aligned} p_1^{(i)} &= p_1^{(i-1)} R + p_2^{(i-1)} l + p_3^{(i-1)} l + \dots + p_m^{(i-1)} l, \\ p_2^{(i)} &= p_1^{(i-1)} l + p_2^{(i-1)} R + p_3^{(i-1)} l + \dots + p_m^{(i-1)} l, \\ p_3^{(i)} &= p_1^{(i-1)} l + p_2^{(i-1)} l + p_3^{(i-1)} R + \dots + p_m^{(i-1)} l, \end{aligned} \quad (7.5.15)$$

$$p_m^{(i)} = p_1^{(i-1)}l + p_2^{(i-1)}l + p_3^{(i-1)}l + \dots + p_m^{(i-1)}R.$$

Заменив здесь  $p_m^{(i-1)}$  на  $1 - (p_1^{(i-1)} + p_2^{(i-1)} + \dots + p_m^{(i-1)})$ , переходим к следующей системе рекуррентных уравнений, каждое из которых решается самостоятельно:

$$\begin{aligned} p_1^{(i)} &= p_1^{(i-1)}(R-l) + l, \\ p_2^{(i)} &= p_2^{(i-1)}(R-l) + l, \\ &\dots \\ p_{(m-1)}^{(i)} &= p_{(m-1)}^{(i-1)}(R-l) + l. \end{aligned} \quad (7.5.16)$$

Используя обычные приемы решения разностного уравнения с постоянными коэффициентами, получаем для системы (7.5.16)

$$p_j^{(i)} = c_j(R-l)^i + \frac{l}{1-(R-l)}; \quad j=1, 2, \dots, (m-1). \quad (7.5.17)$$

При начальных условиях  $p_{j=k}^{(0)} = 1$ ,  $p_{j \neq k}^{(0)} = 0$  имеем

$$\begin{aligned} 1 &= c_{j=k} + \frac{l}{1-(R-l)}, \quad c_{j=k} = \frac{1-R}{1-(R-l)}; \\ 0 &= c_{j \neq k} + \frac{l}{1-(R-l)}, \quad c_{j \neq k} = -\frac{l}{1-(R-l)}. \end{aligned} \quad (7.5.18)$$

Из (7.5.17), (7.5.18) следует

$$\begin{aligned} p_{kk}^{(i)} &= \frac{l + (1-R)(R-l)^i}{1-(R-l)}, \\ p_{k(j \neq k)}^{(i)} &= l \frac{1-(R-l)^i}{1-(R-l)}, \\ k, j &= 1, 2, \dots, (m-1). \end{aligned} \quad (7.5.19)$$

Воспользовавшись свойством строк матрицы оператора  $R + (m-1)l = 1$ , вместо (7.5.19) получаем

$$\begin{aligned} p_{k(j=k)}^{(i)} &= \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m}(R-l)^i, \\ p_{k(j \neq k)}^{(i)} &= \frac{1}{m} - \frac{1}{m}(R-l)^i, \\ k, j &= 1, 2, \dots, (m-1). \end{aligned} \quad (7.5.20)$$

Для случая двух состояний:  $m=2$ ,  $k, j=1,0$  (0 принят вместо 2), тогда из (7.5.20) получаем

$$p_{00}^{(i)} = p_{11}^{(i)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (R-l)^i,$$

$$p_{01}^{(i)} = p_{10}^{(i)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (R-l)^i.$$

В случае трех состояний:  $m=3$ ;  $k, j=1, 2, 3$ , получаем

$$p_{11}^{(i)} = p_{22}^{(i)} = p_{33}^{(i)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} (R-l)^i,$$

$$p_{12}^{(i)} = p_{13}^{(i)} = p_{21}^{(i)} = p_{23}^{(i)} = p_{31}^{(i)} = p_{32}^{(i)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} (R-l)^i.$$

Заметим, что выражения (7.5.20) отвечают требованию для вероятностей. Здесь везде сумма вероятностей всех состояний равна единице. В самом деле,

$$p_{k(j=k)}^{(i)} + (m-1) p_{k(j \neq k)}^{(i)} = \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m} = 1.$$

Сравним две формулы  $p_{k(j=k)}^{(i)}$  с  $m$ , отличающимися на единицу:

$$\frac{1}{m} + \frac{m-1}{m} (R-l)^i \cup \frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+1} (R-l)^i.$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \cup (R-l)^i \left( \frac{m}{m+1} - \frac{m-1}{m} \right)$$

или

$$\frac{1}{m(m+1)} \cup (R-l)^i \frac{1}{m(m+1)}.$$

Следовательно, символ  $\cup$  есть  $>$ , т. е. с увеличением значения  $m$  функция  $p_{k(j=k)}^{(i)}$  уменьшается.

Таким же образом проведем для функции  $p_{k(j \neq k)}^{(i)}$ :

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{m} (R-l)^i \cup \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+1} (R-l)^i.$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{m(m+1)} \cup (R-l)^i \frac{1}{m(m+1)}.$$

Вновь  $\cup$  есть  $>$ , т. е. с увеличением  $m$  и  $p_{k(j \neq k)}^{(i)}$  уменьшается.

Можно заметить следующее. Вероятности появления на выходе простой ТЛУ, обслуживаемой операторами с равными реакциями на любые поступающие сигналы, требуемых сигналов с возрастанием числа ретрансляционных пунктов уменьшаются от 1 до установившегося значения  $1/m$  ( $m$  — число сигналов, передаваемых по линии).

Вероятности появления на выходе простой ТЛУ любых ложных сигналов равны между собой, увеличиваются

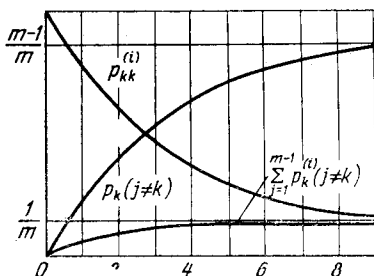


Рис. 7.5.1.

с возрастанием числа  $i$  от 0 до  $1/m$ . Крайне важно учитывать, что при этом суммарные вероятности появления ложных сигналов возрастают (рис. 7.5.1):

$$\sum_{j=1}^{m-1} p_{k(j \neq k)}^{(i)} = \frac{m-1}{m} - \frac{m-1}{m} (R-l)^i. \quad (7.5.21)$$

Если при оценке допустимой длины ТЛУ исходить из условия, что вероятность появления требуемого сигнала на выходе линии должна быть больше суммарной вероятности появления ложных сигналов, то для величины  $i$  можно получить формулу из соотношения

$$\frac{1}{m} + \frac{m-1}{m} (R-l)^i \geq \frac{m-1}{m} - \frac{m-1}{m} (R-l)^i.$$

Это дает

$$(R-l)^i \geq \frac{m-2}{2(m-1)}. \quad (7.5.22)$$

Для линии с двумя состояниями, как это следует из вышесказанного, длина ее неограниченна:  $i \rightarrow \infty$ . Для  $m > 2$  из (7.5.22) следует

$$i = \frac{|\ln(m-2)/[2(m-1)]|}{|\ln(R-l)|}. \quad (7.5.23)$$

В отдельных случаях передача большого числа сигналов с помощью длинных линий может оказаться не-

эффективной. При этом, возможно, окажется полезным использовать несколько линий с небольшим числом состояний каждую. При решении задач о выборе числа линий возникает трудность в определении величины  $R$ , которая, вообще говоря, зависит от  $m$ .

## Глава 8

### ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ АСУ

В общем случае АСУ может быть представлена как советчик оператора, действующий в условиях некоторой неопределенной ситуации. При этом весьма важно оптимальное сопряжение человека с машиной, которое в значительной степени определяет оптимальность действия АСУ и сводится к проблеме отыскания экстремума некоторого функционала, аргументами которого являются параметры, определяющие взаимодействие оператора и машины [58, 59, 72, 91]:

- место оператора в общей структуре АСУ;
- качество оператора (его анализаторов, психофизических и моторных свойств, натренированности);
- количество контролируемых оператором параметров в АСУ и принимаемых им решений;
- алгоритм действий оператора.

#### 8.1. Структурная схема сопряжения оператора с машиной

Структурная схема системы оператор — машина должна отображать функциональную и статистическую природу взаимоотношений внутри системы. Обобщенная графическая модель связей внутри системы изображена на рис. 8.1.1.

В приведенной модели оператор выполняет обработку массива информации  $U$  о состоянии объекта и преобразовывает упомянутый массив информации в многомерный вектор решений (управлений)  $Y$ .

Очевидно, что массив информации  $U$ , предлагаемый оператору для обработки, не может быть произвольно мал или велик — он должен быть оптимален. Под оптимизацией в данном случае понимается обобщенный функционально-статистический синтез по критерию

(1.3.16), учитывающему вероятностную природу информации и те последствия, к которым могут привести верные и ошибочные действия оператора.

Существующие методы синтеза оптимальных систем оператор — машина предусматривают решение частных задач:

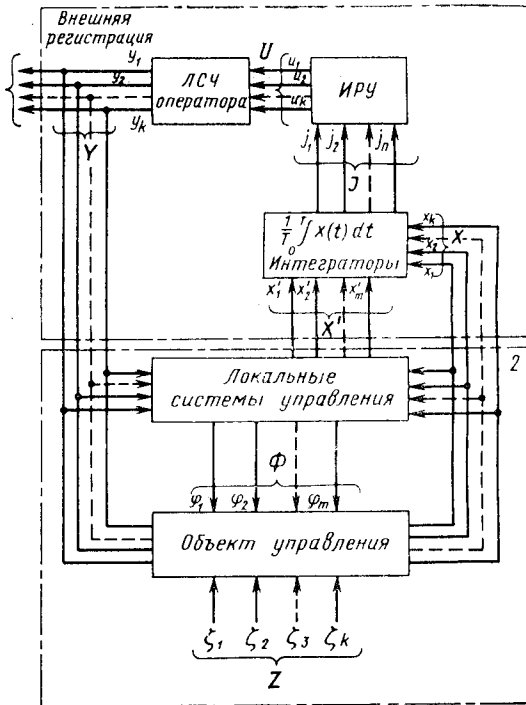


Рис. 8.1.1.

- оптимального профотбора операторов\*);
- оптимального построения измерительной и решающей аппаратуры.

Условия, в которых функционирует оператор, обуславливают необходимость рассмотрения массива частных ситуаций. При этом информация о состоянии контролируемых параметров АСУ (векторы  $X'$  и  $X$ ) может быть представлена в виде решений, принятых измери-

\*) Элементы обучения и профотбора операторов рассматриваются во второй части книги.

тельным и решающим устройством совместно с оператором (ИРУ-О):

— решение типа «норма — нет нормы», принятое ИРУ-О на основе классического анализа;

— решение типа «норма — больше — меньше», принятое ИРУ-О классическим методом;

— решение многоальтернативное, принятое ИРУ-О классическим методом;

— решение типа «норма — нет нормы», принятое ИРУ-О методом последовательного анализа;

— решение типа «норма — больше — меньше», принятое ИРУ-О методом последовательного анализа;

— решение многоальтернативное, принятое ИРУ-О методом последовательного анализа.

Задача оператора состоит в оценке ситуации, создаваемой измерительно-решающим устройством, обработке информации  $\mathbf{U}$  по одному из оптимальных детерминированных алгоритмов и выдаче оптимального управляющего воздействия  $\mathbf{Y}$ .

Общая оценка положения вектора  $\mathbf{U}$  определяется положением его компонент  $u_1, u_2, \dots, u_k$  в пространстве критерия эффективности.

## 8.2. Обобщенная функционально-статистическая модель классического принятия решения типа «норма — нет нормы»

Пусть анализу подвергается некоторый сигнал  $x(t)$ , характеризующий состояние объекта управления (блок 2 рис. 8.1.1). При этом известно, что сигнал  $x(t)$  образован аддитивной смесью сообщения о состоянии объекта и стационарной помехи  $\mathbf{Z}$ , причем помеха, соответствующая возмущающим факторам, имеет нормальный закон плотности распределения вероятности и определенную автокорреляционную функцию  $R(\tau)$ .

Предположим, что решение о нормальном или ненормальном состоянии сообщения  $s(t)$  о величине параметра будет приниматься методом классического анализа, при котором объем выборки (время наблюдения параметра) конечен. Таким образом,

$$x(t) = \begin{cases} s_0(t) + \zeta(t), \\ s_1(t) + \zeta(t), \end{cases} \quad (8.2.1)$$



где  $s_0(t)$  — сообщение типа «норма»,  $s_1(t)$  — сообщение типа «нет нормы».

Ввиду конечности времени наблюдения функция сигнала подвергается операции неполной фильтрации, в результате которой определяется ее статистическое математическое ожидание:

$$M[x(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^T [s_0(t) + \zeta(t)] dt, \\ \frac{1}{T} \int_0^T [s_1(t) + \zeta(t)] dt, \end{cases} \quad (8.2.2)$$

где  $T$  — время наблюдения.

В силу линейности операции (8.2.2) плотность распределения вероятности  $M[x(t)]$  подчиняется нормальному закону, при этом дисперсия определяется по формуле

$$D\{M[x(t)]\} = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_\zeta(\tau) d\tau \quad (8.2.3)$$

и плотности распределения  $M[x_0(t)]$  и  $M[x_1(t)]$  имеют вид

$$\begin{aligned} f_0(m) = & \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_\zeta(\tau) d\tau}} \times \\ & \times \exp \frac{-(m - m_0)^2}{\frac{4}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_\zeta(\tau) d\tau}, \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

$$\begin{aligned} f_1(m) = & \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_\zeta(\tau) d\tau}} \times \\ & \times \exp \frac{-(m - m_1)^2}{\frac{4}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_\zeta(\tau) d\tau}. \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

Анализ выражения (8.2.3) показывает, что с увеличением времени наблюдения дисперсия плотностей  $f_0(m)$ ,  $f_1(m)$  стремится к 0 при  $T \rightarrow \infty$ , а  $f_0(m)$  и  $f_1(m)$  вырождаются в  $\delta$ -функции (рис. 8.2.1). Очевидно, что

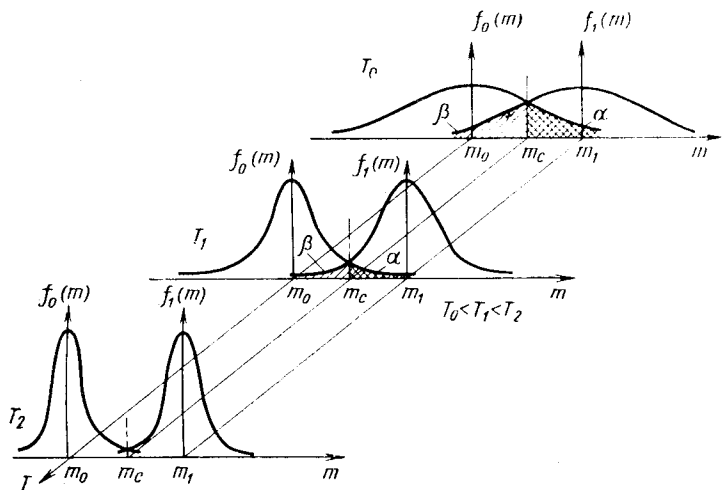


Рис. 8.2.1.

увеличение времени наблюдения (задержки в принятии решения) ведет к дальнейшему уходу контролируемого процесса  $x(t)$  от состояния «норма» или к перерегулированию в управлении. Эти последствия можно трак-

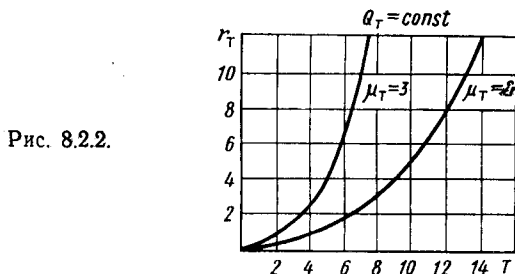


Рис. 8.2.2.

товать как потери, вносимые старением информации, и определять в виде функций (рис. 8.2.2)

$$r_T = Q_T T^{\mu_T}, \quad (8.2.6)$$

где  $r_T$  — потери, вносимые старением информации;  $Q_T$  — коэффициент, отображающий изоморфность про-

странства «время — стоимость», определяемый в процессе разработки;  $\mu_T$  — коэффициент, учитывающий тип контролируемого параметра и определяемый при разработке.

При наблюдении сигнала  $x(t)$  указанным методом возможно возникновение ошибок двоякого рода:  $P_{01}$  — ошибка типа «ложный сигнал»,  $P_{10}$  — ошибка типа «пропуск сигнала».

Вероятность возникновения упомянутых ошибок

$$\begin{aligned}
 P_{01} &= P_0 \alpha = P_0 \int_{m_c}^{\infty} f_0(m) dm = \\
 &= P_0 \int_{m_c}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{\zeta}(\tau) d\tau}} \times \\
 &\times \exp \frac{-(m - m_0)^2}{\frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{\zeta}(\tau) d\tau} dm, \quad (8.2.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{10} &= P_1 \beta = P_1 \int_{-\infty}^{m_c} f_1(m) dm = \\
 &= P_1 \int_{-\infty}^{m_c} \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{\zeta}(\tau) d\tau}} \times \\
 &\times \exp \frac{-(m - m_1)^2}{\frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{\zeta}(\tau) d\tau} dm, \quad (8.2.8)
 \end{aligned}$$

где  $\beta$ ,  $\alpha$  — условные вероятности ошибок типа «пропуск сигнала» и «ложный сигнал» соответственно;  $P_0$ ,  $P_1 = (1 - P_0)$  — априорные вероятности передачи сообщений  $s_0(t)$ ,  $s_1(t)$ ;  $m_c$  — порог разделения областей существования  $M_{ст}[x_0(t)]$  и  $M_{ст}[x_1(t)]$ ;  $m_0$  — математическое ожидание сообщения  $s_0(t)$ ;  $m_1$  — математическое ожидание сообщения  $s_1(t)$ .

При известной матрице платежей при принятии ошибочных и верных решений

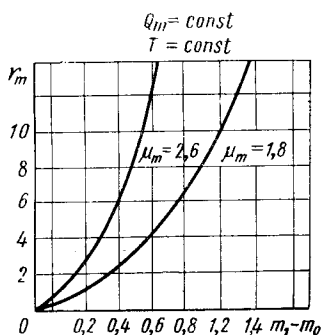
$$L = \begin{vmatrix} L_{10} & L_{01} \\ L_{00} & L_{11} \end{vmatrix} \quad (8.2.9)$$

можно определить риск  $r_0$ , обусловливаемый ошибками при принятии решения:

$$r_0 = P_{01}L_{01} + P_{10}L_{10}, \quad (8.2.10)$$

где  $L_{01}$  — плата при принятии решения «нет нормы» вместо решения «норма»;  $L_{10}$  — плата при принятии решения «норма» вместо решения «нет нормы».

Рис. 8.2.3.



Анализируя выражения (8.2.7), (8.2.8), можно заметить, что вероятности ошибочных решений  $P_{01}$ ,  $P_{10}$  уменьшаются при увеличении «кодированного расстояния» между сообщениями  $s_0(t)$  и  $s_1(t)$ , т. е. при увеличении разности математических ожиданий  $m_1 - m_0$  (рис. 8.2.1).

При  $(m_1 - m_0) \rightarrow \infty$ ,  $P_{10} \rightarrow 0$ ,  $P_{01} \rightarrow 0$ , однако этот метод уменьшения вероятности принятия ошибочных решений ведет к огрублению принятых решений. Грубость принимаемых решений связана с потерями, описываемыми функцией вида (рис. 8.2.3)

$$r_m = Q_m (m_1 - m_0)^{\mu_m} T, \quad (8.2.11)$$

где  $r_m$  — потери, определяемые грубостью решений;  $Q_m$  — коэффициент, определяющий изоморфность пространств «грубость — стоимость»;  $\mu_m$  — коэффициент, учитывающий тип принимаемых решений.

Полный риск (потери)  $r$  с учетом частных независимых потерь (8.2.7) — (8.2.11) при принятии решения

$$\begin{aligned} r &= r_0 + r_T + r_m = \\ &= L_{01}P_0 \int_{m_c}^{\infty} f_0(m) dm + L_{10}P_1 \int_{-\infty}^{m_c} f_1(m) dm + Q_T T^{\mu T} + \\ &\quad + Q_m (m_1 - m_0)^{\mu} T. \end{aligned} \quad (8.2.12)$$

Поступления при принятии решения образуются при принятии верных решений и в общем случае равны

$$\Pi = L_{00}P_0 \int_{-\infty}^{m_c} f_0(m) dm + L_{11}P_1 \int_{m_c}^{\infty} f_1(m) dm, \quad (8.2.13)$$

где  $\Pi$  — поступления при верном решении;  $L_{00}$ ,  $L_{11}$  — положительные платежи при верном решении типа «норма — нет нормы» соответственно.

Выгодность решения типа «норма — нет нормы» при контроле состояния параметра  $x(t)$  в предположении, что

$$|L_{00}| = |L_{01}| \text{ и } |L_{11}| = |L_{10}|, \quad (8.2.14)$$

определяется как

$$\begin{aligned} B &= \Pi - r = L_{00}P_0 \int_{-\infty}^{m_c} f_0(m) dm + \\ &\quad + L_{11}P_1 \int_{m_c}^{\infty} f_1(m) dm - L_{00}P_0 \int_{m_c}^{\infty} f_0(m) dm - \\ &\quad - L_{11}P_1 \int_{-\infty}^{m_c} f_1(m) dm - Q_T T^{\mu T} - Q_m (m_1 - m_0)^{\mu} T = \\ &= L_{00}P_0 - L_{00}P_0 \int_{m_c}^{\infty} f_0(m) dm + L_{11}P_1 - \\ &\quad - L_{11}P_1 \int_{-\infty}^{m_c} f_1(m) dm - \\ &\quad - L_{00}P_0 \int_{m_c}^{\infty} f_0(m) dm - L_{11}P_1 \int_{-\infty}^{m_c} f_1(m) dm - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - Q_T T^{\mu T} - Q_m (m_1 - m_0)^{\mu T} T = \\
& = L_{00} P_0 + L_{11} P_1 - 2L_{00} P_0 \int_{m_c}^{\infty} f_0(m) dm - \\
& \quad - 2L_{11} P_1 \int_{-\infty}^{m_c} f_1(m) dm - \\
& - Q_T T^{\mu T} - Q_m (m_1 - m_2)^{\mu T} T. \quad (8.2.15)
\end{aligned}$$

Преобразования в (8.2.15) корректны, так как пространство событий нормировано  $P_{00} + P_{01} + P_{11} + P_{10} = 1$ .

Предположение (8.2.14) правомерно ввиду того, что при принятии решения ИРУ-О находятся в ситуации, соответствующей игре при нулевой начальной сумме. Процедура принятия решения о состоянии параметра  $x(t)$  представляет собой процесс получения информации  $I$ , которая равна

$$I = H_0 - H_1, \quad (8.2.16)$$

где  $H_0$  — начальная энтропия состояния параметра  $x(t)$ ;  $H_1$  — конечная энтропия состояния параметра  $x(t)$ .

При этом

$$H_0 = -P_0 \lg_2 P_0 - (1 - P_0) \lg_2 (1 - P_0), \quad (8.2.17)$$

$$H_1 = -P_{\text{верн}} \lg_2 P_{\text{верн}} - P_{\text{ош}} \lg_2 P_{\text{ош}}, \quad (8.2.18)$$

где  $P_{\text{верн}}$  — вероятность принятия верного решения,

$$\begin{aligned}
P_{\text{верн}} & = 1 - P_{\text{ош}} = P_{00} + P_{11} = 1 - P_{01} - P_{10} = \\
& = P_0 \int_{-\infty}^{m_c} f_0(m) dm + P_1 \int_{m_c}^{\infty} f_1(m) dm = 1 - P_0 \int_{m_c}^{\infty} f_0(m) dm - \\
& \quad - P_1 \int_{-\infty}^{m_c} f_1(m) dm; \quad (8.2.19)
\end{aligned}$$

$P_{\text{ош}}$  — вероятность принятия ошибочного решения. С учетом (8.2.17), (8.2.19) выражение (8.2.16) примет вид

$$\begin{aligned}
I & = -P_0 \lg_2 P_0 - (1 - P_0) \lg_2 (1 - P_0) + \\
& \quad + P_0 \int_{-\infty}^{m_c} f_0(m) dm + P_1 \int_{m_c}^{\infty} f_1(m) dm. \quad (8.2.20)
\end{aligned}$$

Критериями, при которых решения будут оптимальными, могут служить:

— критерий минимального риска

$$r = \min, \quad (8.2.21)$$

и максимума выгоды

$$B = \max \quad (8.2.22)$$

при оптимальных значениях порога  $m^*_c$ , размеров поля допуска (формирования) сообщения  $m^*_1—m^*_0$ , времени наблюдения  $T^*$ ;

— критерий минимакса и максимина соответственно

$$r = \min \max, \quad (8.2.23)$$

$$B = \max \min, \quad (8.2.24)$$

при оптимальных значениях  $m^*_c$ ,  $T^*$ ,  $m^*_1—m^*_0$ ,  $P^*_0$ ;

— критерий минимума цены информации

$$I/r = \max \text{ или } r/I = \min; \quad (8.2.25)$$

— критерий минимакса цены информации

$$I/r = \max \min \text{ или } r/I = \min \max, \quad (8.2.26)$$

при этом определяются оптимальные значения  $m^*_c$ ,  $m^*_1—m^*_0$ ,  $T^*$ ,  $P^*_0$ ;

— критерий максимума выгоды информации

$$IB = \max, \quad (8.2.27)$$

при этом  $m^*_c$ ,  $T^*$ ,  $m^*_1—m^*_0$  оптимальны (рис. 8.2.4);

— критерий максимина выгоды информации

$$IB = \max \min, \quad (8.2.28)$$

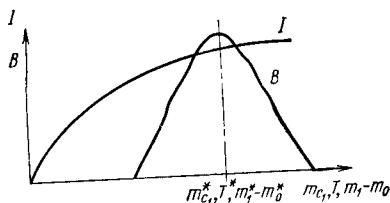


Рис. 8.2.4.

$m^*_c$ ,  $T^*$ ,  $m^*_1—m^*_0$ ,  $P^*_0$  — оптимальные.

Применимость каждого из критериев (8.2.21) — (8.2.28) определяется наличием соответствующих априорных сведений.

Экстремизация критериев (8.2.21) — (8.2.28) проводится с применением ЭВМ. Параметры  $m^*_c$ ,  $T^*$ ,  $m^*_1—m^*_0$ ,  $P^*_0$  формируют экстремум критерия и составляют основу обучения оператора, т. е. вводятся в его память и используются при организации аппаратурной части пульта оператора. Абсолютные значения критериев (экстремальные значения) являются оценкой эффективности контроля данного параметра  $x_i(t)$ . На основе использования упомянутых критериев можно сравнить эффективности контроля параметров и расположить их по иерархической системе.

Например, начальный порядок параметров  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ ,  $x_4(t)$ ,  $x_5(t)$ .

Порядок параметров после определения эффективности по критерию  $r = \min: x_5(t), x_3(t), x_4(t), x_2(t)$ , так как

$$r^*_{x_5} < r^*_{x_3} < r^*_{x_1} < r^*_{x_4} < r^*_{x_2}.$$

### 8.3. Обобщенная функционально-статистическая модель принятия решения типа «норма — нет нормы» методом последовательного анализа

Предположим, что при принятии решения методом последовательного анализа Вальда анализу подвергается сигнал, подобный рассмотренному в § 8.2. При этом области существования  $M_T[x(t)]$  разделяются на три зоны:

- I — зона принятия  $M_T[x(t)]$  как состояния «норма»;
- II — зона принятия  $M_T[x(t)]$  как состояния «нет нормы»;
- III — зона непринятия решения, т. е. зона продолжения наблюдения.

Очевидно, что объем выборки (время наблюдения  $T$ ) является переменной, случайной величиной. В отличие от теоретических исследований Вальда, в которых показано, что вероятность задержки в принятии решения асимптотически приближается к 0 при  $T \rightarrow \infty$ , здесь показано, что при оптимизации последовательной процедуры анализа существуют усеченные выборки, оптимальные по модифицированному критерию Байеса. Подобный модифицированный критерий Байеса рассмотрен в § 8.2 (8.2.21).

Реализация последовательной процедуры при принятии решения связана с получением верных и ошибочных



решений. Если через  $P_0$  обозначить априорную вероятность появления ситуации «норма», тогда, в силу нормированности пространства состояний, вероятность «нет нормы» определяется как  $1 - P_0 = P_1$ . При этом апостериорные вероятности при принятии верных и ошибочных решений имеют вид

$$\begin{aligned}
 P_{00} &= P_0 \int_{-\infty}^{m_2} f_0(m) dm = \\
 &= P_0 \int_{-\infty}^{m_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{\zeta}(\tau) d\tau}} \times \\
 &\quad \times \exp \frac{-(m - m_0)^2}{\frac{4}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{\zeta}(\tau) d\tau} dm, \tag{8.3.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{11} &= (1 - P_0) \int_{m_3}^{\infty} f_1(m) dm = \\
 &= (1 - P_0) \int_{m_3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{\zeta}(\tau) d\tau}} \times \\
 &\quad \times \exp \frac{-(m - m_1)^2}{\frac{4}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{\zeta}(\tau) d\tau} dm, \tag{8.3.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{01} &= P_0 \int_{m_3}^{\infty} f_0(m) dm = \\
 &= P_0 \int_{m_3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{\zeta}(\tau) d\tau}} \times \\
 &\quad \times \exp \frac{-(m - m_0)^2}{\frac{4}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{\zeta}(\tau) d\tau} dm, \tag{8.3.3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{10} &= (1 - P_0) \int_{-\infty}^{m_2} f_1(m) dm = \\
&= (1 - P_0) \int_{-\infty}^{m_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{\zeta}(\tau) d\tau}} \times \\
&\times \exp \frac{-(m - m_1)^2}{\frac{4\pi}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{\zeta}(\tau) d\tau} dm, \tag{8.3.4}
\end{aligned}$$

где  $P_{00}$  — апостериорная вероятность принятия верного решения о состоянии «норма»;  $P_{11}$  — апостериорная вероятность принятия верного решения о состоянии «нет нормы»;  $P_{01}$  — апостериорная вероятность принятия ошибочного решения «нет нормы» вместо верного — «норма»;  $P_{10}$  — апостериорная вероятность принятия ошибочного решения «норма» вместо верного — «нет нормы».

Пусть потери, связанные с затратами времени, описываются выражением (8.2.10), тогда в силу вероятностной природы времени, затрачиваемого на принятие решения методом последовательного анализа, потери (в данном случае определяемые старением информации) имеют вид

$$r_T = Q_T T^{\mu T} \left[ P_0 \int_0^T \int_{m_2}^{m_3} f_0(m) dm dt + P_1 \int_0^T \int_{m_2}^{m_3} f_1(m) dm dt \right]. \tag{8.3.5}$$

Полагая известной матрицу платежей при ошибочных и верных решениях (8.2.8) и функцию грубости контроля (8.2.11), имеем

$$\begin{aligned}
r_m &= Q_m (m_1 - m_0)^{\mu m} \left[ P_0 \int_0^T \int_{m_2}^{m_3} f_0(m) dm dt + \right. \\
&\quad \left. + P_1 \int_0^T \int_{m_2}^{m_3} f_1(m) dm dt \right]. \tag{8.3.6}
\end{aligned}$$

Полный риск при принятии решения методом последовательного анализа

$$\begin{aligned}
 r = r_0 + r_m + r_T = & L_{01} P_0 \int_{m_3}^{\infty} f_0(m) dm + \\
 & + L_{10} (1 - P_0) \int_{-\infty}^{m_2} f_1(m) dm + \\
 & + Q_m (m_1 - m_0)^{\mu m} \left[ P_0 \int_0^T \int_{m_2}^{m_3} f_0(m) dm dt + \right. \\
 & + (1 - P_0) \int_0^T \int_{m_2}^{m_3} f_1(m) dm dt \left. \right] + Q_T T^{\mu T} \left[ P_0 \int_0^T \int_{m_2}^{m_3} f_0(m) dm dt + \right. \\
 & \left. + (1 - P_0) \int_0^T \int_{m_2}^{m_3} f_1(m) dm dt \right]. \quad (8.3.7)
 \end{aligned}$$

Поступления  $\Pi$  при принятии решения

$$\Pi = L_{00} P_0 \int_{-\infty}^{m_2} f_0(m) dm + L_{11} (1 - P_0) \int_{m_3}^{\infty} f_1(m) dm. \quad (8.3.8)$$

Выгодность  $B$  при принятии решения

$$B = \Pi - R. \quad (8.3.9)$$

Информация  $I$ , выделяемая при принятии решения, определяется априорной  $H_0$  и апостериорной  $H_1$  энтропией:

$$H_0 = -P_0 \lg_2 P_0 - (1 - P_0) \lg_2 (1 - P_0), \quad (8.3.10)$$

$$H_1 = -P_{\text{ош}} \lg_2 P_{\text{ош}} - (1 - P_{\text{ош}}) \lg_2 (1 - P_{\text{ош}}), \quad (8.3.11)$$

где

$$P_{\text{ош}} = P_0 \int_{m_3}^{\infty} f_0(m) dm + (1 - P_0) \int_{-\infty}^{m_2} f_1(m) dm$$

— апостериорная вероятность принятия ошибочного решения.

Информация

$$\begin{aligned}
 I_0 = & -P_0 \lg_2 P_0 - (1 - P_0) \lg_2 (1 - P_0) + \\
 & + \left[ P_0 \int_{m_3}^{\infty} f_0(m) dm + (1 - P_0) \int_{-\infty}^{m_2} f_1(m) dm \right] \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \lg_2 \left[ P_0 \int_{m_3}^{\infty} f_0(m) dm + (1 - P_0) \int_{-\infty}^{m_2} f_1(m) dm \right] + \\ & + \left[ (1 - P_0) \int_{m_3}^{\infty} f_0(m) dm - \right. \\ & \left. - (1 - P_0) \int_{-\infty}^{m_2} f_1(m) dm \right] \lg_2 \left[ (1 - P_0) \int_{m_3}^{\infty} f_0(m) dm - \right. \\ & \left. - (1 - P_0) \int_{-\infty}^{m_2} f_1(m) dm \right]. \end{aligned} \quad (8.3.12)$$

Критериями, которые позволяют оптимизировать процедуру принятия решения методом последовательного анализа, могут служить:

1) критерий минимума риска

$$r = \min, \quad (8.3.13)$$

где  $r$  соответствует (8.3.7).

При оптимизации определяются оптимальные значения  $m^*_{2} = f_1(T)$ ,  $m^*_{3} = f_2(T)$ ,  $T_{max}$ ,  $m^*_1$ ,  $m^*_0$ ,  $r^*_{min}$ ;

2) критерий минимакса риска

$$r = \min \max, \quad (8.3.14)$$

где  $r$  соответствует (8.3.7).

Определяются оптимальные значения  $P^*_0$ ,  $m^*_{2} = f_1(T)$ ,  $m^*_{3} = f_2(T)$ ,  $T_{max}$ ,  $m^*_1$ ,  $m^*_0$ ,  $r^*_{min \max}$ ;

3) критерий максимума выгодности

$$B = \max, \quad (8.3.15)$$

где  $B$  — соответствует (8.3.9) с учетом (8.3.7), (8.3.8).

Определяются оптимальные значения  $B^*_{max}$ ,  $T_{max}$ ,  $m^*_{3} = f_1(T)$ ,  $m^*_{2} = f_2(T)$ ,  $m^*_0$ ,  $m^*_1$ ;

4) критерий максимина

$$B = \max \min, \quad (8.3.16)$$

где  $B$  соответствует (8.3.9) с учетом (8.3.7), (8.3.8).

При оптимизации определяется  $B^*_{max \min}$ ,  $T_{max}$ ,  $m^*_{2} = f_1(T)$ ,  $m^*_{3} = f_2(T)$ ,  $m^*_0$ ,  $m^*_1$ ,  $P^*_0$ ;

5) критерий минимума цены информации

$$r/I = \min, \quad (8.3.17)$$

где  $I$ ,  $r$  определяются выражениями (8.3.12), (8.3.7) соответственно.

Оптимум (8.3.17) определяет оптимальные координаты  $r^*/I^* = \min$ ,  $T_{max}$ ,  $m^*_2 = f_1(T)$ ,  $m^*_3 = f_2(T)$ ,  $m^*_0$ ,  $m^*_1$ ;

6) критерий минимакса цены информации

$$r/I = \min \max, \quad (8.3.18)$$

где  $I$ ,  $r$  определяется выражениями (8.3.12), (8.3.7) соответственно.

При оптимизации определяются оптимальные координаты  $r^*/I^* = \min \max$ ,  $T_{max}$ ,  $m^*_2 = f_1(T)$ ,  $m^*_3 = f_2(T)$ ,  $m^*_0$ ,  $m^*_1$ ,  $P^*_0$ ;

7) критерий максимина цены информации

$$BI = \max \min,$$

где  $I$ ,  $B$  определяются из выражений (8.3.12), (8.3.9) соответственно. Экстремум (8.3.19) определяет минимальные  $BI = \max \min$ ,  $m^*_2 = f_1(T)$ ,  $m^*_3 = f_2(T)$ ,  $T_{max}$ ,  $P^*_0$ ,  $m^*_0$ ,  $m^*_1$ .

#### 8.4. Обобщенная функционально-статистическая модель принятия решения типа «норма — больше — меньше»

При передаче сообщения в трехальтернативной ситуации, сигнал описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= s_1(t) + \zeta(t), \\ x_2(t) &= s_2(t) + \zeta(t), \\ x_3(t) &= s_3(t) + \zeta(t). \end{aligned} \quad (8.4.1)$$

При организации технической стороны процедуры принятия решения важно выбрать оптимальные границы состояний, определяющие понятия «норма — больше — меньше», время принятия решения, значения порогов, разделяющих пространство возможных решений.

Полагая, что влияние возмущения  $\zeta(t)$  в выражении (8.4.1) соответствует возмущениям, рассмотренным в § 8.2, 8.3, и что осуществляется интегральный прием сигнала  $x(t)$ , определим вероятности ошибочных и верных решений.

Плотности распределения статистического математического ожидания, соответствующие состояниям «меньше» —  $f_1(m)$ , «норма» —  $f_2(m)$ , «больше» —  $f_3(m)$ , имеют

вид

$$f_1(m) = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{\zeta}(\tau) d\tau}} \times \exp \frac{-(m - m_1)^2}{\frac{4}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{\zeta}(\tau) d\tau}, \quad (8.4.2)$$

$$f_2(m) = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{\zeta}(\tau) d\tau}} \times \exp \frac{-(m - m_2)^2}{\frac{4}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{\zeta}(\tau) d\tau}, \quad (8.4.3)$$

$$f_3(m) = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{\zeta}(\tau) d\tau}} \times \exp \frac{-(m - m_3)^2}{\frac{4}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{\zeta}(\tau) d\tau}. \quad (8.4.4)$$

Вероятность принятия верного решения „меньше“

$$P_{--} = P_- \int_{-\infty}^{m_{c_1}} f_1(m) dm. \quad (8.4.5)$$

Вероятность принятия верного решения „норма“

$$P_{00} = P_0 \int_{m_{c_1}}^{m_{c_2}} f_2(m) dm. \quad (8.4.6)$$

Вероятность принятия верного решения «больше»

$$P_{++} = P_+ \int_{m_{c_2}}^{\infty} f_3(m) dm. \quad (8.4.7)$$

Вероятность принятия ошибочного решения «меньше» вместо «норма»

$$P_{0-} = P_0 \int_{-\infty}^{m_{c_2}} f_2(m) dm. \quad (8.4.8)$$

Вероятность принятия ошибочного решения «меньше» вместо «больше»

$$P_{+-} = P_+ \int_{-\infty}^{m_{c_1}} f_2(m) dm. \quad (8.4.9)$$

Вероятность принятия ошибочного решения «норма» вместо «больше»

$$P_{+0} = P_+ \int_{m_{c_1}}^{m_{c_2}} f_2(m) dm. \quad (8.4.10)$$

Вероятность принятия ошибочного решения «норма» вместо «меньше»

$$P_{-0} = P_- \int_{m_{c_1}}^{m_{c_2}} f_1(m) dm. \quad (8.4.11)$$

Вероятность принятия ошибочного решения «больше» вместо «меньше»

$$P_{-+} = P_- \int_{m_{c_2}}^{\infty} f_1(m) dm. \quad (8.4.12)$$

Вероятность принятия ошибочного решения «больше» вместо «норма»

$$P_{0+} = P_0 \int_{m_{c_2}}^{\infty} f_0(m) dm. \quad (8.4.13)$$

В выражениях (8.4.5) — (8.4.13)  $P_0$ ,  $P_-$ ,  $P_+$  — априорные вероятности появления сообщений «норма», «меньше», «больше» соответственно.

Полагая известной матрицу платежей при верных и ошибочных решениях

$$L = \begin{vmatrix} L_{00} & L_{0-} & L_{0+} \\ L_{--} & L_{-0} & L_{-+} \\ L_{++} & L_{+-} & L_{+0} \end{vmatrix}, \quad (8.4.14)$$

риск (потери), вызываемый ошибочными решениями, представим в виде

$$\begin{aligned}
 r_0 = & L_{0-}P_0 \int_{-\infty}^{m_{c_1}} f_2(m) dm + L_{+-}P_+ \int_{-\infty}^{m_{c_1}} f_2(m) dm + \\
 & + L_{+0}P_+ \int_{m_{c_1}}^{m_{c_2}} f_3(m) dm + L_{-0}P_- \int_{m_{c_1}}^{m_{c_2}} f_1(m) dm + \\
 & + L_{-+}P_- \int_{m_{c_2}}^{\infty} f_1(m) dm + L_{0+}P_0 \int_{m_{c_2}}^{\infty} f_0(m) dm. \quad (8.4.15)
 \end{aligned}$$

Потери, вносимые задержкой в принятии решений, описываются уравнением вида (8.2.6), а потери за счет грубости контроля (кодовым расстоянием) определяются уравнением вида (8.2.11).

