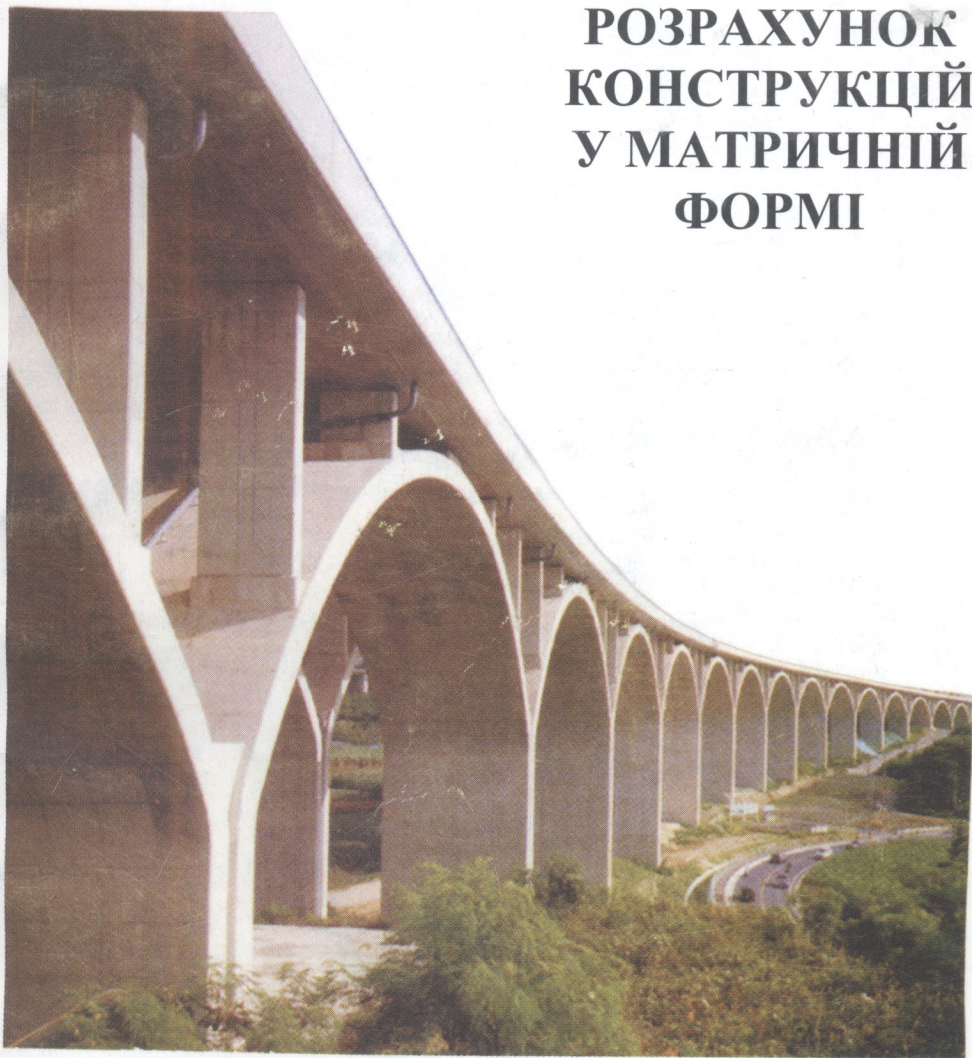


624.01(075)

Б 90

В.Т.Бугаєв, В.В.Ковтун

РОЗРАХУНОК КОНСТРУКЦІЙ У МАТРИЧНІЙ ФОРМІ



ОДЕСА - 2003

В.Т. БУГАЄВ

В.В. КОВТУН

**РОЗРАХУНОК
КОНСТРУКЦІЙ
У МАТРИЧНІЙ ФОРМІ**

Навчальний посібник

НТБ ВНТУ



421213

624.01(075) Б 90 2003

Бугаєв В.Т. Розрахунок конструкцій у матричній



ОАЕСА - 2003

Бугаєв В.Т., Ковтун В.В.: Розрахунок конструкцій у матричній формі: Навч. посібник. – Одеса: ОНМУ, 2003. – 130 с.

У навчальному посібнику викладаються матричні методи розрахунку портових гідротехнічних споруд і стержневих конструкцій, порталних кранів, ферм, освітлювальних щогл і ін., починаючи з визначення зусиль і переміщень у найпростіших статично визначних системах і закінчуючи методом скінчених елементів, що дозволяють за допомогою ЕОМ розраховувати конструкції практично будь-якого ступеня складності.

У навчальному посібнику показується органічний зв'язок двох основних методів будівельної механіки – методу сил і методу переміщень з методом скінчених елементів. Висновки матриць піддатливості і твердості зроблені з єдиних позицій.

Посібник призначений для студентів факультетів воднотранспортних і шельфових споруд, кораблебудівного, механізації портів, а також слухачів ІПК. Він може бути використаним студентами, аспірантами й інженерами інших будівельних і машинобудівних спеціальностей.

Рецензенти: д.т.н., проф., академік Академії будівництва України,
зав. каф. «Будівельна механіка» Одеської державної
академії будівництва й архітектури А.Ф. Яременко

д.т.н., проф., зав. каф. «Прикладна механіка» Техноло-
гічного університету Поділля В.П. Ройзман

Друкується за рішенням Вченої Ради
Одеського національного морського університету
від 26 грудня 2001 (протокол № 3)

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних
закладів (лист № 14/18.2 – 952 від 03.06.03)

U21213

ISBN 966-7716-20-1

© Бугаєв В.Т.
Ковтун В.В., 2003

НТБ ВНТУ
ОДЕСА

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1. КОРОТКІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ МАТРИЦЬ	8
Операції з матрицями.....	9
Загальні положення розрахунку конструкцій у матричній формі.....	11
2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ Й ОСОБЛИВОСТІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ	13
Скінченні елементи і вузли.....	13
Приведення зовнішнього навантаження до вузлового.....	15
Порядок визначення внутрішніх вузлових зусиль і переміщень.....	17
3. МАТРИЧНА ФОРМА ВИЗНАЧЕННЯ ЗУСИЛЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРУЖНИХ СИСТЕМ	20
Представлення зовнішнього навантаження матричним способом.....	21
Визначення внутрішніх зусиль матричним способом.....	23
Матрична форма обчислення переміщень.....	27
Обчислення переміщень системи із шарнірними вузлами.....	30
Обчислення переміщень у плоских рамах і балках.....	32
Обчислення переміщень декількох вузлів системи при різних видах навантаження.....	37
4. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ У МАТРИЧНІЙ ФОРМІ	39
Порядок розрахунку конструкції методом сил.....	40
Представлення методу сил у матричній формі.....	41
Розрахунок статично невизначуваних конструкцій на температурні впливи в матричній формі.....	49
Визначення зусиль, викликаних початковими недосконалостями конструкції.....	56

5. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ У МАТРИЧНІЙ ФОРМІ.....	62
Сутність методу переміщень. Порядок розрахунку.....	62
Матрична форма методу переміщень.....	64
Вираз матриці жорсткості елемента через матрицю піддатливості.....	65
Вираз деформацій через вузлові переміщення.....	69
Матриця жорсткості системи.....	70
Порядок розрахунку конструкцій методом переміщень у матричній формі.....	72
6. РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВИХ КОНСТРУКЦІЙ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ.....	75
Способи формалізації розрахунків.....	76
Аналогія методів сил і переміщень.....	78
Послідовність розрахунку стержневих систем методом скінченних елементів.....	79
Формування матриці жорсткості елемента.....	80
Матриця жорсткості елемента з чотирма степенями свободи.....	81
Матриця жорсткості елемента з трьома степенями свободи..	85
Матриця жорсткості елемента із шістьма степенями свободи.....	86
Формування матриці жорсткості системи.....	89
Розрахунок плоских рам методом скінченних елементів із застосуванням ЕОМ.....	108
ДОДАТКИ.....	119
Додаток 1.....	120
Додаток 2.....	122
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	129

ВСТУП

Розрахунок будь-якої інженерної конструкції власне кажучи зводиться до відшукування внутрішніх зусиль і переміщень, викликаних зовнішніми збурюваннями: силовим впливом, зміною температури, зсувами опор і т.д. У найпростіших випадках цю задачу удається вирішити елементарними методами опору матеріалів. Для складних стержневих систем використовуються методи будівельної механіки. Визначення ж напруг і деформацій у так званих континуальних системах, наприклад у оболонках чи основах споруджень, є задачею теорії пружності чи якої-небудь іншої теорії суцільних деформівних середовищ. Методи теорії пружності, будівельної механіки й опору матеріалів, зовні зовсім різні, при більш глибокому вивченні виявляють дивну діалектичну єдність. Основа цієї єдності в тім, що всі методи обов'язково використовують у якій-небудь формі три умови. Насамперед, це статичні умови чи умови рівноваги, по-друге, геометричні умови суцільності (нерозривності деформацій) і, нарешті, фізичні умови - залежності між напругами і деформаціями, або між зусиллями і переміщеннями.

При дослідженні найпростіших напружених станів брусів в опорі матеріалів використовується інтегральна форма умови рівноваги - метод перетинів. Умова суцільності виражається гіпотезою плоских перетинів, а фізична умова зв'язку між напругами і деформаціями - законом Гука. Такий підхід дозволяє знаходити напруги та деформації в будь-якій точці перетину.

У теорії пружності напруги і деформації відшукуються у виді безперервних функцій координат точок тіла. Тому умови рівноваги і суцільності тут представляються диференціальними рівняннями. Разом з фізичними рівняннями закону Гука вони утворюють замкнуту систему. При рішенні системи виникають дві принципові можливості: виразити всі рівняння через напруги чи через переміщення й одержати рішення відповідно в напругах чи у переміщеннях. Обидва шляхи є рівноправними, хоча частіше перевагу віддають другому.

Аналогічно цьому в будівельній механіці існують два методи розрахунку статично невизначених стержневих систем: метод сил і метод переміщень. У цих методах використовуються інтегральні форми рівнянь рівноваги і спільності переміщень, а фізична умова представляється у вигляді лінійної залежності між зусиллями і переміщеннями.

Відзначена єдність усіх методів виявляється ще більш органічною, якщо розглянути їх із загальних енергетичних позицій. Але спільність у принциповому підході до рішення задач зовсім не означає рівнозначність методів.

Кожний з методів має свою область застосування, відрізняючись від інших трудомісткістю, точністю, формою представлення вихідних даних і результатів рішення.

Найбільш загальними варто визнати методи теорії пружності. Представлення рішення у вигляді неперервних функцій координат дозволяє наочно відбити вплив усіх факторів, що діють на конструкцію. Це істотно полегшує аналіз і дає можливість виявити особливості роботи її елементів. Але, на жаль, одержати рішення задач теорії пружності в замкнутому виді, зручному для аналізу, удалося буквально в декількох випадках для простих обрисів областей і видів нагрюження. Кожна з цих задач являє собою власне кажучи витончену математичну мініатюру і входить у «золотий фонд» теорії пружності. В інших випадках, саме тих, що найбільш цікавлять інженерів, рішення виявляються настільки громіздкими, які довести їх до числового результату можна тільки за допомогою спеціальних чисельних прийомів, що вимагають у кожному випадку розробки складних комп'ютерних програм. Це зводить нанівещь відзначені переваги методів теорії пружності.

На відміну від них методи будівельної механіки, оперуючи інтегральними характеристиками (зусиллями і переміщеннями) виявилися більш пристосованими до складних інженерних задач, особливо до розрахунку стержневих систем. Завдяки тому що вид канонічних рівнянь методу сил і методу переміщень не залежить ні від виду конструкції, ні від характеру нагрюження, представилося можливим застосувати їх для розрахунку широкого класу стержневих систем.

З появою в післявоєнні роки ЕОМ почалася свого роду переоцінка розрахункових методів. Виявилось, що метод сил і особливо метод переміщень найбільш просто піддаються матричній інтерпретації і легко програмуються. Зусиллями багатьох вчених і інженерів, з яких у першу чергу варто назвати імена Д. Аргириса, Р. Клафа, М. Тернера, О. К. Зенкевича, Л. А. Розина, на основі класичних методів будівельної механіки створений один з найбільш універсальних машинних методів — метод скінченних елементів (МСЕ) [1—8]. Метод одержав широку популярність і популярність серед інженерів різного профілю, завдяки чому область його застосування безупинно розширюється, захоплюючи все нові і нові галузі інженерної діяльності.

Слід зазначити, що бурхливий розвиток МСЕ за останні роки викликаний не стільки розвитком якихось нових теоретичних ідей, скільки якісним і кількісним розвитком ЕОМ, оскільки реалізація цього по своїй суті машинного методу неможлива без наявності могутніх швидкодіючих машин.

1. КОРОТКІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ МАТРИЦЬ

Матрицею \overline{A} називається система чисел a_{ij} , розташованих у вигляді прямокутної таблиці по m рядках і n стовпцям

$$\overline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

чи скорочено $[A] = [a_{ij}]$. Числа a_{ij} називаються елементами матриці, причому перший індекс є номер рядка, другий – номер стовпця.

Якщо $m \neq n$, то матриця називається прямокутною. Якщо ж $m = n$, матриця називається квадратною.

При $n=1$ одержуємо $\overline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{vmatrix} = \{A\}$ стовпець чи вектор-

стовпець $\{A\} = \{a_{11} \ a_{21} \ \dots \ a_{m1}\}$.

При $m=1$ одержуємо матрицю-рядок $A = |a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}|$ чи вектор-рядок.

Існує визначена класифікація матриць за їхнім змістом. До числа найбільш характерних відносяться нульові матриці $\overline{0}$, коли всі її елементи дорівнюють нулю; діагональні квадратні матриці, у яких відмінні від нуля тільки головні елементи a_{ii} .

$$\overline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Особливого значення набуває діагональна матриця, у якої

всі головні елементи рівні 1. Ця матриця при обчисленні поводить як звичайна одиниця.

$$\bar{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Операції з матрицями

Дві матриці вважаються рівними в тому випадку, якщо рівні відповідні елементи обох матриць, тобто

$$A = \bar{B}, \text{ за умови } a_{ij} = b_{ij}$$

1. Додавання двох матриць, які обов'язково мають той самий порядок, полягає в одержанні третьої матриці, кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць \bar{A} і \bar{B} , тобто

$$C = \bar{A} + \bar{B}, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

2. Операція множення двох матриць \bar{A} і \bar{B} полягає в одержанні третьої матриці \bar{C} , кожен елемент якої c_{ij} виходить як сума добутків відповідних елементів i -го рядка матриці \bar{A} на елементи j -го стовпця матриці \bar{B} , тобто

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

При цьому варто мати на увазі, що число стовпців n матриці \bar{A} повинне дорівнювати числу рядків матриці \bar{B} . Число рядків m першої матриці і число стовпців n другого - довільно.

Операція множення в загальному випадку не підкоряється закону переміщення:

$$\overline{A} \cdot \overline{B} \neq \overline{B} \cdot \overline{A}$$

Добутком матриці \overline{A} на число λ , називається матриця $\overline{C} = \overline{A} \cdot \lambda$, елементи якої виходять з відповідних елементів матриці \overline{A} множенням на число λ .

Множення довільної матриці на одиничну матрицю не змінює першу, причому для квадратної матриці

$$\overline{A} \cdot \overline{E} = \overline{E} \cdot \overline{A} = \overline{A}.$$

3. Обернення квадратної матриці \overline{A} порядку n полягає у відшуканні такої матриці \overline{B} порядку n , множення якої на \overline{A} приводить до одиничної матриці \overline{E} , тобто

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{E}$$

Матриця \overline{B} при цьому позначається як $\overline{B} = \overline{A}^{-1}$, звідки $\overline{A} \cdot \overline{A}^{-1} = \overline{A}^{-1} \cdot \overline{A} = \overline{E}$. Довільний елемент b_{ij} матриці \overline{B} чи відповідний елемент a_{ij}^{-1} матриці \overline{A}^{-1} визначається за формулою

$$a_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j} \frac{D_{ij}}{|\overline{A}|},$$

де $|\overline{A}|$ – визначник матриці \overline{A} ;

D_{ij} – відповідний мінор визначника $|\overline{A}|$.

Матриця \bar{A}^{-1} може бути знайдена лише в тому випадку, коли визначник $|\bar{A}|$ відмінний від нуля.

4. Операція транспозиції матриць полягає в заміні рядків на стовпці, і навпаки. Елементи a_{ij} транспонованої матриці \bar{A}^T зв'язані з елементами вихідної матриці \bar{A} співвідношенням $a_{ij} = a_{ji}$.

Транспозиція добутку декількох матриць приводить до добутку транспонованих матриць, але зі зміною послідовності перемножування, тобто

$$(\bar{A} \ \bar{B} \ \bar{C} \ \bar{D})^T = \bar{D}^T \ \bar{C}^T \ \bar{B}^T \ \bar{A}^T.$$

Загальні положення розрахунку конструкцій у матричній формі

Загальна схема розрахунку будь-якої конструкції в матричній формі складається з двох етапів. На першому етапі вирішуються питання власне будівельної механіки: вибирається розрахункова схема споруди, складаються вихідні матриці, що залежать від геометричних і фізичних властивостей споруди, матриці зовнішніх впливів і записуються необхідні матричні рівняння. Цей етап розрахунку виконується кваліфікованими інженерами, що володіють методами будівельної механіки.

На другому етапі виконуються необхідні операції над матрицями за допомогою ЕОМ. При розрахунку конструкцій у матричній формі дуже відповідальною частиною є вибір ідеалізованої розрахункової схеми споруди і діючих зовнішніх навантажень.

Основою ідеалізованої розрахункової схеми плоскої стержневої системи служить прямолінійний стержень постійного перетину. До цього стержня ніяких зовнішніх навантажень безпосередньо не прикладено, а приймається, що по кінцях його діють тільки внутрішні зусилля M , Q , N , які

підлягають визначенню. Вибір ідеалізованої розрахункової схеми плоскої стержневої системи здійснюється таким чином:

- границі ділянок системи повинні співпадати з точками прикладення зосереджених сил і переломами прямолінійних осей;

- розподілене навантаження замінюється зосередженими силами, число яких повинно гарантувати достатню точність розрахунку;

- криволінійні осі стержнів замінюються вписаною ломаною;

- стержень із плавно мінливим поперечним перерізом замінюється східчастим.

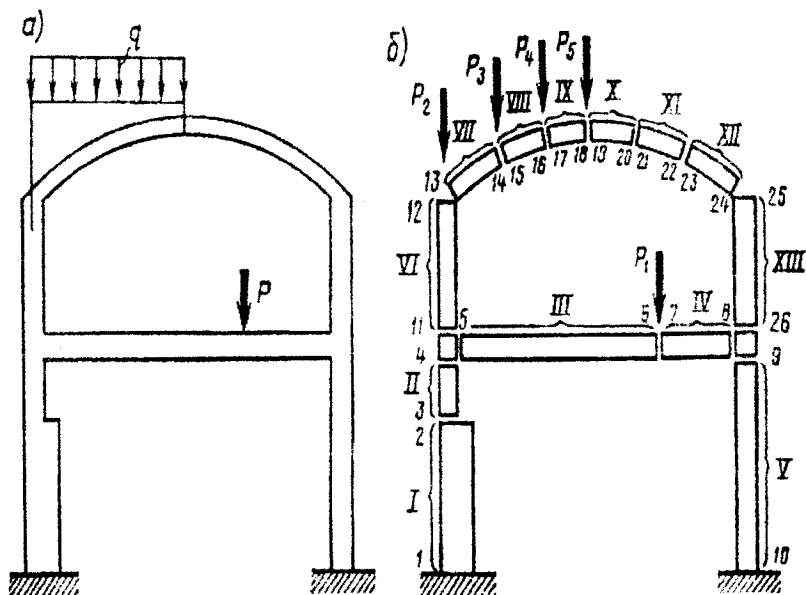


Рис. 1

2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ Й ОСОБЛИВОСТІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Скінченні елементи і вузли

Для розрахунку методом скінченних елементів будь-яка складна конструкція розбивається на прості елементи скінченних розмірів. При розрахунку стержневих систем скінченні елементи являють собою частину бруса постійної жорсткості. Пластини й оболонки розбиваються на плоскі скінченні елементи, що найчастіше мають форму трикутника чи прямокутника. У випадку масивних тіл використовуються об'ємні скінченні елементи, наприклад тетраедри.

Кожен елемент має усі фізичні і механічні властивості матеріалу, з якого виготовлена конструкція. Так, при зміні температури кожен елемент зазнає такі ж температурні деформації, як і матеріал конструкції, при дії зовнішнього навантаження він деформується, згідно з законом Гука, і т.д.

Елементи зв'язані між собою в окремих точках (вузлах). Тільки в цих точках виникають сили взаємодії між елементами, тільки у вузлах прикладається зовнішнє навантаження, і тільки тут заздалегідь забезпечене виконання умови спільності переміщень.

Для зв'язку елементів стержневих систем застосовуються вузли двох типів: шарнірні і жорсткі; для зв'язку плоских чи об'ємних елементів континуальних систем – тільки шарнірні вузли. Шарнірні вузли опираються поступальним, лінійним переміщенням, у зв'язку з чим у них можуть виникнути зусилля тільки по напрямку цих переміщень. У жорстких же вузлах можуть виникнути також і моменти.

Для прикладу розглянемо конструкцію, яка показана на рис. 2,а. З погляду будівельної механіки це комбінована система, що складається з чотирьох стержнів (паль) і суцільного диска (ростверку). При розрахунку реальна конструкція замінюється системою скінченних елементів, показаною на рис. 2,б. Для ростверку прийняті трикутні елементи, точніше, елементи у вигляді трикутних призм, які з'єднуються шарнірними вузлами; для паль — лінійні елементи

постійної жорсткості, котрі закінчуються жорсткими чи шарнірними вузлами. При цьому в окремі елементи виділені частини паль, що знаходяться в ґрунті, з метою можливості врахування їхньої взаємодії з ґрунтовим середовищем.

У результаті зовнішніх впливів на конструкцію елементи будуть деформуватися, а вузли одержать відповідні переміщення. Оскільки елементи зв'язані між собою у вузлах, при їх переміщенні виникнуть сили опору – вузлові зусилля. На рис.2,в показані трикутний і лінійний елементи, які вирізані відповідно з ростверку і палі. У шарнірних вузлах елементів i, j, k, n виникнуть по два зусилля X і Y , які відповідають горизонтальному і вертикальному вузловому переміщенням. У жорсткому ж вузлі m лінійного елемента, крім зусиль X_m, Y_m виникне і момент M_m , який відповідає опору перетину m палі відносно повороту (вигину).

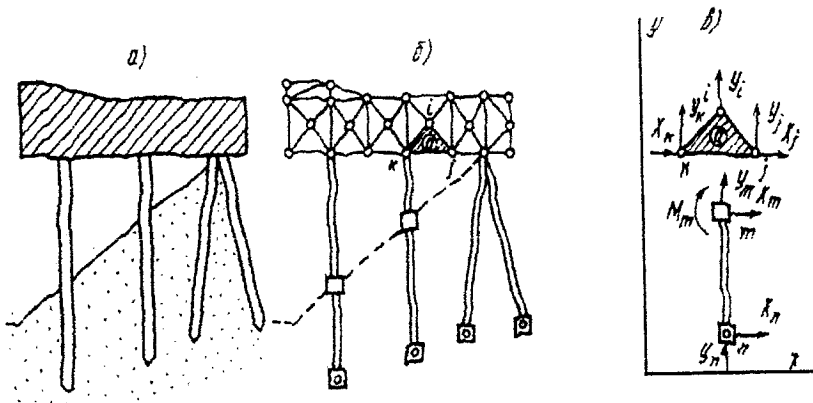


Рис. 2

Таким чином, першою особливістю методу скінченних елементів є заміна конструкції при її розрахунку дискретною схемою, яка представляє собою набір елементів простої форми, взаємодіючих між собою у вузлах.

Приведення зовнішнього навантаження до вузлового

Зовнішнє навантаження, що діє на конструкцію, звичайно задається зосередженими силами і моментами чи розподіленим навантаженням. У МСЕ зручно навантаження прикладати тільки у вузлах. У зв'язку з цим розбивка на елементи відбувається таким чином, щоб вузли розташовувалися в місцях прикладання зосереджених сил і моментів. Розподілене ж у межах елемента навантаження приводиться до вузлового за допомогою різних прийомів. Наприклад, розподілене уздовж сторони a трикутного елемента навантаження q може бути замінено двома еквівалентними йому у статичному відношенні вузловими силами $qa/2$ (рис. 3,а). Аналогічно власна вага трикутного елемента чи інша розподілена по об'єму сила можуть бути замінені трьома рівними вузловими навантаженнями, котрі показані на рис. 3,б.

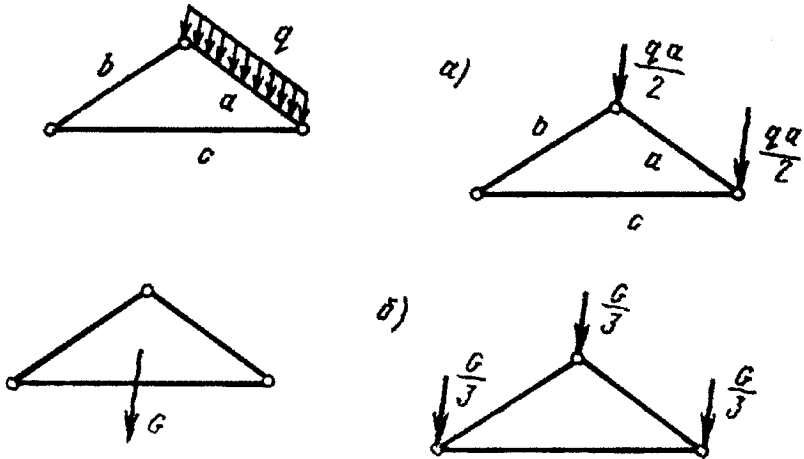


Рис. 3

Для стержневих систем розподілене навантаження приводиться до вузлового за допомогою наступного прийому.

Спочатку кожен елемент розглядається як балка, кінці якої жорстко чи шарнірно закріплені у вузлах. Для балок, за допомогою простих рішень знаходяться внутрішні зусилля в будь-якому перетині й опорні реакції. Далі ведеться розрахунок

конструкції тільки на дію зовнішніх зосереджених навантажень і опорних реакцій балок. Дійсні зусилля знаходяться при використанні принципу суперпозиції (накладення) у виді суми значень, отриманих з розрахунку конструкції з вузловим навантаженням і виділених балок.

Для приклада розглянемо найпростішу раму (рис.4,а). Горизонтальний елемент рами навантажений рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q , а у вузлі 1 прикладений зосереджений момент m . Кожен елемент рами можна представити як балку з опорами у вузлах. При цьому вертикальний елемент не зазнає поперечного навантаження, а горизонтальний приводиться до схеми балки з зацімленими кінцями, навантаженої розподільним, навантаженням.

