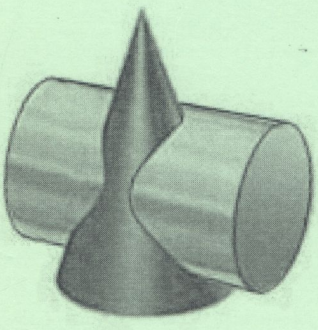
Я. Г. Скорюкова

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

Частина 1



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Я. Г. Скорюкова

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА
Частина 1

Курс лекцій

Вінниця
ВНТУ
2015

УДК 514.18
ББК [22.151.3]я73
С44

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (протокол № 11 від 30.06.2011 р.).

Рецензенти:
В. Ф. Анісімов, доктор технічних наук професор
В. П. Кожем'яко, доктор технічних наук професор
А. С. Моргун, доктор технічних наук професор

Скорюкова, Я. Г.
С44 Інженерна графіка. Частина 1 : курс лекцій / Я. Г. Скорюкова. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 102 с.

В курсі лекцій розглянуті основні теоретичні положення першої частини курсу «Інженерна графіка», надані методи побудови тривимірних об'єктів на площині, наведені приклади розв'язання метричних та позиційних задач. Матеріал викладено відповідно до існуючого плану лекцій. Конспект підготовлено для студентів бакалаврських напрямів підготовки 6.050201 – «Системна інженерія», 6.050202 – «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», 6.051004 – «Оптотехніка», 6.050801 – «Мікро- та наноелектроніка», 6.050802 – «Електронні пристрої та системи».

УДК 514.18
ББК [22.151.3]я73

ЗМІСТ

СИМВОЛИ ТА ПОЗНАЧЕННЯ

1. Точки – A, B, C, D, E,…, Z; 1, 2, 3, …
2. Прямі – a, b, c, d, …z.
3. Горизонталь – h, фронталь – f.
4. Площини – α, β, γ, δ, …
5. Поверхні – A, B, Γ, Δ, Θ, Λ, Π,…
6. Кути – α, β, γ, δ, …
7. Площини проекцій: Π_1 – горизонтальна, Π_2 – фронтальна, Π_3 – профільна.
8. $\cap$ перетин фігур.
9. $\parallel$ – паралельність.
10. $\equiv$ – збіг.
11. Осі проекцій: X_{12} – поділяє площини проекцій Π_1 та Π_2, Y_{13} – поділяє площини проекцій Π_1 та Π_3, Z_{23} – поділяє площини проекцій Π_2 та Π_3.
12. Позначення проекцій фігур такі ж самі, але з доданням індексу відповідної площини проекцій.

ВСТУП

Інженерна графіка (engineering graphics) – це базова інженерна дисципліна, яка складається з двох основних частин: нарисної геометрії та технічного креслення.

Нарисна геометрія (descriptive geometry) є теоретичною основою інженерної графіки і являє собою розділ геометрії, в якому вивчають способи подання просторових фігур за допомогою їхніх зображень на площині або поверхні.

Предметом нарисної геометрії є розробка методів побудови та читання креслень; розробка способів розв'язування геометричних задач за допомогою креслень; розробка методів геометричного моделювання. Для розв'язання задач методами геометричного моделювання в різних галузях науки і техніки методи нарисної геометрії доповнюються методами аналітичної геометрії та геометричного моделювання.

Технічне креслення (technical drawing) – розділ зі створення стандартизованих технічних рисунків, що виконуються фахівцями інженерами, архітекторами тощо.

Бурхливий розвиток комп'ютерної техніки обумовив розвиток графічних програмних продуктів, що дозволило автоматизувати процес креслення. Це привело до появи такого напрямку інженерної графіки як комп'ютерна графіка.

Комп'ютерна графіка (computer graphics) – це сукупність технічних, програмних та мовних засобів і методів зв'язку користувача з ЕОМ на рівні зорових образів при розв'язуванні різних задач.

Новітні технології дозволяють реалізувати класичні підходи нарисної геометрії шляхом застосування сучасних програмних продуктів. Це відкриває нові перспективи розвитку інженерної графіки.

Короткий історичний огляд

Сучасний інженерний рисунок має довгу історію свого розвитку. Першими творцями зображень, що близькі до зорового сприйняття людиною були художники. Перші рисунки, близькі до сучасних прямокутних проекцій, трапляються вже на стінах давніх храмів та палаців Єгипту та Ассирії. Першою з відомих робіт з перспективи була праця Евкліда, яка була написана за 300 років до н.е., що містила 61 теорему та 12 аксіом. Побудови Давньої Греції, споруди Давнього Риму, піраміди Єгипту свідчать про те, що вже тоді спеціалісти займалися розробкою проектних креслень.

В 1799 р. з'явилась знаменита книга „Geometre descriptive" Гаспара Монжа (1746 – 1818 рр.), видатного французького геометра, інженера та політичного діяча. В ній окремі проекції на горизонтальні та вертикальні площини були зведені в єдину систему. Ця система стала основою сучасної інженерної графіки.

З певних обставин російська графіка на відміну від заходу розвивалася дещо в іншому напрямку. Перші креслення, якими користувалися на території Київської Русі до нас не дійшли. Але на підставі пам'ятників архітектури, що збереглись по наш час, можна припустити, що першими кресленнями були розмітки на землі планів будівель або розмітка на матеріалі приблизної форми майбутніх виробів. Вочевидь, що вже в X – XII ст. російські художники-іконописці були знайомі з перспективою, але їх трактовка була зворотною, тобто паралельні прямі не сходилися в точці сходу, а розходилися. Зодчі Київської Русі створили Софію Київську та Золоті Ворота, використовуючи певні правила, які були укладені в „Будівельний статут" Ярославом Мудрим.

В XVIII ст. російські інженери, художники, архітектори вже виконували найскладніші креслення для різних галузей промисловості: суднобудівництва, гідротехніки та ін. Проекти винахідників Кулібіна, Ползунова, архітекторів Казакова, Баженова, Огарьова науково підтверджують наявність розвитку різних методів зображень.

В Росії перший курс нарисної геометрії був прочитаний учнем Г. Монжа – Карлом Потьє в інституті інженерів шляхів сполучення. В 1821 році вийшов перший російський підручник з нарисної геометрії Я. О. Севастьянова (1796 – 1849 рр.), який поклав початок нарисної геометрії на рівних правах як науки і рівних умовах із вченими інших країн. Послідовниками Севастьянова стали М. І. Макаров (1824 – 1904 рр.), В. І. Курдюмов (1853 – 1904 рр.), професори М. О. Ринін (1877 – 1942 рр.), О. І. Добряков (1895 – 1942 рр.).

Новий етап розвитку інженерної графіки почався в 40-ві роки XX сторіччя та пов'язаний з іменами професорів М. Ф. Четверухіна (1891 – 1974 рр.) та С. М. Колотова (1880 – 1965 рр.), коли був опублікований цілий ряд наукових праць. Подальший розвиток науки пов'язаний із застосуванням апарату нарисної геометрії до прикладних задач в різних галузях науки та техніки.

Безумовно, вивчення інженерної графіки взагалі, та, зокрема, нарисної геометрії сприяє всебічному розвитку особистості, оскільки дає можливість набувати та вдосконалювати просторову уяву та просторове образне мислення.

ТЕМА 1 МЕТОДИ ПРОЕКЦІЮВАННЯ. ПРОЕКЦІЇ ТОЧКИ

Методи проекціювання (method of projection)

Основою нарисної геометрії є метод проекціювання, який дає змогу діставати зображення просторових фігур на площині (plane) чи поверхні (surface).

Центральне проекціювання (central projection)

Якщо взяти довільну точку (point) *S* і сполучити її з іншими точками *A*, *B*, *C*, то дістанемо в'язку прямих. Точки перетину отриманих прямих з площиною *П'* є проекціями цих точок на вказану площину (рис. 1.1).

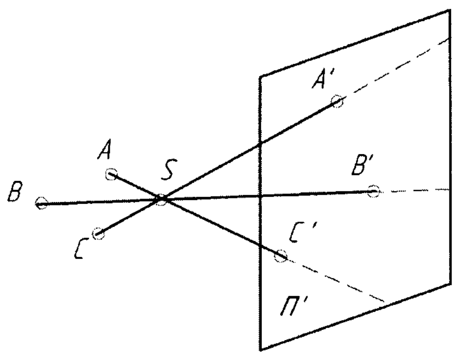


Рисунок 1.1 – Центральне проекціювання точок *A, B, C* на площину *П'* (*S* – центр проекціювання; *SA*, *SB*, *SC* – проекціювальні промені; *П'* – площина проекцій; *A*, *B*, *C* – точки; A', *B'*, *C'* – проекції точок на *П'*)

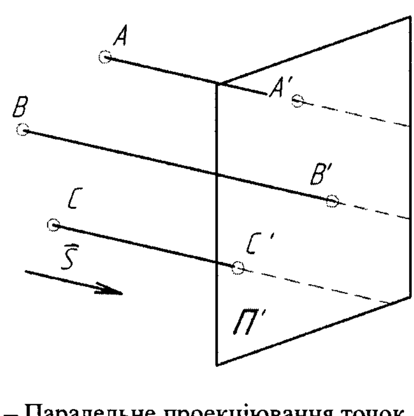


Рисунок 1.2 – Паралельне проекціювання точок *A*, *B*, *C* на площину *П* (*AA'*, *BB'*, *CC'* – проекціювальні промені; *П'* – площина проекцій; *A*, *B*, *C* – точки; *A'*, *B'*, *C'* – проекції точок на *П'*)

Паралельне проекціювання (parallel projection)

При паралельному проекціюванні центр проекцій відсутній (або знаходиться в нескінченності), але є вектор напряму проекціювання. Паралельне проекціювання може бути прямокутним (ортогональним) (orthogonal projection) або косокутним в залежності від кута нахилу проекціювального променя до площини проекцій (рис. 1.2).

Проекціювальні системи

Залежно від положення площин проекціювання та центрів проекціювання можна діставати різні проекціювально-зображувальні системи. Найбільш поширеною є система прямокутних ортогональних проекцій або метод Монжа. За цим методом вибираються площини, які перпендикулярні одна до одної (рис. 1.3).

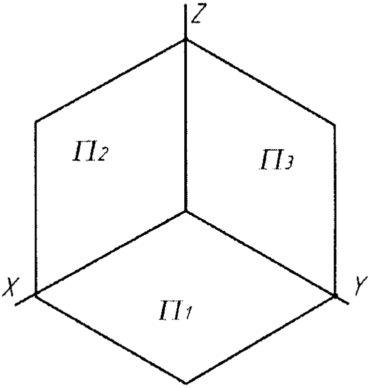


Рисунок 1.3 – Система площин проекцій при ортогональному проекціюванні ($П_1$ – горизонтальна площина проекцій; $П_2$ – фронтальна площина проекцій; $П_3$ – профільна площина проекцій; X – вісь абсцис; Y – вісь ординат; Z – вісь аплікат)

Проекції точки (foot)

Проекцією точки на площину є точка. Якщо помістити точку A в систему трьох взаємно перпендикулярних площин проекцій та спроекціювати на кожну з них, то отримаємо три проекції точки: горизонтальну A_1 (проекція на $П_1$), фронтальну A_2 (проекція на $П_2$), профільну A_3 (проекція на $П_3$). На рис. 1.4 подана просторова модель проекцій точки A. Якщо площину проекцій $П_1$ обернути навколо осі $X_{1,2}$ на кут 90° за часовою стрілкою до суміщення з площиною проекцій $П_2$, а площину проекцій $П_3$ обернути навколо осі (axis) $Z_{2,3}$ проти часової стрілки на кут 90° також до суміщення з площиною проекцій $П_2$ (рис. 1.5), то отримаємо плоске зображення проекцій точки A (рис. 1.6). Отримане креслення називається комплексним кресленням точки або має назву

епюр Монжа (за ім'ям видатного французького геометра, який запропонував таку систему).

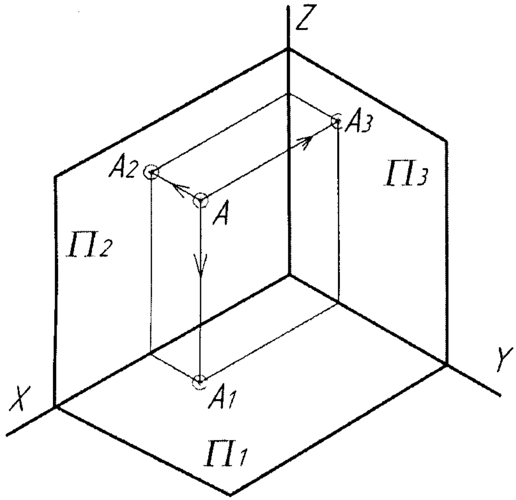


Рисунок 1.4 – Перетворення просторової моделі системи площин проекцій в проекційне креслення (просторова модель)

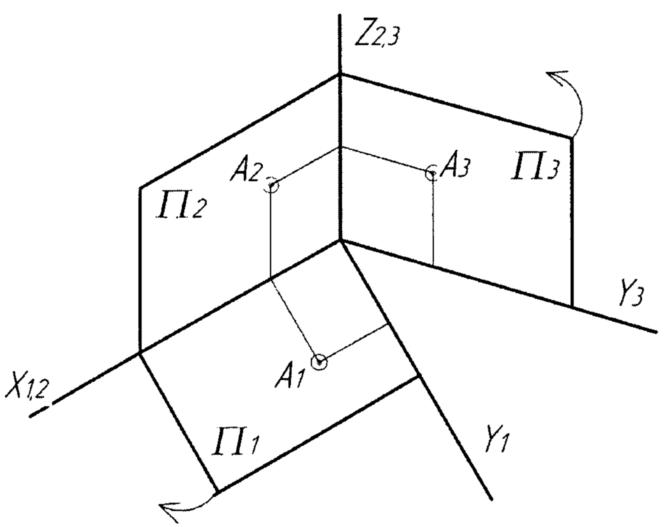


Рисунок 1.5 – Перетворення просторової моделі системи площин проекцій в проекційне креслення (проміжний етап трансформації)

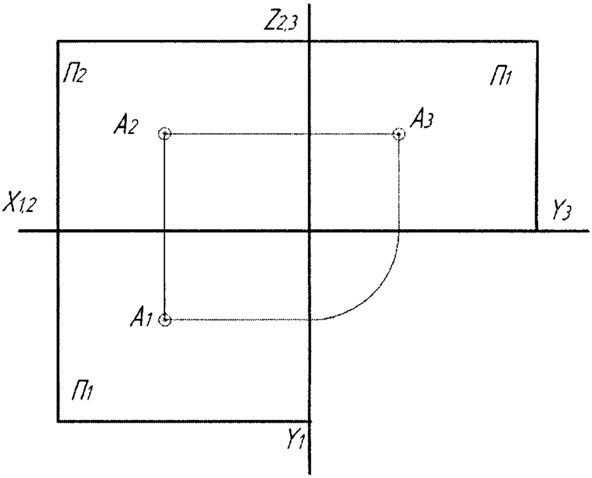


Рисунок 1.6 – Перетворення просторової моделі системи площин проекцій в проекційне креслення

Чверті простору

Кожна площина проекцій, будучи нескінченною, поділяє простір на дві частини (два півпростори). Отже, три площини проекцій, що взаємно перпендикулярні, поділяють простір на вісім частин (рис. 1.7).

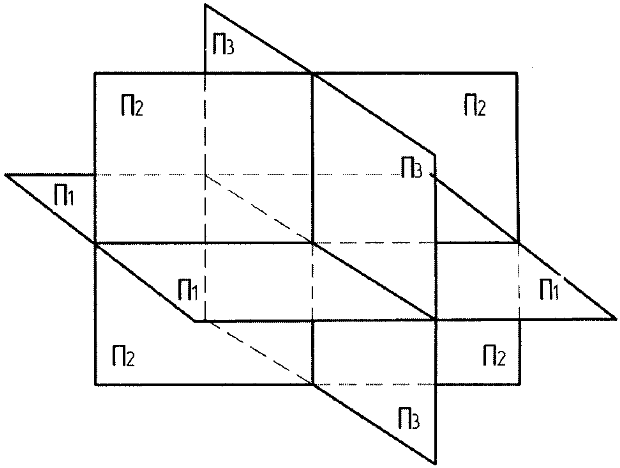


Рисунок 1.7 – Поділ простору на вісім частин

Якщо розглядати простір тільки при додатних значеннях по осі абсцис, то утворюються тільки чотири частини (октанти). Розглянемо положення точок, які знаходяться в різних октантах простору та розташування їх відповідних проекцій (рис. 1.8).

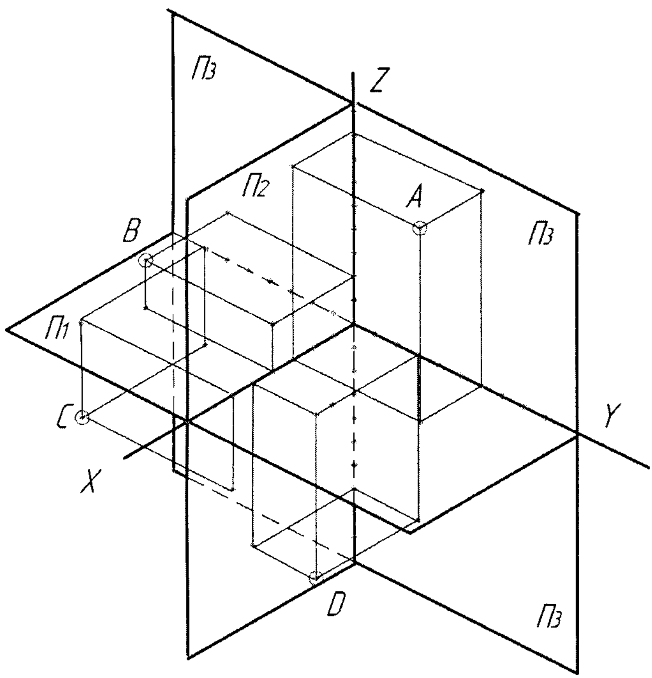


Рисунок 1.8 – Проекції точок, що знаходяться в різних чвертях простору (наочне зображення)

Точка *A* належить до першого октанта і має всі додатні координати. Точка *B* належить до другого октанта і має додатні значення по осях абсцис та аплікат, від'ємні по осі ординат. Точка *C* знаходиться в третьому октанті, при цьому має додатне значення абсцис та від'ємне – ординат і аплікат. Точка *D* знаходиться в четвертому октанті і при додатних абсцисах та ординатах має від'ємну аплікату. Отже, можна записати:

$A \subset$ 1 чверті простору; $A\ (x,\ y,\ z)$;

$B \subset$ 2 чверті простору; $B\ (x,\ -y,\ z)$;

$C \subset$ 3 чверті простору; $C\ (x,\ -y,\ -z)$;

$D \subset$ 4 чверті простору; $D\ (x,\ y,\ -z)$.

На рис. 1.9 подані епюри точок, що знаходяться в різних чвертях простору і відповідають просторовій моделі рис.1.8.

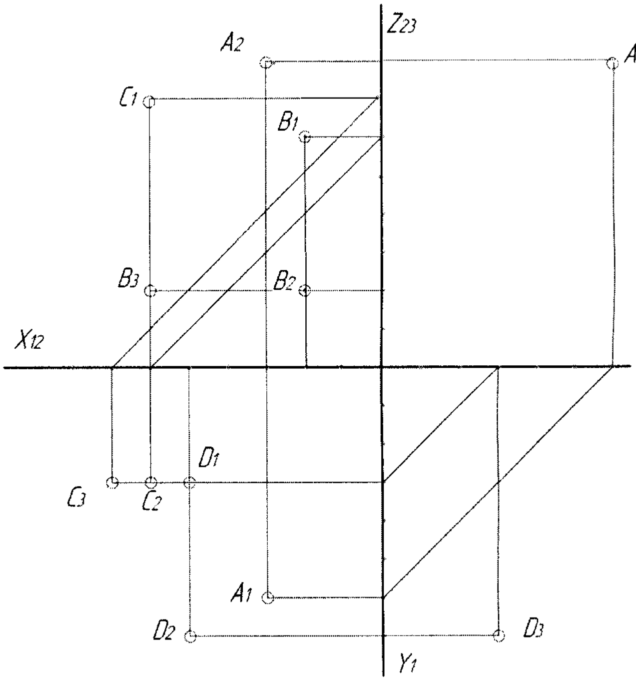


Рисунок 1.9 – Проекції точок, що знаходяться в різних чвертях простору (проекційне креслення)

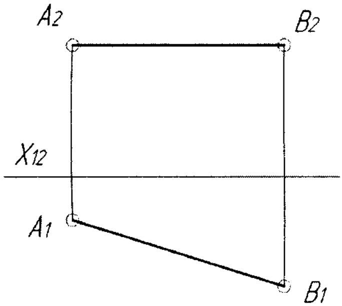
Запитання для самоперевірки

1. Які бувають методи проекціювання?
2. Що таке центральне проекціювання?
3. Що таке паралельне проекціювання?
4. Що являє собою система ортогональних проекцій?
5. Що таке епюр Монжа?
6. Як утворюються чверті простору?
7. Накреслить епюри точок, які знаходяться в 1-й, 2-й, 3-й та 4-й чвертях простору.

ТЕМА 2 ПРОЕКЦІЇ ПРЯМОЇ

Проекції прямої. Проекцією прямої є пряма або точка. Відносно площин проекцій пряма може займати такі положення.

1. Пряма паралельна тільки одній з площин проекцій. Такі прямі мають назву **прямих рівня** (level line). Існує три прямих рівня: горизонтальна, фронтальна і профільна. На рис. 2.1 – 2.3 подані приклади таких прямих. Визначити пряму рівня можна за виглядом її проекцій: дві проекції такої прямої паралельні відповідним осям проекцій, а одна не паралельна.



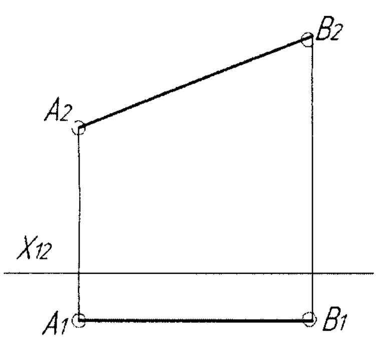
Якщо пряма паралельна тільки до $П_1$, то така пряма називається **горизонтальною** прямою (horizontal straight line).

Властивості проекцій:

A_1B_1 – натуральна величина відрізка AB;
A_1B_1 – не паралельна осі OX_{12};
A_2B_2 – паралельно осі OX_{12};
кут B_1A_1O – кут нахилу прямої AB до $П_2$.

Рисунок 2.1 – Горизонтальна пряма

Якщо пряма паралельна тільки $П_2$, то така пряма називається **фронтальною** прямою (frontal line).



Властивості проекцій:

A_2B_2 – натуральна величина відрізка AB;
A_2B_2 – не паралельна осі OX_{12};
A_1B_1 – паралельно осі OX_{12};
кут B_2A_2O – кут нахилу прямої AB до $П_1$.

Рисунок 2.2 – Фронтальна пряма

Якщо пряма паралельна тільки $П_3$, то така пряма називається **профільною** прямою (profile line).

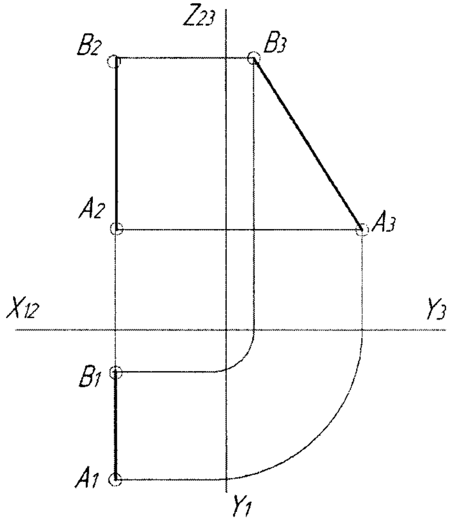


Рисунок 2.3 – Профільна пряма

Властивості проекцій:

A_3B_3 – натуральна величина відрізка AB;

A_3B_3 не паралельна осі OZ_{23};

A_2B_2 – паралельно осі OZ_{23};

A_1B_1 – паралельно осі OY_1;

кут B_3A_3O – кут нахилу прямої AB до $П_1$;

кут A_3B_3O – кут нахилу прямої AB до $П_2$.

2. Пряма перпендикулярна до однієї з площин проекцій і відповідно паралельна двом іншим. Такі прямі мають назву **проекціювальних прямих** (projecting line).

На рисунках 2.4 – 2.6 подані приклади проекціювальних прямих.

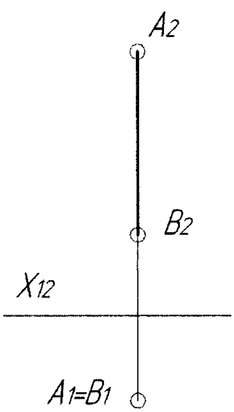


Рисунок 2.4 – Горизонтально-проекціювальна пряма

Якщо пряма перпендикулярна до площини $П_1$ і відповідно паралельна площинам $П_2$ і $П_3$, то така пряма називається **горизонтально-проекціювальною** прямою (projecting horizontal- line).

Властивості проекцій:

точка A_1 збігається з точкою B_1;

A_2B_2 – натуральна величина відрізка AB;

A_2B_2 – перпендикулярна до осі OX_{12} і відповідно паралельно осі OZ_{23}.

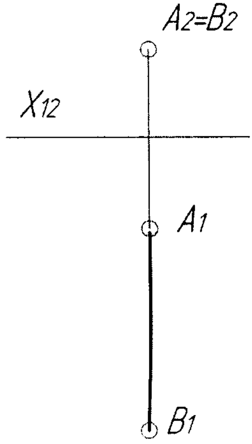


Рисунок 2.5 – Фронтально-проекціювальна пряма

Якщо пряма перпендикулярна до площини $П_2$ і відповідно паралельна площинам $П_1$ і $П_3$, то така пряма називається **фронтально-проекціювальною** прямою (projecting front-line).

Властивості проекцій:

точка A_2 збігається з точкою B_2;

A_1B_1 – натуральна величина відрізка AB;

A_1B_1 – перпендикулярно до осі OX_{12} і відповідно паралельно осі OY.

Якщо пряма перпендикулярна до площини $П_3$ і відповідно паралельна площинам $П_1$ і $П_2$, то така пряма називається **профільно-проекціювальною** прямою.

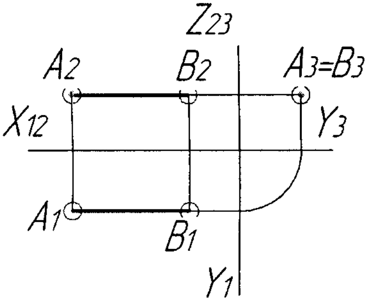


Рисунок 2.6 – Профільно-проекціювальна пряма

Властивості проекцій:

точка A_3 збігається з точкою B_3;

A_2B_2 – натуральна величина відрізка AB;

A_2B_2 – перпендикулярно до осі OZ_{23} і відповідно паралельно осі OX_{12}.

A_1B_1 – натуральна величина відрізка AB;

A_1B_1 – перпендикулярно до осі OY і відповідно паралельно осі OX_{12}.

2. Пряма не паралельна жодній з площин проекцій. Така пряма має назву прямої **загального положення** (line of general position). Ознакою такої прямої є те, що жодна з її проекцій не паралельна жодній з осей проекцій. На рис. 2.7 наведений приклад проекцій прямої загального положення. Безпосередньо за проекціями прямої загального положення не можна визначити натуральну величину відрізка та кути його нахилу до площин проекцій.

