СУЧАСНИЙ УНІВЕРСИТЕТСЬКИЙ
ПІДРУЧНИК

О. І. ЛИСЕНКО
О. М. ТАЧИНІНА
І. В. АЛЄКСЄЄВА

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ

Частина 1

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

О. І. Лисенко, О. М. Тачиніна,
І. В. Алєксєєва

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ

Частина 1
МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Підручник

Київ 2017

УДК 519.85 (075.8) + 519.87
ББК В 190я 7
Л 631

Рецензенти:

О. В. Барабаш — д-р техн. наук, проф.
(Державний університет телекомунікацій);

В. Б. Кисельов — д-р техн. наук, проф.
(Академія муніципального управління);

А. М. Сильвестров — д-р техн. наук, проф.
(Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»)

Рекомендовано вченою радою Національного авіаційного університету (протокол № 5 від 22.06.2016 р.).

Лисенко О. І.

Л 631 Математичні методи моделювання та оптимізації. Ч. 1. Математичне програмування та дослідження операцій: підручник / О. І. Лисенко, О. М. Тачиніна, І. В. Алєксеєва; за заг. ред. О. І. Лисенка. — К. : НАУ, 2017. — 212 с.

ISBN 978-966-932-063-6

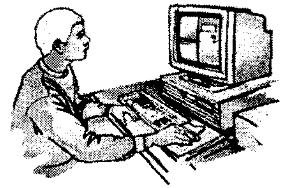
У підручнику викладено основні положення теорії детермінованого лінійного та нелінійного програмування; розглянуто методи числового пошуку екстремумів опуклих функцій на опуклих множинах, методи параметричного та цілочислового програмування, подано визначення основних понять теорії дослідження операцій в обсязі, достатньому для застосування набутих базових знань, умінь та навичок для практичного використання математичних моделей детермінованих явищ, які мають місце в авіаційному та трубопровідному транспорті.

Для студентів спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» спеціалізації «Автоматика та автоматизація на транспорті (за видами транспорту)».

УДК 519.85 (075.8)
ББК В 190я 7

ISBN 978-966-932-063-6

ВСТУП



Рішення складних наукових та науково-прикладних (технічних) завдань значно спрощується при моделюванні, тобто заміщенні одних об'єктів іншими, що забезпечують збереження найбільш істотних властивостей і особливостей заміщуваних об'єктів. Моделювання є потужним засобом аналізу і синтезу складних об'єктів, процесів та явищ. У сучасних умовах математичне моделювання найширше застосовується в багатьох галузях науки і техніки, зокрема під час дослідження явищ, які мають місце в авіаційному та трубопровідному транспорті. З його допомогою вдається знаходити як найкращі (екстремальні), так і прийнятні рішення. Математичні методи моделювання та оптимізації є фундаментом наукової підготовки студентів за спеціальністю «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології».

Цей підручник дасть змогу студентам якісніше засвоїти матеріал навчальної дисципліни «Математичні методи моделювання та оптимізації», а також забезпечить успішне вивчення таких дисциплін, як «Автоматизація управління ресурсами», «Робототехнічні системи та комплекси», «Системний аналіз автоматизованих організаційно-технічних систем», «Імітаційне моделювання складних систем», «Обчислювальні комплекси, системи та мережі».

У підручнику матеріал викладений відповідно до навчальної програми й охоплює такі питання: елементи теорії детермінованого лінійного та нелінійного програмування; методи числового пошуку екстремумів опуклих функцій на опуклих множинах; методи параметричного та цілочислового програмування; термінологія та визначення основних понять, символічні позначення основних операцій та їх змісту, що використовуються в теорії математичного програмування, теорії прийняття рішень, теорії ігор, теорії управління запасами і при імітаційному моделюванні в обсязі, достатньому для застосування базових знань, умінь та навичок з основ побудови, ідентифікації і практичного використання математичних моделей детермінованих явищ.

Розділи підручника є логічно завершеними, відносно самостійними, цілісними частинами навчальної дисципліни, засвоєння яких передбачає вивчення теоретичного матеріалу, відповіді на контрольні питання, виконання модульної контрольної роботи та аналіз її результатів.

Підручник допоможе студентам опанувати:

– термінологію, визначення, основні поняття, що використовуються в детермінованих умовах, символічне позначення основних операцій та їх зміст;

– постановки задач математичного програмування, критерії та методи технічної та економічної оптимізації складних систем, найбільш поширених в авіаційному та трубопровідному транспорті;

– числові методи в задачах лінійного та нелінійного програмування та прикладні практичні навички фізичної інтерпретації результатів обчислювальних експериментів та їх візуалізації;

– інформаційні технології розв'язання класичних задач лінійного, нелінійного, дискретного (зокрема і цілочислового) програмування та дослідження операцій;

– прийоми формалізації задач структурно-функціонального аналізу, загальної стратегії їх розв'язання та системної оптимізації складних конструктивних елементів в авіаційному та трубопровідному транспорті.

У результаті вивчення викладеного у підручнику матеріалу студенти навчаться:

– виконувати аналітичні дослідження та комп'ютерне математичне моделювання складних систем та комплексів, а також їх окремих компонентів в авіаційному та трубопровідному транспорті;

– програмувати математичні моделі складних систем та комплексів в авіаційному та трубопровідному транспорті, а також їх окремі компоненти з використанням програмного забезпечення системи комп'ютерної математики MATLAB.

Матеріал підручника розподілено між авторами так:

О. І. Лисенко — д-р техн. наук, проф. — вступ, розд. 1 (спільно з І. В. Алєксеєвою), розд. 10, 11 (спільно з О. М. Тачиніною); 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18;

О. М. Тачиніна — канд. техн. наук, доц. — розд. 7, 8, 9 (спільно з І. В. Алєксеєвою), розд. 10, 11 (спільно з О. І. Лисенком);

І. В. Алєксеєва — канд. фіз.-мат. наук, доц. — розд. 1 (спільно з О. І. Лисенком), розд. 7, 8, 9 (спільно з О. М. Тачиніною), розд. 2, 3, 4, 5, 6.

Розділ 1

ЗАГАЛЬНА МЕТОДОЛОГІЯ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

1.1. Основні поняття та означення. Ефективність операцій

Означення 1.1 *Операція* — будь-яка дія або система дій, об'єднаних єдиним задумом і спрямованих на досягнення певної мети.

Означення 1.2 Конкретну реалізацію послідовності дій у просторі й часі називають *сценарієм операції.*

Означення 1.3 Під *дослідженням операцій в автоматизованих системах на транспорті* розуміють застосування математичних методів для кількісного обґрунтування рішень стосовно розвитку автоматизованих комп'ютерно-інтегрованих технологій та підвищення ефективності їх використання.

Приклади дослідження операцій в автоматизованих системах на транспорті:

- система заходів щодо підвищення надійності автоматизованих систем на транспорті та технічних засобів автоматизації;
- система заходів зниження інформаційних ризиків (пошкодження інформації, знищення інформації, несанкціонований доступ до конфіденційної інформації);
- розміщення автоматизованих робочих місць;
- розміщення замовлень на виготовлення та технічних засобів автоматизації;
- створення системи гарантійного обслуговування автоматизованих систем на транспорті;
- оптимізація параметрів та структури автоматизованих систем на транспорті.

Означення 1.4	Характеристики дій (фактори операцій), які неможливо змінювати в умовах операцій, вважають *параметрами операцій.*
Означення 1.5	Характеристики дій, унаслідок змінювання яких виявляється позитивний результат, називають *змінними* або *керувальними параметрами.*

Отже, операціями завжди можна керувати. Будь-який вибір залежно від дослідника керувальних параметрів має назву розв'язок (рішення, план операції чи стратегія).

Розв'язки можуть бути такими, що задовольняють чи не задовольняють технічні та (або) економічні, та (або) екологічні, та (або) соціальні обмеження, і їх відповідно називають *допустимими* або *недопустимими.* Зрозуміло, що останніми нехтують, а серед перших обирають оптимальні, тобто ті, які у певному розумінні мають перевагу над іншими.

Основна задача дослідження операцій — попереднє кількісне обґрунтування оптимальних рішень. Під прийняттям рішення в технічних системах розуміють остаточне затвердження всіх дій, які входять до складу операції на основі запропонованого оптимального розв'язку та з урахуванням додаткової інформації. Існує поняття «особа, що приймає рішення» (ОПР).

Особа, що приймає рішення — це фізична особа або колектив фахівців. Для прийняття рішення ОПР використовує спеціальні методи й методики. Методи дослідження операцій є теоретичною основою процесу підготовки та прийняття рішення. Поряд з основною задачею (обґрунтування оптимальних розв'язків) під час дослідження операцій виконують додаткові задачі:

1) порівняльний аналіз різних варіантів організації операцій;

2) оцінювання впливу на результат операцій різних змін параметрів операцій;

3) дослідження операцій для виявлення критичних елементів (критичних параметрів операцій), тобто таких складових операцій, порушення запланованого функціонування яких призводить до істотного погіршення остаточних результатів операцій.

Допоміжні задачі набувають особливого значення, коли дану операцію необхідно розглядати не ізольовано, а як елемент цілісної системи операцій. Дослідження цілісної системи операцій ґрунтується на так званому системному підході, який потребує комплексного врахування взаємної залежності та обумовленості складових елементів системи операцій. Для отримання раціональних рішень потрібно вміло використовувати як прийоми агрегування, тобто об'єднання кількох операцій, так і їх декомпозиції, тобто розбиття на окремі складові.

Припустімо, що нам вдалося виділити окрему операцію. Метою операції є отримання її найбільшої ефективності. Під ефективністю операції розуміють ступінь її налаштованості на виконання поставленої задачі. Що краще організована операція, то вона ефективніша.

Означення 1.6 *Критерієм оцінювання* або *показником ефективності,* або *цільовою функцією W* називається функція фізичної величини чи сукупності фізичних величин, обчислення або вимірювання яких дозволяє кількісно оцінити результат виконання операції.

Порівнюючи показники ефективності для різного складу дій, потрібно обрати найкращий спосіб для організації операції. Показник ефективності може бути заданий аналітично, алгоритмічно або його можна вимірювати. Конкретний вигляд показника ефективності, яким слід користуватися при числовій оцінці ефективності, залежить від спеціальних властивостей конкретної операції, її цільової спрямованості, а також від задачі дослідження. Ця задача може бути поставлена в різних формах: детермінованій або з урахуванням елементів невизначеності.

1.2. Математичні моделі операцій

1.2.1. Загальні відомості про математичні моделі операцій

Загальних способів побудови математичних моделей операцій не існує. У кожному випадку модель будують виходячи із цільової спрямованості операцій і задачі наукового дослідження з урахуванням необхідної точності рішення, а також з точністю, з якою відомі вихідні дані. Під час побудови математичної моделі спрощуване явище (у даному випадку операція) схематизується. Із безлічі факторів, що впливають на явище, виокремлюють порівняно невелику кількість найважливіших, а потім отриману схему опису явища подають у найбільш відповідних для неї математичних термінах (із використанням відповідного математичного апарату). У результаті встановлюються кількісні зв'язки між умовами операції, її параметрами та результатом операції, який оцінюється показником ефективності або сукупністю показників, якщо їх в даній задачі кілька.

Побудова математичної моделі — це мистецтво, яке вдосконалюється з досвідом. У складних випадках, коли немає єдиного рішення щодо математичної моделі операції, використовується так званий прийом конкуренції моделей. Тобто, одне й те саме явище досліджується з використанням кількох математичних моделей. Після порівняння результатів теоретичних досліджень з експериментальними даними обирається найкраща за критерієм мінімального відхилення від експериментальних даних модель.

Для складних задач дослідження операцій характерною особливістю є корекція математичної моделі після кожного циклу дослідження. Побудова математичної моделі — найбільш важлива і відповідальна частина дослідження, яка потребує як глибоких математичних знань, так і знань предметної галузі, тобто суті модельованого явища. Математичні моделі, які використовуються в задачах дослідження операцій, можна поділити на два класи: 1) аналітичні; 2) алгоритмічні.

Перші встановлюють формульні (аналітичні) залежності між показником ефективності, змінними і параметрами задачі. Зазвичай ці залежності записують у вигляді рівнянь або нерівностей: алгебричних, звичайних диференціальних або із частковими похідними. За допомогою аналітичних моделей вдається із задовільною точністю описати лише прості операції, де кількість елементів, що взаємодіють, порівняно невелика.

В операціях значного масштабу, де взаємодіють багато елементів, що перебувають під дією випадкових факторів, доцільно застосовувати алгоритмічні математичні моделі, які дозволяють виконувати імітаційне моделювання операцій.

Суть цього моделювання полягає в тому, що процес розвитку операції імітується на комп'ютері з усіма випадковостями, які цю операцію супроводжують.

Найкращі результати дослідження операцій можна отримати у разі сумісного застосування аналітичних та імітаційних моделей: проста аналітична модель дозволяє визначити основні закономірності явища, з'ясувати напрям його розвитку.

Подальше уточнення кількісних значень показника ефективності операції можливо досягти імітаційним моделюванням.

1.2.2. Детерміновані аналітичні моделі операцій

Розглянемо задачу дослідження операції в загальній постановці, тобто без урахування специфічних властивостей конкретної операції та її цілей. Припустімо, що необхідно виконати певну операцію, тобто керований захід, на остаточний результат якого можна вплинути, обираючи змінні характеристики цієї операції $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ефективність операції оцінюється за допомогою числового показника W. Оптимальним розв'язком задачі вважають ті значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$, за яких W досягає глобального максимуму. У літературі позначають:

$$M = \sup_{X \in G} W,$$

де $X = [x_1, \ldots, x_n]^T$; G — область допустимих розв'язків (ОДР).

У тому випадку, коли необхідно досягти глобального мінімуму:

$$m = \inf_{X \in G} W.$$

Цю задачу можливо переформулювати в задачу пошуку глобального максимуму, розглядаючи замість показника ефективності W показник ефективності — W.

Якщо математична модель побудована, то це означає:

1) відомо фактори операції $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, на які дослідники впливати не можуть;

2) визначено фізичний зміст і математичну формалізацію факторів операції $x_1, x_2, \ldots, x_n$, на які дослідники можуть впливати;

3) визначено спосіб отримання числового значення показника ефективності операції W, яке буде залежати від $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ та $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

4) з'ясовано ОДР G, тобто умови обмежень, що діють у даній операції

$$F_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)\{\le 0, = 0, \ge 0\} \qquad j = \overline{1, q}.$$

Загальна детермінована постановка задачі дослідження операції формулюється так: за заданих умов (4) знайти такі розв'язки (2), за яких показник ефективності (3) досягає глобального максимуму.

Специфічним для детермінованої задачі дослідження операції, порівняно із задачами пошуку екстремумів гладкої функції (допускається існування похідних та частинних мішаних похідних високих порядків), є наявність обмежень-нерівностей та недиференційованість у деяких випадках показника ефективності за елементами розв'язку $x_1, x_2, ..., x_n$.

Загальних математичних методів знаходження екстремумів функцій за наявності довільних обмежень немає. Однак, коли показники ефективності та обмеження мають специфічні властивості, існують спеціальні методи розв'язання таких задач. Якщо показник ефективності W залежить від $x_1, x_2, ..., x_n$ лінійно й обмеження (4) мають вигляд лінійних алгебричних рівнянь або нерівностей, то глобальний максимум W знаходимо з використанням спеціального математичного апарату, який називається *лінійним програмуванням*. Якщо обмеження (4) та показник ефективності W мають інші властивості (наприклад, опуклі, сепарабельні, квадратичні), то застосовується математичний апарат *опуклого або сепарабельного, або квадратичного програмування*. Якщо операція (за фізичним змістом) розділяється на декілька кроків чи станів, а показник ефективності W дорівнює сумі показників W_k, досягнутих на окремих етапах виконання операції, то для пошуку оптимального рішення можливо застосовувати метод *динамічного програмування*.

Зауваження 1.1

1. Для розв'язання задачі пошуку екстремуму показника ефективності W зазвичай використовують числові методи, які попередньо перевіряють (тестують) під час розв'язання задач пошуку екстремумів функцій зі спеціальними властивостями (наприклад, функції Розенброка, рис. 1.1). Ці функції дають змогу з'ясувати досконалість числових методів з погляду уникнення зациклювань та спроможності обходити так звані «складки» та точки стаціонарності.
2. Показник ефективності може мати на ОДР G декілька локальних екстремумів (рис. 1.2).

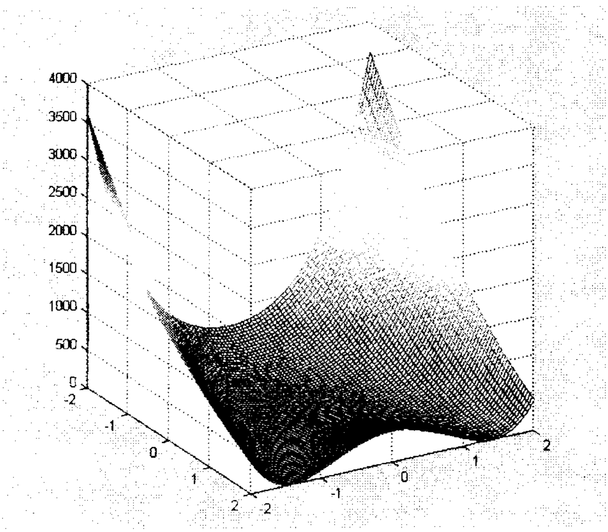


Рис. 1.1. Графічне зображення функції Розенброка

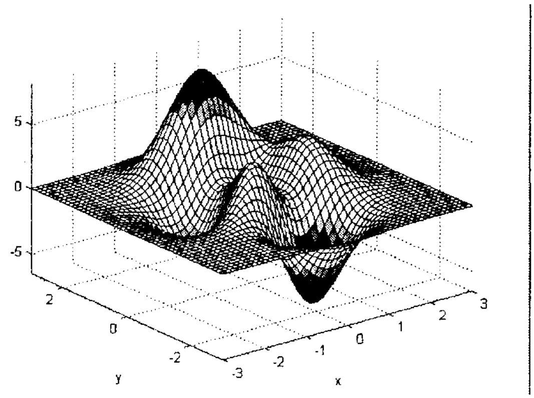


Рис. 1.2. Графічне зображення
багатоекстремального показника ефективності

1.2.3. Математичні моделі операцій з урахуванням невизначеності

Типовим для практики є випадок, коли не всі параметри операції, що не може змінювати дослідник, відомі, тобто є такі, які включають у себе елемент невизначеності. Наприклад, невизначеність параметрів автоматизованої системи управління технологічним процесом може бути спричинена впливом зовнішніх факторів або змінами стану зовнішнього середовища.

В умовах невизначеності до складу математичної моделі операції входять три категорії факторів (параметрів) операції:

1) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ — відомі заздалегідь, які не можна змінити;

2) $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ — невідомі, на які не можливо впливати;

3) $x_1, x_2, ..., x_n$ — невизначені, які необхідно обрати для надання операції бажаних властивостей.

Від цих факторів залежить показник ефективності W та (або) функції, що описують ОДР G.

Якби фактори $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ були відомі, то можна було б обрати такі фактори $x_1, x_2, ..., x_n$, за яких W досягав би глобального максимуму. Але яких саме значень $y_1, y_2, \ldots, y_k$ набудуть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ при реалізації операції невідомо і заздалегідь передбачити значення W теж буде неможливо.

Постановка задачі дослідження операції в умовах невизначеності набуває вигляду: при заданих обмеженнях, фіксованих параметрах $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ та з урахуванням невідомих факторів $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ знайти такі елементи розв'язку $x_1, x_2, ..., x_n$, які «по можливості» дозволяють показнику ефективності W досягти, як кажуть, «розумного» (раціонального) або «вигідного» значення.

Методи розв'язання задач дослідження операцій у такій постановці істотно залежать від:

- природи факторів $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$;
- обсягу відомостей про математичну модель факторів $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$.

Невизначеність $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ можна класифікувати так:

1) $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ — випадкові величини або випадкові функції з відомими статистичними даними, які дозволяють ідентифікувати їх сумісну функцію розподілу або сумісну щільність імовірності;

2) $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ — невідомі фактори, які неможливо вивчати за допомогою статистичних методів, тому що відсутні відповідні статистичні дані, або явища, із якими пов'язані $Y_1, \ldots, Y_k$, взагалі не мають властивості статистичної стійкості;

3) $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ — невідомі фактори, невизначеність яких пов'язана з діями «супротивника». Така ситуація є характерною для конкурентної боротьби на ринку телекомунікаційних послуг та в задачах захисту інформації.

У *першому випадку* математичну модель задачі модифікують за рахунок зміни вигляду показника ефективності за допомогою одного з двох прийомів. Перший прийом: штучне зведення задачі з невизначеністю до детермінованої задачі дослідження операції шляхом заміни $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$, що входять до складу показника ефективності, на їх відповідні математичні сподівання $M[Y_1], \ldots, M[Y_k]$. Другий прийом: «оптимізація в середньому», коли як показник ефективності обирається математичне сподівання:

$$\bar{W} = M[W] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} W(y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_k) f(y_1, \ldots, y_k) dy_1 \ldots dy_k.$$

У *другому випадку*, ґрунтуючись на знанні діапазону значень, знаходять так звані локально-оптимальні розв'язки: оптимальний розв'язок для фіксованих значень $y_1, \ldots, y_k$ з відомого діапазону $y_1 \in [y_{\min}; y_{\max}], \ldots, y_k \in [y_{\min}; y_{\max}]$ відповідно, які в подальшому аналізують і розраховують деякі значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що є компромісними розв'язками, не строго оптимальними для жодної з досліджуваних вище умов локальної оптимальності, але прийнятними для розв'язання задачі в цілому. Таких прийнятних «розумних» розв'язків може бути кілька.

У третьому випадку для пошуку розв'язку використовується так звана теорія ігор — математична теорія конфліктних ситуацій. Уважаючи, що протидійна нам у конфлікті сторона завжди прагне максимізувати наші збитки, то зрозумілою з нашого боку є стратегія (тобто рішення), яка мінімізує максимум нанесених збитків. Має місце так звана мінімаксна стратегія.

1.2.4. Математичні моделі операцій з кількома показниками ефективності

У практиці автоматизованих систем досить часто трапляються випадки, коли ефективність операції оцінюють не за одним, а за кількома показниками ефективності $W_1, W_2, \ldots, W_l$, наприклад, надійнісних, вартісних (економічних), технічних. Тобто, математична модель операції в задачі з кількома показниками ефективності як у детермінованому випадку, так і у випадку з невизначеністю відрізняється від розглянутих тим, що замість скалярного показника ефективності $W(x_1, \ldots, x_n)$ або $W(Y_1, \ldots, Y_k, x_1, \ldots, x_n)$ використовується векторний показник ефективності:

$$\Omega = \left[W_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, W_l(x_1, \ldots, x_n)\right]^T$$

або

$$\Omega = \left[W_1(Y_1, \ldots, Y_k, x_1, \ldots, x_n), \ldots, W_l(Y_1, \ldots, Y_k, x_1, \ldots, x_n)\right]^T.$$

Доцільною є постанова задачі дослідження операцій, що потребує пошуку такого розв'язку $(x_1, \ldots, x_n)$, за якого всі складові векторного показника ефективності досягають свого екстремального значення.

У загальному випадку такого розв'язку не існує, але використовуючи методи розв'язання багатокритеріальних задач, або так звані методи оптимізації за векторним критерієм, можна побудувати процедури вилучення неконкурентоспроможних варіантів розв'язання і тим самим звузити множину розв'язків до меж, у яких виконується подальший вибір раціонального розв'язку.

Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягає основна задача дослідження операцій?
2. Дайте визначення поняття «цільова функція».
3. Які математичні моделі використовуються в задачах дослідження операцій?
4. Сформулюйте загальну детерміновану поставку задачі дослідження операції.
5. Поясніть, у яких випадках для дослідження операцій застосовують метод лінійного програмування, а у яких — метод динамічного програмування.

Розділ 2

СТРУКТУРА МЕТОДИКИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

2.1. Складові методики дослідження операцій

Складовими методики дослідження операцій є такі дії:

1) визначення цілей;

2) складання плану розроблення проекту, операції;

3) формулювання проблем;

4) побудова моделі;

5) розроблення обчислювального методу;

6) розроблення технічного завдання на програмування та налагодження програми;

7) зібрання даних;

8) перевірка моделі;

9) реалізація результатів.

Розглянемо їх детальніше.

Першочергова мета будь-якого дослідження операцій полягає в тому, щоб з'ясувати, що прагне отримати керівник операції в результаті її проведення, тобто, які передбачувані результати проведення операції можна очікувати.

Цілі дослідження треба формулювати, виходячи із суті рішення або рішення, на яке орієнтована дана робота. Цілі не треба формулювати ані занадто вузько, ані занадто широко. Неправильне і неточне формулювання цілей може призвести дослідників до неправильного розв'язання поставленої задачі.

Другий етап дослідження полягає у складанні плану виконання проекту операції, тобто встановленню необхідних термінів завершення певних видів робіт. Це — одна з форм контролю за процесом розроблення проекту.

Як документ, план розроблення проекту операції являє собою календарний графік виконання його етапів. Етапи можуть деталізуватися до рівня окремих завдань. Наприклад, етап розроблення обчислювального методу може мати такі завдання: розроблення методу розв'язання для кожної підмоделі задачі; опис і документальне оформлення методів розв'язання; перевірку запропонованих методів на обраних задачах невеликої розмірності; внесення уточнень та змін до методів розв'язання на підставі результатів пробних розрахунків тощо. Складаючи план, треба також приділяти увагу розподілу робіт між окремими виконавцями.

Формулювання проблеми — третій етап дослідження. Він передбачає не тільки обговорення з керівником операції цілей дослідження, а й зібрання даних, які дають можливість уявити суть проблеми, що мало місце в минулому, чого треба очікувати в майбутньому, який характер співвідношень між змінними досліджуваної задачі. На основі цих результатів формулюється загальна схема побудови моделі і визначається напрям усієї подальшої роботи.

Одним із питань, пов'язаних із формулюванням проблеми, є визначення того, чи можна всю проблему подати у вигляді окремих підпроблем, щоб паралельно або послідовно дослідити їх незалежно одна від одної (декомпозиція). Друге питання пов'язане з визначенням міри деталізації розроблюваної моделі. Останнє залежить від обсягів виділених коштів, календарного плану розроблення проекту, мети дослідження.

Наступне питання стосується галузі застосування та розмірності розроблюваної моделі, визначення керованих і некерованих змінних, технологічних параметрів операції, показників ефективності, які дадуть змогу оцінити конкретні розв'язки розглянутої проблеми.

Четвертий етап дослідження пов'язаний із побудовою моделі. Вона відображає взаємозв'язок між керованими змінними, некерованими змінними, технологічними параметрами і показниками ефективності. Правильно побудована модель — основна умова успішного розроблення проекту операції.

Перед тим як розробляти модель, насамперед, треба з'ясувати питання про можливість використання тих чи інших показників і співвідношень у рамках моделі. Виокремлюють кілька різних типів співвідношень, які формують модель: співвідношення, які виходять із визначень; емпіричні співвідношення; нормативні співвідношення. Крім того, треба зібрати та ретельно проаналізувати великий обсяг даних.

На останньому етапі побудови моделі досліднику треба дати точне аналітичне або алгоритмічне формулювання досліджуваної проблеми.

Разом із роботою з побудови моделі потрібно обрати або розробити числовий метод розв'язання, що і є п'ятим етапом дослідження.

Для цього треба з'ясувати такі питання:

– чи треба використовувати імітаційне моделювання або будь-який з методів оптимізації:

– чи повинна модель враховувати випадковий характер деяких змінних або ж достатньо використовувати детермінований підхід;

– чи треба враховувати нелінійність певних співвідношень, чи достатньо обмежитися їх лінійною апроксимацією;

– чи можна використовувати наявні методи розв'язання, або треба розробити новий метод.

Отже, необхідно з'ясувати, які треба зробити припущення та який метод розробити, щоб застосування моделі було практично виправданим щодо використовуваних обчислювальних процедур. Цей етап також містить перевірку запропонованого числового методу з використанням модельних (тобто таких, точний розв'язок яких відомий) тестових задач, перевіряється можливість використання і коректність розроблених методів розв'язання.

Створення програм для ЕОМ передбачається на шостому етапі дослідження. Розроблення технічного завдання на програмування має виконуватися ретельно, що дасть змогу забезпечити якісніше документальне оформлення програм, результатом чого дослідження стає значною мірою орієнтованим на користувача, на задоволення його потреб. Треба звернути увагу на одну з робіт, які проводяться на цьому етапі, складання вхідних форм та вихідних (документів), їх обговорення та узгодження з керівництвом та виконавцями.

Вхідні форми — бази даних, які дають можливість забезпечити користувача інформацією, що швидко підготовлюється і легко оновлюється. Наглядні вихідні форми мають дати користувачу зрозумілу, добре підібрану й зручно розташовану інформацію.

Що стосується саме програмування і налагодження, то в багатьох випадках проект із дослідження операцій не потребує розроблення машинних програм, а у разі потреби завжди можна використати наявні програми.

На сьомому етапі здійснюється збирання та аналіз даних, які є необхідними для перевірки правильності моделі та практичного застосування результатів дослідження операцій, тоді як на попередніх етапах збирання даних пов'язане передусім з формулюванням проблеми та побудовою моделі. Тому проблема браку даних не є перешкодою до виконання продуктивних операційних дослідження, оскільки математична модель є засобом, який дає змогу подолати труднощі отримання відповідних оцінок зведенням їх до простіших вимірювань.

Використання моделей, які розробляються при дослідженні операцій, допомагає в процесі прийняття рішень. Розв'язання проблеми зводиться до найпростіших вимірювань, встановлення вихідних змінних і показників ефективності, які є функціями цих змінних. У цьому випадку може бути потрібно більше даних, але отримати їх значно простіше, а вимоги до їх точності будуть менш жорсткими.

Восьмий етап перевірки моделі охоплює дві фази: визначення способів перевірки і здійснення самої перевірки. На першій — обирають аналітичні й експериментальні методи перевірки несуперечності, чутливості, реалістичності та працездатності моделі.

Для перевірки моделі будуть потрібні дані, отримані на попередньому етапі. Результати цієї роботи можуть призвести до необхідності перебудови моделі та, відповідно, до створення нових програм.

Найважливішим етапом, яким завершується операційне дослідження, є дев'ятий. Його можна розглядати як самостійну задачу. Отримані результати дослідження операцій треба подати рядом робочих процедур, які можна легко зрозуміти і застосувати діючій стороні.

2.2. Типові класи задач дослідження операцій

За своєю змістовною постановкою множину задач дослідження операцій можна поділити на ряд класів, до яких зводиться більшість із них.

Основні класи задач дослідження операцій:

- управління запасами;
- розподіл ресурсів;
- ремонт та заміна обладнання;
- масове обслуговування;
- упорядкування та координація;
- вибір маршруту;
- пошук значення;
- змагальні;
- комбіновані.

Насправді задачі відповідних класів «виникають» одна з одної відповідно до того, як поширюється уявлення про досліджувану операцію.

Стисло схарактеризуємо перелічені класи задач.

Задачі управління запасами. Можна виокремити, принаймні, чотири основні причини, що призводять до потреби створення запасів:

– необхідність гарантувати безперебійність виробничого процесу;

– періодичність виробництва окремих матеріальних ресурсів у постачальників;

– особливості транспортування від постачальників до споживачів (невідповідність вантажопідйомності транспортних засобів і розмірів споживання);

– незбіжність ритму виробництва та постачання виробничих ресурсів із ритмом їх споживання.

Задача управління запасами в загальному випадку формулюється так. Існують певні запаси, витрати на зберігання яких є функцією їх величини. Відомі також витрати на доставляння ресурсів. Треба визначити оптимальний розмір постачання, частоту та терміни надходження ресурсів, щоб сумарні витрати були мінімальними. Критерієм оптимальності є сума витрат на зберігання і постачання ресурсів.

Задачі управління запасами можна класифікувати так:

• за кількістю періодів управління (поповнення запасів) — на одноперіодні та багатоперіодні;

• за характером поповнення запасів — із неперервною системою поповнення запасів (миттєве) і періодичні (із затримкою);

• за урахуванням попиту — на детерміновані й імовірнісні (статистичні);

• за кількістю типів ресурсів — на однопродуктові й багатопродуктові;

• за видом цільової функції — на задачі з пропорційними та непропорційними втратами.

Задачі розподілу ресурсів пов'язані з розподілом обмежених ресурсів за типами робіт, які треба виконати. При цьому можуть бути задані як роботи, так і ресурси, або тільки роботи. Перекидання, передавання ресурсів з одного типу робіт на інший, якщо не всі роботи можна виконати максимально ефективно через відсутність ресурсів, призводить до зменшення загальної ефективності всіх типів робіт, узятих разом. Тому задачі розподілу ресурсів полягають у відшуканні такого розподілу ресурсів, за якого максимізується спільний прибуток або результат чи мінімізуються витрати. Задачі розподілу ресурсів дуже різноманітні за змістом і багато з них має спеціальну назву: транспортна задача; задача про призначення; задача про суміші; задача вибору оптимальних технологій тощо.

Задачі ремонту та заміни обладнання виникають у тих випадках, коли технічні характеристики працюючого обладнання погіршуються за рахунок старіння, спрацювання та з інших причин. Це призводить до необхідності заміни обладнання з метою зменшення сумарних витрат на експлуатацію або попередження виходу з ладу. У деяких випадках виникає потреба раціональної організації профілактичного обслуговування, тобто попереджувально-відновлювального ремонту.

Задачі цього класу класифікують:

1) за характером заміни обладнання:

- заміни обладнання на устаткування довгострокового використання;
- заміни обладнання на устаткування з метою попередження відмов;
- вибору оптимального плану попереджувального ремонту та технічного обслуговування;

2) за характером урахування витрат на обладнання — на дискретні та неперервні;

3) за виходом з ладу обладнання — на детерміновані та випадкові;

4) за стратегією заміни обладнання — на планові та змішані;

5) за часом урахування витрат на обладнання — з приведенням та без приведення витрат більш пізніх років випуску до розрахункового.

Задачі масового обслуговування умовно поділяють на задачі аналізу та задачі синтезу — оптимізації систем масового обслуговування. Задачі аналізу передбачають оцінювання ефективності функціонування систем за незмінних, наперед відомих вихідних характеристик системи масового обслуговування: структури системи; дисципліни обслуговування; потоків вимог і законів розподілу часу їх обслуговування. Задачі синтезу спрямовані на пошук оптимальних параметрів системи масового обслуговування (вибір кількості каналів, їх послідовності, включення до роботи, пропускної здатності) і характеристик функціонування (формування вхідного потоку вимог, вибір дисципліни обслуговування тощо).

Задачі впорядкування та координації. Задачі впорядкування пов'язані з визначенням оптимальної послідовності оброблення виробів, масивів інформації тощо. Задачі координації належать до комплексів операцій та складаються з певної сукупності окремих операцій, які повинні виконуватися з урахуванням часу в заданій послідовності. Це — задачі мережевого планування й управління. У цьому класі задач розглядають співвідношення між строками закінчення комплексу операцій та моментами початку всіх операцій комплексу.

Задачі вибору маршруту трапляються під час дослідження різноманітних процесів на транспорті, у системах зв'язку. Типова задача полягає у відшуканні найкращого маршруту, який пов'язує кілька пунктів. На допустимі маршрути може накладатися ряд обмежень, коли забороняється повернення до пройденого пункту.

Серед цих задач найбільш відомими є: задача вибору найкоротшого шляху між довільними пунктами; задача комівояжера; задача про максимальний потік.

Задачі пошуку полягають у відшуканні найкращого засобу отримання інформації, яка однозначно визначала б розв'язок. Критерієм у такій задачі є мінімум витрат двох видів: вартості отримання інформації й ціни помилки. У першому випадку йдеться про вартість вибірки, тобто вартість вибору спостережень, у другому — про помилки двох видів: помилки вибірки (виявлення того, що насправді є відсутнім) і помилки спостереження (пропускання того, що насправді має місце). Якщо на проведення пошуку виділені фіксовані ресурси, то що більше буде розмір вибірки, то менше обсяг ресурсів на кожне спостереження. Отже, за потреби зменшити помилки вибірки, як правило, зростає помилка спостереження і навпаки.

В обмеженій задачі пошуку обсяг ресурсів, які виділені на пошук, є заданим, і задача полягає у розробці плану пошуку, який мінімізує ціну помилки. У загальній задачі кількість ресурсів можна змінювати так, що її метою є мінімізація сумарних витрат ресурсів і ціни помилки.

Змагальні задачі — клас задач дослідження операцій, що виникають під час прийняття рішень в умовах конфліктів, незбігу інтересів осіб. Особливе місце в дослідженні проблем конфлікту займає вибір і порівняльний аналіз можливих (допустимих) способів поведінки сторін, що дає підставу для ухвалення кожною стороною «розумних» рішень відносно своїх дій. Особи, які приймають рішення, повинні врахувати не тільки свої цілі, але й цілі, які переслідують інші учасники конфлікту. Відповідну інформацію вдається отримати не завжди, що створює додаткові труднощі як для дослідників, так і осіб, які приймають остаточне рішення.

Комбіновані задачі містять кілька типових задач одночасно.

Контрольні запитання та завдання

1. Назвіть та поясніть основні складові методики дослідження операцій.
2. Наведіть та поясніть типові класи задач дослідження операцій.
3. Стисло охарактеризуйте основні класи задач дослідження операцій.
4. Надайте стислу характеристику задачі управління запасами.
5. У чому полягає суть задач ремонту та заміни обладнання?
6. Сформулюйте загальну постановку задачі масового обслуговування.

Розділ 3

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

3.1. Загальна задача математичного програмування

Послідовність розв'язання задачі пошуку найкращих дій за заданим показником ефективності W (задача дослідження операцій) передбачає такі етапи:

1) якісна (неформальна, змістова, вербальна) постановка задачі дослідження операцій;

2) побудова математичної моделі;

3) математична постановка задачі;

4) розроблення методу розв'язання задачі (метод оптимізації);

5) розроблення алгоритму реалізації запропонованого методу;

6) розроблення комп'ютерної програми;

7) розрахунок, числовий експеримент, імітаційне моделювання;

8) інтерпретація отриманого результату.

Загальною *задачею математичного програмування* є знаходження глобального екстремуму показника ефективності W на області допустимих значень G (рис. 3.1). Тобто математичне програмування дозволяє виконати етапи 4, 5 задачі дослідження операцій.

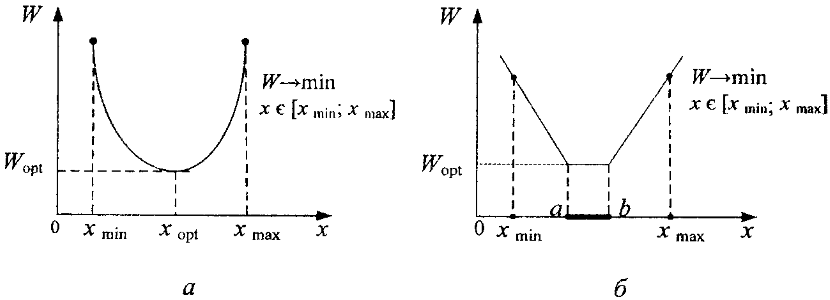


Рис. 3.1. Графічне зображення можливостей існування єдиного та безлічі оптимальних планів:
а — точка оптимуму єдина; *б* — $x_{opt} \in [a;b]$ — континуум

Окрім терміна «математичне програмування», ще використовують термін «математична модель оптимізації», або «математична модель розв'язання задач на екстремум». Набір змінних $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$, який задовольняє обмеження G, називають *планом задачі математичного програмування*.

Система обмежень має бути сумісною, інакше множина планів буде порожньою множиною. Множина планів може бути як обмеженою, так і необмеженою. План, що надає показнику ефективності оптимального значення, називається оптимальним. Оптимальний розв'язок не завжди єдиний (рис. 3.1).

3.2. Класифікація задач математичного програмування

Задачі математичного програмування поділяють на класичні та некласичні.

Ознаками віднесення задач математичного програмування до класичних є: неперервність показника ефективності та обмежень щодо керувальних змінних; існування за керувальними змінними перших та других частинних та мішаних частинних похідних від показника ефективності.

Простою ознакою некласичності даних задач математичного програмування є вимога стосовно дискретності керувальних змінних.

Серед *класичних задач* можна виокремити два підкласи:

1) задачі пошуку безумовного екстремуму;

2) задачі пошуку умовного екстремуму (рис. 3.2).

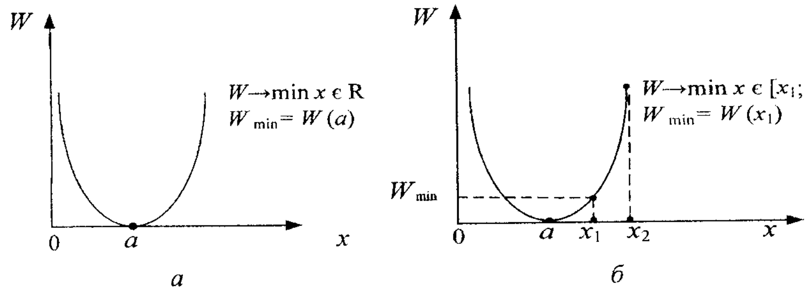


Рис. 3.2. Графічне зображення класифікації класичних задач математичного програмування:

а — безумовний екстремум $W_{\min} = 0,\ x_{\min} = a$;

б — умовний екстремум $W_{\min} = W\left(x_1\right),\ x_{\min} = x_1$

Некласичні задачі математичного програмування поділяють на спеціальні та неспеціальні. До основних типів спеціальних задач математичного програмування належать:

1) задачі лінійного програмування, загальна постановка яких має вигляд:

$$W = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_{X \in G}, \qquad (3.1)$$

де $X = \left(x_1, \ldots, x_n\right)^T$; G — область допустимих розв'язків, яка задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m},\ x_j \in \mathbb{R}; \qquad (3.2)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (3.3)$$

У виразах (3.1)–(3.3) $c_j, a_{ij}, b_i \left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$ — параметри; $x_j \left(j = \overline{1,n}\right)$ — керувальні змінні;

2) задачі квадратичного програмування, загальна постановка яких відрізняється від задач лінійного програмування формою запису показника ефективності:

$$W = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{k_j} x_k x_j \to \max_{X \in G},$$

де d_{k_j} $\left(k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}\right)$ — параметри;

3) задачі сепарабельного програмування, загальна постановка яких відрізняється від задач лінійного програмування також формою запису показника ефективності:

$W = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j\left(x_j\right) \to \max\limits_{X \in G}$ — адитивний показник ефективності

або

$W = \prod\limits_{j=1}^{n} f_j\left(x_j\right) \to \max\limits_{X \in G}$ — мультиплікативний показник ефективності,

де $f_j\left(x_j\right)$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ — відомі функції;

4) задачі геометричного програмування, загальна постановка яких має вигляд:

$$W = \sum_{k=1}^{L} c_k \left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{k_j}}\right) \to \max_{X \in G},$$

де G — область допустимих розв'язків, що задається нерівностями:

$$\sum_{k=1}^{L} c_{ik} \left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ik_j}}\right) \le b_i,\ i = \overline{1,m},\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n},$$

де $c_k, c_{ik}, \alpha_{k_j}, \alpha_{ik_j}, b_i$ $\left(k = \overline{1,L},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$ — параметри;

5) задачі опуклого програмування, загальна постановка яких полягає в тому, що показник ефективності й обмеження є опуклими функціями.

Якщо всі точки відрізка АВ належать ОДР за будь-якого розташування A, B на межі ОДР, то ОДР — опукла (рис. 3.3, *а*). Показник ефективності вважається опуклим, якщо за будь-якого розташування точок A та B ордината точки C буде більшою за значення показника ефективності в цій точці: $Y_c \geq W(x_c)$ (рис. 3.3, *б*);

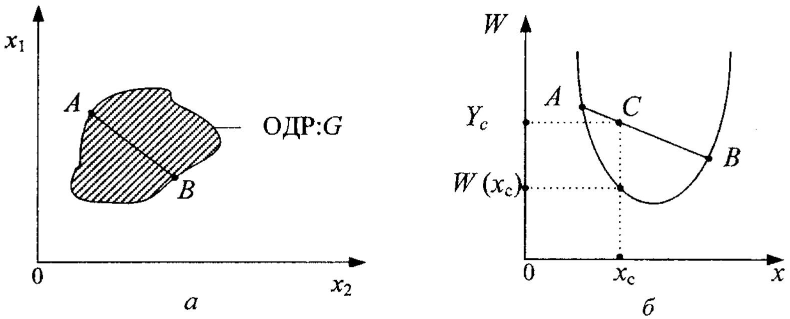


Рис. 3.3. Графічне зображення щодо пояснення змісту терміна «опукла область допустимих рішень» та «опуклий показник ефективності»:
а — точки *A*, *B* належать межі області допустимих розв'язків (ОДР):
б — *W* — показник ефективності, опуклий донизу

6) задачі дискретного програмування, які виникають у випадку, якщо будь-яку з попередніх задач доповнити умовою, що хоча б одна з компонент може набувати окремих значень, наприклад, цілочислових;

7) задачі стохастичного програмування, які виникають у будь-якому з попередніх випадків, коли всі або деякі, перелічені в пп. 1–4, параметри є випадковими величинами.

