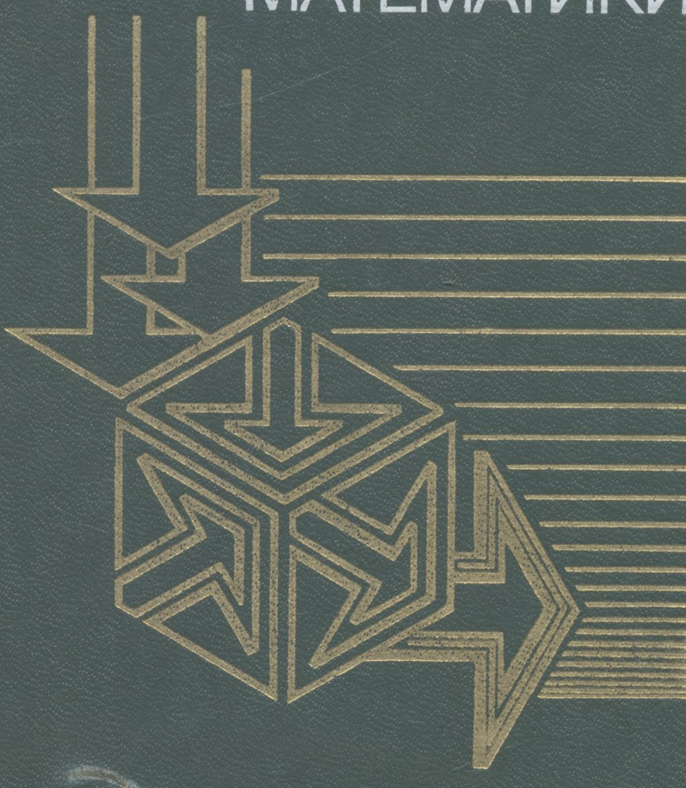
АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ ОБУЧАЮЩИЕ КОМПЛЕКСЫ

В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ



И. В. КУЗЬМИН, Ю. Ф. ПАНОВ, М. Е. ИВАНОВ,
М. Р. ВАЛЬДМАН, В. А. ГАРНИК,
В. И. КЛОЧКО, Н. А. КЛОЧКО,
В. В. ГЕРАСИМЕНКО

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ ОБУЧАЮЩИЕ КОМПЛЕКСЫ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Под общей редакцией
доктора технических наук,
профессора *И. В. Кузьмина*

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования УССР
в качестве учебного пособия
для студентов технических вузов*

Киев
„Выща школа"
1991

ББК 22.11я73
А22

УДК 681.3.068 : 519.6(07)

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. *А. А. Молчанов* (Киевский политехнический институт), д-р техн. наук, проф. В. Ф. Бызов (Криворожский горнорудный институт)

Редакция литературы по информатике и автоматике
Редактор *Ж. Г. Давиденко*

Автоматизированные обучающие комплексы в курсе высшей
А 22 математики: Учеб. пособие / И. В. Кузьмин, Ю. Ф. Панов, М. Е. Иванов и др.; Под общ. ред. И. В. Кузьмина. – К.: Выща шк., 1991. – 195 с.: ил.
ISBN 5-11-003739-6.

Описаны принципы создания автоматизированных обучающих комплексов, предназначенных для повышения эффективности изучения математики в вузах. Даны характеристики технических средств, программного обеспечения, алгоритмы машинного обучения по основным разделам курса математики. Рассмотрены вопросы организации и проведения стандартизированного контроля знаний. Изложена методика проведения деловой игры при изучении теории вероятностей и математической статистики.

Для студентов технических вузов.

А $\frac{2404040000-161}{М211(04)-91}$ 263–92 ББК 22.11я73

ISBN 5-11-003739-6

ВВЕДЕНИЕ

Повышение качества подготовки в вузах специалистов предусматривает совершенствование имеющихся и разработку новых форм и методов организации учебного процесса.

Увеличение выпуска различных типов ЭВМ с широким спектром интеллектуальных и математических возможностей позволяет существенно улучшить математическую подготовку. Создаются возможности разработки и внедрения в учебный процесс автоматизированных обучающих систем (АОК), представляющих собой сложные эргатические системы.

В данном учебном пособии излагаются основные научно-методические принципы построения и применения АОК; методы создания банка данных, содержащего учебные вопросы; варианты упражнений, задач и типовых расчетов; ответы к ним. По основным разделам курса приведены алгоритмы решения задач, которые позволяют разработать программное обеспечение для различных типов ЭВМ – от программируемых микрокалькуляторов до универсальных ЭВМ.

При этом характерен комплексный подход к формированию задач и упражнений. Например, для вычисления определенного интеграла требуется провести полное исследование подынтегральной функции, построить ее график, дать геометрическое толкование, применить один из приближенных методов вычисления, использовать стандартную программу для программируемого микрокалькулятора. Алгоритмизированы и некоторые теоретические вопросы. Создание же формализованных алгоритмов доказательства с помощью ЭВМ основных теорем курса представляет собой сложную и вряд ли разрешимую задачу.

В Винницком политехническом институте разработан АОК „Мечта", программное обеспечение для которого написано на языке ПЛ/I и ориентировано на систему комплексного пользования. Возможна адаптация программного обеспечения для СМ ЭВМ и их терминалов.

АОК „Мечта" представляет собой систему психолого-педагогических, методических, алгоритмических, программных и технических средств, предназначенных для повышения эффективности изучения высшей математики в вузах. В АОК „Мечта" сочетаются и дополняют друг друга машинные и безмашинные методы обучения, применяются различные типы ЭВМ и информационной техники: программируемые микрокалькуляторы, мини- и микроЭВМ, ПЭВМ, универсальные ЭВМ ряда ЕС, аудиторные телевизионные комплексы и другие технические средства обучения.

Все АОК можно разделить на вырождающие, селективные и продуцирующие [8, 16, 27]. Вырождающие АОК реализуют линейные и разветвленные обучающие программы; стандартизированный контроль знаний без свободно формулируемого ответа, консультирование и обучение решению задач. Селективные АОК рассчитаны на использование управляющих алгоритмов, осуществляющих адаптацию к действиям обучаемого представлением порций знаний в виде разветвленного дерева. Продуцирующие АОК реализуют алгоритм, аналогичный действиям преподавателя. В предлагаемом пособии реализуются АОК, включающие применительно к курсу высшей математики элементы всех перечисленных классов.

В АОК „Мечта" многие теоретические разделы, а также численные методы сначала изучают с помощью расчетных таблиц и графиков, а затем составляются алгоритмы и программы для программируемых микрокалькуляторов. После овладения основами изучаемых разделов производится дальнейшее углубленное изучение с помощью ЭВМ.

Применение АОК „Мечта" в курсе высшей математики обеспечивает:

обучение студентов по определенным разделам и темам;

контроль качества усвоения изученного материала;

справочно-информационный поиск;

проведение научно-исследовательской работы студентов;

разгрузку преподавателя от трудоемких рутинных операций подготовки вариантов заданий, экзаменационных вопросов и билетов, проверки знаний и т. д.;

активизацию самостоятельной учебной и научной деятельности студентов;

интенсификацию обучения по наиболее сложным разделам курса за счет повышения активности студентов при взаимодействии с ЭВМ;

индивидуализацию обучения, создаваемую дозированием учебной информации в зависимости от уровня подготовки студента;

выработку навыков работы с различными типами ЭВМ – от программируемых микрокалькуляторов до универсальных ЭВМ, развитие и совершенствование внимательности, точности, аккуратности выполнения функций оператора;

значительное сокращение продолжительности курса обучения, поскольку выдача учебной информации – ее усвоение – контроль есть целенаправленное воздействие на обучаемого для получения определенного учебного эффекта;

повышение уровня педагогической подготовки преподавателей благодаря необходимости создания четких алгоритмов обучения и системы оценки знаний студентов, глубокому знанию технических возможностей вычислительной техники и психофизиологических возможностей студентов при работе на этой технике;

повышение эффективности системы управления вузом за счет включения АОК в АСУ ВУЗ.

Вместе с тем, существует ряд проблем, связанных с разработкой алгоритмического, программного и методического обеспечения АОК.

Несмотря на наличие специальных автоматизированных обучающих систем АОС ВУЗ [10, 18, 27, 35], остается весьма трудоемким процесс алгоритмизации курса высшей математики, его теоретических разделов, лабораторных работ и практических занятий. Это, в первую очередь, определяется большим объемом учебно-методической и научно-исследовательской информации, тщательностью проработки дидактического материала, детализацией целей, задач и методов обучения.

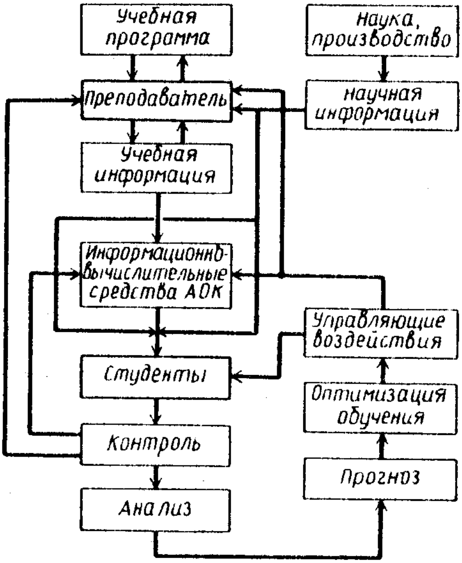


Рис. 1

АОК активно применяется для научных исследований, выполняемых в вузах. В учебный процесс и научные исследования студентов включаются система управления базами реальных производственных данных, а также задачи, возникающие в условиях производства и требующие применения методов математического моделирования и стандартного программного обеспечения. Это позволяет создавать на лекциях, практических занятиях, лабораторных работах реальные проблемные ситуации и внедрять в учебный процесс проблемные методы обучения.

Структурная схема АОК представлена на рис. 1.

Глава 1. СОСТАВ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ОБУЧАЮЩЕГО КОМПЛЕКСА

1.1. ХАРАКТЕРИСТИКА КОМПЛЕКСА ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ

АОК „Мечта" включает в себя ЕС ЭВМ, персональные ЭВМ; дисплейные классы; учебную замкнутую телевизионную систему и другие средства обучения.

В *дисплейных классах* установлены алфавитно-цифровые дисплеи типа ЕС-7066 и ЕС-7927-01, подключенные соответственно к ЕС-1022 и ЕС-1055 как к базовым, ориентированным на использование в учебном процессе.

Математическое обеспечение дисплейного класса базируется на операционной системе ОС/ЕС-6.1, сгенерированной с учетом требований надежности работы технического оборудования.

Приведем характеристики дисплея ЕС-7927-01. Это устройство обеспечивает запись, стирание, сдвиги вправо и влево, отображение алфавитно-цифровых и специальных символов. Частота регенерации кадров – 50 $с^{-1}$. Емкость буферной памяти – 1920 символов. Все операции по изменению содержания информации или ее перемещению на экране производятся при помощи специального указателя – курсора. Клавиатура позволяет осуществлять ввод прописных и строчных символов русского и латинского алфавитов. Наработка на отказ дисплея – не менее 2500 ч, а на сбой – не менее 500 ч.

Для вывода информации на печать используется печатающее устройство ЕС-7939-01. Емкость буферной памяти переменная: 480 или 1920 символов. Способ печати – матричный, игольчатый. Скорость печати – не менее 165 знаков/с. Количество символов в строчке – 132. Наработка на отказ печатающего устройства – не менее 100 ч, на сбой – не менее 100 ч.

В состав периферийного оборудования ЭВМ типа СМ входят дисплеи, или видеотерминалы ВТА 2000-11 и ВТА 2000-15М. Видеотерминалы ВТА 2000-15М в АОС применяются как пульт программиста или операторов информационно-вычислительных и справочных систем, построенных на базе машин СМ.

ВТА 2000-15М обеспечивает: отображение информации на экране электронно-лучевой трубки в буквенно-цифровом виде во всех режимах работы; набор и редактирование текстовой информации в режиме автономная работа; прием текстовой информации от ЭВМ с записью ее в память и отображением на экране в режиме комплексная работа; передачу в ЭВМ текстовой, управляющей информации и технологических запросов, набираемых оператором с одновременным приемом и информацией от ЭВМ.

Наличие подсказок на экране помогает студентам и преподавателям легко ориентироваться при программировании и работе в процессе обучения.

Встроенное математическое обеспечение позволяет подключить блок графических изображений с емкостью памяти 32 Кбайт. Графическое изображение можно строить при помощи сплошных, пунктирных и штриховых линий. В целях удобного формирования объемных изображений любая из линий (точек) может отображаться одним из трех уровней яркости.

Клавиатура ВТА 2000-15М содержит 107 клавиш. Из них 18 снабжены функциями, которые определяет (программирует) пользователь. Нажатием одной из этих клавиш вызывается последовательность команд, которая может быть запрограммирована пользователем и вызывать в центральной ЭВМ выполнение одной из 18 частей используемых задач.

Число командных последовательностей может быть сформировано за счет специального режима „меню", что особенно удобно при индивидуальной форме обучения.

Возможности редактирования текстовой информации пользователем значительны: можно исключить или добавить строку текста, отдельный символ, часть текста, установить или отметить защиту текста и др. Следует отметить, что пользователи могут не иметь специальной и глубокой подготовки, но тем не менее могут успешно осуществлять ввод-вывод информации.

Видеотерминалы ВТА-2000, ЕС-7927 в соответствии с „Временными санитарно-гигиеническими нормами и правилами по устройству видеотерминалов школьных ЭВМ. Часть 1 (Дисплеи)" относятся ко второму классу. Эти видеотерминалы удовлетворяют указанным нормам по контрастности, резкости и размеру точки в центре экрана (не более 0,4 мм).

АОК в курсе высшей математики интенсивно применяется на первом и втором курсах. Поэтому занятия студенческих групп в дисплейных классах организуются в соответствии с временными рекомендациями „Режимов занятий учащихся за видеотерминалами ЭВМ"*. Так, для учащихся 10-х классов длительность работы на ЭВМ не должна превышать при двух занятиях подряд 25 мин на первом занятии и 15 мин на втором. Перерыв между занятиями за видеотерминалом – не менее 20 мин. Число занятий с использованием дисплеев второго класса – не более двух в день. Суммарная еженедельная длительность работы в дисплейном классе не должна превышать 180 мин. Для снятия зрительного утомления после непрерывной работы учащихся за видеотерминалами необходимо провести комплекс упражнений для глаз.

*Режим занятий учащихся за видеотерминалами ЭВМ: Временные рекомендации учебно-методического кабинета по высшему образованию. Приказ Минвуза СССР от 18.06.87 № 260. 4/690.

Между подряд следующими занятиями необходимо проводить комплекс физических упражнений для снятия общего утомления [32].

Наряду с дисплейными классами на занятиях по высшей математике используются *дисплейные вычислительные комплексы* микроЭВМ „Электроника НМС 11100.1". Они предназначены для выполнения функций ввода, хранения, обработки и вывода цифровой и графической информации. МикроЭВМ обеспечивает работу в программном режиме прерывания с внешними устройствами: алфавитно-цифровым дисплеем, накопителем на гибких магнитных дисках, печатающим устройством типа DZM-180. Могут использоваться и устройства других типов с соответствующими для микроЭВМ интерфейсами обмена информацией.

Так реализовано сопряжение микроЭВМ с *учебной замкнутой телевизионной системой (УЗТС)* института [24]. Основой централизованной УЗТС является многопрограммный телецентр, способный одновременно обслуживать несколько аудиторий разной информацией. Единой кабельной магистралью охвачены телеаудитории, в которых остается только одна телекамера для показа графического и справочного материалов, натурных образцов небольших размеров и пульт служебной связи. ДВК, видеомагнитофоны, телекинопроекторы и другие устройства установлены в аппаратных учебного телецентра.

1.2. ПРОГРАММИРУЕМЫЕ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЫ

Широкое применение в АОК находят программируемые микрокалькуляторы „Электроника БЗ-34", „Электроника МК-52", „Электроника МК-61" [13, 22]. Простой кодово-символьный язык программирования, доступность и довольно большие вычислительные возможности программируемых микрокалькуляторов позволяют их применять уже на первых аудиторных занятиях по высшей математике, а также при выполнении домашних заданий.

Наиболее удобны микрокалькуляторы „Электроника МК-52", которые имеют энергонезависимую память (ППЗУ), обеспечивающую сохранение программ и данных при выключенном питании. Размеры, внешнее оформление и клавиатура этих микрокалькуляторов облегчают их применение при больших обьемах вычислений.

Кроме того, программируемые микрокалькуляторы имеют ограниченную память. Поэтому студенты должны глубоко понимать смысл проводимых вычислений, чтобы составить оптимальную по количеству операций и продолжительности вычислений программу.

При составлении программы рекомендуется следующая последовательность действий:

записать расчетные формулы, уяснив входящие в них обозначения;

выделить входные и выходные величины;

сформулировать требования к алгоритму расчета. Например, при определении коэффициентов аналитических зависимостей по экспериментальным данным для получения результатов исходные данные должны использоваться один раз; обеспечить индикацию номера очередного наблюдения, подлежащего обработке, а также очистку сумматоров и подготовку счетчиков для очередного цикла вычислений;

проанализировать расчетные формулы с позиций выполнения сформулированных требований; при необходимости преобразовать их к виду, удовлетворяющему этим требованиям;

· составить алгоритм вычислений в виде блок-схемы или в виде словесного описания выполняемых операций;

составить тест программы, использовав специальный бланк;

составить контрольный пример;

отладить программу;

составить по специальной форме инструкцию по работе с программой.

Наиболее полно данная методика реализуется при построении линейной регрессии. Эту задачу рассмотрим на конкретном примере.

Пример. В сложной системе измерены значения входного X и выходного Y параметров. Результаты измерений приведены в таблице:

Параметры	Наблюдения					
	1	2	...	i	...	n
X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
Y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

Построить математическую модель сложной системы в виде линейной регрессии

$$y = a_0 + a_1 x \tag{1}$$

и определить коэффициенты регрессии a_0, a_1, коэффициент корреляции r, средние выборочные $\bar{x}, \bar{y}$ и средние квадратические отклонения S_x, S_y.

Решение. 1. Запишем расчетные формулы для определения искомых числовых характеристик:

$$a_1 = r\frac{S_y}{S_x}; \tag{2}$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x}; \tag{3}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \tag{4}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i ; \tag{5}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} ; \tag{6}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n-1}} ; \tag{7}$$

$$r = \frac{n}{n-1} \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S_x S_y} . \tag{8}$$

2. Выделим *входные* данные: i – номер наблюдения; n – число наблюдений, x_i и y_i – значения параметров X и Y при i-м наблюдении; *выходные* данные a_0, a_1, $\bar{x}$, $\bar{y}$, S_x, S_y, r определяются по формулам (2) – (7).

3. Вычисления по формулам (2) – (7) требуют использования исходных данных (см. таблицу) дважды: первый раз для определения средних $\bar{x}$, $\bar{y}$, второй – для определения остальных характеристик. Чтобы обеспечить получение выходных данных при одном вводе входных данных, упростим формулы (5) – (8):

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{n}{n-1} \left(\overline{x^2} - \bar{x}^2 \right) . \tag{9}$$

Тогда $$S_x = \sqrt{\frac{n}{n-1} \left(\overline{x^2} - \bar{x}^2 \right)} , \tag{10}$$

где $\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$

В результате аналогичных преобразований получаем:

$$S_y = \sqrt{\frac{n}{n-1} \left(\overline{y^2} - \bar{y}^2 \right)} ; \tag{11}$$

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)(\overline{y^2} - \bar{y}^2)}} , \tag{12}$$

где $\overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 ; \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$

4. Алгоритмическая и программная реализация формул (2) – (5), (10) – (12) должна включать в себя: вычисление сумм $\sum_{k=1}^{i} x_k$, $\sum_{k=1}^{i} y_k$, $\sum_{k=1}^{i} x_k^2$, $\sum_{k=1}^{i} y_k^2$,

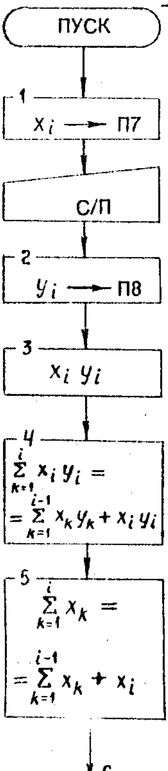
$\sum_{k=1}^{i} x_k y_k$, $k, i = \overline{1, n}$; определение средних $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{x^2}$, $\bar{y^2}$, $\bar{xy}$; определение числовых характеристик S_x, S_y, r, a_1, a_0.

Для удобства вычислений в программе необходимо предусмотреть: индикацию номера очередного наблюдения; последовательную индикацию выходных данных; очистку сумматоров для подготовки к вводу нового массива данных; организацию циклов.

Наиболее простая и удобная символика применена в микрокалькуляторе „Электроника Б3-34". Для этой машины рассмотрим программную реализацию алгоритма построения линейной регрессии.

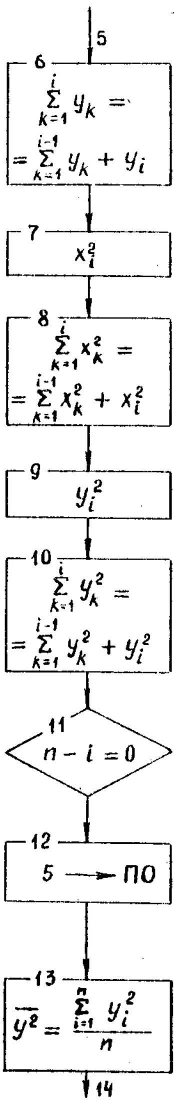
Реализация алгоритма и программы определения оценок линейной регрессии $y = a_0 + a_1 x$

Алгоритм

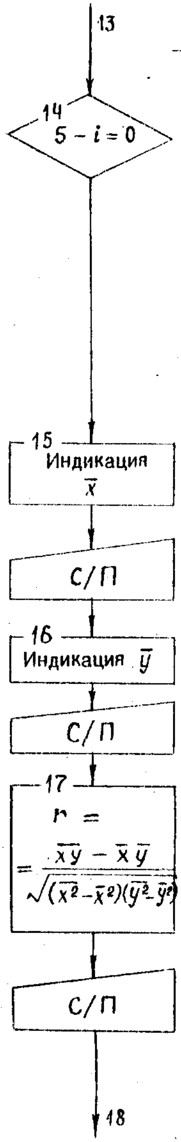


Программа

Шаг алгоритма	Адрес	Команда	Шаг алгоритма	Операции
1	00	П7	1	Занесение x_i в RG7
	01	С/П		Останов. Индикация x_i
2	02	П8	2	Занесение y_i в RG8
3	03	*	3	Получение $x_i * y_i$
4	04	ИП1	4	Вызов $\sum_{k=1}^{i-1} x_k y_k$ из RG1
	05	+		Получение $\sum_{k=1}^{i-1} x_k y_k$
	06	П1		Занесение $\sum_{k=1}^{i} x_k y_k$ в RG1
5	07	ИП7	5	Вызов x_i из RG7
	08	ИП2		Вызов $\sum_{k=1}^{i-1} x_k$ из RG2
	09	+		Получение $\sum_{k=1}^{i} x_k$
	10	П2		Занесение $\sum_{k=1}^{i} x_k$ в RG2

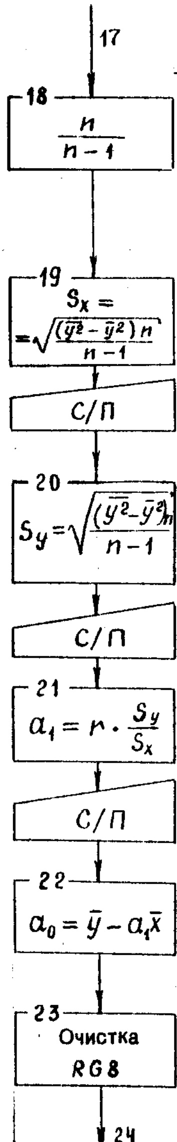


Шаг алгоритма	Адрес	Команда	Шаг алгоритма	Операции
6	11	ИП8	6	Вызов y_i из $RG8$
	12	ИП2		Вызов $\sum_{k=1}^{i-1} y_k$ из $RG3$
	13	+		Получение $\sum_{k=1}^{i} y_k$
	14	П3		Занесение $\sum_{k=1}^{i} y_k$ в $RG3$
7	15	ИП7	7	Вызов x_i из $RG7$
	16	Fx^2		Получение x_i^2
8	17	ИП4	8	Вызов x_i из $RG4$
	18	+		Получение $\sum_{k=1}^{i} x_k^2$
	19	П4		Занесение $\sum_{k=1}^{i} x_k^2$ в $RG4$
9	20	ИП8	9	Вызов y_i из $RG8$
	21	Fx^2		Получение y_i^2
10	22	ИП5	10	Вызов $\sum_{k=1}^{i-1} y_k^2$ из $RG5$
	23	+		Получение $\sum_{k=1}^{i} y_k^2$
	24	П5		Занесение $\sum_{k=1}^{i} y_k^2$ в $RG5$
11	25	$FL0$	11	Получение $n-1$, проверка условия $n-1=0$
	26	„94"		Выполнение команды по адресу „94", если условие $n-1=0$ не выполняется
12	27	5	12	Если условие выполняется, набрать „5" (число регистров), в которых хранятся
	28	П0		Σxy, Σx, Σx^2, Σy, Σy^2. Занесение его в $RG0$
13	29	КИП↑	13	Вызов $\sum_{i=1}^{n} y^2$ из $RG5$, номер которого хранится
	30	ИП6		в $RG0$. Вызов n из $RG6$.
	31	:		Получение $\overline{y^2}$. Занесение $\overline{y^2}$
	32	КП↑		в $RG5$

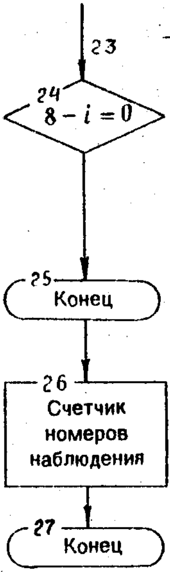


Шаг алгоритма	Адрес	Команда	Шаг алгоритма	Операции
14	33		14	Получение $5 - i$, проверка условия $5 - i = 0$.
	34	„29"		Если условие $5 - i = 0$ не выполняется, то выполнить команды с адреса „29" Цикл вычисления $\overline{y^2}, \bar{y}, \overline{x^2}, \bar{x}, \overline{xy}$. Вызвать содержимое из $RG(5 - i)$, номер которого хранится в $RG0$. Имеем: $RG4 - \Sigma y$; $RG3 - \Sigma x^2$; $RG2 - \Sigma x$; $RG1 - \Sigma xy$ Вызов n из $RG0$ Последовательное получение $\bar{y}, \overline{x^2}, \bar{x}, \overline{xy}$ Занесение результатов в $RG(5 - i)$, номер которого хранится в $RG0$. Имеем: $\bar{y} - RG4$; $\overline{x^2} - RG3$; $\bar{x} - RG2$; $\overline{xy} - RG1$.
15	35	ИП2	15	Если условие $5 - i = 0$ выполняется, вызов $\bar{x}$ из $RG2$.
	36	С/П		Установ. Индикация $\bar{x}$
16	37	ИП3	16	Вызов $\bar{y}$ из $RG3$. Останов. Индикация $\bar{y}$
	38	С/П		
17	39	×	17	Получение $\bar{x} \times \bar{y}$. Получение $\overline{xy} - \bar{x} \times \bar{y}$. Вызов $\overline{x^2}$ из $RG4$. Вызов $\bar{x}$ из $RG2$. Получение $\bar{x}^2$. Получение $\overline{x^2} - \bar{x}^2$. Занесение $(\overline{x^2} - \bar{x}^2)$ в $RG4$. Вызов $\overline{y^2}$ из $RG5$. Вызов $\bar{y}$ из $RG3$. Получение $\bar{y}^2$. Получение $\overline{y^2} - \bar{y}^2$. Занесение $(\overline{y^2} - \bar{y}^2)$ в $RG5$. Получение $(\overline{x^2} - \bar{x}^2) \times (\overline{y^2} - \bar{y}^2)$. Получение $\sqrt{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)(\overline{y^2} - \bar{y}^2)}$. Получение r. Занесение r в $RG0$. Останов. Индикация r
	40	−		
	41	ИП4		
	42	ИП2		
	43	Fx^2		
	44	−		
	45	П4		
	46	ИП5		
	47	ИП3		
	48	Fx^2		
	49	/−/		
	50	П5		
	51	×		
	52	$F\sqrt{}$		
	53	:		
	54	П0		
	55	С/П		

Продолжение программы



Шаг алгоритма	Адрес	Команда	Шаг алгоритма	Операции
18	56	ИП6	18	Вызов n из RG6
	57	ИП6		Вызов n из RG6
	58	1		Занесение 1 в RGX
	59	−		Получение $n-1$
	60	:		Получение $\frac{n}{n-1}$
	61	П6		Занесение $\frac{n}{n-1}$
19	62	ИП4	19	Вызов $(\overline{x^2}-\bar{x}^2)$ из RG4
	63	*		Получение $(\overline{x^2}-\bar{x}^2)n/(n-1)$
	64	F√		Получение S_x
	65	П4		Занесение S_x в RG4
	66	С/П		Останов. Индикация S_x
20	67	ИП6	20	Вызов $n/(n-1)$ из RG6
	68	ИП5		Вызов $(\overline{y^2}-\bar{y}^2)$ из RG5
	69	*		Получение $(\overline{y^2}-\bar{y}^2)n/(n-1)$
	70	F√		Получение S_y
	71	П5		Занесение S_y в RG5
	72	С/П		Останов. Индикация S_y
21	73	ИП0	21	Вызов r из RG0
	74	*		Получение $r\,S_y$
	75	ИП4		Вызов S_x из RG4
	76	:		Получение a_1
	77	П7		Занесение a_1 в RG7
	78	С/П		Останов. Индикация a_1
22	79	ИП2	22	Вызов $\bar{x}$ из RG2
	80	*		Получение $a_1 * \bar{x}$
	81	−		Получение $-a_1 * \bar{x}$
	82	ИП3		Вызов $\bar{y}$ из RG3
	83	+		Получение a_0
	84	П8		Занесение a_0 в RG8
	85	С/П		Останов. Индикация a_0
23	86	8	23	Занесение 8 в RGX
	87	П0		Занесение 8 в RG0
	88	Сх		Сброс (0→RGX).
	89	КП		Очистка регистра RG8, номер которого хранится в RG0



Шаг алгоритма	Адрес	Команда	Шаг алгоритма	Операции
24	90	FL0	24	Получение $8 - i$, проверка условия $8 - i = 0$.
	91	„89"		Если условие $8 - i = 0$ не выполняется, команда с адреса „89"
				Цикл очистки (7 – 1)
				Очистка ($8 - i$), номер которого хранится в $RG0$: : $RG(7 - 1)$.
25	92	С/П	25	Останов
	93	КБПА		Переход к выполнению команд с адреса „00", который хранится в регистре А
26	94	КИП6	26	Получение $i + 1$ в $RG6$
	95	ИП6		Вызов $i + 1$ из $RG6$
27	96	С/П	27	Останов
	97	КБПА		Переход к выполнению команд с адреса „00", который хранится в регистре А ($RG10$)

В предлагаемом алгоритме существенное сокращение числа команд в программе достигается применением косвенной адресации, счетчика циклов $L0$, регистров стека. При этом по командам КП0↑ и КИП0↑ выполняются операции, аналогичные операциям, выполненным по командам КПО и КИПО (из числа, хранящегося в $RG0$, единица не вычитается). В описании операций регистры обозначены символом RGN, где N – номер регистра.

2.1. СОСТАВ БАНКА ДАННЫХ

Банк данных определяют как систему информационных, математических, программных, языковых, организационных и технических средств, предназначенных для централизованного накопления и коллективного многоаспектного использования данных. Массив данных, хранимых в вычислительной системе, называют базой данных. Курс высшей математики излагается на основе сквозного и непрерывного использования алгоритмов при изучении теоретических вопросов и решения задач.

Математическое и программное обеспечение включают системное (ОС ЕС) и прикладное (специализированное) (ПО АОК) программные обеспечения. ПО АОК необходимо для формирования обучающих и контролирующих программ, оно содержит совокупность модулей, обеспечивающих диалог студентов с системой и управление техническими средствами.

Автоматизированные учебные курсы по высшей математике – это программы, которые обеспечивают режимы взаимодействия студента с ЭВМ: обучение, контроль, справочно-информационный поиск, диалоговые вычисления, моделирование, программирование, исследование и т. д. ПО АОК представляет собой совокупность программ, выполняющих ввод, хранение, обработку и предъявление студенту учебной информации с помощью средств отображения. Программные средства оформлены в виде пакета прикладных программ и являются открытой системой, т. е. возможны дополнения новыми программами, корректировка действующих.

База данных ПО АОК включает:

1) учебно-методические материалы;
2) массивы теоретических вопросов по темам [30];
3) массивы задач для обучения и текущего контроля знаний;
4) справочные материалы по темам;
5) массивы алгоритмов, логических схем действия;
6) статистические данные.

К *учебно-методическим материалам* относятся: описание целей обучения, критерии оценки знаний, описание порядка работы, учебный материал, рекомендации преподавателей. В описании целей обучения указывается, какие знания, умения и навыки могут и должны получить студенты в результате усвоения учебного материала курса. Описание порядка работы содержит правила выбора очередного раздела учебного материала. Очередной раздел студент может выбрать сам или по рекомендации преподавателя.

Справочный материал включает информацию о разделах изучаемых тем, сведения по теории, необходимой для проработки учебного материала (понятия, законы, определения), классификацию задач и приемов их решения. Эта информация выдается студенту по запросу или же автоматически при контроле знаний.

В массивах *статистических данных* собираются сведения о каждом студенте. Эта информация необходима для определения эффективности применения АОК, оценки системы влияния технических средств на различные элементы учебного процесса.

Массив теоретических вопросов состоит из перечня тем, формул, понятий, которые соответствуют программе курса. Из этого массива формируются рабочая программа по математике для данной специальности, теоретические вопросы экзаменационных билетов. Вопросы сформированы по семестрам и по темам. Это деление условное. В теоретические вопросы не включены вопросы по теории вероятностей и математической статистике, которые часто изучаются в спецкурсах.

Массивы задач для обучения и текущего контроля знаний содержат примеры для обучения, тестовые вопросы для проверки уровня знаний, контроля усвоения учебного материала, ответы к задачам, задачи прикладного характера, в том числе и для деловой игры.

Массив алгоритмов, логических схем действий включает алгоритмы предоставления учебной информации (линейные, адаптивные), описание системы действий студента при отработке умений и навыков, пути достижения этих целей.

Теоретические вопросы по курсу

I семестр

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

1. Действия над матрицами (умножение на число, сложение матриц, умножение матриц). Свойства действий над матрицами (формулировки и доказательства при примерах матриц размера 3 х 2; 2 х 2; 2 х 3).

2. Свойства определителя матрицы второго порядка (формулировки и доказательства).

3. Формулировка и доказательство теоремы разложения.

4. Формулировка и доказательство теоремы аннулирования.

5. Понятие определителя матрицы любого порядка. Формулировка свойств определителей матриц любого порядка (без доказательства).

6. Понятие обратной матрицы. Нахождение обратной матрицы (формулировка и доказательство теоремы о существовании обратной матрицы).

7. Матричный способ решения системы линейных уравнений. Формулировка и доказательство теоремы о существовании решения системы n уравнений с n переменными.

8. Формулировка и доказательство теоремы о единственности решения невырожденной системы n уравнений с n переменными (вывод формул Крамера).

9. Понятие ранга матрицы. Формулировка теоремы Кронекера–Капелли (без доказательства).

10. Линейные операции над векторами (умножение на число, сложение). Свойства этих операций (формулировки и доказательства).

11. Формулировка и доказательство теоремы о линейной зависимости четырех векторов в пространстве.

12. Проекция вектора на ось. Свойства операции проектирования (формулировка и доказательство).

13. Понятие скалярного произведения двух векторов. Свойства скалярного произведения (формулировка и доказательство). Физический смысл скалярного произведения.

14. Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей (вывод формулы). Нахождение угла между векторами. Условия параллельности и перпендикулярности векторов.

15. Понятие векторного произведения двух векторов. Физический смысл векторного произведения. Формулировка свойств векторного произведения.

16. Выражение векторного произведения через координаты сомножителей (вывод формулы).

17. Смешанное произведение трех векторов. Геометрический смысл смешанного произведения.

18. Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей (вывод формулы). Условие компланарности трех векторов (формулировка и доказательство).

19. Нормальный вектор прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости (вывод формулы).

20. Угол между двумя прямыми (на плоскости) (вывод формулы).

21. Нормальный вектор плоскости. Расстояние от точки до плоскости (вывод формулы).

22. Угол между двумя плоскостями (вывод формулы).

23. Направляющий вектор прямой в пространстве. Канонические уравнения прямой. Параметрические уравнения прямой.

24. Нахождение угла между двумя прямыми в пространстве (вывод формулы).

25. Канонические уравнения эллипса. Характеристическое свойство эллипса. Эксцентриситет эллипса.

26. Каноническое уравнение гиперболы. Характеристическое свойство гиперболы. Асимптоты гиперболы. Экцентриситет гиперболы.

27. Поверхности вращения, вывод правила для составления уравнения поверхности вращения.

28. Виды поверхностей второго порядка и их канонические уравнения.

Математический анализ

29. Линейная функция и ее роль. Линейная интерполяция (вывод формулы).

30. Основные элементарные функции $y = x^n$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ (их свойства, графики, производные).

31. Понятие предела последовательности. Теорема о единственности предела последовательности (формулировка и доказательство).

32. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности (формулировка и доказательство).

33. Теорема о пределе суммы двух сходящихся последовательностей (формулировка и доказательство).

34. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей (формулировка и доказательство).

35. Понятие предела функции в точке. Формулировка свойств предела функции в точке.

36. Эквивалентные бесконечно малые и бесконечно большие функции. Привести примеры.

37. Число e. Предел $(1+\frac{1}{x})$ при $x \to \infty$.

38. Формулировка свойств функции, непрерывной на замкнутом промежутке. Графическая иллюстрация этих свойств.

39. Классификация точек разрыва функции. Примеры.

40. Определение производной. Механический и геометрический смысл производной.

41. Свойства операции дифференцирования (линейность, производная произведения, частного) (формулировки и доказательства).

42. Производная сложной функции. Производная обратной функции (с выводом).

43. Понятие дифференциала функции, его механический и геометрический смысл. Нахождение дифференциала.

44. Свойства дифференциала, инвариантность его формы (формулировка и доказательство).

45. Теорема Ролля (формулировка и доказательство).

46. Теорема Лагранжа (формулировка и доказательство).

47. Вывод формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

48. Вывод правила Лопиталя для нахождения пределов (для случая неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$).

49. Признаки монотонности дифференцируемой функции (формулировка и доказательство).

50. Необходимые условия существования экстремума (формулировка и доказательство).

51. Достаточные условия существования экстремума (формулировка и доказательство).

52. Условия выпуклости и вогнутости графика функции (формулировка и доказательство).

53. Асимптоты графика функции, вывод уравнения асимптоты.

54. Метод хорд для решения алгебраических уравнений (вывод формулы для итераций).

55. Метод касательных для приближенного решения алгебраических уравнений (вывод формулы для итераций).

56. Интерполяционная формула Лагранжа (вывод). Оценка остатка в интерполяционных формулах (без вывода).

57. Производная векторной функции скалярного переменного, ее свойства, геометрический и механический смысл.

58. Понятие кривизны кривой. Вывод формул для вычисления кривизны плоских кривых.

59. Понятие комплексного числа. Алгебраическая форма записи комплексных чисел, действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

60. Модуль и аргумен комплексных чисел, тригонометрическая форма записи комплексных чисел, действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

61. Показательная форма записи комплексных чисел. Формулы Эйлера (вывод).

62. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Теорема об общем виде первообразной (формулировка и доказательство).

63. Свойства неопределенного интеграла (формулировка и доказательство).

64. Теорема о замене переменных в неопределенном интеграле (формулировка и доказательство).

65. Понятие определенного интеграла. Свойства определенного интеграла: линейность, аддитивность, монотонность (формулировка и доказательства).

66. Теорема об оценке определенного интеграла (формулировка и доказательство).

67. Теорема о среднем для определенного интеграла (формулировка и доказательство).

68. Теорема о производной от интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Лейбница – Ньютона (вывод).

69. Теорема о замене переменной в определенном интеграле (формулировка и доказательство).

70. Теорема об интегрировании по частям в определенном интеграле.

71. Вычисление площади фигуры при помощи определенного интеграла в декартовых координатах (вывод формулы).

72. Вычисление площади криволинейного сектора при помощи определенного интеграла (вывод формулы).

73. Вычисление объемов тел по площадям поперечных сечений (вывод формулы).

74. Вычисление длины дуги (вывод формулы).

75. Вычисление объема тела вращения.

76. Вычисление площади поверхности вращения (вывод формулы).

77. Вычисление массы длины кривой и массы плоской фигуры (вывод формулы).

78. Вычисление статических моментов плоской кривой и плоской фигуры относительно осей координат (вывод формулы).

79. Вычисление координат центра тяжести плоской кривой и плоской фигуры (вывод формулы).

80. Вывод формулы прямоугольников для приближенного вычисления определенного интеграла.

81. Вывод формулы трапеций для приближенного вычисления определенного интеграла.

82. Вывод формулы парабол для приближенного вычисления определенного интеграла.

83. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Признаки сходимости.

84. Несобственные интегралы от разрывных функций. Признаки сходимости.

II семестр

Функции нескольких переменных

1. Понятие функции двух переменных, область определения, геометрическая иллюстрация. Понятие функции n переменных.

2. Предел функции двух переменных, основные свойства предела. Непрерывность.

3. Определение частных производных функции нескольких переменных. Основные свойства.

4. Полный дифференциал функции нескольких переменных, его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала. Геометрический смысл полного дифференциала.

5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

6. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

7. Формула Тейлора.

8. Неявные функции. Теорема существования. Дифференцирование неявных функций.

9. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия.

10. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

11. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

12. Метод изоклин решения дифференциальных уравнений первого порядка.

13. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Общий интеграл.

14. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод решения.

15. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод Бернулли.

16. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод вариации произвольной постоянной.

17. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (формулировка). Понятие общего и частного решений.

18. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

19. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Свойства линейного дифференциального оператора.

20. Линейные однородные дифференциальные уравнения, свойства их решения.

21. Линейно зависимые и линейно независимые системы функции. Определитель Вронского. Необходимое условие линейной зависимости системы функций.

22. Линейные однородные дифференциальные уравнения, условие линейной независимости их решений. Фундаментальная система решений, структура общего решения. Формула Остроградского – Лиувилля.

23. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами (случай различных действительных корней характеристического уравнения).

24. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (случай равенства нескольких корней характеристического уравнения).

25. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (случай комплексных корней характеристического уравнения).

26. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков. Теорема о структуре общего решения.

27. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений высших порядков методом вариации произвольных постоянных.

28. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, имеющие правую часть специального вида:

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x).$$

29. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами, имеющие правую часть специального вида:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right].$$

30. Системы дифференциальных уравнений. Нормальные системы. Задача Коши для нормальной системы уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (формулировка). Общее и частное решение. Решение нормальной системы методом исключения.

31. Решение нормальной системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристический многочлен. Решение в случае простых корней характеристического многочлена.

Ряды

32. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Геометрическая прогрессия. Необходимый признак сходимости ряда.

33. Основные свойства сходящихся рядов: умножение на число, сложение и вычитание рядов.

34. Ряды с положительными членами. Признаки сравнения.

35. Признак Д'Аламбера сходимости ряда.

36. Радикальный признак Коши сходимости ряда.

37. Интегральный признак Коши сходимости ряда.

38. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница, оценка остатка ряда.

39. Знакопеременные ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда.

40. Функциональные ряды, область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса.

41. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда.

42. Теоремы о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функциональных рядов.

43. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

44. Ряд Тейлора. Теорема о единственности разложения функций в степенной ряд. Достаточные условия разложимости функций в ряд Тейлора.

45. Разложение в ряд Маклорена функций e^x, $\cos x$, $\sin x$. Интервалы сходимости.

46. Разложение в ряд Маклорена функций $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$. Интервалы сходимости.

47. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям.

48. Решение дифференциальных уравнений при помощи рядов.

49. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя, их свойства (ортогональность, норма).

50. Тригонометрическая система функций. Тригонометрический ряд Фурье. Коэффициенты Фурье. Условие разложимости функций в ряд Фурье.

51. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.

52. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на конечном промежутке.

53. Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность. Дифференцирование по параметру.

54. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Гамма-функция. Бета-функция.

55. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье. Синус- и косинус-преобразования Фурье. Свойства преобразований Фурье. Приложение к решению дифференциальных уравнений.

III семестр

Кратные интегралы

1. Двойной интеграл, свойства. Вычисление последовательным интегрированием.

2. Тройной интеграл, свойства. Вычисление последовательным интегрированием.

3. Замена переменных в двойном интеграле. Полярные координаты.

4. Замена перменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты.

5. Применение кратных интегралов для вычисления обьемов тел, площади плоской фигуры (вывод формул).

6. Применение кратных интегралов для вычисления массы тела, центра тяжести и тела.

Криволинейные и поверхностные интегралы

7. Задачи, приводящие к криволинейным интегралам. Определение криволинейных интегралов первого рода, основные свойства и вычисления

8. Криволинейные интегралы второго рода, их вычисление и свойства.

9. Условие независимости криволинейного интеграла от формы пути интегрирования.

10. Геометрические и механические приложения криволинейных интегралов.

11. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода. Формула Грина.

12. Определение поверхностных интегралов. Их свойства и вычисление.

Векторный анализ

13. Скалярное поле. Поверхности уровня и линии уровня скалярного поля. Производная по направлению.

14. Градиент скалярного поля, его координатное и инвариантное определение.

15. Векторное поле. Векторные линии и их дифференциальные уравнения.

16. Односторонние и двусторонние поверхности. Поток векторного поля через поверхность. Физический смысл потока в поле скоростей жидкости. Вычисление потока.

17. Теорема Остроградского о выражений потока векторного поля через замкнутую поверхность интегралом по обьему.

18. Дивергенция векторного поля, инвариантное определение дивергенции, физический смысл дивергенции.

19. Линейный интеграл в векторном поле. Работа силового поля. Циркуляция векторного поля.

20. Теорема Стокса. Ротор поля, его координатное и инвариантное определения. Физический смысл ротора в поле скоростей.

Элементы теории уравнений математической физики

21. Понятие уравнений в частных производных. Основные физические процессы и их уравнения. Уравнения колебаний, теплопроводности, диффузии, Лапласа.

22. Канонические формы и классификация уравнений в частных производных второго порядка в случае двух независимых переменных. Характеристическое уравнение.

23. Уравнение теплопроводности. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности методом преобразования Фурье.

24. Уравнение Лапласа. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге методом Фурье.

Элементы теории функций комплексного переменного

25. Определение функции комплексного переменного. Элементарные функции.

26. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши – Римана. Дифференцируемость элементарных функций.

27. Интегрирование по комплексному аргументу. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.

28. Ряды Тейлора и Лорана. Изолированные особые точки функции, их классификация.

29. Вычеты. Основная теорема о вычетах. Применение вычетов к вычислению интегралов.

Операционное исчисление

30. Оригиналы и изображения. Существование изображений.

31. Дифференцирование и интегрирование изображений.

32. Основные теоремы об оригиналах и изображениях: теорема подобия, теорема запаздывания.

33. Основные теоремы об оригиналах и изображениях: теорема смещения, теорема умножения.

34. Дифференцирование оригиналов.

35. Интегрирование оригиналов.

36. Интегрирование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом.

37. Формулы обращения интеграла Лапласа.

2.2. ФОРМИРОВАНИЕ В БАНКЕ ДАННЫХ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

Экзаменационные билеты формируются в банке данных на базе экзаменационных вопросов, которые выдаются заранее студентам. Билет состоит из четырех вопросов по различным разделам семестрового курса: двух теоретических и двух задач. При этом обеспечивается дифференцирование вопросов и задач по трудности. Алгоритм составления билетов следующий:

1. Формируется массив экзаменационных вопросов, который делится на массив первых вопросов (по линейной алгебре и аналитической геометрии) и массив вторых вопросов (по математическому

анализу). Кроме того, даются типы задач, которые должен уметь решить студент.

2. Из массива первых вопросов выбирается первый вопрос билета и запоминается его служебный признак по номеру билета.

3. По этому признаку из массива вторых вопросов подбирается второй вопрос билета.

4. Выбирается первая задача, при этом учитываются служебные признаки первого и второго теоретических вопросов.

5. Выбор четвертого вопроса билета (второй задачи) выполняется по такому же принципу. Одна из задач экзаменационного билета, в частности, по разделу „Дифференциальное и интегральное исчисление", носит комплексный характер: необходимо исследовать заданную функцию, построить ее график, вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком заданной функции.

