

621.3  
С-45

# ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ



681.3  
0-25

# ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Под общей редакцией  
доктора технических наук *И. В. Кузьмина*

*Допущено Министерством  
высшего и среднего  
специального образования УССР  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших  
технических учебных заведений.*

**Научная библиотека  
Винницкого  
политехнического института**

КИЕВ  
ГОЛОВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»  
1981

95

ББК 32.965.9я 73  
6Ф6.5  
0—75

УДК 681.3(07)

**Основы моделирования сложных систем: Учеб. пособие для студентов вузов / Под общ. ред. д-ра техн. наук И. В. Кузьмина — Киев: Вища школа. Головное изд-во. 1981. — 360 с. 30501. 2401000000.**

Изложены критерии оценки эффективности и качества, основы теории моделирования динамических систем, а также методы моделирования. Описаны общие принципы и методы математического моделирования АСУ, методы и средства смешанного моделирования радиоэлектронных систем.

Для студентов, изучающих курсы «Моделирование систем» и «Системное моделирование» в технических вузах, а также специалистов, занимающихся исследованием, проектированием и эксплуатацией сложных радиоэлектронных систем.

Табл. 10. Ил. 89. Список лит.: 179 назв.

Коллектив авторов: Л. М. Дыхненко, В. Ф. Кабаненко, И. В. Кузьмин, М. Л. Литвинов, Э. Г. Петров, В. А. Попов, Э. А. Сукесов.

Рецензенты кафедра высшей математики Киевского инженерно-строительного института (зав. кафедрой д-р техн. наук *В. М. Михайленко*) и канд. техн. наук *В. П. Осипов* (Киевский государственный университет).

Редакция литературы по кибернетике, электронике и энергетике

## ВВЕДЕНИЕ

В одиннадцатой пятилетке развитие науки и техники должно быть в еще большей мере подчинено решению важнейших проблем дальнейшего прогресса советского общества, ускорению перевода экономики на путь интенсивного развития\*. В решении этих проблем важное место отводится вопросам моделирования.

Особенностью современного этапа развития моделирования является переход к анализу и синтезу, к проектированию и реализации больших систем. Эта тенденция объясняется тем, что с увеличением масштабов исследуемых систем нелинейно возрастает их сложность как объекта проектирования и эксплуатации, повышается удельная эффективность, оцениваемая критерием эффективность — стоимость.

В сочетании с возрастающими требованиями к оптимальности и эффективности функционирования систем это порождает ряд научных и инженерных проблем, изучаемых такими разделами кибернетики, как теория сложных систем и системотехника. При этом одно из центральных мест в дисциплинах занимает проблема моделирования.

Проектирование системы является в принципе умозрительным процессом. Принятые на этом этапе решения затем проверяются практикой, и в этом смысле она является истиной последней инстанции. Однако на практике можно проверить уже полностью спроектированное и изготовленное изделие. Если же обнаруживается неправильность или неэффективность проектного решения, то процесс проектирования необходимо повторить. Очевидна нерациональность такого процесса создания системы как по времени, так и по затратам ресурсов. Именно поэтому одним из важнейших и обязательным этапам проектирования является моделирование, т. е. имитация практической апробации системы.

При создании модели возможны различные степени абстрагирования. Нижним уровнем является физическое моделирование, при котором система или ее отдельные свойства проверяются на модели, отличающейся от оригинала, в лучшем случае, масштабами. Такие модели при соблюдении требований, вытекающих из теории подобия, обладают высокой адекватностью изучаемому объекту, что привело к их широкому распространению (особенно при проектировании систем, требующих высокой надежности, например самолетов, гидротехнических сооружений), а следовательно, и высокой достоверности результатов моделирования. К этому классу относятся натурные и масштабные макеты, пилотные установки и другие. Общими недостатками физических моделей являются дороговизна, уникальность и связанное с этим отсутствие универсальности, большие за-

\* Основные направления экономического и социального развития СССР на 1981—1985 годы и на период до 1990 года.— М.: Политиздат, 1980, с. 19.



траты времени на создание модели, последовательная организация процесса проектирования: проектное решение — физическая модель — эксперимент — изменение проектного решения и т. д.

Следующим уровнем абстракции является аналоговое физическое моделирование, при котором эксперимент ставится на модели, отличающейся от оригинала физической природой, что позволяет уменьшить затраты ресурсов, повысить наглядность и удобство моделирования. Особенно плодотворным оказалось использование электрических аналоговых моделей, с помощью которых удается воспроизводить широкий класс физических явлений иной природы. Это позволило создать универсальные моделирующие установки, что в свою очередь, потребовало перехода к универсальному описанию исходных процессов, т. е. к следующему уровню абстракции — математическим моделям.

Тенденция увеличения как масштабов систем, так и их сложности все в большей степени затрудняла использование физических моделей и увеличивала значимость математического моделирования. Наряду с другими факторами это послужило мощным толчком для развития аналоговых и цифровых универсальных ЭВМ. ЭВМ играют роль универсальных моделей, на которых можно реализовать широкий класс экспериментов. С этим обстоятельством связано одно из достоинств математического моделирования, обусловленное существенным уменьшением затрат. Кроме того, математическое моделирование позволяет существенно уменьшить время проектирования, во многих случаях позволяет найти строго оптимальное решение, исключить метод натурных проб и ошибок, перейти к параллельному процессу проектирования и моделирования и т. д. Важны также гибкость и широкая адекватность самой модели, простота ее реализации и внесения изменений, связанные с инвариантностью ЭВМ по отношению к реализуемым на них алгоритмам.

Все это сделало математическое моделирование одним из наиболее действенных методов анализа и оптимизации сложных систем и способствовало формированию научного направления, связанного с изучением методологических и научных основ моделирования широкого класса сложных систем как этапа их исследования и проектирования.

Предметом рассматриваемого научного направления является изучение общих закономерностей выбора и обоснования модели системы, реализации на модели экспериментов обработки и интерпретации их результатов.

В настоящем учебном пособии сделана попытка системного подхода к изложению основ математического и смешанного моделирования сложных систем.

Книга состоит из трех частей: в первой изложена общая теория математического моделирования систем, во второй описываются основы математического моделирования автоматизированных систем управления, в третьей изложены основы смешанного моделирования радиолокационных систем.

Авторы выражают благодарность д-ру техн. наук, проф. В. М. Михайленко и канд. техн. наук, доц. В. П. Осипову за критические замечания при рецензировании книги, а также акад. АН УССР И. И. Ляшко и д-ру техн. наук, проф. Я. С. Ипцоки за поддержку идеи написания данного учебного пособия. Авторы заранее признательны всем, кто пришлет замечания и пожелания по улучшению содержания книги, которые просим направлять в Головное издательство издательского объединения «Вища школа» по адресу: 252054, Киев-54, Гоголевская, 7.

**Часть первая**  
**ОСНОВЫ ТЕОРИИ**  
**МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ**

Специфика конкретного объекта моделирования накладывает решающий отпечаток на принятие решения о целях моделирования и путях их достижения: виде модели, ее необходимой адекватности и точности, методах реализации и т. д. В этом смысле моделирование — глубоко индивидуальный акт. Однако, если рассматривать моделирование как один из обязательных этапов проектирования, то возникает необходимость провести научные и методологические обобщения с целью выделения его основных характерных особенностей. В настоящем разделе решается эта задача.

**Глава 1**

**ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ**

В главе рассмотрены семантика понятия «моделирование системы» и на этой основе выделены основные этапы моделирования. Рассмотрены особенности каждого этапа и его содержание. Дана классификация моделей.

**1.1. Содержательный анализ  
понятия «моделирование системы»**

В зависимости от объекта и целей, стоящих перед моделированием, как этапом исследования и проектирования системы, могут ставиться различные задачи. Крайними классами этих задач являются:

1. Увеличение знаний о существующих системах с целью повышения их эффективности, определения путей совершенствования и т. д.
2. Гипотетическое моделирование, т. е. моделирование как средство проверки умозрительных идей, гипотез и т. д. с целью выбора в определенном смысле оптимального варианта.

Между крайними классами лежат различные градации, обусловленные степенью принципиальной новизны моделируемой системы. При этом в процессе моделирования могут достигаться различные цели: определение работоспособности системы, определение ее параметров, оценка эффективности и путей ее повышения, проверка функциональной и технической совместимости с другими системами и т. д. Однако независимо от цели, термин «моделирование» подра-

зумеает в общем случае три содержательно отличных, но взаимосвязанных этапа: синтез модели; обоснованный выбор критериев оценки эффективности и оптимизации; планирование экспериментов с моделью, обработка и интерпретация результатов.

Взаимосвязь этих этапов вытекает из единства цели моделирования, определяемой на основе анализа цели функционирования моделируемой системы. С другой стороны, анализ цели моделирования позволяет сформулировать требования, ограничения и локальные цели каждого из этапов и на этой основе сформулировать ряд условно независимых задач, оптимальное решение которых определяет степень достижения указанных локальных целей и оптимальность моделирования в целом. В этом заключается системный подход к моделированию.

Оптимальность процесса моделирования определяется на основе сопоставления количественных и качественных результатов моделирования с затрачиваемыми на это ресурсами при соблюдении ограничений, вытекающих из целей моделирования.

Рассмотрим этапы моделирования более подробно.

Не останавливаясь на принципах реализации моделей и уровне их абстракции, под моделью будем понимать упрощенную функциональную схему некоторой реальной системы, построенную путем отражения в ней наиболее существенных факторов исходной системы. Причем требование упрощенности является принципиальным, так как если модель имеет такую же сложность, как моделируемый объект, а ее исследование не дает выигрыша в стоимости получаемой информации, то не имеет смысла использование таких моделей. При синтезе модели проводят упрощение структуры и процессов моделируемой системы за счет учета только небольшого числа наиболее важных и отбрасывания несущественных переменных. Это позволяет уменьшить размерность модели и упростить схему ее функционирования. С другой стороны, модель должна обладать определенной степенью адекватности изучаемой системе, обеспечивать необходимую точность получаемой информации, быть гибкой, т. е. до некоторой степени инвариантной количественным и качественным изменениям параметров моделируемого объекта, и конструктивной, т. е. позволять принимать решения о наилучших вариантах структуры, схемы функционирования, значениях параметров и т. д.

Таким образом, задача синтеза модели — это отыскание рационального или оптимального компромисса между простотой модели и степенью ее адекватности изучаемой системе. Основой для поиска такого компромисса является удовлетворение ограничений, вытекающих из цели моделирования, что в свою очередь определяется особенностями моделируемой системы. Задача синтеза модели включает в себя следующие этапы: анализ целей и особенностей моделируемой системы и формулирование на этой основе целей моделирования и требований к модели; выбор критериев оценки эффективности и оптимизации; обоснование класса моделей, на котором будет производиться синтез; синтез феноменологической модели; иденти-

фикация параметров модели; проверка соответствия синтезированной модели исходным требованиям и в случае необходимости повторение всех или некоторых этапов.

Этап формирования целей моделирования является концептуальным, так как в конечном счете предопределяет потенциальные возможности модели. Задача заключается в формализации, т. е. приведения к виду, допускающему количественную оценку, целей системы, их декомпозиции — построении дерева целей и на этой основе — иерархической структуры системы. Анализ этих данных позволяет выделить важнейшие параметры и функциональные связи и на этой основе построить структурную схему моделей и определить цели каждой из них. Этот этап базируется на методологии системного анализа.

Полученные результаты являются основой для выбора критериев оценки эффективности и оптимизации.

На основании системного анализа целей моделирования, особенностей и потенциальных возможностей различных классов моделей по принятым критериям выделяется класс моделей, на котором в дальнейшем проводится синтез конкретной модели, удовлетворяющей заданным требованиям.

Этап собственно синтеза можно свести к проблеме идентификации модели. При этом сначала решается задача идентификации в широком смысле, когда на основе анализа структуры, функциональных и физических принципов исходной системы формируется гипотеза в виде соотношения между входными и выходными параметрами, т. е. синтезируется феноменологическая модель системы. В этом случае система рассматривается как «черный» ящик. Затем решается задача идентификации количественных значений параметров феноменологической модели. Эта задача связана, как правило, с получением и обработкой экспериментальных данных.

Последний этап заключается в проверке по выбранным критериям адекватности модели и принятии решения о необходимости ее уточнения.

С обоснованием и выбором критериев оценки эффективности и оптимизации приходится сталкиваться буквально на всех этапах синтеза модели, планирования и проведения экспериментов с ней и обработки результатов, независимо от целей моделирования. Трудность решения этой задачи заключается в том, что для сложных систем не удается выбрать единственный критерий оценки эффективности и приходится решать задачу многокритериального ранжирования или оптимизации, центральное место в которой занимает выбор и обоснование принципа компромисса, т. е. вида обобщенного скалярного критерия.

Система критериев должна быть конструктивной и обеспечивать методологическое единство решения задач определения эффективных решений на всех этапах моделирования.

Планирование эксперимента, обработка и интерпретация результатов заключается в выборе оптимального пути достижения



цели моделирования и состоит в выборе метода моделирования, техники эксперимента, последовательности его проведения, числа испытаний и обработки результатов. Критерием оптимальности решения этих задач является минимизация затрат времени, материальных и трудовых ресурсов на достижение цели моделирования при соблюдении всех ограничений.

## 1.2. Классификация моделей

Создание модели в конечном счете связано в большей или меньшей степени абстрагирования от реальной системы. Степень абстрагирования зависит от целей моделирования.

**Физические модели.** Простейшим по уровню абстрагирования является класс физических моделей [1]. Физической моделью называется установка, устройство или приспособление, позволяющее исследовать системы путем замещения изучаемого физического процесса подобным ему процессом той же или другой физической природы. При этом в порядке повышения уровня абстракции можно выделить три вида физических моделей: натурные, масштабные и модели — аналоги.

**Натурные модели** — это реальные изучаемые системы или их части. Общим критерием выбора класса или вида модели является минимум затрат ресурсов на получение требуемой информации о системе или процессе при выполнении заданных ограничений на ее точность и достоверность. Такой подход ограничивает область применения натурных моделей. С одной стороны это системы, для которых в настоящее время в силу различных причин невозможно построить более абстрактную модель, обеспечивающую требуемую точность и достоверность результатов моделирования. Характерным примером могут служить авиационные системы, где предъявляются высокие требования к надежности, которые не могут быть обеспечены абстрактным моделированием и поэтому проводятся летные испытания опытных образцов самолетов. С другой стороны — системы, натурное моделирование которых обходится дешевле, чем создание и исследование моделей более высокого уровня абстракции (как правило, это простые системы), или уже существующие системы, для которых требуется уточнение характеристик или получение новых данных.

В связи с моделированием больших (сложных) систем широкое распространение получило гибридное смешанное моделирование или испытание частей системы [2]. Этот вид моделей применяется в том случае, когда абстрактное описание части системы не является удовлетворительным или отсутствует вовсе (например, модель человека-оператора) или когда часть системы должна быть промоделирована во взаимодействии с остальными частями, но их еще не существует, либо их использование затруднено или дорого. В этом случае недостающие части системы могут быть заполнены моделями

другого вида, например, математической моделью, реализуемой на ЭВМ.

Натурные модели отличает полная адекватность реальной системе и обусловленная этим высокая точность и достоверность результатов моделирования. Поэтому, как правило, процесс проектирования оканчивается этапом натурных испытаний системы. Это не в коей мере не исключает использования на ранних этапах моделей любого другого вида для получения более широких возможностей исследования сложных систем.

*Масштабные модели* используются при исследовании сложных систем, для которых невозможно или сложно дать достаточно точное математическое описание функционирования, а натурных образцов еще не существует, либо эксперименты, доставляющие интересные сведения, с ними не допустимы, например, исследование граничных режимов работы при действии больших возмущений, аварийных режимов и т. д. В этом случае может быть использована модель той же физической природы, что и изучаемая система, отличающаяся от натурального образца масштабами.

Теоретической основой масштабного моделирования является теория подобия, которая предусматривает соблюдение геометрического подобия оригинала и модели и соответствующих масштабов для параметров. Для этого натурные значения параметров умножаются на постоянную величину, называемую масштабом моделирования или коэффициентом подобия. Условия подобия выполняются при равенстве критериев подобия — безразмерных величин, являющихся комбинацией физических параметров модели и исследуемой системы.

Масштабные модели широко используются для моделирования аэродинамических процессов, гидротехнических сооружений, многих технологических процессов, для которых разработаны соответствующие критерии подобия.

*Аналоговые модели* принципиально отличаются от натурных и масштабных моделей тем, что процессы исходной системы изучаются на процессе-аналоге другой физической природы. Обязательным условием при этом является выполнение физического подобия, под которым понимается однозначное соответствие между параметрами изучаемого объекта и его модели, выражающееся в тождественности безразмерных математических описаний процессов, протекающих в них. Сходственные величины, характеризующие процессы, отличаются только масштабами и по характеристикам, полученным на модели, можно однозначно определить характеристики оригинала.

Аналоговая модель является моделью высокого уровня абстракции, так как для своего синтеза требует наличия математического описания изучаемой системы, т. е., математической модели.

В качестве процессов-аналогов используются механические, гидравлические, пневматические процессы, однако наиболее широкое применение получили электрические аналоговые модели. В этих моделях ток, напряжение или мощность служат аналогами физиче-

ских величин другой природы. Особенностью аналоговых моделей является их гибкость и сравнительно простая адаптация к изменению количественных значений параметров моделируемой системы. Это позволяет создавать специализированные модели, предназначенные для моделирования широкого класса систем.

Другой принципиальной особенностью аналоговых моделей является их безразличие к физической сущности моделируемого процесса, при одинаковом математическом описании. Это обстоятельство позволяет строить структурные аналоговые модели, блоки которых воспроизводят на основе математических уравнений отдельные этапы процесса, а после их соединения воспроизводят весь процесс в целом. Развитие таких моделей привело к созданию универсальных аналоговых моделей — аналоговых вычислительных машин.

*Аналоговые вычислительные машины (АВМ)* представляют собой специально сконструированные материальные системы (модели), предназначенные для моделирования некоторого класса соотношений между непрерывно изменяющимися физическими величинами — аналогами соответствующих исходных математических переменных решаемых задач. Такие АВМ называются моделями простой аналогии. В зависимости от физического процесса, лежащего в основе модели, различают электрические, электромеханические, гидравлические, пневматические и т. д. АВМ, в качестве переменных в которых выступают соответственно напряжение и токи, угловые или линейные перемещения, давление в соответствующей среде и т. д.

Среди АВМ простой аналогии можно выделить модели со сплошной средой (проводящие пластины или бумага, электролитические ванны, сеточные модели), представляющие собой узкоспециализированные вычислительные машины, и структурные модели. Последние состоят из набора решающих элементов, предназначенных для реализации элементарных математических операций или их совокупности. Коммутация таких элементов в соответствии с видом заданных уравнений позволяет реализовать широкий класс математических зависимостей и описываемых ими процессов.

Особенно широкое применение структурные АВМ получили для решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями, однако они могут быть использованы и для решения ряда других задач.

Основными достоинствами АВМ являются их простота, сравнительно малая стоимость, высокое быстродействие, возможность решения задач как в реальном, так и масштабном времени. Недостатком является сравнительно низкая точность, достаточная, впрочем, для большинства практических задач.

Последнее время большое распространение получили квазианалоговые вычислительные машины, которые строятся, в отличие от АВМ, не на основе физического подобия, а на основе принципа эквивалентности, являющегося более общим. Этот принцип предусматривает эквивалентность уравнения модели и объекта только относительно решений, но не течения процессов. В этом случае уравнения

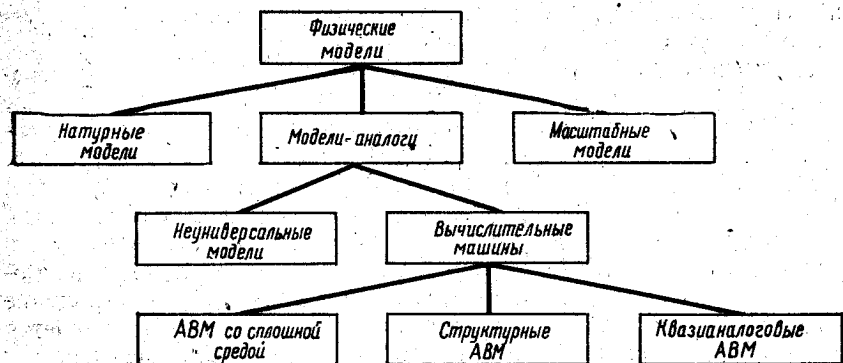


Рис. 1.1.

модели и объекта, хотя бы, частично, не подобны. Это обстоятельство позволяет существенно расширить класс реализуемых математических моделей.

Классификация физических моделей показана на рис. 1.1.

**Математические модели.** Стремление к повышению общности и универсальности моделей и методов моделирования требует повышения уровня абстракции. При этом самым абстрактным и, следовательно, общим является символическое описание. В этом случае для описания системы вводятся специальные символы и устанавливаются правила оперирования с ними. Совокупность символов и правил пользования ими (грамматика) является абстрактным языком. Некоторое высказывание, записанное на абстрактном языке, образует формулу. В качестве примера абстрактных языков можно привести язык химии, математики и т. д. При этом математика представляет собой целый класс абстрактных языков с различными грамматиками и различными уровнями абстракции (общности).

Согласно изложенному выше, математическая модель (ММ) представляет собой систему математических соотношений, описывающих изучаемый процесс или явление. Для составления ММ можно использовать любые математические средства — теорию множеств, дифференциальное и интегральное исчисление, математическую логику, теорию вероятностей, теорию игр и т. д.

Выбор вида ММ определяется целями моделирования, так как рассмотрение модели на каком-либо уровне позволяет получить ответы на определенную группу вопросов, а для получения другой информации и необходима ММ другого вида и, следовательно, уровня абстракции.

Цели моделирования определяют в конечном счете и ряд других особенностей моделей и методы их исследования. В частности, ММ можно классифицировать на детерминированные и стохастические. Первые устанавливают однозначное соответствие между характеристиками модели, а вторые между статистическими параметрами



характеристик. Выбор того или иного вида модели обусловлен степенью необходимости учета случайных факторов.

Кроме того, ММ можно классифицировать по методу их исследования. Можно выделить аналитические и имитационные модели.

*Аналитические модели* позволяют получить или явные зависимости для искомым величин, или, в том случае, когда это не удается, определить численные решения для конкретных начальных условий и количественных характеристик модели. Для решения таких задач широко используются аналоговые и цифровые ЭВМ. Однако синтез аналитических моделей для больших систем, как правило, невозможен. В связи с этим, в настоящее время широко распространение получило имитационное моделирование, которое рассматривается как эксперимент со сложной математической моделью, описывающей поведение системы, реализуемый на ЭВМ, т. е. моделируется натуральный эксперимент.

*Имитационная модель* имеет следующие особенности: большую размерность по числу переменных и связей между элементами модели; стохастический характер, нелинейность, ограничения различных типов, различное математическое описание элементов модели, реакции, зависящие от времени.

Согласно [3] имитационное моделирование позволяет:

экспериментально исследовать сложные внутренние взаимодействия в рассматриваемой системе;

изучать воздействие на функционирование системы информационных и организационных изменений и изменений характера взаимодействия с внешней средой;

лучше понять систему, оценить какие из переменных наиболее существенны и как они взаимодействуют;

оценивать поведение системы в новых ситуациях, проверять новые стратегии и правила принятия решения;

проводить стохастическое моделирование, в частности методом Монте-Карло.

Таким образом, имитационное моделирование ориентировано не только на исследование заданной модели, но и на идентификацию параметров и в этом смысле является аналогом, натурального моделирования.

В дальнейшем подробно рассмотрим только математическое и смешанное моделирование сложных систем.

#### Контрольные вопросы

1. Каковы цели моделирования?
2. Перечислить основные этапы моделирования, их содержание.
3. Перечислить основные этапы синтеза модели, как они взаимодействуют?
4. Назвать классы моделей, их отличия, особенности, области применения.
5. К какому классу моделей относятся ЭВМ? Назвать достоинства ЭВМ как модели.

## ФОРМИРОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ И ОПТИМИЗАЦИИ

Глава посвящена обоснованию общих принципов выбора критериев оценки эффективности и оптимизации. Решение этой проблемы имеет большое значение, так как система критериев в значительной мере определяет эффективность и, в конечном счете, принцип построения модели. С другой стороны только выбор общих принципов оценки эффективности и оптимизации может обеспечить единые методологические позиции анализа и синтеза широкого класса систем.

### 2.1. Определение системы. Формализация цели, критериев, ограничений

В настоящее время не существует общепринятого определения системы. Наиболее широко распространенным, и по-видимому, плодотворным, является множественный подход к синтезу такого определения, который вытекает из самого определения множества. По Н. Бурбаки, множество образуется из элементов, обладающих некоторыми свойствами и находящихся в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств [1]. Детализация этого определения позволяет построить общее определение системы. Система — это комплекс средств, образующих определенную структуру, предназначенный для достижения определенной цели с определенной эффективностью.

Таким образом, система определяется тремя категориями: элемент, отношение, свойство. Однозначное и полное задание этих категорий полностью определяет систему, ее структуру, цель, эффективность и т. д. Целью проектирования является конкретизация и определение рациональных значений указанных категорий, т. е. устранение неопределенности в описании системы. Рассмотрим процесс проектирования системы.

Универсумы элементов  $M$  и отношений между ними  $R$ , определяют универсум свойств  $P$ , реализуемых на этих элементах и отношениях

$$P = M \times R, \quad (2.1)$$

а декартово произведение

$$S = M \times R \times P, \quad (2.2)$$

определяют универсум систем  $S$ . Как видно из выражения (2.1), конкретная система однозначно определена только в том случае, если заданы подмножества элементов  $M = \{m_1, \dots, m_l\}$ ,  $M \subset M$ ; отношений между ними  $R = \{r_1, \dots, r_j\}$ ,  $R \subset R$  и свойств  $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ ,  $P \subset P$ . При этом множества  $M$ ,  $R$  и  $P$  являются конечными и поддаются информативному описанию только в том случае, если определен уровень детализации элементов системы. Задание допустимых подмножеств  $M \subset M$  и  $R \subset R$  недостаточно

для синтеза системы, так как на этих подмножествах можно реализовать, как видно из (2.1) и (2.2), множества различных свойств и систем. Но задание конечного подмножества свойств  $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_k\}$ , которыми должна обладать система, даже при неограниченных множествах  $M$  и  $R$  позволяет синтезировать систему. Неопределенность в этом случае заключается в том, что подмножество желаемых свойств  $\mathcal{P}$  можно реализовать различными сочетаниями элементов и отношений, т. е. задание конечного  $\mathcal{P}$  определяет не систему, а подмножество систем  $S' = \{s_1, s_2, \dots, s_l\}$ , обладающих заданными свойствами, но различными структурами.

Очевидно, что систему со свойствами  $\mathcal{P}$  можно синтезировать только в том случае, если подмножество  $S'$  не пустое, т. е. полное множество  $P = M \times R$  включает в себя

$$\mathcal{P} \subset (M \times R), \quad (2.3)$$

что означает, что существует такое подмножество элементов  $M$  и отношений между ними  $R$ , на которых возможна реализация системы с желаемыми свойствами. Отсюда вытекает постановка двух задач:

1. Исследование с целью выяснения, существуют ли подмножества элементов и отношений между ними, на которых реализуются интересующие нас свойства.

2. Выбор оптимального варианта структуры системы из подмножества  $S'$  систем, обладающих необходимыми свойствами, т. е. выбор таких элементов подмножества  $M$  и  $R$ , на которых оптимальным образом синтезируется система с заданными свойствами. Первая задача является задачей фундаментальных научных исследований, а вторая — технического проектирования.

Итак, для целенаправленной проектной деятельности должны быть заданы требуемые свойства системы. Задание всех свойств системы в виде конкретных показателей очень громоздко, а зачастую и невозможно в силу существующей неопределенности (неполного знания) условий использования системы, внешней среды и т. д. Поэтому чаще всего желаемые свойства системы выражаются в виде обобщенных интегральных характеристик, которые в дальнейшем будем называть целью системы. В силу интегральности и существующей неопределенности цель часто задается не формально, а содержательно. Однако, цель должна позволять с большей или меньшей точностью, в зависимости от степени ее неопределенности, в процессе проектирования выделить основные формальные свойства системы. Под формализацией свойств системы будем понимать приведение их к виду, допускающему количественную оценку. При анализе цели усилия заказчика и разработчика направлены на выявление и формализацию наиболее важных, в смысле влияния на степень достижения цели, свойств системы. Формализованные свойства задаются в виде равенств и двух- или односторонних неравенств с определенными направлениями желательного изменения.

Множество формализованных свойств позволяет получить количественные оценки степени достижения цели, и в этом смысле яв-

ляется множеством критериев оценки эффективности системы, в то время как отдельные свойства являются частными критериями (характеристиками) системы. Определение обобщенных количественных оценок эффективности систем по множеству критериев представляет известные трудности, однако, в настоящее время развито несколько подходов, позволяющих их преодолеть [2, 3]. Все эти подходы сводятся к выбору вида функциональной зависимости обобщенной эффективности системы  $\exists$  от множества формализованных свойств системы  $\mathcal{P}_\Phi = \{p_{\Phi 1}, \dots, p_{\Phi j}\}$

$$\exists = F(\mathcal{P}_\Phi). \quad (2.4)$$

Задание цели системы, т. е. задание множества  $\mathcal{P}$  свойств системы определяет, хотя и неявно, границы подмножества элементов и отношений, на которых в принципе может быть синтезирована система, т. е. область существования системы. Эти подмножества определяются, согласно (2.1), как отображение  $\mathcal{P}$  на множества  $M$  и  $R$ . Обозначим их  $M_0$  и  $R_0$ . Кроме того, на подмножества  $M_0$  и  $R_0$  накладываются ограничения, связанные с экономическими, техническими, моральными и т. д. соображениями, что уменьшает область существования системы до допустимой области, причем в силу уже указанных причин, эти ограничения также часто задаются в интегральной форме и требуют формализации в указанном выше смысле. Проводить такую формализацию имеет смысл только по «дефицитным» элементам подмножеств  $M_0$  и  $R_0$ , т. е. только по тем элементам, для которых допустимая область изменения меньше области существования. Естественно, что ограничения должны быть заданы таким образом, чтобы допустимая область принадлежала области существования или, по крайней мере, пересекалась с ней, иначе задача синтеза системы с заданными свойствами теряет смысл. Таким образом, условие корректности ограничений

$$M_0 \supset M_d, \quad R_0 \supset R_d,$$

или

$$M_0 \cap M_d \neq \emptyset, \quad R_0 \cap R_d \neq \emptyset, \quad (2.5)$$

где  $M_d$  и  $R_d$  — допустимые подмножества.

Каждое из свойств системы, как это видно из (2.1), можно реализовать только на множествах элементов и отношений между ними. При этом количественное значение формализованного свойства функционально зависит от количественных и качественных характеристик множеств элементов и отношений, на которых оно реализуется. Конкретные значения указанных подмножеств определяют «стоимость» достигнутого значения свойства, а множества элементов и отношений, необходимых для реализации всех заданных свойств — «стоимость» системы в целом, т. е.

$$C = \Phi(M_\Phi, R_\Phi). \quad (2.6)$$

Формирование обобщенной количественной оценки множества  $C$  имеет те же трудности и пути их преодоления, что и при формировании оценки обобщенной эффективности.



Таким образом, проблема проектирования системы распадается на два этапа: формирование цели проектирования и выбор оптимальной структуры. Первый этап заключается в выборе множества желаемых свойств системы, их формализации, выделении допустимых подмножеств  $M_d$  и  $R_d$  и определении количественных ограничений на их компоненты. Решение этих вопросов является единой задачей, так как очевидна связь

$$\Xi = Q(C), \quad (2.7)$$

вытекающая из уравнения (2.1). При этом необходимо выбрать такие ограничения, чтобы допустимая область содержала потенциально наиболее эффективные варианты систем. Критерием оценки возможных решений является критерий «эффективность — стоимость»

$$K = \text{opt } G(\Xi, C), \quad (2.8)$$

где  $\text{opt}$  — оператор оптимизации, определяющий принцип оптимальности;  $G$  — оператор, определяющий конкретный вид критерия. В частности, во многих случаях плодотворным является использование относительного критерия вида [4, 5]

$$K_1 = \max \left[ \frac{\bar{\Xi}}{\bar{C}} \right], \quad (2.9)$$

где  $\bar{\Xi}$  и  $\bar{C}$  — обобщенные оценки «эффекта» и «стоимости» системы. На первом этапе определяется стратегия построения системы.

На этапе оптимизации структуры системы решается задача выбора из допустимых множеств  $M_d$  и  $R_d$  конкретных элементов, отношений между ними и их количественных значений. Каждая из структур будет характеризоваться эффективностью, т. е. конкретными значениями элементов множества свойств системы. Задача выбора единственного варианта структуры связана с задачей ранжирования возможных на допустимой области структур. Для этого необходим критерий. В общем случае пригоден критерий вида (2.8), однако обычно в практике проектирования он редуцируется к одному из следующих двух случаев.

1. Задана нижняя граница эффективности системы. В этом случае задача формулируется так: синтезировать систему с заданной эффективностью, имеющей минимальную «стоимость». Критерий оптимизации в этом случае

$$K_2 = \min_{\Xi \in \Xi_0} [\Phi(M_\Phi, R_\Phi)]. \quad (2.10)$$

2. Задана верхняя граница стоимости системы. Необходимо синтезировать систему с максимальной эффективностью не дороже заданной, т. е.

$$K_3 = \max_{\Xi \in \Xi_0} [F(\mathcal{P}_\Phi)]. \quad (2.11)$$

Независимо от вида критерия основной проблемой выбора оптимального варианта структуры системы является формирование обобщенных количественных оценок  $C$  и  $\Xi$  на множестве критериев.

## 2.2. Проблема многокритериальной оптимизации

Задача выбора оптимального решения в многокритериальной ситуации, независимо от конкретного вида критерия, заключается в ранжировании возможных решений по множеству частных (локальных) критериев.

Первым этапом решения этой задачи является выбор множества частных критериев, достаточно полно характеризующих систему. В качестве таких критериев выбираются важнейшие свойства системы, чтобы можно было оценить степень достижения поставленной цели, и наиболее важные компоненты множеств элементов и отношений, которые образуют «стоимость» системы. В частности, так как ограничения накладываются только на «дефицитные» компоненты множеств  $M$  и  $R$ , то все ограничения должны учитываться при выборе частных критериев системы. Необходимо стремиться к интегральности всех частных критериев, так как это уменьшает размерность задачи, однако эта интегральность не должна приводить к утрате формальности постановки задачи.

Частные критерии позволяют ранжировать варианты структур системы только на множестве подчиненных решений, т. е. когда критерии не противоречивы, в противном случае возникает задача выбора «наилучшего» компромиссного решения. В общем случае она формулируется следующим образом [2]. Пусть  $x$  — решение, определенное на допустимом множестве решений  $X$ . Качество решения оценивается множеством частных критериев  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ . Известно отображение  $f: x \rightarrow k$  и относительная важность частных критериев  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Необходимо найти оптимальное решение

$$x^0 = \operatorname{opt}_{x \in X} \theta [K(x), \Lambda]. \quad (2.12)$$

Решение поставленной задачи не вызывает принципиальных трудностей в том случае, если определен вид оператора  $\operatorname{opt} \theta$ , т. е. задан обобщенный критерий, позволяющий упорядочивать возможные решения. Именно выбор и обоснование вида такого критерия и составляет центральную проблему многокритериальной оптимизации.

Формализованную схему решения этой проблемы можно записать [2]

$$Q \rightarrow A \rightarrow \operatorname{opt} \theta \rightarrow x^0, \quad (2.13)$$

где  $Q$  — ситуация принятия решения;  $A$  — аксиоматика принятия решения, представляющая собой набор аксиом, которые строго определяют схему компромисса, т. е. принцип упорядочения возможных решений;  $\operatorname{opt} \theta$  — схема компромисса (обобщенный критерий оценки эффективности).

Очевидно, что концептуальным является этап выбора аксиоматики компромисса. Общая тенденция развития теории многокритериальной оптимизации состоит в стремлении формализовать этот этап. Для этого необходим строгий научный аппарат, устанавливающий связь ситуации принятия решения с конкретным набором

аксиом. В настоящее время это удалось сделать только для очень малого числа случаев, например, принцип минимакса для антагонистических игр.

Разработка формального аппарата выбора аксиоматики принятия решения затрудняется еще одним принципиально важным обстоятельством: наличием неопределенности в ситуации принятия решения, обусловленной неполным знанием требуемых свойств системы, т. е. ее целей. Это предопределяет плодотворность использования аналитико-эвристического подхода к решению указанной проблемы, особенность которого заключается в том, что выбор аксиоматики производится лицом, принимающим решение на основе эвристических соображений. Такой подход не противоречит общей тенденции, так как по мере формализации эвристических процедур метод становится все более аналитическим.

Исходя из аналитико-эвристического подхода можно наметить следующие задачи: обоснование эвристических соображений, позволяющих выбирать аксиоматику компромисса; разработка универсальной формы  $\text{opt } \theta$  (обобщенного критерия), позволяющей реализовать достаточно широкий класс аксиом (принципов компромисса) и хорошо приспособленной к реализации эвристики.

Формирование обобщенного критерия и реализация процедуры определения оптимального решения по многим критериям требует, как правило, решения вспомогательных задач: нормализации частных критериев с целью приведения их к единому интервалу изменения, к одной размерности (в частном случае — безразмерному виду) и выделение области компромисса.

### 2.3. Определение области компромиссов

При многокритериальной оптимизации интерес представляет только случай противоречивости частных критериев, так как в противном случае задача сводится к тривиальной оптимизации по одному критерию. Наиболее общим является случай не строгого противоречия частных критериев, при этом множество возможных решений  $X$  состоит из двух подмножеств

$$X = X^s \cup X^c, \quad (2.14)$$

где  $X^s$  — область согласия, в которой все частные критерии изменяются согласованно;  $X^c$  — область компромиссов, в которой хотя бы пара частных критериев строго противоречивы.

Таким образом, область компромиссов, известная еще как область Парето, представляет собой множество решений, ни одно из которых не может быть улучшено ни по одному из частных критериев без снижения качества хотя бы по одному другому. Так, если  $(x_1, x_2) \in X^c$ , и, в случае двух частных критериев  $k_1(x_1) > k_1(x_2)$ , то  $k_2(x_1) < k_2(x_2)$  или наоборот.

Любое решение, принадлежащее области согласия  $x \in X^s$ , может быть улучшено по крайней мере по одному частному критерию без

снижения качества по всем остальным. Очевидно, что область согласия по определению не содержит оптимального решения и поэтому может быть исключена из рассмотрения при его определении. Таким образом, условие  $x \in X^c$  является необходимым условием оптимальности решения.

Выделение области компромиссов не является обязательным этапом многокритериальной оптимизации, но решение этой задачи может существенно сократить область поиска оптимального решения и связанные с этим затраты. Кроме того, в этом случае гарантируется принадлежность полученного решения области  $X^c$ , тогда как в противном случае необходимо проверять выполнение этого условия, так как некоторые схемы компромисса, например, схема, полученная по принципу равенства нормализованных частных критериев, могут давать решение, принадлежащее  $X^s$ .

Для определения области компромисса можно воспользоваться следующей моделью [2]

$$X^c = \bigcup_{a \in A} f^{-1} \left[ \text{opt}_{x \in X} \sum_{i=1}^n a_i k_i(x) \right], \quad (2.15)$$

где  $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  — векторный параметр, определенный на множестве  $A = \left\{ a \mid a_i > 0; \sum_{i=1}^n a_i = 1 \right\}$ ;  $f^{-1}$  — оператор, устанавливающий связь  $x = f^{-1}(K)$ .

Задача сводится к определению экстремумов линейного функционала  $L(x) = \sum_{i=1}^n a_i k_i(x)$  при различных  $a \in A$ .

Точное определение области компромисса связано с серьезными вычислительными трудностями, которые возрастают с ростом размерности системы. Вместе с этим, в том случае, когда необходимо определить единственное компромиссное решение, а именно это является целью технического проектирования, выделение области компромиссов не обязательно. Необходимо только проверить выбранное решение на принадлежность этой области. С другой стороны очевидно, что с вычислительной точки зрения желательно всемерное сокращение области поиска. Эти обстоятельства и предопределяют плодотворность приближенного, нестроого определения области компромиссов. Условием корректности такой процедуры является требование, чтобы выделенная область  $X^p$  включала в себя, а не пересеклась с областью компромиссов

$$X^c \subset X^p \subset X \quad (2.16)$$

и простота вычислений. Рассмотрим один из возможных методов решения этой задачи.

В области допустимых решений  $X$  проводится оптимизация по каждому из частных критериев  $k_1, k_2, \dots, k_n$ . Полученные результаты заносятся в табл. 2.1.



Таблица 2.1

$k_j (j = \overline{1, n})$	$k_1$	$k_2$	...	$k_n$
$k_1$	$k_{11}$ экстр	$k_{12}$	...	$k_{1n}$
$k_2$	$k_{21}$	$k_{22}$ экстр	...	$k_{2n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$k_n$	$k_{n1}$	$k_{n2}$	...	$k_{nn}$ экстр

Табл. 2.1 составляется следующим образом. В строки  $k_j$  заносятся значения всех частных критериев, полученные при оптимизации системы по  $j$ -му критерию, т. е. значения частных критериев в точке  $j$ -го частного оптимума. Столбец представляет собой набор значений  $j$ -го частного критерия в точках оптимума по всем частным критериям. При этом экстремальное значение критерия достигается на главной диагонали. Таким образом, в каждом столбце таблицы 2.1 значения частного критерия изменяются от экстремального ( $k_{j\text{экстр}}$ ) до наилучшего ( $k_{j\text{нх}}$ ). Этот интервал включает в себя точки экстремумов всех частных критериев. Таким образом, множества значений  $k_{j\text{экстр}}$  и  $k_{j\text{нх}}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , являются границами отображения приближенной области компромиссов  $X^p$  на пространство критериев

$$X^p \rightarrow K. \quad (2.17)$$

Область  $K^p$  включает в себя область компромиссов  $K^o$

$$K^o \subset K^p \quad (2.18)$$

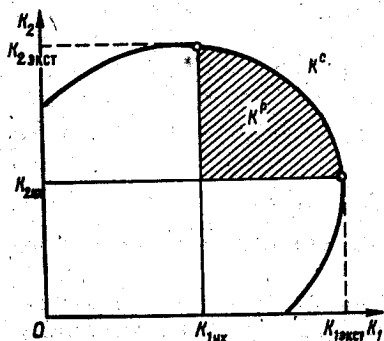


Рис. 2.1.

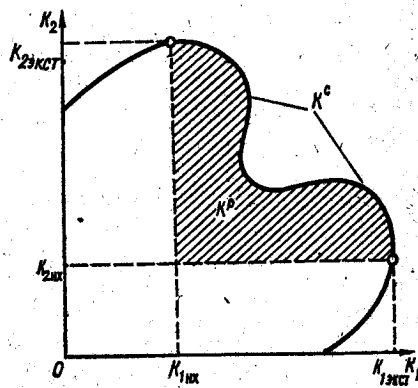


Рис. 2.2.

так как для нее выполняется необходимое условие области компромиссов — включение глобальных экстремумов всех частных критериев. Это условие вытекает из модели (2.15). Область  $K^p$  шире области Парето  $K^o$ , так как включает в себя, как показано на рис. 2.1 для выпуклой и на рис. 2.2 для невыпуклой областей, некоторые подмножества из области согласия. Поэтому в общем случае компромиссные решения, выбранные из области  $K^p$ , необходимо проверять на принадлежность области Парето. Однако это ни в коей мере не дискредитирует предложенный выше подход по выделению приближенной области компромиссов  $K^p$ , так как он позволяет уменьшить область анализа как на стадии поиска компромиссного решения, так и на стадии проверки его принадлежности в области Парето. Кроме того, как будет показано ниже, выделение области  $K^p$  позволяет более просто решить задачу нормирования частных критериев.

#### 2.4. Функции принадлежности частных критериев

По постановке задачи многокритериальной оптимизации эффективность любого решения  $x$  характеризуется множеством частных критериев  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ , где  $k_j = f_j(x)$ , а  $x$ , в свою очередь, полностью описывается некоторым набором значений элементов множеств  $M, R, P$ . Такое описание качества системы является общепринятым, однако оно недостаточно информативно, так как не дает представления об экстремально возможных значениях частных критериев и относительной ценности (полезности)  $\xi$  каждого из возможных значений критерия. Последнее особенно важно в случае нелинейной зависимости

$$\xi_j = F_j(k_j). \quad (2.19)$$

Часто используемый прием нормирования частных критериев в общем случае не является достаточным, так как позволяет преодолеть первый из указанных недостатков, но при этом теряется физический смысл и абсолютная величина каждого из критериев. Одним из путей преодоления указанных недостатков является задание каждого из критериев в виде размытого множества [6, 7].

Пусть  $Y$  — некоторое множество  $Y = \{y\}$ , например, множество возможных значений частного критерия. Размытое множество  $G$  на  $Y$  задается функцией принадлежности

$$\xi_G : Y \rightarrow [0, 1], \quad (2.20)$$

которая ставит в соответствие каждому элементу  $y \in Y$  действительное число в интервале  $[0, 1]$ . Число  $\xi_G$  называется степенью принадлежности  $y$  размытому множеству  $G$ . Чем ближе значение  $\xi_G$  к единице, тем выше степень принадлежности  $y$  к  $G$ . Функция принадлежности  $\xi_G$  является обобщением характеристической функции теории множеств, которая принимает лишь два значения: 1, если  $y \in Y$  и 0, если  $y \notin Y$ . В случае дискретных множеств  $Y$  применяется запись

размытого множества  $G$ , как множества пар

$$G = \{(y, \xi_G(y))\}. \quad (2.21)$$

В соответствие с этим, каждый из частных критериев задается в виде размытого множества

$$k_j = \{(k_j, \xi_{k_j}(k_j))\}, \quad (2.22)$$

где  $\xi_{k_j}$  — функция принадлежности конкретного значения  $j$ -го частного критерия размытому множеству «наилучшего» значения. Такая запись частного критерия обладает высокой информативностью, так как дает представление о его физическом смысле, конкретном значении и его «ценности» относительно наилучшего (экстремального) значения, которую характеризует функция принадлежности  $\xi_{k_j}$ . При этом функция  $\xi_{k_j}$  может аппроксимировать любую, в том числе и нелинейную зависимость. Неопределенность, которая кстати определяет обоснованность использования аппарата теории размытых множеств, заключается в субъективизме выбора вида функции принадлежности.

Желательно, чтобы функция принадлежности была универсальной и хорошо приспособленной для учета особенностей конкретных систем. Для этого она должна отвечать следующим требованиям: быть безразмерной, иметь единый интервал измерения  $[0, 1]$ , быть инвариантной к виду экстремума частного критерия (тип или шаг), т. е. наилучшему значению должно соответствовать значение 1, а наихудшему — 0, позволять реализовать характерные нелинейные зависимости. Рассмотрим возможный вид этих зависимостей.

Как показано в [8], развитие эффективности сложных технических систем происходит эволюционными циклами, каждый из которых хорошо аппроксимируется так называемой  $S$ -образной кривой. Эта кривая является огибающей локальных эволюционных циклов, соответствующих количественному изменению параметров системы, при неизменных принципах ее построения. Эти локальные циклы также хорошо описываются  $S$ -образными кривыми, вид которых показан на рис. 2.3. Они описывают повышение эффектив-

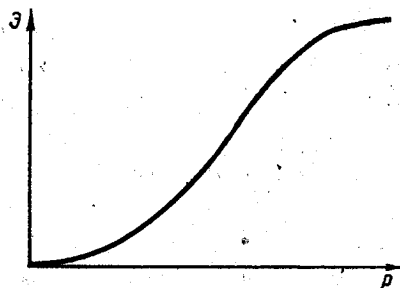


Рис. 2.3.

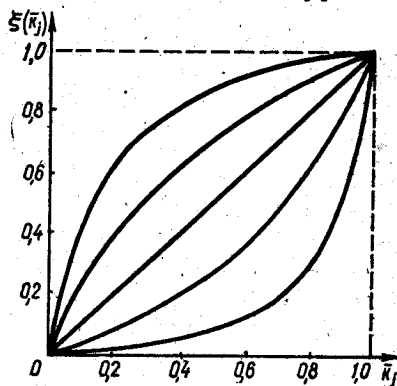


Рис. 2.4.

ности системы за счет изменения отдельных параметров системы. Каждый из эволюционных локальных циклов связан со сравнительно большим временным интервалом от возникновения нового принципа построения системы до его исчерпания. Время проектирования конкретной системы мало по сравнению с эволюционным циклом, поэтому интервал изменения параметров мал и определяется ограничениями, вытекающими из уровня развития науки и техники на момент проектирования. Эти ограничения «вырезают» отрезок на S-образной кривой. В зависимости от вырезанного участка кривая может быть выпуклой (начальный участок), линейной (средний) или вогнутой (конечный) или хорошо аппроксимироваться ими. Следует учесть, что, так как эволюционные циклы различных параметров систем не совпадают, то одновременно могут быть кривые всех трех типов. Поэтому желательно, чтобы функция принадлежности была универсальной и позволяла реализовать все указанные зависимости, как функции допустимых пределов изменения параметров. Всем перечисленным требованиям отвечает функция принадлежности

$$\xi(k_j) = \left( \frac{k_j - k_{jнх}}{k_{jнл} - k_{jнх}} \right)^{\alpha_j}, \quad (2.23)$$

которая с учетом того, что между параметрами системы и частными критериями  $k_j$  существует однозначная зависимость, записана в пространстве критериев. В этой формуле:  $k_j$  — текущее значение  $j$ -го частного критерия;  $k_{jнл}$ ,  $k_{jнх}$  — его наилучшее и наихудшее значения, соответствующие или границам области допустимого изменения соответствующих параметров системы, или границам приближенной области компромиссов (см. табл. 2.1);  $\alpha_j$  — показатель нелинейности. При  $\alpha_j = 1$  получаем линейную, при  $0 < \alpha_j < 1$  — выпуклую, при  $\alpha_j > 1$  — вогнутую зависимости. При этом кривизна зависит от величины  $\alpha_j$ , что хорошо видно на рис. 2.4.

Функция принадлежности (2.23) характеризует степень принадлежности «наилучшему» варианту, т. е. степень приближенности к локальному оптимуму по  $k_j$  критерию. Иногда удобнее пользоваться понятием потери оптимальности. В этом случае функция принадлежности «наихудшему» варианту, имеющая смысл функции потери оптимальности по  $j$ -му частному критерию

$$\bar{\xi}(k_j) = 1 - \xi(k_j) = 1 - \left( \frac{k_j - k_{jнх}}{k_{jнл} - k_{jнх}} \right)^{\alpha_j}. \quad (2.24)$$

## 2.5. Формирование обобщенного критерия оценки эффективности и оптимизации

Для выбора единственного решения из области компромиссов, как показано выше, недостаточно задания множества частных критериев и их связи с параметрами системы. Необходимо выбрать, и обосновать аксиоматику и на этой основе сформулировать правило (схему компромисса) принятия решения. Для решения этой задачи

требуется привлечение дополнительной информации, которая может быть получена только на основе анализа и формализации особенностей цели системы. В силу неполной определенности задания цели, обусловленной как неполным знанием цели системы, так и неформальностью ее формулирования, операция выбора аксиоматики и схемы компромисса неоднозначна и допускает некоторый субъективизм. Причем этот субъективизм носит принципиальный характер и обусловлен исходной информационной энтропией. Поэтому необходимо стремиться к развитию подходов, хорошо приспособленных к реализации эвристических соображений по учету особенностей широкого класса систем.

Одним из важнейших результатов анализа особенностей цели системы является установление взаимной важности частных критериев, что и является основой для выбора схемы компромисса. В зависимости от особенностей системы и результатов такой формализации можно выделить несколько подходов к принятию единственного решения в условиях многокритериальности.

Большая группа схем компромисса основана на принципе выравнивания уровней критериев и предполагает равенство важностей частных критериев. Наиболее жесткая из этих схем реализует принцип равенства уровней частных критериев. Более мягкой модификацией является принцип квазиравенства, заключающийся в том, что производится экстремизация всех критериев при условии, что уровни их отличаются не более, чем на наперед заданную величину  $\delta$ . Это обеспечивает расширение области допустимых решений по сравнению с первым случаем. Еще более гибкими являются принципы равномерности, основанные на максимине или последовательном максимине. В этих схемах компромисса осуществляется выравнивание уровней частных критериев за счет «подтягивания» критериев с наименьшими уровнями. Эта группа схем компромисса применяется в том случае, если частные критерии имеют одинаковую важность или тогда, когда, в силу неопределенности цели системы, не удастся установить их взаимную важность. Очевидно, что все схемы компромисса этой группы предполагают, что все частные критерии нормализованы, т. е. имеют один масштаб измерения.

В основе оптимизации по последовательно применяемым частным критериям лежит идея упорядочения их по взаимной важности. При этом принципиальным является то обстоятельство, что в общем случае достаточно качественного, а не количественного упорядочения. Наиболее последовательно этот подход реализуется при так называемом лексикографическом упорядочении возможных решений. Процедура оптимизации строится следующим образом. Все частные критерии качественно ранжируются по важности. На первом этапе система оптимизируется по наиболее важному критерию. В том случае, если экстремальное решение не единственно (особенно часто такая ситуация возникает в задачах дискретной оптимизации), на этом множестве производится оптимизация по второму по важности критерию и т. д. пока не будет получено единственное решение, или

не будут исчерпаны все частные критерии. Формальная постановка задачи лексикографической оптимизации формулируется следующим образом [3, 9]. Пусть система характеризуется множеством частных критериев  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ , которые строго упорядочены по важности. Тогда решение  $u$  предпочтительнее решения  $v$ , ( $u \succ_{lex} v$ ), если выполняется одно из условий:

$$k_1(u) > k_1(v);$$

$$k_1(u) = k_1(v), k_2(u) > k_2(v);$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$k_l(u) = k_l(v), \quad l = \overline{1, i-1}, \quad k_i(u) > k_i(v). \quad (2.25)$$

Решения  $u$  и  $v$  эквивалентны ( $u \sim v$ ), если выполняется условие

$$K(u) = K(v), \quad (2.26)$$

т. е. значения всех частных критериев равны для обоих решений. Лексикографически оптимальным называется решение  $u^*$ , которое не хуже любого другого, т. е.

$$u^* \succ_{lex} v. \quad (2.27)$$

Частными случаями лексикографической оптимизации является оптимизация по скалярному критерию при наличии ограничений и оптимизация по схеме справедливой уступки. В первом случае задача решается как двухкритериальная. Оптимизация сначала проводится по специально сконструированному критерию, учитывающему степень выполнения ограничений и принимающему значение, равное 1, если ограничения выполняются, и  $-0$  в противном случае. А затем на множестве решений, удовлетворяющих исходным ограничениям (если оно не пустое) проводится оптимизация по исходному скалярному критерию. Схема справедливой уступки предусматривает определение на первом этапе оптимального по наиболее важному критерию решения, а затем назначаются допустимые границы ухудшения этого критерия и в этой области определяется оптимальное решение по второму по важности критерию. В свою очередь назначаются допустимые окрестности по второму критерию и проводится оптимизация по третьему критерию. При этом допустимым считается только то решение, которое не противоречит сформулированным ограничениям как по первому, так и по второму критериям. Процедура повторяется последовательно по всем частным критериям.

Несмотря на плодотворность использования лексикографической оптимизации и ее модификаций во многих практических интересных случаях и достоинства, связанные с тем, что не требуется количественно определять взаимную важность частных критериев и нормализовать их, рассмотренный подход является частным случаем более общего и конструктивного подхода решения задачи многокритериальной оптимизации, основанного на синтезе обобщенного скалярного критерия.

Методологической основой такого подхода является концепция, по которой эффективность любой системы является некоторой функцией локальных полезностей, количественно оцениваемых частными критериями. Трудность состоит в аргументированном определении вида этой функции. При этом генеральной идеей является сравнение текущего решения, характеризуемого множеством  $K = (k_1, \dots, k_n)$  с некоторым идеальным, характеризуемым множеством  $K_{\#} = (k_{1\#}, \dots, k_{n\#})$ . В силу неполной информационной определенности цели системы такое сравнение не тривиально, так как понятие «лучшее» решение не может быть определено точно и представляет собой размытое множество  $K_{\#}$ . Поэтому синтез правила принятия решения о выборе единственного решения в условиях многокритериальности, т. е. синтез обобщенного критерия сводится к выбору вида функции принадлежности  $\xi_{K_{\#}}$  любого варианта размытому множеству  $K_{\#}$ , т. е.

$$\xi_{K_{\#}} = \xi_{K_{\#}}(k_1, \dots, k_n). \quad (2.28)$$

Однако в силу уже указанной недостаточной информативности множества  $K = \{k_j\}$ , лучше воспользоваться соответствующим ему множеством функций принадлежности частных критериев

$$\bar{\xi} = \{\xi_{k_1}(k_1), \xi_{k_2}(k_2), \dots, \xi_{k_n}(k_n)\} \quad (2.29)$$

и оценивать варианты по функции принадлежности «наилучшему» варианту

$$\xi_{K'} = \xi_{K'}[\xi_{k_1}(k_1), \dots, \xi_{k_n}(k_n)]. \quad (2.30)$$

В этом случае множество оценок возможных вариантов структуры системы будет размытым множеством

$$K' = \{(k_1, \dots, k_n), \xi_{K'}(\xi_{k_1}(k_1), \dots, \xi_{k_n}(k_n))\}. \quad (2.31)$$

Выбор функции принадлежности субъективен. Степень субъективизма определяется степенью неопределенности формирования цели системы. При уменьшении информационной энтропии задания цели уменьшается возможный субъективизм при выборе функции принадлежности  $\xi_{K'}$ , так как увеличивается определенность понятия «лучший» вариант, вплоть до точной формулировки. В этом случае формирование обобщенного критерия не представляет труда, а функция  $\xi_{K'}$  превращается в характеристическую функцию теории множеств, принимающую только два значения: 0 и 1.

Таким образом, все известные обобщенные нормированные критерии оценки эффективности являются по сути дела функциями принадлежности. Однако усилия в области принятия решений в многокритериальных ситуациях необходимо направить на поиск универсальной формы функции принадлежности, хорошо приспособленной для реализации эвристики. С этой точки зрения заслуживает внимания форма обобщенного критерия, предложенная в работе [10]. Интерпретированная в понятиях теории размытых множеств, она



имеет вид

$$\xi_{K'} = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [\xi_{k_j}(k_j)]^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}. \quad (2.32)$$

Достоинством этой формы является то, что в зависимости от значения параметра  $\beta$ , реализуется широкий класс принципов компромисса. Кроме того, параметр  $\beta$  имеет легко интерпретируемый функциональный смысл, что облегчает эвристическую аргументацию выбора его конкретных значений в зависимости от особенностей цели системы.

Компромиссное решение  $x^0$  выбирается по правилу

$$x_1^0 = \max_{x \in X^c} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [\xi_{k_j}(k_j)]^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}} \quad (2.33)$$

или, с учетом функций принадлежности наихудшему варианту (2.24), оценивающих потерю оптимальности по частным критериям

$$x_2^0 = \min_{x \in X^c} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [\bar{\xi}_{k_j}(k_j)]^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}. \quad (2.34)$$

При  $\beta = 1$  эти правила принимают, соответственно, вид

$$x_{11}^0 = \max_{x \in X^c} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_{k_j}(k_j); \quad (2.35)$$

$$x_{21}^0 = \min_{x \in X^c} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_{k_j}(k_j), \quad (2.36)$$

соответствующий принципу абсолютной уступки, максимизирующему сумму значений частных критериев и полученному на основе аддитивной теории полезности

$$x^0 = \max_{x \in X^c} \sum_{j=1}^n k_j(x). \quad (2.37)$$

Согласно теореме о среднем высших степеней

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \xi_{K'} = \max_j \{\xi_{k_j}(k_j)\}; \quad (2.38)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow -\infty} \xi_{K'} = \min_j \{\xi_{k_j}(k_j)\}. \quad (2.39)$$

В соответствии с этим, при  $|\beta| \rightarrow \infty$ , правила (2.33) и (2.34) реализуют максиминную (минимаксную) схему компромисса, являющуюся наиболее гибкой из принципов выравнивания качества

$$x_{12}^0 = \max_{x \in X^c} \min_j \xi_{k_j}(k_j), \quad \beta < -1; \quad (2.40)$$

$$x_{22}^0 = \min_{x \in X^c} \max_j \bar{\xi}_{k_j}(k_j), \quad \beta > 1. \quad (2.41)$$

Для вычислений удобно использовать эквивалентную (2.40) форму [2]

$$x^0 = \min_{x \in X^c} \sum_{i=1}^n [\xi_{k_i}(k_i)]^{-\beta}. \quad (2.42)$$

Рассмотрим эвристические соображения, аргументирующие выбор значения коэффициента  $\beta$ . Решение, принимаемое по правилам (2.33), (2.34) при  $\beta = 1$ , является самым эффективным, так как максимизирует суммарную полезность. При  $|\beta| > 1$  эти же правила обеспечивают выравнивание качества по частным критериям. При этом, улучшение качества по критериям с низким уровнем происходит за счет ухудшения значений других критериев, т. е. ни один критерий не достигает своего экстремального значения. Это означает, что решение лежит внутри, а не на границе области компромисса. Такое решение является «грубым» [11], т. е. малочувствительным к изменению характеристик системы, приводящих к изменению границ области компромиссов. Степень грубости определяется величиной  $\beta$ . При  $|\beta| \rightarrow \infty$  получаем максимально грубое на заданных ограничениях решение. Однако при конечных  $n$ ,  $k_j$  идеальное выравнивание качества достигается при конечном  $\beta$ , равном [2]

$$\beta^* = \frac{\log n}{\log(1 + \varepsilon)}, \quad (2.43)$$

где  $n$  — число частных критериев,  $\varepsilon$  — относительная точность задания критериев. Выбор конкретного значения  $\beta$  на интервале  $[1, \beta^*]$  является эвристической процедурой и основывается на анализе особенностей системы. Конкретное значение  $\beta$  можно определить по формуле

$$\beta' = \frac{\log n}{\log[1 + (n-1)\eta]}, \quad (2.44)$$

где  $\eta$  — коэффициент, изменяющийся в пределах от 0 до 1 и учитывающий соотношение между требованиями грубости и эффективности системы. При увеличении требований к грубости системы  $\eta \rightarrow 0$ .

В основу определения требуемой грубости системы могут быть положены соображения, учитывающие степень определенности формулировки цели системы и ее функциональные особенности. Очевидно, чем большую неопределенность толкования допускает формулировка цели системы, тем грубее она должна быть. Учет функциональных особенностей требует конкретизации системы. Пример учета таких особенностей при планировании приведен в [12]. Показано, что для систем, требующих максимальной скорости достижения конечных условий, необходимо принимать  $\beta = 1$ , а для систем, требующих высокой точности движения по плановой траектории,  $\beta \rightarrow \beta^*$ .

Рассмотренные выше результаты получены для случая одинаковой важности частных критериев, но полностью справедливы и для критериев различной важности. В этом случае необходимо учиты-

вать весовые коэффициенты

$$a_j \in [0; 1], \quad \sum_{j=1}^n a_j = 1 \quad (2.45)$$

и во все формулы подставлять соответственно  $a_j \xi_{k_j}(k_j)$ .

Универсальность функции принадлежности обобщенного критерия (2.32) подтверждается еще и следующим обстоятельством. Как известно, аддитивные критерии вида (2.35), (2.36) имеют особенность, которая заключается в том, что они позволяют при оптимизации полностью компенсировать одни свойства другими, т. е. некоторые критерии могут принимать нулевые значения. Наряду с системами, которые допускают такую компенсацию, существуют системы, для которых это недопустимо. В этом случае обычно используют критерии, построенные на основе мультипликативного подхода. При этом функция принадлежности обобщенного критерия может быть представлена как

$$\xi'_k = \prod_{j=1}^n \xi_{k_j}(k_j) \quad (2.46)$$

или, что то же самое,

$$\xi'_k = \sum_{j=1}^n \log \xi_{k_j}(k_j). \quad (2.47)$$

Функция (2.46) принимает нулевое значение, если любая частная функция принадлежности равна нулю, т. е. накладывается запрет на полную компенсацию свойств. Но такого же эффекта можно достичь, применяя функцию принадлежности вида (2.33), (2.34).

Как уже указывалось, с увеличением коэффициента  $|\beta| > 1$  происходит выравнивание качества, тем более жесткое, чем больше величина  $\beta$ . Таким образом, путем выбора величины  $\beta$  можно регулировать допустимую степень взаимной компенсации критериев (свойств) системы.

#### Контрольные вопросы

1. Дать теоретико-множественное определение системы, его связь с понятиями цели, критерия, ограничения.
2. Сформулировать задачу проектирования системы. Исходные данные, формирование критериев оценки эффективности.
3. Сформулировать постановку задачи многокритериальной оптимизации. Схема решения этой задачи.
4. Назвать области компромиссов и согласия. Определение области компромиссов. Для чего необходимо решение этой задачи, как этапа многокритериальной оптимизации?
5. Чем обусловлена плодотворность использования аппарата размытых множеств при формализации задачи многокритериальной оптимизации?
6. Сущность функции принадлежности частных критериев.
7. Сущность основных принципов компромиссов. Область их применения.
8. Сущность лексикографической оптимизации.
9. Обобщенный критерий оценки эффективности.
10. Какие эвристические соображения положены в основу выбора коэффициента  $\beta$ ?

## МОДЕЛИРОВАНИЕ АГРЕГАТИВНЫХ СИСТЕМ

В главе рассмотрены вопросы представления сложной системы как множества взаимосвязанных агрегатов, представляющих собой достаточно общее и универсальное описание разнородных функциональных подсистем и проблемы математического описания и моделирования таких агрегативных систем.

## 3.1. ММ обобщенной динамической системы

Как уже указывалось, высшим уровнем абстракции является лингвистический уровень. В главе 2 рассмотрен метод формализации лингвистических моделей и переход к более низкому уровню абстракции — теоретико-множественному описанию систем. Однако и на этом уровне моделирования можно получить только самые общие сведения об исследуемой системе. Для конкретных целей необходимы модели более низкого уровня абстракции, позволяющие детализировать и конкретизировать описание системы. Такие модели в общем случае являются частными по отношению к теоретико-множественному описанию. Например, конкретизация отношений между элементами множеств; описывающих систему; т. е. задание некоторых однозначных функций, отображающих элементы множества на само исходное множество, приводит к широко распространенному абстрактно-алгебраическому уровню описания систем. Модели этого уровня абстракции позволяют получить общее описание таких развивающихся в настоящее время самостоятельных теорий, как, например, теория конечных автоматов и теория линейных динамических систем [1]. Такое обобщение достигается на базе введения понятия обобщенной динамической системы.

Поведение системы рассматривается на некотором интервале времени, при этом, в общем случае, характеристики системы изменяются во времени дискретно или непрерывно. Это обстоятельство отражает динамический характер функционирования системы. Согласно [2] динамическая система определяется как структурированный объект  $\Sigma$ , куда в определенные моменты времени можно вводить и выводить вещество, энергию, информацию. Таким образом, динамическая система имеет вход и выход.

В каждый момент времени  $t \in T$ , где  $T$  множество моментов времени, на котором анализируется система, объект  $\Sigma$  получает некоторое входное воздействие  $u(t)$  и порождает некоторую выходную величину  $y(t)$ . Предполагается, что входная  $u(t)$  и выходная величины (процессы) не могут быть произвольными (например, бесконечно большими), а принадлежат соответственно некоторым ограниченным множествам значений

$$u(t) \in U, \quad y(t) \in Y. \quad (3.1)$$

В общем случае отрезок входного воздействия

$$\omega : (t_1, t_2) \rightarrow U, \quad (t_1, t_2) \subset T, \quad (3.2)$$

также не может быть произвольным, а принадлежит некоторому классу функций  $\Omega$ , определяемому, в основном, функциональными особенностями системы.

Текущее значение выходной величины системы зависит как от текущего значения входного воздействия, так и от его предыстории. Для того чтобы учесть предысторию развития системы, вводится понятие состояния системы. Состояние системы  $x(t)$  — это ее внутреннее свойство, значение которого в настоящий момент времени определяет текущее значение выходной величины и влияет на ее будущее значение

$$y(t) = G(x(t), t), \quad (3.3)$$

где  $G$  — оператор, устанавливающий функциональную связь между состоянием системы и ее выходной величиной, предопределяющей множество  $\Gamma$  возможных выходных функций  $y(t)$ . Кроме того, знание состояния  $x(t_1)$  и отрезка входного воздействия  $\omega = \omega(t_1, t_2)$  является необходимым и достаточным условием, позволяющим определить состояние

$$x(t_2) = H\{t_2, t_1, x(t_1), \omega\}, \quad (3.4)$$

где  $H$  — оператор переходов, устанавливающий функциональную связь между переменными.

Таким образом, ММ обобщенной динамической системы определяется следующими аксиомами.

I. Заданы множества: моментов времени  $T$ , состояний системы  $X$ , мгновенных значений входных воздействий  $U$ , допустимых входных воздействий  $\Omega$ , мгновенных значений выходных воздействий  $Y$  и выходных воздействий  $\Gamma$ .

II. Множество моментов времени функционирования системы является упорядоченным подмножеством множества вещественных чисел.

III. Множество допустимых входных воздействий  $\Omega$  удовлетворяет следующим условиям:

$\Omega \neq \emptyset$ ; назовем отрезком входного воздействия  $\omega(t_1, t_2)$  для  $\omega \in \Omega$  сужение  $\omega$  на  $(t_1, t_2) \subset T$ . Тогда, если  $\omega, \omega' \in \Omega$  и  $t_1 < t_2 < t_3$ , то всегда найдется такое  $\omega'' \in \Omega$ , что  $\omega_{(t_1, t_2)} = \omega_{(t_1, t_2)}$  и  $\omega''_{(t_2, t_3)} = \omega'_{(t_2, t_3)}$ . Это — условие сочлениа входных воздействий.

*Примечание 1.* Пусть множество  $T$  — область определения отображения  $u = \omega(t)$ . Отображение  $u = g(t)$  с областью определения  $(t_1, t_2)$  является сужением отображения  $\omega(t)$  на множество  $(t_1, t_2)$  в том и только в том случае, когда  $(t_1, t_2) \subset T$  и  $\omega(t) = g(t)$  для каждого  $t \in (t_1, t_2)$ .

*Примечание 2.* Впредь интервал времени  $t_1 < t < t_2$  обозначим  $(t_1, t_2)$ , а полуинтервалы  $t_1 < t \leq t_2$ ,  $t_1 \leq t < t_2$  как  $[t_1, t_2)$ ,  $(t_1, t_2]$  соответственно.

IV. Существует переходная функция состояния

$$x(t) = H\{t, \tau, x(\tau), \omega_{(\tau, t)}\}, \quad (3.5)$$

описывающая состояние системы в произвольный момент времени  $t \in T$ , если система в момент времени  $\tau < t$ ,  $\tau \in T$  находилась в начальном состоянии  $x(\tau) \in X$  и на нее действовало входное воздействие  $\omega \in \Omega$ .

Переходная функция состояния обладает следующими свойствами:

1. Если  $\omega, \omega' \in \Omega$  и  $\omega_{(\tau, t]} = \omega_{(\tau, t]}$ , то всегда

$$H(t, \tau, x(\tau), \omega) = H(t, \tau, x(\tau), \omega').$$

2. Для любых  $t_1 < t_2 < t_3$ ,  $x \in X$  и  $\omega \in \Omega$  выполняется равенство

$$H(t_3, t_1, x(t_1), \omega_{(t_1, t_3]}) = H(t_3, t_2, H(t_2, t_1, x(t_1), \omega_{(t_1, t_2]}), \omega_{(t_2, t_3]}),$$

если  $\omega_{(t_1, t_3]}$  является сочленением входных воздействий  $\omega_{(t_1, t_2]}$  и  $\omega_{(t_2, t_3]}$ .

V. Выходной сигнал системы  $y(t) \in Y$ ,  $t \in T$ ,  $t > \tau$  определяется оператором выходов

$$y(t) = G(t, \tau, x(\tau), \omega_{(\tau, t]}) \quad (3.6)$$

и, следовательно, для моментов времени  $t \in T$ ,  $t = \tau$

$$y(t) = G(t, x(t)). \quad (3.7)$$

В общем случае состояние системы  $x(t)$  представляет собой некоторое множество локальных состояний  $x(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ , характеризующих различные свойства системы в момент времени  $t$ . Множество значений каждого локального состояния  $x_i(t)$  обозначим  $X_i$ . Тогда прямое произведение  $\hat{X} = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  называется пространством состояний, пара  $(t, x)$  — фазой или событием, а множество

$$T \times \hat{X} \quad (3.8)$$

фазовым пространством или пространством событий. Переходная функция состояний (3.5) описывает траекторию в фазовом пространстве.

Таким образом, определение динамической системы сводится к заданию восьмерки величин

$$\Sigma = \{T, X, U, \Omega, Y, \Gamma, H, G\}. \quad (3.9)$$

Это определение является весьма общим, и для проведения конструктивного анализа конкретных функциональных систем необходимо доопределить свойства объекта (стационарность, линейность и т. д.) и конкретизировать операторы  $H$ ,  $G$  и множества  $T$ ,  $X$ ,  $U$ ,  $\Omega$ ,  $Y$ ,  $\Gamma$ , что приводит к частным математическим моделям в терминах теорий конечных автоматов, автоматического управления и т. д.

Наличие такой общей модели, описывающей широкий класс динамических систем, позволяет успешно преодолеть ряд принципиальных трудностей, возникающих при анализе и синтезе сложных систем. Эти трудности обусловлены такими принципиальными осо-

бенностями сложных систем как большая размерность и функциональная разнородность частей системы, что обусловлено множеством подделей функционирования системы. Известным системотехническим принципом преодоления этих трудностей является декомпозиция системы на множество взаимосвязанных подсистем. При этом можно достичь приемлемой размерности и функциональной однородности с точки зрения математического описания и, следовательно, удобства моделирования. Очевидно, что конструктивный анализ таких подсистем требует конкретных математических моделей, полно учитывающих функциональные особенности подсистем. Вместе с этим корректное моделирование системы в целом возможно только при учете взаимодействий подсистем между собой и внешней средой, а это требует единообразного математического описания всех подсистем системы. Решение этой проблемы может быть достигнуто на основе общей модели (3.9) динамической системы. При этом конкретные модели подсистемы строятся как частные случаи общей модели, а, следовательно, допускают их интерпретацию в терминах общей модели, которая и используется для моделирования взаимосвязей между подсистемами и системы в целом.

Один из подходов к решению указанной проблемы предложен Н. П. Бусленко [3, 4] и известен как метод моделирования агрегативных систем. В этом случае система рассматривается как множество взаимосвязанных агрегатов, описываемых, независимо от функциональных особенностей, общей моделью, представляющей собой определенную модель (3.9) обобщенной динамической системы.

### 3.2. Определение и функционирование агрегата

Модель обобщенной динамической системы является основой для синтеза достаточно универсальной модели. При этом необходимо удовлетворить противоречивые требования: с одной стороны, сохранить общность описания дискретных, непрерывных, стохастических, детерминированных систем различной функциональной природы, а с другой стороны — сделать модель конструктивной, для чего необходимо в ущерб общности доопределить, конкретизировать модель (3.9). Рассмотрим решение этой проблемы на основе введения понятия агрегата [3, 4]. Модель агрегата строится на основе модели обобщенной динамической системы путем доопределения ее характеристик. Конкретизируем восьмерку характеристик, определяющих модель (3.9).

Агрегат функционирует во времени. Задание множества моментов времени  $T$ , в которые рассматривается система, определяет такие важные свойства как дискретность и непрерывность. В первом случае  $T$  представляет собой множество изолированных точек, а во втором — множество точек, заполняющих некоторый интервал на числовой оси. В общем случае множество  $T$  может описывать и дискретнонепрерывные системы путем задания соответствующих подмножеств. Таким образом, задание множества  $T$  определяет функцио-



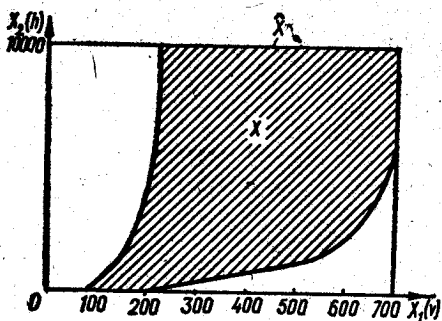


Рис. 3.1.

построена система (см. п. 2.1). Эти характеристики имеют различный физический смысл, могут быть численными (пространственные координаты, давление, температура и т. д.) или представляют собой набор состояний (замкнуто — разомкнуто; норма, больше, меньше и т. д.). Независимо от вида, каждая характеристика может принимать значения из некоторого допустимого множества  $x_i(t) \in X_i$ . Тогда прямое произведение

$$\hat{X} = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \quad (3.10)$$

определяет пространство состояний агрегата, представляющее собой множество всех упорядоченных совокупностей  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Для каждого агрегата задается допустимое множество состояний  $X_i$ , которое является подмножеством пространства состояний  $X \subset \hat{X}$ . Это объясняется тем, что несмотря на то, что каждая локальная характеристика  $x_i$  принимает значения из допустимого множества  $X_i$ , не все упорядоченные совокупности  $x(t) = \{x_i(t)\}$ ,  $t = \overline{1, n}$ , т. е. точки  $\hat{X}$  являются допустимыми для агрегата. Рассмотрим, например, в качестве агрегата самолет, состояние которого описывается двумя характеристиками: скоростью  $x_1$  и высотой  $x_2$ . При этом  $X_1 = [0, 700 \text{ м/с}]$ ,  $X_2 = [0, 10000 \text{ м}]$ . Пространству состояний принадлежат любые пары этих значений, в том числе состояние  $\{x_1 = 700 \text{ м/с}, x_2 = 0\}$ , являющееся недопустимым как при взлете, так и при посадке. Соотношение множеств  $\hat{X}$  и  $X$  для рассмотренного примера показано на рис. 3.1.

На вход агрегата поступает внешнее воздействие  $u(t) \in U$ . В общем случае оно представляет собой множество различных материальных, информационных, энергетических воздействий, т. е.  $\mu(t) = \{u_1(t), \dots, u_m(t)\}$ . Из множества воздействий  $u(t)$  выделим такие, назовем их управляющими и обозначим  $v(t) = \{v_1(t), \dots, v_l(t)\}$ , которые могут изменять внутреннюю структуру агрегата, его характеристики и, таким образом, влиять на характер его функционирования. Это означает, что управляющие воздействия влияют на вид операторов переходов  $H$  и выходов  $G$ . Множество внешних воздей-

ствий, не влияющих на вид операторов  $H$  и  $G$ , будем называть входными и обозначим  $\omega(t) = \{\omega_1(t), \dots, \omega_k(t)\}$ . Таким образом,

$$u(t) = v(t) \cup \omega(t);$$

$$v(t) \in V; \quad \omega(t) \in W;$$

$$v_i(t) \in V_i, \quad i = \overline{1, l}; \quad \omega_j(t) \in \omega_j, \quad j = \overline{1, k}, \quad (3.11)$$

где  $V, W$  — допустимые множества управляющих и входных воздействий;  $V_i, W_i$  — допустимые множества значений компонент управляющих и входных воздействий. Множества  $V_i$  и  $W_j$  содержат и «пустые» воздействия  $v_i = \emptyset, \omega_j = \emptyset$ , подача которых на входы агрегата соответствует отсутствию воздействия. Пространства управляющих и входных воздействий определяются множествами

$$\hat{V} = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_l;$$

$$\hat{W} = W_1 \times W_2 \times \dots \times W_k,$$

при этом  $V \subset \hat{V}, W \subset \hat{W}$ .

В процессе функционирования агрегат генерирует выходные воздействия  $y(t) \in Y, t \in T$ . В общем случае воздействие  $y(t)$  не одномерно, т. е.  $y(t) = \{y_1(t), \dots, y_d(t)\}; y_i(t) \in Y_i, i = \overline{1, d}$  и тогда  $\hat{Y} = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_d$  — пространство выходных воздействий, подмножеством которого является допустимое множество выходных воздействий  $Y \subset \hat{Y}$ . Множество  $Y$  содержит и пустой элемент  $Y \ni y(t) = \emptyset$ , что соответствует отсутствию воздействия на выходе агрегата. Функционирование агрегата определяется операторами переходов  $H$  и выходов  $G$ .

Вид оператора  $H$  зависит от конкретных функциональных, структурных и конструктивных особенностей моделируемой системы. По определению управляющие воздействия могут изменять структурные и конструктивные параметры системы, а следовательно, вид оператора  $H$ , т. е.

$$H = F[t, v(t)]. \quad (3.12)$$

При этом, в момент поступления управляющего воздействия оператор может изменяться скачком. Входные воздействия  $\omega(t)$  на вид оператора переходов не влияют.

Оператор выходов  $G$  состоит из двух подоператоров: первый  $G'$  определяет момент выдачи выходного воздействия, а второй —  $G''$  формирует выходное воздействие. Момент выдачи выходного воздействия определяется следующим образом: задано множество состояний агрегата  $X_y$ , в которых он должен выдавать непустое воздействие. Оператор  $G'$  является характеристической функцией множества  $X_y$ : если  $x(t) \in X_y, G' = 1$ , а при  $x(t) \notin X_y, G' = 0$ . Таким образом, математическая модель формирования выходного воздействия агрегатом имеет вид

$$y(t) = G'[t, x(t), X_y] \cdot G''[t, x(t)]. \quad (3.13)$$

Управляющие воздействия могут влиять на момент выдачи и вид выходных воздействий. Первое осуществляется путем изменения множества

$$X_y = \Phi' [t, v(t)], \quad (3.14)$$

а второе — изменением вида оператора

$$G'' = \Phi'' [t, v(t)]. \quad (3.15)$$

Целью моделирования агрегата является определение на заданном интервале времени  $T$  траектории в фазовом пространстве и выходных воздействий. Исходными данными для моделирования являются: начальное состояние агрегата  $x(t_0)$ , где  $t_0 \in T$  — начальный момент времени; вид оператора переходов  $H$  в начальный момент и зависимость его от управляющих воздействий (3.12); временная диаграмма поступления в агрегат входных и управляющих воздействий или соотношения, определяющие эти моменты; множество состояний  $X_y$ , в которых агрегат выдает выходные воздействия, вид оператора их формирования  $G''$  в начальный момент  $t_0$  и их зависимости от управляющих воздействий (3.14), (3.15).

Особенность моделирования агрегата заключается в том, что необходимо учитывать моменты поступления управляющих, входных и выдачи выходных воздействий, которые называются особыми состояниями агрегата. Необходимость учета особых состояний обусловлена тем, что в моменты поступления управляющих сигналов, в общем случае, изменяется вид операторов  $H$  и  $G$ , состояние агрегата при действии входных и управляющих сигналов может изменяться скачком, а определение моментов выдачи воздействий является одной из целей моделирования. Для удобства моделирования агрегата с учетом особых состояний введем момент времени  $(t + 0)$ , который принадлежит полуинтервалу  $(\tau, t]$ . С учетом сказанного, функционирование агрегата описывается следующими соотношениями.

На интервалах времени  $(t_n, t_{n+1}]$ , где нет особых состояний, поведение агрегата описывается моделью

$$x(\tau) = H_{v_i} [x(t_n), t_n, \tau], \quad \tau \in (t_n, t_{n+1}], \quad (3.16)$$

где  $H_{v_i}$  — оператор перехода, вид которого определен последним по времени поступлению управляющим воздействием  $v_i$ ;  $i = 0, n$ ;  $x(t_n)$  — состояние агрегата в момент выхода из последнего особого состояния.

Поведение агрегата в особых состояниях определяется соотношениями:

а) при действии входного воздействия  $\omega_{(t_n, t_{n+1}]}$ :

$$x(t_n + 0) = H_{v_i} [x(t_n), t_n, \omega(t_n)], \quad (3.17)$$

$$x(\tau) = H_{v_i} [x(t_n + 0), t_n, \tau, \omega_{(t_n, t_{n+1})}], \quad \tau \in (t_n, t_{n+1}], \quad (3.18)$$

б) при действии управляющего воздействия  $v_{(t_n, t_{n+1}]}$ :

$$x(t_n + 0) = H_{v_n} [x(t_n), t_n, v(t_n)], \quad (3.19)$$

$$x(\tau) = H_{v_n} [x(t_n + 0), t_n, \tau, v_{(t_n, t_{n+1})}], \quad \tau \in (t_n, t_{n+1}], \quad (3.20)$$

в) при одновременном действии управляющего  $v_{(t_n, t_{n+1}]}$  и входного  $\omega_{(t_n, t_{n+1}]}$  воздействий

$$x(t_n + 0) = H_{v_n} \{H_{v_n} [x(t_n), t_n, v(t_n)], t_n, \omega(t_n)\}, \quad (3.21)$$

$$x(\tau) = H_{v_n} \{H_{v_n} [x(t_n + 0), t_n, \tau, v_{(t_n, t_{n+1}]}, t_n, \tau, \omega_{(t_n, t_{n+1}]}\}; \\ \tau \in (t_n, t_{n+1}). \quad (3.22)$$

На основании (3.21) и (3.22) не представляет труда составление соотношений для случая, когда интервалы действия воздействий не совпадают;

г) при выдаче выходного воздействия

$$y(\tau) = G' [x(\tau), \tau, X_y^{v_i}] \cdot G_{v_i}^r [\tau, x(\tau)], \quad (3.23)$$

где  $X_y^{v_i}$  — множество состояний, в которых выдается выходное воздействие, установленное последним по времени действия управляющим сигналом  $v_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ ;  $G_{v_i}^r$  — оператор формирования выходного воздействия, вид которого установлен управляющим воздействием  $v_i$ .

Рассмотренный выше агрегат описывает детерминированную систему. Для описания стохастических систем введем понятие случайного оператора [4]. Предположим, что  $Q \ni q$  — пространство элементарных событий с вероятностной мерой  $P(A)$ . Случайным оператором  $H$ , переводящим множество  $M$  во множество  $N$ , называется оператор  $n = H(m, q)$ , реализующий отображение множества  $Q$  во множество отображений  $\{M \rightarrow N\}$ . Таким образом, каждому  $q \in Q$  соответствует неслучайный оператор  $H(m, q)$ , являющийся одним из отображений из допустимого множества  $\{M \rightarrow N\}$ . Оператор  $H(m, q)$  каждому  $m \in M$  ставит в соответствие некоторое множество  $N^* \subset N$  с законом распределения вероятности, зависящим от  $P(A)$  и вида оператора  $H$ . Тогда модель функционирования стохастического агрегата можно записать

$$x(t) = H[t, t_0, x(t_0, q), u(t, q_2)_{(t_0, t]}, q_3]; \quad (3.24)$$

$$y(t) = G[t, x(t), q_4],$$

где  $q_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$  — независимые случайные величины из  $Q$  в соответствии с вероятностными мерами  $P_0(A)$ ,  $P_x(A)$ ,  $P_u(A)$ ,  $P_y(A)$ .

В частных случаях:

а) при фиксированных  $q_1, q_2, q_4$  получаем агрегат со случайными переходами;

б) при фиксированных  $q_1, q_3, q_4$  — агрегат со случайным входом;

в) при фиксированных  $q_2, q_3, q_4$  — агрегат со случайными начальными условиями;

г) при фиксированных  $q_1, q_2, q_3$  — агрегат со случайным выходом.

Описанные детерминированный и стохастический агрегаты являются универсальными моделями широкого класса динамических систем и позволяют при необходимости получить путем доопределения различные частные модели.

### 3.3. Агрегативные системы

При исследовании модель сложной системы иногда удобнее представить не в виде одного агрегата, а в виде комплекса взаимосвязанных агрегатов. Основным фактором, определяющим плодотворность такого подхода, является удобство моделирования, обеспечивающее минимизацию временных, материальных (технических средств, машинного времени) и трудовых ресурсов, необходимых для достижения целей моделирования. Именно этот фактор является определяющим при разбиении системы на агрегаты на основе анализа функциональных, структурных и др. особенностей системы. Рассмотрим синтез агрегативной модели с системных позиций.

По определению (гл. 2) системы агрегативная модель представляет собой упорядоченное множество элементарных моделей (агрегатов), отношений (взаимосвязей) между ними и свойств. Множество свойств задается как цель моделирования. Задание цели моделирования в принципе определяет множества элементарных моделей и взаимосвязей, позволяющих ее достичь. Таким образом, определяющим при выборе структуры модели является цель моделирования, функциональные и структурные особенности моделируемой системы выступают как ограничения допустимых множеств элементарных моделей и отношений между ними, а выбор единственной структуры осуществляется по критерию минимума затрат на моделирование. Кроме того очевидно, что выбор определенного класса моделей ограничивает исходные допустимые множества элементов и отношений между ними. Для агрегативных моделей эти ограничения заключаются в том, что множество элементов должно содержать только элементарные модели, обладающие свойствами агрегата, а элементы множества отношений, определяющего взаимосвязи агрегатов, должны удовлетворять следующим допущениям [4].

1. Взаимодействие между агрегатами, а также между агрегативной системой и внешней средой осуществляется только путем обмена воздействиями (входными, управляющими, выходными).

2. Каждое элементарное воздействие (элемент множества входного, управляющего или выходного сигнала) передается по отдельному элементарному каналу и поступает на отдельный элементар-

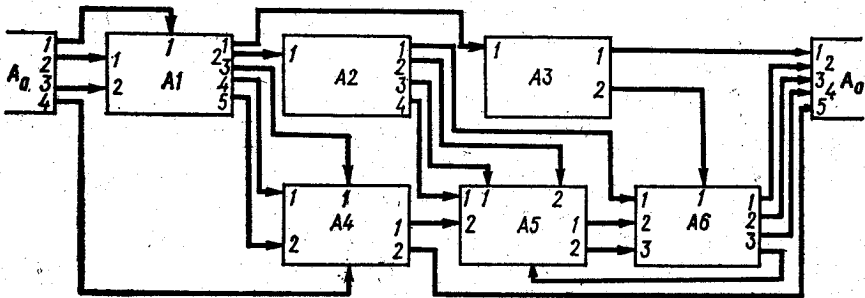


Рис. 3.2.

ный вход или выдается с отдельного элементарного выхода. К элементарному входу присоединяется только один элементарный канал и на него поступает только одно элементарное воздействие определенного вида; к элементарному выходу могут присоединяться несколько элементарных каналов, связывающие его с несколькими входами, т. е. одно элементарное выходное воздействие агрегата может поступать сразу на несколько входов.

3. Воздействия распространяются по элементарным каналам без задержки (мгновенно) и без искажения. Это допущение не снижает общности описания систем, так как любой реальный канал может быть представлен как совокупность идеального канала и агрегатов, один из которых реализует функцию задержки воздействия, а другой — его искажение.

Ни одно из рассмотренных допущений не ограничивает класс моделируемых систем и не сужает общность результатов, обеспечивая удобство моделирования.

Таким образом, агрегативной системой будем называть модель, представляющую собой упорядоченное множество агрегатов, на котором задано множество отношений (взаимосвязей) между ними, удовлетворяющее сформулированным выше ограничениям и цели моделирования.

Воздействия можно разделить на внешние и внутренние. Внешними являются воздействия, которыми агрегативная система обменивается с внешней средой. При описании структуры агрегативной системы внешней среде удобно представить в виде фиктивного агрегата. На рис. 3.2, где показан пример графического изображения агрегативной системы, внешняя среда изображена агрегатом  $A_0$ . Агрегаты, связанные с внешней средой, называются полюсами. В зависимости от вида воздействий, которыми происходит обмен с внешней средой, различают управляющие, входные и выходные полюса. Любой полюс может осуществлять обмен всеми или комбинацией воздействий. В агрегативной системе, показанной на рис. 3.2, полюсами являются: агрегат  $A_1$  — входным и управляющим,  $A_4$  — управляющим  $A_3$  и  $A_8$  — выходными.

Аналитическое описание структуры агрегативных систем удобно производить путем задания оператора сопряжения агрегатов  $R_s$ , устанавливающего связь между элементами множества элементарных входов  $U$  каждого  $j$ -го агрегата с элементами множеств элементарных выходов  $Y$  всех агрегатов системы, т. е.

$$(Y_d^j)_N = R_s(U_p^j), \quad (3.25)$$

где оператор  $R_s$  реализует отображение

$$U_p^j \rightarrow (Y_d^j)_N, \quad (3.26)$$

где  $j = \overline{1, N}$  — номер агрегата;  $d = \overline{1, D}$  — номер элементарного выхода;  $p = \overline{1, P}$  — номер элементарного входа.

Оператор сопряжения можно задавать в виде таблицы, в которой на пересечении столбцов с номерами агрегатов (внешняя среда

Таблица 3.1

$p$			Номер агрегата $j$						
			0	1	2	3	4	5	6
$U$	$W$	1	3,1	0,2	1,2	1,1	1,4	2,4	2,1
		2	6,1	0,3			1,5	4,1	5,1
		3	6,2						5,2
		4	6,3						
		5	4,2						
	$V$	1		0,1			1,3	2,3	3,2
		2					0,4	2,2	
		3						6,3	

обозначается  $A_0$ ) системы  $j$  и строк с номерами элементарных входов  $p$  записывается пара чисел, первое из которых обозначает номер агрегата — источника воздействия, а второе — номер элементарного выхода. При этом с функциональной точки зрения удобнее, учитывая (3.11), из множества входов  $U$  выделить входные  $W$  и управляющие  $V$ , присвоив им независимую нумерацию. Для агрегативной системы изображенной на рис. 3.2 оператор сопряжения приведен в табл. 3.1.

Оператор сопряжения (3.25) описывает все взаимосвязи агрегатов системы и не зависит от времени. Но если рассмотреть систему в конкретный момент времени  $t$ , то в общем случае окажется, что по некоторым элементарным каналам воздействия не передаются (передаются пустые воздействия). Структуру взаимодействий агрегатов в момент времени  $t$  будем описывать оператором взаимодействия

$$(Y^j)_N = R_t(U^j, t). \quad (3.27)$$

Целью моделирования агрегативной системы является определение траекторий  $X(t)$  изменения состояний каждого из агрегатов, входящего в систему для всех  $t \in [0, T]$ , где  $[0, T]$  — интервал моделирования. Достижение этой цели невозможно без идентификации оператора взаимодействия (3.27) как функции времени. Это обусловлено тем, что, как показано в п. 3.2, при моделировании обязательным является выявление и учет особых состояний агрегатов, т. е. моментов их взаимодействия. При моделировании автономного агрегата предполагалось, что моменты действия поступающих на агрегат воздействий известны, а выдаваемых генерируются оператором выходов. При моделировании агрегативной системы множество особых состояний в каждый момент времени описывается оператором взаимодействия, характеризующим взаимодействия агрегатов, элементарные воздействия и каналы, по которым оно происходит. Необходимость идентификации оператора взаимодействия и определяет особенности моделирования системы агрегатов по сравнению с моделированием автономного агрегата. Основой решения этой задачи являются принципы и алгоритмы моделирования отдельного агрегата.

При моделировании агрегативной системы будем полагать известной следующую информацию: оператор сопряжений; исходные данные, необходимые для автономного моделирования каждого агрегата системы (см. п. 3.2); временную диаграмму поступления воздействий из внешней среды на полюсы агрегативной системы или математическую модель их формирования (оператор выхода агрегата  $A_0$ ).

Основная идея современных методов моделирования агрегативных систем заключается в сведении задачи к последовательному автономному моделированию агрегатов, входящих в систему, по алгоритму, изложенному в п. 3.2. В этом случае, если в системе отсутствуют обратные связи, т. е. функционирование любого агрегата зависит только от предыдущих и не зависит от последующих агрегатов, такой подход реализуется легко. Моделирование начинается с любого входного полюса и продолжается по ходу передачи воздействий до тех пор, пока не доходит до выходного полюса или агрегата, на который поступают воздействия от нескольких агрегатов. В этом случае моделируется следующая цепочка агрегатов от входного полюса до этого агрегата и так до тех пор, пока не будет получена полная временная диаграмма входных и управляющих воздействий, поступающих на этот агрегат. Моделирование оканчивается, когда рассмотрены все цепочки от входных до выходных полюсов. Каждый агрегат моделируется или сразу на всем интервале моделирования  $[0, T]$ , в результате чего формируется оператор взаимодействия со всеми непосредственно связанными с ним агрегатами для всех  $t \in [0, T]$ , или на интервалах между особыми состояниями, при этом последовательно прослеживается путь каждого воздействия от входного полюса до выходного. Последний метод известен как моделирование по особым состояниям и подробно описан в [4].

Для реальных систем характерно наличие обратных связей, начиная от локальных, охватывающих несколько агрегатов, например, агрегаты  $A_5, A_6$  на рис. 3.2, до глубоких, охватывающих всю агрегативную систему. В этом случае невозможно определить момент поступления воздействия по каналу обратной связи без моделирования всех агрегатов, охваченных ею. Приходится «нащупывать» этот момент. В такой ситуации автономное моделирование агрегатов на интервале  $[0, T]$  и даже по особым состояниям ведет к большим потерям ресурсов на моделирование, за счет того, что с момента поступления воздействия по каналу обратной связи моделирование необходимо повторять, так как это воздействие не было учтено. Для устранения этого недостатка интервал моделирования  $[0, T]$  разбивают на малые участки  $\Delta T$  и на каждом из них последовательно моделируется агрегативная система по принципу автономного моделирования каждого агрегата, рассмотренного выше. Такой подход позволяет существенно уменьшить непроизводительные затраты ресурсов на моделирование. Выбор величины  $\Delta T$  определяется эвристически на основе анализа функциональных особенностей системы.

Таким образом, алгоритмы моделирования автономных агрегатов позволяют моделировать агрегативную систему. Как показано



в работе [5] этот процесс можно автоматизировать и построить достаточно универсальную автоматизированную систему моделирования сложных систем.

#### Контрольные вопросы

1. Какими параметрами определяется обобщенная динамическая система?
2. Определить агрегат, операторы определяющие его функционирование. Переходная функция состояния агрегата.
3. Чем отличается управляющее воздействие от всех других. Особое состояние агрегата.
4. Сущность моделирования агрегата.
5. Определить агрегативную систему, структуру, взаимодействия агрегатов.
6. Определить оператор взаимодействия.
7. Сущность моделирования агрегативной системы.

#### Глава 4

### ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ

Современная методология управления системами различной природы основана на знании математической модели системы. Без знания с достаточной точностью характеристик и параметров сложной системы невозможно организовать качественное управление ею.

Однако, во многих случаях математическая модель, полученная с помощью теоретических исследований процессов, протекающих в системе, может быть не адекватной реальной системе. В результате этого значительно снижается эффект управления системой. Непосредственная же оценка параметров и характеристик системы не представляется возможной — она осуществляется косвенно, через измеренные в результате эксперимента входные и выходные сигналы системы. Кроме того, измерения входных и выходных сигналов осуществляются в реальных условиях, характеризующихся действием всевозможных шумов и помех.

Указанные обстоятельства обусловили возникновение и развитие одного из важнейших направлений теории управления и моделирования — идентификацию систем. Под идентификацией в дальнейшем будем понимать процесс построения математической модели системы на основе экспериментально полученных в процессе ее функционирования входных и выходных сигналов.

#### 4.1. Определение, основные понятия и особенности задач идентификации

Задача идентификации формулируется следующим образом: по результатам наблюдений над входными и выходными переменными системы необходимо построить оптимальную в некотором смысле математическую модель.

В общем случае идентификация системы предусматривает решение следующих вопросов [1—4]:

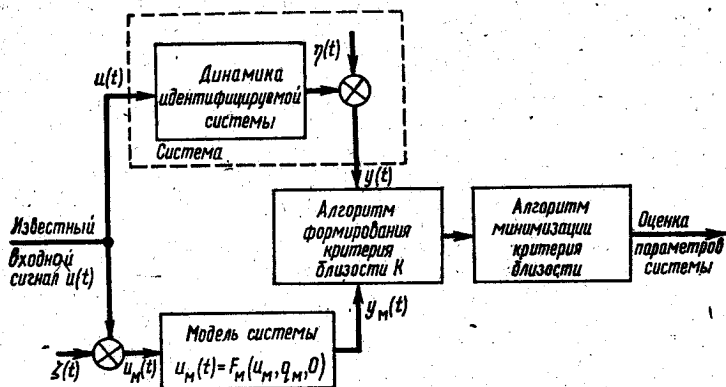


Рис. 4.1.

выбор класса и структуры математической модели идентифицируемой системы и языка описания модели;  
 выбор класса и типа входного воздействия;  
 обоснование критерия близости системы и модели;  
 выбор метода идентификации и разработку соответствующих этому методу численных алгоритмов оценки параметров системы;  
 проверку адекватности полученной в результате идентификации модели реальной системе.

В зависимости от объема априорной информации о классе и структуры системы различают задачи идентификации в широком и узком смысле [6].

Задача идентификации в широком смысле решается в условиях априорной неопределенности относительно модели системы. Выбор класса и структуры математической модели производится на основе теоретического анализа идентифицируемой системы с использованием общих закономерностей процессов, протекающих в системе или на основе априорной информации о подобных системах.

Задача идентификации в узком смысле состоит в оценке параметров и состояния системы при известной структуре и заданном классе математической модели.

В дальнейшем в настоящей главе основное внимание уделено задаче идентификации в узком смысле, общая формулировка которой такова [1—4].

Пусть на вход идентифицируемой системы поступает некоторый входной сигнал  $u(t)$ . Этот же сигнал подается на вход модели (рис. 4.1). Однако, из-за присутствия в каналах передачи информации помех, представляющих собой случайный процесс  $\zeta(t)$ , фактический входной сигнал модели  $u_m(t)$  является некоторой комбинацией сигнала  $u(t)$  и помехи  $\zeta(t)$ . В простейшем случае комбинация входного сигнала и помехи может быть аддитивной, в более сложном случае — мультипликативной или смешанной.

Допустим также, что выход системы задается уравнением

$$y(t) = F(u, q, \eta), \quad (4.1)$$

а модель системы связывает ее вход с выходом зависимостью

$$y_m(t) = F_m(u_m, q_m, 0), \quad (4.2)$$

где  $F$  — оператор системы, характеризующийся некоторой конкретной структурой и  $m$ -мерным вектором  $q$  параметров;  $F_m$  — модельный оператор системы, также характеризующийся структурой и  $m$ -мерным вектором  $q_m$  параметров;  $\eta$  — ошибка, приведенная к выходу системы. Процесс идентификации заключается в нахождении оценки оператора  $F$  по наблюдаемым входным  $u_m(t)$  и выходным  $y(t)$ ,  $y_m(t)$  сигналам. Эффективность идентификации определяется критерием  $K$ , который достигает экстремума в случае эквивалентности операторов объекта  $F$  и модели  $F_m$ . Таким образом, процесс идентификации сводится к решению следующей экстремальной задачи

$$K(F, F_m) \rightarrow \text{extr}, \quad F_m \in \Omega \quad (4.3)$$

где  $\Omega$  — заданный класс операторов модели. Если структура и размерность параметров оператора системы идентичны структуре и размерности параметров модельного оператора (иными словами математической модели процесса), то критерий  $K$  достигает экстремума при равенстве значений параметров системы и модели  $q = q_m$ .

В дальнейшем значения параметров  $q_m$  модели будем называть оценкой параметров  $q$  оператора системы.

Однако, непосредственное измерение параметров оператора системы неосуществимо. Кроме того, в некоторых практических случаях соответствие между входом и выходом системы и модели важнее соответствия операторов. В частности, если модель проще, например более низкого порядка. В связи с этим, при решении задачи идентификации для определения эквивалентности между системой и моделью используется критерий ошибки (или функции потерь), являющийся некоторым функционалом от выхода системы и выхода модели и процесс идентификации, таким образом, сводится к решению следующей экстремальной задачи

$$K(y, y_m) = K[y, F_m(u_m, q_m, 0)] \rightarrow \text{extr}, \quad \begin{matrix} F_m \in \Omega \\ q_m \in Q_m \end{matrix} \quad (4.4)$$

где  $Q_m$  — множество возможных значений параметров.

В дальнейшем критерий  $K$  будем называть критерием близости системы и модели [4, 20].

Процесс оценки параметров системы характеризуется рядом особенностей, которые оказывают значительное влияние на выбор и разработку конкретных методов и алгоритмов идентификации [4].

Первая особенность связана с широким использованием статистических методов оценки, что обусловлено случайной природой приведенной к выходу системы ошибки  $\eta(t)$  (рис. 4.1), случайной

(в большинстве случаев) природой оператора идентифицируемой системы и случайным характером шумов на входе системы и модели.

Приведенная к выходу системы ошибка  $\eta(t)$  складывается из двух составляющих  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$ , называемых ошибкой измерения и методической ошибкой (ошибкой неточности задания модели или неточности определения оператора системы), соответственно [10]. Измерения выхода системы обычно производятся в дискретные моменты времени  $1, 2, \dots, N$ . Наиболее полной статистической характеристикой ошибки измерений, представляющей собой в общем случае случайный вектор  $\eta_1 = [\eta_1(1) \eta_1(2) \dots \eta_1(N)]^T$  является  $N$ -мерный закон распределения. При этом задается (или определяется по данным эксперимента) некоторое число параметров, согласующих этот закон с фактическим законом распределения ошибки или же задаются некоторые моменты этого закона распределения. В первом случае обычно используется нормальный закон, что обусловлено близостью большинства реальных законов распределения к нормальному и удобством использования этого закона при решении задач идентификации. Во втором случае обычно задаются два момента рассматриваемого закона распределения: его математическое ожидание и ковариационная матрица.

Основными источниками возникновения методических ошибок  $\eta_2$  являются [1, 8, 10]: существующая в большинстве практических случаев неполнота используемого вектора  $q_m$  параметров модели; погрешности модельной зависимости  $F_m$ .

Методические ошибки, связанные с неполнотой используемого вектора параметров модели могут возникнуть при использовании модели более низкого порядка, чем система. Такая ситуация может возникнуть, например, при проектировании адаптивных систем управления, в которых синтез управляющего воздействия проще произвести на модели более низкого порядка. Примером возникновения методических ошибок, обусловленных погрешностями модельной зависимости, может служить случай использования линеаризованной модельной зависимости  $F_m$  нелинейной системы.

Во всех существующих методах идентификации оператор системы (вектор параметров оператора системы) рассматривается либо как неизвестная, но не случайная (детерминированная) величина, либо как случайная величина.

Первый подход характерен для уникальных, единичных образцов техники. Второй подход относится к системам, идентифицируемые экземпляры которых могут рассматриваться как частные реализации больших серий аналогичных изделий. К ним в первую очередь относятся системы, вектор параметров которых зависит от большого количества случайных факторов и по своей природе является случайным. При определении вектора параметров таких систем задача сводится к нахождению некоторой частной реализации случайного вектора.

Случайный характер помех  $\zeta(t)$  на входе модели обычно обусловлен погрешностями измерений. Для их математического описания

используются те же приемы, что и для ошибок измерений выхода системы.

Вторая особенность процесса идентификации обусловлена тем, что реальные идентифицируемые системы в большинстве случаев являются динамическими. Исчерпывающей характеристикой динамической системы служат собственные значения ее оператора (собственные частоты системы). В связи с этим для обеспечения условий идентифицируемости необходимо, чтобы [1, 5]: входной сигнал объекта в процессе идентификации возбуждал все колебания, соответствующие собственным частотам системы; выходной сигнал содержал достаточно информации о собственных частотах системы.

Первое условие называется условием управляемости, а второе — условием наблюдаемости.

Третья особенность задачи идентификации связана с тем, что они, как правило, некорректно поставлены.

#### 4.2. Классификация методов идентификации

Все разнообразие существующих методов идентификации может быть классифицировано по признакам, в основу которых положены перечисленные в предыдущем параграфе основные элементы задачи идентификации. Такими признаками являются вид математической модели и характер идентифицируемой системы, способ получения экспериментальной информации о свойствах системы, вид критерия близости системы и модели, объем априорной информации о системе [1, 4].

В зависимости от вида математической модели различают методы непараметрической (или функциональной) и параметрической идентификации. При непараметрической идентификации используются непараметрические модели, такие как весовые и переходные функции, спектральные плотности или разложения в различные ряды (например Вольтерра, Фурье, Ляггера, Эрмита и т. д.). Кроме того, непараметрическими моделями могут служить передаточные функции, если заранее не задано количество коэффициентов этой функции.

Необходимо отметить, что непараметрические модели строятся обычно для объектов типа «черный ящик», что нередко приводит к очень продолжительным процедурам идентификации.

Методы параметрической идентификации используются для объектов типа «серый ящик», или иными словами для систем со структурой известной до конечного числа параметров. Задачей идентификации здесь является количественная оценка этих параметров. Примером параметрического представления систем могут служить дифференциальные и разностные уравнения, передаточные функции с заданным количеством коэффициентов, модели типа «вход — выход — состояние» и др. При использовании параметрической идентификации необходимо помнить, что параметрические

модели могут приводить к неверным результатам, если порядок модели не согласуется с порядком идентифицируемой системы.

По характеру идентифицируемой системы различают идентификацию линейных и нелинейных систем, статических и динамических систем с постоянными, переменными и распределенными параметрами, одномерных и многомерных, непрерывных и дискретных систем.

