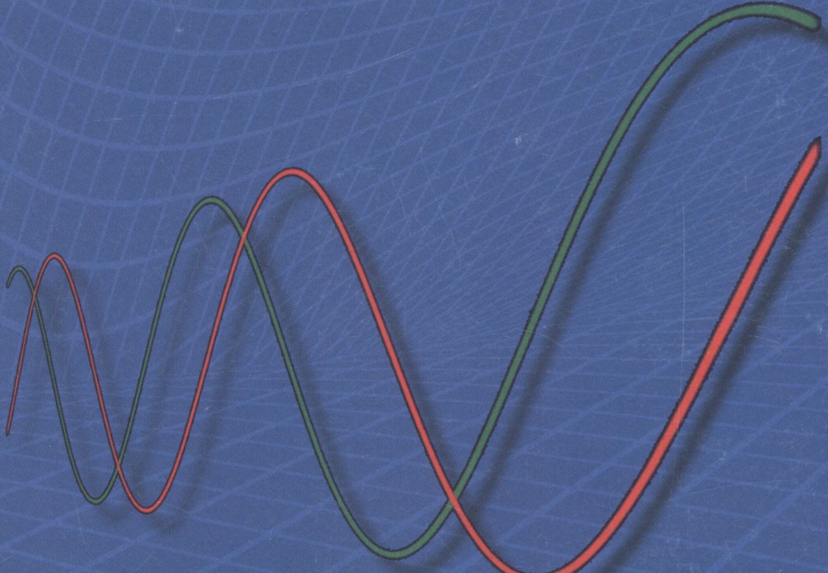
С.А. Кривошея Н.В. Майко
О.В. Моторна Т.М. Прощенко

# Елементи векторного аналізу



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

С. А. Кривошея, Н. В. Майко,
О. В. Моторна, Т. М. Прощенко

# ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ

Навчальний посібник





КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ 2018

УДК 514.742(075.8)
Е50

Рецензенти:

чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. О. А. Бойчук
(Інститут математики НАН України),
д-р фіз.-мат. наук, проф. Г. М. Торбін
(Національний педагогічний університет імені М. Драгоманова),
канд. фіз.-мат. наук, доц. Л. І. Демків
(Національний університет "Львівська політехніка")

*Рекомендовано до друку вченою радою*
*факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем*
*(протокол № 3 від 17 жовтня 2017 року)*

*Ухвалено науково-методичною радою*
*Київського національного університету імені Тараса Шевченка*
*14 жовтня 2013*

Е50 **Елементи** векторного аналізу: навч. посіб. / С. А. Кривошея, Н. В. Майко, О. В. Моторна, Т. М. Прощенко. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2018. – 263 с.

ISBN 978-966-439-962-0

Призначено допомогти студентам у самостійній роботі над вивченням теми "Елементи векторного аналізу" нормативного курсу "Математичний аналіз". Розділи посібника відповідають основним темам курсу в другому семестрі: диференціальні операції векторного аналізу; криволінійні та поверхневі інтеграли: інтегральні операції векторного аналізу; інтегральні теореми Гріна, Гаусса–Остроградського, Стокса; спеціальні типи векторних полів; набла-символіка; запис основних диференціальних операцій векторного аналізу в ортогональних криволінійних системах координат. Викладено доведення основних теорем курсу, методичні поради, численні приклади розв'язування задач. Додатки містять індивідуальні завдання для самостійної роботи студентів.

Для студентів факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем, фізичного факультету і викладачів, які керують самостійною та дистанційною роботою студентів.

**УДК 514.742(075.8)**



**ISBN 978-966-439-962-0**

# ЗМІСТ

**РОЗДІЛ 1. Диференціальні та інтегральні операції векторного аналізу** ........ 4
1.1. Скалярні та векторні поля ........ 4
1.2. Диференціальні операції векторного аналізу ........ 12
1.2.1. Похідна за напрямком і градієнт скалярного поля ........ 12
1.2.2. Дивергенція і ротор векторного поля ........ 20
1.3. Інтегральні операції векторного аналізу ........ 24
1.3.1. Криволінійні інтеграли 1-го роду ........ 24
1.3.2. Криволінійні інтеграли 2-го роду. Циркуляція векторного поля ........ 40
1.3.3. Інтегрування повних диференціалів ........ 49
1.3.4. Поверхневі інтеграли 1-го роду ........ 63
1.3.5. Поверхневі інтеграли 2-го роду. Потік векторного поля ........ 86

**РОЗДІЛ 2. Інтегральні теореми векторного аналізу** ........ 110
2.1. Теорема і формула Гріна ........ 110
2.2. Теорема і формула Гаусса–Остроградського ........ 130
2.3. Теорема і формула Стокса ........ 152
2.4. Деякі наслідки інтегральних теорем ........ 169

**РОЗДІЛ 3. Диференціальні та інтегральні операції векторного аналізу (продовження)** ........ 177
3.1. Спеціальні типи векторних полів ........ 177
3.2. Набла-символіка ........ 188
3.3. Запис основних диференціальних операцій векторного аналізу в ортогональних криволінійних системах координат ........ 196

**ЛІТЕРАТУРА** ........ 211

**ДОДАТКИ** ........ 212
Д1. Індивідуальні завдання самостійної роботи № 1 ........ 212
Д2. Індивідуальні завдання самостійної роботи № 2 ........ 239
Д3. Додаткові завдання ........ 263

# РОЗДІЛ 1

# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ ОПЕРАЦІЇ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ

- Скалярні та векторні поля [2, § 1, 2, гл. 6], [3, § 2, гл. 6], [4, § 7, гл. 2; § 10, гл. 3], [5, підрозд. 52.1, § 52], [6, п. 6.1, § 6, гл. 3], [7, § 4, гл. 18].
- Похідна за напрямком і градієнт скалярного поля [2, § 1, гл. 6], [3, § 2, гл. 6], [4, § 8, 9, гл. 2], [5, п. 52.2 § 52], [6, п. 6.2, § 6, гл. 3], [7, § 4, гл. 18].
- Дивергенція і ротор векторного поля [2, § 3, 4, гл. 6], [3, § 2, гл. 6], [4, § 13, 15, гл. 3], [5, п. 52.2, § 52], [6, п. 6.3, 6.4, § 6, гл. 3], [7, § 4, гл. 18].
- Криволінійні інтеграли 1-го роду [1, § 7, 8, гл. 15], [2, § 1, гл. 4], [3, § 1, 2, гл. 4], [5, п. 47.1, § 47], [6, п. 5.1, § 5, гл. 3], [7, § 1, гл. 15].
- Криволінійні інтеграли 2-го роду; циркуляція векторного поля [1, § 2, гл. 15], [2, § 2, гл. 4], [3, § 1, 2, гл. 4], [4, § 14, гл. 3], [5, п. 47.2, § 47], [6, п. 5.2, § 5, гл. 3], [7, § 2, гл. 15].
- Поверхневі інтеграли 1-го роду [1, § 7, 8, гл. 15], [2, § 1, гл. 5], [3, § 3, гл. 5], [5, п. 51.1, § 51], [6, п. 5.1, § 5, гл. 3], [7, § 3, гл. 17].
- Поверхневі інтеграли 2-го роду; потік векторного поля [1, § 2, гл. 15], [2, § 2, гл. 5], [3, § 3, гл. 5], [4, § 11, гл. 3], [5, п. 51.1, 51.2, § 51], [6, п. 5.2, § 5, гл. 3], [7, § 4, гл. 17].

## 1.1. Скалярні та векторні поля[1]

Якщо в кожній точці простору (або його області[2] $D \subseteq \mathbb{R}^3$) задано значення деякої фізичної величини, то кажуть, що в просторі задано *поле* цієї величини.

[1] Розглядаються праві системи декартових координат. Для ортів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координатних осей такої системи поворот вектора $\vec{i}$ на найменший кут до суміщення з вектором $\vec{j}$ з кінця вектора $\vec{k}$ має вигляд повороту, що здійснюється проти годинникової стрілки.

[2] $D$ – відкрита зв'язна множина в $\mathbb{R}^3$.

Залежно від характеру фізичної величини поле може бути *скалярним* або *векторним*[1]. Поля таких величин, як температура, тиск, густина маси чи густина електричних зарядів скалярні, а поля швидкостей, прискорень, сил – векторні. Якщо значення поля в кожній точці не залежить від часу, то поле називають *стаціонарним*, у протилежному випадку – *нестаціонарним*.

Якщо у просторі $\mathbb{R}^3$ ввести прямокутну декартову систему координат (ПДСК) $x, y, z$, то задання стаціонарних скалярного і векторного полів еквівалентне заданню скалярної

$$u = u(M) = u(x, y, z) \quad \big(M(x; y; z) \in D\big)$$

і векторної

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$
$$\big(M(x; y; z) \in D\big)$$

функцій відповідно. Далі припускаємо, що

$$u(x,y,z),\ P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z) \in C_D^1$$

і

$$u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2 \neq 0,\ P^2 + Q^2 + R^2 \neq 0 \ \ \forall (x; y; z) \in D.$$

Задання точки $M \in D$ повністю визначає значення поля в точці $M$. Тому кажуть, що $u(M)$, $\vec{F}(M)$ – *функції точки*[2].

Якщо фізична величина задана на площині (напр., поле температур, поле густини електричних зарядів тонкої пластинки), то відповідне поле називають *плоским*. Якщо в деякій декартовій системі координат $x, y, z$ поле не залежить від однієї з координат, то його називають *плоскопаралельним*, або *двовимірним*. Якщо існує така циліндрична система координат, у якій значення поля залежить тільки від змінних $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ і $z$, то поле

[1] В електродинаміці, теорії відносності та квантовій механіці важливу роль відіграють величини складнішої природи – *тензорні* величини та тензорні поля [2].

[2] Координати точки в $\mathbb{R}^3$ можна ввести по-різному, тому вирази для $u(x, y, z)$ і $\vec{F}(x, y, z)$ можуть змінюватися залежно від системи координат, але значення функцій $u$ та $\vec{F}$ у даній точці $M \in D$ не залежить від вибору системи координат.

називають *осесиметричним.* Якщо при цьому поле залежить тільки від $r$, то його називають *циліндричним.* Поле називають *сферичним*, якщо його значення в кожній точці $M \in D$ залежать тільки від відстані точки $M$ до деякої фіксованої точки $M_0 \in D$.

*Геометричними характеристиками скалярних полів* є поверхні (лінії) рівня (рис. 1–5). *Поверхнею рівня* скалярного поля $u = u(x, y, z)$ називають геометричне місце всіх точок, у яких поле має фіксоване значення $C = \text{const}$. Рівняння поверхні рівня має вигляд $u(x, y, z) = C$. Якщо поле плоске, то рівняння $u(x, y) = C$ описує деяку криву, яку називають *лінією рівня* поля $u(x, y)$.

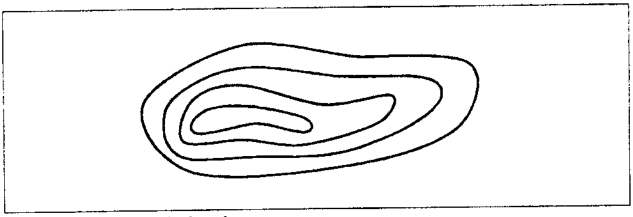


**Рис. 1.** Лінії рівня плоского скалярного поля

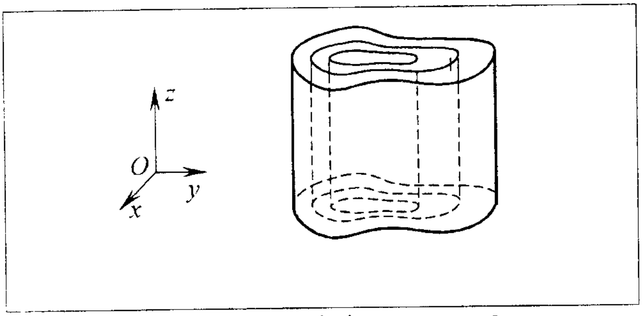



**Рис. 2.** Поверхні рівня $u(x, y) = C$
плоскопаралельного поля – сім'я циліндричних поверхонь

За допомогою ліній однакової висоти над рівнем моря (їх називають *горизонталями*) зображають рельєф місцевості на топографічних картах. Лінії рівня, які називають *ізотермами* та *ізобарами*, використовують для наочного уявлення про поведінку плоских температурних полів і полів тиску.

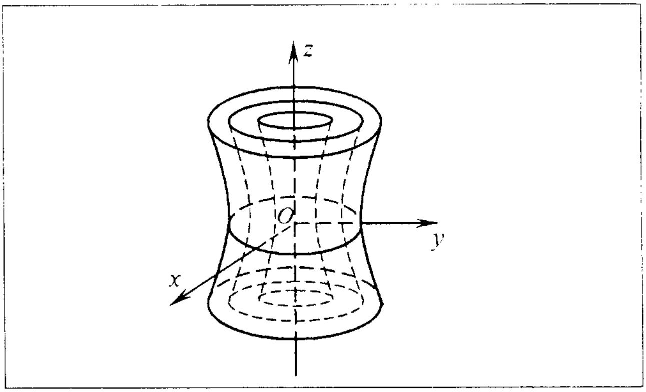



**Рис. 3.** Поверхні рівня $u(x,y,z)=\Phi(x^2+y^2,z)=C$ осесиметричного поля – сім'я поверхонь обертання

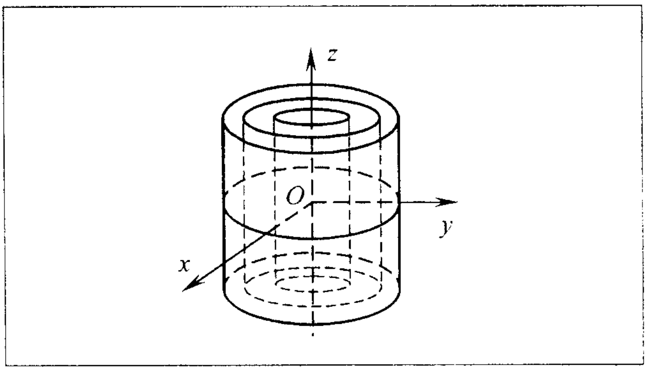



**Рис. 4.** Поверхні рівня $u(x,y,z)=\Phi(x^2+y^2)=C$ циліндричного поля – сім'я циліндрів обертання

Якщо в точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ помістити електричний заряд $e$, то в точці $M(x;y;z)$ дістанемо потенціал $u$ створюваного ним електростатичного поля

$$u=u(M)=\frac{e}{r}$$

$$\left(r=|\overline{MM_0}|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\right).$$

Поверхнями рівня такого (сферичного) поля є сім'я концентричних сфер із центром у точці $M_0$:

$$r = \frac{e}{C} \quad (C > 0)$$

$$\left( (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \frac{e^2}{C^2} \right).$$

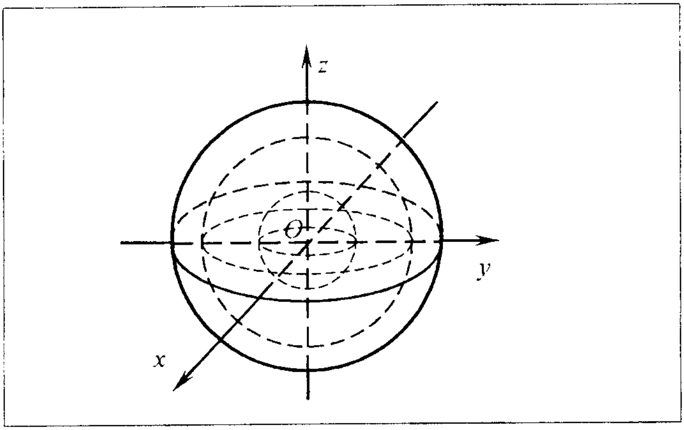



**Рис. 5.** Поверхні рівня $u(x, y, z) = \Phi(x^2 + y^2 + z^2) = C$ сферичного поля – сім'я концентричних сфер

Прикладами векторних полів є: *поле швидкостей стаціонарного потоку рідини* (точці $M \in D$ ставиться у відповідність вектор $\vec{v}(M)$ швидкості частинки рідини, яка перебуває в точці $M$); *гравітаційне поле* (якщо в області $D$ розподілена маса, то на одиничну масу, вміщену в точку $M$, діє гравітаційна сила); *електростатичне поле* (якщо в області $D$ розподілені електричні заряди, то на одиничний електричний заряд, вміщений у точку $M$, ці заряди діють з певною силою, яка характеризується вектором напруженості електростатичного поля). Наприклад, якщо в точках $M_i \in D$ зосереджені точкові маси $m_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то за законом Ньютона гравітаційне поле, створене цими масами, діє на одиничну масу, розміщену в точці $M \in D$ ($M \neq M_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$), із силою, яка (у відповідній системі одиниць) може бути записана у вигляді

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = \sum_{i=1}^{n} k \frac{m_i}{r_i^2} \vec{e}_i \quad (k = \text{const}),$$

де $r_i$ – відстань між точками $M$ і $M_i$, а $\vec{e}_i$ – орт вектора, напрямленого з точки $M$ у точку $M_i$.

Вектор напруженості $\vec{E} = \vec{E}(M)$ електростатичного поля, створюваного системою нерухомих точкових електричних зарядів $q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, обчислюється за аналогічною формулою

$$\vec{E} = \vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n} k \frac{q_i}{r_i^2} \vec{e}_i \quad (k = \text{const}).$$

*Геометричними характеристиками векторних полів* є векторні лінії (силові лінії, лінії течії, траєкторії) і векторні трубки.

*Векторною лінією* векторного поля $\vec{F}$ називають таку лінію $L \subset D$, яка в кожній своїй точці $M$ дотикається до вектора поля $\vec{F}(M)$ (рис. 6).

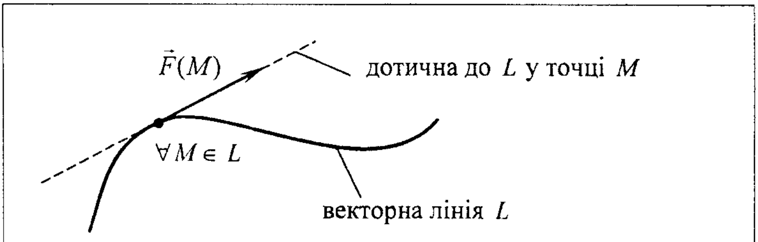



**Рис. 6.** Векторна лінія векторного поля $\vec{F}$

Якщо $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(t \in T)$ – параметричні рівняння векторної лінії $L$, то з умови колінеарності вектора $\dot{\vec{r}} = \{\dot{x}(t);\ \dot{y}(t);\ \dot{z}(t)\}$ дотичної до $L$ і вектора $\vec{F}(M) = \{P(M);\ Q(M);\ R(M)\}$ дістанемо *векторне диференціальне рівняння векторних ліній* $\dot{\vec{r}} = \lambda \vec{F}$

($\lambda$ – коефіцієнт пропорційності) або (у симетричній формі) *систему диференціальних рівнянь векторних ліній*

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}.$$

Знайдемо, наприклад, векторні лінії поля $\vec{F}(M)=\{y;-x;x\}$. Система диференціальних рівнянь векторних ліній у симетричній формі має вигляд

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{x}.$$

Із рівняння $\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}$ маємо

$$xdx+ydy=0, \quad d(x^2+y^2)=0, \quad x^2+y^2=C_1 \quad (C_1>0).$$

Із рівняння $\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{x}$ дістанемо $d(y+z)=0, \quad y+z=C_2$.

Отже, векторними лініями є еліпси, по яких площини $y+z=C_2$ перетинають циліндри $x^2+y^2=\left(\sqrt{C_1}\right)^2$ (рис. 7).

Знайдемо векторні лінії (*лінії напруженості*) векторного поля

$$\vec{E}=\vec{E}(M)=-k\frac{\vec{r}}{r^3} \quad (k=\text{const}, \ \vec{r}=\overrightarrow{OM}, \ r=|\vec{r}|)$$

напруженості електростатичного поля[1], створеного одиничним від'ємним точковим зарядом, вміщеним у початок координат. Симетрична форма системи диференціальних рівнянь векторних ліній має вигляд

$$\frac{dx}{-k\frac{x}{r^3}}=\frac{dy}{-k\frac{y}{r^3}}=\frac{dz}{-k\frac{z}{r^3}}, \text{ або } \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}.$$

Звідси маємо

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}, \quad \ln y=\ln(C_1x),$$

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x}, \quad \ln z=\ln(C_2x).$$

[1] Таке векторне поле називають *кулонівським* векторним полем.

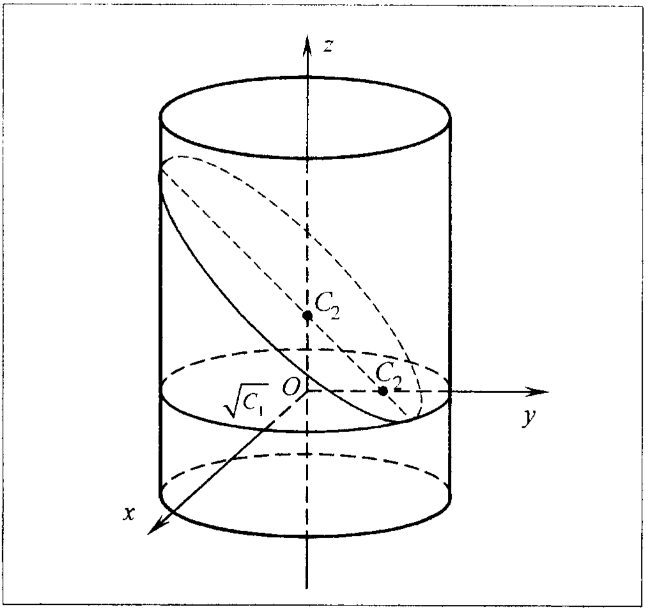



**Рис. 7.** Векторна лінія поля $\vec{F} = \{ y; -x; x \}$

Отже, векторні лінії електростатичного поля є прямими перетину площин $y = C_1 x$, $z = C_2 x$. Ці прямі проходять через початок координат (напрямок ліній напруженості збігається з напрямком поля $\vec{E}$, рис. 8).

Частину простору, яка складається з векторних ліній, називають *векторною трубкою* (кожна векторна лінія або цілком належить векторній трубці, або цілком лежить поза нею). Якщо $\Sigma$ – бічна поверхня, яка обмежує векторну трубку, то для будь-якої точки $M \in \Sigma$ нормаль $\vec{N}(M)$ до $\Sigma$ ортогональна вектору $\vec{F}(M)$ (рис. 9).

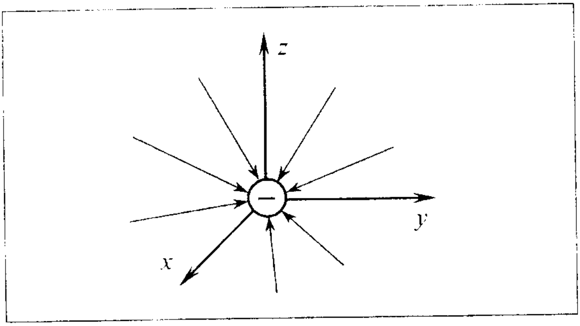



**Рис. 8.** Векторні лінії поля $\vec{F} = -k\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

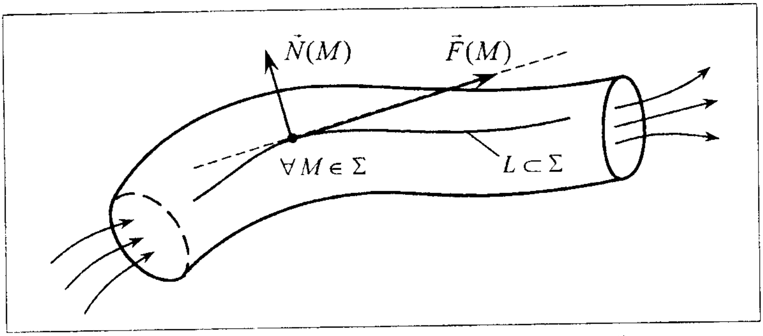



**Рис. 9.** Векторна трубка векторного поля $\vec{F}$

Математичним апаратом дослідження скалярних і векторних полів є апарат диференціального та інтегрального числення функцій векторного аргументу.

## 1.2. Диференціальні операції векторного аналізу

### *1.2.1. Похідна за напрямком і градієнт скалярного поля*

Знайдемо, з якою швидкістю змінюється скалярне поле $u$ уздовж напрямку, який характеризується вектором $\vec{l}$ з ортом $\vec{l}_0 = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ (рис. 10).

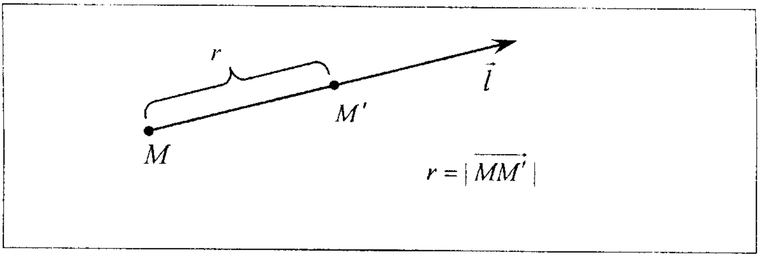



**Рис. 10.** Означення похідної за напрямком

Якщо $\Delta u(M) = u(M') - u(M)$ – приріст поля (у напрямку вектора $\vec{l}$), то величина $\dfrac{\Delta u(M)}{r}$ має зміст середньої швидкості зміни поля (на ділянці від $M$ до $M'$), а величину

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M) \overset{\text{def}}{=} \lim_{r \to +0} \frac{\Delta u(M)}{r}$$

називають *похідною скалярного поля $u$ за напрямком $\vec{l}$ у точці $M$*.

Оскільки за припущенням функція $u$ диференційовна, то похідна за напрямком завжди існує. Справді, з умови диференційовності маємо

$$\Delta u(M) = u'_x(M)\cdot \Delta x + u'_y(M)\cdot \Delta y + u'_z(M)\cdot \Delta z + o(r) \text{ при } r \to 0 .$$

Оскільки

$$\Delta x = \text{Пр}_{Ox}\overline{MM'} = r\cos\alpha , \quad \Delta y = \text{Пр}_{Oy}\overline{MM'} = r\cos\beta ,$$

$$\Delta z = \text{Пр}_{Oz}\overline{MM'} = r\cos\gamma ,$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M) = \lim_{r \to +0}\left( u'_x(M)\cdot \cos\alpha + u'_y(M)\cdot \cos\beta + u'_z(M)\cdot \cos\gamma + \frac{o(r)}{r}\right).$$

З означення випливає, що похідна за напрямком є швидкістю зміни скалярного поля $u$ за напрямком $\vec{l}$ у точці $M$ і може бути обчислена за формулою

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M) = \frac{\partial u}{\partial x}(M)\cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M)\cdot \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M)\cdot \cos\gamma} .$$

Якщо ввести до розгляду вектор

$$\operatorname{grad} u \overset{\text{def}}{=} \vec{i}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{z}\,\frac{\partial u}{\partial z} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial z}\right\} \overset{\text{def}}{=} \vec{\nabla} u$$

– *градієнт скалярного поля* $u$, то останню формулу можна переписати так:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M) = \left(\operatorname{grad} u(M), \vec{l}_0\right) = \left(\vec{\nabla} u(M), \vec{l}_0\right)$$

або, враховуючи означення скалярного добутку,

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M) = \left|\operatorname{grad} u(M)\right| \cdot \cos\varphi,$$

($\varphi$ – найменший кут між векторами $\operatorname{grad} u(M)$ і $\vec{l}_0$ (рис. 11).

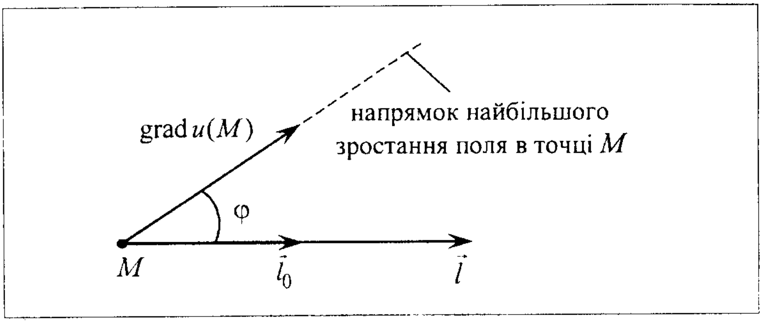



**Рис. 11.** Фізичний зміст градієнта

Оскільки $\operatorname{grad} u(M) \neq \vec{0}$, то з останньої формули випливає фізичний зміст градієнта: у кожній точці $M$ існує єдиний напрямок, уздовж якого $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ має найбільше значення – це напрямок вектора $\operatorname{grad} u(M)$:

$$\max_{\vec{l}} \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M) = \left|\operatorname{grad} u(M)\right| \cdot \cos 0 = \left|\operatorname{grad} u(M)\right|.$$

Напрямок найбільшого зростання поля і максимальна швидкість зростання поля в цьому напрямку не залежать від вибору системи координат, тому градієнт скалярного поля залежить тільки від самого поля, тобто є інваріантом відносно зміни системи координат.

Розглянемо поверхню рівня $u(x,y,z)=C$, яка проходить через точку $M$ (рис. 12). Нехай $L$ $(M\in L)$ – довільна гладка крива, яка лежить на поверхні рівня,

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=\{x(t);\, y(t);\, z(t)\} \quad (t\in T)$$

– її параметричне векторне рівняння. Тоді

$$u\big(x(t), y(t), z(t)\big)=C \quad \forall t\in T,$$

$$\frac{du}{dt}=u'_x\dot{x}+u'_y\dot{y}+u'_z\dot{z}=0, \quad \text{або } \big(\operatorname{grad} u(M), \dot{\vec{r}}\big)=0.$$

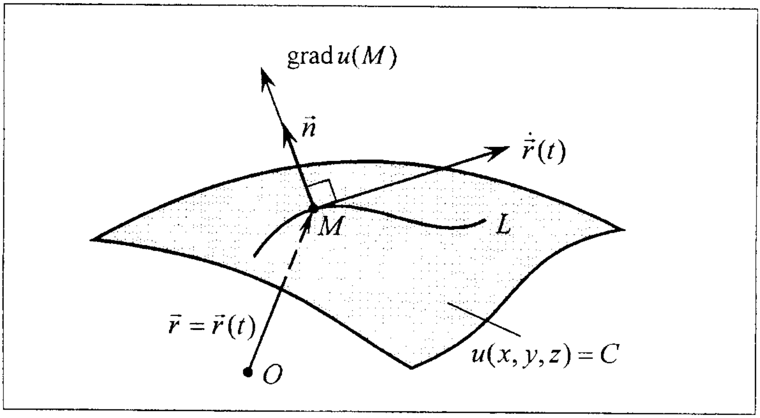



**Рис. 12.** Геометрична властивість градієнта

Остання рівність виражає геометричну властивість градієнта: градієнт скалярного поля в даній точці напрямлений по нормалі до поверхні рівня, яка проходить через цю точку. Для орта $\vec{n}$ нормалі до поверхні рівня можна дістати формулу

$$\vec{n}=\pm\frac{\operatorname{grad} u}{|\operatorname{grad} u|}.$$

Розглянемо диференціальні властивості градієнта, які випливають безпосередньо з означення:

1. $\operatorname{grad} C=\vec{0}$ $(\vec{\nabla} C=\vec{0})$, $C=\text{const}$;
2. $\operatorname{grad}(u+C)=\operatorname{grad} u$ $\big(\vec{\nabla}(u+C)=\vec{\nabla} u\big)$;

3. $\operatorname{grad}(Cu) = C \operatorname{grad} u \quad \left(\vec{\nabla}(Cu) = C\vec{\nabla} u\right)$;

4. $\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v \quad \left(\vec{\nabla}(u \pm v) = \vec{\nabla} u \pm \vec{\nabla} v\right)$;

5. $\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v \quad \left(\vec{\nabla}(uv) = v\vec{\nabla} u + u\vec{\nabla} v\right)$;

6. $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u \quad \left(\vec{\nabla} f(u) = f'(u)\vec{\nabla} u\right)$;

7. $\operatorname{grad} f(u,v) = f'_u \operatorname{grad} u + f'_v \operatorname{grad} v \quad \left(\vec{\nabla} f(u,v) = f'_u \vec{\nabla} u + f'_v \vec{\nabla} v\right)$.

Зауважимо, що позначення $\operatorname{grad} u = \vec{\nabla} u$ можна розглядати як формальний добуток символічного "вектора" (векторно-диференціального оператора)

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

на скаляр $u$. Векторно-диференціальний оператор $\vec{\nabla}$ називають *оператором Гамільтона*, або *набла-оператором*.

Розглянемо приклади.

1. Нехай скалярне поле задано формулою $u = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Знайдемо $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$, якщо $M_0(3;4;5)$, $\vec{l}$ – бісектриса координатного кута $yOz$. Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - (x+y)\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} =$$

$$= \frac{x^2+y^2+z^2-x^2-xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{y^2+z^2-xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2+z^2-xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{2}(x+y)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\,2z = -\frac{(x+y)z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\vec{l}=\{0;1;1\},\quad \vec{l}_0=\left\{0;\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)=\frac{16+25-12}{(9+16+25)^{3/2}}=\frac{29}{250\sqrt{2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)=\frac{9+25-12}{(9+16+25)^{3/2}}=\frac{22}{250\sqrt{2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)=\frac{-(3+4)\cdot 5}{(9+16+25)^{3/2}}=-\frac{35}{250\sqrt{2}}.$$

Тому $\operatorname{grad} u(M_0)=\dfrac{1}{250\sqrt{2}}\{29;22;-35\}$. Отже,

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)=\frac{1}{250\sqrt{2}}\left(29\cdot 0+22\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-35\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{13}{500}.$$

2. Знайдемо $\operatorname{grad} f(r)$, де $r=|\bar{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Згідно з диференціальною властивістю 6 градієнта, маємо

$$\operatorname{grad} f(r)=\vec{\nabla}f(r)=f'(r)\vec{\nabla}r.$$

Знайдемо $\vec{\nabla}r=\{r'_x;r'_y;r'_z\}=\left\{\dfrac{x}{r};\dfrac{y}{r};\dfrac{z}{r}\right\}=\dfrac{\vec{r}}{r}$. Тому $\operatorname{grad} f(r)=\dfrac{f'(r)}{r}\vec{r}$.

3. Знайдемо похідну скалярного поля

$$u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=z(x^2+y^2)^{-1/2}$$

за напрямком орта зовнішньої нормалі $\vec{n}$ до поверхні параболоїда $z=x^2+y^2$ у точці $M_0(1;2;5)$ (рис. 13).

Запишемо рівняння параболоїда у вигляді $x^2+y^2-z=0$. Тоді вектор нормалі $\vec{N}$ до поверхні параболоїда можна знайти так:

$$\vec{N}=\pm\operatorname{grad}(x^2+y^2-z)=\pm\{2x;2y;-1\}.$$

Оскільки кут $\gamma=\widehat{\left(Oz,\vec{N}\right)}$ тупий, то $\vec{N}=\{2x;2y;-1\}$, а для орта нормалі $\vec{n}$ маємо

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{\{2x; 2y; -1\}}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}.$$

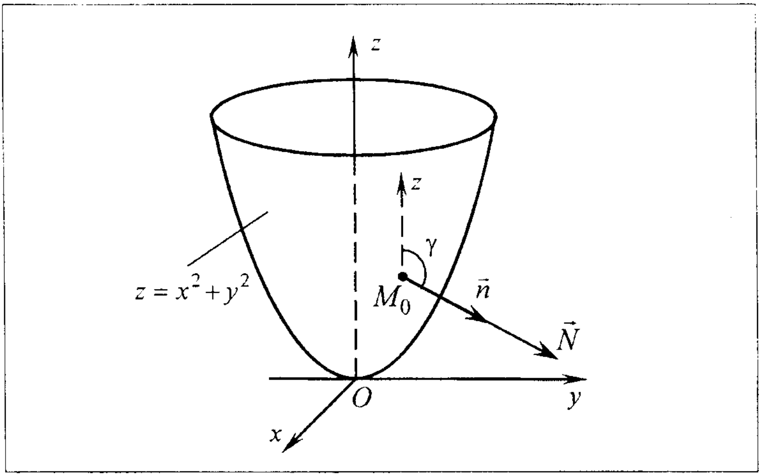



**Рис. 13.** Приклад 3

Отже, $\vec{n}(M_0) = \dfrac{\{2;4;-1\}}{\sqrt{21}}$. Знайдемо градієнт поля $u$ у точці $M_0$:

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \left\{-zx(x^2+y^2)^{-3/2}; -zy(x^2+y^2)^{-3/2}; (x^2+y^2)^{-1/2}\right\}\Big|_{M_0} =$$

$$= \left\{-5\cdot 1(1+4)^{-3/2}; -5\cdot 2(1+4)^{-3/2}; (1+4)^{-1/2}\right\} =$$

$$= \{-5^{-1/2}; -2\cdot 5^{-1/2}; 5^{-1/2}\}.$$

Тому $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}(M_0) = \dfrac{1}{\sqrt{21}}\left(-5^{-1/2}\cdot 2 + (-2\cdot 5^{-1/2})\cdot 4 + 5^{-1/2}\cdot(-1)\right) =$

$$= \frac{-11\cdot 5^{-1/2}}{\sqrt{21}} = -\frac{11}{\sqrt{105}}.$$

4. Знайдемо похідну скалярного поля

$$u = \frac{1}{r^3}, \quad r = |\vec{r}\,| = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

за напрямком зовнішньої нормалі до поверхні сфери $x^2+y^2+z^2 = a^2$ (рис. 14) у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$, яка лежить на сфері.

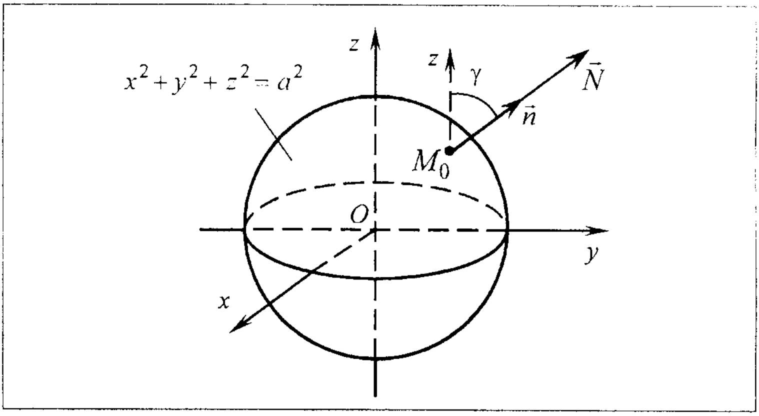



**Рис. 14.** Приклад 4

Вектор зовнішньої нормалі $\vec{N}$ до поверхні сфери знайдемо за формулою

$$\vec{N} = \pm\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2) = \pm\{2x;\,2y;\,2z\}.$$

Оскільки у першому октанті кут $\gamma = \widehat{(Oz,\vec{N})}$ гострий, то

$$\vec{N} = \{2x;\,2y;\,2z\},$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{\{2x;\,2y;\,2z\}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\{x;\,y;\,z\}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{n}(M_0) = \frac{\vec{r}_0}{a},$$

де $\vec{r}_0 = \{x_0; y_0; z_0\}$. Знайдемо градієнт скалярного поля $u$:

$$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad}(r^{-3}) = -3r^{-4}\operatorname{grad} r = -3r^{-4}\{r'_x; r'_y; r'_z\} =$$

$$= -3r^{-4}\left\{\frac{x}{r}; \frac{y}{r}; \frac{z}{r}\right\} = -\frac{3}{r^5}\{x; y; z\} = -\frac{3}{r^5}\vec{r}.$$

Тому $\operatorname{grad} u(M_0) = -\frac{3}{a^5}\vec{r}_0$. Отже,

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(M_0) = \left(-\frac{3}{a^5}\vec{r}_0, \frac{\vec{r}_0}{a}\right) = -\frac{3}{a^6}(\vec{r}_0, \vec{r}_0) = -\frac{3}{a^6}\cdot a^2 = -\frac{3}{a^4}.$$

5. Нехай $r_i = |\vec{r}_i| = |\overrightarrow{MM_i}| = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$.

Знайдемо $\vec{F}_i = \operatorname{grad}\frac{1}{r_i}$. Використовуючи диференціальну властивість 6 градієнта, дістанемо

$$\vec{F}_i = \operatorname{grad}\frac{1}{r_i} = -\frac{1}{r_i^2}\operatorname{grad} r_i =$$

$$= -\frac{1}{r_i^2}\left\{\frac{x-x_i}{r_i}; \frac{y-y_i}{r_i}; \frac{z-z_i}{r_i}\right\} = -\frac{1}{r_i^2}\frac{\vec{r}_i}{r_i} = -\frac{1}{r_i^2}\vec{e}_i,$$

($\vec{e}_i$ – орт вектора, напрямленого з точки $M$ у точку $M_i$, $M \neq M_i$). Використавши тепер диференціальні властивості 3 і 4 градієнта, для гравітаційного поля $\vec{F}$ системи $n$ точкових мас і поля вектора $\vec{E}$ напруженості електростатичного поля системи $n$ точкових зарядів (див. с. 9-10), матимемо

$$\vec{F} = \operatorname{grad} u, \quad u = -\sum_{i=1}^{n}\frac{km_i}{r_i}, \quad \vec{E} = \operatorname{grad} v, \quad v = -\sum_{i=1}^{n}\frac{kq_i}{r_i}$$

$$(M \neq M_i,\ i = 1,\ldots,n).$$

### *1.2.2. Дивергенція і ротор векторного поля*

Нехай векторне поле $\vec{F}$ задане в деякій прямокутній декартовій системі координат (ПДСК):

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\} \quad (M(x; y; z)).$$

*Дивергенцією* і *ротором* векторного поля $\vec{F}$ називають відповідно скалярну і векторну величини

$$\operatorname{div}\vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

За допомогою векторно-диференціального оператора $\vec{\nabla}$ дивергенцію і ротор можна записати у вигляді скалярного і векторного добутків, відповідно: $\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F}$, $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F}$.
Як і градієнт скалярного поля, дивергенція і ротор векторного поля є інваріантами відносно зміни системи координат, хоча формули для обчислення цих величин у різних системах координат різні (див. підрозд. 3.3). Наприклад, у випадку, коли йдеться про поле $\vec{V}$ швидкостей стаціонарного потоку рідини, скалярна величина $\operatorname{div}\vec{V}(M)$ характеризує потужність потоку в точці $M$ (с. 171), а векторна величина $\operatorname{rot}\vec{V}(M)$ – обертальну здатність поля у точці $M$ (с. 169).

### Диференціальні властивості дивергенції

1. $\operatorname{div}\vec{C} = 0$ $(\vec{\nabla}\cdot\vec{C} = 0)$, $\vec{C} = \overline{\text{const}}$ – сталий вектор;
2. $\operatorname{div}(\vec{F} + \vec{C}) = \operatorname{div}\vec{F}$ $\left(\vec{\nabla}\cdot(\vec{F} + \vec{C}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$;
3. $\operatorname{div}(c\vec{F}) = c\operatorname{div}\vec{F}$ $\left(\vec{\nabla}\cdot(c\vec{F}) = c\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$, $c = \text{const}$;
4. $\operatorname{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \operatorname{div}\vec{A} + \operatorname{div}\vec{B}$ $\left(\vec{\nabla}\cdot(\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)$;
5. $\operatorname{div}(\vec{C}u) = \vec{C}\cdot\operatorname{grad}u$ $\left(\vec{\nabla}\cdot(\vec{C}u) = \vec{C}\cdot\vec{\nabla}u\right)$;
6. $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$ $\left(\vec{\nabla}\cdot(u\vec{F}) = u\vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}u\cdot\vec{F}\right)$.

Властивості 1–6 випливають безпосередньо з означення. Доведемо, наприклад, властивості 5 і 6. Маємо

$$\operatorname{div}(\vec{C}u) = \left[\vec{C} = \{c_1; c_2; c_3\}\right] = \operatorname{div}\{uc_1; uc_2; uc_3\} =$$

$$= (uc_1)'_x + (uc_2)'_y + (uc_3)'_z = c_1u'_x + c_2u'_y + c_3u'_z = \vec{C}\cdot\operatorname{grad}u,$$

$$\operatorname{div}(u\vec{F}) = \left[\vec{F} = \{P; Q; R\}\right] = \operatorname{div}\{uP; uQ; uR\} =$$

$$= (uP)'_x + (uQ)'_y + (uR)'_z = uP'_x + u'_x P + uQ'_y + u'_y Q + uR'_z + u'_z R =$$

$$= u(P'_x + Q'_y + R'_z)u + u'_x P + u'_y Q + u'_z R = u \operatorname{div} \vec{F} + \operatorname{grad} u \cdot \vec{F} .$$

## Диференціальні властивості ротора

1. $\operatorname{rot} \vec{C} = \vec{0} \quad (\vec{\nabla} \times \vec{C} = \vec{0})$. $\vec{C} = \overline{\text{const}}$ – сталий вектор;
2. $\operatorname{rot} (\vec{F} + \vec{C}) = \operatorname{rot} \vec{F} \quad \left(\vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{C}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$;
3. $\operatorname{rot} (c\vec{F}) = c \operatorname{rot} \vec{F} \quad \left(\vec{\nabla} \times (c\vec{F}) = c\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$, $\quad c = \text{const}$;
4. $\operatorname{rot} (\vec{A} + \vec{B}) = \operatorname{rot} \vec{A} + \operatorname{rot} \vec{B} \quad \left(\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{B}\right)$;
5. $\operatorname{rot} (\vec{C} u) = \operatorname{grad} u \times \vec{C} \quad \left(\vec{\nabla} \times (\vec{C} u) = \vec{\nabla} u \times \vec{C}\right)$;
6. $\operatorname{rot} (u\vec{F}) = u \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{grad} u \times \vec{F} \quad \left(\vec{\nabla} \times (u\vec{F}) = u\vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} u \times \vec{F}\right)$.

Властивості 1–6 випливають з означення ротора. Переконаємося у правильності властивостей 5 і 6. Маємо

$$\operatorname{rot} (\vec{C} u) = \left[ \vec{C} = \{c_1; c_2; c_3\} \right] = \operatorname{rot} \{uc_1; uc_2; uc_3\} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ uc_1 & uc_2 & uc_3 \end{vmatrix} = \left(u'_y c_3 - u'_z c_2\right)\vec{i} + \left(u'_z c_1 - u'_z c_3\right)\vec{j} + \left(u'_z c_2 - u'_y c_1\right)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u'_x & u'_y & u'_z \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \operatorname{grad} u \times \vec{C} ;$$

$$\operatorname{rot} (u\vec{F}) = \left[ \vec{F} = \{P; Q; R\} \right] = \operatorname{rot} \{uP; uQ; uR\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ uP & uQ & uR \end{vmatrix} =$$

$$= \left(uR'_y + u'_y R - uQ'_z - u'_z Q\right)\vec{i} + \left(uP'_z + u'_z P - uR'_x - u'_x R\right)\vec{j} +$$

$$+\left(uR'_x + u'_x R - uP'_y - u'_y P\right)\vec{k} =$$

$$=\left(u'_y R - u'_z Q\right)\vec{i} + \left(u'_z P - u'_x R\right)\vec{j} + \left(u'_x R_y - u'_y P\right)\vec{k} +$$

$$+\left(R'_y - Q'_z\right)u\vec{i} + \left(P'_z - R'_x\right)u\vec{j} + \left(R'_x - P'_y\right)u\vec{k} =$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u'_x & u'_y & y'_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} + u\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{grad} u \times \dot{F} + u \operatorname{rot} \vec{F} .$$

## 1.3. Інтегральні операції векторного аналізу

До інтегральних операцій векторного аналізу належать *циркуляція* (*лінійний інтеграл*) векторного поля уздовж деякої кривої, а також *потік* векторного поля через вибрану сторону деякої поверхні. Ці операції виражаються через так звані *криволінійні* та *поверхневі інтеграли 1-го* і *2-го родів*.

### *1.3.1. Криволінійні інтеграли 1-го роду*

Розглянемо обмежену криву $K$, задану параметричним рівнянням $\vec{r}=\vec{r}(t)$ ($\alpha \le t \le \beta$), або, у скалярній формі, рівняннями $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$. Якщо виконуються умови:

1) $\vec{r}=\vec{r}(t)$ – бієкція (взаємно однозначна відповідність) між множиною точок кривої $K$ і відрізком $[\alpha;\beta]$;

2) $\vec{r}(t) \in C^1_{[\alpha;\beta]}$;

3) $\dot{\vec{r}}(t)=\{\dot{x}(t);\dot{y}(t);\dot{z}(t)\} \ne \vec{0} \quad \forall t \in [\alpha;\beta]$,

то криву $K$ називають *простою гладкою кривою*.

Замкнену криву, для якої виконуються умови 2) і 3), а умова 1) порушується в одній точці на кривій, називають *простою гладкою замкненою кривою*. Наприклад, для кола

$$K:\ \vec{r}=R\cos t\,\vec{i}+R\sin t\,\vec{j} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

умова 1) порушується в точці $(R;0)$, оскільки $\vec{r}(0)=\vec{r}(2\pi)$.

Зазначимо, що з геометричного погляду умови 2) і 3) означають, що в кожній точці кривої $K$ існує дотичний вектор $\dot{\vec{r}}$, який змінюється від точки до точки на кривій неперервно.

Знайдемо довжину $l=l_K$ простої гладкої кривої $K$, користуючись фізичними міркуваннями[1]. Нехай $\vec{r}=\vec{r}(t)$, де $t$ – час, – закон руху матеріальної точки по кривій, $l=l(t)$ – відстань, яку пройшла точка за проміжок часу від $\alpha$ до $t$ ($\alpha \le t \le \beta$). Тоді $l(\alpha)=0$, $l(\beta)=l=l_K$ (рис. 15). Оскільки $\vec{v}(t)=\dot{\vec{r}}(t)$ – вектор миттєвої швидкості точки, то

[1] З поняттям довжини кривої як границі інтегральних сум можна ознайомитися в [7].

$$\Delta l(t) \approx |\Delta\vec{r}(t)| \approx |d\vec{r}(t)| = |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt \quad (dt \geq 0).$$

Звідси $dl(t) = |d\vec{r}(t)| = |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt$. Інтегруючи цю рівність по[1] $t$ від $\alpha$ до $\beta$, дістанемо

$$\int_\alpha^\beta dl(t) = \int_\alpha^\beta |dr(t)| = \int_\alpha^\beta |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt.$$

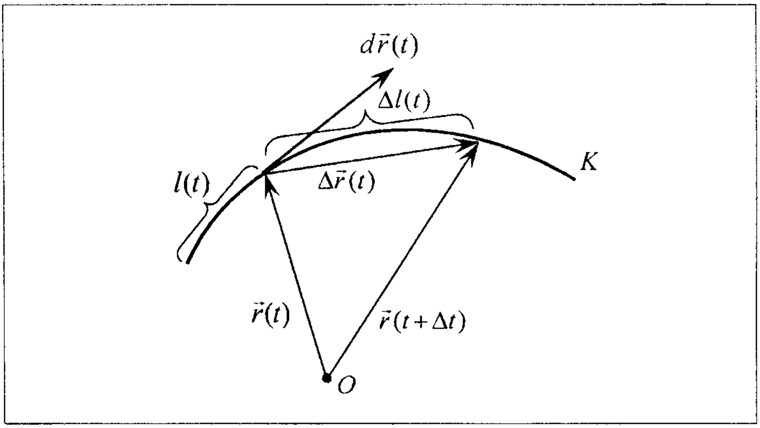



**Рис. 15.** Довжина кривої $K$

Оскільки $\int_\alpha^\beta dl(t) = l(t)\Big|_\alpha^\beta = l(\beta) - l(\alpha) = l = l_K$, то довжину простої гладкої кривої $K$ обчислюють за формулою

$$\boxed{l = l_K \overset{\text{def}}{=} \int_\alpha^\beta |dr(t)| = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt \quad (dt \geq 0)}.$$

Величину $dl = |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$ називають *диференціалом довжини дуги кривої*. Із геометричного погляду диференціал довжини дуги $dl$ дорівнює довжині "лінійного елемента" $d\vec{r}$ кривої, який лежить на дотичній прямій до кривої: $dl = |d\vec{r}|$, а

[1] Тут і далі прийменник *по* використовується за авторською редакцією.

величину $|\dot{\vec{r}}(t)| = \dfrac{dl}{dt}$ можна тлумачити як коефіцієнт деформації (розтягу, зміни) довжини при відображенні

$$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3 : [\alpha;\beta] \xrightarrow{\vec{r}(t)} K .$$

Нехай $f = f(M) = f(x,y,z)$ – функція, визначена і неперервна в кожній точці кривої $K$ ($f \in C_K$). Величину

$$\boxed{\begin{aligned}\int_K f(M)dl = \int_K f(x,y,z)dl \overset{\text{def}}{=} \int_\alpha^\beta f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt = \\ = \int_\alpha^\beta f\big(\vec{r}(t)\big)|d\vec{r}| \quad (\alpha \le \beta, dt \ge 0)\end{aligned}}$$

називають *криволінійним інтегралом*[1] *1-го роду* від функції $f$ по кривій $K$ .

Зазначимо, що з означення криволінійного інтеграла 1-го роду випливає, що

$$\boxed{l_K = \int_K dl}\,.$$

Умови 1) – 3) означення простої гладкої кривої забезпечують існування криволінійного інтеграла 1-го роду, оскільки його обчислення зводиться до обчислення інтеграла Рімана від неперервної функції $f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$ по відрізку $[\alpha;\beta]$.

Зазначимо, що криволінійний інтеграл 1-го роду не залежить від способу параметризації простої гладкої кривої $K$ . Справді, припустимо, що крива $K$ задана ще й таким параметричним рівнянням: $\vec{r} = \vec{r}_1(\tau)$ ($\alpha_1 \le \tau \le \beta_1$), причому $t = \varphi(\tau)$, $\alpha = \varphi(\alpha_1)$, $\beta = \varphi(\beta_1)$, $\varphi' > 0$ $\forall \tau \in [\alpha_1;\beta_1]$, $\vec{r}_1(\tau) = \vec{r}\big(\varphi(\tau)\big)$ . Тоді

[1] Якщо за параметр на кривій $K$ обрано довжину дуги $l$ ($0 \le l \le l_K$), то $\int_K f(M)dl = \int_0^{l_K} f\big(\vec{r}(l)\big)dl$ . Довжину дуги $l$ у цьому випадку називають *натуральним параметром*.

$$\int\limits_K f(M)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\vec{r}(t))|\dot{\vec{r}}(t)|\,dt =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} t=\varphi(\tau), & \dot{\vec{r}}(t) = \dfrac{d\vec{r}_1}{d\tau}\dfrac{d\tau}{dt} = \vec{r}_1'(\tau)\dfrac{1}{\varphi'(\tau)} \\ dt = \varphi'(\tau)d\tau, & \end{array}\right]$$

$$= \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\vec{r}_1(\tau))\cdot|\vec{r}_1'(\tau)|\frac{1}{\varphi'(\tau)}\cdot\varphi'(\tau)d\tau = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\vec{r}_1(\tau))\cdot|\vec{r}_1'(\tau)|\,d\tau\,.$$

Якщо крива $L$ є об'єднанням скінченної кількості простих гладких кривих $K_i$: $L = \bigcup\limits_{i=1}^{m} K_i$ (таку криву називають *кусково-гладкою*), а функція $f = f(M)$ визначена і неперервна в кожній точці кривої $L$, то

$$\int\limits_L f(M)dl \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{K_i} f(M)dl\,.$$

У випадку, коли $L$ – замкнена крива, криволінійний інтеграл позначають так: $\oint\limits_L f(M)dl$.

Зауважимо, що криволінійні інтеграли 1-го роду не залежать від орієнтації кривої, по якій ведеться інтегрування (у формулі обчислення таких інтегралів міститься жорстка умова $\alpha \le \beta$), на відміну від інтеграла Рімана, який змінює знак на протилежний при зміні орієнтації відрізка інтегрування $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$. Усі інші властивості криволінійних інтегралів 1-го роду повністю аналогічні властивостям інтеграла Рімана.

### Фізичний зміст криволінійного інтеграла 1-го роду

Якщо функція $f(M)$ є густиною маси (густиною електричних зарядів) матеріальної кривої $L$, то підінтегральний вираз $f(M)dl$ є масою (електричним зарядом) елементарної частинки дуги кривої довжини $dl$, а сам криволінійний інтеграл за означенням приймають таким, що дорівнює масі (сумарному електричному заряду) матеріальної кривої

$$m(L) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_L f(M)dl \quad \left( \overset{\text{def}}{=} Q(L) \right).$$

Розглянемо різні випадки параметричного задання плоскої кривої $L$ і відповідні формули обчислення криволінійного інтеграла 1-го роду.

1. $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ $\qquad dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt,$
$(\alpha \le t \le \beta)$,

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt\,.$$

2. $L: \begin{cases} x = x, \\ y = y(x) \end{cases}$ (крива $L$ є графіком функції $y = y(x)$ ) (рис. 16):
$(a \le x \le b)$

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\,dx\,, \quad \int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f\big(x, y(x)\big)\sqrt{1 + y'^2}\,dx\,.$$

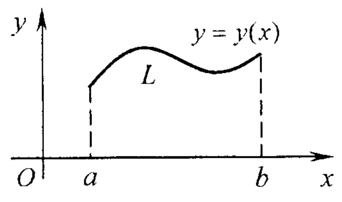



**Рис. 16.** Крива $L$ – графік функції $y = y(x)$

3. а) $L: r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ (крива $L$ задана полярним рівнянням) (рис. 17).

У цьому випадку $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$ ($\varphi$ – параметр):

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,,$$

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,d\varphi = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,d\varphi\,,$$

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi\big)\sqrt{r^2+\dot{r}^2}\,d\varphi\ ;$$

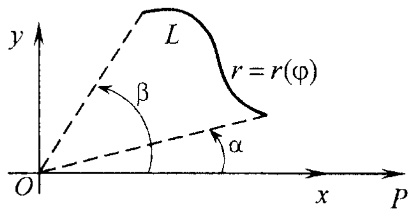



**Рис. 17.** Крива $L$ задана полярним рівнянням $r=r(\varphi)$

б) $L: \begin{matrix}\varphi=\varphi(r),\\ r_1\le r\le r_2\end{matrix}$ $(\varphi, r$ – полярні координати). У цьому випадку $x=r\cos\varphi(r)$, $y=r\sin\varphi(r)$ ($r$ – параметр):

$$\dot{x}=\cos\varphi-r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi},\ \ \dot{y}=\sin\varphi+r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi},$$

$$dl=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dr=\sqrt{1+r^2\dot{\varphi}^2}\,dr\ ,$$

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{r_1}^{r_2} f\big(r\cos\varphi(r), r\sin\varphi(r)\big)\sqrt{1+r^2\dot{\varphi}^2}\,dr\ .$$

Із рис. 18 випливає **геометричний зміст** криволінійного інтеграла $\int\limits_L f(x,y)dl=\int\limits_L f(M)dl$ :

$$\int\limits_L f(M)dl \overset{\text{def}}{=} S(\Sigma)=\sigma \quad \big(f(M)\ge 0\ \forall M\in L\big),$$

де $\sigma=S(\Sigma)$ – площа криволінійної (лінійчастої) поверхні $\Sigma$, утвореної із перпендикулярів довжини $f(M)$ до площини $xOy$, проведених через кожну точку $M$ кривої $L$.

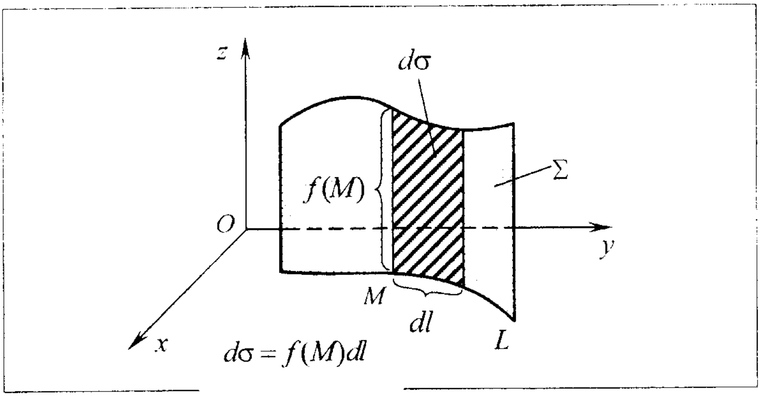



**Рис. 18.** Геометричний зміст криволінійного інтеграла 1-го роду

## Деякі фізичні застосування криволінійного інтеграла 1-го роду

Нехай $\rho(M)=\rho(x,y,z)$ – густина маси матеріальної кривої $L$. Тоді[1]

$$\boxed{m(L)=\int\limits_L \rho(M)dl} \quad \text{– *маса кривої* } L,$$

$$\boxed{M_{yz}=\int\limits_L x\rho(M)dl, \quad M_{xz}=\int\limits_L y\rho(M)dl, \quad M_{xy}=\int\limits_L z\rho(M)dl}$$

– *статичні моменти кривої* $L$ відносно координатних площин $yOz$, $xOz$, $xOy$ відповідно:

$$\boxed{\begin{gathered} I_x=\int\limits_L (y^2+z^2)\rho(M)dl, \quad I_y=\int\limits_L (x^2+z^2)\rho(M)dl, \\ I_z=\int\limits_L (x^2+y^2)\rho(M)dl \end{gathered}}$$

– *моменти інерції кривої* $L$ відносно координатних осей $Ox$, $Oy$, $Oz$ відповідно:

$$\boxed{I_O=\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)\rho(M)dl}$$

– *момент інерції кривої* $L$ відносно початку координат.

---

[1] Аналогічні формули правильні й у випадку плоскої кривої.

