

## О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
Предисловие . . . . .	3
<b>Глава I. Стационарные случайные процессы и их характеристики</b> . . . . .	<b>5</b>
1. Случайные процессы . . . . .	5
2. Стационарные и нестационарные случайные процессы . . . . .	8
3. Характеристики стационарных случайных процессов . . . . .	8
4. Корреляционные функции случайных процессов . . . . .	11
5. Свойства корреляционной функции . . . . .	12
6. Спектральная плотность случайного процесса . . . . .	17
7. Свойства спектральной плотности случайного процесса . . . . .	19
8. Связь между корреляционной функцией и спектральной плотностью . . . . .	20
<b>Глава II. Анализ точности работы линейных систем автоматического управления при стационарных случайных воздействиях</b> . . . . .	<b>26</b>
Введение . . . . .	26
§ 1. Критерии оценки качества работы систем автоматического управления . . . . .	27
§ 2. Определение корреляционной функции реакции системы управления при случайном воздействии на ее вход . . . . .	28
§ 3. Определение спектральной плотности реакции системы управления при случайном воздействии на ее вход . . . . .	31
§ 4. Определение корреляционной функции реакции системы управления при случайных воздействиях в произвольной точке . . . . .	32
§ 5. Определение спектральной плотности реакции системы управления при случайном воздействии в произвольной точке . . . . .	33
§ 6. Определение спектральной плотности ошибки системы управления . . . . .	34
§ 7. Аналитический метод определения спектральной плотности и среднего квадрата ошибки системы управления . . . . .	35
§ 8. Определение среднего квадрата ошибки простейшей системы управления, состоящей из фильтра и интегратора . . . . .	39
§ 9. Графоаналитический метод определения спектральной плотности и среднего квадрата ошибки системы управления . . . . .	43
§ 10. Анализ следящей системы углового сопровождения цели . . . . .	44

	Стр.
<b>Глава III. Синтез линейных систем автоматического управления при стационарных случайных воздействиях . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>Введение . . . . .</b>	<b>52</b>
§ 1. Условия минимума среднеквадратической ошибки . . . . .	53
§ 2. Определение оптимальной передаточной функции разомкнутой системы управления . . . . .	57
§ 3. Графоаналитический метод синтеза систем автоматического управления . . . . .	59
§ 4. Определение минимальной среднеквадратической ошибки . . . . .	63
§ 5. Определение передаточной функции системы управления с цепью обратной связи при наличии внутренних помех . . . . .	64
<i>Литература . . . . .</i>	<i>68</i>

К И В

ХАРЬКОВСКОЕ  
ВЫСШЕЕ АВИАЦИОННО-ИНЖЕНЕРНОЕ ВОЕННОЕ УЧИЛИЩЕ

И. В. КУЗЬМИН

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО  
АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СИСТЕМ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО  
УПРАВЛЕНИЯ

105580-23

(Л Е К Ц И И)

Харьков  
1961

ХАРЬКОВСКОЕ  
ВЫСШЕЕ АВИАЦИОННО - ИНЖЕНЕРНОЕ ВОЕННОЕ УЧИЛИЩЕ

И. В. КУЗЬМИН

Кандидат технических наук

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО  
АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СИСТЕМ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО  
УПРАВЛЕНИЯ

(Л Е К Ц И И)

Учебная библиотека

Инв. №

УЧЕБНИЙ ФОНД

105580 / 23

Харьков

1961

Конспект лекций включает материал раздела „Статистическая динамика линейных систем автоматического управления“. При подготовке материала учитывалось, что читатель знаком с элементами теории вероятностей, преобразованиями Лапласа и Фурье, а также основными понятиями из теории автоматического регулирования.

Конспект лекций является пособием по одному из разделов теории автоматического управления.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

При анализе и синтезе систем автоматического управления рассматриваются два основных типа воздействий: воздействия в виде заданных функций времени (единичный скачок, единичный импульс, гармоническое воздействие и др.) и воздействия в виде случайных функций времени.

*Значение воздействий заданных как функция времени* в любой будущий момент времени  $t$  однозначно определяется через его значение в некоторый исходный момент времени  $t=0$ . В природе воздействия в виде заданных функций времени встречаются довольно редко. Рассмотрение этих воздействий скорее обуславливается применением для исследования систем автоматического управления хорошо разработанных искусственных методов, анализа и синтеза (например, частотный метод и др.).

*Значение воздействия, являющегося случайной функцией времени*, нельзя заранее установить с полной определенностью в любой будущий момент времени. Случайный характер может иметь как управляющее воздействие (полезный сигнал), так и возмущающее воздействие (помеха).

Случайные воздействия имеют наибольшее распространение в природе, однако, сравнительно простые искусственные методы определения динамических характеристик систем автоматического управления при наличии помех из-за их небольшой точности во многих практических случаях не применимы. Поэтому в соответствии с этим видом воздействий разработаны специальные методы анализа и синтеза систем автоматического управления, основанные на статистических представлениях.

Статистические методы анализа и синтеза систем автоматического управления применяются:

— при предположении, что из всего многообразия прикладываемых воздействий к системе можно выделить управляющее воздействие, представляющее собою заданную функцию времени,

а возмущающее воздействие — случайную функцию времени и, наоборот;

— при предположении, что как управляющее воздействие, так и возмущающее воздействие являются случайными функциями времени.

Очевидно, что при статистическом анализе и синтезе систем автоматического управления теряется смысл обычного понятия качества воспроизведения, связанного с такими представлениями, как время переходного процесса и др.

Вполне очевидно и то, что не имеет большого смысла применять статистические методы тогда, когда:

— воздействия представляют собой импульсы, имеющие случайную величину и возникающие в случайные моменты времени, но разделенные такими промежутками времени, которых достаточно для того, чтобы система успевала до появления каждого следующего импульса приходить в установившееся состояние;

— воздействия представляют собою функции, которые можно аппроксимировать по участкам несколькими типовыми функциями таким образом, чтобы процесс регулирования на протяжении каждого из участков успевал достигнуть установившегося состояния.

В первой главе конспекта излагаются основные понятия и сведения о стационарных случайных процессах, а также рассматриваются способы их математического описания.

Более подробное и строгое изложение этих вопросов можно найти в литературе [1], [2], [3].

Во второй главе производится статистический анализ точности работы линейных систем автоматического управления.

В третьей главе производится синтез линейных систем автоматического управления.

## ГЛАВА I

# СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

### § 1. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Одним из новых разделов теории вероятностей, представляющим большой интерес для решения многих важнейших задач, является теория случайных процессов. В этой теории изучаются закономерности изменения случайных величин в зависимости от изменения одного или нескольких неслучайных параметров, например, времени, пространственной координаты и т. д. Таким образом, теория случайных процессов изучает как бы „динамику“ случайных величин.

Для математического описания случайных процессов применяются случайные функции. В связи с этим теорию случайных процессов часто называют теорией случайных функций [1].

*Случайной функцией* называется функция, которая в результате опыта может принять тот или иной вид, неизвестный заранее.

Конкретный вид, принимаемый случайной функцией в результате опыта, называется *реализацией этой функции*.

Предположим, что случайный процесс дает при каждом из большого числа  $k$  произвольных в сходных условиях экспериментов некоторую функцию времени  $x_k(t)$  (рис. 1.1).

Совокупность всех реализаций  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)$  образует случайный процесс  $X(t)$ .

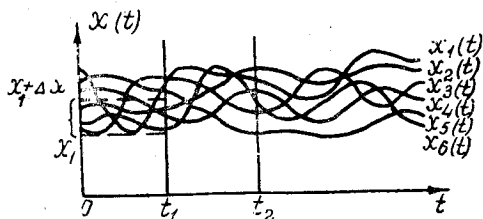


Рис. 1.1. Реализации случайного процесса.



Величина  $k$ -той реализации случайного процесса в определенный момент времени (например,  $t = t_1$ ) называется *выборкой случайного процесса*  $x_k(t_1)$ .

Совокупность значений всех выборок в определенный момент времени (например,  $t = t_1$ ) образует *случайную величину*  $X(t_1)$ .

Картину, изображенную на рис. 1.1, возможно наблюдать на экране осциллографа, на вертикальные пластины которого подано флуоресцирующее напряжение либо с выхода радиоприемника, либо с потенциометра гироскопического датчика углового положения летательного аппарата. Если время одной развертки принять за время одного опыта, то в результате каждого опыта для каждого значения аргумента  $t$  получается определенное значение  $x$ . При этом, если считать, что за одну развертку осциллографа наблюдается реализация  $x(t)$ , то совокупность всех реализаций (разверток) дает картину случайного процесса  $X(t)$ . Необходимо подчеркнуть, что случайность процесса проявляется в том, что вид функции  $x_k(t)$  случайным образом меняется от одного опыта к другому.

Для того чтобы охарактеризовать случайный процесс, необходимо тем или иным способом указать все возможные его реализации и их вероятности.

Рассмотрим определенный момент времени  $t_1$  (рис. 1.1) и найдем, какая доля из общего числа функций  $x_k(t)$  имеет в этот момент времени значение, заключенное между  $x_1$  и  $x_1 + \Delta x_1$ , где  $x_1$  и  $\Delta x_1$  — неслучайные значения.

Эта доля, или *вероятность* нахождения реализации случайного процесса  $x_k(t)$  в интервале значений  $x_1, x_1 + \Delta x_1$ , зависит от момента времени  $t$  и при малых интервалах  $\Delta x$  пропорциональна этому интервалу. Вероятность нахождения реализации процесса в интервале  $\Delta x$  обозначается через  $f_1(x, t) \Delta x$ , а функция  $f_1(x, t)$  называется *одномерным законом распределения плотности вероятности*.

На рис. 1.2 приведен график одного из наиболее часто встречающихся на практике *нормального закона распределения плотности вероятности* случайной величины  $x$  в определенный момент времени  $t_1$ . Математическое описание этого закона имеет вид

$$f(x, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.1)$$

где  $a$  — математическое ожидание случайной величины (в нашем примере — постоянная составляющая);

$\sigma^2$  — дисперсия случайной величины.

Вероятность нахождения  $x(t)$  в интервале  $\Delta x$  равна заштрихованной площади под кривой распределения этой случайной величины.

Одномерный закон распределения плотности вероятности дает представление о процессе лишь в отдельные, фиксированные промежутки времени. Он характеризует процесс *статически* и не дает представления о динамике его развития.

Для более полной характеристики случайного процесса необходимо знать *связь* между вероятными значениями случайной функции при двух произвольно выбранных моментах времени  $t_1$  и  $t_2$ .

Вероятность нахождения любой из функций  $x_k(t)$ , входящих в совокупность функции  $X(t)$  в интервале  $(x_1, x_1 + \Delta x_1)$  в момент времени  $t = t_1$  и в интервале  $(x_2, x_2 + \Delta x_2)$  в момент времени  $t = t_2$ , равна  $f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) \Delta x_1 \Delta x_2$ , а функция  $f_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$  называется *двумерным законом распределения плотности вероятности* случайной величины.

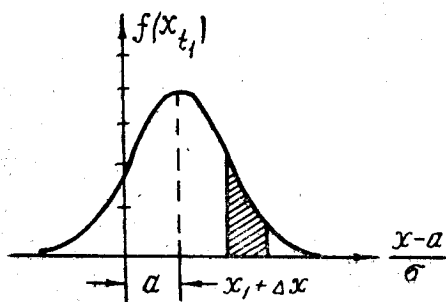


Рис. 1.2. Кривая плотности вероятности для нормального распределения.

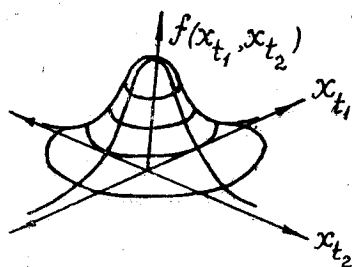


Рис. 1.3. Поверхность двумерного нормального закона распределения плотности вероятности.

На рис. 1.3 приведена поверхность двумерного нормального закона распределения плотности вероятности для случайных величин с нулевым средним значением в моменты времени  $t_1, t_2$ .

Рассуждая аналогичным образом, можно ввести понятие о трехмерном  $f_3(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3)$ , а также и о  $n$ -мерном  $f_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$  законах распределения плотности вероятности случайного процесса  $X(t)$ .

Рассмотрением  $n$ -мерной функции распределения плотности вероятности случайного процесса по существу отождествляется случайная функция с совокупностью  $n$  случайных величин  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ , т. е. значениями случайного процесса  $X(t)$  в фиксированные моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Отсюда видно, что при достаточно большом числе  $n$  случайный процесс можно характеризовать некоторыми мгновенными функциями распределения плотности вероятности, полностью определяющими его в *статистическом* смысле. Однако из-за математических трудностей, возникающих при пользовании этими законами, чаще всего на практике оперируют конечным числом моментных функций, ко-

торые дают, безусловно, менее полное описание случайного процесса. К ним, прежде всего, относятся *начальные и центральные моментные функции*, полученные элементарными средствами в результате осреднения случайных функций либо по *совокупности* (когда наблюдение ведется в один и тот же момент времени за множеством реализаций однотипных устройств), либо для специальных случайных процессов, по *времени* (когда наблюдения ведутся за одной реализацией в различные моменты времени на достаточно большом интервале).

Формулы моментных функций будут приведены в § 3 этой главы.

## § 2. СТАЦИОНАРНЫЕ И НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Случайный процесс  $X(t)$  называется *стационарным*, если  $n$ -мерное распределение плотности вероятности этого процесса для фиксированного взаимного расположения соответствующих  $n$  точек на оси времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$  сохраняется при смещении совокупности точек вдоль оси времени без изменения их взаимного расположения.

Таким образом, стационарный случайный процесс имеет однородные во времени статистические свойства.

Для стационарного случайного процесса одномерный закон распределения плотности вероятности не зависит от времени  $t$ , двумерный — зависит лишь от разности  $t_2 - t_1$  и т. д.

В общем случае указанная однородность во времени не имеет места, а случайные процессы являются *нестационарными*. Поскольку многомерный закон распределения плотности вероятности нестационарного случайного процесса зависит от положения каждого из  $n$  моментов времени в отдельности, то математическое описание и экспериментальное изучение такого рода случайных процессов связано со значительными трудностями.

Встречающиеся во многих физических и технических задачах случайные процессы можно с достаточной точностью считать стационарными и пользоваться в этих случаях хорошо разработанной теорией стационарных случайных функций.

## § 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1. При стационарных случайных процессах функции распределения плотности вероятности могут быть определены из результатов наблюдения над одной единственной системой в течение достаточно долгого промежутка времени путем построения закона распределения выборок одной и той же реализации, взятых в различные моменты времени.

Для нестационарных случайных процессов функций распределения плотности вероятности могут быть определены лишь в результате наблюдения над многими однотипными системами, работающими в сходных условиях, путем построения закона распределения выборок, взятых из реализаций всех систем в один и тот же момент времени.

В основе этого свойства лежит так называемая *эргодическая гипотеза*. Согласно этой гипотезе большое число наблюдений (выборки) над одной системой, движение которой представляет стационарный случайный процесс в произвольно выбранные моменты времени, имеет те же статистические свойства, что и то же число наблюдений над произвольно выбранными сходными с ней системами в один и тот же момент времени.

2. Для стационарных случайных процессов функция одномерного распределения плотности вероятности не зависит от  $t$ ; функция двумерного распределения плотности вероятности зависит только от разности  $t_2 - t_1$ , а не от самих значений  $t_1, t_2$  и т. д.

3. При стационарных случайных процессах усреднение по совокупности, т. е. усреднение, определенное в результате наблюдения над многими подобными системами в один и тот же момент времени, и усреднение по времени, т. е. усреднение, полученное на основании наблюдения над одной из этих систем для достаточно большого числа последующих моментов времени, дают один и тот же результат.

Например, среднее значение (математическое ожидание) для совокупности функций  $x_k(t)$  в момент времени  $t = t_1$  при известном одномерном законе распределения плотности вероятности  $f_1(x, t)$  определяется по формуле

$$m_1 \{ X(t_1) \} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x, t) dx^* \quad (1.2)$$

Среднее значение по времени этой же функции  $x_k(t)$  принимает вид

$$m_1 \{ x(t) \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (1.3)$$

Для стационарных случайных процессов эти операции на основании эргодической теоремы дадут один и тот же результат. То же относится и к моментным функциям более высокого по-

\* Фигурными скобками условно принято обозначать операцию усреднения.