По способу получения экспериментальных данных различают активные и пассивные методы идентификации. При активной идентификации на вход системы подается заранее выбранное воздействие (импульсное, ступенчатое, гармоническое, псевдослучайное и т. д.). При пассивной идентификации используются данные, полученные в процессе нормального функционирования системы.

В соответствии с основной задачей идентификации — процедуре построения оптимальной в определенном смысле математической модели системы по реализациям ее входных и выходных сигналов — должны быть заданы критерии близости системы и модели. Выбор этого критерия в значительной степени определяется целью идентификации, требованиями, предъявляемыми к оценкам и объемом априорной информации о системе и помехах, присутствующих в каналах передачи информации.

В наиболее общей постановке такой критерий формируется как некоторая функция (или функционал) выходной ошибки (невязки), представляющей собой разность между выходом системы  $y(t)$  и выходом модели  $y_m(t)$ .

При этом выход модели формируется на основе сведений о том, в классе каких функций искать модель. Это означает, что необходимо иметь аналитическое описание модели с точностью до конечного числа параметров. Такой мерой задача идентификации параметризуется и делает возможным использование различных методов оценки и принятия решений, развитых в математической статистике. В частности, наиболее широкое применение нашли оценки по критериям наименьших квадратов, наименьших взвешенных квадратов, максимального правдоподобия и минимального риска (байесовские оценки). Все перечисленные оценки упорядочены по возрастанию объема исходной информации об объекте. Применение того или иного критерия приводит к принятию метода идентификации по этому критерию.

Рассмотрим последовательно перечисленные критерии [1, 9, 11, 13, 14].

С целью упрощения выкладок положим, что система является статической и ее модель имеет вид

$$y_m(t) = F_m[u(t), q_m, 0], \quad (4.5)$$

где  $q_m$  — вектор параметров модели;  $u(t)$  — входное воздействие;  $y_m(t)$  — скалярный выход модели. Кроме того, положим, что выходы системы и модели наблюдаются в дискретные моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_N$ . Значения выхода системы и модели в эти моменты времени обозначим  $y(1), y(2) \dots y(N)$  и  $y'(1)_m, y'(2)_m \dots y'(N)_m$ .

соответственно. Значения вектора входного воздействия и приведенной ошибки в эти же дискретные моменты времени обозначим  $u(1), u(2) \dots u(N)$  и  $\eta(1), \eta(2) \dots \eta(N)$ , соответственно.

При формировании критерия близости системы и модели по методу наименьших квадратов (МНК) достаточной априорной информацией является лишь аппроксимация системы выбранной моделью. Оценка по МНК получается в результате минимизации критерия

$$K = \eta^T \eta = \sum_{i=1}^N \eta(i)^2 = \sum_{i=1}^N \{y(i) - F_m[u(i), q, 0]\}^2,$$

$$\eta^T = [\eta(1) \eta(2) \dots \eta(N)], \quad (4.6)$$

где  $i = 1, 2, \dots, N$  — дискретные моменты времени, в которых произведены измерения выходов системы и модели;  $F_m$  — выбранная модель системы.

При формировании критерия близости для получения оценок по методу наименьших взвешенных квадратов считается также известной ковариационная матрица ошибок. Минимизируемый критерий имеет вид

$$K = \eta^T R \eta = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{y(i) - F_m[q_m, u(i), 0]\} R_{ij} \{y(j) - F_m[q_m, u(j), 0]\}, \quad (4.7)$$

где  $R_{ij}$  — элементы ковариационной матрицы  $R$  приведенной ошибки. Использование метода наименьших взвешенных квадратов наиболее целесообразно в случае измерения координат системы с различной точностью. Информация о точности измерения координат реализуется в задании матрицы  $R$ . Если вектор ошибок  $\eta = [\eta(1), \eta(2) \dots, \eta(N)]^T$  является гауссовским, имеет нулевое математическое ожидание и характеризуется ковариационной матрицей  $N = M[\eta \eta^T]$ , то выбор ковариационной матрицы вида  $R = N^{-1}$  приводит к понятию марковских оценок, обеспечивающих минимальную дисперсию оценок параметров системы.

При выборе  $R = E$ , где  $E$  — единичная матрица, оценки по методу наименьших взвешенных квадратов эквивалентны оценкам по методу наименьших квадратов.

Для получения оценок параметров по методу максимального правдоподобия необходимо знание вида функции плотности распределения  $f(\eta)$  ошибки  $\eta$ . Незвестным считается априорное распределение параметров плотности распределения  $f(q)$ , оценка которых при этом должна осуществляться одновременно с оценкой параметров системы.

Пусть до проведения наблюдений над системой известно, что выборочные значения  $y(i), i = \overline{1, N}$  являются случайными величинами с совместным распределением вероятностей при условии  $q$ , т. е. известна  $f[y(1), y(2), \dots, y(N)/q]$ . Апостериори (т. е. после измерений) становятся известными реализации этих случайных величин

$y(i) = y^*(i), i = \overline{1, N}$ , по которым необходимо определить оценку  $q_m$  параметров  $q$ . Оценкой максимального правдоподобия  $q_m$  параметров  $q$  называется величина, максимизирующая следующий критерий

$$K = f[y^*(1), y^*(2), \dots, y^*(N) | q_m]. \quad (4.8)$$

Обоснование выбора такого критерия состоит в том, что параметрам  $q$  присваивается значение  $q_m$ , при котором наиболее вероятно появление наблюдаемой реализации  $y^*(i), i = \overline{1, N}$ .

Условную плотность  $f[y(1), y(2), \dots, y(N) | q]$  обычно называют функцией правдоподобия

$$L(y, q) = f[y(1), y(2) \dots y(N) | q]. \quad (4.9)$$

Если модель линейна по параметрам и вектор ошибки  $\eta = [\eta(1), \eta(2) \dots \eta(N)]^T$  имеет многомерное гауссовское распределение  $f(\eta)$ , то функция правдоподобия может быть записана следующим образом

$$L(y, q) \doteq f[y(1), y(2), \dots, y(N) | q] = f(\eta). \quad (4.10)$$

Значительное упрощение задачи получения оценок по методу максимального правдоподобия достигается в предположении, что составляющие вектора ошибки  $\eta(1), \eta(2), \dots, \eta(N)$  являются статистически независимыми, и каждая из них подчиняется гауссовскому распределению с нулевым математическим ожиданием

$$M[\eta(i)] = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

В этом частном случае

$$f(\eta) = f_1[\eta(1)] f_2[\eta(2)] \dots f_N[\eta(N)], \quad (4.11)$$

где  $f_i[\eta(i)]$  есть плотность распределения  $i$ -й ошибки

$$f_i[\eta(i)] = (2\pi\sigma_i^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\eta(i)^2}{2\sigma_i^2}\right). \quad (4.12)$$

Если дисперсии  $\sigma_i^2$  известны, максимизация функции правдоподобия (4.9) эквивалентна минимизации критерия наименьших взвешенных квадратов (4.7) с матрицей весов

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_N^2 \end{bmatrix}^{-1}. \quad (4.13)$$

Отметим, что хотя предположение о нормальности распределения и независимости ошибок в значительной степени упрощает задачу, необходимо иметь в виду, что эти предположения иногда не имеют надежного физического обоснования. На самом деле, приведенная ошибка включает как ошибки измерений, так и ошибки, связанные с неточностью задания модели. Например, если в качестве модели



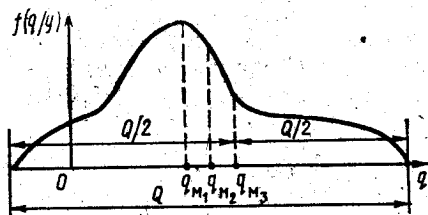


Рис. 4.2.

нелинейной системы принята линейная модель, то ошибки будут коррелированы с вектором фазовых координат и не будут нормально распределены.

Байесовский подход к оценке параметров требует знания совместной плотности распределения вероятности ошибок  $f(\eta)$  и априорной плотности вероятности

параметров  $f(q)$ . По известной  $f(\eta)$  можно рассчитать плотность вероятности измерений  $y$ , которая зависит от параметров системы и обозначается  $f(y/q)$ . Существо байесовского подхода сконцентрировано в вычислении апостериорной плотности вероятности  $f(q/y)$ . Эта плотность распределения вероятности содержит в себе всю информацию о параметрах системы. Для вычисления  $f(q/y)$  используется формула Байеса

$$f(q/y) = f[q/y(1), y(2), \dots, y(N)] = \frac{f[y(1), y(2), \dots, y(N)/q] f(q)}{f[y(1), y(2), \dots, y(N)]} \quad (4.14)$$

Ввиду того, что априорные плотности  $f(q)$  и  $f(\eta) = f(y/q)$  заданы,  $f(y)$  может быть вычислена по формуле

$$f(y) = \int_Q f(y/q) f(q) dq, \quad (4.15)$$

где  $y = [y(1) \dots y(N)]^T$ ;  $Q$  — область допустимых изменений  $q$ .

Вычисление интеграла (4.15) может потребовать многократного численного интегрирования, если  $f(q)$  не задано в аналитической форме. После получения апостериорной плотности  $f(q/y)$  она используется для получения оценок  $q_{M_i}$ , оптимальных по некоторым критериям. Наибольшее распространение получили следующие оценки [14]:

оценка максимальной апостериорной вероятности (или безусловная оценка максимального правдоподобия)  $q_{M_1}$ , максимизирующая следующий критерий

$$K = f(q_{M_1}/y) \rightarrow \max_{q_{M_1} \in Q} \quad (4.16)$$

оценка  $q_{M_2}$ , минимальной дисперсии, минимизирующая критерий

$$K = \int_Q \|q - q_{M_2}\|^2 f(q/y) dq; \quad (4.17)$$

минимаксная оценка  $q_{M_3}$ , минимизирующая максимум критерия

$$K = \|q - q_{M_3}\| \rightarrow \min_{q \in Q} \max_{q \in Q} \quad (4.18)$$

На рис. 4.2 показаны эти оценки для некоторой плотности  $f(q/y)$  в предположении, что объект характеризуется одномерным параметром, где  $q_{M_1}$  — оценка максимальной апостериорной вероятности;  $q_{M_2}$  — оценка минимальной дисперсии;  $q_{M_3}$  — минимаксная оценка.

### 4.3. Математическая постановка задачи идентификации

С математической точки зрения задача идентификации рассматривается как задача определения экстремума некоторого показателя, характеризующего близость объекта и модели [1, 2]. Как было показано в предыдущем параграфе выбор этого показателя в значительной степени определяется объемом априорной информации о системе, классом и структурой математической модели, классом входных сигналов и целью идентификации.

Допустим, например, что показатель близости системы и модели характеризуется функцией

$$K(y, y_m, q_m) = \varphi[y(t), y_m(t, u, q_m)], \quad (4.19)$$

где, по-прежнему,  $y(t) = F(u, q, \eta, t)$  — выходной сигнал системы;  $y_m(t, u, q_m)$  — выходной сигнал модели;  $q_m = [q_{m1}, \dots, q_{mt}]^T$  — вектор оценок параметров (иначе параметров модели);  $u$  — входной сигнал модели и системы;  $\eta$  — приведенные к выходу системы возмущения;  $\varphi$  — некоторая функция, вид которой определяется спецификой принятого метода идентификации.

Как известно из дифференциального исчисления, принципиально задача нахождения оптимальной  $q_m^*$  оценки параметров, минимизирующей критерий (4.19)

$$K(y, y_m, q_m) \rightarrow \min_{q_m = q_m^*}, \quad (4.20)$$

сводится к решению следующего уравнения

$$\left. \frac{dK(y, y_m, q_m)}{dq_m} \right|_{q_m = q_m^*} = 0, \quad (4.21)$$

или в скалярной форме

$$\left. \frac{\partial K(y, y_m, q_m)}{\partial q_{mi}} \right|_{q_{mi} = q_{mi}^*} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.22)$$

Уравнения (4.21) представляют собой необходимые условия достижения минимальной ошибки оценки параметров и связывают искомые оптимальные оценки  $q_m^*$  параметров с экспериментальными данными  $y$  и  $u$ . Вычислительная схема определения оценок параметров непосредственно из уравнения (4.22) приводит к понятию явных или прямых схем идентификации. Однако, система в общем случае нелинейных уравнений (4.22) часто бывает достаточно сложна, чтобы из нее можно было в явном виде найти оптимальные оценки параметров.

В связи с этим большое распространение получили градиентные методы идентификации, или методы с настраиваемой моделью. Градиентом показателя (4.19) называется вектор

$$\frac{dK}{dq_m} = \text{grad}_{q_m} K, \quad (4.23)$$

а составляющие градиента представляют собой частные производные

$$\frac{\partial K}{\partial q_{mi}} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{grad}_{q_m} K = \left[ \frac{\partial K}{\partial q_{m_1}}, \frac{\partial K}{\partial q_{m_2}}, \dots, \frac{\partial K}{\partial q_{m_m}} \right]^T. \quad (4.24)$$

Сущность градиентных методов состоит в последовательной или рекуррентной организации движения оценок  $q_m$  параметров системы  $q$  в антиградиентном направлении показателя (4.19) и в общем случае сводится к следующей схеме.

Пусть показатель близости (4.19) допускает разложение в ряд Тейлора в окрестностях какого-либо значения оценок параметров  $q_m(i)$ .

Ограничившись членом первого ряда порядка малости, получим

$$K(q_m) \simeq K[q_m(i)] + \left\{ \frac{dK[q_m(i)]}{dq_m(i)} \right\}^T [q_m - q_m(i)]. \quad (4.25)$$

Допустим, что значение критерия  $K$  при  $q_m = q_m(i)$  известно и вычислим

$$\Delta K(i) = K(q_m) - K[q_m(i)] = \left[ \frac{dK[q_m(i)]}{dq_m(i)} \right]^T \Delta q_m(i), \quad (4.26)$$

где  $\Delta K(i) = K - K(i)$ ;  $\Delta q_m(i) = q_m - q_m(i)$ .

В случае, если критерий (4.19) является квадратическим, то он имеет такую особенность: чем дальше от минимума значения оценок параметров  $q_m$ , тем круче его наклон. Таким образом, величина  $\text{grad}_{q_m} K$  может служить мерой удаления  $q_m$  от минимума. Следовательно, для организации наискорейшего спуска в направлении минимума  $K(q_m)$  целесообразно использовать градиент, т. е.

$$\Delta q_m(i) = -k_i \text{grad}_{q_m(i)} K, \quad (4.27)$$

где  $k_i$  — параметр длины шага итерации, который в общем случае зависит от номера итерации. В основе выбора  $k_i$  лежат соображения сходимости процедуры идентификации, скорости сходи-

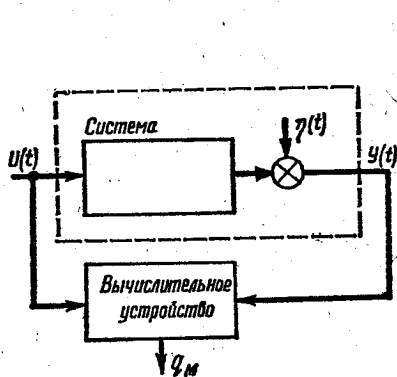


Рис. 4.3.

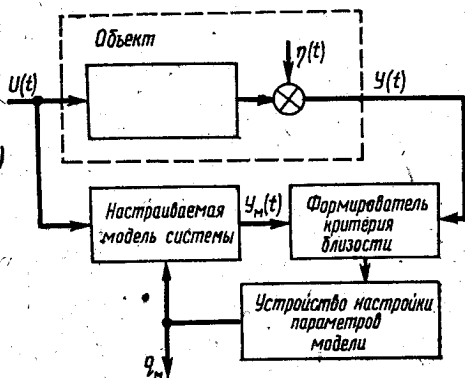


Рис. 4.4.

мости и т. д. Таким образом, используя какое-либо приближение  $q_m(i)$  и вычисляя значение градиента в этой исходной точке, для  $i + 1$  приближения получим

$$q_m(i+1) = q_m(i) + \Delta q_m(i) = q_m(i) - k_i \text{grad}_{q_m(i)} K. \quad (4.28)$$

Выражение (4.28) представляет собой основу схем идентификации по настраиваемой модели или по замкнутому контуру.

Блок схемы явных и градиентных схем реализации идентификации приведены на рис. 4.3. и рис. 4.4, соответственно.

В уравнении (4.28) составляющие градиента определяются в дискретных точках. Пусть все частные производные определяются за время  $\Delta t$ . Тогда можно записать конечно-разностное векторное уравнение [20]

$$\frac{\Delta q_m}{\Delta t} = -k \text{grad}_{q_m} K, \quad (4.29)$$

которое при малом  $k$  и при  $\Delta t \rightarrow 0$  переходит в дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dq_m}{dt} = -k \text{grad}_{q_m} K. \quad (4.30)$$

Решение уравнения (4.30) представляет собой траекторию изменения параметров модели во времени. На рис. 4.5 изображены траектории движения параметров модели, соответствующие конечно-разностному (штриховая линия) и дифференциальному (сплошная линия) уравнениям градиентного метода идентификации системы, характеризующейся двумя оцениваемыми параметрами.

Градиентные методы первого порядка (4.29), (4.30) просты в вычислительном отношении, но иногда дают медленную сходимость в окрестности экстремума функции (4.19). Для устранения этого недостатка могут быть использованы градиентные методы второго порядка. Основой этих методов является сохранение членов первого и второго порядков малости в разложении (4.25). Метод вторых вариаций обеспечивает быструю сходимость в окрестности минимума, однако при этом существенно усложняются соответствующие этому методу вычислительные процедуры [12, 22].

Если в результате действия случайных возмущений происходит искажение направления градиента, то прибегают к процедуре стохастической аппроксимации. Стохастическая аппроксимация представляет собой также рекуррентный алгоритм отыскания минимума критерия близости по следующей схеме [1, 2, 20]:

$$q_m(i+1) = q_m(i) - \hat{k}_i \text{grad}_{q_m(i)} K, \quad (4.31)$$

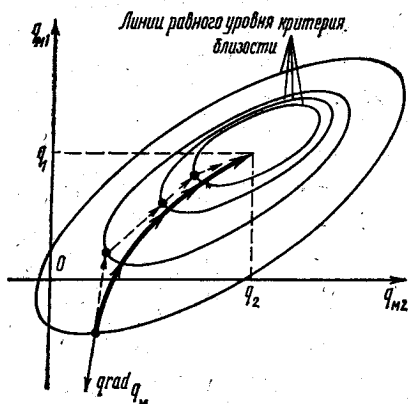


Рис. 4.5.

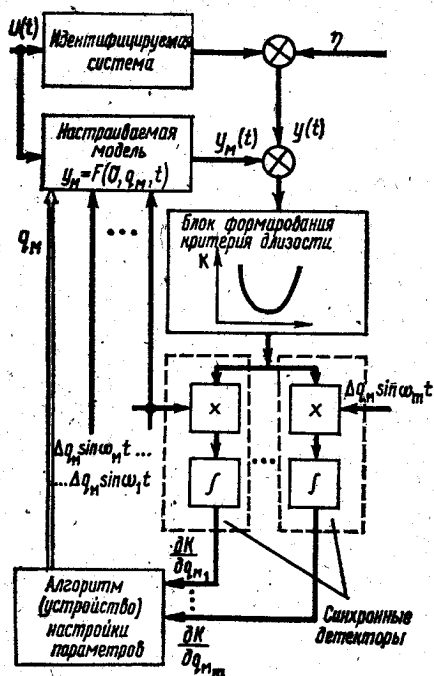


Рис 4.6.

где  $\hat{k}_i$  удовлетворяет условию

$$\hat{k}_i \geq 0; \quad \sum_{i=1}^n (\hat{k}_i)^2 < \infty; \\ \sum_{i=1}^n \hat{k}_i \rightarrow \infty \quad (4.32)$$

при  $n \rightarrow \infty$ , где  $n$  — номер итерации. Выполнение условий (4.32) необходимо для обеспечения сходимости процедуры стохастической аппроксимации. В случае оценки одного параметра этим требованиям подчиняется последовательность  $\hat{k}_i = \frac{1}{n}$ .

Рассмотренные выше градиентные методы идентификации делятся на два больших класса — поисковые и беспойсковые. В поисковых методах определение градиента осуществляется путем численного дифференцирования, для чего вводятся поисковые вариации параметров модели и используется синхронное детектирование.

В беспойсковых системах идентификации для определения градиента используют методы, развитые в теории чувствительности.

Сущность оценки градиента критерия близости с помощью синхронного детектирования заключается в следующем [15, 20, 21]. На параметры модели  $q_{m1}, \dots, q_{mt}$  накладываются незначительные возмущения  $\Delta q_{m1} \sin \omega_1 t, \dots, \Delta q_{mt} \sin \omega_m t$ . Эти возмущения в общем случае могут носить гармонический характер, или же быть случайными. Ограничимся рассмотрением гармонических воздействий, полагая что

$$\hat{q}_{mi} = q_{mi} + \Delta q_{mi} \sin \omega_i t, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.33)$$

причем  $\omega_i \neq \omega_j$ , для всех  $i$  и  $j$ .

В (4.33)  $\hat{q}_{mi}$  обозначен возмущенный  $i$ -й параметр модели. Сигнал с выхода блока формирования критерия близости пропускается через синхронные детекторы, которые представляют собой устройства, реализующие произведения выхода блока формирования критерия близости на возмущения  $\Delta q_{m1} \sin \omega_1 t, \dots, \Delta q_{mt} \sin \omega_m t$  с последующей фильтрацией. Каждый из фильтров реализует операцию осреднения

$$\Phi = \frac{1}{T} \int_0^T \delta(t) dt, \quad (4.34)$$

где  $\delta(t)$  — сигнал, поступающий на вход фильтра. При этом выходы синхронных детекторов будут пропорциональны составляющим градиента критерия близости  $\frac{\partial K}{\partial q_{m1}} \frac{\partial K}{\partial q_{m2}} \dots \frac{\partial K}{\partial q_{mn}}$ . Покажем это. Схема реализации синхронного детектирования изображена на рис. 4.6. Раскладывая выход блока формирования критерия близости в ряд Тейлора по малым возмущениям параметров и ограничившись членами первого порядка малости, получим

$$\hat{K}[(q_m + \Delta q_m) t] = K(q_m) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial K}{\partial q_{mj}} \Delta q_{mj} \sin \omega_j t, \quad (4.35)$$

где  $\hat{K}$  — возмущенное значение критерия близости.

Учитывая (4.35) и принимая во внимание операции, производимые в блоках перемножения и фильтрации, сигнал на выходе  $i$ -го синхронного детектора будет иметь вид

$$q_{mi} = K(q_m) \frac{1}{T} \int_0^T \Delta q_{mi} \sin \omega_i t dt + \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=1}^m \frac{\partial K}{\partial q_{mj}} \Delta q_{mj} \sin \omega_j t \times \\ \times \Delta q_{mi} \sin \omega_i t dt, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.36)$$

Выбирая время усреднения фильтров из условия

$$T \gg \max \left( \frac{2\pi}{\omega_1}, \frac{2\pi}{\omega_2}, \dots, \frac{2\pi}{\omega_m} \right), \quad (4.37)$$

можно показать, что

$$\left. \begin{aligned} \int_0^T \sin \omega_i t \sin \omega_j t dt &= \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad \omega_i \neq \omega_j \\ \frac{1}{2}, \quad \omega_i = \omega_j \end{array} \right\}; \\ \int_0^T \sin \omega_i t dt &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Учитывая (4.38), сигнал на выходе  $i$ -го рассматриваемого фильтра будет иметь вид

$$\Phi_i = \frac{\Delta q_{mi}^2}{2} \frac{\partial K}{\partial q_{mi}} \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.39)$$

Таким образом, на выходе  $i$ -го осредняющего фильтра выделяется сигнал, пропорциональный  $i$ -й составляющей градиента показателя близости  $\frac{\partial K}{\partial q_{mi}}$ .

Исследуя аналогичным образом выходы остальных фильтров и полагая  $\Delta q_{mi} = \Delta q_m$  для всех  $i$ , получим, что

$$(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m) = \frac{\Delta q_m^2}{2} \text{grad}_{q_m} K. \quad (4.40)$$

Полученное соотношение лежит в основе замкнутых систем идентификации, использующих принцип синхронного детектирования.

В отличие от рассмотренного выше поискового метода, сущность беспойсковой идентификации состоит в оценке градиента без поиска путем вычислений. При этом для минимизации критерия близости объекта и модели используется градиентный метод, но оценка градиента производится аналитически, в частности с использованием функций чувствительности [19, 23].

Пусть по-прежнему критерий близости имеет вид

$$K(y, y_m, q_m) = \varphi[y(t), y_m(t, u, q_m)], \quad (4.41)$$

причем функции  $\varphi\{\cdot\}$  и  $y_m$  заданы аналитически, иными словами есть полная информация о структуре объекта.

Оценим градиент критерия близости

$$\text{grad}_{q_m} K = \frac{dK}{dq_m} = \frac{d\varphi}{dy_m} \frac{dy_m}{dq_m}. \quad (4.42)$$

Вектор

$$\frac{dy_m}{dq_m} = \text{grad}_{q_m} y_m = \left[ \frac{\partial y_m}{\partial q_{m1}}, \frac{\partial y_m}{\partial q_{m2}}, \dots, \frac{\partial y_m}{\partial q_{mm}} \right]^T \quad (4.43)$$

называется вектором чувствительности, а функция  $\frac{\partial y_m(t, u, q_m)}{\partial q_{mi}}$  называется функцией чувствительности выхода модели по  $i$ -му параметру.

Знание вектора чувствительности (4.43) позволяет просто реализовать схему беспойсковой идентификации. Учитывая формулу (4.30) и используя вектор чувствительности, получим выражение, определяющее динамику настройки параметров модели в беспойсковой системе идентификации

$$\frac{dq_{mi}}{dt} = -k \frac{d\varphi(y, y_m, q_m, u)}{dy_m} \frac{dy_m}{dq_m}. \quad (4.44)$$

или в скалярной форме

$$\frac{dq_{mi}}{dt} = -k \frac{d\varphi(y, y_m, q_m, u)}{dy_m} \frac{\partial y_m}{\partial q_{mi}}, \quad i = 1 \dots m, \quad (4.45)$$

где  $k$  — некоторая положительная константа.

Вычисление вектора чувствительности для статических систем затруднений не вызывает. Если идентифицируемая система является динамической и ее математическая модель задана, например, в виде

$$y_m = F(y_m, t, u, q_m), \quad y_m(t_0) = 0, \quad (4.46)$$

то вектор чувствительности  $\text{grad}_{q_m} y_m(t) = V(t)$  определяется в результате интегрирования векторной системы

$$\dot{V} = \frac{dF(y_m, t, u, q_m)}{dy_m} V + \frac{dF(y_m, t, u, q_m)}{dq_m} \quad (4.47)$$

$$V(t_0) = 0$$

уравнений чувствительности совместно с уравнением модели (4.46) [23].

Таким образом, реализация беспоиcкового алгоритма идентификации динамической системы по настраиваемой модели сводится к численному интегрированию (в случае реализации алгоритма на ЭВМ) в реальном едином времени уравнения (4.44), дифференциального уравнения модели и дифференциального уравнения чувствительности

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_m &= -k \frac{d\varphi(y, y_m, q_m)}{dy_m} V; \\ y_m &= F(y_m, t, u, q_m); \\ \dot{V} &= \frac{dF(y_m, t, u, q_m)}{dy_m} V + \frac{\partial F(y_m, t, u, q_m)}{\partial q_m} \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

Последующие параграфы настоящей главы содержат описание некоторых конкретных алгоритмов, представляющих собой реализацию основных идей и принципов, изложенных ранее.

#### 4.4. Идентификация параметров методом наименьших квадратов

Рассмотрим задачу синтеза оптимального по методу наименьших квадратов (МНК) алгоритма оценки параметров системы, наблюдаемый сигнал которой, как и прежде, зависит от входного воздействия, параметров и приведенного к выходу шума

$$y(i) = y(u, q, \eta, i), \quad i = 1, 2 \dots n, \quad (4.49)$$

где  $y(i)$  — наблюдаемый выходной сигнал системы в  $i$ -й дискретный момент времени;  $q = [q_1 \dots q_m]^T$  — вектор параметров системы;  $i = 1, 2, \dots, n$  — дискретные моменты времени, в которых происходит измерение выходного сигнала;  $\eta$  — шум, приведенный к выходу системы [1].

Полагая, что шум во входном сигнале отсутствует, иными словами, входной сигнал системы совпадает со входным сигналом модели, зададим математическую модель системы (4.49) в следующем виде

$$y_m(i) = \sum_{j=1}^m q_{mj} u_j(i), \quad i = 1, 2 \dots n, \quad (4.50)$$

где  $y_m(i)$  — выход модели в  $i$ -й момент времени;  $q_m = [q_{m1} \dots, q_{mn}]^T$  — вектор параметров модели.

После серии  $n$  измерений выход системы можно представить следующим вектором:

$$y = [y(1), y(2), \dots, y(n)]^T, \quad (4.51)$$

причем

$$y = Uq + \eta, \quad (4.52)$$

а выход модели как

$$y_m = Uq_m. \quad (4.53)$$



где матрица  $U$  имеет вид

$$U = \begin{bmatrix} u_1(1) & \dots & u_m(1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(n) & \dots & u_m(n) \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Элементы  $u_j(i)$ , ( $j = 1, \dots, m$ ;  $i = 1, \dots, n$ ) матрицы  $U$  представляют собой значения  $j$ -го входа в момент времени  $i$ . Входной сигнал должен выбираться таким образом, чтобы вектор-столбцы матрицы (4.54) были линейно независимы, т. е.

$$\text{ранг } U = m. \quad (4.55)$$

Иными словами, все входные сигналы  $u_j(i)$ , ( $j = 1 \dots m$ ;  $i = 1 \dots n$ ) должны представлять набор линейно-независимых функций.

Задача состоит в том, чтобы определить оптимальные оценки  $q_m^*$  параметров модели, минимизирующие критерий близости наименьших квадратов.

Полагая, что приведенная ошибка является несмещенной, некоррелированной и равноточной

$$M[\eta] = 0, \quad M[\eta\eta^T] = \sigma^2 E, \quad (4.56)$$

где  $E$  — единичная матрица;  $M$  — оператор математического ожидания. Пользуясь (4.26), запишем выражение для критерия близости, который представляет собой следующую квадратичную форму

$$K(q_m) = (y - Uq_m)^T (y - Uq_m) = \sum_{i=1}^n \left[ y(i) - \sum_{j=1}^m u_j(i) q_{mj} \right]^2. \quad (4.57)$$

Необходимые условия минимума критерия близости имеют вид

$$\frac{\partial K}{\partial q_{mk}} \Big|_{q_{mk}=q_{mk}^*} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (4.58)$$

Вычислив производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial q_{mk}} &= -2 \sum_{i=1}^n \left[ y(i) - \sum_{j=1}^m u_j(i) q_{mj} \right] u_k(i) = \\ &= 2 \sum_{j=1}^m q_{mj} \sum_{i=1}^n u_j(i) u_k(i) - 2 \sum_{i=1}^n y(i) u_k(i), \end{aligned} \quad (4.59)$$

перепишем условия минимума (4.58) в виде системы уравнений относительно параметров модели (оценок параметров системы)  $q_{m1}^*, q_{m2}^*, \dots, q_{mt}^*$ , оптимальных по критерию наименьших квадратов

$$\left. \begin{aligned} q_{m1}^* \sum_{i=1}^n u_1^2(i) + q_{m2}^* \sum_{i=1}^n u_2(i) u_1(i) + \dots + q_{mt}^* \sum_{i=1}^n u_m(i) u_1(i) &= \\ = \sum_{i=1}^n y(i) u_1(i); \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & q_{m1}^* \sum_{i=1}^n u_1(i) u_2(i) + q_{m2}^* \sum_{i=1}^n u_2^2(i) + \dots + q_{mm}^* \sum_{i=1}^n u_m(i) u_2(i) = \\
 & = \sum_{i=1}^n y(i) u_2(i); \\
 & \vdots \\
 & q_{m1}^* \sum_{i=1}^n u_1(i) u_m(i) + q_{m2}^* \sum_{i=1}^n u_2(i) u_m(i) + \dots + q_{mm}^* \times \\
 & \times \sum_{i=1}^n u_m^2(i) = \sum_{i=1}^n y(i) u_m(i),
 \end{aligned} \right\} (4.60)$$

или в матричной форме

$$V q_m^* = z, \quad (4.61)$$

где  $V$  и  $z$  матрицы размерности  $m \times m$  и  $m \times 1$ , определяемые равенствами

$$V = U^T U = (V_{kj}), \quad V_{kj} = \sum_{i=1}^n u_k(i) u_j(i); \quad (4.62)$$

$$z = U^T y = [z_1, \dots, z_m]^T, \quad z_k = \sum_{i=1}^n u_k(i) y(i). \quad (4.63)$$

Система (4.60) или (4.61) из  $m$  линейных алгебраических уравнений относительно  $m$  неизвестных  $q_{m1}^* \dots q_{mm}^*$  называется системой нормальных уравнений.

Если  $V$  — невырожденная матрица (иными словами  $\text{rang } V = m$ ), то из (4.61) получим решение

$$q_m^* = V^{-1} z = (U^T U)^{-1} U^T y, \quad (4.64)$$

которое является единственным.

Достаточные условия того, что решение (4.64) обеспечивает минимум критерия (4.57), можно показать следующим образом.

Рассмотрим произвольный вектор  $q_m$ , отличный от  $q_m^*$

$$q_m = q_m^* + \Delta q_m. \quad (4.65)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 K(q_m) &= K(q_m^*) - \Delta q_m^T (U^T y - U^T U q_m^*) - \\
 & - (y^T U - q_m^{*T} U^T U) \Delta q_m + [U \Delta q_m]^T U \Delta q_m.
 \end{aligned} \quad (4.66)$$

Применяя операцию транспонирования к обеим частям (4.64), получим

$$(U^T y - U^T U q_m^*)^T = y^T U - q_m^{*T} U^T U = 0. \quad (4.67)$$

Следовательно, с учетом (4.67) выражение (4.66) можно переписать

$$K(q_m) = K(q_m^*) + \|U \Delta q_m\|^2 \geq K(q_m^*). \quad (4.68)$$

Таким образом, решение (4.64) системы нормальных уравнений (4.60) удовлетворяет и достаточным условиям минимума критерия близости (4.57).

Из формул (4.64) и (4.52) следует

$$\mathbf{q}_m^* = (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T (\mathbf{U} \mathbf{q} + \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{q} + (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \boldsymbol{\eta}. \quad (4.69)$$

Найдем математическое ожидание правой и левой частей последнего соотношения. Принимая во внимание статистическую независимость входного сигнала и приведенной помехи, получим

$$M[\mathbf{q}_m^*] = \mathbf{q} + M[(\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T] M[\boldsymbol{\eta}]. \quad (4.70)$$

Учитывая, что помеха является несмещенной  $M[\boldsymbol{\eta}] = \mathbf{0}$ , то

$$M[\mathbf{q}_m^*] = \mathbf{q}. \quad (4.71)$$

Таким образом, оценка по критерию наименьших квадратов является несмещенной.

Для выяснения точностных характеристик метода наименьших квадратов, вычислим ковариационную матрицу оценки вектора параметров

$$C[\mathbf{q}_m^*] = M\{[\mathbf{q}_m^* - M(\mathbf{q}_m^*)][\mathbf{q}_m^* - M(\mathbf{q}_m^*)]^T\} = \\ = M\{[\mathbf{q}_m^* - \mathbf{q}][\mathbf{q}_m^* - \mathbf{q}]^T\}. \quad (4.72)$$

Вновь принимая во внимание статистическую независимость входного сигнала и приведенного шума, а также статистическую характеристику помехи, получим

$$C[\mathbf{q}_m^*] = M\{[(\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \boldsymbol{\eta}][(\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \boldsymbol{\eta}]^T\}. \quad (4.73)$$

Учитывая детерминированный характер входного воздействия, последнее соотношение можно переписать

$$C[\mathbf{q}_m^*] = (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T M[\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^T] \mathbf{U} (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1}, \quad (4.74)$$

и, таким образом,

$$C[\mathbf{q}_m^*] = \sigma^2 [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1}. \quad (4.75)$$

Диагональные элементы матрицы  $C[\mathbf{q}_m^*]$  представляют собой дисперсии оценок параметров системы, недиагональные элементы представляют собой коэффициенты корреляции между оценками различных параметров.

Алгоритм МНК определения оценок в форме (4.64) обладает существенными недостатками. Во-первых, для вычисления оценок параметров требуется обращение матрицы размера  $m \times m$ , что при значительном  $m$  представляет довольно трудоемкий процесс даже для современных вычислительных средств, на которых реализуется процесс идентификации. Во-вторых, алгоритм не является рекуррентным, в связи с чем вычисление оценок параметров можно произвести только при наличии всех измерений входа и выхода. Иными словами, алгоритм реализует ретроспективную идентификацию. Если же получены новые данные, то для уточнения оценки необходимо вновь решать громоздкую систему нормальных уравнений.

Для устранения указанных недостатков широкое распространение получил рекуррентный алгоритм наименьших квадратов, позволяющий генерировать оценки в темпе с поступающей информацией о входном и выходном сигналах идентифицируемой системы [13].

Пусть после  $n$  измерений определена оценка  $q_m^*$  параметров. Для того чтобы подчеркнуть количество измерений, на основе которых получена эта оценка, обозначим ее  $q_m^*(n)$ . Соответственно, введем обозначения для матриц (4.54), (4.62) и векторов (4.63), (4.51) следующим образом:  $U(n)$ ,  $V(n)$ ,  $z(n)$  и  $y(n)$ .

Предположим, что проведено еще одно, соответствующее многомерному входному воздействию

$$u(n+1) = [u_1(n+1), u_2(n+1), \dots, u_m(n+1)]^T \quad (4.76)$$

измерение выходного сигнала  $y(n+1)$  идентифицируемой системы. Необходимо получить новую оценку  $q_m^*(n+1)$ , учитывающую информацию о последнем эксперименте (информацию о  $y(n+1)$  и  $u(n+1)$ ).

В оговоренных выше обозначениях система (4.61) нормальных уравнений для  $n$  и  $n+1$  измерений запишется следующим образом:

$$V(n) q_m^*(n) = z(n) \quad (4.77)$$

и

$$V(n+1) q_m^*(n+1) = z(n+1). \quad (4.78)$$

В системе уравнений (4.78)

$$V(n+1) = \left[ \frac{U(n)}{u^T(n+1)} \right]^T \left[ \frac{U(n)}{u^T(n+1)} \right] = U^T(n) U(n) + u(n+1) u^T(n+1) = V(n) + u(n+1) u^T(n+1) \quad (4.79)$$

и

$$z(n+1) = [U^T(n) | u(n+1)] \cdot \left[ \frac{y(n)}{y(n+1)} \right] = U^T(n) y(n) + u(n+1) y(n+1). \quad (4.80)$$

Решая систему нормальных уравнений (4.78), получим

$$q_m^*(n+1) = V^{-1}(n+1) z(n+1), \quad (4.81)$$

где  $V(n+1)$  и  $z(n+1)$  определяются выражениями

$$V^{-1}(n+1) = [V(n) + u(n+1) u^T(n+1)]^{-1}; \quad (4.82)$$

$$z(n+1) = z(n) + U(n+1) y(n+1). \quad (4.83)$$

Оба выражения (4.82) и (4.83) являются рекуррентными и позволяют вычислить  $V^{-1}(n+1)$  и  $z(n+1)$  на основе результата последнего  $y(n+1)$  измерения и предшествующих значений  $V(n)$  и  $z(n)$ .

Подставляя (4.83) и (4.82) в (4.81), получим

$$q_m^*(n+1) = q_m^*(n) + V^{-1}(n+1) u(n+1) [y(n+1) - u^T(n+1) q_m^*(n)]. \quad (4.84)$$

По соотношениям (4.82) и (4.84) вычисляется оценка вектора параметров  $q_m^*(n+1)$ , если дана предыдущая оценка и информация  $y(n+1)$  и  $u(n+1)$  о результатах наблюдения в момент времени

$(n + 1)$ . Оценка  $q_m^*(n + 1)$  представляет собой сумму предыдущей оценки и корректирующего члена, учитывающего результаты последнего наблюдения.

Алгоритмы (4.64) и (4.84) широко используются для вычисления оценок параметров статических систем. Они же лежат в основе идентификации важнейшей характеристики динамической системы — весовой (импульсной переходной) функции. Кроме того, эти алгоритмы естественным образом распространяются на оценки других характеристик линейного динамического объекта, связанных преобразованием Фурье.

Пусть идентифицируемая динамическая система представлена следующим соотношением

$$x(t) = \int_0^t u(t - \tau) g(\tau) d\tau, \quad (4.85)$$

где  $g(t)$  — весовая функция;  $u(t)$  — случайный входной сигнал. Полагается, что на  $g(t)$  наложены ограничения, связанные с условием физической реализуемости:  $g(t) = 0$  при  $t < 0$ , ввиду чего нижний предел интегрирования принят равным нулю. Для решения задачи идентификации импульсной переходной функции необходимо в идеальном случае рассматривать установившийся процесс на выходе системы. Иными словами необходимо рассматривать значения  $x(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , т. е.

$$x(t) = \int_0^{\infty} u(t - \tau) g(\tau) d\tau \quad (4.86)$$

с тем, чтобы в формировании  $x(t)$  участвовала вся  $g(t)$ . Однако, учитывая тот факт, что идентифицируется реальная физическая система с конечным временем затухания импульсной переходной функции, в качестве верхнего предела интегрирования при идентификации принимается некоторое фиксированное значение  $T_g$ . Тем самым полагается, что для импульсной переходной функции выполняется условие

$$g(t) = 0 \text{ при } t > T_g. \quad (4.87)$$

Отметим, что выбор  $T_g$ , не согласующийся с условием (4.87), может привести к значительным погрешностям определения  $g(t)$ .

Из-за помехи  $\eta(t)$ , приведенной к выходу системы, наблюдаемый в процессе идентификации сигнал имеет вид

$$y(t) = x(t) + \eta(t). \quad (4.88)$$

Ввиду случайности  $x(t)$  и  $\eta(t)$  наблюдаемый сигнал  $y(t)$  также является случайным. Введем также предположение о статистической независимости  $u(t)$  и  $\eta(t)$ .

Математическую модель зададим в виде

$$y_m(t) = \int_0^{T_g} u(t - \tau) g_m(\tau) d\tau. \quad (4.89)$$

Необходимо определить оптимальную по МНК оценку  $g_m^*(t)$  [13].

Полагая, что измерения производятся в дискретные моменты времени  $0, T, 2T \dots iT \dots (n-1)T$ , где  $T$  — интервал дискретности и  $(n-1)T = T_n$ , представим модель в виде

$$y_m(i) = \sum_{j=0}^{m-1} u(i-j) g_m^*; \quad i = 0, 1, 2 \dots (n-1), \quad (4.90)$$

где  $g_m, j = 0, 1, 2 \dots m-1$  — дискретные значения  $g_m(t)$  в моменты времени  $0, T, 2T \dots jT \dots (m-1)T$ , причем  $(m-1)T = T_g$ .

Для набора  $i = 0, 1, \dots, n-1$  перепишем (4.90) в виде

$$\begin{bmatrix} y_m(0) \\ y_m(1) \\ \vdots \\ y_m(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0-0)u(0-0) & u(0-1) & \dots & u[0-(m-1)] \\ u(1-0)u(1-0) & u(1-1) & \dots & u[1-(m-1)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u[(n-1)-0]u[(n-1)-0] & u[(n-1)-1] & \dots & u[(n-1)-(m-1)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{m_0} \\ g_{m_1} \\ \vdots \\ g_{m_{m-1}} \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

После серии измерений  $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$  система нормальных уравнений (4.60) относительно оптимальных значений  $g_m^*$  дискретной аппроксимации импульсной переходной функции запишется следующим образом

$$\left. \begin{aligned} & g_{m_0}^* \sum_{i=0}^{n-1} u(i-0)u(i-0) + g_{m_1}^* \sum_{i=0}^{n-1} u(i-1)u(i-0) + \dots \\ & \dots + g_{m_{m-1}}^* \sum_{i=0}^{n-1} u[i-(m-1)]u(i-0) = \sum_{i=0}^{n-1} y(i)u(i-0) \\ & g_{m_0}^* \sum_{i=0}^{n-1} u(i-0)u(i-1) + g_{m_1}^* \sum_{i=0}^{n-1} u(i-1)u(i-1) + \dots \\ & \dots + g_{m_{m-1}}^* \sum_{i=0}^{n-1} u[i-(m-1)]u(i-1) = \sum_{i=0}^{n-1} y(i)u(i-1) \\ & \dots \\ & g_{m_0}^* \sum_{i=0}^{n-1} u(i-0)u[i-(m-1)] + g_{m_1}^* \sum_{i=0}^{n-1} u(i-1)u[i- \\ & -(m-1)] + \dots + g_{m_{m-1}}^* \sum_{i=1}^{n-1} u[i-(m-1)]u[i- \\ & -(m-1)] = \sum_{i=0}^{n-1} y(i)u[i-(m-1)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.92)$$

Суммируя уравнения (4.92) и группируя члены, получим

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} u(i-j) \{u(i-0) + u(i-1) + \dots \right. \\ \left. \dots + u[i-(m-1)]\} g_m^* = \sum_{i=0}^{n-1} y(i) \{u(i-0) + u(i-1) + \dots \right. \\ \left. \dots + u[i-(m-1)]\}. \quad (4.93)$$

При стремлении интервала дискретности  $T$  к нулю уравнение (4.93) запишется в непрерывной форме следующим образом

$$\int_0^{T_g} \left[ \int_0^{T_n} u(t-\theta) u(t-\tau) dt \right] g_m^*(\theta) d\theta = \int_0^{T_n} y(t) u(t-\tau) dt. \quad (4.94)$$

Устремляя верхние пределы интегрирования  $T_g$  и  $T_n$  к бесконечности, что соответствует установившемуся режиму системы, а также оценке импульсной переходной функции на всем интервале времени от нуля до бесконечности, перепишем последнее выражение

$$\int_0^{\infty} g_m^*(\theta) R_u(\tau - \theta) d\theta = R_{yu}(\tau), \quad (4.95)$$

где  $g_m^*(\theta)$  — оптимальная оценка импульсной переходной функции;

$$R_u(\tau) = \lim_{T_n \rightarrow \infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} u(t-\tau) u(t) dt; \quad (4.96)$$

автокорреляционная функция входного сигнала;

$$R_{yu}(\tau) = \lim_{T_n \rightarrow \infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} y(t) u(t-\tau) dt \quad (4.97)$$

взаимная корреляционная функция  $y(t)$  и  $u(t)$ .

Уравнение (4.95) называется уравнением Винера — Хопфа. Таким образом, в основе получивших широкое распространение корреляционных методов идентификации (4.95) лежит МНК.

Определение  $g_m^*(t)$  по корреляционным функциям значительно упрощается, если входной сигнал  $u(t)$  является практически белым. В этом случае можно использовать аппроксимацию корреляционной функции входного сигнала дельта функцией

$$R_u(\tau - \theta) \simeq G\delta(\tau - \theta), \quad (4.98)$$

где  $G$  — величина, характеризующая спектральную плотность белого шума

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} R_u(\tau) d\tau. \quad (4.99)$$

Отсюда

$$G \int_{-\infty}^{\infty} g_m^*(\theta) \delta(\tau - \theta) = R_{yu}(\tau), \quad (4.100)$$

и, учитывая свойства дельта-функции

$$\left. \begin{aligned} \delta(t) &= 0 \quad \text{при } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \theta) dt &= f(\theta) \end{aligned} \right\}, \quad (4.101)$$

получим

$$g_m^*(\tau) \simeq \frac{1}{G} R_{yu}(\tau). \quad (4.102)$$

Следовательно, взаимная корреляционная функция может быть использована в качестве приближения весовой функции идентифицируемого объекта. Если входной сигнал не является белым шумом, необходимо определять  $g_m^*(t)$  системы непосредственно из выражения (4.95), т. е. решать интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода.

Применяя преобразование Фурье к (4.95), получим

$$G_{uy}^*(j\omega) = W^*(j\omega) G_u^*(j\omega). \quad (4.103)$$

Отсюда

$$W^*(j\omega) = \frac{G_{uy}^*(j\omega)}{G_u^*(j\omega)}, \quad (4.104)$$

где  $W^*(j\omega)$  — оценка частотной функции системы;  $G_u^*(j\omega)$  — оценка спектральной плотности входного сигнала;  $G_{uy}^*(j\omega)$  — оценка взаимной спектральной плотности входного и выходного сигналов.

По оценкам спектральных плотностей определяется оценка частотной функции объекта. Применяя обратное преобразование Фурье к оценке частотной функции, получим

$$g^*(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_{uy}^*(j\omega)}{G_u^*(j\omega)} e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (4.105)$$

Таким образом, для статических систем, математическая модель которых укладывается в схему линейной регрессии, применение МНК очевидно. Метод допускает также определение некоторых характеристик динамических систем, в частности его весовой функции и частотных характеристик.

Однако, если ММ динамической системы задана дифференциальным уравнением, а параметры ее — коэффициентами этого дифференциального уравнения, то применение МНК в этом случае наталкивается на определенные трудности. Так, например, ММ динамиче-



ской системы представлена в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \right\}, \quad (4.106)$$

где  $x$  — вектор фазовых координат;  $A$  — матрица, состоящая из коэффициентов дифференциальных уравнений;  $H$  — матрица наблюдений.

Выходной сигнал записывается следующим образом [16]:

$$y(t) = H \left[ e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \right]. \quad (4.107)$$

Как видно из (4.107), он нелинейным образом зависит от коэффициентов дифференциальных уравнений (параметров модели). Таким образом, хотя математическая модель является линейной в обычном, развитом в теории управления, смысле (линейной по входу), однако относительно параметров модель является нелинейной.

Следовательно, рассматриваемая задача не укладывается в схему определения параметров уравнения линейной регрессии, для которой применимы алгоритмы (4.64) и (4.84).

Для преодоления этой трудности используют ряд подходов, один из которых состоит в том, что вместо математического описания динамических объектов дифференциальными уравнениями используют разностные уравнения. Эти разностные уравнения связывают входной и выходной сигналы модели в отдельные последовательные моменты времени. В следующем параграфе изложен алгоритм идентификации параметров дискретной модели, представленной разностным уравнением.

#### 4.5. Рекуррентная идентификация дискретных динамических систем

В рассмотренных выше алгоритмах МНК в качестве априорной информации использовалась лишь аппроксимация системы выбранной математической моделью. Вектор параметров там рассматривался как неизвестная, но детерминированная векторная величина. Однако для некоторых систем эта априорная информация может быть дополнена сведениями о законах распределения оцениваемых параметров и приведенной к выходу системе помехе. Наличие такой дополнительной информации позволяет применить другие методы оценки, в частности, метод наименьших взвешенных квадратов, метод максимального правдоподобия и байесовские оценки [1, 2, 8, 11].

Покажем, каким образом эта дополнительная информация может быть использована для оценки параметров дискретной динамической системы

$$x(iT) = \sum_{j=1}^k \alpha_j x[(i-j)T] + \sum_{j=1}^k \beta_j u[(i-j)T], \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.108)$$

где  $u(iT)$  — входная последовательность;  $x(iT)$  — выходная последовательность;  $T$  — интервал квантования;  $q = [\alpha_1 \dots \alpha_k, \beta_1 \dots \beta_k]^T$  — случайный вектор параметров.

Для записей вместо (4.108) далее будем использовать следующую эквивалентную ей форму

$$x_i = \sum_{j=1}^k \alpha_j x_{i-j} + \sum_{j=1}^k \beta_j u_{i-j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.109)$$

Канал наблюдения за идентифицируемой системой описывается уравнением вида

$$y_i = x_i + \eta_i, \quad (4.110)$$

и статистические характеристики помехи определены следующим образом

$$M[\eta_i] = 0, \quad M[\eta_i \eta_j] = \sigma_{\eta_i}^2 \delta_{ij}, \quad (4.111)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Для упрощения выкладок положим, что помеха во входном сигнале отсутствует.

Математическую модель зададим в виде

$$x_{mi} = \sum_{j=1}^k \alpha_{mj} x_{mi-j} + \sum_{j=1}^k \beta_{mj} u_{i-j}, \quad (4.112)$$

где  $q_m = [\alpha_{m1} \dots \alpha_{mk}, \beta_{m1} \dots \beta_{mk}]^T$  — вектор параметров модели.

Введя

$$v_i = [x_{mi-1} \dots x_{mi-k}, u_{i-1} \dots u_{i-k}], \quad (4.113)$$

перепишем (4.112) в виде

$$x_{mi} = v_i q_m. \quad (4.114)$$

Допустим, что до начала процесса идентификации имелась оценка вектора параметров; обозначим ее  $q_m^*(0)$ . Тогда, учитывая, что вектор параметров  $q$  является случайным вектором, в качестве его априорной вероятностной характеристики может служить матрица ковариаций

$$S_1 = M \{ [q - q_m^*(0)] [q - q_m^*(0)]^T \}. \quad (4.115)$$

Оптимальную оценку будем искать итеративным путем, чтобы в момент получения новых результатов наблюдений не возникало необходимости решать задачу оценки с самого начала.

Пусть после первой итерации получена некоторая новая оценка, обозначим ее  $q_m^*(1)$ . В этом случае наши сведения о векторе параметров уже будут характеризоваться некоторой апостериорной ковариационной матрицей ошибок оценок

$$S_1^* = M \{ [q - q_m^*(1)] [q - q_m^*(1)]^T \}. \quad (4.116)$$

Осуществляя оценку параметров на второй итерации, в качестве априорной вероятностной характеристики необходимо использовать матрицу  $S_2$ , причем

$$S_2 = S_1^*, \quad (4.117)$$

т. е. апостериорная матрица ошибки оценки предыдущей итерации служит априорной ковариационной матрицей выполняемой итерации.

В качестве минимизируемого критерия близости примем

$$K(n) = \sum_{i=1}^n \left[ \| q_m(i) - q_m^*(i-1) \|_{S_{i-1}}^2 + \frac{[y_i - v_i q_m(i)]^2}{\sigma_{\eta_i}^2} \right], \quad (4.118)$$

где  $n$  — количество итераций оценки.

Отметим, что в случае отсутствия априорной статистической информации о распределении параметров системы и интенсивности помехи необходимо в выражении (4.118) положить  $\sigma_{\eta_i}^2 = 1$ , а квадратичную форму  $\| q_m(i) - q_m^*(i-1) \|_{S_{i-1}}^2$  равной нулю, что приводит к рассмотренному ранее критерию МНК.

Рассмотрим процесс формирования оптимальной оценки на первой итерации. Для этого представим критерий близости (4.118) в виде

$$K(n) = K(n-1) + K(1) = K(n-1) + \left\{ \| q_m(1) - q_m^*(0) \|_{S_1}^2 + \frac{[y_1 - v_1 q_m(1)]^2}{\sigma_{\eta_1}^2} \right\}. \quad (4.119)$$

Оптимальная оценка  $q_m^*(1)$  на первой итерации должна минимизировать слагаемое, стоящее в фигурных скобках выражения (4.119).

Минимизируя  $K(1)$  относительно  $q_m(1)$ , получим

$$q_m^*(1) = q_m^*(0) + \frac{S_1^{-1} v_1^T}{\sigma_{\eta_1}^2} [y_1 - v_1 q_m^*(0)], \quad (4.120)$$

где

$$S_1^* = \left( S_1^{-1} + \frac{v_1^T v_1}{\sigma_{\eta_1}^2} \right)^{-1}. \quad (4.121)$$

В уравнении (4.121)  $S_1^*$  есть матрица ковариаций ошибки оценки (апостериорная ковариационная матрица)

$$S_1^* = M \{ [q - q_m^*(1)] [q - q_m^*(1)]^T \}. \quad (4.122)$$

Покажем это, для чего положим вектор ошибки оценки

$$e_1 = q_m^*(1) - q. \quad (4.123)$$

Тогда

$$\begin{aligned} e_1 &= q_m^*(0) - q + q_m^*(1) - q_m^*(0) = \\ &= (E - b_1 v_1) [q_m^*(0) - q] + b_1 \eta_1, \end{aligned} \quad (4.124)$$

где

$$b_1 = \frac{S^*_{11} v_1^T}{\sigma_{\eta_1}^2}. \quad (4.125)$$

Поскольку  $[q_m^*(0) - q]$  и  $\eta_1$  статистически независимы, то из (4.124) следует

$$M [e_1 e_1^T] = (E - b_1 v_1) S_1 (E - b_1 v_1)^T + \frac{b_1 b_1^T}{\sigma_{\eta_1}^2}. \quad (4.126)$$

Умножая (4.121) слева на  $S^*_1$  и справа на  $S_1$ , получим

$$S_1 = S^*_1 + \frac{S^*_1 v_1^T v_1 S_1}{\sigma_{\eta_1}^2}, \quad (4.127)$$

или

$$(E - b_1 v_1) S_1 = S^*_1. \quad (4.128)$$

Подставляя (4.128) в (4.126), получим

$$\begin{aligned} M [e e^T] &= S^*_1 - S^*_1 v_1^T b_1^T + \frac{b_1 b_1^T}{\sigma_{\eta_1}^2} = S^*_1 - \frac{S^*_1 v_1^T v_1 S^*_1}{\sigma_{\eta_1}^2} + \\ &+ \frac{S^*_1 v_1^T v_1 S^*_1}{\sigma_{\eta_1}^2} = S^*_1. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Можно показать, что матрица  $S^*_1$  допускает представление в виде [1, 2, 3]

$$S^*_1 = S_1 v_1^T (v_1 S_1 v_1^T + \sigma_{\eta_1}^2)^{-1} v_1 S_1. \quad (4.130)$$

Вычисление апостериорной матрицы по формуле (4.130) значительно предпочтительнее, чем по формуле (4.121), так как множитель  $v_1 S_1 v_1^T$  в (4.130) есть скаляр. При этом задача обращения матрицы размерности  $(2k) \times (2k)$  сводится к тривиальной операции вычисления скаляра, обратного заданному.

Проведя на второй итерации  $i = 2$  измерение выходного сигнала идентифицируемого объекта и минимизируя  $K(2)$  аналогично приведенному выше, получим оптимальную оценку вектора параметров

$$q_m^*(2) = q_m^*(1) + \frac{S^*_2 v_2^T}{\sigma_{\eta_2}^2} [y_2 - v_2 q_m^*(1)], \quad (4.131)$$

где апостериорная матрица ковариаций ошибки оценки вычисляется по соотношению

$$S^*_2 = S_2 - S_2 v_2^T (v_2 S_2 v_2^T + \sigma_{\eta_2}^2)^{-1} v_2 S_2. \quad (4.132)$$

В выражении (4.132)  $S_2$  — априорная матрица ковариаций на второй итерации, принимаемая равной апостериорной матрице ошибки оценки на первой итерации

$$S_2 = S_1^* \quad (4.133)$$

Воспользовавшись соотношением (4.125) и (4.128), запишем для  $i$ -й итерации:

$$\left. \begin{aligned} q_m^*(i) &= q_m^*(i-1) + b_i [y_i - v_i q_m^*(i-1)] \\ b_i &= S_i v_i^T (v_i S_i v_i^T + \sigma_{\eta_i}^2)^{-1} \\ S_{i+1} &= S_i^* = (E - b_i v_i) S_i \end{aligned} \right\} \quad (4.134)$$

Рекуррентный алгоритм (4.134) получен в предположении о том, что помехи на выходе системы представляют собой белый шум — гауссовскую чисто случайную последовательность. Однако, в некоторых практических ситуациях такое предположение не является оправданным. Иными словами, помехи при измерении выходного сигнала идентифицируемой системы являются окрашенными. Как следует из работ [15, 18], все эти окрашенные помехи можно сгруппировать по виду их корреляционных функций:

$$\left. \begin{aligned} R_{\eta}(i, j) &= \gamma e^{-\alpha|i-j|} \\ R_{\eta}(i, j) &= \gamma e^{-\alpha|i-j|} \cos \beta(i-j) \\ R_{\eta}(i, j) &= \gamma e^{-\alpha|i-j|} + \Psi \cos \beta(i-j) \end{aligned} \right\} \quad (4.135)$$

Наиболее простой подход, учитывающий коррелированность помехи в канале наблюдения за системой, состоит в моделировании этих помех гауссовскими марковскими последовательностями и последующей оценки параметров этих дискретных процессов с помощью алгоритма (4.134) как части параметров расширенной системы [18]. Таким образом, возможность описания различных возмущений ограниченным числом корреляционных функций (4.135) значительно упрощает решение задачи оценки параметров. Если помехи относятся к одной группе, то должен использоваться алгоритм одной и той же размерности; различие будет заключаться лишь в параметрах расширенной составляющей алгоритма, зависящих от параметров корреляционной функции помехи.

Методику моделирования случайного коррелированного процесса гауссовской марковской последовательностью рассмотрим на примере случайного процесса  $\{\eta_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$ , имеющего нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию  $R_{\eta}(i, j) = \gamma e^{-\alpha|i-j|}$ , где  $\gamma = \text{const} > 0$  [18]. Очевидно, этот процесс — стационарный в широком смысле. Так как известны только первый и второй моменты случайного процесса, то будем искать скалярную гауссовскую марковскую последовательность вида

$$\eta_{i+1} = G_{i+1} \eta_i + \omega_i \quad (4.136)$$

с теми же первым и вторым моментами, что и заданный процесс. Будем считать  $\eta_0$  гауссовской случайной величиной с нулевым сред-

ним и неизвестной дисперсией, а  $\{\omega_i, i = 1, 2, \dots\}$  гауссовской белой последовательностью с нулевым средним и неизвестной дисперсией.

Из уравнения (4.136) и свойств гауссовских марковских последовательностей имеем

$$M[\eta_{i+1}\eta_i] = G_{i+1,i}M[\eta_i^2] + M[\omega_i\eta_i] = G_{i+1,i}M[\eta_i^2]. \quad (4.137)$$

Согласно выражению для корреляционной функции рассматриваемого процесса

$$\left. \begin{aligned} M[\eta_{i+1}\eta_i] &= R_\eta(i, i+1) = \gamma e^{-1} \\ M[\eta_i^2] &= R_\eta(i, i) = \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (4.138)$$

следовательно

$$\gamma e^{-1} = G_{i+1,i}\gamma, \quad (4.139)$$

и

$$G_{i+1,i} = e^{-1}, \quad (4.140)$$

и уравнение процесса примет вид

$$\eta_{i+1} = e^{-1}\eta_i + \omega_i. \quad (4.141)$$

Соответствующее уравнение для дисперсии

$$R_\eta(i+1) = e^{-2}R_\eta(i) + \sigma_{\omega_i}^2, \quad (4.142)$$

где  $\sigma_{\omega_i}^2$  дисперсия случайного процесса  $\{\omega_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$ .

Однако,

$$R_\eta(i+1) = R_\eta(i+1, i+1) = \gamma, R_\eta(i) = R_\eta(i, i) = \gamma \quad (4.143)$$

следовательно,

$$\gamma = e^{-2}\gamma + \sigma_{\omega_i}^2. \quad (4.144)$$

Последнее равенство означает, что  $\{\omega_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$  — скалярная гауссовская последовательность с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_{\omega_i}^2 = \gamma(1 - e^{-2})$  для всех  $i$ .

Очевидно,  $R_\eta(0, 0) = \gamma$ . Следовательно,  $\eta_0$  — гауссовская случайная величина с нулевым средним и дисперсией  $\gamma$ . Полученная модель представляет собой модель коррелированного случайного процесса  $\{\eta_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$  с корреляционной функцией  $R_\eta(i, j) = \gamma e^{-|i-j|}$ .

Аналогично методике, изложенной выше, могут быть найдены гауссовские марковские последовательности, моделирующие случайные приведенные к выходу идентифицируемого объекта помехи с иными корреляционными функциями.

Таким образом, если наблюдаемый выходной сигнал идентифицируемой системы искажен помехой, представляющей собой случайный коррелированный процесс, то необходимо расширить размерность оцениваемых параметров, а помеху при этом считать гауссовской чисто случайной последовательностью.

#### 4.6. Синтез входной последовательности для оценки параметров дискретной динамической системы заданной в форме разностного уравнения

В условиях активной идентификации точность оценки параметров при заданном времени идентификации может быть существенно повышена путем рациональной организации входного сигнала, возбуждающего идентифицируемую систему. В настоящем параграфе приведен подход [7] для выбора такого входного воздействия. Идентифицируется система, описание которой задано выражением (4.109). Оценка параметров производится с помощью алгоритма (4.134). Канал наблюдения и помехи определяются, по-прежнему, выражениями (4.110) и (4.111), соответственно.

Обозначив

$$\left. \begin{aligned} u_i &= [u(0), u(1) \dots u(i)]^T \\ y_i &= [y(0), y(1) \dots y(i)]^T \\ \eta_i &= [\eta(0), \eta(1) \dots \eta(i)]^T \end{aligned} \right\} \quad (4.145)$$

и введя матрицу  $W_i$ , определяемую как

$$W_i = [B y_i B^2 y_i \dots B^k y_i B u_i B^2 u_i \dots B^k u_i], \quad (4.146)$$

где  $B$  — квадратная матрица сдвига размерности  $(i - 1)$  с элементами  $B(i, j) = \delta_{i, j+1}$

$$\delta_{i, j+1} = \begin{cases} 1, & i = j + 1 \\ 0, & i \neq j + 1, \end{cases}$$

представим уравнение идентифицируемой системы (4.109) в следующем виде:

$$y_i = W_i q + \eta_i. \quad (4.147)$$

Задача оптимизации входной последовательности состоит в выборе  $\{u(i), i = 1, 2, 3 \dots\}$ , максимизирующей среднее количество информации о векторе оцениваемых параметров  $q = [\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1 \dots \dots \beta_k]^T$ , содержащиеся в векторе наблюдений  $y_i$

$$I(q, y_i | u_i) \rightarrow \max_{u_i} \quad (4.148)$$

Ввиду того, что для реализации алгоритмов идентификации используются ЭВМ, то на величину входного сигнала целесообразно наложить ограничение

$$\text{mod } u(i) \leq U, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4.149)$$

где  $U$  — некоторая константа, зависящая от разрядности используемой ЭВМ и особенностей идентифицируемой системы.

Среднее количество информации о векторе параметров, содержащееся в векторе наблюдений, определяется следующим образом:

$$I(q, y_i) = H(y_i) - H(y_i | q), \quad (4.150)$$

где  $H(y_i)$  — энтропия вектора наблюдений;  $H(y_i/q)$  — условная энтропия вектора наблюдений относительно вектора параметров идентифицируемой системы.

В силу статистической независимости вектора параметров и помехи

$$H(y_i | q) = H(\eta_i), \quad (4.151)$$

где  $H(\eta_i)$  — энтропия помехи, определяемая следующим образом [24]

$$H(\eta_i) = \frac{1}{2} \log_2 \det S_{\eta_i} + \frac{i}{2} \log_2 2\pi e, \quad (4.152)$$

где  $\det S_{\eta_i}$  — определитель ковариационной матрицы вектора  $\eta_i$ ;  $i$  — количество дискретных моментов времени, в которых происходит наблюдение выхода системы.

Принимая во внимание (4.151), выражение (4.150) можно переписать следующим образом

$$I(q, y_i) = H(y_i) - H(\eta_i). \quad (4.153)$$

Определив ковариационные матрицы правой и левой частей уравнения

$$y_i = W_i q + \eta_i,$$

получим

$$Y_i = W_i S_1 W_i^T + S_{\eta_i}, \quad (4.154)$$

где  $S_1$  — априорная ковариационная матрица вектора оцениваемых параметров;  $S_{\eta_i}$  — ковариационная матрица вектора помехи  $\eta_i$ ;  $Y_i$  — ковариационная матрица вектора наблюдения.

Учитывая (4.152) и (4.154), из (4.153) получим

$$I(q, y_i) = \frac{1}{2} \log_2 \frac{\det(S_{\eta_i} + W_i S_1 W_i^T)}{\det S_{\eta_i}}. \quad (4.155)$$

Обозначив

$$S_i = (S_1^{-1} + W_i S_{\eta_i}^{-1} W_i^T)^{-1}, \quad (4.156)$$

из (4.155) получим

$$I(q, y_i) = \frac{1}{2} \log_2 \frac{\det S_i}{\det S_i}. \quad (4.157)$$

В соответствии с рекуррентным алгоритмом (4.134) выбор оптимальной входной последовательности также целесообразно производить на каждом цикле оценки. Для этого представим формулу (4.157) следующим образом

$$I[q, y(i) | y_{i-1}] = \frac{1}{2} \log_2 \frac{\det S_{i-1}}{\det S_i}. \quad (4.158)$$

Последнее соотношение представляет собой среднее количество информации, содержащееся в наблюдаемой скалярной величине  $y(i)$ , при условии, что уже осуществлена оценка  $q_m^*$  ( $i-1$ ) по предыдущим наблюдениям  $y_{i-1} = [y(0), \dots, y(i-1)]^T$ .



Учитывая (4.121), соотношение (4.158) можно преобразовать

$$I[\mathbf{q}, y(i) | y_{i-1}] = \frac{1}{2} \log_2 \det \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i \mathbf{S}_i}{\sigma_{\eta_i}^2} \right] = \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{S}_i \mathbf{v}_i^T}{\sigma_{\eta_i}^2} \right). \quad (4.159)$$

Из (4.159) следует, что максимальное количество информации относительно  $\mathbf{q}$ , получаемое при наблюдении  $y(i)$ , достигается при максимальном значении квадратичной формы  $\mathbf{v}_i \mathbf{S}_i \mathbf{v}_i^T$ . Так как на  $i$ -м цикле оценки элементы априорной ковариационной матрицы  $\mathbf{S}_i$  известны полностью, то соответствующим выбором  $u(i-1)$  можно обеспечить максимальное значение квадратичной формы  $\|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{S}_i}^2$  и, следовательно,  $I(\mathbf{q}, y(i) | y_{i-1})$ .

С учетом ограничений (4.149), а также принимая во внимание положительную определенность ковариационной матрицы  $\mathbf{S}_i$ , алгоритм формирования оптимального значения входного воздействия  $u(i-1)$  на  $i$ -м цикле оценки запишется следующим образом

$$u(i-1) = U \operatorname{sign} \left[ \sum_{j=1}^k S_i(j, k+1) y(i-j) + \sum_{l=k+2}^{2k} \times \right. \\ \left. \times S_i(j, k+1) u(i-j) \right] \\ \operatorname{sign} A = \begin{cases} 1, A \geq 0 \\ -1, A < 0 \end{cases} \quad (4.160)$$

где  $S_i(j, k+1)$  — элемент матрицы  $\mathbf{S}_i$ , расположенный на пересечении  $j$ -й строки и  $k+1$  столбца.

Алгоритм (4.160) эффективен, прост в реализации и жестко связан по своей функциональной и статистической структурам с рекуррентным алгоритмом (4.134). Необходимо отметить, что алгоритм (4.160) предусматривает выполнение лишь  $2k$  операций сложения и умножения, а также одну операцию сравнения. Все элементы, входящие в правую часть (4.160) известны, так как естественным образом формируются при реализации алгоритма (4.134) и содержатся в памяти реализующего его устройства.

#### 4.7. Одновременная оценка параметров и состояния. Квазилинеаризация

Как было отмечено ранее применение метода наименьших квадратов для оценивания параметров динамической системы, математическая модель которой представлена дифференциальным уравнением, наталкивается на трудности, связанную с тем, что выходной сигнал нелинейным образом зависит от параметров (коэффициентов дифференциальных уравнений) системы. Для преодоления этой трудности дифференциальное уравнение аппроксимируется разностным уравнением, к которому уже могут быть применены рассмотренные методы.

Другой подход состоит в том, что в процессе идентификации измеряются сигнал и все его производные, максимальный порядок которых должен совпадать с порядком дифференциального уравнения. Однако с допустимыми точностями можно измерить лишь сам выходной сигнал и его первые две производные. Если же система представлена дифференциальным уравнением третьего порядка и выше, то требуется привлечение других подходов. Один из них состоит в том, что в процессе идентификации с привлечением идей и методов теории наблюдения полностью восстанавливается вектор фазовых координат системы на основе ограниченного количества наблюдаемых координат, а затем уже на этой основе производится идентификация. Однако возможна и другая постановка задачи, когда производится одновременная оценка не наблюдаемых фазовых координат и параметров системы. Рассмотрим эту постановку более подробно [1, 3, 4].

Пусть система описывается уравнениями

$$\dot{x} = F(x, u, q, t); \quad (4.161)$$

$$y = Hx, \quad (4.162)$$

где  $F$  — нелинейная вектор-функция;  $x$  —  $n$ -мерный вектор состояния;  $q$  —  $m$ -мерный вектор параметров;  $y$  —  $z$ -мерный вектор измеряемых (наблюдаемых) фазовых координат;  $u$  — известный входной сигнал;  $H$  — матрица наблюдения. Компоненты вектора параметров неизвестны и подлежат определению.

Определение вектора параметров основано на результате измерений  $y(t)$  в дискретные моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_{n+m}$

$$y(t_i) = y_i, \quad i = 1, 2, 3 \dots n + m. \quad (4.163)$$

Предполагается, что компоненты вектора  $q$  являются постоянными величинами. Исходя из этого, систему (4.161) можно дополнить дифференциальным уравнением относительно вектора параметров

$$\dot{q} = 0. \quad (4.164)$$

Объединяя уравнения (4.161) и (4.164) и введя в рассмотрение вектор  $z = [x, q]^T$  расширенных фазовых координат размерности  $n + m$ , получим

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(x, u, q, t) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.165)$$

Обозначив нелинейную вектор-функцию расширенной системы (4.165) как

$$\Psi = \begin{bmatrix} F(x, u, q, t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.166)$$

можно записать

$$\dot{z} = \Psi(z, u, t), \quad (4.167)$$

$$y = H^*z, \quad (4.168)$$

где

$$H^* = \begin{bmatrix} H0 \\ 00 \end{bmatrix}. \quad (4.169)$$

Таким образом, задача идентификации вектора параметров системы (4.161) сведена к задаче восстановления вектора фазовых координат расширенной нелинейной системы (4.167). Иными словами, задача идентификации сведена к решению многоточечной краевой задачи для нелинейных дифференциальных уравнений (4.167) с вектором измерений (4.168), причем граничные условия заданы соотношением (4.163).

Необходимо отметить, что если даже идентифицируемый объект относится к классу линейных систем, описываемых, например, в простейшем случае однородным уравнением

$$\dot{x} = Ax, \quad (4.170)$$

где элементы матрицы  $A$  подлежат определению, то расширенная система

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.171)$$

как очевидно из (4.171), нелинейна относительно фазовых координат  $A$  и  $x$ . Это означает, что уравнение (4.171) невозможно преобразовать к линейному виду

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{A} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x \\ A \end{bmatrix}, \quad (4.172)$$

где матрица  $B$  не зависит ни от  $x$ , ни от  $A$ .

Следовательно, вне зависимости от того, является ли исходный идентифицируемый объект линейным или нелинейным, при введении вектора расширенных фазовых координат и последующей его оценки, исходная задача идентификации сводится к решению многоточечной краевой задачи нелинейных дифференциальных уравнений.

Для решения такой задачи широкое распространение получил метод Ньютона — Рафсона, развиваемый в литературе [12, 25] под названием квазилинеаризация.

Алгоритм квазилинеаризации состоит в последовательном приближении функции  $z(t) = [x(t), q]^T$  на интервале наблюдения. Раскладывая уравнение (4.167) в ряд Тейлора и учитывая только члены первого порядка, получим уравнение квазилинеаризации для  $k+1$  шага приближений

$$z^{k+1} = \Psi[z^k(t)] + P^k(t)[z^{k+1}(t) - z^k(t)] \quad (4.173)$$

при граничных условиях

$$H^* z^{k+1} = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+m. \quad (4.174)$$

В уравнении (4.173)  $z^k(t)$  представляет собой приближение вектора фазовых координат расширенной системы, полученное на  $k$  шаге

приближений;  $P^k(t) = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{z^k(t)}$  — матрица частных производных (якобиан), вычисленная при  $z(t) = z^k(t)$ .

Таким образом, задача решения нелинейного дифференциального уравнения редуцирована к решению нестационарного линейного относительно  $z^{k+1}(t)$  дифференциального уравнения.

Запишем (4.173) в более компактной форме

$$z^{k+1} = P^k(t) z^{k+1}(t) + w^k(t), \quad (4.175)$$

где

$$w^k(t) = \Psi[z^k(t)] - P^k(t) z^k(t). \quad (4.176)$$

Нестационарное уравнение (4.175) имеет следующее решение [16]

$$z^{k+1}(t) = \Phi^{k+1}(t, t_0) z^{k+1}(t_0) + v^{k+1}(t), \quad (4.177)$$

где  $\Phi^{k+1}(t, t_0)$  — матрица фундаментальных решений (переходная матрица состояний), удовлетворяющая условиям

$$\Phi^{k+1}(t, t_0) = P^k(t) \Phi^{k+1}(t, t_0), \quad (4.178)$$

$$\Phi^{k+1}(t_0, t_0) = E, \quad (4.179)$$

и  $v^{k+1}(t)$  — частное решение (4.175), полученное как решение (4.175) при нулевых начальных условиях  $z^{k+1}(t_0) = 0$ .

В развернутой форме записи уравнение (4.177) имеет вид

$$\begin{bmatrix} z_1^{k+1}(t) \\ \vdots \\ z_{n+m}^{k+1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1}^{k+1}(t, t_0) & \dots & \varphi_{1,n+m}^{k+1}(t, t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n+m,1}^{k+1}(t, t_0) & \dots & \varphi_{n+m,n+m}^{k+1}(t, t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{k+1}(t_0) \\ \vdots \\ z_{n+m}^{k+1}(t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1^{k+1}(t) \\ \vdots \\ v_{n+m}^{k+1}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.180)$$

Предположим, что в процессе идентификации измерению подвергается лишь первая фазовая координата системы, т. е. матрица  $H^*$  имеет вид

$$H^* = \begin{bmatrix} 10 & \dots & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.181)$$

Тогда, рассматривая лишь первое скалярное уравнение векторно-матричного соотношения (4.180) с учетом граничных условий (4.174), получим

$$\sum_{k=1}^{n+m} \varphi_{1,k}^{k+1}(j) z_k^{k+1}(t_0) + v_1^{k+1}(j) = y_1(j), \quad j = 1, 2, \dots, n+m. \quad (4.182)$$

Начальные условия  $z^{k+1}(t_0)$  вектора фазовых координат расширенной системы, соответствующие  $k+1$  шагу приближений, находятся путем решения системы алгебраических уравнений (4.182).

При этом составляющие  $z_{n+1}^{k+1}(t_0) \dots z_{n+m}^{k+1}(t_0)$  вектора представляют собой приближения параметров исходной системы (4.161). Решение дифференциальных уравнений (4.175) при  $z^{k+1}(t_0)$  дают приближенные вектора фазовых координат расширенной системы (4.167) для  $k+1$  итерации на всем интервале наблюдений. Таким образом восстанавливаются не наблюдаемые фазовые координаты  $z_2(t) \dots z_n(t)$  исходной системы.

Если наблюдается в процессе идентификации не одна, а  $l$  фазовых координат, то на основе (4.180) составляется система алгебраических уравнений аналогичных (4.182) для  $l$  фазовых координат.

Часто, в виду конечной точности измерительных приборов и присутствия различных помех, измерения фазовых координат бывают зашумлены. В этом случае для сглаживания шума число граничных условий необходимо выбирать большим, чем размерность фазовых координат расширенной системы и для определения начальных условий применять алгоритмы МНК.

Полученные на  $k+1$  итерации составляющие вектора состояния  $z^{k+1}(t)$  расширенной системы затем используются для определения  $z^{k+2}(t)$  на  $k+2$  итерации и т. д.

Основные недостатки, присущие методу Ньютона — Рафсона, состоят в значительных вычислительных затратах на идентификацию и необходимости выбора достаточно хорошего начального приближения  $z^0(t)$ , обеспечивающего сходимость итерационной процедуры идентификации. Для выбора начальных приближений рекомендуется использовать методы дифференциальной аппроксимации [2, 13].

#### Контрольные вопросы

1. Что понимается под термином «идентификация»? Указать области человеческой деятельности, где могут найти применение идеи и методы идентификации.
2. Чем обусловлена необходимость использования вероятностно-статистических методов при решении задач идентификации?
3. Назвать известные линейные оценки. Чем линейные оценки отличаются от нелинейных?
4. Какими соображениями необходимо руководствоваться при выборе критерия близости объекта и модели?
5. Указать две основные схемы реализации идентификации. В чем заключаются их особенности, преимущества и недостатки?
6. В чем заключается отличие между системами, линейными по входу, и системами, линейными по параметрам? Какие методы идентификации целесообразно использовать для оценивания параметров систем, которые являются нелинейными по параметрам?
7. Какова сущность корреляционных методов идентификации? Какие характеристики систем можно определять с использованием корреляционных методов?
8. Что такое функция чувствительности и как она используется при идентификации динамических систем?
9. Охарактеризовать метод квазилинеаризации. В каких случаях его целесообразно применять? В чем заключаются достоинства метода, его ограничения и недостатки?
10. Проработать самостоятельно материал, относящийся к дифференциальной аппроксимации. Указать ситуации, в которых ее целесообразно применять.

### 5.1. Принципы исследования процессов на АВМ

Классические методы прикладной математики не всегда приемлемы для исследования сложных систем. Так, например, исследование динамики сложной системы автоматического управления, как на этапе проектирования, так и в процессе отработки или эксплуатации, представляет собой весьма сложную задачу. Даже исследование устойчивости системы невысокого порядка достаточно громоздко [1, 2]. А если говорить о качестве стохастических и нелинейных сложных систем, то эта задача при чисто теоретическом подходе часто может быть нерешаемой.

Стремление упростить решение задач при исследовании сложных систем привело к бурному развитию и широкому использованию в настоящее время методов моделирования. Моделирование заключается в том, что некоторые звенья системы заменяются их моделями, в то время как другие — остаются неизменными. В частном случае моделями могут быть заменены все звенья системы. Полученная таким образом система подвергается экспериментальному исследованию, в результате которого выясняются все необходимые вопросы.

В электронных аналоговых вычислительных машинах (АВМ) машинными переменными служат мгновенные значения напряжения, измеренные по отношению к корпусу. Такие машины состоят из функциональных (операционных) блоков и устройства управления, а набор задачи осуществляется с помощью жесткого монтажа или коммутационных шнуров. Кроме того, в современных отечественных АВМ имеется изящная измерительная и регистрирующая аппаратура, необходимая для проведения эксперимента.

В цифровых вычислительных машинах каждая переменная задается в виде дискретной последовательности ее чисел, а каждое число — в виде последовательности цифр. Моделирование на цифровых вычислительных машинах (цифровое моделирование) является мощным средством решения задач различного класса и в настоящее время настолько внедрилось в практику исследования, что на первый взгляд кажется вытесняет аналоговое моделирование. Но это только на первый взгляд. На самом деле как одно, так и другое направление имеют тенденцию бурного развития и широкого применения.

Большой интерес для исследователей представляет комбинированное моделирование — моделирование на аналого-цифровых вычислительных системах (АЦВС). В АЦВС машинные переменные задаются и в аналоговой, и в цифровой форме. Комбинированное моделирование имеет большие возможности и является весьма перспективным.

В п. п. 1...4 рассматриваются вопросы, связанные с решением задач на АВМ.

Процессу решения задач на АВМ предшествует определенная подготовительная работа, в которой можно выделить пять основных этапов: 1. Постановка задачи исследования; 2. Программирование задачи; 3. Масштабирование задачи; 4. Набор задачи, настройка и установка начальных условий функциональных блоков АВМ; 5. Контроль коммутационной схемы и настройки решающих устройств.

На этапе постановки задачи дается формализация реального процесса и четко формулируется цель исследования. Затем формализованная схема процесса преобразовывается в математическую модель, определяется совокупность параметров и диапазоны, в которых они должны варьироваться в процессе исследования [6].

На втором этапе ММ преобразовывается к виду, удобному для моделирования на АВМ, разрабатывается структурная схема АВМ, реализующая решение задачи.

Как правило, исходную ММ исследуемого процесса преобразовывают в форму задачи Коши, так как вычислительные возможности АВМ лучше приспособлены к решению обыкновенных дифференциальных уравнений заданных именно в такой форме. Существует целый ряд методов [3, 4], позволяющих свести исходные задачи с некоторыми приближениями к задачам Коши.

Составление структурных схем АВМ, воспроизводящих решение обыкновенных дифференциальных уравнений, будет детально изложено в следующем параграфе. Следует заметить, что решение одной и той же задачи можно воспроизвести различными структурными схемами. Искусство построения «наилучших» в некотором смысле схем зависит как от возможностей технических средств, так и от квалификации исследователя.

Этап масштабирования обусловлен несоответствием диапазонов изменения моделируемых физических переменных с диапазонами изменения машинных переменных (напряжениями и временем). Значения машинных переменных (напряжения) не должны выходить за границы рабочего диапазона функциональных блоков АВМ, так как в противном случае нельзя получить достоверные результаты о поведении моделируемой системы. Обеспечить соответствие физических и машинных переменных можно с помощью масштабных коэффициентов. Вопросы, связанные с масштабированием задач на АВМ, будут рассмотрены ниже.

Этап набора задачи на АВМ и настройки функциональных блоков заключается в соединении между собой решающих устройств с помощью коммутационных шнуров на наборном поле и установке начальных значений этих устройств. В современных АВМ имеется несколько съемных полей набора, что позволяет при необходимости оперативно сменить задачу другой, не разрушая схемы первой задачи.

На этапе контроля набора схемы и настройки функциональных блоков необходимо произвести проверку соответствия соединений и значений коэффициентов передачи этих блоков математической модели, полученной на втором и третьем этапах.

Таким образом, для качественного и быстрого решения задач на АВМ необходимо в первую очередь правильно сделать постановку задачи, определить цели и дать исчерпывающее математическое описание.

## 5.2. Программирование дифференциальных уравнений на АВМ

В настоящее время совершенно очевидно, что для решения почти всех дифференциальных уравнений (линейных, нелинейных, с постоянными и переменными коэффициентами) необходимы аналоговые или цифровые вычислительные машины. Мы рассмотрим два основных метода составления программ для решения дифференциальных уравнений на АВМ: 1. Общий метод; 2. Метод канонической формы. Рассмотрим условия, при которых может быть использован тот или иной метод.

*Общий метод программирования.* Рассмотрим простейший случай, а именно, линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Предположим, что нам необходимо запрограммировать уравнение [5]

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t). \quad (5.1)$$

В качестве первого шага приравниваем производную высшего порядка остальной части уравнения

$$y''(t) = -a_1 y'(t) - a_0 y(t) + f(t). \quad (5.2)$$

Затем, полагая высшую производную известной, соединяем последовательно достаточное число интеграторов для получения производной нулевого порядка (количество интеграторов равно порядку высшей производной).

С помощью структурной схемы программы решения уравнения, изображенной на рис. 5.1, можно получить все производные переменной  $y(t)$ , которые входят в правую часть уравнения (5.2).

На следующем шаге формируется правая часть, т. е. надо умножить каждую из этих производных на соответствующий коэффициент, затем сложить полученные результаты и добавить вынуждающую функцию. В результате получим схему, представленную на рис. 5.2.

В соответствии с уравнением (5.2) выход усилителя 2 равен входу интегратора 1. Следовательно, если соединить эти точки, контур замкнется и АВМ начнет решать уравнение (5.1). Чтобы закончить программирование, необходимо задать начальные условия на интеграторы 1 и 2. Так как при составлении программы основная задача сводилась к тому, чтобы с наибольшей ясностью проиллюстрировать процесс программирования, то полученная программа не является наилучшей в смысле экономии функциональных блоков АВМ (содержит в себе лишний усилитель). Схему

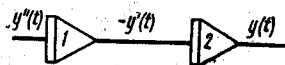


Рис. 5.1.



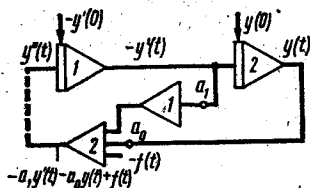


Рис 5.2.

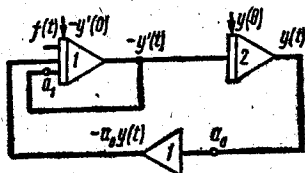


Рис. 5.3.

(рис. 5.2), используя интегросумматор, можно представить более компактно (рис. 5.3).

Таким же образом составляется программа для решения уравнения  $n$ -го порядка. В этом случае последовательность шагов будет такова:

1. Производная высшего порядка приравнивается остальной части уравнения;
2. На структурной схеме изображаются последовательно соединенные интеграторы, число которых равно порядку уравнения;
3. Делают предположение, что располагают производной высшего порядка и подают ее на вход первого интегратора. Тогда на выходах интеграторов, получают зависимую переменную и ее  $n - 1$  производных;
4. Из выходных величин этих интеграторов и вынуждающей функции образуется выражение, равное производной высшего порядка;
5. Контур замыкают путем подачи этой величины на вход первого интегратора;

6. Соответствующим интеграторам задают начальные условия.

Известно, что если на входе каждого интегратора задано определенное начальное условие, то решение будет единственным. Общий метод программирования был предложен Кельвингом, который впервые изложил его в своем докладе Королевскому обществу в 1876 г.

Рассматриваемый метод применим и для программирования систем дифференциальных уравнений.

Пусть, например, система дифференциальных уравнений задана в виде

$$\begin{aligned} y_1'(t) + y_3(t) y_2'(t) &= 0; \\ y_2''(t) + y_2'(t) + y_2(t) \sin t - y_1^2(t) &= e^{-t}; \\ y_3'(t) + y_1(t) + y_2(t) &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Составим программу решения по общему методу.

*Первый шаг.* Разрешаем каждое уравнение относительно высшей производной

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_3(t) y_2'(t); \\ y_2''(t) &= -y_2'(t) - y_2(t) \sin t + y_1^2(t) + e^{-t}; \\ y_3'(t) &= -y_1(t) - y_2(t). \end{aligned} \quad (5.4)$$

**Второй шаг.** Считаем, что высшие производные переменной  $y(t)$  существуют. Для каждого из уравнений соединяем последовательно интеграторы для получения производной нулевого порядка (рис. 5.4).

**Третий шаг.** Формируем правую часть первого уравнения и подаем ее на вход интегратора 1. Правая часть второго уравнения подается на вход интегратора 2, члены правой части третьего уравнения — на вход интегратора 4.

**Четвертый шаг.** Задаем всем интеграторам соответствующие начальные условия, в результате чего получаем окончательную структурную схему, воспроизводящую решение системы дифференциальных уравнений (рис. 5.5).

Предполагается, что имеются блоки, вырабатывающие заданные функции независимого переменного  $\sin t$ ,  $e^{-t}$ . С помощью схемы, изображенной на рис. 5.5, можно исследовать переменные  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$ .

**Программирование дифференциальных уравнений при наличии ограничений на вынуждающую функцию.** Общий метод программирования пригоден для дифференциальных уравнений с известной вынуждающей функцией. Однако встречаются задачи, когда нужно запрограммировать уравнения вида

$$F(y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \dots, y(t)) = \sum_{k=1}^m b_k(t) x^{(k)}(t),$$

$$y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}, \dots, y'(0) = y_0', y(0) = y_0, m \leq n. \quad (5.5)$$

Это задача Коши, где  $b_k(t)$  — заданные переменные или постоянные коэффициенты,  $x^{(k)}(t)$  — производная  $k$ -го порядка по аргументу  $t$  от заданной функции  $x(t)$ . Причем производными от вынуждающей функции  $x(t)$  не располагают. Такая ситуация часто возникает в задачах, связанных с исследованием следящих систем. Так как в АВМ используются интеграторы, а дифференциаторы, как правило, не используются в виду низкой точности решения АВМ, то не имеется возможности получить производные от вынуждающей функции непосредственно. В этом случае общий метод непригоден, нужно искать другие пути программирования задачи и можно воспользоваться методом канонической формы [3, 5].

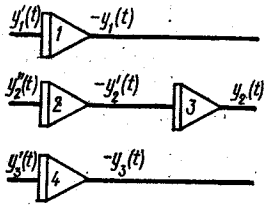


Рис. 5.4.

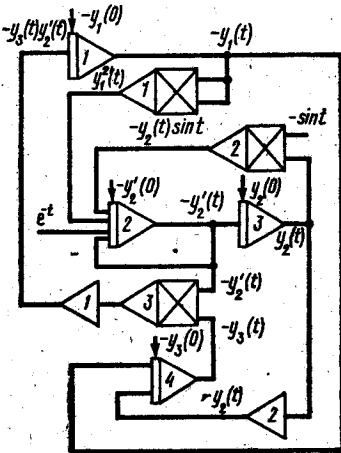


Рис. 5.6.

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_1 x'(t) + b_0 x(t),$$

$$y''(0) = y'_0, y'(0) = y'_0, y(0) = y_0. \quad (5.6)$$

Непосредственное применение общего метода приведет к необходимости воспроизводить производную функции  $x(t)$ . Суть рассматриваемого метода состоит в преобразовании исходной математической модели к канонической форме [3] с последующим применением общего метода программирования. Составим структурную схему АВМ для уравнения (5.6) по шагам:

*Первый шаг.* Уравнение (5.6) записывается в операторной форме

$$p^2 y(t) + a_1 p y(t) + a_0 y(t) = b_1 p x(t) + b_0 x(t). \quad (5.7)$$

*Второй шаг.* Полученное уравнение разрешается относительно высшей производной

$$p^2 y(t) = -a_1 p y(t) - a_0 y(t) + b_1 p x(t) + b_0 x(t). \quad (5.8)$$

*Третий шаг.* Уравнение (5.8) дважды интегрируется, в результате чего получают

$$y(t) = \frac{1}{p} (b_1 x(t) - a_1 y(t)) + \frac{1}{p^2} (b_0 x(t) - a_0 y(t)). \quad (5.9)$$

*Четвертый шаг.* Последовательно соединяют столько интеграторов, каков порядок уравнения. При этом выходная переменная  $y(t)$  предполагается существующей (рис. 5.6).

*Пятый шаг.* Формируется правая часть уравнения (5.9), из которого очевидно, что содержимое первых скобок интегрируется один раз (подается на интегратор 2), а содержимое вторых скобок интегрируется два раза (подается на интегратор 1). Синтезированная схема представлена на рис. 5.7.

*Шестой шаг.* На каждый интегратор необходимо подать начальные условия, которые, в отличие от общего метода программирования, необходимо предварительно рассчитать. Здесь начальные условия представляют собой значения зависимой переменной  $y(t)$  и ее производных. Начальные условия для интегратора 1 можно определить следующим образом. Уравнение (5.8) интегрируется один раз и после группирования и перестановки членов получается

$$\frac{1}{p} (a_0 y(t) - b_0 x(t)) = b_1 x(t) - a_1 y(t) - p y(t). \quad (5.10)$$

Начальные значения всех членов в правой части известны, следовательно, можно вычислить и начальные условия для интегратора 1.

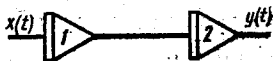


Рис. 5.6.

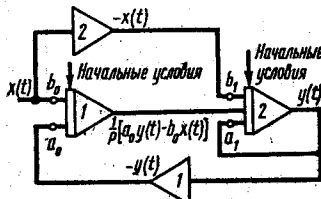


Рис. 5.7.

### 5.3. Масштабирование задач для АВМ

Как уже отмечалось существенным моментом при моделировании систем является подготовка задач к решению, одним из основных этапов которой является масштабирование.

При масштабировании задач для АВМ весьма существенными являются две основные характеристики машины [7]—диапазон изменения машинных переменных и точностной диапазон машины.

Диапазон изменения машинных переменных определяет пределы, в которых могут находиться машинные переменные без искажения

$$D = E \left( \log_b \frac{X_{\max}}{X_{\min}} \right), \quad (5.11)$$

где  $b$  — основание системы счисления, принятой в машине;  $E$  — символ операции выделения целой части с избытком;  $X_{\max}$  — максимальное значение машинной переменной;  $X_{\min}$  — минимальное значение машинной переменной. Физический смысл  $D$  — количество разрядов (при основании системы счисления, равном  $b$ ), необходимых для размещения всех машинных переменных в диапазоне  $X_{\min} \dots X_{\max}$ ; чем шире диапазон  $D$ , тем меньше трудности масштабирования; при достаточно большом  $D$  необходимость в масштабировании может отпасть вообще.

Точностной диапазон машины определяет точность представления величин в машине, а в результате, и точность вычислений. Эта характеристика зависит только от размера разрядной сетки машины и коэффициента ее использования.

Масштабирование зависимых математических переменных для аналоговых вычислительных машин является нелегкой задачей и требует от исследователя соответствующего опыта и практических навыков. Это объясняется наличием ряда противоречивых требований. Функциональные блоки АВМ не могут выполнять соответствующие математические операции, если величина напряжения на их входах выше или ниже определенного уровня. Зависимая машинная переменная не должна выходить за пределы рабочего диапазона линейности операционных усилителей, ограниченного интервалом  $\pm U_{\max}$ . В зависимости от типа АВМ этот интервал может быть  $\pm 100$ ,  $\pm 50$ ,  $\pm 25$ , или  $\pm 10$  В. С другой стороны, напряжения (зависимые машинные переменные) в процессе решения задачи не могут оставаться малыми в течение длительного промежутка времени. В противном случае они становятся соизмеримы с шумом усилителя и дрейфом интегратора, т. е. с погрешностями решающих устройств АВМ.

Кроме того, зависимые машинные переменные не должны изменяться слишком быстро или слишком медленно. Первое — затрудняет измерение и регистрацию, второе — увеличивает время решения задачи и погрешности интеграторов.

Масштаб независимой переменной (времени) выбирается таким, чтобы время решения задачи на АВМ было минимальным и при этом обеспечивалась заданная точность решения.

Масштабы или масштабные коэффициенты устанавливают взаимно однозначное соответствие между исходными (физическими) уравнениями и машинными уравнениями.

Для некоторой зависимой физической переменной  $x$  масштаб определяется отношением

$$m_x = \frac{X}{x}, \quad (5.12)$$

где  $X$  — значение машинной переменной;  $x$  — значение физической переменной.

Масштаб всегда имеет размерность. Так, если машинная переменная измеряется в вольтах, а физическая переменная — в сантиметрах, то масштабный коэффициент имеет размерность [В/см]. Обычно при определении масштабов берут отношение максимальных значений машинной и физической переменных, что обеспечивает повышенную точность решения задач, т. е. имеет место соотношение

$$m_x = \left| \frac{X_{\max}}{x_{\max}} \right|. \quad (5.13)$$

Так как для рассматриваемых АВМ машинной переменной служит напряжение, то (5.13) примет вид

$$m_x = \frac{|U|_{\max}}{|x|_{\max}}, \quad (5.14)$$

где  $|U|_{\max}$  — максимально допустимое значение напряжения на решающих устройствах;  $|x|_{\max}$  — максимальное значение физической переменной, возникающее в процессе решения задачи.

Следует отметить два основных способа определения масштабов. Первый способ предполагает видоизменение математических уравнений, т. е. приведение исходной математической модели к так называемому машинному виду, а второй способ связан с расчетом масштабов и коэффициентов передачи раздельно для каждого из операционных блоков (почленное масштабирование).

*Приведение системы дифференциальных уравнений к машинному виду.* Отображение физических переменных заданной системы уравнений в машинные переменные (напряжения) и обратно осуществляется с помощью следующих линейных масштабных соотношений

$$X_i = m_x x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.15)$$

Рассмотрим систему двух линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами вида

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= a_{xx}\dot{x} + a_{xx}x + a_{xy}\dot{y} + a_{xy}y + a_{x0}\delta + f, \\ \ddot{y} &= a_{yx}\dot{x} + a_{yx}x + a_{yy}\dot{y} + a_{yy}y + a_{y0}\delta + q. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Необходимо привести эту систему уравнений к машинному виду. Рассмотрим алгоритм приведения по шагам.

*Первый шаг.* Определяются (по паспортным данным) максимально возможные напряжения на входах функциональных блоков АВМ. Пусть, например,  $|U|_{\max} = 50 \text{ В}$ .

*Второй шаг.* Определяются или задаются максимально возможные значения зависимых переменных и их производных ( $|x|_{\max}$ ,  $|y|_{\max}$ ,  $|\dot{x}|_{\max}$ ,  $|\dot{y}|_{\max}$ ,  $|\ddot{x}|_{\max}$ ,  $|\ddot{y}|_{\max}$ ,  $|\delta|_{\max}$ ,  $|f|_{\max}$ ,  $|q|_{\max}$ ). Этот момент наиболее трудоемкий для известных задач и является «камнем преткновения» при масштабировании новых сложных задач, что объясняется отсутствием строгих способов определения максимальных значений переменных. В настоящее время имеется два пути задания максимально возможных значений переменных:

1. Эмпирический способ, который заключается в использовании накопленного опыта. На основании анализа подобных задач высказываются более или менее обоснованные предположения о значениях зависимых переменных и исходя из этого выбирают масштабные соотношения. Затем в процессе отработки программы на АВМ масштабные коэффициенты неоднократно уточняются. Этот процесс называется методом проб и ошибок.

2. Численный способ, который заключается в реализации программы на цифровой вычислительной машине одним из численных методов (например, методом Рунге — Куты) и в результате получают максимальные значения переменных.

*Третий шаг.* Вводятся машинные переменные, которые определяются соотношениями

$$\begin{aligned} X &= m_x x, \quad Y = m_y y, \quad \Delta = m_\delta \delta, \\ Y &= m_y y, \quad \bar{X} = m_{\bar{x}} \bar{x}, \quad F = m_f f, \\ \dot{X} &= m_{\dot{x}} \dot{x}, \quad \ddot{Y} = m_{\ddot{y}} \ddot{y}, \quad Q = m_q q. \end{aligned} \quad (5.17)$$

*Четвертый шаг.* Определяются масштабные коэффициенты. Различные масштабные коэффициенты  $m_x, m_y, \dots, m_q$  выбираются таким образом, чтобы каждая из машинных переменных  $X, Y, \dots, Q$  в процессе решения не превышала допустимых значений напряжений на функциональных блоках АВМ. Для этого необходимо максимально допустимые напряжения на входах (выходах) последних разделить на максимальные значения соответствующих физических переменных.

*Пятый шаг.* Физические переменные согласно (5.17) выражаются через машинные

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{m_x}, \quad \dot{y} = \frac{\dot{Y}}{m_y}, \quad \delta = \frac{\Delta}{m_\delta}, \\ y &= \frac{Y}{m_y}, \quad \bar{x} = \frac{\bar{X}}{m_{\bar{x}}}, \quad f = \frac{F}{m_f}, \\ \dot{x} &= \frac{\dot{X}}{m_{\dot{x}}}, \quad \ddot{y} = \frac{\ddot{Y}}{m_{\ddot{y}}}, \quad q = \frac{Q}{m_q}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Подставив (5.19) в исходную систему уравнений (5.16) и разделив обе их части на коэффициент при высшей производной, будем иметь систему уравнений в машинном виде

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= \frac{m_{\ddot{x}}}{m_x} a_{xx} \dot{X} + \frac{m_{\ddot{x}}}{m_x} a_{xx} X + \frac{m_{\ddot{x}}}{m_y} a_{xy} \dot{Y} + \frac{m_{\ddot{x}}}{m_y} a_{xy} Y + \\ &+ \frac{m_{\ddot{x}}}{m_\delta} a_{x\delta} \Delta + \frac{m_{\ddot{x}}}{m_f} F, \\ \ddot{Y} &= \frac{m_{\ddot{y}}}{m_x} a_{yx} \dot{X} + \frac{m_{\ddot{y}}}{m_x} a_{yx} X + \frac{m_{\ddot{y}}}{m_y} a_{yy} \dot{Y} + \\ &+ \frac{m_{\ddot{y}}}{m_y} a_{yy} Y + \frac{m_{\ddot{y}}}{m_\delta} a_{y\delta} \Delta + \frac{m_{\ddot{y}}}{m_f} F. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Полученную систему машинных уравнений непосредственно реализуют на АВМ.

При практической реализации этого метода масштабирования часто (практически всегда) не удается избежать элементов раздельного (почленного) масштабирования. Это обстоятельство ограничивает применение этого метода и склоняет исследователя к использованию метода почленного масштабирования [4].

*Почленное масштабирование.* Основными функциональными блоками аналоговых вычислительных машин являются: масштабный блок, суммирующий, интегрирующий, интегросуммирующий, блок умножения, деления, переменного коэффициента, функционального преобразования. На этапе определения коэффициентов передачи отдельные части исходной системы уравнений заменяются машинными уравнениями. Рассмотрим связь между масштабами при выполнении перечисленных выше операций.

Масштабный блок, как известно, выполняет операцию умножения на постоянную величину по формуле

$$Z = ax. \quad (5.21)$$

С учетом масштабов  $m_z = \frac{Z}{z}$ ,  $m_x = \frac{X}{x}$  будем иметь машинное уравнение вида

$$Z = a \frac{m_z}{m_x} X. \quad (5.22)$$

Работа блока, вообще, описывается выражением

$$Z = KX. \quad (5.23)$$

Из выражений (5.22) и (5.23) очевидно

$$m_z = \frac{K}{a} m_x. \quad (5.24)$$

Полученное соотношение позволяет определить или коэффициент передачи масштабного делителя при заданных масштабах

переменных  $x$  и  $z$ , или масштабы при заданном коэффициенте передачи. Аналогичные соотношения между масштабами можно найти и для других функциональных блоков АВМ.

Суммирующий блок предназначен для выполнения операций суммирования нескольких переменных

$$z = \sum_{i=1}^n a_i x_i. \quad (5.25)$$

Машинное уравнение этого выражения будет иметь вид

$$Z = \sum_{i=1}^n a_i \frac{m_z}{m_{x_i}} X_i. \quad (5.26)$$

Работа суммирующего блока описывается выражением

$$Z = \sum_{i=1}^n K_i X_i, \quad (5.27)$$

где  $K_i$  — коэффициент передачи усилителя по  $i$ -му входу, равный отношению сопротивления обратной связи ко входному сопротивлению ( $K_i = \frac{R_0}{R_{вхi}}$ ).

Из (5.26) и (5.27) получаем искомые соотношения

$$m_z = \frac{K_i}{a_i} m_{x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.28)$$

Интегрирующий блок выполняет операцию

$$z = a \int_0^t x dt. \quad (5.29)$$

С учетом масштабов для зависимых переменных (5.19) и масштаба независимой переменной (времени)  $m_t = \frac{\tau}{t}$  ( $\tau$  — машинное время), машинный вид уравнения (5.29) представится выражением

$$Z = \frac{a m_z}{m_x m_t} \int_0^{\tau} X d\tau. \quad (5.30)$$

Работа интегрирующего усилителя, как известно, описывается в общем случае уравнением

$$Z = K \int_0^{\tau} X d\tau, \quad (5.31)$$

где  $K$  — коэффициент передачи интегратора.

Сравнивая последние два выражения, получаем связь между масштабами и параметрами интегрирующего блока

$$m_z = \frac{K}{a} m_x m_t. \quad (5.32)$$



Для интегросуммирующего блока ( $Z = \int_0^n \sum_{i=1}^n a_i x_i dt$ ) масштабные соотношения определяются по каждому входу аналогично предыдущему и имеют вид

$$m_z = \frac{K_i}{a_i} m_{x_i} m_t, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (5.33)$$

Блок умножения предназначен для образования новой переменной согласно формуле

$$z = axy. \quad (5.34)$$

С учетом масштабов зависимых переменных будем иметь

$$Z = \frac{am_z}{m_x m_y} XY. \quad (5.35)$$

Для блока умножения с коэффициентом передачи  $K = b$  справедливо

$$Z = bXY. \quad (5.36)$$

Следовательно, искомое соотношение будет иметь вид

$$m_z = \frac{bm_x m_y}{a}. \quad (5.37)$$

Соотношение (5.37) по сути дела определяет масштаб результата операции умножения при заданных масштабах сомножителей. Коэффициент передачи блока умножения  $b$  задается конструктивно.

Соотношение масштабов для блока деления ( $z = a \frac{x}{y}$ ), полученное по общей методике, имеет вид

$$m_z = \frac{bm_x}{am_y}, \quad (5.38)$$

где  $b$  — конструктивный коэффициент передачи блока.

*Масштабирование независимой переменной.* В общем случае при решении задач независимой переменной может быть любая физическая величина  $x$  (длина, вес, масса и т. п.). В аналоговых вычислительных машинах независимой переменной всегда является физическая величина — время.

Связь между независимой машинной переменной и независимой физической величиной определяется соотношением [8]

$$m_x = \frac{\tau}{x} \left[ \frac{c}{p} \right], \quad (5.39)$$

где  $m_x$  — масштабный коэффициент;  $x$  — независимая физическая переменная;  $\tau$  — независимая машинная переменная (время).

Для практики особенно важен случай, когда независимая физическая переменная представляет собой время реального процесса. В этом случае масштаб является безразмерной величиной и опре-

деляется следующим образом:

$$m_t = \frac{\tau}{t}, \quad (5.40)$$

где  $t$  — время протекания реального процесса.