## Приклади

1. Знайдемо довжину $l$ кола $L$ радіуса $R$. Якщо помістити початок декартової прямокутної системи координат у центр кола (рис. 19), то дістанемо канонічне рівняння кола $x^2+y^2=R^2$. Позначивши буквою $t$ кут між додатним напрямком осі $Ox$ і радіусом-вектором $\vec{r}=\overline{OM}$, одержимо $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$ – параметричні рівняння кола. Маємо

$$l=\int_L dl, \qquad dl=\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}\,dt=Rdt,$$

$$l=\int_0^{2\pi} Rdt=R\int_0^{2\pi} dt=2\pi R.$$

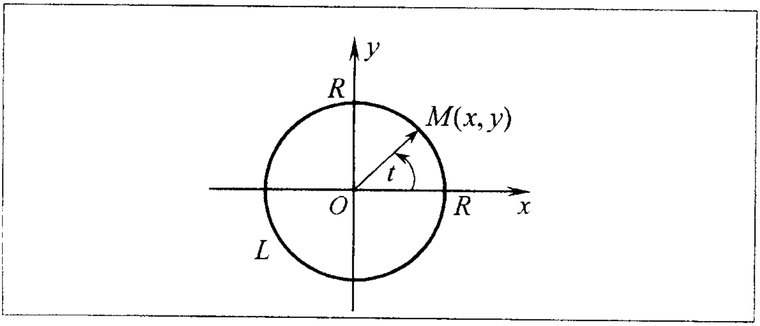



**Рис. 19.** Приклад 1

Зауважимо, що з канонічного рівняння кола можна дістати параметричні рівняння верхнього півкола у вигляді

$$x=x,\ y=\sqrt{R^2-x^2} \quad (-R\le x\le R).$$

Тоді $dl=\sqrt{1+\left(\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)}dx=\dfrac{Rdx}{\sqrt{R^2-x^2}}$ і

$$l=2\int_{-R}^{R}\frac{Rdx}{\sqrt{R^2-x^2}}=4R\int_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=4R\arcsin\frac{x}{R}\bigg|_0^R=4R\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi R.$$

2. Знайдемо довжину $l$ частини *спіралі Архімеда* (рис. 20)

$$L\colon r=a\varphi \quad (a=\mathrm{cosnt}>0,\ 0\le\varphi\le 2\pi).$$

Маємо

$$dl = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\, d\varphi = \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi = a\sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi\,,$$

$$l = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi = a\left(\frac{1}{2}\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1})\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}a\left(2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1})\right).$$

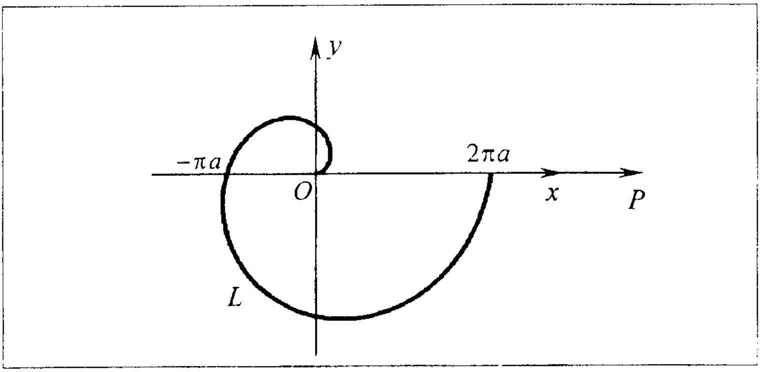



**Рис. 20.** Приклад 2

3. Знайдемо довжину $l$ *кардіоїди* (рис. 21)

$$L\colon r = 2(1 + \cos\varphi) \quad (0 \le \varphi \le 2\pi)\,.$$

Маємо

$$dl = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\, d\varphi = \sqrt{4(1 + \cos\varphi)^2 + 4\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \sqrt{8(1 + \cos\varphi)}\, d\varphi = 4\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 4\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi\,.$$

Ураховуючи симетрію кардіоїди відносно осі $Ox$, дістанемо

$$l = \int_L dl = \int_0^{2\pi} 4\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 2\int_0^{\pi} 4\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 16\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi} = 16\,.$$

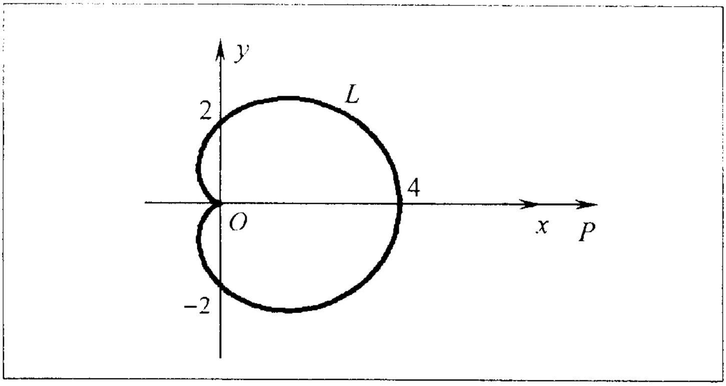



**Рис. 21.** Приклад 3

4. Знайдемо довжину $l$ *лемніскати Бернуллі* (рис. 22)

$$L: r = 6\sqrt{\cos 2\varphi} \quad \left(\varphi \in [-\pi/4; \pi/4] \cup [3\pi/4; 5\pi/4]\right).$$

Маємо

$$dl = \sqrt{36\cos 2\varphi + \left(6\frac{-\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2}\, d\varphi = \frac{6d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Ураховуючи симетрію кривої, дістанемо

$$l = \int_L dl = 4\int_0^{\pi/4} \frac{6d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = \left[\begin{array}{c} \cos^2 2\varphi = t, \quad \varphi = \frac{1}{2}\arccos\sqrt{t} \\ d\varphi = -\frac{1}{4}\frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}} \end{array}\right] =$$

$$= 24\cdot\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[4]{t}\sqrt{t}\sqrt{1-t}} d\varphi = 6\int_0^1 t^{-3/4}\cdot(1-t)^{-1/2}\, dt = 6\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

де $\mathrm{B}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ – бета-функція Ейлера (ейлерів інтеграл 1-го роду).

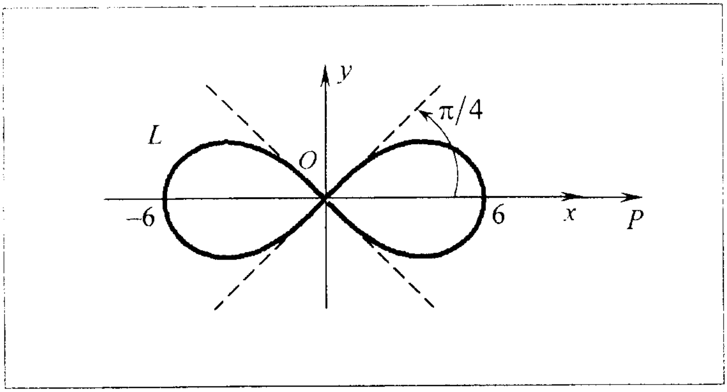



**Рис. 22.** Приклад 4

5. Знайдемо довжину $l$ еліпса

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t \quad \left(b > a > 0,\ 0 \le t \le 2\pi\right).$$

Маємо

$$dl = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2(1-\sin^2 t)}\,dt =$$

$$= \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2)\sin^2 t}\,dt = b\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt,$$

( $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ – ексцентриситет еліпса). Отже,

$$l = b\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt = bE(\varepsilon, 2\pi),$$

де $E(\varepsilon, 2\pi)$ – еліптичний інтеграл[1] 2-го роду.

6. Знайдемо довжину $l$ просторової кривої (рис. 23), заданої параметричними рівняннями

$$x = e^{-t}\cos t,\ y = e^{-t}\sin t,\ z = e^{-t} \quad (0 \le t < +\infty).$$

Маємо

$$\dot{x} = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t,\ \ \dot{y} = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t,\ \ \dot{z} = -e^{-t},$$

$$dl = \sqrt{e^{-2t} + e^{-2t} + e^{-2t}}\,dt = e^{-t}\sqrt{3}\,dt,$$

[1] Зі спеціальними (неелементарними) функціями інтегрального типу, до яких належать інтеграли Ейлера й еліптичні інтеграли, можна ознайомитися в [11].

$$l = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sqrt{3}\,dt = -\sqrt{3}e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = -\sqrt{3}(0-1) = \sqrt{3}\,.$$

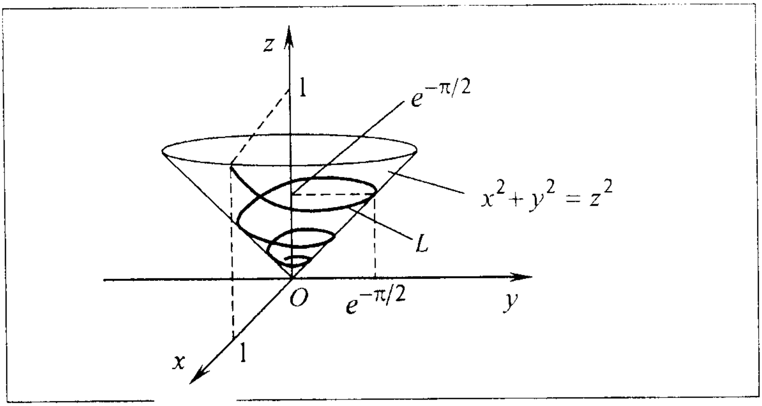



**Рис. 23.** Приклад 6

7. Знайдемо масу кривої $K$: $x^2+y^2=-Rx$, якщо густина маси в точці $M(x;y)\in K$ пропорційна відстані точки $M$ до початку координат: $\rho(M)=k_0\sqrt{x^2+y^2}$ ($k_0>0$ – коефіцієнт пропорційності).

Масу кривої обчислимо за формулою

$$m(K)=\int_K \rho(M)dl\,.$$

Оскільки рівняння кривої можна записати у вигляді

$$x^2+\left(y+\frac{R}{2}\right)^2=\frac{R^2}{4},$$

то дана крива є колом радіуса $R/2$ із центром у точці $(0;-R/2)$. Параметризуємо це коло за допомогою полярних змінних $r$ і $\varphi$. Підставивши $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ у рівняння $x^2+y^2=-Rx$, дістанемо $r^2=-Rr\sin\varphi$, звідки

$$r=r(\varphi)=-R\sin\varphi \quad (\pi\le\varphi\le 2\pi),$$

$x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$ ($\pi \le \varphi \le 2\pi$, $\varphi$ – параметр) (рис. 24). Маємо

$$m(K) = \int_{\pi}^{2\pi} k_0 \sqrt{r^2(\varphi)\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)}\, R d\varphi =$$

$$= -k_0 R^2 \int_{\pi}^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = k_0 R^2 \cos\varphi \Big|_{\pi}^{2\pi} = 2k_0 R^2 .$$

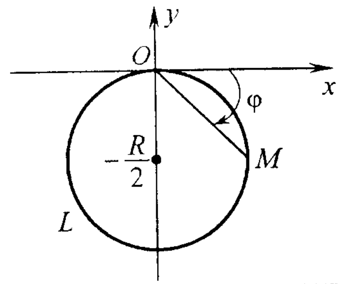



**Рис. 24.** Приклад 7

8. Знайдемо масу кривої

$$L: x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x + y + z = 0 \quad (a > 0),$$

якщо густина маси в точці $M(x,y,z) \in L$ пропорційна квадрату абсциси точки $M$ : $\rho(x,y,z) = \rho(M) = k_0 x^2$ ($k_0 = \text{const} > 0$).

Використаємо формулу $m(L) = \int_L \rho(M) dl$ . Очевидно, $L$ – коло великого круга, отримане внаслідок перетину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ і площини $x + y + z = 0$, яка проходить через початок координат (вектор нормалі $\vec{N} = \{1;1;1\}$ до цієї площини утворює однакові кути з осями координат). Отримаємо параметричні рівняння цього кола, обравши за параметр змінну $x$ :

$$x = x, \quad z = -x - y, \quad x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = a^2 ,$$

$$x^2 + y^2 + xy - \frac{1}{2}a^2 = 0 .$$

Розв'язуючи це рівняння відносно $y$, дістанемо

$$y=\frac{1}{2}\left(-x\pm\sqrt{2a^2-3x^2}\right)\quad\left(|x|\le a\sqrt{2/3}\right).$$

Тому $L=L_1\bigcup L_2$, де $L_1$ і $L_2$ задані параметричними рівняннями:

$$L_1:\begin{cases} x=x \quad \left(|x|\le a\sqrt{2/3}\right),\\ y=\frac{1}{2}\left(-x-\sqrt{2a^2-3x^2}\right),\\ z=\frac{1}{2}\left(-x+\sqrt{2a^2-3x^2}\right),\end{cases}\qquad L_2:\begin{cases} x=x \quad \left(|x|\le a\sqrt{2/3}\right),\\ y=\frac{1}{2}\left(-x+\sqrt{2a^2-3x^2}\right),\\ z=\frac{1}{2}\left(-x-\sqrt{2a^2-3x^2}\right).\end{cases}$$

В обох випадках маємо

$$x'=1,\ \ y'=\frac{1}{2}\left(-1\mp\frac{-6x}{2\sqrt{2a^2-3x^2}}\right),\ \ y'=\frac{1}{2}\left(-1\pm\frac{-6x}{2\sqrt{2a^2-3x^2}}\right),$$

$$x'^2+y'^2+z'^2=\frac{3a^2}{2a^2-3x^2},\quad dl=\frac{a\sqrt{3}\,dx}{\sqrt{2a^2-3x^2}}.$$

Отже,

$$m(L)=\int_{L_1}k_0x^2dl+\int_{L_2}k_0x^2dl=$$

$$=\int_{-a\sqrt{2/3}}^{a\sqrt{2/3}}\frac{k_0x^2a\sqrt{3}\,dx}{\sqrt{2a^2-3x^2}}+\int_{-a\sqrt{2/3}}^{a\sqrt{2/3}}\frac{k_0x^2a\sqrt{3}\,dx}{\sqrt{2a^2-3x^2}}=$$

$$=4k_0a\sqrt{3}\int_0^{a\sqrt{2/3}}\frac{x^2dx}{\sqrt{2a^2-3x^2}}=\left[\begin{array}{c} 3x^2=2a^2\sin^2t,\quad x=a\sqrt{\frac{2}{3}}\sin t\\ dx=a\sqrt{\frac{2}{3}}\cos t,\quad t_н=0, t_в=\frac{\pi}{2}\\ 2a^2-3x^2=2a^2(1-\sin^2t)=\\ =2a^2\cos^2t\end{array}\right]=$$

$$=4k_0a\sqrt{3}\int_0^{\pi/2}\frac{\frac{2}{3}a^2\sin^2t\cdot a\sqrt{\frac{2}{3}}\cos t\,dt}{a\sqrt{2}\cos t}=\frac{8}{3}a^3k_0\int_0^{\pi/2}\sin^2t\,dt=$$

$$=\frac{8}{3}a^3k_0\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)\,dt=\frac{8}{3}a^3k_0\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}\pi a^3k_0.$$

9. Знайдемо координати центра мас $(x_0; y_0)$ астроїди $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(a>0, x\geq 0, y\geq 0)$ (рис. 25), якщо густина маси кривої $\rho(x,y) = x + y$.

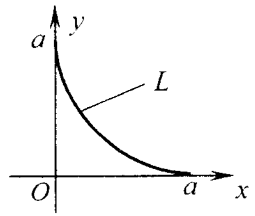



**Рис. 25.** Приклад 9

Щоб отримати параметричні рівняння кривої, покладемо

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t.$$

Оскільки $x\geq 0, y\geq 0$, то $0\leq t\leq \pi/2$. Маємо

$$\dot{x} = 3a\cos^2 t\cdot(-\sin t), \quad \dot{y} = 3a\sin^2 t\cos t,$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 9a^2\sin^2 t\cdot\cos^2 t\cdot(\sin^2 t + \cos^2 t) = 9a^2\sin^2 t\cdot\cos^2 t,$$

$$dl = 3a|\sin t\cdot\cos t|\,dt = 3a\sin t\cos t\,dt,$$

$$M = \int_L \rho(x,y)dl = \int_0^{\pi/2} \left(a\cos^3 t + a\sin^3 t\right)3a\sin t\cos t\,dt =$$

$$= -3a^2\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\cdot d\cos t + 3a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cdot d\sin t =$$

$$= -3a^2\frac{1}{5}\cos^5 t\Big|_0^{\pi/2} + 3a^2\frac{1}{5}\sin^5 t\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{3}{5}a^2(0-1) + \frac{3}{5}a^2(1-0) = \frac{6}{5}a^2,$$

$$M_y = \int_L x\rho(x,y)dl = \int_0^{\pi/2} a\cos^3 t\left(a\cos^3 t + a\sin^3 t\right)3a\sin t\cos t\,dt =$$

$$= -3a^3\int_0^{\pi/2}\cos^7 t\cdot d\cos t + 3a^3\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\cdot\sin^4 t\,dt =$$

$$= -\frac{3a^3}{8}\cos^8 t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{3a^3}{16}\int_0^{\pi/2} \sin^4 2t\,dt =$$

$$= -\frac{3a^3}{8}(0-1) + \frac{3a^3}{64}\int_0^{\pi/2}\left(1 - 2\cos 4t + \frac{1+\cos 8t}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{3a^3}{8} + \frac{3a^3}{64}\int_0^{\pi/2}\frac{3}{2}\,dt = \frac{3a^3}{8} + \frac{9a^3\pi}{256} = \frac{3a^3(32+3\pi)}{256},$$

$$M_x = \int_L y\rho(x,y)\,dl = \int_0^{\pi/2} a\sin^3 t\left(a\cos^3 t + a\sin^3 t\right)3a\sin t\cos t\,dt =$$

$$= 3a^3\int_0^{\pi/2}\sin^7 t\cdot d\sin t + 3a^3\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\cdot\sin^4 t\,dt = \frac{3a^3(32+3\pi)}{256}.$$

Отже, $x_0 = y_0 = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{5(32+3\pi)}{512}a$.

10. Знайдемо площу $\sigma$ частини параболічного циліндра $y = x^2$ $(0 \le x \le \sqrt{2}, z \ge 0)$, вирізану з нього площиною $z = x$ (рис. 26).

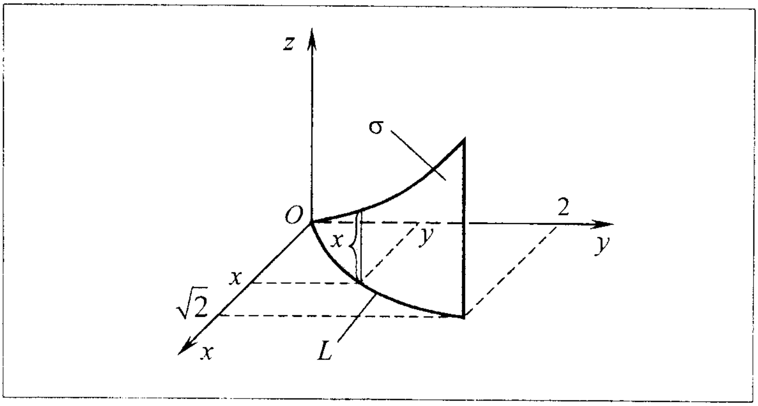



**Рис. 26.** Приклад 10

Маємо

$$\sigma = \int_L x\,dl\,, \quad dl = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{1+4x^2}\,dx\,,$$

$$\sigma = \int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4x^2}\,d(1+4x^2) =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4x^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{12}(27-1) = \frac{13}{6}\,.$$

### *1.3.2. Криволінійні інтеграли 2-го роду. Циркуляція векторного поля*

Припустимо, що на простій гладкій (плоскій) кривій $K$ заданий напрямок (напр., від точки $A$ до точки $B$: $K = AB$) за допомогою орта $\vec{\tau}$ дотичної до кривої (рис. 27).

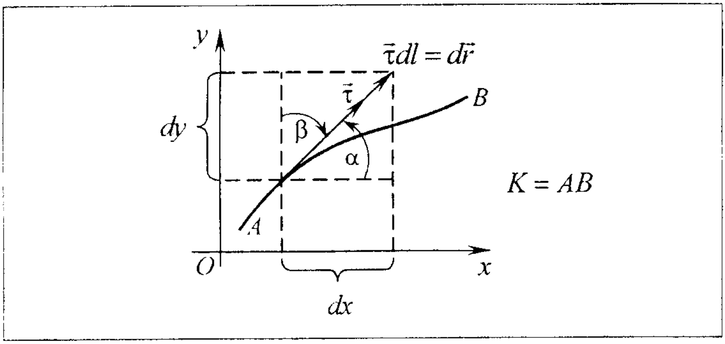



**Рис. 27.** Орієнтована крива

Параметричні рівняння кривої мають вигляд

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \left(x = x(t),\, y = y(t),\; t_A \leftrightarrow A,\; t_B \leftrightarrow B\right).$$

Криву $K$ у цьому випадку називають *орієнтованою*, а орт

$$\vec{\tau} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{\dot{\vec{r}}dt}{|\dot{\vec{r}}|dt} = \frac{d\vec{r}}{dl} = \{\cos\alpha;\, \cos\beta\}$$

– *ортом орієнтації* кривої. Припустимо, що в кожній точці $M(x,y)$ кривої $K$ задана неперервна векторна функція

$$\vec{F}=\vec{F}(M)=\vec{F}(x,y)=\{P(x,y);Q(x,y)\}.$$

Скалярну величину

$$\boxed{\begin{aligned} I &\overset{\text{def}}{=} \int_K (\vec{F},\vec{\tau})dl=\int_K (\vec{F},d\vec{r})=\int_K P(x,y)dx+Q(x,y)dy= \\ &= \int_{K=AB} (P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta)dl \end{aligned}}$$

називають *криволінійним інтегралом 2-го роду* від векторної функції $\vec{F}$ по орієнтованій кривій $K=AB$ (від точки $A$ до точки $B$).

Зауважимо, що інтеграл 2-го роду існує, оскільки він виражається через інтеграл 1-го роду від неперервної функції $P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta$ по простій гладкій кривій $K$. Проте, на відміну від інтеграла 1-го роду, інтеграл 2-го роду змінює свій знак на протилежний при зміні орієнтації кривої:

$$\int_{K=AB} Pdx+Qdy=-\int_{K=BA} Pdx+Qdy,$$

оскільки зміна орієнтації кривої веде до зміни орта орієнтації $\vec{\tau}$ на орт $-\vec{\tau}$.

Отримаємо формулу обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду. Як відомо, вектор $\dot{\vec{r}}$ дотичної до кривої $K$ завжди напрямлений у бік зростання параметра $t$. Тому у випадку $t_A<t_B$ орт орієнтації $\vec{\tau}=\frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}$ і

$$I=\int_{K=AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_K(\vec{F},\vec{\tau})dl=\int_K\left(\vec{F},\frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}\right)dl=$$

$$=\int_{t_A}^{t_B}\left(\vec{F}(\vec{r}(t)),\dot{\vec{r}}\right)\frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|}dt=\int_{t_A}^{t_B}\left(P(x(t),y(t))\dot{x}(t)+Q(x(t),y(t))\dot{y}(t)\right)dt.$$

У випадку $t_A>t_B$ орт орієнтації $\vec{\tau}=-\frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}$, тому

$$I=\int_{K=AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int_K\left(\vec{F},\frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}\right)dl=$$

$$= -\int_{t_B}^{t_A} \left( \vec F(\vec r(t)), \dot{\vec r} \right) \frac{|\dot{\vec r}|}{|\dot{\vec r}|} dt = \int_{t_A}^{t_B} \big( P(x(t), y(t))\dot x(t) + Q(x(t), y(t))\dot y(t) \big) dt.$$

Отже, формула обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду має вигляд

$$\boxed{\begin{aligned} \int\limits_{K=AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy &= \begin{bmatrix} K : \vec r = \vec r(t) \\ t_A \leftrightarrow A, \quad t_B \leftrightarrow B \end{bmatrix} = \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \big( P(\vec r(t))\dot x(t) + Q(\vec r(t))\dot y(t) \big) dt. \end{aligned}}$$

У випадку просторової орієнтованої простої гладкої кривої

$$K = AB: \ \vec r = \vec r(t) \quad \big( x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t_A \leftrightarrow A,\ t_B \leftrightarrow B \big)$$

і неперервної на $K$ векторної функції

$$\vec F = \vec F(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$$
$$\big( M = M(x;y;z) \in K \big)$$

означення і формула обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду аналогічні:

$$I \overset{\text{def}}{=} \int\limits_K (\vec F, \vec\tau) dl = \int\limits_K (\vec F, \vec\tau dl) = \int\limits_K \left( \vec F, d\vec r \right) =$$

$$= \int\limits_{K=AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{K=AB} \big( P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \big) dl$$

($\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси (координати) орта орієнтації $\vec\tau$),

$$\boxed{\begin{aligned} \int\limits_{K=AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz &= \begin{bmatrix} K : \vec r = \vec r(t) \\ t_A \leftrightarrow A,\ t_B \leftrightarrow B \end{bmatrix} = \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \big( P(\vec r(t))\dot x(t) + Q(\vec r(t))\dot y(t) + R(\vec r(t))\dot z(t) \big) dt. \end{aligned}}$$

Якщо крива $L$ – кусково-гладка: $L=\bigcup_{i=1}^{m} K_i$ ($K_i$ – прості гладкі криві), векторна функція $\vec{F}=\vec{F}(M)=\{P(M);Q(M);R(M)\}$ визначена і неперервна в кожній точці $L$, то

$$\int_{L=AB} Pdx+Qdy+Rdz \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m}\int_{K_i} Pdx+Qdy+Rdz\,,$$

причому орієнтації простих гладких кривих $K_i$ узгоджені з орієнтацією кривої $L$.

У випадку замкненої кривої $L$ криволінійний інтеграл 2-го роду позначають так:

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$$

і вказують орієнтацію (напрямок обходу) замкненої кривої (контуру) $L$.

Криволінійні інтеграли 2-го роду мають властивості, аналогічні властивостям інтеграла Рімана.

### Фізичний зміст криволінійного інтеграла 2-го роду

Якщо векторна функція $\vec{F}$ є силою, під дією якої матеріальна точка рухається по кривій $L$ від точки $A$ до точки $B$, то підінтегральний вираз $(\vec{F},\vec{\tau}dl)=dW$ є роботою, яку виконує сила $\vec{F}$ на елементарному переміщенні $\vec{\tau}dl$, а криволінійний інтеграл

$$W=\int_{L=AB} dW=\int_{L=AB}(\vec{F},\vec{\tau}dl)$$

чисельно дорівнює роботі, яку виконує сила $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки з положення $A$ в положення $B$ уздовж кривої $L$. У загальному випадку величину

$$C_L(\vec{F}) \overset{\text{def}}{=} \int_{L=AB}(\vec{F},\vec{\tau}dl)=\int_{L=AB} Pdx+Qdy+Rdz$$

називають *циркуляцією* векторного поля $\vec{F}$ уздовж кривої $L$ (від $A$ до $B$).

## Приклади

1. Знайдемо роботу сили $\vec{F} = 2y\vec{i} - 3x\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки з положення $A(-2;0)$ у положення $B(0;3)$ уздовж еліпса $L$: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ (рис. 28).

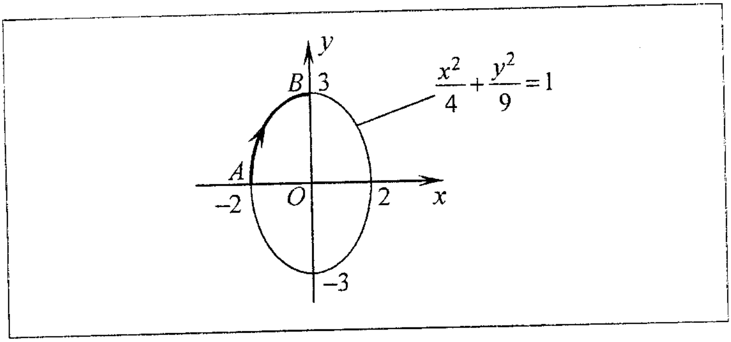



**Рис. 28.** Приклад 1

Запишемо параметричні рівняння еліпса:

$$x = 2\cos t,\ y = 3\sin t, \quad t_A = \pi,\ t_B = \pi/2.$$

Тоді

$$W = \int\limits_{AB} 2y\,dx - 3x\,dy = \int\limits_{\pi}^{\pi/2} \left(2\cdot 3\sin t\cdot(-2\sin t) - 3\cdot 2\cos t\cdot(3\cos t)\right)dt =$$

$$= \int\limits_{\pi}^{\pi/2} \left(-12\sin^2 t - 18\cos^2 t\right)dt = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \left(12 + 6\cos^2 t\right)dt =$$

$$= \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \left(12 + 3(1+\cos 2t)\right)dt = 15\int\limits_{\pi/2}^{\pi} dt = \frac{15\pi}{2}.$$

2. Обчислимо інтеграл

$$\int\limits_{L=AB} (y^2 + x)dx + (x^2 - y^2)dy$$

уздовж кривої $L$: $y = 1 - |x|$ від точки $A(-1;0)$ до точки $B(2;-1)$ (рис. 29).

Оскільки $L = AC \bigcup CB$ – кусково-гладка крива, то

$$\int\limits_L = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB} .$$

Маємо

$$\int\limits_{AC} = \left[ AC : \begin{cases} x = x, \\ y = 1 + x, \end{cases} \atop x_A = -1,\ x_C = 0 \right] = \int\limits_{-1}^{0} \left[ \left( (1+x)^2 + x \right) + \left( x^2 - (1+x)^2 \right) \right] dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} \left( 1 + 3x + x^2 + x^2 - 1 - 2x - x^2 \right) dx = \int\limits_{-1}^{0} \left( x + x^2 \right) dx =$$

$$= \left( \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 \right) \Bigg|_{-1}^{0} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} ,$$

$$\int\limits_{CB} = \left[ CB : \begin{cases} x = x, \\ y = 1 - x, \end{cases} \atop x_C = 0,\ x_B = 2 \right] = \int\limits_{0}^{2} \left[ \left( (1-x)^2 + x \right) + \left( x^2 - (1-x)^2 \right) \cdot (-1) \right] dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{2} \left( 1 - x + x^2 - x^2 + 1 - 2x + x^2 \right) dx = \int\limits_{0}^{2} \left( 2 - 3x + x^2 \right) dx =$$

$$= \left( 2x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 \right) \Bigg|_{0}^{2} = 4 - 6 + \frac{8}{3} = \frac{2}{3} .$$

Отже, $\int\limits_L = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ .

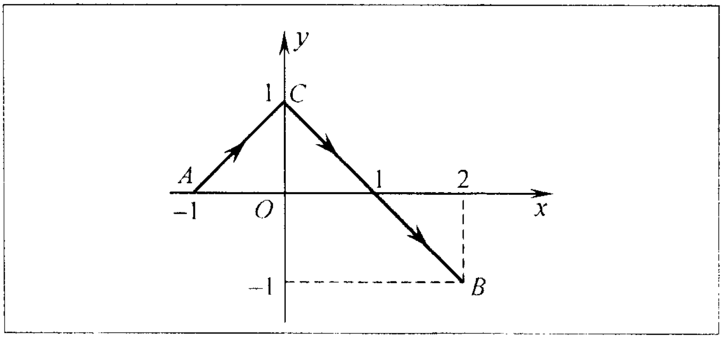



**Рис. 29.** Приклад 2

3. Обчислимо інтеграл

$$I = \oint_L y^2 dx - x dy + (x + y) dz$$

уздовж просторового контуру $L$ (рис. 30).

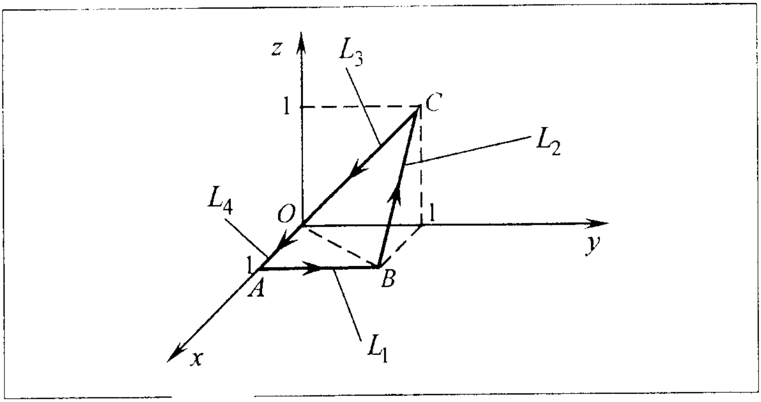



**Рис. 30.** Приклад 3

Очевидно, $\oint\limits_L = \sum\limits_{i=1}^{4} \int\limits_{L_i}$. Маємо

$$\int\limits_{L_1} = \left[ \begin{array}{c} L_1 : \begin{cases} x = 1, \\ y = y, \\ z = 0, \end{cases} \\ y_A = 0, \ y_B = 1 \end{array} \right] = \int\limits_0^1 \left( y^2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + (1 + y) \cdot 0 \right) dy = -\int\limits_0^1 dy = -1,$$

$$\int\limits_{L_2} = \left[ \begin{array}{c} L_2 : \begin{cases} x = x, \\ y = 1, \\ z = 1 - x, \end{cases} \\ x_B = 1, \ x_C = 0 \end{array} \right] = \int\limits_1^0 \left( 1^2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 + (x + 1) \cdot (-1) \right) dx =$$

$$= \int\limits_1^0 (-x) dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$\int_{L_3} = \left[ \begin{array}{c} L_3 : \begin{cases} x = 0, \\ y = y, \\ z = y, \end{cases} \\ y_C = 1,\ y_O = 0 \end{array} \right] = \int_1^0 \left( y^2 \cdot 0 - 0 \cdot 1 + (0 + y) \cdot 1 \right) dy = \int_1^0 y dy = -\frac{1}{2},$$

$$\int_{L_4} = \left[ \begin{array}{c} L_4 : \begin{cases} x = x, \\ y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \\ x_O = 0,\ x_A = 1 \end{array} \right] = \int_1^0 \left( 0^2 \cdot 1 - x \cdot 0 + (x + 0) \cdot 0 \right) dy = 0,$$

Отже, $I = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = -1$.

4. Обчислимо інтеграл

$$I = \oint_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

уздовж просторового контуру $L$ (рис. 31).

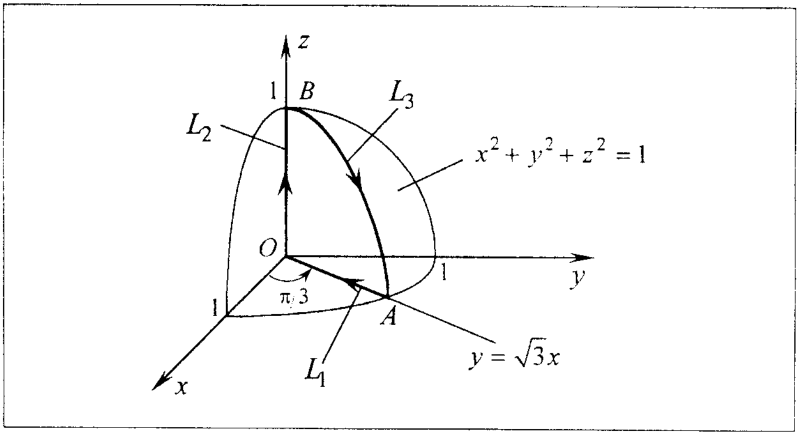



**Рис. 31.** Приклад 4

Маємо $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$,

$$\int_{L_1} = \left[ \begin{array}{c} L_1 : \begin{cases} x = x, \\ y = \sqrt{3}x, \\ z = 0, \end{cases} \\ x_A = 1/2,\ x_O = 0 \end{array} \right] =$$

$$= \int\limits_{1/2}^{0} \left( (3x^2 - 0^2) \cdot 1 + (0^2 - x^2) \cdot \sqrt{3} + (x^2 - 3x^2) \cdot 0 \right) dx =$$

$$= \int\limits_{1/2}^{0} \left( 3x^2 - \sqrt{3}x^2 \right) dx = \frac{3-\sqrt{3}}{3} x^3 \Big|_{1/2}^{0} = -\frac{3-\sqrt{3}}{24}.$$

$$\int\limits_{L_2} = \left[ \begin{array}{c} L_2 : \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = z, \end{cases} \\ z_O = 0, \ z_B = 1 \end{array} \right] = \int\limits_{0}^{1} \left( (0^2 - z^2) + (z^2 - 0^2) + (0^2 - 0^2) \right) dz = 0 .$$

Запишемо параметричні рівняння чверті кола $L_3$, використовуючи сферичну систему координат. Маємо

$$r = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_B = 0, \quad \theta_A = \frac{\pi}{2},$$

$$L_3 : x = \frac{1}{2}\sin\theta, \ y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, \ z = \cos\theta .$$

Тому

$$\int\limits_{L_3} = \int\limits_{0}^{\pi/2} \left( \left( \frac{3}{4}\sin^2\theta - \cos^2\theta \right) \cdot \frac{1}{2}\cos\theta + \right.$$

$$\left. + \left( \cos^2\theta - \frac{1}{4}\sin^2\theta \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \left( \frac{1}{4}\sin^2\theta - \frac{3}{4}\sin^2\theta \right) \cdot (-\sin\theta) \right) d\theta =$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{8} \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2\theta \cdot \cos\theta d\theta + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^3\theta d\theta + \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta =$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{8} \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2\theta \cdot d\sin\theta + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \int\limits_{0}^{\pi/2} (1 - \sin^2\theta) d\sin\theta +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\pi/2} (\cos^2\theta - 1) d\cos\theta =$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{24}\sin^3\theta\Big|_0^{\pi/2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\left(\sin\theta\Big|_0^{\pi/2}-\frac{1}{3}\sin^3\theta\Big|_0^{\pi/2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\pi/2}-\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}\right)=$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{24}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3-\sqrt{3}}{24}+\frac{\sqrt{3}-1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7\sqrt{3}+3}{24}.$$

Отже,

$$I=-\frac{3-\sqrt{3}}{24}+\frac{7\sqrt{3}+3}{24}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

### *1.3.3. Інтегрування повних диференціалів*

Якщо підінтегральний вираз $(\vec{F},d\vec{r})=Pdx+Qdy+Rdz$ є повним диференціалом деякої однозначної неперервно диференційовної в області[1] $D\subset\mathbb{R}^3$ функції $u=u(x,y,z)$:

$$Pdx+Qdy+Rdz=du(x,y,z)$$

$$(\text{або } \vec{F}=\operatorname{grad}u\ ),$$

то уздовж будь-якої кусково-гладкої кривої $K\subset D$ $(\vec{r}=\vec{r}(t),\ t_A\leftrightarrow A, t_B\leftrightarrow B)$ маємо

$$\left[P(\vec{r}(t))\cdot\dot{x}(t)+Q(\vec{r}(t))\cdot\dot{y}(t)+R(\vec{r}(t))\cdot\dot{z}(t)\right]dt=du(x(t),y(t),z(t)).$$

Тому формула обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду в цьому випадку має вигляд

$$\int\limits_{K=AB}Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{t_A}^{t_B}du(x(t),y(t),z(t))=$$

$$=u(x(t),y(t),z(t))\Big|_{t_A}^{t_B}=u(B)-u(A)$$

---

[1] Область – відкрита зв'язна множина.

і, отже, інтеграл не залежить від форми кусково-гладкої кривої, яка сполучає точки $A$ і $B$.

Аналогічне означення повного диференціала:

$$Pdx + Qdy = du \quad (\vec{F} = \operatorname{grad} u)$$

та аналогічна формула обчислення криволінійного інтеграла від повного диференціала

$$\int_{K=AB} Pdx + Qdy = u(B) - u(A)$$

виконується у випадку $\vec{F} = \vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ і плоскої кривої $K$, яка лежить у площині $xOy$. Отриману формулу називають *формулою Ньютона–Лейбніца для криволінійного інтеграла 2-го роду* (функцію $u = u(x,y,z)$ називають *первісною*, або *потенціальною функцією*[1]).

Із формули Ньютона–Лейбніца випливає, що у випадку $u(x,y,z) \in C_D^1$ і кусково-гладкої замкненої кривої $L \subset D$ маємо

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = u(B) - u(A) = 0,$$

оскільки $A = B$ і $u(A) = u(B)$.

Наведемо приклади повних диференціалів і відповідних їм потенціальних функцій.

---

[1] З означення ($du = Pdx + Qdy + Rdz$) випливає, що первісна (потенціальна функція) визначена з точністю до адитивної сталої: $d(u + C) = du$ ($C = \text{const}$).

| $du$ | $u \in C^1_D$ | $D$ |
|---|---|---|
| $xdy + ydx = d(xy)$ | $u = xy$ | $D = \mathbb{R}^2$ |
| $xdx + ydy + zdz = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2)$ | $u = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$ | $D = \mathbb{R}^3$ |
| $yzdx + xzdy + xydz = d(xyz)$ | $u = xyz$ | $D = \mathbb{R}^3$ |
| $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$ | $u = \frac{x}{y}$ | $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ або $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$ |
| $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = d\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)$ | $u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ | |
| $\frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = d\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ | $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ | $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0;0;0)\}$ |
| $\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} d \ln(x^2 + y^2)$ | $u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ | $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ |
| $\frac{xdx + ydy + zdz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -d\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$ | $u = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ | $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0;0;0)\}$ |

Нехай $P = P(x, y), Q = Q(x, y) \in C_D^1$ ($D \subset \mathbb{R}^2$), $du = Pdx + Qdy$. Тоді $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} \in C_D$, то $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, а отже,

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \forall (x, y) \in D}.$$

Отримали необхідну умову того, щоб диференціальний вираз $du = Pdx + Qdy$ був повним диференціалом функції $u = u(x, y) \in C_D^2$. Покажемо, що ця умова є також і достатньою в деякій області $D$. Нехай $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ $\forall (x, y) \in D$. Потенціальну функцію $u(x, y)$ шукатимемо з рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases}$$

З другого рівняння, наприклад, маємо

$$u = \int_{y_0}^{y} Q(x, t)dt + \psi(x),$$

де $\psi(x)$ – невідома функція (стала інтегрування, яка може залежати від $x$). Підставивши в перше рівняння, дістанемо

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t)dt + \psi'(x) = P(x, y)$$

або, враховуючи, що $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, t)$,

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial y}(x, t)dt + \psi'(x) = P(x, y),$$

$$P(x,t)\Big|_{y_0}^{y} + \psi'(x) = P(x,y),$$

$$P(x,y) - P(x,y_0) + \psi'(x) = P(x,y),$$

звідки $\psi'(x) = P(x,y_0)$, $\psi(x) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \underset{\forall}{C}$. Отже, при виконанні умови $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ $\forall (x,y) \in D$, потенціальна функція існує і може бути побудована за формулою

$$\boxed{u = u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt + \underset{\forall}{C}},$$

де $M_0(x_0;y_0)$ – фіксована, а $M(x;y)$ – змінна точка області $D_0 \subset D$[1]. Аналогічно можна дістати й таку формулу:

$$\boxed{u = u(x,y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt + \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \underset{\forall}{C}}.$$

Обидві формули для потенціальної функції $u(x,y)$ можна записати за допомогою криволінійного інтеграла 2-го роду вздовж ламаної[2] $M_0M$:

$$u = u(x,y) = \int\limits_{M_0M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \underset{\forall}{C} \quad \left(\underset{\forall}{C} = u(M_0)\right),$$

де $M_0M = M_0LM$ або $M_0M = M_0KM$, відповідно (рис. 32), $\underset{\forall}{C}$.

Дістанемо необхідну умову того, щоб диференціальний вираз $Pdx + Qdy + Rdz = (\vec{F}, d\vec{r})$ ($P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z) \in C_D^1$) був повним диференціалом деякої потенціальної функції $u = u(x,y,z) \in C_D^2$: $du = Pdx + Qdy + Rdz$.

---

[1] У процесі інтегрування область $D$ може "звузитися" (див. приклад 3 на с. 58).

[2] За умови, що ламана $M_0LM$ або $M_0KM$ належить області $D$.

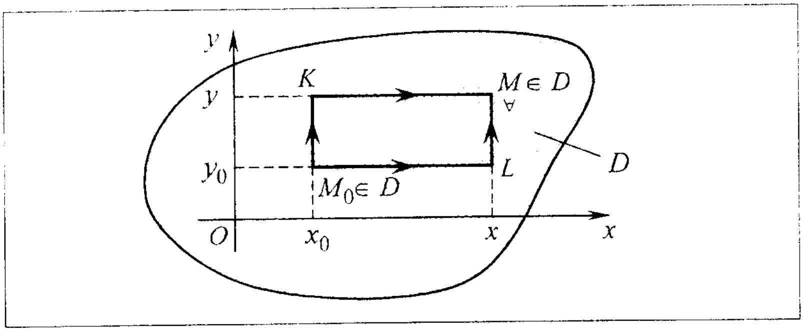



**Рис. 32.** Відшукання потенціальної функції $u=u(x,y,z)$

Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q\,,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=R\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial P}{\partial z}\,,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{\partial R}{\partial x}\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=\frac{\partial R}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial Q}{\partial z}\,.$$

Звідси

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}\,,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\,.$$

використовуючи векторну функцію $\vec{F}=\{P;Q;R\}$, отриману необхідну умову можна записати так[1] (див. с. 20, 21):

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{0}\quad \forall(x,y,z)\in D\,.$$

Умова $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{0}$ $(\forall(x,y,z)\in D)$ є також достатньою. При виконанні цієї умови потенціальну функцію можна записати, наприклад, у вигляді

---

[1] Якщо $\vec{F}=\{P(x,y);\,Q(x,y);\,0\}$, то $\operatorname{rot}\vec{F}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$ і умова $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{0}$ еквівалентна умові $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ $\forall(x,y)\in D$.

$$u=u(x,y,z)=\int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt+\int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt+\underset{\forall}{C},$$

де $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – фіксована, а $M(x,y,z)$ – змінна точка області $D$. Справді, покажемо, наприклад, що $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P$. Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y_0,z_0)+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,t,z_0)dt+\int\limits_{z_0}^{z}\frac{\partial R}{\partial x}(x,y,t)dt=$$

$$=\left[\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}\right]=$$

$$=P(x,y_0,z_0)+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\partial P}{\partial y}(x,t,z_0)dt+\int\limits_{z_0}^{z}\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,t)dt=$$

$$=P(x,y_0,z_0)+P(x,y,z_0)-P(x,y_0,z_0)+$$

$$+P(x,y,z)-P(x,y,z_0)=P(x,y,z).$$

Аналогічно можна показати, що $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=R$. Тому

$$du=Pdx+Qdy+Rdz \quad (\vec{F}=\operatorname{grad}u).$$

Отриману формулу для потенціальної функції можна записати за допомогою криволінійного інтеграла 2-го роду вздовж ламаної[1] $M_0M$:

$$u=u(x,y,z)=\int\limits_{M_0M} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz+\underset{\forall}{C},$$

де

$$M_0M=M_0L_1L_2M \text{ (рис. 33)}, \ \underset{\forall}{C}=u(M_0).$$

---

[1] За умови, що ламана $M_0M=M_0L_1L_2M$ належить області $D$.

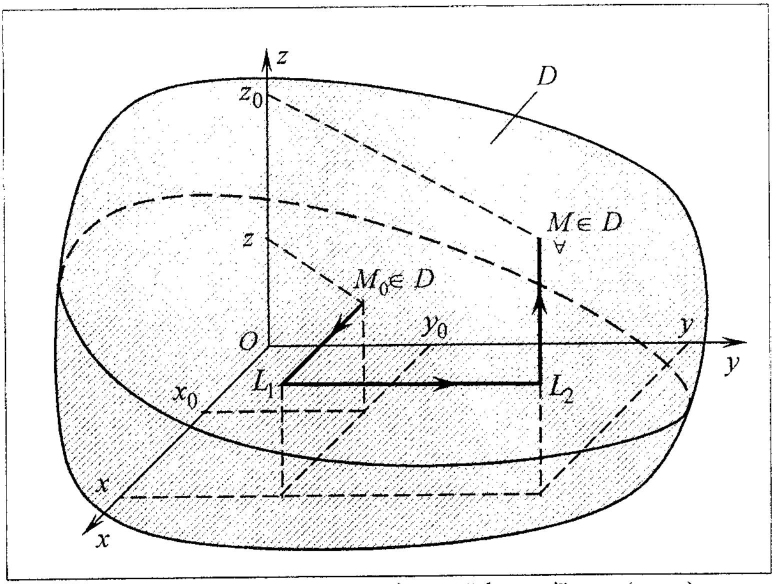


**Рис. 33.** Відшукання потенціальної функції $u=u(x,y,z)$

Розглянемо приклади.

1. Знайдемо первісну функцію $u=u(x,y,z)$, якщо

$$du=(x^4+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy+\sin y)dy\,.$$

Маємо $P=x^4+2xy-y^2$, $Q=x^2-2xy+\sin y$. Умова

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-2y=\frac{\partial P}{\partial y}\,,$$

очевидно, виконується в області $D=\mathbb{R}^2$ ($P,Q\in C^1_{\mathbb{R}}$). Візьмемо $x_0=y_0=0$. Тоді

$$u=\int\limits_0^x(t^4+2t\cdot 0-0^2)dt+\int\limits_0^y(x^2-2xt+\sin t)dt+C=$$

$$=\frac{1}{5}x^5+x^2y-xy^2-\cos y+1+C\in C^2_D\,.$$

Оскільки первісна визначена з точністю до адитивної сталої, то $u$ можна вибрати у вигляді

$$u = \frac{1}{5}x^5 + x^2 y - xy^2 - \cos y .$$

Застосовуючи формулу Ньютона–Лейбніца, дістанемо

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = [\,A(0;0),\, B(2;\pi)] = \left(\frac{1}{5}x^5 + x^2 y - xy^2 - \cos y\right)\Bigg|_A^B =$$

$$= \left(\frac{1}{5}\cdot 2^5 + 2^2\cdot\pi - 2\pi^2 - \cos\pi\right) - \left(\frac{1}{5}\cdot 0^5 + 0^2\cdot 0 - 0\cdot 0^2 - \cos 0\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot 32 + 4\pi - 2\pi^2 + 2 ,$$

$\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$ по будь-якому (кусково-гладкому) контуру $L \subset D = \mathbb{R}^2$ (рис. 34).

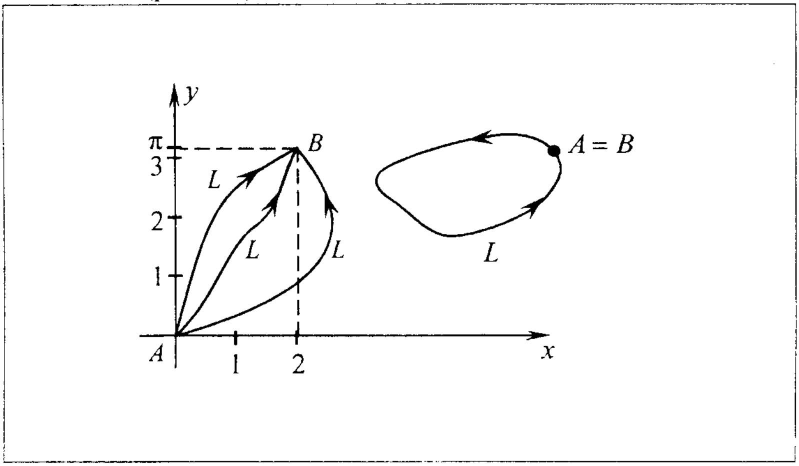



**Рис. 34.** Приклад 1

2. Знайдемо первісну функцію $u = u(x, y, z)$, якщо

$$du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}dz .$$

У цьому випадку $P = 1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}$, $Q = \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}$, $R = -\frac{xy}{z^2}$,

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y\neq 0,\ z\neq 0\}, \quad P,Q,R\in C_D^1,$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=\left(-\frac{y}{z^2}+\frac{y}{z^2}\right)\vec{i}+\left(-\frac{y}{z^2}+\frac{y}{z^2}\right)\vec{j}+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z}\right)\vec{k}=\vec{0}$$

$$\big((x,y,z)\in D\big).$$

Маємо ( $x_0=0,\ y_0=1,\ z_0=1,\ y>0,\ z>0$ ):

$$u=\int_0^x\left(1-\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)dt+\int_1^y\left(\frac{x}{1}+\frac{x}{t^2}\right)dt+\int_1^z\left(-\frac{xy}{t^2}\right)dt=$$

$$=x+\left(xt-\frac{x}{t}\right)\Bigg|_1^y+\frac{xy}{t}\Bigg|_1^z+C=x+\left(xy-\frac{x}{y}-x+x\right)+\left(\frac{xy}{z}-xy\right)+C=$$

$$=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C\in C_D^2.$$

Очевидно, $D=\bigcup\limits_{i=1}^{4}D_i$, де

$$D_1=\{(x,y,z): y>0,\ z>0\}, \quad D_2=\{(x,y,z): y>0,\ z<0\},$$

$$D_3=\{(x,y,z): y<0,\ z>0\}, \quad D_4=\{(x,y,z): y<0,\ z<0\}.$$

Якщо кусково-гладкий контур $L$ належить одній з областей $D_i$ ( $i=1,\ldots,4$ ), то $\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=0$.

3. Знайдемо первісну функцію $u=u(x,y)$, якщо

$$du=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}.$$

Маємо

$$P=\frac{y}{x^2+y^2},\quad Q=\frac{-x}{x^2+y^2},\quad D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0;0)\},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-(x^2+y^2)+x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\quad \forall (x,y)\in D,$$

$$u=\left[\begin{matrix}x_0=1,\\ y_0=1\end{matrix}\right]=\int_1^y Q(t,1)dt+\int_1^x P(t,y)dt=\int_1^y\frac{-dt}{1+t^2}+\int_1^x\frac{ydt}{t^2+y^2}=[y\neq 0]=$$

$$=-\operatorname{arctg}t\Big|_1^y+\operatorname{arctg}\frac{t}{y}\Big|_1^x=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-\left(\operatorname{arctg}y-\operatorname{arctg}\frac{1}{y}\right)+\frac{\pi}{4}.$$

Оскільки

$$\left(\operatorname{arctg}y-\operatorname{arctg}\frac{1}{y}\right)'=\frac{1}{1+y^2}+\frac{-1}{y^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}\equiv 0\quad (y\neq 0),$$

то $\operatorname{arctg}y-\operatorname{arctg}\frac{1}{y}\equiv\mathrm{const}$ $(y\neq 0)$ і первісну можна вибрати у вигляді

$$u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\in C^2_{D_i},\quad i=1,2,$$

$$D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y>0\},\quad D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y<0\}.$$

Тому $I=\oint\limits_{L_1}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=u(B)-u(A)=0$ уздовж будь-якого (кусково-гладкого) контуру $L_1\subset D_i$, $i=1,2$ (рис. 35).

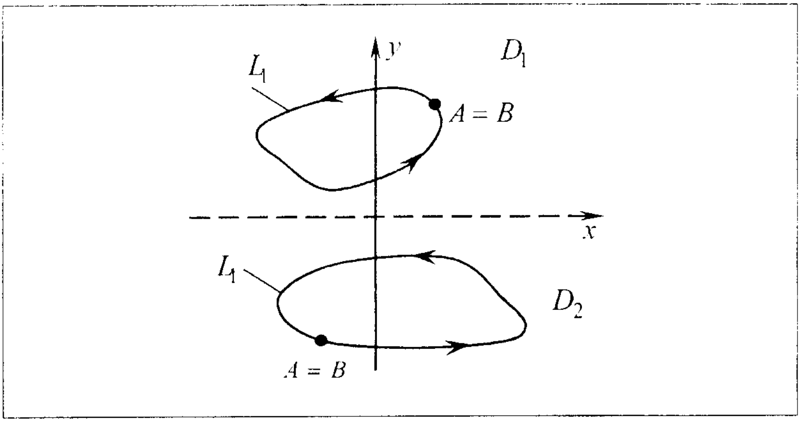



**Рис. 35.** Приклад 3 ( $I = 0$ )

Обчислимо інтеграл $I$ уздовж кола $L_0$ радіуса $a$ з центром у початку координат (рис. 36).

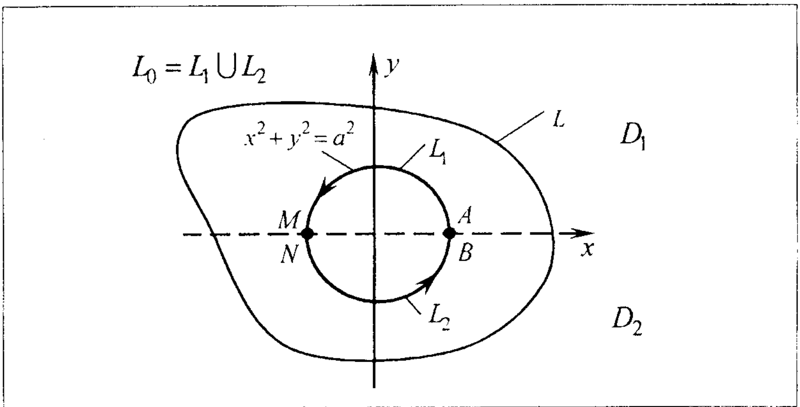



**Рис. 36.** Приклад 3 ( $I = -2\pi$ )

Оскільки контур $L_0$ не лежить в області неперервної диференційовності первісної $u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, то формулу Ньютона–Лейбніца в цьому випадку застосувати не можна. Маємо

$$I=\oint\limits_{L_0}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\left[\begin{array}{l}L_0:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\end{cases}\\ t_A=0,\quad t_B=2\pi\end{array}\right]=\int\limits_0^{2\pi}\frac{a^2(-\sin^2 t-\cos^2 t)}{a^2}dt=$$

$$=-\int\limits_0^{2\pi}dt=-2\pi.$$

Первісна функція $u=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ уздовж контуру інтегрування $L_0$ має розриви першого роду в точках

$$A(a;+0)=B(a;-0),\quad M(-a;+0)=N(-a;-0).$$

Тому, представивши $L_0$ у вигляді $L_0=L_1\cup L_2$, де $L_1=AM$, $L_2=NB$, і використавши властивість адитивності, дістанемо

$$I=\int\limits_{AM}+\int\limits_{NB}=u(M)-u(A)+u(B)-u(N)=$$

$$=\operatorname{arctg}\left(\frac{-a}{+0}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{+0}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{-0}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{-a}{-0}\right)=$$

$$=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-2\pi.$$

Оскільки інтеграл $\int\limits_{AM}\left(\int\limits_{NB}\right)$ (від повного диференціала ) не залежить від форми кусково-гладкої кривої, яка сполучає точки $A$ і $M$ ($N$ і $B$), то можна зробити висновок про те, що $I=\oint\limits_{L}=-2\pi$ уздовж будь-якого гладкого контуру $L$, який охоплює початок координат.

4. Нехай $P=P(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $Q=Q(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$. Оскільки

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}\quad\forall(x,y)\in D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0;0)\},$$

то диференціальний вираз $Pdx + Qdy = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ є повним диференціалом функції $u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ в області $D$.

Тому $\oint\limits_L \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = 0$ уздовж будь-якого кусково-гладкого контуру $L \subset D$.

5. Нехай $r = r(x, y)$ – неперервно диференційовна функція в області $D$, $f = f(r)$ – неперервна функція. Тоді первісною для диференціального виразу $f\left(r(x, y)\right) \cdot (r'_x dx + r'_y dy)$ є функція

$$u = u(x, y) = \int f(r)dr .$$

Справді, $u'_x = f(r)r'_x$, $u'_y = f(r)r'_y$ і $du = f(r)r'_x dx + f(r)r'_y dy$.

Наприклад,

$$du = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\frac{dr}{r} \Rightarrow u = \frac{1}{2}\int \frac{dr}{r} = \frac{1}{2}\ln r = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2),$$

$$du = \frac{xdx + ydy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{dr}{r^{3/2}} \Rightarrow u = \frac{1}{2}\int \frac{dr}{r^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{r}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$du = \sin(xy)(ydx + xdy) = \sin r\, dr \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u = \int \sin r\, dr = -\cos r = -\cos(xy).$$

Аналогічно

$$du = \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{2}\frac{dr}{\sqrt{r}} \Rightarrow u = \frac{1}{2}\int \frac{dr}{\sqrt{r}} = \sqrt{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$du = \operatorname{tg}(xyz)(yzdx + xzdy + xydz) = \operatorname{tg} r\, dr \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u = \int \operatorname{tg} r\, dr = -\int \frac{d\cos r}{\cos r} = -\ln|\cos r| = -\ln|\cos(xyz)|.$$

$$du = \frac{xdx + ydy + zdz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{dr}{r^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2}\int \frac{dr}{r^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{r}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

6. Нехай $f = f(x)$, $g = g(y)$, $h = h(z)$ – неперервні функції. Тоді первісною функцією для диференціального виразу

$$f(x)dx + g(y)dy + h(z)dz$$

є функція

$$u = \int f(x)dx + \int g(y)dy + \int h(z)dz,$$

оскільки $u'_x = f(x)$, $u'_y = g(y)$, $u'_z = h(z)$. Тому, наприклад,

$$du = x^2 dx + \sin y dy + e^{2z} dz \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{3}x^3 - \cos y + \frac{1}{2}e^{2z},$$

$$du = \frac{xdx}{x^2 + 1} + \frac{dy}{1 + y^2} + \frac{dz}{\cos^2 z} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} y + \operatorname{tg} z.$$

### *1.3.4. Поверхневі інтеграли 1-го роду*

Розглянемо обмежену поверхню $\Sigma$, задану векторним параметричним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ ($\vec{r}$ – радіус-вектор точки $M(x;y;z) \in \Sigma$), $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, або, у скалярній формі, рівняннями $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$. Якщо виконуються умови:

1) $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ – бієкція (взаємно однозначна відповідність між множиною точок поверхні $\Sigma$ і множиною $\bar{D} = D \cup \partial D$);

2) $D \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена вимірна однозв'язна множина, $\partial D$ – межа множини $D$;

3) функції $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ – неперервно диференційовні на $\bar{D}$ ($\vec{r}(u,v) \in C^1_{\bar{D}}$);

4) $\vec{N} = \vec{N}(u,v) = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0} \quad \forall (u,v) \in D$;

то поверхню $\Sigma$ називають *простою гладкою поверхнею*.

Нагадаємо, що множину $D \subset \mathbb{R}^2$ називають *однозв'язною*, якщо будь-який (кусково-гладкий) контур $C \subset D$ обмежує область $G$, яка цілком належить $D$: $G \subset D$ (рис. 37). Межа $\partial D$ обмеженої однозв'язної множини $D$ складається з одного контуру (на відміну від межі обмеженої $n$-зв'язної множини (рис. 38), яка складається із $n$ контурів). Множину $\bar{D} = D \bigcup \partial D$ називають *замиканням* множини $D$.

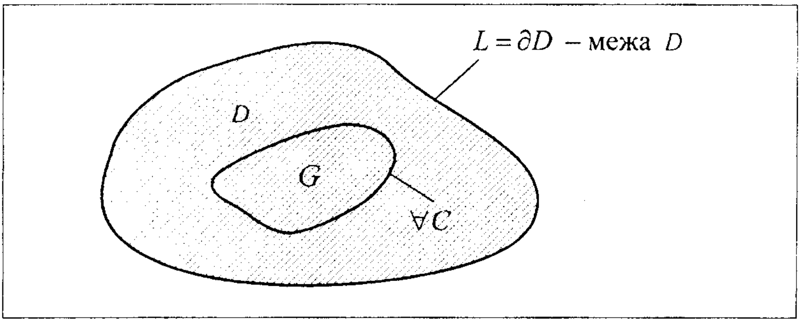



**Рис. 37.** Обмежена однозв'язна множина

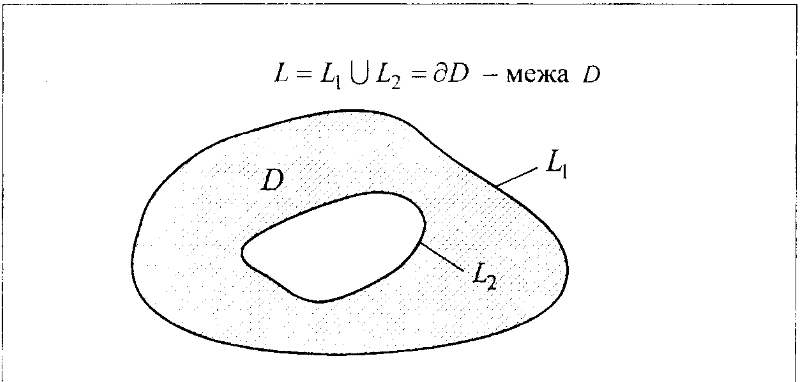



**Рис. 38.** Обмежена двозв'язна множина

Розглянемо геометричний зміст умови 4) в означенні простої гладкої поверхні. Якщо у векторному рівнянні $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ зафіксувати параметр $v$ ($u$), то дістанемо гладку *координатну лінію*

$v$ ($u$) на поверхні $\Sigma$, уздовж якої змінюється тільки параметр $u$ ($v$). Тому $\vec{r}_u'$ ($\vec{r}_v'$) є вектором дотичної до координатної лінії $v$ ($u$), а векторний добуток $\vec{N} = \vec{N}(u,v) = \vec{r}_u' \times \vec{r}_v'$ є вектором, що перпендикулярний і до $\vec{r}_u'$, і до $\vec{r}_v'$, тобто *вектором нормалі* до поверхні $\Sigma$ у точці $M \in \Sigma$ перетину ліній $v$ і $u$ (рис. 39).

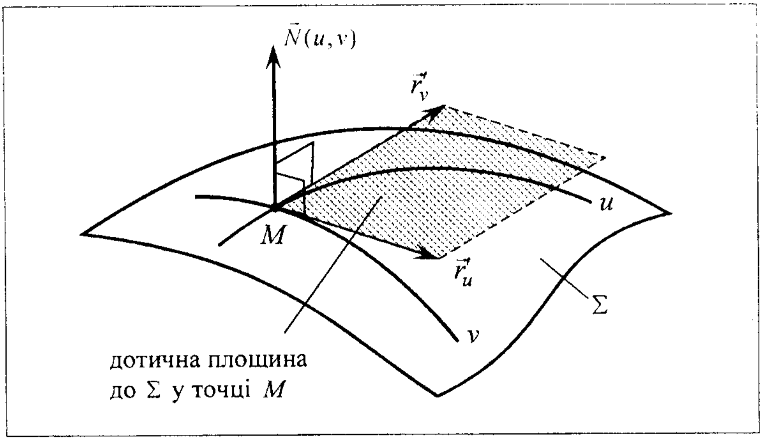



**Рис. 39.** Вектор нормалі до простої гладкої поверхні

Умова $\vec{N} = \vec{N}(u,v) \neq \vec{0}$ $\forall (u,v) \in D$ означає, що в кожній точці $M$ простої гладкої поверхні $\Sigma$ існує дотична площина і при переході від точки до точки на $\Sigma$ положення дотичної площини змінюється неперервно. Далі розглядатимемо також поверхні $\Sigma$, для параметричних представлень $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ $\big((u,v) \in D\big)$ яких умови 1) і 4) можуть порушуватися на множинах двовимірної жорданової міри нуль (тобто в окремих точках або на скінченній кількості кусково-гладких ліній множини $\bar{D}$). Такі поверхні називатимемо *гладкими*.