Формирование таким образом экзаменационных билетов дает возможность составить необходимое количество их. Ниже приводятся образцы билетов.

Винницкий политехнический институт
Кафедра высшей математики
Автоматизированная система приема экзаменов

Утверждаю
Заведующий кафедрой высшей математики

____

Билет 12

1. Скалярные и векторные величины. Коллинеарные и компланарные векторы. Линейные операции над векторами. Свойства этих операций
2. Производная сложной функции; обратной функции (вывод)
3. Исследовать функцию y = 12*x** 2*LOG (x):
   указать область определения функции;
   найти точки пересечения кривой с осью абсцисс;
   найти экстремумы функции;
   исследовать график функции не выпуклость и вогнутость, найти точки перегиба;
   построить график функции;
   вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой y = 12*x**2**LOG(x) и прямыми x = 1, x = 13, y = 0
4. На материальную точку действует сила F. Найти работу этой силы при перемещении точки из положения A (x_A, y_A, z_A) в положение B (x_B, y_B, z_B). Исходные данные: $\vec{F} = (-1; 3; -3)$, $A\,(3; 2; 1)$, $B\,(-4; 2; 5)$

Винницкий политехнический институт
Кафедра высшей математики
Автоматизированная система приема экзаменов

Утверждаю
Заведующий кафедрой высшей математики

____

Билет 7

1. Понятие определителя любого порядка. Свойства определителей n-го порядка
2. Сравнение функций. Порядок малости. Эквивалентные функции. Асимптотические равенства
3. Исследовать функцию $y = 7 * X ** 2 * LOG(x)$:
   указать область определения;
   найти точки пересечения кривой с осью абсцисс;
   найти экстремумы функции;
   исследовать график функции на выпуклость и вогнутость, найти точки перегиба;
   построить график функции;
   вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 7 * X ** 2 * *LOG(x)$ и прямыми $x = 1$, $x = 8$, $y = 0$
4. Найти объем тетраэдра с вершинами в точках $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$, $D(x_D, y_D, z_D)$.
   Исходные данные: $A(-1; -5; 2)$, $B(-6; 0; -3)$, $C(3; 6; -3)$, $D(-10; 6; 7)$

2.3. ФОРМИРОВАНИЕ СПИСКА НАВЫКОВ И УМЕНИЙ

По всем разделам курса высшей математики разработаны основные требования к знаниям студентов теоретических и практических вопросов изучаемого материала. Эти требования вводятся в банк данных АОК в виде списка навыков и умений, причем к каждому вопросу приведено наименование основных литературных источников с указанием параграфов, страниц, номеров задач и примеров.

В приведенных ниже примерах формирования списков навыков и умений использованы восемь литературных источников:

1. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учеб. для вузов. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1988. – 224 с.
2. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика. Дифференциальное исчисление. – М.: Наука, 1988. – 432 с.
3. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Краткие интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
4. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: Учеб. пособие для втузов. – 13-е изд. – М.: Наука, 1985. – 432 с. – Т. 1.

5. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: Учеб. пособие для втузов. – 13-е изд. – М.: Наука, 1985. – 560 с. – Т. 2.

6. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1980. – 416 с.

7. *Сборник* задач по математике для втузов: Учеб. пособие для втузов. – Ч. 1.: Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М.: Наука, 1986. – 464 с.

8. *Сборник* задач по математике для втузов: Учеб. пособие для втузов. – Ч. 2: Специальные разделы математического анализа / Под. ред. А. В. Ефимова. Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М.: Наука, 1986. – 368 с.

Ссылки на них оформлены следующим образом: в квадратных скобках первая цифра означает номер источника, последующие – номер главы, параграфа, примера, упражнения, страницы и т. д.

Основные умения и навыки

Определители и матрицы. Системы линейных уравнений [1, § 1–4]

1. Выполнять линейные операции над матрицами, умножать матрицы.
2. Вычислять определители второго, третьего, четвертого порядка, уметь разлагать определитель по элементам некоторой строки или столбца, находить алгебраические дополнения элементов определителя.
3. Находить обратную матрицу. Уметь решать систему алгебраических уравнений матричным способом.
4. Решать систему алгебраических уравнений по формулам Крамера.
5. Определять ранг матрицы. Исследовать на совместность систему алгебраических уравнений по теореме Кронекера – Капелли.
6. Решать системы алгебраических уравнений методами Гаусса, Жордана – Гаусса.
7. Решать однородные системы алгебраических уравнений.
8. Уметь решать задачи: [7, гл. 3, 1.1.–1.7; 1.10–1.20; 1.40; 1.44–1.50; 2.1.–2.18; 2.27–2.38; 2.41–2.43; 3.19–3.23; 3.25–3.28; 3.32–3.36; 3.42–3.44; 4.1–4.8; 4.12–4.27; 4.39–4.41; 4.54–4.58].

Векторная алгебра и аналитическая геометрия [1, § 1–5]

1. Выполнять линейные операции над векторами.

2. Определять базис на плоскости и в пространстве, находить разложение вектора по базису, длину вектора, направляющие косинусы вектора, нормировать вектор.

3. Уметь вычислять скалярное произведение двух векторов, угол между двумя векторами, проекцию вектора на вектор, работу по перемещению точки.

4. Находить векторное произведение двух векторов, площадь треугольника по заданным координатам вершин, моменты сил.

5. Вычислить смешанное произведение трех векторов, объем параллелепипеда, построенного на трех векторах, проверять компланарность трех векторов.

6. Знать и использовать при решении задач различные виды уравнения прямой на плоскости: общее уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение прямой, проходящей через данные точки; уравнение прямой в отрезках; нормальное уравнение прямой.

7. Уметь преобразовывать общее уравнение прямой к нормальному, находить расстояние от точки до прямой, определять взаимное расположение двух прямых (параллельность, перпендикулярность, угол между двумя прямыми).

8. Уметь использовать при решении задач различные виды уравнения плоскости: общее уравнение; уравнение плоскости, проходящей через данную точку; уравнение плоскости в отрезках; нормальное уравнение плоскости; уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

9. Находить расстояние от точки до плоскости, исследовать взаимное расположение двух плоскостей (параллельность, перпендикулярность, угол между двумя плоскостями).

10. Уметь преобразовывать общее уравнение прямой в пространстве (как линии пересечения двух плоскостей) к каноническим и параметрическим уравнениям; исследовать взаимное расположение двух прямых в пространстве, плоскости и прямой в пространстве.

11. Составлять по геометрическим свойствам уравнения кривых на плоскости, канонические уравнения окружности, эллипса, гиперболы, параболы.

12. Строить линии в полярной системе координат.

13. Уметь решать задачи: [7, гл. 2, 1.3.–1.11; 1.20; 1.24–1.32; 1.56–1.57; 1.60–1.67; 1.85–1.95; 1.98–1.105; 2.1–2.8; 2.10; 2.40–2.42; 2.46; 3.16–3.21; 3.29; 3.49; 3.68; 3.81–3.86].

Неопределенный интеграл [2, гл. 3, 5]

1. Знать напамять основную таблицу неопределенных интегралов.

2. Владеть общей техникой интегрирования по частям и техникой замены переменной в простых случаях.

3. Уметь интегрировать функции вида: $P(x)\arcsin x$, $P(x)e^{\alpha x}\cos bx$, $P(x)e^{\alpha x}\sin \beta x$, $P(x)\ln x$, $P(x)\arccos x$, $P(x)\,\mathrm{arctg}\, x$, дробно-рациональные функции.

4. Владеть техникой тригонометрических подстановок для интегрирования функций, рациональных относительно x и $\sqrt{a^2-x^2}$ или $\sqrt{a^2+x^2}$ или $\sqrt{x^2-a^2}$.

5. Уметь решать задачи: [6, 1676–1776; 1781–1818; 1820–1831; 1832–1855; 1860–1862; 1910–1915; 1940–1950; 2012–2016; 2022–2023; 2036–2043; 2090–2100; 2132–2135; 2151–2154].

Определенный интеграл [2, гл. 6, 7; 5, гл. 11,12]

1. Вычисление определенного интеграла: применение формулы Ньютона – Лейбница, интегрирование по частям, замена переменной.

2. Оценка определенного интеграла. Среднее значение функции на промежутке.

3. Применение квадратурных формул прямоугольников, трапеций и парабол. Знание точности этих формул.

4. Исследование сходимости несобственных интегралов.

5. Вычисление сходящихся несобственных интегралов.

6. Вычисление главного значения несобственного интеграла при его существовании.

7. Вычисление площади плоских фигур, граница которых задана в декартовых или полярных координатах.

8. Вычисление длины пространственной дуги, заданной параметрически. Вычисление длины плоской дуги, заданной в декартовых координатах.

9. Вычисление объема тела по известным площадям его плоских параллельных сечений. Вычисление объема тела вращения в декартовых координатах.

10. Вычисление площади поверхности вращения в декартовых координатах.

11. Вычисление статических моментов дуги и плоской фигуры относительно координатных осей. Вычисление координат центра тяжести дуги и плоской фигуры.

12. Применение определенного интеграла в простейших задачах механики, физики и других прикладных дисциплинах.

13. Уметь решать задачи: [6, 2455–2467; 2490–2492; 2519–2523; 2536; 2546; 2555–2560; 2579–2584; 2594–2598; 2610; 2611; 2613–2617].

Введение в анализ [2, гл. 2, § 2.1–2.6; гл. 3, § 3.1–3.10; гл. 4, § 4.1–4.22; 5, гл. 1, § 1–9; гл. 2 § 1–11].

1. Знать все основные элементарные функции и их графики.

2. Зная график функции $y = f(x)$, уметь построить графики функций: $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = f(x-a)$, $y = b + f(x)$, $y = f(ax)$, $a > 0, a \neq 1$, $y = bf(x)$, $b > 0, b \neq 1$.

3. Находить естественную область определения функции и множество ее значений.

4. Уметь находить пределы последовательностей.

5. Вычислять пределы отношения многочленов при $x \to \infty$, при $x \to a$ (неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$), раскрывать неопределенности $\frac{0}{0}$, 1^{∞}, используя замечательные пределы

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

6. Вычислять пределы отношения функций, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

7. Исследовать непрерывность функций, находить и классифицировать точки разрыва.

8. Уметь решать задачи: [7, гл. 1, 2.8–2.21; 2.40–2.45; 2.47–2.52; 2.53–2.59; 2.81–2.96; 3.19–3.27; 4.12–4.21; 4.24–4.30; 4.36–4.45; 4.49–4.56; 4.63–6.66; 4.91–4.94; 4.109–4.110; 4.112–4.124].

Дифференциальное исчисление функции одной переменной [2, гл. 4, § 4.1–4.22; 4, гл. 3, § 1–27; гл. 4, § 1–7; гл. 5]

1. Знать напамять основную таблицу производных и правила дифференцирования функций.

2. Владеть общей техникой дифференцирования функций.

3. Знать логарифмическую производную функции и уметь применять ее при нахождении производной.

4. Уметь дифференцировать неявные и параметрически заданные функции.

5. Уметь находить производные высших порядков.

6. Знать геометрический и механический смысл производных первого и второго порядка и уметь применять их к решению задач.

7. Находить дифференциалы первого и высшего порядков от функции одной переменной.

8. Применять дифференциал в приближенных вычислениях.

9. Знать и уметь применять правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

10. Представлять функции по формуле Тейлора в виде многочлена n-й степени и остаточного члена.

11. Применять формулу Тейлора в приближенных вычислениях.

12. Находить интервалы возрастания и убывания функций, точки экстремума, экстремум функции.

13. Находить наибольшее и наименьшее значение функции на данном отрезке.

14. Находить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба.

15. Находить асимптоты графика функции.

16. Уметь строить графики элементарных функций как результат общего исследования функций при помощи первой и второй производной.

17. Уметь решать задачи: [7, гл. 5, 1.9–1.11; 1.21–1.50; 1.51–1.56; 1.114–1.126; 1.138–1.153; 1.158–1.163; 1.169–1.172; 1.206–1.216; 1.235–1.237; 1.241; 2.10–2.21; 2.23–2.25; 3.14–3.26; 3.30–3.35; 3.39–3.44; 3.54–3.60; 3.64–3.65; 4.4–4.8; 4.14–4.18; 4.29–4.32; 4.42–4.45; 4.52–4.56; 4.63–4.66; 4.85–4.86; 4.99–4.105; 4.111–4.113].

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных [2, гл. 8, § 8.1–8.9; 8.11; 8.12; 8.15; 8.16; 4, гл. 8, § 1–13].

1. Нахождение естественной области определения функции нескольких переменных.

2. Исследование гладкости функции нескольких переменных: нахождение области, где функция непрерывна, дифференцируема.

3. Построение линий и поверхностей уровня функций нескольких переменных.

4. Нахождение частных производных первого и высших порядков функций нескольких переменных.

5. Дифференцирование сложной функции одной или нескольких переменных. Нахождение производных первого и высших порядков таких функций.

6. Нахождение производных неявной функции одной или нескольких переменных.

7. Нахождение уравнений касательной плоскости и нормали к поверхности.

8. Нахождение дифференциалов первого, второго, третьего порядков функций нескольких переменных.

9. Применение дифференциалов в приближенных вычислениях.

10. Уметь решать задачи: [6, 2983–2991; 3010–3013; 3028–3030; 3043–3054; 3094–3098; 3110–3115; 3124–3130; 3137; 3204; 3207–3210; 3410–3415; 3420].

Обыкновенные дифференциальные уравнения [3, гл. 1; 5, гл. 13]

1. Графическое построение поля направлений и изоклин для уравнения первого порядка.

2. Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.

3. Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка, однородных относительно переменных.

4. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

5. Интегрирование дифференциальных уравнений Бернулли.

6. Интегрирование дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка.

7. Решение вопроса о линейной зависимости или независимости данной системы функций.

8. Нахождение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка по известному нетривиальному решению.

9. Интегрирование линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

10. Интегрирование линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида

$$P(x)\,e^{\alpha x}, \quad P(x)\,e^{\alpha x}\cos bx, \quad P(x)\,e^{\alpha x}\sin bx,$$

где α и b – вещественные константы; $P(x)$ – многочлен.

11. Применение принципа наложения решений для интегрирования линейного неоднородного дифференциального уравнения.

12. Интегрирование линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

13. Интегрирование линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффицентами во всех случаях, когда корни характеристического уравнения находятся без затруднений (без применения численных методов).

14. Составление и интегрирование дифференциальных уравнений, к которым приводятся простейшие задачи геометрии, механики, физики, химии и других дисциплин при условии, что математическое описание задачи не связано с трудностями.

15. Нормальная система дифференциальных уравнений первого порядка. Интегрирование системы.

16. Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

17. Уметь решать задачи: [6, 3901–3910; 3913–3919; 3925; 3927; 3934–3943; 3954–3962; 3965–3968; 3971; 3974; 4095; 4096; 4101–4103; 4155–4164; 4165; 4208–4210; 4251–4287; 4301–4309; 8, гл. 9, 9.4–9.14; 9.16–9.20; 9.22–9.44; 9.46–9.65; 9.67–9.95; 9.165–9.180; 9.187–9.195; 9.211–9.262; 9.310; 9.312; 9.321–9.330; 9.342–9.344; 9.354–9.376; 9.412–9.421].

3.1. МЕТОДИКА РАЗРАБОТКИ АЛГОРИТМОВ ОБУЧЕНИЯ И КОНТРОЛЯ

Разработка алгоритмов обучения и контроля для обучающих программ включает следующие этапы: отбор учебного материала; преобразование теоретических разделов курса в форму, удобную для алгоритмизации; классификация задач и упражнений для создания однотипных методов их решения; разработку методов контроля, оценочных шкал, методов оценки; разработку методики обучения в составе АОК.

Поскольку основные элементы учебного процесса подчинены целям обучения, то в соответствии с последними и осуществляется отбор учебного материала для обучающих программ.

В настоящее время отсутствует целостная теория педагогических целей обучения [14]. Одной из моделей обоснования системы целей может служить теория поэтапного формирования умственных действий [36]. Согласно этой концепции, предметные знания соединяются с целями обучения через познавательную деятельность. Конкретное содержание этой деятельности изменяется от наиболее обобщенных приемов умственной деятельности, соответствующих целям обучения по специальности, до частных видов усваиваемых действий, соответствующих целям обучения по учебным дисциплинам. В соответствии с этими положениями в работе [36] предложено описывать цели обучения на языке усваиваемой деятельности и формулировать в виде перечня типовых задач.

Цели обучения математике можно сформулировать следующим образом [37]. Студент должен овладеть основными методами исследования и решения математических задач, основными численными методами математики и их простейшими реализациями на ЭВМ; приобрести умение самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ инженерных задач.

Поэтому на этапе отбора учебного материала для обучающих программ необходима систематизация типовых задач, удовлетворяющая требованиям, базирующимся на дидактических принципах обучения. Отметим некоторые из них.

Исходя из принципа целесообразности, отбирается тот материал, изучение которого более эффективно с помощью АОК, чем при использовании других дидактических средств. Так, разделы курса, которые раскрывают фундаментальные понятия, содержащие общие методы исследования, нужно излагать на лекции, используя обучающие программы информационно-справочного, демонстрационного типов.

При отборе задач учитывается также планируемая форма взаимодействия с ЭВМ. Например, если предлагается проведение учебной деловой игры, можно воспользоваться задачами из математической статистики с широким привлечением реальных производственных данных и реальных производственных систем, в которых применяются статистические методы. Методические указания по проведению деловой игры приведены в гл. 5.

Во многих разделах курса есть материал, который можно изучить, закрепить, используя игровую форму обучения или контроля. Например, при изучении линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для закрепления навыков решения уравнений такого типа студенту предлагается задача, требующая составления дифференциального уравнения и разработки машинного алгоритма и программы ее решения. При этом реализуется диалоговая система обучения машины. К таким задачам относятся электротехнические и др.

При изложении численных методов ЭВМ, входящие в состав АОК, используются в режиме счета. Существенную роль играет возможность использования машинной графики, которая служит средством не только иллюстрации, но и анализа явлений, экспериментальных данных.

В соответствии с принципом профессиональной направленности обучения математике формируется набор упражнений и задач содержательного характера из предметной области деятельности студента. Важно предусмотреть задачи для реализации учебных целей подготовки специалиста к решению реальных производственных проблем. Осуществить дидактический принцип единства коллективного и индивидуального можно сравнительно легко в условиях применения АОК, с помощью задач для коллективного решения, требующих обсуждения, дискуссии. Таким образом, в результате отбора учебного материала также будет сформирована в общем виде модель учебной деятельности обучаемого.

Затем необходимо разработать алгоритмы решения задач и алгоритмы обучающих программ. Прежде всего составляются блок-схемы или граф-схемы алгоритмов, включающие контролирующие, информационно-справочные и другие блоки, а также условия, по которым при достижении результата обучение признается законченным, и т. п.

Автор учебного курса должен указать верхний и нижний уровни детализации алгоритма, которые определяются критериями оценки знаний, приобретенных умений и навыков.

Обучающая программа учитывает личность студента, что способствует осознанности восприятия и усвоения учебного материала. В связи с этим автор предусматривает знакомство студента с целями учебно-познавательной деятельности, определенную самостоятельность его в выборе пути прохождения программы, выдачу результатов статистического анализа успешности обучения.

Важную психологическую роль играют корректность, доброжелательные реплики, структура предложений диалога, что может снизить уровень тревоги обучаемого.

3.2. АЛГОРИТМ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АОК В РЕЖИМЕ ОБУЧЕНИЯ

Алгоритм обучения включает следующие процедуры:

1. Генерирование теоретических вопросов и задач.
2. Информацию по теоретическим вопросам.
3. Решение типовых задач по каждой теме.
4. Контроль правильности ответов на теоретические вопросы (формулировки теорем, определения, формулы) и решения задач.
5. Демонстрацию на экране цветного монитора графиков, таблиц, полей.

При самостоятельной работе в режиме обучения студент:

1. Набирает код темы, занятия; на дисплее высвечивается теоретический справочный материал, в котором заранее предусмотрены вопросы студенту.
2. Проверяет свои знания по теоретическим вопросам данной темы, заполняя „просветы" в тексте. При этом ЭВМ контролирует ответы и подсказывает в случае необходимости.
3. Знакомится с решением приведенных типовых задач.
4. Решает самостоятельно предложенные задачи по разработанному ранее алгоритму. ЭВМ контролирует правильность ответа и дает подсказку, если задача решена неверно.

Ниже приведен дидактический материал для работы АОК в режиме обучения.

В п. 3.1.1. приведены примеры алгоритмов решения задач по теме „Производная и ее приложения". Эта тема должна заканчиваться изучением полного исследования функции и построением графика. В силу важности этих вопросов их алгоритмы вынесены в отдельный параграф. Сначала рассматривается алгоритм повторения теоретических вопросов. В рамочки заключены те формулы, которые студент должен ввести в ЭВМ. Возможны и другие варианты контроля знаний. В частности, необходимо разработать ответы обучающей программы в случае неправильных ответов студента, дать разъяснения его ошибок. В зависимости от цели занятия можно предусмотреть ответ на аналогичный вопрос в случае неудачного первого ответа или обращения к справочнику обучающей системы.

Приводится пример исследования функции, зависящей от параметра N: это может быть порядковый номер студента, случайное число или иным способом организованное число. Числовой ответ можно сравнивать с эталонным до второго знака после запятой.

1. Дифференциальное исчисление

1.1. Понятие производной и ее вычисление

Решить задачи по предложенным алгоритмам:

Задача 1. Пользуясь определением производной, найти производную функции $f(x) = 5x^2 - 3x$ в т. $x = x_0$.

Ответ: $f'(x_0) = 10x_0 - 3$.

Алгоритм решения: 1) найти приращение функции $f(x) = 5x^2 - 3x$ в т. $x = x_0$; 2) найти отношение приращения функции в т. $x = x_0$ к приращению аргумента; 3) найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю приращения аргумента.

Задача 2. Показать, используя определение производной, что функция:

1) $y=\sqrt[5]{x}$ не имеет конечной производной в т. $x_0=0$;

2) $y=\sqrt[3]{x-1}$ не имеет конечной производной в т. $x_0=1$;

3) $y=2|x|+1$ не имеет конечной производной в т. $x_0=0$.

Ответ: 1) $y'\to\infty$; 2) $y'\to\infty$; 3) производная не существует.

Алгоритм решения: 1) найти приращение функции y в т. x_0; 2) найти отношение $\Delta y/\Delta x$ в т. x_0; 3) найти $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta x$.

Задача 3. Показать, пользуясь определением производной, что функция $y=2|x|+1$ не имеет производной в т. $x_0=0$.

Ответ: $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\Delta y/\Delta x \neq \lim\limits_{\Delta x\to +0}\Delta y/\Delta x$ в т. $x_0=0$ не существует производной.

Алгоритм решения: 1) найти приращение Δy функции в т. $x_0=0$ при $\Delta x>0$; 2) найти правосторонний предел отношения приращения функции к приращению аргумента $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\Delta y/\Delta x$; 3) найти приращение Δy функции в т. $x_0=0$ при $\Delta x<0$; 4) найти левосторонний предел отношения приращения функции к приращению аргумента $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\Delta y/\Delta x$.

Задача 4. Точка движется по прямой по закону $s=t^3$, где s – путь, измеряемый в сантиметрах, а t – время в секундах. Найти:

1) среднюю скорость точки за время от $t=3$ до $t_1=3+\Delta t$, считая $\Delta t=1; 0.01$;

2) истинную скорость точки в момент $t=3$.

Ответ: $v_{ср}=37$ см/с при $\Delta t=1$; $v_{ср}=27{,}09$ см/с при $\Delta t=0{,}01$; $v=27$ см/с.

Алгоритм решения: 1) найти приращение функции $s=t^3$ при любых t и Δt; 2) найти $v_{ср}$ при любых t, Δt; $v_{ср}=\Delta s/\Delta t$; 3) вычислить $v_{ср}$ при $\Delta t=1$ и $\Delta t=0{,}01$, $t=3$; 4) найти истинную скорость $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}v_{ср}$ при $t=3$.

Задача 5. Найти производную функции $y=(3+4\sqrt[3]{(2x)^4})^5$ при $x=0$.

Ответ: $y'(0)=0$.

Алгоритм решения: 1) ввести обозначения $y=u^5$, где $u=3+4\sqrt[3]{(2x)^4}$; 2) найти y', используя формулы $y'_x=y'_u\cdot u'_x$, $(cu^n)'_u=cnu^{n-1}$; 3) вычислить $y'(0)$.

Задача 6. Найти производную функции $y=\ln \operatorname{tg} 2x$ в т. $x=\pi/8$.

Ответ: $y'(\pi/8)=4$.

Алгоритм решения: 1) ввести обозначения $y=\ln u$, где $u=\operatorname{tg} v$, $v=2x$; 2) найти y'_x, использовав формулы $y'_x=y'_u u'_v v'_x$, $(\operatorname{tg} v)'_x=\dfrac{v'}{\cos^2 v}$, $(\ln u)'_x=\dfrac{u'}{u}$; 3) вычислить $y'(\pi/8)$.

Задача 7. Найти производную функции $y = \frac{\cos x}{1-\sin x}$ в т. $x = \pi/6$.

Ответ: $y'(\pi/6) = 2$.

Алгоритм решения: 1) ввести обозначения $u = \cos x$, $v = 1 - \sin x$; 2) использовать формулы

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

Задача 8. Найти производную функции $y = \operatorname{ch}^3 5x$ при $x = 0$.

Ответ: $y'(0) = 0$.

Алгоритм решения: 1) ввести обозначения $y = u^3$, $u = \operatorname{ch} v$, $v = 5x$; 2) найти y'_x, использовав формулы $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$, $(u^n)'_u = nu^{n-1}$, $(\operatorname{ch} v)'_v = \operatorname{sh} v$; 3) вычислить $y'_x(0)$.

Задача 9. Найти производную функции $y = \arcsin\sqrt{4 - x^2}$ при $x = 1$.

Ответ: $y'(1) = -\sqrt{3}/3$.

Алгоритм решения: 1) ввести обозначения $y = \arcsin u$, $u = \sqrt{v}$, $v = 4 - x^2$; 2) найти y'_x использовав формулы $y'_x = y'_u u'_v v'_x$, $(\arcsin u)'_u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, $(\sqrt{v})'_x = v'/(2\sqrt{v})$; 3) вычислить $y'(1)$.

Задача 10. Найти производную функции $y = 3^{\ln(x^2 + x + 1)}$ при $x = -1$.

Ответ: $y'(-1) = \ln 3$.

Алгоритм решения: 1) ввести обозначения $y = 3^u$, $u = \ln(x^2 + x + 1)$; 2) найти y'_x, использовав формулы $y'_x = y'_u u'_x$, $(a^u)'_u = a^u \ln a$, $(\ln v)'_x = v'/v$; 3) вычислить $y'(-1)$.

Задача 11. Найти производную y'_x, если функция $y(x)$ задана параметрически $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ при $t = 0$.

Ответ: 2.

Алгоритм решения: 1) найти y'_t и x'_t; 2) вычислить отношение $y'_x = y'_t/x'_t$; 3) определить $(y'_x)'_t$; 4) найти $y''_x = (y'_x)'_t/x'_t$; 5) вычислить $y'_x = 0$.

Задача 12. Найти производные от функций, заданных параметрически: а) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ при $t = \pi/2$;

б) $\begin{cases} x = 2\ln \operatorname{ctg} t \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t \end{cases}$ при $t = \pi/4$.

Ответ: а) 1; б) 0.

Алгоритм решения: 1) найти производные от x и y по параметру t, т. е. x'_t и y'_t; 2) найти производную от y по переменной x, использовав формулу $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ или $y'_x = y'_t/x'_t$; 3) вычислить dy/dx при указанных значениях t.

Задача 13. Найти производную y'_x, если функция $y(x)$ задана параметрически $x = \ln(1 + t^2)$; $y = t - \operatorname{arctg} t$ при $t = 8$.

Ответ: 4.

Алгоритм решения: 1) найти производные x'_t, y'_t; 2) найти производную y'_x по формуле $y'_x = y'_t / x'_t$; 3) вычислить $y'_x(8)$.

Задача 14. Найти угловой коэффициент касательной к кривой

$$\begin{cases} x = t^2 + 3t - 8, \\ y = 2t^2 - 2t - 5 \end{cases}$$

в т. $M(2; -1)$.

Ответ: 0,857.

Алгоритм решения: 1) определить значение t, соответствующее данным значениям x и y, одновременно удовлетворяющее двум уравнениям:

$$\begin{cases} t^2 + 3t - 8 = 2, \\ 2t^2 - 2t - 5 = -1; \end{cases}$$

2) найти производную y'_x по формуле $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$; 3) вычислить значение y'_x при найденном в п. (1) значении t, т. е. определить искомый угловой коэффициент.

Задача 15. Методом логарифмического дифференцирования найти производные функций:

а) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^3(x^2+1)}{\sqrt{5-x}}}$ при $x = 1$;

б) $y = [u(x)]^{v(x)}$ $(u(x) > 0)$ при $x = x_0$.

Ответ: а) 1,70; б) $y' = v(x_0)[u(x_0)]^{v-1}\, u'(x_0) + [u(x_0)]^{v(x_0)} \ln u(x_0) \times v'(x_0)$.

Алгоритм решения: 1) найти $\ln y(x)$; 2) продифференцировать полученное выражение; 3) из него найти производную y'; 4) подставить вместо y его выражение, данное в условии; 5) вычислить y': а) при $x = 1$; б) при $x = x_0$.

Задача 16. На кривой $y = x^3 - 5x - 1$ найти точки, в которых касательная: а) параллельна прямой $y = -2x$; б) перпендикулярна к прямой $y = -x/7$; в) составляет с положительным направлением оси Ox угол 45°.

Ответ: а) $M_1(-1; 3)$, $M_2(1; -5)$; б) $M_3(-2; 1)$, $M_4(2; -3)$; в) $M_5(-\sqrt{2}; 3\sqrt{2} - 1)$, $M_6(\sqrt{2}; -3\sqrt{2} - 1)$.

Алгоритм решения: 1) для отыскания требуемых точек принять во внимание, что в точке касания угловой коэффициент касательной к данной кривой равен производной y'. Найти y'; 2) найти точки, в которых касательная к кривой $y = x^3 - 5x - 1$ параллельна прямой $y = -2x$, используя равенство угловых коэффициентов $k_1 = 3x^2 - 5$

и $k_2 = -2$; 3) использовав условие перпендикулярности двух прямых $k_1 = -1/k_3$, где $k_3 = -1/7$, решить условие (б) задачи; 4) для решения условия (в) использовать равенство $k_1 = \mathrm{tg}\,45°$.

Задача 17. Найти приближенное значение $\sqrt[5]{33}$, использовав дифференциал функции $y = \sqrt[5]{x}$.

Ответ: 2,0125.

Алгоритм решения: 1) использовать формулу $y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + dy$, положив $x_0 = 32$, $\Delta x = 1$; 2) найти dy по формуле $dy\Big|_{\substack{x_0=32\\ \Delta x=1}} = y'\Big|_{x_0=32}^{\Delta x}$; 3) вычислить $\sqrt[5]{33} \approx \sqrt[5]{32} + dy$.

Задача 18. Найти приближенное значение $\cos 31°$.

Ответ: 0,851.

Алгоритм решения: 1) использовать формулу $y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + dy$, положив $x_0 = \pi/6$, $\Delta x = \pi/180$; 2) найти $dy\Big|_{\substack{x_0=\pi/6\\ \Delta x=\pi/180}} = y'\Big|_{x_0=\pi/6}\Delta x$;

3) вычислить $\cos 31° = \cos(\pi/6 + \pi/180) \approx \cos(\pi/6) + dy$.

Задача 19. Найти приближенное значение $\sin 29°$ с точностью до 0,001 при помощи дифференциала функции $y = \sin x$.

Ответ: 0,484.

Алгоритм решения: 1) применить формулу малых приращений $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$; 2) положить $x_0 = \pi/6$, $\Delta x = -\pi/180$; 3) вычислить $\sin 29° \approx \sin(\pi/6) - \cos(\pi/6)\pi/180$.

Задача 20. Пользуясь понятием дифференциала, найти с точностью до 0,01 приближенное значение функции $y = \sqrt[5]{\dfrac{2-x}{2+x}}$ при $x = 0{,}15$.

Ответ: $y(0{,}15) = 0{,}97$.

Алгоритм решения: 1) записать приращение функции $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$, $y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + \Delta y$; 2) положить $x_0 = 0$, $\Delta x = 0{,}15$, $\Delta y = dy$; 3) найти дифференциал функции при $x_0 = 0$ и $\Delta x = 0{,}15$ по формуле $dy|_{x=0} = y'(0)\Delta x$; 4) вычислить $y(0{,}15) \approx y(0) + dy$.

Задача 21. Найти приращение и дифференциал функции $y = 3x^3 + x - 1$ в т. $x = 1$ при $\Delta x = 0{,}1$. Найти абсолютную и относительную погрешности, которые допускаются при замене приращения функции ее дифференциалом.

Ответ: $\Delta y = 1{,}093$, $dy = 1$, $|\Delta y - dy| = 0{,}093$, $\delta = 8{,}5\ \%$.

Алгоритм решения: 1) найти приращение Δy функции $y(x)$, давая приращение Δx независимой переменной x: $\Delta y = [3(x + \Delta x)^3 + (x + \Delta x) - 1] - (3x^3 + x - 1)$; 2) выделив главную часть приращения, записать дифференциал dy; 3) вычислить значения Δy и dy при $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$; 4) найти абсолютную погрешность $|\Delta y - dy|$; 5) найти относительную погрешность $\delta = |\Delta y - dy|/|\Delta y|\,100\ \%$.

Задача 22. Найти наибольшее M и наименьшее m значения функции на указанных промежутках:

а) $f(x) = 2x^3 - 3x^3 - 12x + 1$ на $[-2; 5/2]$;

б) $f(x) = x^2 \ln x$ на $[1; e]$;

в) $f(x) = x \exp(-x)$ на $[0; +\infty]$;

г) $f(x) = \sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}$ на $[-1; 1]$.

Ответ: а) $M = 8$; $m = -19$; б) $M = e^2$, $m = 0$; в) $M = 1/e$, $m = 0$; г) $M = 3\sqrt{2}/4$, $m = 0$.

Алгоритм решения: 1) найти $f'(x)$; 2) найти критические точки, приравнивая к нулю производную заданной функции; 3) проверить, принадлежат ли заданному отрезку критические точки; 4) вычислить значения функций в критических точках, принадлежащих данному отрезку; 5) вычислить значения функций на концах указанного промежутка; 6) сравнив значения функции в критических точках и на концах отрезка, выбрать наибольшее и наименьшее значения функций.

Задача 23. Для ограждения клумбы в форме кругового сектора имеется кусок проволоки длиной 20 м. Каким выбрать радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

Ответ: $x = 5$ м.

Алгоритм решения: 1) обозначить радиус круга через x, длину сектора через y; 2) выразить y через x и данные задачи: $20 = 2x + y$ или $y = 2(10 - x)$; 3) площадь кругового сектора $s = \frac{1}{2}xy = x(10 - x)$, где $0 \leqslant x \leqslant 10$; 4) найти наибольшее значение функции $s(x)$, сравнив ее значения в критических точках, где $s'(x) = 0$, и на концах $[0, 10]$.

Задача 24. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном обьемом 32 $м^3$ так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Ответ: $x = 4$ м; $y = 2$ м.

Алгоритм решения: 1) обозначить сторону основания через x, высоту – y, обьем бассейна – V, площадь облицовываемой поверхности – s; 2) выразить s через x и V: $s = x^2 + 4x\frac{V}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}$; 3) исследовать полученную функцию $s(x)$ на минимум в промежутке $]0; \infty[$; 4) записать искомые размеры бассейна.

Задача 25. Применяя правило Лопиталя, найти

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right).$$

Ответ: 0,5.

Алгоритм решения: 1) выяснить тип неопределенности $\infty - \infty$; 2) привести неопределенность $\infty - \infty$ к неопределенности 0/0, преобразовав данную функцию сведением к общему знаменателю; 3) применить правило Лопиталя

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Задача 26. Применив правило Лопиталя, найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(2x) - \exp(-4x)}{\ln(1+x)}.$$

Ответ: 6.

Алгоритм решения: 1) выяснить тип неопределенности; 2) применить правило Лопиталя $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$; 3) положить $f(x) = e^{2x} - e^{-4x}$, $\varphi(x) = \ln(1+x)$; найти $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} \varphi'(x)$; 4) найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{-4x}}{\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Задача 27. Найти $\lim\limits_{x \to +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

Ответ: 1.

Алгоритм решения: 1) выяснить тип неопределенности; 2) обозначить $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$; 3) прологарифмировать y: $\ln y = \sin x \ln \frac{1}{x}$; 4) рассмотреть $\lim\limits_{x \to +0} \ln y$, преобразовав неопределенность $0, \infty$ к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$. Найти $\lim\limits_{x \to +0} (-\ln x)/(1/\sin x)$; 5) найти $\lim\limits_{x \to +0} y$, зная $\lim\limits_{x \to +0} \ln y$.

Задачи для самостоятельной работы

Найти производные функций:

1) $y = \ln \operatorname{tg}(x/2)$ при $x = \pi/4$. Ответ: $y' = \sqrt{2}$.

2) $y = (1 + \sqrt{1+x^2})^5$ при $x = 0$. Ответ: $y' = 0$.

3) $y = \arcsin e^{x^2}$ при $x = 1$. Ответ: $y' = \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}}$.

4) $y = e^{\sin x}/\sqrt{1+\operatorname{tg} x}$ при $x = 0$. Ответ: $y' = -0{,}5$.

5) $y = -0{,}4\,(2x+3)/\sqrt{x^2 + 3x + 1}$ при $x = 0$. Ответ: $y' = 1$.

6) $y = x^3(x^2+1)/\sqrt{x(x-1)}$ при $x = -1$ (предварительно прологарифмировать). Ответ: $y' = 50\sqrt{2}$.

7) $y = x^x$ при $x = 1$ (предварительно прологарифмировать). Ответ: $y' = 1$.

8) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ при $t = \pi/4$. **Ответ:** $y'_x = -1$.

9) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$ при $t = 1$. **Ответ:** $y'_x = -1$.

10) $\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \end{cases}$ при $t = \pi/2$. **Ответ:** $y'_x = -1$.

1.2. Исследование функций и построение графиков

1. Найти область определения функции.

2. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и выяснить характер разрывов, найти точки пересечения кривой с осями координат.

3. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической.

4. Найти асимптоты графика функции

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $x = \boxed{a}$ –вертикальная асимптота. Если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A$, то $y = \boxed{A}$ – горизонтальная асимптота (правая при $x \to +\infty$ и левая при $x \to -\infty$). Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k_1$ и $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - k_1 x] = b_1$, то $y = k_1 x + b_1$ – наклонная (правая) асимптота. Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k_2$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - k_2 x] = b_2$, то $y = k_2 x + b_2$ – наклонная (левая) асимптота.

5. Найти точки экстремума функций, вычислить значения функции в этих точках. Установить интервалы монотонности функции. Для этого:

а) найти первую производную функции;

б) приравнять ее нулю;

в) решив уравнение $f'(x) = 0$, найти стационарные точки; найти точки, где $f'(x)$ не существует;

г) исследовать знак $\boxed{f'(x)}$ слева и справа от точек возможного экстремума.

Если $\boxed{f'(x) < 0}$ при $x < x_0$ и $\boxed{f'(x) > 0}$ при $x > x_0$, то $x = x_0$ – точка минимума функции;

если $\boxed{f'(x) > 0}$ при $x < x_0$ и $\boxed{f'(x) < 0}$ при $x > x_0$, то $x = x_0$ – точка максимума функции;

если $f'(x)$ не меняет знака при переходе через т. x_0, то $\boxed{\text{экстремума нет;}}$

д) если $\boxed{f'(x) > 0}$ $\forall x \in (a,b)$, то функция $f(x)$ возрастает на (a,b); если $\boxed{f'(x) < 0}$ $\forall x \in (a,b)$, то $f(x)$ убывает на (a,b).

6. Найти точки перегиба графика функции, вычислить значения функции в этих точках. Установить интервалы выпуклости графика функции. Для этого:

а) найти вторую производную $f''(x)$;

б) найти точки (из области определения функции), в которых $f''(x) = 0$ и $f''(x) \to \infty$;

в) исследовать знак второй производной: если $\boxed{f''(x) < 0}$ $\forall x \in (a,b)$, то кривая $y = f(x)$ выпукла на (a, b); если $\boxed{f''(x) > 0}$ $\forall x \in (a,b)$, то кривая вогнута на (a,b); если $f''(x_0) = 0$ или не существует, причем x_0 принадлежит области определения функции и $f''(x)$ меняет знак при переходе через т. x_0, то т. $(x_0 f(x_0))$ является $\boxed{\text{точкой перегиба}}$ кривой.

7. Используя результаты исследования, построить график функции. При необходимости уточнить отдельные участки кривой, можно найти координаты нескольких дополнительных точек. При построении графика следует прежде всего нанести на чертеж асимптоты, если таковые имеются, а затем – характерные точки.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{1}{N}x^3(x^2 - N)$, где $N \geq 1$, построить ее график.

Алгоритм решения

1. Область определения функции, точки разрыва, точки пересечения кривой с осями координат:

а) область определения $(-\infty, +\infty)$;

б) точек разрыва нет;

в) точки пересечения с осями координат:

$A(0;0)$, $B(\boxed{\sqrt{N};0})$, $C(\boxed{-\sqrt{N};0})$.

2. Исследовать функции на четность:

$$y(-x) = \frac{1}{N}(-x)^3\left[(-x)^2 - N\right] = -\frac{1}{N}x^3\left(x^2 - N\right) = -y(x).$$

Значит, функция $\boxed{\text{нечетна}}$, ее график симметричен относительно $\boxed{\text{начала координат}}$.

3. Асимптоты графика:

а) функция всюду непрерывна, значит, вертикальных асимптот нет;

б) $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3(x^2 - N)}{Nx} = \boxed{\infty}$.

Значит, $\boxed{\text{наклонных асимптот нет}}$.

4. Исследовать функцию на экстремумы и найти интервалы монотонности:

а) найти $y'(x)$: $y'(x) = \boxed{\frac{1}{N}x^2(5x^2 - 3N)}$;

б) найти стационарные точки: $y'(x) = 0, \frac{1}{N}x^2(5x^2 - 3N) = 0 =$
$=> x_1 = \boxed{0}$, $x_{2,3} = \boxed{\pm\sqrt{0,6N}}$;

в) определить знак $y'(x)$ в окрестности этих точек: при $0 < x < \sqrt{0,6N}, y'(x) \boxed{<} 0$; при $\sqrt{0,6N} < x < +\infty, y'(x) \boxed{>} 0$.

Вывод: точка $\boxed{\text{минимума}}$ функции – $(\sqrt{0,6N}; -0,24N\sqrt{0,6N})$.

В силу симметрии графика функции относительно начала координат точка $(-\sqrt{0,6N}; 0,24\sqrt{0,6N})$ является точкой $\boxed{\text{максимума}}$.

Промежутки возрастания: $\boxed{(-\infty; \sqrt{0,6N}) \cup (\sqrt{0,6N}; +\infty)}$,

промежуток убывания функции: $\boxed{]-\sqrt{0,6N}; \sqrt{0,6N}[}$.

5. Нахождение интервалов выпуклости графика функции, точек перегиба:

а) найти $y''(x) : y''(x) = \frac{2}{N}x(10x^2 - 3N)$;

б) найти точки, в которых $y''(x) = 0$, т. е. $\frac{2}{N}x(10x^2 - 3N) = 0 => x_1 =$
$= \boxed{0}$, $x_{2,3} = \boxed{\pm\sqrt{0,3N}}$;

в) при $0 < x < \sqrt{0,3N}$, $y''(x) \boxed{<} 0$; при $\sqrt{0,3N} < x < +\infty$, $y''(x) > 0$.

Вывод: точка $(\sqrt{0,3N}; -0,06N\sqrt{0,3N})$ является $\boxed{\text{точкой перегиба}}$ графика функции.

Интервал выпуклости кривой $\boxed{(0; \sqrt{0,3N})}$; интервал вогнутости $\boxed{(\sqrt{0,3N}; +\infty)}$.

В силу симметрии графика точкой перегиба является та же точка $\boxed{(-\sqrt{0,3N}; 0,06N\sqrt{0,3N})}$, интервал выпуклости – $(-\infty; -\sqrt{0,3N})$, интервал вогнутости –$(-\sqrt{0,3N}; 0)$.

6. Построить график:

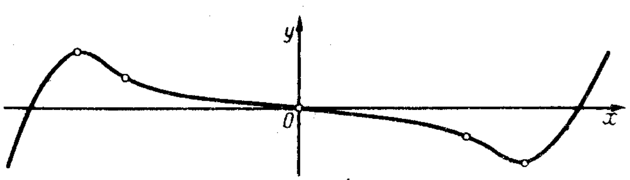


Рис. 2

Задачи для самостоятельной работы

По разработанному алгоритму исследовать следующие функции и построить их графики: а) $y = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$; б) $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$; в) $y = \frac{2x^3}{x^2-4}$; г) $y = x + \ln(x^2 - 1)$; д) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$; е) $y = \arcsin\frac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

Ответы: а) $y_{min}(0) = -5$; точки перегиба: $(-\frac{1}{\sqrt{5}}; -4,5)$, $(\frac{1}{\sqrt{5}}; -4,5)$, $(-1; -4)$, $(1; 4)$;

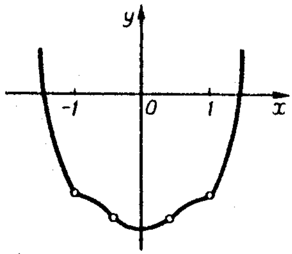


Рис. 3

б) асимптота $y = 0$; $y_{min}(-0,5) = \sqrt[3]{4}$; точки перегиба: $(-1; -1)$, $(0; -1)$;

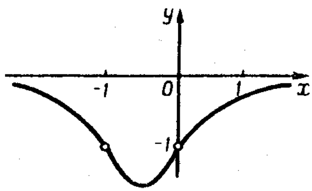


Рис. 4

в) асимптоты: $x = 2$, $x = -2$, $y = 2x$; $y_{min}(2\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$; $y_{max}(-2\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$; точка перегиба $(0; 0)$;

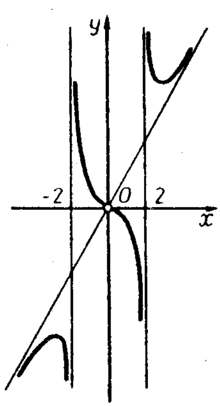


Рис. 5

г) асимптоты: $x=-1$, $x=1$; $y_{max}(-1;-\sqrt{2})=-0{,}84$;

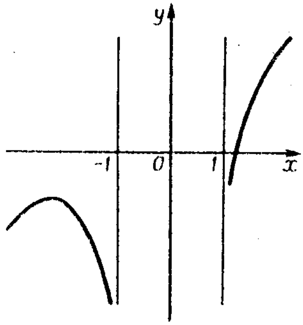


Рис. 6

д) асимптота $x=0$; $y_{min}(0{,}5)\approx 1{,}87$;

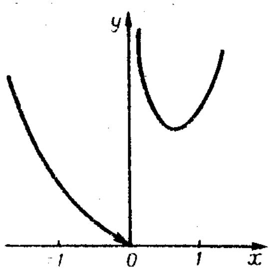


Рис. 7

е) асимптота: $y=-\frac{\pi}{2}$; $y_{max}(0)=\frac{\pi}{2}$ ·

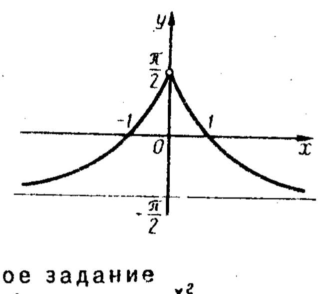


Рис. 8

Контрольное задание

Исследовать функцию $y=\frac{x^2}{4-x^2}$ и построить ее график.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Область определения функции $\boxed{]-\infty;-2[\ \cup\ ]-2;2[\ \cup\ ]2;+\infty[}$	−0,5
2. Точки разрыва: $x_{1,2}=\boxed{\pm 2}$	−0,5

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
3. Асимптоты: $x=\boxed{2}$, $x=\boxed{-2}$, $y=\boxed{-1}$	–1
4. Точка экстремума функции: $x=\boxed{0}$; $y=\boxed{0}$	–1
5. Промежутки выпуклости: $\boxed{]-\infty; 2[\ \cup\ ]2; \infty[}$	–1
промежуток вогнутости $\boxed{]-2; 2[}$	
6. График кривой	–1

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	5	4,5–4	3,5–3	2,5–2

Оценка

Примечание. В примерах контрольных заданий шкала оценок и шкала баллов идентичны указанным, поэтому в дальнейшем они не приводятся.