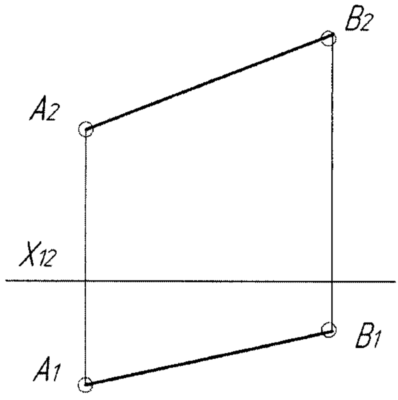
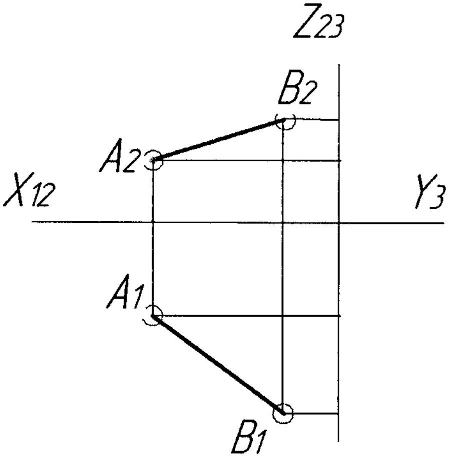


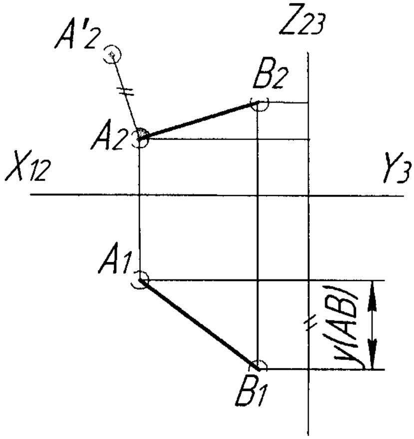
Рисунок 2.7 – Пряма загального положення

Для визначення **натуральної величини** відрізка прямої загального положення та кутів нахилу до площин проекцій можна скористатись **методом прямокутного трикутника**. На рис. 2.8 – 2.11 подані послідовні дії при застосуванні вказаного методу.



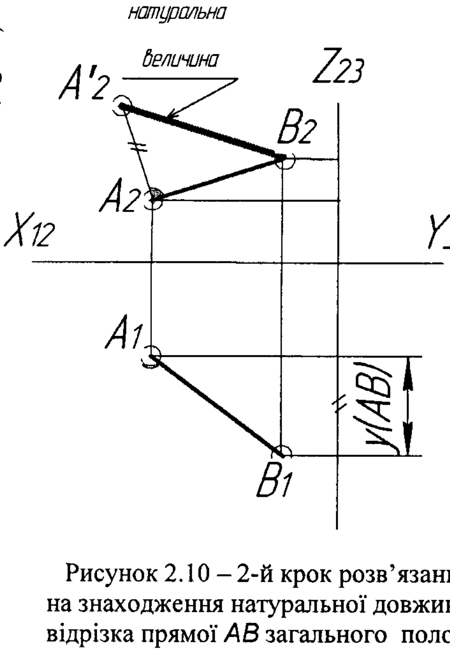
Умова: відрізком *AB* задана пряма загального положення. Знайти натуральну величину відрізка *AB*, та кути нахилу прямої до площин проекцій $П_1$ і $П_2$.

Рисунок 2.8 – Умова задачі на знаходження натуральної довжини відрізка прямої *AB* загального положення



1-й крок. З точки A_2 проводимо перпендикуляр $A_2A'_2$ (perpendicular) до A_2B_2. На цьому перпендикулярі відкладаємо відстань, що дорівнює різниці координат точок A і B по осі OY.

Рисунок 2.9 – 1-й крок розв'язання задачі на знаходження натуральної довжини відрізка прямої AB загального положення



2-й крок. З'єднуємо точки A'_2 та B_2. Довжина отриманого відрізку A'_2B_2 є натуральною довжиною відрізка AB. Кут (angle) $A_2'B_2A_2$ є кутом нахилу прямої AB до площини проекцій $П_2$. Аналогічні дії виконуємо відносно горизонтальної проекції і визначаємо кут нахилу AB до $П_1$.

Рисунок 2.10 – 2-й крок розв'язання задачі на знаходження натуральної довжини відрізка прямої AB загального положення

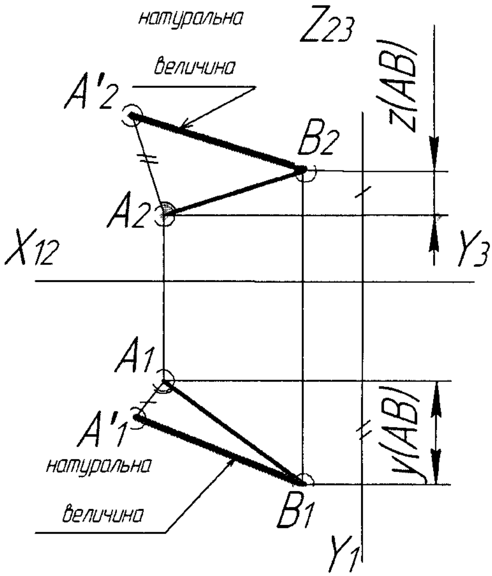


Рисунок 2.11 – Результат розв'язання задачі на знаходження натуральної довжини відрізка прямої AB загального положення

Слід прямої (line trace) – це точка перетину цієї прямої з площиною проекцій. Відповідно розрізняють горизонтальний, фронтальний і профільний сліди прямої.

Визначення **слідів** прямої **загального положення**. Оскільки слід – це точка, яка належить до площини проекцій, то одна її проекція буде збігатись з самою точкою, а інша буде належати осі. При цьому сліди мають належить і до самих проекцій прямої. Якщо продовжити проекції прямої до перетину з віссю OX та з точок перетину провести лінії зв'язку, то на перетині лінії зв'язку і протилежної проекції знаходиться відповідний слід. Так на рис. 2.12 точка F_2 – це фронтальний слід прямої AB, а H_1 – горизонтальний слід цієї прямої.

Взаємне положення прямих

У просторі дві прямі можуть бути: паралельними, перетинатися або мимобіжними.

Якщо прямі **паралельні** (parallel lines), то їх відповідні проекції також паралельні між собою (рис. 2.13).

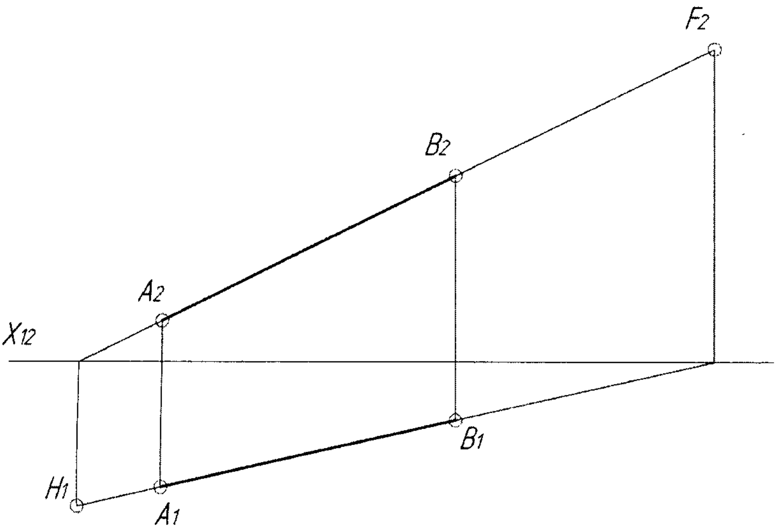


Рисунок 2.12 – Визначення фронтального та горизонтального слідів прямої загального положення

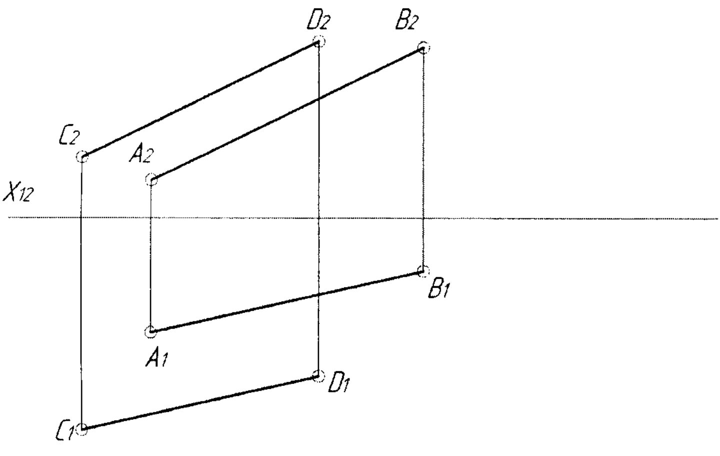


Рисунок 2.13 – Проекції паралельних прямих

Якщо дві прямі **перетинаються** (intersecting lines), то їх відповідні проекції також перетинаються, а точки перетину проекцій знаходяться на одній лінії зв'язку (рис. 2.14).

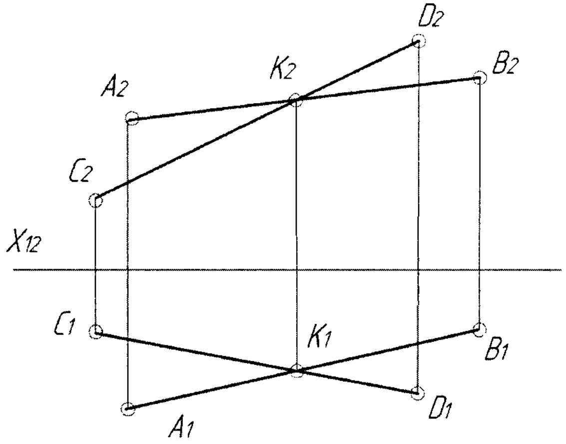


Рисунок 2.14 – Проекції прямих, що перетинаються

Якщо прямі **мимобіжні** (crossed lines), то їх відповідні проекції перетинаються, а точки перетину не знаходяться на одній лінії зв'язку (рис. 2.15).

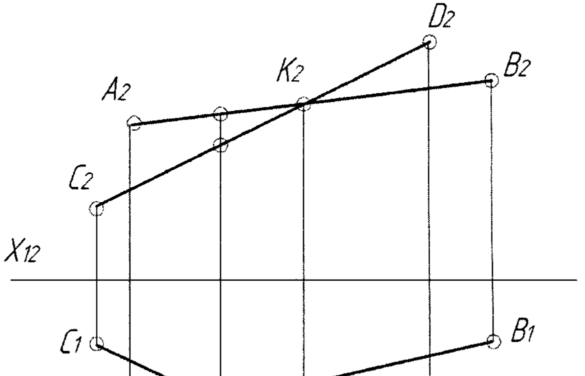


Рисунок 2.15 – Проекції мимобіжних прямих

Запитання для самоперевірки

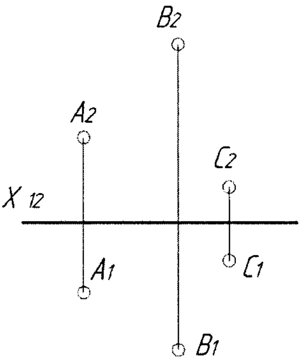
1. Що є проекцією прямої?
2. Які положення може займати пряма відносно площин проекцій?
3. Які властивості проекцій горизонтальної прямої? Накресліть її епюр.
4. Які властивості проекцій фронтальної прямої? Накресліть її епюр.
5. Які властивості проекцій профільної прямої? Накресліть її епюр.
6. Які властивості проекцій горизонтально-проекціювальної прямої? Накресліть її епюр.
7. Які властивості проекцій фронтально-проекціювальної прямої? Накресліть її епюр.
8. Які властивості проекцій профільно-проекціювальної прямої? Накресліть її епюр.
9. Які властивості проекцій прямої загального положення? Накресліть її епюр.
10. Як визначити натуральну величину прямої загального положення методом прямокутного трикутника?
11. Що таке сліди прямої?
12. Які властивості мають сліди прямої загального та окремого положень?
13. Яке положення відносно одна одної можуть займати дві прямі у просторі і які властивості мають їх проекції? Наведіть приклади.

ТЕМА 3 ПРОЕКЦІЇ ПЛОЩИНИ

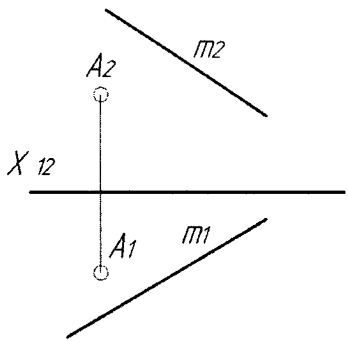
Визначник площини

На епюрі площина (plane) може бути визначена таким чином:

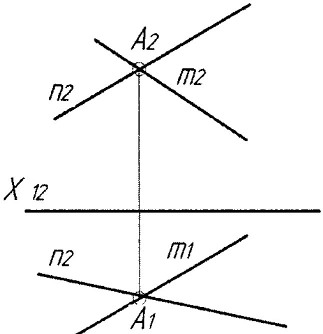
- трьома точками, що не належать одній прямій (рис. 3.1, а);
- прямою і точкою, що не належить цій прямій (рис. 3.1, б);
- двома прямими, що перетинаються (рис. 3.1, в);
- двома прямими, що паралельні (рис. 3.1, г);
- плоскою геометричною фігурою (рис. 3.1, д);
- слідами (рис. 3.2).



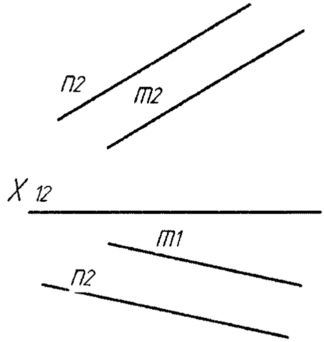
а)



б)

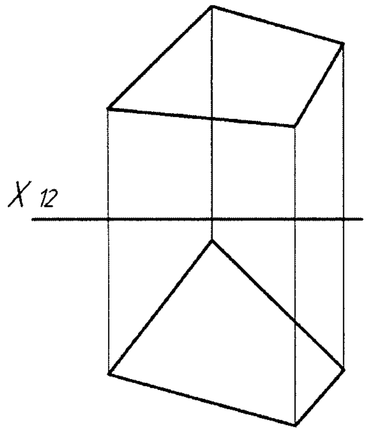


в)



г)

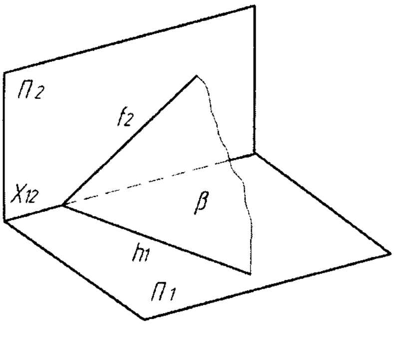
Рисунок 3.1 – Проекції площин, що задані різними способами



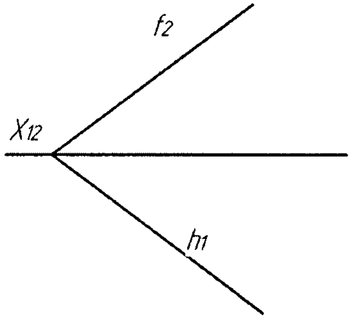
д)

Рисунок 3.1, аркуш 2

Слід площини (plane trace) – це лінія перетину площини з площиною проекцій. Відповідно, слід площини може бути горизонтальний, фронтальний або профільний.



а)



б)

Рисунок 3.2 – Проекції площини, що задана горизонтальним та фронтальним слідами

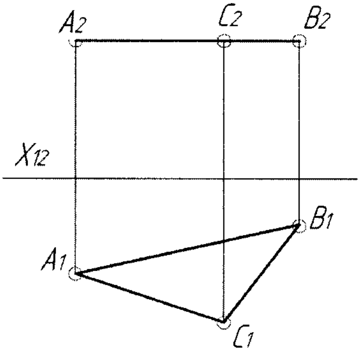
Положення площин відносно площин проекцій

За своїм положенням відносно площин проекцій площини поділяють на три групи: площини рівня, проекціювальні площини та площини загального положення. Площини рівня та проекціювальні площини ще називають площинами окремого положення.

1. Площина, що паралельна одній з площин проекцій і відповідно перпендикулярна до двох інших, називається **площиною рівня** (level plane). Площини рівня поділяються на горизонтальні, фронтальні та профільні.

Площина, яка паралельна горизонтальній площині проекцій, називається **горизонтальною** площиною (horizontal plane) (рис. 3.3).

на



Властивості проекцій:

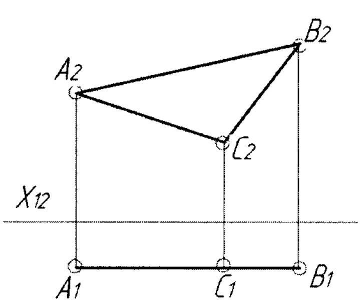
$A_2B_2C_2$ – пряма лінія, паралельна X_{12};

$A_1B_1C_1$ – натуральна величина площини;

точки A_1, B_1 і C_1 – не лежать на одній прямій.

Рисунок 3.3 – Горизонтальна площина

Площина, яка паралельна фронтальній площині проекцій, називається **фронтальною** площиною (frontal plane) (рис. 3.4).



Властивості проекцій:

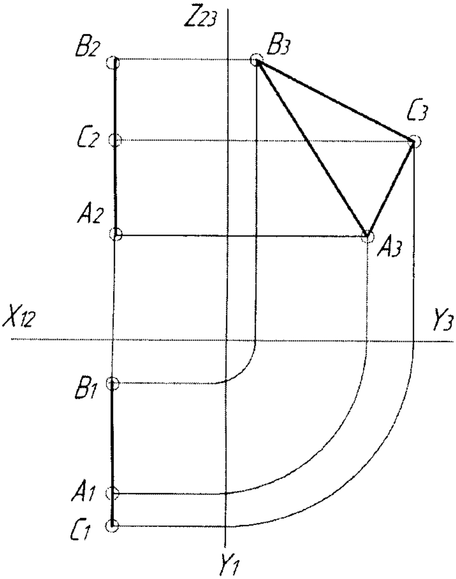
$A_1B_1C_1$ – пряма лінія, паралельна X_{12};

$A_2B_2C_2$ – натуральна величина площини;

точки A_2, B_2 і C_2 – не лежать на одній прямій.

Рисунок 3.4 – Фронтальна площина

Площина, яка паралельна профільній площини проекцій називається **профільною** площиною (profile plane) (рис. 3.5).



Властивості проекцій:

$A_1B_1C_1$ – пряма лінія, паралельна Y_{13};

$A_2B_2C_2$ – пряма лінія, паралельна Z_{23};

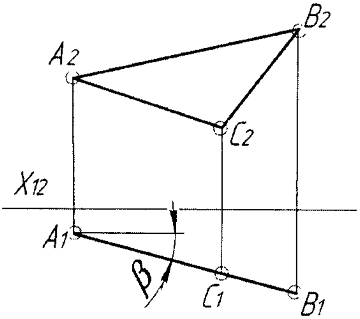
$A_3B_3C_3$ – натуральна величина площини;

точки A_3, B_3 і C_3 – не лежать на одній прямій.

Рисунок 3.5 – Профільна площина

2. Площина, що перпендикулярна до однієї з площин проекцій відповідно не паралельна двом іншим називається **проекціювальною**.

Площина, яка перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій називається **горизонтально-проекціювальною** площиною (рис. 3.6).



Властивості проекцій:

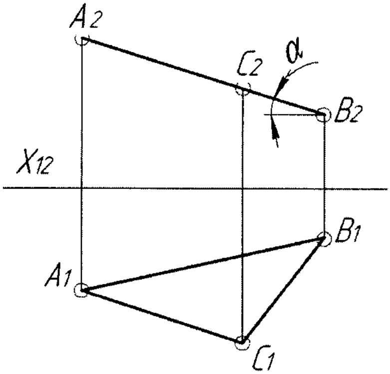
$A_1B_1C_1$ – пряма лінія, не паралельна X_{12};

точки A_2, B_2 і C_2 – не лежать на одній прямій;

β – кут нахилу площини до фронтальної площини проекцій $П_2$.

Рисунок 3.6 – Горизонтально-проекціювальна площина

Площина, яка перпендикулярна до фронтальної площини проекцій, називається **фронтально-проекціювальною** площиною (рис. 3.7).



Властивості проекцій:

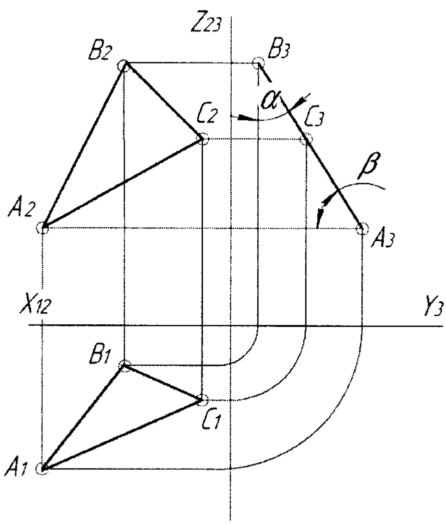
$A_2B_2C_2$ – пряма лінія, не паралельна X_{12};

точки A_1, B_1 і C_1 – не лежать на одній прямій;

α – кут нахилу площини до горизонтальної площини проекцій Π_1.

Рисунок 3.7 – Фронтально-проекціювальна площина

Площина, яка перпендикулярна до профільної площини проекцій називається **профільно-проекціювальною** площиною (рис. 3.8).



Властивості проекцій:

$A_3B_3C_3$ – пряма лінія, не паралельна Z_{23};

точки A_1, B_1 і C_1 – не лежать на одній прямій;

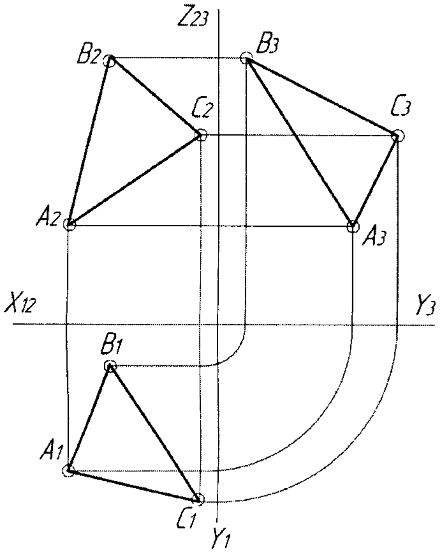
точки A_2, B_2 і C_2 – не лежать на одній прямій;

α – кут нахилу площини до фронтальної площини проекцій Π_2;

β – кут нахилу площини до горизонтальної площини проекцій Π_1.

Рисунок 3.8 – Профільно-проекціювальна площина

3. Площина, що не паралельна жодній з площин проекцій і не перпендикулярна до жодної з них, називається **площиною загального положення** (plane of general position) (рис. 3.9).



Властивості проекцій:

точки A_1, B_1 і C_1 – не лежать на одній прямій;

точки A_2, B_2 і C_2 – не лежать на одній прямій;

точки A_3, B_3 і C_3 – не лежать на одній прямій;

Рисунок 3.9 – Площина загального положення

Властивості слідів площин окремого положення

Для проекціювальних площин два сліди завжди перпендикулярні до осей проекцій, а третій знаходиться під кутом (рис. 3.10 – 3.12).

Для площин рівня існує тільки два сліди, які паралельні до відповідних осей. Але зазвичай площину рівня задають тільки одним слідом (рис. 3.13).

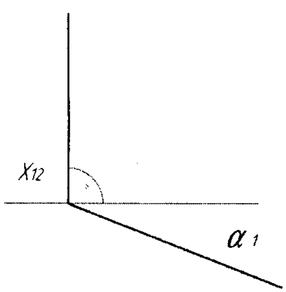


Рисунок 3.10 – Горизонтально-проекціювальна площина

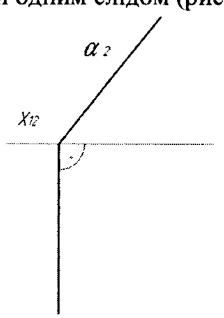


Рисунок 3.11 – Фронтально-проекціювальна площина

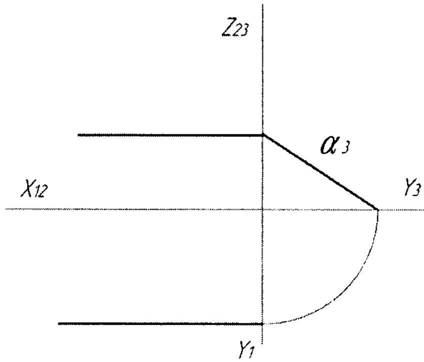


Рисунок 3.12 – Профільно-проекціювальна площина

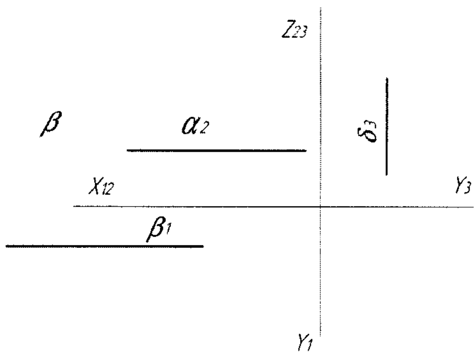


Рисунок 3.13 – Сліди площин рівня: α – горизонтальна, *β* – фронтальна, *δ* – профільна

Запитання для самоперевірки

1. Якими елементами площина може бути задана у просторі?
2. Що таке слід площини?
3. Яке положення може займати площина відносно площин проекцій?
4. Які властивості проекцій горизонтальної, фронтальної та профільної площин? Накресліть їх епюри.
5. Які властивості проекцій горизонтально-проекціювальної, фронтально-проекціювальної та профільно-проекціювальної площин? Накресліть їх епюри.
6. Які властивості проекцій площини загального положення? Накресліть її епюр.
7. Які властивості слідів площин окремого положення?

ТЕМА 4 ТОЧКА І ЛІНІЯ В ПЛОЩИНІ. ПЕРША ПОЗИЦІЙНА ЗАДАЧА

Умова належності точки прямій. Точка належить прямій, якщо її проекції належать відповідним проекціям цієї прямої (рис. 4.1).

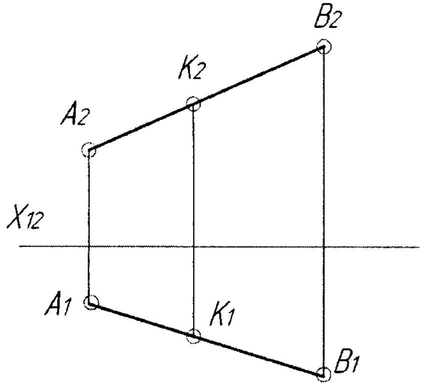


Рисунок 4.1 – Приклад належності точки *K* прямій *AB*

Умова належності точки площині. Точка належить площині, якщо вона належить будь-якій прямій, що лежить в цій площині. Наприклад, необхідно побудувати горизонтальну проекцію точки К, якщо відомо, що вона належить площині, яка задана трикутником АВС (рис. 4.2).