Розглянемо приклад гладкої замкненої поверхні $\Sigma_0$, заданої векторним параметричним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(\varphi,\theta)$:

$$x = a\cos\varphi\sin\theta, \quad y = a\sin\varphi\sin\theta, \quad z = a\cos\theta$$

де $a = \text{const} > 0$, $\varphi$, $\theta$ – сферичні параметри:

$$(\varphi,\theta)\in D: \quad 0\le\varphi<2\pi,\ 0<\theta<\pi .$$

Очевидно, $\Sigma_0$ – сфера радіуса $a$ з центром у початку координат без точок $A_1(0;0;a)$ і $A_2(0;0;-a)$ (рис. 40). Координатними лініями є *паралелі* (уздовж них змінюється кут $\varphi$, а кут $\theta=\text{const}$ ) і *меридіани*, уздовж яких змінюється кут $\theta$, а $\varphi=\text{const}$.

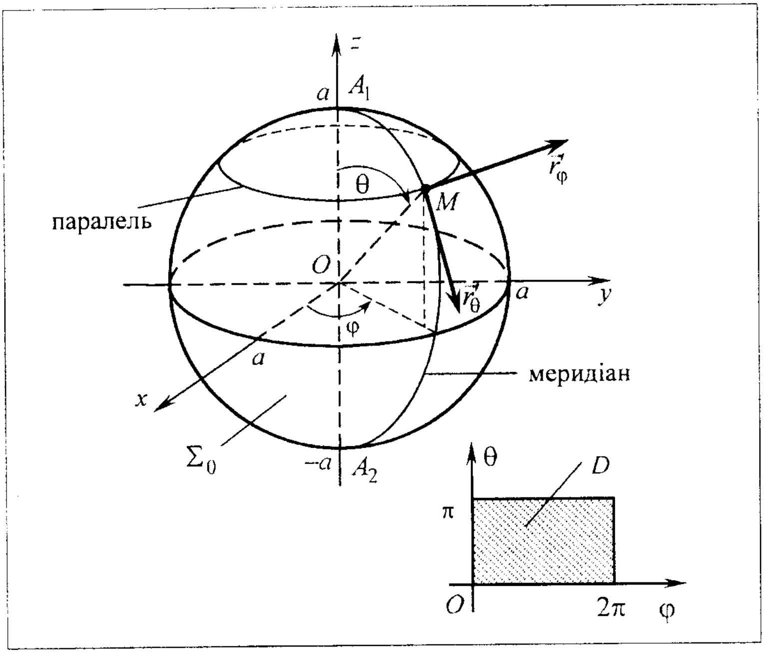



**Рис. 40.** Параметричне представлення сфери $\Sigma_0$

Якщо розглянути відображення

$$\vec{r}=\vec{r}(\varphi,\theta) \quad \left((\varphi,\theta)\in \bar{D}:\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\pi\right),$$

то отримаємо повну сферу, причому взаємна однозначність відображення порушується у т. зв. *кратних* точках $A_1$ і $A_2$ (ці точки є образами цілих відрізків $\theta=0\ (0\le\varphi\le 2\pi)$ і $\theta=\pi\ (0\le\varphi\le 2\pi)$, відповідно).

Знайдемо вектор нормалі $\vec{N}$ до сфери $\Sigma$ для даного параметричного представлення. Маємо

$$\vec{N} = \vec{N}(\varphi,\theta) = \vec{r}'_{\varphi} \times \vec{r}'_{\theta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin\varphi\cdot\sin\theta & a\cos\varphi\cdot\sin\theta & 0 \\ a\cos\varphi\cdot\cos\theta & a\sin\varphi\cdot\cos\theta & -a\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -a^2\left(\cos\varphi\cdot\sin^2\theta\vec{i} + \sin\varphi\cdot\sin^2\theta\vec{j} + \sin\theta\cdot\cos\theta\vec{k}\right),$$

$$\left|\vec{N}(\varphi,\theta)\right| = a^2\sin\theta .$$

Як бачимо, умова 4) $\vec{N} \neq \vec{0}$ порушується при $\theta = 0$ і $\theta = \pi$, тобто в точках $A_1, A_2 \in \Sigma_0$.

Уведемо поняття площі гладкої (криволінійної) поверхні $\Sigma$, заданої векторним параметричним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ $\left((u,v)\in D\right)$. *Диференціалом площі* поверхні $\Sigma$ називають величину

$$d\sigma \overset{\text{def}}{=} \left|\vec{N}(u,v)\right| du dv = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|\, du dv .$$

Із геометричного погляду диференціал площі поверхні $d\sigma$ є лінійним наближенням (з точністю до $o(dudv)$) площі $\Delta\sigma$ нескінченно малого криволінійного паралелограма $MKLN$, вирізаного з поверхні $\Sigma$ двома парами нескінченно близьких координатних ліній $u$, $u+du$ і $v$, $v+dv$ (рис. 41).

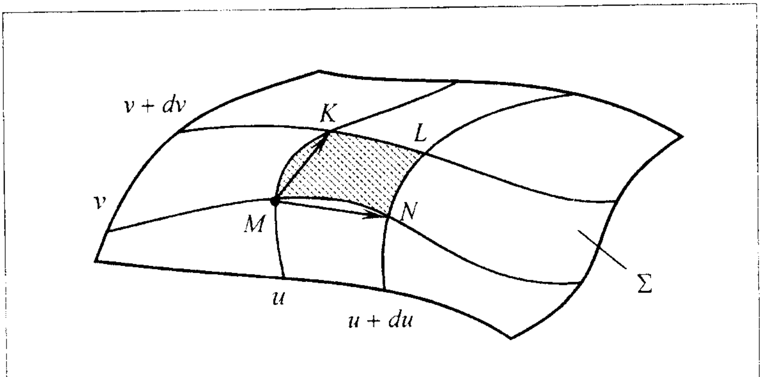



**Рис. 41.** Криволінійний паралелограм $MKLN \subset \Sigma$

Справді,

$$\overrightarrow{MN} = \vec{r}(u+du, v) - \vec{r}(u,v) = \vec{r}_u' du + o(du) \approx \vec{r}_u' du \ ,$$

$$\overrightarrow{MK} = \vec{r}(u, v+dv) - \vec{r}(u,v) = \vec{r}_v' dv + o(dv) \approx \vec{r}_v' dv \ .$$

Тому $d\sigma = |\vec{r}_u' du \times r_v' dv| = \left|\vec{N}(u,v)\right| dudv = |\vec{r}_u' \times r_v'| \, dudv$ .

Таким чином, $d\sigma$ є площею паралелограма $MK_1L_1N_1$, який лежить у дотичній до $\Sigma$ площині – площею "лінійного елемента" поверхні $\Sigma$ (рис. 42), а величину

$$\left|\vec{N}(u,v)\right| = |\vec{r}_u' \times r_v'| = \frac{d\sigma}{dS} \quad (dS = dudv)$$

можна вважати *коефіцієнтом деформації* площі при відображенні

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) : D \to \Sigma \ .$$

Для сфери $\Sigma_0$ маємо

$$\vec{r}_\varphi' = \{-a\sin\varphi \cdot \sin\theta;\, a\cos\varphi\sin\theta;\, 0\},$$

$$\vec{r}_\theta' = \{a\cos\varphi \cdot \cos\theta;\, a\sin\varphi \cdot \cos\theta;\, -a\sin\theta\}\ , \quad \vec{r}_\varphi' \perp \vec{r}_\theta',$$

$$|\vec{r}_\varphi'| = a\sin\theta\ , \quad |\vec{r}_\theta'| = a\ ,$$

$$d\sigma = |\vec{r}_\varphi'|\, d\varphi \cdot |\vec{r}_\theta'|\, d\theta = a^2 \sin\theta d\varphi d\theta = \left|\vec{N}(\varphi,\theta)\right| d\varphi d\theta \ .$$

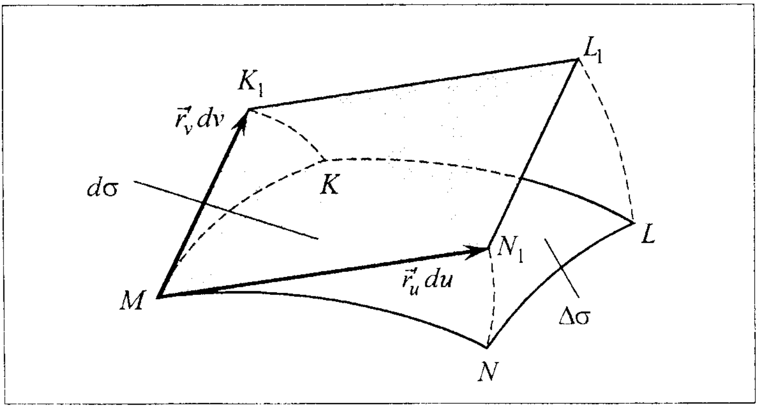



**Рис. 42.** Геометрична інтерпретація диференціала площі $d\sigma$

За означенням[1], площу гладкої поверхні $\Sigma$ приймають такою, що дорівнює величині

$$\boxed{S(\Sigma) \overset{\text{def}}{=} \iint\limits_D \left|\vec{N}(u,v)\right| dudv}\,.$$

Для площі поверхні сфери $\Sigma_0$, наприклад, маємо

$$S(\Sigma_0) = \iint\limits_D a^2 \sin\theta\, d\varphi d\theta =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 2\pi a^2 (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} = 4\pi a^2\,.$$

Розглянемо параметричні рівняння тора $T_0$ – поверхні, утвореної обертанням кола $(y-b)^2 + z^2 = a^2$ ($x = 0$) із центром у точці $(0;b;0)$ ($b > a$) навколо осі $Oz$ (рис. 43). Для координат точки $M \in T_0$ маємо

$$x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi\,,$$
$$y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi\,,$$
$$z = a\sin\psi\,,$$
$$\big((\varphi,\psi) \in D:\ 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \psi < 2\pi\big)\,.$$

Тому векторне параметричне рівняння тора $T_0$ має вигляд

$$\vec{r} = \vec{r}(\varphi,\psi) = (b + a\cos\psi)\cos\varphi \cdot \vec{i} + (b + a\cos\psi)\sin\varphi \cdot \vec{j} + a\sin\psi \cdot \vec{k}$$
$$\big((\varphi,\psi) \in D\big)\,.$$

Знайдемо площу поверхні тора $T_0$:

$$\vec{r}_\varphi = \{-(b + a\cos\psi)\sin\varphi;\ (b + a\cos\psi)\cos\varphi;\ 0\}\,,$$

$$\vec{r}_\theta = \{-a\sin\psi \cdot \cos\varphi;\ -a\sin\psi \cdot \sin\varphi;\ a\cos\psi\}\,,$$

$$\vec{N} = \vec{N}(\varphi,\psi) = a(b + a\cos\psi)\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\sin\psi \cdot \cos\varphi & -\sin\psi \cdot \sin\varphi & \cos\psi \end{vmatrix} =$$

[1] З поняттям площі криволінійної поверхні як границі інтегральних сум можна ознайомитися в [7].

$$= a(b + a\cos\psi)\left(\vec{i}\cos\varphi\cos\psi + \vec{j}\sin\varphi\cos\psi + \vec{k}\sin\psi\right),$$

$$d\sigma = \left|\vec{N}(\varphi,\psi)\right| d\varphi d\psi = a(b + a\cos\psi) d\varphi d\psi ,$$

$$S(\mathrm{T}_0) = \iint_D a(b + a\cos\psi) d\varphi d\psi = a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} (b + a\cos\psi) d\psi = 4\pi^2 ab.$$

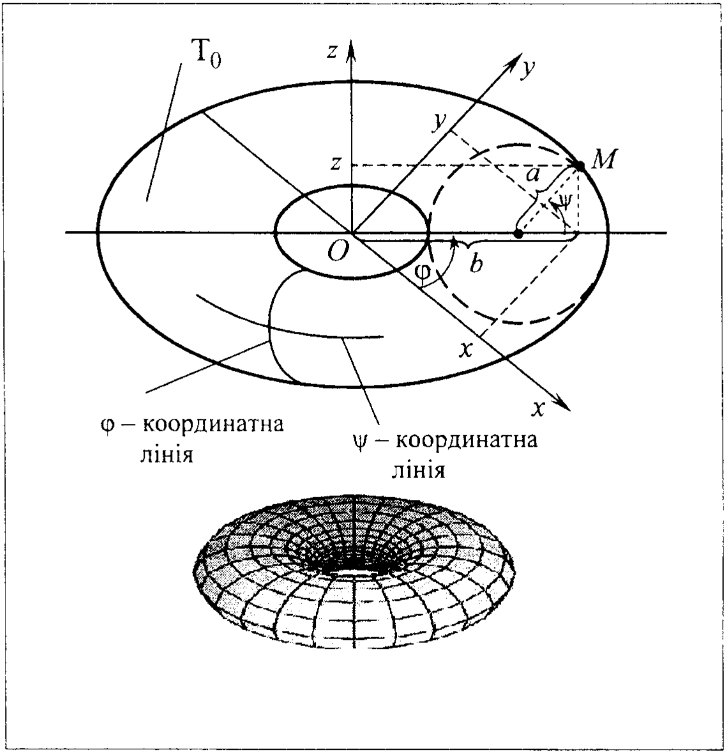



**Рис. 43.** Тор $\mathrm{T}_0$

Нехай $f = f(M) = f(x, y, z)$ – функція, визначена і неперервна у кожній точці гладкої поверхні $\Sigma$ ( $f \in C_\Sigma$ ). Величину

$$\boxed{\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} f(M)d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)d\sigma \overset{\text{def}}{=} \iint\limits_{D} f\left(\vec{r}(u,v)\right)\cdot|\vec{N}(u,v)|\,dudv = \\ = \iint\limits_{D} f\left(\vec{r}(u,v)\right)\cdot|\vec{r}_u' \times r_v'|\,dudv\end{aligned}}$$

називають *поверхневим інтегралом 1-го роду* від функції $f$ по поверхні $\Sigma$.

З означення площі поверхні $\Sigma$ і поверхневого інтеграла 1-го роду випливає, що

$$\boxed{S(\Sigma) = \iint\limits_{\Sigma} d\sigma}\,.$$

Умови 1) – 4) означення простої гладкої поверхні $\Sigma$ забезпечують існування поверхневого інтеграла 1-го роду, оскільки його обчислення зводиться до обчислення подвійного інтеграла Рімана від неперервної на замкненій обмеженій вимірній множині $\bar{D}$ функції $f\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)\cdot|\vec{r}_u' \times r_v'|$ по множині $D$.

Поверхневий інтеграл 1-го роду не залежить від способу параметризації простої гладкої поверхні $\Sigma$. Припустимо, що поверхня $\Sigma$ задана ще й таким параметричним рівнянням:

$$\vec{r} = \vec{r}_1(\xi,\eta) \quad \left((\xi,\eta)\in D_1\right),$$

причому $\vec{r}_1(\xi,\eta) = \vec{r}\left(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\right)$, а відображення

$$u = u(\xi,\eta),\ v = v(\xi,\eta) : D_1 \to D$$

регулярне[1]. У подвійному інтегралі, який визначає поверхневий інтеграл 1-го роду, виконаємо заміну змінних за формулами $u = u(\xi,\eta),\ v = v(\xi,\eta)$. Тоді

---

[1] Регулярне відображення (див. [1]) множини $D_1$ на множину $D$ бієктивне (взаємно однозначне), $u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\in C^1_{D_1}$, якобіан $\begin{vmatrix} u_\xi' & v_\xi' \\ u_\eta' & v_\eta' \end{vmatrix} = J \neq 0$, існує обернене відображення $\xi = \xi(u,v),\ \eta = \eta(u,v) : D \to D_1$, для якого якобіан $\begin{vmatrix} \xi_u' & \eta_u' \\ \xi_v' & \eta_v' \end{vmatrix} = \dfrac{1}{J} \neq 0$.

$$\vec{r}(u,v) = \vec{r}_1\big(\xi(u,v),\eta(u,v)\big),$$

$$\vec{r}'_u = \vec{r}'_{1\xi}\cdot\xi'_u + \vec{r}'_{1\eta}\cdot\eta'_u, \quad \vec{r}'_v = \vec{r}'_{1\xi}\cdot\xi'_v + \vec{r}'_{1\eta}\cdot\eta'_v,$$

$$\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v = \vec{r}'_{1\xi}\times\vec{r}'_{1\xi}\xi'_u\xi'_v + \vec{r}'_{1\xi}\times\vec{r}'_{1\eta}\xi'_u\eta'_v + \vec{r}'_{1\eta}\times\vec{r}'_{1\xi}\eta'_u\xi'_v + \vec{r}'_{1\eta}\times\vec{r}'_{1\eta}\eta'_u\eta'_v =$$

$$= \vec{r}'_{1\xi}\times\vec{r}'_{1\eta}\left(\xi'_u\eta'_v - \eta'_u\xi'_v\right) = \vec{r}'_{1\xi}\times\vec{r}'_{1\eta}\begin{vmatrix}\xi'_u & \eta'_u\\ \xi'_v & \eta'_v\end{vmatrix} = \vec{r}'_{1\xi}\times\vec{r}'_{1\eta}\frac{1}{J}.$$

Маємо

$$\iint\limits_{\Sigma} f(M)d\sigma = \iint\limits_{D} f\big(\vec{r}(u,v)\big)\cdot|\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v|\,dudv = \begin{bmatrix} u = u(\xi,\eta),\\ v = v(\xi,\eta)\\ (D_1\to D)\end{bmatrix} =$$

$$= \iint\limits_{D_1} f\Big(\vec{r}\big(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta)\big)\Big)\cdot|\vec{r}'_{1\xi}\times\vec{r}'_{1\eta}|\cdot\frac{1}{|J|}\cdot|J|\,d\xi d\eta =$$

$$= \iint\limits_{D_1} f\Big(\vec{r}\big(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta)\big)\Big)\cdot|\vec{r}'_{1\xi}\times\vec{r}'_{1\eta}|\,d\xi d\eta.$$

Якщо поверхня $\Sigma$ є об'єднанням скінченної кількості простих гладких поверхонь: $\Sigma = \bigcup\limits_{i=1}^{m}\Sigma_i$ (у цьому разі $\Sigma$ називають *кусково-гладкою* поверхнею), а функція $f = f(M)$ визначена і неперервна в кожній точці поверхні $\Sigma$, то

$$\iint\limits_{\Sigma} f(M)d\sigma \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m}\iint\limits_{\Sigma_i} f(M)d\sigma.$$

У випадку замкненої поверхні $\Sigma$ поверхневий інтеграл 1-го роду позначають так:

$$\oint\limits_{\Sigma} f(M)d\sigma.$$

## Фізичний зміст поверхневого інтеграла 1-го роду

Якщо функція $f(M)$ є густиною маси (густиною електричних зарядів) матеріальної поверхні $\Sigma$, то підінтегральний вираз $f(M)d\sigma$ є масою (електричним зарядом) елемента поверхні площею $d\sigma$, а сам поверхневий інтеграл за означенням приймають таким, що дорівнює масі (сумарному електричному заряду) матеріальної поверхні:

$$m(\Sigma) \overset{\text{def}}{=} \iint\limits_{\Sigma} f(M)d\sigma \quad \left(\overset{\text{def}}{=} Q(\Sigma)\right).$$

Розглянемо різні форми запису диференціала площі поверхні $d\sigma$ і формули обчислення поверхневого інтеграла 1-го роду.

1. Вектор нормалі $\vec{N}(u,v)$ запишемо у вигляді

$$\vec{N}(u,v) = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k},$$

де

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} = \frac{D(z,x)}{D(u,v)},$$

$$C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}.$$

Тоді $d\sigma = |\vec{N}(u,v)|\,dudv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,dudv$,

$$\iint\limits_{\Sigma} f(M)d\sigma = \iint\limits_{D} f\left(\vec{r}(u,v)\right)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,dudv$$

2. Для квадрата модуля вектора $\vec{N}(u,v)$ маємо

$$\vec{N}^2(u,v) = |\vec{N}(u,v)|^2 = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|^2 = \left||\vec{r}'_u| \cdot |\vec{r}'_v| \cdot \sin\varphi(u,v)\right|^2 =$$

$$= |\vec{r}'_u|^2 \cdot |\vec{r}'_v|^2 \left(1 - \cos^2\varphi(u,v)\right) = |\vec{r}'_u|^2 \cdot |\vec{r}'_v|^2 \left(1 - \left(\frac{\vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u| \cdot |\vec{r}'_v|}\right)^2\right) =$$

$$= \vec{r}'^2_u \cdot \vec{r}'^2_v - \left(\vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v\right)^2.$$

Звідси

$$d\sigma = \left|\vec{N}(u,v)\right| dudv = \sqrt{EG - F^2}\,dudv,$$

де

$$E = (x'_u)^2 + (y'_u) + (z'_u) = r'^2_u,$$
$$G = (x'_v)^2 + (y'_v) + (z'_v) = r'^2_v,$$
$$F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = r'_u \cdot r'_v$$

– *коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні*[1],

$$\iint\limits_{\Sigma} f(M)d\sigma = \iint\limits_{D} f\left(\vec{r}(u,v)\right)\sqrt{EG - F^2}\,dudv.$$

3. а) Нехай поверхня $\Sigma$ задана явним рівнянням
$$z = z(x,y) \quad \left((x,y) \in D\right).$$

Тоді маємо параметричне рівняння у вигляді
$$\vec{r} = \vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x,y)\vec{k},$$
$$\vec{r}'_x = \{1; 0; z'_x\}, \quad \vec{r}'_y = \{0; 1; z'_y\},$$
$$\vec{N} = \vec{N}(x,y) = \vec{r}'_x \times \vec{r}'_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} = -z'_x\vec{i} - z'_y\vec{j} + \vec{k},$$
$$d\sigma = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy,$$
$$\iint\limits_{\Sigma} f(M)d\sigma = \iint\limits_{D} f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy.$$

б) Якщо поверхня $\Sigma$ задана неявним рівнянням
$$\Phi(x,y,z) = 0$$

і, наприклад, $\Phi'_z \neq 0$, то функція $z = z(x,y)$ задана неявно цим рівнянням на деякій множині $D$. Тому
$$z'_x = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_z}, \quad z'_y = -\frac{\Phi'_y}{\Phi'_z},$$
$$d\sigma = \sqrt{\frac{\Phi'^2_x + \Phi'^2_y + \Phi'^2_z}{\Phi'^2_z}}\,dxdy.$$

[1] З основними поняттями диференціальної геометрії кривих і поверхонь можна ознайомитися в [2].

## Деякі фізичні застосування поверхневих інтегралів 1-го роду

Нехай $\rho(M)=\rho(x,y,z)$ – густина маси кусково-гладкої матеріальної поверхні $\Sigma$. Тоді

$$\boxed{m(\Sigma)=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)d\sigma}$$

– *маса поверхні* $\Sigma$;

$$\boxed{M_{yz}=\iint\limits_{\Sigma}x\rho(M)d\sigma,\quad M_{xz}=\iint\limits_{\Sigma}y\rho(M)d\sigma,\quad M_{xy}=\iint\limits_{\Sigma}z\rho(M)d\sigma}$$

– *статичні моменти поверхні* $\Sigma$ відносно координатних площин $yOz$, $xOz$, $xOy$ відповідно;

$$\boxed{x_0=\frac{M_{yz}}{m(\Sigma)},\quad y_0=\frac{M_{xz}}{m(\Sigma)},\quad z_0=\frac{M_{xy}}{m(\Sigma)}}$$

– *координати центра мас поверхні* $\Sigma$;

$$\boxed{I_{yz}=\iint\limits_{\Sigma}x^2\rho(M)d\sigma,\quad I_{xz}=\iint\limits_{\Sigma}y^2\rho(M)d\sigma,\quad I_{xy}=\iint\limits_{\Sigma}z^2\rho(M)d\sigma}$$

– *моменти інерції поверхні* $\Sigma$ відносно координатних площин $yOz$, $xOz$, $xOy$ відповідно;

$$\boxed{\begin{gathered}I_x=\iint\limits_{\Sigma}(y^2+z^2)\rho(M)d\sigma,\quad I_y=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+z^2)\rho(M)d\sigma,\\ I_z=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\rho(M)d\sigma\end{gathered}}$$

– *моменти інерції поверхні* $\Sigma$ відносно координатних осей $Ox$, $Oy$ і $Oz$ відповідно;

$$I_O=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\rho(M)d\sigma$$

– *моменти інерції поверхні* $\Sigma$ відносно початку координат.

Розглянемо приклади.

1. Знайдемо площу повної поверхні еліптичного конуса (рис. 44)

$$\Sigma: z=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}},\ z=h \quad (0<a\le b,\ h>0).$$

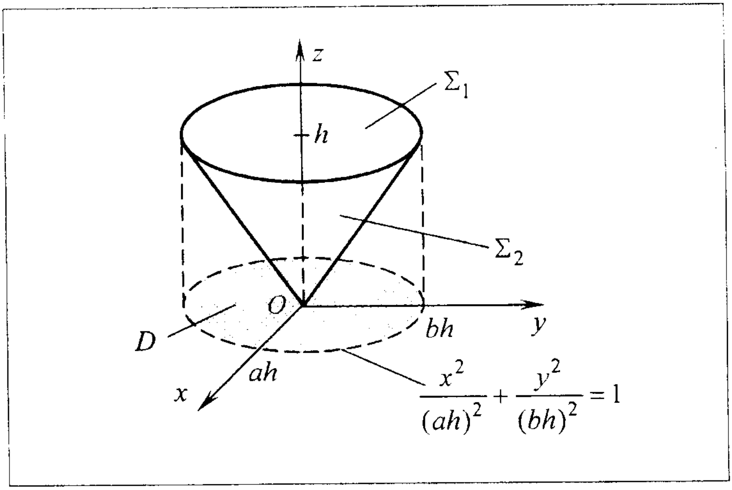



**Рис. 44.** Приклад 1

Очевидно, $S(\Sigma)=\oiint\limits_{\Sigma} d\sigma=\iint\limits_{\Sigma_1} d\sigma+\iint\limits_{\Sigma_2} d\sigma$ . Маємо

$$\Sigma_1: \quad z=h,\ (x,y)\in D,\quad d\sigma=\sqrt{1^2+0^2+0^2}\,dxdy=dxdy,$$

$$S(\Sigma_1)=\iint\limits_{\Sigma_1} d\sigma=\iint\limits_{D} dxdy=\pi\cdot ah\cdot bh=\pi abh^2.$$

Параметричні рівняння поверхні $\Sigma_2$ дістанемо, поклавши

$$x=au\cos v,\ \ y=bu\sin v.$$

Тоді $z=u$ і

$$\Sigma_2: \quad x=au\cos v,\ \ y=bu\sin v,\ \ z=u$$

$$\left((u,v)\in D_{uv}:\ 0\le u\le h, 0\le v\le 2\pi\right).$$

Знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні:

$$\vec{r}_u'=\{a\cos v; b\sin v; 1\},\quad \vec{r}_v'=\{-au\sin v; bu\cos v; 0\},$$

$$E=\vec{r}_u'^2=a^2\cos^2 v+b^2\sin^2 v+1\,,$$

$$G=\vec{r}_v'^2=a^2u^2\sin^2 v+b^2u^2\cos^2 v\,,$$

$$F=\vec{r}_u'\cdot\vec{r}_v'=-a^2u\sin v\cos v+b^2u\sin v\cos v=(b^2-a^2)u\sin v\cos v\,,$$

$$EG-F^2=\left(a^2\cos^2 v+b^2\sin^2 v+1\right)\left(a^2u^2\sin^2 v+b^2u^2\cos^2 v\right)-$$

$$-\left((b^2-a^2)u\sin v\cos v\right)^2=$$

$$=a^4u^2\sin^2 v\cos^2 v+a^2b^2u^2\cos^4 v+$$

$$+a^2b^2u^2\sin^4 v+b^4u^2\sin^2 v\cos^2 v+$$

$$+a^2u^2\sin^2 v+b^2u^2\cos^2 v-(b^2-a^2)^2u^2\sin^2 v\cos^2 v=$$

$$=a^2b^2u^2\cos^4 v+a^2b^2u^2\sin^4 v+$$

$$+a^2u^2\sin^2 v+b^2u^2\cos^2 v+2a^2b^2u^2\sin^2 v\cos^2 v=$$

$$=a^2b^2u^2\cos^2 v\left(\cos^2 v+\sin^2 v\right)+a^2b^2u^2\sin^2 v\left(\sin^2 v+\cos^2 v\right)+$$

$$+a^2u^2\sin^2 v+b^2u^2\cos^2 v=$$

$$=a^2b^2u^2+a^2u^2\sin^2 v+b^2u^2\cos^2 v=$$

$$=a^2b^2u^2+a^2u^2\sin^2 v+b^2u^2(1-\sin^2 v)=$$

$$=u^2\left(a^2b^2+a^2\sin^2 v+b^2-b^2\sin^2 v\right)=$$

$$=u^2\left(a^2b^2+b^2+(a^2-b^2)\sin^2 v\right)=$$

$$=u^2b^2(a^2+1)\left(1-\frac{b^2-a^2}{b^2(a^2+1)}\sin^2 v\right)=u^2b^2(a^2+1)\left(1-k^2\sin^2 v\right),$$

де $k^2=\dfrac{b^2-a^2}{b^2(a^2+1)}$ $(0\le k<1)$. Тому

$$d\sigma=b\sqrt{a^2+1}\,u\sqrt{1-k^2\sin^2 v}\,dudv\,,$$

$$S(\Sigma_2)=\iint\limits_{D_{uv}} b\sqrt{a^2+1}\,u\sqrt{1-k^2\sin^2 v}\,dudv=$$

$$= b\sqrt{a^2+1}\int_0^h u\,du\int_0^{2\pi}\sqrt{1-k^2\sin^2 v}\,dv = \frac{b\sqrt{a^2+1}\,h^2}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-k^2\sin^2 v}\,dv.$$

Оскільки $\sin^2 v$ – парна $\pi$-періодична функція, то при $k \neq 0$:

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{1-k^2\sin^2 v}\,dv = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 v}\,dv =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 v}\,dv = 4E(k,\pi/2),$$

$E(k,\varphi)$ – функція Лежандра (еліптичний інтеграл[1] 2-го роду).

Тому $S(\Sigma_2) = 2b\sqrt{a^2+1}\,h^2 E(k,\pi/2)$ і

$$S(\Sigma) = \pi abh^2 + 2b\sqrt{a^2+1}\,h^2 E(k,\pi/2) \quad (k \neq 0).$$

При $a = b$ (випадок кругового конуса) маємо

$$S(\Sigma) = \pi a^2 h^2 + \pi a\sqrt{a^2+1}\,h^2.$$

Диференціал площі $d\sigma$ для $\Sigma_2$ можна знайти і так:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a\cos v & b\sin v & 1 \\ -au\sin v & bu\cos v & 0 \end{vmatrix} = -bu\cos v\vec{i} - au\sin v\vec{j} + abu\vec{k},$$

$$d\sigma = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\,dudv = \sqrt{b^2u^2\cos^2 v + a^2u^2\sin^2 v + a^2b^2u^2}\,dudv =$$

$$= u\sqrt{b^2 - b^2\sin^2 v + a^2\sin^2 v + a^2b^2}\,dudv =$$

$$= ub\sqrt{1+a^2}\sqrt{1-\frac{b^2-a^2}{b^2(1+a^2)}\sin^2 v}\,dudv = ub\sqrt{1+a^2}\sqrt{1-k^2\sin^2 v}\,dudv.$$

2. Доведемо *формулу Пуассона*

$$I = \iint_\Sigma f(\vec{m}\cdot\vec{r})\,d\sigma = 2\pi\int_{-1}^{1} f(|\vec{m}|\,u)\,du,$$

[1] Ознайомитися зі спеціальними (неелементарними) функціями інтегрального типу можна в [9, 11].

де $f$ – неперервна функція, $\vec{m}$ – сталий вектор, $\Sigma$ – сфера одиничного радіуса, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $O$ – центр, $M$ – довільна точка сфери (рис. 45), $|\vec{r}| = 1$.

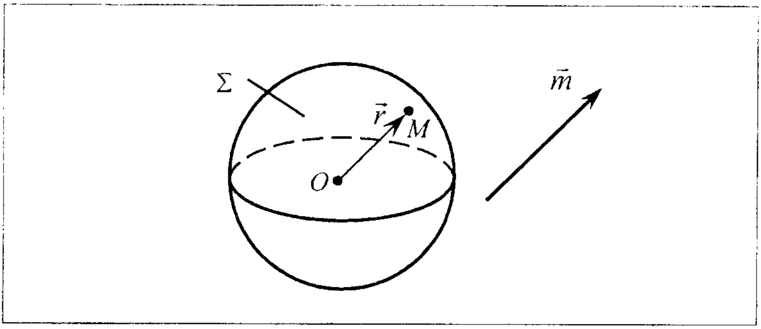



**Рис. 45.** Приклад 2 (формула Пуассона)

Для обчислення інтеграла $I$ початок координат виберемо в точці $O$, а вісь $Oz$ направимо уздовж вектора $\vec{m}$. Тоді

$$\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

або в параметричній формі

$$x = \cos\varphi\sin\theta, \quad y = \sin\varphi\sin\theta, \quad z = \cos\theta$$

$$(0 \le \varphi \le 2\pi, \ 0 \le \theta \le \pi);$$

$$d\sigma = \sin\theta d\varphi d\theta, \quad \vec{m} = \{0; 0; |\vec{m}|\}, \quad \vec{r} = \{x; y; z\}, \quad \vec{m}\cdot\vec{r} = |\vec{m}|\, z.$$

Маємо

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(|\vec{m}|\cos\theta)\sin\theta d\theta = \left[\begin{array}{c}\cos\theta = u, \\ \sin\theta d\theta = -du\end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{-1} f(|\vec{m}|\,u)(-du) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} f(|\vec{m}|\,u)du =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} f(|\vec{m}|\,u)du.$$

3. Знайдемо масу параболічної поверхні (рис. 46),

$$\Sigma: z = x^2 + y^2 \quad (0 \le z \le h),$$

якщо густина маси $\rho(x, y, z) = x^2 z$ .

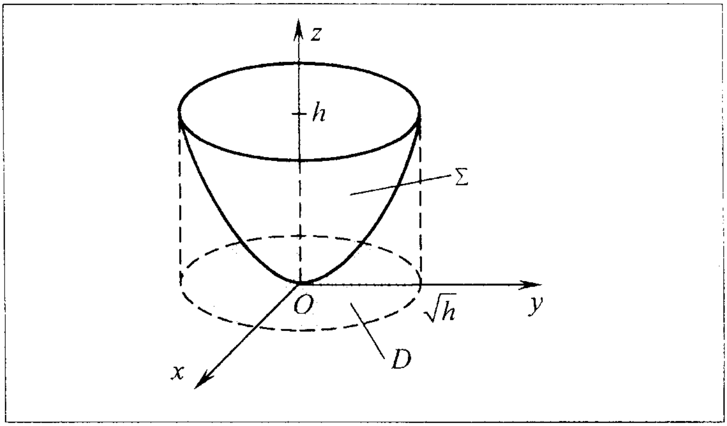



**Рис. 46.** Приклад 3

Маємо

$$m(\Sigma) = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) d\sigma = \iint_{\Sigma} x^2 z d\sigma ,$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dxdy = \left[\begin{matrix} z_x' = 2x, \\ z_y' = 2y \end{matrix}\right] = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy ,$$

$$m(\Sigma) = \iint_{D} x^2 (x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy =$$

$$= \left[\text{ПСК: } \begin{matrix} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{matrix}\right] = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{h}} r^2 \cos^2\varphi \cdot r^2 \sqrt{1 + 4r^2}\, rdr =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{h}} \sqrt{1 + 4r^2}\, r^4 d(r^2) = \left[r^2 = t\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{h} \sqrt{1 + 4t}\, t^2 dt = \left[\begin{matrix} \sqrt{1 + 4t} = \tau, \\ t = \frac{1}{4}(\tau^2 - 1), \\ dt = \frac{1}{2}\tau d\tau \end{matrix}\right] = \frac{\pi}{2} \int_1^{\sqrt{1+4h}} \tau \left(\frac{1}{4}(\tau^2 - 1)\right)^2 \frac{1}{2} \tau d\tau =$$

$$=\frac{\pi}{64}\int_1^{\sqrt{1+4h}}(\tau^6-2\tau^4+\tau^2)d\tau=\frac{\pi}{64}\left(\frac{1}{7}\tau^7-\frac{2}{5}\tau^5+\frac{1}{3}\tau^3\right)\Bigg|_1^{\sqrt{1+4h}}.$$

4. Знайдемо статичний момент і момент інерції однорідної пластини ($\rho(x,y,z)=1$) (рис. 47)

$$\Sigma: x+y+z=1 \quad (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$$

відносно координатної площини $xOy$.

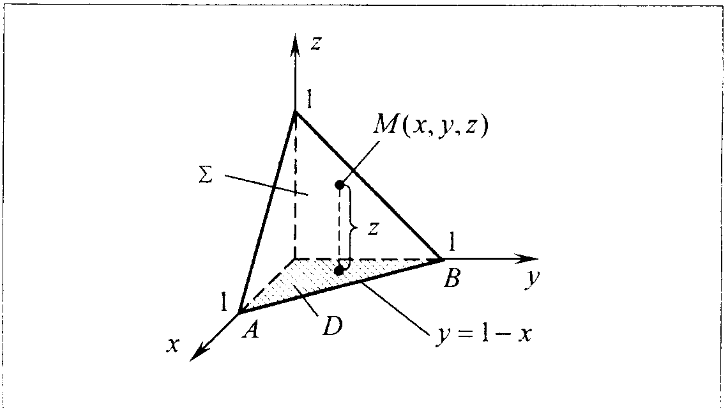



**Рис. 47.** Приклад 4

Для статичного моменту $M_{xy}$ маємо

$$M_{xy}=\iint_{\Sigma} z\,d\sigma=\begin{bmatrix}\Sigma:\ z=1-x-y,\ (x,y)\in D, \\ d\sigma=\sqrt{1+1+1}\,dxdy=\sqrt{3}\,dxdy\end{bmatrix}=$$

$$=\iint_D(1-x-y)\sqrt{3}\,dxdy=\sqrt{3}\iint_D dxdy-\sqrt{3}\int_0^1dx\int_0^{1-x}(x+y)dy=$$

$$=\sqrt{3}S(\Delta AOB)-\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1(x+y)^2\Big|_0^{1-x}dx=$$

$$=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Знайдемо момент інерції $I_{xy}$:

$$I_{xy} = \iint\limits_{\Sigma} z^2 d\sigma = \iint\limits_{D} (1-x-y)^2 \sqrt{3}\, dxdy =$$

$$= \sqrt{3} \iint\limits_{D} \left(1 - 2(x+y) + (x+y)^2\right) dxdy =$$

$$= \sqrt{3} \iint\limits_{D} dxdy - 2\sqrt{3} \iint\limits_{D} (x+y) dxdy + \sqrt{3} \iint\limits_{D} (x+y)^2 dxdy =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (x+y)^2 \Big|_0^{1-x} dx + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \int\limits_0^1 (x+y)^3 \Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \int\limits_0^1 (1-x^2) dx + \frac{\sqrt{3}}{3} \int\limits_0^1 (1-x^3) dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

5. Знайдемо координати центра мас частини $\Sigma$ поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, вирізаної циліндром $x^2 + y^2 = ax$, $z \geq 0$, якщо густина маси $\rho(x, y, z) = xz$ (рис. 48).

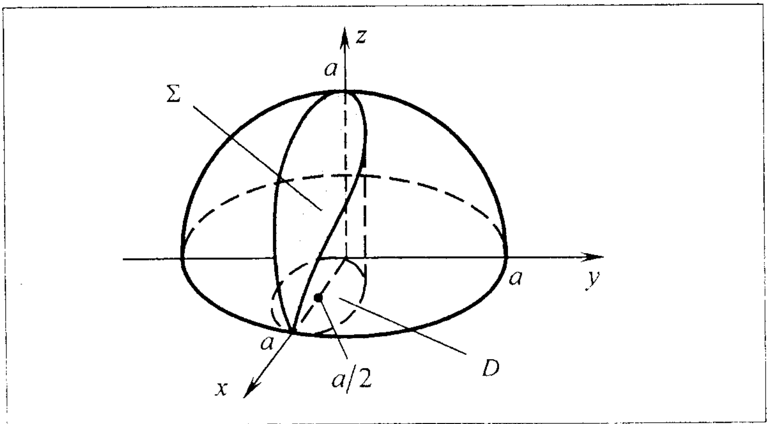



**Рис. 48.** Приклад 5

Циліндром $x^2+y^2-ax=0$ $\left(\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4},\ z\ge 0\right)$ поверхня $\Sigma$ проектується на множину (рис. 49)

$$D:\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\le\frac{a^2}{4}.$$

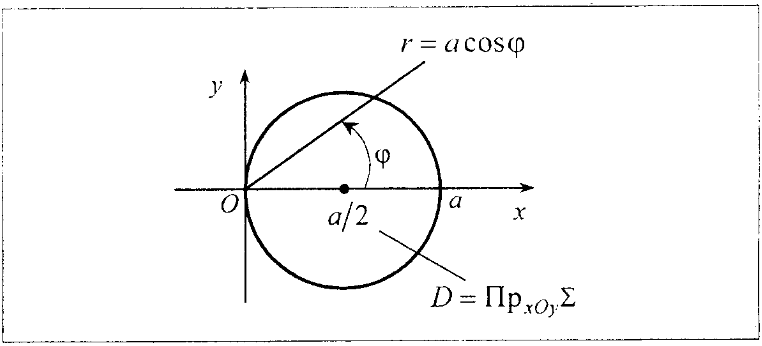



**Рис. 49.** Множина $D$ (приклад 5)

Рівняння поверхні $\Sigma$ має вигляд

$$\Sigma:\ z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ (x,y)\in D.$$

Тому $z'_x=-\frac{x}{z}$, $z'_y=-\frac{y}{z}$,

$$d\sigma=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\,dxdy=\frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\frac{adxdy}{z}.$$

Знаходимо масу поверхні $\Sigma$:

$$m(\Sigma)=\iint_{\Sigma}xzd\sigma=\iint_{D}x\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=a\iint_{D}xdxdy=$$

$$=[\text{ПСК}]=a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_{0}^{a\cos\varphi}r\cos\varphi\cdot rdr=2a\int_{0}^{\pi/2}\cos\varphi\left(\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{a\cos\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{2}{3}a^4\int_{0}^{\pi/2}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{2}{3}a^4\int_{0}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos\varphi}{2}\right)^2d\varphi=$$

$$=\frac{1}{6}a^4\int_0^{\pi/2}\left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi=\frac{\pi}{8}a^4.$$

Знаходимо статичні моменти:

$$M_{yz}=\iint_{\Sigma} xxz d\sigma=a\iint_{D} x^2 dxdy=a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} r^2\cos^2\varphi\cdot r dr=$$

$$=2a\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\left(\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{a\cos\varphi}\right)d\varphi=\frac{a^5}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^6\varphi d\varphi=\left[\sin^2\varphi=t\right]=$$

$$=\frac{a^5}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(7/2)}{\Gamma(4)}=\frac{a^5}{4}\frac{\sqrt{\pi}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{3!}=\frac{5\pi a^5}{64},$$

$$M_{xz}=\iint_{\Sigma} yxz d\sigma=a\iint_{D} xy dxdy=a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} r^2\cos\varphi\sin\varphi\cdot r dr=0$$

(інтеграл по проміжку від $-\pi/2$ до $\pi/2$ від непарної (відносно $\varphi$) функції),

$$M_{xy}=\iint_{\Sigma} zxz d\sigma=a\iint_{D} x\sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dxdy=$$

$$=a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} r\cos\varphi\cdot\sqrt{a^2-r^2}\, r dr=$$

$$=2a\int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} r^2\cdot\sqrt{a^2-r^2}\, dr.$$

Інтеграл $C=\int_0^{a\cos\varphi} r^2\cdot\sqrt{a^2-r^2}\, dr$ обчислимо окремо. Маємо

$$C=\left[\begin{array}{c} a^2-r^2=t^2r^2,\quad r=\dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}},\quad dr=-a(1+t^2)^{-3/2}tdt \\ t_н=+\infty,\quad t_в=\mathrm{tg}\varphi \end{array}\right]=$$

$$= \int\limits_{+\infty}^{\operatorname{tg}\varphi} \frac{a^2}{1+t^2} \frac{at}{\sqrt{1+t^2}} \frac{-at}{(1+t^2)^{3/2}} dt = a^4 \int\limits_{\operatorname{tg}\varphi}^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^3} =$$

$$= \left[ \begin{array}{ll} t = \operatorname{tg}\tau, \quad dt = \dfrac{d\tau}{\cos^2\tau}, \quad 1+t^2 = \dfrac{1}{\cos^2\tau} \\ \tau_н = \varphi, \quad \tau_в = \pi/2 \end{array} \right] = a^4 \int\limits_{\varphi}^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}^2\tau \cdot \dfrac{d\tau}{\cos^2\tau}}{\dfrac{d\tau}{\cos^6\tau}} =$$

$$= a^4 \int\limits_{\varphi}^{\pi/2} \sin^2\tau\cos^2\tau d\tau = \frac{a^4}{4} \int\limits_{\varphi}^{\pi/2} \sin^2 2\tau d\tau = \frac{a^4}{8} \int\limits_{\varphi}^{\pi/2} (1-\cos 4\tau) d\tau =$$

$$= \frac{a^4}{8}\left( \frac{\pi}{2} - \varphi - \frac{1}{4}\sin 4\tau\Big|_{\varphi}^{\pi/2} \right) = \frac{a^4}{8}\left( \frac{\pi}{2} - \varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi \right).$$

Отже,

$$M_{xy} = \frac{2a^5}{8} \int\limits_0^{\pi/2} \left( \frac{\pi}{2}\cos\varphi - \varphi\cos\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\cos\varphi \right) d\varphi =$$

$$= \frac{a^5}{4}\left( \frac{\pi}{2}\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2} - (\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi/2} (\sin 3\varphi + \sin 5\varphi)\, d\varphi \right) =$$

$$= \frac{a^5}{4}\left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{1}{8}\left( -\frac{1}{3}\cos 3\varphi - \frac{1}{5}\cos 5\varphi \right)\Bigg|_0^{\pi/2} \right) =$$

$$= \frac{a^5}{4}\left( 1 + \frac{1}{8}\left( \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \right) = \frac{a^5}{4} \cdot \frac{16}{15} = \frac{4a^5}{15},$$

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m(\Sigma)} = \frac{\dfrac{5\pi a^5}{64}}{\dfrac{\pi}{8}a^4} = \frac{5a}{4}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m(\Sigma)} = 0, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m(\Sigma)} = \frac{\dfrac{4a^5}{15}}{\dfrac{\pi}{8}a^4} = \frac{32a}{15}.$$

### *1.3.5. Поверхневі інтеграли 2-го роду. Потік векторного поля*

Розглянемо гладку поверхню $\Sigma$ у $\mathbb{R}^3$, задану векторним параметричним рівнянням $\vec{r}=\vec{r}(u,v)\left((u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2\right)$. Поверхню $\Sigma$ називають *орієнтовною* (*двосторонньою*), якщо обхід по будь-якому кусково-гладкому контуру $L$ на $\Sigma$, який не має спільних точок із краєм поверхні, не змінює напрямку орта $\vec{n}(M)$ нормалі до поверхні (рис. 50). У випадку ж, коли на поверхні існує контур, при обході якого орт нормалі до поверхні змінює свій напрямок на протилежний, поверхню називають *односторонньою*, або *неорієнтовною*.

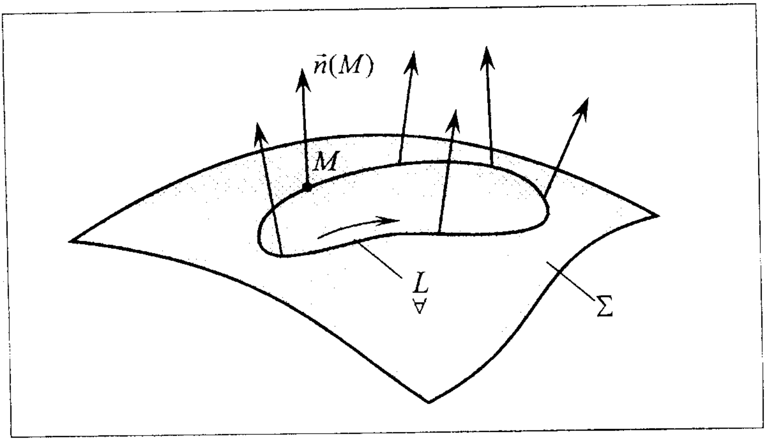



**Рис. 50.** Обхід контуру ортом нормалі до поверхні

На двосторонній поверхні можна вибрати дві і тільки дві неперервні векторні функції $\vec{n}(M)$ $(M\in\Sigma)$ ортів нормалей до поверхні (два неперервних поля нормалей) (рис. 51). Вибір однієї із цих функцій (тобто фіксація певного поля нормалей) означає фіксацію однієї зі сторін поверхні. Поверхню в цьому випадку називають *орієнтованою*, а орт $\vec{n}(M)$ – *ортом орієнтації поверхні*. На односторонній поверхні неможливо виділити жодного неперервного поля нормалей.

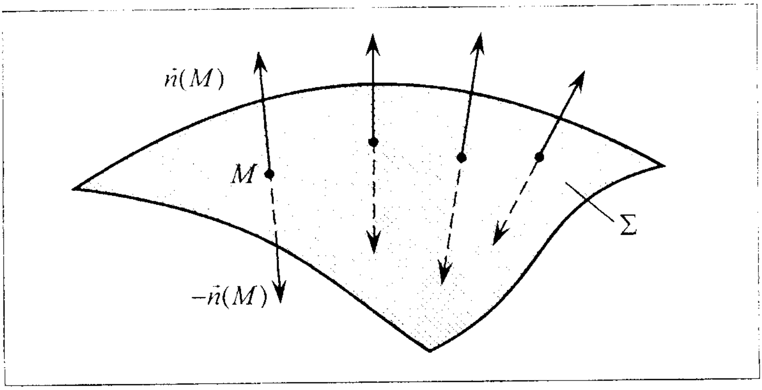



**Рис. 51.** Фіксація певної сторони двосторонньої поверхні

Двосторонніми поверхнями є, наприклад, площина та її частини (круг, прямокутник, паралелограм тощо), а також сфера, еліпсоїд (рис. 52), повні поверхні циліндра, конуса, параболоїда (рис. 53), тора (рис. 43), причому у випадку замкнених поверхонь кажуть про зовнішню (орти орієнтації напрямлені в "зовнішню" частину простору) і внутрішню (орти орієнтації напрямлені у "внутрішню" частину простору) сторони поверхні.

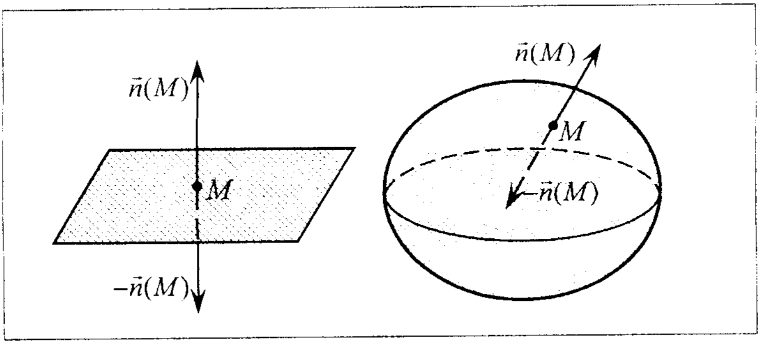



**Рис. 52.** Приклади двосторонніх поверхонь

Двосторонніми також є гладкі поверхні, задані рівняннями типу $z = f(x, y)$ $\left(x = f(y, z),\ y = f(x, z)\right)$. На (рис. 54) "верхня" сторона поверхні $\Sigma$ характеризується умовою $0 \le \gamma < \pi/2$ $(\cos\gamma > 0)$, а "нижня" – умовою $\pi/2 < \gamma \le \pi$ $(\cos\gamma < 0)$.

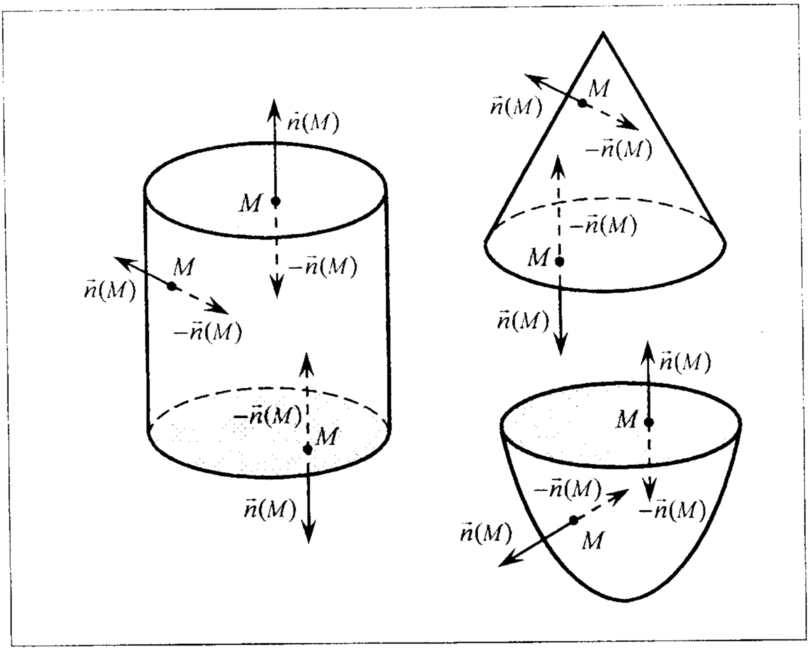



**Рис. 53.** Орієнтація повних поверхонь циліндра, конуса, параболоїда

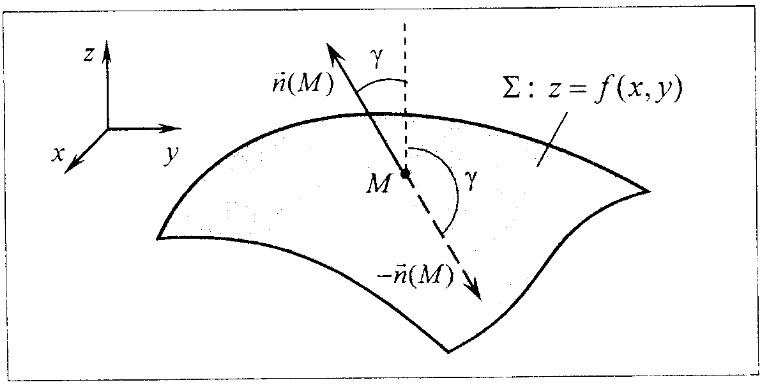



**Рис. 54.** Орієнтація поверхні, заданої явним рівнянням

Найпростішим прикладом односторонньої (неорієнтовної) поверхні в $\mathbb{R}^3$ є т.зв. *стрічка* (*смужка*) *Мебіуса*, яку можна отримати з прямокутної смужки $ABCD$ за допомогою перегинання і склеювання (рис. 55). Обхід стрічки Мебіуса, наприклад, по середній лінії прямокутника $ABCD$ змінює напрямок орта $\vec{n}(M)$ на протилежний.

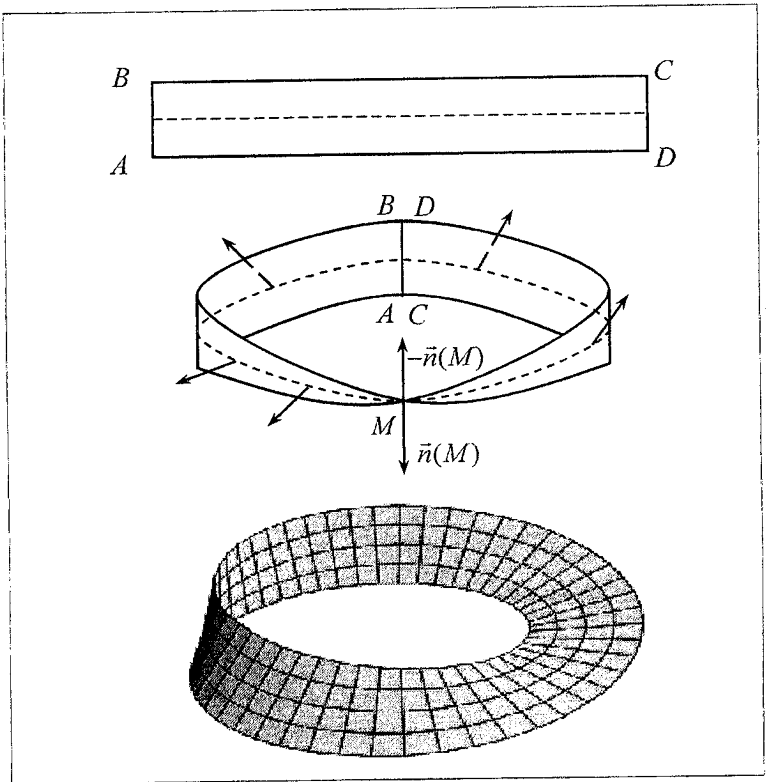



**Рис. 55.** Стрічка Мебіуса

Нехай на гладкій двосторонній поверхні $\Sigma$ задана неперервна векторна функція

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\} \quad (M = M(x; y; z) \in \Sigma)$$

і $\vec{n}=\vec{n}(M)=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$ – орт орієнтації поверхні $\Sigma$. Скалярну величину

$$I \overset{\text{def}}{=} \iint_{\Sigma}\left(\vec{F}(M),\vec{n}(M)\right)d\sigma =$$

$$=\iint_{\Sigma}\left(P(M)\cos\alpha+Q(M)\cos\beta+R(M)\cos\gamma\right)d\sigma$$

називають *поверхневим інтегралом 2-го роду від векторної функції* $\vec{F}$ *по вибраній стороні поверхні* $\Sigma$.

З означення випливає, якщо $\Sigma'$ і $\Sigma''$ – дві сторони гладкої двосторонньої поверхні $\Sigma$, то

$$\iint_{\Sigma'}\left(\vec{F},\vec{n}'\right)d\sigma=-\iint_{\Sigma''}\left(\vec{F},\vec{n}''\right)d\sigma,$$

оскільки $\vec{n}''=-\vec{n}'$. Це означає, що поверхневі інтеграли 2-го роду залежать від орієнтації поверхні та змінюють свій знак на протилежний при зміні орієнтації.

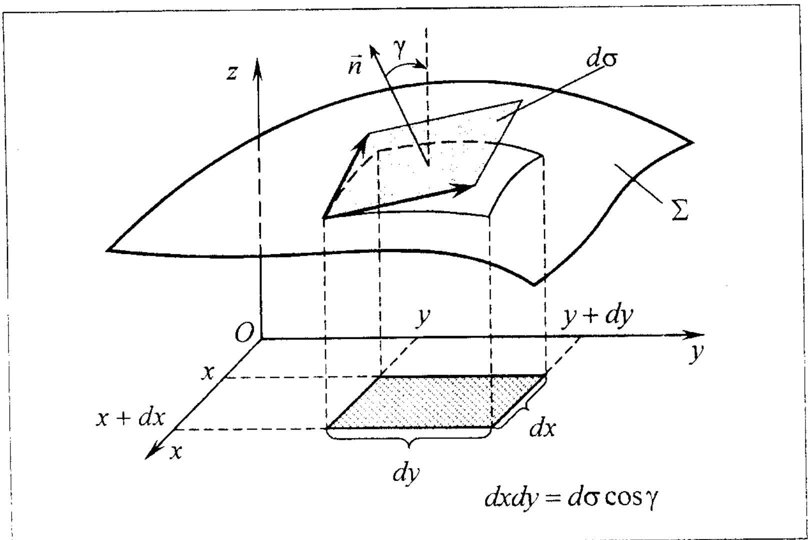



**Рис. 56.** Ілюстрація рівності $d\sigma\cdot\cos\gamma=dxdy$

Із рис. 56 випливає[1], що $d\sigma\cdot\cos\gamma = dxdy$. Аналогічно

$$d\sigma\cdot\cos\alpha = dydz, \quad d\sigma\cdot\cos\beta = dzdx.$$

Тому поверхневі інтеграли 2-го роду записують також у вигляді

$$I = \iint_{\Sigma}(\vec{F},\vec{n})d\sigma = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Оскільки поверхневий інтеграл 2-го роду виражається через поверхневий інтеграл 1-го роду по гладкій поверхні $\Sigma$ від неперервної функції

$$(\vec{F},\vec{n}) = P(x,y,z)\cos\alpha(x,y,z) +$$
$$+Q(x,y,z)\cos\beta(x,y,z) + R(x,y,z)\cos\gamma(x,y,z),$$

то він існує і має властивості, аналогічні властивостям поверхневого інтеграла 1-го роду.

Отримаємо формули обчислення поверхневого інтеграла 2-го роду. Нехай[2]

$$\Sigma:\ \vec{r} = \vec{r}(u,v) \quad \big((u,v)\in D\big),$$

$$\vec{n} = \{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\} = \pm\frac{\{A;B;C\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{\{A;B;C\}}{\sqrt{EF-G^2}}$$

– орт орієнтації поверхні $\Sigma$ (знак залежить від вибору сторони поверхні). Тоді

$$\iint_{\Sigma}(\vec{F},\vec{n})d\sigma = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$

$$= \iint_{D}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\sqrt{EG-F^2}\,dudv =$$

$$= \pm\iint_{D}(PA+QB+RC)dudv,$$

де

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix},$$

---

[1] Площа проекції плоскої фігури на деяку площину дорівнює площі фігури, помноженій на косинус кута між нормалями до площини проекції та площини, у якій лежить проектована фігура.

[2] Див. с. 73.

$$C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}.$$

Якщо поверхня $\Sigma$ задана рівнянням $z=z(x,y)$ $\left((x,y)\in D\right)$, то

$$A=\frac{D(y,z)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ z'_x & z'_y \end{vmatrix}=-z'_x,\quad B=\frac{D(z,x)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} z'_x & z'_y \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-z'_y,$$

$$C=\frac{D(x,y)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1,\quad \vec{n}=\pm\frac{\{-z'_x;-z'_y;1\}}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},$$

і формула обчислення має вигляд

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\pm\iint_{D}(-Pz'_x-Qz'_y+R)dxdy,$$

причому знак "+" обирають у випадку $\cos\gamma>0$, а знак "−" – у випадку $\cos\gamma<0$ (де $\gamma$ – кут між ортом орієнтації $\vec{n}$ і додатним напрямом осі $Oz$).

Якщо $\vec{F}=\{0;0;R(x,y,z)\}$, то

$$\iint_{\Sigma}(\vec{F},\vec{n})d\sigma=\iint_{\Sigma}Rdxdy=\left[\Sigma: z=z(x,y),(x,y)\in D\right]=$$

$$=\pm\iint_{D}R(x,y,z(x,y))dxdy.$$

Якщо двостороння поверхня $\Sigma$ кусково-гладка: $\Sigma=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\Sigma_i$ ($\Sigma_i$ – гладка поверхня), векторна функція визначена і неперервна у кожній точці $\Sigma$, то

$$\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{m}\iint_{\Sigma_i}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy,$$

причому орієнтації поверхонь $\Sigma_i$ узгоджені з орієнтацією поверхні $\Sigma$. У випадку замкненої поверхні $\Sigma$ поверхневий інтеграл 2-го роду позначають символом $\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$ і вказують орієнтацію поверхні $\Sigma$.

## Фізичний зміст поверхневого інтеграла 2-го роду

Поверхневий інтеграл 2-го роду $I = \iint\limits_{\Sigma}(\vec{F}, \vec{n})d\sigma$ називають також *потоком вектора* (*векторного поля*) $\vec{F}$ через вибрану сторону поверхні $\Sigma$ і позначають символом

$$\Pi_{\Sigma}(\vec{F}) \overset{\text{def}}{=} \iint\limits_{\Sigma}(\vec{F}, \vec{n})d\sigma .$$

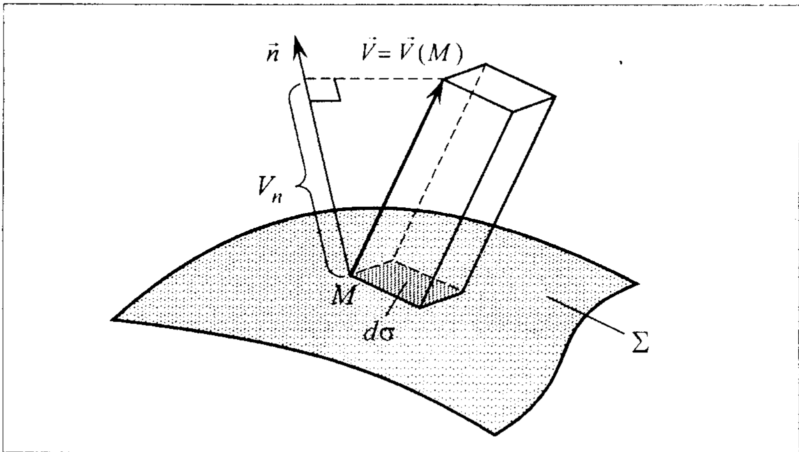



**Рис. 57.** Фізичний зміст поверхневого інтеграла 2-го роду

З'ясуємо походження терміну "потік". Нехай $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$ – стаціонарне поле швидкостей рухомої рідини (рис. 57). Знайдемо об'єм рідини, який протікає через вибрану сторону поверхні $\Sigma$ за одиницю часу. Із рис. 57 випливає, що об'єм рідини, який протікає за одиницю часу через елементарну площадку площею $d\sigma$ (*елементарний* потік рідини) дорівнює об'єму похилого циліндра з площею основи $d\sigma$ і твірною $|\vec{V}|$: $d\Pi = V_n d\sigma$, де $V_n = (\vec{V}, \vec{n})$ – висота похилого циліндра. Таким чином,

$$\Pi_{\Sigma}(\vec{V}) = \iint\limits_{\Sigma} d\Pi = \iint\limits_{\Sigma}(\vec{V}, \vec{n})d\sigma$$

– потік векторного поля $\vec{V}=\vec{V}(x,y,z)$ чисельно дорівнює об'єму рідини, який протікає через вибрану сторону поверхні $\Sigma$ за одиницю часу.