2. Определенный интеграл

2.1. Понятие определенного интеграла, его основные свойства

Интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \boxed{f(\xi_i)\Delta x_i}, \text{ где } \Delta x_i = \boxed{x_{i+1} - x_i}, \ \xi_i \in [x_i, x_{i+1}].$$

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется

$$\int_a^b f(x)\,dx = \boxed{\lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i}.$$

Пример 1. Вычислить, исходя из определения, $\int_0^1 x\,dx$.

Алгоритм решения

1. По определению $\int_0^1 x\,dx = \lim \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \Delta x_i$ при $\max \Delta x_i \to 0$, где $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

2. Разбить отрезок [0; 1] на n равных частей точками деления $x_i = \frac{i}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Длина каждого частичного отрезка $\Delta x_i = \boxed{1/n}$; при $n \to \infty$, $1/n \to \boxed{0}$.

3. В качестве точек ξ_i взять правые концы частичных отрезков $\xi_i = x_{i+1} = \frac{i+1}{n}$, $i = 0, 1, 2, ..., n-1$.

4. Составить интегральную сумму

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \boxed{\frac{i+1}{n} \cdot \frac{1}{n}} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + ... + n).$$

5. Для нахождения суммы $1 + 2 + ... + n$ воспользоваться формулой суммы n первых членов арифметической прогрессии

$$S = (a_1 + a_n)n/2;$$

$$1 + 2 + ... + n = \boxed{(1+n)n/2}.$$

6. Записать интегральную сумму S_n, используя полученный результат для $1 + 2 + ... + n$: $S_n = \boxed{\frac{n(n+1)}{2n^2}}$, или $S_n = \frac{(1+n)n}{2n^2}$.

7. Найти предел интегральной суммы S_n при $n \to \infty$:

$$\lim S_n = 1/2.$$

Ответ:

$$\int_0^1 x\,dx = \boxed{1/2}.$$

Пример 2. Найти величину интеграла $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\,dx$ исходя из его геометрического смысла.

Алгоритм решения

1. Геометрический смысл определенного интеграла от функции $y=f(x)$ на отрезке $[a; b]$ $(f(x) > 0)$: $\int_a^b f(x)dx$ есть $\boxed{\text{площадь криволинейной трапеции}}$, ограниченной линиями $\boxed{y=f(x),\ x=a,\ x=b,\ y=0}$.

2. Линия $y = \sqrt{16 - x^2}$ есть верхняя половина окружности

$$\boxed{x^2 + y^2 = 16}.$$

3. Часть линии, которая получается при изменении x от 0 до 4, лежит в первой координатной плоскости.

Ответ: $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\,dx = \boxed{4\pi}$.

Пример 3. Оценить интеграл $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$.

Алгоритм решения

1. Использовать теорему об оценке интеграла:

если m – наименьшее, а M – наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то

$$\boxed{m(b-a)} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \boxed{M(b-a)}.$$

2. Определить характер изменения функции $f(x) = \sqrt{1+\cos^2 x}$ на $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$. На $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ функция $\cos x$ монотонно $\boxed{\text{убывает}}$ и меняется от $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ до $\boxed{0}$. Значит, функция $\sqrt{1+\cos^2 x}$ тоже $\boxed{\text{монотонно убывает}}$.

3. Определить наименьшее и наибольшее значения функции $\sqrt{1+\cos^2 x}$ на $[\pi/4; \pi/2]$:

наименьшее $m = \boxed{1}$; наибольшее $M = \boxed{\sqrt{3/2}}$ или $M = \sqrt{6}/2$; $b - a = \pi/4$.

Ответ: $\boxed{\frac{\pi}{4} \leq} \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx \boxed{\leq \frac{\pi\sqrt{6}}{8}}$.

Пример 4. Выяснить, не вычисляя интегралы, какой из них больше:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x}\,dx \quad \text{или} \quad \int\limits_0^1 x^4\,dx.$$

Алгоритм решения

1. Использовать свойство: если $f(x) \leq \varphi(x)$ при $a \leq x \leq b$, то

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx} \leq \boxed{\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx}.$$

2. Сравнить функции $f(x) = \sqrt{x}$ и $\varphi(x) = x^4$ на отрезке $[0; 1]$: $\boxed{\sqrt{x}} > \boxed{x^4}$.

Ответ: $\boxed{\int\limits_0^1 \sqrt{x}\,dx} > \boxed{\int\limits_0^1 x^4\,dx}$

Пример 5. Найти среднее значение функции $y = \sqrt[3]{x}$ на $[0; 1]$.

Алгоритм решения

Использовать теорему о среднем значении функции $f(x)$ на $[a, b]$:

$$f(c) = \boxed{\frac{1}{b-a} = \int\limits_a^b f(x)\,dx}.$$

Ответ: $f(c) = \boxed{3/4}$.

Если студент неверно решил задачу, ЭВМ „предлагает" решение:

$$f(c) = \frac{1}{1-0} \int\limits_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{3 \cdot x^{4/3}}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1) Показать, что в примере 1 при другом выборе точек ξ_i предел интегральной суммы будет тот же.

Взять в качестве ξ_i середины частичных отрезков:

$$\xi_i = \frac{i + 1/2}{n} \; (i = 0, 1, 2, ..., n - 1).$$

2) Исходя из геометрического смысла опеределенного интеграла, вычислить $\int\limits_1^5 (4x - 1)dx$.

Ответ: 44.

Указание. Данный интеграл есть площадь трапеции с высотой $5 - 1 = 4$ и основаниями $4 \cdot 1 - 2 = 3$ и $4 \cdot 5 - 1 = 19$.

3) Оценить интегралы:

$J_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx$. Ответ: $\pi/2 \leq J_1 \leq \pi/2\sqrt{3/2}$;

$J_2 = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{10 + 3\cos x}$. Ответ: $\frac{2\pi}{13} \leq J_2 \leq \frac{\pi 2}{7}$;

$J_3 = \int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$. Ответ: $\frac{1}{e} \leq J_3 \leq 1$.

4) Выяснить, не вычисляя, какой из интегралов больше:

$J_1 = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx$ или $J_2 = \int\limits_0^1 x\,dx$. Ответ: $J_1 > J_2$;

$J_3 = \int\limits_0^1 x^2 \sin^2 x\, dx$ или $J_4 = \int\limits_0^1 x \sin^2 x\, dx$. Ответ: $J_3 < J_4$;

$J_5 = \int\limits_1^2 \ln x\, dx$ или $J_6 = \int\limits_1^2 \ln^2 x^2\, dx$. Ответ: $J_5 > J_6$;

$J_7 = \int\limits_3^4 \ln x\, dx$ или $J_8 = \int\limits_3^4 \ln^2 x^2\, dx$. Ответ: $J_7 < J_8$.

5) Найти среднее значение функции на данном отрезке:

$\sin x,\; 0 \leq x \leq \pi/2$. Ответ: $\frac{2}{\pi}$;

$\cos^3 x,\; 0 \leq x \leq \pi/2$. Ответ: $\frac{4}{3\pi}$;

$\sin^4 x,\; 0 \leq x \leq \pi$. Ответ: $\frac{3}{8}$;

Контрольное задание

1. Найти величину интеграла $\int\limits_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$ исходя из его геометрического смысла.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Определить вид кривой $y = \sqrt{4 - x^2}$ и построить ее график	– 1,5
2. Найти ту часть линии $y = \sqrt{4 - x^2}$, которая соответствует изменению $0 \leq x \leq 2$	– 1
Ответ	– 1

2. Оценить $\int\limits_1^3 \sqrt{3 + x^2}\, dx$.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Характер изменения функции $\sqrt{3+x^2}$ на [1; 3].	−1
2. Наименьшее m и наибольшее M значения функции $\sqrt{3+x^2}$ на [1; 3]	−1
Ответ	−1

3. Выяснить, не вычисляя, какой из интегралов больше:

$$\int_0^{1/2}\sqrt{x}\,dx \quad \text{или} \quad \int_0^{1/2}x^3\,dx$$

Промежуточный вопрос	*Штрафные баллы*
Какая из функций: $f(x)=\sqrt{x}$ или $\varphi(x)=x^3$ больше на [0; 1/2]	−1,5
Ответ	−1,5

Оценка

2.2. Приложения определенного интеграла

2.2.1. Вычисление площадей фигур в декартовых координатах

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ $(a<b)$, вычисляется по формуле $\boxed{S=\int_a^b f(x)dx}$.

Если плоская фигура ограничена прямыми $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ и кривыми $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, причем $y_1(x)\leqslant y_2(x)$, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S=\boxed{\int_a^b\left[y_2(x)-y_1(x)\right]dx}\,.$$

Если студент не знает формул, он с помощью процедуры „*HELP*" может обратиться к справочнику.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2^x$, $y=2x-x^2$, $x=0$, $x=2$.

Алгоритм решения

1. Построить данную фигуру

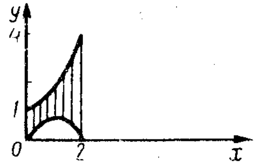


Рис. 9

2. Записать формулу для вычисления площади данной фигуры:

$$S = \boxed{\int_a^b \left[y_2(x) - y_1(x) \right] dx}.$$

3. $2^x > 2x - x^2$ на отрезке [0; 2]. Значит, $y_2 = \boxed{2^x}$, $y_1 = \boxed{2x - x^2}$.

Ответ:

$$S = \boxed{\frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}}.$$

Если ответ неверный, ЭВМ приводит решение:

$$S = \int_0^2 [2^x - (2x - x^2)]\,dx = \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^2 - \left.\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2 = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, лежащей в первом квадранте и ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 3a^2$, $x^2 = 2ay$, $y^2 = 2ax$ $(a > 0)$.

Алгоритм решения

1. Построить данную фигуру, для чего найти:

а) абсциссу т. A пересечения параболы $y^2 = 2ax$ с окружностью $x^2 + y^2 = 3a^2$, решив систему уравнений

$$\boxed{\begin{cases} x^2 + y^2 = 3a^2 \\ y^2 = 2ax \end{cases}}.$$

Единственный положительный корень x_A уравнения $x^2 + 2ax - 3a^2 = 0$ $x_A = \boxed{a}$;

б) аналогично найти абсциссу т. B пересечения окружности $x^2 + y^2 = 3a^2$ и параболы $x^2 = 2ay$, решив систему уравнений

$$\boxed{\begin{cases} x^2 + y^2 = 3a^2 \\ x^2 = 2ay \end{cases}}.$$

Абсциссой т. B является положительный корень x_B уравнения $x^2 = 2a^2$:

$$x_B = \boxed{a\sqrt{2}}.$$

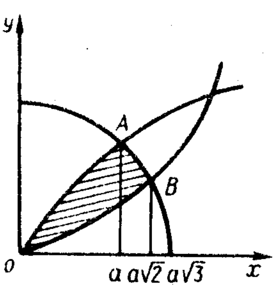


Рис. 10

2. Записать формулу для вычисления площади данной фигуры:

$$S = \boxed{\int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\,dx}.$$

3. Вычислить площадь $\int_0^{a\sqrt{2}} [y_2(x) - y_1(x)]dx$, где $y_1 = \frac{x^2}{2a}$, $y_2(x) = $

$$= \begin{cases} \sqrt{2ax} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant a; \\ \sqrt{3a^2 - x^2} & \text{при } a < x \leqslant a\sqrt{2}. \end{cases}$$

При вычислении воспользоваться свойствами аддитивности интеграла.

Ответ: $S = \boxed{(\sqrt{2}/3 + 3/2 \arcsin 1/3)a^2}$.

Если ответ неверный, ЭВМ приводит решение:

$$S = \int_0^a \left(\sqrt{2ax} - \frac{x^2}{2a}\right) dx + \int_0^{a\sqrt{2}} \left(\sqrt{3a^2 - x^2} - \frac{x^2}{2a}\right)dx =$$

$$= \left[\sqrt{2a}\ \frac{2}{3}\ x^{3/2} - \frac{x^3}{6a}\right]\Bigg|_0^a + \left[\frac{x}{2}\sqrt{3a^2 - x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{3a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a\sqrt{3}} - \frac{x^3}{6a}\right]\Bigg|_a^{a\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} a^2 - \frac{a^2}{6} +$$

$$+ \frac{3a^2}{2}\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \arcsin \frac{1}{3}\right) - \frac{\sqrt{2}}{3} a^2 + \frac{1}{6} a^2 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{3}{2} \arcsin \frac{1}{3}\right) a^2.$$

В преобразованиях использовать формулу

$$\arcsin\alpha - \arcsin\beta = \arcsin\left(\alpha\sqrt{1-\beta^2} - \beta\sqrt{1-\alpha^2}\right), (\alpha\beta > 0).$$

Тогда $\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\ \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = $ $= \arcsin\frac{1}{3}$.

Пример 3. Вычислить площадь петли кривой $y^2 = x(x-1)^2$.

Алгоритм решения

1. Область определения неявной функции $y(x)$ – интервал $[0; +\infty[$
2. Построить данную фигуру, для чего:

а) найти точки пересечения кривой с осью абсцисс:

$$\boxed{x_1 = 0}, \boxed{x_2 = 1};$$

б) учитывая симметрию кривой относительно оси $\boxed{Ox}$, найдем ее две ветви, образующие петлю:

$$y(x) = \sqrt{x}\,(1 - x),\ y(x) = -\sqrt{x}(1 - x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1;$$

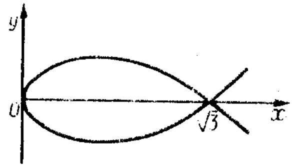


Рис. 11

в) найти дополнительно две точки кривой

$$x_1 = 1/2,\ y_1 = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{2}}},\ x_2 = 1/3,\ y_2 = \boxed{\frac{2}{3\sqrt{3}}}.$$

Ответ:

$$S = 2\boxed{\int_0^1 \sqrt{x}\,(1-x)\,dx} = \boxed{\frac{8}{15}}.$$

Пример 4. Вычислить площадь, заключенную между параболой $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в т. $M(3;\,5)$ и осью ординат.

Алгоритм решения

1. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в т. $M(x_0;\ y_0)$

$$y - y_0 = \boxed{f'(x_0)\cdot(x - x_0)}.$$

Составить уравнение касательной к данной кривой в т. $M(3;\,5)$: $y = \boxed{4x - 7}$.

2. Построить данную фигуру, для чего:

а) найти координаты вершины параболы $x = \boxed{1}$, $y = \boxed{1}$;

б) найти точку пересечения касательной с Oy: $y = \boxed{-7}$.

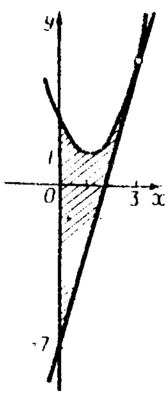


Рис. 12

Ответ: $S = \boxed{\int_0^3 (x^2 - 2x + 2 - 4x + 7)\,dx} = \boxed{9}.$

Задачи для самостоятельной работы

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x-4)^2$, $y = 16 - x^2$ и осью Ox. Ответ: $\frac{64}{3}$.

2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 4x - 3$ и касательными к ней в точках $M_1(0; -3)$ и $M_2(3; 0)$. Ответ: $2\frac{1}{4}$.

3) Вычислить площадь, ограниченную линиями $y^2 = 2x + 1$ и $x - y - 1 = 0$. Ответ: $5\frac{1}{3}$.

4) Вычислить площадь, ограниченную кривой $y^2 = x^2(1 - x^2)$. Ответ: $\frac{4}{3}$.

5) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = e^x - 1$, $y = e^{2x} - 3$, $x = 0$. Ответ: $2\ln 2 - 1/2$.

6) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$, касательной к ней в т. $x = e$, и осью Ox. Ответ: $1/2e - 1$.

7) Найти площадь фигуры, ограниченной окружностями $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 - 2ay = a^2$ и прямой $y = a$. Ответ: a^2.

2.2.2. Вычисление площадей фигур при параметрическом задании границ

Если фигура ограничена кривой, имеющей параметрические уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \boxed{y(t)\,x'(t)\,dt},$$

где t_1 и t_2 находятся из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$. Эта формула получена из формулы $S = \int_a^b y(x)dx$ при помощи соответствующей замены переменной.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox.

Алгоритм решения

1. Арка циклоиды описывается при изменении t от 0 до 2π, так как $y(0) = y(2\pi) = 0$, а в остальных точках указанного промежутка $y > 0$.

2. Найти $x'(t)$: $x'(t) = \boxed{a(1 - \cos t)}$.

Ответ: $S = \boxed{\int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)^2 dt} = 3\pi a^2$.

Если ответ дан неверно, ЭВМ приводит решение:

$$S = a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt =$$

$$= a^2 \left(t - 2\sin t + \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Задачи для самостоятельной работы

1) Вычислить площадь эллипса $x = a\cos t, y = b\sin t$. Ответ: πab.

2) Вычислить площадь петли кривой $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$. Ответ: $\frac{72}{5}\sqrt{3}$.

3) Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$. Ответ: $\frac{3}{8}\pi a^2$.

4) Найти площадь петли кривой $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$. Ответ: $\frac{8}{15}$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой

$x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$. Ответ: $6\pi a^2$.

6) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x = a\sin t$, $y = a\sin 2t$. *Указание:* Учесть симметрию кривой относительно осей координат. Для построения кривой достаточно ограничиться изменением параметра t от 0 до 2π, так как функции $x = a\sin t$, $y = a\sin 2t$ имеют общий период 2π. Ответ: $\frac{8}{3}a^2$.

2.2.3. Вычисление площади в полярных координатах

Площадь криволинейного сектора, ограниченного дугой кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi_1 = \alpha$ и $\varphi_2 = \beta$, выражается интегралом $S = \boxed{\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\rho}$ $(\alpha < \beta)$.

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 + \sin\varphi)$.

Алгоритм решения

1. Построить кривую.

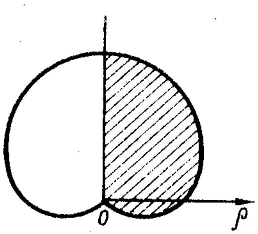


Рис. 13

2. Определить пределы интегрирования. Половина площади описывается полярным радиусом при изменении полярного угла от $-\pi/2$ до $\pi/2$.

Ответ: $S = \frac{1}{2}\cdot 2\boxed{\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2(1+\sin\varphi)^2 d\varphi} = \boxed{\frac{3}{2}\pi a^2}$.

Если студент дал неправильный ответ, ЭВМ приводит решение:

$$S = a^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+2\sin\varphi+\sin^2\varphi)\,d\varphi = a^2\left(\varphi - 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = a^2(\pi + \pi/2) = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = 2a\cos 3\varphi$.

Алгоритм решения

1. Использовать формулу $S = \boxed{\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi}$.

2. Найти пределы интегрирования α, β:

а) определить период функции $\rho = 2a\cos 3\varphi$: $T = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$, полярный радиус описывает три равных лепестка кривой;

б) найти допустимые значения для φ: $\rho \geqslant 0 \Rightarrow \cos 3\varphi \geqslant 0$,

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant 3\varphi \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi;$$

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

при $k = 0$ $\boxed{-\frac{\pi}{6}} \leqslant \varphi \leqslant \boxed{\frac{\pi}{6}}$ получается первый лепесток,

при $k = 1$ $\boxed{\frac{\pi}{2}} \leqslant \varphi \leqslant \boxed{\frac{5\pi}{6}}$ – второй лепесток,

при $k = 2$ $\boxed{\frac{7\pi}{6}} \leqslant \varphi \leqslant \boxed{\frac{3\pi}{2}}$ – третий;

в) построить фигуру

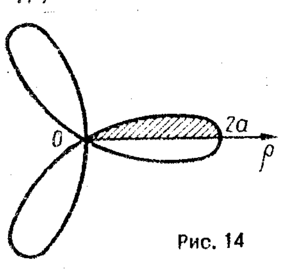


Рис. 14

г) для шестой части искомой площади (на рис. 14 она заштрихована) $\alpha = \boxed{0}$, $\beta = \boxed{\pi/6}$.

Ответ:

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} 4 a^2 \cos^2 3\varphi \, d\varphi = \boxed{\pi a^2}.$$

Пример 3. Вычислить площадь, ограниченную линиями $\rho = 2\sqrt{3} a \cos\varphi$ и $\rho = 2a \sin\varphi$.

Алгоритм решения

1. Построить фигуру:

а) определить вид данных кривых;

б) выражения $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

подставить в каждое уравнение:

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}\, a x \Longrightarrow (x - \sqrt{3}\, a)^2 + y^2 = 3a^2;$$

$$x^2 + y^2 = 2ay \Longrightarrow x^2 + (y - a)^2 = a^2.$$

Первое уравнение определяет окружность с центром в т. $C_1(\sqrt{3}a; 0)$ радиуса $\sqrt{3}a$, второе – окружность с центром в т. $C_2(0; a)$ радиуса a.

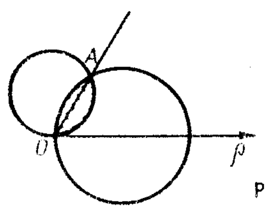


Рис. 15

2. Поскольку искомая площадь есть сумма двух площадей, использовать формулу $S = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\alpha^\beta \rho_1^2(\varphi) d\varphi + \dfrac{1}{2} \int_\beta^\gamma \rho_2^2(\varphi) d\varphi$, где $\rho_1 = 2a\sin\varphi$, $\rho_2 = 2\sqrt{3} a \cos\varphi$.

3. Найти пределы интегрирования α, β, γ. Обе окружности проходят через полюс, значит, полюс – точка пересечения окружностей. Вторую точку пересечения A найти из уравнения $2\sqrt{3}a\cos\varphi = 2a\sin \Longrightarrow \varphi = \pi/3$, $\alpha = 0$, $\beta = \pi/3$, $\gamma = \pi/2$.

Ответ: $S = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{\pi/3} (2a\sin\varphi)^2 d\varphi + \dfrac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} (2\sqrt{3}a\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\left(\dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$.

Задачи для самостоятельной работы

1) Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. Использовать алгоритм решения примера 1. Ответ: $3/2\pi a^2$.

2) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = a\sin 5\varphi$. Использовать алгоритм решения примера 2. Ответ: $\frac{\pi a^2}{4}$.

3) Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями $\rho = 3\sqrt{2}\,a\cos\varphi$ и $\rho = 3a\sin\varphi$. Использовать алгоритм решения примера 3. Ответ: $2{,}25a^2(\pi - \mathrm{arctg}\sqrt{2} - \sqrt{2})$.

4) Найти площадь фигуры, вырезаемой окружностью $\rho = \sqrt{3}\sin\varphi$ из кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi$. Ответ: $3/4(\pi - \sqrt{3})$.

5) Найти площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $\rho = a\varphi$. Ответ: $4/3\pi^{3'}a^2$.

Контрольное задание

1. Вычислить площадь, заключенную между параболами $y = \frac{x^2}{3}$ и $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Точки пересечения парабол: $x_1 = \boxed{2}$, $x_2 = \boxed{-2}$.	–1
2. Для вычисления площади применить формулу $S = \boxed{\int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\,dx}$	–1
3. Вычислить площадь: $S = \boxed{32/2}$	–1

2. Найти площадь петли кривой

$$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3. \end{cases}$$

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Для вычисления площади применить формулу $S = \boxed{\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,dt}$	–1
2. Найти пределы интегрирования $\alpha = \boxed{0}$, $\beta = \boxed{2}$	–1
3. Вычислить площадь: $S = \boxed{8/15}$	

3. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $\rho^2 = 2\cos 2\varphi$ и окружностью $\rho = 1$ ($\rho \geqslant 1$).

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Для вычисления площади применить формулу $S = \boxed{\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}[\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)]\,d\varphi}$	–1
2. Найти пределы интегрирования для $\frac{1}{4}S$: $\alpha = \boxed{0}$, $\beta = \boxed{\frac{\pi}{4}}$	–1
3. Вычислить площадь: $S = \boxed{\sqrt{3} - \pi/3}$	–1

Оценка

2.2.4. Вычисление длины дуги кривой

2.2.4.1. Длина дуги в декартовых координатах

Если гладкая кривая задана уравнением $y = f(x)$ и $f'(x)$ непрерывна, то длина дуги этой кривой $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$, где a, b – абсциссы концов дуги.

Пример. Найти длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$ между точками ее пересечения с осью Ox.

Алгоритм решения

1. Применить формулу

$$l = \boxed{\int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx}.$$

2. Найти пределы интегрирования a и b, для чего решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = \boxed{0}, \quad x_2 = \boxed{3}.$$

Значит, $a = \boxed{0}$, $b = \boxed{3}$.

3. Найти y' и $\sqrt{1 + y'^2}$:

$$y' = \boxed{\frac{1 - x}{2\sqrt{x}}}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \boxed{\frac{1 + x}{2\sqrt{x}}}.$$

Ответ: $l = \boxed{\int_0^3 \frac{1+x}{2\sqrt{x}}\,dx} = \boxed{2\sqrt{3}}$.

Задачи для самостоятельной работы

1) Вычислить длину дуги цепной линии $y = 2(e^{x/4} + e^{-x/4})$ от т. $x = 0$ до т. $x = 4$. Ответ: $2(e - e^{-1})$.

2) Вычислить длину дуги кривой $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, заключенной между точками с ординатами $y = 1$ и $y = 2$. *Указание:* за независимую переменную принять y, длина дуги $l = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + x'^2}\,dy$. Ответ: $3/4 + 1/2\ln 2$.

2.2.4.2. Вычисление длин дуг кривых, заданных параметрически

Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$ и производные $x'(t)$ и $y'(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1; t_2]$, то длина дуги кривой $l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$, где t_1, t_2 – значения параметра t, соответствующие концам дуги ($t_1 \le t_2$).

Пример 1. Вычислить длину одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Алгоритм решения

1. Применить формулу

$$l = \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt}.$$

2. Найти пределы интегрирования. Так как одна арка циклоиды описывается при изменении t от 0 до 2π, то $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$.

3. Найти $x'(t)$, $y'(t)$, $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$: $x'(t) = \boxed{a(1-\cos t)}$, $y'(t) = \boxed{a\sin t}$, $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \boxed{2a\sin t/2}$.

Если ответ для $\sqrt{x'^2 + y'^2}$ неверен, ЭВМ приводит решение: $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\cos^2 t} = a\sqrt{2(1-\cos t)} = a\sqrt{2\cdot 2\sin^2 t/2} = 2a\sin\frac{t}{2}$.

Ответ: $l = \boxed{\int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt} = \boxed{8a}$.

Пример 2. Вычислить длину петли кривой $x = \sqrt{3}\, t^2$; $y = t - t^3$.

Алгоритм решения

1. Применить формулу $l = \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt}$.

2. Найти пределы интегрирования:

а) $x = \sqrt{3}\, t^2 \geqslant 0 \Rightarrow$ кривая лежит в правой полуплоскости; $x = 0$ при $t = \boxed{0}$;

б) $y(t)$ меняет знак $\Rightarrow$ кривая симметрична относительно оси Ox; $y = 0$ при $t_1 = \boxed{0}$, $t_{2,3} = \boxed{\pm 1}$;

в) для построения кривой найти несколько точек:

t	-1	$-1/2$	$-3/4$	0	$1/2$	$3/4$	1
x	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3/4}$	$9\sqrt{3/4}$	0	$\sqrt{3/4}$	$9\sqrt{3/4}$	$\sqrt{3}$
y	0	$-3/8$		0	$3/8$		0

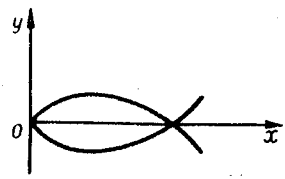


Рис. 16

Поскольку $x(1) = x(-1) = \sqrt{3}$, то точка $(\sqrt{3}; 0)$ – единственная точка самопересечения кривой;

г) пределы интегрирования: $t_1 = -1$, $t_2 = 1$.

3. Найти

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \boxed{1 + 3t^2}.$$

Ответ:

$$l = \boxed{\int_{-1}^{1} (1 + 3t^2)\, dt} = \boxed{4}.$$

Если ответы для $\sqrt{x'^2 + y'^2}$ и для l студентом получены неверно, ЭВМ приводит подробное решение:

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{12t^2 + 1 - 6t^2 + 9t^4} = \sqrt{(1 + 3t^2)^2} = 1 + 3t^2;$$

$$l = \int_{-1}^{1} (1 + 3t^2)\, dt = (t + t^3)\Big|_{-1}^{1} = 4.$$

Задачи для самостоятельной работы

1) Найти длину астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. Ответ: $6a$.

2) Вычислить длину петли кривой $x = t^2$, $y = t\left(\frac{1}{3} - t^3\right)$. Ответ: $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

2.2.4.3. Вычисление длин дуг кривых, заданных в полярных координатах

Если гладкая кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ в полярных координатах, длина дуги кривой $l = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$, где α, β – значения полярного угла φ в концах дуги ($\alpha \leqslant \beta$).

Пример 1. Вычислить длину логарифмической спирали $\rho = e^{\alpha\varphi}$, находящейся внутри окружности $\rho = 1$.

Алгоритм решения

1. Применить формулу

$$l = \boxed{\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}.$$

2. Найти пределы интегрирования, для чего решить систему уравнений:

а) $\begin{cases}\rho = e^{\alpha\varphi}\\ \rho = 1\end{cases} \Rightarrow 1 = e^{\alpha\varphi} \Rightarrow \varphi = \boxed{0};$

б) $\begin{cases}\rho = e^{\alpha\varphi}\\ \rho = 0\end{cases} \Rightarrow 0 = e^{\alpha\varphi} \Rightarrow \varphi = \boxed{-\infty}.$

$$\alpha = \boxed{-\infty}, \qquad \beta = \boxed{0}.$$

3. Найти ρ' и $\sqrt{\rho^2+\rho'^2}$:

$$\rho' = \boxed{a e^{\alpha\varphi}}, \quad \sqrt{\rho^2+\rho'^2} = \boxed{e^{\alpha\varphi}\sqrt{1+a^2}}.$$

Ответ:

$$l = \boxed{\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha\varphi}\sqrt{1+\alpha^2}\,d\varphi} = \boxed{\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}}.$$

Пример 2. Найти длину дуги кардиоиды $\rho = 2(1-\cos\varphi)$, находящейся внутри окружности $\rho = 1$.

Алгоритм решения

1. Применить формулу $l = \boxed{\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\quad dx}$.

2. Найти пределы интегрирования, для чего решить системы уравнений:

а) $\begin{cases}\rho = 2(1-\cos\varphi)\\ \rho = 0\end{cases} \Rightarrow \varphi = 0;$

б) $\begin{cases} \rho = 2(1-\cos\varphi) \\ \rho = 1 \end{cases} \Longrightarrow \quad \varphi = \boxed{\pm\pi/3};$

в) построить данные линии:

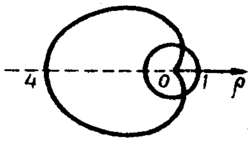


Рис. 17

г) пределы интегрирования: $\alpha = -\pi/3$, $\beta = \pi/3$.

3. Найти ρ' и $\sqrt{\rho^2+\rho'^2}$:

$$\rho' = \boxed{2\sin\varphi}, \qquad \sqrt{\rho^2+\rho'^2} = \boxed{8\sin\varphi/2}.$$

Ответ:

$$l = 2\boxed{\int_0^{\pi/3} 8\sin\varphi/2\, d\varphi} = \boxed{8(2-\sqrt{3})}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1) Найти длину кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$. Ответ: $8a$.

2) Найти длину кривой $\rho = a\cos^3\varphi/3$. Ответ: $\frac{3\pi a}{2}$.

3) Найти длину первого витка спирали Архимеда $\rho = a\varphi$.
Ответ: $a[\pi\sqrt{4\pi^2+1} + 1/2\ln(2\pi + \sqrt{4\pi + 1})]$.

Контрольное задание

1. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln\cos x$ между точками с абсциссами $x = 0$, $x = \pi/4$.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Длина дуги $l = \boxed{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx}$	–1.
2. Найти y' и $\sqrt{1+y'^2}$: $y' = \boxed{-\operatorname{tg}x}$, $\sqrt{1+y'^2} = \boxed{\sec x}$	–1
3. Вычислить длину дуги $l = \boxed{0{,}9}$	–1

2. Найти длину дуги кривой $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ от $t = 0$ до $t = 1$.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Длина дуги $l = \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt}$	–1
2. $x' = \boxed{e^t(\cos t - \sin t)}$, $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \boxed{\sqrt{2}\, e^t}$ $y' = \boxed{e^t(\sin t + \cos t)}$	–1
3. Вычислить длину дуги $l = \boxed{2{,}4}$	–1

3. Вычислить длину дуги кардиоиды $\rho = 2(1 - \sin\varphi)$.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Длина дуги $l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \boxed{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi}$	–1
2. $\rho' = \boxed{2\sin\varphi}$, $\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \boxed{4\sin\varphi/2}$	–1
3. Вычислить длину дуги $l = \boxed{16}$	–1

Оценка

2.2.5. Вычисление объемов тел по известным поперечным сечениям

Если объем тела V существует и $S = S(x)$ есть площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси в точке с абсциссой x (a и b – левая и правая границы изменения x), то $V = \boxed{\int_a^b S(x)\, dx}$.

Пример 1. Найти объем шара радиуса R (рис. 18).

Алгоритм решения

1. Пересечь шар плоскостью, перпендикулярной к диаметру и отстоящей от экваториальной плоскости на расстоянии x.

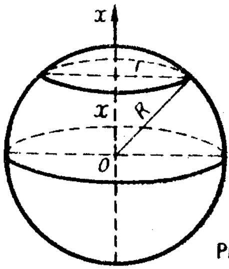


Рис. 18

2. Вычислить площадь круга, полученного в сечении:

а) радиус круга $r = \boxed{\sqrt{R^2 - x^2}}$;

б) площадь $S(x) = \boxed{\pi(R^2 - x^2)}$;

в) расстояние x изменяется от $\boxed{-R}$ до $\boxed{R}$.

3. Для вычисления объема шара применить формулу

$$V = \boxed{\int_{-R}^{R} S(x)\,dx}.$$

Ответ: $$V = \pi \boxed{\int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx} = \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Пример 2. Найти объем тела, отсекаемого от прямого круглого цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания под углом α к нему (такое тело называется цилиндрическим отрезком) (рис. 19).

Алгоритм решения

1. Пусть цилиндр определяется уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, H – высота цилиндрического отрезка.

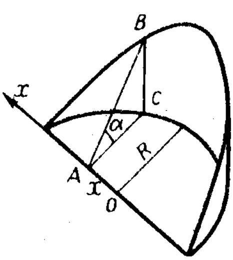


Рис. 19

2. Пересечь тело плоскостью, перпендикулярной оси Ox, в любой т. x ($|x| < R$).

3. Найти площадь сечения (т. е. прямоугольного треугольника): $S(x) = 1/2\,AC \cdot CB$:

а) $AC = \sqrt{R^2 - x^2}$;

б) $CB = AC \cdot \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{R^2 - x^2}\,\operatorname{tg}\alpha = \boxed{\sqrt{R^2 - x^2}\ \frac{H}{R}}$;

в) $S(x) = \boxed{\frac{H}{2R}(R^2 - x^2)}$.

4. Пределы интегрирования $a = \boxed{-R}$, $b = \boxed{R}$.

Ответ:

$$V = \frac{H}{2R}\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)\,dx = \boxed{\frac{2}{3}HR^2}.$$

2.2.6. Вычисление объемов тел вращения

Объемы V_x, V_y тел, образованных вращением вокруг оси Ox или оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$), осью абсцисс и прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, $V_x = \pi\boxed{\int_a^b f^2(x)dx}$; $V_y = 2\pi\boxed{\int_a^b xf(x)dx}$.

Объемы тел V_x, V_y, образованных вращением вокруг оси Ox или Oy фигуры, ограниченной кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ $(0 \leqslant \leqslant y_1(x) \leqslant y_2(x))$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $V_x = \pi\boxed{\int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)]dx}$;

$$V_y = 2\pi\boxed{\int_a^b x[y_2(x) - y_1(x)]dx}.$$

Если кривая задана параметрически или в полярных координатах, надо сделать соответствующую замену переменной в указанных формулах.

Если тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, прилежащей к оси Oy, ограниченной линиями $x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$, $(c < d)$, то $V_y = \pi\boxed{\int_c^d \varphi^2(y)dy}$.

Пример 1. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{4} + 2$ и прямой $5x - 8y + 14 = 0$.

Алгоритм решения

1. Найти абсциссы точек пересечения данных линий, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} + 2 \\ 5x - 8y + 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \boxed{1/2} \\ x_2 = \boxed{2}. \end{matrix}$$

2. Построить фигуру.

3. Применить формулу $V_x = \pi \int_a^b [y_2^2 - y_1^2]dx$, где $y_1 = \boxed{\dfrac{x^2}{4} + 2}$, $y_2 = \boxed{\dfrac{5}{8}x + \dfrac{7}{4}}$, $a = \boxed{1/2}$, $b = \boxed{2}$.

Ответ:

$$V_x = \boxed{\pi \int_{1/2}^{2} [(\frac{5}{8}x + \frac{7}{4})^2 - (\frac{1}{4}x^2 + 2)^2]dx} = \frac{891}{1280}\pi.$$

Пример 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$, $x = \frac{1}{8}y^2$.

Алгоритм решения

1. Найти ординаты точек пересечения парабол, решив систему уравнений: $\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = 8x \end{cases} \Rightarrow y_1 = 0, \ y_2 = 4.$

2. Построить фигуру.

3. Применить формулу $V_y = \int_c^d (x_2^2 - x_1^2)dx$, где $x_1 = \boxed{\dfrac{y^2}{8}}$, $x_2 = \boxed{\sqrt{y}}$, $c = \boxed{0}$, $d = \boxed{4}$.

Ответ: $V_y = \boxed{\pi \int_0^4 (y - \frac{y^4}{64})dx} = \frac{24}{5}\pi.$

2.2.7. Вычисление площади поверхности вращения

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$, выражается интегралом $P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}dx$, который можно написать в форме $P = 2\pi \int_L y dl$, где L – дуга кривой $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$, dl – дифференциал дуги кривой.

Пример 1. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кубической параболы $y = x^3$, заключенной между прямыми $x = -\frac{2}{3}$ и $x = \frac{2}{3}$.

Алгоритм решения

1. Применить формулу $P = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

2. Найти y' и $\sqrt{1+y'^2}$:

$$y' = \boxed{3x^2},\quad \sqrt{1+y'^2} = \boxed{\sqrt{1+9x^4}}.$$

3. Вычислить площадь поверхности:

$$P = \boxed{4\pi\int_0^{2/3} x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx} = \frac{2\pi}{27}\left(\frac{125}{27}-1\right)\approx 0{,}845.$$

Пример 2. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

Алгоритм решения

1. Применить формулу $P = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$.

2. Найти x', y', $\sqrt{x'^2+y'^2}$:

$$x' = \boxed{3a\cos^2 t\,(-\sin t)};\qquad y' = \boxed{3a\sin^2 t\cos t};$$

$$\sqrt{x'^2+y'^2} = \boxed{3a\sin t\cos t}.$$

3. Пределы интегрирования для $P/2$: $t_1 = \boxed{0}$, $t_2 = \boxed{\pi/2}$.

4. Вычислить площадь поверхности

$$P = \boxed{\frac{12}{3}\pi a^2}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1) Найти обьем и боковую поверхность параболоида, образованного вращением параболы $y^2 = 2ax$ вокруг оси Ox и ограниченного плоскостью $x = h$. Ответ: $V = \pi a h^2$; $P = \frac{4\pi\sqrt{2a}}{3}\left[\left(h+\frac{a}{2}\right)^{3/2} - \left(\frac{a}{2}\right)^{3/2}\right]$.

2) Найти обьем и боковую поверхность прямого кругового конуса, рассматривая его как тело, полученное от вращения полупрямой, проходящей через начало координат и точку (H, R), и ограниченное плоскостью $x = H$. Ответ: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$; $P = \pi R L$.

3. Дифференциальные уравнения (ДУ)

3.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

1. Дать определение ДУ с разделяющимися переменными.
Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)\boxed{f_2(y)}dx + \boxed{\varphi_1(x)}\varphi_2(y)\,dy = 0$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

2. Какие из приведенных уравнений относятся к ДУ с разделяющимися переменными?

а) $x^2y' + y = 0$;

б) $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$;

в) $(12x + 13y - 5)\,dx + (5x - 2y)\,dy = 0$;

г) $y' - \frac{y}{x} = x^2$;

д) $\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} y\,dx + \sin^2 y \operatorname{tg} x\,dy = 0$.

Ответ: $\boxed{\text{а, б, д}}$.

3. Если $f_2(y) \neq 0$ и $\varphi_1(x) \neq 0$, то решением ДУ с разделяющимися переменными является общий интеграл

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\,dx + \boxed{\int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}\,dy} = C.$$

4. Решить ДУ $(1 + y^2)dx = xy\,dy$, если $y(2) = 1$:

а) разделить обе части ДУ на выражение $(1 + y^2)x$:

$$\boxed{\frac{dx}{x}} = \frac{y\,dy}{\boxed{1+y^2}};$$

б) проинтегрировать полученное ДУ:

$$\boxed{\ln|x| + \ln|C|} = 1/2\ln(1 + y^2), \text{ или}$$

$$xC_1 = \boxed{\sqrt{1+y^2}},\ x^2C = \boxed{1+y^2};$$

в) найти постоянную C, использовав начальное условие: $C = \boxed{1/2}$;

г) записать частное решение ДУ:

$$\frac{x^2}{2} = \boxed{1+y^2}, \text{ или } x^2 - \boxed{2y^2} = 2.$$

5. Найти общее решение ДУ $x^2 y' + y = 0$:

а) записать y' в виде $\frac{dy}{dx}$;

б) перенести y в правую часть уравнения;

в) умножить обе части ДУ на dx;

г) разделить обе части ДУ на $x^2 y$;

д) проинтегрировать ДУ и ввести ответ в ЭВМ.

Ответ: $y = C e^{1/x}$.

6. Решить задачу Коши для ДУ $y' = 2\sqrt{y}\ln x$, если $y(e) = 1$:

а) записать y' в виде $\frac{dy}{dx}$;

б) разделить обе части ДУ на $\boxed{2\sqrt{y}}$;

в) проинтегрировать ДУ, записать общий интеграл:

$$\sqrt{y} = \boxed{x\ln|x| - x + C};$$

г) использовав начальное условие $y(e) = 1$, найти частное решение ДУ.

Ответ: $\sqrt{y} = \boxed{x\ln|x| - x + 1}$.

Задачи для самостоятельной работы

1) $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$. Ответ: $\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C$.

2) $(1+e^x)yy' = e^x$, $y(0) = 1$. Ответ: $2e^{y^2/2} = \sqrt{e}\quad(1+e^x)$.

3) $y'\sin x = y\ln y$, $y(\frac{\pi}{2}) = e$. Ответ: $y = e^{\operatorname{tg} x/2}$.

4) $y' = 10^{x+y}$. Ответ: $10^x + 10^{-y} = C$.

5) $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$, $y(0) = 1$. Ответ: $1 + y^2 = \dfrac{2}{1-x^2}$.

3.2. Однородные дифференциальные уравнения (ОДУ) первого порядка

1. Дать определение ОДУ.

Уравнение вида $y' = \varphi\boxed{\left(\frac{y}{x}\right)}$ называется однородным.

2. Какие из приведенных уравнений относятся к ОДУ:

а) $x\frac{dy}{dx} = y\ln\frac{y}{x}$;

б) $x\,dy - (y + \sqrt{x^2+y^2})\,dx = 0$;

в) $\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\,\frac{dy}{dx} + \sqrt{y^2+1} = x^2 + 1$;

г) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

Ответ: $\boxed{\text{а, б, г}}$.

3. Записать подстановку, которая применяется для решения ОДУ:

$$u = \boxed{\frac{y}{x}} \quad \text{или} \quad y = \boxed{ux}.$$

4. Решить уравнение $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$.
Записать уравнение в виде $y' = f(x, y)$.
Результат ввести в ЭВМ:

$$\boxed{y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}}.$$

Если студент записал неверно, ЭВМ предлагает решение:
1. Перенести второе слагаемое в правую часть уравнения:

$$\boxed{(x^2 + y^2)\,dx = xydy}.$$

2. Поделить обе части уравнения на dx:

$$\boxed{x^2 + y^2 = xy\frac{dy}{dx}}.$$

3. Поделить обе части ДУ на xy:

$$\boxed{\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{dy}{dx}} \quad \text{или} \quad \boxed{y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}}.$$

4. Применить к решению уравнения подстановку $y = \boxed{ux}$, $y' = u'x + u$:

$$\boxed{\frac{x^2 + (ux)^2}{xux} = u'x + u} \quad \text{или} \quad \frac{x^2 + u^2x^2}{x^2u} = u'x + u.$$

5. Учитывая, что $x \neq 0$, сократить левую часть уравнения на x^2:

$$\boxed{\frac{1 + u^2}{u} = u'x + u}.$$

6. Решить полученное ДУ с разделяющимися переменными:

$$\ln|x| = \boxed{\frac{u^2}{2} + C} \quad \text{или} \quad 2\ln|x| = \boxed{u^2 + C};$$

$$\boxed{2\ln|x| - C = u^2} \quad \text{или} \quad \boxed{2\ln|x| + C = u^2}.$$

Если студент не может решить задачу, ЭВМ предлагает повторить тему „ДУ с разделяющимися переменными".

7. В полученном решении перейти от переменной u к переменной y заменой $u = \boxed{y/x}$:

$$\boxed{2\ln|x| - C = \frac{y^2}{x^2}} \quad \text{или} \quad \boxed{x^2(2\ln|x| - C) = y^2}.$$

Решить задачи по предложенным алгоритмам:

Задача 1. Решить уравнение $x\dfrac{dy}{dx} = y\ln\dfrac{y}{x}$.

Ответ: $y = xe^{Cx+1}$.

Алгоритм решения: 1) поделить обе части ДУ на x; 2) выполнить замену $u = y/x$: $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{du}{dx}x + u$; 3) решить полученное ДУ с разделяющимися переменными относительно функции u; 4) в полученном общем решении перейти от переменной u к переменной y: $y = ux$.

Задача 2. Решить уравнение $x\,dy = (y + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx$.

Ответ: $Cx^2 = y + \sqrt{x^2 + y^2}$.

Алгоритм решения: 1) выполнить замену $y = ux$: $dy = u\,dx + x\,du$; 2) решить полученное ДУ с разделяющимися переменными относительно функции u; 3) в полученном общем решении перейти от переменной u к переменной y: $u = y/x$.

Задача 3. Найти частное решение ДУ: $y^2 + x^2y' = xyy'$, если $y(3) = 4$.

Ответ: $y = 4\,e^{\frac{3y-4x}{3x}}$.

Алгоритм решения: 1) выполнить замену $y = ux$; $y' = u'x + u$; 2) решить полученное ДУ с разделяющимися переменными относительно функции u; 3) найти частное решение ДУ, удовлетворяющее условию $y(3) = 4$.

Задачи для самостоятельной работы

По разработанному алгоритму решения ОДУ решить следующие уравнения:

1) $y' = e^{y/x} + y/x$. Ответ: $\ln Cx = -e^{-y/x}$.

2) $(\sqrt{xy} - x)dy - y\,dx = 0$, $y(1) = 1$. Ответ: $\ln|y| + 2\sqrt{x/y} = 2$.

3) $y' = y^2/x^2 - 2$. Ответ: $y - 2x = Cx^2(y - x)$.

Контрольное задание

Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $(x^2 - N\,y^2)dx + N/2\,xy\,dy = 0$.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Выполнить замену $y = \boxed{ux}$, $y' = \boxed{u'x + u}$	–0,5
2. Разделить переменные $\dfrac{dy}{dx} = \boxed{\dfrac{N/2\,u\,du}{1 - N/2\,u^2}}$	–1

3. Заменить переменную u:

$$u = \boxed{y/x}$$ −0,5

Оценка

3.3. Линейные дифференциальные уравнения (ЛДУ)

1. Дать определение линейного ДУ.

Уравнение вида $\boxed{y' + P(x)y = Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – непрерывные функции, называется линейным.

Линейным однородным ДУ называется уравнение вида

$$y' + P(x)y = 0.$$

2. Назвать методы решения линейного ДУ:

1) метод вариации произвольной постоянной.

Решение уравнения –

$$y = C(x)\boxed{e^{-\int P(x)\,dx}},$$

где $\int P(x)dx$ – одна из первообразных функций;

2) метод подстановки.

Решение уравнения – $y = u(x)\boxed{v(x)}$.

Пример 1. Методом вариации произвольной постоянной решить уравнение

$$xy' + y - e^x = 0, \text{ если } y(a) = b.$$

Алгоритм решения

1. Записать линейное однородное ДУ, соответствующее данному:

$$xy' + y = \boxed{0}.$$

2. Найти общее решение этого уравнения: $y = \boxed{C/x}$.

3. Полагая $y = C(x)/x$, найти $C(x)$. Для этого:

а) найти y': $y = \boxed{\dfrac{C'(x)x - C(x)}{x^2}}$;

б) подставить y и y' в данное ДУ и упростить его:

$$C'(x) = \boxed{e^x};$$

в) определить $C(x)$: $C(x) = \boxed{e^x + C}$.

