

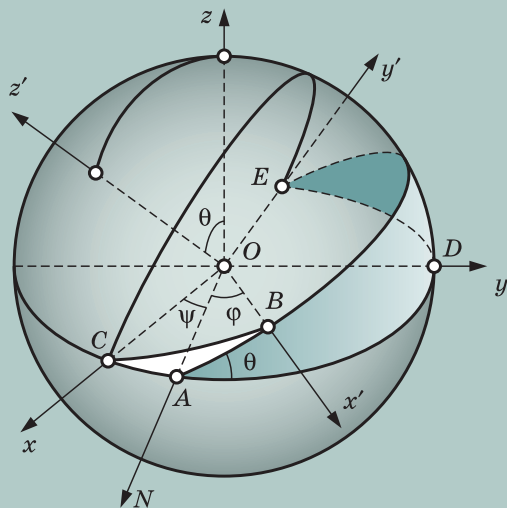
Высшее образование

Классики отечественной науки

Л. Г. Лойцянский  
А. И. Лурье

# КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Том первый



ДРОФД



Классики  
отечественной  
науки

*Классики отечественной науки*

---



ЕСТЕСТВЕННЫЕ  
ТЕХНИЧЕСКИЕ  
ГУМАНИТАРНЫЕ  
НАУКИ



---

ДРОФА

*Классики отечественной науки*

---

Л. Г. Лойцянский  
А. И. Лурье

КУРС  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
МЕХАНИКИ

Том первый

*Статика и кинематика*

*Издание девятое, исправленное и дополненное*

Допущено  
Министерством образования  
Российской Федерации  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по специальности  
010500 «Механика»

МОСКВА 2006



---

ДФОФД

УДК 531(075.8)  
ББК 22.21я73  
Л72

*Серия «Классики отечественной науки»  
основана в 2003 году*

Рецензенты:

академик РАН, д-р техн. наук *Р. Ф. Ганиев*  
(директор Научного центра  
нелинейной волновой механики и технологии РАН);  
чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук *В. Г. Веретенников*  
(зав. кафедрой теоретической механики МАИ)

В оформлении обложки использованы автографы и рисунки Л. Эйлера из его переписки с Клеро, д'Аламбером и Лагранжем (Euleri Leonhardi. Opera omnia / Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae. Basileae: Birkhäuser Basileae, MCMLXXX, Ser. Quarta A. Commercium Epistolicum. Commercium cum A. C. Clairaut, J. d'Alembert et J. L. Lagrange. Vol. quintum.)

**Лойцянский, Л. Г.**

Л72 Курс теоретической механики. В 2 т. / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. — М. : Дрофа, 2006. — (Классики отечественной науки).

ISBN 5-358-01275-3

Т. 1: Статика и кинематика : учеб. пособие для вузов. — 9-е изд., испр. и доп. — 2006. — 447, [1] с. : 233 ил.

ISBN 5-358-01276-1

Первый том курса содержит отделы «Статика» и «Кинематика» в объеме требований программ для вузов, а также дополнительный материал. Наряду с обычным содержанием отделов статики и кинематики точки и абсолютно твердого тела, излагается введение в статику сплошных сред и обобщение теоремы о перемещении и движении абсолютно твердого тела на случай элементарного объема деформируемой и идеально текучей среды.

По сравнению с 8-м (1982 г.) изданием настоящее расширено за счет исторического очерка, перенесенного из 5-го (1954 г.). Обновлены ссылки на литературу, переизданную после 1982 г.

*Курс предназначен для студентов университетов и вузов, обучающихся по специальности «Механика», аспирантов и преподавателей.*

УДК 531(075.8)

ББК 22.21я73

ISBN 5-358-01276-1 (т. 1)

ISBN 5-358-01275-3

© ООО «Дрофа», 2006

## Вступительное слово о «Курсе теоретической механики»

Фамилии авторов предлагаемого издания курса теоретической механики — Лойцянского и Лурье — хорошо известны нескольким поколениям дипломированных инженеров-механиков, преподавателей и специалистов нашей страны.

*Лев Герасимович Лойцянский* (26.12.1900—3.11.1991) — профессор по кафедре механики Ленинградского политехнического института (ЛПИ, 1930), доктор физ.-мат. наук (1935), заслуженный деятель науки и техники РСФСР (1968), — родился в С.-Петербурге; после окончания в 1921 г. Таврического (Крымского) университета остался работать в нем преподавателем математики, а в 1922 г. по приглашению А. А. Фридмана стал его ассистентом на новом физико-механическом факультете Петроградского (затем Ленинградского) политехнического института. С 1935 до 1975 г. он бессменно заведовал основанной им кафедрой гидроаэродинамики ЛПИ; после 1975 г. и до конца своих дней он был профессором-консультантом той же кафедры. С 1941 по 1946 г. Л. Г. Лойцянский одновременно работал в Институте механики АН СССР и в Центральном аэрогидродинамическом институте (ЦАГИ). Лауреат (совместно с А. А. Дородницыным) Сталинской премии (1946).

Автор книг «Аэродинамика пограничного слоя» (1941), «Ламинарный пограничный слой» (1962) и знаменитого, выдержавшего семь изданий, учебника «Механика жидкости и газа» (МЖГ, 1950—2003). По своей основной специальности — МЖГ — входит, после Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина, М. А. Лаврентьева, М. В. Келдыша и Л. И. Седова, в первую десятку наиболее цитируемых русских ученых. Статьи о нем опубликованы в Инженерно-физическом журнале, 1961, т. 4, № 2; в журнале «Известия АН СССР», МЖГ, 1970, № 1; в энциклопедии «Авиация» (1994); в юбилейном научно-мемориальном сборнике «Проблемы МЖГ» (изд. СПб ГТУ, 2000). В 1998 г. дочь Л. Г. Лой-

цянского Ирина Львовна издала написанную им книгу «Из моих воспоминаний. Записки профессора-политехника»\*, которую с интересом и пользой могут прочитать не только помнящие его ученики и коллеги, но и все интересующиеся историей нашей страны вообще и историей отечественной науки в частности.