Если  $\tau = t$  ( $m_t = 1$ ), то принято говорить о реальном масштабе времени. Это значит, что реальный физический процесс и вычислительный процесс, моделирующий первый, протекают с одной и той же скоростью. Возможность проводить исследования с помощью моделирования в реальном масштабе времени имеет большое практическое значение. Это позволяет включать в схему модели реальные блоки, узлы и отдельные устройства, что в практике исследования бывает часто необходимо.

Если время моделирования  $\tau$  больше, чем время протекания реального процесса  $t$ , т. е.  $\tau > t$  ( $m_t > 1$ ), то говорят о замедленном масштабе времени. Необходимость в этом появляется, когда исследователя интересуют подробности изучаемого явления или процесса. И, наконец, работа в ускоренном масштабе времени, когда  $\tau < t$  ( $m_t < 1$ ). В этом случае процессы в модели протекают быстрее во времени, чем в реальной системе.

Масштабирование независимой переменной связано лишь с изменением коэффициентов передачи интеграторов. Это объясняется тем, что всегда входная величина интегратора является производной от его выходной величины, взятой с обратным знаком. А производная некоторой переменной по времени, как известно, есть скорость изменения этой переменной. Следовательно, чтобы изменить скорость переменной достаточно изменить величину коэффициента передачи интегратора. Таким образом, чтобы уменьшить время решения задачи на АВМ, необходимо увеличить скорость изменения зависимых машинных переменных. И наоборот, чтобы увеличить время решения задачи на АВМ, необходимо уменьшить скорость изменения зависимых машинных переменных.

Теперь можно привести важное практическое правило [5]: Для изменения продолжительности решения задачи в  $m$  раз (или, что то же самое, изменения масштаба независимой переменной в  $1/m$  раз) требуется изменить коэффициенты передачи всех интеграторов и только интеграторов в  $1/m$  раз.

#### 5.4. Матричный метод приведения системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами к машинному виду

Распространение гибридных вычислительных систем открывает новые возможности для автоматизации с помощью ЦВМ процесса подготовки задач к моделированию на АВМ.

Пусть поведение сложного объекта управления описывается следующей системой дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$N(t) \ddot{Y} + G(t) \dot{Y} + K(t) Y = R(t) \delta + L(t), \quad (5.41)$$

где  $N(t)$ ,  $G(t)$ ,  $K(t)$  — квадратные матрицы  $m$ -го порядка;  $R(t)$  — матрица-столбец размера  $(m+1)$ ;  $Y$  — вектор-столбец размера  $(m)$ ;  $\delta$  — скалярная величина управляющего воздействия;  $L(t)$  — вектор-столбец возмущающих воздействий размера  $(m)$ .

При моделировании процессов управления сложными динамическими объектами на АВМ или АЦВС математическая модель объекта управления (5.41) должна быть преобразована к виду, удобному для моделирования.

С этой целью целесообразно привести систему уравнений к форме Коши следующим образом. Умножая обе части уравнения (5.41) на  $N^{-1}(t)$ , получим

$$\dot{Y} + N^{-1}(t)G(t)Y + N^{-1}(t)K(t)Y = N^{-1}(t)R(t)\delta + N^{-1}(t)L(t). \quad (5.42)$$

Введя замену переменных

$$Y = V,$$

уравнение (5.42) можно преобразовать к виду

$$\dot{V} + N^{-1}(t)G(t)V + N^{-1}(t)K(t)V = N^{-1}(t)R(t)\delta + N^{-1}(t)L(t), \\ \dot{V} - EV = 0. \quad (5.43)$$

Обозначая  $X = \begin{Bmatrix} V \\ Y \end{Bmatrix}$  и подставляя в уравнение (5.43), получим

$$\dot{X} = A(t)X + B(t)\delta + F(t), \quad (5.44)$$

где  $A(t)$  — квадратная матрица (с переменными коэффициентами)  $n$ -го порядка;  $B(t)$ ,  $F(t)$  — векторы-столбцы переменных во времени коэффициентов размера  $(n \times 1)$ ;  $X$  — вектор-столбец размера  $(n \times 1)$ ;  $\delta$  — скалярная величина управляющего воздействия, т. е.

$$A(t) = \begin{Bmatrix} -N^{-1}(t)G(t) & -N^{-1}(t)K(t) \\ E & 0 \end{Bmatrix}; \quad B(t) = \begin{Bmatrix} N^{-1}(t)R(t) \\ 0 \end{Bmatrix}; \\ F(t) = \begin{Bmatrix} N^{-1}(t)L(t) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Процедура приведения системы (5.44) к машинному виду сводится к следующему. Машинные переменные связываются с физическими переменными известными соотношениями

$$X^M = M_x X; \quad \dot{X}^M = M_z \dot{X}; \quad \delta^M = m_\delta \delta,$$

где

$$M_x = \begin{Bmatrix} m_{x_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{x_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_{x_n} \end{Bmatrix}; \quad M_z = \begin{Bmatrix} m_{z_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{z_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_{z_n} \end{Bmatrix}.$$

Элементы  $m_{x_i}$  и  $m_{\dot{x}_i}$  матриц  $\mathbf{M}_x$  и  $\mathbf{M}_{\dot{x}}$  определяются по формулам:

$$m_{x_i} = \frac{U_{\max}}{x_{i \max}}; \quad m_{\dot{x}_i} = \frac{U_{\max}}{\dot{x}_{i \max}}, \quad (5.45)$$

где  $U_{\max}$  — максимально допустимые напряжения на выходах решающих блоков АВМ;  $x_{i \max}$ ,  $\dot{x}_{i \max}$  — максимально возможные значения  $i$ -й координаты и ее производной.

Тогда уравнение (5.44) с учетом (5.45) примет вид

$$\dot{\mathbf{X}}^M = \mathbf{M}_{\dot{x}} \mathbf{A}(t) \mathbf{M}_x^{-1} \mathbf{X}^M + \mathbf{M}_{\dot{x}} \mathbf{B}(t) m_{\delta}^{-1} \delta^M + \mathbf{M}_{\dot{x}} \mathbf{F}(t). \quad (5.46)$$

Равенство (5.46) может быть представлено в виде

$$\dot{\mathbf{X}}^M = \mathbf{A}^M(t) \mathbf{X}^M + \mathbf{B}^M(t) \delta^M + \mathbf{F}^M(t) \mathbf{F}_0^M, \quad (5.47)$$

где

$$\mathbf{A}^M(t) = \begin{vmatrix} \frac{m_{\dot{x}_1}}{m_{x_1}} a_{11}(t), & \frac{m_{\dot{x}_1}}{m_{x_2}} a_{12}(t), & \dots, & \frac{m_{\dot{x}_1}}{m_{x_n}} a_{1n}(t) \\ \frac{m_{\dot{x}_2}}{m_{x_1}} a_{21}(t), & \frac{m_{\dot{x}_2}}{m_{x_2}} a_{22}(t), & \dots, & \frac{m_{\dot{x}_2}}{m_{x_n}} a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{m_{\dot{x}_n}}{m_{x_1}} a_{n1}(t), & \frac{m_{\dot{x}_n}}{m_{x_2}} a_{n2}(t), & \dots, & \frac{m_{\dot{x}_n}}{m_{x_n}} a_{nn}(t) \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{B}^M(t) = \begin{vmatrix} \frac{m_{x_1}}{m_{\delta}} b_1(t), & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & \frac{m_{x_2}}{m_{\delta}} b_2(t), & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & \frac{m_{x_n}}{m_{\delta}} b_n(t) \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{F}^M(t) = \begin{vmatrix} m_{\dot{x}_1} f_1(t), & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & m_{\dot{x}_2} f_2(t), & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & m_{\dot{x}_n} f_n(t) \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{F}_0^M = \begin{vmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ \dots \\ f_{n0} \end{vmatrix}.$$

Для реализации переменных коэффициентов матрицы  $A^M(t)$  на АВМ их необходимо преобразовать таким образом, чтобы коэффициенты были представлены в виде произведения постоянных коэффициентов усиления и переменных, максимальные значения которых не должны превышать единицы. Процедуру преобразования можно рассмотреть на коэффициенте  $i$ -й строки  $j$ -го столбца  $\left(\frac{m_{x_i}}{m_{x_j}} a_{ij}\right)$ .

Элементы матрицы записываются в виде

$$A_{(t) \max}^M = \begin{pmatrix} \frac{m_{x_1}}{m_{x_1}} a_{11 \max}, & \frac{m_{x_1}}{m_{x_2}} a_{12 \max}, & \dots, & \frac{m_{x_1}}{m_{x_n}} a_{1n \max} \\ \frac{m_{x_2}}{m_{x_1}} a_{21 \max}, & \frac{m_{x_2}}{m_{x_2}} a_{22 \max}, & \dots, & \frac{m_{x_2}}{m_{x_n}} a_{2n \max} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{m_{x_n}}{m_{x_1}} a_{n1 \max}, & \frac{m_{x_n}}{m_{x_2}} a_{n2 \max}, & \dots, & \frac{m_{x_n}}{m_{x_n}} a_{nn \max} \end{pmatrix}$$

и определяются как величины максимально возможных значений коэффициентов матрицы  $A^M(t)$ . После умножения и деления элемента  $i$ -й строки  $j$ -го столбца на величину  $\frac{m_{x_i}}{m_{x_j}} a_{ij \max}$  можно получить

$$\frac{m_{x_i}}{m_{x_j}} a_{ij}(t) = \frac{m_{x_i}}{m_{x_j}} a_{ij \max} \frac{a_{ij}(t)}{a_{ij \max}}. \quad (5.48)$$

Введя обозначения

$$K_{ij} = \frac{m_{x_i}}{m_{x_j}} a_{ij \max}; \quad \tilde{K}_{ij} = \frac{a_{ij}(t)}{a_{ij \max}}, \quad (5.49)$$

вместо (5.48) получим

$$\frac{m_{x_i}}{m_{x_j}} a_{ij}(t) = K_{ij} \tilde{K}_{ij}. \quad (5.50)$$

Иногда желательно использовать в уравнении (5.49) не максимальное значение коэффициента  $a_{ij \max}$ , а ближайшее к его значению целое число ( $a_{ij \max 0}$ ). Тогда переменные коэффициенты примут соответствующие обозначения

$$\tilde{K}_{0ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ij \max 0}}; \quad K_{0ij} = \frac{m_{x_i}}{m_{x_j}} a_{ij \max 0}; \quad (5.51)$$

$$\frac{m_{x_i}}{m_{x_j}} a_{ij} = K_{0ij} \tilde{K}_{0ij}. \quad (5.52)$$

Переменные коэффициенты вида (5.51) или (5.52) могут быть реализованы на блоках переменных коэффициентов аналоговой вычис-

лительной машины. Кроме блоков переменных коэффициентов имеются потенциметрические коэффициенты (масштабные делители). Конструктивно они могут быть выполнены как отдельно  $\overset{мд}{K}$ , так и совместно с блоком переменных коэффициентов  $\bar{K}$ . Коэффициенты усиления усилителей и интеграторов  $\overset{y}{K}$  могут настраиваться либо непрерывно в пределах  $|\overset{y}{K}_{ij}| = \overline{0, U_{\max}}$ , либо дискретно и определяться соответствующим множеством

$$\overset{y}{K}_{ij} \in \{0, \overset{y}{K}_1, \overset{y}{K}_2, \dots, \overset{y}{K}_n\}. \quad (5.53)$$

Вид коэффициентов  $\overset{y}{K}$  и число элементов множества (5.53) определяется типом АВМ.

В конечном итоге реализация коэффициентов  $K_{ij}$  или  $K_{otj}$  сводится в общем случае к выполнению равенства

$$K_{ij} = \overset{y}{K}_{ij} \overset{мд}{K}_{ij} \bar{K}_{ij}, \quad (5.54)$$

где

$$\overset{мд}{K}_{ij} \in \{0, \overset{мд}{K}_1, \overset{мд}{K}_2, \dots, \overset{мд}{K}_m\}, \quad \bar{K} \in \{0, \bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_n\}. \quad (5.55)$$

Аналогично преобразуются коэффициенты матриц  $A^M(t)$ ,  $B^M(t)$ ,  $F^M(t)$ .

$$A^M(t) = \begin{vmatrix} \overset{y}{A}_{11} \overset{мд}{A}_{11} \bar{A}_{11}, & \overset{y}{A}_{12} \overset{мд}{A}_{12} \bar{A}_{12}, & \dots, & \overset{y}{A}_{1n} \overset{мд}{A}_{1n} \bar{A}_{1n} \\ \overset{y}{A}_{21} \overset{мд}{A}_{21} \bar{A}_{21}, & \overset{y}{A}_{22} \overset{мд}{A}_{22} \bar{A}_{22}, & \dots, & \overset{y}{A}_{2n} \overset{мд}{A}_{2n} \bar{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overset{y}{A}_{n1} \overset{мд}{A}_{n1} \bar{A}_{n1}, & \overset{y}{A}_{n2} \overset{мд}{A}_{n2} \bar{A}_{n2}, & \dots, & \overset{y}{A}_{nn} \overset{мд}{A}_{nn} \bar{A}_{nn} \end{vmatrix}; \quad (5.56)$$

$$B^M(t) = \begin{vmatrix} \overset{y}{B}_{11} \overset{мд}{B}_{11} \bar{B}_{11}, & 0, & \dots, & 0 \\ 0 & \overset{y}{B}_{22} \overset{мд}{B}_{22} \bar{B}_{22}, & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots, & \overset{y}{B}_{nn} \overset{мд}{B}_{nn} \bar{B}_{nn} \end{vmatrix}; \quad (5.57)$$

$$F^M(t) = \begin{vmatrix} \overset{y}{F}_{11} \overset{мд}{F}_{11} \bar{F}_{11}, & 0, & \dots, & 0 \\ 0 & \overset{y}{F}_{22} \overset{мд}{F}_{22} \bar{F}_{22}, & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots, & \overset{y}{F}_{nn} \overset{мд}{F}_{nn} \bar{F}_{nn} \end{vmatrix}. \quad (5.58)$$

Рассмотренный процесс приведения системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами к машинному виду легко поддается программированию для ЦВМ, что позволяет значительно уменьшить время подготовки задач к исследованию их на аналоговых вычислительных машинах.

### 5.5. Моделирование систем на ЭВМ

Использование ЭВМ общего назначения значительно облегчает решение задач анализа и синтеза сложных динамических систем. Применение методов цифрового моделирования расширяет возможности исследования, так как оно не требует строгой математической формализации исследуемых процессов и явлений. Алгоритм решения задачи дает не аналитический ответ на поставленный вопрос, а способ, с помощью которого этот вопрос можно разрешить для конкретных исходных данных [9]. Большие перспективы открываются при автоматизации синтеза сложных систем с помощью ЭВМ и чем выше степень автоматизации, тем эффективнее использование электронных вычислительных машин.

Очень многие динамические системы описываются системой линейных или линеаризованных дифференциальных уравнений произвольного вида. Поэтому первой задачей для исследования является преобразование исходной математической модели к некоторому стандартному виду, для которого разработаны определенные методы решения. Одной из таких стандартных форм представления математических моделей является векторно-матричная форма (форма Коши).

*Приведение системы дифференциальных уравнений к форме Коши.* Пусть математическая модель объекта задана в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= a_{xx}\ddot{x} + a_{xx}\dot{x} + a_{xy}y + a_{xy}\dot{y} + a_{xz}\ddot{z} + a_{x\delta}\delta + f_1, \\ \ddot{y} &= a_{yx}\ddot{x} + a_{yx}\dot{x} + a_{yy}\ddot{y} + a_{yy}\dot{y} + a_{yz}\ddot{z} + a_{y\delta}\delta + f_2, \\ \ddot{z} - a_{zz}\ddot{z} + a_{zz}\dot{z} &= a_{zx}\ddot{x} + a_{zy}\dot{y}, \end{aligned} \quad (5.59)$$

где  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и их производные являются переменными;  $\delta$  — скалярная величина управляющего воздействия;  $f$  — какие-то возмущающие воздействия;  $a_{ij}$  — постоянные коэффициенты (первый индекс указывает на принадлежность коэффициента к определенному уравнению, второй индекс — к определенной переменной).

Прежде всего, необходимо упорядочить переменные, т. е. всегда их писать в определенной последовательности, например,  $(x, y, z)$

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 0 - a_{xz}\ddot{z} - a_{xx}\dot{x} - a_{xy}\dot{y} + 0 - a_{xx}\ddot{x} - a_{xy}\dot{y} + 0 &= a_{x\delta}\delta + f_1, \\ 0 + \ddot{y} - a_{yz}\ddot{z} - a_{yx}\dot{x} - a_{yy}\dot{y} + 0 - a_{yx}\ddot{x} - a_{yy}\dot{y} + 0 &= a_{y\delta}\delta + f_2, \\ -a_{zx}\ddot{x} - a_{zy}\dot{y} + \ddot{z} + 0 + 0 - a_{zz}\ddot{z} + 0 + 0 - a_{zz}\dot{z} &= 0. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Если ввести обозначения

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad \ddot{Y} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix},$$

то систему уравнений можно представить в виде

$$N\ddot{Y} + G\dot{Y} + KY = R\delta + P, \quad (5.61)$$

где

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_{xz} \\ 0 & 1 & -a_{yz} \\ -a_{zx} & -a_{zy} & 1 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} -a_{xx} & -a_{xy} & 0 \\ -a_{yx} & -a_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{zz} \end{pmatrix};$$

$$K = \begin{pmatrix} -a_{xx} & -a_{xy} & 0 \\ -a_{yx} & -a_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & a_{zz} \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} a_{x\delta} \\ a_{y\delta} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $N, G, K$  — квадратные матрицы коэффициентов, составленные соответственно при  $(x, y, z)$ ,  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ ,  $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ .

Умножив левую и правую часть уравнения (5.61) на обратную матрицу при высшей производной  $N^{-1}$ , будем иметь

$$\ddot{Y} + N^{-1}G\dot{Y} + N^{-1}KY = N^{-1}R\delta + N^{-1}P. \quad (5.62)$$

Понижаем порядок системы уравнений введением нового переменного вектора  $V$ , т. е.  $\dot{Y} = V$ ,

$$\dot{V} + N^{-1}GV + N^{-1}KY = N^{-1}R\delta + N^{-1}P. \quad (5.63)$$

Разрешая систему матричных уравнений (5.63) относительно производных  $\dot{V}$  и  $\dot{Y}$ , получим,

$$\dot{V} = -N^{-1}GV - N^{-1}KY + N^{-1}R\delta + N^{-1}P, \quad (5.64)$$

$$\dot{Y} = V.$$

С учетом обозначений  $X = \begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{Y} \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} V \\ Y \end{pmatrix}$  получаем систему дифференциальных уравнений в форме Коши

$$\dot{X} = AX + B\delta + F, \quad (5.65)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -N^{-1}G & -N^{-1}K \\ F & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} N^{-1}R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} N^{-1}P \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $A$  — квадратная матрица размера  $(n \times n)$ , элементы которой представляют собой коэффициенты дифференциальных уравнений при неизвестных переменных;  $X$  — вектор координат системы



или вектор состояния системы размера  $n$ ;  $B$  — матрица коэффициентов управляющего воздействия размера  $(1 \times n)$ ;  $F$  — вектор возмущающих воздействий размера  $n$ ;  $n$  — порядок системы, описываемой уравнением (5.65).

Найти решение уравнения заданного в виде (5.65) можно различными способами. Предполагая использование цифровых ЭВМ, мы остановимся ниже на двух методах определения переходной функции состояния системы.

*Получение переходной функции состояния системы с помощью разложения степенной функции в ряд.* Известно, что переходная функция состояния системы является решением системы дифференциальных уравнений, которыми она описывается. Пусть поведение системы описывается уравнением, заданным в форме Коши (5.65).

Известно, что решение этой системы имеет вид

$$X(t) = e^{At}X(+0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \delta(\tau) d\tau + \int_0^t e^{A(t-\tau)} F(\tau) d\tau, \quad (5.66)$$

где

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad X(+0) = \begin{bmatrix} x_1(+0) \\ x_2(+0) \\ \vdots \\ x_n(+0) \end{bmatrix}$$

искомый вектор координат системы и вектор начальных значений координат соответственно.

Интервал интегрирования  $t$  выбирают так, чтобы  $\delta(\tau)$  и  $F(\tau)$  можно было бы считать постоянными, тогда уравнение (5.66) после определения интегралов представится следующим образом

$$X(t) = e^{At}X(+0) + A^{-1}(e^{At} - E)B\delta + A^{-1}(e^{At} - E)F. \quad (5.67)$$

Разложим степенную функцию  $e^{At}$  в ряд

$$e^{At} = E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots, \quad (5.68)$$

откуда следует

$$A^{-1}(e^{At} - E) = Et + \frac{A t^2}{2!} + \dots + \frac{A^{k-1} t^k}{k!} + \dots. \quad (5.69)$$

Матрица  $e^{At}$  должна быть квадратной матрицей размера  $(n \times n)$ , которую легко можно посчитать. Поставив (5.68) и (5.69) в уравнение (5.67), будем иметь

$$\begin{aligned} X(t) = & \left( E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots \right) X(+0) + \\ & + \left( Et + \frac{A t^2}{2!} + \dots + \frac{A^{k-1} t^k}{k!} + \dots \right) B\delta + \\ & + \left( Et + \frac{A t^2}{2!} + \dots + \frac{A^{k-1} t^k}{k!} + \dots \right) F. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Введя обозначения

$$\Phi(t) = E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots \text{ и } Q(t) = Et + \\ + \frac{At^2}{2!} + \dots + \frac{A^{k-1} t^k}{k!} + \dots,$$

получим следующее выражение для определения переходной функции состояния системы

$$X(t) = \Phi(t) X(+0) + Q(t) B\delta + Q(t) F. \quad (5.71)$$

Определим разностный аналог переходной функции состояния системы. С этой целью ось времени разбивается на определенные интервалы  $t = T$  ( $T$  — период прерывания). Зная начальные условия состояния системы  $X(+0)$ , а также значения  $\delta$  и  $F$  на участке от 0 до  $T$ , и вычислив матрицы  $\Phi(T)$  и  $Q(T)$ , можно определить переходную функцию состояния системы в момент времени  $T$ , т. е.

$$X(T) = \Phi(T) X(+0) + Q(T) B\delta(0) + Q(T) F(0).$$

По аналогии

$$X(2T) = \Phi(T) X(T) + Q(T) B\delta(T) + Q(T) F(T).$$

В общем случае переходная функция состояния системы в любой дискретный момент времени будет определяться выражением

$$X|(n+1)T| = \Phi(T) X(nT) + Q(T) B\delta(nT) + Q(T) F(nT). \quad (5.72)$$

Структурно-матричная схема определения дискретной переходной функции состояния системы представлена на рис. 5.8.

*Определение переходной функции состояния системы методом преобразования Лапласа.* Пусть динамическая система описывается уравнением

$$\dot{X} = AX + B\delta + F. \quad (5.73)$$

Уравнение (5.73) подвергается прямому преобразованию Лапласа

$$sX(s) - X(+0) = AX(s) + B\delta(s) + F(s),$$

в результате чего приходим к системе алгебраических уравнений

$$(Es - A) X(s) = X(+0) + B\delta(s) + F(s). \quad (5.74)$$

Умножив левую и правую часть уравнения (5.74) на обратную матрицу при  $X(s)$ , получим

$$X(s) = (Es - A)^{-1} X(+0) + (Es - A)^{-1} B\delta(s) + (Es - A)^{-1} F(s). \quad (5.75)$$

Полученное выражение представляет собой изображение переходной функции состояния. Для того, чтобы найти оригинал, необходимо подвергнуть это уравнение обратному преобразованию Лапласа.

$$X(t) = L^{-1} [X(s)] = L^{-1} [(Es - A)^{-1} X(+0) + L^{-1} [(Es - A)^{-1} \times \\ \times B\delta(s)] + L^{-1} [(Es - A)^{-1} F(s)]. \quad (5.76)$$

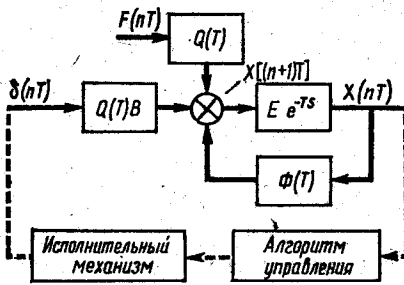


Рис. 5.8.

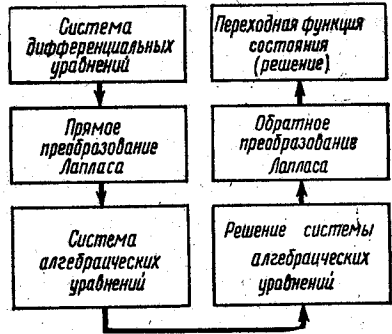


Рис. 5.9.

Известно, что решение уравнения (5.73) имеет вид (5.66). Сравнивая уравнения (5.76) и (5.66), можно заметить, что

$$e^{A\tau} = L^{-1} [(Es - A)^{-1}].$$

В целом алгоритм определения переходной функции состояния методом преобразования Лапласа сравнительно несложен и структурно может быть представлен блок-схемой (рис. 5.9). Однако, при практической реализации его в процессе исследования сложных динамических систем возникают определенные трудности. Поэтому этот метод целесообразно рассмотреть более детально.

Представим уравнение (5.73) в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1\delta + f_1, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2\delta + f_2, \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n\delta + f_n. \end{aligned} \tag{5.77}$$

Преобразуем систему (5.77) по Лапласу

$$\begin{aligned} sx_1(s) - x_1(+0) &= a_{11}x_1(s) + \dots + a_{1n}x_n(s) + b_1\delta(s) + f_1(s), \\ sx_2(s) - x_2(+0) &= a_{21}x_1(s) + \dots + a_{2n}x_n(s) + b_2\delta(s) + f_2(s), \\ &\dots \\ sx_n(s) - x_n(+0) &= a_{n1}x_1(s) + \dots + a_{nn}x_n(s) + b_n\delta(s) + f_n(s). \end{aligned}$$

Перенесем в правую часть начальные условия, а в левую — члены с неизвестными

$$\begin{aligned} (s - a_{11})x_1(s) - a_{12}x_2(s) - \dots - a_{1n}x_n(s) &= x_1(+0) + \\ &+ b_1\delta(s) + f_1(s), \\ -a_{21}x_1(s) + (s - a_{22})x_2(s) - \dots - a_{2n}x_n(s) &= \\ = x_2(+0) + b_2\delta(s) + f_2(s), \\ &\dots \end{aligned} \tag{5.78}$$

$$-a_{n1}x_1(s) - a_{n2}x_2(s) - \dots + (s - a_{nn})x_n(s) = x_n(+0) + b_n\delta(s) + f_n(s).$$

Найдя  $x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)$ , будем иметь изображение решения уравнения (5.77). Для примера найдем одну из координат  $x_1(s)$ , пользуясь известным правилом Крамера,

$$x_1(s) = \frac{\det_1(s)}{\det(s)}, \quad (5.79)$$

где  $\det(s)$  — характеристический определитель системы (5.78) имеет вид

$$\det(s) = \begin{vmatrix} (s - a_{11}) & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (s - a_{22}) & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & (s - a_{nn}) \end{vmatrix}; \quad (5.80)$$

$\det_1(s)$  — определитель, получающийся из определителя замены 1-го столбца (столбца соответствующего номеру искомой переменной) столбцом, образованным правой частью системы уравнений, т. е.

$$\det_1(s) = \begin{vmatrix} x_1(+0) + b_1\delta + f_1 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ x_2(+0) + b_2\delta + f_2 & (s - a_{22}) & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n(+0) + b_n\delta + f_n & -a_{n2} & \dots & (s - a_{nn}) \end{vmatrix}. \quad (5.81)$$

Представим определитель (5.81) в виде суммы трех определителей

$$\det_1(s) = \begin{vmatrix} x_1(0) & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ x_2(0) & s - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n(0) & -a_{n2} & \dots & s - a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} b_1\delta & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ b_2\delta & s - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n\delta & -a_{n2} & \dots & s - a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ f_2 & s - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & -a_{n2} & \dots & s - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Раскрывая каждый из определителей  $\det_1(s)$  по элементам первого столбца (т. е. того столбца, который определяется номером искомой составляющей  $x_1(s)$  и с учетом отношения (5.79), можно записать следующее выражение

$$x_1(s) = \frac{P_{11}(s)}{\det(s)} x(+0) - \frac{P_{12}(s)}{\det(s)} x_2(+0) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{(1+n)} \frac{P_{1n}(s)}{\det(s)} x_n(+0) + \frac{P_{11}(s)}{\det(s)} b_1\delta(s) -$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{P_{12}(s)}{\det(s)} b_2 \delta(s) + \dots (-1)^{(1+n)} \frac{P_{1n}(s)}{\det(s)} b_n \delta(s) + \\
 & + \frac{P_{11}(s)}{\det(s)} f_1(s) - \frac{P_{12}(s)}{\det(s)} f_2(s) + \dots (-1)^{(1+n)} \frac{P_{1n}(s)}{\det(s)} f_n(s), \quad (5.82)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 P_{11}(s) &= \begin{vmatrix} s - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{n2} & \dots & s - a_{nn} \end{vmatrix}, & P_{12}(s) &= \begin{vmatrix} -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{n2} & \dots & s - a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \\
 P_{1n}(s) &= \begin{vmatrix} -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ s - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{(n-1)2} & \dots & -a_{(n-1)n} \end{vmatrix} -
 \end{aligned}$$

— определители, образованные дополнениями соответственно для 1-го, 2-го ... n-го элементов первых столбцов  $\det_1(s)$ . По аналогии находятся и все остальные координаты  $x_2(s)$ ,  $x_3(s)$ , ...,  $x_n(s)$ .

В общем случае, если отношение полиномов  $\frac{P_{ij}(s)}{\det(s)}$  обозначить через  $W_{ij}(s)$  и учесть знаки, можно записать решение системы алгебраических уравнений (5.78) в виде

$$\begin{aligned}
 x_1(s) &= W_{11}(s)x_1(+0) - W_{12}(s)x_2(+0) + \dots \\
 &\dots + (-1)^{(1+n)} W_{1n}x_n(+0) + W_{11}(s)b_1\delta(s) - W_{12}(s)b_2\delta(s) + \dots \\
 &\dots + (-1)^{(1+n)} W_{1n}b_n\delta(s) + W_{11}(s)f_1(s) - W_{12}(s)f_2(s) + \dots \\
 &\dots + (-1)^{(1+n)} W_{1n}f_n(s); \\
 x_2(s) &= -W_{21}(s)x_1(+0) + W_{22}(s)x_2(+0) + \dots \\
 &\dots + (-1)^{(2+n)} W_{2n}x_n(+0) - W_{21}(s)b_1\delta(s) + W_{22}(s)b_2\delta(s) + \dots \\
 &\dots + (-1)^{(2+n)} W_{2n}b_n\delta(s) - W_{21}(s)f_1(s) + W_{22}(s)f_2(s) + \dots \\
 &\dots + (-1)^{(2+n)} W_{2n}f_n(s); \quad (5.83)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_n(s) &= (-1)^{(n+1)} W_{n1}(s)x_1(+0) + (-1)^{(n+2)} W_{n2}(s)x_2(+0) + \dots \\
 &\dots + (-1)^{(n+n)} W_{nn}(s)x_n(+0) + (-1)^{(n+1)} W_{n1}(s)b_1\delta(s) + \\
 &+ (-1)^{(n+2)} W_{n2}(s)b_2\delta(s) + \dots + (-1)^{(n+n)} W_{nn}(s)b_n\delta(s) + \\
 &+ (-1)^{(n+1)} W_{n1}(s)f_1(s) + (-1)^{(n+2)} W_{n2}(s)f_2(s) + \dots \\
 &\dots + (-1)^{(n+n)} W_{nn}(s)f_n(s).
 \end{aligned}$$

Полученную систему уравнений можно представить в матричной форме

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{W}(s)\mathbf{X}(+0) + \mathbf{W}(s)\mathbf{B}\delta(s) + \mathbf{W}(s)\mathbf{F}(s), \quad (5.84)$$

где

$$\mathbf{X}(s) = \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ \vdots \\ x_n(s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(s) = \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ \vdots \\ f_n(s) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W}(s) = \begin{pmatrix} W_{11}(s) & -W_{12}(s) & \dots & (-1)^{(1+n)} W_{1n}(s) \\ -W_{21}(s) & W_{22}(s) & \dots & (-1)^{(2+n)} W_{2n}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{(n+1)} W_{n1}(s) & (-1)^{(n+2)} W_{n2}(s) & \dots & (-1)^{(n+n)} W_{nn}(s) \end{pmatrix}.$$

Знак элементов матрицы  $\mathbf{W}(s)$  определяется номером строки ( $i$ ) и номером столбца ( $j$ ), т. е.

$$\text{sign } W_{ij}(s) = (-1)^{i+j}.$$

Решить систему дифференциальных уравнений (5.77)—суть получить функции, при подстановке которых и их производных должно удовлетворяться равенство. Для нахождения функции времени  $\mathbf{X}(t)$  необходимо взять обратное преобразование Лапласа от уравнения (5.84)

$$\mathbf{X}(t) = L^{-1}[\mathbf{X}(s)] = L^{-1}[\mathbf{W}(s) \mathbf{X}(+0)] + L^{-1}[\mathbf{W}(s) \mathbf{B} \delta(s)] + L^{-1}[\mathbf{W}(s) \mathbf{F}(s)]$$

или с учетом основных свойств преобразования Лапласа

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{W}(t) \mathbf{X}(+0) + \int_0^t \mathbf{W}(t-\tau) \mathbf{B} \delta(\tau) d\tau + \int_0^t \mathbf{W}(t-\tau) \mathbf{F}(\tau) d\tau. \quad (5.85)$$

Определим обратное преобразование Лапласа от матрицы  $\mathbf{W}(s)$  путем разложения ее элементов на элементарные дроби.

Известно, что для определения обратного преобразования Лапласа матрицы необходимо найти обратное преобразование Лапласа всех ее элементов.

Определим обратное преобразование Лапласа от элемента матрицы  $W_{ij}(s)$ .

Элементы матрицы  $\mathbf{W}(s)$  представляют собой отношение полиномов (5.82), которые можно получить в виде дробно-рационального выражения от  $s$

$$W_{ij}(s) = \frac{P_{ij}(s)}{\det(s)} = \frac{b_{ijm}s^m + b_{ij(m-1)}s^{m-1} + \dots + b_{ij1}s + b_{ij0}}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}. \quad (5.86)$$

В дальнейшем, чтобы не загромождать выкладки, индексы  $ij$  опустим.

Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти обратное преобразование Лапласа от отношения полиномов.

Полином в знаменателе (5.86) можно представить в следующем виде [9]

$$\det(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = s^k \prod_{i=1}^l (s - \alpha_i) \times \\ \times \prod_{i=1}^r [(s - \beta_i)^2 + \gamma_i^2].$$

Тогда (5.86) запишется

$$W(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^k \prod_{i=1}^l (s - \alpha_i) \prod_{i=1}^r [(s - \beta_i)^2 + \gamma_i^2]} = \\ = \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{s^i} + \sum_{i=1}^l \frac{B_i}{s - \alpha_i} + \sum_{i=1}^r \frac{C_i s + D_i}{(s - \beta_i)^2 + \gamma_i^2}, \quad (5.87)$$

где  $k$  — число нулевых корней характеристического уравнения  $\det(s) = 0$ ;  $l$  — число действительных корней;  $r$  — число комплексно-сопряженных корней;  $A_i$ ;  $B_i$ ;  $C_i$ ;  $D_i$  — действительные числа (коэффициенты).

Коэффициенты  $A_i$ ;  $B_i$ ;  $C_i$ ;  $D_i$  пока будем считать известными, тогда обратные преобразования Лапласа от элементарных составляющих практически сведены к табличным [11]

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1; \quad L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t; \quad \dots \quad L^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\right] = \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1}, \quad \dots \\ L^{-1}\left[\frac{1}{s - \alpha}\right] = e^{\alpha t}; \quad L^{-1}\left[\frac{Cs + D}{(s - \beta)^2 + \gamma^2}\right] = \\ = \frac{1}{C\gamma} \sqrt{(a_0 + \beta)^2 + \gamma^2} e^{\beta t} \sin(\gamma t + \psi).$$

Зная коэффициенты  $A_i$ ;  $B_i$ ;  $C_i$ ;  $D_i$  и выражения для обратных преобразований Лапласа от элементарных дробей, будем иметь для любого элемента матрицы  $W_{ij}(s)$  функцию времени  $W_{ij}(t)$ .

Таким образом, фундаментальная матрица решений будет функцией времени

$$W(t) = \begin{pmatrix} W_{11}(t) & -W_{12}(t) & \dots & (-1)^{1+n} W_{1n}(t) \\ -W_{21}(t) & W_{22}(t) & \dots & (-1)^{2+n} W_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n+1} W_{n1}(t) & (-1)^{n+2} W_{n2}(t) & \dots & (-1)^{n+n} W_{nn}(t) \end{pmatrix}. \quad (5.88)$$

Имея фундаментальную матрицу решений (5.88), можно определить и остальные составляющие решения (5.85).

Следует заметить, что существует много численных методов [12] для анализа дробно-рациональных выражений (5.86), для которых разработаны вычислительные процедуры реализации их на ЭВМ.

В конечном счете у нас осталась одна задача. Ранее мы сделали предположение, что коэффициенты  $A_i, B_i, C_i, D_i$  известны. Теперь осталось научиться их определять. Для любого элемента матрицы имеется основное соотношение (5.87), по которому находятся коэффициенты.

*Определение коэффициентов  $B_\rho$ ;  $\rho \in \bar{l}$ .* Для нахождения  $B_\rho$  необходимо разрешить уравнение (5.87) относительно этого коэффициента. Умножив обе части тождества на  $s - \alpha_\rho$  и положив  $s = \alpha_\rho$ , будем иметь

$$B_\rho = W(s)(s - \alpha_\rho) \Big|_{s=\alpha_\rho} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \rho}}^l (s - \alpha_i) \prod_{i=1}^r [(s - \beta_i)^2 + \gamma_i^2]} \Big|_{s=\alpha_\rho} \quad (5.89)$$

*Определение коэффициентов  $C_\rho$  и  $D_\rho$ ,  $\rho \in \bar{l}$ ,  $r$ .* В целом суть остается та же — обе части уравнения (5.87) умножаем на знаменатель при этих коэффициентах  $[(s - \beta_\rho)^2 + \gamma_\rho^2]$  и полагаем  $s = \beta_\rho + j\gamma_\rho$ ,  $j = \sqrt{-1}$ , получим

$$C_\rho s + D_\rho = W(s) [(s - \beta_\rho)^2 + \gamma_\rho^2] \Big|_{s=\beta_\rho + j\gamma_\rho} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^k \prod_{i=1}^l (s - \alpha_i) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \rho}}^r [(s - \beta_i)^2 + \gamma_i^2]} \Big|_{s=\beta_\rho + j\gamma_\rho} = \text{Re}_0 + j \text{Im}_0. \quad (5.90)$$

Из выражения (5.90) находим

$$C_\rho = \frac{\text{Im}_0}{\gamma_\rho}, \quad D_\rho = \text{Re}_0 - \frac{\beta_\rho}{\gamma_\rho} \text{Im}_0.$$

*Определение коэффициентов разложения  $A_\mu$ ,  $\mu \in \bar{l}$ ,  $k$ .* При определении коэффициентов  $A_\mu$  имеются некоторые трудности. Для этого уравнение (5.87) следует преобразовать к виду

$$W(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^k (a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0)} \equiv \frac{A_k}{s^k} + \frac{A_{k-1}}{s^{k-1}} + \dots \\ \dots + \frac{A_l}{s} + \sum_{i=1}^l \frac{B_i}{(s - \alpha_i)} + \sum_{i=1}^r \frac{C_i s + D_i}{(s - \beta_i)^2 + \gamma_i^2}, \quad (5.91)$$

где  $N = l + 2r$ .



Умножив обе части равенства (5.91) на  $s^k$  и положив  $s = 0$ , получим

$$A_k = W(s) s^k \Big|_{s=0} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^k (a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_0)} s^k \Big|_{s=0} = \frac{b_0}{a_0}.$$

Для определения следующего коэффициента  $A_{k-1}$  нужно вычлсть от обеих частей выражения (5.91) член  $\frac{A_k}{s^k}$ , тем самым уменьшается кратность нулевого корня на единицу:

$$\begin{aligned} & \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^k (a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_0)} - \frac{A_k}{s^k} = \\ & = \frac{A_{k-1}}{s^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{s} + \dots \end{aligned}$$

После преобразований в левой части этого равенства получим

$$\begin{aligned} & \frac{b_m s^{m-1} + \dots + b_1 - \frac{b_0}{a_0} a_N s^{N-1} - \dots - \frac{b_0}{a_0} a_1}{s^{k-1} (a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0)} = \\ & = \frac{A_{k-1}}{s^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{s} + \sum_{i=1}^l \frac{B_i}{(s - \alpha_i)} + \sum_{i=1}^r \frac{C_i s + D_i}{(s - \beta_i)^2 + \gamma^2}. \quad (5.92) \end{aligned}$$

В результате определение коэффициента  $A_{k-1}$  сведено к предыдущему случаю.

Из полученного уравнения (5.92) вышеописанным способом определяется коэффициент  $A_{k-1}$  — аналогично домножаются обе части уравнения на  $s^{k-1}$  и т. д., как в случае определения  $A_k$ .

Метод определения переходной функции состояния системы с помощью преобразования Лапласа является точным аналитическим методом, так как при его реализации мы не принимали никаких допущений. Но использование его затруднительно, если весь процесс решения не переложить полностью на ЭВМ. Рассмотренный ранее способ получения переходной функции состояния системы с помощью разложения степенной функции в ряд более прост и практичен, но обладает методическими погрешностями за счет следующих принятых допущений:

1. Управляющие и возмущающие воздействия на интервалах интегрирования принимаются постоянными;
2. При реализации этого метода на ЭВМ берется ограниченное число членов разложения.

Выбор величины периода прерывания системы  $T$  также существенно влияет на точность метода. И здесь налицо противоречивая ситуация — с одной стороны, период прерывания должен быть небольшим для повышения точности решения, а с другой —

чем период прерывания больше, тем меньше затраты машинного времени. На практике обычно принимают компромиссное решение.

### Контрольные вопросы

1. Каково назначение основных этапов подготовки задач к решению их на АВМ?
2. Каковы условия применения общего метода программирования и метода канонической формы?
3. Чем обусловлена необходимость масштабирования зависимых и независимых математических переменных?
4. Каковы особенности задания начальных условий на интеграторы при использовании метода канонической формы?
5. В чем заключается сущность матричного метода приведения системы дифференциальных уравнений к машинному виду?
6. Какова природа погрешностей методов получения переходных функций состояния систем?
7. Как определяются и какова физическая сущность матриц  $\Phi(T)$  и  $Q(T)$ ?
8. Из каких соображений выбирают период прерывания системы  $T$ ?
9. Как можно представить укрупненный алгоритм получения переходной функции состояния системы методом преобразования Лапласа?
10. Каковы возможности и перспективы использования АЦВС для моделирования сложных систем?

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АСУ

В последние годы разработка и создание автоматизированных систем управления (АСУ) техническими и технико-экономическими процессами усложнились вследствие увеличения диапазона изменения основных характеристик управляемых объектов и предъявляемых к ним требований. При этом динамические характеристики в ряде случаев изменяются на один-два порядка. Поэтому предпринимаются попытки создания принципиально новых методов управления на базе самонастраивающихся и адаптивных систем, которые позволяют существенно продвинуться в решении проблем обеспечения требуемого качества процессов управления.

В каждом конкретном применении синтез оптимального варианта системы управления, состоящий из ряда подсистем, определяется тактико-техническими требованиями, предъявляемыми в целом. Последнее приводит к необходимости реализации выбранных адаптивных алгоритмов управления на управляющих цифровых вычислительных комплексах (УЦВК).

Проектирование УЦВК, помимо разработки логической структуры комплекса, включает и составление программ, наилучшим образом приспособленных к выбранной структуре УЦВК. Решение задачи согласования логической структуры реализуемых алгоритмов представляется возможным только с использованием методов математического моделирования, что требует построения моделей УЦВК.

Математическими моделями функционирования УЦВК третьего и четвертого поколений могут быть вероятностные модели на основе теории массового обслуживания, теории марковских цепей, теории графов. Такие модели позволяют в достаточной степени учитывать разнообразие режимов функционирования УЦВК, большое количество разнообразных операций, определять не только средние характеристики функционирования, но и диапазон их изменения с указанием степени ожидаемости того или иного значения величин. Кроме того, вероятностные модели без особого труда интерпретируются на задачи надежности, а также согласуются с индетерминированными методами обработки информации в УЦВК.

Во второй части рассматриваются вопросы аналитического проектирования структур АСУ, связанные с использованием вероятностных моделей для оценки эффективности структур вычисли-

тельных комплексов, исследованием вычислительных процессов при реализации алгоритмов управления, определением характеристик функционирования устройств.

## Глава 6

### ПОСТРОЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АСУ

#### 6.1. Представление информационных потоков в моделях управляющих систем

Основными функциями АСУ являются сбор и упорядочивание информации о состоянии управляемого объекта, обработка этой информации по соответствующему алгоритму, выработка управляющих сигналов в зависимости от состояния объекта, времени, прошедшего с момента начала функционирования объекта, состояния окружающей среды и т. д. Определяющими операциями для различных функциональных систем управления являются операции переработки информации: цифровой — в цифровых вычислительных устройствах, аналоговой — в моделирующих устройствах и датчиках непрерывно изменяющихся параметров, аналоговой в цифровую и обратно — в аналого-цифровых преобразователях.

Во всех случаях переработки информации можно выделить два процесса:

1. Поступление информации, ее упорядочивание, предварительное (буферное) хранение в случае занятости основного устройства обработки информации.

2. Обработка информации в соответствии с определенными алгоритмами, предусматривающими учет состояний устройств АСУ объекта управления и окружающей среды.

Первый процесс обусловлен информационным потоком, входным по отношению к устройству обработки информации. Второй процесс вызван непосредственно обработкой, которой подвергается входной информационный поток. Последний в устройствах АСУ обычно представляет собой распределенную некоторым (обычно случайным) образом по времени совокупность сообщений, причем можно выделить моменты поступления этих сообщений в устройство обработки информации. Аналогично, поток обработки информации можно представить как распределенную во времени совокупность сообщений, для каждого из которых можно выделить момент окончания обработки, совпадающий с моментом начала обработки последующего сообщения. Такое представление процессов переработки информации может использоваться для построения моделей функционирования АСУ на самых различных уровнях, начиная от основных функциональных частей АСУ и кончая отдельными вычислительными устройствами и преобразователями информации;

при этом процесс переработки информационных сообщений можно трактовать как обслуживание сообщений входного потока.

Таким образом, моделями устройств преобразования информации в АСУ выступают системы массового обслуживания (СМО), заявки в которых соответствуют входным сообщениям, обслуживающие устройства — основным устройствам преобразования информации, места ожидания — буферной памяти. Дисциплина прохождения заявок в таких СМО определяется дисциплиной обработки сообщений, а характеристики потоков событий СМО (входных и обслуживания) должны соответствовать характеристикам потоков в исследуемых устройствах. Рассмотрим основные характеристики потоков событий, причем под событием будем понимать появление за промежуток времени  $\Delta t \rightarrow 0$  одной или нескольких (группы) заявок рассматриваемого потока (входного или обслуживания).

Интенсивность потока в момент времени  $t$

$$\alpha(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \Lambda(t, \tau),$$

где  $\Lambda(t, \tau)$  — число заявок потока, поступивших или обслуженных за промежуток времени  $(t, t + \tau)$ .

Если  $\alpha(t) = \alpha = \text{const}$ ,  $t \in (a, b)$ , то поток называется стационарным на рассматриваемом интервале  $(a, b)$ . В ряде случаев можно считать, что  $a = 0$ ,  $b \leq \infty$ . Для стационарного потока число заявок, поступивших или обслуженных за некоторый промежуток времени  $\tau$ , не зависит от расположения этого промежутка на интервале  $(a, b)$ . Интенсивность потока определяется также как среднее число (математическое ожидание) заявок, поступивших или обслуженных за единичный временной интервал.

Взаимное расположение событий потока на временной оси можно характеризовать (в вероятностном смысле) степенью последствия (влияния) факта наступления некоторого события потока на вероятностные характеристики появления последующих событий этого же потока. Важным классом потоков событий являются рекуррентные потоки, в которых вероятность появления события потока в некоторый момент времени зависит только от момента  $t$  появления ближайшего предшествующего события и не зависит от вида потока до момента времени  $t$ . Частным случаем рекуррентных потоков являются потоки без последствия, для которых вероятность наступления события в любой момент времени не зависит от того, каким образом следовали события до этого момента времени.

Введем величину  $p_k(\tau)$  — вероятность того, что за время  $\tau$  наступит ровно  $k$  событий потока. Тогда промежуток времени  $\tau_2$  между любыми двумя соседними событиями рекуррентного стационарного потока описывается функцией распределения

$$F(\tau) = P\{\tau_2 < \tau\} = 1 - p_0(\tau), \quad (6.1)$$

причем  $P\{\tau_2 < \tau\}$  — вероятность выполнения условия, заключенного в скобках. Например, для стационарного потока без послед-

ствия

$$F(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}, \quad (6.2)$$

где  $\lambda$  — некоторая постоянная величина.

Поток событий называется ординарным, если для него

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - p_0(\tau) - p_1(\tau)}{\tau} = 0.$$

Физический смысл ординарности потоков состоит в том, что каждое событие потока происходит при участии только одной заявки (отсутствуют группы одновременно поступающих или обслуживаемых заявок). Рекуррентные ординарные стационарные потоки задаются функцией распределения (6.1) и положением момента наступления первого события потока относительно начальной точки отсчета временной координаты.

Величина

$$\varepsilon = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - p_0(\tau)}{\tau}$$

называется параметром потока. Согласно теореме Королюка [1], необходимым и достаточным условием ординарности потока является равенство значений параметра и интенсивности

$$\varepsilon = \lambda.$$

Учет неординарности потока событий ведет к необходимости задания закона распределения числа заявок в группе потока

$$Q(n) = P\{\eta = n\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.3)$$

где  $\eta$  — число заявок, соответствующих некоторому событию потока. Очевидно, что ординарные потоки являются частным случаем неординарных, для которых

$$Q(1) = 1, \quad Q(n) = 0 \text{ при } n = 2, 3, \dots$$

Математическое ожидание времени между двумя соседними событиями

$$m = \int_0^{\infty} \tau dF(\tau),$$

дисперсия этого времени

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (\tau - m)^2 dF(\tau).$$

Величина  $g = \frac{\sigma^2}{m^2}$  называется коэффициентом вариации и может быть использована как характеристика потока. В частности, для потока без последствия  $g = 1$ .

Вероятность наступления  $k$  событий потока за интервал времени  $\tau$

$$p_0(\tau) = 1 - F(\tau),$$
$$p_i(\tau) = \int_0^{\tau} p_{i-1}(\tau - \tau_2) dF(\tau_2), \quad i = 1, 2, \dots$$

Для стационарного потока без последствия

$$p_i(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^i}{i!} e^{-\lambda\tau}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

что соответствует распределению Пуассона, поэтому такие потоки обычно называются пуассоновскими. Потоки, для которых одновременно выполняются свойства стационарности, ординарности и отсутствия последствия, называются простейшими, они характеризуются одной величиной — параметром потока.

Таким образом, для задания рекуррентного стационарного потока событий необходимо иметь аналитический вид функции распределения времени между двумя соседними событиями (6.1) и функции распределения числа заявок в группе потока (6.3). В дальнейшем мы будем рассматривать модели функционирования АСУ именно с такими потоками, поскольку реальные потоки, как правило, являются рекуррентными. Свойство стационарности выполняется не всегда, однако в пределах некоторого временного интервала с определенной погрешностью можно считать интенсивность потока постоянной, тогда весь временный интервал работы системы разбивается на подынтервалы, в пределах каждого из которых поток событий считается стационарным с определенной интенсивностью. При этом отметим, что прохождение точек раздела подынтервалов не связано с эффектами переходного режима, так как реальное изменение интенсивности потока происходит обычно достаточно плавно.

Последовательность построения статистической модели некоторого потока событий можно представить в следующем виде:

1. Построение эмпирической модели потока на основе статистических данных, что включает: а) проверку гипотезы о стационарности потока, выделение (при необходимости) временных подынтервалов функционирования исследуемой системы, на которых поток событий можно считать стационарным; б) построение эмпирической функции распределения (либо плотности распределения), а также нахождение оценок числовых характеристик эмпирического распределения (математического ожидания, дисперсии, высших моментов); в) в случае неординарного потока событий необходимо построить дискретную функцию распределения числа заявок в группе.

2. Выбор наиболее удобного аналитического вида аппроксимирующей (теоретической) функции распределения. Как правило, наиболее удобным видом теоретической функции распределения (с точки зрения возможности получения аналитических решений моделей с такими потоками, а также простоты аппроксимации) является экспоненциальная функция распределения.

3. Нахождение параметров (параметризация) теоретической функции распределения.

4. Проверка возможности использования распределения выбранного вида в качестве теоретического с использованием критерия согласия.

5. Анализ результатов проверки по предыдущему этапу, принятие решения о виде теоретической функции распределения; повторение (в случае необходимости) пунктов 3, 4, 5 до получения нужной точности аппроксимации.

В настоящей главе будут рассмотрены особенности выше перечисленных этапов построения статистических моделей потоков событий.

## 6.2. Построение эмпирической модели потока

Основой для нахождения вида потока событий является рассмотрение физических условий его возникновения и анализ статистического материала, получаемого при наблюдении такого потока. Обычно модели АСУ используются при проектировании системы, когда не всегда имеется возможность получать физические реализации потока. В связи с этим необходимо подробно рассмотреть причины, вызывающие поток событий, тогда характеристики потока иногда можно определить из рассмотрения всех (или достаточно большого числа) возможных вариантов формирования событий потока. Существенным облегчением при этом может явиться использование методов моделирования на базе универсальных цифровых ЭВМ. Кроме того, часто можно воспользоваться результатами наблюдений за реальным потоком событий, однотипным по отношению к исследуемому потоку событий.

Предположим, что имеется определенное число величин, являющихся длительностями промежутков между соседними событиями некоторого потока. Предположим также, что эти величины (или часть из них) представляют собой выборку из некоторой генеральной совокупности случайных величин, описываемых одной и той же функцией распределения. Такая выборка является исходной информацией для построения эмпирической модели потока событий. Очевидно, такой поток должен быть стационарным рекуррентным.

Проверка стационарности потока осуществляется путем анализа физической сущности условий его возникновения либо формальными методами. При использовании последних наибольшее практическое применение нашли непараметрические статистические критерии, не требующие априорного знания вида закона распределения анализируемого потока. К таким критериям относятся критерий серий и критерий тренда, а также критерий Уилкоксона [3, 4] и X-критерий [15].

Если гипотеза о стационарности потока на некотором временном интервале не подтвердилась, то этот интервал можно разбить на два подынтервала (не обязательно равных между собой) и проверить гипотезу о стационарности для каждого из подынтервалов. При выборе точки разбиения следует использовать сведения о средних значениях случайной величины X на различных участках интервала существования потока событий. Продолжая (в случае необходимости) такие разбиения, можно выделить временные отрезки функциони-



рования системы, в пределах каждого из которых поток событий можно считать стационарным.

Построение эмпирической функции распределения величины  $X$  обычно начинается с построения гистограммы распределения этой величины. При достаточно большом объеме выборки (порядка 100...150 и более) последовательность построения гистограммы имеет следующий вид:

1. Определение диапазона изменений случайной величины  $X$ , т. е. нахождение  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$ . Упорядочивание ряда значений выборки (по величине элементов).

2. Выбор числа  $r$  интервалов изменения величины  $X$ . Обычно интервалы равны между собой и в каждый из них должно попасть (в среднем) 8...15 значений выборки. Следует иметь в виду, что чрезмерное увеличение величины  $r$  приводит к большой изрезанности гистограммы, что может осложнить нахождение вида аппроксимирующей функции. В то же время малое  $r$  может обесценить часть информации, содержащейся в выборке. Рекомендуемое значение  $r$  порядка 6...15.

3. Нахождение числа попаданий случайной величины  $X$  в каждой из  $r$  интервалов, определение значений ординат приведенной гистограммы

$$b_i = \sum_{j=1}^n x_j \Gamma(x_j - a_{i-1}) \Gamma(a_i - x_j) / \sum_{s=1}^n x_s, \quad (6.4)$$

причем здесь и далее

$$\Gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

— единичная функция Хевисайда;  $a_i$  — точки раздела интервалов.

4. Графическое построение гистограммы распределений.

При большой изрезанности гистограммы следует уменьшить величину  $r$  (за счет объединения интервалов с малым значением  $b_i$ ) и повторить пункты 3 и 4.

При небольшом объеме выборки величин  $X$  ( $n < 30$ ) необходимо сгладить особую значимость величин, попавших в выборку [6]. Такое сглаживание особенно необходимо в тех случаях, когда не известна форма гипотетического распределения. В ряде случаев необходимо знать числовые характеристики случайной величины  $X$ . Так как исходной информацией при этом является некоторая случайная выборка, то и находимые числовые величины будут случайными оценками искомого характеристик. Эти оценки должны обладать свойствами несмещенности, состоятельности и эффективности [7]. Приведем формулы для несмещенных оценок первых четырех центральных моментов:

$$M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m) \equiv 0, \text{ так как } m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i;$$

$$M_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2;$$

$$M_3 = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^3;$$

$$M_4 = \frac{n^2 - 2n + 3}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^4 -$$

$$- \frac{3(2n-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \right]^2;$$

причем  $m$  — математическое ожидание величины  $X$ .

### 6.3. Параметризация аппроксимирующих теоретических функций распределения

Нахождение теоретических функций распределения, описывающих рекуррентные потоки событий, неизбежно связано с определением числовых значений параметров, входящих в аналитический вид теоретических функций распределения. Исходной информацией при параметризации является эмпирическая функция распределения, либо соответствующие числовые характеристики. В связи с тем, что эта информация является в определенной мере функцией выборки, задача параметризации сводится к определению оценок параметров теоретической функции распределения.

Определяемые оценки параметров должны удовлетворять обычным требованиям несмещенности, состоятельности и эффективности [7]. Кроме того, методика нахождения оценок должна быть по возможности простой. Ниже будут рассмотрены следующие методы параметризации:

1. Методы, использующие среднеквадратичные критерии различия теоретической и эмпирической функций распределения.

2. Метод моментов.

3. Графо-аналитический метод на основе критерия Колмогорова.

В первом случае в качестве меры расхождения эмпирической и теоретической функций распределения принимается величина

$$b = \sum_{i=1}^r c_i \left( \frac{v_i}{n} - p_i \right)^2, \quad (6.5)$$

где  $n$  — объем выборки;  $r$  — число интервалов гистограммы;  $v_i$  — число значений выборки, попавших в  $i$ -й интервал;  $p_i = p_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  — площадь под кривой теоретической плотности распределения, соответствующей  $i$ -му интервалу;  $\alpha_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) — параметр теоретической функции (или плотности) распределения;  $c_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) — некоторым образом выбранные множители.

Нахождение параметров сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\partial b / \partial \alpha_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (6.6)$$

Если положить, что

$$c_i = n/p_i, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

то мера расхождения теоретического и эмпирического распределений

$$b_1 = \sum_{i=1}^r \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i} \quad (6.7)$$

и обладает тем свойством, что при  $n \rightarrow \infty$  величина  $b_1$  имеет распределение  $\chi^2$  с  $(r - 1)$  степенями свободы. При этом система уравнений (6.6)

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial b_1}{\partial \alpha_j} = \sum_{i=1}^r \left[ \frac{v_i - np_i}{p_i} + \frac{(v_i - np_i)^2}{2np_i^2} \right] \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} = 0. \quad (6.8)$$

Решение последней системы уравнений относительно  $\alpha_j$  весьма затруднительно даже в простейших случаях. Поэтому обычно используют следующие упрощения системы уравнений (6.8).

*Метод максимума правдоподобия.* Если знаменатель второго члена в (6.8) считать постоянным, то можно получить следующую систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^r \frac{v_i}{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (6.9)$$

Оценки, находимые по методу максимума правдоподобия, в большинстве практических случаев являются наиболее эффективными, т. е. обладают минимальной дисперсией среди других возможных оценок тех же параметров.

*Метод наименьших квадратов.* Если в выражении (6.5) принять

$$c_i = n^2/v_i,$$

то получим следующее уравнение для меры расхождения эмпирического и теоретического распределений:

$$b_2 = \sum_{i=1}^r \frac{(v_i - np_i)^2}{v_i}.$$

Соответствующая система уравнения для параметров теоретической функции распределения

$$\sum_{i=1}^r \frac{(v_i - np_i)}{v_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (6.10)$$

и весьма удобна в случае линейного вида функции

$$p_i = p_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m),$$

поскольку приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно величин  $\alpha_j$ . Отметим, что оценки по методу наименьших квадратов отличаются от оценок метода максимума правдоподобия на величину порядка  $\frac{1}{n}$  [5].

При методе моментов параметры теоретического распределения определяются из условия равенства первых  $h$  моментов теоретического и эмпирического распределений. В основу метода положено то обстоятельство, что характеристическая функция

$$\varphi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} dF(x),$$

однозначно соответствующая функции распределения  $F(x)$ , может быть представлена в виде

$$\varphi(s) = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{d_v}{v!} (is)^v, \quad (6.11)$$

где  $d_v$  —  $v$ -й начальный момент распределения. Отсюда следует, что равенство всех моментов эмпирического и теоретического распределений говорит о полном совпадении и соответствующих функций распределения. При аппроксимации, выполняемой с некоторой конечной степенью точности, важно совпадение моментов, входящих с наибольшими весовыми коэффициентами в разложение (6.11). Поскольку с увеличением номера момента его вес в формуле (6.11) падает, то при получении конечной системы уравнений целесообразно потребовать совпадения именно первых моментов. Наряду с начальными моментами могут использоваться и центральные моменты распределений, если это удобнее.

Для большинства аппроксимирующих распределений эффективность метода моментов значительно ниже единицы (что соответствует методу максимума правдоподобия) и только для нормального и экспоненциального распределений эта величина достигает 1. Однако процесс параметризации по методу моментов, как правило, не вызывает особых трудностей, а невысокая эффективность метода может быть компенсирована соответствующим увеличением объема выборки.

Графо-аналитический метод параметризации существенно использует критерий Колмогорова, согласно которому аппроксимация считается удовлетворительной, если модуль разности эмпирической и теоретической функций распределения  $\Delta$  не превосходит некоторой определенной величины  $\varepsilon$ .

Практически методика параметризации функции распределения с использованием критерия Колмогорова сводится к следующему. Прежде всего строится эмпирическая функция распределения. Затем при выбранном уровне значимости  $\alpha$  определяют величину  $\varepsilon$  из таблицы 1 приложения 3 и строят «коридор» распределения, границами которого служат ступенчатые линии, отстоящие на  $\pm \frac{\varepsilon}{2}$

от эмпирической функции распределения. Затем «коридор» распределений заполняется отрезками аппроксимирующей функции распределения таким образом, чтобы число отрезков было минимальным. Поскольку «коридор» распределений целиком покрывает гипотетическую функцию распределения, то теоретическая аппроксимирующая функция распределения отстоит от нее не более, чем на  $\epsilon$ , что говорит о достаточной точности выполненной аппроксимации.

#### 6.4. Функции распределения для задания потоков событий и их свойства

Множество всех возможных реализаций некоторого стационарного рекуррентного потока событий адекватно, вообще говоря, генеральной совокупности возможных значений длительности интервалов между соседними событиями (при условии, что известно число заявок, участвующих в каждом событии). Можно говорить о том, что величины, составляющие генеральную совокупность, подчиняются некоторой гипотетической функции распределения, восстановить которую по выборке ограниченного объема представляется возможным лишь с некоторой степенью точности.

Будем говорить об аппроксимации распределения величин, составляющих генеральную совокупность, с помощью некоторой аппроксимирующей (теоретической) функции распределения по выборке ограниченного объема. Получение формального вида распределения времени между соседними событиями потока необходимо для использования в математическом аппарате решения моделей, составляющей частью которых являются эти потоки. При этом вид распределения оказывает определяющее влияние на трудоемкость (и возможность) того или иного метода решения исследуемых моделей.

Аналитическая форма аппроксимирующего распределения должна позволять:

с достаточной степенью точности приблизиться к распределению случайных величин, составляющих генеральную совокупность; находить по возможности несложные аналитические решения исследуемых систем;

выполнять аппроксимацию (т. е. производить параметризацию теоретической функции распределения) достаточно просто и эффективно.

Распределения могут характеризоваться следующими характеристиками:

функцией распределения

$$F(x) = P\{\tau < x\},$$

где  $\tau$  — длительность промежутка между соседними событиями; плотностью распределения

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}; \quad (6.12)$$

преобразованием Лапласа — Стильтьеса

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x); \quad (6.13)$$

математическим ожиданием времени между соседними событиями

$$\tau_{cp} = \int_0^{\infty} x dF(x); \quad (6.14)$$

и высшими начальными моментами

$$d_v = \int_0^{\infty} x^v dF(x), \quad v = 2, 3, \dots; \quad (6.15)$$

дисперсией времени между соседними событиями

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (x - \tau_{cp})^2 dF(x) \quad (6.16)$$

и высшими центральными моментами

$$\theta_v = \int_0^{\infty} (x - \tau_{cp})^v dF(x), \quad v = 3, 4, \dots \quad (6.17)$$

относительной вариацией

$$g = \frac{\sigma^2}{\tau_{cp}^2}. \quad (6.18)$$

Характеристики экспоненциального распределения приведены в табл. 6.1, такое распределение описывает потоки без последствия, которые упоминались в п. 6.1. Потоки событий, описываемые экспоненциальным распределением, представимы как марковские процессы с непрерывным временем, что создает исключительные удобства при анализе системы с такими потоками.

Экспоненциальная аппроксимация зачастую совершенно неудовлетворительно передает форму гипотетического (и эмпирического) распределений, что может приводить к грубым ошибкам при решении моделей. Поэтому использовать экспоненциальное распределение следует достаточно осторожно, учитывая степень согласования его с эмпирическим распределением, а также возможную погрешность решений модели.

Обобщением экспоненциального распределения для случая  $g \leq 1$  является специальное распределение Эрланга  $k$ -го порядка ( $k = 1, 2, \dots$ ), основные характеристики которого приведены в табл. 6.1. Временные промежутки между соседними событиями потока с распределением Эрланга можно представить в виде суммы  $k$  отрезков, каждый из которых описывается экспоненциальным распределением с параметром  $\alpha$ .

Таблица 6.1

№ п/п	Наименование распределения	$P(x)$	$f(x)$	$\varphi(s)$	$\tau_{\text{оп}}$	$\sigma^2$	$g$	$a_v$
1	Экспоненциальное	$1 - \exp(-\alpha x)$	$\alpha \cdot \exp(-\alpha x)$	$\alpha/(\alpha + s)$	$1/\alpha$	$1/\alpha^2$	1	$v!/\alpha^v$
2	Эрланга-степенное	$1 - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(\alpha x)^l}{l!} e^{-\alpha x}$	$\alpha \frac{(\alpha x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\alpha x}$	$\left(\frac{\alpha}{\alpha + s}\right)^k$	$\frac{k}{\alpha}$	$\frac{k}{\alpha^2}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{(k+v-1)!}{(k-1)! \alpha^v}$
3	Гиперэкспоненциальное 2-го порядка	$1 - \varphi \exp(-2\varphi \alpha x) - (1-\varphi) \times \exp[-2(1-\varphi)\alpha x]$	$2\varphi^2 \alpha e^{-2\varphi \alpha x} + 2(1-\varphi)^2 \times \alpha e^{-2(1-\varphi)\alpha x}$	$\frac{2\varphi^2 \alpha}{2\varphi \alpha + s} + \frac{2(1-\varphi)^2 \alpha}{2(1-\varphi)\alpha + s}$	$\frac{1}{\alpha}$	$1 + \frac{(1-2\varphi)^2}{2\varphi(1-\varphi)}$	$1 + \frac{\varphi \cdot v!}{(2\varphi \alpha)^v} + \frac{(1-\varphi) v!}{[2(1-\varphi)\alpha]^v}$	
4	Вырожденное	$\Gamma(x-a)$	$\delta(x-a)$	$e^{-as}$	$a$	0	0	$\alpha^v$
5	Степенчатое	$\sum_{l=1}^n b_l \Gamma(x-a_l)$	$\sum_{l=1}^n b_l \delta(x-a_l)$	$\sum_{l=1}^n \frac{b_l}{s} e^{-a_l s}$	$\sum_{l=1}^n a_l b_l$			$\sum_{l=1}^n a_l^v b_l$
6	Кусочно-линейное	$\sum_{l=1}^n b_l \Gamma(x-a_l) \Gamma(x-a_l)$	$\sum_{l=1}^n b_l \Gamma(x-a_l)$	$\sum_{l=1}^n \frac{b_l}{s} e^{-a_l s}$	$\frac{\sum_{l=1}^n a_l^2 b_l}{2}$			$\sum_{l=1}^n \frac{a_l^{v+1} \cdot b_l}{v+1}$
7	Нормальное		$\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}$		$m$	$\sigma^2$	$\frac{\sigma^2}{m^2}$	

Тогда такому потоку можно сопоставить фиктивную регулируемую систему, состоящую из  $k$  последовательных фаз и считать, что группа заявок, участвующих в одном событии, находится на  $i$ -й фазе, если от предшествующего события эту группу отделяют  $(i - 1)$ -й отрезок. Одновременно на всех фазах может находиться не более одной группы заявок. Эрланговский поток указанным разложением на фазы может быть представлен как марковский процесс с непрерывным временем, при этом как бы вводится дополнительная координата проходимой фазы.

Распределение с непрерывным (в некотором интервале) изменением  $g$  можно получить, используя специальным образом сконструированное распределение Эрланга, преобразование Лапласа — Стильтеса, которое имеет вид

$$\varphi(s) = \left( \frac{\alpha}{\alpha + s} \right)^{k-1} \frac{\gamma}{\gamma + s}.$$

Такое распределение получается из специального распределения Эрланга  $k$ -го порядка, для которого интенсивность прохождения первых  $(k - 1)$  фаз равно  $\alpha$ , а  $k$ -й фазы —  $\gamma$ . Для этого распределения

$$F(x) = \left( \frac{\alpha}{\alpha - \gamma} \right)^{k-1} \left\{ 1 - e^{-\gamma x} - \frac{\gamma}{\alpha} \sum_{j=0}^{k-2} \left( \frac{\alpha - \gamma}{\alpha} \right)^j \times \right. \\ \left. \times \left( 1 - \sum_{s=0}^j \frac{(\alpha x)^s}{s!} e^{-\alpha x} \right) \right\}$$

и

$$f(x) = \gamma \left( \frac{\alpha}{\alpha - \gamma} \right)^{k-1} \left\{ e^{-\gamma x} - \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\alpha - \gamma)^j x^j}{j!} e^{-\alpha x} \right\}.$$

Кроме того, получим

$$\tau_{cp} = \frac{(k-1)\gamma + \alpha}{\alpha\gamma}, \quad \alpha_1^2 = \frac{k-1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\gamma^2},$$

тогда

$$g = \frac{(k-1)\gamma^2 + \alpha^2}{[(k-1)\gamma + \alpha]^2}.$$

Можно видеть, что при  $\tau_{cp} = \text{const}$ ,  $g \rightarrow 1$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ ;  $g \rightarrow \frac{1}{k}$  при  $\alpha \rightarrow \gamma$ , т. е. для такого распределения спектр  $g$  непрерывен в интервале  $\left[ 1, \frac{1}{k} \right]$ .

Параметризация и в этом случае наиболее удобна и выполняется методом моментов, исходной информацией являются значения  $\tau_{cp}$  и  $g$  выборки. Тогда получаем, что

$$k = \left[ \frac{1}{g} \right], \quad \alpha = \frac{k-1 + \sqrt{kg(k-1) - (k-1)}}{\tau_{cp}(1-g)},$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{\alpha\tau_{cp} - (k-1)}.$$



Обобщением экспоненциального распределения на случай  $g \geq 1$  является гиперэкспоненциальное распределение  $k$ -го порядка,  $k = 1, 2, \dots$ , для которого

$$F(x) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} a_i e^{-\alpha_i x}, \quad \sum_{i=0}^{k-1} a_i = 1, \quad a_i \geq 0.$$

Временные промежутки между соседними событиями потока с гиперэкспоненциальным распределением описываются экспоненциальными распределениями, однако параметр этого распределения для различных промежутков может быть неодинаков, причём с вероятностью  $a_i$  величина параметра равна  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k-1$ ).

Для такого потока также можно ввести регулируемую систему, состоящую из  $k$  параллельных фаз и считать, что для каждой заявки (или группы заявок)  $i$ -я фаза может быть выбрана с вероятностью  $a_i$ , тогда время прохождения фазы распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\alpha_i$ , причём одновременно на всех фазах может находиться не более одной заявки (или группы заявок при неординарном потоке). Гиперэкспоненциальный поток может быть представлен как марковский процесс с непрерывным временем, при этом необходимо ввести дополнительную координату проходившей фазы.

Удобная форма задания гиперэкспоненциального распределения 2-го порядка и его характеристики приведены в табл. 6.1. Можно видеть, что уже при втором порядке распределения и фиксированном  $\tau_{cp}$  величина  $g$  может принимать любые значения в диапазоне от 1 (что соответствует экспоненциальному распределению) и до  $\infty$ .

Параметризация по методу моментов в последнем случае производится на основе величин  $\tau_{cp}$  и  $g$  выборки. Тогда

$$\alpha = \frac{1}{\tau_{cp}}$$

и

$$\varphi = \frac{1}{2} - \sqrt{g^2 - 1} / [2(g + 1)].$$

Можно отметить, что все виды распределений Эрланга и гиперэкспоненциальных распределений сводятся к экспоненциальному при  $k = 1$ . Эффективность оценок по методу моментов падает с ростом  $k$ , однако использование других методов параметризации приводит к необходимости решения громоздких систем трансцендентных уравнений.

Вырожденное распределение, характеристики которого приведены в табл. 6.1, описывает регулярный поток, для которого интервалы между соседними событиями строго постоянны и равны между собой. Несмотря на простоту задания, решения систем с такими потоками, как правило, далеко не тривиальны. К вырожденному распределению стремится специальное распределение Эрланга при  $k \rightarrow \infty$ .

Вырожденное распределение является частным случаем вводимых ниже аппроксимирующих распределений, описываемых кусочно-степенными функциями распределения вида

$$F(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m b_{ik} (x - a_i)^k \Gamma(x - a_i), \quad (6.19)$$

где  $n$  — число участков аппроксимации;  $m$  — максимальная степень выражения;  $\Gamma(x)$  — единичная функция Хевисайда, т. е.

$$\Gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Для такого распределения

$$f(x) = \sum_{i=0}^n b_{i0} \delta(x - a_i) + \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^m k b_{ik} (x - a_i)^{k-1} \Gamma(x - a_i),$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака, и

$$\varphi(s) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m \frac{b_{ik} k!}{s^k} e^{-a_i s}.$$

В табл. 6.1 приведены характеристики частных форм распределений такого рода — ступенчатого и кусочно-линейного распределений.

Кусочно-степенные распределения позволяют производить аппроксимацию реальных распределений, заданных в табличной или графической форме, практически с любой требуемой степенью точности. Возможность такой аппроксимации основана на теореме Вейерштрасса [8]. Другим достоинством кусочно-степенных аппроксимирующих функций является возможность получения аналитических решений довольно широкого класса моделей, в которых используются потоки, описываемые этими функциями. Наконец, параметризация таких функций как методом моментов, так и методом наименьших квадратов сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений, а для ступенчатой и кусочно-линейной зависимостей параметризация оказывается весьма простой с использованием графо-аналитического метода.

Из нормирующего условия  $\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$

следует, что

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^m b_{ik} = 0 \quad (6.20)$$

и

$$\sum_{i=0}^n b_{i0} + \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^m (-1)^k b_{ik} a_i^k = 1. \quad (6.21)$$

Последние два равенства должны обязательно учитываться при параметризации.

Аналитической параметризации кусочно-степенных распределений предшествует этап получения границ участков аппроксимации  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). В дальнейшем параметризация сводится к определению величин  $b_{ik}$  при выбранном  $m$ .

При использовании метода моментов необходимо приравнять значения несмещенных оценок методов выборки и соответствующих моментов теоретического распределения — начальных

$$d_v = \sum_{i=0}^n \left\{ a_i^v b_{i0} + \sum_{k=1}^m b_{ik} (-1)^k \frac{k! v!}{(v+k)!} a_i^{v+k} \right\},$$

или центральных

$$\theta_v = \sum_{j=0}^v (-1)^j \frac{v! a_1^{v-j}}{j! (v-j)!} d_j.$$

Если необходимо найти  $s$  параметров распределения (6.19) при  $m > 0$ , следует приравнять первые  $s - 2$  эмпирические и теоретические моменты, тогда с учетом (6.20), (6.21) получим систему  $s$  линейных алгебраических уравнений с  $s$  неизвестными.

При  $m = 0$  следует приравнять первые  $(s - 1)$  моментов и учесть равенство (6.21).

Более целесообразно использовать при параметризации распределений вида (6.19) метод наименьших квадратов, так как эффективность его выше, а вычислительные трудности те же, что при методе моментов.

В некоторых моделях теории надежности находит применение нормальное распределение. Такое распределение имеет место в тех случаях, когда случайные величины, соответствующие времени между соседними событиями потока, формируются как результат действия большого числа различных факторов, при этом влияние этих факторов имеет примерно один и тот же порядок. Характеристики нормального распределения приведены в табл. 6.1.

Следует отметить, что нормальное распределение играет исключительную роль в различного рода предельных соотношениях теории вероятности. В частности, специальное распределение Эрланга с ростом порядка распределения весьма мало отличается от нормального, в силу центральной предельной теоремы [9].

### 6.5. Оценка точности аппроксимации с помощью критериев согласия

Критерии согласия используются, в общем случае, для проверки различных гипотез относительно принадлежности выборки к генеральной совокупности случайных величин с некоторыми определенными свойствами. Такие критерии используются при проверке стационарности потока событий, а также при построении некоторых методов параметризации. Критерии согласия представляется целесообразным использовать для проверки гипотезы о достаточной

точности аппроксимации эмпирического распределения теоретической функцией распределения. Если при этом параметры теоретической функции распределения принимаются во внимание, то критерий называется параметрическим, в противном случае — непараметрическим.

Среди критериев параметрических наиболее употребительным является критерий  $\chi^2$ , в основе которого лежит использование меры расхождения эмпирического и теоретического распределений вида (6.7), которая ранее использовалась при параметризации распределений. Мера (6.7) обладает тем свойством, что при  $n \rightarrow \infty$  величина  $b_1$  распределена по закону  $\chi^2$  с  $(r - c - 1)$  степенями свободы, причем  $c$  — число тех параметров теоретического распределения, которые были определены по выборке случайных величин.

Выражение (6.12) можно записать в более удобной форме

$$b_1 = \sum_{i=1}^r \frac{v_i^2}{np_i} - n.$$

Естественно, что чем меньше величина  $b_1$ , тем с большей вероятностью можно говорить о близости эмпирического и теоретического распределений.

Для того, чтобы сформулировать правило проверки, следует выбрать уровень значимости  $\alpha$  — вероятность отвергнуть гипотезу при условии ее истинности, т. е.

$$p \{b_1 > \chi_0^2\} = \alpha,$$

где в левой части равенства стоит вероятность того, что  $b_1 > \chi_0^2$  при верной гипотезе, причем  $\chi_0^2$  — соответствующий уровню значимости  $\alpha$  предел для закона  $\chi^2$  с  $r - c - 1$  степенями свободы (табл. 2 приложения 3). Заметим, что термин «число степеней свободы» используется для обозначения параметра распределения  $\chi^2$ , который может принимать только целочисленные значения.

Проверка соответствия эмпирического и теоретического распределений с помощью критерия  $\chi^2$  включает следующие этапы.

1. Выбор уровня значимости  $\alpha$ . При этом необходимо учитывать, что с уменьшением  $\alpha$  заметно растет вероятность принятия гипотезы даже в том случае, когда она неверна. Значения  $\alpha$  обычно выбирают из промежутка от 0,1 до 0,05.

2. Упорядочивание выборки (расположение ее элементов в порядке возрастания их значений), разбиение ее на  $r$  интервалов. Интервалы могут быть выбраны достаточно произвольно, однако в каждой из них должно попасть не менее пяти значений выборки. Число интервалов разбиения при  $n > 200$  можно определить как ближайшее целое к следующей величине

$$r = 4 [0,75 (n - 1)^{\frac{1}{5}}].$$

При умеренной величине  $n$  значение  $r$  можно выбирать равным максимальному целому числу, не превышающего уровня  $n/5$ .

3. Определение математического ожидания  $E_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) числа наблюдений в интервале  $(x_{i-1}, x_i)$  для теоретического распределения

$$E_i = n \int_{x_{i-1}}^{x_i} dF(x).$$

4. Подсчет  $v_i$  — числа наблюдений выборки, попавших в интервал  $(x_{i-1}, x_i)$ .

5. Вычисление значения критерия

$$b_1 = \sum_{i=1}^r \frac{(v_i - E_i)^2}{E_i}.$$

6. Сравнение вычисленного значения  $b_1$  с табличным значением величины  $\chi_0^2$  при  $r - c - 1$  степени свободы и уровне значимости  $\alpha$  (табл. 2 приложения 3). Превышение значения  $b_1$  над  $\chi_0^2$  соответствует тому, что вероятность справедливости гипотезы о соответствии теоретического и эмпирического распределений не превосходит  $\alpha$ , при этом модель распределения обычно отвергается.

При небольшом объеме выборки целесообразно использовать критерий  $\omega^2$  [10], основывающийся на несгруппированных значениях случайных величин, составляющих выборку. В качестве меры расхождения эмпирического и теоретического распределений выбрана величина

$$\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [F_M(x) - F(x)]^2 dF_M(x), \quad (6.22)$$

где, как и ранее,  $F_M(x)$  — эмпирическая, а  $F(x)$  — теоретическая функция распределения. Выражение (6.22) можно преобразовать в следующее соотношение:

$$\omega^2 = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ F(x_i) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2, \quad (6.23)$$

причем  $x_i$  — значение  $i$ -го элемента выборки.

Если  $n \rightarrow \infty$ , то  $\omega^2 \rightarrow 0$ , однако произведение  $n\omega^2$  близко к 1. При  $n > 40$  распределение этого произведения близко к некоторому предельному распределению, для которого вычислены таблицы критических значений величин  $n\omega_0^2$ .

При использовании критерия  $\omega^2$  прежде всего необходимо задать уровень значимости  $\alpha$ , имеющий тот же смысл, что и для критерия  $\chi^2$ . Затем вычисляется величина  $\omega^2$  по формуле (6.23) и произведение  $n\omega^2$  сравнивается со значением  $n\omega_0^2$ , взятом при соответствующем уровне значимости из табл. 6.2. Если  $n\omega^2 > n\omega_0^2$ , то гипотеза соответствия эмпирического и теоретического распределений отвергается.

Особое положение при построении моделей потоков событий занимает экспоненциальное распределение вида (6.2) в связи с про-

Таблица 6.2

$\alpha$	0,1	0,05	0,03	0,02	0,01	0,001
$n\omega_0^2$	0,3473	0,4614	0,5489	0,6198	0,7435	1,1679

стойкой получения аналитических решений при таких распределениях. Рассмотрим простой непараметрический критерий  $WE_0$  [11] для проверки возможности экспоненциальной аппроксимации.

При использовании критерия  $WE_0$  необходимо вычислить величину

$$WE_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \tau_{cp})^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2},$$

а затем определить, не находится ли вычисленное значение  $WE_0$  вне интервалов для уровня значимости  $\alpha = 0,05$  (или  $\alpha = 0,1$ ), приведенных в табл. 3 приложения 3 для соответствующих значений  $n$ . Слишком большое или слишком малое значение  $WE_0$  указывает на отсутствие экспоненциальности, т. е. вероятность того, что выборка взята из совокупности случайных величин, распределенных по экспоненциальному закону, составляет не более 0,05 (или 0,1).

### 6.6. Некоторые аспекты выбора вида аппроксимирующих распределений при построении моделей АСУ

Строгое решение задачи нахождения оптимальных аппроксимирующих распределений для потоков событий вероятностных моделей существенно осложняется отсутствием критерия, учитывающего все последствия такого выбора. Ранее уже было сказано, что вид аппроксимирующей (теоретической) функции распределения существенно определяет возможность (и трудоемкость) аналитического исследования модели, достижимую точность аппроксимации, а также простоту процесса аппроксимации и возможность использования тех или иных методов параметризации. Количественная оценка перечисленных факторов вызывает определенные трудности.

Наиболее удобным распределением для возможности получения аналитического решения в моделях массового обслуживания, надежности и др. является экспоненциальное распределение вида (6.2). Использование распределений, сводящихся к экспоненциальному разложением на фазы (Эрланга, гиперэкспоненциального), увеличивает трудоемкость получения решений модели, особенно с ростом величины порядка распределений  $k$ . Далее по шкале сложности получения решений находятся кусочно-степенные распределения. Для абсолютного большинства распределений

теории вероятностей, не упомянутых в этом перечне, вообще не удастся получить сколь-нибудь приемлемые с точки зрения возможности практического использования результаты.

С точки зрения удобства аппроксимации порядок расположения распределений меняется для перечисленных функций на обратный, так как наибольшую точность аппроксимации в общем случае можно достичь лишь с использованием кусочно-степенных распределений. Экспоненциальная аппроксимация в ряде практических случаев может позволить произвести лишь весьма грубое приближение. Промежуточное положение (по точности аппроксимации) между кусочно-степенными и экспоненциальными распределениями занимают распределения Эрланга и гиперэкспоненциальное распределение.

Анализируя существующие методы решения вероятностных моделей (в частности, моделей обслуживания) можно утверждать, что наиболее оптимальным вариантом задания потоков в самом общем случае, позволяющем получать достоверные модели, является такой, когда один из потоков, а именно, тот, точность аппроксимации для которого в наибольшей степени влияет на погрешность характеристик модели в целом, аппроксимирован с использованием одной из кусочно-степенных зависимостей, а для задания остальных потоков использованы распределения Эрланга или гиперэкспоненциальное распределение. Однако при менее жестких требованиях к точности аппроксимации можно ограничиться использованием лишь распределений Эрланга или гиперэкспоненциальным распределением (в том числе и экспоненциальным), а при более жестких требованиях необходимо все потоки событий задавать кусочно-степенными распределениями.

В некоторых случаях (особенно при малом объеме статистических данных для потока событий) существенное влияние на выбор распределения, описывающего этот поток, могут оказать условия формирования потока. Речь идет о случаях применимости предельных теорем теории вероятности. Проведем некоторые из них.

Центральная предельная теорема теории вероятностей [12] устанавливает, что если случайная величина  $\xi$  является суммой  $n$  независимых случайных величин, таких, что ни одна из них не является превалирующей, то с ростом  $n$  функция распределения величины  $\xi$  стремится к нормальному закону. Именно этой теоремой объясняется близость специального распределения Эрланга высокого порядка и нормального распределения.

Использование в качестве аппроксимирующего распределения нормального закона имеет место в задачах надежности для моделей с постепенными (износowymi) отказами. Постепенные отказы возникают в результате накопления изменений свойств объекта под воздействием ряда факторов, тогда аддитивность изменений позволяет использовать центральную предельную теорему.

Центральная предельная теорема для окружности [13] устанавливает, что если случайная величина  $\xi$  образована как сумма по  $\text{mod } n$  одинаково распределенных случайных величин с ненулевой

ограниченной плотностью распределения в интервале  $(0,1)$ , то при  $n \rightarrow \infty$  предельное распределение  $\xi$  равномерно в интервале  $(0,1)$ . Сумма по mod 1 образуется следующим образом:

$$a \oplus b = a + b \text{ если } a + b \leq 1,$$

$$a \oplus b = a + b - 1 \text{ если } a + b > 1,$$

причем

$$0 < a \leq 1, \quad 0 < b \leq 1.$$

Использование этой теоремы позволяет выявить потоки событий с равномерным распределением длительностей промежутков между соседними событиями, а также построить простой датчик случайных чисел.

Предельная теорема для редяущих потоков [14] устанавливает, что поток заявок, образуемый в результате случайного разрежения некоторого исходного стационарного потока, стремится к пуассоновскому с увеличением числа разрежений.

Согласно предельной теореме для суммарного потока [14] вид потока событий, образованного суммированием некоторого числа независимых потоков, сравнимых по интенсивности, стремится к пуассоновскому при увеличении числа суммируемых потоков.

Для определенного класса систем массового обслуживания, а именно, для моделей с потерями, т. е. при отсутствии мест ожидания, и простейшим входным потоком вид аппроксимирующей функции распределения для потока обслуживания не влияет на показатели функционирования такой системы, что следует из теоремы Севастьянова [1], а выражения для вероятностей состояний совпадают с формулами для системы при экспоненциальном распределении времени обслуживания. Следует отметить, что перенесение выводов теоремы Севастьянова на модели с нулевым числом мест ожидания неправомочно и может привести к грубым ошибкам.

Влияние вида потоков событий подчеркнуто в классификации Кендалла для моделей массового обслуживания [15]. Согласно этой классификации, однофазная система массового обслуживания (СМО) с одним входящим потоком в общем случае обозначается

$$G^{(h)}/G^{(l)}/n/M/N,$$

где  $G^{(h)}$  — неординарный входной поток ( $h$  — число заявок в одной группе) самого общего вида;  $G^{(l)}$  — символ произвольного распределения времени обслуживания ( $l$  — число одновременно обслуживаемых заявок);  $n$  — количество обслуживающих устройств;  $M$  — число заявок в источнике;  $N$  — число мест ожидания.

Для ординарных потоков верхний символ отсутствует. При рекуррентном входном потоке используется символ  $GI$ . Если  $M = \infty$  или  $N = \infty$ , то соответствующий символ опускается, а второй записывается в виде равенства.

Часто, используемые в моделях обслуживания, потоки событий вместо символа  $G$  имеют следующие обозначения;  $M$  — при экспо-



ненциальном распределении потока;  $D$  — при вырожденном распределении;  $E_k$  — при распределении Эрланга  $k$ -го порядка;  $H_k$  — при гиперэкспоненциальном распределении  $k$ -го порядка;  $Q_s$  — при кусочно-степенной аппроксимации, причем  $s$  — максимальная степень выражения (6.19).

В целом решение задачи построения статистических моделей сводится к обеспечению альтернативных требований достаточной степени адекватности модели по отношению к реальному объекту и минимально возможной сложности их построения и исследования.

### Контрольные вопросы

1. Показать место и роль вероятностных моделей в системном анализе АСУ.
2. На примере УЦВК рассмотреть интерпретацию СМО (входящие потоки, буфер, обрабатывающие устройства) и разнообразие моделей для реальных структур УЦВК.
3. Охарактеризовать свойства простейшего потока событий. Привести примеры из практики АСУ и других сложных систем.
4. Как задается рекуррентный стационарный поток событий? Назвать и охарактеризовать последовательность этапов построения статистической модели.
5. Что такое гистограмма распределения случайной величины. Как она строится при большой и малой выборке? В чем состоит задача параметризации аппроксимирующих теоретических функций распределения?
6. Назвать известные формы аппроксимирующих функций распределения. Чем вызвано их разнообразие, какова их роль в исследовании систем обработки информации?
7. Указать преимущества кусочно-степенных функций распределения. Каков порядок их получения в реальных условиях?
8. В чем разница функций распределения, привлекаемых для временного и надежностного анализа?
9. Какова роль критериев согласия при оценке адекватности теоретических функций распределения эмпирическим?

## Глава 7

### ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ УСТРОЙСТВ АСУ НА ОСНОВЕ ПУАССОНОВСКИХ МОДЕЛЕЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ

#### 7.1. Методика исследования моделей, описываемых марковскими графами

Процессы, протекающие в вероятностных моделях, состоят в том, что исследуемая система в случайные моменты времени переходит из одного состояния в другое: меняется число занятых каналов, число сообщений, находящихся в очереди, и т. д. Например, СМО представляет собой физическую систему дискретного типа с конечным (или со счетным в общем случае) множеством состояний, а переход системы из одного состояния в другое происходит скачком в момент, когда осуществляется какое-то событие (приход новой заявки, освобождение канала и т. д.). Рассмотрим физическую систему  $X$  со счетным множеством состояний

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

В любой момент времени  $t$  система  $X$  может быть в одном из этих состояний. Обозначим  $p_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) вероятность того, что в момент  $t$  система будет находиться в состоянии  $x_k$ . Очевидно, для любого  $t$

$$\sum_k p_k(t) = 1.$$

Совокупность вероятностей  $p_k(t)$  для каждого момента времени  $t$  характеризует данное сечение случайного процесса, протекающего в системе. Эта совокупность не является исчерпывающей характеристикой процесса (она, например, совсем не отражает зависимости между сечениями), но все же достаточно хорошо описывает процесс и для ряда практических применений оказывается достаточной. Дискретным случайным процессом  $X(t)$  будет называться процесс, протекающий в системе с дискретными состояниями, число которых конечно (или счетно). Такой процесс можно интерпретировать с помощью графа состояний с указанием возможных переходов из состояния в состояние. Процесс удобно представлять как блуждание точки, изображающей систему по этому графу с мгновенными перескоками из состояния в состояние по соответствующей стрелке, проходящими в случайные моменты времени.

Граф возможных состояний характеризует качественную сторону процесса в СМО. Для выяснения количественных соотношений необходимо определить тип полученного графа и найти соответствующие ему аналитические зависимости. При общих предположениях о виде входного потока требований и распределении времени обслуживания получение количественных соотношений чрезвычайно затруднительно. Среди случайных процессов особое место занимают дискретные марковские случайные процессы с непрерывным временем, граф состояний которых адекватен системе линейных дифференциальных уравнений [1].

Для того, чтобы описать дискретный марковский процесс с непрерывным временем, нужно знать следующие характеристики: перечень возможных состояний с указанием возможных непосредственных переходов из состояния в состояние, интенсивности всех потоков событий, под влиянием которых осуществляются эти переходы, и, в общем случае, состояние системы в начальный момент (при  $t = 0$ ). Таким образом, для исследования процесса нужно [1]:

1. Указать все состояния, в которых может находиться система.
2. Составить граф состояний, т. е. указать пути возможных непосредственных переходов системы из состояния в состояние.
3. Для каждого возможного перехода указать соответствующую интенсивность  $\lambda_{ij}(t)$  потока событий, переводящего систему из состояния  $x_i$  непосредственно в состояние  $x_j$ , т. е. разметить граф.
4. Указать, в каком состоянии находится система в начальный момент времени (при  $t = 0$ ).

Приведем простое мнемоническое правило, позволяющее составить систему дифференциальных уравнений непосредственно по размеченному графу состояний.

Производная  $\frac{dp_i(t)}{dt}$  вероятности пребывания системы в состоянии  $x_i$  равна алгебраической сумме нескольких членов; число членов этой суммы равно числу стрелок на графе состояний системы, соединяющих состояние  $x_i$  с другими состояниями. Если стрелка направлена в состояние  $x_i$ , то член берется со знаком плюс, если стрелка направлена из состояния  $x_i$ , то со знаком минус. Каждый член суммы равен произведению вероятности того состояния, из которого направлена стрелка, на интенсивность потока событий, переводящего систему по данной стрелке. Число отрицательных членов равно числу стрелок, направленных из состояния  $x_i$ , число положительных членов равно числу стрелок, направленных в состояние  $x_i$ .

Дальнейшее исследование системы связано с более глубоким анализом процесса смены состояний. Оказывается, что для довольно широкого класса моделей имеют место теоремы, существенно упрощающие процесс нахождения вероятностей состояния.

Будем называть процесс эргодическим, если по истечении продолжительного промежутка времени  $\tau$  вероятности состояний системы практически не зависят от того, в каком состоянии она находилась в начальный момент времени и не зависят от самого промежутка времени  $\tau$ .

Режим работы системы, при котором вероятности  $p_j$  нахождения системы в состоянии  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) не зависят от времени, называется стационарным режимом. Следовательно, любой процесс, обладающий эргодическим свойством, имеет предельный стационарный режим, который практически наступает после достаточно продолжительного времени функционирования системы. Этот режим не зависит от того, в каком состоянии система находилась в начальный момент времени. Для системы в стационарном режиме дифференциальные уравнения превращаются в алгебраические, что является решающим фактором, позволяющим находить решения систем обслуживания.

Большинство пуассоновских СМО являются эргодическими; все время работы таких систем можно разбить условно на два интервала:

1. Переходной режим работы системы  $(0, t_n)$ .
2. Стационарный режим  $(t_n, \infty)$ .

Время переходного режима  $t_n$  можно определить из условия, что по окончании переходного режима

$$|p_j(t) - p_j| < \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где величина  $\varepsilon > 0$  назначается исследователем.

Громадное большинство моделей АСУ исследуется в стационарном режиме. В этом случае становится возможным нахождение распределения времени ожидания с использованием формулы полной вероятности.

$$F_M(x) = p \{t_{ож} < x\} = \sum_i p_i P_i(x),$$

где  $t_{ож}$  — время ожидания заявки в очереди на реализацию;  $P_i(x)$  — вероятность выполнения неравенства  $t_{ож} < x$  при условии, что входящая заявка застала систему в состоянии  $i$ .

Определив вероятности состояний и функцию распределения времени ожидания, можно найти все характеристики функционирования СМО, т. е. оценить эффективность структуры, моделью которой является исследуемая СМО.

## 7.2. Расчет характеристик функционирования многолинейной системы с ориентированными входными потоками

Практика проектирования АСУ для различных производственных и административных целей показала, что наиболее эффективной структурой информационной части системы является иерархическая структура [4]. Последняя представляет собой многоуровневую вычислительную систему, где на нижнем уровне ведется предварительная обработка информации, поступающей от датчиков измерения параметров контролируемых процессов. На верхнем уровне производится принятие решений (выработка управляющих воздействий) с учетом всего многообразия входящих потоков информации, отражающих поведение отдельных подсистем.

Рассмотрим первый уровень такой иерархической структуры, на котором производится формирование параметров системы (усреднение и др.) на основании данных измерений, поступающих от объектов, входящих в систему. При этом каждый объект выдает множество сигналов, которые поступают для обработки на  $n$  специализированных вычислителях. Для повышения эффективности системы обработки информации используется общее буферное запоминающее устройство (БЗУ) ассоциативного типа, которое выполняет функции приема информации от объектов, сортировки, временного хранения и выдачи на соответствующий вычислитель. Построение локальных накопителей для каждого объекта или вычислителя оказывается менее эффективным, т. к. общий буфер является универсальным устройством и обладает логическими возможностями при сортировке информации, а также имеет более высокий коэффициент использования.

Таким образом, вся снимаемая с датчиков объектов управления информация поступает в БЗУ, где она принимается, сортируется по массивам информации для соответствующих вычислителей и выбирается по мере обработки предыдущих порций одноименной информации. После обработки на специализированных вычислителях информация поступает на следующую ступень иерархии (при отсутствии таковой — непосредственно на центральный вычислитель для выработки управляющих решений).

Сообщения, снимаемые с датчиков  $j$ -го объекта ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) образуют  $j$ -й информационный поток. Будем считать информационные потоки в системе стационарными и независимыми, а емкость

БЗУ ограниченной и равной  $N$ . Характеристики функционирования системы получим из рассмотрения  $n$ -линейной модели массового обслуживания с числом мест ожидания  $N$ , заявками в которой являются сообщения, образующие  $m$  входных потоков заявок  $n$  видов (по числу вычислителей), причем заявки будут ориентированные, т. е. подлежащие обработке только на одноименных обслуживающих устройствах.

Пусть задана прямоугольная матрица интенсивностей

$$\| \alpha_{ij} \| = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \dots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix},$$

где элементами являются средние числа заявок  $j$ -го вида, поступающих в систему в составе  $i$ -го потока в единицу времени. Предполагая порядок прихода заявок в каждом потоке случайным, можно использовать предельную теорему для редких потоков [1], в силу которой поток заявок, образуемый в результате случайного разрежения некоторого исходного стационарного потока, стремится к пуассоновскому с увеличением числа разрежений. Тогда можно утверждать, что поток заявок  $j$ -го вида, пришедших в систему в составе  $i$ -го порядка, будет по форме более близок к пуассоновскому, чем весь  $i$ -й поток.

Суммируя одноименные потоки заявок, поступающих в составе всех входных потоков, получим СМО, в которую поступает  $n$  потоков однородных заявок. Для выяснения вида этих входных потоков используем предельную теорему для суммарного потока [1], в силу которой вид потока, образованного суммированием некоторого числа независимых потоков (в нашем случае это число равно  $m$ ), сравнимых по интенсивности, стремится к пуассоновскому при увеличении числа суммируемых потоков. При этом интенсивность суммарного потока равна сумме интенсивностей слагаемых потоков, т. е.

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}, \quad j = 1, 1, \dots, n.$$

Уже при небольших числах  $m$  и  $n$  потоки одноименных заявок на входе рассматриваемой СМО можно считать пуассоновскими, поэтому задача нахождения характеристик исходной системы сводится к анализу многолинейной СМО с ограниченным числом мест ожидания, общих для всех заявок. На входе системы пуассоновские потоки однородных заявок, причем число потоков равно числу обслуживающих устройств. Принимая функцию распределения времени обслуживания в каждом обслуживающем устройстве экспоненциальной, т. е.

$$B_i(t) = 1 - e^{-\mu_i t},$$

где  $\mu_i$  — интенсивность обслуживания заявок  $i$ -го вида, получим пуассоновскую СМО с марковским процессом изменения состояний системы. Блок-схема приведена на рис. 7.Г.

Поведение рассматриваемой СМО описывается  $n$ -мерным графом переходов и следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 p_{i j \dots k r}(t) = & -p_{i j \dots k r}(t) \sum_{l=1}^n (\lambda_l + \mu_l) + \lambda_1 p_{(l-1) j \dots k r}(t) + \\
 & + \lambda_2 p_{l(j-1) \dots k r}(t) + \dots + \lambda_n p_{i j \dots k(r-1)}(t) + \mu_1 p_{i j \dots k r}(t) + \\
 & + \mu_2 p_{i j \dots k r}(t) + \dots + \mu_n p_{i j \dots k(r+1)}(t); \quad (7.1) \\
 i = \theta, 0, 1, \dots, N; & \quad j = \theta, 0, 1, \dots, N-i; \dots; \\
 r = \theta, 0, 1, \dots, & \quad N-i-j-\dots-k,
 \end{aligned}$$

причем всегда выполняется

$$p_{i j \dots r}(t) \equiv 0 \quad (7.2)$$

при

$$N < i, j, \dots, r < \theta.$$

Здесь  $p_{i j \dots r}(t)$  — вероятность того, что в момент времени  $t$  в системе будут находиться в состоянии ожидания обслуживания  $i$  заявок 1-го вида,  $j$  заявок 2-го вида, ...,  $r$  заявок  $n$ -го вида. Для случая отсутствия заявок какого-либо вида в буфере предусмотрено две градации — 0 — при работе соответствующего обслуживающего устройства и  $\theta$  — при его простое. Тогда сумма всех цифр индекса состояния не должна превышать  $N$ -числа мест ожидания, при этом индекс  $\theta$  во внимание не принимается. Тождество (7.2) отражает граничные условия работы СМО.

В стационарном режиме

$$p_{i j \dots r} = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{i j \dots r}(t) = \text{const},$$

при этом система (7.1) обращается в систему линейных алгебраических уравнений, имеющую единственное решение вместе с условием нормировки

$$\sum_{i=\theta}^N \sum_{j=\theta}^{N-i} \dots \sum_{r=\theta}^{N-i-j-\dots-k} p_{i j \dots k r} = 1. \quad (7.3)$$

Для решения последней системы воспользуемся следующими соображениями:

1. Распределение вероятностей состояний пуассоновской СМО, в которой действуют потоки событий для заявок только одного вида, подчиняется геометрическому распределению.

2. Потоки событий в рассматриваемой СМО взаимонезависимы.

Тогда отношения вероятностей состояний, отличающихся числом заявок только одного вида, не зависят от числа заявок какого-либо другого вида, находящихся в СМО, причем имеет

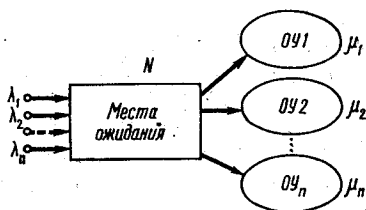


Рис. 7.1.

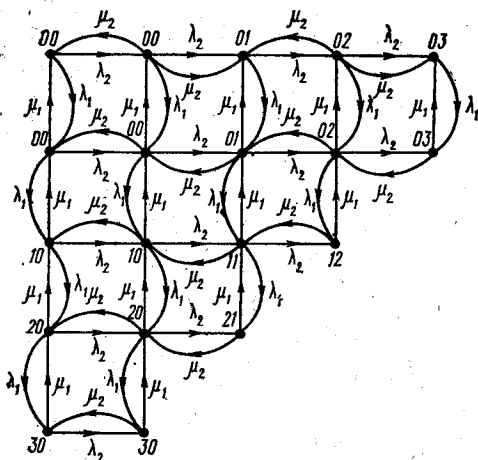


Рис. 7.2.

место равенство:

$$\begin{aligned}
 & P^{(i+a)(j+b) \dots (k+c)(r+d)} = \\
 & = \rho_1^a \rho_2^b \dots \rho_{n-1}^c \rho_n^d p_{ij} \dots kr,
 \end{aligned}
 \quad (7.4)$$

$$\rho_i = \lambda_i / \mu_i,$$

$$i = 1, 2, \dots, n; a, b, \dots,$$

$$d = 0, 1, 2, \dots$$

Соотношение (7.4) существенно облегчает нахождение аналитического решения для вероятностей состояний. В случае  $n = 2$  граф переходов изображен на рис. 7.2 и решение имеет вид:

$$\rho_{ij} = \frac{(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho_1)\rho_1^{i+1}\rho_2^{j+1}}{(1 - \rho_1^{N+2} - \rho_2^{N+2})(\rho_2 - \rho_1) - (1 - \rho_2)\rho_1^2\rho_2^{N+2} + (1 - \rho_1)\rho_1^{N+2}\rho_2^2} \cdot (7.5)$$

Другие показатели функционирования СМО в этом случае:  
вероятность простоя системы

$$P_{\text{пр}} = \rho_{00};$$

вероятность простоя первого обслуживающего устройства

$$P_{\text{п1}} = \sum_{j=0}^N \rho_{0j} = \frac{1 - \rho_2^{N+2}}{1 - \rho_2^2} \rho_{00};$$

среднее число заявок первого вида в очереди

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \sum_{i=1}^N i \sum_{j=0}^{N-i} \rho_{ij} + \sum_{i=1}^N \rho_{i0} \cdot i = \\
 &= \frac{\rho_{00}\rho_1^2}{1 - \rho_2} \left[ \frac{1 - (N+1)\rho_1^{N+1} + N\rho_1^{N+2}}{(1 - \rho_1)^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \rho_2 \frac{\rho_2^{N+2} - (N+1)\rho_1^{N+1}\rho_2^2 + N\rho_1^{N+2}}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \right].
 \end{aligned}$$

Показатели функционирования системы относительно заявок второго вида имеют аналогичный вид и могут быть найдены из полученных формул при замене  $\rho_1$  и  $\rho_2$  (и наоборот). Аналогичное исследование можно выполнить, вообще говоря, при любом числе  $n$  обслуживающих устройств.

В случае равенства величин нагрузок по всем линиям системы

$$\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_n = \rho$$

выражения для характеристик СМО несколько упрощаются. Так, для  $n = 2$

$$P_{11} = \frac{(1 - \rho)^2 \rho^{1+1+2}}{1 - \rho^{N+2} [(2 + N\rho) - (N + 1)\rho^2]}$$

При малых значениях  $\rho$  и  $N$  может оказаться полезной следующая асимптотическая формула:

$$\rho_{00} \dots \rho = \frac{(1 - \rho)^N}{1 - n\rho^{N+2}}$$

Рассмотренная система массового обслуживания является обобщением однолинейной СМО с ограниченным числом мест ожидания на многолинейный вариант с ориентированными потоками заявок. Отсюда следует, что при определенных условиях рассмотренная СМО должна обратиться в упомянутую однолинейную систему.

Для случая  $n = 2$  полная запись вероятности простоя для первого обслуживающего устройства

$$P_{\text{пр}} = \frac{(1 - \rho_1)(\rho_2 - \rho_1)(1 - \rho_2^{N+2})}{(1 - \rho_1^{N+2} - \rho_2^{N+2})(\rho_2 - \rho_1) - (1 - \rho_2)\rho_1^2\rho_2^{N+2} + (1 - \rho_1)\rho_1^{N+2}\rho_2^2}$$

Если нагрузка по второму обслуживающему устройству снизится до нуля, то заявки второго вида не будут влиять на прохождение по системе заявок первого вида, т. е. фактически будет иметь место однолинейная СМО с числом мест ожидания  $N$ . Это положение должно найти отражение в формальных соотношениях. Действительно

$$\lim_{\rho_2 \rightarrow 0} P_{\text{пр}} = \frac{1 - \rho_1}{1 - \rho_1^{N+2}},$$

что совпадает с выражением для вероятности простоя однолинейной СМО с числом мест ожидания  $N$  [5].