4. Записать общее решение ДУ: $y = \boxed{\dfrac{e^x + C}{x}}$.

5. Учитывая, что $y(a) = b$, найти постоянную C:

$$C = \boxed{ab - e^{a}}.$$

Ответ:

$$y = \boxed{\frac{e^{x} + ab - e^{a}}{x}}.$$

Пример 2. Найти частное решение уравнения

$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}, \text{ если } y(0) = 0.$$

ДУ решить методом подстановки: $y = u(x)\,v(x)$.

Алгоритм решения

1. Найти y': $y' = u'(x)\,v(x) + \boxed{u(x)\,v'(x)}$.

2. Подставить y и y' в данное уравнение:

$$u'(x)\,v(x) + \boxed{u(x)\,v'(x) + u(x)\,v(x)\,\mathrm{tg}\,x} = \frac{1}{\cos x}.$$

3. Сгруппировать 2-е и 3-е слагаемые:

$$\left[u(x)\,v'(x) + u(x)\,v(x)\,\mathrm{tg}\,x\right] + u'(x)\,v(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Выбрать функцию $v(x)$ так, чтобы выражение, стоящее в квадратных скобках, обращалось в нуль. Для этого достаточно, чтобы $v(x)$ являлось решением ДУ: $\boxed{v'(x) + v(x)\,\mathrm{tg}\,x = 0}$.

4. Найти какое-либо частное решение полученного ДУ с разделяющимися переменными: $v(x) = \boxed{\cos x}$.

5. Подставив найденное значение $v(x)$ в ДУ, записанное в п. 2, получить второе ДУ с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$: $u'(x)\cos x = \boxed{\frac{1}{\cos x}}$, или $u'(x) = \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}}$.

6. Решить его: $u(x) = \boxed{\mathrm{tg}\,x + C}$.

7. Записать общее решение данного ДУ:

$$y = u(x)\,v(x) = \boxed{(\mathrm{tg}\,x + C)\cos x}.$$

8. Используя условие $y(0) = 0$, найти постоянную C: $C = \boxed{0}$.

Ответ: $y = \boxed{\sin x}$.

Задачи для самостоятельной работы

Решить линейные ДУ:

1) $y'=2y+e^x-x, y(0)=\frac{1}{4}$. Ответ:

$y=e^{2x}-e^x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$.

2) $y'=\frac{y}{2y\ln y+y-x}, y(1)=1$. Ответ:

$x=y\ln y+\frac{1}{y}$.

3) $y'+\frac{y}{x}=x^2$. Ответ: $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{C}{x}$.

4) $dy=(x^2+2x-2y)dx$. Ответ:

$y=Ce^{-2x}+\frac{1}{4}(2x^2+2x-1)$.

Алгоритм решения: 1) применить подстановку $y=u(x)v(x)$ (если ДУ линейно относительно относительно x, применить подстановку $x=u(y)v(y)$); 2) записать выражение для $y'(x')$; 3) подставить y, y' (x, x') в данное ДУ; 4) найти одну из функций $u(x)$ ($u(y)$) или $v(x)$ ($v(y)$), сгруппировав два слагаемых; 5) найти вторую функцию $v(x)$ ($v(y)$) или $u(x)$ ($u(y)$); 6) записать общее решение ДУ; 7) если заданы начальные условия, найти частное решение ДУ; 8) записать ответ.

Контрольное задание

Решить линейные дифференциальные уравнения $y'+Nxy=x^2e^{-\frac{N}{2}x^2}$, $y(0)=0$; $Ny'+\frac{N}{2}y=x$, $y(0)=0$, где N – номер варианта.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Применить подстановку $y=u(x)v(x)$	
2. Записать выражение для $y'(x)$	–0,5
3. Найти $u(x)$	–0,5
4. Найти $v(x)$	–0,5
5. Записать общее решение ДУ	–0,5
6. Найти произвольную постоянную C, используя начальные условия	–0,5
7. Записать частное решение ДУ	–0,5

Оценка

3.4. Уравнение Бернулли

1. Дать определение уравнения Бернулли.

Уравнение вида $y' + \boxed{P(x)y = Q(x)y^n}$, где $n \neq 1$ и $n \neq 0$, называется уравнением Бернулли.

2. Написать подстановку, которая приводит уравнение Бернулли к линейному дифференциальному уравнению: $z = \boxed{y^{1-n}}$.

3. Можно ли решить уравнение Бернулли при помощи подстановки

$$y = u(x)\,v(x)$$

Ответ: $\boxed{\text{Да}}$.

Пример. Решить уравнение Бернулли $y'x + y = -xy^2$.

Алгоритм решения

1. Положить $y = u(x)\,\boxed{v(x)}$.

2. Найти y': $y' = \boxed{u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}$.

3. Подставив y и y' в данное уравнение, получить уравнение

$$u'(x)v(x)x + \boxed{u(x)v'(x)x + u(x)v(x) = -xu^2(x)v^2(x)}.$$

4. Сгруппировав 1-е и 3-е слагаемые, получить ДУ

$$\boxed{v(x)\left[u'(x)x + u(x)\right]} + u(x)v'(x)x = -xu^2(x)v^2(x).$$

5. Выбрать функцию $u(x)$ так, чтобы выражение, стоящее в квадратных скобках, обращалось в нуль. Для этого достаточно, чтобы $u(x)$ являлось решением ДУ:

$$u'(x)x + u(x) = 0.$$

6. Найти какое-либо частное решение $u(x)$ полученного выше ДУ:

$$u(x) = \boxed{1/x}.$$

7. Подставив найденное значение $u(x) = 1/x$ в ДУ, записанное в п. 4, получить ДУ:

$$v'(x) = \boxed{-\frac{v^2(x)}{x}}.$$

8. Решив его, найти $v(x) = \boxed{\dfrac{1}{C\ln x}}$.

9. Записать общее решение данного ДУ: $y = \boxed{\dfrac{1}{Cx\ln x}}$.

Задачи для самостоятельной работы

1) $y' = xy + x^3y^3$. Ответ: $y = 1/(2 - x^2 + Ce^{-x^2/2})$.

2) $x\,dy = (x^5y^2 - 2y)dx$. Ответ: $y = -1/(\frac{1}{3}x^5 + Cx^2)$.

3) $yy' - 4x - y^2\sqrt{x} = 0$. Ответ: $x = y^4/4\ln^2|Cx|$.

4) $y' - xy = -y^3e^{-x^2}$. Ответ: $y^2 = e^{x^2}/(2x + C)$.

5) $y' - y\operatorname{ctg}x = y^3/\sin x$. Ответ: $y = \sin/\sqrt{2\cos x + C}$.

Алгоритм решения: 1) применить подстановку $y = u(x)v(x)$; 2) записать выражение для $y'(x)$; 3) подставить y и y' в данное ДУ; 4) сгруппировать слагаемые таким образом, чтобы можно было определить одну из функций – $u(x)$ или $v(x)$; 5) зная одну из функций, определить вторую; 6) записать общее решение ДУ.

Контрольное задание

Решить уравнение Бернулли: $y' + 2Nxy = xe^{-x^2}\sqrt{y}$, если $y(0) = 0$; $Ny' = (1 - Ny^3)y\sin x$, если $y(\pi/2) = 1$, где N – номер варианта.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Применить подстановку $y = u(x)v(x)$	
2. Записать выражение для y'	
3. Найти $u(x)$	–1
4. Найти $v(x)$	–1
5. Записать общее решение ДУ	–0,5
6. Найти произвольную постоянную C, использовав начальные условия	–0,5
7. Записать частное решение ДУ	

Оценка

3.5. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Пример 1. Решить уравнение $y'' = \cos x$.

Алгоритм решения

1. Записать данное уравнение в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(x): \boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \cos x}.$$

2. Подставить полученное выражение в виде

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(x)\,dx: \boxed{d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \cos x\,dx}.$$

3. Проинтегрировать правую и левую части ДУ:

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\sin x + C_1}.$$

4. В полученном ДУ разделить переменные

$$\boxed{dy = (\sin x + C_1)\,dx} \quad \text{или} \quad \boxed{dy = \sin x dx + C_1 dx}.$$

5. Решить полученное дифференциальное уравнение

$$y = \boxed{\cos x + C_1 x + C_2}.$$

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения $yy'' - y'^2 = y^4$, если $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

Алгоритм решения

1. Ответить, к какому из перечисленных видов дифференциальных уравнений относится данное уравнение: $a) F(x, y, y', y'') = 0$; $b) F(x, y', y'') = 0$; $c) F(y, y', y'') = 0$.

Ответ: относится к виду $\boxed{c)}$.

2. Записать необходимую подстановку для решения уравнений вида $F(y, y', y'') = 0$: $y' = \boxed{P(y)}$.

3. Записать выражение для y'': $y'' = \boxed{P(y)\,\frac{dp}{dy}}$.

Если ответ студента неверный, ЭВМ сообщает: „Вы записали неверно. Так как $y' = p(y)$, то $y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p = pp'$".

4. Полагая $y' = p$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$, записать данное уравнение:

$$\boxed{yp\,\frac{dp}{dy} - p^2 = y^4}.$$

5. Решить полученное уравнение Бернулли, полагая $p = u(y)\,v(y)$.

Результат решения ввести в ЭВМ: $p = \boxed{\pm y\sqrt{C_1 + y^2}}$.

Если решение получено неверно, ЭВМ предлагает повторить тему „Уравнение Бернулли" или же дает следующий алгоритм решения:

1. Положить $p = uv$, $\frac{dp}{dy} = \boxed{u'v + v'u}$.

2. Подставить p и $\frac{dp}{dy}$ в уравнение Бернулли:

$$yuv\,\boxed{(u'v + uv')} - \boxed{u^2v^2} = y^4.$$

3. Раскрыть скобки: $\boxed{yuv^2u' + yu^2vv' - u^2v^2 = y^4}$.

4. Сгруппировать первое и третье слагаемое и результат положить равным нулю, т. е. $\boxed{yuv^2u' - u^2v^2} = 0 \Rightarrow v^2u\boxed{(yu' - u)} = 0$. Так как $v^2u \neq 0$, то $yu' - u = 0$.

5. Решить полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Результат ввести в ЭВМ: $u = \boxed{y}$.

6. Найти функцию $v(y)$ из уравнения $yu^2vv' = y^4$, учитывая, что $u = y$:
$y^3vv' = y^4 \Rightarrow vv' = y \Rightarrow vdv = \boxed{ydy} \Rightarrow v^2 = y^2 + C_1 \Rightarrow v = \boxed{\pm\sqrt{y^2 + C_1}}$.

7. Решением дифференциального уравнения Бернулли является функция $p = \pm y\sqrt{y^2 + C_1}$.

8. Из условия $y = 1$ и $y' = p = 0$ найти постоянную C_1. Результат ввести в ЭВМ: $C_1 = \boxed{-1}$.

9. Решить уравнение $p = \pm y\sqrt{y^2 - 1}$ или $y' = \pm y\sqrt{y^2 - 1}$.

Ответ: $\boxed{\arccos 1/y = \pm x + C_2}$.

10. Учитывая, что $y(0) = 1$, найти C_2: $C_2 = \boxed{0}$.

11. Записать решение данного уравнения:

$$\arccos 1/y = \boxed{\pm x},$$

откуда $\quad 1/y = \cos x$.

Ответ: $y = 1/\cos x$.

Пример 3. Решить уравнение $y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x$.

Алгоритм решения

1. Ответить, к какому из ниже перечисленных видов относится данное уравнение: *a)* $F(x, y', y'') = 0$; *b)* $F(y, y', y'') = 0$.

Ответ: Относится к виду $\boxed{a)}$.

2. Записать подстановку для решения данного ДУ:

$$\boxed{y' = p(x)}.$$

3. Применить данную подстановку к исходному ДУ. Записать уравнение

$$p'(x) + \boxed{p(x)\operatorname{tg} x} = \sin 2x.$$

4. Определить тип полученного ДУ: *a)* с разделяющимися переменными; *b)* линейное; *c)* однородное.

Ответ: полученное уравнение относится к виду $\boxed{b)}$.

5. Записать подстановку, которая применяется к решению линейного уравнения: $p(x) = \boxed{u(x)v(x)}$ или $p = uv$.

6. Решить полученное ДУ и результат ввести в ЭВМ:

$$\rho(x) = \boxed{-2\cos^2 x + C_1 \cos x}.$$

Если студент не справляется с поставленной задачей, ЭВМ показывает решение: „Так как $\rho(x) = u(x)v(x)$, то $\rho'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$. Подставить $\rho(x)$ и $\rho'(x)$ в уравнение:

$$u'(x)v(x) + v'(x)u(x) + u(x)v(x)\operatorname{tg} x = \sin 2x.$$

Сгруппировать 1-е и 3-е слагаемые и положить их сумму равной нулю: $u'(x)v(x) + u(x)v(x)\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow v(x)[u'(x) + u(x)\operatorname{tg} x] = 0 \Rightarrow \frac{du(x)}{dx} = -u(x)\operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{du(x)}{u(x)} = -\operatorname{tg} x\,dx \Rightarrow \ln|u(x)| = \ln|\cos x| \Rightarrow u(x) = \cos x$.

Найти функцию $v(x)$.

Так как $v'(x)u(x) = \sin 2x$, т. е. $v'(x)\cos x = \sin 2x$, то $\frac{dv(x)}{dx} = \frac{\sin 2x}{\cos x} \Rightarrow dv(x) = 2\sin x\,dx \Rightarrow v(x) = -2\cos x + C_1$".

Тогда $\rho(x) = \cos x\,(-2\cos x + C_1)$.

7. Решить полученное ДУ $y'(x) = \cos x\,(-2\cos x + C_1)$ и результат ввести в ЭВМ:

$$y = \boxed{-x - \frac{1}{2}\sin 2x + C_1 \sin x + C_2}.$$

Если студент ошибся, ЭВМ приводит решение уравнения:

$$y' = \cos x(-2\cos x + C_1) \Rightarrow y = \int(-2\cos^2 x + C_1\cos x)\,dx =$$
$$= -2\int(1+\cos 2x)/2\,dx + \int C_1 \cos x\,dx =$$
$$= -x - \sin 2x/2 + C_1 \sin x + C_2.$$

Решить задачи по предложенным алгоритмам

Задача 1. Решить ДУ $y'' = x + \sin x$.

Ответ: $y = x^3/6 - \sin x + C_1 x + C_2$.

Алгоритм решения: 1) записать данное ДУ в виде $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(x)$; 2) умножить обе части ДУ на dx; 3) проинтегрировать правую и левую части ДУ; 4) проинтегрировать еще раз полученное ДУ, предварительно умножив обе части уравнения на dx.

Задача 2. Решить ДУ $y''' = \frac{6}{x^3}$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 1$.

Ответ: $y = 3\ln|x| + 2x^2 - 6x + 6$.

Алгоритм решения: 1) записать данное ДУ в виде $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = f(x)$; 2) умножить обе части на dx; 3) проинтегрировать обе части ДУ; 4) найти C_1, использовав условие $y''(1) = 1$; 5) умножить ДУ на dx; 6) проинтегрировать полученное ДУ; 7) найти C_2, использовав условие

$y'(1) = 1$; 8) умножить полученное ДУ на dx; 9) проинтегрировать ДУ; 10) использовав начальное условие $y(1) = 2$, найти C_3; 11) записать частное решение ДУ.

Задача 3. Решить задачу Коши: $1 + (y')^2 = 2yy''$, если $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 1$.

Ответ: $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$.

Алгоритм решения: 1) для решения уравнения применить подстановку: $y' = p(y)$; 2) записать выражение для y''; 3) подставить $y' = p(y)$ и $y'' = pp'$ в данное уравнение; 4) решить полученное уравнение относительно $p(y)$; 5) заменить $p(y)$ на y; 6) использовав условие $y' = 1$ при $x = 1$, найти C_1; 7) решить полученное ДУ первого порядка относительно функции $y(x)$; 8) использовав условие $y = 1$ при $x = 1$, найти C_2; 9) записать частное решение данного ДУ.

Задача 4. Решить ДУ $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Ответ: $y = x^3 + 3x + 1$.

Алгоритм решения: 1) для решения уравнения применить подстановку $y' = p(x)$; 2) записать выражение для $y''(x)$; 3) подставить $y' = p(x)$ и $y'' = p'(x)$ в данное ДУ; 4) решить полученное ДУ первого порядка относительно функции $p(x)$; 5) заменить $p(x) = y'$, получить ДУ первого порядка относительно функции $y(x)$; 6) использовав условие $y'(0) = 3$, найти C_1; 7) решить полученное ДУ первого порядка; 8) использовав условие $y(0) = 1$, найти C_2; 9) записать частное решение данного ДУ.

Задачи для самостоятельной работы

По разработанному алгоритму решить уравнения:

1) $y'' = \ln x$. Ответ: $y = x^2/2\left(\ln|x| - \frac{3}{2}\right) + C_1x + C_2$.

2) $y'' = 4\cos 2x$; начальные условия: $y(0) = y'(0) = 0$.
Ответ: $y = -\cos 2x + C_1x + C_2$; $y = 1 - \cos 2x$.

3) $y''' = x\sin x$. Ответ: $y = -x\sin x - 2\cos x + C_1x + C_2$.

4) $y''' = 0$; начальные условия: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.
Ответ: $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$; $y = x^2 + 1$.

5) $y'' = 1/x$; начальные условия: $y(1) = y'(1) = 1$.
Ответ: $y = x\ln|x| - x + C_1x + C_2$, $y = x\ln|x| + 1$.

6) $yy'' - y'(1 + y') = 0$. Ответ: $y = C_1e^{C_2x} + \frac{1}{C_2}$.

7) $yy'' + y'^2 = y'^3$, $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 0$. Ответ: $y = x + 1$.

8) $y^3y'' = 1$, $y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$. Ответ: $2y^2 - 1 = (2x + 3)^2$.

9) $y''x\ln x = y'$. Ответ: $y = C_1x(\ln x - 1) + C_2$.

10) $2xy'' = y'$. Ответ: $y = \frac{2}{3}C_1x^{3/2} + C_2$.

11) $xy'' + xy'^2 - y = 0$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$.

Ответ: $y = 2 + \ln\frac{x^2}{4}$.

12) $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$. Ответ: $(1 + C_1^2)\ln|x + C_1| - C_1x + C_2 = 0$.

Контрольное задание № 1

1. Решить дифференциальное уравнение $y = \frac{\operatorname{arctg} Nx}{N-1}$, где N – номер варианта.

Промежуточные вопросы	Штрафные баллы
1. Записать данное уравнение в виде $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(x)$	–0,5
2. Разделить переменные	–0,5
3. Проинтегрировать обе части ДУ	–1
4. Разделить еще раз переменные	–0,5
5. Найти общее решение ДУ	–0,5

2. Решить дифференциальное уравнение $y'' = e^{(N-1)x} \cos \frac{N}{2}x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3/2$, где N – номер варианта.

Промежуточные вопросы	Штрафные баллы
1. Найти y'	–1
2. Найти C_1, использовав условие $y'(0) = 3/2$	–0,5
3. Найти y	–0,5
4. Найти C_2, использовав условие $y(0) = 0$	–0,5
5. Записать частное решение ДУ	–0,5
Оценка	

Контрольное задание № 2

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'^2 + Nyy'' = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = 1$, где N – номер варианта.

Промежуточные вопросы	Штрафные баллы
1. Применить подстановку $y' = p(y)$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$.	
2. Найти общее решение ДУ первого порядка относительно функции $p(y)$	–1
3. Использовав начальные условия, определить постоянную C_1	–0,5
4. Заменив в полученном решении функцию $p(y)$ на y', найти общее решение этого ДУ	–1

Промежуточные вопросы	Штрафные баллы
5. Использовав начальное условие $y(0) = 1$, определить C_2.	−0,5
6. Записать частное решение данного ДУ	
Оценка	

3.6. Линейные однородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами (ЛОДУПК)

1. Дать определение ЛОДУПК n-го порядка.

Дифференциальное уравнение $\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0}$ называется ЛОДУПК n-го порядка, если коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – постоянные.

2. Какие из приведенных уравнений относятся к ЛОДУПК:

a) $y''' + 9y' - 4y = 0$; b) $y^{(5)} + y'' - 4y = x$;
c) $5y^{(4)} - 2y''' + 6 = 0$; d) $y'' + 2y' + 2y = 0$;
e) $2y''' - 4y' + y = tgx + 2$.

Ответ: $\boxed{a, c, d}$

3. Какого вида функции могут быть частными решениями ЛОДУПК:

$y = \boxed{e^{kx}}$; $y = \boxed{\sin ax}$; $y = \boxed{\cos bx}$;

$y = \boxed{e^{kx} \sin ax}$; $y = \boxed{e^{kx} \cos bx}$.

4. Записать характеристическое уравнение ДУ

$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$:

$a_0 r^n + \boxed{a_1 r^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0}$.

5. Записать вид частных решений ЛОДУПК, корни характеристического уравнения которого $r_1 = 3$; $r_{2,3} = 1 \pm 2i$:

$y = \boxed{e^{3x}}$; $y = \boxed{e^x \sin 2x}$; $y = \boxed{e^x \cos 2x}$.

6. Дать определение фундаментальной системы решения ЛОДУПК.

Фундаментальной системой решения называется система n линейно независимых частных решений ЛОДУ n-го порядка.

7. Записать вид общего решения ЛОДУПК, если $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ – его фундаментальная система:

$$\boxed{C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n}.$$

8. Записать фундаментальную систему решений ЛОДУПК, если:

а) $r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots, r_n$ – действительные различные корни характеристического уравнения:

$$\boxed{e^{r_1 x},\ e^{r_2 x},\ e^{r_3 x}, \ldots, e^{r_n x}};$$

б) кратные действительные корни:

$r_1 = r_2$ $\qquad \boxed{e^{r_1 x},\quad e^{r_1 x} x};$

$r_1 = r_2 = r_3$ $\qquad \boxed{e^{r_1 x},\ x e^{r_1 x};\ x^2 e^{r_1 x}};$

$r_1 = r_2 = \ldots = r_n$ $\qquad \boxed{e^{r_1 x},\ x e^{r_1 x}, \ldots, x^{n-1} e^{r_1 x}};$

в) комплексные корни $r_1 = \alpha + \beta i,\ r_2 = \alpha - \beta i$:

$$\boxed{e^{\alpha x} \cos \beta x, \qquad e^{\alpha x} \sin \beta x}.$$

9. Записать общее решение ЛОДУПК, если:

$r_1 \neq r_2$ $\qquad \boxed{C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}};$

$r_1 = r_2$ $\qquad \boxed{C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}};$

$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ $\qquad \boxed{e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)}.$

Пример. Найти общее решение ЛОДУПК $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Алгоритм решения

1. Составить характеристическое уравнение: $\boxed{r^2 - 3r + 2 = 0}$.

2. Найти его корни: $r_1 = \boxed{2}$, $r_2 = \boxed{1}$.

3. Записать фундаментальную систему решений:

$$y_1 = e^{2x}; \qquad y_2 = \boxed{e^{x}}.$$

Ответ: $\qquad y = \boxed{C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}}$.

Решить задачи по предложенным алгоритмам

Задача 1. Решить уравнение $y'' + 9y = 0$.

Ответ: $C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

Алгоритм решения: 1) записать вид общего решения уравнения; 2) составить характеристическое уравнение; 3) найти его корни; 4) записать фундаментальную систему решений; 5) записать общее решение уравнения.

Задача 2. Решить уравнение $y''-4y'+4y=0$.

Ответ: $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$.

Алгоритм решения: 1) записать вид общего решения уравнения; 2) составить характеристическое уравнение; 3) найти его корни; 4) записать фундаментальную систему решений; 5) записать общее решение уравнения.

Задача 3. Решить уравнение $y'''-3y'-2y=0$.

Ответ: $y=C_1e^{2x}+(C_2+C_3x)e^{-x}$.

Алгоритм решения: 1) записать вид общего решения уравнения; 2) составить характеристическое уравнение; 3) найти его корни; 4) записать фундаментальную систему уравнений; 5) записать общее решение уравнения.

Задача 4. Найти частное решение ЛОДУПК $y'''+2y''+10y'=0$ при условии, что $y(0)=2$, $y'(0)=y''(0)=1$.

Ответ: $y=2{,}3+e^{-x}(-0{,}3\cos 3x+\frac{7}{30}\sin 3x)$.

Алгоритм решения: 1) записать вид общего решения уравнения; 2) составить характеристическое уравнение; 3) найти его корни; 4) записать фундаментальную систему решений; 5) записать общее решение уравнения; 6) найти постоянные C_1, C_2, C_3, для этого: а) найти первую производную общего решения уравнения; б) найти вторую производную общего решения уравнения; в) составить и решить систему уравнений относительно C_1, C_2, C_3; 7) записать частное решение ЛОДУПК.

Задачи для самостоятельной работы

1) $y''-6y'+9y=0$. Ответ: $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$.

2) $y''-4y'+13=0$. Ответ: $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

3) $y'''-4y''+13y'=0$. Ответ: $y=C_1+e^{2x}(C_2\cos 3x+C_3\sin 3x)$.

4) $y''-5y'+4y=0$, $y=5$, $y'=1$ при $x=0$. Ответ: $y=4e^x+e^{4x}$.

5) $y''+4y=0$, $y=0$, $y'=2$ при $x=0$. Ответ: $y=\sin 2x$.

Контрольное задание

Решить дифференциальные уравнения:

1. $y''+Ny'-\frac{N-1}{2}y=0$, **(N – номер варианта, номер студента по списку и т. п.)**

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Составить характеристическое уравнение	–1
2. Решить его	–0,5
3. Записать фундаментальную систему решений	–1
4. Записать общее решение уравнения	–0,5

2. $y''' - Ny' = 0, y(0) = 3, y'(0) = -1, y''(0) = 1.$

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Составить характеристическое уравнение	–0,5
2. Решить его	–0,5
3. Записать фундаментальную систему решений	–0,5
4. Записать общее решение уравнения	–0,5
5. Найти постоянные C_1, C_2	–0,5
6. Записать частное решение ДУ	–0,5

3. $y'' - 2Ny' + N^2y = 0.$

1. Записать вид общего решения уравнения: –0,5

$$y = \boxed{C_1y_1 + C_2y_2}$$

2. Составить характеристическое уравнение: –0,5

$$\boxed{r^2 - 2Nr + N^2 = 0}$$

3. Найти его корни: $r_1 = r_2 = \boxed{N}$ –1

4. Записать фундаментальную систему решений: –0,5

$$y_1 = \boxed{e^{Nx}} \qquad y_2 = \boxed{x\,e^{Nx}}$$

5. Записать общее решение данного уравнения: –0,5

$$y = \boxed{C_1 e^{Nx} + C_2 x\, e^{Nx}}$$

4. $y'' + 2\ln Ny' + \sqrt{N}\,y = 0$

1. Записать вид общего решения данного уравнения: –0,5

$$y = \boxed{C_1y_1 + C_2y_2}$$

2. Составить характеристическое уравнение: –0,5

$$\boxed{r^2 + 2\ln N \cdot r + \sqrt{N} = 0}$$

3. Найти его корни: –1

$$r_{1,2} = \boxed{-\ln N \pm \sqrt{\ln^2 N - \sqrt{N}}}$$

4. Записать фундаментальную систему решений:

а) если $\ln^2 N - \sqrt{N} > 0$, то

$$y_{1,2} = \boxed{e^{(-\ln N \pm \sqrt{\ln^2 N - \sqrt{N}})x}}$$

б) если $\ln^2 N - \sqrt{N} < 0$, то –0,5

$$y_1 = \boxed{e^{-x\ln N}\cos\sqrt{\ln^2 N-\sqrt{N}}\,x}$$

$$y_2 = \boxed{e^{-x\ln N}\sin\sqrt{\ln^2 N-\sqrt{N}}\,x}$$

5. Записать общее решение данного уравнения:

а) $\boxed{\begin{aligned}y = C_1 e^{(-\ln N+\sqrt{\ln^2 N-\sqrt{N}})x} & + \\ + C_2 e^{(-\ln N-\sqrt{\ln^2 N-\sqrt{N}})x} & \end{aligned}}$ $-0{,}5$

б) $\boxed{y = e^{-x\ln N}\left(C_1\cos\sqrt{\ln^2 N-\sqrt{N}}\,x + C_2\sin\sqrt{\ln^2 N-\sqrt{N}}\,x\right)}$

Оценка

3.7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами (ЛНДУПК)

3.7.1. Метод неопределенных коэффициентов

1. Дать определение ЛНДУПК: $L(y) = \boxed{f(x)}$.

2. Записать структуру общего решения ЛНДУПК:

$$y = \boxed{y_{oo} + y_{чн}}.$$

3. Записать однородное уравнение, соответствующее данному ЛНДУПК:

а) $y'' - 5y' + y = 8\mathrm{tg}x$:

$$\boxed{y'' - 5y' + y = 0};$$

б) $5y'' + 4y' = x\sin 2x + y$:

$$\boxed{5y'' + 4y' - y = 0};$$

в) $y^{(n)} + 18y'' = xe^{2x} - 81y$:

$$\boxed{y^{(n)} + 18y'' + 81y = 0};$$

г) $7y'' - 7y' + 6y = (x-1)\cos x + 2\sin x$:

$$\boxed{7y'' - 7y' + 6y = 0};$$

д) $y''' + 2y = x^2\sin 5x - e^{2x}(x^3 - 1)$:

$$\boxed{y''' + 2y = 0}$$

4. Определить, какие из функций $f(x)$ относятся к специальному виду правой части уравнения $L(y) = f(x)$:

а) $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$;

б) $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right]$.

Ответ: $\boxed{\text{а, б}}$.

5. Пусть $f(x) = P(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$.
Записать частное решение $y_{ч.н}$ уравнения $L(y) = f(x)$, если:
а) 0 не является корнем характеристического уравнения ЛОДУПК:

$$y_{ч.н} = \boxed{B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m};$$

б) 0 – корень характеристического уравнения ЛОДУПК кратности k:

$$y_{ч.н} = \boxed{x^k\left(B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_{m-1} x + B_m\right)}.$$

6. Пусть $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$. Записать частное решение $y_{ч.н}$ уравнения $Ly = f(x)$, если даны корни характеристического уравнения для $Ly = 0$:

а) $r_1 = 2$, $r_2 = 3$:

$$y_{ч.н} = \boxed{B_0 x^3 + B_1 x^2 + B_2 x + B_3};$$

б) $r_1 = 0$, $r_2 = 4$:

$$y_{ч.н} = \boxed{x\left(B_0 x^3 + B_1 x^2 + B_2 x + B_3\right)};$$

в) $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = -2$:

$$y_{ч.н} = \boxed{x^2\left(B_0 x^3 + B_1 x^2 + B_2 x + B_3\right)}.$$

7. Допустим, $f(x) = e^{\alpha x}P(x) = e^{\alpha x}(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m)$.
Записать частное решение $y_{ч.н}$ уравнения $Ly = f(x)$, если:

а) α не является корнем характеристического уравнения ЛОДУПК:

$$y_{ч.н} = \boxed{e^{\alpha x}\left(B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_{m-1} x + B_m\right)};$$

б) α является корнем характеристического уравнения кратности k ЛОДУПК:

$$y_{ч.н} = \boxed{x^k e^{\alpha x}\left(B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_{m-1} x + B_m\right)}.$$

8. Пусть $f(x) = e^{-2x}(3x^4 + 2x^2 - x + 8)$. Записать частное решение $y_{ч.н}$ уравнения $Ly = f(x)$, если даны корни соответствующего характеристического уравнения ЛОДУПК:

а) $r_1 = 1,\ r_2 = -3$:

$$y_{ч.н} = \boxed{e^{-2x}(B_0x^4 + B_1x^3 + B_2x^2 + B_3x + B_4)};$$

б) $r_1 = -2,\ r_2 = 2$:

$$y_{ч.н} = \boxed{x\,e^{-2x}(B_0x^4 + B_1x^3 + B_2x^2 + B_3x + B_4)};$$

в) $r_1 = r_2 = -2,\ r_3 = 1$:

$$y_{ч.н} = \boxed{x^2 e^{-2x}(B_0x^4 + B_1x^3 + B_2x^2 + B_3x + B_4)}.$$

9. Пусть $f(x) = P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x = (A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m)\cos\beta x + (C_0x^n + C_1x^{n-1} + \ldots + C_n)\sin\beta x\ (n \geqslant m)$.

Записать частное решение уравнения $Ly = f(x)$, если:

а) $i\beta$ не является корнем характеристического уравнения ЛОДУПК:

$$y_{ч.н} = \boxed{(N_0x^n + N_1x^{n-1} + \ldots + N_n)\cos\beta x + (M_0x^n + M_1x^{n-1} + \ldots + M_n)\sin\beta x};$$

б) $i\beta$ является корнем характеристического уравнения кратности ЛОДУПК:

$$y_{ч.н} = \boxed{x^k\left[(N_0x^n + N_1x^{n-1} + \ldots + N_n)\cos\beta x + (M_0x^n + M_1x^{n-1} + \ldots + M_n)\sin\beta x\right]}.$$

10. Пусть $f(x) = (x+1)\cos 3x + x^2\sin 3x$. Записать частное решение $y_{ч.н}$ уравнения $Ly = f(x)$, если корни характеристического уравнения для $Ly = 0$ заданы:

а) $r_{1,2} = \pm 2i$:

$$y_{ч.н} = \boxed{(N_0x^2 + N_1x + N_2)\cos 3x + (M_0x^2 + M_1x + M_2)\sin 3x};$$

б) $r_{1,2} = \pm 3i,\ r_3 = 4$:

$$y_{ч.н} = \boxed{x\left[(N_0x^2 + N_1x + N_2)\cos 3x + (M_0x^2 + M_1x + M_2)\sin 3x\right]}.$$

11. Пусть $f(x) = (5x - 3)\sin 2x$. Записать частное решение $y_{ч.н}$ уравнения $Ly = f(x)$, если корни характеристического уравнения для $Ly = 0$ заданы:

а) $r_1 = 2,\ r_2 = 3$:

$$y_{ч.н} = \boxed{(N_0x + N_1)\cos 2x + (M_0x + M_1)\sin 2x};$$

б) $r_1 = 2,\ r_{2,3} = \pm 4i$:

$$y_{ч.н} = \boxed{(N_0x + N_1)\cos 2x + (M_0x + M_1)\sin 2x};$$

в) $r_{1,2} = \pm 2i,\ r_3 = -1$:

$$y_{ч.н} = \boxed{x\left[(N_0x + N_1)\cos 2x + (M_0x + M_1)\sin 2x\right]}.$$

12. Пусть $f(x) = (3x^3 - 2x^2 + 1)\cos 2x$. Записать частное решение $y_{ч.н}$ уравнения $Ly = f(x)$, если заданы корни характеристического уравнения для $Ly = 0$:

а) $r_1 = r_2 = 2,\ r_3 = 4$:

$$y_{ч.н} = \boxed{(N_0x^3 + N_1x^2 + N_2x + N_3)\cos 2x + M_0x^3 + M_1x^2 + M_2x + M_3)\sin 2x};$$

б) $r_{1,2} = \pm 4i,\ r_3 = -2$:

$$y_{ч.н} = \boxed{(N_0x^3 + N_1x^2 + N_3)\cos 2x + (M_0x^3 + M_1x^2 + M_2x + M_3)\sin 2x};$$

в) $r_{1,2} = \pm 2i$:

$$y_{ч.н} = \boxed{x[(N_0x^3 + N_1x^2 + N_2x + N_3)\cos 2x + (M_0x^3 + M_1x^2 + M_2x + M_3)\sin 2x]}.$$

13. Пусть $f(x) = e^x[(2x + 1)\cos 3x - 2\sin 3x]$. Записать частное решение $y_{ч.н}$ уравнения $Ly = f(x)$, если заданы корни характеристического уравнения для $L(y) = 0$:

а) $r_1 = 2,\ r_2 = 3,\ r_3 = 1$:

$$y_{ч.н} = \boxed{e^x[(N_0x + N_1)\cos 3x + (M_0x + M_1)\sin 3x]};$$

б) $r_{1,2} = 2 \pm 3i,\ r_3 = -2$:

$$y_{ч.н} = \boxed{e^x[(N_0x + N_1)\cos 3x + (M_0x + M_1)\sin 3x]};$$

в) $r_{1,2} = 1 \pm 3i,\ r_3 = 4$:

$$y_{ч.н} = \boxed{xe^x[(N_0x + N_1)\cos 3x + (M_0x + M_1)\sin 3x]}.$$

14. Пусть $f(x) = e^{3x}(x^2 + 2)\sin 6x$. Записать частное решение $y_{ч.н}$ уравнения $Ly = f(x)$, если заданы корни характеристического уравнения для $Ly = 0$:

а) $r_1 = 3,\ r_2 = 6$:

$$y_{ч.н} = \boxed{e^{3x}[(N_0x^2 + N_1x + N_2)\cos 6x + (M_0x^2 + M_1x + M_2)\sin 6x]};$$

б) $r_{1,2} = 3 \pm 6i,\ r_3 = 1$:

$$y_{ч.н} = \boxed{xe^{3x}[(N_0x^2 + N_1x + N_2)\cos 6x + (M_0x^2 + M_1x + M_2)\sin 6x]};$$

в) $r_{1,2} = 3 \pm 2i$:

$$y_{ч.н} = \boxed{e^{3x}[(N_0x^2 + N_1x + N_2)\cos 6x + (M_0x^2 + M_1x + M_2)\sin 6x]}$$

15. Записать частное решение ЛНДУПК в общем виде, если правая часть этого уравнения имеет вид $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$:

$$y_{ч.н} = \boxed{y_{ч.н1} + y_{ч.н2}}.$$

16. Пусть $f(x) = 4x - 3\sin 2x$. Записать частное решение $y_{ч.н}$ ЛНДУПК $Ly = f(x)$, если корни характеристического уравнения ЛОДУПК заданы:

а) $r_1 = 1, \ r_{2,3} = 1 \pm 2i$:

$$y_{ч.н} = \boxed{Ax + B + N\cos 2x + M\sin 2x};$$

б) $r_1 = 0, \ r_{2,3} = 3 \pm 2i$:

$$y_{ч.н} = \boxed{x(Ax + B) + N\cos 2x + M\sin 2x};$$

в) $r_1 = -2, \ r_{2,3} = \pm 2i$:

$$y_{ч.н} = \boxed{Ax + B + x(N\cos 2x + M\sin 2x)};$$

г) $r_1 = 0, \ r_{2,3} = \pm 2i$:

$$y_{ч.н} = \boxed{x(Ax + B) + x(N\cos 2x + M\sin 2x)}.$$

Пример. Найти частное решение ЛНДУПК $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$, если $y'(0) = y(0) = 1$.

Алгоритм решения

1. Записать общее решение данного уравнения:

$$y = \boxed{y_{оо} + y_{ч.н}}.$$

2. Записать ЛОДУПК, соответствующее данному уравнению:

$$\boxed{2y'' + 5y' = 0}.$$

3. Записать характеристическое уравнение ЛОДУПК:

$$\boxed{2r^2 + 5r = 0}.$$

4. Записать корни характеристического уравнения:

$$r_1 = \boxed{0}, \ r_2 = \boxed{-5/2}.$$

5. Записать общее решение ЛОДУПК: $y_{оо} = \boxed{C_1 + C_2 e^{-5/2x}}$.

6. Записать в общем виде $y_{ч.н}$ – частное решение данного уравнения: $y_{ч.н} = \boxed{x}(Ax^2 + Bx + C)$.

7. Найти $y'_{ч.н}$:

$$y'_{ч.н} = x'(Ax^2 + Bx + C) + x\boxed{(Ax^2 + Bx + C)'}.$$

Привести подобные члены: $y'_{ч.н} = \boxed{3Ax^2 + 2Bx + C}$.

8. Найти $y''_{ч.н}$: $y''_{ч.н} = \boxed{6Ax + 2B}$.

9. Полученные $y'_{ч.н}$ и $y''_{ч.н}$ подставить в данное ЛНДУПК, упростить и записать результат:

$$\boxed{15Ax^2} + (12A + 10B)x + \boxed{4B + 5C} = 5x^2 - 2x - 1.$$

10. Записать соответствующую систему уравнений для нахождения коэффициентов A, B и C:

$$\begin{cases} 15A = 5; \\ \boxed{12A + 10B} = -2; \\ \boxed{4B + 5C} = -1. \end{cases}$$

11. Определить A, B и C:

$$A = \boxed{1/3};\ B = \boxed{-3/5};\ C = \boxed{7/25}.$$

12. Записать $y_{чн}$ ЛНДУПК:

$$y_{ч.н} = \boxed{x\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{7}{25}\right)}.$$

13. Записать общее решение ЛНДУПК:

$$y = y_{оо} + y_{ч.н} = \boxed{C_1 + C_2 e^{-5/2x} + x\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{7}{25}\right)},$$

или

$$y = y_{оо} + y_{ч.н} = \boxed{C_1 + C_2 e^{-5/2x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x}.$$

14. Использовав начальные условия $y'(0) = y(0) = 1$, найти C_1 и C_2:

$$C_1 = \boxed{1\frac{36}{125}},\ C_2 = \boxed{-\frac{36}{125}}.$$

15. Записать частное решение ЛНДУПК:

$$y = \boxed{1\frac{36}{125} - \frac{36}{125}e^{-5/2x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x}.$$

Решить задачи по предложенному алгоритму:

1) $y'' - 3y' + 2y = e^x$. Ответ: $y = C_1 e^{2x} + (C_2 - x)e^x$.

2) $y'' - 7y' + 6y = (x - 1)\cos x + 2\sin x$. Ответ: $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + \frac{1}{74}[(37 + 5x)\cos x - (90 + 7x)\sin x]$.

3) $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}\cos x$. Ответ: $y = e^{-x}(4x\sin x - x^2\cos x + 6\cos x + C_1 + C_2 x)$.

4) $y'' + y = -\sin 2x$, если $y(\pi) = y'(\pi) = 1$. Ответ: $y = -\cos x - \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x$.

5) $y'' - y' = 2(1 - x)$, если $y(0) = y'(0) = 1$. Ответ: $y = e^x + x^2$.

6) $y'''+2y''+y'=-2e^{-2x}$, если $y(0)=2, y'(0)=y''(0)=1$. Ответ: $y=4-$ $-3e^{-x}+e^{-2x}$.

Алгоритм решения: 1) записать общий вид общего решения ЛНДУПК; 2) найти общее решение y_{oo} ЛОДУПК, соответствующего ЛНДУПК; 3) найти частное решение $y_{ч.н}$ ЛНДУПК; 4) записать общее решение ЛНДУПК; 5) если даны начальные условия, найти произвольные постоянные; 6) записать частное решение ЛНДУПК.

Контрольное задание

Найти частное решение ЛНДУПК:

1) $2y''-3Ny'+N^2y=e^{Nx}(x^2+2)$, **если** $y(0)=0, y'(0)=1$;

2) $4y''-4Ny'+5N^2y=e^{-\frac{N}{2}x}(\cos Nx+x\sin Nx)$, **если** $y(0)=$ $=y'(0)=0$, **где** N **– номер варианта.**

Промежуточные вопросы	Штрафные баллы
1. Записать вид общего решения ЛНДУПК	–0,5
2. Найти общее решение ЛОДУПК, соответствующего ЛНДУПК	–1
3. Найти частное решение ЛНДУПК	–1
4. Записать общее решение ЛНДУПК	
5. Используя начальные условия, найти частное решение ЛНДУПК	–0,5
6. Записать ответ	
Оценка	

3.7.2. Метод вариации произвольных постоянных

Пример. Решить уравнение $y''+y=\frac{1}{\cos x}$.

Алгоритм решения

1. Записать общий вид решения ЛНДУПК:

$$y=y_{oo}+y_{ч.н}.$$

2. Записать ЛОДУПК, соответствующее ЛНДУПК:

$$\boxed{y''+y=0}.$$

3. Написать характеристическое уравнение полученного ЛОДУПК:

$$\boxed{r^2+1=0}.$$

4. Найти его корни: $r_{1,2}=\boxed{\pm i}$.

5. Записать общее решение ЛОДУПК:

$$y_{oo} = \boxed{C_1 \cos x + C_2 \sin x}.$$

6. Записать общее решение неоднородного уравнения:

$$y = C_1(x)\boxed{\cos x} + \boxed{C_2(x)\sin x}.$$

7. Записать систему уравнений для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\boxed{\cos x} + \boxed{C_2'(x)}\sin x = 0; \\ \boxed{-C_1'(x)\sin x} + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

8. Решить ее относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, например, по формулам Крамера:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ 1/\cos x & \cos x \end{vmatrix}}{\boxed{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}}} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x;$$

$$C_2'(x) = \boxed{\frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 1/\cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}}} = 1.$$

9. Найти $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \boxed{\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx} = \boxed{-\ln|\cos x| + C_1};$$

$$C_2(x) = \boxed{\int dx} = \boxed{x + C_2}.$$

10. Записать общее решение ЛНДУПК:

$$y = \boxed{(-\ln|\cos x| + C_1)\cos x + (x + C_2)\sin x},$$

или $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln|\cos x| + x\sin x$.

Решить задачу по предложенному алгоритму

Задача. Найти частное решение ДУ

$$y'' + y' = \frac{1}{1+e^x}, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 2.$$

Ответ: $y = -x + e^x(3 - \ln 2 - x) + (1 + e^x) - 2 - \ln 2$.

Алгоритм решения: 1) записать общий вид решения ЛНДУПК; 2) записать ЛОДУПК, соответствующее ЛНДУПК; 3) найти общее решение ЛОДУПК; 4) записать в общем виде решение ЛОДУПК; 5) записать необходимую систему уравнений для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$; 6) найти $C_1(x)$ и $C_2(x)$; 7) записать общее решение ЛНДУПК; 8) учитывая начальные условия, найти частное решение ЛНДУПК; 9) записать ответ.

Задачи для самостоятельной работы

1) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$. Ответ: $y=\left(\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{3x^2}{4}+C_1+C_2x\right)e^{-2x}$.

2) $y''-y'=e^{2x}\cos x$. Ответ: $y=-\cos x+C_2e^x+C_1$.

Контрольное задание

Решить дифференциальные уравнения:

1) $y''-Ny=N/x^3(x^2-1)$, если $y(\sqrt{N})=y'(\sqrt{N})=0$;

2) $y''-y'=e^{Nx}\cos x$, если $y(0)=y'(0)=0$, где N – номер варианта.

	Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1.	Записать ЛОДУПК, соответствующее ЛНДУПК	
2.	Найти общее решение ЛОДУПК	–0,5
3.	Записать необходимую систему уравнений	–0,5
	для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$	–1
4.	Найти $C_1(x)$ и $C_2(x)$	–1
5.	Записать общее решение ЛНДУПК	–0,5
6.	Учитывая начальные условия, найти частное решение ЛНДУПК	–0,5
7.	Записать ответ	
	Оценка	

4. Двойной интеграл

4.1. Определение и основные свойства

1. Дать определение двойного интеграла от функции $z=f(x,y)$ по области σ, если λ – шаг разбиения области σ на элементарные $\Delta\sigma_i$:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dx\,dy=\boxed{\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\,\Delta S_i},$$

где ΔS_i – площадь элементарной области $\Delta\sigma_i$.

2. Записать основные свойства двойного интеграла:

а) $\iint\limits_{(\sigma)} Cf(x,y)\,dx\,dy=\boxed{C\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dx\,dy}$, где $C=const$;

б) $\iint\limits_{(\sigma)}[f(x,y)\pm g(x,y)]\,dx\,dy=\boxed{\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dx\,dy\pm\iint\limits_{(\sigma)} g(x,y)\,dx\,dy}$;

в) если $f(x, y) \leqslant g(x, y)$ в области σ, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy \boxed{\leqslant} \iint\limits_{(\sigma)} g(x, y)\,dx\,dy;$$

г) если область σ разбита некоторой кривой на две области σ_1 и σ_2, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \boxed{\iint\limits_{(\sigma_1)} f(x, y)\,dx\,dy + \iint\limits_{(\sigma_2)} f(x, y)\,dx\,dy};$$

д) если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x, y)$ в области σ, а S – площадь области σ, то

$$\boxed{mS} \leqslant \iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy \leqslant \boxed{MS};$$

е) если $f(x, y)$ непрерывна в области σ, S – площадь области σ, μ – значение функции $f(x, y)$ в некоторой точке $P(\xi, \eta)$, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \boxed{\mu S}.$$

Пример 1. Вычислить приближенно $\iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{x+y}\,dx\,dy$, составив интегральные суммы, если область σ ограничена прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

Для вычисления воспользоваться приближенной формулой:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i.$$

Первый способ. Разбить данную область на четыре равных треугольника прямыми $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $x + y = \frac{1}{2}$, взяв за точки P_i (ξ_i, η_i) вершины прямых углов частичных треугольников.