*Анатолий Исакович Лурье* (6.06.1901—12.02.1980) — профессор по кафедре механики ЛПИ (1925), доктор физ.-мат. наук (1939), член-корреспондент АН СССР (1960), — родился в Могилеве, окончил физико-механический факультет ЛПИ в 1925 г. и остался там преподавателем механики. После неожиданной, в результате врачебной ошибки, смерти А. А. Фридмана (16.09.1925 в возрасте 37 лет) А. И. Лурье вместе с Л. Г. Лойцянским, И. А. Кибелем и Н. В. Розе продолжил чтение курса лекций Фридмана, включавших также начала механики сплошных сред. С этого времени началась продолжавшаяся всю жизнь дружба А. И. Лурье и Л. Г. Лойцянского. В 1935 г. А. И. Лурье возглавил кафедру теоретической механики ЛПИ, в 1944 — кафедру механики и процессов управления; с 1942 по 1944 г. он работал в Уральском индустриальном институте Свердловска (ранее и ныне — Екатеринбург).

Кроме совместного с Л. Г. Лойцянским «Курса теоретической механики» (1934—1982), А. И. Лурье принадлежат книги: «Устойчивость систем автоматического регулирования» (1944), «Статика тонкостенных упругих оболочек» (1947), «Операционное исчисление» (2-е изд., 1950), «Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования» (1951), «Пространственные задачи теории упругости» (1955), «Аналитическая механика» (1961), «Нелинейная теория упругости» (1970). Ему посвящены биографические статьи в журналах «Прикладная математика и механика» (т. 25, вып. 4, 1961) и «Известия АН СССР» МТТ (1971, № 5; 1980, № 5); в Большой советской энциклопедии (БСЭ, 3-е изд., т. 15, 1974) и в биографическом справочнике А. Н. Боголюбова «Математики и механики» («Наукова думка», 1983, 640 с.). Наконец, в 2002 г. Константин Анатольевич Лурье, известный физик, ныне успешно работающий в США, написал и опубликовал очень содержательный очерк о своем отце «А. И. Лурье: ранние годы» (Научно-технические ведомости СПб ГТУ, 2002, № 4).

\* См. сноску на с. 439.

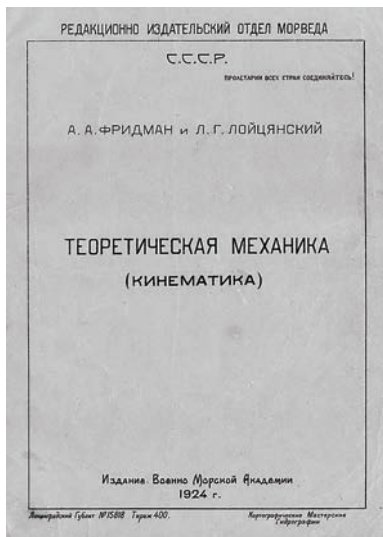
Теперь можно обратиться к истории создания «Курса теоретической механики» (ниже кратко — «Курс Л.—Л.») и совместным работам его авторов в области теоретической механики.

Непревзойденный успех этого курса не случаен. Он обеспечен многолетней выдающейся деятельностью Петербургской — Петроградской школы теоретической и прикладной механики, в числе основателей и знаменитых представителей которой следует назвать О. (И.) И. Сомова (1815—1876), П. Л. Чебышёва (1821—1894), Д. К. Бобылева (1842—1917), В. Л. Кирпичева (1845—1913), И. В. Мещерского (1859—1935), А. Н. Крылова (1863—1945). Свое кредо постановки преподавания механики в духе этой школы А. А. Фридман выразил в письме из Пермского университета В. А. Стеклову 9.06.1918 г. так: «...говоря о практической направленности в механике, я, конечно, далек от мысли вносить в университет мелкий дух инженерных школ, где ремесленники довольствуются сборниками формул, преисполненными грубейшими ошибками; мне думается, что в университете на первом месте стоит теоретическая сторона дела (сюда включаю и экспериментальную механику), иллюстрированная практическими приложениями» (А. А. Фридман, Избранные труды. Наука, 1966, с. 351).

В Москве аналогичная перестройка курсов аналитической (теоретической) и практической (прикладной) механики связана с ведущей деятельностью профессора Императорского московского технического училища (ИМТУ) и Императорского московского университета (ИМУ) Н. Е. Жуковского (1847—1921), занимавшего кафедры механики ИМТУ с 1879 г. и ИМУ с 1885 г. Здесь уместно напомнить, что в вузах дореволюционной России не было ни кафедр в современном понимании, ни их заведующих, ни ученых званий доцента и профессора. Выражения «быть избранным профессором по кафедре...», «занять кафедру...» и т. п. означали лишь, что преподаватель получал право читать лекции по утвержденной программе.

Через полвека после Н. Е. Жуковского выдающийся петроградский физик и механик А. А. Фридман начал читать в Военно-морской академии (ее начальником был тогда А. Н. Крылов) и одновременно в ЛПИ новый весьма совершенный курс механики. «Знаком большого доверия своему ассистенту, — пишет в своих воспоминаниях Л. Г. Лойцянский, — явилось поручение мне А. А. Фридманом составить — на основе записок его лекций по кинематике точки и твердого тела — учебник по этому важному разделу теоретической механики».





В 1982 г., после обсуждения рецензии на шестое издание «Курса Л.—Л.» Лев Герасимович подарил автору этих строк опубликованный Военно-морской академией в 1924 г. литографским способом на 277 с. и тиражом 400 экз. учебник «Теоретическая механика (кинематика)». В предисловии от имени первого автора — профессора Фридмана — сказано, что этот учебник предназначен слушателям Морской академии, а также может служить вспомогательным пособием для студентов физико-механического факультета ЛПИ. Лев Герасимович высоко ценил это издание как память об учителе,

осуществлении его программы и начале своей научно-педагогической деятельности. Учитывая большую занятость Фридмана, а также объем и содержание учебника, не приходится сомневаться в том, что он полностью написан Лойцянским и затем был положен в основу всех дальнейших изданий раздела «Кинематика» «Курса Л.—Л.». Авторы с большой теплотой и признательностью говорят об учителе и старшем коллеге в юбилейной статье «Александр Александрович Фридман» (Труды ЛПИ, 1949, № 1) и в других публикациях.