С учетом (8.4.15) полный риск  $r$  при принятии решения в трехальтернативной ситуации определяется как

$$r = r_0 + r_T + r_{m_1-m_2} + r_{m_2-m_3}, \quad (8.4.16)$$

где  $r_{m_1-m_2} = Q_m(m_1 - m_2)^{\nu m} T$  — грубость контроля при различении состояний „меньше—норма“;  $r_{m_2-m_3} = Q_m(m_2 - m_3)^{\nu m} T$  — грубость контроля при различении состояний „норма—больше“.

Поступления  $\Pi$  при принятии верных решений

$$\begin{aligned}
 \Pi = & L_{00}P_0 \int_{m_{c_1}}^{m_{c_2}} f_2(m) dm + L_{--}P_- \int_{-\infty}^{m_{c_1}} f_1(m) dm + \\
 & + L_{++}P_+ \int_{m_{c_2}}^{\infty} f_3(m) dm. \quad (8.4.17)
 \end{aligned}$$

Выгодность  $B$  принятого решения

$$B = \Pi - r, \quad (8.4.18)$$

где  $r$ ,  $\Pi$  — соответственно (8.4.16), (8.4.17).

Начальная энтропия до принятия решения

$$H_0 = -P_0 \lg_2 P_0 - P_- \lg_2 P_- - P_+ \lg_2 P_+. \quad (8.4.19)$$

Конечная энтропия после принятия решения

$$H_1 = -P_{\text{ош}} \lg_2 P_{\text{ош}} - (1 - P_{\text{ош}}) \lg_2 (1 - P_{\text{ош}}), \quad (8.4.20)$$



где

$$\begin{aligned} P_{\text{ош}} = & P_0 \int_{-\infty}^{m_{c_1}} f_2(m) dm + P_0 \int_{m_{c_2}}^{\infty} f_2(m) dm + \\ & + P_- \int_{m_{c_1}}^{m_{c_2}} f_1(m) dm + P_- \int_{m_{c_2}}^{\infty} f_1(m) dm + \\ & + P_+ \int_{m_{c_1}}^{m_{c_2}} f_3(m) dm + P_+ \int_{-\infty}^{m_{c_1}} f_3(m) dm. \end{aligned}$$

Информация, выделяемая при принятии решения,

$$I = H_0 - H_1, \quad (8.4.21)$$

где  $H_0$ ,  $H_1$  — соответственно (8.4.19), (8.4.20).

Оптимизация процедуры принятия решения в трехальтернативной ситуации может быть выполнена по одному из критериев (8.2.21) — (8.2.27), в которые соответственно нужно ввести выражения (8.4.16), (8.4.18), (8.4.21). При этом возможно определение оптимальных значений  $m^*_1$ ,  $m^*_2$ ,  $m^*_3$ ,  $m^*_{c_1}$ ,  $m^*_{c_2}$ ,  $P^*_-$ ,  $P^*_0$ ,  $P^*_+$ ,  $T$ .

### 8.5. Обобщенная функционально-статистическая модель принятия решения типа «норма — больше — меньше» методом последовательного анализа

Рассматриваемая здесь трехальтернативная ситуация предполагает, что последовательному анализу подвергается сигнал, описываемый выражением (8.4.1). При этом объем выборки  $T$  переменен, и, следовательно, соответствующие плотности вероятности статистического математического ожидания описываются уравнениями вида (8.4.2), (8.4.3), (8.4.4). В отличие от § 8.4, в упомянутых уравнениях  $T$  — случайная величина, а  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  — функции времени наблюдения.

Принятие любого решения, ошибочного или верного, влечет остановку процедуры принятия решения. При этом возможны верные и ошибочные решения, определяемые вероятностями их появления.

Вероятность принятия верного решения «меньше»

$$P_{--} = P_- \int_{-\infty}^{m_{c_1}} f_1(m) dm. \quad (8.5.1)$$

Вероятность принятия верного решения «норма»

$$P_{00} = P_0 \int_{m_{c_2}}^{m_{c_3}} f_2(m) dm. \quad (8.5.2)$$

Вероятность принятия верного решения «больше»

$$P_{++} = P_+ \int_{m_{c_4}}^{\infty} f_3(m) dm. \quad (8.5.3)$$

Вероятность принятия ошибочного решения «меньше»  
вместо «норма»

$$P_{-0} = P_0 \int_{-\infty}^{m_{c_1}} f_2(m) dm. \quad (8.5.4)$$

Вероятность принятия решения «меньше» вместо  
«больше»

$$P_{-+} = P_+ \int_{-\infty}^{m_{c_1}} f_3(m) dm. \quad (8.5.5)$$

Вероятность принятия ошибочного решения «норма»  
вместо «меньше»

$$P_{0-} = P_- \int_{m_{c_2}}^{m_{c_3}} f_1(m) dm. \quad (8.5.6)$$

Вероятность принятия ошибочного решения «норма»  
вместо «больше»

$$P_{0+} = P_+ \int_{m_{c_2}}^{m_{c_3}} f_3(m) dm. \quad (8.5.7)$$

Вероятность принятия ошибочного решения «больше»  
вместо «меньше»

$$P_{+-} = P_- \int_{m_{c_4}}^{\infty} f_1(m) dm. \quad (8.5.8)$$

Вероятность принятия ошибочного решения «больше» вместо «норма»

$$P_{+0} = P_0 \int_{m_{c_1}}^{\infty} f_2(m) dm. \quad (8.5.9)$$

Полагая известной матрицу (8.4.14) платежей при принятии ошибочных и верных решений, а также платежи, связанные с грубостью контроля

$$r_{m_1 - m_2} = Q_m (m_1 - m_2)^{\mu} m T, \quad (8.5.10)$$

$$r_{m_2 - m_3} = Q_m (m_2 - m_3)^{\mu} m T \quad (8.5.11)$$

и со старением информации (задержкой в принятии решения)

$$r_T = Q_T T^{\mu} T, \quad (8.5.12)$$

определим риск при принятии решения:

$$r = L_{-+} P_{-+} + L_{-0} P_{-0} + L_{0-} P_{0-} + L_{0+} P_{0+} + L_{+-} P_{+-} + L_{+0} P_{+0} + r_{m_1 - m_2} + r_{m_2 - m_3} + r_T P_T, \quad (8.5.13)$$

где

$$P_T = \int_0^T \int_{m_{c_1}}^{m_{c_2}} f_1(m) dm dt + \int_0^T \int_{m_{c_1}}^{m_{c_2}} f_2(m) dm dt + \int_0^T \int_{m_{c_3}}^{m_{c_4}} f_2(m) dm dt + \int_0^T \int_{m_{c_3}}^{m_{c_4}} f_3(m) dm dt. \quad (8.5.14)$$

Поступления при принятии решения в трехальтернативной ситуации методом последовательного анализа

$$\Pi = L_{00} P_{00} + L_{--} P_{--} + L_{++} P_{++}, \quad (8.5.15)$$

при этом выгодность принятого решения

$$B = \Pi - r, \quad (8.5.16)$$

где  $r$  соответствует (8.5.13).

Информация, получаемая при принятии решения,

$$I = H_0 - H_1, \quad (8.5.17)$$

где

$$H_0 = -P_0 \lg_2 P_0 - P_- \lg_2 P_- - P_+ \lg_2 P_+; \quad (8.5.18)$$

$$H_1 = -P_{\text{ош}} \lg_2 P_{\text{ош}} - (1 - P_{\text{ош}}) \lg_2 (1 - P_{\text{ош}}). \quad (8.5.19)$$

С учетом выражений (8.5.4) — (8.5.9)

$$P_{\text{ош}} = P_{-0} + P_{-+} + P_{+0} + P_{+-} + P_{0-} + P_{0+}.$$

Критериями, позволяющими синтезировать оптимальные ИРУ, согласованные с оператором, могут служить

- 1)  $r = \min$ ,  $r = \min \max$ , 2)  $B = \max$ ,  $B = \max \min$ ;
- 3)  $I/r = \max$ ,  $I/r = \max \min$ , 4)  $IB = \max$ ,  $IB = \max \min$ .

### 8.6. Оценка полного риска оператора и измерительно-решающих устройств

Общие методы оценки эффективности ИРУ-О, приведенные в § 8.2—8.5, позволяют построить произвольный ряд поддающихся контролю параметров производственного процесса в иерархический ряд по убыванию эффективности. Однако оператор обычно не в состоянии охватить весь ряд контролируемых параметров. По крайней мере, эффективность осознания состояния массива информации падает с увеличением массива.

В соответствии с изложенным выше можно определить полный риск при выборе оптимального управления:

$$r_{\pi} = \sum_{i=1}^n r_{ik_2} + \sum_{i=1}^k r_{is_2} + \sum_{i=1}^l r_{ik_3} + \sum_{i=1}^m r_{is_3} + \sum_{i=1}^p r_{iT} + \sum_{i=1}^r r_{iTC} + \sum_{i=1}^{sh} r_{iTT}, \quad (8.6.1)$$

где  $r_{\pi}$  — полный риск при выборе типа управления;

$\sum_{i=1}^n r_{ik_2}$  — суммарный риск при оценке информации типа

„норма—нет нормы“ классическим методом;

$\sum_{i=1}^k r_{is_2}$  — суммарный риск при оценке информации типа

„норма—нет нормы“ последовательным методом;

$\sum_{i=1}^l r_{ik_3}$  — суммарный риск при оценке информации типа

„норма—больше—меньше“ классическим методом;

$\sum_{i=1}^m r_{is_3}$  — суммарный риск при оценке информации типа

„норма—больше—меньше“ последовательным методом;

$\sum_{i=1}^p r_{iT}$  — суммарный риск, вызываемый старением инфор-

мации за время распознавания массива информации;

$\sum_{i=1}^r r_{iTC}$  — суммарный риск, вызываемый логическими ошибками оператора;

$\sum_{i=1}^{sh} r_{iTT}$  — суммарный риск, вызываемый старением информации за время моторной реакции оператора.

Аналогичные оценки можно ввести по выгодности принимаемых решений, цене информации и ее выгодности. Оптимальность согласования индикационных средств, моторных средств действия оператора и его пропускной способности должна вестись именно методами экстремизации указанных критериев. Очевидно, что мерность критериев в общем случае велика, и определение координат экстремумов критериев возможно только при организации случайного поиска с применением ЭВМ, что и составляет элемент машинного проектирования оптимальных взаимоотношений «человек — машина».

В процессе деятельности оператора возникает необходимость запоминания информации: долговременного или оперативного [72, 91]. Оперативная память оператора связана с первичной ориентировкой в массиве поступающей информации, с фиксацией общего числа вновь появляющихся сигналов [89]. Долговременная память связана с организацией поведения в масштабах длительных интервалов времени [89].

Процесс запоминания связан с перекодированием поступающей информации таким образом, чтобы сократить количество запоминаемых единиц. При этом часть новой информации идентифицируется с той, которая хранится в памяти оператора [83, 84, 89].

На запоминание влияют составленный план принятия решения (алгоритм), установление смысловых связей, выделение опорных точек, т. е. в данном случае поведение оператора представляется как решение задачи сетевого планирования.

**ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА  
ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ ОБУЧЕНИЯ**

Глава 9

**ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЫПОЛНЕНИЯ  
ЗАДАЧИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СТЕПЕНИ  
ОБУЧЕННОСТИ ОПЕРАТОРОВ**

При синтезе системы обучения необходимо прежде всего определить критерии степени обученности операторов, оценки эффективности обучения, математические модели получения оценок, а также оптимальное распределение средств, выделенных для построения элементов системы обучения.

**9.1. Оценка степени обученности**

Как известно, обучение предназначено дать обучаемому определенную сумму знаний, необходимых для его дальнейшей трудовой деятельности. Конечной целью обучения является достижение обучаемым требуемого уровня знаний  $P^k_{об}$  или степени обученности [83, 102]. Уровень знаний можно использовать в качестве критерия, характеризующего состояние обучаемой системы  $B$ . В [83] предполагается, что система  $B$  в процессе обучения проходит ряд промежуточных состояний  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k$ , каждое из которых характеризуется определенным уровнем знаний  $P^0_{об}, P^1_{об}, \dots, P^i_{об}, \dots, P^k_{об}$ .

Уровень знаний может быть описан  $n$ -мерным вектором

$$\bar{P}^i_{об} = P^i_{об}(r_1, r_2, \dots, r_j, \dots, r_n),$$

где  $r_1, r_2, \dots, r_n$  — компоненты вектора, каждая из которых количественно выражает определенные свойства обучаемой системы в данный момент времени.

Предположим, что переход системы  $B$  из состояния  $\alpha_i$  в состояние  $\alpha_{i+1}$  совершается в результате ввода в нее определенного количества информации  $S_i$ . Причем, со-

стояние определяется не только информацией  $S_i$ , но и предыдущим состоянием системы  $\alpha_i$ ; уровень знаний при этом

$$\bar{P}_{об}^{i+1} = F(\bar{P}_{об}^i, \bar{S}_i).$$

Степень обученности в каждом из состояний может определяться методом проб путем предъявления к  $B$ -системе  $k$  вопросов, где  $k$  принимает значения  $1, 2, 3, \dots, i, \dots, k$ , и анализа реакции системы на вопрос. Критерием степени обученности  $\bar{P}_{об}^i$  можно считать степень соответствия правильной (эталонной) информации, содержащейся в ответе системы на  $i$ -й вопрос ( $\bar{X}_i$ ), т. е.

$$\bar{P}_{об}^i = F(\bar{X}_i, \bar{X}'_i).$$

где  $\bar{X}'_i$  — эталонная информация.

При изучении материала, который можно представить в виде дискретных приблизительно равных порций, степень обученности может характеризоваться статистической вероятностью, определяемой как отношение числа усвоенных порций  $m$  к общему количеству преподносимых порций  $N$  [32]  $P_{об} = m/N$ .

В общем случае обученность определяется ответами обучаемого на поставленные вопросы, которые адекватно определяют понимание или знание обучающимся данного материала. Содержание этих вопросов будет, конечно, зависеть от того лица, которое их составляет, так как ни один из двух педагогов не может иметь совершенно одинакового мнения по одному и тому же вопросу. В конкретном случае обучаемый ответит на вопрос правильно (1) или неправильно (0), но эти величины не будут вероятностями; так как относятся к одной реализации. В [112] рассматривается абстрактная совокупность обучаемых с одинаковой предысторией и способностями, и вероятность  $P_{об}^k$  того, что какой-либо обучаемый даст правильный ответ на  $k$ -й вопрос, будет определяться как процент обучающихся из данной совокупности, давших правильный ответ на  $k$ -й вопрос.

Этот принцип может быть положен в основу определения вероятности безошибочной работы операторов

$$P_{о}^*(T_3) = 1 - n_0(T_3)/N_0,$$

где  $n_0(T_3)$  — число ошибок за время  $T_3$ , сделанных  $N_0$  операторами, и вероятности безошибочной работы группы операторов

$$P_{г0}^*(T_3) = 1 - n_{г0}(T_3)/N_{г0},$$

где  $n_{г0}(T_3)$  — число групп, дающих ошибку;  $N_{г0}$  — число всех групп.

Система «баллов» является наиболее распространенной при оценке обучения. Если обучаемый получил  $l$  баллов в  $N$ -балльной системе, то с известным приближением можно сказать, что вероятность того, что обучаемый выполнит задачу, к которой готовился, равна  $P_{об} = l/N$ .

Таким образом, намечается один общий вероятностный подход к оценке степени обученности, при котором уровень знаний определяется или вероятностью правильного ответа на контрольный вопрос, или вероятностью обнаружения и устранения неисправности, или вероятностью безошибочной работы и т. п. Во всех рассмотренных случаях вероятность  $P_{об}$  изменяется в пределах от 0 до 1. Можно наметить и несколько отличный подход в оценке степени обученности, который потребуется в дальнейшем.

Если преподаваемый материал разбить на порции и сформулировать к ним контрольные вопросы альтернативного типа, требующие ответов «да» или «нет», то при полном отсутствии знаний обучаемый с вероятностью  $P_{об}^* = 0,5$  будет давать правильные ответы и степень обученности будет характеризоваться максимальной неопределенностью (энтропией)

$$H_{max} = -P_{об}^* \log_2 P_{об}^* - (1 - P_{об}^*) \log_2 (1 - P_{об}^*) = 1,0.$$

Переход к  $P_{об}^*$  в новой интерпретации от ранее установленной формы  $P_{об}$  может быть осуществлен по следующей формуле [32]:

$$P_{об}^* = 0,5 (P_{об} + 1).$$

При изменении  $P_{об}$  в пределах 0—1,0  $P_{об}^*$  изменяется в пределах 0,5—1,0.

Используя данный подход, можно степень обученности определить как количество информации, которое получает обучаемый в процессе обучения:

$$I_{об} = H_{max} + P_{об}^* \log_2 P_{об}^* + (1 - P_{об}^*) \log_2 (1 - P_{об}^*),$$



где  $P^*_{об}$  — вероятность, характеризующая текущую степень обученности.

При изменении  $P^*_{об}$  в пределах 0,5—1,0  $I_{об}$  изменяется от 0 до 1.

## 9.2. Приближенный метод получения априорных оценок обучения

Большинство рассмотренных способов оценки уровня знаний являются статистическими и могут быть реализованы только в результате проведения опыта (апостериори). Иногда практически вообще не представляется возможным получение таких оценок, и они являются чистой абстракцией [112]. В некоторых случаях функционирования систем «человек — автомат» исключительно важной становится задача получения априорных оценок, характеризующих пригодность человека к выполнению своих функций в системе.

В [4] показано, что обучение должно рассматриваться как составная часть общей решаемой задачи, включающей как создание аппаратуры, так и ее обслуживание. При этом оптимальной системе будет соответствовать вполне определенная степень обученности обслуживающего персонала. Таким образом, возникает задача получения априорных оценок и прогнозирования обучения, обеспечивающих оптимальное функционирование системы «человек — автомат».

В [112, 21, 49] рассматриваются интуитивные модели получения априорных оценок, учитывающие предысторию обучения. Статистика оценок может быть записана в виде матрицы

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{12} & \dots & \dots & \alpha_{1n-1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{k2} & \dots & \dots & \alpha_{kn-1} & \dots & \alpha_{kn} \\ \alpha_{k+11} & \alpha_{k+12} & \dots & \dots & \dots & \alpha_{k+1n-1} & \dots & \alpha_{k+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \dots & \dots & \alpha_{mn-1} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \quad (9.2.1)$$

где  $\alpha_{ij}$  — оценка  $i$ -го обучаемого по  $j$ -му предмету;  $\alpha_{ij}$  ( $i=1, \dots, k-1; j=1, \dots, n$ ),  $\alpha_{ij}$  ( $i=k, \dots, m; j=1, \dots, n-1$ ) — известные оценки, характеризующие предысторию обучения;  $\alpha_{in}$  ( $i=k, \dots, m$ ) — оценки  $i$ -х обучаемых по  $n$ -му предмету, которые требуется определить априори.

В основу интуитивных моделей положены следующие утверждения: если  $i$ -й обучаемый хорошо успевал по  $n-1$  предметам, то  $a_{in}$  следует ожидать большой; и если большой процент обучающихся хорошо успевал по  $n$ -му предмету, то  $a_{in}$  должна быть большой. При этом используются три параметра в качестве показателей развития умственных способностей обучаемого и трудности предмета:

1) математическое ожидание оценок  $i$ -го обучаемого по  $n-1$  предметам

$$u_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}; \quad (9.2.2)$$

2) математическое ожидание оценок  $k-1$  обучаемых по  $n$ -му предмету

$$v_n = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} a_{in}; \quad (9.2.3)$$

3) математическое ожидание оценок  $k-1$  обучаемых по  $n$  предметам

$$\beta = \frac{1}{n(k-1)} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^n a_{ij}. \quad (9.2.4)$$

Используя эти три параметра, предположим существование следующих четырех условий  $a_{ij}$ , удовлетворяющих интуитивным понятиям, касающимся интеллекта обучаемого и трудности изучаемого предмета:

- а)  $a_{in} \geq v_n$  при  $\mu_i > \beta$ ,  
 $a_{in} = v_n$  при  $\mu_i = \beta$ ,  
 $a_{in} \leq v_n$  при  $\mu_i < \beta$ .

Это условие может быть интерпретировано как утверждение того, что, если  $i$ -й обучаемый выше среднего, среднего или ниже среднего уровня, то его ожидаемая оценка по  $n$ -му предмету должна быть выше, равна или меньше средней оценки  $k-1$  обучаемых по  $n$ -му предмету;

- б)  $a_{in} \geq \mu_i$  при  $v_n > \beta$ ,  
 $a_{in} = \mu_i$  при  $v_n = \beta$ ,  
 $a_{in} \leq \mu_i$  при  $v_n < \beta$ .

Это условие может быть сформулировано как утверждение того, что если  $n$  является более легким, средним или более трудным предметом, то ожидаемая оценка  $i$ -го обучаемого должна быть больше, равна или меньше, чем его усредненная оценка по  $n-1$  предметам;

в)  $\frac{\partial \alpha_{in}}{\partial \mu_i} \geq 0$  для всех  $\mu_i, \nu_n, \beta$ . Следовательно,  $\alpha_{in}$  не

должна уменьшаться по мере развития умственных способностей  $i$ -го обучаемого;

г)  $\frac{\partial \alpha_{in}}{\partial \nu_n}$  для всех  $\mu_i, \nu_n, \beta$  соответствует тому, что  $\alpha_{in}$

не должна уменьшаться по мере уменьшения трудности  $n$ -го предмета. В этом случае

$$\alpha^*_{in} = \begin{cases} \frac{\mu_i \nu_n}{\beta}; & (\mu_i \leq \beta) \\ \alpha^{max} - \frac{(\alpha^{max} - \mu_i)(\alpha^{max} - \nu_n)}{(\alpha^{max} - \beta)}, & (\mu_i \geq \beta) \end{cases} \quad (9.2.5)$$

где  $\alpha^*_{in}$  — априорная оценка  $i$ -го обучаемого по  $n$ -му предмету;  $\alpha^{max}$  — основание системы оценок (максимальная оценка). Например, при вероятностных оценках  $\alpha^{max} = 1$ .

### 9.3. Возможность улучшения априорных оценок обучения

К недостаткам рассмотренной модели относится то, что оценка  $i$ -го обучаемого по  $n$ -му предмету не зависит от трудности изучавшихся ранее предметов. Это зависит в основном от неполноты предыстории обучения, которая используется в моделях. Из этих соображений было бы желательным выполнение дополнительного условия: если два обучаемых  $i_1$  и  $i_2$  имеют идентичные данные по обучению на предыдущем этапе (за исключением того, что  $i_1$  имеет выше оценку по  $j_1$ -му, а  $i_2$  — по  $j_2$ -му предмету), то  $\alpha_{i_1 n}$  должна быть выше, чем  $\alpha_{i_2 n}$ , если  $j_1$  более трудный предмет, чем  $j_2$ .

Модель, в которой удалось бы реализовать пятое условие, в значительной степени снизила бы неопределенность или энтропию определяемых оценок.

Припишем каждому предмету  $j$  свой вес  $\lambda_j$ , характеризующий его трудность и степень влияния на получе-

ние оценки  $\alpha^*_{in}$ . В этом случае матрица  $\mathbf{A}$  преобразуется в матрицу  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{G} = \mathbf{AD} = \|\alpha_{ij}\| \cdot \|\lambda_j \delta_{ij}\|, \quad (9.3.1)$$

где  $\mathbf{D} = \|\lambda_j \delta_{ij}\|$  — диагональная матрица из весовых коэффициентов  $\lambda_j$  ( $j=1, \dots, n$ );

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i=j; \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases} \quad \text{— символ Кронекера.}$$

Определим из матрицы параметры  $\mu_i^\lambda$ ,  $\nu_n^\lambda$  и  $\beta^\lambda$ :

$$\mu_i^\lambda = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \alpha_{ij}, \quad (9.3.2)$$

$$\nu_n^\lambda = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_n \alpha_{in}, \quad (9.3.3)$$

$$\beta^\lambda = \frac{1}{n(k-1)} \sum_i^{k-1} \sum_j^n \lambda_j \alpha_{ij}. \quad (9.3.4)$$

Подставляя выражения (9.3.2), (9.3.3), (9.3.4) в формулу (9.2.5) для априорных оценок, окончательно получаем

$$\alpha^*_{in} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{n \sum_j^{n-1} \lambda_j \alpha_{ij} \sum_i^{k-1} \lambda_n \alpha_{in}}{(n-1) \sum_i^{k-1} \sum_j^i \lambda_j \alpha_{ij}}, \quad \mu \leq \beta, \\ \frac{\alpha^m(n-1) \left[ \alpha^m n(k-1) - \sum_i^{k-1} \sum_j^n \lambda_j \alpha_{ij} \right] -}{(n-1) \left[ \alpha^m n(k-1) - \right.} \\ \left. - n \left[ \alpha^m(n-1) - \sum_j^{n-1} \lambda_j \alpha_{ij} \right] \left[ \alpha^m(k-1) - \sum_i^{k-1} \lambda_n \alpha_{in} \right] \right.} \\ \left. - \sum_i^{k-1} \sum_j^n \lambda_j \alpha_{ij} \right] \end{array} \right. \quad (9.3.5)$$

Таким образом, на основании формулы (9.3.5) может быть получен вектор-столбец

$$\alpha^* = \begin{vmatrix} \alpha^*_{kn} \\ \alpha^*_{k+1, n} \\ \dots \\ \alpha^*_{k+l, n} \end{vmatrix} \quad (9.3.6)$$

априорных оценок  $l$  обучаемых по  $n$ -му предмету. В результате реализации  $n$ -го события определится вектор-столбец

$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_{kn} \\ \alpha_{k+1, n} \\ \dots \\ \alpha_{k+l, n} \end{vmatrix} \quad (9.3.7)$$

апостериорных оценок  $l$  обучаемых по  $n$ -му предмету.

Норма разности двух векторов  $\alpha$  и  $\alpha^*$ , определяемая по формуле

$$d(\alpha, \alpha^*) = \|\alpha - \alpha^*\| = \sqrt{\sum_{i=k}^{k+l} (\alpha_i - \alpha^*_i)^2}, \quad (9.3.8)$$

является нелинейной функцией весовых коэффициентов  $\lambda_j$ :

$$d(\alpha, \alpha^*) = f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (9.3.9)$$

и может рассматриваться как функция, выражающая критерий оптимальности.

Такие задачи относятся к нелинейному планированию. В математическом отношении задача нелинейного планирования заключается в определении переменных  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , при которых критерий оптимальности, являющийся нелинейной функцией переменных, имеет минимальную величину при условии, что эти переменные принимают лишь положительные значения:

$$\lambda_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (9.3.10)$$

Данная задача может быть решена методом случайных испытаний (методом Монте-Карло) или градиентными методами [38].

Полученные значения весовых коэффициентов необходимо использовать при определении априорных оценок по формуле (9.3.5) и прогнозировании обучения для последующих групп обучаемых. При этом на каждом этапе необходимо уточнение весовых коэффициентов

$\lambda_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ). Использование метода весовых коэффициентов позволит улучшить априорные оценки, полученные приближенным методом, на 3—5%.

#### 9.4. Математическая модель обучения

В настоящее время известно значительное число математических моделей, с помощью которых описывается и исследуется процесс обучения человека: усвоение теоретического материала, выработка умения и навыков и т. п. В работах [11, 123, 124] описаны следующие математические модели:

$$y = b - ae^{-cx}; \quad (9.4.1)$$

$$y = \frac{be^{Ax}}{c + e^{Ax}}; \quad (9.4.2)$$

$$y = b(1 - e^{-ax}); \quad (9.4.3)$$

$$y = e^{-ax}p + (1 - e^{-ax})b, \quad (9.4.4)$$

где  $y$  — сила навыков;  $b$  — верхний предел навыка;  $A$ ,  $a$ ,  $c$  — константы;  $p$  — начальная вероятность некоторой реакции;  $x$  — число циклов обучения.

Расхождение формул объясняется несовпадением условий экспериментов (разный характер изучаемого материала, индивидуальные особенности, отличие методики обучения и т. п.). Несмотря на некоторый произвол в описании процесса обучения человека, приведенные модели широко применялись и применяются в настоящее время при исследованиях процесса усвоения материала обучаемыми, обосновании методики обучения и оптимизации обучения.

При определении средств на обучение учитывается цель, т. е. конечный результат обучения. Имеет смысл найти тот минимум средств, который необходим для достижения требуемой степени обученности. Степень обученности характеризуется вероятностью выполнения задачи обучаемым  $P_{об}$ .

Этой задачей может являться управление сложным объектом, проведение технического обслуживания, отыскание и устранение неисправностей и т. п., причем степень обученности в каждом конкретном случае должна быть строго определенной. В этой связи представляет интерес установление зависимости между вероятностью выполнения поставленной задачи и стоимостью обуче-

ния  $C_\eta$ :

$$P_{об} = F(C_\eta). \quad (9.4.5)$$

Пусть в момент  $t=0$  имеется какое-то количество средств  $C$ , выделенное на обучение. Для простоты рассуждений будем полагать, что  $C$  неограниченное, т. е. для обучения можно расходовать столько средств, сколько для этого потребуется. Такое предположение не накладывает ограничений на общность рассуждений, поскольку в дальнейшем нас будет интересовать оптимальное количество средств  $C_{opt}$ , требуемое для такой степени обученности операторов, которая позволила бы выполнить задачу с заданной вероятностью.

Примем некоторые допущения.

1. Обучаемый знает какой-то прототип изучаемого предмета и имеет опыт его применения. Это ограничение не является существенным, так как в дальнейшем в основном представляют интерес расходы, связанные с обучением специалистов новому предмету.

2. Изучаемый предмет является достаточно сложным. Приступая к его изучению, операторы располагают твердыми знаниями, полученными ранее, но ничего не знают о новом предмете.

3. Общее познание изучаемого материала будем рассматривать как сумму знаний, составляющих предмет элементов, законов, терминов, определений и т. п. Система преподавания строится по методу непланового поэтапного обучения. Этапом обучения называется процесс усвоения путем сравнения с известным прототипом. Процесс обучения построен таким образом, чтобы каждый новый этап начинался после того, как всеми операторами будет усвоен материал предыдущего этапа обучения.

4. Существует линейная зависимость между временем обучения и затратами на обучение. Это вполне согласуется с допущением 3.

5. Важность задач, решаемых с помощью изучаемого предмета, требует обязательного его знания всеми обучаемыми, т. е. отсева по неуспеваемости в процессе обучения быть не может.

Принятая модель обучения позволяет найти распределение затрат на обучение. В этой модели время, а следовательно, и стоимость обучения являются вели-

чинами случайными. Найдем функцию распределения случайной величины.

Очевидно, при  $t < 0$   $C_\eta = 0$  и  $F(C_\eta) = 0$ . Обозначим через  $P(C_{\eta_1}, C_{\eta_2})$  вероятность того, что обучение закончится при затратах  $C_{\eta_1} \leq C_\eta \leq C_{\eta_2}$ , а через  $q(C_{\eta_1}, C_{\eta_2})$  — вероятность того, что при этих же затратах обучение не закончится.

Для малых величин затрат вероятность  $P(C_\eta, C_\eta + \Delta C_\eta)$  пропорциональна  $\Delta C_\eta$ , т. е.

$$P(C_\eta, C_\eta + \Delta C_\eta) = \lambda \Delta C_\eta, \quad (9.4.6)$$

где  $\lambda > 0$  — коэффициент пропорциональности.

Отсюда следует, что

$$q(C_\eta, C_\eta + \Delta C_\eta) = 1 - \lambda \Delta C_\eta. \quad (9.4.7)$$

На основании принятых допущений будем считать, что обучение в непересекающихся отрезках времени (затраченных средств) суть события независимые.

Если при затратах  $[0, C_\eta + \Delta C_\eta]$  не произойдет обучения, то имеет место совмещение двух событий: обучение не произошло при затратах  $[0, C_\eta]$  и при затратах  $[C_\eta, C_\eta + \Delta C_\eta]$ .

Таким образом, по аксиоме умножения вероятностей получим

$$q(0, C_\eta + \Delta C_\eta) = q(0, C_\eta) q(C_\eta, C_\eta + \Delta C_\eta),$$

или

$$q(0, C_\eta + \Delta C_\eta) = q(0, C_\eta) [1 - \lambda \Delta C_\eta],$$

отсюда

$$q(0, C_\eta + \Delta C_\eta) = q(0, C_\eta) - \lambda q(0, C_\eta) \Delta C_\eta,$$

или

$$\frac{q(0, C_\eta + \Delta C_\eta) - q(0, C_\eta)}{\Delta C_\eta} = -\lambda q(0, C_\eta).$$

Переходя к пределу при условии  $\Delta C_\eta \rightarrow 0$ , получаем

$$\frac{dq(0, C_\eta)}{dC_\eta} = -\lambda q(0, C_\eta).$$



Интегрируя полученное дифференциальное уравнение, находим

$$q(0, C_\eta) = G \exp \{-\lambda C_\eta\}. \quad (9.4.8)$$

Из начального условия  $q(0, 0) = 1$  находим, что  $G = 1$ . Таким образом,

$$q(0, C_\eta) = \exp \{-\lambda C_\eta\} \quad (9.4.9)$$

и, следовательно,

$$F(C_\eta) = 1 - \exp \{-\lambda C_\eta\}. \quad (9.4.10)$$

Обозначив  $\lambda = 1/\omega$ , окончательно получим

$$P_{об} = 1 - \exp \{-C_\eta/\omega\}, \quad (9.4.11)$$

где  $\omega$  — постоянная обучения, определяемая экспериментально.

Постоянная обучения является функцией нескольких переменных:

$$\omega = f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5), \quad (9.4.12)$$

где  $\varepsilon_1$  — количество изучаемого материала;  $\varepsilon_2$  — сложность изучаемого материала;  $\varepsilon_3$  — способности обучаемого;  $\varepsilon_4$  — методика обучения и средства обучения;  $\varepsilon_5$  — коэффициент пропорциональности с размерностью стоимости.

Экспериментальные данные [35] показывают, что, чем сложнее материал и чем больше его количество, тем больше постоянная обучения  $\omega$  и тем более пологой является зависимость  $P_{об}$  от  $C_\eta$ . Чем выше индивидуальные способности обучаемого и чем лучше методика обучения, тем меньше постоянная обучения и тем более крутой является зависимость  $P_{об}$  от  $C_\eta$ .

Выражение (9.4.11) может быть также получено из формул (9.4.3) и (9.4.4) с учетом допущения 4 после некоторых преобразований.

Полученное согласование результатов подтверждает справедливость формулы (9.4.11) при принятых допущениях. Следует, однако, признать, что принятые допущения накладывают значительные ограничения на области применения разработанной модели. Модель ни в коем случае не может претендовать на универсальность и принята для простоты. Достоинством модели

является то, что она определяет нижнюю границу степени обученности, т. е. исключается возможность ошибки по «недоучиванию» операторов. Это достоинство имеет теневую сторону, поскольку в большинстве реальных случаев будет наблюдаться некоторый перерасход средств, необходимых для обучения. Будем считать этот перерасход своеобразным «запасом прочности», обеспечивающим большую величину вероятности выполнения задачи операторами.

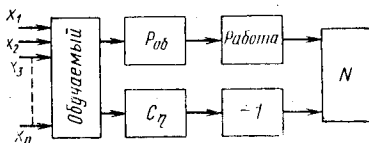
Несомненно и то, что использование даже ограниченной модели позволяет внести элемент управления в процесс распределения средств на проектирование аппаратуры, ее эксплуатацию и обучение операторов. Дальнейшие работы в этом направлении и достаточный статистический материал позволят уточнить стоимостную модель обучения, что повысит достоверность описанной методики.

### 9.5. Оптимальное распределение средств на проектирование аппаратуры, ее эксплуатацию и обучение операторов

Обучение не является самоцелью, а предназначено дать обучаемому необходимую сумму знаний для успешного выполнения определенной деятельности.

Общая схема решения данной задачи представлена на рис. 9.5.1. Принятые обозначения:  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — необходимая сумма знаний по отдельным дисциплинам;

Рис. 9.5.1.



$W$  — конечная выгода, выраженная в денежных единицах.

Стоимость обучения  $C_\eta$ , с одной стороны, через  $P_{об}$  и выполняемую работу приводит к увеличению выгоды  $W$ . С другой стороны, стоимость обучения  $C_\eta$  с отрицательным знаком входит в значение выгоды  $W$  и, следовательно, непосредственно уменьшает последнюю. Таким образом, становится очевидным, что существует опти-

мальное решение данной задачи, приводящее к максимальному значению выгоды  $W$ .

Рассмотрим подробнее несколько интересующих нас случаев. Обозначим:  $A$  — событие, состоящее в безошибочном выполнении некоторого технологического процесса (например, это может быть процесс контроля и управления в АСУ);  $P(A)$  — вероятность безошибочного выполнения технологического процесса (надежность работы системы:  $P(A) = P_p$ );  $D$  — событие, состоящее в том, что ошибка технологического процесса будет обнаружена и устранена;  $P(D)$  — вероятность обнаружения и устранения ошибки технологического процесса ( $P(D) = P_{пр}$ );  $P(\bar{A}\bar{D})$  — вероятность появления ошибки и невозможности ее устранения;

$$P(\bar{A}\bar{D}) = [1 - P(A)] \cdot [1 - P(D)] = (1 - P_p)(1 - P_{пр}).$$

В том случае, когда ошибка устраняется или неисправный прибор заменяется исправным, надежность технологического процесса определится по формуле

$$P = 1 - [1 - P(A)] \cdot [1 - P(D)] = 1 - (1 - P_p)(1 - P_{пр}). \quad (9.5.1)$$

При замене неисправного прибора прибором из ЗИП, не проверенным перед заменой, вероятность ошибки, которая не может быть устранена, определяется по формуле условной вероятности [69]:

$$Q^* = P(\bar{A}\bar{D}/B) = \frac{P(\bar{A}\bar{D})}{P(B)},$$

где  $B = A + \bar{A}\bar{D}$  — событие, заключающееся в выполнении технологического процесса или в его прекращении:

$$P(B) = P(A) + P(\bar{A}\bar{D}) = 1 - P_{пр}(1 - P_p).$$

В этом случае

$$Q = \frac{(1 - P_p)(1 - P_{пр})}{1 - P_{пр}(1 - P_p)},$$

и для вероятности выполнения задачи может быть записана следующая формула:

$$P = \frac{P_p}{1 - P_{пр}(1 - P_p)}. \quad (9.5.2)$$

Для вероятности обнаружения и устранения ошибки технологического процесса можно записать

$$P_{пр} = P_a P_{об}, \quad (9.5.3)$$

где  $P_{об}$  — вероятность обнаружения и устранения неисправности человеком, определяемая по формуле (9.4.11);  $P_a$  — вероятность обнаружения неисправностей аппаратурой (для спроектированного оборудования).

Средняя стоимость автоматизированной системы управления (АСУ) определяется суммарными средними затратами на разработку аппаратуры, ее эксплуатацию и обучение операторов:

$$C = C_{v_1} + C_{v_2} + C_{\eta}, \quad (9.5.4)$$

где  $C_{v_1}$  — средняя стоимость разработки и изготовления АСУ;  $C_{v_2}$  — средняя стоимость эксплуатации.

В соответствии с [27] средняя стоимость разработки и изготовления АСУ может быть вычислена по формуле

$$C_{v_1} = C_{01} \left( \frac{1 - P_0}{1 - P_p} \right)^{\mu_1}, \quad (9.5.5)$$

где  $C_{01}$  — стоимость простейшей АСУ при первоначальной вероятности безотказной работы  $P_0$ . (Простейшей называется АСУ, в которой еще не приняты меры по повышению надежности, быстродействия, снижения веса и объема.);  $\mu_1$  — постоянная величина, определяемая в процессе производства.

Средняя стоимость эксплуатации системы определяется следующим выражением [54]:

$$C_{v_2} = C_{02} (1 - P_p)^{\mu_2}, \quad (9.5.6)$$

где  $C_{02}$  — стоимость эксплуатации простейшей АСУ;  $\mu_2$  — постоянная величина, определяемая в процессе эксплуатации.

Средняя стоимость обучения операторов методике обнаружения и устранения неисправностей может быть получена в результате преобразования формулы (9.4.11) и определится следующим образом:

$$C_{\eta} = -\omega \ln(1 - P_{об}). \quad (9.5.7)$$

На рис. 9.5.2 в общем виде представлена структурная схема задачи оптимального распределения средств, при решении которой возможны два варианта [4, 110].

**Вариант 1.** При возникновении ошибки неисправный прибор заменяется непроверенным прибором из ЗИП и надежность технологического процесса определяется выражением (9.5.2). Известно общее количество средств  $C$ .

Требуется распределить их так  $[C_{v_1}^{opt}, C_{v_2}^{opt}, C_{\eta}^{opt}]$ , чтобы вероятность выполнения задачи была максимальной.