Алгоритм решения

1. Записать координаты вершин частичных треугольников $P_1(\xi_1, \eta_1)$, $P_2(\xi_2, \eta_2)$, $P_3(\xi_3, \eta_3)$, $P_4(\xi_4, \eta_4)$:

$$\xi_1 = \boxed{0};\quad \xi_2 = \boxed{1/2};\quad \xi_3 = \boxed{1/2};\quad \xi_4 = \boxed{0};$$

$$\eta_1 = \boxed{0};\quad \eta_2 = \boxed{0};\quad \eta_3 = \boxed{1/2};\quad \eta_4 = \boxed{1/2}.$$

(порядок выбора точек брать в направлении против часовой стрелки, начиная с начала координат).

2. Вычислить значения функции $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ в точках P_i:

$$f(\xi_1, \eta_1) = \boxed{0};\quad f(\xi_2, \eta_2) = \boxed{\frac{1}{2}};\quad f(\xi_3, \eta_3) = \boxed{1};\quad f(\xi_4, \eta_4) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

3. Найти ΔS_i – площади частичных треугольников: $= \frac{1}{8}$ кв. ед.; $i = 1, 2, 3, 4$.

4. Вычислить $\iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{x + y}\,dx\,dy \approx [f(\xi_1, \eta_1) + f(\xi_2, \eta_2) + f(\xi_3, \eta_3) + f(\xi_4, \eta_4)]\Delta S_i = \boxed{\left(0 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{8}} \approx \boxed{0{,}301}$ с точностью $0{,}1 \cdot 10^{-3}$.

Второй способ. Разбить данную область так же, как и в первом случае, но за точки P_i (ξ_i, η_i) взять центры тяжести частичных треугольников.

Алгоритм решения

1. Найти координаты центров тяжести (x_c, y_c) частичных треугольников, используя формулы:

$x_c = (x_1 + x_2 + x_3)/3$, $y_c = (y_1 + y_2 + y_3)/3$.

P_1 (ξ_1, η_1) – центр тяжести треугольника с вершинами 0(0; 0), A ($\frac{1}{2}$; 0), B (0; $\frac{1}{2}$): $\xi_1 = \boxed{1/6}$; $\eta_1 = \boxed{1/6}$;

P_2 (ξ_2, η_2) – центр тяжести треугольника с вершинами A (1/2; 0), C (1; 0); D (1/2; 1/2): $\xi_2 = \boxed{2/3}$; $\eta_2 = \boxed{1/6}$;

P_3 (ξ_3, η_3) – центр тяжести треугольника с вершинами A (1/2; 0); B(0; 1/2); D (1/2; 1/2): $\xi_3 = \boxed{1/3}$; $\eta_3 = \boxed{1/3}$;

P_4 (ξ_4, η_4) – центр тяжести треугольника с вершинами B (0; 1/2); D (1/2; 1/2); E (0; 1): $\xi_4 = \boxed{1/6}$; $\eta_4 = \boxed{2/3}$.

2. Вычислить значения функции $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ в указанных точках:

$$f(\xi_1, \eta_1) = \boxed{1/\sqrt{3}}; \quad f(\xi_2, \eta_2) = \boxed{\sqrt{5/6}}; \quad f(\xi_3, \eta_3) = \boxed{\sqrt{2/3}};$$

$$f(\xi_4, \eta_4) = \boxed{\sqrt{5/6}}.$$

3. Найти приближенно с точностью до 0,001 значение интеграла:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{x + y}\, dx\, dy \approx \boxed{0{,}402}.$$

Если студент ответил неверно, ЭВМ приводит решение:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{x + y}\, dx\, dy \approx \frac{1}{8}\left(1/\sqrt{3} + \sqrt{5/6} + \sqrt{2/3} + \sqrt{5/6}\right) =$$

$$= 1/(8\sqrt{6})(\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 2) \approx 1/(8 \cdot 2{,}449)(1{,}414 +$$

$$+ 2 \cdot 236 + 2) \approx 0{,}402.$$

Точное значение данного интеграла равно 0,4. Какой выбор точек оказался более удачным? Ответ дать в виде: „Первый способ" или „Второй способ".

Ответ: $\boxed{\text{Второй способ}}$.

Найти абсолютную погрешность $\Delta \mathcal{Y}$ более точного ответа: $\Delta \mathcal{Y} = 0{,}002$.

Найти относительную погрешность δ в процентах: $\delta = \boxed{0{,}5\ \%}$.

Если студент неверно нашел $\Delta \mathcal{Y}$ и δ, ЭВМ приводит решение:

$$\Delta \mathcal{Y} = 0{,}402 - 0{,}4 = 0{,}002; \ \delta = \frac{0{,}002}{0{,}4} \cdot 100\ \% = 0{,}5\ \%.$$

Пример 2. Оценить интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} \sin\frac{x^2-y+1}{x^2+y^2+1}\,dx\,dy$, где σ – круг $x^2+y^2 \le 9$. Для решения воспользоваться свойством $mS \le \iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dx\,dy \le MS$.

Алгоритм решения

1. Найти площадь S области σ: $S = 9\pi$.

2. Найти наименьшее m и наибольшее M значения функции $\sin\frac{x^2-y+1}{x^2+y^2+1}$ в круге $x^2+y^2=9$, воспользовавшись соотношением $|\sin t| \le 1$: $m=\boxed{-1}$; $M=\boxed{1}$.

Ответ: $\boxed{-9\pi \le \iint\limits_{(\sigma)} \sin\frac{x^2-y+1}{x^2+y^2+1}\,dx\,dy \le 9\pi}$.

4.2. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных координатах

Область интегрирования σ ограничена кривой γ, которую любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает не более чем в двух точках. При $a \le x \le b$ уравнение нижней границы области $y=\varphi_1(x)$, верхней – $y=\varphi_2(x)$. Тогда двойной интеграл, распространенный на эту область, вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dx\,dy = \boxed{\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy}. \qquad (1)$$

Область интегрирования σ ограничена кривой γ, которую любая прямая, параллельная оси Ox, пересекает не более чем в двух точках. При $c \le y \le d$ уравнение левой границы области $x=\psi_1(y)$, правой – $x=\psi_2(y)$. Двойной интеграл, распространенный на эту область, вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dx\,dy = \boxed{\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx}. \qquad (2)$$

При определении пределов интегрирования в повторном интеграле полезно пользоваться следующим правилом:

1) постоянные пределы интегрирования внешнего интеграла – это наименьшее и наибольшее значения соответствующей переменной интегрирования в области σ;

2) пусть $a \le x \le b$. Чтобы получить пределы интегрирования по y для внутреннего интеграла, надо пересечь область σ лучом, параллельным и одинаково направленным с осью Oy. Граница области, которую луч пересекает при входе в область, будет нижней границей этой области, а ее уравнение, решенное относительно y, служит для установления нижнего предела интегрирования по y $[y=\varphi_1(x)]$. Граница области, которую луч пересекает, выходя из области, будет

верхней границей этой области, а ее уравнение, решенное относительно y, служит для установления верхнего предела интегрирования по $y[y = \varphi_2(x)]$.

Аналогичным образом при постоянных пределах по y определяются переменные пределы по x.

Пример 1. Записать двойной интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy$ в виде повторных интегралов двумя способами, если σ – фигура, ограниченная линиями $x = 0$, $y = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$, причем $x \geqslant 0$.

Алгоритм решения

1. Применить формулы (1), (2) для выражения двойного интеграла через повторный.

2. Изобразить область интегрирования σ.

3. Проинтегрировать по формуле (1):

а) найти постоянные пределы интегрирования по переменной x для внешнего интеграла: $a = \boxed{0}$; $b = \boxed{R}$;

б) найти переменные пределы интегрирования по переменной y для внутреннего интеграла:

$$\varphi_1(x) = \boxed{-\sqrt{R^2 - x^2}}; \qquad \varphi_2(x) = \boxed{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Ответ: $\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \boxed{\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} f(x, y)\,dy}$.

4. Проинтегрировать по формуле (2):

а) найти постоянные пределы интегрирования по переменной y для внешнего интеграла: $c = \boxed{-R}$; $d = \boxed{R}$;

б) найти переменные пределы интегрирования по переменной x для внутреннего интеграла:

$$\psi_1(y) = \boxed{0}; \qquad \psi_2(y) = \boxed{\sqrt{R^2 - y^2}}.$$

Ответ: $\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \boxed{\int_{-R}^{R} dy \int_0^{\sqrt{R^2 - y^2}} f(x, y)\,dx}$.

Пример 2. В повторном интеграле $\int_0^{2/3} dx \int_{2x}^{2-x} f(x, y)\,dy$ переменить порядок интегрирования.

Алгоритм решения

1. Восстановить область интегрирования σ по известным пределам данного повторного интеграла, для чего:

а) записать уравнения границ этой области:

$x = \boxed{0}$; $\qquad x = \boxed{2/3}$; $\qquad y = \boxed{2x}$; $\qquad y = \boxed{2 - x}$;

б) построить область.

2. Для перемены порядка интегрирования разбить данную область на две области прямой $y = \boxed{4/3}$, так как правая граница области σ есть линия, заданная двумя аналитическими выражениями.

3. Найти постоянные пределы интегрирования по переменной y для внешних интегралов по каждой из двух полученных областей:

$y_1 = \boxed{0}$; $y_2 = \boxed{4/3}$; $y_3 = \boxed{4/3}$; $y_4 = \boxed{2}$.

4. Найти переменные пределы интегрирования по переменной x для внутренних интегралов по каждой из двух полученных областей:

$x_1 = \boxed{0}$; $x_2 = \boxed{y/2}$; $x_3 = \boxed{0}$; $x_4 = \boxed{2-y}$.

Ответ:

$$\int_0^{2/3} dx \int_{2x}^{2-x} f(x,y)\,dy = \int_0^{4/3} dy \int_0^{y/2} f(x,y)\,dx + \int_{4/3}^{2} dy \int_0^{2-y} f(x,y)\,dx.$$

Пример 3. Вычислить с точностью до 0,001 двойной интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} \frac{y^3}{x^2}\,dxdy$ двумя способами, меняя порядок интегрирования, если область σ ограничена линиями $y = \frac{1}{3}x$, $y = \sqrt{x}$, $x = 1$.

Алгоритм решения способом I

1. Применить формулу

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

2. Построить область σ.
3. Найти пределы интегрирования:

$a = \boxed{0}$; $b = \boxed{1}$; $\varphi_1(x) = \boxed{\frac{1}{3}x}$; $\varphi_2(x) = \boxed{\sqrt{x}}$.

Ответ: $\iint\limits_{(\sigma)} \frac{y^3}{x^2}\,dxdy = \boxed{\int_0^1 dx \int_{\frac{1}{3}x}^{\sqrt{x}} \frac{y^3}{x^2}\,dy} = \boxed{0{,}249}$.

Если студент дает неправильный ответ, ЭВМ приводит решение:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{y^3}{x^2}\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{3}x}^{\sqrt{x}} \frac{y^3}{x^2}\,dy = \int_0^1 \frac{y^4}{4x^2}\Big|_{\frac{1}{3}x}^{\sqrt{x}} dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^2 - \frac{1}{81}x^4}{x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{81}x^2\right) dx = \frac{1}{324}\int_0^1 (81 -$$

$$- x^2)\,dx = \frac{1}{324}\cdot\left(81x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{121}{486} \approx 0{,}249.$$

Алгоритм решения способом II

1. Применить формулу $\iint\limits_{(G)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$.

2. Разбить область G на две области прямой $y = \boxed{1/3}$.

3. Найти пределы интегрирования для повторного интеграла по первой области: $c_1 = \boxed{0}$; $d_1 = \boxed{1/3}$; $\psi_1(y) = \boxed{y^2}$; $\psi_2(y) = \boxed{3y}$.

4. Найти пределы интегрирования для повторного интеграла по второй области:

$c_2 = \boxed{1/3}$; $\quad d_2 = \boxed{1}$; $\quad \psi_3(y) = \boxed{y^2}$; $\psi_4(y) = \boxed{1}$.

Ответ:

$$\iint\limits_{(G)} \frac{y^3}{x^2}\,dx\,dy = \boxed{\int_0^{1/3} dy \int_{y^2}^{3y} \frac{y^3}{x^2}\,dx + \int_{1/3}^{1} dy \int_{y^2}^{1} \frac{y^3}{x^2}\,dx} \approx 0{,}249.$$

Задачи для самостоятельной работы

По разработанным алгоритмам решить задачи:

1. Составить интегральную сумму для двойного интеграла $\iint\limits_{(G)} x^2 y^3\,dx\,dy$, где G – область, ограниченная осями координат и прямыми $x = 1$, $y = 1$. Область разбить на 4 квадрата прямыми $x = 1/2$ и $y = 1/2$, за точки P_i выбрать центры частичных квадратов. Ответ: 0,0684.

2. Записать двойной интеграл $\iint\limits_{(G)} f(x, y)\,dx\,dy$ в виде повторных интегралов двумя способами, если G – квадрат, ограниченный прямыми $x + y = 1$, $x - y = 1$, $y - x = 1$, $x + y = -1$.

Ответ: 1) $\iint\limits_{(G)} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} dx \int_{-x-1}^{x+1} f(x, y)\,dy + \int_0^1 dx \int_{x-1}^{-x+1} f(x, y)\,dy$;

2) $\iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{-y-1}^{y+1} f(x,y)\,dx + \int_0^1 dx \int_{y-1}^{-y+1} f(x,y)\,dy$.

3. В повторном интеграле $\int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y)\,dy$ изменить порядок интегрирования. Ответ:

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-2\sqrt{1+x}}^{2\sqrt{1+x}} f(x, y)\,dy + \int_0^8 dx \int_{-2\sqrt{1+x}}^{2-x} f(x, y)\,dy.$$

4. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(G)} \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, где G ограничена линиями $x = 2$, $y = x$, $y = \frac{1}{x}$. Ответ: 2,25.

5. Вычислить $\iint\limits_{(G)} (2x + y)\,dx\,dy$ по указанным областям G:

1) G – параллелограмм с вершинами A (–1; 2), B (3; 4), C (3; 1/2), D (–1; –3/2). Ответ: 45,5.

2) $\mathcal{D}$ ограничена прямыми $y = -\frac{2}{3}x + 6$, $y = \frac{1}{2}x - 1$, $x = 3$. Ответ: 53,375.

3) $\mathcal{D}$ определена неравенствами $\frac{1}{4}y - \frac{3}{2} \leq x \leq 2y + 2$, $-2 \leq y \leq 2$. Ответ: $37\frac{1}{3}$.

4) $\mathcal{D}$ – треугольник с вершинами $A(-2; -2)$; $B(-1; 2)$; $C(-1; -3/2)$. Ответ: 5,93.

6. После стирания с доски остался нестертым $\int_{-y}^{\sqrt{y}}$. Какой это интеграл: внутренний или внешний? По какой переменной он взят? Ответ: внутренний; по переменной x.

Контрольные задания

1. При стирании с доски на ней осталось от решенной задачи только $\int_0^1 \int_{2x}^{3x}$. По какой переменной вычислялся внутренний интеграл? Восстановить область интегрирования $\mathcal{D}$.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Указать переменную интегрирования внутреннего интеграла в форме x или y: $\boxed{y}$	–2
2. Записать уравнение границ области $\mathcal{D}$: $x = \boxed{0}$; $x = \boxed{1}$; $y = \boxed{2x}$; $y = \boxed{3x}$	–0,5
3. Построить область $\mathcal{D}$	–0,5

2. Переменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int_0^2 dx \int_{2x}^{6x} f(x,y)\,dy$.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Записать уравнения границ области интегрирования $x = \boxed{0}$; $x = \boxed{2}$; $y = \boxed{2x}$; $y = \boxed{6-x}$	–0,5
2. Построить область интегрирования	–0,5
3. Разбить область интегрирования на две области $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ линией $y = \boxed{4}$	–0,5
4. Найти пределы интегрирования для внешних интегралов по каждой из двух областей $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ $y = \boxed{0}$; $y = \boxed{4}$; $y = \boxed{4}$; $y = \boxed{6}$	–1

5. Найти пределы интегрирования для внутренних интегралов по каждой из областей $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ −1

   $x = \boxed{0}$; $x = \boxed{y/2}$; $x = \boxed{0}$; $x = \boxed{6 - y}$.

6. Записать ответ

3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(\mathcal{G})} (x + 2y)\,dxdy$, где область $\mathcal{G}$ ограничена прямыми $y = 4x + 6$, $y = \dfrac{1}{2}x - 1$, $x = -1$.

1. Построить область интегрирования −0,5
2. Найти пределы интегрирования: −1,5

   $x = \boxed{-2}$; $x = \boxed{-1}$; $y = \boxed{\dfrac{1}{2}x - 1}$; $y = \boxed{4x + 6}$

3. Вычислить двойной интеграл с точностью до 0,001: −1

$$\iint\limits_{(\mathcal{G})} (x + 2y)\,dxdy = \boxed{4{,}008}$$

Оценка

4.3. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Переход в двойном интеграле $\iint\limits_{(\mathcal{G})} f\,(x, y)\,dxdy$ к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ целесообразен в том случае, если область $\mathcal{G}$ – круг или часть его, а подынтегральная функция зависит от $x^2 + y^2$.

Формула, выражающая двойной интеграл в полярных координатах, – $\iint\limits_{(\mathcal{G}_1)} f\,(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{(\mathcal{G})} f\,(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\varphi\,d\rho$.

Если область $\mathcal{G}$ ограничена лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$) и кривыми $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$ $[\rho_1(\varphi) < \rho_2(\varphi)]$, то

$$\iint\limits_{(\mathcal{G})} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\varphi\,d\rho = \boxed{\int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho}.$$

Если область $\mathcal{G}$ охватывает начало координат, то

$$\iint\limits_{(\mathcal{G})} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\varphi\,d\rho = \boxed{\int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho}.$$

Пример 1. Вычислить $\iint\limits_{(\sigma)} (x^2 + y^2)dxdy$, где область σ ограничена линиями $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ и дугой окружности $x^2 + y^2 = 8$, лежащей в первой четверти.

Алгоритм решения

1. Построить область интегрирования.

2. Записать уравнения границ области в полярных координатах:

а) $y = x \Rightarrow \rho\sin\varphi = \rho\cos\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \boxed{1} \Rightarrow \varphi = \boxed{\pi/4}$;

б) $y = \sqrt{3}x \Rightarrow \rho\sin\varphi = \sqrt{3}\rho\cos\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \boxed{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \boxed{\pi/3}$;

в) $x^2 + y^2 = 8 \Rightarrow \rho = \boxed{2\sqrt{2}}$.

3. Преобразовать подынтегральную функцию к полярным координатам: $x^2 + y^2 = \boxed{\rho^2}$.

4. Вычислить данный двойной интеграл в полярных координатах

$$\iint\limits_{(\sigma)} (x^2 + y^2)dxdy = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{\sqrt{8}} \rho^3 d\rho = \frac{4}{3}\pi.$$

Ответ: $\frac{4}{3}\pi$.

Пример 2. Вычислить $\iint\limits_{(\sigma)} x\,dxdy$, где σ ограничена окружностями $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = 2ax$ и лежит вне первой окружности.

Алгоритм решения

1. Построить область интегрирования.

2. Записать уравнения границ области и подынтегральную функцию в полярных координатах:

а) $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow \rho = \boxed{a}$;

б) $x^2 + y^2 = 2ax \Rightarrow \rho = \boxed{2a\cos\varphi}$;

в) $x = \rho\cos\varphi$.

3. Найти границы изменения полярного угла φ, для чего решить систему уравнений

$$\begin{cases} \rho = a \\ \rho = 2a\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \cos\varphi = \boxed{1/2} \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi_1 = \boxed{-\pi/3}; \\ \varphi_2 = \boxed{\pi/3}. \end{array}$$

4. Найти пределы интегрирования для внутреннего интеграла по переменной ρ: $\rho_1 = \boxed{a}$; $\rho_2 = \boxed{2a\cos\varphi}$.

5. Выразить $\iint\limits_{(\sigma)} x\,dxdy$ в полярных координатах, учитывая симметрию области σ:

$$\iint\limits_{(G)} x\,dx\,dy = \boxed{2\int_0^{\pi/3} d\varphi \int_a^{2a\cos\varphi} \rho^2 \cos\varphi \, d\rho}$$

Ответ: $2{,}53\,a^3$.

Задачи для самостоятельной работы

1) $\iint\limits_{(G)} \dfrac{x\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где G – ограничена линиями $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=16$ ($x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$). Ответ: 6.

2) $\iint\limits_{(G)} e^{x^2+y^2}dx\,dy$, где G – круг $x^2+y^2=1$. Ответ: $\pi(e-1)$.

3) $\iint\limits_{(G)} \sqrt{25-x^2-y^2}\,dx\,dy$ где G – круг $x^2+y^2 \leqslant 9$. Ответ: $\dfrac{121}{3}\pi$, или 126,711.

Контрольное задание

Вычислить $J = \iint\limits_{(G)} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, если G – полукруг $x^2+y^2 \leqslant 2Rx$ ($y \geqslant 0$), перейдя к полярным координатам.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Построить область G	–0,5
2. Записать полярные координаты: $x = \boxed{\rho\cos\varphi}$, $y = \boxed{\rho\sin\varphi}$	
3. Записать уравнение окружности $x^2+y^2=2Rx$ в полярных координатах: $\rho = \boxed{2R\cos\varphi}$	–0,5
4. Указать пределы изменения полярного угла: $\varphi_1 = \boxed{0}$, $\varphi_2 = \boxed{\pi/2}$	–0,5
5. Найти пределы интегрирования для внутреннего интеграла по переменной ρ: $\rho_1 = \boxed{0}$, $\rho_2 = \boxed{2R\cos\varphi}$	–0,5
6. Записать и вычислить данный двойной интеграл через повторный	–1

$$J = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} \rho^2\,d\rho$$

Оценка

5. Тройной интеграл

5.1. Вычисление тройного интеграла

Пусть область (V), на которую распространен тройной интеграл, есть замкнутая пространственная область, органиченная снизу поверхностью $z = \varphi_1(x, y)$, сверху – $z = \varphi_2(x, y)$, ($\varphi_1 \leq \varphi_2$), а с боков – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz. Переменные x, y изменяются в плоской области (σ), которая является проекцией пространственной области (V) на плоскость xoy. В прямоугольных координатах (x, y, z) элемент объема dv вычисляется по формуле $dv = \boxed{dx\,dy\,dz}$.

Тройной интеграл по области (V) от функции $f(x, y, z)$, непрерывной в этой области, записывается в виде

$$\boxed{\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}.$$

Вычисление его сводится к вычислению двойного интеграла (внешнего) по области (σ) и одномерного (внутреннего) по формуле

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \boxed{\iint\limits_{(\sigma)} dx\,dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz}.$$

При вычислении внутреннего интеграла $\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz$ переменной величиной является $\boxed{z}$, а переменные $\boxed{x, y}$ рассматриваются как постоянные. В результате получается функция двух независимых переменных x, y, которую обозначим через $F(x, y)$.

Если область (σ) ограничена непрерывными кривыми $y = \psi_1(x)$ и $y = \psi_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ ($a < b$), то двойной интеграл можно вычислить при помощи двух повторных интегрирований по формуле

$$\iint\limits_{(\sigma)} F(x, y)\,dx\,dy = \boxed{\int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} F(x,y)\,dy}.$$

Формула для вычисления тройного интеграла при помощи трех последовательных интегрирований:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \boxed{\int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz}.$$

Порядок интегрирования может быть изменен; число способов вычисления тройного интеграла по переменным x, y, z равно числу перестановок из трех элементов, т. е. шести.

Пример. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} y\,dx\,dy\,dz$ по области (V), ограниченный плоскостью $2x+y+z-4=0$ и координатными плоскостями.

Алгоритм решения

1. Построить область V.
2. Выбрать порядок интегрирования.

Поверхность, ограничивающая область V сверху (плоскость $2x+y+z-4=0$), такова, что внутреннее интегрирование можно проводить по любой из трех переменных. Пусть эта переменная – z.

3. Найти пределы интегрирования:

а) спроецировать область V на плоскость xOy; полученная область σ есть треугольник, ограниченный линиями $2x+y-4=0$, $x=0$, $y=0$;

б) для определения пределов интегрирования внутреннего интеграла по переменной z провести из любой точки области σ в область V прямую, параллельную оси Oz: точка „входа" в область V лежит на плоскости $z=0$, точка „выхода" из области V – на плоскости $2x+y+z-4=0$; значит, пределы интегрирования по переменной z: $z_1=0$, $z_2=4-2x-y$;

в) для определения пределов интегрирования по переменной y провести в область σ прямую, параллельную оси Oy; точка „входа" в область σ лежит на прямой $y=0$, точка „выхода" – на прямой $2x+y-4=0$; значит, пределы интегрирования по переменной y: $y_1=0$, $y_2=4-2x$;

г) для определения пределов интегрирования внешнего интеграла по переменной x найти наименьшее и наибольшее значения x в области σ: $x_1=0$, $x_2=2$.

4. Записать данный тройной интеграл в виде трехкратного интеграла: $\iiint\limits_{(V)} y\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{4-2x} dy \int\limits_0^{4-y-2x} y\,dz.$

5. Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} y\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{4-2x} y\left(z\Big|_0^{4-y-2x}\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{4-2x} y(4-y-2x)\,dy = \int\limits_0^2 \left(4\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \right.$$

$$\left. - 2x\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{4-2x} dx = \int\limits_0^2 \left(2(4-2x)^2 - \frac{1}{3}(4-2x)^3 - \right.$$

$$\left. - x(4-2x)^2\right) dx = \frac{1}{6}\int\limits_0^2 (4-2x)^3 dx = -\frac{1}{12}\,\frac{(4-2x)^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Вычислить $\iiint\limits_{(V)} x\,dx\,dy\,dz$, где V – тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $2x + 2y + z - 6 = 0$. Ответ: $\frac{27}{4}$.

2. Вычислить $\iiint\limits_{(V)} x\,dx\,dy\,dz$, где V ограничена плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 2$, $x + y = 1$. Ответ: $\frac{1}{3}$.

5.2. Замена переменных в тройном интеграле

5.2.1. Цилиндрические координаты

Положение т. $M(x, y, z)$ пространства xyz однозначно определяется заданием трех чисел: ρ, φ, z, где ρ – длина радиуса-вектора $\overrightarrow{OP}$ проекции т. M на плоскость xoy; φ – угол, составленный этим радиусом-вектором с осью ox; z – аппликата MP т. M. Числа ρ, φ, z называются цилиндрическими координатами т. M. Они связаны с декартовыми координатами т. M соотношениями $\boxed{x = \rho\cos\varphi}$, $\boxed{y = \rho\sin\varphi}$, $\boxed{z = z}$, где $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

Для того чтобы тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ преобразовать к цилиндрическим координатам, надо x, y, z в подынтегральной функции заменить по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$; элемент объема $dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$, уравнения границы области V записать в цилиндрических координатах. После этого тройной интеграл вычислить тремя последовательными интегрированиями:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho\,d\rho \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} dz .$$

Пример. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz$, где V – область, ограниченная конусом $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ и плоскостью $z = h$.

Алгоритм решения

1. Построить область V, найти проекцию ее на плоскость xoy:

$$\begin{cases} z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2), \\ z = h \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = R^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

2. В интеграле $\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz$ перейти к цилиндрическим координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$.

3. Найти пределы интегрирования для φ, ρ, z:

$$z_1 = \frac{h}{R}\rho, \quad z_2 = h, \quad \rho_1 = 0, \quad \rho_2 = R, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 2\pi.$$

4. Вычислить данный тройной интеграл:

$$\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho\,d\rho \int\limits_{\frac{h}{R}\rho}^{h} z\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho\left(\frac{z^2}{2}\Big|_{\frac{h}{R}\rho}^{h}\right)d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho\left(h^2 - \frac{h^2\rho^2}{R^2}\right)d\rho =$$

$$= \frac{h^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4R^2}\right)\Big|_0^R d\varphi = \frac{h^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}\right)d\varphi = \frac{\pi h^2 R^2}{4}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Вычислить $\iiint\limits_{(V)} x\,dx\,dy\,dz$, если область V ограничена конусом $x^2 = \frac{h^2}{R^2}(z^2+y^2)$ и плоскостью $x = h$. Ответ: $0.25\pi h^2 R^2$.

2. Вычислить $\iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, если область V ограничена плоскостью $y = 2$ и параболоидом $x^2+z^2 = 2y$. Ответ: $\frac{16\pi}{3}$.

5.2.2. Сферические координаты

Сферическими координатами т. $M(x,y,z)$ пространства xyz называются числа ρ, φ, θ, где ρ – длина радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ т. M; φ – угол, составленный с осью Ox проекцией этого радиуса-вектора на плоскость xoy; θ – угол отклонения радиуса-вектора т. M от плоскости xoy.

Сферические координаты ρ, φ, θ т. M связаны с ее декартовыми x, y, z формулами:

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi, \qquad 0 \le \rho < +\infty;$$
$$y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi;$$
$$z = \rho\sin\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Элемент объема в сферических координатах
$$dV = \rho^2\cos\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

Тройной интеграл в сферических координатах:
$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \iiint\limits_{(T)} f(\rho\cos\theta\cos\varphi,\ \rho\cos\theta\sin\varphi,\ \rho\sin\theta)\, \rho^2\cos\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

Пример. Вычислить $\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$, если область V ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Алгоритм решения

1. Преобразовать уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = z$ к виду $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$.

2. Построить область V.

3. Записать уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = z$ в сферических координатах: $\rho^2 = \rho\sin\theta$, или $\rho = \sin\theta$.

4. Найти пределы интегрирования для сферических координат φ, θ, ρ: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \rho \le \sin\theta$.

5. Вычислить тройной интеграл:
$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_0^{\sin\theta} \rho^3\, d\rho =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \left(\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\sin\theta}\right) d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin^4\theta\, d\theta =$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^5\theta}{5}\Big|_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{1}{20}\,\varphi\Big|_0^{2\pi} = \pi/10.$$

Ответ: $\pi/10$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Вычислить $\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}}$, если область V ограничена плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Ответ: $\pi^2 a^2/8$.

2. Вычислить $\iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)dxdydz$, если область V ограничена сферами $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2 (0<a<b)$. Ответ: $\frac{8\pi}{15}(b^5-a^5)$.

5.3. Приложения тройных интегралов

Объем v области V выражается формулой $v=\iiint\limits_{(V)} dxdydz$. В сферических координатах этот интеграл имеет вид $v=\iiint\limits_{(V)} \rho^2\cos\theta d\rho d\theta d\varphi$ а в цилиндрических – $v=\iiint\limits_{(V)} \rho d\rho d\varphi dz$. Масса m неоднородного тела V плотностью $\gamma(x,y,z)$ определяется по формуле

$$m=\iiint\limits_{(V)} \gamma(x,y,z)dxdydz.$$

Статические моменты тела относительно координатных плоскостей xoy, yoz, xoz вычисляются по формулам

$$S_{xy}=\iiint\limits_{(V)} \gamma(x,y,z)\,z\,dxdydz,\quad S_{yz}=\iiint\limits_{(V)} \gamma(x,y,z)\,x\,dxdydz,$$

$$S_{xz}=\iiint\limits_{(V)} \gamma(x,y,z)\,y\,dxdydz.$$

Координаты центра тяжести тела

$$x_0=\frac{S_{yz}}{m},\qquad y_0=\frac{S_{xz}}{m},\qquad z_0=\frac{S_{xy}}{m}.$$

Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей:

$$J_{xy}=\iiint\limits_{(V)} \gamma(x,y,z)\,z^2\,dxdydz;$$

$$J_{xz}=\iiint\limits_{(V)} \gamma(x,y,z)\,y^2\,dxdydz;$$

$$J_{yz}=\iiint\limits_{(V)} \gamma(x,y,z)\,x^2\,dxdydz.$$

Моменты инерции тела относительно координатных осей ox, oy, oz:

$$J_x=\iiint\limits_{(V)} \gamma(x,y,z)(y^2+z^2)\,dxdydz;$$

$$\mathcal{J}_y = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)(x^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz;$$

$$\mathcal{J}_z = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Момент инерции тела относительно начала координат

$$\mathcal{J}_0 = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Имеют место соотношения $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_{xy} + \mathcal{J}_{xz}$, $\mathcal{J}_y = \mathcal{J}_{yx} + \mathcal{J}_{yz}$, $\mathcal{J}_z = \mathcal{J}_{zx} + \mathcal{J}_{zy}$, $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}_{xy} + \mathcal{J}_{yz} + \mathcal{J}_{zx}$.

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $x = 2 - y^2 - z^2$ и конусом $x^2 = y^2 + z^2$ $(x > 0)$.

Алгоритм решения

1. Построить данное тело. Проекцией тела на плоскость yoz является круг $y^2 + z^2 \leqslant 1$. Уравнение окружности $y^2 + z^2 = 1$ получено в результате исключения x из уравнений конуса и параболоида.

2. Объем V вычислить в цилиндрических координатах:

$$x = x, \quad y = \rho\cos\varphi, \quad z = \rho\sin\varphi.$$

$$V = \iiint\limits_{(V)} \rho\,d\varphi\,d\rho\,dx.$$

3. Записать уравнения данного конуса (нижняя граница области), параболоида (верхняя граница области) и окружности $y^2 + z^2 = 1$ в цилиндрических координатах:

$$x = \rho,\; x = 2 - \rho^2,\; \rho = 1.$$

4. Найти пределы интегрирования: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $\rho \leqslant x \leqslant 2 - \rho^2$.

5. Вычислить объем тела:

$$V = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho\,d\rho \int_{\rho}^{2-\rho^2} dx = \frac{29\pi}{6}.$$

Пример 2. Найти массу тела, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = N$, $y = N/2$, $z = \sqrt{N}$, если его плотность $\gamma(x, y, z) = Nx + \frac{N}{3}y + \frac{1}{N}z$.

Алгоритм решения

1. Построить тело, спроецировать его на плоскость xoy.

2. Применить формулу $m = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$.

3. Найти пределы интегрирования:

$$0 \leqslant x \leqslant N,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{N}{2},\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{N}.$$

4. Вычислить массу тела:

$$m = \int_0^N dx \int_0^{N/2} dy \int_0^{\sqrt{N}} \left(Nx + \frac{N}{3} y + \frac{1}{N} z\right) dz =$$

$$= \int_0^N dx \int_0^{N/2} \left(N\sqrt{N}x + \frac{N\sqrt{N}}{3} y + 1\right) dy =$$

$$= \int_0^N \left(\frac{N^2\sqrt{N}}{2} x + \frac{N^3\sqrt{N}}{24} + \frac{N}{2} dx \right. =$$

$$= \frac{N^4\sqrt{N}}{4} + \frac{N^4\sqrt{N}}{24} + \frac{N^2}{2} = N^2 \, \frac{7N^2\sqrt{N}+12}{24}.$$

Пример 3. Найти центр тяжести шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz$, если плотность γ в каждой точке его обратно пропорциональна расстоянию от начала координат.

Алгоритм решения

1. Учитывая симметрию тела относительно оси Oz, применить формулы $x_0 = 0;\ y_0 = 0;\ z_0 = \dfrac{S_{xy}}{m}$.

2. Записать формулу для плотности: $\gamma = \boxed{\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$.

3. Записать формулы для массы m и статического момента S_{xy}:

$$m = \boxed{\iiint\limits_{(V)} \frac{k\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}; \qquad S_{xy} = \boxed{\iiint\limits_{(V)} \frac{kz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}.$$

4. Преобразуя тройные интегралы к сферическим координатам по формулам $x = \rho\cos\theta\cos\varphi$, $y = \rho\cos\theta\sin\varphi$, $z = \rho\sin\theta$,, найти пределы интегрирования для ρ, θ, φ: $\varphi_1 = \boxed{0}$; $\theta_1 = \boxed{0}$; $\rho_1 = \boxed{0}$; $\varphi_2 = \boxed{2\pi}$; $\theta_2 = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$; $\rho_2 = \boxed{2R\sin\theta}$.

5. Вычислить массу данного шара:

$$m = \boxed{\frac{4}{3} k\pi R^2}.$$

Если ответ дан неверно, ЭВМ приводит решение:

$$m = \iiint\limits_{(V)} \frac{k\rho^2}{\rho} \cos\theta d\rho d\theta d\varphi = k\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta \int_0^{2R\sin\theta} \rho d\rho =$$

$$= k\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta\left(\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{2R\sin\theta}\right) d\theta = 2kR^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos\theta d\theta =$$

$$= 2kR^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{4}{3} k\pi R^2.$$

6. Вычислить статический момент S_{xy}:

$$S_{xy} = \boxed{\frac{16}{15} k\pi R^3}.$$

Если ответ дан неверно, ЭВМ приводит решение:

$$S_{xy} = k\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2R\sin\theta} \rho^2 d\rho =$$

$$= k\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\left(\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{2R\sin\theta}\right) d\theta = \frac{8k}{3} R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\cos\theta d\theta =$$

$$= \frac{8}{3} kR^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin^5\theta}{5}\Big|_0^{\pi/2}\right) d\varphi = \frac{16}{15} k\pi R^3.$$

Ответ: $x_0 = \boxed{0}$; $y_0 = \boxed{0}$; $z_0 = \boxed{\frac{4}{5} R}$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти моменты инерции относительно координатных плоскостей тела, ограниченного конусом $x^2 = y^2 + z^2$ и плоскостью $x = a$ $(a > 0, x \geqslant 0, \gamma = 1)$. Ответ: $J_{xy} = J_{xz} = \frac{\pi a^5}{20}$, $J_{yz} = \frac{\pi a^5}{5}$.

2. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного параболоидом $y = 3 - x^2 - z^2$ и плоскостью $y = 0$ $(y \geqslant 0)$. Ответ: $x_0 = 0$; $z_0 = 0$; $y_0 = 1$.

3. Найти объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, цилиндром $x^2 + z^2 = ax$ и плоскостью $y = 0$ $(a > 0)$ (внутренний по отношению к цилиндру). Ответ: $\frac{a^3}{9}(3\pi - 4)$.

Контрольное задание

Найти массу тела V плотностью $\gamma = \frac{N}{3}x$, которое задано ограничивающими его поверхностями: $x^2 + y^2 = N$, $x^2 + y^2 = \sqrt{N}z$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$).

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Формула для вычисления $m = \boxed{\iiint\limits_{(V)} \gamma\, dx\,dy\,dz}$	−1
2. Пределы интегрирования для цилиндрических координат φ, ρ, z:	−1
3. Вычислить массу тела: $m = \boxed{\frac{2}{45} N^3}$.	−1

$$\varphi_1 = \boxed{0}, \quad \varphi_2 = \boxed{\frac{\pi}{2}}, \quad \rho_1 = \boxed{0}, \quad \rho_2 = \boxed{\sqrt{N}},$$

$$z_1 = \boxed{\frac{\rho^2}{\sqrt{N}}}, \quad z_2 = \boxed{\sqrt{N}}.$$

Оценка

6. Ряды

6.1. Признаки сходимости рядов

6.1.1. Признак сравнения

1. Сформулировать признак сравнения.

Пусть даны два ряда Σu_n и Σv_n с $\boxed{\text{неотрицательными}}$ членами, причем для всех достаточно больших n члены первого ряда не превосходят соответствующих членов второго ряда, т. е. $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Тогда из сходимости ряда $\boxed{\Sigma v_n}$ следует сходимость ряда $\boxed{\Sigma u_n}$; из расходимости ряда $\boxed{\Sigma u_n}$ следует расходимость ряда $\boxed{\Sigma v_n}$.

2. Сформулировать предельную форму признака сравнения.

Если Σu_n и Σv_n – ряды $\boxed{\text{с положительными членами и существует конечный, отличный от нуля } \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k > 0}$, то рассматриваемые ряды либо одновременно сходятся, либо расходятся.

Пример 1. Используя признак сравнения, исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Алгоритм решения

1. Записать общий член ряда $u_n = \boxed{\frac{1}{\ln n}}$.

2. Подобрать ряд для сравнения с данным рядом, поведение которого известно или легко можно установить: $v_n = \boxed{1/n}$.

3. Сравнить члены рядов u_n и v_n : $\boxed{v_n < u_n}$.

4. Сделать соответствующий вывод о сходимости данного ряда. Ответить в форме: „На основании признака сравнения данный ряд сходится" или „На основании признака сравнения данный ряд расходится":

На основании признака сравнения данный ряд расходится

Пример 2. Пользуясь предельной формой признака сравнения, исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\ (1/n)$.

Алгоритм решения

1. Выбрать для сравнения с данным рядом ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \boxed{\frac{\sin(1/n)}{1/n}} = \boxed{1} > 0.$

3. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (гармонический) расходится, то и данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ $\boxed{\text{расходится}}$.

Задачи для самосто-тельной работы

Используя признак сравнения, исследовать на сходимость следующие ряды: 1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\,2^{2n+1}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} tg \frac{1}{\sqrt{n}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$.

Контрольное задание

Используя признак сравнения или предельный признак сравнения, определить сходимость рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sin nN|/n^2; \quad \sum_{n=1}^{\infty} tg^2(\sqrt{\pi}/(N\sqrt{n})); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N^2-n^2},$$

где N – номер варианта.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Подобрать ряд для сравнения с данным рядом	–1
2. Применить признак сравнения или предельный признак сравнения к данному ряду	–1
3. Сделать вывод о сходимости ряда	–1

Оценка

6.1.2. Признак Д'Аламбера

Сформулировать признак Д'Аламбера.

Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ с $\boxed{\text{положительными}}$ членами таков, что существует $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}} = l$, то при $\boxed{l < 1}$ ряд сходится, а при $\boxed{l > 1}$ ряд расходится. Если $\boxed{l = 1}$, то вопрос о поведении ряда остается открытым.

Пример. Пользуясь признаком Д'Аламбера, исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \quad (n+1)/3^n$.

Алгоритм решения

1. Записать u_n и u_{n+1}:

$$u_n = \boxed{\frac{n(n+1)}{3^n}}; \quad u_{n+1} = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{3^{n+1}}}.$$

2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)3^n}{3^{n+1}n(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{\boxed{3n}} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

3. Сделать соответствующий вывод о сходимости ряда. Так как $l = \frac{1}{3} < 1$, то ряд сходится.

Задачи для самостоятельной работы

Пользуясь признаком Д'Аламбера, исследовать на сходимость ряды: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{(\sqrt{n})^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}$.

Ответ: а) расходится; б) сходится; в) сходится; г) расходится; д) сходится; е) сходится.

Алгоритм решения: 1) записать u_n и u_{n+1} члены ряда; 2) вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$; 3) сделать соответствующий вывод о сходимости ряда.

Контрольное задание

Пользуясь признаком Д'Аламбера, исследовать на сходимость ряды: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{N^{n-1}}{(n-1)!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(N+1)^{n^2-1}}{(N-1)^{n^2}\sqrt{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+N}{N^n}$, **где N – номер варианта.**

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Записать u_n	–0,5
2. Записать u_{n+1}	–0,5
3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$	–1,5
4. Сделать вывод о сходимости ряда	–0,5
Оценка	

6.1.3. Признак Коши (радикальный)

Сформулировать признак Коши.

Если для ряда Σu_n с $\boxed{\text{положительными}}$ членами существует $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}}=l$, то этот ряд сходится при $\boxed{l<1}$ и расходится при $\boxed{l>1}$. Если $\boxed{l=1}$, то вопрос о поведении ряда остается открытым.

Пример. Пользуясь признаком Коши, исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Алгоритм решения

1. Записать u_n: $u_n=\boxed{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\boxed{\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\boxed{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}}=\boxed{\frac{1}{3e}},$$

или $\boxed{\frac{1}{3}e^{-1}}$.

3. Сделать соответствующий вывод о сходимости ряда. Так как $l = \frac{1}{3e} < 1$, то данный ряд сходится.

Контрольное задание

Пользуясь признаком Коши, исследовать на сходимость ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+N}{Nn+1}\right)^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(N+1)^{n^2-1}}{N^{n^2}\sqrt{n}}$, где N – номер варианта.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Записать u_n	–0,5
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$	–2
3. Сделать соответствующий вывод о сходимости ряда	–0,5

Оценка

6.1.4. Интегральный признак Коши

Сформулировать интегральный признак Коши.

Если функция $f(x)$ $\boxed{\text{непрерывная, положительная, невозрастающая}}$ для $x \geqslant a$ и, начиная с некоторого N, $u_n = f(n)$, то ряд $u_1 + u_2 + + \ldots + u_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и несобственный интеграл $\boxed{\int\limits_a^{\infty} f(x)dx}$ одновременно сходятся или расходятся.

Пример. Пользуясь интегральным признаком Коши, исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Алгоритм решения

1. Для функции $f(n) = \frac{1}{n(\ln n)^2}$ в точках $n = x$ записать функцию $f(x)$: $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$.

2. Проверить, выполняются ли условия теоремы Коши для функции $f(x)$ в промежутке $2 \leqslant x < \infty$. Ответить в форме: „Да" или „Нет".

Ответ: $\boxed{\text{Да}}$.

3. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$:

$$\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{A\to\infty}\int\limits_2^{A}\frac{d\ln x}{\boxed{(\ln x)^2}} = \lim_{A\to\infty}\boxed{\left(-\frac{1}{\ln x}\right)}\Bigg|_2^A =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln A} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \boxed{\frac{1}{\ln 2}}.$$

4. Сделать вывод о сходимости несобственного интеграла. Ответить в форме: „Несобственный интеграл сходится" или „Несобственный интеграл расходится".

Ответ: $\boxed{\text{Несобственный интеграл сходится}}$.

5. Решить вопрос о сходимости данного ряда. Ответить в форме: „Ряд сходится" или „Ряд расходится".

Ответ: $\boxed{\text{Ряд сходится}}$.

Задачи для самостоятельной работы

Пользуясь интегральным признаком Коши, исследовать на сходимость следующие ряды: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3+n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n(\ln^4 n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$.

Ответы: а) сходится; б) сходится; в) расходится; г) сходится.

Алгоритм решения: 1) для функции $f(n)$ для $n = x$ записать функцию $f(x)$; 2) проверить выполнимость условий теоремы Коши; 3) вычислить несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$; 4) на основании сходимости или расходимости несобственного интеграла решить вопрос о сходимости данного ряда.

Контрольное задание

Пользуясь интегральным признаком Коши, исследовать на сходимость ряды: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{N}{N+n^2}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{Nn+1}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-N\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Для функции $f(n)$ записать функцию $f(x)$ при $n = x$	–1
2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$	–1,5
3. Решить вопрос о сходимости данного ряда	–0,5
Оценка	

6.2. Абсолютная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов

1. Дать определение условно сходящихся и абсолютно сходящихся рядов.

Если ряд $\sum u_n$ сходится, а ряд $\boxed{\sum |u_n|}$ расходится, то ряд $\boxed{\sum u_n}$ называется условно сходящимся.

Если сходится ряд $\boxed{\sum |u_n|}$, то сходится и ряд $\sum u_n$, который называется абсолютно сходящимся.

2. Дать определение знакочередующегося ряда.

Ряд вида $\boxed{u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}\ u_n + \ldots}$, где все $u_n > 0$, называется знакочередующимся.

3. Сформулировать теорему Лейбница.

Если члены знакочередующегося ряда удовлетворяют условиям $\boxed{u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > u_n > \cdots}$, $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$, то такой ряд сходится, причем остаток $r_n = \boxed{(-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \ldots}$ ряда имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине, т. е. $|r_n| < |u_{n+1}|$.

Пример 1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

Алгоритм решения

1. Для знакочередующегося ряда проверить выполняемость условий теоремы Лейбница.

Так как $\boxed{1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{\sqrt{n}} > \ldots \text{ и } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0}$, то условия теоремы Лейбница выполняются.

2. Исследовать на сходимость ряд, составленный из абсолютных величин членов данного рода, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ответ дать в форме: „Ряд сходится" или „Ряд расходится".

Ответ: $\boxed{\text{Ряд расходится}}$.

3. Сделать вывод о сходимости ряда. Ответ дать в форме: „Данный ряд сходится абсолютно" или „Данный ряд сходится условно".

Ответ: $\boxed{\text{Данный ряд сходится условно}}$.

Пример 2. С какой точностью будет вычислена сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^n}$, если для подсчета будут взяты первые 7 членов ряда?

Алгоритм решения

1. Установить вид ряда: знакоположительный, знакочередующийся, ряд с произвольными членами. Ответить в форме, например, „Ряд знакоположительный".

Ответ: $\boxed{\text{Ряд знакочередующийся}}$.

2. Записать формулу для оценки остатка ряда:

$$\boxed{|r_n| < |u_{n+1}|}.$$

3. Ответить на вопрос задачи:

$$|r_n| \leqslant \boxed{\frac{1}{8\cdot 2^8}}, \text{ или } |r_7| \leqslant \boxed{0{,}0004883}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Исследовать на сходимость или абсолютную сходимость следующие ряды: 1) $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{17}-\frac{1}{26}-\frac{1}{37}+\ldots$ (где $|u_n| = \frac{1}{n^2+1}$);

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 7^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)^n}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{4n}$.

Ответы: 1) сходится абсолютно; 2) сходится условно; 3) сходится абсолютно; 4) сходится абсолютно; 5) сходится абсолютно; 6) сходится условно.