В 1933 г. Лойцянский и Лурье опубликовали свои лекции по теоретической механике в двух частях: «Кинематика (287 с.)» и «Динамика» (451 с.), а через год появилось первое издание «Курса Л.—Л.», тогда в трех томах: «Статика и кинематика» (342 с.), «Динамика» (580 с.), «Динамика несвободной системы и теория колебаний» (624 с.). В том же 1934 г. Лойцянский переиздал в Военно-морской академии уже упомянутый учебник по кинематике (в соавторстве с Фридманом). «Курс Л.—Л.» сразу же получил известность, был высоко оценен специалистами и рецензентами и начал входить в учебные программы всех университетов и вузов с повышенным уровнем преподавания естественно-научных дисциплин. В 1938 г. появилось второе переработанное издание «Курса», сокращенное до двух томов, «Статика и кинематика» (327 с.) и «Динамика» (468 с.); в 1940 г. — третье изда-

ние (без изменений); в 1948 г. — четвертое, переработанное и дополненное (399 и 580 сс.); в 1954 и 1955 гг. — пятое (380 и 596 сс.); до 1957 г. включительно две допечатки т. 1 (его 6-е и 7-е издания).

Полнота, научная строгость изложения и высокое методическое мастерство авторов навсегда поставили «Курс Л.—Л.» в первые ряды наших учебников теоретической механики, по которым училось несколько поколений инженеров, научных работников и преподавателей общеинженерных и специально-технических дисциплин. Высокому авторитету авторов способствовала, конечно, их одновременная плодотворная деятельность во многих областях современной механики; некоторые результаты этой деятельности вошли в историю науки: это отражено, в частности, в двухтомнике «История механики» Института истории естествознания и техники (ИИЕТ АН СССР, Наука, 1971, 1972) и трехтомнике «Механика в СССР за 50 лет» (Наука, 1968—1972).

В 1938 г. под редакцией и с примечаниями Лойцянского и Лурье был издан перевод т. 1 «Аналитической механики» Ж.-Л. Лагранжа (изд. 2-е, 1950). Во второй трети прошедшего века они пишут практически все юбилейные и энциклопедические статьи о механике: о механике в СССР за 20, 25 и 30 лет; в первом (1938) и втором (1952) изданиях Большой советской энциклопедии; в Физической энциклопедии (1960—1965).

В пятидесятых годах в наших вузах началось недалековидное сокращение курса теоретической механики по выделяемому учебному времени и уровню отчетности. С учетом еще одновременного ухудшения естественно-научной подготовки учащихся средней школы и снижения требований ВАК (Высшей аттестационной комиссии) к соискателям ученых степеней и званий, а также возрастающей доли паллиатива высшего образования — заочного и вечернего обучения — это сокращение базового для всех общеинженерных и специально-технических дисциплин курса привело ныне к упадку высшего инженерно-технического образования в нашей стране, необратимые последствия которого, несомненно, будут сказываться еще многие и многие годы. «Курс Л.—Л.» по своему объему, около тысячи страниц, перестал удовлетворять новым сокращенным программам втузов, и его постепенно стали переводить из основного учебника в дополнительное учебное пособие, а в конце шестидесятых годов совсем вывели из учебных программ для студентов. Однако впоследствии редакционно-издательский совет Главной редакции физико-математической литературы издательства «Наука» рекомендовал переиздать

«Курс Л.—Л.»; его первый и второй тома вышли в 1982 и 1983 гг., соответственно объемом 352 и 640 сс. и хорошими по тому времени тиражами 42 и 34 тыс. экз. В этом издании Л. Г. Лойцянский реализовал последние воззрения авторов на содержание «Курса», кратко изложенные в предисловиях и ранее в его статье «Курс теоретической механики в свете требований современной практики» (сб. статей «Теоретическая механика», Высшая школа, 1973, № 4).

Издательство «Дрофа» повторяет этот курс без изменений с добавлением в конце т. 1 исторического очерка из предшествующих изданий, снятого в свое время авторами ради сокращения текста; замеченные опечатки исправлены. В нескольких спорных случаях, не вызывающих сомнений по контексту, были сохранены стиль и термины авторов.

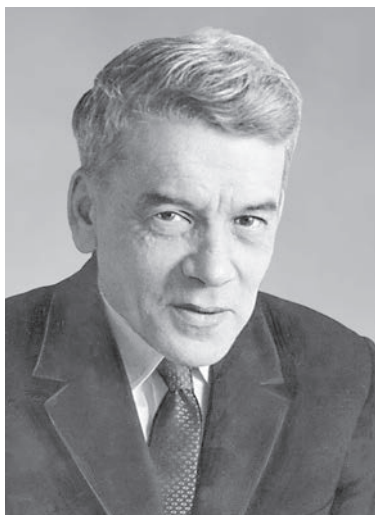
При упомянутом выше обсуждении «Курса Л.—Л.» в 1982 г. затрагивались некоторые перспективы его совершенствования, которые, по убеждению Льва Герасимовича, будут внесены идущими нам на смену молодыми учеными и педагогами, принявшими «великий постриг» служения прогрессу науки. К ним обращены заключительные слова его «Воспоминаний», которыми уместно закончить это несколько затянувшееся *Вступительное слово*:

«Наука двадцатого века носит переходный характер — от классической, «феноменологической», довольствующейся простейшими математическими моделями, ... к новой, назовем ее условно «физической», науке, глубже проникающей в физическую сущность окружающего нас мира. Не бойся трудностей, а борись с ними. Завоевания вычислительной техники придут тебе на помощь, но не избавят от необходимости развивать свои теоретические знания. Только во всеоружии глубокого теоретического анализа можно преодолеть встречающиеся трудности, и ты, исследователь двадцать первого века, устранишь их со своего пути и выйдешь из этой борьбы победителем.»