рядка. Так, например, момент  $n$ -го порядка по совокупности в момент времени  $t = t_1$

$$m_n \{ X(t_1) \} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_1(x, t) dx \quad (1.4)$$

для стационарного случайного процесса равен среднему значению по времени

$$m_n \{ x(t) \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t)]^n dt. \quad (1.5)$$

4. Наряду с приведенными выше простейшими моментными функциями, в теории случайных процессов вводятся понятия *начальных моментных функций* многомерных распределений и *центральных моментных функций*. *Второй центральный момент* одномерного закона распределения плотности вероятности называется *дисперсией случайного процесса* и определяется по формуле

$$m_2 \{ [x(t) - m_1 \{ x(t) \}]^2 \} = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_1 \{ x(t) \}]^2 f_1(x, t) dx, \quad (1.6)$$

где  $\sigma$  — называется среднеквадратическим отклонением случайного процесса.

*Смешанный второй начальный момент* двумерного закона распределения плотности вероятности называется *корреляционной функцией* и определяется для стационарного случайного процесса с нулевым средним значением выражением

$$m_2 \{ x(t_1), x(t_2) \} = R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \quad (1.7)$$

В то время, как экспериментальное определение двумерной функции распределения плотности вероятности случайного процесса представляет собой громоздкий и практически редко осуществимый труд, экспериментальное определение корреляционной функции стационарного случайного процесса может быть выполнено, как это показано в [2], сравнительно просто.

Для большого числа задач корреляционная функция является достаточно полной статистической характеристикой стационарного случайного процесса.

В связи с этим раздел теории вероятности, посвященный изучению лишь тех свойств случайных процессов, которые опреде-

ляются их моментами первых двух порядков, называется *корреляционной теорией случайных процессов*.

5. Случайные процессы, у которых среднее значение и дисперсия не зависят от времени, а корреляционная функция зависит от разности моментов времени  $\tau = t_2 - t_1$ , называются *стационарными в широком смысле*.

Ясно, что стационарность в широком смысле не тождественна точной стационарности, определенной ранее—процессы стационарные будут всегда стационарными в широком смысле, но не наоборот. Лишь для нормальных процессов понятие стационарности в точном и широком смыслах совпадают.

#### § 4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Понятие корреляционной функции и спектральной плотности являются основополагающими в теории стационарных случайных процессов.

*Автокорреляционной, или корреляционной, функцией* последовательностей значений  $x_k$  случайной функции  $x(t)$  дискретного стационарного случайного процесса  $X(t)$  с нулевым средним значением называется среднее по совокупности от произведения  $x_{k+\vartheta} x_k$ :

$$R_x(\vartheta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_{k+\vartheta} x_k. \quad (1.8)$$

*Взаимно корреляционной функцией* последовательностей  $x_k$  и  $y_k$  двух случайных функций  $x(t)$  и  $y(t)$  дискретных стационарных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  с нулевым средним значением называется среднее по совокупности от произведения  $x_{k+\vartheta} y_k$ :

$$R_{xy}(\vartheta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_{k+\vartheta} y_k, \quad (1.9)$$

где  $k$  — номер выборки;

$\vartheta$  — количество дискретов, на которое сдвинуты во времени выборки;

$N$  — количество дискретов.

Для непрерывных случайных стационарных процессов с нулевым средним значением корреляционной функцией случайного

процесса называется среднее во времени от произведения  $x(t + \tau)x(t)$

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau)x(t) dt; \quad (1.10)$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau)y(t) dt, \quad (1.11)$$

где  $T$  — время усреднения\*;  
 $\tau = t_1 - t_2$  — сдвиг во времени.

Из выражения (1.10) видно, что корреляционная функция  $R_x(\tau)$  процесса  $X(t)$  зависит от промежутка времени  $\tau$  и реализации случайного процесса  $x(t)$ .

Для стационарного случайного процесса автокорреляционная функция будет одной и той же для всех реализаций совокупности  $X(t)$ .

### § 5. СВОЙСТВА КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

1. Определим значение корреляционной функции при сдвиге во времени  $\tau = 0$ . Из определения (1.10) с учетом (1.5) получим

$$R_x(0) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t)]^2 dt = m_1 \{ [x(t)]^2 \} = m_2 \{ x(t) \}. \quad (1.12)$$

Из выражения (1.12) вполне очевидно, что если  $x(t)$  представляет изменение напряжения (или тока), рассматриваемое как стационарный случайный процесс, то физически корреляционная функция  $R_x(0)$  равна средней мощности, выделяемой реализацией  $x(t)$  на сопротивлении величиною в 1 ом. Кроме того, корреляционная функция  $R_x(0)$  эквивалентна квадрату эффективного значения (дисперсии) случайного процесса, если его среднее значение равно нулю, так как предел от правой части выражения является квадратом эффективного значения напряжения.

Покажем, чему равна корреляционная функция при сдвиге во времени  $\tau \rightarrow \infty$ . При случайном процессе зависимость между величинами  $x(t)$  и  $x(t + \tau)$  ослабевает при  $\tau \rightarrow \infty$ . В пределе эти ре-

\* Если не подходить строго, то в формулах (1.8), (1.9), (1.10) и (1.11) знак предела можно опустить, а усреднение производить при конечном числе дискретов  $N$  и на конечном промежутке времени  $T$ . При этом ошибка будет не велика, если число  $N$  взять достаточно большим, а время  $T$  продолжительным. Методика выбора  $N$  и  $T$ , а также оценка приближенности упрощенных формул даны в [2].

лизации становятся независимыми. Поскольку среднее значение произведения независимых случайных величин равно произведению средних сомножителей и, так как для стационарного процесса среднее значение не зависит от времени, то

$$R_x(\infty) = m_1 \{ x(t) x(t) \} = m_1^2 \{ x(t) \}. \quad (1.13)$$

Таким образом, физическое значение корреляционной функции при  $\tau \rightarrow \infty$ , в случае, если  $x(t)$  представляет изменение напряжения, равно мощности постоянной составляющей стационарного случайного процесса, рассеиваемой на сопротивлении в 1 ом.

При случайном процессе без постоянной составляющей

$$R_x(\infty) = 0.$$

Выразим дисперсию случайного процесса через значения корреляционной функции при  $\tau = 0$  и  $\tau \rightarrow \infty$ .

С учетом формулы (1.6) можно написать

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_1 \{ x(t) \}]^2 f_1(x, t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x^2(t) - 2x(t)m_1 \{ x(t) \} + m_1^2 \{ x(t) \}] f_1(x, t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) f_1(x, t) dt - 2m_1 \{ x(t) \} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f_1(x, t) dt + \\ &\quad + m_1^2 \{ x(t) \} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, t) dt. \end{aligned}$$

В правой части этого равенства первый член является моментом второго порядка функции  $x(t)$ ; второй — удвоенное произведение моментов первого порядка. Поскольку интегральное выражение третьего члена  $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, t) = 1$ , то можно записать,

что

$$\sigma^2 = m_2 \{ x(t) \} - m_1^2 \{ x(t) \},$$

или, если учесть (1.12) и (1.13), то

$$\sigma^2 = R_x(0) - R_x(\infty) \quad (1.14)$$

2. В силу независимости функции распределения плотности вероятности стационарного случайного процесса от начала



отсчета времени корреляционная функция  $R_x(\tau)$  есть четная функция от  $\tau$ , т. е.

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau). \quad (1.15)$$

3. Принимая во внимание, что

$$m_1 \{ [x(t) \pm x(t + \tau)]^2 \} > 0$$

(как среднее значение существенно положительной величины) и, учитывая, что

$$\begin{aligned} m_1 \{ [x(t) \pm x(t + \tau)]^2 \} &= m_1 \{ x^2(t) \pm 2x(t)x(t + \tau) + x^2(t + \tau) \} = \\ &= 2R_x(0) \pm 2R_x(\tau) > 0, \end{aligned}$$

находим

$$R_x(0) \geq |R(\tau)|, \quad (1.16)$$

т. е. любое значение корреляционной функции не может превышать значение этой функции при  $\tau = 0$ .

На рис. 1.4 приведен типичный график корреляционной функции случайного процесса, иллюстрирующий перечисленные выше свойства.

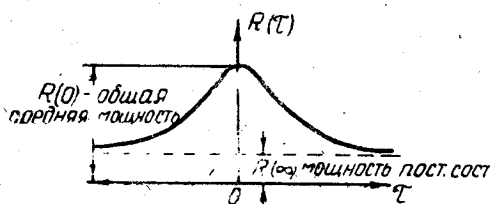


Рис. 1.4. График корреляционной функции случайного процесса.

Необходимо отметить, что полученное ранее асимптотическое приближение корреляционной функции

$R(\tau)$  к значению  $m_1^2 \{ x(t) \}$ , (1.13) не всегда реализуется монотонно. Иногда (например, при смеси периодического сигнала с шумом) значение корреляционной функции колеблется около значения  $m_1^2 \{ x(t) \}$  (рис. 1.5), приближаясь к нему при увеличении параметра  $\tau$ .

4. Корреляционная функция стационарного случайного процесса характеризует связь между предшествующими и последующими значениями реализации  $x(t)$ . В качестве меры этой связи примем величину  $2\epsilon(\tau)$  среднего квадратического отклонения  $x_k(t)$  от этой же реализации,

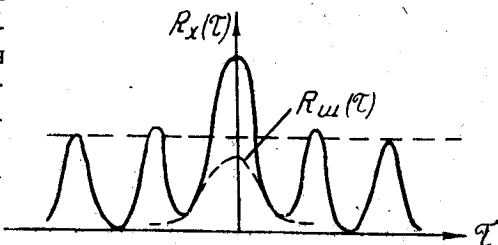


Рис. 1.5. Корреляционная функция смеси периодического сигнала и шума.

но смещенной на интервал  $\tau$  по оси времени  $x_k(t + \tau)$ , т. е.

$$2\varepsilon(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x_k(t) - x_k(t + \tau)]^2 dt. \quad (1.17)$$

Разбивая интегральное выражение (1.17) на сумму интегралов и используя эргодическую теорему, получим

$$\varepsilon(\tau) = R_x(0) - R_x(\tau).$$

Если записать это равенство в другом виде, то станет очевидно, что корреляционная функция  $R_x(\tau)$  дополняет величину среднего квадратического отклонения функции  $x_k(t + \tau)$  от  $x_k(t)$  до некоторой постоянной  $R_x(0)$ , равной полной мощности стационарного случайного процесса (рис. 1.6). Корреляционная функция  $R_x(\tau)$  как бы показывает, насколько в среднем связаны друг с другом два значения реализации случайного процесса, разделенные интервалом времени  $\tau$ .

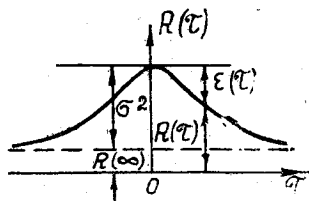


Рис. 1.6. Связь между  $\varepsilon(\tau)$  и  $R(\tau)$ .

5. При решении практических задач часто вместо реализации случайного процесса рассматривают ее отклонение от среднего значения:

$$x_0(t) = x(t) - m_1 \{x(t)\}. \quad (1.18)$$

Такая случайная функция называется *пульсациями* или *флуктуациями* случайного процесса.

Корреляционная функция  $R_0(\tau)$  флуктуаций стационарного случайного процесса

$$R_0(\tau) = m_1 \{x_0(t) x_0(t + \tau)\}. \quad (1.19)$$

Подставив в выражение (1.19) вместо флуктуаций их выражение через (1.18), получим

$$R_0(\tau) = m_1 \{x(t) x(t + \tau) - m_1 x(t) - m_1 x(t + \tau) + m_1^2\},$$

где  $m_1$  — среднее значение случайного процесса.

Поскольку среднее значение суммы равно сумме средних значений, то окончательно имеем

$$R_0(\tau) = R(\tau) - m_1^2 \{x(t)\}. \quad (1.20)$$

Из соотношений (1.18) и (1.19) следует, что среднее значение пульсаций равно нулю, а их дисперсия

$$\sigma^2 = R_0(0). \quad (1.21)$$

## 6. Отношение

$$r(\tau) = \frac{R_0(\tau)}{R_0(0)} = \frac{R_0(\tau)}{\sigma^2} \quad (1.22)$$

называется *нормированной корреляционной функцией (коэффициентом корреляции)* стационарного случайного процесса с нулевым средним.

Нормированная корреляционная функция обладает теми же свойствами, что и ненормированная корреляционная функция. Основными из них являются следующие:

— нормированная корреляционная функция  $r(\tau)$  является четной функцией своего аргумента;

— максимальное значение нормированной корреляционной функции, как видно из формул (1.21), (1.22)  $r(0) = 1$ , а  $|r(\tau)| < 1$  при любом  $\tau$ ;

— нормированная корреляционная функция  $r(\tau)$  может равняться нулю и при конечных  $\tau$ , однако, равенство  $r(\tau) = 0$  еще не означает независимость случайных процессов\*, оно означает их некоррелированность в то время, как два независимых случайных процесса некоррелированы и имеют  $r(\tau) = 0$ .

7. Для чисто случайного процесса всегда можно указать такое  $\tau_0$ , когда при  $\tau > \tau_0$  функции  $x(t)$  и  $x(t+\tau)$  можно считать практически независимыми, причем практическая независимость принимается в том случае, если при  $\tau > \tau_0$  абсолютная величина коэффициента корреляции остается меньше наперед заданной величине, например

$$|r(\tau)| < 0,05.$$

Величина  $\tau_0$  называется *временем корреляции* случайного процесса. Время корреляции иногда определяется как половина ширины основания прямоугольника единичной высоты, площадь которого равна площади под графиком коэффициента корреляции, т. е.

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) d\tau = \frac{1}{R_x(0)} \int_0^{\infty} R_x(\tau) d\tau. \quad (1.23)$$

\* Например,  $x_1 = \cos x$  и  $x_2 = \sin x$ , где  $x$  — случайная величина, распределенная равномерно между 0 и  $2\pi$ . Ясно, что случайные величины  $x_1$  и  $x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}$  зависимы, однако, их нормированная корреляционная функция равна нулю, поскольку

$$m_1 \{x_1 x_2\} = m_1 \{\cos x \sin x\} = \frac{1}{2} m_1 \{\sin 2x\} = 0.$$

## § 6. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Теория, основанная на представлении случайных процессов в виде спектральных функций, называется *спектральной теорией* стационарных случайных процессов.

Рассмотрим реализацию стационарного случайного процесса  $x(t)$  на ограниченном интервале  $2T$  (рис. 1.7). Положим, что

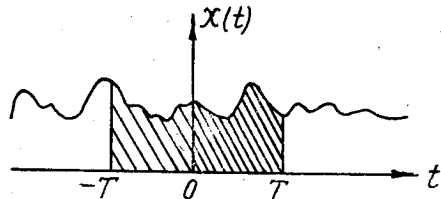


Рис. 1.7. Реализация случайного процесса.

$$x(t) = x_T(t) \text{ при } -T \leq t \leq T, \quad (1.24)$$

$$x(t) = 0 \text{ при всех остальных } t.$$

Определим преобразование Фурье этой реализации:

$$\Phi_T(j\omega) = \int_{-T}^T x_T(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.25)$$

Преобразование Фурье  $\Phi_T(j\omega)$  реализации стационарного случайного процесса  $x(t)$  называется *спектром случайного процесса*. Этот спектр изображает стационарную случайную функцию в виде гармонических составляющих различных частот:  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots$ , причем, амплитуды этих колебаний являются случайными величинами.

Подобное приложение классического гармонического анализа к случайным процессам, как мы видим, ничего не дает, поскольку аналитически эти процессы не выражаются точными функциональными зависимостями от независимой переменной. Однако гармонический анализ можно обобщить, осредняя по времени спектральные разложения, полученные для отдельных реализаций.

Определим корреляционную функцию реализации  $x_T(t)$ :

$$R_T(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t) x_T(t + \tau) dt \quad (1.26)$$

и найдем преобразование Фурье для этой функции:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_T(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) x_T(t + \tau) dt.$$

Выражение под вторым интегралом умножим и разделим на  $e^{j\omega t}$  и запишем равенство в следующем виде:

$$S_T(\omega) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t+\tau) e^{-j\omega(t+\tau)} d\tau. \quad (1.27)$$

Производя замену переменной  $t + \tau = \lambda$  и учитывая, что

$$\Phi_T^*(j\omega) = \Phi_T(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{j\omega t} dt,$$

получим

$$S_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_T(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2T} \Phi_T(j\omega) \Phi_T^*(j\omega). \quad (1.28)$$

Поскольку корреляционная функция  $R_T(\tau)$  четная, то можно записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_T(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_T(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_T(\tau) \cos \omega\tau d\tau$$

и окончательно

$$S_T(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_T(\tau) \cos \omega\tau d\tau = \frac{1}{2T} |\Phi_T(j\omega)|^2. \quad (1.29)$$

Переходя в равенстве (1.29) к пределу при  $T \rightarrow \infty$ , получим

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |\Phi_T(j\omega)|^2. \quad (1.30)$$

Равенство (1.30) называется *спектральной плотностью* (энергетическим спектром) стационарного случайного процесса.