С увеличением величины  $\rho_2$  все более будет сказываться присутствие заявок второго вида на прохождение заявок первого вида. При неограниченном увеличении интенсивности второго потока

$$\lim_{\rho_2 \rightarrow \infty} P_{\text{пр}} = \frac{1 - \rho_1}{1 - \rho_1^2},$$

т. е. для заявок первого вида условия прохождения соответствуют СМО с отказами, (т. е.  $N = 0$ ). Отсюда следует, что рассматриваемая СМО может работать в режиме регулирования эквивалентного числа мест ожидания для  $(n - 1)$  каналов путем изменения величины нагрузки по одному какому-либо каналу.

Пример. Для системы с двухканальной ступенью предварительной обработки информации с общим входным буфером емкостью  $N$  определим допустимые границы изменения величины нагрузки по второму каналу  $\rho_2$  (т. е.  $\rho_{2\text{min}}$  и  $\rho_{2\text{max}}$ ). Задана следующая система ограничений:

$$\rho_1 = 0,5, \quad A \leq 0,65, \quad B_1 \leq 0,05.$$



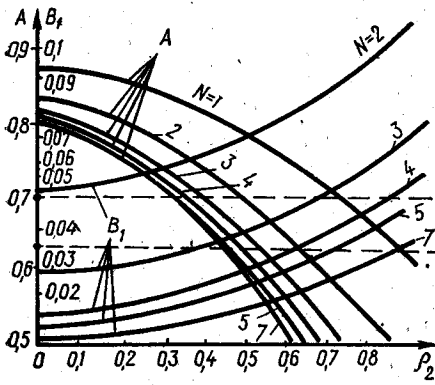


Рис. 7.3.

где  $\rho_1$  — величина нагрузки по первому каналу;  $A$  — вероятность отсутствия информации в буферной памяти;  $B_1$  — вероятность потери информации по первому каналу.

Кроме того, оценим минимально возможную емкость буферной памяти и найдем величину  $N$ , при которой выполняется отношение

$$\rho_2 \max / \rho_2 \min' \geq 2.$$

Выражения для  $A$  и  $B_1$  имеют следующий вид:

$$A = \rho_{00} + \rho_{00} + \rho_{00} + \rho_{00} =$$

$$= \frac{(1 - \rho_1^2)(1 - \rho_2^2)(\rho_2 - \rho_1)}{(1 - \rho_1^{N+2} - \rho_2^{N+2})(\rho_2 - \rho_1) - (1 - \rho_2)\rho_1^2\rho_2^{N+2} + (1 - \rho_1)\rho_1^{N+2}\rho_2^2}$$

$$B_1 = \rho_{0N} + \sum_{i=0}^N \rho_{i, N-i} =$$

$$= \frac{(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)(\rho_1^{N+1}\rho_2 - \rho_1^{N+1} + \rho_1\rho_2^{N+2}\rho_1^{N+2}\rho_2)}{(1 - \rho_1^{N+2} - \rho_2^{N+2})(\rho_2 - \rho_1) - (1 - \rho_2)\rho_1^2\rho_2^{N+2} + (1 - \rho_1)\rho_1^{N+2}\rho_2^2}$$

Графики функций

$$A = f_1(\rho_2) \quad \text{и} \quad B_1 = f_2(\rho_2)$$

для различных  $N$  приведены на рис. 7.3, откуда определяем, что для выполнения условий примера следует выбрать

$$N \geq 3.$$

Далее находим, что при  $N = 5$

$$\rho_2 \min = 0,43, \quad \rho_2 \max = 0,875,$$

т. е.

$$\rho_2 \max / \rho_2 \min = 2,35 > 2,$$

что удовлетворяет условию примера.

### 7.3. Определение характеристик устройств сопряжения с объектом на основе моделей обслуживания с неординарными потоками

В настоящем параграфе исследуются однолинейные и многолинейные устройства сопряжения с объектом (УСО) на базе пуассоновских СМО с неординарными потоками событий, с помощью которых можно моделировать различные процессы преобразования дискретной информации. Для входных УСО моделью служит СМО с ординарным пуассоновским потоком входных заявок и групповым обслуживанием, причем число заявок в обслуживаемой груп-

пе — величина постоянная и равная принятой разрядности машинного слова. Входными заявками в этом случае являются импульсы, поступающие с датчиков первичной информации АСУ. Для выходных УСО моделью служит СМО с входным пуассоновским потоком групп заявок, причем число заявок в группе — величина постоянная, зависящая от принятых разрядностей машинных слов. В обоих случаях предусмотрена буферная память (на регистрах) ограниченного объема, служащая для уменьшения потерь информации при перегрузке УСО. Основной определяемой характеристикой является величина задержки информации при прохождении через УСО.

Рассмотрим многолинейную СМО, заявки в которую приходят группами, по  $h$  заявок в каждой. Обслуживаются заявки также группами, по  $l$  заявок одновременно, причем обслуживающие устройства простаивают, если число заявок в соответствующем обслуживающем устройстве меньше, чем  $l$ . Промежутки между моментами прихода соседних групп заявок и время обслуживания распределены по экспоненциальному закону с параметром  $\lambda$  и  $\mu$  (соответственно). Все обслуживающие устройства равнодоступны, число их равно  $n$ . Кроме того, система содержит  $N$  мест ожидания (для заявок, ожидающих обслуживания). Заявки, пришедшие в моменты полной заполненности системы, получают отказ. Число различных состояний СМО

$$s = nl + N + 1,$$

и при конкретных значениях  $n$ ,  $N$ ,  $h$  и  $l$  можно легко построить размеченный граф переходов.

В общем случае соответствующая система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$а) \dot{p}_i(t) = -\lambda p_i(t) + \mu p_{i+l}(t), \quad 0 \leq i < \min(h, l), \quad i \leq N + (n-1)l;$$

$$б) \dot{p}_i(t) = \lambda p_{i-h}(t) - \lambda p_i(t) + \mu p_{i+l}(t), \quad h \leq i < l,$$

$$в) \left. \begin{aligned} \dot{p}_i(t) &= -\left(\lambda + \left[\frac{i}{l}\right]\mu\right)p_i(t) + \left(1 + \left[\frac{i}{l}\right]\right)\mu p_{i+l}(t), \\ &\quad \left[\frac{i}{l}\right] < n, \\ \dot{p}_i(t) &= -(\lambda + n\mu)p_i(t) + n\mu p_{i+l}(t), \\ &\quad \left[\frac{i}{l}\right] \geq n, \end{aligned} \right\} \quad l \leq i < h,$$

$$г) \left. \begin{aligned} \dot{p}_i(t) &= \lambda p_{i-h}(t) - \left(\lambda + \left[\frac{i}{l}\right]\mu\right)p_i(t) + \\ &\quad \left[\frac{i}{l}\right] < n, \\ &+ \left(1 + \left[\frac{i}{l}\right]\right)\mu p_{i+l}(t), \\ \dot{p}_i(t) &= \lambda p_{i-h}(t) - (\lambda + n\mu)p_i(t) + n\mu p_{i+l}(t), \\ &\quad \left[\frac{i}{l}\right] \geq n, \end{aligned} \right\} \quad i \geq \max(h, l),$$

Таблица 7.1

1	2	3	4	5
a		$0 \leq i < \min(h, l)$ $i \leq N + (n-1)L$	$N \geq 0$	
b		$h \leq i < l$ $i \leq N + (n-1)L$	$l > h$ $N \geq 1$	
б		$l \leq i < h$ $i \leq N + (n-1)L$	$h > l$ $N \geq 1$	
в		$l \geq \max(h, l)$ $i \leq N + (n-1)L$	$N + (n-1)L \geq$ $\geq \max(h, l)$	
б		$i \geq \max(h, l)$ $i > N + (n-1)L$ $i < N + nl$	$l > 1$	
e		$h \leq i < l$ $i > N + (n-1)L$ $i \leq N + nl$	$l > h$ $N \leq 1$	
ж		$l < N + nl$ $i < h$ $i > N + (n-1)L$	$h > l$ $N = 0$	
з		$i \equiv N + nl$	$N \geq 0$	

$$д) \dot{p}_i(t) = \lambda p_{i-h}(t) - (\lambda + n\mu) p_i(t), \quad \max(h, l) \leq i < N + nl, \quad i > N + (n-1)L;$$

$$е) \dot{p}_i(t) = \lambda p_{i-h}(t) - \lambda p_i(t), \quad h \leq i < l, \quad N + (n-1)L < i < N + nl;$$

$$ж) \dot{p}_i(t) = -(\lambda + n\mu) p_i(t), \quad \min(h, N + nl) > i > N + (n-1)L;$$

$$з) \dot{p}_{N+nl}(t) = \lambda \sum_{j=2}^{N+nl-1} p_j(t) - n\mu p_{N+nl}(t),$$

$$z = \begin{cases} N + nl - h & \text{при } N + nl \geq h, \\ 0 & \text{при } N + nl < h. \end{cases}$$

Запись  $[x]$  обозначает целую часть числа, заключенного в скобки.

Для облегчения составления дифференциальных уравнений приведем таблицу типов узлов графов многолинейных СМО с неординарными потоками. Столбцы этой таблицы (табл. 7.1):

1. Уравнение, соответствующее типу узла.
  2. Графический вид узла.
  3. Диапазон изменений номера узла.
  4. Условия существования узлов данного типа.
  5. Пример графа, включающего узлы соответствующего типа.
- В стационарном режиме имеют место конечные вероятности

$$p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = \text{const}, \quad i = 0, 1, \dots, N + nl,$$

причем

$$p_i \equiv 0.$$

Тогда система дифференциальных уравнений (7.6) запишется в виде системы алгебраических уравнений, образуемой из системы (7.6) путем подстановки в левой части всех уравнений нулей. Кроме того, для нахождения однозначного решения следует учитывать условие нормировки

$$\sum_{i=0}^{N+nl} p_i = 1. \quad (7.7)$$

Основные показатели функционирования системы имеют следующий вид:

1. Вероятность простоя системы

$$P_{\text{пр}} = \sum_{i=0}^{l-1} p_i.$$

2. Среднее число занятых обслуживающих устройств

$$n_{\text{ср}} = n \sum_{i=nl}^{N+nl} p_i + \sum_{i=l}^{nl-1} \left[ \frac{i}{l} \right] p_i.$$

3. Средняя длина очереди

$$m_{\text{ср}} = \sum_{i=nl+1}^{N+nl} p_i (i - nl).$$

4. Вероятность отказа входной заявке

$$P_{\text{отк}} = \sum_{j=0}^{h-1} \frac{h-j}{h} p_{N+nl-j}.$$

В ряде случаев (при конкретных  $h, l, n$ ) система уравнений (7.6) имеет аналитическое решение (для случая стационарного режима). В частности, при  $h = 1$  и  $l = 1$  получаем хорошо известную многолинейную СМО с ограниченным числом мест ожидания и пуассоновскими (ординарными) потоками событий. Для других

вариантов можно предложить следующую методику получения аналитического решения систем рассматриваемого класса:

1. Получение определенной системы алгебраических уравнений, исходя из системы (7.6) для случая стационарного режима, а также из предположения достаточно большого значения  $N$ , поскольку в остальных случаях решения будут носить частный характер и могут быть получены без особого труда.

2. Составление рекуррентных соотношений между вероятностями состояний системы.

3. Последовательное выражение вероятностей состояний через вероятность одного (базового) состояния с использованием рекуррентных соотношений. Выделение параметров нагрузки СМО в этих выражениях.

4. Составление таблицы числовых коэффициентов, стоящих перед параметрами нагрузки в соответствующей степени для достаточно большого числа вероятностей состояний СМО.

5. Анализ полученной таблицы и нахождение аналитической формы задания числовых коэффициентов перед параметрами нагрузки в различной степени в зависимости от номера состояния.

6. Аналитическое выражение всех вероятностей через вероятность базового состояния.

7. Использование условия нормировки для получения значения базовой вероятности.

8. Нахождение выражений для вероятностей всех состояний СМО.

Получим аналитические решения для некоторых моделей рассматриваемого класса.

1. Модель преобразователя параллельно-последовательной формы представления информации в последовательную ( $l = 1, h = 2, 3, \dots$ ).

Прежде всего рассмотрим случай, когда  $n = 1, h = 2$ . Система уравнений для вероятностей состояний (7.6) в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} -\lambda p_0 + \mu p_1 &= 0, \\ -(\lambda + \mu) p_1 + \mu p_2 &= 0, \\ \lambda p_{i-2} - (\lambda + \mu) p_i + \mu p_{i+1} &= 0 \quad 1 < i \leq N, \\ \lambda (p_{N-1} + P_N) - \mu p_{N+1} &= 0. \end{aligned}$$

Из этой системы следуют рекуррентные соотношения (где  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ ):

$$\begin{aligned} p_1 &= \rho p_0, \quad p_2 = (1 + \rho) p_1, \\ p_i &= (1 + \rho) p_{i-1} - \rho p_{i-2}, \quad 2 < i \leq N + 1, \end{aligned} \quad (7.8)$$

при помощи которых легко выразить значения всех  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N + 1$ ) через  $p_0$ . Полученные выражения будут иметь вид:

$$p_i = Q_i(\rho) p_0, \quad (7.9)$$

Таблица 7.2

<i>i</i>	<i>j</i>									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	3	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	3	4	1	0	0	0	0
6	0	0	0	1	6	5	1	0	0	0
7	0	0	0	0	4	10	6	1	0	0
8	0	0	0	0	1	10	15	7	1	0
9	0	0	0	0	0	5	20	21	8	1
10	0	0	0	0	0	1	15	35	28	9
11	0	0	0	0	0	0	6	35	56	36
12	0	0	0	0	0	0	1	21	70	84
13	0	0	0	0	0	0	0	7	56	126
14	0	0	0	0	0	0	0	1	28	126
15	0	0	0	0	0	0	0	0	8	84
16	0	0	0	0	0	0	0	0	1	36

где  $Q_i(\rho)$  — многочлен по степеням  $\rho$ . Коэффициенты многочлена определяются величиной  $i$ , а также степенью  $\rho$ , при котором они стоят. Сведем значения коэффициентов в таблицу, столбцы которой соответствуют значениям степеней  $\rho$  (обозначим их как  $j$ ), а строки — величинам  $i$  (табл. 7.2). Из анализа таблицы следует, что

$$D_{ij}^{(2)} = D_{i-1, j-1}^{(2)} + D_{i-2, j-1}^{(2)},$$

где  $D_{ij}^{(2)}$  — элемент табл. 7.2, соответствующий  $i$ -й строке и  $j$ -му столбцу. Можно отметить, что

$$D_{ij}^{(2)} = \binom{i}{i-j} = \frac{j!}{(i-j)!(2j-i)!}.$$

Тогда

$$p_i = \sum_{j=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^i D_{ij}^{(2)} \rho^j p_0 = \sum_{j=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^i \binom{j}{i-j} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j p_0,$$

$$i = 1, 2, \dots, N+1.$$

Подставляя эти соотношения в условие нормировки

$$\sum_{i=0}^{N+1} p_i = 1,$$

получим

$$p_i = \frac{\sum_{s=\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}^i \binom{s}{i-s} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{\sum_{k=0}^{N+1} \sum_{j=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^k \binom{j}{k-j} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}, \quad i = 0, 1, \dots, N+1.$$

Аналогично можно выполнить исследование при любом другом значении величины  $h$ . Коэффициенты многочленов (7.9) в общем случае можно найти из следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} D_{ij}^{(h)} &\equiv 0, \quad i, j < 0, \quad i \neq j; \\ D_{ii}^{(h)} &\equiv 1 \quad i = 0, -1, -2, \dots; \\ D_{ij}^{(h)} &= \sum_{k=1}^h D_{i-k, j-1}^{(h)}, \quad i, j \geq 0. \end{aligned}$$

2. Модель преобразователя последовательной формы представления информации в параллельно-последовательную ( $l = 2, 3, \dots$ ;  $h = 1$ ).

Рассмотрим вариант, когда  $n = 1$ ,  $l = 2$ . Система уравнений (7.6) для этого случая имеет вид:

$$\begin{aligned} -\lambda p_0 + \mu p_2 &= 0; \\ \lambda p_0 - \lambda p_1 + \mu p_3 &= 0; \\ \lambda p_{i-1} - (\lambda + \mu) p_i + \mu p_{i+2} &= 0, \quad 1 < i \leq N; \\ \lambda p_N - (\lambda + \mu) p_{N+1} &= 0; \\ \lambda p_{N+1} - \mu p_{N+2} &= 0. \end{aligned}$$

Произведем замену переменных

$$q_j = p_{N+2-j}, \quad j = 0, 1, \dots, N+2.$$

Тогда система рекуррентных соотношений для  $q_j$  ( $j = 0, 1, \dots, N+1$ ) будет совпадать с системой (7.8).

При других значениях  $l$  система рекуррентных соотношений будет совпадать с (7.9) при соответствующем значении величины  $h$ , что дает возможность использовать результаты решения модели ( $l = 1, h = 2, 3, \dots$ ) в рассматриваемом случае ( $h = 1, l = 2, 3, \dots$ ).

Отличительной особенностью рассматриваемого варианта является то, что система рекуррентных соотношений сохраняет свой вид при любом  $n$ , что дает возможность без особого труда получать аналогичные решения и для многолинейного варианта. Для этого случая в систему рекуррентных соотношений вместо  $\mu$  везде следует подставлять  $n\mu$ .

*Пример.* Оценим влияние неоднородности потоков событий на величину коэффициента использования обслуживающего устройства. Показателем использо-

вания обслуживающего устройства является вероятность простоя системы. Для модели преобразователя параллельно-последовательной формы информации в последовательную выражение для вероятности простоя имеет вид ( $k = 3$ ):

$$p_0 = 1 / \sum_{i=0}^{N+1} \sum_{j=s_i}^i D_{ij}^{(3)} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j,$$

где

$$s_i = \{(i + 2)/3\}; D_{ij}^{(3)} = D_{i-1, j-1}^{(3)} + D_{i-2, j-1}^{(3)} + D_{i-3, j-1}^{(3)}, \quad i, j \geq 0;$$

где  $\lambda$  — параметр входного потока;  $\mu$  — интенсивность обслуживания;  $N$  — число мест ожидания.

Для аналогичной системы с ординарными потоками при том же значении величины нагрузки, что и для исходной системы, вероятность простоя запишется в виде [5]

$$\bar{p}_0 = \frac{1 - 3\lambda/\mu}{1 - (3\lambda/\mu)^{N+2}},$$

причем нагрузкой системы является величина

$$\rho = 3\lambda/\mu.$$

Критерием, позволяющим оценить влияние неординарности входного потока, может служить функция

$$\delta = f(\rho, N) = 100(p_0 - \bar{p}_0)/\bar{p}_0,$$

представляющая собой относительную разность  $p_0$  и  $\bar{p}_0$ , выраженную в процентах.

Графики функций  $\delta$  приведены на рис. 7.4, из которых следует, что:

- 1) неординарность входного потока заметно влияет на коэффициент простоя системы в области достаточно больших нагрузок;
- 2) с увеличением числа мест ожидания влияние неординарности входного потока уменьшается при  $\rho < 1$  и резко растет в случае  $\rho > 1$ .

Таким образом, при малых  $\rho$  моделями систем с неординарным входным потоком могут выступать обычные СМО с ординарными потоками событий. При больших  $\rho$  необходимо точно учитывать вид входного потока.

## 7.4. Оценка переходного режима реализации алгоритмов управления

Рассмотренные выше модели исследовались в предположении достаточно большой величины времени функционирования комплекса. Между тем характеристики прохождения информации в АСУ на начальном этапе реализации алгоритмов могут существенно отличаться от величин этих характеристик в стационарном режиме. Это явление возникает вследствие отсутствия полезной информации в соответствующих устройствах при смене задач управления и в начальный период функционирования системы.

Характеристики СМО в переходном режиме можно найти, непосредственно решая исходную систему дифференциальных уравнений

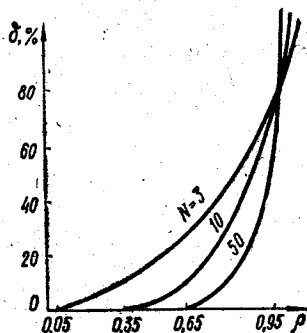


Рис. 7.4.



с учетом начальных условий. Основным затруднением здесь является необходимость определения корней алгебраического уравнения, что весьма затруднительно уже при  $n \geq 3$ .

Рассмотрим метод, позволяющий определить характеристики СМО в начальный период работы.

Пусть имеется система дифференциальных уравнений

$$y_i' = f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_m), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (7.10)$$

причем

$$y_i = y_i(t), \quad y_i(0) = c_i = \text{const.}$$

Исходная система эквивалентна следующей:

$$y_i = y_i^0 + \int_0^t f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_m) dt, \quad (7.11)$$

где  $y_i^0$  — первое приближение решения. В дальнейшем примем

$$y_i^0 = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Вычислив интеграл в правой части (7.11), получим вторую систему приближений, определяемую соотношениями

$$y_i^1 = c_i + \int_0^t f_i(t, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0) dt.$$

Можно записать рекуррентную формулу для определения  $(k+1)$ -й системы приближений

$$y_i^{k+1} = c_i + \int_0^t f_i(t, y_1^k, y_2^k, \dots, y_m^k) dt,$$

где  $y_i^k$  —  $k$ -е приближение решения,

$$0 \leq k \leq r, \quad r = \text{const.}$$

Известно [6], что при  $r \rightarrow \infty$  функции  $y_i^r$  равномерно сходятся к предельным функциям  $y_i(t)$ , удовлетворяющим исходной системе (7.10) и начальным условиям.

Изложенный метод последовательных приближений можно использовать для получения решений СМО в переходном режиме. В общем случае система линейных дифференциальных уравнений имеет вид

$$p_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} p_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

причем

$$p_i = p_i(t) \quad \text{и} \quad p_i(0) = c_i = \text{const.}$$

В качестве нулевой системы приближений примем начальные условия, т. е.

$$p_i^0 = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

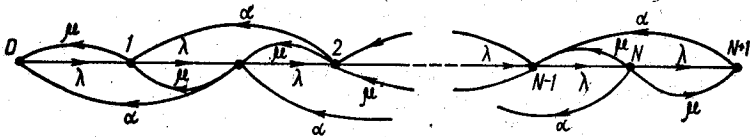


Рис. 7.5.

Последовательно получим системы приближений:  
первую

$$p_i^1 = c_i + \int_0^t \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} p_j^0 dt = c_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} c_j t;$$

вторую

$$p_i^2 = c_i + \int_0^t \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} p_j^1 dt = c_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} c_j t + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} c_k \frac{t^2}{2}.$$

Аналогично для  $m$ -й системы приближений можно записать

$$p_i^m = c_i + \sum_{k=1}^m \left( \sum_{j_1=1}^n \alpha_{ij_1} \sum_{j_2=1}^n \alpha_{j_1 j_2} \dots \sum_{j_k=1}^n \alpha_{j_{k-1} j_k} c_{j_k} \frac{t^k}{k!} \right). \quad (7.12)$$

Примем изложенную методику для определения характеристик переходного режима для СМО с ограниченным числом мест ожидания и одним пуассоновским входным потоком с параметром  $\lambda$ . Обслуживание может равновероятно производиться как одной заявкой (со средней длительностью  $b_1$ ), так и двух заявок одновременно (со средней длительностью  $b_2$ ), причем в последнем варианте одна из обслуживаемых заявок занимает определенное место ожидания в очереди. Граф переходов такой СМО для произвольного  $N$  приведен на рис. 7.5, при  $N = 2$  система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} p_0 &= -\lambda p_0 + \mu p_1 + \alpha p_2; \\ p_1 &= \lambda p_0 - (\lambda + \mu) p_1 + \mu p_2 + \alpha p_3; \\ p_2 &= \lambda p_1 - (\lambda + \mu + \alpha) p_2 + \mu p_3; \\ p_3 &= \lambda p_2 - (\alpha + \mu) p_3, \end{aligned} \quad (7.13)$$

причем

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(t), \quad i = 0, 1, 2, 3; \\ p_0(0) &= 1, \quad p_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Величины параметров потоков обслуживания можно найти из следующих соотношений:

$$\mu = \frac{1}{2b_1}, \quad \alpha = \frac{1}{2b_2} \dots$$

Для исследования асимптотики поведения решений зададимся некоторыми значениями для  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  и построим график для  $P_i^m(t)$  при различных величинах степеней приближений  $m$ . На рис. 7.6

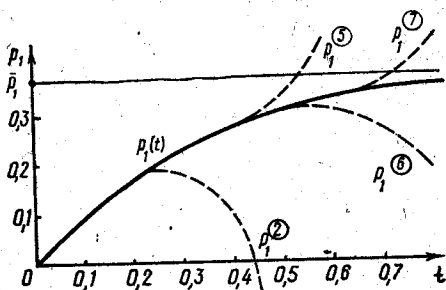


Рис. 7.6.

приведены соответствующие графики для  $m = 2, 5, 6, 7$ .

Кроме того, получим значение  $p_i$  в стационарном режиме, для чего следует в левых частях системы (7.13) подставить нули, а вместо одного из уравнений системы (7.13) записать условие нормировки

$$\sum_{i=0}^3 p_i = 1.$$

Полученное значение  $\bar{p}_i$  для стационарного режима также отложим на рис. 7. 6.

Из всей изложенной, методики, а также из графика рис. 7. 6 можно сделать следующие выводы:

1. При возрастании  $m$  и  $t$  решение асимптотически стремится к решению в стационарном режиме.

2. Знак погрешности решения определяется знаком последнего члена полинома Тейлора (7.12) и равен ему.

3. Если начальное значение определяемой величины меньше значения той же величины в стационарном режиме, то следует выбирать степень приближения, дающую положительную погрешность. В противном варианте лучше, когда степень приближения соответствует отрицательной погрешности. Для обоих случаев при таком выборе решение быстрее достигает величины установившегося режима.

4. Метод принципиально пригоден только для получения характеристик СМО на начальном этапе работы (в переходном режиме) и при достаточной степени приближения дополняет методы решения СМО в стационарном режиме до общего случая.

#### Контрольные вопросы

1. В чем заключаются особенности марковских моделей с непрерывным временем? Назвать основные этапы их построения. Привести простейший пример.
2. Объяснить необходимость исследования переходных режимов в системах обработки информации (система с резервированием, распределенные вычислительные системы и др.).
3. Перечислить показатели функционирования системы, получаемые при расчете эффективности УЦВК и АСУ.
4. Для многолинейной системы с ориентированными входными потоками (п. 2.2) подсистем АСУ рассчитать показатели эффективности.
5. Показать особенности неординарных систем обслуживания для моделирования процессов в устройствах сопряжения с объектом. Что является основным показателем функционирования таких систем?
6. Объяснить систему уравнений (2.9), исходя из размеченного графа переходов многолинейной СМО.
7. Составить машинные программы для вычисления основных показателей функционирования системы (7.9). Подобрать реальные исходные данные для УСО в АСУ и рассчитать оценки эффективности.

8. В чем трудности исследования переходных режимов в СМО? Как зависят вероятности состояний от распределения вероятностей в начальный момент?
9. Показать особенности методики исследования стационарных и нестационарных режимов в СМО.
10. Провести расчет переходного режима СМО (7.13) при конкретных числовых данных. Что дают результаты расчетов в дополнение к анализу стационарного режима?

## Глава 8

### НАХОЖДЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК МОДЕЛЕЙ УСТРОЙСТВ АСУ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ФАЗ

#### 8.1. Модели с эрланговскими потоками событий

К эрланговским потокам событий относятся рекуррентные потоки, описываемые распределениями Эрланга (см. п. 6.4). Такие потоки являются обобщением пуассоновских потоков для случая, когда величина

$$g = \sigma^2 / \tau_{\text{ср}}^2 \leq 1,$$

где  $\sigma^2$ ,  $\tau_{\text{ср}}$  — соответственно дисперсия и математическое ожидание промежутка между соседними событиями некоторого потока событий [1].

Поток событий, заданный распределением Эрланга  $k$ -го порядка, можно представить как последовательное прохождение процессом  $k$  фаз, причем время прохождения каждой фазы распределено по экспоненциальному закону, а на всех фазах одновременно должно быть не более одной заявки. В целом, такая совокупность фаз называется регулирующей системой [2], а марковский процесс смены состояний должен учитывать номер проходимой фазы для каждого потока.

Функционирование СМО вида  $E_m/E_n/1/N$  описывается графом изображенным на рис. 8.1. Такой граф, в общем случае, (при произвольных значениях  $m$  и  $n$ ) не будет марковским, что существенно затрудняет исследование системы. Можно предположить, что поступление заявок в систему или обслуживание заявок производится с использованием регулирующей системы, содержащей последовательно расположение фазы. На рис. 8.2. изображен граф, полученный из исходного графа (рис. 8.1) расширением исходного множества состояний путем учета номера фазы регулирующей системы входного потока, а на рис. 8.4 — граф, полученный из исходного графа учетом номера фазы регулирующей системы потока обслуживания.

Если ввести вторую регулирующую систему для СМО вида  $E_m/E_n/1/N$ , то получим расширенное множество состояний, процесс изменения которых уже будет марковским. Соответствующие графы, полученные из графов рис. 8.2 и 8.4, изображены (соответственно) на рис. 8.3 и 8.5. Из сравнительного анализа этих графов видно, что графы на рис. 8.3 и 8.5 эквивалентные, так как описывают

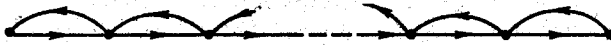


Рис. 8.1.

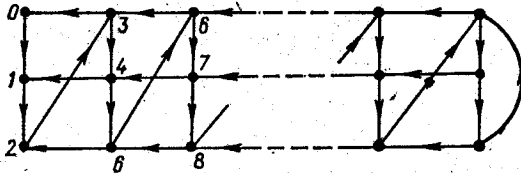


Рис. 8.2.

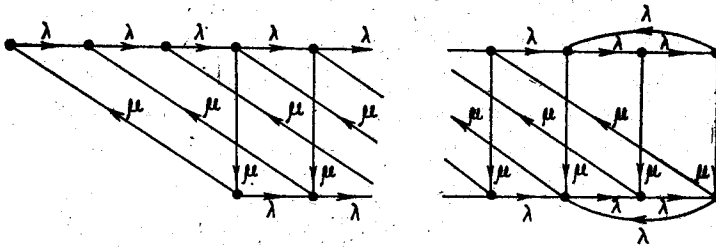


Рис. 8.3.

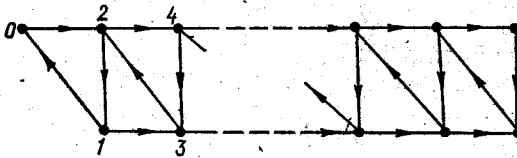


Рис. 8.4.

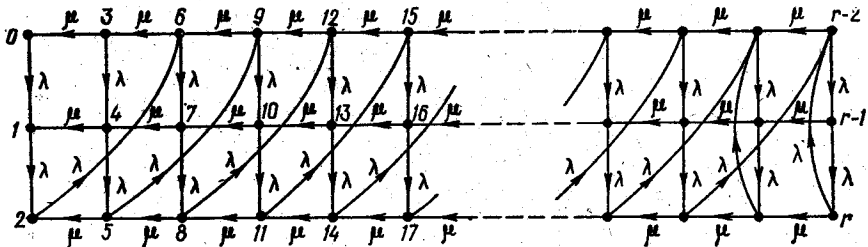


Рис. 8.5.

марковский процесс в одной и той же СМО. Однако для целей формального анализа СМО лучшим образом подходит граф рис. 8.5, которым и будем пользоваться в дальнейшем.

Используя формальную методику составления уравнений СМО, описываемых марковскими процессами (п.7.1), запишем систему (8.1) дифференциальных уравнений для вероятностей состояний расширенного множества (граф соответствует рис. 8.5):

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_0 &= -\lambda q_0 + \mu q_m; \\
 \dot{q}_i &= \lambda q_{i-1} - \lambda q_i + \mu q_{i+m}; & i = 1, 2, \dots, m-1; \\
 \dot{q}_i &= -(\lambda + \mu) q_i + \mu q_{i+m}; & i = m, 2m, \dots, (n-1)m
 \end{aligned}$$

$$q_i = -(\lambda + \mu) q_i + \mu q_{i+m} + \lambda q_{i-m(n-1)-1},$$

$$i = nm, (n+1)m, \dots, Nnm;$$

$$q'_i = \lambda q_{i-m(n-1)-1} - (\lambda + \mu) q_i + \mu q_{i+m} + \lambda q_{i+m-1};$$

$$i = (Nn+1)m, (Nn+2)m, \dots, (Nn+n-1)m; \quad (8.1)$$

причем

$$q_{r-m+1} = \lambda q_{r-mn} - (\lambda + \mu) q_{r-m+1} + \lambda q_r,$$

$$r = (N+1)mn + m - 1;$$

$$q'_{r-j} = \lambda q_{r-j-1} - (\lambda + \mu) q_{r-j}; \quad j = 0, 1, \dots, m-2;$$

$$q'_i = \lambda q_{i-1} - (\lambda + \mu) q_i + \mu q_{i+m}$$

— при всех других значениях индекса  $i$ .

В приведенных уравнениях

$$q_i = q_i(t), \quad i = 0, 1, \dots, r,$$

причем  $q_i$  — вероятность пребывания системы в  $i$ -м состоянии расширенного множества;  $t$  — время функционирования системы;  $r$  — максимальный номер состояний расширенного множества;  $\lambda, \mu$  — параметры потоков (входного и обслуживания).

В стационарном режиме (при  $t \rightarrow \infty$ ) полученная система дифференциальных уравнений переходит в систему линейных алгебраических уравнений (так как  $q_i = \text{const}$  и  $q'_i = 0$ ), имеющую единственное решение вместе с условием нормировки

$$\sum_{i=0}^r q_i = 1. \quad (8.2)$$

Однако в общем случае аналитическое решение этой системы уравнений оказывается весьма затруднительным.

В связи с этим был разработан алгоритм получения решений исходной системы алгебраических уравнений, основанный на использовании представления

$$q_i = \sum_{j=0}^{m-1} D_{ij} q_j, \quad i = 0, 1, \dots, r, \quad (8.3)$$

для сведения исходной системы уравнений с  $(N+1)mn + m$  неизвестными к системе уравнений вида

$$\sum_{j=0}^{m-1} c_{kj} q_j = c_{k0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad (8.4)$$

с  $m$  неизвестными. Так как величина  $m$  обычно невелика (несколько единиц), то предлагаемый метод позволяет существенно упростить нахождение решений СМО достаточно общего вида с эрланговскими потоками событий.

Общий вид алгоритма решения СМО вида  $E_m/E_n/1/N$  приведен на рис. 8.6. Операторы 3...24 позволяют находить коэффициенты

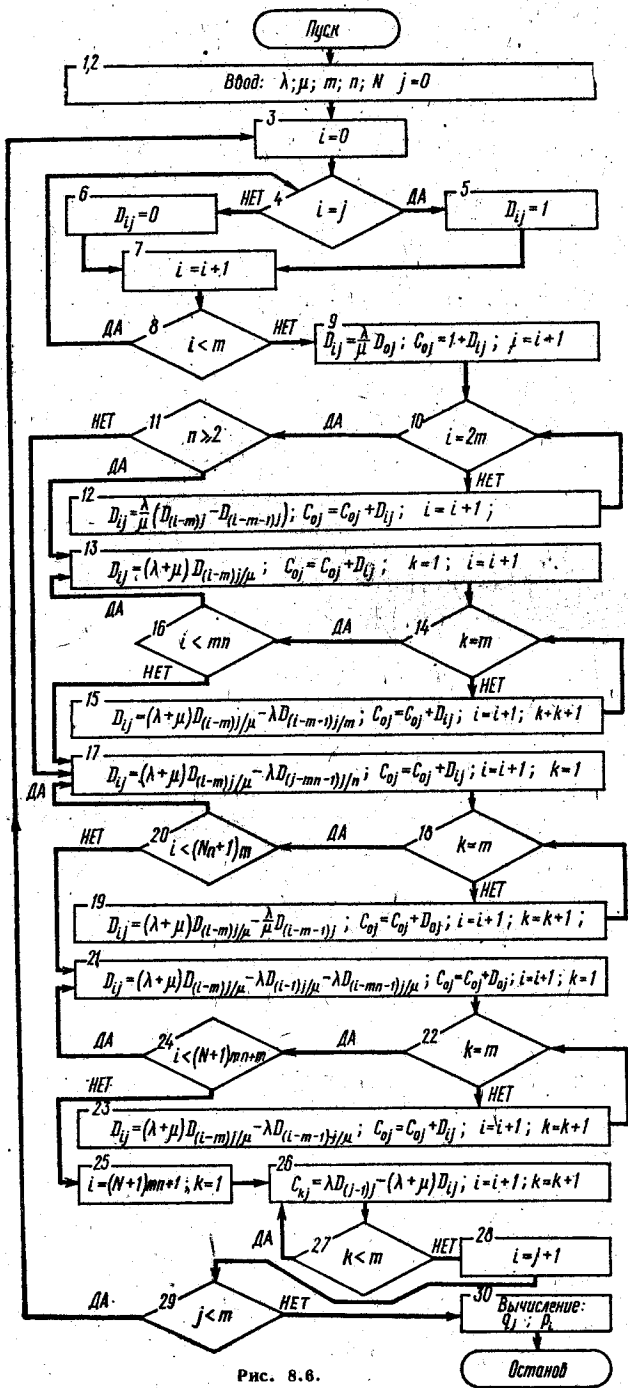


Рис. 8.6.

$D_{11}$ , при этом используются уравнения для первых  $r-m$  состояний СМО. Подставляя выражения (8.3) в условие нормировки (8.2) и в уравнения для последних  $m-1$  состояний СМО, получим результирующую систему уравнений (8.4). Для нахождения коэффициентов этой системы уравнений служат операторы 25...27. Операторы 1, 2, 28, 29 являются служебными для формирования цикла по  $j$ . Наконец, оператор 30 предназначен для нахождения решений системы уравнений (8.4), а также (при необходимости) требуемых вероятностей расширенного или исходного множества состояний. Переход к вероятностям исходного множества состояний (отличающихся числом заявок в системе) выполняется по формулам:

$$p_0 = \sum_{i=0}^{m-1} q_i;$$

$$p_i = \sum_{j=1}^{mn} q_{m(nj+i)-j}, \quad i = 1, 2, \dots, N+1.$$

Нахождение вероятностей состояний существенно упрощается, если один из потоков СМО описывается экспоненциальным распределением (т. е. когда  $m = 1$  или  $n = 1$ ). Так, марковский граф переходов системы  $E_m/M/1/N$  (и соответствующая система управлений) в своей общей части совпадает с графом пуассоновской СМО с неординарным потоком обслуживания вида  $M/M^{(h)}/1/N$ , когда  $m = 1$ . Отсюда следует, что для нахождения аналитических решений СМО вида  $E_m/M/1/N$  можно использовать методику, изложенную в п. 7.3. Если же достаточно ограничиться нахождением числовых решений СМО, то можно построить алгоритм нахождения величин  $q_i$ , в основу которого будет положено следующее рекуррентное соотношение:

$$q_i = \frac{\lambda + \mu}{\mu} q_{i-m} - \frac{\lambda}{\mu} q_{i-m-1}, \quad i = 2m, 2m+1, \dots, (N+2)m-1.$$

Аналогично, граф СМО вида  $M/E_n/1/N$  (и соответствующая система уравнений) в своей общей части совпадает с графом пуассоновской СМО с неординарным входным потоком  $M^{(h)}/M/1/N$ , когда  $n = h$ , тогда и в этом случае можно воспользоваться методикой п. 7.3.

Для нахождения функции распределения времени ожидания  $F_m(x)$  заявки в системе  $E_m/E_n/1/N$  воспользуемся формулой полной вероятности, которая для этого случая имеет вид

$$F_m(x) = P\{t_{ож} < x\} = \sum_{i=0}^r q_i P_i(x),$$

где  $P_i(x)$  — вероятность выполнения неравенства  $t_{ож} < x$  при условии, что входящая заявка застала СМО в состоянии  $i$ .

Можно записать, что:

$$P_i(x) = 1, \quad i = 0, 1, \dots, m-1;$$



$$P_i(x) = 1 - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{i-m}{m} \rfloor} \frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-\mu x}, \quad m \leq i < (Nn + 1)m;$$

$$P_i(x) = 0, \quad i \geq (Nn + 1)m.$$

## 8.2. Модели с гиперэкспоненциальными потоками событий

Гиперэкспоненциальными будем называть потоки, описываемые гиперэкспоненциальными распределениями (см. п. 6.4). Эти потоки являются обобщением пуассоновских для случая, когда величина

$$g = \sigma^2 / \tau_{cp}^2 \geq 1,$$

где  $\sigma^2$  и  $\tau_{cp}$  — соответственно дисперсия и математическое ожидание промежутка между соседними событиями потока.

В настоящем параграфе ограничимся изучением СМО с гиперэкспоненциальными потоками второго порядка, так как уже при втором порядке гиперэкспоненциального распределения покрывается весь диапазон  $1 \leq g < \infty$ . В связи с этим для обозначения гиперэкспоненциального потока используем символ  $H$  без индекса (полагая, что он равен двум).

Представим функционирование СМО вида  $H/H/1/N$  в виде графа, изображенного на рис. 8.1, причем входной поток задан распределением вида

$$A(t) = 1 - a_1 e^{-\lambda_1 t} - a_2 e^{-\lambda_2 t},$$

а поток обслуживания

$$B(t) = 1 - b_1 e^{-\mu_1 t} - b_2 e^{-\mu_2 t}.$$

Такой граф в общем случае не будет марковским, однако с вводом регулирующей системы для каждого из потоков образуется расширенное множество состояний, граф переходов для которых уже будет марковским.

На рис. 8.7 изображен граф, полученный из исходного (рис. 8.1) расширением исходного множества состояний за счет ввода регулирующей системы для входного потока, а на рис. 8.8 — граф, полученный из исходного графа с учетом номера фазы регулирующей системы потока обслуживания. Граф переходов для расширенного множества состояний СМО с двумя регулируемыми системами показан на рис. 8.9.

Так как последний граф является марковским, то ему соответствует система дифференциальных уравнений для вероятностей

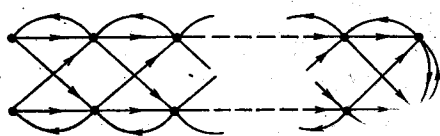


Рис. 8.7.

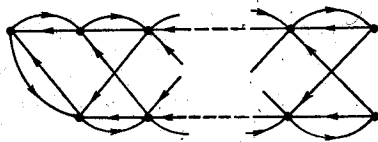


Рис. 8.8.

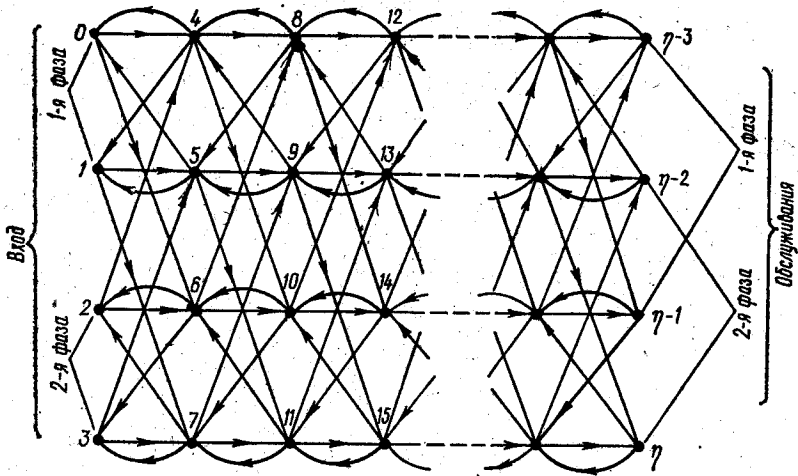


Рис. 8.9.

состояний расширенного множества (ее можно получить с использованием формальной методики п.7.1).

В стационарном режиме (при  $t \rightarrow \infty$ ) в левой части уравнений появляются нули, а образованная при этом система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение вместе с условием нормировки вида (8.2). Аналитическое решение этой системы оказывается весьма затруднительным.

Более того, для СМО вида  $H/H/1/N$  не удаётся составить даже алгоритм решения (например, аналогичный алгоритму для модели  $E_m/E_n/1/N$ , который приведен в предыдущем параграфе).

Единственным способом получения решения в этом случае является использование стандартных программ решения систем линейных алгебраических уравнений универсальной ЭВМ.

При достаточно большом числе мест ожидания  $N$  рассмотренная выше модель переходит в СМО с ожиданием вида  $H/H/1$ . Приведем вывод выражения для функции распределения времени ожидания с использованием метода интегрального уравнения Линдли [4]. При этом используем следующую теорему.

**Теорема.** Если возможно представление

$$\beta(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dB(x) = P_m(s)/Q_n(s), \quad (8.5)$$

где  $Q_n(s)$  — многочлен степени  $n$ , а  $P_m(s)$  — многочлен степени  $m$  и существует такое  $\lambda$ , что функция  $e^{\lambda t} [1 - A(s)]$  имеет ограниченную вариацию в  $(0, \infty)$ , то преобразование Лапласа — Стильтеса функции распределения времени ожидания  $F_M(x)$  записывается в виде

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_M(x) = \frac{Q_n(s)}{Q_n(0) \prod_{i=1}^n (1 - s/\xi_i)}, \quad (8.6)$$

где  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) нули уравнения

$$1 - \alpha(-s)\beta(s) = 0,$$

лежащие в левой полуплоскости  $\text{Re}(s) < 0$ , причем  $\alpha(s)$  и  $\beta(s)$  — преобразования Лапласа — Стильтьеса функций распределения (соответственно)  $A(t)$  и  $B(t)$ .

Для СМО вида  $H/H/1$

$$\beta(s) = \frac{b_1\mu_1(\mu_2 + s) + b_2\mu_2(\mu_1 + s)}{(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)},$$

т. е. возможно представление (8.6). Тогда, используя (8.6), можно записать

$$\varphi(s) = \frac{(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}{\mu_1\mu_2 \left(1 - \frac{s}{\xi_1}\right) \left(1 - \frac{s}{\xi_2}\right)},$$

где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — корни уравнения

$$1 - \left(\frac{a_1\lambda_1}{\lambda_1 - s} + \frac{a_2\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right) \left(\frac{b_1\mu_1}{\mu_1 + s} + \frac{b_2\mu_2}{\mu_2 + s}\right) = 0,$$

лежащие в левой полуплоскости  $\text{Re}(s) < 0$ .

Переходя к оригиналу (например, используя вычеты [5]), получим

$$F_m(x) = 1 - \frac{(\mu_1 + \xi_1)(\mu_2 + \xi_2)e^{\xi_1 x}}{\mu_1\mu_2(1 - \xi_1/\xi_2)} - \frac{(\mu_1 + \xi_2)(\mu_2 + \xi_1)e^{\xi_2 x}}{\mu_1\mu_2(1 - \xi_2/\xi_1)}.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди на обслуживание

$$t_{ож} = \int_0^{\infty} x dF_m(x) = \frac{(\mu_1 + \xi_1)(\mu_2 + \xi_1)}{(-\xi_1)\mu_1\mu_2(1 - \xi_1/\xi_2)} + \frac{(\mu_1 + \xi_2)(\mu_2 + \xi_2)}{(-\xi_2)\mu_1\mu_2(1 - \xi_2/\xi_1)}.$$

### 8.3. Модели с эрланговским входным потоком и гиперэкспоненциальным распределением времени обслуживания

По классификации Кендалла (см. п. 6.6) указанные модели с ограниченным числом мест ожидания обозначаются как  $E_m/H/1/N$ . Вводя регулируемую систему по методу фаз для каждого из потоков, можно получить расширенное множество состояний, граф переходов для которых будет марковским. Для СМО вида  $E_2/H/1/N$  такой граф представлен на рис. 8.10. Максимальный номер состояний расширенного множества

$$r = 2(N + 2)m - 1.$$

Используя формальную методику п. 7.1, получаем следующую систему уравнений для вероятностей состояний расширенного множества:

$$q_0 = b_1(\mu_1 q_{2m} + \mu_2 q_{2m+1}) - \lambda q_0;$$

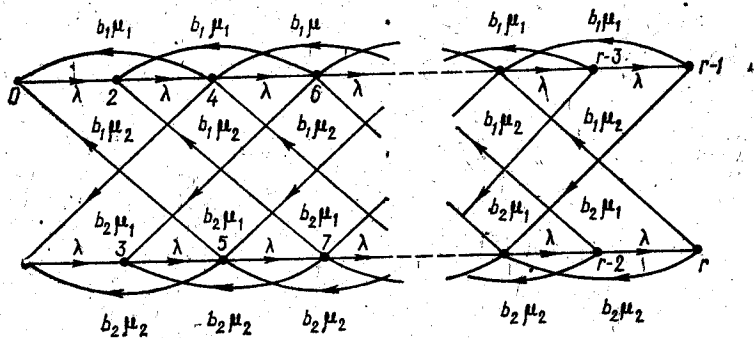


Рис. 8.10.

$$q_1 = b_2 (\mu_1 q_{2m} + \mu_2 q_{2m+1}) - \lambda q_1;$$

$$q_i = \lambda q_{i-2} - \lambda q_i + b_1 (\mu_1 q_{i+2m} + \mu_2 q_{i+2m+1}), \quad i = 2, 4, \dots, 2m - 2;$$

$$q_i = \lambda q_{i-2} - \lambda q_i + b_2 (\mu_1 q_{i+2m-1} + \mu_2 q_{i+2m}), \quad i = 3, 5, \dots, 2m - 2;$$

$$q_i = \lambda q_{i-2} - (\lambda + \mu_1) q_i + b_1 (\mu_1 q_{i+2m} + \mu_2 q_{i+2m+1}),$$

$$i = 2m, 2m + 2, \dots, r - 2m - 1;$$

$$q_i = \lambda q_{i-2} - (\lambda + \mu_2) q_i + b_2 (\mu_1 q_{i+2m-1} + \mu_2 q_{i+2m}),$$

$$i = 2m + 1, 2m + 3, \dots, r - 2m;$$

$$q_i = \lambda q_{i-2} - (\lambda + \mu_1) q_i, \quad i = r - 2m + 1, r - 2m + 3, \dots, r - 3;$$

$$q_i = \lambda q_{i-2} - (\lambda + \mu_2) q_i, \quad i = r - 2m + 2, r - 2m + 4, \dots, r - 2;$$

$$q_{r-1} = \lambda q_{r-3} - \mu_1 q_{r-1};$$

$$q_r = \lambda q_{r-2} - \mu_2 q_r.$$

Здесь (как и ранее)

$$q_i = q_i(t), \quad i = 0, 1, \dots, r.$$

В стационарном режиме

$$q_i = \text{const} \quad \text{и} \quad \dot{q}_i = 0,$$

Тогда полученная при этом система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение вместе с условием нормировки вида (8.2). Для нахождения значений вероятностей  $q_i$  в стационарном режиме построим алгоритм, в основу которого положено представление

$$q_i = \sum_{j=r-1}^r D_{ij} q_j, \quad i = 0, 1, \dots, r. \quad (8.7)$$

Блок-схема алгоритма приведена на рис. 8.11.

Операторы 1...21 позволяют определить все коэффициенты вида  $D_{ij}$ . Оператор 22 позволяет находить значения опорных веро-

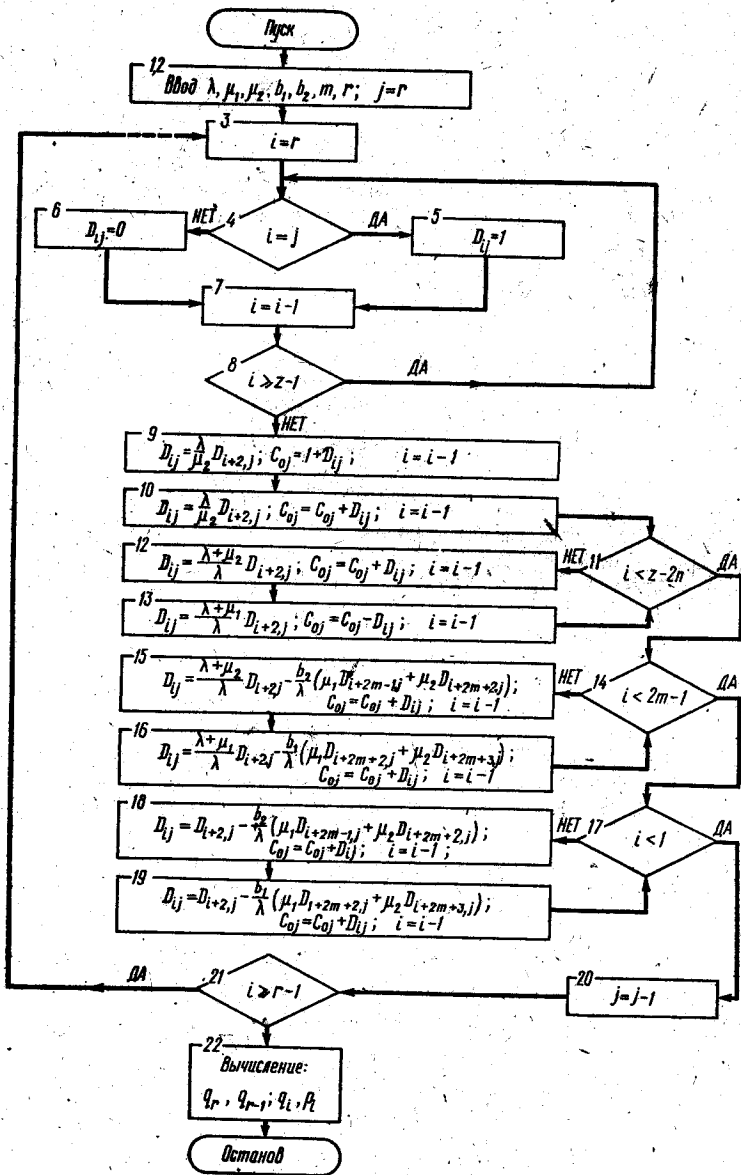


Рис. 8.11.

ятностей  $q_r$  и  $q_{r-1}$ , после чего можно вычислить вероятность любого состояния расширенного множества (используя 8.7), а также найти вероятности нахождения в СМО  $i$  заявок из выражения

$$p_i = \sum_{j=0}^{2m-1} q_{2mi+j}, \quad i = 0, 1, \dots, N+1.$$

Приведем нахождение функции распределения времени ожидания для СМО вида  $E_m/E_n/1$ , т. е. в отличие от ранее рассмотренных вариантов гиперэкспоненциальный поток задан в общем виде. Как и раньше, будет использован метод Линдли.

Заметим, что для исследуемой системы возможно представление (8.5). Тогда, используя (8.6), запишем

$$\varphi(s) = \frac{Q_n(s)}{Q_n(0) \prod_{t=1}^n \left(1 - \frac{s}{g_t}\right)}, \quad Q_n(s) = \prod_{t=1}^n (\mu_t + s),$$

где  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — корни уравнения

$$1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda - s}\right)^m \sum_{t=1}^n \frac{b_t \mu_t}{\mu_t + s} = 0, \quad (8.8)$$

лежащие в левой полуплоскости  $\text{Re}(s) < 0$ .

Среднее время ожидания в очереди

$$t_{\text{ож}} = -\varphi'(0) = \sum_{t=1}^n \left[ \frac{1}{\lambda(z_t - 1)} - \frac{1}{\mu_t} \right], \quad z_t = 1 - \frac{g_t}{\lambda}.$$

Дисперсия времени ожидания в очереди

$$\sigma_{\text{ож}}^2 = m_2 - t_{\text{ож}}^2, \quad (8.9)$$

где  $m_2$  — второй начальный момент времени ожидания, причем  $m_2 = \varphi''(0)$ . Найдя  $m_2$  и подставив в (8.9)  $t_{\text{ож}}^2$  и  $m_2$ , после преобразований получим

$$\sigma_{\text{ож}}^2 = \sum_{t=1}^n \left[ \frac{1}{\lambda^2 (z_t - 1)^2} - \frac{1}{\mu_t^2} \right].$$

#### 8.4. Модели с гиперэкспоненциальным входным потоком и эрланговским распределением времени обслуживания

Исследование моделей указанного вида во многих чертах повторяет основные этапы предыдущего параграфа. Использование метода фаз для СМО  $H/E_n/1/N$  позволяет получить расширенное множество состояний, граф переходов для которых будет марковским. На рис. 8.12 приведен такой граф для СМО вида  $H/E_3/1/N$ , причем максимальный номер состояний расширенного множества

$$r = 2(N+2)n - 1.$$

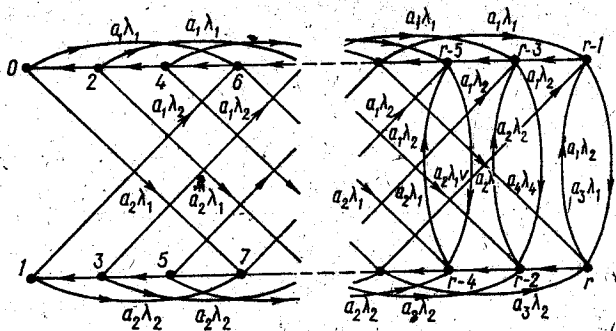


Рис. 8.12.

Для вероятностей состояний расширенного множества  $q_i$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ) получим следующую систему дифференциальных уравнений;

$$q'_0 = -\lambda_1 q_0 + \mu q_1;$$

$$q'_1 = -\lambda_2 q_1 + \mu q_2;$$

$$q'_i = -(\lambda_1 + \mu) q_i + \mu q_{i+2}, \quad i = 2, 4, \dots, 2n-2;$$

$$q'_i = -(\lambda_2 + \mu) q_i + \mu q_{i+2}, \quad i = 3, 5, \dots, 2n-1;$$

$$q'_i = a_1 (\lambda_1 q_{i-2n} + \lambda_2 q_{i-2n+1}) - (\lambda_1 + \mu) q_i + \mu q_{i+2};$$

$$i = 2n, 2n+2, \dots, r-2n-1;$$

$$q'_i = a_2 (\lambda_1 q_{i-2n-1} + \lambda_2 q_{i-2n}) - (\lambda_2 + \mu) q_i + \mu q_{i+2},$$

$$i = 2n+1, 2n+3, \dots, r-2n;$$

$$q'_i = a_1 (\lambda_1 q_{i-2n} + \lambda_2 q_{i-2n+1}) - (a_2 \lambda_1 + \mu) q_i + \mu q_{i+2} + a_1 \lambda_2 q_{i+1};$$

$$i = r-2n+1, r-2n+3, \dots, r-3;$$

$$q'_i = a_2 (\lambda_1 q_{i-2n-1} + \lambda_2 q_{i-2n}) - (a_1 \lambda_2 + \mu) q_i + \mu q_{i+2} + a_2 \lambda_1 q_{i-1},$$

$$i = r-2n+2, r-2n+4, \dots, r-2;$$

$$q'_{r-1} = a_1 (\lambda_1 q_{r-2n} + \lambda_2 q_{r-2n+1}) - (a_2 \lambda_1 + \mu) q_{r-1} + a_1 \lambda_2 q_r;$$

$$q'_r = a_2 (\lambda_1 q_{r-2n-1} + \lambda_2 q_{r-2n}) - (a_1 \lambda_2 + \mu) q_r + a_2 \lambda_1 q_{r-1}.$$

Приведенная система уравнений описывает любой момент функционирования СМО. В стационарном режиме

$$q_i = \text{const}, \quad q'_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r,$$

и в этом случае система уравнений для вероятностей состояний имеет единственное решение вместе с условием нормировки (8.2).

При построении алгоритма нахождения величин  $q_i$  (для стационарного режима) используем представление

$$q_i = \sum_{j=0}^i D_{ij} q_j, \quad i = 0, 1, \dots, r. \quad (8.10)$$

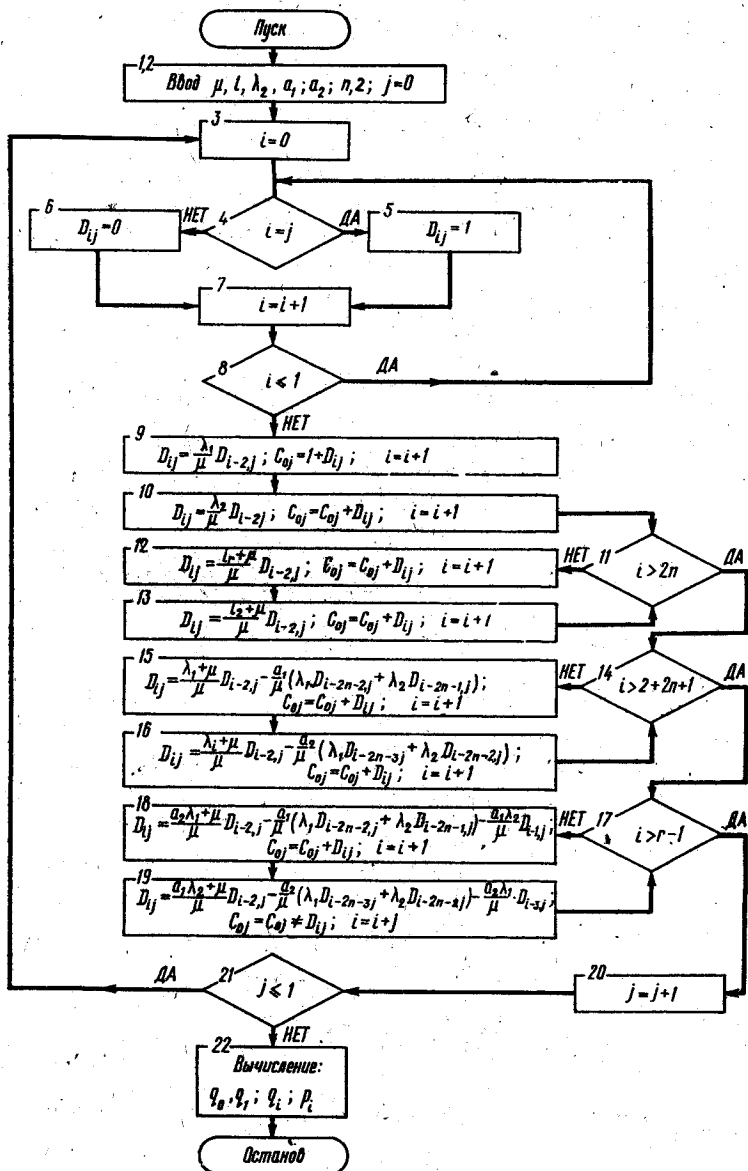


Рис. 8.13.



Блок-схема алгоритма приведена на рис. 8.13, где операторы  $T...21$  предназначены для нахождения коэффициентов вида  $D_{ij}$ , а также величин

$$c_{0j} = \sum_{i=0}^j D_{ij}, \quad j = 0, 1.$$

Оператор 22 производит формирование величин опорных вероятностей.

Наличие величин опорных вероятностей позволяет определить вероятность любого состояния расширенного множества с использованием представления (8.10) и найти вероятности состояний, отличающихся числом заявок в СМО по формуле

$$p_i = \sum_{j=0}^{2n-1} q_{2ni+j}, \quad i = 0, 1, \dots, N+1.$$

Рассмотрим СМО с ожиданием вида  $H_m/E_n/1$ . Для установившегося режима рассматриваемой системы существует функция распределения времени ожидания  $F_m(x)$ , для нахождения которой используется метод интегрального уравнения Линдли [4]. Соответствующее факторизационное уравнение имеет вид

$$\varphi(s) = \alpha(-s)\beta(s) - 1 = \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^n \sum_{i=1}^m \frac{a_i \lambda_i}{\lambda_i - s} - 1.$$

Заметим, что функция  $\beta(s)$  допускает представление (8.5) в виде:

$$\beta(s) = \frac{\mu^n}{(\mu+s)^n} = \frac{P_0(s)}{Q_n(s)}.$$

Тогда можно использовать уравнение (8.6) и записать, что

$$\varphi(s) = \frac{(\mu+s)^n}{\mu^n \prod_{i=1}^n (1-s/g_i)},$$

где  $g_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  — корни уравнения

$$\gamma(s) = 0, \quad (8.11)$$

лежащие в левой полуплоскости  $\text{Re}(s) < 0$ .

Положим, что

$$s = \mu(z-1), \quad (8.12)$$

тогда уравнение (8.11) переписется в виде

$$\sum_{i=1}^m \frac{a_i \lambda_i}{\lambda_i + \mu(1-z)} - z^n = 0. \quad (8.13)$$

Уравнение (8.13) имеет  $n$  корней в круге  $|z| = 1$  (включая кратные).

Тогда

$$\varphi(s) = (\mu + s)^n \prod_{i=1}^n \frac{(z_i - 1)}{\mu(z_i - 1) - s}, \quad z_i = 1 - \frac{g_i}{\mu}. \quad (8.14)$$

Среднее время ожидания в очереди

$$t_{\text{ож}} = -\varphi'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu(1-z_i)} = \frac{n}{\mu}.$$

Дисперсия времени ожидания в очереди

$$\sigma_{\text{ож}}^2 = m_2 - t_{\text{ож}}^2, \quad (8.15)$$

где  $m_2$  — второй начальный момент времени ожидания

$$m_2 = \varphi''(0).$$

Найдя  $m_2$  и подставив в (8.15) после преобразований, получим

$$\sigma_{\text{ож}}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu^2(1-z_i)} = \frac{n}{\mu^2}.$$

#### Контрольные вопросы

1. В чем сущность метода фаз при исследовании моделей АСУ?
2. Каковы особенности систем обслуживания с потоками Эрланга?
3. Показать переход от графа состояний к системе (8.1).
4. Составить программу на ЭВМ для алгоритма (8.3) и просчитать примеры.
5. Какие реальные ситуации отражают гиперэкспоненциальные потоки событий?
6. Рассмотреть особенности анализа систем с гиперэкспоненциальными потоками событий. Проследить переход от графа (рис. 8.9) к соответствующей системе дифференциальных уравнений.
7. Объяснить трудности определения показателей эффективности для систем с гиперэкспоненциальными распределениями.
8. Составить таблицу всех моделей массового обслуживания в данной книге по классификации Кендалла. Показать роль модели при реальном проектировании АСУ на базе УЦВК.
9. В чем сущность и различие метода Кендалла и Линдли при исследовании непуассоновских систем?
10. Для моделей п. 8.3 и 8.4 найти практические примеры из области анализа вариантов УЦВК с оперативным обменом информацией с объектом управления.

### Глава 9

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК НЕПУАССОНОВСКИХ МОДЕЛЕЙ АСУ

##### 9.1. Методика исследования систем обслуживания с кусочными функциями распределения

Ранее было предложено использовать в качестве аппроксимирующих кусочные функции распределения. Особенностью потоков событий, описываемых этими распределениями, является их

несводимость (без специальных методов) к марковским процессам, что существенно усложняет анализ моделей уже при одном потоке, заданном каким-либо кусочным распределением (остальные потоки предполагаются сводимыми к пуассоновским).

Еще большие трудности возникают при решении моделей, в которых несколько потоков событий заданы при помощи кусочных распределений. Во всех случаях моделей с кусочными распределениями приходится использовать специальные методы исследования моделей обслуживания, общей чертой которых является сведение немарковских процессов в СМО с марковским (с дискретным или непрерывным временем).

В том случае, когда только один из потоков событий СМО описан кусочным распределением, для нахождения вероятностей состояний системы используем метод вложенных цепей Маркова (метод Кендалла) [1], позволяющий получить значения вероятностей состояний СМО в стационарном режиме.

Вложенная цепь Маркова — это последовательность событий процесса в специально выбранные моменты времени, так называемых точках регенерации. Момент времени является точкой регенерации, если информация о поведении процесса до этого момента времени не влияет на прогноз дальнейшего поведения процесса. Таким образом, точки регенерации образуют цепь Маркова. Затем методами, обычными для цепей Маркова, исследуется распределение между вероятностями состояний системы.

Будем различать финитные вероятности состояний в произвольный момент времени

$$\bar{p}_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P \{M(t) = k\}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (9.1)$$

где  $P \{M(t) = k\}$  — вероятность нахождения системы в  $k$ -м состоянии в момент времени  $t$ , и финитные вероятности состояний системы в точках регенерации

$$p_s = \lim_{n \rightarrow \infty} P \{H(n) = s\}, \quad s = 0, 1, \dots, \quad (9.2)$$

причем  $P \{H(n) = s\}$  — вероятность нахождения системы в  $s$ -м состоянии в  $n$ -й точке регенерации.

Для пуассоновских систем имеет место равенство вероятностей, найденных по (9.1) и (9.2). В случае непуассоновских СМО приходится определять соотношения между  $\bar{p}_i$  и  $p_i$  для каждого вида систем в отдельности. Методика получения соотношений между вероятностями указанного вида приводится в п. 9.3.

Последовательность решения СМО по методу Кендалла можно представить в следующем виде:

1. Выделение точек регенерации, конкретизация событий, происходящих в окрестности этих точек.

2. Нахождение распределения вероятностей числа событий потока с экспоненциальным распределением за время между соседними точками регенерации.

### 3. Построение матрицы переходных вероятностей

$$\| p_{ij} \| = \begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & \dots & p_{0,n} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & \dots & p_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n,0} & p_{n,1} & \dots & p_{n,n} \end{pmatrix}, \quad (9.3)$$

где  $p_{ij}$  — вероятность перехода системы из  $i$ -го состояния в  $j$ -е за время между соседними точками регенерации;  $n$  — наибольший номер состояния СМО.

4. Составление системы алгебраических уравнений для вероятностей состояний системы с использованием построенной матрицы (9.3)

$$p_j = \sum_{i=0}^n p_{ij} \cdot p_i, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (9.4)$$

Решение системы уравнений (9.4) вместе с условием нормировки

$$\sum_{i=0}^n p_i = 1.$$

При этом одно из уравнений (9.4) заменяется условием нормировки, а решение может быть получено либо аналитическими методами, либо численными.

Следует подчеркнуть, что использование метода Кендалла позволяет получить вероятности вида (9.2), т. е. речь идет о методе, принципиально применимом лишь для нахождения характеристик в стационарном режиме.

Элементы матрицы (9.3) нетрудно вычислить, зная величины  $k_r$  ( $r = 0, 1, \dots$ ), причем  $k_r$  — вероятность того, что за время между двумя соседними точками регенерации произойдет ровно  $r$  событий потока с экспоненциальным распределением. В общем случае

$$k_r = \int_0^{\infty} \frac{(\alpha t)^r}{r!} e^{-\alpha t} dF(t) = \frac{(-1)^r}{r!} \alpha^r \left[ \frac{d^r \varphi(s)}{ds^r} \right]_{s=\alpha}, \quad (9.5)$$

где  $F(t)$  — функция распределения потока с кусочным распределением времени между событиями;  $\varphi(s)$  — ее преобразование Лапласа — Стильтьеса;  $\alpha$  — параметр потока с экспоненциальным распределением промежутков между соседними событиями.

Получим

$$k_r = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m \frac{b_{ik} k!}{\alpha^k} \sum_{j=0}^r \frac{(k+j-1)! (a_i \alpha)^{r-j}}{j! (k-1)! (r-j)!} e^{-a_i \alpha}. \quad (9.6)$$

При задании вида  $F(t)$  кусочно-ступенчатой функцией (табл. 6.1) имеем

$$k_r = \sum_{i=0}^n b_i \frac{(a_i \alpha)^r}{r!} e^{-a_i \alpha}, \quad r \geq 0. \quad (9.7)$$

Для кусочно-линейного вида  $F(t)$  (см. табл. 6.1)

$$k_r = \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{\alpha} \sum_{j=0}^r \frac{(a_i \alpha)^j}{j!} e^{-a_i \alpha}, \quad r \geq 0. \quad (9.8)$$

При исследовании систем обслуживания может представлять интерес определение следующих распределений: времени ожидания заявки в очереди

$$F_M(x) = P\{t_{\text{ож}} < x\},$$

времени пребывания заявки в системе

$$G(x) = P\{t_{\text{сист}} < x\},$$

интервалов времени между моментами выхода из системы соседних обслуженных заявок

$$E(x) = P\{t_{\text{вых}} < x\},$$

где  $t_{\text{ож}}$ ,  $t_{\text{сист}}$ ,  $t_{\text{вых}}$  — соответственно время ожидания заявки в очереди, время пребывания заявки в системе и время между моментами выхода из системы двух соседних обслуженных заявок. Покажем, что зная распределение  $F_M(x)$  можно определить распределения  $G(x)$  и  $E(x)$ . Введем следующие обозначения:  $a_i$  — промежуток времени между моментами поступления  $i$ -й и  $(i+1)$ -й заявок;  $b_i$  — время обслуживания  $i$ -й заявки;  $f_i$  — время ожидания  $i$ -й заявки;  $g_i$  — время пребывания  $i$ -й заявки в системе;  $e_i$  — промежуток времени между моментами выхода из системы  $i$ -й и  $(i+1)$ -й обслуженных заявок.

Величины  $a_i$  и  $b_i$  взаимонезависимы и имеют функции распределения (соответственно)  $A(t)$  и  $B(t)$ . Будем считать, что величины  $t_{\text{вых}}$  являются взаимонезависимыми и одинаково распределенными величинами, как это принято в [3] и статистически подтверждается в [4].

Можно видеть, что

$$g_i = f_i + b_i,$$

т. е. в стационарном режиме

$$G(x) = \int_0^x F(x - \xi) dB(\xi). \quad (9.9)$$

Введем в рассмотрение случайную величину  $y_i$ , равную времени занятости системы перед приходом  $(i+1)$ -й заявки

$$y_i = a_i - g_i \quad \text{при } a_i \geq g_i,$$

$$y_i = 0 \quad \text{при } a_i < g_i.$$

В стационарном режиме функция распределения времени занятости системы

$$Y(x) = \int_0^{\infty} A(x + \xi) dG(\xi). \quad (9.10)$$

Учитывая, что

$$e_i = y_i + b_{i+1},$$

имеем

$$E(x) = \int_0^x Y(x - \xi) dB(\xi). \quad (9.11)$$

В некоторых случаях в моделях АСУ имеет место составное обслуживающее устройство (СОУ), включающее несколько обслуживающих блоков, причем каждому блоку соответствует своя функция распределения времени обслуживания заявки в этом блоке ( $V_i$ ). Например, два блока могут последовательно обслуживать одну и ту же заявку (время окончания обслуживания заявки для всего СОУ совпадает с временем окончания обслуживания на втором блоке). Общая функция распределения времени обслуживания такого СОУ

$$W(t) = \int_0^t V_1(t - \xi) dV_2(\xi). \quad (9.12)$$

В других случаях СОУ может состоять из  $n$  блоков, одновременно обслуживающих  $n$  различных заявок, причем общее время обслуживания равно максимальному из времен выполнения операций в отдельных блоках. Тогда

$$W(t) = \prod_{i=1}^n V_i(t). \quad (9.13)$$

Если для задания функций  $V_i(t)$  использовать кусочные функции (6.19), то общая функция распределения СОУ будет иметь вид (6.19), т. е. после преобразований (9.12), (9.13) получим одну из кусочных функций. Это дает возможность использовать вышеприведенные формулы (9.6—9.8) и в случае составного обслуживающего устройства.

## 9.2. Нахождение характеристик обслуживания методом рекуррентных коэффициентов

Основным затруднением при решении моделей методом Кендалла является то, что порядок системы уравнений (9.4) может быть довольно высоким, что существенно осложняет получение величин вероятностей состояний даже с использованием универсальной ЭВМ.

Между тем матрицы, полученные при решении моделей обслуживания методом Кендалла, имеют ту особенность, что часть элементов их, образующие треугольную подматрицу, являются нулевыми. Это обстоятельство позволяет заметно понизить порядок систем уравнений (9.4).

Пусть матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\|a_{ij}\| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l+1,1} & a_{l+1,2} & \dots & a_{l+1,m} \\ 0 & a_{l+2,2} & \dots & a_{l+2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix}. \quad (9.14)$$

Введем  $l$  — число базовых переменных и допустим представление

$$q_i = \sum_{j=1}^l D_{ij} q_j, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (9.15)$$

где  $D_{ij}$  — постоянные коэффициенты, а вероятности  $q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ ) назовем базовыми вероятностями. Сведем исходную систему уравнения  $m$ -го порядка к системе уравнений для базовых вероятностей  $l$ -го порядка.

Запишем исходную систему уравнений с учетом вида матрицы (9.14)

$$q_s = \sum_{i=1}^{s+l} a_{is} q_i, \quad 1 \leq s \leq m-l, \quad (9.16)$$

$$q_s = \sum_{i=1}^m a_{is} q_i, \quad m-l < s \leq m. \quad (9.17)$$

С использованием (9.16) можно вывести формулу для рекуррентного определения коэффициентов  $D_{ij}$ . Действительно,

$$\begin{aligned} q_s &= \frac{1}{a_{s,s-l}} \left\{ q_{s-l} - \sum_{i=1}^{s-l} a_{i,s-l} q_i \right\} = \\ &= \frac{1}{a_{s,s-l}} \sum_{r=1}^l \left\{ D_{s-l,r} - \sum_{i=1}^{s-l} a_{i,s-l} D_{ir} \right\} q_r, \quad l+1 \leq s \leq m, \end{aligned}$$

т. е.

$$D_{sr} = \frac{1}{a_{s,s-l}} \left\{ D_{s-l,r} - \sum_{i=1}^{s-l} a_{i,s-l} D_{ir} \right\}. \quad (9.18)$$

Очевидно, что

$$D_{ir} = 0 \quad \text{при } i \neq r, \quad i \leq l, \quad (9.19)$$

$$D_{ir} = 1 \quad \text{при } i = r, \quad i \leq l. \quad (9.20)$$

Пользуясь соотношениями (9.18 — 9.20), получим значения всех коэффициентов  $D_{ir}$  и выразим с их помощью вероятности состояний в уравнениях (9.17) и в уравнении нормировки.

В результате получается система уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^l D_{ir} q_r &= 1, \\ \sum_{r=1}^l \left\{ D_{sr} - \sum_{i=1}^m a_{is} D_{ir} \right\} q_r &= 0, \quad m-l < j \leq m, \end{aligned}$$

из которой можно найти базовые вероятности, а затем (используя представление (9.15) и коэффициенты  $D_{ir}$ ) остальные вероятности состояний системы.

Таким образом, решение исходной системы линейных алгебраических уравнений порядка  $m$  сведено к рекуррентному нахождению коэффициентов и решению системы линейных алгебраических уравнений для базовых вероятностей порядка  $l$ . Поскольку для матриц переходных вероятностей СМО обычно  $l \ll m$ , то этот метод оказывается весьма удобным при нахождении решений моделей обслуживания. Кроме того, не всегда обязательно вводить в память ЭВМ полную матрицу  $\|a_{ij}\|$ , так как можно находить элементы этой матрицы непосредственно в процессе вычислений. Весьма удобно произвольное распределение в рассматриваемых моделях задавать при помощи кусочно-степенных функций распределения, что позволяет вычислять значения элементов матриц, используя сравнительно простые выражения.

### 9.3. Определение вероятностей состояний моделей обслуживания методом Кендалла

При решении систем обслуживания методом Кендалла определяются вероятности состояний, отнесенные к некоторым специальным образом выбранным моментам времени (точкам регенерации). Между тем в ряде случаев необходимо получить вероятности, усредненные во времени, т. е. относящиеся к произвольно взятому моменту времени функционирования СМО в стационарном режиме. В настоящем параграфе рассмотрена общая методика получения соотношений между вероятностями состояний, относящихся к точкам регенерации и состояний, относящихся к произвольному моменту времени для СМО, решаемых методом Кендалла.

Введем обозначения

$$\bar{q}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} P \{ \eta(t) = i \}, \quad (9.21)$$

где  $\eta(t)$  — номер состояния СМО в момент времени  $t$ ;

$$q_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \eta_n(t) = i \}, \quad (9.22)$$

где  $\eta_n(t)$  — номер состояния системы в  $n$ -й точке регенерации. Считая процесс изменения состояний в СМО эргодическим, равенство (9.22) можно записать в виде

$$q_i = \lim_{t \rightarrow \infty} M_i(t) / \sum_j M_j(t), \quad (9.23)$$

причем  $M_i(t)$  — число точек регенерации в промежутке  $(0, t)$ , в которых СМО находилась в  $i$ -м состоянии.

При нахождении соотношений между вероятностями вида  $\bar{q}_i$  и  $q_i$  воспользуемся тем, что число переходов за любой промежуток времени в некоторое состояние СМО из всех других состояний отли-



чается от числа переходов системы из этого состояния во все другие не более, чем на единицу. Получим формулу для математических ожиданий числа переходов из состояния в состояние, вызванных потоками событий различного вида.

В точках регенерации происходят изменения состояний СМО, вызванные пуассоновским потоком событий. Точку регенерации будем относить к  $i$ -му типу, если СМО в этой точке пребывает в  $i$ -м состоянии. Обозначим:  $\alpha$  — интенсивность точек регенерации на временной оси. Согласно элементарной теореме восстановления [5]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_i M_i(t)/t = \alpha.$$

Поскольку предел (9.23) существует, можно записать

$$\left[ \lim_{t \rightarrow \infty} M_i(t)/t \right] \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} M_i(t) / \sum_j M_j(t) \right] = \alpha.$$

Тогда получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t)/t = q_i \alpha. \quad (9.24)$$

Изменение состояний СМО под воздействием какого-либо пуассоновского потока может происходить в любой момент времени. Обозначим  $N_i(t)$  — число переходов СМО под воздействием пуассоновского потока в промежутке  $(0, t)$ , при которых система переходит из  $i$ -го состояния в какое-либо отличное от него. Для малых  $\Delta t$ , следуя рассуждениям [6], имеем

$$N_i(t + \Delta t) - N_i(t) = \bar{q}_i \beta \Delta t,$$

где  $\beta$  — параметр потока, переводящего систему из состояния  $i$ . Тогда

$$N'_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_i(t + \Delta t) - N_i(t)}{\Delta t} = \beta P\{\eta(t) = i\}.$$

Переходя к пределу, имеем  $\lim_{t \rightarrow \infty} N'_i(t) = \beta \bar{q}_i$ , вследствие чего можно записать

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N_i(t)/t = \beta \bar{q}_i. \quad (9.25)$$

Вышесказанное можно обобщить в следующую методику нахождения соотношений между вероятностями, определенными различным образом:

составление графа переходов между состояниями системы; выделение точек регенерации и переходов (дуг графа), соответствующим этим точкам;

написание уравнения баланса числа переходов, происходящих из каждого определенного состояния в другие и из других состояний в каждое определенное. Общий вид таких уравнений

$$\left| \sum_i E_{i,k}(t) - \sum_j E_{k,i}(t) \right| \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots,$$

причем  $E_{ij}(t)$  — число переходов из состояния  $i$  в состояние  $j$  в промежутке  $(0, t)$ . При составлении уравнений конкретных систем числа переходов, происходящих под воздействием пуассоновских потоков, будем выделять черточками над  $E$  (т. е. будем писать  $\bar{E}_{ij}(t)$  вместо  $E_{ij}(t)$  — последнюю запись будем относить к переходу, происходящему в точке регенерации);

переход к предельным соотношениям вида

$$\sum_i \lim_{t \rightarrow \infty} E_{ik}(t)/t = \sum_j \lim_{t \rightarrow \infty} E_{kj}(t)/t, \quad k = 0, 1, \dots; \quad (9.26)$$

составление системы уравнений для вероятностей состояний с помощью соотношений (9.24), (9.25) и решение этих уравнений относительно искомых вероятностей.

Примеры использования изложенной методики приводятся в главах 10, 11, 12, в которых исследуются различные непуассоновские модели с кусочными распределениями.

#### 9.4. Использование метода Линдли в моделях с кусочными распределениями

В случае, когда поток входных заявок является рекуррентным, а функция распределения времени обслуживания отлична от экспоненциальной и не сводится к ней методом фаз [3], единственным методом получения характеристик СМО является метод интегрального уравнения Линдли. Ниже будут приведены решения однолинейных моделей обслуживания с ожиданием, потоки событий в которых описываются кусочно-степенными функциями распределения (6.19).

Согласно методу Линдли [9], функция распределения времени ожидания  $F_M(x)$  определяется из решения интегрального уравнения

$$F_M(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^x F_M(x - \xi) dc(\xi), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где

$$c(t) = \int_0^{\infty} B(t + \xi) dA(\xi),$$

методом Винера-Хопфа. Согласно этому методу, необходимо выполнить факторизацию

$$\alpha(-s)\beta(s) - 1 = \frac{\psi_+}{\psi_-},$$

где  $\alpha(s)$  и  $\beta(s)$  — преобразования Лапласа — Стильтьеса (соответственно) функций  $A(t)$  и  $B(t)$ ;  $\psi_+$  — функция от  $s$ , аналитическая в полуплоскости  $\text{Re}(s) > -c$ ;  $\psi_-$  — функция от  $s$ , аналитическая

в  $\text{Re}(s) < d$  и не имеющая там нулей;  $c, d = \text{const} > 0$ .

Если  $\psi_+ \leq M|s|^m$  при  $|s| \rightarrow +\infty, \text{Re}(s) > -c$ ,

$\psi_- \leq N|s|^n$  при  $|s| \rightarrow +\infty, \text{Re}(s) < d$ ,

то имеет место равенство [9]:

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_M(x) = \sum_{i=0}^z k_i s^i / \psi_+, \quad (9.27)$$

причем

$$z = \min(m, n).$$

Так как один из корней  $\psi_+$  всегда равен нулю, то в уравнении (9.27) выполняется

$$k_0 = 0.$$

При  $z = 1$  имеет место равенство [10]

$$\varphi(s) = \frac{Ds}{\psi_+}, \quad (9.28)$$

где

$$D = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi_+}{s}. \quad (9.29)$$

Используя формулы (9.28), (9.29), можно найти  $D$  и  $\varphi(s)$ , а затем и искомую функцию  $F_M(x)$ .

Получим выражение для  $F_M(x)$ , когда для задания  $A(t)$  и  $B(t)$  используются кусочно-ступенчатые функции

$$A(t) = \sum_{i=0}^{n_1} b_i \gamma(t - a_i), \quad B(t) = \sum_{j=1}^{n_2} d_j \gamma(t - c_j).$$

Примем  $\lambda = 1 / \sum_{i=0}^{n_1} a_i b_i$  — параметр входного потока;

$\mu = 1 / \sum_{j=0}^{n_2} d_j c_j$  — интенсивность обслуживания.

Тогда

$$\varphi(s) = \frac{(\mu - \lambda)s}{\lambda \mu \left( \sum_{i=0}^{n_1} b_i e^{a_i s} \sum_{j=0}^{n_2} d_j e^{-c_j s} - 1 \right)} \quad (9.30)$$

и

$$s(x) = 1 + \frac{(\mu - \lambda) e^{s_1 x}}{\lambda \mu \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} b_i d_j (a_i - c_j) e^{(a_i - c_j) s_1}}, \quad (9.31)$$

где  $s_1$  — ненулевой корень уравнения

$$\sum_{i=0}^{n_1} b_i e^{a_i s} \sum_{j=0}^{n_2} d_j e^{-c_j s} - 1 = 0. \quad (9.32)$$

В случае, когда  $A(t)$  и  $B(t)$  имеют вид кусочно-ступенчатых функций, представляется возможным оценить влияние комплексных корней при нахождении оригинала от преобразования Лапласа — Стильтьеса (9.30) функции  $F_{\Sigma}(x)$ . В этом случае корни знаменателя (9.30) будут находиться на двух прямых, параллельных оси ординат комплексной плоскости, причем одна из них будет совпадать с осью ординат, а другая проходить через точку  $s_j$ , являющуюся действительным ненулевым корнем знаменателя (9.30).

Расстояние между соседними комплексными корнями, расположенными на одной и той же прямой, будет равно величине  $T$ , определяемой как длина наибольшего отрезка, который можно уложить целое число раз в каждый из отрезков длиной  $|a_i - c_j|$ , ( $i = 0, 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots, n$ ). Тогда можно утверждать, что распределение комплексных корней определяется соизмеримостью величин  $a_i$  и  $b_i$  по множеству значений индексов  $i$  и  $j$ . В случае не-соизмеримости хотя бы двух из этих величин

$$T = 0,$$

т. е. комплексные корни совпадают с соответствующими действительными корнями знаменателя (9.37).

Вкладом комплексных корней, вообще говоря, можно пренебречь в связи со следующим обстоятельством. Мощность множества всех несоизмеримых отрезков вида  $(a_i, c_j)$ ,  $i = 0, \dots, n_1; j = 0, \dots, n_2$  является мощностью континуума, а мощность соизмеримых отрезков вида  $(a_i - c_j)$  является мощностью счетного множества [11]. В связи с этим гораздо более предпочтительным является вариант, когда рассматриваемые отрезки окажутся несоизмеримыми, т. е. вклад комплексных корней будет нулевым, и их можно не принимать во внимание.

Кроме функции распределения времени ожидания для исследуемой СМО можно получить аналитические выражения функций распределения:

$$G(x) \text{ — (9.9); } \quad Y(x) \text{ — (9.10); } \quad E(x) \text{ — (9.11)}$$

в виде кусочных функций.

#### Контрольные вопросы

1. Что такое конечные вероятности и точки регенерации? Какова их роль при анализе систем?
2. Показать последовательность анализа систем с помощью метода Кендалла. Для каких систем и условий он применим?
3. Рассмотреть возможности использования составных обслуживающих устройств при анализе модульных структур УЦВК.
4. Показать механизм нахождения элементов матрицы переходных вероятностей с применением кусочно-степенных функций распределения.
5. Привести пример расчета СМО с кусочно-степенными функциями распределения для входящих потоков, и потоков обслуживания. Оценить точность и сложность получаемых решений.
6. В чем сложность разработки и применения многолинейных СМО для анализа УЦВК?

7. Показать с инженерных позиций необходимость и эффективность применения кусочно-степенных функций распределения при анализе УЦВК.
8. В чем состоит оптимизация структуры УЦВК при использовании вероятностных моделей?
9. Каковы возможности кусочно-степенных функций распределения для проведения надежностного анализа УЦВК?
10. Какие характеристики системы обмена УЦВК можно определить с помощью моделей с кусочно-степенными функциями распределения?

## Глава 10

### МОДЕЛИ УСТРОЙСТВ АСУ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ КУСОЧНЫМИ И ЭРЛАНГОВСКИМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

#### 10.1. Определение характеристик моделей с ограниченным числом мест ожидания, учитывающих распределения времени реализации алгоритмов кусочными функциями распределения

Рассмотрим СМО вида  $E_m | Q | 1 | N$ , рекуррентный поток входных заявок в которой описывается распределение Эрланга  $m$ -го порядка

$$A(t) = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

а время обслуживания распределено по одному из кусочных законов, что позволяет аппроксимировать функцию распределения реального потока обслуживания с требуемой точностью.

Определим величину нагрузки системы

$$\rho = \frac{b}{a},$$

где  $a$  — среднее время между моментами поступления заявок;  $b$  — среднее время обслуживания.

Множество исходных состояний системы, отличающихся числом заявок в СМО, расширим так, что максимальный номер состояния расширенного множества (начиная с нулевого)

$$r = (N + 2)m - 1,$$

за счет ввода регулирующей системы для входных заявок, состоящей из последовательно расположенных фаз.

Введем последовательно возрастающую нумерацию состояний, так что номер состояния, при котором в системе имеется  $v$  заявок ( $v = 0, 1, \dots, N + 1$ ) и входящая заявка пребывает на фазе  $w$  ( $w = 1, 2, \dots, m$ ) находился бы по формуле

$$i = vm + (w - 1).$$

Тогда процесс изменения состояний системы под воздействием только входного потока заявок является марковским, а для всей системы можно выделить точки регенерации, которыми в данном

случае являются моменты времени, непосредственно следующие за выходом из системы обслуженных заявок. Для рассматриваемой СМО вероятности вида  $p_i$  (9.2) определяется именно в такие моменты времени ( $i = 0, 1, \dots, N$ ).

При конечной величине  $N$  матрица переходных вероятностей (9.3) имеет вид

$$\|q_{ij}\| = \begin{array}{cccccccc} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_{r-2m} & k_{r-2m+1}^* & \dots & k_{r-m}^* \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \dots & k_{r-2m-1} & k_{r-2m}^* & \dots & k_{r-m-1}^* \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & \dots & k_{r-2m-2} & k_{r-2m-1}^* & \dots & k_{r-m-2}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_{r-2m} & k_{r-2m+1}^* & \dots & k_{r-m}^* \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \dots & k_{r-2m-1} & k_{r-2m}^* & \dots & k_{r-m-1}^* \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & \dots & k_{r-2m-2} & k_{r-2m-1}^* & \dots & k_{r-m-2}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_0 & k_1^* & \dots & k_m^* \end{array} \left. \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \text{ строк} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ N-m \text{ строк} \end{array}$$

Определение величины  $k_i$  при кусочных функциях распределения одного из потоков событий СМО рассмотрено в п. 9.1. Эту же матрицу можно представить в виде

$$\|q_{ij}\| = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \alpha & \delta & \beta \\ \hline \gamma & \theta & \epsilon \\ \hline \end{array}, i, j = 0, 1, \dots, r-m, \quad (10.1)$$

причем значения элементов каждой подматрицы можно найти из следующих соотношений:

$$q_{ij} = 0, \quad j < i, \quad i < m;$$

$$q_{ij} = k_{j-i}, \quad i \leq j \leq r-2m, \quad i < m;$$

$$q_{ij} = k_{j-i}^* = \sum_{z=0}^{\infty} k_{2m+j-i-z}, \quad j > r-2m, \quad i < m;$$

$$q_{ij} = 0, \quad j < i-m, \quad i \geq m;$$

$$q_{ij} = k_{j-i+m}, \quad i-m \leq j \leq r-2m, \quad i \geq m;$$

$$q_{ij} = k_{j-i+m}^* = \sum_{z=1}^{\infty} k_{2m+j-i-z}, \quad j > r-2m, \quad i \geq m.$$

Тогда вероятности состояний можно определить из решения системы уравнений

$$q_{ij} = \sum_{i=0}^{r-m} q_i \cdot q_{ij}, \quad j = 0, 1, \dots, r-m, \quad (10.2)$$

вместе с условием нормировки

$$\sum_{i=0}^{r-m} q_i = 1. \quad (10.3)$$

Решение этой системы можно найти, используя метод рекуррентных коэффициентов (см. п. 9.2), позволяющий свести систему уравнений порядка  $r - m + 1$  к системе порядка  $m$ , которую решить гораздо легче. При этом используется треугольная подматрица  $\gamma$  матрицы (10.1), состоящая из нулевых элементов и наличие которой позволяет последовательно выразить вероятности всех состояний через вероятности первых  $m$  состояний.

Величины вероятностей исходных состояний системы, отличающихся числом заявок в СМО, при любой величине  $m$  можно определить как

$$p_i = \sum_{j=0}^{m-1} q_{mj+i}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (10.4)$$

Рассмотрим получение выражений, позволяющих перейти от вероятностей вида  $q_i$  ( $i = 0, 1, \dots, r - m$ ), отнесенных к точкам регенерации, к вероятностям вида  $\bar{q}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ), усредненным по времени функционирования системы в стационарном режиме. При этом будет использован метод, изложенный в п. 9.3.

Граф переходов СМО  $E_m/G/1/N$ , частным случаем которых являются модели вида  $E_m/Q/1/N$ , соответствует изображенному на рис. 8.2. Уравнения баланса

$$|E_{m,0} - \bar{E}_{0,1}| \leq 1,$$

$$|E_{i-1,i} + E_{i+m,i} - \bar{E}_{i,i+1}| \leq 1, \quad 0 < i < m,$$

$$|\bar{E}_{i-1,i} + E_{i+m,i} - \bar{E}_{i,i+1} - \bar{E}_{i,i-m}| \leq 1, \quad m \leq i \leq r-m,$$

$$|\bar{E}_{i-1,i} + \bar{E}_{r,i} - E_{i,i-m} - \bar{E}_{i,i+1}| \leq 1, \quad i = r-m+1,$$

$$|\bar{E}_{i-1,i} - \bar{E}_{i,i+1} - E_{i,i-m}| \leq 1, \quad r-m+1 \leq i < r,$$

$$|\bar{E}_{r-1,r} - E_{r,r-m} - \bar{E}_{r,r-m+1}| \leq 1,$$

Интенсивность точек регенерации

$$\alpha = \left[ \sum_{i=0}^{m-1} \left( \frac{1}{\mu} + \frac{m-i}{\lambda} \right) q_i + \frac{1}{\mu} \left( 1 - \sum_{i=0}^{m-1} q_i \right) \right]^{-1}.$$

Параметр пуассоновского потока событий в системе  $\beta = \lambda$ .

Переходя к пределам вида (9.31), получаем, что

$$\bar{q}_i = \frac{\alpha}{\lambda} \sum_{j=0}^i q_j, \quad 0 \leq i < m; \quad (10.5)$$

$$\bar{q}_i = \frac{\alpha}{\lambda} \sum_{j=0}^{m-1} q_{i-j}, \quad m \leq i \leq r-m; \quad (10.6)$$

$$\bar{q}_{r-i} = \frac{1}{m} \left( 1 - \sum_{j=1}^i q_{r-m+1-j} \right), \quad 1 \leq i < m; \quad \bar{q}_r = \frac{1}{m} - \frac{\alpha}{\lambda}. \quad (10.7)$$

Более подробно рассмотрим случай, когда  $m = 1$ , что соответствует пуассоновскому входному потоку заявок. Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\|q_{ij}\| = \begin{vmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & \dots & k_{N-1} & k_N^* \\ k_0 & k_1 & k_2 & \dots & k_{N-1} & k_N^* \\ 0 & k_0 & k_1 & \dots & k_{N-2} & k_{N-1}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_0 & k_1^* \end{vmatrix}. \quad (10.8)$$

Отметим, что для данного случая

$$q_{ij} = p_{ij}, \quad q_i = p_i, \quad \bar{q}_i = \bar{p}_i.$$

Запишем систему уравнений (10.2), заменив последнее уравнение условием нормировки

$$p_i = k_1 p_0 + \sum_{j=0}^i k_j p_{i-1-j}, \quad 0 \leq i \leq N, \\ \sum_{i=0}^N p_i = 1. \quad (10.9)$$

Введём следующие соотношения по методу рекуррентных коэффициентов

$$p_i = D_i p_0, \quad 0 \leq i \leq N,$$

где коэффициенты  $D_i$  могут быть найдены из системы уравнений вида

$$D_1 = (1 - k_0)/k_0; \\ D_i = \left( D_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} k_j D_{i-j} - k_{i-1} \right) / k_0, \quad 1 < i \leq N.$$

Тогда из условия нормировки (10.9) можно определить величину

$$p_0 = 1 / \left( 1 + \sum_{i=1}^N D_i \right),$$

а затем и все остальные вероятности  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).



Из уравнений (10.5) — (10.7) для случая  $m = 1$  следует, что

$$\bar{p}_i = \frac{\lambda}{\rho_0 + \lambda/\mu} p_i, \quad 0 \leq i \leq N,$$

$$\bar{p}_{N+1} = 1 - \frac{1}{\rho_0 + \lambda/\mu}.$$

Для нахождения функции распределения времени ожидания при  $m = 1$  используем формулу полной вероятности [2]

$$F_m(x) = \bar{p}_0 + \sum_{i=1}^N \bar{p}_i P_i \{ \tau_{ож} < x \}, \quad (10.10)$$

где  $P_i \{ \tau_{ож} < x \}$  — условная вероятность того, что заявка, заставшая систему в  $i$ -м состоянии, будет ожидать начала обслуживания время меньшее, чем  $x$ . Эту вероятность можно оценить, используя неравенство

$$g_{i-1} > P_i \{ \tau_{ож} < x \} \geq g_i,$$

где  $g_i = g_i(x)$  — вероятность того, что за время  $x$  в обслуживающем устройстве будет обслужено не меньше, чем  $i$  заявок (при условии непрерывной работы обслуживающего устройства). Легко установить, что

$$g_i = [B(x)]^{i*},$$

где

$$[B(x)]^{i*} = \int_0^x [B(x-\xi)]^{(i-1)*} dB(\xi), \quad i > 0,$$

$$[B(x)]^{0*} = B(x).$$

Значение величин  $P_i \{ \tau_{ож} < x \}$  приближенно можно найти, пользуясь линейной интерполяцией

$$P_i \{ \tau_{ож} < x \} \approx \frac{g \left[ \frac{x}{m} \right] - 1 + g \left[ \frac{x}{m} \right]}{2}. \quad (10.11)$$

При задании  $B(t)$  кусочно-ступенчатой функцией

$$g_s = \sum_{i_0=1}^n \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_r=1}^n b_{i_0} b_{i_1} \dots b_{i_r} \dots \Gamma(x - a_{i_0} - a_{i_1} - \dots - a_{i_r}). \quad (10.12)$$

При задании  $B(t)$  кусочно-линейной функцией

$$g_r = \sum_{i_0=1}^n \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_r=1}^n b_{i_0} b_{i_1} \dots b_{i_r} \frac{(x - a_{i_0} - \dots - a_{i_r})}{(r+1)!} \times \\ \times \Gamma(x - a_{i_0} - \dots - a_{i_r}). \quad (10.13)$$

## 10.2. Определение характеристик моделей с ожиданием, учитывающих распределения времени реализации алгоритмов кусочными функциями распределения

Предельным вариантом моделей, рассмотренных в предыдущем параграфе при неограниченно возрастающем числе мест ожидания, т. е. при  $N \rightarrow \infty$ , являются СМО вида  $E_m/G/1$ . Методы предыдущего параграфа становятся непригодными в этом случае, что требует использования специальных решений моделей с ожиданием.

В общем случае моделей  $E_m/G/1$  производящая функция [3]

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i x^i = \frac{m(1-\rho)(1-x)}{1-x^m/\beta(\lambda-\lambda x)} \prod_{j=1}^{m-1} \left( \frac{x-\xi_j}{1-\xi_j} \right), \quad m > 1,$$

где  $\xi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m-1$ ) — корни уравнения

$$\xi^m - \beta(\lambda - \lambda\xi) = 0, \quad (10.14)$$

лежащие внутри единичного круга.

При  $m = 1$  (что соответствует пуассоновскому входному потоку)

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i = \frac{(1-\rho)(1-x)}{1-x/\beta(\lambda-\lambda x)}.$$

Определяемые величины, для которых получена производная функция, могут быть получены путем многократного дифференцирования и последующего приравнивания аргумента  $x$  производящей функции нулю. Отметим, что в общем случае задача разложения производящей функции является весьма трудоемкой (если только знаменатель функции не разлагается на конечное число элементарных множителей). Рассмотрим разложение производящей функции при пуассоновском входном потоке.

При времени обслуживания, подчиняющемся ступенчатому распределению, имеем

$$Q(x) = \frac{(1-\rho)(1-x) \sum_{i=1}^n b_i \exp\{-a_i \lambda(1-x)\}}{\sum_{i=0}^n b_i \exp\{-a_i \lambda(1-x)\} - \rho}.$$

Обозначим

$$c_i = \sum_{j=0}^n b_j (a_j \lambda)^j \exp(-a_j \lambda),$$

тогда можно получить

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 - \rho, \quad p_1 = \frac{(1-\rho)(1-c_0)}{c_0}; \\ p_2 &= (1-\rho)(1-c_1-c_0)/c_0^2; \\ p_3 &= (1-\rho)[2(1-c_1)(1-c_1-c_0) - c_2 c_0]/(2c_0^3). \end{aligned} \quad (10.15)$$

Если функция распределения времени обслуживания имеет кусочно-линейный вид, то можно получить:

$$p_0 = 1 - \rho, \quad p_1 = (1 - \rho)(\lambda - c_0); \quad p_2 = \lambda(1 - \rho)(\lambda - c_1)/c_0^2, \\ p_3 = \lambda(1 - \rho)[2c_0(\lambda - c_0) + 2(\lambda - c_1)^2 - c_2c_0]/(2c_0^3). \quad (10.16)$$

Для перехода к вероятностям вида  $\bar{p}_i$  ( $\bar{q}_i$  в общем случае) используем уравнения (10.5) — (10.6). Получаем, что при  $m = 1$  выполняется равенство  $\bar{p}_i = p_i$ .

Для нахождения функции распределения времени ожидания для системы с ожиданием можно воспользоваться методом интегрального уравнения Линдли [4]. В случае, когда  $m = 1$ , имеет место формула Поллячека — Хинчина [5]

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_M(x) = \frac{(1 - \rho)s}{s - \lambda + \lambda\beta(s)}.$$

При  $B(t)$  вида ступенчатой функции получим  $s_1$  — ненулевой корень уравнения

$$s - \lambda + \lambda \sum_{i=0}^n b_i \exp(-a_i s) = 0, \quad (10.17)$$

можно записать, что

$$F_M(x) = 1 - \rho e^{s_1 x}. \quad (10.18)$$

При  $B(t)$  вида кусочно-линейной функции получим  $s_1$  — ненулевой корень уравнения

$$s - \lambda + \frac{\lambda}{s} \sum_{i=0}^n b_i \exp(-a_i s),$$

имеем формальное выражение для  $F_M(x)$ , совпадающее с (10.18).

При  $m > 1$  преобразование Лапласа — Стильтьеса от функции распределения времени ожидания имеет вид

$$\Phi(s) = \frac{(1 - \rho) m \lambda^{m-1} (-s)}{(\lambda - s)^m - \lambda \beta(s)} \prod_{j=1}^{m-1} (1 - s/s_j),$$

причем  $s_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m - 1$ ) — корни уравнения

$$(\lambda - s)^m - \lambda \beta(s) = 0.$$

Для случая пуассоновского входного потока и времени обслуживания с функцией распределения вида ступенчатой, кусочно-линейной можно получить аналитическую запись функций распределения

$$G(x) — (9.14); \quad Y(x) — (9.15) \quad \text{и} \quad E(x) — (9.16).$$

### 10.3. Характеристики моделей с ограниченным числом мест ожидания и кусочными функциями распределения для задания входного информационного потока

Учет вида входящего рекуррентного потока заявок можно выполнить путем аппроксимации функции распределения промежутков между приходом соседних заявок  $A(t)$ . В настоящем параграфе для аппроксимации вида  $A(t)$  будут использованы кусочные функции (ступенчатая, кусочно-линейная и т. д.). Распределение времени обслуживания имеет вид

$$B(t) = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t},$$

где  $m$  — порядок распределения Эрланга.

Система массового обслуживания с такими потоками событий может быть получена из системы, рассмотренной в п. 10.1, путем взаимной замены распределений  $A(t)$  и  $B(t)$  и является, по отношению к ней, двойственной [3]. Нагрузка системы

$$\rho = \frac{m}{\mu \alpha^1(0)},$$

причем

$$\alpha(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dA(t).$$

Множество исходных состояний системы, различающихся числом заявок в СМО, расширим до числа состояний с наибольшим номером  $r = (N + 1)m$  за счет ввода регулирующей системы для обслуживаемых заявок, состоящей из  $m$  последовательно расположенных фаз. Время обслуживания заявки на каждой фазе будет величиной случайной, распределенной по экспоненциальному закону с параметром  $\mu$ , причем в одно и то же время на всех фазах находится не более одной заявки.

Введем последовательно возрастающую нумерацию состояний, так, чтобы номер состояния, соответствующий количеству заявок в системе  $v$  ( $v = 0, 1, \dots, N + 1$ ) и номеру фазы, на которой находится обслуживаемая заявка  $w$  ( $w = 1, 2, \dots, m$ ), можно было найти по формуле

$$i = mv - (w - 1), \quad v > 0,$$

$$i = 0, \quad v = 0.$$

Процесс изменения состояний системы под воздействием только потока обслуживания будет являться марковским, а для всей системы можно выделить точки регенерации, которыми в данном случае



Получим выражения, позволяющие перейти от вероятностей вида  $q_i$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ), отнесенным к точкам регенерации, к вероятностям вида  $\bar{q}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ), усредненным по всему времени функционирования системы в стационарном режиме. При получении будет использован метод, изложенный в п. 9.3.

Граф переходов СМО  $GI | E_m | 1 | N$ , частным случаем которых являются модели вида  $Q | E_m | 1 | N$ , соответствует изображенному на рис. 8.3. Уравнения баланса

$$\begin{aligned} |\bar{E}_{i,0} - E_{0,m}| &\leq 1; \\ |\bar{E}_{i+1,i} - \bar{E}_{i,i-1} - E_{i,i+m}| &\leq 1, \quad 0 < i < m; \\ |\bar{E}_{i+1,i} - \bar{E}_{i,i-1} - E_{i,i+m} + E_{i-m,i}| &\leq 1, \quad m \leq i \leq r - m; \\ |\bar{E}_{i+1,i} - \bar{E}_{i,i-1} - E_{i-m,i}| &\leq 1, \quad r - m < i < r; \\ |E_{r-m,r} - \bar{E}_{r,r-1}| &\leq 1, \quad r - m < i < r. \end{aligned}$$

Интенсивность точек регенерации будет совпадать с интенсивностью поступления заявок, т. е.

$$\alpha = \lambda = 1/(-\alpha'(0)).$$

Параметр пуассоновского потока событий равен  $\mu$ .