Выразим  $P_p$  и  $C_{v_2}$  на основании (9.5.5) и (9.5.6) через  $C_{v_1}$ :

$$P_p = 1 - C_{01}^{1/\mu_1} C_{v_1}^{-1/\mu_1} (1 - P_0), \quad (9.5.8)$$

$$C_{v_2} = C_{02} C_{01}^{\mu_2/\mu_1} C_{v_1}^{-\mu_2/\mu_1} (1 - P_0)^{\mu_2}. \quad (9.5.9)$$

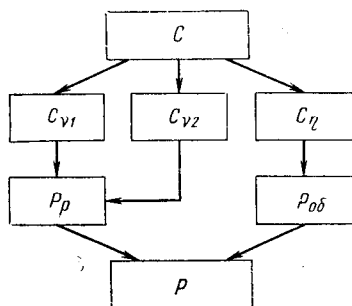


Рис. 9.5.2.

Подставляя (9.4.11), (9.5.3), (9.5.8) и (9.5.9) в (9.5.2), получаем выражение для вероятности выполнения задачи

$$P = [C_{v_1}^{1/\mu_1} - C_{01}^{1/\mu_1} (1 - P_0)] \left[ C_{v_1}^{1/\mu_1} - P_a \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{\omega} [C - C_{v_1} - C_{02} (1 - P_0)^{\mu_2} \times C_{01}^{\mu_2/\mu_1} C_{v_1}^{-\mu_2/\mu_1}] \right\} \right) C_{01}^{1/\mu_1} (1 - P_0) \right]^{-1}. \quad (9.5.10)$$

Определим максимум ( $P_{max}$ ) данного выражения, для чего приравняем нулю производную  $dP/dC_{v_1}$ . Получим нелинейное уравнение относительно  $C_{v_1}$ :

$$\begin{aligned} & \omega \ln \{ P_a [\mu_1 C_{v_1} - \mu_2 C_{01}^{\mu_2/\mu_1} C_{02} (1 - P_0)^{\mu_2} C_{v_1}^{-\mu_2/\mu_1} - \\ & - \omega - \mu_1 C_{v_1}^{(\mu_1-1)/\mu_1} C_{01}^{1/\mu_1} (1 - P_0) + \mu_2 C_{v_1}^{(-1-\mu_2)/\mu_1} C_{01}^{(1+\mu_2)/\mu_1} \times \\ & \times (1 - P_0)^{1+\mu_2} C_{02}] \} - \omega \ln \omega (1 - P_a) - C + C_{v_1} + \\ & + C_{01}^{\mu_2/\mu_1} C_{02} C_{v_1}^{-\mu_2/\mu_1} (1 - P_0)^{\mu_2} = 0. \quad (9.5.11) \end{aligned}$$

Решив уравнение (9.5.11), определим  $C_{v_1}^{opt}$  и на основании (9.5.4) и (9.5.9) вычислим значения  $C_{v_2}^{opt}$  и  $C_{\eta}^{opt}$ .

Для многих реальных систем  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  [54]. В этом случае нелинейное уравнение (9.5.11) и формула (9.5.9) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} & \omega \ln P_a [C_{v_1} - C_{o1} C_{o2} (1 - P_0) C_{v_1}^{-1} - C_a (1 - P_0) - \\ & - \omega + C_{v_1}^{-2} C_{o1} (1 - P_0)^2 C_{o2}] [\omega (1 - P_a)]^{-1} - C + C_{v_1} + \\ & + C_{o1} C_{o2} C_{v_1}^{-1} (1 - P_0) = 0, \end{aligned} \quad (9.5.12)$$

$$C_{v_2} = C_{o1} C_{o2} C_{v_1}^{-1} (1 - P_0). \quad (9.5.13)$$

Для наглядности на рис. 9.5.3 приводится графическое решение уравнения (9.5.12). На графике представ-

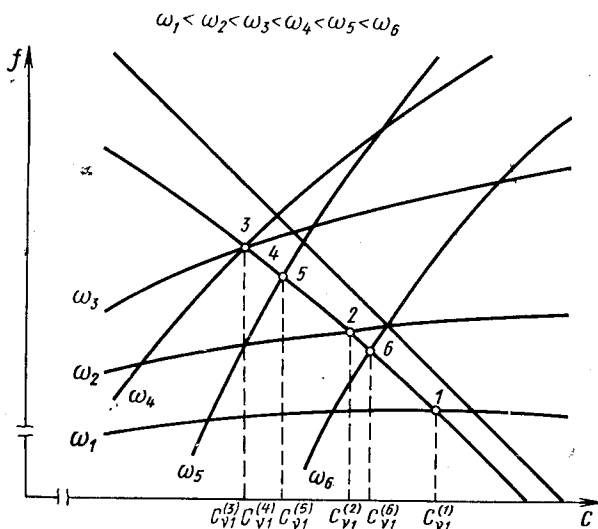


Рис. 9.5.3.

лено несколько решений для различных значений постоянной обучения  $\omega$ . Причем по мере увеличения  $\omega$  сначала наблюдается уменьшение, а затем увеличение  $C_{v_1}$ . На рис. 9.5.4 для вариантов 1 и 2 представлены графики зависимости средств, которые необходимо вложить в обучение, от постоянной обучения  $\omega$ . Из графиков вид-

но, что с увеличением  $\omega$  количество средств, которые необходимо вложить в обучение, сначала увеличивается, достигает максимума, а затем уменьшается до нуля.

Значение  $\omega$ , при котором  $C_{\eta} = 0$ , назовем критическим значением постоянной обучения  $\omega_{кр}$ . Формулы для опре-

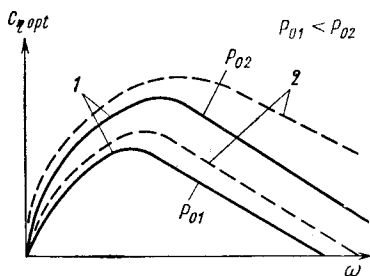


Рис. 9.5.4.

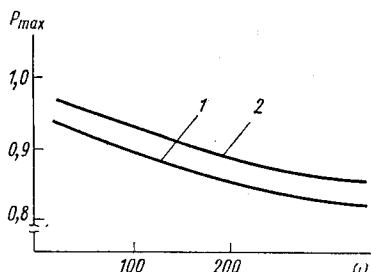


Рис. 9.5.5.

деления  $\omega_{кр}$  могут быть получены, если приравнять единице выражения под логарифмами в уравнениях (9.5.11) и (9.5.12):

$$\begin{aligned} \omega_{кр} = P_a [ & \mu_1 C_{v_1} - \mu_2 C_{o_1}^{\mu_2/\mu_1} C_{o_2} (1 - P_0)^{\mu_2} C_{v_1}^{-\mu_2/\mu_1} - \\ & - \mu_1 C_{v_1}^{(\mu_1-1)/\mu_1} C_{o_1}^{1/\mu_1} (1 - P_0) + \\ & + \mu_2 C_{v_1}^{(-1-\mu_2)/\mu_1} C_{o_1}^{(1+\mu_2)/\mu_1} (1 - P_0)^{1+\mu_2} C_{o_2}], \end{aligned} \quad (9.5.14)$$

$$\begin{aligned} \omega_{кр} = P_a [ & C_{v_1} - C_{o_1} C_{o_2} (1 - P_0) C_{v_1}^{-1} - C_{o_1} (1 - P_0) + \\ & + C_{v_1}^{-2} C_{o_1}^2 (1 - P_0)^2 C_{o_2}]. \end{aligned} \quad (9.5.15)$$

Анализ полученных формул и графиков показывает, что при  $\omega \geq \omega_{кр}$  вкладывать средства в обучение становится нецелесообразным и следует рекомендовать полную автоматизацию технологического процесса без участия человека.

На рис. 9.5.5 для вариантов 1 и 2 представлены графики зависимости  $P_{max}$  от постоянной обучения  $\omega$  при  $C = \text{const}$ . Анализ графиков показывает, что при уменьшении  $\omega$  вероятность выполнения задачи значительно увеличивается. Это указывает на возможные пути повышения эффективности выполнения задачи, связанные с уменьшением постоянной обучения.

Если предположить, что в выражении (9.4.12)  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — const, то уменьшение  $\omega$  можно обеспечить профессиональным отбором, улучшением методики обучения, развитием и совершенствованием средств обучения.

Этот вывод является обоснованием постановки и решения задач в гл. 10 и 11 настоящей книги.

**Вариант 2.** При возникновении ошибки неисправный прибор заменяется исправным из ЗИП или ошибка устраняется. Надежность технологического процесса определяется выражением (9.5.1).

Подставляя (9.4.11), (9.5.3), (9.5.8) и (9.5.9) в (9.5.1), получаем выражение для вероятности выполнения задачи:

$$P = 1 - C_{01}^{1/\mu_1} C_{v_1}^{-1/\mu_1} (1 - P_0)^{\mu_1} \left[ 1 - P_a + P_a \exp \left\{ -\frac{1}{\omega} [C - C_{v_1} - C_{02} (1 - P_0)^{\mu_2} C_{01}^{\mu_2/\mu_1} C_{v_1}^{-\mu_2/\mu_1}] \right\} \right]. \quad (9.5.16)$$

Определим максимум ( $P_{max}$ ) данного выражения, для чего приравняем нулю производную  $dP/dC_{v_1}$ . Получим нелинейное уравнение относительно  $C_{v_1}$ :

$$\begin{aligned} \omega \ln \{ P_a [\mu_1 C_{v_1} - \omega - \mu_2 C_{v_1}^{-\mu_2/\mu_1} C_{02} C_{01}^{\mu_2/\mu_1} \times \\ \times (1 - P_0)^{\mu_1}] [\omega (1 - P_a)^{-1}] + C_{v_1} + \\ + C_{v_1}^{-\mu_2/\mu_1} C_{02} C_{01}^{\mu_2/\mu_1} (1 - P_0)^{\mu_2} - C = 0. \end{aligned} \quad (9.5.17)$$

Решив уравнение (9.5.17), определим  $C_{v_1}^{opt}$  и на основании (9.5.4) и (9.5.9) вычислим значения  $C_{v_2}^{opt}$  и  $C_{\eta}^{opt}$ .

При  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  уравнение (9.5.17) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega \ln P_a [C_{v_1} - \omega - C_{v_1}^{-1} C_{02} C_{01} (1 - P_0)] [\omega (1 - P_0)^{-1}] + \\ + C_{v_1} + C_{v_1}^{-1} C_{02} C_{01} (1 - P_0) - C = 0. \end{aligned} \quad (9.5.18)$$

Графическое решение уравнения (9.5.18) для различных значений постоянной обучения  $\omega$  имеет такой же вид, как и решение уравнения (9.5.12) (рис. 9.5.3). Из сравнения графиков для вариантов 1 и 2 (рис. 9.5.4 и 9.5.5) можно сделать вывод, что при одинаковых исходных данных и  $C = \text{const}$  во втором случае обеспечивается большее значение вероятности выполнения задачи и



расширяются пределы использования оператора, поскольку  $\omega_{кр}^{(2)} > \omega_{кр}^{(1)}$ .

Формулы для определения  $\omega_{кр}$  можно получить, приравняв единице выражения под логарифмами в уравнениях (9.5.17) и (9.5.18):

$$\omega_{кр} = P_a [\mu_1 C_{v_1} - \mu_2 C_{v_1}^{-\mu_2/\mu_1} C_{o_2} C_{o_1}^{\mu_2/\mu_1} (1 - P_0)^{\mu_1}],$$

$$\omega_{кр}^* = P_a [C_{v_1} - C_{v_1}^{-1} C_{o_2} C_{o_1} (1 - P_0)].$$

Для варианта 1 решение задачи можно получить на ЭВМ.

### 9.6. Обеспечение требуемой вероятности выполнения задачи при минимальных затратах

Классической является задача, когда задан некоторый критерий оптимальности и требуется определить минимум средств, необходимых для его достижения [47—125].

В том случае, когда заданные ограничения являются нелинейными функциями, данная задача может быть решена с помощью неопределенных множителей Лагранжа.

Пусть требуется определить экстремум функции

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \quad (9.6.1)$$

от  $m+n$  переменных, которые связаны  $n$  соотношениями:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{m+n}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.6.2)$$

Для определения тех значений  $x_s$ , при которых функция  $f$  достигает условного максимума или минимума, надо приравнять нулю частные производные по всем  $x_s$  от функции  $F$ , определяемой равенством

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_n \varphi_n, \quad (9.6.3)$$

считая  $\lambda_i$  постоянными, и присоединить  $n$  уравнений связи (9.6.2).

Так же как и в предыдущем параграфе, рассмотрим два варианта решения данной задачи.

**Вариант 1.** Функция  $f$  задана выражением (9.5.4). Ограничение  $\varphi_1$  определяется формулой (9.5.2). Задача формулируется следующим образом. Задано значение вероятности выполнения задачи  $P_3$ . Требуется обеспечить получение  $P_3$  при минимальных затратах, т. е.

необходимо определить минимум выражения (9.5.4) при выполнении условия (9.5.2).

Используя (9.5.2), (9.5.4)–(9.5.7), составим выражение для функции  $F$ :

$$F = C_{01} \left( \frac{1 - P_0}{1 - P_p} \right)^{\mu_1} - \omega \ln(1 - P_{06}) + C_{02} (1 - P_p)^{\mu_2} + \lambda \left[ \frac{P_p}{1 - P_a P_{06} (1 - P_p)} \right]. \quad (9.6.4)$$

Дифференцируя (9.6.4) по  $P_{06}$  и  $P_p$  и приравнявая нулю частные производные, с учетом выражения (9.5.2) получим систему нелинейных уравнений:

$$\lambda P_p P_a (1 - P_p) [1 - P_a P_{06} (1 - P_p)]^{-2} + \omega (1 - P_{06})^{-1} = 0, \quad (9.6.5)$$

$$C_{01} \mu_1 (1 - P_0)^{\mu_1} (1 - P_p)^{-\mu_1 - 1} - C_{02} \mu_2 (1 - P_p)^{\mu_2 - 1} + \lambda [1 - P_a P_{06} (1 - P_p) + P_a P_{06} P_p] [1 - P_a P_{06} (1 - P_p)]^{-2} = 0, \quad (9.6.6)$$

$$P_{06} = (P_3 - P_p) [P_3 P_a (1 - P_p)]^{-1}. \quad (9.6.7)$$

Ввиду сложности полученных выражений задача путем подстановки (9.6.5) и (9.6.7) в (9.6.6) сводится к решению алгебраического уравнения вида

$$Az^{\mu_1 + \mu_2 + 1} + Bz^{\mu_1 + \mu_2} + Cz^{\mu_1} + Dz + E = 0, \quad (9.6.8)$$

где

$$z = 1 - P_p; \quad C = -\omega(1 - P_3);$$

$$A = \mu_2 C_{02} (1 - P_3 P_a); \quad D = -\mu_1 C_{01} (1 - P_0)^{\mu_1} (1 - P_3 P_a); \quad (9.6.9)$$

$$B = -\mu_2 C_{02} (1 - P_3); \quad E = \mu_1 C_{01} (1 - P_0)^{\mu_1} (1 - P_3).$$

Определив  $P_p$  из (9.6.8), найдем  $P_{06}$  из (9.6.7) и окончательно получим  $C_{v_1}$ ,  $C_{v_2}$  и  $C_\gamma$  из (9.5.5)–(9.6.7). Выражение (9.5.4) дает искомое значение  $C_{min}$ .

При условии  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  (9.6.8) и (9.6.9) принимают вид

$$Az^3 + Bz^2 + (C + D)z = 0, \quad (9.6.10)$$

где

$$A = C_{02}(1 - P_3 P_a); \quad D = -C_{01}(1 - P_0)(1 - P_3 P_a);$$

$$B = -C_{02}(1 - P_3); \quad E = C_{01}(1 - P_0)(1 - P_3). \quad (9.6.11)$$

$$C = -\omega(1 - P_3).$$

**Вариант 2.** Рассматриваемый вариант относится к случаю, когда при возникновении ошибки неисправный прибор заменяется исправным из ЗИП или ошибка устраняется. При этом функция  $f$  задана выражением (9.5.4), а ограничение  $\Phi_1$  определяется формулой (9.5.1).

На основании (9.5.1), (9.5.4)–(9.5.7) составим выражение для функции  $F$ :

$$F = C_{01} (1 - F_0)^{\mu_1} (1 - P_p)^{-\mu_1} + C_{02} (1 - P_p)^{\mu_2} - \omega \ln(1 - P_{06}) + \lambda [1 - (1 - P_p)(1 - P_a P_{06})]. \quad (9.6.12)$$

Дифференцируя (9.6.12) по  $P_{06}$  и  $P_p$  и приравнявая нулю частные производные, с учетом выражения (9.5.1) получим систему не-

линейных уравнений:

$$\lambda P_a (1 - P_p) - \omega (1 - P_{об})^{-1} = 0, \quad (9.6.13)$$

$$C_{01}\mu_1 (1 - P_0)^{\mu_1} (1 - P_p)^{-\mu_1-1} - C_{02}\mu_2 (1 - P_p)^{\mu_2-1} + \\ + \lambda (1 - P_{об} P_a) = 0; \quad (9.6.14)$$

$$P_{об} = (P_3 - P_p) [P_a (1 - P_p)]^{-1}. \quad (9.6.15)$$

Подстановкой (9.6.13) и (9.6.15) в (9.6.14) задача сводится к решению алгебраического уравнения вида

$$A'z^{\mu_1+\mu_2+1} + B'z^{\mu_1+\mu_2} + Cz^{\mu_1} + Dz + E = 0, \quad (9.6.16)$$

где

$$z = 1 - P_p; \quad C' = -\omega (1 - P_3); \\ A' = \mu_2 C_{02} (1 - P_a); \quad D' = -\mu_1 C_{01} (1 - P_0)^{\mu_1} (1 - P_a); \quad (9.6.17)$$

$$B' = -\mu_2 C_{02} (1 - P_3); \quad E' = \mu_1 C_{01} (1 - P_0)^{\mu_1} (1 - P_3).$$

**Пример.** Дано:  $C_{01}=500$ ;  $C_{02}=200$ ;  $P_0=0,6$ ;  $P_a=0,8$ ;  $\mu_1=\mu_2=1$ ;  $T=200$ ;  $P_3=0,852$ . Требуется определить  $C_{min}$  по варианту 1.

**Примечание.** Стоимость выражена в условных денежных единицах.

1. На основании формул (9.6.11) определяем коэффициенты уравнения (9.6.10):  $A=63,6$ ;  $B=-29,6$ ;  $C=-29,6$ ;  $D=-63,6$ ;  $E=-29,6$ , после чего уравнение принимает следующий вид:

$$63,6z^3 - 29,6z^2 - 93,2z + 29,6 = 0.$$

2. Решение уравнения дает  $z=0,305$ , и на основании (9.6.9) определяем  $P_p=1-z=0,695$ .

3. Вероятность обнаружения и устранения неисправностей определяется по формуле (9.6.7):

$$P_{об} = \frac{0,852 - 0,695}{0,852 - 0,8 \cdot 0,305} = 0,757.$$

4. На основании (9.5.5) — (9.5.7) определим количество средств, которое необходимо выделить на разработку и изготовление аппаратуры, ее эксплуатацию и обучение обслуживающего персонала:

$$C_{y1} = 500 \frac{1 - 0,6}{1 - 0,695} = 656,$$

$$C_{y2} = 200 (1 - 0,695) = 60,$$

$$C_{\eta} = -200 \ln (1 - 0,757) = 284.$$

5. Минимально необходимое количество средств, обеспечивающее заданное значение вероятности выполнения задачи, определяется по формуле (9.5.4):

$$C_{min} = 656 + 60 + 284 = 1000.$$

Предлагаемая математическая модель обучения позволяет оценивать степень обученности в зависимости от стоимости обучения. Достоинством модели является простота и универсальность в том смысле, что она опреде-

ляет нижнюю границу степени обученности, т. е. исключается возможность ошибки по «недоучиванию» операторов.

Разработка стоимостной модели обучения позволяет обучение рассматривать как составную часть единого процесса проектирования и изготовления аппаратуры, ее обслуживания и подготовки операторов.

Такой подход дает возможность, пользуясь методами исследования операций, решать следующие проблемы, связанные с повышением эффективности выполнения задачи:

- оптимальное распределение средств на проектирование аппаратуры, ее эксплуатацию и обучение операторов;

- обеспечение требуемого значения вероятности выполнения задачи при минимальных затратах.

Исследование двух методов устранения ошибок, возникающих при проведении проверок, показывает, что в том случае, когда при возникновении ошибки неисправный прибор заменяется исправным из ЗИП или ошибка устраняется, оказывается возможным получение большего значения вероятности выполнения задачи при одинаковых исходных данных и затраченных средствах. Для этого же случая расширяются границы использования человека в автоматизированных системах.

Введение в рассмотрение критического значения постоянной обучения  $\omega_{кр}$  позволяет установить границу целесообразности использования человека в автоматизированных системах. В том случае, когда  $\omega < \omega_{кр}$ , использование человека в АСУ является целесообразным. При  $\omega > \omega_{кр}$  использование человека в АСУ является малоэффективным, и в этом случае можно рекомендовать разработку полностью автоматических систем.

Анализ формул и графических зависимостей § 9.5 указывает на возможные пути повышения эффективности выполнения задачи, связанные с уменьшением постоянной обучения:

- профессиональный отбор;

- улучшение методики обучения;

- развитие и совершенствование средств обучения.

Наиболее интересной является разработка технических средств обучения, а именно — тренажеров для обу-

чения и отбора операторов. В связи с этим в дальнейшем материал книги посвящается разработке принципов построения тренажеров, развитию теоретических основ проектирования тренажеров и повышения их эффективности.

## Глава 10

### ОБОСНОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ТРЕНАЖЕРОВ

#### 10.1. Тренажер — информационная модель реальной аппаратуры. Точность разработки тренажеров

Для большинства современных систем управления типична удаленность объектов управления от центральных пунктов управления и контроля. Оператор, как правило, лишен возможности наблюдать объект управления непосредственно и вынужден пользоваться информацией, поступающей к нему по каналам связи. Данные, поступающие от управляемых объектов и различного рода датчиков, характеризующие состояние внешней среды и самой системы управления, отображаются на тех или иных устройствах и образуют то, что принято называть информационной моделью реальных объектов [33].

Информационная модель представляет собой важнейший элемент системы управления и контроля, так как оператор на основе сведений, полученных через нее, должен принимать решения, которые обеспечивают правильную работу системы и выполнение возложенных на нее задач. Если информационная модель отражает действительность не адекватно или не дает возможности оператору надлежащим образом воспринять данные, необходимые для понимания и осознания действительной ситуации, то она негодна для рассматриваемой системы управления и контроля.

Рассмотренную модель назовем информационной моделью I рода, поскольку имеется необходимость в построении информационной модели II рода. В [53] показывается, что тренажер, являясь информационной

моделью реальной аппаратуры, может быть назван информационной моделью II рода (рис. 10.1.1, на котором ОУ — объект управления, ИМ-I — аппаратура контроля и управления (информационная модель I рода), ИМ-II — тренажер (информационная модель II рода)).

В литературе [8, 127] тренажеры рассматриваются как электрические, гидравлические и пневматические

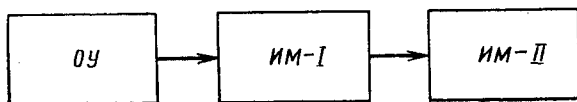


Рис. 10.1.1.

модели реальной аппаратуры, но, как подчеркивается в работе [127], это лишь возможные методы имитации.

Инвариантом при построении тренажера являются его информационные свойства, которые не зависят от методов имитации и являются определяющими при синтезе. Именно это положение

в [53] послужило основанием для определения тренажера как информационной модели II рода, изоморфной по отношению к реальной аппаратуре. Это значит, что каждый элемент  $y \in Y$  (информационная модель) может быть взаимно-однозначно сопоставлен с элементом  $x \in X$  (реальная аппаратура); каждая операция  $F_y$  из некоторого класса операций, преобразующая элемент  $y_1 \in Y$  в  $y_2 \in Y$ ,  $F_y(y_1) = y_2$ , может быть взаимно-однозначно сопоставлена с операцией  $F_x$ , преобразующей элемент  $x_1 \in X$  в  $x_2 \in X$ ,  $F_x(x_1) = x_2$ , т. е.  $F_y \rightarrow F_x, F_x \rightarrow F_y$ .

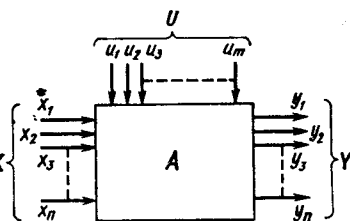


Рис. 10.1.2.

Вопрос о построении информационных моделей изучен недостаточно, и наиболее слабым местом в этой проблеме является обоснование точности моделирования. В настоящей книге синтез тренажеров рассматривается как задача преобразования информации, где точность преобразования определяется психофизическими характеристиками оператора [53]. На рис. 10.1.2 в об-

щем виде представлена структурная схема построения тренажера как информационной модели II рода, где  $X(x_i, t, \tau) = (x_1, x_2, \dots, x_n, t, \tau)$  — многомерный случайный вектор, характеризующий реальную аппаратуру (параметры, характеристики, процессы);  $Y(y_i, t, \tau) = (y_1, y_2, \dots, y_n, t, \tau)$  — многомерный случайный вектор, характеризующий тренажер (параметры, характеристики, процессы);  $U(u_i, t, \tau) = (u_1, u_2, \dots, u_n, t, \tau)$  — многомерный случайный вектор, характеризующий «помехи».

Таким образом, синтез тренажера как информационной модели II рода сводится к преобразованию  $n$ -мерного вектора  $X(x_i, t, \tau)$  в  $n$ -мерный вектор  $Y(y_i, t, \tau)$ .

Если представить процесс работы тренажера как стационарный случайный процесс, то можно получить несколько общих выводов для двух интересных случаев [54, 53, 24д\*]:

1) когда имеет место точное, но с запаздыванием на  $\tau_3$  воспроизведение стационарного случайного процесса

$$Y(y_i, t, \tau) = X(x_i, t - \tau_3, \tau), \quad (10.1.1)$$

2) или когда выходной процесс воспроизводится без запаздывания, но действует вектор помехи, не зависящий от входного процесса,

$$Y(y_i, t, \tau) = X(x_i, t, \tau) + U(u_i, t, \tau). \quad (10.1.2)$$

Под помехой можно понимать погрешности аппаратуры и органов чувств оператора. Среднее количество информации, получаемое при переводах векторов (10.1.1), (10.1.2), можно определить по формуле

$$\begin{aligned} I(X \rightarrow Y, t, \tau) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(X, Y, t, \tau) \log_2 \frac{f(X, Y, t, \tau)}{f(X, t, \tau) \cdot f(Y, t, \tau)} dX dY, \end{aligned} \quad (10.1.3)$$

где  $f(X, Y, t, \tau)$  — совместный дифференциальный закон распределения  $X$  и  $Y$ ;  $f(X, t, \tau)$  — дифференциальный закон распределения вектора  $X$ ;  $f(Y, t, \tau)$  — дифференциальный закон распределения вектора  $Y$ .

Выполнив некоторые преобразования, формулу (10.1.3) представим в виде

\*) См. список дополнительной литературы.

$$I(X \rightarrow Y, t, \tau) = H(X, t, \tau) - m_y [H_y(X, t, \tau)] \quad (10.1.4)$$

или

$$I(X \rightarrow Y, t, \tau) = H(Y, t, \tau) - m_x [H_x(Y, t, \tau)], \quad (10.1.5)$$

где

$$H(X, t, \tau) = - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(X, t, \tau) \log_2 f(X, t, \tau) dX \quad (10.1.6)$$

— априорная энтропия вектора  $X$ ;

$$m_y [H_y(X, t, \tau)] = - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(X, Y, t, \tau) \log_2 f_y(X, t, \tau) dX dY \quad (10.1.7)$$

— усредненное по выходным параметрам значение энтропии после получения вектора  $Y$ ;

$f_y(X, t, \tau)$  — условный дифференциальный закон распределения вектора  $X$  при получении вектора  $Y$ ,

$$f_y(X, t, \tau) = \frac{f(X, Y, t, \tau)}{f(Y, t, \tau)}. \quad (10.1.8)$$

Формулы, определяющие среднее количество информации при одномерной передаче  $x_i \rightarrow y_i$ , как по виду, так и по содержанию аналогичны формулам (10.1.3) — (10.1.8).

При нормальном распределении векторов  $X$  и  $Y$ :

$$f(X, t, \tau) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(X - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right\}, \quad (10.1.9)$$

$$f(Y, t, \tau) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(Y - m_y)^2}{2\sigma_y^2} \right\}, \quad (10.1.10)$$

находим

$$\log_2 \frac{f(X, Y, t, \tau)}{f(X, t, \tau) f(Y, t, \tau)} = \log_2 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{r^2 \log_2 l}{2(1-r^2)} \times \left[ \frac{(X - m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2(X - m_x)(Y - m_y)}{r\sigma_x\sigma_y} + \frac{(Y - m_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \quad (10.1.11)$$

Подставляя выражения (10.1.9) — (10.1.11) в формулу (10.1.3), получаем после некоторых преобразований

$$I(X \rightarrow Y, t, \tau) = \log_2 \frac{1}{\sqrt{1-r_{xy}^2(t, \tau)}}, \quad (10.1.12)$$



где

$$r_{xy}(t, \tau) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (X - m_x)(Y - m_y) f(X, Y, t, \tau) dX dY \quad (10.1.13)$$

— коэффициент корреляции векторов  $X$  и  $Y$ ;  $\sigma_x^2(t, \tau)$  и  $\sigma_y^2(t, \tau)$  — дисперсии векторов  $X$  и  $Y$ .

Энтропия  $n$ -мерного случайного вектора  $X(x_i, t, \tau)$ , имеющего нормальный закон распределения, может быть представлена в виде

$$H(X, t, \tau) = \log_2 \sqrt{(2\pi e)^n |R^{xx}|}. \quad (10.1.14)$$

Среднее количество информации при преобразовании  $X \rightarrow Y$  можно выразить через корреляционные матрицы

$$I(X \rightarrow Y, t, \tau) = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{|R|}{|R^{xx}| + |R^{yy}|}, \quad (10.1.15)$$

где

$$R^{xx} = \begin{vmatrix} R_{11}^{xx} & \dots & R_{1n}^{xx} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1}^{xx} & \dots & R_{nn}^{xx} \end{vmatrix}; \quad (10.1.16)$$

$$R^{yy} = \begin{vmatrix} R_{11}^{yy} & \dots & R_{1n}^{yy} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1}^{yy} & \dots & R_{nn}^{yy} \end{vmatrix}; \quad (10.1.17)$$

$$R = \begin{vmatrix} R_{11}^{xx} & R_{1n}^{xx} R_{11}^{yy} & R_{1n}^{xy} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{1n}^{xx} & R_{nn}^{xx} R_{n1}^{yy} & R_{nn}^{xy} \\ R_{11}^{xy} & R_{1n}^{xy} R_{11}^{yy} & R_{1n}^{yy} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{n1}^{xy} & R_{nn}^{xy} R_{n1}^{yy} & R_{nn}^{yy} \end{vmatrix}; \quad (10.1.18)$$

$|R|$ ,  $|R^{xx}|$ ,  $|R^{yy}|$  — корреляционные определители, соответствующие корреляционным матрицам, составленным из корреляционных моментов:

$$R_{ij}^{xx} = m[(x_i - m_{x_i})(x_j - m_{x_j})], \quad (10.1.19)$$

$$R_{ij}^{yy} = m[(y_i - m_{y_i})(y_j - m_{y_j})], \quad (10.1.20)$$

$$R_{ij}^{xy} = m[(x_i - m_{x_i})(y_j - m_{y_j})]. \quad (10.1.21)$$

При независимых компонентах вектора  $X(t, \tau)$

$$R_{ij}^{xx} = \begin{cases} \sigma^2 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

а энтропия вектора

$$H(X, t, \tau) = \log_2 \sigma_1 \sqrt{2\pi e} + \dots + \log_2 \sigma_n \sqrt{2\pi e}. \quad (10.1.22)$$

Известно, что степень связи между случайными векторами характеризуется корреляционной функцией. Если выходной вектор  $Y(t, \tau)$  не связан с характеристиками входного вектора  $X(t, \tau)$ , то  $R_{ij}^{xy} = 0$  и количество информации о векторе  $X(t, \tau)$ , получаемое по состоянию вектора  $Y(t, \tau)$ ,  $I(X \rightarrow Y, t, \tau) = 0$ .

Если вектор  $Y(t, \tau)$ , характеризующий тренажер, получен с учетом всех характеристик вектора  $X(t, \tau)$ , отображающего реальную аппаратуру, то тренажер даст как угодно много информации о реальной аппаратуре. При учете всех характеристик вектора  $X(t, \tau)$  коэффициент корреляции  $r_{xy}(t, \tau) \rightarrow 1$ , следовательно, как это видно из формулы (10.1.12),

$$I(X \rightarrow Y, t, \tau) \rightarrow \infty.$$

Для одномерного преобразования формула (10.1.12) обращается в формулу

$$I(x_i \rightarrow y_i, t, \tau) = -\frac{1}{2} \log_2 [1 - r^2(t, \tau)], \quad (10.1.23)$$

где

$$r(t, \tau) = \frac{R_{11}^{xx}(t, \tau)}{\sigma_x(t, \tau) \sigma_y(t, \tau)}$$

— коэффициент корреляции.

Рассмотрим наиболее интересные случаи, ограничиваясь одномерным преобразованием. При запаздывании воспроизведения

$$y(t, \tau) = x(t - \tau_3, \tau), \quad (10.1.24)$$

$$r(t, \tau) = \sigma^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int [x(t - \tau_3) - m_x][x(t) - m_x] f(x, y, t, \tau) dx dy \quad (10.1.25)$$

или окончательно

$$r(t, \tau) = R(\tau_3)/R(0), \quad (10.1.26)$$

где  $R(\tau_3)$  — корреляционная функция центрированной случайной величины;  $R(0) = \sigma^2$  — дисперсия. Количество получаемой при этом информации

$$I(x \rightarrow y, t, \tau) = -\frac{1}{2} \log_2 \left[ 1 - \frac{R^2(\tau_3)}{R^2(0)} \right]. \quad (10.1.27)$$

Так как

$$0 \leq \frac{R(\tau_3)}{R(0)} \leq 1 \text{ при } \tau_3 > 0, \text{ то } \infty > I(x \rightarrow y, t, \tau) \geq 0.$$

Известно, что если  $\tau_3 \rightarrow \infty$ , то  $R(\tau_3) \rightarrow 0$  и  $I(x \rightarrow y, t, \tau) \rightarrow 0$ .

Вектор  $Y(t, \tau)$  практически не дает информации о состоянии вектора  $X(t, \tau)$ , если он представляет последний со сколь угодно большой задержкой  $\tau_3$ . Это можно интерпретировать следующим образом: если тренажер вводится в эксплуатацию с задержкой  $\tau_3$  относительно реальной аппаратуры, то при этом наблюдается потеря информации, обуславливающая снижение эффективности использования тренажера. При  $\tau_3 \rightarrow \infty$  потери информации будут настолько большими, что эффективность будет стремиться к нулю.

Практически полная потеря информации будет наблюдаться на интервале корреляции

$$T_{кр} = \frac{1}{R(0)} \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau, \quad (10.1.28)$$

который может быть определен из следующих соображений:

$$T_{кр} = t_k - \tau_0, \quad (10.1.29)$$

где  $\tau_0$  — начальный отсчет времени;  $t_k$  — момент снятия аппаратуры с эксплуатации.

Проведенный анализ показывает, что тренажер должен вводиться в эксплуатацию одновременно с реальной аппаратурой. Только при этом условии будет получено максимальное количество информации и эффективность использования тренажера будет максимальной.

При наличии помех и нормальном распределении параметров  $x, y$

$$y(t, \tau) = x(t, \tau) + u(t, \tau), \quad (10.1.30)$$

$$\sigma_y^2(t, \tau) = \sigma_x^2(t, \tau) + \sigma_u^2(t, \tau), \quad (10.1.31)$$

$$r(t, \tau) = (\sqrt{1 + \sigma_u^2 / \sigma_x^2})^{-1}. \quad (10.1.32)$$

Среднее количество информации, получаемое при преобразовании  $x \rightarrow y$ ,

$$I(x \rightarrow y, t, \tau) = 1/2 \log_2 [(\sigma_x^2 + \sigma_u^2)/\sigma_u^2]. \quad (10.1.33)$$

Преобразование не дает информации при сколь угодно малой точности перевода входного вектора  $X(t, \tau)$  в выходной вектор  $Y(t, \tau)$ . При  $\sigma_u \gg \sigma_x$

$$[(\sigma_x^2 + \sigma_u^2)/\sigma_u^2] \rightarrow 1,$$

следовательно, согласно (10.1.33),  $I(x \rightarrow y, t, \tau) \rightarrow 0$ .

Преобразование способно дать сколь угодно много информации при сколь угодно высокой точности перевода входного вектора  $X(t, \tau)$  в выходной вектор  $Y(t, \tau)$ . Если  $\sigma_u \ll \sigma_x$ , то  $(\sigma_x^2/\sigma_u^2) + 1 \rightarrow \infty$ , следовательно, согласно (10.2.33)  $I(x \rightarrow y, t, \tau) \rightarrow \infty$ . Но увеличение точности преобразования сопряжено с увеличением стоимости. Поэтому точность преобразования должна быть выбрана из соображений минимальной стоимости и требуемой эффективности (необходимого количества информации). Это требование будет выполнено, если погрешности преобразования, или иначе, допуски на моделирование характеристик и процессов реальной аппаратуры в тренажере будут определены на основании психофизических характеристик оператора.

В несколько иной форме это может быть выражено следующим образом: то, что не различается или не воспринимается оператором, может не моделироваться; то, что различается слабо, может моделироваться с большой погрешностью и, наконец, то, что воспринимается достаточно точно, должно моделироваться с очень малой погрешностью. Тренажер, удовлетворяющий этим требованиям, будет способен дать количество информации того же порядка, что и реальная аппаратура, но при значительно меньшей стоимости.

## 10.2. Математическая модель восприятий человека

В настоящее время известны два вида чувственного отображения признаков предметов и явлений действительности — ощущения и восприятия [24, 25].

Ощущения характеризуются тем, что отображение данного признака осуществляется в значительной степени независимо от других признаков. Так, например,

в определенном смысле независимо от других признаков отображаются интенсивность света, громкость звука, угловая скорость движения, угловая величина объекта. Психический образ указанных выше признаков определяется соответственно интенсивностью раздражения рецепторов зрительного или слухового анализатора, скоростью перемещения раздражения по сетчатке, величиной раздражаемой области сетчатки. С количественной точки зрения ощущения представляют собой своего рода психические измерения, которые базируются на фундаментальных понятиях обнаружения и различения стимулов.

В объективной психофизике [101] такими фундаментальными понятиями являются абсолютный порог, т. е. наименьшая интенсивность стимула, еще способная вызвать сенсорную реакцию находящегося в покое рецепторного органа в строго определенных условиях стимуляции. Существует несколько методов определения абсолютного порога. В качестве примера приведем один из них.

Если  $B$  — событие, заключающееся в восприятии стимула  $S$ ,  $\bar{B}$  — событие, заключающееся в невосприятии стимула  $S$ , то

$$P(B) + P(\bar{B}) = 1,$$

где  $P(B)$  — статистическая вероятность восприятия стимула;  $P(\bar{B})$  — статистическая вероятность невосприятия стимула.

Абсолютный порог  $\alpha$  определится как величина стимула  $S$ , для которого энтропия распределения ответов является наибольшей:  $H_S = -P(B) \log P(B) - P(\bar{B}) \log P(\bar{B})$ . Тогда  $\alpha = S$ , если  $H_S = H_S^{max}$ , т. е.  $P(B) = P(\bar{B})$ .

Разностный порог  $\Omega$  характеризуется едва заметным изменением стимула, приводящим к изменению ощущения. Закон Бугера — Вебера утверждает постоянство относительной величины этого едва заметного приращения, измеряемого в единицах стимула:

$$\Omega = \frac{\Delta S}{S} = \text{const},$$

где  $S$  — исходный стимул;  $\Delta S$  — приращение стимула, вызывающее изменение ощущения.

Средства и методы объективной психофизики, разработанные Фехнером и модифицированные его последо-

вателями, позволяют решать многие задачи в области сенсорной психофизиологии по определению абсолютной чувствительности и способностей к различению. Однако многие признаки не могут быть отображены независимо от ряда других. Так, например, вследствие особенностей строения и функционирования нашего глаза не могут быть «независимо» отображены линейные величины объектов или линейные скорости движения.

Необходимое условие отображения такого рода признаков заключается в следующем. Признаки, которые не могут быть отображены независимо (т. е. в ощущениях), и признаки, отображаемые независимо, образуют единую систему. Эта система характеризуется тем, что все признаки, рассматриваемые как величины, связаны определенной функциональной зависимостью. Тогда признаки, которые не могут быть отображены независимо, воспринимаются посредством ощущаемых признаков. Рассмотренный процесс восприятия представляет собой своего рода психическое вычисление значений признака на основе данных прямых измерений (ощущений) других признаков и отображения функциональных зависимостей между соответствующими признаками.

Пусть между  $x$  и  $y$  существует функциональная зависимость

$$y = F(x), \quad (10.2.1)$$

где  $x$  — независимо отображаемая (ощущаемая) величина;  $y$  — величина, воспринимаемая посредством  $x$ .