Переиздаваемый классический «Курс Л.—Л.» предназначен студентам и аспирантам физико-математических факультетов университетов и втузов с повышенным уровнем подготовки, а также научным работникам и преподавателям, желающим восполнить недостатки образования или повысить свою квалификацию.

Июль 2005 г.

Профессор  
Г. Ю. Степанов



*Бухарин*



*Молотов*

## Оглавление

Предисловие к восьмому изданию . . . . .	18
------------------------------------------	----

### **Введение**

§ 1. Предмет теоретической механики. Основные модели материальных тел. Разделение механики на статику, кинематику и динамику . . . . .	19
§ 2. Основные понятия теоретической механики . . . . .	22

## Отдел первый

### СТАТИКА

#### *Глава I.* **Общие сведения о силах**

§ 3. Модель механического взаимодействия — сила. Сила как вектор. Приложенные и скользящие векторы. Деформируемые среды и принцип затвердевания . . . . .	24
§ 4. Действие и противодействие. Метод сечений . . . . .	28
§ 5. Опорные реакции и простейшие типы опор . . . . .	30

#### *Глава II.* **Приведение пространственной совокупности сил, сходящихся в точке, к равнодействующей силе**

§ 6. Силовой многоугольник . . . . .	34
§ 7. Геометрический метод решения задач . . . . .	37
§ 8. Проекции силы на оси прямоугольной системы координат . . . . .	43
§ 9. Уравнения равновесия твердого тела под действием сходящейся совокупности сил . . . . .	45
§ 10. Примеры . . . . .	47

---

<i>Глава III.</i>	<b>Приведение несходящейся совокупности сил к простейшему виду</b>	
§ 11.	Момент силы относительно точки как вектор. Моменты силы относительно осей координат и их аналитические выражения . . . . .	48
§ 12.	Пара сил и ее момент. Свойства пар. Сложение пар . . .	56
§ 13.	Приведение пространственной несходящейся совокупности сил к одной силе и одной паре. Главный вектор и главный момент совокупности сил . . . . .	60
§ 14.	Уравнения равновесия абсолютно твердого тела под действием несходящейся совокупности сил . . . . .	64
§ 15.	Равновесие тела с двумя закрепленными точками . . . .	70
§ 16.	Примеры . . . . .	71
<i>Глава IV.</i>	<b>Приведение пространственной несходящейся совокупности сил к динаме</b>	
§ 17.	Влияние изменения центра приведения на главный момент . . . . .	78
§ 18.	Приведение несходящейся совокупности сил к динаме . . . . .	80
§ 19.	Аналитические выражения элементов динами . . . . .	84
§ 20.	Приведение пространственной несходящейся совокупности сил к двум непересекающимся силам . .	87
<i>Глава V.</i>	<b>Равновесие при наличии сил трения</b>	
§ 21.	Трение скольжения и трение верчения . . . . .	90
§ 22.	Трение качения . . . . .	95
§ 23.	Некоторые случаи равновесия тел при наличии трения . . . . .	96
§ 24.	Примеры . . . . .	101
<i>Глава VI.</i>	<b>Центр параллельных сил и центр тяжести</b>	
§ 25.	Центр параллельных сил . . . . .	105
§ 26.	Центры тяжести объема, поверхности, линии . . . . .	107
§ 27.	Методы определения координат центра тяжести . . . . .	111
§ 28.	Центры тяжести некоторых линий, плоских фигур и тел . . . . .	114
<i>Глава VII.</i>	<b>Распределение сил в сплошной среде. Напряжения</b>	
§ 29.	Сплошная среда. Объемные и поверхностные силы. Напряжения . . . . .	119

§ 30.	Равенства Коши . . . . .	123
§ 31.	Взаимность касательных напряжений . . . . .	126
<i>Глава VIII. Элементы тензорной алгебры</i>		
§ 32.	Поле физической величины. Условия физической объективности аналитического определения вектора . . . . .	128
§ 33.	Линейная вектор-функция. Тензор второго ранга. Условия его физической объективности. Простейшие операции над тензорами. Перемножение тензора и вектора. Диада и диадное представление тензора . . .	132
§ 34.	Разложение тензора второго ранга на симметричную и антисимметричную части. Сопутствующий антисимметричному тензору вектор. Инварианты. Сферическая и девиаторная части тензора . . . . .	137
§ 35.	Главные оси и главные значения симметричного тензора . . . . .	143
<i>Глава IX. Тензор напряжений. Необходимые условия равновесия сплошной среды</i>		
§ 36.	Тензор напряжений . . . . .	147
§ 37.	Формула Гаусса — Остроградского . . . . .	152
§ 38.	Уравнения статики сплошной среды «в напряжениях» . . . . .	157

*Отдел второй*

---

КИНЕМАТИКА

<i>Глава X. Уравнения движения точки</i>		
§ 39.	Введение. Основные особенности кинематического описания движения . . . . .	162
§ 40.	Уравнения движения точки. Траектория. Примеры прямолинейных движений. Графики движений . . . . .	165
§ 41.	Криволинейные движения точки. Примеры . . . . .	175
<i>Глава XI. Кинематические элементы движения точки</i>		
§ 42.	Скорость и ускорение . . . . .	183
§ 43.	Скорость и ускорение в прямолинейном движении . . .	191
§ 44.	Скорость и ускорение в криволинейном движении . . .	197