Тогда, переходя к пределам вида (9.31), находим

$$\bar{q}_i = \frac{\lambda}{\mu} \sum_{j=0}^{i-1} q_j, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (10.22)$$

$$\bar{q}_i = \frac{\lambda}{\mu} \sum_{j=i-m}^{i-1} q_j, \quad m < i \leq r - m + 1; \quad (10.23)$$

$$\bar{q}_i = \frac{\lambda}{\mu} \sum_{j=i-m}^{r-m} q_j, \quad r - m + 1 < i \leq r, \quad (10.24)$$

$$\bar{q}_0 = 1 - \sum_{i=1}^r q_i = 1 - \frac{\lambda m}{\mu} \sum_{i=0}^{r-m} q_i = 1 - \rho \left( 1 - \sum_{j=0}^{m-1} q_{r-j} \right). \quad (10.25)$$

Приведем решение частного случая, когда  $m = 1$ , что соответствует экспоненциальному распределению времени обслуживания. Матрица переходных вероятностей имеет вид:

$$\|q_{ij}\| = \begin{vmatrix} k_1^* & k_0 & 0 & \dots & 0 \\ k_2^* & k_1 & k_0 & \dots & 0 \\ k_3^* & k_2 & k_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{N+1}^* & k_N & k_{N-1} & \dots & k_0 \\ k_{N+1}^* & k_N & k_{N-1} & \dots & k_0 \end{vmatrix}, \quad (10.26)$$

где

$$k_i^* = 1 - \sum_{j=1}^{i-1} k_j.$$

Для этого случая

$$q_{ij} = p_{ij}, \quad p_i = q_i, \quad \bar{p}_i = \bar{q}_i, \quad i, j = 0, 1, \dots, N+1.$$

Запишем систему уравнений (10.2), заменив первое уравнение условием нормировки:

$$p_i = k_{N+1-i} p_{N+1} + \sum_{j=0}^{N+1-i} k_j p_{i-1+j}, \quad i \geq 0,$$

$$\sum_{i=0}^{N+1} p_i = 1.$$

Введем соотношения по методу рекуррентных коэффициентов

$$p_i = D_i p_{N+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N+1.$$

Тогда из решения системы уравнений имеем

$$D_N = (1 - k_0)/k_0,$$

$$D_i = \left( D_{i+1} - k_{N-i} - \sum_{j=1}^{N-i} k_j D_{i+j} \right) / k_0, \quad 0 \leq i < N.$$

Используя условие нормировки, можно определить

$$p_{N+1} = 1 / \left( 1 + \sum_{i=0}^N D_i \right),$$

а затем и все остальные  $p_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ).

Сопоставляя рекуррентные соотношения для вероятностей рассматриваемой модели вида  $GI/M/1/N$  и СМО вида  $M/G/1/N+1$  (см. п. 10.1), можно сделать вывод об их идентичности при условии изменения порядка нумерации состояний в одной из систем на обратный. Тогда можно построить алгоритм определения величин  $p_i$  и  $\bar{p}_i$  моделей обслуживания вида  $M/G/1/N+1$  и  $GI/M/1/N$ . Блок-схема такого алгоритма приведена на рис. 10.1.

Оператор 1 служит для ввода исходных данных системы  $GI/M/1/N$  при этом величина  $l \neq 0$ . Для СМО  $M/G/1/N+1$  вместо параметров  $A(x)$  следует вводить аналогичные параметры функции  $B(x)$  вместо  $\mu$  — величину  $\lambda$ , а величина  $l = 0$ .

Операторы 2 и 6 производят нахождение величин  $k_0$  и  $k_r$  соответственно, формальные выражения приведены в п. 9.1.

Совокупность операторов 2—13 служит для нахождения величин коэффициентов  $D_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N+1$ ), а также для вычисления

$$s = \sum_{i=0}^{N+1} D_i.$$

При этом операторы 4—10 производят определение промежуточной величины

$$z = \sum_{j=1}^i k_j D_{i+1-j} + k_i D_0.$$

При необходимости перехода к вероятностям вида  $p_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N+1$ ) воспользуемся формулами, полученными из системы, (10.22) — (10.25). Имеем

$$\bar{p}_i = \rho p_i - 1,$$

$$i = 1, 2, \dots, N+1, \quad \bar{p}_0 = 1 - \rho(1 - \rho_{N+1}).$$

Для нахождения функции распределения времени ожидания воспользуемся формулой полной вероятности, которая при любой величине  $m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) будет иметь вид

$$F_m(x) = q_0 + \sum_{i=1}^{m-1} q_i P_i \{ \sigma_{\text{ож}} < x \}, \quad (10.27)$$

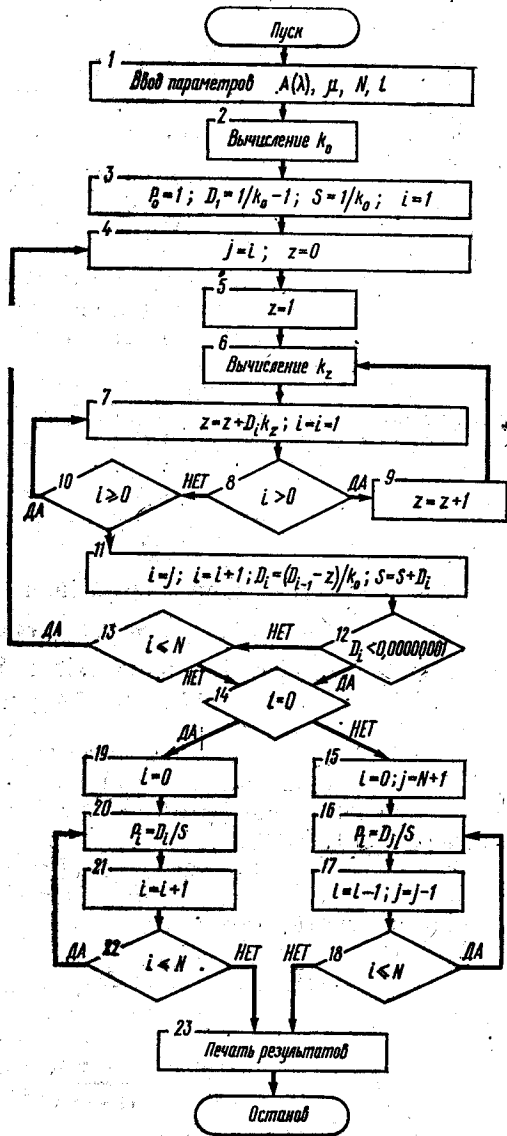


Рис. 10.1.



причем

$$P_i \{ \tau_{ож} < x \} = 1 - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(\mu x)^j}{j!} e^{-\mu x}.$$

Тогда имеет место равенство

$$F_m(x) = q_0 + \sum_{i=1}^{r-m} q_i \left( 1 - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(\mu x)^j}{j!} e^{-\mu x} \right). \quad (10.28)$$

#### 10.4. Характеристики моделей с ожиданием и кусочным заданием распределений входных информационных потоков

При достаточно большом числе мест ожидания  $N$  можно исследуемую модель считать системой обслуживания с ожиданием. Тогда для вероятностей состояний СМО вида  $GI | E_m | 1$  имеет место производная функция

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i x^i = \prod_{j=1}^m \frac{(1 - \xi_j)}{(1 - x \xi_j)},$$

где  $\xi_j$  — ненулевые корни уравнения

$$\xi^m - \alpha(\mu - \mu\xi) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (10.29)$$

лежащие в  $\text{Re} |\xi| < 1$ . Корни могут быть найдены графическим путем, либо численными методами решения трансцендентных уравнений.

$m = 1$ . Рассмотрим нахождение вероятностей состояний при различных значениях величины  $m$ .

Уравнение (10.29) имеет единственный корень, лежащий в круге  $\text{Re} |\xi| < 1$ . Тогда

$$Q(x) = \frac{1 - \xi_1}{1 - x \xi_1}.$$

Можно получить, что

$$Q^{(n)}(x) = \frac{n! (1 - \xi_1) \xi_1^n}{(1 - x \xi_1)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

и 
$$p_n = q_n = \frac{Q^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(1 - \xi_1) \xi_1^n}{(1 - x \xi_1)^{n+1}} \Big|_{x=0} = (1 - \xi_1) \xi_1^n. \quad (10.30)$$

$m=2$ . Предположим, что корни (10.29) не кратные (т. е. разные). Тогда производящую функцию можно представить в следующем виде

$$Q(x) = \frac{(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)}{(1 - x \xi_1)(1 - x \xi_2)} = \frac{A}{1 - x \xi_1} + \frac{B}{1 - x \xi_2},$$

причем из условия выполнения последнего равенства можно найти

$$A = \frac{\xi_2(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)}{\xi_1 - \xi_2}, \quad B = \frac{-\xi_1(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)}{\xi_1 - \xi_2}.$$

Тогда

$$Q(x)^{(n)} = n! \left( \frac{A\xi_1^n}{(1-x\xi_1)^{n+1}} + \frac{B\xi_2^n}{(1-x\xi_2)^{n+1}} \right) \Big|_{x=0} = n! (A\xi_1^n + B\xi_2^n),$$

в учетом чего

$$q_i = \frac{Q^{(i)}(0)}{i!} = \frac{(1-\xi_1)(1-\xi_2)(\xi_1^{i+1} - \xi_2^{i+1})}{\xi_1 - \xi_2}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (10.31)$$

Если  $\xi_1 = \xi_2$ , то производящую функцию легко представить в виде

$$Q(x) = \frac{(1-\xi_1)^2}{(1-x\xi_1)^2}.$$

Можно получить

$$Q(x)^{(n)} = \frac{(n+1)! \xi_1^n (1-\xi_1)^2}{(1-x\xi_1)^{n+2}} \Big|_{x=0} = (n+1)! \xi_1^n (1-\xi_1)^2,$$

и формула для вероятностей состояний имеет вид

$$q_i = (i+1) \xi_1^i (1-\xi_1)^2, \quad i = 0, 1, \dots \quad (10.32)$$

При необходимости перехода к вероятностям вида  $\bar{q}_i$  воспользуемся уравнениями (10.20) — (10.23) при условии, что

$$r \rightarrow \infty.$$

Тогда уравнение (10.20) сохраняет свой вид, а для  $i > m$

$$\bar{q}_i = \frac{\lambda}{\mu} \sum_{j=i-m}^{i-1} q_j.$$

Для вероятности отсутствия заявок в СМО

$$\bar{q}_0 = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \bar{q}_i = 1 - \rho.$$

Интересно отметить, что этот результат имеет место для всех систем с ожиданием вида  $GI | G | 1$  [7].

Использование метода интегрального уравнения Линдли позволяет получить следующее выражение для преобразования Лапласа — Стильтеса функции распределения времени ожидания [3]:

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_{\mu}(x) = \prod_{j=1}^m \left( \frac{1 + s/\mu}{1 - s/s_j} \right),$$

где  $s_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) — корни уравнения

$$(\mu + s)^m - \mu^m \alpha(-s) = 0, \quad (10.33)$$

лежащие в левой полуплоскости, т. е.

$$\operatorname{Re}(s) < 0,$$

причем

$$\alpha(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dA(t).$$

Можно убедиться, что

$$s_j = \mu(\xi_j - 1), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где  $\xi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) — корни уравнения (10.29).

При экспоненциальном распределении времени обслуживания (т. е.  $m = 1$ )

$$\varphi(s) = (1 + s/\mu)/(1 - s/s_1),$$

откуда, выполняя обратное преобразование, получим

$$F_M(x) = 1 - \sigma e^{s_1 x}, \quad (10.34)$$

где

$$\sigma = 1 + s_1/\mu.$$

В частности, если  $A(t)$  имеет вид кусочно-ступенчатой функции, то  $s_1$  является ненулевым корнем уравнения

$$s + \mu - \mu \sum_{i=0}^n B_i \exp(-a_i s) = 0.$$

Аналогичные уравнения легко получить при задании вида  $A(t)$  любой из кусочных функций.

Для случаев  $m > 1$  аналитический вид  $F_M(x)$  получим с использованием теории вычетов [8]. Так, для  $m = 2$ , если корни уравнения (10.33) не кратны, т. е.  $s_1 \neq s_2$ , то

$$F_M(x) = 1 - \frac{s_2(\mu + s_1)^2}{\mu^2(s_2 - s_1)} e^{s_1 x} - \frac{s_1(\mu + s_2)^2}{\mu^2(s_1 - s_2)} e^{s_2 x}. \quad (10.35)$$

Для случая кратных корней  $|s_1 = s_2|$

$$F_M(x) = 1 + [2s_1(\mu + s_1) e^{s_1 x} - (1 - s_1 x)(\mu + s_1)^2 e^{s_1 x}]/\mu^2. \quad (10.36)$$

#### Контрольные вопросы

1. Попробуйте найти решение системы (10.2), (10.3) с использованием метода рекуррентных коэффициентов и составить машинную программу.
2. Доказать возможность получения функций распределения времени ожидания (10.10) в общем случае.
3. Какие характеристики функционирования центрального процессора УЦВК можно найти с помощью модели п. 10.1?
4. В чем существенная разница моделей с ограниченным и неограниченным числом мест ожидания. Какие упрощения и ограничения при этом используются?
5. Рассмотреть возможности метода интегральных уравнений Линдли для получения функций времени ожидания (п. 10.43). Что такое теория вычетов, и как она используется для определения показателей функционирования СМО (п. 10.45, 10.46)?
6. На основании материала данной главы сформулировать трудности анализа УЦВК с помощью непуассоновских моделей.
7. Показать особенности применения вероятностных моделей с позиций системного анализа структурных и функциональных свойств УЦВК. (Использовать варианты структур ЦВК и алгоритмов обработки информации).

8. Указать и обосновать недостаточность модели данной главы для анализа многопроцессорных систем.
9. Какие модели необходимы для анализа распределения вычислительных систем?
10. Оценить возможности аналитических решений для моделей данной главы в условиях реальных АСУ.

## Глава 11

### МОДЕЛИ УСТРОЙСТВ АСУ С КУСОЧНЫМИ И ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

#### 11.1. Системы обслуживания с ограниченным числом мест ожидания и кусочными функциями распределения для потока обслуживания

Рассмотрим СМО вида  $H_m/Q/1/N$ , рекуррентный поток входных заявок в которой описывается гиперэкспоненциальным распределением, а время обслуживания распределено по одному из кусочных законов.

Величина нагрузки системы

$$\rho = -\beta'(0) / \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{\lambda_i}.$$

Вводя регулируемую систему для входного потока по методу фаз, расширим исходное множество состояний так, что максимальный номер состояний расширенного множества, начиная с нулевого,

$$r = (N + 2)m - 1.$$

Граф переходов для состояний расширенного множества (при  $m = 2$ ) аналогичный приведенному на рис. 8.7. Такой граф имеет следующие особенности:

1. В общем случае (т. е. при произвольном потоке обслуживания) граф не является марковским. Однако, процесс, связанный с увеличением числа заявок в СМО, будет марковским, поскольку протекание этого процесса, начиная с некоторого момента времени  $\xi$ , полностью определяется номером состояния, в котором система находится в момент  $\xi$  и не зависит от того, что было до этого момента.

2. Изменение номера состояния системы, вызванное увеличением числа заявок в ней, может происходить, в общем случае, различными путями.

3. При состояниях системы, соответствующих числу заявок в СМО в количестве  $N + 1$  (т. е. состояния полной занятости), входящие заявки получают отказ, однако регулирующая система продолжает действовать, что приводит к возможности изменения номера фазы системы без изменения числа заявок в ней.

Точками регенерации рассматриваемой системы (для которой предварительно было выполнено разложение входного потока на

фазы) являются моменты времени, непосредственно следующие за выходом обслуженных заявок из СМО. Для таких моментов составим матрицу переходных вероятностей, элементами которой  $q_{ij}$  являются условные вероятности перехода системы из  $i$ -го состояния в  $j$ -е за время между двумя соседними точками регенерации ( $i, j = 0, 1, \dots, N - m$ ).

Рассмотрим случай, когда  $m = 2$ . Нетрудно видеть

$$q_{00} = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda_1 x) dB(x), \quad q_{01} = 0. \quad (11.1)$$

Введем величину  $G_{ij}^{(1,2)}$  — вероятность того, что за время между двумя соседними точками регенерации в систему поступит  $(i + j)$  заявок при условии, что из них  $i$ -заявок поступает при 1-й фазе регулирующей системы, а  $j$ -заявок — при 2-й фазе. Находим

$$G_{ij}^{(1,2)} = \int_0^{\infty} \int_0^x \lambda_1 \frac{(\lambda_1 y)^{i-1} \exp(-\lambda_1 y)}{(i-1)!} \frac{\lambda_2^j (x-y)^j \exp(-\lambda_2 (x-y))}{j!} dy dB(x);$$

$$i, j > 0. \quad (11.2)$$

$$G_{i,0}^{(1,2)} = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda_1 x)^i}{i!} \exp(-\lambda_1 x) dB(x), \quad i \geq 0.$$

Тогда получим

$$q_{0,2s+n} = a_{n+1} \sum_{i=0}^{s-1} a_1^{s-1-i} a_2^i \binom{s-1}{i} G_{s-i,i}^{(1,2)}, \quad 0 < s < N, \quad n = 0, 1. \quad (11.3)$$

Аналогично находим выражения для элементов второй строки матрицы:

$$q_{1,0} = 0, \quad q_{1,1} = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda_2 x) dB(x),$$

$$q_{1,2s+n} = a_{n+1} \sum_{i=0}^{s-1} a_1^i a_2^{s-1-i} \binom{s-1}{i} G_{i,s-i}^{(1,2)},$$

$$0 < s < N, \quad n = 0, 1.$$

Нахождение величин переходных вероятностей, соответствующих переходам в состоянии полной занятости системы существенно осложняется тем обстоятельством, что система, перейдя в одно из таких состояний, не обязательно остается в нем до ближайшей точки регенерации. Напротив, под воздействием входного потока номер фазы регулирующей системы может изменяться произвольное число  $i$  раз ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ). Найдем условные вероятности  $g_i(t)$  того, что система спустя время  $t$  от некоторого момента  $\xi$  будет находиться на  $i$ -й фазе, если распределение вероятностей нахождения систе-

мы на одной из  $m$  фаз в момент времени  $\xi$  задается регулирующей системой, при условии, что за промежутки времени  $(\xi, \xi + t)$  число заявок в системе останется неизменным.

Система разностных уравнений, полученных для вероятностей  $g_i(t)$  на основе уравнения Чемпена — Колмогорова для малых  $\Delta t$ , имеет вид:

$$g_1(t + \Delta t) = g_1(t) (1 - a_2 \lambda_1 \Delta t) + g_2(t) a_1 \lambda_2 \Delta t;$$

$$g_2(t + \Delta t) = g_1(t) a_2 \lambda_1 \Delta t + g_2(t) (1 - a_1 \lambda_2 \Delta t),$$

откуда получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$g_1'(t) = -a_2 \lambda_1 g_1(t) + a_1 \lambda_2 g_2(t);$$

$$g_2'(t) = a_2 \lambda_1 g_1(t) - a_1 \lambda_2 g_2(t),$$

с начальными условиями

$$g_1(0) = a_1, \quad g_2(0) = a_2.$$

Решая эту систему, находим

$$g_1(t) = a_1 \left[ \frac{\lambda_2}{s} + \left( 1 - \frac{\lambda_2}{s} \right) e^{-st} \right];$$

$$g_2(t) = a_2 \left[ \frac{\lambda_1}{s} + \left( 1 - \frac{\lambda_1}{s} \right) e^{-st} \right],$$

где

$$s = a_1 \lambda_2 + a_2 \lambda_1.$$

Введем величину  $L_{ij}^{(1,2)}$  — вероятность того, что за время  $x$  между двумя соседними точками регенерации через регулирующую систему пройдет по крайней мере  $(i + j)$  заявок при условии, что из них  $i$  заявок пройдет при 1-й фазе,  $j$  заявок — при второй фазе регулирующей системы и в момент окончания времени  $x$  регулирующая система будет находиться на  $h$ -й фазе. Для определения этой величины представим случайную величину  $x$  с функцией распределения  $B(x)$  в виде

$$x = (z + (y - z)) + (x - y).$$

Вероятность того, что за промежуток времени  $y$  в систему поступит  $i$  заявок при первой фазе регулирующей системы и  $j$  заявок — при второй, запишем в виде

$$m_{ij}(y) = \int_0^y \lambda_1 \frac{(\lambda_1 z)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda_1 z} \frac{\lambda_2^j (y-z)^j}{j!} e^{-\lambda_2 (y-z)} dz. \quad (11.4)$$

Тогда величина

$$L_{ij}^{(1,2)} = \int_0^\infty \int_0^x m_{ij}(y) dg_h(x-y) dB(x). \quad (11.5)$$

Введем

$$c_{2z, r+n-3}^* = a_{n+1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} a_1^{s-1-j} a_2^j L_{j, s=j, n+1}^{(1,2)} \quad (11.6)$$

и

$$c_{2z+1, r+n-3}^* = a_{n+1} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s-1}{j} a_1^{s-1-j} L_{j, s=j, n+1}^{(1,2)}$$

$$z = N - s, \quad s = 1, 2, \dots, N, \quad n = 0, 1.$$

Тогда для двух последних элементов первой и второй строк матрицы переходных вероятностей

$$q_{0, r-3} = c_{0, r-3}^*, \quad q_{0, r-2} = c_{0, r-2}^*;$$

$$q_{1, r-3} = c_{1, r-3}^*, \quad q_{1, r-2} = c_{1, r-2}^*.$$

Можно видеть, что третья и четвертая строки матрицы совпадают соответственно с первой и второй строкой. Обозначая

$$c_{ij} = q_{i, j}, \quad i = 0, 1, \quad j < mN, \quad (11.7)$$

получим следующий вид матрицы переходных вероятностей:

$$\|q_{ij}\| = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & \dots & c_{0, r-4} & c_{0, r-3}^* & c_{0, r-2}^* \\ 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1, r-4} & c_{1, r-3}^* & c_{1, r-2}^* \\ c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & \dots & c_{0, r-4} & c_{0, r-3}^* & c_{0, r-2}^* \\ 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1, r-4} & c_{1, r-3}^* & c_{1, r-2}^* \\ 0 & 0 & c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0, r-6} & c_{2, r-3}^* & c_{2, r-2}^* \\ 0 & 0 & 0 & c_{11} & \dots & c_{1, r-6} & c_{3, r-3}^* & c_{3, r-2}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{01} & c_{2N-2, r-3}^* & c_{2N-2, r-2}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{11} & c_{2N-1, r-3}^* & c_{2N-1, r-2}^* \end{pmatrix}$$

В общем случае (при произвольной величине  $m$ ) матрица представима в виде (10.1), причем значения элементов каждой подматрицы можно найти из следующих соотношений:

$$q_{ij} = 0, \quad j < i, \quad i < m;$$

$$q_{ij} = c_{ij}, \quad i \leq j \leq r - 2m, \quad i < m;$$

$$q_{ij} = c_{ij}, \quad r - 2m < j, \quad i < m;$$

$$q_{ij} = 0, \quad j < i - m, \quad i \geq m;$$

$$q_{ij} = c_{s, z}, \quad i - m \leq j \leq r - 2m, \quad i \geq m;$$

$$s = i - \left[ \frac{i}{m} \right]; \quad z = j - \left[ \frac{i-m}{m} \right] m;$$

$$q_{ij} = c_{i+m, j}, \quad r - 2m < j, \quad i \geq m.$$

Вероятности состояний расширенного множества определяются из решения системы уравнений вида (10.2) вместе с условием нормировки (10.3), например, методом рекуррентных коэффициентов (п. 9.2.). Переход к вероятностям, отличающимся числом заявок в СМО, производится с использованием равенств (10.4).

Получим уравнения для нахождения вероятностей вида  $\bar{q}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ) с использованием метода п. 9.3. Граф переходов системы  $H G 1 N$  приведен на рис. 8.7. Уравнения баланса:

$$|E_{2,0} - \bar{E}_{0,2} - \bar{E}_{0,3}| \leq 1;$$

$$|E_{3,1} - \bar{E}_{1,2} - \bar{E}_{1,3}| \leq 1;$$

$$|\bar{E}_{i-2,i} + \bar{E}_{i-1,i} - E_{i,i-2} - \bar{E}_{i,i+2} - \bar{E}_{i,i+3} + E_{i+2,i}| \leq 1;$$

$$i = 2, 4, \dots, r-3;$$

$$|\bar{E}_{i-3,i} + \bar{E}_{i-2,i} - E_{i,i-2} - \bar{E}_{i,i+1} - \bar{E}_{i,i+2} + E_{i+2,i}| \leq 1;$$

$$i = 3, 5, \dots, r-2;$$

$$|\bar{E}_{r-3,r-1} + \bar{E}_{r-2,r-1} - E_{r-1,r-3} - \bar{E}_{r-1,r} + \bar{E}_{r,r-1}| \leq 1;$$

$$|\bar{E}_{r-3,r} + \bar{E}_{r-2,r} - E_{r,r-2} - \bar{E}_{r,r-1} + \bar{E}_{r-1,r}| \leq 1.$$

Интенсивность точек регенерации

$$\alpha = [q_0/\lambda_1 + q_1/\lambda_2 + 1/\mu]^{-1}.$$

Параметр пуассоновского потока в системе равен  $\lambda_1$  с вероятностью  $a_1$  и  $\lambda_2$  с вероятностью  $a_2$ .

Переходя к пределам вида (9.31), получим:

$$\bar{q}_0 = \frac{\alpha}{\lambda_1} q_0, \quad \bar{q}_1 = \frac{\alpha}{\lambda_2} q_1;$$

$$\bar{q}_i = \frac{\alpha}{\lambda_1} (q_i + a_1 q_{i-1} - a_2 q_{i-2}), \quad i = 2, 4, \dots, r-3;$$

$$\bar{q}_i = \frac{\alpha}{\lambda_2} (q_i - a_1 q_{i-2} + a_2 q_{i-3}), \quad i = 3, 5, \dots, r-2;$$

$$\bar{q}_{r-1} = \frac{a_1 \lambda_2}{a_1 \lambda_2 + a_2 \lambda_1} \left( \sum_{j=r-3}^r q_j - \left( \frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{a a_2}{a_1 \lambda_2} \right) q_{r-3} \right);$$

$$\bar{q}_r = \frac{a_2 \lambda_1}{a_1 \lambda_2 + a_2 \lambda_1} \left( \sum_{j=r-3}^r q_j - \left( \frac{\alpha}{\lambda_2} + \frac{a a_1}{a_2 \lambda_1} \right) q_{r-2} \right).$$

Нахождение функции распределения времени ожидания  $F_M(x)$  для моделей с гиперэкспоненциальными входными потоками ничем не отличается от того исследования, которое было проделано для СМО вида  $M/G/1/N$ . Это объясняется тем, что после того, как заявка поступила в систему, ее дальнейшее поведение не зависит от вида входного потока.



## 11.2. Системы с ограниченным числом мест ожидания и кусочными функциями распределения для входного потока

Если рекуррентный поток входящих заявок описывается одной из кусочных функций (6.27), (6.37), а время обслуживания описывается гиперэкспоненциальным распределением  $m$ -го порядка, то можно построить СМО вида  $Q/H_m/1/N$ , для анализа которой, как и раньше, используем композицию метода фаз и метода Кендалла. Величина нагрузки СМО

$$\rho = - \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{\mu_i} / \alpha^1(0),$$

причем

$$\alpha(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dA(x).$$

Вводя регулируемую систему для потока обслуживания по методу фаз, расширим исходное множество состояний так, что максимальный номер состояний расширенного множества, начиная с нулевого,

$$r = m(N + 1).$$

Для такой СМО можно выделить точки регенерации, которыми являются моменты времени, непосредственно предшествующие поступлению заявок в СМО. Получение матрицы переходных вероятностей во многих чертах аналогично случаю СМО, рассмотренной в предыдущем параграфе. Для облегчения составления такой матрицы введем обратную нумерацию состояний расширенного множества.

Тогда граф переходов до вершин, соответствующих последним  $(r - m)$  состояниям, будет совпадать с графом СМО  $H_m/Q/1/N + m$ . При  $m = 2$  матрица переходных вероятностей имеет вид:

$$\| q_{ij} \| = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & \dots & c_{0,r-2} & c_{0,r-1} & c_{0,r}^* \\ 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1,r-2} & c_{1,r-1} & c_{1,r}^* \\ c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & \dots & c_{0,r-2} & c_{0,r-1} & c_{0,r}^* \\ 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1,r-2} & c_{1,r-1} & c_{1,r}^* \\ 0 & 0 & c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0,r-4} & c_{0,r-3} & c_{0,r-2}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{r,r-2}^* & c_{r,r-1}^* & c_{r,r}^* \end{pmatrix},$$

где

$$i, j = 0, 1, \dots, r.$$

Элементы матрицы определяются из аналогичных выражений за исключением:

$$c'_{ij} = 1 - \sum_{k=0}^{j-1} c_{ik}; \quad c'_{r,r-2} = B_1 \int_0^{\infty} e^{-\mu_1 x} dA(x);$$

$$c'_{r,r-1} = B_2 \int_0^{\infty} e^{-\mu_2 x} dA(x); \quad c'_{r,r} = 1 - c'_{r,r-2} - c'_{r,r-1}.$$

В общем случае (при произвольной величине  $m$ ) матрица с обратной нумерацией состояний представима в виде (10.1), причем значения элементов каждой подматрицы можно найти из следующих соотношений:

$$q_{ij} = 0, \quad j < i, \quad i < m;$$

$$q_{ij} = c_{ij}, \quad i \leq j < r, \quad i < m;$$

$$q_{ir} = c'_{i,r}, \quad i < m;$$

$$q_{ij} = 0, \quad j < i - m, \quad i \geq m;$$

$$q_{ij} = c_{s,z}, \quad i - m \leq j < r, \quad r > i \geq m,$$

где

$$s = i - \left[ \frac{i}{m} \right]; \quad z = j - \left[ \frac{i-m}{m} \right] m;$$

$$q'_{r,j} = c'_{r,j}, \quad j = r-2, r-1;$$

$$q_{i,r} = c'_{s,r}, \quad m \leq i < r, \quad s = i - \left[ \frac{i}{m} \right]; \quad q_{rr} = c'_{rr}.$$

При составлении системы уравнений для вероятностей состояний следует учитывать, что матрица переходов является транспонированной по отношению к прямой нумерации состояний расширенного множества. С учетом этого момента можно записать

$$q_i = \sum_{j=0}^r q_j q_{r-i, r-j}, \quad i = 0, 1, \dots, r,$$

где  $q_i$  — вероятность состояния расширенного множества, при котором в СМО находится

$$v = \left[ \frac{i+m-1}{m} \right], \quad i = 0, 1, \dots, r,$$

заявок, а номер фазы регулирующей системы

$$w = i + (1-v)m; \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Переход к вероятностям состояний, отличающихся числом заявок в СМО, можно произвести с помощью выражений (10.27), (10.28).

Получим уравнения для нахождения вероятностей вида  $\bar{q}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ) с использованием метода п. 9.3. Граф переходов

системы  $GI/H/1/N$  приведен на рис. 8.8. Уравнения баланса имеют вид:

$$\begin{aligned} |\bar{E}_{1,0} + \bar{E}_{2,0} - E_{0,1} - E_{0,2}| &\leq 1; \\ |E_{0,1} + \bar{E}_{3,1} + \bar{E}_{4,1} - \bar{E}_{1,0} - E_{1,3}| &\leq 1; \\ |E_{0,2} + \bar{E}_{4,2} + \bar{E}_{3,2} - \bar{E}_{2,0} - E_{2,4}| &\leq 1; \\ |E_{i-2,i} + \bar{E}_{i+2,i} + \bar{E}_{i+3,i} - \bar{E}_{i,i-2} - \bar{E}_{i,i-1} - E_{i,i+2}| &\leq 1, \\ i = 3, 5, \dots, r-3; \\ |E_{i-2,i} + \bar{E}_{i+1,i} + \bar{E}_{i+2,i} - \bar{E}_{i,i-2} - \bar{E}_{i,i-3} - E_{i,i+2}| &\leq 1, \\ i = 4, 6, \dots, r-2; \\ |E_{r-3,r-1} - \bar{E}_{r-1,r-2} - \bar{E}_{r-1,r-3}| &\leq 1; \\ |E_{r-2,r} - \bar{E}_{r,r-3} - \bar{E}_{r,r-2}| &\leq 1. \end{aligned}$$

Интенсивность точек регенерации в рассматриваемой СМО равна интенсивности входного потока заявок  $\lambda$ , а параметр пуассоновского потока равен  $\mu_1$  с вероятностью  $b_1$  (заявка обслуживается на 1-й фазе) или же  $\mu_2$  с вероятностью  $b_2$  (заявка обслуживается на 2-й фазе). Переходя к пределам вида (9.31), находим, что

$$\begin{aligned} \bar{q}_{r-1} &= q_{r-3} \frac{\lambda}{\mu_1}; \quad \bar{q}_r = \frac{\lambda}{\mu_2} q_{r-2}; \\ \bar{q}_i &= \frac{\lambda}{\mu_1} (q_{i-2} - b_2 q_i + b_1 q_{i+1}), \quad i = 3, 5, \dots, r-3; \\ \bar{q}_i &= \frac{\lambda}{\mu_2} (q_{i-2} - b_1 q_i + b_2 q_{i-1}), \quad i = 4, 6, \dots, r-2; \\ \bar{q}_2 &= \frac{\lambda}{\mu_2} (b_2 q_0 - b_1 q_2 + b_2 q_1), \quad \bar{q}_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} (b_1 q_0 - b_2 q_1 + b_1 q_2); \\ \bar{q}_0 &= 1 - \lambda \left( \frac{b_1}{\mu_1} + \frac{b_2}{\mu_2} \right) \sum_{i=0}^{2N} q_i = 1 - \rho (1 - q_{r-1} - q_r), \end{aligned}$$

причем  $\rho$  — нагрузка системы. Очевидно, что для СМО с ожиданием следует принять  $q_{r-1} = q_r = 0$ .

Частным случаем рассмотренной СМО является система вида  $GI/M/1/N$ , для получения которой достаточно положить, например, что  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 1$ . Тогда вероятности состояний с нечетными номерами будут равны нулю, а для состояний с четными номерами имеют место формулы:

$$\begin{aligned} \bar{q}_i &= \lambda q_{i-2} / \mu_2; \quad i = 2, 4, \dots, 2N + 2; \\ \bar{q}_0 &= 1 - \sum_{i=1}^{2N+2} q_i. \end{aligned}$$

аналогично полученным Л. Такачем [1].

### 11.3. Модели обслуживания с ожиданием

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания с ожиданием, рекуррентный входной поток которой описывается гиперэкспоненциальным распределением второго порядка с функцией распределения

$$A(t) = 1 - a_1 e^{-\lambda_1 t} - a_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad a_1 + a_2 = 1, \quad (11.8)$$

и средней интенсивностью

$$\Lambda = \left[ \frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_2} \right]^{-1}.$$

Пусть  $B(t)$  — функция распределения времени обслуживания, ее преобразование Лапласа — Стильтеса —  $\beta(s)$ , интенсивность обслуживания  $r(t) = B'(t) [1 - B(t)]^{-1}$ , средняя длительность обслуживания  $b_{cp}$ . Если  $\frac{1}{b_{cp}} > \Lambda$ , то для данной системы существует

стационарный режим, исследование которого может быть проведено методом включения добавочных переменных [2] в сочетании с методом фаз. Входной поток требований, описываемый распределением (11.8), можно интерпретировать следующим образом [3]: имеется входное устройство, состоящее из двух каналов, где в любой момент времени имеется всего лишь одно требование, выходящее из неограниченного буфера. Последнее находится в  $j$ -м ( $j=1,2$ ) канале с вероятностью  $\lambda_j \Delta t + 0$  ( $\Delta t$ ) за время  $\Delta t$  выйдет из входного устройства и поступит в систему на обслуживание.

Пусть  $q_n^i(u) du$  обозначает вероятность того, что: в произвольный момент равновесного состояния в системе находится  $n$  требований ( $n > 0$ ) и очередное поступающее требование расположено в  $i$ -м канале; время, в течение которого продолжается обслуживание требования, поступившего в линию, заключено в промежутке  $u, u + du$ . Величина  $q_n^i(u)$  является стационарной плотностью вероятности состояния  $[n, i, u]$  и предполагается непрерывной. Состояния  $[0, i]$  описывают вероятности  $q_0^i$ .

Рассматривая возможные изменения состояний системы в бесконечно малом промежутке времени и переходя к пределу, получим систему дифференциальных уравнений для  $q_n^i(u)$ :

$$\frac{d}{du} q_1^i(u) = -[\lambda_i + r(u)] q_1^i(u), \quad i = 1, 2; \quad (11.9)$$

$$\frac{d}{du} q_n^i(u) = -[\lambda_i + r(u)] q_n^i(u) + a_i \sum_{j=1}^2 \lambda_j q_{n-1}^j(u).$$

Найдем соотношения для последовательности значений  $q_n^i(0)$  и  $q_0^i$ :

$$\lambda_i q_0^i = \int_0^{\infty} q_1^i(u) r(u) du; \quad (11.10)$$

$$q'_1(0) = \int_0^{\infty} q'_2(u) r(u) du + a_1 \sum_{i=1}^2 \lambda_i q'_i;$$

$$q'_n(0) = \int_0^{\infty} q'_{n+1}(u) r(u) d(u), \quad n > 1.$$

Системы уравнений (11.9) и (11.10) полностью описывают стационарное состояние рассматриваемой системы. Стационарными вероятностями для случая, когда не учитывается время, в течение которого продолжается обслуживание, являются величины

$$q'_0 \text{ и } q'_n = \int_0^{\infty} q'_n(u) du, \quad n > 0.$$

При этом условии нормировки будет в виде

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} q'_n = 1. \quad (11.11)$$

Для нахождения функции распределения времени ожидания СМО  $H|G|1$  используется метод Линдли. Факторизационное уравнение

$$\alpha(-s) \beta(s) - 1 = \frac{[\lambda_1 \lambda_2 - (a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2) s] \beta(s) - (\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)} = \frac{\Psi_+}{\Psi_-}.$$

В данном случае можно принять естественную факторизацию, тогда

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_M(x) = \frac{k_0 + k_1 s + k_2 s^2}{[\lambda_1 \lambda_2 - (a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2) s] \beta(s) - (\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)}, \quad (11.12)$$

причем:

$$k_0 = 0;$$

$$k_1 = \lambda_1 \lambda_2 \beta'(0) + a_2 \lambda_1 + a_1 \lambda_2;$$

$$k_2 = \lambda_1 \lambda_2 \beta''(0)/2 - t_{ож} (\lambda_1 \lambda_2 \beta'(0) + a_2 \lambda_1 + a_1 \lambda_2) - 1 - (a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2) \beta'(0).$$

Произведя обращение выражения (11.12), найдем определяемую функцию  $F_M(x)$ . Тогда среднее время ожидания

$$t_{ож} = \int_0^{\infty} x dF_M(x).$$

Для случая модели обслуживания  $GI/H/1$  воспользуемся тем обстоятельством, что  $\beta(s)$  представима в виде (8.6), тогда принимая во внимание (8.7), получим

$$\varphi(s) = \frac{(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}{\mu_1 \mu_2 (1 - s/\xi_1)(1 - s/\xi_2)},$$

где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — корни уравнения

$$1 - \alpha(-s) [\mu_1 \mu_2 + (b_1 \mu_1 + b_2 \mu_2) s] / [(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)] = 0,$$

лежащие в левой полуплоскости  $\text{Re}(s) < 0$ .

### Контрольные вопросы

1. Какова роль уравнений Чепмена — Колмогорова при составлении вероятностных моделей сложных систем?
2. Сравнить модели п. 16.1 и 16.2. В чем для них заключаются особенности определения показателей функционирования УЦВК?
3. Как можно интерпретировать модели обслуживания с ожиданием и без ожидания?
4. Получить выражения для производящих функций, путем вывода конечных формул и вероятностей стационарных состояний на основе п. 11.9—11.11.
5. Показать специфику анализа архитектуры УЦВК и программного обеспечения с помощью вероятностных моделей данной главы.
6. Для каких по сложности структур УЦВК можно получить более полезные для системного анализа результаты (сосредоточенные, распределенные, одно- и многопроцессорные, матричные, магистральные, конвейерные, однородные и др.)?
7. Сравнить аналитические и машинные методы моделирования УЦВК по трудности, точности, оперативности, универсальности.
8. Какие показатели функционирования УЦВК можно получить с помощью модели данной главы? Объяснить их ограниченность и специфику определения.
9. На каком этапе проектирования УЦВК результаты расчетов по вероятностным моделям имеют наиболее важное значение (разработка ТЗ, аванпроект, эскизный проект, технический проект)? Учесть уровень детализации и способ принятия решений.

## Глава 12

### ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ УСТРОЙСТВ СОПРЯЖЕНИЯ С ОБЪЕКТОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕПУАССОНОВСКИХ МОДЕЛЕЙ С НЕОРДИНАРНЫМИ ПОТОКАМИ И КУСОЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В настоящей главе рассматриваются вопросы определения характеристик функционирования устройств сопряжения с объектом (УСО) на основе непуассоновских моделей массового обслуживания, причем учет вида входного информационного потока или распределения времени преобразования информации производится путем аппроксимации соответствующего распределения  $A(t)$  или  $B(t)$  одной из кусочных функций распределения. Отличительной особенностью используемых моделей является наличие неординарных потоков событий, причем для моделей УСО характерным является постоянное число заявок в группе.

#### 12.1. Расчет характеристик УСО с помощью кусочных функций для потока обслуживания

Пусть имеется СМО с ограниченным числом мест ожидания  $N$ , заявки в которую поступают группами по  $h$  штук, причем промежутки между моментами прихода соседних групп распределены по

закону  $A(t)$ . Одновременно обслуживаются группы из  $l$  заявок, время обслуживания распределено по закону  $B(t)$ . Если число заявок в СМО меньше  $l$ , то обслуживающее устройство простаивает.

Рассмотрим однолинейную (т. е. одновременно обслуживается не более одной группы заявок) СМО с ограниченным числом мест ожидания и неординарными потоками событий, в которой функция  $A(t)$  имеет вид, соответствующий распределению Эрланга или гиперэкспоненциальному распределению, а время обслуживания распределено по одной из кусочных зависимостей. Введя дополнительные состояния системы по методу фаз, можно выделить точки регенерации, которыми для данного случая будут являться моменты времени, непосредственно следующие за выходом обслуженных заявок из СМО.

Рассмотрим случай, когда

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Матрица переходных вероятностей состояний, которые в данном случае будут отличаться только числом заявок в СМО, представляется в виде

$$\| \| p_{ij} \| \| = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & \theta \\ \hline \end{array} & \left. \begin{array}{l} l \text{ строк} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline \vdots & \delta & \vdots \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \vdots & \theta & \vdots \\ \hline \end{array} & \left. \begin{array}{l} N+1-l \\ \text{строк} \\ \\ \end{array} \right\} \\ \hline \end{array} \quad (12.1)$$

причем подматрицы  $a$ ,  $b$ ,  $\theta$ , соответствуют режиму простоя обслуживающего устройства (так как число заявок в СМО меньше, чем  $l$ ); а матрицы  $\delta$ ,  $\theta$ ,  $e$  — режиму работы обслуживающего устройства.

Введем величины

$$k_j = P\{\xi = j\}, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\xi$  — число групп заявок, поступивших в систему за время между моментами выхода из СМО двух соседних обслуженных групп заявок. Тогда элементы подматриц матрицы (12.1) можно записать следующим образом:

$$p_{ij} = 0, \quad i > j, \quad i < l;$$

$$p_{ij} = k_r, \quad r = \frac{j-i}{h} = 0, 1, 2, \dots \left. \vphantom{p_{ij}} \right\} i \leq j < N$$

$$p_{ij} = 0, \quad \frac{j-i}{h} \neq 0, 1, 2, \dots \left. \vphantom{p_{ij}} \right\} i < l;$$

$$p_{ij} = 1 - \sum_{s=0}^r k_s = k_{r+1}^*, \quad j = N, \quad r = \left[ \frac{N-i-1}{h} \right], \quad i < l;$$

$$p_{ij} = 0, \quad i-l > j;$$

$$\left. \begin{aligned}
 p_{ij} &= k_r, \quad r = \frac{j-i+l}{h} = 0, 1, 2, \dots, \\
 p_{ij} &= 0, \quad \frac{j-i+l}{h} \neq 0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 &i-l \leq j < N \\
 &i \geq l;
 \end{aligned}$$

$$p_{ij} = 1 - \sum_{s=0}^r k_s = k_{r+1}^*, \quad j = N, \quad r = \left[ \frac{N+l-i-1}{h} \right], \quad i \geq l.$$

Величины  $k_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ), входящие в эти формулы, определяются соответственно (9.5), причем в случае задания вида  $B(t)$  одной из кузовочных функций выражение для  $k_j$  будет совпадать с соответствующей зависимостью (9.6) — (9.8) с точностью до замены символа  $\alpha$  величиной  $\lambda$ , являющейся параметром входного потока.

Проследим влияние величин  $h$  и  $l$  на вид матрицы переходных вероятностей. При  $h = 1$  и  $l = 3$  эта матрица имеет вид

$$\| p_{ij} \| = \begin{vmatrix}
 k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_{N-1} & k_N^* \\
 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \dots & k_{N-2} & k_{N-1}^* \\
 0 & 0 & k_0 & k_1 & \dots & k_{N-3} & k_{N-2}^* \\
 k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_{N-1} & k_N^* \\
 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \dots & k_{N-2} & k_{N-1}^* \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_2 & k_3^*
 \end{vmatrix}, \quad (12.2)$$

а при  $h = 2$  и  $l = 1$ ,

$$\| p_{ij} \| = \begin{vmatrix}
 k_0 & 0 & k_1 & 0 & k_2 & \dots & k_{[N/2]}^* \\
 k_0 & 0 & k_1 & 0 & k_2 & \dots & k_{[N/2]}^* \\
 0 & k_0 & 0 & k_1 & 0 & \dots & k_{[\frac{N-1}{2}]}^* \\
 0 & 0 & k_0 & 0 & k_1 & \dots & k_{[\frac{N}{2}]-1}^* \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_2^* \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_1^* \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_1^*
 \end{vmatrix}. \quad (12.3)$$

Сопоставление матриц (12.2), (12.3) между собой и с матрицей (10.8) позволяет сделать следующие выводы:

1. Величина  $l$  определяет число строк составляющих подматриц (в, б, в) в разложении (12.1).

2. Величина  $h$  определяет число рядом стоящих нулевых элементов матрицы, причем это число равно  $h - 1$ . Уравнения системы (9.4) кроме соответствующего  $j = N$ , можно записать в следующем



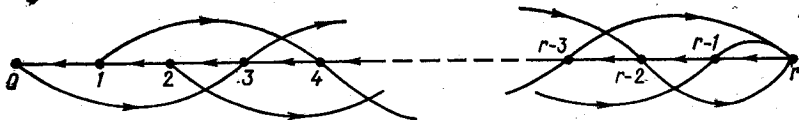


Рис. 12.1.

виде

$$p_i = \sum_{s=\chi_1}^k k_s p_{i+l-hs} + \sum_{s=\chi_2}^k k_2 p_{i-hs} r^{l-j+kh-1}, \quad (12.4)$$

где

$$k = \left[ \frac{j}{h} \right], \quad j = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$\chi_1 = \left[ \frac{j-N+h-1+l}{h} \right] r (j-N+l);$$

$$\chi_2 = \left[ \frac{j-l+h}{h} \right] r (j-l+1),$$

причем везде  $j < N$ .

Заметим, что для случая  $l \geq h$  второй член суммы (12.4) всегда отличен от нуля. Действительно, при этом имеет место

$$l-1 - \left( j - \left[ \frac{j}{h} \right] h \right) \geq 0,$$

т. е.

$$r(l-j+kh-1) = 1.$$

Приведем выражения для перехода к вероятностям вида  $p_i$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ), усредненным по всему времени функционирования СМО в стационарном режиме, с использованием методики п. 9.3.

Для модели  $M^{(h)}/G/1/N$  граф переходов (при  $h = 3$ ) приведен на рис. 12.1.

Интенсивность точек регенерации

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho_0 + \lambda/\mu}.$$

Система уравнений для вероятностей вида  $p_i$  и  $\bar{p}_i$

$$\alpha p_0 - \lambda \bar{p}_0 = 0;$$

$$\alpha p_i - \alpha p_{i-1} - \lambda \bar{p}_i = 0, \quad 0 < i < h;$$

$$\alpha p_i - \alpha p_{i-1} - \lambda \bar{p}_i + \lambda \bar{p}_{i-h} = 0, \quad h \leq i < r, \quad r = N+1;$$

$$\lambda \sum_{j=r-h}^{r-1} \bar{p}_j - \alpha p_{r-1} = 0.$$

Из решений этой системы, учитывая условие нормировки, при конкретных значениях  $h$  и  $N$  нетрудно получить искомые соотношения.

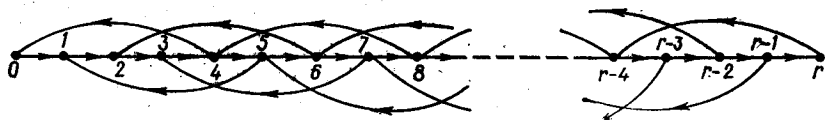


Рис. 12.2.

Для модели  $M | G^{(l)} | 1 | N$  граф переходов (при  $l = 4$ ) приведен на рис. 12.2.

Интенсивность точек регенерации

$$\alpha = \left[ \frac{1}{\mu} + \sum_{i=0}^{l-1} \frac{l-i}{\lambda} p_i \right]^{-1}.$$

Соответствующая система уравнений запишется так

$$\begin{aligned} -\lambda \bar{p}_0 - \alpha p_0 &= 0; \\ \lambda \bar{p}_{i-1} - \lambda \bar{p}_i + \alpha p_i &= 0; \quad 0 < i < l; \\ \lambda \bar{p}_{i-1} - \lambda \bar{p}_i + \alpha p_i - \alpha p_{i-l} &= 0, \quad l \leq i \leq r-l; \\ \lambda \bar{p}_{i-1} - \lambda p_i - \alpha p_{i-l} &= 0, \quad r-l < i < r; \\ \lambda \bar{p}_{r-1} - \alpha p_{r-l} &= 0. \end{aligned}$$

Из решения этой системы вместе с условием нормировки получаем:

$$\begin{aligned} \bar{p}_i &= \frac{\alpha}{\lambda} \sum_{j=0}^i p_j, \quad 0 \leq i < l; \\ \bar{p}_i &= \frac{\alpha}{\lambda} \sum_{j=i-l+1}^i p_j, \quad l \leq i \leq r-l; \\ \bar{p}_i &= \frac{\alpha}{\lambda} \sum_{j=i-l+1}^{r-1} p_j, \quad r-l < i < r; \\ \bar{p}_r &= 1 - \frac{\alpha l}{\lambda}. \end{aligned}$$

Для определения функции распределения времени ожидания используем формулу полной вероятности [2]. При этом оказывается, что вид функции распределения будет зависеть от порядкового номера заявки, находящейся в системе, причем можно заметить периодичность величиной  $h$ , с которой в систему поступают заявки, имеющие в стационарном режиме одну и ту же функцию распределения времени ожидания. Задача сводится к нахождению вида функций  $F_{nk}(x)$ , где  $k = 1, 2, \dots, h$ .

## 12.2. Определение параметров УСО с учетом вида потоков преобразуемой информации на основе кусочной аппроксимации

Рассмотрим однолинейную модель массового обслуживания, в которую заявки поступают группами, по  $h$  заявок в каждой, причем для задания вида функции распределения промежутков между моментами поступления в систему соседних групп заявок  $A(t)$  используем кусочные функции распределения (6.19). Предположим, что время обслуживания одной группы заявок распределено по экспоненциальному закону, т. е.

$$B(t) = 1 - e^{-\mu t}.$$

Тогда по методу Кендалла для моментов времени, непосредственно предшествующих поступлениям в систему входных групп заявок, матрицу вероятностей перехода для состояний системы можно представить как

$$\| \| p_{ij} \| \| = \left\| \begin{array}{c} \left. \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \right\} \begin{array}{l} (l-h)Y(t-h) \\ \text{строк} \end{array} \\ \left. \begin{array}{|c|} \hline \delta \quad \delta \\ \hline \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{|c|} \hline \delta \quad e \\ \hline \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{|c|} \hline \delta \quad c \\ \hline \end{array} \right\} h \text{ строк} \end{array} \right\| \quad (12.5)$$

причем подматрица  $a$  соответствует режиму простоя системы, подматрицы  $b, e$  — режиму нормальной работы СМО, подматрицы  $\delta, c$  — режиму переполнения мест ожидания и отказам части или всем входящим заявкам. Введем величины

$$k_j = P \{ \xi = j \}, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\xi$  — число групп заявок, обслуженных в обслуживающем устройстве за время между моментами поступления входных групп заявок при условии непрерывной работы обслуживающего устройства. Тогда элементы подматриц матрицы (12.5) можно найти из следующих выражений:

$$\left. \begin{array}{l} p_{ij} = 1, \quad j - i = h \\ p_{ij} = 0, \quad j - i \neq h \end{array} \right\} \quad 0 \leq i < \max(l - h, 0),$$

$$\left. \begin{array}{l} p_{ij} = k_s^*, \quad s = \frac{i+h-j}{l} = 0, 1, \dots, \\ p_{ij} = 0, \quad \frac{i+h-j}{l} \neq 0, 1, \dots, \\ p_{ij} = k_r, \quad r = \frac{i+h-j}{l} = 0, 1, \dots, \\ p_{ij} = 0, \quad \frac{i+h-j}{l} \neq 0, 1, \dots, \end{array} \right\} \begin{array}{l} j < l, \\ j > l \\ j \leq h + 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} i \geq \max \times \\ \times (l - h, 0), \\ i \leq N + l - h; \end{array} \right\}$$

$$p_{ij} = 0, \quad j \geq l, \quad j - i > h, \quad i \geq \max(l - h, 0), \quad i \leq N + l - h;$$

$$\left. \begin{aligned} p_{ij} &= k_s^*, \quad s = \frac{N+l-j}{l} = \frac{N}{l} + 1, \\ p_{ij} &= 0, \quad \frac{N+l-j}{l} \neq \frac{N}{l} + 1, \\ p_{ij} &= k_r, \quad r = \frac{N+l-j}{l} = 0, 1, \dots, \\ p_{ij} &= 0, \quad \frac{N+l-j}{l} \neq 0, 1, \dots, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} j < l \\ i > N + l - h, \\ j \geq l \end{array}$$

где

$$k_j^* = 1 - \sum_{i=0}^{j-1} k_i.$$

Величины  $k_j$  ( $j = 0, 1, \dots$ ), входящие в приведенные выражения, определяются соответственно (9.5), причем для случая задания вида  $A(t)$  какой-либо кусочной функцией (6.19) выражение для  $k_j$  будет совпадать с соответствующей зависимостью (9.6) — (9.8) с точностью до замены символа  $\alpha$  величиной  $\mu$ , являющейся параметром потока обслуживания.

Проследим влияние величин  $h$  и  $l$  на вид матрицы переходных вероятностей. При  $h = 1$  и  $l = 3$  матрица (12.5) имеет вид (для  $N$  кратного 3)

$$\|p_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_1^* & 0 & 0 & k_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_1^* & 0 & 0 & k_0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_1^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_2^* & 0 & 0 & k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2^* & 0 & 0 & k_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{\frac{N}{3}+1}^* & 0 & 0 & k_{\frac{N}{3}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (12.6)$$

а при  $h = 3$  и  $l = 1$

$$\|p_{ij}\| = \begin{pmatrix} k_3^* & k_2 & k_1 & k_0 & 0 & \dots & 0 \\ k_4^* & k_3 & k_2 & k_1 & k_0 & \dots & 0 \\ k_5^* & k_4 & k_3 & k_2 & k_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{N+1}^* & k_N & k_{N-1} & k_{N-2} & k_{N-3} & \dots & k_0 \\ k_{N+1}^* & k_N & k_{N-1} & k_{N-2} & k_{N-3} & \dots & k_0 \end{pmatrix}. \quad (12.7)$$

Сопоставляя матрицы (12.6), (12.7) между собой и матрицей (10.26) можно заметить, что:

1. Величина  $h$  определяет число строк подматрицы  $\delta$  и  $\epsilon$ , причем это число равно  $h$ .

2. Величина  $l$  определяет число рядом стоящих нулевых элементов матрицы, причем это число равно  $l - 1$ .

Для случая, когда  $h = kl$  (или  $l = kh$ ), матрица (12.5) будет содержать число

$$s = \min(h, l)$$

неприводимых матриц, причем вид невозвратной матрицы существенных состояний определяется величиной числа мест ожидания  $N$ . Элементами невозвратной матрицы будут переходные вероятности состояний, индексы которых записываются в виде

$$j = as + b, \quad b = N - \left[ \frac{N}{s} \right] s. \quad (12.8)$$

$$a = 0, 1, 2, \dots$$

В стационарном режиме все вероятности, номер (индекс) которых отличен от вида (12.8), равны нулю.

Для нахождения вероятностей вида  $\bar{p}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N + l$ ) для СМО  $GI^{(h)} | M | 1 | N$  воспользуемся п. 9.3. В этом случае система соотношений примет вид:

$$\bar{\mu} \bar{p}_1 - \lambda p_0 = 0;$$

$$\bar{\mu} \bar{p}_{i+1} - \bar{\mu} \bar{p}_i - \lambda p_i = 0; \quad 0 < i < h;$$

$$\bar{\mu} \bar{p}_{i+1} - \bar{\mu} \bar{p}_i - \lambda p_i + \lambda p_{i-h} = 0, \quad h \leq i < r, \quad r = N + 1;$$

$$\sum_{j=1}^h \lambda p_{r-j} - \bar{\mu} \bar{p}_r = 0,$$

откуда получаем:

$$\bar{p}_i = \frac{\lambda}{\bar{\mu}} \sum_{j=0}^{i-1} p_j, \quad 0 < i \leq h;$$

$$\bar{p}_i = \frac{\lambda}{\bar{\mu}} \sum_{j=i-h}^{i-1} p_j, \quad h < i \leq r;$$

$$\bar{p}_0 = 1 - \frac{\lambda}{\bar{\mu}} \left[ h(1 - p_r) - \sum_{j=1}^h (h-j) p_{r-j} \right].$$

Для модели  $GI/M^{(h)}/1/N$  соответствующая система соотношений запишется в виде:

$$-\lambda p_0 + \bar{\mu} \bar{p}_1 = 0;$$

$$\lambda p_{i-1} - \lambda p_i + \bar{\mu} \bar{p}_{i+1} = 0; \quad 0 < i < l;$$

$$\lambda p_{i-1} - \lambda p_i + \bar{\mu} \bar{p}_{i+1} - \bar{\mu} \bar{p}_i = 0, \quad l \leq i \leq r - l;$$

$$\lambda p_{i-1} - \lambda p_i - \mu \bar{p}_i = 0, \quad r - l < i < r;$$

$$\lambda p_{r-1} - \mu \bar{p}_r = 0.$$

Из решения этой системы уравнений при конкретных  $l$  и  $N$  определяются величины  $\bar{p}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ).

### 12.3. Анализ временных характеристик работы УСО с использованием кусочной аппроксимации входного потока и распределения времени преобразования информации

Системы массового обслуживания, рассмотренные в предыдущих двух параграфах, могут быть обобщены таким образом, что ни одно из распределений, описывающих потоки событий в СМО не является бы экспоненциальным, т. е. потоки событий (стационарные, рекуррентные) могут быть достаточно произвольного вида. Такой подход требует использования специальных методов анализа моделей обслуживания с ожиданием. Рассмотрим случай определения функций распределения времени ожидания для СМО с неординарными потоками событий, когда  $A(t)$  и  $B(t)$  — произвольные функции распределения. Для решения такой СМО будем использовать некоторую вспомогательную систему, являющуюся эквивалентной исходной в некотором смысле. Вспомогательная СМО выбирается таким образом, чтобы аналитическое решение для нее или было бы известным, или могло бы быть получено без особых затруднений. После определения характеристик вспомогательной СМО можно перейти к параметрам исходной системы с использованием имеющихся соотношений между основной и вспомогательной СМО. Рассмотрим некоторые случаи, когда введение вспомогательной системы позволяет получить решение для исходной СМО

$$h = 1, \quad l \geq 1.$$

Вспомогательную СМО с ординарными потоками событий получим из исходной системы путем учета во входном потоке заявок каждой  $s$ -й заявки, начиная с  $l$ -й, причем

$$s = kl, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда для вспомогательной СМО распределение времени между моментами поступления соседних заявок

$$\bar{A}(t) = [A(t)]^{(l-1)*}, \quad [A(t)]^{(0)*} = A(t),$$

а распределение времени обслуживания

$$\bar{B}(t) = B(t).$$

Для такой системы методами, изложенными в гл. 10, можно найти

$$\bar{\varphi}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} d\bar{F}(x),$$

где  $\bar{F}_m(x)$  — функция распределения времени ожидания вспомогательной СМО.

Из рассмотрения исходной СМО можно видеть, что последовательно входящие заявки имеют различные функции распределения времени ожидания вследствие неодинаковых условий прохождения через СМО, причем с периодичностью  $l$  заявок эти условия повторяются. Тогда имеется не больше, чем  $l$  видов функций распределения времени ожидания, связанных с соответствующими характеристиками вспомогательной СМО следующими соотношениями

$$\varphi_j(s) = \bar{\varphi}(s) \alpha^{j-1}(s), \quad (12.9)$$

причем  $j$  — номер заявки в группе, образованной из  $l$  последовательно входящих заявок

$$h \geq 1, \quad l = 1.$$

Вспомогательную СМО образуем из исходной путем учета в каждой входной группе заявок одной, именно той, которая обслуживается первой. Тогда для такой системы

$$\bar{A}(t) = A(t), \quad \bar{B}(t) = [B(t)]^{(n-1)*},$$

причем потоки событий будут ординарными.

С использованием метода Линдли для вспомогательной СМО можно определить вид  $\bar{\varphi}(s)$ , тогда формулы перехода к исходной системе имеют вид

$$\varphi_j(s) = \bar{\varphi}(s) \beta^{j-1}(s), \quad j = 1, 2, \dots, h. \quad (12.10)$$

В том случае, если

$$B(t) = 1 - e^{-\mu t},$$

можно видеть, что

$$\bar{\beta}(s) = \left( \frac{\mu}{\mu + s} \right)^h,$$

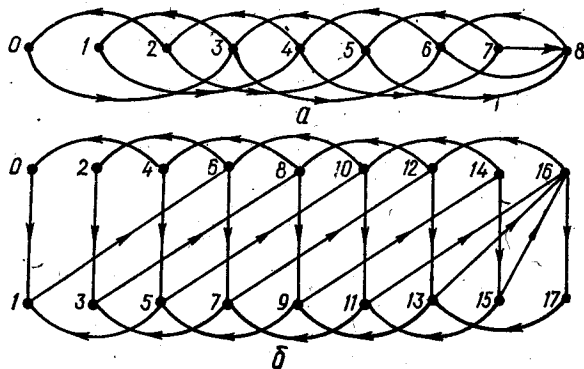


Рис. 12.3.

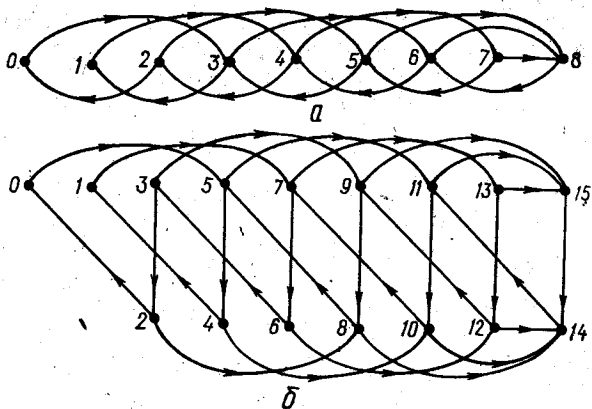


Рис. 12.4.

и формулы перехода к исходной СМО имеют вид

$$\varphi_i(s) = \bar{\varphi}(s) \beta^{i-1}(s). \quad (12.11)$$

Другим обобщением СМО, рассмотренных в параграфах 10.1 и 10.2, являются системы с неординарными потоками, в которых вид одного из потоков событий аппроксимирован какой-либо из кусочных функций распределения (6.19), а для задания остальных потоков используется гиперэкспоненциальное распределение или же распределение Эрланга.

Исследование таких систем СМО можно производить в следующей последовательности:

построение графа переходов для состояний системы, отличающихся числом заявок в СМО;

переход к графу переходов для расширенного множества состояний, которое образуется вследствие учета состояния регулирующей темы, вводимой по методу фаз [4]. Следует отметить, что как этот граф, так и граф переходов для исходных состояний СМО, является вообще говоря, немарковским, и служит для удобства составления матрицы переходных вероятностей в точках регенерации;

заполнение матрицы переходных вероятностей для состояний расширенного множества по методу Кендалла [5];

составление и решение системы алгебраических уравнений для вероятностей состояний расширенного множества;

переход к вероятностям исходных состояний СМО.

Рассмотрим примеры систем обслуживания этого класса:

1. Система  $E_2^{(3)}/G^{(2)}/1/N$  с числом мест ожидания  $N = 6$ . Граф переходов для исходных состояний приведен на рис. 12.3, а, для расширенного множества состояний — на рис. 12.3; б. Точками регенерации будут моменты времени, непосредственно следующие за выходом из системы обслуженных групп заявок.

2. Система  $GI^{(3)}/E_2^{(2)}/1/N$  с числом мест ожидания  $N = 6$ . Граф переходов для исходных состояний приведен на рис. 12.4, а,



для расширенного множества состояний — на рис. 12.3, б. Точками регенерации будут моменты времени, непосредственно предшествующие поступлению в систему входных групп заявок.

#### Контрольные вопросы

1. Как интерпретируется неоднородность информационных потоков при временном анализе УЦВК? Выяснить роль неординарных моделей для исследования эффективности системы обмена УЦВК с периферийными устройствами.
2. Провести аналогию между системным анализом структурных и функциональных свойств УЦВК и функциями распределения в моделях СМО.
3. Изучить роль вспомогательной СМО при исследовании непуассоновских систем с неординарными потоками п. 12.3.
4. Использовать решения предыдущих задач для определения показателей функционирования УЦВК в стационарном режиме.
5. Сравнить оценки сложности инженерной полезности пуассоновских систем и систем с кусочными функциями распределения.
6. Каковы недостатки моделей главы 12 при исследовании приоритетных режимов работы УЦВК?

### Глава 13

#### ПРИМЕНЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ СТРУКТУР АСУ

##### 13.1. Определение характеристик управляющей ЭВМ со сверхоперативной памятью

Одним из способов повышения производительности ЭВМ является ввод сверхоперативной памяти (СОП), позволяющей сгладить неравномерность при пересылке операндов из оперативного запоминающего устройства в арифметико-логическое устройство (АЛУ). СОП обычно имеет небольшой объем и строится на тех же элементах, что и регистры АЛУ [3]. Стоимость таких элементов достаточно высока, поэтому возникает задача выбора оптимального числа регистров СОП с учетом класса реализуемых алгоритмов.

Сверхоперативной памятью обычно называют блок памяти ЭВМ, непосредственно сообщающийся с арифметическим устройством машины. В блок-схеме ЭВМ его место между запоминающим устройством (ЗУ) и АЛУ. Основное назначение сверхоперативной памяти — согласование скоростей АЛУ и ЗУ. Различие в скоростях работы памяти (ЗУ) и арифметики (АЛУ) вызвано, в основном, различной элементной базой построения этих устройств. Регистры АЛУ обычно собраны на весьма быстродействующих (хотя и дорогих) элементах. Такое решение возможно ввиду небольшого числа регистров АЛУ, оно позволяет обеспечить высокую скорость выполнения элементарных операций.

Относительно большой объем ЗУ не позволяет использовать для его построения те же элементы, что применялись в АЛУ, так как память получается недопустимо дорогой. Поэтому ЗУ обычно стро-

яется на сравнительно медленнодействующих, но дешевых и надежных элементах (например, с использованием элементов на ферритовых сердечниках). Быстродействие такой памяти заметно отстает от быстродействия АЛУ и в конечном счете является основным препятствием для роста быстродействия всей ЭВМ. Особенно это заметно для машин с совмещенным циклом работы, когда при выполнении коротких операций быстродействующее АЛУ простаивает значительную часть рабочего цикла в ожидании операнда для последующей операции.

Показатели функционирования системы АЛУ—ЗУ можно улучшить более рациональной организацией обмена информацией между этими устройствами. При этом приходится идти на некоторые аппаратные затраты, вводя буферные регистры для промежуточного хранения информации, так как может теряться взаимный синхронизм между устройствами ЭВМ.

Время простоя АЛУ при работе с медленнодействующим ЗУ можно уменьшить следующими способами.

1. Уменьшая суммарное время на пересылку операндов из АЛУ в ЗУ;
2. Организацией режима работы ЗУ, близкого к непрерывному;
3. Увеличивая время считывания операндов из ЗУ при неизменной скорости его работы.

Первый способ в физической реализации сводится к организации буферного хранения результатов операций АЛУ. При этом часть хранимой в буфере информации может потребоваться для ближайших операций в АЛУ, и поскольку она находится в быстродействующей буферной памяти, она пересылается в АЛУ почти немедленно, без обращения к основному ЗУ. Применение буферного хранения результатов позволяет уменьшить поток информации между АЛУ и оперативным ЗУ, что приводит к уменьшению суммарного времени работы ЗУ, уменьшению простоев АСУ и к повышению быстродействия ЭВМ в целом.

Второй способ предусматривает сведение режима работы ЗУ по возможности к непрерывному, при таком режиме суммарное время занятости (как сумма времен работы и простоя) окажется наименьшим. Для организации такого режима необходимо выполнить два условия: а) организовать заблаговременный (опережающий) просмотр команд программы; б) ввести буферную память для хранения выбранных операндов.

Следует учитывать, что не вся информация для последующих операций в АЛУ может быть получена пересылкой операндов из ЗУ, так как часть ее является результатом операций в АЛУ. Для такой информации необходимо предусмотреть место в буферной памяти и получать ее перезаписью из АЛУ. При этом возможно полное перекрытие с первым способом, т. е. все результаты записываются в буферную память (тогда требуется организовать обмен информацией между буферной памятью и ЗУ), либо только некоторые, а именно те, которые потребуются в АЛУ вскоре. Во втором варианте

поток информации между ЗУ и буферной памятью будет одностронним.

Третий способ предусматривает одновременную выборку нескольких операндов из ЗУ. Получающееся при этом уплотнение во времени позволяет как бы повысить скорость работы ЗУ в несколько раз (по числу одновременно считываемых операндов). Для реализации этого способа необходимо обеспечить многоблочную организацию ЗУ, причем каждый блок должен иметь возможность обращения к нему независимо от состояния других блоков, и ввод буферной памяти для хранения пересылаемой информации.

Для этого случая буферная память представляется имеющей двухступенчатую структуру, причем первую ступень составляют регистры для непосредственной приемки информации из блоков памяти, а вторую — регистры для буферного хранения информации. Обе ступени могут производить обмен информацией по простому алгоритму.

Примером использования третьего способа можно привести организацию ЗУ, предусматривающую раздельное хранение командной и числовой информации. В этом случае общая емкость ЗУ может оставаться неизменной, а быстродействие памяти (как обратная величина времени на выборку информации для одной операции) увеличивается.

Анализируя приведенные три способа организации обмена информацией между ЗУ и АЛУ, можно заметить, что каждый последующий способ в определенной мере включает в себя предыдущие. Действительно, применение опережающего просмотра команд программы требует учета информации, получаемой в результате операций в АЛУ, а построение ЗУ по многоблочному принципу требует использования опережающего просмотра. Общим моментом является наличие промежуточных хранителей информации — буферных регистров или буферной памяти, в общем случае служащей целям согласования скоростей АЛУ и ЗУ. Так как АЛУ непосредственно обменивается информацией с буферной памятью, последнюю иногда называют виртуальной памятью АЛУ [3], или же сверхоперативной памятью. В дальнейшем будем употреблять последний термин.

В основе метода оценки эффективности ввода регистров СОП лежит изучение возможных вариантов длительности рабочего цикла ЭВМ по всем операциям выполняемой программы и нахождение вероятностей их выполнения из анализа временных диаграмм работы устройств ЭВМ. При анализе рабочего цикла удобно рассматривать величину, обратную быстродействию машины — среднюю длительность рабочего цикла.

В зависимости от вида выполняемых операций, параметров устройств памяти, к которым производится обращение, наличия или отсутствия модификации команды, длительность рабочего цикла может принимать различные значения. Будем считать заданными вероятностные характеристики участия в вычислительном процес-

се тех или иных устройств ЭВМ, а также вероятностные характеристики выполняемых программ. Тогда для каждого варианта длительности рабочего цикла можно определить его вероятность, а среднюю длительность рабочего цикла найти как математическое ожидание по всем вариантам длительности рабочего цикла

$$T = \sum_i \tau_i p_i, \quad (13.1)$$

где  $\tau_i$  — длительность  $i$ -го варианта рабочего цикла;  $p_i$  — вероятность его появления.

При оценке быстродействия ЭВМ с СОП необходимо знать вероятность обращения АЛУ за операндом к СОП без обращения к ОЗУ. С учетом небольшой емкости СОП можно считать, что эта величина равна вероятности наличия в СОП хотя бы одного операнда. Время обращения СОП будем считать нулевым.

Процесс обмена информацией между ступенями памяти в ЭВМ при выполнении какой-либо операции определяется не только длительностью этой операции, но и реальной организацией пересылки операндов между устройствами ЭВМ при конкретном рабочем цикле. Каждой операции, выполняемой в АЛУ, можно сопоставить определенное число, на которое изменяется количество операндов в СОП. Назовем это число реакцией операции. По величине реакции все операции образуют несколько групп, причем в смысле воздействия на уровень операндов в СОП операции с равной реакцией будут эквивалентными, и при анализе СОП их можно заменить одной операцией. Каждая такая операция характеризуется реакцией и вероятностью появления в программе.

Так как число операций в ЭВМ конечно, конечным будет количество вариантов перехода от одного состояния СОП к какому-либо другому, причем это количество не будет превышать числа состояний СОП, равного  $(N + 1)$ , где  $N$  — число регистров СОП. Каждое последующее состояние СОП зависит от предыдущего, и не зависит от других, ранее следовавших состояний, тогда процесс изменения числа операндов в СОП от операции к операции представляет собой марковскую цепь, для которой можно написать матрицу переходных вероятностей

$$\| p_{ij} \| = \begin{vmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0N} \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N0} & p_{N1} & \dots & p_{NN} \end{vmatrix}. \quad (13.2)$$

Имея значения реакций операций и вероятности их появления в программе, можно вычислить значения элементов матрицы (13.2).

С учетом ограниченной емкости СОП и неотрицательного значения числа операндов в СОП, получаем

$$p_{ij} = \sum_{l \rightarrow j} \delta_k p_k, \quad j = 0; \quad (13.3)$$

$$p_{ij} = \sum_{k-i=\delta_k} p_k, \quad 0 < j < N; \quad (13.4)$$

$$p_{ij} = \sum_{k-i < \delta_k} p_k, \quad j = N, \quad (13.5)$$

где суммирование производится по операциям, удовлетворяющим условию под знаком суммы.

Заполнив матрицу (13.2) с учетом (13.3—13.5), можно определить характеристики СОП для стационарного режима:

вероятность нахождения в СОП определенного числа операндов  $v_j$ , решая системы уравнений

$$v_j = \sum_{i=0}^N v_i p_{ij}, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (13.6)$$

вместе с присоединенным условием нормировки

$$\sum_{i=0}^N v_i = 1; \quad (13.7)$$

средний уровень (математическое ожидание) числа операндов в СОП

$$b = \sum_{i=1}^N i v_i; \quad (13.8)$$

вероятность застать в СОП к произвольному моменту времени по крайней мере один операнд

$$R_1 = 1 - v_0. \quad (13.9)$$

Имеет смысл определить число операций, за которое будет достигнут установившийся режим в СОП, а также выяснить поведение СОП в переходном режиме. Начальным условием следует принять нулевой уровень числа операндов в СОП. Используя основное уравнение марковских цепей [4], можно составить матрицу переходных вероятностей при выбранном числе выполненных операций, и по ней определить характеристики СОП при этом числе операций. С увеличением числа операций режим будет асимптотически приближаться к стационарному.

Найдем характеристики функционирования СОП с числом регистров  $N = 3$  для ЭВМ со следующим набором операций (реакции каждой операции определены,  $b$  — текущее значение числа операндов в СОП (табл. 13.1).

По воздействию на число операндов в СОП все операции можно свести к четырем:

$$\delta_1 = -1, \quad p_1 = 0,48;$$

$$\delta_2 = 1, \quad p_2 = 0,35;$$

$$\delta_3 = 3, \quad p_3 = 0,07;$$

$$\delta_4 = -b, \quad p_4 = 0,1.$$

Вид операций	$\delta_i$	$p_i$
Пересылка операндов из ОЗУ в АЛУ	-1	0,25
Сложение, вычитание	-1	0,23
Умножение	1	0,15
Деление	3	0,07
Переходы, прерывания	-b	0,1
Запись результата в память	1	0,2

Составим матрицу переходных вероятностей

$$\|p_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0,58 & 0,35 & 0 & 0,07 \\ 0,58 & 0 & 0,35 & 0,07 \\ 0,1 & 0,48 & 0 & 0,42 \\ 0,1 & 0 & 0,48 & 0,42 \end{vmatrix}$$

По составленной матрице можно записать систему уравнений (13.6, 13.7), решая которую, получим:

$$v_0 = 0,39887; \quad v_1 = 0,22375; \quad v_2 = 0,1753; \quad v_3 = 0,20208.$$

Математическое ожидание числа операндов в СОП

$$b = \sum_{i=1}^3 i \cdot v_i = 1,1807.$$

Вероятность заставить в СОП хотя бы один операнд

$$R_1 = 1 - v_0 = 0,60113.$$

Отсюда видно, что более половины всех считываний будет выполнено с обращением только к СОП, что может позволить существенно увеличить производительность ЭВМ.

Рассмотрим переходной режим работы СОП. Установившийся режим будем считать достигнутым при

$$R_1 \geq 0,9R_{1уст} = 0,541,$$

число операций с начального момента обозначим через  $r$ .

Находим характеристики СОП после каждой операции, используя формулу Чепмена — Колмогорова:

$$p_{ij}^{[m+n]} = \sum_k p_{ik}^{[m]} p_{kj}^{[n]},$$

где  $p_{ij}^{[m]}$  — вероятность перехода из  $i$ -го состояния в  $j$ -е за  $m$  шагов:

$$r = 0, \quad v_0 = 1, \quad R_1 = 0;$$

$$r = 1, \quad v_0 = 0,58, \quad R_1 = 0,42;$$

$$r = 2, \quad v_0 = 0,5464, \quad R_1 = 0,4536;$$

$$r = 3, \quad v_0 = 0,45971, \quad R_1 = 0,54029;$$

$$r = 4, \quad v_0 = 0,44848, \quad R_1 = 0,55152 > 0,9R_{1уст}.$$

После выполнения четвертой операции в СОП установится стационарный режим.

Аналитическое решение системы (13.6, 13.7) в общем виде получить не удастся, так как в матрице (13.2) любой элемент может принимать ненулевое значение.

При исследовании зависимости быстродействия ЭВМ с СОП от выполняемой программы ограничимся рассмотрением двух операций в АУ — длинной, с вероятностью появления  $g$  и реакций  $\delta_1$  и короткой, с вероятностью появления  $1 - g$  и реакцией  $\delta_0$ . Это дает возможность характеризовать выполняемую программу одним параметром  $g$ . Нулевые элементы матрицы будут расположены, в основном, на двух диагоналях, конкретный вид матрицы определяется величинами  $\delta_0$  и  $\delta_1$  и числом  $N$  регистров СОП. Уравнения системы (13.6, 13.7) для такой матрицы будут иметь рекуррентный вид, что позволит аналитически определить зависимость

$$R_1 = f_1(g, N), \quad (13.10)$$

где  $R_1$  — вероятность наличия в СОП хотя бы одного операнда.

Подставляя (13.10) в выражение (13.1), можно найти зависимость средней длительности рабочего цикла ЭВМ с СОП от параметров выполняемой программы.

Эффективность ввода СОП определим в виде

$$k_{эф} = \frac{T_0}{T_N} = f_2(g), \quad (13.11)$$

где  $T_N$  — средняя длительность рабочего цикла при числе регистров СОП, равном  $N$ .

Определим эффективность ввода регистров СОП ( $N = 1, 2, 3, 5, 10$ ) в схему одноадресной ЭВМ с непрерывным рабочим циклом [2]. Найдем предельное значение увеличения быстродействия ЭВМ за счет ввода СОП. Операции в АЛУ имеют следующие характеристики:

Короткая  $\delta_0 = -1$ ,  $t_{АЛУ} = \tau_{кор} = 1$  мс.

Длинная  $\delta_1 = 1$ ,  $t_{АЛУ} = \tau_{дл} = 10$  мс.

Время выборки и модификации команды  $\tau_{ком} = 2$  мс.

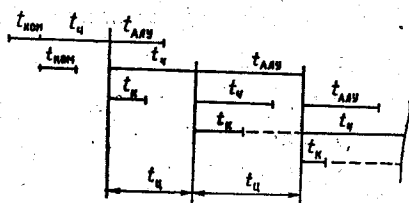


Рис. 13.1.

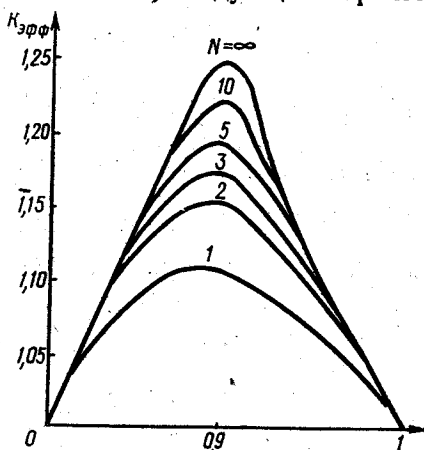


Рис. 13.2.

Время выборки из ОЗУ  $\tau_{\text{ОЗУ}} = 5$  мс.

Временем обращения СОП можно пренебречь, т. е.  $\tau_{\text{СОП}} = 0$ .

Временная диаграмма ЭВМ с непрерывным рабочим циклом представлена на рис. 13.1.

Из временной диаграммы можно записать

$$T = \max(\tau_{\text{КОМ}}, \tau_r, \tau_{\text{АЛУ}}).$$

Для примера

$$\tau_{\text{КОМ}} = 2 \text{ мс с вероятностью } 1;$$

$$\tau_r = \tau_{\text{ОЗУ}} \text{ с вероятностью } 1 - R_1;$$

$$\tau_r = \tau_{\text{СОП}} \text{ с вероятностью } R_1;$$

$$t_{\text{АЛУ}} = t_{\text{КОР}} \text{ с вероятностью } 1 - g;$$

$$t_{\text{АЛУ}} = t_{\text{ДЛ}} \text{ с вероятностью } g.$$

Выражение (13.1) запишется в виде:

$$T = \max(\tau_{\text{КОМ}}, \tau_{\text{ОЗУ}}, \tau_{\text{КОР}})(1 - R_1)(1 - g) + \max(\tau_{\text{КОР}}, \tau_{\text{СОП}}, \tau_{\text{КОМ}}) \times \\ \times R_1(1 - g) + \max(\tau_{\text{КОМ}}, \tau_{\text{ОЗУ}}, \tau_{\text{ДЛ}})(1 - R_1)g + \\ + \max(\tau_{\text{КОМ}}, \tau_{\text{СОП}}, \tau_{\text{ДЛ}})R_1g = 5g - 3R_1 + 3R_1g + 5.$$

Матрица переходных вероятностей для состояний СОП имеет вид

$$\|p_{ij}\| = \begin{vmatrix} 1-g & g & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1-g & 0 & g & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-g & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-g & g \end{vmatrix}.$$

Система уравнений (13.6, 13.7) при такой матрице запишется как:

$$v_0' = (1 - g)(v_0 + v_1);$$

$$v_i' = gv_{i-1} + (1 - g)v_{i+1}, \quad 0 < i < N;$$

$$v_N' = g(v_{N-1} + v_N);$$

$$\sum_{i=0}^N v_i = 1;$$

Решая полученную систему, найдем

$$R_1 = 1 - v_0 = 1 - \frac{(1-g)^N(1-2g)}{(1-g)^{N+1} - g^{N+1}}.$$

С учетом того, что при  $N = 0$ ,  $R_1 = 0$ , выражение (13.11) запишется в виде

$$k_{\text{эф}} = \frac{5(1+g)}{5(1+g) - 3(1-g) \left[ 1 - \frac{(1-g)^N(1-2g)}{(1-g)^{N+1} - g^{N+1}} \right]}. \quad (13.12)$$

Графики зависимости (13.12) представлены на рис. 13.2. Из этих



графиков следует, что увеличение производительности ЭВМ рассмотренного вида за счет ввода СОП может достигать 25%, при соотношении длинных и коротких операций в программе как 1 : 1. Последнее соотношение следует учитывать при составлении программ решения задач для рассматриваемой ЭВМ.

### 13.2. Оценка влияния конечного быстродействия регистров сверхоперативной памяти на эффективное быстродействие устройств вычислительной системы

Одним из возможных путей создания высокоэффективных вычислительных систем является объединение ряда в общем случае разнородных вычислительных цифровых устройств в единую систему с общим объемом оперативной памяти [7]. В качестве модели для анализа такой структуры можно принять схему, изображенную на рис. 13.3.

Для обращения к ОЗУ каждое устройство вырабатывает специальный сигнал, который поступает в блок приоритета (БП). Последовательность сигналов, вырабатываемых данным устройством, назовем потоком заявок на обращение в ОЗУ со стороны этого устройства.

Для определения среднего времени задержки для каждого из вычислительных устройств (ВУ) будем полагать, что потоки заявок всех устройств являются стационарными и независимыми. Тогда преобразование входных потоков заявок, выполняемое блоком приоритета, можно записать (для двух потоков)

при

$$\begin{aligned} t_1 &\leq t_2 < t_1 + \tau_1; \\ \dot{x}_1(t) &= x_1(t); \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t + \Delta_{1,2}); \end{aligned} \quad (13.13)$$

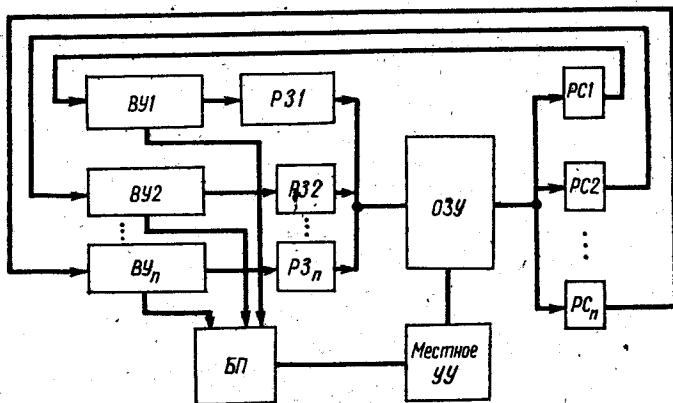


Рис. 13.3.

при

$$\begin{aligned} t_2 &\leq t_1 < t_2 + \tau_2; \\ x_1^*(t) &= x_1(t + \Delta_{2,1}); \\ x_2^*(t) &= x_2(t), \end{aligned} \quad (13.14)$$

где  $x_1$  — поток заявок  $i$ -го ВУ на входе блока приоритета;  $x_1^*$  — поток заявок  $i$ -го ВУ на выходе блока приоритета;  $\Delta_{ij}$  — время задержки заявки потока  $j$  при обслуживании заявки  $i$ -го потока;  $\tau_i$  — длительность импульса заявки  $i$ -го потока.

Имеет место следующая теорема [7]. Если на входы  $n$ -канального блока приоритета, каждая пара каналов которого описывается условиями (13.13), (13.14) поступают  $n$  независимых стационарных потоков заявок  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , то среднее время задержки заявки на  $i$ -м выходе блока определяется соотношением

$$\bar{\Delta}_i = \frac{n}{4(n-1)} \left( \sum_{s=1}^n \frac{T_s^2}{\bar{T}_s} - \frac{\tau_i^2}{\bar{T}_i} \right), \quad (13.15)$$

где  $\bar{T}_s$  — математическое ожидание длительностей интервалов между двумя соседними заявками  $s$ -го потока.

Фактически величина  $\bar{\Delta}_i$  представляет собой время, на которое в среднем увеличивается длительность каждой операции в данном вычислительном устройстве. Если ВУ обладает номинальным быстродействием

$$\bar{Q}_i = \frac{1}{\bar{T}_i},$$

то в результате работы в комплексе с общим ОЗУ его быстродействие снизится до величины

$$\bar{Q}_i' = \frac{1}{\bar{T}_i + \bar{\Delta}_i}.$$

Относительное уменьшение быстродействия

$$\varepsilon_i = \frac{\bar{Q}_i'}{\bar{Q}_i} = \frac{1}{1 + \frac{n\tau_i^2\bar{Q}_i}{4(n-1)} \left( \sum_{s=1}^n \bar{Q}_s - \bar{Q}_i \right)}, \quad (13.16)$$

с учетом того, что время обращения к ОЗУ одинаково для всех ВУ

$$\tau_1 = \dots = \tau_n = \tau.$$

В другой форме выражение (13.16) можно записать в виде

$$\varepsilon_i = \frac{1}{1 + \frac{n\tau_i}{4} \gamma_i^2}, \quad (13.17)$$

где  $l_i$  — среднее арифметическое величины быстродействия всех вычислителей, кроме  $i$ -го,  $\gamma_i$  — относительное время обращения

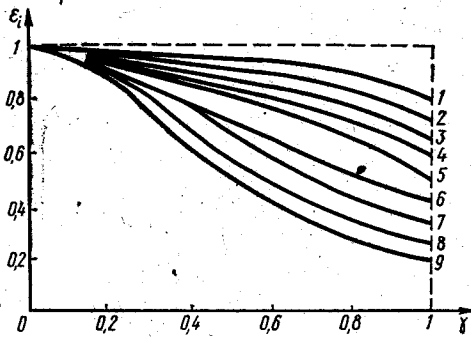


Рис. 13.4.

к памяти, причем

$$l_i = \left( \sum_{s=1}^n \bar{q}_s - \bar{q}_i \right) / (\bar{q}_i (n - 1)), \quad \gamma_i = \tau \bar{q}_i.$$

Полученные выражения позволяют оценить величины относительного уменьшения быстродействия по формуле (13.17). Соответствующие графики приведены на рис. 13.4.

Рассмотренную выше модель можно использовать для оценки влияния конечного быстродействия сверхоперативной памяти на временные параметры работы системы. С ростом числа блоков оперативной памяти и количества АЛУ может сказываться конечное быстродействие регистров СОП, что найдет отражение в замедлении работы устройств памяти и АЛУ из-за ожидания доступа в СОП.

В этом случае узлы ВУ соответствуют блокам оперативной памяти и АЛУ, узел ОЗУ соответствует СОП, а БП выполняет ту же роль организации очереди к СОП. Среднее время простоя каждого из устройств может быть определено из выражения (13.15), если в нем будут использованы соответствующие величины.

### 13.3. Расчет емкостей блоков памяти, с различной элементной базой

Рассмотрим ступень иерархического ЗУ, состоящую из  $n$  блоков памяти с различным быстродействием. Каждому блоку памяти соответствуют длительности обращения на считывание и на запись операнда (примем эти величины равными для каждого блока), стоимость единицы хранения информации, емкость блока.

Среднее время обращения к такой ступени

$$t = \sum_{i=1}^n \tau_i q_i,$$

где  $\tau_i$  — время обращения  $i$ -го блока памяти;  $q_i$  — вероятность нахождения считываемого числа в  $i$ -м блоке.

При отсутствии обмена информацией между блоками можно принять

$$q_i = \frac{N_i}{N}, \quad (13.18)$$

где  $N_i$  — емкость  $i$ -го блока;  $N$  — суммарная емкость ступени, причем

$$N = \sum_{i=1}^n N_i.$$

## Общая стоимость памяти

$$V = \sum_{i=1}^n v_i N_i, \quad (13.19)$$

где  $v_i$  — стоимость элемента памяти для  $i$ -го блока.

Емкости ступеней ЗУ обычно бывают заданы, кроме того, могут быть заданы стоимость памяти и некоторые ограничения на емкость определенных блоков в виде систем равенств и неравенств.

*Пример.* Для вычислительной системы, состоящей из  $n$  блоков оперативной памяти (ОП), одного АЛУ и общей сверхоперативной памяти определим потребное время обращения регистров СОП ( $\tau_{\text{СОП}}$ ), чтобы увеличение времени пересылки числа из блоков ОП в СОП не превысило 10% времени обращения ОП ( $t_{\text{ОП}} = 4$  мс). Средняя длительность операции в АЛУ  $t_{\text{АЛУ}} = 1,5$  мс,  $n = 3$ .

Воспользуемся вероятностной моделью системы, описанной выше. Среднее время пересылки числа из ОП в СОП

$$t = t_{\text{ОП}} + \Delta,$$

где  $\Delta$  — среднее время задержки числа на входе СОП.

Используя (13.15) и учитывая, что все блоки ОП имеют одинаковое быстродействие запишем

$$\Delta = \frac{3\tau_{\text{СОП}}^2}{4t_{\text{АЛУ}}};$$

по условию задачи

$$\Delta \leq 0,1t_{\text{ОП}},$$

тогда

$$\tau_{\text{СОП}} \leq \sqrt{\frac{0,1 \cdot 4 \cdot t_{\text{ОП}} t_{\text{АЛУ}}}{h}} = 0,89 \text{ мс.}$$

Задачу построения оптимальной структуры иерархического ЗУ можно сформулировать следующим образом. Определить значения величин  $N_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , соответствующих системе уравнений

$$V = \sum_{i=1}^n v_i N_i; \quad (13.20)$$

$$N = \sum_{i=1}^n N_i,$$

и системе ограничений

$$N_i \geq c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $c_i$  — минимальная емкость  $i$ -го блока;  $i$  — номера блоков памяти, для которых вводятся ограничения, при которых функция

$$t = \sum_{i=1}^n \tau_i q_i \quad (13.21)$$

принимает минимальное значение.

Для случая отсутствия обмена информацией между блоками памяти имеет место (13.18) и задачу можно решать методами линейного программирования, например, симплексным методом [9].

В этом случае можно поставить симметричную задачу определения емкости памяти при заданном среднем времени обращения,

B	R <sub>j</sub>			
	-x <sub>1</sub>	-x <sub>2</sub>	-x <sub>3</sub>	1
0	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	15
0	1	1	1	1000
Z	-50	-10	-0,1	0

B	R <sub>j</sub>		
	-x <sub>1</sub>	0	1
x <sub>3</sub>	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{500}{5}$
x <sub>2</sub>	1,1	$\frac{10}{9}$	$\frac{8500}{9}$
Z	-39,0	1,1	9450

B	R <sub>j</sub>		
	-x <sub>1</sub>	-x <sub>2</sub>	1
x <sub>3</sub>	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	150
0	$\frac{99}{100}$	$\frac{9}{10}$	850
Z	$\frac{19995}{1000}$	$\frac{999}{100}$	15

B	R <sub>j</sub>	
	-x	1
x <sub>3</sub>	$-\frac{1}{10}$	$\frac{500}{9}$
-x <sub>2</sub>	$\frac{11}{10}$	$\frac{8520}{9}$
Z	3901	9450

Рис. 13.5.

причем общая стоимость ступени ЗУ должна быть минимальной. Тогда целевой функцией будет являться уравнение (13.19), а уравнение (13.21) войдет в систему (13.20, 13.21).

Пусть для иерархического ЗУ ЦВК при отсутствии обмена информацией между блоками ступеней задано среднее время обращения определенной ступени ЗУ  $t = 15$  мс и суммарная емкость ступени  $N = 1000$ . Время обращения для блоков ступени ЗУ  $\tau_1 = 1$  мс,  $\tau_2 = 10$  мс,  $\tau_3 = 100$  мс, стоимость единицы хранения информации (соответственно)  $v_1 = 50$ ,  $v_2 = 10$ ,  $v_3 = 0,1$ . Стоимость выражена в условных единицах. Определим распределение емкостей по блокам ступени ЗУ, при котором суммарная стоимость памяти была бы минимальной.

В такой постановке пример может решаться симплексным методом линейного программирования. Обозначим емкости 1-го, 2-го и 3-го блока через  $N_1, N_2, N_3$  соответственно. Целевая функция имеет вид

$$V = v_1 N_1 + v_2 N_2 + v_3 N_3,$$

а система ограничений

$$t = \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i N_i}{N} = 15 \text{ мс};$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 1000;$$

$$N_1 \geq 0, \quad N_2 \geq 0, \quad N_3 \geq 0.$$

На рис. 13.5 приведены соответствующие таблицы, из которых найдем

$$N_1 = 0; \quad N_2 = 945; \quad N_3 = 55.$$

Построение таблиц рис. 13.5 приведено по методике, изложенной в [9], где  $A'_j$  — базисные векторы;  $B$  — векторы свободных членов.

#### 13.4. Расчет количественного состава выполняемых операций в специализированных цифровых вычислительных машинах АСУ

Статистическая модель какого-либо процесса обычно характеризуется вероятностными характеристиками своих состояний. При этом в качестве состояний могут быть приняты и некоторые (определенные детерминированным или вероятностным образом) совокуп-

ности других, более мелких состояний модели. В свою очередь расматриваемые состояния могут составлять более крупные состояния.

Назовем совокупность различных состояний вероятностной модели, каждое из которых не является частью другого из этой совокупности, состояниями  $r$ -го уровня детализации. Тогда состояния, включающие в себя состояния  $r$ -го уровня детализации в качестве составных, являются состояниями более высокого уровня детализации, чем  $r$ . Состояния, входящие как составные в состояния  $r$ -го уровня детализации, являются состояниями более низкого уровня детализации, чем  $r$ . Статистическую модель, которую можно определить в состояниях различного уровня детализации, назовем сложным динамическим объектом.

Рассмотрим сложный динамический объект, который задан вероятностями состояний какого-либо определенного уровня детализации. Для состояний любого уровня детализации (кроме первого) известно, сколько определенных состояний уровня детализации на единицу меньшего составляют данные состояния. Представляет интерес найти вероятности состояний объекта при любом другом уровне детализации состояний.

Введем обозначения:  $Q_i^{(r)}$  — количество  $i$ -х состояний  $r$ -го уровня детализации объекта за время наблюдения;  $k_{ij}^{(r)}$  — количество  $i$ -х состояний  $r$ -го уровня детализации, входящих в состав одного  $j$ -го состояния  $(r+1)$ -го уровня детализации, переходной коэффициент  $r$ -го уровня детализации вида  $ij$ ;  $m, n$  — число различных состояний  $r$ -го и  $(r+1)$ -го уровней детализации. Тогда можно записать:

$$\|k_{ij}^{(r)}\| \vec{Q}_{r+1} = \vec{Q}_r, \quad (13.22)$$

где  $\vec{Q}_r$  — вектор состояний  $r$ -го уровня детализации объекта, заданный в пространстве, размерность которого равна числу состояний  $r$ -го уровня детализации;  $\|k_{ij}^{(r)}\|$  — матрица переходных коэффициентов  $r$ -го уровня детализации. Количество всевозможных состояний  $r$ -го уровня детализации объекта за время наблюдения

$$N_r = \sum_{i=1}^m Q_i^{(r)}.$$

Предположим время наблюдения достаточно продолжительным, а процессы в сложном динамическом объекте стационарными. Тогда можно записать вероятность  $i$ -го состояния  $r$ -го уровня детализации объекта

$$p_i^{(r)} = \frac{Q_i^{(r)}}{N_r}.$$

Выражение (13.22) можно записать в виде

$$\|k_{ij}^{(r)}\| \vec{p}_{r+1} = \vec{p}_r,$$

где  $\vec{p}_r$  — вектор вероятностей состояний  $r$ -го уровня детализации объекта, заданный в пространстве, размерность которого равна

числу состояний  $r$ -го уровня детализации;  $c_{r+1,r}$  — коэффициент сложности состояний  $r$ -го уровня детализации относительно состояний  $(r + 1)$ -го уровня детализации состояний объекта.

Выразим  $c_{r+1,r}$  через переходные коэффициенты и вероятности одного из уровней детализации объекта. Просуммируем все равенства (13.22) и разделим обе части полученного равенства на  $N_{r+1}$ .

$$\frac{1}{N_{r+1}} \sum_{j=1}^n Q_j^{(r+1)} \sum_{i=1}^m k_{ij}^{(r)} = \frac{1}{N_{r+1}} \sum_{i=1}^m Q_i^{(r)},$$

откуда можно записать

$$c_{r,r+1} = \sum_{j=1}^n p_j^{(r+1)} \sum_{i=1}^m k_{ij}^{(r)}.$$

Для состояний произвольного уровня детализации объекта нетрудно получить (при  $s < r$ )

$$\vec{p}_s = c_{rs} \prod_{h=s}^{r-1} \|k_{ij}^{(h)}\| \vec{p}_r.$$

*Пример.* В ЭВМ имеется 4 вида микроопераций, из которых построено 3 вида команд. Последовательности команд образуют 2 программы, которые могут входить в массив программ в 3-х вариантах, причем вероятность выполнения каждого массива равна (соответственно) 0,2, 0,7 и 0,1. Первая команда состоит из двух 1-х микроопераций 1-го вида, пяти 2-го, трех 3-го и одной 4-го. В состав второй и третьей команд микрооперации входят в следующих количествах (соответственно): 2, 3, 7, 0 и 2, 3, 5, 4. Первая программа состоит из двадцати команд 1-го вида, пятнадцати 2-го и пяти 3-го. В состав второй программы команды входят в следующих количествах (соответственно): 40, 80, 30. Первый массив состоит из двух 1-го вида программ и трех 2-го. В состав второго и третьего массива программы входят в следующих количествах (соответственно): 1,4 и 5,1. Требуется определить вероятность выполнения в произвольный момент времени каждой микрооперации и каждой команды.

Вычислительный процесс можно принять как сложный динамический объект. Тогда микрооперации будут состояниями первого уровня детализации объекта, команды — второго уровня, программы — третьего уровня и массивы программ — четвертого уровня детализации.

Запишем матрицы переходных коэффициентов

$$\|k_{ij}^{(1)}\| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad \|k_{ij}^{(2)}\| = \begin{vmatrix} 15 & 40 \\ 20 & 80 \\ 5 & 30 \end{vmatrix}, \quad \|k_{ij}^{(3)}\| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вероятности выполнения каждого из массивов программ определяют вектор вероятностей состояний четвертого уровня детализации

$$\vec{p}_4 = \begin{vmatrix} 0,2 \\ 0,7 \\ 0,1 \end{vmatrix}.$$

Последовательно применяя полученные выше формулы, получим

$$\vec{p}_1 = c_{2,1} \|k_{ij}^{(1)}\| \vec{p}_2 = 0,068 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0,292 \\ 0,516 \\ 0,192 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,155 \\ 0,409 \\ 0,364 \\ 0,072 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, в определяемом выше вычислительном процессе микрооперации встречаются с вероятностями (соответственно) 0,155, 0,409, 0,364 и 0,072, а команды с вероятностями 0,292, 0,516, 0,192.

Рассмотрим сложный динамический объект, который задан вероятностями переходов между состояниями какого-то определенного уровня детализации. Для состояний любого уровня детализации (кроме первого) известны количество и порядок вхождения состояний уровня детализации на единицу меньшего, чем у исходных состояний. Представляет интерес найти переходные вероятности для состояний объекта при любом другом уровне детализации его состояний.

Разберем частный случай, когда при известной матрице переходных вероятностей для состояний  $(r + 1)$ -го уровня детализации требуется определить матрицу переходных вероятностей для состояний  $r$ -го уровня детализации. По матрице переходных вероятностей  $\|p_{ij}^{(r+1)}\|$  состояний  $(r + 1)$ -го уровня детализации можно определить вероятности состояний того же уровня детализации, решая систему уравнений:

$$p_j^{(r+1)} = \sum_{i=1}^n p_{ij}^{(r+1)} p_i^{(r+1)}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (13.23)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i^{(r+1)} = 1, \quad (13.24)$$

где  $n$  — число состояний  $(r + 1)$ -го уровня детализации;  $p_{ij}^{(r+1)}$  — вероятность того, что за  $i$ -м состоянием  $(r + 1)$ -го уровня детализации будет следовать  $j$ -е состояние того же уровня детализации; элемент матрицы переходных вероятностей для состояний  $(r + 1)$ -го уровня детализации.

Два соседних состояния  $r$ -го уровня детализации могут следовать друг за другом либо в составе одного и того же состояния  $(r + 1)$ -го уровня детализации, либо в составе соседних состояний  $(r + 1)$ -го уровня детализации. Запишем выражение для вероятности перехода объекта из состояния  $i$   $r$ -го уровня детализации в состояние  $j$  того же уровня детализации

$$p_{ij}^{(r)} = \frac{\alpha_{ij}^{(r)} + \beta_{ij}^{(r)}}{Q_j^{(r)}}, \quad (13.25)$$

где  $\alpha_{ij}^{(r)}$  — количество  $i$ -х состояний  $r$ -го уровня детализации объекта, за которыми следует  $j$ -е состояние того же уровня детализации, причем каждая пара состояний входит в состав одного и того же (произвольного) состояния  $(r + 1)$ -го уровня детализации;  $\beta_{ij}^{(r)}$  — количество  $i$ -х состояний  $r$ -го уровня детализации объекта, за которым следует  $j$ -е состояние того же уровня детализации, причем каждая пара состояний входит в состав различных (хотя и соседних) состояний  $(r + 1)$ -го уровня детализации.



Подсчет величины  $\alpha_{ij}^{(r)}$  и  $\beta_{ij}^{(r)}$  производится за тот же интервал времени, что и подсчет  $Q_i^{(r)}$ . Поскольку определена последовательность вхождения состояний более низкого уровня детализации в состояния более высокого уровня детализации, можно для каждого состояния  $(r+1)$ -го уровня детализации составить матрицу числа переходов между составляющими состояниями  $r$ -го уровня детализации внутри этого состояния, где элементами  $q_{ij}^{(r)}$  будут числа переходов от  $i$ -го состояния к  $j$ -му внутри одного и того же  $k$ -го состояния  $(r+1)$ -го уровня детализации. Тогда

$$\alpha_{ij}^{(r)} = \sum_{k=1}^n q_{ij}^{(r)} p_k^{(r+1)} N_{r+1}. \quad (13.26)$$

Для каждого состояния  $(r+1)$ -го уровня детализации можно составить матрицу  $\|g_{ijk}^{(r)}\|$ , элементами которой служат условные вероятности того, что при переходе от  $k$ -го состояния  $(r+1)$ -го уровня детализации к последующему состоянию того же уровня детализации имеет место переход от  $i$ -го состояния  $r$ -го уровня к  $j$ -му состоянию  $r$ -го уровня детализации. Эта матрица может быть и нулевой. Элементы ее найдем из выражения

$$g_{ijk}^{(r)} = \sum_{s=j, \dots} p_{ks}^{(r+1)} \delta_{ki},$$

где суммирование производится по состояниям  $(r+1)$ -го уровня детализации, которые начинаются с  $j$ -го состояния  $r$ -го уровня детализации, а

$$\delta_{ki} = 1 \text{ при } k = \dots i;$$

$$\delta_{ki} = 0 \text{ при } k \neq \dots i,$$

причем запись  $k = \dots i$  обозначает, что  $k$ -е состояние оканчивается  $i$ -м состоянием уровня детализации, на единицу меньшего предыдущего. Тогда

$$\beta_{ij}^{(r)} = \sum_{k=1}^n g_{ijk}^{(r)} p_k^{(r+1)} N_{r+1}. \quad (13.27)$$

Число  $i$ -х состояний  $r$ -го уровня детализации за все время наблюдения

$$Q_i^{(r)} = \sum_{s=1}^n k_{is}^{(r)} p_s^{(r+1)} N_{r+1}. \quad (13.28)$$

Подставив (13.26), (13.28) в (13.25); получим

$$p_{ij}^{(r)} = \frac{\sum_{k=1}^n (g_{ijk}^{(r)} + q_{ijk}^{(r)}) p_k^{(r+1)}}{\sum_{s=1}^n k_{is}^{(r)} p_s^{(r+1)}}, \quad (13.29)$$

т. е. выражение, позволяющее перейти от переходных вероятностей  $(r + 1)$ -го уровня детализации к переходным вероятностям  $r$ -го уровня детализации объекта.

Рассмотрим количественную сторону влияния переходных вероятностей состояний более высокого уровня детализации и числа входящих в них состояний более низкого уровня детализации на переходные вероятности более низкого уровня детализации. Выражение (13.29) запишем в виде двух слагаемых

$$p_{ij}^{(r)} = \frac{\sum_{k=1}^n q_{ijk}^{(r)} p_k^{(r+1)}}{\sum_{s=1}^n k_{is}^{(r)} p_s^{(r+1)}} + \frac{\sum_{k=1}^n g_{ijk}^{(r)} p_k^{(r+1)}}{\sum_{s=1}^n k_{is}^{(r)} p_s^{(r+1)}} = V_{ij}^{(r)} + W_{ij}^{(r)},$$

где от значений переходных вероятностей  $(r + 1)$ -го уровня детализации зависит лишь слагаемое  $W_{ij}^{(r)}$ . Оценим влияние этого слагаемого на формирование величины  $p_{ij}^{(r)}$ .