Пользуясь понятием дифференциала функции, запишем

$$dy = \frac{dF(x)}{dx} \Delta x.$$

Положив  $\Delta x = x\Omega_x$ , где  $\Delta x$  — погрешность ощущения стимула  $x$ ;  $\Omega_x$  — разностный порог ощущения, определим разностный порог восприятия стимула  $y$  ( $\Omega_y$ ) через разностный порог ощущения  $\Omega_x$ :

$$\Omega_y = \frac{dy}{y} = \frac{x\Omega_x}{F(x)} \frac{dF(x)}{dx}.$$

Переходя к функции многих переменных

$$y = \mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (10.2.2)$$

разностный порог восприятия стимула  $y(\Omega_y)$  определим через разностные пороги ощущения и восприятия стимулов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  по формуле

$$\Omega_y = \frac{1}{\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)} \left[ x_1 \Omega_{x_1} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_1} + \right. \\ \left. + x_2 \Omega_{x_2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_2} + \dots + x_n \Omega_{x_n} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_n} \right]. \quad (10.2.3)$$

Таким образом, зная функциональную зависимость (10.2.2) и разностные пороги непосредственно отображаемых величин, можно теоретически определить пороги восприятия величин, связанных функциональной зависимостью. В тех случаях, когда функциональная зависимость (10.2.2) неизвестна, разностные пороги восприятия могут определяться экспериментально, аналогично определению порогов ощущения.

Рассмотренная модель ощущений и восприятий является детерминистской, поскольку абсолютные и разностные пороги считаются постоянными величинами несмотря на то, что получены они на основании экспериментальных статистических данных. Как известно, детерминистские модели, являясь частным случаем статистических, считаются ограниченными и менее точными. [5, 97, 108, 113]. В некоторых случаях они вообще не позволяют решать поставленную задачу. К этому типу задач относится и задача обоснования точности построения тренажеров [48].

Статистическая модель восприятия может быть построена на основе дифференциальных законов распределения погрешностей ощущений, рассматриваемых как измерения. По каждому анализатору органов чувств оператора экспериментально могут быть определены законы распределения погрешностей ощущений стимулов. В [108, 113] показывается, что эти законы носят ярко выраженный нормальный характер

$$f(x) = N(x_x, \sigma_x),$$

где  $x$  — осязаемый (измеряемый) стимул;  $m_x$  — математическое ожидание, характеризующее систематическую погрешность ощущения;  $\sigma_x$  — среднеквадратическое отклонение, характеризующее величину случайной ошибки ощущения.

В том случае, когда восприятие стимула  $y$  осуществляется посредством ощущений и восприятий  $x_1, x_2, \dots$

...,  $x_n$ , известна функциональная зависимость типа (10.2.2) и дифференциальные законы распределения  $f(x_1)$ ,  $f(x_2)$ , ...,  $f(x_n)$ , то могут быть определены числовые характеристики, а следовательно, и закон распределения погрешности восприятия стимула  $y$ .

Применяя метод линеаризации функции (10.2.2), получаем выражения для математического ожидания ( $m_y$ ) и дисперсии ( $D_y$ ) погрешности восприятия стимула  $y$  [13]:

$$m_y = F(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}),$$

$$D_y = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_m^2 D_{x_i} + 2 \sum_{i < j} \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_m \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right)_m K_{ij}.$$

Переходя в последней формуле от дисперсий к средним квадратическим отклонениям, получаем

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_m^2 \sigma_{x_i}^2 + 2 \sum_{i < j} \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_m \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right)_m r_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}}, \quad (10.2.4)$$

где  $r_{ij}$  — коэффициент корреляции величины  $x_i$ ,  $x_j$ .

Особенно простой вид принимает формула (10.2.4), когда величины  $x_1$ ,  $x_2$ , ...,  $x_n$  не коррелированы, т. е.  $r_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . В этом случае

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_m^2 \sigma_{x_i}^2}. \quad (10.2.5)$$

Уточнение результатов, полученных методом линеаризации, может быть выполнено по формулам

$$m_y = F(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} \right)_m D_{x_i}, \quad (10.2.6)$$

$$D_y = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_m^2 D_{x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} \right)_m D_{x_i}^2 + \sum_{i < j} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right)_m^2 D_{x_i} D_{x_j}, \quad (10.2.7)$$



где дополнительные члены представляют собой поправку на нелинейность функции и могут служить для оценки точности метода линеаризации при вычислении математического ожидания и дисперсии.

Формулы (10.2.6) и (10.2.7) справедливы в предположении независимости величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и нормальности законов распределения  $f(x_1), f(x_2), \dots, \dots, f(x_n)$ . В том случае, когда функциональная зависимость типа (10.2.2) неизвестна, числовые характеристики погрешности восприятия стимула  $y$ , а следовательно, и закон распределения могут быть определены экспериментально.

В гл. 12 дано описание лабораторной установки для определения числовых характеристик погрешности восприятия временных интервалов, приводится методика и результаты эксперимента.

### **10.3. Механизм действия статистической модели восприятия при обнаружении и различении стимулов. Надежность идентификации**

Детерминистская модель восприятия широко используется в теоретических и экспериментальных исследованиях. Многочисленные эмпирические законы позволяют предсказывать события и соотношения весьма ценные как по теоретическому содержанию, так и по своему практическому применению.

Но именно неудачные предсказания субъективных отношений на основе законов объективной психофизики привели к разработке новых методов прямого исследования. Возникла субъективная психофизика [82, 101, 115] или, точнее, — стохастическая психофизика.

Ее возникновение связано с именем Терстоуна, который разработал метод парных сравнений. Принимая понятие разностного порога, он понимал его как функцию четырех факторов [101]: с одной стороны, двух физических величин, имеющих некоторое различие, а с другой — двух коррелирующих процессов с определенной дисперсией, один из которых связан с идентификацией эталона, а другой — переменного раздражителя. При этом одним из основных принимаемых допущений является постулат о нормальности закона распределения восприятия. Обозначим через  $S_0$  эталонный стимул;

$S$  — переменный раздражитель;  $f_1(x) = N(m_{S_0}, \sigma_{S_0})$  — плотность вероятности восприятия стимула  $S_0$ ;  $f_2(x) = N(m_S, \sigma_S)$  — плотность вероятности восприятия стимула  $S$ .

Таким образом, при восприятии стимулы  $S_0$  и  $S$  могут рассматриваться как случайные величины с законами распределения  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  соответственно. Расстояние между стимулами (метрика) определяется следующим соотношением:

$$\Delta = S - S_0,$$

где  $\Delta$  — случайная величина, полученная как композиция двух случайных величин  $S$  и  $S_0$ . При этом

$$m_\Delta = m_S - m_{S_0}; \quad D_\Delta = D_S + D_{S_0}.$$

Вероятность того, что  $S$  будет воспринят как стимул, имеющий большую величину, чем  $S_0$ , определится по формуле

$$p(S > S_0) = p(\Delta > 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Delta} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(x - m_\Delta)^2}{2\sigma_\Delta^2}\right\} dx$$

или

$$p(S > S_0) = N\left(\frac{m_S - m_{S_0}}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_{S_0}^2}}\right),$$

где  $N(x)$  — значение в точке  $x$  функции распределения случайной величины, подчиняющейся нормальному закону с параметрами  $(0, 1)$ .

При равенстве дисперсий  $D_S = D_{S_0} = D$

$$p(S > S_0) = N\left(\frac{m_S - m_{S_0}}{\sqrt{2}\sigma}\right).$$

Рассмотренный метод вскрывает вероятностную структуру процесса восприятия и, следовательно, с большей точностью может описывать различные ситуации. В то же время метод парных сравнений не учитывает мотивации и установки и, следовательно, не может претендовать на всеобщность.

Свое дальнейшее развитие стохастическая психофизика получила в работах [97, 108, 113]. Толчком к развитию послужило использование метода статистических решений в теории обнаружения сигналов. Главная осо-

бенность этой теории состоит в том, что она может помочь при решении одной проблемы в области психофизики — проблемы определения критерия, который используется наблюдателем в процессе принятия решения.

Теория обнаружения сигналов дает важный вывод о сенсорной организации. На основе этой теории предлагается следующее определение идеального наблюдателя. Идеальный наблюдатель — это модель способа действий, позволяющая выбирать всю доступную информацию из окружающих

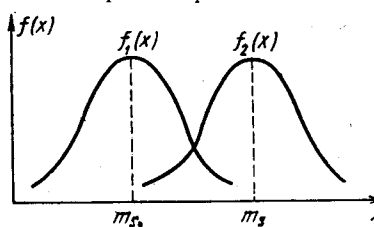


Рис. 10.3.1.

сигналов и шумов. Идеальный наблюдатель устанавливает верхний предел способности к различению у исследуемого наблюдателя, независимо от человека или электронного устройства.

С учетом рис. 10.3.1 вопрос различения двух стимулов может быть решен в рамках статистической теории обнаружения сигнала на фоне шумов. Восприятие стимулов  $S_0$  и  $S$  осуществляется на фоне шумов, характеризующихся плотностями вероятностей  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  соответственно. С геометрической точки зрения задача является одномерной, так как стимулы определяются одной координатой. Отметим на оси пороговое значение  $m_{S_0} < x_0 < m_S$ , и пусть собственная область одного стимула есть  $0 < x < x_0$ , а другого  $x_0 < x < \infty$ . Составим выражение для вероятности ошибки различения двух стимулов.

Условная вероятность получить решение «наблюдается стимул  $S_0$ , когда в действительности предъявляется стимул  $S$ »,

$$p_2(1) = \int_{-\infty}^{x_0} f_2(x) dx.$$

Условная вероятность получить решение «наблюдается стимул  $S$ , когда в действительности предъявляется стимул  $S_0$ »,

$$p_1(2) = \int_{x_0}^{\infty} f_1(x) dx.$$

Если обозначить  $p(S_0)$  и  $p(S)$  соответственно априорные вероятности предъявления стимулов  $S_0$  и  $S$ , то полная вероятность ошибки различения двух стимулов запишется в виде

$$P_{\text{ош}} = p(S_0) p_1(2) + p(S) p_2(1) = p(S_0) \int_{-\infty}^{x_0} f_2(x) dx + \\ + p(S) \int_{x_0}^{\infty} f_1(x) dx.$$

Определим собственные области стимулов  $S_0$  и  $S$  так, чтобы вероятность ошибки была наименьшей. Параметром, определяющим область, является пороговое значение  $x_0$ . Поэтому для минимизации вероятности ошибки необходимо решить следующее уравнение относительно  $x_0$ :

$$\frac{dP_{\text{ош}}}{dx_0} = p(S_0) f_2(x_0)' - p(S) f_1(x_0)'$$

Для определения характера экстремума необходимо вычислить вторую производную

$$\frac{d^2P_{\text{ош}}}{dx_0^2} = p(S_0) f_2(x_0)'' - p(S) f_1(x_0)''.$$

Если эта величина положительна, то в точке, абсцисса которой определяется из уравнения  $dP_{\text{ош}}/dx_0=0$ , имеется минимум  $P_{\text{ош}}(x_0)$ ; если отрицательна — максимум. Запишем условие минимума:

$$f_2(x_0)/f_1(x_0) > \Lambda_0,$$

где

$$\Lambda_0 = p(S)/p(S_0).$$

Если это условие выполнено, то оптимальное значение находится из уравнения

$$f_2(x_0)/f_1(x_0) = \Lambda_0.$$

В том случае, когда  $p(S_0) = p(S)$ ,  $\Lambda_0 = 1$  и  $x_0$  есть абсцисса точки пересечения кривых  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ .

В теории связи надежность (или верность) распознавания оценивается при помощи убывающей функции вероятности ошибки [121]

$$\theta = -\log_2 P_{\text{ош}}.$$

Эта мера удобна для оценки надежности систем связи, где вероятность ошибки не превышает  $10^{-5}$ . Однако в тех

случаях, когда вероятность ошибки может достигать больших значений, становится заметным несоответствие описанной меры интуитивному представлению о надежности.

Действительно, при рассмотрении двух равновероятных классов, когда ошибка распознавания составляет 0,5,

$$\theta = -\log_2 0,5 = 1,0.$$

Определяемая этим выражением надежность достигает нулевого значения только при  $P_{\text{ош}}=1$ , что не имеет смысла при распознавании [5].

Тренажер представляет собой информационную модель реальной аппаратуры. Задача синтеза информационной модели в некотором роде обратна задаче различения сигналов в теории связи. Если в теории связи стремятся различительную способность двух сигналов сделать максимальной, то при синтезе информационной модели элемент  $y \in Y$  (тренажер) стремятся сделать максимально подобным элементу  $x \in X$  (реальная аппаратура). Как меру подобия введем понятие надежности (или верности) идентификации элементов  $x$  и  $y$ :

$$\kappa = -\log_2(1 - P_{\text{ош}}). \quad (10.3.1)$$

Эта мера хорошо согласуется с интуитивными представлениями о подобии элементов. При полном подобии элементов  $P_{\text{ош}}=0,5$  и  $\kappa = -\log_2(1 - 0,5) = 1,0$ .

При абсолютном различении элементов  $P_{\text{ош}}=0$  и  $\kappa = -\log_2 1,0 = 0$ .

Таким образом, надежность идентификации, изменяющаяся в пределах  $\kappa = (0-1,0)$ , является той числовой характеристикой, с помощью которой окажется возможным перейти от качественных описаний к количественным обоснованиям точности моделирования.

В [5, 48] показывается, что наиболее успешно данная задача может быть решена в рамках статистической теории распознавания. Длительное время вопросы распознавания рассматривались лишь с применением методов биологии и психологии. Кибернетика позволила ввести в изучение психологического процесса распознавания образцов количественные методы, что открывает принципиально новые возможности в исследовании и проектировании систем. В распознавании можно выделить два существенно отличных друг от друга подхода:

детерминистский и статистический. Несомненно, процессы распознавания, в основе которых лежат ощущения и восприятия, носят ярко выраженный вероятностный характер, поэтому в основу их исследований должны быть положены вероятностные методы (теория вероятностей, математическая статистика, теория информации и т. д.). Статистический подход является более общим, он полнее отражает физическую и психологическую сущность распознавания.

Большинство распознаваемых объектов характеризуется случайной природой, различение происходит, как правило, в условиях действия случайных помех. Именно из этих соображений и на основании проведенного анализа в § 1—3 был сделан выбор в пользу статистической теории распознавания [3, 5, 48]. Следует добавить, что в работах [5, 108, 113] и гл. 12 данной книги экспериментальными исследованиями подтверждается гипотеза о статистическом механизме восприятия изображений оператором.

#### **10.4. Дивергенция как мера расстояния между двумя случайными векторами в $N$ -мерном векторном пространстве**

В тех случаях, когда речь идет об одномерных стимулах, мы говорим об их обнаружении и различении. Это низшая ступень познания окружающего мира. С помощью этих элементарных операций исследуются объекты, формируются априорные сведения, что позволяет перейти на более высокую ступень познания окружающего мира — распознавание образов. В самых общих чертах распознавание образов можно определить как соотношение объектов или явлений на основе анализа их характеристик с одним из нескольких, заранее определенных классов. Рассматриваемые классы объектов или явлений часто называют образами, а общую проблему — проблемой распознавания образов.

В теории распознавания приходится иметь дело с некоторым набором классов, или так называемым «алфавитом классов». Обозначим этот алфавит множеством

$$L = (L_1, L_2, \dots, L_i, L_M),$$

где  $L_i$  — некоторый конкретный класс;  $M$  — общее число классов, входящих в данный алфавит (в рассматриваемом

мом случае  $M=2$ );  $L_1$  — класс реальной аппаратуры (вектор  $X$ );  $L_2$  — класс тренажеров (вектор  $Y$ ).

Каждый из классов множества  $L$  включает в себя некоторое число отдельных объектов — реализаций. Совокупность неодинаковых реализаций, присущих данному алфавиту классов, обозначается множеством

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_T),$$

где  $b_j$  — некоторая конкретная реализация;  $T$  — общее число неодинаковых реализаций.

Следует отметить, что, как правило, выполняется неравенство  $T \gg M$ , т. е. число реализаций значительно превышает число распознаваемых классов. При непрерывном изменении значений признаков общее число реализаций стремится к бесконечности.

Обозначим совокупность признаков, которой характеризуется распознаваемый класс  $L$ , множеством

$$Z = (z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_N),$$

где  $z_k$  — некоторый определенный признак;  $N$  — общее число признаков.

При синтезе информационных моделей такими признаками являются характеристики элементов и процессов (размеры, яркость, длительность, громкость и т. п.), восприятия оператором. Как правило, число признаков  $N$  принимается одинаковым для всех классов.

В общем виде каждый признак можно рассматривать как случайную величину  $z_k$  с плотностью вероятности  $f_k(z/L_i)$ . В том случае, когда признак — постоянная величина, плотность вероятности вырождается в  $\delta$ -функцию. Признак данного класса определяется как композиция случайных величин, характеризующих рассматриваемый параметр и погрешность его восприятия оператором. Для класса реальной аппаратуры

$$z_k(L_1) = x_k + u_k.$$

Для класса тренажеров

$$z_k(L_2) = y_k + u_k,$$

где  $x_k, y_k$  — рассматриваемые параметры, характеристики или процессы;  $u_k$  — погрешность восприятия оператором рассматриваемых параметров.

Плотность вероятности случайной величины  $z_k(L_1)$  может быть вычислена по формуле

$$f_k(z/L_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(-u + z, u/L_1) du \quad (10.4.1)$$

или

$$f_k(z/L_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x, z - x/L_1) dx. \quad (10.4.2)$$

В частном случае, когда случайные величины  $x_k$  и  $u_k$  независимы,

$$f_k(x, u/L_1) = f_k(x/L_1) f_k(u/L_1)$$

и формулы (10.4.1), (10.4.2) принимают вид

$$\begin{aligned} f_k(z/L_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_k(z - u) f_k(u) du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x) f_k(z - x) dx. \end{aligned}$$

Плотность вероятности случайной величины  $z_k(L_2)$  может быть вычислена по аналогичным формулам.

Исследования [5, 101, 115] показывают, что законы распределения погрешностей восприятия носят нормальный характер:

$$f_k(u/L_i) = N(m_u, \sigma_u).$$

С принятием допущений о нормальности распределений значений параметров и характеристик классов  $L_1$  и  $L_2$ :

$$f_k(x/L_1) = N(m_x, \sigma_x),$$

$$f_k(y/L_2) = N(m_y, \sigma_y),$$

и независимости случайных величин  $x_k$ ,  $y_k$  и  $u_k$  для случайной величины  $z_k(L_i)$  получим выражение плотности вероятности

$$f_k(z/L_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_z} \exp \left\{ -\frac{(z - m_z)^2}{2\sigma_z^2} \right\},$$

где

$$m_z(L_1) = m_x + m_u; \quad m_z(L_2) = m_y + m_u,$$

$$\sigma_z(L_1) = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_u^2}; \quad \sigma_z(L_2) = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_u^2}.$$



В некоторых частных случаях, когда параметр или характеристика являются постоянной величиной,  $x_k = k_1$ ,  $y_k = k_2$ ,

$$m_z(L_1) = k_1 + m_u; \quad m_z(L_2) = k_2 + m_u,$$

$$\sigma_z(L_i) = \sigma_u.$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда характеристики и параметры рассматриваемых классов — постоянные величины. При статистической связи между признаками появляется необходимость введения совместных распределений вероятностей значений признаков. Совместное распределение вероятностей значений признаков для класса  $L_i$  записывается в следующем виде:

$$f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_i) = f\left(\bigcup_{k=1}^N z_k/L_i\right) = f(z/L_i).$$

Признаки  $i$ -го класса статистически независимы, если выполняется условие

$$f\left(\bigcup_{k=1}^N z_k/L_i\right) = \prod_{k=1}^N f(z_k/L_i).$$

Совокупность распределений  $f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_i)$  и вероятностей  $P(L_i)$  показывающих, как часто встречается тот или иной класс в реальных условиях, называют описанием класса  $L_i$  (или эталоном этого класса) [5].

При рассмотрении двух классов будем иметь алфавит

$$\{L, L_i, f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_i), P(L_i), i=1, 2\},$$

где  $f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_1)$  — совместное распределение вероятностей значений признаков для класса  $L_1$  — реальной аппаратуры;  $f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_2)$  — совместное распределение вероятностей значений признаков для класса  $L_2$  — информационной модели (тренажера).

Дальнейшая задача заключается в установлении меры расстояния (дистанции) между двумя классами, являющимися многомерными случайными векторами, и определении функциональной зависимости между надежностью идентификации и установленной дистанцией.

В [2д] показывается, что такой мерой может служить «расхождение»

$$I(1, 2) = I(1:2) + I(2:1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_1) - \\ - f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_2) \log_2 \frac{f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_1)}{f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_2)} dV, \quad (10.4.3)$$

где  $I(1:2)$  — средняя информация для различения в пользу  $L_1$  против  $L_2$ ;  $I(2:1)$  — средняя информация для различения в пользу  $L_2$  против  $L_1$ :

$$I(1:2) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_1) \times \\ \times \log_2 \frac{f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_1)}{f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_2)} dV,$$

$$I(2:1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_2) \times \\ \times \log_2 \frac{f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_2)}{f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_1)} dV.$$

Мера расхождения  $I(1, 2)$  между многомерными случайными векторами  $L_1$  и  $L_2$  является мерой трудности их различения. Расхождение обладает всеми свойствами расстояния (метрики), определяемого в топологии, кроме неравенства треугольника. Информационные меры  $I(1:2)$  и  $I(2:1)$  можно рассматривать в связи с этим как направления расхождения.

В [5, 54д) мера расхождения  $I(1, 2)$  называется дивергенцией и обозначается  $\mathcal{L}$ . Дивергенция характеризуется следующими свойствами:

1.  $\mathcal{L} \left( \bigcup_{k=1}^N z_k \right) \geq 0$ , причем равенство достигается только при тождественно равных распределениях:

$$f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_1) = f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_2).$$

2. Если признаки классов статистически независимы, дивергенция является аддитивной мерой, т. е.

$$\mathcal{L} \left( \bigcup_{k=1}^N z_k \right) = \sum_{k=1}^N \mathcal{L}(z_k).$$

3. Увеличение числа признаков, используемых при распознавании, не уменьшает дивергенцию, т. е.

$$\mathcal{L} \left( \bigcup_{k=1}^N z_k \right) \leq \mathcal{L} \left( \bigcup_{k=1}^{N+1} z_k \right).$$

### 10.5. Установление зависимости между дивергенцией и надежностью идентификации. Допуски на проектирование тренажера

Важным свойством дивергенции является ее связь с вероятностью ошибки распознавания [54д]. Поскольку в § 10.3 была определена зависимость между вероятностью ошибки распознавания и надежностью идентификации, то на основании этого можно установить зависимость между дивергенцией и надежностью идентификации

$$\kappa = F(\mathcal{L}).$$

Для двух многомерных случайных векторов отношение правдоподобия

$$\Lambda = f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_1) / f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_2)$$

позволяет определить вероятность ошибки классификации отдельных реализаций [5, 121].

Действительно, при условии, что распознаваемый объект относится к первому классу, отношение правдоподобия будет распределено некоторым вполне определенным образом. Плотность такого распределения обозначим  $f_1(\Lambda)$ . При условии, что объект относится ко второму классу, плотность распределения отношения правдоподобия будет  $f_2(\Lambda)$ . Вероятность ошибки при распознавании объектов первого класса равна

$$P_1(l) = \int_{-\infty}^l f_1(\Lambda) d\Lambda,$$

а объектов второго класса —

$$P_2(l) = \int_0^{\infty} f_2(\Lambda) d\Lambda.$$

Вероятность ошибки распознавания обоих классов составляет

$$P(l) = \sum_{i=1}^2 P(L_i) P_i(l).$$

При распознавании двух классов объектов распределения признаков описываются нормальными законами

$$N(\varphi^{(1)}, \Gamma) \text{ и } N(\varphi^{(2)}, \Gamma),$$

где  $\varphi^{(i)}$  ( $\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, \dots, \varphi_N^{(i)}$ ) — вектор среднего значения  $i$ -й генеральной совокупности ( $i=1, 2$ );  $\Gamma$  — ковариационная матрица, одинаковая для обоих классов.

Плотность распределения значений признаков  $i$ -го класса равна

$$f(Z/L_i) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}N} |\Gamma| \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Z - \varphi^{(i)})' \Gamma^{-1} (Z - \varphi^{(i)}) \right\},$$

где  $|\Gamma|$  — определитель матрицы  $\Gamma$ ;  $\Gamma^{-1}$  — матрица, обратная  $\Gamma$ ;  $Z$  —  $N$ -мерный вектор значений признаков;  $(Z - \varphi^{(i)})'$  — вектор, транспонированный относительно  $(Z - \varphi^{(i)})$ .

Отношение правдоподобия в данном случае равно

$$\begin{aligned} \Lambda = \frac{f(Z/L_1)}{f(Z/L_2)} = \exp \left\{ \frac{1}{2} (Z - \varphi^{(2)})' \Gamma^{-1} (Z - \varphi^{(2)}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (Z - \varphi^{(1)})' \Gamma^{-1} (Z - \varphi^{(1)}) \right\}. \end{aligned} \quad (10.5.1)$$

В случае нормальных распределений удобно пользоваться не отношением правдоподобия, а его логарифмом [57, 54]:

$$\begin{aligned} \ln \Lambda = -\frac{1}{2} [(Z - \varphi^{(1)})' \Gamma^{-1} (Z - \varphi^{(1)}) - \\ - (Z - \varphi^{(2)})' \Gamma^{-1} (Z - \varphi^{(2)})]. \end{aligned}$$

Правую часть можно представить в виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} [Z' \Gamma^{-1} Z - Z' \Gamma^{-1} \varphi^{(1)} - \varphi^{(1)'} \Gamma^{-1} Z + \varphi^{(1)'} \Gamma^{-1} \varphi^{(1)} - \\ - Z' \Gamma^{-1} Z + Z' \Gamma^{-1} \varphi^{(2)} + \varphi^{(2)'} \Gamma^{-1} Z - \varphi^{(2)'} \Gamma^{-1} \varphi^{(2)}]. \end{aligned}$$

Группируя соответствующие члены, окончательно получаем

$$\ln \Lambda = z' \Gamma^{-1} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) - \frac{1}{2} (\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)})' \Gamma^{-1} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}). \quad (10.5.2)$$

Первый член является дискриминантной функцией. Это линейная функция компонент вектора результатов наблюдений.

Если объект относится к первому классу [ $Z$  распределен  $N(\varphi^{(1)}, \Gamma)$ ], то логарифм отношения правдоподобия распределен нормально с математическим ожиданием

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= M[\ln \Lambda] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_1) \times \\ &\quad \times \ln \frac{f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_1)}{f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_2)} dV = \\ &= \varphi^{(1)'} \Gamma^{-1} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) - \frac{1}{2} (\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)})' \Gamma^{-1} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) = \\ &= \frac{1}{2} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)})' \Gamma^{-1} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) \quad (10.5.3) \end{aligned}$$

и дисперсией

$$D = (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)})' \Gamma^{-1} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}). \quad (10.5.4)$$

Если объект относится ко второму классу [ $Z$  распределен  $N(\varphi^{(2)}, \Gamma)$ ], то  $\ln \Lambda$  распределен нормально с той же дисперсией, что и в первом случае, и с математическим ожиданием

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_2) \times \\ &\quad \times \ln \frac{f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_2)}{f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_1)} dV = \\ &= \varphi^{(2)'} \Gamma^{-1} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) - \frac{1}{2} (\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)})' \Gamma^{-1} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) = \\ &= - \frac{1}{2} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)})' \Gamma^{-1} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}). \quad (10.5.5) \end{aligned}$$

Из анализа формул (10.5.3) — (10.5.5) видно, что

$$D = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \mathcal{L}.$$

Откуда

$$\varepsilon_1 = 0,5\mathcal{L}; \quad \varepsilon_2 = -0,5\mathcal{L}.$$

Таким образом, имеются два нормальных распределения  $N(0,5\mathcal{L}, \mathcal{L})$  и  $N(-0,5\mathcal{L}, \mathcal{L})$ , пересекающихся в одной точке (рис. 10.5.1).

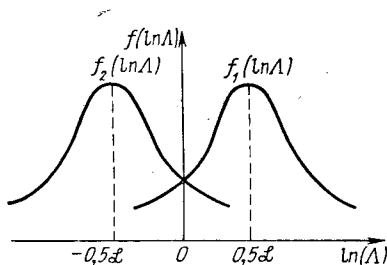


Рис. 10.5.1.

Вероятность ошибочной классификации при условии, что наблюдение производится над  $L_1$ ,

$$\begin{aligned} P(2/1) &= \int_{-\infty}^c \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathcal{L}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{2} \mathcal{L} \right)^2 / \mathcal{L} \right\} dz = \\ &= \int_{-\infty}^{(c-0,5\mathcal{L}) \mathcal{L}^{-1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} y^2 \right\} dy, \end{aligned}$$

а вероятность ошибочной классификации при условии, что наблюдение производится над  $L_2$ ,

$$\begin{aligned} P(1/2) &= \int_c^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathcal{L}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{2} \mathcal{L} \right)^2 / \mathcal{L} \right\} dz = \\ &= \int_{\mathcal{L}^{-1/2} (c+0,5\mathcal{L})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} y^2 \right\} dy. \end{aligned}$$

Если считать, что  $P(L_1) = P(L_2)$ , то вероятность ошибки составит

$$P_{\text{ош}} = \int_{0,5\sqrt{\mathcal{L}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} y^2 \right\} dy.$$

Отсюда надежность идентификации определится по формуле

$$\kappa = -\log_2 \left[ 1 - \int_{0,5 \sqrt{\mathcal{L}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} y^2 \right\} dy \right].$$

После некоторых преобразований окончательно получим

$$\kappa = -\log_2 \frac{1}{2} \left[ 1 + \Phi \left( \frac{\sqrt{\mathcal{L}}}{2\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (10.5.6)$$

Таблица 10.5.1

$\mathcal{L}$	$\kappa$	$\mathcal{L}$	$\kappa$	$\mathcal{L}$	$\kappa$	$\mathcal{L}$	$\kappa$
0,0000	1,000	0,090	0,840	0,55	0,633	2,56	0,347
0,0004	0,990	0,115	0,820	0,64	0,614	2,89	0,320
0,0016	0,980	0,160	0,794	0,81	0,574	3,24	0,294
0,0036	0,966	0,194	0,773	1,00	0,540	3,60	0,273
0,0064	0,956	0,250	0,743	1,21	0,500	4,0	0,250
0,010	0,947	0,291	0,727	1,44	0,467	9,0	0,100
0,019	0,922	0,360	0,700	1,69	0,434	16,0	0,033
0,040	0,890	0,410	0,680	1,96	0,400	25,0	0,007
0,057	0,870	0,490	0,653	2,25	0,374	$\infty$	0

В табл. 10.5.1 приведены значения надежности идентификации для различных значений дивергенции.

В случае распознавания классов, признаки которых распределены нормально с различными ковариационными матрицами, отношение правдоподобия определится по формуле

$$\Lambda = \left( \frac{|\Gamma_2|}{|\Gamma_1|} \right)^{1/2} \exp \frac{1}{2} \{ (Z - \varphi^{(2)})' \Gamma_2^{-1} (Z - \varphi^{(2)}) - (Z - \varphi^{(1)})' \Gamma_1^{-1} (Z - \varphi^{(1)}) \},$$

и

$$\begin{aligned} \ln \Lambda &= \frac{1}{2} \left\{ \ln \frac{|\Gamma_2|}{|\Gamma_1|} + (Z - \varphi^{(2)})' \Gamma_2^{-1} (Z - \varphi^{(2)}) - (Z - \varphi^{(1)})' \Gamma_1^{-1} (Z - \varphi^{(1)}) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \ln \frac{|\Gamma_2|}{|\Gamma_1|} - t_r \Gamma_1^{-1} (Z - \varphi^{(1)}) (Z - \varphi^{(1)})' + t_r \Gamma_2^{-1} (Z - \varphi^{(2)}) (Z - \varphi^{(2)})' \right\}, \end{aligned}$$

где  $t_r \Gamma$  — след матрицы  $\Gamma$ .

Для относящихся к первому классу объектов  $\ln \Lambda$  распределен с математическим ожиданием

$$\varepsilon_1 = M[\ln \Lambda] = \frac{1}{2} \left\{ \ln \frac{|\Gamma_2|}{|\Gamma_1|} + t_r \Gamma_1 (\Gamma_2^{-1} - \Gamma_1^{-1}) + \right. \\ \left. + t_r \Gamma_2^{-1} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)})' \right\}$$

и дисперсией

$$D_1 = \frac{1}{4} \left\{ \sum_{ij} \sum_{kl} (B^2_{ij} - B^1_{ij}) (B^2_{kl} - B^1_{kl}) (\sigma^1_{ij} \sigma^1_{kl} + \right. \\ \left. + \sigma^1_{ik} \sigma^1_{jl} + \sigma^1_{il} \sigma^1_{jk}) + 4 (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)})' \Gamma_2^{-1} \Gamma_1 \Gamma_2^{-1} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) - \right. \\ \left. - t_{r^2} \Gamma_1 (\Gamma_2^{-1} - \Gamma_1^{-1}) \right\},$$

где  $B^k_{ij}$  —  $ij$ -й элемент матрицы, обратной  $k$ -й ковариационной;  $\sigma^1_{ij}$  —  $ij$ -й элемент ковариационной матрицы распределения признаков первого класса.

Для объектов второго класса  $\ln \Lambda$  распределен с математическим ожиданием

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \left\{ \ln \frac{|\Gamma_2|}{|\Gamma_1|} + t_r \Gamma_2 (\Gamma_2^{-1} - \Gamma_1^{-1}) - \right. \\ \left. - (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)})' \Gamma_1^{-1} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) \right\}$$

и дисперсией

$$D_2 = \frac{1}{4} \left\{ \sum_{ij} \sum_{kl} (B^2_{ij} - B^1_{ij}) (B^2_{kl} - B^1_{kl}) \times \right. \\ \left. \times (\sigma^2_{ij} \sigma^2_{kl} + \sigma^2_{ik} \sigma^2_{jl} + \sigma^2_{il} \sigma^2_{jk}) + \right. \\ \left. + 4 (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)})' \Gamma_1^{-1} \Gamma_2 \Gamma_1^{-1} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) - t_{r^2} \Gamma_2 (\Gamma_2^{-1} - \Gamma_1^{-1}) \right\}.$$

При большом числе признаков можно считать, что случайная величина  $\ln \Lambda$  распределена нормально.

Плотность вероятности логарифма отношения правдоподобия в случае, когда объект относится к первому классу, равна

$$f_1(\ln \Lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_1}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(\ln \Lambda - \varepsilon_1)^2}{D_1} \right\}.$$

Если объект относится ко второму классу, то

$$f_2(\ln \Lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(\ln \Lambda - \varepsilon_2)^2}{D_2} \right\}.$$



Вероятность ошибки распознавания объектов первого класса составляет

$$P_1(l) = \int_{-\infty}^q f_1(\ln \Lambda) d(\ln \Lambda) = \frac{1}{2} + \\ + \int_0^{D_1^{-1/2}(q-\varepsilon_1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} dy,$$

объектов второго класса —

$$P_2(l) = \int_q^{\infty} f_2(\ln \Lambda) d(\ln \Lambda) = \frac{1}{2} - \\ - \int_0^{D_2^{-1/2}(q-\varepsilon_2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} dy.$$

При принятых ранее допущениях для надежности идентификации получим следующее выражение:

$$\kappa = -\log_2 \frac{1}{2} \left[ 1 - \int_0^{D_1^{-1/2}(q-\varepsilon_1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} dy + \right. \\ \left. + \int_0^{D_2^{-1/2}(q-\varepsilon_2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} dy \right] = \\ = -\log_2 \frac{1}{2} \left[ 1 + \int_{D_1^{-1/2}(q-\varepsilon_1)}^{D_2^{-1/2}(q-\varepsilon_2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} dy \right] = \\ = -\log_2 \frac{1}{2} \left[ \Phi\left(\frac{q-\varepsilon_2}{\sqrt{2D_2}}\right) - \Phi\left(\frac{q-\varepsilon_1}{\sqrt{2D_1}}\right) \right]. \quad (10.5.7)$$

Таким образом, если признаки классов распределены нормально с равными ковариационными матрицами, дивергенция позволяет однозначно определить надежность идентификации.

Если ковариационные матрицы распределений различны, дивергенция равна

$$\mathcal{L} \left( \bigcup_{k=1}^N z_k \right) = \frac{1}{2} \{ t_r (\Gamma_1 - \Gamma_2) (\Gamma_2^{-1} - \Gamma_1^{-1}) + t_r (\Gamma_1^{-1} + \Gamma_2^{-1}) (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)})' \}. \quad (10.5.8)$$

При этом нет однозначной связи между дивергенцией и надежностью идентификации, задача синтеза тренажера с заданной надежностью идентификации приобретает значительные трудности, но может быть решена при использовании ЦВМ.

Однако незначительные отклонения параметров и характеристик тренажера по сравнению с реальной аппаратурой и постоянство механизма восприятия человека для рассматриваемых классов позволяют принять допущение о равенстве ковариационных матриц. Более того, в [5] утверждается, что в абсолютном большинстве случаев возможно отобрать независимые признаки, совокупность которых обеспечивает не меньшую надежность распознавания, чем совокупность зависимых признаков. Отметим принятые допущения:

— равенство ковариационных матриц

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma,$$

— независимость признаков классов

$$f(z_1, z_2, \dots, z_N / L_i) = \prod_{i=1}^N f(z_k / L_i).$$

В этом случае ковариационная матрица вырождается в диагональную с дисперсиями признаков по главной диагонали

$$\Gamma = \begin{vmatrix} D_{z_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{z_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & D_{z_N} \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\Gamma^{-1} = \begin{vmatrix} 1/D_{z_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/D_{z_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1/D_{z_N} \end{vmatrix}.$$

и дивергенция определится по следующей формуле:

$$\mathcal{L} = (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)})' \Gamma^{-1} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) = \sum_{i=1}^N \psi_i^2 D_{z_i}^{-1}, \quad (10.5.9)$$

где  $\psi_i = \varphi_i^{(1)} - \varphi_i^{(2)}$  — разность математических ожиданий значений  $i$ -го признака для первого и второго классов, являющаяся мерой точности моделирования  $i$ -го параметра или характеристики. Эта величина определяет допуск, за который не должен выйти моделируемый  $i$ -й параметр, с тем чтобы обеспечить заданную величину надежности идентификации (заданное подобие двух классов  $L_1$  и  $L_2$ ).

Подставляя (10.5.9) в (10.5.10), получаем формулу для надежности идентификации, выраженную через допуски на моделируемые параметры, характеристики:

$$\kappa = -\log_2 \frac{1}{2} \left[ 1 + \Phi \left( \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \psi_i^2 D_{z_i}^{-1}}}{2\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (10.5.10)$$

Рассмотрение двух математических моделей ощущений и восприятий оператора — детерминистской и статистической — показало, что детерминистская модель является ограниченной, менее точной и не может быть использована при решении задачи обоснования точности построения тренажеров. Разработка статистической модели ощущений и восприятий позволяет при знании дифференциальных законов распределений погрешностей ощущений и известных функциональных зависимостей типа (10.2.2) определять числовые характеристики погрешностей восприятия. В том случае, когда функциональные зависимости неизвестны, законы распределения погрешностей восприятия должны находиться экспериментально.

Использование статистической теории распознавания дает возможность ввести понятие надежности идентификации как меры подобия двух стимулов, двух классов, двух образов и т. п. Это позволит устранить неопределенность, обусловленную наличием только качественных обоснований точности построения тренажеров.

Установление зависимости между надежностью идентификации и дивергенцией как мерой расстояния (ди-

станции) между двумя случайными векторами в  $N$ -мерном векторном пространстве с последующим введением в рассмотрение допусков на моделирование параметров и характеристик дает возможность перейти от обоснования точности к элементам синтеза тренажеров с заданными свойствами при минимальной стоимости.

## Глава 11

### ЭЛЕМЕНТЫ СИНТЕЗА ТРЕНАЖЕРОВ

#### 11.1. Синтез тренажера с заданной надежностью идентификации

Как показано в гл. 9 и 10, обучение и создание технических средств обучения, в частности тренажеров, не должно рассматриваться изолированно от проектирования и эксплуатации основной аппаратуры (АСУ). Более того, разработка тренажеров должна начинаться одновременно с разработкой аппаратуры и вестись параллельно, чтобы к моменту поступления техники в эксплуатацию обеспечить необходимую степень обученности операторов. Точность построения тренажера обуславливается психофизическими характеристиками человека.

В гл. 10 произведена оценка точности построения тренажера и получены формулы, связывающие допуски на моделирование параметров и характеристик с погрешностями восприятия последних оператором. Рассмотрим несколько вариантов синтеза тренажера с заданной надежностью идентификации в порядке возрастания сложности решаемых задач, используя при этом математический аппарат, разработанный в гл. 10.

**Вариант 1.** Задано описание классов  $L_1$  и  $L_2$ :

$$\{L, L_i, f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_i), P(L_i), i=1, 2\}.$$

Признаки классов статистически независимы:

$$f\left(\bigcup_{k=1}^N z_k/L_i\right) = \sum_{k=1}^N f(z_k/L_i).$$

Веса допусков на моделирование параметров и характеристик неизвестны, для простоты их можно принять равными:

$$\psi^1 = \psi^2 = \dots = \psi^N = \psi, \quad (11.1.1)$$

где  $\psi^H_i$  — нормированный допуск  $i$ -го параметра, представляющий собой безразмерную величину

$$\psi^H_i = \psi_i / \sigma_{z_i}. \quad (11.1.2)$$

Задано значение надежности идентификации  $\kappa_3$ , определяющее необходимое подобие тренажера реальной аппаратуре. Требуется определить допуски  $\psi_i$  на моделирование параметров и характеристик тренажера, обеспечивающие заданное значение надежности идентификации.