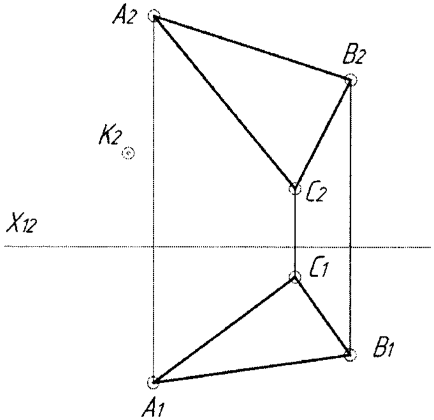


Рисунок 4.2 – Умова задачі на побудову проекції точки *K*, що належить площині Δ *ABC*

Відповідно до умови належності точки площині через точку К необхідно провести пряму, яка належить площині $\Delta\ ABC$: K_2B_2 (рис. 4.3).

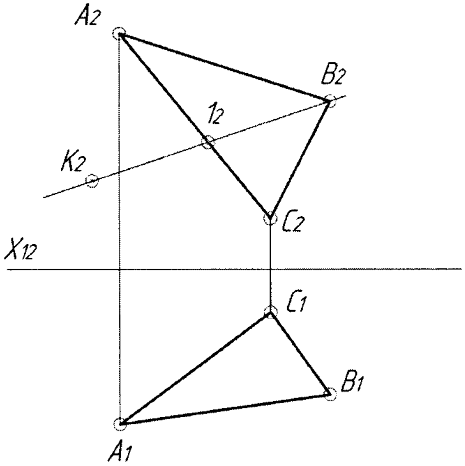


Рисунок 4.3 – Перший крок на розв'язання задачі на побудову проекції точки K, що належить площині $\Delta\ ABC$

Наступним кроком будуємо горизонтальну проекцію прямої KB (K_1B_1). Для цього визначаємо точку 1_2 як результат перетину проекцій прямих K_2B_2 і A_2C_2. Горизонтальну проекцію цієї точки 1_1 знаходимо, опускаючи лінію зв'язку до перетину з прямою A_1C_1. Згідно з умовою належності точки до прямої, точка K_1 має належати прямій B_11_1 (рис. 4.4).

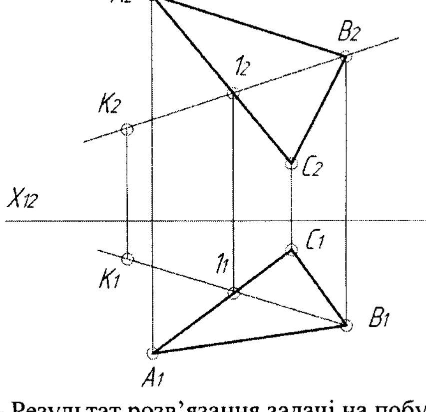


Рисунок 4.4 – Результат розв'язання задачі на побудову проекції точки K, що належить площині $\Delta\ ABC$

Розглянемо подібну задачу, але площина задана слідами (рис. 4.5).

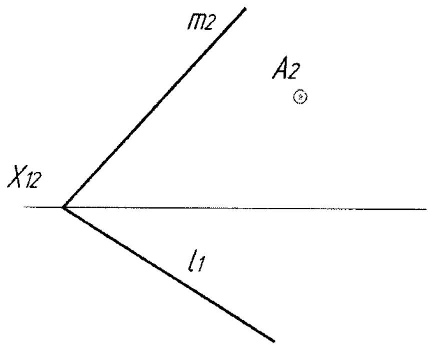


Рисунок 4.5 – Умова задачі на побудову проекції точки A,
що належить площині α ($m_2 \cap l_1$)

Через точку A проведемо горизонтальну пряму h, яка належить площині α ($m_2 \cap l_1$). Для цього проведемо фронтальну проекцію h_2 через A_2 (рис. 4.6).

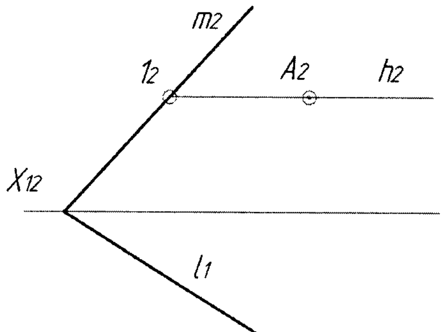


Рисунок 4.6 – Перший крок розв'язання задачі на побудову проекції
точки A, що належить площині α ($m_2 \cap l_1$)

Горизонтальна проекція точки 1 знаходиться на осі OX_{12}, а горизонтальна проекція прямої h паралельна сліду l_1. Якщо провести вертикальну лінію зв'язку, знайдемо шукану горизонтальну проекцію A_1 (рис. 4.7).

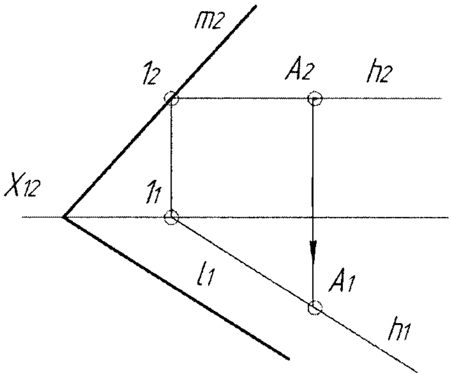


Рисунок 4.7 – Результат розв'язання задачі на побудову проекції точки А, що належить площині α ($m_2 \cap l_1$)

Умова належності прямої площині 1. Пряма належить площині, якщо вона проходить через дві точки, що лежать в цій площині. Наприклад, задана площина трикутником *ABC* і фронтальна проекція прямої *m* (m_2). Побудувати горизонтальну проекцію цієї прямої, якщо відомо що вона належить заданій площині (рис. 4.8).

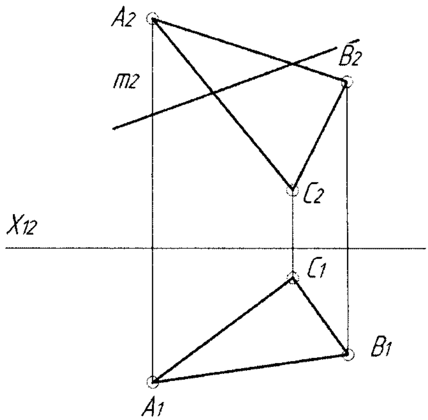


Рисунок 4.8 – Умова задачі на належність прямої площині, що задана трикутником *ABC*

Відповідно до умови належності прямої площині необхідно знайти дві точки, що є спільними між прямою і заданою площиною. Такими точками є точки *1* і *2* перетину прямої *m* зі сторонами трикутника *ABC* (рис. 4.9).

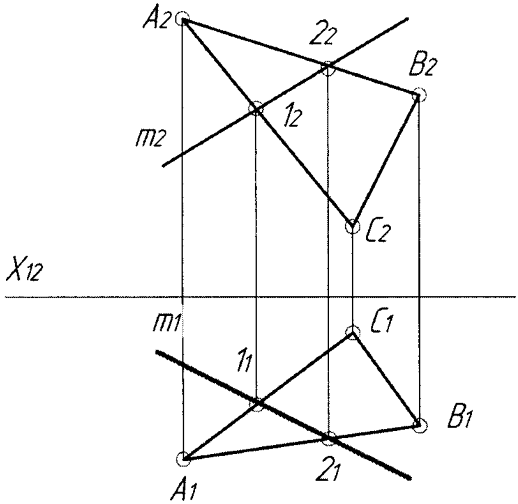


Рисунок 4.9 – Результат розв'язання задачі на належність прямої площині, що задана трикутником *ABC*

Розглянемо подібну задачу, але площина задана слідами. Необхідно побудувати горизонтальну проекцію прямої *m*, якщо пряма належить площині α ($f_2 \cap h_1$) (рис. 4.10).

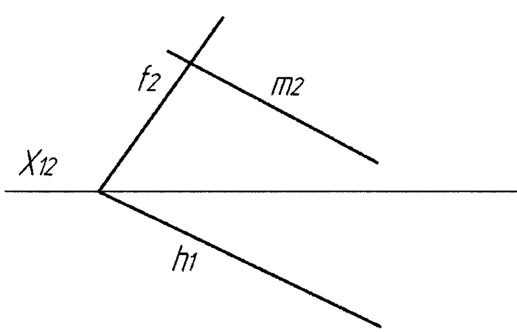


Рисунок 4.10 – Умова задачі на належність прямої площині, що задана слідами α ($f2 \cap h1$)

Згідно з умовою належності прямої площині необхідно знайти дві точки, спільні для прямої та площини. Такими точками можуть бути точки перетину слідів *f* і *h* з прямою *m*. Точка 1_2 визначається одразу, а відповідна горизонтальна проекція знаходиться на осі OX_{12}. Для отримання проекцій точки 2 необхідно продовжити пряму до перетину з віссю OX_{12}, та опустити лінію зв'язку на слід h_1. З'єднавши точки 1_1 і 2_1, отримаємо шукану проекцію прямої рис. 4.11).

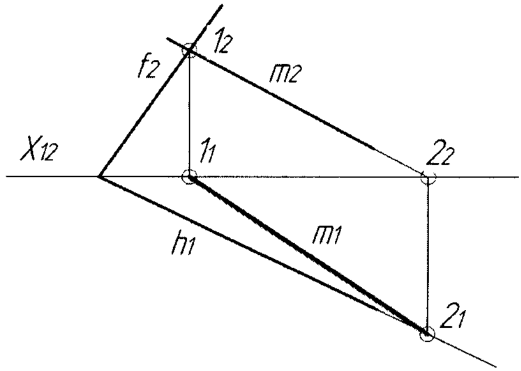


Рисунок 4.11 – Результат розв'язання задачі на належність прямої площині, що задана слідами α ($f2 \cap h1$)

Умови належності прямої площині 2. Пряма належить площині, якщо вона проходить через точку, що належить цій площині і при цьому паралельна прямій, яка лежить в даній площині. Наприклад, площина задана трикутником ABC, а пряма m, що належить цій площині проходить через точку C (рис.4.12). Побудувати горизонтальну проекцію прямої m.

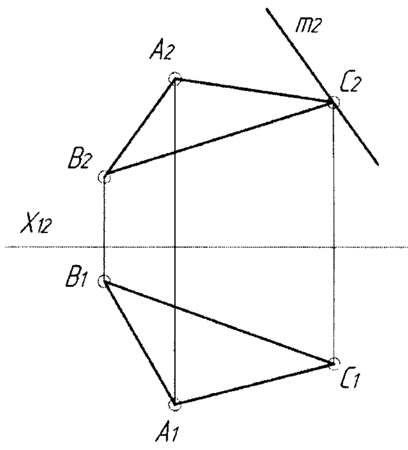


Рисунок 4.12 – Умова задачі на належність прямої площині, що задана трикутником ABC

Через точку A_2 проводимо допоміжну пряму $A_2 1_2$, паралельну m_2. Знаходимо горизонтальну проекцію цієї прямої ($A_1 1_1$). З точки C_1 проводимо пряму паралельну прямій $A_1 1_1$ (рис. 4.13). Отримана пряма m_1 – шукана проекція.

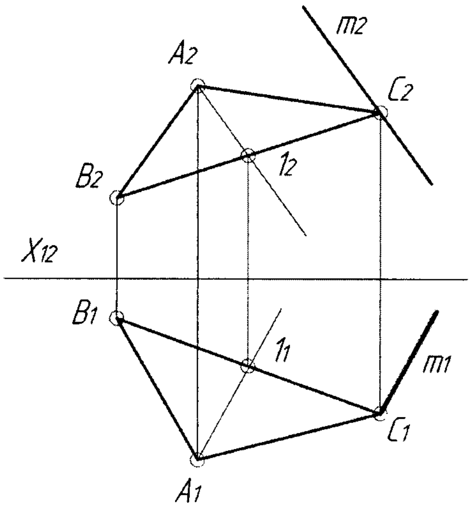


Рисунок 4.13 – Результат розв'язання задачі на належність прямої площині, що задана трикутником ABC

На вищевказаних умовах базується розв'язання **першої позиційної задачі** на знаходження точки перетину прямої та площини. При розв'язанні розглядаються три випадки умов:

1) площина і пряма є проекціювальними відносно різних площин проекцій;

2) одна з фігур, що перетинаються, є проекціювальною, а друга займає загальне положення;

3) пряма і площина займають загальне положення.

В першому випадку точки перетину вже є на перетині проекцій заданих фігур (рис. 4.14). В другому випадку одна проекція вже є, а друга визначається на підставі належності точки прямій (рис. 4.15).

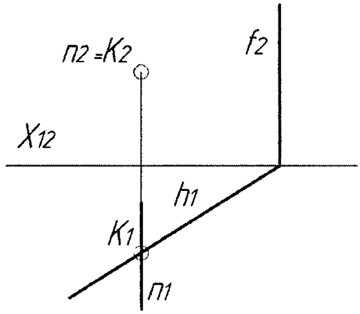


Рисунок 4.14 – Перетин фронтально-проекціювальної прямої n та горизонтально-проекціювальної площини, заданої слідами α ($f \cap h$)

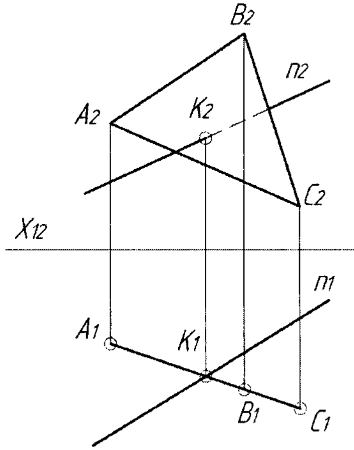


Рисунок 4.15 – Перетин горизонтально-проекціювальної площини, що задана трикутником α (ΔABC) та прямої n загального положення

Алгоритм розв'язання першої позиційної задачі:

1) через пряму проводять допоміжну площину (окремого положення);
2) знаходять лінію перетину заданої площини з допоміжною;
3) визначають точку перетину двох прямих (заданої та лінії перетину);
4) визначають видимість прямої.

Розглянемо приклад задачі на пошук точки перетину площини загального положення, заданої трикутником ABC, та прямої загального положення m (рис. 4.16). На першому кроці відповідно до алгоритму вводимо допоміжну фронтально-проекціювальну площину β таким чином, щоб її слід-проекція збігалась з фронтальною проекцією прямої m (рис. 4.17). Другим кроком шукаємо лінію перетину допоміжної площини β з площиною α (ΔABC). Її можна визначити по точках *1* і *2* перетину слід-проекції площини β із сторонами трикутника (рис. 4.17).

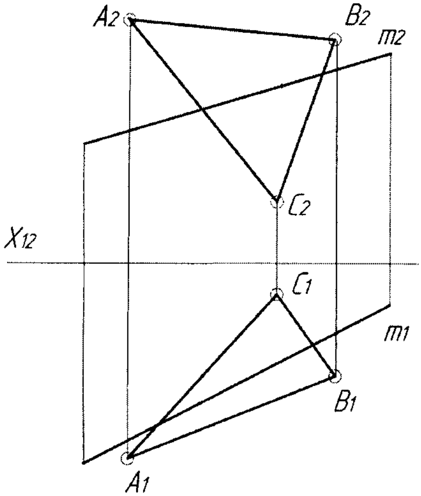


Рисунок 4.16 – Умова задачі на перетин площини α, що задана трикутником *ABC*, та прямої *m*

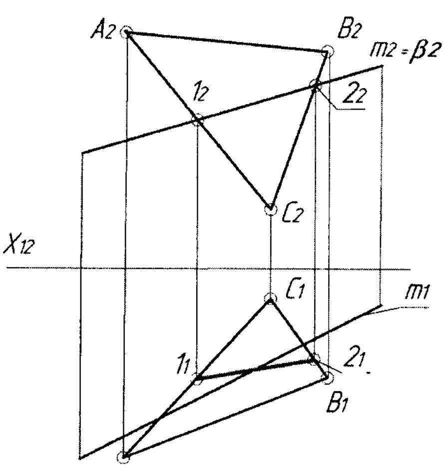


Рисунок 4.17 – Перший та другий кроки розв'язання задачі на перетин площини α, що задана трикутником *ABC*, та прямої *m*

На третьому кроці визначаємо точку K_1 перетину горизонтальної проекції прямої m_1 і отриманої лінії $1_1 2_1$ (рис.4.18). Піднявши з точки K_1 догори лінію зв'язку до перетину з прямою m_2, отримаємо фронтальну проекцію шуканої точки K_2 (рис. 4.18).

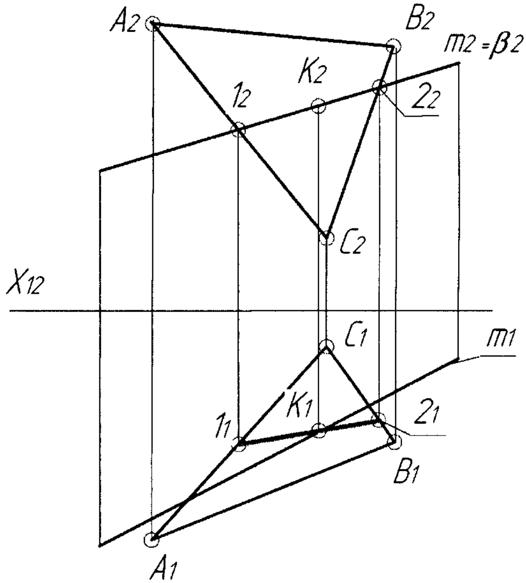


Рисунок 4.18 – Третій крок розв'язання задачі на перетин площини α, що задана трикутником *ABC*, та прямої *m*

Останнім кроком визначаємо видимість прямої *m* на горизонтальній та фронтальній площинах проекцій. Для цього можна скористатись просторовою уявою або застосувати **метод конкуруючих точок**. Конкуруючими називають точки, проекції яких на одній з площин проекцій збігаються. Наприклад, точки *3* і *4* відносно горизонтальної площини проекцій $П_1$ є конкуруючими (рис. 4.19). Причому, точка 3 належить прямій m, а точка 4 – відрізку AC. Якщо подивитись на фронтальну площину проекцій, побачимо, що точка 4 знаходиться далі від площини проекцій $П_1$, тобто ближче до умовного спостерігача. А це означає, що точка 3_1 буде не видима, а точка 4_1 – видима, відповідно ділянка прямої від точок 3_1, 4_1 до K_1 є невидимою. Точка K_1 є границею видимості прямої *m*. Видимість на фронтальній площині проекцій визначається аналогічно.

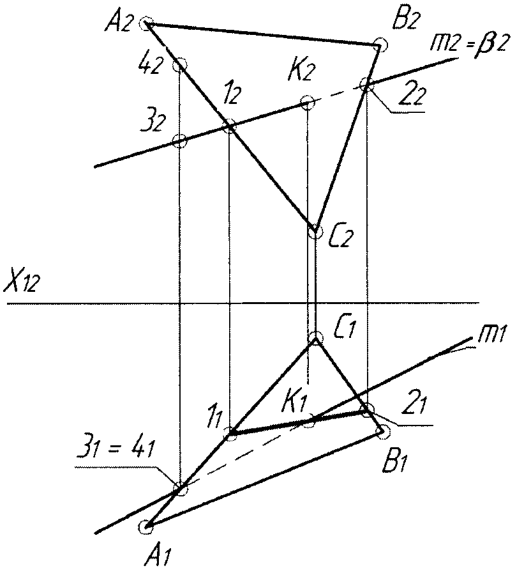


Рисунок 4.19 – Результат розв'язання задачі на перетин площини α, що задана трикутником *ABC*, та прямої *m*

Запитання для самоперевірки

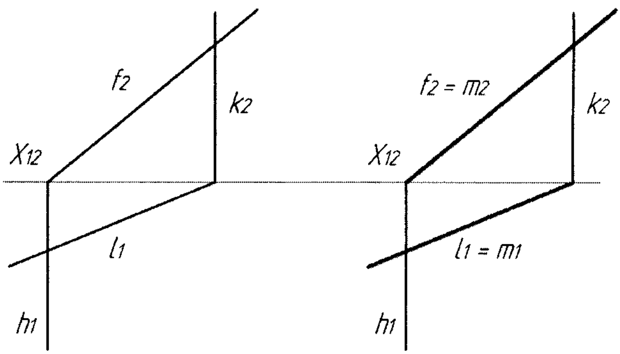
1. Яка умова належності точки прямій? Наведіть приклад проекцій точки, що належить прямій загального положення.
2. Яка умова належності точки площині? Наведіть приклади проекцій точки, що належить площині, яка задана трикутником, і площині, яка задана слідами.
3. Назвіть умови належності прямої площині. Наведіть приклад проекцій прямої, що належить площині до кожної з умов.
4. Які випадки розташування об'єктів відносно площин проекцій можуть бути при знаходженні точки перетину прямої та площини?
5. Як розв'язується задача в перших двох випадках? Наведіть приклади.
6. Який алгоритм розв'язання першої позиційної задачі?
7. Як визначається видимість конкуруючих точок?

ТЕМА 5 ДРУГА ПОЗИЦІЙНА ЗАДАЧА

Друга позиційна задача – це задача на знаходження лінії перетину двох площин. При розв'язанні другої позиційної задачі розглядають такі основні випадки:

1) обидві площини, що перетинаються є проекціювальними;
2) одна площина – проекціювальна, а друга – загального положення;
3) обидві площини – загального положення.

В першому випадку лінія перетину збігається із слідами площин або паралельна до них, тобто, виконання додаткових побудов не потрібне (рис. 5.1)



а) б)

Рисунок 5.1 – Перетин двох проекціювальних площин:
а – умова; б – розв'язок

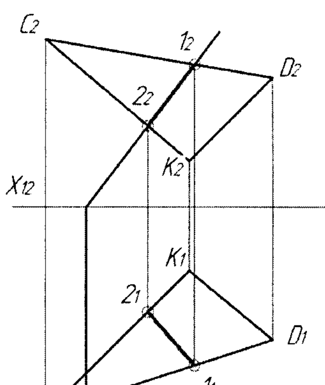


Рисунок 5.2 – Перетин двох площин: проекціювальної та загального положення

В другому випадку одна з проекцій лінії перетину вже є на епюрі, а друга будується відповідно до умови належності (рис. 5.2).

В третьому випадку застосовують алгоритм.

Алгоритм розв'язання другої позиційної задачі:

1) вводять допоміжну площину окремого положення;

2) будують лінії перетину допоміжної площини із заданими площинами;

3) знаходять точку перетину отриманих ліній між собою (перша спільна точка двох площин);

4) вводять другу допоміжну площину окремого положення;

5) будують лінії перетину другої допоміжної площини із заданими площинами;

6) знаходять точку перетину, ліній отриманих в п.5, між собою (друга спільна точка двох площин);

7) з'єднують між собою точки, отримані в пп. 3 і 6 (це і є шукана лінія перетину площин).

Розглянемо приклад перетину двох площин загального положення: площину β, яка задана паралельними прямими a і b, та площину γ, яка задана прямими c і d, що перетинаються (рис. 5.3).

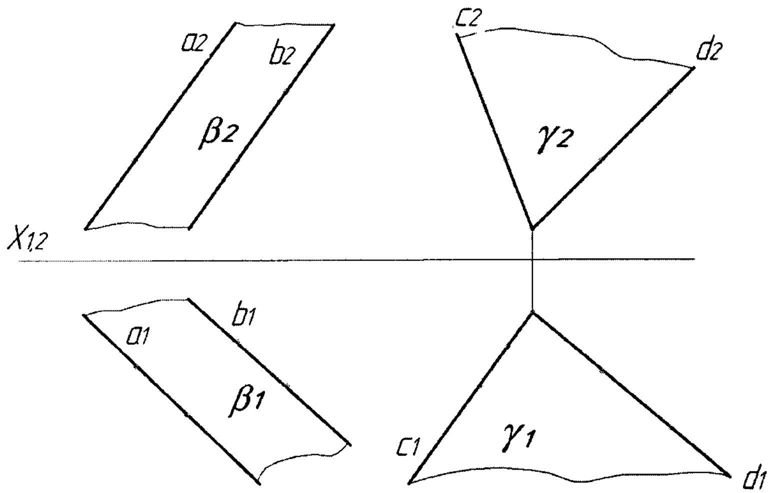


Рисунок 5.3 – Умова задачі на перетин двох площин загального положення

Відповідно до алгоритму вводимо горизонтальну допоміжну площину α, задану слід-проекцією α_2 (рис. 5.4). Фронтальні проекції ліній перетину l і m площин β і γ з площиною α збігаються із слід-проекцією α_2.

Горизонтальні проекції цих прямих будуємо за точками *1* і *2* перетину прямої l і m з прямими a і b площини β та точками *3* і *4* перетину прямої m з прямими c і d площини γ. Результатом перетину проекцій прямих $1_1 2_1$ і $3_1 4_1$ є точка K_1 – горизонтальна проекція першої спільної точки двох площин (рис. 5.4).

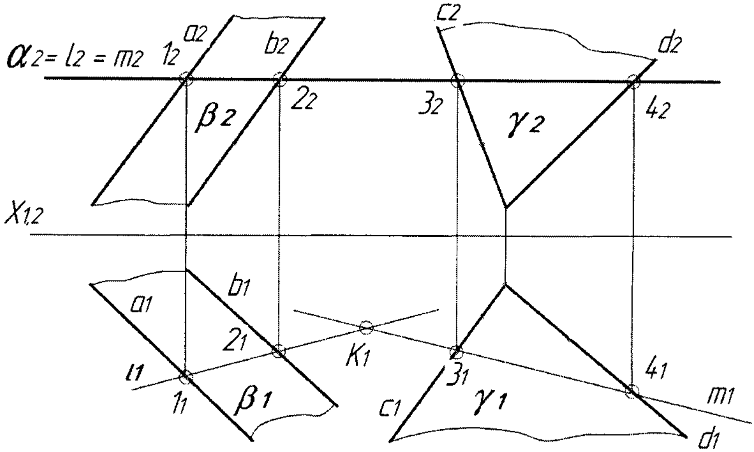


Рисунок 5.4 – Перший крок розв'язання задачі на перетин двох площин загального положення

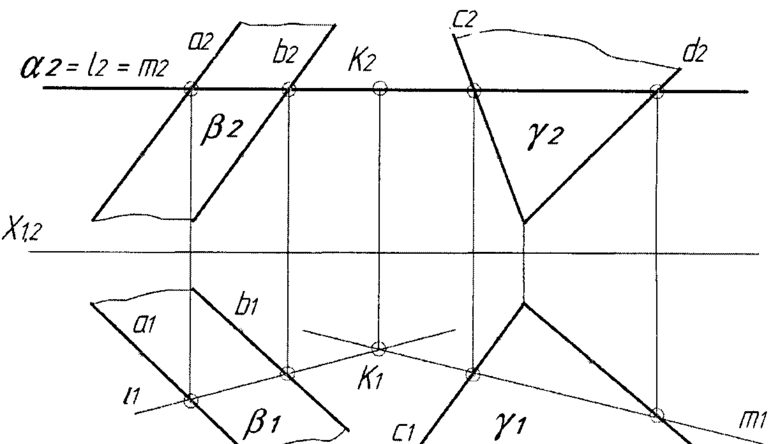


Рисунок 5.5 – Другий крок розв'язання задачі на перетин двох площин загального положення

Для того щоб отримати фронтальну проекцію K_2 точки K необхідно підняти лінію зв'язку з точки K_1 до перетину із слід-проекцією α_2 (рис. 5.5).

Для отримання другої спільної точки площин вводимо другу допоміжну площину $\delta(\delta_2)$ та аналогічно попереднім діям знаходимо проекції N_1 і N_2 точки N (рис. 5.6). З'єднуючи відповідні проекції точок, отримаємо проекції шуканої прямої лінії NK (рис. 5.6).