Залежно від фізичного змісту векторного поля можна говорити про потік електричного поля, потік магнітного поля тощо.

Розглянемо приклади.

1. Обчислимо інтеграл $I=\oiint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$, якщо $\Sigma$ – зовнішня сторона повної поверхні циліндра (рис. 58) $x^2+y^2\le a^2$, $0\le z\le h$.

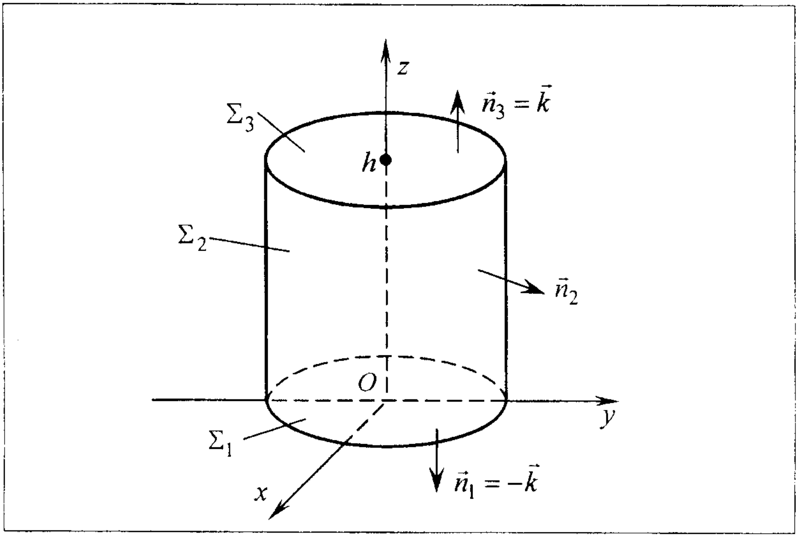



**Рис. 58.** Приклад 1

Очевидно, $I=\oiint\limits_{\Sigma}(\vec{r},\vec{n})d\sigma$, де $\vec{r}=\{x;y;z\}$. Ураховуючи властивість адитивності поверхневого інтеграла, маємо $I=\sum\limits_{i=1}^{3}\iint\limits_{\Sigma_i}(\vec{r},\vec{n}_i)d\sigma$.

Знайдемо інтеграли по $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$. Маємо

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(\vec{r},\vec{n}_1)d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_1}(\vec{r},-\vec{k})d\sigma = -\iint\limits_{\Sigma_1} z\,d\sigma = 0,$$

оскільки на поверхні $\Sigma_1$ $z = 0$;

$$\iint\limits_{\Sigma_3}(\vec{r},\vec{n}_3)d = \iint\limits_{\Sigma_3}(\vec{r},\vec{k})d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_3} z\,d\sigma = hS(\Sigma_3) = \pi a^2 h,$$

оскільки $z = h$ на поверхні $\Sigma_3$ ($(\vec{r},\vec{n}_3) = h$ на $\Sigma_3$).

Із рівняння поверхні $\Sigma_2 : x^2 + y^2 = a^2$ знайдемо

$$\vec{N} = \pm\{2x; 2y; 0\} \text{ – вектор нормалі до } \Sigma_2,$$

$$\vec{n}_2 = \frac{\{2x; 2y; 0\}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{\{x; y; 0\}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left\{\frac{x}{a}; \frac{y}{a}; 0\right\} \quad \big((x, y, z) \in \Sigma_2\big).$$

Тому

$$\iint\limits_{\Sigma_2}(\vec{r},\vec{n}_2)d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_2}\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a}\right)d\sigma = a\iint\limits_{\Sigma_2} d\sigma = aS(\Sigma_2) =$$

$$= a \cdot 2\pi a h = 2\pi a^2$$

($(\vec{r},\vec{n}_2) = a$ на $\Sigma_2$).

Отже, $I = \pi a^2 h + 0 + 2\pi a^2 h = 3\pi a^2 h$.

2. Знайдемо потік $\Pi_\Sigma(\vec{F})$ кулонівського поля (див. с. 11)

$$\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \left(\vec{r} = \{x; y; z\}, \quad r = |\vec{r}|\right)$$

у випадках:

а) $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (зовнішня сторона сфери);

б) $\Sigma : x^2 + y^2 = a^2$, $z = \pm h$ (зовнішня сторона повної поверхні циліндра);

в) $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(0 < z \le a)$ $(0 \le \gamma = (\widehat{\vec{n}, Oz}) < \pi/2)$;

г) $\Sigma : x^2 + y^2 + (z - h)^2 = a^2$ $(0 < a < h)$ (зовнішня сторона сфери);

д) $\Sigma : x^2 + y^2 = z + 1$, $z = 1$ (зовнішня сторона повної поверхні параболоїда).

□ а) Вектор нормалі $\vec{N}$ до $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$ (рис. 59) має вигляд $\vec{N}=\pm\{2x; 2y; 2z\}$. Тому

$$\vec{n}=\frac{\{2x;2y;2z\}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}=\left\{\frac{x}{r};\frac{y}{r};\frac{z}{r}\right\}=\frac{\vec{r}}{r}=\frac{\vec{r}}{a}\qquad ((x,y,z)\in\Sigma),$$

$$\Pi_\Sigma(\vec{F})=\oiint\limits_\Sigma(\vec{F},\vec{n})d\sigma=\oiint\limits_\Sigma\left(\frac{\vec{r}}{r^3},\frac{\vec{r}}{r}\right)d\sigma=$$

$$=\oiint\limits_\Sigma\frac{r^2}{r^4}d\sigma=\oiint\limits_\Sigma\frac{1}{r^2}d\sigma=\frac{1}{a^2}\oiint\limits_\Sigma d\sigma=\frac{1}{a^2}\cdot 4\pi a^2=4\pi.$$

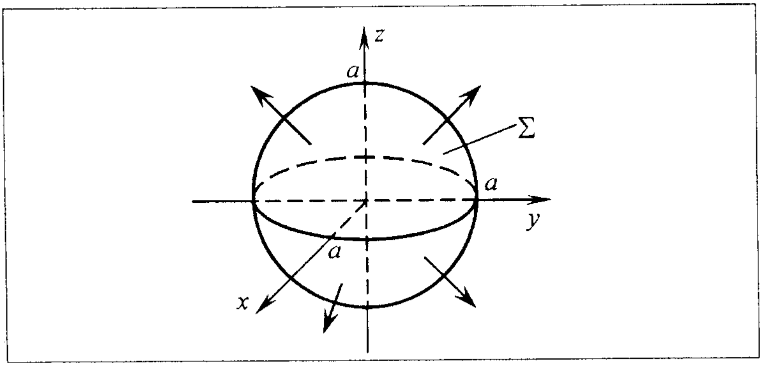



**Рис. 59.** Приклад 2 а)

б) $\Sigma$ – кусково-гладка поверхня. Тому (рис. 60)

$$\Pi_\Sigma(\vec{F})=\Pi_{\Sigma_1}(\vec{F})+\Pi_{\Sigma_2}(\vec{F})+\Pi_{\Sigma_3}(\vec{F}).$$

Маємо

$$\Pi_{\Sigma_1}(\vec{F})=\iint\limits_{\Sigma_1}\left(\frac{\vec{r}}{r^3},\vec{n}_1\right)d\sigma=-\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{z}{r^3}d\sigma=-\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{-h\,dxdy}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}=$$

$$=\left[\text{ПСК}:\ \begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}\right]=h\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\frac{\rho d\rho}{(\rho^2+h^2)^{3/2}}=$$

$$=\pi h\int\limits_0^a\frac{d(\rho^2+h^2)}{(\rho^2+h^2)^{3/2}}=-2\pi h(\rho^2+h^2)^{-1/2}\Big|_0^a=2\pi-\frac{2\pi h}{\sqrt{a^2+h^2}};$$

$$\Pi_{\Sigma_3}(\vec{F}) = \iint\limits_{\Sigma_3}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}, \vec{n}_3\right)d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_3}\frac{z}{r^3}\,d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_1}\frac{h\,dxdy}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}} =$$

$$= 2\pi - \frac{2\pi h}{\sqrt{a^2+h^2}},$$

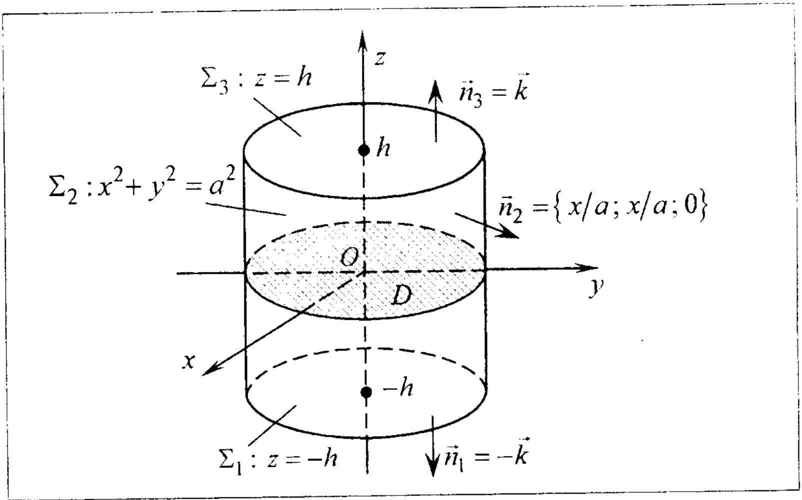



**Рис. 60.** Приклад 2 б)

$$\Pi_{\Sigma_2}(\vec{F}) = \iint\limits_{\Sigma_2}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}, \vec{n}_2\right)d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_2}\frac{x^2+y^2}{ar^3}\,d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_2}\frac{a^2}{a(a^2+z^2)^{3/2}}\,d\sigma =$$

$$= a\left(\iint\limits_{\Sigma_2'}\frac{d\sigma}{(a^2+z^2)^{3/2}} + \iint\limits_{\Sigma_2''}\frac{d\sigma}{(a^2+z^2)^{3/2}}\right),$$

де $\Sigma_2' : x = \sqrt{a^2 - y^2}$, $\Sigma_2'' : x = -\sqrt{a^2 - y^2}$, $-a \le y \le a$, $-h \le z \le h$ (рис. 61). Оскільки змінна $x$ не входить у підінтегральний вираз, то $\Pi_{\Sigma_2}(\vec{F}) = 2a\iint\limits_{\Sigma_2'}\frac{d\sigma}{(a^2+z^2)^{3/2}}$. Маємо

$$d\sigma = \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\,dydz = \frac{a\,dydz}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

$$\Pi_{\Sigma_2}(\vec{F}) = 2a\int\limits_{-a}^{a} dy \int\limits_{-h}^{h} \frac{a\,dy\,dz}{\sqrt{a^2 - y^2}\,(a^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$= 8a^2\int\limits_0^a \frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}\int\limits_0^h \frac{dz}{(a^2+z^2)^{3/2}} = 8a^2\cdot\frac{\pi}{2}\int\limits_0^h \frac{dz}{(a^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$= \begin{bmatrix} z = a\,\mathrm{tg}\,t \\ dz = \dfrac{a\,dt}{\cos^2 t} \end{bmatrix} = 4\pi a^2\cdot\frac{1}{a^2}\int\limits_0^{\mathrm{arctg}(h/a)} \cos t\,dt = 4\pi\sin t\Big|_0^{\mathrm{arctg}(h/a)} =$$

$$= 4\pi\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{h}{a}\right) = 4\pi\frac{\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\dfrac{h}{a}\right)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\left(\mathrm{arctg}\dfrac{h}{a}\right)}} = \frac{4\pi h}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

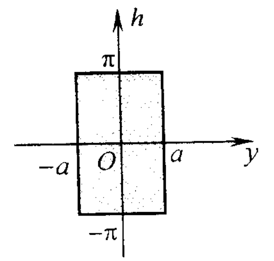



**Рис. 61.** Множина $|y| \le a$, $|z| \le h$

Отже, $\Pi_\Sigma(\vec{F}) = 4\pi - \dfrac{4\pi h}{\sqrt{a^2+h^2}} + \dfrac{4\pi h}{\sqrt{a^2+h^2}} = 4\pi$.

в) Маємо (рис. 62):

$$\Pi_\Sigma(\vec{F}) = \iint\limits_\Sigma \left(\frac{\vec{r}}{r^3}, \frac{\vec{r}}{a}\right) d\sigma = \iint\limits_\Sigma \frac{a^2}{a^4}\,d\sigma = \frac{1}{a^2}S(\Sigma) = \frac{1}{a^2}2\pi a^2 = 2\pi.$$

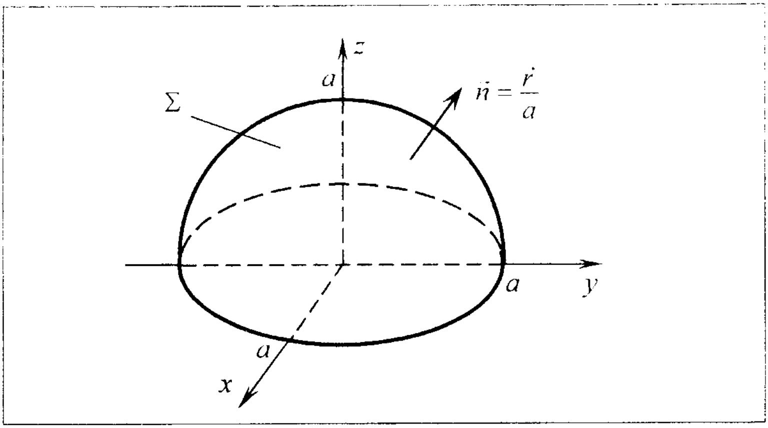



**Рис. 62.** Приклад 2 в)

г) Знайдемо орт $\vec{n}$ орієнтації поверхні $\Sigma$ (рис. 63). Маємо

$$x^2 + y^2 + (z-h)^2 = a^2,$$

$$\vec{N} = \pm\{2x; 2y; 2(z-h)\} \text{ – вектор нормалі до } \Sigma,$$

$$\vec{n} = \pm\frac{\{2x; 2y; 2(z-h)\}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4(z-h)^2}} = \pm\frac{\{x; y; z-h\}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} =$$

$$= \pm\left\{\frac{x}{a}; \frac{y}{a}; \frac{z-h}{a}\right\} \quad \big((x, y, z) \in \Sigma\big).$$

Оскільки на верхній півсфері ($z > h$) виконується $\cos\gamma > 0$, а на нижній ($z < h$) – $\cos\gamma < 0$, то орт орієнтації має вигляд

$$\vec{n} = \left\{\frac{x}{a}; \frac{y}{a}; \frac{z-h}{a}\right\} \quad \big((x, y, z) \in \Sigma\big).$$

Тоді

$$\Pi_\Sigma(\vec{F}) = \oiint\limits_\Sigma \left(\frac{\vec{r}}{r^3}, \vec{n}\right) d\sigma = \oiint\limits_\Sigma \frac{x^2 + y^2 + z^2 - zh}{ar^3} d\sigma.$$

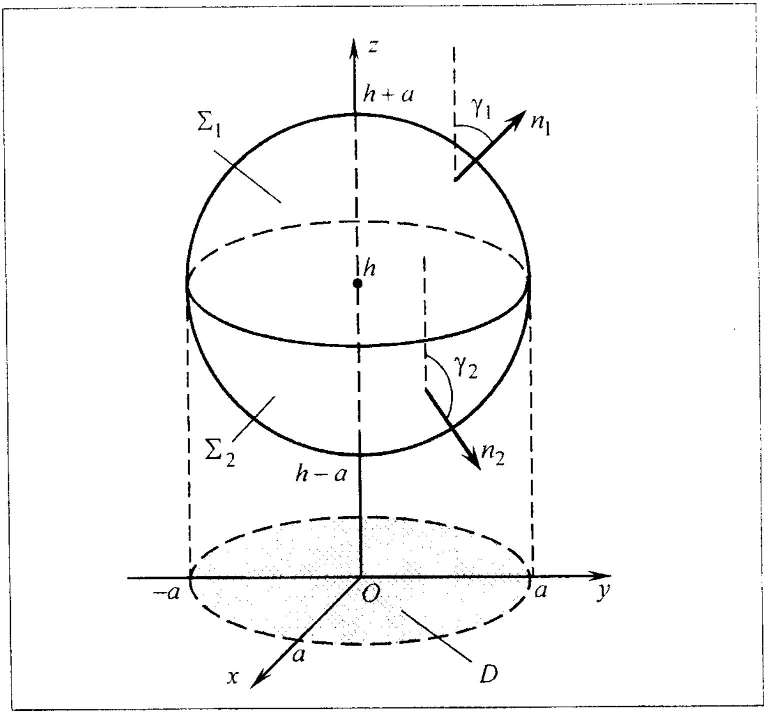



**Рис. 63.** Приклад 2 г)

На сфері $\Sigma$ виконуються рівності

$$x^2+y^2+z^2=2zh+a^2-h^2,$$

$$r^3=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}=(2zh+a^2-h^2)^{3/2},$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2-zh}{ar^3}=\frac{zh+a^2-h^2}{a(2zh+a^2-h^2)^{3/2}}.$$

Верхня півсфера

$$\Sigma_1 : z=h+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\quad (\cos\gamma_1>0)$$

і нижня півсфера

$$\Sigma_1 : z=h-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\quad (\cos\gamma_2<0)$$

$\left( d\sigma = \dfrac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right)$ проектуються на площину $xOy$ в круг $D: x^2 + y^2 \le a^2$. Тому

$$\Pi_\Sigma(\vec{F}) = \Pi_{\Sigma_1}(\vec{F}) + \Pi_{\Sigma_2}(\vec{F}) =$$

$$= \iint\limits_D \frac{h^2 + h\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + a^2 - h^2}{a\left(2h^2 + 2h\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + a^2 - h^2\right)^{3/2}} \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} -$$

$$- \iint\limits_D \frac{h^2 - h\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + a^2 - h^2}{a\left(2h^2 - 2h\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + a^2 - h^2\right)^{3/2}} \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$= \iint\limits_D \frac{h\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + a^2}{a\left(h^2 + a^2 + 2h\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right)^{3/2}} \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} +$$

$$+ \iint\limits_D \frac{h\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - a^2}{a\left(h^2 + a^2 - 2h\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right)^{3/2}} \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = [\text{ПСК}] =$$

$$(h_0 = h^2 + a^2)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \int_0^a \frac{h\sqrt{a^2 - r^2} + a^2}{\left(h_0 + 2h\sqrt{a^2 - r^2}\right)^{3/2}} \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \right.$$

$$\left. + \int_0^a \frac{h\sqrt{a^2 - r^2} - a^2}{\left(h_0 - 2h\sqrt{a^2 - r^2}\right)^{3/2}} \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right] = \left[ \begin{array}{c} \sqrt{a^2 - r^2} = t \\ \dfrac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -dt \end{array} \right] =$$

$$= -2\pi \left[ \int_a^0 \frac{ht + a^2}{(h_0 + 2ht)^{3/2}} dt + \int_a^0 \frac{ht - a^2}{(h_0 - 2ht)^{3/2}} dt \right] =$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c} \text{заміна в 1-му інтегралі:} & \text{заміна в 2-му інтегралі:} \\ h_0 + 2ht = u, & h_0 - 2ht = v, \\ t = \dfrac{1}{2h}(u - h_0),\ \ dt = \dfrac{1}{2h} du & t = \dfrac{1}{2h}(h_0 - u),\ \ dt = -\dfrac{1}{2h} du \end{array} \right] =$$

$$=-\frac{2\pi}{2h}\left[\int\limits_{h_0+2ha}^{h_0}\frac{\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}h_0+a^2}{u^{3/2}}du+\int\limits_{h_0-2ha}^{h_0}\frac{\frac{1}{2}h_0-\frac{1}{2}v-a^2}{v^{3/2}}dv\right]=$$

$$=-\frac{\pi}{h}\left[\int\limits_{h_0+2ha}^{h_0}\left(\frac{1}{2}u^{-1/2}+\left(-\frac{h_0}{2}+a^2\right)u^{-3/2}\right)du+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{h_0-2ha}^{h_0}\left(\left(\frac{h_0}{2}-a^2\right)v^{-3/2}-\frac{1}{2}v^{-1/2}\right)dv\right]=$$

$$=-\frac{\pi}{h}\left[\left(\sqrt{u}-2\left(a^2-\frac{h_0}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{u}}\right)\Bigg|_{h_0+2ha}^{h_0}+\right.$$

$$\left.+\left(2\left(a^2-\frac{h_0}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{u}}-\sqrt{u}\right)\Bigg|_{h_0-2ha}^{h_0}\right]=$$

$$=-\frac{\pi}{h}\left[\sqrt{h^2+a^2}-2\cdot\frac{1}{2}\left(a^2-h^2\right)\frac{1}{\sqrt{h^2+a^2}}-\right.$$

$$-\left(h+a-2\cdot\frac{1}{2}(a^2-h^2)\frac{1}{h+a}\right)+$$

$$+2\cdot\frac{1}{2}\left(a^2-h^2\right)\frac{1}{\sqrt{h^2+a^2}}-\sqrt{h^2+a^2}-$$

$$\left.-\left(2\cdot\frac{1}{2}(a^2-h^2)\frac{1}{h-a}-(h-a)\right)\right]=0$$

(ураховано, що $h_0\pm 2ha=h^2+a^2\pm 2ha=(h\pm a)^2$ ).

д) Маємо (рис. 64): $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$ , $\Pi_\Sigma(\vec{F})=\Pi_{\Sigma_1}(\vec{F})+\Pi_{\Sigma_2}(\vec{F})$ ,

$$\Pi_{\Sigma_1}(\vec{F})=\iint\limits_{\Sigma_1}\left(\frac{\vec{r}}{r^3},\vec{k}\right)d\sigma=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{z}{r^3}d\sigma=$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}d\sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_1: z=1,\\ d\sigma=dxdy\end{bmatrix}=\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}d\sigma=$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{rdr}{(r^2+1)^{3/2}} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{d(r^2+1)}{(r^2+1)^{3/2}} =$$

$$= -2\pi (r^2+1)^{-1/2} \Big|_0^{\sqrt{2}} = -2\pi \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \right) = 2\pi - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

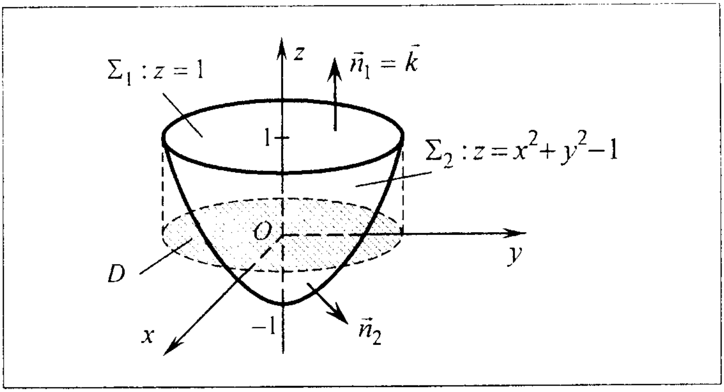



**Рис. 64.** Приклад 2 д)

Знайдемо орт орієнтації поверхні $\Sigma_2$. Із рівняння параболоїда $x^2 + y^2 - 1 - z = 0$ дістанемо вектор нормалі $\vec{N} = \pm\{2x; 2y; -1\}$. Оскільки орт орієнтації $\vec{n}_2$ утворює тупий кут з віссю $Oz$, то $\vec{n}_2 = \dfrac{\{2x; 2y; -1\}}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}$. Маємо

$$\Pi_{\Sigma_2}(\vec{F}) = \iint\limits_{\Sigma_2} \left( \frac{\vec{r}}{r^3}, \vec{n}_2 \right) d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{2x^2 + 2y^2 - z}{r^3 \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D} \frac{2x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2 + 1}{\left( x^2 + y^2 + \left( x^2 + y^2 - 1 \right)^2 \right)^{3/2}} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} \frac{(x^2 + y^2 + 1)dxdy}{\left( x^2 + y^2 + \left( x^2 + y^2 - 1 \right)^2 \right)^{3/2}} = [\text{ПСК}] =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{(r^2+1)rdr}{\left(r^2+r^4-2r^2+1\right)^{3/2}} = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{(r^2+1)rdr}{\left(r^4-r^2+1\right)^{3/2}} =$$

$$= \left[r^2 = t\right] = \pi \int_0^2 \frac{(t+1)dt}{\left(t^2-t+1\right)^{3/2}} =$$

$$= \pi \left[ \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{(2t-1)dt}{\left(t^2-t+1\right)^{3/2}} + \frac{3}{2} \int_0^2 \frac{dt}{\left(t^2-t+1\right)^{3/2}} \right] =$$

$$= \pi \left[ \frac{1}{2}(-2)\left(t^2-t+1\right)^{-1/2}\Big|_0^2 + \frac{3}{2} \int_0^2 \frac{d\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^{3/2}} \right] =$$

$$= \pi \left[ -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-1\right) + \frac{3}{2} \int_{-1/2}^{3/2} \frac{d\tau}{\left(\tau^2+\frac{3}{4}\right)^{3/2}} \right] = \left[ \begin{array}{c} \tau = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\varphi, \\ d\tau = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \end{array} \right] =$$

$$= \pi \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/3} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} d\varphi}{\cos^2\varphi \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} \frac{1}{\cos^3\varphi}} \right] =$$

$$= \pi \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \int_{-\pi/6}^{\pi/3} \cos\varphi \, d\varphi \right) = \pi \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\sin\varphi\Big|_{-\pi/6}^{\pi/3} \right) =$$

$$= \pi \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} + 1 \right) = \pi \left( 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) = 2\pi + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} .$$

Отже, $\Pi_{\Sigma}(\vec{F}) = 2\pi - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + 2\pi - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 4\pi$ .

3. Знайдемо потік вектора $\vec{F} = \vec{r} = \{x; y; z\}$ через зовнішню сторону тора $T_0$ (див. рис. 43). Параметричні рівняння тора $T_0$ мають вигляд

$$x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi,$$
$$y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi,$$
$$z=a\sin\psi,$$
$$(\varphi,\psi)\in D: 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\psi\le 2\pi\,,$$
$$(b>a>0).$$

Вектор нормалі до поверхні тора має вигляд $\vec{N}=\pm\{A;B;C\}$, де

$$A=\frac{D(y,z)}{D(\varphi,\psi)}=\begin{vmatrix} y'_\varphi & y'_\psi \\ z'_\varphi & z'_\psi \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} (b+a\cos\psi)\cos\varphi & -a\sin\psi\sin\varphi \\ 0 & a\cos\psi \end{vmatrix}=$$
$$=a(b+a\cos\psi)\cos\varphi\cos\psi\,,$$
$$B=\frac{D(z,x)}{D(\varphi,\psi)}=\begin{vmatrix} z'_\varphi & z'_\psi \\ x_\varphi & x'_\psi \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & a\cos\psi \\ -(b+a\cos\psi)\sin\varphi & -a\sin\psi\cos\varphi \end{vmatrix}=$$
$$=a(b+a\cos\psi)\sin\varphi\cos\psi\,,$$
$$C=\frac{D(x,y)}{D(\varphi,\psi)}=\begin{vmatrix} x'_\varphi & x'_\psi \\ y'_\varphi & y'_\psi \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -(b+a\cos\psi)\sin\varphi & -a\sin\psi\cos\varphi \\ (b+a\cos\psi)\cos\varphi & -a\sin\psi\sin\varphi \end{vmatrix}=$$
$$=a(b+a\cos\psi)\sin^2\varphi\sin\psi+a(b+a\cos\psi)\cos^2\varphi\sin\psi=$$
$$=a(b+a\cos\psi)\sin\psi\,.$$

Оскільки, наприклад, у точці $M_0$ на торі з кутовими координатами $\varphi=0$, $\psi=0$ орт орієнтації $\vec{n}$ має бути напрямлений уздовж додатної півосі $Ox$ (рис. 65), то у формулі для вектора $\vec{N}$ треба взяти знак "+":

$$\vec{N}=\{\,a(b+a\cos\psi)\cos\varphi\cos\psi;\,a(b+a\cos\psi)\sin\varphi\cos\psi;$$
$$a(b+a\cos\psi)\sin\psi\},$$
$$\vec{N}(0;0)=\{\,a(b+a);0;0\},\quad \vec{n}(0;0)=\vec{i}=\{\,1;0;0\}\,.$$

Тому

$$\Pi_{T_0}(\vec{r})=\iint\limits_{T_0} x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy=$$
$$=\iint\limits_D\Big[a(b+a\cos\psi)^2\cos^2\varphi\cos\psi+a(b+a\cos\psi)^2\sin^2\varphi\cos\psi+$$
$$+a^2(b+a\cos\psi)^2\sin^2\psi\Big]d\varphi d\psi=$$

$$= \iint\limits_D a(b + a\cos\psi)(b\cos\psi + a\cos^2\psi + a\sin^2\psi)d\varphi d\psi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\pi} a(b + a\cos\psi)(b\cos\psi + a)d\psi =$$

$$= 2\pi a \int\limits_0^{2\pi} (b^2\cos\psi + ab + ab\cos^2\psi + a^2\cos\psi)d\psi =$$

$$= 2\pi a \cdot 3\pi ab = 6\pi^2 a^2 b\ .$$

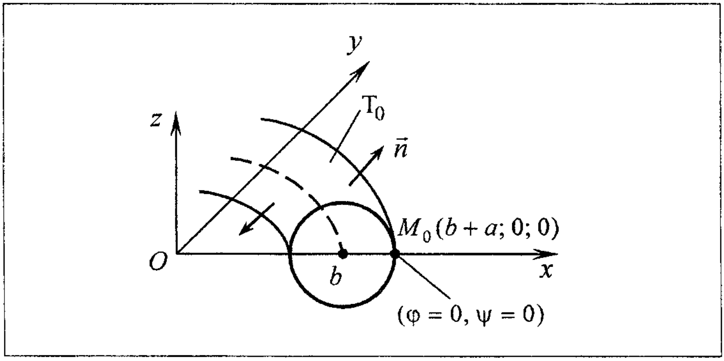



**Рис. 65.** Приклад 3

4. Знайдемо $\Pi_\Sigma(\vec{F})$, де $\vec{F} = \{x - y; x + y; z - x^2\}$, а $\Sigma$ – зовнішня сторона повної поверхні конуса (рис. 66)

$$\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le h\ .$$

Із рівняння поверхні $\Sigma_1$, записаного у вигляді $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ $(z \ge 0)$, знайдемо вектор нормалі $\vec{N} = \pm\{2x; 2y; -2z\}$ та орт орієнтації

$$\vec{n}_1 = \frac{\{2x; 2y; -2z\}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{\{x; y; -z\}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\{x; y; -z\}}{z\sqrt{2}}$$

$$\big((x, y, z) \in \Sigma_1\big).$$

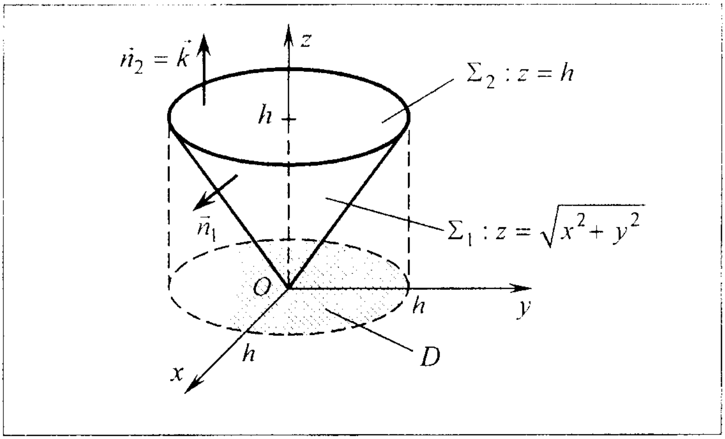



**Рис. 66.** Приклад 4

Маємо

$$\Pi_{\Sigma}(\vec{F}) = \oiint\limits_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \Pi_{\Sigma_1}(\vec{F}) + \Pi_{\Sigma_2}(\vec{F}),$$

$$\Pi_{\Sigma_1}(\vec{F}) = \iint\limits_{\Sigma_1} (\vec{F}, \vec{n}_1) d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{x^2 - xy + xy + y^2 - z^2 + zx^2}{z\sqrt{2}} d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{x^2 + y^2 - z^2 + zx^2}{z\sqrt{2}} d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{x^2}{\sqrt{2}} d\sigma =$$

$$= \left[ \begin{array}{c} \Sigma_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in D, \\ d\sigma = \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2} dxdy = \sqrt{2} dxdy \end{array} \right] = \iint\limits_{D} \frac{x^2}{\sqrt{2}} \sqrt{2} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} x^2 dxdy = [\text{ПСК}] = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r^2 \sin^2\varphi \, r dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi \int_0^h r^3 dr = \pi \frac{h^4}{4};$$

$$\Pi_{\Sigma_2}(\vec{F}) = \iint\limits_{\Sigma_2} (\vec{F}, \vec{n}_2) d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_2} (z - x^2) d\sigma = \left[ \begin{array}{c} \Sigma_2 : z = h, (x, y) \in D, \\ d\sigma = dxdy \end{array} \right] =$$

$$= \iint\limits_D (h - x^2) dxdy = h \iint\limits_D dxdy - \iint\limits_D x^2 dxdy = h \cdot \pi h^2 - \pi \frac{h^4}{4}.$$

Отже, $\Pi_\Sigma(\vec{F}) = \frac{\pi h^4}{4} + \pi h^3 - \frac{\pi h^4}{4} = \pi h^3$.

5. Знайдемо потік вектора $\vec{F} = \{0; 0; z^m\}$ ( $m = \text{const} > 0$ ) через зовнішню сторону поверхні $\Sigma$, яка складається з конуса

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (0 \le z \le 1/\sqrt{2})$$

і частини поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, що вирізається цим конусом (рис. 67).

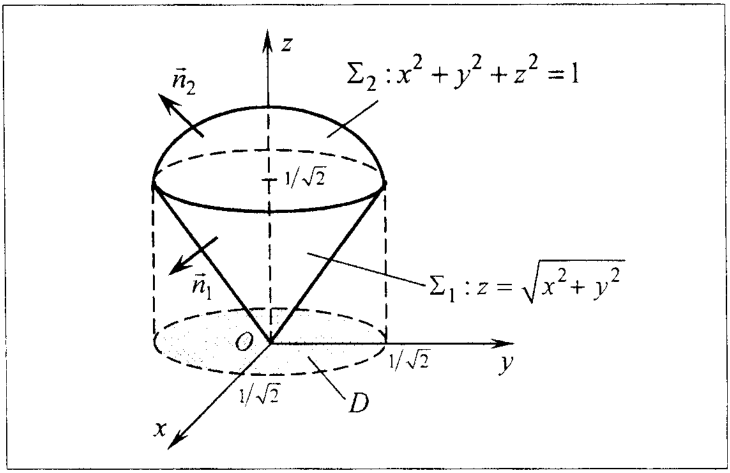



**Рис. 67.** Приклад 5

Маємо

$$\Pi_\Sigma(\vec{F}) = \oiint\limits_\Sigma (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \oiint\limits_\Sigma z^m \cos\gamma d\sigma = \oiint\limits_\Sigma z^m dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_1} z^m dxdy + \iint\limits_{\Sigma_2} z^m dxdy,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} z^m dxdy = \left[ \begin{array}{c} \vec{n}_1 \text{ утворює тупий кут} \\ \text{з віссю } Oz \end{array} \right] = -\iint\limits_D \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)^m dxdy =$$

$$=[\text{ПСК}]=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{1/\sqrt{2}}r^m\cdot rdr=-2\pi\int_0^{1/\sqrt{2}}r^{m+1}dr=$$

$$=-2\pi\frac{r^{m+2}}{m+2}\bigg|_0^{1/\sqrt{2}}=-\frac{2\pi}{m+2}\left(\frac{1}{2^{(m+2)/2}}-0\right)=-\frac{\pi}{(m+2)2^{m/2}},$$

$$\iint_{\Sigma_2}z^m dxdy=\begin{bmatrix}\vec{n}_2 \text{ утворює гострий кут} \\ \text{з віссю } Oz\end{bmatrix}=\iint_D\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^m dxdy=$$

$$=[\text{ПСК}]=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-r^2}\right)^m\cdot rdr=2\pi\int_0^{1/\sqrt{2}}(1-r^2)^{m/2}rdr=$$

$$=2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{1/\sqrt{2}}(1-r^2)^{m/2}d(1-r^2)=-\pi\frac{(1-r^2)^{m/2+1}}{m/2+1}\bigg|_0^{1/\sqrt{2}}=$$

$$=-\pi\cdot\frac{2}{m+2}\left(\frac{1}{2^{(m+2)/2}}-1\right)=-\frac{\pi}{(m+2)2^{m/2}}+\frac{2\pi}{m+2}.$$

Отже, $\Pi_\Sigma(\vec{F})=-\frac{\pi}{(m+2)2^{m/2}}-\frac{\pi}{(m+2)2^{m/2}}+\frac{2\pi}{m+2}=$

$$=\frac{2\pi}{m+2}-\frac{2\pi}{(m+2)2^{m/2}}.$$

При обчисленні $\Pi_\Sigma(\vec{F})$ використано формулу

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\begin{bmatrix}\Sigma:\ z=z(x,y), \\ (x,y,)\in D\end{bmatrix}=\pm\iint_\Sigma R\big(x,y,z(x,y)\big)dxdy.$$

# РОЗДІЛ 2

# ІНТЕГРАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ

- Теорема і формула Гріна; умови незалежності криволінійного інтеграла 2-го роду від вибору кривої інтегрування [1, § 4, 5, гл. 15], [2, § 3, 4, гл. 4], [3, § 1, 4, гл. 7], [4, § 17, гл. 3], [5, п. 47.6, 47.9, § 47], [6, п. 5.4, § 5, гл. 3], [7, § 3, гл. 16, § 3, гл. 15].
- Теорема і формула Гаусса–Остроградського [1, § 4, 5, гл. 15], [2, § 3, гл. 5], [3, § 3, 4, гл. 7], [4, § 12, гл. 3], [5, п. 52.3, § 52], [6, п. 5.4, § 5, гл. 3], [7, § 2, гл. 18].
- Теорема і формула Стокса [1, § 4, 5, гл. 15], [2, § 4, гл. 5], [3, § 2, 4, гл. 7], [4, § 16, гл. 3], [5, п. 52.4, § 52], [6, п. 5.4, § 5, гл. 3], [7, § 4, гл. 17].

Такою назвою об'єднують класичні теореми Гріна, Гаусса–Остроградського і Стокса, які, з одного боку, встановлюють зв'язок між різними типами інтегралів – криволінійними і подвійними, поверхневими і потрійними, поверхневими і криволінійними, а з другого боку, описують зв'язок між інтегральними та диференціальними операціями векторного аналізу.

## 2.1. Теорема і формула Гріна

На рис. 68 зображені обмежені однозв'язна[1] і $n$-зв'язна[2] множини з $\mathbb{R}^2$. Межу $\partial D = L_+$ множини $D$ називають *додатно орієнтованою* (відносно $D$), якщо обхід межі здійснюється так,

---

[1] Див. с. 64.

[2] У випадку $n$-зв'язної множини кажуть, що контури $L_2, \dots, L_n$ є межами *лакун* (порожнин, прогалин) $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{n-1}$, відповідно. Однозв'язна множина лакун не має.

що $D$ лишається зліва (при цьому обхід межі лакуни $\Lambda_i$ здійснюється за годинниковою стрілкою).

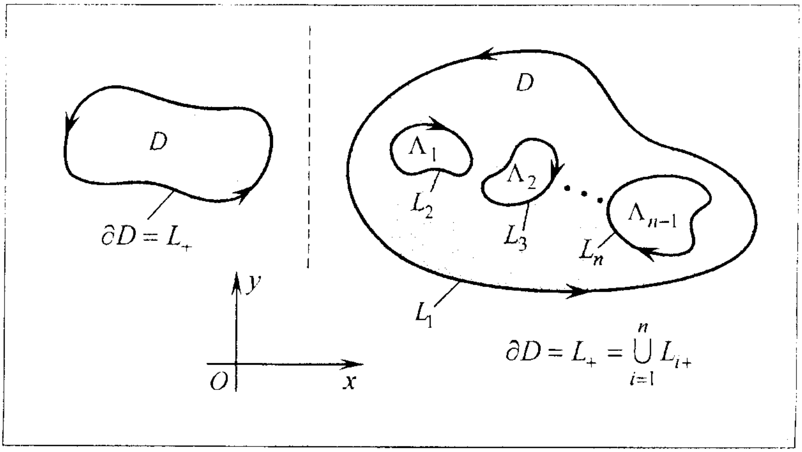



**Рис. 68.** Однозв'язна і $n$-зв'язна множини в $\mathbb{R}^2$

Нехай виконуються умови:

1) $D \subset \mathbb{R}^2$ – замкнена обмежена вимірна однозв'язна множина, $\partial D = L_+$ – кусково-гладкий контур;

2) $P = P(x,y), Q = Q(x,y), \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y} \in C_{\bar{D}}$.

Тоді справджується *формула Гріна*

$$\boxed{\oint\limits_{L_-} Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy}.$$

У випадку замкненої обмеженої вимірної $n$-зв'язної множини $D$ у лівій частині формули Гріна стоїть інтеграл по повній межі $L_+ = \bigcup\limits_{i=1}^{n} L_{i+}$ множини $D$:

$$\oint\limits_{L_+} Pdx + Qdy = \sum_{i=1}^{n} \oint\limits_{L_{i-}} Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy .$$

Доведемо формулу Гріна спочатку для однозв'язної множини $D$, правильної відносно осей $Ox$ і $Oy$ (тобто для множини, одночасно $y$- і $x$-циліндричної). Ураховуючи $y$-циліндричність множини $D$ (рис. 69), маємо

$$\oint_{L_+} Pdx + Qdy = \int_{AB} P(x,y)dx + \int_{BC} P(x,y)dx + \int_{CA} P(x,y)dx =$$

$$= \int_a^b P\big(x, y_1(x)\big)dx + \int_b^a P\big(x, y_2(x)\big)dx + 0 =$$

$$= -\int_a^b \Big[P\big(x, y_2(x)\big)dx - P\big(x, y_1(x)\big)\Big]dx = -\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy =$$

$$= -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy .$$

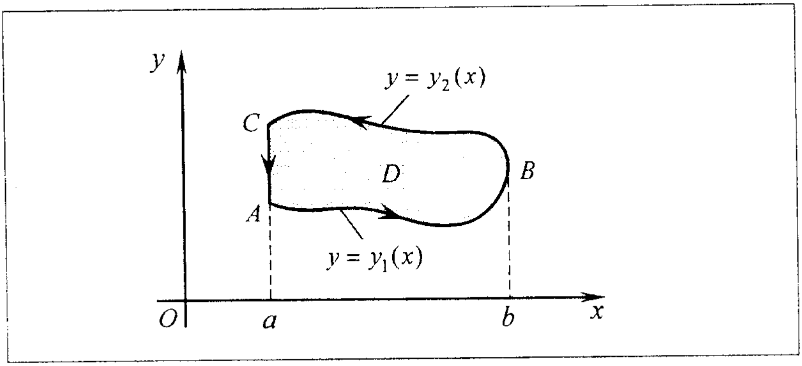



**Рис. 69.** Доведення теореми Гріна у випадку правильної множини

Ураховуючи $x$-циліндричність множини $D$, аналогічно дістанемо

$$\oint_{L_+} Q(x,y)dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy .$$

Додавши $\oint\limits_{L_+} P(x,y)dy$ і $\oint\limits_{L_+} Q(x,y)dy$, отримаємо формулу Гріна для правильної множини $D$.

Щоб довести формулу Гріна в загальному випадку, використаємо метод перерізів. Продемонструємо цей метод для множини, зображеної на рис. 70. Однозв'язна множина $D$ не є $x$-циліндричною. За допомогою перерізу $BK$ утворимо множини $D_1$ і $D_2$ – правильні відносно осей $Ox$ і $Oy$, причому $D = D_1 \cup D_2$. Позначимо

$$L_{1+} = BC \cup CK \cup KB = \partial D_1, \quad L_{2+} = KA \cup AB \cup BK = \partial D_2 .$$

Тоді

$$\iint\limits_{D_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_{L_{1+}} Pdx + Qdy = \int\limits_{BC} + \int\limits_{CK} + \int\limits_{KB} ,$$

$$\iint\limits_{D_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_{L_{2+}} Pdx + Qdy = \int\limits_{KA} + \int\limits_{AB} + \int\limits_{BK} .$$

Додавши почленно отримані рівності (при цьому враховуємо, що $\int\limits_{KB} + \int\limits_{BK} = 0$), дістанемо формулу Гріна для множини $D$, зображеної на рис. 70.

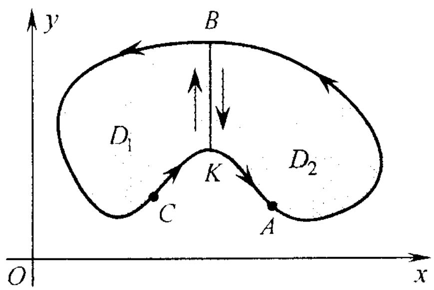



**Рис. 70.** Доведення формули Гріна для однозв'язної множини

Випадок многозв'язної множини розглянемо на прикладі двозв'язної множини, зображеної на рис. 71. За допомогою перерізу $AB$ утворимо однозв'язну множину $D'$ із межею

$$L'_+ = \partial D' = BA \cup AmA \cup AB \cup BnB .$$

Тоді

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_{D'}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{L'_+} Pdx+Qdy=$$

$$=\int_{BA}+\int_{AmA}+\int_{AB}+\int_{BnB}=\int_{AmA}+\int_{BnB}=\oint_{L_1}+\oint_{L_2}=\oint_{L_+} Pdx+Qdy\,.$$

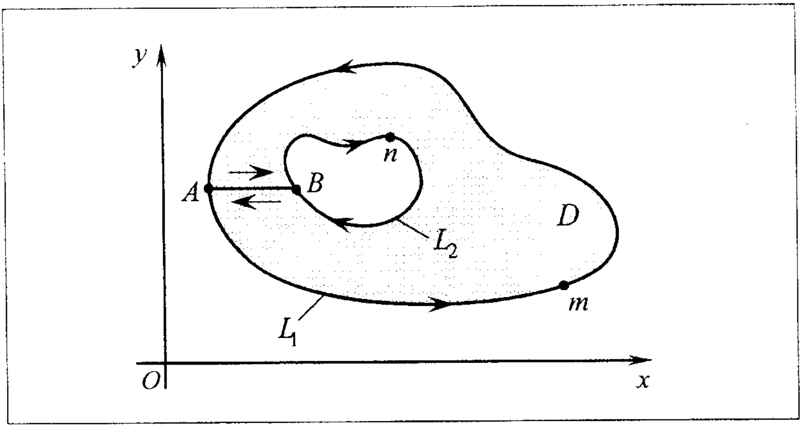



**Рис. 71.** Доведення формули Гріна для многозв'язної множини

Із формули Гріна випливає, що у випадку

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\equiv 1 \quad \big((x,y)\in D\big)$$

вона виражає площу (міру) $S(D)$ множини $D\subset\mathbb{R}^2$ через криволінійний інтеграл 2-го роду по додатно орієнтованій межі $L=\partial D$:

$$S(D)=\oint_{L_+} Pdx+Qdy\,.$$

Якщо вибрати, наприклад, $P=-\frac{1}{2}y$, $Q=\frac{1}{2}x$, то

$$\boxed{S(D)=\frac{1}{2}\oint_{L_+} xdy-ydx}\,.$$

Зауважимо, що з урахуванням означення криволінійного інтеграла 2-го роду (див. с. 41), формулу Гріна записують також у вигляді

$$\oint\limits_{L_+}(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\,dl=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

або

$$C_L(\vec{F})=\oint\limits_{L_+}(\vec{F},d\vec{l})=\oint\limits_{L_+}(\vec{F},\vec{\tau})dl=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

де $P$ і $Q$ – координати вектора $\vec{F}$, $\cos\alpha$ і $\cos\beta$ – координати орта орієнтації $\vec{\tau}$ кривої.

Розглянемо п р и к л а д и.

1. Обчислимо інтеграл

$$I=\oint\limits_{L}2ydx-3xdy$$

уздовж еліпса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ (рис. 72). Маємо

$$P=2y,\ Q=-3x,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-3,\ \frac{\partial P}{\partial y}=2\in C_D,$$

$$I=-\int\limits_{L_+}2ydx-3xdy=-\iint\limits_{D}(-3-2)dxdy=5\iint\limits_{D}dxdy=$$

$$=5\cdot S(D)=5\cdot\pi\cdot 2\cdot 3=30\pi$$

(застосована формула Гріна для однозв'язної множини).

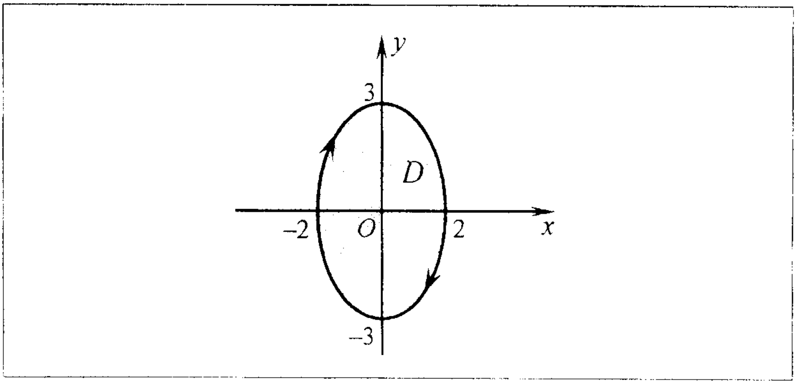



**Рис. 72.** Приклад 1

2. Обчислимо інтеграл

$$I=\oint_L (y^2-\sin(x^2))dx+(-x^5+y^6)dy$$

уздовж кола $x^2+y^2=1$ (рис. 73). Маємо

$$P=y^5-\sin(x^2),\ Q=-x^5+y^6,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-5x^4,\ \frac{\partial P}{\partial y}=5y^4\in C_D,$$

$$I=-\oint_{L_+}(y^2-\sin(x^2))dx+(-x^5+y^6)dy=$$

$$=-\iint_D(-5x^4-5y^4)dxdy=5\iint_D(x^4+y^4)dxdy=[\text{ПСК}]=$$

$$=5\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^5(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)dr=5\frac{r^6}{6}\Big|_0^a\int_0^{2\pi}(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)d\varphi=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\cos^4\varphi+\sin^4\varphi=(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^2-2\sin^2\varphi\cos^2\varphi=\\ =1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4\varphi)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\varphi\end{array}\right]=$$

$$=\frac{5}{6}a^6\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\varphi\right)d\varphi=\frac{5}{6}a^6\cdot\frac{3}{4}\cdot 2\pi=\frac{5}{4}\pi a^6$$

(застосована формула Гріна для однозв'язної множини).

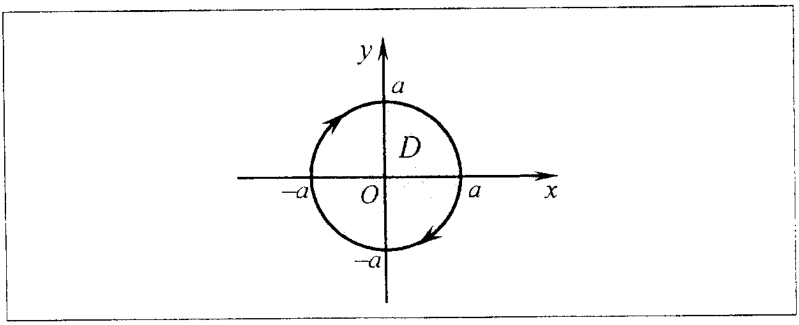



**Рис. 73.** Приклад 2

3. Інтеграл

$$I = \oint\limits_{L_+} (x^4 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy + \sin y)dy = 0$$

по будь-якій кусково-гладкій замкненій кривій $L_+$, оскільки (рис. 74):

$$P = x^4 + 2xy - y^2, \quad Q = x^2 - 2xy + \sin y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 2x - 2y \in C_{\overline{D}}$$

і за формулою Гріна для однозв'язної множини маємо

$$I = \iint\limits_D 0\,dxdy = 0$$

(див. також приклад 1 на с. 57).

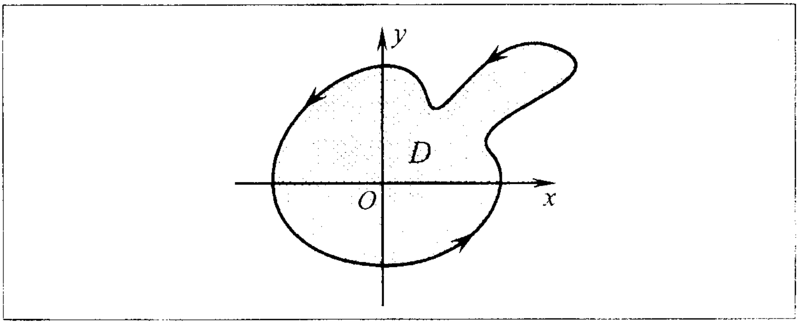



**Рис. 74.** Приклад 3

4. Обчислимо інтеграл $I = \oint\limits_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ для випадків, зображених на рис. 75.

Маємо

$$P = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{-x}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

(див. також приклад 3 на с. 58–61). Тому у випадку а) за формулою Гріна для однозв'язної множини $D$ маємо $I = \iint\limits_{D} 0\,dxdy = 0$.

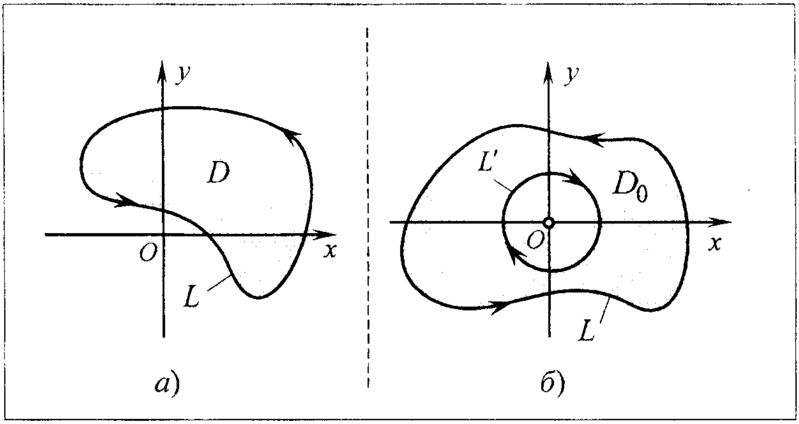



**Рис. 75.** Приклад 4

У випадку б) умова неперервності функцій $P, Q, \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}$ порушується в точці $O(0;0)$. Вилучимо точку $O$ з множини $D$, оточивши її колом $L'$ достатньо малого радіуса так, щоб у двозв'язній множині $D_0$ виконувалася умова $P, Q, \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y} \in C_{\bar{D}_0}$. Позначимо через $L_{0+}$ додатно орієнтовану межу $L_0 = L \cup L'$ області $D_0$. Тоді за формулою Гріна для двозв'язної області маємо

$$I = \oint\limits_{L_{0+}} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \oint\limits_{L} + \oint\limits_{L'} = \iint\limits_{D_0} 0\,dxdy = 0,$$

звідки

$$\oint\limits_{L} = \oint\limits_{L} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = -\oint\limits_{L'} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \begin{bmatrix} L' : x = a\cos t, y = a\sin t, \\ t_{\text{п}} = 2\pi, \ t_{\text{к}} = 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\int_{2\pi}^{0} \frac{a\sin t(-a\sin t) - a\cos t(a\cos t)}{a^2} dt = \frac{a^2}{a^2}\int_{0}^{2\pi} dt = 2\pi .$$

5. Обчислимо інтеграл $I = \oint_L \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$ для випадків, зображених на рис. 75. Маємо

$$P = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0) ,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y} .$$

Тому у випадку а) за формулою Гріна для однозв'язної множини $D$ отримаємо

$$I = \oint_L \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \iint_D 0\, dxdy = 0 .$$

У випадку б) умова неперервності функцій $P, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ порушується в точці $O(0;0)$. Застосовуючи формулу Гріна (як і в прикладі 4) до двозв'язної множини $D_0$, дістанемо

$$\oint_L = -\oint_{L'} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \left[ \begin{array}{c} L' : x = a\cos t,\ y = a\sin t, \\ t_{\text{п}} = 2\pi,\ t_{\text{к}} = 0 \end{array} \right] =$$

$$= -\int_{2\pi}^{0} \frac{a\cos t(-a\sin t) + a\sin t(a\cos t)}{a^2} dt = \frac{1}{a^2}\int_{0}^{2\pi} 0\, dt = 0 .$$

6. Знайдемо площу фігури $D$, обмеженої лемніскатою Бернуллі

$$L : (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (a = \text{const} > 0) .$$

Щоб знайти параметричні рівняння кривої $L$, скористаємося полярними координатами $r$ і $\varphi$ за формулами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ . Підставивши в рівняння для $L$, дістанемо

$$r^4 = a^2 r^2 \cos 2\varphi, \quad r^2 = a^2 \cos 2\varphi ,$$

звідки $\cos 2\varphi \geq 0$, а отже, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ і $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Дістаємо параметричні рівняння кривої $L$:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi, \\ y = a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi \end{cases} \left(-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}\right).$$

Крива має вигляд, зображений на рис. 76.

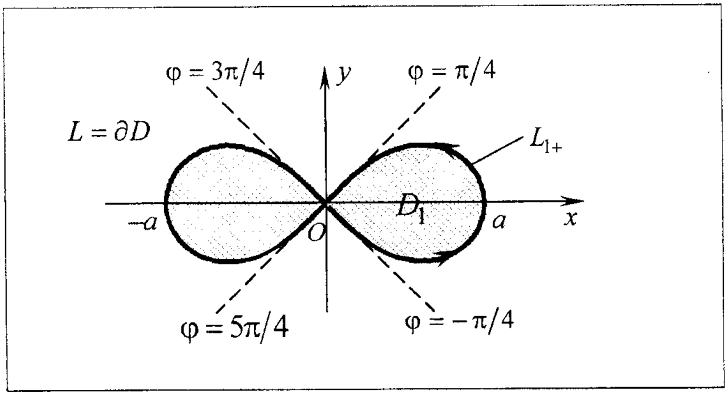



**Рис. 76.** Приклад 6

Ураховуючи симетрію фігури $D$, маємо $S(D) = 2S(D_1)$,

$$S(D_1) = \frac{1}{2}\oint_{L_{1+}} xdy - ydx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left[a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\left(\frac{-2a\sin 2\varphi}{2\sqrt{\cos 2\varphi}}\sin\varphi + a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\right) -\right.$$

$$\left. -a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\left(\frac{-2a\sin 2\varphi}{2\sqrt{\cos 2\varphi}}\cos\varphi - a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\right)\right]d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left[-\cos\varphi\sin 2\varphi\sin\varphi + \cos 2\varphi\cos^2\varphi + \right.$$

$$\left. + \sin\varphi\sin 2\varphi\cos\varphi + \cos 2\varphi\sin^2\varphi\right]d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} = \frac{a^2}{2}.$$

Тому $S(D) = 2 \cdot \frac{a^2}{2} = a^2$.

7. Знайдемо площу фігури $D$, обмеженої астроїдою (рис. 77)

$$L: x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \qquad (a = \text{const} > 0).$$

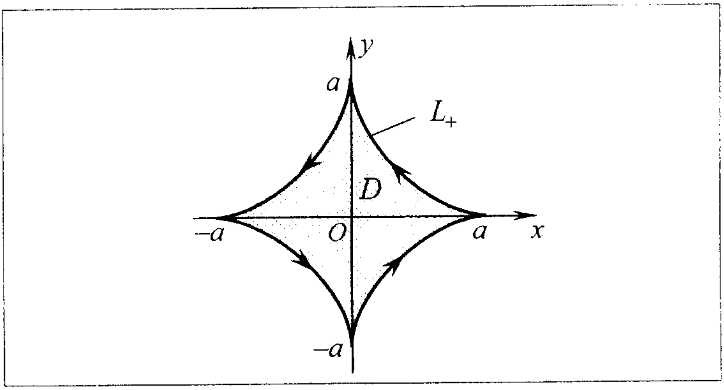



**Рис. 77.** Приклад 7

Скористаємося параметричними рівняннями астроїди:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

Тоді за формулою

$$S(D) = \frac{1}{2} \oint_{L_+} x dy - y dx$$

маємо

$$S(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ a\cos^3 \cdot 3a\sin^2 t \cos t - a\sin^3 \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t) \right] dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t \left( \cos^2 t + \sin^2 t \right) dt = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt = \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{3a^2}{16}\cdot 2\pi = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

8. Обчислимо інтеграл

$$I = \int_L (\sin x + y^2)\,dx + (\cos y + x)\,dy$$

уздовж кривої $L$ (рис. 78).

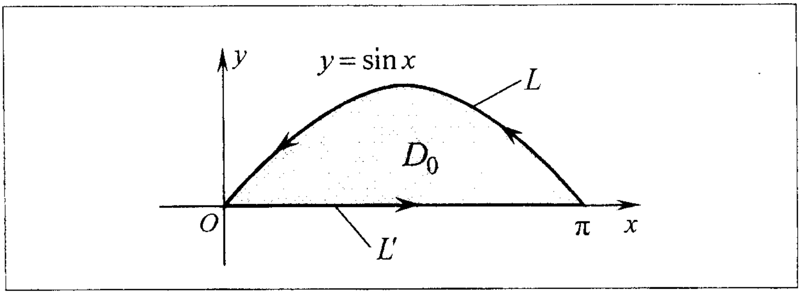



**Рис. 78.** Приклад 8

Щоб використати формулу Гріна, розглянемо замкнену криву $L_{0+} = L \cup L'$, яка обмежує однозв'язну множину $D_0$. Тоді

$$I = \oint_{L_{0+}} - \int_{L'} .$$

Маємо

$$P = \sin x + y^2, \quad Q = \cos y + x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 2y \in C_{D_0},$$

$$\oint_{L_{0+}} = \iint_{D_0}(1-2y)\,dxdy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x}(1-2y)\,dy = \int_0^{\pi}(y-y^2)\Big|_0^{\sin x} dx =$$

$$= \int_0^{\pi}(\sin x - \sin^2 x)\,dx = \int_0^{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)dx =$$

$$= \left(-\cos x - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} = 2 - \frac{\pi}{2},$$

$$\int\limits_{L'} = \left[ \begin{array}{c} L' : y = 0, \\ x_{\text{п}} = 0, \quad x_{\text{к}} = \pi \end{array} \right] = \int\limits_0^{\pi} \big( (\sin x + 0^2) + (\cos 0 + x) \cdot 0 \big) dx = 2 .$$

Тому $I = 2 - \frac{\pi}{2} - 2 = -\frac{\pi}{2}$.

9. Обчислимо інтеграл $I = \oint\limits_L (\vec{F}, \vec{\tau}) dl$ для випадків:

а) $\vec{F} = \vec{a} = \overrightarrow{\text{const}} = \{a_1; a_2\}$; б) $\vec{F} = \vec{r}$; в) $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3}$

$$(\vec{r} = \{x; y\}, \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2})$$

уздовж будь-якого кусково-гладкого контуру $L$ (рис. 79).