§ 45.	Натуральный триэдр (естественный трехгранник) траектории . . . . .	204
§ 46.	Разложение ускорения по осям натурального триэдра траектории . . . . .	212
<i>Глава XII. Кинематика точки в криволинейных координатах</i>		
§ 47.	Криволинейные координаты точки . . . . .	219
§ 48.	Проекции скорости и ускорения на оси криволинейных координат . . . . .	225
<i>Глава XIII. Простейшие движения абсолютно твердого тела</i>		
§ 49.	Поступательное движение твердого тела . . . . .	234
§ 50.	Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость. Угловое ускорение . . . . .	236
§ 51.	Скорости и ускорения точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси . . . . .	244
§ 52.	Векторные формулы скорости и ускорения точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси . . . . .	251
<i>Глава XIV. Плоское движение твердого тела</i>		
§ 53.	Уравнения плоского движения . . . . .	256
§ 54.	Перемещение плоской фигуры . . . . .	263
§ 55.	Поле скоростей точек плоской фигуры . . . . .	266
§ 56.	Мгновенный центр скоростей . . . . .	270
§ 57.	Центроиды . . . . .	279
§ 58.	Поле ускорений плоской фигуры. Мгновенный центр ускорений . . . . .	284
<i>Глава XV. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки</i>		
§ 59.	Определение положения твердого тела, имеющего неподвижную точку. Эйлеровы углы . . . . .	294
§ 60.	Перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку . . . . .	301
§ 61.	Поле скоростей в твердом теле, вращающемся вокруг неподвижной точки . . . . .	304
§ 62.	Мгновенная ось вращения твердого тела. Аксоиды . . .	307
§ 63.	Поле ускорений в твердом теле, вращающемся вокруг неподвижной точки . . . . .	309



<i>Глава XVI.</i>	<b>Общий случай движения абсолютно твердого тела</b>	
§ 64.	Определение положения твердого тела в пространстве. Основная теорема о перемещении абсолютно твердого тела . . . . .	314
§ 65.	Поля скоростей и ускорений в общем случае движения твердого тела . . . . .	317
§ 66.	Винтовая ось. Винтовые аксоиды . . . . .	323
<i>Глава XVII.</i>	<b>Относительное движение</b>	
§ 67.	Абсолютное, относительное и переносное движения . .	332
§ 68.	Сложение скоростей . . . . .	337
§ 69.	Сложение ускорений . . . . .	342
§ 70.	Сложение вращений твердого тела вокруг параллельных осей . . . . .	349
§ 71.	Сложение вращений вокруг пересекающихся осей . . .	354
§ 72.	Общая задача об относительном движении твердого тела . . . . .	362
<i>Глава XVIII.</i>	<b>Основы кинематики сплошной среды</b>	
§ 73.	Определение положения и движения сплошной среды. Переменные Лагранжа и Эйлера . . . . .	366
§ 74.	Перемещения, скорости и ускорения точек сплошной среды в переменных Лагранжа . . . . .	368
§ 75.	Дифференциальные операции поля . . . . .	370
§ 76.	Ускорение точек среды в переменных Эйлера. Локальное и конвективное ускорения . . . . .	375
§ 77.	Теорема Гельмгольца о бесконечно малом перемещении элементарного объема сплошной среды. Квазитвердое перемещение . . . . .	377
§ 78.	Тензоры деформаций и скоростей деформаций. Кинематический смысл их компонент . . . . .	381
<i>Приложение.</i>	<b>Исторический очерк</b> . . . . .	386
	Литература . . . . .	429
	Предметный указатель . . . . .	430
	Именной указатель . . . . .	437
	Об авторах . . . . .	439

## ОТ РЕДАКТОРА

В предыдущем (1982—1983 гг.) издании двухтомника ссылки на цитированную литературу были даны в сносках и отчасти непосредственно в тексте. Многие из этих монографий, учебников, статей с тех пор не переиздавались и в настоящее время труднодоступны, поэтому здесь они сведены в общие списки литературы в конце каждого тома. Ссылки в тексте одного тома на книги, входящие в список литературы из другого тома, снабжены соответствующей пометой, например, [т. II, 35].

Сведения о персоналиях, находящиеся в нижней части страниц и не отмеченные значком сноски, принадлежат редактору.

В подготовке настоящего издания к печати принимали участие коллеги авторов — сотрудники СПбГПУ: канд. техн. наук А. И. Боровков, канд. физ.-мат. наук, проф. С. Б. Колешко, докт. физ.-мат. наук, проф. В. А. Пальмов, канд. физ.-мат. наук, доцент В. А. Пупырев, докт. физ.-мат. наук, проф. Е. М. Смирнов, — а также докт. техн. наук М. С. Герштейн, Ю. А. Григорьева, докт. техн. наук, проф. Е. М. Зверяев, канд. техн. наук, доцент И. Л. Лойцянская, докт. техн. наук, проф. К. А. Лурье. Особенно много времени и внимания уделили двухтомнику докт. физ.-мат. наук, проф. Г. Ю. Степанов и докт. физ.-мат. наук, проф. П. А. Жилин.

Первый том уже был подготовлен к печати, когда внезапно и почти одновременно, осенью 2005 г., не стало двоих ученых — друзей и коллег авторов: ученика Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье, впоследствии возглавившего кафедру теоретической механики СПбГПУ, профессора Павла Андреевича Жилина и профессора Георгия Юрьевича Степанова, редактировавшего еще прижизненное издание и курировавшего издание нынешнее.

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ВОСЬМОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание выходит в свет после длительного, более чем двадцатилетнего перерыва. Возросший в настоящее время интерес к механике сплошных сред побудил авторов к расширению традиционного предмета теоретической механики в этом направлении. Некоторые первоначальные представления статики и кинематики сплошных сред содержатся в главах VII—IX и XVIII. Ознакомление с этими главами облегчит учащемуся усвоение материала последующих курсов учебного плана технических вузов: сопротивления материалов и гидравлики (технической механики жидкости).

Новое издание первого тома курса, помимо только что указанных глав, содержит еще ряд других дополнений. Так, в отделе статики изложен классический вопрос о приведении произвольной совокупности сил к двум непересекающимся силам, дано несколько новых примеров. В отделе кинематики расширено представление о возможных системах эйлеровых углов.

Моему дорогому другу и соавтору Анатолию Исааковичу Лурье не было дано судьбой принять участие в работе над новым изданием нашего курса. Не может быть сомнения в том, как велик был бы его вклад в это дело.