Предположим, что все состояния  $(r + 1)$ -го уровня детализации равновероятны, т. е.

$$p_k^{(r+1)} = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

и содержат одно и то же число  $s$  одинаковых состояний  $r$ -го уровня детализации. Тогда

$$p_{ij}^{(r)} = \frac{(s-1)n}{sn} + \frac{n}{s \cdot n},$$

и

$$W_{ij}^{(r)} = \frac{1}{s}.$$

Доля участия  $W_{ij}^{(r)}$  в формировании  $p_{ij}^{(r)}$

$$d = \frac{W_{ij}^{(r)}}{p_{ij}^{(r)}} = \frac{1}{s},$$

т. е. обратно пропорциональна числу состояний более низкого уровня детализации, входящих в состав состояния более высокого уровня детализации.

Влияние переходных вероятностей состояний какого-то уровня детализации на вероятностные характеристики последовательности состояний более низкого уровня детализации тем меньше, чем больше число состояний более низкого уровня детализации входит в состав состояний данного уровня детализации. Если между состояниями какого-то уровня детализации существует зависимость более глубокая, чем марковская (т. е. состояния заданы переходными вероятностями вида  $p_{ijk}$ ,  $p_{ijkm}$  и т. д.), то даже при небольшом  $s$  переходные зависимости более глубокие, чем между соседними состояниями, не будут оказывать существенного влияния на последовательность состояний более низкого уровня детализации объекта.

Отсюда следует, что процессы в сложном динамическом объекте, рассматриваемом на более низком уровне детализации по сравнению с уровнем задания объекта, можно считать марковскими.

Постановка обратной задачи требует предварительной увязки характеристик следования состояний более низкого уровня детализации во всей программе и в каждом состоянии более высокого уровня детализации ввиду преобладающего влияния порядка следования состояний более низкого уровня детализации в состояниях более высокого уровня детализации на переходные вероятности для состояний более низкого уровня детализации по всей программе. Поэтому в общем случае постановка обратной задачи (нахождения матрицы переходных вероятностей состояний более высокого уровня детализации по матрице переходных вероятностей состояний более низкого уровня детализации) является некорректной.

### Контрольные вопросы

1. Рассмотреть более подробно работу УЦВК с СОП и определить ограничения допущений, при которых справедлив метод анализа п. 13.1?
2. Какова роль операций условного перехода в работе СОП? Как изменится эффективность СОП 13.16 при этом?
3. Привести анализ современных ЭВМ (ЕС ЭВМ, БЭСМ, АСВТ, микро ЭВМ и др.). Сравнить их по наличию СОП и ее роли при организации вычислительного процесса (СОП чисел, команд, чисел и команд).
4. Определить эффективность СОП в 2-х адресной ЭВМ с непрерывным рабочим циклом. Как изменится эффективность в 3-х адресной ЭВМ?
5. Построить временные диаграммы для структуры рис. 13.3, попытаться сформулировать ограничения, при которых справедливы результаты расчетов по 13.19.
6. Изобразить диаграмму работы иерархического ЗУ, найти при этом все предложения, которые необходимо принять для проведения расчетов по методу п. 13.3.
7. Провести интерпретацию векторов состояний для многоуровневой АСУ, операции разузлования при комплектации сложных систем.
8. Сравнить возможные способы задания состояний сложной системы на различных уровнях детализации (детерминированные вероятностные, комбинированные), как это повлияет на расчетные формулы?

## Глава 14

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ВЕРОЯТНОСТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЕЙ АСУ

#### 14.1. Особенности решений, получаемых методом статистических испытаний

Математические модели функционирования устройств АСУ, рассмотренные выше, были ориентированы на возможность получения в той или иной форме аналитических решений для определяемых характеристик устройств АСУ. Возможность получения таких решений существенно ограничивается видом информационных потоков, законом распределения времени выполнения операций, структурой УЦВК. Использование методов моделирования позволя-

ет заметно ослабить эти ограничения, особенно относящиеся к виду потоков событий. Ниже будут построены моделирующие алгоритмы, позволяющие определять характеристики функционирования устройств АСУ как СМО при произвольных потоках событий.

Метод статистических испытаний (Монте-Карло) основан на моделировании исследуемого процесса. Основной его принцип — построение такой искусственной вероятностной модели, параметры которой представляют собой решение поставленной задачи. Если такая модель построена, то, пользуясь методами математической статистики, можно оценить неизвестные параметры, т. е. найти приближенное решение задачи.

Для моделирования процесса на ЭВМ необходимо преобразовать математическую модель его (в нашем случае СМО) в специальный моделирующий алгоритм. При статистическом моделировании реализация моделирующего алгоритма является, в некотором смысле, имитацией элементарных явлений, составляющих исследуемый процесс, с сохранением их логической структуры, последовательности протекания во времени и особенно характера и состава информации о состояниях процесса. Можно указать на имеющуюся аналогию с исследованием процессов в природе. В том и другом случаях имеется возможность использовать для решения поставленных задач любую информацию о состояниях процесса, если только она доступна соответствующей регистрации [1].

Отсюда следует, что структура моделирующего алгоритма может слабо зависеть от совокупности искомых величин, а определяется главным образом строением математической модели Монте-Карло. При решении СМО метод позволяет учитывать: вид всех потоков событий; нестационарность потоков в системе; различного рода ограничения (например, ограничение на время пребывания в СМО); влияние состояний СМО на интенсивность потоков, и т. д.

Вместе с тем результаты моделирования, как и при любом численном методе, всегда носят частный характер. Для получения качественных выводов требуется решить большое число СМО, причем и в этом случае качественный результат может носить частный характер. В ряде случаев может сказываться принципиально ограниченная точность получаемых результатов, особенно, если используется ЭВМ с небольшой длиной разрядной сетки. Необходимость наличия достаточно мощной универсальной ЭВМ также может являться существенным препятствием к использованию метода. Поэтому, несмотря на несомненные достоинства, метод Монте-Карло не может заменить аналитических методов решения СМО, а является их дополнением.

#### **14.2. Синтез моделирующих алгоритмов**

Основными принципами построения моделирующих алгоритмов являются [1]:

1. Принцип, позволяющий определять последовательные состояния системы через некоторые интервалы времени (принцип  $\Delta t$ ).

## 2. Принцип последовательной проводки заявок.

Первый принцип состоит в том, что состояния СМО определяются для моментов времени, разделенных равными интервалами времени  $\Delta t$ . При этом оказывается, что для большинства таких моментов состояние СМО не изменяется по сравнению с предыдущим моментом, т. е. весь промежуток времени  $\Delta t$  является неинтересным для исследования. Интерес представляют особые состояния, соответствующие моментам поступления заявок в систему и моментам выхода заявок из СМО. При увеличении  $\Delta t$  растет вероятность попадания в интервал особого состояния и снижается точность и достоверность моделирования (за счет возможного попадания в один интервал двух и более особых состояний). Уменьшение  $\Delta t$  приводит к резкому росту времени моделирования.

При моделировании процессов обработки заявок в СМО удобнее строить моделирующие алгоритмы по принципу последовательной проводки заявок. Идея его состоит в последовательном воспроизведении истории отдельных заявок в порядке поступления их в систему: алгоритм обращается к сведениям о других заявках лишь в том случае, если это необходимо для решения вопроса о дальнейшем порядке обслуживания данной заявки. Такого рода моделирующие алгоритмы весьма экономны, не требуют специальных мер для учета особых состояний системы, однако они имеют весьма сложную логическую структуру и не всегда доступны для построения человеку, не обладающему достаточным опытом решения задач методом Монте-Карло. Далее везде будет использован именно этот принцип.

При моделировании обычно приходится решать следующие задачи:

1. Получение последовательности случайных чисел, равномерно распределенных в интервале  $(0, 1)$ .

2. Преобразование чисел полученной последовательности в величины, имеющие некоторую определенную функцию распределения.

3. Построение логической схемы алгоритма, учитывающей особенности работы моделируемой СМО.

4. Построение алгоритмов фиксации состояний СМО и обработки результатов моделирования.

5. Выбор числа реализаций по заданной точности определяемых характеристик СМО.

6. Моделирование на универсальной ЭВМ.

7. Окончательная обработка и анализ результатов.

Задача моделирования СМО по заданному алгоритму полностью определяется типом и возможностями используемой ЭВМ.

Для моделирования потоков событий необходимо располагать алгоритмами, по которым вырабатывались бы случайные величины, соответствующие длительностям промежутков между соседними событиями одного и того же потока. Возможная нестационарность потоков может быть учтена вводом в алгоритм формирования случайных величин зависимости от текущего времени поступления (или

начала обслуживания) определенной заявки. Эти случайные величины должны быть распределены по определенному закону, т. е. имеет место задача получения последовательности случайных величин с определенной функцией распределения. Обычно сперва получают последовательность чисел, равномерно распределенных в интервале  $(0, 1)$ , а затем эту последовательность преобразуют в последовательность случайных величин с требуемой функцией распределения.

Существуют следующие способы получения чисел с равномерным распределением [2]:

1. Начальное занесение в память ЭВМ таблицы случайных чисел.

2. Генерирование случайных чисел специальной электронной приставкой к машине.

3. Алгоритмическое получение последовательности случайных (псевдослучайных) чисел.

Рассмотрим третий способ получения случайных чисел, поскольку первые два практически целиком определяются типом используемой ЭВМ. Последовательность псевдослучайных чисел вырабатывается самой ЭВМ при помощи специальных алгоритмов. При этом предъявляются следующие требования.

1. Получаемая последовательность чисел должна иметь статистическую структуру, в достаточной степени близкую к структуре равномерной совокупности.

2. Количество операций, необходимое для выработки каждого числа последовательности, не должно быть слишком большим.

Остановимся на способе получения псевдослучайных чисел, основанном на центральной предельной теореме для окружности (см. п. 6.6). В этом случае  $i$ -й член последовательности

$$x_i = x_{i-1} \oplus x_{i-2} \oplus \dots \oplus x_{i-m},$$

причем знак  $\oplus$  обозначает суммирование по mod 1, т. е.

$$a \oplus b = a + b; \quad a + b < 1;$$

$$a \oplus b = a + b - 1; \quad a + b \geq 1,$$

причем

$$a, b < 1.$$

С увеличением числа членов последовательности распределение их совокупности стремится к равномерному в интервале  $(0, 1)$ .

Последовательность псевдослучайных чисел характеризуется периодичностью повторения. Желательно так подбирать «случайные» числа  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), чтобы длина периода повторения была побольше. На рис. 14.1 приведена блок-схема алгоритма для определения количества чисел в периоде. Выбирая в качестве  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) различные числа, можно заметить такие, при которых длина периода будет особенно велика.

Получим выражение для функции распределения длины периода

$$F(N) = P \{ \xi \leq N \},$$

причем  $\xi$  — число членов последовательности, в которой любые  $m$  последовательно распределенных членов отличны от начальных  $m$  чисел этой последовательности по крайней мере в одном разряде хотя бы одной пары сравниваемых чисел, при этом для сравнения должны выбираться числа, отстоящие от начальных чисел на одно и то же количество членов последовательности. На рис. 14.1 определенную таким образом операцию реализует оператор 4.

Вероятность того, что в  $m$  парах случайных чисел совпадают (соответственно) все цифры в соответствующих разрядах

$$q = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n P \left\{ x_{ij} = y_{n+1-i, j} \right\} = (0,1)^{mn}.$$

Последовательно получим

$$F(1) = q = 1 - (1 - q)^1;$$

$$F(2) = q + (1 - q)q = 1 - (1 - q)^2$$

и вообще

$$F(N) = 1 - (1 - q)^N,$$

причем справедливость последней формулы легко устанавливается по индукции.

Окончательно имеем

$$F(N) = 1 - [1 - (0,1)^{mn}]^N.$$

На рис. 14.2 приведен алгоритм датчиков псевдослучайных чисел при  $m = 3$ .

Если требуется строгое обоснование «случайности» последова-

тельности псевдослучайных чисел, то необходимо использовать систему следующих тестов [2]:

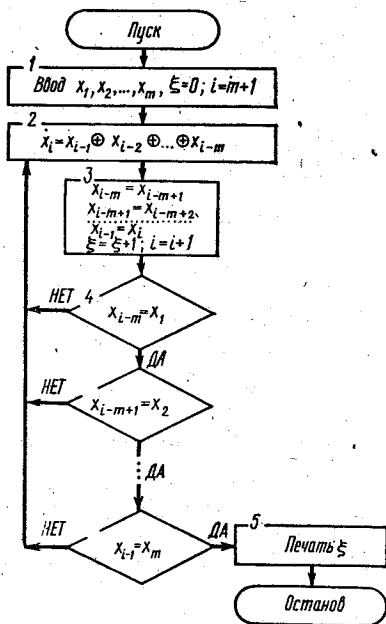


Рис. 14.1.

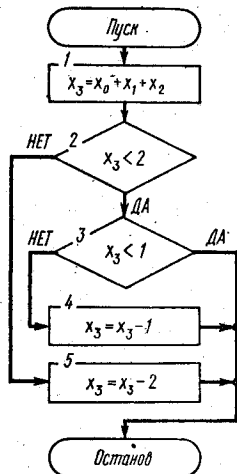


Рис. 14.2

1. Проверка частот повторения чисел из различных интервалов;
2. Проверка пар;
3. Проверка интервалов;
4. Проверка комбинаций.

Множество псевдослучайных чисел, удовлетворяющее всем этим тестам, называется локально случайным. Все упомянутые выше тесты характеризуются одним и тем же общим свойством: испытываемые псевдослучайные числа (или разряды в них) классифицируются по некоторым признакам (различным для каждого теста) и полученное эмпирическое распределение сравнивается с теоретическим. Для сравнения используются обычные статистические критерии (п. 6.5).

Располагая случайными числами, равномерно распределенными в интервале  $(0, 1)$  можно получить последовательность случайных величин  $\xi$  с заданной плотностью распределения  $f(x)$ , если решить уравнение

$$\int_a^{\xi} f(x) dx = \gamma, \quad (14.1)$$

где  $\gamma$  — число из исходной равномерной последовательности;  $a$  — минимально возможное число из последовательности случайных величин с плотностью распределения  $f(x)$ . Доказательство этого утверждения можно найти в [1], ниже приведем некоторые решения уравнения (14.1).

Для случая равномерного распределения величины  $\xi$  в интервале  $(a, b)$  плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{b-a};$$

математическое ожидание

$$m = \frac{a+b}{2}.$$

Уравнение (14.1) запишется в виде

$$\int_a^{\xi} \frac{dx}{b-a} = \gamma,$$

откуда

$$\xi = a + \gamma(b-a).$$

При экспоненциальном распределении величины  $\xi$  плотность распределения

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \quad \text{и} \quad \xi = -\frac{1}{\alpha} \ln \gamma.$$

Моделирование потоков с гиперэкспоненциальным распределением и распределением Эрланга наиболее удобно производить, сведя их к экспоненциальному распределению по методу фаз.

Рассмотрим построение логической схемы алгоритмов моделирования однолинейной СМО с ожиданием и обслуживанием заявок в



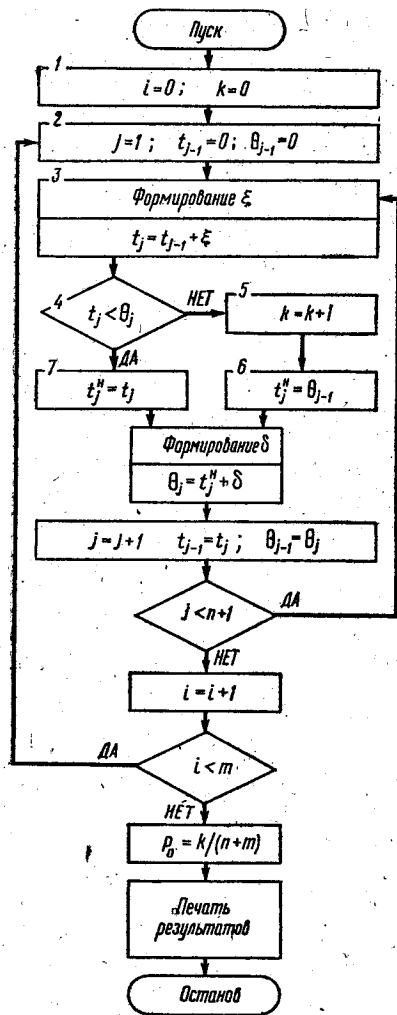


Рис. 14.3.

порядке поступления. Будем считать, что работа СМО прекращается, если обслужено  $n$  заявок. Начальное состояние соответствует отсутствию заявок в системе. Определяемой характеристикой выступает вероятность того, что поступающая заявка застанет СМО в состоянии простоя. Потоки событий ординарные, заданы функции распределения промежутков между соседними событиями каждого из потоков.

Для построения схемы моделирования такой СМО потребуются следующие операторы (рис. 14.3): 1 — оператор начальной установки  $i$ -значения счетчика числа реализаций и  $k$ -значения счетчика числа заявок, поступление которых совпало с простоям СМО (по всем реализациям); 2 — оператор установки начального значения  $j$ -номера проводимой заявки;  $t_{j-1}$  — значения момента прихода в СМО  $(j-1)$ -й заявки и  $\theta_{j-1}$  — значения момента выхода  $(j-1)$ -й заявки (для каждой реализации); 3 — оператор формирования величины  $t_j$ , причем  $\xi$  — величина промежутка времени между моментами поступления  $(j-1)$  и  $j$ -й заявки, совокупность этих величин распределена по закону  $A(t)$ ; 4 — логический оператор, выясняющий состояние СМО (простоя или работы) в момент прихода  $j$ -й заявки; 5 — оператор счета числа поступлений заявок в

СМО, при которых система простаивала (по всем реализациям); 6, 7 — операторы формирования значения  $t_j^H$  — момента начала обслуживания  $j$ -й — заявки; 8 — оператор формирования  $\theta_j$ , причем  $\tau_j$  — длительность обслуживания  $j$ -й — заявки, совокупность этих величин распределена по закону  $B(t)$ ; 9 — оператор переиндексации  $j$  — номера проводимой заявки; 10 — логический оператор, служащий для фиксации окончания обслуживания  $n$ -й заявки (для каждой реализации); 11 — счетчик числа реализаций; 12 — логический оператор, выясняющий момент окончания  $m$ -й реализации; 13 — оператор печати результата моделирования.

Из блок-схемы рис. 14.3 видно, что все операторы делятся на два вида:

1. Операторы, предназначенные непосредственно для моделирования процессов в СМО (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12).

2. Операторы, предназначенные для фиксации, обработки и выдачи определяемых характеристик (5, 13).

Совокупность операторов первого вида определяется структурой моделируемой СМО, дисциплиной прохождения заявок и т. д. Операторы второго вида зависят от определяемых параметров.

#### 14.3. Определение характеристик моделей обслуживания методом моделирования

Моделирующие алгоритмы в определенной мере зависят от вида определяемых характеристик, способа их фиксации и обработки. Операторы, предназначенные для этих целей, обычно не составляют какой-то единой последовательности и могут иметь произвольное расположение в общем алгоритме моделирования. Остановимся на особенностях получения различных характеристик СМО.

Наиболее просто поддаются фиксации величины, необходимые для определения вероятностей простоя СМО. Действительно, как видно из блок-схемы рис. 14.3, оператором фиксации числа заявок, поступление которых происходит при незанятой СМО, является обычный счетчик. Окончательная обработка результата также выполняется весьма просто. Для нахождения вероятности простоя, усредненной по времени ( $\bar{p}_0$ ) необходимо найти сумму тех промежутков времени, когда в СМО не было ни одной заявки. На наличие простоя СМО указывает переход по стрелке «нет» логического оператора 4 (рис. 14.3), а время простоя (для одной заявки)

$$t_{np} = t_i - \theta_{i-1} \text{ при } t_i \geq \theta_{i-1};$$

$$t_{npj} = 0 \text{ при } t_i < \theta_{i-1}.$$

Усредненная вероятность простоя определится сперва для одной реализации

$$p_{0i} = \sum_{j=1}^n t_{npj} / n, \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

а затем и по всем реализациям

$$\bar{p}_0 = \sum_{i=0}^{m-1} p_{0i} / m.$$

Рассмотрим нахождение вероятностей других (отличных от нуля) состояний СМО. Для исследования состояний системы при каждой проводимой заявке выберем промежуток времени между моментами поступления  $i$ -й и  $(i-1)$ -й заявки ( $i$  — номер проводимой заявки). Система будет находиться в одном и том же состоянии, пока не произойдет какое-либо событие. Следовательно, в промежутке

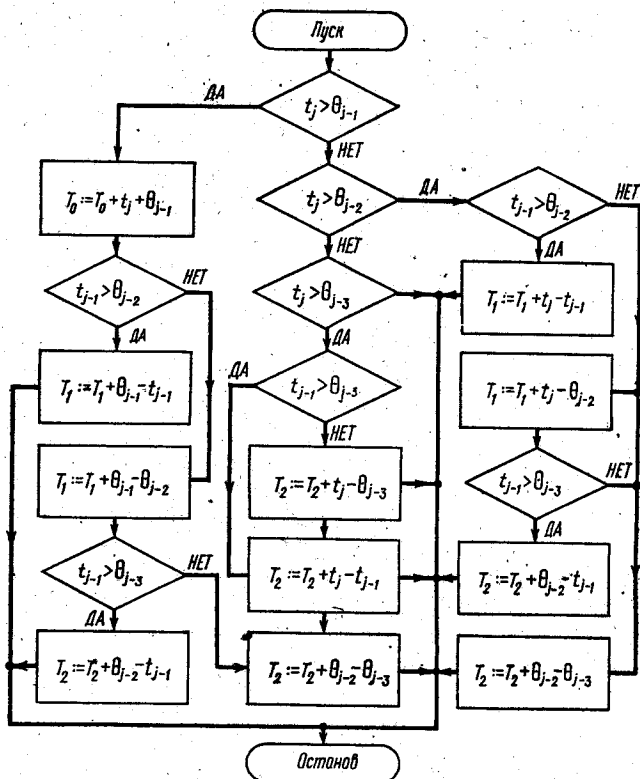


Рис. 14.4.

времени между двумя соседними событиями СМО находится в каком-либо одном из своих состояний. Необходимо определить это состояние, тогда сумма промежутков времени с одинаковыми состояниями СМО, отнесенная к полному времени реализации, даст вероятность соответствующего состояния по одной реализации. Результирующая вероятность определится как математическое ожидание от одноименных вероятностей по всем реализациям системы.

Для определения состояния, в котором находится СМО в некоторый промежуток времени, служит логическая схема анализа. Определение величины промежутка, его фиксация и дальнейшая обработка особых затруднений обычно не вызывает. На рис. 14.4 приведена схема логического блока анализа и регистрации состояния (БАРС). Блок позволяет определить суммарное время пребывания СМО в состояниях 0, 1 и 2 за одну реализацию. По окончании  $i$ -й реализации определяются вероятности состояний СМО

$$\bar{p}_{\alpha} = T_0 / \theta_n;$$

$$\rho_{1i} = T_1/\theta_n;$$

$$\bar{\rho}_{2i} = T_2/\theta_n,$$

где  $T_i$  — суммарное время нахождения СМО в  $i$ -м состоянии за одну реализацию;  $n$  — число обслуженных заявок за одну реализацию.

Функции распределения времени ожидания  $F(x)$ , времени пребывания в системе —  $G(x)$  и интервалов между выходящими заявками —  $e(x)$  определяются при моделировании в виде гистограмм распределений (т. е. в виде кусочно-ступенчатых функций). Весь диапазон изменения  $x$  разбивается на некоторое число интервалов (не обязательно равных между собой). Каждому интервалу соответствует счетчик, в который добавляется единица при каждом попадании интересующей нас величины в данный интервал. Обработка результатов производится аналогично случаю нахождения вероятностей состояний.

Для каждого распределения нетрудно определить соответствующую измеряемую величину. Время ожидания  $j$ -й заявки

$$\tau_{ожj} = \theta_{j-1} - t_j \text{ при } \theta_{j-1} > t_j;$$

$$\tau_{ожj} = 0 \quad \text{при } \theta_{j-1} \leq t_j.$$

Время пребывания в СМО

$$\tau_{систj} = \tau_{ожj} + \tau_j,$$

где  $\tau_j$  — время обслуживания  $j$ -й заявки.

Промежуток времени между соседними выходящими заявками

$$\tau_{выхj} = \theta_j - \theta_{j-1}.$$

Таким образом, для анализа ситуации при проведении каждой заявки необходимо располагать информацией о моменте ее поступления в СМО  $t_j$ , о моменте поступления предшествующей заявки  $t_{j-1}$ , а также о моментах выхода из системы некоторого числа ранее проводимых заявок. Для СМО с ограниченным числом мест ожидания такая информация имеется уже в процессе самой организации моделирования. В других случаях (как, например, для СМО с ожиданием) для хранения такой информации требуется выделять отдельные ячейки оперативной памяти ЭВМ.

Рассмотрим особенности моделирования СМО с ограниченным числом мест ожидания. Для такой СМО существует понятие отказа входной заявки (отказ наблюдается при занятости всех  $N$  мест ожидания).

Такому случаю соответствует неравенство

$$t_j < \theta_{j=N-1}, \quad N = 0, 1, \dots$$

Отсюда следует, что при моделировании СМО с ограниченным числом мест ожидания необходимо хранить в памяти ЭВМ моменты выхода из СМО ( $j - N - 1$ ) —  $x$  заявок.

В зависимости от поведения заявки, приходящей в СМО в момент отсутствия свободных мест ожидания системы различаются:

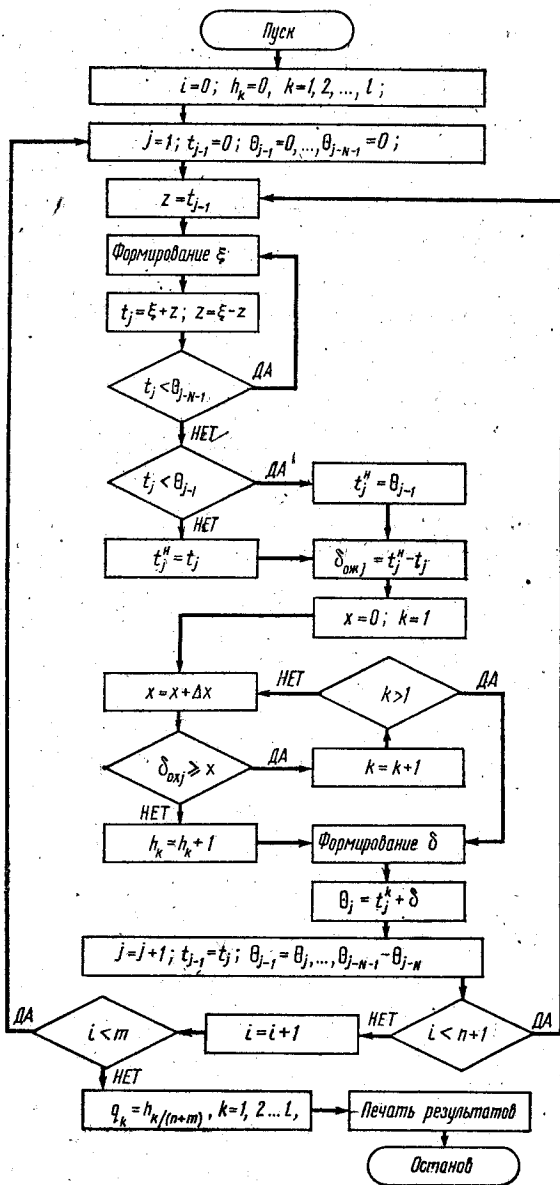


Рис. 14.5.

1. В которых входная заявка, заставшая СМО в состоянии  $(N + 1)$  получает отказ и из рассмотрения выбывает.

2. В которых работа генератора заявок блокируется, если входная заявка застала СМО в состоянии  $(N + 1)$ . Сама заявка при этом не теряется, а хранится на выходе генератора заявок.

На рис. 14.5 приведена блок-схема моделирования СМО с ограниченным числом мест ожидания, причем заявки, заставшие систему в состоянии  $(N + 1)$  теряются. Определяемой характеристикой является гистограмма распределения времени ожидания заявки. Весь диапазон изменения величины  $x$  разбит на  $l$  равных интервалов ( $\Delta x$  — длина одного интервала). По результатам моделирования можно построить кусочно-ступенчатую функцию распределения времени ожидания.

### Контрольные вопросы

1. Какие требования предъявляются к ЭВМ для проведения вероятностного моделирования структур УЦВК?
2. Способы генерации случайных чисел. Показать их достоинства и недостатки.
3. В чем различие результатов, получаемых аналитическими методами и методами вероятностного моделирования? Указать преимущества и недостатки этих методов.
4. Как связаны точность получаемых результатов и уровень детализации системы? Какие допущения принимаются при вероятностном моделировании в плане исследования рабочего цикла процессора и процессора обмена?
5. Показать особенности моделирования систем с ограниченным и неограниченным числом мест ожидания, с неординарными потоками.
6. Как можно построить детерминированный алгоритм моделирования работы процессора, используя временные диаграммы и их фазы?
7. Какие языки используются для моделирования систем на ЭВМ?
8. Какова роль моделирования на ЭВМ при разработке УЦВК и АСУ? Указать основные этапы проектирования и возможности применения в них моделирования.
9. Разработать основные принципы для детерминированного моделирования многопроцессорных систем.
10. Каковы возможности детерминированного моделирования и вероятностного моделирования для исследования распределенных вычислительных систем?

## Часть третья

# СМЕШАННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СИСТЕМ

## Глава 15

### ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ СМЕШАННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

#### 15.1. Предмет и задачи метода смешанного моделирования

Наиболее сложным является оценка эффективности функционирования сложных систем, в первую очередь тех, к которым следует отнести радиолокационные системы и комплексы.

Исследование процессов функционирования радиолокационных систем требует создания воздушной и помеховой обстановки во всем многообразии ее изменения и способа применения при работе исследуемого объекта в динамике с учетом логических изменений его функционирования применительно к данной обстановке. Это приводит к необходимости организации натурального эксперимента с многократным повторением ситуаций. Очевидно, что проведение такого эксперимента является довольно сложной не только инженерной, но и организационной задачей.

Исследование процессов функционирования радиолокационных систем без учета влияния помех не дает представления об исследуемом объекте и о его возможностях в реальных условиях. Организация же помеховой обстановки в натурном эксперименте часто оказывается неосуществимой из-за сложности и большой стоимости.

Трудности проведения натуральных экспериментов вынудили искать другие методы исследования динамических характеристик функционирования радиолокационных систем, свободные от недостатков натурального эксперимента и позволяющие воспроизводить функционирование исследуемых систем во всем многообразии воздушной и помеховой обстановки.

Одним из таких методов и является метод смешанного моделирования.

При исследовании характеристик функционирования радиолокационных систем методом смешанного моделирования исследуемая система работает в своем штатном режиме, но без излучения высокочастотной энергии в пространстве, а сигналы на входе приемного устройства этой системы создаются специальной установкой смешанного моделирования в соответствии с заданными воздушной и помеховой обстановками и динамикой их изменения, а также с учетом динамики функционирования исследуемой системы.

При достаточно точном воспроизведении сигналов работа радиолокационной системы по моделируемым летательным объектам не будет отличаться от ее работы по реальным объектам.

Для воспроизведения сигналов на входе приемного устройства установка смешанного моделирования должна воспроизводить

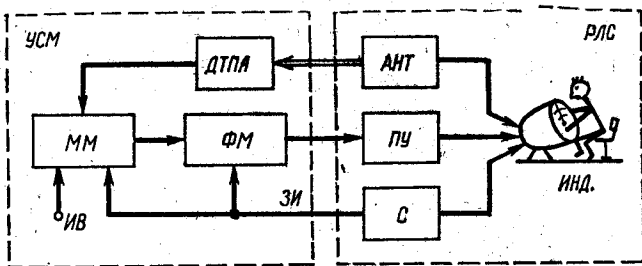


Рис. 15.1.

полет требуемого количества объектов, учитывать характеристики и режимы работы исследуемой системы, а также распространение радиоволн в атмосфере.

Таким образом, при исследовании характеристик функционирования радиолокационных систем методом смешанного моделирования должна быть создана модель реальной системы, воспроизводящей процессы генерации, излучения и распространения зондирующих сигналов системы, их отражения от объектов, распространения и приема отраженных сигналов антенными устройствами, а для помех — воспроизводящей процессы генерации и излучения помех, распространения и приема этих помех антенными устройствами. Эта модель должна функционировать в реальном масштабе времени, синхронизирована с работой исследуемой системы и сопрягаться с ней для получения информации о режимах работы системы и ее динамики и ввода моделируемых сигналов в приемные устройства.

Ввиду того, что задачей системы смешанного моделирования является воспроизведение на входе приемного устройства сигналов, адекватных реальным по своей физической природе, то для моделирования процессов генерации сигналов и помех следует применять физические модели, а управление их параметрами наиболее целесообразно осуществлять с помощью математической модели, которая, используя совокупность определенных соотношений (формул, уравнений, неравенств, логических условий и т. д.), определяет текущие значения параметров сигналов в зависимости от текущих координат положения объектов, их характеристик отражения электромагнитных волн, состояния атмосферы и текущего направления антенн радиоэлектронной системы.

В соответствии с изложенным, можно представить следующую блок-схему установки смешанного моделирования для исследования характеристик функционирования радиолокационной станции, приведенную на рис. 15.1.

Математическая модель установки смешанного моделирования (УСМ) производит расчет текущих параметров сигналов на входе приемного устройства (ПУ) радиолокационной станции (РЛС) на каждый период повторения зондирующих импульсов (ЗИ) РЛС в соответствии с заложенным алгоритмом функционирования при



воспроизведении полета объектов по заданным траекториям в реальном масштабе времени. Синхронизация работы ММ осуществляется внешними импульсами реального времени (ИВ), и импульсами запуска (ЗИ) от синхронизатора (С) РЛС. Физическая модель (ФМ) воспроизводит сигналы на входе приемного устройства РЛС, параметры которых изменяются по информации от ММ. Информация о текущем направлении антенны РЛС вводится в ММ с помощью датчика текущего положения антенны (ДТПА), сопряженного с антенной (АНТ) РЛС. Созданные в УСМ сигналы подаются непосредственно на вход приемного устройства РЛС.

ФМ установки смешанного моделирования фактически является преобразователем информации от ММ в физическую форму сигналов. Поэтому от правильности составления алгоритма функционирования математической модели зависит качество работы УСМ в целом.

Реальные процессы, если их рассматривать во всех деталях, весьма сложны, а явления, их сопровождающие, чрезвычайно разнообразны. Тем не менее учет большого количества второстепенных деталей оказывается практически нецелесообразным. В большинстве случаев при моделировании радиолокационных задач достаточно учитывать лишь основные стороны исследуемого процесса и стремиться к ограничению количества моделируемых параметров сигналов.

Создание моделирующей установки производится в три этапа [1, 7]: этап составления содержательного описания процесса; этап составления формализованной схемы модели; этап создания модели.

Содержательное описание процесса должно появиться в результате тщательного изучения процесса, подлежащего моделированию, и его составляющих явлений и представляет первую попытку изложить характерные закономерности. Содержательное описание должно иметь постановку задачи, определяющую цели моделирования, перечень искомых величин с указанием их практического назначения и требуемую точность их воспроизведения в модели.

Содержательное описание процесса составляется специалистами прикладной области (в нашем случае радиолокации), практически без непосредственного участия математиков. Поэтому постановка задачи может и не иметь строгой математической формулировки. Однако она должна содержать четкое изложение идей предполагаемого исследования, перечень зависимостей, подлежащих оценке по результатам моделирования, а также окончательно установить те факторы, которые должны учитываться при построении модели процесса.

Кроме постановки задачи, в содержательное описание включаются исходные данные, необходимые для исследования: численные значения известных характеристик и параметров процесса (в виде таблиц, графиков и т. д.), а также значения начальных условий.

Содержательное описание процесса служит основой для формализации процесса — построения формализованной схемы и модели

процесса и должно содержать все сведения, необходимые для составления формализованной схемы. В случае недостаточности материалов содержательного описания необходимо провести дополнительные исследования, уточняющие представления о моделируемом процессе.

Формализованная схема процесса является промежуточным звеном между содержательным описанием процесса и его моделью. Формализованная схема разрабатывается совместными усилиями математиков и специалистов в области радиолокации. Хотя форма представления материала, как и в содержательном описании, может оставаться словесной, однако формализованная схема должна быть строго формальным описанием процесса.

Для построения формализованной схемы необходимо выбрать характеристики процесса, установить систему параметров, определяющих процесс, вполне строго определить все зависимости между характеристиками и параметрами процесса с учетом тех факторов, которые принимаются во внимание при формализации.

В качестве характеристик процесса целесообразно выбирать такие функции, которые, с одной стороны, обеспечивали бы удобство определения искомых величин, а с другой — давали бы возможность получить достаточно простую модель. Выбор параметров, характеризующих реальный процесс, обусловлен теми факторами, которые должны учитываться при формализации и обеспечивать достаточную полноту описания его различных сторон.

На этапе построения формализованной схемы должна быть дана точная математическая формулировка задачи с указанием окончательного перечня искомых величин и оцениваемых зависимостей. Наконец, к формализованной схеме должна прилагаться систематизированная и уточненная совокупность всех исходных данных, известных параметров процесса и начальных условий. Эти величины могут оставаться представленными таблично или графически, но должны быть полностью выяснены все вопросы, связанные с интерполяцией и экстраполяцией экспериментального материала, а также вопросы упрощений и допущений, которые вводятся при составлении модели.

Часто реальные процессы можно представить в виде совокупности подпроцессов, что в значительной степени может упростить задачу создания модели. При этом производится формализация этих подпроцессов и составляются соотношения, связывающие характеристики подпроцессов с характеристиками всего процесса.

Многие зависимости, определяющие реальный процесс, уже разработаны и имеют достаточно удобное и проверенное практикой математическое описание. Поэтому в первую очередь нужно обращаться к типовым случаям математических схем, использовать их для формализации и лишь при необходимости создавать оригинальные зависимости.

При моделировании реальных процессов не всегда удастся формализовать эти процессы и представить в виде явных функций или

уравнений. В этих случаях приходится ограничиваться таблицами и графиками соответствующих зависимостей при различных входных воздействиях.

Дальнейшее преобразование формализованной схемы процесса в его модель выполняется математическими методами без притока дополнительной информации о процессе.

Математическая модель представляет собой систему соотношений, связывающих характеристики процесса с его параметрами и начальными условиями во времени.

Для преобразования формализованной схемы в математическую модель необходимо записать в аналитической форме все соотношения, которые еще не были записаны, выразить логические условия в виде систем неравенств, а также придать аналитическую форму по возможности всем другим сведениям, содержащимся в формализованной схеме. В частности, это касается числовых данных, характеризующих процесс. Обычно, при моделировании процессов на цифровых вычислительных машинах с ограниченной памятью, числовой материал используется не в первоначальном виде, а в форме аппроксимирующих выражений (полиномов), удобных для вычислений. Естественно, такого рода замены не должны влиять существенно на точность математического описания процесса и обязательно должны приводить к упрощению модели.

При моделировании процесса на цифровых вычислительных машинах необходимо преобразовать математическую модель в специальный моделирующий алгоритм, в соответствии с которым в машине должна вырабатываться информация, описывающая элементарные явления моделируемого процесса с учетом их связей и взаимных влияний, а результирующая информация, описывающая процесс в целом, выводится из машины и используется для управления физической моделью установки смешанного моделирования.

Применяемый в установке метод математического моделирования является особым численным методом, с помощью которого вычисляются текущие численные значения параметров сигналов на входе приемного устройства РЛС.

Математическая модель в составе установки смешанного моделирования должна обладать качеством однозначности определения параметров сигналов на входе приемного устройства через параметры модели, входные сигналы и начальные условия. Это требование выполняется для так называемых детерминированных моделей, представляющих собой совокупность неслучайных соотношений. Хотя при моделировании и приходится воспроизводить случайные отклонения параметров выходных сигналов (например, флюктуация мощности отраженных сигналов), однако модель является вполне детерминированной, так как при этом изменяются только значения параметров выходных величин и не изменяются внутренние связи в модели.

Как уже говорилось выше, ни один метод моделирования не дает возможности воспроизводить реальный процесс со всеми его тонкос-

тями и особенностями. Поэтому создаваемая модель в определенном смысле будет носить характер узкого назначения, определяемого целью исследования.

При создании модели необходимо стремиться к максимально возможному упрощению задачи и учитывать только те факторы, которые определяют оценку характеристик радиолокационной станции, отбрасывая второстепенные, так как их учет приведет только к усложнению модели, а точность решения задачи при этом практически не изменится.

В качестве иллюстрации можно привести следующие примеры.

*Пример 1.* Требуется создать моделирующую установку, предназначенную для определения вероятностной характеристики обнаружения объектов радиолокационной станцией кругового обзора, имеющей автоматический съем данных.

Очевидно, что количество моделируемых объектов в этом случае может быть ограничено всего одним, так как пропускная и разрешающая способности станции не проверяются. Кроме того, наличие автосъема в РЛС позволяет воспроизводить не движущийся по определенной траектории объект, а объект останавливаемый в определенных точках пространства, в которых и будет определяться вероятность обнаружения, т. е. моделировать «остановленный» объект.

Точность воспроизведения координат объекта может быть значительно занижена, т. к. в этом случае не определяются точностные характеристики РЛС, а количество моделируемых параметров в отраженном сигнале может быть сокращено, если РЛС не извлекает информации из них. Например, частотный сдвиг отраженного сигнала за счет радиальной составляющей скорости полета объекта может не моделироваться, если система селекции движущегося объекта в данной РЛС отсутствует или выключена.

*Пример 2.* Для исследования пропускной способности РЛС кругового обзора необходимо создать установку смешанного моделирования, воспроизводящую сигналы, отраженные от большого количества объектов.

В реальных условиях возможна такая ситуация, что объекты каким-то образом распределяются в зоне обзора РЛС и, если ввести ограничение, что отраженный от объекта сигнал по боковым лепесткам диаграммы направленности антенны РЛС не моделируется, то одновременно в главном луче диаграммы направленности антенны может находиться значительно меньшее количество объектов по сравнению с их общим количеством. И тогда состав физической модели установки может быть сокращен, а сама физическая модель будет функционировать как система массового обслуживания с воспроизведением сигналов, отраженных только от объектов, находящихся в данный момент в пределах главного луча и последовательным воспроизведением сигналов от всех объектов при вращении антенны.

*Пример 3.* Необходимо создать установку, позволяющую определить характеристики РЛС кругового обзора при большом количестве источников непрерывных шумовых помех.

Если учесть, что мощности шумовых помех от большого количества их источников на входе приемного устройства РЛС суммируются, а структура суммарной помехи нормализуется, то объем физической модели может быть сокращен до одного генератора нормализованной шумовой помехи, а математическая модель должна вычислять при этом сумму мощностей помех от всех источников со своими весами, определяемыми их координатами и мощностями излучаемых помех.

При этом, безусловно, несколько усложняется алгоритм функционирования математической модели, однако выигрыш в оборудовании физической модели получается значительным.

Ограничимся рассмотрением только этих примеров, так как во второй главе книги рассмотрены многие вопросы ограничений и допущений, которые целесообразно вводить при создании установок смешанного моделирования.

## 15.2. Общие требования к установке смешанного моделирования

В соответствии с определением метода смешанного моделирования при исследовании характеристик функционирования РЛС, общими требованиями, предъявляемыми к установке смешанного моделирования, являются:

воспроизведение сигналов и помех, адекватных по своим параметрам реальным;

обеспечение динамики функционирования РЛС в реальном масштабе времени;

воспроизведение сигналов и помех на входах всех приемных каналов исследуемой РЛС;

воспроизведение полета необходимого количества объектов по заданным траекториям;

воспроизведение логики работы станций помех и пространственных диаграмм направленности излучения помех [9];

воспроизведение условий распространения радиоволн в пространстве;

достаточная точность воспроизведения параметров сигналов и заложенной в них информации об объектах;

простота смены начальных условий исследования;

высокая надежность функционирования;

простота оборудования и обслуживания.

Удовлетворение этим требованиям является необходимым условием при создании установки смешанного моделирования, хотя некоторые из них и являются противоречивыми (например, повышение точности работы всегда приводит к усложнению аппаратуры, что влечет за собой снижение ее надежности и усложнение обслуживания).

Рассмотрим подробнее каждое из этих требований.

В первую очередь необходимо иметь в виду, что создать с помощью моделирования сигнал, точно соответствующий по своим параметрам реальному—задача практически неосуществимая. Однако, это вовсе не значит, что моделирование не может применяться для исследований характеристик РЛС. При создании установки смешанного моделирования необходимо обращать внимание только на главные характеристики сигналов, из которых извлекается информация об объекте исследуемой РЛС, и пренебрегать воспроизведением других несущественных характеристик. Например, для РЛС, не извлекающих информацию об объекте из доплеровского сдвига несущей частоты, нет необходимости воспроизводить этот сдвиг в моделируемом сигнале. Однако, такие параметры, как мощность, временная структура и спектральный состав сигнала и помехи должны воспроизводиться для всех видов радиолокации.

Степень соответствия параметров моделируемых сигналов реальным определяется принятым в установке смешанного моделирования формализованным представлением реального процесса и способом генерации сигналов и помех в физической модели.

Так, уравнения радиолокации и помех соответствуют только свободному пространству, когда поглощением радиоволн землей можно пренебречь. Искривление распространения радиоволн, определяемое влиянием земли, может быть учтено введением в расчеты текущих координат объектов не физического радиуса земли, а его эквивалентного радиуса для данной длины волны излучаемого колебания.

Адекватность моделируемых сигналов кроме прочих факторов определяется также формой диаграммы направленности антенны исследуемой РЛС, поэтому точность ее представления в установке смешанного моделирования играет существенную роль, а при необходимости надо учитывать и изменение этой формы при развертывании диаграммы направленности антенны в пространстве. Например, для антенных решеток наблюдается расширение диаграммы и изменение уровня боковых лепестков при отклонении диаграммы от центрального положения.

Все это приводит к усложнению установки смешанного моделирования, поэтому исследователи должны вводить разумные ограничения и учитывать их при обработке результатов исследования.

Обязательным условием при создании установки смешанного моделирования является обеспечение ее функционирования в реальном масштабе времени, чтобы не нарушить динамики работы исследуемой РЛС. Это касается и воспроизведения полета объектов с сохранением их динамики полета в соответствии с заданными временными характеристиками.

Кроме того, установка смешанного моделирования должна быть синхронизирована с работой РЛС и воспроизводить сигналы на каждый период повторения зондирующих сигналов. Это может быть достигнуто за счет синхронизации работы установки импульсами запуска исследуемой РЛС и реализации полного алгоритма функционирования установки смешанного моделирования в течение периода повторения этих импульсов.

В некоторых случаях можно допускать более редкую реализацию алгоритма функционирования математической модели установки, когда скорость изменения рассчитываемых параметров мала и не наблюдается их изменение за период повторения зондирующих сигналов. Например, дальность до объектов даже для достаточно скоростных объектов за период повторения зондирующих сигналов изменяется незначительно и поэтому период вычисления дальности до объектов будет определяться скоростью полета объектов и заданной точностью воспроизведения дальности. Однако физическая модель должна воспроизводить сигналы в каждом периоде повторения зондирующих сигналов, а изменение их параметров может воспроизводиться функционированием математической модели.

Радиолокационные станции могут иметь от одного до нескольких десятков зависимых и независимых приемных устройств (каналов) и для исследования их характеристик сигналы и помехи должны воспроизводиться во всех приемных каналах с учетом их

особенностей как построения, так и использования. Некоторые РЛС имеют пеленгационные приемные каналы, которые не имеют устройств выделения отраженных сигналов и поэтому моделировать для них надо только помехи. Для РЛС, работающих с парными импульсами, существует разнос частот излучаемых колебаний, однако мощности отраженных сигналов, определяемые дальностью до объекта и диаграммой направленности РЛС, будут одинаковые, а флюктуации независимые. Для РЛС с парциальной диаграммой направленности азимутальные сечения диаграммы каждого луча примерно одинаковы, что должно приниматься во внимание при создании установки смешанного моделирования.

Поэтому при создании установки смешанного моделирования необходимо тщательно изучать подлежащую исследованию РЛС, анализировать все особенности ее функционирования и учитывать их при формализации модели с целью ее максимального упрощения.

При исследовании РЛС ставятся задачи определения как ее точностных характеристик и разрешающей способности, так и вероятностных характеристик обнаружения и сопровождения объектов. А для некоторых РЛС определяются характеристики функционирования при массовом полете объектов и большом количестве источников помех. В связи с этим требуемое количество моделируемых объектов может составлять от одного до нескольких десятков. Скорости полета моделируемых объектов должны соответствовать скоростям полета реальных объектов и находиться в диапазоне от нуля (вертолеты) до нескольких тысяч километров в час. Траектории полета объектов, воспроизводимые в установке смешанного моделирования, не должны ограничивать исследователей в их выборе. Величина эффективной отражающей поверхности моделируемого объекта должна находиться в пределах от сотых долей (малые объекты) до сотен квадратных метров (тяжелые самолеты и корабли) [8].

Установка смешанного моделирования должна обеспечивать воспроизведение нескольких видов одновременно создаваемых помех.

Для учета поглощения радиоволн в атмосфере при моделировании могут быть использованы, имеющиеся в литературе графические зависимости коэффициента поглощения от состояния атмосферы, времени суток и года.

Точность воспроизведения параметров сигналов и помех и заложенной в них информации об объектах имеет первостепенное значение при исследованиях характеристик функционирования РЛС методом смешанного моделирования. Радиолокационная станция является измерительным прибором и для ее проверки необходимо создавать сигналы, информация в которых воспроизводится с заведомо большей точностью, чем точность ее измерения исследуемой РЛС. Рассмотрению вопроса точности воспроизведения сигналов в установке смешанного моделирования посвящается отдельный параграф.

Для обеспечения удобства пользования установкой смешанного моделирования, необходимо добиваться простоты смены начальных условий исследования. Под начальными условиями следует понимать не подготовку всей модели в целом, а только изменение некоторых условий исследования. Например, смена траекторий полета объектов, изменение мощности создаваемых помех, или их некоторых параметров.

Удовлетворение требованию простоты оборудования и обслуживания установки смешанного моделирования может быть достигнуто за счет унификации как моделирующих алгоритмов, так и элементов установки. Выполнение этих требований определяется уровнем проработки методологии создания установки и инженерной отработки ее элементов.

Надежность функционирования установки хотя и имеет большое значение, однако не является определяющей. Время безотказной работы и время восстановления аппаратуры установки должно быть в пределах норм для лабораторного оборудования.

### **15.3. Характеристики сигналов, подлежащих воспроизведению**

При создании установки смешанного моделирования после составления содержательного описания процесса, подлежащего воспроизведению, необходимо формализовать данный процесс, т. е. представить его в виде определенных математических выражений (формул, уравнений, неравенств, логических условий и т. д.). Кроме того, необходимо выбрать характеристики моделируемого процесса, установить систему параметров, определяющих этот процесс, с учетом принимаемых во внимание факторов.

Учитывая, что математическая модель должна выдавать информацию о текущих значениях параметров сигналов на входе приемного устройства исследуемой РЛС, необходимо рассмотреть возможности создания или использования существующего математического описания отраженных сигналов.

В одиночном отраженном от объекта сигнале, или их совокупности, содержится информация о координатах и скорости движения объекта — наклонной дальности  $R$ , азимуте  $\beta$ , угле места  $\epsilon$  и радиальной составляющей скорости полета объекта  $V_p$ . Эта информация заключена в мощности, временной и спектральной структурах отраженного сигнала. Поэтому при моделировании и необходимо с достаточной для практики точностью воспроизводить информацию об объекте, заключенную в энергетической структуре совокупности сигналов, времени задержки отраженного сигнала относительно зондирующего и спектральном составе отраженного сигнала. Эти характеристики являются общими для всех видов радиолокации, хотя способы извлечения информации из отраженных сигналов в них разные.



Мощность отраженного от объекта сигнала для свободного пространства достаточно точно описывается уравнением радиолокации, а мощность помехи — уравнением связи [8]:

$$P_0 = \frac{P_{\text{РЛС}} G_{\text{РЛС}}^2 \sigma_0 \lambda^2 K_{\text{п}}^2}{(4\pi)^3 R^4}; \quad (15.1)$$

$$P_{\text{п}} = \frac{P_{\text{п.п}} G_{\text{п.п}} G_{\text{РЛС}} \lambda^2 K_{\text{п}} \gamma}{(4\pi)^2 R^2}, \quad (15.2)$$

где  $P_{\text{РЛС}}$  и  $P_{\text{п.п}}$  — мощности передатчиков РЛС и помехи;  $G_{\text{РЛС}}$  — коэффициент усиления антенны РЛС в направлении на объект;  $G_{\text{п.п}}$  — коэффициент усиления антенны передатчика помех в направлении на РЛС;  $\sigma_0$  — значение величины эффективной отражающей поверхности объекта;  $\lambda$  — длина волны;  $K_{\text{п}}$  — значение коэффициента поглощения радиоволн в атмосфере;  $\gamma$  — коэффициент несовпадения поляризаций волн излучаемого сигнала и помехи;  $R$  — наклонная дальность между РЛС и объектом.

Коэффициент усиления антенны РЛС определяется диаграммой направленности антенны и текущим углом рассогласования между направлением оси максимума диаграммы и направлением на объект. Можно представить следующую запись коэффициента усиления антенны

$$G_{\text{РЛС}} = G_{\text{РЛС}_0} g_{\text{РЛС}}(\beta, \varepsilon), \quad (15.3)$$

где  $G_{\text{РЛС}_0}$  — значение коэффициента усиления антенны РЛС в максимуме диаграммы направленности;  $g_{\text{РЛС}}(\beta, \varepsilon)$  — функция, определяющая относительное изменение коэффициента усиления антенны в зависимости от углов рассогласования в азимутальной и угломестной плоскостях.

Аналогично можно представить запись коэффициента усиления передатчика помех

$$G_{\text{п.п}} = G_{\text{п.п}_0} g_{\text{п.п}}(q, \rho), \quad (15.4)$$

где  $q$  и  $\rho$  — значения углов между вектором скорости объекта и направлением на РЛС в горизонтальной ( $q$  — курс) и вертикальной ( $\rho$  — ракурс) плоскостях.

Значение величины эффективной отражающей поверхности объекта

$$\sigma_0 = \sigma_0 \sigma(q, \rho) \sigma(t), \quad (15.5)$$

где  $\sigma_0$  — среднее значение величины эффективной отражающей поверхности объекта;  $\sigma(q, \rho)$  — относительное изменение величины эффективной отражающей поверхности объекта в зависимости от углов  $q$  и  $\rho$ ;  $\sigma(t)$  — относительное изменение эффективной отражающей поверхности объекта, определяемое его флюктуациями во времени.

Коэффициент поглощения радиоволн в атмосфере является сложной функцией дальности и высоты полета объекта, определяется состоянием атмосферы и не имеет аналитической формы записи. Эти зависимости можно представить в виде графика или аппроксимирующей функции.

Дальность до объекта, азимут, угол места, курс и ракурс определяют положение объекта относительно РЛС, являются функциями текущего времени и могут определяться по формулам плоской или сферической геометрии в соответствии с заданной траекторией полета объекта, начальными условиями.

Максимальное значение мощности отраженного от объекта сигнала и помехи

$$P_{c_0} = \frac{P_{\text{РЛС}} G_{\text{РЛС}_0}^2 \sigma_0 \lambda^2}{(4\pi)^2 R_0^4}; \quad (15.6)$$

$$P_{\text{п}_0} = \frac{P_{\text{п.п}} G_{\text{п.п}_0} G_{\text{РЛС}_0} \lambda^2 \gamma}{(4\pi)^2 R_0^2}, \quad (15.7)$$

где  $R_0$  — минимальная воспроизводимая при моделировании дальность между РЛС и объектом.

Относительное изменение мощности отраженного от объекта сигнала и помехи

$$N_{\text{Рс}} = \frac{P_c}{P_{c_0}} = \frac{g_{\text{РЛС}}^2(\beta; \varepsilon) \sigma(q; \rho) \sigma(t) K_{\text{П}}^2}{(R/R_0)^4}; \quad (15.8)$$

$$N_{\text{РП}} = \frac{P_{\text{П}}}{P_{\text{п}_0}} = \frac{g_{\text{РЛС}}(\beta; \varepsilon) g_{\text{п.п}}(q; \rho) K_{\text{П}}}{(R/R_0)^2}. \quad (15.9)$$

Эти уравнения могут быть использованы для определения текущих значений относительного изменения мощности отраженного от объекта сигнала и помехи в математической модели установки смешанного моделирования, а максимальные значения мощностей сигналов и помех в соответствии с величинами  $P_{c_0}$  и  $P_{\text{п}_0}$  должны устанавливаться в физической модели.

Задержка отраженного импульсного сигнала определяется дальностью до объекта

$$T_c = 2 \frac{R}{C}, \quad (15.10)$$

где  $C$  — скорость распространения радиоволн.

Величина относительного изменения дальности до объекта или времени задержки отраженного сигнала относительно зондирующего

$$N_R = N_{T_G} = \frac{R}{\Delta R}, \quad (15.11)$$

где  $\Delta R$  — шаг квантования дальности до объекта при его дискретном представлении.

Спектральный состав отраженного сигнала будет определяться в первую очередь спектральным составом зондирующего сигнала РЛС и, во вторую, теми его изменениями, которые вносятся за счет отражения сигнала от объекта и включения в него некоторой информации об объекте.

В спектре одиночного отраженного сигнала могут произойти следующие изменения: сдвиг несущей частоты за счет радиальной составляющей скорости полета объекта; сдвиг фазы несущей частоты или моделирующего колебания; изменение поляризации сигнала.

Очевидно, что все эти изменения спектра сигнала определяются параметрами объекта и могут быть выражены аналитически.

Несущая частота отраженного сигнала

$$f_c = f_{c0} \left( 1 + 2 \frac{V_p}{C} \right). \quad (15.12)$$

Относительное значение несущей частоты и доплеровского сдвига частоты

$$N_{f_c} = \frac{f_c}{f_{c0}} = 1 + 2 \frac{V_p}{C}; \quad N_{V_D} = \frac{V_p}{\Delta V_p}, \quad (15.13)$$

где  $\Delta V_p$  — шаг квантования радиальной скорости полета объекта при его дискретном представлении.

Сдвиг фазы несущей частоты или модулирующего колебания определяется дальностью до объекта.

Поляризация отраженного сигнала имеет сложную зависимость от конфигурации объекта и его отражающих свойств (аналитического выражения, которой пока создать не удалось) и должна учитываться только для РЛС, извлекающей информацию об объекте из поляризованного сигнала.

Помеха на входе приемного устройства РЛС характеризуется спектральным составом и временной структурой. Так непрерывная шумовая помеха характеризуется следующими основными параметрами: спектральной плотностью мощности, формой и шириной энергетического спектра, законом распределения шумов, а также корреляционной функцией. Прерывистая шумовая помеха и ответная шумовая помеха дополнительно характеризуется временными параметрами, которые определяются логикой работы станции помех [9].

Временная структура импульсных помех определяется логикой работы станции импульсных помех и может быть задана в форме аналитической или логической записи.

Учитывая, что при работе РЛС в условиях помех будут предприниматься шаги по защите от помех (например, перестройка несущей частоты, вобуляция периода повторения зондирующих сигналов и др.), станция помех будет следить за изменениями логики работы РЛС и тогда временная структура помех на входе приемного устройства РЛС будет определяться совместной логикой работы РЛС и станции помех.  $T_{\Pi} = f$  (логика работы РЛС и станции помех).

Эта логическая зависимость может быть выражена аналитически при известных логиках работ РЛС и станции помех.

#### 15.4. Требования к точности воспроизведения параметров сигналов

Точность воспроизведения параметров отраженного сигнала и помех на входе приемного устройства исследуемой РЛС является основной принципиальной характеристикой установки смешанного моделирования.

Информация о дальности заложена в задержке одиночного отраженного сигнала, о скорости — в сдвиге несущей частоты принимаемых сигналов, а угловые координаты цели заложены в амплитудах одиночного отраженного сигнала на входах нескольких приемных каналов РЛС (амплитудный моноимпульсный метод радиолокации), или в амплитудной структуре совокупности отраженных сигналов (для РЛС обзора и с коническим развертыванием луча).

Для обеспечения определения точностных характеристик РЛС погрешность воспроизведения информации об объекте в отраженном сигнале должна быть меньше погрешности определения соответствующих координат исследуемой РЛС.

Суммарная средняя квадратическая ошибка определения координат объекта при исследовании РЛС методом смешанного моделирования

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sigma_{\text{РЛС}}^2 + \sigma_{\text{УСМ}}^2}, \quad (15.14)$$

где  $\sigma_{\text{РЛС}}$  — среднеквадратическая ошибка РЛС при измерении соответствующей координаты объекта;  $\sigma_{\text{УСМ}}$  — средняя квадратическая ошибка установки смешанного моделирования при воспроизведении соответствующей координаты объекта в отраженном сигнале.

Представим, что при моделировании суммарная ошибка увеличивается относительно ошибки РЛС в  $K$  раз, тогда

$$\frac{\sigma_{\text{УСМ}}}{\sigma_{\text{РЛС}}} \sqrt{K^2 - 1} \text{ при } K > 1. \quad (15.15)$$

Это выражение показывает какой должна быть ошибка воспроизведения координат в УСМ по отношению к ошибке измерения этих координат исследуемой РЛС, если мы допускаем определенное увеличение ошибки РЛС при моделировании в  $K$  раз. График этой зависимости приведен на рис. 15.2.

Из анализа графика следует, что если мы допускаем увеличение ошибки РЛС при моделировании на 5...10%, то УСМ должна воспроизводить соответствующие координаты в 2...3 раза точнее, чем их измеряет исследуемая РЛС.

В процессе моделирования сигналов возникают два основных вида ошибок: ошибки воспроизведения координат пространственного положения объектов  $\sigma_{\kappa}$  и ошибки воспроизведения в сигнале информации об объектах, обусловленные ошибками воспроизведения мощности сигнала  $\sigma_{\rho}$ . При моделировании эти ошибки являются независимыми, поэтому можно принять

$$\sigma_{\text{УСМ}}^2 = \sigma_{\kappa}^2 + \sigma_{\rho}^2. \quad (15.16)$$

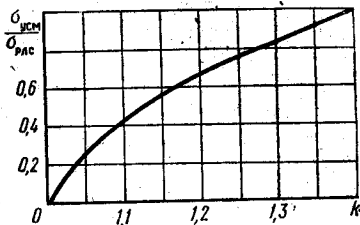


Рис. 15.2.

Точность воспроизведения мощности сигнала определяют как точность воспроизведения координат объекта, так и точность воспроизведения вероятностной характеристики обнаружения отраженного сигнала.

Определим зависимость требуемой точности воспроизведения мощности отраженного сигнала от точности определения вероятности обнаружения сигнала на фоне внутренних шумов приемного устройства применительно к обзорной РЛС. Воспользуемся для этого выражением аппроксимации функции вероятности обнаружения сигнала от отношения сигнал/шум  $m$  при заданных вероятности ложных тревог  $F$  и числе импульсов в пачке  $L$  [2]

$$\ln D = -\frac{Z^* - L + 1}{mL - 1}, \quad (15.17)$$

где  $Z^* = f(F; L)$ .

Решив это уравнение относительно  $m$ , получим

$$m = -\frac{Z^* - L + 1}{L \ln D} - \frac{1}{L}. \quad (15.18)$$

Продифференцировав эту зависимость по  $D$ , для конечных приращений получим выражение допустимой ошибки воспроизведения отношения, сигнал/шум  $\delta m$  от величины вероятности обнаружения сигнала  $D$  и заданной точности  $\delta D$

$$\delta m = \frac{Z^* - L + 1}{L} \frac{1}{D (\ln D)^2} \delta D. \quad (15.19)$$

Относительная допустимая ошибка воспроизведения мощности сигнала при постоянном значении мощности шума

$$\frac{\delta m}{m} = \frac{\delta P_c}{P_c} = -\frac{1}{D \ln D \left[ 1 + \frac{\ln D}{Z^* - L + 1} \right]} \delta D. \quad (15.20)$$

Значение  $D$ , при котором наблюдается наименьшее значение  $\delta P_c/P_c$ , определяется из уравнения

$$\frac{d}{dD} \left( \frac{\delta P_c}{P_c} \right) = 0.$$

Откуда

$$\ln D \frac{\delta P_c}{P_c} = -\frac{Z^* - L + 3}{2} \pm \frac{\sqrt{(Z^* - L + 1)^2 + 4}}{2}. \quad (15.21)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta P_c}{P_c} \right)_{\min} &= \delta D \frac{Z^* - L + 1}{2 \pm \sqrt{(Z^* - L + 1)^2 + 4}} \times \\ &\times \exp \left( -\frac{Z^* - L + 3}{2} \pm \frac{\sqrt{(Z^* - L + 1)^2 + 4}}{2} \right). \end{aligned} \quad (15.22)$$

Используя графические зависимости функции  $L^* = f(F; L)$  [3], можно показать, что требуемая точность воспроизведения мощности

сигнала слабо зависит от  $L$  и  $F$ , т. е.

$$\frac{\delta P_c}{P_c} = \frac{\delta D}{D \ln D}. \quad (15.23)$$

График этой зависимости приведен на рис. 15.3.

Минимум этой функции достигается в точке перегиба выбранной функции аппроксимации вероятности обнаружения

$$\left( \frac{\delta P_c}{P_c} \right)_{\min} = \epsilon \delta D. \quad (15.24)$$

Точность измерения координат радиолокационной станцией [4] зависит от соотношения сигнал/шум и определяется выражением

$$\sigma_{\text{РЛС}} = \frac{B}{\sqrt{m}}, \quad (15.25)$$

где  $B$  — параметр РЛС; для измерения дальности импульсным методом  $B$  представляет собой величину, обратную ширине спектра сигнала, а для измерения углов амплитудным методом — пропорционально ширине диаграммы направленности антенны РЛС.

Неточность воспроизведения мощности сигнала приводит к неточности воспроизведения отношения сигнал/шум и если мы допускаем среднеквадратическую ошибку  $\sigma_m$ , то ошибка измерения координат радиолокационной станцией

$$\sigma_{\text{РЛС}} = \frac{B}{\sqrt{m - \sigma_m}}; \quad \left( \frac{\sigma_{\text{РЛС}}}{\sigma_{\text{РЛС}}} \right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_{\delta P_c}}{P_c}}. \quad (15.26)$$

Ошибка РЛС в измерении координат при наличии ошибки в воспроизведении мощности сигнала установкой смешанного моделирования  $\sigma_p$  определится

$$\frac{\sigma_{\text{РЛС}}}{\sigma_{\text{РЛС}}} = 1 - \left( \frac{\sigma_p}{\sigma_{\text{РЛС}}} \right)^2. \quad (15.27)$$

Тогда

$$\left( \frac{\sigma_p}{\sigma_{\text{РЛС}}} \right)^2 = \frac{\frac{\sigma_{\delta P_c}}{P_c}}{1 - \frac{\sigma_{\delta P_c}}{P_c}}. \quad (15.28)$$

Учитывая, что общая ошибка УСМ при воспроизведении соответствующих координат будет складываться из ошибки воспроизведения собственно координат  $\sigma_k$  и мощности сигнала  $\sigma_p$  (15.16) после соответствующих преобразований с учетом (15.15), получим

$$\frac{\sigma_{\delta P_c}}{P_c} = 1 - \frac{1}{K^2 - \left( \frac{\sigma_k}{\sigma_{\text{РЛС}}} \right)^2}. \quad (15.29)$$

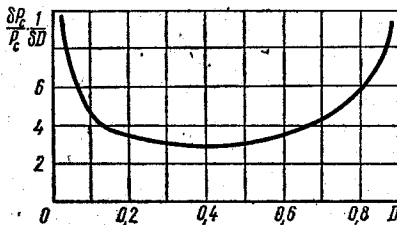


Рис. 15.3.

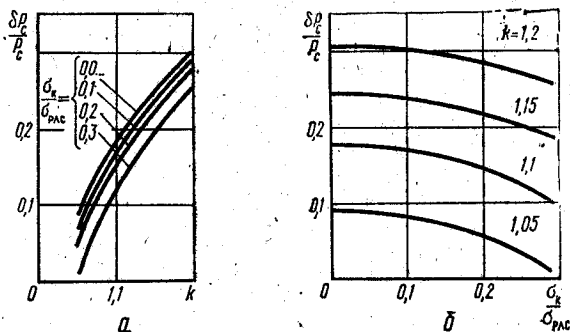


Рис. 15.4.

Графики этой зависимости приведены на рис. 15.4. Эти графики позволяют исследователям производить перераспределение ошибок при создании УСМ и производить выбор наиболее удобных для реализации их величин.

Если, например, при исследовании характеристик РЛС методом смешанного моделирования мы допускаем десятипроцентное увеличение ошибок РЛС при измерении координат, то среднеквадратические ошибки воспроизведения координат моделируемых объектов должны быть примерно в пять раз меньше соответствующих ошибок РЛС, а среднеквадратическая ошибка воспроизведения мощности сигнала должна быть не больше 15% (0,6 дБ); при этом обеспечивается определение вероятностной характеристики обнаружения объектов со среднеквадратической ошибкой порядка 6%.

### 15.5. Структура установки смешанного моделирования

В соответствии с описанной блок-схемой УСМ, ММ должна производить расчет текущих параметров сигналов и помех как функции времени в соответствии с заданными траекториями полета объектов и динамикой работы исследуемой РЛС, а ФМ должна воспроизвести физическую форму сигнала на входе приемного устройства РЛС с изменением параметров сигналов по информации от математической модели.

ММ должна вычислять относительные изменения энергетических параметров сигналов и помех по формулам 15.8 и 15.9, временных и частотных параметров сигналов по формулам 15.11 и 15.13, а временных и частотных параметров помех по следующим зависимостям:

$$N_{T_{\text{п}}} = \varphi (\text{логика работы РЛС и станции помех}); \quad (15.30)$$

$$N_{F_{\text{п}}} = \psi (\text{логика работы РЛС и станции помех}). \quad (15.31)$$

Рассмотрим более подробно эти формулы и попытаемся выделить составляющие, которые определяются только координатами объектов.

В первую очередь обращают на себя внимание величины  $N_T$  и  $N_{F_c}$ , которые не зависят ни от каких характеристик РЛС и фактически являются текущими данными об объекте.

В уравнениях, определяющих относительное изменение мощностей сигнала и помехи, величины  $\sigma(q; \rho)$ ,  $g_{\Pi\Pi}(q; \rho)$  и  $K_{\Pi}$ , также не зависят от характеристик РЛС и динамики ее работы и являются текущими данными об объекте в соответствии с заданными формами эффективной отражающей поверхности, диаграммы направленности антенны станции помех и зависимость поглощения радиоволн от дальности и высоты объекта.

Величина  $\sigma(t)$ , определяющая флюктуации эффективной отражающей поверхности объекта, не зависит ни от координат объекта, ни от каких-либо характеристик РЛС и является случайной функцией времени в соответствии с требуемым законом распределения и функцией корреляции случайных значений.

Величина относительного изменения коэффициента усиления антенны РЛС в направлении на объект определяется как текущими угловыми координатами объекта, так и текущим угловым направлением диаграммы и самой формой диаграммы направленности исследуемой РЛС.

С учетом изложенного, уравнения относительного изменения мощности сигнала и помехи

$$\left. \begin{aligned} N_{P_c} &= W_c g_{\text{РЛС}}^2(\beta; \varepsilon) \sigma(t); & W_c &= \frac{\sigma(q; \rho) K_{\Pi}^2}{(R/R_0)^4}; \\ N_{P\Pi} &= W_{\Pi} g_{\text{РЛС}}(\beta; \varepsilon); & W_{\Pi} &= \frac{g_{\Pi\Pi}(q; \rho) K_{\Pi}}{(R/R_0)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (15.32)$$

Тогда информацией об объектах в процессе моделирования являются следующие величины: азимут объекта  $\beta_0$ ;  $\varepsilon_0$  — угол места объекта; относительное изменение дальности  $N_R$ ; относительное изменение доплеровского сдвига частоты  $N_{F_c}$ ; относительные изменения мощностей сигнала и помехи, обусловленные положением объекта относительно РЛС —  $W_c$  и  $W_{\Pi}$ .

Эти величины являются функциями времени в соответствии с заданной траекторией полета объекта, состояния атмосферы и форм диаграмм отражающей поверхности и направленности антенны станции помех и должны вычисляться в математической модели УСМ с временным интервалом, определяемым скоростью их изменения и принятой точностью их вычисления.

Значение коэффициента усиления антенны РЛС в направлении на объект определяется формой диаграммы направленности антенны РЛС и значениями углов  $\beta_0$ ,  $\varepsilon_0$  и  $\beta_a$ ,  $\varepsilon_a$ .

Углы рассогласования между осью антенны и направлением на объект определяются

$$\beta = \beta_0 - \beta_a; \quad \varepsilon = \varepsilon_0 - \varepsilon_a.$$

Для определения величин  $N_P$  ММ должны производиться операции умножения, которые требуют значительного времени на их



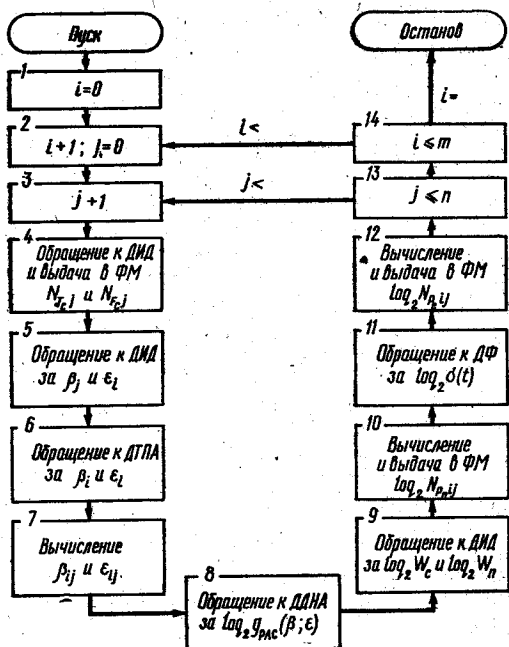


Рис. 15.5.

обозначения:  $i$  — текущий номер приемного канала РЛС ( $0 < i \leq m$ );  $j$  — текущий номер моделируемого объекта ( $0 < j \leq n$ ); ДИД — датчик исходных данных об объектах; ДТПА — датчик текущего положения антенны РЛС; ДДНА — датчик диаграмм направленности антенны РЛС; ФМ — физическая модель; ДФ — датчик флюктуаций.

Начало работы алгоритма определяется поступлением импульса запуска исследуемой РЛС, а конец вычисления полной реализацией алгоритма по всем объектам и всем приемным каналам РЛС.

Запись этого алгоритма на языке логических схем [5, 6] будет иметь вид

$$\Sigma = U_0; \quad i := 0; \quad \downarrow_2 i := i + 1; \quad j := 0; \quad \downarrow_3 j := j + 1 D_4 D_5 D_6;$$

$$D_7 D_8 D_9 D_{10} D_{11} D_{12} \quad (j < n) \uparrow^3 (i < m) \uparrow^2 Y_1,$$

где  $D$  — выполнение действия в соответствии с номерами блоков на рис. 15.5;  $U_0$  — оператор пуска;  $Y$  — оператор останова;  $\downarrow$ ,  $\uparrow$  — знаки переходов.

В приведенном алгоритме не учитывается временная и частотная структуры помехи, что соответствует случаю моделирования непрерывной шумовой помехи, или случаю, когда временная и частотная

выполнение в ЭВМ. Поэтому целесообразно представить уравнения относительного изменения мощностей сигнала и помех, заменив операции умножения на операции сложения

$$\log_2 N_{P_c} = \log_2 W_c + 2 \log_2 g_{PЛС}(\beta; \epsilon) + \log_2 \sigma(t); \quad (15.33)$$

$$\log_2 N_{P_{\Pi}} = \log_2 W_{\Pi} + \log_2 g_{PЛС}(\beta; \epsilon). \quad (15.34)$$

В соответствии с изложенным, можно представить следующий алгоритм функционирования математической модели УСМ (рис. 15.5). При чтении алгоритма необходимо иметь в виду следующие принятые

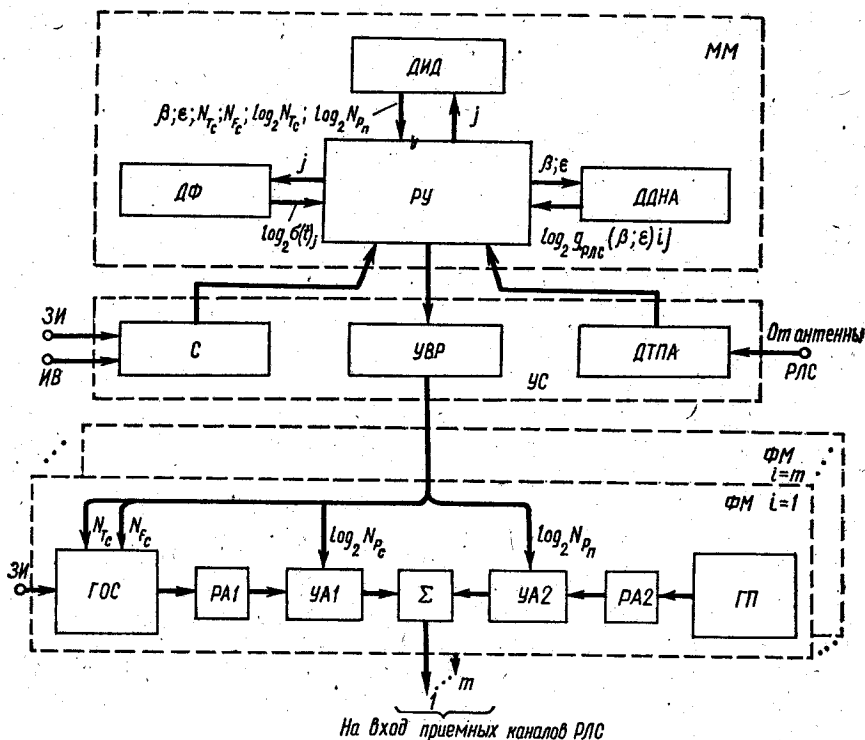


Рис. 15.6.

структуры помехи формируется в ФМ и не управляется от математической модели.

Для реализации этого алгоритма может быть представлена следующая структура УСМ (рис. 15.6), состоящей из математической модели (ММ), устройства сопряжения (УС) и физической модели (ФМ).

Устройства сопряжения состоят из синхронизатора (С), устройства выдачи результатов (УВР) и датчика текущего положения антенны (ДТПА).

Физическая модель состоит из  $m$  идентичных блоков для каждого приемного канала РЛС. В каждом блоке ФМ имеется: генератор отраженного сигнала (ГОС), генератор помехи (ГП), два ручных attenuатора мощности радиосигналов (РА<sub>1,2</sub>), два управляемых attenuатора (УА<sub>1,2</sub>) и сумматор сигнала и помехи (Σ).

ДИД работает по своему автономному алгоритму и вырабатывает текущие значения величин:  $\beta_0$ ;  $\epsilon_0$ ;  $N_{Tc}$ ;  $N_{Fc}$ ;  $\log_2 W_c$  и  $\log_2 W_p$  для каждого  $j$ -го моделируемого объекта. Запрос соответствующих величин производится с периодом повторения импульсов запуска РЛС решающим устройством в соответствии с его алгоритмом функционирования.

ДНА в соответствии с величинами  $\beta_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  своим алгоритмом работы по запросу от РУ вырабатывает значение относительного коэффициента усиления антенны  $i$ -го приемного канала РЛС в логарифмическом масштабе. Диаграммы направленности в ДТПА представляются в виде аналитических или графических зависимостей.

ДФ вырабатывает случайные значения относительного изменения величины эффективной отражающей поверхности каждого из  $n$  моделируемых объектов в логарифмическом масштабе в соответствии с заложенными в нем законами распределения и функциями корреляции случайных величин. Запрос значения  $\sigma(t)_{ij}$  производится по номеру объекта и номеру канала РЛС.

ДТПА является преобразователем угловых положений антенн исследуемой РЛС в форму, удобную для ввода в РУ. Запрос значений  $\beta_i$  и  $\varepsilon_i$  производится по номеру приемного канала.

ГОС вырабатывает импульсный сигнал на несущей частоте исследуемой РЛС, задержка и частотный сдвиг которого устанавливается по информации от ММ.

ГП вырабатывает помеху с заданными временными и частотными параметрами.

С помощью ручных аттенуаторов  $РА_1$  и  $РА_2$  производится установка требуемых значений максимальных мощностей сигнала и помехи ( $P_{с0}$  и  $P_{п0}$ ), а с помощью управляемых аттенуаторов  $УА_1$  и  $УА_2$  по информации от ММ воспроизводится динамика изменения мощностей сигнала и помехи. После суммирования сигнала и помехи в  $\Sigma$  эта смесь подается непосредственно на вход приемника данного канала исследуемой РЛС.

На рисунке приведена структура блока ФМ при моделировании одного объекта — источника помех. При моделировании  $n$  объектов количество элементов ФМ за исключением сумматора соответственно увеличивается. Сумматор при этом должен иметь  $n$  входов по сигналу и  $n$  входов по помехе.

УВР представляет собой устройство дистанционной передачи информации от математической модели на физическую и соответствующего распределения ее по исполнительным устройствам.

#### Контрольные вопросы

1. Каковы задачи смешанного моделирования и каковы основные принципы построения установок смешанного моделирования?
2. Роль и место математической модели в установке смешанного моделирования.
3. Сформулировать основное назначение физической модели в установке смешанного моделирования.
4. Каковы основные этапы создания моделирующей установки и как достигнуть моделируемого процесса с учетом характера и целей исследований.
5. Какие общие требования к установке смешанного моделирования, предназначенной для исследований характеристик системы двухсторонней связи в реальных условиях ее работы?
6. Сформулировать критерий предъявления требований к допустимым погрешностям работы моделирующей установки.
7. Составить алгоритм функционирования математической модели при моделировании работы двух одинаковых связанных радиостанций со всенаправленными антеннами типа диполь.

**ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСТАНОВКИ  
СМЕШАННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ****16.1. Требования к физической модели**

В соответствии с назначением и местом физической модели в составе установки смешанного моделирования, она должна выполнять задачи воспроизведения физической структуры отраженных сигналов и помех на входах приемного устройства исследуемой РЛС.

ФМ, как и вся УСМ характеризуется: количеством моделируемых объектов и источников помех; количеством и характеристиками приемных каналов РЛС; параметрами выходных сигналов и помех.

Количество моделируемых объектов определяется задачами исследования РЛС и может составлять от единиц до нескольких десятков. При этом все объекты или часть из них, могут создавать помехи для подавления исследуемой РЛС.

Количество приемных каналов РЛС может составлять единицы и десятки. Для пеленгации источников помех в обзорных РЛС применяются пеленгационные приемные каналы и каналы подавления помех, принимаемых по боковым лепесткам диаграмм направленности антенны. Характерной особенностью этих каналов является отсутствие устройств выделения отраженных сигналов [1].

Каждый приемный канал РЛС характеризуется чувствительностью, полосой пропускания, входным сопротивлением, динамическим диапазоном усиления сигналов и наличием тех или иных устройств автоматической или ручной регулировки его функционирования. Перечисленные характеристики приемных каналов РЛС являются принципиальными для создания ФМ и должны учитываться при определении ее структуры и параметров моделируемых сигналов и помех.

Параметры выходных сигналов и помех: несущая частота; максимальное значение мощности; диапазоны автоматического изменения мощности, времени задержки и доплеровского сдвига частоты; точность установки мощности, времени задержки и доплеровского сдвига частоты; диапазон ручной регулировки мощности сигналов и помех; период повторения и длительность импульсов сигнала; спектральный состав помехи.

Несущая частота сигналов исследуемых РЛС лежит в достаточно широком диапазоне волн — от сотен мегагерц (метровый диапазон) до десятков гигагерц (сантиметровый диапазон). Очевидно, создать ФМ, обеспечивающую воспроизведение сигналов в таком диапазоне несущих частот, задача практически невыполнимая. Поэтому при создании УСМ следует ограничиваться более узким диапазоном, либо проводить исследования характеристик РЛС по каналам промежуточной частоты или применять перенос спектров сигналов и помех, созданных на одной фиксированной частоте на требуемую несущую частоту.

При воспроизведении сигналов по каналам промежуточной частоты необходимо учитывать коэффициент передачи тракта усилителя высокой частоты  $K_{увч}$  от входа антенного волновода до входа усилителя промежуточной частоты.

Выход ФМ должен быть согласован со входом приемного устройства, или при наличии некоторого рассогласования это должно учитываться в значениях  $P_{с0}$  и  $P_{\Pi 0}$  (15.6 и 15.7).

Установка требуемых значений максимальных мощностей сигналов и помех может осуществляться с помощью ручных аттенуаторов.

Диапазон ручной регулировки мощности сигнала определяется диапазонами возможных изменений энергетического потенциала ряда РЛС, подлежащих исследованию данной УСМ и величиной максимального значения эффективной отражающей поверхности объекта. Диапазон ручной регулировки мощности помехи определяется диапазонами возможных изменений энергетического потенциала помехи и коэффициентов усиления антенн ряда подлежащих исследованию РЛС.

В соответствии с этими выражениями диапазон автоматического изменения мощности сигнала является достаточно большим, но так как воспроизведение сигналов ниже чувствительности приемного устройства РЛС ( $P_{пр \min}$ ) не имеет смысла, то требуемый диапазон автоматического изменения мощности сигнала и помехи определяется:

$$1 \gg N_{P_c} \gg \frac{P_{пр \min}}{P_{с0}} ; \quad 1 \gg N_{P_{\Pi}} \gg \frac{P_{пр \min}}{P_{\Pi 0}} \quad (16.1)$$

Диапазон изменения времени задержки отраженного сигнала относительно зондирующего определяется диапазоном изменения дальности между РЛС и объектом. Для обеспечения однозначности отсчета дальности, период повторения зондирующих импульсов выбирается несколько большим максимальной дальности действия РЛС и при дискретном воспроизведении времени задержки диапазон относительного изменения времени задержки определяется

$$\frac{R_0}{\Delta R} \leq N_{T_c} \leq \frac{R_{\max}}{\Delta R} \quad (16.2)$$

Аналогичным образом определится диапазон относительного изменения доплеровского сдвига частоты

$$0 \leq N_{F_c} \leq \frac{V_{P \max}}{\Delta V_P} \quad (16.3)$$

Период повторения и длительность моделируемых сигналов строго определяются соответствующими параметрами зондирующих импульсов исследуемой РЛС.

Спектральный состав воспроизводимой в физической модели шумовой помехи определяется спектром реальной помехи, однако воспроизводить спектр помехи много шире полосы пропускания при-

многого устройства исследуемой РЛС не имеет смысла. Правда, это допустимо в случае, когда не проводится исследование характеристик РЛС по каналам внеполосного приема.

При исследовании характеристик РЛС на основной частоте приема, для обеспечения равномерности помехи в полосе приема, на практике принято считать, что ширина спектра воспроизводимой шумовой помехи должна быть по крайней мере в два-три раза больше ширины полосы пропускания приемника исследуемой РЛС.

Закон распределения амплитуд мгновенных значений воспроизводимого шума и его корреляционная функция должны соответствовать реальной шумовой помехе.

При замене амплитудно, частотно или амплитудно-частотно модулированного шума высокочастотного колебания на прямой шум, должен быть определен энергетический коэффициент соответствия такой замены.

Точность установки мощности сигнала и помехи, времени задержки и доплеровского сдвига частоты в ФМ определяется требованиями к точности их воспроизведения УСМ и перераспределением ошибок между математической и физической моделями.

Анализ структуры УСМ показывает, что в ММ можно достичь достаточно высокой точности вычисления параметров сигналов при использовании ЭВМ, а ФМ оказывается подверженной большому количеству дестабилизирующих факторов и увеличение точности ее работы может быть достигнуто только за счет дополнительных аппаратных затрат, т. е. увеличения стоимости.

Если предположить, что ММ обеспечивает вычисления в  $n$  раз точнее физической, то распределение допустимых ошибок воспроизведения соответствующих параметров сигналов в математической и физической моделях по отношению к заданным допустимым ошибкам установки смешанного моделирования УСМ определится

$$\sigma_{\text{ММ}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \sigma_{\text{УСМ}}; \quad (16.4)$$

$$\sigma_{\text{ФМ}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \sigma_{\text{УСМ}}. \quad (16.5)$$

## 16.2. Возможные пути оптимизации структуры физической модели

При исследованиях характеристик функционирования многоканальных РЛС методом смешанного моделирования и воспроизведении при этом большого количества объектов количество аппаратуры физической модели определяется следующими положениями.

Несущая частота моделируемых сигналов для каждого приемного канала РЛС будет определяться несущей частотой соответствующего приемно-передающего канала исследуемой РЛС, а величина доплеровского сдвига частоты определяется как скоростью полета объекта, так и несущей частотой данного приемного канала, хотя

относительное изменение частотной структуры  $N_{F_c}$  и не зависит от несущей частоты канала.

Временная задержка отраженного сигнала не зависит от характеристик канала РЛС, а определяется только дальностью между РЛС и объектом.

Мощности отраженного сигнала и помехи определяются как характеристиками объекта, так и характеристиками канала РЛС.

Очевидно, что при большом количестве моделируемых объектов и многоканальных РЛС, объем оборудования ФМ будет значительным, а сама УСМ станет трудно управляемой. Поэтому целесообразно рассмотреть возможные ограничения и допущения при моделировании, приводящие к сокращению оборудования ФМ при безусловном удовлетворении требованиям воспроизведения большого количества объектов — поставщиков помех.

*Моделирование шумовых непрерывных помех.* Спектральная плотность мощности шумовой помехи  $S_{\Pi}$  на входе  $i$ -го приемного канала РЛС от  $j$ -го источника помех определяется выражением

$$S_{\Pi i} = \frac{S_{\Pi j} G_{РЛС i j} G_{\Pi \Pi j} \gamma_j \lambda_i^2 K_{\Pi i j}}{(4\pi)^2 R_{ij}^2}; \quad (16.6)$$

где  $S_{\Pi j}$  — спектральная плотность мощности шумовой помехи  $j$ -го источника помех;  $G_{РЛС i j}$  — коэффициент усиления антенны  $i$ -го приемного канала РЛС в направлении на  $j$ -й источник помех;  $G_{\Pi \Pi j}$  — коэффициент усиления антенны  $j$ -го источника помех в направлении на  $i$ -й канал РЛС;  $\gamma_j$  — коэффициент несовпадения поляризаций помехи  $j$ -го источника помех относительно  $i$ -го канала РЛС;  $\lambda_i$  — длина волны  $i$ -го канала РЛС;  $R_{ij}$  — дальность между  $j$  источником помех и  $i$  каналом РЛС;  $K_{\Pi}$  — коэффициент поглощения радиоволн в атмосфере.

Мощности шумовых помех от каждого источника на входе приемного канала РЛС суммируются и, таким образом, спектральная плотность мощности шумовых помех от  $n$  источников на входе  $i$ -го приемного канала РЛС определится выражением

$$S_{\Pi i} = \sum_{j=1}^n S_{\Pi i j}. \quad (16.7)$$

Если принять, что энергетический потенциал  $j$ -го источника помех в  $\alpha_j$  раз меньше некоторой величины  $S_{\Pi 0} G_{\Pi 0}$ , то

$$S_{\Pi i} = \frac{S_{\Pi 0} G_{\Pi 0} G_{РЛС i 0} \lambda_i^2}{(4\pi)^2 R_0^2} \sum_{j=1}^n \frac{g_{РЛС i j} g_{\Pi \Pi j} K_{\Pi j i} \gamma_j \alpha_j}{(R_{ij}/R_0)^2}, \quad (16.8)$$

где  $G_{РЛС i 0}$  — коэффициент усиления антенны  $i$ -го канала РЛС в максимуме;  $g_{РЛС i j}$  — относительный коэффициент усиления антенны  $i$ -го канала РЛС в направлении на  $j$ -й источник помех;  $g_{\Pi \Pi j}$  — относительный коэффициент усиления антенны  $j$ -го источника помех в направлении на  $i$ -й канал РЛС;  $R_0$  — минимальная дальность

между РЛС и любым источником помех;  $\alpha_i$  — коэффициент различия энергетических потенциалов источников помех.

Максимальное значение спектральной плотности мощности шумовой помехи на входе  $i$ -го приемного канала РЛС от одного источника помех, имеющего максимальный энергетический потенциал станции помех,

$$S_{n\alpha}^* = \frac{S_{\text{пн0}} G_{\text{пн0}} G_{\text{РЛС0}} \lambda_i^2}{(4\pi)^2 R_0^2} \quad (16.9)$$

Максимальная спектральная плотность мощности шумовых помех на входе  $i$ -го приемного канала РЛС от всех  $n$  источников помех

$$(S_{n\alpha i})_{\text{max}} = S_{n\alpha i}^* n. \quad (16.10)$$

Текущее значение спектральной плотности мощности шумовых помех на входе  $i$ -го приемного канала РЛС

$$S_{ni} = S_{n\alpha i}^* n \sum_{j=1}^n \frac{g_{\text{РЛС}ij} g_{\text{пн}ji} K_{\text{пн}i} \gamma_{ij} \alpha_j}{n (R_{ji}/R_0)^2}. \quad (16.11)$$

В соответствии с изложенным, для воспроизведения непрерывных шумовых помех от  $n$  источников, ФМ для данного приемного канала РЛС должна иметь в своем составе генератор шума со спектральной плотностью шума  $S_{\text{шн}i} = S_{n\alpha i}^* n$ , один ручной и один управляемый аттенуатор.

ММ установки смешанного моделирования определяет текущее значение величины уменьшения спектральной плотности мощности помех от всех  $n$  источников

$$\begin{aligned} S_{ni} &= \sum_{j=1}^n \frac{g_{\text{пн}ji} K_{\text{пн}i} \gamma_{ij} \alpha_j}{n (R_{ji}/R_0)^2} g_{\text{РЛС}ij} = \sum_{j=1}^n \frac{W_{\text{пн}j}}{n} g_{\text{РЛС}ij} = \\ &= \sum_{j=1}^n w_{\text{пн}j} g_{\text{РЛС}ij}. \end{aligned} \quad (16.12)$$

При этом, исходными данными по относительному изменению спектральной плотности мощности помех для каждого источника являются величины

$$w_{\text{пн}j} = \frac{W_{\text{пн}j}}{n}. \quad (16.13)$$

Алгоритм вычисления мощности шумовой помехи приведен на рис. 16.1. Запись этого алгоритма на языке логических схем будет

$$\begin{aligned} \Sigma &= U_0 \quad i := 0 \quad \perp \quad i := l + 1 \quad j = 0 \quad \perp \quad j := j + 1 \quad \overset{13'}{\Gamma} D_5 D_6; \\ &D_7 D_8 D_9 D_{10} D_{11} D_{12} \quad (j < n) \quad \overset{3}{\Gamma} H_{14} \quad (i < m) \quad \overset{2}{\Gamma} Я_1. \end{aligned}$$

Моделирование отраженных сигналов. Анализ принципов работы обзорных РЛС показывает, что информация о данном объекте



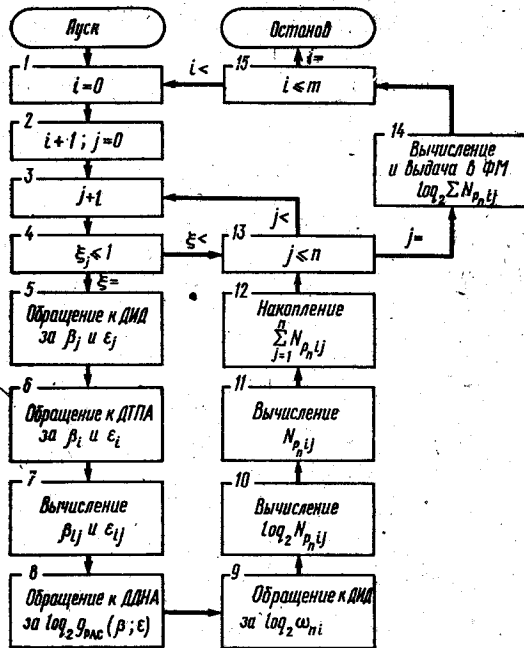


Рис. 16.1.

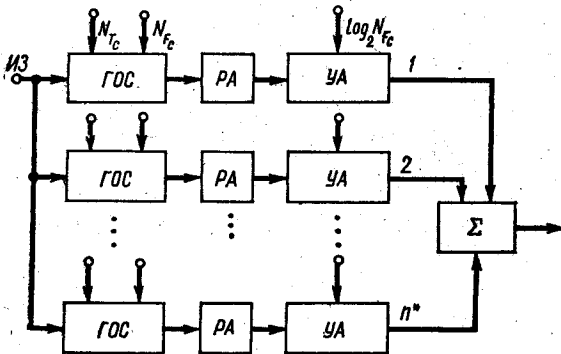


Рис. 16.2.

извлекается из отраженного сигнала в течение времени облучения цели главным лучом диаграммы направленности антенны, а сигналы по боковым лепесткам диаграммы направленности индикаторным устройством РЛС не воспринимаются ввиду их малости. Кроме того, при воспроизведении массивов полета, состоящего из  $n$  объектов, эти объекты будут каким-либо образом распределены в зоне обзора РЛС и в главном луче диаграммы направленности антенны данного канала РЛС окажется  $n^*$  объектов.

В соответствии с изложенным, в состав ФМ для одного приемного канала РЛС входит  $n^*$  независимых каналов формирования отраженных сигналов (рис. 16.2), состоящих из генератора отраженного сигнала (ГОС), формирующего по информации от ММ временную и частотную структуры сигнала, ручного аттенюатора (РА) и управляемого аттенюатора (УА). После суммирования всех  $n^*$  сигналов в сумматоре  $\Sigma$  получим поток сигналов, отраженных от  $n^*$  объектов, попавших в данный момент времени в главный луч диаграммы направленности антенны. Полученный выигрыш в оборудовании ФМ составляет  $n/n^*$  раз.

Алгоритм функционирования ММ УСМ при этом будет несколько сложнее за счет введения анализа нахождения объекта в пределах главного луча диаграммы направленности антенны.

Дальнейший анализ расположения объектов в пространстве, попавших в область главного луча, показывает, что эти объекты

будут каким-то образом распределены по дальности и только  $n^{**}$  объектов окажутся неразрешенными по угловым координатам и дальности. Это число  $n^{**}$ , как и  $n^*$ , является переменным по времени и зависит не только от организации полета, но и динамики изменения координат объектов относительно РЛС и динамики развертывания луча в пространстве. Очевидно, что с учетом распределения объектов по дальности, имеется возможность сократить объем ФМ при условии осуществления последовательного воспроизведения сигналов, разнесенных по дальности, а следовательно и во времени, одним и тем же каналом формирования сигналов.

Теперь ФМ можно представить как систему массового обслуживания, состоящую из  $n^{**}$  аппаратов. Время обслуживания одной заявки одним аппаратом будет определяться временем существования воспроизводимого сигнала  $\tau$  и временем переключения аппарата на обслуживание новой заявки  $\tau_n$

$$\tau_{\text{обсл}} = \tau_c + \tau_n.$$

Поток заявок на обслуживание будет характеризоваться числом одновременно поступающих заявок и их распределением во времени.

Алгоритм функционирования ММ при такой структуре и логике работы ФМ еще более усложняется, так как должна решаться задача определения канала ФМ для воспроизведения сигнала.

Количество каналов в ФМ будет определяться максимальным количеством одновременно воспроизводимых сигналов —  $n^{**}$ , а количество сигналов воспроизводимых последовательно в каждом канале, будет определяться как количеством объектов, попавших в область главного луча  $n^*$ , так и алгоритмом их распределения по  $n^{**}$  каналам.

Таким образом, при учете распределения моделируемых объектов в пространстве как по угловым координатам, так и по дальности, возможный выигрыш в оборудовании ФМ составляет  $n/n^{**}$  раз.

Безусловно, при такой минимизации структуры ФМ усложняется алгоритм функционирования ММ. Однако, учитывая важность повышения надежности работы и упрощения обслуживания ФМ за счет сокращения ее оборудования, усложнение алгоритма функционирования ММ является целесообразным.

*Моделирование сигналов и помех для каналов пеленгации источников помех и подавления боковых лепестков диаграммы направленности антенны.* Пеленгационные каналы обзорных РЛС предназначены для приема шумовых помех и определения угловых координат постановщика этих помех [1]. Приемник этого канала имеет логарифмическую характеристику усиления, а антенная система и тракт усиления высокой частоты являются общими с основным приемным каналом РЛС.

Для борьбы с помехами, принимаемыми по боковым лепесткам диаграммы направленности антенны основного и пеленгационного каналов РЛС, применяется принцип компенсации шумовых помех [1]. Для реализации этого принципа каждый приемный канал РЛС

имеет вспомогательный приемный канал компенсации, который включает в себя специальную компенсационную антенную систему, приемник с логарифмической характеристикой усиления и устройство компенсации помех в основном и пеленгационном каналах РЛС. Коэффициент усиления антенны компенсации примерно равен уровню наибольшего из боковых лепестков основного канала, а форма диаграммы направленности круговая или специальной формы в виде кардиоиды с провалом в районе главного луча основного канала.

Различают две системы борьбы с шумовой помехой по боковым лепесткам [1]:

систему подавления боковых лепестков, работающую по принципу ограничения помех в основном и пеленгационном приемниках снизу; систему корреляционной компенсации шумовых помех, принимаемых основным каналом по боковым лепесткам.

Общей особенностью каналов пеленгации и подавления помех по боковым лепесткам является отсутствие устройств выделения сигналов, отраженных от объектов. Более того, постоянная времени устройств компенсации выбирается таким образом, чтобы исключить срабатывание по пачке отраженных сигналов.

В соответствии с принципами работы этих каналов, очевидно, что воспроизведение отраженных сигналов на их выходах не имеет смысла.

Так как пеленгационный канал сопряжен с основным, а структура помехи и ее мощность одинаковы, создавать в установке смешанного моделирования аппаратуру для моделирования помех в пеленгационном канале не требуется.

Структура шумовой помехи, воспроизводимой на входе вспомогательного канала должна строго соответствовать структуре помехи в основном канале, что может быть обеспечено формированием шума в физической модели одним генератором и идентичностью фазовых и частотных характеристик элементов ФМ основного и вспомогательного каналов.

Алгоритм функционирования ММ при вычислении мощности шумовых помех во вспомогательном канале не отличается от алгоритма по основному каналу. ФМ для вспомогательного канала должна иметь всего один ручной и один управляемый аттенюатор, а в качестве источника воспроизводимого шума используется генератор шумовой помехи основного канала.

*Диапазон несущих частот воспроизводимых сигналов.* Диапазон несущих частот, на которых возможно воспроизведение сигналов и помех установкой смешанного моделирования, играет значительную роль при использовании установки, определяя ее универсальность и широту применения.

Очевидно, что создание генераторов, аттенюаторов и сумматоров в широком диапазоне волн, от сантиметрового до метрового, является довольно сложной инженерной задачей. Практически при исследовании характеристик РЛС по высокой (несущей) частоте не-

обходимо создавать специальную ФМ, которая не может быть применена для РЛС с другой несущей частотой.

На практике широко применяется воспроизведение сигналов, а следовательно, и исследование характеристик РЛС по каналам промежуточной частоты. Этот подход обосновывается тем, что амплитудные характеристики высокочастотных трактов РЛС являются статически нелинейными в большом динамическом диапазоне. Статически нелинейные высокочастотные тракты характеризуются только определенной зависимостью коэффициента передачи тракта  $K_{увч}$  от мощности входных сигналов и не имеют устройств его автоматической регулировки

$$K_{увч} = K_{увч_0} k(P_{вх}), \quad (16.14)$$

где  $K_{увч_0}$  — максимальный коэффициент передачи высокочастотного тракта;  $k(P_{вх})$  — нормированная зависимость коэффициента передачи от мощности входного сигнала.

Тогда мощности сигнала и помехи и их относительное изменение

$$\left. \begin{aligned} P_{с0}^* &= P_{с0} K_{увч_0}; & P_{п0}^* &= P_{п0} K_{увч_0}; \\ N_{P_0}^* &= N_{P_0} k(P_{с0} N_{P_0}); & N_{P_{п}}^* &= N_{P_{п}} k(P_{п0} N_{P_{п}}), \end{aligned} \right\} \quad (16.15)$$

где  $P_0 N_p$  — текущее значение мощности сигнала или помехи на входе высокочастотного тракта приемного канала исследуемой РЛС.

При воспроизведении сигналов на промежуточной частоте, высокочастотный тракт может быть отключен и сформированные сигналы в этом случае подаются непосредственно на вход усилителя промежуточной частоты. Это приводит к исключению внутренних шумов высокочастотного тракта, действующих на вход усилителя промежуточной частоты, которые в обязательном порядке должны быть воспроизведены в ФМ.

Мощность этих шумов в полосе пропускания усилителя промежуточной частоты определяется чувствительностью приемного устройства РЛС  $P_{пр \min}$  (без учета его собственных шумов) и коэффициентом усиления высокочастотного тракта

$$P_{ш} = P_{пр \min} K_{увч_0}. \quad (16.16)$$

При исследовании характеристик РЛС по каналам промежуточной частоты в составе ФМ должен быть генератор дополнительного шума, шумы которого через ручной аттенуатор должны поступать в сумматор.

Частотный диапазон воспроизведения сигналов за счет перехода на моделирование по каналам промежуточной частоты, значительно уменьшился и переместился в область десятков мегагерц. Однако, и в этом случае исследования РЛС с различными промежуточными частотами не могут быть обеспечены одной и той же ФМ ввиду трудностей создания широкополосных устройств.

Для обеспечения широкополосности ФМ можно применить принцип переноса спектра сигнала, сформированного на одной фиксированной частоте, на заданную частоту с помощью гетеродинирования. При этом техническая задача создания ФМ значительно упрощается, так как элементы работают на одной постоянной частоте независимо от значения частоты выходного сигнала. Однако, следует иметь в виду, что при введении преобразования частоты уровень собственных шумов ФМ значительно возрастает и может даже превысить уровень шумов, действующих на входе усилителя промежуточной частоты исследуемой РЛС, что уменьшит динамический диапазон изменения мощности сигналов на выходе ФМ.

Несмотря на простоту построения ФМ, воспроизводящей сигналы на промежуточной частоте РЛС, этот путь не может применяться во всех случаях практики, так как при таком исследовании исключается тракт преобразования частоты РЛС и исключаются из исследования все явления, связанные с внеполосным приемом.

Рассмотренные ограничения и допущения следует выбирать в каждом конкретном случае в соответствии с поставленной задачей исследования РЛС и, если требуется, то учитывать их при обработке результатов и формировании выводов по исследованию характеристик РЛС.

Рассмотренные ограничения и допущения позволяют значительно сократить объем ФМ, унифицировать элементы и сделать ее достаточно универсальной, пригодной для исследования характеристик широкого круга РЛС.

### 16.3. Структура физической модели

Структура физической модели для воспроизведения сигналов и шумовых помех на входах основного и вспомогательного приемных каналов РЛС приведена на рис. 16.3. Эта структура обеспечивает

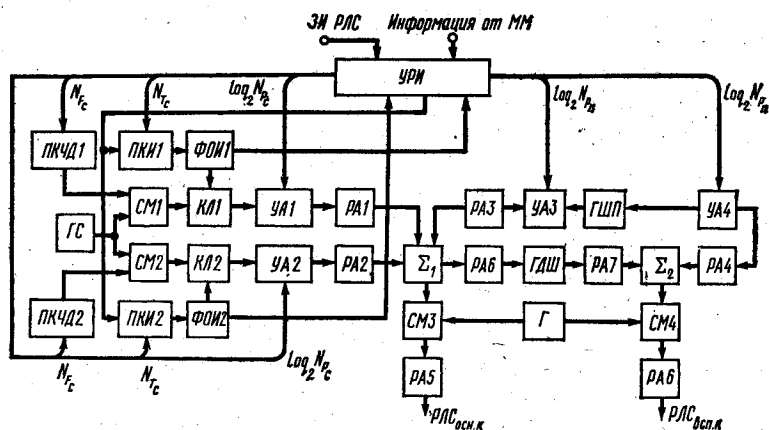


Рис. 16.3.

воспроизведение сигналов в диапазоне возможных промежуточных частот приемных каналов РЛС при моделировании большого количества объектов источников непрерывных и прерывистых шумовых помех.

Генератор сигнала (ГС) вырабатывает непрерывный монохроматический сигнал на частоте  $f_{\Gamma}$ , который поступает на сместители (СМ1, 2). Преобразователи код — частота Доплера (ПКЧД1, 2) вырабатывают непрерывный синусоидальный сигнал, несущая частота которого изменяется в соответствии с кодом относительного изменения частоты в отраженном сигнале  $N_{F_c j}$  от  $j$ -го объекта, и на выходе сместителей получаем непрерывный синусоидальный сигнал на частоте  $f_{M_i}$  с учетом ее сдвига по информации от ММ

$$f_{M_i} = f_{\Gamma} + f_0 + \Delta F_{ci} N_{F_{ci}}. \quad (16.17)$$

Преобразователи код — интервал (ПКИ1, 2) осуществляют автоматическую установку временного положения отраженного сигнала относительно импульса запуска РЛС по информации от ММ

$$T_{oi} = \Delta T_c N_{T_{c j}}. \quad (16.18)$$

Величина  $\Delta T_0$  выбирается в соответствии с требуемой точностью воспроизведения дальности до объекта.