Подставляя (11.1.2) в (10.5.10), получаем

$$\sum_{i=1}^N \psi_i^{2H} = [2 \sqrt{2} \Phi^{-1} (2^{1-\kappa_3} - 1)]^{1/2}. \quad (11.1.3)$$

Учитывая допущение (11.1.1), выражение (11.1.3) преобразуем к следующему виду:

$$\psi^H_i = \psi = N^{-1/2} [2 \sqrt{2} \Phi^{-1} (2^{1-\kappa_3} - 1)]^{1/4}. \quad (11.1.4)$$

Окончательно допуск на моделирование  $i$ -го параметра определится при подстановке (11.1.2) в (11.1.4):

$$\psi_i = \sigma_{z_i} N^{-1/2} [2 \sqrt{2} \Phi^{-1} (2^{1-\kappa_3} - 1)]^{1/4}. \quad (11.1.5)$$

**Вариант 2.** Исходные данные соответствуют первому варианту. Отличие состоит в том, что представляется возможным из некоторых соображений (ценности, важности и т. п.) определить весовые коэффициенты  $k_1, k_2, \dots, k_N$ , задающие веса допускам  $\psi^H_i$  так, что

$$\psi^H_1 = k_1 \psi, \quad \psi^H_2 = k_2 \psi, \quad (11.1.6)$$

где  $\psi$  — постоянная величина, выступающая в данном случае в виде единицы измерения.

На основании (11.1.6), (10.5.9) и (10.5.10) получим выражение

$$\psi = \left( \sum_{i=1}^N k_i^2 \right)^{-1/2} [2 \sqrt{2} \Phi^{-1} (2^{1-\kappa_3} - 1)]^{1/4}. \quad (11.1.7)$$

Учитывая (11.1.6), определим нормированный допуск на моделирование  $i$ -го параметра:

$$\psi^H_i = k_i \left( \sum_{i=1}^N k_i^2 \right)^{-1/2} [2 \sqrt{2} \Phi^{-1} (2^{1-\kappa_3} - 1)]^{1/4}. \quad (11.1.8)$$

Окончательно допуск на моделирование  $i$ -го параметра определится при подстановке (11.1.2) в (11.1.8):

$$\psi_i = k_i \sigma_{z_i} \left( \sum_{i=1}^N k_i^2 \right)^{-1/2} [2 \sqrt{2} \Phi^{-1} (2^{1-\kappa_3} - 1)]^{1/4}. \quad (11.1.9)$$

Можно заметить, что выражение (11.1.5) может быть получено из формулы (11.1.9) при выполнении условия

$$k_1 = k_2 = \dots = k_N = 1.$$

**Вариант 3.** Данный вариант отличается от рассмотренных тем, что считаются известными (заданными) функции стоимости, определяющие затраты, необходимые для обеспечения требуемой точности моделирования параметров или характеристик [109],

$$c_i = g_i \psi_i^{-\rho_i}, \quad (11.1.10)$$

где  $c_i$  — стоимость обеспечения допуска  $\psi_i$   $i$ -го моделируемого параметра;  $g_i$ ,  $\rho_i$  — постоянные коэффициенты, определяемые в процессе производства.

В этом случае стоимость моделирования  $N$  параметров определится по формуле

$$c = \sum_{i=1}^N g_i \psi_i^{-\rho_i}. \quad (11.1.11)$$

Требуется определить допуски  $\psi_i$  на моделирование параметров и характеристик при заданной надежности идентификации  $\kappa_3$  и минимальных затратах. Математически это можно сформулировать следующим образом: определить минимум выражения (11.1.11) при выполнении ограничения

$$\sum_{i=1}^N \psi_i^2 D_{z_i}^{-1} = [2 \sqrt{2} \Phi^{-1} (2^{1-\kappa_3} - 1)]^{1/2}. \quad (11.1.12)$$

Рассматриваемая задача является частным случаем изопериметрической задачи в вариационном исчислении и сводится к отысканию условного экстремума с помощью неопределенных множителей Лагранжа.

Составим вспомогательную функцию

$$F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N) = \sum_{i=1}^N g_i \psi_i^{-\rho_i} + \lambda \sum_{i=1}^N \psi_i^2 D_{z_i}^{-1},$$

где  $\lambda$  — постоянный множитель.

Приравняем нулю частные производные по  $\psi_i$ :

$$\frac{\partial F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)}{\partial \psi_i} = -\rho_i g_i \psi_i^{-\rho_i-1} + 2\lambda \psi_i D_{z_i}^{-1} = 0.$$

Определим значение  $\psi_i$ :

$$\psi_i = [(2\lambda)^{-1} \rho_i g_i D_{z_i}^{-1}]^{1/(\rho_i+2)}. \quad (11.1.13)$$

Подставив (11.1.13) в (11.1.12), определим  $\lambda$ :

$$\lambda = \left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{4} \rho_i^2 g_i^2 D_{z_i}^{-\rho_i} \right)^{1/(\rho_i+2)} \right]^{(\rho_i+2)/2} \times \\ \times [2 \sqrt{2} \Phi^{-1} (2^{1-\kappa_3} - 1)]^{-(\rho_i+2)/4}. \quad (11.1.14)$$

На основании (11.1.13) и (11.1.14) получим окончательное выражение для допусков на моделирование параметров или характеристик рассматриваемых классов:

$$\psi_i = \left( \frac{1}{2} \rho_i g_i D_{z_i} \right)^{1/(\rho_i+2)} \times \\ \times \left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{4} \rho_i^2 g_i^2 D_{z_i}^{-\rho_i} \right)^{1/(\rho_i+2)} \right]^{-1/2} [2\sqrt{2}\Phi^{-1}(2^{1-z_3} - 1)]^{1/4}. \quad (11.1.15)$$

Подставляя (11.1.15) в (11.1.11), найдем формулу для определения стоимости моделирования, которая в данном случае будет минимальной:

$$C_{min} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} \rho_i g_i^{-2/\rho_i} D_{z_i}^{-\rho_i/(\rho_i+2)} \right) \times \\ \times \left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{4} \rho_i^2 g_i^2 D_{z_i}^{-\rho_i} \right)^{1/(\rho_i+2)} \right]^{\rho_i/2} \times \\ \times [2\sqrt{2}\Phi^{-1}(2^{1-z_3} - 1)]^{-\rho_i/4}. \quad (11.1.16)$$

Для наглядности на рис. 11.1.1 представлен алгоритм синтеза тренажеров из условия заданной надежности идентификации и минимальной стоимости.

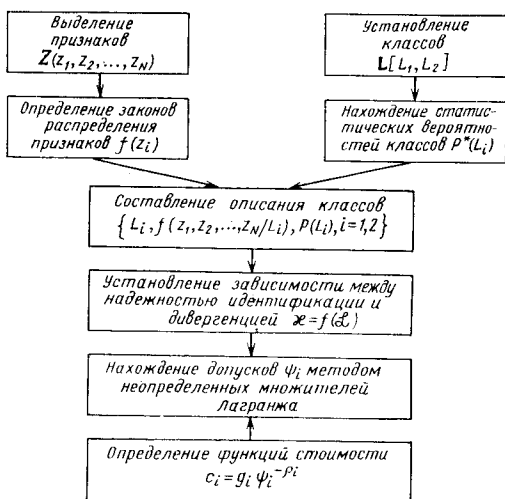


Рис. 11.1.1.

**Пример 11.1.1.** Дано:

1. Рассматриваемые классы содержат три признака:

$$\varphi_1^{(1)} = 5, \quad \varphi_2^{(1)} = 10, \quad \varphi_3^{(1)} = 15,$$

$$D_1 = 4; \quad D_2 = 25; \quad D_3 = 36.$$

2. Функции стоимости  $c_i = g_i \psi_i^{-\rho_i}$  имеют следующие коэффициенты:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1; \quad g_1 = 1; \quad g_2 = 3; \quad g_3 = 5.$$

3. Признаки статистически независимы.

4. Заданная надежность идентификации  $\kappa = 0,8$ .

Требуется определить:

— допуски на моделирование параметров  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ , обеспечивающие заданную надежность идентификации при минимальной стоимости;

— стоимость моделирования  $C_{min}$ .

Допуски определяются по формуле (11.1.15):

$$\psi_1 = \frac{\sqrt[3]{0,5 \cdot 4}}{\sqrt{\frac{1,41}{0,65}}} = \frac{1,26}{1,48} = 0,85,$$

$$\psi_2 = \frac{\sqrt[3]{0,5 \cdot 3 \cdot 25}}{1,48} = \frac{3,35}{1,48} = 2,26,$$

$$\psi_3 = \frac{\sqrt[3]{0,5 \cdot 3 \cdot 36}}{1,48} = \frac{4,5}{1,48} = 3,0.$$

Минимальная стоимость определяется по формуле (11.1.16):

$$C_{min} = \frac{1}{0,85} + \frac{3}{2,26} + \frac{5}{3} = 4,18.$$

Таким образом, параметры класса  $L_2$  (тренажера) должны моделироваться с точностью

$$\varphi_1^{(2)} = \varphi_1^{(1)} \pm \psi_1 = 5 \pm 0,85,$$

$$\varphi_2^{(2)} = \varphi_2^{(1)} \pm \psi_2 = 10 \pm 2,26,$$

$$\varphi_3^{(2)} = \varphi_3^{(1)} \pm \psi_3 = 15 \pm 3.$$

При этом минимальная стоимость моделирования составит  $C_{min} = 4,18$  (условных денежных единицы).

**Примечание:** Значение обратной функции Лапласа  $\Phi^{-1}(2^{1-x_3} - 1)$  определяется из таблицы [13].

**Вариант 4.** В общем случае признаки классов следует считать зависимыми. Тогда совместные законы распределения признаков



классов  $f(z_1, z_2, \dots, z_N/L_i)$  будут характеризоваться ковариационной матрицей

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{N1} & \gamma_{N2} & \dots & \gamma_{NN} \end{bmatrix}.$$

Следует заметить, что элементы по главной диагонали равны дисперсиям признаков:

$$\gamma_{11} = D_{z_1}; \quad \gamma_{22} = D_{z_2}; \quad \dots; \quad \gamma_{NN} = D_{z_N}.$$

Считая описания классов и функции стоимости заданными, покажем общий порядок нахождения допусков на моделирование параметров. На основании (10.5.9) запишем выражение для дивергенции:

$$\mathcal{L} = \psi' \Gamma^{-1} \psi, \quad (11.1.17)$$

где  $\psi' = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$  — вектор допусков на моделирование параметров.

Обратная матрица  $\Gamma^{-1}$  определяется выражением

$$\Gamma^{-1} = \Gamma^+ / |\Gamma|, \quad (11.1.18)$$

где  $\Gamma^+$  — присоединенная матрица для матрицы  $\Gamma$ ;

$$\Gamma^+ = \|\gamma_{ij}^+\| = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{21} & \dots & \dots & \dots & \Gamma_{N1} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & \dots & \dots & \dots & \Gamma_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Gamma_{1N} & \Gamma_{2N} & \dots & \dots & \dots & \Gamma_{NN} \end{bmatrix}, \quad (11.1.19)$$

$\Gamma_{ij}$  — адьюнкта элемента  $\gamma_{ij}$ .

Подставляя (11.1.18) и (11.1.19) в (11.1.17), после некоторых преобразований получаем

$$\mathcal{L} = \frac{1}{|\Gamma|} \left[ \sum_{i=1}^N \psi_i^2 \Gamma_{ii} + 2 \sum_{i < j} \psi_i \psi_j \Gamma_{ij} \right]. \quad (11.1.20)$$

Для нахождения условного экстремума составим вспомогательную функцию

$$F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N) = \sum_{i=1}^N g_i \psi_i^{-\rho_i} + \lambda \left[ \sum_{i=1}^N \psi_i^2 \Gamma_{ii} + 2 \sum_{i < j} \psi_i \psi_j \Gamma_{ij} \right] \frac{1}{|\Gamma|}.$$

Приравняем нулю частные производные по  $\psi_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)}{\partial \psi_i} &= \\ &= -\rho_i g_i \psi_i^{-\rho_i-1} + \frac{2\lambda}{|\Gamma|} (\psi_i \Gamma_{ii} + \psi_j \Gamma_{ij}) = 0, \end{aligned}$$

Для определения допусков на моделирование параметров необходимо решить систему  $(N+1)$  нелинейных алгебраических уравнений

$$|\Gamma| \rho_i g_i \psi_i^{-\rho_i - 1} - 2\lambda (\psi_i \Gamma_{ii} + \psi_j \Gamma_{ij}) = 0, \quad (11.1.21)$$

$$\sum_{i=1}^N \psi_i^2 \Gamma_{ii} + 2 \sum_{i < j} \psi_i \psi_j \Gamma_{ij} = [2 \sqrt{2} \Phi^{-1} (2^{1-x_3} - 1)]^{1/2} |\Gamma|. \quad (11.1.22)$$

где  $N$  уравнений задаются выражением (11.1.21), а  $(N+1)$ -е уравнение определяется ограничением (10.5.6) с учетом подстановки выражения (11.1.20).

Рассмотрение нескольких частных случаев общего порядка синтеза тренажера с заданной надежностью идентификации показывает, что в наиболее общем случае (вариант 4) решаемая задача представляет значительные трудности, которые не позволяют в общем виде получить выражения для определения допусков на моделирование параметров.

Степень сложности определяется количеством рассматриваемых признаков, которые обуславливают степень нелинейности и порядок системы нелинейных алгебраических уравнений (11.1.21), (11.1.22).

Использование допущений (варианты 1, 2, 3) значительно упростило задачу синтеза, что позволило разработать достаточно простую инженерную методику построения тренажеров с заданной надежностью идентификации.

## 11.2. Методы повышения эффективности тренажеров

Как известно, обучение будет эффективным в том случае, когда оно представляет собой замкнутый процесс. В работе [86] рассматривается схема процесса обучения, представленная на рис. 11.2.1, где:

$A_1$  — информационно-логическое устройство или устройство контроля знаний, предназначенное для восприятия ответа обучаемого  $B$ , его количественной оценки и передачи результата в виде сигнала  $\Delta x$  на решающее устройство  $A_2$ ;

$A_3$  — устройство, обрабатывающее определенную информацию от устройства  $A_1$  в соответствии с заложенной в него программой, определяемой методическими и психологическими требованиями. Решение устройства  $A_2$

(сигнал  $y$ ) является основой для определения дозы информации ( $s_i$ ), которая переводит систему из состояния  $\alpha_i$  в  $\alpha_{i+1}$ ;

$K(\Delta x)$  — функция, определяющая закон классификации каждого ответа (сигнал  $x$ ) по  $K$  признакам;

$G(\Delta x)$  — функция, определяющая закон разветвления программы по  $\delta$  направлениям в зависимости от структуры и количественных характеристик сигнала  $x$ ;

$A_3$  — источник фактической учебной информации.

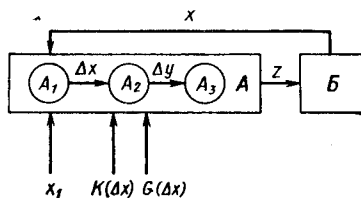


Рис. 11.2.1.

Под обучающей системой  $A$  понимается система, выполняющая функции устройства контроля знаний (информационно - логического устройства)  $A_1$  и решающего устройства  $A_2$ . При этом источник фактической учебной информации  $A_3$  может находиться как внутри

системы, так и вне ее. В качестве такой системы могут быть использованы человек, техническое устройство (включая ЭЦВМ), обучающая программа и, наконец, сложная система, включающая в себя человека, программу и машину. Обучающим (управляющим) автоматом называется техническое устройство, предназначенное для выполнения функций информационно-логического  $A_1$  и решающего  $A_2$  устройств.

Действие обучающей системы осуществляется по следующей программе. При  $t=t_0$  информационный блок  $A_3$  выдает дозу информации, характеризуемую управляющим воздействием  $z_0$  на обучаемого. Обучаемый переводится из состояния  $\alpha_0$  в  $\alpha_1$ . Степень обучения определяется ответом  $x$ , сравниваемым с эталонным значением  $x'$  в блоке контроля  $A_1$ . Величина ошибки, содержащаяся в ответе ( $\Delta x$ ), совместно с функциями  $K(\Delta x)$  и  $G(\Delta x)$  через блоки  $A_2$  и  $A_3$  формирует новую, оптимальную дозу информации  $z_1$ .

Проанализируем, в какой степени существующие в настоящее время тренажеры [8, 9, 127] соответствуют обучающей системе  $A$ . Все тренажеры частично выполняют функции информационного блока  $A_3$ . Функции блока контроля и решающего блока полностью выполняют инструкторы. Это значит, что степень подготовленности и опыт инструктора, его педагогические каче-

ства и методическое мастерство, наконец, его эмоциональное состояние и индивидуальные особенности полностью определяют порядок обучения и контроль знаний обучаемых.

Учитывая характер деятельности операторов АСУ, решающих важные задачи, нельзя признать удовлетворительным состояние, когда присутствует столь большой элемент субъективности в обучении и в оценке степени обученности. Это делает необходимым постановку задачи о разработке автоматов контроля, сопряженных с тренажерами и выполняющих функции блоков контроля ( $A_1$ ) и решающих блоков ( $A_2$ ). Реализация данного требования позволит процесс обучения сделать более интенсивным, а оценку обученности — объективной. Синтез таких автоматов должен осуществляться в соответствии с хорошо разработанной теорией цифровых автоматов [16, 70, 83].

Особый интерес представляет работа [83], где структура знаний и ответы обучаемого описываются с помощью набора булевых функций. Такой подход целесообразен по двум причинам. Во-первых, потому, что функциональные зависимости, описанные булевыми функциями и отображающие связи между отдельными частями информации, могут быть использованы в качестве переключательных функций, т. е. функций, описывающих состояния автомата. На основе этих функций может быть синтезирован автомат, способный реализовать эти функции. Во-вторых, потому, что информационные процессы, описанные булевыми функциями, сравнительно легко программируются и поддаются машинной обработке.

Воспользовавшись приемом суперпозиции [16], тренажер можно описать с помощью следующей системы булевых функций:

$$\begin{aligned} F_1 [x_{11}(t), x_{12}(t), \dots, x_{1j}(t), \dots, x_{1l}(t)], \\ F_2 [x_{21}(t), x_{22}(t), \dots, x_{2j}(t), \dots, x_{2l}(t)], \\ \dots \\ F_k [x_{k1}(t), x_{k2}(t), \dots, x_{kj}(t), \dots, x_{kl}(t)], \end{aligned} \tag{11.2.1}$$

где  $F_1, F_2, \dots, F_k$  — описания частных тренажеров единого комплексного тренажера;  $x_{ij}(t)$  — проверки отдельных систем.

Продолжая разложение, получаем

$$\begin{aligned}
 x_{11}(t) &= F_{11} [x_{111}(t), x_{112}(t), \dots, x_{11\alpha}(t), \dots, x_{11m}(t)], \\
 x_{12}(t) &= F_{12} [x_{121}(t), x_{122}(t), \dots, x_{12\alpha}(t), \dots, x_{12m}(t)], \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 x_{1l}(t) &= F_{1l} [x_{1l1}(t), x_{1l2}(t), \dots, x_{1l\alpha}(t), \dots, x_{1lm}(t)], \\
 x_{21}(t) &= F_{21} [x_{211}(t), x_{212}(t), \dots, x_{21\alpha}(t), \dots, x_{21m}(t)], \\
 x_{22}(t) &= F_{22} [x_{221}(t), x_{222}(t), \dots, x_{22\alpha}(t), \dots, x_{22m}(t)], \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 x_{2l}(t) &= F_{2l} [x_{2l1}(t), x_{2l2}(t), \dots, x_{2l\alpha}(t), \dots, x_{2lm}(t)], \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 x_{k1}(t) &= F_{k1} [x_{k11}(t), x_{k12}(t), \dots, x_{k1\alpha}(t), \dots, x_{k1m}(t)], \\
 x_{k2}(t) &= F_{k2} [x_{k21}(t), x_{k22}(t), \dots, x_{k2\alpha}(t), \dots, x_{k2m}(t)], \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 x_{kl}(t) &= F_{kl} [x_{kl1}(t), x_{kl2}(t), \dots, x_{kl\alpha}(t), \dots, x_{klm}(t)],
 \end{aligned}
 \tag{11.2.2}$$

где  $x_{11\alpha}, x_{21\alpha}, \dots, x_{kl\alpha}(t)$  — отдельные проверки.

Функции, входящие в систему (11.2.1), называются функциями первого разложения, входящие в систему (11.2.2) — функциями второго разложения.

Запишем общее выражение для функций третьего разложения:

$$x_{ija} = F_{ija} [x_{ija1}(t), x_{ija2}(t), \dots, x_{ija\beta}(t), \dots, x_{ija\alpha}(t)], \tag{11.2.3}$$

где  $x_{ija\beta}(t)$  — элементарные операции отдельных проверок.

Время  $t$  введено в рассмотрение для того, чтобы сделать модель чувствительной к временным зависимостям. Такая необходимость возникает при описании алгоритмических процессов.

Рассмотренная система формализации позволяет с заданной точностью отображать большие количества сложной учебной информации. Информация в такой форме удобно описывается булевыми функциями и, следовательно, легко реализуется автоматами. Однако проведение проверок и выполнение элементарных операций  $x_{ija\beta}(t)$ , предусмотренных технической документацией,





обнаруживают свою несостоятельность как раз в то время, когда необходимо их вмешательство, — при возникновении аварий.

Быстрая и умелая ликвидация аварий и неисправностей может предупредить человеческие жертвы и выход из строя дорогостоящей техники. Ошибочные действия персонала могут повлечь за собой развитие и углубление аварии. Статистика показывает, что наблюдается значительный процент аварий, получивших развитие из-за неправильных действий персонала [27, 39, 41, 99]. Работа операторов в режиме «ожидания», что является характерным для АСКУ, по своей внутренней структуре приближается к деятельности операторов в аварийных ситуациях: и в том и в другом случае на фоне незначительного потока информации или ее полного отсутствия внезапно появляется очень большой поток информации [20]  $I = \log p$ , где  $I$  — частная информация о событии [13];  $p$  — вероятность наступления ожидаемого события. При этом возможно появление грубых ошибок со стороны операторов, потеря самообладания, иногда даже прекращение всякой деятельности — самоустранение.

В каком-то проценте случаев неадекватное поведение работника в аварийных условиях или в момент получения сигнала в режиме ожидания может быть объяснено случайностью — угнетенным или перевозбужденным состоянием, нездоровьем и пр. Однако остается значительное число других поведений, которые так объяснить не удастся. При обсуждении известных случаев, относящихся к ликвидации аварий, было выдвинуто предположение, что неадекватное поведение работника определяется его природными данными, его индивидуальными особенностями в основных (или типологических) свойствах нервной системы, в первую очередь в силе процесса возбуждения, а также в балансе нервных процессов [23]. Как бы ни был квалифицирован оператор, о его пригодности судят прежде всего по его поведению при возникновении аварий.

В предыдущем параграфе был рассмотрен вопрос о повышении эффективности тренажеров, причем было обосновано требование, предусматривающее разработку в тренажерах устройств, обеспечивающих случайный ввод неисправностей и создание аварийных ситуаций. Обоснование производилось с позиций повышения эффективности обучения операторов. В связи с этим целе-



сообразно рассмотреть возможности использования тренажеров для профессионально-технического отбора операторов, так как именно поведение оператора в аварийных ситуациях является «пробным камнем», на котором проверяются его качества как оперативного работника.

В настоящем параграфе будут рассмотрены методологические стороны проблемы отбора. Описание лабораторной установки и результаты эксперимента приводятся в гл. 12. В основу методики эксперимента отбора можно положить шкалы порядка или квазисерии [82, 103, 115].

Система с отношениями

$$U = \langle A, R \rangle,$$

содержащая множество  $A$  и одно двуместное отношение  $R$ , называется двуместной системой. Двуместная система  $\langle A, I \rangle$  называется системой квалификации, если  $I$  является отношением эквивалентности в  $A$ , т. е. обладает [82]:

- рефлексивностью, если  $a \in A$ , то  $aIa$ ;
- симметричностью, если  $a, b \in A$  и  $aIb$ , то  $bIa$ ;
- транзитивностью, если  $a, b, c \in A$  и  $aIb, bIc$ , то  $aIc$ .

В простейшем случае отношение эквивалентности может совпадать с отношением равенства.

Система с отношениями  $U = \langle A, I, P \rangle$  является квазисерией, когда  $\langle A, I \rangle$  — система классификации;  $P$  — двуместное транзитивное отношение.

Если  $a, b \in A$ , то верно только одно из следующих утверждений:  $aPb, bPa$  или  $aIb$ . Например, когда  $A$  — группа людей,  $I$  — отношение «того же роста, как»,  $P$  — отношение «ниже ростом, чем», то система с отношениями  $\langle AIP \rangle$  будет квазисерией.

В психологических экспериментах, если ввести фактор времени (тест на «скорость»), то можно испытуемым предложить ряд идентичных заданий. Различные результаты, полученные при выполнении теста, и испытуемые, их получившие, могут быть расположены в соответствии с числом положительных ответов, полученных за определенное время.

В аварийной ситуации поведение и состояние оператора может быть описано с помощью признаков:

- время ликвидации аварии;

- число ошибок;
- величина кровяного давления;
- частота дыхания;
- кожно-гальваническая реакция;
- протокольное описание поведения (суетливость, появление пота и красных пятен на лице и т. п.).

Каждый из этих признаков обладает разной информативностью в отношении определения профессиональной пригодности оператора. Наиболее правильным будет заключение с учетом всех признаков и при условии медикобиологического и психофизиологического исследования нервной системы. Такой подход сопряжен со значительными трудностями при разработке методики исследования, создания экспериментальных установок и обработке статистического материала. В ряде случаев представляет интерес использование более простой, но достаточно надежной методики отбора: при наборах в учебные заведения, при формировании групп обслуживания АСУ и т. п. При этом в качестве признаков для построения квазисерий можно выбрать:

- разность времени

$$\Delta t_i = t_{ai} - t_{hi},$$

где  $t_{hi}$  — время выполнения алгоритма ликвидации аварии, полученное при обучении без эмоциональной напряженности;  $t_{ai}$  — время ликвидации аварии при работе в режиме ожидания и при воздействии фактора помехи, усиливающего эмоциональную напряженность;

- число ошибок  $n$  при выполнении алгоритма ликвидации аварии;
- протокольное описание поведения.

Для регистрации признаков автомат контроля, сопряженный с тренажером, должен иметь дополнительно электрические часы и счетчик ошибок.

Квазисерии, полученные на основании экспериментального материала, позволяют не только упорядочить испытуемых по профессиональной пригодности, но и произвести классификацию [115]. Пусть, например,  $A$  — множество испытуемых. Если  $I$  будет отношением эквивалентности, таким что  $aIb$  имеет место тогда и только тогда, когда  $a$  и  $b$  совершили одну ошибку при ликвидации аварии, то класс «одна ошибка» будет содержать всех испытуемых, совершивших одну ошибку. Аналогичные рассуждения могут быть проведены для 0, 2, 3, ...

ошибок. При этом множество всех  $l$  эквивалентных классов  $A/I$  будет содержать  $k+1$  элементов.

Следует добавить, что полученные таким образом классы не пересекаются. Если классы эквивалентности  $[a], [b] \in A/I$ , то или  $[a] = [b]$ , или  $[a] \cap [b] = \emptyset$ .

Использование  $r$  признаков позволяет получить  $r$  квазисерий с  $k+1$  классами в каждой:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k+1,1} & A_{k+1,2} & \dots & A_{k+1,r} \end{pmatrix}.$$

При этом надежность отбора может быть увеличена за счет получения последовательностей при пересечении  $r$  объединений  $i$  классов (где  $i=1, 2, 3, \dots, k$ ):

$$\begin{aligned} V_1 &= A_{11} \cap A_{12} \cap \dots \cap A_{1r}, \\ V_2 &= (A_{11} \cup A_{21}) \cap (A_{12} \cup A_{22}) \cap \dots \cap (A_{1r} \cup A_{2r}), \\ &\dots \\ V_k &= (A_{11} \cup A_{21} \cup \dots \cup A_{k1}) \cap (A_{12} \cup A_{22} \cup \dots \cup A_{k2}) \dots \\ &\dots \cap (A_{1r} \cup A_{2r} \cup \dots \cup A_{kr}). \end{aligned}$$

Выбор последовательности  $V_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) будет определяться необходимым количеством абитуриентов. Оценка надежности отбора может быть выполнена с помощью известных методов дисперсионного анализа.

#### 11.4. Критерии оценки эффективности тренажеров

При разработке и эксплуатации технических средств обучения, и в частности тренажеров, в настоящее время используется ряд критериев. Рассмотрим основные из них.

Надежность тренажера — это вероятность безотказной работы аппаратуры в течение заданного времени в определенных условиях эксплуатации. Иными словами, надежность измеряется вероятностью того, что время исправной работы аппаратуры  $T$  будет больше заданного  $t$ :

$$P(t) = \text{Вер}(T > t).$$

Учитывая принятое деление отказов на постепенные и внезапные и их взаимонезависимость, надежность тре-

нажера может быть определена как вероятность того, что отсутствуют оба вида отказов:

$$P(t) = P_k(t) \prod_{i=1}^M P_{ci}(t),$$

где  $P_k(t)$  — вероятность внезапных отказов;  $P_{ci}(t)$  — вероятность того, что  $i$ -й параметр за время  $t$  не вышел за пределы допуска.

Коэффициент готовности — это вероятность того, что тренажер исправен в любой заданный момент времени периода эксплуатации [81]:

$$K_{\Gamma} = t_{cp} / (t_{cp} + \tau_{в}),$$

где  $t_{cp}$  — средняя наработка на отказ исследуемого устройства;  $\tau_{в}$  — среднее время восстановления аппаратуры.

Можно указать на два производных критерия от коэффициента готовности: коэффициент вынужденного простоя и коэффициент профилактики.

*Коэффициент вынужденного простоя* — это вероятность того, что тренажер в любой произвольно выбранный момент времени находится в неисправном состоянии:

$$K_{\Pi} = 1 - K_{\Gamma} = \tau_{в} / (\tau_{в} + t_{cp}).$$

*Коэффициент профилактики* определяется отношением суммарного времени, затраченного на восстановление работоспособности аппаратуры, к суммарному времени безотказной работы за один и тот же период эксплуатации:

$$K_{\text{пр}} = (1 - K_{\Gamma}) / K_{\Gamma} = \tau_{в} / t_{cp}.$$

Коэффициенты  $K_{\Gamma}$ ,  $K_{\Pi}$ ,  $K_{\text{пр}}$  характеризуют обобщенные свойства аппаратуры, но тем не менее они не могут достаточно полно определить работоспособность сложных систем. Эти показатели не учитывают характер (вес) отказов отдельных компонентов системы с точки зрения их влияния на способность системы выполнять заданные функции. Критерием, лишенным этих недостатков, является коэффициент технической эффективности.

*Коэффициент технической эффективности* определяется взвешенной суммой коэффициентов технической эффективности по всем возможным состояниям системы

$$\mathcal{E}(P, \Phi) = \sum_{i=0}^{\beta} P_i \Phi_i,$$

где  $P_i$  — вероятность  $i$ -го состояния системы;  $\beta$  — число состояний системы;  $\Phi_i$  — коэффициент технической эффективности  $i$ -го состояния системы.

Рассмотренные критерии являются общеизвестными и применимы для большинства технических систем, в том числе и для тренажеров. Особенность их применения в данном случае будет заключаться только в методах оптимизации, но этот вопрос не затрагивается в настоящей книге.

В то же время тренажер характеризуется специфическими особенностями, вытекающими из его целевого назначения: он является информационной моделью реальной аппаратуры, предназначен для обучения и контроля знаний обучаемых, может быть использован для профессионально-технического отбора операторов.

Реализация этих особенностей ставит вопрос о разработке дополнительных критериев, которые позволили бы осуществлять синтез и оценку эффективности спроектированной аппаратуры.

*Надежность идентификации* определяет степень подобия тренажера реальной аппаратуре:  $\kappa_c = F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$ , и является той числовой характеристикой, которая обуславливает точность построения тренажера как информационной модели реальной аппаратуры.

Обоснованию и разработке данного критерия посвящены гл. 10 и § 11.1. Критерий должен задаваться в ТТТ на разработку аппаратуры.

*Критерий оценки эффективности обучения и контроля.* Рассматривая тренажер, сопряженный с автоматом контроля, как автоматическую систему обучения и контроля (АСОК), можно воспользоваться для оценки эффективности следующим методом, изложенным в [54].

Вероятность выполнения оператором своих функциональных обязанностей определяется по формуле

$$P^0_0 = \prod_{i=1}^n p^0_{0i}, \quad (11.4.1)$$

где  $p^0_{0i}$  — априорная вероятность работоспособности оператора в  $i$ -й ситуации (элементарная проверка, неисправность, авария и т. п.).

Апостериорная вероятность работоспособности оператора в  $i$ -й ситуации после применения АСОК определяется по формуле

$$p_{oi} = \frac{p^{0oi}(1 - p_{лoi})}{p^{0oi}(1 - p_{лoi}) + (1 - p^{0oi})p_{нoi}}, \quad (11.4.2)$$

где  $p_{лoi}$  — вероятность ложного отказа в  $i$ -й ситуации;  $p_{нoi}$  — вероятность необнаруженного отказа в  $i$ -й ситуации.

Под ложным отказом понимаются отсутствующие на самом деле отказы, которые ложно обнаруживаются в процессе контроля. Для дискретной системы с конечным числом возможных состояний можно положить, что

$$p_{лoi} = 0, \quad (11.4.3)$$

т. е. при проектировании имеется возможность исключить случаи, когда автомат будет браковать правильную работу оператора.

Под необнаруженными отказами понимаются существующие в действительности отказы, которые не обнаруживаются в процессе контроля. В АСОК необнаруженные отказы определяются вероятностью создания той или иной ситуации (проверка, неисправность, авария и т. п.), что реализуется с помощью датчика случайных событий (ДСС). Можно записать, что

$$p_{нoi} = (1 - p_{ДССi})^v, \quad (11.4.4)$$

где  $p_{ДССi}$  — вероятность появления  $i$ -й ситуации при одном цикле обучения и контроля;  $v$  — количество циклов обучения и контроля.

Подставляя (11.4.3) и (11.4.4) в (11.4.2), получаем выражение для апостериорной вероятности работоспособности оператора в  $i$ -й ситуации:

$$p_{oi} = \frac{p^{0oi}}{p^{0oi} + (1 - p^{0oi})(1 - p_{ДССi})^v}. \quad (11.4.5)$$

Считая ситуации независимыми, с учетом (11.4.1) определяем апостериорную вероятность выполнения оператором своих функциональных обязанностей:

$$P_o = \prod_{i=1}^n p_{oi} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \left[ 1 + \frac{1 - p^{0oi}}{p^{0oi}} (1 - p_{ДССi})^v \right]}. \quad (11.4.6)$$

При  $i=1, 2, \dots, l$   $p_{\text{ДСС}i} = 1$ . Это соответствует режиму, когда  $i$ -я ситуация возникнет при каждом цикле обучения и контроля.

При  $i=l+1, l+2, \dots, m$   $p_{\text{ДСС}i} = p_{\text{ДСС}} = \text{const}$ . В этом случае  $i$ -я ситуация при каждом цикле обучения и контроля может появиться с вероятностью  $p_{\text{ДСС}}$ .

При  $i=m+1, m+2, \dots, n$   $p_{\text{ДСС}i} = 0$ . Данное условие выражает тот факт, что  $i$ -я ситуация не моделируется на тренажере и по ней отсутствует обучение и контроль оператора.

С учетом рассмотренных вариантов формула (11.4.6) приобретает следующий вид:

$$P_0^{(1)} = \frac{\prod_{i=m+1}^n p_{0i}}{\prod_{i=l+1}^m \left[ 1 + \frac{1 - p_{0i}}{p_{0i}} (1 - p_{\text{ДСС}})^v \right]}. \quad (11.4.7)$$

В тех случаях, когда  $(1 - p_{0i})/p_{0i} \ll 1$ , может быть использована приближенная формула для определения  $P_0$ :

$$P_0^{(2)} = \frac{\prod_{i=m+1}^n p_{0i}}{1 + (1 - p_{\text{ДСС}})^v \sum_{i=l+1}^m (1 - p_{0i})/p_{0i}}. \quad (11.4.8)$$

Иногда с достаточной степенью точности можно принять

$$p_{0i} = p_{01} = p_{02} = \dots = p_{0i} = p_0^{\frac{1}{n}}. \quad (11.4.9)$$

Тогда формула (11.4.7) преобразуется к виду

$$P_0^{(3)} = \left[ 1 + \frac{1 - p_0^{\frac{1}{n}}}{p_0^{\frac{1}{n}}} (1 - p_{\text{ДСС}})^v \right]^{\frac{1}{m-l}} p_0^{\frac{n-m}{n}}. \quad (11.4.10)$$

Величины  $P_0^{(1)}$ ,  $P_0^{(2)}$  и  $P_0^{(3)}$  характеризуют уровень знаний обучаемого. Этого еще недостаточно для оценки эффективности АСОК.

В [112] рассматриваются следующие критерии оценки эффективности обучения:

$$\Delta P = P_0 - P^0_0, \quad \mathcal{E}(P, T) = \Delta P / T = (P_0 - P^0_0) / T.$$

Величина  $\Delta P$  является мерой того, какое количество информации усвоено в процессе обучения. Введение в рассмотрение времени обучения  $T$  позволяет перейти к динамической характеристике процесса обучения. В этом случае величина  $\mathcal{E}(P, T)$  может быть ассоциирована со скоростью обучения.

Как показано в [54, 102], более полным является критерий эффективности, учитывающий стоимость, поскольку через стоимость может быть выражено и время процесса  $T$ , и объем, и вес оборудования, и стоимость самого оборудования. Учитывая сказанное, можно записать

$$\mathcal{E}(C, P) = (P_0 - P^0_0) / C,$$

где  $\mathcal{E}(C, P)$  — вероятностный критерий оценки эффективности обучения;  $C$  — стоимость обучения.

Исследования, проведенные в [102], показывают, что вероятностные критерии являются недостаточно чувствительными при больших значениях вероятностей и не всегда соответствуют физическому смыслу процесса обучения.

Критерий будет действительно характеризовать эффективность процесса обучения и контроля, если он охарактеризует информационную способность процесса обучения. Количество информации, полученное обучаемым, определится как

$$I_{об} = H_0 - H,$$

где

$$H_0 = \sum_{i=1}^n H_{0i} = - \sum_{i=1}^n [p^0_{0i} \log_2 p^0_{0i} + (1 - p^0_{0i}) \log_2 (1 - p^0_{0i})];$$

$$H = \sum_{i=1}^n H_i = - \sum_{i=1}^n [p_{0i} \log_2 p_{0i} + (1 - p_{0i}) \log_2 (1 - p_{0i})].$$

Эффективность процесса обучения и контроля с информационной точки зрения можно оценить критерием



$$\mathcal{E}(I) = \frac{\sum_{i=1}^n H_{oi} - \sum_{i=1}^n H_i}{\sum_{i=1}^n H_{oi}}. \quad (11.4.11)$$

Этот критерий обладает следующими достоинствами. Критерий имеет физический смысл и действительно характеризует процесс обучения однозначно некоторым числом, изменяющимся от 0 до 1.

Оценку эффективности АСОК с учетом эксплуатационной стоимости необходимо выполнять по формуле [54]

$$\mathcal{E}(I, C) = \mathcal{E}(I) k_3, \quad (11.4.12)$$

где  $k_3$  — коэффициент, учитывающий стоимость эксплуатации в рублях;  $k_3 = C_{ск} / (C_{ск} + C_3)$ ;  $C_{ск}$  — стоимость АСОК;  $C_3$  — стоимость эксплуатации АСОК;  $C_3 = \alpha_3 T_k$  при  $\alpha_3 = (C_{обсл} + C_{зип}) / t_{рес}$ , где  $T_k$  — время обучения и контроля;  $t_{рес}$  — ресурс АСОК;  $C_{обсл}$  — стоимость содержания обслуживающего персонала;  $C_{зип}$  — стоимость ЗИП.

При проектировании и оценке тренажеров могут оказаться полезными два производных критерия, полученных из выражений (11.4.8) и (11.4.10).

Необходимое число циклов обучения и контроля  $v$  при заданных  $P_{об}$ ,  $p_{дсс}$  и  $p^{0}_{об}$  и  $p^{0}_{об} \neq \text{const}$  на основании выражения (11.4.8) определяется по формуле

$$v^{(1)} = \frac{1}{\lg(1 - p_{дсс})} \left[ \lg \left( \prod_{i=m+1}^n p^{0}_{об i} - P_{об} \right) - \lg P_{об} \sum_{i=l+1}^m \frac{1 - p^{0}_{об i}}{p^{0}_{об i}} \right]. \quad (11.4.13)$$

При  $p^{0}_{об i} = p^{0}_{об} \frac{1}{n} = \text{const}$  на основании выражения (11.4.10) будем иметь

$$v^{(2)} = \frac{1}{\lg(1 - p_{дсс})} \left[ \lg p^{0}_{об} \frac{1}{n} \left( p^{0}_{об} \frac{n-m}{n(m-l)} - p^{0}_{об} \frac{1}{m-l} \right) - \lg p^{0}_{об} \frac{1}{m-l} \left( 1 - p^{0}_{об} \frac{1}{n} \right) \right]. \quad (11.4.14)$$

Вероятность настройки датчика случайных событий  $P_{\text{ДСС}}$  при заданных  $v$ ,  $P_{\text{об}}$ ,  $p^{\text{об}}_i$  и  $p^{\text{об}}_i \neq \text{const}$

$$P_{\text{ДСС}}^{(1)} = 1 - \left[ \frac{\prod_{i=m+1}^n p^{\text{об}}_i - P_{\text{об}}}{p^{\text{об}}_i \sum_{i=l+1}^m \frac{(1 - p^{\text{об}}_i)}{p^{\text{об}}_i}} \right]^{1/v} \quad (11.4.15)$$

Если  $p^{\text{об}}_i = \text{const}$ , то

$$P_{\text{ДСС}}^{(2)} = 1 - \left[ \frac{p_{\text{об}}^{0 \frac{1}{n}} (p_{\text{об}}^{\frac{n-m}{n(m-l)} - p_{\text{об}}^{\frac{1}{m-l}})}{p_{\text{об}}^{\frac{1}{m-l}} (1 - p_{\text{об}}^{0 \frac{1}{n}})}} \right]^{1/v} \quad (11.4.16)$$

В заключение приведем критерии, которые могут быть использованы при синтезе тренажеров и оценке их эффективности.