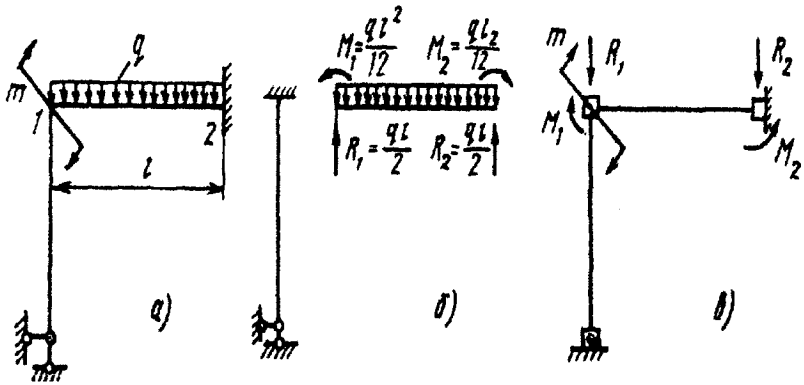


Рис. 4

На рис. 4,б показана балка з виникаючими в опорах реактивними силами R_1 , R_2 і моментами M_1 , M_2 . На рис. 4,в приведена остаточна схема конструкції при розрахунку методом скінчених елементів. Рама зазнає дію тільки вузлових навантажень: зовнішнього моменту m і реакцій балки, які прикладені у протилежних напрямках. При цьому сили в закріпленому вузлі 2 можна було б не показувати, тому що вони не впливають на розподіл зусиль в елементах рами.

Таким чином, другою особливістю методу скінченних елементів є облік у розрахунку тільки вузлового навантаження.

Порядок визначення внутрішніх вузлових зусиль і переміщень

У результаті розбивки конструкції на елементи і приведення навантаження до вузлового реального конструкція при розрахунку по методу скінченних елементів замінюється системою елементів що деформуються, взаємодіючих між собою в окремих точках (вузлах). Сили взаємодії, які для конструкції є внутрішніми зусиллями, і зовнішні сили повинні, природно, задовольняти умовам рівноваги. Але для однієї і тієї ж схеми можна підібрати безліч систем сил, що задовольняють умові рівноваги (безліч статично можливих станів системи), і тільки один з цих станів є дійсним. Іншими словами, визначити однозначно дійсні сили взаємодії між елементами тільки з умов рівноваги неможливо.

421213
Зміщення вузлів викликаються деформацією скінченних елементів і не можуть бути довільними. Вони зв'язані між собою умовами сумісності переміщень. Для системи елементів можна уявити безліч станів, у кожному з яких дотримується умова сумісності переміщень. Такі стани називаються кінематично можливими. Але тільки один з них буде дійсним станом.

Таким чином, щоб знайти дійсні сили взаємодії між елементами, необхідно задовольнити одночасно двом умовам рівноваги і сумісності переміщень.

Для виконання зазначених умов існують два підходи, що приводять до двох відомих методів будівельної механіки: методу сил і методу переміщень.

У першому випадку в конструкції, що розраховується, відкидається стільки в'язів, щоб сили взаємодії між елементами в отриманій системі можна було знайти за допомогою одних тільки рівнянь статички. Отже, умова рівноваги тут завжди виконується, але, оскільки залишаються невідомими реакції відкинутих в'язів, такий прийом еквівалентний введенню безлічі статично можливих станів системи. Для вибору з них дійсного стану використовується умова сумісності переміщень: сумарні

переміщення вузлів по напрямку відкинутих в'язів, викликані дією зовнішнього навантаження, невідомих реакцій відкинутих в'язів, температурними впливами і початковими недосконаlostями конструкції, повинні дорівнювати нулю. Легко помітити, що описаний підхід застосовується при розрахунку конструкцій методом сил, де умова сумісності записується системою канонічних рівнянь, які мають чіткий фізичний зміст. Наприклад, рівняння, яке показує, що переміщення по напрямку i -ї відкинутої в'язі дорівнює нулю, записується в такий спосіб:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j + \Delta_{iF} + \Delta_{it} + \Delta_{iH} = 0, \quad (1)$$

де δ_{ij} — коефіцієнти, які характеризують піддатливість системи по напрямку i -ї в'язі при дії невідомих реакцій X_j ; Δ_i , Δ_{it} , Δ_{iH} — переміщення по напрямку i -ї в'язі, викликані відповідно зовнішнім навантаженням, температурними впливами і початковими недосконаlostями.

Обчислення коефіцієнтів і вільних членів рівнянь у загальному випадку вимагає виконання ряду операцій (побудови одиничних і вантажних епюр, їхнього перемножування і т.д.), що важко піддаються програмуванню на ЕОМ. У методі скінченних елементів завдяки тому, що сили взаємодії виникають тільки у вузлах, можна заздалегідь аналітично чи дослідним шляхом одержати для кожного елемента залежність між одиничними вузловими зусиллями, і переміщеннями вузлів, тобто установити піддатливість елемента. Це дозволяє механізувати процес обчислень за допомогою ЕОМ, особливо при використанні матричного апарата.

При другому підході до розрахунку конструкції розглядається система, вузли якої можуть одержати будь-які переміщення, що дозволяють накладені на систему в'язі. Іншими словами, розглядається безліч кінематично можливих станів системи. Дійсним станом системи буде той з них, при якому виконується умова рівноваги. Умову рівноваги можна записати в різних формах, наприклад у формі канонічних рівнянь, прийнятих у методі переміщень. У МСЕ вважається, що умова рівноваги усередині елемента виконується

автоматично. Тому записуються тільки умови рівноваги кожного вузла. Наприклад, для i -го вузла його можна записати у виді

$$F_i = \sum_{j=1}^k K_{ij} Z_j + F_{ij} + F_{iH} . \quad (2)$$

Рівняння виражає рівність зовнішніх сил F_i , прикладених у вузлі i , внутрішнім силам, які прикладаються до вузла з боку кожного елемента, що примикає до нього. Внутрішні сили, насамперед, включають зусилля, викликані зміщеннями вузлів j , що належать тим елементам, які сходяться у вузлі i . Ці зусилля визначаються як добутки жорсткості елемента K_{ij} на невідоме переміщення вузла Z_j . Крім того, вони містять у собі зусилля F_{ij} , F_i викликані температурними деформаціями кожного елемента, які приєднуються до вузла i , і початковими недосконаlostями.

Звичайно скінченні елементи вибираються простої форми і для них представляється можливим заздалегідь установити залежність між вузловими зусиллями і переміщеннями, тобто жорсткість чи піддатливість кожного елемента при розрахунку вважається відомою. У цьому випадку розрахунок конструкцій зводиться до формування і рішення систем канонічних рівнянь, що дозволяє істотно формалізувати його, зробити універсальним, такими що не залежить від окремих особливостей конструкції.

Таким чином, у принциповому відношенні МСЕ можна розглядати як модифікацію одного з основних методів будівельної механіки – методу сил чи методу переміщень. Але особливість МСЕ, що полягає в розбивці конструкції на скінченні області, для яких попередньо визначена жорсткість чи піддатливість, істотно розширює область застосування методу і дає можливість, крім стержневих систем, розраховувати оболонки, масивні тіла і комбіновані конструкції.

Зазначені особливості МСЕ дозволяють створювати універсальні програми розрахунку широкого класу конструкцій на ЕОМ, але це вимагає, максимальної формалізації розрахунку. Для цього необхідно відмовитися від суб'єктивного підходу при виборі основної системи, від графічних методів обчислень,

ввести єдину нумерацію елементів і вузлів, погодити знаки, а також позначення зусиль і переміщень з обраною системою координат і т.д. Переліченим вимогам цілком відповідає матрична форма розрахунку, що повсюдно використовується в МСЭ.

Таким чином, третьою відмінною рисою МСЭ є використання на всіх етапах розрахунку матричного апарата.

3. МАТРИЧНА ФОРМА ВИЗНАЧЕННЯ ЗУСИЛЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРУЖНИХ СИСТЕМ

Усі величини, що зустрічаються при розрахунку інженерних конструкцій: зовнішні сили, внутрішні зусилля, переміщення і т.д. є векторами. Розрахунок будь-якої конструкції зводиться до визначення внутрішніх зусиль і переміщень по заданому навантаженню. Для лінійно деформівних систем він зводиться до лінійних перетворень вектора навантаження у вектори внутрішніх зусиль, переміщень і т.д. і, отже, може бути представлений у матричній формі.

Представлення зовнішнього навантаження матричним способом

При розрахунку методом скінченних елементів зовнішнє розподілене навантаження, як було сказано в розділі 2, приводиться до вузлових навантажень.

У випадку плоскої системи вектор довільної сили F може бути заданий двома лінійно незалежними компонентами, наприклад, проєкціями F_1 , F_2 на обрані осі. У матричній формі він може бути представлений у вигляді матриці-стовпця (рис. 5).

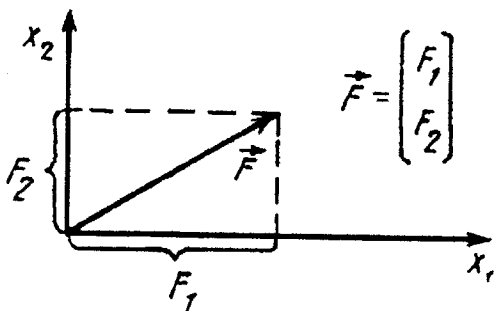


Рис. 5

При розрахунку просторових конструкцій вектор \vec{F} представляється трьома лінійно незалежними компонентами і може бути записаний матрицею-стовпцем, який складається з трьох компонентів F_1, F_2, F_3 (рис. 6).

Аналогічно однією матрицею можуть бути записані всі зовнішні сили, що діють на конструкцію, для чого досить послідовно записати у вигляді стовпця компоненти всіх зовнішніх сил. При цьому порядок матриці буде залежати від кількості сил і розмірності вектора сили.

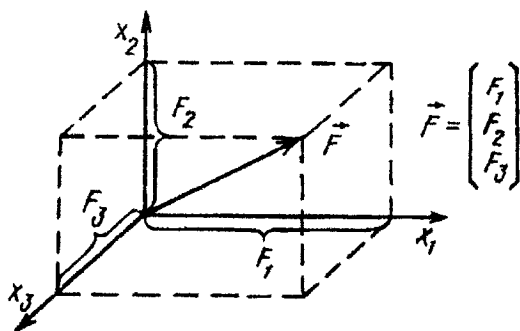


Рис. 6

Наявність у вузлі крім сили зосередженого моменту підвищує порядок вектора навантаження. Наприклад, для плоскої системи зосереджений момент може розглядатися як третій компонент вектора навантаження F_3 .

При розрахунку просторової конструкції вектор вузлового навантаження в загальному випадку представляється шістьма компонентами: трьома силами і трьома моментами.

Приклад. Представити навантаження, що діє на раму, показано на рис.7,а, у вигляді вектора.

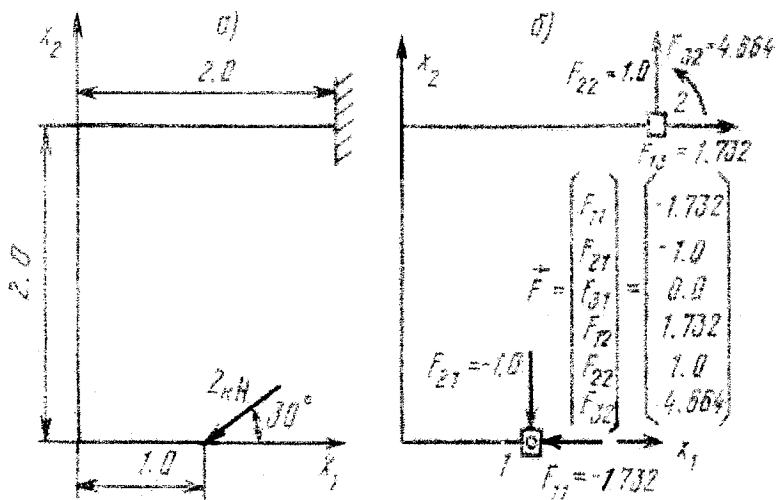


Рис. 7

На раму діють зосереджена сила 2 кН і реактивні сили в зацімлені, які легко знайти за допомогою рівнянь статки. Введемо вузли 1 і 2 та позначимо компоненти вузлових навантажень, як показано на рис.7,б. Оскільки у вузлі 2, крім реактивних сил, виникає момент, кожне вузлове навантаження повинне бути представлене трьома компонентами. При позначенні компонентів матриці-стовпця прийняте наступне правило: перший індекс відповідає номеру осі, другий – номеру вузла. Наприклад, F_{21} – сила, паралельна осі x_2 , що діє у вузлі 1; F_{32} — момент у вузлі 2. Оскільки у вузлі 1 момент відсутній, відповідний компонент F_{31} матриці-стовпця прийнятий рівним нулю.

Визначення внутрішніх зусиль матричним способом

Внутрішні зусилля, як відомо, визначаються методом перетинів. Цей етап розрахунку конструкції, що звичайно не викликає утруднень при ручному рахунку, виявляється досить складним для програмування. Тому в більшості випадків при описі матричних методів розрахунку конструкцій його пропонується виконати вручну, а в розрахунок вводити відразу матриці зусиль. У методі скінченних елементів, як уже відзначалося, оперують тільки вузловими зусиллями. Ця особливість у сполученні з вузловою передачею навантажень дозволяє формалізувати порядок дій по визначенню зусиль і виконати цей етап розрахунку матричним способом

Розглянемо кілька елементів плоскої стержневої системи, з'єднаних жорсткими вузлами (рис.8). У вузлі k прикладене зовнішнє навантаження, представлено трьома компонентами F_{1k} , F_{2k} , F_{3k} . Координати вузлів позначені двома індексами: перший відповідає номеру осі, другий – номеру вузла.

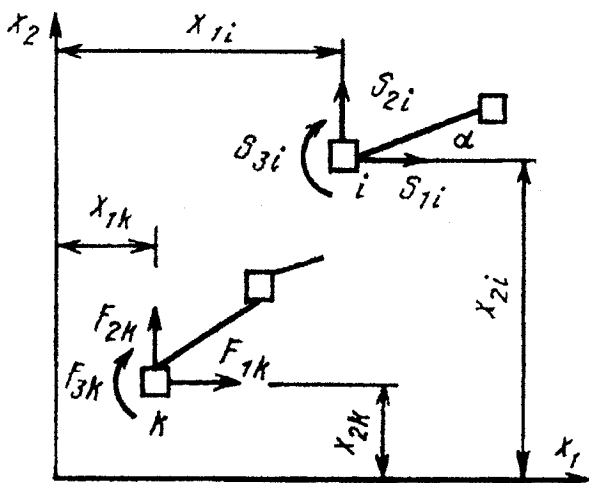


Рис. 8

Знайдемо зусилля у вузлі i від дії навантаження, прикладеного у вузлі k , методом перетину. Компоненти зусиль, що відповідають осям x_1, x_2, x_3 , будуть рівні:

$$\left. \begin{aligned} S_{1i} &= F_{1k}, \\ S_{2i} &= F_{2k}, \\ S_{3i} &= F_{1k}(x_{2i} - x_{2k}) + F_{2k}(x_{1i} - x_{1k}) + F_{3k} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

У матричній формі це можна записати в такий спосіб:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ S_{3i} \end{bmatrix} = [F_{1k} \cdot F_{2k} \cdot F_{3k}] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & (x_{2k} - x_{2i}) \\ 0 & 1 & (x_{1i} - x_{1k}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

чи

$$\{S\} = [F^T] \cdot [L],$$

де $\{S\}$ — матриця-стовпець внутрішніх зусиль; $\{F^T\}$ — матриця-рядок (транспонований стовпець) навантажень (надалі операцію транспонування завжди будемо позначати символом « T »); $[L]$ — прямокутна матриця, що перетворює вектор зовнішніх навантажень у вектор внутрішніх зусиль. Ця матриця називається матрицею впливу.

У справедливості приведених виразів легко переконалися, виконавши перемноження матриць за правилом: рядок на стовпець.

Якщо зусилля необхідно знайти від навантажень, прикладених у декількох вузлах, то матричний вираз (4) зберігає свій вигляд, але матриці $\{F^T\}$ і $[L]$ слід розглядати як блокові. Іншими словами, зміниться тільки порядок матриць. Наприклад, якщо навантаження прикладене в двох вузлах, то матрицю $\{F^T\}$ необхідно розширити вправо, дописавши ще один матрицю-рядок із трьох компонентів, а матрицю $[L]$ продовжити вниз, дописавши підматрицю (3×3) , що відповідає 2-му вузлу.

У МСЕ звичайно оперують компонентами зусиль, що відповідають напрямкам осей загальної для всіх елементів

системи координат, тобто компонентами, обумовленими виразом (4). Але в ряді випадків виявляється зручно користатися складовими зусиль у так званій місцевій системі координат, зв'язаній з напрямком осі окремого елемента, тобто загальноприйнятими в опорі матеріалів і будівельній механіці зусиллями: подовжньою силою N , поперечною – Q , згинальним моментом M і т. д. Перехід від зусиль S_{1i}, S_{2i}, S_{3i} до зусиль N_i, Q_i, M_i і назад легко виконати за допомогою формул повороту осей координат на кут α (див. рис. 8):

$$\left. \begin{aligned} N_i &= -S_{1i} \cos \alpha - S_{2i} \sin \alpha; \\ Q_i &= -S_{1i} \sin \alpha + S_{2i} \cos \alpha; \\ M_i &= S_{3i}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

У матричній формі вираз (5) можна записати:

$$\begin{vmatrix} N_i \\ Q_i \\ M_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ S_{3i} \end{vmatrix}, \quad (6)$$

чи

$$[\tilde{S}] = [G][S],$$

де $[G]$ – матриця направляючих косинусів;

$\{\tilde{S}\}$ – матриця-стовпець зусиль у місцевій системі координат;

$\{S\}$ – матриця-стовпець зусиль у загальній системі координат, обумовлена виразом (4).

Знаки зусиль N, Q і M тут відповідають правилам знаків, які прийняті в опорі матеріалів.

Остаточно з урахуванням матричного виразу (4) зусилля в місцевій системі координат визначаються наступним матричним виразом:

$$\{\tilde{S}\} = [G]\{F^T\}\{L\} \quad (7)$$

Приклад. Визначити зусилля $\{S\}$ і $\{\tilde{S}\}$ у вузлі 2 рами, показаної на рис. 7, матричним способом.

Ці зусилля, власне кажучи, вже знайдені в попередньому прикладі і чисельно дорівнюють реакціям. З урахуванням прийнятого правила знаків зусилля повинні бути:

$$\{S\} = \begin{vmatrix} S_{12} \\ S_{22} \\ S_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1.732 \\ -1.0 \\ 2.464 \end{vmatrix}; \quad \{\tilde{S}\} = \begin{vmatrix} N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.732 \\ -1.0 \\ 2.464 \end{vmatrix}$$

Для визначення зусиль $\{S\}$ у системі координат x_1, x_2 скористаємося виразом (4): $\{S\} = \{F^r\} [L]$.

У розглянутому випадку:

$$\{F^r\} = [-1.732 \ -1.0 \ -0.0];$$

$$[L] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & (0-2) \\ 0 & 1 & (2-1) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Перемножуючи матриці, одержимо:

$$\{S\} = [-1.732 \ -1.0 \ 0.0] \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1.732 \\ -1.0 \\ 2.464 \end{vmatrix}.$$

Зусилля в місцевій системі координат знаходимо за формулою (6).

При записі матриці $[G]$ враховуємо, що $\alpha = 0$, $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$.

$$\{\tilde{S}\} = \begin{vmatrix} N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{vmatrix} = [G] \{S\} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1.732 \\ -1.0 \\ 2.464 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1.732 \\ -1.0 \\ 2.464 \end{vmatrix}.$$

Результати, які отримані різними способами, збіглися.

Матрична форма обчислення переміщень

Найбільш універсальним методом обчислення переміщень пружних систем є енергетичний метод, заснований на обчисленні інтеграла переміщень Максвелла-Мору. Згадаємо, які операції для цього необхідно виконати.

1. У точці, де шукаються переміщення, прикладається одинична сила.

2. Записуються вирази для зусиль у місцевій системі координат на кожній ділянці від одиничної сили S_0 і зовнішнього навантаження S_F .

3. Обчислюється переміщення як сума інтегралів по всіх k ділянках системи

$$\Delta = \sum_{i=1}^k \int_0^{l_i} \frac{S_{0i} S_{Fi}}{g} dl,$$

де g – жорсткість ділянки, що відповідає виду зусилля. При вигині $g = EI$, крутінні – $g = GI_{кр}$, при дії подовжніх сил $g = EA$, поперечних – $g = GA$.

Обчислимо приведенний інтеграл за відомою з курсу математики формулою Симпсона

$$\int_0^l f(x) dx = l/6 (f^H + 4f^{cp} + f^K).$$

Тут f^H , f^{cp} , f^K – значення функції $f(x)$, відповідно, на початку, посередині і у кінці ділянки довжиною l .

Обмежимося поки обчисленням інтеграла переміщень на одній ділянці.

$$\Delta = \frac{1}{g} \int_0^l S_0 S_F dl = \frac{1}{6g} (S_0^H S_F^H + 4S_0^{cp} S_F^{cp} + S_0^K S_F^K), \quad (8)$$

де S_0^H , S_F^H , $S_0^{порівн}$, S_F^{cp} , $S_0^{до}$, S_F^K – значення одиничних і вантажних зусиль на початку, посередині і у кінці ділянки. Вираз є точним, якщо зусилля в межах ділянки змінюються за

лінійним чи параболічним законами. В інших випадках його слід розглядати як наближене.

Отриманий вираз (8) можна представити як добуток трьох матриць, у чому легко переконатися, виконавши зазначені дії з матрицями.

$$\Delta = \frac{1}{6g} \left(S_0^H S_F^H + 4S_0^{cp} S_F^{cp} + S_0^K S_F^K \right) =$$

$$= [S_0^H \ S_0^{cp} \ S_0^K] \frac{1}{6g} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} S_F^H \\ S_F^{cp} \\ S_F^K \end{Bmatrix} = \{S_0^H\} [B] \{S_F\}. \quad (9)$$

Тут $\{S_0^T\}$ – матриця-рядок (транспонований стовпець $\{S_0\}$), елементами якого є значення одиничних зусиль на початку, посередині і у кінці ділянки; $[B]$ – симетрична квадратна матриця, яку називають матрицею піддатливості окремої ділянки чи елемента.

Таким чином, для обчислення переміщень на ділянці досить визначити значення зусиль на початку, посередині і у кінці ділянки і виконати перемножування матриць відповідно до виразу (9). Як уже відзначалося, при розрахунку по методу скінчених елементів розподілене навантаження приводиться до вузлового. У цьому випадку і одиничні, і вантажні зусилля змінюються в межах елемента по лінійному закону. Тому значення зусиль у середині ділянки будуть дорівнювати напівсумі крайніх зусиль

$$S_0^{\text{порівн}} = (S_0^H + S_0^K)/2; \quad S_F^{cp} = (S_F^H + S_F^K)/2.$$

Підставимо ці значення у формулу Симпсона

$$\Delta = 1/6g (S_0^H S_F^H + 4S_0^{cp} S_F^{cp} + S_0^K S_F^K) =$$

$$= 1/6g (2S_0^H S_F^H + S_0^H S_F^K + S_0^K S_F^H + 2S_0^K S_F^K)$$

Отриманий вираз також можна записати у вигляді добутку трьох матриць

$$\Delta = [S_0^H S_0^K] \frac{l}{6g} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_F^H \\ S_F^H \end{vmatrix} = \{S_0^T\} [B] \{S_F\}.$$

Таким чином, при вузловому навантаженні матриці зусиль для кожної ділянки складаються тільки з двох компонентів – значень зусиль на початку і у кінці ділянки (у вузлах елемента).

Для конструкції, що складається з декількох ділянок (системи елементів), переміщення обчислюється за допомогою того ж матричного виразу:

$$\Delta = \{S_0^T\} [B] \{S_F\}. \quad (10)$$

Але елементами квазіматриць $\{S_0^T\}$, $\{S_F\}$ і $[B]$ будуть відповідні матриці у кожного елемента.

Наприклад, для системи, що складається з k елементів:

$$\begin{aligned} \{S_0^T\} &= \{S_{01}^T S_{02}^T \dots S_{0k}^T\} = \\ &= \{[S_{01}^{H \text{ до}}] [S_{02}^{H \text{ до}}] \dots [S_{0k}^{H \text{ до}}]\} = \{S_{0i}^T\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{S_F\} &= \left\{ \begin{matrix} S_{F1} \\ S_{F2} \\ \vdots \\ S_{Fk} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} S_{F1}^H \\ S_{F1}^K \\ S_{F2}^H \\ S_{F2}^K \\ \vdots \\ S_{Fk}^H \\ S_{Fk}^K \end{matrix} \right\} = \{S_{Fi}\}; \quad [B] = \begin{vmatrix} B_{11} & & & 0 \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_{kk} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{l_1}{6g_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & & & \\ & \frac{l_2}{6g_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{l_k}{6g_k} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \{B_{ii}\}, \quad (11) \end{vmatrix}$$

де $i = 1, 2, 3, \dots, k$ – номер елемента.

Формування діагональної матриці [B] завдяки її простоті не викликає труднощів. Методика одержання матриць зусиль викладена в разд. 1. У приведених виразах під S_0 і S_F розуміють будь-які зусилля, що виникають в елементах конструкції. Наприклад, якщо елементи з'єднані шарнірними вузлами (ферма), то в них виникають тільки поздовжні зусилля N , при обчисленні переміщень у балках і плоских рамах враховують вплив тільки згинальних моментів, у плоскопросторових рамах – вплив згинальних і крутних моментів; у матриці [B] жорсткість g -елемента, природно, повинна відповідати виду зусилля.

Розглянемо більш докладно перелічені окремі випадки.

Обчислення переміщень системи із шарнірними вузлами

При вузловій передачі навантаження в кожному елементі системи виникає тільки поздовжнє зусилля N , що не змінюється по довжині елемента ($S_0 = N_0$; $S_F = N_F$).

Для обчислення переміщень скористаємося формулою Симпсона, прийнявши в ній: $g = EA$; $S_0^H = S_0^{\text{порівн}} = S_0^{\text{до}} = N_0$; $S_F^H = S_F^{\text{сп}} = S_F^k = N_F$:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{EA} \int_0^l N_0 N_F dl = \frac{l}{6EA} (N_0 N_F + 4N_0 N_F + N_0 N_F) = \\ &= N_0 \frac{l}{EA} [l] N_F = N_0 [B] N_F. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким чином, кожна з матриць $\{S_0^T\}$, [B] і $\{S_F\}$ на одній ділянці складається тільки з одного елемента. Для всієї конструкції

$$\Delta = \sum_{i=1}^k \frac{1}{EA} \int_0^l N_{0i} N_{Fi} dl = \sum_{i=1}^k N_{0i} \frac{l_i}{EA_i} N_{Fi} = \{N_0^T\} [B] \{N_F\}.$$

Тут $\{N_0^T\} = [N_{01} N_{02} \dots N_{0k}] = \{N_{0i}\}$;

$$\{N_F\} = \begin{Bmatrix} N_{F1} \\ N_{F2} \\ \vdots \\ N_{Fk} \end{Bmatrix} = \{N_{Fi}\};$$

$$[B] = \begin{Bmatrix} \frac{l_1}{EA} & & & 0 \\ & \frac{l_2}{EA_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{l_k}{EA_k} \end{Bmatrix} = \{B_{ii}\},$$

де $i = 1, 2, 3, \dots, k$ - номер елемента.

Приклад. Визначити вертикальне переміщення вузла 1 ферми (рис. 9).