Усі інші типи задач математичного програмування належать до неспеціальних, некласичних задач математичного програмування.

3.3. Теорема про достатні умови глобального максимуму

Означення 3.1 У загальній задачі математичного програмування вектор змінних $\widehat{X}$ є *точкою глобального максимуму*, якщо він належить області існування планів задачі G і показник ефективності набуває на ньому значення не менше, ніж у будь-якій допустимій точці:

$$\widehat{X} \in G \text{ та } W\left(\widehat{X}\right) \geq W(X) \ \forall X \in G.$$

Означення 3.2	Вектор змінних є *точкою локального максимуму*, якщо він належить допустимій множині та на ньому досягається значення показника ефективності більше або таке, що дорівнює значенню показника ефективності в певному малому околі цього вектора: $$\widehat{X} \in G\,, W\left(\widehat{X}\right) \geq W\left(X\right) \quad \forall X \in G \cap M_{\varepsilon}\left(\widehat{X}\right),$$ де $M_{\varepsilon}\left(\widehat{X}\right)$ — ε-окіл вектора $\widehat{X}$, який у даному випадку є множиною точок, що задовольняють умову (рис. 3.4, *а*) $$\left\|X - \widehat{X}\right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \hat{x}_j\right)^2} \leq \varepsilon\,.$$
Означення 3.3	Якщо $W\left(\widehat{X}\right) > W\left(X\right) \; \forall X \in G$, то *глобальний максимум* називається *строгим* або *сильним*.
Означення 3.4	Якщо $W\left(\widehat{X}\right) > W\left(X\right) \; \forall X \in G \cap M_{\varepsilon}\left(\widehat{X}\right)$, то *локальний максимум* називається *строгим* або *сильним*.
Теорема 3.1	Нехай допустима множина обмежена, замкнена (тобто компактна) та опукла, а неперервний показник ефективності є опуклим догори на G. Тоді локальний максимум є глобальним. Якщо $W\left(X\right)$ строго опукла догори функція, то розв'язок задачі пошуку максимуму єдиний [існує єдиний глобальний максимум] (рис. 3.4, *б*).

Достатні умови існування глобального максимуму сформульовані в теоремі Веєрштраса.

Теорема 3.2	Припустімо, що допоміжна множина G — компактна й опукла, тоді неперервний показник ефективності $W\left(X\right)$ досягає глобального максимуму у внутрішній або граничній точці множини G (рис. 3.4, *в*, *г*).

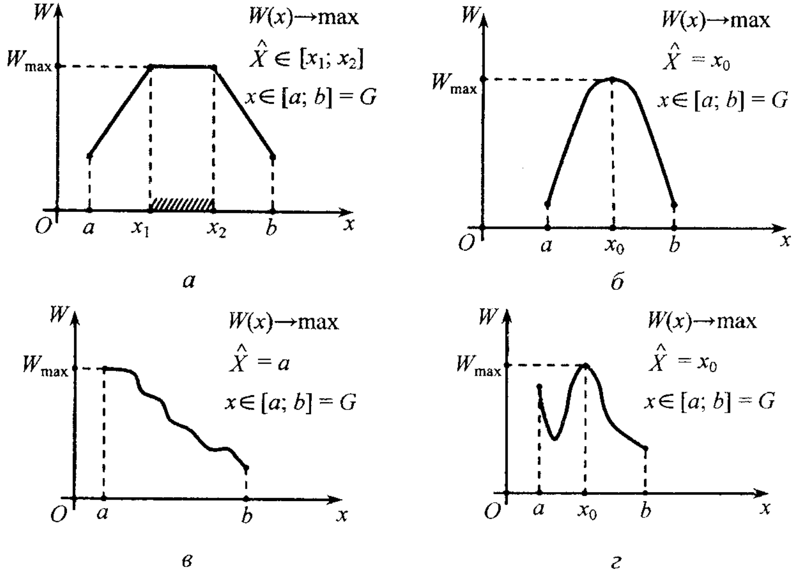


Рис. 3.4. Графічне зображення теорем:
а, б — про глобальний максимум опуклої догори функції;
в, г — теореми Веєрштраса

Головною специфічною ознакою некласичних задач математичного програмування є те, що вони мають яскраво означену прикладну спрямованість. При математичній постановці задач, які спрямовані на розв'язання конкретних практичних завдань, зазвичай виникає значна кількість специфічних обмежень, які класична теорія не враховує.

Контрольні запитання та завдання

1. Наведіть та поясніть класифікацію задач математичного програмування.
2. У чому полягає суть задачі квадратичного програмування?
3. Поясніть суть задачі опуклого програмування.
4. У чому полягає суть задачі дискретного програмування?
5. Поясніть суть задачі стохастичного програмування.
6. Дайте визначення поняття «глобальний максимум».
7. Наведіть та поясніть достатні умови глобального максимуму.
8. У чому полягає суть теореми Веєрштраса?

Розділ 4

ТИПОВІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

4.1. Приклади типових задач математичного програмування

Кожна з наведених нижче задач має свою назву, що відображає її первинне походження, яке в багатьох випадках не має жодного стосунку у прямій постановці до автоматизованих систем керування на транспорті та засобів автоматизації, але прикладна привабливість цих задач для таких систем полягає в тому, що в математиці їх більшість може бути зведена до цих класичних прикладів. Типові приклади виконують як функцію прототипу-аналога, так і нагромаджувача знань з об'єктивно-орієнтованого способу розв'язання технічних задач у галузі автоматизації. Зводячи технічні задачі до прикладів, наведених нижче, отримаємо прийоми формалізації специфічних актуальних задач автоматизації та вже відпрацьований ефективний математичний та алгоритмічний інструмент розв'язання цих задач.

4.1.1. Задача про розкрій

На фірмі, що спеціалізується на виробництві корпусів для системних блоків, листи металу можуть розкроюватися кількома способами. Якщо лист розкроїти за j-м способом $\left(j=\overline{1,n}\right)$, то отримаємо a_{ij} корпусів i-го виду $\left(i=\overline{1,m}\right)$. При цьому величина відходів з одного листа дорівнює c_j (м^2).

Визначити, яку кількість листів металу необхідно розкроювати кожним зі способів для того, щоб отримати корпусів i-го виду не менше ніж b_i із мінімальною кількістю відходів.

Якщо через x_j позначити кількість листів металу, розкроєних j-м способом, то математична модель та постановка задачі набуває вигляду

$$W=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min_{X\in G},$$

де ОДР G — умови до виконання обмежень на виробництво корпусів j-го типу:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ \left(i = \overline{1,m}\right)$$

та на x_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$, які випливають із фізичного змісту цих змінних:

$$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{N},\ X = \left[x_1, \ldots, x_n\right]^T, \left(j = \overline{1,n}\right).$$

4.1.2. Задача виробничого планування або задача оптимального використання ресурсів виробництва

Для виробництва продукції j-го виду $\left(j = \overline{1,n}\right)$ фірма має обмежені ресурси (виробничі приміщення, спеціалізовані прилади, оргтехніку, витратні матеріали, кількість фахівців, фінансові ресурси тощо) b_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$. Витрати ресурсів i-го виду на виготовлення одиниці продукції j-го виду дорівнюють a_{ij}.

Визначити скільки та якої продукції треба виробляти, щоб отримати максимальний прибуток. Вважаємо, що збут продукції кожного виду відбувається в повному обсязі.

Якщо позначити через x_j, P_j відповідно обсяг продукції j-го виду та прибуток від його реалізації, то математична модель постановки задачі набуває вигляду

$$W = \sum_{j=1}^{n} P_j x_j \to \max_{X \in G}$$

за умови виконання обмежень G за ресурсами:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ \left(i = \overline{1,m}\right)$$

з урахуванням фізичного змісту обсягів виробництва

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{N}_0 \left(j = \overline{1,n}\right).$$

4.1.3. Задача про суміші або задача про дієту

Сучасний фітотерапевтичний центр виконує лікувальні роботи на основі препаратів природного походження. Кожен вид рослини характеризується відповідним складом лікувальних елементів. Відомо вміст i-го елемента в одиниці j-го рослинного препарату a_{ij} $\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$, а також вартість одиниці препарату j-го виду і добову мінімальну лікувальну дозу i-го препарату.

Скласти лікувально-профілактичний раціон мінімальної вартості. Якщо позначити через x_j кількість препарату j-го виду, який включено до складу раціону, то математична модель та постановка задачі набувають вигляду:

$$W=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min_{X\in G}$$

за умови виконання обмежень G на добову дозу

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ \left(i=\overline{1,m}\right)$$

та з урахуванням фізичного змісту кількості препарату

$$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{R}\ \left(j=\overline{1,n}\right).$$

4.1.4. Задача про призначення

Фірма, що займається гарантійним обслуговуванням та ремонтом комп'ютерної техніки, має у своєму розпорядженні n ремонтних бригад. Відомо продуктивність c_{ij} кожної i-ї бригади $\left(i=\overline{1,m}\right)$ при виконанні j-ї роботи.

Розподілити бригади за роботами так, щоб досягти максимальної сумарної виробничої потужності.

Зрозуміло, що i-та бригада може виконувати в певному інтервалі часу лише одну задану роботу.

Якщо нас цікавить тільки заданий інтервал часу, то немає сенсу розглядати ті роботи, які протягом усього інтервалу часу не виконуються. Або розглядати ті бригади, яким у даному інтервалі часу роботи не вистачило (табл. 4.1), тобто у процесі побудови математичної моделі задачі вважатимемо, що кількість робіт, які необхідно виконати, дорівнює кількості бригад [усі роботи обов'язково виконуються, усі бригади працюють].

Таблиця 4.1

Пояснення щодо можливого робочого завантаження бригад

Номер бригади	Номер роботи							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0

Математичну модель описаного явища можна подати у вигляді матриці (табл. 4.2).

Таблиця 4.2

Побудова матриці математичної моделі

Номер бригади	Номер роботи j					
	1	2	...	$n-2$	$n-1$	n
1	1	0	...	0	0	0
2	0	1	...	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...
$n-2$	0	0	0	0	0	1
$n-1$	0	0	0	0	1	0
n	0	0	0	1	0	0

Відповідно до змісту задачі про призначення, в окремому стовпці, наприклад третьому, чи в окремому рядку, наприклад другому, може бути лише одна одиниця, яку інтерпретуємо як призначення другої бригади для виконання роботи третього типу.

Остаточно математична модель та постановка задачі набувають вигляду

$$W=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\max_{X\in G}$$

за умови виконання обмежень G :

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,$$

де $X = \left[x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{nn}\right]^T$ — кількість компонент вектора, що дорівнює n^2.

4.1.5. Задача оптимального розміщення

Великою телекомунікаційною компанією укладені договори на постачання обладнання замовникам у задані терміни, у певному асортименті та обсязі. Для виконання договірних зобов'язань керівництво компанії опрацьовує заходи щодо розширення виробництва на наявних підприємствах за рахунок їх реконструкцій, а також завдяки будівництву нових виробничих приміщень.

Визначити обсяги виробництва продукції на наявних підприємствах і тих, що реконструюються та будуються, а також обсяги постачання продукції від підприємств-постачальників до споживачів; і при цьому сумарні витрати на виробництво і доставляння продукції мають бути мінімальними. Побудову математичної моделі почнемо із введення та пояснення фізичного змісту таких позначень:

i — вид продукції, яка виробляється $\left(i = \overline{1,m}\right)$;

j — номер підприємства, яке виробляє продукцію $\left(j = \overline{1,n}\right)$;

k — номер споживача продукції $\left(k = \overline{1,l}\right)$;

b_{ij} — обсяг продукції i-го виду, який виробляє j-те підприємство протягом заданого часу (виробнича потужність підприємства);

c_{ij} — вартість виробництва продукції i-го виду, виготовленої j-м підприємством;

p_{ik} — обсяг постачання продукції i-го виду k-му споживачеві згідно з договорами;

x_{ij} — обсяг виробництва продукції i-го виду на j-му підприємстві;

x_{ijk} — обсяг постачання продукції i-го виду, виробленого j-м підприємством k-му споживачеві;

W — сумарні виробничі та транспортні витрати, тобто показник ефективності.

Математична модель і постановка задачі набувають вигляду

$$W=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}c_{ijk}x_{ijk}\to\min_{X\in G}$$

за умови виконання обмежень G:

на виробничі потужності кожного підприємства:

$$\sum_{k=1}^{l}x_{ijk}\le b_{ij}\ \left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right),$$

на баланс виробництва і споживання продукції:

$$x_{ij}=\sum_{k=1}^{l}x_{ijk}\quad\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right),$$

на задоволення попиту споживачів:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ijk}=p_{ik}\quad\left(i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,l}\right),$$

на невід'ємність обсягу постачання та виробництва продукції:

$$x_{ij}\ge 0,\ x_{ijk}\ge 0\quad\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,l}\right),$$

$$X=\left[\overbrace{x_{11},\ldots,x_{ij},\ldots,x_{mn}}^{m\times n},\overbrace{x_{111},\ldots,x_{mnl}}^{m\times n\times l}\right]^T.$$

4.1.6. Задача про розподіл ресурсів

У телекомунікаційній компанії є технічні і людські ресурси $R_1,R_2,\ldots,R_m$ (наприклад, кількість каналів та серверів на їх обслуговування, кількість бригад монтажу та ремонту обладнання, кількість бригад технологічної підтримки абонентів і т.д.) для надання телекомунікаційних послуг у кількості відповідно $b_1,\ldots,b_m$ одиниць. За допомогою цих ресурсів можливо надати послуги $T_1,\ldots,T_n$ (голосовий зв'язок, визначення координат мобільної станції, можливість приймання зображення в реальному часі, можливість користування бездротовим Інтернетом тощо). Для надання послуги T_j треба a_{ij} одиниць ресурсу R_i $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$.

Кожна одиниця ресурсу R_i коштує d_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$. Кожну послугу T_j можна реалізувати за ціною c_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$. На кожний вид послуги є свій запит: відомо, що ринок телекомунікаційних послуг може скористатися не більше ніж K_j одиницями послуги T_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$. Знайти, які послуги і в якій кількості потрібно реалізувати для отримання максимального прибутку.

Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – кількісний вираз відповідних послуг $T_1, T_2, \ldots, T_n$, які заплановано «виробити».

Умови запиту та фізичний зміст накладають на x_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ обмеження $0 \le x_j \le K_j$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$.

Обмеження вигляду

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ \left(i=\overline{1,m}\right)$$

формалізують вимогу не перевищення наявного запасу відповідного ресурсу.

Обчислимо прибуток L залежно від елементів розв'язку $x_1, \ldots, x_n$. Собівартість одиниці послуги T_j дорівнює

$$S_j = a_{1j} d_1 + a_{2j} d_2 + \ldots + a_{nj} d_n = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} d_i \ \left(j=\overline{1,n}\right).$$

Чистий прибуток q_j від реалізації одиниці послуги T_j дорівнює різниці між її ціною для продажу c_j та собівартістю S_j:

$$q_j = c_j - S_j \ \left(j=\overline{1,n}\right).$$

Загальний чистий прибуток від реалізації всіх послуг:

$$W = \sum_{j=1}^{n} q_j x_j .$$

Математична модель і постановка задачі набувають вигляду

$$W=\sum_{j=1}^{n} q_j x_j \to \max_{X\in G}$$

за умови виконання обмежень:

$$0\le x_j\le K_j,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\ \left(i=\overline{1,m}\right),\ X=\left[x_1,\ldots,x_n\right]^T. \qquad (4.1)$$

Вираз (4.1) означає: знайти такі невід'ємні та обмежені зверху значення $x_j\ \left(j=\overline{1,n}\right)$, за яких задовольняються ресурсні обмеження та максимізується показник ефективності.

4.1.7. Задача про перевезення

Описова постановка задачі полягає в тому, що фірма, яка працює за технологією Інтернет-магазину, має на всій території України m складських приміщень $c_1,\ldots,c_m$ та n споживачів продукції $П_1,\ldots,П_n$ (рис. 4.1).

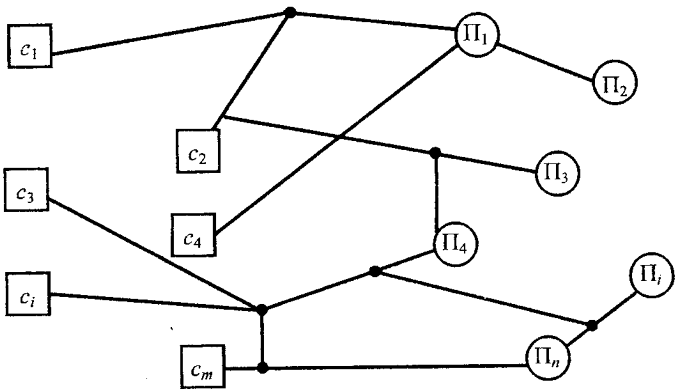


Рис. 4.1. Схема розташування складів $c_i\ \left(i=\overline{1,m}\right)$, споживачів $П_j\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ та мережі транспортних сполучень

Скласти план перевезень зі складів $c_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ до споживачів $П_j\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ деякого телекомунікаційного обладнання. На складах

$c_i\ \left(i=\overline{1,m}\right)$ є запаси цього обладнання в кількості a_i одиниць. Користувачі послуг Π_j Інтернет-магазину надали n замовлень відповідно на b_j одиниць обладнання. Замовлення можна виконати, якщо сума всіх замовлень не перевищує суми всіх запасів

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \leq \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

Склади пов'язані з пунктами споживання $\Pi_j\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ мережею доріг з визначеними тарифами перевезення. Вартість перевезення одиниці товару зі складу c_i до споживачів Π_j дорівнює $v_i\ \left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$. Потрібно скласти план перевезень, тобто вказати, з якого складу до якого споживача і яку кількість обладнання необхідно спрямувати так, щоб замовлення були виконані, а загальні витрати на всі перевезення були мінімальними.

Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо x_{ij} — кількість одиниць обладнання, яка спрямовується зі складу c_i у пункт Π_j.

Розв'язок (план перевезень) складається із $n \times m$ чисел, які подамо у вигляді прямокутної матриці:

$$P=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}=\left\{x_{ij}\right\}\Big|_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} .$$

Обрати такі невід'ємні значення змінних x_{ij}, які є елементами матриці перевезень P, щоб були виконані такі умови:

1. Місткість складу перевищувати не можна (це означає, що загальна кількість обладнання, взятого з кожного складу, не має перевищувати його запасів на цьому складі):

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i\ \left(i=\overline{1,m}\right). \tag{4.2}$$

2. Замовлення, сформовані споживачами, повинні бути виконані:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ \left(j = \overline{1,n}\right).$$

3. Загальну вартість перевезень обчислюють за формулою:

$$W = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_{ij} \ .$$

Постановка задачі формулюється так: знайти такий план перевезень P, щоб вартість W була мінімальною і всі обмеження виконані за умови, що сума всіх замовлень має дорівнювати сумі всіх запасів

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i ,$$

тобто обсяг запасів обладнання, що зберігатиметься на складі, дорівнюватиме сумі всіх замовлень; тоді нерівність (4.2) перетвориться в рівність:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Постановка задачі математичного програмування в цьому випадку набуває вигляду

$$W = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_{ij} \to \min_{X \in G}$$

за умови виконання обмежень:

$$x_{ij} \geq 0 \ \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right), \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Ця задача ще має назву «транспортна задача».

4.1.8. Задача про виробництво складного обладнання

Протягом часу T планується виробництво складного телекомунікаційного обладнання, кожен компонент якого складається з n елементів $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Замовлення на виготовлення цих елементів можна розмістити на m різних підприємствах $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$.

За інтервал часу T на підприємстві $П_i$ можливо виготовити a_{ij} елементів типу E_j $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$.

Зважаючи на те, що нас цікавить лише певний комплект елементів, який дозволяє виконати повне складання відповідного пристрою, сформулюємо мету операції: необхідно розподілити замовлення по підприємствах так, щоб кількість повних комплектів, виготовлених за час T, була максимальною. Розподілити замовлення означає визначити для кожного підприємства $П_i$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ проміжок часу x_{ij} від загального часу T, який це підприємство буде працювати, виготовляючи елемент E_j $(j=\overline{1,n})$.

Беручи до уваги, що

$$x_{ij}=\frac{\tau_{ij}}{T},$$

де τ_{ij} — час, який має витратити підприємство $П_i$ на виробництво елемента E_j, а також той факт, що

$$\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}\le T,$$

отримаємо обмеження на змінну x_{ij}:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le 1\ \left(i=\overline{1,m}\right).$$

Зауважимо, що при виконанні загальної задачі враховуються лише повні комплекти, що складаються з усіх елементів $E_1,\ldots,E_n$. Тому визначимо кількість повних комплектів, які зможуть виготовляти всі підприємства за час T. Зрозуміло, що загальна кількість елементів типу E_j обчислюється з виразу:

$$N_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_{ij}\ \left(j=\overline{1,n}\right).$$

Показник ефективності — це кількість повних комплектів, що дорівнює кількості елементів, яких виготовлено найменше:

$$W = \min_{j \in \{1,\dots,n\}} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} .$$

Математична постановка задачі набуває вигляду

$$W = \min_{j \in \{1,\dots,n\}} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} \to \max_{X \in G}$$

за умови виконання обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1 \left(i = \overline{1,m}\right), x_{ij} \ge 0 \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right),$$

$$X = \left[x_{11}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mn}\right]^T .$$

Із наведених прикладів видно, що більшість задач сформульовані з використанням лише лінійних функцій від елементів розв'язку як у показнику ефективності, так і в обмеженнях.

Нагадаємо, що елементами розв'язку є $x_1,\dots,x_n$ і за цими елементами необхідно було знайти максимум або мінімум показника ефективності. Такі задачі в математичному програмуванні утворюють окремий клас задач, що отримали назву *задачі лінійного програмування*.

Контрольні запитання та завдання

Наведіть та поясніть математичну модель та постановку задачі:

1) про розкрій;
2) про суміші;
3) про призначення;
4) оптимального розміщення;
5) про розподіл ресурсів;
6) про перевезення;
7) про виробництво складного обладнання.

Розділ 5
ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

5.1. Поняття про лінійне програмування

Найбільш дослідженим розділом математичного програмування є лінійне програмування.

Лінійне програмування вивчає важливу для практики задачу відшукання максимуму (мінімуму) лінійної функції за наявності обмежень у вигляді лінійних нерівностей або рівнянь.

Оскільки прикладна сторона математичного програмування — це оптимізація рішень взагалі і в техніці зокрема, то лінійне програмування ще називають *лінійною оптимізацією*. Алгоритми та програми, створені на базі методів лінійного програмування, що застосовуються в комп'ютерній техніці, утворюють так звані системи комп'ютерної математики. Ці системи є невід'ємними елементами сучасних інформаційних технологій пошуку оптимального розв'язку.

Розглянемо ключовий елемент цієї технології, а саме — методи розв'язання задач лінійного програмування.

5.2. Форми запису задачі лінійного програмування

Загальна задача лінійного програмування полягає в пошуку максимуму (мінімуму) лінійної функції

$$W = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \max_{X\in G}\ (\min) \tag{5.1}$$

за умови використання обмежень:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_jx_j \le b_i \quad \left(i = \overline{1,k}\right); \tag{5.2}$$

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_jx_j = b_i \quad \left(i = \overline{k+1,m}\right); \tag{5.3}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{5.4}$$

які утворюють область допустимих розв'язків G, яку має задовольняти вектор керувальних змінних $X=\left[x_1,\ldots,x_n\right]^T$.

Нагадаємо, що функція W називається показником ефективності або цільовою функцією, або критерієм оптимальності, або лінійною формою. Сукупність значень невідомих керувальних змінних $X=\left[x_1,\ldots,x_n\right]^T$, що задовольняють умови (5.2)–(5.4) задачі (5.1)–(5.4), має назву розв'язку. Розв'язок $X=\left[x_1,\ldots,x_n\right]^T$ називається *оптимальним*, якщо він максимізує (мінімізує) значення показника ефективності.

Якщо в задачі (5.1)–(5.4) вилучити обмеження (5.3), то задача лінійного програмування буде називатися *симетричною задачею лінійного програмування*.

Якщо в задачі (5.1)–(5.4) вилучити обмеження (5.2), то отримана задача лінійного програмування буде називатися *канонічною* або *основною задачею лінійного програмування*.

Виконуючи формальні перетворення, можна перейти від симетричної задачі лінійного програмування до основної, і навпаки. Перехід від нерівності до рівності виконується завдяки використанню допоміжних додатних змінних:

$$a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n\le b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n+y_i=b_i, \left(i=\overline{1,k}\right)\\ y_i\ge 0,\end{cases}$$

або

$$a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n\ge b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n-y_i=b_i, \left(i=\overline{1,k}\right),\\ y_i\ge 0.\end{cases}$$

Перехід від рівняння до нерівності виконується шляхом заміни одного рівняння двома нерівностями:

$$a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n=b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n\ge b_i,\\ a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n\le b_i \; \left(i=\overline{k+1,m}\right).\end{cases}$$

Зауважимо, що у випадку, коли за фізичним змістом задачі (5.1)–(5.4) деяка змінна x_s може мати будь-який знак, то необхідно ввести в дослідження дві допоміжні невід'ємні змінні і цю змінну замінити їх різницею:

$$x_s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x_s = u_s - v_s, \left(u_s \geq 0\ , v_s \geq 0\right).$$

5.3. Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування

Поставимо задачу лінійного програмування у вигляді

$$W = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max_{X \in G}(\min) \qquad (5.5)$$

за умови виконання обмежень G :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m,\ x_j \geq 0\ \left(j = \overline{1,n}\right). \end{cases} \qquad (5.6)$$

Кожна з нерівностей системи (5.5) в евклідовому просторі є півпростором із граничними гіперплощинами

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i\ \left(i = \overline{1,m}\right);$$

$$x_j = 0\ \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Припустімо, що система нерівностей (5.6) сумісна. Результат її розв'язання утворює ОДР, яка, як відомо з курсу лінійної алгебри, буде обмежена опуклим багатогранником, грані якого можуть збігатися з частинами гіперплощин, а вершини утворюватися як точки перетину цих гіперплощин. Будь-яка внутрішня і гранична точка ОДР є допустимим розв'язком задачі лінійного програмування. Якщо прирівняти показник ефективності до нуля, то отримаємо рівняння гіперплощини в n-вимірному евклідовому просторі

$$W = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = 0\ ,$$

яка проходить через початок координат і є перпендикулярною до вектора-градієнта $\vec{C} = \left[c_1, \ldots, c_n\right]^T$, складеного з коефіцієнтів показника ефективності. Напрям вектора $\vec{C}$ вказує напрям зростання функції W . Тому, для пошуку максимального значення функції W

необхідно пересувати гіперплощину в напрямі вектора $\vec{C}$ так, щоб ОДР і ця пересунута гіперплощина мали хоча б одну спільну точку.

На прикладі двовимірного евклідового простору проілюструємо типові випадки, що трапляються під час розв'язання задач лінійного програмування (рис. 5.1).

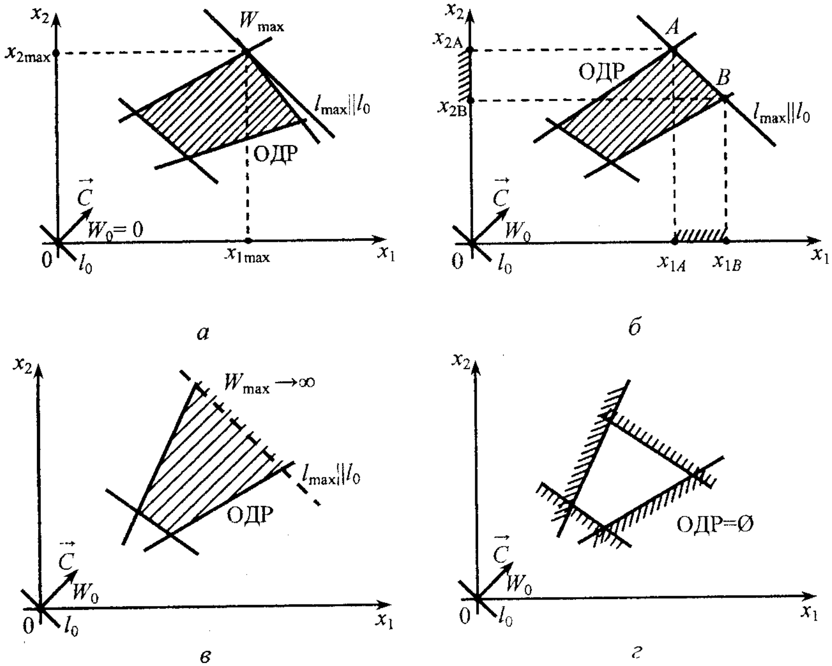


Рис. 5.1. Графічне зображення розташування основної площини $W = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ та ОДР:

а — задача лінійного програмування, яка має єдиний розв'язок; *б* — задача лінійного програмування, яка має безліч оптимальних розв'язків; *в* — задача лінійного програмування, яка має абстрактний розв'язок (цей розв'язок не має фізичного змісту, тому що не враховано всі ресурсні обмеження, які не дозволяють досягти нескінченно великого значення показника ефективності); *г* — система обмежень несумісна $G = \varnothing$: задача лінійного програмування, яка не має розв'язків

Вершини ОДР називають *опорними точками*, а розв'язки, що існують у цих вершинах — *опорними розв'язками*.

5.4. Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування

Приклад 5.1

Розглянемо приклад виробничого планування, при $n = 2$.

Припустімо, що телекомунікаційна фірма виготовляє вироби двох видів:

A — супутник зв'язку; B — навігаційний супутник.

Для їх виробництва використовують такі ресурси:

G — базові модулі сонячних батарей;

D — функціонально необхідні елементи життєзабезпечення супутника;

E — модулі системи орієнтації, стабілізації та навігації;

в об'ємах: $G = 600$, $D = 800$, $E = 240$ відповідно.

Норми витрат ресурсів наведено в табл. 5.1.

Прибуток від реалізації виробу — A становить 40 у.о., B — 50 у.о. Знайти обсяг виробництва, що забезпечує максимальний прибуток.

Таблиця 5.1

Норми витрат ресурсів

Норми витрат ресурсів	A	B
C	24	8
D	8	8
E	3	8

Побудова математичної моделі:

Позначимо $x_{1,2}$ — обсяги виробництва виробу A та B. Тоді прибуток фірми від реалізації x_1 виробу A та x_2 виробу B становитиме $W = 40x_1 + 50x_2$. Обмеження G (ОДР), пов'язані з ресурсами та фізичним змістом змінних, мають вигляд:

$$\begin{cases} 24x_1 + 8x_2 \le 600, \\ 8x_1 + 8x_2 \le 480, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 240, \\ x_1 \in N_0,\ x_2 \in N_0, \end{cases}$$

де $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Знехтуємо умовою цілочисельності розв'язків, а умову їх невід'ємності залишимо, тобто розв'яжемо так звану послаблену задачу.

Математична постановка задачі. Необхідно максимізувати показник ефективності

$$W = 40x_1 + 50x_2 \to \max_{x_{1,2} \in G}$$

за умови виконання записаних обмежень G.

Як бачимо, задача лінійного програмування сформульована як симетрична задача лінійного програмування.

Знайдемо ОДР цієї задачі. Для цього розв'яжемо нерівності відносно змінної x_2:

$$\begin{cases} x_2 \le -3x_1 + 75, \\ x_2 \le -x_1 + 60, \\ x_2 \le -3/8x_1 + 30, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Границі:

$$x_2 = -3x_1 + 75;$$

$$x_2 = -x_1 + 60;$$

$$x_2 = -\frac{3}{8}x_1 + 30;$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0.$$

Побудуємо ОДР (рис. 5.2) та визначимо положення основної прямої

$$W = 40x_1 + 50x_2 = 0 \Rightarrow l_0 : x_2 = -\frac{4}{5}x_1.$$

Знайдемо $W_{\max}$:

$$x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + \left(\frac{W}{50}\right) = -\frac{4}{5}x_1 + W^*,$$

де W^* — відрізок, який пряма відтинає на осі ординат.

Що більше значення W^*, то більше W, тому що $W^* = \dfrac{W}{50}$.

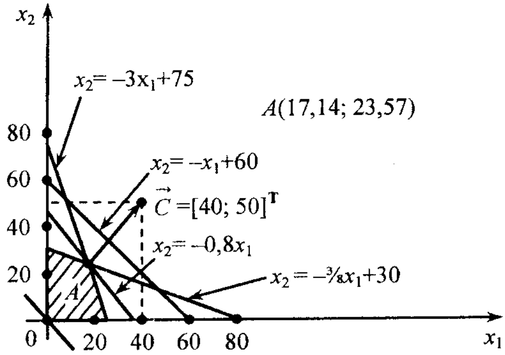


Рис. 5.2. Графік знаходження області допустимих значень

Визначимо $\left(x_{1_{max}}, x_{2_{max}}\right)$ як точку перетину границь:

$$\begin{cases} x_2 = -\dfrac{3}{8}x_1 + 30, \\ x_2 = -3x_1 + 75; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 17\dfrac{1}{7} \approx 17{,}14, \\ x_2 = 23\dfrac{4}{7} \approx 23{,}57; \end{cases}$$

$$W_{max} = 40 \cdot 17{,}14 + 50 \cdot 23{,}57 = 1864{,}1.$$

Знайдемо оптимальний розв'язок з урахуванням умови цілочисельності та невід'ємності змінних x_1 та x_2 (рис. 5.3).

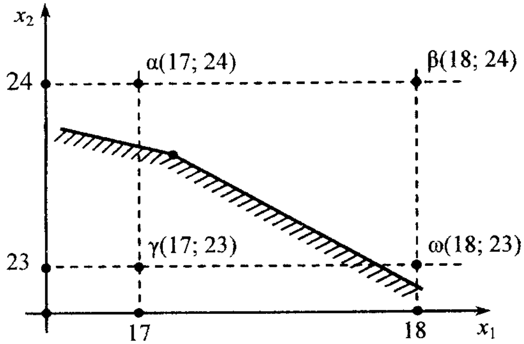


Рис. 5.3. Розташування оптимального розв'язку біля цілочислових значень

Із рис. 5.3 (із результатів обчислення можливості потрапляння $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ в ОДР) отримаємо такий результат: лише γ (17; 23) належить ОДР, тобто

$$W_{\max} = 40 \cdot 17 + 50 \cdot 23 = 1830 ,$$

і досягається це значення критерію при випуску продукції: 17 одиниць типу A і 23 одиниць типу B.

Приклад 5.2

Знайти оптимальний розв'язок основної задачі лінійного програмування:

$$W = -5x_1 - 2x_2 - 18 \to \min_{X \in G} ,$$

де ОДР G задана такими обмеженнями:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -5 , \\ x_1 + x_2 - x_5 = -4 , \\ x_2 + x_6 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_6 + 2x_7 = 7, \end{cases}$$

за умови, що $x_i \geq 0 \left(i = \overline{1,7} \right)$

$X = \left[x_1, \ldots, x_7 \right]^T \in \mathbb{R}^7$.

Кількість керувальних змінних $n = 7$, а кількість обмежень-рівностей $m = 5$, тому $n - m = 7 - 5 = 2$.

Отже, використаємо графічно-аналітичний метод розв'язання задачі лінійного програмування:

– побудуємо ОДР G;

– графічним способом знайдемо точку, що відповідає мінімальному значенню критерію W (оптимальний розв'язок);

– обчислимо оптимальний розв'язок та мінімальне значення критерію.

І. Дослідження системи рівнянь на сумісність.

Із курсу лінійної алгебри відомо: для сумісності системи лінійних рівнянь необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи r_A дорівнював рангу розширеної матриці r_{AB}.

Запишемо систему обмежень у матричному вигляді:

$$A \times X = B ,$$

де $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4\\ -5\\ -4\\ 5\\ 7\end{bmatrix}$, $[AB]=A\times\begin{bmatrix}4\\ -5\\ -4\\ 5\\ 7\end{bmatrix}$;

A — матриця системи; B — матриця вільних коефіцієнтів; $[AB]$ — розширена матриця системи.

Ранг матриці — це найбільший порядок відмінного від нуля мінора:

$$\Delta_1 = 1 \neq 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 0 + (-1)\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 -$$

$$-1\cdot(-1)\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot(-1)\cdot 0 = 5 \neq 0;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} = -1\cdot(-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = -1 \neq 0;$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 0\end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)^{2+4}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Отже,

$$r_A = m = 5.$$

Визначників більшого порядку немає, тому що матриця A є прямокутною матрицею розміру 5×7. Зрозуміло, що розширена матриця системи матиме розмір 5×8, а це означає, що найбільший порядок визначника розширеної матриці збігається з найбільшим порядком визначника системи і дорівнює 5. Висновок: $r_A = r_{AB} = 5$, система обмежень у формі рівностей сумісна.

II. Вибір вільних та базисних змінних.

Ураховуючи той факт, що $n = 7, m = 5$, тобто $n - m = 2$, можна обрати дві змінні, наприклад, x_1 та x_2 як вільні та п'ять змінних x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 як базисні. Тоді із системи обмежень знаходимо:

$$\begin{cases} x_3 = -x_1 + x_2 + 4 \ge 0, \\ x_4 = 3x_1 - 2x_2 + 1 \ge 0, \\ x_5 = x_1 + x_2 + 4 \ge 0, \\ x_6 = -x_2 + 5 \ge 0, \\ x_7 = \dfrac{1}{2}\left(-2x_1 + 2x_2 + x_6 + 7\right) = -x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + 6 \ge 0. \end{cases}$$

Беручи до уваги невід'ємність змінних, будуємо ОДР (рис. 5.4), аналітичний вираз для якої залежно від змінних x_1 та x_2 має вигляд:

$$\begin{cases} x_2 \ge x_1 - 4, \\ x_2 \le \dfrac{3}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}, \\ x_2 \ge -x_1 - 4, \\ x_2 \le 5, \\ x_2 \ge 2x_1 - 12, \ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Визначимо положення основної гіперплощини:

$$W = -5x_1 - 2x_2 - 18 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{5}{2}x_1 - \underbrace{\frac{W + 18}{2}}_{b};$$

$$\begin{cases} b = 0\ , \\ x_2 = -\dfrac{5}{2}x_1, \end{cases}$$

де $\vec{c} = \left[-5,-2\right]$ — вектор градієнта.

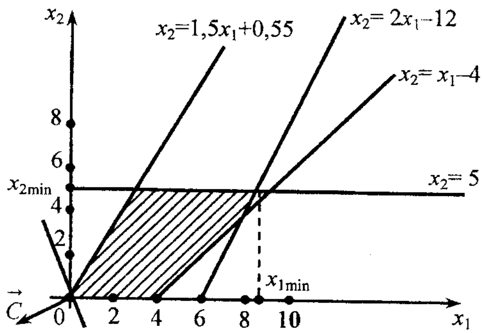


Рис. 5.4. Графічне зображення побудови області допустимих розв'язків

Оптимальне (мінімальне) значення показника ефективності дорівнює

$$W_{\min} = -70{,}5$$

і досягається в точці $\left(x_{1\min}; x_{2\min}\right) = \left\{\left(8{,}5;\, 5\right)\right\}$.

Висновок. Наведена в підрозд. 5.3 геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування та приклади дають підстави стверджувати таке.

Принцип 1. Оптимальний розв'язок, якщо він існує, розташований в одній з «опорних точок».

За аналітичною ознакою опорна точка — це така точка, у якій хоча б $k = n - m$ (n — кількість невідомих; m — кількість сумісних обмежень рівностей) змінних перетворюються на нуль.

Геометрично опорна точка визначається як кутова точка ОДР G.

Проілюструємо принцип 1 графічними образами (рис. 5.5) для випадку $k = n - m = 2$.

Зрозуміло, що в загальному випадку, коли $k = 2$, усі змінні $x_3, x_4, \ldots, x_n$ можна виразити через x_1 та x_2, що дозволяє критерій

$$W = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n,$$

і записати у вигляді:

$$W = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_0.$$

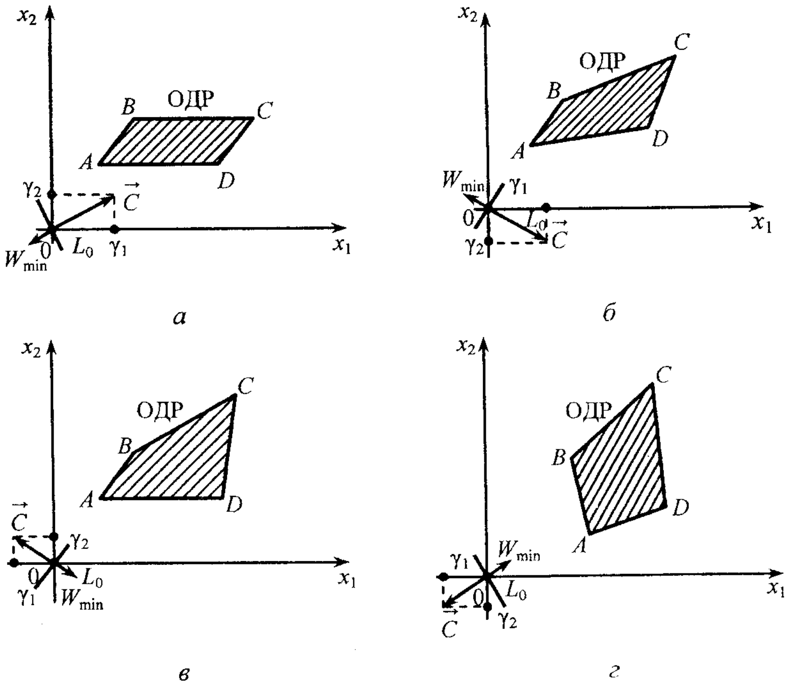


Рис. 5.5. Положення основної прямої та напряму її пересування під час пошуку найменшого значення в точці, яка задовольняє область допустимих розв'язків:
а — $\gamma_1, \gamma_2 > 0$; *б* — $\gamma_1 > 0, \gamma_2 < 0$; *в* — $\gamma_1 < 0, \gamma_2 > 0$; *г* — $\gamma_1, \gamma_2 < 0$

Припустімо, що необхідно знайти оптимальне значення критерію W. Якщо $\gamma_0 = 0$, то основна пряма L_0:

$$\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 = 0$$

проходить через початок координат.

Розглянемо за допомогою рис. 5.5 *а–г* напрями переміщення цієї прямої в площині двох змінних x_1, x_2, які дають змогу знайти найменше значення показника ефективності.

Принцип 2. Для пошуку оптимального розв'язку необхідно переходити від однієї опорної точки до іншої, пересуваючись у напрямі зменшення або збільшення показника ефективності залежно від вимог задачі лінійного програмування.

Принцип 3. Застосування геометричного методу розв'язання задачі лінійного програмування ускладнюється, якщо $n-m=3$. Геометричний метод зовсім втрачає придатність до розв'язання практичних задач при $n-m>3$. Тому у довільному випадку застосовуються числові методи пошуку екстремуму показника ефективності, які ґрунтуються на наведених вище принципах 1, 2.

Універсальним методом розв'язання задач лінійного програмування є *симплекс-метод.*

Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягає суть лінійного програмування?
2. Наведіть та поясніть форми запису задачі лінійного програмування.
3. Наведіть геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування.
4. У чому полягає суть графічного методу розв'язання задач лінійного програмування?
5. Що таке «опорні точки»?

Розділ 6

СИМПЛЕКС-МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

6.1. Поняття про симплекс-метод

У назві основного методу розв'язання основної задачі лінійного програмування використовується термін «симплекс», що означає n-вимірний тетраедр або n-вимірний трикутник.

Симплекс-метод визначення локального мінімуму лінійної або нелінійної функції кількох змінних запропоновано Нелдером і Мідом. Цей метод хоча і містить у своїй назві слово «симплекс», однак, не має нічого спільного із симплекс-методом розв'язання задачі лінійного програмування.

Суть методу Нелдера–Міда полягає у спеціальній процедурі обчислення координат вершин цього n-вимірного трикутника для наступної ітерації (наближення) залежно від результату порівняння значень показника ефективності у вершинах n-вимірного трикутника, координати яких можуть бути обчислені у попередній ітерації. «Найгірша» вершина, у якій показник ефективності набуває найбільшого значення, якщо відбувається пошук мінімального значення показника ефективності, відкидається і замінюється новою.

Координати нової вершини отримують, наприклад, «відображенням» старої вершини відносно прямої, що проходить через дві інші вершини (рис. 6.1).

Окрім «відображення», для пошуку координат нової вершини використовують так звані процедури «продовження», «стиснення» або «скорочення».

У результаті застосування зазначених прийомів та процедур значення показника ефективності у вершинах трикутників на кожній ітерації зменшується і при цьому зменшується «розмір» самого n-вимірного трикутника, стискаючись поступово до точки — мінімального значення показника ефективності (рис. 6.1).

Розглянемо симплекс-метод розв'язання задач лінійного програмування.