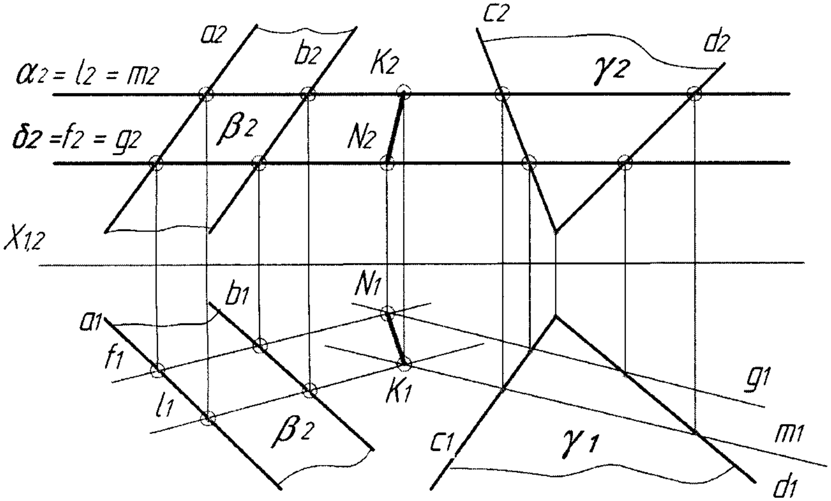


Рисунок 5.6 – Результат розв'язання задачі на перетин двох площин загального положення

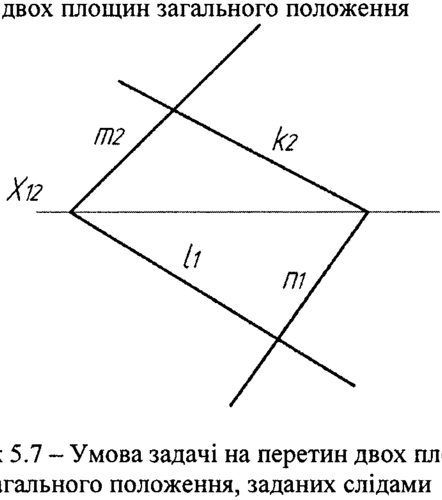


Рисунок 5.7 – Умова задачі на перетин двох площин загального положення, заданих слідами

Розглянемо приклад визначення лінії перетину двох площин, заданих слідами: $\alpha(m \cap k)$ і $\beta(l \cap n)$ (рис. 5.7).

Для побудови лінії перетину необхідно знайти дві спільні для заданих площин точки. Вочевидь, що на епюрі вже є такі точки. Вони утворюються від перетину слідів вказаних площин. Необхідно тільки побудувати другі проекції та з'єднати відповідні проекції між собою (рис. 5.8).

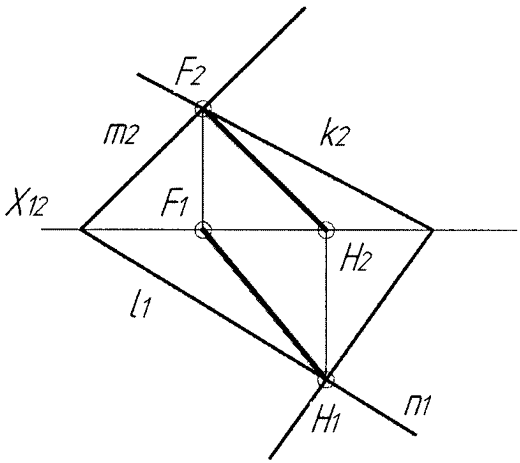


Рисунок 5.8 – Розв'язання задачі на перетин двох площин загального положення, що задані слідами

Запитання для самоперевірки

1. Які випадки розташування об'єктів відносно площин проекцій можуть бути при знаходженні лінії перетину двох площин?
2. Як розв'язується друга позиційна задача в перших двох випадках? Наведіть приклади.
3. Який алгоритм розв'язання другої позиційної задачі?
4. Як вибирають допоміжну площину при розв'язанні другої позиційної задачі?
5. Як розв'язується друга позиційна задача, якщо площини задані слідами?

ТЕМА 6 МЕТОДИ ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

Розв'язання геометричних задач можна звести до розв'язання чотирьох основних типів задач:

1) перетворення прямої загального положення в пряму рівня;
2) перетворення прямої загального положення в проекціювальну;
3) перетворення площини загального положення в проекціювальну;
4) перетворення площини загального положення в площину рівня.

Основні методи перетворення комплексного креслення: метод заміни площин проекцій, метод обертання, метод плоско-паралельного переміщення. Останній можна розглядати як метод обертання без вказання осі обертання. Розглянемо деякі з методів.

Метод заміни площин проекцій

Для розуміння методу заміни площин проекцій розглянемо найпростіший приклад побудови **проекції точки в допоміжній площині.** Додаткова площина Π_4 вводиться перпендикулярно до горизонтальної площини проекцій Π_1 та обертається навколо осі X_{14} на кут 90° за часовою стрілкою. Отже, при проекціюванні точки A на Π_4 відстань від осі X_{14} до проекції A_4 буде дорівнювати відстані від осі X_{12} до проекції A_2, а лінія зв'язку A_1A_4 буде перпендикулярна до осі X_{14} (рис. 6.1, 6.2).

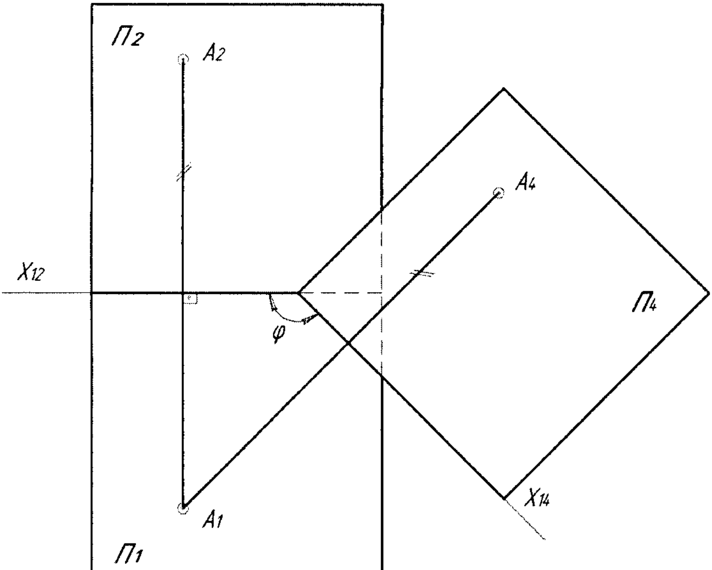


Рисунок 6.1 – Переведення проекції точки в допоміжну площину

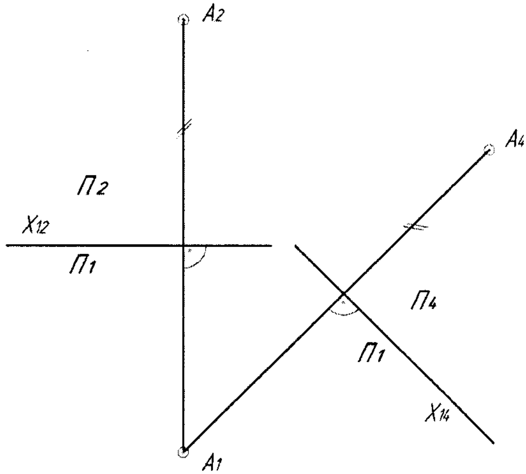


Рисунок 6.2 – Переведення проекції точки в допоміжну площину

Для визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення необхідно перетворити задану пряму в пряму рівня. Для **перетворення прямої загального положення в пряму рівня** необхідно ввести додаткову площину таким чином, щоб вона була паралельна прямій (рис. 6.3). Для цього проводимо вісь X_{14} паралельно одній з проекцій прямої (наприклад, A_1B_1). Кожну точку переводимо в допоміжну площину проекцій. Отриманий відрізок A_4B_4 і є натуральною величиною AB.

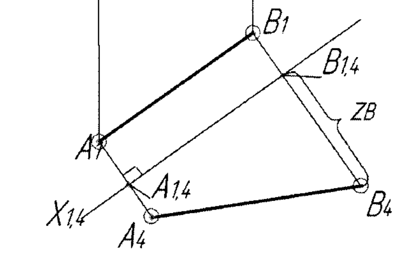


Рисунок 6.3 – Перетворення прямої загального положення в пряму рівня

Для **перетворення прямої загального положення в проекціювальне положення** необхідно ввести додаткову площину таким чином, щоб вона була перпендикулярна до прямої. Для цього спочатку пряму перетворюють в пряму рівня, а потім вводиться ще одна додаткова площина $П_5$. Отже, вісь X_{45} проводимо перпендикулярно до відрізка A_4B_4 (рис. 6.4). При цьому відстань від осі X_{45} до точок A_5 і B_5 дорівнює відстані від осі X_{14} до точок A_1 і B_1, відповідно. Якщо всі дії виконані правильно, то проекції точок на площині $П_5$ мають збігатися в одну точку.

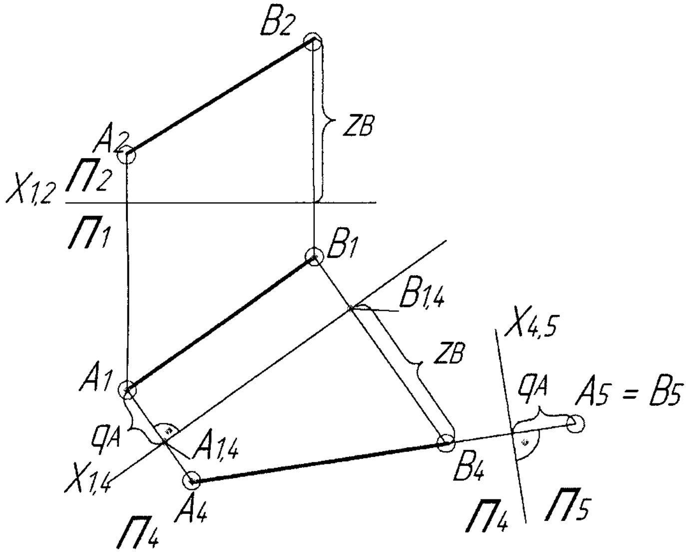


Рисунок 6.4 – Перетворення прямої загального положення в проекціювальну пряму

Розглянемо **перетворення площини загального положення в проекціювальну площину.** Введемо поняття особливих ліній площини: горизонталі та фронталі площини. **Горизонталь** площини – це пряма, яка належить площині загального положення і при цьому паралельна горизонтальній площині проекцій. **Фронталь** – це пряма, яка належить площині загального положення і при цьому паралельна фронтальній площині проекцій. Алгоритм перетворення площини загального положення в проекціювальну площину:

1) вводимо горизонталь або фронталь;
2) вводимо допоміжну площину проекцій перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі (або фронтальної проекції фронталі);
3) переводимо площину в додаткову площину проекцій.

Для детального застосування цього алгоритму візьмемо площину загального положення, задану трикутником ABC (рис. 6.5).

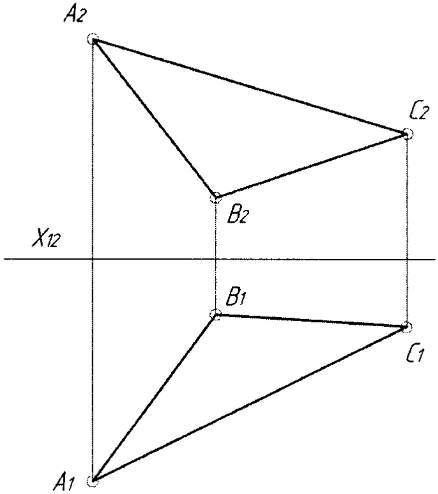


Рисунок 6.5 – Умова задачі на перетворення площини загального положення в проекціювальну площину

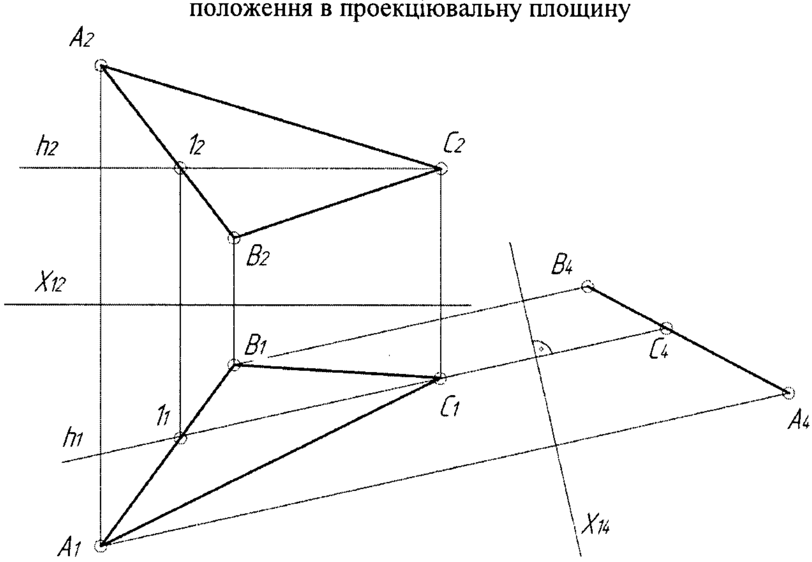


Рисунок 6.6 – Перетворення площини загального положення в проекціювальну площину

Відповідно до першого пункту алгоритму через точку C_2 проводимо горизонталь h. Її фронтальна проекція h_2 буде паралельна осі OX_{12}, а її горизонтальну проекцію визначаємо за точкою $1(1_2, 1_1)$ перетину горизонталі з відрізком AB (рис. 6.6). Згідно з другим пунктом алгоритму проводимо вісь X_{14} перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі h_1. Наступним кроком проекціюємо точки A, B і C в допоміжну площину $П_4$, при цьому відкладаємо відстані по лініях зв'язку від осі X_{14} до проекцій A_4, B_4 і C_4 такі, що дорівнюють відповідно відстаням від осі X_{12} до проекцій A_1, B_1 і C_1 (рис. 6.6). Якщо точки A_4, B_4 і C_4 знаходяться на одній прямій, то задача розв'язана правильно.

Розглянемо **перетворення площини загального положення в площину рівня.** Алгоритм перетворення площини загального положення в площину рівня такий:

4) вводимо горизонталь або фронталь;

5) вводимо допоміжну площину проекцій перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі (або фронтальної проекції фронталі);

6) переводимо площину в проекціювальне положення;

7) вводимо нову допоміжну площину паралельно до площини, що знаходиться в прекціювальному положенні;

8) переводимо площину в натуральну величину.

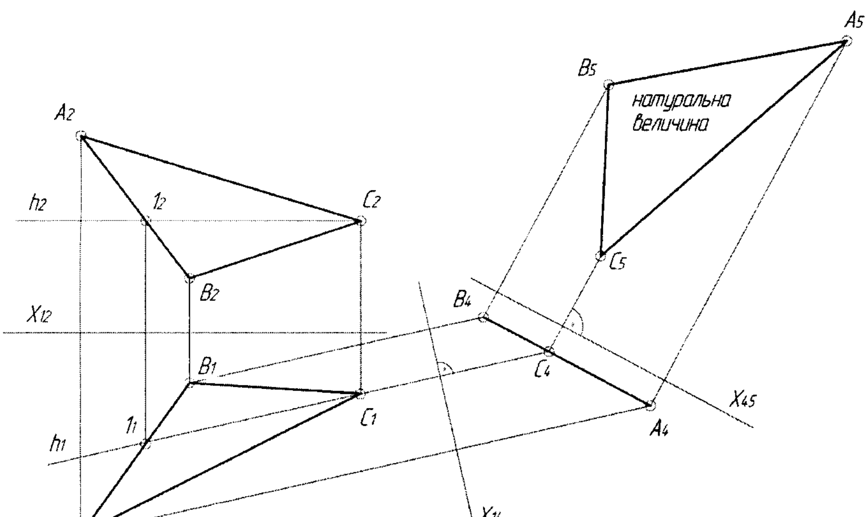


Рисунок 6.7 – Перетворення площини загального положення в площину рівня

Отже, для переведення площини із загального положення в положення рівня потрібно спочатку перевести задану площину в проекціювальне положення. Щодо задачі, яка розглядалась вище, то вводиться допоміжна площина $П_5$, для чого проводимо вісь X_{45} паралельно лінії $A_4C_4B_4$ (рис. 6.7). Відстані, що відкладаються по лініях зв'язку від осі X_{45} до проекцій точок A_5, B_5 і C_5, дорівнюють відстаням від осі X_{14} до проекцій точок A_1, B_1 і C_1, відповідно. Проекція трикутника $A_5B_5C_5$ є натуральною величиною трикутника ABC.

Розглянемо приклад застосування наведених перетворень для **визначення натуральної величини відстані між двома мимобіжними прямими.** Відомо, що відстань між двома мимобіжними прямими дорівнює довжині їх спільного перпендикуляра. Для того, щоб визначити натуральну величину цього перпендикуляра методом заміни площин проекцій, необхідно ввести таку допоміжну площину проекцій, при проекціюванні на яку одна з прямих зайняла б проекціювальне положення. Першим кроком вводимо додаткову площину $П_4$ таким чином, щоб одна з прямих (в даному випадку CD) перетворилась в пряму рівня, тобто проводимо X_{14} паралельно C_1D_1 і будуємо проекції C_4D_4. В цю ж саму площину проекціюємо іншу пряму AB, яка буде в загальному положенні (рис. 6.8).

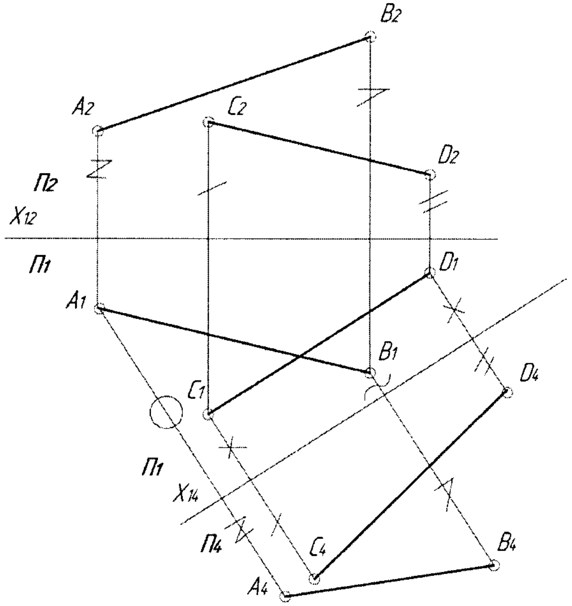


Рисунок 6.8 – Перший крок задачі на визначення відстані між двома мимобіжними прямими

Другим кроком вводимо додаткову площину проекцій $П_5$ перпендикулярно до проекції C_4D_4, та будуємо на ній проекцію C_5D_5 і проекцію A_5B_5. В площині $П_5$ відрізок C_5D_5 збігається в точку, а відрізок A_5B_5 займає загальне положення. Якщо опустити перпендикуляр цієї точки на пряму A_5B_5, то довжина цього перпендикуляра буде визначати шукану відстань між двома мимобіжними прямими AB і CD (рис. 6.9).

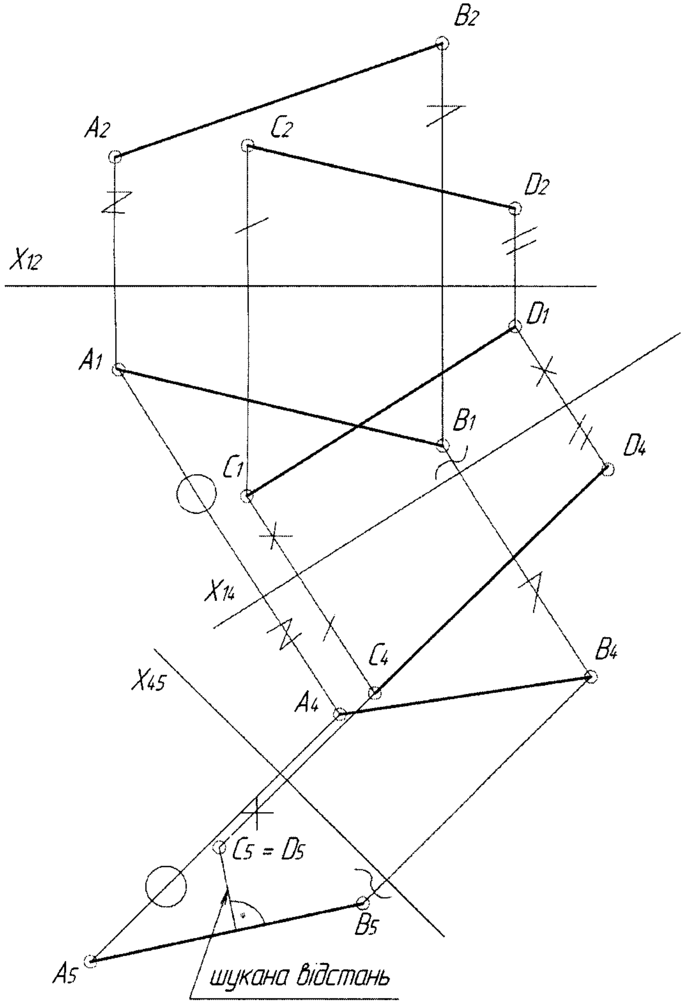


Рисунок 6.9 – Розв'язання задачі на визначення відстані між двома мимобіжними прямими

Метод плоскопаралельного переміщення (plane-parallel interchange)

Розв'яжемо такі самі задачі методом плоскопаралельного переміщення. Оскільки цей метод є різновидом методу обертання, то спочатку розглянемо просту задачу на визначення **натуральної величини відрізка** загального положення саме методом обертання. Нехай заданий відрізок прямої загального положення AO (рис. 6.10а). Для визначення натуральної величини необхідно повернути його навколо нерухомої осі таким чином, щоб він став паралельним одній з площин проекцій. Нехай вісь обертання перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій $П_1$ і її горизонтальна проекція збігається з точкою O_1. Обертаємо відрізок A_1O_1 навколо O_1 до тих пір, поки він не буде паралельним осі X_{12} (рис. 6.10, б). Дуга AA' на фронтальну площину проекцій проекціюється у вигляді відрізка A_2A_2'. Отже, відрізок O_2 A_2' і є натуральною величиною відрізка AO.

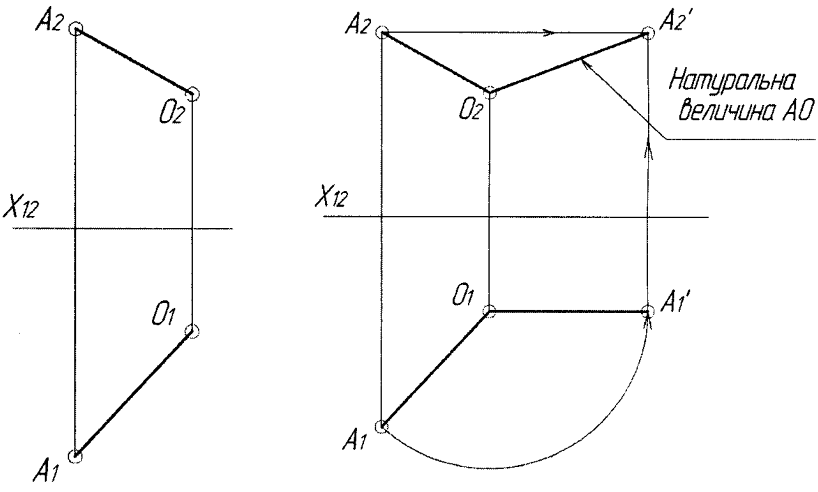


Рисунок 6.10 – Визначення натуральної величини відрізка методом обертання: а – умова; б – розв'язок

Якщо при перетвореннях не визначати вісь обертання, то такий метод називається методом плоскопаралельного переміщення. На рис 6.11 поданий приклад перетворення відрізка загального положення в положення рівня та в проекціювальне положення методом плоскопаралельного переміщення. При цьому, відрізок AB спочатку розташовують паралельно горизонтальній площині проекцій $П_1$ ($A_1'B_1'$

паралельно OX_{12}), а потім натуральну величину $A_2'B_2'$ перпендикулярно до OX_{12}.

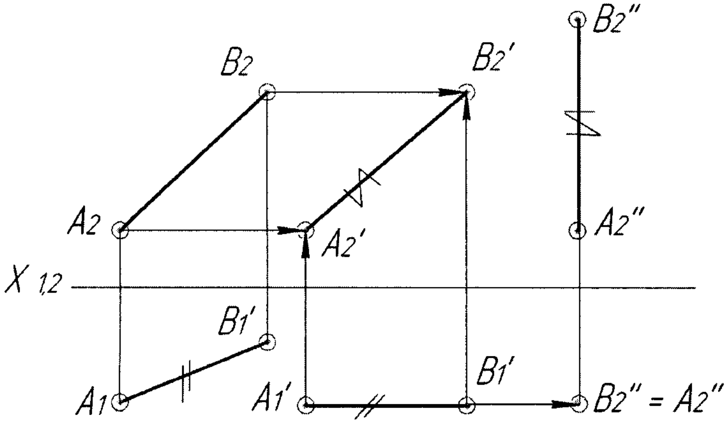


Рисунок 6.11 – Перетворення відрізка загального положення в положення рівня та в проекціювальне положення методом плоскопаралельного переміщення

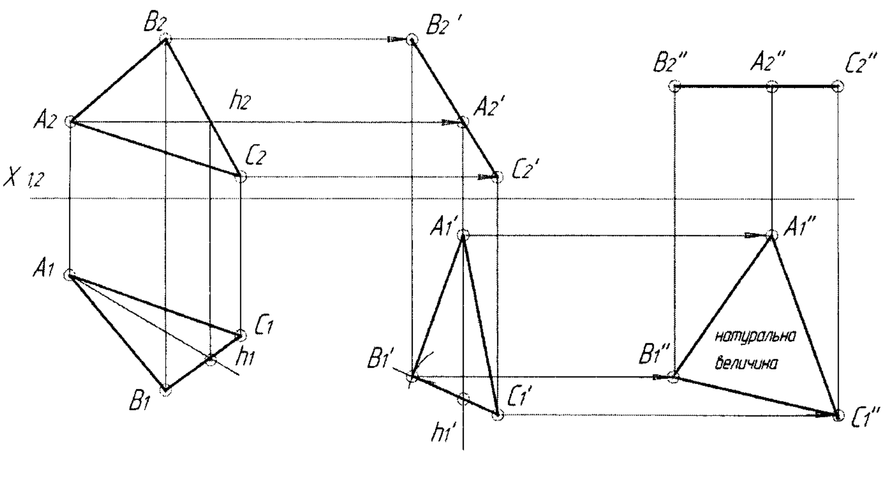


Рисунок 6.12 – Перетворення площини загального положення в проекціювальне положення та положення рівня методом плоскопаралельного переміщення

Для перетворення площини із загального в окремі положення скористаємося алгоритмом, наведеним вище (рис. 6.12).

Тобто, спочатку вводимо горизонталь площини $h(h_2)$. Потім повертаємо площину таким чином, щоб горизонтальна проекція горизонталі h_1 була перпендикулярна до площини проекцій Π_2, при цьому отримуємо проекціювальне положення площини $A_2'B_2'C_2'$. Далі, отриманий відрізок $A_2'B_2'C_2'$ розташовуємо паралельно OX_{12} і при проект-ціюванні отримуємо натуральну величину трикутника ABC ($A_2''B_2''C_2''$).