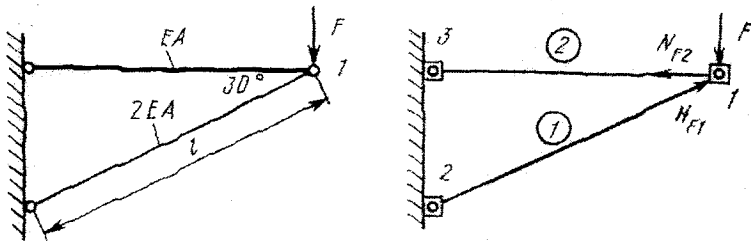


Рис. 9

Форма складається з двох елементів, зусилля в яких можна записати відразу з розгляду рівноваги вузлів.

$$\text{Вантажний стан: } N_{F1} = F / \sin 30^\circ = 2F; N_{F2} = F \operatorname{ctg} \alpha = F.$$

$$\text{Одиничний стан: } N_{01} = 2; N_{02} = \sqrt{3}, \text{ чи } \{N_0^T\} = [2\sqrt{3} \quad 1]; \\ \{N_F\} = [2\sqrt{3} \quad 1]F.$$

Складемо матрицю $[B]$, $l_1 = l$, $l_2 = l\sqrt{3}/2$, $EA_1 = 2EA$, $EA_2 = EA$:

$$[B] = \begin{vmatrix} \frac{l_1}{EA} & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{EA_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{l}{2EA} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}}{2EA} \end{vmatrix} = \frac{l}{2EA} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix}.$$

Визначаємо переміщення вузла l :

$$\Delta = \{N_0^T\} [B] \{N_F\} = [2\sqrt{3} \quad 1] \frac{l}{2EA} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix} F \begin{vmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{vmatrix} = \\ = 2\sqrt{3} \frac{Fl}{2EA} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} = 4,6 \frac{Fl}{EA}.$$

Обчислення переміщень у плоских рамах і балках

При визначенні переміщень у плоских рамах і балках враховується вплив тільки згинальних моментів. У випадку вузлового навантаження згинальні моменти розподіляються уздовж елемента по лінійному закону. Тому переміщення можна обчислити за допомогою виразу (10), прийнявши $g = EI$,

$$\{S_0^T\} = \{M_0^T\}; \{S_F\} = \{M_F\}.$$

$$\Delta = [M_0^H \quad M_0^K] \frac{l}{6EI} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_F^H \\ M_F^K \end{vmatrix} = \{M_0^T\} [B] \{M_F\}. \quad (13)$$

Для системи елементів квазіматриці $\{M_0^T\}$, $[B]$ і $\{M_F\}$ складаються з матриць, складених для кожного елемента.

$$\{M_0^T\} = \{M_{01} M_{02} \dots M_{0k}\} = \{M_{0k}\};$$

$$\{M_F\} = \begin{bmatrix} [M_{F1}] \\ [M_{F2}] \\ \vdots \\ [M_{Fk}] \end{bmatrix} = \{M_{Fi}\};$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{l}{6EI_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & & & \\ & \frac{l}{6EI_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & & \\ & & \dots & \\ & & & \frac{l}{6EI_k} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \{B_{ii}\} \quad (14)$$

де $i = 1, 2, 3, \dots, k$ – номер елемента.

Приклад. Визначити прогин середини балки (рис. 10).

Обчислення переміщення виконаємо матричним способом. Розглянемо два стани балки: вантажне й одиничне. Позначимо вузли, елементи і вузлові навантаження, як показано на рис. 10. Скористаємося виразом (13)

$$\Delta = \{M_0^T\} [B] \{M_F\}.$$

Сформуємо квазіматриці $\{M_0^T\}$, $[B]$ і $\{M_F\}$.

Балка розбита на два елементи. Тому кожна квазіматриця повинна складатися з двох матриць. Елементами матриці-рядка $\{M_0^T\}$ є значення одиничних моментів на початку і кінці кожного елемента (див. одиничну епюру M_0), елементами матриці-

стовпця $\{M_F\}$ – значення вантажних моментів (див. вантажну епюру). Блоки матриці піддатливості $[B]$ запишемо відповідно до виразу (14), з огляду на те, що довжина кожного елемента дорівнює $l/2$: $\{M_0^T\} = \{0 \quad l/4 \quad l/4 \quad 0\}$;

$$\{M_F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Fl \\ 4 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$[B] = \begin{vmatrix} \frac{l}{2} & 2 & 1 & 0 \\ \frac{6EI}{6EI} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2} & 2 & 1 \\ \frac{6EI}{6EI} & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{l}{12EI} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

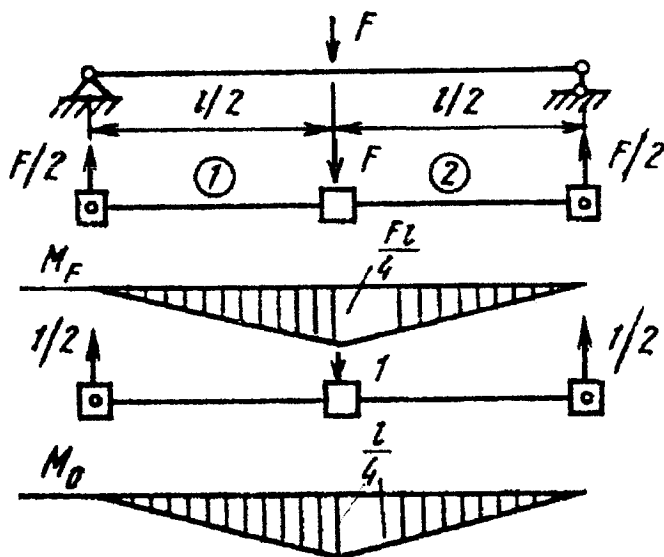


Рис. 10

Перемножуючи матриці, одержимо відомий з курсу опору матеріалів вираз для прогину балки:

$$\Delta = \{M_0^T\} [B] \{M_F\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{vmatrix} \frac{l}{12EI} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ Fl/4 \\ Fl/4 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{Fl^3}{48EI}$$

Приклад. Визначити горизонтальне переміщення точки 1 і кут повороту перетину 6 заданої рами. (рис. 11, а)

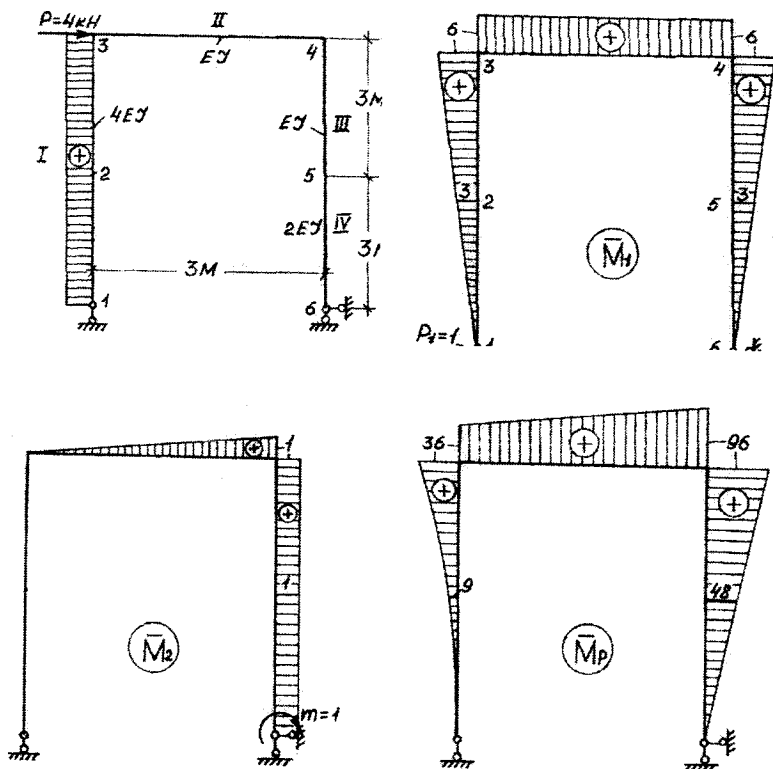


Рис. 11

Розіб'ємо раму на 4 ділянки. Для складання матриць L_m і M_p побудуємо епюри \overline{M}_1 , \overline{M}_2 від сили $X_1 = 1$, прикладеної в точці 1, і $m = 1$, прикладеного в перетині 6, і M_p – від заданого навантаження. (рис. 11, б, в, г)

У зв'язку з тим, що епюра M_p на ділянці 1 має форму параболи, необхідно обчислити M в трьох перетинах – 1, 2, 3. На ділянках II, III і IV епюри \overline{M}_1 , \overline{M}_2 і M_p лінійні, тому M обчислюємо в крайніх перетинах.

$$L_m = \begin{array}{c|cc} & 0 & 0 \\ \hline I & 3 & 0 \\ & 6 & 0 \\ & 6 & 0 \\ \hline II & & \\ & 6 & 1 \\ & 6 & 1 \\ \hline III & & \\ & 3 & 1 \\ & 3 & 1 \\ \hline IV & & \\ & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad M_p = \begin{array}{c|cc} & 0 & \\ \hline I & 9 & \\ & 36 & \\ & 36 & \\ \hline II & & \\ & 96 & \\ & 96 & \\ \hline III & & \\ & 48 & \\ & 48 & \\ \hline IV & & \\ & 0 & \\ \hline \end{array}$$

Квазидіагональна матриця піддатливості:

$$B = \begin{array}{c|cccc} & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ \hline \end{array}$$

Складемо матриці піддатливості кожної ділянки окремо:

$$\bar{\Delta}_p = L'_m \cdot B \cdot \bar{M}_p.$$

$$\bar{\Delta}_p = \begin{Bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 & 3 & 6 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{4EI} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 9 \\ 36 \\ 96 \\ 48 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 2349 \\ 366 \end{Bmatrix}$$

Обчислення переміщень декількох вузлів системи при різних видах навантаження

Якщо виникає необхідність обчислити переміщення не одного вузла, а декількох чи навіть усіх вузлів системи, можна скористатися все тим же матричним виразом (10). При цьому матриця вантажних зусиль $\{S_F\}$ і матриця $[B]$ будуть мати колишній вид, а зміниться тільки матриця одиничних зусиль. Нехай система складається з k елементів ($i = 1, 2, 3, \dots, k$). Потрібно знайти n переміщень у вузлах $j = 1, 2, 3, \dots, n$. Для цього потрібно послідовно прикласти до системи одиничні сили по напрямку кожного шуканого переміщення і для кожного випадку записати матрицю-рядок одиничних зусиль $\{S_0^T\}$. Об'єднавши всі n рядків, одержимо повну матрицю одиничних зусиль:

$$\{S_0^T\} = \begin{vmatrix} S_{011} & S_{012} & \dots & S_{01j} & \dots & S_{01k} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ S_{0i1} & S_{0i2} & \dots & S_{0ij} & \dots & S_{0ik} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ S_{0n1} & S_{0n2} & \dots & S_{0nj} & \dots & S_{0nk} \end{vmatrix} = \{S_{0ji}\}, \quad (15)$$

де $i = 1, 2, 3, \dots, k$ – номер елемента (ділянки); $j = 1, 2, 3, \dots, n$ – номер вузла, у якому шукається переміщення.

Після перемножування $\{S_0^T\}$ на матриці $[B]$ і $\{S_F\}$ відповідно до виразу (10) одержимо вектор-стовпець переміщень $\{\Delta\}$, елементами якого будуть шукані переміщення вузлів $j = 1, 2, 3, \dots, n$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_j \\ \vdots \\ \Delta_n \end{vmatrix} = \{\Delta_j\}.$$

Часто розрахунок конструкції ведеться на кілька видів навантажень. При обчисленні переміщення одного вузла від декількох видів навантажень у виразі (10) зміниться тільки матриця вантажних зусиль $\{S_F\}$. Нехай система складається з k елементів ($i = 1, 2, 3, \dots, k$). Потрібно знайти переміщення обраного вузла для m випадків навантажень ($i = 1, 2, 3, \dots, m$). Для цього потрібно послідовно розглянути усі види навантажень і для кожного випадку записати матрицю-стовпець $\{S_F\}$. Об'єднавши всі m стовпців, одержимо повну матрицю зусиль $\{S_F\}$.

$$\{S_F\} = \begin{pmatrix} S_{F11} & \dots & S_{F1l} & \dots & S_{F1m} \\ S_{F21} & \dots & S_{F2l} & \dots & S_{F2m} \\ S_{Fi1} & \dots & S_{Fil} & \dots & S_{Fim} \\ S_{Fk1} & \dots & S_{Fkl} & \dots & S_{Fkm} \end{pmatrix} = \{S_{Fil}\}, \quad (16)$$

де $i = 1, 2, 3, \dots, k$ – номер елемента (ділянки); $l = 1, 2, 3, \dots, m$ – вид навантаження.

Після перемножування $\{S_F\}$ на матриці $\{S_0^T\}$ і $[B]$ одержимо матрицю-рядок переміщень Δ , елементами якої будуть переміщення обраного вузла (наприклад, вузла i) від кожного навантаження: $\{\Delta_i\} = [\Delta_{i1} \Delta_{i2} \dots \Delta_{il} \dots \Delta_{im}] \dots$

Нарешті, може виникнути необхідність обчислити відразу переміщення n вузлів від m видів навантаження. У цьому випадку матриці зусиль $\{S_0^T\}$ і $\{S_F\}$ записуються відповідно до виразів (15) і (16). Підставивши знайдені матриці у вираз (10), одержимо прямокутну матрицю переміщень

$$\{\Delta\} = \{\Delta_{jl}\} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (l = 1, 2, \dots, m),$$

де n – число вузлів, у яких розглядаються переміщення;

m – число випадків навантаження;

Δ_{jl} – переміщення вузла j , що відповідає виду навантаження l .

4. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ У МАТРИЧНІЙ ФОРМІ

Розглянуті в попередніх розділах методи визначення зусиль і переміщень можуть застосовуватись тільки для статично визначуваних систем. У статично невизначуваних системах внутрішні зусилля не можуть бути знайдені за допомогою лише одних рівнянь статички. Тому для розрахунку таких систем вибирають відповідні їм основні системи, які визначаються статично чи кінематично. Для того щоб вихідна й основна системи були еквівалентними, накладають додаткові

умови сумісності переміщень чи рівноваги у формі систем канонічних рівнянь. У залежності від виду невідомих, що входять у ці рівняння, розрізняють два класичних методи: метод сил і метод переміщень. У цьому розділі ми розглянемо метод сил.

Порядок розрахунку конструкції методом сил

Розрахунок статично невизначених систем методом сил зводиться до наступного.

1. Установлюють ступінь статичної невизначуваності p .
2. Вибирають основну систему, для чого у вихідній системі відкидають всі «зайві» в'язи. Отримана в такий спосіб основна система повинна бути визначуваною статично і кінематично незмінною.
3. До основної системи прикладаються всі зовнішні сили F і невідомі поки реакції у відкинутих в'язах X_j ($j = 1, 2, \dots, n$).
4. Записують канонічні рівняння методу сил, які виражають умову еквівалентності основної і вихідної систем – умову сумісності переміщень:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{j1}X_1 + \delta_{j2}X_2 + \dots + \delta_{jn}X_n + \Delta_{jF} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Тут δ_{ik} – переміщення в напрямку i -ї відкинутої в'язі в основній системі, яке викликане силою $X_k = 1$, прикладеною по напрямку k -ї відкинутої в'язі; Δ_{iF} – переміщення в напрямку i -ї відкинутої в'язі в основній системі, навантаженій зовнішніми силами.

Кожне з рівнянь (17) виражає умову, що в основній системі повне переміщення по напрямку кожної відкинутої в'язі, яке викликане зовнішнім навантаженням і всіма невідомими реакціями, повинне дорівнювати нулю, як і у вихідній системі.

5. За допомогою інтеграла Максвелла-Мора знаходяться коефіцієнти і вільні члени канонічних рівнянь.

6. Рішенням системи канонічних рівнянь (17) визначають невідомі реакції у відкинутих в'язях.

7. На підставі принципу незалежності дії сил знаходяться внутрішні зусилля

$$\{S\} = \sum_{j=1}^n S_{0j} X_j + S_F, \quad (18)$$

де S_{0j} – зусилля від одиничної сили $X_j = 1$;

S_F – зусилля від зовнішнього навантаження.

8. Виконують деформаційну (кінематичну) перевірку. Для деформаційної перевірки за допомогою інтеграла Максвелла-Мора шукають переміщення по напрямку кожної відкинутої в'язі, які на підставі канонічних рівнянь (17) повинні дорівнювати нулю.

Представлення методу сил у матричній формі

Систему лінійних канонічних рівнянь методу сил (17) легко представити у формі матричного рівняння

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \vdots & & & \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \dots & \delta_{jn} \\ \vdots & & & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_j \\ \vdots \\ X_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \Delta_{F1} \\ \vdots \\ \Delta_{Fj} \\ \vdots \\ \Delta_{Fn} \end{vmatrix}, \quad (19)$$

чи

$$[\delta] \{X\} = -\{\Delta_F\}, \quad (20)$$

де $\{X\} = \{X_j\}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) – вектор невідомих зусиль;

$[\delta] = \{\delta_{ij}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$) – симетрична матриця, кожен елемент якої являє собою переміщення по напрямку відкинutoї в'язі i від одиничної сили $X_j^0 = 1$ (матрицю $[\delta]$ часто називають, матрицею піддатливості системи);

$\{\Delta_F\} = \{\Delta_{Fj}\}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) – вектор переміщень по напрямку кожної з відкинутих в'язів від зовнішнього навантаження.

Оскільки елементами матриць $[\delta]$ і $\{\Delta_F\}$ є переміщення, їх, як було показано в попередньому розділі, можна представити в матричній формі (вираз (10))

$$[\delta] = \{S_0^T\} [B] \{S_0\}, \text{ чи } [\delta] = [d] \{S_0\}; \quad (21)$$

$$[\Delta_F] = \{S_0^T\} [B] \{S_F\}, \text{ чи } \{\Delta_F\} = [d] \{S_F\}. \quad (22)$$

Тут $\{S_0^T\} = \{S_{0ij}\}$ ($i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, n$) – прямокутна матриця ($n \times k$) зусиль від одиничних сил $X_j^0 = 1$, прикладених по напрямку відкинутих в'язів. Для n раз статично невизначуваної системи, що складається з k елементів, матриця $\{S_0^T\}$ складається відповідно до виразу (15). $\{S_0\}$ – прямокутна матриця $k \times n$ (транспонована матриця $\{S_0^T\}$). $\{S_F\}$ – матриця вантажних зусиль. Для одного випадку навантаження $\{S_F\} = \{S_{Fl}\}$ являє собою матрицю-стовпець $k \times 1$, для m видів навантаження $\{S_F\} = \{S_{Fl}\}$ – прямокутну матрицю $k \times m$, складену відповідно до виразу (16) ($l = 1, 2, \dots, m$). $[B] = \{B_{ij}\}$ – квазідіагональна матриця піддатливості. $[d] = \{S_0^T\} [B]$ – проміжна матриця, зручна для обчислень.

Рішення матричного рівняння (20), як відомо, можна представити у виді

$$\{X\} = -[\delta]^{-1} \{\Delta_F\}, \quad (23)$$

де $[\delta]^{-1}$ – зворотна матриця ($[\delta]^{-1} [\delta] = [E]$).

Визначенням вектора невідомих реакцій завершується основний етап розрахунку конструкції – розкриття статичної невизначуваності.

Після одержання вектора $\{X\}$ за допомогою виразу (18) знаходять внутрішні зусилля в еквівалентній системі

$$\{S\} = \{S_0\} \{X\} + \{S_F\}. \quad (24)$$

Заключним етапом розрахунку є деформаційна (кінематична) перевірка.

У матричній формі рівність нулю переміщень по напрямку відкинутих в'язів можна записати:

$$\{S_0^T\} [B] \{S\} = 0, \quad \text{чи} \quad [d] \{S\} = 0. \quad (25)$$

Нарешті, якщо розрахунком потрібно визначити переміщення Δ яких-небудь вузлів, у них прикладаються одиничні сили, знаходяться зусилля $\{\bar{S}_0\}$, які викликані цими силами, і обчислюються переміщення за формулами (5).

$$\{\Delta\} = \{S_0\} [B] \{S\}. \quad (26)$$

$\{\bar{S}_0^T\}$ – транспонована матриця одиничних зусиль $\{\bar{S}_0\}$; $\{S\}$ – матриця зусиль в еквівалентній системі (24).

Таким чином, у матричній формі можна знайти усі величини, котрі необхідні для розрахунку конструкції на міцність і жорсткість: реакції X у «зайвих» в'язях, зусилля S і переміщення Δ в елементах системи.

Приклад. Розкрити статичну невизначуваність рами, визначити згинальні моменти в характерних перетинах і виконати перевірку.

На рис. 12,а представлена двічі статично невизначувана рама. Відкинемо дві «зайві» в'язі, замінивши їх невідомими реакціями X_1 і X_2 . Введемо жорсткі і шарнірні вузли в характерних перетинах. Отримана еквівалентна система з трьох елементів і чотирьох вузлів показана на рис. 10,б.

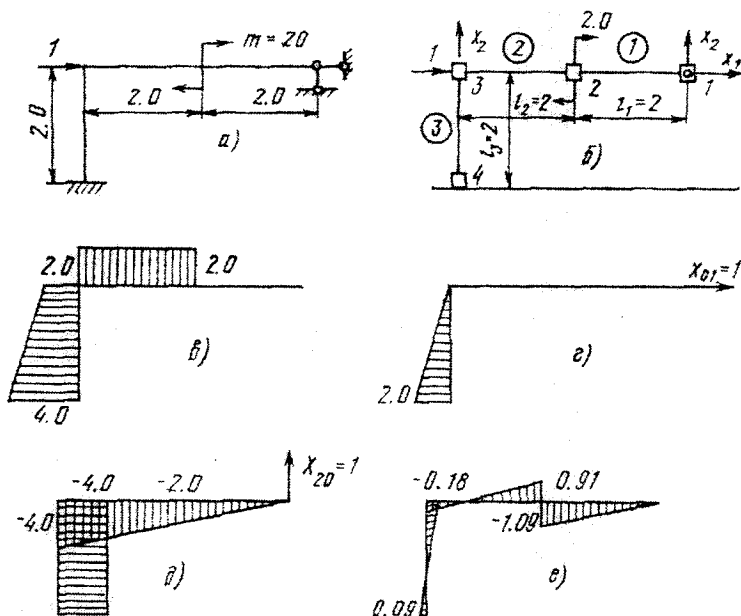


Рис. 12

Запишемо умови спільності переміщень у матричній формі (20)

$$[\delta] \{X\} = -\{\Delta_F\},$$

у якій матриці $[\delta]$ і $\{\Delta_F\}$ визначаються виразами (21) і (22)

$$[\delta] = \{S_0^T\} [B] \{S_0\} = [d] \{S_0\};$$

$$\{\Delta_F\} = \{S_0^T\} [B] \{S_F\} = [d] \{S_F\}.$$

Сформуємо матриці $\{S_F\}$ і $\{S_0\}$ за допомогою вантажної і одиничних епюр згинальних моментів, показаних на рис. 10, у, з і д. Компонентами матриці $\{S_F\}$ є значення вантажних моментів на початку і у кінці кожного елемента. Перший стовпець матриці $\{S_0\}$ відповідає одиничним моментам, викликаним дією сили $X_{01} = 1$, другий – сили X_{02} .

$$\{S_F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{Bmatrix} ; \{S_0\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -4 \\ 0 & -4 \\ 2 & -4 \end{Bmatrix}$$

Матрицю $\{S_0^T\}$ одержуємо транспонуванням $\{S_0\}$.

$$\{S_0^T\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & -4 & -4 \end{Bmatrix}$$

Матриця $[B]$ будується відповідно до виразу (14).

$$[B] = \begin{Bmatrix} \frac{I_1}{6EI_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & & & & & 0 \\ & \frac{I_2}{6EI_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & & \frac{I_3}{6EI_3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \\ & & & & & \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{I}{3EI} \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{Bmatrix}$$

Добуток матриць виконаємо поетапно. Знаходимо допоміжну матрицю $[d]$.

$$[d] = \{S_0^T\}[B] = \begin{array}{c|cccccc|c} & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 3EI \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & & \\ 0 & -2 & -2 & -4 & -4 & -4 & & \end{array} \begin{array}{c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} =$$

$$= \frac{1}{3EI} \begin{array}{c|cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ \hline -2 & -4 & -2 & -10 & -12 & -12 \end{array}.$$

Тепер можна обчислити матриці $[\delta]$ і $\{\Delta_F\}$.

$$[\delta] = [d]\{S_0\} = \frac{1}{3EI} \begin{array}{c|cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ \hline -2 & -4 & -8 & -10 & -12 & -12 \end{array} \begin{array}{c} 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -4 \\ 0 & -4 \\ 2 & -4 \end{array} =$$

$$= \frac{1}{3EI} \begin{array}{c|cc} 8 & -24 \\ \hline -24 & 160 \end{array} = \frac{8}{3EI} \begin{array}{c|cc} 1 & -3 \\ \hline -3 & 20 \end{array},$$

$$\{\Delta_F\} = \{d\} \{S_F\} = \frac{1}{3EI} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -8 & -10 & -12 & -12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3EI} \begin{vmatrix} 20 \\ -108 \end{vmatrix} = \frac{4}{3EI} \begin{vmatrix} 5 \\ -27 \end{vmatrix}.$$

Вирішуючи вихідне матричне рівняння, знаходимо вектор невідомих сил: $\{X\} = -[\delta]^{-1} \{\Delta_F\}$.

Не зупиняючись на відомих з курсу лінійної алгебри правилах перебування зворотної матриці $[\delta]^{-1}$, остаточно одержуємо:

$$[\delta]^{-1} = \frac{3EI}{88} \begin{vmatrix} 20 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad [\delta]^{-1}[\delta] = [E].$$

$$\{X\} = -\frac{3EI}{88} \begin{vmatrix} 20 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \\ 3EI \\ -27 \end{vmatrix} = -\frac{1}{22} \begin{vmatrix} 19 \\ -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.864 \\ 0.545 \end{vmatrix}$$

Знаходимо повні згинальні моменти у вузлах рами, використовуючи вирази (24):

$$\{S\} = \{M\} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -4 \\ 0 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -0.864 \\ 0.545 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ -1.09 \\ -1.09 \\ -2.18 \\ -2.18 \\ -3.91 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ -1.09 \\ 0.91 \\ -0.18 \\ -0.18 \\ 0.09 \end{vmatrix}$$

Остаточна епюра згинальних моментів за отриманим значенням $\{M\}$, показана на рис. 10,е.

Виконуємо кінематичну перевірку формули (24):

$$\{S_0^T\} [B] \{S\} = [d] \{S\} = 0;$$

$$\frac{1}{3EI} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -8 & -10 & -12 & -12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ -1.09 \\ 0.91 \\ -0.18 \\ -0.18 \\ 0.09 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3EI} \begin{vmatrix} 0 \\ 0.04 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Розрахунок статично невизначуваних конструкцій на температурні впливи в матричній формі

Зміна температури, як відомо, викликає в елементах статично невизначуваних систем додаткові температурні зусилля. Розрахунок на температурні впливи можна виконати методом сил. Канонічні рівняння (17) у цьому випадку записуються у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1t} = 0; \\ \dots \\ \delta_{j1}X_1 + \delta_{j2}X_2 + \dots + \delta_{jn}X_n + \Delta_{jt} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nt} = 0. \end{array} \right. \quad (27)$$

Вільними членами рівнянь є температурні переміщення в основній системі по напрямку відкинутих в'язів.