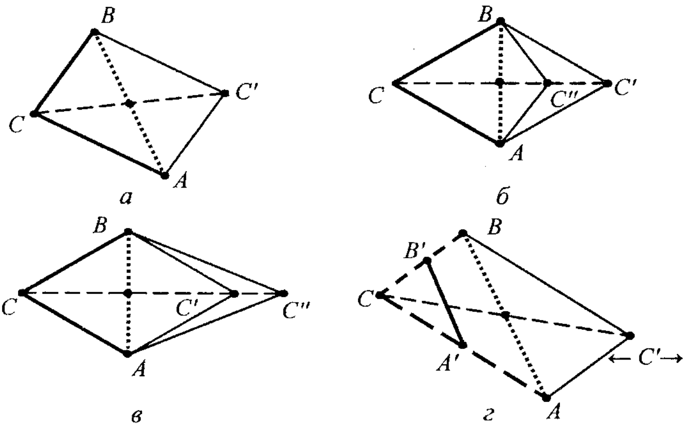


Рис. 6.1. Прийоми симплекс-методу Нелдера–Міда:
а — відображення; *б*, *г* — стиснення; *в* — розтягнення

6.2. Зведення стандартної форми обмежень нерівностей до обмежень рівностей (рівнянь обмежень) основної задачі лінійного програмування

Стандартною *формою обмежень* нерівностей вважається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

де $x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,n}\right)$. Усі нерівності системи лінійно незалежні.

Цю систему можна перетворити на обмеження рівності за допомогою додаткових невід'ємних змінних, а саме:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n, \end{cases}$$

де $x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,n}\right)$; $y_i \ge 0 \left(i = \overline{1,m}\right)$.

Якщо до записаних обмежень рівностей додати показник ефективності

$$W = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min_{\substack{x_j \ge 0\left(j=\overline{1,n}\right) \\ y_i \ge 0\left(i=\overline{1,m}\right)}},$$

який необхідно мінімізувати за невід'ємними змінними $x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,n}\right)$ та $y_i \ge 0 \left(i = \overline{1,m}\right)$, то отримаємо основну задачу лінійного програмування.

Отже, у результаті переходу до основної задачі лінійного програмування маємо:

а) рівняння обмежень, які задані в такій формі, де базисні (залежні) змінні $y_i \ge 0 \left(i = \overline{1,m}\right)$ виражені через незалежні (вільні) $x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,n}\right)$ змінні;

б) загальну кількість змінних, яка дорівнює $n+m$, де n, m — кількість початкових і додаткових змінних відповідно;

в) показник ефективності, який явно залежить від початкових змінних. Вважаємо, що всі коефіцієнти при додаткових змінних показника ефективності дорівнюють 0.

Приклад 6.1

Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$W = x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \min_{x_1, x_2, x_3 \ge 0}$$

за умови виконання обмежувальних нерівностей

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 5, \\ x_3 - 2x_2 \le -1, \\ x_5 - 2x_4 + x_1 \le -1, \\ x_5 - x_1 \le 0, \\ x_3 + 2x_1 + x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Потрібно звести задачу до вигляду основної задачі лінійного програмування.

1. Зведемо обмеження нерівності до стандартного вигляду:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 5, \\ x_3 - 2x_2 \le -1, \\ x_5 - 2x_4 + x_1 \le -1, \\ x_5 - x_1 \le 0, \\ -x_3 - 2x_1 - x_5 \le 0. \end{cases}$$

2. Використаємо для отримання обмежень рівностей додаткові змінні

$$\begin{cases} y_1 = 5 - (2x_1 - x_2 + x_3), \\ y_2 = -1 - (x_3 - 2x_2), \\ y_3 = -1 - (x_5 - 2x_4 + x_1), \\ y_4 = 0 - (x_5 - x_1), \\ y_5 = 0 - (-x_3 - 2x_1 - x_5); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5 - 2x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = -1 - x_3 + 2x_2, \\ y_3 = -1 - x_5 + 2x_4 - x_1, \\ y_4 = -x_5 + x_1, \\ y_5 = x_3 + 2x_1 + x_5. \end{cases}$$

3. Постановка задачі набуде вигляду

$$W = x_1 - 2x_2 - x_3 \to \min_{\substack{x_{1,2,3} \ge 0 \\ y_{1,2,3} \ge 0}}$$

за умови виконання обмежень, наведених у п. 2.

6.3. Основні прийоми та способи симплекс-методу розв'язання задач лінійного програмування

Для розв'язання основної задачі лінійного програмування використовуємо наведені в підрозд. 5.4 принципи побудови оптимального розв'язку.

Прийоми та способи симплекс-методу розв'язання задачі лінійного програмування викладені у припущенні, що в задачі лінійного програмування використовується n змінних та m незалежних лінійних рівнянь-обмежень.

Прийом 1. Вибір вільних змінних

Оберемо будь-які k змінних $k = n - m$ ($r = m$ — ранг системи обмежень рівностей) як вільні і представимо через них m базисних змінних, що залишилися. Припустімо, що як вільні обрані перші k змінних, тобто $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Інші m виразимо через них:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \alpha_{k+1,1}x_1 + \ldots + \alpha_{k+1,k}x_k + \beta_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n,1}x_1 + \ldots + \alpha_{n,k}x_k + \beta_n. \end{cases}$$

Тобто маємо

$$\underbrace{1, 2, \ldots, k,}_{k \text{ вільних змінних}} \quad \underbrace{k+1, \ldots, n}_{m \text{ базисних змінних}}.$$

Якщо вважати, що всі вільні змінні дорівнюють $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$, то отримаємо координати вершини симплексу:

$$x_{k+1} = \beta_{k+1}, \ldots, x_n = \beta_n.$$

Цей розв'язок може бути допустимим, якщо всі вільні коефіцієнти — невід'ємні, або недопустимим, якщо серед коефіцієнтів є хоча б одне від'ємне число.

Припустімо, що розв'язок є допустимим, тобто знайдено опорний розв'язок. При цьому виникає запитання, чи є розв'язок оптимальним. Для перевірки опорного розв'язку на оптимальність представимо показник ефективності як функцію, яка залежить від вільних змінних:

$$W = c_1x_1 + \ldots + c_kx_k + c_{k+1}x_{k+1} + \ldots + c_nx_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W = \gamma_0 + \gamma_1x_1 + \ldots + \gamma_kx_k \to \min_{x_j \geq 0, \left(j=\overline{1,k}\right)}.$$

Якщо в опорному розв'язку 1, то $W = \gamma_0$.

Проаналізуємо, чи можна зменшити показник ефективності, збільшивши будь-які змінні $x_1, \ldots, x_k$ (зменшувати їх не можна, тому що всі ці змінні при отриманні оптимального розв'язку дорівнюють 0, а від'ємні значення недопустимі).

Якщо всі коефіцієнти $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ додатні, то, збільшуючи будь-які змінні $x_1, \ldots, x_k$ порівняно з 0, не можна зменшити показник ефективності. Тому знайдений опорний розв'язок є оптимальним.

Прийом 2. Покращення опорного розв'язку

Якщо серед коефіцієнтів $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ є від'ємні, то, збільшуючи ті змінні, за яких коефіцієнти від'ємні, досягаємо покращення розв'язку, тобто зменшення показника ефективності.

Припустімо, що є єдиний від'ємний коефіцієнт γ_1. Необхідно виконати дві дії:

1. Збільшити x_1, але так, щоб жодна з базисних змінних $x_{k+1},\ldots,x_n$ не стала від'ємною, якщо будь-який із коефіцієнтів $\alpha_{k+11},\ldots,\alpha_{n1}$ при x_1 від'ємний. Збільшувати x_1 можна без обмежень, якщо всі коефіцієнти при x_1 у виразах для обчислення базисних змінних додатні. Але в цьому випадку показник ефективності W прямує до $-\infty$ при $x_1 \to +\infty$, тобто оптимального розв'язку, який має фізичний зміст, не існує. Існує абстрактний розв'язок. Розв'язання задачі припиняється, необхідно переформулювати постановку задачі.

2. Вилучити x_1 зі списку вільних змінних і вставити у список базисних, а зі списку базисних вилучити ту змінну, наприклад x_L, яка першою досягне нуля при збільшенні x_1. Запишемо рівняння для x_L:

$$x_L = \alpha_{L1}x_1 + \ldots + \alpha_{Lk}x_k + \beta_L ,$$

у якому візьмемо $x_2 = 0, \ldots, x_k = 0,\ x_L = 0$.

Тоді

$$x_1 = -\frac{\beta_L}{\alpha_{L1}} \geq 0 \text{, тому що } \alpha_{L1} < 0,\ \beta_L \geq 0 .$$

Отримане значення x_1 — це те значення, за якого $x_L = 0$. Взагалі першою досягне нуля та змінна зі складу $x_{k+1},\ldots,x_n$, для якої $-\dfrac{\beta_L}{\alpha_{L1}}$ або $\left|\dfrac{\beta_L}{\alpha_{L1}}\right|$ буде найменшим $\left(L \in [k+1, n],\ L \in \mathbb{N}\right)$.

Припустімо, що це x_r, $r \in [k+1, n]$, $r \in \mathbb{N}$.

Прийом 3. Зміна складу вільних змінних

Обираємо новий склад вільних $x_2, x_3, \ldots, x_k, x_r$ та базисних $x_1, x_{k+1}, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n$ змінних. Обчислюємо нові базисні змінні через нові вільні змінні та перевіряємо умову невід'ємності базисних змінних при нульових вільних змінних, тобто з'ясуємо, чи є розв'язок опорним. Перевіримо отримані опорні розв'язки на оптимальність, використовуючи прийоми 1, 2.

Висновок. Практична реалізація симплекс-методу потребує розроблення двох алгоритмів:

1) визначення опорного розв'язку основної задачі лінійного програмування;

2) визначення оптимального розв'язку основної задачі лінійного програмування.

Приклад 6.2 Пошук оптимального розв'язку шляхом поступового покращення результату з використанням трьох описаних вище прийомів.

Постановка задачі:

$$W = 5x_1 - 2x_3 \rightarrow \min_{X \in G} \tag{6.1}$$

за умови виконання обмежень G:

$$\begin{cases} -5x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2, \\ -x_1 + x_3 + x_4 \le 5, \\ 3x_1 + 5x_4 \le 7, \\ x_i \ge 0, (i = 1,2,3,4), X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T. \end{cases}$$

Методика розв'язання задачі:

1) виконати перехід до стандартного вигляду основної задачі лінійного програмування;

2) перевірити систему обмежень-рівностей на сумісність;

3) виконати обчислення оптимального розв'язку із використанням прийомів симплекс-методу.

1. Перехід до стандартного вигляду задачі лінійного програмування:

$$(6.1) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1 - x_2 + 2x_3 + y_1 = 2, \\ -x_1 + x_3 + x_4 + y_2 = 5, \\ 3x_1 + 5x_4 + y_3 = 7, \\ x_{1,2,3,4} \ge 0, \; y_{1,2,3} \ge 0, \end{cases} \tag{6.2}$$

де (6.1) задає ОДР G.

2. Перевірка обмежень-рівностей на сумісність:

$$(6.2) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1 - 1x_2 + 2x_3 + 0x_4 + y_1 = 2, \\ -1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 + y_2 = 5, \\ -3x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 5x_4 + y_3 = 7, \end{cases}$$

де

$$A=\begin{bmatrix}-5 & -1 & 2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ -3 & 0 & 0 & 5 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2\\5\\7\end{bmatrix}.$$

Ранг матриці $A: r_A = 3$, що дорівнює кількості обмежень-рівностей m. Отже, система обмежень сумісна, лінійно залежних обмежень не має.

Зауважимо, що зазвичай сумісності та незалежності обмежень можна досягти під час побудови математичної моделі задачі, якщо враховувати фізичний зміст цих обмежень.

3. Обчислення оптимального розв'язку задачі лінійного програмування симплекс-методом почнемо з вибору базисних та вільних змінних:

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 2, \\ y_2 = x_1 - x_3 - x_4 + 5, \\ y_3 = 3x_1 - 5x_4 + 7, \\ x_{1,2,3,4} \ge 0, \\ y_{1,2,3} \ge 0, \end{cases} \tag{6.3}$$

де система (6.3) задає ОДР G, на якій оптимізується критерій

$$W = 5x_1 - 2x_3 \to \min_{\left[X^T\,Y^T\right]^T \in G},$$

$$X = \left[x_1, x_2, x_3, x_4\right]^T, Y = \left[y_1, y_2, y_3\right]^T.$$

Загальна кількість змінних у переформульованій задачі $n = 7$, $m = 3$ — кількість сумісних, лінійно незалежних обмежень-рівностей. Кількість вільних змінних $k = 7 - 3 = 4$.

Прийом 1. Вибір вільних змінних

Обираємо як вільні змінні $x_{1,2,3,4}$ і припускаємо, що вони дорівнюють нулю. В результаті отримаємо розв'язок:

$$X_1 = \left[x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0; x_4 = 0; y_1 = 2; y_2 = 5; y_3 = 7\right],$$

який можна вважати опорним.

При цьому $W\left(X_1\right) = 0$.

Прийом 2. Покращення опорного розв'язку

2.1. Коефіцієнт при x_3 виразу для обчислення показника ефективності від'ємний, тому за рахунок збільшення x_3 можна зменшити W. Обираємо як нову вільну змінну ту змінну (серед $y_{1,2,3}$), для якої модуль відношення вільних коефіцієнтів до коефіцієнта при x_3 найменший:

$$\left|\frac{2}{-2}\right| = 1 < \left|\frac{5}{-1}\right|.$$

Обираємо y_1. Таким чином, вільними змінними є x_1, x_2, x_4, y_1. Обчислюємо нові базисні змінні x_3, y_2, y_3:

$$\begin{cases} x_3 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 1, \\ y_2 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{3}{2x_1} - \frac{1}{2}x_2 - x_4 + 4, \\ y_3 = 3x_1 - 5x_4 + 7. \end{cases}$$

Перевіряємо, чи є знайдений розв'язок опорним.

$$X_2 = \left[y_1 = 0; x_{1,2} = 0; x_3 = 1; y_2 = 4; y_3 = 7\right].$$

Отже, X_2 — опорний розв'язок. Спостерігається зменшення значення критерію:

$$W(X_2) = y_1 - x_2 - 2 = -2.$$

2.2. Коефіцієнт при x_2 від'ємний. Можна зменшити значення показника ефективності завдяки збільшенню x_2. Аналогічно викладеному в п. 2.1 визначаємо нові вільні та базисні змінні:

$$\begin{cases} x_3 = -y_2 + x_1 - x_4 + 5, \\ x_2 = y_1 - 2y_2 - 3x_1 - 2x_1 - 2x_4 + 8, \\ y_3 = 3x_1 - 5x_4 + 7, \end{cases}$$

$$X_3 = \left[\underbrace{y_1 = 0; x_1 = 0; x_4 = 0; y_2 = 0}_{\text{вільні змінні}};\ \underbrace{x_2 = 8; x_3 = 5; y_3 = 7}_{\text{базисні змінні}}\right],$$

$$W(X_3) = 2y_2 + 3x_1 + 2x_4 - 10 = -10.$$

Усі коефіцієнти при вільних змінних у виразі для обчислення показника ефективності невід'ємні, тому досягати зменшення показника ефективності за рахунок додаткових вільних змінних неможна. Глобальний мінімум досягнуто $W = -10$ у точці

$$x_1 = 0,\ x_4 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ x_2 = 8,\ x_3 = 5,\ y_3 = 7.$$

Зауваження 6.1 У прикладах 6.1, 6.2 при застосуванні прийомів симплекс-методу отримали невід'ємні опорні розв'язки. У більшості практичних випадків трапляються ситуації, коли за обраних вільних змінних з нульовими значеннями отримують від'ємні значення базисних змінних, тобто не виконується умова невід'ємності змінних. Тому доцільно розглянути спеціальний алгоритм обчислення опорного розв'язку.

Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягає суть симплекс-методу?
2. Наведіть та поясніть процедуру зведення стандартної форми обмежень нерівностей до обмежень рівностей основної задачі лінійного програмування.
3. Поясніть основні прийоми та способи симплекс-методу розв'язання задач лінійного програмування.
4. Наведіть та поясніть методику розв'язання задач лінійного програмування на основі симплекс-методу.
5. Яка система обмежень вважається стандартною формою обмежень нерівностей?
6. У чому полягає суть методу Нелдера–Міда?
7. Наведіть приклади графічного зображення прийомів симплекс-методу Нелдера–Міда.

Розділ 7

АЛГОРИТМ ПОШУКУ ОПОРНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

7.1. Табличний алгоритм заміни базисних змінних (стандартні таблиці)

Як було показано в розд. 6, прийоми реалізації симплекс-методу розв'язання задачі лінійного програмування ґрунтуються на багаторазових перераховуваннях системи рівнянь обмежень основної задачі лінійного програмування відносно нових вільних та базисних змінних. Для пришвидшення цих розрахунків розглянемо спеціальний табличний алгоритм. Припустімо, що потрібно виконати мінімізацію показника ефективності, представленого лінійною функцією

$$W = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \min_{x_{1,2,3} \geq 0}$$

за умови виконання обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3. \end{cases}$$

Подамо цю задачу у вигляді основної задачі лінійного програмування у зручній для застосування стандартизованого табличного алгоритму формі:

$$W = c_0 - \left(\left(-c_1\right)x_1 + \left(-c_2\right)x_2 + \left(-c_3\right)x_3\right) =$$

$$= c_0 - \left(\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_3x_3\right) \to \min_{x_{1,2,3} \geq 0};$$

$$\begin{cases} y_1 = b_1 - \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\right), \\ y_2 = b_2 - \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\right), \\ y_3 = b_3 - \left(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\right), \end{cases}$$

де $\gamma_1 = -c_1$, $\gamma_2 = -c_2$, $\gamma_3 = -c_3$.

Для цього складемо табл. 7.1 і 7.2.

Таблиця 7.1

Вихідне подання інформації

Показник ефективності, базисні змінні	Вільний елемент	Коефіцієнти при вільних змінних		
		x_1	x_2	x_3
W	c_0	γ_1	γ_2	γ_3
y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y_2	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
y_3	b_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Таблиця 7.2

Формули перерахунку коефіцієнтів після заміни змінних

Показник ефективності, базисні змінні	Вільний елемент	Коефіцієнти при вільних змінних		
		x_1	y_3	x_3
W	$c_0+b_3\left(-\frac{\gamma_2}{a_{32}}\right)$	$\gamma_0+a_{31}\left(-\frac{\gamma_2}{a_{32}}\right)$	$-\frac{\gamma_2}{a_{32}}$	$\gamma_3+a_{33}\left(-\frac{\gamma_2}{a_{32}}\right)$
y_1	$b_1+b_3\left(-\frac{a_{12}}{a_{32}}\right)$	$a_{11}+a_{31}\left(-\frac{a_{12}}{a_{32}}\right)$	$-\frac{a_{12}}{a_{32}}$	$a_{13}+a_{33}\left(-\frac{a_{12}}{a_{32}}\right)$
y_2	$b_2+b_3\left(-\frac{a_{22}}{a_{32}}\right)$	$a_{21}+a_{31}\left(-\frac{a_{22}}{a_{32}}\right)$	$-\frac{a_{22}}{a_{32}}$	$a_{23}+a_{33}\left(-\frac{a_{22}}{a_{32}}\right)$
x_2	$b_3\left(\frac{1}{a_{32}}\right)$	$a_{31}\left(\frac{1}{a_{32}}\right)$	$\frac{1}{a_{32}}$	$a_{33}\left(\frac{1}{a_{32}}\right)$

Припустімо, що потрібно виконати заміну базисної змінної y_3 на x_2 і, навпаки, вільної змінної x_2 на y_3. В аналітичному вигляді така заміна змінних виконується з використанням рівняння

$$x_2=\frac{b_3}{a_{32}}-\left(\frac{a_{31}}{a_{32}}\cdot x_1+\frac{1}{a_{32}}\cdot y_3+\frac{a_{33}}{a_{32}}\cdot x_3\right),$$

у якому елемент a_{32} називають *розв'язувальним елементом* і, відповідно, у стандартній таблиці рядок та стовпець називають *розв'язувальними рядком і стовпцем* (табл. 7.2). Якщо як вираз для x_2

підставити у формули для обчислення W, y_1, y_2, то отримаємо таблицю перерахунку коефіцієнтів рівнянь обмежень для нових базисних змінних y_1, y_2, x_2 та нових вільних змінних x_1, y_3, x_3 (табл. 7.2).

У загальному випадку алгоритм перетворення x_j на y_i і навпаки з використанням стандартної табл. 7.2 передбачає такі дії:

1. Виділення в стандартній таблиці розв'язувального елемента a_{ij}. Обчислення оберненої величини $\lambda = 1/a_{ij}$. Для наочності обчислень пропонується записати λ у правому нижньому куті фрагмента таблиці, де розташований розв'язувальний елемент.

2. Множення всіх елементів розв'язувального рядка (окрім a_{ij}) на λ. Результат записується у відповідному фрагменті табл. 7.2 праворуч знизу.

3. Множення всіх елементів розв'язувального стовпця (окрім a_{ij}) на $-\lambda$. Результат записується у відповідному фрагменті табл. 7.2 праворуч знизу.

4. Виділення в розв'язувальному рядку всіх попередніх, а у розв'язувальному стовпці — усіх нових елементів за винятком самого розв'язувального елемента a_{ij}.

5. Обчислення добутку нового елемента розв'язувального стовпця і попереднього елемента розв'язувального рядка для всіх попередніх елементів таблиці, крім тих, що розташовані у розв'язувальних рядку та стовпці. Добуток записується у відповідний фрагмент табл. 7.2.

6. Формулювання остаточного результату:

а) замінити x_j на y_i і навпаки;

б) залишити у розв'язувальних стовпці та рядку лише нижні елементи фрагментів табл. 7.2;

в) замінити інші елементи таблиці сумою попередніх чисел та результатів розрахунку згідно з п. 5.

Приклад 7.1 Замінити змінні у такій задачі лінійного програмування:

$$W = -x_1 - x_3 + 2 \to \min_{x_{1,2,3} \geq 0}$$

за виконання умов: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 5 \ge 0, \\ 2x_1 - x_2 + 1 \ge 0, \\ 2x_2 - x_3 - 1 \ge 0. \end{cases}$

Переформулюємо критерій та обмеження нерівності у вигляді:

$$W = 2 - (x_1 + x_3) \to \min_{\substack{x_{1,2,3} \ge 0 \\ y_{1,2,3} \ge 0}} ;$$

$$\begin{cases} y_1 = -5 - (-x_1 + x_2 - 2x_3), \\ y_2 = 1 - (-2x_1 + x_2), \\ y_3 = -1 - (-2x_2 + x_3). \end{cases}$$

Подамо вихідні дані у вигляді табл. 7.3 та виконаємо заміну змінних, наприклад y_2 на x_1 у рядку і x_1 на y_2 у стовпці використанням наведеного вище алгоритму перетворення x_j в y_i і навпаки.

Таблиця 7.3

Вихідні дані

Показник ефективності, базисні змінні	Вільний елемент	Коефіцієнти при вільних змінних		
		$x_1 \to y_2$	x_2	x_3
W	2 1/2	1 $\boxed{1/2}$	0 1/2	–1 0
y_1	–5 –1/2	–1 $\boxed{-1/2}$	1 –1/2	–2 0
$y_2 \leftrightarrow x_1$	$\boxed{1}$ –1/2	–2 –1/2	$\boxed{1}$ –1/2	$\boxed{0}$ 0
y_3	–1 0	0 0	–2 0	1 0

Результат заміни змінних наведено в табл. 7.4.

Таблиця 7.4

Результат заміни змінних

Показник ефективності, базисні змінні	Вільний елемент	Коефіцієнти при вільних змінних		
		x_2	x_2	x_3
W	5/2	1/2	1/2	1
y_1	–11/2	–1/2	1/2	–2
x_1	–1/2	–1/2	–1/2	0
y_3	–1	0	–2	1

7.2. Алгоритм пошуку опорного розв'язку за допомогою стандартних таблиць

Основна задача лінійного програмування у стандартній формі має вигляд:

$$W = c_0 - (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_n x_n) \to \min_{\substack{x_i (i=\overline{1,n}) \\ y_j (j=\overline{1,m})}}$$

за умови виконання обмежень рівностей:

$$y_j = b_j - (a_{j1} + a_{j2} + \ldots + a_{jn} x_n),\ j = \overline{1,m}.$$

У кожній вершині ОДР знаходяться опорні розв'язки, для яких характерним є те, що хоча б n змінних дорівнюють нулю, а інші змінні невід'ємні.

Покладемо $x_i = 0\ (i = \overline{1,n})$, $y_j = b_j\ (j = \overline{1,m})$. Тоді ознакою того, що записаний вище розв'язок

$$\begin{cases} x_i = 0\ (i = \overline{1,n}), \\ y_j = b_j\ (j = \overline{1,m}) \end{cases}$$

є опорним, слід вважати невід'ємність вільних елементів $b_j \geq 0\ (j = \overline{1,m})$.

Якщо ця умова не виконується, то необхідно перейти від розв'язку, що не задовольняє ОДР, до опорного розв'язку. Алгоритм пошуку опорного розв'язку має призводити на кожній ітерації або до зменшення кількості від'ємних вільних коефіцієнтів обмежень рівностей, які задають рівняння для пошуку базисних змінних, або зменшувати модуль цих від'ємних коефіцієнтів, і тим самим поступово наближати базисні змінні до межі ОДР.

Розглянемо один із таких алгоритмів, який використовує стандартні таблиці.

Прийом 1. Дослідження ОДР на існування

Знайти в стандартній таблиці від'ємний вільний елемент для будь-якої базисної змінної. Якщо в знайденому рядку немає від'ємних коефіцієнтів при вільних змінних, то це ознака відсутності розв'язку, тому що

$$y_j = b_j - \left(a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n\right) < 0$$

при $b_j < 0$ та $x_i \geq 0$, а змінна y_j має бути невід'ємною. Виконати умову невід'ємності неможливо.

Прийом 2. Пошук розв'язувального елемента

Припустімо, що в рядку з від'ємним вільним коефіцієнтом є від'ємний коефіцієнт при деякій вільній змінній. Розглядаючи стовпець із від'ємним коефіцієнтом при деякій вільній змінній, знаходимо в ньому елемент з вільним коефіцієнтом з таким самим знаком, але відношення вільного коефіцієнта до нього має бути мінімальним. Цей елемент і є розв'язувальним.

Прийом 3. Заміна змінних із застосуванням стандартних таблиць

Розглянемо на прикладі застосування алгоритму пошуку опорного розв'язку з використанням стандартних таблиць.

Приклад 7.2 Знайти, якщо він існує, опорний розв'язок основної задачі лінійного програмування з такими рівняннями-обмеженнями:

$$\begin{cases} y_1 = 1 - \left(-x_1 - 2x_2 + x_3\right), \\ y_2 = -5 - (-2x_1 + x_2 - x_3), \\ y_3 = 2 - \left(x_1 + x_2\right), \\ y_4 = 1 - \left(-x_2 + x_3\right). \end{cases}$$

Запишемо вихідні дані у вигляді симплекс-таблиці (табл. 7.5).

Таблиця 7.5

Вихідні дані

Показник ефективності, базисні змінні	Вільний елемент	Коефіцієнти при вільних змінних		
		$x_1 \rightarrow y_3$	x_2	x_3
W	1 2	–1 $\boxed{1}$	–2 1	1 0
y_1	–5 4	–2 $\boxed{2}$	1 2	–1 0
$y_3 \leftrightarrow x_1$	$\boxed{2}$ 2	1 1	$\boxed{1}$ 1	$\boxed{0}$ 0
y_4	1 0	0 $\boxed{0}$	–1 0	1 0

Обираємо другий рядок та перший стовпець, тому що у другому рядку є від'ємний коефіцієнт -2 та від'ємний вільний коефіцієнт -5. Зупиняємося на стовпці з коефіцієнтом -2 та обчислюємо відношення $\dfrac{-5}{-2} = 2,5 \geq \dfrac{2}{1} = 2$, тобто як розв'язувальний елемент обираємо $a_{31} = 1$.

Заповнюємо табл. 7.6, яка буде таблицею першої ітерації до опорного розв'язку.

Таблиця 7.6

Перша ітерація

Базисні змінні	Вільний елемент	Коефіцієнти при вільних змінних		
		y_3	x_2	$x_3 \leftrightarrow y_2$
y_1	3 / −1	1 / 2	−1 / 3	1 / $\boxed{1}$
$x_2 \leftrightarrow y_3$	$\boxed{-1}$ / 1	$\boxed{2}$ / −2	$\boxed{3}$ / −3	−1 / −1
x_1	2 / 0	1 / 0	1 / 0	0 / $\boxed{0}$
y_4	1 / −1	0 / 2	−1 / 3	1 / $\boxed{1}$

Повторно застосовуємо алгоритм пошуку опорного розв'язку з використанням стандартних таблиць (табл. 7.6).

Заповнюємо табл. 7.7, яка буде таблицею другої ітерації до опорного розв'язку.

Таблиця 7.7

Друга ітерація

Базисні змінні	Вільний елемент	Коефіцієнти при вільних змінних		
		y_3	x_2	y_2
y_1	2	3	2	1
x_3	1	−2	−3	−1
x_1	2	1	1	0
y_4	0	2	2	1

У табл. 7.7 усі вільні елементи невід'ємні. Опорний розв'язок знайдено.

Приклад 7.3 Знайти опорний розв'язок задачі лінійного програмування з такими рівняннями-обмеженнями:

$$\begin{cases} y_1 = -4 - \left(-x_1 + 2x_2\right), \\ y_2 = -3 - \left(x_1 - x_2 + x_3\right), \\ y_3 = -10 - (2x_1 - x_2 + x_3), \\ y_4 = -2 - \left(-x_1 + x_2\right). \end{cases}$$

Обираємо, наприклад, перший рядок та перший стовпець із від'ємним коефіцієнтом (табл. 7.8).

Таблиця 7.8

Вихідні дані

Базисні змінні	Вільний елемент	Коефіцієнти при вільних змінних		
		$x_1 \leftrightarrow y_4$	x_2	x_3
y_1	-4 2	-1 $\boxed{-1}$	2 -1	0 0
y_2	-3 -2	1 $\boxed{1}$	-1 1	1 0
y_3	-10 -4	2 $\boxed{2}$	-1 2	1 0
$y_4 \leftrightarrow x_1$	$\boxed{-2}$ 2	-1 -1	$\boxed{1}$ -1	$\boxed{0}$ 0

Як на початку розв'язання задачі лінійного програмування, так і в процесі отримання кожної наступної ітерації контролюємо виникнення умови, коли вільний елемент будь-якої базисної змінної від'ємний, а серед коефіцієнтів при вільних змінних немає від'ємного.

Так, у рядках 2–3 табл. 7.9 маємо:

$$y_2 = -5 - \left(y_4 + x_3\right) < 0\ ,$$

$$y_3 = -14 - \left(2y_4 + x_2 + x_3\right) < 0\ \forall x_2, x_3 \geq 0, y_4 \geq 0.$$

Таблиця 7.9

Перша ітерація

Базисні змінні	Вільний елемент	Коефіцієнти при вільних змінних		
		y_4	x_2	x_3
y_1	-2	-1	1	0
y_2	-5	1	0	1
y_3	-14	2	1	1
x_1	2	-1	-1	0

Тобто розв'язку, який належить ОДР за ознакою невід'ємності керувальних змінних, не існує. Отже, область допустимих розв'язків — порожня множина. Як бачимо, з'ясування питання про існування допустимих розв'язків відбувається в процесі пошуку опорного розв'язку.

Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягає суть опорних розв'язків задачі лінійного програмування?
2. Поясніть, у чому полягає суть табличного алгоритму заміни базисних змінних.
3. Розкрийте суть поняття «розв'язувальний елемент».
4. Наведіть та поясніть алгоритм пошуку опорного розв'язку за допомогою стандартних таблиць.
5. Охарактеризуйте основні прийоми алгоритму пошуку опорного розв'язку за допомогою стандартних таблиць.

Розділ 8

АЛГОРИТМ ПОШУКУ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

8.1. Алгоритм пошуку оптимального розв'язку за допомогою стандартних таблиць

У розд. 6, 7 розглянуто основні складові (прийоми симплекс-методу) пошуку оптимального опорного розв'язку задачі лінійного програмування, тобто задачі знаходження мінімуму показника ефективності:

$$W = c_0 - \left(\gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_n x_n\right) \to \min_{\substack{x_i \ge 0 \left(i=\overline{1,n}\right) \\ y_j \ge 0 \left(j=\overline{1,m}\right)}}$$

при виконанні рівнянь-обмежень

$$y_i = b_j - \left(a_{j1} x_1 + \ldots + a_{jn} x_n\right),\ j = \overline{1,m}\,.$$

Покажемо на прикладі, як у зручній формі табличного алгоритму заміни змінних виконувати оптимізацію, тобто розв'язувати основну задачу лінійного програмування в цілому.

Приклад 8.1 Розв'язати основну задачу лінійного програмування

$$W = 0 - \left(-x_1 + 2x_2 + x_3\right) \to \min_{\substack{x_{1,2,3} \geq 0 \\ y_{1,2,3,4} \geq 0}}$$

при виконанні рівнянь-обмежень

$$\begin{cases} y_1 = 2 - (x_1 + x_2 - 2x_3), \\ y_2 = 1 - \left(x_1 - x_2 + x_3\right), \\ y_3 = 5 - \left(x_2 + x_3\right), \\ y_4 = 2 - (2x_1 - x_2). \end{cases}$$

При $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $y_1 = 2, y_2 = 1, y_3 = 5, y_4 = 2$, тобто опорний розв'язок існує, але він не є оптимальним, тому що коефіцієнти при x_2 та x_3 у виразі для W додатні. Це означає, що за рахунок збільшення x_2 або x_3 можна зменшити значення показника ефективності. Застосуємо алгоритм стандартних таблиць (табл. 8.1).

Таблиця 8.1

Вихідні дані

Показник ефективності, базисні змінні	Вільний елемент	Коефіцієнти при вільних змінних		
		x_1	x_2	$x_3 \leftrightarrow y_2$
W	0 / −1	−1 / −1	2 / 1	1 / $\boxed{-1}$
y_1	2 / 2	1 / 2	1 / −2	−2 / $\boxed{2}$
$y_2 \leftrightarrow x_3$	$\boxed{1}$ / 1	$\boxed{1}$ / 1	$\boxed{-1}$ / −1	1 / 1
y_3	5 / −1	0 / −1	1 / 1	1 / $\boxed{-1}$
y_4	2 / 0	2 / 0	−1 / 0	0 / $\boxed{0}$

У першому рядку табл. 8.1, що відображає вихідні дані, показник ефективності має додатні коефіцієнти при вільних змінних x_2 та x_3. Тому можна обрати будь-який із стовпців як розв'язувальний. Нехай це буде стовпець із x_3, тобто x_3 вилучимо зі складу вільних змінних. Розв'язувальний елемент в обраному стовпці повинен бути додатний. Таких коефіцієнтів два: один у рядку з y_2, другий у рядку з y_3. Оберемо як розв'язувальний той елемент, для якого відношення вільного елемента до елемента, обраного як розв'язувальний, найменше (табл. 8.1).

У табл. 8.2, отриманій після першої ітерації, тільки при x_2 коефіцієнт додатний, тому x_2 нетреба виводити зі складу вільних змінних. Як розв'язувальний елемент обираємо $a_{32} = 2$ (табл. 8.2).

Таблиця 8.2

Перша ітерація

Показник ефективності, базисні змінні	Вільний елемент	Коефіцієнти при вільних змінних		
		x_1	$x_2 \leftrightarrow y_3$	y_2
W	-1 -6	-2 $3/2$	3 $\boxed{-3/2}$	-1 $3/2$
y_1	4 2	3 $-1/2$	-1 $\boxed{1/2}$	2 $-1/2$
x_3	1 2	1 $-1/2$	-1 $\boxed{1/2}$	1 $-1/2$
$y_3 \leftrightarrow x_2$	$\boxed{4}$ 2	$\boxed{-1}$ $-1/2$	2 $1/2$	$\boxed{-1}$ $-1/2$
y_4	2 2	2 $-1/2$	-1 $\boxed{1/2}$	0 $-1/2$

У подальшому для отримання другої та третьої ітерацій застосовуємо табличний алгоритм заміни базисних змінних (табл. 8.3, 8.4).

Таблиця 8.3

Друга ітерація

Показник ефективності, базисні змінні	Вільний елемент	Коефіцієнти при вільних змінних		
		x_1	y_3	$y_2 \leftrightarrow y_1$
W	-7 -2	$-1/2$ $-5/6$	$-3/2$ $-1/6$	$1/2$ $\boxed{-1/3}$
$y_1 \leftrightarrow y_2$	$\boxed{6}$ 4	$\boxed{5/2}$ $5/3$	$\boxed{1/2}$ $1/3$	$3/2$ $2/3$
x_3	3 -2	$1/2$ $-5/6$	$1/2$ $-1/6$	$1/2$ $\boxed{-1/3}$
x_2	2 2	$-1/2$ $5/6$	$1/2$ $1/6$	$-1/2$ $\boxed{-1/3}$
y_4	4 2	$3/2$ $5/6$	$1/2$ $1/6$	$-1/2$ $\boxed{-1/3}$

Таблиця 8.4

Третя ітерація

Показник ефективності, базисні змінні	Вільний елемент	Коефіцієнти при вільних змінних		
		x_1	y_3	y_1
W	–9	–4/3	–5/3	–1/3
y_2	4	5/3	1/3	2/3
x_3	1	–1/3	1/3	–1/3
x_2	4	1/3	2/3	1/3
y_4	6	7/3	2/3	1/3

Як бачимо, опорний розв'язок

$$x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ x_3 = 1,\ y_1 = 0,\ y_2 = 4,\ y_3 = 0,\ y_4 = 6$$

є оптимальним, тому що всі коефіцієнти при вільних змінних у виразі для обчислення показника ефективності від'ємні. Остаточно отримаємо оптимальне (мінімальне) значення показника ефективності $W_{\min} = -9$.

Зауваження 8.1 Якщо в кожному стовпці з додатним коефіцієнтом у рядку показника ефективності не існує додатного елемента, то це означає, що незважаючи на існування ОДР, обмеженого розв'язку задача не має: за необмеженого збільшення вільної змінної показник ефективності W прямує до $-\infty$.

Алгоритм пошуку оптимального розв'язку основної задачі лінійного програмування з використанням симплекс-методу:

1. Якщо всі вільні елементи (виключаючи рядок W) у симплекс-таблиці (стандартній таблиці) невід'ємні і при цьому в рядку W (без урахування вільного елемента) немає жодного додатного коефіцієнта, то оптимальний розв'язок досягнутий.

2. Якщо в рядку W серед коефіцієнтів вільних змінних є додатний, а у стовпці, що йому відповідає, немає жодного додатного коефіцієнта (елементу), то лінійна функція W не обмежена знизу і оптимального розв'язку не існує.

3. Якщо у стовпці є додатні коефіцієнти, то вільну змінну, яка відповідає цьому стовпцю, необхідно поміняти місцями з тією ба-

зисною змінною, для якої відношення вільного елемента до обраного додатного коефіцієнта є найменшим.

Зауваження 8.2	Під час розв'язання задачі лінійного програмування може виникнути ситуація, коли у разі заміни змінних не відбувається зміни значення показника ефективності (вироджена задача лінійного програмування). Для припинення процедури пошуку $W_{\min}$ можна використати ознаку того, що показник ефективності залишається незмінним після спеціально встановленої кількості циклів, або ознаку того, що показник ефективності вже не можна зменшити, тому що немає додатних коефіцієнтів у рядку W симплекс-таблиці.
Зауваження 8.3	У процесі розв'язання задачі лінійного програмування може виникнути зациклювання, суть якого полягає в тому, що після кількох замін змінних відбувається повернення до початкових значень опорного розв'язку та показника ефективності. Для подолання зациклювання потрібно після першого повернення до початкових умов оптимізації замінити розв'язувальний елемент.

Приклад 8.2

Розв'язати основну задачу лінійного програмування

$$W = 2x_1 - x_2 \to \min_{\substack{x_{1,2,3,4} \ge 0 \\ y_{1,2,3} \ge 0}}$$

за умови виконання рівнянь-обмежень

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2, \\ y_2 = -x_2 + x_3 + 2, \\ y_3 = x_3 + x_4 + 1. \end{cases}$$

1. Перейдемо до стандартної форми задачі лінійного програмування:

$$W = 0 - (-2x_1 + x_2) \to \min_{\substack{x_{1,2,3,4} \geq 0 \\ y_{1,2,3} \geq 0}};$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 - (-x_1 + x_2), \\ y_2 = 2 - (x_2 - x_3), \\ y_3 = 1 - (-x_3 - x_4). \end{cases}$$

2. Зі стандартної форми задачі лінійного програмування (п. 1) випливає, що вільні коефіцієнти невід'ємні. Тобто при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ має місце опорний розв'язок. Отже, опорний розв'язок шукати не потрібно. Переходимо до алгоритму покращення значень показника ефективності на опорних розв'язках, тобто до алгоритму пошуку оптимального розв'язку за допомогою стандартних таблиць (табл. 8.5, 8.6).

Таблиця 8.5

Вихідні дані

Показник ефективності, базисні змінні	Вільний елемент	Коефіцієнти при вільних змінних			
		x_1	$x_2 \leftrightarrow y_1$	x_3	x_4
W	0 / 0	−2 / 1	1 / $\boxed{-1}$	0 / 0	0 / 0
$y_1 \leftrightarrow x_2$	$\boxed{0}$ / 0	$\boxed{-1}$ / −1	1 / 1	$\boxed{0}$ / 0	$\boxed{0}$ / 0
y_2	2 / 0	0 / 1	1 / $\boxed{-1}$	−1 / 0	0 / 0
y_3	1 / 0	0 / 0	0 / $\boxed{0}$	−1 / 0	−1 / 0

Таблиця 8.6

Перша ітерація

Показник ефективності, базисні змінні	Вільний елемент	Коефіцієнти при вільних змінних			
		x_1	y_1	x_3	x_4
W	0	−1	−1	0	0
x_2	0	−1	1	0	0
y_2	2	1	−1	−1	0
y_3	1	0	0	−1	−1

Отже:

1) показник ефективності не змінився і дорівнює $W = 0$;

2) у рядку з W у табл. 8.6 вже не існує додатних коефіцієнтів. Так оптимальний розв'язок досягнуто в точці

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = y_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad y_3 = 1 .$$

8.2. Розв'язання задачі лінійного програмування з використанням системи комп'ютерної математики Mathlab

Постановка задачі:

$$W = f^T X \to \min_{X \in G} ,$$

де ОДР G задана системою нерівностей

$$G = \begin{cases} AX \le b, \\ A_{eq} X = b_{eq}, \\ lb \le X \le Ub, \end{cases}$$

де A — прямокутна матриця; X — вектор змінних, за якими виконується оптимізація; f — матриця-стовпець коефіцієнтів показника ефективності; b — матриця-стовпець вільних елементів (коефіцієнтів) у нерівностях-обмеженнях; A_{eq} — прямокутна матриця; b_{eq} — матриця-стовпець вільних елементів (коефіцієнтів) у рівностях обмеженнях; lb, Ub — матриці-стовпці покомпонентних обмежень вектора X .

Методика застосування функції *linprog*():

% виконати математичну постановку прикладної задачі;

% задати матриці $f, A, b, A_{eq}, b_{eq}, lb, Ub$;

% звернутися до функції «розв'язок» *linprog*() та отримати результат: $[X, W] = linprog\left(f, A, b, A_{eq}, b_{eq}, lb, Ub\right)$;

% якщо будь-яке з обмежень не можна задати, то замість цих аргументів у разі використання функції *linprog*() задають порожні масиви у вигляді [.....].

Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягає суть оптимального розв'язку задачі лінійного програмування?
2. Наведіть та поясніть алгоритм пошуку оптимального розв'язку основної задачі лінійного програмування з використанням симплекс-методу.
3. У якому випадку опорний розв'язок є оптимальним?
4. У яких випадках оптимальних розв'язків не існує?
5. Наведіть ознаку того, що показник ефективності вже не можна зменшити.
6. У чому полягає суть алгоритму пошуку оптимального розв'язку за допомогою стандартних таблиць?
7. Поясніть суть основної задачі лінійного програмування.
8. Наведіть дії, необхідні для подолання зациклювання у процесі розв'язання задачі лінійного програмування.
9. Поясніть призначення функції системи комп'ютерної математики Mathlab *linprog*().
10. Наведіть методику застосування функції *linprog*().