Запитання для самоперевірки

1. До яких основних типів можна звести розв'язання геометричних задач при використанні методів перетворення комплексного креслення?
2. Які є основні методи перетворення комплексного креслення?
3. В чому полягає суть методу заміни площин проекцій?
4. Наведіть приклад переведення точки в допоміжну площину.
5. Як перетворити пряму загального положення в пряму рівня методом заміни площин проекцій?
6. Як перетворити пряму загального положення в проекціювальну пряму методом заміни площин проекцій?
7. Як перетворити площину загального положення в проекціювальну площину методом заміни площин проекцій?
8. Як перетворити площину загального положення в площину рівня методом заміни площин проекцій?
9. Як визначити відстань між двома мимобіжними прямими методом заміни площин проекцій?
10. В чому полягає суть методу плоскопаралельного переміщення?
11. Як перетворити пряму загального положення в пряму рівня методом плоскопаралельного переміщення?
12. Як перетворити пряму загального положення в проекціювальну пряму методом плоскопаралельного переміщення?
13. Як перетворити площину загального положення в проекціювальну площину методом плоскопаралельного переміщення?
14. Як перетворити площину загального положення в площину рівня методом плоскопаралельного переміщення?

ТЕМА 7 КРИВІ ЛІНІЇ ТА ПОВЕРХНІ: СПОСОБИ УТВОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ

Крива лінія (curve) – це множина точок тривимірного простору, координати якої є функціями однієї змінної. Криву лінію можна отримати такими способами:

- як траєкторію руху точки;
- як лінію перетину двох кривих поверхонь (або площини і поверхні);
- як множину точок, що відповідають певному рівнянню.

Криві лінії поділяють на плоскі і просторові. Якщо всі точки кривої належать одній площині, то така крива є плоскою. В іншому випадку – просторова.

Криві можуть бути алгебраїчні та трансцендентні. Алгебраїчні криві поділяються на 1-го, 2-го та більш високих порядків.

На рис. 7.1 наведений приклад проекцій просторової кривої лінії. Побудова проекцій будь-якої кривої відбувається по точках, що належать до цієї кривої.

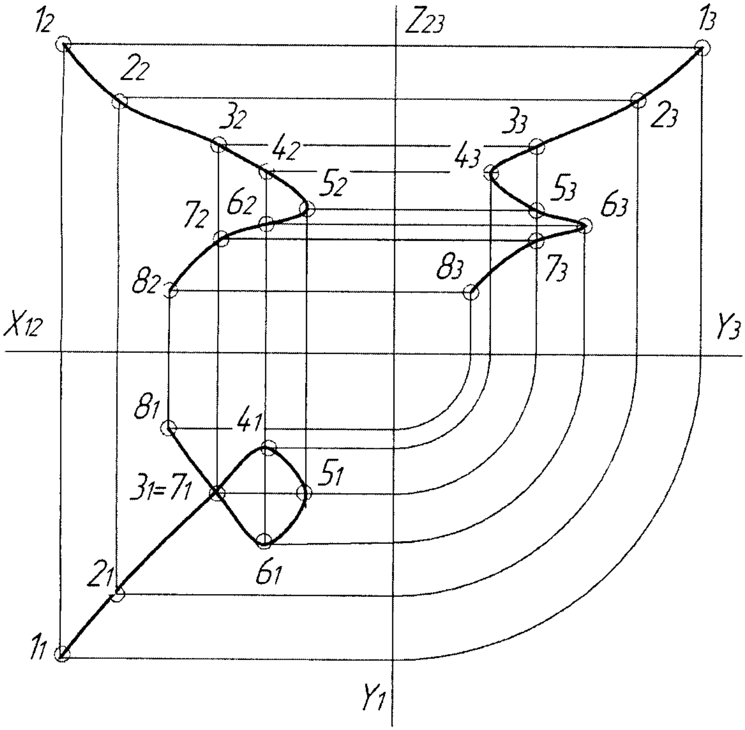


Рисунок 7.1 – Приклад задання просторової кривої лінії сукупністю проекцій її точок

Прикладами закономірних кривих можуть бути коло (circle) та еліпс (ellipse). При побудові проекцій можна враховувати їх властивості (рис.7.2).

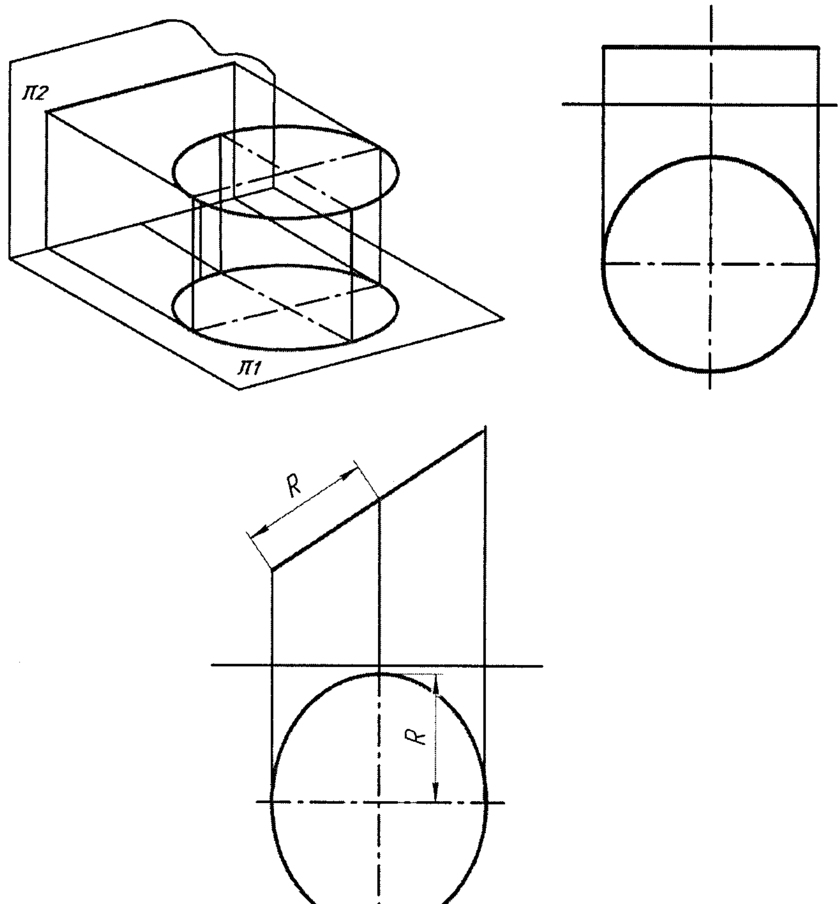


Рисунок 7.2 – Приклад побудови проекцій кола

Для визначення кривої поверхні необхідно врахувати спосіб, яким задана поверхня. **Способи задання кривих поверхонь** (curve surface): аналітичний; каркасом; кінематичний; визначником.

Аналітичний спосіб – це задання поверхні рівнянням або системою рівнянь. Цей спосіб вивчає аналітична геометрія.

Задання поверхні **каркасом** (framework) – графічне задання поверхні щільною сукупністю ліній або точок, що належать даній поверхні (рис.7.3).

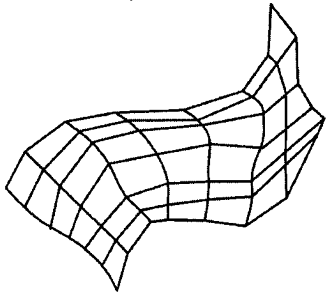


Рисунок 7.3 – Приклад задання поверхні лінійним каркасом

При **кінематичному способі** задання поверхня розглядається як траєкторія безперервного руху твірної лінії у просторі. Твірна лінія може бути пряма або крива; плоска або просторова; закономірна або незакономірна. В процесі переміщення форма твірної лінії може бути незмінною або змінюватися.

Задання поверхні **визначником** (surface determinant) – це задання сукупністю параметрів, які однозначно задають поверхню та відрізняють від інших поверхонь. Визначник має алгоритмічну та геометричну частини. Геометричною частиною є усі геометричні елементи, які утворюють дану поверхню. Алгоритмічна частина – алгоритм формування поверхні з геометричних елементів.

Часто поверхні задаються обрисом. **Обрис** (outline) – це проекція контуру поверхні на площини проекцій.

Класифікація поверхонь. За виглядом твірної лінії (generatrix) поверхні поділяються на прямолінійчаті або лінійчаті (твірна – пряма лінія) та криволінійчаті (твірна – крива лінія).

За можливістю розгортання поверхні поділяють на розгортні та нерозгортні. Розгортні – це поверхні, які можуть бути розгорнуті до суміщення з площиною без складок та розривів. Приклад розгортних поверхонь: циліндр (cylinder), конус (cone). Приклад нерозгортних поверхонь: сфера (sphere), еліпсоїд (ellipsoid).

За законами утворення поверхні поділяють на закономірні та незакономірні.

За характером переміщення твірної поверхні класифікують: поверхні обертання (surface of revolution), поверхні перенесення (transfer surface), гвинтові поверхні.

На рис. 7.4, 7.5 показано утворення поверхні перенесення шляхом переміщення кривої твірної l по прямій напрямній (directrix) m.

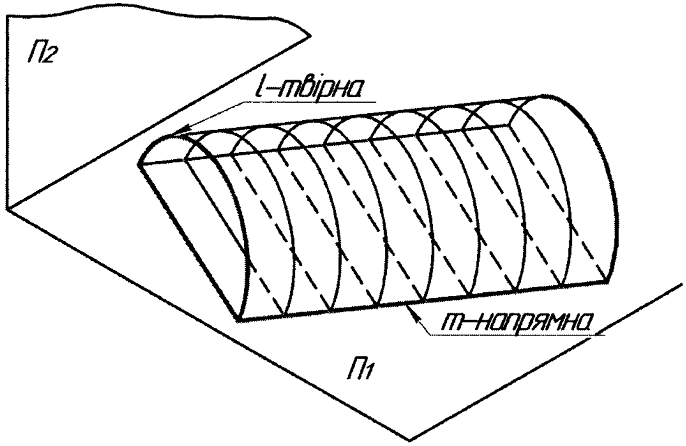


Рисунок 7.4 – Приклад утворення поверхні перенесення: об'ємна модель

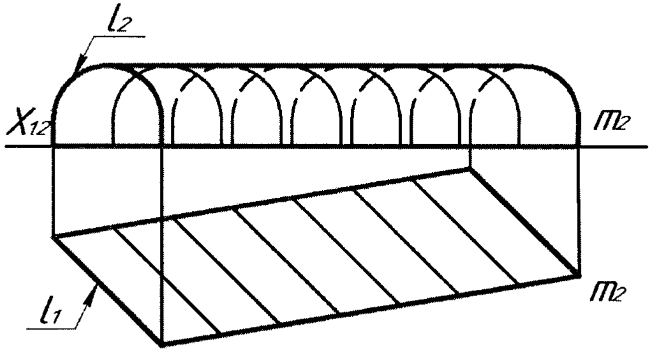


Рисунок 7.5 – Приклад утворення поверхні перенесення: проекції каркаса

Запитання для самоперевірки

1. Дайте визначення поняття «крива лінія» та назвіть способи задання кривої лінії.
2. Наведіть приклади проекцій закономірних кривих.
3. Які є способи задання поверхонь?
4. За якими ознаками і як можна класифікувати поверхні?
5. Наведіть приклад задання поверхні каркасом.
6. Наведіть приклад задання поверхні обрисом.
7. Дайте визначення понять «твірна» та «напрямна».

ТЕМА 8 ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ: ГРАФІЧНІ МОДЕЛІ

Поверхні, які можуть бути утворені шляхом обертання твірної лінії навколо нерухомої осі, називають **поверхнями обертання**. Найпростіші приклади таких поверхонь: циліндр обертання, конус обертання, сфера та інші. Поверхні обертання задаються, зазвичай, обрисом. **Обрис** – це проекція контуру поверхні. На рис. 8.1 наведені приклади поверхонь обертання в об'ємному зображенні та відповідні проекції їх обрисів.

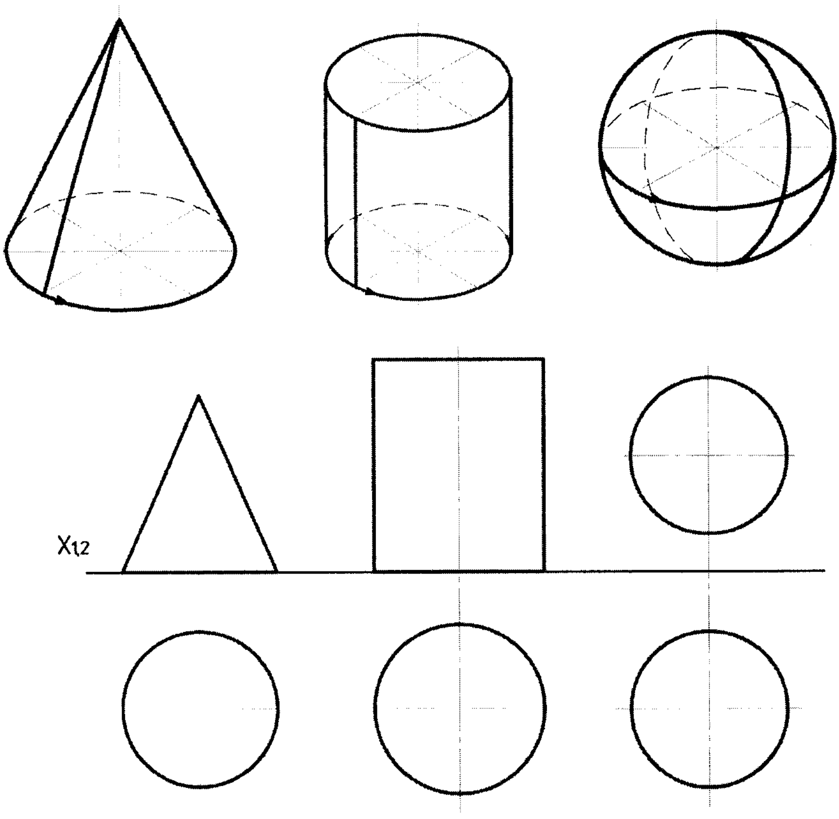


Рисунок 8.1 – Поверхні обертання: конус обертання, циліндр обертання, сфера

При утворенні конуса обертання твірна лінія – пряма, що паралельна осі, обертається навколо неї. При утворенні конуса обертання твірна лінія – теж пряма, але вона перетинає вісь. Утворення сфери можна розглядати як обертання твірної кола навколо власної осі. Якщо вісь, навколо якої обертається коло, не збігається з власною віссю кола, то поверхня, що утворюється, має назву **тор** (torus). Тор може бути закритий, відкритий, однопорожнинний або двопорожнинний. На рис. 8.2 подані проекції відкритого однопорожнинного тора.

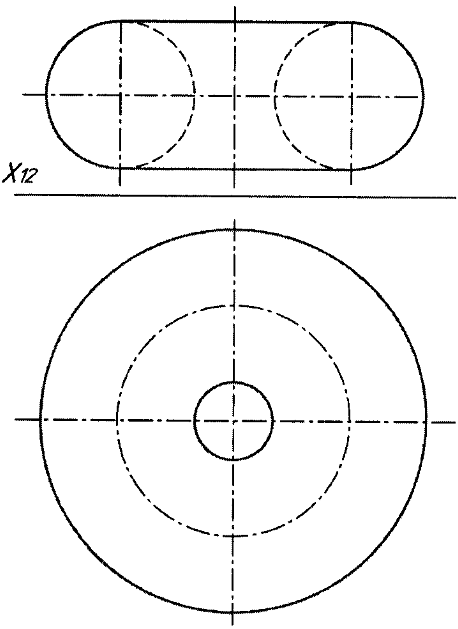


Рисунок 8.2 – Відкритий однопорожнинний тор

Особливі лінії поверхонь обертання: паралелі, горло, екватор, меридіани, головний меридіан. **Паралелі** (parallel) – це лінії, що утворюються в результаті перетину поверхні обертання площиною перпендикулярною до осі обертання. **Горло** (throat) – це найменша паралель. **Екватор** (equator) – це найбільша паралель. **Меридіан** (meridian) – це лінія, що утворюється в результаті перетину поверхні обертання площиною, яка проходить через вісь обертання. Якщо така площина паралельна фронтальній площині проекцій, то лінія називається **головним меридіаном**.

Розглянемо побудову обрису **поверхні обертання загального вигляду** за заданими кривою твірною лінією *l* та віссю обертання *i* (рис. 8.3). Кожна точка твірної *l* (наприклад точка *1*) при обертанні навколо осі *i* утворює коло радіусом, що дорівнює відстані від i_1 до горизонтальної проекції цієї точки (*1₁*). На фронтальній площині проекцій це коло буде виглядати як відрізок довжиною, що дорівнює діаметру кола (рис. 8.4). Кінці цього відрізка належать до лінії обрису. Точку 2_1 вибираємо на твірній *l*, як точку найближчу до осі обертання *i*. Тобто, при обертанні вона буде утворювати паралель з найменшим радіусом (горло). Точка *3* вибрана довільно, точка *4* – це найбільш віддалена точка від осі (утворює найбільшу паралель – екватор), а точка *5* є кінцевою точкою твірної (рис. 8.5). З'єднавши всі отримані точки контуру, отримаємо обрис поверхні (рис. 8.6). Останнім кроком на горизонтальній площині проекцій необхідно визначити, які паралелі відносяться до обрису, а які залишити як допоміжні лінії, а також визначити видимість отриманих ліній обрису.

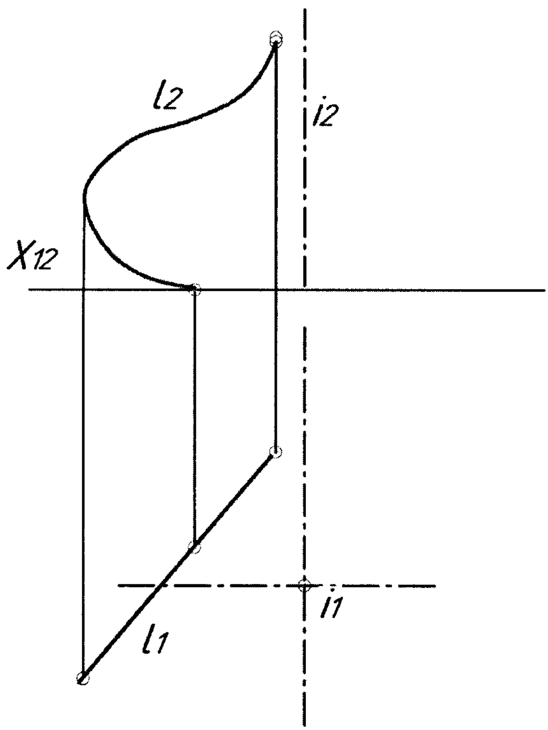


Рисунок 8.3 – Умова задачі на побудову обрису поверхні обертання

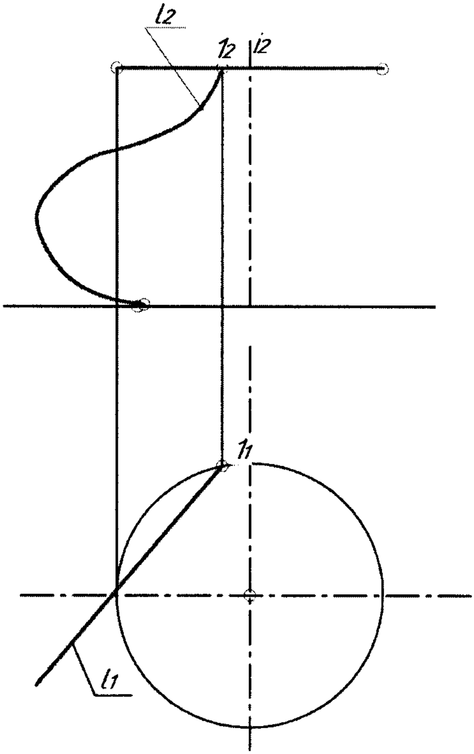


Рисунок 8.4 – Перший крок розв'язання задачі на побудову обрису поверхні обертання

Побудова проекцій точки, що належить до поверхні обертання. Точка належить поверхні, якщо вона належить до будь-якої лінії, що належить цій поверхні. На цій умові базується розв'язання задач на побудову проекцій точок, що належать поверхні. Якщо відома одна проекція точки належної поверхні, і необхідно побудувати другу проекцію точки, то спочатку треба шукати лінію, якій ця точка належить. Для поверхонь обертання такими лініями можуть бути паралелі, головний меридіан, лінії обрису. В задачах такого типу варто звертати увагу на видимість отриманих проекцій точок. На рис. 8.7 наведений приклад поверхні сфери та побудовані проекції точок, що належать різним частинам цієї поверхні. Наприклад, точка *A* видима і належить екватору сфери, тому її горизонтальна проекція буде знаходитися на обрисі знизу. Точка *B* розташована на головному меридіані зверху. Отже, її горизонтальна проекція буде на осі і при цьому видима. Для побудови точок D і C використовують побудову паралелей, на яких знаходяться ці точки.

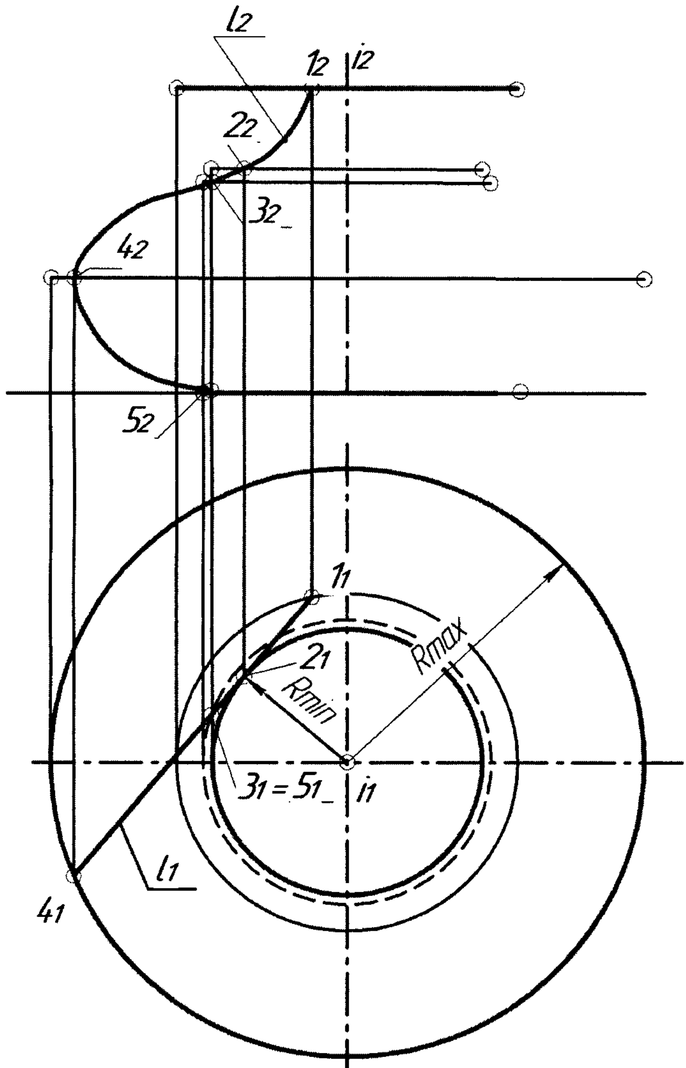


Рисунок 8.5 – Наступні кроки розв'язання задачі на побудову обрису поверхні обертання

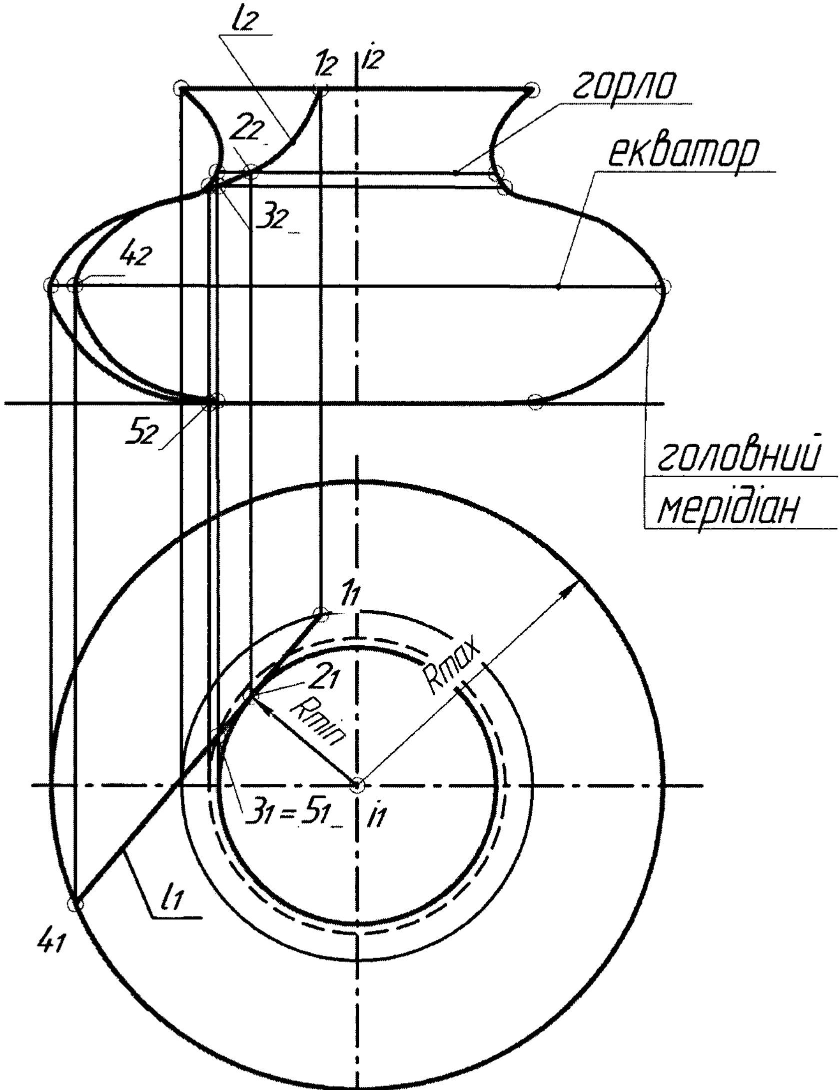


Рисунок 8.6 – Розв’язок задачі на побудову обрису поверхні обертання

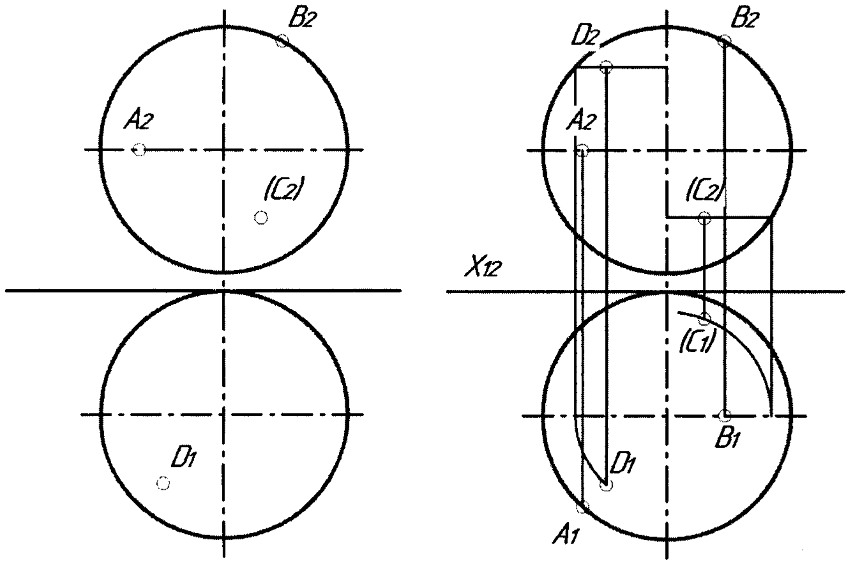


Рисунок 8.7 – Розв’язок задачі на побудову проекцій точок, які належать поверхні сфери

Запитання для самоперевірки

1. Як утворюється поверхня обертання? Наведіть приклади.
2. Дайте визначення понять «паралель», «горло», екватор».
3. Дайте визначення понять «меридіан», «головний меридіан».
4. Який принцип побудови обрису поверхні обертання загального вигляду?
5. Які точки на твірній лінії є обов’язковими при побудові обрису поверхні?
6. Яка умова належності точки поверхні?
7. Які лінії використовують як допоміжні при побудові точок, що належать поверхні?