2. Найти приближенно (с точностью $\varepsilon = 0{,}01$) сумму знакочередующихся рядов: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{(3n)^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

Ответы: 1) 0,31; 2) 0,62.

Контрольное задание

Исследовать на сходимость или абсолютную сходимость следующие ряды: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\pi}{Nn}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{N^n n!}{(2n+2)!!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{N^n}$,

где N – номер варианта.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Проверить выполняемость условий теоремы Лейбница	–1
2. Составить ряд из абсолютных величин членов данного ряда	–0,5
3. Исследовать полученный ряд на сходимость	–1
4. Сделать вывод о сходимости ряда	–0,5

Оценка

6.3. Функциональные ряды

6.3.1. Функциональный ряд и область его сходимости

1. Ввести понятие функционального ряда.

Пусть задана последовательность функций $f_n(x)$, $n \in N$, определенных в области D. Выражение $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x) + \dots =$ $= \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)}$, $x \in D$, называется функциональным рядом.

2. Дать понятие области сходимости функционального ряда. Множество всех значений n, $\boxed{\text{для которых функциональный ряд сходится}}$, называется областью сходимости функционального ряда.

3. Можно ли для определения области сходимости функциональных рядов пользоваться достаточными признаками сходимости числовых рядов? Ответить в форме „Да" или „Нет".

Ответ: $\boxed{\text{Да}}$.

Пример 1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(x+3)^n}$.

Алгоритм решения

1. Ответить, почему $x = -3$ не войдет в область сходимости функционального ряда.

Ответ: Потому, что функция $f(x) = \frac{1}{n!(x+3)^n}$ $\boxed{\text{не определена}}$ в точке $x = -3$.

2. Записать u_n и u_{n+1} члены данного ряда:

$$u_n = \boxed{\frac{1}{n!\,(x+3)^n}}, \qquad u_{n+1} = \boxed{\frac{1}{(n+1)!\,(x+3)^{n+1}}}.$$

3. Для определения области сходимости ряда использовать признак Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \boxed{\left|\frac{n!\,(x+3)^n}{(n+1)!\,(x+3)^{n+1}}\right|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(n+1)(x+3)}\right| = \frac{1}{|x+3|} \lim_{n\to\infty} \boxed{\frac{1}{n+3}} = 0 < 1.$$

4. Записать область сходимости ряда: $]-\infty$ $3[\cup]-3; \infty[$.

5. Определить, как в данной области сходится ряд: абсолютно или условно? Ответить в форме: „Ряд сходится условно" или „Ряд сходится абсолютно".

Ответ: $\boxed{\text{Ряд сходится абсолютно}}$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

Алгоритм решения

1. Установить, что данный ряд является обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

2. Определить p, при которых сходится этот ряд: $p\boxed{>1}$.

3. Записать область сходимости исходного ряда.

Ответ: $\boxed{]1;\infty[}$.

Задачи для самостоятельной работы

Найти область сходимости следующих функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n x$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3-x^2)^n$.

Ответы: а) $]-\infty; \infty[$; б) $]-2; 2[$; в) $]e^{-1}; e[$; г) $]-2; -\sqrt{2}[\ \cup$ $\cup\ ]\sqrt{2}; 2[$.

Алгоритм решения: 1) использовать табличные ряды для нахождения области сходимости функционального ряда либо 2) один из достаточных признаков сходимости числовых рядов; 3) записать область сходимости функционального ряда.

6.3.2. Равномерная сходимость функциональных рядов

1. Дать определение равномерной сходимости функционального ряда.

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, сходящийся в области D, называется равномерно сходящимся в этой области, если для любого $\boxed{\varepsilon > 0}$ найдется $\boxed{N = N(\varepsilon)}$ такое, что для остатка функционального ряда $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ при всех $\boxed{n > N}$ и $x \in D$ имеет место оценка $\boxed{|R_n(x)| < \varepsilon}$.

2. Сформулировать признак Вейерштрасса.

Пусть дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, сходящийся в области D, и пусть существует $\boxed{\text{сходящийся знакоположительный}}$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ такой, что для всех $x \in D$ и для всех $\boxed{n > N_0}$ члены функционального ряда удовлетворяют условию $\boxed{|f_n(x)| \leq u_n}$. Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится $\boxed{\text{абсолютно и равномерно}}$ в области D.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется $\boxed{\text{мажорирующим}}$ для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Пример. Найти область равномерной сходимости функционального ряда $\sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^n} + \ldots$

Алгоритм решения

1. Подобрать мажорирующий числовой ряд для данного функционального ряда.

Так как $\left|\frac{\sin nx}{n^n}\right| \le \boxed{\frac{1}{n^n}}$, то мажорантой данного функционального ряда будет числовой ряд

$$\boxed{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots}, \text{ или } \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}}.$$

2. Установить сходимость мажорирующего ряда с помощью признака Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1}.$$

3. Сделать вывод: данный функциональный ряд сходится равномерно на $\boxed{\text{всей числовой оси}}$, или $\boxed{]-\infty;+\infty[}$.

Задачи для самостоятельной работы

Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость следующих функциональных рядов в указанных промежутках: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$, $[-1;\ 1]$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n n^3}$, $[-3;\ 3]$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n\ln n}{n^2\,2^n}$, $[0;\ 4]$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^3}}$, $(-\infty;\infty)$.

Алгоритм решения: 1) подобрать мажорирующий числовой ряд для данного функционального ряда; 2) установить сходимость мажорирующего ряда в указанной области; 3) сделать вывод.

6.3.3. Степенные ряды

1. Дать понятие степенного ряда.

Степенным рядом называется ряд вида $a_0+a_1(x-x_0)+$ $+\boxed{a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots}=\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n}$, где a_n - числа, называемые коэффициентами степенного ряда. При $x_0=0$ степенной ряд имеет вид:

$$\boxed{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n}.$$

2. Сформулировать теорему Абеля.

Если степенной ряд $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n}$ сходится при $x = \boxed{x_0 \neq 0}$, то он сходится, и притом абсолютно, для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $\boxed{|x| < x_0}$. Если же степенной ряд расходится при $x = x_0$, то он $\boxed{\text{расходится}}$ и для всех значений x, для которых $\boxed{|x| > |x_0|}$.

3. Записать формулы для вычисления радиуса сходимости степенного ряда: $\boxed{R_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$ или $\boxed{R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}}$ при условии, что пределы, в них входящие, $\boxed{\text{существуют}}$.

4. Что значит исследовать степенной ряд на сходимость?

Исследовать степенной ряд на сходимость – значит найти его $\boxed{\text{интервал сходимости и выяснить, сходится или расходится ряд в граничных точках интервала сходимости.}}$

Пример 1. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}.$$

Алгоритм решения

1. Найти радиус сходимости степенного ряда по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Для данного ряда $a_n = \boxed{\frac{1}{n^2 2^n}}$, $a_{n+1} = \boxed{\frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}}$.

Тогда $R = \boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 2^{n+1}}{n^2 2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2}{n^2} = \boxed{2}$.

2. Записать интервал сходимости ряда:

$$|x-1| < 2 => \boxed{-1} < x < \boxed{3}.$$

3. Исследовать ряд на сходимость в граничных точках:

а) при $x = -1$ получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2 2^n} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n^2 2^n}} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}},$$

который сходится на основании теоремы $\boxed{\text{Лейбница}}$;

б) при $x = 3$ получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2 2^n} = \boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$, который сходится, так как представляет собой $\boxed{\text{обобщенный гармонический}}$ ряд, у которого $p \boxed{> 1}$.

Ответ: Область сходимости данного степенного ряда $\boxed{-1 \leqslant x \leqslant 3}$ или $\boxed{x \in [-1; 3]}$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n^2} x^{n^2}$.

Алгоритм решения

1. Записать ряд в развернутом виде:

$$\boxed{5x + 5^4x^4 + 5^9x^9 + \ldots + 5^{n^2}x^{n^2} + \ldots}$$

2. Что можно сказать относительно коэффициентов этого ряда?

Бесконечное множество его коэффициентов равно $\boxed{\text{нулю}}$ или

$$\boxed{a_0 = a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = \ldots = a_m = 0, \ldots \ (m \neq n^2)}.$$

3. Ответить в форме: „Да" или „Нет", можно ли воспользоваться формулами для нахождения радиуса сходимости функционального ряда?

Ответ: $\boxed{\text{Нет}}$.

4. Найти область сходимости ряда, применяя непосредственно признак Коши:

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \boxed{\sqrt[n]{|5^{n^2}x^{n^2}|}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \boxed{|5x|^n} = \begin{cases} \boxed{\infty}, \text{ если } |5x| > 1, \text{ или } |x| > \boxed{\frac{1}{5}}; \\ \boxed{1}, \text{ если } |5x| = 1, \text{ или } x = \boxed{\pm\frac{1}{5}}; \\ \boxed{0}, \text{ если } |5x| < 1, \text{ или } -\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Следовательно, ряд сходится в интервале $\boxed{-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}}$.

5. Исследовать ряд на сходимость в граничных точках.

При $x = \mp\frac{1}{5}$ получается ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n^2}x^{n^2} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n^2}\frac{1}{5^{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} 1}$,

который расходится, так как не удовлетворяет $\boxed{\text{необходимому}}$ признаку сходимости ряда.

Ответ: область сходимости данного степенного ряда

$$\boxed{-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}}, \text{ или } \boxed{x \in \left]-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right[}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти область сходимости следующих степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$; б) $3x + 9x^2 + 27x^3 + \ldots$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n\ln(n+1)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+\dfrac{1}{n})^{n^2} x^n$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$.

Ответы: а) $]-\infty; \infty[$; б) $]-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}[$; в) $\{0\}$; г) $[-1; 1[$; д) $]-\dfrac{1}{e}; \dfrac{1}{e}[$; е) $]-1; 1[$.

Алгоритм решения: 1) найти радиус сходимости степенного ряда, если это возможно; 2) в противном случае найти область сходимости степенного ряда, используя непосредственно признак Д'Аламбера или признак Коши; 3) исследовать ряд на сходимость в граничных точках интервала; 4) сделать выводы о сходимости ряда.

Контрольное задание

Найти область сходимости степенных рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-N)^n}{N_n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{N_{n+1}}\right)^n x^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (N-x)^n \sin\frac{\pi}{N2^n},$$ где

N – **номер варианта.**

Промежуточные вопросы	Штрафные баллы
1. Найти область сходимости или радиус сходимости степенного ряда	–1
2. Исследовать ряд на сходимость на концах интервала	–1,5
3. Сделать вывод о сходимости ряда	–0,5

Оценка

6.3.3.1. Разложение функций в ряд Тейлора и Маклорена

1. Записать ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = \boxed{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}},$$

где $0 < \theta < 1$.

2. Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки $x = a$ производные всех порядков. Записать необходимое и достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора в окрестности точки $x = a$:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=0}.$$

3. Записать ряд Тейлора при $a = 0$:

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}}.$$

4. Как называется полученный ряд? – $\boxed{\text{Рядом Маклорена}}$.

Пример 1. Написать ряд Тейлора по степеням $(x + 2)$ функции $f(x)=\frac{1}{x}$.

Алгоритм решения

1. Найти производные функции $f(x)$ и их значения в точке $x = -2$. Результаты вычислений записать следующим образом:

$f(x)=x^{-1}$; $\qquad f(-2)=-\frac{1}{2}$;

$f'(x)=-1\cdot x^{-2}$; $\qquad f'(-2)=-\frac{1!}{2^2}$

$f''(x)=1\cdot 2\cdot x^{-3}$; $\qquad f''(-2)=-\frac{2!}{2^3}$;

$f'''(x)=-1\cdot 2\cdot 3\cdot x^{-4}$; $\qquad f'''(-2)=-\frac{3!}{2^4}$;

. . . .

$f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n x^{-n-1}$, $\qquad f^{(n)}(-2)=-\frac{n!}{2^{n+1}}$

. . . .

2. Подставить найденные значения в ряд Тейлора и записать его:

$$\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}-\frac{1!(x+2)}{1!\,2^2}-\boxed{\frac{2!(x+2)^2}{3!\,2^3}-\frac{3!(x+2)^3}{3!\,2^4}-\ldots-\frac{n!(x+2)^n}{n!\,2^{n+1}}+\ldots}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1+\frac{x+2}{2}+\boxed{\frac{(x+2)^2}{2^2}+\frac{(x+2)^3}{2^3}+\ldots+\frac{(x+2)^n}{2^n}+\ldots}\right].$$

3. Найти область сходимости полученного ряда, используя признак Д'Аламбера:

$$u_n=\frac{(x+2)^n}{2^n};\qquad u_{n+1}=\boxed{\frac{(x+2)^{n+1}}{2^{n+1}}};$$

$$\lim_{n\to}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \boxed{\lim_{n\to}\left|\frac{(x+2)^{n+1}\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot(x+2)^n}\right|} = \frac{|x+2|}{2}.$$

Решить неравенство $\frac{|x+2|}{2}<1$ и записать ответ: $\boxed{-4<x<0}$, или $\boxed{x\in\,]-4;0[}$.

4. Исследовать сходимость полученного ряда на границах области:

а) при $x=-4$ получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n}=\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n}$, который $\boxed{\text{расходится}}$;

б) при $x=0$ получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n}=\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n}$, который $\boxed{\text{расходится}}$.

Ответ: интервал сходимости полученного ряда Тейлора для данной функции $\boxed{]-4;0[}$.

5. Исследовать остаточный член формулы Тейлора для данной функции:

$$\lim_{n\to\infty}|R_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| =$$

$$= \boxed{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,(x+2)^{n+1}}{[-2+\theta(x+2)]^{n+2}(n+1)!}\right|} = \boxed{0}.$$

Ответ: в указанном интервале полученный ряд сходится к данной функции.

Пример 2. Разложить в ряд по степеням $(x-1)$ функцию $f(x)=$ $=\frac{1}{2+3x}$.

Алгоритм решения

1. Представить функцию следующим образом:

$$\frac{1}{2+3x}=\frac{1}{5+3(x-1)}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\frac{3(x-1)}{5}}.$$

2. Записать разложение данной функции в ряд по степеням $(x-1)$, воспользовавшись табличным разложением

$$\frac{1}{1+y}=\sum_{n=0}^{\infty}y^n=1+y+y^2+y^3+y^4+\ldots\ (|y|<1),\ \text{где}\ y=-\frac{3(x-1)}{5}.$$

$$\frac{1}{2+3x}=\boxed{\frac{1}{5}\left(1-\frac{3(x-1)}{5}+\frac{3^2(x-1)^2}{5^2}-+\ldots+(-1)^n\frac{3^n(x-1)^n}{5^n}+\ldots\right)}=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n (x-1)^n}{5^{n+1}} .$$

3. Найти область сходимости найденного ряда, решив неравенство $|y| < 1$, т. е. $\left| -\frac{3(x-1)}{5} \right| < 1$:

$$\boxed{\left] -\frac{2}{3}; 2\frac{2}{3} \right[} .$$

Пример 3. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = (1+x)e^x$.

Алгоритм решения

1. Записать разложение функции в ряд, используя табличное разложение функции e^x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad (|x| < \infty) .$$

$$(1+x)e^x = (1+x)\boxed{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)} =$$

$$= 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{3}{2!}x^2 + \frac{4}{3!}x^3 + \ldots + \boxed{\frac{n+1}{n!}x^n} + \ldots$$

2. Указать, при каких значениях x справедливо данное равенство

Ответ: $\boxed{\text{Для всех значений}}$, или $\boxed{]-\infty; \infty[}$.

Пример 4. Разложить в ряд по степеням x функцию

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} .$$

Алгоритм решения

Для разложения данной функции в ряд воспользоваться табличным разложением в ряд функции $\frac{1}{1-x}$, поскольку $\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$:

$$\boxed{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots, \ |x| < 1},$$

$$\text{или } \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \ |x| < 1}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Разложить указанные функции в ряды по степеням заданных разностей $(x - a)$: 1) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ по степеням $(x - 1)$. Ответ:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}$, $-2 < x < 4$. 2) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ по степеням x. Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}$, $-\infty < x < \infty$. 3) $f(x) = \frac{x+3}{(x+1)^2}$ по степеням x. Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+3)x^n$, $-1 < x < 1$. 4) $f(x) = 2^x$ по степеням $(x-3)$. Ответ: $8 + 8\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 2}{n!}(x-3)^n$, $-\infty < x < \infty$, 5) $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{2}$ по степеням x. Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$, $-\infty < x < \infty$. 6) $f(x) = \frac{4x+3}{x^2-3x+2}$ по степеням x. Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(7 - \frac{11}{2^{n+1}}\right)x^n$, $-1 < x < 1$. 7) $f(x) = \ln x$ по степеням $(x-1)$. Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \times$ $\times \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$, $0 < x \leqslant 2$. 8) $f(x) = x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 27x$ по степеням $(x+3)$. Ответ: $-3(x+3)^3 + (x+3)^4$, $-\infty < x < \infty$.

Алгоритм решения. При разложении в ряд можно пользоваться следующими приемами:

1. Непосредственно разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора: а) вычислить производные всех порядков функции $f(x)$ в точке $x = a$ и подставить в формулу для ряда Тейлора; б) найти область сходимости полученного ряда; в) выяснить, для каких значений x из области сходимости между функцией $f(x)$ и ее рядом Тейлора можно поставить знак равенства.

2. Использовать табличные разложения, что исключает необходимость исследовать остаточные члены соответствующих формул Тейлора с целью выяснения, можно ли между составленным рядом и самой функцией поставить знак равенства, так как области сходимости самих рядов известны.

3. Использовать сложение и вычитание рядов и умножение ряда на число.

4. Использовать дифференцирование и интегрирование рядов.

5. Использовать умножение рядов.

Контрольное задание

Разложить в ряд по степеням x функции: $f(x) = \frac{1}{x^2 - (N+2)x + 2N}$; $f(x) = \frac{2}{1 - Nx^2}$; $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\arcsin Nx}{x}dx$; $f(x) = \sin Nx^2$; $f(x) = \frac{Nx^2}{1 + \frac{N}{2}x}$;

$f(x) = (N+x)\cos Nx$, **где N – номер варианта.**

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Записать ряд Маклорена	–1
2. Получить разложение функции в ряд Маклорена	–1,5
3. Найти область сходимости полученного ряда функции $f(x)$	–0,5
Оценка	

6.3.3.2. Применение рядов к приближенным вычислениям

Пример 1. Вычислить $\cos 10°$ с точностью до 0,0001.

Алгоритм решения

1. Для приближенного вычисления $\cos 10°$ воспользоваться табличным рядом $\cos x = \boxed{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots}$, или $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}$, где $x \in]-\infty; \infty[$.

2. Положив $x = \mathrm{arc}\,10° = \frac{\pi}{18}$, записать ряд для вычисления $\cos 10°$ с любой точностью:

$$\cos 10° = \boxed{1 - \frac{\pi^2}{18^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{18^4 \cdot 4!} - \frac{\pi^6}{18^6 \cdot 6!} + \ldots}$$

3. Согласно свойству знакочередующегося сходящегося ряда для вычисления приближенного значения $\cos 10°$ с заданной точностью достаточно взять сумму первых двух членов ряда, так как третий член этого ряда $\frac{\pi^4}{18^4 \cdot 4!} < 0{,}0001$.

Таким образом, $\cos 10° \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{18^2} \approx \boxed{0{,}9948}$.

Пример 2. Вычислить $\sqrt[4]{17}$ с точностью до 0,0001.

Алгоритм решения

1. Преобразовать данный корень таким образом, чтобы можно было воспользоваться биномиальным рядом

$$\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} = \boxed{2\left(1 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}}.$$

2. Записать ряд для вычисления $\sqrt[4]{17}$ с любой точностью

$$\sqrt[4]{17} = \boxed{2\left(1 + \frac{1}{4 \cdot 16} - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8 \cdot 16^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16^3} - \ldots\right)}.$$

3. Ответить, сколько членов полученного ряда нужно взять, чтобы вычислить $\sqrt[4]{17}$ с точностью до 0,0001?

Ответ: $\boxed{3}$.

4. Вычислить значение $\sqrt[4]{17}$ с заданной точностью

$$\sqrt[4]{17} \approx \boxed{2(1 + 0{,}01562 - 0{,}00037)} \approx 2{,}0305.$$

Пример 3. Вычислить $\ln 2$ с точностью до 0,001.

Алгоритм решения

1. Для данного вычисления использовать табличный ряд $\ln \frac{1+x}{1-x} =$

$$= \boxed{2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right)}, \text{ где } x \in]-1;\, 1[.$$

2. Найти значение x из выражения $\frac{1+x}{1-x} = 2 \Rightarrow x = \boxed{\frac{1}{3}}$.

3. Записать ряд для вычисления $\ln 2$ с любой точностью

$$\ln 2 = \boxed{2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^2} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9} + \ldots\right)}.$$

4. Для вычисления $\ln 2$ с заданной степенью точности достаточно взять четыре члена, делая ошибку, равную величине отброшенного остаточного члена

$$|R_4| = 2\left(\frac{1}{9\cdot 3^9} + \frac{1}{11\cdot 3^{11}} + \frac{1}{13\cdot 3^{13}} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{2}{9\cdot 3^9}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{2}{9\cdot 3^9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} = \frac{1}{36\cdot 3^7} < 0{,}001.$$

Таким образом, $\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^2} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7}\right) \approx 0{,}6931.$

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить приближенно с указанной степенью точности δ: 1) $\sqrt{e}$, $\delta = 0{,}0001$; 2) $\sin 1°$, $\delta = 0{,}0001$; 3) $\sqrt[3]{8{,}36}$ $\delta = 0{,}01$; 4) $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{10}\right)$, $\delta = 0{,}001$; 5) $\int\limits_0^{1/10} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$, $\delta = 0{,}001$.

Ответы: 1) 1,6487; 2) 0,0175; 3) 2,030; 4) 0,304; 5) 0,098.

Алгоритм решения: 1) функцию $f(x)$ разложить в степенной ряд; 2) в полученном разложении положить $x = x_0$; 3) вычислить $f(x_0)$ с указанной точностью, взяв необходимое число его первых членов.

Контрольное задание

Вычислить с точностью $\delta = 0{,}001$ интеграл $\int\limits_0^{0,N} \frac{\sin x}{Nx}\,dx$, где N – номер варианта.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Записать разложение в ряд функции $\sin x$	–0,5
2. Записать с помощью ряда функцию $\frac{\sin x}{Nx}$	–0,5
3. Записать с помощью ряда интеграл $\int\limits_0^{0,N} \frac{\sin x}{Nx}\,dx$	–1
4. Вычислить интеграл с заданной точностью	–1
Оценка	

3.3. АЛГОРИТМ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АОК В РЕЖИМЕ КОНТРОЛЯ

АОК предназначен для контроля знаний студентов и в процессе семестра, и на экзамене или зачете.

Для текущего контроля знаний в процессе семестра разработан следующий алгоритм функционирования АОК:

1) вызов на дисплее контрольного варианта при помощи набора соответствующего кода темы;

2) ответ на поставленные промежуточные вопросы по содержанию каждой задачи;

3) высвечивание на экране дисплея „штрафных" баллов за неправильные ответы по каждому промежуточному вопросу;

4) оценка ответа с учетом шкалы оценок и баллов, а также „штрафных" баллов;

5) выдача правильных ответов на все вопросы по каждой задаче в случае неудовлетворительной оценки ответа студента.

Для контроля знаний студентов на экзамене предлагается следующий алгоритм работы АОК:

1).формирование экзаменационного билета;

2) контроль и оценка каждого теоретического вопроса (если ответ контролирует ЭВМ);

3) контроль и оценка второго теоретического вопроса (если вопрос контролирует ЭВМ);

4) контроль и оценка решения первой задачи;

5) контроль и оценка решения второй задачи билета.

АОК осуществляет контроль тех теоретических вопросов, которые могут быть сформулированы в виде математического диктанта, носят тестовый характер или ответы на которые могут быть даны при помощи небольшого запаса ключевых слов. Остальные теоретические вопросы контролирует экзаменатор. Оценку выставляет экзаменатор.

Ниже приводится пример экзаменационного билета и материал для работы АОК в режиме контроля.

Задания для текущего контроля и оценки знаний

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A и B перпендикулярно к этой плоскости, если A (N; $N-1$; $N-2$); B ($N/2$; $3N$; $2N$); $Nx + (N-3)y + \frac{N}{4}z - 2 = 0$ (p), где N = номер варианта.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Записать координаты вектора $\vec{AB}$	–1
2. Записать координаты нормального вектора $\vec{n}_1$	–1
3. Найти нормальный вектор $\vec{n}_2$ искомой плоскости, равный векторному произведению векторов $\vec{AB}$ и $\vec{n}_1$	–3
4. Записать уравнение плоскости, проходящей через данную точку, если известен нормальный вектор плоскости	–3
5. Записать уравнение искомой плоскости и привести его к общему виду	–2

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	20–18	17–14	13–11	10

Оценка

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через т. A параллельно (p) плоскости, если A (N; $N/2$; $N+2$); $Nx + (N+2)y + (N+4)z - 25 = 0$ (p), где N – номер варианта.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Записать координаты нормального вектора плоскости (p)	–2
2. Записать уравнение плоскости, проходящей через данную точку, если известен нормальный вектор плоскости	–3
3. Записать условие параллельности плоскостей	–3
4. Записать уравнение искомой плоскости и привести его к общему виду	–2

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	20–18	17–14	13–11	10

Оценка

3. **Найти площадь треугольника, вершины которого находятся в точках** $A\left(\frac{N}{N+4}; \frac{N}{15}; \frac{4N-1}{3N+20}\right)$; $B\left(\frac{3N+1}{2N+25}; \frac{N+1}{20}; \frac{1-2N}{N+3}\right)$;

$C\left(\frac{N+3}{19+N}; \frac{N-11}{N+1}; \frac{2N+5}{10+N}\right)$, **где** N **– номер варианта.**

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Найти координаты векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CB}$	–1
2. Найти векторное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CB}$	–5
3. Найти модуль векторного произведения векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CB}$	–3
4. Найти площадь треугольника	–1

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	20–18	17–14	13–11	10

Оценка

4. **Найти проекцию вектора** $\vec{AB}$ **на вектор** $\vec{AC}$**, если известны координаты точек:** $A\left(1+\frac{N}{13}, \frac{1-2N}{N+3}, \frac{N}{1-3N}\right)$; $B\left(\frac{2N+3}{5-N}; \frac{1}{N}; \frac{N+3}{N-3}\right)$;

$C\left(\frac{N+1}{N+2}; \frac{2N}{4-N}; \frac{3N-5}{2N+7}\right)$, **где** N **– номер варианта.**

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Найти координаты векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$	–1
2. Вычислить длину вектора $\vec{AC}$	–3
3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$	–3
4. Найти проекцию вектора $\vec{AB}$ на вектор $\vec{AC}$	–3

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	20–18	17–14	13–11	10

Оценка

5. **Найти угол между векторами** $\vec{AB}$ **и** $\vec{AC}$ **если** $A\left(N; \frac{N}{2}; \frac{N}{3}\right)$;

$B\left(\frac{N}{2N+1}, \frac{3}{N}; N\right)$; $C\left(\frac{2N}{N+7}; \frac{1-N}{15}; 2+\frac{N}{7}\right)$, **где** N **– номер варианта.**

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Найти координаты векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$	–1
2. Вычислить длину векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$	–2
3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$	–4

Промежуточные вопросы	Штрафные баллы
4. Найти косинус угла между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$	–2
5. Найти угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$	–1

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	20–18	17–14	13–11	10

Оценка

6. На материальную точку действует сила $\vec{F} = (2N; -2N; -(2N+1))$. Найти работу этой силы при перемещении из положения $A\ (2N+1; 2N; 4N+2)$ в положение $B\ (N/4; 3N+1; N/5)$, где N – номер варианта.

Промежуточные вопросы	Штрафные баллы
1. Найти вектор $\vec{AB}$	–4
2. Найти работу силы $\vec{F}$	–6

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	20–18	17–14	13–11	10

Оценка

7. Решить системы уравнений:

по формулам Крамера

$$\begin{cases} (2N+1)x_1 + Nx_2 + 2(N+1)x_3 = N; \\ 2Nx_1 + Nx_2 + Nx_3 = 2N+1; \\ Nx_1 + Nx_2 + Nx_3 = 2N; \end{cases}$$

методом Жордано–Гаусса

$$\begin{cases} (2N+1)x_1 + 2Nx_2 + Nx_3 = N; \\ 2Nx_1 + (2N+1)x_2 + 2Nx_3 = 8N; \\ Nx_1 + Nx_2 + 2Nx_3 = 6N, \end{cases}$$

где N – номер варианта.

Промежуточные вопросы	Штрафные баллы
Написать решение каждой из заданных систем	–10

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	20–18	17–14	13–11	10

Оценка

8. Скорость точки, движущейся прямолинейно, пропорциональна кубу времени (k – коэффициент пропорциональности). Через N секунд после начала движения точка удалилась на $2N$ метров. Найти закон движения точки (N – номер варианта).

Промежуточные вопросы	Штрафные баллы
1. Записать дифференциальное уравнение для функции $S(t)$, функции пути от времени	–3
2. Записать начальные условия	–2
3. Найти общее решение полученного дифференциального уравнения	–5
4. Найти частное решение, использовав начальные условия. Найти коэффициент пропорциональности k	–4
5. Записать частное решение уравнения – закон движения точки	–1

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	30–26	25–20	19–16	15

Оценка

9. Найти линию, проходящую через точку (N; $1/2N$) и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания (N – номер варианта).

Промежуточные вопросы	Штрафные баллы
1. Записать уравнение касательной с текущими координатами X, Y, проходящей через точку $A(x, y)$ кривой $y = f(x)$	–3
2. Записать координаты точек B, C, точек пересечения касательной с осями oy и ox	–2
3. Записать дифференциальное уравнение, использовав условие $y = (y_B + y_C)/2$	–2
4. Найти общее решение полученного дифференциального уравнения	–5
5. Найти частное решение полученного дифференциального уравнения, использовав начальное условие $y(N) = N/2$	–3

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	30–26	25–20	19–16	15

Оценка

10. Найти частные решения дифференциальных уравнений:

$$y'' - 4Ny' + 3N^2y = 5e^{Nx};$$

$$y'' - 2Ny' + 5N^2y = 3\cos Nx;$$

$$y'' + Ny' - 3N^2y = (Nx)^2 + Nx + 1,$$

удовлетворяющие начальным условиям $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Записать вид общего решения данного уравнения	–3
2. Найти общее решение линейного однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному $y_{оо}$	–3
3. Найти частное решение данного уравнения $y_{ч.н}$: а) найти неопределенные коэффициенты решения $y_{ч.н}$ б) записать $y_{ч.н}$ с найденными коэффициентами	–5
4. Записать общее решение данного уравнения y	–1
5. Найти постоянные c_1 и c_2	–2
6. Записать ответ	–1

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	30–26	25–20	19–16	15

Оценка

11. Найти $\partial z/\partial x$ и $\partial z/\partial y$, если функция $z(x, y)$ задана неявно уравнением $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$. Выяснить характер изменения функции $z = (x, y)$ в т. $A(-N; 0; N)$ при изменения только x (N – номер варианта).

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Записать формулы для $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в случае неявного задания функции $z(x, y)$ в виде $F(x, y, z) = 0$	–3
2. Найти F'_x, F'_y, F'_z	–2
3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$	–2
4. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}(A)$	–1
5. Записать ответ	–2

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	20–18	17–14	13–11	10

Оценка

12. Вычислить с точностью до $\delta = 0{,}0001$ интеграл $\int\limits_0^{0,N} \frac{\sin x}{Nx} dx$, где N – номер варианта.

Промежуточные вопросы	Штрафные баллы
1. Записать разложение в ряд функции $\sin x$	–2
2. Записать $\frac{\sin x}{Nx}$	–2
3. Вычислить $\int\limits_0^{0,N} \frac{\sin x}{Nx} dx$	–3
4. Определить член ряда, который по абсолютной величине меньше δ	–2
5. Вычислить сумму с точностью $\delta = 0{,}0001$. Записать ответ	–1

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	20–18	17–14	13–11	10

Оценка

13. Найти область сходимости степенных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-N)^n}{Nn};\quad \sum_{n=1}^{\infty} (N-x^2)^n;\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+N)^n}{n\cdot 2^n};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N}{n(x-N)^n};\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^N(1+n)^n(x-N)^n}{n^n},$$

где N – номер варианта.

Промежуточные вопросы	Штрафные баллы
1. Записать общий член ряда u_n и u_{n+1}	–1
2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$	–2
3. Найти интервал сходимости ряда	–1
4. Записать ряд при значении x в левом конце интервала сходимости ряда	–1
5. Исследовать сходимость полученного ряда	–1
6. Записать ряд при значении x в правом конце интервала сходимости ряда	–1
7. Исследовать сходимость полученного ряда	–2
8. Записать ответ	–1

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	20–18	17–14	13–11	10

Оценка

14. В теории теплопроводности важную роль играет уравнение $\frac{\partial y}{\partial t}=N\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Показать, что этому уравнению удовлетворяет функция $y=e^{-Nt}\sin x$ (N – номер варианта).

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Найти $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial x}$	–3
2. Найти $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$	–3
3. Подставить $\frac{\partial y}{\partial z}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ в данное уравнение	–2
4. Сделать вывод	–2

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	20–18	17–14	13–11	10–0

Оценка

15. Исследовать функции на экстремум: $z=x^2+y^2-xy-Nx-y$; $z=Nxy-3x^2-2y^2+10$; $z=N(x-y)-x^2-y^2$; $z=e^{\frac{x}{N}}(x+y^2)$, где N – номер варианта.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Записать необходимое и достаточное условие экстремума	–2
2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$	–3
3. Найти стационарные точки	–2
4. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$	–3
5. Проверить выполнимость достаточного условия экстремума	–3
6. Найти экстремумы функции	–2
7. Сделать вывод	–1

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	30–26	25–20	19–16	15–0

Оценка

16. Годовые расходы предприятия могут быть выражены функцией $f(x,y)=a+Nx+\frac{N}{2}y+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{y}$, где a, N, c_1, c_2 – постоянные. При каких значениях x и y расходы предприятия будут наименьшими? N – номер варианта.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Записать необходимое условие существования экстремума	–2
2. Найти частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$	–3
3. Найти точки, при которых $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$	–3
4. Сделать выводы	–2

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	20–18	17–14	13–11	10–0

Оценка

17. Разложить функцию $f(x) = N e^{Nx}$ в ряд Маклорена и указать область сходимости ряда (N – номер варианта).

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Записать ряд Маклорена	–3
2. Записать ряд Маклорена для функции e^x и указать область сходимости ряда	–3
3. Записать ряд Маклорена для функции $f(x) = N e^{Nx}$	–2
4. Указать область сходимости данного ряда	–2

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	20–18	17–14	13–11	10–0

Оценка

18. Разложить в ряд Маклорена функцию $y = (N + x)\cos Nx$, где N – номер варианта.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Записать ряд Маклорена	–3
2. Записать ряд Маклорена для функции $y = \cos x$	–3
3. Записать ряд Маклорена для функции $y = \cos Nx$	–1
4. Записать ряд Маклорена для функции $y = (N + x)\cos Nx$	–2
5. Указать область сходимости полученного ряда	–1

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	20–18	17–14	13–11	10-0

Оценка

19. Решить дифференциальные уравнения:

$y' + xy - x^3 = 0,\ y(0) = -2;\ y'x\ln x + y = 2\ln x,\ y(e) = 0;\ y' + y\cos x = e^{-\sin x},\ y(0) = -1;\ y'\sin x - y = 2\sin^2\frac{x}{2},\ y(\frac{\pi}{2}) = 0;\ y' + y\cos x = \sin x\cos x,\ y(0) = 3.$

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Привести уравнение к стандартному виду: $y' + P(x)y = Q(x)$	−1
2. Записать подстановку для решения ДУ методом Бернулли: $y = u(x)\cdot v(x)$	−1
3. Найти функцию $u(x)(v(x))$	−2
4. Найти функцию $v(x)(u(x))$	−2
5. Записать общее решение ДУ	−1
6. Найти постоянную C	−2
7. Записать ответ	−1

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	20–18	17–14	13–11	10–0

Оценка

20. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{N-1}{(Nn+3)\ln^2(Nn+3)}$, **где N – номер варианта.**

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Определение сходимости и расходимости ряда	−1
2. Записать интегральный признак Коши	−3
3. Вычислить интеграл $\int_2^{\infty} \frac{N-1}{(Nn-3)\ln^2(Nn+3)}dx$	−10
4. Вывод	−1

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	30–26	25–20	19–16	15–0

Оценка

21. Вычислить приближенное значение функции $z = f(x, y)$ в данной точке с помощью полного дифференциала.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Записать формулу приближенного вычисления функции с помощью полного дифференциала $z(x, y) \approx z(x_0, y_0) + dz(x_0, y_0)$	−2

Промежуточные вопросы	Штрафные баллы
2. Выбрать точку $B(x_0, y_0)$, Δx, Δy	−1
3. Найти $z(x_0, y_0)$	−1
4. Найти z'_x, z'_y	−2
5. Найти $z'_x(x_0, y_0)$ и $z'_y(x_0, y_0)$	
6. Записать $dz(x_0, y_0)$	−1
7. Записать ответ	−1

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	20–18	17–14	13–11	10–0

Оценка

Задачи для экзаменационного контроля знаний

Тип 1

Исследовать функцию $y = i\sqrt[3]{i - x^2}$ и построить график. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = i\sqrt[3]{i - x^3}$; $y = 0$; $x = 0$; $x = \sqrt{i}$, где $i = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30$.

Алгоритм решения

1. О.Д.З. $]-\infty; +\infty[$.

2. Найти точки пересечения графика функции с осями координат. Решить уравнение $y(x) = 0$, т. е. $i\sqrt[3]{i - x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{i}$, $x_2 = \sqrt{i}$.

3. Исследовать на четность и нечетность. Вычислить $y(x)$: $x = -x$: $y(-x) = i\sqrt[3]{i - x^2}$. Функция четная.

4. Исследовать функцию на экстремум:

а) найти $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{1}{3}i(i - x^3)^{-\frac{2}{3}}(-2x) = -\frac{2}{3}ix(i - x^2)^{-\frac{2}{3}};$$

б) найти значения x_0, при которых $y'(x_0) = 0$ или $y'(x_0)$ не существует:

$$-\frac{2}{3}ix(i - x^2)^{-\frac{2}{3}} = 0 \Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = \sqrt{i}; \quad x_3 = -\sqrt{i};$$

в) найти или определить знак $y'(0,5)$ и $y'(6)$:

$$y'(0,5) = -\frac{2}{3}i(0,5)(i - 0,5^2)^{-\frac{2}{3}} < 0;$$

$$y'(6) = -\frac{2}{3}i \cdot 6(i - 6^2)^{-\frac{2}{3}} = -4i\frac{1}{\sqrt[3]{(i - 36)^2}} < 0,$$

$x = 0$ – точка максимума;

г) найти $y(0)$: $y(0) = i\sqrt[3]{i}$.

Свести результаты исследований:

x	0	$]0; \sqrt{i}[$	$\sqrt{i}$	$]\sqrt{i}; +\infty[$
y'	0	минус	0	минус
y	$i\sqrt[3]{i}$ max	убывает	0	убывает

5. Исследовать функцию не выпуклость, вогнутость и найти точки перегиба:

а) найти $y''(x)$:

$$y''(x) = [y'(x)]' = [-\frac{2}{3}\, i\, \frac{x}{(i-x^2)^{2/3}}]' = -\frac{2}{9}\, i\, \frac{3i + x^2}{\sqrt[3]{(i-x^2)^3}\,(i-x^2)};$$

б) найти значения x_0, при которых $y''(x_0) = 0$ или не существует:

$$y''(x) = -\frac{2}{9}\, i\, \frac{3i + x^2}{\sqrt[3]{(i-x^2)^3}\,(i-x^2)} \neq 0;$$

$y''(x)$ не существует при $x = \pm\sqrt{i}$;

в) найти $y''(0{,}5)$ и $y''(31)$, $y(i)$:

$$y''(0{,}5) = -\frac{2}{9}\, i\, \frac{3i + 0{,}5^2}{\sqrt[3]{(i-0{,}5^2)^2}\,(i-0{,}5^2)} < 0;$$

$$y''(31) = -\frac{2}{9}\, i\, \frac{3i + 31^2}{\sqrt[3]{(i-31^2)^2}\,(i-31^2)} > 0.$$

Точки перегиба: $(-\sqrt{i}; 0)$, $(\sqrt{i}; 0)$.

Свести результаты исследований:

x	$]0; \sqrt{i}[$	$\sqrt{i}$	$]\sqrt{i}; +\infty[$
y''	минус	не существует	плюс
y	выпуклый	0	вогнутый

6. Построить график функции с учетом того, что функция четная.

7. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = i\sqrt[3]{i - x^2}$; $y = 0$; $x = 0$; $x = \sqrt{i}$;

$$S = \int_0^{\sqrt{i}} i\sqrt[3]{i - x^2}\, dx.$$

Вычислить интеграл приближенно по формуле Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\Big[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) +$$
$$+ 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})\Big],$$

взяв $h = 0{,}1\sqrt{i}$.

Тип 2

1. Решить систему уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -2$; $x_2 = -3$; $x_3 = 1$.

2. Решить систему уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -2$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

3. Решить систему уравнений методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 7$; $x_2 = -4$; $x_3 = 0$.

Тип 3

Найти $\text{пр}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB}$. Исходные данные: $A(x_A, y_A, z_A)$; $B(x_B, y_B, z_B)$; $C(x_C, y_C, z_C)$.

Алгоритм решения

1. $a_1 = x_B - x_A$; $a_2 = y_B - y_A$; $a_3 = z_B - z_A$;
   $b_1 = x_C - x_A$; $b_2 = y_C - y_A$; $b_3 = z_C - z_A$.
2. $d = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$.
3. $c = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.
4. $\text{пр}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = \dfrac{c}{d}$.

Данные к задаче (i – номер экзаменационного билета)

i	A	B	C
6	(5; 3; 1)	(5; 2; 0)	(6; 4; –1)
14	(–3; –7; –5)	(0; –1; –2)	(2; 3; 0)
19	(2; –4; 6)	(0; –2; 4)	(6; –8; 10)
24	(0; 1; –2)	(3; 1; 2)	(4; 1; 1)
29	(3; 3; –1)	(1; 5; –2)	(4; 1; 1)

Тип 4

Найти площадь треугольника, вершины которого заданы координатами: $A\ (x_A, y_A, z_A)$; $B\ (x_B, y_B, z_B)$; $C\ (x_C, y_C, z_C)$.

Алгоритм решения

1. $a_1 = x_A - x_B;\quad a_2 = y_A - y_B;\quad a_3 = z_A - z_B;$
   $b_1 = x_C - x_B;\quad b_2 = y_C - y_B;\quad b_3 = z_C - z_B.$
2. $d_1 = a_2 b_3 - b_2 a_3;\quad d_2 = -a_1 b_3 + b_1 a_3;\quad d_3 = a_1 b_2 - b_1 a_2.$
3. $d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}.$
4. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} d.$

Данные к задаче (i – номер экзаменационного билета)

i	A	B	C
8	(2; 1; 1)	(6; 1; –4)	(4; 2; 1)
15	(–1; –2; 1)	(–4; 2; 5)	(–3; –2; 2)
22	(–6; 2; –3)	(6; 3; –2)	(7; 3; –3)
25	(0; 0; 4)	(–3; –6; 1)	(–5; –10; –1)
27	(2; –8; –1)	(4; –6; 0)	(–2; –5; –1)
33	(6; –1; –4)	(0; 0; 4)	(–3; –6; 1)

Тип 5

Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-i)^n}{in}, \text{ где } i = 1, 7, 13, 19, 25.$$

Алгоритм решения

1. Записать $u_n = (-1)^{n-1}\frac{(x-i)^n}{in};\quad u_{n+1} = (-1)^n \frac{(x-i)^{n+1}}{i(n+1)}.$

2. Вычислить

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n (x-i)^{n+1} in}{i(n+1)(-1)^{n-1}(x-i)^n}\right| = |x-i|.$$

3. Решить неравенство $|x-i| < 1 \Longrightarrow -1 + i < x < 1 + i.$

4. Записать и исследовать ряд при $x = -1 + i$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1+i-i)^n}{in} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{in} = -\frac{1}{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

5. Сделать вывод: ряд расходится при $x = -1 + i$.

6. Записать и исследовать ряд при $x = 1 + i$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(1+i-i)^n}{in} = \frac{1}{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

7. Сделать вывод: ряд сходится при $x = 1 + i$ (по теореме Лейбница).

Ответ: $-1 + i < x \leq 1 + i$.

Тип 6

Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси ox петли кривой $(x - 4i)\, y^2 = ix\,(x - 3i)$ ($i = 3, 9, 15, 21, 27$).

Алгоритм решения

1. Записать

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx, \qquad [f(x)]^2 = \frac{ix(x-3i)}{x-4i}.$$

2. Найти пределы интегрирования: $ix(x - 3i) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 3i$.

3. Найти объем тела:

$$V = \pi \int_0^{3i} \frac{ix(x-3i)}{x-4i}\, dx =$$

$$= \pi \int_0^{3i} \left(ix + i^2 + \frac{4i^3}{x-4i}\right) dx =$$

$$= \pi \left[\left(\frac{ix^2}{2} + i^2 x + 4i^3 \ln|x-4i|\right)\Bigg|_0^{3i}\right] = \frac{\pi i^3}{2}(15 - 16\ln 2).$$

Тип 7

Найти длину кардиоиды $r = i\,(1 + \cos\varphi)$, где $i = 4, 10, 16, 22, 28$.

Алгоритм решения

1. Записать формулу длины дуги с учетом симметрии фигуры:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi = 2\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi.$$

2. Найти r': $r' = [i(1 + \cos\varphi)]' = -i\sin\varphi$.

3. Вычислить $r^2 + (r')^2$:

$$r^2 + (r')^2 = [i(1 + \cos\varphi)]^2 + (-i\sin\varphi)^2 =$$

$$= i^2(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) =$$

$$= i^2(2 + 2\cos\varphi) = i^2 \cdot 2 \cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2} = 4i^2\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

4. Вычислить интеграл:

$$l = 2i\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 4i\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4i\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8i.$$

Ответ: $l = 8i$.

Типы 8, 9, 10

Решить уравнение $y'' - 4iy' + 3i^2y = 5e^{ix}\varphi(ix)$, где

$$\varphi(ix) = \begin{cases} 5e^{ix}\sin ix, & \text{для } i = 1, 6, 11, 16, 21, 26 \\ 5e^{ix}\cos ix, & \text{для } i = 3, 8, 13, 18, 23, 28 \\ (ix)^2 + ix + 1, & \text{для } i = 5, 10, 15, 20, 25, 30 \end{cases}$$

при $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Алгоритм решения для $\varphi(ix) = (ix)^2 + ix + 1$,
$i = 5, 10, 15, 20, 25, 30$

1. Записать $y = y_{00} + y_{ч.н}$.
2. Найти y_{00}, для чего:

а) решить уравнение

$k^2 - 4ik + 3i^2 = 0 \Rightarrow k_1 = i$; $k_2 = 3i$;

б) записать y_{00}: $y_{00} = C_1e^{k_1x} + C_1e^{k_2x} = C_1e^{ix} + C_2e^{3ix}$.

3. Найти $y_{ч.н}$:

а) записать $y_{ч.н} = Ax^2 + Bx + C$;

б) найти $y'_{ч.н}$: $y'_{ч.н} = (Ax^2 + Bx + C)' = 2Ax + B$;

в) найти $y''_{ч.н}$: $y''_{ч.н} = (2Ax + B)' = 2A$;

г) подставить $y_{ч.н}$, $y'_{ч.н}$, $y''_{ч.н}$ в дифференциальное уравнение

$$2A - 4i(2Ax + B) + 3i^2(Ax^2 + Bx + C) = (ix)^2 + ix + 1,$$

т. е.

$$3i^2Ax^2 + (3i^2B - 8iA)x + (3i^2C - 4iB + 2A) = ix^2 + ix + 1;$$

д) составить и решить системы относительно A, B, C:

$$\begin{cases} 3i^2A = i^2 \\ 3i^2B - 8iA = i \\ 3i^2C - 4iB + 2A = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \frac{1}{3}; \quad B = \frac{11}{9i}; \quad C = \frac{47}{27i^2};$$

е) записать $y_{ч.н}$: $y_{ч.н}=\frac{1}{3}x^2+\frac{11}{9i}x+\frac{47}{27i^2}$.