Систему канонічних рівнянь (27) можна представити у формі матричного рівняння

$$[\delta] \{X_t\} = -\{\Delta_t\}.$$

Ліва частина цього рівняння складається з тих же матриць $\{X\}$ і $\{\delta\}$, що й у випадку силового впливу (20), а $\{\Delta_t\} = \{\Delta_{ij}\}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) – вектор переміщень по напрямку кожної відкинутої в'язі від температурного впливу.

Температурні переміщення в статично визначуваній основній системі можна знайти за допомогою інтеграла Мора. Нехай температура статично невизначуваної системи, яка складається з елементів ($i = 1, 2, \dots, k$), підвищилася на t° . Кожен елемент при цьому одержав видовження Δ_{ti} , у результаті чого вузли одержали переміщення $\{\Delta_{ij}\}$. Інтеграл переміщень для випадку, коли елементи працюють тільки на розтягання (стиск), має вид (12)

$$\Delta = \sum_{i=1}^k \int_0^{l_i} N_{0i} \frac{N_{Fi} dl_i}{EA} = \sum_{i=1}^k N_{0i} \frac{N_{Fi} l_i}{EA} = \sum_{i=1}^k N_{0i} \Delta_{Fi} \quad (28)$$

У цьому виразі перший співмножник під знаком суми являє собою зусилля в i -му елементі від дії одиничної сили, а другий співмножник – видовження i -го елемента, викликане зовнішніми силами F . У випадку температурного впливу цей співмножник повинний бути замінений температурним видовженням

$$\Delta_t = \sum_{i=1}^k N_{0i} \Delta_{ti} = \sum_{i=1}^k N_{0i} \beta_i \Delta_{t_i} t \quad (29)$$

Вирази (29) можна легко представити в матричній формі

$$\Delta_t = [N_{01} N_{02} \dots N_{0k}] t \begin{vmatrix} \beta_1 & l_1 \\ \beta_2 & l_2 \\ \vdots & \vdots \\ \beta_k & l_k \end{vmatrix} = [N_0^T] [L_t] \quad (30)$$

Найчастіше коефіцієнти лінійного розширення кожного елемента ті самі. Обчислення температурного переміщення в цьому випадку ще більш спрощується

$$\Delta_t = \beta t \sum_{i=1}^k N_{0i} l_i = [N_{01} N_{02} \dots N_{0k}] \beta t \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_k \end{vmatrix} = [N_0^T] [L_0] \quad (31)$$

Якщо потрібно обчислити температурні переміщення по декількох n напрямках, до системи прикладається n одиничних сил і матриця-рядок $\{N_0^T\}$ ($1 \times k$) замінюється прямокутною матрицею ($n \times k$), що має n рядків. Кожен рядок складається з

зусиль, викликаних однією з одиничних сил. Результатом обчислень по формулах (30) і (31) є вектор-стовпець

$$\{\Delta_t\} = \{\Delta_{ij}\} (j = 1, 2, \dots, n),$$

який складається з переміщень по напрямках прикладених сил.

Таким чином, вектор переміщень $\{\Delta_t\}$, що входить у вираз (29), знаходиться за формулами (30) і (31). Подальший розрахунок системи на температурні впливи аналогічний розрахунку на дію навантажень.

Вирішуючи матричне рівняння (28), знаходять вектор невідомих реакцій

$$\{X_t\} = -[\delta]^{-1}\{\Delta_t\}. \quad (32)$$

Після цього визначають температурні зусилля

$$\{S_t\} = \{S_0\}\{X_t\}. \quad (33)$$

Для обчислення температурного переміщення по його напрямку в основній системі прикладають одиничну силу і записують матрицю одиничних зусиль $\{\bar{S}_0\}$. Переміщення визначають аналогічно виразу (26):

$$\{\Delta_t\} = \{\bar{S}_0^T\}[B]\{S_t\}. \quad (34)$$

Приклад. Визначити зусилля в елементах рами при збільшенні температури на t° . Всі елементи виготовлені з одного матеріалу, коефіцієнт лінійного розширення якого β , і мають однакову жорсткість EI .

Зображена на рис. 13,а рама двічі статично невизначувана, тобто має дві «зайві в'язі».

Відкинемо дві в'язі, замінивши їх невідомими реакціями X_{t_1} і X_{t_2} . Позначимо вузли і елементи як показано на рис. 13,б.

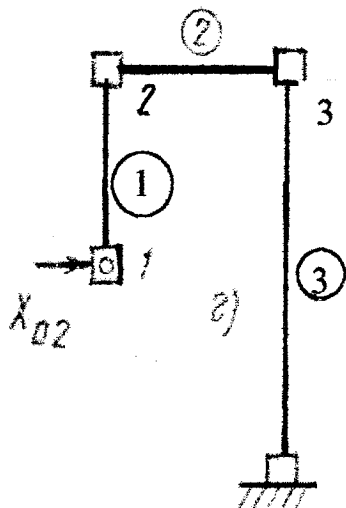
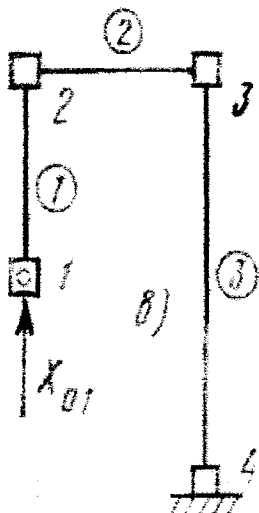
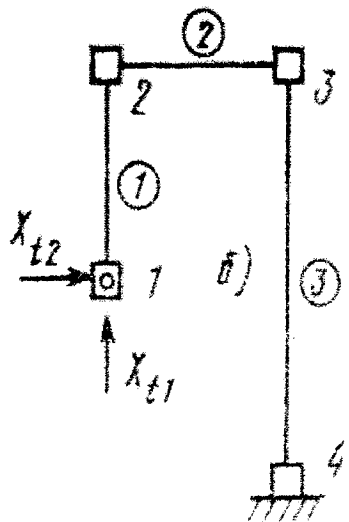
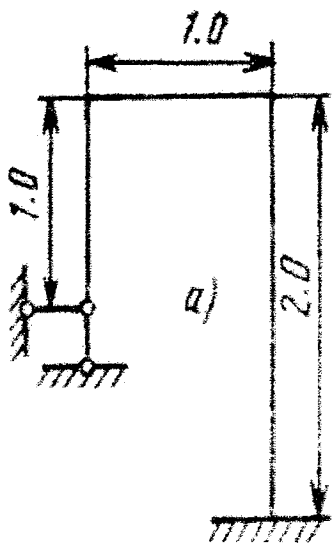


Рис. 13

Для визначення невідомих реакцій записуємо систему канонічних рівнянь у матричній формі (28), де $[\delta]$ визначається по формулі (21), а $\{\Delta_i\}$ – по формулі (31).

Записуємо вихідні матриці: $\{S_0^T\}$, $\{S\}$, $[B]$, $[N_0^T]$, $[L_1]$. Матриці одиничних зусиль $\{S_0^T\}$, $\{S_0\}$ і $[N_0^T]$, з огляду на простоту конструкції, можна одержати відразу без використання матриць впливу. Для цього по напрямку відкинутих в'язів по черзі прикладаються одиничні сили $X_{01} = 1$ (рис. 11,б) і $X_{02} = 1$ (рис. 13,з). Матриця $\{S_0^T\}$ складається з двох рядків. Компонентами першого рядка є згинальні моменти в початковому і кінцевому вузлах кожного елемента від дії сили $X_{01} = 1$, компонентами другого рядка – моменти від дії сили $X_{02} = 1$ (див. одиничні епюри).

$$\{S_0^T\} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$\{S_0^T\}$ одержуємо транспонуванням матриці $\{S_0\}$, тобто її стовпцями є рядки матриці $\{S_0^T\}$; $\{N_0^T\}$ також складається з двох рядків. Компонентами першого рядка є поздовжні зусилля в кожному елементі, які викликані дією сили $X_{01} = 1$, компонентами другого рядка – зусилля від дії сили $X_{02} = 1$.

$$[N_0^T] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Матриця $[B]$ складається відповідно до виразу (14), а матриця $[L_1]$ – відповідно до виразу (31)

$$[B] = \frac{1}{6EI} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$[L_t] = \beta_t \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{vmatrix} = \beta_t \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

Знаходимо матрицю піддатливості $[\delta]$:

$$[\delta] = \{S_0^T\} [B] \{S_0\} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{6EI} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6EI} \begin{vmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 12 \end{vmatrix}.$$

Температурні переміщення

$$\{\Delta_t\} = [N_0^T] [L_t] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \beta_t \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \beta_t \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}.$$

(28) Вектор невідомих реакцій $\{X_t\}$ можна одержати з рівняння

$$\{X_t\} = -[\delta]^{-1} \{\Delta_t\}.$$

Виконавши стандартні операції, знайдемо зворотну матрицю $[\delta]^{-1}$

$$[\delta]^{-1} = \frac{6EI}{159} \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 14 \end{vmatrix}.$$

У правильності результату можна переконатися, виконавши перевірку

$$\begin{aligned} [\delta]^{-1}[\delta] &= E; \frac{6EI}{159} \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} \frac{1}{6EI} \begin{vmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{159} \begin{vmatrix} 159 & 0 \\ 0 & 159 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = [E]. \end{aligned}$$

Визначаємо невідомі зусилля X_{t1}, X_{t2}

$$\{X_t\} = -[\delta]^{-1} \{\Delta_t\} = \frac{6EI}{159} \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} \beta_t \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \beta_t EI \begin{vmatrix} -0.339 \\ 0.415 \end{vmatrix}$$

тобто

$$X_{t1} = -0,339\beta_t EI; X_{t2} = 0,415\beta_t EI.$$

Тепер можна знайти температурні зусилля за формулою (33)

$$\{S_t\} = \{S_0\} \{X_t\} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -0.339 \\ 0.415 \end{vmatrix} \beta EI =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ -0.415 \\ -0.415 \\ -0.754 \\ -0.754 \\ 0.076 \end{vmatrix} \beta EI = \begin{vmatrix} M_{11} \\ M_{12} \\ M_{22} \\ M_{32} \\ M_{33} \\ M_{43} \end{vmatrix}$$

Компоненти отриманого стовпця є згинальними моментами в початковому і кінцевому вузлах кожного елемента рами, від зміни температури.

Визначення зусиль, викликаних початковими недосконаlostями конструкції

Під початковими недосконаlostями розуміють: відхилення розмірів елементів від проектних, неточності монтажу, початковий зсув опор, викликаний, наприклад, їх осадками, і т.д. Ці недосконаlosti викликають в елементах статично невизначуваних конструкцій початкові зусилля, що можуть істотно впливати на роботу конструкцій.

Вплив початкових недосконаlostей можна врахувати методом сил. Для цього вибирають основну систему і геометричним шляхом знаходять величини переміщень по напрямку кожної з відкинутих в'язів, викликаних заданими

початковими недосконалостями Δ_n . Канонічні рівняння мають вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n = \Delta_{1n}; \\ \dots \\ \delta_{j1}X_1 + \delta_{j2}X_2 + \dots + \delta_{jn}X_n = \Delta_{jn}; \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n = \Delta_{nn}. \end{array} \right.$$

Чи в матричній формі

$$[\delta] \{X_n\} = \{\Delta_n\}, \quad (35)$$

де $[\delta] = \{\delta_{ij}\}$ – матриця піддатливості системи;
 $\{X_n\} = \{X_{nj}\}$ – вектор-стовпець невідомих реакцій у відкинутих в'язях;
 $\{\Delta_n\} = \{\Delta_{nj}\}$ – вектор-стовпець переміщень по напрямку відкинутих в'язів, викликаних початковими недосконалостями;
 $i = 1, 2, \dots, k$ – номер елемента;
 $j = 1, 2, \dots, n$ – номер зусилля по напрямку кожної відкинутої в'язі.

У результаті рішення матричного рівняння (35) знаходять вектор реакцій у «зайвих» в'язях

$$\{X_n\} = [\delta]^{-1} \{\Delta_n\}. \quad (36)$$

Після визначення невідомих реакцій $\{X_n\}$, обчислюють зусилля в елементах

$$\{S_n\} = \{S_0\} \{X_n\}. \quad (37)$$

Нарешті, переміщення вузлів знаходять за допомогою інтеграла Максвелла-Мора в матричній формі, як викладено в попередніх розділах:

$$\{\Delta_n\} = \{\bar{S}_0^T\} [B] \{S_n\}. \quad (38)$$

Приклад. Знайти початкові згинальні моменти в балці, проміжні опори якої одержали початкові осадки 2 і 4 мм. Жорсткість $EI = 1 \cdot 10^7 \text{ Н}\cdot\text{м}^2$.

На рис. 14,а представлена двічі статично невизначувана балка. Відкидаємо дві проміжні опори, замінюючи їхніми

невідомими реакціями $\{X_n\} = \begin{vmatrix} X_{n1} \\ X_{n2} \end{vmatrix}$. Еквівалентна система, що

складається з трьох елементів, показана на рис. 14, б.

Записуємо вихідні матриці, що входять у вихідне матричне рівняння. Стовпець початкових переміщень (у метрах)

$$\{\Delta_n\} = \begin{vmatrix} \Delta_{n1} \\ \Delta_{n2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,002 \\ -0,004 \end{vmatrix}.$$

Матриця $\{S_0^T\}$ складається з двох рядків. Компоненти першого рядка являють собою згинальні моменти в початковому і кінцевому вузлах кожного елемента від дії сили $X_{01} = 1$ (рис. 14,б), другий – від дії сили $X_{02} = 1$ (рис. 14,в). Значення моментів знаходимо по одиничних епюрах

$$\begin{aligned} \{S_0^T\} &= \begin{vmatrix} 0 & -0.75 & -0.75 & -0.25 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.25 & -0.25 & -0.75 & -0.75 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -0.25 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$\{S_0\}$ одержуємо транспонуванням матриці $\{S_0^T\}$.

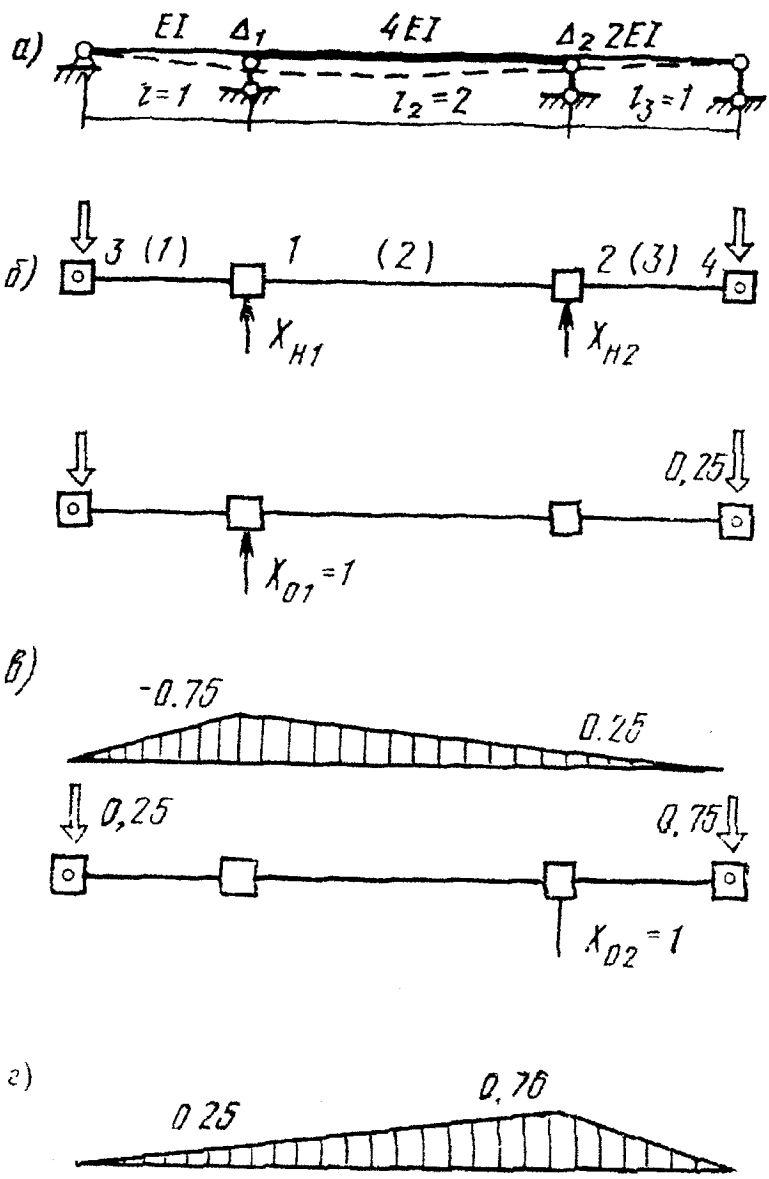


Рис. 14

Матрицю $[B]$ запишемо на підставі виразу (14):

$$[B] = \begin{vmatrix} \frac{l_1}{6EI_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & & & & & & 0 \\ & \frac{l_2}{6EI_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & & \frac{l_3}{6EI_3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{l}{12EI} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Знаходимо матрицю піддатливості системи

$$[\delta] = \{S\}[B]\{S_0\} = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{12EI} \times$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{4} = \frac{0.0416}{EI} \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Рішення вихідного матричного рівняння запишемо у формі

$$\{X_H\} = [\delta]^{-1} \{\Delta_H\}.$$

Знаходимо зворотну матрицю $[\delta]^{-1}$

$$[\delta]^{-1} = \frac{EI}{0.9568} \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}.$$

Перевірка: $[\delta]^{-1} [\delta] = [E]$.

Вектор невідомих реакцій відкинутих в'язів

$$\begin{aligned} \{X_H\} &= [\delta]^{-1} \{\Delta_H\} = \frac{EI}{0.9568} \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -0.002 \\ -0.004 \end{vmatrix} = \\ &= 1.045 \cdot 10^4 \begin{vmatrix} 8 \\ -22 \end{vmatrix} H \end{aligned}$$

Знаходимо внутрішні зусилля

$$\{S\} = \begin{vmatrix} M_{31} \\ M_{11} \\ M_{12} \\ M_{22} \\ M_{23} \\ M_{43} \end{vmatrix} = \{S_0\} \{X_H\} =$$

$$= (-0.25) \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} 1.045 \cdot 10^4 \begin{vmatrix} 8 \\ -22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -0.52 \\ -0.52 \\ 15.1 \\ 15.1 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot 10^4 H \cdot m$$

5. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ У МАТРИЧНІЙ ФОРМІ

Метод переміщень, як і метод сил, є основним методом будівельної механіки. Розрахунок конструкцій цим методом у ряді випадків є більш простим. Крім того, він легше піддається формалізації і програмуванню на ЕОМ, що привело до широкого поширення методу в інженерній практиці. На ньому заснована абсолютна більшість програм розрахунку конструкцій методом скінченних елементів.

Як і метод сил, метод переміщень виник до появи ЕОМ, тому його алгоритм і прийоми розрахунку пристосовувалися до «ручного» рахунку. З появою ЕОМ виникла необхідність формалізувати деякі етапи розрахунку, зробивши його більш універсальним. Сутність методу при цьому не змінилася. Розглянемо спочатку основи «класичного» методу переміщень і порядок розрахунку в матричній формі.

Сутність методу переміщень. Порядок розрахунку

У методі переміщень за невідомі приймаються не зусилля в «зайвих» в'язях, а переміщення вузлів. У залежності від виду конструкції вузли можуть одержувати як лінійні, так і кутові переміщення. Ці переміщення однозначно зв'язані з внутрішніми зусиллями, тому розрахунок конструкції власне кажучи зводиться до відшукування невідомих вузлових переміщень. Для розрахунку вибирається основна кінематично визначувана система. Для її одержання у вузлах накладаються додаткові в'язі, що перешкоджають кутовим і лінійним переміщенням. Кожна накладена в'язь обмежує тільки одне переміщення (лінійне переміщення чи поворот вузла), і в ньому може виникнути тільки один вид зусилля. Наприклад, в'язі, що обмежують повороти вузлів, не заважають лінійним зсувам, і в них виникають тільки реактивні моменти. Таким чином, при розрахунку стержневих систем методом переміщень основна система являє собою сукупність однопрогонових статично

Внутрішні зусилля знаходять на підставі принципу незалежності дії сил

$$\{S\} = \sum_{i=1}^n \bar{S}_i Z_i + S_F, \quad (41)$$

де \bar{S}_i – внутрішнє зусилля в основній системі методу переміщень від одиничного переміщення по напрямку i -ої в'язі $Z_i = 1$; S_F – внутрішнє зусилля в стержнях основної системи методу переміщень від зовнішнього навантаження.

Матрична форма методу переміщень

Систему канонічних рівнянь (39) можна записати в матричній формі

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \cdot \\ Z_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_{1F} \\ R_{2F} \\ \cdot \\ R_{nF} \end{pmatrix},$$

чи одним матричним рівнянням

$$[r]\{Z\} = -\{R_F\}, \quad (42)$$

де $[r]$ – матриця жорсткості, тобто симетрична матриця зусиль, що виникають при почерговому одиничному зміщенні кожної накладеної в'язі; $\{Z\}$ – матриця невідомих переміщень; $\{R_F\}$ – матриця зусиль, що виникають у введених в'язях від зовнішнього навантаження.

При виконанні розрахунків тільки на один вид навантаження $\{Z\}$ і $\{R_F\}$ являють собою матриці-стовпці. Якщо ж у розрахунку розглядається кілька комбінацій навантажень, вони перетворюються в прямокутні матриці, кожен стовпець яких відповідає одному з розглянутих видів навантаження.

У випадку вузлового зовнішнього навантаження кожен компонент матриці $\{R_F\}$ дорівнює значенню вузлової сили, прийнятої зі зворотним знаком.

Дійсно, якщо сила діє безпосередньо на опору, то реакція опори завжди дорівнює величині цієї сили і спрямована в зворотньому напрямку. Тому права частина рівняння (42) дорівнює матриці зовнішнього навантаження $-\{R_F\} = \{F\}$ і рівняння здобуває вид

$$[r]\{Z\} = \{F\}. \quad (43)$$

Якщо матриця жорсткості $[r]$ відома, то задача розрахунку конструкції зводиться до знаходження невідомих переміщень $\{Z\}$ і остаточного визначення внутрішніх зусиль.

$$\{Z\} = [r]^{-1}\{F\}; \quad (44)$$

$$\{S\} = \{S\}\{Z\} + \{S_F\}, \quad (45)$$

де $[r]^{-1}$ – матриця зворотна $[r]$, тобто $[r]^{-1}[r] = [E]$; $\{\bar{S}\}$ – матриця зусиль при одиничних зсувах вузлів.

Таким чином, найбільш важливим етапом розрахунку методом переміщень є одержання матриці жорсткості. Для її одержання розглянемо деякі додаткові поняття.

Вираз матриці жорсткості елемента через матрицю піддатливості

Як видно з виразу (42) чи (43), матриця жорсткості зв'язує між собою вузлові зусилля і переміщення. У загальному випадку вузли конструкцій можуть одержувати як лінійні, так і кутові переміщення, але при розрахунку за допомогою спеціальних в'язів конструкцію закріплюють таким чином, щоб вузли не мали лінійних зміщень. Для визначення зусиль у цих в'язях складають рівняння, які за структурою відрізняються від канонічних. Тому далі будемо розглядати тільки рами, вузли яких лінійно не зміщуються. Єдино можливими переміщеннями

вузлів у них будуть повороти.

При поворотах вузлів в елементах плоскої конструкції будуть виникати різні види деформацій: видовження, зсуви, згин. Але впливом видовжень і зсувів звичайно зневажають і враховують тільки деформації згину, які характеризуються відносними поворотами перетинів. Зусиллями, що відповідають цим деформаціям, є згинальні моменти.

Розглянемо елемент у вигляді затисненого по кінцях стержня (рис. 15). Нехай опорні перетини одержали кутові переміщення $\Delta_{\text{н}}$, $\Delta_{\text{до}}$, при цьому елемент зігнеться, а у вузлах виникнуть згинальні моменти $M_{\text{н}}$, $M_{\text{к}}$. Деформації згину в цьому випадку будуть рівні заданим кутовим переміщенням $\varphi = \Delta$ чи в матричній формі

$$\{\varphi\} = \begin{vmatrix} \varphi_{\text{н}} \\ \varphi_{\text{к}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta_{\text{н}} \\ \Delta_{\text{к}} \end{vmatrix} = \{\Delta\}. \quad (46)$$

Скористаємося отриманим раніше виразом (13) для визначення переміщень елемента, що згинається; $\{\Delta\} = \{\varphi\} = \{M_0^T\} [B] \{M_F\}$.

Для визначення кутових переміщень за допомогою цього вираз необхідно у вузлах по черзі прикласти одиничні моменти, тобто матриця $\{M_0^T\}$ буде одиничною

$$\{M_0^T\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = [E].$$

Компонентами матриці-стовпця $\{M_F\}$ будуть згинальні моменти $M_{\text{н}}$, $M_{\text{к}}$. Матриця піддатливості $[B]$ визначається виразом (13).

Остаточно, враховуючи те, що $\{M_0^T\}$ – одинична матриця, вираз для деформацій згину буде мати вигляд

$$\{\varphi\} = [B] \{M\}, \quad \text{чи} \quad \begin{vmatrix} \varphi_{\text{н}} \\ \varphi_{\text{к}} \end{vmatrix} = \frac{l}{6EI} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_{\text{н}} \\ M_{\text{к}} \end{vmatrix}. \quad (47)$$

Таким чином, для одержання вектора-стовпця кутів повороту опорних перетинів досить помножити матрицю піддатливості елемента $[B]$ на вектор вузлових зусиль $\{M\}$.

Тепер легко вирішити зворотну задачу – знайти вектор зусиль $\{M\}$, що відповідає показаній на рис. 15 епюрі згинальних моментів, які виникають при повороті кінців балки на кути φ_H і φ_K . Для цього досить вирішити матричне рівняння (47).

$$\{M\} = [B]^{-1}\{\varphi\}, \text{ чи } \{M\} = [C]\{\varphi\}, \quad (48)$$

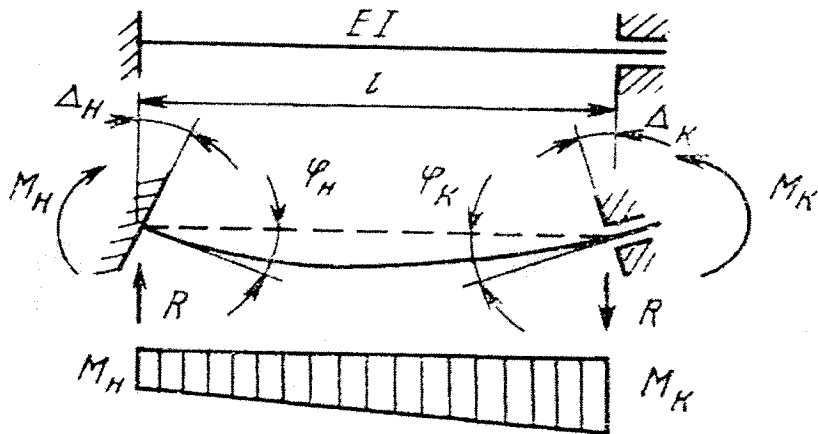


Рис. 15

де $[B]^{-1}$ – матриця, зворотна матриці піддатливості; може бути обчислена, наприклад, за допомогою приєднаної матриці $[B]$ і визначника $\text{Det } B$

$$[B]^{-1} = \frac{[\tilde{B}]}{\text{Det } B} = \frac{6EI}{l \cdot 3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{2EI}{l} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}. \quad (49)$$

Матриця $[C]$ за своїм змістом є матрицею жорсткості окремого елемента.