Наименование критерия	Формула
Надежность тренажера	$P(t) = \text{Вер}(T > t)$
Коэффициент готовности	$K_{\Gamma} = \frac{t_{\text{ср}}}{t_{\text{ср}} + \tau_{\text{в}}}$
Коэффициент вынужденного простоя	$K_{\Pi} = 1 - K_{\Gamma}$
Коэффициент профилактики	$K_{\text{пр}} = \frac{1 - K_{\Gamma}}{K_{\Gamma}}$
Коэффициент технической эффективности	$\mathcal{E}(P, \Phi) = \sum_{i=0}^{\beta} P_i \Phi_i$
Надежность идентификации	$\kappa = F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$
Информационные критерии оценки эффективности обучения и контроля	$\mathcal{E}(I), \mathcal{E}(I, C)$
Необходимое число циклов обучения	$v = F(P_{\text{об}}, P_{\text{ДСС}}, p^{\text{об}}_i)$
Вероятность настройки датчика случайных событий	$P_{\text{ДСС}} = F(v, P_{\text{об}}, p^{\text{об}}_i)$

В результате можно сделать следующие выводы:

1) если рассматривать тренажер как автоматическую систему обучения и контроля (АСОК) со случайным входом неисправностей и созданием аварийных ситуаций, то представляется возможным исключить субъек-

тивный фактор при обучении оператора, разработать математический аппарат для оценки степени обученности и критерии оценки эффективности обучения и контроля;

2) предлагаемые критерии позволят не только оценивать спроектированные тренажеры, но и осуществлять элементы синтеза, определяя настройку датчика случайных событий и необходимое число циклов обучения и контроля для конкретных условий обучения;

3) Тренажеры могут использоваться для профессионально-технического отбора операторов с учетом аварийных ситуаций. При отборе можно использовать шкалы порядка (квэзисерии).

## Глава 12

### МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПРИНЦИПОВ ПОСТРОЕНИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ ТРЕНАЖЕРОВ

#### 12.1. Проверка гипотезы о статистическом механизме восприятия образов человеком

Материал гл. 10 базируется на принятии положения о статистической природе восприятия и распознавания образов человеком. Эта гипотеза высказывалась ранее в работах [97, 108, 113]. В [5] показано, что человек в процессе распознавания хорошо знакомых образов обращает внимание, в первую очередь, на наиболее отличительные признаки предъявляемых ему реализаций. Отыскание этих признаков производится на основании вероятностного анализа совокупности реализаций в процессе обучения. Решение принимается в соответствии с апостериорным распределением вероятностей. Содержание работ [5, 97, 108, 113] дает основание считать, что процессы восприятия и распознавания имеют вероятностную природу.

Однако незначительное количество работ по данному вопросу и узкий круг исследованных задач не позволяют рассматриваемую гипотезу считать полностью проверенной. Только новые эксперименты позволят доказать типичность случаев и общий характер статистической природы восприятия и распознавания образов челове-

ком. В качестве стимулов следует выбрать временные интервалы, не исследованные ранее [5, 108, 113].

Основная цель эксперимента заключается в том, чтобы осуществить сравнительную количественную оценку результатов распознавания временных интервалов человеком и автоматом и разработать методику составления описания классов распознаваемых объектов.

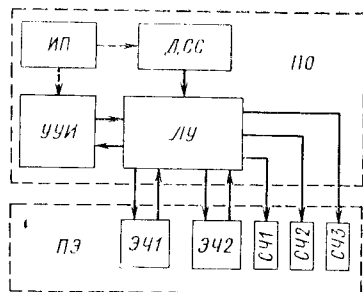


Рис. 12.1.1.

На рис. 12.1.1 представлена структурная схема установки, предназначенной для исследования процессов восприятия человеком временных интервалов. На схеме приняты следующие обозначения:

ПО — пульт оператора;

ПЭ — пульт экспериментатора;

ЛУ — логическое устройство;

УУИ — устройство управления и индикации;

ИП — источник питания;

ДСС — датчик случайных событий;

ЭЧ1 — электрические часы эталонного времени;

ЭЧ2 — электрические часы контрольного времени;

СЧ1 — счетчик ошибок первого рода;

СЧ2 — счетчик ошибок второго рода;

СЧ3 — счетчик количества циклов испытаний.

Электрические часы с подвижными установочными стрелками предназначены для задания временных интервалов в качестве стимулов и измерения времени с точностью 0,01 с.

Электромеханические счетчики используются для регистрации количества циклов испытаний и ошибок первого и второго рода при работе испытуемого.

Устройство управления и индикации и логическое устройство обеспечивают необходимую коммутацию и обработку информации при проведении исследования.

Датчик случайных событий задает вероятность появления сравниваемых стимулов. Описание датчика приведено в § 12.2.

Эксперимент состоит из двух этапов. На первом этапе определяется закон распределения погрешности вос-

приятия эталонного временного интервала  $T_0$ ,  $N(m_T, \sigma_T)$ .

При этом используется метод, разработанный Фехнером и называемый методом установки, или средней ошибки [103]. Испытуемый уравнивает стимул с предварительно или одновременно воспринимаемым эталоном и повторяет это действие много раз. Получаемые значения должны воспроизводить значение эталона, но в действительности они рассеяны вокруг последнего и обнаруживают случайное распределение в некотором диапазоне неразличимости.

Таблица 12.1.1

$T, c$	$T-m_T,$ c	$(T-m_T)^2,$ c <sup>2</sup>	$T, c$	$T-m_T,$ c	$(T-m_T)^2,$ c <sup>2</sup>	$T, c$	$T-m_T,$ c	$(T-m_T)^2,$ c <sup>2</sup>
15,5	-5,5	30,25	19,5	-1,5	2,25	24,5	+3,5	12,25
20,5	-0,5	0,25	21,5	+0,5	0,25	18	-3	9
19,5	-1,5	2,25	19	-2	4	19,5	-1,5	2,25
22,5	+1,5	2,25	18,5	-2,5	6,25	18,5	-2,5	6,25
20,5	-0,5	0,25	25	+4	16	18	-3	9
26	+5	25	22	+1	1	20,5	-0,5	0,25
17,5	-3,5	12,25	22,5	+1,5	2,25	21,5	+0,5	0,25
19	-2	4	20	-1	1	22,5	+1,5	2,25
21,5	+0,5	0,25	20	-1	1	19,5	-1,5	2,25
22	+1	1	19	-2	4	20	-1	1
21	0	0	21,5	+0,5	0,25	20	-1	1
20,5	-0,5	0,25	19,5	-1,5	2,25	18,5	-2,5	6,25
18,5	-2,5	6,25	24	+3	9	19,5	-1,5	2,25
17,5	-3,5	12,25	21	0	0	17,5	-3,5	12,25
17	-4	16	19	-2	4	20	-1	1
21	0	0	21	0	0	20	-1	1
18	-3	9	19	-2	4	20	-1	1
23	+2	4	19,5	-1,5	2,25	19,5	-1,5	2,25
28	+7	49	23	+2	4	17,5	-3,5	12,25
25	+4	16	16,5	-4,5	20,25	21,5	+0,5	0,25
21	0	0	20,5	-0,5	0,25	21	0	0
25	+4	16	15	-6	36	27	+6	36
21	0	0	17,5	-3,5	12,25	24	+3	9
25	+4	16	18,5	-2,5	6,25	20,5	-0,5	0,25
22,5	+1,5	2,25	23	+2	4	22	+1	1
26	+5	25	24,5	+3,5	12,25	19,5	-1,5	2,25
20,5	-0,5	0,25	22,5	+1,5	2,25	19	-2	4
26,5	+5,5	30,25	22	+1	1	23,5	+2,5	6,25
22	+1	1	19,5	-1,5	2,25	23,5	+2,5	6,25
29	+8	64	22	+1	1	23	+2	4
23	+2	4	19,5	-1,5	2,25	20,5	-0,5	0,25
21,5	+0,5	0,25	20,5	-0,5	0,25	22	+1	1
26	+5	25	21,5	+0,5	0,25	19	-2	4
21	0	0	23,5	+2,5	6,25	23,5	+2,5	6,25
19	-2	4	22,5	+1,5	2,25			

В данном случае испытуемому предъявляется временной интервал  $T_0$ , который он должен затем воспроизвести. Каждый цикл испытания состоит из одного предъявления  $T_0$  и одного воспроизведения. В табл. 12.1.1 представлены результаты испытания, а на рис. 12.1.2— гистограмма распределения ошибок, совмещенная с графиком нормальной плотности вероятности.

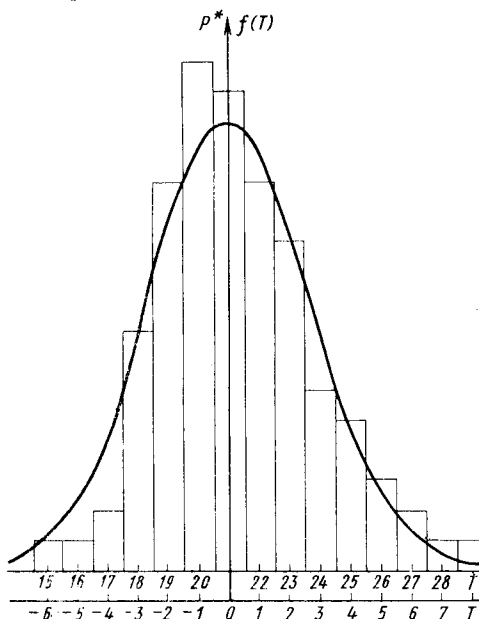


Рис. 12.1.2.

Проверку согласованности теоретического и статистического распределения можно произвести по критерию  $\chi^2$ . Получено значение  $\chi^2=4,588$  при числе степеней свободы  $k=6$ , что меньше значения  $\chi^2_{\alpha}$ , соответствующего 50%-ному уровню значимости. Следовательно, гипотезу о нормальности закона распределения погрешности восприятия временного интервала можно считать правдоподобной.

Второй этап эксперимента состоит в проверке гипотезы о статистическом механизме восприятия человека. В каждом цикле испытуемому сначала предъявляется эталонный временной интервал, а затем с вероятностью

Таблица 12.1.2

<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>
1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$P^*(T_k)=0,51$$

$$P^*_{1(2)}=0,1$$

$$P^*_{2(1)}=0,12$$

0,5 — контрольный временной интервал ( $T_k > T_0$ ) или тот же самый — эталонный. Вероятности  $P(T_k) = P(T_0) = 0,5$  задаются с помощью датчика случайных событий.

Испытуемый должен произвести различение двух стимулов ( $T_0$  и  $T_k$ ). При этом возможны ошибки двоякого рода: пропуск стимула, ложная тревога.

В табл. 12.1.2 приведены результаты эксперимента, где  $k$  — появление контрольного стимула;  $l$  — событие, состоящее в приеме контрольного стимула при условии предъявления эталонного;  $m$  — событие, состоящее в приеме эталонного стимула при условии предъявления контрольного;  $P^*(T_k)$  — статистическая вероятность появления контрольного стимула;  $P^*_{1(2)}$  — статистическая вероятность ложной тревоги;  $P^*_{2(1)}$  — статистическая вероятность пропуска контрольного стимула.

Статистическая вероятность ошибки различения  $T_0$  и  $T_k$  определится выражением

$$P^*_{\text{ош}} = P^*_{1(2)} + P^*_{2(1)}. \quad (12.1.1)$$

В том случае, если поведение испытуемого соответствует идеальному наблюдателю, или наблюдателю Зигерта — Котельникова [121], вероятность ошибки различения должна вычисляться по формуле

$$P_{\text{ош}} = 0,5 - \Phi\left(\frac{T_k - T_э}{2\sqrt{D_T}}\right), \quad (12.1.2)$$

где  $D_T$  — дисперсия, определенная на первом этапе эксперимента.

Таким образом, проверка гипотезы о статистическом механизме восприятия человека сводится к оценке вероятности  $P_{\text{ош}}$  по частоте  $P^*_{\text{ош}}$ .

Отличие от классической постановки данной задачи [13, 111] состоит в том, что вероятность  $P_{\text{ош}}$  является неслучайной функцией случайного аргумента  $D_T$ , и, следовательно, вычисленный доверительный интервал должен накрывать не точку, а область практически возможных значений  $P_{\text{ош}}$ . Числовые характеристики случайной величины  $D_T$  определяются по формулам [13, 111]

$$m(D_T) = D_T = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (T_i - m_T)^2, \quad (12.1.3)$$

$$\sigma(D_T) = \sqrt{\frac{2}{n-1}} D_T = \sqrt{\frac{2}{(n-1)^3}} \sum_{i=1}^n (T_i - m_T)^2, \quad (12.1.4)$$

где  $n$  — число циклов испытания.

Применяя метод линеаризации, определим числовые характеристики случайной величины  $P_{\text{ош}}$ :

$$m(P_{\text{ош}}) = P_{\text{ош}},$$

$$\sigma(P_{\text{ош}}) = \left[ \frac{\partial P_{\text{ош}}(D_T)}{\partial D_T} \right]_{m(D_T)} \sqrt{\frac{2}{n-1}} D_T. \quad (12.1.5)$$

После несложных преобразований, выражение (12.1.5) приводится к виду

$$\sigma(P_{\text{ош}}) = \frac{T_k - T_э}{4\sqrt{\pi(n-1)}D_T} \exp\left\{-\frac{(T_k - T_э)^2}{8D_T}\right\}. \quad (12.1.6)$$

Задаваясь доверительной вероятностью  $\beta$ , определим доверительный интервал, соответствующий практически возможным значениям  $P_{\text{ош}}$  [13]:

$$I_{\beta} = (P_{\text{ош}} - \Delta P_{\text{ош}}; P_{\text{ош}} + \Delta P_{\text{ош}}),$$



где  $\Delta P_{\text{ош}} = \sigma(P_{\text{ош}}) \sqrt{2} \Phi^{-1}(\beta)$ ;  $\Phi^{-1}(\beta)$  — функция, обратная функции Лапласа.

Значение функции  $\Phi^{-1}(\beta)$  определяется из таблицы [13], где  $t_{\beta} = \sqrt{2} \Phi^{-1}(\beta)$ .

Непротиворечивость экспериментальных данных рассматриваемой гипотезе оценивается следующими неравенствами:

$$|P^*_{\text{ош}} - (P_{\text{ош}} + \Delta P_{\text{ош}})| < \sqrt{2} \Phi^{-1}(\beta) \times \sqrt{\frac{(P_{\text{ош}} + \Delta P_{\text{ош}})(1 - P_{\text{ош}} - \Delta P_{\text{ош}})}{n}}, \quad (12.1.7)$$

$$|P^*_{\text{ош}} - (P_{\text{ош}} - \Delta P_{\text{ош}})| < \sqrt{2} \Phi^{-1}(\beta) \times \sqrt{\frac{(P_{\text{ош}} - \Delta P_{\text{ош}})(1 - P_{\text{ош}} + \Delta P_{\text{ош}})}{n}}.$$

Результаты вычислений, полученные из формул (12.1.1) — (12.1.7) (табл. 12.1.3), не противоречат гипотезе о статистическом механизме восприятия человека.

Таблица 12.1.3

$P^*_{\text{ош}}$	$m(D_T)$	$\sigma(D_T)$	$m(P_{\text{ош}})$	$\sigma(P_{\text{ош}})$	$t_{\beta}$ ( $\beta = 0,99$ )
0,22	7,05	1,0	0,28	0,0136	0,315; 0,245
$ P^*_{\text{ош}} - (P_{\text{ош}} + \Delta P_{\text{ош}}) $ $ P^*_{\text{ош}} - (P_{\text{ош}} - \Delta P_{\text{ош}}) $			$t_{\beta} \sqrt{\frac{(P_{\text{ош}} + \Delta P_{\text{ош}})(1 - P_{\text{ош}} - \Delta P_{\text{ош}})}{n}}$ $t_{\beta} \sqrt{\frac{(P_{\text{ош}} - \Delta P_{\text{ош}})(1 - P_{\text{ош}} + \Delta P_{\text{ош}})}{n}}$		
0,095			0,119		
0,025			0,11		

Примечание. Исследования показывают, что функция  $P_{\text{ош}} = F(D_T)$  на интервале  $[D_T + 3\sigma(D_T); D_T - 3\sigma(D_T)]$  очень близка к линейной, и поэтому использование данной методики можно считать оправданным. В противном случае область возможных значений вероятности  $P_{\text{ош}}$  определяется при подстановке в выражение (12.1.2) практически возможных значений случайного аргумента.

## 12.2. Устройство для обучения операторов АСУ со случайным вводом неисправностей

Рассматриваемое устройство относится к учебным приборам (тренажерам), обеспечивающим обучение и отработку практических навыков у операторов АСУ.

Отличительной особенностью деятельности операторов подобных систем является умение правильно действовать в сложных, напряженных условиях возникновения неисправностей и аварийных ситуаций. В существующих тренажерах это достигается введением неисправностей и созданием аварийных ситуаций с последующим контролем правильности действия операторов со специального пульта руководителя занятий. Как правило, руководитель вводит неисправности вручную. Он же контролирует правильность работы операторов.

В некоторых случаях контроль осуществляется автоматически, но ввод неисправностей остается прежним, в принципе отличаясь от неисправностей и аварийных ситуаций, которые имеют место в действительности и носят случайный вероятностный характер. Как отмечалось в § 10.2, все это накладывает субъективный отпечаток на процесс обучения и контроля.

Известно, что если имеется система случайных событий  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , характеризующихся вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , причем  $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ , то среднее количество ин-

формации, получаемое при реализации событий, может быть определено по формуле

$$I = - \sum_{i=1}^k p_i \log p_i.$$

Максимального значения величина  $I$  достигает при  $p_1 = p_2 = \dots = p_k = 1/k$ .

Руководитель занятий не может вручную обеспечить требуемое распределение вероятностей появления событий и тем самым не обеспечивает оптимальности обучения.

Рассматриваемое устройство отличается от существующих в настоящее время тем, что осуществляет введение неисправностей или аварийных ситуаций при обучении операторов случайным образом, причем вероятность соответствующих ситуаций может изменяться

(регулироваться) в зависимости от конкретных требований обучения. Это достигается применением специального датчика случайных событий.

Структурная схема тренажера с датчиком случайных событий представлена на рис. 12.2.1. Обозначения, принятые в схеме: 1 — оператор; 2 — органы управления пульта оператора; 3 — элементы сигнализации и контроля пульта оператора; 4 — датчик случайных

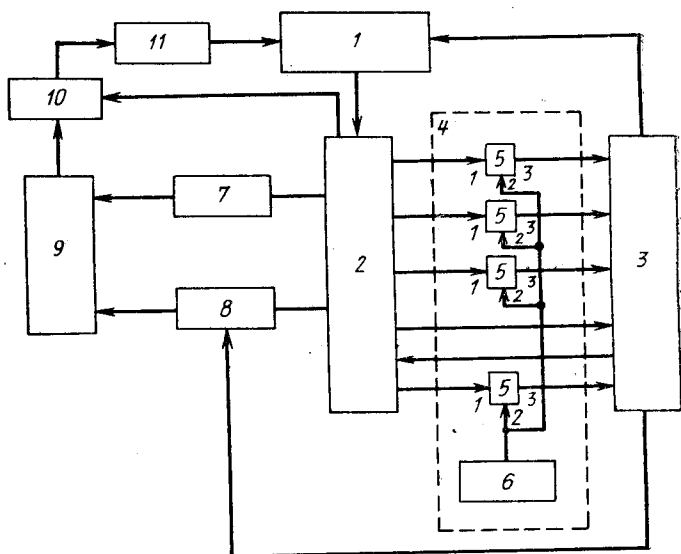


Рис. 12.2.1.

событий; 5 — схемы совпадения; 6 — генератор временных интервалов; 7 — шифратор; 8 — запоминающее устройство; 9 — устройство сравнения; 10 — решающее устройство; 11 — устройство выдачи оценки.

Работа оператора 1 заключается в реализации определенных алгоритмов посредством органов управления 2 на пульте. Информация о состоянии технологических систем выдается на элементы сигнализации и контроля 3 после прохождения через датчик случайных событий 4 и приобретения вероятностного характера.

Таким образом, если оператор включил в работу некоторую систему А, исправное состояние которой характеризуется загоранием транспаранта  $\alpha$ , а отказ незагоранием  $-\alpha$ , то датчик случайных событий 4 реализует эти ситуации с вероятностями  $p(\alpha)$  и  $p(-\alpha) = 1 - p(\alpha)$  соответственно. При этом реакция оператора на возникшую неисправность может контролироваться как вручную руководителем занятий, так и автоматически при помощи устройств 7, 8, 9, 10 и 11.

Код неисправности воздействует на запоминающее устройство 8, которое начинает выдавать в устройство сравнения 9 программные кодовые послылки, соответствующие алгоритму устранения возникшей неисправности. Оператор посредством органов управления 2 и шифратора 7 формирует кодовые послылки в устройство сравнения 9, соответствующие его действительной работе. В устройстве 9 происходит сравнение программного алгоритма с действительным и результат выдается в решающее устройство 10. Решающее устройство обрабатывает поступающую информацию, формирует оценку оператору и выдает ее через устройство выдачи оценки 11.

Датчик случайных событий 4 состоит из генератора временных интервалов 6 и схем совпадения 5, число которых соответствует количеству реализуемых событий. На рис. 12.2.2 представлены графики, поясняющие принцип работы датчика случайных событий.

Генератор временных интервалов 6 формирует напряжение  $U_1$ , которое подается на входы 2 схемы совпадения. При этом  $T = t_3 - t_1$  и  $t_a = t_2 - t_1$ . На входы 1 схем совпадения подается импульсное напряжение  $U_2$ , соответствующее определенным событиям. Для примера, рассмотренного выше, это может быть импульс включения в работу системы А. Появление подобных событий на отрезке  $(t_1, t_3)$  подчинено закону равномерной плотности, который может быть записан следующим образом:

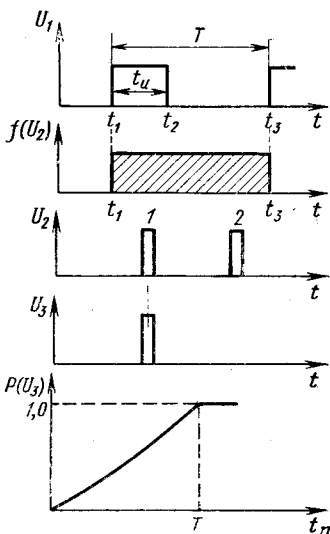


Рис. 12.2.2.

$$f(U_2) = 1/(t_3 - t_1) \quad \text{при } t_1 < t < t_3,$$

$$f(U_2) = 0 \quad \text{при } t < t_1 \text{ или } t > t_3. \quad (12.2.1)$$

Сигнал  $U_3$  на выходе 3 схемы совпадения появится тогда, когда произойдет совпадение по времени импульса  $U_2$  с напряжением  $U_1$  и вероятность появления сигнала  $U_3$  будет определяться вероятностью попадания импульса  $U_2$  на отрезок  $(t_1, t_2)$ :

$$p(U_3) = p(t_1 < t < t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t_3 - t_1} dt = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} \quad (12.2.2)$$

или

$$p(U_3) = t_u / T. \quad (12.2.3)$$

Таким образом, изменяя длительность  $t_u$  напряжения  $U_1$ , можно изменять (регулировать) вероятность соответствующего события.

### 12.3. Экспериментальные результаты и рекомендации по профессионально-техническому отбору операторов

Лабораторная установка, предназначенная для профессионально-технического отбора, выполнена на базе устройства, описанного в § 12.2. Структурная схема установки изображена на рис. 12.3.1. Обозначения, принятые в схеме: ОП—оператор; ПО—пульт оператора; ПЭ—пульт экспериментатора; ЛУ—логическое устройство; УУИ—устройство управления и индикации; ДСС—датчик случайных событий; ЗУ—запоминающее устройство; УС—устройство сравнения; ИП—

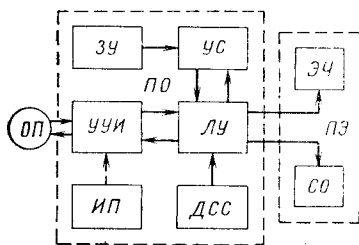


Рис. 12.3.1.

источник питания; ЭЧ—электрические часы; СО—счетчик ошибок.

Цель эксперимента—проверить эффективность методики и аппаратуры при проведении профессионально-технического отбора операторов АСУ [60].

Методика эксперимента состоит в следующем. На первом этапе испытуемый обучается по разработанной инструкции выполнению определенного алгоритма работы, соответствующего некоторой аварийной ситуации. При этом фиксируется время работы и число допускаемых ошибок, являющихся показателями степени обученности испытуемого. Обучение прекращается при достижении стационарного режима работы (11—12 циклов). В табл. 12.3.1 заносится среднее время выполнения алгоритма  $t_a$  при стационарном режиме работы.

Второй этап эксперимента характеризуется работой оператора в режиме ожидания случайного появления аварийной ситуации. Вероятность ситуации определяется настройкой датчика случайных событий. Напряженность эмоционального фона обеспечивается звонком, сопровождающим состояние аварии. Оператор обязан выполнить тот алгоритм работы, которому он был обучен. При этом фиксируется и заносится в табл. 12.3.1 число ошибок  $n$  и время ликвидации аварий  $t_h$ .

Вычисляются значения  $\Delta t_i = t_{hi} - t_{ai}$ . Время  $t_a$  явля-

Таблица 12.3.1

$t_a, c$	$t_k, c$	$\Delta t = t_k - t_a$	$n$	$t_a, c$	$t_k, c$	$\Delta t = t_k - t_a$	$n$
8,23	5,76	-2,47	0	7,34	10,12	+2,78	0
6,42	6,26	-0,16	0	14,79	12,34	-2,45	0
8,56	6,66	-1,9	0	9,41	12,63	+3,22	0
7,16	7,01	-1,15	0	6,4	13,27	+6,87	0
8,32	7,12	-1,2	0	30,67	32,94	+2,27	0
8,6	7,47	-1,13	0	19,57	38,54	+18,97	1
7,02	8,43	+1,41	0	16,64	65,13	+48,49	2

ется показателем пропускной способности оператора. На время  $t_k$  влияют два основных фактора — пропускная способность и типологические свойства нервной системы (сила процесса возбуждения и баланс нервных процессов). Именно из этих соображений следует предположить, что время  $\Delta t$  является показателем типологических свойств нервной системы и может рассматриваться как основной признак, характеризующий поведение человека в аварийных ситуациях.

На основании числовых значений данного признака с использованием математической модели § 11.3, может быть получена квазисерия, в которой испытуемые будут расположены по мере возрастания (убывания) их оперативных способностей. Аналогичные последовательности могут быть получены и по другим признакам, учет которых необходим при профессионально-техническом отборе (морально-политические качества, состояния здоровья, дисциплинированность и др.).

Таблица 12.3.2

$i$	$A_{i1}$	$A_{i2}$	$A_{i3}$	...	$A_{iq}$
1	$A_1$	$A_6$	$A_3$	...	$A_{10}$
2	$A_7$	$A_7$	$A_{11}$	...	$A_7$
3	$A_3$	$A_5$	$A_{14}$	...	$A_5$
...	...	...	...	...	...
$l$	$A_l$	$A_l$	$A_l$	...	$A_l$
...	...	...	...	...	...
$r$	$A_9$	$A_2$	$A_2$	...	$A_4$

В общем случае получим  $q$  квазисерий (по числу учитываемых признаков), которые можно представить в виде табл. 12.3.2, где  $A_l$  ( $l=1, 2, \dots, r$ ) — личный номер (фамилия) испытуемого.

По каждой квазисерии может быть построено множество переменной мощности  $\beta$ :

$$M_1(\beta) = \bigcup_{i=1}^{\beta} A_{i1}; \quad M_2(\beta) = \bigcup_{i=1}^{\beta} A_{i2}; \quad \dots, \quad M_q(\beta) = \bigcup_{i=1}^{\beta} A_{iq}.$$

При  $\beta=1$   $M_1, M_2, \dots, M_q$  — одноэлементные множества; при  $\beta=r$   $M_1=M_2=\dots=M_q$ .

Пересечение  $q$  множеств переменной мощности  $\beta$  образует множество переменной мощности  $\alpha$ :

$$V(\alpha) = \prod_{\substack{j=1 \\ \beta=1, 2, \dots, r}}^q M_j(\beta). \quad (12.3.1)$$

Если  $\beta=1$   $\alpha \leq 1$  и  $V = \emptyset$ , то  $V$  — одноэлементное множество; если  $\beta=r$ ,  $\alpha=r$ , то  $V = M_1 = M_2 = \dots = M_q$ .

При отборе задача состоит в нахождении множества  $V$  мощности  $m$ , где  $m$  — требуемое количество специалистов данного профиля.

Мощность множеств  $M_j$ , обеспечивающая заданную мощность  $m$  множества  $V$ , может быть определена при

Таблица 12.3.3

$i$	$A_{i1}$	$A_{i2}$	$A_{i3}$	$V(1)$	$V(2)$	$V(3)$	$V(4)$	$V(8)$	$V(10)$	
1	$A_1$	$A_4$	$A_5$	$A_3$	$A_3$	$A_3$	$A_3$	$A_3$	$A_3$	
2	$A_9$	$A_{11}$	$A_7$							$A_1$
3	$A_3$	$A_3$	$A_8$							$A_5$
4	$A_5$	$A_2$	$A_3$							$A_2$
5	$A_4$	$A_6$	$A_{12}$							$A_7$
6	$A_8$	$A_8$	$A_9$							$A_8$
7	$A_2$	$A_{13}$	$A_1$							$A_9$
8	$A_7$	$A_1$	$A_{14}$							$A_4$
9	$A_{12}$	$A_5$	$A_2$							
10	$A_3$	$A_7$	$A_{11}$							
11	$A_{10}$	$A_9$	$A_4$							
12	$A_{11}$	$A_{10}$	$A_{10}$							
13	$A_{13}$	$A_{14}$	$A_{13}$							
14	$A_{14}$	$A_{12}$	$A_6$							
				$\beta=4$	$\beta=8$	$\beta=9$	$\beta=9$	$\beta=11$	$\beta=12$	

помощи метода половинного разбиения (дихотомии). В табл. 12.3.3 приведены квазисерии по трем признакам:  $A_{i1}$  — оперативное качество;  $A_{i2}$  — морально-политические качества;  $A_{i3}$  — состояние здоровья.

Квазисерия  $A_{i1}$  получена из экспериментальных данных таблицы. Данные  $A_{i2}$ ,  $A_{i3}$  приведены в виде примера.

Показано, что множества  $V(\alpha)$  ( $\alpha=1, 2, 3, 4, 8, 10$ ) могут быть получены при значениях мощности множеств  $M_j(\beta)$  ( $\beta=4, 8, 9, 11$  и  $12$ ). Неопределенность, которая может возникнуть в некоторых случаях (например, для  $V(\beta)$  при  $\beta=3$ ), ликвидируется установлением приоритета одних признаков по отношению к другим. В рассматриваемом случае при  $\beta=8$ ,  $V(2)=\{A_3, A_1\}$ ; при  $\beta=9$ ,  $V(4)=\{A_3, A_1, A_5, A_2\}$ .

Для множества  $V(3)$  из двух элементов,  $A_5$  или  $A_2$ , выбирается тот элемент, для которого значение первого признака лучше  $V(3)=\{A_3, A_1, A_5\}$ .

Проведенное исследование показало эффективность описанной аппаратуры и методики при профессионально-техническом отборе операторов АСУ.

В заключение можно сделать некоторые выводы и рекомендации.

Обучение операторов не является самоцелью и поэтому не должно рассматриваться изолированно от конкретно решаемых задач. Влияние «человеческого фактора» должно учитываться, начиная с этапа проектирования, ибо только в этом случае представляется возможным произвести оптимальное распределение средств на проектирование аппаратуры, ее эксплуатацию и обучение обслуживающего персонала. Это требование носит чисто психологический характер, так как должно заставить проектные организации задуматься не только над проектированием основной аппаратуры, но и предусмотреть создание необходимых тренировочных средств. В этом случае будет обеспечена оперативность в создании тренажеров, что в значительной степени повысит эффективность АСУ.

Введение в рассмотрение критического значения постоянной обучения  $\omega_{кр}$  позволяет установить границу целесообразности использования оператора в автоматизированных системах. В том случае, когда  $\omega < \omega_{кр}$ , использование оператора в АСУ целесообразно. При  $\omega > \omega_{кр}$  использование оператора в АСУ является мало-



эффективным и можно рекомендовать в этом случае разработку полностью автоматических систем.

Как одно из средств, уменьшающих значение величины постоянной обучения  $\omega$ , должны рассматриваться тренажеры — информационные модели реальной аппаратуры, точность построения которых обуславливается психофизическими характеристиками человека.

Анализ возможностей использования тренажеров для профессионально-технического отбора позволяет сделать вывод о том, что описанная в книге аппаратура и методика позволят достаточно эффективно решать задачи по отбору операторов требуемого профиля. При этом методика позволит учитывать такие факторы, как морально-политические качества, состояние здоровья, дисциплинированность и т. п.

Наряду с общеизвестными критериями, применяемыми при проектировании и оценке технических средств широкого назначения, например надежность, коэффициент готовности, коэффициент профилактики, синтез тренажеров требует дополнительных критериев, отражающих специфические особенности, таких как: критерий надежности идентификации; критерий оценки эффективности обучения и контроля; необходимое число циклов обучения и контроля; вероятность настройки датчика случайных событий.

## Глава 13

### **СИСТЕМА КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ ОПЕРАТОРОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ [57, 22д]**

Для создания автоматизированной системы управления учебным процессом необходимо предусмотреть прежде всего реализацию системы контроля знаний операторов и системы контроля хода учебного процесса.

#### **13.1. Место контролирующих устройств в управлении учебным процессом**

Самым слабым звеном в учебном процессе, как правило, является явно недостаточное количество или иногда даже полное отсутствие информации у преподавателя о качестве усвоения изучаемого материала, о правиль-

ном понимании его, о самостоятельной работе операторов. Представление об этом может быть получено лишь в конце обучения, да и то лишь по некоторым курсам и далеко не полное, так как за те несколько часов, которые отводятся для беседы преподавателя во время экзамена или зачета с целой группой операторов, трудно выяснить истинные знания, полученные операторами за весь период обучения.

Для более успешного проведения занятий преподаватель должен знать о работе операторов над прочитанным материалом, о качестве его усвоения. Это можно сделать с помощью внедрения технических средств в учебный процесс, например автоматизированных контролирующих устройств. К системам контроля должны предъявляться следующие основные требования:

— удобство обмена информацией между человеком и машиной;

— наиболее рациональный метод ввода ответов в машину, при котором у оператора была бы полная инициатива при ответе на вопрос;

— удобство задания контрольных вопросов;

— простота ввода программы работы контролирующей машины;

— обеспечение индивидуальности работы каждого оператора;

— достаточная универсальность машины, чтобы с ее помощью можно было проводить занятия по различным учебным курсам;

— быстрота перехода от проведения занятий по одному курсу к занятиям по другому;

— быстрота анализа введенного оператором ответа и выдачи результата;

— возможность удобного наблюдения преподавателем за ходом работы каждого оператора;

— возможность накопления статистического материала о ходе занятий по различным курсам;

— простота обслуживания и ремонта;

— сравнительно простая схема построения и невысокая стоимость оборудования.

Одним из наиболее существенных вопросов, влияющих на принцип построения системы, является метод ввода ответов в машину. В настоящее время известно несколько таких методов, основными из которых явля-

ются выборочный, численно кодированный и конструктивный.

Выборочный метод является самым простым методом ввода ответа; контролирующие машины, реализующие его, получаются также наиболее простыми и дешевыми. Однако этот метод имеет существенные недостатки, которые ставят под сомнение целесообразность применения таких контролирующих машин в учебном процессе. Основным недостатком является несовершенство методики построения ответа на вопросы, предлагаемые операторам. Когда операторам предлагается вопрос и серия ответов на него, один из которых правильный, а остальные неправильные, то оператор, как правило, проводит не детальный последовательный анализ материала, благодаря которому он может сформулировать правильный ответ, а пытается угадать ответ.

При выборочном методе усложнен процесс задания вопросов, а также смены программы работы контролирующей машины, так как для этого надо иметь специальные карточки. Кроме того, сложен процесс подбора неправильных ответов, более или менее похожих на правильные. Все это ограничивает широкое внедрение этого метода контроля в учебный процесс.

Численно-кодированный метод обладает недостатками, присущими как выборочному, так и конструктивному методам. На практике он не нашел широкого применения.

В основу метода ввода ответа в машину целесообразно положить конструктивный метод, при котором оператору задается вопрос и никаких сведений об ответе не сообщается. Оператор «составляет» или «конструирует» ответ и вводит его без всякой перекодировки. Этот способ задания вопроса и составления ответа принципиально ничем не отличается от обычного задания вопроса преподавателем и ответа на него оператором. При этом вопросы могут быть заданы или непосредственно преподавателем, или в виде бланка с вопросами.

Основное преимущество этого метода состоит в том, что оператор работает в привычных условиях, которые являются свойственными для человека, когда он, получив вопрос, обдумывает его, анализирует изученный им материал и составляет ответ, который затем вводит в машину.

При реализации конструктивного метода ввода ответа требуется построение сложных машин, которые должны обладать способностью запоминать введенную информацию и перерабатывать ее по определенным правилам при анализе введенного оператором ответа. В настоящее время во многих вузах для этой цели пытаются приспособить ЭЦВМ.

В работах [2д, 7д] описываются классы, которые не всегда реализуют конструктивный метод ввода ответа, но в принципе могут его реализовать.

Процесс составления и ввода программы работы машины, а также ее обслуживания может выполняться людьми, имеющими специальную подготовку. Кроме того, преподавателю необходимо потратить много времени и энергии на разработку методики проведения этих занятий, что снижает их эффективность.

В будущем, несомненно, вычислительная техника будет широко применяться в учебном процессе, но для этого необходимо решить ряд вопросов, например усовершенствовать процесс обмена информацией между человеком и машиной, создать небольшие специализированные машины для этих целей, обладающие приемами обработки информации, большим объемом памяти и др. Они должны быть простыми в обслуживании, недорогими, доступными для работы любому преподавателю, не имеющему специальной подготовки.

### **13.2. Контролирующие устройства с конструктивным вводом ответа**

Под контролирующими устройствами с конструктивным вводом ответа понимают устройства, обеспечивающие ввод конструктивного ответа и заключение о его правильности.

Основной трудностью при построении таких устройств является различие языка машины и человека. Если человек работает с привычными для него знаками (буквами, цифрами), словами, выражениями, то машина может работать только с кодом. Поэтому возникает проблема перекодировки языка человека на язык машины. Для этого нужны программисты, обеспечивающие работу контролирующей или обучающей машины. Обучение программированию всех операторов потребует много времени и снизит эффективность обучения. По-

этому необходимо разработать способ ввода ответа в машину, позволяющий без всякой подготовки автоматически решать вопрос перекодировки информации.

В описываемом контролирующем устройстве [63д, 64д] с этой целью использовался метод последовательного нажатия кнопок или клавишей, снабженных индексами или словами, необходимыми для ввода ответа по методу, напоминающему печатание на пишущей машинке. Каждая кнопка при этом имеет свой код, который заносится в запоминающее устройство машины при ее нажатии.

Таким образом, вводя ответ, оператор автоматически **вводит в машину** числа, соответствующие индексу, обозначенному на кнопке. При этом, чтобы запомнить каждое число, введенное кнопкой при ее нажатии, требуется очень большой объем памяти. Кроме того, при конструктивном вводе ответа на один и тот же вопрос можно составить не одну форму ответа, а несколько, что увеличивает объем памяти в соответствующее число раз.

При построении таких машин также возникает проблема учета последовательности нажатия кнопок, т. е. последовательности ввода ответа. С одной стороны, машина должна учитывать эту последовательность, например, при вводе ответа  $a-b$ , а с другой стороны, она должна одинаково реагировать на последовательность ввода индексов, например, для ответа  $a+b$ . Если в первом случае  $a-b$  и  $b-a$  — разные ответы, то в другом  $a+b$  и  $b+a$  — ответы равнозначные.

Таким образом, если строить контролируемую или обучающую машину с конструктивным вводом ответа по методу построения ЭЦВМ, то она будет очень громоздкой и дорогой, а ее обслуживание — относительно сложным. Поэтому в большинстве случаев отказывались от метода конструктивного ввода ответа. Этим можно объяснить большое разнообразие машин, реализующих выборочный метод, и почти полное отсутствие машин, позволяющих вводить ответ конструктивным методом, хотя преимущества последнего с педагогической точки зрения не вызывают сомнений.