Розділ 9

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

9.1. Постановка транспортної задачі

Симплекс-метод — універсальний метод розв'язання задач лінійного програмування. Проте є клас задач лінійного програмування, розв'язок яких можна отримати простішими методами. Найбільш відомою є *транспортна задача*. Класична транспортна задача лінійного програмування формулюється так: існує m пунктів відправлення $A_1, A_2, \ldots, A_m$, у яких зосереджено запаси певного товару в кількості $a_1, a_2, \ldots, a_m$ одиниць відповідно. Крім того, є n пунктів призначення $B_1, B_2, \ldots, B_n$, що надали замовлення на отримання товару в кількості $b_1, b_2, \ldots, b_n$ одиниць відповідно. Вважаємо, що сума всіх замовлень дорівнює сумі всіх товарів:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Відомою є вартість c_{ij} — перевезення одиниці товару від кожного пункту відправлення A_i до кожного пункту призначення B_j. Таблиця вартості перевезення:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} .$$

Скласти такий план перевезень, за якого всі замовлення були б виконані і при цьому загальна вартість усіх перевезень була б мінімальною. У разі такої постановки задачі показником ефективності плану перевезень є вартість. Тому поставлену задачу називають *транспортною задачею за критерієм вартості*.

Наведемо математичну постановку цієї задачі. Позначимо x_{ij} $\left(x_{ij} \geq 0\right)$ — кількість товару, який відвантажується з i-го пункту відправлення A_i до j-го пункту призначення B_j $\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$. На змінні x_{ij} $\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$ накладаються умови та обмеження (рис. 9.1).

1. Сумарна кількість товару, що відвантажується з кожного пункту відправлення в усі пункти призначення, має дорівнювати запасу в даному пункті (рис. 9.1).

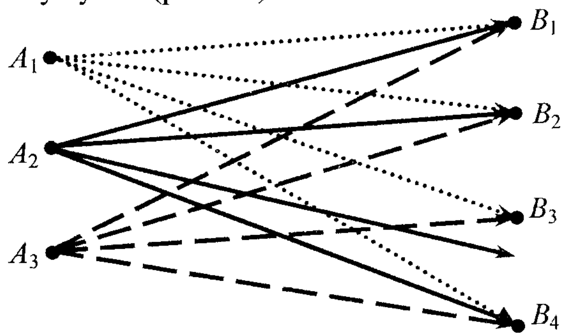


Рис. 9.1. Графічне зображення виникнення обмежень

Ця умова дає n рівнянь-обмежень:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{1j} = a_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^{n} x_{mj} = a_m. \end{cases} \qquad (9.1)$$

2. Сумарна кількість товару, що надходить до кожного пункту призначення з усіх пунктів відправлення, має дорівнювати замовленню, яке надійшло від даного пункту. Ця умова дає n рівнянь-обмежень:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{i1} = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{m} x_{in} = b_n. \end{cases} \qquad (9.2)$$

3. Сумарна вартість усіх перевезень має бути мінімальною

$$W = c_{11}x_{11} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min_{x_{ij}\ge 0\left(\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}\right)}. \qquad (9.3)$$

Показник ефективності (9.3), рівняння-обмеження (9.1) та (9.2) є лінійними функціями змінних x_{ij} $\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$, тобто задачу про транспортні перевезення за вартісним критерієм у такій постановці можна розглядати як основну задачу лінійного програмування. Як і будь-яку задачу лінійного програмування, транспортну задачу можна розв'язати з використанням симплекс-методу. Розмірність цієї задачі дорівнює кількості змінних параметрів, які потрібно знайти, щоб задовольнити умову (9.3), дорівнює $m \times n$. Це означає, що при $m = 10$ та $n = 10$ (всього 10 складів та 10 пунктів приймання товару) отримаємо 100 змінних.

Для досить простої транспортної задачі лінійного програмування стрімко зростає кількість невідомих і традиційний, розглянутий вище симплекс-метод потребує значних обчислювальних операцій.

Ураховуючи той факт, що всі коефіцієнти при змінних в обмеженнях (9.1) та (9.2) дорівнюють 1 або 0, можна спростити процедуру обчислення оптимального розв'язку. Перед початком викладення методу розв'язання транспортної задачі з'ясуємо особливості системи рівнянь-обмежень (9.1) та (9.2).

Якщо скласти ліві і праві частини цих обмежень, то отримаємо рівняння: сума запасів дорівнює сумі замовлень. Тобто всього лінійно незалежних обмежень у рівняннях (9.1) та (9.2) буде $(m+n-1)$. Це означає, що ранг системи рівнянь-обмежень дорівнює $r=m+n-1$. Тому можна розв'язати ці рівняння відносно $(m+n-1)$ базисної змінної, вважаючи інші

$k=mn-(m+n-1)=m(n-1)-(n-1)=(m-1)(n-1)$ вільними змінними.

У розділі 5 було показано, що в задачі лінійного програмування оптимальний розв'язок досягається в одній із вершин ОДР і при цьому хоча б k змінних перетворюються в нуль. Це означає, що у випадку транспортної задачі $(m-1)(n-1)$ змінних теж повинні дорівнювати нулю у вершині ОДР (опорній точці). Під час розв'язання транспортної задачі зазвичай використовують такі позначення:

• перевезення x_{ij} — кількість одиниць вантажу, що перевозять із пункту відправлення A_i до приймального пункту B_j;

• план перевезень x_{ij} — будь-яка сукупність значень x_{ij};

• допустимий план $\left(x_{ij}\right)_{\text{д}}$ — план, який задовольняє балансові умови: усі замовлення виконані, усі запаси вичерпані, при цьому $x_{ij} \gg 0$;

• опорний план $\left(x_{ij}\right)_{\text{оп}}$ — допустимий план, у якому відмінних від нуля не більше, ніж $r=m+n-1$ базисних перевезень x_{ij}, а всі інші дорівнюють нулю;

• оптимальний план $\left(x_{ij}\right)_{\text{opt}}$ — опорний план, за якого досягається найменше значення показника ефективності (вартості перевезень).

Розглянемо методи розв'язання транспортної задачі. Вони не потребують застосування симплекс-таблиць, але використовують так звану транспортну таблицю (табл. 9.1).

Таблиця 9.1

Зразок транспортної таблиці

Пункт відправлення	Пункт призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	...	B_n	a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	...	c_{2n}	a_2
...	...	...	... ...	...	...	...
A_m	c_{m1}	c_{m2}	c_{m3}	...	c_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	b_3	...	b_n	$\sum b = \sum a$

До таблиці заносять:

– пункти відправлення та пункти призначення;

– запаси, розташовані в пунктах відправлення;

– замовлення, розташовані в пунктах призначення;

– вартість перевезень із кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення одиниці вантажу.

Вартість перевезень c_{ij} розташуємо у правому верхньому куті кожної клітини, а всередині цієї клітини будемо записувати перевезення x_{ij}. Пам'ятаючи визначення опорного плану, можна стверджувати, що в клітині $r = m + n - 1$ будуть записані числа, відмінні від нуля. Ці клітини будемо називати базисними, а інші (порожні або нульові) — вільними. Отже, розв'язок транспортної задачі можна отримати, якщо заповнити транспортну таблицю і виконати такі умови:

- сума перевезень у кожному рядку транспортної таблиці має дорівнювати запасу даного пункту відправлення;
- сума перевезень у кожному стовпці транспортної таблиці повинна дорівнювати замовленню приймальних пунктів;
- загальна вартість перевезень має бути мінімальною.

Усі наступні дії, пов'язані з пошуком оптимального плану, будуть використовувати зручну (наочну) форму подання інформації про транспортну задачу у вигляді транспортної таблиці.

9.2. Табличний метод пошуку опорного плану (метод «північно-західного кута»)

Пошук розв'язку транспортної задачі, як і будь-якої задачі лінійного програмування, починається зі знаходження *опорного розв'язку* або *опорного плану*. На відміну від загального випадку основної задачі лінійного програмування з довільними обмеженнями і показником ефективності, розв'язок транспортної задачі завжди існує. Дійсно, із фізичних міркувань зрозуміло, що певне допустимий розв'язок (допустимий план) має існувати.

Пояснимо на конкретному прикладі основні прийоми методу пошуку опорного розв'язку, який отримав назву *метод «північно-західного кута»* (табл. 9.2).

Припустімо, що умова транспортної задачі задана за допомогою транспортної таблиці. Необхідно знайти опорний розв'язок (побудувати опорний план).

Розв'язання задачі починаємо з лівої верхньої позиції верхньої клітини з координатами $(1;1)$, що відповідає образному сприйняттю цієї позиції як «північно-західного» напряму на географічній карті північної півкулі.

Таблиця 9.2

Вихідні дані та приклад побудови опорного розв'язку

Пункт відправлення	Пункт призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	10 18	8 27	5 3	6	9	48
A_2	6	7	8 30	6	5	30
A_3	8	7	10 9	8 12	7 6	27
A_4	7	5	4	6	8 20	20
b_j	18	27	42	12	26	125

За рахунок пункту відправлення A_1 задовольняємо вимогу пункту призначення B_1 і записуємо перевезення у клітину з координатами $(1;1)$. Потім задовольняємо запит пункту призначення B_2

і далі записуємо залишок у клітину з координатами $(1;3)$. Недовиконання замовлення пункту призначення B_3 за рахунок пункту відправлення A_1 доповнюємо поставками з A_2 та A_3 і т. д. Клітини таблиці, у яких зазначені ненульові перевезення, є базовими. Їх кількість повинна дорівнювати

$$r = m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 8.$$

Вільні клітини означають 0 перевезень, тобто це вільні змінні, яких має бути щонайменше

$$k = (m-1)(n-1) = (4-1)(5-1) = 12.$$

Отже, опорний розв'язок знайдений. Обчислимо його вартість:

$$W = 18\cdot 10 + 27\cdot 8 + 3\cdot 5 + 30\cdot 8 + 9\cdot 10 + 12\cdot 8 + 6\cdot 7 + 20\cdot 8 = 1039.$$

Зрозуміло, що знайдене значення W не є оптимальним хоча б тому, що не використовувався алгоритм покращення опорного розв'язку.

Розглянемо алгоритм покращення опорного плану. Виконаємо так звану циклічну перестановку, наприклад, 18 одиниць вантажу з клітини з координатами $(1;1)$ перемістимо у клітину з координатами $(1;3)$ і далі через клітину $(2;3)$ до $(2;1)$, зберігаючи балансові співвідношення (табл. 9.3).

Таблиця 9.3

Покращення опорного плану

Пункт відправлення	Пункт призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	10	8 27	5 21	6	9	48
A_2	6 18	7	8 12	6	5	30
A_3	8	7	10 9	8 12	7 6	27
A_4	7	5	4	6	8 20	20
b_j	18	27	42	12	26	125

Показник ефективності для транспортної таблиці набуває значення:

$$W = 18\cdot 6 + 27\cdot 8 + 21\cdot 5 + 12\cdot 8 + 9\cdot 10 + 12\cdot 8 + 6\cdot 7 + 20\cdot 8 = 913,$$

яке на 126 одиниць менше від показника ефективності, розрахованого для попереднього опорного плану. Наведений у табл. 9.3 як приклад спосіб циклічної перестановки лежить в основі алгоритму оптимізації плану перевезень.

Перед тим, як перейти до алгоритму оптимізації, розглянемо так званий «вироджений» план транспортної задачі, коли нулю дорівнюють не лише вільні змінні, але й частина базисних (табл. 9.4).

Таблиця 9.4

Приклад «виродженого» плану

Пункт відправлення	Пункт призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	10	10				20
A_2			20	10		30
A_3				25		25
A_4					20	20
b_j	10	10	20	35	20	95

Кількість базисних змінних згідно із заданою транспортною таблицею має дорівнювати $r = 4 + 5 - 1 = 8$, але в отриманому за допомогою методу «північно-західного кута» плані перевезень ненульовими є шість змінних, тобто виродженою є задача, у якій деякі з базисних змінних дорівнюють нулю.

Для побудови стійкого алгоритму обчислення оптимального розв'язку бажано на кожній ітерації мати всі базисні змінні ненульовими. З метою уникнення ситуації виникнення «виродженого» плану достатньо штучно на незначну величину ε змінити запаси і замовлення (табл. 9.5), а потім, після знаходження оптимального плану, покласти $\varepsilon = 0$.

Таблиця 9.5

Приклад уникнення «виродженого» плану

Пункт відправлення	Пункт призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	10	10	ε			$20 + \varepsilon$
A_2			$20 - \varepsilon$	$10 + \varepsilon$		30
A_3				$25 - \varepsilon$	ε	25
A_4					$20 - \varepsilon$	$20 - \varepsilon$
b_j	10	10	20	35	20	95

У табл. 9.5 маємо розрахункову кількість ненульових базисних змінних. Вона дорівнює 8. У табл. 9.3, 9.4 не вказана вартість перевезень одиниці товару c_{ij}, тому що автори ставили за мету розглянути лише приклад побудови опорного плану та прийоми уникнення появи «виродженого» плану.

9.3. Метод пошуку оптимального плану за допомогою циклічного перерахунку (метод циклічного перерахунку або розподільний метод)

Циклом у транспортній таблиці будемо називати кілька клітин, з'єднаних між собою уявною неперервною ламаною лінією, яка в кожній спеціально обраній клітині розвертається на 90° так, щоб утворити з початковою клітиною замкнену лінію. Так, наприклад, у табл. 9.6 наведено два цикли:

— Ц1 — з чотирма вершинами;

— Ц2 — з шістьма вершинами.

Таблиця 9.6

Пояснення щодо методу циклічного перерахунку

Пункт відправлення	Пункт призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	c_{11} −	c_{12}	c_{13} +	+ c_{14}	c_{15} −	a_1
A_2	+ c_{21}	c_{22}	c_{23} −	c_{24}	c_{25}	a_2
A_3	c_{31}	c_{32} +	c_{33}	− c_{34}	c_{35}	a_3
A_4	c_{41}	c_{42} −	c_{43}	c_{44}	c_{45} +	a_4
b_j	b_1	b_2	b_3	b_n	b_n	$\sum b = \sum a$

Кожен цикл має парну кількість вершин і сторін, тобто ланцюгів, що зв'язують ці вершини. Вершини позначимо « + » або « − » залежно від збільшення або зменшення перевезень. Цикл із позначеними вершинами називатимемо *перенесеннями*. Перенести певну кількість одиниць вантажу зазначеним циклом означає збільшити перевезення, що містяться в додатних вершинах циклу, на деяку кількість одиниць вантажу, а перевезення, що містяться у від'ємних вершинах — зменшити на ту саму кількість. Зрозуміло, що за будь-якого циклічного перенесення, що зберігає невід'ємність перевезень, виконується закон збереження матерії, тобто зберігаються балансові умови, але вартість плану змінюється. Вартістю циклу називається зміна вартості перевезень під час переміщення одиниці вантажу зазначеним циклом.

Кількісна вартість циклу дорівнює алгебричній сумі вартостей, розташованих у вершинах циклу, із урахуванням знаку вершин. Наприклад, вартість Ц1 та Ц2 можна обчислити так:

$$V_{ц1} = c_{21} - c_{23} + c_{13} - c_{11};$$

$$V_{ц2} = c_{32} - c_{42} + c_{45} - c_{15} + c_{14} - c_{34}.$$

Якщо вартість циклу від'ємна, то переміщення цим циклом ΔX одиниці вантажу приводить до зменшення загальної вартості перевезень на $\Delta x V_ц$ умовних одиниць. Процедура зменшення загальної вартості припиняється тоді, коли циклів з від'ємною вартістю вже не буде. Тобто покращення плану перевезень бути не може. Оптимальний план досягнутий. При покращенні плану перевезень за рахунок циклічних перенесень, як правило, користуються прийомами симплекс-методу: на кожній ітерації, присвяченій зміні циклу, замінюють одну базисну змінну вільною і навпаки. Загальна кількість базисних змінних залишається незмінною. Доведено, що для будь-якої вільної клітини транспортної таблиці завжди існує цикл і при тому єдиний, одна з вершин якого лежить у цій вільній клітині, а всі інші у базисних клітинах.

Приклад 9.1 Розглянемо комплексне застосування методу північно-західного кута та циклічного перерахунку для пошуку оптимального плану транспортної задачі, заданої за допомогою транспортної таблиці (табл. 9.7).

Таблиця 9.7

Вихідні дані до прикладу 9.1

Пункт відправлення	Пункт призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	– 10 22 Ц1	+ 7 9	6	8	31
A_2	+ 5	– 6 25	5 23	4	48
A_3	8	7	6 18	7 20	38
b_j	22	34	41	20	117

1. Складемо опорний план, застосувавши метод північно-західного кута. Кількість базисних змінних має дорівнювати

$$r = m + n - 1 = 6,$$

що відповідає плану, наведеному в табл. 9.1.

Задача «не вироджена».

Обчислимо значення показника ефективності

$$W = 22 \cdot 10 + 9 \cdot 7 + 25 \cdot 6 + 23 \cdot 5 + 18 \cdot 6 + 20 \cdot 7 = 796.$$

2. Покращимо план (табл. 9.8), замінивши вільну клітину з координатами $(2;1)$.

Таблиця 9.8

Покращений план за циклом Ц1

Пункт відправлення	Пункт призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10	7 31	6	8	31
A_2	5 22	6 3	– 5 23 Ц2	+ 4	48
A_3	8	7	+ 6 18	– 7 20	38
b_j	22	34	41	20	117

Вартість циклу

$$V_{ц1} = 5 + 7 - 10 - 6 = -4.$$

Покращимо план за рахунок переміщення 22 одиниць вантажу, інакше в $(1;1)$ буде від'ємне число, чого не можна допустити, тому що від'ємних перевезень не існує.

Покращений план (табл. 9.8) має показник ефективності

$$W_1 = 796 - 22 \cdot 4 = 708.$$

Сформулюємо правило добору циклу, що є чотирикутником:

1) лише в одній вершині розташована вільна клітина;

2) у вільній клітині завжди «+»;

3) суми вартості по діагоналі, що включає вільну клітину, менші за суми вартості іншої діагоналі.

3. Друга ітерація. Обираємо цикл Ц2 (табл. 9.8) з вільною клітиною з координатами (2;4):

$$V_{ц2} = 4 + 6 - 5 - 7 = -2;$$

$$\Delta x V_{ц2} = 20(-2) = -40;$$

$$W_2 = 708 - 40 = 668 .$$

Результат перенесень за Ц2 наведено в табл. 9.9.

Таблиця 9.9

Покращений план за циклом Ц2

Пункт відправлення	Пункт призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10	7 31	6	8	31
A_2	5 22	6 3	5 3	4 20	48
A_3	8	7	6 38	7	38
b_j	22	34	41	20	117

План, наведений у табл. 9.9, є оптимальним, тому що всі цикли, побудовані для вільних клітин, мають додатну вартість.

Отже, розподільний (циклічний) метод полягає в безпосередньому пошуку вільних клітин транспортної таблиці з від'ємною вартістю циклу і в перенесенні перевезень за циклом.

Приклад 9.2 Знайти оптимальний план перевезень для транспортної задачі, заданої транспортною таблицею (табл. 9.10).

Таблиця 9.10

Вихідні дані до прикладу 9.2

Пункт відправлення	Пункт призначення			Запаси
	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	– 10 20 Ц1	7 20	+ 6 ε	40 + ε
A_2	+ 5	6	– 5 23	23
A_3	8	7	6 20 – ε	20 – ε
b_j	20	20	43	83

1. Будуємо опорний план методом «північно-західного кута» та перевіряємо його на невиродженість:

$$r = n + m - 1 = 3 + 3 - 1 = 5 > 4 .$$

Опорний план вироджений.

2. Для уникнення виродженості використовуємо метод збурень запасів та замовлень на величину $\pm\varepsilon$ відповідно у першому та третьому рядках табл. 9.10.

3. Розподільним методом покращуємо розв'язок, використовуючи цикл Ц1(табл. 9.11):

$$V_{\text{ц}1} = 5 + 6 - 10 - 5 = -4\,;$$

$$\Delta x V_{\text{ц}1} = 20(-4) = -80\,.$$

Таблиця 9.11

Покращення плану з використанням Ц1

Пункт відправлення	Пункт призначення			Запаси
	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	10	7 20	6 $20+\varepsilon$	$40+\varepsilon$
A_2	5 20	6	5 3	23
A_3	8	7	6 $20-\varepsilon$	$20-\varepsilon$
b_j	20	20	43	83

Отримана транспортна таблиця (табл. 9.11) відображає оптимальний план перевезень. Циклів з від'ємною вартістю у вільних клітинах немає. Показник ефективності дорівнює

$$W = \left(20\cdot5 + 20\cdot7 + (20+\varepsilon)\cdot6 + (20-\varepsilon)\cdot6 + 3\cdot5\right)\Big|_{\varepsilon=0} = 495\,.$$

Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягає суть транспортної задачі лінійного програмування?
2. Наведіть та поясніть постановку транспортної задачі.
3. Розкрийте суть симплекс-методу розв'язання задачі лінійного програмування.
4. Наведіть математичну постановку транспортної задачі.
5. Поясніть процедуру пошуку розв'язку транспортної задачі методом «північно-західного кута».

Розділ 10

МЕТОД ПОТЕНЦІАЛІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

10.1. Обґрунтування методу потенціалів

Розглянутий у розд. 9 розподільний метод розв'язання транспортної задачі має істотний недолік: потрібно знаходити цикли для всіх вільних клітин і обчислювати їх вартість. Для зменшення кількості обчислень за рахунок визначення вартості лише тих циклів, де ця вартість від'ємна, запропоновано *метод потенціалів*.

Ідея методу полягає в такому. Припустімо, що задана транспортна задача у вигляді

$$W = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

за умови

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \\ x_{ij} \ge 0 \; (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n},), \end{cases}$$

при цьому

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Уявімо, що кожен із пунктів відправлення A_i та призначення (приймальному) B_j сплачують певні кошти у розмірі відповідно α_i та β_j. Позначимо суму коштів $\alpha_i + \beta_j = \tilde{c}_{ij}$.

Зауважимо, що α_i, β_j, $\tilde{c}_{ij}$ — уявні абстрактні вартості і платежі, тобто вони можуть бути як додатними, так і від'ємними або нульовими.

Для скорочення запису позначимо всю сукупність платежів (α_i, β_j). Тоді матриця псевдовартостей матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} = \alpha_1 + \beta_1 & \tilde{c}_{12} = \alpha_1 + \beta_2 & \ldots & \tilde{c}_{1n} = \alpha_1 + \beta_n \\ \tilde{c}_{21} = \alpha_2 + \beta_1 & \tilde{c}_{22} = \alpha_2 + \beta_2 & \ldots & \tilde{c}_{2n} = \alpha_2 + \beta_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{c}_{m1} = \alpha_m + \beta & \tilde{c}_{m2} = \alpha_m + \beta_2 & \ldots & \tilde{c}_{mn} = \alpha_m + \beta_n \end{bmatrix}.$$

Доведемо теорему про платежі.

Теорема 10.1 Для заданої сукупності платежів (α_i, β_j) загальна псевдовартість перевезень не залежить від плану перевезень, а залежить лише від сукупності платежів

$$\widetilde{W} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}x_{ij}.$$

Розглянемо вираз для обчислення псевдовартості:

$$\widetilde{W} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i + \beta_j)x_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i)x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\beta_j)x_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sum_{j=1}^{n}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\beta_j\sum_{i=1}^{m}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n}\beta_j b_j.$$

Як бачимо, загальна псевдовартість перевезень не залежить від допустимого плану перевезень, тобто такого плану, що задовольняє систему балансових обмежень і умов $x_{ij} \geq 0$, а залежить лише від запасів a_i, замовлень b_j та платежів (α_i, β_j), що і треба було довести.

З'ясуємо зв'язок між псевдовартістю $\tilde{c}_{ij}$ перевезення та її істинним значенням. Припустімо, що план перевезень x_{ij} невироджений: кількість базисних клітин з додатними перевезеннями у таблиці перевезень дорівнює $m+n-1$.

Уважатимемо, що в усіх базисних клітинах псевдовартості дорівнюють істинним вартостям

$$\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j = c_{ij} \quad \forall x_{ij} > 0 .$$

У вільних клітинах $x_{ij} = 0$, при цьому співвідношення між $\tilde{c}_{ij}$ та c_{ij} будь-яке. Це співвідношення є індикатором (показником) того, чи є план перевезень, якому відповідає дана таблиця, оптимальним, чи його можна покращити. Доведемо теорему.

Теорема 10.2 Якщо для всіх базисних клітин допустимого плану $\tilde{c}_{ij} = c_{ij}$, а для всіх вільних клітин допустимого плану $\tilde{c}_{ij} \le c_{ij}$, то план є оптимальним.

Нагадаємо, що для базисних клітин перевезення мають бути додатними, а для вільних клітин $x_{ij} = 0$.

Визначимо вартість плану x_{ij}, заданого умовами даної теореми та з урахуванням «теореми про платежі»:

$$W = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j = \text{const}.$$

Виконаємо заміну плану $\left(x_{ij}\right) \to (x_{ij}^{*})$, у якому змінимо частково або повністю склад вільних або базисних змінних, але співвідношення між елементами матриці істинних вартостей та псевдовартостей залишимо незмінним, тобто таким, що відповідає умовам теореми. Це означає, що для базисних змінних x_{ij}^{*}, які теж були базисними у плані x_{ij}, виконується умова $\tilde{c}_{ij} = c_{ij}$, а для інших базисних змінних із плану виконується умова $\tilde{c}_{ij} \ge c_{ij}$.

У результаті отримаємо вираз для обчислення загальної вартості перевезень у новому плані x_{ij}^{*}:

$$W^{*} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}^{*} \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j = \text{const} ,$$

що і треба було довести.

Зауваження 10.1 | Жодними змінами плану перевезень їх підсумкова вартість не може бути зменшена.

Прокоментуємо на прикладі зміст доведеної теореми. Припустімо, що $m = n = 3$. Тоді кількість базисних клітин має дорівнювати $m + n - 1 = 5$.

Загальна вартість W у разі виконання умов теореми обчислюється за формулою:

$$\widetilde{W} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{13} \\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} & \tilde{c}_{23} \\ \tilde{c}_{31} & \tilde{c}_{32} & \tilde{c}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \tilde{c}_{13} \\ \tilde{c}_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & \tilde{c}_{32} & \tilde{c}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ 0 & x_{23} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{31}x_{31}.$$

Уважатимемо, що план змінено. Визначимо вартість зміненого плану:

$$W^* = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \tilde{c}_{13} \\ \widetilde{c_{21}} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & \tilde{c}_{32} & \tilde{c}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & x_{21}^* & 0 \\ x_{12}^* & 0 & 0 \\ x_{13}^* & x_{23}^* & x_{33}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= c_{12}x_{12}^* + \tilde{c}_{31}x_{31}^* + \tilde{c}_{21}x_{21}^* + c_{23}x_{23}^* + \tilde{c}_{33}x_{33}^* \geq$$

$$\geq \tilde{c}_{12}x_{12}^* + \tilde{c}_{31}x_{31}^* + \tilde{c}_{21}x_{21}^* + \tilde{c}_{23}x_{23}^* + \tilde{c}_{33}x_{33}^*.$$

Доведена теорема виконується і для виродженого плану. Отже, доведено, що ознакою оптимальності плану перевезень є виконання двох умов:

1) для всіх базисних клітин $\tilde{c}_{ij} = c_{ij}$;

2) для всіх вільних клітин $\tilde{c}_{ij} \leq c_{ij}$.

План, для якого виконуються умови 1 і 2, називається ***потенціальним***, а платежі, що йому відповідають (α_i, β_j), — ***потенціалами пунктів*** A_i та B_j.

Використовуючи наведені вище терміни, можна переформулювати теорему коротше: будь-який потенціальний план є оптимальним.

10.2. Побудова потенціального плану

Для розв'язання транспортної задачі потрібно побудувати потенціальний план. Цей план можна побудувати за рахунок послідовних наближень від початкового плану, знайденого, наприклад, методом «північно-західного кута». Існує властивість платежів та псевдовартостей, яка полягає в такому: якою б не була система платежів (α_i, β_j), що задовольняє умову $\tilde{c}_{ij} = c_{ij}$ для всіх базисних клітин, для кожної вільної клітини ціна циклу перерахунку дорівнює різниці між вартістю c_{ij} та псевдовартістю $\tilde{c}_{ij}$, що належить даній клітині.

Приклад 10.1 Розглянемо транспортну задачу, не проставляючи запасів і замовлень, наприклад, для випадку $m = 5$, $n = 6$ (табл. 10.1).

Таблиця 10.1

Приклад циклу перерахунку

Пункт відправлення	Пункт призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	c_{11}	c_{12} −	c_{13}	c_{14}	c_{15} +	c_{16}
A_2	c_{21}	c_{22} +	c_{23} −	c_{24}	c_{25}	c_{26}
A_3	c_{31}	c_{32}	c_{33} +	c_{34}	c_{35} −	c_{36}
A_4	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	c_{45}	c_{46}
A_5	c_{51}	c_{52}	c_{53}	c_{54}	c_{55}	c_{56}

Визначимо

$$r = n + m - 1 = 5 + 6 - 1 = 10.$$

У табл. 10.1 для прикладу заштриховано 10 базисних клітин. Обираємо будь-яку вільну клітину, наприклад, $(1,5)$ і будуємо цикл перерахунку так, щоб додатна вершина перебувала у цій клітині, а всі інші в базисних.

Ціна визначеного циклу дорівнює:

$$V_{15} = c_{15} - c_{35} + c_{33} - c_{23} + c_{22} - c_{12}$$

або

$$\begin{aligned} V_{15} &= c_{15} - (\alpha_3 + \beta_5) + (\alpha_3 + \beta_3) - \\ &- (\alpha_2 + \beta_3) + (\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_2) = \\ &= c_{15} - (\alpha_1 + \beta_5) = c_{15} - \tilde{c}_{15}. \end{aligned} \qquad (10.1)$$

Висновок. У разі використання методу потенціалів для розв'язання транспортної задачі немає потреби визначати цикли з від'ємною ціною, що є найбільш трудомісткою процедурою розподільного методу.

10.3. Методика розв'язання транспортної задачі методом потенціалів

1. Виконати перше наближення до оптимального плану, наприклад, за допомогою методу «північно-західного кута». Перевірити задачу на невиродженість, тобто обчислити кількість базисних клітин, перевезення в яких мають бути додатними. Якщо перше наближення продемонструвало виродженість транспортної задачі (кількість вільних клітин з нульовими перевезеннями перевищує $mn - (m + n - 1)$), необхідно застосувати метод збурення замовлень та запасів і перейти до невиродженої задачі.

2. Визначити для плану першого наближення платежі, виходячи з умови, що в будь-якій базисній клітині псевдовартості дорівнюють вартостям $\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j = c_{ij}$. Всього записаних вище рівнянь буде $r = m + n - 1$, а невідомих, що входять до їх складу, α_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ та β_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$ — $m + n$. Тобто одну з невідомих можна для простоти вважати нульовою, а всі інші обчислити так, щоб виконувалось рівняння (10.1).

3. Обчислити псевдовартості для всіх вільних клітин. Якщо виявиться, що псевдовартості вільних клітин не перевищують їх вартості, то оптимальний план знайдено.

4. Якщо хоча б в одній з вільних клітин псевдовартість перевищує вартість $\tilde{c}_{ij} > c_{ij}$, то потрібно покращити план перевезень за рахунок переміщення перевезень за циклом, який відповідає обраній вільній клітині з від'ємною різницею $0 > \tilde{c}_{ij} - c_{ij}$.

5. Знову обчислити платежі та псевдовартості. Перерахунки завершити лише тоді, коли буде знайдено оптимальний план.

Зауваження 10.2 Поняття платежів, вартостей, псевдоплатежів, псевдовартостей мають наглядну економічну інтерпретацію: компанії групи A, які зберігають товари, та компанії групи B, що накопичують та реалізують товари, разом фінансують перевезення. Оптимальним є той план, коли компанії A та B за ці перевезення не переплачують.

Приклад 10.2 Розв'язати транспортну задачу, задану табл. 10.2.

Таблиця 10.2

Вихідні дані

Пункт відправлення	Пункт призначення					Запаси	Платежі
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	α_i
A_1	10 10 **17**	8 8 **8Ц1** +	6 9	3 6	4 5	25	0
A_2	8 5 +	6 6 **13** –	4 4 **19**	3 3	2 8	32	–2
A_3	9 9	7 7	5 5 **22**	4 4 **14**	3 3 **4**	40	–1
A_4	14 14	12 10	10 8	9 8	8 8 **20**	20	4
b_j	17	21	41	14	24	117	
Платежі β_j	10	8	6	5	4		

Знайдемо методом «північно-західного кута» перше наближення до оптимального плану (табл. 10.2). Кількість ненульових клітин дорівнює 8, що збігається з контрольним числом

$$r = m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8.$$

Висновок. Транспортна задача є невиродженою.

Додамо до транспортної таблиці (табл. 10.2) рядок та стовпець платежів β_j та α_i відповідно. Псевдовартості запишемо ліворуч зверху в кожній клітині (табл. 10.3).

Таблиця 10.3

Перша ітерація

Пункт відправлення	Пункт призначення					Запаси	Платежі
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	α_i
A_1	10 10 4	8 8 21	9 9	8 6	7 5	25	0
A_2	5 5 13 +	6 6	4Ц2 4 19	3 3	2 8	32	–5
A_3	6 9	4 7	5 5 22 +	4 4 14 –	3 3 4	40	–4
A_4	11 14	9 10	10 8	9 8	8 8 20	20	1
b_j	17	21	41	14	24	117	
Платежі β_j	10	8	9	8	7		

Ураховуючи, що для базисних клітин $\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j$, знаходимо $\tilde{c}_{ij} = c_{11} = 10 = 0 + \beta_1$ (за припущенням $\alpha_1 = 0$), тобто $\beta_1 = 10$.

Аналогічно визначаємо $\beta_2 = 8$. Далі $\alpha_2 + \beta_2 = 6 \to \alpha_2 = -2$ і т. д. (табл. 10.3). Виконаємо перерахунок базисної клітини за циклом Ц1 (див. табл. 10.2). Перенесемо за цим циклом 13 одиниць вантажу (більше не можна, інакше у клітині $(2,2)$ виникне від'ємне число і план не буде допустимим) і зменшимо вартість плану на $13 \cdot 3 = 39$.

Не всі псевдовартості у вільних клітинах (табл. 10.3) задовольняють умову $\tilde{c}_{ij} \le c_{ij}$. Тому план, наведений у таблиці першої ітерації, не є оптимальним.

Спробуємо покращити цей план шляхом переведення у базисні змінні однієї з вільних змінних, для якої у відповідній клітині $\tilde{c}_{ij} > c_{ij}$, наприклад, у клітині $(1,4)$. Ціна циклу для клітини $(1,4)$ дорівнює $\upsilon_{14} = 6 - 8 = -2$.

Перенесемо циклом Ц2 (табл. 10.3) чотири одиниці і занесемо результат у таблицю другої ітерації (табл. 10.4).

Таблиця 10.4

Друга ітерація

Пункт відправлення	Пункт призначення					Запаси	Платежі
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	α_i
A_1	8 10	8 8 21	7 9	6 6 4	5 5	25	0
A_2	5 5 17 +	5 6	4 4 15	3 3	2 8	32	–3
A_3	6 9	6 7	5 5 26	4 4 10	3 3 4 +	40	–2
A_4	11 14	11 10	10 8 +	9 Ц3 8	8 8 20	20	3
b_j	17	21	41	14	24	117	
Платежі β_j	8	8	7	6	5		

План другої ітерації теж не є оптимальним. Обираємо клітину $(4,3)$ і переносимо 20 одиниць перевезень циклом Ц3. Остаточно отримаємо таблицю третьої ітерації (табл. 10.5), яка за всіма ознаками надає оптимальний план перевезень (усі псевдовартості не перевищують відповідних вартостей).

Показник ефективності дорівнює

$$W = 21 \cdot 8 + 4 \cdot 6 + 17 \cdot 5 + 15 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 24 \cdot 3 + 20 \cdot 8 = 639.$$

Таблиця 10.5

Третя ітерація

Пункт відправлення	Пункт призначення					Запаси	Платежі
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	α_i
A_1	8 10	8 8 21	7 9	6 6 4	5 5	25	0
A_2	5 5 17 +	5 6	4 4 15	3 3	2 8	32	–3
A_3	6 9	6 7	5 5 6 –	4 4 10	3 3 24 +	40	–2
A_4	9 14	11 10	8 8 20	7 8	6 8	20	1
b_j	17	21	41	14	24	117	
Платежі β_j	8	8	7	6	5		

Отже, фірма, яка володіє всіма складами A та всіма пунктами реалізації B, але не має у своєму складі перевізників, повинна заплатити мінімальну суму $W_{\min} = 639$. Платежі α_i та β_j мають умовний зміст і використані як математична абстракція.

Приклад 10.3 Розв'язати методом потенціалів вироджену транспортну задачу. Умови транспортної задачі задані вихідною транспортною таблицею (табл. 10.6); $m = 3$, $n = 3$.

Таблиця 10.6

Вихідні дані

Пункт відправлення	Пункт призначення			Запаси	Платежі
	B_1	B_2	B_3	a_i	α_i
A_1	6 6 20 –	4 4ε +	3 2	20 + ε	0
A_2	7 3 +	5Ц1 5 5 – ε –	4 4 2ε	25 + ε	1
A_3	6 3	4 6	3 3 30 – 2ε –	30 – 2ε	0
b_j	20	25	30	75	
Платежі β_j	6	4	3		

Перевіримо: $r = m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5 > 3$ — транспортна задача вироджена. Скористаємося методом збурення запасів та замовлень (табл. 10.6). Перерахунок за циклом Ц1 дає можливість заповнити таблицю першої ітерації (табл. 10.7), а за циклом Ц2 — таблицю другої ітерації (табл. 10.8).

Таблиця 10.7

Перша ітерація

Пункт відправлення	Пункт призначення			Запаси	Платежі
	B_1	B_2	B_3	a_i	α_i
A_1	6 6 20 –	4 4 20 + ε +	3 2 Ц2 +	20 + ε	0
A_2	3 3 20	5 5 5 – ε +	4 4 2ε –	25+ε	1
A_3	2 3	4 6	3 3 30 – 2ε –	30-2ε	0
b_j	20	25	30	75	
Платежі β_j	2	4	3		

Таблиця 10.8

Друга ітерація

Пункт відправлення	Пункт призначення			Запаси	Платежі
	B_1	B_2	B_3	a_i	α_i
A_1	2 6	4 4 **20 + ε** +	2 2 **2 ε**	20 + ε	0
A_2	3 3 **20**	5 5 **5 + ε**	3 4	25 + ε	1
A_3	3 3	5 6	3 3 **30 – 2ε** –	30 – 2ε	1
b_j	20	25	30	75	
Платежі β_j	2	4	3		

Отже, покращений план має показник ефективності

$$W_{\min}\big|_{\varepsilon=0} = 20\cdot 4 + 20\cdot 3 + 5\cdot 5 + 30\cdot 3 = 255 .$$

Зауважимо, що у виродженій транспортній задачі при виборі Ц1 або Ц2 з іншими вільними клітинами, остаточний, тобто оптимальний, план зміниться, але мінімальне значення показника ефективності залишиться незмінним: $W = 255$.

Висновок. Особливістю вироджених транспортних задач є те, що однакових мінімальних значень показника ефективності можна досягнути на кількох різних планах. Тобто, для «вироджених» транспортних задач характерною ознакою є неоднозначність розв’язку.

Контрольні запитання та завдання

1. Розкрийте суть транспортної задачі.
2. У чому полягає суть методу потенціалів розв’язання транспортної задачі?
3. Сформулюйте ознаки оптимальності плану перевезень.
4. Розкрийте суть поняття «потенціальний план».
5. Поясніть процедуру побудови потенціального плану.
6. Наведіть та поясніть методику розв’язання транспортної задачі методом потенціалів.

Розділ 11

ДЕЯКІ ОКРЕМІ ВИПАДКИ ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧ

11.1. Транспортні задачі з неправильним балансом

У попередніх розділах розглядалися транспортні задачі з виконанням такої умови: сума запасів дорівнює сумі замовлень

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{11.1}$$

Ця класична транспортна задача (11.1) називається *транспортною задачею з правильним балансом.* Порушення умови правильного балансу перетворює класичну транспортну задачу в *транспортну задачу з неправильним балансом.* Порушення балансу поділяють на два типи:

1. Сума запасів у пунктах відправлення перевищує суму замовлень

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j , \tag{11.2}$$

тобто має місце *транспортна задача з надмірністю запасів.*

2. Сума замовлень перевищує наявні запаси

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j , \tag{11.3}$$

тобто маємо *транспортну задачу з надмірністю замовлень.*

У разі надмірності запасу постановка транспортної задачі набуває вигляду: знайти такий план перевезень $\left(x_{ij}\right)$, за якого всі замовлення будуть виконані, а загальна вартість перевезень набуває мінімального значення:

$$W = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min_{x_{ij}\geq 0 \left(i=\overline{1,m}\;\; j=\overline{1,n}\right)}$$

при виконанні умов (11.2) та системи обмежень

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i \ \left(i = \overline{1, m_1}\right), \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ \left(i = \overline{m_1 + 1, m}\right), \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_j \ \left(j = \overline{1, n}\right). \end{cases}$$

Як бачимо, частина або всі рівняння-обмеження перетворюються в нерівності-обмеження. Розв'язок цієї транспортної задачі можна отримати або класичним симплекс-методом, або за допомогою методів розв'язання транспортних задач, розглянутих вище (розподільний метод, метод потенціалів).

Перед тим, як скористатися відомими методами розв'язання транспортної задачі, зведемо транспортну задачу з надмірністю запасів до класичної транспортної задачі з правильним балансом.

Для цього використаємо уявний пункт призначення (фіктивний, хибний) $B_ф$, якому належить замовлення, що саме дорівнює перевищенню запасів над замовленнями:

$$b_ф = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Уважатимемо вартості перевезень від усіх пунктів відправлення до фіктивного пункту призначення $B_ф$ такими, що дорівнюють нулю, тобто $c_{iф} = 0 \ \left(i = \overline{1, m}\right)$.

За фізичним змістом $x_{iф}$ означає кількість вантажу, який залишається невідправленим з i-го пункту відправлення.

Висновок. За рахунок фіктивного пункту призначення $B_ф$ із замовленням $b_ф$ усі нерівності-обмеження в транспортній задачі з надмірністю запасів перетворені в рівняння-обмеження, тобто задача зведена до класичної транспортної задачі з правильним балансом.

Транспортна задача з надмірністю запасів

У цьому випадку виконується нерівність (11.3):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

тобто запасів недостатньо для задоволення всіх замовлень. Потрібно скласти план таких перевезень, за якого всі запаси будуть вивезені і при цьому вартість перевезень буде мінімальною. Для розв'язання введемо фіктивний пункт відправлення $A_ф$ із фіктивним уявним запасом $a_ф$, який дорівнює саме тій кількості вантажу, якої бракує для задоволення всіх замовлень

$$a_ф = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

Уважатимемо, що всі вартості перевезень із фіктивного пункту відправлення до будь-якого пункту призначення дорівнюють нулю:

$$c_{фj} = 0 \left(j = \overline{1,n} \right).$$

Складові плану перевезень $x_{ф_j}$ $(j = \overline{1,n})$ показують величину недопостачання вантажу у відповідний пункт призначення.

Висновок. За допомогою фіктивного пункту відправлення транспортну задачу з надмірністю замовлень зведено до транспортної задачі з правильним балансом.

Приклад 11.1 Розв'язати транспортну задачу з надмірністю запасів (табл. 11.1).

Таблиця 11.1

Вихідні дані

Пункт відправлення	Пункт призначення				Запаси	Платежі
	B_1	B_2	B_3	$B_Ф$	a_i	α_i
A_1	5 5 18	7 7 21 –	6 6 11 +	1 0	50	0
A_2	4 6	6 6	5 5 22Ц1 –	0 0 18 +	40	–1
A_3	4 8	6 4 +	5 5 –	0 0 20 –	20	–1
b_j	18	21	33	38	110	
Платежі β_j	5	7	6	1		

Зауваження 11.1 Крім прийому зведення транспортної задачі з неправильним балансом до транспортної задачі з правильним балансом за допомогою фіктивних пунктів відправлень та приймальних пунктів, можна використати умови «нормування», наприклад домножити всі замовлення на коефіцієнт

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j}$$

Для транспортної задачі з надмірністю замовлень або на коефіцієнт

$$k = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i}$$

для транспортних задач з надмірністю запасів.

Перевіряємо балансове співвідношення:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 = 50 + 40 + 20 = 110, \\ b_1 + b_2 + b_3 = 18 + 21 + 23 = 72, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} a_i > \sum_{j=1}^{3} b_j \,.$$

Тут є надмірність запасів.

Використовуємо фіктивний пункт призначення $B_ф$ із заявкою $b_ф = 110 - 72 = 38$. У результаті використання $B_ф$ вдалося перейти до транспортної задачі з правильним балансом. Розв'язуємо класичну транспортну задачу методом потенціалів. Перевіряємо задачу на невиродженість:

$$r = n + m - 1 = 4 + 3 - 1 = 6 \,.$$

Кількість ненульових базисних змінних, отриманих методом «північно-західного кута», дорівнює 6 і збігається з r. Тобто транспортна задача (табл. 11.1) є невиродженою.

Виконаємо заміну базисних і вільних віконець за циклами Ц1 (табл. 11.1), Ц2 (табл. 11.2) та Ц3 (табл. 11.3). Заповнимо таблиці першого (див. табл. 11.2), другого (табл. 11.3) та третього (табл. 11.4) наближень відповідно.