Спектральная плотность  $S(\omega)$  может существовать даже тогда, когда не существует преобразования Фурье от  $x_T(t)$ , т. е. когда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Phi_T(j\omega) = \infty.$$

Таким образом, введение спектральной плотности вместо обычного преобразования Фурье для реализации  $x_T(t)$  является тем обобщением гармонического анализа, которое позволяет распространить спектральные представления даже на функции, неудовлетворяющие условиям интегрируемости, или, иначе, на реализации  $x_T(t)$  случайного процесса, для которых интеграл Фурье не существует.

## § 7. СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

1. Чаще всего на практике реализация  $x_T(t)$  является напряжением (или током) на нагрузке, тогда энергия, которую ток рассеивает на сопротивлении 1 ом в промежуток времени  $2T$ , равна энергии, которую несут все гармоники спектра, т. е.

$$\int_{-T}^T x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_T(j\omega)|^2 d\omega \quad (1.31)$$

и

$$P_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} |\Phi_T(j\omega)|^2 d\omega \quad (1.32)$$

являются средней мощностью тока, протекающего через сопротивление в 1 ом за промежуток времени  $2T$ .

Переходя к пределу при  $T \rightarrow \infty$ , получим согласно (1.31) выражение для средней мощности

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (1.33)$$

Отсюда видно, что  $S(\omega)$  имеет размерность мощности на единицу полосы частот и является спектральной плотностью средней мощности стационарного случайного процесса  $x(t)$ .

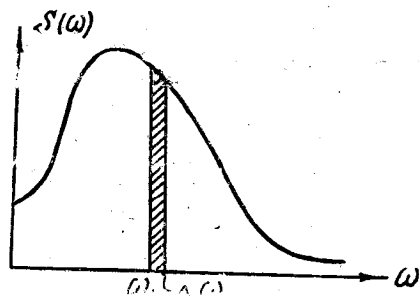


Рис. 1.8. Спектральная плотность случайного процесса.

На рис. 1.8 приведен график спектральной плотности стационарного случайного процесса в области положительных частот.

Мощность, рассеиваемая гармоническими составляющими с частотами в интервале  $[\omega_1, \omega_1 + \Delta\omega]$ , определяется интегралом

$$P_{\Delta\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_1 + \Delta\omega} S(\omega) d\omega.$$

2. Спектральная плотность  $S(\omega)$ , как это видно из формулы (1.30), описывает частотный состав стационарного случайного

процесса, дает только усредненную энергетическую картину распределения энергии по частотам элементарных гармонических составляющих и, так же, как корреляционная функция, не содержит никаких сведений о сдвигах фаз отдельных составляющих реализации  $x(t)$ .

3. Если реализации  $x(t)$  и  $y(t)$  принадлежат двум различным случайным процессам, то

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \Phi_{\tau,x}^*(j\omega) \Phi_{\tau,y}(j\omega), \quad (1.34)$$

где  $\Phi_{\tau,x}^*(j\omega)$  — комплексно-сопряженная функция  $\Phi_{\tau,x}(j\omega)$ ;  
 $\Phi_{\tau,y}(j\omega)$  — преобразование Фурье для реализации  $y(t)$ .

4. Из соотношений

$$\begin{aligned} \Phi_{\tau,x}(j\omega) &= \Phi_{\tau,x}^*(-j\omega); \\ \Phi_{\tau,y}(j\omega) &= \Phi_{\tau,y}(-j\omega) \end{aligned}$$

следует, что

$$S_{xy}(\omega) = S_{xy}^*(-\omega) = S_{xy}(-\omega), \quad (1.35)$$

т. е. спектральная плотность  $S_{xy}(\omega)$  является четной функцией от  $\omega$ .

5. При анализе случайных процессов иногда оказывается удобным пользоваться понятием *нормированной спектральной плотности*

$$\sigma(\omega) = \frac{S(\omega)}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega}, \quad (1.36)$$

имеющей размерность времени.

## § 8. СВЯЗЬ МЕЖДУ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ И СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Понятия корреляционной функции и спектральной плотности в теории случайных процессов аналогичны понятиям импульсной переходной и передаточной функциям в гармоническом анализе, поскольку корреляционная функция и спектральная плотность представляют собою преобразование Фурье друг для друга.

Рассмотрим корреляционную функцию (1.26)

$$R_{\tau}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_{\tau}(t) x_{\tau}(t + \tau) dt.$$

Вполне очевидно, что корреляционная функция  $R(\tau)$  представляет собою предел функции  $R_T(\tau)$  при  $T \rightarrow \infty$ :

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} R_T(\tau). \quad (1.37)$$

В то же время известно, что корреляционная функция  $R_T(\tau)$  связана с  $S_T(\omega)$  интегралом (1.29):

$$S_T(\omega) = 2 \int_0^T R_T(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{1}{2T} |\Phi_T(j\omega)|^2.$$

Переходя к пределу при  $T \rightarrow \infty$ , получим основополагающее в корреляционной теории случайных процессов соотношение между спектральной плотностью и корреляционной функцией через интеграл Фурье:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (1.38)$$

Следовательно, обратное преобразование Фурье

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos \tau \omega d\omega. \quad (1.39)$$

Необходимо заметить, что в показательной форме обратного преобразования Фурье (1.39) понятие спектрального распределения средней мощности процесса распространялось на все действительные частоты от  $\omega = -\infty$  до  $\omega = +\infty$ . Физический смысл имеют только положительные частоты от  $\omega = 0$  до  $\omega = +\infty$ .

Поскольку показательная форма интеграла легче вычисляется, то для вычисления спектра  $S(\omega)$  разбивается на две равные по интенсивности компоненты  $\frac{1}{2} S(\omega)$  и  $\frac{1}{2} S(-\omega)$ . В связи с этим общая спектральная плотность, распространенная на отрицательные частоты, становится четной функцией частоты.

Соотношения (1.38) и (1.39) позволяют определить спектральную плотность  $S(\omega)$  по известной корреляционной функции, или по известной спектральной плотности определить корреляционную функцию [2].

Кроме того, соотношения (1.38) и (1.39) позволяют использовать при изучении связи между функцией корреляции  $R(\tau)$  и спектральной плотностью  $S(\omega)$  известные свойства преобразования Фурье.



Перечислим наиболее интересные из них.

1. Монотонно убывающей функции спектральной плотности  $S(\omega)$  соответствует монотонно убывающая функция корреляции  $R(\tau)$ .
2. Чем более пологая и широкая функция спектральной плотности  $S(\omega)$ , тем уже функция корреляции  $R(\tau)$  (рис. 1.9). В связи

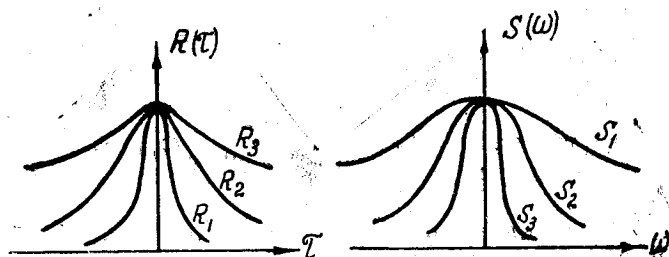


Рис. 1.9. Графики соотношения ширины корреляционной функции и спектральной плотности для различных случайных процессов.

с этим свойством рассмотрим граничный и наиболее интересный случай, соответствующий спектральной плотности  $S(\omega) = S_0 = \text{const}$ , т. е. спектральную плотность, равномерную на всех частотах.

Случайный процесс, имеющий равномерный на всех частотах спектр, называют „белым шумом“.

Корреляционная функция „белого шума“

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_0 e^{j\omega\tau} d\omega = S_0 \delta(\tau),$$

поскольку интеграл  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega$  является обратным преобразованием Фурье от дельта-функции.

Таким образом, корреляционная функция „белого шума“ представляет собою дельта-функцию в начале координат:

$$R(\tau) = \begin{cases} \infty, & \tau = 0; \\ 0, & \tau \neq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что „белый шум“  $x(t)$  характеризуется тем, что значения  $x(t)$  в любые два (даже сколько угодно близкие) момента времени некоррелированы. В этом случае двухмерный закон распределения плотности вероятности случайного процесса распадается на два сомножителя:

$$f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = f_1(x_1, t_1) f_2(x_2, t_2).$$

Такой случайный процесс иногда называют *абсолютно* случайным.

Необходимо подчеркнуть, что понятие „белый шум“ основано на спектральном свойстве случайного процесса и совершенно не связано с законами распределения плотности вероятности.

„Белые шумы“ представляют пример таких случайных процессов, у которых корреляционные функции и спектральные плотности одинаковы, а законы распределения плотности вероятности могут отличаться друг от друга.

„Белый шум“, имеющий, например, нормальный закон распределения плотности вероятности, называется *нормальным*.

Близким к нормальному „белому шуму“ является шум на входе детектора приемного устройства.

„Белый шум“ в точном смысле является идеализацией, никогда не встречающейся в реальных условиях, хотя бы потому, что достаточно близкие значения случайной функции практически всегда зависимы, а также и потому, что реальные процессы имеют конечную мощность. Однако подобная идеализация во многих важных практических случаях значительно упрощает математический анализ и не вносит сколько-нибудь существенных погрешностей.

3. Если случайный процесс имеет спектральную плотность  $S(\omega)$ , сосредоточенную в узкой полосе около некоторой довольно высокой частоты  $\omega_c$ , обладающей симметрией относительно этой точки, и имеющую максимум при  $\omega = \omega_c$  (рис. 1.10), т. е. если

$$S(\omega) = S_1(\omega_c - \omega),$$

то корреляционная функция этого случайного процесса

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega\tau d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\omega_c} S_1(\omega_c - \omega) \cos(\omega_c - \omega)\tau d\omega = \\ &= \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\omega_c} S_1(\omega_c - \omega_0) \cos \omega\tau d\omega \right] \cos \omega_c\tau + \\ &+ \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\omega_c} S_1(\omega_c - \omega) \sin \omega\tau d\omega \right] \sin \omega_c\tau. \end{aligned}$$

Поскольку по условию полоса спектра пренебрежимо мала по сравнению с частотой  $\omega_c$ , то верхние пределы интегрирования без особой погрешности можно распространить до бесконечности.

Принимая во внимание, что второй интеграл, как интеграл от синуса в бесконечных пределах, равен нулю, получим

$$R(\tau) \approx \frac{1}{2\pi} \cos \omega_c \tau \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\tau.$$

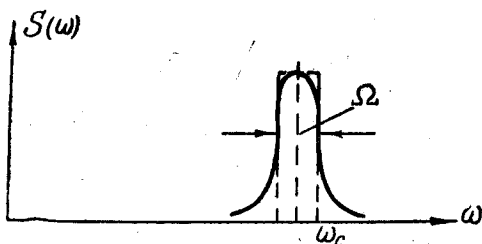


Рис. 1.10. Спектральная плотность узкополосного сигнала.

Если предположить, что  $S(\omega) = \text{const}$  в полосе частот  $\Omega$ , содержащей частоту  $\omega_c$ , то

$$R(\tau) \approx \frac{1}{2\pi} \cos \omega_c \tau \frac{2}{\tau} \sin \frac{\Omega \tau}{2}.$$

Из этого выражения видно, что корреляционная функция имеет характер затухающих колебаний с частотой  $\omega_c$ .

4. Для стационарного случайного процесса, среднее значение которого не равно нулю, спектральная плотность при достаточно больших  $T$  имеет разрыв в начале координат, т. е. при  $\omega = 0$ .

Для случайного процесса, содержащего периодическую составляющую частоты  $\omega_c$ ,

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |\Phi_T(j\omega)|^2 = \infty,$$

т. е. спектральная плотность в точке  $\omega = \omega_c$  имеет разрыв. Эти два положения легко поясняются физически. Действительно, при значительном возрастании времени усреднения в первом случае постоянная составляющая, имеющая частоту  $\omega = 0$ , на этой частоте даст бесконечную плотность энергии; во втором случае энергией в основном обладает периодическая составляющая и поэтому при значительном времени усреднения на частоте  $\omega = \omega_c$  спектральная плотность возрастает до бесконечности.

Из изложенного следует, что существует два пути вычисления энергетического спектра случайного процесса:

1) непосредственный путь по наблюдению за одной реализацией  $x(t)$  стационарного случайного процесса и нахождения предела

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} |\Phi_T(j\omega)|^2;$$

2) нахождение преобразования Фурье корреляционной функции стационарного случайного процесса, определяемой обычно экспериментально.

Подробное описание методов определения корреляционной функции  $R(\tau)$  и спектральной плотности  $S(\omega)$  дано в работе [2].

---

## Г Л А В А II

# АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ РАБОТЫ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

### В В Е Д Е Н И Е

Неотъемлемой частью всякой САУ является измерительный элемент. Измерительный элемент замеряет регулируемый параметр и сравнивает с заданным значением этого параметра. При этом любое измерительное устройство, будь то гироскопический датчик углового положения объекта или радиолокационная система измерения пространственного положения летательного аппарата, всегда работает с некоторыми ошибками. Эти ошибки, как правило, являются случайными функциями времени. Кроме того, они могут являться не только случайными функциями времени, но и случайными функциями величин, определяющих состояние управляемого объекта.

Таким образом, случайные ошибки измерения преобразуются системой и в виде случайного сигнала управления воздействуют на объект управления и определяют случайное его состояние в каждый данный момент времени.

В качестве примера рассмотрим полет управляемого летательного аппарата в турбулентной атмосфере [1]. Случайные изменения вектора скорости ветра при перемещении летательного аппарата в пространстве вызывают случайные колебания действующих на него аэродинамических сил и моментов. Вследствие реакции динамической системы управления аппарата на случайные возмущения координаты и вектор скорости его центра массы, углы, определяющие положение его осей, а также вектор угловой скорости, оказываются случайными функциями времени.

Для обеспечения наименьшей реакции летательного аппарата на случайные возмущения необходимо по известным вероятностным характеристикам вектора скорости ветра определить веро-

ятностные характеристики всех перечисленных элементов движения самолета и на основании их выбрать динамические характеристики аппарата и его системы управления.

Задача настоящей главы состоит в том, чтобы по данным вероятностным характеристикам ошибок измерительных элементов определить вероятностные характеристики состояния управляемого объекта. Такая задача является основной задачей точности систем автоматического управления.

## § 1. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА РАБОТЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

При случайных воздействиях ошибка воспроизведения, т. е. разность между случайным полезным сигналом  $z(t)$  на входе системы и случайным выходным сигналом  $x(t)$ , является ошибкой

$$\theta(t) = z(t) - x(t), \quad (2.1)$$

носящей случайный характер.

Существует несколько критериев оценки точности и качества работы систем автоматического управления при случайных воздействиях.

Наиболее простым критерием является минимум среднего значения ошибки ( $\min m_1 \{|\theta(t)|\}$ ). Однако этот критерий мало эффективен, поскольку при усреднении величины  $\theta(t)$  положительные и отрицательные ошибки обычно в значительной степени компенсируют друг друга, несмотря на то, что в любой фиксированный момент времени величина ошибки может быть весьма большой.

Применение в качестве критерия минимума среднего значения абсолютной ошибки ( $\min m_1 \{|\theta(t)|\}$ ), а также минимума среднеквадратического значения ошибки ( $\min \sqrt{m_1 \{\theta^2(t)\}}$ ), позволяет уйти от указанного недостатка. Однако эти критерии скрывают преобладание того или иного знака ошибки.

Среднеквадратическая ошибка

$$\sqrt{m_1 \{\theta^2(t)\}} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \theta^2(t) dt} \quad (2.2)$$

показывает среднее значение ошибки, а не мгновенное. Поэтому все эти критерии обладают тем недостатком, что они не позволяют минимизировать значение ошибки в определенные моменты времени.

Наиболее эффективным критерием качества систем управления является максимальное значение вероятности выполнения

поставленной перед системой задачи [1], [4], [11]. Поскольку математическое вычисление такого показателя связано со значительными трудностями, то обычно при анализе систем автоматического управления в качестве критерия точности и качества регулирования применяют минимум среднеквадратического значения ошибки.

Неоспоримыми достоинствами этого критерия являются, во-первых, его сравнительная простота и, во-вторых, то, что он обладает большой эффективностью, когда нежелательность ошибки возрастает вместе с квадратом ее величины. Такие достоинства этого критерия весьма важны для практики.

Как уже указывалось ранее, среднее значение квадрата стационарной случайной реализации  $x(t)$  может быть определено по формуле

$$m_1 \{x^2(t)\} = R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega, \quad (2.3)$$

Если ошибка воспроизведения является стационарной случайной функцией, то ее можно определить по аналогичной формуле

$$m_1 \{\theta^2(t)\} = R_\theta(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\theta(\omega) d\omega, \quad (2.4)$$

где  $R_\theta(\tau)$  и  $S_\theta(\omega)$  — соответственно корреляционная функция и спектральная плотность ошибки  $\theta(t)$ .