Для практического построения контролирующего устройства, которое бы реализовало конструктивный метод ввода ответа, разработаны специальные приемы запоминания и обработки информации, поступающей в машину от преподавателя и оператора. При этом оказа-

лось, что такие контролирующие устройства можно строить по разным принципам в зависимости от требований, предъявляемых к ним.

Самым простым устройством может быть устройство с конструктивным вводом однозначного ответа, т. е. такого ответа на вопрос, который имеет единственную форму. Принцип построения таких устройств состоит в следующем.

Если принять, что ввод ответа в машину осуществляется путем набора кнопок, как описывалось раньше, то при нажатии каждой кнопки в запоминающее устройство машины будет вводиться некоторое число. Назовем его кодом кнопки и обозначим через  $a_i$ , где  $i$  — номер кнопки. При последовательном нажатии кнопок во время ответа будут вводиться числа, допустим  $a_1, a_2$  и т. д. Если эти числа просуммировать, то получим их сумму, равную

$$N = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad (13.2.1)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — числа, вводимые в машину каждой кнопкой при ее нажатии.

Таким образом, в результате ввода ответа в суммирующем устройстве машины образуется некоторое число, равное сумме чисел соответствующих кодов кнопок, нажимаемых при этом. Для каждой совокупности кнопок, т. е. для каждого ответа на вопрос, это число будет разным, но для одного и того же ответа оно будет всегда постоянным. Таким образом, если преподавателю, который задает вопрос, известен ответ (а это так и должно быть при любом методе машинного контроля знаний) и код кнопок, которые будут использоваться при вводе вопроса в машину, то он может узнать сумму, которая получится при наборе ответа на машине. Если преподаватель введет эту сумму в машину, а затем даст возможность оператору ответить на поставленный вопрос, то при ответе он также наберет некоторое число, представляющее сумму кодов используемых при ответе кнопок. При правильном ответе эти суммы окажутся равными. Машина сравнивает числа и выдает соответствующий сигнал «правильно» или «неправильно».

Достоинства машины, построенной по такой схеме, состоят в том, что она не требует специального перекодирования информации при вводе ответа и не требует специального программирования, необходимого при за-

дании вопроса. Получить сумму правильного ответа может каждый преподаватель. Кроме того, легко этот процесс автоматизировать таким образом, чтобы преподаватель с помощью кнопок «код вопроса» набирал ответ, а сумма получалась автоматически. Предполагается, что кнопки «код вопроса» должны быть вынесены на пульт преподавателя, тогда с их помощью можно задавать программу работы не одного рабочего места, а сразу нескольких.

Недостаток такого принципа построения состоит в том, что он может быть применен для построения контролирующих устройств с однозначным ответом. Кроме того, устройство, реализующее его, будет все-таки сложно и потребует значительных затрат. Его можно значительно упростить, если использовать тот же принцип, но в сумматоре получать не настоящую сумму чисел при вводе ответа, а формировать некоторое число, которое будет получаться при нажатии кнопок «набор ответа». При этом сравниваются не две суммы, а два числа, закон их получения не имеет значения. В этом случае вместо сложного сумматора можно применить регистр, в котором будет формироваться число  $N$  при параллельном вводе в него чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  во время ответа. Схема контролирующего устройства в этом случае значительно упрощается и может состоять только из одного регистра сдвига и триггера  $T$ .

Кроме того, в такой схеме можно реализовать автоматический учет последовательности ввода различных элементов ответа, т. е. обеспечить учет последовательности нажатия одних кнопок и не учитывать эту последовательность для других. Если при вводе кодов различных индексов в регистр эти числа будут складываться в них, то от перемены мест слагаемых сумма не изменится, что обеспечивает произвольный порядок ввода этих индексов.

В таком случае машина выдает сигнал «правильно» и при вводе индексов  $a+b$  и  $b+a$ . Если эту последовательность необходимо учитывать (как, например, при вводе  $a-b$ ), то некоторым кнопкам надо придать еще функцию сдвига числа, ранее записанного в регистре. В этом случае конечное число, получающееся в регистре при вводе  $a-b$ , не равно числу, получающемуся при обратном вводе этих же индексов, и, таким образом, машина сможет учесть последовательность нажатия кно-

пок. Справедливость этого можно доказать, исходя из следующих соображений. Так как в регистре всегда записывается число в двоичной системе счисления, то разряды его можно обозначить с помощью букв. Пусть после нажатия каких-то кнопок в регистре образовалось  $m$ -разрядное число  $\langle a_1 a_2 \dots a_m \rangle$ , причем не все  $a=0$  и не все  $a=1$ . При нажатии некоторой кнопки в регистре произошел сдвиг всех элементов на один разряд вправо, так что после этого получилось число

$$\langle b_1 b_2 \dots b_m \rangle = \langle a_m a_1 a_2 \dots a_{m-1} \rangle. \quad (13.2.2)$$

Нужно доказать, что для того, чтобы выполнялось неравенство

$$\langle b_1 b_2 \dots b_m \rangle \neq \langle a_1 a_2 \dots a_m \rangle, \quad (13.2.3)$$

необходимо и достаточно, чтобы не все разряды числа были равны нулю или единице, т. е. чтобы выполнялись неравенства

$$\langle a_1 a_2 \dots a_m \rangle \neq \langle 111 \dots 1 \rangle, \quad (13.2.4)$$

$$\langle a_1 a_2 \dots a_m \rangle \neq \langle 00 \dots 0 \rangle. \quad (13.2.5)$$

Для доказательства необходимости предположим обратное, т. е. при выполнении неравенств (13.2.4) и (13.2.5) выполняется равенство

$$\langle b_1 b_2 \dots b_m \rangle = \langle a_1 a_2 \dots a_m \rangle.$$

Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1, \\ a_2 &= b_2, \\ &\vdots \\ a_m &= b_m. \end{aligned} \quad (13.2.6)$$

В то же время на основании выражения (13.2.2) мы имеем, что

$$\begin{aligned} a_1 &= b_2, \\ a_2 &= b_3, \\ &\vdots \\ a_{m-1} &= b_m, \\ a_m &= b_1. \end{aligned} \quad (13.2.7)$$

Но если:

$$a_1 = b_2 \text{ и } a_2 = b_2, \text{ то } a_1 = a_2;$$

$$a_2 = b_3 \text{ и } a_3 = b_3, \text{ то } a_2 = a_3;$$

$$a_{m-1} = b_m \text{ и } a_m = b_m, \text{ то } a_{m-1} = a_m;$$

$$a_m = b_1 \text{ и } a_1 = b_1, \text{ то } a_m = a_1.$$



Из этого следует, что  $a_1 = a_2 = \dots = a_m$  и, следовательно,  $b_1 = b_2 = \dots = b_m$ . Так как в двоичной системе счисления разряды чисел могут быть равны 0 или 1, то не выполняются условия (13.2.6) и (13.2.7). Отсюда вытекает, что

$$\langle b_1 b_2 \dots b_m \rangle \neq \langle a_1 a_2 \dots a_m \rangle.$$

Таким образом, доказана необходимость. Для доказательства достаточности нужно показать, что если выполняется (13.2.3), то выполняются (13.2.4) и (13.2.5). Предположим обратное, т. е. что выполняется (13.2.3) при

$$\langle a_1 a_2 \dots a_m \rangle = \langle 11 \dots 1 \rangle;$$

$$\langle a_1 a_2 \dots a_m \rangle = \langle 00 \dots 0 \rangle.$$

Тогда в выражении (13.2.6) найдется хотя бы одно неравенство вида  $a_k \neq b_k$ , а выражение (13.2.3) будет по-прежнему выполняться. Среди равенств выражения (13.2.7) будет и равенство  $a_{k-1} = b_k$ , отсюда следует, что  $a_{k-1} \neq a_k$ , а это противоречит нашему условию.

Таким образом, теорема доказана, значит сдвиг чисел в регистре хотя бы на одну ячейку обеспечивает учет последовательности нажатия кнопок. Этот принцип может быть практически реализован для построения контролирующих машин с конструктивным вводом ответа, автоматически учитывающих последовательность ввода символов.

### 13.3. Проблема построения контролирующих устройств с многозначным вводом ответа

Основным недостатком контролирующих устройств, рассмотренных в предыдущем параграфе, является ввод только однозначных ответов. Однако в практике имеются такие вопросы, на которые нельзя ответить однозначно, т. е. имеется несколько равноценных форм ответа. Даже там, где вопросы можно свести к однозначным ответам, видимо, лучше не сковывать инициативу оператора при выборе форм ответа на вопрос.

С этой целью в машине должна быть предусмотрена возможность запоминания каждой из форм ответа. Но это усложнит и удорожит машину. Поэтому можно пойти по следующему пути: если принять во внимание, что большинство вопросов по математическим и техническим

дисциплинам имеет небольшое количество вариантов ответов, которые можно заранее предусмотреть, то можно ввести информацию об этих вариантах в машину, которая способна сопоставлять ее с введенным ответом.

Однако если вводить полную информацию по каждому из возможных ответов на вопрос, то это потребует большого объема памяти машины. С целью экономии памяти можно вводить неполную информацию об этих ответах, т. е. не весь ответ, а некоторые признаки, по которым машина сможет сравнивать введенный в нее ответ. В этом случае контролирующая машина усложнится незначительно. Принцип построения такой контролирующей машины, позволяющей вводить несколько форм правильных ответов, состоит в следующем: каждая кнопка, предназначенная для ввода ответа, имеет свой код, и при вводе ответа в машину в ее запоминающем регистре образуется некоторое число  $A_i$ . Для каждой формы ответа на один и тот же вопрос это число будет разным. Количество таких чисел равно количеству правильных форм ответа.

Обозначим коды форм правильных ответов на один и тот же вопрос соответственно через  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Учитывая, что каждая форма такого ответа складывается из набора кодов кнопок, используемых при вводе ответа, и представляет собой многозначное число (количество разрядов числа будет равно количеству разрядов регистра, используемого для формирования и запоминания этого ответа), то эти коды можно записать в виде

$$\begin{aligned} A_1 &= \langle a^1_1 a^1_2 \dots a^1_m \rangle, \\ A_2 &= \langle a^2_1 a^2_2 \dots a^2_m \rangle, \end{aligned} \quad (13.3.1)$$

.....

$$A_n = \langle a^n_1 a^n_2 \dots a^n_m \rangle,$$

где  $\langle a_1 a_2 \dots a_m \rangle$  — значение разрядов каждого из чисел;  $m$  — количество разрядов регистра;  $n$  — количество форм правильных ответов на один и тот же вопрос.

Обратные коды этих чисел (если не принимать во внимание знаковые разряды) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \langle \bar{a}^1_1 \bar{a}^1_2 \dots \bar{a}^1_m \rangle, \\ \bar{A}_2 &= \langle \bar{a}^2_1 \bar{a}^2_2 \dots \bar{a}^2_m \rangle, \end{aligned} \quad (13.3.2)$$

.....

$$\bar{A}_n = \langle \bar{a}^n_1 \bar{a}^n_2 \dots \bar{a}^n_m \rangle.$$



контролирующей машины с помощью кнопок «набор ответа», расположенных на устройстве ввода ответов. Таким образом, в машину окажутся введенным число  $\Pi$  и число  $A$ . При нажатии кнопки  $K_4$  «результат» происходит поразрядное умножение чисел  $A$  и  $\Pi$  с помощью схем  $\text{И}$ . Если введенный ответ будет одним из ответов  $A_i$ , предусмотренных преподавателем, то с выхода всех схем  $\text{И}$  не поступит никакого сигнала, и триггер устройства «правильно — неправильно» окажется в состоянии «правильно». Если ответ неправильный, то на выходе хотя бы одной схемы  $\text{И}$  образуется сигнал, который переводит триггер в состояние «неправильно».

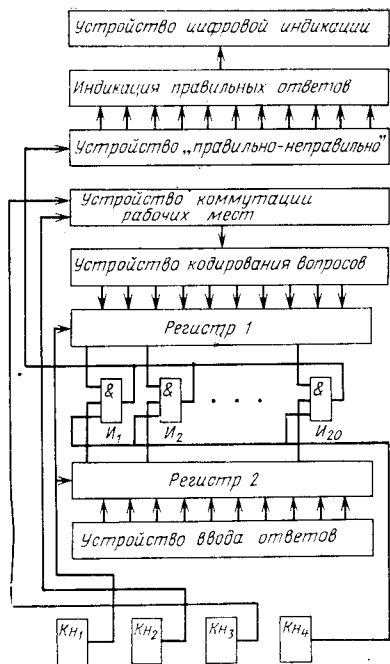


Рис. 13.3.1.

### 13.4. Математическое обоснование достоверности работы контролирующих устройств [64]

При конструктивном вводе ответа его можно представить в виде некоторого двоичного числа  $A$ . Так как любое двоичное число можно рассматривать как некоторое упорядоченное множество нулей и единиц, являющихся элементами этого множества, то это число можно записать в виде

$$A = \langle a_1 a_2 \dots a_m \rangle, \quad (13.4.1)$$

где  $a_1 a_2 \dots a_m$  — разряды числа  $A$  или элементы множества  $A$ ;  $m$  — количество разрядов ячеек памяти контролирующего устройства.

Если на один вопрос имеется несколько правильных ответов, то для машин это эквивалентно наличию не-

скольких чисел, например  $A_1 A_2 \dots A_n$ , где  $n$  — количество правильных ответов на один и тот же вопрос.

Как известно, для того, чтобы выделить общую часть различных множеств, необходимо взять их произведение в виде

$$P = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m. \quad (13.4.2)$$

Если взять поразрядное произведение числа, обратного одному из чисел этого выражения  $\bar{A}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \dots, m$ ), и числа  $P$ ; то всегда получим

$$\bar{A}_i \wedge P = \emptyset, \quad (13.4.3)$$

т. е. получим множество, состоящее из одних нулей, или пустое множество  $\emptyset$ . Этот принцип можно использовать при построении контролирующих машин. Так как преподавателю известны все ответы на вопрос, то ему известно число  $P$ . Если это число ввести в контролируемую машину, а затем предоставить возможность учащемуся вводить ответ, т. е. некоторое число  $A_k$  из  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то машина сама может реализовать выражение (13.4.3), и если ответ правильный, то во всех разрядах числа  $\emptyset$  будут нули, если ответ неправильный, то хотя бы в одном из них окажется единица.

Так как при вводе ответов в контролирующее устройство в нем формируется информация об этих ответах по некоторым законам в виде двоичных чисел, которые имеют разрядность, равную разрядности устройств, используемых в данной контролирующей машине, и, если на один и тот же вопрос может быть составлено несколько правильных ответов, то их можно записать в виде чисел. Для правильных ответов эти числа будут иметь вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \langle a_{11} a_{12} \dots a_{1m} \rangle, \\ A_2 &= \langle a_{21} a_{22} \dots a_{2m} \rangle, \\ &\vdots \\ A_n &= \langle a_{n1} a_{n2} \dots a_{nm} \rangle, \end{aligned} \quad (13.4.4)$$

где  $A_i$  — число, характеризующее некоторый ответ;  $m$  — количество разрядов регистров контролирующих устройств, служащих для записи правильных ответов  $a_{i1} a_{i2} \dots a_{im}$  разрядов числа  $A_i$ .

Пусть  $P = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n = \langle b_1 b_2 \dots b_m \rangle$ . Обозначим

$$C = \bar{A}_i \wedge P. \quad (13.4.5)$$

Если  $A_i \in \{A_1 A_2 \dots A_n\}$ , то согласно (13.4.5)  $C = \langle 00 \dots 0 \rangle$ .

Это соответствует состоянию машины при правильном ответе. Однако в принципе возможны случаи реализации условия (13.4.5) при ложных ответах, т. е. когда

$$A_i \notin \{A_1 A_2 \dots A_n\}. \quad (13.4.6)$$

Это вытекает из того, что одно и то же произведение можно получить с помощью различных сомножителей. Однако если задан вопрос, на который нужно ответить, и оператор, отвечая на него, набирает ответ с помощью индексов, то он не знает ни произведения, которое нужно получить, ни чисел, которые он вводит в машину при ответе, так как не знает кодов кнопок. При этом подобрать неизвестное число, комбинируя неизвестные числа, весьма сложно, особенно если эти числа являются многоразрядными. Эти соображения справедливы при малом количестве правильных форм ответов. Если их количество увеличивается, то при реализации выражения (13.4.6) часть информации об ответах утрачивается, что приводит к увеличению класса чисел, удовлетворяющих условию (13.4.5).

Рассмотрим оптимальные условия, которым должны удовлетворять двоичные числа, соответствующие разным ответам. При этом за основу возьмем запоминающее устройство, которое имеет 20 разрядов, т. е. все ответы записываются 20-разрядными числами. Исследуем эти условия при количестве возможных правильных ответов на один и тот же вопрос от одного до пятнадцати, хотя практически их более 2—3 встречается весьма редко.

Обозначим через  $p(a_k=1)$  вероятность того, что  $a_k=1$ , и через  $p(b_k=0)$  — вероятность того, что  $b_k=0$ , где  $k=1, 2, \dots, 20$  есть  $k$ -й разряд ответа или числа;  $A_i$ ;  $b_k$  ( $k=1, 2, \dots, 20$ ) есть  $k$ -й разряд произведения  $\Pi$  в выражении (13.4.2).

На основании определения поразрядного произведения  $\Pi$ ,  $b_k=1$  только при условии, что  $a_{1k}=a_{2k}=\dots=a_{mk}=1$ . Следовательно,

$$p(b_k=1) = p(a_{1k}=1) p(a_{2k}=1) \dots p(a_{mk}=1), \quad (13.4.7)$$

где  $a_{mk}$  —  $m$ -й разряд  $k$ -го ответа.

Пусть в каждом из ответов единицы в разрядах встречаются с одной и той же вероятностью

$$p(b_k=1) = 1/m, \quad (13.4.8)$$

где  $l$  — количество единицы в числе, характеризующем некоторый ответ;  $m$  — максимальное количество разрядов регистра. Тогда для  $n$  ответов эта вероятность будет

$$p(b_k=1) = (l/m)^n. \quad (13.4.9)$$

Машина реагирует на ложный ответ, если не выполняется условие (13.4.5), т. е. в разрядах числа (13.4.2) будет хоть одна единица. Из соображений, аналогичных ранее рассмотренным, можно написать

$$p(c_k=1) = p(b_k=1)p(\bar{a}_{ik}=1), \quad (13.4.10)$$

где  $\bar{a}_{ik}$  — обратная величина  $k$ -го разряда  $i$ -го числа в выражении (13.4.2). Но

$$p(\bar{a}_{ik}=1) = p(a_{ik}=0), \quad (13.4.11)$$

так как  $\bar{A}_i$  получается заменой всех единиц на нули и всех нулей на единицы, то можно записать

$$p(c_k=1) = p(b_k=1)p(a_{ik}=0). \quad (13.4.12)$$

По аналогии с (13.4.8)

$$p(\bar{a}_{ik}=1) = l/m. \quad (13.4.13)$$

Тогда

$$p(a_{ik}=1) = 1 - l/m. \quad (13.4.14)$$

С учетом этого выражение (13.4.12) можно записать в виде

$$p(c_i=1) = (l/m)^n (1 - l/m). \quad (13.4.15)$$

Максимальное значение этой вероятности соответствует минимальной вероятности прохождения ложного ответа,

Т а б л и ц а 13.4.1

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$l$	10	13	14	15	16	16	17	17	18	18	18	18	19	19	19
$m$	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20

когда машина распознает его как правильный. На ЭЦВМ «Наири» выражение (13.4.15) было подсчитано для  $n=1-15$ . Результаты расчета приведены в табл. 13.4.1.

Из этой таблицы видно, что оптимальное количество единиц в числе, изображающем правильный ответ, зави-

сит от числа возможных правильных ответов, и при увеличении их количества число этих единиц должно увеличиваться. Так при одном ответе на вопрос число, изображающее ответ, будет оптимальным, если в нем имеется половина единиц, половина нулей. Если число ответов равно трем, то количество единиц надо увеличить на 40%, чтобы сохранить такую же вероятность прохождения ложного ответа. При пяти правильных ответах на один и тот же вопрос, количество единиц нужно увеличить на 60%.

При одном ответе на вопрос двоичное число, изображающее ответ, будет оптимальным, если в нем имеется половина нулей, половина единиц. При этом в запоминающий регистр машины, используемый для ввода ответа, можно ввести наибольшее количество возможных чисел, т. е. при случайном подборе ответа потребуется наибольшее количество их вариантов, определяемое как количество возможных перестановок нулей и единиц в двоичном числе, изображающем ответ. Это число можно определить из выражения

$$Q = \frac{m!}{l!q!},$$

где  $m$  — количество разрядов регистра;  $l$  — количество единиц в числе;  $q$  — количество нулей.

При  $m=20$ ;  $l=10$ ;  $q=10$  количество необходимых подборов будет

$$Q = \frac{20!}{10!10!} = 184756.$$

Зная это число, а также время ввода ответа  $t$  и время, отведенное для занятий  $T$ , можно вычислить вероятность угадывания ответа. Она будет равна отношению количества введенных ответов при подборе к количеству необходимых подборов для угадывания ответа, т. е.

$$p = T/tQ.$$

Например, если за время одного часа необходимо подобрать ответ, на ввод которого в машину требуется 10, то эта вероятность будет составлять

$$p = \frac{3600}{10 \cdot 184756} \approx 0,002.$$

Отсюда видно, что если при трех ответах согласно табл. 13.4.1 эта вероятность и увеличится на 40%, она все же будет составлять лишь 0,0028.



### 13.5. Структурная схема автоматизированного класса [63Д, 64Д]

Как показывает опыт использования контролирующих устройств, при ответе на вопрос оператор более 90% своего времени тратит на обдумывание и составление ответа. Сам процесс ввода ответа не занимает много времени.

Ввиду того что анализ ответа, введенного оператором, машина производит за доли секунды, общее время непосредственной работы оператора с машиной составляет не более 5—10% от всего времени его работы при ответе на вопрос. Отсюда следует, что нет необходимости ставить контролирующую машину на каждое рабочее место, так как одна такая машина может работать на несколько рабочих мест.

Выбор оптимального количества мест производится из следующих соображений. Допустим, что оператор тратит на ввод ответа в машину и на работу с ней самое большое количество времени 10%. Тогда максимальное количество мест, которое может обслужить одна машина, составляет  $100\%/10\% = 10$ .

Если учесть, что время, когда оператору нужна машина для ввода ответа распределяется в течение всего занятия неравномерно (часть времени контролирующая машина не работает, например в начале занятия, когда операторы обдумывают вопрос, зато в другое время она используется чаще, например, когда операторы подготовили свои ответы), то, чтобы не задерживать его, необходимо количество мест, обслуживаемых одной машиной, уменьшить. Поэтому в классе одна контролирующая машина обслуживает шесть рабочих мест, а пульт ввода ответа устанавливается на каждом рабочем месте. На пульте имеется сигнализация о правильности введенного оператором ответа в машину и о занятости контролирующей машины, к которой подключен пульт. В самой же машине имеется блокировка, обеспечивающая нормальную работу оператора, вводящего ответ в данный момент. Когда один оператор вводит ответ на пульте, у других загорается сигнал «ожидайте». Кроме того, в схеме предусмотрено подключение пульта к машине через реле времени, поэтому, если контролирующая машина освобождается или оператор не уложился во время, отведенное для ответа, то на всех рабочих

местах загорается зеленая лампочка «отвечайте». При этом оператор может подключаться к контролирующей машине и вводить свой ответ (рис. 3.3.1).

Рассмотрим назначение каждого из элементов, представленных на схеме. Основные из них расположены на рабочем месте оператора. Сюда входят кнопки «набор ответа», с помощью которых оператор вводит свой ответ (на каждом рабочем месте их 30). Они снабжаются надписями в виде индексов, необходимых при вводе ответа. Надписи выполняются на специальных шаблонах, которые легко накладываются на кнопки и снимаются, поэтому индексы кнопок легко сменить, а следовательно, и легко осуществить перевод класса для занятий по другой дисциплине.

Кнопка «начало работы» ( $KH_1$ ) служит для подключения рабочего места к контролирующей машине и приведения всех элементов схемы машины в исходное состояние. Кнопка «поиск вопроса» ( $KH_2$ ) служит для того, чтобы установить рабочее место для ввода ответа по одному из пяти возможных вопросов. Кнопка «ответ закончен» ( $KH_3$ ) служит для посылки сигнала в контролируемую машину о том, что данное рабочее место ответ закончило, и машина может производить его анализ.

При нажатии кнопки «результат» ( $KH_4$ ) загораются лампочки «правильно» или «неправильно» на пульте рабочего места. На пульте оператора имеются также лампочки «номер вопроса», с помощью которых оператор устанавливает машину для ответа по нужному вопросу, а также лампочка «отвечайте по этапам», необходимая при работе класса в соответствующем режиме, устанавливаемом преподавателем. В этом случае, если оператор ответил неправильно на основной вопрос, у него загорается эта лампочка, и он должен отвечать на дополнительные четыре подвопроса, приводящие его к пониманию ответа на основной вопрос.

Кроме пультов рабочих мест, в классе имеется пульт преподавателя, в котором смонтированы все электронные схемы как контролирующих устройств, так и устройств, обеспечивающих различные блокировки и подключения рабочих мест к контролирующим машинам. Кроме того, на этом пульте имеются лампочки индикации правильно введенных в контролирующие машины ответов операторов с каждого рабочего места; лампочки цифровой индикации, с помощью которых преподаватель

в любой момент может определить, какое количество операторов ответило правильно по каждому из вопросов, а также тумблеры режима работы класса и включения питания.

Регистры 1 и 2, а также схемы И являются основными элементами контролирующей машины. Так как к каждому из них подключается по шесть рабочих мест, то для упрощения на рисунке показана схема связи только одного. Остальные показаны стрелками, идущими к регистру 2.

Регистр 1 служит для записи в него информации о правильных формах ответа, которую вводит преподаватель в машину с помощью кнопок «код вопроса». Регистр 2 служит для записи в него и хранения информации об ответе оператора с пульта рабочего места. Переработка информации в обоих регистрах и выдача сигнала о правильности введенного оператором ответа на рабочее место и на пульт преподавателя производится с помощью схем И.

В схеме применяются кнопки с фиксацией положения. Так как само контролирующее устройство производит обработку информации в двоичном коде, то информацию о правильных ответах можно вводить в виде двоичных чисел. При этом, если кнопка зафиксирована в нажатом состоянии, в машину вводится единица, а в исходном (ненажатом) состоянии — нуль. Для преподавателей, не знакомых с двоичной системой счисления, под кнопками стоят обычные десятичные числа.

Устройство коммутации рабочих мест выполняется в основном на шаговых искателях и реле и служит для подключения каждого рабочего места при ответе на вопрос и управления устройствами контролирующей машины при всех манипуляциях.

Устройство «правильно — неправильно» предназначено для регистрации сигналов, поступающих с контролирующей машины, и выдачи этих сигналов на пульт рабочего места и пульт преподавателя.

Устройство индикации правильных ответов служит для запоминания и индикации их на пульте преподавателя, чтобы преподаватель мог следить за эффективностью работы каждого оператора.

Устройство цифровой индикации служит для суммирования всех правильных ответов по каждому вопросу

и при необходимости для их индикации на пульте преподавателя.

При работе класса, если на рабочем месте горит лампочка «отвечайте» и оператор готов ввести ответ в машину, он нажимает кнопку «начало работы». При этом контролирующее устройство подключается к данному рабочему месту и подается напряжение, необходимое для обеспечения работы генератора импульсов. С помощью этого генератора при нажатии каждой кнопки «набор ответа», а также кнопок «ответ закончен» и «результат» в контролируемую машину поступают необходимые сигналы. Одновременно регистр 1 подключается к кнопкам «код вопроса». При этом на пульте рабочего места загорается одна из лампочек «номер вопроса», под которой стоит номер вопроса, на который в данный момент оператор должен отвечать, т. е. код которого сейчас он может ввести. Если оператор хочет ответить на другой вопрос, он с помощью кнопки «поиск вопроса» отыскивает нужный вопрос. Это значит, что он подключает машину для контроля по данному вопросу. В этом случае устройство коммутации обеспечивает подключение необходимых кнопок «код вопроса» к регистру 1. Таким образом, машина подготавливается для ответа на данный вопрос с данного рабочего места.

Далее оператор вводит свой ответ в машину путем последовательного нажатия кнопок «набор ответа», имеющих необходимые для этого индексы. При каждом нажатии кнопки «набор ответа» в регистр 2 вводится некоторое число, которое хранится там до нажатия следующей кнопки, после чего это число изменяется. Изменение числа происходит в зависимости от кодов соответствующих кнопок, т. е. будет выполняться сложение или вычитание, но не обычное, как в суммирующих устройствах, а по «модулю два». Это необходимо для того, чтобы можно было обойтись обычным регистром.

При окончании ввода ответа в регистре 2 образуется некоторое число. Логика работы контролирующей машины для упрощения выполнена таким образом, что это число без дополнительной инверсии соответствует цифре  $\bar{A}$ . При нажатии оператором кнопки «ответ закончен» вырабатывается сигнал, который поступает в устройство коммутации. С помощью этого устройства в регистр 1 переносится информация с кнопок «код вопроса» о правильных формах ответа на данный вопрос. Другими сло-

вами, в регистр *1* с кнопок «код вопроса» переносится число *П*. Таким образом, в обоих регистрах контролирующей машины будет записана необходимая информация.

Далее оператор нажимает кнопку «результат», вследствие чего машина производит поразрядное умножение чисел, хранящихся в регистрах *1* и *2*, и вырабатывает сигнал о правильности введенного ответа. Этот сигнал поступает в устройство «правильно — неправильно», запоминается там до следующего подключения данного рабочего места к контролирующей машине и выдается на пульт рабочего места в виде подсветки соответствующей надписи «правильно» или «неправильно», а также на устройство индикации правильных ответов, где он запоминается до конца занятий. При этом на пульте преподавателя подсвечивается соответствующая лампочка.

Если преподаватель захочет узнать количество правильных ответов по какому-либо вопросу, он нажимает соответствующую кнопку на пульте преподавателя, и устройство цифровой индикации высвечивает цифру правильных ответов. При ответе на следующий вопрос весь процесс повторяется. Автоматизированный класс состоит из четырех таких схем, за исключением устройства цифровой индикации, которое является общим для всех вариантов, поэтому работа каждой из этих схем совершенно аналогична работе описанного варианта.

## Список литературы

1. **Алексеев М. Н.** Сущность процесса обучения.—«Советская педагогика», 1965, № 1.
2. **Ананьев Б. Г.** Человек как предмет познания. ЛГУ, 1968.
3. **Андерсон Т.** Введение в многомерный статистический анализ, М., Физматгиз, 1963.
4. **Введение** в математическую теорию обучения. М., «Мир», 1969. Авт.: Р. Аткинсон и др.
5. **Вопросы** статистической теории распознавания. М., «Сов. радио», 1967. Авт.: Ю. Л. Барабаш, Б. В. Варский, В. Т. Зиновьев и др.
6. **Башмаков М. И.** Уравнения и неравенства. М., «Наука», 1971.
7. **Бичаев Б. П.** Аналоговые и цифровые модели морских газотурбинных установок. Л., «Судостроение», 1969.
8. **Бобнева М. И.** Техническая психология. М., «Наука», 1966.
9. **Бриггс Л.** Обучающие машины для подготовки личного состава к обслуживанию электронного оборудования.—В кн.: Программированное обучение, М., «Воениздат», 1966.
10. **Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.** Справочник по математике. Гостехиздат, 1954.
11. **Буш Р., Мостеллер Ф.** Стохастические модели обучаемости. М., Физматгиз, 1962.
12. **Венда В. Ф.** Средства отображения информации. М., «Энергия», 1969.
13. **Вентцель Е. С.** Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1964.
14. **Гогин Ю. А.** Алгебра логических графов.—В кн. Вопросы проектирования систем автоматического контроля и управления, ЛВИКА им. А. Ф. Можайского, 1966.
15. **Гол Р.** Зависимость гипотетических компонент времени реализации от продолжительности подготовительного периода.—В кн.: Инженерная психология за рубежом. Под ред. А. Н. Леонтьева. М., «Прогресс», 1967.
16. **Глушков В. М.** Синтез цифровых автоматов. М., Физматгиз, 1962.
17. **Глушков В. М., Ющенко Е., Довгялло А., Машбиц Е.** Сегодня и завтра «Электронного учителя».—«Красная звезда», 1968, 15 июня.
18. **Губинский А. И.** Основные понятия теории надежности применительно к человеку.—«Стандарты и качество», 1967. № 1, стр. 36—39.
19. **Губинский А. И., Половко А. М., Фокин Ю. Г.** Принцип количественной оценки надежности систем «человек — техник».—В кн. Надежность комплексных систем «человек — техника». Под ред. А. И. Губинского. ЛДНТП, 1969.
20. **Гуревич К. Н., Эдельман Л. М.** К вопросу о профессиональной пригодности и пропускной способности операторов.—В кн.: Система «Человек и автомат». М., «Наука», 1965.
21. **Денисов А. Е.** Применение осредненных преподавательских оценок в качестве критерия контроля знаний. В кн.: Тезисы док-

ладов НТС «Программированное обучение и обучающие машины». Киев, 1967.

22. Довгялло А. М. Вероятностная модель программированного обучения.—«Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика», 1965, № 3.

23. Доманицкий С. М. Построение надежных логических устройств. М., «Энергия», 1971.

24. Дымерский В. Я. Метод количественного анализа восприятия пространственных и пространственно-временных отношений.— В кн. Инженерная психология. Под ред. А. Н. Леонтьева. МГУ, 1964.

25. Дымерский В. Я. О точности психологического отображения признаков, порогах ощущений и порогах восприятий. Под ред. Д. А. Ошанина.—В кн. Система «Человек и автомат». М., «Наука», 1965.

26. Жучек П. М. Оценка эффективности обучения методами математической статистики.—«Сов. педагогика», 1965, № 6.

27. Зараковский Г. М. Психофизиологический анализ трудовой деятельности. М., «Наука», 1966.

28. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. М., «Наука», 1967.

29. Зинченко В. П. Восприятие как действие.—«Вопросы психологии», 1967, № 1, стр. 17.

30. Зинченко В. П. и др. Деятельность оператора в режиме информационного начала.—«Вопросы психологии», 1965, № 2, стр. 3—16.

31. Зинченко В. П., Зинченко П. И. Исследование памяти в связи с задачами инженерной психологии.—В кн.: Проблемы инженерной психологии. Под ред. Б. Ф. Ломова. Вып. 3. Л., Общество психологов, 1965.

32. Зинченко В. П., Смолян Г. Л. Человек и техника. Система управления и инженерная психология. М., «Знание», 1965.

33. Зинченко В. П., Панов Д. Ю. Построение систем управления и проблемы инженерной психологии.— В кн.: Инженерная психология. М., «Прогресс», 1965.

34. Ильин В. А. Большие системы телемеханики. М., «Энергия», 1967.

35. Ительсон Л. Б. Об использовании математических и кибернетических методов в педагогических исследованиях.—«Сов. педагогика», 1962, № 4.

36. Ительсон Л. Б. Математические и кибернетические методы в педагогике. М., «Просвещение», 1964.

37. Исчисление конечных разностей. Под ред. А. О. Гелефонд. М., «Наука», 1967.

38. Коган Б. М., Тер-Микаэлян Т. М. Решение инженерных задач на цифровых вычислительных машинах. М., «Энергия», 1964.

39. Казаринов М. А. Моделирование деятельности человека-оператора в системе управления.— В кн.: Вопросы военно-инженерной психологии. Под ред. И. Г. Васильева. Вып. 1. ХВКИУ, 1968.

40. Казаринов М. И. Некоторые пути математического описания процесса обучения оператора.— В кн.: Вопросы военно-инженерной психологии. Под ред. И. Г. Васильева. Вып. 1. ХВКИУ, 1968.

41. Карцовник В. С. Оценка эффективности целенаправленной деятельности оператора (коллектива) в сложной системе с исполь-

зованием стохастических моделей обучаемости.— В кн.: Вопросы военно-инженерной психологии. Под ред. И. Г. Васильева. Вып. 1. ХВКИУ, 1968.

42. **Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж.** Введение в конечную математику. М., «Мир», 1965.

43. **Кемени Дж., Снелл Дж.** Конечные цепи Маркова. М., «Наука», 1970.

44. **Колдуэл С.** Логический синтез релейных устройств. М., ИЛ, 1962.

45. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М., «Наука», 1968.

46. **Котик М. А.** Основы инженерной психологии. Тарту, ТГУ, 1969.

47. **Кофман А., Фор Р.** Займемся исследованием операций. М., «Мир», 1966.

48. **Ключко В. И.** Некоторые вопросы подобия и синтеза информационных физических моделей автоматизированных систем.— В кн.: Проблемы инженерной психологии. Вып. 1. Под ред. Б. Ф. Ломова, Л., Общество психологов, 1971.

49. **Ключко В. И.** Получение априорных оценок и прогнозирование обучения.— В кн.: Вопросы военно-инженерной психологии. Под ред. В. И. Нилова. Вып. 2. Харьков, ХВКИУ, 1969.

50. **Крылов А. А.** Читаемость индикаторов и надежность комплекса «измерительный прибор-человек».— «Измерительная техника». 1967, № 12, стр. 53—54.

51. **Крэм Д.** Программированное обучение и обучающие машины. М., «Прогресс», 1965.

52. **Кузьмин И. В.** Проектирование телемеханических систем контроля и управления. Ч. 1. Элементы синтеза структур. ХВКИУ, 1967.

• 53. **Кузьмин И. В., Ключко В. И.** Синтез средств обучения с учетом психофизиологических характеристик человека.— В кн.: Вопросы военно-инженерной психологии. Под ред. И. Г. Васильева. Вып. 1, ХВКИУ, 1968.

• 54. **Кузьмин И. В.** Оценка эффективности автоматических систем контроля и управления. ХВКИУ, 1966.

• 55. **Кузьмин И. В.** Проектирование телемеханических систем контроля и управления. Ч. III. Оператор в системе контроля и управления. Харьковское ВКИУ, 1970.

56. **Кузьмин И. В.** Оценка эффективности и оптимизация АСКУ. «Сов. радио», 1971.

• 57. **Кузьмин И. В., Коба В. А.** Функциональная статистическая модель учебного процесса.— В кн.: Труды НТК Научная организация учебного процесса в вузе. Вып. 1. М., МВССО СССР, 1971.

• 58. **Кузьмин И. В., Гуц Л. В., Белогуров В. П.** Статистический синтез решающих устройств.— В кн.: Труды семинара по технической кибернетике. Киев, ИК АН УССР, 1969.

• 59. **Кузьмин И. В., Белогуров В. П., Гуц Л. В.** Элементы статистического синтеза оптимальных АСКУ.— В кн.: Труды семинара по кибернетике и автоматическому управлению. Вып. 2, Киев ИК АН УССР, 1969.

60. **Кузьмин И. В., Людвичек К. В.** Критерии профессионального отбора операторов АСУ.— В кн.: Техническая кибернетика, Под ред. И. В. Кузьмина. Вып. 8, Киев, ИК АН УССР, 1970.



61. Кузьмин И. В. Теоретические основы информационной техники. ХВКИУ, 1969.
62. Кузьмин И. В., Дедиков Э. А., Кухарев Б. Е. Метод построения глобального критерия в задачах математического программирования.—«Механизация и автоматизация управления», 1971, № 6.
63. Кузьмин И. В., Грецов В. Л., Краснополюсовский А. С. Структурный синтез автоматов допускового контроля.—В кн.: Радиоэлектроника летательных аппаратов, Вып. 5, ХАИ, 1973.
64. Кузьмин И. В., Людвичек К. В. Критерии профессионального отбора операторов автоматизированных систем управления.—В кн.: Техническая кибернетика. Под ред. И. В. Кузьмина. Вып. 8, Киев ИК АН УССР, 1970.
65. Кульбак С. Теория информации и статистика. М., «Наука», 1967.
66. Ланда Л. Н. Алгоритмический подход к анализу процессов обучения правомерен.—«Вопросы психологии», 1963, № 4.
67. Ланда Л. Н. К вопросу о математических моделях построения и оценки алгоритмов распознавания.—«Изв. АПН РСФСР», 1963, вып. 129.
68. Ланда Л. Н. Алгоритмизация в обучении. М., «Просвещение», 1966.
69. Лапигин И. В. Логические методы автоматизации проверок. ХВКИУ, 1964.
70. Ларин А. А. Надежность логических схем. ХВИКУ, 1966.
71. Леонтьев А. Н. Теория усвоения знаний и программированное обучение.—«Сов. педагогика», 1964, № 10.
72. Ломов Б. Ф. Человек и техника. М., «Сов. радио», 1966.
73. Ломов Б. Ф. Человек в системах управления. М., «Знание», 1967.
74. Ломов Б. Ф. и др. Инженерная психология и охрана труда.—«Вестник высшей школы», 1968, № 7, с. 78.
75. Ломов Б. Ф. О некоторых критериях оценки сигналов, передающих информацию человеку-оператору.—В кн.: Проблемы инженерной психологии. Под ред. Б. Ф. Ломова. Вып. 2. Л., Общество психологов, 1965.
76. Ломов Б. Ф., Суходольский Г. О человеке, для человека.—«Техника и вооружение», 1965, № 1.
77. Ломов Б. Ф., Николаев В. И. В центре внимания—человек.—«Техника и вооружение», 1967, № 11.
78. Ломов Б. Ф., Фокин Ю. Г., Губинский А. Н. Некоторые методологические вопросы проблемы надежности систем «человек—техника».—В кн.: Надежность комплексных систем «человек—техника». Под ред. А. И. Губинского. ЛДНТП, 1969.
79. Ломов Б. Ф., Николаев В. И., Рубахин В. Ф. Теоретические проблемы инженерной психологии.—В кн.: Вопросы военно-инженерной психологии. Под ред. В. И. Ниловой, ХВКИУ, 1970.
80. Лунц А. Г. Алгебраические методы анализа и синтеза контактных схем.—«Изв. АН СССР, сер. Математика», 1952, т. 16, № 5.
81. Луцкий В. А. Расчет надежности и эффективности радиоэлектронной аппаратуры. Справочник. Киев, «Наукова думка», 1966.
82. Льюс Р., Галантер Н. Психологические шкалы.—В кн.: Психологические измерения. М., «Мир», 1967.