Г. Ю. Степанов взял на себя труд прочтения рукописи и сделал ряд ценных замечаний. И. Л. Лойцянская оказала автору большую помощь в методической работе над курсом и в подготовке рукописи к изданию. Автор приносит указанным лицам свою глубокую благодарность.

*Л. Г. Лойцянский*

# Введение

## § 1. Предмет теоретической механики.

### Основные модели материальных тел.

#### Разделение механики на статику, кинематику и динамику

Предметом теоретической механики являются материальные тела, представленные своими простейшими моделями и рассматриваемые в связи с изменением их взаимного расположения в пространстве и времени. Такое *внешнее* движение моделей тел, рассматриваемое в отвлечении от *внутренних* — молекулярных, атомных и других подобных «скрытых» движений материи в действительных телах, — называют *механическим движением* и противопоставляют общим движениям материи (тепловым, электрическим, магнитным и др.), изучаемым в физике.

Теоретическая механика занимается общими закономерностями механических движений материальных тел и механических (силовых) взаимодействий между ними, а также взаимодействий тел с физическими (тяготения, электромагнитными) полями.

В механике используются следующие модели материальных тел:

- ✓ *материальная точка и дискретная совокупность (система) материальных точек;*
- ✓ *сплошная среда, в частности абсолютно твердое и деформируемое твердое тело, текучие твердые, аморфные, сыпучие, жидкие и газообразные тела.*

Основным разделом теоретической механики, изучающим движения материальных тел в тесной связи с силовыми взаимодействиями их между собой, а также с физическими полями, является *динамика*.

По классическому определению Ньютона, динамика должна

*по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам изъяснить остальные движения.*

Этот тезис Ньютона лежит в основе динамики; его методическое значение будет подробно разъяснено в начале второго тома настоящего курса.

В какой-то степени вспомогательными по отношению к динамике служат статика и кинематика, которые по установившемуся порядку принято выделять в самостоятельные отделы теоретической механики.

Первый из них — статика — представляет собой общее учение о совокупности сил, приложенных к материальным телам, и об основных операциях над силами, позволяющих приводить совокупности их к наиболее простому виду. Вместе с тем в статике выводятся условия равновесия материальных тел, находящихся под действием заданной совокупности сил. В дальнейшем под равновесием материального тела подразумевается его *покой* относительно некоторой выбранной системы отсчета, т. е. рассматриваются *относительные* равновесие и покой. Так, тело, покоящееся относительно Земли, на самом деле совершает вместе с нею далеко не простые движения относительно так называемой «неподвижной» системы координат, связанной с удаленными звездами.

Только в случае самой простой модели — материальной точки — понятие равновесия, т. е. изолированности от действия сил, связывают с ее прямолинейным равномерным *движением по инерции* относительно данной системы отсчета, включая сюда и ее покой относительно этой системы. Движение твердого тела *по инерции*, т. е. в отсутствие приложенных к нему извне сил, может быть также названо равновесным, но оно оказывается настолько сложным, что в этом случае под равновесием понимают только покой тела относительно рассматриваемой системы отсчета.

В кинематике изучаются способы количественного описания существующих движений материального тела в отрыве от силовых взаимодействий его с другими телами или физическими полями. Недаром кинематику называют иногда «геометрией движения», включающей, конечно, понятие времени. Основными характеристиками движений в кинематике являются: траектория, пройденный путь, скорость и ускорение движения.

Велико разнообразие изучаемых теоретической механикой движений. Это — *орбитальные* движения небесных тел, искусственных «спутников» Земли, ракет, *колебательные* движения (вибрации) в широком их диапазоне — от вибраций в машинах и

фундаментах, качки кораблей на волнении, колебаний самолетов в воздухе, тепловозов, электровозов, вагонов и других транспортных средств до колебаний в приборах управления. Все эти и многие другие встречающиеся в природе и технике движения образуют широкое поле практических применений механики. Как уже указывалось в предисловии, в курсе ведется подготовка учащегося к изучению равновесия и движения не только абсолютно твердых тел, но и сплошных *деформируемых* сред. С этой целью в первый отдел — статику, — наряду с традиционными методами статики абсолютно твердого тела, введено изложение основ статики сплошной деформируемой среды.

В главе VII, как естественное расширение понятия о *внутренних силах*, вводятся представления о *напряжениях* в сплошной среде и об их основных свойствах, выражаемых равенствами Коши и теоремой о взаимности касательных напряжений. В главе IX, после изложения элементарных сведений из области тензорной алгебры (глава VIII), вводится понятие о тензоре напряжений как единой, физически объективной величине, характеризующей напряженное состояние среды, дается тензорная форма равенств Коши и уравнений равновесия сплошной среды «в напряжениях». Из тех же соображений второй отдел настоящего тома, посвященный в основном кинематике точки и абсолютно твердого тела, заканчивается (глава XVIII) обобщением теоремы о перемещении (движении) абсолютно твердого тела — этого простейшего примера сплошной среды — на случай элементарного объема деформируемой сплошной среды. Это приводит к рассмотрению тензоров деформаций и скоростей деформаций, сопровождаемому описанием кинематического смысла их компонент.

Изложение только что указанных вопросов связано с применением основ векторного и тензорного исчисления, которые, быть может, несколько бегло, но в достаточном для пользования ими виде, излагаются в § 37 и 75.

Настоящий курс посвящается изложению основных разделов классической механики Ньютона. Что же касается более общей, релятивистской механики Эйнштейна, содержащей в себе как частный случай классическую механику движений с малыми скоростями, по сравнению со скоростью света, и в малых, по сравнению с космическими масштабами, областях, то некоторые сведения об этой замечательной области естествознания будут даны во втором томе курса — динамике.

## § 2. Основные понятия теоретической механики

Механика Ньютона покоится на трех основных законах Ньютона: законе инерции, законе связи между силой, приложенной к материальной точке, и сообщаемым ею ускорением, и законе действия и противодействия. Последовательное изложение этих законов и их следствий в случае *любого движения* материальной точки или системы материальных точек будет дано в начале второго тома при изложении основ динамики. В статике учащийся встретится с несколько ограниченными их применениями. Для кинематики имеют значения лишь общие ньютоновские представления о пространстве и времени.