Из этой формулы видно, что для вычисления среднеквадратической ошибки  $\sqrt{m_1 \{\theta^2(t)\}}$  необходимо прежде всего определить либо  $R_\theta(\tau)$ , либо  $S_\theta(\omega)$  на выходе системы по известной корреляционной функции или спектральной плотности сигнала на входе системы.

## § 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ РЕАКЦИИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА ЕЕ ВХОД

Предположим, что имеется реально созданная линейная система управления. Динамические свойства этой системы полностью определяются ее передаточной функцией  $W_3^*(p)$  или импульсной переходной функцией  $k(t)$  (рис. 2.1).

Предварительно напомним определение некоторых понятий.

\* Индекс „з“ означает, что система имеет замкнутый контур;  $p$  — оператор Лапласа ( $p = j\omega$ ).

Передаточной функцией линейной динамической системы  $W_3(p)$  называется отношение преобразования Лапласа для величины  $x(t)$  на выходе системы к преобразованию Лапласа для воздействия  $z(t)$  на ее вход (при нулевых начальных условиях), т. е.

$$W_3(p) = \frac{x(p)}{z(p)}.$$

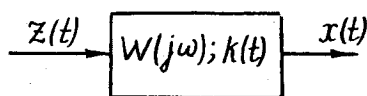


Рис. 2.1.

Импульсной переходной функцией  $k(t)$  называется реакция линейной динамической системы на воздействие в виде дельта-функции.

Импульсная переходная функция  $k(t)$  и передаточная функция  $W_3(p)$  являются преобразованием Лапласа друг для друга:

$$k(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} W_3(p) e^{pt} dp,$$

где  $c$  — абсцисса абсолютной сходимости;

$$W_3(p) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-pt} dt.$$

Входом системы называется то место, где приложено внешнее воздействие.

Выходом или реакцией системы называется то место, в котором изучается ее реакция на приложенное внешнее воздействие.

Общим случаем является система, имеющая несколько входов и несколько выходов [2]. В таких системах изучаются не только статистические свойства реакции на каждом выходе, но и статистическая связь между отдельными реакциями, а также между реакциями и воздействиями.

Наиболее простой задачей является исследование случайного процесса в системе с одним входом и одним выходом.

Пусть на вход линейной системы подан стационарный случайный сигнал  $z(t)$ , корреляционная функция  $R_z(\tau)$  и спектральная плотность  $S_z(\omega)$  которого заранее известны.

Запас энергии в системе в этот момент времени полагаем для простоты равным нулю.

Задача состоит в том, чтобы определить реакцию системы  $x(t)$  на внешнее случайное воздействие, а также корреляционную функцию  $R_x(\tau)$  и спектральную плотность  $S_x(\omega)$  этой реакции.



Внешнее воздействие можно рассматривать как последовательность непосредственно примыкающих друг к другу элементарных импульсов с бесконечно малой продолжительностью, единичной площадью и бесконечной амплитудной (рис. 2.2).

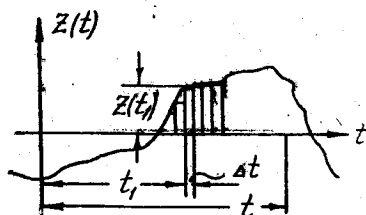


Рис. 2.2. Входное воздействие как последовательность импульсных функций.

Реакция системы в момент времени  $t$  на элементарный импульс, находящийся на расстоянии  $t_1$  от начала координат, может быть выражена следующим образом:

$$dx(t) = k(t - t_1) z(t_1) dt.$$

Суммарная реакция  $x(t)$  системы на все элементарные импульсы получается путем интегрирования:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t - t_1) z(t_1) dt_1.$$

При  $\lambda = t - t_1$ , получим интеграл свертки

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t - \lambda) k(\lambda) d\lambda, \quad (2.5)$$

где  $\lambda$  — текущее время;

$t$  — моменты времени, относительно которых рассматривается импульсная функция.

Корреляционная функция случайной реакции системы управления  $x(t)$  может быть определена по формуле

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) x(t) dt. \quad (2.6)$$

Подставляя выражение (2.5) в эту формулу, получим

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \left[ \int_{-\infty}^{\infty} z(t - \lambda) k(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} z(t + \tau - \eta) k(\eta) d\eta \right]$$

где  $\eta$  — текущее время, введенное для удобства наряду с текущим временем  $\lambda$ .

Изменяя порядок интегрирования, получим

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta) d\eta \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T z(t + \tau - \eta) z(t - \lambda) dt \right],$$

и, учитывая, что

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T z(t + \tau - \eta) z(t - \lambda) dt = \\ & = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T z(t + \tau + \lambda - \eta) z(t) dt = R_z(\tau + \lambda - \eta), \end{aligned}$$

получим окончательное выражение для соотношения между корреляционными функциями входного и выходного сигналов

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta) k(\lambda) R_z(\tau + \lambda - \eta) d\eta. \quad (2.7)$$

Таким образом, корреляционная функция реакции системы равна двойному интегральному преобразованию от корреляционной функции случайного процесса на входе системы.

### § 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ РЕАКЦИИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА ЕЕ ВХОД

По известной корреляционной функции не представляет особого труда найти спектральную плотность реакции системы. Известно, что

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.8)$$

Подставляя в это выражение формулу (2.7), определим

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} k(\eta) k(\lambda) R_z(\tau + \lambda - \eta) d\eta.$$

Умножая и деля это равенство на  $e^{-j\omega\lambda}$  и  $e^{j\omega\eta}$ , получим

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(\tau+\lambda-\eta)} e^{j\omega\lambda-j\omega\eta} R_z(\tau+\lambda-\eta) k(\lambda) k(\eta) d\eta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta) e^{-j\omega\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda) e^{j\omega\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} R_z(\tau+\lambda+\eta) e^{-j\omega(\tau+\lambda-\eta)} d\tau$$

Заметим, что первый и второй интегралы являются преобразованием Фурье от импульсных переходных функций:

$$S_x(\omega) = W_s(j\omega) W_s(-j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} R_z(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

учитывая (2.8), получим окончательно

$$S_x(\omega) = |W_s(j\omega)|^2 S_z(\omega). \quad (2.9)$$

Таким образом, спектральная плотность  $S_x(\omega)$  стационарной случайной реакции линейной системы управления равна произведению квадрата модуля ее передаточной функции  $W_s(j\omega)$  на спектральную плотность  $S_z(\omega)$  стационарной случайной величины на входе этой системы.

#### § 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ РЕАКЦИИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧКЕ

Для полноты изложения рассмотрим более общий случай, когда случайные возмущения приложены в произвольных точках системы.

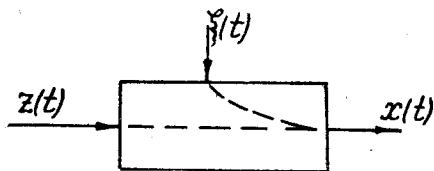


Рис. 2.3.

Предположим, что в различных точках на линейную систему автоматического управления действует стационарный случайный управляющий сигнал  $z(t)$  и стационарный случайный возмущающий сигнал  $\xi(t)$  (рис. 2.3). Реакция линейной системы в этом

случае получится в виде аддитивной смеси:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t-\lambda) k(\lambda) d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t-\lambda) k_{\xi}(\lambda) d\lambda, \quad (2.10)$$

где  $k(\lambda)$  — импульсная переходная функция системы относительно управляющего сигнала;

$k_{\xi}(\lambda)$  — импульсная переходная функция системы относительно возмущения.

Подставляя выражение реакции системы (2.10) в формулу определения корреляционной функции (2.7), получим выражение для определения корреляционной функции реакции системы:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[ \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{\infty} z(t + \tau - \eta) k(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} z(t - \lambda) k(\lambda) d\lambda + \right. \\ \left. + \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t + \tau - \eta) k_{\xi}(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t - \lambda) k_{\xi}(\lambda) d\lambda + \right. \\ \left. + \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{\infty} z(t + \tau - \eta) k(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t - \lambda) k_{\xi}(\lambda) d\lambda + \right. \\ \left. + \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{\infty} z(t - \lambda) k(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t + \tau - \eta) k_{\xi}(\eta) d\eta \right],$$

и окончательно

$$R_x(\tau) = \int_{-T}^T d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} [k(\lambda) R_z(\tau + \lambda - \eta) k(\eta) + k_{\xi}(\lambda) R_{\xi}(\tau + \lambda - \eta) k_{\xi}(\eta) + \\ + k_{\xi}(\lambda) R_{z\xi}(\tau + \lambda - \eta) k(\eta) + k(\lambda) R_{\xi z}(\tau + \lambda - \eta) k_{\xi}(\eta)] d\eta. \quad (2.11)$$

В реальных системах обычно управляющее воздействие и возмущения являются независимыми между собой и формула (2.11) значительно упрощается, поскольку  $R_{z\xi}(\tau) = R_{\xi z}(\tau) = 0$ , т. е. для таких систем справедливо выражение

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} [k(\lambda) R_z(\tau + \lambda - \eta) k(\eta) + k_{\xi}(\lambda) R_{\xi}(\tau + \lambda - \eta) k_{\xi}(\eta)] d\eta. \quad (2.12)$$

### § 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ РЕАКЦИИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧКЕ

Для определения спектральной плотности реакции системы умножим обе части выражения для корреляционной функции

реакции (2.11) на  $e^{-j\omega\tau}$ , проинтегрируем его от  $-\infty$  до  $+\infty$  и по аналогии с методикой вывода формулы (2.9) получим

$$S_x(\omega) = |W_3(j\omega)|^2 S_z(\omega) + |W_\xi(j\omega)|^2 S_\xi(\omega) + W_3^*(j\omega) S_{z\xi}(\omega) W_\xi(j\omega) + W_3(j\omega) S_{\xi z}(\omega) W_\xi^*(j\omega), \quad (2.13)$$

где  $W_\xi(j\omega)$  — передаточная функция системы относительно помехи.

При независимости управляющего и возмущающего воздействия, т. е. при отсутствии корреляции между ними,

$$S_{z\xi}(\omega) = S_{\xi z}(\omega) = 0,$$

формула (2.12) значительно упрощается:

$$S_x(\omega) = |W_3(j\omega)|^2 S_z(\omega) + |W_\xi(j\omega)|^2 S_\xi(\omega). \quad (2.14)$$

## § 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ОШИБКИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

В предыдущих параграфах были определены статистические характеристики  $R_x(\tau)$  и  $S_x(\omega)$  реакции системы по заданным статистическим характеристикам случайного сигнала на входе системы и случайного возмущения. Однако, как уже было сказано ранее, основной задачей анализа системы управления с заданными параметрами является задача определения статистических характеристик, а также величины среднеквадратической ошибки, получающейся в процессе управления.

Учитывая известное соотношение между передаточной функцией замкнутой системы  $W_3(j\omega)$  и передаточной функцией сигнала ошибки  $W_\theta(j\omega)$  —

$$W_\theta(j\omega) = 1 - W_3(j\omega), \quad (2.15)$$

определим спектральную плотность  $S_\theta(\omega)$  ошибки воспроизведения  $\theta(t)$ . Для этого в выражении (2.13) заменим  $W_3(j\omega)$  через  $W_\theta(j\omega)$  в соответствии с формулой (2.15).

В результате получим

$$S_\theta(\omega) = |W_\theta(j\omega)|^2 S_z(\omega) + |W_\xi(j\omega)|^2 S_\xi(\omega) + W_\theta^*(j\omega) S_{z\xi}(\omega) W_\xi(j\omega) + W_\theta(j\omega) S_{\xi z}(\omega) W_\xi^*(j\omega). \quad (2.16)$$

В частном случае при независимости управляющего и возмущающего воздействий

$$S_\theta(\omega) = |W_\theta(j\omega)|^2 S_z(\omega) + |W_\xi(j\omega)|^2 S_\xi(\omega). \quad (2.17)$$

Из формулы (2.17) видно, что спектральная плотность ошибки определяется как свойствами системы, так и статистическими характеристиками воздействий.

Спектральная плотность ошибки определяется либо аналитически, либо графоаналитически. Ниже рассматривается сущность этих методов.

Среднеквадратическая ошибка системы управления определяется квадратным корнем из интеграла:

$$C = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta}(\omega) d\omega}. \quad (2.18)$$

### § 7. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ И СРЕДНЕГО КВАДРАТА ОШИБКИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Вычислим аналитически средний квадрат ошибки динамической системы по формуле

$$m_1 \{ \theta^2(t) \} = R_{\theta}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta}(\omega) d\omega \quad (2.4)$$

при поступлении на вход системы управления стационарного случайного сигнала.

Предположим, что как спектральные плотности, так и передаточные функции, входящие в формулу (2.16),

$$S_{\theta}(\omega) = |W_{\theta}(j\omega)|^2 S_z(\omega) + |W_{\xi}(j\omega)|^2 S_{\xi}(\omega) + W_{\theta}^*(j\omega) S_{z\xi}(\omega) W(j\omega) + W_{\theta}(j\omega) S_{\xi z}(\omega) W_{\xi}^*(j\omega) \quad (2.16)$$

представляют собою дробно-рациональные функции  $\omega$ :

Учитывая это, предположим, что спектральная плотность  $S_{\theta}(\omega)$  также является дробно-рациональной функцией  $\omega$ . В этом случае интеграл (2.4) можно вычислить, определив корни знаменателя многочлена (2.16) и разложив подынтегральное выражение на простейшие дроби. Однако такой путь при исследовании сложных систем неудобен, поскольку он не позволяет получить в явном виде зависимость среднеквадратической ошибки от параметров системы и, кроме этого, он связан с трудоемким процессом определения корней многочлена.

Рассмотрим метод вычисления среднеквадратической ошибки, основанный на непосредственном выражении этой величины через коэффициенты многочлена, а следовательно и через пара-

метры системы, и не требующий предварительного определения корней знаменателя.

Прежде всего представим выражение для спектральной плотности (2.16) в виде суммы абсолютных значений квадрата рациональных функций, имеющих полюсы, расположенные симметрично относительно мнимой оси в верхней полуплоскости.

Рассмотрим первый член правой части (2.16):

$$|W_{\theta}(j\omega)|^2 S_z(\omega).$$

Если система управления устойчива, то все полюсы передаточной функции  $W_{\theta}(p)$  расположены в левой полуплоскости. Это означает, что все полюсы амплитудно-фазовой характеристики  $W_{\theta}(j\omega)$  лежат в верхней полуплоскости. Полюсы  $|W_{\theta}(j\omega)|^2$  расположены симметрично относительно мнимой оси, поскольку  $|W_{\theta}(j\omega)|^2$  является четной функцией  $\omega$ .

Так как, по нашему предположению,  $S_z(\omega)$  является дробно-рациональной функцией, то ее можно представить в виде произведения двух множителей,

$$S_z(\omega) = S_{11}(\omega) G_{11}(\omega),$$

один из которых, например  $S_{11}(\omega)$ , имеет нули и полюсы, совпадающие с нулями и полюсами  $S_z(\omega)$ , расположенными в верхней полуплоскости, а другой множитель  $G_{11}(\omega)$  имеет нули и полюсы, совпадающие с нулями и полюсами, расположенными в нижней полуплоскости.

Поскольку функция  $S_z(\omega)$  вещественна при вещественных  $\omega$ , то ее нули и полюсы расположены симметрично относительно вещественной оси.

Кроме того, так как  $S_z(\omega)$  является четной функцией  $\omega$ , то ее нули и полюсы также расположены симметрично и относительно мнимой оси.

Поэтому можно написать, что

$$G_{11}(\omega) = S_{11}^*(\omega) = S_{11}(-\omega),$$

или

$$S_z(\omega) = S_{11}(\omega) S_{11}^*(\omega) = |S_{11}(\omega)|^2.$$

Тогда

$$|W_{\theta}(j\omega)|^2 S_z(\omega) = |W_{\theta}(j\omega) S_{11}(\omega)|^2. \quad (2.19)$$

Из предыдущего вполне очевидно, что все полюсы выражения  $W_{\theta}(j\omega) S_{11}(\omega)$  расположены в верхней полуплоскости, симметрично относительно мнимой оси.