Таблиця 11.2

Перше наближення

Пункт відправлення	Пункт призначення				Запаси	Платежі
	B_1	B_2	B_3	$B_Ф$	a_i	α_i
A_1	5 5 **18**	7 7 **1** –	6 6 **31** –	1 0 +	50	0
A_2	4 6	6 6	5 **Ц2** 5 **2** +	0 0 **38** –	40	–1
A_3	2 8	4 4 20	3 5 –	–2 0	20	–3
b_j	18	21	33	38	110	
Платежі β_j	5	7	6	1		

Таблиця 11.3

Друге наближення

Пункт відправлення	Пункт призначення				Запаси	Платежі
	B_1	B_2	B_3	$B_Ф$	a_i	α_i
A_1	5 5 **18**	7 7 **1** –	5 6	0 0 31 +	50	0
A_2	5 6	7 +6	5 **Ц3** 5 **33**	0 0 **31**	40	0
A_3	2 8	4 4 **20**	2 5	–3 0	20	–3
b_j	**18**	21	33	38	110	
Платежі β_j	5	7	5	0		

Таблиця 11.4

Третє наближення

Пункт відправлення	Пункт призначення				Запаси	Платежі
	B_1	B_2	B_3	$B_Ф$	a_i	α_i
A_1	5 5 **18**	6 7	5 6	0 0 **32**	50	0
A_2	5 6	6 6 **1**	5 5 **33**	0 0 **6**	40	0
A_3	3 8	4 4 **20**	3 5	–2 0	20	–2
b_j	18	21	33	38	110	
Платежі β_j	5	6	5	0		

Висновок:

1. Третє наближення дає оптимальний план, із якого випливає, що $W_{\min} = 341$.

2. У пункті відправлення A_1 залишилось невідправлених замовлень 32, у A_2 – 6, а в A_3 – 0.

11.2. Розв'язок транспортної задачі за критерієм часу

Дотепер транспортну задачу ставили як задачу, у якій потрібно було мінімізувати вартість перевезень. Але в багатьох випадках на практиці важливу роль відіграє тривалість часу T, протягом якого всі перевезення буде завершено. Так, наприклад: у разі ліквідації наслідків надзвичайних ситуацій треба мінімізувати як час надходження інформації про стихійне лихо, так і час до надання допомоги; у випадку багатопроцесорного оброблення інформації необхідно розподілити обчислювальні ресурси, щоб мінімізувати тривалість обчислень.

Найкращим слід уважати такий план перевезень x_{ij}, за якого час завершення всіх перевезень мінімізується

$$T \to \min_{\substack{x_{ij} \geq 0 \\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}} .$$

Транспортна задача, у якій оптимальним вважається план із мінімальним часом усіх перевезень, називається *транспортною задачею за критерієм часу*.

Математична постановка транспортної задачі за критерієм часу стосовно балансових обмежень виконується так само, як і класична транспортна задача. Відмінність полягає лише в тому, що критерій, тобто показник ефективності, має вигляд:

$$T = \max t_i \to \min_{x_{ij} > 0}$$

і виконуються балансові обмеження:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = \overline{1,n});$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = \overline{1,m}).$$

Зауваження 11.2 Використання строгого обмеження $x_{ij} > 0$ показує, що максимальний інтервал часу обирається не загалом, а лише з тих клітин транспортної таблиці, у яких перевезення строго більше за нуль (строго додатні, тобто реально виконуються).

Для розв'язку транспортної задачі за критерієм часу теж зручно використовувати транспортну таблицю, у якій у правому верхньому куті буде записано t_{ij} — час перевезення вантажу з пункту відправлення i в пункт призначення j (замість c_{ij}).

Загалом транспортна задача за критерієм часу не належить до задач лінійного програмування, тому що показник ефективності T є нелінійною функцією змінних x_{ij}. Але зручна форма транспортної таблиці, яка використовується для розв'язку класичної транспортної задачі, дозволяє виконати обчислення без порушень балансових обмежень, тобто побудувати алгоритм, який ґрунтується на використанні допустимого плану.

Метод обчислень, що мінімізує час перевезень T, побудований з використанням транспортної таблиці і технології циклічних перенесень, які дають змогу не порушити балансові обмеження, називається *методом «заборонених» клітин.* «Забороненими» вважаються клітини без перевезень і при цьому з найбільшим часом перевезень t_{ij}. «Заборона» вказує, з якої допустимої клітини потрібно «виштовхнути» перевезення в іншу клітину з меншим часом перевезень. Покращення плану перевезень припиняється тоді, коли найбільший час перевезень уже зменшити неможливо.

Ознака: всі клітини заблоковані перевезеннями або заборонені до перевезень.

Приклад 11.2 Вихідні дані транспортної задачі наведені в табл. 11.5. Необхідно мінімізувати час перевезень.

Таблиця 11.5

Вихідні дані

Пункт відправлення	Пункт призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	**10**	8	5 **25**	6	7	25
A_2	5 **21** –	6 Ц1 +	6 **2**	6 **11**	**9**	34
A_3	4 +	8 **14** –	7 13	8	5 **15**	42
A_4	**11**	4 **23**	5	8	**9**	23
b_j	21	37	40	11	15	124

1. Викреслюємо клітини з координатами $(1{,}1)$, $(2{,}5)$, $(4{,}1)$ та $(4{,}5)$, як клітини з тривалим часом перевезень.

2. Будь-яким способом заповнюємо транспортну таблицю допустимим планом:

а) якщо транспортну таблицю заповнити будь-яким планом, не звертаючи уваги на баланс записів та замовлень, але лише виконувати умову невід'ємності перевезень, то отримаємо план перевезень;

б) якщо транспортну таблицю додатково до невід'ємності заповнити такими значеннями x_{ij}, які враховують умови виконання балансу записів та замовлень, то одержимо допустимий план перевезень;

в) якщо вимоги п. 2 доповнити вимогою додатності $r = m + n - 1$ базових перевезень та нульовими перевезеннями в інших клітинах таблиці, то отримаємо *опорний план перевезення.*

Зауважимо ще раз, що *оптимальний план перевезень для транспортної задачі за критерієм вартості* досягається лише на опорному плані.

Для транспортної задачі за критерієм часу оптимальний план перевезень не обов'язково досягається на опорному, він може досягатися на будь-якому допустимому плані перевезень.

Виконаємо перенесення перевезень за циклами Ц1 (табл. 11.6) та Ц2 (табл. 11.7).

Таблиця 11.6

Перша ітерація

Пункт відправлення	Пункт призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	10	8	5 25	6	5 +	25
A_2	7 7 −1	6 14	6 2+	Ц2 6 11	9	34
A_3	1 14	8	2 13	8	−5 15	42
A_4	11	4 23	5 +	8	9	23
b_j	21	37	40	11	15	124

Таблиця 11.7

Друга ітерація

Пункт відправлення	Пункт призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	10	8	5 18	6	5 7	25
A_2	5	6 14	6 9	6 11	9	34
A_3	4 21	8	5 13	8	−5 8	42
A_4	11	4 23	5	8	9	23
b_j	21	37	40	11	15	124

Отже, $T_{\min} = 6$.

Приклад 11.3 Скласти план перевезень, якщо вихідні дані транспортної задачі задані табл. 11.8, 11.9.

Таблиця 11.8

Вихідні дані

Пункт відправлення	Пункт призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	1 15	3 5	4	2	5	20
A_2	5	2 15	3 15	1	2	30
A_3	8	7	6 10	10	4 25	35
A_4	3	4	3	6 25	5 15	40
b_j	15	20	25	25	40	125

Таблиця 11.9

Остаточний результат

Пункт відправлення	Пункт призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	1 15	3 5	4	2 10	5	20
A_2	5	2 10	3	1 15	2 5	30
A_3	8	7	6	10	4 35	35
A_4	3 5	4 10	3 25	6	5	40
b_j	15	20	25	25	40	125

Отже, $T_{\min} = 4$.

Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягає суть транспортної задачі?
2. Порушення яких умов перетворює класичну транспортну задачу в транспортну задачу з неправильним балансом?
3. Які методи застосовують для розв'язання транспортної задачі з неправильним балансом?
4. У чому полягає суть транспортної задачі за критерієм часу? Наведіть приклади.
5. Наведіть та поясніть математичну постановку транспортної задачі за критерієм часу.

Розділ 12
ПІСЛЯОПТИМІЗАЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

12.1. Ідея аналізу параметричної чутливості

Післяоптимізаційний аналіз (або аналіз чутливості) полягає у зв'язуванні впливу структурних, параметричних та структурно-параметричних змін у математичній моделі задачі на отриманий оптимальний розв'язок для тієї постановки задачі лінійного програмування, яка вважається вихідною.

Розглянемо приклад 5.1, у якому було показано, що для отримання максимального прибутку необхідно випустити продукцію типу A (супутники зв'язку) $\hat{x}_1 = 17\frac{1}{7} \approx 17$ та типу B (навігаційні супутники) $\hat{x}_2 = 23\frac{4}{7} \approx 23$. Оптимальний розв'язок був отриманий за умови, що вартість виробів A та B має становити 40 та 50 умовних одиниць відповідно.

У зв'язку зі змінами, що відбуваються у світовій економіці, керівнику фірми (особі, що приймає рішення) важливо знати, як вплине зміна вартості продукції A та B (питомий прибуток) на запланований випуск продукції $\hat{x}_{1,2}$ (рис. 12.1).

Як бачимо, за умови

$$-3 < -\frac{c_1}{c_2} < -\frac{3}{8} \Leftrightarrow 3 > \frac{c_1}{c_2} > \frac{3}{8} \quad \Leftrightarrow \quad 3 > \frac{c_1}{c_2} > 0,375$$

оптимальний план випуску продукції не зміниться, тому що «основна пряма»

$$W = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

проходитиме через кутову точку з координатами $\left(\hat{x}_1 = 17\frac{1}{7}, \hat{x}_2 = 23\frac{4}{7}\right)$, що забезпечує максимальне значення показника ефективності.

При $\frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{8}$ або $\frac{c_1}{c_2} = 3$ має місце невизначеність.

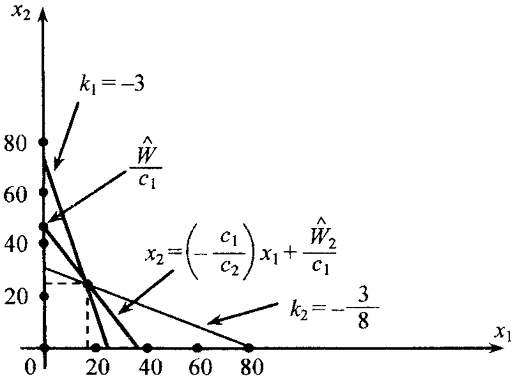


Рис. 12.1. Графік визначення меж зміни співвідношення між c_1 та c_2 у виразі для обчислення показника ефективності, за яких оптимальний розв'язок $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ залишається незмінним

Якщо $\frac{c_1}{c_2} < \frac{3}{8}$, то оптимальною точкою буде $(0{,}30)$, а якщо $\frac{c_1}{c_2} > 3$, то оптимальною точкою буде $(25{,}0)$, що з фізичної точки зору означає недоцільність випуску супутників зв'язку або навігаційних супутників відповідно. У разі зміни співвідношення між c_1 та c_2 відбувається зміна оптимального значення показника ефективності. Зрозуміло, що в цілому зміна будь-якого параметра математичної моделі задачі лінійного програмування (обсяг ресурсів та їх вартість), норми витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції впливатимуть на оптимальний розв'язок і значення показника ефективності. Кількісне дослідження цих змін і виконується в процесі аналізу чутливості математичної моделі задачі лінійного програмування.

Наведений простий приклад аналізу чутливості оптимального розв'язку задачі лінійного програмування та значення показника ефективності до зміни параметрів математичної моделі має ілюстративний характер і для використання в багатовимірному випадку ($n \geq 3$, де n — кількість змінних) є трудомістким.

Для дослідження впливу властивостей задачі лінійного програмування на її оптимальний за вихідною постановкою розв'язок у загальному багатовимірному випадку використовують певним чином переформульовану вихідну задачу лінійного програмування, яку називають *двоїстою (спряженою) задачею лінійного програмування,* або використовують так зване *параметричне програмування.*

12.2. Ідея фізичного змісту побудови математичної моделі двоїстої задачі лінійного програмування

У прикладі 5.1 було поставлено за мету отримати максимальний прибуток від створення виробів A та B, однак, не розглядалося питання про вартість ресурсу, який використовувався для виробництва, тобто не було зауважень щодо витрат, які необхідно мінімізувати, але так, щоб не зменшити питомий прибуток (собівартість виробленої продукції).

Припустімо, що одиниця ресурсу C, D, E коштує u_1, u_2, u_3 відповідно. Тоді вартість виробів можна обчислити за виразами $24u_1 + 8u_2 + 3u_3$ і $8u_1 + 8u_2 + 8u_3$ відповідно.

Задача лінійного програмування зі змінними $u_{1,2,3}$ формулюється так: якою має бути вартість кожного окремого ресурсу для того, щоб, не зменшуючи вартості одиниці виробу, досягти мінімуму сумарної вартості ресурсів.

Математична постановка задачі в цьому випадку набуває вигляду:

$$W = 600u_1 + 480u_2 + 240u_3 \to \min_{u_{1,2,3} \geq 0}$$

за умов

$$\begin{cases} 24u_1 + 8u_2 + 3u_3 \geq 40, \\ 8u_1 + 8u_2 + 8u_3 \geq 50. \end{cases}$$

Записана задача лінійного програмування є двоїстою стосовно задачі прикладу 5.1.

12.3. Загальна постановка і правила побудови двоїстої задачі

Кожній задачі лінійного програмування можливо поставити у відповідність задачу, яку називають *двоїстою* до неї. Припустімо, що загальна задача лінійного програмування (вихідна, або, як ще кажуть, пряма задача) задана у вигляді:

$$W=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \to \max_{x_j\ge 0\ \left(j=\overline{1,n}\right)} \tag{12.1}$$

за умови виконання обмежень

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i \ \left(i=\overline{1,m}\right). \tag{12.2}$$

Двоїста (спряжена до неї) задача має вигляд:

$$\tilde{W}=\sum_{i=1}^{m}b_iu_i \to \min_{u_i\ge 0\ \left(j=\overline{1,m}\right)}; \tag{12.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}u_i \ge c_j \ \left(j=\overline{1,n}\right). \tag{12.4}$$

Задача (12.3), (12.4) — двоїста до задачі (12.1), (12.2) — будується за такими правилами:

1. Виконується впорядкування вихідної задачі до вигляду (12.3), (12.4), тобто якщо цільова функція максимізується, то нерівності-обмеження мають бути зведені до вигляду «$\le$», а якщо мінімізується, то до вигляду «$\ge$».

Досягти виконання потрібної орієнтації знаку обмежень можна множенням обох його частин на (-1).

2. Якщо вихідна задача є задачею максимізації, то двоїста задача буде задачею мінімізації. При цьому вектор, який утворено з коефіцієнтів при невідомих у показнику ефективності вихідної задачі збігається з вектором констант у правих частинах системи обмежень двоїстої задачі, і навпаки, коефіцієнти при невідомих у показнику ефективності двоїстої задачі є відповідними правими частинами системи обмежень вихідної задачі.

3. Кожній змінній u_i двоїстої задачі відповідає i-те обмеження вихідної задачі, і, навпаки, кожній змінній x_j вихідної задачі відповідає j-те обмеження двоїстої задачі.

4. Матриця коефіцієнтів двоїстої задачі може бути отримана транспонуванням матриці $A=\left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}$, складеної з коефіцієнтів, при невідомих у системі обмежень вихідної задачі.

Задачі (12.1), (12.2) та (12.3), (12.4) утворюють симетричну пару взаємно двоїстих задач. Якщо використати позначення:

$$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)\,; \quad B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T\,;$$

$A = \|a_{ij}\|_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ — прямокутна матриця розміром $m \times n$;

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^T$;

$Q_k = (0, \ldots, 0)_k^T$ — вектор-стовпець нулів розмірності k, то пряму і двоїсту задачі лінійного програмування можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} W = CX \to \max\limits_{X \geq 0_n} \\ AX \leq B \end{cases} \text{— пряма,}$$

$$\begin{cases} \tilde{W} = B^T U \to \min\limits_{U \geq 0_m} \\ A^T U \geq C^T \end{cases} \text{— двоїста.}$$

Розглянемо двоїсту задачу лінійного програмування (12.3), (12.4) як вихідну задачу лінійного програмування і, скориставшись правилами переходу до двоїстої задачі, отримаємо пряму задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} -\tilde{W} = -B^T U \to \max\limits_{U \geq 0_m}, \\ -A^T U \geq -C^T\,. \end{cases}$$

Тоді, після перетворення можемо записати:

$$\begin{cases} -W = -CX \to \min\limits_{X \geq 0_n}, \\ -AX \geq -B; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W = CX \to \max\limits_{X \geq 0_n}, \\ AX \leq B. \end{cases}$$

Висновок:

1. Зведення задачі лінійного програмування до двоїстої задачі лінійного програмування є прямою задачею.

2. У системі «пряма–двоїста» обидві задачі лінійного програмування рівноправні. Кожну з них можна розглядати як пряму, тоді інша вважається двоїстою до неї.

Приклад 12.1 Задано задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} W = x_1 - 4x_2 - 3x_3 \to \min\limits_{0 \le x_{1,2,3}}, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_3 \ge 4. \end{cases}$$

Побудувати двоїсту задачу лінійного програмування.

Зведемо задану задачу лінійного програмування до вигляду (12.1), (12.2)

$$\begin{cases} -W = -x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max\limits_{x_{1,2,3} \ge 0}, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 \le -6, \\ -x_3 \le -4, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -W = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T \to \max\limits_{x_{1,2,3} \ge 0}, \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Двоїста задача лінійного програмування набуває вигляду:

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -6 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \to \min\limits_{u_{1,2,3,4} \ge 0}.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{W} = 7u_1 + 6u_2 - 6u_3 - 4u_4 \to \min\limits_{u_{1,2,3,4} \geq 0}, \\ 3u_1 + u_2 - u_3 \geq -1, \\ 4u_1 + 2u_2 - 2u_3 \geq 4, \\ u_1 + u_2 - u_3 - 4u_4 \geq 3. \end{cases}$$

Приклад 12.2

Пряма задача лінійного програмування задана у вигляді:

$$\begin{cases} W = 6x_1 + 10x \to \max\limits_{x_1 \geq 0}, \\ 5x_1 + 3x \geq 10, \\ x_1 - x \leq 4. \end{cases}$$

Побудувати двоїсту задачу.

Зведемо пряму задачу до стандартного вигляду. Для цього позначимо

$$x = x_2 - x_3 \in \mathbb{R},\ x_{2,3} \geq 0\,.$$

Тоді:

$$\begin{cases} W = 6x_1 + 10x_2 - 10x_3 \to \max\limits_{x_{1,2,3} \geq 0}, \\ -5x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leq -10, \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 4, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} W = \begin{bmatrix} 6 & 10 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \to \max\limits_{x_{1,2,3} \geq 0}, \\ \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Двоїста задача набуває вигляду:

$$\begin{cases} W = \begin{bmatrix} -10 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \to \min\limits_{u_{1,2} \ge 0}, \\ \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{W} = -10u_1 + 4u_2 \to \min\limits_{u_{1,2} \ge 0}, \\ -5u_1 + u_2 \ge 6, \\ -3u_1 - u_2 \ge 10, \\ 3u_1 + u_2 \ge -10, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{W} = -10u_1 + 4u_2 \to \min\limits_{u_{1,2} \ge 0}, \\ -5u_1 + u_2 \ge 6, \\ -3u_1 - u_2 = 10. \end{cases}$$

Приклад 12.3 Побудувати двоїсту задачу до заданої задачі лінійного програмування:

$$\begin{cases} W = x_1 + x_2 + x_3 \to \min\limits_{x_{123} \ge 0}, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 9, \\ 2x_1 + x_3 \ge 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} W = [111] \cdot [x_1\, x_2\, x_3]^T \to \min\limits_{x_{123} \ge 0}, \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{W} = [9 \quad 4] \cdot [u_1 \, u_2]^T, \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{W} = 9u_1 + 4u_2 \to \max\limits_{x_{123} \ge 0}; \\ u_1 + 2u_2 \le 1, \\ 2u_1 \le 1, \\ u_1 + u_2 \le 1. \end{cases}$$

12.4. Основні теореми двоїстості

Теорема 12.1 Якщо одна з двоїстих задач має оптимальний розв'язок $\widehat{X} = \left[\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n\right]^T$, то й інша має оптимальний розв'язок $\widehat{U} = \left[\hat{u}_1, \hat{u}_2, \ldots, \hat{u}_m\right]^T$, при чому екстремальні значення показника ефективності обох задач збігаються $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i \hat{u}_i$.

Зауваження 12.1 Якщо показник ефективності однієї із задач необмежений, то інша задача не має розв'язків.

Наслідок 12.1

1. Для існування розв'язку однієї з двоїстих задач необхідно і достатньо, щоб інша мала хоча б один розв'язок.

2. Для того, щоб $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ та $U = [u_1, u_2, \ldots, u_m]^T$ були оптимальними розв'язками пари двоїстих задач, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i .$$

Теорема 12.2	Якщо будь-яка змінна $\hat{x}_j$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ оптимального розв'язку прямої задачі додатна, то j-те обмеження двоїстої задачі на оптимальному розв'язку перетворюється в рівність. Якщо оптимальне рівняння прямої задачі перетворює будь-яке i-те обмеження у строгу нерівність, то в оптимальному розв'язку двоїстої задачі змінна $\hat{u}_i$ дорівнює нулю.
Зауваження 12.2	Теорема 12.2 ще має назву «умова доповняльної нежорсткості» і формально записується у вигляді: $$\begin{cases}\left(\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}\hat{u}_i-c_j\right)\hat{x}_j=0,\ j=\overline{1,n},\\ \left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\hat{x}_j-b_i\right)\hat{u}_i=0,\ i=\overline{1,m}.\end{cases}$$
Теорема 12.3	В оптимальному розв'язку двоїстої задачі значення змінних чисельно дорівнюють частинним похідним $\dfrac{\partial W_{\max}}{\partial b_i}$ для прямої задачі; $$\hat{u}_i=\frac{\partial W_{\max}}{\partial b_i},\ i=\overline{1,m},$$ де $\Delta W_{\max}$ — зміна максимального значення показника ефективності W при одному й тому самому двоїстому плані, яка викликана малою зміною b_i прямої задачі.

Покажемо, що у разі змінення правих частин b_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ обмежень прямої задачі невідомі двоїстої задачі можна інтерпретувати, як оцінки впливу цих змінних на оптимальне значення показника ефективності прямої задачі.

Позначимо

$$\Delta B=\left[\Delta b_1,\ldots,\Delta b_m\right]^T,$$

де Δb_i — приріст i-ї правої частини прямої задачі.

Розглянемо дві двоїсті задачі:

1) пряма —

$$\begin{cases} W = CX_1 \to \max\limits_{X_1 \geq 0_n}, \\ AX_1 \leq B \end{cases}$$

та двоїста —

$$\begin{cases} \tilde{W} = B^T U_1 \to \min\limits_{U_1 \geq 0_m}, \\ A^T U_1 \geq C^T; \end{cases}$$

2) пряма —

$$\begin{cases} W = CX_2 \to \max\limits_{X_1 \geq 0_n}, \\ AX_2 \leq (B + \Delta B), \end{cases}$$

де $\Delta B = \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ \vdots \\ \Delta b_m \end{bmatrix} \to 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Delta b_1 \to 0 \\ \vdots \\ \Delta b_m \to 0 \end{bmatrix}$,

та двоїста —

$$\begin{cases} \tilde{W} = (B + \Delta B)^T U_2 \to \min\limits_{U_2 \geq 0_m}, \\ A^T U_2 \geq C^T. \end{cases}$$

Вимога, яка полягає в тому, що $\Delta B \to 0$, означає, що заміна B на $B + \Delta B$ у двоїстій задачі не призводить до зміни її оптимального розв'язку $\widehat{U}_2 = \widehat{U}_1$.

Тоді, відповідно до першої теореми двоїстості, можна записати:

для першої пари задач

$$W_{\max_1} = \widehat{W}_{\min_1} \Leftrightarrow C\widehat{X}_1 = B^T \widehat{U}_1;$$

для другої пари задач

$$W_{\max_2} = \widehat{W}_{\min_2} \Leftrightarrow C\widehat{X}_2 = (B + \Delta B)^T \widehat{U}_1.$$

Обчислимо приріст показника ефективності прямої задачі

$$\Delta W_{\max} = W_{\max_2} - W_{\max_1} = \left(B + \Delta B\right)^T \widehat{U}_1 - B^T \widehat{U}_1 =$$

$$= \left(B^T + \Delta B^T - B^T\right)\widehat{U}_1 = \Delta B^T \widehat{U}_1 =$$

$$= \left[\Delta b_1, \ldots, \Delta b_m\right] \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_m \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \Delta b_i \hat{u}_i .$$

Із доведеної теореми 12.3 випливає, що розв'язок двоїстої задачі u_i (двоїста оцінка) кількісно дорівнює приросту максимального значення показника ефективності прямої задачі у разі зміни правої частини i-го обмеження прямої задачі на одиницю.

Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягає суть післяоптимізаційного аналізу задачі лінійного програмування?
2. Поясніть необхідність проведення післяоптимізаційного аналізу задачі лінійного програмування.
3. У чому полягає суть двоїстої задачі лінійного програмування?
4. Наведіть та поясніть математичну постановку і правила побудови двоїстої задачі.

Розділ 13

АНАЛІЗ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

13.1. Аналіз розв'язку задачі лінійного програмування на основі двоїстих оцінок

Аналіз розв'язку задачі лінійного програмування

$$W = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_{x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,n}\right)}$$

за умови виконання обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right)$$

ґрунтується на дослідженні впливу варіації параметрів c_j, a_{ij}, b_i ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$) на цей розв'язок.

Такий аналіз можна виконати, використовуючи такі прийоми та способи:

1) аналіз внутрішньої структури кожного з отриманих розв'язків із використанням властивостей двоїстих оцінок;

2) порівняння варіантів розв'язків, отриманих шляхом розв'язання прямої задачі, за різних значень її параметрів.

Перший напрям використовує теореми двоїстості, другий — пов'язаний з так званою *параметричною оптимізацією* (*параметричне програмування*), яка ґрунтується здебільшого на комп'ютерному обчислювальному експерименті.

Аналіз розв'язку задачі лінійного програмування на основі двоїстих оцінок

Двоїсті оцінки потрібно розглядати як:

1. *Показники дефіцитності (коштовності) ресурсів і продукції.*

Як випливає з теореми 12.2, $\hat{u}_i$ є оцінкою i-го ресурсу. Що більше значення оцінки, то вище дефіцитність ресурсу. Для недефіцитного ресурсу $\hat{u}_i = 0$.

2. *Показники впливу обмежень на значення показника ефективності.*

У теоремі 12.3 було показано, що $\hat{u}_i = \dfrac{\partial W_{\max}}{\partial b_i}$, $i=\overline{1,m}$. При незначному прирості Δb_i оцінка $\hat{u}_i$ є точною мірою впливу обмеження на показник ефективності. Для практики важливо знайти граничні значення правих частин системи обмежень-нерівностей прямої задачі (нижньої та верхньої границь), за яких величини оцінок $\hat{u}_i$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ залишаються незмінними.

3. *Показники доцільності виробництва окремих видів продукції.*

Ця властивість випливає з теореми 12.2. Головний зміст цієї властивості полягає в тому, що в оптимальний план виробництва доцільно включати лише виробництво тієї j-ї продукції, для якої витрати на придбання і використання сировини не перевищують прибуток:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{u}_i < c_j \ \left(j=\overline{1,n}\right).$$

4. *Інструмент порівняння сумарних умовних витрат та результатів.*

Ця властивість випливає з теореми 12.1, у якій встановлено зв'язок між екстремальними значеннями показника ефективності прямої та двоїстої задач.

Докладно розглянемо чотири описані вище властивості. З економічної інтерпретації двоїстих задач випливає, що рівність показника ефективності за оптимальних планів означає, що оцінка всіх затрат виробництва має дорівнювати оцінці вартості виготовленого продукту.

Означення 13.1 *Допустимим інтервалом стійкості двоїстих оцінок відносно i-го обмеження* називають інтервал вигляду

$$\left[b_i - \Delta b_i^{\text{н}},\ b_i + \Delta b_i^{\text{в}}\right],\ i=\overline{1,m},$$

де $\Delta b_i^{\text{н}}$ — нижня межа зменшення; $\Delta b_i^{\text{в}}$ — верхня межа збільшення.

Якщо

$$b_i + \Delta b_i \in \left[b_i - \Delta b_i^{\text{н}}, b_i + \Delta b_i^{\text{в}}\right],$$

де Δb_i — зміна i-го ресурсу, то вплив Δb_i на змінення величини прибутку, обчисленого в результаті оптимізації прямої задачі лінійного програмування, можна оцінити, використовуючи вираз

$$\Delta\widehat{W}_i = \hat{u}_i\ \Delta b_i \ \left(i=\overline{1,m}\right).$$

При цьому сумарний вплив змінення усіх Δb_i розраховується як сума окремих впливів.

Визначити $\Delta b_i^{\text{н}}$ та $\Delta b_i^{\text{в}}$ можна за формулами:

$$\Delta b_i^{\text{н}} = \min_{j=\overline{1,m_1}} \left\{\frac{\hat{x}_j}{d_{ij}}\right\},\ d_{ij} > 0$$

та

$$\Delta b_i^{\text{в}} = \left| \max_{j=\overline{1,m_1}} \left\{ \frac{\hat{x}_j}{d_{ij}} \right\} \right|, \, d_{ij} < 0,$$

де $\|d_{ij}\| = \|a_{ij}\|^{-1}$, $i = \overline{1,m_1}$, $j = \overline{1,m_1}$, m_1 — кількість базисних змінних; a_{ij} — елемент матриці A.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1m_1} & a_{1\,m_1+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1 1} & \cdots & a_{m_1 m_1} & a_{m_1\,m_1+1} & \cdots & a_{m_1 n} \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} & a_{1\,m_1+1} & \cdots & a_{1n} \\ A_1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a_{m_1\,m_1+1} & \cdots & a_{m_1 n} \end{array} \right],$$

де $A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1 1} & \cdots & a_{m_1 m_1} \end{bmatrix}$ — квадратна матриця, що складається з коефіцієнтів при базисних змінних ($m_1 \le m$, тут m_1 — кількість лінійно незалежних обмежень у прямій задачі лінійного програмування).

Доцільність включення до плану випуску нових видів продукції оцінюється параметром

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \hat{u}_i - c_j \left(j = \overline{1,n} \right).$$

Якщо $\Delta_j < 0$, то даний вид продукції після його введення до плану покращує план.

Якщо $\Delta_j > 0$, то включення продукту до плану випуску недоцільно.

Зрозуміло, що приріст прибутку за рахунок збільшення певного ресурсу на величину Δb_i дорівнює

$$\Delta \widehat{W}_i = \Delta b_i \, \hat{u}_i,$$

і при цьому витрати на придбання ресурсу становлять

$$\Delta V_i = \Delta b_i \, v_i ,$$

де V_i — вартість одиниці i -го ресурсу.

Висновок. Захід із придбанням ресурсу слід вважати доцільним, якщо $\Delta \widehat{W}_i - \Delta V_i > 0$.

Приклад 13.1 Для виготовлення чотирьох видів продукції А, Б, В, Г використовуються три види ресурсів R_1, R_2, R_3. Наявність ресурсу, норми його витрат на виготовлення одиниці продукції, питомий прибуток наведені в табл. 13.1.

Таблиця 13.1

Вихідні дані прямої задачі лінійного програмування

Вид ресурсу	Наявність ресурсу	Норми на виготовлення витрат одиниці продукції			
		А	Б	В	Г
R_1	240	2	1	1	3
R_2	60	1	0	2	1
R_3	300	1	2	3	0
Питомий прибуток, c_j	–	4	2	3	5

Основні етапи розв'язання:

I. Знайти оптимальний розв'язок прямої та двоїстої задач $\widehat{X}, \widehat{U}$.

II. Визначити зміни максимального прибутку за зміни ресурсу:

$$R_1 \text{ на } \Delta b_1 = -10 ;$$

$$R_2 \text{ на } \Delta b_2 = 60 ;$$

$$R_3 \text{ на } \Delta b_3 = 30 .$$

III. Оцінити доцільність уведення в план випуску п'ятого виду продукції Д, якщо норми витрат ресурсів R_1, R_2, R_3 на одиницю випуску становитимуть відповідно 2, 4, 2, а питомий прибуток — $C_5 = 15$.

IV. Оцінити доцільність придбання 100 одиниць ресурсу R_3 за ціною $V_3 = 0,5$.

Розв'язати пряму та двоїсту задачі лінійного програмування і виконати післяоптимізаційний аналіз.

1. Постановка та розв'язок прямої та двоїстої задач лінійного програмування:

$$\begin{cases} W = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot X \to \max\limits_{x_{1,2,3,4} \geq 0}, \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X \leq \begin{bmatrix} 240 \\ 60 \\ 300 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

де $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$.

2. Двоїста задача лінійного програмування

$$\begin{cases} \tilde{W} = \begin{bmatrix} 240 & 60 & 300 \end{bmatrix} \cdot U \to \min\limits_{u_{1,2,3} \geq 0}, \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot U \geq \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

де $U = [u_1, u_2, u_3]^T$.

3. Результат обчислення оптимального розв'язку за допомогою функцій Mathlab набуває вигляду:

- прямої задачі лінійного програмування

$\widehat{X} = \left[\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4\right]^T = \begin{bmatrix} 60 & 120 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$,

$\widehat{W} = 480$;

- двоїстої задачі лінійного програмування

$\widehat{U} = \left[\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\right]^T = \begin{bmatrix} 1{,}6 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{bmatrix}^T$,

$\widehat{W} = 480$.

4. Аналіз результатів розв'язку прямої задачі лінійного програмування:

а) найбільш дефіцитним є ресурс R_1, $\hat{u}_1 = 1{,}6$, найменш дефіцитним є ресурс R_3, $\hat{u}_3 = 0{,}2$;

б) обчислимо зміну максимального прибутку при зміні ресурсу.

5. Знаходження інтервалів стійкості двоїстих оцінок, тобто меж, у яких вони точно вимірюють вплив зміни обмежень на показник ефективності прямої задачі лінійного програмування.

5.1. Визначаємо інтервал стійкості оцінки відносно обмеження b_1, пов'язаного з ресурсом 1.

Базисними невідомими, що входять до оптимального плану, є x_1, x_2, x_3, тому матриця A_1 набуває вигляду:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \left\| a_{ij} \right\|_{3\times 3}.$$

Тоді $A_1^{-1} = \left\| a_{ij} \right\|_{3\times 3}^{-1} = \left\| b_{ij} \right\|_{3\times 3}$:

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,2 & -0,4 \\ -0,2 & -0,2 & 0,6 \\ -0,4 & 0,6 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

Знаходимо

$$\Delta b_1^{\text{н}} = \min_{j=1,2,3} \left\{ \frac{60}{0,8} \right\} = 75, \ d_{1j} > 0;$$

$$\Delta b_1^{\text{в}} = \left| \max_{j=1,2,3} \left\{ \frac{120}{-0,2}; \frac{0}{-0,4} \right\} \right| = 0, \ \ d_{1j} < 0.$$

Остаточно інтервал стійкості оцінок відносно першого обмеження набуває вигляду:

$$\left[b_1 - \Delta b_1^{\text{н}}, b_1 + \Delta b_1^{\text{в}} \right] = [240 - 75, 240 + 0] = [165, 240].$$

5.2. Визначаємо інтервал стійкості відносно ресурсу 2:

$$\Delta b_2^{\text{н}} = \min_{j=1,2,3} \left\{ \frac{0}{0,6} \right\} = 0, \ d_{2j} > 0;$$

$$\Delta b_2^{\text{в}} = \left| \max_{j=1,2,3} \left\{ \frac{60}{-0,2}; \frac{120}{-0,2} \right\} \right| = 300, \ \ d_{2j} < 0.$$

Остаточно:

$$\left[b_2 - \Delta b_2^{\text{н}}, b_2 + \Delta b_2^{\text{в}} \right] = [60 - 0, 60 + 300] = [60, 360].$$

5.3. Визначаємо інтервал стійкості відносно ресурсу 3:

$$\Delta b_3^{\text{н}} = \min_{j=1,2,3}\left\{\frac{120}{0,6};\frac{0}{0,2}\right\} = 0,\ d_{3j} > 0;$$

$$\Delta b_3^{\text{в}} = \left|\max_{j=1,2,3}\left\{\frac{60}{-0,4}\right\}\right| = 150,\quad d_{3j} < 0.$$

Остаточно:

$$\left[b_3 - \Delta b_3^{\text{н}}, b_3 + \Delta b_3^{\text{в}}\right] = [300 - 0, 300 + 150] = [300, 450].$$

Перевіримо, чи перебуває ресурс у межах стійкості після його зміни згідно з п. 2 завдання:

$R_1 : b_1 = 240 - 10 = 230 \in [165, 240]$;

$R_2 : b_2 = 60 + 60 = 120 \in [60, 360]$;

$R_3 : b_3 = 300 + 30 = 330 \in [300, 450]$.

Висновок І. Після зміни весь ресурс перебуває в межах стійкості.

6. Вплив зміни окремого ресурсу на максимальний прибуток, тобто $\Delta\widehat{W}_i\ (i = 1,2,3)$ можна обчислити за формулою

$$\Delta\widehat{W}_i = \hat{u}_i \Delta b_i\ (i = 1,2,3);$$

$$\Delta\widehat{W}_1 = \hat{u}_1 \Delta b_1 = 1,6(-10) = -16;$$

$$\Delta\widehat{W}_2 = \hat{u}_2 \Delta b_2 = 0,6 \cdot 60 = 36;$$

$$\Delta\widehat{W}_3 = \hat{u}_3 \Delta b_3 = 0,2 \cdot 30 = 6.$$

Сумарний вплив визначають як суму окремих впливів:

$$\Delta\widehat{W} = -16 + 36 + 6 = 26.$$

7. Для оцінювання доцільності введення у план випуску п'ятого виду продукції Д обчислюють характеристику Δ_5:

$$\Delta_5 = \sum_{i=1}^{3} a_{i5}\hat{u}_i - C_5 = 2 \cdot 1,6 + 4 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,2 - 15 = -9 < 0.$$

Висновок II. Прибуток перевищує витрати, тому введення у план випуску п'ятого виду продукції є вигідним.

8. Приріст ресурсу R_3 на величину $\Delta b_3 = 100$

$$b_3 = 300 + 100 = 400 \in [300, 450]$$

не виводить цей ресурс за межі стійкості, тому

$$\Delta\widehat{W}_3 = \hat{u}_3 \Delta b_3 = 0,2 \cdot 100 = 20,$$

але витрати на придбання 100 одиниць ресурсу R_3 становитимуть:

$$\Delta V_3 = \Delta b_3 V_3 = 100 \cdot 0,5 = 50 > 20,$$

тобто величина додаткового прибутку менша за витрати.

Висновок III. Закупівля ресурсу R_3 на умовах п. 4 недоцільна.

13.2. Аналіз розв'язку задачі лінійного програмування на основі використання параметричного програмування

Дослідження змінення розв'язку задачі лінійного програмування залежно від змінення параметрів математичної моделі задачі лінійного програмування є предметом *параметричного програмування* в задачі лінійного програмування. Постановка загальної задачі параметричного програмування в задачі лінійного програмування формулюється так: знайти на відрізку [α, β] скінченну кількість інтервалів $I_q \in [\alpha, \beta]$, $q = \overline{1,Q}$, $Q \in \mathbb{N}$, що містять значення параметра $t \in I_q\left(q = \overline{1,Q}\right)$, для яких оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування вигляду

$$W = \sum_{j=1}^{n}\left(c'_j + c''_j t\right)x_j \to \max_{x_j \geq 0\left(j=\overline{1,n}\right)}$$

за умови виконання обмежень

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a'_{ji} + a''_{ij}t\right)x_j \leq b'_i + b''_i t,\ i = \overline{1,m}$$

досягається в одній і тій самій кутовій точці (вершині) ОДР.

Економічний зміст задачі параметричного програмування в задачі лінійного програмування полягає в тому, що з плином часу, який можна інтерпретувати як параметр t, змінюється як вартість $c_j(t)$ одиниці j-го виробленого товару (вартість на момент виготовлення та вартість, пов'язана зі строком зберігання), так і запаси $b_i(t)$ i-го ресурсу (відбувається вихід з ладу за рахунок старіння та перебування тривалий час у неробочому стані) та витрат ресурсу $a_{ij}(t)$ на виготовлення одиниці товару (наприклад, пов'язаних з модернізацією виробництва).

Покажемо геометричну інтерпретацію задачі параметричного програмування в задачі лінійного програмування. Розглянемо залежність від часу t лише коефіцієнтів показника ефективності. Задача параметричного програмування в задачі лінійного програмування набуває вигляду: для кожного $t \in [\alpha; \beta]$ знайти свій вектор змінних, який максимізує показник ефективності:

$$W_t = \sum_{j=1}^{n}\left(c'_j + c''_j t\right)x_j = C(t)X \to \max_{x_j \geq 0\left(j=\overline{1,n}\right)}$$

у разі виконання умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j \leq b', \quad i = \overline{1,m},$$

де $C(t) = \left[c'_1 + c''_j t, \ldots, c'_n + c''_n t\right], X = \left[x_1, \ldots, x_n\right]^T$.

Припустімо, що ОДР є опуклим багатогранником. Рівнянню $C(t)X = 0$ відповідає сім'я гіперплощин, що проходять через початок координат.

Якщо параметру t надати деяке значення $t = t_1 \in [\alpha; \beta]$, то гіперплощина займе фіксоване положення. Переміщення гіперплощини $C(t_1)X = W_{t_1}$ паралельно фіксованому положенню в бік збільшення W_{t_1} призведе до збігу цієї площини, наприклад, з вершиною A ОДР (рис. 13.1).

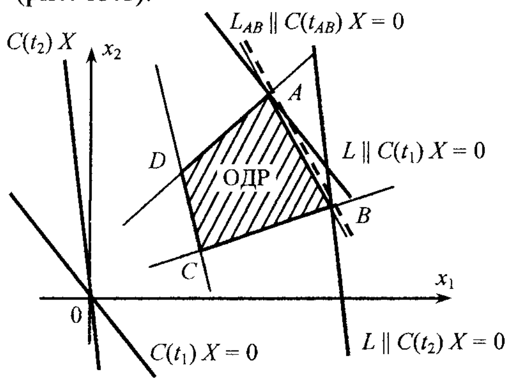


Рис. 13.1. Геометрична інтерпретація задачі параметричного програмування в задачі лінійного програмування

Змінення t у межах $t \in (t_{AB}, t_{AD})$ залишає незмінним оптимальний розв'язок $\hat{X} = X_A$.

Якщо

$$\begin{cases} t \in (-\infty, t_{AB}) \cap [\alpha, \beta]; \\ t_{AB} > \alpha, \end{cases}$$

тобто $t \in (\infty, t_{AB})$, то $\hat{X} = X_B$ і т. д.

Задача лінійного програмування стає виродженою при $t = t_{AB}$. Остаточний результат розв'язання задачі параметричного програмування в задачі лінійного програмування призведе до розбиття відрізка $[\alpha; \beta]$ на скінченне число інтервалів, у яких зміна t не призводить до зміни оптимального розв'язку, але в послідовно розташованих інтервалах ці розв'язки будуть різними. Методика розв'язання задачі параметричного програмування в задачі лінійного програмування з використанням стандартних процедур лінійного програмування складається з двох етапів:

Етап 1. Обчислення оптимального розв'язку задачі лінійного програмування.

Параметру $t \in [\alpha; \beta]$ надається фіксоване значення. Задача параметричного програмування перетворюється в задачу лінійного програмування з фіксованими параметрами, яку розв'язують, наприклад, симплекс-методом.

Етап 2. Обчислення інтервалу стійкості оптимального розв'язку.

На цьому етапі знаходять інтервал $(t_{\text{н}}, t_{\text{в}}) \subset [\alpha; \beta]$, для якого оптимальний розв'язок, отриманий за допомогою процедур етапу 1, не змінюється. Знайдений інтервал вилучають із $[\alpha; \beta]$, задають нове фіксоване значення для інтервалу і повторюють обчислення відповідно до етапу 1. Розв'язання припиняється лише тоді, коли буде виконано розбиття всього відрізку $[\alpha; \beta]$ на інтервали стійкості оптимального розв'язку.