ТЕМА 9 ПОВЕРХНІ ПЕРЕНЕСЕННЯ: ГРАФІЧНІ МОДЕЛІ

Поверхні перенесення (transfer surface) – це поверхні, що утворюються шляхом переміщення твірної лінії за заданою напрямною. Такі поверхні зручно задавати проекціями каркаса. На рис. 9.1 наведений приклад утворення канальної поверхні при русі твірної кола l за напрямною кривою m, а на рис. 9.2 – проекції каркаса цієї ж поверхні.

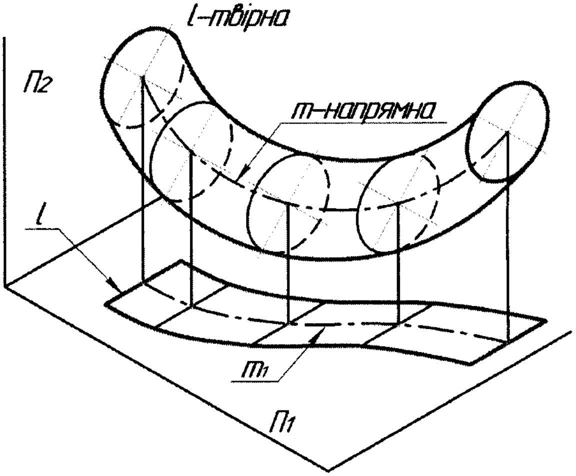


Рисунок 9.1 – Утворення канальної поверхні

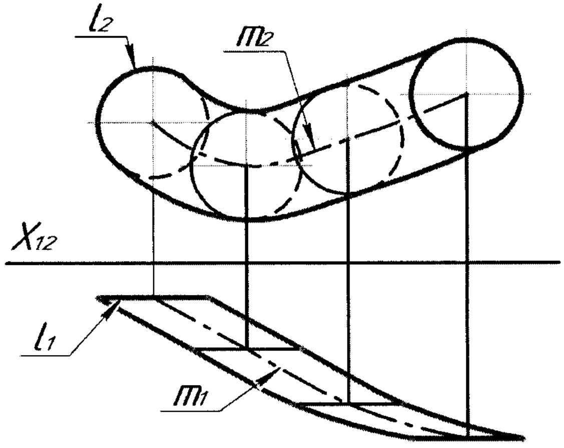


Рисунок 9.2 – Проекції каркаса канальної поверхні

Розгортні лінійчаті поверхні. Прикладами таких поверхонь можуть бути конічна, циліндрична та торсові поверхні.

Конічна поверхня утворюється, якщо один кінець твірної прямої рухається по кривій напрямній лінії і при цьому всі твірні перетинаються в одній точці. На рис. 9.3 наданий приклад каркаса такої поверхні, де один кінець твірної-прямої рухається по кривій напрямній *m*, і всі твірні перетинаються в точці *S*.

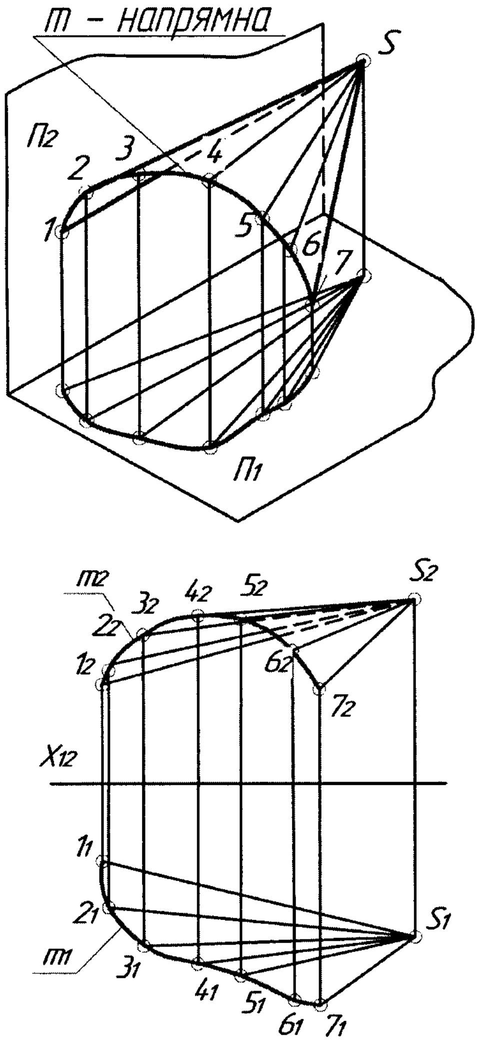


Рисунок 9.3 – Каркас конічної поверхні: об’ємна модель та проекції

Визначник конічної поверхні: $\Phi = [\ (m, l, S); (\forall m \cap l;\ l \supset S)]$;

m – напрямна крива;

l – твірна пряма;

S – власна точка.

Циліндрична поверхня утворюється, якщо один кінець твірної-прямої рухається по кривій напрямній лінії і при цьому всі твірні паралельні певному напрямку. На рис. 9.4, 9.5 наведений приклад об’ємної моделі та проекцій каркаса циліндричної поверхні, де один кінець твірної-прямої рухається по кривій напрямній m, і всі твірні паралельні вектору S.

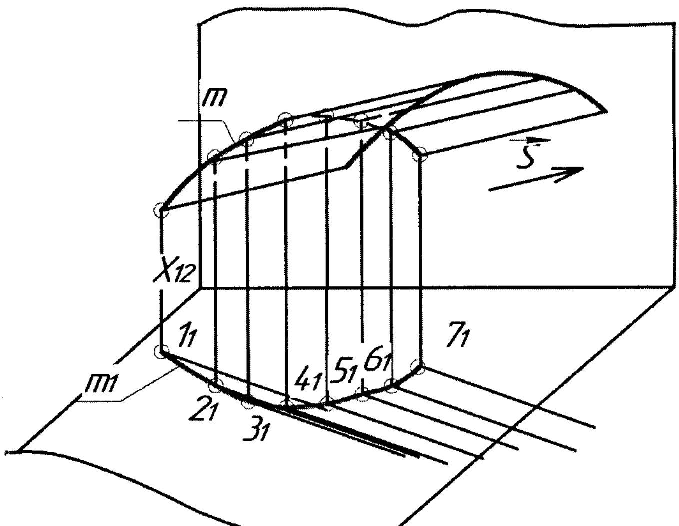


Рисунок 9.4 – Утворення каркаса циліндричної поверхні

Визначник циліндричної поверхні: $\Phi = [\ (m, l, S); (\forall m \cap l;\ l \parallel S)]$;

m – напрямна крива;

l – твірна пряма;

S – вектор напряму.

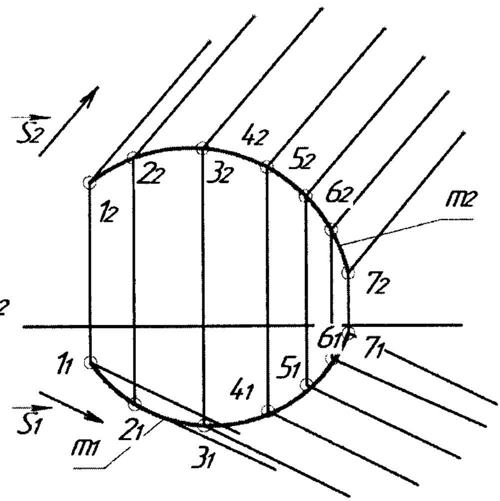


Рисунок 9.5 – Проекції каркаса циліндричної поверхні

Торсова поверхня (torso surface) **(поверхня з ребром звороту** (surface with a cuspidal edge)) утворюється шляхом переміщення твірної прямої по кривій напрямній. При цьому твірна у всіх своїх положеннях є дотичною до напрямної лінії. Крива напрямна, що може бути як плоскою, так і просторовою, називається ребром звороту. На рис. 9.6, 9.7 наведений приклад утворення торса та його проекцій.

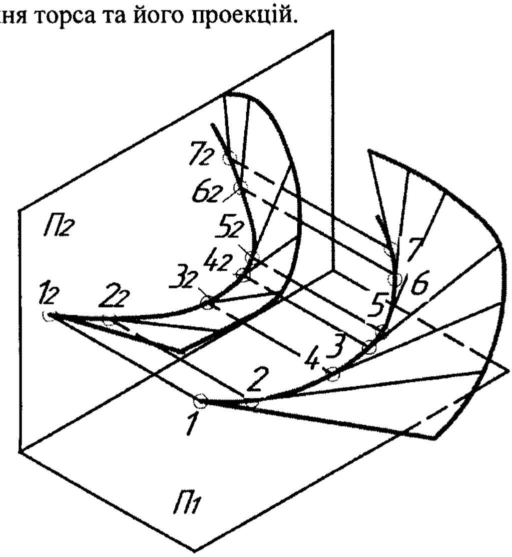


Рисунок 9.6 – Просторова модель утворення торсової поверхні

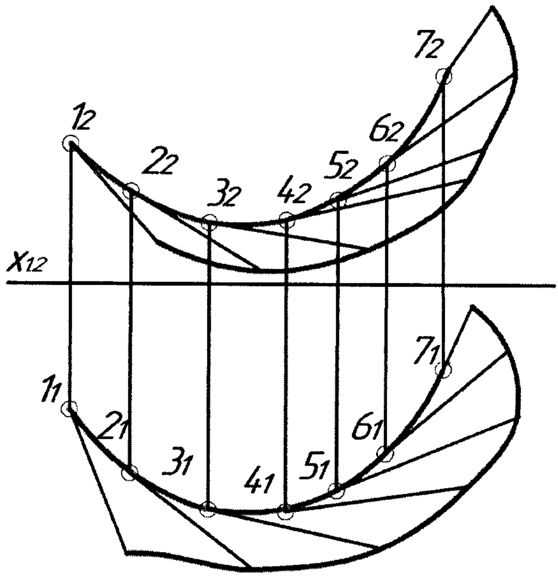


Рисунок 9.7 – Проекції каркаса торсової поверхні

Визначник торсової поверхні: $\Phi = [(m, l); (\forall\, m \cap l;\ l \cup m)]$;

m – напрямна крива;

l – твірна пряма.

Серед поверхонь перенесення можна виділити групу поверхонь, при утворенні яких всі твірні залишаються паралельними деякій площині. Вони мають назву поверхонь з **площиною паралелізму** і відносяться до **нерозгортних лінійчатих поверхонь**. До них можна віднести циліндроїд, коноїд, гіперболічний параболоїд. Ці поверхні також мають назву поверхонь **Каталану**.

Циліндроїд (cylindroid) – це поверхня, що утворюється в результаті руху твірної-прямої по двох кривих напрямних. При цьому твірна завжди залишається паралельною площині паралелізму. Приклад такої поверхні та її проекцій наведений на рис. 9.8, 9.9.

Визначник поверхні циліндроїда: $\Phi = [(m, n, l, \delta); (\forall\, m \cap l;\ n \cap l;\ l \parallel \delta)]$;

m – напрямна крива;

n– напрямна крива;

l – твірна пряма;

δ – площина паралелізму.

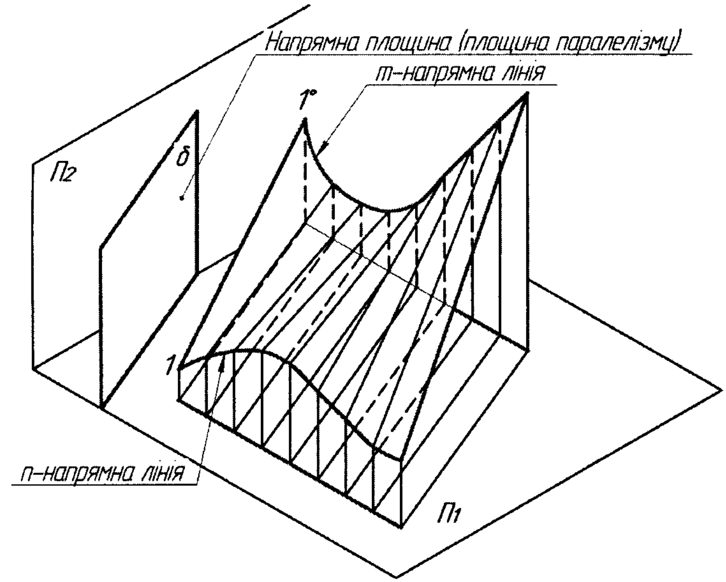


Рисунок 9.8 – Просторова модель утворення циліндроїда

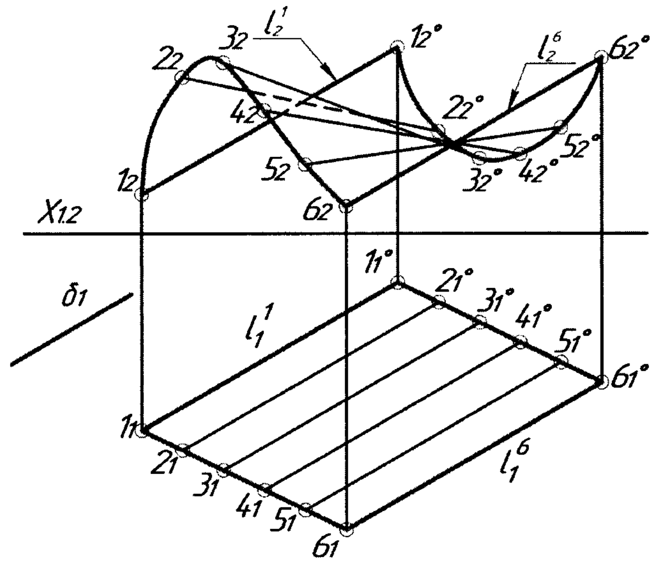


Рисунок 9.9 – Проекції каркаса поверхні циліндроїда

Коноїд (conoid) – це поверхня, що утворюється в результаті руху прямої-твірної по двох напрямних, одна з яких – крива лінія, а друга – пряма. При цьому твірна залишається паралельною до деякої площини (площини паралелізму). Приклад поверхні коноїда та її проекцій наведений на рис. 9.10.

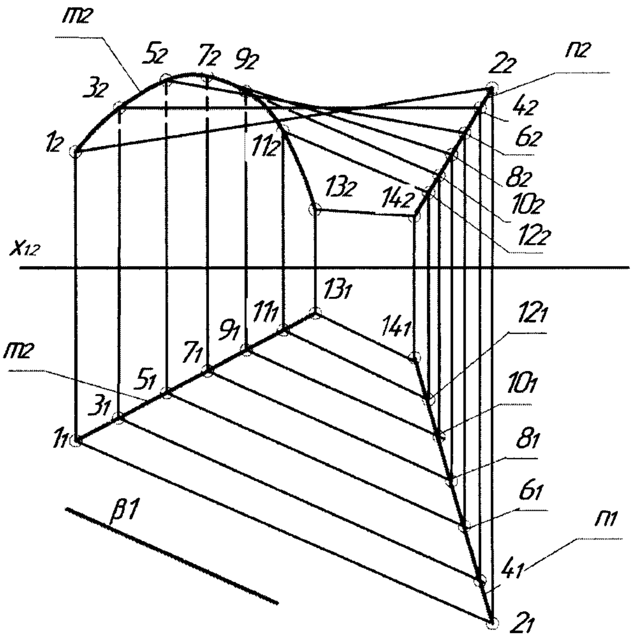


Рисунок 9.10 – Проекції каркаса поверхні коноїда

Визначник поверхні коноїда: $\Phi = [(m, n, l, \beta); (\forall m \cap l; n \cap l; l \parallel \beta)]$;

m – напрямна крива;

n– напрямна пряма;

l – твірна пряма;

β – площина паралелізму.

Гіперболічний параболоїд (hyperbolic paraboloid) **(скісна площина** (oblique plane)**)** – це поверхня, що утворюється в результаті руху прямої-твірної по двох прямих напрямних, які є мимобіжними. При цьому твірна залишається паралельною до деякої площини (площини паралелізму). Приклад проекцій поверхні гіперболічного параболоїда наведений на рис. 9.11.

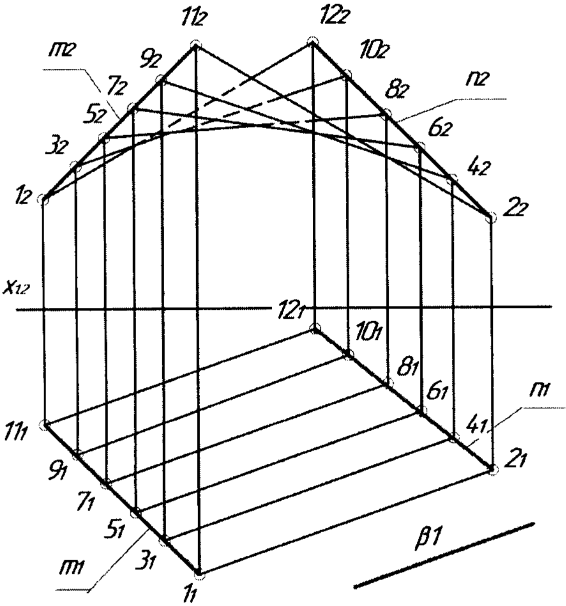


Рисунок 9.11 – Проекції каркаса поверхні гіперболічного параболоїда

Визначник гіперболічного параболоїда:

$$\Phi = [(m, n, l, \beta); (\forall\, m \cap l;\ n \cap l;\ l \parallel \beta;\ m — n)];$$

m – напрямна пряма;
n– напрямна пряма;
l – твірна пряма;
β – площина паралелізму.

Запитання для самоперевірки

1. Як утворюється поверхня перенесення? Наведіть приклади.
2. Дайте визначення конічної та циліндричної поверхонь, наведіть приклади проекцій, запишіть визначники.
3. Дайте визначення торсової поверхні, наведіть приклади проекцій, запишіть визначник.
4. Дайте визначення циліндроїда та коноїда, наведіть приклади проекцій, запишіть визначники.
5. Дайте визначення гіперболічного параболоїда, наведіть приклади проекцій, запишіть визначник.

ТЕМА 10 ТРЕТЯ ПОЗИЦІЙНА ЗАДАЧА: ПЕРЕТИН ПОВЕРХНІ ПЛОЩИНОЮ, ЯКЩО ПЛОЩИНА АБО ПОВЕРХНЯ Є ПРОЕКЦІЮВАЛЬНИМИ

Третя позиційна задача – це задача на знаходження лінії перетину поверхні площиною. Результатом перетину поверхні та площини є крива лінія. Для її побудови необхідно знайти точки, які є спільними для поверхні і площини. Можна розглядати такі випадки:

1) і площина, і поверхня займають проекціювальне положення;
2) площина займає проекціювальне положення, а поверхня – ні;
3) поверхня займає проекціювальне положення, а площина – загальне;
4) і площина, і поверхня відносно площин проекцій не є проекціювальними.

В першому випадку проекції лінії перетину вже є на епюрі і збігаються з проекціями заданих фігур (рис. 10.1). На фронтальній площині проекцій лінія перетину збігається із слід-проекцією площини α в межах циліндра, а на горизонтальній площині проекцій – з обрисом циліндра в межах точок *2-1-3*.

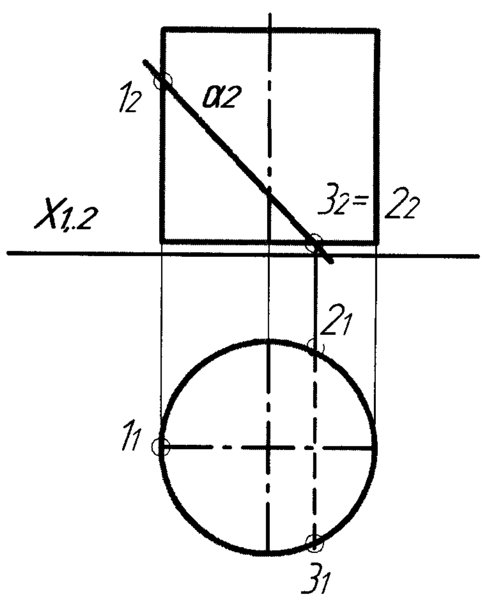


Рисунок 10.1 – Перетин поверхні прямого циліндра фронтально-проекціювальною площиною

В другому випадку одна проекція лінії перетину збігається із слід-проекцією площини, а друга будується на підставі належності точок поверхні. Розглянемо перетин еліптичного конуса фронтально-проекціювальною площиною α (рис. 10.2). Фронтальна проекція лінії перетину збігається із слід-проекцією α_2. Горизонтальну проекцію лінії перетину будуємо, використовуючи твірні конуса. Так, для побудови горизонтальної проекції точки *1*, що знаходиться на обрисі, спочатку будуємо проекцію твірної, яка з'єднує точку на колі основи і вершину, а потім на неї проекціюємо точку 1_1 (рис.10.3).

Для подальшої побудови обираємо точки, користуючись їх доцільністю (рис. 10.4). Точки *1* і *5* належать обрису на фронтальній проекції поверхні. Точки *3* і *4* є границею видимості для горизонтальної проекції лінії перетину, тому є обов'язковими для побудови. Для цього спочатку на $П_2$ будуємо проекції твірних, потім на їх перетині з α_2 відмічаємо точки 3_2 і 4_2, звідки проекціюємо їх на горизонтальний обрис (точки 3_1 і 4_1). Точки *7* і *2* є зручними у побудові, оскільки збігаються з вищевказаними точками. Точка *6* також є допоміжною.

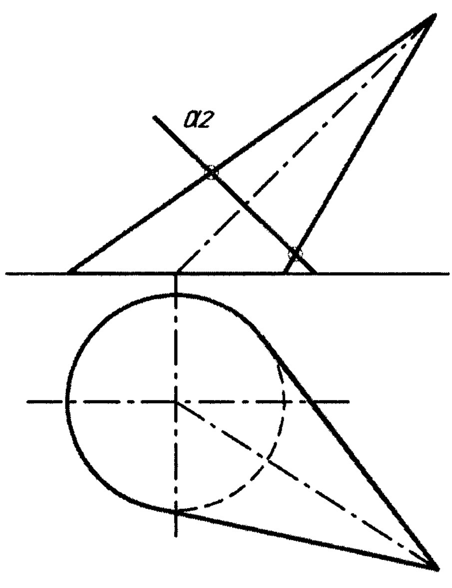


Рисунок 10.2 – Перетин поверхні конуса фронтально-проекціювальною площиною: умова

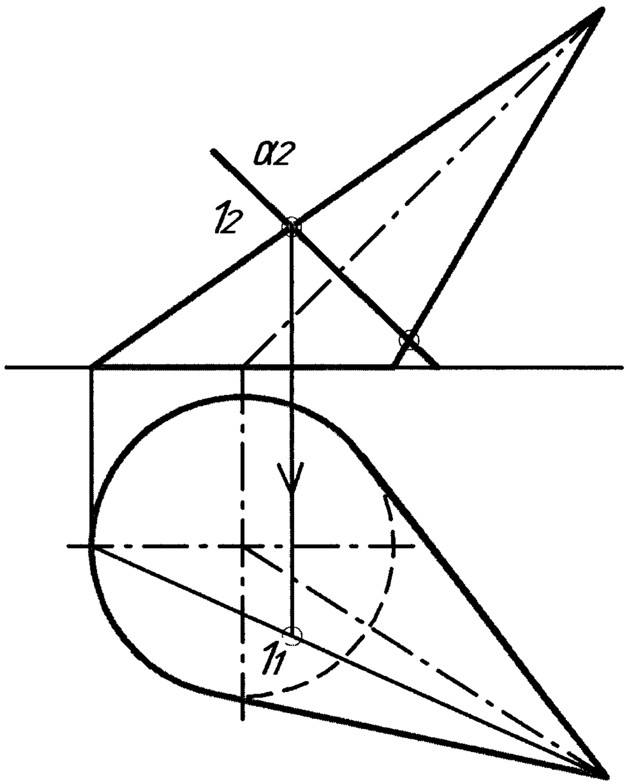


Рисунок 10.3 – Перетин поверхні конуса фронтально-проекціювальною площиною: перший крок розв’язування

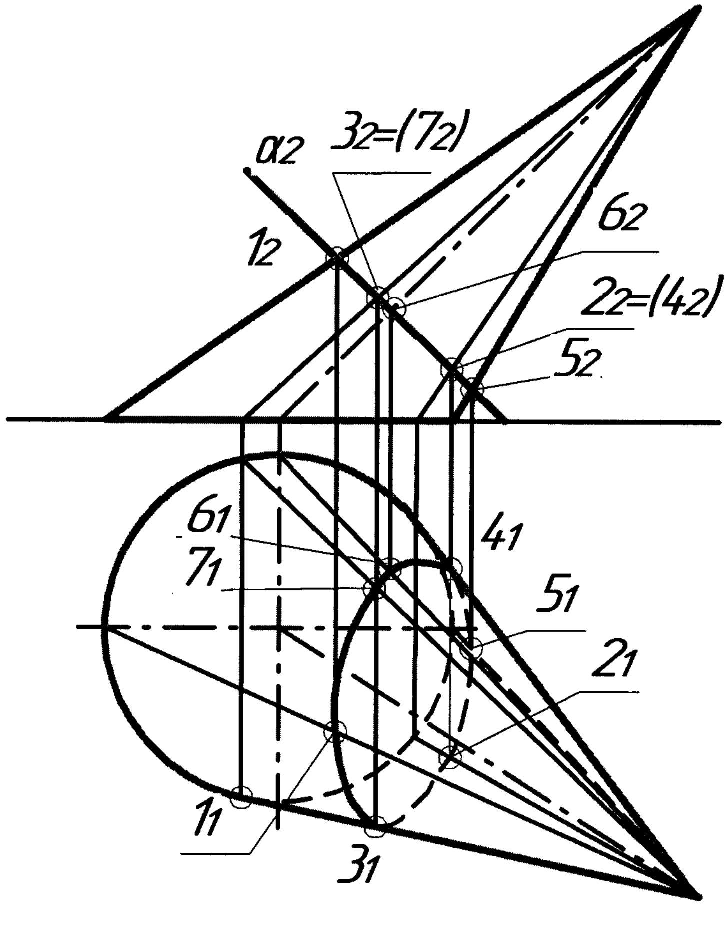


Рисунок 10.4 – Перетин поверхні конуса фронтально-проекціювальною площиною: розв'язок

В задачах вказаного типу досить часто необхідно визначити натуральну величину лінії перетину. Для цього вводиться додаткова площина проекцій, що паралельна площині перерізу (X_{24} паралельно α_2). Від введеної осі X_{24} відкладаються відстані, які дорівнюють відстаням від осі X_{12} до відповідних проекцій точок на $П_1$. На рис. 10.5 наведений приклад такої побудови.