Рассуждая аналогичным образом относительно второго члена правой части (2.16), можно получить

$$|W_{\xi}(j\omega)|^2 S_{\xi}(\omega) = |W_{\xi}(j\omega) S_{22}(\omega)|^2. \quad (2.20)$$

В этом выражении, как и в предыдущем, все полюсы расположены в верхней полуплоскости симметрично относительно мнимой оси. Остается показать, каким образом приводятся к требуемому виду следующие два слагаемых выражения (2.16):

$$W_{\theta}^*(j\omega) S_{z\xi}(\omega) W_{\xi}(j\omega) + W_{\theta}(j\omega) S_{\xi z}(\omega) W_{\xi}^*(j\omega).$$

Так как функция  $S_{z\xi}(\omega)$  представляет собой преобразование Фурье для вещественной функции  $R_{z\xi}(\tau)$ , то ее нули и полюсы расположены симметрично относительно мнимой оси.

Кроме того, как и в предыдущем случае, для вещественных значений  $\omega$   $S_{z\xi}(\omega)$  и  $S_{\xi z}(\omega)$  можно представить в виде произведений [2], т. е.

$$S_{z\xi}(\omega) = S_{12}(\omega) S_{21}^*(\omega);$$

$$S_{\xi z}(\omega) = S_{21}(\omega) S_{12}^*(\omega).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & W_{\theta}^*(j\omega) S_{z\xi}(\omega) W_{\xi}(j\omega) + W_{\theta}(j\omega) S_{\xi z}(\omega) W_{\xi}^*(j\omega) = \\ & = W_{\theta}^*(j\omega) S_{21}^*(\omega) W_{\xi}(j\omega) S_{12}(\omega) + W_{\theta}(j\omega) S_{21}(\omega) W_{\xi}^*(j\omega) S_{12}^*(\omega) = \\ & = \frac{1}{2} \left| W_{\theta}(j\omega) S_{12}(\omega) + W_{\xi}(j\omega) S_{21}(\omega) \right|^2 - \\ & - \frac{1}{2} \left| W_{\theta}(j\omega) S_{12}(\omega) - W_{\xi}(j\omega) S_{21}(\omega) \right|^2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Поскольку полюсы выражений  $W_{\theta}(j\omega) S_{12}(\omega)$  и  $W_{\xi}(j\omega) S_{21}(\omega)$  расположены в верхней полуплоскости симметрично относительно мнимой оси, то и полюсы выражения (2.21) расположены также в верхней полуплоскости симметрично относительно мнимой оси.

Таким образом, получим

$$\begin{aligned} S_{\theta}(\omega) & = \left| W_{\theta}(j\omega) S_{11}(\omega) \right|^2 + \left| W_{\xi}(j\omega) S_{22}(\omega) \right|^2 - \\ & - \frac{1}{2} \left| W_{\theta}(j\omega) S_{12}(\omega) + W_{\xi}(j\omega) S_{21}(\omega) \right|^2 - \\ & - \frac{1}{2} \left| W_{\theta}(j\omega) S_{12}(\omega) - W_{\xi}(j\omega) S_{21}(\omega) \right|^2, \end{aligned} \quad (2.22)$$

причем полюсы  $S_{\theta}(\omega)$  расположены в верхней полуплоскости симметрично относительно мнимой оси.



Из (2.22) видно, что выражение для спектральной плотности состоит из членов вида

$$S_1(\omega) = \left| \frac{G(\omega)}{H(\omega)} \right|^2. \quad (2.23)$$

Представим это выражение несколько в ином виде, для чего предположим, что

$$H(\omega) = (\omega - \lambda_1)(\omega - \lambda_2) \dots (\omega - \lambda_n)$$

и сопряженный с этим многочлен

$$H^*(\omega) = (\omega + \lambda_1)(\omega + \lambda_2) \dots (\omega + \lambda_n).$$

При отрицательных значениях частоты  $\omega$

$$H(-\omega) = (-\omega - \lambda_1)(-\omega - \lambda_2) \dots (-\omega - \lambda_n),$$

или иначе

$$H(-\omega) = (-1)^n H^*(\omega),$$

откуда

$$H^*(\omega) = \frac{H(-\omega)}{(-1)^n}.$$

Учитывая это выражение и то, что

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega),$$

получим

$$S_1(\omega) = \frac{(-1)^n |G(\omega)|^2}{H(\omega)H(-\omega)}. \quad (2.24)$$

Итак, определение среднего значения квадрата ошибки сводится к вычислению интеграла

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n |G(\omega)|^2}{H(\omega)H(-\omega)} d\omega. \quad (2.25)$$

Кроме того, поскольку знаменатель (2.25) является четной функцией от  $\omega$ , то в числителе необходимо учитывать лишь четные степени от  $\omega$ , так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^{2k+1}}{H(\omega)H(-\omega)} d\omega = 0 \text{ при } k = 0, 1, 2, \dots$$

Учитывая это, получим окончательный вид интеграла:

$$I_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_n(\omega)}{H_n(\omega)H_n(-\omega)} d\omega, \quad (2.26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} H_n(\omega) &= a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \dots + a_n; \\ G_n(\omega) &= b_0\omega^{2n-2} + b_1\omega^{2n-4} + \dots + b_n. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Здесь все корни  $H_n(\omega)$  расположены в верхней полуплоскости. Этот интеграл для любого  $n$  может быть вычислен в явном виде без непосредственного определения корней. Согласно [4].

$$I_n = \frac{(-1)^{n+1} N_n}{2a_0 D_n}, \quad (2.28)$$

где  $D_n = |d_{mr}|$  — определитель Гурвица:

$$d_{mr} = a_{2m-r};$$

$$m = 1, 2, \dots, n;$$

$$r = 1, 2, \dots, 2m;$$

$N_n$  — определитель, получаемый в результате замены в определителе  $D_n$  первого столбца на  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ .

### § 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕГО КВАДРАТА ОШИБКИ ПРОСТЕЙШЕЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ФИЛЬТРА И ИНТЕГРАТОРА [4]

В качестве примера применения аналитического метода анализа определим средний квадрат ошибки простейшей замкнутой системы, структурная схема которой изображена на рис. 2.4.

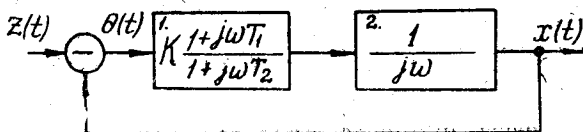


Рис. 2.4. Структурная схема простейшей системы управления.

Предположим, что ко входу системы приложен модулированный синусоидальный сигнал со случайными фазой и амплитудой

$$z(t) = \xi(t) \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.29)$$

Амплитуда этого сигнала  $\xi(t)$  является стационарным случайным процессом с экспериментально определенной экспоненциальной корреляционной функцией

$$R_{\xi}(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}. \quad (2.30)$$

Фаза процесса является случайной величиной, распределенной на интервале  $[0, 2\pi]$ .

Для определения спектральной плотности сигнала ошибки воспользуемся формулой (2.17), правая часть которой будет содержать в данном случае только второй член, т. е.

$$S_{\theta}(\omega) = |W_s(j\omega)|^2 S_z(\omega), \quad (2.31)$$

поскольку передаточная функция возмущающего сигнала совпадает с передаточной функцией системы.

Передаточную функцию замкнутой системы (рис. 2.4) определим по формуле

$$W_s(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)},$$

где  $W(j\omega)$  — передаточная функция разомкнутой системы.

Учитывая выражения для передаточных функций отдельных звеньев системы, получим

$$W_s(j\omega) = K \frac{1 + j\omega T_1}{(j\omega)^2 T_2 + j\omega(1 + KT_1) + K}. \quad (2.32)$$

Прежде чем определить спектральную плотность  $S_z(\omega)$ , вычислим корреляционную функцию случайного входного сигнала, воспользовавшись формулой

$$R_z(\tau) = 2 \int_0^{\infty} z(t) z(t + \tau) dt. \quad (2.33)$$

Подставив в это выражение формулу (2.29), описывающую закон изменения входного сигнала, получим

$$R_z(\tau) = 2 \int_0^{\infty} \xi(t) \xi(t + \tau) \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin[\omega_0(t + \tau) + \varphi] dt. \quad (2.34)$$

Поскольку фаза процесса является равномерной случайной величиной, распределенной на интервале  $[0, 2\pi]$ , то два последних сомножителя необходимо усреднить по фазам, взяв интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin[\omega_0(t + \tau) + \varphi] d\varphi = \frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau. \quad (2.35)$$

Учитывая, что в выражении (2.34) первые два сомножителя при усреднении дадут корреляционную функцию (2.30) случайной амплитуды входного сигнала, а также значение интеграла (2.35), получим окончательное выражение для корреляционной функции входного сигнала

$$R_z(\tau) = \frac{1}{2} A e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau. \quad (2.36)$$

Для определения спектральной плотности входного сигнала возьмем интеграл

$$S_z(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_z(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau.$$

Получим

$$S_z(\omega) = \frac{A\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \omega_0^2 + \omega}{\omega^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + (\alpha^2 + \omega_0^2)^2}. \quad (2.37)$$

Таким образом, определены все необходимые данные для вычисления спектральной плотности сигнала ошибки по формуле (2.31).

Нам же надо определить средний квадрат ошибки данной системы управления. Возьмем интеграл (2.26)

$$m_1 \{ \theta^2(t) \} = \frac{A\alpha K^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_4(\omega)}{H_4(\omega) H_4(-\omega)} d\omega, \quad (2.38)$$

где

$$G_4(\omega) = T_1^2 \omega^4 + [T_1^2(\alpha^2 + \omega_0^2) + 1] \omega^2 + (\alpha^2 + \omega_0^2)$$

— числитель многочлена, полученный по формуле (2.31) с учетом формул (2.32) и (2.37);

$$H_4(\omega) = T_2 \omega^4 - j(KT_1 + 1 + 2\alpha T_2) \omega^3 - [K + 2\alpha(KT_1 + 1) + T_2(\alpha^2 + \omega_0^2)]^2 \omega + j[2\alpha K + (KT_1 + 1)(\alpha^2 + \omega_0^2)] \omega + K(\alpha^2 + \omega_0^2) \quad (2.39)$$

— знаменатель этого многочлена.

Как уже указывалось раньше, этот интеграл можно вычислить путем определения корней знаменателя и разложения подынтегрального выражения на простейшие дроби. Однако удобнее воспользоваться описанным в предыдущем параграфе способом, не требующим определения корней и дающим в явном виде зависимость  $m_1 \{ \theta^2(t) \}$  от параметров системы.

Сравнивая равенства (2.39) с (2.27), получим

$$\begin{aligned}
 a_0 &= T_2; \\
 a_1 &= -j(KT_1 + 1 + 2\alpha T_2); \\
 a_2 &= -[K + 2\alpha(KT_1 + 1) + T_2(\alpha^2 + \omega_0^2)]; \\
 a_3 &= j[2\alpha k + (KT_1 + 1)(\alpha^2 + \omega_0^2)]; \\
 a_4 &= K(\alpha^2 + \omega_0^2); \\
 b_0 &= 0; \\
 b_1 &= T_1^2; \\
 b_2 &= T_1^2(\alpha^2 + \omega_0^2) + 1; \\
 b_3 &= \alpha^2 + \omega_0^2.
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Сопоставляя выражения (2.38) с (2.26), можно записать

$$m_1 \{ \theta^2(t) \} = 2jA\alpha K^2 I_4,$$

или, согласно (2.28),

$$m_1 \{ \theta^2(t) \} = \frac{(-1)^{4+1}}{2a_0} 2jA\alpha K^2 \frac{N_4}{D_4}, \tag{2.41}$$

где определители

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 a_4 - a_0 a_3^2 a_4 - a_1^2 a_4^2$$

и

$$N_4 = \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & a_4 & a_3 & a_2 \\ b_3 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = (a_0^2 a_3 - a_0 a_1 a_2 + a_0 a_1 a_4 b_1) b_3 - a_0 a_3 a_4 b_1 - a_0 a_1 a_4.$$

Таким образом, подставляя вместо постоянных входящих в определители их значение из равенств (2.40), а значения определителей в формулу (2.41), получим в явном виде зависимость среднего квадрата ошибки от параметров системы.

## § 9. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ И СРЕДНЕГО КВАДРАТА ОШИБКИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

При действии на вход системы стационарного случайного процесса с корреляционной функцией  $R_z(\tau)$  и спектральной плотностью  $S_z(\omega)$  спектральная плотность и средний квадрат ошибки системы могут быть вычислены, как это показано в предыдущих параграфах, аналитически соответственно по формулам

$$S_\theta(\omega) = |W_s(j\omega)|^2 S_z(\omega) \quad (2.31)$$

и

$$m_1 \{ \theta^2(t) \} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_\theta(\omega) d\omega. \quad (2.4)$$

Однако на практике довольно часто корреляционная функция и спектральная плотность входного сигнала определяют экспериментально и задают в виде графиков, аппроксимация аналитическим выражением которых либо представляет значительные трудности, либо полученная в результате аппроксимации функция является довольно сложной.

Кроме этого, передаточная функция системы управления может быть также задана либо в виде сложного алгебраического выражения, либо в виде графика. В этих случаях средний квадрат ошибки определяется или чисто графически, или графоаналитически.

Поясним сказанное простейшим примером. Предположим, что эквивалентный входной случайный сигнал радиолокационной моноимпульсной следящей системы имеет нормированную спектральную плотность [5], график которой приведен на рис. 2.5. Нормирование в данном случае произведено по квадрату угловых размеров цели  $\varphi^2$ , поскольку в подобных системах величина среднеквадратического значения случайного сигнала примерно пропорциональна угловому размеру цели.

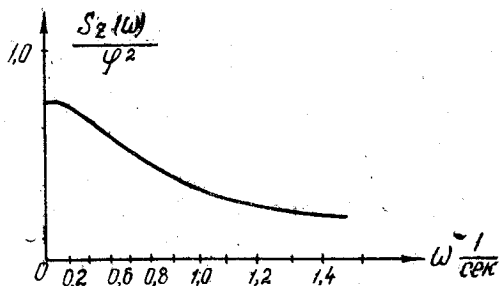


Рис. 2.5. Нормированная спектральная плотность входного сигнала.

Предположим также, что квадрат амплитудно-частотной характеристики имеет график, представленный на рис. 2.6.

Для определения спектральной плотности ошибки, как это видно из формулы (2.31), достаточно перемножить ординаты графиков, изображенных на рис. 2.5. и рис 2.6., в результате чего получим график спектральной плотности (рис. 2.7).

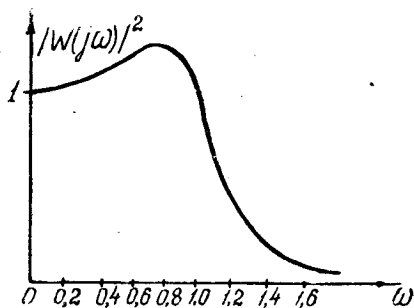


Рис. 2.6. Квадрат амплитудно-частотной характеристики.

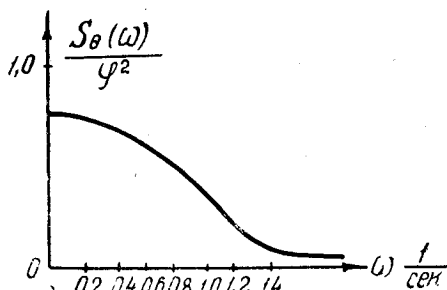


Рис. 2.7. Спектральная плотность сигнала ошибки.

Выполняя планиметром площадное интегрирование, получим величину площади  $\frac{m_1 \{ \theta^2(t) \}}{\varphi^2}$ , ограниченную графиком спектральной плотности и осью абсцисс. В этом случае

$$m_1 \{ \theta^2(t) \} = 0,65 \frac{\varphi^2}{\pi}.$$

В заключение этой главы приведем более детальный анализ системы углового сопровождения цели.

## § 10. АНАЛИЗ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ УГЛОВОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ ЦЕЛИ [2]

Этот пример наиболее полно иллюстрирует применение теории случайных процессов к анализу систем управления.

Передатчик радиолокационной станции (рис. 2.8) генерирует высокочастотные импульсы длительностью порядка долей микросекунды. Эти импульсы излучаются в пространство вращающимся вибратором, установленным в раскрыве параболического рефлектора, служащего для формирования иглообразного луча. Ось луча отклонена от оси параболоида на  $1,25^\circ$  и при вращении вибратора со скоростью 1800 об/мин она описывает в пространстве коническую поверхность.

Когда цель находится в равносигнальной зоне в точке  $C_1$  (ось конуса направлена точно на цель), тогда, несмотря на вращение луча, цель облучается импульсами с одной интенсив-

ностью, поэтому отраженные от цели импульсы, вообще говоря, должны иметь постоянную амплитуду. При отклонении цели относительно оси конуса, например в точку  $Ц_2$ , амплитуды отраженных импульсов будут изменяться по синусоидальному закону с частотой вращения луча.