У приведених виразах прийняті звичайні для опору матеріалів правила знаків, коли позитивними вважаються

згинальні моменти, які викликають при вигині балки розтягання нижніх волокон. Наприклад, на рис. 15 показані позитивні моменти M_n , M_k і відповідні їм кути поворотів φ_n і φ_k .

При розрахунку конструкцій за допомогою ЕОМ зручніше приймати єдині правила знаків, не розрізняючи початок і кінець елемента. Надалі будемо вважати, що якщо вузол повертається за годинниковою стрілою, то відповідний кут φ і згинальний момент M позитивні. Відповідно до цього правила знаків показані на рис. 15 φ_n і M_n варто вважати додатними, а $\varphi_{до}$ і M_k – від’ємними. Для того щоб привести вирази (48), (49) у відповідність з новим правилом, досить у матриці $[B]^{-1} = [C]$ поміняти знаки перед відповідними елементами.

Таким чином, матриця жорсткості окремого елемента з жорстко закріпленими кінцями має вигляд

$$[C] = \frac{2EI}{l} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}. \quad (50)$$

Крім елементів з жорстко закріпленими кінцями, при розрахунку балок і рам зустрічаються також елементи з одним шарнірно закріпленим вузлом, як показано на рис. 16.

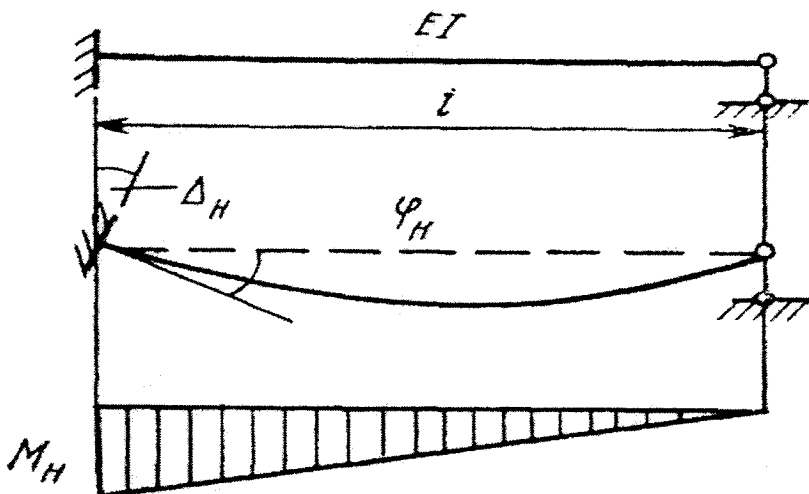


Рис. 16

Матриці піддатливості і жорсткості в цьому випадку складаються тільки з одного елемента

$$[B] = \frac{l}{3EI} [1], [C] = \frac{3EI}{l} [1]. \quad (51)$$

Вираз деформацій через вузлові переміщення

Якщо обмежитися розглядом конструкцій, у яких вузли не одержують лінійних зміщень, то кутові деформації опорних перетинів елементів завжди будуть дорівнювати кутовим переміщенням вузлів. Але у вузлі можуть з'єднуватися кілька елементів. У цьому випадку одному вузловому переміщенню будуть відповідати кутові деформації в кожному елементі, що примикає до вузла. У зв'язку з цим розмірності матриць вузлових переміщень і деформацій виявляються різними. Тому зручно матрицю деформацій одержувати з матриці переміщень за допомогою спеціального перетворення. Таке представлення є особливо зручним, якщо приходить визначати деформації не тільки через кутові, але і через лінійні переміщення вузлів.

Розглянемо знову елемент у виді балки з зацімленими кінцями. Деформації елемента φ_i і φ_j можна виразити через переміщення вузлів Δ_i , Δ_j на підставі принципу суперпозиції

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &= \alpha_{ii} \Delta_i + \alpha_{ij} \Delta_j; \\ \varphi_j &= \alpha_{ji} \Delta_i + \alpha_{jj} \Delta_j. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Тут коефіцієнти α являють собою величину деформацій при одиничних переміщеннях вузлів. Перший індекс указує, до якого вузла примикає опорний перетин, другий – яке переміщення викликало деформацію. У матричній формі рівності (52) можна записати в такому виді:

$$\begin{vmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{ii} & \alpha_{ij} \\ \alpha_{ji} & \alpha_{jj} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta_i \\ \Delta_j \end{vmatrix}, \text{ чи } \{\varphi\} = [\alpha] \{\Delta\}. \quad (53)$$

Для представленого на рис. 17 найпростішого випадку $\alpha_{ii} = \alpha_{jj} = 1$, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = 0$ і матриця $[\alpha]$ перетворюється в одиничну матрицю. У більш складних випадках матриця $[\alpha]$ може бути прямокутною. Наприклад, якщо потрібно визначити кути повороту n опорних перетинів, викликаних переміщенням m вузлів, то вектор деформацій φ буде мати n компонентів, вектор переміщень – m компонентів, а розміри матриці $[\alpha]$ – $n \times m$.

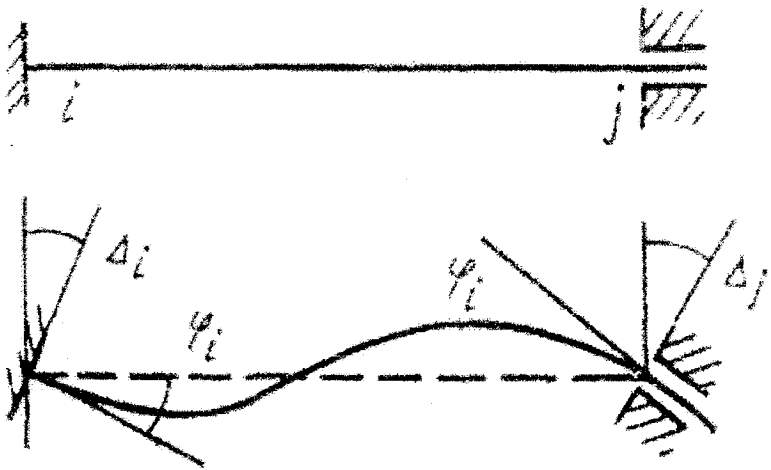


Рис. 17

Матриця жорсткості системи

Матрицею жорсткості системи називають матрицю $[r]$, що зв'язує вузлові переміщення з зусиллями відповідно до матричної рівності (42) $[r] \{Z\} = -\{R_F\}$. Компонентами матриці r_{ij} є зусилля від одиничних поворотів вузлів j .

Для визначення матриці $[r]$ зручно скористатися відомим принципом можливих переміщень, що у найбільш загальній

формі виражає умову рівноваги. Відповідно до цього принципу робота внутрішніх сил на можливих переміщеннях дорівнює потенційній енергії деформації пружної системи $W = W_B$. У матричній формі цю умову можна записати у вигляді

$$\{\Delta_*^T\} \{R\} = \{\Phi_*^T\} \{M\}, \quad (54)$$

де $\{\Delta_*^T\}$ — транспонована матриця можливих переміщень; $\{R\}$ — матриця вузлових зусиль; $\{\Phi_*^T\}$ — транспонована матриця деформацій, що відповідають можливим переміщенням; $\{M\}$ — матриця згинальних моментів.

У якості можливих можуть бути прийняті одиничні переміщення. Послідовно задамо одиничні повороти вузлів. Цьому відповідає одинична матриця $\{\Delta_*\} = \{E\} = \{\Delta_*^T\}$. Вузлові зусилля $\{R\}$, що відповідають одиничним переміщенням, є компонентами матриці жорсткості $[r]$. Отже, вираз (54) можна переписати так

$$[E] [r] = \{\Phi_*^T\} \overline{\{M\}} \quad \text{чи} \quad [r] = \{\Phi_*^T\} \overline{\{M\}}. \quad (55)$$

У цьому виразі транспонована матриця деформацій

$$\{\Phi_*^T\} = ([\alpha](\Delta_*)^T) = \{\Delta_*^T\}[\alpha^T] = [\alpha^T] \cdot \{M\}.$$

Матрицю згинальних моментів від одиничних поворотів вузлів можна отримати з виразу (54)

$$\overline{\{M\}} = [C] \{\Phi_*\} = [C][\alpha]\{\Delta_*\} = [C] [\alpha] [E] = [C] [\alpha].$$

Остаточно матриця жорсткості на підставі виразу (55) має вигляд

$$[r] = [\alpha^T] [C] [\alpha]. \quad (56)$$

Порядок розрахунку конструкцій методом переміщень у матричній формі

Розрахунок конструкцій методом переміщень у матричній формі ведуть в наступному порядку.

1. Вибирають основну кінематично визначувану систему, для чого у вузлах вводять додаткові в'язі, що перешкоджають їхнім зміщенням.

2. Формують вихідні матриці: $\{F\}$ – матрицю зовнішніх навантажень; $\{\alpha\}$ – матрицю деформацій від одиничних переміщень вузлів; $[C]$ – матрицю жорсткості.

3. Визначають матрицю жорсткості всієї системи. З цією метою транспонують матрицю $[\alpha^T]$ і виконують перемножування матриць відповідно до виразу (56)

$$[r] = [\alpha^T] [C] [\alpha].$$

4. Розв'язують матричне рівняння (43), у результаті чого знаходять невідомі переміщення вузлів Z : $[Z] = [r]^{-1} \{F\}$. На цьому етапі корисно виконати перевірку правильності рішення. При перемножуванні матриці $[r]^{-1}$ на $[r]$ повинна вийти одинична матриця $[r]^{-1}[r] = E$.

5. Визначають згинальні моменти в опорних перетинах: $\{M\} = [C] \{\phi\} = [C][\alpha]\{\Delta\} = [C] [\alpha] [Z]$.

6. Виконують статичну перевірку правильності рішення: $\{F\} = [r] \{Z\} = [\alpha^T] [C] [\alpha] [Z] = [\alpha^T] \{M\}$.

7. По знайдених моментах у вузлах будуються епюри внутрішніх зусиль.

Приклад. Визначити згинальні моменти в елементах рами (рис. 18,а).

Насамперед приведемо навантаження до вузлового. Для цього скористаємося прийомом, описаним у розділі 2. Горизонтальний елемент рами представимо як балку з зацімленими і шарнірним кінцями, яка навантажена зосередженою силою в прогоні. На рис. 18, б показано виникаючі в опорах реакції та епюру згинальних моментів. Розрахунок рами виконується на вузлові навантаження, що дорівнюють реакціям, але протилежно спрямовані. Вузлові сили $11/4$ і $5/4$ не викликають згину елементів. Тому в розрахунку

будемо враховувати тільки вплив опорного моменту $M = 3.0$.

1. Розглянута рама один раз кінематично невизначувана з вузлами, що лінійно незміщуються. Обираємо основну систему, вводячи жорсткий вузол на стику елементів.

2. Задамо вузлу невідоме поки кутове переміщення z_1 . Отримана еквівалентна система показана на рис. 18,в. Цифрами 1, 2, 3 на ній позначено опорні перетини, у яких будуть визначатися згинальні моменти.

3. Формуємо вихідні матриці. Матриця навантаження у прикладі, що розглядається, має тільки одну компоненту – вузловий момент $\{F\} = 3.0 [1]$.

Для одержання матриці деформацій опорних перетинів 1, 2, 3 від одиничного зміщення вузла ($Z_1 = 1$) скористаємося рис. 18, з.

$$|\alpha| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} .$$

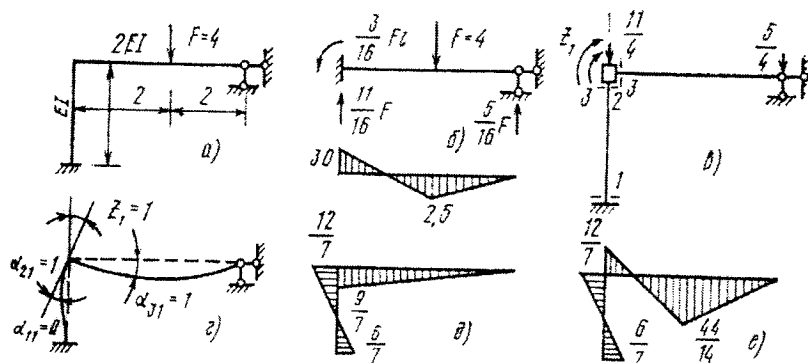


Рис. 18

Матрицю жорсткості двох елементів запишемо у виді квазіматриці, діагональними блоками якої служать матриці жорсткості кожного елемента

$$[C] = \begin{vmatrix} \frac{2EI_1}{l_1} & 2 & 1 & 0 \\ & 1 & 2 & 0 \\ & & & \frac{2EI_1}{l_1} \\ & & & |1| \end{vmatrix} = \frac{EI}{2} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

4. Визначаємо матрицю жорсткості системи (56)
 $[r] = [\alpha^T] [C] [\alpha]$

$$[r] = |0 \ 1 \ 1| \frac{EI}{2} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = |0 \ 1 \ 1| \frac{EI}{2} \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{vmatrix} = \frac{7}{2} EI [1]$$

5. Зворотна матриця $[r]^{-1} = 2/7EI [1]$.

Перевірка: $[r]^{-1} [r] = [1] = [E]$.

6. Визначаємо невідоме переміщення вузла

$$Z_1 = [r]^{-1} [1] \{F\} = \frac{2}{7EI} [1] 3.0 [1] = \frac{6}{7EI}$$

7. Визначаємо згинальні моменти в опорних розрахункових перетинах

$$\{M\} = [C][\alpha] \{Z\} = \frac{EI}{2} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \frac{6}{7EI} = \frac{3}{7} \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{vmatrix}$$

Отже $M_1 = 6/7$; $M_2 = 12/7$; $M_3 = 9/7$. За знайденими значеннями будемо епюри моментів, що викликані тільки поворотом вузла на величину $Z_1 = 6/7EI$ (рис. 18,д). Складаючи її з епюрами моментів від навантаження (див. рис. 18,б), одержуємо остаточну епюру згинальних моментів, показану на рис. 16,е.

8. Виконуємо статичну перевірку

$$\{F\} = [\alpha^T] \{M\};$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{3}{7} & 4 & 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{7} [7] = 3.0 [1].$$

Умова тотожно виконується.

6. РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВИХ КОНСТРУКЦІЙ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

У попередніх розділах поступово були введені усі властиві МСЕ поняття і прийоми обчислень.

Насамперед, у характерних перетинах конструкції: точка прикладення зосереджених навантажень, місцях зміни жорсткості і нахилів стержнів, а при бажанні й у будь-яких інших перетинах – вводилися тверді чи шарнірні вузли.

Уведено поняття скінченного елемента – частина конструкції, розташованої між суміжними вузлами. Реальна стержнева система в розрахунку замінювалася дискретною схемою – набором деформірних елементів скінчених розмірів, з'єднаних жорсткими чи шарнірними вузлами. Як відзначалося в розділі 1, це є першою відмінністю МСЕ.

Другою особливістю МСЕ можна вважати врахування у розрахунках тільки вузлових навантажень, зусиль і переміщень, що рівнозначно заміні безперервних функцій зусиль і переміщень їх дискретними значеннями.

Нарешті, зазначені особливості в сполученні з розглянутими в розділах (2–4) матричними методами дозволяють формалізувати всі етапи розрахунку і створити універсальні програми для ЕОМ, що практично цілком автоматизують сам розрахунок.

Способи формалізації розрахунків

Перш за все, для повної формалізації розрахунків вводяться єдині для всієї конструкції позначення і правила знаків. Наприклад, усі вузлові сили і моменти розглядаються як компоненти єдиного вектора навантаження $\{F\}$, лінійні переміщення і повороти вузлів – як компоненти вектора переміщень $\{\Delta\}$. Знаки сил, переміщень і координат повинні бути погоджені з напрямком осей єдиної системи координат. Індеси зусиль і переміщень повинні відповідати номерам осей і вузлів і т.д. По-друге, необхідно відмовитися від графічних методів розрахунку, наприклад, від побудови епюр – наочного, зручного для ручного розрахунку, що став звичним для інженера, прийому. По-третє, варто відмовитися від суб'єктивного підходу у виборі основної системи, а в принципі – і від самого поняття основної системи в класичному розумінні. Дійсно, у класичних методах розрахунку зусилля представляють аналітично чи графічно у вигляді безперервних функцій координат. При цьому остаточну епюру одержують як суму епюр зусиль в основній системі від знайдених невідомих і зовнішніх навантажень. Для дискретної схеми конструкції такий прийом може розглядатися як розкладання остаточної епюри в скінчений ряд по координатних функціях (базисах) [9]. Координатними функціями тут служать одиничні епюри, а невідомі відіграють роль коефіцієнтів при них.

Варто звернути увагу, що на порядок розрахунку впливає не вид основної схеми, а характер епюр (координатних функцій). Це підтверджується, зокрема, тим, що різним основним системам можуть відповідати однакові епюри. У свою чергу, при використанні матричних методів розрахунку в сполученні з вузловою передачею навантаження відпадає необхідність у побудові епюр. Таким чином, при заміні конструкції дискретною схемою і використанні матричних методів самі поняття основної системи в класичному представленні й одиничних епюр стають непотрібними. Істотним же є вибір системи координатних функцій, по яких виконується розкладання.

Найбільш зручно виявляється система координатних функцій, якщо конструкцію представити у виді набору лінійних

елементів, з'єднаних між собою жорсткими чи шарнірними вузлами. Типовий елемент плоскої конструкції показаний на рис. 19. У кожному вузлі елемента виникають по три зусилля, тобто вузли мають по три ступеня свободи. Якщо відомі зусилля в одному вузлі, наприклад i , то зусилля в іншому вузлі j визначаються з одних тільки умов рівноваги

$$S_{1j} = -S_{1i};$$

$$S_{2j} = -S_{2i};$$

$$S_{3j} = -S_{1i} - S_{1i};$$

$$\text{чи } \begin{vmatrix} S_{1j} \\ S_{2j} \\ S_{3j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ S_{3i} \end{vmatrix}.$$

Залежність між вузловими переміщеннями для елемента, що розглядається, може бути також установлена заздалегідь.

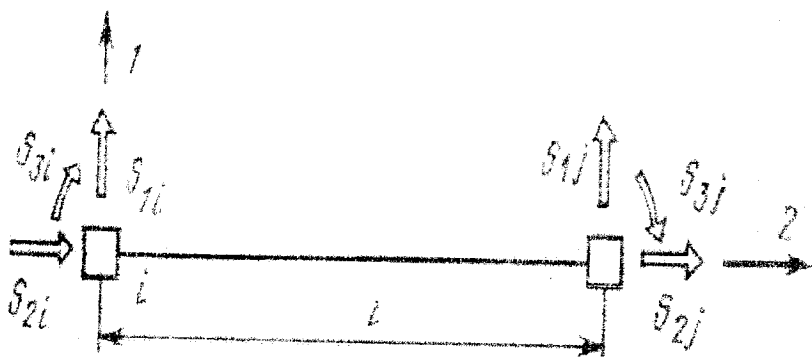


Рис. 19

У зв'язку з цим зусилля і переміщення при розрахунку визначаються тільки в одному вузлі кожного елемента, а число невідомих зусиль і переміщень дорівнює числу вузлів системи, помноженому на число ступенів свободи вузла.

Аналогія методів сил і переміщень

Дискретна схема, складена з розглянутих елементів, однаково зручна для розрахунку конструкції як методом сил, так і методом переміщень.

При використанні методу сил за невідомі приймаються вузлові зусилля X . Оскільки умови рівноваги тут задовольняються автоматично, невідомі зусилля визначаються з умов сумісності переміщень вузлів (20) $[\delta] \{X\} = -\{\Delta_F\}$. При цьому матриця піддатливості системи $[\delta]$ визначається через матриці піддатливості окремих елементів $[B]$ (21).

У методі переміщень за невідомі приймають переміщення вузлів Z . Оскільки елементи зв'язані між собою у вузлах, умови сумісності переміщень тут виконуються автоматично, а самі невідомі визначаються з умов рівноваги (43) $[r]\{Z\} = \{F\}$. Матриця жорсткості $[r]$ визначається через матриці жорсткості окремих елементів $[C]$. Відзначимо, що матриці $[C]$ і $[B]$ є зворотними один одному, тобто $[B][C] = [E]$.

При описаному підході поки не враховано граничні умови: закріплення деяких вузлів конструкції, наявність відомих вузлових сил чи переміщень і т.д. У зв'язку з цим визначники матриць $[\delta]$ і $[r]$ дорівнюють нулю, самі матриці є виродженими (сингулярними), а системи канонічних рівнянь не мають рішень. І тільки після завдання граничних умов, наприклад, якщо переміщення в закріплених вузлах дорівнювати нулю, рішення рівнянь (20) і (43) дають конкретні значення невідомих зусиль чи переміщень.

Таким чином, при використанні скінченних елементів між методами сил і переміщень спостерігається тісна аналогія, що відмічено багатьма авторами: И. М. Рабиновичем (1934 р.), Дж. Аргиросом (1956 р.), А. П. Філінім (1966 р.), А. М. Масленниковим (1970 р.) і ін.

Цю аналогію зручно простежити за допомогою наступної таблиці, де ліворуч вписані поняття і залежності, що використовуються в методі сил, праворуч – відповідні їм поняття і залежності методу переміщень.

Метод сил	Метод переміщень
Невідомі вузлові зусилля $\{X\}$	Невідомі вузлові переміщення $\{Z\}$
Виконуються заздалегідь умови рівноваги Канонічні рівняння $\{\delta\}\{X\} = \{\Delta_F\}$ виражають умови сумісності переміщень Невідомі зусилля визначаються виразом $\{X\} = -\{\delta\}^{-1}\{\Delta_F\}$ Матриця піддатливості елемента $[B] = [C]^{-1}$	Виконуються заздалегідь умови спільності деформацій Канонічні рівняння $\{r\}\{Z\} = \{R_F\}$ виражають умови рівноваги Невідомі переміщення визначаються виразом $\{Z\} = -[r]^{-1}\{R_F\}$ Матриця жорсткості елемента $[C] = [B]^{-1}$

Хоча в принциповому відношенні обидва методи будівельної механіки аналогічні, більшість програм МСЕ використовують процедуру методу переміщень. Це пояснюється тим, що в ньому більш просто враховуються граничні умови. У зв'язку з цим при подальшому викладі будемо ґрунтуватися на метод переміщень.

Послідовність розрахунку стержневих систем методом скінченних елементів

Розрахунок конструкцій методом скінченних елементів ведеться в наступному порядку.

1. Конструкцію шляхом введення в характерних перетинах жорстких чи шарнірних вузлів розбивають на скінченних елементи. Роблять нумерацію вузлів і елементів.

2. Вибирають єдину для всіх елементів глобальну систему координат, у якій визначаються геометричні характеристики елементів.

3. Усі зовнішні навантаження за правилами, викладеним у розділі 2, приводять до вузлових. Формують вектор навантаження.

4. Для кожного елемента формують матрицю жорсткості в зручній для цього системі координат.

5. Формують сумарну матрицю жорсткості в глобальній системі координат.
6. Формують граничні умови.
7. Рішають систему канонічних рівнянь, в результаті чого визначають невідомі переміщення вузлів.
8. Обчислюють вузлові зусилля.
9. Визначають сумарні внутрішні зусилля напруження і деформації.

У приведеній послідовності новими питаннями, що вимагають більш детального викладу, є питання формування матриць жорсткості елементів і всієї системи.

Формування матриці жорсткості елемента

У розділі 4 показано одержання матриці жорсткості найпростіших елементів, що згинаються, без врахування впливу поздовжніх і поперечних деформацій. При цьому жорсткі вузли елементів мали тільки один степінь свободи – можливість повороту, а самі елементи – одну чи дві степені свободи (по кількості жорстких вузлів). Розглянуті елементи можуть використовуватися для розрахунку конструкцій з вузлами, що лінійно не зміщуються. При розрахунку за допомогою таких елементів конструкцій, вузли яких можуть одержувати лінійні зміщення, приходиться додатково розглядати рівновагу частини конструкції. Це викликає певні труднощі і незручності для програмування.

У зв'язку з цим у МСЕ використовують елементи, що мають число степенів свободи більше, ніж 2. Наприклад, якщо крім поворотів жорстких вузлів, врахувати можливість їхніх поперечних зміщень, одержимо елемент із чотирма степенями свободи, а якщо врахувати також поздовжні переміщення – елемент із шістьма степенями свободи і т.д. У цьому випадку всі рівняння як для лінійних, так і для кутових переміщень, складаються за єдиною методикою і мають єдину структуру.

Розглянемо вивід матриць жорсткості елементів з великим числом степенів свободи.

Матриця жорсткості елемента з чотирма степенями свободи

На рис.20 показаний елемент, що має чотири степені свободи. Його вузли можуть одержувати як поперечні, так і кутові переміщення, тобто переміщення по позначених напрямках 1, 2, 3, 4. Елементами матриці жорсткості будуть зусилля по зазначених напрямках при одиничних зміщеннях вузлів. У нашому випадку це згинальні моменти \bar{S}_2, \bar{S}_4 і поперечні зусилля \bar{S}_1, \bar{S}_3 (рис. 21).

Моменти можуть бути знайдені з виразу (48) $\{M\} = [C]\{\phi\}$, де за кутові деформації ϕ повинні бути прийняті кути повороту кінців стержня при почергових одиничних зміщеннях вузлів. Для їх визначення скористаємося виразом (53) $\{\phi_0\} = [\alpha] (\Delta_0) = [\alpha] [E] = [\alpha]$.