Предпочтительным рядом, из которого выбирается  $\Delta T_c$ , является

$$\Delta T_c = \frac{2^{-k}}{0,15} \text{ мкс}; \quad \Delta R = 10^3 \cdot 2^{-k} \text{ м}, \quad (16.19)$$

где  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Импульсы с выходов ПКИ поступают в формирователи длительности отраженного импульса (ФОИ1, 2), в которых производится формирование видеоимпульса заданной длительности в соответствии с длительностью зондирующего импульса РЛС. Установка длительности фиксированная ручная.

Высокочастотные ключи (КЛ1, 2) осуществляют клапанирование непрерывного сигнала, поступающего со сместителей, завершая таким образом, формирование высокочастотного импульсного сигнала, задержанного относительно зондирующего импульса РЛС в соответствии с дальностью до объекта и с частотным сдвигом в соответствии с радиальной составляющей скорости полета данного  $j$ -го объекта.

С помощью управляемых аттенуаторов (УА1, 2) по информации с ММ  $\log_2 N_{P_c j}$  производится автоматическое изменение мощности этих сигналов, а с помощью ручных аттенуаторов (РА1, 2) установка требуемой их мощности. Ввиду того, что ММ производит вычисления изменений мощности в логарифмическом масштабе, управляемые аттенуаторы должны быть потенцирующими.

Генератор шумовой помехи (ГШП) вырабатывает непрерывный шум на средней частоте  $f_{\Sigma}$  с шириной спектра, несколько большей ширины полосы пропускания приемного устройства РЛС. Это обусловлено обеспечением большого динамического диапазона управля-

емого аттенюатора за счет уменьшения передаваемой мощности и отсутствием паразитных составляющих после переноса спектра в смесителях (СМЗ, 4). Сформированный шум через УАЗ и РАЗ поступает в сумматор  $\Sigma$ .

Для воспроизведения шумов отключенного высокочастотного тракта приемного устройства РЛС, в составе физической модели предусматривается генератор дополнительного шума (ГДШ). Установка требуемой мощности этих шумов производится с помощью РА5. Аддитивная смесь сигналов, шумовой помехи и дополнительного шума с помощью СМЗ и гетеродина ( $\Gamma$ ) переносится на требуемую промежуточную частоту. Установка значений  $P_{\text{с0}}$  и  $P_{\text{п0}}$  производится с помощью РА1, 2, 3, 5, 6. На входе вспомогательного приемного канала воспроизводится только шумовая помеха и дополнительные шумы.

Описанная структура может обеспечить одновременное воспроизведение двух неразрешаемых по углам и дальности объектов.

Алгоритмы функционирования УРИ и ММ взаимосвязаны и для уменьшения оборудования ФМ желательно свести алгоритм функционирования УРИ к простому адресному распределению, поступившей от ММ информации, по исполнительным устройствам ФМ.

Выбор несущей частоты определяется диапазоном и значениями возможных промежуточных частот исследуемых РЛС и возможностью обеспечения фильтрации комбинационных составляющих.

Такая структура модели принципиально может обеспечить воспроизведение сигналов и на несущей частоте РЛС при установке высокочастотных преобразователей частоты. В качестве гетеродина в этом случае целесообразно использовать гетеродин исследуемой РЛС и преобразовывать сформированные на промежуточной частоте сигналы. Эти преобразователи создаются применительно к данной исследуемой РЛС.

#### 16.4. Требования к элементам физической модели

Точность воспроизведения параметров сигналов и помех играет первостепенную роль при определении требований к элементам ФМ. Требования к выходным сигналам ФМ были определены, теперь рассмотрим цепочки формирования сигналов и помех и определим требования к элементам этих цепочек.

*Точность воспроизведения мощности.* Исходя из структуры ФМ (рис. 16.3), источниками ошибок при формировании мощности сигналов и помех являются: нестабильность выходной мощности генераторов ( $\sigma_{\text{ГС}}$ ,  $\sigma_{\text{ПКЧД}}$ ,  $\sigma_{\text{ГШП}}$  и  $\sigma_{\text{Г}}$ ), дискретность управления мощностью в ручных и управляемых аттенюаторах ( $\sigma_{\text{РЛ}}$  и  $\sigma_{\text{УА}}$ ), нестабильность коэффициентов передачи в ключах, смесителях и сумматорах ( $\sigma_{\text{КЛ}}$ ,  $\sigma_{\text{СМ}}$  и  $\sigma_{\Sigma}$ ).

Некоторое рассогласование между элементами модели приводит к изменению общего коэффициента передачи цепочек формирования сигналов и помех и в процессе работы созданной ФМ не вносит флюк-

туирующих ошибок. Суммарная флюктуационная среднеквадратическая ошибка воспроизведения мощности сигнала и помехи на выходе ФМ определяется выражением:

$$\sigma_{P_c}^2 = \sigma_{ГС}^2 + \sigma_{ПКЧД}^2 + \sigma_{КЛ}^2 + 2\sigma_{СМ}^2 + \sigma_{УА}^2 + 2\sigma_{РА}^2 + \sigma_{\Sigma}^2 + \sigma_{Г}^2, \quad (16.20)$$

$$\sigma_{P_{\Pi}}^2 = \sigma_{ГШП}^2 + \sigma_{УА}^2 + 2\sigma_{РА}^2 + \sigma_{\Sigma}^2 + \sigma_{СМ}^2 + \sigma_{Г}^2. \quad (16.21)$$

При задании требований к отдельным элементам в первую очередь необходимо исходить из потенциально достижимой точности измерительной аппаратуры, с помощью которой будут определяться ошибки отдельных элементов ФМ.

Тогда потенциально достижимая точность воспроизведения мощности сигналов и помех на выходе ФМ данной структуры с учетом дискретности установки отношения мощностей будет:

$$(\sigma_{P_c}^2)_{\min} = 10\sigma_{P_{\text{изм}}}^2 + \frac{(\Delta N_P)^2}{4}; \quad (16.22)$$

$$(\sigma_{P_{\Pi}}^2)_{\min} = 7\sigma_{P_{\text{изм}}}^2 + \frac{(\Delta N_P)^2}{4}. \quad (16.23)$$

Очевидно, что выбирать дискрет установки отношения мощностей меньше максимальной ошибки существующей измерительной аппаратуры не имеет смысла, т. е.

$$(\Delta N_P)_{\min} = 3\sigma_{\text{изм}},$$

тогда

$$(\sigma_{P_c})_{\min} = 3,5\sigma_{\text{изм}};$$

$$(\sigma_{P_{\Pi}})_{\min} = 3\sigma_{\text{изм}}.$$

*Динамические диапазоны изменения мощности сигналов и помех.* Динамический диапазон изменения мощности сигналов и помех определяется динамическим диапазоном изменения мощности в управляемых и ручных аттенуаторах. Однако этот динамический диапазон может быть ограничен динамическим диапазоном сумматоров и смесителей СМЗ,4.

Принципиально существует возможность создания сумматора, имеющего большой динамический диапазон изменения мощности сигналов, который не ограничивает динамического диапазона изменения мощности сигналов и помех. В качестве такого сумматора может быть использован пассивный сумматор на сопротивлениях, имеющий коэффициент передачи значительно меньше единицы.

Однако создание смесителя с большим динамическим диапазоном изменения мощности преобразуемых сигналов является довольно сложной проблемой. Минимальная мощность преобразуемого сигнала ограничивается собственными шумами смесителя, а максимальная — линейным участком его амплитудной характеристики.

Для расширения возможностей регулировки начальных мощностей сигналов и помех в ФМ может быть установлен РА5, который не изменяет соотношений сигнал/помеха, а устанавливает их макси-



малые значения на входе приемного устройства РЛС. Такая структура позволяет несколько уменьшить динамический диапазон изменения сигналов на входе смесителя.

При использовании в цепочках формирования помех и сигнала одинаковых элементов, требования к ним определяются динамическим диапазоном изменения сигналов, так как требования к динамическому диапазону изменения мощности помех значительно меньше.

*Точность воспроизведения временных параметров сигнала.* К временным параметрам отраженного сигнала относятся: время задержки отраженного сигнала относительно зондирующего импульса РЛС и длительность отраженного сигнала.

В соответствии со структурой ФМ формирование задержки производится автоматически по информации от ММ в преобразователе код — интервал (ПКИ); а длительность сигнала устанавливается в формирователе длительности отраженного импульса (ФОИ).

Источниками ошибок в автоматическом преобразователе информации является дискретность представления времени задержки  $\sigma_d$ , привязка этого дискрета к импульсу запуска РЛС  $\sigma_{пр}$  и задержка сформированного импульса в элементах цепочки формирования сигнала, а в ФОИ — нестабильность установленной длительности сигнала.

При выбранной структуре и конкретной технической реализации элементов ФМ, задержка импульса в цепочке формирования сигнала является практически стабильной и ее величина может быть замерена и учтена при моделировании в ММ.

Случайная ошибка формирования задержки сигнала определяется выражением

$$\sigma_{T_c}^2 = \sigma_{пр}^4 + \sigma_d^2. \quad (16.25)$$

С учетом того, что  $\sigma_{пр} = \sigma_d$  ошибки привязки и дискретности имеют случайный характер с равномерным законом распределения в интервале  $\Delta T_c$ , поэтому

$$\sigma_{T_c} = \frac{\Delta T_c}{\sqrt{3}}, \quad (16.26)$$

т. е., точность воспроизведения времени задержки отраженного сигнала при идеальной форме переднего фронта импульса запуска РЛС определяется только величиной дискрета представления величины времени задержки. Тогда, исходя из требований к временным параметрам выходного сигнала ФМ, величина дискрета представления задержки определяется из условия

$$\Delta T_c \leq \sqrt{3} \sigma_{T_c}. \quad (16.27)$$

Требуемая точность установки длительности отраженного сигнала в ФОИ целиком определяется требованием к длительности выходного сигнала. При этом необходимо иметь в виду, что в формировании длительности импульса принимают участие два элемента —

ФОИ и высокочастотный ключ (КЛ), а остальные элементы (УА, РА, Э и СМ) для обеспечения передачи импульсного сигнала без искажений должны иметь полосу пропускания

$$\Delta f \geq \frac{2 \dots 3}{\tau_0} \quad (16.28)$$

Кроме того, в преобразователе код — интервал существует ошибка, накапливающаяся с увеличением воспроизводимого временного интервала, которая обусловлена нестабильностью тактового генератора. Требования к точности установки частоты тактового генератора  $f_{ТГ}$  и ее стабильности определяются допустимыми ошибками воспроизведения максимальной дальности до объекта.

Если принять, что величина накапливающейся ошибки должна быть не более половины дискрета установки величины дальности, то требования к относительным стабильности и точности установки  $f_{ТГ}$  определяются

$$\frac{f_{ТГ}}{f_{ТГ_0}} = \frac{2R_{\max}}{2R_{\max} \pm \Delta R} \approx 1 \pm \frac{\Delta R}{2R_{\max}} \quad (16.29)$$

*Управление параметрами сигналов и помех.* Информация от ММ поступает в виде последовательности слов двоичного кода, содержащих относительные изменения частоты Допплера, временной задержки и мощности сигналов, находящихся в данный момент времени в пределах главного луча диаграммы направленности, а также относительные изменения мощности помех в основном и вспомогательном каналах РЛС.

Устройство распределения информации запоминает всю информацию на следующий период повторения и с приходом запускающего импульса от РЛС передает информацию  $\log_2 N_{P_{II}}$  для управляемых аттенуаторов (УАЗ и УАА) формирования шумовой помехи в основном и вспомогательном приемных каналах РЛС. Значения этих мощностей выдаются на весь период повторения запускающих импульсов.

При моделировании более двух объектов, находящихся в главном луче диаграммы направленности антенны, с учетом их распределения по дальности, УРИ осуществляет временное управление моментами выдачи величин  $N_{F_c}$ ,  $N_{T_c}$  и  $\log_2 N_{P_c}$  для обоих подканалов воспроизведения сигналов. Сигналом об освобождении подканала служит спад импульса на выходе ФОИ.

Наиболее простым алгоритмом распределения информации об отраженных сигналах является алгоритм, при котором информация выдается с приоритетом в первый подканал. При занятости обоих подканалов информация не выдается и, следовательно, отраженный сигнал не воспроизводится.

При создании ФМ необходимо определить максимальное количество объектов, которое необходимо воспроизводить в течение одного периода повторения зондирующих сигналов, и их распределение

по дальности. И затем с учетом времени переключения подканалов определить требуемое количество подканалов формирования отраженных сигналов.

### Контрольные вопросы

1. Почему сигналы, созданные в физической модели, должны быть адекватны реальным и каковы основные требования к моделируемым сигналам?
2. Как определяется требуемый динамический диапазон измерения параметров сигналов? Составить выражение, определяющее относительное изменение мощности сигнала, отраженного от шара при его движении вокруг РЛС на постоянном расстоянии.
3. Как можно моделировать прерывистое воздействие шумовых помех от одного источника и от большого количества независимых источников?
4. На чем основан выигрыш в количестве оборудования физической модели при моделировании большого количества объектов?
5. Какие требования предъявляются к воспроизведению в физической модели временных характеристик сигналов (например, времени задержки отраженных сигналов)?

## Глава 17

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСТАНОВКИ СМЕШАННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

#### 17.1. Требования к математической модели

В соответствии с приведенной структурой установки смешанного моделирования, рассмотренных вопросов оптимизации структуры ФМ и требований к установке смешанного моделирования, определены требования к математической модели.

ММ установки смешанного моделирования должна произвести расчет текущих параметров сигналов и помех на входе приемного устройства РЛС на каждый период повторения зондирующих импульсов РЛС при воспроизведении полета заданного количества объектов и осуществить выдачу значений этих параметров в ФМ.

Общие требования к ММ могут быть разделены на требования к моделирующему алгоритму и требования к аппаратурной реализации ММ.

При создании моделирующего алгоритма необходимо производить его оптимизацию с целью максимально возможного уменьшения количества простых операций при его реализации, что обеспечит большую производительность как ММ, так и УСМ в целом. Кроме того, для облегчения составления общего моделирования алгоритма должны быть созданы унифицированные алгоритмы функционирования отдельных блоков ММ.

Оптимизация и агрегатизация моделирующего алгоритма должны обеспечить универсальность ММ по отношению к исследованию ряда РЛС различных классов.

Возможности аппаратурной реализации всегда ограничивают исследователей, в том числе и при исследовании характеристик РЛС

методом смешанного моделирования. Современный уровень развития вычислительной техники позволяет реализовать алгоритмы функционирования математических моделей только для некоторых РЛС, и так как возможности аппаратурной реализации ММ не безграничны, то при создании установки смешанного моделирования необходимо вводить разумные ограничения в модели, приводящие к согласованию противоречий между желаниями исследователей и возможностями технической реализации этих желаний.

При аппаратурной реализации ММ в первую очередь следует рассчитывать на использование существующих как универсальных, так и специализированных вычислительных машин; во вторую очередь рассматривать вопросы создания дополнительных специализированных устройств к универсальной вычислительной машине и в третью, последнюю, очередь разрабатывать специальную вычислительную машину для УСМ. В этом отношении наиболее удобным и применимым оказалось создание дополнительных устройств к существующим вычислительным машинам, так как возможности универсальных машин ограничивают общую производительность математических моделей, а создание новой специализированной вычислительной машины требует больших временных и материальных затрат.

Моделирующий алгоритм должен обеспечивать выполнение следующих условий оптимизации:

1. Исходные данные для моделирования, содержащие угловые координаты моделируемых  $j$ -х объектов  $\beta_j$  и  $\varepsilon_j$ , относительное изменение времени задержки  $N_{T,j}$  и доплеровского сдвига частоты  $N_{F,j}$ , а также относительное изменение мощностей сигнала  $\log_2 W_{c,j}$  и помехи  $\log_2 W_{n,j}$ , обусловленные пространственным положением объектов относительно РЛС, должны готовиться заранее с помощью универсальной вычислительной машины в соответствии с заданным налетом объектов, как функции текущего времени и запоминаться в виде, удобном для ввода в ММ при моделировании.

2. Отраженный сигнал, принятый по боковым лепесткам диаграммы направленности антенны, не моделируется.

3. В районе главного луча диаграммы направленности антенн моделируется ограниченное количество не разрешаемых в пространстве объектов.

4. Отраженные сигналы в каналах пеленгации и подавления боковых лепестков диаграммы направленности антенны не моделируются.

5. Шумовые помехи на входе приемного устройства РЛС от источников помех суммируются по мощности и нормализуются по структуре.

6. Флюктуации эффективной отражающей поверхности объектов должны воспроизводиться в виде относительного изменения эффективной отражающей поверхности с определенными заданными законом распределения и спектром флюктуации.

7. Диаграммы направленности антенн РЛС должны воспроизводиться в объемном виде в заданном диапазоне изменения углов.

8. Данные об угловом направлении антенной системы РЛС должны выдаваться в ММ в виде параллельного двоичного кода с согласованной ценой младшего разряда.

9. Синхронизация работы ММ должна осуществляться от устройства синхронизации исследуемой РЛС запускающими импульсами и импульсами реального времени.

10. Реализация моделирующего алгоритма должна производиться за время, меньшее периода повторения импульсов запуска РЛС, а вычисления производиться на последующий период повторения этих импульсов.

11. Выдача информации на ФМ должна производиться по мере ее вычисления.

12. Для сокращения времени реализации моделирующего алгоритма вычисления относительного изменения мощности сигнала (помехи) должны производиться в логарифмическом масштабе. Наиболее удобной для реализации как в физической, так и в математической моделях является логарифмический масштаб при основании два.

Точность вычисления информации о текущих значениях параметров сигналов и помех обеспечивается соответствующей ценой младшего разряда  $\Delta$  представления исходных величин, определяемых из заданных допустимых среднеквадратических ошибок воспроизведения соответствующих параметров сигналов и помех УСМ

$$\Delta = 2\sqrt{3}\sigma_{\text{ММ}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{n^2 + 1}} \sigma_{\text{УСМ}}, \quad (17.1)$$

где  $n$  — число, указывающее, во сколько раз точность вычислений в ММ выше точности воспроизведения соответствующих параметров в ФМ.

Разрядность двоичных кодов представления величин  $\psi$  определяется выражением

$$\mu = \log_2 \left\{ \left[ \frac{\psi_{\text{max}}}{\Delta\psi} \right] \right\}. \quad (17.2)$$

## 17.2. Моделирование радиолокационных характеристик объектов

Основными радиолокационными характеристиками объектов являются: отражающая способность, определяющая свойство объекта переизлучать высокочастотную энергию в направлении на РЛС, т. е. величину эффективной отражающей поверхности (ЭОП) объекта  $\sigma_0$ ; зависимость величины ЭОП объекта от угла падения электромагнитной волны; флуктуации мощности, фазового фронта и задержки отраженного сигнала, а также его деполяризации, определяемые вибрацией, рысканием и колебанием объекта относительно центра масс и характеризующимися законом распределения и спектром флуктуаций.

Отражающая способность объекта зависит от размеров объекта, материала из которого он выполнен, конфигурации объекта, длины волны облучающей электромагнитной энергии и направления облучения.

При неравномерной диаграмме переизлучения реальных объектов сложной конфигурации всякое случайное изменение угла их облучения со стороны РЛС приводит к флюктуациям мощности сигнала, отраженного в направлении на РЛС.

Учитывая наличие большого количества объектов, участвующих в полете и имеющих различные значения средней величины ЭОП  $\sigma_0$ , представленную в главе 15 аналитическую запись ЭОП объекта (15.5), целесообразно дополнить коэффициентом различия величины средней ЭОП  $j$ -го объекта  $\alpha_j$  относительно максимального значения средней ЭОП одного из объектов, участвующих в полете,

$$\sigma_0 = (\sigma_0)_{\max} \alpha_j \sigma(q; \rho)_j \sigma(t)_{ij}. \quad (17.3)$$

Для большинства аэродинамических объектов ЭОП зависит от угла облучения, а ее усредненное значение практически не зависит от длины облучающей волны. Наибольшие значения ЭОП соответствуют облучению с борта и снизу. Диапазон изменения величины  $\sigma(q; \rho)$  велик и для некоторых объектов может достигать 30...35 дБ. Зависимость  $\sigma(q; \rho)$  имеет объемный вид, является сложной функцией этих углов и может быть определена только экспериментально.

Значения  $\sigma_0$  для различных объектов составляют [1]:

тяжелый самолет	20...50 м <sup>2</sup> ;
средний самолет	5...20 м <sup>2</sup> ;
легкий самолет	1...5 м <sup>2</sup> .

Относительное изменение ЭОП, определяемое флюктуациями, является случайной величиной и может быть определено только экспериментально. Флюктуации ЭОП могут быть представлены случайными функциями времени, характеризующимися законом распределения амплитуд и спектром флюктуаций.

Закон распределения амплитуд сигналов, отраженных от различных сложных объектов по результатам многих экспериментов хорошо совпадают с распределением Релея [1, 2, 3]

$$\omega(U) = \frac{U_m}{\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{U_m^2}{2\sigma_n^2}\right). \quad (17.4)$$

Закон распределения мощности отраженного сигнала

$$\omega(P) = W[U_m(P)] \frac{dU_m}{dP} = \frac{1}{P} \exp\left(-\frac{P}{P}\right). \quad (17.5)$$

Учитывая, что мощность отраженного сигнала пропорциональна величине ЭОП объекта, плотность вероятности

$$\omega(\sigma; \sigma_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma \leq 0; \\ \frac{1}{\sigma_0} \exp\left(-\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) & \text{при } \sigma > 0. \end{cases} \quad (17.6)$$

Экспоненциальное распределение полностью определяется величиной средней ЭОП объекта  $\sigma_0$ , и математическое ожидание, дисперсия, медиана и мода будут

$$m_\sigma = \sigma_0; \quad D_\sigma = \sigma_0^2; \quad M_l = \ln 2\sigma_0; \quad M_0 = 0. \quad (17.7)$$

В ряде случаев при исследованиях задаются релейским или нормальным законами распределения флюктуаций ЭОП объекта.

Плотность вероятности для релейского распределения

$$\omega(\sigma; \sigma_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma \leq 0; \\ \frac{\sigma}{\sigma_k} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\sigma_k^2}\right) & \text{при } \sigma > 0. \end{cases} \quad (17.8)$$

Математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение, медиана и мода, соответственно

$$m_\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_k; \quad a = \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}} \sigma_k; \quad M_l = \sqrt{2 \ln 2} \sigma_k; \quad (17.9)$$

$$M_0 = \sigma_k.$$

Учитывая эти соотношения, плотность вероятности для релейского распределения

$$\omega(\sigma; m_\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{m_\sigma^2} \exp\left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{\sigma}{m_\sigma}\right)^2\right] & \text{при } \sigma > 0. \end{cases} \quad (17.10)$$

Плотность вероятности для нормального закона

$$\omega(\sigma; m_\sigma; a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} a} \exp\left[-\frac{(\sigma - m_\sigma)^2}{2a^2}\right]. \quad (17.11)$$

Так как флюктуации ЭОП объекта представляются в виде относительного изменения ЭОП, то представляет интерес определить возможный диапазон изменения ЭОП объекта при его флюктуациях.

Если принять, что ЭОП объекта флюктуирует относительно средней величины  $\sigma_0$ , которая является математическим ожиданием случайной величины  $\sigma_0 = m_\sigma$ , то плотности вероятности и функции распределения запишутся так:

1. Для экспоненциального распределения

$$\left. \begin{aligned} \omega\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}; \sigma_0\right) &= \begin{cases} 0 & \text{при } \frac{\sigma}{\sigma_0} \leq 0; \\ \frac{1}{\sigma_0} \exp\left(-\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) & \text{при } \frac{\sigma}{\sigma_0} > 0. \end{cases} \\ W\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) &= \begin{cases} 0 & \text{при } \frac{\sigma}{\sigma_0} \leq 0; \\ 1 - \exp\left(-\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) & \text{при } \frac{\sigma}{\sigma_0} > 0. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (17.12)$$

## 2. Для релейевского распределения

$$\omega\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0_0}}; \sigma_{0_0}\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } \frac{\sigma}{\sigma_{0_0}} \leq 0; \\ \frac{\pi}{2\sigma_{0_0}} \frac{\sigma}{\sigma_{0_0}} \exp\left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0_0}}\right)^2\right] & \text{при } \frac{\sigma}{\sigma_{0_0}} > 0. \end{cases} \quad (17.13)$$

$$W\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0_0}}\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } \frac{\sigma}{\sigma_{0_0}} \leq 0; \\ 1 - \exp\left[-\frac{2}{\pi} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0_0}}\right)^2\right] & \text{при } \frac{\sigma}{\sigma_{0_0}} > 0. \end{cases}$$

## 3. Для нормального распределения

$$W\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0_0}}; \sigma_{0_0} a\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } \frac{\sigma}{\sigma_{0_0}} \leq 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi} a} \exp\left[-\frac{\sigma_{0_0}^2}{2a^2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0_0}} - 1\right)^2\right] & \text{при } \frac{\sigma}{\sigma_{0_0}} > 0; \end{cases}$$

$$W_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt; \quad (17.14)$$

$$x = \begin{cases} 0 & \text{при } \frac{\sigma}{\sigma_{0_0}} \leq 0; \\ \frac{\sigma_{0_0}}{a} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0_0}} - 1\right) & \text{при } \frac{\sigma}{\sigma_{0_0}} > 0; \end{cases}$$

$$W\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0_0}}; \sigma_{0_0}; a\right) = \begin{cases} 0,5 + W_0(x), & \text{если } x \geq 0; \\ 0,5 - W_0(|x|), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Можно принять, что для нормального закона распределения величина среднеквадратического отклонения ( $a$ ) всегда в три и более раза меньше величины  $\sigma_{0_0}$ . Тогда для крайнего случая ( $a = \sigma_{0_0}/3$ ), что соответствует самым глубоким флюктуациям, нормальный закон распределения

$$w^*\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0_0}}; \sigma_{0_0}\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } \frac{\sigma}{\sigma_{0_0}} \leq 0; \\ \frac{3}{\sqrt{2\pi} \sigma_{0_0}} \exp\left[-\frac{9}{2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0_0}} - 1\right)^2\right] & \text{при } \frac{\sigma}{\sigma_{0_0}} > 0; \end{cases} \quad (17.15)$$

$$W^*\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0_0}}\right) = \begin{cases} 0,5 + W_0(x^*), & \text{если } x^* \geq 0; \\ 0,5 - W_0(|x^*|), & \text{если } x^* \leq 0; \end{cases}$$

$$W_0(x^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^*} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x^* = 3 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0_0}} - 1\right).$$

На графике рис. 17.1 приведены зависимости функции распределения от отношения  $\sigma/\sigma_{0_0}$  для экспоненциального (1), релейевского (2),



и нормального (3) законов флюктуаций ЭОП объекта.

Анализ этих графиков показывает, что ЭОП объекта флюктуирует относительно среднего значения не симметрично и если ввести ограничения по уровням вероятности 0,05 и 0,95, то глубина флюктуаций ЭОП объекта для различных законов распределения будет

для экспоненциального —  $12 < \frac{\sigma}{\sigma_0} < 5$  дБ;

для релеевского —  $6 < \frac{\sigma}{\sigma_0} < 3$  дБ;

для нормального —  $4 < \frac{\sigma}{\sigma_0} < 2$  дБ.

В работе [4] рассматривается обобщенная функция распределения плотности вероятности ЭОП объекта, для которой экспоненциальное, релеевское и нормальное распределения являются частными случаями. Это распределение  $\chi^2$  с  $2K$  степенями свободы.

Экспоненциальное распределение представляет собой распределение с двумя степенями свободы, релеевское распределение — при четырех степенях свободы и нормальное — при большом количестве степеней свободы.

Исходя из этого можно составить весьма разнообразные функции распределения плотности вероятности.

Флюктуации ЭОП объекта характеризуются как законом распределения амплитуд, так и спектром.

Ширина спектра флюктуаций огибающей отраженного сигнала зависит в основном от длины волны РЛС, изрезанности диаграммы переизлучения и скорости изменения углов облучения объекта. Чем уже лепестки диаграммы переизлучения и чем больше указанная скорость, тем выше частота флюктуаций. Наивысшая частота спектра флюктуаций лежит в диапазоне сотен герц. Рыскания и случайные крены самолета приводят к появлению флюктуаций в диапазоне единиц герц. Поэтому зависимость спектральной плотности мощности флюктуаций ЭОП объекта от частоты носит неравномерный характер в области единиц герц и достаточно быстро и монотонно убывает в области десятков и сотен герц.

В зависимости от типа объекта спектральный состав амплитудных флюктуаций может существенно меняться. Для примера на рис. 17.2 приведены нормированные спектральные плотности мощности амплитудных флюктуаций огибающей сигналов, отраженных от самолета и корабля [2, 3, 5], а на рис. 17.3 соответствующие им корреляционные функции при работе РЛС в сантиметровом диапазоне волн.

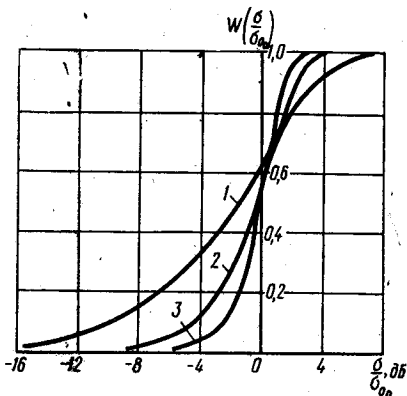


Рис. 17.1.

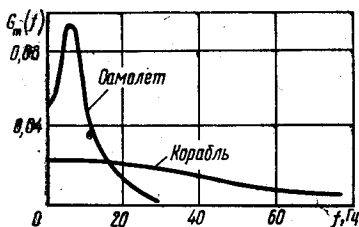


Рис. 17.2.

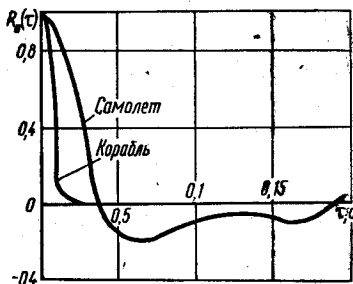


Рис. 17.3.

Для обзорных РЛС время облучения объекта либо примерно равно времени корреляции (быстрый обзор), либо значительно меньше его (РЛС кругового обзора), поэтому амплитуды импульсов в начале и конце пачки отраженных сигналов в первом случае коррелированы слабо, т. е. весьма вероятно их отличие, а во втором случае искажения формы пачек незначительные. В последнем случае говорят, что флуктуации «дружные». Так как период обзора РЛС значительно больше времени корреляции, то пачки отраженных сигналов будут некоррелированы. Искажения импульса внутри пачки маловероятны, так как длительность импульса значительно меньше времени корреляции.

Корреляционные функции большинства реальных случайных процессов с достаточной точностью могут быть аппроксимированы экспоненциальными или экспоненциально-косинусными функциями вида [6, 7]

$$\left. \begin{aligned} R(\tau) &= \sum_{k=1}^m A_k \exp(-C_k |\tau|); \\ R(\tau) &= \sum_{k=1}^m A_k \exp(-C_k |\tau|) + B \exp(-C |\tau|) \cos \omega_0 \tau. \end{aligned} \right\} (17.16)$$

В ряде практических случаев функции корреляции могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} R_1(\tau) &= A \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_0}\right); \\ R_2(\tau) &= A \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_0}\right) \cos \omega_0 \tau, \\ R_3(\tau) &= A \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_0}\right) + B \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_0}\right) \cos(\omega_0 \tau + \varphi), \end{aligned} \right\} (17.17)$$

или

$$R_4(\tau) = A \exp\left[-\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^2\right];$$

$$R_b(\tau) = A \exp \left[ - \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^2 \right] \cos \omega_0 \tau;$$

$$R_s(\tau) = A \exp \left[ - \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^2 \right] + B \exp \left[ - \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^2 \right] \cos (\omega_0 \tau + \varphi),$$

где  $\tau_0$  — время корреляции;  $\omega_0$  — частота гармонического колебания функции;  $\varphi$  — фазовый сдвиг гармонического колебания;  $A$  и  $B$  — нормирующие коэффициенты.

Отраженный от объекта сигнал характеризуется, кроме того, флюктуациями фазового фронта, временем запаздывания и деполяризацией отраженного сигнала.

Для точечного изотропного излучателя фазовый фронт представляет сферу. Поэтому его пеленгация при прочих идеальных условиях всегда будет осуществляться без ошибки. При пеленгации сложного объекта пеленгатор при тех же условиях будет в каждый момент указывать положение нормали к фазовому фронту, не проходящей в общем случае через центр объекта. При случайных перемещениях объекта относительно РЛС положение нормали будет также случайным образом меняться и объект в этих условиях может быть заменен точкой, блуждающей в некотором объеме, размеры которого могут превосходить размеры объекта. Эту блуждающую точку называют эффективным центром отражения объекта. Флюктуации фазового фронта проявляются в виде случайных изменений сигнала ошибки измерения угла объекта, что дало основание назвать флюктуации фазового фронта «угловыми шумами» объекта.

Спектр угловых шумов, так же как и спектр флюктуаций амплитуды, является низкочастотным и для РЛС сантиметрового диапазона волн имеет максимальную интенсивность в полосе от 0 до 5 Гц.

При блуждании эффективного центра отражения в пределах некоторого объема, заключающего реальный объект, возникают флюктуации времени прихода сигнала. Соответствующее им отклонение по дальности обычно не превышает геометрических размеров объекта в направлении облучения. Спектр этих флюктуаций и плотность распределения их амплитуд весьма близко совпадают с соответствующими характеристиками угловых шумов. Величина среднеквадратического отклонения от среднего значения дальности составляет около 0,8 размера объекта.

При облучении реальных объектов имеет место явление деполяризации, когда поляризация поля в точке приема отличается от поляризации зондирующего колебания. Степень деполяризации определяется энергетическими свойствами и формой объекта, зависит от длины волны и условий распространения. Деполяризация приводит к потере принимаемой энергии. Так при облучении самолета линейно поляризованной волной сантиметрового диапазона потери составляют порядка 10 дБ, а при круговой поляризации — порядка 3 дБ [1]. Поле в точке приема, как правило, эллиптически поляризовано независимо от поляризации первичной волны. Потери

ри же энергии связаны с неодинаковым сдвигом фаз ортогональных компонентов отраженного поля.

Моделирование эффективных отражающих поверхностей объекта заключается в выборе величины  $(\sigma_{0j})_{\max}$ , входящей в выражение, определяющее максимальное значение мощности отраженного сигнала  $P_{\text{со}}$  при моделировании, задании графической или аналитической зависимости  $\sigma(q; \rho)$  для каждого  $j$ -го объекта и воспроизведении случайных функций  $\sigma(t)$  для каждого объекта.

Моделирование «угловых шумов» объектов и флюктуаций времени запаздывания отраженных сигналов заключается в изменении угловых координат целей  $\beta_j$  и  $\varepsilon_j$  и относительного изменения времени задержки  $N_{T,j}$  на некоторую случайную величину  $\delta\beta_j$ ,  $\delta\varepsilon_j$  и  $\delta N_{T,j}$  в соответствии с требуемыми законами распределения их величин и функциями корреляции.

Для воспроизведения флюктуаций в составе математической модели предусматривается датчик случайных функций со своим автономным алгоритмом функционирования, позволяющим вырабатывать требуемое количество независимых стационарных эргодических случайных процессов с заданными законом распределения и корреляционной функцией. Выдача случайных величин должна производиться по запросу от решающего устройства математической модели. Количество воспроизводимых независимых случайных процессов определяется количеством каналов исследуемой РЛС, количеством моделируемых объектов и количеством моделируемых случайных возмущений («угловые шумы» и флюктуации ЭОП и времени задержки сигнала).

Создание такого датчика даже для нескольких объектов встречает значительные технические трудности и требует больших материальных затрат. Поэтому при моделировании массированного полета объектов необходимо изыскивать другие пути воспроизведения флюктуаций.

Флюктуации ЭОП объектов для обзорных РЛС носят «дружный» характер и некоррелированы от обзора к обзору, т. е. величина  $\sigma(t)$  за время существования пачки отраженных сигналов практически не изменятся и не зависит от ее значения при предыдущем облучении. Тогда флюктуации ЭОП для обзорных РЛС могут воспроизводиться в виде некоррелированных значений  $\sigma(t)$  с заданным законом распределения. Причем, для каждого объекта и каждого приемного канала эти значения должны быть независимыми.

Рассмотрим возможные примеры технической реализации воспроизведения флюктуаций ЭОП объектов для обзорных РЛС.

Наиболее простым и достаточно универсальным техническим решением датчика флюктуаций для  $n$  объектов и  $m$  — канальной РЛС является установка в математической модели одного датчика некоррелированных случайных чисел и буферной оперативной памяти объемом  $nm$  чисел.

Датчик случайных чисел производит смену данных во всем объеме этого запоминающего устройства с периодом не более периода

обзора РЛС. Каждый номер ячейки памяти соответствует определенным номерам объекта и канала и при моделировании запрос значения  $\sigma(t)_{ij}$  производится по текущим номерам объекта  $j$  и канала  $i$ .

Другим путем воспроизведения «дружных» флюктуаций ЭОП объектов является учет этих флюктуаций в величине  $W_c$  при подготовке исходных данных. Этот путь является заманчивым, так как не требует аппаратных затрат в математической модели, однако при повторении полета необходимы новые исходные данные об объектах, в которых занесено другое распределение флюктуаций по траектории полета объектов. Кроме того, объем исходных данных увеличивается, так как в этом случае величина  $W_c \sigma(t)$  зависит не только от номера объекта, но и от номера приемного канала РЛС

$$W_{cjl}^* = W_{cjl} \sigma(t)_{ij}.$$

При моделировании сигналов для РЛС сопровождения объектов использование датчика случайных функций является обязательным.

### 17.3. Моделирование диаграмм направленности антенн РЛС

В РЛС различного назначения применяются три основные формы диаграмм направленности антенн — косекансквадратная, плоская и карандашная.

Косекансквадратные формы диаграмм применяются в одноканальных обзорных РЛС и создают в пространстве луч с узким сечением в горизонтальной плоскости и широким сечением в вертикальной, описываемый уравнением

$$C(\epsilon) = G_0 \operatorname{cosec}^2 \epsilon. \quad (17.18)$$

Плоские диаграммы, у которых ширина луча в одной плоскости больше, или намного больше, чем в другой используются для формирования многолучевой диаграммы направленности антенной системы многоканальной РЛС, а также в одноканальных РЛС (например, высотомеры) и в двухканальных трехкоординатных РЛС с взаимоперпендикулярным линейным сканированием лучей.

Карандашные формы диаграмм представляют собой поверхность вращения вокруг оси максимума коэффициента усиления, и при достаточной малой ширине таких диаграмм их называют игольчатыми.

При исследовании характеристик функционирования РЛС методом смешанного моделирования возникает задача воспроизведения в математической модели УСМ объемных диаграмм направленности антенн этих РЛС.

В качестве устройства воспроизведения диаграмм в установке смешанного моделирования применяется датчик диаграмм направленности антенн (ДДНА), в который заносится экспериментальное графическое (табличное) представление реальной диаграммы данной исследуемой РЛС.

В соответствии со структурой установки смешанного моделирования, алгоритм функционирования ММ реализуется с помощью

ЭВМ, а для занесения и хранения реальных диаграмм направленности антенн РЛС используется цифровое запоминающее устройство.

Требуемый объем памяти запоминающего устройства определяется диапазоном занесения диаграммы направленности и ценой младшего разряда угловых координат по азимуту и углу места, диапазоном и ценой младшего разряда представления коэффициента усиления антенны, а также количеством воспроизводимых диаграмм.

Диапазон занесения диаграммы по угловым координатам может составлять от единиц градусов (для РЛС с игольчатым лучом) до  $\pm 180^\circ$  (для РЛС кругового обзора), а диапазон представления коэффициента усиления антенны определяется формой ее диаграммы.

Наиболее удобной формой представления относительного изменения коэффициента усиления антенны, с точки зрения реализации в цифровой вычислительной машине и управления мощностью сигналов в управляемых аттенюаторах ФМ, является логарифмическое представление при основании два. Тогда цена младшего разряда относительного изменения мощности должна выбираться из ряда

$$\Delta N_p = 10 \frac{\lg 2}{2^k} \approx 3,01 \cdot 2^{-k} \text{ дБ}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (17.19)$$

и для удовлетворения требуемой точности, цена младшего разряда может быть принята равной 0,1875 дБ, а изменение коэффициента усиления антенны может быть представлено восьмиразрядным двоичным кодом.

Требуемый объем памяти для хранения одной объемной диаграммы в диапазоне  $\pm 180^\circ$  по азимуту и  $\pm 90^\circ$  по углу места при шаге записи  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2^{11}}$  и восьмиразрядном представлении коэффициента усиления составляет  $2^{36}$  двоичных знаков. Очевидно, что реализация такой памяти является сложной, а составление таблиц диаграммы для занесения в память в виде нескольких миллионов слов практически невозможно, т. е. современный уровень развития техники не позволяет реализовать при исследованиях РЛС методом смешанного моделирования реальные объемные диаграммы направленности антенн, учитывающие тонкости распределения боковых лепестков во всем диапазоне по азимуту и углу места.

В некоторых случаях, когда диапазон воспроизведения диаграмм может быть сокращен, представляется возможность занести диаграмму в виде множества азимутальных (угломестных) сечений. Учитывая технические возможности, диапазон представления объемных диаграмм может составить всего единицы градусов.

На практике широко применяется способ представления диаграмм в виде двух главных сечений (по азимуту и углу места), а объемная диаграмма представляется в виде произведения двух сечений

$$g(\beta; \varepsilon) = g(\beta) g(\varepsilon). \quad (17.20)$$

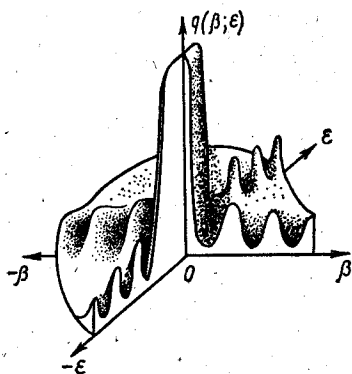


Рис. 17.4.

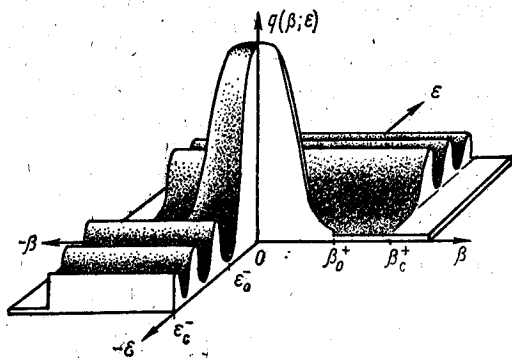


Рис. 17.5.

При этом происходит искажение действительной объемной формы диаграммы. На рис. 17.4 представлен вид объемной диаграммы, полученный при перемножении двух главных сечений.

Во многих случаях практики для плоских и косекансквадратных диаграмм такое представление объемных диаграмм считается допустимым.

Не вдаваясь в доказательство допустимости, рассмотрим возможности представления плоских объемных диаграмм в виде двух главных сечений.

Представим объемную диаграмму в виде произведения двух главных сечений ограниченных величинами  $\beta_c$  и  $\epsilon_c$  и постоянным значением  $g(\beta; \epsilon) = c$  во всем остальном диапазоне.

Математическая запись такого представления с учетом логики

$$\log_2 g(\beta; \epsilon) = L_\beta L_\epsilon [\log_2 g(\beta) + \log_2 g(\epsilon)] + \{ \bar{L}_\beta \vee \bar{L}_\epsilon \} c, \quad (17.21)$$

где  $L_\beta$  и  $L_\epsilon$  — логические признаки положения объекта относительно максимума диаграммы направленности антенны в азимутальной и угломерной плоскостях

$$L_\beta (L_\epsilon) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\beta| \leq \beta_c (|\epsilon| \leq \epsilon_c); \\ 0 & \text{при } |\beta| > \beta_c (|\epsilon| > \epsilon_c). \end{cases} \quad (17.22)$$

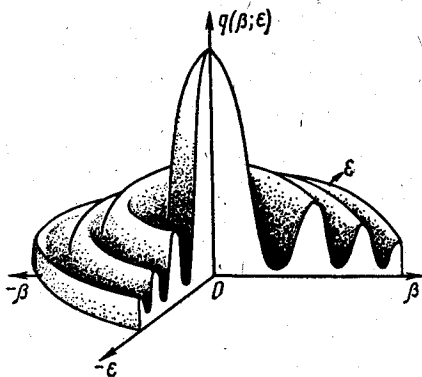


Рис. 17.6.

Иногда, в соответствии с решаемыми задачами, оказывается целесообразным представление объемной диаграммы в виде трех участков главного луча, ограниченного величинами  $\beta_0^+$ ;  $\beta_0^-$  и  $\epsilon_0^+$ ;  $\epsilon_0^-$ ; сектора, ограниченного величинами  $\beta_0^\pm - \beta_c^\pm$  и  $\epsilon_0^\pm - \epsilon_c^\pm$ .

участка за пределами сектора, ограниченного величинами  $\beta_c^\pm \dots \pm \pi$  и  $\varepsilon_c^\pm \dots (\pm \pi/2)$ .

При этом в районе главного луча диаграмма представляется в виде произведения двух главных сечений, в районе сектора — только одним из главных сечений и вне сектора — постоянным уровнем. Выбор сечения в районе сектора определяется направлением разворачивания луча — азимутальное или угломестное.

На рис. 17.5 приведен объемный вид диаграммы, воспроизводимый по этому алгоритму, при разворачивании луча по углу места.

Для диаграммы направленности карандашной формы коэффициент усиления определяется только модулем отклонения от оси максимума  $|\theta|$  и не зависит от стороны отклонения, так как такая диаграмма является телом вращения. Объемный вид диаграммы карандашной формы представлен на рис. 17.6.

Карандашная форма диаграммы может быть представлена в виде одного сечения в диапазоне  $0 \dots \pi$ , а величина отклонения  $\theta$  может определяться по формуле косинусов сферической тригонометрии

$$\theta = \arccos(\cos \beta \cos \varepsilon). \quad (17.23)$$

При малых значениях углов можно пользоваться формулой

$$\theta = \sqrt{\beta^2 + \varepsilon^2}. \quad (17.24)$$

Объемная диаграмма представляется в форме

$$g(\beta; \varepsilon) = \begin{cases} g(\theta) & \text{при } |\theta| \leq \theta_c; \\ 0 & \text{при } |\theta| > \theta_c. \end{cases} \quad (17.25)$$

Аналогично ранее изложенному, объем памяти для занесения диаграммы направленности карандашной формы

$$a(\theta) = 2^{-k} \frac{\pi}{\Delta\varphi}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (17.26)$$

Общий объем памяти для занесения  $m$  диаграмм направленности карандашной формы

$$V = \frac{2\pi}{\Delta\varphi} \sum_{i=1}^m \Gamma_{ik} 2^{-(k_i+1)}. \quad (17.27)$$

Угол  $\theta$  для РЛС с коническим сканированием луча определяется выражением

$$\theta = \arccos \{ \cos [\beta - \theta_0 \cos(\Omega t + \varphi)] \cos [\varepsilon - \theta_0 \sin(\Omega t + \varphi)] \}; \quad (17.28)$$

$$\varphi = \arctg \varepsilon/\beta,$$

где  $\beta$ ;  $\varepsilon$  — координаты объекта относительно равносигнального направления;  $\theta_0$  — угол смещения оси максимума диаграмм относительно равносигнального направления;  $\Omega$  — круговая частота сканирования антенны.

При малых значениях  $\beta$  и  $\varepsilon$  пользуются упрощенной формулой

$$\theta^2 = \theta_0^2 + \beta^2 + \varepsilon^2 - 2\theta_0 [\beta \cos(\Omega t + \varphi) + \varepsilon \sin(\Omega t + \varphi)]; \quad (17.29)$$

$$\varphi = \arctg \varepsilon/\beta.$$



Однако с точки зрения реализации этих уравнений в цифровой вычислительной машине последнее уравнение не обладает существенной простотой.

Угол  $\theta$  для моноимпульсных РЛС может быть вычислен по формулам:

для вертикальной плоскости пеленгации:

$$\begin{aligned}\theta_{B1} &= \arccos [\cos (\theta_0 - \varepsilon) \cos \beta]; \\ \theta_{B2} &= \arccos [\cos (\theta_0 + \varepsilon) \cos \beta];\end{aligned}\quad (17.30)$$

для горизонтальной плоскости пеленгации:

$$\begin{aligned}\theta_{Г1} &= \arccos [\cos (\theta_0 + \beta) \cos \varepsilon]; \\ \theta_{Г2} &= \arccos [\cos (\theta_0 - \beta) \cos \varepsilon];\end{aligned}\quad (17.31)$$

для передающей антенны:

$$\theta_{П} = \arccos (\cos \beta \cos \varepsilon). \quad (17.32)$$

При малых значениях  $\beta$  и  $\varepsilon$  можно пользоваться упрощенными формулами:

$$\begin{aligned}\theta_{B1}^2 &= (\theta_0 - \varepsilon)^2 + \beta^2; \\ \theta_{B2}^2 &= (\theta_0 + \varepsilon)^2 + \beta^2; \\ \theta_{Г1}^2 &= (\theta_0 + \beta)^2 + \varepsilon^2; \\ \theta_{Г2}^2 &= (\theta_0 - \beta)^2 + \varepsilon^2; \\ \theta_{П}^2 &= \beta^2 + \varepsilon^2,\end{aligned}\quad (17.33)$$

где  $\theta_0$  — угол смещения осей максимума диаграмм относительно мгновенного равносигнального направления.

Для хранения таблиц диаграмм направленности антенн могут быть использованы магнитная лента, магнитные барабаны, долговременное и оперативное запоминающее устройства.

Кроме достаточного объема памяти, общим требованием к датчику диаграмм направленности антенн, является достаточно высокое быстродействие, так как в течение периода повторения зондирующих импульсов количество обращений к ДТГА определяется количеством моделируемых объектов и количеством исследуемых приемных каналов РЛС. Так для шестиканальной РЛС, имеющей  $T_{зи} = 2,7$  мкс, при моделировании 50 целей, период обращения к ДДНА составляет 9 мкс. Обращение же к памяти, за значениями величин  $g(\beta)$  и  $g(\varepsilon)$  производится с периодом 4,5 мкс. Следовательно, использование накопителя на магнитной ленте и магнитном барабане невозможно.

Оперативное запоминающее устройство по сравнению с долговременным имеет некоторые преимущества применения: быстрая смена таблиц диаграммы; возможность проведения уточнения таблиц; широкие возможности перераспределения диаграмм в общем объеме памяти.

Исходными данными для формирования адреса обращения к запоминающему устройству являются: номер канала  $i$ , признак азимутального ( $d = 1$ ) или угломестного ( $d = 0$ ) сечения диаграммы, код угла рассогласования  $\beta$  или  $\varepsilon$  и принятое распределение диаграмм в запоминающем устройстве.

Ввиду того, что разрядность величин  $\log_2 g(\beta)$  и  $\log_2 g(\varepsilon)$  невелика, то при распределении памяти наиболее целесообразно размещать таблицы для положительных и отрицательных значений величины  $\beta$  ( $\varepsilon$ ) по одному адресу, а по их знаку выбирать нужную половину слова.

Подготовка таблиц для занесения в запоминающее устройство должна быть автоматизирована и выполняться с помощью универсальной вычислительной машины.

#### 17.4. Датчик исходных данных

При исследовании РЛС методом смешанного моделирования реальная воздушная и помеховая обстановка заменяются их математической моделью, то есть совокупностью уравнений, математических соотношений и табличных зависимостей с достаточной степенью точности описывающих реальный процесс. Эта математическая модель реализуется с помощью специального функционального устройства УСМ — датчика исходных данных.

В процессе моделирования в датчике производится определение пространственного положения объектов и источников помех относительно места расположения исследуемой РЛС в соответствии с заданными траекториями полета в реальном масштабе времени.

Выходными данными датчика для каждого моделируемого объекта являются: угловые координаты объекта  $\beta_i$  и  $\varepsilon_i$ ; относительное изменение времени задержки отраженного сигнала  $N_{T_i}$ ; относительное изменение доплеровского сдвига частоты  $N_{F_i}$ ; относительное изменение мощностей сигнала и помех, определяемое положением объектов относительно РЛС  $\log_2 W_{c_i}$  и  $\log_2 W_{n_i}$ .

Для вычисления этих данных в датчике должны определяться как функции времени следующие величины: дальность наклонная до объекта  $R_i(t)$ ; азимут объекта  $\beta_i(t)$ ; угол места объекта  $\varepsilon_i(t)$ ; радиальная составляющая скорости полета объекта  $V_{D_i}(t)$ ; значения углов между вектором скорости объекта и направлением на РЛС в горизонтальной (курс)  $g_i(t)$  и вертикальной (ракурс)  $\rho_i(t)$  плоскостях.

Кроме этого, в датчик исходных данных должны быть введены следующие экспериментальные зависимости: величины относительного изменения средней эффективной отражающей поверхности объекта от углов  $q$  и  $\rho$  —  $\sigma(q; \rho)$ ; величины относительного коэффициента усиления антенны передатчика помех от углов  $q$  и  $\rho$  —  $g_{пп}(q; \rho)$ ; величины коэффициента поглощения радиоволн от дальности до объекта  $R$  и высоты ее полета  $H$  —  $K_{п}(R; H)$  для фиксированного состояния атмосферы.

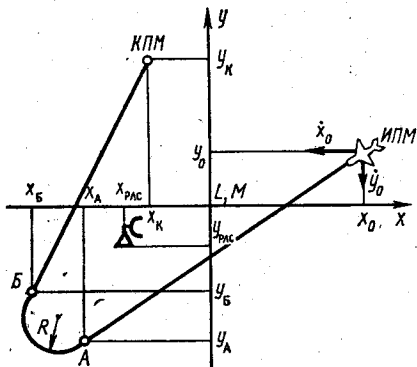


Рис. 17.7.

Эти зависимости могут вводиться либо в виде таблиц, либо в виде аппроксимирующих функций.

Пространственное положение объекта относительно РЛС может вычисляться по формулам сферической геометрии при задании траектории полета объекта перемещением ее проекции по поверхности Земли  $X_j(t)$  и  $Y_j(t)$ , профилем полета объекта  $H_j(t)$  и скоростью  $V_j(t)$  как функции времени.

Траекторию полета объекта можно представить в виде участков прямолинейного полета и участков разворота с определенной угловой скоростью.

Рассмотрим проекцию одной из возможных траекторий полета объекта на поверхность Земли, изображенную на рис. 17.7. Прямоугольная система координат выбрана относительно некоторой точки на поверхности Земли с геометрическими координатами  $L^\circ$  широты и  $M^\circ$  долготы, а ось  $OY$  направлена на Север. Земной шар представляется в виде идеального шара с эквивалентным радиусом  $R_s$ . Координаты  $x$  и  $y$  измеряются по поверхности Земли. Место расположения РЛС относительно начала координат определяется координатами  $X_{рлс}$  и  $Y_{рлс}$ .

Начальное положение объекта характеризуется координатами исходного пункта маршрута (ИПМ) —  $X_0; Y_0; H_0$  и вектором скорости объекта  $\dot{X}_0; \dot{Y}_0; \dot{H}_0$ .

Прямолинейный участок траектории полета объекта от ИПМ до точки А с координатами  $X_A$  и  $Y_A$  может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 + \dot{X}(t)t; \\ Y(t) &= Y_0 + \dot{Y}(t)t. \end{aligned} \quad (17.34)$$

Время полета объекта на участке ИПМ-А

$$t_A = \left| \sqrt{\frac{(X_A - X_0)^2 + (Y_A - Y_0)^2}{\dot{X}_0^2 + \dot{Y}_0^2}} \right|. \quad (17.35)$$

Разворот объекта на новый курс полета производится определенным радиусом разворота ( $R_p$ ), что при заданной линейной скорости однозначно определяет угловую скорость объекта

$$\Omega = \frac{\sqrt{\dot{X}^2(t) + \dot{Y}^2(t)}}{R_p} \text{ рад/с.} \quad (17.36)$$

Тогда, текущие координаты объекта на участке разворота от пункта  $A$  до пункта  $B$

$$\left. \begin{aligned} X(t) &= X_A + R_p \left[ \cos \Omega (t - t_A) - \frac{\dot{Y}_A}{\sqrt{\dot{X}_A^2 + \dot{Y}_A^2}} \right]; \\ Y(t) &= Y_A + R_p \left[ \sin \Omega (t - t_A) - \frac{\dot{X}_A}{\sqrt{\dot{X}_A^2 + \dot{Y}_A^2}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (17.37)$$

Время, затраченное на разворот объекта

$$t_{AB} = \frac{R_p \left[ \arctg \left( \frac{\dot{X}}{\dot{Y}} \right)_A - \arctg \left( \frac{\dot{X}}{\dot{Y}} \right)_B \right]}{\sqrt{\dot{X}_B^2 + \dot{Y}_B^2}}. \quad (17.38)$$

Тогда, координаты пункта  $B$  при постоянной скорости разворота

$$\left. \begin{aligned} X_B &= X_A + R_p \left\{ \cos \left[ \arctg \left( \frac{\dot{X}}{\dot{Y}} \right)_A - \arctg \left( \frac{\dot{X}}{\dot{Y}} \right)_B \right] - \frac{\dot{X}_A}{\sqrt{\dot{X}_A^2 + \dot{Y}_A^2}} \right\}; \\ Y_B &= Y_A + R_p \left\{ \sin \left[ \arctg \left( \frac{\dot{X}}{\dot{Y}} \right)_A - \arctg \left( \frac{\dot{X}}{\dot{Y}} \right)_B \right] - \frac{\dot{Y}_A}{\sqrt{\dot{X}_A^2 + \dot{Y}_A^2}} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (17.39)$$

Текущие координаты объекта на прямолинейном участке от пункта  $B$  до конечного пункта маршрута (КПМ)

$$\left. \begin{aligned} X(t) &= X_B + \dot{X}_B [t - (t_A + t_{AB})]; \\ Y(t) &= Y_B + \dot{Y}_B [t - (t_A + t_{AB})]. \end{aligned} \right\} \quad (17.40)$$

Время полета объекта на этом участке

$$t_{B-КПМ} = \left| \sqrt{\frac{(X_{КПМ} - X_B)^2 + (Y_{КПМ} - Y_B)^2}{\dot{X}_B^2 + \dot{Y}_B^2}} \right|. \quad (17.41)$$

Профиль полета объекта определяет зависимость высоты полета над уровнем Земли от текущего времени от ИПМ до КПМ. Эта зависимость задается графически или аналитически в виде нескольких прямолинейных участков с различными значениями вертикальной составляющей вектора скорости объекта  $H(t)$ .

Расчет текущих координат объекта в соответствии со значениями величин  $X(t)$ ;  $Y(t)$ ;  $H(t)$ ;  $\dot{X}(t)$ ;  $\dot{Y}(t)$ ;  $\dot{H}(t)$ ;  $X_{РЛС}$ ;  $Y_{АЛС}$  и при  $H_{РЛС} = 0$  можно производить по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} R(t) &= [R_s + H(t)] \sqrt{1 + \left[ \frac{R_s}{R_s + H(t)} \right]^2} - \\ &- 2 \frac{R_s}{R_s + H(t)} \cos \frac{X(t) - X_{РЛС}}{R_s} \cos \frac{Y(t) - Y_{РЛС}}{R_s}; \end{aligned} \right\} \quad (17.42)$$

$$\varepsilon(t) = \operatorname{arctg} \frac{\cos \frac{X(t) - X_{\text{РЛС}}}{R_3} \cos \frac{Y(t) - Y_{\text{РЛС}}}{R_3} - \frac{R_3}{R_3 + H(t)}}{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{X(t) - X_{\text{РЛС}}}{R_3} \cos^2 \frac{Y(t) - Y_{\text{РЛС}}}{R_3}}}; \quad (17.43)$$

$$\beta(t) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{X(t) - X_{\text{РЛС}}}{R_3}}}{\cos \frac{X(t) - X_{\text{РЛС}}}{R_3} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{Y(t) - Y_{\text{РЛС}}}{R_3}}} +$$

$$+ \pi \left\{ 1 + \frac{1}{2} [1 + \operatorname{sign}(Y(t) - Y_{\text{РЛС}})] \operatorname{sign}(X(t) - X_{\text{РЛС}}) \right\}; \quad (17.44)$$

$$q(t) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{X(t) - X_{\text{РЛС}}}{R_3}}}{\cos \frac{X(t) - X_{\text{РЛС}}}{R_3} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{Y(t) - Y_{\text{РЛС}}}{R_3}}} +$$

$$+ \operatorname{arctg} \frac{Y(t)}{X(t)} + \pi \left\{ 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sign} X(t) \operatorname{sign} [Y(t) - Y_{\text{РЛС}}] \right\}; \quad (17.45)$$

$$\rho(t) = \varepsilon(t) + \arccos \left[ \cos \frac{X(t) - X_{\text{РЛС}}}{R_3} \cos \frac{Y(t) - Y_{\text{РЛС}}}{R_3} \right]; \quad (17.46)$$

$$\left. \begin{aligned} V_p(t) &= R'(t); & N_{F_0}(t) &= \frac{V_p(t)}{\Delta V_p}; \\ T_0(t) &= \frac{2R(t)}{C}; & N_{T_0}(t) &= \frac{R(t)}{\Delta R}. \end{aligned} \right\} \quad (17.47)$$

По значениям  $q(t)$ ,  $\rho(t)$ ,  $R(t)$  и  $H(t)$ , используя таблицы зависимостей  $\sigma(q; \rho)$ ,  $g_{\text{ПП}}(q; \rho)$  и  $K_{\text{П}}(R; H)$ , определяются текущие значения величин  $\log_2 W_0(t)$  и  $\log_2 W_{\text{П}}(t)$  при заданной минимальной дальности до объекта:

$$\log_2 W_0(t) = \log_2 \sigma [g(t); \rho(t)] + 2 \log_2 k_{\text{П}} [R(t); H(t)] -$$

$$- 4 \log_2 \frac{R(t)}{R_0}; \quad (17.48)$$

$$\log_2 W_{\text{П}}(t) = \log_2 g_{\text{ПП}} [q(t); \rho(t)] + \log_2 k_{\text{П}} [R(t); H(t)] -$$

$$- 2 \log_2 \frac{R(t)}{R_0}. \quad (17.49)$$

Временная и частотная структура помехи  $T_{\text{П}}(t)$  и  $F_{\text{П}}(t)$  в общем случае являются функциями логик работы станции помех и исследуемой РЛС и могут быть заданы в виде логических или аналитических выражений, реализуемых в решающем устройстве ММ или в ФМ установки смешанного моделирования.

Датчик исходных данных должен обеспечить вычисления текущих данных объекта в реальном масштабе времени с требуемой точностью, и при необходимости, достаточно строгую их повторяемость.

Удовлетворить этим требованиям можно с помощью многократного решения уравнений, описывающих временное изменение исходных данных в процессе моделирования, или однократного решения уравнений с записью результатов вычислений в запоминающее устройство и последующим многократным их считыванием при повторении траектории полета объекта.

Анализ уравнений с точки зрения объема вычислений и современного уровня развития вычислительной техники показывает, что проведение расчетов в процессе моделирования с сохранением реального масштаба времени и требуемого шага вычислений невозможно. Поэтому следует обратить внимание на предварительный расчет исходных данных.

Каждая из функций может быть описана конечным числом дискретных отсчетов, величина временного интервала между которыми определяется скоростью изменения соответствующих величин и заданной точностью их представления.

Для моделирования полета современных средств при достаточно высоких требованиях, к точности вычислений, временной интервал расчета исходных данных составляет единицы — десятки миллисекунд и требуемый объем памяти для хранения исходных данных будет значительным и может составить десятки миллионов слов. Очевидно, что техническая реализация запоминающего устройства с таким объемом памяти, практически невозможна.

Учитывая, что текущие значения исходных данных изменяются во времени плавно, траекторию полета каждого объекта можно задавать совокупностью значений исходных данных в опорных точках, а для получения данных внутри отрезка, заключенного между опорными точками, применить интерполяцию полиномами той или иной степени. Каждая рассчитываемая величина в опорной точке представляется значением функции в данной точке  $\psi_0(t)$  и значениями ее производных  $\dot{\psi}_0(t)$ ,  $\ddot{\psi}_0(t)$ , ..., в зависимости от степени полинома интерполяции.

Такт интерполяции определяется временем изменения рассчитываемой величины на единицу выбранного младшего разряда

$$\Delta t = \frac{\Delta \psi}{\dot{\psi}(t)}$$

Максимум скорости изменения дальности до объекта будет наблюдаться при радиальном полете и максимальной дальности до объекта

$$\dot{R}_{\max} = |\bar{V}_0|$$

Максимум скорости изменения азимута объекта наблюдается при полете объекта с параметром, определяемым величиной

$$\dot{\beta}_{\max} = \frac{|V_0|}{R_0}$$

Максимум скорости изменения угла места объекта наблюдается при радиальном полете и минимальной дальности  $R_0$

$$\epsilon_{\max} = \frac{|V_0|}{R_0}.$$

Тогда, такты интерполяции

$$\Delta t_R = \frac{\Delta R}{|\bar{V}_0|}; \quad \Delta t_\beta = \frac{\Delta \beta R_0}{|\bar{V}_0|};$$

$$\Delta t_\epsilon = \frac{\Delta \epsilon R_0}{|\bar{V}_0|}.$$

Учитывая, что  $\beta_{\max} = \epsilon_{\max} = \dot{q}_{\max} = \rho_{\max}$  и, принимая  $\Delta \beta = \Delta \epsilon = \Delta q = \Delta \rho = \Delta \phi$ , получим

$$\Delta t_\phi = \frac{\Delta \phi R_0}{|\bar{V}_0|}. \quad (17.50)$$

Величина временного интервала между опорными точками зависит от требуемой точности воспроизведения интерполируемых величин и степени интерполирующего полинома и определяется из условия

$$|\psi(t + \Delta t) - \psi^*(t + \Delta t)| \leq \Delta \psi / 2, \quad (17.51)$$

где  $\psi(t)$  — рассчитываемая функция;  $\psi^*(t)$  — интерполирующий полином;  $\Delta \psi$  — цена младшего разряда интерполируемой величины.

С точки зрения простоты реализации наиболее удобным является полином вида

$$\begin{aligned} \psi^*(t) = & \psi(t_0) + \dot{\psi}(t_0) \frac{t-t_0}{1!} + \ddot{\psi}(t_0) \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots \\ & \dots + \psi^{(n)}(t_0) \frac{(t-t_0)^n}{n!}. \end{aligned} \quad (17.52)$$

На графике рис. 17.8 приведены зависимости допустимого временного интервала между узловыми точками для функций  $R(t)$ ;  $\beta(t)$  и  $\epsilon(t)$  при  $|\bar{V}_0| = 1$  км/с;  $R_0 = 20$  км;  $\Delta R = 2^{-4}$  км;  $\Delta \phi = \pi/2^\circ$ .

Из анализа этого графика следует, что при увеличении степени полинома временной интервал между опорными точками растет и, следовательно, уменьшается количество рассчитываемых опорных точек. Однако при этом увеличивается количество слов информации в каждой опорной точке за счет необходимости вычисления и хранения соответствующего количества значений производных рассчитываемых величин.

На графике рис. 17.9 приведены зависимости относительного изменения количества рассчитываемых слов во всех опорных точках траектории полета объекта от степени интерполирующего полинома. Из анализа этого графика следует, что наибольший выигрыш дости-

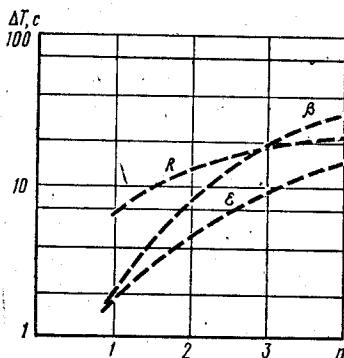


Рис. 17.8.

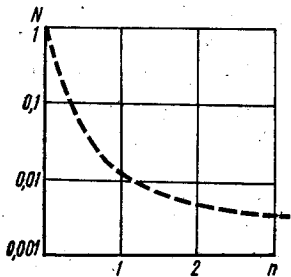


Рис. 17.9.

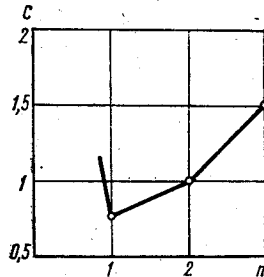


Рис. 17.10.

гается при использовании полинома первой степени, а дальнейшее увеличение степени интерполирующего полинома существенного выигрыша не дает.

Применение интерполяции приводит к аппаратным затратам и чем выше степень интерполяции, тем больше эти затраты. Расчеты стоимости аппаратной реализации интерполяторов и стоимости предварительных расчетов исходных данных в опорных точках позволили построить зависимость условной стоимости датчика исходных данных от степени применяемой интерполяции, примерный вид которой приведен на графике рис. 17.10. Можно считать, что оптимальным по стоимости датчиком исходных данных является датчик, в котором используется интерполяция исходных данных полиномом первой степени.

### Контрольные вопросы

1. Почему при реализации в ЭВМ алгоритма вычисления мощности сигналов предпочтительным является логарифмический масштаб?
2. Чем обусловлена необходимость работы ЭВМ, реализующей математическую модель установки, в реальном масштабе времени?
3. По методике определения глубины флюктуаций эффективной отражающей поверхности объекта, изложенной в разделе 17.2, определите глубину флюктуаций для закона, аппроксимированного квадратичной экспонентой.
4. Составить уравнение всенаправленной круговой диаграммы направленности антенны и определить требуемый объем памяти ЭВМ для ее хранения во всем диапазоне углов по азимуту ( $0 \dots 2\pi$ ) и по углу места ( $0 \dots \pi/2$ ).
5. Определить временной интервал расчета исходных данных об объекте, совершающем круговое движение вокруг РЛС на постоянной высоте при применении линейной интерполяции для воспроизведения текущих координат объекта.

## Глава 18

### УСТРОЙСТВА СОПРЯЖЕНИЯ УСТАНОВКИ СМЕШАННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Устройства сопряжения установки смешанного моделирования предназначены для обеспечения:

синхронизации установки при реализации алгоритма ее функционирования в соответствии с режимами и временной диаграммой работы исследуемой РЛС и текущим временем;



преобразования существующей в РЛС информации об угловом направлении антенной системы в форму, удобную для ввода в математическую модель;

передачи информации о текущих значениях параметров моделируемых сигналов и помех от математической модели на физическую и соответствующего ее распределения по исполнительным устройствам.

В соответствии с назначением, в составе устройств сопряжения имеются: синхронизатор, датчик текущего положения антенн и устройство выдачи результатов.

### 18.1. Синхронизатор

Для обеспечения функционирования датчика исходных данных в реальном масштабе времени, его синхронизация должна производиться следующими сериями импульсов:

серия импульсов интерполяции;

серия импульсов смены опорных точек;

серия импульсов пуска внешнего запоминающего устройства.

Период повторения импульсов интерполяции определяется скоростью изменения соответствующих исходных данных и принятой ценой младшего разряда их представления

$$\Delta t_{\psi} = \frac{\Delta \psi}{(\dot{\psi})^r}, \quad (18.1)$$

где  $\psi$  — общее обозначение величин исходных данных.

Скорости изменения соответствующих величин исходных данных:

$$\beta'(t) = \frac{\dot{X}_0}{R_3} \frac{\sin \frac{y_0}{R_3} t}{\sin^2 \frac{y_0}{R_3} \cos^2 \frac{\dot{X}_0}{R_3} t + \sin^2 \frac{\dot{X}_0}{R_3} t}; \quad (18.2)$$

$$e'(t) = -\dot{X}_0 \frac{R_3 + H}{R_3} \left[ \frac{R_3 + H}{R_3} - \cos \frac{\dot{X}_0}{R_3} t \right]; \quad (18.3)$$

$$R'(t) = \dot{X}_0 \frac{R_3 + H}{R(t)} \sin \frac{\dot{X}_0}{R_3} t; \quad (18.4)$$

$$V_p'(t) = R''(t) = \dot{X}_0 \frac{R_3 + H}{R(t)} \left[ \frac{\dot{X}_0}{R_3} \cos \frac{\dot{X}_0}{R_3} t - \frac{R'(t)}{R(t)} \sin \frac{\dot{X}_0}{R_3} t \right]; \quad (18.5)$$

$$[\log_2 W_c(t)]' = 4 \log_2 e \frac{\dot{X}_0 (R_3 + H)}{R^2(t)} \sin \frac{\dot{X}_0}{R_3} t; \quad (18.6)$$

$$[\log_2 W_{\Pi}(t)]' = 2 \log_2 e \frac{\dot{X}_0 (R_3 + H)}{R^2(t)} \sin \frac{\dot{X}_0}{R_3} t. \quad (18.7)$$

Например, на графиках рис. 18.1 приведены зависимости относительных скоростей изменения исходных данных от времени при скорости полета объекта  $|\bar{V}_0| = 1$  км/с.

Для зависимости скорости изменения азимута принят полет цели с параметром относительно РЛС:

$$\begin{cases} X(t) = |\bar{V}_0| t; \\ Y(t) = 10\,000 \text{ М}; \\ H(t) = 0, \end{cases}$$

а для остальных зависимостей принят радиальный полет объекта:

$$\begin{cases} X(t) = |\bar{V}_0| t; \\ Y(t) = 0; \\ H(t) = 10\,000 \text{ М}. \end{cases}$$

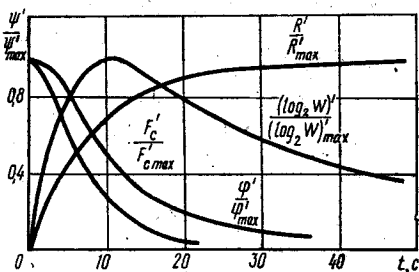


Рис. 18.1.

Для обеспечения одинакового периода интерполяции по всей траектории полета в датчике исходных данных принимаются периоды, соответствующие минимальным временным интервалам при определенных параметрах траектории полета объекта и в зависимости от алгоритма функционирования датчика может быть принят ~~мак~~ одинаковый для всех исходных данных период интерполяции, так и определенные периоды для каждой интерполируемой величины.

Однако, организация работы датчика исходных данных при разных периодах интерполяции усложняет датчик и не дает выигрыша в оборудовании. Поэтому наиболее целесообразным является интерполяция всех величин с одинаковым периодом, который определяется:

$$\Delta t_{\text{инт}} = (\Delta t_{\psi})_{\min \min}. \quad (18.8)$$

Стабильность периода повторения импульсов интерполяции

$$\delta(\Delta t_{\text{инт}}) \leq \frac{\Delta t_{\text{инт}}}{2l}; \quad (18.9)$$

где  $l$  — количество интерполяций между опорными точками исходных данных.

Количество интерполяций определяется кривизной интерполируемой функции и может составлять единицы-тысячи между опорными точками исходных данных.

Для обеспечения удобства и простоты организации работы датчика и подготовки исходных данных целесообразно принять единое для всех величин количество интерполяций между опорными точками

$$e = \left\{ \left[ \frac{(\Delta T_{\psi})_{\min \min}}{(\Delta t_{\psi})_{\min \min}} \right] \right\}, \quad (18.10)$$

тогда

$$\delta(\Delta t_{\text{инт}}) \leq \frac{(\Delta t_{\psi})_{\min \min}^2}{2(\Delta T_{\psi})_{\min \min}}. \quad (18.11)$$

Изменением периода повторения импульсов интерполяции и соответствующим изменением периода ввода опорных точек исходных данных возможна установка требуемой скорости полета объекта при неизменном временном интервале расчета исходных данных. Кроме того, для выбора оптимального количества рассчитываемых опорных точек необходимо обеспечить достаточно плавное изменение периода повторения импульсов интерполяции при  $l = \text{const}$ . Шаг установки

$$\Delta(\Delta t_{\text{инт}}) = \frac{(\Delta t_{\psi})_{\text{min min}}^2}{(\Delta T_{\psi})_{\text{min min}}} \quad (18.12)$$

Расчеты показывают, что для обеспечения интерполяции при реальных параметрах траекторий полета объектов и достаточно малых ценах младших разрядов соответствующих исходных данных  $\Delta\beta = \pi/2^{14}$ ;  $\Delta R = 2^{-7}$  км синхронизатор должен обеспечить выдачу импульсов интерполяции с периодом  $10^{-3} \leq \Delta t_{\text{инт}} \leq 1$  с, шагом установки  $\Delta(\Delta t_{\text{инт}}) = 10^{-5}$  с и стабильностью  $\delta(\Delta t_{\text{инт}}) = 0,5 \cdot 10^{-5}$  с.

Период повторения импульсов смены опорных точек определяется длительностью участка аппроксимируемой функции, во всех точках которого точность интерполяции удовлетворяет заданным требованиям. Методика определения этого периода изложена в главе 17.

Расчеты показывают, что для обеспечения смены опорных точек при реальных параметрах траекторий полета целей и применении линейной интерполяции синхронизатор должен обеспечить выдачу импульсов смены опорных точек с периодом

$$1 \leq \Delta T \leq 100 \text{ с.}$$

Шаг установки периода должен быть равен выбранному периоду повторения импульсов интерполяции

$$\Delta(\Delta T) = \Delta t_{\text{инт.}}$$

Период повторения импульсов пуска внешнего запоминающего устройства жестко связан с периодом повторения импульсов смены опорных точек и определяется объемом оперативного запоминающего устройства в датчике исходных данных и количеством моделируемых объектов.

В общем случае период повторения импульсов пуска внешнего запоминающего устройства

$$\Delta T_{\text{всп}} = k\Delta T,$$

где  $k$  — количество одновременно вводимых опорных точек.

## 18.2. Датчик текущего положения антенн

Для обеспечения ввода в ММ информации о текущем направлении оси максимума диаграммы направленности антенны исследуемой РЛС устройства сопряжения должны содержать преобразова-

тели механических угловых перемещений антенны или преобразователи электрических сигналов, несущих информацию об угловом направлении диаграммы направленности, в параллельный двоичный код.

В радиолокационных станциях могут применяться следующие преобразователи углов поворота вала антенны в электрические величины: потенциометрические, сельсинные, трансформаторные, кодовые.

В радиолокационных станциях с антенной решеткой и с электрическим сканированием луча информация об угловом направлении диаграммы направленности заложена в самом управляющем электрическом сигнале, который может быть как аналоговым, так и дискретным в виде двоичных кодов. У РЛС, входящих в состав автоматизированных радиолокационных узлов и систем управления, для обеспечения автоматической обработки радиолокационной информации имеются преобразователи угловых перемещений антенн в двоичный код [7].

Преобразование электрических сигналов сельсинов и синусно-косинусных вращающихся трансформаторов в двоичный код с точностью выше точности передачи угла от антенны к индикаторному устройству РЛС практически оказывается невозможным. Поэтому при исследовании РЛС с сельсинной и трансформаторной дистанционной передачей углов наиболее целесообразным является использование специальных преобразователей «вал — код». Эти преобразователи входят в состав устройств сопряжения УСМ и устанавливаются на валах антенн.

Преобразование аналоговых электрических сигналов об угловом направлении антенн в двоичный код может быть произведено с достаточной для практики точностью с помощью преобразователей «напряжение — код».

В ряде случаев при значительном удалении антенны исследуемой РЛС от УСМ информацию об угловом направлении антенн, выраженную в виде двоичного кода, целесообразно представлять в виде последовательного двоичного кода. И, как показывает опыт, наиболее удобным является последовательный импульсный двоичный код. Это значительно сокращает количество линий связи между РЛС и УСМ.

Преобразователи угловых перемещений и электрических величин в цифровой код достаточно полно описаны в литературе [1...4] и многие преобразователи выпускаются промышленностью серийно. Датчик текущего положения антенн представляет собой устройство приема цифровой информации с линий связи в виде последовательного или параллельного двоичного кода и выдачи этой информации в ММ в виде параллельного двоичного кода.

Для обеспечения максимальной производительности ММ выдача информации из датчика должна производиться по запросу от решающего устройства по значению текущего номера канала ( $i$ ).

При реализации моделирующего алгоритма по данному каналу по всем моделируемым целям производится  $n$  запросов величин  $\beta_i$

и  $\epsilon_t$  с временным интервалом, определяемым временем реализации алгоритма по одному каналу и одному объекту. При использовании в ММ современных ЭВМ период опроса датчика составляет единицы — десятки микросекунд. Поэтому требования, предъявляемые к датчику по быстродействию, являются высокими.

Ввиду несинхронности смены информации в датчиках отдельных каналов и запроса этой информации решающим устройством, необходимо обеспечить объем информации с этих датчиков после окончания переходных процессов, т. е. обеспечить запрет съема информации с датчиков во время ее смены.

Для проверки правильности функционирования датчика текущего положения антенн и установки смешанного моделирования в целом необходимо предусматривать автономный режим работы, при котором входные сигналы создаются с помощью специальных имитаторов.

Исходя из опыта работы с УСМ, при отладке алгоритма ее функционирования и калибровке физических моделей, возникает необходимость выдавать в решающее устройство определенные коды азимута и угла места. В этом случае в составе датчика необходимо иметь тумблерный регистр констант, который с помощью тумблерного коммутатора может быть подключен к любому из буферных регистров.

### 18.3. Устройство выдачи результатов

Устройство выдачи результатов предназначено для сопряжения математической модели УСМ с физической моделью и должно обеспечить прием информации о текущих значениях параметров отраженных сигналов и помех от математической модели, получаемой в результате реализации моделирующего алгоритма, и ее передачу к исполнительным устройствам ФМ.

Количество информации, выдаваемой за период повторения зондирующих импульсов РЛС, определяется количеством приемных каналов РЛС ( $m$ ), на входах которых моделируются сигналы, количеством моделируемых целей ( $n$ ) и количеством слов информации ( $p$ ), характеризующих отраженный сигнал и помеху.

В соответствии с алгоритмом функционирования ММ и для обеспечения ее максимальной производительности, выдача результатов должна производиться по мере их вычислений без сдерживания темпа расчета в математической модели.

Количество слов информации, передаваемой на ФМ каждого приемного канала, определяется теми ограничениями, которые введены в ФМ по количеству отраженных сигналов, моделируемых в течение одного периода повторения зондирующих импульсов РЛС ( $n_c$ ) и количеством разнотипных помех ( $n_n$ ).

При исследовании характеристик РЛС, имеющих относительно небольшой период повторения зондирующих импульсов (например, в РЛС автосопровождения объектов время реализации алгоритма

по одному каналу может составлять всего 50...80 микросекунд. При этом количество моделируемых объектов ограничивается двумя — тремя, количество приемных каналов РЛС составляет 4...8, а количество слов информации, передаваемой на ФМ в течение каждого периода повторения зондирующих импульсов, составит 24...60.

При исследовании характеристик обзорных РЛС, которые имеют период повторения зондирующих импульсов единицы миллисекунд, моделируется массированный полет объектов-поставщиков помех и период реализации моделирующего алгоритма по одному каналу может составлять 200...250 микросекунд, а информация, передаваемая на ФМ каждого приемного канала РЛС, может представляться десятками слов.

Из анализа возможных условий проведения исследований РЛС следует, что в некоторых случаях ФМ должны располагаться в непосредственной близости к приемным устройствам РЛС при удалении от ММ на расстояние до нескольких сотен метров. Более того, в ряде случаев ФМ должна размещаться во вращающихся приемно-передающих кабинах РЛС.

Условия размещения ФМ в значительной мере определяют структуру и алгоритм функционирования устройства выдачи результатов. Очевидно, что при значительном удалении физической модели от математической и ее размещении во вращающейся приемно-передаваемой кабине РЛС возможна организация только последовательной передачи разрядов слов и самих слов информации. При незначительном удалении ФМ и ее стационарности возможна организация параллельной передачи разрядов слов при последовательной передаче слов информации по общей цифровой магистрали. Оба эти варианты передачи информации от математической модели на физическую находят применение в УСМ.

В соответствии с принципом действия УСМ расчеты в ММ в течение данного периода повторения зондирующих импульсов производятся на последующий период их повторения, а следовательно, передаваемая информация подлежит воспроизведению только с приходом следующего импульса запуска РЛС. Из этого следует, что в ФМ должна быть установлена буферная память для накопления информации в течение всего периода повторения зондирующих импульсов. С приходом импульса запуска на ФМ эта информация должна быть переписана в исполнительные устройства ФМ и буферная память освобождена для накопления новой информации. Объем буферной памяти определяется общим количеством слов информации для всех приемных каналов РЛС и их разрядностью.

Адрес передаваемой информации формируется из текущих значений номеров каналов ( $i$ ) и целей ( $j$ ), а также наименований самой информации ( $N_T, N_E, N_p$ ; сигнал; помеха;  $\Sigma N_{pn}$ ). При реализации алгоритма функционирования ММ с ограничением количества отраженных сигналов, моделируемых в каждом приемном канале, для формирования адреса используются модифицированный номер

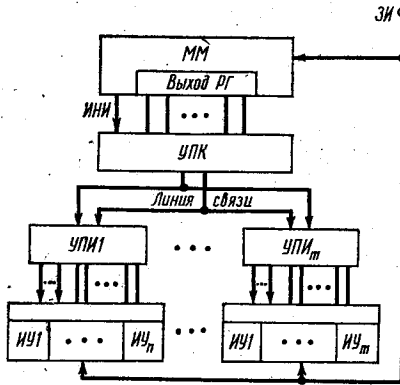


Рис. 18.2.

тельной машины математической модели.

На рис. 18.2 представлена структура устройства последовательной передачи разрядов слов и самих слов на буферные регистры [6]. Это устройство обеспечивает прием от ММ параллельного двоичного кода, преобразование его в последовательный парафазный импульсный код, передачу этого кода по двухпроводной коаксиальной линии связи к устройству преобразования последовательного кода в параллельный и выдачу кода в исполнительное устройство в соответствии с адресом информации, содержащимся в передаваемом слове.

Устройство выдачи состоит из одного узла преобразования параллельного потенциального двоичного кода в импульсный парафаз-

цели  $j_0^*$  и постановка шумовых помех  $j_n^*$  ( $j_c^* \leq n_c$ ;  $j_n^* \leq n_n$ ), которые формируются в ММ при реализации моделирующего алгоритма.

Для минимизации оборудования устройства выдачи результатов выходная информация ММ должна представляться в таком виде, как она передается на ФМ.

Время, затрачиваемое на передачу информации, определяется быстрейшим приемным элементом и не должно превышать рабочего такта вычислитель-

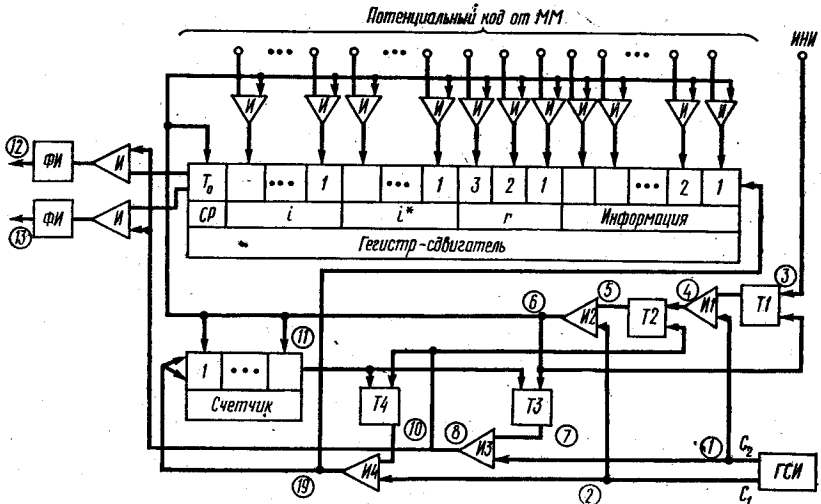


Рис. 18.3.

ный последовательный код (УПК) и  $m$  узлов (по числу приемных каналов РЛС) приема и распределения информации (УПИ).

Весь комплекс имеет единую временную синхронизацию по реализации алгоритма импульсами запуска РЛС. Структура выдаваемого слова такая же, как и при параллельной передаче. Количество исполнительных устройств, подключенных к каждому УПИ, определяется структурой ФМ применительно к данной задаче исследования характеристик РЛС.

Функциональная схема узла преобразования кода представлена на рис. 18.3, а временные диаграммы сигналов в контрольных точках — на рис. 18.4. УПК состоит из сдвигателя, устройства управления и устройства выдачи кода в линию связи.

Устройство управления имеет в своем составе генератор двух последовательностей импульсов серии  $C1$  и  $C2$  с периодом следования  $\tau_c$  и сдвинутыми друг относительно друга на  $\tau_c/2$ .

Схема, состоящая из триггеров  $T1$  и  $T2$  и элементов  $I1$  и  $I2$ , осуществляет надежную привязку импульса наличия информации к серии импульсов  $C1$ , создавая импульс начала работы УПК. С появлением этого импульса происходит перепись кода с выходного регистра математической модели в регистр — сдвигатель УПК и запуск схемы формирования импульсов сдвига и импульсов выдачи. Сдвигатель имеет один дополнительный (служебный) разряд ( $T_0$ ), который всегда устанавливается в единичное состояние. Счетчик (СЧ), триггеры  $T3$ ,  $T3$ , и элементы  $I3$ ,  $I4$  формируют пачку импульсов сдвига из серии  $C1$  и пачку импульсов выдачи из серии  $C2$ . Количество импульсов в пачке определяется разрядностью сдвигателя. Устройство выдачи кода в линию связи состоит из элементов  $I5$ ,  $I6$  и формирователей импульсов  $\Phi И1$  и  $\Phi И2$ .

Функциональная схема узла приема информации (УПИ) представлена на рис. 18.5. В состав УПИ входит сдвигатель, схема управления и два дешифратора  $D1$  и  $D2$ .

Входной импульсный парафазный код с помощью триггера  $T$  и схемы ИЛИ преобразуется в потенциальный последовательный код и импульсы сдвига на входе сдвигателя. Появление «единицы» в служебном разряде сдвигателя  $T_0$  сигнализирует о конце записи слова и на выходе схемы И появляется импульс, задержанный относительно последнего импульса сдвига с помощью линии задержки  $L31$ . Дешифратор  $D1$  расшифровывает номер приемного канала РЛС и выдает импульс на дешифратор  $D2$ , импульс с которого в

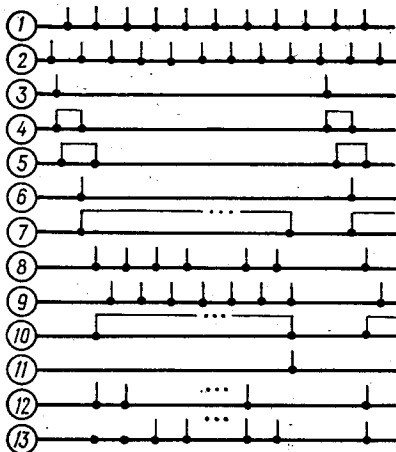


Рис. 18.4.



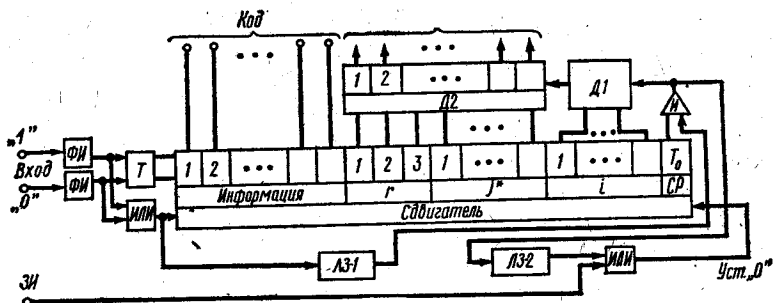


Рис. 18.5.

соответствии с кодом  $j^*$  и  $r$ , поступает в одно из исполнительных устройств для записи информации в буферный регистр. Импульс, выделенный на элементе И и задержанный на элементе задержки ЛЗ2 на время срабатывания дешифраторов Д1 и Д2 и переписи информации, устанавливает сдвигатель в нулевое состояние, подготавливая его к приему следующего слова. Для начальной установки сдвигателя и устранения случайных сбоев в процессе работы используется импульс синхронизации ФМ от исследуемой РЛС. Наличие  $t$  узлов приема информации обусловлено территориальным разносом блоков ФМ в соответствии с размещением приемных устройств исследуемой РЛС.

Время передачи слова будет определяться периодом следования импульсов серии С в УПК, количеством разрядов в регистре-сдвигателе, задержкой привязки наличия информации к серии С1 и временем приведения УПИ в готовность к приему следующего слова. Это время оказывается значительно большим возможного временного интервала между выдачами информации из ММ. Учитывая неравномерность периода выдачи информации из ММ и зная общее количество слов, выдаваемых за период реализации моделирующего алгоритма, можно определить допустимое время передачи одного слова, а для согласования со временем выдачи слов необходимо установить между выходным регистром ММ и регистром-сдвигателем устройства выдачи демпфирующую стековую регистровую память. Количество регистров этой памяти должно быть рассчитано на безотказный прием информации от ММ с учетом темпа ее поступления и темпа передачи в узел преобразования кода. Время приема информации не должно превышать такта работы вычислительной машины математической модели.

#### Контрольные вопросы

1. В чем заключается основной принцип обеспечения моделирования физического процесса в математической модели в реальном масштабе времени?
2. Рассмотреть принцип действия преобразователя «вал-код» по рекомендуемой литературе и определить ограничения возможностей его применения.
3. Почему передача информации на физическую модель в виде последовательного двоичного кода является предпочтительной?

## УПРАВЛЕНИЕ ВРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ СИГНАЛОВ

## 19.1. Способы автоматического управления задержкой сигнала

С целью формирования радиоимпульса заданной длительности и задержанного относительно зондирующего на время, соответствующее времени распространения электромагнитной энергии до цели и обратно, в физической модели УСМ применен принцип манипуляции высокочастотного сигнала видеоимпульсами, временные параметры которого соответствуют временным параметрам радиоимпульса. Управление временными параметрами видеоимпульса осуществляется как вручную — в соответствии с длительностью зондирующего импульса исследуемой РЛС ( $\tau_c$ ), так и автоматически — по информации от математической модели о дальности до объекта ( $N_T$ ).

Для обеспечения моделирования нескольких отраженных сигналов в течение периода повторения зондирующих импульсов возможно как параллельное с помощью нескольких устройств, так и последовательное с помощью одного устройства формирование отраженных сигналов. При параллельном формировании количество аппаратуры ФМ прямо пропорционально количеству моделируемых сигналов.

Последовательное воспроизведение сигналов имеет ограничение по минимальному временному интервалу между соседними сигналами, определяемому длительностью воспроизводимого сигнала и временем переключения аппаратуры для воспроизведения следующего сигнала. Очевидно, что при необходимости исследования разрешающей способности РЛС и исследования РЛС, работающих с сигналами сложной структуры относительно большой длительности, последовательное воспроизведение сигналов не удовлетворит исследователей и в этом случае придется организовывать параллельное формирование сигналов. Во многих случаях практики оказывается наиболее целесообразным организовать параллельно-последовательное воспроизведение сигналов при двух параллельных каналах формирования и последовательном воспроизведении сигналов в каждом канале. Количество последовательно воспроизводимых сигналов в канале определяется конкретными условиями исследования РЛС. Такая структура имеет практически неограниченные возможности по количеству моделируемых целей и обеспечивает минимизацию количества оборудования ФМ.

В соответствии с изложенным, преобразователь код — интервал и формирователь длительности отраженного импульса должны обеспечить последовательное воспроизведение видеоструктуры сигналов и иметь минимально возможное время переключения для формирования следующего сигнала.

Преобразование кода во временной интервал может быть реализовано различными методами [1, 2, 3, 4]. Наиболее удобным с точки

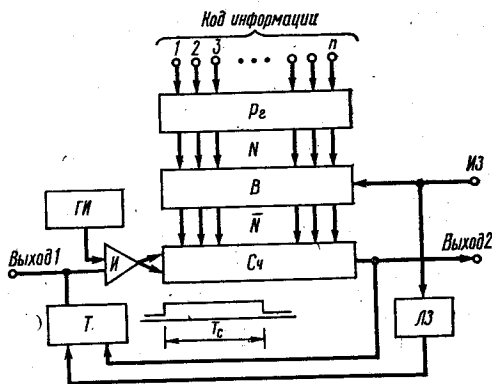


Рис. 19.1.

обратного кода  $N$  и с некоторой задержкой, определяемой временем переписи информации в счетчик, производится установка триггера  $T$  в единичное состояние. При этом импульсы от генератора тактовых импульсов (ГИ) начинают поступать на вход счетчика. Конец временного интервала определяется моментом переполнения счетчика после поступления  $(N + 1)$ -го импульса. Импульс переполнения от последнего разряда счетчика поступает на нулевой вход триггера  $T$  и прекращает поступление импульсов на вход счетчика. На выходе триггера  $T$  образуется перепад напряжения, длительность которого соответствует значению преобразуемого кода.

Благодаря выбору такой функциональной схемы преобразователя ошибка воспроизведения временного интервала не зависит от величины преобразуемого кода, так как после прихода  $N + 1$ -го импульса всегда происходит полный пробег импульса переноса от младшего до старшего разряда счетчика. Этот пробег занимает время

$$\tau_s = \sum_{i=1}^n \tau_{zi}, \quad (19.1)$$

где  $\tau_{zi}$  — задержка импульса в  $i$ -м разряде счетчика.

Если принять, что импульс начального переброса триггера  $T$  приходит строго синхронно с очередным импульсом ГИ и этот импульс поступает на вход счетчика, то временной интервал

$$T_c = N\Delta t_{ти} + \tau_s, \quad (19.2)$$

где  $\Delta t_{ти}$  — цена единичного временного интервала.

Как видно, в этом случае точность воспроизведения временного интервала определяется стабильностью частоты повторения генератора импульсов.

Если эти импульсы не синхронны, то

$$(N + 1)\Delta t_{ти} + \tau_s \geq T_c \geq N\Delta t_{ти} + \tau_s. \quad (19.3)$$

В силу независимости моментов поступления счетных и запускающих импульсов и равной вероятности любого момента поступления

зрения обеспечения постоянства ошибки преобразования независимо от длительности временного интервала является метод последовательного счета импульсов, который реализуется в преобразователе, построенном по схеме рис. 19.1. В определенные моменты времени по импульсу запуска (ИЗ) двоичный код  $N$ , содержащийся в регистре ( $P_2$ ), переписывается в счетчик ( $C_4$ ) в виде

запускающих импульсов в пределах временного интервала  $\Delta t_{\text{ти}}$ , рассеяние возможных значений  $T_c$  может быть описано прямоугольным законом распределения погрешности, что соответствует их равной вероятности в пределах  $\pm \frac{\Delta t_{\text{ти}}}{2}$ .

При таком законе распределения ошибок среднеквадратическая погрешность преобразования

$$\sigma_{T_c} = \frac{\Delta t_{\text{ти}}}{2\sqrt{3}}, \quad (19.4)$$

а среднее значение временного интервала

$$T_c^* = \frac{2N+1}{2} \Delta t_{\text{ти}} + \tau_s. \quad (19.5)$$

Кроме этой погрешности, существует еще погрешность, обусловленная неточностью установки и нестабильностью периода повторения импульсов  $\Delta t_{\text{ти}}$ .

Изменение периода повторения тактовых импульсов при увеличении преобразуемого кода приводит к плавному смещению распределения ошибок по оси времени.

Если новое значение частоты генератора

$$f'_{\text{ти}} = f_{\text{ти}}(1 \pm \alpha), \quad (19.6)$$

где  $\alpha$  — коэффициент нестабильности частоты генератора, то элементарный временной интервал, соответствующий новому значению частоты ( $f'_{\text{ти}}$ ),

$$\Delta t'_{\text{ти}} = \Delta t_{\text{ти}} \frac{1}{1 \pm \alpha}. \quad (19.7)$$

Очевидно, что наибольшая ошибка получится при преобразовании максимального значения кода и при новом значении частоты генератора величина временного интервала

$$T_c = \frac{2N+1}{2} \Delta t_{\text{ти}} \frac{1}{1 \pm \alpha}. \quad (19.8)$$

Для того, чтобы ошибка из-за ухода частоты генератора не превышала половины единицы младшего разряда, нестабильность генератора должна быть

$$\alpha \leq \frac{1}{2N_{\text{max}} + 1} \approx 2^{-(n+1)}, \quad (19.9)$$

где  $n$  — количество разрядов преобразуемого кода.

Или, переходя к дальностям до цели ( $R$ ), максимально допустимые неточность настройки и нестабильность частоты повторения тактовых импульсов должны быть

$$\alpha_{\text{max}} = \pm \frac{\Delta R}{2R_{\text{max}}}, \quad (19.10)$$

где  $\Delta R$  — цена младшего разряда представления дальности.

Основным источником случайной погрешности преобразования цифровой информации во временной интервал является несинхронность внешних запускающих и внутренних тактовых импульсов. Максимальная случайная ошибка преобразования будет равна половине периода повторения тактовых импульсов. Для уменьшения этой ошибки можно увеличить частоту тактовых импульсов. Однако, несмотря на постоянное расширение возможностей элементов цифровой техники и увеличение их быстродействия, требования к точности преобразования всегда будут выше возможностей этих элементов и поэтому повышение точности преобразования за счет увеличения частоты тактовых импульсов не беспредельно. Необходимо исключить или, по крайней мере, значительно уменьшить ошибки, возникающие за счет несинхронности импульсов без дальнейшего увеличения частоты тактовых импульсов.

Одним из возможных способов уменьшения ошибок является способ, при котором с приходом внешнего запускающего импульса производится фазирование тактовых импульсов с тем, чтобы моменты появления первого тактового импульса и запускающего импульса совпадали или были разнесены на определенную известную величину. Тогда случайная ошибка преобразования будет определяться ошибкой фазировки генератора тактовых импульсов, и будет во много раз меньше ошибки преобразования без фазировки. Уменьшение цены младшего разряда при этом может быть достигнуто за счет уточняющего преобразователя код — временной интервал. Время, затраченное на фазирование генератора тактовых импульсов, может быть учтено в значении преобразуемого кода, так как при исследованиях РЛС увеличение начальной задержки преобразователя до некоторой величины, определяемой минимальной дальностью до цели при моделировании, которая составляет единицы, а иногда и десятки километров, не является принципиальным.

Техническая реализация преобразователей возможна с использованием интегральных схем и схем на туннельных диодах. При создании преобразователей следует отдавать предпочтение интегральным схемам, обеспечивающим малые габариты преобразователя, малое потребление электрической энергии от источников питания, высокую надежность функционирования и простоту составления и отладки схемы.

## 19.2. Формирование длительности сигнала

Формирование высокочастотного сигнала в физической модели производится методом манипуляции непрерывного высокочастотного сигнала видеопульсами, задержанными относительно запускающего (зондирующего) импульса исследуемой РЛС и имеющими заданную длительность. При этом требования к точности установки амплитуды видеопульсов и ее стабильности являются очень слабыми. Поэтому главными требованиями к параметрам видеопульсов, управляющих работой высокочастотных ключей,

являются — точность установки длительности импульса и крутизна фронта и спада импульса.

При исследованиях характеристик РЛС методом смешанного моделирования форма радиосигнала на выходе ФМ должна максимально соответствовать форме радиосигнала на входе приемного устройства РЛС. Длительность импульса определяется длительностью зондирующего импульса исследуемой РЛС, а его фронт и спад определяются полосой пропускания и величиной промежуточной частоты приемного устройства. В приемнике, согласованном с сигналом, величина полосы пропускания приемника определяется допустимыми искажениями спектрального состава принимаемого сигнала и выбирается из условия

$$\Delta f_{\text{пр}} = \frac{1 \dots 3}{\tau_c}$$

Величина промежуточной частоты выбирается из условия обеспечения формирования импульса, заполнение которого должно состоять из определенного числа периодов колебаний промежуточной частоты РЛС.

Очевидно, что минимально возможный фронт импульса будет  $\tau_{\Phi \text{ min}} = 1/\Delta f_{\text{пр}}$ , а минимально возможная длительность фронта импульса определяется искажениями, вносимыми ограничением полосы пропускания приемного устройства РЛС.

Флюктуации фронта формируемого в ФМ импульсного сигнала за счет флюктуаций моментов срабатывания высокочастотного ключа (манипулятора) совместно с флюктуациями временного интервала преобразователя код — временной интервал определяют точность воспроизведения дальности до цели и для обеспечения максимальной точности эти флюктуации должны быть в 2...3 раза меньше флюктуаций временного интервала.

Исходя из этого, максимально допустимая ошибка момента срабатывания манипулятора должна быть

$$\delta_{\text{M max}} \leq (0,15 \dots 0,25) \Delta T_c$$

Учитывая, что пороговые схемы манипуляторов строятся таким образом, чтобы они надежно срабатывали при превышении управляющего напряжения на 10...20%, можно определить, что длительность фронта сформированного задержанного видеоимпульса должна быть не более дискрета преобразования временного интервала.

Очевидно, что выполнение этого требования при цифровом способе формирования видеоимпульсов не представляет сложности, так как быстрдействие цифровых элементов в преобразователе код — временной интервал всегда больше, чем частота тактовых импульсов.

Длительности формируемых сигналов для различных случаев использования УСМ могут составлять от десятых долей микросекунды до нескольких десятков и даже сотен микросекунд при относительно невысоких требованиях к точности воспроизведения длительности (порядка 5...10%).

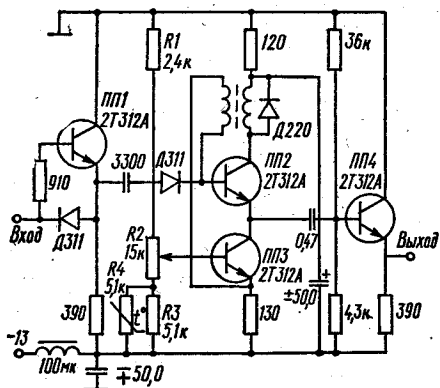


Рис. 19.2.

ности и отсутствием необходимости контроля точности ее установки. Однако эти формирователи являются довольно сложными устройствами и их применение не всегда оказывается целесообразным.

Использование обычных кipp-реле и блокинг-генераторов ограничивается нестабильностью длительности формируемого импульса и малым диапазоном регулировки длительности и их применение возможно только при изготовлении формирователя для каждой конкретной длительности импульсов. Кроме того, время восстановления схем для формирования следующего импульса оказывается значительным, что не позволяет использовать их при последовательном воспроизведении нескольких импульсов с малым временным интервалом между ними.

Известны схемы ждущих блокинг-генераторов, в которых осуществляется плавная электронная регулировка длительности импульсов в больших пределах с коэффициентом перекрытия порядка 2000...5000 без замены элементов схемы при линейной зависимости длительности импульсов от управляющего напряжения [5].

Высокая крутизна фронтов, спадов, уплотненность вершины генерируемых импульсов и возможность получения малого времени восстановления схемы позволяет в некоторых случаях использовать этот блокинг-генератор в качестве формирователя задержанных импульсов.

На рис. 19.2. приведена принципиальная схема формирователя задержанных импульсов. Собственно блокинг-генератор собран на транзисторах ПП2 и ПП3, а выходным каскадом является эмиттерный повторитель на транзисторе ПП4. Регулировка длительности импульса осуществляется с помощью переменного резистора  $R_2$ , включенного в делитель напряжения, состоящий из резисторов  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , и  $R_4$ . Резистор  $R_4$  — термокомпенсационный.

Приведенная схема формирователя позволяет формировать импульсы для управления высокочастотным ключом генератора сигнала физической модели при диапазоне регулировки длительности

Для обеспечения такой точности воспроизведения длительности сигналов формирователь видеоимпульсов, построенный по принципу преобразователя код-временной интервал, должен иметь дискрет преобразования по крайней мере в 5...10 раз меньше минимально воспроизводимой длительности импульса.

Формирователи, построенные по принципу преобразователя код — временной интервал, отличаются простотой установки требуемой длительности

1...50 мкс, длительности фронта 0,05 мкс и длительности спада 0,15 мкс. Время восстановления схемы не более длительности формируемого импульса. При изменении окружающей температуры в диапазоне +10...+35° С длительность выходного импульса изменяется не более, чем на 10%.

Достаточно большая температурная зависимость длительности формируемого импульса ограничивает возможности применения этих блокинг-генераторов только лабораторными условиями.

При эксплуатации ФМ в условиях, не отвечающих температурному диапазону лабораторных (комнатных) условий, и трудности организации периодического контроля правильности воспроизведения заданной длительности выходного импульса наиболее удобной является схема цифрового формирователя длительности импульса.

#### Контрольные вопросы

1. Изучить принципы действия преобразователей «код-временной интервал» по рекомендуемой литературе и составить функциональную схему многоканального преобразователя.
2. Каковы преимущества формирователя длительности импульса, построенного по принципу преобразователя «код-временной интервал»?