Предполагая, что учащийся уже осведомлен в какой-то мере об основных понятиях механики из курса физики, остановимся вкратце на тех из них, которые имеют непосредственное отношение к отделам настоящего первого тома курса: статике и кинематике.

Основной количественной мерой механического взаимодействия тел, характеризующей интенсивность и направление этого взаимодействия, является *сила*. Понятие силы, зародившееся из опытных представлений о давлении одного тела на другое при непосредственном их соприкосновении, о приведении тела в движение при помощи каната и т. п., было в дальнейшем обобщено на силы, возникающие при упругой деформации тел, на взаимное притяжение небесных тел, взаимодействие электрически заряженных частиц.

Различают две формы силового взаимодействия материальных тел: *близкодействие* и *дальнодействие*. Под первым понимают взаимодействие, осуществляемое путем непосредственного контакта тел, под вторым — результат взаимодействия тел с физическими полями (тяжести, тяготения, электрическими и магнитными), по отношению к которым находятся в равновесии или движутся материальные тела.

Наряду с понятием силы, совершенно достаточным для отдела статики, и классическими представлениями о пространстве и времени в кинематике, в динамике возникает дополнительная потребность количественного описания *инерционных* свойств материальных тел, характеризующихся понятиями *массы* и *моментов инерции*.

Движения материи развиваются в пространстве и времени, представляющих собой неотъемлемые *атрибуты* движения ма-

терии, а следовательно, и всех явлений мира. В порядке допустимого отвлечения от действительности можно себе представить существование чисто геометрического «абсолютного» пространства и протекающего в нем, не зависящего ни от каких физических условий «абсолютного» времени. Такого рода абстракцию допускает классическая механика Ньютона — Галилея, которая пользуется понятием о пространстве как о некоторой абсолютно неизменяемой, безгранично во все стороны распространяющейся сплошной совокупности точек, аналогичной по схеме абсолютно твердому телу. По отношению к таким системам — их иногда называют *системами отсчета* — и рассматриваются перемещения тел в их механическом движении. Эти системы отсчета могут быть либо неподвижными по отношению к одной основной системе, принимаемой условно за абсолютно неподвижную, либо двигаться произвольным образом по отношению к ней.

Измерение протяженности тел и определение их положения в таком пространстве производится приемами, устанавливаемыми геометрией пространства, отражающей с той или иной степенью отвлечения действительные свойства материального пространства. В классической механике такой геометрией, единой для всех систем отсчета, служит *евклидова геометрия*. В механике космических объектов геометрические свойства пространства связываются с особенностями распределения в нем материи. Законы геометрии такого пространства отличны от геометрии Евклида.

Классическая механика принимает в качестве *времени* одно «абсолютное время», одинаковое для всех систем отсчета, как бы они ни двигались по отношению друг к другу. Таким образом, в соответствии с принятой степенью отвлечения, в классической механике не учитывается связь свойств пространства и времени с распределением материи. Это приводит к тому, что выводы классической механики являются приближенными. Как уже упоминалось, они тем более точны, чем меньше скорости рассматриваемых движений по сравнению со скоростью света и чем ограниченнее масштабы движений по сравнению с космическими.

Выбор единиц длины и времени предполагается известным из общего курса физики. О некоторых особенностях процессов измерения длин и промежутков времени в релятивистской механике будет упомянуто в разделе динамики.



## СТАТИКА

### Глава I

---

#### Общие сведения о силах

#### **§ 3. Модель механического взаимодействия — сила. Сила как вектор. Приложенные и скользящие векторы. Деформируемые среды и принцип затвердевания**

Повседневный опыт говорит о наличии механического взаимодействия между материальными телами и их взаимодействия с физическими полями. При этом даже такое простейшее взаимодействие двух тел, как прямой контакт между ними, имеет далеко не простую природу и до сих пор привлекает внимание физиков. В частности, это относится к явлению *трения* между поверхностями соприкасающихся тел. Еще более сложны явления взаимодействия тел с физическими полями. До сих пор не существует общепризнанной теории тяготения, которая объяснила бы физическую природу этого явления. Между тем так называемый четвертый закон Ньютона о всемирном тяготении имеет простое *количественное* выражение, которое широко используется.

Трудно поэтому переоценить историческую заслугу Ньютона, положившего в основу своей механики количественные законы сил, независимо от того, ясна ли их природа. Основные стороны такой, не претендующей на глубокое понимание физического механизма явления, модели силы изложены в его классическом труде «Математические начала натуральной философии» (русский перевод А. Н. Крылова в издании Морской академии, относящийся к 1915 г.)<sup>\*</sup>.

Модель силы, по второму закону Ньютона, определяется тремя главными количественными сторонами: *величиной* (интенсив-

---

<sup>\*</sup> См. [8].

ностью), *направлением* действия и *точкой приложения*. Такому определению силы полностью отвечает образ *вектора*, равного по длине выраженной в масштабе величине силы, приложенного в данной точке и направленного в сторону действия силы.

Силы, равные по величине, одинаковые по направлению и имеющие одну и ту же точку приложения, признаются равными между собой, т. е. могут быть заменены одна другой. Говоря о равенстве двух физических величин, мы подразумеваем не абсолютное их равенство во всех отношениях — тождество, а лишь некоторое относительное равенство в смысле выбранных признаков сравнения. Так, называя две силы равными, мы не утверждаем тождественности их (например, силы тяжести и силы давления от соприкосновения двух тел). Очевидно, что двум равным силам соответствуют «тождественные» в *геометрическом* смысле векторы.

Рассмотрение совокупного действия нескольких сил основывается на следующем положении.

*Совокупность нескольких сил, приложенных в одной и той же точке, может быть заменена одной силой; наоборот, одна сила может быть разложена на совокупность нескольких сил, приложенных в той же точке.*

Две совокупности сил, обладающие тем свойством, что при замене одной совокупности другою относительный покой (равновесие) тела или системы тел не нарушится, считаются *статически эквивалентными*. Указанная ранее возможность замены совокупности *сходящихся* в точке сил одной силой представляет простейший пример замены данной совокупности сил ей *статически эквивалентной*.