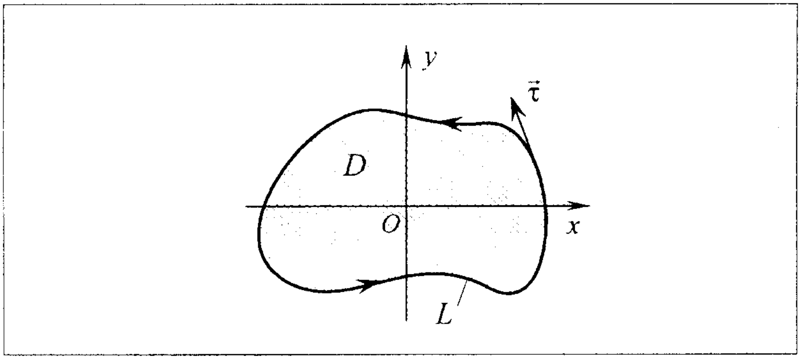



**Рис. 79.** Приклад 9

Маємо

а) $P = a_1$, $Q = a_2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0$. Тому

$$I = \oint\limits_L (\vec{a}, \vec{\tau}) dl = \iint\limits_D 0 dx dy = 0 .$$

б) $P = x$, $Q = y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0$. Отже,

$$I = \oint\limits_L (\vec{r}, \vec{\tau}) dl = \iint\limits_D 0 dx dy = 0 .$$

в) $P=\frac{x}{r^3},\ Q=\frac{y}{r^3}\quad (x^2+y^2\neq 0)$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-3yr^{-4}r'_x=-3yr^{-4}\,\frac{x}{r}=-\frac{3xy}{r^5},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-3xr^{-4}r'_y=-3xr^{-4}\,\frac{y}{r}=-\frac{3xy}{r^5}.$$

Умова неперервності функцій $P, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ порушується в точці $O(0;0)$. Вилучаючи точку $O(0;0)$ із множини $D$ (аналогічно прикладу 4 на с. 121) (див. рис. 75, *б*)) і використовуючи формулу Гріна для двозв'язної множини $D_0$, дістанемо

$$\iint_{D_0}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0,\quad \oint_L+\oint_{L'}=\iint_{D_0}0dxdy=0,$$

$$I=\oint_L\left(\frac{\vec{r}}{r^3},\vec{\tau}\right)dl=-\oint_{L'}\left(\frac{\vec{r}}{r^3},\vec{\tau}\right)dl=$$

$$=-\oint_{L'}\frac{xdx+ydy}{r^3}=\oint_{L'}d\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0.$$

10. Обчислимо інтеграл $I=\oint_L\cos(\widehat{\vec{r},\vec{\tau}})dl$ уздовж контуру $L$, зображеного на рис.75, *б*). Маємо

$$\cos(\widehat{\vec{r},\vec{\tau}})=\frac{\vec{r}\cdot\vec{\tau}}{|\vec{r}||\vec{\tau}|}=\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{\tau},$$

$$I=\oint_L\left(\frac{\vec{r}}{r},\vec{\tau}\right)dl,$$

$$P=\frac{x}{r},\quad Q=\frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-yr^{-2}r'_x=-yr^{-2}\,\frac{x}{r}=-\frac{xy}{r^3},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{xy}{r^3}$$

$$(x^2+y^2\neq 0),$$

$$I=\oint\limits_{L}\left(\frac{\vec{r}}{r},\vec{\tau}\right)dl=-\oint\limits_{L'}\left(\frac{\vec{r}}{r},\vec{\tau}\right)dl=$$

$$=-\oint\limits_{L'}\frac{xdx+ydy}{r}=-\oint\limits_{L'}d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=0\,.$$

Умови незалежності криволінійного інтеграла

$$\oint\limits_{L}\left(\vec{F},\vec{\tau}\right)dl=\oint\limits_{L}Pdx+Qdy$$

від вибору кривої інтегрування

Беручи до уваги методику інтегрування повних диференціалів (п. 1.3.3) і формулу Гріна, можна отримати таке твердження.

Нехай $D\subset\mathbb{R}^2$ – однозв'язна обмежена множина, $\vec{F}=\{P;Q\}$, $P=P(x,y)$, $Q=Q(x,y)\in C_D^1$. Тоді чотири твердження еквівалентні:

1) $\oint\limits_{L}Pdx+Qdy=0$ для будь-якого кусково-гладкого контуру $L\subset D$;

2) інтеграл $\int\limits_{L}Pdx+Qdy$ не залежить від вибору кусково-гладкої кривої $L$, яка сполучає точки $A,B\in D$;

3) існує однозначна (*первісна*, або *потенціальна*) функція $u=u(x,y)\in C_D^2$ така, що $du=Pdx+Qdy \Leftrightarrow \vec{F}=\operatorname{grad}u$ і

$$\int\limits_{AB}Pdx+Qdy=u(x,y)\Big|_A^B=u(B)-u(A)\,;$$

4) скрізь в області $D$ виконується умова $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Еквівалентність тверджень 3) і 4) встановлена на с. 52-53. Доведемо, що $4)\Rightarrow 1)\Rightarrow 2)\Rightarrow 3)$. Нехай виконується твердження 4). Тоді за формулою Гріна для будь-якого кусково-гладкого контуру $L$ і однозв'язної множини $D_0$ $(L=\partial D_0)$ маємо

$$\int\limits_{L_1} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D_0} 0dxdy = 0\,,$$

тобто твердження 1) виконується.

Нехай виконується твердження 1). Тоді (рис. 80) маємо $(L = AmBnA)$:

$$0 = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy = \int\limits_{AmB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BnA} Pdx + Qdy\,,$$

звідки $\int\limits_{AmB} Pdx + Qdy = -\int\limits_{BnA} Pdx + Qdy = \int\limits_{AnB} Pdx + Qdy$.

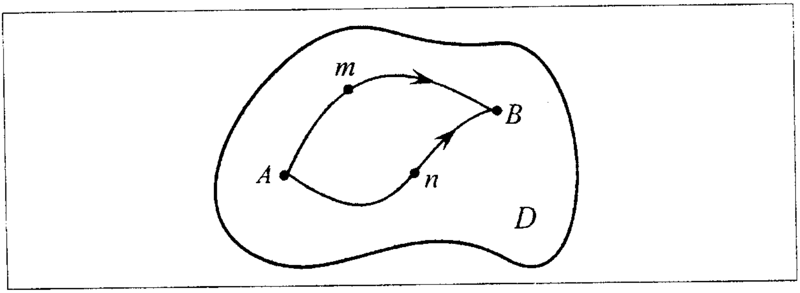



**Рис. 80.** Доведення $1 \Rightarrow 2$

Нехай виконується твердження 2). Покажемо, що функція

$$u = u(x,y) = \int\limits_{M_0M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

є потенціальною. Розглянемо точку $M'(x+\Delta x, y)$ (рис. 81). Тоді

$$\Delta_x u = u(x+\Delta x, y) - u(x,y) =$$

$$= \int\limits_{M_0M'} - \int\limits_{M_0M} = \int\limits_{MM'} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

(нагадаємо, що за припущенням інтеграл $\int\limits_{M_0M'}$ не залежить від вибору кривої, яка сполучає точки $M_0$ і $M'$) і

$$\Delta_x u = \left[ MM' : \begin{cases} x = t, \\ y = y \end{cases} \right] = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t,y)dt = P(\xi, y)\cdot \Delta x$$

(використана теорема про середнє значення для інтеграла Рімана). Тому

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(\xi,y)\cdot\Delta x}{\Delta x}=P(x,y).$$

Аналогічно можна показати, що $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$.

Отже, $du=Pdx+Qdy$, і твердження 3 виконується.

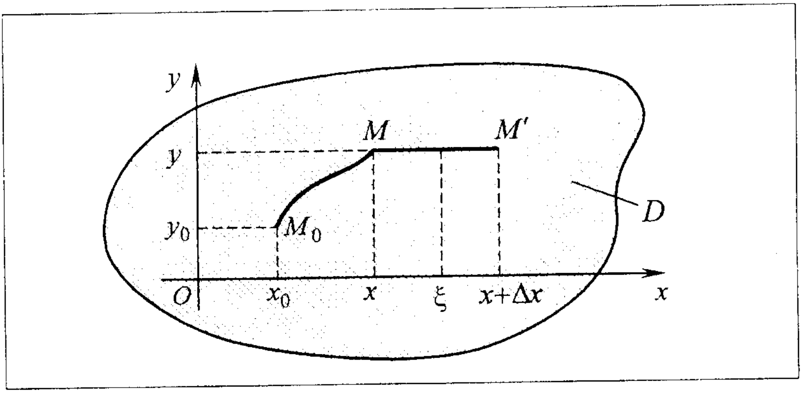



**Рис. 81.** Доведення $2\Rightarrow 3$

Таким чином, якщо виконуються твердження 1), 2) або 4), то потенціальну функцію можна побудувати за формулою

$$u=u(x,y)=\int\limits_{M_0M}P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\underset{\forall}{C},$$

де $M_0M$ – будь-яка кусково-гладка крива в $D$, яка сполучає фіксовану точку $M_0(x_0,y_0)\in D$ і змінну точку $M(x,y)\in D$. Формула Ньютона–Лейбніца

$$\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=u(B)-u(A)$$

доведена на с. 49, 50.

Зауваження 1. Нехай $P,Q\in C^1_D$, $D\subset\mathbb{R}^2$ – однозв'язна обмежена множина, $L\subset D$. Якщо диференціальний вираз $Pdx+Qdy$

можна подати у вигляді $Pdx + Qdy = P_1dx + Q_1dy + d\omega$, де $\omega = \omega(x, y)$, то $\oint\limits_L Pdx + Qdy = \oint\limits_L P_1dx + Q_1dy$, оскільки $\oint\limits_L d\omega = 0$.

Зауваження 2. У випадку, коли $D$ є обмеженою $n$-зв'язною множиною, еквівалентність умов 1–4 може порушуватися. Розглянемо, наприклад, тризв'язну множину $D$, яка має дві "лакуни", обмежені контурами $L_2$ і $L_3$ (рис. 82).

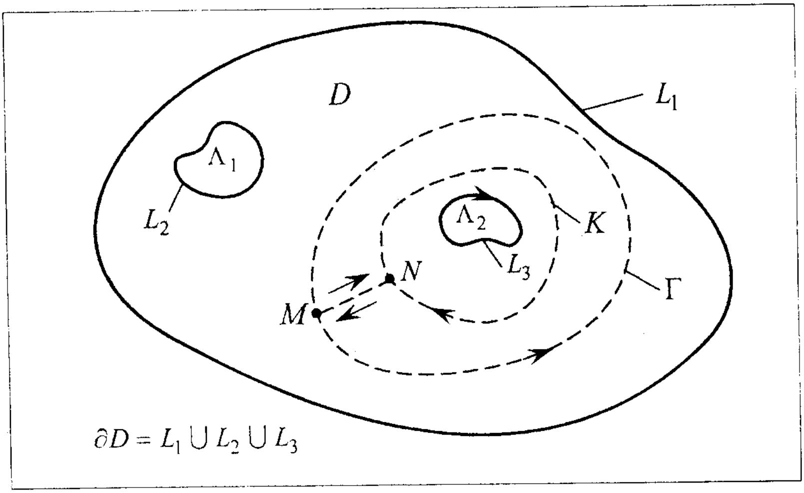



**Рис. 82.** Приклад тризв'язної множини

Нехай $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ $\forall (x, y) \in D$. Якщо $\Gamma$ – контур, який охоплює дану лакуну, то формулу Гріна застосувати не можна, і в загальному випадку

$$\oint\limits_{\Gamma_+} (\vec{F}, \vec{\tau})dl = \oint\limits_{\Gamma_+} Pdx + Qdy \neq 0$$

(контур $\Gamma_+$ охоплює лакуну $\Lambda_2$ з обходом проти годинникової стрілки). Покажемо, що величина цього інтеграла є сталою для даної лакуни і даного векторного поля $\vec{F} = \{P; Q\}$. Нехай $K$ –

ще один контур, який охоплює лакуну. Проведемо розріз $MN$ і розглянемо контур $C=\Gamma_+\bigcup MN\bigcup K_-\bigcup NM$. Оскільки контур $C$ не охоплює жодної з лакун, то $\oint\limits_C Pdx+Qdy=0$. Звідси

$$\oint\limits_{\Gamma_+}+\int\limits_{MN}+\oint\limits_{K_-}+\int\limits_{NM}=0,\quad \oint\limits_{\Gamma_+}+\oint\limits_{K_-}=0,$$

оскільки $\int\limits_{MN}+\int\limits_{NM}=0$, тому $\oint\limits_{\Gamma_+}Pdx+Qdy=\oint\limits_{K_+}Pdx+Qdy$.

Отже, кожній лакуні $\Lambda$ множини $D$ відповідає деяке число

$$\gamma=\gamma(\Lambda,\vec{F})=\oint\limits_{\Gamma_+}Pdx+Qdy,$$

де $\Gamma_+$ – будь-який контур, що охоплює дану лакуну. Це число, яке, зокрема, може дорівнювати нулю, називають *циклічною сталою* даної лакуни. Наприклад, для векторних полів

$$\vec{F}_1=\left\{\frac{y}{x^2+y^2};\frac{-x}{x^2+y^2}\right\}\ \text{і}\ \vec{F}_2=\left\{\frac{x}{x^2+y^2};\frac{y}{x^2+y^2}\right\}$$

маємо

$$\gamma_1=\gamma(\Lambda,\vec{F}_1)=-2\pi,\ \gamma_2=\gamma(\Lambda,\vec{F}_2)=0$$

(у цьому випадку $\Lambda=\{(0;0)\}$).

Нехай $\gamma_1=\gamma_1(\Lambda_1,\vec{F})$, $\gamma_2=\gamma_2(\Lambda_2,\vec{F})$, ..., $\gamma_{n-1}=\gamma_{n-1}(\Lambda_{n-1},\vec{F})$ – циклічні сталі лакун $n$-зв'язної області $D$ (див. рис. 68), і контур $L$ обходить лакуни $\Lambda_1$, ..., $\Lambda_{n-1}$ відповідно $m_1$, ..., $m_{n-1}$ разів ($m_i$ – алгебраїчна сума орієнтованих обходів – кількість обходів проти годинникової стрілки мінус кількість обходів за годинниковою стрілкою). Тоді у випадку виконання умови

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\ \forall(x,y)\in D$$

маємо

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy=\sum_{i=1}^{n-1}m_i\gamma_i,\quad \oint\limits_{L_1}Pdx+Qdy=\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i,$$

де $L_1$ – "зовнішня" межа множини $D$ (див. рис. 68).

## 2.2. Теорема і формула Гаусса–Остроградського

На рис. 83 зображені обмежені *об'ємно однозв'язна* та *об'ємно двозв'язна* множини з $\mathbb{R}^3$.

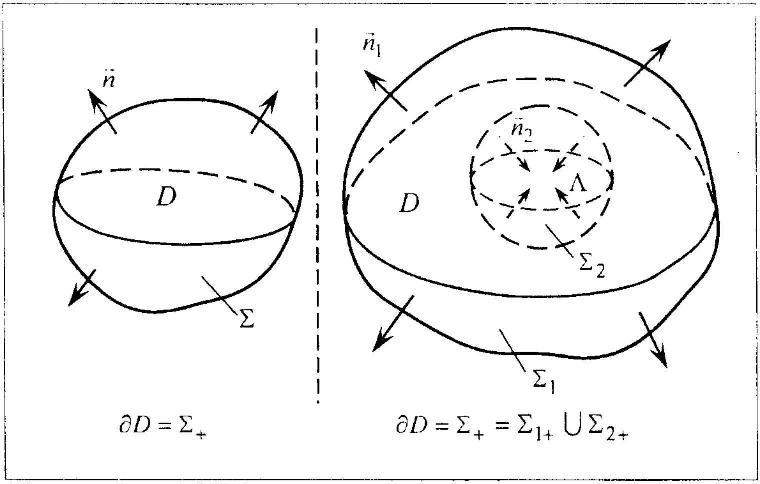



**Рис. 83.** Об'ємно однозв'язна й об'ємно двозв'язна множини

Множину (тіло) $D \subset \mathbb{R}^3$ називають *об'ємно однозв'язною*, якщо будь-яка (кусково-гладка) замкнена поверхня в $D$ обмежує множину, яка також лежить у $D$. Обмежена однозв'язна множина $D \subset \mathbb{R}^3$ не містить лакун (просторових порожнин). Обмежена об'ємно-$n$-зв'язною множина $D \subset \mathbb{R}^3$ має $n-1$ лакун, а повна межа такої множини є об'єднанням $n$ замкнених поверхонь. Якщо поле ортів орієнтації $\vec{n}$ вибрано так, що вони напрямлені в зовнішню (відносно $D$) частину простору, то межу $\Sigma = \partial D$ називають додатно орієнтованою (відносно $D$) і позначають символом $\Sigma_+$. У випадку обмежної $n$-зв'язної множини і додатної орієнтації $\Sigma = \partial D$ межі лакун від'ємно орієнтовані (відносно самих лакун).

Нехай виконуються умови:

1) $D$ – замкнена обмежена вимірна об'ємно однозв'язна множина з кусково-гладкою додатно орієнтованою межею $\Sigma_+ = \partial D$;

2) векторна функція $\vec{F} = \{P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\} \in C^1_{\bar{D}}$.

Тоді справджується формула Гаусса–Остроградського

$$\Pi_{\Sigma_+}(\vec{F}) = \oiint_{\Sigma_+} (\vec{F},\vec{n})d\sigma = \oiint_{\Sigma_+} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma =$$

$$= \oiint_{\Sigma_+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Таким чином, формула Гаусса–Остроградського зводить обчислення поверхневого інтеграла другого роду (потоку векторного поля $\vec{F}$) до обчислення потрійного інтеграла по тілу, обмеженому цією поверхнею, від дивергенції[1]

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

У випадку замкненої обмеженої вимірної об'ємно-$n$-зв'язної множини $D$ у лівій частині формули Гаусса–Остроградського стоїть поверхневий інтеграл по повній межі $\Sigma_+ = \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_{i+}$ множини $D$:

$$\oiint_{\Sigma_+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \sum_{i=1}^{n} \oiint_{\Sigma_{i+}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$

$$= \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Доведемо формулу Гаусса–Остроградського для об'ємно однозв'язної множини, яка є одночасно $x$-, $y$- і $z$-циліндричною.

---

[1] Формулу Гаусса–Остроградського можна також записати у вигляді

$$\oiint_{\Sigma_+} (\vec{F},\vec{n})d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dv.$$

Спочатку використовуємо $z$-циліндричність множини $D$ (рис. 84). Нехай $D$: $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$, $(x,y) \in D_0$. Маємо

$$\iiint\limits_D \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{D_0} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint\limits_{D_0} R(x,y,z)\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_0} R\big(x,y,z_2(x,y)\big)dxdy - \iint\limits_{D_0} R\big(x,y,z_1(x,y)\big)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_2} R(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{\Sigma_1} R(x,y,z)dxdy = \oiint\limits_{\Sigma_+} R(x,y,z)dxdy$$

(враховано, що орти нормалей до поверхні $\Sigma_2$ утворюють гострий кут з додатним напрямком осі $Oz$, а орти нормалей до поверхні $\Sigma_1$ – тупий (див. с. 92)).

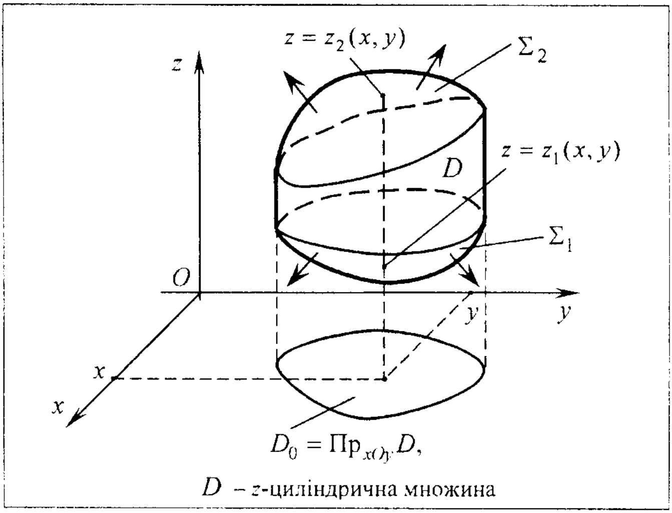



**Рис. 84.** Доведення теореми Гаусса–Остроградського (випадок $z$-циліндричної множини)

Використовуючи $y$-циліндричість і $x$-циліндричність множини $D$, аналогічно дістаємо

$$\iiint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial y}\,dxdydz = \oiint\limits_{\Sigma_+} Q(x,y,z)\,dzdx\,,$$

$$\iiint\limits_D \frac{\partial P}{\partial x}\,dxdydz = \oiint\limits_{\Sigma_+} P(x,y,z)\,dydz\,.$$

Почленно додавши отримані рівності, дістанемо формулу Гаусса–Остроградського для одночасно $x$-, $y$- і $z$-циліндричної (правильної) множини $D$.

Щоб довести формулу в загальному випадку, використаємо метод перерізів, який продемонструємо на прикладі множини $D$, зображеної на рис. 85. Множина $D$ не є $y$-циліндричною. За допомогою перерізу $\Sigma_0$ утворимо множини $D_1$ і $D_2$, циліндричні відносно всіх координатних осей і такі, що

$$D = D_1 \cup D_2\,, \quad \Sigma_+ = \Sigma' \cup \Sigma''\,,$$

$$\partial D_1 = \Sigma_{1+} = \Sigma' \cup \Sigma_0'\,, \quad \partial D_2 = \Sigma_{2+} = \Sigma'' \cup \Sigma_0''$$

($\Sigma_0'$ і $\Sigma_0''$ – протилежні орієнтації перерізу $\Sigma_0$). Тоді

$$\iiint\limits_{D_1}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint\limits_{\Sigma_{1+}} = \iint\limits_{\Sigma'} + \iint\limits_{\Sigma_{0+}}\,,$$

$$\iiint\limits_{D_2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint\limits_{\Sigma_{2+}} = \iint\limits_{\Sigma''} + \iint\limits_{\Sigma_{0-}}\,.$$

Додавши почленно отримані рівності і враховуючи, що

$$\iint\limits_{\Sigma_{0+}} + \iint\limits_{\Sigma_{0-}} = 0\,,$$

дістанемо формулу Гаусса–Остроградського для множини $D$ (рис. 85).

Випадок об'ємно $n$-зв'язної множини розглянемо на прикладі об'ємно двозв'язної множини, зображеної на рис. 86.

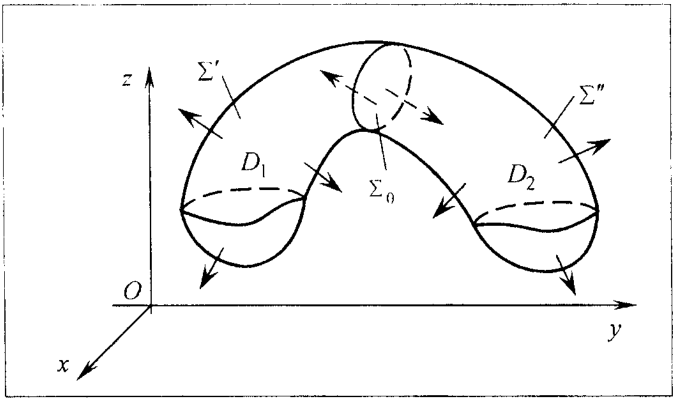



**Рис. 85.** Доведення теореми Гаусса–Остроградського (випадок множини, яка не є $y$-циліндричною)

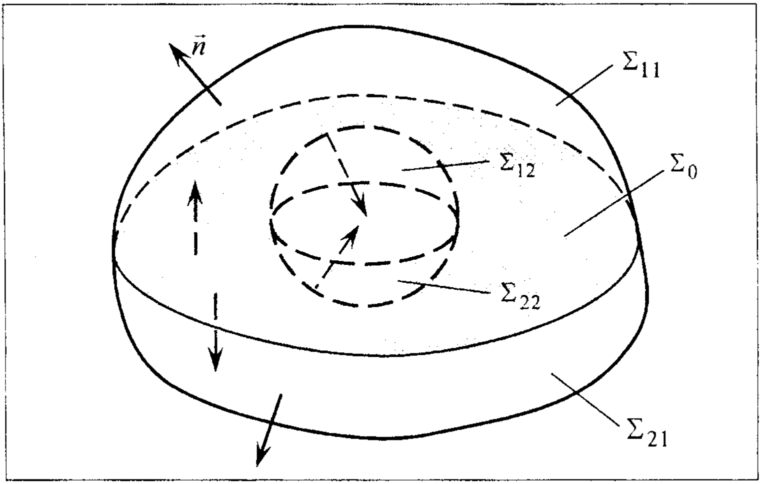



**Рис. 86.** Доведення теореми Гаусса–Остроградського у випадку об'ємно двозв'язної множини

За допомогою перерізу $\Sigma_0$ утворимо дві об'ємно однозв'язні множини $D_1$ і $D_2$ з межами

$$\Sigma_{10+} = \partial D_1 = \Sigma_{11} \cup \Sigma_0' \cup \Sigma_{12},$$

$$\Sigma_{20+} = \partial D_2 = \Sigma_{21} \cup \Sigma_0'' \cup \Sigma_{22}$$

( $\Sigma_0'$ , $\Sigma_0''$ – протилежні орієнтації перерізу $\Sigma_0$ , $\Sigma_{11} \bigcup \Sigma_{21} = \Sigma_{1+}$ , $\Sigma_{12} \bigcup \Sigma_{22} = \Sigma_{2+}$ ). Застосуємо формулу Гаусса–Остроградського до (об'ємно однозв'язних) множин $D_1$ і $D_2$ :

$$\iiint\limits_{D_1} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \oiint\limits_{\Sigma_{10+}} = \iint\limits_{\Sigma_{11}} + \iint\limits_{\Sigma_0'} + \iint\limits_{\Sigma_{12}} ,$$

$$\iiint\limits_{D_2} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \oiint\limits_{\Sigma_{20+}} = \iint\limits_{\Sigma_{21}} + \iint\limits_{\Sigma_0''} + \iint\limits_{\Sigma_{22}} .$$

Додавши почленно отримані рівності, дістанемо (ураховуючи, $\iint\limits_{\Sigma_0'} + \iint\limits_{\Sigma_0''} = 0$ ) формулу Гаусса–Остроградського для об'ємно двозв'язної множини $D$ . Випадок об'ємно $n$ -зв'язної множини розглядається аналогічно.

Із формули Гаусса–Остроградського випливає, що у випадку $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \equiv 1 \quad \forall (x, y, z) \in D$, вона виражає об'єм (міру) множини $D \subset \mathbb{R}^3$ через поверхневий інтеграл 2-го роду по межі $\Sigma_+ = \partial D$ :

$$V(D) = \oiint\limits_{\Sigma_+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy .$$

Якщо вибрати, наприклад, $P = \frac{1}{3}x$ , $Q = \frac{1}{3}y$ , $R = \frac{1}{3}z$ ( $\vec{F} = \frac{1}{3}\vec{r}$ ), то

$$\boxed{V(D) = \frac{1}{3} \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n}) d\sigma = \frac{1}{3} \oiint\limits_{\Sigma_+} xdydz + ydzdx + zdxdy} .$$

Зауважимо, із прикладу 3 на с. 104–106 випливає, що для об'єму тора $\mathrm{T}_0$ маємо

$$V(\mathrm{T}_0) = \frac{1}{3} \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n}) d\sigma = \frac{1}{3} \cdot 6\pi^2 a^2 b = 2\pi^2 a^2 b .$$

Якщо $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \equiv 0$ ( $\operatorname{div} \vec{F} \equiv 0$ ) $\forall (x, y, z) \in D$, то для об'ємно двозв'язної множини (рис. 83) із формули Гаусса–Остроградського маємо

$$\oiint\limits_{\Sigma_+}(\vec{F},\vec{n})d\sigma=\oiint\limits_{\Sigma_{1+}}+\oiint\limits_{\Sigma_{2+}}=0,$$

звідки випливає, що величина поверхневого інтеграла 2-го роду по поверхні, яка охоплює просторову лакуну $\Lambda$, не залежить від цієї поверхні:

$$\oiint\limits_{\Sigma_1}(\vec{F},\vec{n})d\sigma=\oiint\limits_{\Sigma_2}(\vec{F},\vec{n})d\sigma$$

(орієнтації поверхонь $\Sigma_1$ і $\Sigma_2$ узгоджені), а залежить лише від векторного поля $\vec{F}$ і самої просторової лакуни $\Lambda$.

Аналогічно, у випадку виконання умови $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\equiv 0$ $(\operatorname{div}\vec{F}\equiv 0)$ $\forall(x,y,z)\in D$ для об'ємно однозв'язної області маємо

$$\oiint\limits_{\Sigma}(\vec{F},\vec{n})d\sigma=0,$$

а для об'ємно $n$-зв'язної –

$$\oiint\limits_{\Sigma_1}(\vec{F},\vec{n})d\sigma=0=\sum_{i=2}^{n}\oiint\limits_{\Sigma_i}(\vec{F},\vec{n})d\sigma,$$

де $\Sigma_1$ – "зовнішня" межа множини $D$, $\Sigma_2,\ldots,\Sigma_n$ – будь-які (кусково-гладкі) замкнені поверхні в $D$, які охоплюють просторові лакуни $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1}$, відповідно. Орієнтації поверхонь $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n$ узгоджені.

Розглянемо п р и к л а д и.

1. Обчислимо інтеграл $I=\oiint\limits_{\Sigma_+}z^2dxdy$ безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського ($\Sigma$ – замкнена поверхня, зображена на рис. 87). Маємо

$$\vec{F}=\{0;0;z^2\},\quad I=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\iint\limits_{\Sigma_3},$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}=\left[\begin{matrix}\Sigma_1: z=0,\\ \vec{n}_1=-\vec{k},\end{matrix}\quad (\vec{F},\vec{n}_1)=-z^2\Big|\right]=\iint\limits_{\Sigma_1}(-z^2)d\sigma=\iint\limits_{\Sigma_1}0d\sigma=0,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}=\left[\begin{matrix}\Sigma_2: z=1,\\ \vec{n}_2=\vec{k},\end{matrix}\quad (\vec{F},\vec{n}_2)=z^2\Big|\right]=\iint\limits_{\Sigma_2}z^2d\sigma=\iint\limits_{\Sigma_2}d\sigma=S(\Sigma_2)=\pi.$$

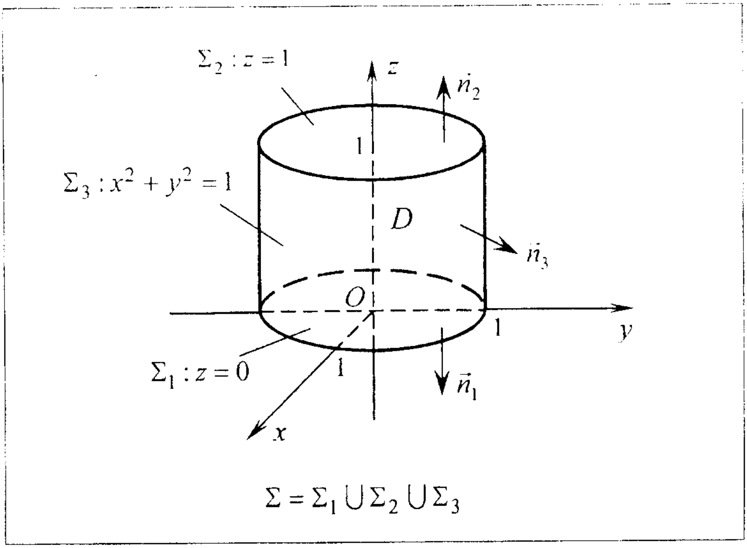



**Рис. 87.** Приклад 1

Знайдемо орт орієнтації $\vec{n}_3$: $\vec{N}_3 = \{2x; 2y; 0\}$, $\vec{n}_3 = \dfrac{\{x; y; 0\}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

тому

$$\iint\limits_{\Sigma_3} = \left[\begin{matrix} \Sigma_3 : x^2 + y^2 = 1, \\ \vec{n}_3 = \{x; y; 0\}, \end{matrix} \quad (\vec{F}, \vec{n}_3) = 0 \Big| \right] = \iint\limits_{\Sigma_3} 0 d\sigma = 0,$$

а отже, $I = \pi$.

Застосуємо тепер формулу Гаусса–Остроградського:

$$I = \iiint\limits_D (0 + 0 + 2z) dxdydz = [\text{ЦСК}] =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 rdr \int\limits_0^1 zdz = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \pi.$$

2. Обчислимо інтеграл

$$I = \oiint\limits_{\Sigma} xdydz + zdxdy$$

($\Sigma$ – замкнена поверхня, зображена на рис. 88) за формулою Гаусса–Остроградського.

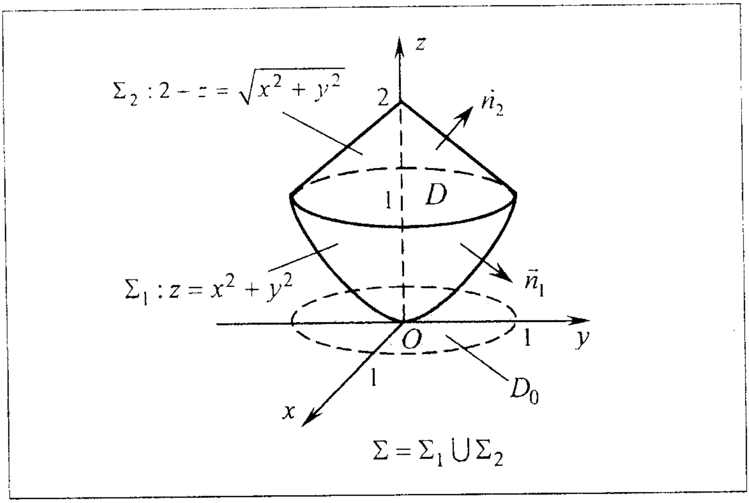



**Рис. 88.** Приклад 2

Маємо

$$I = \oiint\limits_{\Sigma_+} xdydz + zdxdy = \iiint\limits_{D} (1 + 0 + 1)dxdydz = 2\iiint\limits_{D} dxdydz .$$

Задача звелася до обчислення потрійного інтеграла $\iiint\limits_{D} dxdydz = V(D)$. Знайдемо рівняння проекції лінії перетину поверхонь $z = x^2 + y^2$ (параболоїда) і $2 - z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (півконуса з вершиною в точці $(0;0;2)$ ) на площину $xOy$:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ 2 - z = \sqrt{x^2 + y^2}, \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1,$$

тому $D_0 = \text{Пр}_{xOy} D : \ x^2 + y^2 \le 1$ . Перейшовши до ЦСК, дістанемо

$$I = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 rdr \int\limits_{r^2}^{2-r} dz = 4\pi \int\limits_0^1 r(2 - r - r^2)dr =$$

$$= 4\pi \left( r^2 - \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = 4\pi \cdot \frac{5}{12} = \frac{5\pi}{3} .$$

3. Застосуємо формулу Гаусса–Остроградського для обчислення інтеграла

$$I = \oiint\limits_{\Sigma} x dydz + ydzdx + z^3 dxdy$$

( $\vec{F} = \{x; y; z^3\}$ ) по незамкненій поверхні $\Sigma$ (рис. 89). Для цього утворимо замкнену поверхню $\Sigma' = \Sigma \bigcup \Sigma_0$ ( $\Sigma_0$ – частина площини $z = 0$, обмежена колом $x^2 + y^2 = 1$ ). Маємо

$$\oiint\limits_{\Sigma'_+} x dydz + ydzdx + z^3 dxdy = \iiint\limits_{D} (1 + 1 + 3z^2) dxdydz = [\text{ССК}] =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int\limits_0^1 (2 + 3r^2 \cos^2\theta) r^2 dr =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \left( \frac{2}{3} + \frac{3}{5}\cos^2\theta \right) d\theta = 2\pi \left( -\frac{2}{3}\cos\theta - \frac{1}{5}\cos^3\theta \right) \Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= 2\pi \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{26\pi}{15}.$$

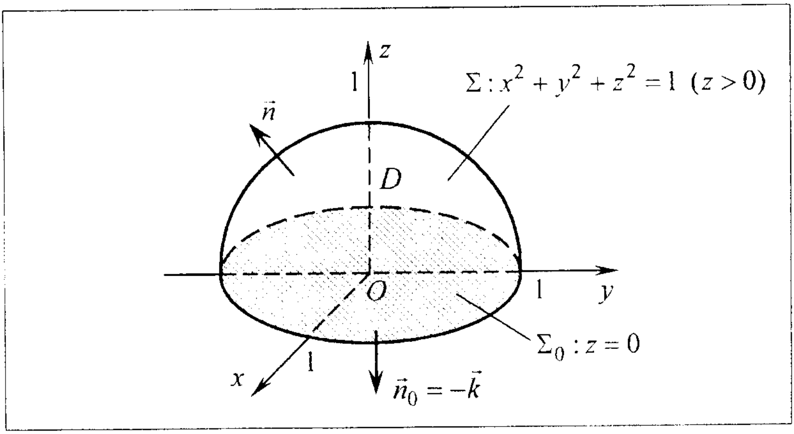



**Рис. 89.** Приклад 3

Оскільки $\oiint\limits_{\Sigma'_+} = \iint\limits_{\Sigma} + \iint\limits_{\Sigma_0}$, то $I = \oiint\limits_{\Sigma'_+} - \iint\limits_{\Sigma_0}$. Обчислимо

$$\iint\limits_{\Sigma_0} = \iint\limits_{\Sigma_0}(\vec{F},\vec{n}_0)d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_0}-z^3 d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_0}0d\sigma = 0 .$$

Отже, $I = \dfrac{26\pi}{15}$ .

4. Обчислимо інтеграл

$$I = \oiint\limits_{\Sigma_+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

($P = x - y + z$ , $Q = 2y - z + x$ , $R = 3z - x + y$ ) по зовнішній стороні поверхні $\Sigma$ , заданій рівнянням

$$|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1 .$$

За формулою Гаусса–Остроградського маємо

$$I = \iiint\limits_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iiint\limits_{D} 6dxdydz = 6V(D) =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x - y + z, & \\ v = y - z + x, & J(u,v,w) = \dfrac{1}{J(x,y,z)} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{4} \\ w = z - x + y, & \end{array}\right] =$$

$$= 6 \iiint\limits_{T:|u|+|v|+|w|\le 1} \frac{1}{4}dudvdw = \frac{6}{4}\cdot 8 \iiint\limits_{\substack{T':\, u+v+w\le 1 \\ (u\ge 0,\, v\ge 0,\, w\ge 0)}} dudvdw =$$

$$= 12V(T') = 12\cdot\frac{1}{6} = 2 ,$$

де $T'$ – трикутна піраміда ( $1/8$ частина тіла $T$ ), зображена на рис. 90.

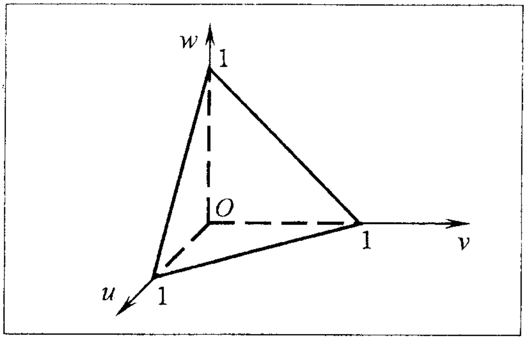



**Рис. 90.** Приклад 4

5. Обчислимо інтеграл

$$I = \iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

($\vec{F} = \{x^2; y^2; z^2\}$) по незамкненій конічній поверхні (рис. 91)

$$\Sigma:\ x^2 + y^2 = z^2 \quad (0 \le z \le h).$$

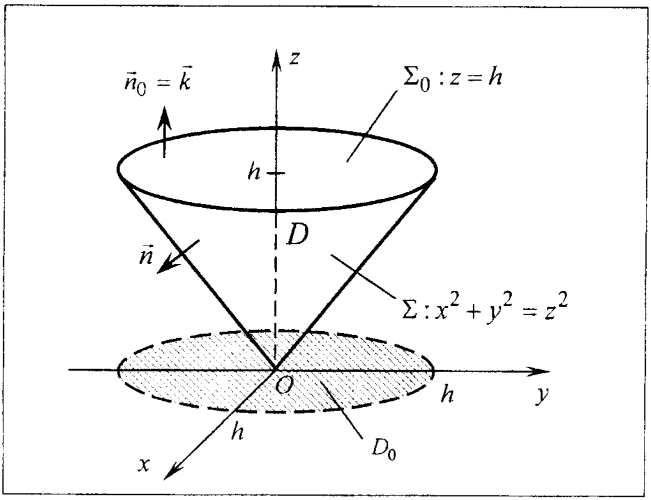



**Рис. 91.** Приклад 5

Щоб використати формулу Гаусса–Остроградського, утворимо замкнену поверхню $\Sigma' = \Sigma \cup \Sigma_0$. Тоді

$$\oiint\limits_{\Sigma'_+} = I + \iint\limits_{\Sigma_0} = \iiint\limits_D (2x+2y+2z)dxdydz = [\text{ЦСК}] =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h r dr \int\limits_r^h (r\cos\varphi + r\sin\varphi + z)dz = 4\pi\int\limits_0^h r\left.\frac{z^2}{2}\right|_r^h dr = 2\pi\int\limits_0^h r(h^2 - r^2)dr =$$

$$= 2\pi\left(h^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^h = 2\pi\left(\frac{h^4}{2} - \frac{h^4}{4}\right) = \frac{\pi h^4}{2},$$

$$\iint\limits_{\Sigma_0} = \iint\limits_{\Sigma_0}(\vec{F}, \vec{n}_0)d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_0} z^2 d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_0} h^2 d\sigma = h^2 \cdot S(\Sigma_0) = h^2 \cdot \pi h^2 = \pi h^4.$$

Отже, $I = \frac{\pi h^4}{2} - \pi h^4 = -\frac{\pi h^4}{2}$.

6. Знайдемо потік векторного поля $\vec{F} = \{x^3; y^3; z^2\}$ через зовнішню поверхню $\Sigma_+$ сфери $x^2 + y^2 + z^2 = z$ (рис. 92).

За формулою Гаусса–Остроградського маємо

$$\Pi_{\Sigma_+}(\vec{F}) = \oiint\limits_{\Sigma_+}(\vec{F}, \vec{n})d\sigma = \iiint\limits_D \operatorname{div}\vec{F}dv =$$

$$= \iiint\limits_D (3x^2 + 3y^2 + 2z)dxdydz = [\text{ССК}] =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} (3r^2\sin^2\theta + 2r\cos\theta)r^2 dr =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\left(\frac{3}{5}r^5\sin^2\theta + \frac{1}{2}r^4\cos\theta\right)\Bigg|_0^{\cos\theta} d\theta =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{3}{5}\cos^5\theta\sin^3\theta + \frac{1}{2}\cos^5\theta\sin\theta\right)d\theta =$$

$$= 2\pi\cdot\frac{3}{5}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^5\theta(\cos^2\theta - 1)d\cos\theta - 2\pi\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^5\theta\, d\cos\theta =$$

$$= \frac{6\pi}{5}\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\right)+\pi\cdot\frac{1}{6}=\frac{13\pi}{60}.$$

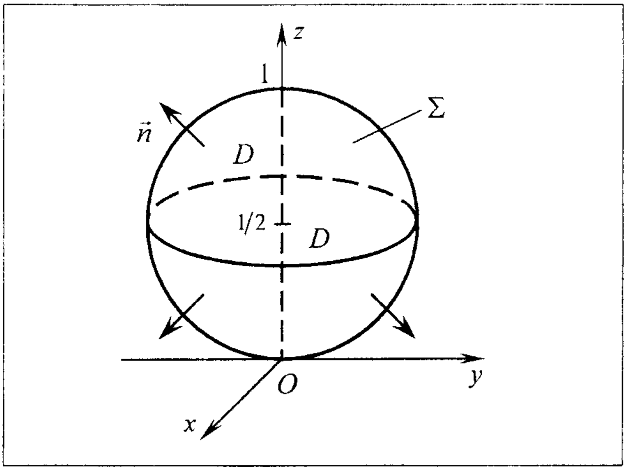



**Рис. 92.** Приклад 6

7. Обчислимо інтеграл

$$I = \oiint_{\Sigma_+} \cos(\vec{n},\vec{l})\,d\sigma$$

по зовнішній стороні замкненої поверхні $\Sigma$ (рис. 93), якщо $\vec{l}$ – сталий напрямок, орт якого $\vec{l}_0 = \{\cos\alpha_0; \cos\beta_0; \cos\gamma_0\} = \overline{\text{const}}$, а $\vec{n} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ – орт орієнтації поверхні $\Sigma$.

Маємо

$$\cos(\vec{n},\vec{l}) = \frac{(\vec{n},\vec{l})}{|\vec{n}|\cdot|\vec{l}|} = \cos\alpha\cdot\cos\alpha_0 + \cos\beta\cdot\cos\beta_0 + \cos\gamma\cdot\cos\gamma_0,$$

$$I = \oiint_{\Sigma_+}\left(\cos\alpha\cdot\cos\alpha_0 + \cos\beta\cdot\cos\beta_0 + \cos\gamma\cdot\cos\gamma_0\right)d\sigma =$$

$$= \oiint_{\Sigma_+} \cos\alpha_0 dydz + \cos\beta_0 dzdx + \cos\gamma_0 dxdy =$$

$$= \iiint_D (0+0+0)dxdydz = 0.$$

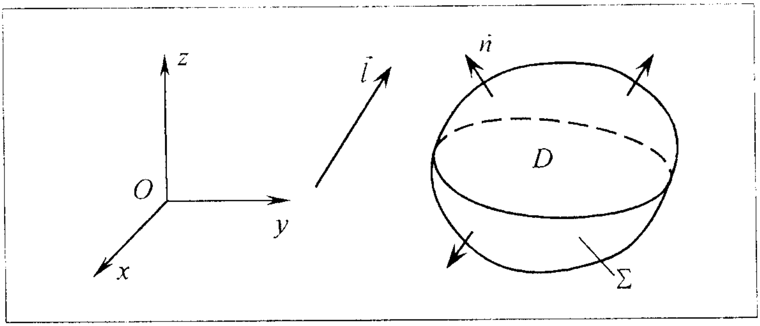



**Рис. 93.** Приклад 7

8. Обчислимо *інтеграл Гаусса*[1]

$$I = I(M_0) = \oiint_{\Sigma} \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2} d\sigma \quad \left(M_0(x_0, y_0, z_0)\right)$$

по замкненій поверхні $\Sigma$, якщо $\vec{n} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ – орт орієнтації поверхні $\Sigma$, $M(x,y,z) \in \Sigma$, $\vec{r} = \overline{M_0 M}$,

$$r = |\vec{r}| = \left|\overline{M_0 M}\right| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}\ ,$$

для випадків: а) поверхня $\Sigma$ не охоплює точку $M_0$ (рис. 94); б) поверхня $\Sigma$ охоплює точку $M_0$ (рис. 95).

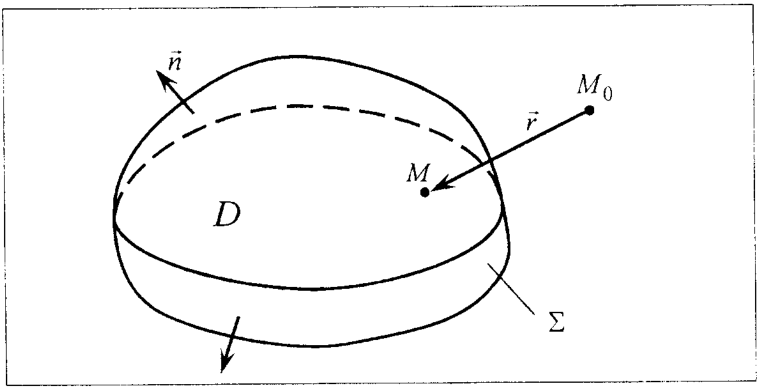



**Рис. 94.** Приклад 8 а)

[1] Інтеграл Гаусса має таку геометричну інтерпретацію: він є мірою *тілесного кута*, під яким поверхню $\Sigma$ видно з точки $M_0$.

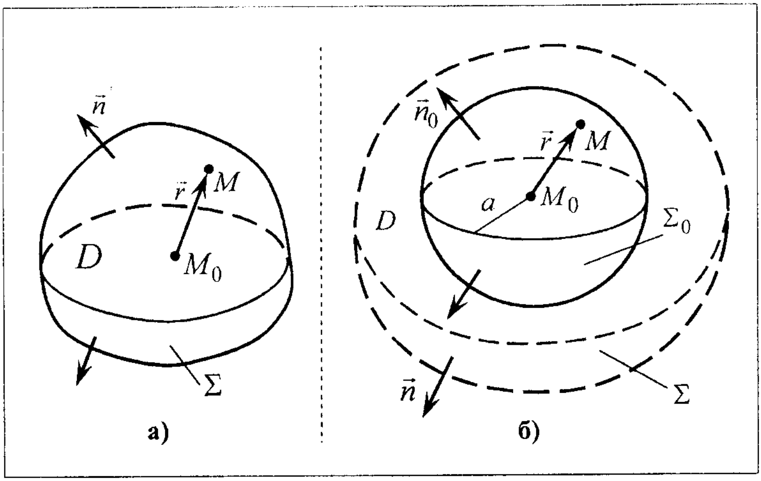



**Рис. 95.** Приклад 8 б)

Маємо

$$\cos(\vec{r},\vec{n}) = \frac{(\vec{r},\vec{n})}{|\vec{r}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{(x-x_0)\cos\alpha + (y-y_0)\cos\beta_0 + (z-z_0)\cos\gamma_0}{r},$$

$$I(M_0) = \oiint\limits_{\Sigma} \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\,d\sigma =$$

$$= \oiint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x-x}{r^3}\cos\alpha + \frac{y-y_0}{r^3}\cos\beta + \frac{z-z_0}{r^3}\cos\gamma\right)d\sigma =$$

$$= \iiint\limits_{D}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x_0}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-y_0}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-z_0}{r^3}\right)\right)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{D} \operatorname{div}\vec{F}\,dxdydz,$$

де $\vec{F} = \left\{\frac{x-x_0}{r^3}; \frac{y-y_0}{r^3}; \frac{z-z_0}{r^3}\right\}$. Знайдемо $\operatorname{div}\vec{F}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x_0}{r^3}\right) = \frac{r^3 - (x-x_0)3r^2 r'_x}{r^6} =$$

$$= \frac{r^3 - (x - x_0)3r^2 \dfrac{x - x_0}{r}}{r^6} = \frac{r^2 - 3(x - x_0)^2}{r^5},$$

аналогічно

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y - y_0}{r^3}\right) = \frac{r^2 - 3(y - y_0)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z - z_0}{r^3}\right) = \frac{r^2 - 3(z - z_0)^2}{r^5},$$

тому

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = 0 \quad \text{при } r \neq 0 \ \ (M \neq M_0).$$

Звідси випливає, що у випадку а) за формулою Гаусса–Остроградського для об'ємно однозв'язної множини $D$ $(\Sigma = \partial D)$ (рис. 94) маємо

$$I(M_0) = \iiint\limits_D 0\, dxdydz = 0\,.$$

У випадку б) всередині множини $D$ існує лакуна (точка $M_0$), у якій порушуються умови теореми Гаусса–Остроградського. У цьому випадку (див. с. 135, 136) поверхневий інтеграл $I(M_0)$ не залежить від замкненої поверхні, яка охоплює лакуну (точку $M_0$). Охопимо $M_0$ поверхнею $\Sigma_0$ – сферою

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$

достатньо малого радіуса $a$ (рис. 95, *б*)). Тоді

$$|\vec{r}| = r = a, \quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{r}}{a}, \quad \cos(\vec{r}, \vec{n}_0) = 1,$$

$$I(M_0) = \oiint\limits_{\Sigma_0} \frac{d\sigma}{r^2} = \frac{1}{a^2} \oiint\limits_{\Sigma_0} d\sigma = \frac{1}{a^2} S(\Sigma_0) = \frac{1}{a^2} \cdot 4\pi a^2 = 4\pi\,.$$

9. Виразимо поверхневий інтеграл

$$I = \oiint\limits_{\Sigma} \cos(\vec{r}, \vec{n})\, d\sigma$$

($\Sigma$, $\vec{r}$, $\vec{n}$ такі ж, як і в прикладі 8а)) через потрійний інтеграл по множині $D$ $(\Sigma = \partial D)$ за допомогою формули Гаусса–Остроградського.

Маємо

$$\cos(\vec{r},\vec{n}) = \frac{(x-x_0)\cos\alpha + (y-y_0)\cos\beta + (z-z_0)\cos\gamma}{r},$$

$$I = \oiint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x-x_0}{r}\cos\alpha + \frac{y-y_0}{r}\cos\beta + \frac{(z-z_0)}{r}\cos\gamma\right)d\sigma =$$

$$= \iiint\limits_{D} \operatorname{div}\vec{F}dxdydz,$$

де $\vec{F} = \left\{\frac{x-x_0}{r}; \frac{y-y_0}{r}; \frac{z-z_0}{r}\right\}$,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x_0}{r}\right) = \frac{r-(x-x_0)r'_x}{r^2} = \frac{r-(x-x_0)\dfrac{x-x_0}{r}}{r^2} = \frac{r^2-(x-x_0)^2}{r^3},$$

аналогічно

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-y_0}{r}\right) = \frac{r^2-(y-y_0)^2}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-z_0}{r}\right) = \frac{r^2-(z-z_0)^2}{r^3}.$$

Тому $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{3r^2-r^2}{r^3} = \frac{2}{r}$. Отже, $I = 2\iiint\limits_{D}\frac{dxdydz}{r}$.

10. Нехай

$$\Delta u \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (u = u(x,y,z)),$$

$\Sigma$ – кусково-гладка замкнена поверхня ($\Sigma = \partial D$) (рис. 96). Доведемо такі рівності:

а) $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}d\sigma = \iiint\limits_{D}\Delta u\, dxdydz$;

б) $\oiint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}d\sigma = \iiint\limits_{D}\left(|\vec{\nabla}u|^2 + u\Delta u\right)dxdydz$,

де $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ – похідна за напрямком нормалі $\vec{n}$,

$$\vec{\nabla}u = \operatorname{grad} u = \{u'_x; u'_y; u'_z\}.$$

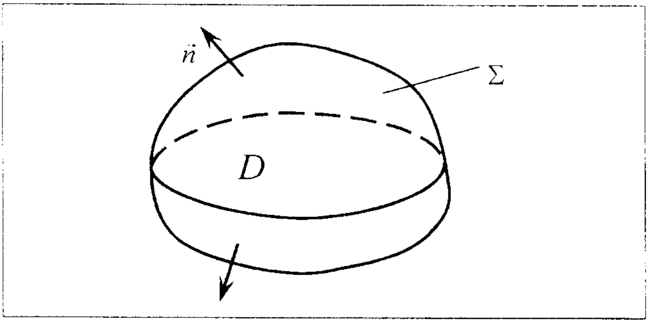



**Рис. 96.** Приклад 10

Нехай $\vec{n} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$, тоді

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = u'_x \cos\alpha + u'_y \cos\beta + u'_z \cos\gamma = \left(\vec{\nabla} u, \vec{n}\right).$$

У випадку а) маємо $\operatorname{div}(\vec{\nabla} u) = \dfrac{\partial(u'_x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(u'_y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(u'_z)}{\partial z} = \Delta u$. У випадку б) маємо

$$u\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = uu'_x \cos\alpha + uu'_y \cos\beta + uu'_z \cos\gamma = \left(u\vec{\nabla} u, \vec{n}\right),$$

$$\operatorname{div}(u\vec{\nabla} u) = \frac{\partial(uu'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(uu'_y)}{\partial y} + \frac{\partial(uu'_z)}{\partial z} = u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z + u\Delta u.$$

Рівності а) і б) тепер випливають ыз формули Гаусса–Остроградського.

Якщо функція $u$ є *гармонічною* в області $D$ ($\Delta u = 0$, $u \in C^2_{\bar{D}}$), то із рівностей а) і б) випливає

$$\oiint_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma = 0, \quad \oiint_\Sigma u\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma = \iiint_D |\vec{\nabla} u|^2 \, dxdydz.$$

Ці формули виконуються, наприклад, для функції

$$u = \frac{1}{r}, \quad r = |r| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Справді,

$$u'_x = -\frac{1}{r^2} r'_x = -\frac{x}{r^3},$$

$$u''_{xx} = -\frac{r^3 - x\cdot 3r^2 r'_x}{r^6} = -\frac{r^3 - x\cdot 3r^2\,\dfrac{x}{r}}{r^6} = -\frac{r^2 - 3x^2}{r^5},$$

$$u''_{yy} = -\frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \quad u''_{zz} = -\frac{r^2 - 3z^2}{r^5},$$

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = -\frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = 0 \quad (r \neq 0),$$

і функція $u = 1/r$ є гармонічною в $D \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{(0;0;0)\}$.

11. Нехай $u = u(x,y,z) \in C^2_{\bar{D}}$ – гармонічна в області $D$ (рис. 95, *б*) функція ($\Sigma$, $\vec{r}$, $\vec{n}$ такі ж, як і в прикладі 8б)). Доведемо, що в цьому випадку

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{\Sigma_+}\left(u\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)d\sigma.$$

Маємо (див. приклад 8):

$$u\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} =$$

$$= u\frac{x - x_0}{r^3}\cos\alpha + u\frac{y - y_0}{r^3}\cos\beta + u\frac{(z - z_0)}{r^3}\cos\gamma +$$

$$+\frac{1}{r}u'_x\cos\alpha + \frac{1}{r}u'_y\cos\beta + \frac{1}{r}u'_z\cos\gamma = (\vec{F},\vec{n}),$$

де $\vec{F} = \{P; Q; R\}$,

$$P = u\frac{x - x_0}{r^3} + \frac{1}{r}u'_x, \quad Q = u\frac{y - y_0}{r^3} + \frac{1}{r}u'_y, \quad Q = u\frac{z - z_0}{r^3} + \frac{1}{r}u'_z,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = u'_x\frac{x - x_0}{r^3} + u\frac{r^2 - 3(x - x_0)^2}{r^5} - \frac{x - x_0}{r^3}u'_x + \frac{1}{r}u''_{xx} =$$
$$= u\frac{r^2 - 3(x - x_0)^2}{r^5} + \frac{1}{r}u''_{xx},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = u'_y\frac{y - y_0}{r^3} + u\frac{r^2 - 3(y - y_0)^2}{r^5} - \frac{y - y_0}{r^3}u'_y + \frac{1}{r}u''_{yy} =$$
$$= u\frac{r^2 - 3(y - y_0)^2}{r^5} + \frac{1}{r}u''_{yy},$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = u'_z \frac{z-z_0}{r^3} + u\frac{r^2 - 3(z-z_0)^2}{r^5} - \frac{z-z_0}{r^3}u'_z + \frac{1}{r}u''_{zz} =$$

$$= u\frac{r^2 - 3(z-z_0)^2}{r^5} + \frac{1}{r}u''_{zz},$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = u\frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} + \frac{1}{r}(u''_{yy} + u''_{yy} + u''_{yy}) =$$

$$= \frac{1}{r}(u''_{yy} + u''_{yy} + u''_{yy}) = \frac{1}{r}\Delta u = 0.$$

Усередені множини $D$ існує лакуна (точка $M_0$). Оскільки $\operatorname{div}\vec{F} = 0 \quad (r \neq 0)$, то поверхневий інтеграл не залежить від поверхні, яка охоплює лакуну (точку $M_0$). Як і в прикладі 8), охопимо $M_0$ сферою ($\Sigma_0 = \partial D_0$):

$$\Sigma_0 : (x-x)^2 + (y-y)^2 + (z-z)^2 = a^2$$

достатньо малого радіуса $a$ (рис. 95, *б*)). Тоді

$$r = a, \quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{r}}{a}, \quad \cos(\vec{r}, \vec{n}_0) = 1,$$

$$\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{\Sigma_+}\left(u\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)d\sigma =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{\Sigma_{0+}}\left(u\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0}\right)d\sigma = \frac{1}{4\pi a^2}\oiint\limits_{\Sigma_{0+}} u\,d\sigma + \frac{1}{4\pi a}\iiint\limits_D \Delta u\,dxdydz =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\oiint\limits_{\Sigma_{0+}} u\,d\sigma = \frac{1}{4\pi a^2}u(M^*)S(\Sigma_0) = \frac{1}{4\pi a^2}u(M^*)4\pi a^2 = u(M^*),$$

де $M^* \in D$ – точка, існування якої гарантується теоремою про середнє значення для поверхневого інтеграла $\oiint\limits_{\Sigma_{0+}} u\,d\sigma$ від неперервної функції $u = u(x, y, z)$. Якщо тепер перейти до границі при $a \to 0$, то $M^* \to M_0$ і

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{\Sigma_+}\left(u\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)d\sigma.$$

З отриманої формули випливає, що значення гармонічної функції $u$ в області $D$ однозначно визначені її значеннями на межі $\Sigma$ множини $D$ і, зокрема,

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \oiint\limits_{\Sigma_0} u(x, y, z) d\sigma$$

($\Sigma_0 = \partial D_0$, $D_0$ – куля радіуса $a$ з центром у точці $M_0$).

12. Доведемо, що справджується формула

$$\oiint\limits_{\Sigma_+} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} & \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \\ u & v \end{vmatrix} d\sigma = \iiint\limits_D \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dxdydz,$$

де $\Sigma_+$ – додатно орієнтована межа множини $D$ (рис. 96), $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z) \in C^2_{\bar{D}}$.

Маємо

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} & \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \\ u & v \end{vmatrix} = v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = v(\vec{\nabla} u, \vec{n}) - u(\vec{\nabla} v, \vec{n}) =$$

$$= (v\vec{\nabla} u, \vec{n}) - (u\vec{\nabla} v, \vec{n}) = (v\vec{\nabla} u - u\vec{\nabla} v, \vec{n}) = (\vec{F}, \vec{n}).$$

Щоб застосувати формулу Гаусса–Остроградського, знайдемо $\operatorname{div} \vec{F}$:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div}(v\vec{\nabla} u) - \operatorname{div}(u\vec{\nabla} v) =$$

$$= v\operatorname{div}(\vec{\nabla} u) + (\vec{\nabla} v, \vec{\nabla} u) - u\operatorname{div}(\vec{\nabla} v) - (\vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v) =$$

$$= v\operatorname{div}(\vec{\nabla} u) - u\operatorname{div}(\vec{\nabla} v).$$

Оскільки $\operatorname{div}(\vec{\nabla} u) = \operatorname{div}\{u'_x; u'_y; u'_z\} = \Delta u$, $\operatorname{div}(\vec{\nabla} v) = \Delta v$, то

$$\operatorname{div} \vec{F} = v\Delta u - u\Delta v = \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix},$$

і за формулою Гаусса–Остроградського маємо

$$\oiint\limits_{\Sigma_+} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} & \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \\ u & v \end{vmatrix} d\sigma = \iiint\limits_D \operatorname{div} \vec{F} dv = \iiint\limits_D \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dxdydz.$$

## 2.3. Теорема і формула Стокса

Формула Стокса встановлює зв'язок між криволінійними і поверхневими інтегралами 2-го роду. На рис. 97 зображена орієнтована гладка поверхня $\Sigma$, межею (*краєм*) якої є один орієнтований кусково-гладкий контур[1] $L$.

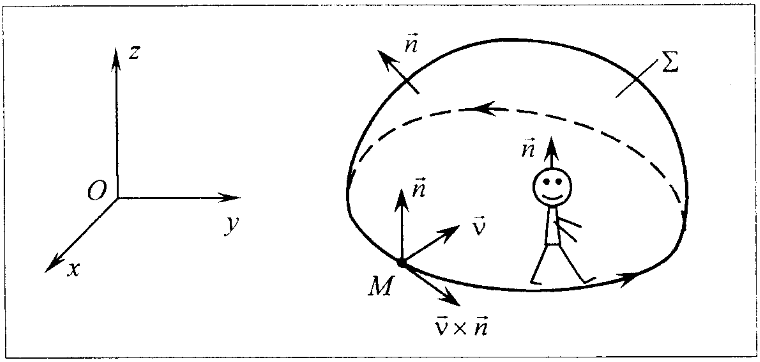



**Рис. 97.** Узгоджені орієнтації поверхні $\Sigma$ і контуру $L$

Орієнтації поверхні $\Sigma$ і контуру $L$ вважають *узгодженими*, якщо з кінця орта орієнтації $\vec{n}$ обхід контуру $L$ видно так, що він здійснюється проти годинникової стрілки (при такому обході спостерігачем контуру $L$ поверхня лишається зліва).

Якщо межа (край) поверхні $\Sigma$ складається із декількох контурів (напр., із двох: $L_1$ і $L_2$, як на рис. 98), то орієнтація повної межі $L = L_1 \bigcup L_2$ поверхні $\Sigma$ вважається узгодженою з орієнтацією $\Sigma$, якщо за вказаним[2] правилом обходу контурів $L_1$ і $L_2$ поверхня $\Sigma$ лишається зліва.