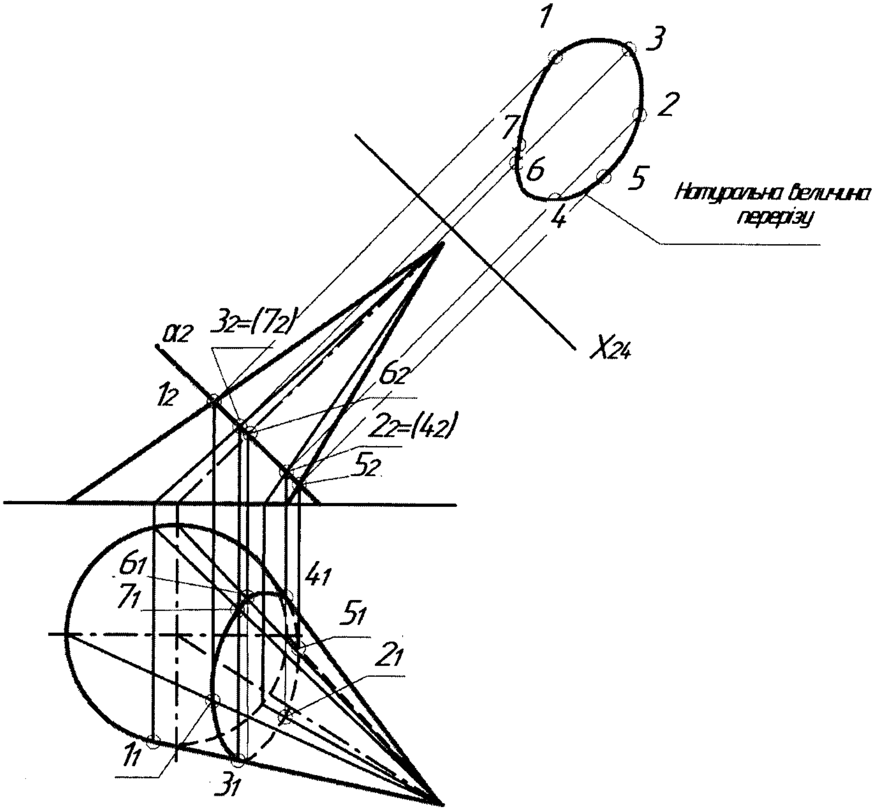


Рисунок 10.5 – Визначення натуральної величини перетину конуса фронтально-проекціювальною площиною

Запитання для самоперевірки

1. Які випадки розташування об'єктів відносно площин проекцій можна розглядати при розв'язанні задачі на перетин поверхні та площини.
2. Як розв'язується третя позиційна задача, якщо і площина і поверхня займають проекціювальне положення?
3. Як розв'язується третя позиційна задача, якщо площина займає проекціювальне положення, а поверхня – ні?
4. Побудова яких точок лінії перетину є обов'язковою при розв'язанні третьої позиційної задачі?

ТЕМА 11. ТРЕТЯ ПОЗИЦІЙНА ЗАДАЧА: ПЕРЕТИН ПОВЕРХНІ ПЛОЩИНОЮ, ЯКЩО ПЛОЩИНА ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ

Розглянемо третій та четвертий випадки теми 10. При розв'язанні такого типу задач можуть бути різні підходи. Один з таких підходів – використання методів перетворення креслення. Нехай необхідно знайти лінію перетину поверхні прямого кругового циліндра площиною загального положення, яка задана двома прямими, що перетинаються (рис. 11.1).

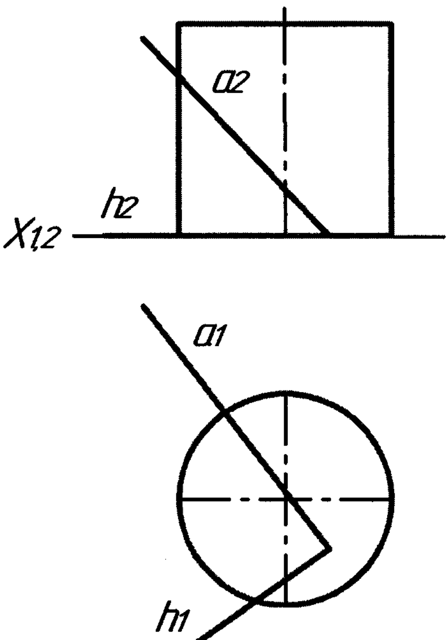


Рисунок 11.1 – Перетин поверхні прямого циліндра площиною загального положення: умова

Якщо площина займає загальне положення, то для розв'язання задачі треба застосувати спеціальні методи, наприклад, метод заміни площин проекцій. При цьому додаткова площина вводиться таким чином, щоб задана площина перетворилася в проекціювальну. Порядок дій можна подати таким чином:

1) вводимо додаткову площину проекцій X_{14}, що перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі h_1 (рис.11.2);

2) проекціюємо циліндр на додаткову площину $П_4$ (рис. 11.3);

3) проекціюємо площину на додаткову площину $П_4$ (рис. 11.3);

4) визначаємо лінію перетину, проекція якої збігається з проекцією площини на $П_4$ в межах проекції циліндра ($1_4 - 3_4$);

5) знаходимо проекції точок, що належать наданій лінії, послідовно на $П_1$ та $П_2$, враховуючи при цьому, що відстані в $П_1$ від $X_{1,2}$ до відповідної проекції і відстані в $П_4$ від $X_{1,4}$ до відповідної проекції рівні між собою;

6) обов'язково визначаємо точки 2 і 4, оскільки саме вони визначають границю видимості на $П_2$.

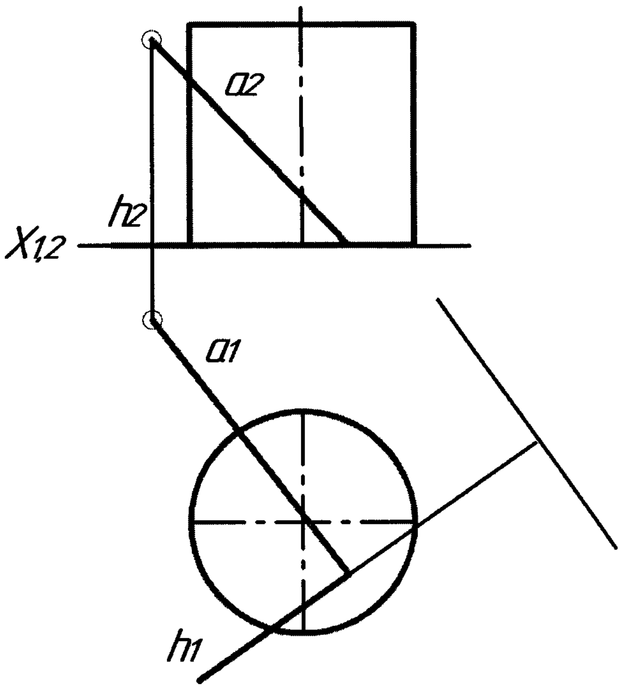


Рисунок 11.2 – Перетин поверхні прямого циліндра площиною загального положення: перший крок розв'язування

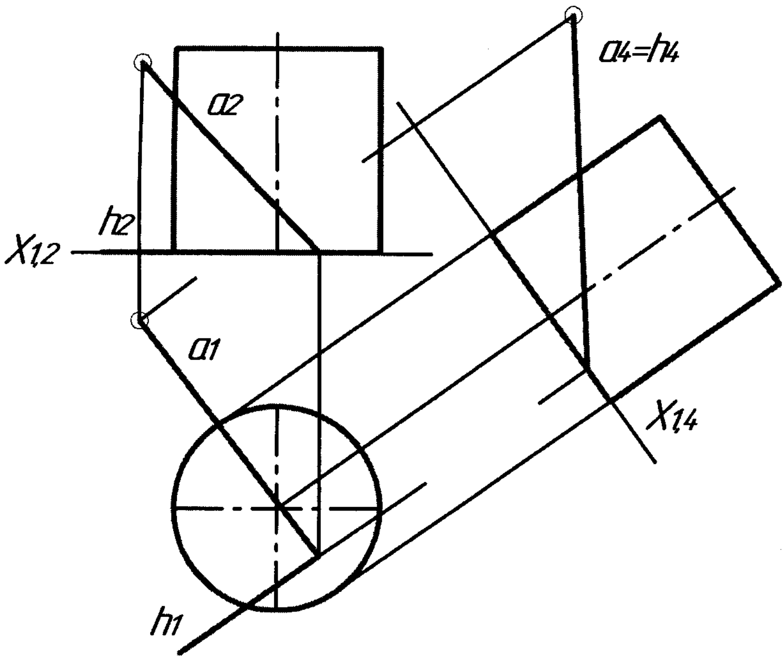


Рисунок 11.3 – Перетин поверхні прямого циліндра площиною загального положення: проміжний етап

Необхідно відмітити, що введена допоміжна площина проекцій може бути перпендикулярна як до $П_1$, так і до $П_2$. При цьому необхідно враховувати складність проекціювання також і самої поверхні.

У випадках, якщо поверхнею є конус, сфера або похилий циліндр, необхідно будувати також і горизонтальну проекцію лінії перетину поверхні з площиною, використовуючи при цьому твірні або паралелі. Приклад умови задачі на перетин конуса площиною загального положення, що задана слідами поданий на рис. 11.5, а розв'язок цієї задачі на рис. 11.6. При побудові точки *1* і *2* знаходяться на колі основи конуса. Точка *3* належить відповідній твірній і є найвищою точкою лінії перетину. Точки *4* і *5* знаходяться на осі і тому визначаються через відповідну паралель. При побудові фронтальної проекції лінії перетину враховують ще і точку *6*, оскільки саме вона є межею видимості для фронтальної проекції.

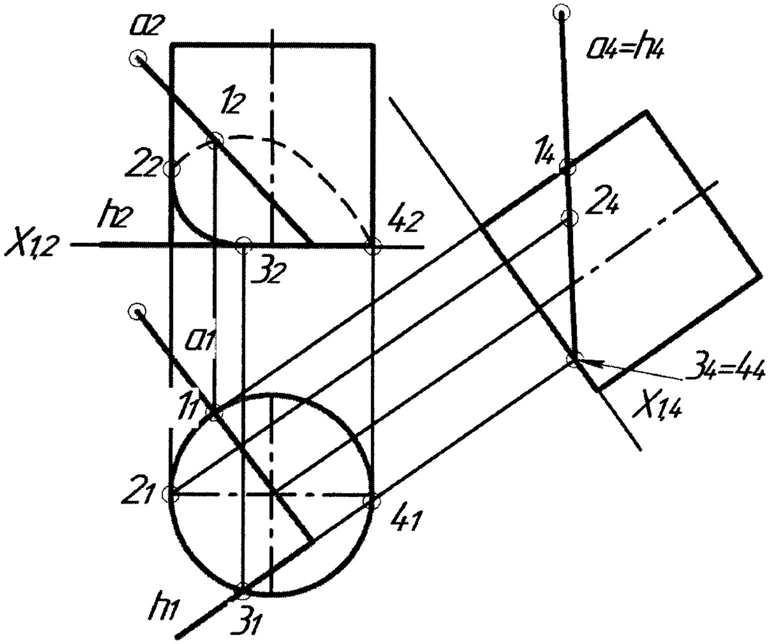


Рисунок 11.4 – Перетин поверхні прямого циліндра площиною загального положення: результат розв’язування

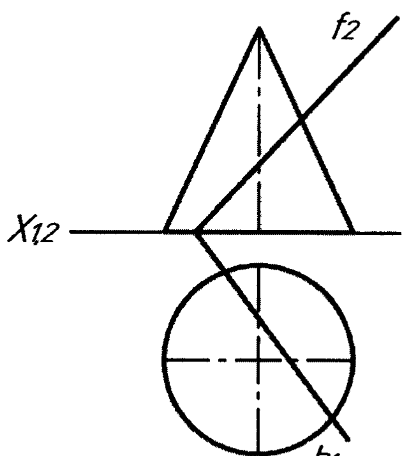


Рисунок 11.5 – Перетин поверхні конуса обертання площиною загального положення: умова

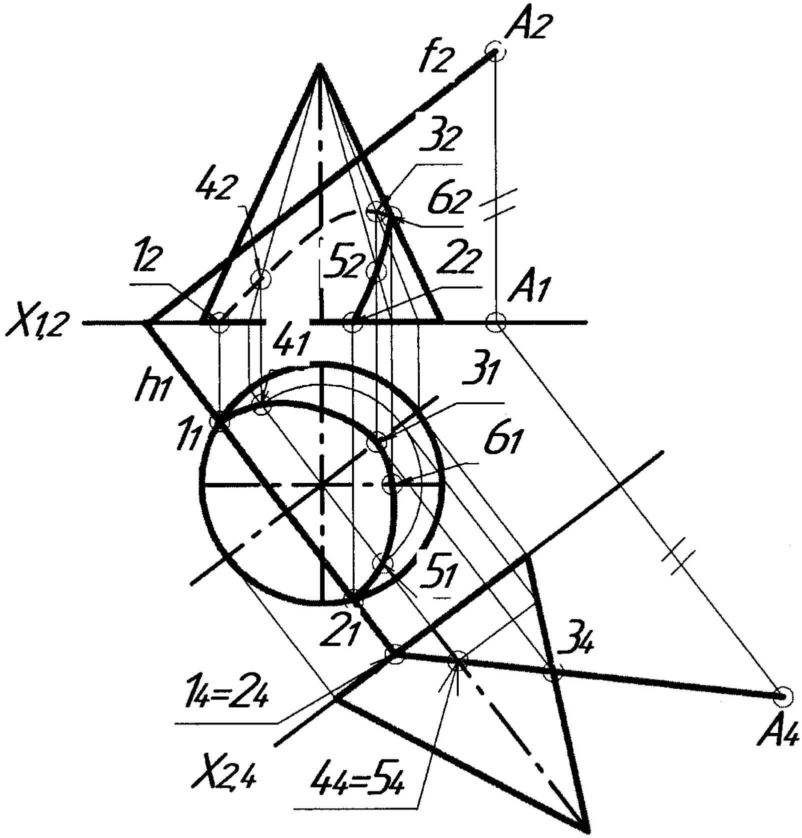


Рисунок 11.6 – Перетин поверхні конуса обертання площиною загального положення: результат розв'язування

Запитання для самоперевірки

1. Які методи застосовують для розв'язання третьої позиційної задачі, якщо площина займає загальне положення?
2. Як вводиться додаткова площина при розв'язанні третьої позиційної задачі, якщо площина займає загальне положення?
3. Які точки є обов'язковими при побудові, якщо поверхня – прямий циліндр?
4. Які точки є обов'язковими при побудові, якщо поверхня – конус?
5. Які точки є обов'язковими при побудові, якщо поверхня – сфера?

ТЕМА 12 ЧЕТВЕРТА ПОЗИЦІЙНА ЗАДАЧА: ПЕРЕТИН ПОВЕРХНІ ПРЯМОЮ

Четверта позиційна задачами – це задача на знаходження проекцій точки перетину поверхні прямою лінією. Можна розглянути такі випадки:

1) і пряма, і поверхня займають проекціювальне положення;
2) пряма займає проекціювальне положення, а поверхня – ні;
3) пряма займає загальне положення, а поверхня є проекціювальною;
4) і поверхня, і площина не є проекціювальними.

Нехай необхідно знайти точки перетину прямого кругового циліндра горизонтально-проекціювальною прямою b (рис.12.1). Це перший випадок. Оскільки бічна поверхня циліндра є проекціювальною відносно $П_1$, то фронтальні проекції точок перетину N_2 і L_2 знаходяться на перетині обрису та проекції прямої b_2. Горизонтальні проекції точок перетину збігаються з горизонтальною слід-проекцією прямої b_1.

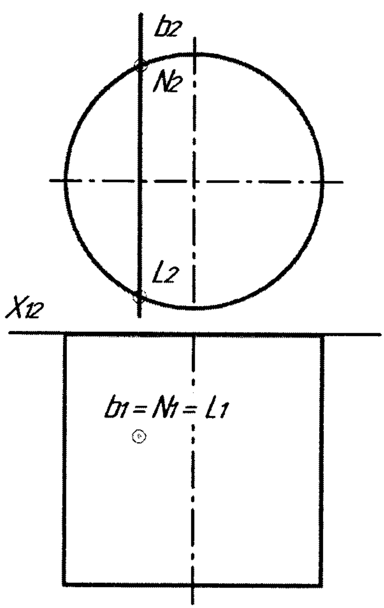
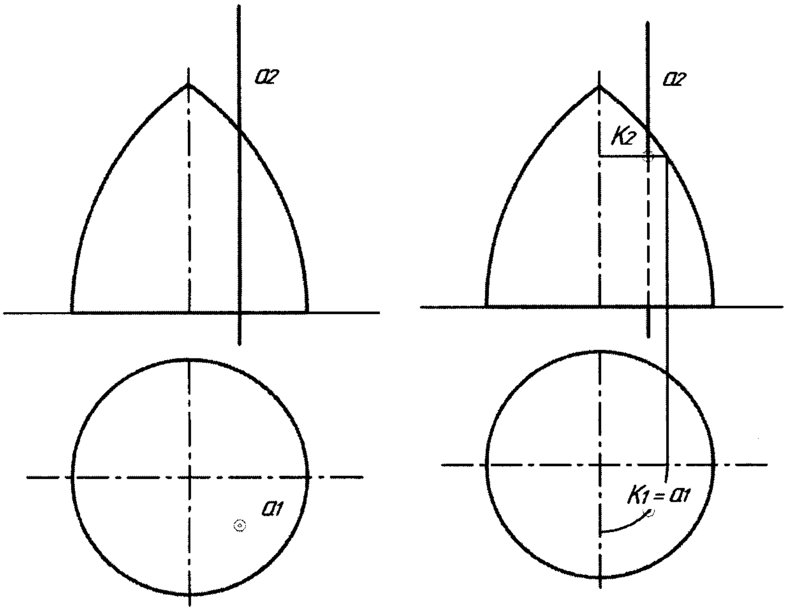


Рисунок 12.1 – Перетин циліндра прямою лінією

Другий випадок перетину поверхні з проекціювальною прямою поданий на рис. 12.2 (а, б). Оскільки пряма a є горизонтально-проекціювальною, то горизонтальна проекція K_1 точки перетину K збігається з проекцією a_1. Фронтальну проекцію K_2 визначають, виходячи з умови належності точки поверхні обертання. Тобто, будують паралель, якій належить точка *K*.



а) б)

Рисунок 12.2 – Перетин поверхні обертання з прямою лінією:
а – умова; б – розв’язок

Розглянемо випадок перетину поверхні конуса з прямою загального положення (рис. 12.3). **Алгоритм** розв’язання задачі такого типу такий:

1) вводимо додаткову допоміжну площину окремого положення таким чином, щоб задана пряма належала їй;
2) будуємо лінію перерізу заданої поверхні допоміжною площиною;
3) визначаємо точки перетину побудованої лінії із заданою прямою;
4) відповідно до проекційного зв’язку визначаємо інші проекції точок;
5) визначаємо видимість прямої.

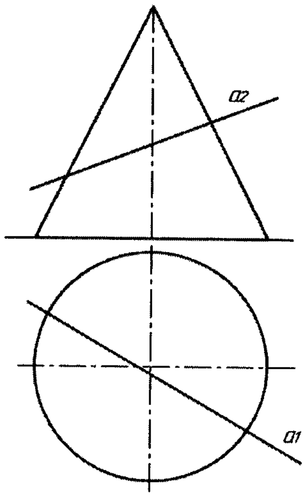


Рисунок 12.3 – Перетин поверхні конуса з прямою лінією: умова

Відповідно до алгоритму вводимо допоміжну фронтально-проекціювальну площину α(α2), слід-проекція якої збігається з фронтальною проекцією прямої *a*2 (рис. 12.4).

Для побудови лінії перерізу конуса введеною площиною використовуємо умову належності точки поверхні. Точки *1* і *2* належать лініям обрису і на горизонтальній площині проекцій знаходяться на горизонтальній осі конуса. Точки *3* і *4* визначаються за допомогою відповідної паралелі, а точки *5* і *6* – за допомогою відповідної твірної. Точки *K* і *M* є шуканими точками перетину прямої з поверхнею (рис. 12.5). Останнім кроком визначаємо видимість прямої.

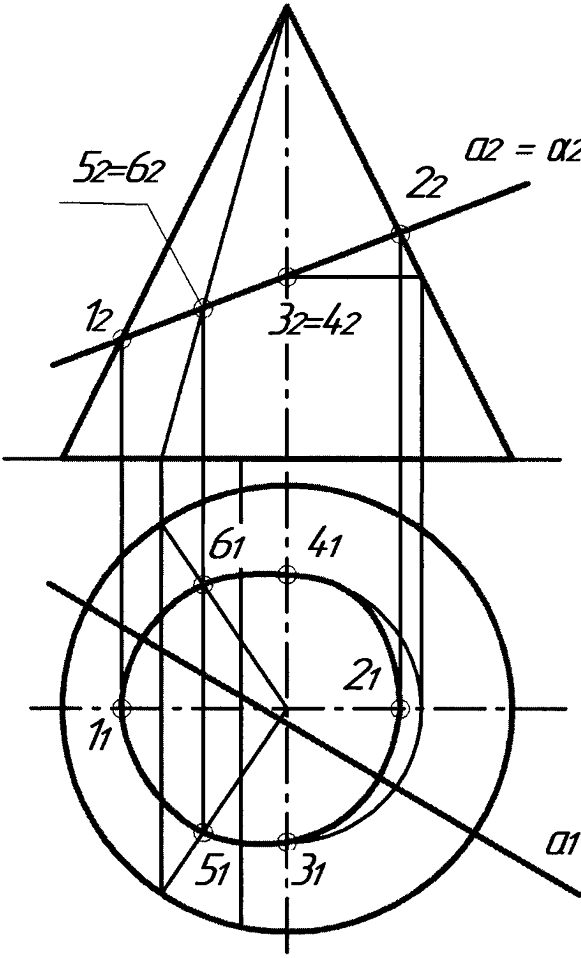


Рисунок 12.4 – Перетин поверхні конуса з прямою лінією: проміжний результат розв'язування

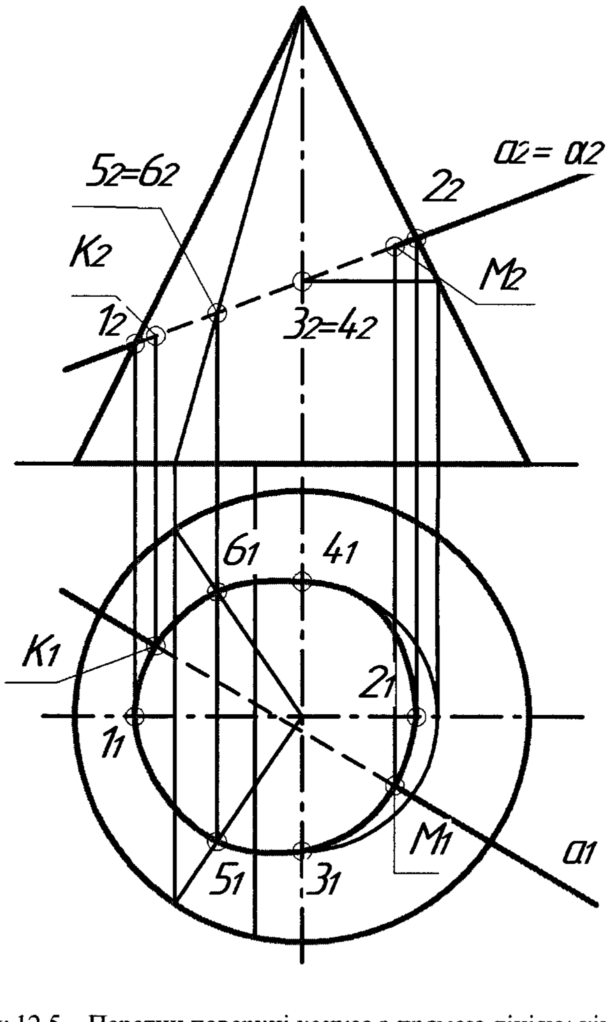


Рисунок 12.5 – Перетин поверхні конуса з прямою лінією: кінцевий результат розв’язування

ТЕМА 13 П'ЯТА ПОЗИЦІЙНА ЗАДАЧА: ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ МЕТОДОМ СІЧНИХ ПЛОЩИН

П'ята позиційна задача – це задача на **знаходження лінії перетину** (line of intersection) **кривих поверхонь**. Лінія перетину – це сукупність точок, що одночасно належать обом поверхням. Якщо одна з поверхонь є проекціювальною відносно певної площини проекцій (наприклад, бічна поверхня прямого циліндра проекціюється в коло), то лінія перетину на цій площині проекцій збігається з лінією проекції поверхні. В такому випадку задача зводиться до перенесення точок, які належать поверхні, на інші проекції поверхонь.

В інших випадках для розв'язування п'ятої позиційної задачі можна застосувати введення поверхонь посередників. Найбільш поширені методи, які основані на такому введенні, - метод допоміжних січних площин, метод допоміжних концентричних сфер та метод допоміжних ексцентричних сфер. Нижче розглянемо перших два методи.

В **методі січних площин** як поверхні посередники вибираються площини окремого положення. Причому при виборі положення допоміжної площини враховують умову, щоб при перетині із заданими поверхнями утворювалися прості геометричні лінії (кола, прямокутники і т. ін.). Перед введенням допоміжної площини необхідно проаналізувати умову і визначити точки, які не потребують додаткових побудов. Це, наприклад, можуть бути точки, що знаходяться на перетині обрисів поверхонь.

Алгоритм розв'язування п'ятої позиційної задачі методом січних площин можна подати такими діями:

1) вводимо допоміжну січну площину окремого положення;

2) знаходимо лінії перетину введеної площини окремо з кожною із поверхонь;

3) визначаємо точки перетину знайдених ліній;

4) повторюємо п. 1 – 3 ще для кількох допоміжних площин;

5) з'єднуємо отримані точки між собою;

6) переносимо проекції отриманих точок на іншу площину проекцій;

7) визначаємо видимість.

На рис. 13.1 – 13.3 поданий приклад побудови лінії перетину конуса та циліндра методом допоміжних січних площин. Оскільки поверхня циліндра є проекціювальною відносно фронтальної площини проекцій, то лінія перетину на Π_2 збігається з колом обрису циліндра. Тому, по-перше, визначаємо точки 1_2 та 5_2, які знаходяться на перетині обрисів поверхонь на фронтальній площині проекцій (нумерація точок може бути довільною). Горизонтальні проекції цих точок 1_1 та 5_1 отримаємо, якщо перенесемо на горизонтальну проекцію лінії, до якої вони належать. В даному випадку це твірна, яка збігається з обрисом на Π_2, а на Π_1 збігається з горизонтальною віссю конуса. Як допоміжну січну площини вибираємо площину горизонтального положення $\alpha(\alpha_2)$, оскільки при перетині з цією площиною конічна поверхня дає простий переріз у вигляді кола (рис.13.2). На $П_2$ – це коло проекціюється у вигляді відрізка, який збігається із слід-проекцією α_2, а на $П_1$ – у вигляді кола, радіус якого можна визначити. При перетині з циліндром площина $\alpha(\alpha_2)$ утворює прямокутник, на $П_2$ проекція якого збігається із слід-проекцією α_2, а на $П_1$ – збігається з обрисом поверхні циліндра. Результатом перетину кола та прямокутника є точки 2_1 та $2_1'$. Фронтальні проекції цих точок 2_2 та $2_2'$ отримаємо при перенесенні їх на проекцію α_2. Надалі допоміжні площини можна вводити через довільні точки (наприклад площина β проходить через точки 3 і $3'$ (рис. 13.2). Винятком є площина δ, оскільки вона проходить через найнижчі точки 4 і $4'$ лінії перетину на $П_1$. З'єднавши точки $1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 4' – 3' – 2' – 1$, отримаємо шукану лінію перетину.