Приклад 13.2 Визначити інтервали зміни параметра $t \in [0,8]$ і знайти значення змінних x_1, x_2, за яких лінійна функція

$$W_t = 4x_1 + (2+t)x_2$$

досягає максимуму в одній і тій самій вершині ОДР під час виконання системи обмежень:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 40, \;\; x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

1. Побудова ОДР (рис. 13.2):

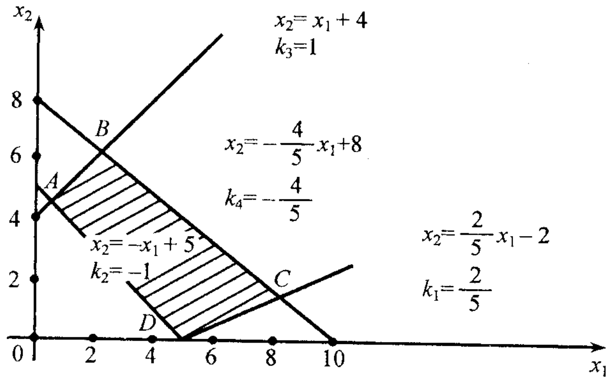


Рис. 13.2. Область допустимих розв'язків задачі 13.2

2. Побудова головної прямої (рис. 13.3):

$$\begin{cases} W_t = 4x_1 + (2+t)\,x_2 \\ t \in [0,8] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \left(-\dfrac{4}{t+2}\right)x_1 + \left(\dfrac{W}{t+2}\right) = k(t)\,x_1 + b(t), \\ t \in [0,8], \end{cases}$$

$$k(t) = -\frac{4}{t+2},\, b(t) = \frac{W_t}{t+2}.$$

Якщо $t \in [0,3)$, то $k(t) \in \left[-2, -\dfrac{4}{5}\right),\; \widehat{X} = X_C = \begin{bmatrix} x_{1_C} \\ x_{2_C} \end{bmatrix}.$

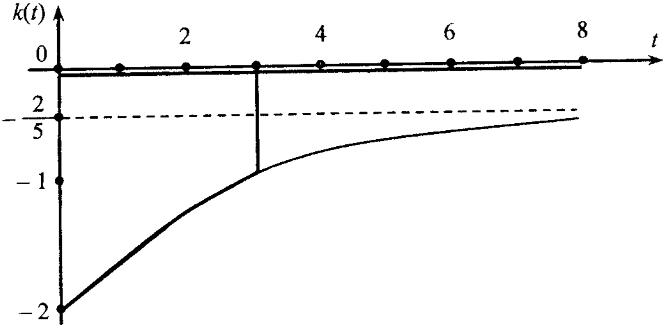


Рис. 13.3. Графік залежності кутового коефіцієнта головної прямої від параметра t

Визначимо координати точки C:

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + 8 \\ x_2 = \frac{2}{5}x_1 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{25}{3} \\ x_2 = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \widehat{X}_C = \begin{bmatrix} \frac{25}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

Якщо $t \in (3,8]$, то $k(t) \in \left(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right]$, $\widehat{X} = X_B = \begin{bmatrix} x_{1_B} \\ x_{2_B} \end{bmatrix}$.

Знайдемо координати точки B:

$$\widehat{X}_B = \begin{bmatrix} \frac{20}{9} \\ \frac{56}{9} \end{bmatrix}.$$

3. Розв'язок:

а) $t \in [0,3) \to \widehat{X}_C = \left[\frac{25}{3}; \frac{4}{3}\right]^T$;

б) $t \in (3,8] \to \widehat{X}_B = \left[\frac{20}{9}; \frac{56}{9}\right]^T$;

в) $t = 3$, безліч розв'язків:

$$\widehat{X} = \left[x_1 \in \left[\frac{20}{9}; \frac{25}{3}\right], x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + 8\right]^T.$$

Приклад 13.3 Розв'язати графічним методом задачу параметричного програмування в задачі лінійного програмування (рис. 13.4)

$$\begin{cases} W_t = tx_1 + (1+t)x_2 \to \max\limits_{x_{1,2}\ge 0, t\in[1;7]}, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 11, \\ 4x_1 + x_2 \le 8. \end{cases}$$

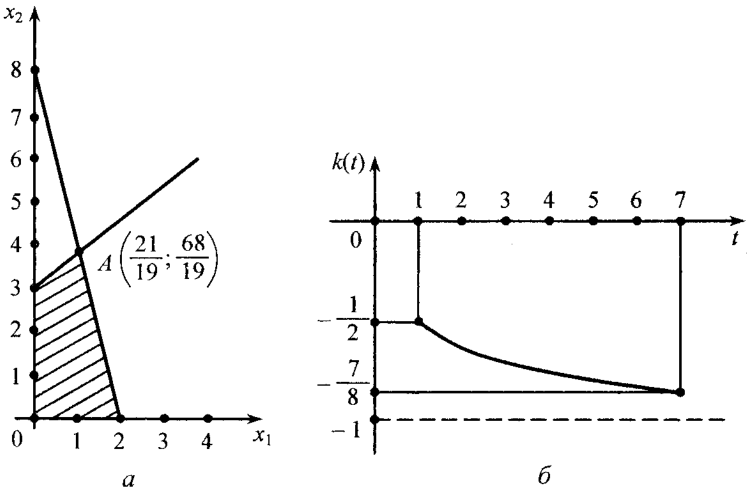


Рис. 13.4. Розв'язання задачі параметричного програмування:
а — область допустимих розв'язків задачі;
б — графік залежності кутового коефіцієнта головної прямої від параметра *t*

Відповідь: $t\in[1;7] \to \widehat{X}_A = \left[\frac{21}{19}; \frac{68}{19}\right]^T$.

Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягає суть задач лінійного програмування?
2. Які прийоми та способи використовують для аналізу розв'язку задач лінійного програмування?
3. Поясніть процедуру проведення аналізу розв'язку задач лінійного програмування на основі двоїстих оцінок.

4. У чому полягає суть параметричної оптимізації?
5. Наведіть та поясніть двоїсті оцінки, які використовують для аналізу розв'язків задачі лінійного програмування.
6. Надайте визначення допустимого інтервалу стійкості двоїстих оцінок.
7. Наведіть та поясніть основні етапи розв'язку прямої задачі лінійного програмування і виконання післяоптимізаційного аналізу.

Розділ 14

ЦІЛОЧИСЛОВІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

14.1. Постановка цілочислових задач лінійної оптимізації

Під час розв'язання більшості задач автоматизації необхідно, щоб величини (кількість каналів зв'язку, окремих агрегатів обладнання, обслуговуючого персоналу, корегувальних пристроїв тощо) обчислювались у цілих невід'ємних числах.

Означення 14.1 *Задачі цілочислового програмування* — різновид задач, які припускають, що шукані значення повинні бути цілими числами.

Задачі цілочислової оптимізації можуть бути як лінійними, так і нелінійними. Розглянемо цілочислові задачі лінійної оптимізації (лінійного програмування). У цих задачах і показник ефективності, і обмеження є лінійними функціями своїх аргументів, але частина або всі ці аргументи можуть бути лише цілими та невід'ємними. Якщо вимога невід'ємної цілочисловості стосується лише частинних змінних, то така задача називається *частковою цілочисловою*.

Математична постановка цілочислових задачі лінійного програмування має вигляд:

$$\begin{cases} W = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\limits_{x_j \in \mathbb{N}_0 \left(j=\overline{1,n}\right)} (\min), \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le = \ge\} b_i,\ i = \overline{1,m}\ , \\ \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\ldots\}, \end{cases}$$

де $\mathbb{N}_0$ — розширений ряд натуральних чисел.

14.2. Метод Гоморі розв'язання цілочислових задач лінійного програмування

Метод Гоморі будується на застосуванні симплекс-методу і методу відтинання. Головна ідея методу Гоморі полягає в такому.

На **етапі 1** знаходять оптимальний розв'язок задачі, яка була отримана з вихідної цілочислової задачі лінійного програмування, за умови, що вимога цілочисловості не враховувалась. Якщо отриманий розв'язок є цілочисловим, то мета цілочислової задачі лінійного програмування досягнута й обчислення припиняється. Якщо розв'язок задачі лінійного програмування не є цілочисловим, то його не вважають розв'язком задачі лінійного програмування і відбувається перехід до етапу 2.

На **етапі 2** до умов задачі додаються обмеження, які відтинають від ОДР отриманий нецілочисловий розв'язок, але не відтинають жодного цілочислового розв'язку, що належить ОДР. Після цього відбувається повернення до етапу 1 і знову виконується розв'язання задачі лінійного програмування симплекс-методом, але з урахуванням нового обмеження. Якщо новий розв'язок теж не є цілочисловим, то відбувається перехід до етапу 2 і до складу обмеження включається ще одне додаткове обмеження та виконується повернення до етапу 1. Вихід із двохетапної процедури відбувається тоді, коли буде знайдено цілочисловий розв'язок, що належить ОДР.

Для з'ясування специфічних особливостей методу Гоморі розглянемо його геометричне вирішення (рис. 14.1).

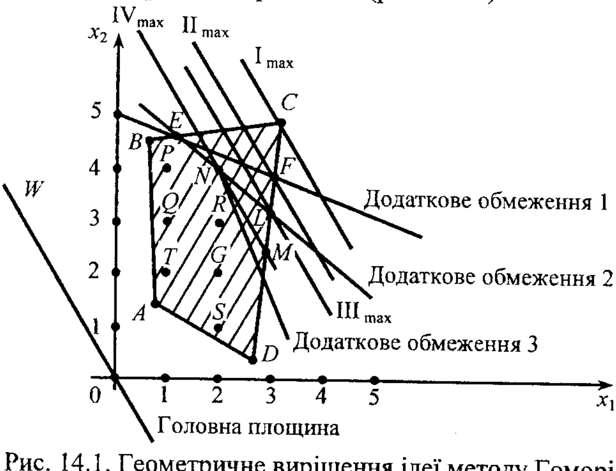


Рис. 14.1. Геометричне вирішення ідеї методу Гоморі

Означення 14.2 *Послабленою цілочисловою задачею лінійного програмування* називають задачу, у якій знято обмеження на цілочисловість.

Для послабленої цілочислової задачі лінійного програмування (або просто задачі лінійного програмування) максимум досягається в точці C, але x_2 не є цілим. Точка C (дробовий розв'язок) відтинається додатковим обмеженням EF (перше додаткове обмеження), зберігаючи ОДР цілочислової задачі лінійного програмування (точки P, N, Q, R, T, G, S).

Будуємо додаткове обмеження 1 та переходимо до послабленої задачі, що досягає максимуму в точці F, при цьому оптимальне значення x_1 буде дробовим. Будуємо додаткове обмеження 2 (ENL) та переходимо до максимуму показника ефективності задачі лінійного програмування в точку L, у якій знову оптимальні x_1, x_2 — дробові. Будуємо додаткове обмеження 3, яке в послабленій задачі лінійного програмування дає кутову точку N, у якій оптимальні x_1, x_2 є цілочисловими і додатними. Вважаємо, що цілочислова задача лінійного програмування розв'язана.

Як бачимо, додаткові обмеження кожного разу відтинали від ОДР послабленої цілочислової задачі лінійного програмування (тобто ОДР задачі лінійного програмування) дробові розв'язки і зберігали область допустимих розв'язків цілочислової задачі лінійного програмування.

Критерієм побудови «правильного» додаткового обмеження є те, що воно має відтинати оптимальну нецілочислову точку і залишати незмінними всі цілочислові точки вихідної цілочислової задачі лінійного програмування.

Приклад 14.1 Розв'язати цілочислову задачу лінійного програмування за допомогою методу Гоморі:

$$\begin{cases} W = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max\limits_{x_{1,2,3} \in \mathbb{N}_0}, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 20, \\ 9x_1 + 7x_2 + 10x_3 \le 40. \end{cases}$$

Етап 1. Сформулюємо послаблену цілочислову задачу лінійного програмування у вигляді основної задачі лінійного програмування:

$$\begin{cases} -W = -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \min\limits_{x_{1,2,3,4,5} \geq 0}, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 0x_5 = 20, \\ 9x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 0x_4 + x_5 = 40. \end{cases}$$

За допомогою функції ***linprog*** системи комп'ютерної математики MATLAB знайдемо оптимальний розв'язок:

```
>> f=[–2; –4; –3;0;0]
f = –2
    –4
    –3
     0
     0
>> A=[2  3  1   1  0
        9  7  10  0  1]
A = 2    3    1    1    0
    9    7   10    0    1
>> b=[20;40]
b = 20
    40
>> lb=[0;0;0;0;0]
lb = 0
     0
     0
     0
     0
>> [X,W]=linprog(f,[],[],A,b,lb,[])
Optimization terminated successfully.
X = 0.0000
    5.7143
    0.0000
    2.8571
    0.0000
W = –22.8571
```

Висновок. Серед базисних змінних x_1, x_2, x_3 є дробовий розв'язок x_2. Тому цей розв'язок не можна вважати оптимальним розв'язком вихідної цілочислової задачі лінійного програмування.

Етап 1. Виконаємо побудову першого додаткового обмеження:

$$x_2 = \frac{40}{7} - \left(\frac{9}{7}x_1 + \frac{10}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_5\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\left\{\frac{40}{7}\right\} + \left\{\frac{9}{7}\right\}x_1 + \left\{\frac{10}{7}\right\}x_3 + \left\{\frac{1}{7}\right\}x_5 = \tag{14.1}$$

$$= \left[\frac{40}{7}\right] - \left(\left[\frac{9}{7}\right]x_1 + \left[\frac{10}{7}\right]x_3 + \left[\frac{1}{7}\right]x_5\right) - x_2.$$

Якщо $x_{1,2,3}$ та $x_{4,5}$ цілі, то і права частина рівняння (14.1) — ціле число. Тоді і ліва частина останнього рівняння теж буде цілим числом: $-\frac{5}{7} + \frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_5 = x_6$, яке задовольняє нерівність $x_6 \geq -\frac{5}{7}$, x_6 — ціле невід'ємне число, $x_6 \in \{0,1,2,\ldots\}$. Нагадаємо, що x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — невід'ємні.

Записана умова означає, що додаткове обмеження у вигляді нової змінної x_6 не обмежене нічим, крім загальної вимоги до невід'ємності та цілочисловості. Отже, нове обмеження може вплинути на дробовий розв'язок задачі лінійного програмування, залишивши цілочислові значення незмінними.

Сформулюємо на прикладі x_6 правило побудови додаткового обмеження:

$$\left(\frac{9}{7} - \left[\frac{9}{7}\right]\right)x_1 + \left(\frac{10}{7} - \left[\frac{10}{7}\right]\right)x_3 + 0x_4 + \left(\frac{1}{7} - \left[\frac{1}{7}\right]\right)x_5 - x_6 = \frac{40}{7} - \left[\frac{40}{7}\right].$$

Послаблену цілочислову задачу лінійного програмування з додатковим обмеженням розв'язуємо, використовуючи функції **linprog:**

```
>> f=[–2;–4;–3;0;0;0]
f = –2
    –4
    –3
     0
     0
```

```
    0
>> A=[2  3  1    1   0  0
        9  7  10   0   1  0
     2/7 0 3/7  0  1/7 -1]
A =  2.0000    3.0000    1.0000    1.0000         0         0
     9.0000    7.0000   10.0000         0    1.0000         0
     0.2857         0    0.4286         0    0.1429   -1.0000
>> b=[20;40;5/7]
b = 20.0000
    40.0000
     0.7143
>> lb=[0;0;0;0;0;0]
lb =  0
      0
      0
      0
      0
      0
>> [X,W]=linprog(f,[],[],A,b,lb,[])
Optimization terminated successfully.
X =
   0.0000
   5.0000
   0.0000
   5.0000
   5.0000
   0.0000
W = -20.0000.
```

Висновок. $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $W = 20$ – оптимальний цілочисловий розв'язок цілочислової задачі лінійного програмування.

14.3. Метод гілок і границь розв'язання цілочислової задачі лінійного програмування

Ідея методу та прийоми його застосування полягають у тому, що спочатку в ОДР системи обмежень знаходять оптимальний розв'язок послабленої цілочислової задачі лінійного програмування з використанням, наприклад, симплекс-методу.

Для визначеності покладемо, що відбувається пошук максимуму показника ефективності.

Якщо в отриманому розв'язку деякі базисні змінні є дробами, то обираємо будь-яку із цих змінних і будуємо два обмеження: в одному — обмежена величина змінної менше або дорівнює розв'язку задачі лінійного програмування, округленому до найближчого цілого числа знизу; а в іншому — обмежена величина змінної більше або дорівнює розв'язку задачі лінійного програмування, округленому до найближчого цілого числа зверху.

Наприклад, при побудові додаткового обмеження за деякою *i*-ю змінною $x_i = \frac{9}{2} \in [4;5]$ перше обмеження набуває вигляду $x_i \leq 4$, а друге — вигляду $5 \leq x_i$.

Першим та другим додатковими обмеженнями вилучаємо з ОДР вихідної цілочислової задачі лінійного програмування проміжок $[4;5]$ із дробовими значеннями невідомої x_i.

Цей проміжок поділяє область допустимих розв'язків на дві частини, ОДР$_1$ та ОДР$_2$, де нова ОДР$_1$ отримана завдяки врахуванню в обмеженні вихідної задачі додаткового обмеження $x_i \leq 4$, а ОДР$_2$ — врахуванню обмеження $5 \leq x_i$. У результаті такого розподілу ОДР отримаємо дві нові задачі (підзадачі) лінійного програмування.

Якщо після їх розв'язання дістанемо значення невідомих, які знову не є цілочисловими, то обираємо для продовження обчислень, що наближає до цілочислового розв'язку ту підзадачу, у якої значення показника ефективності більше, і знову повторюємо процедуру формування додаткових обмежень і пов'язаних з ними підзадач.

Графічно-образне сприйняття процесу наближення до цілочислового оптимального розв'язку і дало назву *метод гілок і границь.*

Приклад 14.2 Для ОДР$_1$ цілочислової задачі лінійного програмування знайти максимум показника ефективності $W_{\max}$.

Процедура розгалуження припиняється тоді, коли буде знайдено цілочисловий розв'язок. Граничними вважаються значення показника ефективності задачі і підзадач кожної гілки.

На кожній ітерації подальшому розгалуженню (розподіленню на нові підзадачі) підлягає та гілка, на якій значення показника ефективності виявилося більшим. Тому окремі підзадачі (гілки, за якими отримано менші значення показника ефективності) можна відкинути, але можливі випадки з поверненням, коли в подальших ітераціях відбулося зменшення показника ефективності нижче раніше виявленого рівня на гілках, що вважалися неперспективними.

Оскільки множина всіх розв'язків цілочислової задачі лінійного програмування скінченна, то після скінченної кількості ітерацій оптимальний розв'язок буде знайдено (рис. 14.2).

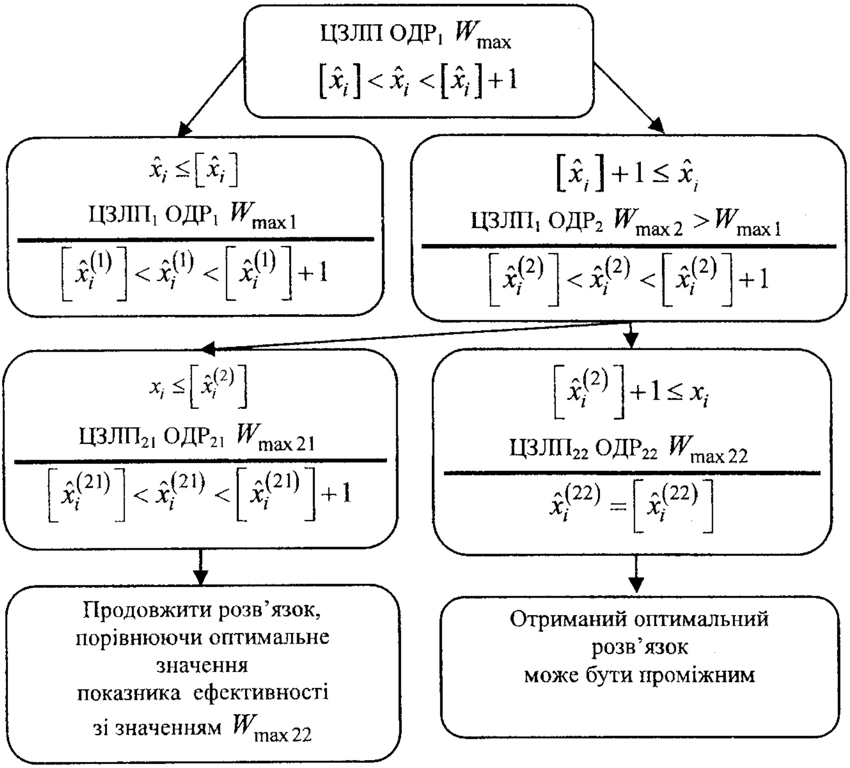


Рис. 14.2. Приклад структури методу гілок та границь за умови, що всі змінні, крім x_i, на кожній ітерації залишаються цілочисловими та невід'ємними:
ЦЗЛП — цілочислова задача лінійного програмування

Приклад 14.3 Знайти максимум показника ефективності методом гілок та границь із використанням функції **linprog** системи комп'ютерної математики MATLAB:

$$\begin{cases} W = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max\limits_{x_{1,2,3} \in \mathbb{N}_0}, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 20, \\ 9x_1 + 7x_2 + 10x_3 \le 40. \end{cases}$$

Метод гілок і границь

Вихідна послаблена цілочислова зображена як симетрична задача лінійного програмування у форматі

```
>> f=[–2; –4; –3]
>> A=[2   3   1
      9   7   10]
>> b=[20;40]
>> lb=[0;0;0]
>> [X,W]=linprog(f,A,b,[],[],lb,[])
Optimization terminated successfully.
X =   0.0000
      5.7143
      0.0000
W = –22.8571
```

Гілка 1

```
>> A=[2   3   1
      9   7   10
      0   1   0]
>> b=[20;40;5]
>> [X,W]=linprog(f,A,b,[],[],lb,[])
Optimization terminated successfully.
X = 0.0000
    5.0000
    0.5000
W = –21.5000
```

Гілка 1.1

```
>> Aeq=[0   0   1]
```

```
>> beq=[0]
>> [X,W]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,[])
Optimization terminated successfully.
X = 0.5556
    5.0000
     0
W = –21.1111
```

Гілка 1.1.1

```
>> Aeq=[1   0   0
         0   0   1]
>> beq=[0;0]
>> [X,W]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,[])
Optimization terminated successfully.
X =   0
      5.0000
      0
W = –20.0000
```

Гілка 2

```
>> A=[2   3   1
      9   7   10
      0  –1   0]
>> b=[20;40; –6]
>> [X,W]=linprog(f,A,b,[],[],lb,[])
Exiting: One or more of the residuals, duality gap, or total relative error
        has stalled:
        the primal appears to be infeasible (and the dual unbounded).
        (The dual residual < TolFun=1.00e–008.)
X =  0.0001
     5.8937
     0.0006
W = – 23.5768
```

Висновок. Отримано оптимальний цілочисловий розв'язок:
$x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $W = 20$.

Контрольні запитання та завдання

1. Наведіть та поясніть постановку цілочислових задач лінійної оптимізації.
2. Дайте визначення задачі цілочислового програмування.
3. У чому полягає суть методу Гоморі розв'язання цілочислових задач лінійного програмування?
4. Наведіть та поясніть геометричну інтерпретацію методу Гоморі розв'язання цілочислових задач лінійного програмування.
5. Поясніть призначення функції *linprog* системи комп'ютерної математики MATLAB.

Розділ 15
НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

15.1. Класичні умови екстремуму задачі нелінійного програмування

Загальна задача нелінійного програмування полягає в знаходженні екстремуму показника ефективності:

$$W = \left(x_1, \ldots, x_n\right) \to \underset{x_j \in \mathbb{R},\ j=\overline{1,n}}{\text{extrem}}$$

на множині планів задачі, яка задається системою умов

$$g_i\left(x_1, \ldots, x_n\right)\{\leq = \geq\}\, b_i \left(i = \overline{1, m}\right), \tag{15.1}$$

де умова дискретності змінних та їх знака теж ураховується за допомогою функцій $g_i\left(x_1, \ldots, x_n\right)$. Зауважимо, що функції $g_i\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$ та показник ефективності $W\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ усі або частково є нелінійними. До специфічних властивостей задачі нелінійного програмування слід віднести:

1) багатоекстремальність;

2) ОДР може не бути опуклою та зв'язаною, тобто складатися з кількох частин, що не перетинаються (рис. 15.1, *а*–*в*);

3) оптимальний план (план, на якому досягається, наприклад, глобальний максимум) може бути як внутрішньою, так і граничною точкою ОДР;

4) показник ефективності та обмеження можуть мати кутові точки та розриви.

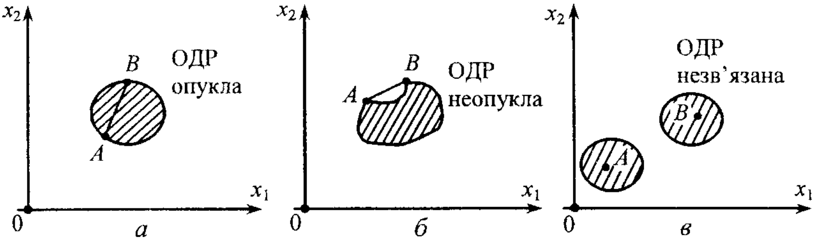


Рис. 15.1. Графічне пояснення особливостей ОДР

Класична детермінована задача пошуку екстремуму, тобто максимуму або мінімуму деякої неперервної та кусково-диференційованої функції n змінних формулюється так: знайти всі значення вектора $X^T = \left[x_1, \ldots, x_n\right]$, за яких функція $W\left(X\right)$ досягає екстремуму, у разі виконання ОДР G, яка задається за допомогою обмежень у формі рівнянь, тобто в обмеженнях (15.1) існує лише m обмежень-рівностей, і математично записується у вигляді

$$W\left(X\right) \to \underset{X \in G \subset \mathbb{R}^n}{\text{extrem}} .$$

Різницю $n - m$ називають *кількістю степенів вільності* задачі нелінійного програмування, а саму задачу нелінійного програмування з умовами (обмеженнями) — *задачею нелінійного програмування на умовний екстремум*. Розглянемо застосування методу прямої підстановки та методу множників Лагранжа для розв'язання класичної задачі нелінійного програмування на умовний екстремум.

15.1.1. Метод прямої підстановки

Припустімо, що

$$X^T = \left[X_k^T , X_m^T \right],$$

де $X_k^T = \left[x_1, \ldots, x_k\right]$ — k-вимірний вектор вільних змінних; $X_m^T = \left[x_{k+1}, \ldots, x_n\right]$ — m-вимірний вектор базисних змінних ($k + m = n$).

Тоді, розв'язуючи в явному вигляді рівняння-обмеження відносно базисних змінних $x_{k+i} = \varphi_i$, $i = \overline{i,m}$ і підставляючи їх у вираз показника ефективності, отримаємо класичну безумовну задачу нелінійного програмування:

$$W\left(x_1,\ldots,x_k,\varphi_{k+1}\left(x_1,\ldots,x_k\right),\ldots,\varphi_n\left(x_1,\ldots,x_k\right)\right)\to \underset{[x_1,\ldots,x_k]\in\mathbb{R}^k}{\text{extrem}}.$$

Якщо $k=1$, то показник ефективності буде залежати лише від однієї змінної. Припустімо, що необхідно знайти максимум показника ефективності $W_{\max}$.

За означенням, у точці $\hat{x}_1$ досягається строгий локальний максимум, якщо $W\left(\hat{x}_1\right)>W\left(\hat{x}_1+\Delta x_1\right)\ \forall\Delta x_1\to 0$.

Визначимо диференціальні умови існування точки локального максимуму $\hat{x}_1$.

Розкладемо $W\left(x_1\right)=W\left(\hat{x}_1+\Delta x_1\right)$ за умови $\Delta x_1\to 0$ у ряд Тейлора в околі точки $\hat{x}_1$:

$$\Delta W\left(\hat{x}_1\right)=W\left(\hat{x}_1+\Delta x_1\right)-W\left(\hat{x}_1\right)=$$
$$=\left.\frac{dW\left(x_1\right)}{dx_1}\right|_{x_1=\hat{x}_1}\Delta x_1+\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2W\left(x_1\right)}{dx_1^2}\right|_{x_1=\hat{x}_1}\Delta x_1^2+ \qquad (15.2)$$
$$+0\left(\Delta x_1\right)<0,\forall\Delta x_1\to 0.$$

Із виразу (15.2) отримаємо достатні умови локального максимуму функції однієї змінної:

$$\begin{cases}\left.\dfrac{dW\left(x_1\right)}{dx_1}\right|_{x_1=\hat{x}_1}=0,\\[2ex]\left.\dfrac{d^2W\left(x_1\right)}{dx_1^2}\right|_{x_1=\hat{x}_1}<0.\end{cases}$$

Приклад 15.1

На космічній платформі з апаратурою системи космічного зв'язку розташовано контейнер з ядерною енергетичною установкою циліндричної форми. Для максимізації маси ядерного пального за заданою масою контейнера необхідно виготовити контейнер максимального об'єму за заданої площі поверхні (рис. 15.2).

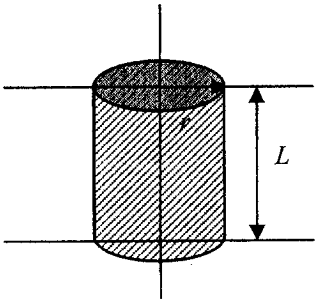


Рис. 15.2. Форма контейнера

Математична модель задачі:

$$\begin{cases} W(r,L)=\pi r^2 L, \\ S_0 = 2\pi r^2 + 2\pi r L. \end{cases}$$

Математична постановка задачі:

$$\begin{cases} W(r,L)=\pi r^2 L \to \max\limits_{r,L}, \\ S_0 = 2\pi r^2 + 2\pi r L\ . \end{cases}$$

Розв'язання методом прямої підстановки:

$$L=\frac{1}{2\pi r}\left(S_0-2\pi r^2\right),\ W(r)=\frac{S_0}{2}r_0-\pi r^3\ .$$

Необхідна умова екстремуму:

$$\frac{dW(r)}{dr}=0.$$

Обчислюємо похідну: $\frac{S_0}{2}-3\pi r^2=0 \Leftrightarrow r_{\max}=\sqrt{\frac{S_0}{6\pi}}$.

За фізичним змістом мінімальний об'єм $V_{\min}=0$ при $r=0$ або $L=0$, тобто знайдене значення $r_{\max}$ відповідає максимальному об'єму. Використаємо достатні умови для формального підтвердження цього факту:

$$\frac{d^2W(r)}{dr^2}=-6\pi r<0, \quad r>0\ .$$

Отже,

$$\begin{cases} r_{\max} = \hat{r} = \sqrt{\dfrac{S_0}{6\pi}}; \\ L_{\max} = \sqrt{\dfrac{2S_0}{3\pi}}. \end{cases}$$

Приклад 15.2 | Знайти екстремум функції $W(x_1, x_2)$:

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + 1}.$$

Необхідна умова екстремуму:

$$\frac{\partial W(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{2(x_1 - 1)}{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + 1} = 0;$$

$$\frac{\partial W(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{2(x_2 - 1)}{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + 1} = 0.$$

За геометричним змістом задачі зрозуміло, що в точці екстремуму $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = 1$ функція $W(x_1, x_2)$ набуває найбільшого значення $W(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 1$. Як видно з графіка (рис. 15.3), функція $W(x_1, x_2)$ має єдиний екстремум, що є глобальним максимумом:

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = 1;\ W(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 1.$$

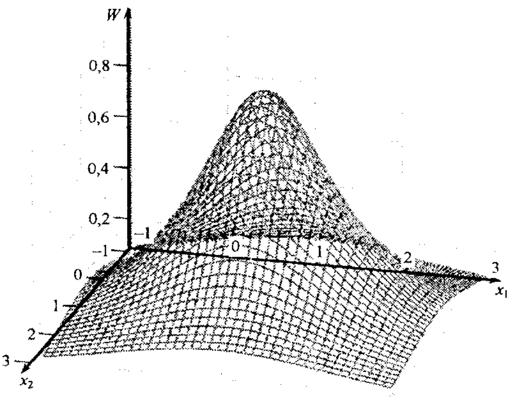


Рис. 15.3. Графічне зображення визначення типу екстремуму функції $W(x_1, x_2)$

Уважатимемо, що $k>1, m<n, k+m=n$, ($k=n-m$ — кількість степенів вільності) $k,n,m\in\mathbb{N}$.

За означенням, $W\left(X_k\right)$ має в точці X_k строгий локальний максимум, якщо

$$W\left(X_k\right)>W\left(\widehat{X}_k+\Delta X_k\right)\ \forall\Delta x_i\to 0\ \left(i=\overline{1,k}\right);$$

$$X_k^T=\left[x_1,\ldots,x_k\right],\ \ \Delta X_k^T=\left[\Delta x_1,\ldots,\Delta x_k\right].$$

Розкладання в ряд Тейлора скалярної функції векторного аргумента відносно X_k дає можливість обчислити приріст показника ефективності в малому околі точки максимуму цього показника ефективності, тобто $\widehat{X}_k$:

$$\Delta W\left(\widehat{X}_k\right)=W\left(\widehat{X}_k+\Delta\widehat{X}_k\right)-W\left(\widehat{X}_k\right)=\left[\frac{\partial W\left(X_k\right)}{\partial X_k}\right]_{X_k=\widehat{X}_k}\cdot\Delta X_k+$$

$$+\frac{1}{2!}\Delta X_k^T\left[\frac{\partial}{\partial X_k}\left(\frac{\partial W\left(X_k\right)}{\partial X_k}\right)^T\right]_{X_k=\widehat{X}_k}\cdot\Delta X_k+0\left(\left\|\Delta X_k\right\|\right)\forall\Delta X_k\to 0,$$

де $0\left(\left\|\Delta X_k\right\|\right)$ — доданки вищого порядку малості порівняно з $\left\|\Delta X_k\right\|=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\ldots+\Delta x_k^2}$.

Виходячи з означення локального максимуму, маємо:

$$\Delta W\left(\widehat{X}_k\right)<0,\ \forall\Delta X_k\to 0;\ \left.\left(\frac{\partial W\left(X_k\right)}{\partial X_k}\right)^T\right|_{X_k=\widehat{X}_k}=\left[\frac{\partial W}{\partial X_1},\ldots,\frac{\partial W}{\partial X_k}\right]=0,$$

тобто $\left.\dfrac{\partial W\left(X_k\right)}{\partial X_k}\right|_{X_k=\widehat{X}_k}$ — градієнт показника ефективності в точці локального максимуму.

Квадратична форма:

$$\frac{1}{2!}\Delta X_k^T\left[\frac{\partial}{\partial X_k}\left(\frac{\partial W\left(X_k\right)}{\partial X_k}\right)^T\right]_{X_k=\widehat{X}_k}\cdot\Delta X_k<0\ \forall\Delta X_k\to 0$$

побудована з використанням квадратичної симетричної матриці

$$\left[\frac{\partial}{\partial X_k}\left(\frac{\partial W(X_k)}{\partial X_k}\right)^T\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial X_1 \partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial X_1 \partial X_k} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial X_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial X_2 \partial X_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 W}{\partial X_k \partial X_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial X_k \partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial X_k^2} \end{bmatrix}, \tag{15.3}$$

яка називається *матрицею Гессе*.

Ця квадратична форма у випадку локального максимуму має бути від'ємно визначеною, тобто:

$$\Delta X_k^T \left[\frac{\partial}{\partial X_k}\left(\frac{\partial W(X_k)}{\partial X_k}\right)\right]_{X_k=\widehat{X}_k} \Delta X_k < 0 .\#$$

Квадратична форма буде від'ємно визначеною, коли матриця Гессе задовольняє спеціальну умову. Матрицю Гессе (15.3), яка задовольняє умову від'ємної визначеності квадратичної форми, теж називають *від'ємно визначеною*. Ознакою від'ємної визначеності квадратичної форми, побудованої з використанням квадратної симетричної матриці

$$Q=\begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix},$$

є виконання такої умови: усі кутові діагональні визначники матриці Q непарного порядку мають бути від'ємними, а парного — додатними, тобто

$$q_{11} < 0\,, \quad \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} < 0 \text{ і т. д.}$$

Якщо показник ефективності в точці $\widehat{X}_k$ має мінімум, то достатня умова мінімуму має вигляд:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial W(X_k)}{\partial X_k}\right|_{X_k=\widehat{X}_k} = 0, \\ \Delta_k X_k^T \left.\left[\dfrac{\partial}{\partial X_k}\left(\dfrac{\partial W(X_k)}{\partial X_k}\right)^T\right]\right|_{X_k=\widehat{X}_k} > 0. \end{cases}$$

Ознакою додатної визначеності квадратичної форми є додатність усіх кутових визначників квадратної симетричної матриці Q, на якій ця форма побудована.

Приклад 15.3 Перевірити знаковизначеність квадратичної форми, заданої симетричною матрицею

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \; X_k \in \mathbb{R}^3 .$$

$$q_1 = 1 > 0 ; \quad q_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0 ;$$

$$q_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 + 1 - 2 - 1 - 3 = 2 > 0 .$$

$$[\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} > 0;$$

$$\forall [\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \setminus [0,0,0]^T .$$

Висновок. Матриця Q додатно визначена.

Якщо задану матрицю Q помножити на -1, то дістанемо:

$$\Delta X_3^T \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \Delta X_3 < 0\,,$$

де $\Delta X_3^T = \left[\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3\right]^T$, тобто отримана форма є від'ємно визначеною.

Проілюструємо ознаку від'ємної визначеності квадратної симетричної матриці $-Q$:

$$-Q = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix};$$

$$q_1 = -1 < 0\,,\; q_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0\,;\; q_3 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -2 < 0\,.$$

Зауваження 15.1

Окрему умову $\dfrac{\partial W(X_k)}{\partial X_k} = 0$ називають *необхідною умовою екстремуму першого порядку*. Умову

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W(X_k)}{\partial X_k} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial X_k}\left(\dfrac{\partial W(X_k)}{\partial X_k}\right)^T \le 0 \end{cases}$$

називають *необхідною умовою максимуму другого порядку*.

Матрицю Гессе в цьому випадку називають *від'ємно напіввизначеною*.

Необхідна умова мінімуму другого порядку набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W(X_k)}{\partial X_k} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial X_k}\left(\dfrac{\partial W(X_k)}{\partial X_k}\right)^T \geq 0. \end{cases}$$

Матрицю Гессе в цьому випадку називають *додатно напіввизначеною.*

Як бачимо, для розв'язання задачі пошуку екстремуму скалярного показника ефективності з векторним аргументом на основі наведених вище достатніх умов необхідно, щоб $W(x_1 \ldots x_k)$ мала частинні похідні до другого порядку включно за своїм аргументом, і при цьому існувала можливість отримання явного розв'язку системи обмежень відносно базисних змінних. Але остання умова доволі часто не виконується. Тому за рахунок використання так званого принципу розширення вектора змінних та показника ефективності було запропоновано спеціальний метод розв'язання класичної задачі нелінійного програмування на умовний екстремум, який отримав назву *метод множників Лагранжа.*

15.1.2. Метод множників Лагранжа

Метод множників Лагранжа полягає в тому, що класичну задачу нелінійного програмування на умовний екстремум з обмеженнями-рівностями замінюють спрощеною умовною задачею з розширеним вектором змінних $\left[X^T, \Lambda^T\right]^T$, де $X^T = [x_1, ..., x_n]$ — вихідній вектор змінних; $\Lambda^T = [\lambda_1, ..., \lambda_m]$ — вектор додаткових змінних, який називають *вектором множників Лагранжа*, а також вектором із розширеним показником ефективності

$$L(X, \Lambda) = W(X) + \Lambda^T (B - G(X)).$$

Отже, можна записати розширений показник ефективності

$$L(X, \Lambda) = W(x_1, ..., x_2) + \sum_{i=1}^{m} \Lambda(b_i - g_i(x_1, ..., x_2)), \qquad (15.4)$$

який називають *функцією Лагранжа* або *лагранжіаном.*

Необхідна умова екстремуму в розширеній задачі нелінійного програмування має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial X} = \dfrac{\partial W(X)}{\partial X} + \left(-\dfrac{\partial G^T(X)}{\partial X}\right)\Lambda = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \dfrac{\partial W(X)}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i(X)}{\partial x_j} = 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right); \\ \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial \Lambda} = B - G(X) = 0 \Leftrightarrow b_i - g_i(X) = 0 \left(i = \overline{1,m}\right). \end{cases}$$

Після обчислення розв'язків записаної системи рівнянь знаходимо точки екстремумів. Залежно від умови задачі виділяємо точки, у яких показник ефективності $W(\widehat{X})$ досягає максимуму або мінімуму, і виконуємо пошук глобального максимуму або мінімуму. У багатьох випадках із фізичного змісту задачі зрозуміло, у якій точці досягається найбільше або найменше значення показника ефективності з урахуванням обмежень.

Приклад 15.4 | Розв'яжемо задачу 15.1, використовуючи метод множників Лагранжа.

Запишемо функцію Лагранжа

$$L(r,l,\lambda) = \pi r^2 l + \lambda(S_0 - 2\pi r^2 - 2\pi r l).$$

Необхідна умова набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r} = 2\pi r l + \lambda(-4\pi r - 2\pi l) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial l} = \pi r^2 + \lambda(-2\pi r) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = S_0 - 2\pi r^2 - 2\pi r l = 0; \end{cases}$$

$$rl - 2r^2 = 0 \to \begin{cases} r = \dfrac{l}{2}, \\ r = 0 - \text{не задовольняє фізичний зміст} - \lambda = \dfrac{r}{2}; \end{cases}$$

$$S_0-6\pi r^2=0\rightarrow r_{\max}=\sqrt{\frac{S_0}{6\pi}};\ l_{\max}=\sqrt{\frac{2S_0}{3\pi}};\ \lambda_{\max}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_0}{6\pi}}.$$

Розглянемо на прикладі двовимірної задачі лінійного програмування фізичний (економічний) зміст множників Лагранжа:

$$\begin{cases} W(x_1 x_2)\rightarrow \max; \\ g(x_1 x_2)=b. \end{cases}$$

Припустімо, що умовний максимум досягається в точці $\widehat{X}^T=[\hat{x}_1,\ \hat{x}_2]$. Розглядаючи залежність зміни $\widehat{X}$ від параметра b, отримаємо:

$$\hat{x}_1=\hat{x}_1(b);\ \hat{x}_2=\hat{x}_2(b);$$

$$W_{\max}=W\left(\hat{x}_1(b),\ \hat{x}_1(b)\right).$$

Знайдемо похідну від оптимального значення показника ефективності за параметром b:

$$\frac{\partial\widehat{W}}{\partial b}=\frac{\partial W}{\partial\hat{x}_1}\cdot\frac{\partial\hat{x}_1}{\partial b}+\frac{\partial W}{\partial\hat{x}_2}\cdot\frac{\partial\hat{x}_2}{\partial b},$$

а також похідну за параметром b від обох частин обмеження-рівності:

$$\frac{\partial g}{\partial\hat{x}_1}\cdot\frac{\partial\hat{x}_1}{\partial b}+\frac{\partial g}{\partial\hat{x}_2}\cdot\frac{\partial\hat{x}_2}{\partial b}=1.$$

Виходячи з того, що в заданій задачі нелінійного програмування функція Лагранжа (15.4) має вигляд:

$$L(x_1,x_2,\lambda)=W(x_1,x_2)+\lambda\left(b-g(x_1,x_2)\right),\#$$

знаходимо частинні похідні в оптимальній точці:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial\hat{x}_1}=\dfrac{\partial W}{\partial\hat{x}_1}-\hat{\lambda}\dfrac{\partial g}{\partial\hat{x}_1}=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial\hat{x}_2}=\dfrac{\partial W}{\partial\hat{x}_2}-\hat{\lambda}\dfrac{\partial g}{\partial\hat{x}_2}=0. \end{cases}$$

Підставляючи частинні похідні у вираз для обчислення похідної для оптимального значення показника ефективності, дістанемо:

$$\frac{\partial \widehat{W}}{\partial b}=\frac{\hat{\lambda}\partial g}{\partial \hat{x}_1}\cdot\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial b}+\frac{\hat{\lambda}\partial g}{\partial \hat{x}_2}\cdot\frac{\partial \hat{x}_2}{\partial b}=\hat{\lambda}\left(\frac{\partial g}{\partial \hat{x}_1}\cdot\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial b}+\frac{\partial g}{\partial \hat{x}_2}\cdot\frac{\partial \hat{x}_2}{\partial b}\right)=\hat{\lambda}.$$

Узагальнюючи отриманий результат на випадок n-вимірного вектора X та на випадок дії m обмежень $(m<n)$, отримаємо:

$$\left.\frac{\partial \widehat{W}}{\partial b_i}\right|_{\substack{X=\widehat{X}\\ \Lambda=\widehat{\Lambda}}}=\hat{\lambda}_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right).$$

Фізичний (економічний) зміст множників Лагранжа. Уважаючи, що $W(X)$ — прибуток і при цьому виконується максимізація показника ефективності, або $W(X)$ — вартість (витрати) виробництва і при цьому виконується мінімізація показника ефективності, за умови, що b_i — об'єм i-го ресурсу, дійдемо висновку про те, що i-й множник Лагранжа показує на скільки зміниться максимальний прибуток або мінімальна вартість виробництва у разі зміни i-го ресурсу на 1.