[1] У цьому випадку кажуть, що поверхня $\Sigma$ натягнута на контур $L$. На рис. 98 поверхня $\Sigma$ натягнута на два контури: $L_1$ і $L_2$.

[2] Напрямок обходу в точці $M$ на $L$ збігається з напрямком векторного добутку $\vec{v}\times\vec{n}$, де $\vec{n}$ – орт орієнтації поверхні $\Sigma$ у точці $M$, а $\vec{v}$ – вектор, перпендикулярний і до $L$, і до $\vec{n}$ та напрямлений у бік поверхні $\Sigma$ (рис. 97).

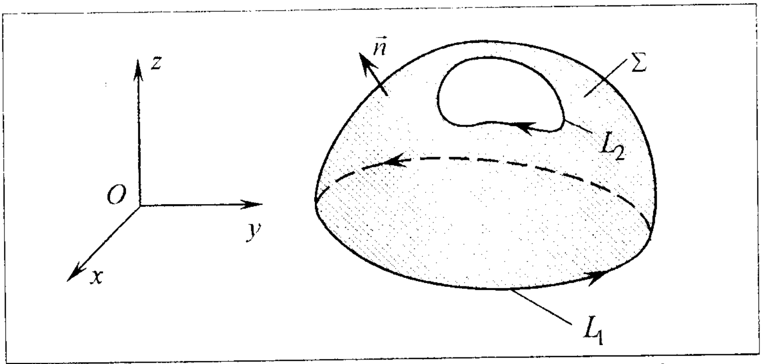



**Рис. 98.** Узгоджені орієнтації поверхні $\Sigma$ і контурів $L_1$ і $L_2$

Нехай виконуються умови:

1) $\Sigma$ – гладка або кусково-гладка орієнтована поверхня, обмежена орієнтованим контуром $L$;

2) векторна функція $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = \{P; Q; R\}$ неперервно диференційовна в деякій просторовій області $D \subset \mathbb{R}^3$, яка містить у собі поверхню $\Sigma$ і контур $L$;

3) орієнтації поверхні $\Sigma$ і контуру $L$ узгоджені.

Тоді справджується *формула Стокса*:

$$\boxed{\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma},$$

де $\vec{n} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ – орт орієнтації поверхні $\Sigma$.

Формулу Стокса записують також у вигляді

$$\boxed{\begin{gathered}\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \\ = \iint_\Sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma,\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \\ = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma dxdy\end{gathered}}$$

або[1]

$$\boxed{C_L(\vec{F}) = \oint_L (\vec{F},\vec{\tau})dl = \iint_\Sigma (\operatorname{rot}\vec{F},\vec{n})d\sigma},$$

де $\vec{\tau}$ – орт орієнтації контуру $L$.

Якщо поверхня $\Sigma$ обмежена кількома контурами так, що $L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$ і орієнтації контурів $L_i, i=1,\ldots,n$, узгоджені з орієнтацією поверхні $\Sigma$, то в лівій частині формули Стокса стоїть сума інтегралів

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{L_i} Pdx + Qdy + Rdz .$$

Доведемо формулу Стокса спочатку для поверхні $\Sigma$, яку одночасно можна задати рівняннями

$$z = z(x,y), \quad x = x(y,z), \quad y = y(x,z) .$$

Нехай спочатку $\Sigma : z = z(x,y) \quad \big((x,y)\in D\big)$, $L$ – контур, який обмежує $\Sigma$ (рис. 99):

$$\vec{n} = \frac{\{-z'_x;-z'_y;1\}}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} = \{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$$

– орт орієнтації поверхні $\Sigma$. Перетворимо інтеграл $I_1 = \oint_L Pdx$ у лівій частині формули Стокса. Маємо

$$I_1 = \oint_L P(x,y,z)dx = \begin{bmatrix} (x,y,z)\in\Sigma, \\ z = z(x,y) \end{bmatrix} = \oint_L P\big(x,y,z(x,y)\big)dx =$$

$$= \big[K = \text{Пр}_{xOy}L = \partial D\big] = \oint_K P\big(x,y,z(x,y)\big)dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{застосовуємо} \\ \text{формулу Гріна} \end{bmatrix} = \iint_D \left[0 - \frac{\partial}{\partial y}P\big(x,y,z(x,y)\big)\right]dxdy =$$

---

[1] $C_L(\vec{F})$ – циркуляція векторного поля $\vec{F}$ уздовж контуру $L$. Таким чином, формула Стокса встановлює зв'язок між циркуляцією і ротором векторного поля $\vec{F}$.

$$= -\iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} z'_z \right) dxdy = \begin{bmatrix} z'_y dxdy = -\cos\beta d\sigma, \\ dxdy = \cos\gamma d\sigma \end{bmatrix} =$$

$$= \iint_\Sigma \left( \frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma \right) d\sigma = \iint_\Sigma \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \iint_\Sigma \frac{\partial P}{\partial y} dxdy .$$

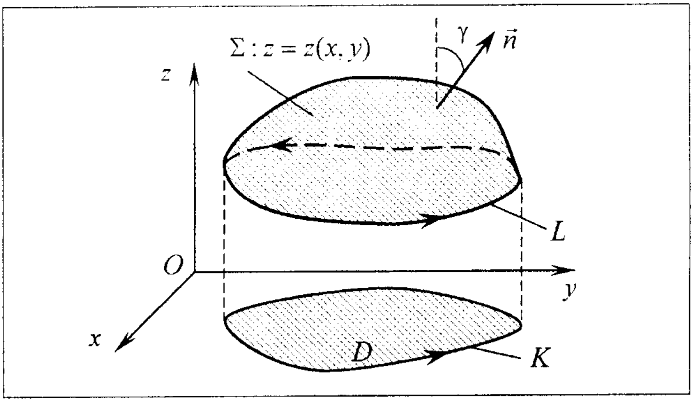



**Рис. 99.** Доведення формули Стокса

Аналогічно дістаємо

$$I_2 = \oint_L Qdy =$$

$$= \iint_\Sigma \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos\alpha \right) d\sigma = \iint_\Sigma \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \iint_\Sigma \frac{\partial Q}{\partial z} dydz,$$

$$I_3 = \oint_L Rdz =$$

$$= \iint_\Sigma \left( \frac{\partial R}{\partial y} \cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos\beta \right) d\sigma = \iint_\Sigma \frac{\partial R}{\partial y} dydz - \iint_\Sigma \frac{\partial R}{\partial x} dzdx.$$

Додавши почленно отримані рівності, дістанемо формулу Стокса для поверхонь вказаного типу.

За допомогою методу перерізів можна довести, що формула Стокса виконується й у випадку, коли кусково-гладка поверхня $\Sigma$ є об'єднанням скінченної кількості поверхонь, які одночасно можуть бути задані рівняннями $z = z(x, y)$, $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, а також у випадку, коли межа поверхні $\Sigma$ складається із декількох контурів.

Покажемо це, наприклад, для випадку, зображеного на (рис. 100) ($L = L_1 \bigcup L_2$). За допомогою перерізу $MN$ утворимо поверхню $\Sigma'$, яка обмежена контуром $L' = L_1 \bigcup L_2 \bigcup NM \bigcup MN$. Тоді

$$\oint_{L'} = \oint_{L_1} + \oint_{L_2} + \int_{NM} + \int_{MN} = \oint_{L_1} + \oint_{L_2}, \qquad \iint_{\Sigma'} = \iint_{\Sigma},$$

і формула Стокса матиме вигляд

$$\sum_{i=1}^{2} \oint_{L_i} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} \vec{F}, \vec{n}) d\sigma .$$

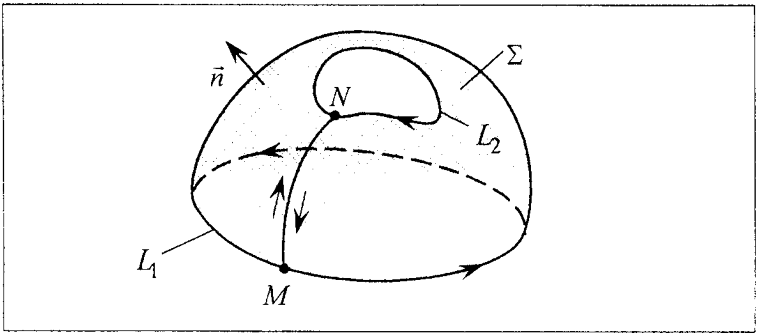



**Рис. 100.** Узгоджені орієнтації поверхні $\Sigma$ і контурів $L_1$ і $L_2$

Сформулюємо декілька з а у в а ж е н ь.

1. Криволінійний інтеграл у лівій частині формули Стокса не залежить від вибору кусково-гладкої поверхні $\Sigma$, натягнутої на контур $L$. Отже, поверхневий інтеграл у правій частині формули Стокса також не залежить від поверхні $\Sigma$. Тому при практичному обчисленні криволінійного інтеграла $\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$ за допомогою формули Стокса на контур $L$ намагаються натягти поверхню $\Sigma$ якомога простішої форми.

2. Якщо $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{0}$ на поверхні $\Sigma$, натягнутій на контури $L_1$, $L_2,\dots,L_n$ (рис. 101), то за формулою Стокса

$$\oint\limits_{L} = \sum_{i=1}^{n}\oint\limits_{L_i} Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_{\Sigma}(\operatorname{rot}\vec{F},\vec{n})d\sigma=0 \qquad (L=\bigcup_{i=1}^{n}L_i),$$

звідки маємо

$$\oint\limits_{L_1} Pdx+Qdy+Rdz=\sum_{i=2}^{n}\oint\limits_{L_i} Pdx+Qdy+Rdz,$$

причому в останній рівності орієнтації контурів $L_1$, $L_2,\dots,L_n$ однакові в тому розумінні, що з кінця орта орієнтації $\vec{n}$ поверхні $\Sigma$ обхід їх видно так, що він здійснюється проти годинникової стрілки (на рис. 101 цей обхід зображено пунктирними лініями).

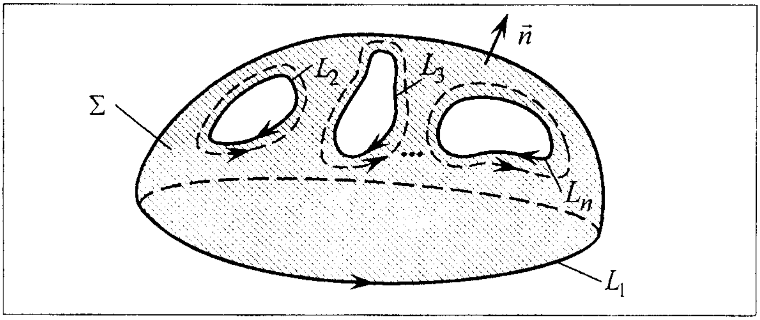



**Рис. 101.** Узгоджені орієнтації поверхні $\Sigma$ і контурів $L_1$ і $L_2$

3. Формула Стокса є узагальненням формули Гріна і переходить у неї, якщо поверхня $\Sigma$ є частиною площини $xOy$ – множиною $D$. Справді, у цьому випадку

$$\vec{n}=\{0;0;1\},\quad P=P(x,y),\quad Q=Q(x,y),\quad dz=0,$$

і формула Стокса має вигляд

$$\oint\limits_{L_+} Pdx+Qdy=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Розглянемо п р и к л а д и.

1. Обчислимо інтеграл

$$I=\oint\limits_L (2y+3z)dx+(3x+2z)dy+(x-y)dz$$

по замкненій кривій $L$ – лінії перетину поверхонь $x^2-x+y^2/4=0$ і $x+z=1$ (рис. 102).

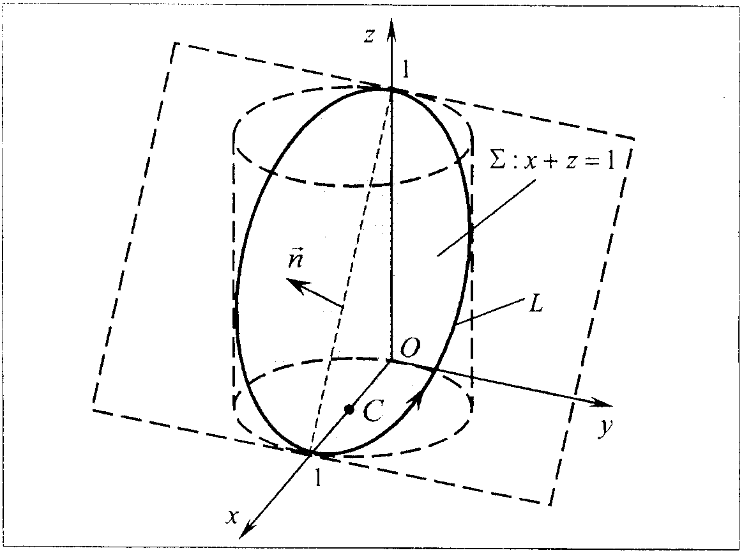



**Рис. 102.** Приклад 1

Перша з поверхонь є циліндром, твірні якого паралельні осі $Oz$. Виділивши повний квадрат по змінній $x$, дістанемо

$$\frac{(x-1/2)^2}{1/4}+y^2=1$$

– рівняння еліпса з півосями $a=1/2$, $b=1$ і центром у точці $C(1/2;0)$. Цей еліпс лежить в основі циліндра.

Друга поверхня – площина, паралельна осі $Oy$, яка відтинає на осях $Ox$ і $Oz$ одиничні відрізки.

Отже, контур $L$ є еліпсом. На цей контур натягнута частина поверхні

$$\Sigma : x+z=1 \quad \left(\vec{n}=\left\{1/\sqrt{2};0;1/\sqrt{2}\right\}\right).$$

Знайдемо ротор векторного поля $\vec{F}$ ($\vec{F}\in C^1_{\mathbb{R}^3}$):

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y+3z & 3x+2z & x-y \end{vmatrix}=$$

$$=(-1-2)\vec{i}+(3-1)\vec{j}+(3-2)\vec{k}=-3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}.$$

За формулою Стокса маємо

$$I=\iint_{\Sigma}(\operatorname{rot}\vec{F},\vec{n})d\sigma=\iint_{\Sigma}\left(-3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+2\cdot 0+1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)d\sigma=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{2}}\iint_{\Sigma}d\sigma=-\sqrt{2}S(\Sigma)=-\sqrt{2}\cdot\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1=-\pi,$$

оскільки півосі еліпса $L$ дорівнюють $\sqrt{2}/2$ і 1.

2. Обчислимо інтеграл

$$I=\oint_L (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz$$

по контуру $L$, який є лінією перетину сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$ і циліндра $x^2+y^2=ax$ ($z\geq 0$, $a=\text{const}>0$) (рис. 103).

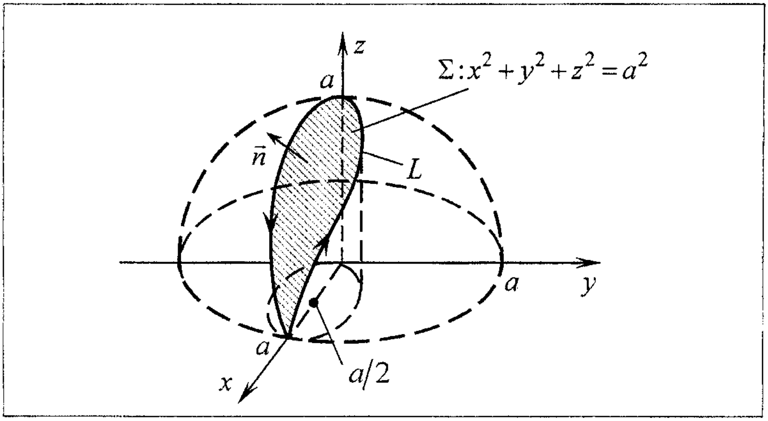



**Рис. 103.** Приклад 2

На контур $L$ натягнута частина поверхні сфери $\Sigma$. Знайдемо орт орієнтації

$$\vec{n}=\frac{\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2)}{\left|\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2)\right|}=\frac{\{x;y;z\}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{\vec{r}}{r},$$

де $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (вектор $\vec{n}$ утворює гострий кут з віссю $Oz$). Знайдемо $\operatorname{rot}\vec{F}$ ( $\vec{F}\in C^1_{\mathbb{R}^3}$ ):

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2\end{vmatrix}=$$

$$=(2y-2z)\vec{i}+(2z-2x)\vec{j}+(2x-2y)\vec{k}.$$

За формулою Стокса

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(\operatorname{rot}\vec{F},\vec{n})d\sigma=$$

$$=2\iint\limits_{\Sigma}\left[(y-z)\frac{x}{r}+(z-x)\frac{y}{r}+(x-y)\frac{z}{r}\right]d\sigma=[r=a \text{ на } \Sigma]=$$

$$=\frac{2}{a}\iint\limits_{\Sigma}(yx-zx+zy-xy+xz-yz)d\sigma=\frac{2}{a}\iint\limits_{\Sigma}0d\sigma=0.$$

3. Обчислимо інтеграл

$$I=\oint\limits_{L}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz,$$

де $L$ – переріз куба $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$ площиною $x+y+z=3/2$ (рис. 104). На контур $L$ натягнута поверхня $\Sigma$ – частина площини $x+y+z=3/2$. Орт орієнтації

$$\vec{n}=\left\{1/\sqrt{3};1/\sqrt{3};1/\sqrt{3}\right\}\quad ((\widehat{\vec{n},Oz})\text{ – гострий}).$$

Знайдемо $\operatorname{rot}\vec{F}$ ( $\vec{F}\in C^1_{\mathbb{R}^3}$ ):

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2y - 2z)\vec{i} + (-2z - 2x)\vec{j} + (-2x - 2y)\vec{k} =$$

$$= -2\left[ (y + z)\vec{i} + (z + x)\vec{j} + (x + y)\vec{k} \right].$$

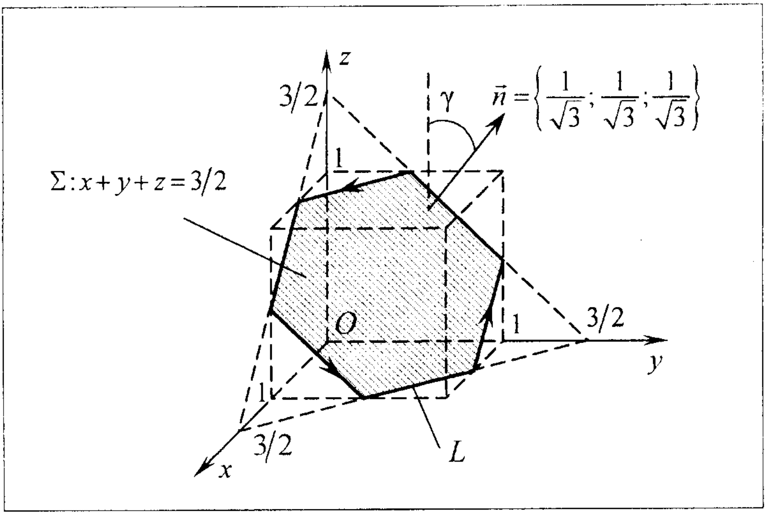



**Рис. 104.** Приклад 3

За формулою Стокса

$$I = \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot}\vec{F}, \vec{n}) d\sigma =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (y + z + z + x + x + y) d\sigma = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x + y + z) d\sigma =$$

$$= \left[ x + y + z = 3/2 \text{ на } \Sigma \right] = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} \iint_{\Sigma} d\sigma = -2\sqrt{3} S(\Sigma) =$$

$$= -2\sqrt{3} \cdot 6 \frac{\left( 1/\sqrt{2} \right)^2 \sqrt{3}}{4} = -\frac{9}{2}$$

(використана формула площі правильного шестикутника $S(\Sigma)=6a^2\sqrt{3}/4$ при $a=1/\sqrt{2}$ ).

4. Обчислимо інтеграл $I=\oint\limits_L(\vec{F},\vec{\tau})dl$ для випадків (рис. 105):

а) контур $L$ не охоплює вісь $Oz$ ; б) контур $L$ охоплює вісь $Oz$, якщо $\vec{F}=\left\{-\dfrac{y}{x^2+y^2};\ \dfrac{x}{x^2+y^2};\ 0\right\}$.

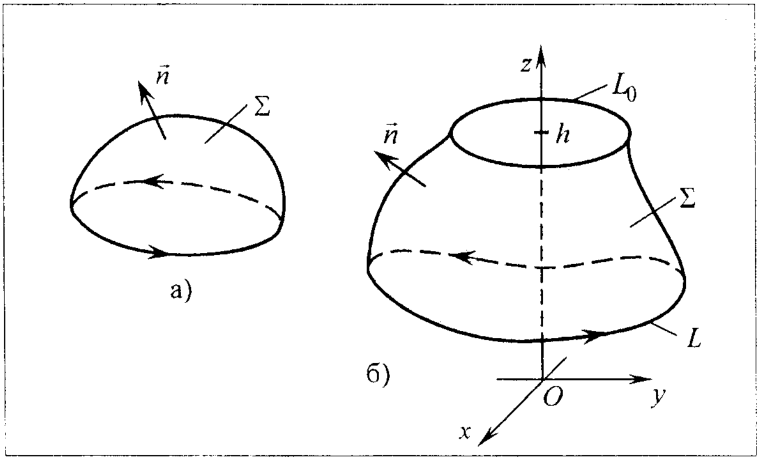



**Рис. 105.** Приклад 4

Очевидно, векторна функція $\vec{F}\in C^1_D$ в області $D=\mathbb{R}^3\setminus\{(0;0;z)\}$ $(z\in\mathbb{R})$. Знайдемо $\operatorname{rot}\vec{F}$ :

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & 0\end{vmatrix}=$$

$$=(0-0)\vec{i}+(0-0)\vec{j}+\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\vec{k}=\vec{0}\,.$$

У випадку а) поверхня $\Sigma$, натягнута на $L$, лежить в області $D$ неперервної диференційовності векторної функції $\vec{F}$. Тому за формулою Стокса

$$I = \oint_L (\vec{F}, \vec{\tau}) dl = \iint_\Sigma (\vec{0}, \vec{n}) d\sigma = 0 .$$

У випадку б) на контур $L$ не можна натягнути поверхню $\Sigma$ так, щоб на ній виконувалися умови теореми Стокса, оскільки в точках осі $Oz$ порушується умова неперервної диференційовності функції $\vec{F}$. Натягнемо кусково-гладку поверхню $\Sigma \subset D$ на два контури: $L$ і коло $L_0 : x^2 + y^2 = a^2$, $z = h$. Тоді за формулою Стокса маємо

$$\oint_L + \oint_{L_0} = \iint_\Sigma (\vec{0}, \vec{n}) d\sigma = 0 ,$$

звідки

$$\oint_L = -\oint_{L_0} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \begin{bmatrix} L_0 : \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \\ t_{\text{п}} = 2\pi, \ t_{\text{к}} = 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\int_{2\pi}^{0} \frac{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}{a^2} dt = 2\pi .$$

5. Обчислимо інтеграл $I = \oint_L (\vec{F}, \vec{\tau}) dl$, де $L$ – контур, який обмежує частину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, що лежить у першому октанті ( $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ ) (рис. 106), якщо

$$\vec{F} = (y^2 - z^2)\vec{i} + (z^2 - x^2)\vec{j} + (x^2 - y^2)\vec{k} .$$

Маємо

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \operatorname{rot} \vec{F} = -2\left[ (y + z)\vec{k} + (z + x)\vec{j} + (x + y)\vec{k} \right]$$

(див. приклад 3). За формулою Стокса

$$I = \iint_\Sigma (\operatorname{rot} \vec{F}, \vec{n}) d\sigma = -2\iint_\Sigma \frac{(y + z)x + (z + x)y + (x + y)z}{r} d\sigma =$$

$$= -\frac{4}{a}\iint\limits_{\Sigma}(xy + yz + zx)d\sigma = \begin{bmatrix} \Sigma : z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},\ (x, y) \in D, \\ d\sigma = \dfrac{adxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{4}{a}\iint\limits_{D}\left(xy + (x + y)\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right)\frac{adxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$= -4\iint\limits_{D}\frac{xydxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} - 4\iint\limits_{D}(x + y)dxdy = [\text{ПСК}] =$$

$$= -4\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin 2\varphi d\varphi\int\limits_{0}^{a}\frac{r^3dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} - 4\int\limits_{0}^{\pi/2}(\sin\varphi + \cos\varphi)d\varphi\int\limits_{0}^{a}r^2dr =$$

$$= \cos 2\varphi\Big|_0^{\pi/2}\cdot\frac{a^3}{2}\mathrm{B}(2, 1/2) - \frac{4}{3}a^3(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -2\cdot\frac{1}{2}a^3\frac{\sqrt{\pi}}{3/2\cdot 1/2\cdot\sqrt{\pi}} - \frac{8}{3}a^3 = -\frac{4}{3}a^3 - \frac{8}{3}a^3 = -4a^3.$$

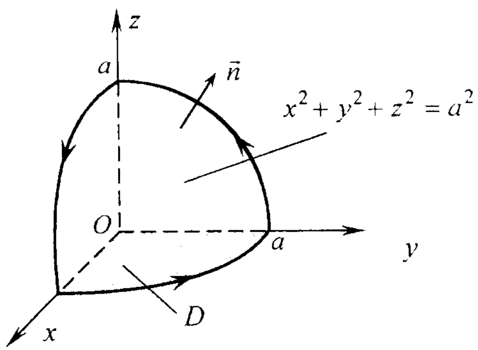



**Рис. 106.** Приклад 5

6. Обчислимо інтеграл

$$I = \oint\limits_{L} y^2dx + xdy + zdz$$

по контуру $L$, зображеному на рис. 107.

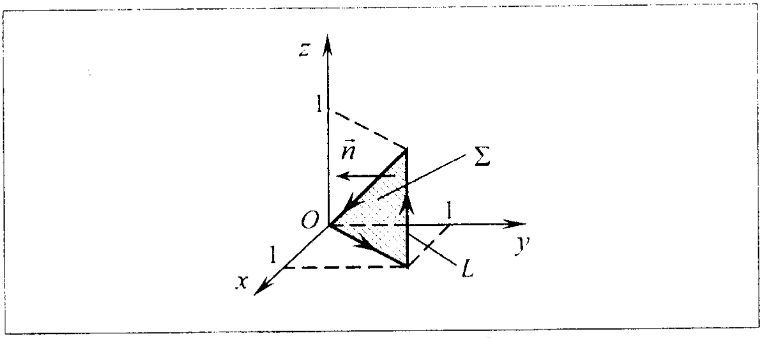



**Рис. 107.** Приклад 6

Векторна функція $\vec{F}=\{y^2;x;z\}$ неперервно диференційовна на $\mathbb{R}^3$. Знайдемо $\operatorname{rot}\vec{F}$:

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & x & z\end{vmatrix}=0\vec{i}+0\vec{j}+(1-2y)\vec{k}=(1-2y)\vec{k}.$$

Контур $L$ лежить у площині $\Sigma: x-y=0$. Тому

$$\vec{n}=\left\{1/\sqrt{2};-1/\sqrt{2};0\right\}.$$

За формулою Стокса маємо $I=\iint\limits_{\Sigma}(\operatorname{rot}\vec{F},\vec{n})d\sigma=\iint\limits_{\Sigma}0d\sigma=0$.

7. Обчислимо інтеграл $I=\oint\limits_{L}y^2dx+xzdy+zdz$ по контуру $L$, зображеному на рис. 108.

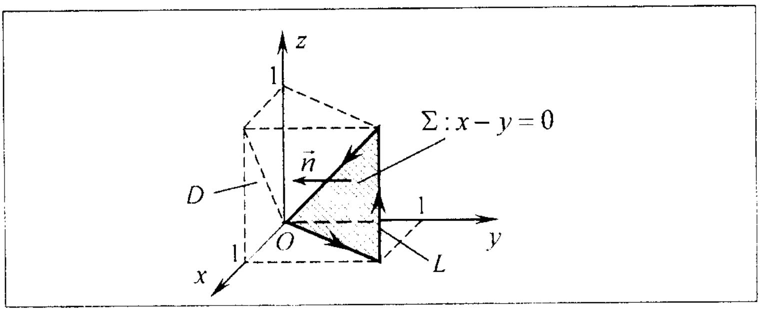



**Рис. 108.** Приклад 7

Векторна функція $\vec{F}=\{y^2; xz; z\}$ неперервно диференційовна на $\mathbb{R}^3$. Знайдемо $\operatorname{rot}\vec{F}$:

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & xz & z \end{vmatrix}=-x\vec{i}+0\vec{j}+(z-2y)\vec{k}\ .$$

Контур $L$ лежить у площині $\Sigma: x-y=0$. Тому

$$\vec{n}=\left\{1/\sqrt{2}\,; -1/\sqrt{2}\,; 0\right\}.$$

За формулою Стокса маємо

$$I=\iint_{\Sigma}(\operatorname{rot}\vec{F},\vec{n})d\sigma=\iint_{\Sigma}\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}+0+0\right)d\sigma=-\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{\Sigma}x\,d\sigma=.$$

$$=\begin{bmatrix} \Sigma: y=x, (x,y)\in D, \\ d\sigma=\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz=\sqrt{2}dxdz \end{bmatrix}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{D}x\sqrt{2}dxdz=$$

$$=-\int_0^1 x\,dx\int_0^{2x}dz=-\int_0^1 2x^2dx=-\frac{2}{3}\,.$$

### Фізичний зміст ротора

Користуючись зв'язком між циркуляцією векторного поля і ротором (формула Стокса), покажемо, що ротор $\operatorname{rot}\vec{F}$ векторного поля $\vec{F}$ не залежить від вибору системи координат[1] у просторі, а залежить лише від самого поля $\vec{F}$. Нехай $\operatorname{rot}\vec{F}(M)\neq\vec{0}$. Виберемо будь-який напрямок, який характеризується ортом $\vec{n}$, і проведемо через точку $M$ малу плоску площадку $\Sigma\perp\vec{n}$ (рис. 109), обмежену контуром $L$. Вважаємо, що $\vec{n}$ – орт орієнтації площадки $\Sigma$ і що орієнтація контуру $L$ узгоджена з орієн-

[1] Як і раніше, розглядаються праві системи декартових координат. Для ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координатних осей такої системи поворот вектора $\vec{i}$ на найменший кут до суміщення з вектором $\vec{j}$ з кінця вектора $\vec{k}$ видно так, що він здійснюється проти годинникової стрілки.

тацією $\Sigma$. Використовуючи формулу Стокса, для циркуляції поля $\vec{F}$ уздовж контуру маємо

$$C_L(\vec{F}) = \iint\limits_{\Sigma} (\operatorname{rot}\vec{F}, \vec{n})d\sigma = \left[ \begin{array}{c} (\operatorname{rot}\vec{F}, \vec{n}) = \\ = \text{Пр}_{\vec{n}} \operatorname{rot}\vec{F} \overset{\text{def}}{=} \operatorname{rot}_n \vec{F} \end{array} \right] =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} \operatorname{rot}_n \vec{F} d\sigma = [S(\Sigma) = \sigma] = \operatorname{rot}_n \vec{F}(M^*)\sigma$$

(використана теорема про середнє значення для поверхневого інтеграла 1-го роду). Звідси

$$\operatorname{rot}_n \vec{F}(M^*) = \frac{C_L(\vec{F})}{\sigma}$$

та

$$\lim_{\substack{\Sigma \to M \\ (M^* \to M)}} \operatorname{rot}_n \vec{F}(M^*) = \operatorname{rot}_n \vec{F}(M) = \lim_{\substack{\Sigma \to M \\ (M^* \to M)}} \frac{C_L(\vec{F})}{\sigma}$$

$$\left(\operatorname{rot}_n \vec{F}(M) \approx \frac{C_L(\vec{F})}{\sigma}\right).$$

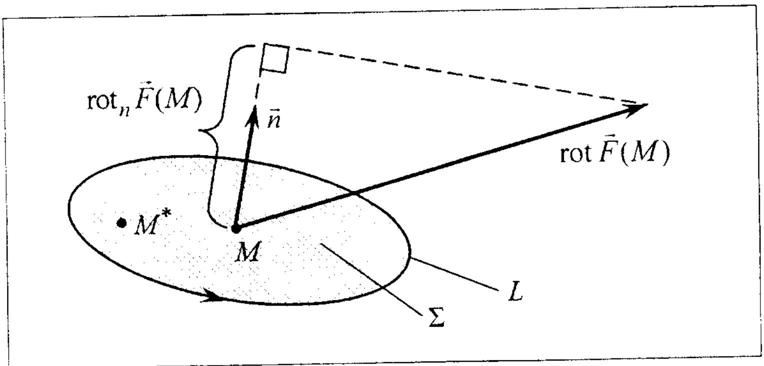



**Рис. 109.** Геометричний зміст ротора

Оскільки циркуляція $C_L(\vec{F})$ і площа $\sigma$ площадки $\Sigma$ не залежить від вибору системи координат, то і проекція ротора на будь-який напрямок $\vec{n}$ не залежить від вибору системи координат. Отже, таку властивість має і $\operatorname{rot}\vec{F}$. Величину $\dfrac{C_L(\vec{F})}{\sigma}$ називають *відносною циркуляцією.*

Оскільки проекція $\operatorname{rot}_n\vec{F}(M)$ максимальна, якщо $\operatorname{rot}\vec{F}(M)\uparrow\uparrow\vec{n}$, то $\operatorname{rot}\vec{F}(M)$ напрямлений по перпендикуляру до площадки $\Sigma$, у якій відносна циркуляція максимальна.

Нехай тепер $\vec{F}=\vec{F}(M)$ – векторне поле швидкостей стаціонарного потоку рідини. Помістимо в точку $M$ мале коліщатко $\Sigma$ з лопатками на ободі $L$ (рис. 110).

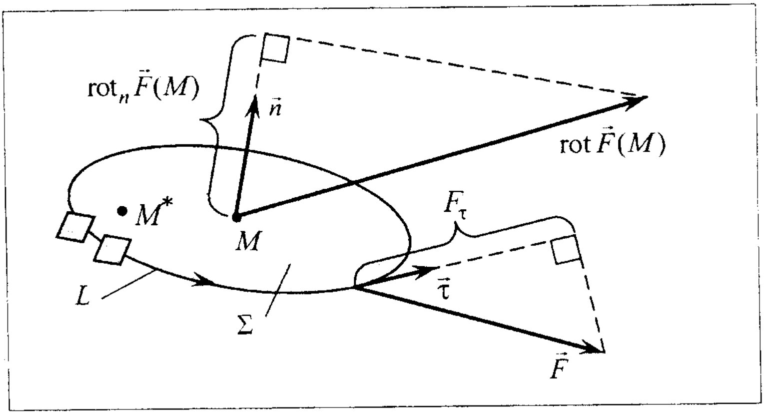



**Рис. 110.** Фізичний зміст ротора

Нехай $\vec{n}$ – орт осі коліщатка, $a$ – радіус кола $L$. Під дією рухомої рідини коліщатко обертається зі швидкістю, яка залежить від положення осі (від орієнтації орта $\vec{n}$). Середню лінійну швидкість точок на ободі $L$ можна знайти за формулою

$$v_{\text{сер}}=\frac{1}{2\pi a}\oint_L(\vec{F},\vec{\tau})dl=\frac{1}{2\pi a}\oint_L F_\tau\,dl,$$

де $F_\tau=(\vec{F},\vec{\tau})$ – складова швидкості $\vec{F}$, напрямлена вздовж дотичної до $L$. Застосувавши формулу Стокса і теорему про середнє значення для поверхневих інтегралів 1-го роду, дістанемо

$$v_{\text{сер}} = \frac{1}{2\pi a}\iint_{\Sigma}(\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n})d\sigma = \frac{1}{2\pi a}\iint_{\Sigma}\operatorname{rot}_n\vec{F}d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\operatorname{rot}_n\vec{F}(M^*)\cdot\pi a^2 = \frac{a}{2}\operatorname{rot}_n\vec{F}(M^*).$$

Звідси знайдемо середню кутову швидкість коліщатка:

$$\omega_{\text{сер}} = \frac{v_{\text{сер}}}{a} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}_n\vec{F}(M^*).$$

Отже, кутова швидкість у самій точці $M$ має вигляд

$$\omega(M) = \lim_{\substack{\Sigma\to M\\(M^*\to M)}}\frac{v_{\text{сер}}}{a} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}_n\vec{F}(M).$$

Якщо напрямок осі (вектор $\vec{n}$) вибрати так, що $\vec{n}\uparrow\uparrow\operatorname{rot}\vec{F}(M)$, то швидкість обертання коліщатка буде найбільшою, причому

$$\omega_{\max}(M) = 1/2\cdot\left|\operatorname{rot}\vec{F}(M)\right| \quad \left(\left|\operatorname{rot}\vec{F}(M)\right| = 2\omega_{\max}(M)\right).$$

Отже, ротор векторного поля $\vec{F}$ характеризує обертальну здатність поля: він напрямлений перпендикулярно до нескінченно малої площадки (у точці $M$), у якій кутова швидкість обертання частинки рідини найбільша, а довжина ротора в цій точці дорівнює подвоєній максимальній кутовій швидкості обертання.

## 2.4. Деякі наслідки інтегральних теорем

### Наслідки формули Гаусса–Остроградського

Теорема про дивергенцію

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_+}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iiint_{D_0}\operatorname{div}\vec{F}dv \quad \left(\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_+}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iiint_{D_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{F}dv\right)$$

(формула Гаусса–Остроградського)

($\Sigma = \partial D_0$, $\vec{n} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ – орт нормалі (орієнтації) $\Sigma$ ).

Теорема про ротор

$$\oiint_{\Sigma_-} \vec{F} \times \vec{n}\, d\sigma = \iiint_{D_0} \operatorname{rot} \vec{F}\, dv \quad \left( \oiint_{\Sigma_-} \vec{F} \times \vec{n}\, d\sigma = \iiint_{D_0} \vec{\nabla} \times \vec{F}\, dv \right)$$

Теорема про градієнт

$$\oiint_{\Sigma_+} u\vec{n}\, d\sigma = \iiint_{D_0} \operatorname{grad} u\, dv \quad \left( \oiint_{\Sigma_+} u\vec{n}\, d\sigma = \iiint_{D_0} \vec{\nabla} u\, dv \right)$$

Для доведення двох останніх рівностей необхідно застосувати формулу Гаусса–Остроградського до кожної компоненти відповідного вектора:

$$\oiint_{\Sigma_-} \vec{F} \times \vec{n}\, d\sigma =$$

$$= \oiint_{\Sigma_-} \Big[ (Q\cos\gamma - R\cos\beta)\vec{i} + (R\cos\alpha - P\cos\gamma)\vec{j} +$$

$$+ (P\cos\beta - Q\cos\alpha)\vec{k} \Big] d\sigma =$$

$$= -\iiint_{D_0} \left[ \left( \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right)\vec{i} + \left( \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right)\vec{j} + \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)\vec{k} \right] dv = \iiint_{D_0} \operatorname{rot} \vec{F}\, dv,$$

$$\oiint_{\Sigma_-} u\vec{n}\, d\sigma = \oiint_{\Sigma_+} (u\cos\alpha\,\vec{i} + u\cos\beta\,\vec{j} + u\cos\gamma\,\vec{k})\, d\sigma =$$

$$= \iiint_{D_0} \left( \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \right) dv = \iiint_{D_0} \operatorname{grad} u\, dv .$$

Як відомо (с. 93), скалярна величина $\Pi_\Sigma(\mathrm{F}) = \oiint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$ є потоком векторного поля $\vec{F}$ через поверхню $\Sigma = \partial D_0$. Векторні величини $\vec{\Pi}_\Sigma(\vec{F}) = \oiint_{\Sigma} \vec{F} \times \vec{n}\, d\sigma$ і $\vec{\Pi}_\Sigma(u) = \oiint_{\Sigma} u\vec{n}\, d\sigma$ називають *векторним потоком векторного поля* $\vec{F}$ і *векторним потоком скалярного поля* $u$ через поверхню $\Sigma$ , відповідно.

Із теорем про дивергенцію, ротор і градієнт можна дістати такі граничні рівності:

$$\operatorname{div}\vec{F}(M)=\lim_{d\to 0}\frac{\oiint\limits_{\Sigma_+}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma}{V(D_0)}=\frac{d\Pi_{\Sigma}(\vec{F})}{dv},$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}(M)=\lim_{d\to 0}\frac{\oiint\limits_{\Sigma_-}\vec{F}\times\vec{n}\,d\sigma}{V(D_0)}=\frac{d\vec{\Pi}_{\Sigma}(\vec{F})}{dv},$$

$$\operatorname{grad}u(M)=\lim_{d\to 0}\frac{\oiint\limits_{\Sigma_+}u\vec{n}\,d\sigma}{V(D_0)}=\frac{d\vec{\Pi}_{\Sigma}(u)}{dv}$$

($d$ – діаметр множини $D_0$, $M\in D_0$), з яких випливає, що $\operatorname{div}\vec{F}$, $\operatorname{rot}\vec{F}$ і $\operatorname{grad}u$ є *похідними по об'єму* відповідних потоків.

Зауваження. Із рівності для дивергенції випливає, що у випадку, коли $\vec{F}$ – поле швидкостей стаціонарного потоку рідини, $\operatorname{div}\vec{F}(M)$ є потужністю (густиною) потоку в точці $M$, $\operatorname{div}\vec{F}(M)$ чисельно дорівнює кількості рідини, яка виникає (зникає) у точці $M$ за одиницю часу (*фізичний зміст* дивергенції векторного поля). Якщо $\operatorname{div}\vec{F}(M)>0$ $(<0)$, то кажуть, що в точці $M$ джерело (стік).

### Формула Стокса

$$\oint\limits_L\vec{F}\cdot\vec{\tau}\,dl=\oint\limits_L\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint\limits_{\Sigma}\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma\quad\left(\oint\limits_L\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint\limits_{\Sigma}\vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma\right)$$

(поверхня $\Sigma$ натягнута на контур $L$, $\vec{\tau}$ – орт орієнтації $L$, $\vec{n}=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$ – орт орієнтації $\Sigma$, орієнтації $L$ і $\Sigma$ узгоджені).

### Наслідки формули Стокса

$$\oint\limits_L\vec{F}\times d\vec{r}=-\iint\limits_{\Sigma}(\vec{n}\times\vec{\nabla})\times\vec{F}\,d\sigma,$$

$$\oint\limits_L u\,d\vec{r}=-\iint\limits_{\Sigma}\operatorname{grad}u\times\vec{n}\,d\sigma\quad\left(\oint\limits_L u\,d\vec{r}=-\iint\limits_{\Sigma}\vec{\nabla}u\times\vec{n}\,d\sigma\right).$$

Щоб довести перше співвідношення, знайдемо

$$\vec{F}\times d\vec{r}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P & Q & R \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\,(Qdz-Rdy)+\vec{j}\,(Rdx-Pdz)+\vec{k}\,(Pdy-Qdx)$$

і застосуємо формулу Стокса до кожної компоненти:

$$\oint_L 0dx-Rdy+Qdz=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -R & Q \end{vmatrix} d\sigma=$$

$$=\iint_\Sigma \left[\cos\alpha\left(\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)+\cos\beta\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+\cos\gamma\left(-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\right]d\sigma,$$

$$\oint_L Rdx+0dy-Pdz=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ R & 0 & -P \end{vmatrix} d\sigma=$$

$$=\iint_\Sigma \left[\cos\alpha\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)+\cos\beta\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)+\cos\gamma\left(-\frac{\partial R}{\partial y}\right)\right]d\sigma,$$

$$\oint_L -Qdx+Pdy+0dz=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -Q & P & 0 \end{vmatrix} d\sigma=$$

$$=\iint_\Sigma \left[\cos\alpha\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+\cos\beta\left(-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\cos\gamma\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right]d\sigma.$$

Знайдемо тепер підінтегральний вираз $-(\vec{n}\times\vec{\nabla})\times\vec{F}$ . Маємо

$$-(\vec{n}\times\vec{\nabla})=-\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}=\vec{i}\left(\cos\gamma\frac{\partial}{\partial y}-\cos\beta\frac{\partial}{\partial z}\right)+$$

$$+\vec{j}\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial z}-\cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)+\vec{k}\left(\cos\beta\frac{\partial}{\partial x}-\cos\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$-(\vec{n}\times\vec{\nabla})\times\vec{F}=$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\gamma\frac{\partial}{\partial y}-\cos\beta\frac{\partial}{\partial z} & \cos\alpha\frac{\partial}{\partial z}-\cos\gamma\frac{\partial}{\partial z} & \cos\beta\frac{\partial}{\partial x}-\cos\alpha\frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left(\cos\alpha\frac{\partial R}{\partial z}-\cos\gamma\frac{\partial R}{\partial z}-\cos\beta\frac{\partial Q}{\partial x}+\cos\alpha\frac{\partial Q}{\partial y}\right)+$$

$$+\vec{j}\left(\cos\beta\frac{\partial P}{\partial x}-\cos\alpha\frac{\partial P}{\partial y}-\cos\gamma\frac{\partial R}{\partial y}+\cos\beta\frac{\partial R}{\partial z}\right)+$$

$$+\vec{k}\left(\cos\gamma\frac{\partial Q}{\partial y}-\cos\beta\frac{\partial Q}{\partial z}-\cos\alpha\frac{\partial P}{\partial z}+\cos\gamma\frac{\partial P}{\partial z}\right)+$$

$$=\vec{i}\left(\cos\alpha\left(\frac{\partial R}{\partial z}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)-\cos\gamma\frac{\partial R}{\partial z}-\cos\beta\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+$$

$$+\vec{j}\left(\cos\beta\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)-\cos\alpha\frac{\partial P}{\partial y}-\cos\gamma\frac{\partial R}{\partial y}\right)+$$

$$+\vec{k}\left(\cos\gamma\left(\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\right)-\cos\beta\frac{\partial Q}{\partial z}-\cos\alpha\frac{\partial P}{\partial z}\right).$$

Отже, $\oint\limits_L \vec{F}\times d\vec{r}=-\iint\limits_\Sigma(\vec{n}\times\vec{\nabla})\times\vec{F}\,d\sigma$ .

Аналогічно доведемо і друге співвідношення:

$$\oint\limits_L u d\vec{r}=\vec{i}\oint\limits_L udx+\vec{j}\oint\limits_L udy+\vec{k}\oint\limits_L udz=$$

$$=\vec{i}\iint\limits_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & 0 & 0\end{vmatrix}d\sigma+\vec{j}\iint\limits_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & u & 0\end{vmatrix}d\sigma+$$

$$+\vec{k}\iint\limits_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & u\end{vmatrix}d\sigma=$$

$$= \vec{i}\iint\limits_{\Sigma}\left(\cos\beta\frac{\partial u}{\partial z} - \cos\gamma\frac{\partial u}{\partial y}\right)d\sigma + \vec{j}\iint\limits_{\Sigma}\left(-\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial z} + \cos\gamma\frac{\partial u}{\partial x}\right)d\sigma +$$

$$+\vec{k}\iint\limits_{\Sigma}\left(\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial y} - \cos\beta\frac{\partial u}{\partial x}\right)d\sigma .$$

Перетворимо праву частину:

$$-\iint\limits_{\Sigma}\operatorname{grad}u\times\vec{n}\,d\sigma = -\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\end{vmatrix}d\sigma =$$

$$= \vec{i}\iint\limits_{\Sigma}\left(\cos\beta\frac{\partial u}{\partial z} - \cos\gamma\frac{\partial u}{\partial y}\right)d\sigma + \vec{j}\iint\limits_{\Sigma}\left(\cos\gamma\frac{\partial u}{\partial x} - \cos\alpha\frac{\partial u}{\partial z}\right)d\sigma +$$

$$+\vec{k}\iint\limits_{\Sigma}\left(\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial y} - \cos\beta\frac{\partial u}{\partial x}\right)d\sigma .$$

Отже, $\oint\limits_{L} u\,d\vec{r} = -\iint\limits_{\Sigma}\operatorname{grad}u\times\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\Sigma}\vec{n}\times\operatorname{grad}u\,d\sigma$.

Доведемо формули:

1. $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma_+} u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}d\sigma = \iiint\limits_{D}(\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v + u\operatorname{div}\operatorname{grad}v)dV$

$$\left(\oiint\limits_{\Sigma_+} u\vec{\nabla}v\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iiint\limits_{D}(\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v + u\Delta v)dV\right).$$

2. $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma_+}\left(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)d\sigma = \iiint\limits_{D}(u\operatorname{div}\operatorname{grad}v - v\operatorname{div}\operatorname{grad}u)dV$

$$\left(\oiint\limits_{\Sigma_+}\left(u\vec{\nabla}v\cdot\vec{n} - v\vec{\nabla}u\cdot\vec{n}\right)d\sigma = \iiint\limits_{D}(u\Delta v - v\Delta u)dV\right)$$

$$\left(\operatorname{div}\operatorname{grad}v = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}v = \vec{\nabla}^2 v = \Delta v,\quad \frac{\partial u}{\partial\vec{n}} = \operatorname{grad}u\cdot\vec{n} = \vec{\nabla}u\cdot\vec{n}\right).$$

3. $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma_+} u\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}d\sigma = \iiint\limits_{D}\left((\operatorname{grad}u)^2 + u\operatorname{div}\operatorname{grad}u\right)dV$

$$\left(\oiint\limits_{\Sigma_+} u\vec{\nabla}v\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iiint\limits_{D}\left((\vec{\nabla}u)^2 + u\Delta u\right)dV\right).$$

4. $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma_+}\frac{\partial u}{\partial\vec n}d\sigma=\iiint\limits_D\Delta u\,dV\quad\left(\oiint\limits_{\Sigma_+}\vec\nabla u\cdot\vec n\,d\sigma=\iiint\limits_D\Delta u\,dV\right).$

5. $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma_+}\frac{\partial(1/r)}{\partial\vec n}d\sigma=0\quad(r=|r|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,)$

$$\left(\oiint\limits_{\Sigma_+}\vec\nabla\frac{1}{r}\cdot\vec n\,d\sigma=0\right).$$

6. $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma_+}\frac{1}{r}\frac{\partial(1/r)}{\partial\vec n}d\sigma=\iiint\limits_D\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)^2dV$

$$\left(\oiint\limits_{\Sigma_+}\frac{1}{r}\vec\nabla\frac{1}{r}\cdot\vec n\,d\sigma=\iiint\limits_D\left(\vec\nabla\frac{1}{r}\right)^2dV\right).$$

7. $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma_+}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\vec n}d\sigma=0\quad\left(\oiint\limits_{\Sigma_+}\frac{1}{r^2}\vec\nabla r\cdot\vec n\,d\sigma=0\right).$

8. $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma_+}r^2\frac{\partial(1/r)}{\partial\vec n}d\sigma=-2\iiint\limits_D\frac{1}{r}dV\quad\left(\oiint\limits_{\Sigma_+}r^2\vec\nabla\frac{1}{r}\cdot\vec n\,d\sigma=-2\iiint\limits_D\frac{1}{r}dV\right).$

Перші дві з цих формул називають *формулами Гріна*. Інші формули є наслідками перших двох. Для доведення застосуємо формулу Гаусса–Остроградського:

1) $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma_-}u\frac{\partial v}{\partial\vec n}d\sigma=\oiint\limits_{\Sigma_+}u\vec\nabla v\cdot\vec n\,d\sigma=\iiint\limits_D\operatorname{div}(u\vec\nabla v)dV=$

$$\iiint\limits_D(u\vec\nabla\cdot\vec\nabla v+\vec\nabla u\cdot\vec\nabla v)dV=\iiint\limits_D(u\Delta v+\vec\nabla u\cdot\vec\nabla v)dV$$

(використано властивість 6 дивергенції (с. 21):

$$\operatorname{div}(u\vec F)=\vec\nabla\cdot(u\vec F)=u\vec\nabla\cdot\vec F+\vec\nabla u\cdot\vec F\,).$$

2) Формула є наслідком першої формули Гріна.

3) Формула випливає з першої формули Гріна при $u=v$.

4) Формула випливає з другої формули Гріна при $v=1$.

5) Оскільки $\Delta\frac{1}{r}=\operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{r}=-\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3}=0 \quad (r\neq 0)$, то формула випливає із формули 4 при $u=\frac{1}{r}$.

6) Оскільки $\Delta\frac{1}{r}=0\ (r\neq 0)$, то формула випливає із формули 3 при $v=\frac{1}{r}$.

7) У формулі 1 покладемо $u=\frac{1}{r^2}$, $v=r$. Тоді

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma_+}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\vec{n}}d\sigma=\iiint_D(\operatorname{grad}\frac{1}{r^2}\cdot\operatorname{grad}r+\frac{1}{r^2}\operatorname{div}\operatorname{grad}r)dV=$$

$$=\iiint_D(-\frac{2}{r^3}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}+\frac{1}{r^2}\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r})dV=$$

$$=\iiint_D\left(-\frac{2}{r^3}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r}\operatorname{div}\vec{r}+\operatorname{grad}\frac{1}{r}\cdot\vec{r}\right)\right)dV=$$

$$=\iiint_D\left(-\frac{2}{r^3}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{3}{r}-\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{r}\right)\right)dV=0 \quad (r\neq 0).$$

8) У формулі 1 покладемо $u=r^2$, $v=\frac{1}{r}$. Тоді $\Delta\frac{1}{r}=0$ і

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma_+}r^2\frac{\partial(1/r)}{\partial\vec{n}}d\sigma=\iiint_D\operatorname{grad}r^2\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{r}\,dV=$$

$$=\iiint_D 2r\frac{\vec{r}}{r}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\vec{r}}{r}dV=-2\iiint_D\frac{1}{r}dV.$$

# РОЗДІЛ 3

# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ ОПЕРАЦІЇ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ (ПРОДОВЖЕННЯ)

- Спеціальні типи векторних полів [2, п. 4, § 2, гл. 6, п. 4, § 3, гл. 6, п. 5, § 4, гл. 6], [3, п. 4, § 4, гл. 7], [4, § 18, 19, гл. 4, § 22, гл. 5], [5, п. 52.5, 52.6, § 52], [6, п. 6.2–6.4, § 6, гл. 3], [7, § 4, гл. 18].
- Набла-символіка [2, § 5, 6, гл. 6], [4, § 20, 21, гл. 5], [6, п. 6.5, § 6, гл. 3].
- Запис основних диференціальних операцій векторного аналізу в ОКСК [2, § 7, гл. 6], [3, § 3, гл. 6], [4, гл. 6], [6, § 7, гл. 3].

## 3.1. Спеціальні типи векторних полів

Будь-яке неперервно диференційовне векторне поле $\vec{F}$ можна представити у вигляді $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, де $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ – т. зв. потенціальне і соленоїдне векторні поля відповідно[1]. Векторне поле $\vec{F} = \{P; Q; R\} \in C^1_D$ називають *потенціальним*, якщо існує скалярна функція $u$ така, що $\vec{F} = \operatorname{grad} u$ $(du = Pdx + Qdy + Rdz)$. Функцію (скалярне поле) $u$ називають *скалярним потенціалом*[2] векторного поля $\vec{F}$.

Наприклад, векторне поле $\vec{F} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$ є потенціальним зі скалярним потенціалом $u = -\dfrac{1}{r}$:

---

[1] Це твердження в літературі відоме як теорема Гельмгольца.

[2] У підрозд. 1.3, п. 3, функція $u$ була названа первісною, або потенціальною функцією.

$$\operatorname{grad} u = -\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\left(-\frac{1}{r^2}\right)\operatorname{grad} r = \frac{1}{r^2}\frac{\vec r}{r} = \frac{\vec r}{r^3} = \vec F \quad (r \neq 0).$$

Кулонівське поле вектора напруженості

$$\vec E = \vec E(M) = \sum_{i=1}^{n} k\frac{q_i}{r_i^2}\vec e_i$$

електростатичного поля, створеного системою $n$ нерухомих електричних зарядів $q_1,\ldots,q_n$, розміщених у точках $M_1,\ldots,M_n$ ($\vec r_i = \overrightarrow{MM_i}$, $r_i = |\vec r_i|$, $k = \text{const}$, $\vec e_i = \vec r_i / r_i$), теж потенціальне з потенціалом $u = -\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{kq_i}{r_i}$ $\quad (r_i \neq 0)$.

Якщо поле $\vec F$ потенціальне в деякій області, то його скалярний потенціал $u$ визначений полем $\vec F$ у цій області однозначно з точністю до довільної адитивної сталої. Справді, якщо одночасно $\vec F = \operatorname{grad} u$ і $\vec F = \operatorname{grad} v$, то $\operatorname{grad}(u - v) \equiv \vec 0$, звідки $u - v = \text{const} = \underset{\forall}{C}$.

### Властивості потенціальних полів

Нехай $D \subset \mathbb{R}^3$ – поверхнево однозв'язна[1] область. Тоді наступні чотири твердження еквівалентні.

1. Циркуляція векторного поля $\vec F$ по будь-якому (кусково-гладкому) контуру $L$ дорівнює нулю:

$$C_L(\vec F) = \oint\limits_L \vec F \cdot d\vec r = 0 \quad (\forall L \subset D).$$

2. Лінійний інтеграл $\int\limits_{K=AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{K=AB} \vec F \cdot d\vec r$ не залежить від вибору кривої $K \subset D$, яка з'єднує точки $A$ і $B$.

3. Поле $\vec F$ потенціальне: $\vec F = \operatorname{grad} u$, причому

[1] Область $D \subset \mathbb{R}^3$ називається *поверхнево однозв'язною*, якщо на будь-який кусково-гладкий контур $L \subset D$ можна натягнути кусково-гладку поверхню $\Sigma \subset D$.

$$\int\limits_{K=AB} \vec{F}\cdot d\vec{r} = u\Big|_A^B = u(B)-u(A)\,.$$

4. Скрізь в області $D$ виконується рівність $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{0}$.

Доведемо[1], наприклад, еквівалентність тверджень 1 і 4. Нехай $\operatorname{rot}\vec{F}=0$. Тоді, застосовуючи формулу Стокса, маємо

$$C_L(\vec{F})=\oint\limits_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint\limits_L \vec{F}\cdot\vec{\tau}dl=\iint\limits_\Sigma \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma=\vec{0}$$

($\Sigma\subset D$ – поверхня, натягнута на контур $L$, яка існує внаслідок поверхневої однозв'язності області $D$).

Нехай тепер $C_L(\vec{F})=0$ по будь-якому контуру $L\subset D$. Використовуючи граничне представлення проекції ротора (с. 170)

$$\operatorname{rot}_n\vec{F}(M)=\lim_{\Sigma\to M}\frac{C_L(\vec{F})}{\sigma}=0 \quad (M\in D),$$

дістаємо, що проекція $\operatorname{rot}\vec{F}(M)$ на будь-який напрямок $\vec{n}$ дорівнює нулю. Отже, $\operatorname{rot}\vec{F}=0$ $(\forall M\in D)$.

Скалярний потенціал потенціального поля $\vec{F}$ можна знайти за формулою

$$u=u(x,y,z)=\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz+\underset{\forall}{C}\,,$$

де $A(x_0;y_0;z_0)$ – фіксована, $B(x;y;z)$ – довільна (змінна) точки області $D$, а також за наслідками цієї формули (с. 55).

Векторне поле $\vec{F}=\{P;Q;R\}\in C_D^1$ називають *соленоїдним* в області $D$, якщо існує векторна функція (*векторний потенціал*) $\vec{A}$ така[2], що $\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$.

Векторний потенціал $\vec{A}$ визначений полем $\vec{F}$ в області $D$ однозначно з точністю до довільного доданка вигляду $\operatorname{grad}u$.

---

[1] Еквівалентність інших тверджень пропонуємо довести самостійно (див. також с. 50–56).

[2] Оскільки $\vec{F}\in C_D^1$, то векторний потенціал задовольняє умову $\vec{A}\in C_D^2$.

Справді[1], якщо $\vec{F} = \text{rot}\,\vec{A}$ і $\vec{F} = \text{rot}\,\vec{B}$, то $\text{rot}(\vec{A} - \vec{B}) = \vec{0}$ і $\vec{A} - \vec{B} = \text{grad}\,u$.

### Властивості соленоїдних полів

Нехай $D \subset \mathbb{R}^3$ – об'ємно однозв'язна область (с. 130).

1. Векторне поле $\vec{F}$ соленоїдне тоді і тільки тоді[2], коли $\text{div}\,\vec{F}(M) = 0 \ \ \forall M \in D$.

2. Векторне поле $\vec{F}$ соленоїдне тоді і тільки тоді, коли потік

$$\Pi_\Sigma(\vec{F}) = \oiint\limits_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0$$

для будь-якої (кусково-гладкої) замкненої поверхні $\Sigma \subset D$.

3. Потік соленоїдного поля $\vec{F}$ через поверхню $\Sigma$, натягнуту на контур $L$ ($L, \Sigma \subset D$ – кусково-гладкі), не залежить від вибору поверхні $\Sigma$.

4. Для соленоїдних полів справджується *закон збереження інтенсивності векторної трубки* (с. 12): потік соленоїдного поля через перерізи векторної трубки однаковий[3].

Перевіримо правильність цих тверджень.

1. Нехай $\vec{A} = \{a; b; c\}$,

$$\vec{F} = \text{rot}\,\vec{A} = \left\{ \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z};\ \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x};\ \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right\}.$$

Тоді

$$\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial^2 c}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 b}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 a}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a}{\partial y \partial z} = 0.$$

Нехай тепер $\text{div}\,\vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} \equiv 0$. Знайдемо векторний потенціал $\vec{A}$. Оскільки потенціал $\vec{A}$ визначений з точністю до довільного доданка типу $\text{grad}\,u$, то можна вважати, що одна з

---

[1] Припускається, що $D$ – поверхнево однозв'язна область.

[2] З умови $\text{div}\,\vec{F} = 0$ випливає, що соленоїдні поля не містять ні джерел, ні стоків.

[3] Соленоїдні поля називають також *трубчастими* полями.

координат (наприклад третя) вектора $\vec{A}$ дорівнює нулю. Справді, для третьої координати вектора $\vec{A}$ маємо $c(x,y,z)+\dfrac{\partial u}{\partial z}$. Вибравши функцію $u$ з умови $u=-\int c(x,y,z)dz$, дістанемо

$$\vec{A}=\vec{A}_0=\{a_0;b_0;0\},$$

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\left\{-\frac{\partial b_0}{\partial z};\ \frac{\partial a_0}{\partial z};\ \frac{\partial b_0}{\partial x}-\frac{\partial a_0}{\partial y}\right\}=\vec{F}=\{P;Q;R\}.$$

Звідси

$$\frac{\partial b_0}{\partial z}=-P,\quad \frac{\partial a_0}{\partial z}=Q,\quad \frac{\partial b_0}{\partial x}-\frac{\partial a_0}{\partial y}=R.$$

Із перших двох рівнянь маємо:

$$b_0=-\int_{z_0}^{z}P(x,y,t)dt+\varphi(x,y),\qquad a_0=\int_{z_0}^{z}Q(x,y,t)dt+\psi(x,y)$$

($\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ – сталі інтегрування по змінній $z$). Підставивши в третє рівняння, дістанемо

$$-\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dt+\varphi'_x-\psi'_y=R(x,y,z),$$

або, враховуючи, що $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}=-\dfrac{\partial R}{\partial z}$,

$$\varphi'_x-\psi'_y=R(x,y,z_0).$$

Таким чином, для векторного потенціала маємо

$$\vec{A}=\vec{A}_0+\operatorname{grad}u,$$

де

$$\vec{A}_0=\{a_0;b_0;0\},\ a_0=\int_{z_0}^{z}Q(x,y,t)dt+\psi,\ b_0=-\int_{z_0}^{z}P(x,y,t)dt+\varphi,$$

$u\in C^1_D$ – довільна функція, а $\varphi=\varphi(x,y)$, $\psi=\psi(x,y)$ – функції, які задовольняють співвідношення

$$\varphi'_x-\psi'_y=R(x,y,z_0)\quad \big((x,y,z),(x,y,z_0)\in D\big).$$

Розглянемо т. з. центрально-симетричне векторне поле

$$\vec{F} = f(r)\vec{r}$$

($r = |\vec{r}|$, $f(r)$ – довільна неперервно диференційовна функція). З'ясуємо, для яких $f(r) \neq 0$ поле $\vec{F}$ соленоїдне. Маємо:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \operatorname{div}\big(f(r)\vec{r}\big) = f(r)\operatorname{div}\vec{r} + \operatorname{grad} f(r)\cdot\vec{r} =$$

$$= 3f(r) + f'(r)\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r} = 3f(r) + rf'(r) = 0,$$

$$rf'(r) = -3f(r), \quad r\frac{df}{dr} = -3f, \quad \frac{df}{f} = -3\frac{dr}{r},$$

$$\ln f = -3\ln r + \ln C, \quad f = f(r) = \frac{C}{r^3} \ (C = \mathrm{const}).$$

Таким чином, центрально-симетричне поле є соленоїдним тоді і тільки тоді, коли $\vec{F} = C\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ (векторний потенціал кулонівського поля знайдено у прикладі 4 на с. 185–186).