4. Записать y:

$$y=y_{00}+y_{ч.н}=c_1e^{ix}+c_2e^{3ix}+\frac{1}{3}x^2+\frac{11}{9i}x+\frac{47}{27i^2}.$$

5. Найти постоянные c_1 и c_2:

а) найти y':

$$y'=\left(c_1e^{ix}+c_2e^{3ix}+\frac{1}{3}x^2+\frac{11}{9i}x+\frac{47}{27i^2}\right)'=$$

$$=ic_1e^{ix}+3ic_2e^{3ix}+\frac{2}{3}x+\frac{11}{9i};$$

б) составить и решить систему:

$$\begin{cases} c_1+c_2+\dfrac{47}{27i^2}=0 \\ ic_1+3ic_2+\dfrac{11}{9i}=1 \end{cases} \Longrightarrow \quad c_1=-\frac{4+i}{2i}; \quad c_2=\frac{27i+14}{54i^2}.$$

Ответ:

$$y=-\frac{4+i}{2i}e^{ix}+\frac{27i+14}{54i^2}e^{3ix}+\frac{1}{3}x^2+\frac{11}{9i}x+\frac{47}{27i^2}.$$

Тип 11

Найти линию, проходящую через точку $(i;\ i/2)$ и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания; i = 2, 7, 12, 17, 22, 27.

Алгоритм решения

1. Сделать схематический чертеж, соответствующий условию задачи:

а) в декартовой системе координат выбрать произвольную точку $A(x;y)$;

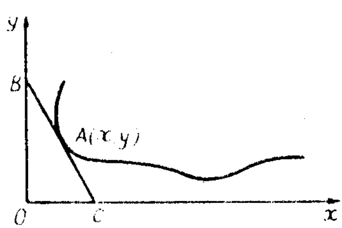


Рис. 20

б) через точку провести отрезок BC, пересекающий оси ox и oy так, чтобы точкой A он делился пополам;

в) B – точка пересечения касательной с осью oy; C – точка пересечения касательной с осью ox.

2. Записать уравнение касательной, проходящей через точку A:

$$Y - y = y'(X - x).$$

3. Найти координаты точки B.

Решить систему: $\begin{cases} Y - y = y'(X - x) \\ X = 0 \end{cases} \Rightarrow Y - y = y'(-x);$

$Y = -y'x + y;$ $\qquad B(0; -y'x + y).$

4. Составить дифференциальное уравнение (использовать формулу $y = \dfrac{y_A + y_B}{2}$:

$$y = \frac{0 + (-y'x + y)}{2} \Rightarrow 2y = -y'x + y; \quad -y'x = y.$$

5. Решить дифференциальное уравнение

$$y = -y'x \Rightarrow y = -\frac{x\,dy}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|x| = -\ln|y| + \ln|c| \Rightarrow$$

$$x = \frac{c}{y} \Rightarrow xy = c.$$

6. Найти c: $\quad i \cdot \dfrac{i}{2} = c \Rightarrow c = \dfrac{i^2}{2}.$

Ответ: $xy = \dfrac{i^2}{2}.$

8. Сделать рисунок.

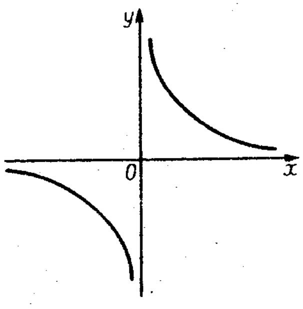


Рис. 21

Тип 12

Точка массой, равной i, движется прямолинейно; на нее действует сила, пропорциональная времени (коэффициент пропорциональности равен k_1), прошедшему от момента, когда скорость равнялась нулю. Кроме того, на точку действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости (коэффициент пропорциональности равен k). Найти зависимость скорости от времени (i = 4, 9, 14, 18, 24, 28).

Алгоритм решения

1. Записать второй закон Ньютона: $m\dfrac{dv}{dt}=\sum\limits_{i=1}^{n}F_i$.

2. Записать дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dt}=k_1t-kv.$$

3. Определить вид дифференциального уравнения.

Ответ: линейное дифференциальное уравнение.

4. Решить дифференциальное уравнение:

а) применить подстановку $v=uv$; $v'=u'v+v'u$;

б) записать дифференциальное уравнение:

$$i(u'v+v'u)+kuv=k_1t\ \Rightarrow$$

$$iu'v+v'ui+kuv=k_1t\ \Rightarrow$$

$$iu'v+kuv+v'ui=k_1t\ \Rightarrow$$

$$(iu'+ku)v+v'ui=k_1t;$$

в) положить $iu'+ku=0$;

г) решить уравнение $iu'+ku=0\ \Rightarrow$

$$\frac{du}{u}=-\frac{k}{i}dt\ \Rightarrow\ \ln|u|=-\frac{k}{i}t\ \Rightarrow\ u=e^{-\frac{k}{i}t};$$

д) решить уравнение $v'ui=k_1t$:

$$v'e^{-\frac{k}{i}t}\cdot i=k_1t\Rightarrow v'=\frac{k_1}{i}e^{\frac{k}{i}t}t\Rightarrow dv=\frac{k_1}{i}e^{\frac{k}{i}t}tdt\Rightarrow$$

$$v=\frac{k_1}{i}\int e^{\frac{k}{i}t}tdt=\left|\begin{array}{l}u=t,\ du=dt\\ e^{\frac{k}{i}t}dt=dv,\ v=\frac{i}{k}e^{\frac{k}{i}t}\end{array}\right|=\frac{k_1}{i}\Big(\frac{i}{k}e^{\frac{k}{i}t}\cdot t-$$

$$-\frac{i}{k}\int e^{\frac{k}{i}t}dt\Big)=\frac{k_1}{i}\cdot\frac{i}{k}\left(e^{\frac{k}{i}t}\cdot t-\frac{i}{k}e^{\frac{kt}{i}}\right)+c;$$

$$v = \frac{k_1}{k} e^{\frac{kt}{i}} \left(t - \frac{i}{k} \right) + c ;$$

е) записать uv:

$$V = uv = \frac{k_1}{k} e^{-\frac{kt}{i}} \cdot e^{\frac{kt}{i}} \left(t - \frac{i}{k} \right) + c e^{-\frac{kt}{i}} .$$

$$V = \frac{k_1}{k} \left(t - \frac{i}{k} \right) + c e^{-\frac{kt}{i}} .$$

5. Найти c. Использовать условие $V = 0$; $t = 0$:

$$0 = -\frac{k_1 i}{k^2} + c \Rightarrow c = \frac{k_1 i}{k^2} .$$

Ответ: $V = \frac{k_1}{k} \left(t - \frac{i}{k} + \frac{i}{k} e^{-\frac{kt}{i}} \right).$

Оценка ответов на вопросы экзаменационного билета (пример)

1. Доказать необходимый признак сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Сформулировать признак	–6
2. Дать определение сходящегося ряда	–2
3. Выразить n-й член ряда через частичные суммы S_n и S_{n-1}	–1
4. Найти предел n-го члена ряда	–1

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	20–18	17–14	13–11	10

Оценка за 1-й вопрос

2. Доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

Контролирует экзаменатор

Оценка за 2-й вопрос.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 3(1 - \cos\varphi)$.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Записать формулу для вычисления площади фигуры в полярных координатах	–5
2. Указать пределы интегрирования с учетом симметрии фигуры	–3
3. Вычислить площадь фигуры	–7

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	30–26	25–20	19–16	15

Оценка

4. Найти полный дифференциал функции $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ в т. $P(1; 1)$, если $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta y = -0{,}2$.

Промежуточные вопросы	*Штрафные баллы*
1. Записать формулу полного дифференциала функции $z = f(x; y)$	–5
2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ в т. $P(1; 1)$	–2
3. Найти $\frac{\partial z}{\partial y}$ в т. $P(1; 1)$	–1
4. Вычислить полный дифференциал	–2

Шкала оценок	5	4	3	2
Шкала баллов	20–18	17–14	13–11	10

Оценка за 4-й вопрос

Оценка итоговая

4.1. ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Программное обеспечение автоматизированного обучающего комплекса в курсе высшей математики „Мечта" (ПО „Мечта") представляет собой пакет прикладных программ, которые обеспечивают ввод, хранение, обработку и диалог с помощью средств отображения. Структура ПО „Мечта" представлена на рис. 22.

Программы, входящие в ПО, обеспечивают:

удобное и простое обращение ко всем программам пакета;

формирование на магнитных дисках (МД) экзаменационных билетов в виде файлов с последовательной организацией и его хранение;

распечатку учебно-методического и справочного материала;

обучение и контроль знаний студентов;

организацию диалоговых вычислений;

получение статистических данных;

выдачу на печать или экран видеотерминала инструкций по использованию пакета программ.

Программы, входящие в библиотеку программ курсов и библиотеку обслуживающих программ, написаны на языке ПЛ/1, имеют модульную организацию, хранятся в библиотеке загрузочных модулей и готовы к использованию без дополнительного редактирования.

Библиотека программ курсов представляет собой пакет функциональных программ, выполняющихся под управлением системы PRIMUS [11]. Библиотека представляет собой открытую систему, что позволяет корректировать программы, а также включать в комплекс новые программы.

Диалоговая система коллективного доступа PRIMUS обеспечивает организацию взаимодействия пользователей с личными функциональными программами, написанными на ПЛ/1.

Использование языка ПЛ/1, являющегося универсальным языком высокого уровня, позволяет существенно упростить процесс написания функциональных программ. При этом система PRIMUS [11] не накладывает практически никаких ограничений на использование средств этого языка. Язык ПЛ/1 позволяет создавать функциональные программы с реентерабельной структурой, что обеспечивает эффективное использование ресурсов основной памяти в случае коллективного взаимодействия пользователей с подобными функциональными программами.

Функциональные программы могут вступать в диалоговое взаимодействие с пользователями, используя коммуникационные средства системы PRIMUS.

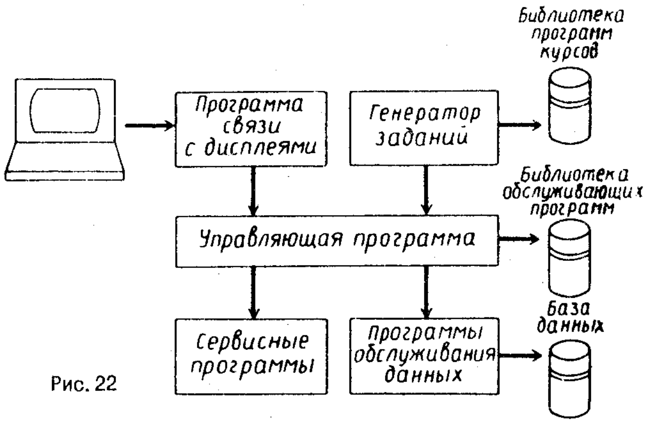


Рис. 22

Все обучающе-контролирующие программы комплекса „Мечта" обладают свойством реентерабельности. Реентерабельность определяют как возможность повторного входа в программу до того, как она полностью завершила работу в результате предыдущего входа в нее. Иначе говоря, *реентерабельность* – это свойство программы, позволяющее при решении двух или более задач использовать ее одновременно.

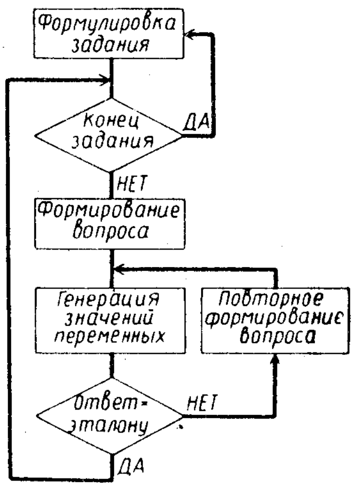


Рис. 23

Таким образом, реентерабельность обеспечивает одновременную работу группы студентов с обучающе-контролирующими программами в диалоговом режиме за видеотерминалами типа ЕС-7906.

Для управления работой программ пакета требуются знания языка управления заданиями [40], основных принципов операционной системы ОС ЕС и основных команд диалоговой системы коллективного доступа PRIMUS.

Пакет предназначен для экспуатации на ЭВМ ЕС моделей 1022 и выше, имеющих основную память емкостью не менее 512 Кбайт.

ПО „Мечта" работает под управлением операционной системы ОС ЕС версии 6.1. и выше с планировщиком заданий MFT или MVT.

На рис. 23 приведена общая схема функционирования обучающе-контролирующей программы. Ниже показан ее фрагмент:

```
EKZ1K: PROC (D) OPTIONS (MAIN, REENTRANT);
      DCL D CHAR (4);
      DCL PARM CHAR (24) BASED (z),
            CL BIN FIXED (31, Ø ),
            SCR CHAR (96 Ø ) VAR;
      UNSPEC (Z) = UNSPEC (D);
      DCL NBICH CHAR (2);
      DCL PR DEC FIXED (1, Ø );
      DCL AN31 CHAR (3);
      DCL ANC32 CHAR (1);
      DCL AN32 DEC FIXED (1, Ø );
      DCL (ZN, E) DEC FIXED (8, 4);
      DCL CHIS DEC FIXED (9, 3);
      DCL A4 (5) DEC FIXED (2, Ø );
      DCL CN CHAR (2 0 ) VAR;
      DCL P3 DEC FIXED (1, Ø );
      E = 2. 7183;
      SCR = (81) '*' !! (78)' ' !! (2)'*' !! (78)' ' !!(2)'*'(22)' ' !!
      'ВИННИЦКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ' !! (22)' ' !! (2)'*' !! (27)' ' !!
' КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ' !! (26)' ' !! (2)'*' !! (18)' ' !!
      'АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА ПРИЕМА ЭКЗАМЕНОВ' !! (17)
' !! (2)'*' !!(78)' ' !!'*'; CL = 1 B;
      SCR = SCR !! '*' !! (36) ' ' !! ' МЕЧТА - 1 ' !! (35) ' ' !! (2)'*' !! (78) ' ' !!
(2) '*' !! (78) ' ' !! (81) '*';
      CALL PLPUT (PARM, CL, SCR);
      CALL PLGET (PARM, SCR);
      SCR = (8 Ø ) ' ' !! 'СООБЩИТЕ ВАШУ ФАМИЛИЮ = ';
      CALL PLPUT (PARM, CL, SCR);
      CALL PLGET (PARM, SCR);
      FAM = SUBSTR (SCR, 2. 2 Ø );
      V3 = Ø ; VD4 = Ø ;
      A4 = Ø
      SCR = (1 Ø 9) ' ' !! 'ПРИГОТОВЬТЕСЬ К ОТВЕТУ' !! (128) ' ' !!
      'БУДЬТЕ ВНИМАТЕЛЬНЫ И АККУРАТНЫ В СВОИХ ОТВЕТАХ'
!! (1Ø7) ' !!
      'ВВЕДИТЕ НОМЕР ВАШЕГО ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА = ';
      CALL PLPUT (PARM, CL, SCR);
      CALL PLGET (PARM, SCR);
      NBICH = SUBSTR (SCR, 2, 2);
SCR = (1 Ø Ø ) ' ' !! 'НОМЕР ВАШЕГО ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА ' !!
      NBICH !! (1 Ø 2) ' ' !! 'НАЧИНАЕМ ПРОВЕРЯТЬ ОТВЕТЫ ' !!
      'НА ВОПРОС 3.' !! 'ИССЛЕДОВАТЬ ФУНКЦИЮ Y = ' !!
      NBICH !! ' * X * * 2 * LDG (X). ' !! (85) ' ' !!
      'ЕСЛИ ВЫ ГОТОВЫ, НАЖМИТЕ КЛАВИШУ "В" ';
      CALL PLPUT (PARM, CL, SCR);
      CALL PLGET (PARM, SCR);
SCR = (8 Ø ) ' ' !! 'УКАЖИТЕ ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ = ';
V31: CALL PLPUT (PARM, CL, SCR);
      CALL PLGET (PARM, SCR);
      AN31 = SUBSTR (SCR, 2, 3);
      IF AN31 = 'x > Ø ' THEN GO TO V32;
      IF PR = 1 THEN GO TO R31;
      SCR = 'ПОВТОРЯЕМ ВОПРОС: ' !!
```

```
'ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ = ';
PR = 1;
GO TO V31;
R31 : SCR = (8Ø) ''!! 'ВЫ ОТВЕТИЛИ НЕВЕРНО, СНИМАЕТСЯ 1 БАЛЛ '!!
          (123) ''!! 'ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ: x > Ø. ';
CALL PLPUT (PARM, CL, SCR);
CALL PLGET (PARM, SCR);
V31 = 1;
```

4.2. ОРГАНИЗАЦИЯ ДАННЫХ, ОБРАБАТЫВАЕМЫХ ПРОГРАММАМИ ПО „МЕЧТА"

Программы пакета обрабатывают информацию, которая представляет собой тексты теоретических и практических вопросов по курсу высшей математики, выносимых для подготовки к экзаменам и для формирования экзаменационных билетов. Исходная информация переносится на машинные носители из документа, форма которого приведена в табл. 4.1.

В гр. 2 записывается текст вопроса, длина которого может быть до 710 символов. Все вопросы группируются по темам, которые выносятся на экзамен. Количество тем может быть от двух до девяти. Вопросы и задачи, относящиеся к одной теме, записываются подряд один за другим; номер темы указывается в гр. 3.

Теоретические вопросы по каждой теме разделяются на вопросы, требующие доказательств теорем, свойств, и вопросы, ответ на которые содержит формулировки, определения и т. д. Для вопросов первого типа в гр. 4 записывается признак „Т", для второго типа – „Ф". По желанию пользователя в исходный массив вопросов могут быть внесены и такие вопросы, которые не будут входить в экзаменационные билеты, но необходимы для подготовки к экзамену. Для этих записей гр. 5 должна быть пустой. В таком же виде могут быть записаны и требования к знаниям студентов на экзамене. Для вопросов, выносимых на экзамен и используемых для формирования экзаменационных билетов, гр. 5 должна содержать признак „Е".

Физически входные данные представляют собой файл на перфокартах или магнитных носителях, обычно на магнитной ленте. Файлы на перфокартах содержат символьное изображение исходной информации, файлы на магнитных носителях представляют собой образы перфокарт.

Таблица 4.1

№ п/п	Текст вопроса	№ темы	Признак „Т" или „Ф"	Признак „Е" или пробел
1	2	3	4	5

Файлы исходной информации, независимо от машинного носителя, логически организованы в виде стандартного вводного файла SYSIN. Длина записи файла SYSIN равна 80 байтам. Такая организация вводного файла исключает необходимость создания специальной программы корректировки. Внесение исправлений в исходные данные может быть достаточно эффективно организовано с помощью общественных диалоговых средств редактирования, в частности с помощью системы коллективного доступа PRIMUS.

4.3. ПРОГРАММА ОРГАНИЗАЦИИ НА МАГНИТНЫХ ДИСКАХ ФАЙЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ МАССИВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ПРАКТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ

Программа WQUEST предназначена для организации исходной информации на магнитных дисках (МД) в виде файлов с последовательной организацией данных. Входной информацией для программ являются теоретические вопросы по темам, выносимым на экзамен. Организация и подготовка данных описана в п. 4.1.

Программа WQUEST вводит исходную информацию из стандартного файла SYSIN и проверяет значения граф 3, 4, 5.

Программой различаются две ситуации, связанные с наличием ошибок в данных. Первая ситуация связана с нарушением порядка следования вопросов по темам, т. е. среди вопросов одной темы попадается вопрос другой темы. Вторая ситуация возникает в том случае, когда в графах 4, 5 записаны недопустимые символы. В первой ситуации на АЦПУ печатается сообщение о нарушении порядка следования вопросов и запись не включается в файл. Во втором случае на экран дисплея выдается соответствующее сообщение и представляется возможность исправить допущенную ошибку, введя правильный символ. Далее массивы вопросов и задач записываются в виде файлов на МД.

Файл на МД представляет собой набор данных с их последовательной организацией и с блокированными записями фиксированной длины. Длина записи равна 720 байтам, количество записей в блоке обычно 10.

По окончании работы программы на МД находятся два файла: один из них содержит теоретические вопросы по курсу высшей математики, другой – практические вопросы.

Имена формируемых файлов, а также имя файла исходных данных и его расположение, если он подготовлен на машинных носителях, отличных от перфокарт, указываются пользователем в операторах при оформлении задания на выполнение программы WQUEST.

Пример задания на выполнение программы

```
1. //BM JOB MSGLEVEL = (2,0)
2. // EXEC PGM = WQUEST
3. // STEPLIB DD DSN = DREAM1, DISP = SHR
```

4. // SYSPRINT DD SYSOUT = A
5. // LISTING DD SYSOUT = A
6. // FRAGT DD DSN = FRAGT, UNIT = SYSDA, VOL = SER = DREAM, // DISP = (, KEEP), SPACE = (TRK, (10, 1), RLSE), // DCB = (RECFM = = FB, LRECL = 640, BLKSIZE = 6400)
7. // FRAGP DD DSN = FRAGP, UNIT = SYSDA, VOL = SER = DREAM, // DISP = (, KEEP), SPACE = (TRK, (10, 1), RLSE), // DCB = (RECEM = = FB, LRECL = 800, BLKSIZE = 8000)
8. // SYSIN DD DSN = MAS, UNIT = SYSDA, VOL = SER = DREAM, // DISP = SHR
9. /*
10. //

В приведенном примере оператор 3. // STEPLIB DD ... описывает библиотеку загрузочных модулей с именем DREAM1. DD-оператор* // FRAGT ... описывает вновь создаваемый последовательный набор данных – файл FRAGT, который содержит теоретические вопросы по курсу высшей математики. DD-оператор // FRAGP ... аналогичным образом описывает создаваемый файл практических вопросов по курсу высшей математики. DD-оператор // SYSIN описывает входной файл, содержащий массив вопросов и задач. Этот массив в виде файла с именем MAS предварительно записан на диск с серийным номером DREAM.

4.4. ПРОГРАММА ФОРМИРОВАНИЯ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ И ЗАПИСИ ИХ В ВИДЕ ФАЙЛА НА МАГНИТНЫХ ДИСКАХ EXATIC

Исходными данными для программы служат файлы, сформированные программой WQUEST; они содержат теоретические и практические вопросы.

Алгоритм формирования текста билетов следующий:

1. Указание пользователем номера темы, с вопросов которой следует начать компоновку билетов.

2. Определение номера первого вопроса билета из указанной темы с использованием генератора случайных чисел.

3. Проверка признака „Е” гр. 5 в записи вопроса. Если признак отсутствует, т. е. этот вопрос не выносится на экзамен, выбирается следующий по порядку вопрос этой же темы.

4. Запись текста вопроса в массив экзаменационных билетов.

Чтобы исключить возможность дублирования билетов, программа формирует табл. 4.2, содержащую сведения о каждом билете.

Таблица 4.2

№ билета	Первый вопрос экзаменационного билета			
	№ темы	№ вопроса	Признак „Т” или „Ф”	Текст вопроса
	из сформированных массивов			
1	2	3	4	5

*Оператор описания данных // ...DD... в дальнейшем именуется DD-оператор.

5. Определение номера темы второго теоретического вопроса. Сумма номеров тем, из которых выбраны первый и второй вопросы, вычисляется по модулю N, где N – количество тем. Процесс выбора второго теоретического вопроса аналогичен процессу выбора первого вопроса, описанному в пп. 2, 3, 4.

6. Определение номера темы первого практического вопроса. Номер темы, из которой выбирается первый практический вопрос, всегда больше на единицу номера темы первого теоретического вопроса. практического

Номер темы второго теоретического вопроса определяется по тому же алгоритму, что и номер темы второго вопроса по теории.

Обязательным условием при формировании экзаменационных билетов является соответствие признака „Т" гр. 4 одного вопроса признаку „Ф" гр. 4 второго вопроса. Это требование осуществляется при подборе как теоретических, так и практических вопросов.

Подготовленный таким образом массив экзаменационных билетов записывается в виде файла на МД. Сформированный на МД файл представлет собой набор данных с последовательной организацией записей фиксированной длины. Длина записи – 3280 байтов. Этот файл по желанию пользователя может быть выведен на печать по утвержденной форме экзаменационных билетов или на экран видеотерминала.

Для удобства корректировки файла рекомендуется описывать его сцепленными операторами – DD-задания на выполнение программы EXATIC. В каждом операторе DD, кроме последнего, описан файл, содержащий 10 экзаменационных билетов. Последний файл может содержать большее или меньшее количество билетов. DD-имя указывается в первом операторе DD-задания на выполнение программы EXATIC.

Пример задания на выполнение программы EXATIC

1. // BIL JOB MSGLEVEL = (2, 0)
2. // EXEC PGM = EXATIC
3. // STEPLIB DD DSN = DREAM1, DISP = SHR
4. // SYSPRINT DD SYSOUT = A
5. // FRAGT DD DSN = FRAGT, UNIT = SYSDA, VOL = SER = DREAM, DISP = SHR
6. // FRAGP DD DSN = FRAGP, UNIT = SYSDA, VOL = SER = DREAM, DISP = SHR
7. // BILET DD DSN = BIL11, UNIT = SYSDA, VOL = SER = DREAM, // DISP = (, KEEP), SPACE = (3280, (10), PLSE), DCB = BLKSIZE = 3280
8. // DD DSN = BIL12, UNIT = SYSDA, VOL = SER = DREAM, // DISP = (, KEEP), SPACE = (3280, (10), RLSE), DCB = BLKSIZE = 3280

9. // DD DSN = BIL 13, UNIT = SYSDA, VOL = SER = DREAM, // DISP = (, KEEP), SPACE = (3280, (10), RLSE), DCB = BLKSIZE = 3280
10. / *
11. //

В приведенном примере операторы // FRAGT DD..., // FRAGP DD... описывают существующие наборы данных, соответственно содержащих теоретические и практические вопросы по курсу высшей математики. Сцепленные DD-операторы // BILET DD DSN = BIL 11..., // DD DSN = = BIL 12... описывают создаваемые на МД с серийным номером DREAM последовательные наборы данных, в которых записаны экзаменационные билеты. Описанный файл может содержать 35 экзаменационных билетов по курсу высшей математики.

4.5. ПРОГРАММА ПЕЧАТИ И ВЫВОДА НА ЭКРАН ВИДЕОТЕРМИНАЛА PRINTIC

Программа PRINTIC предназначена для вывода на печать на АЦПУ или же на экран видеотерминала массивов теоретических и практических вопросов, массива экзаменационных билетов.

Исходной информацией для программы служат файлы, созданные на магнитных дисках программы, описанные раньше. Программа PRINTIC работает в трех режимах и в зависимости от заданного режима на внешние устройства выводятся: вопросы и билеты; вопросы; билеты.

Вопросы и билеты печатаются на АЦПУ в количестве, которое указывает пользователь, причем количество экземпляров задается отдельно для печати вопросов и для печати билетов.

Распечатка вопросов и билетов производится в принятой форме, одновременно в двух экземплярах на одном стандартном листе перфорированной бумаги для АЦПУ.

Пример оформления задания на выполнение программы PRINTIC

1. // BM JOB MSGLEVEL = (2, 0)
2. // EXEC PGM = PRINTIC
3. // STEPLIB DD DSN = DREAM 1, DISP = SHR
4. // SYSPRINT DD SYSOUT = A
5. // LISTING DD SYSOUT = A
6. // FRAGT DD DSN = FRAGT, UNIT = SYSDA, VOL = SER = DREAM, DISP = SHR
7. // FRAGP DD DSN = FRAGP, UNIT = SYSDA, VOL = SER = DREAM, DISP = SHR
8. // BILET DD DSN = BIL 11, UNIT = SYSDA, VOL = SER = DREAM, DISP = SHR
9. // DD DSN = BIL 12, UNIT = SYSDA, VOL = SER = DREAM, DISP = SHR

10. // DD DSN = BIL 13, UNIT = SYSDA, VOL = SER = DREAM, DISP = = SHR

11. // SYSIN DD *

12. 0

13. 10

14. 2

15 / *

16. //

В приведенном примере DD-операторы // FRAGT . . ., // FRAGP . . ., // BILET DD . . . содержат ту же информацию, что и в примерах, описанных прежде. Число 0 в двенадцатом операторе задает общий режим, при котором печатаются и вопросы и ответы, 10 – количество экземпляров распечатки вопросов для подготовки к экзамену, 2 – количество экземпляров экзаменационных билетов.

Глава 5. ПРИМЕНЕНИЕ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ ОБУЧАЮЩИХ КОМПЛЕКСОВ

5.1. МЕТОДИКА ПРИМЕНЕНИЯ

Цели изучения курса высшей математики достигаются только в случае методически обоснованного использования АОК. Прежде всего нужно определить структуру, содержание курса высшей математики для данной специальности, провести анализ математического содержания дисциплин учебного плана.

Можно выделить особенности содержания математической подготовки инженеров. Необходимы знания фундаментальных понятий, теорем, формул анализа и алгебры, их методов описания и исследования процессов. Современный уровень инженерного дела требует владения навыками четкого, логического выражения мысли. Инженеру необходимы навыки вероятностного мышления, умения пользоваться статистическими методами. Все большую роль играют оптимизационные методы, поэтому необходимы знания по математическому программированию и другим математическим дисциплинам. Особое место в инструментарии инженера занимает численный эксперимент, поэтому студентов необходимо научить постановке задач, всем этапам построения математической модели, выбору оптимальных математических методов решения данной инженерной задачи, оценке результатов и т. д. Исходя из этого определяется та тема курса высшей математики, где необходимо использовать АОК. Преподавателю необходимо найти компромиссное решение в применении автоматизированной формы обучения и другими формами учебной работы в данном потоке, группе, что соответствует методическому принципу совместимости автоматизированного обучения с традиционными формами.

Использование АОК увеличивает время самостоятельной работы над курсом.

Первым шагом адаптации студента к диалоговым работам в дисплейных классах является знакомство с клавиатурой видеотерминалов [23, 29]. Методические указания, разработанные для студентов, должны учитывать разнообразие типов дисплеев.

Учебно-методическое обеспечение АОК курса высшей математики содержит методические рекомендации преподавателям по составлению программ учебного курса, проведению занятий, дидактические материалы, используемые во всех формах учебного процесса.

В АОК можно разработать ряд обучающих программ, которые помогут сформировать различные элементы творческого мышления студента, например, интуицию, логику, способность к анализу, синтезу и т. д.

Пример фрагмента обучающей программы на проверку логики мышления, эффективности использования приобретенных знаний

1. Пусть существуют частные производные функции $z = f(x; y)$. Дифференцируема ли функция $z = f(x; y)$?

2. Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема. Существуют ли частные производные?

3. Функция $z = f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные в т. (x_0, y_0). Дифференцируема ли функция в данной точке?

4. Пусть функция $z = f(x; y)$ непрерывна в т. (x_0, y_0). Дифференцируема ли функция в данной точке?

5. Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в т. (x_0, y_0). Имеет ли поверхность $z = f(x; y)$ в т. $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ невертикальную касательную плоскость?

6. Пусть поверхность $z = f(x, y)$ имеет касательную плоскость в т. $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Дифференцируема ли функция $z = f(x, y)$?

Аналогичные тесты используются для развития нестандартности ответов, проверки глубины знаний. Особенно благодатным материалом для этой цели является тема „Случайные события".

Важной особенностью АОК является возможность адаптации процесса обучения к индивидуальным возможностям студентов [31, 38]. Переход к следующему фрагменту учебного материала определяется достигнутым уровнем знаний, который устанавливается в результате решения тестовых заданий. Если тестовые задания решены неудовлетворительно, предлагается помощь, цель которой заключается в повторном разъяснении сложных вопросов и решении типичных задач. Далее обучающийся подвергается повторному тестированию. В случае неудачи программой предусматривается или возвращение к изучению разделов, необходимых для данного фрагмента, или обращение за консультацией к преподавателю. Одновременно ЭВМ обрабатывает статистические данные о ходе обучения.

Как в режиме обучения, так и в режиме контроля не исключены правильно угаданные ответы, а не полученные в результате глубокого знания материала. Поэтому сохраняет свою важную роль устное собеседование, особенно коллоквиумы.

Качество усвоения учебного материала, формирования умения и навыков математики во многом определяется степенью овладения студентами теоретическим материалом. При изучении теории используются как линейные, так и адаптивные программы. В первом случае студент заполняет пропуски в тексте. Это могут быть формулы, термины, коэффициенты и т. п. В случае неверного ответа студенту сообщается правильный. Адаптивная обучающая программа в определенной степени учитывает индивидуальные знания студентов.

Рассмотрим фрагменты обучающих программ, используемых при изучении теоремы о производной сложной функции многих переменных.

Производная сложной функции

Теорема. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в т. t, а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в т. (x, y), где $x = x(t)$, $y = y(t)$, то сложная функция $z = f(x(t), y(t))$ также дифференцируема в т. t и справедлива формула

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Для продолжения введите ВВ.

Доказательство теоремы. Переменной t дадим приращение Δt; тогда соответствующие приращения функций $x(t)$ и $y(t)$ имеют вид

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t); \quad \Delta y = \boxed{y(t + \Delta t) - y(t)}.$$

В свою очередь, приращениям Δx и Δy переменных x и y соответствует полное приращение функции $f(x, y)$:

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y)$$

Так как функция $f(x, y)$ $\boxed{\text{дифференцируема}}$ в т. (x, y), то ее полное приращение Δz представимо в виде

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y} + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y,$$

где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Для продолжения введите ВВ.

Разделим полное приращение Δz функции $f(x, y)$ на Δt, получим:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}} + \boxed{\alpha_1 \frac{\Delta x}{\Delta t}} + \alpha_2 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

По условию теоремы существуют пределы:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \boxed{\frac{dx}{dt}} \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \boxed{\frac{dy}{dt}}.$$

Для продолжения введите ВВ.

А теперь рассмотрим фрагмент адаптивной обучающей программы

Производная сложной функции

Режим работы: самостоятельный.

На занятии рассмотрим вопрос дифференцирования сложной функции многих переменных.

Определение сложной функции напомнить?
Введите: ДА, НЕТ.

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется сложной функцией переменой t, если аргументы x и y, в свою очередь, являются функцией переменой t, т. е. $z = f(x, y)$ и $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Пример сложной функции привести?
Введите: ДА, НЕТ.

Пример сложной функции. Пусть $z = x^2 - xy^2 - 2x$. Если $x = \sin t$, $y = \ln t$, то функция $f(x, y)$ является сложной функцией аргумента t. Переменная z зависит от t не непосредственно, а через посредство промежуточных аргументов x и y. Запишем и непосредственную зависимость:

$$z = \sin^2 t - \sin t \cdot \ln^2 t - 2\sin t.$$

Переходим к изучению теоремы.

Введите ВВ.

Формулировка теоремы (см. с. 00).

Обратите внимание на важные условия теоремы, которые удовлетворяют функциям $x(t), y(t), f(x, y)$:

1. Дифференцируемость функций $x(t), y(t)$ в т. t
2. Дифференцируемость функции $z = f(x, y)$ в т. (x, y).

Если условия дифференцируемости понятны, переходите к доказательству. Для этого введите: ДА. Если непонятны, обратитесь к справочнику. Введите СП34.

Доказательство теоремы. Переменной t дадим приращение Δt. Получим новое значение аргумента $t + \Delta t$. Тогда функции $x(t)$ и $y(t)$ получат приращения Δx, Δy, которые имеют вид: $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$; $\Delta y = \boxed{y(t + \Delta t) - y(t)}$.

Приращения Δx и Δy, в свою очередь, вызывают полное приращение Δz функции $z = f(x, y)$:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, \quad y + \Delta y) - f(x, y).$$

Еще раз прочтите текст этого кадра и продумайте его.

Для продолжения введите ВВ.

Так как функция $f(x, y)$ дифференцируема в т. (x, y), то по определению полное приращение Δz можно представить в виде

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y,$$

где $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Напоминаю, что α_1 и α_2 – бесконечно малые функции.

Введите ВВ.

Если непонятно стремление к нулю функций α_1 и α_2 при $\Delta t \to 0$, воспользуйтесь консультацией. Для этого введите СП62.

Разделим левую и правую часть последнего уравнения на приращение Δt, тогда получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}}.$$

Для продолжения введите ВВ.

Так как функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в т. t, то они непрерывны в этой точке и приращения $\Delta x, \Delta y$ стремятся к нулю, т. е. $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Тогда и $\alpha_1 \to 0, \alpha_2 \to 0$.

Для продолжения введите ВВ.

В правой части равенства

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

переходим к пределу при $\Delta t \to 0$.

По условию теоремы существуют пределы отношений $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ и $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, которые соответственно равны $x'(t)$ и $\boxed{y'(t)}$.

Для продолжения введите ВВ.

Итак, предел правой части равен $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t)}$. Из существования этого предела следует существование предела отношения $\Delta z/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$. Этот предел равен dz/dt. Это означает, что функция $z = f(x(t), y(t))$ дифференцируема и ее производная dz/dt вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} .$$

Доказательство завершено.

В приведенном фрагменте обучающей программы использована учебная справочно-информационная программа. В АОК входит также справочник по математике, предназначенный для студенто старших курсов, инженеров, преподавателей специальных кафедр. Справочник содержит и дополнительный материал, не входящий в программу курса высшей математики для технического вуза, который иллюстрируется примерами применения математических методов.

5.2. ПРОВЕДЕНИЕ ЛЕКЦИЙ, ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Одной из наиболее главных задач лектора является использование таких форм проведения лекции, которые обеспечивали бы напряженную работу студентов и повышение степени усвоения лекционного материала. Перспективным направлением повышения эффективности лекции является использование структурных элементов АОК. Использование диалогового режима работы в дисплейном классе позволяет лектору расширить иллюстративные возможности лекционного материала, использовать при построении математических моделей реальные производственные данные, проводить текущий и итоговый контроль знаний. Использование дисплеев усиливает роль графического кода подачи информации при чтении лекций по высшей математике, особенно при использовании цветных мониторов.

Например, при геометрической интерпретации дифференциала функции одной переменной эффективному усвоению этого понятия способствует использование графической иллюстрации достаточного числа возможных расположений касательной, если функция возрастает или убывает, функция выпуклая или вогнутая. На рис. 24 показан кадр графической информации. Если эти графики иллюстрируют геометрический смысл дифференциала, то рисунок либо выполняется в цвете на плакате, либо воспроизводится на цветном мониторе, чтобы четче выделить отрезки, соответствующие дифференциалу. Если

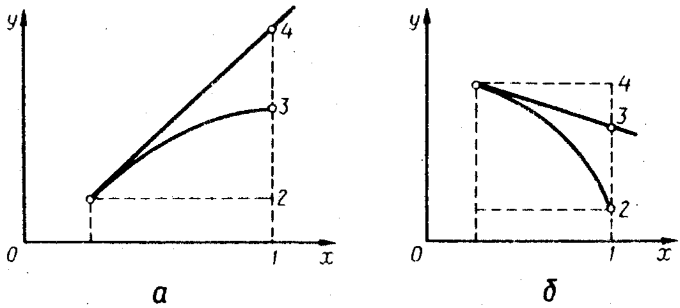


Рис. 24

же эти графики применяются для контроля знаний, то удобно использовать цифровую нумерацию точек для ввода абсолютной величины дифференциала. Вводимая информация для варианта рис. 24, *а* „24 + ", для варианта рис. 24, *б* – „34 – ".

В состав банка данных входит информация о показателях производственных процессов, что позволяет на лекциях, практических и лабораторных занятиях использовать реальные данные (например, об изменении числа работающих, фонда зарплаты, данные по социальным вопросам развития производства) при изучении интерполирования функций, сравнении математических моделей при обработке экспериментальных данных. В процессе изучения теории вероятностей и математической статистики по реальным данным определяются числовые характеристики производственных параметров. Студенты на конкретных примерах знакомятся с задачами, возникающими при управлении производством. Изменение средней при осуществлении комплексов производственных мероприятий характеризует тенденции производственного процесса, а изменение дисперсии – его стабильность. Более стабильный производственный процесс характеризуется меньшей дисперсией параметров изделий и его технологии. Такая мотивировка и возможность диалогового анализа математических моделей технико-экономических показателей выпускаемых изделий и технологии их изгототовления активизирует работу студента на занятиях по высшей математике.

Использование банка данных показателей производственных процессов на лекциях, практических и лабораторных занятиях значительно повышает качество учебного процесса, помогает формировать профессиональные навыки управления производством.

Углубленное знакомство с идеями управления производством на основе методов математического моделирования и рализацию этих идей студент осуществляет в процессе проведения деловой игры „Статистические модели сложных систем" [25]. Студенты строят и анализируют математические модели, отражающие взаимосвязи между производственными показателями и позволяющие определить резервы производства, которые способствуют его интенсивному развитию.

Первое знакомство с программируемыми калькуляторами студенты получают на практических занятиях в первом семестре и выполняют лабораторные работы на микрокалькуляторах в соответствии с рабочим планом первого курса. На втором курсе, когда они уже знакомы с алгоритмическими языками, лабораторные работы выполняются в дисплейных классах. Студенты изучают принципы работы терминальной системы и, используя операционную систему РАФОС, отлаживают программу для выполнения лабораторной работы. Мультитерминальная система может находиться в нескольких режимах работы: режиме счета, режиме набора программы, режиме отладки.

Такой же характер носит и выполнение типовых расчетов. Остановимся подробнее на методике работы студентов над типовыми расчетами по одному из важных в образовании инженера разделов курса высшей математики – математической статистике. При подготовке к выполнению типовых расчетов преподаватель должен обратить внимание студентов на то, что статистические методы позволяют выявить закономерности изменения параметров технических систем, оценить степень взаимосвязи между ними, точность и надежность числовых характеристик. Эти методы позволяют только оценить риск той или иной ошибки в полученом результате. Окончательное принятие решения по полученной оценке риска осуществляет исследователь.

Цель типового расчета „Статистическая оценка параметров сложной системы" – выработать и закрепить практические навыки проведения статистических расчетов. Эта цель достигается: значительным объемом (более 150 наблюдений) исходных данных; необходимостью применения почти всех методов расчета статистических характеристик, изучаемых в разделе „Математическая статистика"; использованием в ходе выполнения расчетов на различных типах ЭВМ.

Как показывает опыт, после выполнения задания студенты прочно овладевают методами статистического анализа и умело используют их при изучении специальных дисциплин.

В типовом расчете рассматриваются случайные параметры X и Y с нормальным законом распределения. Для получения нормированных случайных чисел ξ_{xi} с нормальным законом распределения, математическим ожиданием $m_x = 0$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_x = 1$ вначале генерируется последовательность псевдослучайных чисел η_i с равномерным законом распределения. Последовательность случайных чисел ξ_{xi} формируется по формуле

$$\xi_{xi} = \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\eta_i}\right)} \cdot \sin(2\pi\eta_{i-1}).$$

Последовательность нормально распределенных нормированных случайных чисел ξ_{yi}, коррелированных с заданным коэффициентом корреляции r с последовательностью случайных чисел ξ_{xi}, вычисляется по формуле

$$\xi_{yi} = r\xi_{xi} + \sqrt{1 - r^2}\,\xi_{xi} + 10.$$

Разработанная методика генерирования пары коррелированных нормированных псевдослучайных чисел ξ_x и ξ_y позволяет подготовить варианты заданий.

Для этого преподаватель задает математические ожидания m_x, m_y, средние квадратические отклонения σ_x, σ_y, коэффициент корреляции r для первого варианта, шаги Δm_x, Δm_y, $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$, Δr для этих характеристик, число вариантов M, число значений X и Y в задании N, номер режима работы программы PR (табл. 5.1).

Числовые характеристики для z-го варианта вычисляются по формулам, аналогичным формуле

$$m_{xz} = m_x + (z - 1)\Delta m_x.$$

Исходные данные для каждого варианта рассчитывают по формулам: $x_{iz} = m_{xz} + \sigma_{xt}\xi_{xi}$; $y_{iz} = m_{yz} + \sigma_{yz}\xi_{yi}$.

Таблица 5.1

Режим	Исходные данные (задает преподаватель)	Выводы на печать
1	m_x, Δm_x, σ_x, $\Delta\sigma_x$, σ_y, $\Delta\sigma_y$, r, Δr, N, n, где Δ – шаг, N – число вариантов, n – число значений X и Y в задании	Варианты числовых характеристик. Исходные данные
2	То же, что в режиме 1; z – номер варианта, для которого необходимо построить гистограмму и теоретическую плотность распределения	Гистограммы и теоретическая плотность распределения для z-го варианта величин X и Y
3	То же, что и в режиме 2; α – уровень значимости	То же. Оценка числовых характеристик для z-го варианта
4	То же, что и в режиме 3	Оценка числовых характеристик
5	n – длина массивов XY, массивы X, Y	Гистограммы и теоретическая плотность распределения величин X и Y
6	То же, что и в режиме 5; α – уровень значимости	То же. Оценка числовых характеристик X и Y
и т. д.		

В программе предусмотрена обработка параметров технических систем. Порядок работы с такими данными: генерирование псевдослучайных чисел; оценка числовых характеристик; построение гистограмм, кривой плотности нормального распределения; проверка согласия опытного и теоретического распределения.

Таким образом, программное обеспечение позволяет выполнить типовой расчет или научно-исследовательскую работу на генерированных или реальных исходных данных.

При этом следует указать, что на первом этапе все расчеты выполняются с помощью микрокалькуляторов, на втором – после составления и отладки программы для расчета на современных ЭВМ.

При недостаточных навыках в программировании по усмотрению преподавателя расчеты второго этапа могут быть выполнены с использованием программного обеспечения АОК.

5.3. НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

Занимаясь НИР, студент овладевает прежде всего основными формами представления результатов исследования, участвуя в составлении научных отчетов, рефератов, заявок на изобретение, в написании статьи, конкурсной работы, выступая с докладами на занятиях кружка, на конференциях, принимая участие в дискуссиях в коллективе исследователей. Исследовательская работа требует от студента изучения дополнительных разделов предмета. Помощь в этом могут оказать кафедральные кружки. Их планы работы составляются таким образом, чтобы дополнить программу общего курса в объеме, необходимом для проведения конкретных исследований.

Как уже отмечалось, важным инструментом в исследовании процессов производства являются вероятностные методы. При этом студенты знакомятся с постановкой задачи исследования, методологическими вопросами применения статистических методов анализа в конкретном производстве.

При решении поставленных задач используется математическое обеспечение АОК. Приведем значения одного из параметров производственной системы:

t	1	2	3	4	5	...	58	59	60
x_i	384	406	378	291	329	...	1441	1298	1736

На рис. 25 показан соответствующий график временного ряда. Такого рода случайные процессы не рассматриваются в общем курсе математики, поэтому необходимые понятия изучаются на занятиях кружка или самостоятельно. Существенным моментом при исследовании таких случайных процессов является порядок значений аргумента t, позволяющий выявить структуру временного ряда и те свойства параметра, которые обусловливают появление ряда. Анализ временного ряда позволяет по реализации оценить и восстановить свойства параметров сложной системы.

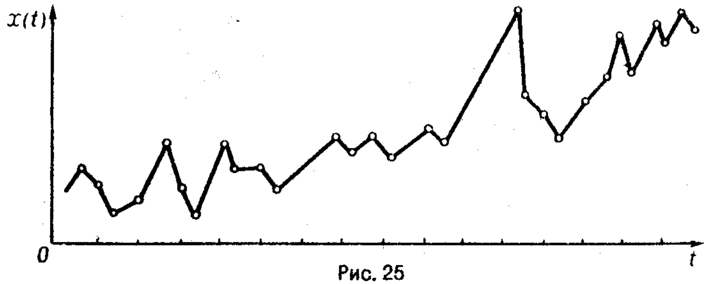


Рис. 25

Предположим, что исследуемый параметр сложной системы представляет собой временной ряд, порожденный случайным процессом $x(t)$. Пусть $x(t) = y(t) + \varepsilon(t)$, где $y(t)$ – неслучайная составляющая случайного процесса – тренд; $\varepsilon(t)$ – случайная составляющая.

Перед студентами ставится задача выбора тренда $y(t)$ и исследования остатка $\varepsilon(t)$. Вначале рассматривается полиномиальная модель. Для определения коэффициентов на первом шаге используется метод наименьших квадратов:

$$y(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m .$$

Анализ показывает, что этот метод имеет некоторые недостатки: при значениях k порядка шести и более система нормальных уравнений становится плохо обусловленной, тем самым растет погрешность вычислений; кроме того, при увеличении степени полинома необходимо пересчитывать коэффициенты.

Эти недостатки устраняются, если использовать ортогональные многочлены. В частности, на втором шаге исследований применяются многочлены Чебышева (свойства ортогональных многочленов изучаются на математическом кружке во втором и третьем семестрах). При построении полиномиального тренда производится последовательное повышение степени с использованием результатов предыдущих вычислений. Сравнение трендов m-й и $(m + 1)$-й степеней производится по критерию Фишера.

Проверка того, что эмпирические значения отклонений (остаток временного ряда) согласуются с гипотезой о законе распределения, осуществляется сравнением среднего арифметического абсолютных величин отклонений и смещенной оценки среднего квадратического отклонения.

Оценка значимости автокорреляции остатка временного ряда производится по критерию Дарбина–Уотсона. При оценке трендов временных рядов некоторых параметров можно ограничиться квадратичными многочленами. В других случаях модель усложняется добавлением синусоидальных или экспоненциальных слагаемых.

При построении линейных и квадратичных трендов вычисления проводятся на микрокалькуляторах. Программное обеспечение включает три программы. Первая – используется для вычисления $\bar{x}$ и среднего квадратичного отклонения; вторая – для вычисления коэффицентов полинома; третья программа позволяет исключить тренд, вычислить дисперсии и статистики Дарбина–Уотсона. Если рассматриваются более сложные оценки тренда, вычисления проводятся на больших ЭВМ с использованием их математического обеспечения. Отладка программ производится в дисплейном классе.