Компоненти матриці $[\alpha]$ легко знайти з геометричних уявлень. Нехай вузли елемента послідовно одержують одиничні переміщення в напрямках 1, 2, 3, 4, як показано на рис. 20, б, в, г, д. Деформації $\{\phi_0\}$ дорівнюють кутам, між лінею, що з'єднує кінці елемента і напрямком дотичної до вигнутої осі. Кути вважаються додатними, якщо поворот відбувається за годинниковою стрілкою. Скориставшись значенням кутів, позначених на рис. 20, б, в, г, д, запишемо матрицю $\{\phi_0\} = [\alpha]$ Компонентами першого рядка будуть деформації лівого вузла, другого – деформації правого.

$$[\phi_0] = [\alpha] = \begin{vmatrix} -1/l & 1 & 1/l & 0 \\ -1/l & 0 & 1/l & 1 \end{vmatrix}$$

Тепер виразу (48), знаходимо значення відповідних цим деформаціям вузлових моментів

$$\begin{aligned} \overline{\{M\}} &= [C] [\phi_0] = \frac{2EI}{l} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1/l & 1 & 1/l & 0 \\ -1/l & 0 & 1/l & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{3EI}{l} \begin{vmatrix} -3/l & 2 & 3/l & 1 \\ -3/l & 1 & 3/l & 2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

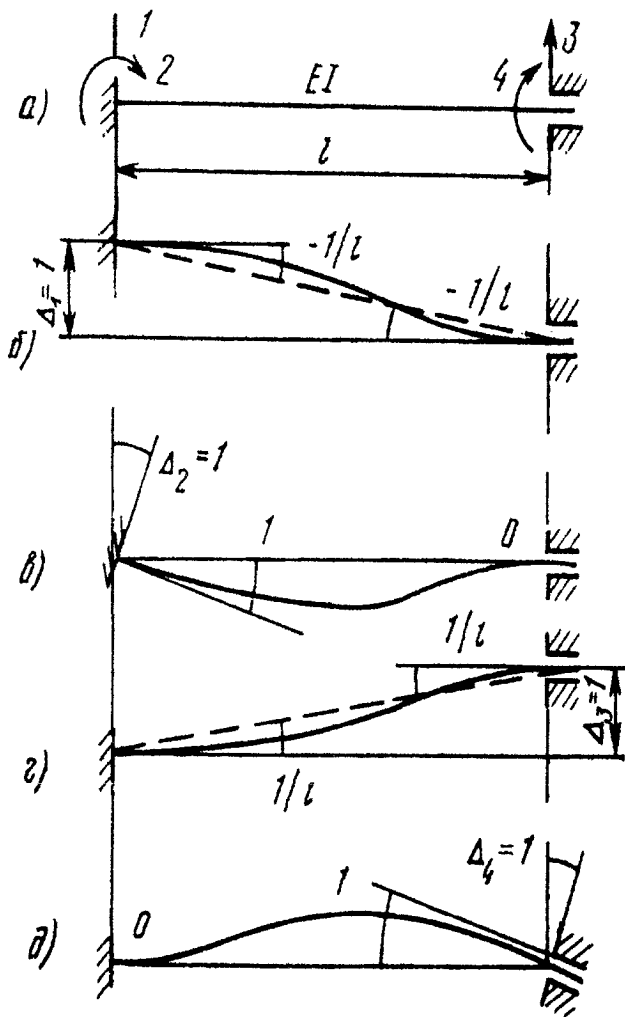


Рис. 20

У прийнятих позначеннях матриця згинальних моментів при одиничних зміщеннях вузлів буде мати вид

$$\begin{vmatrix} \bar{S}_2 \\ \bar{S}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{23} & \bar{S}_{24} \\ \bar{S}_{41} & \bar{S}_{42} & \bar{S}_{43} & \bar{S}_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{vmatrix}. \quad (57)$$

Тут і далі перший індекс позначає напрямок зусилля, другий – напрямок переміщення, що викликало це зусилля.

Тепер займемося визначенням поперечних зусиль S_4 і S_3 (рис. 21). З умови рівноваги знаходимо

$$\bar{S}_1 = -\bar{S}_3; \quad \bar{S}_1 = -\frac{\bar{S}_2 + \bar{S}_4}{l}; \quad \bar{S}_3 = \frac{\bar{S}_2 + \bar{S}_4}{l}.$$

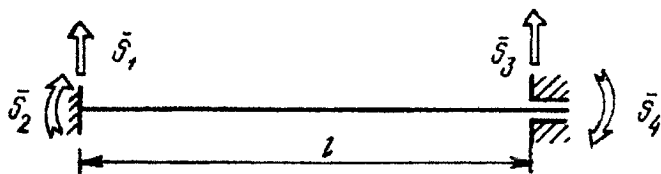


Рис. 21

Таким чином, для одержання \bar{S}_3 потрібно почленно скласти елементи стовпців матриці моментів (57) і розділити результат на l . Для одержання \bar{S}_1 досить перед отриманим виразом поміняти знаки на зворотні.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} & \bar{S}_{14} \\ \bar{S}_{31} & \bar{S}_{32} & \bar{S}_{33} & \bar{S}_{34} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{12 EI}{l^3} & -\frac{6 EI}{l^2} & -\frac{12 EI}{l^3} & -\frac{6 EI}{l^2} \\ \frac{12 EI}{l^3} & \frac{6 EI}{l^2} & \frac{12 EI}{l^3} & \frac{6 EI}{l^2} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (58)$$

Кожен компонент отриманих матриць (57), (58) це зусилля, що виникає при одиничних зміщеннях вузлів, тобто воно є компонентом матриці жорсткості елемента (МЖЕ). У методі скінченних елементів МЖЕ позначають $[K_3]$. Це квадратна симетрична матриця, рядками якої є відповідні рядки матриць (57), (58). Порядок МЖЕ завжди відповідає числу степенів свободи елемента, у розглянутому випадку він дорівнює 4×4 .

Враховуючи сказане матриця жорсткості елемента з чотирма степенями свободи буде мати вигляд

$$\begin{aligned} [K_3] &= \begin{vmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \\ \bar{S}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (59)$$

При уважному розгляді легко помітити, що отримана матриця має блокову структуру. Кожний з чотирьох блоків, який має порядок 2×2 (по кількості степенів свободи вузла), містить у собі зусилля, що виникають у цьому вузлі. Якщо, наприклад, лівий вузол позначити буквою i , а правий – буквою j , то матриця $[K_s]$ може бути записана в блоковому виді:

$$[K_s] \begin{vmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{vmatrix}.$$

Тут блок $[K_{ii}]$ містить зусилля, що виникають у вузлі i при одиничних зсувах цього ж вузла, блок $[K_{ji}]$ включає зусилля, які виникають у вузлі j при одиничних зсувах вузла i , і т.д.

Матриця жорсткості елемента з трьома степенями свободи

Якщо один кінець елемента закріплений шарнірно, то цей перетин може вільно повертатися і момент у ньому буде дорівнювати нулю. Такий елемент має три степені свободи. Матриця жорсткості $[K_s]$ (3×3) може бути отримана для цього випадку аналогічно попередньому.

На рис. 22 показані зусилля, що відповідають одиничним зміщенням вузлів елемента з трьома степенями свободи. Ці зусилля і є компонентами матриці жорсткості, яка для розглянутого випадку має вигляд

$$[K_s] = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l^3} \\ \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & \frac{3EI}{l^2} \\ \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l^3} \end{vmatrix}. \quad (60)$$

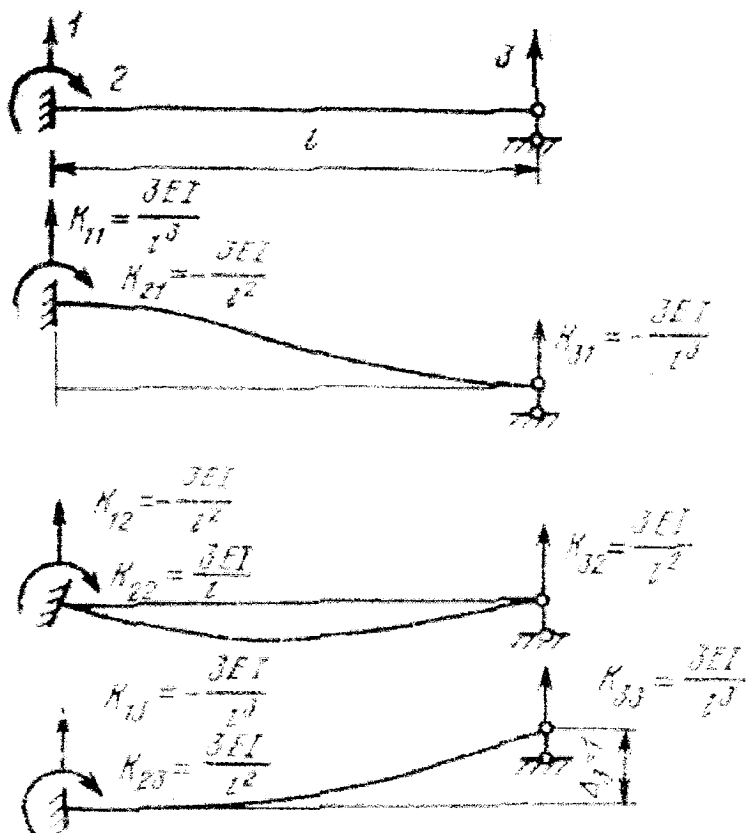


Рис. 22

Матриця жорсткості елемента із шістьма степенями свободи

У найбільш загальному випадку необхідно враховувати вплив усіх трьох можливих переміщень вузлів елемента: поперечні переміщення, поздовжні переміщення і повороти. Такий елемент, що має 6 степенів свободи, зображений на рис. 23. Там же показані зусилля, які відповідають одиничним зміщенням вузлів.

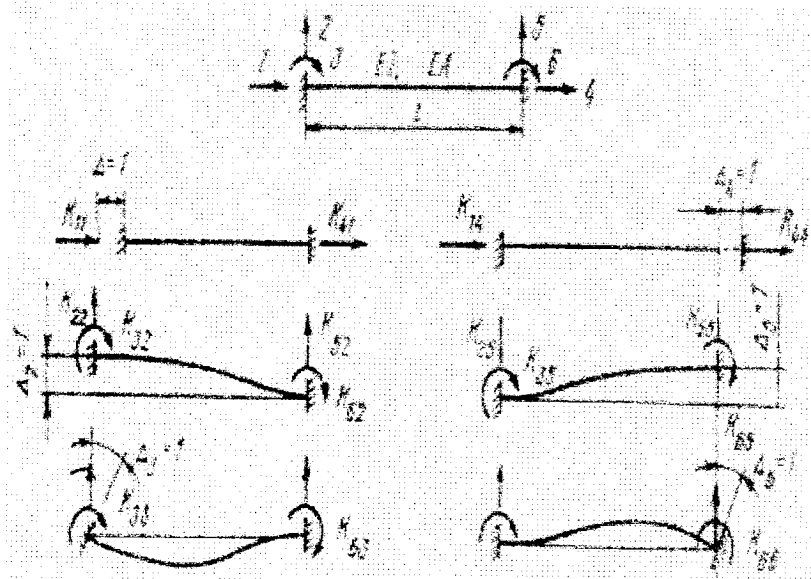


Рис. 23

Вирази для зусиль, що відповідають одиничним поперечним зміщенням і поворотам, отримані раніше (див. вираз (59)). Для одержання повної матриці жорсткості елемента із шістьма степенями свободи необхідно до зусиль, що складають матрицю (59), додати зусилля, викликані подовжніми зміщеннями вузлів $\Delta_1 = 1$ і $\Delta_4 = 1$. Вони знаходяться безпосередньо за законом Гука. Дійсно, надамо лівому вузлу змушене лінійне зміщення $\Delta_1 = 1$ по осі стержня. Тоді в стрижні виникнуть тільки подовжні стискуючі зусилля N_0 , які можна знайти за законом Гука $\Delta_1 = N_0/(EA)$, $N_0 = EA\Delta_1$ з урахуванням прийнятих позначень і правила знаків: $K_{11} = EA/l$; $K_{41} = -EA/l$. Аналогічно при зміщенні $\Delta_4 = 1$ правого вузла: $K_{14} = -EA/l$; $K_{44} = -EA/l$. Інші зусилля при цьому будуть дорівнювати нулю

Тепер легко записати повну матрицю жорсткості $[K_s]$ (6×6) елемента із шістьма степенями свободи.

$$[K_3] =$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ \hline K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ \hline K_{31} & K_{32} & K_{33} \\ \hline K_{41} & K_{42} & K_{43} \\ \hline K_{51} & K_{52} & K_{53} \\ \hline K_{61} & K_{62} & K_{63} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ \hline K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ \hline K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ \hline K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ \hline K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ \hline K_{64} & K_{65} & K_{66} \\ \hline \end{array} =$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \hline 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \hline 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \hline \end{array} =$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \hline 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \hline 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \\ \hline \end{array} . (61)$$

Матриця (61) враховує вплив усіх можливих переміщень вузлів лінійного елемента плоскої системи, тому вона є точною. Матриці ж (59) і (60), отримані в припущеннях, що звичайно приймаються при розрахунку стержневих систем (впливом осьових деформацій у порівнянні з згинальними можна зневажити) є наближеними.

Аналогічно отримують матриці жорсткості для інших більш складних випадків, наприклад, коли елемент взаємодіє з пружною основою, має нелінійну форму і т.д.

Матриці жорсткості деяких елементів, які часто зустрічаються приведені в додатку.

Формування матриці жорсткості системи

Отримані матриці жорсткості типових елементів зручно використовувати для формування глобальної матриці жорсткості всієї системи. Розглянемо докладніше цю важливу операцію методу скінченних елементів.

Якщо у вузлі конструкції з'єднуються кілька елементів, то повне вузлове зусилля буде складатися із суми зусиль, які передаються вузлу кожним елементом. Наприклад, при повороті вузла i , що з'єднує 3 елемента (a), (b) і (c), в опорних перетинах елементів виникнуть по 3 зусилля, позначені на рис. 24. Для визначення сумарних вузлових зусиль досить підсумувати відповідні складові:

$$\begin{aligned} S_{13} &= S_{13}^{(a)} + S_{13}^{(b)} + S_{13}^{(c)}, \\ S_{23} &= S_{23}^{(a)} + S_{23}^{(b)} + S_{23}^{(c)}, \\ S_{33} &= S_{33}^{(a)} + S_{33}^{(b)} + S_{33}^{(c)}. \end{aligned}$$

Тепер згадаємо, що кожен компонент матриці жорсткості являє собою зусилля, викликане одиничним зміщенням вузла.

Отже, для одержання глобальної матриці жорсткості системи необхідно підсумувати відповідні компоненти матриць жорсткості елементів, що сходяться у вузлі. Наприклад, підматриця $[K_{ii}]$ (3×3) системи, яка включає в себе зусилля у вузлі i при одиничних зсувах цього ж вузла, одержується підсумовуванням відповідних підматриць елементів (a), (b) і (c):

$$K_{ii} = K_{ii}^{(a)} + K_{ii}^{(b)} + K_{ii}^{(c)} = \sum_{r \in i} K_{ii}^{(r)}.$$

Символ $\sum_{r \in i}$ означає, що підсумовування відбувається по всіх

елементах r , які мають вузол i .

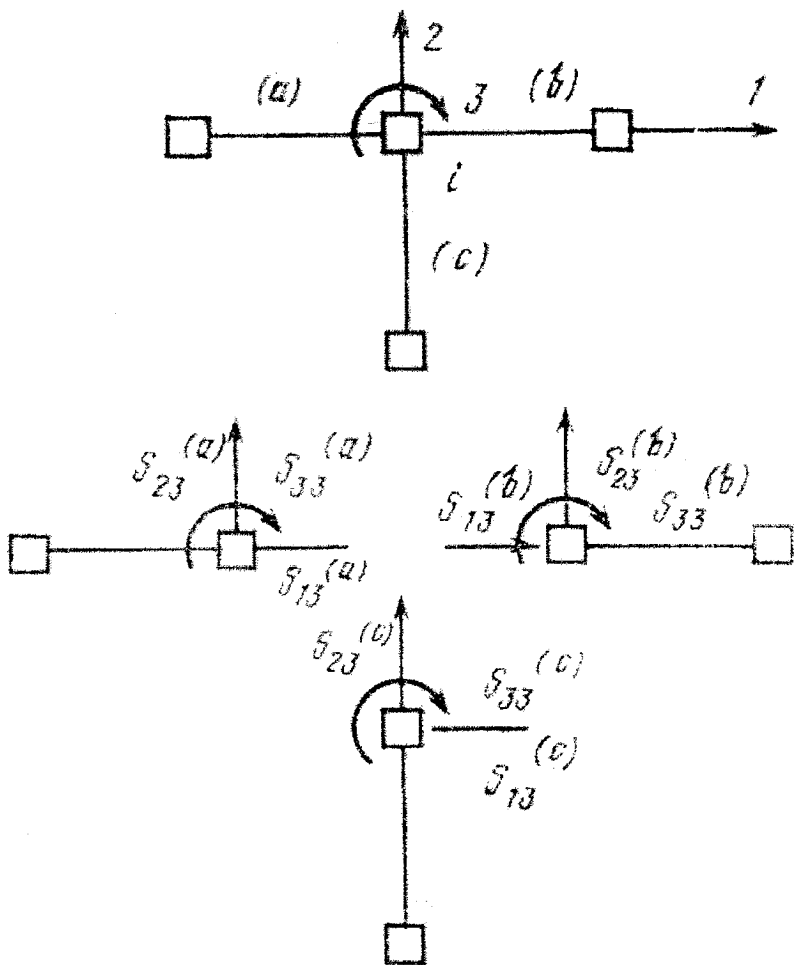


Рис. 24

При складанні програм для ЕОМ зручніше робити підсумовування відразу по всіх елементах системи, тобто

$$K_{ii} = \sum_{r=1}^N K_{ii}^{(r)}$$

У цьому записі ті елементи, які не містять вузол i , дадуть нульовий внесок у суму, а відмінні від нуля доданки відповідають елементам, що з'єднані у вузлі r . Це просте правило підсумовування зручно тим, що відразу ж після визначення коефіцієнта для окремого елемента він може бути адресований у відповідну область пам'яті машини і там підсумований з попереднім значенням.

Варто мати на увазі ще одну особливість формування матриці жорсткості системи. У МСЕ усі вузлові зусилля і переміщення повинні відповідати напрямкам осей глобальної, єдиної для всіх елементів, системи координат. Матриці жорсткості окремих елементів складені в місцевій системі осей, тобто її компоненти являють собою поздовжні і поперечні зусилля, а також моменти. У конструкції елементи, природно, можуть бути довільно орієнтовані щодо загальної системи координат. Тому ще до складання сумарної матриці жорсткості необхідно визначити складові зусиль елемента, паралельні осям глобальної системи. Це легко здійснити за допомогою стандартного лінійного перетворення – повороту осей координат, що застосовувалось вже, наприклад, у розділі 2.

Розглянемо елемент (a) , вісь якого складає з осями загальної системи координат кути γ і $\pi/2-\gamma$. Позначимо переміщення і зусилля його вузлів у місцевій системі координат, відповідно, $\tilde{\Delta}_{(a)}$, $\tilde{S}_{(a)}$, а у загальній – $\Delta_{(a)}$, $S_{(a)}$. Виразимо переміщення $\tilde{\Delta}_{(a)}$ через $\Delta_{(a)}$ за допомогою відомого лінійного перетворення

$$\{\tilde{\Delta}_{(a)}\} = [G]\{\Delta_{(a)}\}, \quad (62)$$

де $[G]$ – матриця направляючих косинусів

$$G = \begin{vmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

У будь-якій системі координат відповідні компоненти сил повинні робити однакову роботу. На підставі цього можна записати $\{S_{(a)}^T\} \{\Delta_{(a)}\} = \{\tilde{S}_{(a)}^T\} \{\tilde{\Delta}_{(a)}\}$. Використовуючи формулу (62), перепишемо вираз:

$$\{S_{(a)}^T\} \{\Delta_{(a)}\} = \{\tilde{S}_{(a)}^T\} [G] \{\Delta_{(a)}\}, \text{ чи } \{S_{(a)}\} = [G^T] \{\tilde{S}_{(a)}\}. \quad (63)$$

Тепер перейдемо до перетворень жорсткостей:

$$\{\tilde{S}_{(a)}\} = [\tilde{K}_{(a)}] \{\tilde{\Delta}_{(a)}\},$$

де $[\tilde{K}_{(a)}]$ – матриця жорсткості елемента в місцевій системі координат. Підставимо останню залежність у (63):

$$\{S_{(a)}\} [G^T] [\tilde{K}_{(a)}] \{\tilde{\Delta}_{(a)}\} = [G^T] [\tilde{K}_{(a)}] [G] \{\Delta_{(a)}\} = [K_{(a)}] \{\Delta_{(a)}\}.$$

Таким чином, матриця жорсткості елемента в глобальній системі координат

$$[K_{(a)}] = [G^T] [\tilde{K}_{(a)}] [G].$$

На закінчення повторимо порядок складання матриці жорсткості системи на прикладі.

Нехай конструкція складається з трьох елементів (a), (b), (c), які з'єднуються у вузлі 3 (рис. 25). Усі вузли мають по три степені свободи, отже, вузлові зусилля і переміщення мають по три складові. Матриця жорсткості кожного елемента складається з чотирьох підматриць (3×3) і в місцевій системі координат визначається виразом (61). Для одержання глобальної матриці необхідно за допомогою залежності (64) визначити компоненти МЖЕ в загальній системі координат, занести їхні значення у відповідну область пам'яті машини і підсумувати їх із уже наявними там величинами. Ця операція наочно показана на рис. 25. Оскільки кожен вузол має три степені свободи, а конструкція містить у собі 4 вузли, глобальна матриця

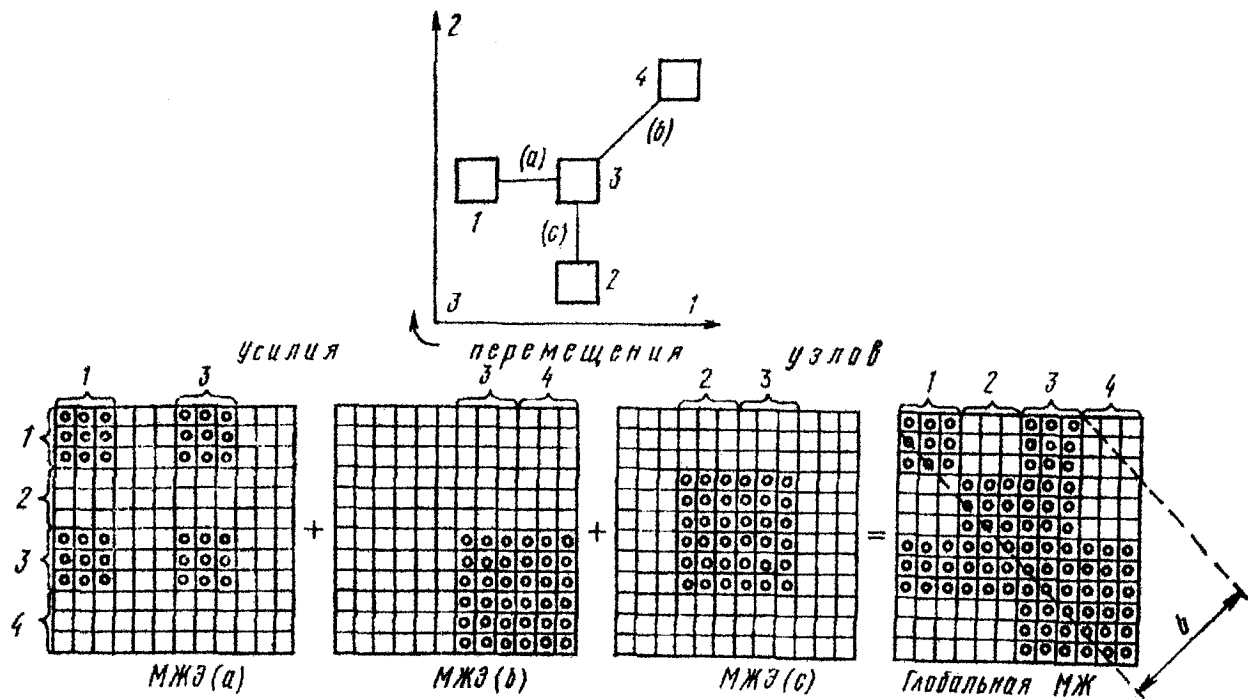


Рис. 25, а

жорсткості має розмірність 12×12 і складається з 144 компонентів. На рис. 25,а показано 4 квадрати, розбиті на 144 осередки. Кожен стовпчик квадратів відповідає певному переміщенню вузлів; перші три стовпчики – переміщенням першого вузла по напрямках 1, 2, 3, другі три – переміщення другого вузла і т.д. Рядки відповідають складовим вузлових зусиль по осях 1, 2, 3. На перших трьох квадратах показано розташування компонентів матриць жорсткості кожного елемента в глобальній матриці, а на четвертому квадраті – розташування сумарних компонентів. Области у яких компоненти матриці жорсткості відмінні від нуля, на рисунку відзначені кружечками. Наприклад, перший квадрат відповідає елементу з вузлами 1 і 3. МЖЕ складається з чотирьох підматриць (3×3): $[K_{11}]$, $[K_{13}]$, $[K_{31}]$, $[K_{33}]$. Глобальну матрицю можна одержати накладенням трьох квадратів, які побудовано для елементів (a), (b) і (c). При цьому область, що відповідає підматриці $[K_{33}]$, відзначена кружечками на всіх трьох квадратах. Отже, поміщені в цю область компоненти глобальної матриці будуть отримані підсумовуванням відповідних компонентів матриць жорсткості елементів

$$[K_{33}] = [K_{33}^{(a)}] + [K_{33}^{(b)}] + [K_{33}^{(c)}].$$

При формуванні глобальної матриці виникають три випадки.

1. Окремі блоки містять у собі тільки нульові компоненти, наприклад, $[K_{12}]$, $[K_{14}]$, $[K_{24}]$. Вони відповідають не зв'язаним між собою вузлам.

2. Блоки містять компоненти матриці жорсткості тільки одного елемента, наприклад $[K_{11}]$, $[K_{13}]$, $[K_{44}]$ і т.д. Вони відповідають вузлам, які належать тільки одному елементу.

3. Блоки містять компоненти, отримані підсумовуванням жорсткостей декількох елементів, наприклад $[K_{33}]$. Ці блоки відповідають вузлам, що з'єднують кілька елементів.

Легко помітити, що матриця жорсткості системи є квадратною симетричною стрічковою матрицею, тобто відмінні від нуля елементи розташовані навколо її головної діагоналі у

вигляді стрічки.

Послідовність розрахунку стержневих систем методом скінчених елементів покажемо на конкретному прикладі.

Приклад. Потрібно визначити внутрішні зусилля і побудувати епюри M , Q і N для рами, показаної на рис. 25,6.

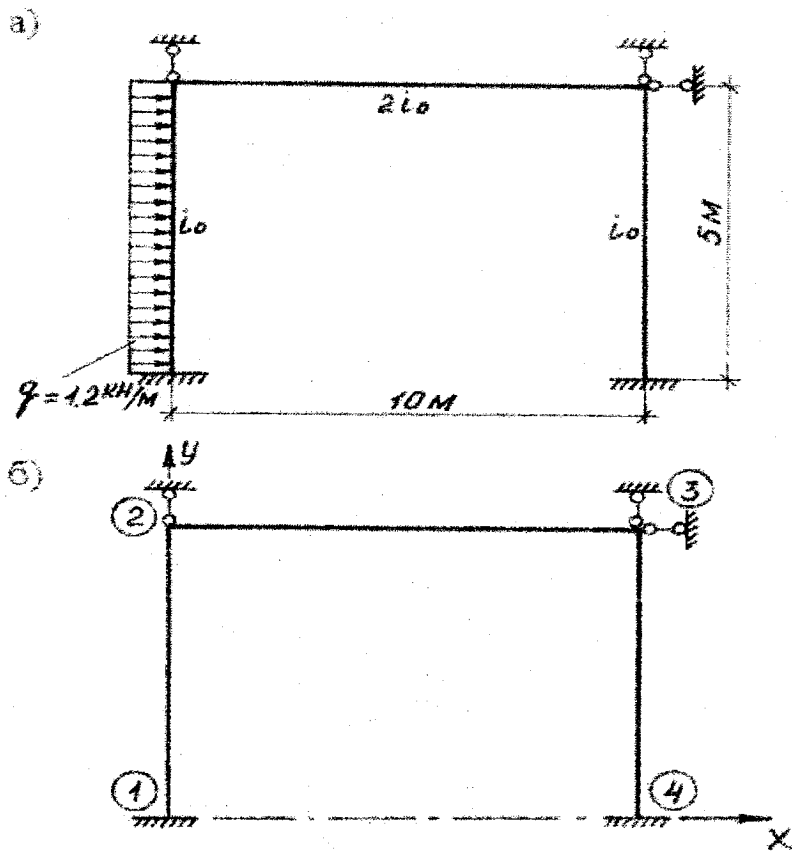


Рис. 25,6

Згинальні погонні жорсткості в стояках рами рівні i_0 , у ригелі - $2 i_0$.