2. Нехай $\operatorname{div}\vec{F} = 0$ в області $D$. Тоді, використовуючи формулу Гаусса–Остроградського для будь-якої замкненої поверхні $\Sigma \subset D$, маємо

$$\Pi_\Sigma(\vec{F}) = \oiint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iiint_{D_0} \operatorname{div}\vec{F}\,dV = 0$$

($\Sigma = \partial D_0$, $D_0 \subset D$ унаслідок об'ємної однозв'язності області $D$).

Нехай тепер $\Pi_\Sigma(\vec{F}) = \oiint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = 0$ для будь-якої замкненої поверхні $\Sigma \subset D$. Тоді, використовуючи граничне представлення дивергенції (с. 171), дістаємо

$$\operatorname{div} F(M) = \lim_{d\to 0}\frac{\overbrace{\oiint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma}^{=0}}{V(D_0)} = \lim_{d\to 0}\frac{\Pi_\Sigma(\vec{F})}{V(D_0)} = 0.$$

3. Нехай $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ – поверхні, натягнуті на контур $L$ (рис. 111). Розглянемо замкнену поверхню $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2'$ (орт орієнтації поверхні $\Sigma_2'$ $\vec{n}_2' = -\vec{n}_2$). Тоді $\Pi_\Sigma(\vec{F}) = 0 = \Pi_{\Sigma_1}(\vec{F}) + \Pi_{\Sigma_2'}(\vec{F})$, звідки

$$\Pi_{\Sigma_1}(\vec{F}) = -\Pi_{\Sigma_2'}(\vec{F}) = \Pi_{\Sigma_2}(\vec{F}).$$

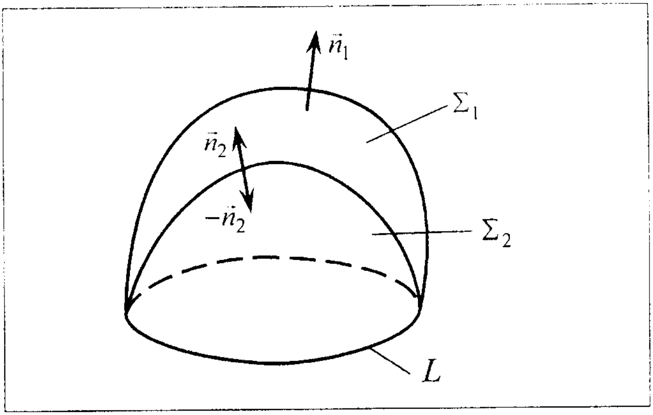



**Рис. 111.** Властивість 3 соленоїдних полів

4. Розглянемо відрізок векторної трубки, обмежений перерізами $\Sigma_1$ і $\Sigma_2$ (рис. 112). Позначивши через $\Sigma_3$ бічну поверхню трубки, дістанемо замкнену поверхню $\Sigma = \Sigma_1' \bigcup \Sigma_2 \bigcup \Sigma_3$ ($-\vec{n}_1$ є ортом орієнтації поверхні $\Sigma_1'$). Оскільки

$$\Pi_{\Sigma}(\vec{F}) = \Pi_{\Sigma_1'}(\vec{F}) + \Pi_{\Sigma_2}(\vec{F}) + \Pi_{\Sigma_3}(\vec{F}) = 0,$$

$$\Pi_{\Sigma_1'}(\vec{F}) = -\Pi_{\Sigma_1}(\vec{F}), \quad \Pi_{\Sigma_3}(\vec{F}) = \iint\limits_{\Sigma_3} \vec{F} \cdot \vec{n}_3 d\sigma = 0,$$

то $\Pi_{\Sigma_1}(\vec{F}) = \Pi_{\Sigma_2}(\vec{F})$.

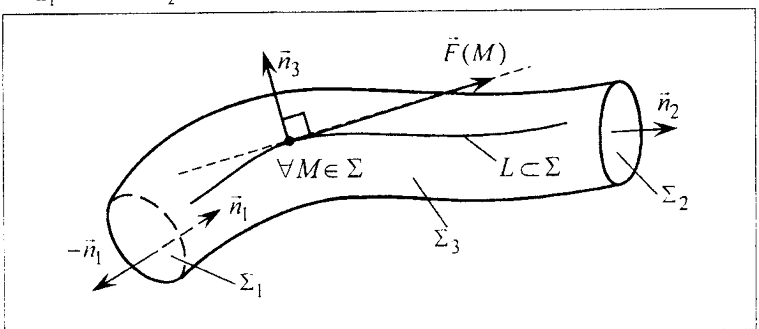



**Рис. 112.** Властивість 4 соленоїдних полів

## Приклади відшукання векторних потенціалів соленоїдних полів

1. $\vec{F}=\{c_1;c_2;c_3\}\quad (c_i=\text{const},\ i=1,2,3),\quad \operatorname{div}\vec{F}=0$.

Маємо

$$a_0=\int_0^z c_2\,dt+\psi=c_2z+\psi,\quad b_0=-\int_0^z c_1\,dt+\varphi=-c_1z+\varphi.$$

$$\varphi'_x-\psi'_y=c_3.$$

Вибравши $\varphi=c_3x$, $\psi=0$, дістанемо $\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$, де

$$\vec{A}=\vec{A}_0+\operatorname{grad}u=\{c_2z;-c_1z+c_3x;0\}+\operatorname{grad}u.$$

2. $\vec{F}=\{\sin y+e^z;\ z^2+x^3;\ x^2+\cos y\},\quad \operatorname{div}\vec{F}=0$.

Маємо

$$a_0=\int_0^z (t^2+x^3)\,dt+\psi=\frac{1}{3}z^3+x^3z+\psi,$$

$$b_0=-\int_0^z(\sin y+e^t)\,dt+\varphi=-z\sin y+1-e^z+\varphi,$$

$$\varphi'_x-\psi'_y=x^2+\cos y.$$

Вибравши $\varphi=\frac{1}{3}x^3$, $\psi=-\sin y$, дістанемо $\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$, де

$$\vec{A}=\vec{A}_0+\operatorname{grad}u=$$

$$=\left\{\frac{1}{3}z^3+x^3z-\sin y;\ 1-e^z-z\sin y+\frac{1}{3}x^3;\ 0\right\}+\operatorname{grad}u.$$

3. $\vec{F}=\{x^2ye^z;\ xy^2e^z;\ -4xye^z\},\quad \operatorname{div}\vec{F}=0$.

Маємо

$$a_0=\int_0^z xy^2e^t\,dt+\psi=xy^2(e^z-1)+\psi,$$

$$b_0=-\int_0^z x^2ye^t\,dt+\varphi=-x^2y(e^z-1)+\varphi,$$

$$\varphi'_x - \psi'_y = -4xye^z .$$

Вибравши $\varphi = 0$, $\psi = 2xy^2$, дістанемо $\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$, де

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \operatorname{grad} u =$$

$$= \left\{ xy^2e^z + xy^2;\ x^2y - x^2ye^z;\ 0 \right\} + \operatorname{grad} u .$$

4. $\vec{F} = \dfrac{\vec{r}}{r^3} = \left\{ \dfrac{x}{r^3}; \dfrac{y}{r^3}; \dfrac{z}{r^3} \right\}$ $\quad (\vec{r} = \{x; y; z\},\ r = |\vec{r}\,|)$,

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r^3}\operatorname{div}\vec{r} + \operatorname{grad}\frac{1}{r^3}\cdot\vec{r} =$$

$$= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0 \quad (r \neq 0).$$

Маємо:

$$a_0 = \int_0^z \frac{y\,dt}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \psi , \quad b_0 = -\int_0^z \frac{x\,dt}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \varphi ,$$

$$\varphi'_x - \psi'_y = 0 .$$

Обчислимо

$$\int_0^z \frac{dt}{(x^2+y^2+t^2)^{3/2}} = \left[ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \overset{\text{def}}{=} \omega^2,\ \omega \neq 0 \\ t = \omega \operatorname{tg}\tau,\ dt = \dfrac{\omega\, d\tau}{\cos^2\tau} \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{\operatorname{arctg}\frac{z}{\omega}} \frac{\omega\, d\tau}{\cos^2\tau\,(\omega^2 + \omega^2\operatorname{tg}^2\tau)^{3/2}} = \frac{1}{\omega^2}\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{z}{\omega}} \cos\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{z}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega^2}\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{z}{\omega}\right)\cdot\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{z}{\omega}\right) = \frac{z}{\omega^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{z^2}{\omega^2}}} =$$

$$= \frac{z}{\omega^2\sqrt{\omega^2+z^2}} = \frac{z}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{(r^2-z^2)r} .$$

Вибравши $\varphi = \psi = 0$, дістанемо

$$\vec{A}_0 = \left\{ \frac{yz}{r(r^2 - z^2)}; -\frac{xz}{r(r^2 - z^2)}; 0 \right\}$$

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \operatorname{grad} u \quad (r \neq 0,\ x^2 + y^2 \neq 0).$$

При $\omega = 0$ $(x^2 + y^2 = 0)$ візьмемо $z = z_0 = 1$:

$$\int_1^z \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2}\bigg|_1^z = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2} - 1\right),$$

$$a_0 = -\frac{y}{2}\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) + \psi = -\frac{y}{2z^2} + \frac{y}{2} + \psi,$$

$$b_0 = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) + \varphi = \frac{x}{2z^2} - \frac{x}{2} + \varphi,$$

$$\varphi'_x - \psi'_y = 1 \quad (\varphi = x,\ \psi = 0).$$

Отже, $\vec{A}_0 = \left\{ -\frac{y}{2z^2}; \frac{x}{2z^2}; 0 \right\}$, $\vec{A} = \vec{A}_0 + \operatorname{grad} u$,

$$\vec{F}\Big|_{\substack{x=0,\, y=0 \\ z\neq 0}} = \operatorname{rot} \vec{A}\Big|_{\substack{x=0,\, y=0 \\ z\neq 0}}.$$

## Теорема Гельмгольца і обернена задача векторного аналізу

За теоремою Гельмгольца, будь-яке неперервно диференційовне векторне поле $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, де $\vec{F}_1$ – потенціальне, а $\vec{F}_2$ – соленоїдне поле ($\vec{F}_1 = \operatorname{grad} u$, $\operatorname{div} \vec{F}_2 = 0$). Розглянемо алгоритм доведення цієї теореми. Знайдемо диференціальне рівняння, розв'язком якого є функція $u$. Маємо

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u,$$

де $\Delta$ – оператор Лапласа: $\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Отже, функція $u$ є розв'язком *рівняння Пуассона*: $\Delta u = \operatorname{div} \vec{F}$, яке має нескінченну множину розв'язків. Єдиний розв'язок рівняння Пуассона можна отримати, якщо до рівняння долучити певні крайові умови, які задовольняє функція $u$. Якщо функція $u$ знайдена з рівняння Пуассона, то $\vec{F}_1 = \operatorname{grad} u$, $\vec{F}_2 = \vec{F} - \operatorname{grad} u$.

Нехай тепер дивергенція і ротор векторного поля $\vec{F}$ задані:

$$\operatorname{div}\vec{F} = f, \quad \operatorname{rot}\vec{F} = \vec{B}$$

($f$ і $\vec{B}$ – відомі скалярна і векторна функції, відповідно). Обернена задача векторного аналізу полягає у відшуканні самого векторного поля $\vec{F}$. Оскільки $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F} = 0$, то має виконуватися умова $\operatorname{div}\vec{B} = 0$. Розглянемо алгоритм розв'язання оберненої задачі векторного аналізу.

Унаслідок теореми Гельмгольца поле $\vec{F}$ слід шукати у вигляді $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, де $\vec{F}_1 = \operatorname{grad} u$ – потенціальне поле, а $\vec{F}_2$ – соленоїдне поле ($\operatorname{div}\vec{F}_2 = 0$). Маємо

$$\operatorname{div}\vec{F} = \operatorname{div}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \operatorname{div}\vec{F}_1 = \operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u = f,$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \operatorname{rot}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \operatorname{rot}\vec{F}_2 = \vec{B}.$$

Таким чином, дістали систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} \Delta u = f \quad \text{(рівняння Пуассона)}, \\ \operatorname{rot}\vec{F}_2 = \vec{B} \quad (\operatorname{div}\vec{B} = 0,\ \operatorname{div}\vec{F}_2 = 0). \end{cases}$$

Друге рівняння системи внаслідок умови $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ має розв'язок (див. с. 180–181), який можна записати у вигляді $\vec{F}_2 = \vec{F}_{20} + \operatorname{grad} v$, де $\vec{F}_{20}$ – фіксований розв'язок, а $\operatorname{grad} v$ – довільний потенціальний вектор. З умови $\operatorname{div}\vec{F}_2 = 0$ для функції $v$ знову дістаємо рівняння Пуассона $\Delta u = -\operatorname{div}\vec{F}_{20}$. Отже, $\vec{F}_1 = \operatorname{grad} u$, $\vec{F}_2 = \vec{F}_{20} + \operatorname{grad} v$, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Нехай за вказаним алгоритмом, можна знайти два векторних поля $\vec{F}$ і $\vec{G} = \vec{F} + \vec{W}$. Тоді, оскільки

$$\operatorname{div}\vec{G} = \operatorname{div}(\vec{F} + \vec{W}) = \operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{div}\vec{W} = f,$$

$$\operatorname{rot}\vec{G} = \operatorname{rot}(\vec{F} + \vec{W}) = \operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{rot}\vec{W} = \vec{B},$$

то одночасно $\operatorname{div}\vec{W} = 0$, $\operatorname{rot}\vec{W} = \vec{0}$, звідки $\vec{W} = \operatorname{grad} w$ і $\operatorname{div}\operatorname{grad} w = \Delta w = 0$, де $w$ – довільна гармонічна функція.

Таким чином, поле $\vec{F}$ визначене з точністю до доданка типу $\operatorname{grad} w$, де $w$ – гармонічна функція. Для однозначного відшукання вектора $\vec{F}$ треба до вказаного алгоритму долучити крайові умови, які однозначно визначають гармонічну функцію $w$.

## 3.2. Набла-символіка

Як уже зазначалося (с. 14), у векторному аналізі часто використовують запропонований Р. Гамільтоном символічний векторно-диференціальний оператор набла (оператор Гамільтона)

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти координатних осей $Ox, Oy, Oz$, відповідно, $x, y, z$ – прямокутні декартові координати.

Наприклад, диференціальні операції векторного аналізу першого порядку за допомогою оператора $\vec{\nabla}$ записують у вигляді

$$\operatorname{grad} u = \vec{\nabla} u, \quad \operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}, \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}.$$

Перевагою застосування символічного вектора $\vec{\nabla}$ є те, що за його допомогою зручно записувати (та отримувати) у компактній і наочній формі різноманітні формули векторного аналізу. Ураховуючи двоїстий характер вектора $\vec{\nabla}$ (з одного боку – вектор, а з другого – диференціальний оператор), сформулюємо основні правила дій із символічним вектором (оператором) $\vec{\nabla}$.

1. Оператор $\vec{\nabla}$ діє тільки на величину (скалярну або векторну), яка стоїть безпосередньо за ним. Наприклад,

$$\vec{\nabla} uv = v\vec{\nabla} u = v \operatorname{grad} u \neq \vec{\nabla}(uv),$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} u = u\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = u \operatorname{div} \vec{F} \neq \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} u),$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} u = u\vec{\nabla} \times \vec{F} = u \operatorname{rot} \vec{F} \neq \vec{\nabla} \times (\vec{F} u).$$

Таким чином, оператор $\vec{\nabla}$ виконує праве множення.

2. Якщо до оператора $\vec{\nabla}$ застосувати ліве множення, то отриманий вираз слід розглядати як новий диференціальний оператор:

Наприклад, вирази $u\vec{\nabla}$, $\vec{F}\cdot\vec{\nabla}$, $\vec{F}\times\vec{\nabla}$ ($\vec{F}=\{P;Q;R\}$) слід розглядати як диференціальні оператори

$$u\vec{\nabla}=\vec{i}u\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}u\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}u\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\vec{F}\cdot\vec{\nabla}=P\frac{\partial}{\partial x}+Q\frac{\partial}{\partial y}+R\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\vec{F}\times\vec{\nabla}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ P & Q & R\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left(Q\frac{\partial}{\partial z}-R\frac{\partial}{\partial y}\right)+\vec{j}\left(R\frac{\partial}{\partial x}-P\frac{\partial}{\partial z}\right)+\vec{k}\left(P\frac{\partial}{\partial y}-Q\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

3. Якщо за оператором $\vec{\nabla}$ (справа) не стоїть добуток змінних величин, то оператор $\vec{\nabla}$ діє як оператор диференціювання, і можна використовувати звичайні правила векторної алгебри.

Наприклад (нагадаємо, що $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=(\vec{\nabla},\vec{F})$, $\vec{\nabla}\times\vec{F}=[\vec{\nabla},\vec{F}]$):

$$\vec{\nabla}(\alpha u+\beta v)=\alpha\vec{\nabla}u+\beta\vec{\nabla}v,$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\alpha\vec{F}_1+\beta\vec{F}_2)=\alpha\vec{\nabla}\cdot\vec{F}_1+\beta\vec{\nabla}\cdot\vec{F}_2,$$

$$\vec{\nabla}\times(\alpha\vec{F}_1+\beta\vec{F}_2)=\alpha\vec{\nabla}\times\vec{F}_1+\beta\vec{\nabla}\times\vec{F}_2 \quad (\alpha,\beta=\text{const}),$$

$$\vec{\nabla}c=\vec{0} \quad (c=\text{const}),$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{c}=0,\ \vec{\nabla}\times\vec{c}=\vec{0} \quad (\vec{c}=\overrightarrow{\text{const}}),$$

$$\text{rot}\,\text{grad}\,u=\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}u=\vec{0}$$

(векторний добуток колінеарних векторів $\vec{\nabla}$ і $\vec{\nabla}u$ дорівнює нуль-вектору),

$$\text{div}\,\text{rot}\,\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$$

(мішаний добуток компланарних векторів $\vec{\nabla}$, $\vec{\nabla}$, $\vec{F}$ дорівнює нулю),

$$\vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta \text{ – оператор Лапласа.}$$

4. Якщо за оператором $\vec{\nabla}$ (справа) стоїть добуток змінних величин, то спочатку оператор $\vec{\nabla}$ діє як оператор диференціювання, а потім отримані вирази слід перетворити за допомогою правил векторної алгебри так, щоб справа за відповідним диференціальним оператором з $\vec{\nabla}$ стояла тільки та величина, на яку він діє.

У табл. 3.1 наведено диференціальні операції 2-го порядку з оператором $\vec{\nabla}$ .

***Таблиця 3.1.*** Диференціальні операції 2-го порядку

| | $\operatorname{grad} u$ | $\operatorname{div} \vec{F}$ | $\operatorname{rot} \vec{F}$ |
|---|---|---|---|
| grad | — | $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F}$ | — |
| div | $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u$ | — | $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$ |
| rot | $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \vec{0}$ | — | $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F} =$ <br> $= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F} - \Delta \vec{F}$ |

Розглянемо приклади[1].

1. $\operatorname{grad}(uv) = \vec{\nabla}(uv) = \vec{\nabla} \overset{\downarrow}{u} v + \vec{\nabla} u \overset{\downarrow}{v} = v\vec{\nabla} u + u\vec{\nabla} v =$

$$= v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v .$$

2. $\operatorname{div}(\vec{F}u) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{F}u) = \vec{\nabla} \cdot \overset{\downarrow}{\vec{F}} u + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \overset{\downarrow}{u} = u\vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} u \cdot \vec{F} =$

$$= u \operatorname{div} \vec{F} + \operatorname{grad} u \cdot \vec{F} .$$

3. $\operatorname{rot}(\vec{F}u) = \vec{\nabla} \times (\vec{F}u) = \vec{\nabla} \times \overset{\downarrow}{\vec{F}} u + \vec{\nabla} \times \vec{F} \overset{\downarrow}{u} = u\vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} u \times \vec{F} =$

$$= u \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{grad} u \times \vec{F} .$$

[1] Символом $\downarrow$ позначено той співмножник, на який діє оператор $\vec{\nabla}$.

4. $\operatorname{div}(\vec A\times\vec B)=\nabla\cdot(\vec A\times\vec B)=\vec\nabla\cdot\overset{\downarrow}{\vec A}\times\vec B+\nabla\cdot\vec A\times\overset{\downarrow}{\vec B}=$

$$=\vec B\cdot\vec\nabla\times\vec A-\vec A\cdot\vec\nabla\times\vec B=\vec B\cdot\operatorname{rot}\vec A-\vec A\cdot\operatorname{rot}\vec B$$

(використано властивість циклічності мішаного добутку:

$$\vec a\vec b\vec c=\vec c\vec a\vec b\,,\quad \vec a\vec b\vec c=-\vec b\vec a\vec c\,).$$

5. $\operatorname{rot}(\vec A\times\vec B)=\vec\nabla\times(\vec A\times\vec B)=\vec\nabla\times(\overset{\downarrow}{\vec A}\times\vec B)+\vec\nabla\times(\vec A\times\overset{\downarrow}{\vec B})=$

$$=(\vec B\cdot\vec\nabla)\overset{\downarrow}{\vec A}-\vec\nabla\,\overset{\downarrow}{\vec A}\cdot\vec B+(\vec\nabla\cdot\overset{\downarrow}{\vec B})\vec A-\overset{\downarrow}{\vec B}(\vec\nabla\cdot\vec A)=$$

$$=(\vec B\cdot\vec\nabla)\vec A-\vec B\vec\nabla\cdot\vec A+\vec A\vec\nabla\cdot\vec B-(\vec A\cdot\vec\nabla)\vec B=$$

$$=(\vec B\cdot\vec\nabla)\vec A-(\vec A\cdot\vec\nabla)\vec B+\vec A\operatorname{div}\vec B-\vec B\operatorname{div}\vec A\,.$$

У цьому прикладі використано формулу подвійного векторного добутку: $\vec a\times(\vec b\times\vec c)=\vec b(\vec a\cdot\vec c)-\vec c(\vec a\cdot\vec b)$. Наприклад, за цією формулою доданок $\vec\nabla\times(\overset{\downarrow}{\vec A}\times\vec B)$ можна перетворити так:

$$\vec\nabla\times(\overset{\downarrow}{\vec A}\times\vec B)=\overset{\downarrow}{\vec A}(\vec\nabla\cdot\vec B)-\vec B(\vec\nabla\cdot\overset{\downarrow}{\vec A})=$$

$$=(\vec B\cdot\vec\nabla)\vec A-\vec B(\vec\nabla\cdot\vec A)=(\vec B\cdot\vec\nabla)\vec A-\vec B\operatorname{div}\vec A\,.$$

Аналогічно

$$\vec\nabla\times(\vec A\times\overset{\downarrow}{\vec B})=\vec A(\vec\nabla\cdot\overset{\downarrow}{\vec B})-\overset{\downarrow}{\vec B}(\vec\nabla\cdot\vec A)=$$

$$=\vec A(\vec\nabla\cdot\vec B)-(\vec A\cdot\vec\nabla)\vec B=\vec A\operatorname{div}\vec B-(\vec A\cdot\vec\nabla)\vec B\,.$$

Вираз типу $(\vec B\cdot\vec\nabla)\vec A$ розуміємо як результат застосування оператора

$$\vec B\cdot\vec\nabla=B_1\frac{\partial}{\partial x}+B_2\frac{\partial}{\partial y}+B_3\frac{\partial}{\partial z}\qquad(\vec B=\{B_1;B_2;B_3\})\,,$$

отриманого лівим скалярним множенням $\vec B$ на $\vec\nabla$, до вектора $\vec A=\{A_1;A_2;A_3\}$:

$$(\vec B\cdot\vec\nabla)\vec A=\left\{B_1\frac{\partial A_1}{\partial x}+B_2\frac{\partial A_1}{\partial y}+B_3\frac{\partial A_1}{\partial z};\right.$$

$$\left.B_1\frac{\partial A_2}{\partial x}+B_2\frac{\partial A_2}{\partial y}+B_3\frac{\partial A_2}{\partial z};\ B_1\frac{\partial A_3}{\partial x}+B_2\frac{\partial A_3}{\partial y}+B_3\frac{\partial A_3}{\partial z}\right\}.$$

$$6.\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec F=\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec F)=\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\overset{\downarrow}{\vec F})-\overset{\downarrow}{\vec F}\vec\nabla^2=\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec F)-\vec\nabla^2\vec F=$$

$$=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec F-\Delta\vec F$$

(оператор Лапласа $\Delta$ застосовується до вектора $\vec F$ покомпонентно: $\Delta\vec F=\Delta\{P;Q;R\}=\{\Delta P;\Delta Q;\Delta R\}$).

$$7.\ \operatorname{grad}(\vec A\cdot\vec B)=\vec\nabla(\vec A\cdot\vec B)=\vec\nabla(\overset{\downarrow}{\vec A}\cdot\vec B)+\vec\nabla(\vec A\cdot\overset{\downarrow}{\vec B})=$$

$$=\vec\nabla(\vec B\cdot\overset{\downarrow}{\vec A})+\vec\nabla(\vec A\cdot\overset{\downarrow}{\vec B}).$$

Для подальшого перетворення використаємо формулу

$$\vec b(\vec a\cdot\vec c)=\vec a\times(\vec b\times\vec c)+\vec c(\vec a\cdot\vec b)$$

(див. приклад 5). Маємо

$$\vec\nabla(\vec B\cdot\overset{\downarrow}{\vec A})=\vec B\times(\vec\nabla\times\overset{\downarrow}{\vec A})+\overset{\downarrow}{\vec A}(\vec B\cdot\vec\nabla)=\vec B\times(\vec\nabla\times\vec A)+(\vec B\cdot\vec\nabla)\vec A=$$

$$=\vec B\times\operatorname{rot}\vec A+(\vec B\cdot\vec\nabla)\vec A.$$

Аналогічно

$$\vec\nabla(\vec A\cdot\overset{\downarrow}{\vec B})=\vec A\times\operatorname{rot}\vec B+(\vec A\cdot\vec\nabla)\vec B.$$

Отже, $\operatorname{grad}(\vec A\cdot\vec B)=\vec B\times\operatorname{rot}\vec A+\vec A\times\operatorname{rot}\vec B+(\vec B\cdot\vec\nabla)\vec A+(\vec A\cdot\vec\nabla)\vec B$.

8. $\operatorname{grad}(\vec A^2)=2\vec A\times\operatorname{rot}\vec A+2(\vec A\cdot\vec\nabla)\vec A$ (використано результат прикладу 7 при $\vec A=\vec B$).

9. Обчислимо $\operatorname{grad}(|\vec c\times\vec r\,|^2)$, де $\vec c=\{c_1;c_2;c_3\}$ – сталий вектор, $\vec r=\{x;y;z\}$. Використаємо результат прикладу 8:

$$\operatorname{grad}(|\vec c\times\vec r\,|^2)=\operatorname{grad}((\vec c\times\vec r)^2)=$$

$$=2(\vec c\times\vec r)\times\operatorname{rot}(\vec c\times\vec r)+2((\vec c\times\vec r)\cdot\vec\nabla)(\vec c\times\vec r).$$

де

$$\vec c\times\vec r=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ c_1&c_2&c_3\\ x&y&z\end{vmatrix}=\vec i(c_2z-c_3y)+\vec j(c_3x-c_1z)+\vec k(c_1y-c_2x),$$

$$\operatorname{rot}(\vec{c}\times\vec{r})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ (c_2z-c_3y) & (c_3x-c_1z) & (c_1y-c_2x)\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}(c_1+c_1)+\vec{j}(c_2+c_2)+\vec{k}(c_3+c_3)=2\vec{c}\ .$$

Маємо

$$2(\vec{c}\times\vec{r})\times\operatorname{rot}(\vec{c}\times\vec{r})=2(\vec{c}\times\vec{r})\times(2\vec{c})=4(\vec{c}\times\vec{r})\times\vec{c}=-4\vec{c}\times(\vec{c}\times\vec{r})=$$

$$=\left[\text{використано формулу}\quad \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})\right]=$$

$$=-4\left(\vec{c}(\vec{c}\cdot\vec{r})-\vec{r}\vec{c}^{\,2}\right)=4\vec{r}\vec{c}^{\,2}-4\vec{c}(\vec{c}\cdot\vec{r})\,,$$

$$2((\vec{c}\times\vec{r})\cdot\vec{\nabla})(\vec{c}\times\vec{r})=$$

$$=2\left((c_2z-c_3y)\frac{\partial}{\partial x}+(c_3x-c_1z)\frac{\partial}{\partial y}+(c_1y-c_2x)\frac{\partial}{\partial z}\right)\{c_2z-c_3y;$$

$$c_3x-c_1z;\,c_1y-c_2x\}=$$

$$=2\Big\{(c_3x-c_1z)(-c_3)+(c_1y-c_2x)c_2\,;$$

$$(c_2z-c_3y)c_3+(c_1y-c_2x)(-c_1);\ (c_2z-c_3y)(-c_2)+(c_3x-c_1\,\mathrm{z})c_1\Big\}=$$

$$=-2\Big\{(c_3^2+c_2^2)x-c_1c_2y-c_1c_3z;\ (c_1^2+c_3^2)y-c_2c_3z-c_1c_2x;$$

$$(c_2^2+c_1^2)z-c_1c_3x-c_2c_3y\Big\}=$$

$$=-2\Big\{\vec{c}^{\,2}x-c_1^2x-c_1c_2y-c_1c_3z;\ \vec{c}^{\,2}y-c_2^2y-c_2c_3z-c_1c_2x;$$

$$\vec{c}^{\,2}z-c_3^2z-c_1c_3x-c_2c_3y\Big\}=$$

$$=-2\vec{c}^{\,2}\vec{r}+2\{c_1(\vec{c}\cdot\vec{r});\ c_2(\vec{c}\cdot\vec{r});\ c_3(\vec{c}\cdot\vec{r})\}=-2\vec{c}^{\,2}\vec{r}+2(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{c}.$$

Отже,

$$\operatorname{grad}(|\vec{c}\times\vec{r}|^2)=4\vec{r}\vec{c}^{\,2}-4\vec{c}(\vec{c}\cdot\vec{r})-2\vec{c}^{\,2}\vec{r}+2(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{c}=$$

$$=2\vec{c}^{\,2}\vec{r}-2(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{c}\ .$$

Перевіримо отриманий результат безпосереднім обчисленням градієнта:

$$\operatorname{grad}(|\vec{c}\times\vec{r}|^2)=$$

$$\operatorname{grad}\left\{(c_2z-c_3y)^2+(c_3x-c_1z)^2+(c_1y-c_2x)^2\right\}=$$
$$=[\,\mathrm{T}-\text{символ транспонування}\,]=$$
$$=\begin{pmatrix}2(c_3x-c_1z)c_3+2(c_1y-c_2x)(-c_2)\\ 2(c_2z-c_3y)(-c_3)+2(c_1y-c_2x)c_1\\ 2(c_2z-c_3y)c_2+2(c_3x-c_1z)(-c_1)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=2\begin{pmatrix}\vec{c}^{\,2}x-c_1(\vec{c}\cdot\vec{r})\\ \vec{c}^{\,2}y-c_2(\vec{c}\cdot\vec{r})\\ \vec{c}^{\,2}z-c_3(\vec{c}\cdot\vec{r})\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=$$
$$=2\vec{c}^{\,2}\vec{r}-2(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{c}\,.$$

Наведемо ще один (коротший) спосіб розв'язання:

$$\operatorname{grad}(|\vec{c}\times\vec{r}\,|^2)=[\varphi=\widehat{(\vec{c},\vec{r})}]=\operatorname{grad}(\vec{c}^{\,2}\vec{r}^{\,2}\sin^2\varphi)=$$
$$=\operatorname{grad}(\vec{c}^{\,2}\vec{r}^{\,2}-\vec{c}^{\,2}\vec{r}^{\,2}\cos^2\varphi)=\operatorname{grad}(\vec{c}^{\,2}r^2-(\vec{c}\cdot\vec{r})^2)=$$
$$=\operatorname{grad}(\vec{c}^{\,2}r^2)-\operatorname{grad}(\vec{c}\cdot\vec{r})^2=\left[\operatorname{grad}f(r)=f'(r)\operatorname{grad}r=f'(r)\frac{\vec{r}}{r}\right]=$$
$$=\vec{c}^{\,2}\,2r\operatorname{grad}r-2(\vec{c}\cdot\vec{r})\operatorname{grad}(\vec{c}\cdot\vec{r})=\left[\operatorname{grad}r=\frac{\vec{r}}{r},\ \operatorname{grad}(\vec{c}\cdot\vec{r})=\vec{c}\right]=$$
$$=\vec{c}^{\,2}\,2r\frac{\vec{r}}{r}-2(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{c}=2\vec{c}^{\,2}\vec{r}-2\vec{c}(\vec{c}\cdot\vec{r})\,.$$

10. Знайдемо: а) $\operatorname{rot}(f(r)\vec{r})$; б) $\operatorname{rot}(f(r)\vec{c})$; в) $\operatorname{rot}(\vec{c}\times f(r)\vec{r})$ ($\vec{c}=\{c_1;c_2;c_3\}=\overrightarrow{\mathrm{const}}$, $\vec{r}=\{x;y;z\}$, $r=|\vec{r}\,|$, $f$ – диференційовна функція). Маємо

а) $\operatorname{rot}(f(r)\vec{r})=[\text{використовуємо формулу прикладу 3}]=$
$$=\vec{\nabla}\times(f(r)\vec{r})=f(r)\operatorname{rot}\vec{r}+\operatorname{grad}f(r)\times\vec{r}=$$
$$=\left[\operatorname{rot}\vec{r}=\vec{0};\quad \operatorname{grad}f(r)=f'(r)\operatorname{grad}r=f'(r)\frac{\vec{r}}{r}\right]=$$
$$=\vec{0}+\frac{f'(r)}{r}\vec{r}\times\vec{r}=\vec{0}\,.$$

б) Аналогічно п. а) маємо
$$\operatorname{rot}(f(r)\vec{c})=f(r)\operatorname{rot}\vec{c}+\operatorname{grad}f(r)\times\vec{c}=$$
$$=\vec{0}+\frac{f'(r)}{r}\vec{r}\times\vec{c}=\frac{f'(r)}{r}\vec{r}\times\vec{c}\,.$$

в) $\operatorname{rot}(\vec{c}\times f(r)\vec{r})=\vec{\nabla}\times(\vec{c}\times f(r)\vec{r})=$

$$= [\text{використовуємо формулу прикладу 5}] =$$
$$= (f(r)\vec r \cdot \vec\nabla)\vec c - (\vec c \cdot \vec\nabla)(f(r)\vec r) + \vec c \operatorname{div}(f(r)\vec r) - f(r)\vec r \operatorname{div}\vec c .$$

Обчислимо доданки, які входять в останню суму
$$(f(r)\vec r \cdot \vec\nabla)\vec c = f(r)\left( x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} \right)\vec c = \vec 0 ,$$
оскільки координати вектора $\vec c$ сталі;
$$(\vec c \cdot \vec\nabla)(f(r)\vec r) =$$
$$= \left( c_1\frac{\partial}{\partial x} + c_2\frac{\partial}{\partial y} + c_3\frac{\partial}{\partial z} \right)(f(r)x\vec i + f(r)y\vec j + f(r)z\vec k) =$$
$$= \left( c_1\left( f'(r)\frac{x}{r}x + f(r)\right) + c_2 f'(r)\frac{y}{r}x + c_3 f'(r)\frac{z}{r}x \right)\vec i +$$
$$+ \left( c_1 f'(r)\frac{x}{r}y + c_2\left( f'(r)\frac{y}{r}y + f(r) \right) + c_3 f'(r)\frac{z}{r}y \right)\vec j +$$
$$+ \left( c_1 f'(r)\frac{x}{r}z + c_2 f'(r)\frac{z}{r}z + c_3\left( f'(r)\frac{z}{r}z + f(r)\right) \right)\vec k =$$
$$= c_1\left( \frac{f'(r)}{r}x\vec r + f(r)\vec i \right) + c_2\left( \frac{f'(r)}{r}y\vec r + f(r)\vec j \right) +$$
$$+ c_3\left( \frac{f'(r)}{r}z\vec r + f(r)\vec k \right) = \frac{f'(r)}{r}(\vec c \cdot \vec r)\vec r + f(r)\vec c ;$$
$$\vec c \operatorname{div}(f(r)\vec r) =$$
$$= [\text{використовуємо формулу прикладу 2}] =$$
$$= \vec c\big( f(r)\operatorname{div}\vec r + \operatorname{grad} f(r) \cdot \vec r \big) = \vec c\left( 3f(r) + \frac{f'(r)}{r}\vec r \cdot \vec r \right) =$$
$$= \big(3f(r) + rf'(r)\big)\vec c ;$$
$$f(r)\vec r \operatorname{div}\vec c = \vec 0, \text{ оскільки } \operatorname{div}\vec c = 0 .$$

Отже,
$$\operatorname{rot}(\vec c \times f(r)\vec r) = \vec 0 - \frac{f'(r)}{r}(\vec c \cdot \vec r)\vec r - f(r)\vec c + \big(3f(r) + rf'(r)\big)\vec c - \vec 0 =$$
$$= 2f(r)\vec c + \frac{f'(r)}{r}\big(\vec c r^2 - (\vec c \cdot \vec r)\vec r\big) .$$

## 3.3. Запис основних диференціальних операцій векторного аналізу в ортогональних криволінійних системах координат

Розглянемо ПДСК – прямокутну декартову систему координат, у якій положення точки $M \in \mathbb{R}^3$ задається впорядкованою трійкою чисел $(x, y, z)$ ($x = \text{Пр}_{Ox}\vec{r}$, $y = \text{Пр}_{Oy}\vec{r}$, $z = \text{Пр}_{Oz}\vec{r}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ – радіус-вектор точки $M$) і КСК – криволінійну систему координат, у якій положення точки $M$ визначене впорядкованою трійкою $(q_1, q_2, q_3)$ деяких чисел.

| ПДСК: | КСК: |
|---|---|
| $M(x, y, z)$ | $M(q_1, q_2, q_3)$ |

Нехай залежність між ПДСК і КСК визначена рівностями

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3),$$

або (у векторній формі) $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$. Припустимо, що функції $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$, $z = z(q_1, q_2, q_3)$ неперервно диференційовні в деякій області, і в цій області якобіан[1] не дорівнює нулю

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(q_1, q_2, q_3)} = \begin{vmatrix} x'_{q_1} & x'_{q_2} & x'_{q_3} \\ y'_{q_1} & y'_{q_2} & y'_{q_3} \\ z'_{q_1} & z'_{q_2} & z'_{q_3} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Якщо ці умови виконуються, то векторна рівність $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$ визначає[2] взаємно однозначну відповідність між деяким околом точки $(q_1, q_2, q_3)$ і деяким околом відповідної точки $(x, y, z)$. Тому впорядковану трійку $(q_1, q_2, q_3)$ можна розглядати як координати точки $M$. Якщо принаймні одна із функ-

---

[1] Якобіан $J$ чисельно дорівнює мішаному добутку векторів $\vec{r}_{q_1}$, $\vec{r}_{q_2}$, $\vec{r}_{q_3}$. З умови $J \neq 0$ випливає, зокрема, що вектори $\vec{r}_{q_1}$, $\vec{r}_{q_2}$, $\vec{r}_{q_3}$ лінійно незалежні, а отже, утворюють у даній точці (локальний) базис.

[2] Твердження випливає з теореми про неявно задане відображення [1].

цій $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$, $z = z(q_1, q_2, q_3)$ нелінійна, то координати $q_1$, $q_2$, $q_3$ називають *криволінійними*.

*Координатною поверхнею* $q_i$ називають поверхню в просторі, на якій координата $q_i$ зберігає стале значення $q_i = \text{const}$.

*Координатною лінією* $q_i$ називають лінію, уздовж якої змінюється тільки координата $q_i$.

Найбільшого поширення дістали ті криволінійні системи координат, у яких криволінійні координати $(q_1, q_2, q_3)$ перебувають у взаємно однозначній відповідності з усіма точками розглядуваної області, за винятком, можливо, декількох (*особливих*) точок, ліній або поверхонь, у яких якобіан $J = 0$. Якщо в кожній точці $M$ координатні лінії перетинаються під прямим кутом (рис. 113), то таку систему координат називають *ортогональною криволінійною системою координат* (ОКСК). Трійка $\vec{r}_{q_1}, \vec{r}_{q_2}, \vec{r}_{q_3}$ взаємно ортогональних векторів дотичних до координатних ліній утворює т. зв. *локальний ортогональний базис* ОКСК.

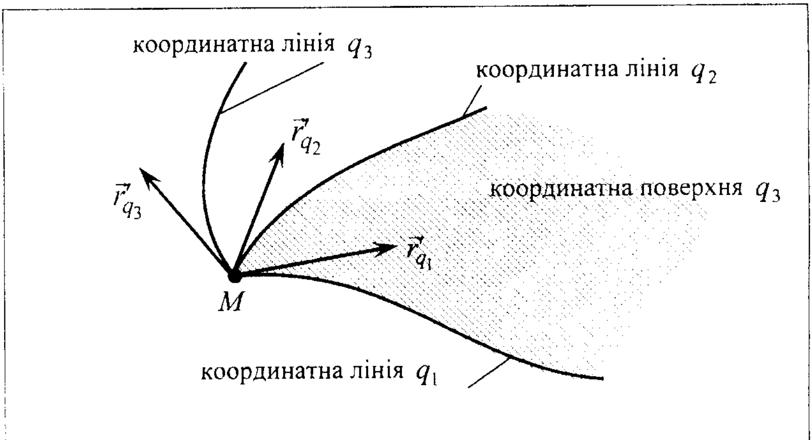



**Рис. 113.** Локальний ортогональний базис ОКСК

Величини $H_i = |\vec{r}_{q_i}|$ $(i = 1, 2, 3)$ називають *параметрами Ламе*, або *масштабними множниками* даної ОКСК. Вектори

$\vec{e}_i = \dfrac{\vec{r}'_{q_i}}{H_i}$ $(i = 1,2,3)$ утворюють *локальний ортонормований базис* ОКСК. Розглянемо криволінійний координатний паралелепіпед $D$ (рис. 114), утворений координатними поверхнями $q_i$, $q_i + dq_i$ $(i = 1,2,3)$. Довжини ребер цього паралелепіпеда

$$dl_i = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} =$$

$$= \sqrt{(x'_{q_i} dq_i)^2 + (y'_{q_i} dq_i)^2 + (z'_{q_i} dq_i)^2} = |\vec{r}'_{q_i}|\, dq_i = H_i dq_i$$

$$(i = 1,2,3)$$

називають *елементами довжини*, площі його граней

$$d\sigma_1 = dl_2 dl_3 = H_2 H_3 dq_2 dq_3,$$

$$d\sigma_2 = dl_3 dl_1 = H_3 H_1 dq_3 dq_1,$$

$$d\sigma_3 = dl_1 dl_2 = H_1 H_2 dq_1 dq_2$$

– *елементами площі*, а об'єм

$$dv = dl_1 dl_2 dl_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

– *елементом об'єму* в ОКСК.

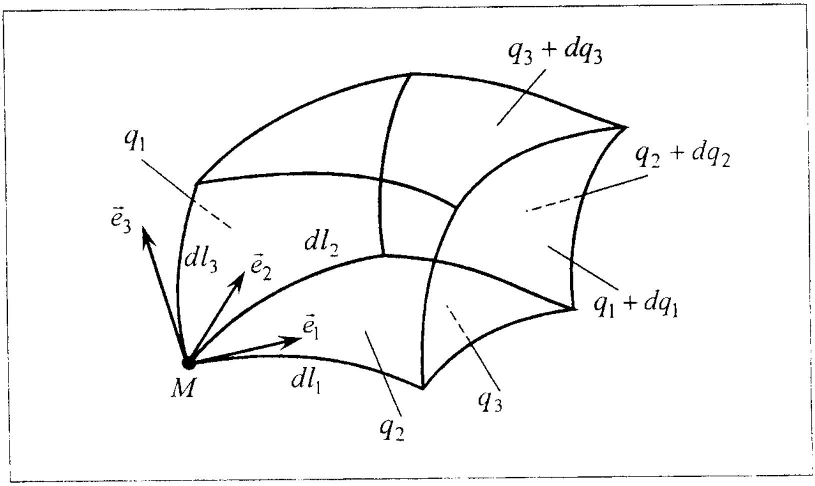



**Рис. 114.** Криволінійний координатний паралелепіпед

Оскільки для ОКСК

$$|J| = |\vec{r}'_{q_1}||\vec{r}'_{q_2}||\vec{r}'_{q_3}| = |H_1H_2H_3|,$$

то в особливих точках (нагадаємо, що в них $J = 0$) принаймні один із параметрів Ламе перетворюється на нуль.

Знайдемо параметри Ламе, елементи довжини, площі та об'єму для прямокутної декартової (ПДСК), полярної (ПСК), циліндричної (ЦСК) і сферичної (ССК) систем координат.

ПДСК:

$$\vec{r} = \{x; y; z\},$$

$$\vec{r}'_x = \{1; 0; 0\} = \vec{i}, \quad \vec{r}'_y = \{0; 1; 0\} = \vec{j}, \quad \vec{r}'_z = \{0; 0; 1\} = \vec{k},$$

$$H_1 = |\vec{r}'_x| = 1, \quad H_2 = |\vec{r}'_y| = 1, \quad H_2 = |\vec{r}'_z| = 1,$$

$$dl_1 = dx, \quad dl_2 = dy, \quad dl_3 = dz,$$

$$d\sigma_1 = dydz, \quad d\sigma_2 = dzdx, \quad d\sigma_3 = dxdy,$$

$$dv = dxdydz.$$

ПСК:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \vec{r} = \vec{r}(r,\varphi)$$

$$(0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r < +\infty),$$

$$\vec{r}'_r = \{\cos\varphi; \sin\varphi\}, \quad \vec{r}'_\varphi = \{-r\sin\varphi; r\cos\varphi\},$$

$$\vec{r}'_r \cdot \vec{r}'_\varphi = -r\cos\varphi\sin\varphi + r\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

$$H_1 = |\vec{r}'_r| = 1, \quad H_2 = |\vec{r}'_\varphi| = r,$$

$$dl_1 = dr, \quad dl_2 = rd\varphi,$$

$$d\sigma = dl_1dl_2 = rdrd\varphi.$$

ЦСК:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z, \quad \vec{r} = \vec{r}(r,\varphi,z)$$

$$(0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r < +\infty,\ -\infty < z < +\infty),$$

$$\vec{r}'_r = \{\cos\varphi; \sin\varphi; 0\}, \quad \vec{r}'_\varphi = \{-r\sin\varphi; r\cos\varphi; 0\}, \quad \vec{r}'_z = \{0; 0; 1\},$$

$$\vec{r}'_r \cdot \vec{r}'_\varphi = 0, \quad \vec{r}'_r \cdot \vec{r}'_z = 0, \quad \vec{r}'_\varphi \cdot \vec{r}'_z = 0,$$

$$H_1 = |\vec{r}'_r| = 1, \quad H_2 = |\vec{r}'_\varphi| = r, \quad H_3 = |\vec{r}'_z| = 1,$$

$$dl_1 = dr, \quad dl_2 = rd\varphi, \quad dl_3 = dz,$$

$$d\sigma_1 = rd\varphi dz, \quad d\sigma_2 = drdz, \quad d\sigma_3 = rdrd\varphi, \ dv = rdrd\varphi dz.$$

ССК:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \quad \vec{r} = \vec{r}(r,\theta,\varphi)$$

$$(0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r < +\infty,\ 0 \le \theta \le \pi),$$

$$\vec{r}_r' = \{\sin\theta\cos\varphi; \sin\theta\sin\varphi; \cos\theta\},$$

$$\vec{r}_\theta' = \{r\cos\theta\cos\varphi; r\cos\theta\sin\varphi; -r\sin\theta\},$$

$$\vec{r}_\varphi' = \{-r\sin\theta\sin\varphi; r\sin\theta\cos\varphi; 0\},$$

$$\vec{r}_r' \cdot \vec{r}_\theta' = 0, \quad \vec{r}_r' \cdot \vec{r}_\varphi' = 0, \quad \vec{r}_\varphi' \cdot \vec{r}_\theta' = 0,$$

$$H_1 = |\vec{r}_r'| = 1, \quad H_2 = |\vec{r}_\theta'| = r, \quad H_3 = |\vec{r}_\varphi'| = r\sin\theta,$$

$$dl_1 = dr, \quad dl_2 = rd\theta, \quad dl_3 = r\sin\theta d\varphi,$$

$$d\sigma_1 = r^2\sin\theta d\theta d\varphi, \quad d\sigma_2 = r\sin\theta d\varphi dr, \quad d\sigma_3 = rdrd\theta,$$

$$dv = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi.$$

Отримані величини розмістимо в табл. 3.2.

***Таблиця 3.2.*** Приклади ОКСК

| ОКСК | Параметри Ламе | Елементи довжини | Елементи площі | Елементи об'єму |
|---|---|---|---|---|
| ПДСК | $H_1 = 1$, $H_2 = 1$, $H_3 = 1$ | $dl_1 = dx$, $dl_2 = dy$, $dl_3 = dz$ | $d\sigma_1 = dydz$, $d\sigma_2 = dzdx$, $d\sigma_3 = dxdy$ | $dv = dxdydz$ |
| ПСК | $H_1 = 1$, $H_2 = r$ | $dl_1 = dr$, $dl_2 = rd\varphi$ | $d\sigma = rdrd\varphi$ | |
| ЦСК | $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = 1$ | $dl_1 = dr$, $dl_2 = rd\varphi$, $dl_3 = dz$ | $d\sigma_1 = rd\varphi dz$, $d\sigma_2 = drdz$, $d\sigma_3 = rdrd\varphi$ | $dv = rdrd\varphi dz$ |
| ССК | $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 =$ $= r\sin\theta$ | $dl_1 = dr$, $dl_2 = rd\theta$, $dl_3 =$ $= r\sin\theta d\varphi$ | $d\sigma_1 =$ $= r^2\sin\theta d\theta d\varphi$, $d\sigma_2 =$ $= r\sin\theta d\varphi dz$, $d\sigma_3 = rdrd\theta$ | $dv =$ $= r^2\sin\theta \times$ $\times drd\theta d\varphi$ |

На рис. 115–118 зображені координатні лінії і локальні ортонормовані базиси ПДСК, ПСК, ЦСК і ССК.

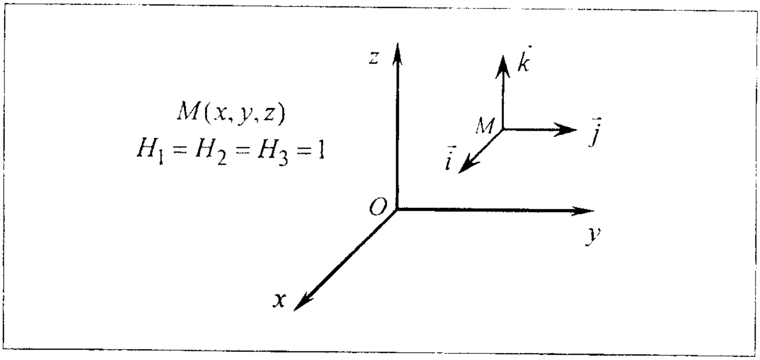



**Рис. 115.** ПДСК

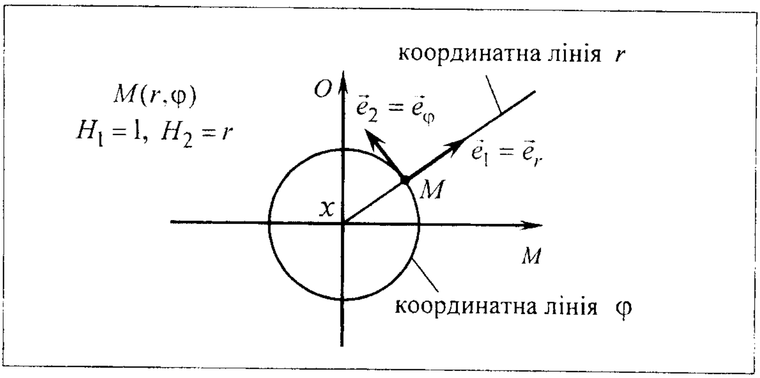



**Рис. 116.** ПСК

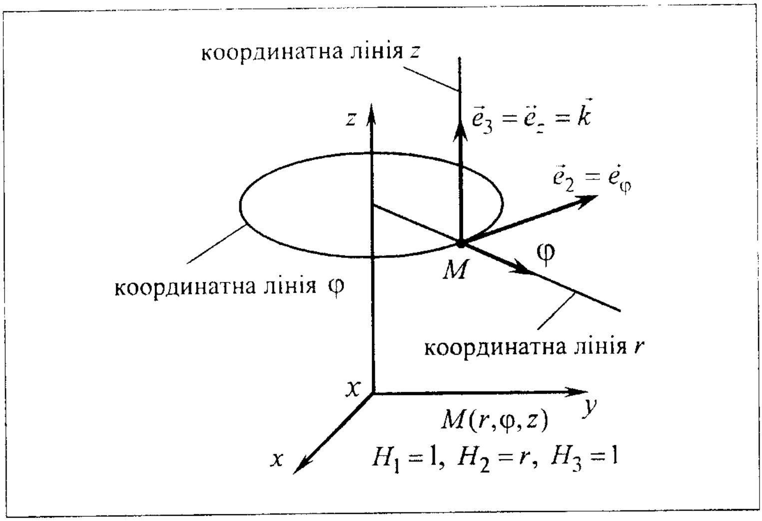



**Рис. 117.** ЦСК

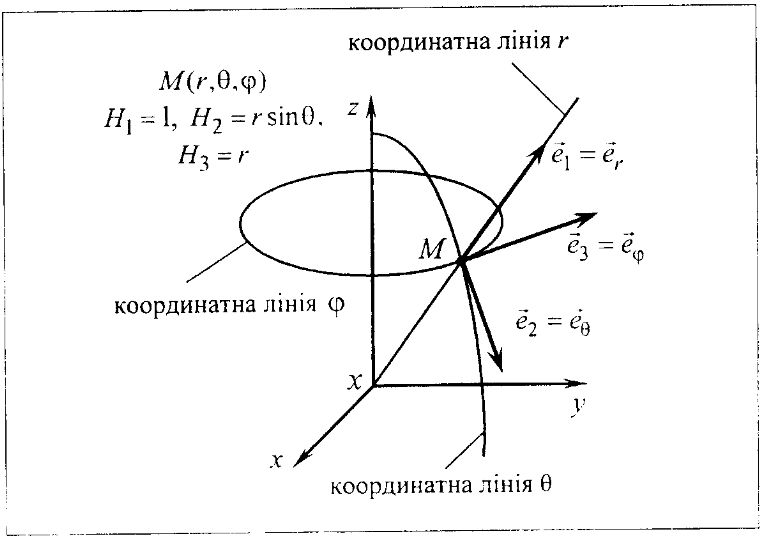



**Рис. 118.** ССК

### Обчислення grad$u$ в ОКСК

Нехай $u = u(x, y, z) = U(q_1, q_2, q_3)$. Знайдемо (рис. 119) координати градієнта в ортонормованому базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$:

$$\operatorname{grad} U = \{X; Y; Z\},$$

де

$$X = \text{Пр}_{\vec{e}_1} \operatorname{grad} U = \operatorname{grad} U \cdot \vec{e}_1 = \frac{\partial U}{\partial \vec{e}_1} = \lim_{\substack{dl_1 \to 0 \\ (M_1 \to M)}} \frac{U(M_1) - U(M)}{dl_1} =$$

$$= \frac{1}{H_1} \lim_{\substack{dl_1 \to 0 \\ (M_1 \to M)}} \frac{U(M_1) - U(M)}{dq_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1},$$

аналогічно

$$Y = \frac{1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2}, \quad Z = \frac{1}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3}.$$

Отже,

$$\boxed{\operatorname{grad} U = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \vec{e}_3}.$$

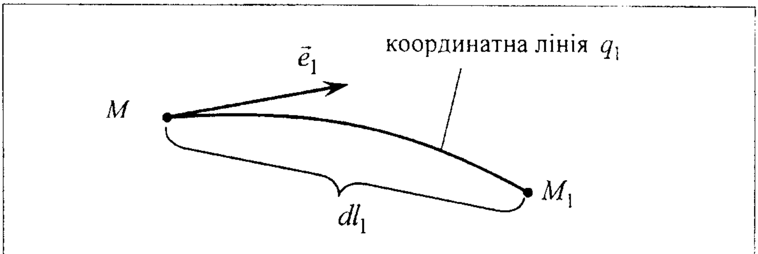



**Рис. 119.** Обчислення grad$u$ в ОКСК

Наприклад,

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \quad \text{(ПДСК)},$$

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad \text{(ПСК)},$$

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z \quad \text{(ЦСК)},$$

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \quad \text{(ССК)}.$$

### Обчислення $\operatorname{div}\vec{F}$ в ОКСК

Нехай

$$\vec{F}(x,y,z) = \vec{A}(q_1,q_2,q_3) = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3,$$

де $A_i = A_i(q_1,q_2,q_3)$, $i = 1, 2, 3$. Використовуючи фізичний зміст, дивергенцію векторного поля $\vec{A}$ обчислимо як густину потоку:

$$\operatorname{div}\vec{A}(M) = \lim_{\substack{d\to 0\\(V(D)\to 0)}} \frac{\Pi_{\Sigma_+}(\vec{A})}{V(D)},$$

де $D$ – криволінійний паралелепіпед (рис. 120), $\Sigma_+ = \partial(D)$, $V(D) = dV$.

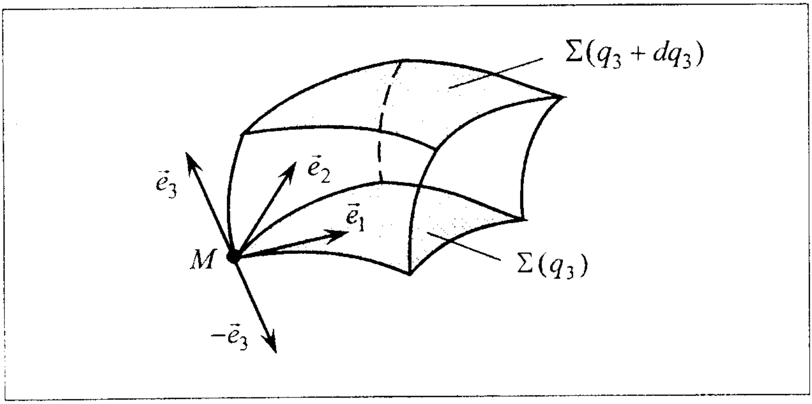



**Рис. 120.** Обчислення div в ОКСК

Потік $\Pi_{\Sigma_+}(\vec{A}) = \oiint\limits_{\Sigma_+} \vec{A}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ представимо у вигляді суми інтегралів по гранях паралелепіпеда:

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_+} \vec{A}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \sum_{j=1}^{3}\left( \iint_{\Sigma(q_j)} \vec{A}\cdot\vec{n}\,d\sigma + \iint_{\Sigma(q_j+dq_j)} \vec{A}\cdot\vec{n}\,d\sigma \right),$$

де $\Sigma(q_j)$ і $\Sigma(q_j + dq_j)$ – грані, утворені координатними поверхнями $q_j$ і $q_j + dq_j$, відповідно (на рис. 120 $j = 3$). Застосовуючи теорему про середнє значення для поверхневих інтегралів і формулу малих приростів $f(q + dq) \approx f(q) + f'(q)dq$, з точністю до величин вищого порядку мализни маємо

$$\iint_{\Sigma(q_3)} \vec{A}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\Sigma(q_3)} \vec{A}\cdot(-\vec{e}_3)\,d\sigma = -A_3 d\sigma_3 = -A_3 H_1 H_2 dq_1 dq_2,$$

$$\iint_{\Sigma(q_3+dq_3)} \vec{A}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\Sigma(q_3+dq_3)} \vec{A}\cdot\vec{e}_3\,d\sigma = A_3 H_1 H_2 dq_1 dq_2 =$$

$$= \left( A_3 H_1 H_2 + \frac{\partial(A_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} dq_3 \right) dq_1 dq_2 .$$

Аналогічно

$$\iint_{\Sigma(q_1)} \vec{A}\cdot\vec{n}\,d\sigma = -A_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3,$$

$$\iint_{\Sigma(q_1+dq_1)} \vec{A}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \left( A_1 H_2 H_3 + \frac{\partial(A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} dq_1 \right) dq_2 dq_3,$$

$$\iint_{\Sigma(q_2)} \vec{A}\cdot\vec{n}\,d\sigma = -A_2 H_1 H_3 dq_1 dq_3,$$

$$\iint_{\Sigma(q_2+dq_2)} \vec{A}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \left( A_2 H_1 H_3 + \frac{\partial(A_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} dq_2 \right) dq_1 dq_3 .$$

Отже,

$$\iint_{\Sigma_+} \vec{A}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \left( \frac{\partial(H_2 H_3 A_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_3 H_1 A_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1 H_2 A_3)}{\partial q_3} \right) dq_1 dq_2 dq_3 .$$

Ураховуючи, що $v(D) = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 = dv$, із граничного представлення дивергенції дістанемо:

$$\boxed{\operatorname{div}\dot{A}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial(H_2H_3A_1)}{\partial q_1}+\frac{\partial(H_3H_1A_2)}{\partial q_2}+\frac{\partial(H_1H_2A_3)}{\partial q_3}\right)}.$$

Наприклад,

$$\operatorname{div}\dot{A}=\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\quad(\text{ПДСК}),$$

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_r)}{\partial r}+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\quad(\text{ПСК}),$$

$$(A_1=A_r,\ A_2=A_\varphi)$$

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_r)}{\partial r}+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial(rA_z)}{\partial z}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\quad(\text{ЦСК}),$$

$$(A_1=A_r,\ A_2=A_\varphi,\ A_3=A_z)$$

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial(r^2\sin\theta\,A_r)}{\partial r}+\frac{\partial(r\sin\theta\,A_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial\varphi}\right)=$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\,A_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\qquad(\text{ССК}).$$

$$(A_1=A_r,\ A_2=A_\theta,\ A_3=A_\varphi)$$

## Обчислення оператора Лапласа в ОКСК

Нехай $u(x,y,z)=U(q_1,q_2,q_3)$. Ураховуючи, що

$$\Delta U=\operatorname{div}\operatorname{grad}U,$$

дістанемо

$$\boxed{\Delta U=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)}{\partial q_1}+\frac{\partial\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)}{\partial q_2}+\frac{\partial\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right)}{\partial q_3}\right)}.$$

Наприклад,

$$\Delta U=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}\quad(\text{ПДСК}),$$

$$\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \quad \text{(ПСК)},$$

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\end{aligned} \quad \text{(ЦСК)},$$

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \quad \text{(ССК)}.\end{aligned}$$

### Обчислення $\operatorname{rot}\vec{F}$ в ОКСК

Нехай $\vec{F}(x,y,z) = \vec{A}(q_1,q_2,q_3) = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3$,

$$\operatorname{rot}\vec{A} = R_1\vec{e}_1 + R_2\vec{e}_2 + R_3\vec{e}_3.$$

Координати $R_1, R_2, R_3$ ротора векторного поля $\vec{A}$ в базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ знайдемо, використовуючи формулу

$$(\operatorname{rot}\vec{A},\vec{n}) = \operatorname{rot}_n \vec{A}(M) = \lim_{\Sigma\to M}\frac{C_L(\vec{A})}{\sigma},$$

де $\vec{n}$ – орт вектора нормалі до площадки $\Sigma$ із площею $\sigma$, $L$ – контур, який обмежує площадку $\Sigma$ (рис. 109), $C_L(\vec{A})$ – циркуляція вектора $\vec{A}$ по контуру $L$.

Для отримання координати $R_3$ використаємо грань $\Sigma = \Sigma(q_3)$ криволінійного паралелепіпеда $D$ і контур (рис. 121):

$$L = L_3 = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_1' \cup \gamma_2':$$

$$R_3 = (\operatorname{rot}\vec{A},\vec{e}_3) = \lim_{\Sigma\to M}\frac{C_{L_3}(\vec{A})}{d\sigma_3}.$$

Зазначимо, що уздовж $\gamma_1$ змінюється координата $q_1$ ($q_2, q_3$ – сталі), уздовж $\gamma'_1$ змінюється координата $q_1$ ($q_2 + dq_2, q_3$ – сталі), уздовж $\gamma_2$ змінюється координата $q_2$ ($q_1, q_3$ – сталі), уздовж $\gamma'_2$ змінюється координата $q_2$ ($q_1 + dq_1, q_3$ – сталі).