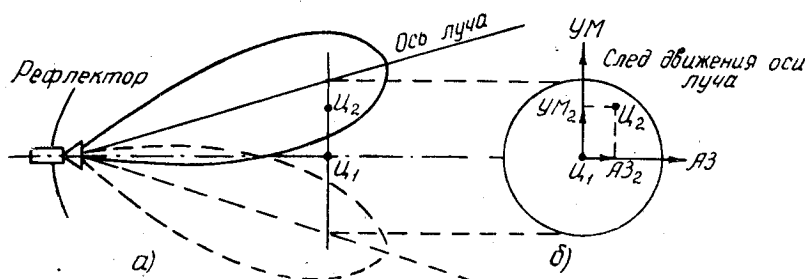


Рис. 2.8. Принцип действия РЛС при угловом сопровождении цели.

Очевидно, что при большем отклонении цели от равносигнальной зоны будет больше глубина модуляции импульсов; при отклонении цели в противоположную сторону относительно оси конуса фаза огибающей импульсов изменится на  $180^\circ$ .

Таким образом, отраженные от цели импульсы содержат информацию о величине и стороне отклонения цели, при этом информация о величине отклонения заключается в глубине модуляции импульсов, а информация о стороне отклонения — в фазе огибающей.

Огибающая отраженных импульсов, выделяемая в приемнике при помощи детектора и соответствующего фильтра, может быть представлена в виде

$$\gamma [1 + \theta(t) \sin(\omega_c t + \varphi)], \quad (2.42)$$

где  $\gamma$  — величина, пропорциональная коэффициенту отражения цели;

$\theta(t)$  — угловая ошибка сопровождения;

$\omega_c$  — угловая частота сканирования;

$\varphi$  — фазовый угол, определяющий положение цели относительно оси конуса.

Закон огибающей (2.42) получается в идеальном случае, когда коэффициент отражения является постоянной величиной и отсутствуют шумы приемника.

В реальных условиях, в результате рыскания и качки цели, вращения винта или турбины, изменения условий распространения, а также вследствие наличия шумов приемника и других факторов коэффициент  $\gamma$  представляет собой случайную функцию времени:

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1(t) = \gamma_0 [1 + \xi(t)], \quad (2.43)$$



где

$$\gamma_0 = \text{const};$$

$$\xi(t) = \frac{\gamma_1(t)}{\gamma_0}$$

— стационарная случайная функция времени.

С учетом указанного огибающая (2.42) может быть представлена с точностью до постоянной  $\gamma_0$  в виде сигнала с наложенной на него помехой:

$$\begin{aligned} & [1 + \xi(t)] [1 + \theta(t) \sin(\omega_c t + \varphi)] = \\ & = 1 + \xi(t) + \theta(t) \sin(\omega_c t + \varphi) + \xi(t) \theta(t) \sin(\omega_c t + \varphi). \end{aligned}$$

Ввиду малости последнего члена этого выражения ( $|\theta(t)| \leq 0,05$ , а среднеквадратическое значение величины  $\xi(t)$  примерно равно 0,25 [2]) им можно пренебречь. Если в полученном после упрощения выражении отделить постоянную составляющую, пропускаемая сигнал через трансформатор, то получим

$$u(t) = a [\xi(t) + \theta(t) \sin(\omega_c t + \varphi)]. \quad (2.44)$$

Коммутатор [6] делит  $u(t)$  на две составляющие (рис. 2.8, б): составляющую по углу места (УМ) и составляющую по азимуту (АЗ), которые соответственно равны:

$$\begin{aligned} u_{\text{УМ}}(t) &= 2u(t) \cos \omega_c t; \\ u_{\text{АЗ}}(t) &= 2u(t) \sin \omega_c t. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Для упрощения рассмотрим случай, когда цель движется по прямой на уровне РЛС (т. е.  $\varphi = 0$ ). В этом случае составляющая по УМ отсутствует, а составляющая АЗ

$$\begin{aligned} u_{\text{АЗ}} &= 2[\xi(t) + \theta(t) \sin \omega_c t] \sin \omega_c t = \\ &= 2\xi(t) \sin \omega_c t + \theta(t) - \theta(t) \cos 2\omega_c t. \end{aligned} \quad (2.46)$$

подается на фильтр нижних частот, который имеет полосу пропускания примерно от 0 до 10 гц, и поэтому устраняет пульсации сигнала вида  $\theta(t) \cos 2\omega_c t$ , изменяет составляющую  $2\xi(t) \sin \omega_c t$ , а составляющую  $\theta(t)$  пропускает без изменения, поскольку она содержит спектр частот не выше 2 гц.

Преобразованный фильтром сигнал  $u_{\text{АЗ}}' = \theta(t) + 2\xi(t) \sin \omega_c t$  усиливается и воздействует на электромотор, который поворачивает антенну на угол, пропорциональный этому сигналу.

Функциональную схему следящей системы в соответствии с рассмотренными преобразованиями сигнала можно представить в виде рис. 2.9.

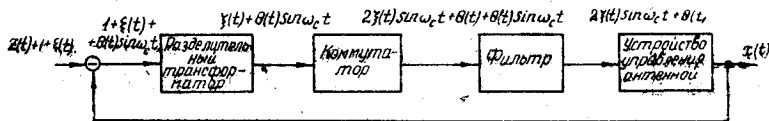


Рис. 2.9. Функциональная схема канала углового сопровождения.

Для определения спектральной плотности сигнала ошибки  $S_{\theta}(\omega)$  предварительно определим корреляционную функцию и спектральную плотность помехи  $\xi(t)$  и составляющей  $2\xi(t) \sin \omega_c t$ .

Корреляционная функция  $R_{\xi}(\tau)$  стационарного случайного процесса  $\xi(t)$  обычно определяется экспериментальным путем [2]. Вид нормированной корреляционной функции  $r_{\xi}(\tau) = \frac{R_{\xi}(t)}{R_{\xi}(0)}$  процесса  $\xi(t)$  представлен на рис. 2.10.



Рис. 2.10 Нормированные корреляционные функции.

Экспериментальная кривая может быть приближенно аппроксимирована выражением

$$r_{\xi}(\tau) = e^{-0,931|\tau|} [\cos 2\tau + 0,106 \sin 2|\tau|]. \quad (2.47)$$

Нормированную спектральную плотность  $\sigma_{\xi}(\omega)$  стационарного случайного процесса  $\xi(t)$  можно определить либо графически путем интегрирования площади под кривой  $r_{\xi}(\tau)$ , либо аналитически путем вычисления интеграла:

$$\sigma_{\xi}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} r_{\xi}(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Подставив (2.47) в это выражение, получим

$$\sigma_{\xi}(\omega) = \frac{1,44\omega^2 + 11,11}{\omega^4 - 6,27\omega^2 + 23,64}. \quad (2.48)$$

График функции (2.48) приведен на рис. 2.11.

Определим корреляционную функцию  $R_{\xi_1}(\tau)$  и спектральную плотность  $S_{\xi_1}(\omega)$  составляющей сигнала (2.46):

$$\xi_1(t) = 2\xi(t) \sin \omega_c t.$$

По определению (1.10) запишем

$$R_{\xi_1}(\tau) = 4 \int_0^{\infty} \xi(t) \xi(t + \tau) \sin \omega_c t \sin \omega_c(t + \tau) dt. \quad (2.49)$$

Поскольку  $\xi(t)$  не зависит от положения луча при развертке, то сигналы  $2\xi(t) \sin \omega_c t$ , отличающиеся лишь фазой, равноверо-

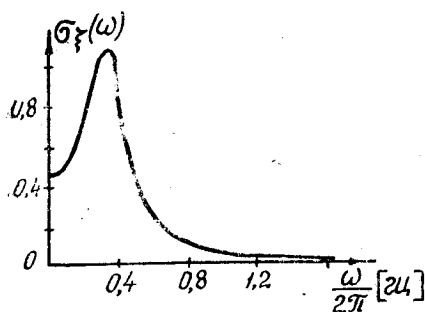


Рис. 2.11. Нормированная спектральная плотность.

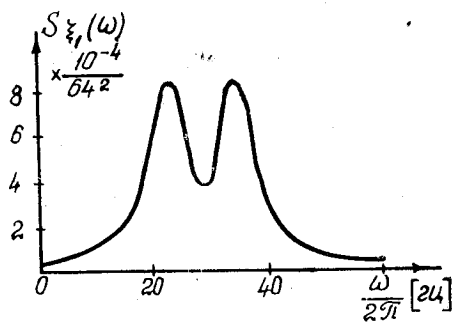


Рис. 2.12. Нормированная спектральная плотность случайного процесса.

яты. Поэтому (2.49) необходимо усреднить по всем возможным значениям фазы  $\varphi$ , т. е.

$$R_{\xi_1}(\tau) = 4 \int_0^{\infty} \xi(t) \xi(t + \tau) dt \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\omega_c t + \varphi) \sin[\omega_c(t + \tau) + \varphi] d\varphi.$$

Интегрируя это выражение, получим

$$R_{\xi_1}(\tau) = 2 \cos \omega_c \tau R_{\xi}(\tau). \quad (2.50)$$

Спектральная плотность

$$\begin{aligned} S_{\xi_1}(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} R_{\xi_1}(\tau) \cos \omega \tau d\tau = 4 \int_0^{\infty} R_{\xi}(\tau) \cos \omega \tau \cos \omega_c \tau d\tau = \\ &= 2 \int_0^{\infty} R_{\xi}(\tau) \cos(\omega - \omega_c) \tau d\tau + 2 \int_0^{\infty} R_{\xi}(\tau) \cos(\omega + \omega_c) \tau d\tau, \end{aligned}$$

и окончательно

$$S_{\xi_1}(\omega) = S_{\xi}(\omega - \omega_c) + S_{\xi}(\omega + \omega_c). \quad (2.51)$$

Нормированная спектральная плотность, вычисленная по формуле (2.51), приведена на рис. 2.12.

Для определения спектральной плотности ошибки  $\theta(t)$  из-за отсутствия корреляции между траекторией цели и флуктуациями  $\xi(t)$  воспользуемся формулой (2.17):

$$S_{\theta}(\omega) = |W_{\theta}(j\omega)|^2 S_z(\omega) + |W_{\xi}(j\omega)|^2 S_{\xi}(\omega). \quad (2.17)$$

Кроме того, по ранее сделанному предположению цель движется с постоянным азимутом, ввиду этого спектральная плотность  $S_z(\omega)$  представляет собою дельта-функцию, т. е.

$$S_z(\omega) = 2\delta(\omega).$$

Система сопровождения, как это будет видно в дальнейшем, является астатической (функция  $W_{\theta}(j\omega)$  содержит  $\omega$  в виде множителя), поэтому

$$|W_{\theta}(j\omega)|^2 S_z(\omega) = 0.$$

Так как полезный сигнал и помеха приложены на входе системы сопровождения, то

$$W_{\xi}(j\omega) = W_s(j\omega).$$

Следовательно,

$$S_{\theta}(\omega) = |W_s(j\omega)|^2 S_{\xi_1}(\omega). \quad (2.52)$$

Формула показывает, что спектр ошибки определяется свойствами системы и спектром случайного процесса  $\xi(t)$ .

Для определения передаточной функции замкнутой системы  $W_s(j\omega)$  воспользуемся формулой

$$W_s(j\omega) = -\frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)}. \quad (2.53)$$

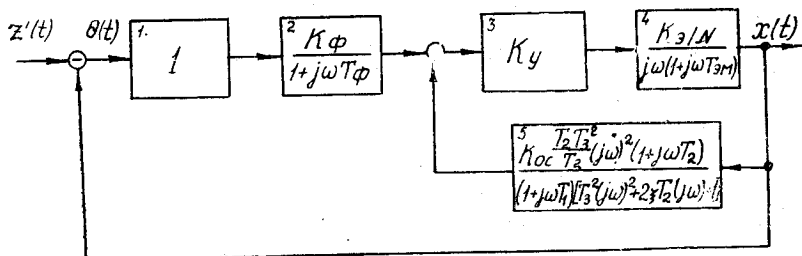


Рис. 2.13. Упрощенная структурная схема канала углового сопровождения.

Передаточную функцию разомкнутой системы  $W(j\omega)$  определим по упрощенной структурной схеме (рис. 2.13), состоящей из устройства выделения и преобразования сигнала-ошибки  $I$

(с передаточной функцией  $W_1(j\omega) = 1$ ), фильтра 2, электронного усилителя 3, ЭМУ совместно с мотором, постоянного тока и редуктором 4, цепи гибкой местной обратной связи и цепи жесткой основной обратной связи [2].

По рис. 2.13

$$W(j\omega) = \frac{W_{11}(j\omega)}{1 + W_{22}(j\omega)}, \quad (2.54)$$

где

$$W_{11}(j\omega) = \frac{K_{11}}{j\omega(1 + j\omega T_{мэ})};$$

$$W_{22}(j\omega) = \frac{K_{22} \frac{T_1 T_3^2}{T_2} (1 + j\omega T_2)}{(1 + j\omega T_{мэ})(1 + j\omega T_1) [(j\omega T_3)^2 + 2\zeta T_3(j\omega) + 1]};$$

$$K_{11} = K_y K_\phi \frac{K_3}{N} = 200 \text{ сек.}^{-1};$$

$$K_{22} = K_{oc} K_3 K_c = 20;$$

$K_c$  — коэффициент передачи мотора с редуктором;  
 $T_{мэ} = 0,11$  сек. — постоянная времени якоря двигателя и продольной оси ЭМУ;

$T_\phi$  — постоянная времени фильтра;

$$T_1 = 0,56 \text{ сек.}; \quad T_2 = 0,25 \text{ сек.}; \quad T_3 = 1,65 \text{ сек.}$$

— постоянные времени сложной цепи гибкой обратной связи;

$\xi = 0,61$  — постоянный коэффициент.

Подставляя (2.54) в (2.51), найдем передаточную функцию замкнутой системы:

$$W_3(j\omega) = \frac{W_{11}(j\omega)}{1 + W_{11}(j\omega) + W_{22}(j\omega)}. \quad (2.55)$$

График квадрата модуля передаточной функции представлен на рис. 2.14. На этом рисунке также представлен график спектральной плотности ошибки  $S_\theta(\omega)$ , рассчитанный графически путем перемножения ординат графиков (рис. 2.12 и 2.14).

Среднее значение квадрата ошибки определим по формуле

$$m_1 \{ \theta^2(t) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\theta(\omega) d\omega.$$

Однако в рассматриваемом случае ввиду сложности аналитического выражения для  $S_{\theta}(\omega)$  это удобнее сделать путем интегрирования площади под кривой рис. 2.14.

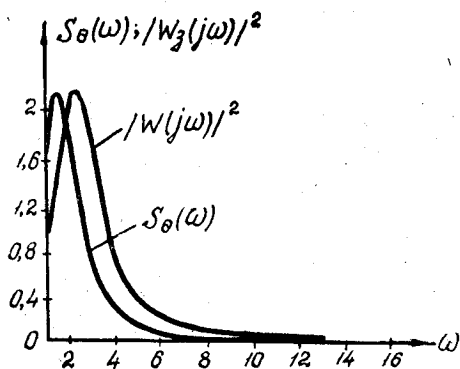


Рис. 2.14. Графики  $|W_3(j\omega)|^2$  и  $S_{\theta}(\omega)$ .

В результате получим значение среднеквадратической ошибки

$$c = \sqrt{m_1 \{ \theta^2(t) \}} \approx 0,1^\circ.$$

Таким образом, в этой главе за критерий оценки качества работы системы управления была принята среднеквадратическая ошибка. Однако иногда может оказаться, что удобнее воспользоваться другими критериями, такими как эффективная полоса пропускания САУ [11], коэффициент шума [5] и вероятностный критерий Н. И. Андреева [7].

### Г Л А В А III

## СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

### В В Е Д Е Н И Е

Задача синтеза систем автоматического управления наиболее часто встречается на практике. Она состоит в том, что по известным характеристикам управляющего (полезного) и возмущающего (помехи) воздействия определяется такая передаточная функция системы, которая обеспечивает наивысшую точность воспроизведения заданного закона преобразования управляющего воздействия.

При решении задачи синтеза предполагается, что полезный сигнал и помеха представляют собою стационарные случайные воздействия, а точность воспроизведения характеризуется среднеквадратической ошибкой.

В более общей постановке вопроса синтеза предполагается, что система должна возможно более точно воспроизвести на своем выходе не само управляющее воздействие  $z(t)$ , а некоторый сигнал  $h(t)$ , связанный с сигналом  $z(t)$  заданным функциональным преобразованием  $H(p)$ , т. е.

$$h(t) = H(p)z(t), \quad (3.1)$$

где  $H(p)$  — некоторый оператор от  $p \left( p = \frac{d}{dt} \right)$ , который обычно называют преобразующим оператором [2].