5.4. ОРГАНИЗАЦИЯ И ПРОВЕДЕНИЕ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Контроль знаний осуществляется в подсистеме „Мечта-1".

Рассмотрим алгоритм функционирования системы при подготовке и проведении экзаменов. Для создания массивов номеров вопросов экзаменационных билетов или контрольных карточек используется массив псевдослучайных чисел, которые генерируются программно с равномерным законом распределений.

Теоретические вопросы экзаменационных билетов, задачи сгруппированы по степени сложности. Так как задачи для рубежного контроля и экзаменационных билетов в первом семестре носят комплексный характер, их решение требует составления программ на микрокалькуляторе и доведения решения до числа.

В режиме обучения студенты по справочнику набирают на клавиатуре дисплея номера заданий. На экранах дисплеев появляются информационные кадры вопросов и задач, а также промежуточные теоретические вопросы. Результаты ответов контролируются ЭВМ и выдаются на экран дисплея в виде оценок в баллах и правильных ответов.

Основные сообщения, которые выдаются „Мечтой-1" на экраны дисплеев:

экзаменационные вопросы;

перечень основных навыков и умений, которые приобретает студент в результате изучения данного раздела курса высшей математики;

экзаменационные билеты;

инструкция по работе на видеотерминалах;

список рекомендованной литературы.

Эти материалы студент может получить самостоятельно в виде распечатки на первом занятии в дисплейном классе.

Экзаменационные вопросы охватывают всю теоретическую часть курса высшей математики; например, экзаменационные вопросы первого семестра – темы „Матрицы и определители. Системы линейных уравнений", „Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии", „Введение в анализ", „Дифференциальное исчисление функций одной переменной", „Неопределенный интеграл"; экзаменационные вопросы второго семестра – „Определенный интеграл и его приложения", „Функции многих переменных", „Дифференциальные уравнения", „Ряды".

В экзаменационные билеты включены два теоретических вопроса и две задачи, которые отражают содержание различных тем семестрового курса. Теоретические вопросы предусматривают доказательство теорем или вывод формул.

Одна из задач билета носит комплексный характер контроля знаний; в первом семестре – по дифференциальному исчислению; во втором – по дифференциальным уравнениям; в третьем – по теории поля; в четвертом – по теории вероятностей и математической статистике.

По курсу высшей математики первого семестра составлены 7 основных типов задач, второго, третьего, четвертого семестров – по 10.

При решении задач необходимо выполнить вычислительную работу. С этой целью используются микрокалькуляторы и подпрограммы ЭВМ ЕС-1020 и СМ-4.

Машинный контроль предусматривает проверку промежуточных ответов студента и оценку их в баллах [34]. На экран дисплея выводится информация:

если промежуточный ответ верный, предлагается перейти к следующему этапу решения задачи;

если ответ неверный, предлагается подумать и дать правильный ответ, воспользоваться подсказкой, справочником; если снова допущена ошибка, на экране дисплея появляется информация, в которой содержится правильный ответ и снимается определенное количество баллов за допущенные ошибки.

В приведенном примере экзаменационного билета сформулированы вопросы; дан текст, цель которого – подсказать путь поиска правильного ответа; указаны штрафные баллы, снимаемые с общего числа баллов, которыми оценивается вопрос билета, и приведена шкала оценок за ответ на вопрос.

Итоговая оценка ответа на экзаменационный билет определяется суммой баллов за ответы на вопросы билета.

5.5. МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ДЕЛОВОЙ ИГРЫ „СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ" (ДИСМ)

Назначение деловой игры [25]: ДИСМ проводят со студентами, изучающими курс теории вероятностей и математической статистики.

Цель проведения игры: показать студентам необходимость применения вероятностно-статистических методов при решении конкретных производственных задач; обеспечить глубокое изучение ими возможностей и особенностей статистического моделирования; привить студентам навыки применения аппарата математической статистики при решении практических задач; показать реальную сложность алгоритмов решения задач моделирования и необходимость использования ЭВМ различных типов.

ДИСМ для обеспечения активности усвоения и закрепления знаний охватывает следующие вопросы математической статистики:

расчет точечных оценок числовых характеристик случайной величины; оценку точности и надежности статистических числовых характеристик; построение эмпирического и теоретического законов распределения случайной величины; проверку согласия эмпирического и теоретического распределений.

В процессе ДИСМ студенты также должны усвоить следующие вопросы статистического моделирования: выбор вида модели; методику и технику расчета параметров линейной модели; оценку информационной эффективности модели; оценку экономической эффективности модели.

Структура ДИСМ и функции ее участников. В ДИСМ под руководством преподавателей участвует поток студентов. Имитируется деятельность научно-исследовательского сектора (НИС) производственного объединения в течение одного квартала. Академические группы являются научно-исследовательскими отделами (НИО), внутри которых создаются научно-исследовательские группы (НИГ). Каждая НИГ состоит из руководителя, старшего инженера, одного или двух инженеров. В состав НИГ может входить также лаборант.

Для разъяснения участникам деловой игры ее структуры и содержания, распределения ролей создается арбитраж (лектор и один-два ассистента). Арбитраж выдает и разъясняет участикам игры инструкции, шкалу начисления баллов за выполнение заданий в срок, шкалу удержания баллов за консультации по математическим вопросам игры, шкалу премий и штрафов, числовые массивы исходных данных и заданий участникам деловой игры на каждом этапе; контролирует игровой режим, контролирует и фиксирует результаты ДИ (в баллах) на каждом этапе и подводит окончательные итоги, решает все спорные организационные вопросы в ходе деловой игры и дает „платные" консультации участникам игры по математическим вопросам.

Начальник НИСа обязан обеспечить выполнение отделом задания по разработке алгоритма построения линейной регрессионной модели, имеющей определенную информационную и экономическую эффективность. В игре принято, что каждый НИО НИСа решает эту задачу. Из полученных алгоритмов выбирают оптимальный.

Начальник НИСа контролирует деятельность НИО по выполнению заданий, проводит производственные совещания с начальниками НИО, где обсуждаются неясные вопросы игры, ищутся их решения, контролируется выполнение календарного плана работы, предотвращаются возможные „сбои" в работе, подводятся итоги (в баллах) работы начальников НИО по каждому этапу и по всей деловой игре в целом.

Начальник НИО обеспечивает выполнение задания по разработке алгоритма построения линейной регрессионной модели, имеющей заданную информационную и экономическую эффективность (в игре принято, что все НИГ данного НИО решают эту задачу; на основе полученных алгоритмов в данном НИО строится оптимальный алгоритм), выдает задания руководителям НИГ своего отдела, совместно с руководителем НИГ конкретизирует задания для каждого сотрудника НИГ, выдает исходные данные, разрабатывает календарный план работы НИО на каждом этапе, руководит составлением календарных планов работы в каждой НИГ и утверждает их, начальник НИО контролирует деятельность НИГ своего отдела по выполнению заданий, проводит производственные совещания с руководителями НИГ, на которых обсуждается ход решения задачи, ищутся пути решения неясных математических вопросов, если такие возникают, контролируется выполнение календарного плана работы, предотвращаются возможные „сбои"; подводятся итоги (в баллах) работы руководителей НИГ по каждому этапу и по всей ДИ в целом.

Руководитель НИГ обеспечивает выполнение задания по разработке алгоритма построения линейной регрессионной модели, имеющей заданную информационную и экономическую эффективность.

Решение этой задачи состоит из разработки алгоритмов: выбора и обоснования вида модели; расчета параметров модели; оценки точности и надежности числовых характеристик; нахождения эмпирических и теоретических законов распределения и проверки их согласия; оценки информационной и экономической эффективности модели.

Руководитель НИГ выдает каждому из своих сотрудников задание, состоящее в составлении одного из алгоритмов. В игре принято, что решением последней проблемы по оценке эффективности модели занимается сам руководитель НИГ. Руководитель НИГ также выдает своим сотрудникам числовые массивы исходных данных для отладки программы алгоритма (этап III)* и для реализации алгоритма (этап IV).

Руководитель НИГ составляет календарный план работы своей группы на каждом этапе деловой игры, утверждает его у начальника НИО и доводит до сведения своих сотрудников. Контролирует деятельность своих сотрудников, проводит производственные совещания с сотрудниками НИГ. Цель производственных совещаний НИГ – проанализировать ход решения проблем, найти пути решения неясных математических вопросов; проконтролировать выполнение календарного плана работы, предотвратить возможные „сбои"; подвести итоги (в баллах) работы сотрудников по каждому этапу и по всей деловой игре в целом. На производственных совещаниях НИГ на основе разработанных алгоритмов решения отдельных проблем строится алгоритм решения задачи в целом, т. е. алгоритм линейной регрессионной модели.

---

*Этапы игры – см. с. 179–182.

Руководители НИГ участвуют в работе производственных совещаний НИО, где отчитываются о работе своих групп и могут получать „платные" консультации по математическим вопросам игры.

Сотрудники НИГ должны выполнить в срок задание по разработке алгоритма, отладить и реализовать алгоритм.

На этапе II „Разработка алгоритма" каждый сотрудник НИГ изучает необходимую литературу и разрабатывает алгоритм решения своей задачи. Затем на совещании строится алгоритм решения задачи в целом, т. е. алгоритм построения линейной регрессионной модели.

На этапе III „Отладка программы алгоритма" сотрудники НИГ по учебным исходным данным строят линейные регрессионные модели, внося при этом в алгоритм необходимые изменения.

На этапе IV „Реализация алгоритма" сотрудники НИГ по реальным производственным данным строят линейные регрессионные модели, следуя алгоритму, утвержденному после отладки программы.

Сотрудники НИГ участвуют в работе всех совещаний НИГ, где отчитываются о проделанной работе и могут получать „платные" консультации по математическим вопросам игры.

Процесс игры. Этап I. Подготовительный. Арбитраж разъясняет всем участникам деловой игры ее структуру: состав участников, содержание имитируемой деятельности, цель и задачи игры, систему премий и штрафов, систему начисления и удержания баллов, правила образования и распределения премиального фонда арбитража. Обеспечивает участников деловой игры инструкциями, расчетными бланками и формами отчетов, числовыми массивами исходных данных, текстами заданий, справочными материалами, микрокалькуляторами БЗ-34, распределяет роли.

Начальник НИСа, начальник НИО и руководители НИГ составляют календарные планы работы для своего подразделения; эти планы корректируют и утверждают на соответствующих производственных совещаниях, затем доводят их до сведения участников деловой игры, которые изучают инструкции, структуру и содержание игры, календарный план работы.

Начальник НИСа проводит производственные совещания с начальниками НИО, в ходе которых обсуждаются постановка задачи (разработать алгоритм построения линейной регрессионной модели), определяют основные математические проблемы, которые необходимо решить:

1) разработать алгоритм выбора и обоснования вида модели;

2) разработать и оптимизировать по времени алгоритм расчета параметров модели;

3) разработать алгоритм нахождения закона распределения случайной величины;

4) разработать алгоритм оценки точности и надежности параметров модели;

5) разработать алгоритм оценки эффективности модели.

Начальники НИО проводят совещания с руководителями НИГ своих отделов, в ходе которых обсуждают постановку задачи, проблемы 1–5, решают организационные вопросы.

Руководители НИГ проводят совещания со своими сотрудниками, на которых обсуждают постановку задачи и проблемы 1–5; руководитель НИГ распределяет решение проблем 1–4 среди своих сотрудников; проблему 5 в каждой НИГ решает сам руководитель.

Арбитраж штрафует руководителей за несвоевременное проведение совещаний.

Участники деловой игры изучают необходимую литературу и методические пособия.

Этап II. Разработка алгоритма. Сотрудники НИГ разрабатывают алгоритмы решения проблем 1–4, результаты работы представляют руководителю НИГ.

Руководитель НИГ начисляет баллы своим сотрудникам за качество и своевременность выполнения заданий, удерживает баллы за каждый день превышения срока выполнения задания и за консультации по математическим вопросам.

Руководитель НИГ разрабатывает алгоритм оценки информационной и экономической эффективности модели (проблема 5); на совещании НИГ руководитель и сотрудники НИГ на основе алгоритмов решения проблем 1–5 разрабатывают алгоритм построения линейной регрессионной модели; результаты работы НИГ руководитель НИГ представляет начальнику НИО.

Начальник НИО начисляет баллы руководителям НИГ своего отдела за своевременность выполнения заданий, удерживает баллы за каждый день превышения срока выполнения задания и за консультации по математическим вопросам.

На совещании начальник НИО совместно с руководителями НИГ на основе алгоритмов, разработанных в разных НИГ, разрабатывают алгоритм построения линейной регрессионной модели, оптимальный по времени и имеющий наибольшую информационную и экономическую эффективность; этот алгоритм является итогом работы всего НИО на этапе II, по соответствующей форме его представляют начальнику НИСа.

Начальник НИСа начисляет баллы начальникам НИО за своевременность выполнения задания, удерживает баллы за каждый день превышения срока выполнения задания и за консультации по математическим вопросам.

На совещании начальник НИСа совместно с начальниками НИО анализируют представленные разными НИО алгоритмы и выбирают оптимальный.

За несвоевременное проведение производственных совещаний и математические ошибки, допущенные в их ходе, арбитраж штрафует руководителей совещаний.

За ошибки при начислении и удержании баллов арбитраж штрафует лицо, допустившее ошибку.

Начальнику НИСа баллы начисляет арбитраж.

Арбитраж освещает итоги этапа II на стенде „Экран ДИСМ".

Этап III. Отладка программы алгоритма. Сотрудники НИГ по учебным исходным данным строят линейные регрессионные модели. Руководители НИГ подсчитывают информационную и экономическую эффективность моделей и начисляют баллы своим сотрудникам за выполнение заданий в срок, удерживают баллы за каждый день превышения срока выполнения задания, за ошибки при заполнении расчетных бланков и при построении графиков, за консультации по математическим вопросам.

На совещании руководитель НИГ и его сотрудники обсуждают результаты расчетов, быстродействие алгоритма, его информационную и экономическую эффективность, вносят в алгоритм необходимые изменения; результаты работы НИГ по отладке алгоритма представляют начальнику НИО.

Начальник НИО начисляет баллы руководителям НИГ за выполнение заданий в срок, удерживает баллы за каждый день превышения срока выполнения задания, за ошибки при заполнении расчетых бланков и отчетных форм, за консультации по математическим вопросам.

На совещании начальник НИО и руководители НИГ корректируют алгоритм, вносят необходимые изменения; результат работы НИО, отлаженный алгоритм представляют начальнику НИСа.

Начальник НИСа начисляет баллы начальникам НИО за выполнение заданий в срок, удерживает баллы за каждый день превышения срока выполнения задания, за ошибки при заполнении отчетных форм, за консультации по математическим вопросам.

На совещании начальник НИСа и начальники НИО анализируют алгоритмы, представленные разными НИО; окончательно утверждают алгоритм построения линейной регрессионной модели.

Арбитраж штрафует руководителей совещаний за несвоевременность их проведения, за математические ошибки, за ошибки при начислении и удержании баллов.

Начальнику НИСа баллы начисляет арбитраж.

Арбитраж освещает итоги этапа III на стенде „Экран ДИСМ".

Этап IV. Реализация алгоритма. Сотрудники НИГ по производственным данным строят линейные регрессионные модели.

Руководители НИГ подсчитывают информационную и экономическую эффективность моделей.

Повторение процедуры (см. этап III).

На производственных совещаниях НИГ IV этапа руководитель НИГ и его сотрудники обсуждают результаты расчетов, особенности использования алгоритма при построении линейной регрессионной модели по малому числу наблюдений; результаты работы НИГ по реализации алгоритма для обработки производственных данных представляют начальнику НИО.

Повторение процедуры (см. этап II).

На совещании НИО IV этапа начальник НИО и руководители НИГ анализируют особенности применения алгоритма для обработки производственных параметров определенного типа, корректируют алгоритм применительно к изучаемым параметрам; результаты работы НИО представляют начальнику НИСа.

Повторение процедуры (см. этап III).

На производственном совещании НИС IV этапа начальник НИСа и начальники НИО анализируют алгоритмы, представленные разными НИО для изучения производственных параметров определенных типов; утверждают эти алгоритмы.

Повторение процедур (см. этап III) для этапа IV.

Этап V. Заключительный. На совещании НИО V этапа начальник НИО проводит с сотрудниками данного НИО обсуждение разработанных алгоритмов, при этом основное внимание обращается на такие вопросы: случайный характер величин, связанных линейной зависимостью; оценка точности и надежности модели; оценка адекватности модели объекту моделирования, оценка экономической эффективности модели.

На совещании начальник НИСа подводит итоги проделанной работы по разработке общего алгоритма и алгоритмов для конкретных производственных показателей.

Арбитраж подводит итоги в баллах всей деловой игры (для каждого участника игры, для каждой НИО).

Арбитраж определяет лучший НИО, лучшие НИГ и лучших участников игры.

Итоги арбитраж освещает на стенде „Экран ДИСМ".

Арбитраж формирует выводы по проведению деловой игры и рекомендации по ее совершенствованию.

Инструкция арбитражу. Этап I. Разъяснить участникам деловой игры ее структуру и содержание; распределить роли начальника НИСа, начальников НИО, руководителей НИГ.

Выдать начальнику НИСа инструкции для участников игры и шкалы начисления и удержания баллов, шкалу премий и штрафов, числовые массивы исходных данных и тексты заданий по каждому этапу игры; разъяснить участникам ДИ систему начисления и удержания баллов, систему премий и штрафов.

Контролировать своевременность и правильность проведения всех совещаний этапа I.

За нарушение сроков и ошибки оштрафовать.

Этап II. *Процедура А.* Проконтролировать выполнение календарного плана работы данного этапа (за нарушение сроков оштрафовать) и правильность проведения всех совещаний этапа II, за ошибки оштрафовать.

Процедура В. Проконтролировать правильность начисления и удержания баллов, премий и штрафов на данном этапе; за ошибки оштрафовать.

Процедура С. Результаты в баллах данного этапа осветить на стенде „Экран ДИСМ" (отдельно для каждого участника игры, каждой НИГ и каждого НИО).

Этап III. Повторить процедуру *А* (см. этап II).

Проконтролировать правильность проведения всех производственных совещаний этапа III; за ошибки оштрафовать.

Проверить правильность расчетов, выполненных сотрудниками НИСа при построении регрессионных моделей по учебным данным; за ошибки оштрафовать.

Повторить процедуру *В* (см. этап II).

Повторить процедуру *С* (см. этап II).

Этап IV. Повторить процедуру *А* (см. этап II).

Проконтролировать правильность проведения всех совещаний этапа IV; за ошибки оштрафовать.

Проверить правильность расчетов сотрудников НИСа при построении регрессионных моделей по производственным данным; за ошибки оштрафовать.

Повторить процедуру *В* (см. этап II).

Повторить процедуру *С* (см. этап II).

Этап V. Проконтролировать правильность проведения всех совещаний этапа V.

Подвести итоги всей игры в баллах для каждого участника, каждой НИГ, каждого НИО; результаты отразить на стенде „Экран ДИСМ".

Наиболее активным участникам игры начислить персональные премии, отметить лучшие НИГ и лучший НИО.

Подготовить выводы по проведению деловой игры и рекомендации по ее совершенствованию.

Инструкция начальнику НИСа. Этап I. Изучить инструкции с участниками деловой игры.

Изучить систему начисления и удержания баллов, систему премий и штрафов, текст задания этапа II.

Разработать календарный план работы НИСа и провести производственные совещания с начальниками НИО, НИС I этапа.

Принять участие в работе всех совещений НИО I этапа.

Этап II. Изучить рекомендованную литературу.

Разработать алгоритм построения линейной регрессионной модели.

По календарному плану провести производственные совещания НИС, обратить особое внимание на оптимальность по времени алгоритма, на информационную экономическую эффективность модели.

Принять участие в работе совещаний НИО.

Изучить текст задания этапа III.

Этап III. Построить (просчитать) по учебным исходным данным линейную регрессионную модель.

По календарному плану провести производственные совещания НИС, обратить особое внимание на возможности повышения эффективности модели, оптимизацию по времени алгоритма построения модели.

Принять участие в работе совещаний НИО.

Изучить текст задания этапа IV.

Этап IV. Построить (просчитать) по производственным исходным данным линейную регрессионную модель.

По календарному плану провести совещания НИС, обратить основное внимание на особенности применения алгоритма построения модели по малому числу наблюдений.

Принять участие в работе совещаний НИО.

Этап V. По календарному плану провести совещания НИС, обратить внимание участников игры на факторы, благодаря которым получены заданная информация и экономическая эффективность модели, на оптимизацию вычислительного процесса, оптимизацию организации процесса разработки алгоритма построения модели.

Принять участие в работе совещаний НИО.

Проанализировать работу каждого НИО, лучший НИО представить арбитражу для поощрения (поощрения могут выделяться по линии деканата, комсомольской или профсоюзной линии).

Проанализировать работу всех НИГ на основе данных, представленных начальниками НИО; лучшие НИГ представить арбитражу для поощрений.

Проанализировать работу лучших сотрудников НИСа по данным, представленным начальниками НИО; наиболее активных участников игры представить арбитражу для начисления персональных премий.

Инструкция начальнику НИО. Этап I. Изучить инструкции участникам игры, календарный план работы НИСа, систему начисления и удержания баллов, систему премий и штрафов, текст задания этапа II.

Разработать календарный план работы НИО, провести совещание НИО.

Принять участие в работе всех совещаний НИГ.

Этап II. Изучить рекомендованную литературу.

Разработать алгоритм построения линейной регрессионной модели.

По календарному плану провести совещание НИО, обсудить алгоритмы решения проблем 1–5 и алгоритм построения линейной регрессионной модели.

По календарному плану принять участие в работе совещаний НИГ и отчитаться о работе своего НИО на совещании НИС.

Изучить текст задания этапа III.

Этап III. Построить (просчитать) по учебным исходным данным линейную регрессионную модель.

По календарному плану провести совещание НИО, обсудить изменения, вносимые в алгоритм построения модели и направленные на повышение его эффективности и оптимизацию алгоритма по времени; принять участие в работе совещаний НИГ; отчитаться о работе своего НИО на совещании НИС.

Изучить текст задания этапа IV.

Этап IV. Построить (просчитать) по производственным исходным данным линейную регрессионную модель.

По календарному плану провести совещание НИО, проанализировать особенности применения алгоритма построения модели по малому числу наблюдений; принять участие в работе совещаний НИГ; отчитаться о работе своего НИО на совещании НИС.

Этап V. По календарному плану провести совещание НИО, проанализировать проделанную работу, подвести итоги, обращая особое внимание на различия алгоритма для учебных данных и для производственных данных.

Проанализировать работу каждой НИГ своего отдела, лучшую НИГ представить начальнику НИСа для поощрения.

Лучшие работы сотрудников НИГ на основе данных, представленных руководителями НИГ, представить начальнику НИСа для поощрений.

Инструкция руководителю НИГ. Этап I. Изучить инструкции руководителю НИГ и сотрудникам НИГ, календарный план работы НИО, систему начисления и удержания баллов, систему премий и штрафов, текст заданий этапа II.

Разработать календарный план работы НИГ, принять участие в совещании НИО.

Этап II. Изучить рекомендованную литературу. Разработать алгоритм оценки информационной и экономической эффективности модели.

По календарному плану провести совещание НИГ, проанализировать алгоритмы решения проблем 1–5, разработать алгоритм построения линейной регрессионной модели, отчитаться о работе своей НИГ на совещании НИО.

Изучить текст задания этапа III.

Этап III. Подсчитать по учебным исходным данным информационную и экономическую эффективность модели.

По календарному плану провести совещание НИГ, проанализировать результаты расчетов, выяснить, надо ли в алгоритм вносить какие-либо изменения.

По календарному плану отчитаться о работе своей НИГ на совещании НИО.

Изучить текст задания этапа IV.

Этап IV. Подсчитать по производственным исходным данным информационную и экономическую эффективность модели.

По календарному плану провести совещание НИГ, проанализировать результаты расчетов, выяснить, возникают ли особенности при использовании алгоритма для изучения производственных показателей, обсудить возникающие особенности.

Этап V. Проанализировать работу каждого сотрудника НИГ, лучшего сотрудника НИГ представить начальнику НИО для поощрения.

По календарному плану принять участие в совещаниях НИО и НИС.

Инструкция сотруднику НИГ (инженеру, старшему инженеру). Этап I. Изучить инструкцию, систему начисления и удержания баллов, систему премий и штрафов, текст задания этапа II, календарный план работы НИГ.

По календарному плану принять участие в производственном совещании НИГ.

Этап II. Изучить рекомендованную литературу.

Разработать алгоритм решения проблемы (каждый сотрудник решает одну из проблем 1–4).

По календарному плану отчитаться о своей работе на совещании НИГ, принять участие в разработке алгоритма построения линейной регрессионной модели.

Изучить текст задания этапа III.

Этап III. Построить (просчитать) по учебным исходным данным линейную регрессионную модель.

По календарному плану отчитаться о своей работе на совещании НИГ, принять участие в отладке алгоритма.

Изучить текст задания этапа IV.

Этап IV. Построить (просчитать) по производственным данным линейную регрессионную модель.

По календарному плану отчитаться о своей работе на совещании НИГ, принять участие в обсуждении особенностей, возникающих при использовании алгоритма для изучения производственных показателей.

Этап V. По календарному плану принять участие в совещаниях НИО и НИС.

Формы отчетов участников деловой игры на этапе II. Отчеты сотрудников НИГ на этапе II. *Форма 1. Алгоритм выбора и обоснования вида статистической модели:* 1) изложить принципы содержательного анализа исследуемых случайных величин; 2) изложить принципы графического моделирования; 3) изложить алгоритм выбора вида статистической модели; 4) изложить принцип вычисления параметров модели; 5) изложить алгоритм вычисления параметров модели.

Форма 2. Алгоритм расчета числовых характеристик и параметров модели: $m_x \approx \bar{x} = \ldots$; $\sigma_x \approx S_x = \ldots$; $\rho_{xy} \approx r_{xy} = \ldots$; $m_y \approx \bar{y} = \ldots$; $\sigma_y \approx S_y = \ldots$; $\alpha_0 \approx a_0 = \ldots$; $\alpha_1 \approx a_1 = \ldots$.

Привести формулы для вычисления программы на МК БЗ-34; при отсутствии программ предложить методику вычислений и обосновать быстродействие предлагаемого метода.

Форма 3. Алгоритм нахождения закона распределения случайной величины: 1) изложить алгоритм построения графика эмпирической плотности распределения; 2) изложить алгоритм нахождения (формулы для вычислений и методику вычислений) эмпирической плотности распределения; 3) изложить алгоритм нахождения теоретической плотности распределения; 4) изложить алгоритм построения графика теоретической плотности распределения; 5) изложить алгоритмы применения критериев согласия (критерий χ^2 и критерий Колмогорова); 6) обосновать необходимость применения критериев согласия.

Форма 4. Алгоритм оценки точности и надежности регрессионной модели: 1) доверительные границы для m_x; 2) то же, m_y; 3) σ_x; 4) σ_y; 5) ρ_{xy}; 6) доверительная область для линии регрессии (в нормированных переменных); 7) доверительные границы для коэффициентов регрессии α_0, α_1; 8) доверительная область для линии регрессии (в абсолютных переменных). Записать доверительную вероятность и объяснить смысл понятий „доверительный интервал" и „доверительная вероятность".

Форма 5. Алгоритм оценки эффективности модели. Записать формулы для вычислений и методику вычислений: 1) информационного критерия эффективности; 2) экономического критерия эффективности.

Отчет руководителя НИГ на этапе II. *Форма 6. Алгоритмы решения проблем 1–5:*

1. Алгоритм решения проблемы 1.

1.1. . . . .

1.2. . . . .

. . . .

5. Алгоритм решения проблемы 5.

5.1. . . . .

5.2. . . . .

. . . .

Дата Руководитель НИГ Подпись

Отчет начальника НИО на этапе II. *Форма 7. Алгоритм построения линейной регрессионной модели.*

Изложить алгоритм:

1) выбора вида статистической модели; 2) вычисления параметров модели; 3) вычисления $\bar{x}$, $\bar{y}$, S_x, S_y, r_{xy}, a_0, a_1; 4) нахождения эмпирической плотности распределения; 5) построения графика эмпирической функции распределения; 6) нахождения теоретической плотности распределения; 7) построения графика теоретической плот-

ности распределения; 8) применения критериев согласия (критерий χ^2 и критерий Колмогорова); 9) нахождения доверительных границ для m, σ, ρ, α_0, α_1; 10) нахождения доверительной области для линии регрессии в нормированных переменных и в абсолютных переменных; 11) нахождения информационного критерия эффективности модели; 12) нахождения экономического критерия эффективности модели.

Дата Начальник НИО Подпись

Тексты заданий участникам ДИСМ

Этап I

Задание сотрудникам НИГ (I – С – НИГ). С целью разработки алгоритма построения статистической модели изучить по учебным и методическим пособиям следующие вопросы: предварительная обработка статистических данных; нахождение эмпирического и теоретического законов распределения; критерии согласия, их проверка; точечные и интервальные оценки числовых характеристик случайных величин; регрессия, линейная регрессия.

Задание руководителю НИГ (I – Р – НИГ): 1) обеспечить выполнение задания всеми сотрудниками НИГ; 2) выполнить задание I – С – НИГ; 3) изучить основные понятия теории информации; 4) изучить информационные подходы к оценке эффективности статистических моделей; 5) изучить возможности оценки экономической эффективности статистических моделей.

Задание начальнику НИО (I – НИО): 1) обеспечить выполнение задания I – Р – НИГ всеми руководителями НИГ; 2) выполнить пп. 2–5 задания I – Р – НИГ; 3) выделить основные математические проблемы, которые необходимо решить в процессе разработки алгоритма построения статистической модели; 4) для каждой проблемы выделить основные подпроблемы.

Задание начальнику НИСа (I – НИС): 1) обеспечить выполнение задания I – НИО всеми начальниками НИО; 2) выполнить пп. 2–4 задания I – НИО.

Этап II

Задание сотрудникам НИГ (II – С – НИГ). Решить одну из следующих проблем: разработать алгоритм выбора и обоснования вида статистической модели (проблема 1); разработать алгоритм вычисления параметров модели, оптимизировать его по времени (проблема 2); разработать алгоритм нахождения закона распределения случайной величины (проблема 3); разработать алгоритм оценки точности и надежности статистической модели (проблема 4).

Задание руководителю НИГ (II – Р – НИГ): 1) обеспечить выполнение задания II – С – НИГ всеми сотрудниками НИГ; 2) разработать алгоритм оценки информационной и экономической статистической модели (проблема 5); 3) на основе алгоритмов решения проблем 1–5 разработать алгоритм построения линейной регрессионной модели.

Задание начальнику НИО (II – НИО): 1) обеспечить выполнение задания II – Р – НИГ всеми руководителями НИГ; 2) решить проблемы 1–5 из заданий II – С – НИГ и II – Р – НИГ; 3) разработать блок-схему алгоритма и сам алгоритм построения линейной регрессионной модели.

Задание начальнику НИСа (II – НИС): 1) обеспечить выполнение задания II – НИО всеми начальниками НИО; 2) выполнить пп. 2, 3 задания II – НИО.

Этап III

Задание сотрудникам НИГ (III – С – НИГ): 1) просчитать по учебным исходным данным параметры линейной регрессионной модели; 2) оценить точность и надежность модели; 3) оценить информационную и экономическую эффективность модели; 4) определить быстродействие алгоритма.

Задание руководителю НИГ (III – Р – НИГ): 1) обеспечить выполнение задания III – С – НИГ всеми сотрудниками НИГ; 2) выполнить задание III – С – НИГ; 3) проанализировать алгоритм и сформулировать предложения по его улучшению.

Задание начальнику НИО (III – НИО): 1) обеспечить выполнение задания III – Р – НИГ всеми руководителями НИГ; 2) проанализировать результаты работы НИГ, их предложения по улучшению алгоритма; 3) выработать и сформулировать предложения НИО по улучшению алгоритма.

Задание начальнику НИСа (III – НИС): 1) обеспечить выполнение задания III – НИО всеми начальниками НИО; 2) проанализировать предложения НИО по улучшению алгоритма; 3) окончательно сформулировать отлаженный алгоритм.

Этап IV

Задание сотрудникам НИГ (IV – С – НИГ): 1) просчитать по производственным исходным данным линейную регрессионную модель; 2) оценить точность и надежность модели; 3) оценить информационную и экономическую эффективность модели.

Задание руководителю НИГ (IV – Р – НИГ): 1) обеспечить выполнение задания IV – С – НИГ всеми сотрудниками НИГ; 2) выполнить задание IV – С – НИГ; 3) проанализировать алгоритм применительно к изучению производственных показателей; 4) сформулировать предложения по улучшению алгоритма применительно к изучению производственных показателей данного типа.

Задание начальнику НИО (IV – НИО): 1) обеспечить выполнение задания IV – Р – НИГ всеми руководителями НИГ; 2) проанализировать результаты работы всех НИГ, их предложения по улучшению алгоритма; 3) выработать и сформулировать предложения по улучшению алгоритма применительно к изучению производственных показателей данного типа.

Задание начальнику НИСа (IV – НИС): 1) обеспечить выполнение задания IV – НИО всеми начальниками НИО; 2) проанализировать результаты работы всех НИО, их предложения по улучшению алгоритма; 3) выработать и окончательно сформулировать улучшенные алгоритмы построения линейной регрессионной модели применительно к производственным показателям разных типов.

Производственные совещания. Производственные совещания начальника НИСа с начальниками НИО.

Этап I. Выдать начальникам НИО инструкции для участников деловой игры, шкалы начисления и удержания баллов, шкалы премий, штрафов. Сообщить начальникам НИО календарный план работы НИСа. Обсудить с начальниками НИО календарный план работы каждого НИО. Выдать начальникам НИО текст задания I – НИО, обсудить его; выделить основные проблемы, которые необходимо решить в ходе выполнения этого задания: разработать алгоритмы выбора и обоснования вида модели; разработать и оптимизировать по времени алгоритм расчета параметров модели; разработать алгоритм нахождения закона распределения случайной величины; разработать алгоритм оценки точности и надежности параметров модели; разработать алгоритм оценки эффективности модели. Выдать начальникам НИО текст задания II – НИО.

Этап II. Для каждого НИО рассмотреть его отчет по этапу II, утвердить или отклонить отчет. Проанализировать совместно с начальниками НИО представленные алгоритмы построения регрессионной модели. Обсудить быстродействие алгоритмов, их информационную и экономическую эффективность. Утвердить алгоритм построения линейной регрессионной модели, наиболее подходящей по быстродействию, информационной и экономической эффективности. При необходимости проконсультировать начальников НИО по математическим вопросам деловой игры. Начислить баллы начальникам НИО по этапу II. Выдать начальникам НИО текст задания III – НИО и числовые массивы исходных данных для сотрудников НИГ.

Этап III. Для каждого НИО рассмотреть его отчет по этапу III, утвердить или отклонить отчет. Проанализировать совместно с начальниками НИО результаты расчетов при отладке алгоритма. Внести в алгоритм необходимые изменения, утвердить отлаженный алгоритм. При необходимости проконсультировать начальников НИО по математическим вопросам деловой игры. Начислить баллы начальникам НИО по этапу III. Выдать начальникам НИО текст задания IV – НИО и числовые массивы исходных данных для сотрудников НИГ.

Этап IV. Для каждого НИО рассмотреть его отчет по этапу IV, утвердить или отклонить его. Проанализировать совместно с начальниками НИО особенности применения алгоритма построения линейной регрессионной модели при изучении конкретных производственных показателей. При необходимости проконсультировать начальников НИО по математическим вопросам деловой игры. Начислить баллы начальникам НИО по этапу IV.

Этап V. Начальник НИСа организует обсуждение со всеми сотрудниками НИСа разработанного алгоритма построения линейной регрессионной модели и модификаций этого алгоритма для изучения конкретных производственных показателей. Затем подводит итоги проделанной работы, отмечает лучший НИО, лучшую НИГ, наиболее активных сотрудников НИСа. (Производственные совещания начальник НИСа проводит со всеми сотрудниками НИСа.)

Производственные совещания начальника НИО с руководителями НИГ данного НИО.

Этап I. Выдать руководителям НИГ инструкции для участников деловой игры, шкалы начисления и удержания баллов, шкалы премий и штрафов. Сообщить руководителям НИГ календарный план работы НИО. Обсудить с руководителями НИГ календарный план работы каждой НИГ. Выдать руководителям НИГ текст задания I–Р–НИГ, обсудить его и возможные пути решения основных проблем; разработать алгоритм выбора и обоснования вида модели; разработать и оптимизировать по времени алгоритм расчета параметров модели; разработать алгоритм нахождения закона распределения случайной величины; разработать алгоритм оценки точности и надежности параметров модели; разработать алгоритм оценки эффективности модели. Выдать руководителям НИГ текст задания П–Р–НИГ.

Этап II. Рассмотреть отчет каждой НИГ по этапу II, утвердить или отклонить его. Совместно с руководителями НИГ проанализировать разработанные разными НИГ алгоритмы построения линейной регрессионной модели. Обсудить быстродействие алгоритма построения линейной регрессионной модели, его информационную и экономическую эффективность. На основе алгоритмов, построенных разными НИГ, разработать и утвердить алгоритмы построения линейной регрессионной модели данного НИО.

Процедура К: при необходимости проконсультировать руководителей НИГ по математическим вопросам деловой игры.

Процедура Б: начислить баллы руководителям НИГ по этапу II.

Выдать руководителям НИГ текст задания III–НИГ и числовые массивы исходных данных.

Этап III. Рассмотреть отчет каждой НИГ по этапу III, утвердить или отклонить его. Совместно с руководителями НИГ проанализировать результаты расчетов при отладке алгоритма. Внести в алгоритм необходимые изменения, утвердить отлаженный алгоритм построения линейной регрессионной модели, разработанный в данном НИО. Повторить процедуру *К*. Повторить процедуру *Б* для этапа III. Выдать руководителям НИГ текст задания IV–НИГ и числовые массивы исходных данных.

Этап IV. Рассмотреть отчет каждой НИГ по этапу IV, утвердить или отклонить его. Совместно с руководителями НИГ проанализировать особенности применения алгоритма построения линейной регрессионной модели при изучении конкретных производственных показателей. Повторить процедуру *К*. Повторить процедуру *Б* для этапа IV.

Этап V. Совместно с сотрудниками данного НИО обсудить разработанный алгоритм построения линейной регрессионной модели; обратить внимание на быстродействие алгоритма, на оптимизацию его по времени; проанализировать информационную и экономическую эффективность модели; обратить внимание на особенности применения этого алгоритма при изучении конкретных производственных показателей.

Подвести итоги проделанной работы для данного НИО, отметить лучшую НИГ в данном НИО, наиболее активных сотрудников НИО. (Производственные совещания начальник НИО проводит со всеми сотрудниками данного НИО.)

Производственные совещания руководителя НИГ с сотрудниками данной НИГ.

Этап I. Выдать сотрудникам НИГ инструкции. Ознакомить их со шкалами начисления и удержания баллов, шкалами премий и штрафов. Сообщить им календарный план работы НИГ. Выдать сотрудникам НИГ текст задания I–С–НИГ, распределить проблемы 1–4. Обсудить с сотрудниками НИГ возможные пути решения проблем 1–5. Выдать сотрудникам НИГ текст задания II–С–НИГ.

Этап II. Рассмотреть отчет каждого сотрудника НИГ по этапу II, утвердить или отклонить его. Совместно с сотрудниками НИГ: проанализировать разработанные алгоритмы решения проблем 1–5; разработать алгоритм построения линейной регрессионной модели на основе алгоритмов решения проблем 1–5; проанализировать быстродействие алгоритма, его информационную и экономическую эффективность.

Процедура К: при необходимости проконсультировать сотрудников НИГ по математическим вопросам деловой игры.

Процедура Б: начислить баллы сотрудникам НИГ по этапу II.

Выдать сотрудникам НИГ текст задания III–НИГ и числовые массивы исходных данных.

Этап III. Рассмотреть отчет каждого сотрудника НИГ по этапу III, утвердить или отклонить его. Совместно с сотрудниками НИГ проанализировать результаты расчетов при отладке алгоритма, внести в алгоритм необходимые изменения. Утвердить отлаженный алгоритм. Повторить процедуру *К*. Повторить процедуру *Б* для этапа III. Выдать сотрудникам НИГ задание IV–НИГ и числовые массивы исходных данных.

Этап IV. Рассмотреть отчет каждого сотрудника НИГ по этапу IV, утвердить или отклонить его. Совместно с сотрудниками НИГ проанализировать особенности применения алгоритма построения линейной регрессионной модели при изучении производственных показателей. Повторить процедуру *К*. Повторить процедуру *Б* для этапа IV. (При наличии отклоненных отчетов соответствующие производственные совещания проводят повторно.)

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Автоматизированные* учебные курсы и пути повышения их эффективности // Экспресс-информ. Вып. 8. – М.: Изд-во НИИ ВШ, 1984. – 32 с.
2. *Александров Г. Н.* Компьютер в структуре педагогической деятельности преподавателя // Вопр. психологии. – 1986. – № 5. – С. 77–78.
3. *Балл Г. О.* У світі задач // Нове в науці, техніці, виробництві. Сер. 8. – К.: Знання, 1986. – № 20. – 46 с.
4. *Вергасов В. М.* Активизация познавательной деятельности студентов в высшей школе. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Выща шк. Головное изд-во, 1985. – 176 с.
5. *Вопросы* кибернетики: Логика рассуждений и ее моделирование / Под ред. Д. А. Поспелова. Науч. совет АН СССР по комплекс. пробл. „Кибернетика". – М., 1983. – 180 с.
6. *Гергей Г., Машбиц Е. И.* Психолого-педагогические проблемы эффективного применения компьютера в учебном процессе // Вопр. психологии. – 1985. – № 3. – С. 41–49.
7. *Глушков В. М.* Основы безбумажной информатики. – 2-е изд.,испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 552 с.
8. *Гурова Л. Л.* Психологический анализ решения задач. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
9. *Дановски П. И., Панков И. П., Довгяло А. М.* и др. Автоматизированные обучающие системы на базе СПОК // Совр. высш. шк. – 1983. – 1 (41). – С. 171–178.
10. *Диалоговая* система коллективного доступа PRIMUS / В. В. Васильков, В. М. Иванов, В. В. Еломонова, П. В. Ченкасов. – МИФИ. – 1980. – 25 с. – (Информ. бюл. ВНТИЦ „Алгоритмы и программы". – 1982. – Вып. 1. рег. № ГФАП – П005027).
11. *Дончак И. Д., Мирошниченко Н. И., Олейник В. П.* Опыт разработки и внедрения системы контроля качества подготовки специалистов // Экспресс-информ. – М.: Изд-во НИИ ВШ, 1984. – Вып. 8. – С. 44.
12. *Дьяконов В. П.* Справочник по расчетам на микрокалькуляторах. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
13. *Каган В. И., Сычеников Н. А.* Основы оптимизации процесса обучения в высшей школе. Единая методическая система института: теория и практика: Науч.-метод. пособие. – М.: Высш. шк., 1987. – 143 с.
14. *Комкова В. Н.* О моделях выбора рациональных режимов обучения // Упр. системы и машины. – 1985. – № 3. – С. 20–22.
15. *Кузьмин И. В.* Классификация задач, оценка эффективности и качества человеко-машинных систем // Информ. и моделирующие системы в электроэнергетике: Сб. науч. тр. – К.: Наук. думка, 1980. – С. 3–6.
16. *Лавров С. С.* Методологические и психологические вопросы аналоговых систем // Вестн. Моск. ун-та. – Сер. 14: Психология. – 1984. – № 2. – С. 11–12.
17. *Лобанов Ю. И., Селиванов А. Д., Съедин В. В., Токарева В. С.* Методы и средства управления процессом обучения в АОС / Под ред. В. А. Новикова // Экспресс-информ. – М.: Изд-во НИИ ВШ, 1985. – Вып. 9. – 52 с.
18. *Ляудис В. Я., Тихомиров О. К.* Психология и практика автоматизированного обучения // Вопр. психологии. – 1983. – № 6. – С. 16–27.

19. *Махмутов М. Н.* Проблемное обучение: Основные вопросы теории. – М.: Педагогика, 1975. – 208 с.
20. *Машбиц Е. И.* Компьютеризация обучения: Проблемы и перспективы. – М.: Знание, 1986. – 80 с.
21. *Методические* рекомендации к применению микрокалькулятора „Электроника-БЗ-34" для синтеза математических моделей параметров сложных систем для студентов всех специальностей всех форм обучения и специалистов по стратегическому управлению и надежности / Сост.: Ю. Ф. Панов, М. Р. Вальдман, Л. И. Горбенко и др. – Винница, 1985. – 70 с.
22. *Методические* указания по использованию видеотерминалов ЕС-7906 в учебном процессе для студентов всех специальностей / Сост.: А. П. Олоничев, В. Н. Подзе, В. И. Шолохов. – Винница, 1983. – 24 с.
23. *Методические* указания по применению телевидения в учебном процессе / Сост.: А. Г. Бунтарь, А. В. Хрущак, Б. П. Зель. – Винница, 1984. – 48 с.
24. *Методические* указания по проведению деловой игры „Статистическое моделирование сложных систем" для студентов всех специальностей / Сост.: И. В. Кузьмин, М. Е. Иванов, М. Р. Вальдман и др. – Винница, 1985. – 56 с.
25. *Методические* указания по проведению занятий в дисплейном классе для студентов всех специальностей / Сост.: В. В. Чуркин, О. И. Дюрбург, Ю. А. Абрамо. – К., 1981. – 48 с.
26. *Обучающие* машины, системы и комплексы: Справ. / Под ред. А. Я. Савельева. – К.: Выща шк. Головное изд-во, 1986. – 303 с.
27. *Одегова В. В.* Учебный процесс и ЭВМ (Дидактические проблемы управления). – Львов: Выща шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1988. – 176 с.
28. *Организация* и проведение учебных занятий в дисплейном классе (инструкция) / Киев. политехн. ин-т. – К., 1986. – 16 с.
29. *Программа* курса „Высшая математика для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений (510 учебных часов)". – М.: Высш. шк., 1984. – 45 с.
30. *Растригин Л. А., Эренштейн М. Х.* Адаптивная система обучения с адаптируемой моделью обучаемого // Кибернетика. – 1984. – № 1. – С. 28–32.
31. *Романов Г. М., Туркина Н. В., Колпащиков Л. С.* Человек и дисплей. – М.; Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1986. – 256 с.
32. *Савельев А. Я., Новиков В. А., Лобанов Ю. И.* Подготовка информации для автоматизированных обучающих систем: Метод. пособие для преподавателей и студентов вузов / Под ред. А. Я. Савельева. – М.: Высш. шк., 1986. – 176 с.
33. *Свиридов А. П.* Основы статистической теории обучения и контроля знаний. – М.: Высш. шк., 1981. – 262 с.
34. *Строкалева Л. В., Пискунов М. У., Тихонов И. И.* Организация учебного процеса с помощью АОС. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1986. – 93 с.
35. *Талызина М. Ф.* Управление процессом усвоения знаний. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 344 с.
36. *Талызина Н. Ф.* Методика составления обучающих программ. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. – 47 с.
37. *Тихомиров О. К.* Психологическая структура диалога „человек – ЭВМ" // Вестн. Моск. ун-та. – Сер. 14: Психология. – 1984. – № 2. – С. 12–14.
38. *Шапиро С. И.* Мышление человека и переработка информации ЭВМ. – М.: Сов. радио, 1980. – 288 с.
39. *Эшли Р., Фернандес Д.* Язык управления заданиями / Пер. с англ. Т. Н. Михайловой – М.: Мир, 1981. – 1973 с.
40. *Янушкевич Ф.* Технология сбучения в системе высшего образования / Пер. с пол. О. В. Долженко. – М.: Высш. шк., 1986. – 135 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Кузьмин Иван Васильевич
Панов Юрий Федорович
Иванов Михаил Евгеньевич
Вальдман Михаил Рувимович
Гарник Валентина Антоновна
Клочко Виталий Иванович
Клочко Надежда Алексеевна
Герасименко Валентина Васильевна

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ ОБУЧАЮЩИЕ КОМПЛЕКСЫ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Переплет художника *В. С. Жиборовского*
Художественный редактор *С. П. Духленко*
Технический редактор *А. А. Коркишко*
Корректор *Н. С. Королева*
Оператор *О. П. Россина*

ИБ № 14865

Подписано в печать 11.12.90. Формат 84 X 108 $^1/_{32}$. Бумага офсетная № 2. Гарнитура Цюрих. Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,29. Усл. кр.-отт. 10,29. Уч.-изд. л. 13,30. Тираж 650 экз. Изд. № 8368. Заказ № 1-580 Цена 75 к.

Издательство „Выща школа", 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7

Напечатано с оригинала-макета, подготовленного в издательстве „Выща школа", в Киевской книжной типографии научной книги, 252004, Киев-4, ул. Репина, 4