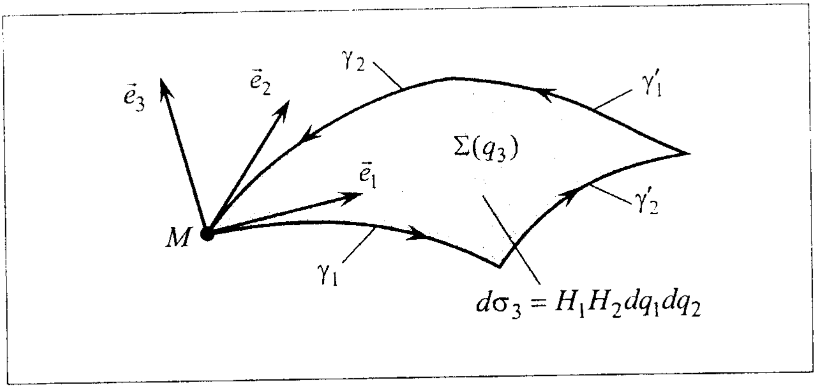



**Рис. 121.** Обчислення rot в ОКСК

Маємо

$$C_{L_3}(\vec{A}) = C_{\gamma_1}(\vec{A}) + C_{\gamma'_1}(\vec{A}) + C_{\gamma_2}(\vec{A}) + C_{\gamma'_2}(\vec{A}).$$

Використовуючи теорему про середнє значення для криволінійних інтегралів і формулу малих приростів, з точністю до величин вищого порядку мализни дістанемо

$$C_{\gamma_1}(\vec{A}) = (\vec{A}, \vec{e}_1)dl_1 = A_1 H_1 dq_1,$$

$$C_{\gamma'_1}(\vec{A}) = (\vec{A}, -\vec{e}_1)dl_1 = -A_1 H_1 dq_1 = -\left( A_1 H_1 + \frac{\partial(A_1 H_1)}{\partial q_2} dq_2 \right) dq_1,$$

$$C_{\gamma_2}(\vec{A}) = (\vec{A}, -\vec{e}_2)dl_2 = -A_2 H_2 dq_2,$$

$$C_{\gamma'_2}(\vec{A}) = (\vec{A}, \vec{e}_2)dl_2 = A_2 H_2 dq_2 = \left( A_2 H_2 + \frac{\partial(A_2 H_2)}{\partial q_1} dq_1 \right) dq_2,$$

$$C_{L_3}(\vec{A}) = \left( \frac{\partial(A_2H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_1H_1)}{\partial q_2} \right) dq_1 dq_2 .$$

Отже,

$$R_3 = \frac{1}{H_1H_2} \left( \frac{\partial(A_2H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_1H_1)}{\partial q_2} \right).$$

Діставши аналогічним чином координати $R_1$ і $R_2$ ротора, отримаємо

$$\boxed{\begin{gathered} \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{H_2H_3} \left( \frac{\partial(A_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(A_2H_2)}{\partial q_3} \right) \vec{e}_1 + \\ + \frac{1}{H_3H_1} \left( \frac{\partial(A_1H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(A_3H_3)}{\partial q_1} \right) \vec{e}_2 + \frac{1}{H_1H_2} \left( \frac{\partial(A_2H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_1H_1)}{\partial q_2} \right) \vec{e}_3, \end{gathered}}$$

або (в операторній формі)

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3} \begin{vmatrix} H_1\vec{e}_1 & H_2\vec{e}_2 & H_3\vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ A_1H_1 & A_2H_2 & A_3H_3 \end{vmatrix}} .$$

Наприклад,

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left( \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \vec{k} \quad \text{(ПДСК)},$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{vmatrix} = \left[ A_1 = A_r,\ A_2 = A_\varphi,\ A_3 = A_z \right] =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z \text{ (ЦСК)},$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} = \left[A_1 = A_r,\, A_2 = A_\theta,\, A_3 = A_\varphi\right] =$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta +$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi \quad \text{(ССК)}.$$

# ЛІТЕРАТУРА

## Основні джерела

1. *Дороговцев А. Я.* Математичний аналіз. Ч. 2 / А. Я. Дороговцев. – К. : Либідь, 1994.

2. *Будак Б. М.* Кратные интегралы и ряды / Б. М. Будак, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1982.

3. *Ильин В. А.* Основы математического анализа. Ч. 2 / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002.

4. *Краснов М. Л.* Векторный анализ: Задачи и примеры с подробными решениями / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Едиториал УРСС, 2002.

5. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 2 / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988.

6. *Математический* анализ. Ч. 2 / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда. – К. : Вища шк., 1985.

7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3 / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 1969.

## Додаткові джерела

8. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – М. : АСТ: Астрель, 2002.

9. *Математичний* аналіз: завдання для самостійної роботи студентів. Ч. 1 / С. А. Кривошея, Н. В. Майко, О. В. Моторна, Т. М. Прощенко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2013.

10. *Математичний* аналіз: завдання для самостійної роботи студентів. Ч. 2 / С. А. Кривошея, Н. В. Майко, О. В. Моторна, Т. М. Прощенко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2015.

11. *Придатченко Ю. В.* Деякі спеціальні інтеграли / Ю. В. Придатченко, Г. П. Головач, Н. В. Майко – К. : ВПЦ "Київський університет", 2003.

12. *Разумова М. А.* Основи векторного і тензорного аналізу / М. А. Разумова, В. М. Хотяїнцев. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2011.

13. *Справочное* пособие по математическому анализу. Введение в анализ, производная, интеграл / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда. – К. : Вища шк., 1984.

14. *Справочное* пособие по математическому анализу. Ряды, функции векторного аргумента, кратные и криволинейные интегралы / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда. – К. : Вища шк., 1986.

# ДОДАТКИ

## Д1. Індивідуальні завдання самостійної роботи № 1[1]

### Варіант 1

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_K \frac{dl}{x+y+2}$,

$K$ – контур трикутника $ABC$: $A(0;-1), B(2;0), C(0;1)$;

б) $I = \oint\limits_K (x^2+y^2+1)dl$, $K: x^2+y^2=-x$;

в) $I = \int\limits_K dl$, $K: y=(x-9)^{3/2}$ $(9 \le x \le 18)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (y^2+\sin x)dx + (2xy+\cos x)dy$,

$K$ – контур трикутника $ABC$: $A(0;-1), B(2;0), C(0;1)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} y^2dx + xdy$, $K: x^2+y^2=-x$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_{K_+} ydx + (y+z)dy + (3x+z)dz$,

$K$ – контур трикутника $ABC$: $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;1)$:

---

[1] В усіх варіантах $\vec{n}$ – орт орієнтації поверхні $\Sigma$, $\vec{r} = \{x;y;z\}$, $K_+$ – додатно орієнтований (відносно множини, яку він обмежує) контур.

б) $I = \oint\limits_{K_-} (x+y)dx + 2ydy + (x+z)dz$, $\quad K: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + z = 4. \end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_{\Sigma} xdydz + zdxdy$, $\Sigma$ – частина площини $x + y + 2z = 2$,

розміщена в першому октанті, $(\widehat{\vec{n}, Oz})$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, $\Sigma$ – повна поверхня конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1$

(безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 2

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_{K} \frac{dl}{y - x + 2}$,

$K$ – контур трикутника $OAB$: $O(0;0)$, $A(2;1)$, $B(2;4)$;

б) $I = \oint\limits_{K} \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, $\quad K: x^2 + y^2 = 2y$;

в) $I = \int\limits_{K} dl$, $\quad K: x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3 \ (0 \le t \le 1)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (y^3 + x^2)dx + (3xy^2 + y^3)dy$,

$K$ – контур трикутника $OAB$: $O(0;0)$, $A(2;1)$, $B(2;4)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (x^2 + 2y^2)dx + (2xy - y^3)dy$, $\quad K: x^2 + y^2 = 2y$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_{K_-} (x^2 + y)dx + ydy + (y + z)dz$,

$K$ – контур трикутника $ABC$: $A(4;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} ydx + xdy + (z^2 + x)dz$, $\quad K: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + z = 2. \end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_{\Sigma} xdydz + zdzdx$, $\Sigma$ – частина площини $x + 2y + 2z = 2$, розміщена в першому октанті, $(\widehat{\vec{n}, Oz})$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 3

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_{K} x^2 ydl$, $K$ – контур чотирикутника $OABC$:

$O(0;0), A(3;1), B(3;1), C(0;2)$;

б) $I = \oint\limits_{K} (x + y^2)dl$, $\quad K: x^2 + y^2 = -y$;

в) $I = \int\limits_{K} dl$, $\quad K: x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t \quad (0 \le t \le \pi)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (x + y)dx - x^2dy$, $K$ – контур чотирикутника $OABC$:

$O(0;0), A(3;1), B(3;1), C(0;2)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (2xy + 3)dx + (x^2 + 3xy)dy$, $\quad K: x^2 + y^2 = -y$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_{K} xydx - ydy + xzdz$,

$K$ – контур трикутника $ABC$: $A(0;0;0), B(1;1;0), C(1;1;1)$;

б) $I=\oint\limits_K (x+y)dx-(y+z)dy+(x+z)dz$, $K:\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=2x. \end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_{\Sigma} xdydz+zdxdy$, $\Sigma$ – частина поверхні $x^2+y^2+z^2=1$

$(z\geq 0)$, $\widehat{(\vec{n},Oz)}$ – гострий кут;

б) $I=\oiint\limits_{\Sigma_+}(\vec{r},\vec{n})d\sigma$, $\Sigma$– замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z=4-x^2-y^2$ і $z=0$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 4

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_K (x+y+y^2)dl$, $K$– контур чотирикутника $OABC$:

$O(0;0), A(2;0), B(2;2), C(0;1)$;

б) $I=\oint\limits_K x^2ydl$, $K$: $x^2+y^2=-2x$;

в) $I=\int\limits_K dl$, $K$: $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ $(0\leq x\leq 1)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+}(3y-2x)dx+(y^2+3x)dy$, $K$– контур чотирикутника $OABC$: $O(0;0), A(2;0), B(2;2), C(0;1)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+}(y^3+\sqrt{x^2+1})dx-(x^3+3y)dy$, $K$: $x^2+y^2=-2x$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I=\oint\limits_K 2xy^3zdx+3x^2y^2zdy+x^2y^3dz$,

$K$ – контур трикутника $ABC$: $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;1)$;

б) $I = \oint\limits_K 3ydx + (x+y)dy + zdz$, $\quad K: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 3. \end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_{\Sigma} zdydz - xdzdx$, $\quad \Sigma: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $(\widehat{\vec{n}, Oz})$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, $\quad \Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = -2z$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 5

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_K \dfrac{dl}{2y - 3x + 5}$,

$K$ – контур трикутника $OAB$: $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(0;3)$;

б) $I = \oint\limits_K (x + \sqrt{x^2 + y^2})dl$, $\quad K: x^2 + y^2 = -4x$;

в) $I = \int\limits_K dl$, $\quad K: x = 5\cos t,\ y = 5\sin t,\ z = 5t\ (0 \le t \le 2\pi)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (x + y)dx + x^2 dy$,

$K$ – контур трикутника $OAB$: $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(0;3)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (y^3 + 2y)dx - (x^3 - 3x)dy$, $\quad K: x^2 + y^2 = -4x$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_K (y + z)dx + (x + z)dy + zdz$,

$K$ – контур трикутника $ABC$: $A(0;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(1;1;1)$;

б) $I = \oint\limits_K (x+z)dx + zdy + ydz$, $\quad K: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = 1. \end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_{\Sigma} xdydz - ydzdx + z^5 dxdy$, $\quad \Sigma$ – площина трикутника $ABC$: $A(0;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(1;1;1)$, $(\widehat{\vec{n}, Ox})$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n}) d\sigma$, $\Sigma$: $x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{25} = 1$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 6

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_K \dfrac{dl}{x+y+3}$,

$K$ – контур трикутника $ABC$: $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(0;2)$;

б) $I = \oint\limits_K (\sqrt{x^2+y^2} - 2y)dl$, $\quad K$: $x^2 + y^2 = -2x$;

в) $I = \int\limits_K dl$, $\quad K$: $y = (3-x)^{3/2}$ $(-6 \le x \le 3)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (x+y)dx + (2x - y^2)dy$,

$K$ – контур трикутника $ABC$: $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(0;2)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (y^3 - x)dx - (x^3 + y)dy$, $\quad K$: $x^2 + y^2 = -2x$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_K ydx + 2xdy - z^2 dz$,

$K$ – контур трикутника $ABC$: $A(0;0;0)$, $B(1;2;0)$, $C(0;0;3)$;

б) $I = \oint\limits_K (x+z)dx + zdy + ydz$, $\quad K: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x = 1/2. \end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_{\Sigma} ydydz + xdxdy$, $\Sigma$ – площина трикутника $ABC$: $A(0;0;0)$, $B(1;2;0)$, $C(0;0;3)$, $(\widehat{\vec{n}, Ox})$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n}) d\sigma$, $\Sigma: \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 7

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_K \dfrac{dl}{2x - y + 7}$,

$K$ – контур трикутника $ABC$: $A(0;3)$, $B(-2;0)$, $C(1;0)$;

б) $I = \oint\limits_K \dfrac{dl}{x^2 + y^2 + 1}$, $\quad K: x^2 + y^2 = -2x$;

в) $I = \int\limits_K dl$, $\quad K: y = (7 - x)^{3/2}$ $(-2 \le x \le 7)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (x + y^2)dx + (2xy - x)dy$,

$K$ – контур трикутника $ABC$: $A(0;3)$, $B(-2;0)$, $C(1;0)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (y^3 - x^2)dx - (x^3 + y^2)dy$, $\quad K: x^2 + y^2 = -2x$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_K (x + 2y)dx + (y - 2z)dy + (x + y)dz$,

$K$ – контур трикутника $ABC$: $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;1)$;

б) $I = \oint\limits_K (x+y)dx + xdy + z^2dz$, $\quad K: \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 4. \end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_\Sigma xdydz + zdzdx + ydxdy$, $\Sigma$ – площина трикутника $ABC$: $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;1)$, $(\widehat{\vec{n}, Oz})$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = -z$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 8

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_K \dfrac{dl}{3x + 2y + 8}$,

$K$ – контур трикутника $ABC$: $A(0;0)$, $B(2;1)$, $C(2;3)$;

б) $I = \oint\limits_K (xy + x^2 + y^2)dl$, $\quad K: x^2 + y^2 = -2y$;

в) $I = \int\limits_K dl$, $\quad K: y = (4-x)^{3/2}$ $(-5 \le x \le 4)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (x + y^2)dx - (x + y^2)dy$,

$K$ – контур трикутника $ABC$: $A(0;0)$, $B(2;1)$, $C(2;3)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} x^2ydx - y^2xdy$, $\quad K: x^2 + y^2 = -2y$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_K ydx - xdy + (x+y)dz$,

$K$ – контур трикутника $ABC$: $A(0;0;0)$, $B(1;3;0)$, $C(1;3;1)$;

б) $I=\oint\limits_K y^2dx+zdy+ydz$, $\quad K:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ z=\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_\Sigma xdydz+2ydzdx+(x+z)dxdy$, $\Sigma$ – площина трикутника $ABC$: $A(0;0;0)$, $B(1;3;0)$, $C(1;3;1)$, $(\widehat{\vec{n},Ox})$ – гострий кут;

б) $I=\oiint\limits_{\Sigma_+}(\vec{r},\vec{n})d\sigma$, $\Sigma$ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z=\sqrt{x^2+y^2}$ і $x^2+y^2+z^2=1$ $(z>0)$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 9

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_K\dfrac{dl}{2x+y+9}$, $K$ – контур чотирикутника $ABCD$: $A(0;0)$, $B(3;0)$, $C(3;1)$, $D(0;2)$;

б) $I=\oint\limits_K(x^2+y^2)dl$, $\quad K$: $r=\sqrt{\cos\varphi}$, $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2$;

в) $I=\int\limits_K dl$, $\quad K$: $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ $(-\infty<t\le 0)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+}(2x+y^2+y)dx+(2xy+4x)dy$, $K$ – контур чотирикутника $ABCD$: $A(0;0)$, $B(3;0)$, $C(3;1)$, $D(0;2)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+}xy^2dx+(x^2y+2x)dy$, $K$: $r=\sqrt{\cos\varphi}$, $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I=\oint\limits_K xdx+y^2dy+xydz$, $\quad K:\begin{cases}z=4-x^2-y^2,\\ z=x^2+y^2;\end{cases}$

б) $I = \oint\limits_K z^2dx + zdy + ydz$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;5)$.

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_\Sigma xdydz + zdzdx + ydxdy$, $\Sigma$ – площина трикутника $ABC$: $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;5)$, $(\widehat{\vec{n}, Oz})$ – гострий кут;

б) $I = \oint\!\!\oint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, $\Sigma$ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ і $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $(z > 0)$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 10

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_K \dfrac{dl}{x - y + 10}$, $K$ – контур чотирикутника $ABCD$: $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;4)$, $D(0;4)$;

б) $I = \oint\limits_K (\sqrt{x^2 + y^2} + x)dl$, $K$: $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, $x \geq 0$;

в) $I = \int\limits_K dl$, $K$: $r = 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (2x + 2xy)dx + (x^2 + 10x)dy$, $K$ – контур чотирикутника $ABCD$: $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;4)$, $D(0;4)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (2x + 3y)dx + (13x + y)dy$,

$K$: $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, $x \geq 0$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_K (x + y^2)dx + (x + z)dy + (x + y)dz$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;10)$;

б) $I = \oint\limits_K ydx - xdy - xzdz$, $K: \begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_{\Sigma} xdydz - zdxdy$, $\Sigma$ – площина трикутника $ABC$: $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;10)$, $\widehat{(\vec{n}, Oz)}$ – гострий кут;

б) $I = I = \oiint\limits_{\Sigma_+} x^3dydz + y^3dzdx + zdxdy$, $\Sigma$ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ і $z = 2 - x^2 - y^2$ $(z > 0)$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 11

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_K \frac{dl}{x + y + 11}$, $K$ – контур чотирикутника $ABCD$: $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;5)$, $D(0;1)$;

б) $I = \oint\limits_K xdl$, $K: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$;

в) $I = \int\limits_K dl$, $K: y = (11 - x)^{3/2}$ $(-5 \le x \le 11)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (3x^2 + y)dx + y^2dy$, $K$ – контур чотирикутника $ABCD$: $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;5)$, $D(0;1)$;

б) $I=\oint\limits_{K_-}(x+y)dx-(x-y)dy$, $K:\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I=\oint\limits_K ydx+(x-z)dy+ydz$, $K-$ контур трикутника $ABC$: $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;2)$;

б) $I=\oint\limits_K ydx+xdy-(x+z)dz$, $K:\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ x+z=4.\end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_\Sigma d\sigma$, $\Sigma$ – частина півсфери $x^2+y^2+z^2=4$ $(z\ge 0)$, вирізана циліндром $x^2+y^2=2x$;

б) $I=\oiint\limits_{\Sigma_+}(\vec{r},\vec{n})d\sigma$, $\Sigma$ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $x^2+y^2=4$, $z=0$ і $x+z=4$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 12

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_K\dfrac{dl}{2x+3y+12}$, $K-$ контур трикутника $ABC$: $A(-2;0)$, $B(0;1)$, $C(0;-1)$;

б) $I=\oint\limits_K(x^2+y^2+2x)dl$, $K:\ x^2+y^2=-x$;

в) $I=\int\limits_K dl$, $K:\ r=\sqrt{\cos 2\varphi}$ $(0\le\varphi\le\pi/4)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+}(y^2+x^2)dx+(3xy-y)dy$, $K-$ контур трикутника $ABC$: $A(-2;0)$, $B(0;1)$, $C(0;-1)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (2y^3 + 3x^2)dx + (-2x^3 + y^2)dy$, $\quad K:\ x^2 + y^2 = -x$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_{K} ydx + (z+y)dy + (x+z)dz$, $\quad K -$ контур трикутника $ABC$: $A(1;0;0), B(0;3;0), C(0;0;2)$;

б) $I = \oint\limits_{K} (x-y)dx + 2ydy - zdz$, $\quad K: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y + z = 2. \end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_{\Sigma} xdydz + z^2dxdy$, $\quad \Sigma$ – площина трикутника $ABC$: $A(1;0;0), B(0;3;0), C(0;0;2)$, $(\widehat{\vec{n}, Oz})$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, $\quad \Sigma:\ x^2 + y^2 + z^2 = -2z + 3$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 13

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_{K} \dfrac{dl}{x + y + 13}$, $\quad K -$ контур трикутника $ABC$: $A(-1;0), B(2;0), C(0;2)$;

б) $I = \oint\limits_{K} xdl$, $\quad K -$ контур, утворений за допомогою кривих $y = x^2$ і $y = 2 - x^2$;

в) $I = \int\limits_{K} dl$, $\quad K:\ y = x\sqrt{x}$ $\ (1 \le x \le 9)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (x-y)dx + (xy+1)dy$, $\quad K -$ контур трикутника $ABC$: $A(-1;0), B(2;0), C(0;2)$;

б) $I = \oint\limits_{K} (3y - x^2)dx + (13x - y^2)dy$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y = x^2$ і $y = 2 - x^2$;

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_{K} x^2 y dx - (z + x)dy + zdz$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(0;0;0)$, $B(2;3;0)$, $C(0;3;4)$;

б) $I = \oint\limits_{K} zdx - ydy + xdz$, $K: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ y = 1. \end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_{\Sigma} (x^2 + y^2 - z^2)d\sigma$, $\Sigma$ – частина поверхні конуса $(2 - z)^2 - x^2 - y^2 = 0$ $(z \le 2)$, вирізана параболоїдом $z = x^2 + y^2$, $(\widehat{\vec{n}, Oz})$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, $\Sigma$ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $x^2 + y^2 = 4$, $y + z = 1$ і $y + z = 4$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 14

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_{K} \frac{xdl}{x + y + 14}$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(0;-2)$, $B(3;0)$, $C(0;1)$;

б) $I = \oint\limits_{K} xydl$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y = x^2$ і $y = 8 - x^2$;

в) $I = \oint\limits_K dl$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y = (14 - x)^{3/2}$, $x = 5$ і $y = 0$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (x + 2y)dx - (xy - 1)dy$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(0;-2), B(3;0), C(0;1)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (x^2 + 2y)dx - (3x - y^2)dy$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y = x^2$ і $y = 8 - x^2$;

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_K (3x - 2y)dx + zdy + ydz$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(0;0;0), B(2;1;0), C(0;1;3)$;

б) $I = \oint\limits_K (x + y)dx - (y + z)dz$, $K: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ y = 1. \end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_\Sigma y^2 dydz - xdzdx$, $K$ – площина трикутника $ABC$: $A(0;0;0), B(2;1;0), C(0;1;3)$, $(\widehat{\vec{n}, Oz})$ – гострий кут;

б) $I = \oint\!\!\oint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, $\Sigma$ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z = x^2 + y^2$ і $4 - z = x^2 + y^2$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 15

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_K \frac{dl}{2x+y+15}$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(-3;0)$, $B(0;0)$, $C(-1;1)$;

б) $I=\oint\limits_K x\,dl$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y=-x^2$ і $y=x^2-2$;

в) $I=\oint\limits_K dl$, $K: r=\cos\varphi$ $(-\pi/2\le\varphi\le\pi/2)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+}(2x^2+3y)dx+(3x+2y)dy$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(-3;0)$, $B(0;0)$, $C(-1;1)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+}(x^2+2y)dx-(3x-y^2)dy$, $K: r=\cos\varphi$ $(-\pi/2\le\varphi\le\pi/2)$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I=\oint\limits_K z\,dx+(x+z)dy-z^2dz$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(1;1;3)$;

б) $I=\oint\limits_K z\,dx-x\,dy+x\,dz$, $K: \begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+z=2. \end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz-ydzdx+xdxdy$, $K$ – площина трикутника $ABC$: $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(1;1;3)$, $(\widehat{\vec{n},Oz})$ – гострий кут;

б) $I=\oiint\limits_{\Sigma}(\vec r,\vec n)d\sigma$, $\Sigma$ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z=x^2+y^2$ і $x^2+y^2+z^2=2$ $(z\geq 0)$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 16

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_K\frac{xdl}{x+y+16}$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(-1;2)$, $B(0;4)$, $C(1;0)$;

б) $I=\oint\limits_K xydl$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y=x^2-1$ і $y=-x^2+7$;

в) $I=\oint\limits_K dl$, $K: r=\sin\varphi$ $(0\leq\varphi\leq\pi)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+}(x+y)dx+(3x-y^2)dy$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(-1;2)$, $B(0;4)$, $C(1;0)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+}(x^2y+x)dx+(y-xy^2)dy$, $K: r=\sin\varphi$ $(0\leq\varphi\leq\pi)$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I=\oint\limits_K xydx+zdy+ydz$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(1;1;0)$, $B(0;2;0)$, $C(3;2;2)$;

б) $I=\oint\limits_K ydx+\sin ydy+dz$, $K$ – контур, утворений перетином сфери $x^2+y^2+z^2=4$ з координатними площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0)$.

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_{\Sigma} y^2dzdx - xdxdy$, $K$ – площина трикутника $ABC$: $A(1;1;0)$, $B(0;2;0)$, $C(3;2;2)$, $(\widehat{\vec{n},Oz})$ – гострий кут;

б) $I=\oiint\limits_{\Sigma_+}(\vec{r},\vec{n})d\sigma$, $\Sigma$ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $x^2+y^2+z^2=2z$ і $z=1/2$ $(0\le z\le 1/2)$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 17

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_K \dfrac{dl}{2x+y+9}$, $K$ – контур чотирикутника $ABCD$: $A(-3;0)$, $B(0;-2)$, $C(3;0)$, $D(0;2)$;

б) $I=\oint\limits_K xydl$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y=1-x^2$ і $y=x-1$;

в) $I=\oint\limits_K dl$, $K: r=-\sin\varphi$ $(\pi\le\varphi\le 2\pi)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+}(2x+3y^2)dx+(3x^2y-y)dy$, $K$ – контур чотирикутника $ABCD$: $A(-3;0)$, $B(0;-2)$, $C(3;0)$, $D(0;2)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+}(y^3-2x)dx-(x^3+3y)dy$, $K: r=-\sin\varphi$ $(\pi\le\varphi\le 2\pi)$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I=\oint\limits_K (y-x)dx+x^2dy+zdz$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(6;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;3)$;

б) $I=\oint\limits_K ydx-xdy+zdz$, $K:\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=2(x+y). \end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_{\Sigma}(x+z)dydz-zdxdy$, $K$ – площина трикутника $ABC$: $A(6;0;0), B(0;3;0), C(0;0;3)$, $(\widehat{\vec{n},Oz})$ – гострий кут;

б) $I=\oiint\limits_{\Sigma_+}(\vec{r},\vec{n})d\sigma$, $\Sigma$ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z=x^2+y^2$ і $z=2(x+y)-1$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 18

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_K \frac{xdl}{x+2y+9}$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(-3;0)$, $B(2;0)$, $C(0;-3)$;

б) $I=\oint\limits_K xydl$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y=1-x^2$ і $y=3x+3$;

в) $I=\oint\limits_K dl$, $K: r=-\cos\varphi$ $(\pi/2\le\varphi\le 3\pi/2)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+}(2x+5y)dx-(3x+x^2)dy$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(-3;0)$, $B(2;0)$, $C(0;-3)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+}(x^2-5y)dx+(y^2-6x)dy$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y=1-x^2$ і $y=3x+3$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_K (2y + 3x)dx + (z - 2y)dy + ydz$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(1;1;0), B(0;1;0), C(0;0;2)$;

б) $I = \oint\limits_K (z + y)dx - zdy - ydz$, $K: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 2x - 2y. \end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_\Sigma (2x + 3z)dydz + xdzdx - ydxdy$, $K$ – площина трикутника $ABC$: $A(1;1;0), B(0;1;0), C(0;0;2)$, $\widehat{(\vec{n}, Oz)}$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, $\Sigma$ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z = x^2 + y^2$ і $x + y + z = 1$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 19

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_K \dfrac{ydl}{x + y + 10}$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(-3;0)$, $B(2;0)$, $C(0;-3)$;

б) $I = \oint\limits_K xydl$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y = 1 - x^2$ і $y = 4x + 4$;

в) $I = \int\limits_K dl$, $K: y = (19 - x)^{3/2}$ $(-6 \le x \le 19)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (x^2 + y)dx - (x + y^2)dy$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(-3;0)$, $B(2;0)$, $C(0;-3)$;

б) $I = \oint\limits_{K} (2y + x)dx - (3x + 2y)dy$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y = 1 - x^2$ і $y = 4x + 4$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_{K} (3z - 2x)dx + ydy - xdz$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(4;0;0), B(0;3;0), C(0;0;3)$;

б) $I = \oint\limits_{K} (z - x)dx + zdy + ydz$, $K: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 2y - 2x. \end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_{\Sigma} (x + y)dydz - (x + z)dzdx + xdxdy$, $K$ – площина трикутника $ABC$: $A(4;0;0), B(0;3;0), C(0;0;3)$, $(\widehat{\vec{n}, Oz})$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, $\Sigma$ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $z = -1$ і $z = 1$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 20

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_{K} \frac{xdl}{x + y + 10}$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(0;0)$, $B(3;0)$, $C(0;-3)$;

б) $I = \oint\limits_{K} xydl$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y = 1 - x^2$ і $y = 5x + 5$;

в) $I = \int\limits_{K} dl$, $K: y = (x - 10)^{3/2}$ $(10 \le x \le 14)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (\sin x + y^2)dx + (2xy - x)dy$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(0;0)$, $B(3;0)$, $C(0;-3)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (2yx - y)dx + (x^2 - 5y)dy$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y = 1 - x^2$ і $y = 5x + 5$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_{K} (-x + z)dx + zdy + ydz$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(2;2;0), B(2;2;2), C(0;0;0)$;

б) $I = \oint\limits_{K} (x - y)dx + xdy + ydz$, $K: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 2x. \end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_{\Sigma} (y - z)dydz + xdxdy$, $K$ – площина трикутника $ABC$: $A(2;2;0), B(2;2;2), C(0;0;0)$, $(\widehat{\vec{n}, Ox})$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, $\Sigma$ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z = x^2 + y^2$ і $z = 2x$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 21

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_{K} \frac{ydl}{x + y + 10}$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(-3;0)$, $B(0;0)$, $C(0;4)$;

б) $I = \oint\limits_K xydl$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y = 1 - x^2$ і $y = -3x + 3$;

в) $I = \int\limits_K dl$, $K: y = (2x-1)^{3/2}$ $(1/2 \le x \le 5/2)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (x - y^2)dx + (2xy + y)dy$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(-3;0)$, $B(0;0)$, $C(0;4)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (y - x)dx - (y^2 - 3x)dy$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y = 1 - x^2$ і $y = -3x + 3$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_K x^2dx - zdy - ydz$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(4;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;2)$;

б) $I = \oint\limits_K (y - z)dx + (x - z)dy + zdz$, $K: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 2y. \end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_\Sigma (x - z)dydz + zdxdy$, $K$ – площина трикутника $ABC$: $A(4;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;2)$, $(\widehat{\vec{n}, Oz})$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, $\Sigma$ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z = x^2 + y^2$ і $z = 2y$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 22

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_K \frac{xdl}{x+y+12}$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(-2;0)$, $B(0;3)$, $C(0;-3)$;

б) $I=\oint\limits_K xydl$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y=1-x^2$ і $y=-4x+4$;

в) $I=\int\limits_K dl$, $K: y=(2x+1)^{3/2}$ $(0\le x\le 4)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+}(xy-2x)dx+(x^2-2y)dy$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(-2;0)$, $B(0;3)$, $C(0;-3)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+}(x^2y-1)dx+(y-x^3)dy$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y=1-x^2$ і $y=-4x+4$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I=\oint\limits_K z^2dx-xdy-ydz$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(2;2;0), B(0;2;0), C(2;2;4)$;

б) $I=\oint\limits_K(2x-3z)dx+2xdy-zdz$, $K:\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z=x.\end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_\Sigma(x-2z)dydz+(y-2x)dxdy$, $K$ – площина трикутника $ABC$: $A(2;2;0), B(0;2;0), C(2;2;4)$, $(\widehat{\vec n,Ox})$ – гострий кут;

б) $I=\oiint\limits_{\Sigma_+}(\vec{r},\vec{n})d\sigma$, $\Sigma$ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $x^2+y^2=9$, $x+y+z=2$ і $x+y+z=3$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 23

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_K \frac{xdl}{x+y+12}$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(-2;0)$, $B(0;3)$, $C(0;-3)$;

б) $I=\oint\limits_K xydl$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y=1-x^2$ і $y=-4x+4$;

в) $I=\int\limits_K dl$, $K: y=(2x+1)^{3/2}$ $(0\le x\le 4)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+}(xy-2x)dx+(x^2-2y)dy$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(-2;0)$, $B(0;3)$, $C(0;-3)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+}(x^2y-1)dx+(y-x^3)dy$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y=1-x^2$ і $y=-4x+4$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I=\oint\limits_K z^2dx-xdy-ydz$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(2;2;0)$, $B(0;2;0)$, $C(2;2;4)$;

б) $I=\oint\limits_K(2x-3z)dx+2xdy-zdz$, $K:\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z=x.\end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_{\Sigma} (x-2z)dydz + (y-2x)dxdy$, $K$ – площина трикутника $ABC$: $A(2;2;0)$, $B(0;2;0)$, $C(2;2;4)$, $(\widehat{\vec{n}, Ox})$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, $\Sigma$ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $x^2 + y^2 = 9$, $x + y + z = 2$ і $x + y + z = 3$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

## Варіант 24

**1.** Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_K \frac{dl}{y+12}$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(-1;1)$, $B(0;0)$, $C(1;1)$;

б) $I = \oint\limits_K xydl$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y = 1 - x^2$ і $y = -5x + 5$;

в) $I = \int\limits_K dl$, $K$: $y = (1-2x)^{3/2}$ $(-3/2 \le x \le 1/2)$.

**2.** Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (5x - 2y)dx + (6x - y)dy$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(-1;1)$, $B(0;0)$, $C(1;1)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (5x - y^2)dx + (2xy - x)dy$, $K$ – контур, утворений за допомогою кривих $y = 1 - x^2$ і $y = -5x + 5$.

**3.** Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_K (2x + 3y)dx - zdy - ydz$, $K$ – контур трикутника $ABC$: $A(3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;1)$;

б) $I = \oint\limits_K y^2 dx - x dy + z dz$, $K: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ z = 2x. \end{cases}$

**4.** Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_{\Sigma} (-x + 2z) dydz + (3z - x) dzdx + z dxdy$, $K$ – площина трикутника $ABC$: $A(3;0;0), B(0;2;0), C(0;0;1)$, $(\widehat{\vec{n}, Oz})$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n}) d\sigma$, $\Sigma$ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $x^2 + y^2 = 1$, $2x + y + z = 4$ і $2x + y + z = -1$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

**5.** Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

# Д2. Індивідуальні завдання самостійної роботи № 2[1]

## Варіант 1

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u = \dfrac{1}{r}$, $\vec{l} = \{-1; 2; 3\}$, $M_0(3; 4; 0)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left( \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \dfrac{\vec{r}}{r} + \operatorname{rot} \dfrac{\vec{r}}{x+y} \right)$; б) $\operatorname{rot}(e^{-r}\vec{r} + x \operatorname{grad} r^3)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left( \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + z^2 \right)$; г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left( \dfrac{\vec{r}}{r^3} + x\vec{r} \right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\big(x\vec{r} + y \operatorname{rot}(x\vec{r})\big)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{ \sqrt{y^2 + z^2};\ \frac{xy}{\sqrt{y^2 + z^2}} + 2y;\ \frac{xz}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{2yz;\ 0;\ 2xy - x\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad} |\vec{c} \times \vec{r}|^2 = 2\big(|\vec{c}|^2\, \vec{r} - (\vec{c}, \vec{r})\vec{c}\big)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u \operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad} u \cdot \vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u \operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad} u \times \vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо

---

[1] В усіх варіантах $\vec{r} = \{x; y; z\}$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$\vec{c}=\{-1;2;3\}$, $\vec{a}=\dfrac{x+y}{r}\vec{r}$, $\vec{b}=y\vec{r}$, $u=\sqrt{x^2+y^2}$, $\vec{F}=\dfrac{r^2}{x}\vec{r}$.

## Варіант 2

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u=\dfrac{1}{r^3}$, $\vec{l}=\{1;-2;3\}$, $M_0(-3;0;4)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{x^2}{r}\vec{r}+\operatorname{rot}(xy\vec{r})\right)$;

б) $\operatorname{rot}(e^{-r}y\vec{r}+x\operatorname{grad}e^{r})$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{1}{r^3}\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r}+y\vec{r}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(y\vec{r}+x\operatorname{rot}(y^2\vec{r})\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{y+2xe^{zx^2};\ x;\ e^{zx^2}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\{3y^2z;\ 3z^2x;\ 3x^2y\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2=2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{div}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$,

якщо

$\vec{c}=\{1;-2;3\}$, $\vec{a}=\dfrac{\vec{r}}{x}$, $\vec{b}=y^2\vec{r}$, $u=\dfrac{1}{r}$, $\vec{F}=\dfrac{x}{y^2}\vec{r}$.

## Варіант 3

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u = \dfrac{x}{r}$, $\vec{l} = \{-1;2;-3\}$, $M_0(3;0;-4)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{y^2}{r}\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}(xz\vec{r})\right)$;

б) $\operatorname{rot}(e^r z\vec{r} + y\operatorname{grad} r)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r^3} + e^x \sin y\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r} + z\vec{r}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\big((x+y)\vec{r} + z\operatorname{rot}(y\vec{r})\big)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{-\frac{1}{2}x^{-3/2}e^{y/z};\ x^{-1/2}ze^{y/z};\ -x^{-1/2}z^{-2}e^{y/z}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \left\{ze^{yz};\ 0;\ -\frac{1}{2}x^{-3/2} - xe^{xy}\right\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2\big(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\big)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad} u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad} u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо

$\vec{c} = \{-1;2;3\}$, $\vec{a} = \dfrac{\vec{r}}{y}$, $\vec{b} = \dfrac{\vec{r}}{r}$, $u = \dfrac{1}{r^3}$, $\vec{F} = \dfrac{y}{z^2}\vec{r}$.

## Варіант 4

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u = \dfrac{y}{r}$, $\vec{l} = \{3; -1; 2\}$, $M_0(-3; 0; 4)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left( \dfrac{z}{r}\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}(x^2\vec{r}) \right)$; б) $\operatorname{rot}\left( \dfrac{\vec{r}}{x} + z \operatorname{grad}\dfrac{1}{r} \right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left( \dfrac{x}{r^2} + \dfrac{1}{r^3} + z\ln(x^2 + y^2) \right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left( \dfrac{\vec{r}}{r^2} + z^2\vec{r} + \operatorname{grad}\dfrac{z}{xy} \right)$; д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left( \dfrac{\vec{r}}{x+y} + y\operatorname{rot}(z\vec{r}) \right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{ \frac{r^2 - x^2}{r^3};\ -\frac{xy}{r^3};\ -\frac{xz}{r^3} \right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{0;\ 0;\ -y\sin xy - x\cos xy\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c} \times \vec{r}|^2 = 2\left(|\vec{c}|^2\, \vec{r} - (\vec{c}, \vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad}u \cdot \vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u \times \vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{2; -1; 3\}$, $\vec{a} = \dfrac{\vec{r}}{x^2}$, $\vec{b} = \dfrac{\vec{r}}{y^2}$, $u = \dfrac{1}{r^2}$, $\vec{F} = \dfrac{x}{y^2 r}\vec{r}$.

## Варіант 5

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u=\frac{z}{r}$, $\vec{l}=\{-3;1;2\}$, $M_0(3;0;-4)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\frac{z^2}{r}\vec{r}+\frac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{rot}(y^2\vec{r})\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(z\vec{r}+xyz\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\frac{y}{r^3}+\frac{1}{r}+ze^{-x}\sin y\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}+y^2\vec{r}+\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)$; д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{r}}{xr}+z\operatorname{rot}\frac{\vec{r}}{z}\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{-\frac{xy}{r^3};\ \frac{r^2-y^2}{r^3};\ -\frac{yz}{r^3}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\{y;\ z^2;\ x^2+y^2\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2=2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{div}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$,

якщо

$$\vec{c}=\{3;-1;2\},\quad \vec{a}=\frac{y}{z}\vec{r},\quad \vec{b}=\frac{x}{z}\vec{r},\quad u=\frac{1}{r^4},\quad \vec{F}=\frac{y^2}{x}\frac{\vec{r}}{r}.$$

## Варіант 6

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u = \dfrac{x^2}{r}$, $\vec{l} = \{3;1;-2\}$, $M_0(3;0;-4)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{x^2}{r}\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}(z^2\vec{r})\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{z} + x\operatorname{grad}\dfrac{1}{r^2}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{y^2}{r} + \dfrac{1}{r} + e^z\cos x\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r} + \dfrac{\vec{r}}{y^3} + \operatorname{grad}(xyz)\right)$; д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{yr} + z^2\operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{z}\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{2x}{z^3\sqrt{y}};\ \frac{-x^2}{2\sqrt{y^3}z^3};\ \frac{-3x^2}{z^4\sqrt{y}}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{xze^{xy} - y^2e^{zy};\ x^2e^{xz} - zye^{xy};\ 0\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{3;1;-2\}$, $\vec{a} = x\dfrac{\vec{r}}{r}$, $\vec{b} = y\dfrac{\vec{r}}{r}$, $u = \dfrac{x}{r}$, $\vec{F} = \dfrac{x\vec{r}}{z}$.

## Варіант 7

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u = \dfrac{y^2}{r}$, $\vec{l} = \{1;3;-2\}$, $M_0(-3;0;4)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{y^2}{r}\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{y}\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{z^2} + y\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{z^2}{r} + \dfrac{1}{r} + \operatorname{arctg}\dfrac{z}{x}\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^2} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{grad}\dfrac{z}{xy}\right)$; д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{zr} + x\operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{y}\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{x^3 + 2x(y^2 + z^2)}{r^3};\ \frac{-x^2 y}{r^3};\ \frac{-x^2 z}{r^3}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{z^2 - r^2 - xy}{r^3};\ \frac{x^2 - r^2 - yz}{r^3};\ \frac{y^2 - r^2 - xz}{r^3}\right\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{3;1;-2\}$, $\vec{a} = \dfrac{z}{y}\vec{r}$, $\vec{b} = \dfrac{y}{z}\vec{r}$, $u = \dfrac{y}{r}$, $\vec{F} = \dfrac{x^2\vec{r}}{zr}$.

## Варіант 8

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u = \dfrac{y^2}{r}$, $\vec{l} = \{3;-1;2\}$, $M_0(3;-4;0)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{z}{r}\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{z}\right)$;  б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{z^3} + y\operatorname{grad}\dfrac{1}{r^3}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{x}{r} + \dfrac{r}{x} + \dfrac{1}{r}\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{x} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + r\operatorname{grad} r\right)$;  д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{x} + z\operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{r}\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{-xy}{r^3};\ \frac{x^2 + z^2}{r^3};\ \frac{-yz}{r^3}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{xz - zy}{r^3};\ \frac{xz - yz}{r^3};\ \frac{y^2 - x^2}{r^3}\right\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad} u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad} u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{3;-1;2\}$, $\vec{a} = \dfrac{y}{z}\vec{r}$, $\vec{b} = \dfrac{x}{z}\vec{r}$, $u = \dfrac{z}{r}$, $\vec{F} = \dfrac{xy\vec{r}}{r}$.

## Варіант 9

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u = \dfrac{z^2}{r}$, $\vec{l} = \{-3;1;-2\}$, $M_0(0;-3;4)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{xy}{r}\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{x+y}\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{x^3} + z\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{y}{r} + \dfrac{r}{x} + \dfrac{1}{r}\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{y} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \dfrac{1}{r}\operatorname{grad} r\right)$; д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{y} + r\operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{x}\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{z(y^2+z^2)}{r^3};\ -\frac{xyz}{r^3};\ \frac{x(y^2+z^2)}{r^3}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{z;\ x;\ y\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{-3;1;-2\}$, $\vec{a} = \dfrac{x}{z}\vec{r}$, $\vec{b} = \dfrac{y}{z}\vec{r}$, $u = \dfrac{z}{r}$, $\vec{F} = \dfrac{xz}{yr}\vec{r}$.

## Варіант 10

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u = \dfrac{z^2}{r}$, $\vec{l} = \{-2;1;3\}$, $M_0(-3;0;4)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{z^2}{r}\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{z^3}\right)$;  б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{xy} + \dfrac{1}{x}\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{xy}{r} + \dfrac{1}{r} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3} + \dfrac{\vec{r}}{r} + \operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;  д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{x^2} + \dfrac{\vec{r}}{r^5} + \operatorname{grad}\dfrac{xy}{z}\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{-xyz}{r^3};\ \frac{z(x^2+z^2)}{r^3};\ \frac{y(x^2+y^2)}{r^3}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{-2z;\ 3x;\ 4y\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{-2;1;3\}$, $\vec{a} = \dfrac{x}{y}\vec{r}$, $\vec{b} = \dfrac{z}{y}\vec{r}$, $u = \dfrac{xy}{r}$, $\vec{F} = \dfrac{xy}{r}\vec{r}$.

## Варіант 11

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u = \dfrac{yz}{r}$, $\vec{l} = \{-1;-2;1\}$, $M_0(-4;0;3)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{yz}{r}\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot} xy\vec{r}\right)$;

б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{yz} + yz \operatorname{grad}\dfrac{x}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{x}{r} + \dfrac{r}{y^2} + \dfrac{1}{r}\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{xy\vec{r}}{z} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + r\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{r} + r\operatorname{rot}\dfrac{z\vec{r}}{x}\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{r}{y} + \frac{x^2}{yr};\ \frac{x}{r} - \frac{xr}{y^2};\ \frac{xz}{yr}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{z^2 + x^2;\ xy;\ -3xz\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad} u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad} u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{0;2;-3\}$, $\vec{a} = \dfrac{xz}{y}\vec{r}$, $\vec{b} = \dfrac{\vec{r}}{r}$, $u = \dfrac{z^2}{r}$, $\vec{F} = \dfrac{x\vec{r}}{r}$.

## Варіант 12

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u = \dfrac{xyz}{r}$, $\vec{l} = \{4;-1;3\}$, $M_0(-3;0;-4)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{xy}{r}\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{xz}\right)$;

б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{\sin r} + \dfrac{1}{y}\operatorname{grad}\dfrac{y}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{xz}{r} + \dfrac{1}{r} + r^2\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3} + \dfrac{\vec{r}}{r} + \dfrac{xy}{r}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{x\vec{r}}{r^3} + \dfrac{\vec{r}}{\cos r} + \operatorname{grad}\dfrac{x+y}{r}\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{z}{r} - \frac{zr}{x^2};\ \frac{zy}{xr};\ \frac{r}{x} + \frac{z^2}{xr}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{2yz + x^2;\ x^2y;\ -2xz - x^2z\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c})$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{-3;4;1\}$, $\vec{a} = r\vec{r}$, $\vec{b} = \dfrac{\vec{r}}{xr}$, $u = \dfrac{x^2}{r}$, $\vec{F} = \dfrac{y\vec{r}}{r}$.

## Варіант 13

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u = \dfrac{r}{xy}$, $\vec{l} = \{-2;1;2\}$, $M_0(0;3;4)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{r}{x}\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}\dfrac{r\vec{r}}{x}\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{xy} + \dfrac{1}{r}\operatorname{grad} r\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{r}{x} + \dfrac{1}{r^3} + r^4\right)$; г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{xy} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \dfrac{1}{r}\operatorname{grad} r\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^5} + \dfrac{1}{r}\operatorname{rot}\dfrac{y\vec{r}}{z}\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{r}{z} + \frac{x^2}{zy};\ \frac{xy}{zr};\ \frac{x}{r} - \frac{xr}{z^2}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{2xyz + y^2;\ 2xyz - zy^2;\ -xz^2\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{-1;1;4\}$, $\vec{a} = \dfrac{z}{r}\vec{r}$, $\vec{b} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$, $u = \dfrac{z}{r^3}$, $\vec{F} = \dfrac{z\vec{r}}{r^3}$.

## Варіант 14

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u = \dfrac{x}{r^3}$, $\vec{l} = \{-4;2;3\}$, $M_0(1;4;8)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{x\vec{r}}{r^3} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}\dfrac{x\vec{r}}{r^3}\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{x\vec{r}}{r^3} + z\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{x}{r^3} + \dfrac{1}{r} + r\right)$; г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^5} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \dfrac{1}{r}\operatorname{grad} r\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{x\vec{r}}{r^3} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{grad}\dfrac{x}{r^3}\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{y}{r} - \frac{x^2 y}{r^3};\ \frac{x}{r} - \frac{y^2 x}{r^3};\ -\frac{xyz}{r^3}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{-zx^2 - 1;\ 2x^3yz + 2xyz;\ 1 - x^3z^2\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad} u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad} u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{-5;3;1\}$, $\vec{a} = \dfrac{1}{xz}\vec{r}$, $\vec{b} = r\vec{r}$, $u = \dfrac{x}{r^3}$, $\vec{F} = \dfrac{xy\vec{r}}{r^3}$.

## Варіант 15

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u = \frac{y}{r^3}$, $\vec{l} = \{2;-4;3\}$, $M_0(-1;4;8)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\frac{y\vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}\frac{y\vec{r}}{r^3}\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(\frac{y\vec{r}}{r^3} + r\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\frac{y}{r^3} + \ln r + r^2\right)$; г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{y\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{x}\operatorname{grad} r\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\frac{y\vec{r}}{r^3} + e^{-r}\vec{r} + \operatorname{grad}\frac{xy}{z}\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{z}{r} - \frac{x^2 z}{r^3};\ -\frac{xyz}{r^3};\ \frac{x}{r} - \frac{xz^2}{r^3}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{y - 2z;\ x + z;\ x^2 - 2y\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad} u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad} u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{-2;1;3\}$, $\vec{a} = \frac{x}{r^3}\vec{r}$, $\vec{b} = xr\vec{r}$, $u = \frac{x}{r^3}$, $\vec{F} = \frac{xy\vec{r}}{r^3}$.

## Варіант 16

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u = \dfrac{xy}{r^3}$, $\vec{l} = \{2;-4;3\}$, $M_0(1;-4;8)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{xy\vec{r}}{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}\dfrac{xy\vec{r}}{r}\right)$;  б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{xy\vec{r}}{r} + e^{-r}\vec{r} + \operatorname{grad}\dfrac{xy}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{xy}{r^3} + \dfrac{1}{r} + r^2\right)$;  г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(r\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \dfrac{1}{r}\operatorname{grad} r^2\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{xy\vec{r}}{r} + \vec{r}\sin r + \operatorname{grad}\dfrac{xyz}{r}\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{1}{rz} - \frac{x^2}{zr^3};\ -\frac{xy}{zr^3};\ -\frac{x}{z^2 r} - \frac{x}{zr^3}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{y^2 z^3 + y;\ x^3 z^2 + x;\ x^2 y^3 + y\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2\big(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\big)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{-2;3;4\}$, $\vec{a} = \dfrac{xy}{r}\vec{r}$, $\vec{b} = \dfrac{y}{r}\vec{r}$, $u = \dfrac{xy}{r^3}$, $\vec{F} = \dfrac{xz}{r^3}\vec{r}$.

## Варіант 17

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u = \dfrac{z}{r^3}$, $\vec{l} = \{-3; 2; 4\}$, $M_0(1; 4; -8)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{z\vec{r}}{r^3} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}\dfrac{xz\vec{r}}{r^3}\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3} + \vec{r}\ln r + \operatorname{grad}\dfrac{xz}{r^3}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{z}{r^3} + \dfrac{1}{r} + r^4\right)$; г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(r^3\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \dfrac{1}{x}\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{z\vec{r}}{r^3} + \vec{r}e^{2r} + \operatorname{grad}\dfrac{\sin r}{r}\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{yz}{r} - \frac{x^2yz}{r^3};\ \frac{xz}{r} - \frac{xy^2z}{r^3};\ \frac{xy}{r} - \frac{xyz^2}{r^3}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{3x^2y^2z - 2x^3yz;\ 3xy^2z^2 - 2xy^3z;\ 3x^2yz^2 - 2xyz^3\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{4; -3; 5\}$, $\vec{a} = \dfrac{z}{r^3}\vec{r}$, $\vec{b} = \dfrac{\vec{r}}{r}$, $u = \dfrac{z}{r^3}$, $\vec{F} = \dfrac{z}{r^3}\vec{r}$.

## Варіант 18

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u = \dfrac{xz}{r^3}$, $\vec{l} = \{2;0;-3\}$, $M_0(-1;4;-8)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{xz\vec{r}}{r^3} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}\dfrac{xz\vec{r}}{r^3}\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^5} + \vec{r}xr + \operatorname{grad}\dfrac{xz}{r^3}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{xz}{r^3} + \dfrac{1}{r} + \ln r\right)$; г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(r\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \dfrac{1}{y}\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{xz\vec{r}}{r} + r^3\vec{r} + \operatorname{grad}(x^2yz^3)\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{2xyr + \frac{x^3y}{r};\ x^2r + \frac{x^2y^2}{r};\ \frac{x^2yz}{r}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{xz^3 - x^3y^2;\ x^2y^3 - yz^3;\ x^2 + y^2\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{-2;4;1\}$, $\vec{a} = \dfrac{xz}{r}\vec{r}$, $\vec{b} = xr\vec{r}$, $u = \dfrac{xz}{r^3}$, $\vec{F} = \dfrac{xz}{r^3}\vec{r}$.

## Варіант 19

**1.** Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u = \dfrac{x^2}{r}$, $\vec{l} = \{-3; 1; 2\}$, $M_0(-1;4;-8)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{x^2\vec{r}}{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}\dfrac{x^2\vec{r}}{r^3}\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{\sin r} + yr\vec{r} + \operatorname{grad}\dfrac{x^2}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{x^2}{r} + \dfrac{1}{r} + \operatorname{div}(r^2\vec{r})\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(r^2\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \dfrac{1}{z}\operatorname{grad} r\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{x^2\vec{r}}{r} + \vec{r}\ln r + \operatorname{grad}(xy^2z^3)\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{yz}{r^2} - \frac{2x^2yz}{r^4};\ \frac{xz}{r^2} - \frac{2xy^2z}{r^4};\ \frac{xy}{r^2} - \frac{2xyz^2}{r^4}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{xz^2 - yx^2;\ xy^2 - yz^2;\ y^3\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c})$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{-4; -2; 1\}$, $\vec{a} = \dfrac{x^2}{r}\vec{r}$, $\vec{b} = \dfrac{y}{r}\vec{r}$, $u = \dfrac{x^2}{r}$, $\vec{F} = \dfrac{x^2}{r}\vec{r}$.

## Варіант 20

**1.** Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u=\dfrac{x^3}{r}$, $\vec{l}=\{-1;4;-3\}$, $M_0(8;4;1)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{x^3\vec{r}}{r}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{rot}\dfrac{x^2y\vec{r}}{r}\right)$;

б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^7}+\dfrac{x^3}{r}\vec{r}+\operatorname{grad}(xye^z)\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{x^3}{r}+\dfrac{1}{r}+\ln r\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{x^3}{r}\vec{r}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{x^3\vec{r}}{r}+r\vec{r}+\operatorname{grad}(xy^2z^3)\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{yz}{r}-\frac{x^2yz}{r^3};\ \frac{xz}{r}-\frac{xy^2z}{r^3};\ \frac{xy}{r}-\frac{xyz^2}{r^3}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\{x^3z-3xyz^2;\ xy^3-3x^2yz;\ yz^3-3xy^2z\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2=2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{div}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c}=\{-2;3;5\}$, $\vec{a}=\dfrac{x^3}{r}\vec{r}$, $\vec{b}=\dfrac{y}{r}\vec{r}$, $u=\dfrac{x^3}{r}$, $\vec{F}=\dfrac{x^3}{r}\vec{r}$.

## Варіант 21

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u = \dfrac{y^3}{r}$, $\vec{l} = \{-4; 2; 3\}$, $M_0(-8; 4; -1)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{y^3\vec{r}}{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}\dfrac{y^3\vec{r}}{r}\right)$;

б) $\operatorname{rot}\left(e^{-2r}\vec{r} + \vec{r}\operatorname{div}\dfrac{\vec{r}}{r} + \operatorname{grad}(x^5 yz)\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{y^3}{r} + \dfrac{1}{r} + \ln(x^2 + y^2)\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{y^3}{r}\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{y^3\vec{r}}{r} + \dfrac{1}{r^2}\vec{r} + \operatorname{grad}\dfrac{xyz}{r^2}\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{2xyz}{r} - \frac{x^3yz}{r^3};\ \frac{x^2z}{r} - \frac{x^2y^2z}{r^3};\ \frac{x^2y}{r} - \frac{x^2yz^2}{r^3}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{z}{x} - \frac{x}{y};\ \frac{yz}{x^2} - \frac{xy}{z^2};\ \frac{z}{y} - \frac{x}{z}\right\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c})$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{-3;4;5\}$, $\vec{a} = \frac{y^3}{r}\vec{r}$, $\vec{b} = \frac{\vec{r}}{y}$, $u = \frac{y^3}{r}$, $\vec{F} = \frac{z^3}{r}\vec{r}$.

## Варіант 22

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u = \frac{z^3}{r}$, $\vec{l} = \{2;-1;4\}$, $M_0(8;-4;1)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\frac{z^3\vec{r}}{r} + \frac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}\frac{z^3\vec{r}}{r}\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{r}}{\sqrt{r}} + z^3\vec{r} + \operatorname{grad}\frac{x^3y}{z}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\frac{z^3}{r} + \frac{1}{r} + \operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r}\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\frac{y^3}{r}\vec{r} + \frac{\vec{r}}{r^5} + \operatorname{grad} r\right)$; д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\frac{z^3\vec{r}}{r} + \frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{x}{r}\vec{r}\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{2xy^2}{r} - \frac{x^3y^2}{r^3};\ \frac{2x^2y}{r} - \frac{x^2y^3}{r^3};\ -\frac{x^2y^2z}{r^3}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{3xy^2z^2 - x^3y^2;\ 3x^2yz^2 - y^3z^2;\ 3x^2y^2z - x^2z^3\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c})$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$, якщо $\vec{c}=\{-5;3;1\}$, $\vec{a}=\frac{z^3}{r}\vec{r}$, $\vec{b}=\frac{\vec{r}}{x}$, $u=\frac{z^3}{r}$, $\vec{F}=\frac{z^3}{r}\vec{r}$.

## Варіант 23

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u=\frac{x^2y}{r}$, $\vec{l}=\{-3;2;-1\}$, $M_0(4;-8;1)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\frac{x^2y\vec{r}}{r}+\frac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{rot}(z\vec{r})\right)$;  б) $\operatorname{rot}\left(z\vec{r}+\frac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{grad}\frac{xz^3}{y}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\frac{x^2y}{r}+\frac{1}{r}+\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r}\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\frac{xy}{r}\vec{r}+\frac{\vec{r}}{r^2}+\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)$;  д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\frac{x\vec{r}}{r}+\frac{\vec{r}}{r^5}+\operatorname{grad}r\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{2xz^2}{r}-\frac{x^3z^2}{r^3};\ \frac{-x^2yz^2}{r^3};\ \frac{2x^2z}{r}-\frac{x^2z^3}{r^3}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{x}{z}-\frac{y}{x};\ \frac{x}{y}-\frac{y}{z};\ \frac{xz}{y^2}-\frac{yz}{x^2}\right\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2=2(|\vec{c}|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c})$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{div}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$, якщо $\vec{c}=\{-5;\,6;\,3\}$, $\vec{a}=\dfrac{x^2y}{r}\vec{r}$, $\vec{b}=\dfrac{\vec{r}}{y}$, $u=\dfrac{x^2y}{r}$, $\vec{F}=\dfrac{\vec{r}}{xy}$.

## Варіант 24

**1.** Знайти похідну за напрямком $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля $u$ в точці $M_0$, якщо $u=\dfrac{1}{xr}$, $\vec{l}=\{-3;\,-1;\,2\}$, $M_0(8;\,4;\,-1)$.

**2.** Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{xr}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{r}\right)$;

б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{\cos r}+y^3\vec{r}+\operatorname{grad}\dfrac{1}{xr}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{1}{xr}+\dfrac{1}{r}+\operatorname{div}\dfrac{\vec{r}}{r}\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{z^3}{r}\vec{r}+\dfrac{\vec{r}}{r}+\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{y\vec{r}}{xr}+\vec{r}e^{-2r}+\operatorname{grad}r\right)$.

**3.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал $u$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{2}{r}-\frac{x^2}{r^3}-\frac{r}{x^2};\ \frac{y}{xr}-\frac{xy}{r^3};\ \frac{z}{xr}-\frac{xz}{r^3}\right\}.$$

**4.** Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{x}{z}-\frac{x}{y};\ \frac{y}{x}-\frac{y}{z};\ \frac{z}{y}-\frac{z}{x}\right\}.$$

**5.** Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2=2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{div}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c}=\{2;\,-3;\,6\}$, $\vec{a}=\dfrac{\vec{r}}{xr}$, $\vec{b}=\dfrac{\vec{r}}{r}$, $u=\dfrac{1}{xr}$, $\vec{F}=\dfrac{\vec{r}}{xr}$.

## Д3. Додаткові завдання

Знайти гармонічну функцію $u$ ( $\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u = 0$ ) для випадків:

а) $u = u(x)$ в ПДСК,

б) $u = u(r)$ в ССК ( $r = |\vec{r}\,|$ ),

в) $u = u(r)$ в ЦСК або ПСК ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ),

г) $u = u(\varphi)$ в ССК,

ґ) $u = u(\theta)$ в ССК.

Навчальне видання

**КРИВОШЕЯ** Сергій Арсенович,
**МАЙКО** Наталія Валентинівна,
**МОТОРНА** Оксана Віталіївна,
**ПРОЩЕНКО** Тетяна Михайлівна

# ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ

Навчальний посібник

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"

Формат 60х84$^{1/16}$. Ум. друк. арк. 15,3. Наклад 100. Зам. № 218-8583.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № Рф6.
Підписано до друку 12.07.18

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (044) 239 32 22; (044) 239 31 72; тел./факс (044) 239 31 28
e-mail: vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua
http: vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02

**Кривошея Сергій Арсенович**

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри ма-ематики та теоретичної радіофізики Київського національ-ого університету імені Тараса Шевченка. Випускник ме-аніко-математичного факультету Київського державного ніверситету імені Т.Г. Шевченка 1972 р. Наукові інтереси: симптотичні методи нелінійної механіки, теорія нетерових крайових задач. Читає лекційні курси "Математичний аналіз", Диференціальні та інтегральні рівняння". Автор близько 100 аукових і науково-методичних праць, серед яких підручник посібники з теорії диференціальних рівнянь для студентів ищих навчальних закладів СРСР, України, Росії. Лауреат ремії імені Тараса Шевченка Київського національного ніверситету імені Тараса Шевченка (2007 р.) за навчальний омплекс з диференціальних рівнянь. Лауреат Державної ремії України в галузі освіти (2012 р.).

**Прощенко Тетяна Михайлівна**

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри ма-тематики та теоретичної радіофізики Київського національ-ного університету імені Тараса Шевченка. Випускниця ме-ханіко-математичного факультету Київського державного університету імені Т.Г. Шевченка 1994 р. Наукові інтереси: роз-робка методів побудови точних і наближених аналітичних ро-зв'язків систем рівнянь статики електро-, магніто- та термое-лектропружності; дослідження відповідних граничних задач для тіл складної геометрії. Читає лекції та проводить прак-тичні заняття з курсів "Загальна алгебра", "Алгоритми та методи обчислень", "Математичне програмування", "Обробка даних і чисельні методи", "Математичний аналіз". Автор понад 30 наукових публікацій.

**Моторна Оксана Віталіївна**

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри ма-ематики та теоретичної радіофізики Київського національ-ого університету імені Тараса Шевченка. Випускниця ме-аніко-математичного факультету Дніпропетровського дер-жавного університету 1990 р. Наукові інтереси: теорія набли-ження функцій. Читає лекційні курси "Математичний аналіз", Диференціальні та інтегральні рівняння". Автор близько 50 аукових публікацій.

**Майко Наталія Валентинівна**

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри ма-тематики та теоретичної радіофізики Київського національ-ного університету імені Тараса Шевченка. Випускниця фа-культету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка 1995 р. Наукові інтереси: дискретні аналоги крайових та початково-крайових задач, наближені методи розв'язування абстрактної задачі Коші. Читає лекцій-ний курс "Математичний аналіз" та проводить практичні за-няття з курсів "Диференціальні та інтегральні рівняння", "Теорія ймовірностей". Автор понад 30 наукових і науко-во-методичних праць.