Так, например, преобразующий оператор  $H(p)$  может иметь вид

$$\begin{aligned} H(p) &= p; \\ H(p) &= \frac{1}{p}; \\ H(p) &= e^{\pm t_0 p}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В этих случаях операции над входным сигналом сводятся соответственно к дифференцированию, интегрированию или смещению во времени на промежуток  $t_0$ . Преобразующий оператор также может иметь и более сложный характер, например,

$$H(p) = \frac{n_0}{p} + n_1 + n_2 p. \quad (3.3)$$

Ошибка воспроизведения  $\Theta(t)$  с учетом сказанного определится разностью между подлежащим воспроизведению сигналом  $h(t)$  и величиной на выходе системы:

$$\Theta(t) = h(t) - x(t). \quad (3.4)$$

Если на систему воздействует возмущение, то ошибка будет иметь составляющую, обусловленную этим возмущением.

Задача синтеза сводится к определению такой передаточной функции  $W(j\omega)$ , которая при стационарном случайном управляющем и возмущающем воздействиях (со средним значением, равным нулю) минимизирует среднеквадратическую ошибку.

Такой метод синтеза оптимальных систем получил наиболее широкое распространение вследствие его относительной простоты. Однако метод синтеза систем на основе минимизации среднеквадратической ошибки является не единственным. Наибольшую динамическую точность преобразования управляющего воздействия при наличии возмущений можно получить на основе применения к задачам синтеза теории решающих функций [1], [2], [7], [8], но эти методы синтеза систем управления по более общим критериям теории решающих функций пока еще только разрабатываются.

## § 1. УСЛОВИЯ МИНИМУМА СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ

Известно, что среднее значение квадрата ошибки

$$m_1 \{ \theta^2(t) \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \theta^2(t) dt,$$

а выходной сигнал системы управления можно представить в виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) k(t - \tau) d\tau.$$



Тогда с учетом (3.4) можно написать

$$m_1 \{ \theta^2(t) \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [h(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau) k(\tau) d\tau]^2 dt, \quad (3.5)$$

где  $\varphi(t)$  — аддитивная смесь управляющего сигнала и помехи.

Из этого равенства видно, что при статистически заданных характеристиках управляющего сигнала и возмущений минимизировать среднее значение квадрата ошибки возможно путем надлежащего выбора параметров системы, т. е. выборов импульсной переходной функции  $k(\tau)$ .

Определим необходимые и достаточные условия минимизаций среднего значения квадрата ошибки. Для этого раскроем в выражении (3.5) квадратные скобки, при этом положим  $\lambda = t - \tau$ .

В результате этих преобразований получим

$$\begin{aligned} m_1 \{ \theta^2(t) \} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h^2(t) dt - \\ &- 2 \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda) d\lambda \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(t) \varphi(t-\lambda) dt + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} k(\vartheta) d\vartheta \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(t-\lambda) \varphi(t-\vartheta) dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Замечая, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h^2(t) dt = R_h(0)$$

и учитывая определения корреляционных функций

$$R_h(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(t+\tau) h(t) dt; \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} R_\varphi(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(t-\tau) \varphi(t) dt = \\ &= R_z(\tau) + R_\xi(\tau) + R_{z\xi}(\tau) + R_{\xi z}(\tau); \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$R_{h\varphi}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(t+\tau) \varphi(t) dt = R_{hz}(\tau) + R_{h\xi}(\tau), \quad (3.9)$$

можно написать

$$m_1 \{ \theta^2(t) \} = R_h(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda) R_{h\varphi}(\lambda) d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} k(\vartheta) R_{\varphi}(\lambda - \vartheta) d\vartheta. \quad (3.10)$$

Согласно условию физической осуществимости

$$k(t) = 0 \text{ при } t < 0 \quad (3.11)$$

нижние пределы интегрирования приравняем к нулю; тогда

$$m_1 \{ \theta^2(t) \} = R_h(0) - 2 \int_0^{\infty} k(\lambda) R_{h\varphi}(\lambda) d\lambda + \int_0^{\infty} k(\lambda) d\lambda \int_0^{\infty} k(\vartheta) R_{\varphi}(\lambda - \vartheta) d\vartheta. \quad (3.12)$$

Отсюда видно, что вид импульсной переходной функции при рассматриваемых условиях не зависит от характера воздействий  $h(t)$  и  $\varphi(t)$ , а зависит от их корреляционных функций.

Покажем, что необходимым и достаточным условием того, чтобы импульсная переходная функция  $k(t)$  обращала в минимум выражение (3.12), является то, что функция  $k(t)$  представляет собою решение интегрального выражения

$$R_{h\varphi}(\tau) - \int_0^{\infty} R_{\varphi}(\tau - \lambda) k(\lambda) d\lambda = 0, \quad \tau > 0. \quad (3.13)$$

Подобное доказательство производится в [2] на основе вариационного исчисления.

Приведем его без особого изменения. Придадим функции  $k(\lambda)$  в (3.12) вариацию  $\delta k(\lambda)$ , причем  $\delta k(\lambda) = 0$  при  $\lambda < 0$  вследствие физической осуществимости. Тогда вместо функции  $k(\lambda)$  получим функцию  $k(\lambda) + \gamma x(\lambda)$ , где  $\gamma$  — параметр, не зависящий от  $\lambda$ , а  $x(\lambda)$  — произвольная функция от времени  $\lambda$ .

При этом величина

$$E = m_1 \{ \theta^2(t) \}$$

получит вариацию  $\delta E$ , а полное среднее значение квадрата ошибки делается равным

$$E + \delta E.$$

Для того чтобы величина  $E$  имела экстремум (в частности минимум), необходимо

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} (E + \delta E)_{\gamma=0} = 0$$

при любых  $x(\lambda)$ .

Заменяя в (3.12) функцию  $k(\lambda)$  через  $k(\lambda) + \gamma x(\lambda)$ , получим

$$\begin{aligned}
 E(k + \gamma x) &= R_{\text{н}}(0) - 2 \int_0^{\infty} [k(\lambda) + \gamma x(\lambda)] R_{\text{н}\varphi}(\lambda) d\lambda + \\
 &+ \int_0^{\infty} [k(\lambda) + \gamma x(\lambda)] d\lambda \int_0^{\infty} [k(\vartheta) + \gamma x(\vartheta)] R_{\varphi}(\lambda - \vartheta) d\vartheta = \\
 &= E(k) - 2\gamma \int_0^{\infty} R_{\text{н}\varphi}(\lambda) x(\lambda) d\lambda + 2\gamma \int_0^{\infty} x(\lambda) d\lambda \int_0^{\infty} k(\vartheta) R_{\varphi}(\lambda - \vartheta) d\vartheta + \\
 &+ \gamma^2 \int_0^{\infty} x(\lambda) d\lambda \int_0^{\infty} x(\vartheta) R_{\varphi}(\lambda - \vartheta) d\vartheta. \quad (3.14).
 \end{aligned}$$

Если обозначить через

$$E_1 = \int_0^{\infty} x(\lambda) d\lambda \left[ R_{\text{н}\varphi}(\lambda) - \int_0^{\infty} R_{\varphi}(\lambda - \vartheta) k(\vartheta) d\vartheta \right]; \quad (3.15)$$

$$E_2 = \int_0^{\infty} x(\lambda) d\lambda \int_0^{\infty} R_{\varphi}(\lambda - \vartheta) x(\vartheta) d\vartheta, \quad (3.16)$$

то вместо (3.14) можно написать

$$E(k + \gamma x) = E(k) - 2\gamma E_1 + \gamma^2 E_2. \quad (3.17)$$

Дифференцируя (3.17) по  $\gamma$  и полагая  $\gamma = 0$ , получим

$$E_1 = 0, \quad (3.18)$$

или, что то же самое,

$$R_{\text{н}\varphi}(\tau) - \int_0^{\infty} R_{\varphi}(\tau - \lambda) k(\lambda) d\lambda = 0, \quad \tau > 0.$$

Таким образом доказано, что интегральное уравнение (3.13) является необходимым условием минимума  $E$ .

Для того чтобы равенство (3.18) было не только необходимым условием минимума среднего квадрата ошибки, но и достаточным, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$E(k + \gamma x) \geq E(k)$$

при произвольном выборе  $x(t)$ .

Докажем это положение. При  $E_1 = 0$  равенство (3.17) принимает вид

$$E(k + \gamma x) = E(k) + \gamma^2 E_2,$$

но

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_0^{\infty} x(\lambda) d\lambda \int_0^{\infty} R_{\varphi}(\lambda - \vartheta) x(\vartheta) d\vartheta = \\ &= \int_0^{\infty} x(\lambda) d\lambda \int_0^{\infty} x(\vartheta) d\vartheta \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(t - \lambda) \varphi(t - \vartheta) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[ \int_0^{\infty} x(\lambda) \varphi(t - \lambda) d\lambda \right]^2 dt > 0. \end{aligned}$$

Отсюда очевидно, что

$$E(k) + \gamma^2 E_2 > E(k).$$

Таким образом, найдены необходимые и достаточные условия минимума среднего квадрата ошибки системы управления при стационарных случайных воздействиях.

## § 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Проиллюстрируем полученные в предыдущих параграфах выводы на простейших примерах синтеза линейных систем автоматического управления. К таким системам можно прежде всего отнести:

1) системы, не замкнутые обратной связью, с внутренними возмущениями, не зависящими от внешних воздействий, и без внутренних возмущений;

2) системы, замкнутые обратной связью, но без внутренних возмущений.

Для определения оптимальной импульсной переходной функции при стационарных случайных воздействиях необходимо, как это видно из (3.13), решить интегральное уравнение

$$R_{n\varphi}(\tau) - \int_0^{\infty} R_{\varphi}(\tau - \lambda) k(\lambda) d\lambda = 0, \quad (3.13)$$

удовлетворяющее условию физической осуществимости.

В [10] разработано и описано несколько методов решения этого уравнения:

1) метод, основанный на преобразовании Фурье, (частотный метод [10]);

2) алгебраические методы решения уравнения:

а) точные методы (метод Гаусса, квадратных корней, обращение матрицы, окаймления и эскалаторный метод [9]);

б) итерационные методы (метод простой итерации и итерационный метод Гаусса — Зейделя [10]);

3) метод подбора [10].

Рассмотрим наиболее эффективный и наиболее простой в математическом отношении частотный метод решения уравнения (3.13). Решение проведем в предположении, что:

1) входное воздействие и реакция объекта являются стационарными случайными функциями времени;

2) корреляционная функция входа и взаимная корреляционная функция входа и выхода заданы;

3) помехи внутри самого объекта отсутствуют.

Для решения уравнения (3.13) в частотной области, умножив оба члена на  $e^{-j\omega\tau}$  и проинтегрировав по  $\tau$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R_{h\varphi}(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} k(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R_{\varphi}(\tau - \lambda) d\tau. \quad (3.19)$$

Заменив переменную в последнем интеграле этого выражения и положив  $\vartheta = \tau - \lambda$ , получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R_{h\varphi}(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} k(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\vartheta} R_{\varphi}(\vartheta) d\vartheta. \quad (3.20)$$

Вводя спектральные плотности

$$S_{h\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R_{h\varphi}(\tau) d\tau; \quad (3.21)$$

$$S_{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R_{\varphi}(\tau) d\tau \quad (3.22)$$

и учитывая, что

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.23)$$

получим

$$W(j\omega) = \frac{S_{н\varphi}(\omega)}{S_{\varphi}(\omega)}. \quad (3.24)$$

Если к (3.24) еще раз применить преобразование Фурье, то получим решение уравнения (3.13) во временной области:

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{н\varphi}(\omega)}{S_{\varphi}(\omega)} e^{j\omega t} d\omega,$$

или

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.25)$$

Значение  $k(t)$  может быть получено из этого выражения аналитически, графоаналитическим методом трапециoidalных характеристик, а также экспериментальным методом [10].

В качестве примера рассмотрим один из этих методов.

### § 3. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД СИНТЕЗА СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть корреляционная функция воздействия на входе системы имеет экспоненциальную форму

$$R_{\varphi}(\tau) = e^{-|\tau|}.$$

Взаимная корреляционная функция  $R_{н\varphi}$  задана графиком (рис. 3.1). По заданным корреляционным функциям необходимо определить импульсную переходную функцию устойчивой системы.

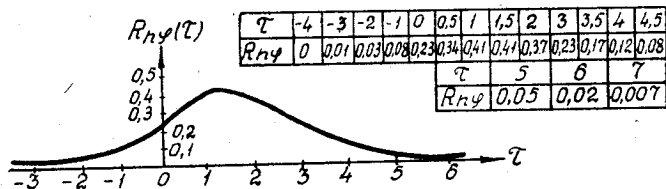


Рис. 3.1. График корреляционной функции  $R_{н\varphi}(\tau)$ .

1. По формуле (3.22) определяем спектр входного сигнала  $S_{\varphi}(\omega)$ :

$$S_{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R_{\varphi}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} e^{-|\tau|} d\tau = \frac{2}{\omega^2 + 1}.$$

2. Находим вещественную  $N(\omega)$  и мнимую  $M(\omega)$  части спектра

$$S_{\text{нф}}(\omega) = N(\omega) - jM(\omega) \quad (3.26)$$

по формулам

$$N(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\text{нф}}(\tau) \cos \omega\tau d\tau = \int_0^{\infty} R_{\text{нф}}(\tau) \cos \omega\tau d\tau + \\ + \int_0^{\infty} R_{\text{нф}}(-\tau) \cos \omega\tau d\tau; \quad (3.27)$$

$$M(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\text{нф}}(\tau) \sin \omega\tau d\tau = \int_0^{\infty} R_{\text{нф}}(\tau) \sin \omega\tau d\tau + \\ + \int_0^{\infty} [-R_{\text{нф}}(-\tau)] \sin \omega\tau d\tau. \quad (3.28)$$

Отсюда видно, что определение  $N(\omega)$  и  $M(\omega)$  сводится к вычислению интегралов вида

$$\int_0^{\infty} Y(\tau) \cos \omega\tau d\tau;$$

$$\int_0^{\infty} Y(\tau) \sin \omega\tau d\tau,$$

Последние могут быть вычислены методом трапециoidalных характеристик.

На рис. 3.2 показана методика аппроксимации трапециями кривой  $Y(\tau)$ .

На рис. 3.3 показаны вычисленные  $N(\omega)$  и  $M(\omega)$ .

3. Частотные характеристики системы определяются по формулам

$$P(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega) = \frac{N(\omega)}{S(\omega)};$$

$$Q(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega) = -\frac{M(\omega)}{S(\omega)}.$$

На рис. 3.4 и 3.5 показаны вычисленные вещественная и мнимая частотные характеристики.

4. По вещественной частотной характеристике, пользуясь методом трапециoidalных характеристик, определим импульсную переходную функцию. На рис. 3.6 для сравнения показаны вычисленная частотным методом и истинная переходные функции.

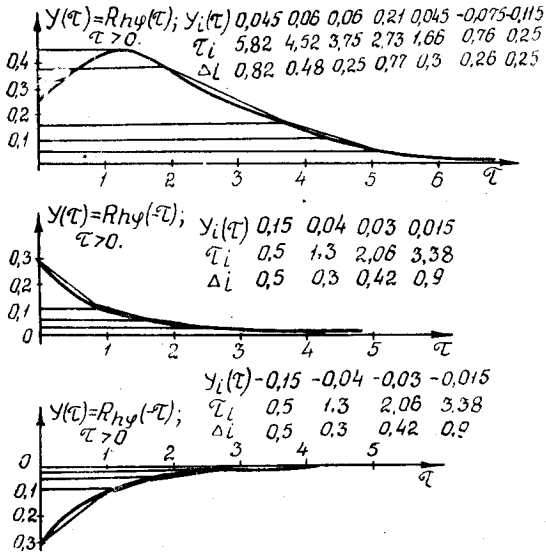


Рис. 3.2. Аппроксимация трапециями кривой  $Y(\tau)$ .

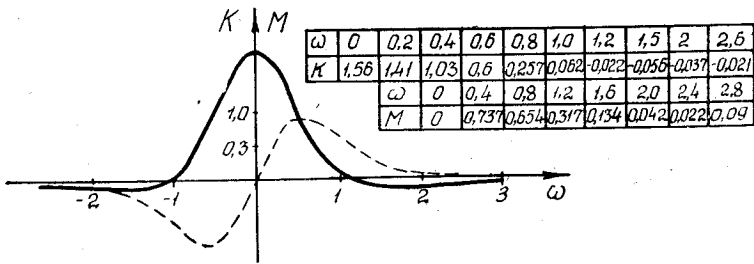


Рис. 3.3. Вещественная и мнимая части взаимной спектральной плотности.