83. **Марченко Е. К.** Моделирование учебного процесса и объем памяти простейших обучающих устройств.—«Изв. АН Латв. ССР», 1965, № 8.
84. **Мачкин Ю. Е.** Методика количественного анализа инженерно-психологических свойств сложных систем. В кн.: Прикладные вопросы инженерной психологии. Под ред. Л. Н. Выщепан. Вып. 1. Таганрог, ТРТИ, 1974.
85. **Мельник И. М.** Исследование зависимости воспроизведения подхарактеристик знаков.—В кн.: Материалы 3-го Всесоюзного съезда психологов СССР. Т. 1, 1968.
86. **Мельник И. М.** Стратегия, улучшающая непосредственное научение.—В кн.: Материалы 19-го Международного психологического конгресса. 1969.
87. **Милерян М. А.** Метод психологического изучения деятельности оператора.—В кн.: Проблемы инженерной психологии. Под ред. Б. Ф. Ломова. Вып. 2. Л., Общество психологов, 1965.
88. **Мишина А. П., Проскураков И. В.** Высшая алгебра. М., Физматгиз, 1962.
89. **Невяжский Г. А.**, Неравенства. М., Учпедгиз, 1947.
90. **Невельский П. Б.** Объем памяти и количество информации.—В кн.: Проблемы инженерной психологии. Под ред. Б. Ф. Ломова. Вып. 3. Л., Общество психологов, 1965.
91. **Николаев В. И.** Информационная теория контроля и управления. Л., «Судостроение», 1973.
92. **Николаев В. И.** Контроль работы судовых энергетических установок. Ч. 1, ч. II, Л., «Судостроение», 1965, 1966.
93. **Николаев В. И.** Определение времени, затрачиваемого оператором на решение задач по управлению судовой энергетической установкой.—«Изв. АН СССР. Сер. Энергетика и транспорт», 1965, № 4.
94. **Нечипоренко В. Н.** Структурный анализ и методы построения надежных систем. М., «Сов. радио», 1968.
95. **Офицеров В., Рубахин В. Ф.** Очерки инженерной психологии.—«Авиация и космонавтика», 1967, № 9.
96. **Инженерно-психологическое проектирование АСУ**, Будівельник, Киев, 1973. Авт.: А. И. Прохоров, Б. А. Смирнов, Е. М. Хохлов, А. С. Линков, А. Н. Митан.
97. **Некоторые достижения психофизики в изучении организации сенсорных систем связи.**—В кн.: Теория связи в сенсорных системах. Под ред. Г. Д. Смирнова. М., «Мир», 1964.
98. **Поспелов Д. А.** Логические методы анализа и синтеза схем. М., «Энергия», 1968.
99. **Прикладные вопросы военно-инженерной психологии.** Под ред. Ю. Г. Фокина. М., ВИА им. Дзержинского, 1968.
100. **Пушкин В. Н.** Психология мышления и принципы эвристического программирования.—«Вопросы психологии», 1967, № 6.
101. **Пьерон А.** Психофизика.—В кн.: Экспериментальная психология. Под ред. П. Фресс, Ж. Пиаже. М., «Прогресс», 1966.
102. **Рактов А. И.** О природе эмпирического знания. М., «Наука», 1965.
103. **Решлен М.** Измерения в психологии.—В кн.: Экспериментальная психология. Под ред. П. Фресс, Ж. Пиаже. М., «Прогресс», 1966.

104. **Розенберг Н. М.** Оценка рациональности учебных алгоритмов распознавания. — В кн.: ПО и обучающие машины. Вып. 1, Киев, Изд-во АН УССР, 1966.
105. **Ростунов Т. И.** Программированное обучение и обучающие машины. Киев, «Техника», 1967.
106. **Рубахин В. Ф.** Психологические основы обработки первичной информации. Л., «Наука», 1974.
107. **Сандлер Дж.** Техника надежности систем. М., «Наука», 1966.
108. **Светс Д., Теннер У., Бертзалл Т.** Статистическая теория решений и восприятия. — В кн.: Инженерная психология. Под ред. Д. Ю. Панова. М., «Прогресс», 1964.
109. **Синдеев И. М.** О выборе параметров, определяющих состояние технического устройства при автоматическом контроле. — В кн.: Труды ВВИА им. М. Е. Жуковского. Вып. 1020.
110. **Скинер Б.** Обучающие машины. Пер. с англ. М., «Мир», 1965.
111. **Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В.** Краткий курс математической статистики для технических приложений. М., «Физматгиз», 1959.
112. **Смоллвуд Р.** Структура выбора решений для обучающих машин. Пер. с англ. Киев, КВИРТУ, 1966.
113. **Соколов Е. Н.** Статистическая модель наблюдателя. — В кн.: Инженерная психология. Под ред. А. Н. Леонтьева. МГУ, 1964.
114. **Столяров Л. М.** Обучение с помощью машин. Пер. с англ. М., «Мир», 1965.
115. **Суппес П., Зинес Д.** Основы теории измерений. — В кн.: Психологические измерения. Под ред. Л. Д. Мешалкина. М., «Мир», 1967.
116. **Тихонов И. И.** Программирование и технические средства в учебном процессе. М., «Сов. радио», 1970.
117. **Ушаков И. А.** Эффективность сложных систем. — В кн.: О надежности систем. М., «Сов. радио», 1966.
118. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М., «Мир», 1967.
119. **Фокин Ю. Г.** Надежность при эксплуатации технических средств. М., Воениздат, 1970.
120. **Фридман Л. М.** Построение и оптимизация алгоритмов распознавания отношения принадлежности. Киев, АН УССР, 1966.
121. **Харкевич А. А.** Борьба с помехами. М., «Наука», 1965.
122. **Хедли Дж.** Нелинейное и динамическое программирование. М., «Мир», 1967.
123. **Хилгард Э. Р.** Методы и приемы анализа процесса обучения. — В кн.: Экспериментальная психология. М., ИЛ, 1963.
124. **Ховланд К.** Научение и сохранение заученного у человека. — В кн.: Экспериментальная психология. М., ИЛ, 1963.
125. **Черчмен У., Акоф Р., Арноф Л.** Введение в исследование операций. М., «Наука», 1968.
126. **Шило В. Н.** Некоторые вопросы оптимизации обучения. Казань, КВКИУ, 1967.
127. **Экстранд Г. и др.** Обучающие машины в системе военной подготовки. — В кн.: Программированное обучение. М., Всениздат, 1966.

## Список дополнительной литературы

1. Айзенберг Я. Е., Филипенко И. Г., Кузьмин И. В., Сухоревый В. Г. Перевірка «нотенціальної» працездатності динамічних об'єктів комбінованим частотно-часовим способом. — «Автоматика». ІК АН УРСР, 1973, № 1.
2. Алексеев Г. Н., Мауль Г. Г. Применение цифровых вычислительных машин для проверки контрольных работ. М., «Энергия», 1966.
3. Артеменко Е. А., Барбаш И. П., Григорьев А. И., Тимонькин Г. Н. Элементы анализа сложных систем. Под ред. Е. А. Артеменко. Харьков, ХВКИУ, 1972.
4. Барбаш И. П., Жуковский В. А., Тимонькин Г. Н. Теория и техника автоматических систем контроля и управления. Под ред. Е. А. Артеменко. Вып. 2, Харьков, ХВКИУ, 1972.
5. Беленов Ф. С., Выщепан Л. Н., Захаров Ю. А., Червяцов В. Н., Явна А. А. Элементы проектирования больших систем с учетом характеристик работы операторов. Под ред. А. А. Явна. Ростов-на-Дону, РВКИУ, 1970.
6. Березняков Г. Е., Казаринов М. А., Смирнов Б. А. Основы военно-инженерной психологии. Лабораторный практикум. Под ред. Б. А. Смирнова, Харьков, ХВВУ, 1970.
7. Бузунов Ю. А. Общие принципы построения обучающих комплексов. Обучающий комплекс «Радон». Киев, КВИРТУ, 1966.
8. Вопросы военно-инженерной психологии. [Сб. статей]. Под ред. И. Г. Васильева. Вып. 1. Харьков, ХВКИУ, 1968.
9. Вопросы военно-инженерной психологии. [Сб. статей]. Под ред. В. И. Шилова. Вып. 2, Харьков, ХВКИУ, 1968.
10. Вопросы военно-инженерной психологии. [Сб. статей]. Под ред. В. И. Нилова. Вып. 3. Харьков, ХВКИУ, 1970.
11. Человек и вычислительная техника. Киев, «Наукова думка», 1971. Авт.: Глушков В. М., Брановицкий В. И., Довгялло А. М. и др.
12. Гогин Ю. А., Ермилов В. Н., Запаская Е. С., Кукарин И. П., Молчанов О. Е., Просин Н. А. Логико-математическое моделирование больших сложных систем. ЛВИКА им. А. Ф. Можайского, 1972.
13. Граве П. С., Растринин Л. А. Кибернетика и психика. Рига, «Знание», 1973.
14. Гутчин И. Б., Кузичев А. С. Бионика и надежность. М., «Наука», 1967.
15. Захаров В. Н., Поспелов Д. А., Хазацкий В. Е. Системы управления. М., «Энергия», 1970.
16. Касаткин А. С., Кузьмин И. В. Оценка эффективности автоматизированных систем контроля. М., «Энергия», 1967.
17. Касаткин А. С., Хрулева А. В. Рациональный выбор характеристик аппаратуры контроля. М., «Энергия», 1970.
18. Ключко В. И. Обоснование точности построения тренажеров. — В кн.: Вопросы военно-инженерной психологии. Под ред. В. И. Нилова. Вып. 3, Харьков, ХВКИУ, 1970.
19. Ключко В. И. Элементы синтеза тренажеров. — В кн.: Вопросы военно-инженерной психологии. Под ред. В. И. Нилова. Вып. 3, Харьков, ХВКИУ, 1970.
20. Ключко В. И. Экспериментальная проверка гипотезы о статистическом механизме восприятия образов человеком. — В кн.: Военно-инженерная психология. Под ред. В. И. Нилова и Б. А. Смирнова. Харьков, ХВКИУ, 1971.

21. Ключко В. И. Разработка оптимальной структуры тренажеров. — В кн.: Военно-инженерная психология. Под ред. В. И. Нилова и Б. А. Смирнова. Харьков, ХВКИУ, 1971.
22. Коба В. А., Пчелинов В. П. Автоматизированный класс. Авт. свидетельство № 367449. — БИ, 1973, № 8.
23. Корытин А. М., Трофимов В. А. Применение технических средств обучения. Киев, «Вища школа», 1974.
24. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. М., Госэнергоиздат, 1962.
25. Кузьмин И. В. Автоматические системы контроля и управления АСКУ. — В кн.: Техническая кибернетика. Под ред. А. И. Кухтенко. Вып. 8. Киев, ИК, АН УССР, 1970.
26. Кузьмин И. В. Профессиональный отбор операторов автоматизированных систем управления. — В кн.: Военно-инженерная психология. Под ред. В. И. Нилова и Б. А. Смирнова. Харьков, ХВКИУ, 1971.
27. Кузьмин И. В. Оценка эффективности АСКУ на основе математических моделей потенциальных и реальных автоматических систем. Материалы координационного совещания секции технической кибернетики, апрель 1967. Под ред. А. И. Кухтенко. Киев, ИК АН УССР, 1969.
28. Кузьмин И. В., Онуфриенко Г. А. Об одном методе организации периодического контроля больших групп однотипных технических устройств. — В кн.: Кибернетика и автоматическое управление. Труды семинара ИК АН УССР (Харьковское отделение). Под ред. И. В. Кузьмина. Вып. 2. Киев, ИК АН УССР, 1969.
29. Кузьмин И. В., Барбаш И. В. Математическая модель структуры логического устройства. — В кн.: Техническая кибернетика. Под ред. А. И. Кухтенко. Вып. 8. Киев, ИК АН УССР, 1970.
30. Кузьмин И. В., Барбаш И. П., Трухин Г. П. Оптимизация структуры логического устройства. В кн.: Техническая кибернетика. Под ред. А. И. Кухтенко. Вып. 8. Киев, ИК АН УССР, 1970.
31. Кузьмин И. В., Белогуров В. П., Сукесов Э. А. Некоторые вопросы оптимизации алгоритмов принятия решений при автоматическом контроле. — В кн.: Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. Под ред. Е. Я. Иванченко. Вып. 30. Харьков, «Вища школа», 1974.
32. Кузьмин И. В., Бурко Н. Г., Мирошниченко В. Г., Бакланов О. Д., Юсим В. Ю. Определение объема систематической информации для водителя. — В кн.: Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. Под ред. Е. Я. Иванченко. Вып. 30. Харьков, «Вища школа», 1974.
33. Кузьмин И. В., Бурко Н. Г., Бакланов О. Д., Мирошниченко В. Г. Количественная оценка полного объема информации, необходимого для принятия решения руководством. — В кн.: Вопросы технической диагностики. Под ред. Б. В. Городецкого. Вып. 10. Материалы Всесоюзного совещания и семинара по проблемам оценки эффективности применения и практике проектирования автоматизированных средств контроля и диагностики. Таганрог, ТРИ, 1973.
34. Кузьмин И. В., Бурназян Р. Г., Коверин А. А. Аппаратный контроль электронных цифровых вычислительных машин. — В кн.: Библиотека по автоматике. Вып. 518. М., «Энергия», 1974.
35. Кузьмин И. В., Василенко Ю. А. Розпізнавання сигналів машинами. Київ. Товариство «Знання» УССР, 1974.

36. Кузьмин И. В., Гапунин А. Я. Формализация процесса согласования ЭТТ. — В кн.: Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. Под ред. Е. Я. Иванченко. Вып. 29. Харьков, «Вища школа», 1974.
37. Кузьмин И. В., Грецов В. Л., Краснополюсовский А. С. Микропрограммный синтез устройства управления автоматической системы контроля. — В кн.: Радиоэлектроника летательных аппаратов. Под ред. Н. Т. Березюка. Вып. 5. Харьков, ХАИ, 1973.
38. Кузьмин И. А., Евсеев В. В. Математическая модель прогнозирования численности и структуры семей. — В кн.: Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. Под ред. Е. Я. Иванченко. Вып. 29. Харьков, «Вища школа», 1974.
39. Кузьмин И. В., Канарский В. Ф., Алексеев О. П. Последовательность обработки информации с учетом избыточности в информационных системах контроля и управления (ИС). — В кн.: Вопросы технической диагностики. Материалы Всесоюзного совещания и семинара по проблемам оценки эффективности применения и практике проектирования автоматизированных средств контроля и диагностики. Под ред. Б. В. Городецкого. Вып. 10. Таганрог, ТРИ, 1973.
40. Кузьмин И. В., Канарский В. Ф., Буйный А. Е. Некоторые методы информационной оценки и подстройки обобщенных динамических характеристик САУ. — В кн.: Приборы и системы автоматики. Под ред. Е. Я. Иванченко. Вып. 28. Харьков, ХГУ, 1973.
41. Кузьмин И. В., Кедрус В. А. Критерии оценки качества функционирования и пути оптимизации систем автоматизированной проверки измерительных средств. — В кн.: Приборы и системы автоматики. Под ред. Е. Я. Иванченко. Вып. 28. Харьков, ХГУ, 1973.
42. Кузьмин И. В., Ключко В. И. Об оптимальном распределении ресурсов в системах «человек—машина». — В сб.: Прикладные вопросы инженерной психологии. Под ред. Л. Н. Выщепан. Вып. 1. Таганрог, ТРИ, 1974.
43. Кузьмин И. В., Мигунова Л. В., Евсеев В. В. Оптимальное планирование капитального ремонта подвижного состава. — В кн.: Автоматизированные системы контроля. Под ред. И. В. Кузьмина. Киев, ИА АН УССР, 1973.
44. Кузьмин И. В., Мигунова Л. В. Исследование абсолютного обобщенно-статистического критерия. — В кн.: Техническая кибернетика. Под ред. А. И. Кухтенко. Вып. 8. Киев, ИА АН УССР, 1970.
45. Кузьмин И. В., Петров Э. Г., Стеценко Ю. А. Пути уменьшения методических ошибок при управлении подвижными автономными объектами. — В кн.: Техническая кибернетика. Под ред. А. И. Кухтенко. Вып. 8. Киев, ИА АН УССР, 1970.
46. Кузьмин И. В., Петров Э. Г., Мирошниченко В. Г., Евсеев В. В. Классификация целей управления и синтез структуры универсальной системы управления. — В кн.: Методы и средства исследования сложных систем контроля и управления. Под ред. И. В. Кузьмина. Киев, ИА АН УССР, 1973.
47. Кузьмин И. В., Салыга В. И., Филиппов В. В., Котляров В. П. Организация мультипрограммного режима работы вычислительного комплекса. — В кн.: Вопросы технической диагностики. Региональный научно-технический семинар по статистическому анализу, моделированию и автоматизации контроля объектов с конструктивно-сложной структурой. Под ред. Б. В. Городецкого. Вып. 9. Таганрогский радиотехнический институт, 1973.

48. Кузьмин И. В., Стеценко Ю. А., Канарский В. Ф. Исследование динамических характеристик некоторого класса нелинейных систем автоматического управления (НСАУ). — В кн.: Кибернетика и автоматическое управление. Труды семинара ИК АН УССР. Под ред. И. В. Кузьмина. Вып. 2. Киев, ИК АН УССР, 1969.

49. Кузьмин И. В., Стеценко Ю. А., Канарский В. Ф. Информационная оценка динамических характеристик нелинейной системы автоматического управления (НСАУ). — В кн.: Кибернетика и автоматическое управление. Труды семинара ИК АН УССР. Под ред. И. В. Кузьмина. Вып. 2. Киев, ИК АН УССР, 1969.

50. Кузьмин И. В., Сукесов Э. А. К вопросу о синтезе стратегии поиска неисправности динамической системы. — В кн.: Вопросы технической диагностики. Материалы всесоюзного совещания и семинара по проблемам оценки эффективности применения и практике проектирования автоматизированных средств контроля и диагностики. Под ред. Б. В. Городецкого. Вып. 10, Таганрог, ТРИ, 1973.

51. Кузьмин И. В., Сукесов Э. А., Тимошенко В. В. Определение оптимальной совокупности параметров из условия минимума риска в задаче контроля работоспособности системы автоматического управления. — В кн.: Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. Под ред. Е. Я. Иванченко. Вып. 32. Харьков, «Вища школа», 1974.

52. Кузьмин И. В., Сукесов Э. А. Параметрическая идентификация дискретной нелинейности динамической системы. — В кн.: Вопросы технической диагностики. Под ред. Б. В. Городецкого, Вып. 8. Таганрог, ТРИ, 1973.

53. Кузьмин И. В., Филиппенко И. Г., Кабаненко В. Ф. Алгоритм синтеза автоматизированных систем контроля (АСК) сложных динамических систем. — В кн.: Вопросы технической диагностики. Материалы Всесоюзного совещания и семинара по проблемам оценки эффективности применения и практике проектирования автоматизированных средств контроля и диагностики. Под ред. Б. В. Городецкого. Вып. 10. Таганрог, ТРИ, 1973.

54. Marrill T. Statistical recognition functions and the design of pattern recognizers. — «IRE Trans». 1960, v. EC-9, № 4.

55. М. де Монмоллен. Системы «человек и машина». Под ред. проф. Д. А. Ошанина. М., «Мир», 1973.

56. Методы исследования динамических систем и автоматизации процесса контроля. Под ред. А. В. Галенко. Харьков, ХВКИУ, 1967.

57. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. Т. 1. М., «Сов. радио», 1962.

58. Милсум Дж. Биологические системы управления. М., «Мир», 1968.

59. Основы построения автоматизированных систем контроля и управления. Под ред. А. П. Лысенко. ЛВИКА им. А. Ф. Можайского, 1972.

60. Полетаев И. А. Сигнал. М., «Сов. радио», 1958.

61. Прикладные вопросы военно-инженерной психологии. Изд. 2. Под ред. Ю. Г. Фокина. ВИА им. Дзержинского, М., 1968.

62. Применение ЭВМ в учебном процессе. [Сб. докладов научно-технического семинара]. Под ред. А. И. Берга. М., «Сов. радио», 1969.

63. Пчелинов В. П., Коба В. А. Вопросы построения контролируемых устройств с конструктивным вводом ответа. — В кн.: Ма-

герналы Харьковской областной научно-технической конференции. Харьков. ХГУ, 1972.

64. Пчелинов В. П., Коба А. В., Михаль А. П. Логико-математические основы контролируемых устройств с многозначным вводом ответа. — В кн.: Проблемы высшей школы. Вып. II. Киев, «Вища школа», 1972.

65. Ростунов Т. И. Программированное обучение и обучающие машины. Киев, «Техника», 1967.

66. Рукавишников Н. Н., Морозов Г. И. Космонавт-исследователь. М., «Знание», 1973.

67. Салыга В. И. Автоматическое управление и исследование моделей технологических процессов на обогатительных фабриках. Серия технология обогащения и брикетирования угля. М., ЦНИЭИ Уголь, 1972.

68. Степанов Ю. Н., Лысенко Э. В., Попов В. А., Сироджа И. Б. Автоматизация проектирования и анализ элементов управляющих вычислительных систем. Харьков, ХВВУ, 1972.

69. Теория и техника автоматических систем контроля и управления. Под ред. Е. А. Артеменко. Вып. 2. Харьков, ХВКИУ, 1972.

70. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М., «Сов. радио», 1966.

71. Томас К., Девис Дж., Опеншоу Д., Берд Дж. Перспективы программированного обучения. М., «Мир», 1966.

72. Трапезников В. А. Биоэлектрическое управление. Человек и автоматические системы. — В кн.: Труды международного симпозиума по техническим и биологическим проблемам управления. Ереван, 1968. Под ред. В. А. Трапезникова. М., «Наука», 1970.

73. Ушакова Г. Н. Аппаратный контроль и надежность специализированных ЭВМ. М., «Сов. радио», 1969.

74. Фрейдзон И. Р., Филиппов Л. Г. Математические модели в судовых обучающих комплексах. Л., «Судостроение», 1972.

75. Хрунов Е. В., Романтеев Н. Ф. Космонавт в системе космической навигации. М., «Знание», 1974.

76. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетики. М., ИЛ, 1966.

77. Штейнбух К. Автомат и человек. М., «Сов. радио», 1967.

78. Элементы проектирования систем автоматического управления и электроснабжения летательных аппаратов (пособие к проектированию). Под ред. И. В. Кузьмина. Ч. I. Харьков, ХВКИУ, 1967.



## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аксиома умножения вероятностей** 215
- Алгебра логических графов** 131
- Алгоритм действий оператора** 181
- ликвидация аварии 273
  - синтеза тренажера 262
- Анализ эффективности операций** 22
- — функционирования системы 106
- Вероятность апостериорная** 193
- безошибочного выполнения технологического процесса 218
  - безошибочной работы оператора 206
  - внезапных отказов 275
  - восприятия стимула 236
  - выполнения операций 77, 98
  - задержек управления 104
  - истинности логической функции 142
  - исходов 112
  - ложного отказа 12, 277
  - — управления 104
  - независимых событий 150
  - обнаруженного отказа 12, 277
  - несовместимых исходов 109
  - отработки требуемой операции 43
  - появления исходов 108
  - — события 11
  - принятия решения 11, 189
  - проведения операций 32, 35
  - сложных событий 35
- Вероятность условная** 148, 242
- элементарных операций по допускам 112
- Вес допуска** 259
- Ветвь контроля** 159
- Выгодность информации** 204
- принимаемого решения 204
  - принятого решения 202
- Гипотеза о статистическом механизме восприятия человека** 285
- Гистограмма распределения ошибок** 285
- График вероятностей выполнения операций** 34
- нормальной плотности вероятности 285
- Датчик случайных событий** 277, 283
- Декомпозиция функциональная** 141
- Дерево логических возможностей** 101, 111, 158, 165
- Диапазон неразличимости** 284
- Дисперсия плотности вероятности** 185
- Допуск нормированный** 260
- Единица ложная** 19
- требуемая 19
- Задача сетевого планирования** 204
- Задержка включения системы** 105
- ложного включения системы 19, 103
  - требуемого управления 18, 103
- Закон Бугера-Вебера** 236
- плотности распределения вероятности 183
  - работы 33
  - — группы 19
  - равномерной плотности 291
  - распределения вероятностей 14
  - — времени выполнения операции 86
  - — погрешности восприятия эталонного временного интервала 283
  - управления группы 60
- Запоминание информации долговременное** 204
- — оперативное 204
- Затраты обобщенные** 16
- частные 16
- Звено старшего оператора** 17
- управляющего органа 18
- Зона принятия решения** 191
- продолжения наблюдения 191

- Индекс повторяемости 145
- Интервал временной контрольный 285
  - — ограничительный 98
  - — эталонный 285
- Информация эталонная 206
- Канал отбоя 98
  - связи 9
  - управления 98
- Код неисправности 291
- Контроль обособленной кратности 166
- Коэффициент весовой 15
  - вынужденного простоя 275
  - готовности 275
  - корреляции 233
  - оценки эффективности тренажера 274
  - профилактики 275
  - технической эффективности 275
- Кратность контроля 163
- Критерий Байеса 191
  - идеального наблюдателя 13
  - максимума 190, 195, 196
  - максимума выгодности информации 190, 195
  - минимакса 190, 196
  - — риска 195
  - минимального риска 15, 190, 195
  - минимума цены информации 190, 195
  - надежности идентификации 296
  - Неймана — Пирсона 15
  - оптимальности 212, 224
  - оценки эффективности обучения и контроля 276, 279
  - правдоподобия 14
  - статистический обобщенный 16
  - степени обученности оператора 205
  - структурный 149
  - функциональный 149
  - эффективности 148
  - — управления 75
- Линия связи 17, 151
  - управления 151
  - — бесконечной длины 155
  - — простая трансляционная 151
- — с внешними обратными связями 164
- — с местными обратными связями 157
- — со многими состояниями на выходе 172
- Логика работы линии 162
  - функционирования узлов 140
- Максимум выгодности 190
- Матрица вероятностей оператора 176
  - ковариационная 251, 264
  - платежей 187, 198
  - статистика оценок 208
- Мера расхождения (дивергенция) 249
  - способности оператора 20
  - устойчивости схемы управления 23
- Метод ввода ответов в машину 297
  - весовых коэффициентов 213
  - градиентный 212
  - дисперсионного анализа 274
  - исследования операции 227
  - классического анализа 183
  - малого параметра 65
  - Ньютона 90
  - определителей 133
  - парных сравнений 240
  - перебора 28
  - половинного разбиения 295
  - получения априорных оценок обучения 208
  - последовательного анализа Вальда 191
  - случайных испытаний 212
  - статистических решений 241
  - суперпозиции 132
  - Фехнера 284
  - экстремизации критериев 204
- Методика выбора параметров расчета схем группирования операторов 51
- Множество переменной мощности 294
- Модель автомата управления 10
  - восприятий человека 235
  - восприятия детерминистская 240
  - затрат 10
  - идеальная 9

- математическая вероятностная 99
- — обобщенная 10
- обучения математическая 213
- — стоимостная 217
- оператора 10
- — вероятно-временная 82
- логико-вероятностная 82, 122
- — потенциальная 11
- — реальная 14
- получения априорных оценок 208
- процесса математическая 16, 98
- реальных объектов информационная 228
- структуры большой системы 122
- связей системы 181
- функционально-статистическая обобщенная 191
- Мощность сообщения 186

- Наблюдатель** Зигерта—Котельникова 287
- идеальный 12, 242, 287
- Надежность** идентификации 250, 254, 276
- оператора 20
- отбора операторов 274
- структурная 149
- технологического процесса 223
- Ноль** ложный 19
- требуемый 19

- Область** значений параметра 62
- Ограничение** временное 95
- — оперативного характера 96
- — технического характера 96
- Ожидание** затрат математическое 13
- Оператор** безотказный 20
- дизъюнкции 143
- идеально надежный 83
- конъюнкции 143
- ненадежный 22, 81
- — в группе 34
- неравноправный 24

- несовершенный 16
- неработоспособный 81
- отрицания 143
- предельно ненадежный 104
- равноправный 24
- совершенный 16
- Операция** запрещенная 77, 92
- ложная 17, 81, 152
- ложного отбоя 104
- неполной фильтрации 184
- поглощения 138
- отбоя 98
- склеивания 138
- требуемая 17, 92, 152
- управления 16, 98
- Определитель** нормальный приведенный 133
- нормированный 134
- транспонированный 133
- Оптимальность** действия АСУ 181
- Орган** управления 104
- Отбой** ложного управления 100
- требуемого управления 100
- Отказ** ложный 277
- — обнаруженный 277
- правдоподобия 12
- Оценка** полного риска 203
- степени обученности 205
- схем группирования операторов 70
- уровня знаний 208
- эффективности обучения 205
- Память** долговременная 204
- оперативная 204
- Параметр** закона управления 89
- Плотность** вероятности случайной величины 247
- Показатель** вероятностный 26
- — эффективности 70
- — прямоугольной схемы 75
- Поле** допуска пулевое 119
- Помехоустойчивость** линии управления 167
- Порог** абсолютный 236
- разностный 236, 240
- срабатывания 33
- Постоянная** обучения 216
- —, критическое значение 222
- Принем** суперпозиции 267
- Признак** класса 259
- Принцип** единогласия операторов 35
- минимальности группы 59

- Проблема распознавания образов 245  
 Пространство событий нормированное 189  
 Процесс марковский 111  
 — управления исходный 103  
 Психифизика стохастическая 240  
 Пункт ретрансляционный 167  
 Раздражитель переменный 241  
 Ранг обратной связи 166  
 Расстояние кодовое 187, 199  
 Реакция оператора моторная 204  
 — сенсомоторная 82  
 Реализация способа группирования 71  
 Решение задачи по шагам 62  
 Риск полный 204  
 — суммарный 204  
 Символ двойного суммирования 40  
 — Кронскера 211  
 Синтез схем группирования 36  
 — тренажеров 229  
 — — с заданной надежностью идентификации 259  
 — функционально - статистический 181  
 — элементов системы обучения 205  
 Система контроля знаний оператора 296  
 — обучающая 266  
 — управления автоматизированная 9  
 — — автоматическая 9  
 Ситуация аварийная 271, 282, 289  
 — независимая 277  
 — неопределенная 181  
 — частная 182  
 — экстремальная 81  
 Способ выбора параметров группы графоаналитический 58  
 — группирования операторов 23  
 — решения системы логических уравнений 130  
 Степень обученности оператора 259  
 — равноправия схемы 24  
 — устойчивости к возведению ненадежных операторов 78  
 Стимул контрольный 286  
 — осязаемый 238  
 — эталонный 241, 286  
 Стоимость обеспечения допуска 261  
 — обучения 213, 279  
 — содержания обслуживающего персонала 280  
 — эксплуатации 280  
 Сумма биномиальная 51  
 Схема группирования 37  
 — — избирательно-суммирующая 24, 32, 51, 84  
 — — операторов 42  
 — — прямоугольная 24, 42, 92  
 — — с параллельным соединением 24  
 — — с последовательным соединением 24  
 — совпадения 290  
 — тренажера с датчиком случайных событий 290  
 — — управления с органами отбора 98  
 — — структурная 17  
 Сходимость процесса разложения 145  
 Таблица вероятностных характеристик 99  
 Теорема де Моргана 141  
 — Неймана 142  
 Теория логических графов 122  
 — обнаружения сигналов 241  
 — распознавания стохастические 244  
 — структур 122  
 Точность построения тренажеров 238  
 Требование продолжительности 116  
 Узел структуры 124  
 Управление аппаратное ложное 17  
 — ложное 18  
 — помехи ложные 17  
 — требуемое 17  
 — учебным процессом 296  
 Уравнение связи логическое 100  
 Уровень знаний 205  
 — значимости 285  
 Условие осуществимости 43  
 Устойчивость против ненадежных операторов 23  
 — управления 81

Устройство голосования 71  
— индикации правильных ответов 314  
— коммутации рабочих мест 314  
— ограничения времени 96

Форма дизъюнктивная скобочная 144

Формула вероятностей 30, 33  
— закона управления избирательно-суммирующей схемы 72

— полной вероятности 149  
— распределения Бернулли 33, 35, 38  
— свертки 146

Функция автокорреляционная 183

— алгебры логики 130  
— — — и дизъюнктивной нормальной формы 131

— вероятности ошибки 243  
— времени наблюдения 200  
— грубости контроля 193

— двоичная 17, 18  
— действия 18  
— дискриминантная 252

— передачи сигнала 132  
— — узлов 140  
— — элемента структуры 122

— правдоподобия 12  
— распределения времени 82  
— стоимости 261

Характеристика вероятностная 20

— оператора 23  
— — — временная 82  
— схемы вероятностная 26

Цена информации 204

Цепь Маркова 153

Цикл обучения 281

Число вариантов расположения операторов в группе 26

Шкала порядка 282

Эксперимент отбора операторов 272

Экстремизация критериев 191

Энтропия апостериорная 193

— априорная 194  
— конечная 199  
— начальная 199

— определяемых оценок 210  
— состояния объекта 13  
— — параметра 189

Этап обучения 214

Эффект группы операторов 19  
— экономический 22

Эффективность использования тренажера 234

— потенциальной системы 14  
— работы реального оператора 15  
— схемы 72

— управления 91, 106

— функционирования системы 151

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ. ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИК АСУ С УЧЕТОМ РАБОТЫ ОПЕРАТОРОВ</b>	
Глава 1. Оценка эффективности операторов в АСУ	
1.1. Функциональная модель системы автомат — оператор . . .	10
1.2. Потенциальная модель оператора . . . . .	11
1.3. Реальная модель оператора . . . . .	14
Глава 2. Вероятность выполнения операций по управлению при группировании операторов	
2.1. Математическая модель процесса . . . . .	16
2.2. Прямоугольные схемы группирования операторов . . . . .	24
2.3. Избирательно-суммирующие схемы группирования опера- торов . . . . .	32
Глава 3. Выбор параметров схем группирования операторов	
3.1. Расчет параметров прямоугольных схем группирования операторов . . . . .	42
3.2. Расчет параметров избирательно-суммирующих схем . . . . .	51
3.3. Расчет параметров избирательно-суммирующих схем груп- пирования (методом малого параметра) . . . . .	65
3.4. Сравнительная оценка схем группирования операторов . . . . .	70
Глава 4. Методика выбора параметров схем группирования операторов с учетом времени отработки операций	
4.1. Вероятностно-временная модель оператора . . . . .	82
4.2. Определение параметров схем группирования с учетом времени отработки операций . . . . .	84
4.3. Выбор параметров схем группирования при наличии вре- менных ограничений на отработку операций . . . . .	95
Глава 5. Схемы управления с органами отбоя	
5.1. Математическая модель и исходные соотношения . . . . .	98
5.2. Оценка целесообразности применения органа отбоя . . . . .	104
5.3. Методика анализа эффективности функционирования си- стем с двумя органами управления . . . . .	106
5.4. Некоторые свойства процессов, вероятности появления исходов в которых заданы . . . . .	108
5.5. Определение требуемых вероятностей элементарных опе- раций по допускам, установленным на вероятности исхо- дов . . . . .	112
Глава 6. Анализ эффективности функционирования большой системы с учетом характеристик работы операторов	
6.1. Математическая модель структуры большой системы . . . . .	122
6.2. Некоторые способы решения систем логических уравнений . . . . .	130
	333

6.3. Некоторые аналитические методы определения функций вероятностей логики . . . . .	140
6.4. Формирование критериев эффективности . . . . .	148
Глава 7. Элементы анализа эффективности линий управления с учетом характеристик операторов	
7.1. Анализ простых трансляционных линий управления . . . . .	151
7.2. Анализ трансляционных линий управления с местными обратными связями . . . . .	157
7.3. Трансляционные линии управления с внешними обратными связями . . . . .	164
7.4. Анализ свойств простой линии управления с одним оператором, отличающимся своими характеристиками от других . . . . .	166
7.5. Некоторые свойства простых трансляционных линий управления со многими состояниями на их выходах . . . . .	172
Глава 8. Оптимальные решения АСУ	
8.1. Структурная схема сопряжения оператора с машиной . . . . .	181
8.2. Обобщенная функционально-статистическая модель классического принятия решения типа «норма — нет нормы» . . . . .	183
8.3. Обобщенная функционально-статистическая модель принятия решения типа «норма — нет нормы» методом последовательного анализа . . . . .	191
8.4. Обобщенная функционально-статистическая модель принятия решения типа «норма — больше — меньше» . . . . .	196
8.5. Обобщенная функционально-статистическая модель принятия решения типа «норма — больше — меньше» методом последовательного анализа . . . . .	200
8.6. Оценка полного риска оператора и измерительно-решающих устройств . . . . .	203
<b>РАЗДЕЛ ВТОРОЙ. ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ ОБУЧЕНИЯ</b>	
Глава 9. Оценка эффективности выполнения задачи в зависимости от степени обученности операторов	
9.1. Оценка степени обученности . . . . .	205
9.2. Приближенный метод получения априорных оценок обучения . . . . .	208
9.3. Возможность улучшения априорных оценок обучения . . . . .	210
9.4. Математическая модель обучения . . . . .	213
9.5. Оптимальное распределение средств на проектирование аппаратуры, ее эксплуатацию и обучение операторов . . . . .	217
9.6. Обеспечение требуемой вероятности выполнения задачи при минимальных затратах . . . . .	224
Глава 10. Обоснование точности построения тренажеров	
10.1. Тренажер — информационная модель реальной аппаратуры. Точность разработки тренажеров . . . . .	228
10.2. Математическая модель восприятия человека . . . . .	235
10.3. Механизм действия статистической модели восприятия при обнаружении и различении стимулов. Надежность идентификации . . . . .	240
10.4. Дивергенция как мера расстояния между двумя случайными векторами в $N$ -мерном векторном пространстве . . . . .	245

10.5. Установление зависимости между дивергенцией и надежностью идентификации. Допуски на проектирование тренажера . . . . .	250
Глава 11. Элементы синтеза тренажеров	
11.1. Синтез тренажера с заданной надежностью идентификации . . . . .	259
11.2. Методы повышения эффективности тренажеров . . . . .	265
11.3. Использование тренажеров для профессионально-технического отбора операторов . . . . .	270
11.4. Критерий оценки эффективности тренажеров . . . . .	274
Глава 12. Методика экспериментальных исследований принципов построения и применения тренажеров	
12.1. Проверка гипотезы о статистическом механизме восприятия образов человеком . . . . .	282
12.2. Устройство для обучения операторов АСУ со случайным вводом неисправностей . . . . .	289
12.3. Экспериментальные результаты и рекомендации по профессионально-техническому отбору операторов . . . . .	292
Глава 13. Система контроля знаний операторов в процессе обучения [57, 22д]	
13.1. Место контролирующих устройств в управлении учебным процессом . . . . .	296
13.2. Контролирующие устройства с конструктивным вводом ответа . . . . .	299
13.3. Проблема построения контролирующих устройств с многозначным вводом ответа . . . . .	304
13.4. Математическое обоснование достоверности работы контролирующих устройств [64] . . . . .	307
13.5. Структурная схема автоматизированного класса [63Д, 64Д] . . . . .	312
Список литературы . . . . .	317
Список дополнительной литературы . . . . .	323
Предметный указатель . . . . .	328



**Кузьмин И. В. и др.**

**К 89** Элементы вероятностных моделей автоматизированных систем управления. М., «Сов. радио», 1975

336 с ил.

Перед загл. авт.: И. В. Кузьмин, А. А. Явна, В. И. Ключко

Приводится описание вероятностных моделей оценки эффективности работы АСУ, «включающих» операторов, вероятности выполнения задачи оператором и группой операторов при различных схемах включения. Рассматриваются элементы вероятностных моделей АСУ обучением операторов. Показана возможность применения в процессе обучения тренажера и программированного класса.

Книга может быть полезна для инженеров и студентов вузов

**К** 30501-069  
046(01)-75 — 67-75

**6Ф7.5**

**Иван Васильевич Кузьмин  
Анатолий Абрамович Явна  
Владимир Игнатьевич Ключко**

**ЭЛЕМЕНТЫ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ  
АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

Редактор **Т. М. Любимова**  
Художественный редактор **З. Е. Вендрова**  
Обложка художника **Б. К. Шаповалова**  
Технический редактор **Г. А. Мешкова**  
Корректор **Г. М. Денисова**

Сдано в набор 15/V-1975 г. Подписано в печать 25/VIII-1975 г. Т-137  
Формат 84×108/32 Бумага машинописная  
Объем 17,64 усл.-п. л., 17,895 уч.-изд.  
Тираж 14 000 экз. Зак. 210 Цена 1 р. 10

Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, а/я 69

Московская типография № 10 Союзполиграфпрома  
при Государственном Комитете Совета Министров СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.  
Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.