Погонні жорсткості f щодо поздовжніх деформацій приймаються $f = 50i$ для всіх елементів рам.

1. Вводимо загальну систему координат і нумеруємо вузли рами (рис. 25-1,б).

2. Записуємо координати вузлів рами в прийнятій загальній системі координат.

Таблиця 1

№ вузла	X	Y
1	0	0
2	0	5
3	10	5
4	10	0

3. Визначаємо довжини і величини $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ для всіх елементів. Результати обчислень запишемо в таблицю, наведену нижче

Таблиця 2

№ елемента	i	f	l (м)	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
1 - 2	i_0	$50i_0$	5	1	0
2 - 3	$2i_0$	$50i_0$	10	0	1
3 - 4	i_0	$50i_0$	5	-1	0

4. У розрахунковій схемі рами виділимо вільні вузли (рис. 26).

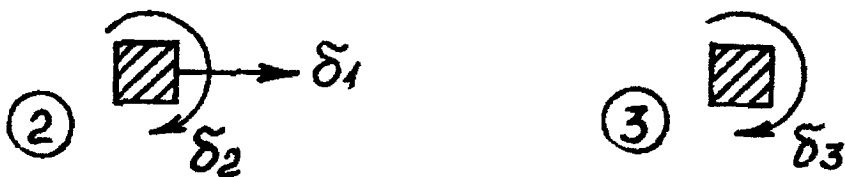


Рис. 26

Невідомими є можливі переміщення цих вузлів: лінійні по напрямку осей координат і кути повороту.

Оскільки в розглянутій рамі деякі лінійні переміщення обмежуються накладеними в'язями, то у вузлі 2 невідомими будуть горизонтальне переміщення δ_1 , кут повороту δ_2 , а у вузлі 3 – тільки кут повороту δ_3 . Додатні напрямки вузлових переміщень, показані на рис. 26, визначають додатні напрямки і нумерацію вузлових зовнішніх навантажень і реактивних зусиль.

Замінімо задане навантаження $q = 1,2$ кН/м вузловим. Для цього скористаємося таблицею (Додаток 1).

Для стержня, зашцімленого з двох сторін під дією розподіленого навантаження, виникають зусилля M і Q , яких показані на рис.27. Опорні моменти для заданого навантаження стержня складуть

$$M_1 = M_2 = \frac{ql^2}{12} = \frac{1,2 \times 5^2}{12} = 2,5 \text{ кНм}$$

а опорні реакції

$$P = \frac{ql}{2} = \frac{1,2 \times 5}{2} = 3 \text{ кНм} .$$

Розрахункова схема ригеля рами під дією навантажень показана на рис. 28.

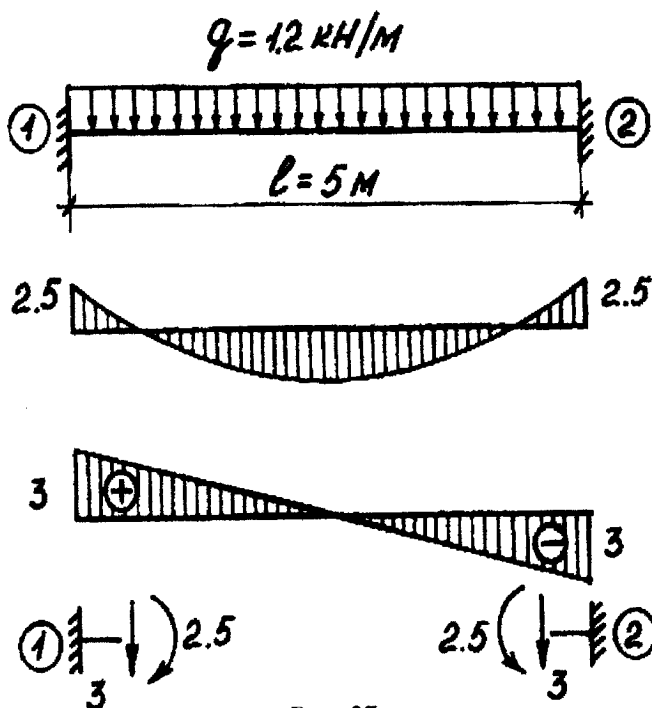


Рис. 27

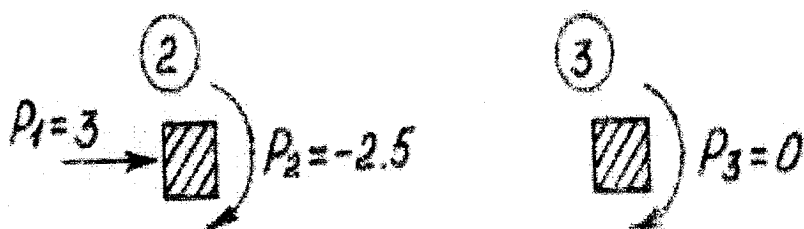


Рис. 28

Запишемо в матричній формі вектори вузлових переміщень, реактивних зусиль і зовнішнього навантаження для всієї системи

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{vmatrix}, \quad \bar{R} = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{vmatrix}, \quad \bar{P} = \begin{vmatrix} 3,0 \\ -2,5 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

При формуванні цих векторів пропущені компоненти, які відповідають нульовим переміщенням.

5. Формуємо матрицю жорсткості.

Вектор реакцій і вектор переміщень зв'язуються між собою за допомогою матриці жорсткості, порядок якої дорівнює числу незалежних вузлових переміщень

$$K = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{vmatrix}$$

Коефіцієнт K_{ik} - це реакція r_i від одиничного переміщення $\delta_{до} = 1$. Коефіцієнти матриці жорсткості визначаємо за методикою, викладеного вище.

6. Запишемо матрицю жорсткості системи

$$K = \begin{vmatrix} 100,48 & -1,2 & 0 \\ -1,2 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix}$$

7. Система рівнянь рівноваги

$$K \cdot \bar{\Delta} - \bar{P} = 0$$

$$i_0 \begin{vmatrix} 100,48 & -1,2 & 0 \\ -1,2 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 \\ -2,5 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} 100,48i_0\delta_1 - 1,2i_0\delta_2 - 3 = 0 \\ -1,2i_0\delta_1 + 12i_0\delta_2 + 4i_0\delta_3 + 2,5 = 0 \\ 4i_0\delta_2 + 12i_0\delta_3 = 0 \end{cases}$$

З рішення системи рівнянь одержимо:

$$i_0\delta_1 = 0,027, \quad i_0\delta_2 = -0,231, \quad i_0\delta_3 = 0,077.$$

8. Визначимо зусилля у стрижнях рами.

8.1. Стержень 1 – 2 ($i = i_0$, $f = 50 i_0$, $\ell = 5\text{м}$, $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$)

Матриця жорсткості елемента 1 – 2 у загальній системі координат

$$K_1 = i_0 \begin{vmatrix} 0,48 & 0 & 1,2 & -0,48 & 0 & 1,2 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & -50 & 0 \\ 1,2 & 0 & 4 & -1,2 & 0 & 2 \\ -0,48 & 0 & -1,2 & 0,48 & 0 & -1,2 \\ 0 & -50 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 1,2 & 0 & 2 & -1,2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Матриця перетворень елемента 1 – 2

$$T_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Вектор переміщень елемента 1 – 2

$$\Delta = \frac{1}{i_0} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,027 \\ 0 \\ -0,231 \end{vmatrix}$$

Обчислення реакцій, які діють на елемент 1 – 2 у загальній системі координат

$$\begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,48 & 0 & 1,2 & -0,48 & 0 & 1,2 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & -50 & 0 \\ 1,2 & 0 & 4 & -1,2 & 0 & 2 \\ -0,48 & 0 & -1,2 & 0,48 & 0 & -1,2 \\ 0 & -50 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 1,2 & 0 & 2 & -1,2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,027 \\ 0 \\ -0,231 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,29 \\ 0 \\ -0,49 \\ 0,29 \\ 0 \\ -0,96 \end{vmatrix}$$

Обчислення реакцій, які діють на елемент 1-2 у місцевій системі координат

$$\begin{array}{l}
 r_1 \\
 r_2 \\
 r_3 \\
 r_4 \\
 r_5 \\
 r_6
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,29 \\
 \hline
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,49 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0,29 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,96 \\
 \hline
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 0 \\
 \hline
 0,29 \\
 \hline
 -0,49 \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 -0,29 \\
 \hline
 -0,96 \\
 \hline
 \end{array}$$

Реакції, які діють на стержень 1-2, показані на рис. 29.

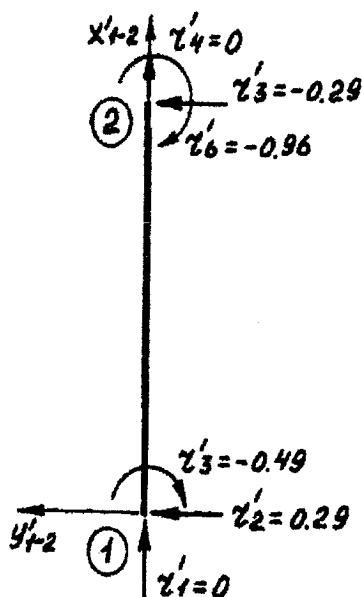


Рис. 29

8.2. Стержень 2 – 3 ($i = 2i_0$, $f = 100i_0$, $\ell = 10\text{м}$, $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$)

Матриця жорсткості елемента 2 – 3 у загальній системі координат

$$K_2 = i_0 \begin{vmatrix} 100 & 0 & 0 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0,24 & 1,2 & 0 & -0,24 & -1,2 \\ 0 & -1,2 & 8 & 0 & 1,2 & 4 \\ -100 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & -0,24 & 1,2 & 0 & 0,24 & 1,2 \\ 0 & -1,2 & 4 & 0 & 1,2 & 8 \end{vmatrix}$$

Матриця перетворень $T_2 = E$.

Вектор переміщень

$$\Delta = \frac{1}{i_0} \begin{vmatrix} 0,027 \\ 0 \\ -0,231 \\ 0 \\ 0 \\ 0,077 \end{vmatrix}$$

Оскільки $T_2 = E$, реакції, які діють на стержень у місцевій системі координат, будуть дорівнювати реакціям, що діють у загальній системі координат.

Визначення реакцій, які діють на стержень 2 – 3

$$\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 100 & 0 & 0 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0,24 & -1,2 & 0 & -0,24 & -1,2 \\ 0 & -1,2 & 8 & 0 & 1,2 & 4 \\ -100 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & -0,24 & 1,2 & 0 & 0,24 & 1,2 \\ 0 & -1,2 & 4 & 0 & 1,2 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0,027 \\ 0 \\ -0,231 \\ 0 \\ 0 \\ 0,077 \end{matrix} = \begin{matrix} 2,71 \\ 0,18 \\ -1,54 \\ -2,71 \\ -0,18 \\ -0,31 \end{matrix}$$

Реакції, які діють на стержень 2 – 3, показані на рис. 30.

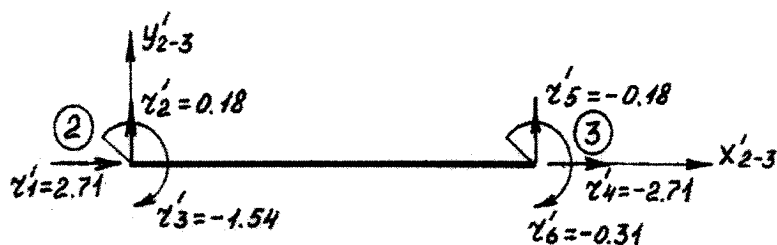


Рис. 30

8.3. Стержень 3 – 4 ($i = i_0$, $f = 50i$, $\ell = 5\text{м}$, $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$).

Матриця жорсткості елемента 3 – 4 у загальній системі координат:

$$K_3 = i_0 \begin{vmatrix} 0,48 & 0 & -1,2 & -0,48 & 0 & -1,2 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & -50 & 0 \\ -1,2 & 0 & 4 & 1,2 & 0 & 2 \\ -0,48 & 0 & 1,2 & 0,48 & 0 & 1,2 \\ 0 & -50 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ -1,2 & 0 & 2 & 1,2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Матриця перетворень для елемента 3 – 4 T_3 буде такою ж, як і для стержня 1 – 2 T_2 .

Вектор переміщень для стержня 3 – 4

$$\Delta = \frac{1}{i_0} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,077 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Визначення реакції, яка діє на елемент 3 – 4 у загальній системі координат

$$\begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,48 & 0 & -1,2 & -0,48 & 0 & -1,2 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & -50 & 0 \\ -1,2 & 0 & 4 & 1,2 & 0 & 2 \\ -0,48 & 0 & 1,2 & 0,48 & 0 & 1,2 \\ 0 & -50 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ -1,2 & 0 & 2 & 1,2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \cdot 0,077 = \begin{vmatrix} -0,092 \\ 0 \\ 0,308 \\ 0,092 \\ 0 \\ 0,154 \end{vmatrix}$$

Визначення реакцій, які діють на стержень 3 – 4 у місцевій системі координат

$$\begin{vmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \\ r_4' \\ r_5' \\ r_6' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -0,092 \\ 0 \\ 0,308 \\ 0,092 \\ 0 \\ 0,154 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -0,092 \\ 0,308 \\ 0 \\ 0,092 \\ 0,154 \end{vmatrix}$$

Реакції, які діють на стержень 3-4, показані на рис. 31.

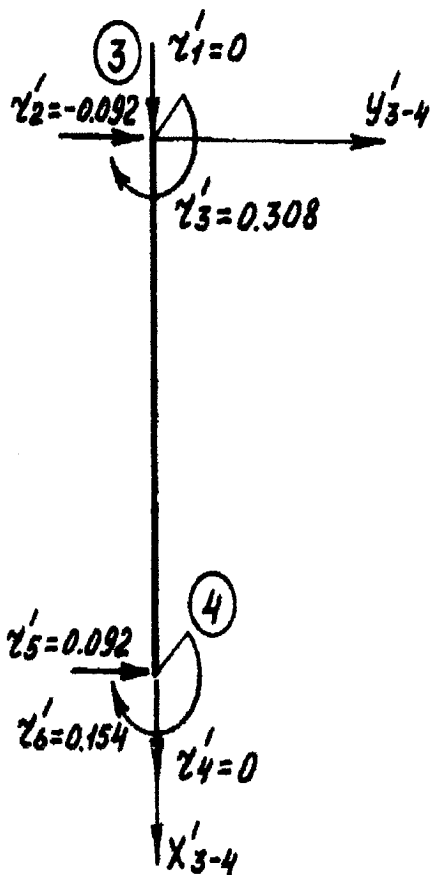


Рис. 31

9. За знайденими результатами будемо епюри внутрішніх зусиль.

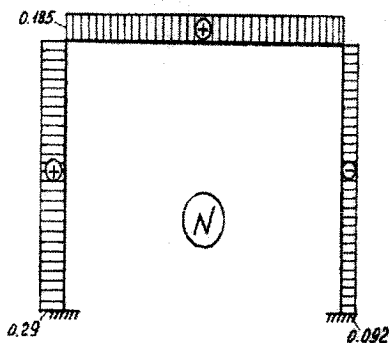
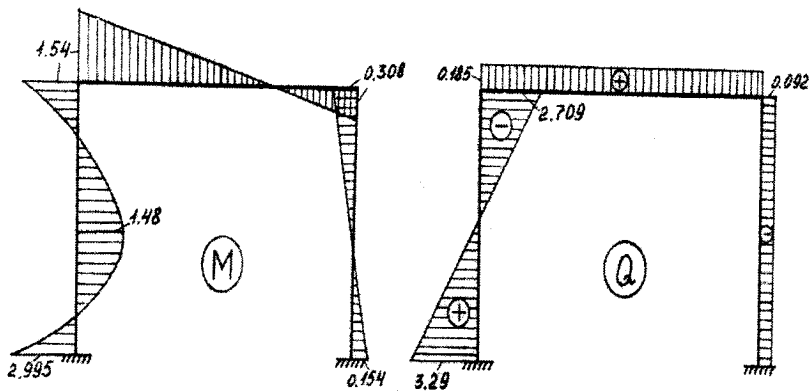


Рис. 32

10. Кінематична перевірка виконується по формулі Мора

$$\Delta_{iq} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_q}{EJ} dx + \sum \frac{\bar{N}_i N_q}{f} = 0$$

Розрахунок плоских рам методом скінченних елементів із застосуванням ЕОМ

У програмному комплексі [1], що є у наявності в бібліотеці кафедри «Опір матеріалів і будівельна механіка» ОНМУ, поміщений файл RAMDL_PEXE із програмою, призначеною для перевірки розрахунків стержневих систем МСЕ. У програму включена інформація про чотири схеми плоских рам з вихідними даними.

Програма перевіряє обчислення елементів матриці жорсткості, векторів вузлових реакцій і навантажень, а також внутрішніх зусиль для двох визначених програмою стержнях.

При відсутності помилок у результатах розрахунку програма може видати правильні результати контрольних величин.

Для роботи з програмою спочатку необхідно виконати елементи розрахунку обраної схеми рами МСЕ: визначити степінь свободи, скласти матричне рівняння рівноваги, обчислити всі елементи довільного стовпця матриці жорсткості і стовпця вузлових навантажень. Після перевірки правильності цих величин програма видасть вектор вузлових переміщень дискретної моделі, а також номери стержнів, у яких необхідно надалі обчислювати внутрішні зусилля.

На другому етапі роботи програма перевіряє обчислені в зазначених стержнях внутрішні зусилля. Якщо контроль виконаний повністю, програма виводить на екран дисплея епюри внутрішніх зусиль, а також таблиці чисельних результатів.

Приклад. Потрібно розрахувати раму, показану на рис. 33 при наступних вихідних даних: $l=4\text{м}$, $h=3\text{м}$, $P_1=1,8\text{кН}$, $P_2=1,2\text{кН}$, $q_1=2,4\text{кН/м}$, $q_2=2\text{кН/м}$.

Як видно з рисунку, рама має два типи скінченних елементів: стержень із защемленнями з обох сторін – перший тип, стержень з одним зацімленим, а іншим шарнірним кінцями – другий тип.

Вважаємо, що для вертикальних стержнів рами 1-4, 1-6, 2-5, 2-7, 3-8 жорсткість на згін складає $EI = 1$, а на поздовжні деформації – $EA=100$.

Для похилих і горизонтальних стержнів 4-5, 1-2, 2-3, 3-5, відповідно, $EI = 2$ і $EA = 200$.

Початок глобальної системи координат приймаємо у вузлі 6.

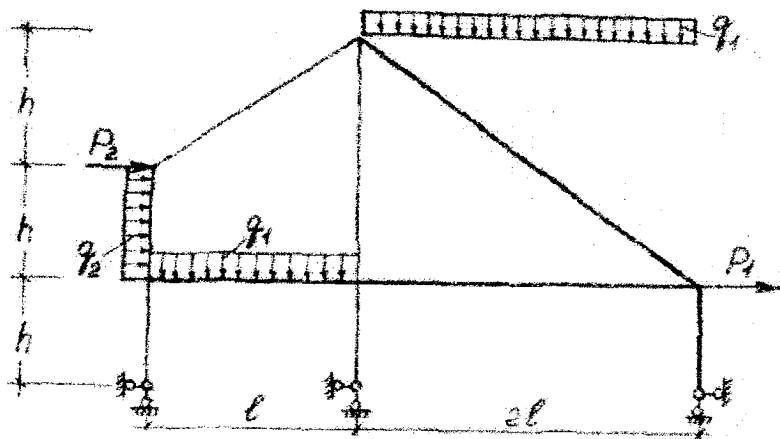


Рис. 33

1. Геометричні характеристики скінченних елементів.

Геометричні характеристики стержнів приведені в табл. 3

Таблиця 3

П. - к.	Тип КЕ	ℓ (м)	$\sin\beta$	$\cos\beta$	EI	EA	i	f
1-2	1	4	0	1	2	200	0,50	50,000
2-3	1	8	0	1	2	200	0,25	25,000
4-5	1	5	0,6	0,8	2	200	0,40	40,000
3-5	1	10	0,6	-0,8	2	200	0,20	20,000
1-6	2	3	-1	0	1	100	0,3333	33,333
2-7	2	3	-1	0	1	100	0,3333	33,333
3-8	2	3	-1	0	1	100	0,3333	33,333
1-4	1	3	1	0	1	100	0,3333	33,333
2-5	1	6	1	0	1	100	0,3333	16,667

2. Побудова векторів вузлових характеристик.

Дискретна модель рами з нумерацією напрямків можливих переміщень зображена на рис. 34.

Оскільки переміщення опорних вузлів дорівнює нулю, вектор невідомих вузлових переміщень має вид

$$\{\Delta\} = \{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 | \Delta_4 \Delta_5 \Delta_6 | \dots | \Delta_{13} \Delta_{14} \Delta_{15}\}^T$$

Отже, кількість основних невідомих дорівнює п'ятнадцяти.

Аналогічно можна записати вектори вузлових реакцій і вузлових навантажень

$$\{R\} = \{R_1 R_2 R_3 | R_4 R_5 R_6 | \dots | R_{13} R_{14} R_{15}\}^T$$

$$\{F\} = \{F_1 F_2 F_3 | F_4 F_5 F_6 | \dots | F_{13} F_{14} F_{15}\}^T$$

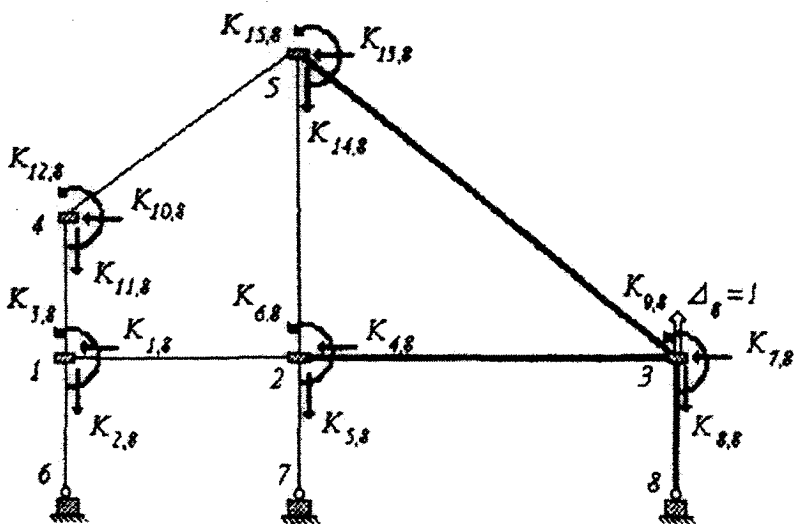


Рис. 34

Вектор вузлових навантажень $\{F\}$ являє собою суму вектора $\{F\}$ вузлових сил, які безпосередньо діють на вузли дискретної моделі, і вектора $\{Q\}$, що обумовлений дією на вузли розподілених на стержнях навантажень.

Вектор $\{F\}$ можна записати з порівняння діючих вузлових сил і моментів і схеми напрямків вільних переміщень вузлів

$$\{F\} = \{000|000|1,800|1,200|000\}^T$$

Для визначення компонентів вектора $\{Q\}$ обчислимо вузлові сили в глобальній системі координат у стержнях, на яких розташоване розподілене навантаження:

Стержень 1-2 (рис.35,а) має такі вихідні дані

$$q_x = 0, q_y = 2q_1 = 22,4 \text{ кН/м}, \ell_x = 4 \text{ м}, \ell_y = 0.$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned} P_1 &= 0, & P_4 &= 0, \\ P_2 &= -\frac{(-2,4) \cdot 4}{2} = 4,8 \text{ кН}, & P_5 &= 4,8 \text{ кН}, \\ P_3 &= -\frac{(-2,4) \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1}{12} = 4,8 \text{ кНм}, & P_6 &= 3,2 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Стержень 3-5 (рис.35,б) має такі дані:

$$q_x = 0, q_y = 2P_1 = 22,4 \text{ кН/м}, \ell_x = 8 \text{ м}, \ell_y = 6 \text{ м}$$

тоді

$$\begin{aligned} P_1 &= 0, & P_4 &= 0, \\ P_2 &= -\frac{(-2,4) \cdot 8}{2} = 9,6 \text{ кН}, & P_5 &= 9,6 \text{ кН}, \\ P_3 &= -\frac{(-2,4) \cdot 8 \cdot 6 \cdot -0,8}{12} = 12,8 \text{ кН}, & P_6 &= -12,8 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Стержень 1-4 (рис.35,в) має такі характеристики

$$q_x = q_2 = 2 \text{ кН/м}, \quad q_y = 0, \quad l_x = 0, \quad l_y = 3 \text{ м}$$

Обчислюємо

$$P_1 = -\frac{2 \cdot 3}{2} = -3 \text{ кН}, \quad P_4 = 3 \text{ кН},$$

$$P_2 = 0, \quad P_5 = 0,$$

$$P_3 = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1}{12} = -1,5 \text{ кН}, \quad P_6 = 1,5 \text{ кНм}.$$

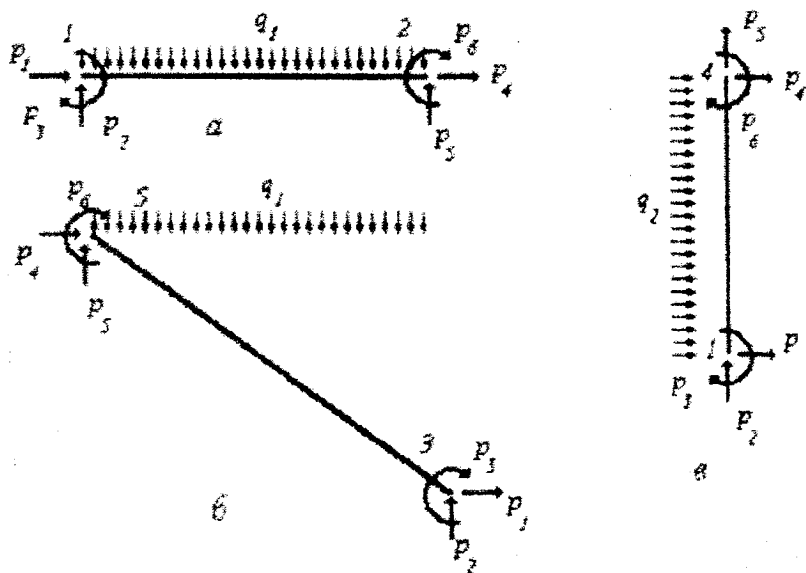


Рис. 35

Далі обчислюємо компоненти вектора $\{Q\}$, приймаючи до уваги, що кінцеві сили від стержнів передаються на вузли дискретної моделі в зворотному напрямку і тому повинні братися зі зворотним знаком. Тоді можна записати

$$\begin{aligned}
Q_1 &= 2(q_1^{122} + q_1^{124}) = 3, & Q_2 &= 2(q_2^{122} + q_2^{124}) = 24,8, & Q_3 &= 2(q_3^{122} + q_3^{124}) = 24,7, \\
Q_4 &= 2q_4^{122} = 0, & Q_5 &= 2q_5^{122} = 24,8, & Q_6 &= 2q_6^{122} = 23,2, \\
Q_7 &= 2q_1^{325} = 0, & Q_8 &= 2q_2^{325} = 29,6, & Q_9 &= 2q_3^{325} = 212,8, \\
Q_{10} &= 2q_4^{124} = 3, & Q_{11} &= 2q_5^{124} = 0, & Q_{12} &= 2q_5^{124} = 21,5, \\
Q_{13} &= 2q_4^{124} = 0, & Q_{14} &= 2q_5^{124} = 29,6, & Q_{15} &= 2q_5^{124} = 12,8.
\end{aligned}$$

Таким чином, вектор сил, що передаються на вузли дискретної моделі з боку завантажених стержнів, запишеться у виді

$$\{Q\} = \{324,8 \ 4,7 \mid 024,8 \ 23,2 \mid 029,6 \ 212,8 \mid 3 \ 0 \ 21,5 \mid 029,6 \ 12,8\}^T,$$

а вектор вузлових навантажень

$$\{F\} = \{324,8 \ 4,7 \mid 024,8 \ 23,2 \mid 1,8 \ 29,6 \ 212,8 \mid 4,2 \ 0 \ 21,5 \mid 029,6 \ 12,8\}^T.$$

3. Побудова матриці жорсткості дискретної моделі.