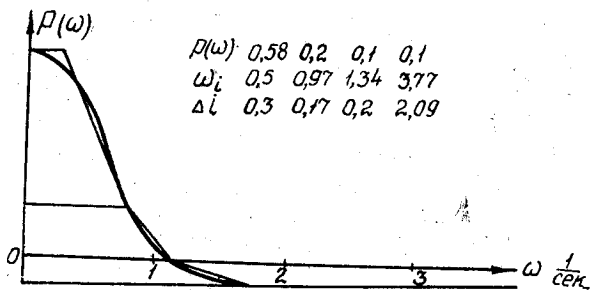


Рис. 3.4. Вещественная частотная характеристика  $P(\omega)$ .

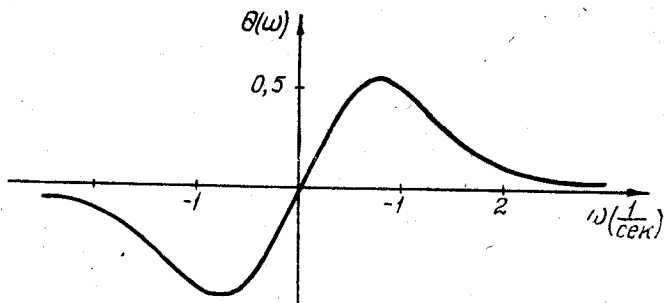


Рис. 3.5. Мнимая частотная характеристика  $Q(\omega)$ .

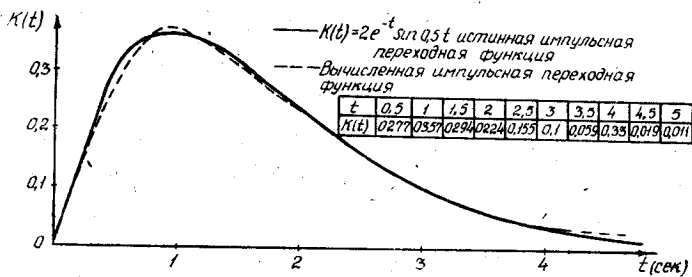


Рис. 3.6. Сравнение  $k(t)$ , вычисленной частотным методом с истинной  $k(t)$ .

#### § 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МИНИМАЛЬНОЙ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ

Выражение (3.12) для среднего значения квадрата ошибки можно представить в виде

$$m_1 \{ \theta^2(t) \} = R_h(0) + I, \quad (3.29)$$

где

$$I = -2 \int_0^{\infty} k(\lambda) R_{h\varphi}(\lambda) d\lambda + \int_0^{\infty} k(\lambda) d\lambda \int_0^{\infty} k(\vartheta) R_{\varphi}(\lambda - \vartheta) d\vartheta, \quad (3.30)$$

если удовлетворены условия оптимума [2]

$$I = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_{\varphi}(\omega) d\omega, \quad (3.31)$$

тогда

$$m_1 \{ \theta^2(t) \} = R_h(0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_{\varphi}(\omega) d\omega. \quad (3.32)$$

Учитывая, что

$$R_h(0) = m_1 \{ h^2(t) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_h(\omega) d\omega, \quad (3.33)$$

получим

$$m_1 \{ \theta^2(t) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S_h(\omega) - |W(j\omega)|^2 S_{\varphi}(\omega)] d\omega. \quad (3.34)$$

Минимальную среднеквадратическую ошибку можно определить также графически.

В главе II было найдено выражение для спектра ошибки регулирования

$$S_{\theta}(\omega) = |W_{\theta}(j\omega)|^2 S_z(\omega) + |W_{\xi}(j\omega)|^2 S_{\xi}(\omega). \quad (2.17)$$

Среднее значение квадрата ошибки

$$m_1 \{ \theta^2(t) \} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{\theta}(\omega) d\omega,$$

а с учетом (2.17)

$$m_1 \{ \theta^2(t) \} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |W_{\theta}(j\omega)|^2 S_z(\omega) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |W_{\xi}(j\omega)|^2 S_{\xi}(\omega) d\omega.$$

При условии, что помеха действует на вход системы [т. е.  $W_{\xi}(j\omega) = W(j\omega)$ ], получим

$$m_1 \{ \theta^2(t) \} = m_1 \{ \theta_z^2(t) \} + m_1 \{ \theta_{\xi}^2(t) \}, \quad (3.35)$$

где

$$\left. \begin{aligned} m_1 \{ \theta_z^2(t) \} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |W_{\theta}(j\omega)|^2 S_z(\omega) d\omega; \\ m_1 \{ \theta_{\xi}^2(t) \} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_{\xi}(\omega) d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Предположим, что график спектральной плотности сигнала имеет вид, показанный на рис. 3.7,а. На вход системы, график модуля передаточной функции которой представлен на рис. 3.7,б, действует „белый шум“ со спектральной плотностью, график которой представлен на рис. 3.7,в.

График  $m_1 \{ \theta^2(t) \}$  показан на рис. 3.7,г. Из рис. 3.7,г видно, что существует оптимальная полоса пропускания системы ( $\omega' = \omega_{\text{opt}}$ ), при которой среднеквадратическая ошибка минимальна.

При  $\omega' < \omega_{\text{opt}}$  уменьшается влияние помехи, однако при этом значительно ухудшается воспроизведение сигнала.

При  $\omega' > \omega_{\text{opt}}$  возрастает влияние помех, что приводит к увеличению  $m_1 \{ \theta^2(t) \}$ .

## § 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ЦЕПЬЮ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННИХ ПОМЕХ

После рассмотрения простейших задач синтеза систем автоматического управления рассмотрим более сложный и более общий пример синтеза, когда система имеет цепь обратной связи и помеха может действовать в любой точке внутри системы.

Примером такой системы может служить летательный аппарат, управляемый автопилотом.

При наличии в разомкнутой системе внутренних помех (рис. 3.8) уравнение (3.13) примет вид

$$R_{\text{нф}}(\tau) = \int_0^{\infty} R_{\varphi}(\tau - \vartheta) k(\vartheta) d\vartheta + \int_0^{\infty} R_{\xi\varphi}(\tau - \vartheta) k_{\xi}(\vartheta) d\vartheta, \quad (3.37)$$

где  $\xi(t)$  — помеха;

$k_{\xi}(t)$  — импульсная переходная функция системы по отношению к помехе.

Таким образом, наличие внутри системы источника помехи приводит к появлению в уравнении (3.13) второго неизвестного, что делает задачу, вообще говоря, неразрешимой. Однако при независимости внутренних помех от внешних воздействий корреляционная функция

$$R_{\xi\varphi}(\tau) = 0,$$

а определение динамических свойств оптимальной системы сводится к решению уравнения (3.13).

Поскольку все системы управления являются системами с обратной связью, то наибольший интерес представляет случай, когда в системе с обратной связью действует внутренняя помеха (рис. 3.9).

В этой системе управления на ее часть с передаточной функцией  $W_2(j\omega)$  действует сигнал, формируемый устройством с передаточной функцией  $W_1(j\omega)$ , и возмущение  $\xi(t)$ . Реакция системы  $x(t)$  подается на вход системы по цепи обратной связи с передаточной функцией  $W_{\text{oc}}(j\omega)$ .

Уравнение такой системы относительно сигнала ошибки запишется в виде

$$x(t) = W_1(j\omega) W_2(j\omega) \theta(t) + W_2(j\omega) \xi(t), \quad (3.38)$$

где сигнал ошибки

$$\theta(t) = z(t) - W_{\text{oc}}(j\omega) x(t).$$

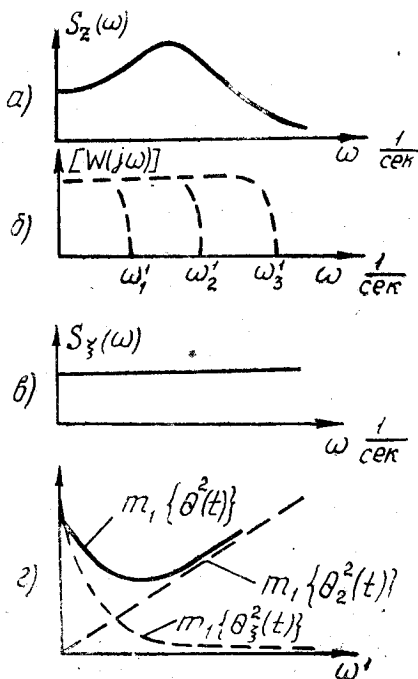


Рис. 3.7. Графики: а — спектра сигнала; б — АЧХ системы; в — спектра помехи; 2 — среднего квадрата ошибки в зависимости от полосы пропускания системы.

Для этого случая

$$R_{x\theta} = \int_0^{\infty} R_{\theta}(\tau - \theta) k(\theta) d\theta + \int_0^{\infty} R_{\xi\theta}(\tau - \theta) k(\theta) d\theta. \quad (3.39)$$

Из уравнений (3.38) и (3.39) видно, что введение обратной связи приводит к тому, что воздействие  $\theta(t)$  на входе коррелировано с внутренними помехами, т. е.

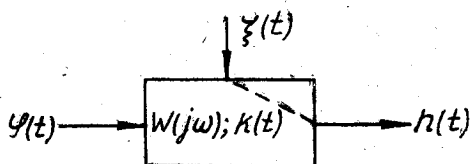


Рис. 3.8.

$$R_{\xi\theta}(0) \neq 0,$$

и равенство (3.13) не выполняется.

Для определения передаточной функции системы управления с замкнутой обратной связью прежде всего определим импульс-

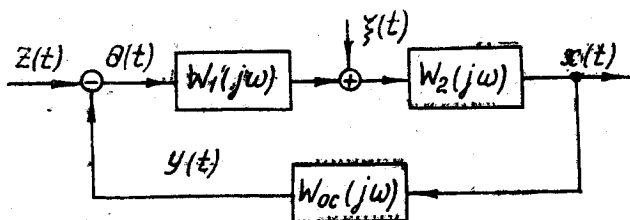


Рис. 3.9.

ную переходную функцию всей системы и импульсную переходную функцию обратной связи.

Введем обозначения:

$W_{12}(j\omega) = W_1(j\omega) W_2(j\omega)$ ,  $k(t)$  — соответственно передаточная и импульсная переходная функции прямой цепи системы управления;

$W_2(j\omega)$ ,  $k_2(t)$  — передаточная и импульсная переходная функция прямой цепи системы управления по отношению к возмущению;

$W_{oc}(j\omega)$ ,  $k_{oc}(t)$  — передаточная и импульсная переходная функции цепи обратной связи.

Учитывая уравнение (3.38), выразим реакцию системы через воздействия  $z(t)$ ,  $\xi(t)$  и параметры замкнутой системы:

$$x(t) = W_s(j\omega) z(t) + W_{\xi}(j\omega) \xi(t), \quad (3.40)$$

где

$$W_3(j\omega) = \frac{W_{12}(j\omega)}{1 + W_{12}(j\omega) W_{oc}(j\omega)}, k_3(t)$$

— передаточная и импульсная функция замкнутой системы относительно воздействия  $z(t)$ ;

$$W_\xi(j\omega) = \frac{W_2(j\omega)}{1 + W_{12}(j\omega) W_{oc}(j\omega)}, k_\xi(t)$$

— соответственно передаточная и переходная функции системы по отношению к возмущению  $\xi(t)$ .

Уравнение (3.40) можно выразить через импульсные переходные функции, т. е.

$$x(t) = \int_0^\infty z(t + \vartheta) k_3(\vartheta) d\vartheta + \int_0^\infty \xi(t - \vartheta) k_\xi(\vartheta) d\vartheta, \quad (3.41)$$

где  $k_3(\vartheta)$  — импульсная переходная функция замкнутой системы;  $k_\xi(\vartheta)$  — импульсная переходная функция системы относительно помехи.

Учитывая независимость внешнего воздействия  $z(t)$  и внутренних шумов  $\xi(t)$ , можно написать

$$R_{z\xi}(\tau) = 0$$

и, следовательно,

$$R_{xz}(\tau) = \int_0^\infty R_z(\tau - \vartheta) k_3(\vartheta) d\vartheta. \quad (3.42)$$

Аналогичное соотношение можно записать для цепи обратной связи:

$$R_{yx}(\tau) = \int_0^\infty R_x(\tau - \vartheta) k_{oc}(\vartheta) d\vartheta. \quad (3.43)$$

Из уравнений (3.42) и (3.43), например, методом, рассмотренным в § 2, находим импульсные переходные функции  $k_3(\vartheta)$ ,  $k_{oc}(\vartheta)$  и затем по ним — передаточные функции.

Оптимальная передаточная функция прямой цепи системы автоматического управления летательного аппарата определяется по формуле

$$W_{1,2}(j\omega) = \frac{W_3(j\omega)}{1 + W_3(j\omega) W_{oc}(j\omega)}. \quad (3.44)$$

Таким образом, задача синтеза достаточно сложной системы автоматического управления сведена к задаче синтеза простейшей системы управления.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Пугачев, Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Физматгиз, М., 1960 г.
2. В. В. Солодовников, Статистическая динамика линейных систем автоматического управления, Физматгиз, М., 1960 г.
3. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, Сов. радио, М., 1957 г.
4. Д. Х. Леннинг и Р. Г. Бэттин, Случайные процессы в задачах автоматического управления, ИЛ, М., 1958 г.
5. Н. Н. Коробов, Основы теории автоматического регулирования. Статистические характеристики систем автоматического регулирования, АРТА им. П. А. Говорова, 1960 г.
6. А. В. Галенко, Системы автоматического регулирования радиотехнических устройств, ХВАИВУ, 1958 г.
7. Н. И. Андреев, Определение оптимальной линейной динамической системы по критерию экстремума функционала общего вида, Автоматика и телемеханика, № 7, 1957 г.
8. А. А. Фельдбаум, Теория дуального управления, Автоматика и телемеханика, т. XXI, № 9, 1960 г.
9. В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Госиздат технико-теоретической литературы М.-Л., 1950 г.
10. В. В. Солодовников и А. С. Усков, Статистический анализ объектов регулирования, Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, М., 1960 г.
11. А. С. Шаталов, Инженерные методы исследования регулируемых систем, т. 11, АИА им. Ф. Э. Дзержинского, М., 1958 г.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
Предисловие . . . . .	3
<b>Глава I. Стационарные случайные процессы и их характеристики . . . . .</b>	<b>5</b>
1. Случайные процессы . . . . .	5
2. Стационарные и нестационарные случайные процессы . . . . .	8
3. Характеристики стационарных случайных процессов . . . . .	8
4. Корреляционные функции случайных процессов . . . . .	11
5. Свойства корреляционной функции . . . . .	12
6. Спектральная плотность случайного процесса . . . . .	17
7. Свойства спектральной плотности случайного процесса . . . . .	19
8. Связь между корреляционной функцией и спектральной плотностью . . . . .	20
<b>Глава II. Анализ точности работы линейных систем автоматического управления при стационарных случайных воздействиях . . . . .</b>	<b>26</b>
Введение . . . . .	26
§ 1. Критерии оценки качества работы систем автоматического управления . . . . .	27
§ 2. Определение корреляционной функции реакции системы управления при случайном воздействии на ее вход . . . . .	28
§ 3. Определение спектральной плотности реакции системы управления при случайном воздействии на ее вход . . . . .	31
§ 4. Определение корреляционной функции реакции системы управления при случайных воздействиях в произвольной точке . . . . .	32
§ 5. Определение спектральной плотности реакции системы управления при случайном воздействии в произвольной точке . . . . .	33
§ 6. Определение спектральной плотности ошибки системы управления . . . . .	34
§ 7. Аналитический метод определения спектральной плотности и среднего квадрата ошибки системы управления . . . . .	35
§ 8. Определение среднего квадрата ошибки простейшей системы управления, состоящей из фильтра и интегратора . . . . .	39
§ 9. Графоаналитический метод определения спектральной плотности и среднего квадрата ошибки системы управления . . . . .	43
§ 10. Анализ следящей системы углового сопровождения цели . . . . .	44



	Стр.
<b>Глава III. Синтез линейных систем автоматического управления при стационарных случайных воздействиях . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>Введение . . . . .</b>	<b>52</b>
§ 1. Условия минимума среднеквадратической ошибки . . . . .	53
§ 2. Определение оптимальной передаточной функции разомкнутой системы управления . . . . .	57
§ 3. Графоаналитический метод синтеза систем автоматического управления . . . . .	59
§ 4. Определение минимальной среднеквадратической ошибки . . . . .	63
§ 5. Определение передаточной функции системы управления с цепью обратной связи при наличии внутренних помех . . . . .	64
<i>Литература . . . . .</i>	<i>68</i>

## О П Е Ч А Т К И

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
7	3 сверху	промежутки	моменты
9	1 ,	функций	функции
29	8 снизу	сигнам	сигнал
32	8 сверху	действует	действуют
37	11 ,	$w_{\xi} (j\omega) S_2 (\omega)$	$w_{\xi} (j\omega) S_{21} (\omega)$