### Глава 20

## ГЕНЕРИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ

### 20.1. Воспроизведение сигналов в широком диапазоне несущих частот

С целью создания ФМ, пригодной для исследований характеристик РЛС, значения промежуточных и несущих частот которых находятся в широком частотном диапазоне, а также с целью значительного сокращения объема аппаратуры ФМ, ее упрощения и унификации, наиболее удобной структурой ФМ является структура, обеспечивающая воспроизведение сигналов как на промежуточной, так и на несущей частоте исследуемых РЛС. При этом сигналы и помеха, сформированные на промежуточной или выбранной фиксированной частоте, с помощью преобразователя частоты переносятся на требуемую в данном случае высокую частоту.

Такая структура позволяет унифицировать ФМ и создать единую модель, пригодную для исследований широкого круга РЛС. Переход к формированию сигналов в диапазоне промежуточных частот значительно упрощает конструкцию, уменьшает габариты, сокращает стоимость изготовления, повышает эксплуатационные характеристики ФМ и снижает как статические, так и динамические погрешности воспроизведения информации в моделируемых сигналах. Перенос спектров сигналов, сформированных на промежуточной частоте, осуществляется отдельной приставкой к ФМ в виде сместителя, изготавливаемого из высокочастотных элементов



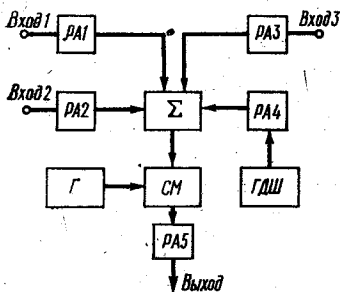


Рис. 20.1.

исследуемой РЛС. При этом в качестве гетеродина может быть использован гетеродин исследуемой РЛС.

Дальнейший поиск путей оптимизации структуры ФМ позволил определить, что с точки зрения обеспечения воспроизведения сигналов в требуемом диапазоне возможных значений промежуточных частот исследуемых РЛС, наиболее целесообразно произвести формирование сигналов на одной фиксированной частоте, а затем применить перенос спектров этих сигналов на требуемую в данном

конкретном случае исследований промежуточную частоту. Выбор частоты, на которой должно производиться формирование сигналов, определяется значениями промежуточных частот РЛС, шириной спектра воспроизводимых сигналов, допустимым уровнем комбинационных частот в полосе спектра сигнала на промежуточной частоте и максимально возможной простотой настройки элементов ФМ.

Для переноса спектров сигналов с этой фиксированной частоты на другую большую или меньшую частоту на выходе ФМ применяется преобразование частоты.

При необходимости воспроизведения сигналов на промежуточных частотах, близких к частоте формирования сигналов в ФМ, когда применять перенос спектров нецелесообразно, а в некоторых случаях даже невозможно, формирование сигналов надо производить непосредственно на промежуточной частоте.

На рис. 20.1 приведена структура выходной части ФМ, обеспечивающей суммирование всех воспроизводимых сигналов, перенос их спектров на требуемую промежуточную частоту и регулировку мощностей каждого сигнала.

Для суммирования сформированных сигналов применяется сумматор сигналов ( $\Sigma$ ). Перенос спектров осуществляется с помощью широкополосного смесителя (СМ) и сменного гетеродина (Г). Ручные аттенюаторы  $PA1$ ,  $PA2$ ,  $PA3$  служат для установки требуемых соотношений мощностей между тремя сигналами. Ручным аттенюатором  $PA5$  устанавливается требуемое максимальное значение мощности сигналов на выходе ФМ. При использовании ручных аттенюаторов с затуханием до 50 дБ диапазон этих регулировок может быть значительным и обеспечивается возможность установки практически любого значения мощности и соотношения мощностей формируемых сигналов. Максимальные значения мощностей сигналов на выходе ФМ будут определяться максимальными мощностями сигналов на входах 1...3 и коэффициентами передачи сумматора  $K_{\Sigma}$  и смесителя  $K_{см}$ .

Для воспроизведения шумов отключенного при исследованиях высокочастотного тракта РЛС в составе ФМ предусмотрен генера-

тор дополнительного шума (ГДШ), а мощность шумов на выходе ФМ с учетом затухания, установленного в РА5 и наличия собственных шумов сумматора и смесителя, устанавливается с помощью ручного аттенуатора РА4.

Сумматор сигналов характеризуется количеством входов суммирования, коэффициентом передачи, уровнем собственных шумов, динамическим диапазоном изменения мощности сигналов на входе и выходе и уровнем допустимой максимальной мощности сигналов на каждом входе.

Все эти характеристики определяют выбор принципа действия и схемы сумматора.

По принципу действия сумматор может быть чисто пассивным и смешанным. Пассивный сумматор строится на пассивных элементах, например, резисторах, и напряжение его входного сигнала равно сумме напряжений, действующих в данный момент времени на каждом из его входов.

Создать пассивный сумматор с коэффициентом передачи по каждому входу равным единице невозможно, а максимально достижимый коэффициент передачи зависит от числа входов ( $n$ ) и определяется

$$(K_{\Sigma})_{\max} = \frac{1}{n}. \quad (20.1)$$

При изменении выходного сопротивления источника суммируемого сигнала появляются ошибки суммирования. Это изменение выходного сопротивления обусловлено не только переключением затухания в управляемом или ручном аттенуаторе, но и изменением выходного сопротивления активных выходных каскадов (например, эмиттерных повторителей) при наличии и отсутствии сигнала. Для уменьшения этих ошибок коэффициент передачи сумматора по каждому входу должен быть значительно уменьшен и составлять примерно 20 дБ [1]. Поэтому для получения максимального коэффициента передачи сумматора требование согласования и постоянства выходных сопротивлений источников суммируемых сигналов должно строго выполняться.

Исходя из требований к максимальным значениям мощностей сигналов на выходе ФМ и учитывая энергетические возможности каскадов формирования сигналов, коэффициент передачи сумматора должен быть примерно равен единице. Поэтому после пассивного сумматора необходимо установить усилитель сигналов с коэффициентом усиления, обеспечивающим восполнение потерь мощности сигналов в пассивном сумматоре.

Однако установка усилителя приводит к появлению дополнительных шумов на выходе ФМ, которые ограничат динамический диапазон изменения суммируемых сигналов. Поэтому при создании физической модели необходимо исходить из требования обеспечения заданной в данном случае величины максимальной мощности сигналов на выходе ФМ и если эта мощность обеспечивается с по-

мощью пассивного сумматора, то устанавливать усилитель не нужно. С другой стороны, для обеспечения универсальности сумматора, его коэффициент передачи должен обеспечить на выходе ФМ мощность сигналов, достаточную для исследований РЛС с самым большим энергетическим потенциалом. При этом необходимо исходить из допустимого уровня собственных шумов на выходе ФМ, который не должен превосходить уровень шумов, действующий в точке ввода сигналов от ФМ в приемное устройство исследуемой РЛС.

Полоса пропускания пассивного сумматора на резисторах является широкой и для частот до 100...150 МГц не требует никакой коррекции. Полоса пропускания усилителя суммируемых сигналов не должна искажать спектр формируемых сигналов и с учетом универсальности этого усилителя применительно к сигналам с различной шириной спектра, ширина полосы пропускания усилителя должна быть порядка 10...20 МГц. Учитывая, что спектральная плотность мощности собственных шумов определяется амплитудно-частотной характеристикой усилителя, а мощность шумов, действующая в полосе спектра усиливаемого сигнала, а следовательно, в полосе пропускания согласованного с сигналом приемника исследуемой РЛС, не зависит от наличия шумов на выходе усилителя за пределами ширины полосы пропускания приемника РЛС, можно сделать вывод, что усилитель может иметь полосу пропускания немного шире спектра усиливаемого сигнала и ее согласование с шириной спектра сигнала не обязательно.

Максимальное значение мощности сигналов, при котором не нарушается постоянство коэффициента усиления, определяется в основном характеристиками используемых транзисторов.

Динамический диапазон изменения мощности сигналов определяется уровнем собственных шумов в полосе спектра этих сигналов и максимальным значением безискаженного усиления мощности сигналов.

Для обеспечения правильности функционирования ФМ динамический диапазон изменения мощности сигналов на выходе усилителя сумматора должен быть больше, или по крайней мере равен требуемому динамическому диапазону изменения мощности сигналов на выходе ФМ

$$\left( \frac{P_{c \max}}{P_{\text{ш}}} \right)_{\Sigma} \geq \frac{P_{c_0}}{P_{\text{ш прм}}}, \quad (20.2)$$

где  $P_c$  — мощность сигналов на выходах сумматора и физической модели;  $P_{\text{ш}}$  — мощность шумов в полосе пропускания приемного устройства на выходе сумматора и входе приемного устройства РЛС.

Откуда, требуемая максимальная мощность сигнала на выходе усилителя сумматора

$$P_{c \max \Sigma} = P_{c_0} \frac{P_{\text{ш}\Sigma}}{P_{\text{ш прм}}}. \quad (20.3)$$

Преобразователь частоты предназначен для переноса спектра сигнала сформированного на частоте  $f_p$  на требуемую промежуточную частоту без изменения вида и параметров модуляции. Обычно у преобразователей частоты эти условия выполняются в некотором диапазоне изменения мощности входного сигнала.

Преобразователь частоты, как и любой каскад усиления сигнала, имеет определенную зависимость мощности выходного сигнала от мощности входного. При некоторых больших значениях мощности входного сигнала происходит завал амплитудной характеристики преобразователя (коэффициент передачи преобразователя уменьшается). При малых значениях сигнала наступает ограничение коэффициента передачи, связанное с внутренними шумами, возникающими в преобразователе, и потерей в этих шумах преобразуемого сигнала. Эти ограничения определяют динамический диапазон возможной неискаженной передачи мощности преобразуемого сигнала. Верхний предел мощности определяется как амплитудой напряжения гетеродина, так и энергетическими характеристиками, используемых в схеме преобразования транзисторов, а нижний — характеристиками преобразователя, определяющими величину внутренних шумов.

Источниками шума в преобразователе частоты являются: входная цепь преобразователя, включающая внутреннее сопротивление предшествующего преобразователя каскада; нелинейный элемент преобразователя; гетеродин; выходная цепь преобразователя.

Огибающая спектра шума, поступающая на вход преобразователя, определяется полосой пропускания выходной цепи преобразователя, а на выход преобразователя будут проходить лишь составляющие шума с частотами, соответствующими основному и паразитным каналам преобразования. Величина шума, проникающая по паразитному каналу, определяется избирательностью входной цепи преобразователя, и для уменьшения этих шумов входная цепь преобразователя или выходная цепь предшествующего каскада должны подавлять составляющие шума паразитного канала по крайней мере в 3 и более раз. При этом увеличение шумов на выходе преобразователя за счет паразитного канала будут не более 10%.

Шумы, создаваемые нелинейным элементом преобразователя, определяются шумовыми характеристиками используемых в смесителе полупроводниковых приборов и крутизной характеристики преобразования. Для уменьшения этих шумов необходимо выбирать малошумящие транзисторы и другие элементы схемы смесителя, а также уменьшать коэффициент усиления преобразователя.

Шум гетеродина, так же как и шум входного сигнала, передается на выход преобразователя и для его уменьшения необходимо максимально сузить полосу пропускания выходного каскада гетеродина и выбрать оптимальную связь гетеродина с преобразователем, при которой обеспечивается максимальное отношение

сигнал/шум. Для уменьшения влияния шума гетеродина применяют балансные смесители.

Выходная цепь преобразователя может быть представлена в виде каскада, имеющего определенную полосу пропускания и обеспечивающего селекцию спектра основного канала преобразователя. Ввиду того, что сигналы с выхода преобразователя поступают на вход усилителя промежуточной частоты исследуемой РЛС, обладающего селективными свойствами, установка в преобразователе выходного селективирующего каскада не обязательна. При этом необходимо только обеспечить согласование выходного сопротивления преобразователя с входным сопротивлением приемного устройства исследуемой РЛС.

При использовании ФМ может возникнуть необходимость воспроизведения как узкополосных, так и широкополосных сигналов. При этом суммарная мощность шума, действующая в полосе спектра моделируемого сигнала пропорциональна ширине его спектра, аналогично — суммарной мощности шума, действующей в полосе пропускания приемника РЛС, в зависимости от ее ширины. Поэтому шумовые свойства преобразователя и других элементов ФМ следует оценивать величиной спектральной плотности мощности собственных шумов, а ширина полосы пропускания преобразователя может быть значительно шире полосы пропускания приемного устройства исследуемой РЛС и удовлетворять требованиям исследования РЛС с самой большой полосой пропускания приемного устройства, а ограничение шума произойдет за счет селективирующих свойств самого приемного устройства.

Для обеспечения исследований РЛС методом смешанного моделирования спектральная плотность мощности собственных шумов ФМ не должна быть больше спектральной плотности мощности шумов, действующих в месте ввода сигналов от ФМ в приемное устройство. С точки зрения обеспечения требуемого уровня шумов, представленная структура выходной части ФМ имеет широкие возможности и на выходе ФМ позволяет иметь уровни шумов как меньше собственных за счет включения затухания в выходном аттенуаторе, так и больше за счет ввода дополнительных шумов.

Ввод затухания в выходном ручном аттенуаторе приводит к уменьшению мощности сигналов на выходе ФМ. Поэтому уровень сигналов на выходе преобразователя должен быть отрегулирован с помощью аттенуаторов на входе сумматора.

Динамический диапазон изменения мощности сигналов на выходе преобразователя частоты (смесителя) не должен ограничивать возможный динамический диапазон изменения мощности сигналов на входе приемного устройства РЛС в месте ввода сигналов от ФМ, т. е. должно выполняться условие

$$\left(\frac{P_{c \max}}{P_c}\right)_{\Sigma} \geq \left(\frac{P_{c \max}}{P_{ш}}\right)_{\text{см}} \geq \frac{P_{c_0}}{P_{ш \text{ прм}}} \quad (20.4)$$

Из этого выражения можно определить:

общий коэффициент передачи от сумматора до входа в приемное устройство

$$K_{\text{см}} K_{\text{ра}} = \frac{P_{\text{с}0}}{P_{\text{с макс } \Sigma}} \leq \frac{P_{\text{ш прм}}}{P_{\text{ш } \Sigma}}, \quad (20.5)$$

коэффициент передачи смесителя

$$K_{\text{см}} = \frac{P_{\text{с макс см}}}{P_{\text{с макс } \Sigma}} \leq \frac{P_{\text{ш см}}}{P_{\text{ш } \Sigma}}, \quad (20.6)$$

требуемый коэффициент затухания, который необходимо ввести в выходном ручном аттенуаторе; для обеспечения требуемой величины собственных шумов на выходе ФМ

$$K_{\text{РА}} = \frac{P_{\text{с}0}}{P_{\text{с макс см}}} \leq \frac{P_{\text{ш см}}}{P_{\text{ш пр м}}}. \quad (20.7)$$

С точки зрения расширения возможностей регулировки мощности сигналов на выходе ФМ и получения требуемой мощности необходимо обеспечить

$$P_{\text{ш см}} \leq P_{\text{ш прм}} \quad \text{и} \quad K_{\text{см}} \geq \frac{P_{\text{с}0}}{P_{\text{с макс } \Sigma}}. \quad (20.8)$$

При преобразовании частоты возможны ошибки в передаче мощностей сигналов, обусловленные суммированием мощностей сигналов основных и комбинационных составляющих. Так как напряжение сигнала состоит не из одной частоты, а из спектра частот, то преобразованию подвергается каждая составляющая спектра сигнала. Это приводит к появлению в спектре преобразованного сигнала как основных полезных, так и комбинационных вредных составляющих, в связи с чем изменится мощность выходного сигнала. Величина этого изменения может быть определена следующим образом.

Суммарная мощность преобразуемого сигнала

$$P_{\text{с}} = \sum_{i=1}^n P_{\text{с}i}, \quad (20.9)$$

где  $n$  — число спектральных составляющих сигнала;  $P_{\text{с}i}$  — мощность  $i$ -й составляющей спектра.

Вследствие преобразования частоты совместно с  $i$ -й гармонической составляющей в спектре преобразованного сигнала будет существовать  $K$  комбинационных составляющих вида  $Kf_{\text{с}} \pm f_m$ , ослабленных относительно основной в  $N_1, N_2, \dots, N_K$  раз. Суммарная мощность комбинационных составляющих будет

$$P_{\text{с}i} = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^n P_{\text{с}il} N_{jl}, \quad (20.10)$$

а изменение мощности сигнала в результате появления в его спектре комбинационных составляющих определится

$$\Delta P_c = \frac{P_{cl}}{P_c} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n P_{ci} N_j}{\sum_{i=1}^n P_{ci}} \quad (20.11)$$

Минимизация этого изменения выходной мощности достигается соответствующим выбором частоты формирования сигнала  $f_p$  в ФМ относительно заданной промежуточной частоты и верхней настройкой гетеродина. С учетом ширины спектра преобразуемого сигнала частотный разнос между основным и любым комбинационным каналом преобразования должен быть больше ширины спектра сигнала. Так как основную роль играют вторая и третья комбинационные составляющие, то при расчете преобразователя им следует уделять главное внимание.

Выбор верхней настройки гетеродина обусловлен облегчением фильтрации зеркального канала и комбинационных составляющих вида  $f_p \pm Kf_r$ . К частоте сигнала гетеродина предъявляются довольно жесткие требования, так как наличие гармоник сигнала гетеродина приводит к появлению большого количества паразитных составляющих преобразованного сигнала, отфильтровать которые не всегда возможно.

С точки зрения обеспечения переноса спектра сформированного в ФМ сигнала на любую возможную промежуточную частоту при допустимых искажениях мощности преобразованного сигнала за счет комбинационных составляющих в ФМ должна быть предусмотрена возможность некоторого изменения рабочей частоты.

Проведенные исследования характеристик ряда преобразователей частоты показали, что лучшим из них для использования в ФМ является балансный, имеющий верхнюю настройку гетеродина.

## 20.2. Генератор импульсного радиосигнала

При исследовании характеристик РЛС методом смешанного моделирования исследуемая РЛС работает без излучения высокочастотной энергии в пространство, а процесс генерации радиосигналов воспроизводится в физической модели УСМ. Степень соответствия сигналов на выходе ФМ реальным на входе приемного устройства РЛС определяет точность моделирования и допустимость проведения исследований методом смешанного моделирования в целом.

Для обеспечения соответствия формируемых в физической модели сигналов реальным, в составе физической модели необходимо иметь генератор, структура сигналов на выходе которого должна быть адекватна структуре реальных сигналов, формируемых в передатчике исследуемой РЛС. Это соответствие заключается в совпадении спектров этих сигналов. Очевидно, что для РЛС, работаю-

щей с простыми импульсными сигналами (без внутримпульсной модуляции), совпадение спектров произойдет при равенстве длительностей импульсов. Для РЛС, имеющих аппаратуру селекции движущихся объектов, и РЛС автосопровождения объектов по скорости, использующих доплеровский сдвиг частоты, генератор сигнала ФМ должен воспроизводить этот сдвиг частоты, а для когерентных РЛС на выходе ФМ должна быть обеспечена когерентность сигналов, отраженных от различных объектов.

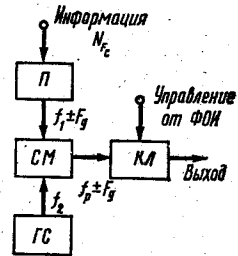


Рис. 20.2.

При исследовании характеристик РЛС, работающих в сигналами сложной структуры (например, с внутримпульсной частотной модуляцией несущей частоты) генератор сигналов должен строиться на тех же принципах и тех же элементах технической реализации этих принципов, что и в исследуемой РЛС. То есть в составе ФМ должен использоваться генератор частотно-модулированного импульсного сигнала исследуемой РЛС, однако функционирующий на рабочей частоте ФМ, обеспечивающей воспроизведение выходных сигналов на промежуточной частоте исследуемой РЛС.

На рис. 20.2 приведена схема построения генератора импульсного сигнала с управлением частотного сдвига несущей по информации от математической модели.

Преобразователь код-частота Допплера вырабатывает непрерывный синусоидальный сигнал, частота которого изменяется в соответствии с кодом информации об относительном изменении несущей частоты в сигнале, отраженном от  $j$ -го объекта ( $N_{F_{c,j}}$ )

$$f_{ij} = f_0 + \Delta F_{c,i} N_{F_{c,j}} \quad (20.12)$$

Величина частоты  $f_0$  выбирается из условия преобразования кода в частоту и обеспечения эффективного подавления паразитных составляющих преобразования частоты в смесителе.

Частота несущей на выходе генератора сигнала (ГС) должна выбираться в соответствии с заданной частотой формирования сигнала в ФМ ( $f_p$ ) с учетом частоты  $f_0$

$$f_2 = f_p \pm f_0 \quad (20.13)$$

После преобразования частоты на выходе смесителя (СМ) получим сигнал частоты

$$f_p + \Delta F_{c,i} N_{F_{c,j}}$$

Ключ представляет собой манипулятор высокочастотного сигнала, управляемый видеоимпульсами, поступающими от формирователя длительности задержанного импульса.

Диапазон изменения доплеровского сдвига частоты определяется максимальной скоростью полета объекта и длиной волны исследуемой РЛС и для скорости полета объекта  $V_0 = 1$  км/с и  $\lambda = 10$  см, этот диапазон составит  $F_{0, \max} = \pm 20$  кГц.



Для обеспечения исследований характеристик многочастотных РЛС, использующих различия доплеровского сдвига частоты в приемных каналах, точность воспроизведения этого сдвига в одном приемном канале относительно другого должна быть достаточно высокой. Это может быть обеспечено двумя путями. Первый путь заключается в регулировке цены младшего разряда преобразователей код-частота. Относительная разница в ценах младших разрядов определяется отношением частот или длин волн приемных каналов РЛС. Принимая цену младшего разряда одного из каналов РЛС за основу (например, первого), цены младших разрядов в остальных каналах

$$\Delta F_{ci} = \Delta F_{c1} \frac{\lambda_1}{\lambda_i} = \Delta F_{c1} \frac{f_{c1}}{f_{ci}}. \quad (20.14)$$

Разница в ценах младших разрядов может составлять единицы процентов, поэтому требования к стабильности частоты генератора сигнала (ГС) и гетеродина преобразователя частоты на выходе ФМ являются очень высокими. При обычной кварцевой стабилизации частоты уход промежуточной частоты может составить сотни герц, что является недопустимым. Поэтому при исследовании многочастотных РЛС необходимо принимать дополнительные меры стабилизации частоты генераторов в ФМ с учетом требований к точности воспроизведения доплеровского сдвига частоты в разных приемных каналах.

Цена младшего разряда представления информации о скорости цели определяется характеристиками исследуемой РЛС и для сопровождения целей по скорости может составлять единицы — десятки сантиметров в секунду, что будет соответствовать ценам младших разрядов в преобразователях код-частота единицы герц. Для РЛС, не извлекающих информации из доплеровского сдвига частоты, а только выделяющих сигналы движущихся целей по наличию этого сдвига, точность воспроизведения скорости полета объекта не является принципиальной, важно только воспроизвести некоторую величину частотного сдвига в сигнале и обеспечить заданную точность воспроизведения этого сдвига в одном приемном канале относительно другого.

Второй путь заключается в вычислении в ММ значения доплеровского сдвига частоты по каждой  $j$ -й моделируемой цели и для каждого  $i$ -го приемного канала исследуемой РЛС. Количество информации, передаваемой на ФМ, при этом увеличится в  $m$  раз ( $m$  — число каналов РЛС), а цена младшего разряда информации должна составлять единицы герц. Соответственно и преобразователи код-частота должны обеспечить преобразование информации с такой же ценой младшего разряда. Этот путь является более универсальным, так как позволяет использовать одно и то же оборудование ФМ для исследований различных РЛС.

В качестве преобразователей код-частота Допплера могут быть использованы выпускаемые промышленностью синтезаторы частоты, позволяющие производить автоматическую установку частоты

непрерывного сигнала по информации от вычислительной машины. Точность установки составляет единицы герц, а частотный диапазон этих синтезаторов соответствует требуемому частотному диапазону в ФМ. Время перестройки синтезатора на новое значение частоты составляет единицы миллисекунд.

При исследовании РЛС, работающих со сложной структурой сигнала, в качестве генератора сигнала может использоваться генератор сигнала исследуемой РЛС, а запуск его производится импульсом с преобразователя код-временной интервал, задержанным относительно зондирующего в соответствии с дальностью от цели.

В качестве смесителя может быть использован транзисторный балансный смеситель выходного преобразователя частоты ФМ. Однако на выходе его необходимо установить каскад селекции основной частоты преобразования и подавления составляющих паразитных каналов преобразования, так как при вторичном преобразовании частоты их наличие приведет к дополнительным погрешностям моделирования сигналов.

При воспроизведении в ФМ простых импульсных сигналов в качестве генератора сигнала может быть использован кварцевый транзисторный генератор.

Для обеспечения когерентности сигналов в двух каналах формирования сигналов ФМ используется один генератор сигнала, работающий на два смесителя.

Формирование импульсной структуры сигналов производится с помощью высокочастотных ключей-манипуляторов.

### 20.3. Генератор шума

Наиболее универсальными среди известных в настоящее время активных маскирующих помех являются шумовые помехи. Действие их при достаточной мощности приводит к полному или частичному засвечиванию экрана индикатора РЛС, вследствие чего отметки объектов оказываются замаскированными.

Классическим методом создания шумовой помехи является излучение непрерывного высокочастотного сигнала, модулированного по амплитуде, частоте или фазе шумами. Различают прицельную и заградительную шумовые помехи. Прицельная шумовая помеха характеризуется узким шумовым спектром, соизмеримым с полосой пропускания подавляемой РЛС и в этом отношении имеет энергетические преимущества перед заградительной помехой. Но прицельная шумовая помеха подавляет лишь одну выбранную РЛС, или даже всего лишь один из каналов РЛС, и при недостаточной ее мобильности от нее можно отстроиться путем смены рабочей частоты РЛС. Заградительная шумовая помеха характеризуется широким спектром модулирующих шумов и в принципе может одновременно воздействовать на несколько РЛС, в том числе и на РЛС с ограниченной перестройкой по частоте. Но это дается ценой

энергетических потерь. Для создания одинакового эффекта передатчик заградительной шумовой помехи должен иметь значительно большую мощность, чем передатчик прицельной шумовой помехи.

Шумовая помеха может быть получена путем непосредственного усиления шума соответствующего источника (например, шумового диода прямого накала) с однородным спектром или путем модуляции высокочастотного непрерывного сигнала шумом. Прицельная шумовая помеха, как правило, создается за счет модуляции непрерывного сигнала, а ее перестройка осуществляется изменением частоты несущего сигнала [5].

Шумовые помехи, создаваемые способом прямого усиления шума, называются прямошумовыми. Закон распределения амплитуд шумовых выбросов этой помехи близок к нормальному и по сравнению с шумовыми помехами, создаваемыми за счет модуляции, эффект воздействия на РЛС прямошумовой помехи несколько выше.

Шумовые помехи характеризуются шириной спектра ( $\Delta f_{\text{шм}}$ ), спектральной плотностью мощности шумовой помехи ( $S_{\text{шм}}$ ), распределением мощности в спектре  $S_{\text{шм}}(f)$  и средней несущей частотой помехи.

Передатчик прицельной шумовой помехи всегда работает совместно с разведывательным приемником, обнаруживающим работу РЛС, и создаваемая помеха является ответной с продолжительностью, определяемой логикой работы анализирующего устройства станции помех. Время перестройки передатчика на новую несущую частоту достаточно мало и поэтому помехи могут создаваться даже для РЛС с быстрой перестройкой рабочей частоты, успевая произвести разведку нового значения частоты сигнала РЛС, анализ обстановки и перестройку передатчика. Однако эта помеха будет маскировать только объекты, находящиеся на дальностях больше дальности самого постановщика помехи [5].

При моделировании помех в математической модели УСМ определяются текущие значения мощности, временной и частотной структур помех. Для шумовых помех несовпадение спектра помехи с полосой пропускания приемника РЛС может быть представлено как отсутствие помехи по данному каналу РЛС. Поэтому при моделировании шумовых помех достаточно определить только текущие значения мощности, а временная структура может задаваться в виде функции типа «да—нет» в соответствии с логиками работы моделируемой станции помех и исследуемой РЛС. При временных интервалах функции больше периода повторения зондирующих импульсов РЛС и кратных ему, учитывая, что ММ определяет параметры помех на весь период повторения зондирующих импульсов, шумовая помеха может быть представлена только одним параметром — мощностью в течение данного периода. При отсутствии помехи, реализуемая логическая функция выдает запрет на реализацию алгоритма по данному постановщику помех и ФМ помеху

по данному объекту в данном приемном канале РЛС не воспроизводит.

При моделировании заградительной или прицельной шумовой помехи структура ФМ не меняется, так как шумовая помеха воспроизводится только в пределах полосы пропускания данного приемного канала РЛС, а изменение энергетике помехи учитывается в затуханиях, вводимых ручными аттенуаторами в соответствии с величиной  $P_{п.}$ , определяющей максимальное значение мощности помехи на входе приемного устройства исследуемой РЛС. При этом энергетика генератора шумовой помехи в ФМ должна рассчитываться на моделирование прицельной помехи максимальной мощности.

При оптимизации структуры ФМ было определено, что при моделировании большого количества источников шумовых помех шумовые помехи на входе приемного устройства нормализуются по своей структуре, а мощность суммарной помехи равна сумме мощностей помех, создаваемых каждым источником. В соответствии с этим, для воспроизведения шумовых помех от  $n$  источников помех, ФМ для данного приемного канала РЛС должна иметь в своем составе генератор шума со спектральной плотностью шума в  $n$  раз больше спектральной плотности мощности шума на входе приемного устройства, создаваемой одним источником помех.

Ширина спектра шума на выходе ФМ должна быть в 2—3 раза больше ширины полосы пропускания приемного устройства исследуемой РЛС для обеспечения равномерности шума в пределах полосы пропускания приемного устройства, а средняя частота шумового спектра должна соответствовать выбранной рабочей частоте формирования сигналов в ФМ.

Для создания структуры шума близкой к нормальной первичным источником шума может быть выбран шумовой диод, а сам генератор шума может строиться по принципу усиления шума первичного источника в заданном участке частот.

При проведении исследований, при которых шумовые помехи на входах двух или более приемных каналов РЛС должны быть коррелированы, необходимо иметь генератор шумовой помехи с двумя или более выходами шумов, взаимокорреляционная функция которых равна единице.

Кроме генератора шума, предназначенного для моделирования шумовых помех, в составе ФМ должен быть генератор дополнительного шума, предназначенный для ввода в приемное устройство шумов, компенсирующих шумы отключаемой при исследованиях РЛС высокочастотной части приемного устройства. Спектральная плотность мощности дополнительных шумов на выходе генератора должна быть порядка  $10^{-8} \dots 10^{-9}$  Вт/мГц. Регулировка мощности дополнительных шумов осуществляется ручными аттенуаторами на выходе ФМ и на входе сумматора сигнала ФМ.

## Контрольные вопросы

1. Назвать основные преимущества формирования сигналов в физической модели на промежуточной частоте исследуемой РЛС и привести обоснование допустимости исключения высокочастотных трактов РЛС при моделировании?
2. Какими параметрами характеризуются шумовые сигналы?
3. Каково назначение генератора дополнительного шума в составе физической модели и какие требования к нему предъявляются?

## Глава 21

### ГЕНЕРИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Для воспроизведения флюктуаций эффективных отражающих поверхностей моделируемых целей в составе установки смешанного моделирования предусмотрен цифровой датчик случайных функций, выходными величинами которого являются случайные числа, характеризующие относительное изменение величины средней эффективной отражающей поверхности объекта  $\sigma(t)$  во времени.

При исследовании характеристик РЛС различного назначения возникает необходимость воспроизведения как коррелированных, так и некоррелированных случайных чисел. Так, при исследовании характеристик обзорных РЛС, у которых время наблюдения отраженного сигнала меньше, а период обзора значительно больше времени корреляции флюктуаций эффективной отражающей поверхности объекта, датчик случайных функций должен выдавать некоррелированные от обзора к обзору случайные числа. При исследовании характеристик РЛС автосопровождения целей, у которых время наблюдения отраженных от объекта сигналов оказывается значительно больше времени корреляции флюктуаций, датчик должен обеспечить выдачу коррелированных случайных чисел с периодом их обновления соизмеримым с периодом повторения зондирующих импульсов РЛС.

Статистические характеристики последовательности случайных чисел на выходе датчика должны соответствовать заданным при исследовании статистическим характеристикам флюктуаций величины эффективной отражающей поверхности объекта. Эти флюктуации являются стационарными эргодическими и определяются одномерным законом распределения и спектром (функцией корреляции).

Методы решения задачи генерирования случайных процессов довольно сложны и требуют применения современной вычислительной техники. Если воспроизведение одного — трех независимых случайных процессов не встречает особых технических трудностей, то воспроизведение большего их числа является проблемным вопросом, так как простое наращивание аппаратуры приводит к увеличению стоимости УСМ и снижению ее эксплуатационных качеств.

Флюктуации эффективной отражающей поверхности объекта при рассмотрении в ограниченном временном интервале могут быть опи-

саны одномерным законом распределения и корреляционной функцией флюктуаций.

В главе 17 было определено, что флюктуации эффективной отражающей поверхности различных объектов могут быть описаны экспоненциальным, релеевским и в некоторых случаях нормальными законами распределения флюктуаций, а сами случайные величины, которые несут информацию об изменении эффективной отражающей поверхности объекта относительно ее среднего значения, в УСМ должны представляться в логарифмическом при основании два масштабе.

Корреляционная функция флюктуаций указывает на взаимосвязь предыдущего значения отражающей поверхности объекта с последующим через некоторый интервал текущего времени  $\tau$ .

Для обеспечения исследований обзорных РЛС датчик случайных функций должен генерировать некоррелированные случайные числа при неизменном значении случайного числа для каждого объекта в течение времени облучения объекта.

Для обеспечения исследований РЛС автосопровождения объектов датчик случайных функций должен генерировать случайные числа, подчиненные заданному закону распределения и имеющие заданную корреляционную функцию. При этом могут быть случаи необходимости воспроизведения как  $n$  (по числу моделируемых объектов) независимых случайных процессов, описываемых различными законами распределения и функциями корреляции, так и  $n$  независимых случайных процессов, описываемых одними и теми же законами распределения и функциями корреляции.

Поэтому датчик случайных функций должен быть многоканальным и обеспечивать выдачу требуемого числа независимых последовательностей случайных чисел в соответствии с заданными законами их распределения и функциями корреляции.

### 21.1. Методы генерирования случайных чисел

Существует три метода генерирования случайных чисел: физический, аналитический и табличный.

Физический генератор состоит из источника шума и устройств формирования случайного числа. В качестве первичного источника шума используются физические шумовые процессы, возникающие в различных устройствах (например, в шумовых диодах).

Аналитический метод предусматривает получение псевдослучайных чисел путем реализации на ЭВМ математического алгоритма, состоящего из последовательности математических и логических операций для реализации некоторого рекуррентного соотношения. Аналитические методы не позволяют получить случайный процесс в его строгом математическом определении, так как рекуррентный способ образования последовательности однозначно определяет все остальные числа. При этом не исключена возможность образования повторяющихся циклов. Кроме того, из-за ограниченности разрядной

сетки машины нельзя получить строго равномерное распределение в определенном интервале; поэтому такое распределение называется квазиравномерным, а случайный процесс — псевдослучайным. Однако аналитический метод позволяет получить процессы, удовлетворяющие большинству критериев случайности и полностью пригодные для многих технических приложений.

Табличный метод задания случайных чисел заключается в занесении в запоминающее устройство таблицы случайных чисел и по мере необходимости поочередного считывания значений случайных чисел. Для предварительного расчета таблиц случайных процессов используется например, метод канонического представления [1]. Табличный метод применим только при малом объеме статистических испытаний, так как требует наличия большого объема памяти.

В связи с широким применением метода Монте — Карло при статистических исследованиях поведения различных объектов при воздействии на них случайных возмущений к настоящему времени наиболее полно разработаны способы получения некоррелированных случайных чисел с заданными законами распределения. При цифровом моделировании исходным сигналом для преобразования является равномерно распределенная случайная величина, как наиболее просто генерируемая с помощью дискретной техники. Наибольшее распространение получил метод построения генератора равномерно распределенных чисел (ГЧ), в котором каждый разряд выходного случайного числа формируется независимо с помощью вероятностных блоков, в которых в качестве первичного источника используются физические шумовые процессы [2, 3, 5, 6, 7, 22].

В различных конструкциях ГЧ имеет место последовательная, параллельная или смешанная выработка двоичных разрядов числа. Общим недостатком последовательного формирования многоразрядных чисел является относительно невысокое быстродействие их получения, а при параллельном — аппаратурная громоздкость. Поэтому в основном применяются смешанные методы или схемные решения, повышающие быстродействие ГЧ при незначительном увеличении аппаратуры.

В последнее время получил широкое внедрение ГЧ, построенный на сдвиговом регистре с линейной обратной связью, который формирует псевдослучайную последовательность чисел [8, 9].

Из равномерного распределения можно получить случайные величины принципиально с любым другим законом распределения методом его нелинейного преобразования.

Существуют различные варианты технической реализации метода нелинейного преобразования равномерного распределения (способ кусочной аппроксимации плотности распределения выходного процесса, метод Неймана и др.). Наибольшее распространение при преобразовании исходного равномерного распределения с помощью ЭВМ получил способ кусочной аппроксимации плотности распределения.

Сущность этого метода состоит в том, что область возможных значений случайной величины  $x$  разбивается на  $n$  интервалов, количество которых определяется заданной точностью аппроксимации плотности распределения  $W(x)$ . Затем случайным обра-

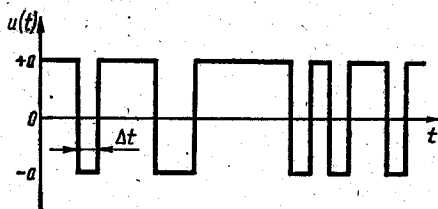


Рис. 21.1.

зом из  $n$  интервалов выбирается произвольный интервал и получение случайного числа с плотностью  $W(x)$  сводится к формированию равномерного распределения в данном интервале.

Задача генерирования равномерно распределенных случайных чисел сводится к получению  $N$  одноразрядных двоичных чисел с равновероятным и независимым появлением нулей и единиц в каждом разряде. При использовании пуассоновского потока первичных случайных импульсов независимость достигается тем, что период съема случайных чисел значительно превышает средний период следования случайных импульсов.

В работе [9] рассмотрен цифровой генератор первичной случайной последовательности, выполненный на сдвиговом регистре с линейной обратной связью. Такой генератор формирует двоичные псевдослучайные шумовые последовательности с частотой тактовых импульсов.

Принцип его работы заключается в том, что выходные сигналы регистра сдвига после обработки в специальной цифровой логической схеме (например, в сумматоре по модулю два) снова вводятся в регистр, замыкая тем самым цепь рециркуляций. Таким образом, генерируется периодическая псевдослучайная последовательность двоичных символов, максимальная длительность периода которой при линейной цепи обратной связи составляет  $(2^N - 1)$  периодов, соответствующих тактовой частоте работы регистра сдвига.

Получаемые на выходе регистра последовательности максимальной длины, как и случайные последовательности, полученные в результате серии независимых испытаний, характеризуются равной вероятностью получения нулей и единиц  $P(0) = P(1) = 0,5$ . Каждая последовательность, сформированная в сдвиговом регистре, является обязательно периодической и обладает следующими тремя важными свойствами псевдослучайности.

Для получения двоичного аналогового шума из цифровой последовательности, необходимо сместить по постоянной составляющей и ограничить рабочие уровни напряжения триггера, установленного на выходе сдвигового регистра. При этом образуется псевдослучайное напряжение прямоугольной формы, изменяющееся в пределах  $\pm a$  вольт (рис. 21.1). Этот периодически повторяющийся случайный сигнал характеризуется средним по времени

$$\bar{U} = \frac{a}{2^N - 1} \quad (21.1)$$



и автокорреляционной функцией

$$R(\tau) = \overline{U(t)U(t+\tau)} =$$

$$= \begin{cases} a^2 \left[ 1 - \frac{|\tau - k(2^N - 1)\Delta t|}{\Delta t} \right] & \text{при } |\tau - k(2^N - 1)\Delta t| \leq \Delta t \\ k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots; & \\ \frac{a^2}{2^N - 1} & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (21.2)$$

где  $\Delta t$  — длительность элементарного дискрета (период повторения тактовых импульсов).

Автокорреляционная функция обязательно является периодической с периодом  $(2^N - 1)\Delta t$ .

Спектральная плотность мощности периодического псевдослучайного прямоугольного аналогового сигнала является линейчатой

$$S_u(\omega) = 2\pi \left( \frac{a}{2^N - 1} \right)^2 \left\{ -(2^N - 1) \delta(\omega) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^N \left[ \frac{\sin \frac{k\pi}{2^N - 1}}{\frac{k\pi}{2^N - 1}} \right]^2 \delta \left[ \omega - \frac{2k\pi}{(2^N - 1)\Delta t} \right] \right\}. \quad (21.3)$$

Расстояние между спектральными линиями обратнопропорционально длительности периода  $(2^N - 1)\Delta t$ . Мощность нулевой составляющей составляет  $1/(2^N - 1)^2$ .

*Свойство 1.* В течение каждого периода максимальной длительности сдвиговой регистра проходит через все возможные состояния, за исключением состояния, при котором во всех разрядах записаны нули. Таким образом, каждый период состоит из  $(2^N - 1)$  цифр, среди которых имеется точно  $(2^N - 1)$  единиц, а число нулей — на единицу меньше.

*Свойство 2.* Среди групп из последовательных единиц и нулей в каждом периоде половина имеет длительность в один символ (0 или 1), четвертая часть имеет длительность в два символа (00 или 11), восьмая часть имеет длительность в три символа (000 или 111) и т. д.; т. е. чем длинее группа, тем меньше частота ее появления.

*Свойство 3.* Нормированная корреляционная функция последовательности имеет единственный значительный пик амплитуды равной единице, а при всех остальных сдвигах равна  $(2^N - 1)^{-1}$ .

С увеличением числа разрядов сдвигового регистра резко возрастает длина последовательности, величина  $a/2^N - 1$  и  $a^2/2^N - 1$  становятся весьма малыми и приближенно можно считать, что в пределах одного периода псевдослучайной последовательности среднее по времени, автокорреляционная функция и спектральная плот-

ность запишутся [10]:  $\bar{U} \approx 0$ ;

$$R(\tau) \approx \begin{cases} a^2 \left[ 1 - \frac{|\tau|}{\Delta t} \right] & \text{при } \tau \leq \Delta t; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (21.4)$$

$$S_u(\omega) \approx a^2 \Delta t \left[ \frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\frac{\omega \Delta t}{2}} \right]^2.$$

Генераторы псевдослучайных шумовых сигналов обладают несколькими значительными преимуществами по сравнению с физическими генераторами.

1. Псевдослучайный шумовой сигнал формируется при помощи надежной цифровой схемы, простой в эксплуатации.

2. Ширина спектра двоичного шумового сигнала прямопропорциональна частоте тактовых импульсов, т. е. зависит только от длительности  $\Delta t$  отдельного элементарного импульса.

3. Сдвиговый регистр легко может быть возвращен в исходное положение в любой момент времени, что позволяет точно повторять данную реализацию последовательности случайных событий.

4. Имеется возможность получения нескольких каналов некоррелированного шума от одного сдвигового регистра с помощью цифрового коммутатора.

5. Цифро-аналоговый генератор шума формирует псевдослучайные числа в цифровой форме с примерно биномиальным или гауссовским распределением, а также аналоговый шум.

6. Параллельно выводимый из сдвигового регистра двоичный код образует равномерно распределенные псевдослучайные числа.

Для получения некоррелированных случайных чисел их сьем необходимо производить через  $N$  тактов работы сдвигающего регистра, так как нормированная функция корреляции равномерно распределенных случайных чисел, получаемых в каждом такте, приближенно имеет вид [11]

$$R(\tau) = \begin{cases} 2^{-\tau} & \text{при } |\tau| < N\Delta t; \\ 0 & \text{при } |\tau| \geq N\Delta t. \end{cases} \quad (21.5)$$

Число некоррелированных случайных чисел, которое можно получить за один период псевдослучайной последовательности

$$m = \frac{2^N - 1}{N}. \quad (21.6)$$

Сравнение физического и псевдослучайного генераторов равномерно распределенных чисел позволяет сделать вывод о целесообразности использования в датчике случайных функций генератора псевдослучайных некоррелированных равномерно распределенных чисел как более надежного и простого в настройке и эксплуатации.

## 21.2. Генерирование стационарных случайных процессов с заданными законами распределения и функциями корреляции

Для генерации стационарных эргодических случайных функций с заданными вероятностными и корреляционными свойствами используется принцип нелинейного преобразования нормального случайного процесса с предварительно сформированной корреляционной функцией [12].

На рис. 21.2 представлена блок-схема, поясняющая принцип генерации стационарных случайных процессов с заданными статистическими характеристиками.

Заданный закон распределения вероятностей  $f(y)$  выходного случайного процесса  $Y(t)$  определяется кривой нелинейного функционального преобразования НФП  $Y(x)$  нормального случайного процесса  $X(t)$ . Для получения необходимой функции корреляции выходного случайного процесса с законом распределения, отличным от нормального, необходимо пересчитать заданную функцию корреляции  $R_{yy}(\tau)$  с выхода на вход НФП с учетом кривой преобразования  $Y(x)$  и полученную в результате пересчета корреляционную функцию  $R_{xx}(\tau)$  сформировать с помощью линейного формирующего фильтра ФФ из широкополосного (слабо коррелированного) нормального случайного сигнала ГНС. Полученный таким образом на выходе ФФ нормальный случайный процесс, пройдя НФП, будет иметь заданные закон распределения и корреляционную функцию.

Применение преобразования именно нормального случайного процесса в любой другой дает возможность по заданной корреляционной функции выходного случайного процесса, отличного от нормального, рассчитать параметры и вид функции корреляции нормального случайного процесса на входе нелинейного функционального преобразователя, так как аналитическая зависимость корреляционных функций при нелинейных преобразованиях случайных процессов к настоящему времени в общем виде установлена только для случая преобразования нормального случайного процесса. Кроме того, любые линейные преобразования нормального случайного процесса, связанные с необходимостью формирования требуемой функции корреляции, не меняют его закона распределения, а потому кривая нелинейного преобразования будет постоянной при постоянных параметрах нормального случайного процесса (таких как математическое ожидание и дисперсия).

Описанный принцип формирования случайных процессов позволяет провести аналитический расчет параметров линейного фильтра и нелинейного функционального преобразователя и освободиться от многократной подгонки параметров формирующего

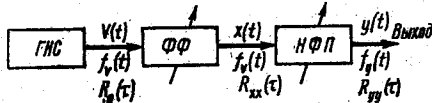


Рис. 21.2.

фильтра [13]. Кроме того, он обладает простотой и удобством синтеза корреляционной функции сигнала на входе НФП по заданной функции корреляции выходного случайного процесса и не связан с необходимостью определения двумерного закона распределения выходных сигналов [14, 15].

Общая методика проведения необходимых расчетов разбивается на следующие этапы:

1. Определение уравнения кривой нелинейного преобразования нормального случайного процесса по заданной функции распределения выходного процесса из следующего выражения, справедливого для непрерывных функций распределения

$$\int_{-\infty}^{x_i} f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{y_i} f_y(y) dy \quad (21.7)$$

и аппроксимации полученной кривой преобразования любым известным способом с заданной точностью.

2. Пересчет заданной функции корреляции  $R_{yy}(\tau)$  выходного случайного процесса на вход НФП с учетом его параметров по следующему соотношению, представляющему собой разложение функции корреляции выходного процесса  $R_{yy}(\tau)$  в ряд по степеням нормированной функции корреляции входного сигнала  $r_{xx}(\tau) = \frac{R_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2}$  [16].

$$R_{yy}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \frac{r_{xx}^n(\tau)}{n!}, \quad (21.8)$$

где  $C_n = C_n(m_x, \sigma_x, A_i)$  — коэффициенты разложения, зависящие от параметров входного нормального сигнала и нелинейного преобразования, которые могут быть рассчитаны по следующей общей формуле

$$C_n(m_x, \sigma_x, A_i) = \int_{-\infty}^{\infty} y (m_x + \xi \sigma_x) \varphi^n(\xi) d\xi, \quad (21.9)$$

где  $\xi$  — нормированный аргумент;  $\varphi(\xi)$  — плотность вероятности нормального процесса от нормированного аргумента.

Решая уравнение (21.8) относительно  $r_{xx}(\tau)$  при различных значениях  $R_{yy}(\tau)$  можно определить вид и параметры функции корреляции входного случайного процесса в результате аппроксимации расчетных данных  $r_{xx}(\tau)$  некоторым аналитическим выражением.

3. Расчет параметров линейного фильтра, формирующего необходимую функцию корреляции нормального случайного процесса. Расчет фильтра сводится к определению передаточной функции линейного устройства по следующему соотношению

$$[W(j\omega)]^2 = \frac{S_x(\omega)}{S_u(\omega)}, \quad (21.10)$$

где  $S_x(\omega)$  и  $S_u(\omega)$  — спектральные плотности выходного и входного случайных процессов формирующего фильтра, представляющие

собой Фурье — преобразование от соответствующих корреляционных функций.

Предельная точность проведения расчетов кривых преобразования нормального случайного процесса в другие, а следовательно, и погрешность формирования заданного закона распределения выходного случайного процесса, определяются ограничением интервала изменения процесса  $X(t)$ . Так, для интервала изменения  $X(t)$  относительно его математического ожидания  $\pm 4\sigma_x$  эта погрешность составляет всего 0,00634%. Однако реальная точность расчета кривых нелинейного преобразования определяется еще и точностью задания исходной информации и вычислительными погрешностями. Кроме того, погрешность формирования закона распределения зависит от точности представления корреляционной функции сигнала на входе НФП, ввиду ограничения количества членов уравнения (21.8) и точности представления кривых преобразования  $Y(x)$  при их технической реализации.

Проведение расчетов для генерирования случайных функций в заданным законом распределения и функций корреляции распадается на два отдельных вопроса с определенной их взаимосвязью, а именно: формирование заданного закона распределения и формирование заданной функции корреляции.

Рассмотрим применение описанной методики на примере формирования стационарного случайного процесса с релейевским законом распределения и экспоненциальной функцией корреляции.

*Формирование заданного закона распределения выходного случайного процесса.* Для случая преобразования нормального случайного процесса в релейевском уравнении преобразования

$$\int_{-\infty}^{x_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(X-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx = \int_0^{y_i} \frac{y}{V} e^{-\frac{y^2}{2V^2}} dy, \quad (21.11)$$

где  $V$  — параметр релейевского распределения, однозначно определяющий математическое ожидание и дисперсию

$$m_y = \sqrt{\frac{\pi}{2}} V; \quad \sigma_y^2 = \frac{4-\pi}{2} V^2. \quad (21.12)$$

Уравнение (21.11) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \left[ 1 + \Phi \left( \frac{X-m_x}{\sigma_x} \right) \right] = 1 - e^{-\frac{y^2}{2V^2}}, \quad (21.13)$$

откуда уравнение кривой преобразования

$$Y(x) = \sqrt{2} V \sqrt{\ln 2 - \ln \left[ 1 - \Phi \left( \frac{X-m_x}{\sigma_x} \right) \right]}, \quad (21.14)$$

где  $\Phi \left( \frac{X-m_x}{\sigma_x} \right) = \Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$  — интеграл вероятности.

\* Аналогично для экспоненциального одностороннего закона распределения вида

$$f_y(y) = \alpha e^{-\alpha y} \quad \text{при } 0 < y < \infty \quad (21.15)$$

кривая преобразования будет

$$Y(x) = \frac{1}{\alpha} \{ \ln 2 - \ln [1 - \Phi(\xi)] \}. \quad (21.16)$$

При технической реализации НФП необходимо произвести аппроксимацию кривой преобразования. Наиболее простой и удобной является кусочно-линейная аппроксимация.

Математическое ожидание и дисперсия выходного случайного процесса при кусочно-линейной аппроксимации кривой преобразования определяются следующими выражениями [16]:

для всех участков кроме первого

$$m_{y_k} = [Y_{k+0} + \alpha_k (m_x - X_k)] [\Phi(\xi_{k+1}) - \Phi(\xi_k)] + \alpha_k \sigma_x [\varphi(\xi_k) - \varphi(\xi_{k+1})], \quad (21.17)$$

$$D_{yy_k} = \frac{1}{2} \{ [Y_{k+0} + \alpha_k (m_x - X_k)]^2 + (\alpha_k \sigma_x)^2 \} \times \\ \times [\Phi(\xi_{k+1}) - \Phi(\xi_k)] + 2 [Y_{k+0} + \alpha_k (m_x - X_k)] \times \quad (21.18)$$

$$\times \alpha_k \sigma_x [\varphi(\xi_k) - \varphi(\xi_{k+1})] + (\alpha_k \sigma_x)^2 [\xi_k \Phi(\xi_k) - \xi_{k+1} \Phi(\xi_{k+1})];$$

для первого участка  $-\infty < X_k < X_2$

$$m_{y_1} = \frac{1}{2} [Y_{2+0} + \alpha_1 (m_x - X_2)] [1 + \Phi(\xi_2)] - \alpha_1 \sigma_x \varphi(\xi_2); \quad (21.19)$$

$$D_{yy_1} = \frac{1}{2} \{ [Y_{2+0} + \alpha_1 (m_x - X_2)]^2 + (\alpha_1 \sigma_x)^2 \} \times \\ \times [1 + \Phi(\xi_2)] - 2 [Y_{2+0} + \alpha_1 (m_x - X_2)] \alpha_1 \sigma_x \varphi(\xi_2) - (\alpha_1 \sigma_x)^2 \xi_2 \varphi(\xi_2), \quad (21.20)$$

где  $k = 2, 3, \dots, q$ ;  $q$  — количество участков аппроксимации;  $Y_{k+0}$  — граница  $k$ -го участка, взятая справа на случай наличия скачков;  $\alpha_k$  — тангенс угла наклона на  $k$ -м участке;  $\Phi(\xi_k)$  — значение интеграла вероятности при  $\xi_k = \frac{X_k - m_x}{\sigma_x}$ ;  $\varphi(\xi_k)$  — значение

$$\text{функции } \varphi(\xi_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi_k^2/2}.$$

Общие значения  $m_y$  и  $\sigma_y^2$  вычисляются по формулам:

$$m_y = \sum_{k=1}^q m_{y_k}; \quad (21.21)$$

$$D_{yy} = \sigma_y^2 = \sum_{k=1}^q D_{yy_k} - m_y^2. \quad (21.22)$$

При полиномиальной аппроксимации кривой нелинейного преобразования, например, степенным полиномом вида

$$Y(x_k) = \sum_{k=0}^m A_k x_k^k, \quad (21.23)$$

где  $A_k$  — постоянные коэффициенты;  $m$  — степень полинома; при  $m = 3$  получены следующие выражения для  $m_y$  и  $\sigma_y^2$  [16]:

$$m_y = A_0 + A_1 m_x + A_2 (m_x^2 + \sigma_x^2) + A_3 (m_x^3 + 3\sigma_x^2 m_x); \quad (21.24)$$

$$D_{yy} = A_1^2 \sigma_x^2 + A_2^2 (4m_x^2 \sigma_x^2 + 2\sigma_x^4) + \\ + A_3 (9m_x^4 \sigma_x^2 + 36m_x^2 \sigma_x^4 + 15\sigma_x^6) + A_1 A_2 m_x \sigma_x^2 + A_1 A_3 (6m_x^2 \sigma_x^2 + 6\sigma_x^4) + \\ + A_2 A_3 (12m_x^3 \sigma_x^2 + 24m_x \sigma_x^4). \quad (21.25)$$

Сравнивая результаты расчета математического ожидания и дисперсии по функции аппроксимации кривой преобразования с теоретическим ее значением, можно оценить степень соответствия практических и теоретических значений этих параметров выходного случайного процесса.

*Формирование заданной функции корреляции выходного случайного процесса с заданным законом распределения вероятностей.* Формирование заданной функции корреляции выходного сигнала с распределением отличным от нормального включает пересчет заданной функции корреляции на вход НФП и последующее ее формирование с помощью линейного фильтра. Коэффициенты разложения  $C_n(m_x, \sigma_x, A_i)$  для различных видов аппроксимации характеристики нелинейного элемента приведены в [16].

При кусочно-линейной аппроксимации функции  $Y(x)$  расчетные выражения коэффициентов разложения

$$C_n(m_x, \sigma_x, A_i) = \sum_{k=1}^q C_{nk} \quad (21.26)$$

и для всех участков кроме первого

$$C_{nk}(m_x, \sigma_x, A_i) = [Y_{k+0} + \alpha_k (m_x - X_k)] [E_n(\xi_{k+1}) - E_n(\xi_k)] + \\ + \alpha_k \sigma_x [F_n(\xi_{k+1}) - F_n(\xi_k)], \quad (21.27)$$

а для первого участка

$$C_{n1}(m_x, \sigma_x, A_i) = [Y_{2+0} + \alpha_1 (m_x - X_2)] E_n(\xi_2) + \alpha_1 \sigma_x F_n(\xi_2), \quad (21.28)$$

где  $E_n$  и  $F_n$  — функция следующего вида:

$$E_0(\xi) = \frac{1}{2} [1 + \Phi(\xi)]; \\ F_0(\xi) = -\varphi(\xi); \\ E_n(\xi) = \varphi^{(n-1)}(\xi) \quad \text{при } n \geq 1; \\ F_n(\xi) = \xi E_n(\xi) - E_{n-1}(\xi) \quad \text{при } n \geq 1.$$

В [16] даны расчетные выражения функций  $E_n(\xi)$  и  $F_n(\xi)$  до  $n = 7$ .

При полиномиальной аппроксимации  $m$  — степенными полиномами вида  $Y(x) = \sum_{k=0}^m A_k x^k$  коэффициенты разложения  $C_n(m_x, \sigma_x, A_i)$  рассчитываются по следующим формулам

$$C_n(m_x, \sigma_x, A_i) = \sum_{k=0}^m C_{nk}(m_x, \sigma_x, A_i), \quad (21.29)$$

где  $k$  — степень полинома.

При  $n > k$   $C_{nk}(m_x, \sigma_x, A_i) = 0$ , а при  $n \leq k$  окончательное выражение для коэффициентов разложения будет

$$C_{nk}(m_x, \sigma_x, A_i) = A_k (-1)^n k! \sum_{i=0}^{\frac{k-n}{2}} \frac{(2i+1)!!}{(2i+1)!(k-n-2i)!} \sigma_x^{(n+2i)}. \quad (21.30)$$

В частном случае, когда  $m_x = 0$  и  $(k-n)$  — нечетное число  $C_{nk} = 0$ . Если  $(k-n)$  — четное число, то

$$C_{nk}(m_x, \sigma_x, A_i) = (-1)^n A_k \frac{k!(k-n+1)!!}{(k-n+1)!} \sigma_x^k. \quad (21.31)$$

Кривую  $Y(x)$  вида (21.23) в интервале изменения  $X$  равном  $\pm 3\sigma_x$  с погрешностью не более 10% на концах можно аппроксимировать трехстепенным полиномом  $Y(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3$ . При этом коэффициенты разложения могут быть рассчитаны по формулам:

$$C_1 = \sum_{k=1}^3 C_{1k} = -A_1\sigma_x - 2A_2m_x\sigma_x - 3A_3(m_x^2\sigma_x + \sigma_x^3); \quad (21.32)$$

$$C_2 = \sum_{k=2}^3 C_{2k} = 2A_2\sigma_x^2 + 6A_3m_x\sigma_x^2; \quad (21.33)$$

$$C_3 = C_{33} = -6A_3\sigma_x^3. \quad (21.34)$$

Несмотря на простоту расчетных соотношений для полиномиальной аппроксимации кривой преобразования, при ее технической реализации встречаются значительные трудности, поэтому целесообразно применение кусочно-линейной аппроксимации. Ввиду наличия большого количества участков аппроксимации расчеты математического ожидания и дисперсии на выходе нелинейного преобразователя, а также коэффициентов разложения  $C_n(m_x, \sigma_x, A_i)$  целесообразно производить с помощью универсальной цифровой вычислительной машины.

В заключение можно сказать, что описанный метод генерирования случайных процессов позволяет с общих позиций решить задачу формирования случайных процессов принципиально с любыми законами распределения и корреляционными функциями, хотя в отдельных случаях могут встретиться определенные математические



и расчетные трудности, связанные с необходимостью аппроксимации сложных функций корреляции на входе НФП, расчетом коэффициентов разложения в зависимости от заданного вида нелинейного преобразования и т. д.

### 21.3. Цифровой генератор случайных функций

Флюктуации эффективных отражающих поверхностей объектов, моделируемых установкой смешанного моделирования, воспроизводятся с помощью специального генератора случайных функций. Этот генератор должен вырабатывать случайные числа с заданным законом распределения и функцией корреляции в реальном масштабе времени. Ввиду того, что вычисления текущих значений мощности отраженного сигнала производятся с периодом, равным периоду повторения зондирующих импульсов исследуемой РЛС, то и генератор случайных функций должен вырабатывать случайные числа с этим же периодом. Для обеспечения воспроизведения независимых флюктуаций эффективных отражающих поверхностей нескольких объектов генератор должен быть многоканальным.

С точки зрения обеспечения высокой надежности функционирования, удобства эксплуатации и настройки наиболее приемлемым является цифровой вариант построения генератора псевдослучайных функций, который при использовании цифровых элементов, обладающих высоким быстродействием, может последовательно генерировать требуемое количество не только независимых случайных функций с одинаковыми параметрами закона распределения и функции корреляции, но и различные их виды.

Ниже рассматривается простейший пример построения и расчета характеристик одноканального генератора нормальных случайных процессов с заданной корреляционной функцией.

Общая блок-схема генератора приведена на рис. 21.3 [17]. В качестве генератора равномерно распределенных чисел (ГРРЧ) применен генератор псевдослучайных чисел.

Цифровой функциональный преобразователь (ЦФП) производит преобразование исходных равномерно распределенных чисел в последовательность некоррелированных случайных чисел с нормальным законом распределения по методу обратных функций. Применение этого блока необходимо в связи с тем, что при непосредственной нормализации равномерно распределенных псевдослучайных чисел с помощью линейного устройства может оказаться, что распределение второго порядка и более высокого порядка будут не гауссовскими [8].

Цифровой фильтр (ЦФ) представляет собой линейное инерционное устройство, служащее для формирования корреляционной функции выходного случайного сигнала.

Выходное устройство (ВУ) выполнено в виде выходного

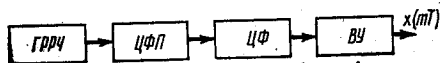


Рис. 21.3.

буферного регистра и служит для хранения выработанного случайного числа. В случае необходимости выдачи случайных чисел в логарифмическом масштабе ВУ дополнительно имеет в своем составе блок логарифмирования.

Так как любые линейные преобразования нормального случайного процесса не изменяют его закона распределения [19, 20, 21], то вопрос генерирования нормальных случайных процессов с заданной корреляционной функцией сводится в основном к расчету передаточной функции  $W(z)$  и реализации структуры цифрового фильтра, формирующего корреляционную функцию, так как реализация ГЧ и ЦФП не представляет трудности.

### Контрольные вопросы

1. Сформулировать достоинства и недостатки физического, аналитического и табличного методов генерирования случайных чисел применительно к задаче моделирования некоррелированного случайного процесса.
2. Изучить по рекомендованной литературе принципы действия цифрового генератора псевдослучайной последовательности двоичных символов и определить, при каких условиях его работы достигается близость генерируемого процесса к случайному равномерно распределенному и некоррелированному.
3. Каковы преимущества генераторов псевдослучайных шумовых сигналов перед физическими генераторами?
4. Сформулировать основной принцип генерации стационарного случайного процесса с заданными статистическими характеристиками.
5. Изучить рекомендованную литературу [19, 20, 21] и сформулировать, почему линейные преобразования нормального случайного процесса не изменяют его закона распределения.

Обоснование кусочно-степенной аппроксимации

*Теорема.* Пусть дана произвольная функция распределения  $F(x)$ , удовлетворяющая условию

$$F(0) = 0.$$

Тогда можно подобрать такое кусочно-степенное распределение

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^m b_{ik} (x - a_i)^k \Gamma(x - a_i), \quad (\text{П.1.1})$$

что для любого  $\varepsilon > 0$  будет справедливо соотношение

$$\int_0^{\infty} |\Phi(x) - F(x)| e^{ax} dx \leq \varepsilon. \quad (\text{П.1.2})$$

Здесь

$$\Gamma(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

*Доказательство.* Пусть  $a > 0$ . Покажем прежде всего, что можно подобрать такую ступенчатую функцию

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i \Gamma(x - c_i), \quad \sum_{i=0}^{\infty} d_i = 1, \quad (\text{П.1.3})$$

что

$$\int_0^{\infty} |A(x) - F(x)| e^{ax} dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для этого выберем в (П.1.3) величины  $c_i, d_i$  таким образом, чтобы

$$F(c_k) = \sum_{i=0}^k d_i, \quad k = 0, 1, \dots$$

Тогда

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} |A(x) - F(x)| e^{ax} dx \leq \left( \sum_{i=0}^{k+1} d_i - \sum_{i=0}^k d_i \right) \int_{c_k}^{c_{k+1}} e^{ax} dx = \frac{d_{k+1}}{a} [e^{ac_{k+1}} - e^{ac_k}], \quad (\text{П.1.4})$$

причем  $k = 0, 1, \dots, a$ ,

$$\int_0^{c_0} |A(x) - F(x)| e^{ax} dx \leq d_0 \int_0^{c_0} e^{ax} dx = \frac{d_0}{a} [e^{ac_0} - 1]. \quad (\text{П.1.5})$$

Далее пусть

$$c_k = \max \left[ 0, \frac{1}{a} \ln \frac{ae_k}{2} \right],$$

тогда

$$\frac{1}{a} [e^{ac_0} - 1] \leq \begin{cases} 0, & c_0 = 0, \\ \frac{\varepsilon}{2}, & c_0 > 0, \end{cases} \quad (\text{П.1.6})$$

$$\frac{1}{a} [e^{ac_{k+1}} - e^{ac_k}] \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad k \geq 0. \quad (\text{П.1.7})$$

Суммируя соответственно левые и правые части неравенств (П.1.4, П.1.5) при  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , и добавив соотношения (П.1.6, П.1.7), получим:

$$\int_0^{\infty} |A(x) - F(x)| e^{ax} dx \leq d_0 \frac{\varepsilon}{2} + d_1 \frac{\varepsilon}{2} + \dots = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{П.1.8})$$

Так как функция (П.1.1) удовлетворяет условию

$$\Phi(0) = 0,$$

то для нее также можно записать неравенство вида

$$\int_0^{\infty} |A(x) - \Phi(x)| e^{ax} dx \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{П.1.9})$$

Теперь из неравенств (П.1.8) и (П.1.9) следует (П.1.2), что и требовалось доказать.

Важным следствием этой теоремы является принципиальная возможность аппроксимации распределений с любой степенью точности уже при кусочно-ступенчатом виде аппроксимирующей функции, при этом повышение точности приближения достигается увеличением числа участков аппроксимации.

Для практических применений интерес представляет аппроксимация с помощью конечных сумм, когда

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^m b_i (x - a_i)^k \Gamma(x - a_i), \quad (\text{П.1.10})$$

где  $n$  — число участков аппроксимации. Рассмотрим два случая:

1. Существует некоторое  $T < \infty$ , для которого

$$F(T) = 1.$$

2.  $F(x) < 1$  для всех  $0 \leq x < \infty$ .

В первом случае теорема так же имеет место. Однако при доказательстве ее интегрирование следует вести в пределах от 0 до  $T$ .

Во втором случае предположим, что интеграл

$$\int_0^{\infty} [1 - F(x)] e^{ax} dx$$

сходится. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $T > 0$ , что

$$\int_T^{\infty} [1 - F(x)] e^{ax} dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{П.1.11})$$

Составим далее функцию

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) & \text{если } x \leq T, \\ 1 & \text{если } x > T, \end{cases} \quad (\text{П.1.12})$$

и подберем функцию распределения  $\Phi_1(x)$  вида (П.1.10) такую, что

$$\int_0^{\infty} |\Phi(x) - F_1(x)| e^{ax} dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{П.1.10})$$

Тогда из неравенств (П.1.11—П.1.13) следует, что

$$\int_0^{\infty} |\Phi_1(x) - F(x)| e^{ax} dx < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

## Приложение 2

### Исследование устойчивости решений моделей обслуживания с кусочными аппроксимирующими функциями распределения

Систему массового обслуживания (СМО) назовем устойчивой по отношению к некоторой функции распределения  $F(x)$ , определяющей функционирование данной СМО, если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое

$$\kappa = \kappa(\varepsilon),$$

что при соблюдении неравенства

$$\max\{|\delta_1|, |\delta_2|\} < \kappa$$

выполняется

$$\max_{t \geq 0} \{r |F^*(t) - F(t)|\} < \varepsilon. \quad (\text{П.2.1})$$

Здесь  $r |F^*(t) - F(t)|$  — некоторое введенное специальным образом «расстояние» между «возмущенной» характеристикой  $F^*(t)$  и «невозмущенной»  $F(t)$ . Если функция распределения  $F(x)$  имеет разрывы 1-го рода («скачки»), то график ее в точках разрыва дополняется вертикальными отрезками:

$\lambda, \mu$  — невозмущенные значения параметров СМО;  
 $\lambda^*, \mu^*$  — возмущенные значения тех же параметров;  
 $\delta_1, \delta_2$  — величины возмущений, причем

$$\delta_1 = \lambda^* - \lambda, \quad \delta_2 = \mu^* - \mu.$$

Характеристика  $F(x)$ , удовлетворяющая условию (П.2.1), называется устойчивой по Ляпунову.

Исследование устойчивости СМО, потоки событий в которых заданы кусочно-степенными функциями вида (П.1.10) проведем для модели с ожиданием вида  $Q/Q/1$ , решение которой приведено в п.9.4. В частности, при определяющих модель функциях  $A(t)$  и  $B(t)$  вида при  $m=0$  и  $m=1$  соответственно имеем

$$\lambda = 1 / \sum_{i=0}^{n_1} a_i b_i;$$

$$\mu = -2 / \sum_{j=0}^{n_2} c_j^2 d_j.$$

В качестве определяющей характеристики модели примем функцию распределения времени ожидания заявки в очереди  $F(x)$ , аналитический вид которой (9.31), причем  $S_1$  — единственный нулевой корень уравнения (9.32).

Обозначим левую часть уравнения (9.31) как  $z(s)$ , тогда выражение (9.31) можно записать следующим образом:

$$F(x) = 1 + z''(0) \frac{s_1 e^{s_1 x}}{2z'(s_1)}. \quad (\text{П.2.2})$$

Проведем исследование для корней уравнения

$$z(s) = 0,$$

причем ограничимся областью существования стационарного режима, т. е.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1. \quad (\text{П.2.3})$$

Так как  $\lambda > 0$  и  $\mu > 0$ , то из (П.2.3) следует, что

$$\mu - \lambda > 0.$$

Тогда, учитывая то свойство функции распределения, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1,$$

включаем, рассматривая (П.2.2), что  $s_1$  и  $z'(s_1)$  должны иметь разные знаки. Кроме того, для любого  $x$  должно соблюдаться неравенство

$$-1 \leq \frac{z''(0) s_1}{2z'(s_1)} e^{s_1 x} \leq 0,$$

что возможно лишь при условии  $s_1 < 0$ .

Относительно функции  $z(s)$  можно сказать следующее:

1.  $z(s)$  непрерывна вместе со всеми своими производными.
2.  $\lim_{s \rightarrow -\infty} z(s) = -\infty$
3.  $z(0) = 0$
4.  $z'(0) = 0$
5.  $z''(0) = 2(1/\lambda - 1/\mu) > 0$

Вид графика функции  $z(s)$  приведен на рис. П.2.1.

Пусть параметры  $\lambda$  и  $\mu$  исследуемой модели получили некоторые «возмущения»  $\delta_1$  и  $\delta_2$  соответственно. Тогда характеристика  $F(x)$  модели имеет «возмущенное» значение  $F^*(x)$ . Нужно оценить расстояние между «возмущенной» и «невозмущенной» характеристиками, если возмущения параметров достаточно малы.

В том случае, если указанное расстояние измерять с помощью метрики Колмогорова, имеем:

$$r = [F^*(x), F(x)] = \max_{x \geq 0} |F^*(x) - F(x)|.$$

Из свойства 1 функции  $z(s)$  следует, что при малых возмущениях  $\delta_1$  и  $\delta_2$  значение корня  $s_1$  также изменится мало, тогда и вся функция (П.2.2) изменится мало. Найдем область устойчивости характеристики  $F(x)$  в смысле введенного определения.

Область  $\rho > 1$  принципиально является областью неустойчивости. Не следует также выбирать параметры вблизи прямой  $\rho = 1$ , так как может случиться следующее.

Пусть

$$\mu = \lambda + \Delta, \quad \Delta > 0$$

и

$$\delta_1 = \Delta, \quad \delta_2 = -\Delta.$$

Тогда

$$\rho^* = \lambda^*/\mu^* = \frac{\lambda + \Delta}{\lambda} > 1,$$

и модель на плоскости параметров выходит из области устойчивости. Таким образом, в рассмотренном примере областью устойчивости в плоскости параметров  $\lambda$  и  $\mu$  (рис. П.2.2) является область  $\Omega$ , ограниченная прямыми  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \mu - \epsilon$ .

Для анализа устойчивости может быть использована метрика Дуба. По этой метрике расстояние  $r$  между функциями распределения измеряется в направлении

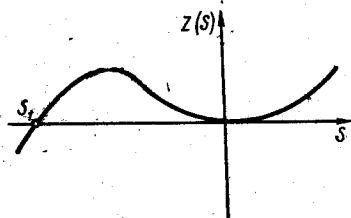


Рис. П.2.1.

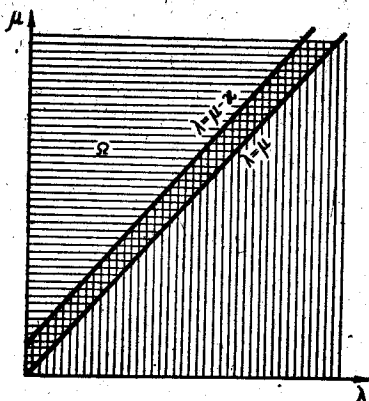


Рис. 11.2.2.

прямой с угловым коэффициентом, равным  $(-1)$ . Очевидно, что если по метрике Колмогорова модель обслуживания функционирует устойчиво относительно некоторой характеристики, то и по метрике Дуба функционирование будет устойчивым, так как расстояние в смысле Колмогорова отличается от расстояния в смысле Дж. Дуба не более, чем в  $\sqrt{2}$  раз.

Расстояние между  $F(x)$  и  $F^*(x)$  можно оценить с помощью критерия  $\omega^2$  вида:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \int_0^{\infty} [F^*(x) - F(x)]^2 dF(x) = \\ &= \int_0^{\infty} [\sigma^* e^{s_1^* x} - \sigma e^{s_1 x}]^2 \sigma s_1 e^{s_1 x} dx, \end{aligned}$$

где

$$\sigma = \frac{z''(0) s_1}{2z'(s_1)}$$

После интегрирования и несложных преобразований получаем, что

$$\omega^2 = -\sigma s_1 \left( \frac{(\sigma^*)^2}{s_1 + 2s_1^*} - \frac{2\sigma\sigma^*}{2s_1 + s_1^*} + \frac{\sigma^2}{3s_1} \right).$$

Если разности  $(s_1^* - s_1)$  и  $(\sigma^* - \sigma)$  малы, то и  $\omega^2$  будет малым, т. е. СМО устойчива.

### Приложение 3

#### Статистические таблицы

Таблица П.1

Границы верхней грани  $\varepsilon$  модуля разности истинной и аппроксимирующей функции распределения критерия А. Н. Колмогорова

Объем выборки $n$ :	Уровень значимости $\alpha$		Объем выборки $n$ :	Уровень значимости $\alpha$	
	0,05 (5%)	0,01 (1%)		0,05 (5%)	0,01 (1%)
5	0,5633	0,6685	50	0,1884	0,2260
10	0,4087	0,4864	60	0,1723	0,2067
15	0,3375	0,4042	70	0,1597	0,1917
20	0,2939	0,3524	80	0,1496	0,1795
25	0,2639	0,3165	90	0,1412	
30	0,2417	0,2898	100	0,1340	
40	0,2101	0,2521			

Таблица П.2

Значения  $\chi_0^2$ 

Число оцененной свободы ( $r - c - 1$ )	Уровни значимости $\alpha$				
	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
1	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6
2	3,22	4,6	6,0	7,8	9,2
3	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3
4	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3
5	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1
6	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8
7	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5
8	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1
9	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7
10	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2
11	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2
13	17,0	19,8	22,4	25,6	27,7
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1
15	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8
19	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2
20	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6
21	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9
22	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3
24	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0
26	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6
28	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3
30	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9

Таблица П.3

Граничные значения  $WE_0$ 

Объем выборки $n$	Уровни значимости $\alpha$			
	0,05		0,1	
	Верхняя граница	Нижняя граница	Верхняя граница	Нижняя граница
7	0,025	0,26	0,033	0,225
8	0,025	0,23	0,032	0,200
9	0,025	0,205	0,031	0,177
10	0,025	0,184	0,030	0,159
11	0,025	0,166	0,030	0,145
12	0,025	0,153	0,029	0,134
13	0,025	0,14	0,028	0,124
14	0,024	0,128	0,027	0,115
15	0,024	0,119	0,026	0,106
16	0,023	0,113	0,025	0,098
17	0,023	0,107	0,024	0,093
18	0,022	0,101	0,024	0,087
19	0,022	0,096	0,023	0,083
20	0,021	0,090	0,023	0,077



Объем выборки $n$	Уровни значимости $\alpha$			
	0,05		0,1	
	Верхняя граница	Нижняя граница	Верхняя граница	Нижняя граница
21	0,02	0,085	0,022	0,074
22	0,02	0,080	0,022	0,069
23	0,019	0,075	0,021	0,065
24	0,019	0,069	0,021	0,062
25	0,018	0,065	0,020	0,058
26	0,018	0,062	0,020	0,056
27	0,017	0,058	0,020	0,054
28	0,017	0,056	0,019	0,052
29	0,016	0,054	0,019	0,050
30	0,016	0,053	0,019	0,048
31	0,016	0,051	0,018	0,047
32	0,015	0,050	0,018	0,045
33	0,015	0,048	0,018	0,044
34	0,014	0,046	0,017	0,043
35	0,014	0,045	0,017	0,041

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### К главе 1

1. *Энциклопедия кибернетики*.— Киев: Главная редакция украинской советской энциклопедии, 1974.
2. *Справочник по системотехнике* /Под ред. Р. Макол.— М.: Сов. радио, 1970.
3. *Нейлор Т.* Машинные имитационные эксперименты в моделях экономических систем.— М.: Мир, 1975.

### К главе 2

1. *Сигорский В. П.* Математический аппарат инженера.— Киев: Техника, 1975.
2. *Емельянов С. В., Борисов В. И. и др.* Модели и методы векторной оптимизации.— Техническая кибернетика. Итоги науки и техники.— М.: Изд. ВИНТИ, 1972, Т. 5.
3. *Подиновский В. В., Гаврилов В. М.* Оптимизация по последовательно применяемым критериям.— М.: Сов. радио, 1975.
4. *Кузьмин И. В.* Оценка эффективности и оптимизация АСКУ.— М.: Сов. радио, 1971.
5. *Хитч Ч.* Руководство обороной.— М.: Сов. радио, 1968.
6. *Беллман В., Заде Л.* Принятие решений в расплывчатых условиях.— В кн.: Вопросы анализа и процедуры принятия решений.— М.: Мир, 1976.
7. *Гусев Л. А., Смирнова И. М.* Размытые множества.— Автоматика и телемеханика, 1973, № 5
8. *Саркисян С. А., Ахундов В. М., Минаев Э. С.* Большие технические системы. Анализ и прогноз развития.— М.: Наука, 1977.
9. *Подиновский В. В.* Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями.— Вычислительная математика и математическая физика, 1975, № 2.
10. *Кухарев Б. И.* Выбор компромиссного решения в условиях многокритериальности.— В сб.: Автоматизированные системы управления и приборы автоматики.— Харьков: Вища школа, 1975, вып. 33.
11. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний.— М.: Физматгиз, 1959.
12. *Автоматизированные системы управления городским хозяйством.* /Под ред. Кузьмина И. В.— Киев: Будівельник, 1978.

### К главе 3

1. *Кухтенко А. И.* Обзор основных направлений развития общей теории систем.— В кн.: Материалы координационного совещания секции технической кибернетики Научного Совета по кибернетике АН УССР.— Киев: АН УССР, 1969.
2. *Калман Р., Фалб П., Арbib М.* Очерки по математической теории систем.— М.: Мир, 1971.

3. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем.— М.: Наука, 1968.
4. Бусленко Н. П., Қалашиников В. В., Коваленко И. Н. Лекции по теории сложных систем.— М.: Сов. радио, 1973.
5. Бусленко В. Н. Автоматизация имитационного моделирования сложных систем.— М.: Наука, 1977.

К главе 4

1. Эйхгофф П. Основы идентификации систем управления.— М.: Мир, 1975.
2. Сейдж Э. П., Мелса Дж. Идентификация систем управления.— М.: Наука, 1974.
3. Гроп Д. Методы идентификации систем.— М.: Мир, 1979.
4. Юсупов Р. М. Элементы теории идентификации технических объектов.— М.: Мир, 1974.
5. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управления.— М.: Наука, 1966.
9. Райбман Н. С. Что такое идентификация.— М.: Наука, 1970.
7. Сукесов Э. А. Синтез входной последовательности для оценки параметров дискретной автоматической системы.— В сб.: Приборостроение.— Киев: 1975, № 19.
8. Кузьмин И. В., Сукесов Э. А. Параметрическая идентификация дискретной нелинейной динамической системы.— В сб.: Вопросы технической диагностики.— Таганрог: 1973, № 8.
9. Денисов В. И. Математическое обеспечение системы ЭВМ — экспериментатор.— М.: Наука, 1977.
10. Эльясберг П. Е. Определение движения по результатам измерений.— М.: Наука, 1976.
11. Аоки М. Оптимизация стохастических систем.— М.: Наука, 1971.
12. Аоки М. Введение в методы оптимизации.— М.: Наука, 1977.
13. Спиди К., Браун Р., Гудвин Дж. Теория управления.— М.: Мир, 1973.
14. Закс Ш. Теория статистических выводов.— М.: Мир, 1975.
15. Евланов Л. Г. Контроль динамических систем.— М.: Наука, 1972.
16. Заде Л., Дезор Ч. Теория линейных систем.— М.: Наука, 1970.
17. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1960.
18. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление.— М.: Энергия, 1973.
19. Красовский А. А., Буков В. Н., Шендрик В. С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами.— М.: Наука, 1977.
20. Растринин Л. А. Системы экстремального управления.— М.: Наука, 1974.
21. Основы автоматического управления /Под. ред. В. С. Пугачева.— М.: Наука, 1968.
22. Моисеев Н. Н., Иванюлов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации — М.: Наука, 1978.
23. Розенвассер Е., Юсупов Р. М. Чувствительность систем автоматического управления.— Л.: Энергия, 1969.
24. Кузьмин И. В., Кедрус В. А. Основы теории информации и кодирования.— Киев: Вища школа, 1977.
25. Беллман Р., Қалаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи.— М.: Мир, 1968.

К главе 5

1. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматки и технической кибернетики.— М.— Л.: Госэнергиздат, 1962.
2. Фельдбаум А. А., Бутковский А. Г. Методы теории автоматического управления.— М.: Наука, 1971.
3. Урмаев А. С. Основы моделирования на АВМ.— М.: Наука, 1978.
4. Справочник по аналоговой вычислительной технике / Под ред. Г. Е. Пухова.— Киев: Техника, 1975.
5. Левин Л. Методы решения технических задач с использованием аналоговых вычислительных машин.— М.: Мир, 1966.
6. Кузьмин И. В. Элементы вероятностных моделей АСУ.— М.: Сов. радио, 1975.
7. Разоренов Г. И. Выбор масштабов при моделировании.— М.: Сов. радио, 1975.
8. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем.— М.: Наука, 1978.
9. Динамика управления ракет с бортовыми цифровыми вычислительными машинами / Под. ред. Хитрика М. С. и Федорова С. М.— М.: Машиностроение, 1972.
10. Кирилов В. В., Моисеев В. С. Аналоговое моделирование динамических систем.— Л.: Машиностроение, 1977.
11. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z — преобразования.— М.: Наука, 1971.
12. Барковский В. В., Захаров В. Н., Шаталов А. С. Методы синтеза систем управления.— М.: Машиностроение, 1969.

К главе 6

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания.— М.: Наука, 1966.
2. Павловский Э. Введение в математическую статистику.— М.: Статистика, 1967.
3. Шторм Р. Теория вероятностей, математическая статистика, статистический контроль качества.— М.: Мир, 1970.
4. Оуэн Д. Сборник статистических таблиц.— М.: Статистика, 1966.
5. Ван-дер-Варден. Математическая статистика.— М.: ИЛ, 1960.
6. Чавчанидзе В. В., Кумсишвили В. А. Об определении законов распределения на основе малого числа наблюдений.— В кн.: Применение вычислительной техники для автоматизации производства.— М.: Машгиз, 1961.
7. Крамер Г. Математические методы статистики.— М.: ИЛ, 1948.
8. Дюге Д. Теоретическая и прикладная статистика.— М.: Наука, 1972.
9. Тутубалин В. Н. Теория вероятностей.— М.: Изд. МГУ, 1972.
10. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений.— М.: Наука, 1969.
11. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах.— М.: Мир, 1969.
12. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей.— М.: Физматгиз, 1961.
13. Голенко Д. М. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах.— М.: Наука, 1965.
14. Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории массового обслуживания.— М.: Машиностроение, 1969.
15. Кендалл Д. Стохастические процессы, встречающиеся в теории очередей и их анализ методом вложенных цепей Маркова.— В сб. переводов: Математика, 1959.

16. *Калашиков В. В., Цицашвили Г. М.* Об устойчивости систем массового обслуживания относительно возмущений определяющих их функций распределения.— *Техническая кибернетика*.— М.: Изв. АН СССР, 1972, № 2.
17. *Андронов А. М., Кордонский Х. Б., Розенблит П. Я.* Применение теории несмещенных оценок в задачах массового обслуживания. *Техническая кибернетика*.— М.: Изв. АН СССР, 1972, № 2.

#### К главе 7

1. *Овчаров Л. А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания.— М.: Машиностроение, 1969.
2. *Кофман А., Крюон Р.* Массовое обслуживание. Теория и приложения.— М.: Мир, 1965.
3. *Васильев В. В.* Прогнозирование надежности и эффективности радиоэлектронных устройств.— М.: Сов. радио, 1970.
4. *Гришков Ю. А., Николаев И. С.* Комплекс основных [функциональных] устройств информационных и управляющих систем промышленного назначения.— В сб.: Управление производством. Труды III Всесоюзного совещания по автоматическому управлению.— М.: Наука, 1967.
5. *Новиков О. А., Петухов С. И.* Прикладные вопросы теории массового обслуживания.— М.: Сов. радио, 1969.
6. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: ИЛ, 1954, т. 2.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М.: Гостехиздат, 1963.

#### К главе 8

1. *Кокс Р. Д., Смит В. Л.* Теория очередей.— М.: Мир, 1967.
2. *Кофман А., Крюон Р.* Массовое обслуживание. Теория и приложения.— М.: Мир, 1965.
3. *Прабху Н.* Методы теории массового обслуживания и управления запасами.— М.: Машиностроение, 1969.
4. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания.— М.: Наука, 1966.
5. *Бицадзе А. Б.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1969.

#### К главе 9

1. *Кендалл Д.* Стохастические процессы, встречающиеся в теории очередей и их анализ методом вложенных цепей Маркова.— В сб. переводов: Математика, 3: 6, 1959.
2. *Мышкис А. Д.* Лекции по высшей математике.— М.: Наука, 1969.
3. *Кофман А., Крюон Р.* Массовое обслуживание. Теория и приложения.— М.: Мир, 1965.
4. *Бокучава И. Т., Донадзе Н. К., Гелдиашвили Н. И.* О выходящем потоке системы с потерями.— В сб.: Сообщения АН Груз.ССР, 1969, № 1.
5. *Кокс Р. Д., Смит В. Л.* Теория восстановления.— М.: Сов. радио, 1967.
6. *Такач Л.* Некоторые вероятностные задачи в телефонии.— В сб. переводов: Математика, 1960.
7. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей.— М.: Физматгиз, 1961.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М.: Гостехиздат, 1963.
9. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966.
10. *Риордан Дж.* Вероятностные системы обслуживания.— М.: Связь, 1966.
11. *Макаров И. Д.* Дополнительные главы математического анализа.— М.: Просвещение, 1968.

К главе 10

1. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание.— М.: Мир, 1965.
2. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей.— М.: Физматгиз, 1961.
3. Прабух Н. Методы теории массового обслуживания и управления запасами.— М.: Машиностроение, 1969.
4. Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания.— М.: Наука, 1966.
5. Риордан Дж. Вероятностные системы обслуживания.— М.: Связь, 1966.
6. Такач Л. Некоторые вероятностные задачи в телефонии.— В сб. переводов: Математика, 4:6, 1960.
7. Krakowski M. Conservation methods in queing theory. «Rev. franc. automat. inform., rech. oper.», 1973, 7, № V—1. 63—83.
8. Бицадзе А. Б. Основы теории аналитических функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1969.

К главе 11

1. Такач Л. Некоторые вероятностные задачи в телефонии.— В сб. переводов: Математика, 4:6, 4:6, 1960.
2. Риордан Дж. Вероятностные системы обслуживания.— М.: Связь, 1966.
3. S. K. Gupta. Queues with hyper — Poisson input and exponential service time distribution with state dependent arrival and service rates, «Operat Res.», 15, № 5, 1967.

К главе 12

1. Кемени Д., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова.— М.: Наука, 1970.
2. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей.— М.: Физматгиз, 1961.
3. Бицадзе А. Б. Основы теории аналитических функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1969.
4. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание. Теория и приложения.— М.: Мир, 1965.
5. Кендалл Д. Стохастические процессы, встречающиеся в теории очередей и их анализ методом вложенных цепей Маркова.— В сб. переводов: Математика, 3:6, 1959.

К главе 13

1. Попов В. А., Березюк Н. Т. Некоторые вопросы выбора структуры управляющей машины для летательных аппаратов.— В сб.: Самолетостроение и техника воздушного флота.— Харьков: Изд. Харьковского Гос. университета, 1967, вып. 12.
2. Чумаченко В. Ф., Попов В. А., Литвинов М. Л. Расчет характеристик цифровых вычислительных систем.— Харьков: Изд. ХВКИУ, 1971.
3. Кок Дж., Колский К. Г. Виртуальная память вычислительной машины Стретч.— Кибернетический сборник.— М.: ИЛ, 1964, вып. 5.
4. Кемени Д., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова.— М.: Наука, 1970.
5. Чумаченко В. Ф., Попов В. А. Эффективность логических структур специализированных вычислительных машин.— Харьков: Изд. ХВКИУ, 1970.
6. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах.— М.: Мир, 1969.
7. Семенов О. И. Анализ вычислительной системы с общей оперативной памятью.— В сб.: Вопросы теории структур специализированных машин.— М.: Сов. радио, 1966.
8. Запоминающие устройства современных ЭЦВМ.— М.: Мир, 1968.
9. Зуховицкий С. И., Авдеева С. И. Линейное и выпуклое программирование.— М.: Наука, 1967.

#### К главе 14

1. Бусленко Н. Н. Моделирование сложных систем.— М. : Наука, 1968.
2. Голенко Д. М. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах.— М. : Наука, 1965.
3. Калашников В. В., Цициашвили Г. М. Об устойчивости систем массового обслуживания относительно возмущений определяющих их функций распределения.— Техническая кибернетика.— М. : Изв. АН СССР, 1972, № 2.
4. Дуб Дж. Вероятностные процессы.— М. : ИЛ, 1956.

#### К главе 15

1. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем.— М. : Наука, 1968.
2. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех.— М. : Сов. радио, 1960.
3. Каценбоген М. С. Характеристики обнаружения.— М. : Сов. радио, 1965.
4. Вудворд Ф. М. Теория вероятностей и теория информации с применением в радиолокации.— М. : Сов. радио, 1955.
5. Янов Ю. И. О логических схемах алгоритмов.— В сб. Проблемы кибернетики.— М. : Физматгиз, 1958, вып. 1.
6. Крицкий Н. А. Равносильные преобразования алгоритмов и программирование.— М. : Сов. радио, 1970.
7. Новик И. Б. О моделировании сложных систем.— М. : Мысль, 1965.
8. Теоретические основы радиолокации / Под ред. Я. Д. Ширмана.— М. : Сов. радио, 1970.
9. Вакин С. А., Шустов Л. Н. Основы радиопротиводействия и радиотехнической разведки.— М. : Сов. радио, 1968.
10. Радиолокационные устройства / Под ред. В. В. Григорина-Рябова.— М. : Сов. радио, 1970.

#### К главе 16

1. Теоретические основы радиолокации / Под ред. Я. Д. Ширмана.— М. : Сов. радио, 1970.
2. Радиолокационные устройства / Под ред. В. В. Григорина-Рябова.— М. : Сов. радио, 1970.

#### К главе 17

1. Теоретические основы радиолокации / Под ред. Я. Д. Ширмана.— М. : Сов. радио, 1970.
2. Радиолокационные устройства / Под ред. В. В. Григорина-Рябова.— М. : Сов. радио, 1970.
3. Теоретические основы радиолокации / Под ред. В. В. Дулевича.— М. : Сов. радио, 1964.
4. Современная радиолокация. / Под ред. Ю. Б. Кобзарева.— М. : Сов. радио, 1969.
5. Леонов А. И., Фомичев К. И. Моноимпульсная радиолокация.— М. : Сов. радио, 1970.
6. Долгополов В. Н. Генерирование стационарных случайных сигналов с заданными статистическими характеристиками.— Таганрог: Изд. Таганрогского радиотехнического института, 1970.

#### К главе 18

1. Сверчак Д. В. Дистанционные передачи.— М. : Энергия, 1966.
2. Филиппов В. Г. Цифраторы перемещений.— М. : Воениздат, 1965.
3. Дроздов Е. А., Пятибратов А. П. Автоматическое преобразование и кодирование информации.— М. : Сов. радио, 1964.

4. Гитис Э. И. Автоматика радиоустановок.— М.: Энергия, 1964.
5. Гитис Э. И. Преобразователи информации для электронных цифровых вычислительных устройств.— М.: Госэнергиздат, 1961.
6. Дыхненко Л. М., Крюкова Н. А., Матвеева Л. Т. Устройство дистанционной передачи информации от ЭЦВМ к управляемым объектам.— Приборы и техника эксперимента.— М.: АН СССР, 1971, № 3.
7. Современная радиолокация / Под ред. Ю. Б. Кобзарева.— М.: Сов. радио, 1969.

К главе 19

1. Дроздов Е. А., Пятибратов А. П. Автоматическое преобразование и кодирование информации.— М.: Сов. радио, 1964.
2. Гитис Э. И. Преобразователи информации для электронных цифровых вычислительных устройств.— М.: Госэнергиздат, 1961.
3. Дыхненко Л. М., Крюкова Н. А., Мушинский Б. В., Щеголев В. А. Преобразователь код-временной интервал на кремниевых интегральных схемах.— Приборы и техника эксперимента.— М.: АН СССР, 1970, № 5.
4. Туннельные диоды в вычислительной технике.— Труды института электроники и вычислительной техники АН Латв. ССР.— Рига: Зинатне, 1969.
5. Пысин В. Д. Блокннг-генераторы с управлением длительностью импульса.— М.: Энергия, 1970.

К главе 20

1. Дыхненко Л. М. Анализ точности работы сумматора на сопротивлениях.— Сб. трудов ВВИА им. Жуковского Г. Е., 1961, вып. 863.
2. Гуткин Л. С., Лебедев В. Л., Сифоров В. И. Радиоприемные устройства.— М.: Сов. радио, 1961.
3. Крохин В. В. Элементы радиоприемных устройств СВЧ.— М.: Сов. радио, 1964.
4. Чистяков Н. И., Сидоров М. В., Мельников В. С. Радиоприемные устройства.— М.: Госиздат. литературы по вопросам связи и радио, 1959.
5. Вакин С. А., Шустов Л. Н. Основы радиопротиводействия и радиотехнической разведки.— М.: Сов. радио, 1968.

К главе 21

1. Левин Б. Р. Статистическая радиотехника.— М.: Сов. радио, 1968.
2. Бобнев М. П. Генерирование случайных сигналов и измерение их параметров.— М.: Энергия, 1966.
3. Веркиенко Ю. В. Генератор равномерно-распределенных чисел.— Приборостроение, 1967, № 8.
4. Захаров В. М. Датчик двоичных случайных чисел.— Автоматика и телемеханика, 1969, № 1.
5. Корн Г. А. Моделирование случайных процессов на аналоговых и аналого-цифровых машинах.— М.: Мир, 1968.
6. Петрович П. Т., Размахин М. К. Системы связи с шумоподобными сигналами.— М.: Сов. радио, 1969.
7. Долгополов В. Н. Генерирование стационарных случайных сигналов с заданными статистическими характеристиками.— Таганрог, Изд. Таганрогского радиотехнического института, 1970.
8. Кладов Г. К., Ляховицкий Е. М., Шпильберг А. Я. Метод получения псевдослучайных функций с заданными характеристиками.— Кибернетика.— Киев, АН УССР, 1969, № 1.
9. Панов Д. Н., Долгополов В. Н., Гондарев В. П. К вопросу генерирования стационарных эргодических случайных процессов с заданными статистическими характеристиками.— Приборостроение, 1971, № 2.



10. Жовинский В. Н. Генерирование шумов для исследования автоматических систем.— М.: Энергия, 1968.
11. Фурманов И. А., Поздняков Г. И. Методы моделирования случайных процессов.— Приборостроение, 1967, № 10.
12. Лившиц Н. А., Пугачев В. Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления.— М.: Сов. радио, 1966.
13. Долгополов В. Н. и др. Генератор нормальных дискретных случайных процессов с заданной функцией корреляции.— В кн.: Проблемы преобразования информации и синтез стохастических процессов. Таганрог, Изд. Таганрогского радиотехнического института, 1971, № 1.
14. Батраченко В. С., Дыхненко Л. М., Завязкин Ю. И. Аппаратный способ логарифмирования в двоичной системе.— Сб. трудов ВЦ ВГУ, 1970, № 4.
15. Ратков Л. А. Статистические методы исследования на электронных моделях.— М.: Энергия, 1967.
16. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике.— М.: Сов. радио, 1971.
17. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968.
18. Большев Л. Н. О преобразовании случайных величин.— Теория вероятности и ее применение, 1959, 4, № 2.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	3
<b>Часть первая</b>	
<b>ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ</b>	
<b>Глава 1. Общие положения и определения . . . . .</b>	<b>5</b>
1.1. Содержательный анализ понятия «моделирование системы» . . . . .	5
1.2. Классификация моделей . . . . .	8
<b>Глава 2. Формирование критериев оценки эффективности и оптимизации</b>	<b>13</b>
2.1. Определение системы. Формализация цели, критериев, ограничений	13
2.2. Проблема многокритериальной оптимизации . . . . .	17
2.3. Определение области компромиссов . . . . .	18
2.4. Функции принадлежности частных критериев . . . . .	21
2.5. Формирование обобщенного критерия оценки эффективности и оптимизации . . . . .	23
<b>Глава 3. Моделирование агрегативных систем . . . . .</b>	<b>30</b>
3.1. ММ обобщенной динамической системы . . . . .	30
3.2. Определение и функционирование агрегата . . . . .	33
3.3. Агрегативные системы . . . . .	38
<b>Глава 4. Идентификация моделей систем . . . . .</b>	<b>42</b>
4.1. Определение, основные понятия и особенности задач идентификации. . . . .	42
4.2. Классификация методов идентификации . . . . .	46
4.3. Математическая постановка задачи идентификации . . . . .	51
4.4. Идентификация параметров методом наименьших квадратов . . . . .	57
4.5. Рекуррентная идентификация дискретных динамических систем . . . . .	66
4.6. Синтез входной последовательности для оценки параметров дискретной динамической системы, заданной в форме разностного уравнения . . . . .	72
4.7. Одновременная оценка параметров и состояния. Квазилинеаризация . . . . .	74
<b>Глава 5. Моделирование систем на ЭВМ . . . . .</b>	<b>79</b>
5.1. Принципы исследования процессов на АСУ . . . . .	79
5.2. Программирование дифференциальных уравнений на АВМ . . . . .	81
5.3. Масштабирование задач для ЭВМ . . . . .	85

5.4. Матричный метод приведения системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами к машинному виду . . . . .	91
5.5. Моделирование систем на ЭВМ . . . . .	96

**Часть вторая**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АСУ**

<b>Глава 6. Построение вероятностных моделей функционирования АСУ</b>	
6.1. Представление информационных потоков в моделях управляющих систем . . . . .	109
6.2. Построение эмпирической модели потока . . . . .	113
6.3. Параметризация аппроксимирующих теоретических функций распределения . . . . .	115
6.4. Функции распределения для задания потоков событий и их свойства . . . . .	118
6.5. Оценка точности аппроксимации с помощью критериев согласия . . . . .	124
6.6. Некоторые аспекты выбора вида аппроксимирующих распределений при построении моделей АСУ . . . . .	127
<b>Глава 7. Оценка эффективности устройств АСУ на основе пуассоновских моделей обслуживания</b>	
7.1. Методика исследования моделей, описываемых марковскими графами . . . . .	130
7.2. Расчет характеристик функционирования многолинейной системы с ориентированными входными потоками . . . . .	133
7.3. Определение характеристик устройств сопряжения с объектом на основе моделей обслуживания с неординарными потоками . . . . .	138
7.4. Оценка переходного режима реализации алгоритмов управления . . . . .	145
<b>Глава 8. Нахождение характеристик моделей устройств АСУ с использованием метода фаз</b>	
8.1. Модели с эрланговскими потоками событий . . . . .	149
8.2. Модели с гиперэкспоненциальными потоками событий . . . . .	154
8.3. Модели с эрланговским входным потоком и гиперэкспоненциальным распределением времени обслуживания . . . . .	156
8.4. Модели с гиперэкспоненциальным входным потоком и эрланговским распределением времени обслуживания . . . . .	159
<b>Глава 9. Определение характеристик непуассоновских моделей АСУ</b>	
9.1. Методика исследования систем обслуживания с кусочными функциями распределения . . . . .	163
9.2. Нахождение характеристик обслуживания методом рекуррентных коэффициентов . . . . .	167
9.3. Определение вероятностей состояний моделей обслуживания методом Кендалла . . . . .	169
9.4. Использование метода Линдли в моделях с кусочными распределениями . . . . .	171
<b>Глава 10. Модели устройств АСУ, определяемые кусочными и эрланговскими распределениями</b>	
10.1. Определение характеристик моделей с ограниченным числом мест ожидания, учитывающих распределения времени реализации алгоритмов кусочными функциями распределения . . . . .	174

10.2. Определение характеристик моделей с ожиданием, учитывающих распределения времени реализации алгоритмов кусочными функциями распределения	179
10.3. Характеристики моделей с ограниченным числом мест ожидания и кусочными функциями распределения для задания входного информационного потока	181
10.4. Характеристики моделей с ожиданием и кусочным заданием распределений входных информационных потоков	186
<b>Глава 11. Модели устройств АСУ с кусочными и гиперэкспоненциальными распределениями</b>	189
11.1. Системы обслуживания с ограниченным числом мест ожидания и кусочными функциями распределения для потока обслуживания	189
11.2. Системы с ограниченным числом мест ожидания и кусочными функциями распределения для входного потока	194
11.3. Модели обслуживания с ожиданием	197
<b>Глава 12. Оценка эффективности устройств сопряжения с объектом с использованием непуассоновских моделей с неординарными потоками и кусочными функциями распределения</b>	199
12.1. Расчет характеристик УСО с помощью кусочных функций для потока обслуживания	199
12.2. Определение параметров УСО с учетом вида потоков преобразуемой информации на основе кусочной аппроксимации	204
12.3. Анализ временных характеристик работы УСО с использованием кусочной аппроксимации входного потока и распределения времени преобразования информации	207
<b>Глава 13. Применение вероятностных моделей для анализа эффективности построения структур АСУ</b>	210
13.1. Определение характеристик управляющей ЭВМ со сверхоперативной памятью	210
13.2. Оценка влияния конечного быстродействия регистров сверхоперативной памяти на эффективное быстродействие устройств вычислительной системы	218
13.3. Расчет емкостей блоков памяти с различной элементной базой	220
13.4. Расчет количественного состава выполняемых операций в специализированных цифровых вычислительных машинах АСУ	222
<b>Глава 14. Использование методов вероятностного моделирования для нахождения решений моделей АСУ</b>	228
14.1. Особенности решений, получаемых методом статистических испытаний	228
14.2. Синтез моделирующих алгоритмов	229
14.3. Определение характеристик моделей обслуживания методом моделирования	235

## Часть третья

### СМЕШАННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СИСТЕМ

<b>Глава 15. Основы построения систем смешанного моделирования</b> . . . . .	240
15.1. Предмет и задачи метода смешанного моделирования . . . . .	240
15.2. Общие требования к установке смешанного моделирования . . . . .	246
15.3. Характеристики сигналов, подлежащих воспроизведению . . . . .	249
15.4. Требования к точности воспроизведения параметров сигналов . . . . .	252
15.5. Структура установки смешанного моделирования . . . . .	256
<b>Глава 16. Физическая модель установки смешанного моделирования</b> . . . . .	261
16.1. Требования к физической модели . . . . .	261
16.2. Возможные пути оптимизации структуры физической модели . . . . .	263
16.3. Структура физической модели . . . . .	270
16.4. Требования к элементам физической модели . . . . .	272
<b>Глава 17. Математическая модель установки смешанного моделирования</b> . . . . .	276
17.1. Требования к математической модели . . . . .	276
17.2. Моделирование радиолокационных характеристик объектов . . . . .	278
17.3. Моделирование диаграмм направленности антенн РЛС . . . . .	286
17.4. Датчик исходных данных . . . . .	291
<b>Глава 18. Устройства сопряжения установки смешанного моделирования</b> . . . . .	297
18.1. Синхронизатор . . . . .	298
18.2. Датчик текущего положения антенн . . . . .	300
18.3. Устройство выдачи результатов . . . . .	302
<b>Глава 19. Управление временными параметрами сигналов</b> . . . . .	307
19.1. Способы автоматического управления задержкой сигнала . . . . .	307
19.2. Формирование длительности сигнала . . . . .	310
<b>Глава 20. Генерирование сигналов</b> . . . . .	313
20.1. Воспроизведение сигналов в широком диапазоне несущих частот . . . . .	313
20.2. Генератор импульсного радиосигнала . . . . .	320
20.3. Генератор шума . . . . .	323
<b>Глава 21. Генерирование случайных функций</b> . . . . .	326
21.1. Методы генерирования случайных чисел . . . . .	327
21.2. Генерирование стационарных случайных процессов с заданными законами распределения и функциями корреляции . . . . .	332
21.3. Цифровой генератор случайных функций . . . . .	338

<i>Приложения</i> . . . . .	340
<i>Приложение 1. Обоснование кусочно-степенной аппроксимации</i> . . . . .	340
<i>Приложение 2. Исследование устойчивости решений моделей обслуживания с кусочными аппроксимирующими функциями распределения</i> . . . . .	342
<i>Приложение 3. Статистические таблицы</i> . . . . .	344
<i>Список литературы</i> . . . . .	347
<i>Оглавление</i> . . . . .	355

Леонид Михайлович Дыхнецко,  
Валентин Федорович Кабаненко,  
Иван Васильевич Кузьмин,  
Михаил Леонидович Литвинов,  
Эдуард Георгиевич Петров,  
Вячеслав Алексеевич Попов,  
Эдуард Андреевич Сукесов

## ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Под. общ. ред. д-ра техн. наук. *И. В. Кузьмина*

Редактор Ж. Г. Давиденко  
Переплет художника Г. М. Балюна  
Художественный редактор С. П. Духленко  
Технический редактор Л. Ф. Волкова  
Корректоры Куроченко С. Я., Синькевич И. В.

Информ. бланк 5836.

Сдано в набор 23.04.80. Подп. в печать 05.01.81. БФ 11004.  
Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага типогр. № 2. Лит. гарн. Вмс.  
печать. 22,5 печ. л. 22,5 кр.-отт. 22,16 уч.-изд. л.  
Тираж 5500 экз. Изд. № 4915. Зак. № 1573. Цена  
1 р. 10 к.

Главное издательство издательского объединения  
«Вища школа»  
252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7.

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграф-книга» Госкомиздата УССР, г. Киев, Довженко, 3 в Киевской книжной типографии научной книги, ул. Репина, 4, Зак. 1-61.