Матриця жорсткості дискретної моделі має такий вид:

$$[K] = \begin{vmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & \dots & K_{1,15} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} & \dots & K_{2,15} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} & \dots & K_{3,15} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{15,1} & K_{15,2} & K_{15,3} & \dots & K_{15,15} \end{vmatrix}$$

Для обчислення елементів матриці жорсткості $[K]$ необхідно по чергові давати вільним кутам дискретної моделі одиничні переміщення і знаходити реакції, що передадуться на вузли з боку стержнів, у результаті цих переміщень.

Обчислимо, наприклад, елементи 8-го стовпця. Для цього дамо дискретній моделі переміщення $\Delta_8=1$, думаючи, що всі інші вузлові переміщення дорівнюють нулю. При такій дії деформуються лише ті стержні, які сходяться у вузлі 3. Схема вузлових реакцій показана на рис. 36. Реакції у вузлах, до яких

приєднані тільки недеформуємі стержні дорівнюють нулю, тобто:

$$K_{1,8}=K_{2,8}=K_{3,8}=K_{10,8}=K_{11,8}=K_{12,8}=0$$

Для обчислення інших реакцій розглянемо схему стержнів, які деформуються (рис. 36). На схемі вважається, що вертикальні переміщення Δ_8 вузла 3 дискретної моделі для стержнів 3-5 і 3-8 є вертикальними переміщеннями їхнього початку δ_2 , а для стержня 2-3 – вертикальним переміщенням кінця δ_5 .

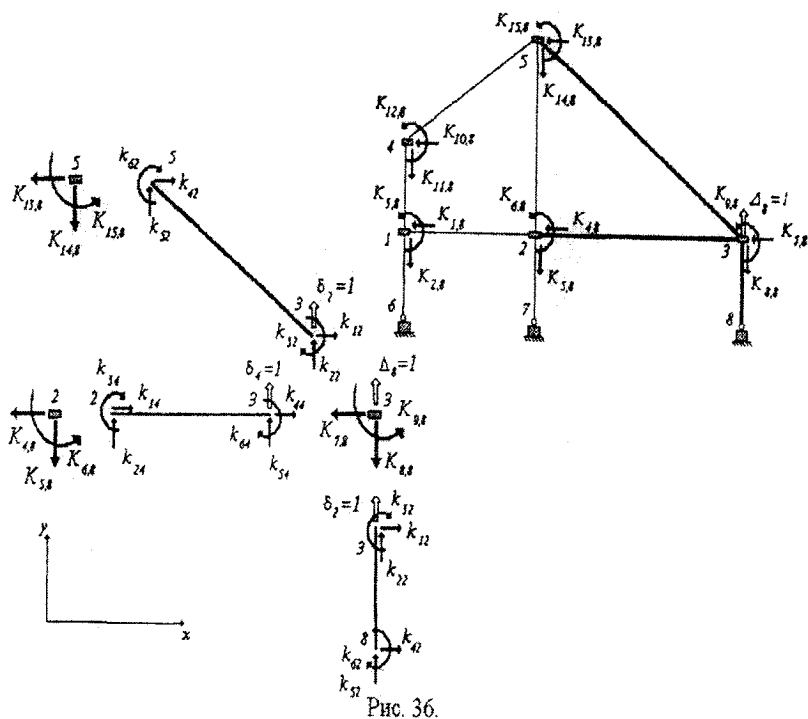


Рис. 36

Кінцеві реакції визначаються елементами відповідних матриць жорсткості: для стержнів 2-3, 3-5 – матрицею

жорсткості стержня, який має зашцімлення на обох кінцях (перший тип), для стержня 3-8 – матрицею жорсткості стержня із зашцімленням на початку і шарніром на кінці (другий тип). На підставі схеми (рис. 36) можна записати

$$K_{4,8} = K_{1,5}^{2-3} = SC \left(f - \frac{12i}{l^2} \right) \Big|^{2-3} = 0;$$

$$K_{5,8} = K_{3,5}^{2-3} = \left(-fS^2 - \frac{12i}{l^2} C^2 \right) \Big|^{2-3} = 0 - \frac{12 \cdot 0,25}{8^2} 1^2 = -0,0469;$$

$$K_{6,8} = K_{3,5}^{2-3} = \frac{6i}{l} C \Big|^{2-3} = \frac{6 \cdot 0,25}{8} \Big|^{2-3} = 0,1875;$$

$$K_{7,8} = K_{4,5}^{2-3} + K_{1,2}^{3-5} + K_{1,2}^{3-8} =$$

$$= SC \left(f - \frac{12i}{l^2} \right) \Big|^{2-3} + SC \left(f - \frac{12i}{l^2} \right) \Big|^{3-5} + SC \left(f - \frac{3i}{l^2} \right) \Big|^{3-8} = -9,588;$$

$$K_{8,8} = K_{5,5}^{2-3} + K_{2,2}^{3-5} + K_{2,2}^{3-8} = \left(fS^2 - \frac{12i}{l^2} C^2 \right) \Big|^{2-3} +$$

$$+ \left(S^2 f - \frac{12i}{l^2} C^2 \right) \Big|^{3-5} + \left(fS^2 - \frac{3i}{l^2} C^2 \right) \Big|^{3-8} = 40,595;$$

$$K_{9,8} = K_{6,5}^{2-3} + K_{3,2}^{3-5} + K_{3,2}^{3-8} =$$

$$= \left(\frac{6i}{l} C \right) \Big|^{2-3} + \left(\frac{6i}{l} \right) \Big|^{3-5} + \left(\frac{6i}{l} \right) \Big|^{3-8} = 0,283;$$

$$K_{13,8} = K_{4,2}^{3-5} = \left(-SC \left(f - \frac{12i}{l^2} \right) \right) \Big|^{3-5} = 9,588;$$

$$K_{14,8} = K_{3,2}^{3-5} = \left(-fS^2 - \frac{12i}{l^2} C^2 \right) \Big|^{3-5} = -7,215;$$

$$K_{15,8} = K_{6,2}^{3-5} = \left(-\frac{6i}{l} \right) \Big|^{3-5} = 0,009.$$

Правильність розрахунків може бути перевірена за допомогою програми PAMADL_P. Якщо при перевірці немає помилок, програма вирішує рівняння рівноваги і видає листинг із величинами вузлових переміщень дискретної моделі (табл. 4) із указівкою тих стержнів, у яких необхідно виконати обчислення вручну.

Таблиця 4

№	DX	DY	DF
1	6.0630880E+00	-1.4219720E-01	2.3217250E+00
2	6.0239660E+00	-3.3510400E-01	-2.7461000E-00
3	6.0933580E+00	-3.8669850E-01	-3.4268370E+00
4	6.1645700E+00	-1.8428430E-01	-2.4085670E+00
5	6.3384370E+00	-5.8774600E-01	5.3624630E+00
6	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
7	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
8	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00

Кожен ряд таблиці містить поступальні Δ_x і Δ_y , а також кутові Δ_φ переміщення відповідного вузла, тобто компоненти вектора вузлових переміщень $\{\Delta\}$.

4. Обчислення зусиль у стержнях.

Наступний етап розрахунку складається з визначення зусиль у стержнях рами по формулі

$$\{S'\}_e = [h]_e \{\delta\}_e + \{P'\}_e$$

Виконаємо такий розрахунок для стержня 3-5. Вектор вузлових переміщень будується на підставі листинга

$$\{\delta\}_{3-5} = \{\delta_1 \delta_2 \delta_3 | \delta_4 \delta_5 \delta_6\}_{3-5}^T = \{\Delta_{x3} \Delta_{y3} \Delta_{\varphi3} | \Delta_{x5} \Delta_{y5} \Delta_{\varphi5}\} = \{6,093358 - 0,386698 - 3,426837 | 6,338437 - 0,587746 - 5,362463\}^T$$

Матриця, що визначає зусилля в локальній системі координат стержня по переміщеннях його кінців у глобальній системі координат, має такий вид

$$\{h\} = \begin{bmatrix} -16 & 12 & 0 & \dots & 16 & -12 & 0 \\ -0,0144 & -0,0192 & -0,12 & \dots & 0,0144 & 0,0192 & -0,12 \\ 0,072 & -0,096 & 0,8 & \dots & -0,072 & 0,096 & 0,4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 16 & -12 & 0 & \dots & -16 & 12 & 0 \\ 0,0144 & 0,0192 & 0,12 & \dots & -0,0144 & -0,0192 & 0,12 \\ -0,072 & 0,4 & 0,4 & \dots & -0,072 & 0,096 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Визначаємо вектор кінцевих сил у локальній системі координат від розподіленого навантаження

$$P'_1 = -\frac{ql^2}{2} C - \frac{q_y l_x}{2} S = 0 - \frac{(-2,4) \cdot 8}{2} \cdot 0,6 = 5,76 \text{ кН},$$

$$P'_2 = -\frac{q_x l_y}{2} S - \frac{q_y l_x}{2} C = 0 - \frac{(-2,4) \cdot 8}{2} \cdot (-0,8) = -7,68 \text{ кН},$$

$$P'_3 = -\frac{q_x l_y l}{12} S + \frac{q_y l_x l}{12} C = 0 + \frac{(-2,4) \cdot 8 \cdot 10}{12} \cdot (-0,8) = 12,8 \text{ кН},$$

$$P'_4 = -\frac{q_x l_y}{2} C - \frac{q_y l_x}{2} S = 5,76 \text{ кН},$$

$$P'_5 = \frac{q_x l_y}{2} S - \frac{q_y l_x}{2} C = -7,68 \text{ кН},$$

$$P'_6 = -\frac{q_x l_y l}{12} S - \frac{q_y l_x l}{12} C = -12,8 \text{ кН}.$$

Вектор вузлових реакцій остаточно має вид

$$\{S\} = \{12,085 - 7,913 \quad 12,205 - 0,574 - 7,447 - 9,879\}^T$$

Звідси кінцеві зусилля в стрижні 3-5 становлять:

$$N_3 = -12,085 \text{ кН};$$

$$N_5 = -0,574 \text{ кН};$$

$$Q_3 = -7,913 \text{ кН};$$

$$Q_5 = -0,7,447 \text{ кН};$$

$$M_3 = 12,205 \text{ кНм};$$

$$M_5 = -9,879 \text{ кНм}.$$

Схема кінцевих зусиль у стержні 3-5 зображена на рис.37.

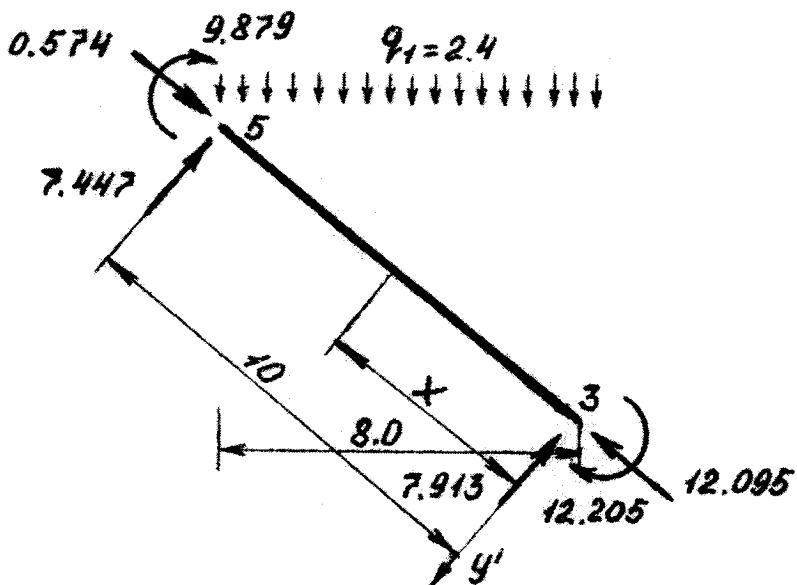
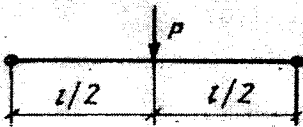
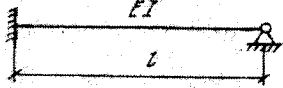
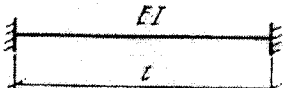

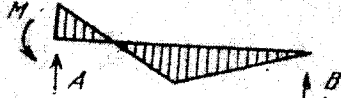






Рис. 37

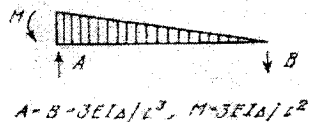
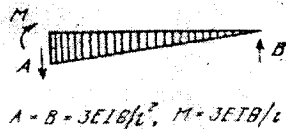
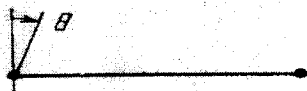
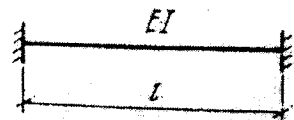
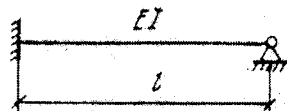
ДОДАТКИ

ДОВІДКОВІ ДАНІ ДО РОЗРАХУНКУ ЕЛЕМЕНТІВ НА НЕВУЗЛОВІ ВПЛИВИ

Опорні реакції і епюри згинальних моментів в однопрогонових статично невизначених балках.

Схема воздействия	Схемы балок	
		
	 $A = \frac{11}{16} P, B = \frac{5}{16} P, M = \frac{3}{16} Pl$	 $A = B = \frac{P}{2}, M = \frac{1}{8} Pl$
	 $\frac{5}{8} qL, B = \frac{3}{8} qL, M = \frac{1}{8} qL^2$	 $A = B = \frac{1}{2} qL, M = \frac{1}{12} qL^2$

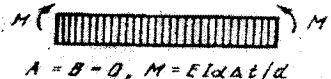
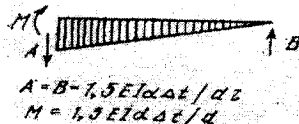
Схеми балок

Схема
воздействия

Нагрев



$t_B > t_A, \Delta t = t_B - t_A$
 d - высота сечения



ПЛОСКІ ТИПОВІ ЕЛЕМЕНТИ

а). Прямолінійні стержні. Матриці жорсткості будуються з урахуванням деформацій вигину і подовження. Задаються: l, EI, EF для елементів 1-4; l, EF для елементів 5-7.

Тип	Схема	\bar{u}^r	\bar{f}^r	\bar{k}^r
1		\bar{u}_{1i}^r \bar{u}_{2i}^r \bar{u}_{3i}^r \bar{u}_{1j}^r \bar{u}_{2j}^r \bar{u}_{3j}^r	F_{1i}^r \bar{F}_{2i}^r \bar{F}_{3i}^r \bar{F}_{1j}^r \bar{F}_{2j}^r \bar{F}_{3j}^r	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{ii}^r & \bar{k}_{ij}^r \\ \bar{k}_{ji}^r & \bar{k}_{jj}^r \end{bmatrix} =$ $= \begin{bmatrix} EI l & 0 & 0 & EI l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI l^3 & 6EI l^2 & 0 & 12EI l^3 & 6EI l^2 \\ 0 & 6EI l^2 & 4EI l & 0 & -6EI l^2 & 2EI l \\ EI l & 0 & 0 & EI l & 0 & 0 \\ 0 & -12EI l^3 & -6EI l^2 & 0 & 12EI l^3 & -6EI l^2 \\ 0 & -6EI l^2 & 2EI l & 0 & -6EI l^2 & 4EI l \end{bmatrix}$

Тип	Схема	\bar{u}^r	\bar{f}^r	\bar{k}^r
2		\bar{u}_{1i}^r \bar{u}_{2i}^r \bar{u}_{3i}^r \bar{u}_{1j}^r \bar{u}_{2j}^r	F_{1i}^r \bar{F}_{2i}^r \bar{F}_{3i}^r \bar{F}_{1j}^r \bar{F}_{2j}^r	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{ii}^r & \bar{k}_{ij}^r \\ \bar{k}_{ji}^r & \bar{k}_{jj}^r \end{bmatrix} =$ $= \begin{bmatrix} EF/l & 0 & 0 & EF/l & 0 \\ 0 & 3EF/l^3 & 3EF/l^2 & 0 & -3EF/l^3 \\ 0 & 3EF/l^2 & 3EF/l & 0 & 3EF/l^2 \\ -EF/l & 0 & 0 & EF/l & 0 \\ 0 & -3EF/l^3 & -3EF/l^2 & 0 & 3EF/l^2 \end{bmatrix}$
3		\bar{u}_{1i}^r \bar{u}_{2i}^r \bar{u}_{3i}^r	F_{1i}^r \bar{F}_{2i}^r \bar{F}_{3i}^r	$[\bar{k}_{ii}^r] = \begin{bmatrix} EF/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EF/l^3 & 6EF/l^2 \\ 0 & 6EF/l^2 & 4EF/l \end{bmatrix}$
4		\bar{u}_{1i}^r \bar{u}_{2i}^r \bar{u}_{3i}^r	F_{1i}^r \bar{F}_{2i}^r \bar{F}_{3i}^r	$[\bar{k}_{ii}^r] = \begin{bmatrix} EF/l & 0 & 0 \\ 0 & 3EF/l^3 & 3EF/l^2 \\ 0 & 3EF/l^2 & 3EF/l \end{bmatrix}$

Тип	Схема	\bar{u}^r	\bar{f}^r	\bar{k}^r
5		\bar{u}_{1i}^r \bar{u}_{2i}^r \bar{u}_{1j}^r \bar{u}_{2j}^r	F_{1i}^r \bar{F}_{2i}^r \bar{F}_{1j}^r \bar{F}_{2j}^r	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{ii}^r & \bar{k}_{ij}^r \\ \bar{k}_{ji}^r & \bar{k}_{jj}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EF/l & 0 & -EF/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EF/l & 0 & EF/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
6		\bar{u}_{1i}^r \bar{u}_{2i}^r	F_{1i}^r \bar{F}_{2i}^r	$[\bar{k}_{ii}^r] = \begin{bmatrix} EF/l & 0 \\ 0 & 3EF/l^3 \end{bmatrix}$
7		\bar{u}_{1i}^r \bar{u}_{2i}^r	F_{1i}^r \bar{F}_{2i}^r	$[\bar{k}_{ii}^r] = \begin{bmatrix} EF/l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

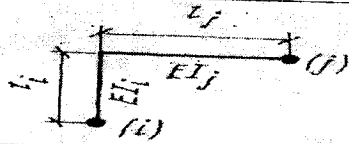
б). Прямолінійний стержень на пружній винклеровській основі. Матриця жорсткості будується з урахуванням деформацій вигину і подовження. Задаються: $l, EI, EF/c$ ($c=kb$, де k – коефіцієнт постелі, b – ширина стержня в площині опору).

125

Тип	Схема	\bar{u}^r	\bar{f}^r	\bar{k}^r
8		\bar{u}_{1i}^r \bar{u}_{2i}^r \bar{u}_{3i}^r \bar{u}_{1j}^r \bar{u}_{2j}^r \bar{u}_{3j}^r	F_{1i}^r \bar{F}_{2i}^r \bar{F}_{3i}^r \bar{F}_{1j}^r \bar{F}_{2j}^r \bar{F}_{3j}^r	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{ii}^r & \bar{k}_{ij}^r \\ \bar{k}_{ji}^r & \bar{k}_{jj}^r \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc ccc} EF/t & 0 & 0 & -EF/t & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 & -a_4 & a_5 \\ 0 & a_2 & a_3 & 0 & -a_5 & a_6 \\ \hline -EF/t & 0 & 0 & EF/t & 0 & 0 \\ 0 & -a_4 & -a_5 & 0 & a_1 & -a_2 \\ 0 & a_5 & a_6 & 0 & -a_2 & a_3 \end{array} \right]$

$$a_1 = 12EI/l^3 + 13cl/35; \quad a_2 = 6EI/l^2 + 11cl/210; \quad a_3 = 4EI/l + cl^3/105;$$

$$a_4 = 12EI/l^3 - 970; \quad a_5 = 6EI/l^2 + 13cl^2/420; \quad a_6 = 2EI/l - cl^3/140.$$



в). Г-образні рами. Матриці жорсткості будується з урахуванням одних деформацій вигину. Задаються: l_i, l_j, EI_i, EI_j

Тип	Схема	\bar{u}^r	\bar{f}^r	\bar{k}^r
9		\bar{u}_{1i}^r \bar{u}_{2i}^r \bar{u}_{3i}^r \bar{u}_{1j}^r \bar{u}_{2j}^r \bar{u}_{3j}^r	F_{1i}^r \bar{F}_{2i}^r \bar{F}_{3i}^r \bar{F}_{1j}^r \bar{F}_{2j}^r \bar{F}_{3j}^r	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{ii}^r & \bar{k}_{ij}^r \\ \bar{k}_{ji}^r & \bar{k}_{jj}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & -a_3 & -a_1 & -a_2 & a_7 \\ a_2 & a_4 & -a_5 & -a_2 & -a_4 & a_8 \\ -a_3 & -a_5 & a_6 & a_3 & a_5 & a_9 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & a_1 & a_2 & -a_7 \\ -a_2 & -a_4 & a_5 & a_2 & a_4 & -a_8 \\ a_7 & a_8 & -a_9 & -a_7 & -a_8 & a_{10} \end{bmatrix}$
10		\bar{u}_{1i}^r \bar{u}_{2i}^r \bar{u}_{3i}^r	F_{1i}^r \bar{F}_{2i}^r \bar{F}_{3i}^r	$\bar{k}_{ii}^r = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & -a_3 \\ a_2 & a_4 & -a_5 \\ -a_3 & -a_5 & a_6 \end{bmatrix}$

$$a_1 = (12 - 9i_1 t) i_1 / l_i^2; a_2 = 9i_1 i_j t / (l_i l_j); a_3 = (6 - 3i_1 t) i_1 / l_i; a_4 = (12 - 9i_j t) i_j / l_j^2; a_5 = 3i_1 i_j t / l_j; a_6 = (4 - i_1 t) i_1' \\ a_7 = 3i_1 i_j t / l_i; a_8 = (6 - 3i_j t) i_j / l_j; a_9 = i_1 i_j t; a_{10} = (4 - i_j t) i_j, \text{ где } t = 1 / (i_1 + i_j), i_1 = EI_i / l_i; i_j = EI_j / l_j.$$

Тип	Схема	\bar{u}^r	\bar{f}^r	\bar{k}^r
11		\bar{u}_{1i}^r \bar{u}_{2i}^r \bar{u}_{3i}^r \bar{u}_{1j}^r \bar{u}_{2j}^r	F_{1i}^r \bar{F}_{2i}^r \bar{F}_{3i}^r \bar{F}_{1j}^r \bar{F}_{2j}^r	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{ii}^r & \bar{k}_{ij}^r \\ \bar{k}_{ji}^r & \bar{k}_{jj}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & -b_3 & -b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_4 & -b_5 & -b_2 & -b_4 \\ -b_3 & -b_5 & b_6 & b_3 & b_5 \\ -b_1 & -b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ -b_2 & -b_4 & -b_5 & b_2 & b_4 \end{bmatrix}$
12		\bar{u}_{1i}^r \bar{u}_{2i}^r \bar{u}_{3i}^r	F_{1i}^r \bar{F}_{2i}^r \bar{F}_{3i}^r	$[\bar{k}_{ii}^r] = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & -b_3 \\ b_2 & b_4 & -b_5 \\ -b_3 & -b_5 & b_6 \end{bmatrix}$
13		\bar{u}_{1j}^r \bar{u}_{2j}^r	F_{1j}^r \bar{F}_{2j}^r	$[\bar{k}_{jj}^r] = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix}$
$b_1 = (12 - 9i_1t)i_i/l_i^2; b_2 = 4,5i_i i_j t / (l_i l_j); b_3 = (6 - 3i_1t)i_i/l_i; b_4 = 3i_j i_j t / l_j^2; b_5 = 1,5i_i i_j t / l_j; b_6 = (4 - i_1t)i_i;$ $\text{аде} \quad t = 1/(i_i + 0,75i_j); i_i = \mathbf{EI}_i/l_i; i_j = \mathbf{EI}_j/l_j.$				

Тип	Схема	\bar{u}^r	\bar{f}^r	\bar{k}^r
14		\bar{u}_{1i}^r \bar{u}_{2i}^r \bar{u}_{1j}^r \bar{u}_{2j}^r	F_{1i}^r F_{2i}^r F_{1j}^r F_{2j}^r	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{ii}^r & \bar{k}_{ij}^r \\ \bar{k}_{ji}^r & \bar{k}_{jj}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & -c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_3 & -c_2 & -c_3 \\ -c_1 & -c_2 & c_1 & c_2 \\ -c_2 & -c_3 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$
15		\bar{u}_{1i}^r \bar{u}_{2i}^r	F_{1i}^r F_{2i}^r	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{ii}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix}$
$c_1 = 3i_i i_j t / l_i^2; \quad c_2 = 3i_i i_j t / (l_i) l_j; \quad c_3 = 3i_j i_j t / l_j^2,$ <p style="text-align: center;">зде $t = 1/(i_i + i_j), i_i = EI_i / l_i; i_j = EI_j / l_j.$</p>				

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Баженов В.А., Грант С.Я., Шишов О.В. Будівельна механіка. Комп'ютерний курс. – К., 1999. – 583 с.
2. Баженов В.А., Дащенко О.Ф., Коломієць Л.В., Ухов О.В. Будівельна механіка та металеві конструкції. Одеса: Астропринт. – 427 с.
3. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
4. Оден Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
5. Стренг Г., Фікс Д. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
6. Розин Л.А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов. – Л.: Энергия, 1971. – 214 с.
7. Масленников А.М. Метод конечных элементов: Справочник по теории упругости. Гл. XIV.- Київ: Будівельник, 1971. – 239. – 260 с.
8. Варнак П.М. і ін.. Метод конечных элементов в механике сплошной среды. Киев: Киевский автомобильно-дорожный ин-т, 1976. – 114 с.
9. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1982. - 269 с.

В. Т. Бугаєв, В.В. Ковтун

**РОЗРАХУНОК КОНСТРУКЦІЙ
У МАТРИЧНІЙ ФОРМІ**

Навчальний посібник

Редактор Силакова Г.І.

Комп'ютерна верстка та розробка
оригінал-макету - Мусієчко Т.Г.

Підписано до друку 19.08.03.

Формат 60×84 1/16. Папір офсетний. Ум.друк.арк. 8,25.
Замовлення № 777. Тираж 300.

Адреса редакційної колегії та Видавництва ОНМУ:
65029, Одеса, вул. Мечникова, 34,
тел.728-31-14.