Зауваження 15.3 У більшості задач, присвячених системним дослідженням складних технічних систем, спеціально виділяють вектор стану, який можна інтерпретувати як вектор базисних змінних.

Одноетапною процедурою прийняття рішення з обмеженнями у формі рівнянь називається результат розв'язання задачі нелінійного програмування, поставленої у вигляді:

$$\begin{cases} W(X,U)\to \max\limits_{X\in\mathbb{R}^n,U\in\mathbb{R}^m} (\min), \\ F(X,U)=0, \end{cases}$$

де $W(X,U):R^n\times R^m\to R$ — скалярний показник ефективності; X — n-вимірний вектор; U — m-вимірний вектор; $F(X,U):R^n\times R^m\to$ $\to R^n$ — n-вимірна векторна функція;

$$F^T(X,U)=[f_1(X,U),\ldots,f_n(X,U)].$$

Необхідні умови для пошуку оптимального розв'язку мають вигляд:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial L}{\partial X}\right|_{\substack{X=\widehat{X}\\ U=\widehat{U}\\ \Lambda=\widehat{\Lambda}}} = \dfrac{\partial W(X,U)}{\partial X} + \dfrac{\partial}{\partial X} F^T(X,U)\Lambda \Bigg|_{\substack{X=\widehat{X}\\ U=\widehat{U}\\ \Lambda=\hat{\nu}}} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial L}{\partial U}\right|_{\substack{X=\widehat{X}\\ U=\widehat{U}\\ \Lambda=\widehat{\Lambda}}} = \dfrac{\partial W(X,U)}{\partial U} + \dfrac{\partial}{\partial U} F^T(X,U)\Lambda \Bigg|_{\substack{X=\widehat{X}\\ U=\widehat{U}\\ \Lambda=\widehat{\Lambda}}} = 0, \\ F\left(\widehat{X},\widehat{U}\right) = 0, \end{cases}$$

де $L = L(X,U,\Lambda) = W(X,U) + \Lambda^T F(X,U)$, $\Lambda^T = [\lambda_1,..,\lambda_m]$ — множник Лагранжа.

Приклад 15.5 Дано:

$$W(x_1,x_2) = \frac{1}{(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 + 1}.$$

1. Знайти точку екстремуму та з допомогою матриці Гессе з'ясувати тип екстремуму.

2. Розв'язати задачу

$$\begin{cases} W(x_1,x_2) \to \max(\min), \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \end{cases}$$

застосовуючи метод множників Лагранжа.

1. Ураховуючи результат розв'язання прикладу 15.2, маємо:

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = 1,\ W\left(\hat{x}_1,\hat{x}_2\right) = 1.$$

Тоді в точці екстремуму матриця Гессе та її діагональні визначники набувають вигляду:

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\ q_1 = -2 < 0,\ q_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Отже, квадратична форма від'ємно визначена, тобто (1;1) — точка максимуму.

2. Побудуємо лагранжіан:

$$L(x_1,x_2,\lambda)=W(x_1,x_2)+\lambda\left(1-x_1^2-x_2^2\right)$$

та скористаємося необхідною умовою екстремуму

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0.\end{cases}$$

У результаті отримаємо

$$\left[\begin{array}{l} x_{11}=x_{12}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\[2mm] x_{21}=x_{22}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{array}\right.$$

За геометричним змістом задачі зрозуміло, що

$$\left[\begin{array}{l} x_{1\min}=x_{2\min}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\[2mm] x_{1\max}=x_{2\max}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\end{array}\right.$$

$$W_{\min}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)^2+1};$$

$$W_{\max}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2+1}.$$

Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягає суть задачі нелінійного програмування?
2. Наведіть та поясніть класичні умови екстремуму задачі нелінійного програмування.
3. Назвіть різновиди ОДР задачі нелінійного програмування.
4. У чому полягає суть методу прямої підстановки розв'язку класичної задачі нелінійного програмування на умовний екстремум?
5. Наведіть та поясніть необхідні умови екстремуму першого та другого порядку.
6. У чому полягає суть методу множників Лагранжа розв'язку класичної задачі нелінійного програмування на умовний екстремум?
7. Наведіть та поясніть необхідну умову екстремуму в розширеній задачі нелінійного програмування.

Розділ 16

НАЙПРОСТІША ЗАДАЧА НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В УМОВАХ НЕВІД'ЄМНОСТІ ЗМІННИХ

У випадку найпростішої задачі нелінійного програмування з усіх обмежень загальної задачі нелінійного програмування залишається лише вимога невід'ємності змінних:

$$W(X) \to \max_{X \geq 0}.$$

На прикладі скалярного показника ефективності, що залежить від двох змінних, розглянемо умови існування його максимуму при невід'ємності змінних. Нехай

$$W = W\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{\left(x_1 - a\right)^2 + \left(x_2 - b\right)^2 + 1}.$$

Позначатимемо $x_{1\max}$, $x_{2\max}$ точки максимуму $W\left(x_1, x_2\right)$, коли обмежень немає, $x_{1,2} \in R$, $x_{1\max} = a$, $x_{2\max} = b$, а $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ — координати точки максимуму $W\left(x_1, x_2\right)$ за умови, коли $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (рис. 16.1, *а–д*).

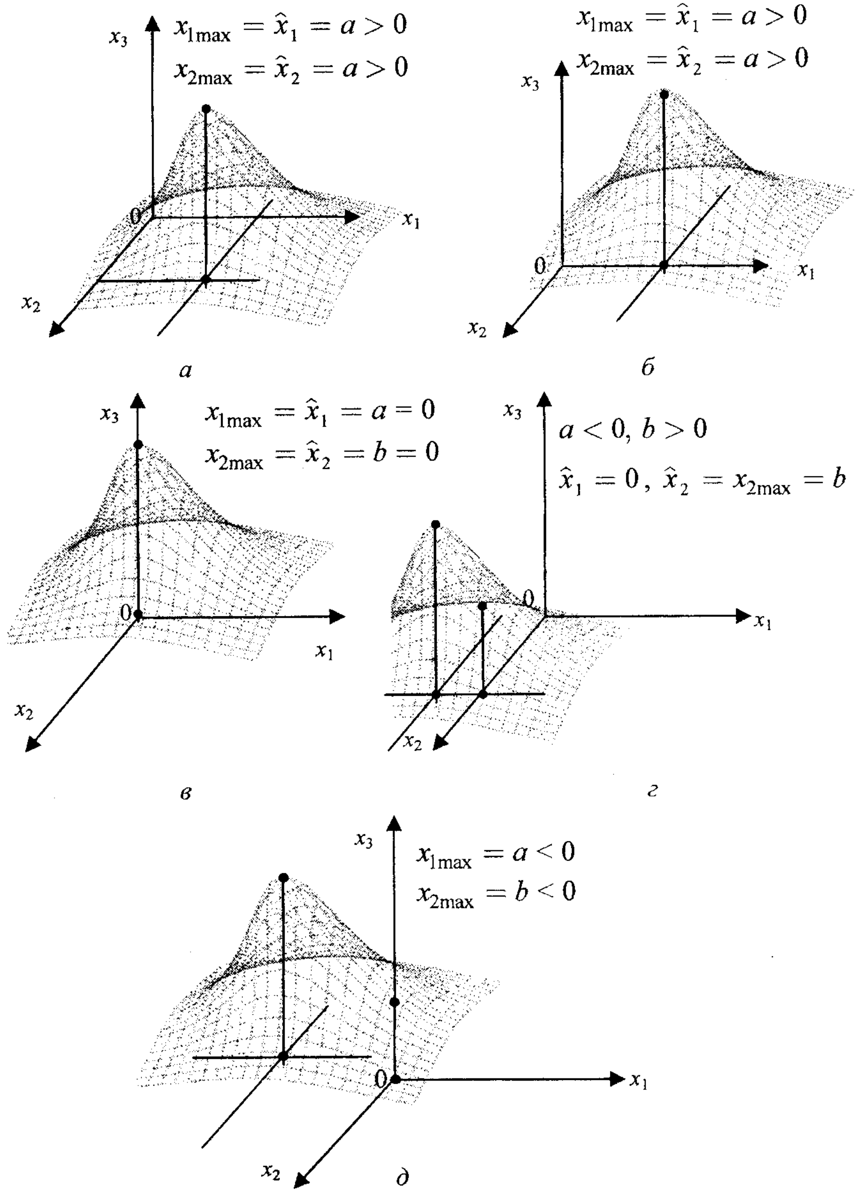


Рис. 16.1. Графічне зображення пошуку необхідних умов існування найбільшого значення показника ефективності

Запишемо необхідні умови існування найбільшого значення показника ефективності в точці $\hat{x}_{1,2}$, зображеного у вигляді унімодальної двовимірної функції в умовах дії найпростіших обмежень $x_{1,2} \geq 0$: для рис. 16.1, *а–в* виконується умова $\frac{\partial W}{\partial x_i} = 0, i = 1,2;$ для рис. 16.1, *г*, *д* відповідно

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} < 0, \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial W}{\partial x_1} < 0, \frac{\partial W}{\partial x_2} < 0.$$

Висновок щодо необхідної умови існування максимуму:

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial W}{\partial x_1}\right|_{x_1=\hat{x}_1} \leq 0, \\ \left.\frac{\partial W}{\partial x_2}\right|_{x_2=\hat{x}_2} \leq 0, \\ \hat{x}_1 \geq 0, \\ \hat{x}_2 \geq 0, \\ \left.\frac{\partial W}{\partial x_1}\right|_{x_1=\hat{x}_1} \cdot \hat{x}_1 = 0, \\ \left.\frac{\partial W}{\partial x_2}\right|_{x_2=\hat{x}_2} \cdot \hat{x}_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left.\frac{\partial W(X)}{\partial X}\right|_{X=\hat{X}} \leq 0, \\ \hat{X} \geq 0; \\ \left(\left.\frac{\partial W}{\partial X}\right|_{X=\hat{X}}\right)^T \cdot \hat{X} = 0, \end{cases}$$

де $X^T = [x_1, x_2]$.

Якщо замість $W(x_1, x_2)$ з одним максимумом використовується показник ефективності з кількома максимумами (багатомодова функція), то записана умова зберігається і використовується як необхідна умова перевірки існування локального максимуму в умовах найпростіших обмежень-нерівностей (усі координати невід'ємні). Для n-вимірного випадку, тобто коли $X^T = [x_1, \ldots, x_n]$, можна отримати строго аналітично ті самі співвідношення, що і для розглянутого двовимірного прикладу, як необхідну умову існування локального максимуму, якщо скористатись розкладанням у ряд Тейлора показника ефективності поблизу точки $\widehat{X}$ і виконати вимогу

$$\Delta W\left(\widehat{X}\right)=W\left(\widehat{X}+\Delta X\right)-W\left(\widehat{X}\right)\leq 0 \quad \forall \Delta X \to 0_n, X \geq 0_n.$$

Ці необхідні вимоги існування локального максимуму в n-вимірному випадку запишемо у вигляді:

1) якщо $\hat{x}_j=0$, то $\left.\dfrac{\partial W}{\partial x_j}\right|_{x=\hat{x}_j}\leq 0$;

2) якщо $\hat{x}_j>0$, то $\left.\dfrac{\partial W}{\partial x_j}\right|_{x=\hat{x}_j}=0$.

Зауваження 16.1 В умовах 1), 2) j може набувати будь-якого значення від 1 до n як окремо, так і за групою координат.

Зауваження 16.2 У випадку опуклої догори функції $W(X)$ для будь-якого $X\in\mathbb{R}^n$ отримаємо достатню умову існування глобального максимуму при $X\geq 0$ у тому самому вигляді, який було наведено в умовах 1), 2).

Зауваження 16.3 Визначення опуклості функції графічно зображено на рис. 16.2. Для векторного аргумента вважаємо функцію опуклою відповідно догори

$$f_1\left(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2\right)>\lambda f\left(X_1\right)+(1-\lambda)f\left(X_2\right)$$

та донизу

$$f_2\left(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2\right)<\lambda f\left(X_1\right)+(1-\lambda)f\left(X_2\right),$$

де λ — скаляр.

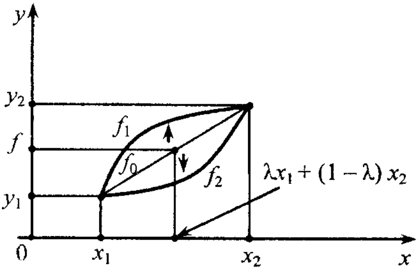


Рис. 16.2. Визначення характеру опуклості двовимірної функції:

$$f_0\left(\lambda x_1 + \left(1-\lambda\right)x_2\right) = \lambda f\left(x_1\right) + \left(1-\lambda\right) f\left(x_2\right) \text{ — пряма;}$$

$$f_1\left(\lambda x_1 + \left(1-\lambda\right)x_2\right) > \lambda f\left(x_1\right) + \left(1-\lambda\right) f\left(x_2\right) \text{ — опукла догори;}$$

$$f_2\left(\lambda x_1 + \left(1-\lambda\right)x_2\right) < \lambda f\left(x_1\right) + \left(1-\lambda\right) f\left(x_2\right) \text{ — опукла донизу.}$$

Приклад 16.1

Розв'язати графічно:

1) $$\begin{cases} W\left(x_1\ x_2\right) = \left(x_1 - 5\right)^2 + \left(x_2 - 8\right)^2 \underset{x_{1,2}\ge 0}{\to \max\left(\min\right)}, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ \dfrac{5}{2}x_1 + 2x_2 \le 20; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} W\left(x_1\ x_2\right) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 \underset{x_{1,2}\ge 0}{\to \max\left(\min\right)}, \\ x_1 \le 10, \\ x_2 \le 9, \\ x_1 + \dfrac{3}{2}x_2 \le \dfrac{15}{2}, \\ x_1 \cdot x_2 \le 6; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} W\left(x_1\ x_2\right) = x_2 - x_1^2 + 4x_1 \underset{x_{1,2}\ge 0}{\to \max}, \\ x_1 \cdot x_2 \ge 6\ , \\ x_1^2 + x_2^2 \le 49, \\ x_2 \le 6. \end{cases}$$

Графічні розв'язки задач 1–3 подані на рис. 16.3–16.5:

Задача 1

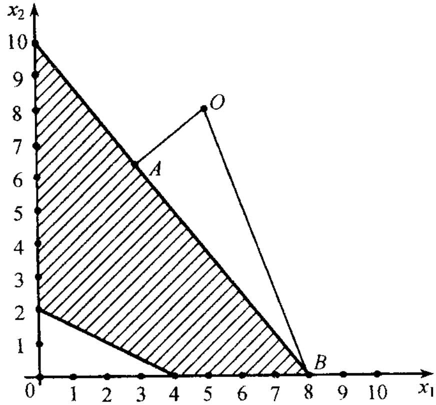


Рис. 16.3. Графічне зображення розв'язання задачі 1

Задача 2

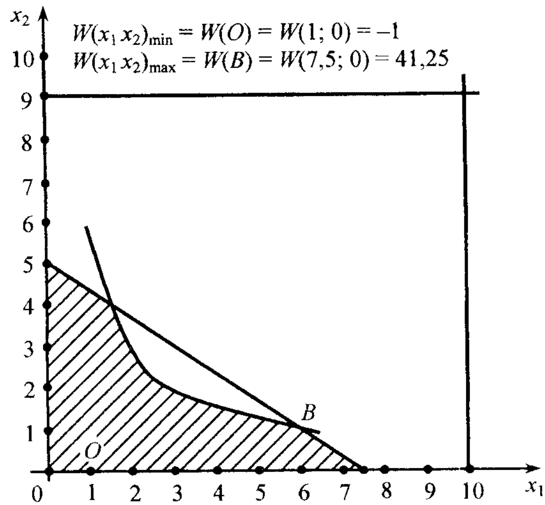


Рис. 16.4. Графічне зображення розв'язання задачі 2

Задача 3

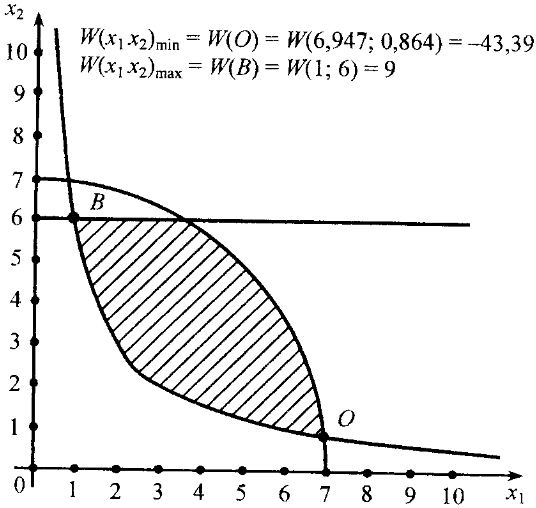


Рис. 16.5. Графічне зображення розв'язання задачі 3

Приклад 16.2

Телекомунікаційна компанія надає користувачам послуги супутникового зв'язку $(i=1)$ та бездротового доступу до Інтернету $(i=2)$.

Знижка витрат на одиницю послуги при зростанні кількості користувачів обчислюють за формулою:

$$\Delta V_i = l_i x_i ,$$

де x_i — обсяг послуги i-го виду (кількість користувачів даної послуги); V_i — витрати фірми на реалізацію i-го виду послуги за мінімальної сумарної кількості користувачів обох послуг; l_i — коефіцієнти знижок питомих витрат у разі зростання кількості користувачів.

Необхідно з'ясувати обсяг послуг кожного виду, за якого забезпечується мінімізація сумарних витрат у разі виконання таких обмежень:

– мінімальна сумарна кількість користувачів 40;

– техніко-технологічний ресурс двох видів послуг становить 160 та 210 одиниць відповідно;

– норми витрат першого ресурсу на обслуговування одного користувача супутникового зв'язку дорівнюють 2, а користувача бездротового доступу до Інтернету — 2,67;

– норми витрат другого ресурсу становлять 3 і 2 відповідно.

Побудувати математичну модель задачі, виконати математичну постановку задачі і розв'язати її графічним методом, якщо:
$V_1 = 100$ грош. од., $V_2 = 140$ грош. од., $l_1 = l_2 =$
$= 1$ грош. од. на одного користувача.

1. Математична модель:

$$\begin{cases} W(x_1, x_2) = (100 - x_1)x_1 + (140 - x_2)x_2, \\ x_1 + x_2 \geq 40, \\ 2x_1 + 2.67x_2 \leq 160, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 210, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

2. Математична постановка:

$$W(x_1, x_2) \to \min_{x_{1,2} \in G};$$

$$(x_1 - 50)^2 + (x_2 - 70)^2 = 50^2 + 70^2 - W,$$

де ОДР G задається обмеженнями-нерівностями:

$$\begin{cases} x_2 \geq -x_1 + 40, \\ x_2 \leq \dfrac{160 - 2x_1}{2,67}, \\ x_2 \leq -\dfrac{3}{2}x_1 + 105, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

3. Графічний розв'язок (рис. 16.6). Як бачимо

$$(x_1 - 50)^2 + (x_2 - 70)^2 = 50^2 + 70^2 - W = R^2,$$

тобто графічним зображенням виразу, пов'язаного з показником ефективності W, є коло радіусом $R^2 = 50^2 + 70^2 - W$.

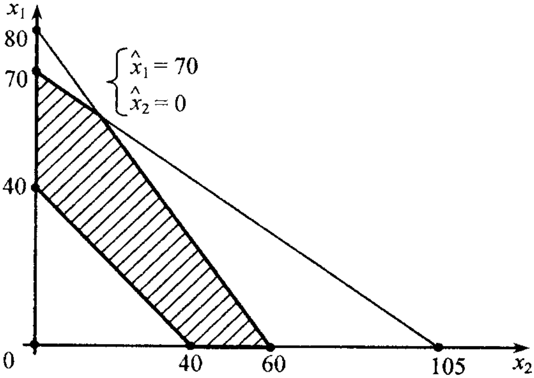


Рис. 16.6. Графічне зображення побудови
області допустимих значень

Що менше W, то більше R. Найбільше значення R досягається в точці

$$(x_1-50)^2+(x_2-70)^2=50^2+70^2-W=R^2,$$

$$\begin{cases}\hat{x}_1=70,\\ \hat{x}_2=0.\end{cases}$$

Отже, результат розв'язання сформульованої вище задачі нелінійного програмування в умовах дії обмежень-нерівностей дає змогу зробити висновок про те, що надання послуг супутникового зв'язку економічно вигідніше, ніж бездротового доступу до Інтернету. Мінімальні витрати на обслуговування $W_{\min}=2100$ грош. од.

Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягає суть задачі нелінійного програмування?
2. Наведіть та поясніть математичну постановку задачі нелінійного програмування в умовах невід'ємності змінних.
3. Наведіть та поясніть необхідні умови існування максимуму задачі нелінійного програмування.
4. Поясніть суть поняття «локальний максимум».
5. Назвіть та поясніть необхідні вимоги існування локального максимуму задачі нелінійного програмування.
6. Поясніть суть поняття «глобальний максимум».
7. Наведіть та поясніть достатні умови існування глобального максимуму задачі нелінійного програмування.

Розділ 17

ЗАДАЧІ ОПУКЛОГО ТА КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

17.1. Умови та теорема Куна–Таккера

Задача нелінійного програмування в некласичній постановці, тобто у постановці, коли як умови обмеження в задачі нелінійного програмування використовуються обмеження-нерівності, формулюється так:

$$\begin{cases} W(X) \to \max\limits_{x_i \ge 0, (i=\overline{1,n})}, \\ g_j(X) \le b_j \ (j = \overline{1,m}), \end{cases}$$

де $X^T = [x_1, \ldots, x_n]$.

Як показник ефективності розглянемо опуклу догори функцію для всіх $x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,n}\right)$. Побудуємо функцію Лагранжа:

$$L(X,\Lambda) = W(X) + \Lambda^T \left(B - G(X)\right) \to \max\limits_{\substack{x_i \ge 0, \left(i=\overline{1,n}\right) \\ \lambda_j \ge 0, \left(j=\overline{1,m}\right)}},$$

де $G^T(X) = \left[g_1(X), \ldots, g_m(X)\right]$, $B^T = \left[b_1, \ldots, b_m\right]$, $\Lambda^T = [\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$.

Нам вдалося звести некласичну задачу нелінійного програмування до найпростішої некласичної задачі нелінійного програмування, тобто задачі нелінійного програмування, у якій на змінні накладена лише одна умова — умова їх невід'ємності.

Скористаємося результатом розд. 16:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial X}\right|_{X=\widehat{X}} = \left.\left(\dfrac{\partial W(X)}{\partial X} - \dfrac{\partial G^T(X)}{\partial X}\Lambda\right)\right|_{X=\widehat{X}} \le 0, \\ \widehat{X} \ge 0, \\ \left.\left(\dfrac{\partial W(X)}{\partial X} - \dfrac{\partial G^T(X)}{\partial X}\Lambda\right)^T\right|_{X=\widehat{X}} \widehat{X} = 0; \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\left.\dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial \Lambda}\right|_{\Lambda=\widehat{\Lambda}} = B - G\left(\widehat{X}\right) \ge 0, \\
\widehat{\Lambda} \ge 0, \\
\left(B - G\left(\widehat{X}\right)\right)^T \widehat{\Lambda} = 0,
\end{cases}
$$

де $\dfrac{\partial G^T(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$

Наведені умови називають *умовами Куна–Таккера.* Вони є необхідними і достатніми умовами існування глобального максимуму задачі нелінійного програмування з опуклим догори показником ефективності за умови виконання обмежень, які утворюють опуклу множину допустимих розв'язків. Із задачі такого типу складається спеціальний розділ задач нелінійного програмування, який називається *опуклим програмуванням.*

Важлива властивість функції Лагранжа полягає в тому, що:

$$L(X,\widehat{\Lambda}) \le L(\widehat{X},\widehat{\Lambda}) \le L(\widehat{X},\Lambda).$$

Це означає, що точка $(\widehat{X},\widehat{\Lambda})$ є *сідловою* точкою функції Лагранжа (рис. 17.1).

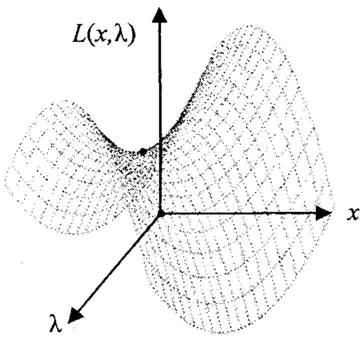


Рис. 17.1. Двовимірна функція Лагранжа із сідловою точкою

Тому умову Куна–Таккера можна переписати у вигляді двоїстих задач:

$$\begin{cases} L\left(\widehat{X},\Lambda\right) = \max\limits_{X\geq 0} L(X,\Lambda) \to \min\limits_{\Lambda\geq 0}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \Lambda} \geq 0 \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} L\left(X,\widehat{\Lambda}\right) = \min\limits_{\Lambda\geq 0} L(X,\Lambda) \to \max\limits_{X\geq 0}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial X} \leq 0. \end{cases}$$

Уперше властивість оптимальної точки $(\widehat{X},\widehat{\Lambda})$ як сідлової точки функції Лагранжа в задачах опуклого програмування було доведено Куном і Таккером і сформульовано у формі теореми, яка в подальшому отримала назву теореми Куна–Таккера.

Теорема 17.1 Для того щоб в задачі опуклого програмування деякий план $\widehat{X}$ був точкою глобального максимуму, необхідно і достатньо існування вектора таких множників Лагранжа, за яких точка $(\widehat{X},\widehat{\Lambda})$ буде сідловою точкою функції Лагранжа:

$$L\left(X,\Lambda\right) = W\left(X\right) + \Lambda^T (B - G(X)).$$

Зауваження 17.1 Умови Куна–Таккера записують ще детальніше:

$$\hat{x}_j > 0 \;\to\; \left.\frac{\partial W}{\partial x_j}\right|_{X=\widehat{X}} - \Lambda^T \left.\frac{\partial G}{\partial x_j}\right|_{X=\widehat{X}} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial x_j}\right|_{X=\widehat{X}} - \Lambda^T \left.\frac{\partial G}{\partial x_j}\right|_{X=\widehat{X}} < 0 \;\to\; \hat{x}_j = 0,$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial x_j}\right|_{X=\widehat{X}} - \Lambda^T \left.\frac{\partial G}{\partial x_j}\right|_{X=\widehat{X}} = 0 \to \ \hat{x}_j = 0 \text{ або } \hat{x}_j > 0;$$

$$\hat{x}_j = 0 \to \left.\frac{\partial W}{\partial x_j}\right|_{X=\widehat{X}} - \Lambda^T \left.\frac{\partial G}{\partial x_j}\right|_{X=\widehat{X}} = 0 \text{ або } \left.\frac{\partial W}{\partial x_j}\right|_{X=\widehat{X}} - \Lambda^T \left.\frac{\partial G}{\partial x_j}\right|_{X=\widehat{X}} < 0;$$

і далі, відносно змінної λ_i :

$$\lambda_i > 0 \ \to \ g_i\left(\widehat{X}\right) = b_i, \ \ g_i\left(\widehat{X}\right) < b_i \ \to \ \hat{\lambda}_i = 0;$$

$$\hat{\lambda}_i = 0 \to g_i\left(\widehat{X}\right) = b_i \text{ або } g_i\left(\widehat{X}\right) < b_i;$$

$$g_i\left(\widehat{X}\right) = 0 \to \lambda_i = 0 \text{ або } \lambda_i > 0, \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Умови Куна–Таккера, записані у детальному вигляді, називають умовами *доповнювальної нежорсткості*.

17.2. Квадратичне програмування

Спеціальним класом задач нелінійного програмування є так звані задачі квадратичного програмування, у яких показник ефективності складається з лінійної та квадратичної функцій, і при цьому всі обмеження-нерівності — лінійні:

$$\begin{cases} W(X) = GX + \dfrac{1}{2} X^T DX \to \max\limits_{X \geq 0}, \\ AX \leq B, \end{cases}$$

де D — дійсна симетрична від'ємна визначена матриця (тобто D) складається з таких елементів, за яких

$$X^T DX < 0 \ \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus 0_n .$$

Лінійні обмеження-нерівності утворюють опуклу область допустимих розв'язків. Показник ефективності складається із суми квадратичної

$$X^T DX = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{k_j} x_n x_j < 0 \ \forall \, X \in R^n \setminus \{0_n\}$$

та лінійної

$$CX = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

форм і є опуклою догори функцією.

Це означає, що для розв'язання задачі квадратичного програмування можна застосувати методи та теореми опуклого програмування, зокрема теорему та умови Куна–Таккера. Функція Лагранжа для задачі квадратичного програмування має вигляд:

$$L(X,\Lambda) = GX + \frac{1}{2} X^T DX + \Lambda^T (B - AX),$$

що дає можливість отримати умови Куна–Таккера:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial X}\right)^T X \Bigg|_{X=\widehat{X},\Lambda=\widehat{\Lambda}} = \left(C + D\widehat{X} - \widehat{\Lambda}^T A\right)\widehat{X}^T = 0, \\ \hat{X} \geq 0; \\ \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial \Lambda}\Bigg|_{X=\widehat{X},\Lambda=\widehat{\Lambda}} = B - A\widehat{X} \geq 0, \\ \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial X}\Bigg|_{X=\widehat{X},\Lambda=\widehat{\Lambda}} = C + D\widehat{X} - \widehat{\Lambda}^T A \leq 0, \\ \Lambda^T \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial \Lambda}\Bigg|_{X=\widehat{X},\Lambda=\widehat{\Lambda}} = \widehat{\Lambda}^T \left(B - A\widehat{X}\right) = 0, \\ \widehat{\Lambda} \geq 0. \end{cases}$$

Розглянемо модифікацію щодо формулювання умов Куна–Таккера. Введемо вектори

$$V^T = (v_1, \ldots, v_n) \geq 0;$$

$$\Omega^T = (\omega_1, \ldots, \omega_m) \geq 0,$$

компоненти яких обирають, виходячи з таких умов:

1) якщо $\dfrac{\partial L}{\partial x_j} < 0$, то $v_j > 0$;

2) якщо $\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$, то $v_j = 0$;

3) якщо $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} < 0$, то $\omega_i > 0$;

4) якщо $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0$, то $\omega_i = 0$ $\left(j = \overline{1,n}; i = \overline{1,m}\right)$.

Тоді умови Куна–Таккера можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} V^T \widehat{X} = 0, \\ B - A\widehat{X} - \Omega = 0, \\ C + D\widehat{X} - \widehat{\Lambda}^T A + V^T = 0, \\ \Lambda^T \Omega = 0, \\ \widehat{X} \geq 0_n, \\ \widehat{\Lambda} \geq 0_m, \\ V \geq 0_n, \\ \Omega \geq 0_m. \end{cases} \tag{17.1}$$

Теорема 17.2 *Необхідна та достатня умова оптимального розв'язку задачі квадратичного програмування.*

Вектор $\widehat{X}$ є розв'язком задачі квадратичного програмування тоді і лише тоді, коли існують:

- m-вимірний вектор $\widehat{\Lambda} \geq 0$ та $\Omega \geq 0$;
- n-вимірний вектор $V \geq 0$,

за яких виконуються лінійні рівняння (17.1):

$$\begin{cases} B - A\widehat{X} - \Omega = 0, \\ C + D\widehat{X} - \widehat{\Lambda}^T A + V^T = 0 \end{cases}$$

та нелінійні рівняння:

$$\begin{cases} V^T \widehat{X} = 0, \\ \Lambda^T \Omega = 0, \end{cases}$$

які називають *умовами доповнювальної нежорсткості*.

Для розв'язання системи лінійних рівнянь (17.1) можна застосувати методи розв'язання задач лінійного програмування, наприклад, симплекс-метод.

Серед методів розв'язання задач квадратичного програмування найбільш відомим є метод Франка–Вульфа.

Прикладом аналітичного пошуку розв'язків задачі квадратичного програмування може бути задача квадратичного програмування як одноетапна процедура прийняття рішення в такій постановці:

$$\begin{cases} W(X,U)=\frac{1}{2}U^TRU+\frac{1}{2}X^TQX=\frac{1}{2}\|U\|_R^2+\frac{1}{2}\|X\|_Q^2 \to \min\limits_{U\in R^m}, \\ AX+BU+C=0, \end{cases}$$

де A — невироджена матриця $n\times n$; B — матриця розміру $n\times m$; $X\in E^n$ — n-вимірний евклідів простір; $C\in E^n$, $0_n^T=[0_1,\dots,0_n]$, R, Q — симетричні додатно визначені матриці розміру $m\times m$, $n\times n$ відповідно.

Функція Лагранжа може бути записана у такому вигляді:

$$L(X,U,\Lambda)=\frac{1}{2}U^TRU+\frac{1}{2}X^TQX+\Lambda^T(AX+BU+C).$$

Для мінімізації показника ефективності необхідно, щоб виконувались умови:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial L}{\partial X}\right|_{X=\widehat{X},U=\widehat{U},\Lambda=\widehat{\Lambda}} = Q\widehat{X}+A^T\widehat{\Lambda}=0, \\ \left.\dfrac{\partial L}{\partial U}\right|_{X=\widehat{\Lambda},U=\widehat{U},\Lambda=\widehat{\Lambda}} = R\widehat{U}+B^T\widehat{\Lambda}=0, \\ A\widehat{\Lambda}+B\widehat{U}+C=0. \end{cases}$$

Із перших двох рівнянь знаходимо:

$$\widehat{X}=-Q^{-1}A^T\Lambda;$$

$$\widehat{U}=-R^{-1}B^T\Lambda$$

та підставляємо у третє рівняння (залежатиме лише від Λ):

$$-AQ^{-1}A^T\widehat{\Lambda}-BR^{-1}B^T\widehat{\Lambda}+C=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\widehat{\Lambda}=\left(AQ^{-1}A^T+BR^{-1}B^T\right)^{-1}C.$$

Підставимо $\widehat{\Lambda}$ у вирази для $\widehat{X}$ і $\widehat{U}$:

$$\widehat{X}=-Q^{-1}A^T\left(AQ^{-1}A^T+BR^{-1}B^T\right)^{-1}C;$$

$$\widehat{U}=-R^{-1}B^T\left(AQ^{-1}A^T+BR^{-1}B^T\right)^{-1}C.$$

Достатня умова того, що в точці $\left(\widehat{X},\widehat{U}\right)$ показник ефективності досягає мінімуму, полягає в тому, що друга варіація показника ефективності поблизу цієї точки більша за нуль:

$$\delta^2W\left(X,U\right)\Big|_{\substack{X=\widehat{X}\\U=\widehat{U}}}>0,$$

де

$$\delta^2W\left(X,U\right)\Big|_{\substack{X=\widehat{X}\\U=\widehat{U}}}=\frac{1}{2!}\left[\Delta X^T,\Delta U^T\right]\begin{bmatrix}Q & 0\\0 & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta X\\\Delta U\end{bmatrix}\ \text{при}\ \begin{matrix}\Delta X\to 0\\\Delta U\to 0\end{matrix}.$$

Ураховуючи той факт, що:

$$\begin{cases}A\Delta X+B\Delta U=0,\\\Delta X\to 0\\\Delta U\to 0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\Delta X=-A^{-1}B\Delta U,$$

отримаємо:

$$\delta^2W\left(X,U\right)\Big|_{\substack{X=\widehat{X}\\U=\widehat{U}}}=\frac{1}{2!}\Delta U^TR\Delta U+$$
$$+\frac{1}{2}\left(-A^{-1}B\Delta U\right)^TQ\left(A^{-1}B\Delta U\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\Delta U^T\left(R+B^TA^{-T}QA^{-1}B\right)\Delta U>0.$$

Тобто, матриця в дужках має задовольняти ознаку додатної визначеності.

Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягає суть задачі нелінійного програмування в некласичній постановці?
2. Поясніть процедуру зведення некласичної задачі нелінійного програмування до найпростішої некласичної задачі нелінійного програмування.
3. Наведіть та поясніть необхідні і достатні умови існування глобального максимуму задачі нелінійного програмування.
4. Розкрийте суть поняття «сідлова точка функції Лагранжа».
5. Сформулюйте теорему Куна–Таккера та наведіть приклади її застосування.
6. Наведіть та поясніть умови доповнювальної нежорсткості Куна–Таккера.
7. У чому полягає суть задачі квадратичного програмування?
8. Які методи застосовують для розв'язання задачі квадратичного програмування?
9. Наведіть та поясніть необхідні та достатні умови оптимального розв'язку задачі квадратичного програмування.

Розділ 18

ОГЛЯД ОСНОВНИХ ПІДХОДІВ ДО ПОБУДОВИ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

18.1. Модельно-тестовий приклад

Як модельно-тестовий приклад, який будемо використовувати для демонстрації змісту прийомів та способів, що становлять зміст більшості числових методів розв'язання задач нелінійного програмування, розглянемо показник ефективності вигляду:

$$W(x_1, x_2)\Big|_{\substack{x_1=a\\ x_2=b}} = a^2 + ab + b^2 \to \min_{\substack{a\in[-3;3]\\ b\in[-3;3]}}.$$

Використаємо необхідні і достатні умови пошуку екстремуму функції двох змінних і знайдемо, за яких значень параметрів a та b показник ефективності досягає мінімуму:

1) необхідна умова:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W(a,b)}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial W(a,b)}{\partial b} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 0, \\ 2b + a = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{a} = 0, \\ \hat{b} = 0. \end{cases}$$

2) достатня умова існування мінімуму в точці (0;0) — матриця Гессе має бути додатно визначеною:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 W}{\partial a^2} & \dfrac{\partial^2 W}{\partial a \partial b} \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial a \partial b} & \dfrac{\partial^2 W}{\partial b^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} > 0,$$

де $\Delta_{1,2}$ — визначники, розташовані на головній діагоналі матриці Гессе, $\Delta_1 = q_{11} = 2 > 0$, $\Delta_2 = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 > 0$.

Висновки:

1. Підтверджено, що матриця Гессе додатно визначена.

2. Показник ефективності досягає мінімуму і його значення дорівнює: $\begin{cases} \hat{a} = 0, \\ \hat{b} = 0, \end{cases}$ $\widehat{W}\left(\hat{a}, \hat{b}\right) = 0.$

18.2. Метод сканування (метод повного перебирання)

Зазвичай цей метод використовують для вибору початкових умов для роботи числового алгоритму або в задачах цілочислового програмування для уточнення цілочислових значень змінних, за якими розв'язується задача, розташованих біля екстремуму показника ефективності, який було знайдено в умовах послабленої цілочислової задачі.

Для реалізації методу сканування необхідно виконати такі дії:

1) задати крок дискретизації змінних, за якими виконується пошук екстремуму;

2) побудувати область дискретизації змінних, за якими виконується пошук екстремуму.

Для того щоб не пропустити жодної точки, використовуються різні способи їх обходу (способи сканування вузлів). Наприклад, на рис. 18.1 показано рядковий та спіральний (сірий колір) способи сканування.

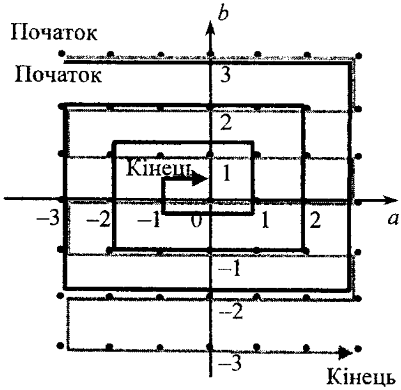


Рис. 18.1. Приклад побудови області дискретизації значень змінних, за якими виконується оптимізація показника ефективності
$$W = a^2 + ab + b^2 \to \min \forall a, b \in [-3;3]$$
з вибором кроку дискретизації за параметрами $\varepsilon_a = 1$, $\varepsilon_b = 1$

18.3. Метод Гаусса–Зейделя (метод покоординатного спуску)

Якщо показник ефективності W залежить від m змінних, то в цьому методі на кожному етапі (циклі) пошуку оптимальних значень параметрів припускають, що лише одна змінна впливає на значення показника ефективності, а інші залишаються незмінними (сталими). Після того, як буде знайдене екстремальне значення показника ефективності за виділеною змінною, цю змінну вважають сталою зі значенням, яке було знайдене під час пошуку екстремуму показника ефективності за цією змінною. Покоординатний пошук екстремуму припиняється за відповідною умовою, яка може полягати в тому, що в разі повного виконання етапів (циклів) покоординатної зміни за всіма змінними значення показника майже не змінюється.

Умови наближення до мінімуму показника ефективності за числової реалізації методу Гаусса–Зейделя показані на рис. 18.2, де r — узагальнене позначення того параметра, від якого залежить показник ефективності і який на даному етапі (циклі) методу покоординатного спуску вважається змінюваним.

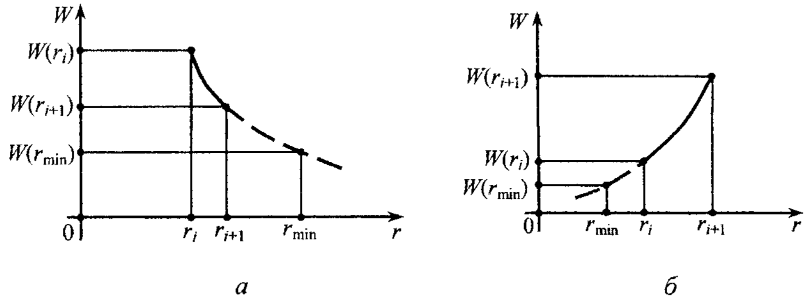


Рис. 18.2. Умови методів скалярної оптимізації
(тобто пошуку екстремуму функції однієї змінної):
а) якщо $r_{i+1} > r_i$ і при цьому $W(r_{i+1}) < W(r_i)$,
то точка мінімуму розташована праворуч від r_{i+1};
б) якщо $r_{i+1} > r_i$ і при цьому $W(r_{i+1}) > W(r_i)$,
то точка мінімуму $W(r_{i+1}) > W(r_i)$,
то точка мінімуму розташована ліворуч від r_i

Існує велика кількість методів пошуку екстремуму функції однієї змінної, наприклад:

1) аналітичний (класичний) метод;

2) групи числових методів:

– метод ділення відрізків навпіл;
– метод золотого перерізу;
– симетричні методи;
– оптимальні методи;
– метод ламаних;
– метод покриттів;
– метод дотичних;
– метод парабол тощо.

18.3.1. Класичний метод мінімізації функції однієї змінної у разі його застосування в методі Гаусса–Зейделя

Показник ефективності має вигляд:

$$W = a^2 + ab + b^2 \to \min,$$

тобто вважається відомою залежність показника ефективності від змінних, за якими відбувається оптимізація.

Етап 1 (рис. 18.3)

$$\begin{cases} a_0 = 3, \\ b_0 = 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_0 = 3 = \text{const}, \\ a = \text{var}, \end{cases}$$

$$W(a,3) = a^2 + 3a + 9, \quad \frac{dW}{da} = 2a + 3 = 0 \rightarrow a_1 = -\frac{3}{2}, b_1 = 3.$$

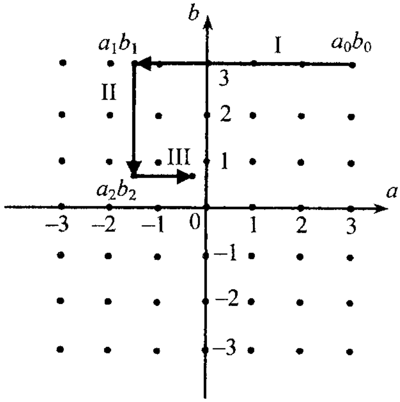


Рис. 18.3. Графічне зображення класичного методу пошуку екстремуму функції однієї змінної в методі Гаусса–Зейделя

Етап 2

$$\begin{cases} b_1 = \text{var}, \\ a_1 = -\dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

$$W\left(-\frac{3}{2}, b\right) = \frac{9}{4} - \frac{3}{2}b + b^2;$$

$$\frac{dW}{db} = -\frac{3}{2} + 2b = 0 \rightarrow b_2 = \frac{3}{4} = 0{,}75, \; a_2 = -\frac{3}{2}.$$

Етап 3

$$\begin{cases} b_2 = 0{,}75, \\ a_2 = \text{var}, \end{cases}$$

$$W\left(a,\frac{3}{4}\right)=a^2+\frac{3}{4}a+\frac{9}{16};$$

$$\frac{dW}{da}=2a+\frac{3}{4}=0\rightarrow a_3=-\frac{3}{8}\ \text{і т. д.}$$

18.3.2. Метод екстраполяційного пошуку

Метод екстраполяційного пошуку ґрунтується на трьох припущеннях:

1) заздалегідь відоме бажане значення (область розташування бажаного значення показника ефективності):

$$W_б \in [W_0-\varepsilon_i;\ W_0+\varepsilon_i],$$

де W_0— певна величина, значення якої задають, ґрунтуючись на досвіді розв'язання подібних задач; ε_i — допустима похибка обчислення ($\varepsilon_i>0$); i — номер етапу (циклу). Але при цьому невідома точка екстремуму показника ефективності, тобто значення змінних, за яких досягається $W_б$;

2) значення показника ефективності може бути наближено представлене функціональною залежністю від змінних, за якими відбувається пошук екстремуму;

3) значення показника ефективності при заданому векторі змінних, за якими відбувається оптимізація, може бути виміряне або обчислене.