Визначення видимості лінії перетину на $П_1$ проводимо на підставі форми поверхні циліндра Межею видимості є точки, що знаходяться на горизонтальній осі циліндра (2 та $2'$). Всі точки, які на $П_2$ знаходяться вище, на $П_1$ будуть видимі. А ті, що нижче – невидимі.

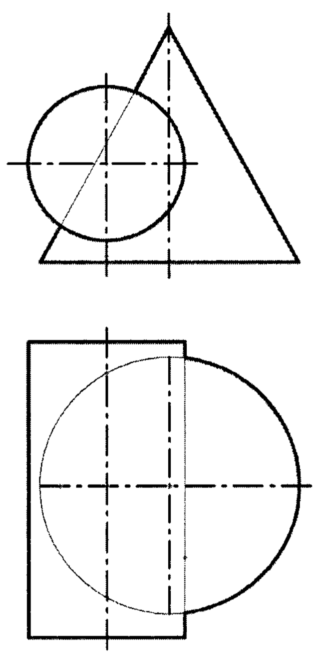


Рисунок 13.1 – Перетин поверхні конуса з циліндром: умова

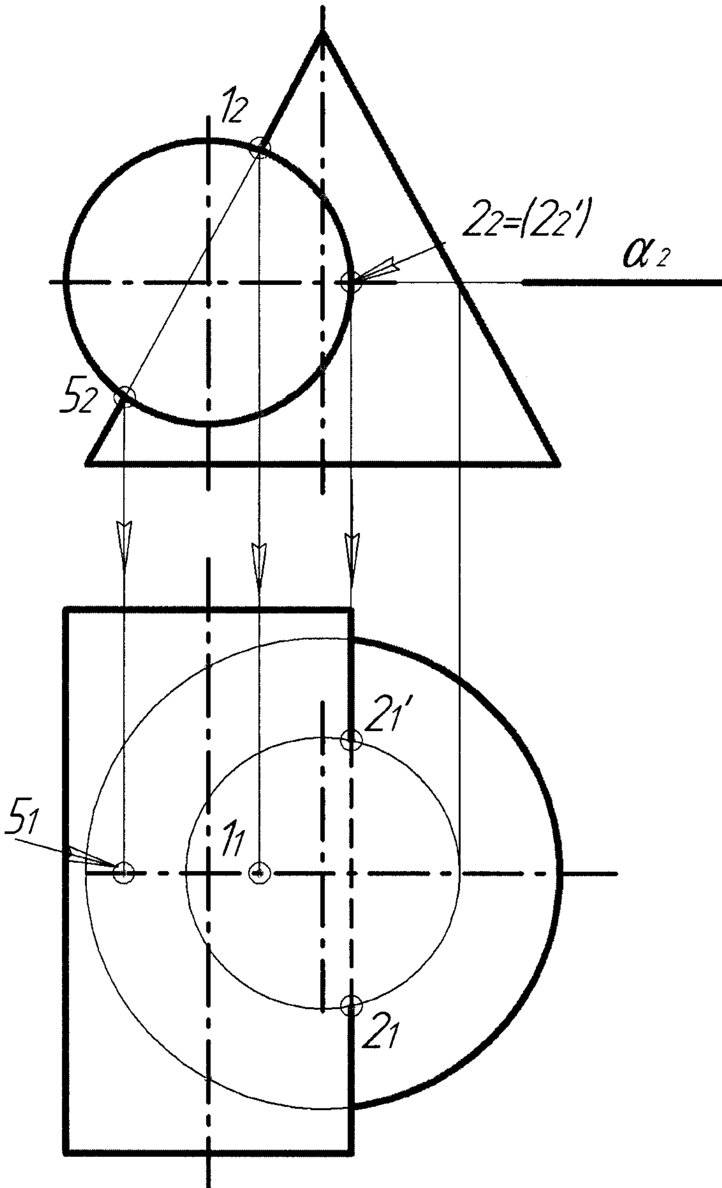


Рисунок 13.2 – Перетин поверхні конуса з циліндром: проміжний етап розв'язування

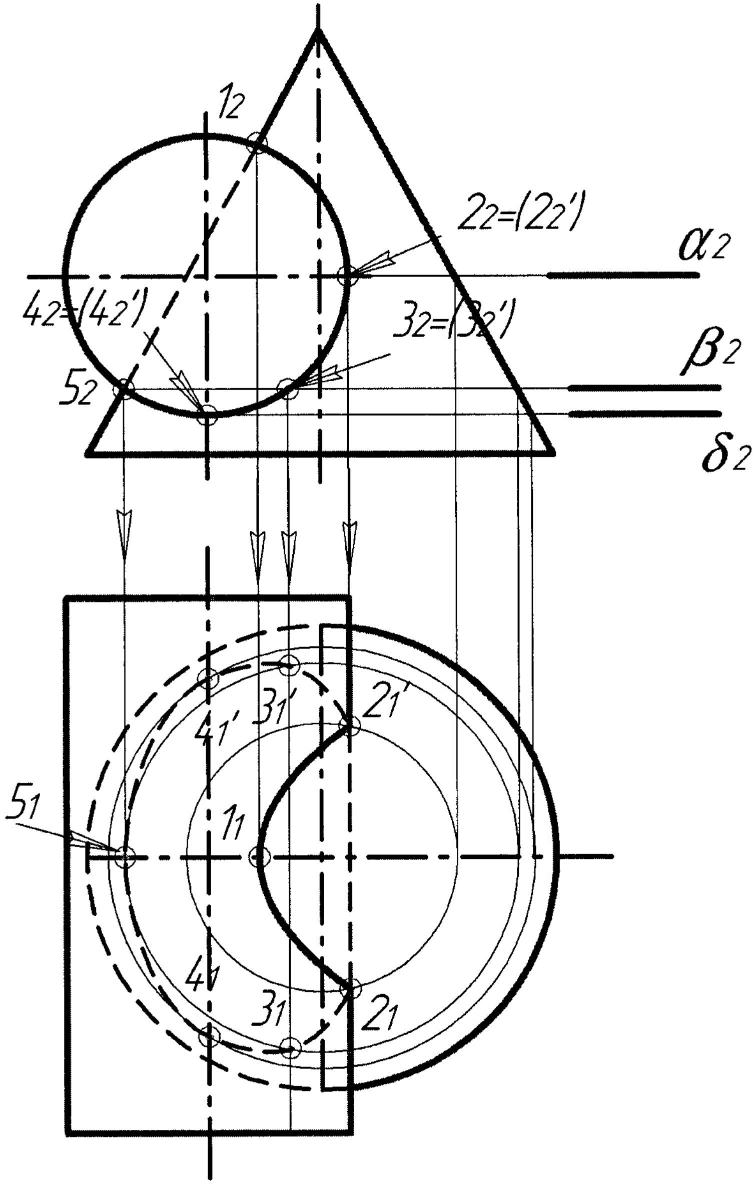


Рисунок 13.3 – Перетин поверхні конуса з циліндром: результат розв’язування

ТЕМА 14 П'ЯТА ПОЗИЦІЙНА ЗАДАЧА: ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ МЕТОДОМ ДОПОМІЖНИХ КОНЦЕНТРИЧНИХ СФЕР

Один з найбільш поширених методів розв'язання п'ятої позиційної задачі – це метод допоміжних концентричних сфер. Цей метод можна використовувати якщо виконуються такі умови:

а) обидві поверхні, що перетинаються, є поверхнями обертання;

б) осі обертання обох поверхонь перетинаються;

в) ці осі мають бути паралельні до однієї з площин проекцій.

Перед тим, як розглянути даний метод на конкретному прикладі, розглянемо деякі особливі випадки перетину поверхонь, що відповідають вказаним умовам.

1. Якщо поверхні, що перетинаються, можуть бути описані навколо спільної сфери, то лінія перетину являє собою дві плоскі криві другого порядку. Їх отримують сполученням точок перетину контурів поверхонь. Приклади таких поверхонь наведені на рис.14.1.

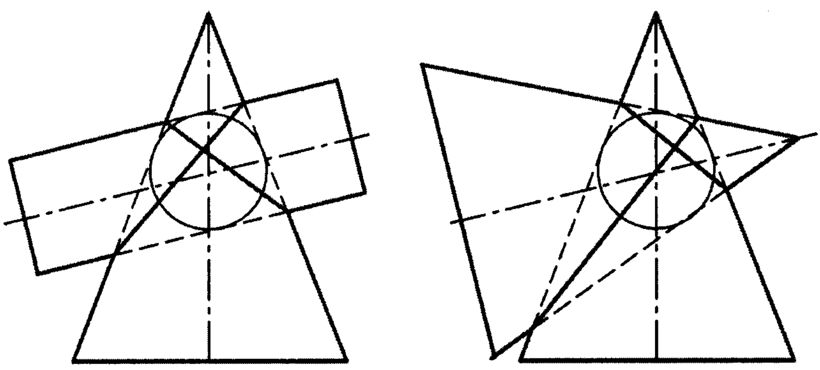


Рисунок 14.1 – Перетин поверхонь обертання

2. Якщо осі поверхонь, що перетинаються збігаються, то лінії перетину є колами. Причому, на одній з площин проекцій лінія виглядає як відрізок, а на іншій – коло. Приклади наведені на рис.14.2.

Для інших випадків необхідно застосувати метод допоміжних концентричних сфер. Як поверхні-посередники вибираються сфери з постійним центром в точці перетину осей. Кількість сфер визначається конкретною задачею. Мінімальний радіус вибирається таким чином, щоб допоміжна сфера була вписана в одну з поверхонь і перетинала іншу. Деякі точки лінії перетину можна визначити без додаткових побудов. Наприклад, точки на перетині обрисів поверхонь.

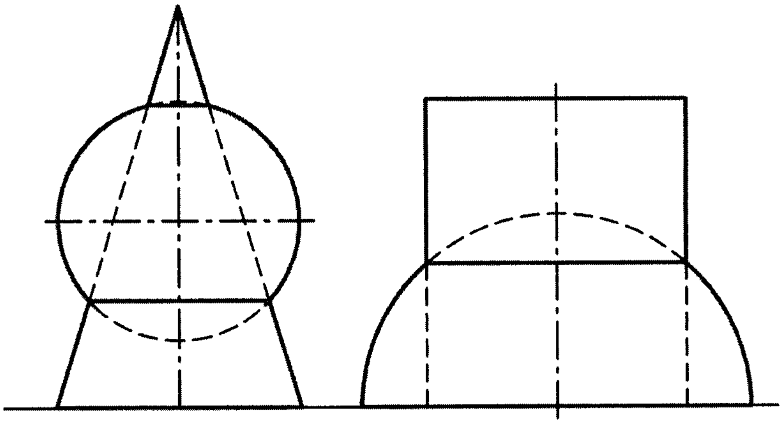


Рисунок 14.2 – Перетин співвісних поверхонь обертання

Алгоритм розв'язування п'ятої позиційної задачі методом концентричних сфер можна подати такими діями:

1) визначаємо центр допоміжних сфер;
2) визначаємо мінімальний та максимальний радіуси допоміжних сфер;
3) вводимо допоміжну сферичну поверхню;
4) знаходимо лінії перетину введеної сфери окремо з кожною із поверхонь;
5) визначаємо точки перетину знайдених ліній;
6) повторюємо п. 1 – 5 ще для кількох допоміжних сфер (при необхідності);
7) з'єднуємо отримані точки між собою;
8) переносимо проекції отриманих точок на іншу площину проекцій;
9) визначаємо видимість лінії перетину;
10) визначаємо видимість поверхонь, що перетинаються.

Розглянемо приклад перетину циліндра та закритого тору, осі обертання яких перетинаються і знаходяться в площині, що паралельна до фронтальної площини проекцій (рис. 14.3). Точки *1* і *2* визначаємо на перетині обрисів поверхонь. Допоміжною сферою з мінімальним радіусом є сфера, що вписується в тор. За її допомогою визначаються точки *3* і *4* (рис. 14.4). При перенесенні отриманих точок на горизонтальну площину проекцій використовуємо лінії обрису (точки *1* і *2*) та паралелі (точки *3* і *4*). Також, необхідно враховувати точки, які є границею видимості для лінії перетину на Π_1. Такими точками в даному випадку є точки *5* і *6* (рис. 14.5). Останнім кроком визначаємо видимість лінії перетину та видимість обрисів.

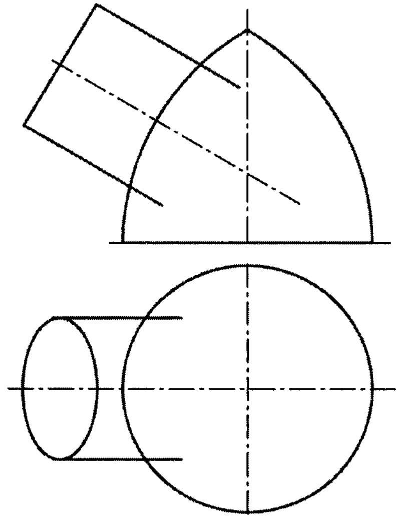


Рисунок 14.3 – Перетин поверхонь обертання: умова

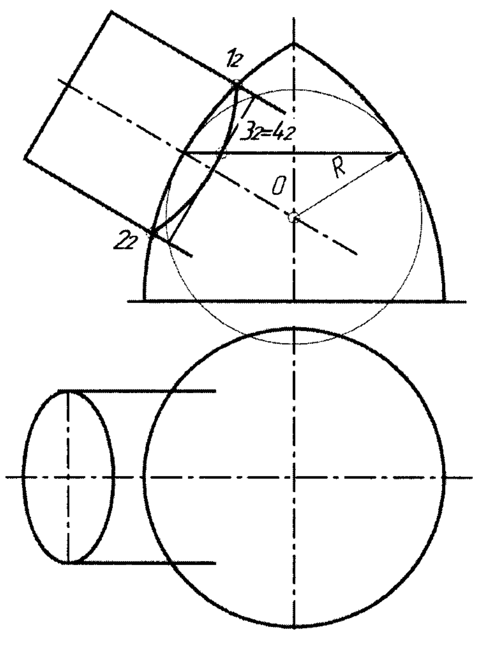


Рисунок 14.4 – Перетин поверхонь обертання: введення сфери мінімального радіуса

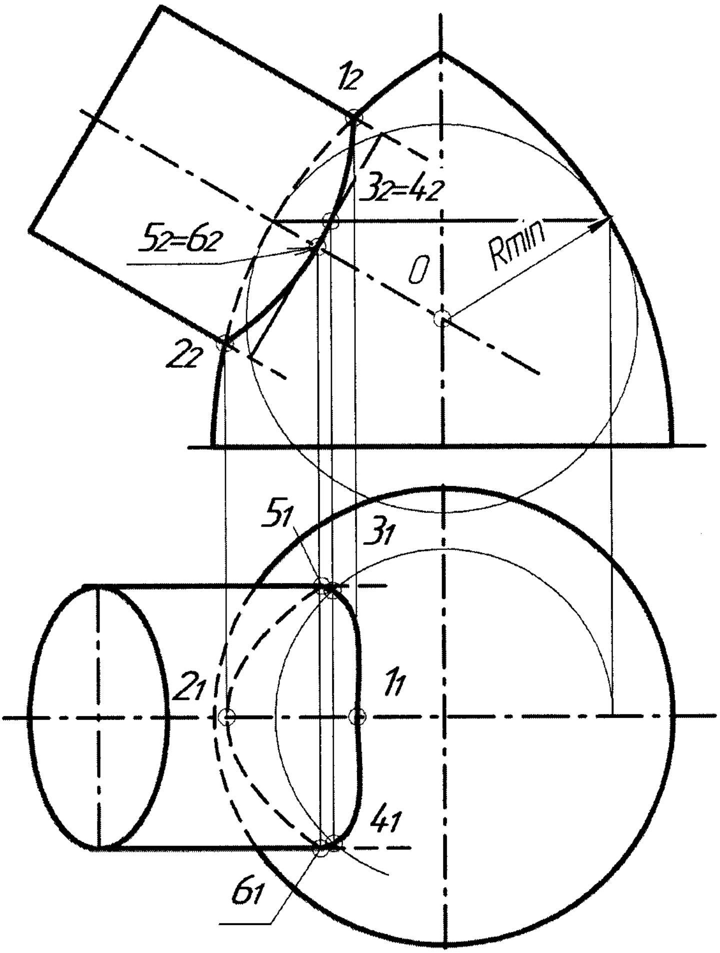


Рисунок 14.5 – Перетин поверхонь обертання: результат розв'язування

ЛІТЕРАТУРА

1. Буда А. Г. Нарисна геометрія. Збірник прикладів та задач з теоретичними відомостями для студентів машинобудівних спеціальностей. – Вінниця : ВНТУ, 2005. – 142 с.

2. Інженерна графіка: підручник для студентів вищих закладів освіти / В. Є. Михайленко, В. В. Ванін, С. М. Ковальов; за ред. В. Є. Михайленка. – Львів: Піча Ю. В.; К.: "Каравела"; Львів: "Новий Світ-2000", 2002. – 336 с.

3. Збірник задач з інженерної та комп'ютерної графіки / [Михайленко В. Є., Найдиш В. М., Підкоритов А. М., Скидан І. А.]. – К. : Вища шк., 2002. – 300 с.

4. Інженерна та комп'ютерна графіка : [підручник] / В. Є. Михайленко, В. М. Найдиш, А. М. Підкоритов, І. А. Скидан; за ред. В. Є. Михайленка. – 2-е вид. – К.: Вища шк., 2001. – 350 с.

5. Павлова А. А. Начертательная геометрия : учеб. для студентов высш. учеб. заведений. / Павлова А. А. – М.: ООО «Издательство Астрель» : ООО «Издательство АСТ», 2001. – 304 с.

6. Методичні вказівки до виконання графічних робіт з нарисної геометрії. / Вітюк О. П., Кормановський С. І., Пащенко В. Н. – Вінниця: ВДТУ, 1994. – 712 с.

7. Нарисна геометрія : [підручник] / В. Є. Михайленко, М. Ф. Євстифеєв, С. М. Ковальов, О. В. Кащенко; за ред. В. Є. Михайленка. – К. : Вища шк., 1993. – 271 с.

8. Шевченко А. В., Конспект лекцій з курсу "Інженерна графіка". / Шевченко А. В., Пащенко В. Н., Павловська О. Г. – Вінниця : ВПІ, 1990. – 80 с.

9. Начертательная геометрия : [учеб. для вузов] / Н. Н. Крылов, Г. С. Иконникова, В. Л. Николаев, Н. М. Лаврухина; под ред. Н. Н. Крылова. – 6-е изд. – М. : Высш. шк., 1990. – 240 с.

10. Бубырь Ю. В., Начертательная геометрия : учебно-методические материалы для самостоятельного изучения курса. Ю. В. Бубырь, А. М. Пресис – Харьков : УЗПИ, 1989. – 306 с.

11. Лагерь А. И., Инженерная графика : учеб. для инж.-техн. спец. вузов. / А. И. Лагерь, Л. М. Колесникова – М. : Высш. шк., 1985. – 176 с.

12. Курс начертательной геометрии (на базе ЭВМ) : учеб. для инж.-техн. вузов. / [А. М. Тевлин, Г. С. Иванов, Л. Г. Нартова и др.]; под ред. А. М. Тевлина – М. : Высш. шк., 1983. – 175 с.

13. Кузнецов Н. С. Начертательная геометрия : учеб. для вузов. 2-е изд. / Кузнецов Н. С. – М. : Высш. школа, 1981. – 262 с.

14. Дистанційний навчальний процес : [навчальний посібник] / В. М. Кухаренко, Н. Г. Сиротенко, Г. С. Молодих, Н. Є. Твердохлєбова; за ред. В. Ю. Бикова та В. М. Кухаренка – К. : Міленіум, 2005. – 292 с.

15. Кухаренко В. М. Практикум дистанционного обучения / под. ред. В. М. Кухаренко. – [2-е издание]. – К. : Милленниум, 2003. – 196 с.

16. Гороховський О. І. Методичні аспекти створення навчальної літератури для дистанційного навчання : [методичний посібник] / Гороховський О. І. – Вінниця : ВНТУ, 2004. – 121 с.

17. Дистанционное обучение: теория и практика / [В. И. Гриценко, С. П. Кудрявцева, В. В. Колос, Е. В. Веренич]; Киев : Наукова думка, 2004 р. – 275 с.

18. Кухаренко В. М. Дистанційне навчання. Умови застосування / В. М. Кухаренко, О. В. Рибалко, Н. Г. Сиротинко; за ред. В. М. Кухаренко. – Харків : Торсінг, 2002. – 320с.

19. Кудрявцев Е. М. КОМПАС-3D V8. Наиболее полное руководство / Кудрявцев Е. М. – М. : ДМК Пресс, 2006. – 928с. – (Серия «Проектирование»).

20. Мельник О. П. Інженерна графіка. Дистанційний практикум. Частина 1. Прямокутні зображення тривимірних об'єктів: навчальний посібник / Мельник О. П., Скорюкова Я. Г., Слободянюк О. В. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 149 с.

21. Кормановський С. І. Конспект лекцій з інженерної графіки. Конспект лекцій / Кормановський С. І. – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 116 с.

УКРАЇНСЬКО-РОСІЙСЬКО-АНГЛІЙСЬКИЙ СЛОВНИК НАЙБІЛЬШ УЖИВАНИХ ТЕРМІНІВ

Алгоритм	Алгоритм	Algorithm
Багатокутник	Многоугольник	Polygon
Багатогранник	Многогранник	Polyhedron
Множина	Множество	Set
Вертикальна лінія	Вертикальная линия	Vertical line
Видимість	Видимость	Visibility
Визначник поверхні	Определитель поверхности	Surface determinant
Виріз	Вырез	Excision
Відстань	Расстояние	Distance
Відображення	Отображение	Map
Відрізок лінії	Отрезок линии	Segment
Відсік	Отсек	Compartment
Вісь, ось	Ось	Axis
Гіперболічний параболоїд	Гиперболический параболоид	Hyperbolic paraboloid
Горизонтальна лінія	Горизонтальная линия	Horizontal line
Горизонтальна площина	Горизонтальная плоскость	Horizontal plane
Горизонтальна пряма	Горизонтальная прямая	Horizontal straight line
Горло	Горло	Throat
Грань	Грань	Face
Допоміжна площина	Вспомогательная плоскость	Auxiliary plane
Екватор	Экватор	Equator
Еліпс	Эллипс	Ellipse
Епюр	Эпюр	Epure
Задача	Задача	Task
Зображення	Изображение	Image
Інженерна графіка	Инженерная графика	Engineering graphics
Інцидентність	Инцидентность	Incidence
Кінематичний	Кинематический	Kinematic
Коло	Окружность	Circle
Коноїд	Коноид	Conoid
Конус	Конус	Cone
Компютерна графіка	Компьютерная графика	Computer graphic
Координата	Координата	Coordinate
Коса (скісна) площина	Косая плоскость	Oblique plane
Крива лінія	Кривая линия	Curve
Крива поверхня	Кривая поверхность	Curve surface
Кут	Угол	Angle
Лінія	Линия	Line
Лінія зв'язку	Линия связи	Communication line
Меридіан	Меридиан	Meridian
Метод проекцій	Метод проекций	Projection method
Мимобіжні прямі	Скрещивающиеся прямые	Crossed lines
Напрямна	Направляющая	Directrix
Належність	Принадлежность	Belonging

Нарисна геометрія	Начертательная геометрия	Descriptive geometry
Нахил	Наклон	Inclination
Обертання	Вращение	Rotation
Обрис	Очертание	Outline
Окреме положення	Частное положение	Particular position
Ортогональне проекціювання	Ортогональное проецирование	Orthogonal projection
Отвір	Отверстие	Opening (hole)
Паралель	Параллель	Parallel
Паралельні прямі	Параллельные прямые	Parallel lines
Паралельність	Параллельность	Parallelism
Переріз	Сечение	Cut
Перетин	Пересечение	Intersection
Перпендикулярність	Перпендикулярность	Perpendicularity
Піраміда	Пирамида	Pyramid
Плоскопаралельне переміщення	Плоскопараллельное перемещение	Plane-parallel interchange
Площина	Плоскость	Plane
Площина загального положення	Плоскость общего положения	Plane of general position
Площина окремого положення	Плоскость частного положения	Plane of individual position
Площина рівня	Плоскость уровня	Level plane
Побудова	Построение	Construction
Повертати	Поворачивать	Turn
Поверхня	Поверхность	Surface
Поверхня з ребром звороту	Поверхность с ребром возврата	Surface with a cuspidal edge
Поверхня обертання	Поверхность вращения	Surface of revolution
Поверхні переміщення	поверхность переноса	Transfer surface
Позиційний	Позиционный	Positional
Позиційна задача	Позиционная задача	Positional task
Початок координат	Начало координат	Coordinate origin
Призма	Призма	Prism
Проекціювання	Проецирование	Projection
Проекція точки	Проекция точки	Foot
Промінь	Луч	Ray
Профільна площина	Профильная плоскость	Profile plane
Профільна пряма	Профильная прямая	Profile line
Пряма загального положення	Прямая общего положения	Line of general position
Пряма лінія	Прямая линия	Straight line
Пряма окремого положення	Прямая частного положения	Line of individual position
Пряма рівня	Прямая уровня	Level line
Прямі, що перетинаються (перетинні прямі)	Пересекающиеся прямые	Intersecting lines
Прямий кут	Прямой угол	Right angle
Прямокутне	Прямоугольное	Rectangular projection

проекціювання	проецирование	
Прямокутник	Прямоугольник	Rectangle
Радіус	Радиус	Radius
Ребро	Ребро	Edge
Рисунок	Рисунок	Figure
Система площин проекцій	Система плоскостей проекций	System of projection planes
Січна площина	Секущая плоскость	Intersecting plane
Слід площини	След плоскости	Plane trace
Слід прямої	След прямой	Line trace
Структура курсу	Структура курса	Course structure
Сфера	Сфера	Sphere
Твірна	Образующая	Generatrix
Тест	Тест	Test
Технічне креслення	Техническое черчение	Technical drawing
Тор	Тор	Torus
Торсова поверхня	Торсовая поверхность	Torso surface
Точка	Точка	Point
Трикутник	Треугольник	Triangle
Фронтальна площина	Фронтальная плоскость	Frontal plane
Фронтальна пряма	Фронтальная прямая	Frontal line
Центральне проекціювання	Центральное проецирование	Central projection
Циліндр	Цилиндр	Cylinder
Циліндроїд	Цилиндроид	Cylindroid

Навчальне видання

Скорюкова Яніна Германівна

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА
Частина 1

Курс лекцій

Редактор В. Дружиніна
Коректор З. Поліщук
Оригінал-макет підготовлено Я. Скорюковою

Підписано до друку 12.12.2014 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 5,4.
Наклад 100 пр. Зам. № 2015-033.

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.