Приклад 18.1 Нехай залежність показника ефективності від змінного на даному циклі параметра є лінійною:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

$$r_1=r^{(i)}-\delta_i\rightarrow W(r_1),\ \ r_2=r^{(i)}+\delta_i\rightarrow W(r_2).$$

Тоді можемо записати:

$$\left(\frac{W\left(r^{(i+1)}\right)-W(r_1)}{W(r_2)-W(r_1)}\right)=\frac{r^{(i+1)}-r_1}{r_2-r_1}\rightarrow r^{(i+1)}=r_i-\delta_i+2\delta_i\frac{W\left(r^{(i+1)}\right)-W(r_1)}{W(r_2)-W(r_1)},$$

де беремо $W\left(r^{(i+1)}\right)=W_б$, $\delta_i>0$.

Після обчислення $r^{(i+1)}$ вимірюємо або обчислюємо істинне значення показника ефективності $W_{\text{іст}}(r)$ у точці $r = r^{(i+1)}$.

Якщо $W_{\text{іст}}\left(r^{(i+1)}\right) \in [W_0 - \varepsilon_i; W_0 + \varepsilon_i]$, то вважаємо, що $r^{(i+1)} = r_{\text{ext}}$. Запам'ятовуємо це значення і переходимо до пошуку екстремуму показника ефективності за такою координатою.

Якщо $W_{\text{іст}}\left(r^{(i+1)}\right) \notin [W_0 - \varepsilon_i; W_0 + \varepsilon_i]$, то повторюємо всі наведені вище розрахунки за інших значень δ_i та ε_i.

Приклад 18.2 Застосування методу екстраполяційного пошуку за умови квадратичної екстраполяції залежності показника ефективності від значень тієї змінної, за якою на даному циклі відбувається оптимізація. Нехай $W(r) = Ar^2 + Br + C,\ \ A > 0$.

Якщо на i-му етапі виконати обчислення (вимірювання) значення показника ефективності, а саме:

$$W\left(r^{(i)} - \delta_i\right) = W_1;\quad W\left(r^{(i)}\right) = W_2;\quad W\left(r^{(i)} + \delta_i\right) = W_3,$$

то отримаємо систему трьох лінійних рівнянь для обчислення трьох невідомих параметрів A, B, C:

$$\begin{cases} A\left(r^{(i)} - \delta_i\right)^2 + B\left(r^{(i)} - \delta_i\right) + C = W_1, \\ A\left(r^{(i)}\right)^2 + B\left(r^{(i)}\right) + C = W_2, \\ A\left(r^{(i)} + \delta_i\right)^2 + B\left(r^{(i)} + \delta_i\right) = W_3. \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{cases} A = \dfrac{\Delta A}{\Delta}, \\ B = \dfrac{\Delta B}{\Delta}, \\ C = \dfrac{\Delta C}{\Delta}, \end{cases}$$

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} \left(r^{(i)} - \delta_i\right)^2 & \left(r^{(i)} - \delta_i\right) & 1 \\ \left(r^{(i)}\right)^2 & \left(r^{(i)}\right) & 1 \\ \left(r^{(i)} + \delta_i\right)^2 & \left(r^{(i)} + \delta_i\right) & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta A = \begin{vmatrix} W_1 & \left(r^{(i)} - \delta_i\right) & 1 \\ W_2 & \left(r^{(i)}\right) & 1 \\ W_3 & \left(r^{(i)} + \delta_i\right) & 1 \end{vmatrix};$$

$$\Delta B = \begin{vmatrix} \left(r^{(i)} - \delta_i\right)^2 & W_1 & 1 \\ \left(r^{(i)}\right)^2 & W_2 & 1 \\ \left(r^{(i)} + \delta_i\right)^2 & W_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta C = \begin{vmatrix} \left(r^{(i)} - \delta_i\right)^2 & \left(r^{(i)} - \delta_i\right) & W_1 \\ \left(r^{(i)}\right)^2 & \left(r^{(i)}\right) & W_2 \\ \left(r^{(i)} + \delta_i\right)^2 & \left(r^{(i)} + \delta_i\right) & W_3 \end{vmatrix}.$$

Мінімум квадратичної залежності досягається при $r_{\text{ext}} = -B / 2A$.

Знайдене значення змінної r_{ext}, за якою відбувається пошук екстремуму, дає змогу обчислювати (вимірювати) істинне значення показника ефективності $W_{\text{іст}}\left(r_{\text{ext}}\right)$.

Якщо $W_{\text{іст}}\left(r_{\text{ext}}\right) \in \left[W_0 - \varepsilon_i, W_0 + \varepsilon_i\right]$, то вважаємо, що оптимізація за цією координатою завершена.

Значення r_{ext} запам'ятовуємо і переходимо до пошуку екстремуму показника ефективності за такою координатою.

Якщо $W_{\text{іст}}\left(r_{\text{ext}}\right)$ не належить заданій області, то повторюємо наведені вище обчислення, змінивши δ_i або ε_i, або W_0.

18.4. Метод градієнта

За умови використання методу градієнта на кожному етапі змінюються всі змінні, за якими відбувається пошук екстремуму. Припустімо, що таких змінних m.

Показник ефективності має вигляд $W = W(x_1, \ldots, x_m)$. Градієнтом диференційованої функції називається вектор, проекція якого на осі координат дорівнює $\dfrac{\partial W}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial W}{\partial x_m}$ відповідно.

У методі градієнта використовується його властивість, яка полягає в тому, що модуль градієнта зменшується при наближенні до точки екстремуму (рис. 18.4):

$$\left|\frac{\partial W}{\partial X}\right|_{X_i} = \left|\operatorname{grad} W\right|_i = \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)_i^2 + \ldots + \left(\frac{\partial W}{\partial x_m}\right)_i^2} \to 0;$$

$$X_i^T = [x_1^{(i)}, \ldots, x_m^{(i)}] \to X_{\text{ext}}.$$

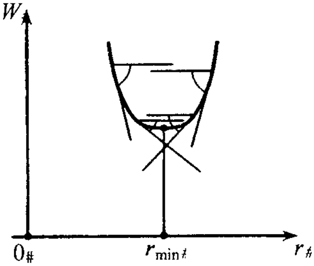


Рис. 18.4. Наближення модуля градієнта до нуля при наближенні аргументу до точки екстремуму показника ефективності

У загальному випадку, якщо невідома аналітична залежність показника ефективності від змінних, за якими відбувається оптимізація, значення градієнта в заданій точці X_i обчислюють наближено, тобто визначають субградієнт:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial x_1{}^{(i)}} = \operatorname{grad}_1^{(i)} W \cong \dfrac{1}{2\varepsilon_1}\left[W\left(x_1^{(i)} + \varepsilon_1, x_2^{(i)} \ldots x_m^{(i)}\right) - W\left(x_1^{(i)} - \varepsilon_1, x_2^{(i)} \ldots x_m^{(i)}\right)\right], \\ \ldots \\ \dfrac{\partial W}{\partial x_m{}^{(i)}} = \operatorname{grad}_m^{(i)} W \cong \dfrac{1}{2\varepsilon_m}\left[W\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \ldots x_m^{(i)} + \varepsilon_m\right) - W\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \ldots x_m^{(i)} - \varepsilon_m\right)\right], \end{cases}$$

де $\varepsilon_j > 0$ $(j = \overline{1, m})$ — пробний крок, використовуваний для зміни j-ї змінної на i-й ітерації.

Тобто:

$$\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}^{(i)} W\right)^T = \left(\operatorname{grad}_1^{(i)} W, \ldots, \operatorname{grad}_m^{(i)} W\right).$$

Для обчислення нового (наступного) наближення змінних, за якими відбувається пошук екстремуму, використовують вирази:

$$\begin{cases} x_1^{(i+1)} = x_1^{(i)} - \delta_1 \operatorname{grad}_1^{(i)} W, \\ \quad \ldots \\ x_m^{(i+1)} = x_m^{(i)} - \delta_m \operatorname{grad}_m^{(i)} W, \end{cases}$$

якщо відбувається пошук мінімального значення показника ефективності та

$$\begin{cases} x_1^{(i+1)} = x_1^{(i)} + \delta_1 \operatorname{grad}_1^{(i)} W, \\ \quad \ldots \\ x_m^{(i+1)} = x_m^{(i)} + \delta_m \operatorname{grad}_m^{(i)} W, \end{cases}$$

якщо здійснюється пошук максимального значення показника ефективності, де δ_j $(j = \overline{1,m})$ — величина робочого кроку вздовж відповідної координати. Отже, у методі градієнта процес пошуку екстремуму на кожній ітерації, тобто етапі (циклі) наближення до точки екстремуму, включає в себе дві обов'язкові операції (дії):

- пошук градієнта в поточній точці, коротка назва — пробний крок;
- пошук нового значення вектора змінних, коротка назва — робочий крок.

Графічне зображення траєкторії наближення до мінімального значення показника ефективності у разі використання методу градієнта показане на рис. 18.5.

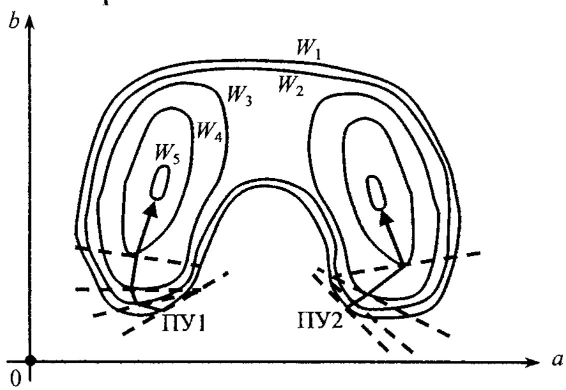


Рис.18.5. Застосування методу градієнта для пошуку екстремуму багатомодової функції: ПУ — початкова умова

Метод градієнта дає змогу визначати локальний екстремум показника ефективності. Як бачимо з рис. 18.5, результат пошуку локального екстремуму залежить від початкових умов.

Приклад 18.3 Припустімо, що показник ефективності має вигляд:

$$W = a^2 + ab + b^2 \to \min .$$

Розв'язати задачу методом градієнта (рис. 18.6).

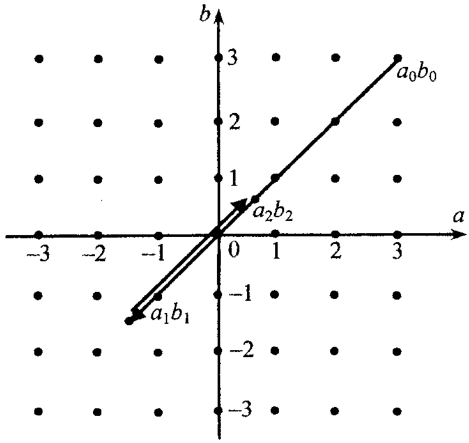


Рис. 18.6. Використання методу градієнта
для пошуку екстремуму показника ефективності

1. Перша ітерація. Початкові умови: $a_0 = b_0 = 3$.

1.1. Пробний крок:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = 2a + b\Big|_{(a_0;b_0)} = 9,$$

$$\frac{\partial W}{\partial b} = 2b + a\Big|_{(a_0;b_0)} = 9.$$

1.2. Робочий крок:

$$\begin{cases} a_1 = a_0 - \delta \dfrac{\partial W}{\partial a} = -1{,}5, \\ b_1 = b_0 - \delta \dfrac{\partial W}{\partial b} = -1{,}5, \end{cases}$$

де $\delta = 1/2$.

2. Друга ітерація. Початкові умови: $a_1 = b_1 = -1,5$.

2.1. Пробний крок:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = 2a + b\Big|_{(a_1;b_1)} = -4,5,$$

$$\frac{\partial W}{\partial b} = 2b + a\Big|_{(a_1;b_1)} = -4,5.$$

2.2. Робочий крок:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 - \delta\dfrac{\partial W}{\partial a} = 0,75, \\ b_2 = b_1 - \delta\dfrac{\partial W}{\partial b} = 0,75. \end{cases}$$

Збіжність методу градієнта залежить як від початкових умов, так і від величини робочого кроку, тобто для підвищення ефективності методу градієнта (пошук локального екстремуму відбувається за меншу кількість кроків) необхідно цей метод модифікувати, надавши йому деяких оптимальних властивостей.

18.5. Метод найшвидшого спуску

Метод найшвидшого спуску — модифікація методу градієнта, суть якого полягає в тому, що після обчислення градієнта на i-й ітерації, переміщення вздовж цього градієнта відбувається від $X^{(i)} \to X^{(i+1)}$ доти, доки зменшується значення показника ефективності, а не з фіксованим кроком, як це було в методі градієнта (рис. 18.7).

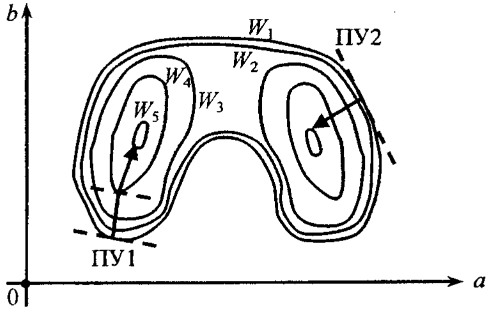


Рис. 18.7. Застосування методу найшвидшого спуску для пошуку екстремуму багатомодової функції

При використанні методу найшвидшого спуску зменшується кількість ітерацій і навіть можна досягти локального екстремуму за одну ітерацію за вдало обраних початкових умов (див. приклад 18.4 та рис. 18.8).

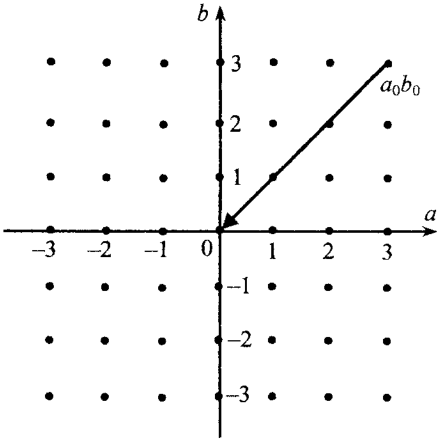


Рис.18.8. Застосування методу найшвидшого спуску для пошуку мінімуму показника якості

Приклад 18.4 | Припустімо, що показник ефективності має вигляд: $W = a^2 + ab + b^2 \to \min$.
Розв'язати задачу методом найшвидшого спуску.

1. Перша ітерація. Початкові умови: $a_0 = b_0 = 3$.

1.1. Пробний крок:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = 2a + b\Big|_{(a_0;b_0)} = 9;$$

$$\frac{\partial W}{\partial b} = 2b + a\Big|_{(a_0;b_0)} = 9.$$

1.2. Робочий крок:

$$a_1 = a_0 - 9\delta = 3 - 9\delta;$$

$$b_1 = b_0 - 9\delta = 3 - 9\delta\,;$$

$$W(\delta) = 3(3 - 9\delta)^2\,;$$

$$\frac{\partial W}{\partial \delta} = -54(3 - 9\delta) = 0 \to \delta = \frac{1}{3}\,.$$

Остаточно маємо:

$$a_1 = a_0 - 9\delta = 3 - 9\delta = 3 - 9 \cdot \frac{1}{3} = 0;$$

$$b_1 = b_0 - 9\delta = 3 - 9\delta = 3 - 9 \cdot \frac{1}{3} = 0\,.$$

18.6. Метод випадкового пошуку

В основу випадкового пошуку покладено метод випробувань і помилок, відповідно до якого вдало знайдене значення керувальних параметрів зберігається, а невдале — відкидається.

Метод випадкового пошуку використовують для пошуку глобальних і локальних екстремумів показника ефективності, причому як самостійно, так і комбіновано з методами регулярного (детермінованого) пошуку.

Класифікація методів випадкового пошуку:

1) локальний випадковий пошук з поверненням;

2) локальний випадковий пошук за найкращою пробою;

3) локальний випадковий пошук за статистичним градієнтом;

4) глобальний випадковий пошук з незалежним вибором щільності розподілу пробних кроків;

5) генетичні алгоритми та еволюційне програмування.

Розглянемо як приклад основні елементи алгоритму локального випадкового пошуку (локального випадкового пошуку з поверненням, який на сьогодні є найпоширенішим). Алгоритм полягає в такому:

Крок 1. У випадковому напрямі здійснюється зміна значень параметрів, за якими відбувається пошук екстремуму:

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} + \Delta X^{(i+1)},$$

де $\Delta X^{(i+1)} = \delta E_{i+1}$; $E_{i+1}^T = [e_1, \ldots, e_n]_{i+1}$ — випадковий одиничний вектор $\left(e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2 = 1\right)$ із заданою щільністю ймовірності, реалізація значень компонент якого отримана для обчислення $\Delta X^{(i+1)}$; δ — величина кроку за керувальними параметрами.

Якщо вимірювання (обчислення) показало, що показник ефективності в новій точці менший ніж значення показника ефективності у попередній точці (відбувається пошук мінімуму), тобто $W\left(X^{(i+1)}\right) < W\left(X^{(i)}\right)$, то значення показника ефективності $W\left(X^{(i+1)}\right)$ та $X^{(i+1)}$ запам'ятовуються.

Якщо $W\left(X^{(i+1)}\right) \geq W\left(X^{(i)}\right)$, то виконується повернення до попередніх значень показника ефективності та керувальної змінної і знову обчислюється

$$X^{(i+2)} = X^{(i)} + \Delta X^{(i+2)},$$

де $\Delta X^{(i+2)} = \delta E_{i+2}$, $E_{i+2}^T = \left[e_1, \ldots, e_n\right]_{i+2}$ — випадковий одиничний вектор, реалізація значень компонент якого отримана для обчислення $\Delta X^{(i+2)}$.

Обчислення виконується доти, доки показник ефективності стане меншим, ніж його попереднє значення. Останнє значення вектора керувальних змінних та значення показника ефективності запам'ятовується.

Крок 2. Виконується у випадковому напрямі від останнього значення вектора керувальних параметрів, яке було запам'ятоване наприкінці кроку 1.

У подальшому кроки 1 і 2 повторюються доти, доки не буде виконана умова зупинки алгоритму пошуку екстремального значення показника ефективності.

18.7. Застосування системи комп'ютерної математики MATLAB для розв'язання задач квадратичного та нелінійного програмування

Квадратичне програмування: функція ***quadprog***

Формат постановки задачі квадратичного програмування в MATLAB:

$$\begin{cases} W = \dfrac{1}{2} X^T H X + f X \to \min\limits_{X \in \mathbb{R}^n}, \\ A X \leq b, \\ A_{eq} X = b_{eq}, \\ L_b \leq X \leq U_b. \end{cases}$$

Формат звернення до функції ***quadprog:***

$$[X, W, flag] = \textbf{\textit{quadprog}}(H, f, A, b, A_{eq}, b_{eq}, L_b, U_b).$$

Приклад 18.5

Розглянемо задачу рівня бізнес-управління телекомунікаційною компанією. Перед ТОР-менеджерами компанії поставлено завдання щодо розподілу інноваційних ресурсів компанії на розвиток найприбутковіших технологій, тобто визначення так званого інноваційного портфеля. Через невизначеність майбутнього запиту ринку цей портфель є ризикованим.

Для зменшення ризику втрати наявних інноваційних ресурсів необхідно виконати їх розбиття, наприклад, на чотири частини x_1, x_2, x_3, x_4 для того, щоб розвивати, відповідно, чотири інноваційні технології A_1, A_2, A_3, A_4. Позначимо

$$X^T = [x_1, x_2, x_3, x_4],$$

де x_i $(i = \overline{1,4})$ — відносні витрати (частина від загальної інноваційної суми):

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \quad x_{1,2,3,4} \geq 0.$$

Таким чином, інноваційний портфель визначається вектором X частинок від загальної суми інноваційних ресурсів.

Ризик оцінюється як величина дисперсії доходу, що очікується. Уважаємо, що за результатом аналізу тенденцій розвитку ринку ІТ-технологій ідентифіковано вектор, що складається з математичних сподівань прибутковості чотирьох обраних для розвитку технологій

$$d^T = [d_1, d_2, d_3, d_4]$$

та матриці взаємних дисперсій V.

Тоді математичне сподівання прибутковості інноваційного портфеля можна обчислити так:

$$M_p = d^T X.$$

Припустімо, що:

$$d = [11.3; 13.2; 16.4; 17.4],$$

$$V = \begin{bmatrix} 102,0 & 27,1 & -52,3 & 66,5 \\ 27,1 & 148,8 & 42,1 & -66,4 \\ -52,3 & 42,1 & 246,5 & 56,9 \\ 66,5 & -66,4 & 56,9 & 272,3 \end{bmatrix}.$$

Дисперсія відхилення від прибутковості, що очікується ($M_{p0} = 15$), обчислюється за формулою:

$$D = X^T V X .$$

Вираз для обчислення дисперсії D використовують для оцінки ризику інноваційного портфеля. Цей ризик потрібно мінімізувати за рахунок оптимального вибору компонент вектора X (задача Марковиця).

Для наведеного прикладу матриці, що відповідають загальній постановці задачі, набувають вигляду:

$H = V$;

f — відсутня, [ ];

A — відсутня, [ ];

B — відсутня, [ ];

$A_{eq} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

$b_{eq} = \begin{bmatrix} 15 \\ 1 \end{bmatrix}$;

$lb = [0,\ldots,0]$;

Ub — відсутня, [ ].

Звернення до функції мінімізації квадратичного показника ефективності для нашого випадку:

$$[X, \min W, flag] = quadprog\left(V,[],[],[],A_{eq},b_{eq},lb,[]\right),$$

де $flag$ — символ якості виконання оптимізації: якщо $flag$ дорівнює цілому додатному числу, то операція оптимізації виконана успішно; якщо $flag = 0$, то виконана максимальна кількість ітерацій без покращення результату (ознака зациклювання алгоритму); якщо $flag$ дорівнює цілому від'ємному числу, то досягти екстремуму не вдалося — операція пошуку екстремуму не виконана.

Командне віконце MATLAB:

```
>> V=[102.0  27.1  –52.3  66.5
        27.1 148.8  42.1 –66.4
       –52.3  42.1 246.5  56.9
        66.5 –66.4  56.9 272.3]
>> Aeq=[11.3  13.2  16.1  17.4
           1     1     1     1]
```

```
>> beq=[15;1]
>> lb=[0;0;0;0]
>> [X,W,flag]=quadprog(V,[],[],[],Aeq,beq,lb,[])
X = 0.0626
    0.4359
    0.1439
    0.3575
minW = 31.2725
flag = 1.
```

Нелінійне програмування: *функція fmincon*

Формат постановки задачі нелінійного програмування в MATLAB:

$$f(x) \to \min_{X \in \mathbb{R}^n},$$

$$\begin{cases} AX \le b, \\ A_{eq}X = b_{eq}, \\ lb \le X \le Ub, \\ C(X) \le 0, \\ C_{eq}(X) = 0. \end{cases}$$

Формат звернення до функції ***fmincon:***

$$[X, \min W, flag] =$$
$$= fmincon(fun, X_0, A, b, A_{eq}, b_{eq}, lb, Ub, nonlcon, options, p_1, p_2),$$

де X — вектор змінних, за яким відбувається оптимізація (керувальні змінні); $W_{\min}$ — мінімальне значення показника ефективності; $flag$ — символ якості виконання оптимізації (має той самий зміст, що й у випадку квадратичного програмування); fun — ім'я файлу-функції, яка обчислює значення показника ефективності (може залежати від кількох параметрів p_1, p_2, значення яких передається за допомогою аргументів $fmincon$, що починаються з 11-ї позиції у її вхідному списку; аргументом $fmincon$ є вектор X); вектори і матриці, які не використовуються, позначаються як []; X_0 — початкове значення вектора X; $nonlcon$ — ім'я файлу-функції нелінійних обмежень (вхідним аргументом є вектор X, а вихідні аргументи — ліві частини обмежень); *options* — керувальна структура, яка задає властивості обчислювального алгоритму.

Приклад 18.6

Постановка задачі

$W=3x_1^2+2x_2^2 \to \min$,

$x_1^2+x_2^2 \le 1$.

Розв'язання.

Побудова файлу-функції: File_New_M-file

function fp1= myfunp1(x)

fp1=3·x(1)^2+2·x(2)^2;

Save as…myfunp1

Побудова файлу-функції: File_New_M-file

function [c, ceq]=myconp1(x)

c(1)=x(1)^2+x(2)^2—1;

ceq=[];

Save as…myconp1

>> [x, fp1, flag]=

=fmincon(@myfunp1,[0.7 0.7],[],[],[],[],[],[],@myconp1)

x = 1.0e-004·(0.1895 –0.0235)

fp1 = 1.0882e–009

flag = 1

Приклад 18.7

Постановка задачі

$W=(x_1-5)^2+(x_2-8)^2 \to \min(\max)$,

$x_1+2x_2 \ge 4$,

$5/2x1+2x2 \le 20$,

$x1,2 \ge 0$.

Розв'язання.

Побудова файлу-функції: File_New_M-file

function fp2min= myfunp2min(x)

fp2min=(x(1)-5)^2+(x(2)-8)^2;

Save as…myfunp2min

>> A=[–1 -2 2.5 2]

>> b=[–4;20]

>> [x, fp2min, flag]=fmincon(@myfunp2min,[0 5],[A],[b],[],[],[0 0],[])

x = 2.9268 6.3415

fp2min = 7.0488
flag = 1
Побудова файлу-функції: File_New_M-file
function fp2max= myfunp2max(x)
fp2max=—((x(1) –5)^2+(x(2) –8)^2);
Save as…myfunp2max
>>[x, fp2max, flag]=fmincon(@myfunp2max,[0 5],[A],[b],[],[],[0 0],[])
x = 0 2
fp2max = —61
flag = 1

Приклад 18.8

Постановка задачі

$W = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 \rightarrow \min(\max)$,

$x_1 + 3/2x_2 \le 15/2$,

$0 \le x_1 \le 10$,

$0 \le x_2 \le 9$,

$x_1 x_2 \le 6$.

Розв'язання.

Побудова файлу-функції: File_New_M-file
function fp3min= myfunp3min(x)
fp3min=x(1)^2+x(2)^2–2·x(1);
Save as…myfunp3min
>> A=[1 1.5]
A = 1.0000 1.5000
>> b=[7.5]
b = 7.5000
Побудова файлу-функції: File_New_M-file
function [c, ceq]=myconp3(x)
c(1)=x(1)·x(2) –6;
ceq=[];
Save as…myconp3
>> [x, fp3min, flag]=fmincon(@myfunp3min,[0 0],[A],[b],[],[],[0 0],[10 9], @myconp3)
x = 1.0000 0
fp3min = –1
flag = 1

Побудова файлу-функції:File_New_M-file
function fp3max= myfunp3max(x)
fp3max=– (x(1)^2+x(2)^2-2·x(1));
Save as…myfunp3max
>>[x, fp3max, flag]=fmincon(@myfunp3max,[**0 0**],[A],[b],[],[],[0 0],[10 9], @myconp3)
x = 1.0e-007·(0 0.1000)
fp3max = –1.0000e-016
flag = 1
>> [x, fp3max, flag]=fmincon(@myfunp3max,[6 **0**],[A],[b],[],[],[0 0],[10 9], @myconp3)
x = 7.5000 0
fp3max = –41.2500
flag = 1

Приклад 18.9
Постановка задачі
$W= - x_1^2 +4x_1+ x_2 \rightarrow \min (\max)$,
$x_1x_2 \geq 6$,
$x_1^2+ x_2^2 \leq 49$,
$0 \leq x_1$,
$0 \leq x_2 \leq 6$.
Розв'язання.
Побудова файлу-функції:File_New_M-file
function fp4min= myfunp4min(x)
fp4min=—x(1)^2+4·x(1)+x(2);
Save as…myfunp4min
Побудова файлу-функції:File_New_M-file
function [c, ceq]=myconp4(x)
c(1)=—x(1)*x(2)+6;
c(2)=x(1)^2+x(2)^2–49;
ceq=[];
Save as…myconp4
>> [x, fp4min, flag]=fmincon(@myfunp4min,[3 4],[],[],[],[],[0 0],[10 6], @myconp4)
x = 6.9465 0.8637
fp4min = –19.6042
flag = 1

Побудова файлу-функції:File_New_M-file

```
function fp4max= myfunp4max(x)
fp4max=– (–x(1)^2+4·x(1)+x(2));
Save as…myfunp4max
>>[x, fp4max, flag]=fmincon(@myfunp4max,[3 4],[],[],[],[],[0 0],[10 6], @myconp4)
x = 2.0000    6.0000
fp4max = –10.0000
flag = 1
```

Пошук глобального максимуму (мінімуму) полімодальної функції (рис. 18.9, 18.10)

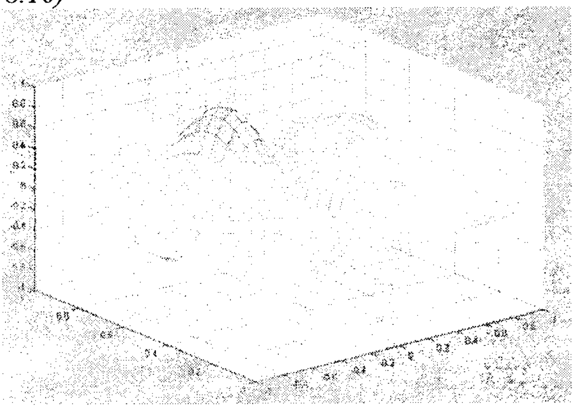


Рис. 18.9. Графічний образ полімодальної функції

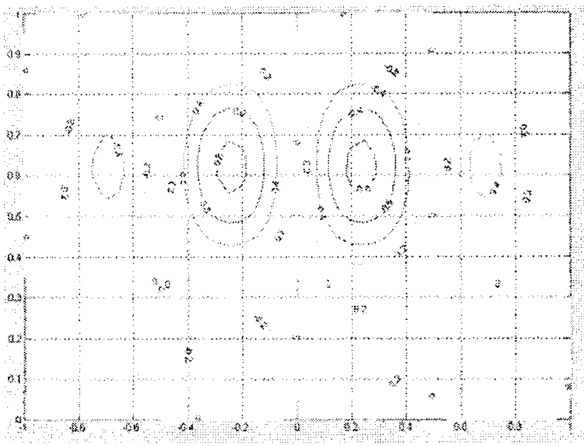


Рис.18.10. Графічний образ ліній однакового рівня полімодальної функції

Побудова файлу-функції: File_New_M-file function fP=myfunP(x)

fP=4·sin(2·pi·x(1))·cos(1.5·pi·x(2))·(1–x(1)^2)·x(2)·(1–x(2));

Save as…myfunP

```
>> [x1,x2]=meshgrid(–1:0.05:1,0:0.05:1);
>> fP=4.·sin(2.·pi.·x1).·cos(1.5·pi.·x2).·(1–x1.^2).·x2.·(1–x2);
>> mesh(x1,x2,fP)
   >> [CMatr,h]=contour(x1,x2,fP);
   >> clabel(CMatr,h)
>> grid on
```

Початкові умови [–1; 0]

```
>> [X,fP,flag]=fmincon(@myfunP,
[ –1;0],[],[],[],[],[ –1;0],[1;1])
X =  –1
      0
fP = 0
flag =  1
```

Початкові умови [0.2;0.6]

```
>>[X,fP,flag]=fmincon(@myfunP,
[0.2;0.6],[],[],[],[],[–1;0],[1;1])
X =   0.2373
      0.6211
fP =  –0.8652
flag =   1
```

Початкові умови [-0.6;0.5]

```
>> [X,fP,flag]=fmincon(@myfunP,
[–0.6;0.5],[],[],[],[],[–1;0],[1;1])
X =  –0.6874
              0.6211
fP =   –0.4481
flag = 1
```

Пошук глобального максимуму (мінімуму) функції Розенброка (рис. 18.11, 18.12)

Побудова файлу-функції: File_New_M-file function fR=myfunR(x)

fR=100·(x(2) –x(1)^2)^2+(1–x(1))^2;

Save as…myfunR

```
>> [x1,x2]=meshgrid(–2:0.05:2, –2:0.05:2);
>> fR=100.·(x2–x1.^2).^2.+(1–x1).^2;
>> mesh(x1,x2,fR)
```

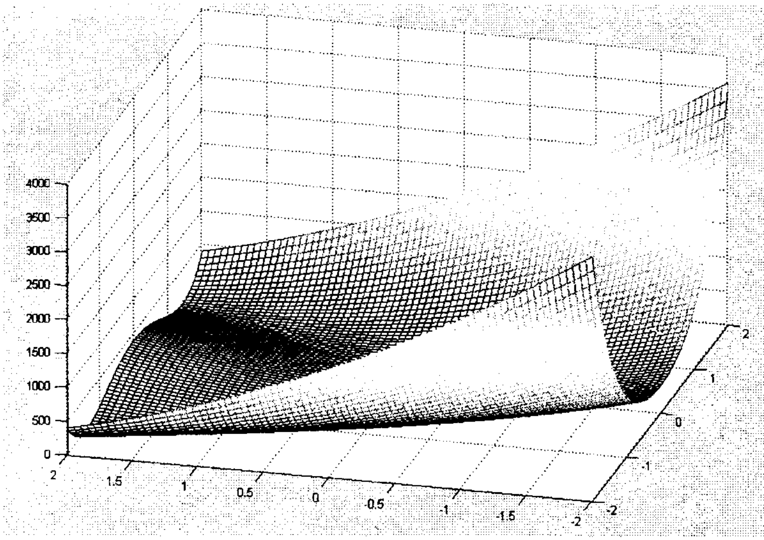


Рис. 18.11. Графічний образ функції Розенброка

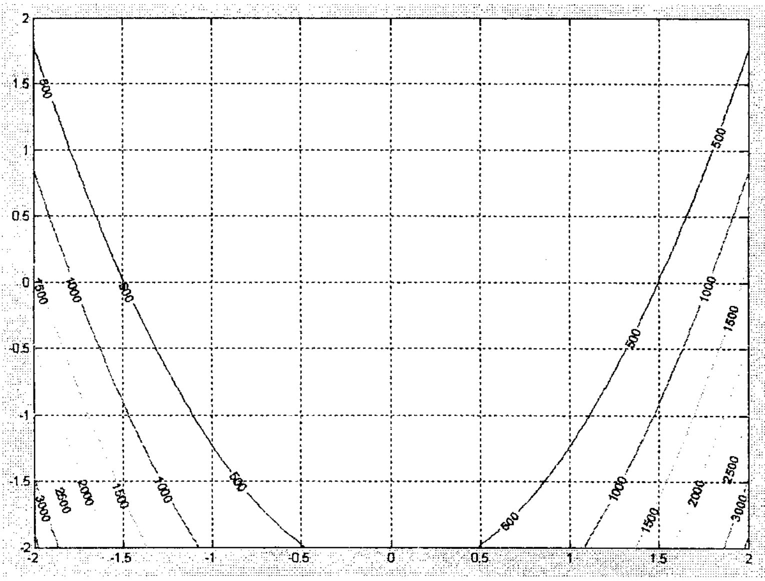


Рис. 18.12. Графічне зображення ліній однакового рівня функції Розенброка

```
>> [CMatr,h]=contour(x1,x2,fR);
>> clabel(CMatr,h)
>> grid on
>> p=[0.5 2 10 50 100 150 200 250 300 350 400];
>> [CMatr,h]=contour(x1,x2,fR,p);
```

Побудова файлу-функції: File_New_M-file function fR=myfunR(x)

```
fR=100·(x(2) –x(1)^2)^2+(1–x(1))^2;
```

Save as…myfunR

```
>> [x1,x2]=meshgrid(–2:0.05:2, –2:0.05:2);
>> fR=100.·(x2–x1.^2).^2.+(1–x1).^2;
>> mesh(x1,x2,fR)
>> [CMatr,h]=contour(x1,x2,fR);
>> clabel(CMatr,h)
>> grid on
>> p=[0.5 2 10 50 100 150 200 250 300 350 400];
>> [CMatr,h]=contour(x1,x2,fR,p);
>> clabel(CMatr,h)
>> grid on
>>[X,fR,flag]=fmincon(@myfunR,[ –1; –1],[],[],[],[],[v2; –2], [2;2])
X =    1.0000
       1.0001
fR =  9.7522e–009
flag = 1
```

Пошук глобального максимуму (мінімуму) функції Вуда

Побудова файлу-функції: File_New_M-file

```
function fB=myfunB(x)
f1=100·(x(2) –x(1)^2)^2+(1–x(1))^2+90·(x(4) –x(3)^2)^2+(1–
–x(3))^2;
f2=10.1·((x(2) –1)^2+(x(4) –1)^2)+19.8·(x(2) –1)·(x(4) –1);
fB=f1+f2;
```

Save as…myfunB

Початкові умови [3;3;3;3]

```
>> [X,fB,flag]=fmincon(@myfunB,
[3;3;3;3],[],[],[],[],[–3;–3;–3;
–3],[3;3;3;3])
X =   1.0000
      1.0000
      1.0000
```

```
        1.0000
fB = 4.2696e–009
flag = 1
```

Початкові умови [–3;3;3;3]

```
>>    [X,fB,flag]=fmincon(@myfunB,[-3;3;3;3],[],[],[],[],[ –3; –3; –3; –3],[3;3;3;3])
X =   1.0000
      1.0000
      1.0000
      1.0000
fB =  3.4980e–010
flag = 1
```

Контрольні запитання та завдання

1. Наведіть та поясніть основні методи розв'язання задач нелінійного програмування.
2. У чому полягає суть методу екстраполяційного пошуку?
3. Дайте визначення градієнта диференційованої функції.
4. Наведіть та поясніть геометричну інтерпретацію використання методу градієнта для пошуку екстремуму показника ефективності.
5. Наведіть та поясніть геометричну інтерпретацію застосування методу найшвидшого спуску для пошуку екстремуму багатомодової функції.
6. У чому полягає суть методу випадкового пошуку глобальних і локальних екстремумів показника ефективності?
7. Поясніть призначення функції *quadprog* системи комп'ютерної математики MATLAB.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ануфриев И. Е.* MATLAB 7/ И. Е. Ануфриев, А. Б. Смирнов, Е. Н. Смирнова. — СПб. : БХВ-Петербург, 2005. — 1104 с.

2. *Бакулин М. Г.* Технология MIMO: принципы и алгоритмы / М. Г. Бакулин, Л. А. Варукина, В. Б. Крейнделин. — М. : Горячая линия–Телеком, 2014. — 244 с.

3. *Бенькович Е. С.* Практическое моделирование динамических систем / Е. С. Бенькович, Ю. Б. Колесов, Ю. Б. Сениченков. — СПб. : БХВ-Петербург, 2002. — 464 с.

4. *Самоорганизующиеся* радиосети со сверхширокополосными радиосигналами / С. Г. Бунин, А. П. Войтер, М. Е. Ильченко, В. А. Романюк. — К. : НПП «Изд-во Наук. думка НАН Украины», 2012. — 444 с.

5. *Вентцель Е. С.* Исследование операций / Е. С. Вентцель. — М. : Сов. радио, 1972. — 552 с.

6. *Волков И. К.* Исследование операций: учеб. для вузов / И. К. Волков. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. — 436 с.

7. *Герман-Галкин С. Г.* Компьютерное моделирование полупроводниковых систем в MATLAB 6.0: учеб. пособие / С. Г. Герман-Галкин. — СПб. : КОРОНА-принт, 2001. — 320 с.

8. *Глоба Л. С.* Математичні основи побудови інформаційно-телекомунікаційних систем / Л. С. Глоба. — К. : Норіта-плюс, 2007. —360 с.

9. *Дьяконов В. П.* MATLAB 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6. Основы применения / В. П. Дьяконов. — М. : СОЛОН-Пресс, 2005. — 800 с.

10. *Дьяконов В. П.* Simulink 5/6/7: Самоучитель/ В. П. Дьяконов. — М. : ДМК-Пресс, 2008. — 784 с.

11. *Зайченко О. Ю.* Дослідження операцій: збірник задач / О. Ю. Зайченко. — К. : Слово, 2007. — 472 с.

12. *Зайченко Ю. П.* Исследование операций: учебник/ Ю. П. Зайченко. — 6-е изд., перераб. и доп. — К. : Слово, 2003. — 688 с.

13. *Згуровський М. З.* Основи системного аналізу/ М. З. Згуровський, Н. Д. Панкратова. — К. : BHV, 2007. — 544 с.

14. *Ільченко М. Ю.* Сучасні телекомунікаційні системи / М. Ю. Ільченко, С. О. Кравчук. — К. : Наук. думка, 2008. — 328 с.

15. *Калюжний О. Я.* Моделювання систем передачі сигналів в обчислювальному середовищі MATLAB-Simulink: навч. посібник / О. Я. Калюжний. — К. : Політехніка, 2004. — 136 с.

16. *Корн Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Т. Корн. — М. : Наука, 1984. — 832 с.

17. *Костевич Л. С.* Математическое программирование: информационные технологии оптимальных решений: учеб. пособие / Л. С. Костевич. — Минск : Новое знание, 2003. — 424 с.

18. *Ларіонов Ю. І.* Дослідження операцій в інформаційних системах / Ю. І. Ларіонов, В. М. Левикін, М. А. Хажмурадов. — Харків : Компанія СМІТ, 2005. — 364 с.

19. *Мэтьюз Д. Г.* Численные методы. Использование MATLAB / Д. Г. Мэтьюз, К. Д. Финк. — М. : Вильямс, 2001. — 720 с.

20. *Самсонов В. В.* Алгоритми розв'язання задач оптимізації: навч. посібник / В. В. Самсонов. —К. : НУХТ, 2014. — 300 с.

21. *Таха Хемди А.* Введение в исследование операций / А. Хемди Таха. — М. : Вильямс, 2005. — 912 с.

22. *Томашевський В. М.* Моделювання систем: підручник / В. М. Томашевський. — К. : BHV, 2007. — 352 с.

23. *Цисарь И. Ф.* MATLAB Simulink. Компьютерное моделирование в экономике/ И. Ф. Цисарь. — М. : СОЛОН-ПРЕСС, 2008. — 256 с.

24. *Черных И. В.* Моделирование электротехнических устройств в MATLAB, SimPowerSystems & Simulink / И. В. Черных. — М. : ДМК Пресс. — СПб. : Питер, 2008. — 288 с.

25. *Frederick S.* Introduction to Operations Research/ S. Frederick, J. Lieberman. — Standford University : McGraw-Hill, 2005. — 1088 p.

26. *Wayne L. Winston.* Operations Research: Applications and Algorithms / Winston Wayne L. — Indiana University : Cengage Learning, 2003. —1440 p.

27. *Warren B. Powell.* Approximate Dynamic Programming / Powell Warren B. — Princeton University : ICST, 2011. — 656 p.

28. *David J. Rader.* Deterministic Operations Research: Models and Methods in Linear Optimization / Rader David J. — Rose-Hulman Institute of Technology : John Wiley & Sons, 2010. — 613 p.

29. *Singiresu S. Rao.* Engineering Optimization: Theory and Practice / Rao Singiresu S. — Western Reserve University: John Wiley & Sons, 2009. — 813 p.

30. *Baoding Liu.* Theory and Practice of Uncertain Programming / Liu Baoding. — Cambridge : Springer, 2009. — 202 p.

31. *Sinha S. M.* Mathematical Programming: Theory and Methods / S. M. Sinha. — University of Delhi : Elsevier, 2005. — 572 p.

32. *Williams Paul H.* Model Building in Mathematical Programming / Paul H. Williams. — London School of Economics : John Wiley & Sons, 2013. — 432 p.

33. *Enrique Castillo.* Building and Solving Mathematical Programming Models in Engineering and Science/ Castillo Enrique, Antonio J. Gonejo, Pablo Pedregal, Ricardo Garcia, Natalia Alguacil. — Florida Institut of Technology: John Wiley & Sons, 2012. — 680 p.

34. *David G. Luenberger.* Linear and Nonlinear Programming / David G. Luenberger. — Stanford University : LLC, 2008. — 555 p.

35. *Katta G. Murty.* Linear complementarity, linear and nonlinear programming/ Katta G. Murty. — Michigan: DIOE, 1997. — 660 p.

36. *Griva Igor. Linear and Nonlinear Optimization* / I. Griva, Stephen G. Nash, Ariela Sofer. — George Mason University: SIAM, 2009. —720 p.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ЛИСЕНКО Олександр Іванович
ТАЧИНІНА Олена Миколаївна
АЛЄКСЄЄВА Ірина Віталіївна

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ

Частина 1

Математичне програмування та дослідження операцій

Підручник

Відповідальний редактор *Н. М. Гурович*
Технічний редактор *А. І. Лавринович*
Коректор *О. О. Крусь*
Комп'ютерна верстка *Л. Т. Колодіної*

Підп. до друку 05.09.2017. Формат 60×84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 12,32. Обл.-вид. арк. 13,25.
Тираж 100 прим. Замовлення № 126-1.

Видавець і виготівник
Національний авіаційний університет
03680. Київ-58, проспект Космонавта Комарова, 1.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ

Частина 1

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