В дальнейшем под понятием эквивалентности двух совокупностей сил будет всегда подразумеваться статическая их эквивалентность, но для краткости термин *статическая* иногда будет опускаться.

Из общего курса математики известны правила сложения векторов, приложенных в одной точке. Это — правила *параллелограмма* в случае *двух* векторов, *параллелепипеда* в случае *трех* и векторного *многоугольника* в случае *любого* числа векторов. Эти же правила сохраняются и для сходящейся системы сил.

При рассмотрении совокупности сил, приложенных к различным точкам данного тела или системы тел, физические свойства этих тел становятся существенными.

Из всего возможного многообразия физических свойств тел для нас пока достаточно остановиться на простейшем — *деформируемости тела*. Все физические тела под влиянием приложенных сил изменяют свою форму, причем величина деформации зависит от различных условий: материала тела, формы его, величины и направлений приложенных сил. Некоторые тела, например жидкости и газы, легко деформируются; твердые тела (например, металлы, дерево и др.), наоборот, обычно получают незначительные деформации.

В строительном деле, в машиностроении и других областях техники телá и нагрузки выбирают так, чтобы возможные деформации не выходили за ограниченные, наперед заданные пределы. В таких случаях в первом приближении можно пренебречь влиянием деформируемости и этим значительно упростить решение задач статики, сводя их к рассмотрению тел *недеформируемых*. Таким путем мы приходим к естественной абстракции — *абсолютно твердому телу*, как «жесткой» системе точек, т. е. такой, в которой взаимное расположение отдельных точек не изменяется.

Рассматривая действие заданной совокупности сил на данное твердое тело, будем пока предполагать, что это тело является *свободным*, т. е. не подверженным никаким другим воздействиям со стороны окружающих его тел или полей, кроме включенных в число заданных.

Следующее свойство модели свободного абсолютно твердого тела является основным.

*Свободное абсолютно твердое тело под действием двух сил будет находиться в равновесии только в том случае, когда эти силы равны по величине и направлены вдоль одной и той же прямой в противоположные стороны.*

Стержень под действием такой совокупности сил будет испытывать сжатие, если силы приложены к концам стержня и направлены *внутрь* стержня, и, наоборот, растяжение, если силы направлены *вовне*. Абсолютно твердый стержень недеформируем, и в этих условиях никакого изменения в его состоянии не произойдет. Только что указанная совокупность двух сил, рав-

ных по величине и направленных вдоль одной и той же прямой в противоположные стороны, является для абсолютно твердого тела эквивалентной нулю.

Основываясь на приведенном свойстве модели абсолютно твердого тела, докажем следующую теорему.

**ТЕОРЕМА.** *Не нарушая равновесия твердого тела, можно точку приложения силы переносить вдоль линии, по которой расположена сила.*

Предположим, что в точке  $M$  тела (рис. 1) приложена сила  $F$ . Возьмем на прямой линии, вдоль которой направлена эта сила, произвольную точку  $N$ ; не нарушая состояния тела, можно приложить в точке  $N$  две равные друг другу и противоположно направленные вдоль той же прямой силы  $F'$  и  $F''$ , каждая из которых по величине равна  $F$ . Тогда получим совокупность трех сил  $F, F', F''$ , эквивалентную одной силе  $F$ . Эквивалентную нулю совокупность сил  $F$  и  $F''$  можно опустить; тогда останется сила  $F'$ , равная по величине и одинаково направленная с силой  $F$ , но имеющая точку приложения  $N$ .

Итак, в абсолютно твердом теле точка приложения перестает быть характерным элементом силы и приобретает значение лишь прямая линия, вдоль которой направлена сила, — так называемая *линия действия силы*.

Векторы, обозначающие силы, в этом случае теряют свое наименование «приложенных» и становятся «скользящими». Название это отражает возможность силы, приложенной к абсолютно твердому телу, произвольно менять точку приложения вдоль линии ее действия. Заметим, что далее излагаемые методы приведения совокупности сил к простейшему виду относятся в одинаковой степени ко всем скользящим векторам.

Итак, в статике абсолютно твердого тела определяющими элементами силы являются: *численная величина* (интенсивность) силы, *линия действия* ее и *сторона*, в которую направлена сила вдоль своей линии действия. Учет наличия точки приложения силы иногда все же необходим, как, например, это будет иметь место в учении о центре параллельных сил (§ 25) и центре тяжести (§ 26).

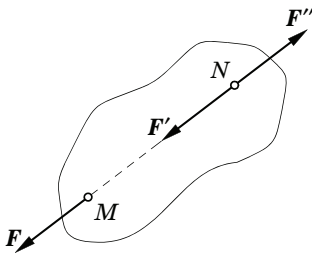


Рис. 1

Указанное различие между абсолютно твердым и деформируемым телами не означает полного отсутствия связи между статикой этих тел. Далеко не полные, но вместе с тем все же существенные сведения о равновесии деформируемых тел можно получить, применяя следующее правило.

**ПРИНЦИП ЗАТВЕРДЕВАНИЯ.** *Если деформируемое тело находится в равновесии, то замена его или отдельных его частей соответствующими ему телами в абсолютно твердом состоянии равновесия не нарушит.*

Полезна еще одна формулировка принципа затвердевания.

*В число условий равновесия деформируемого тела входят и условия равновесия того абсолютно твердого тела, которое образуется из данного деформируемого тела при его затвердевании.*

При такой формулировке становится ясным, что условия равновесия жесткой системы являются *необходимыми*, но не *достаточными* условиями равновесия деформируемой системы. Принцип затвердевания позволит в дальнейшем решать простейшие задачи статики деформируемых тел (ремень, цепь, нить и др.), применяя к ним приемы статики твердого тела.

#### § 4. Действие и противодействие. Метод сечений

Отметим важный случай взаимодействия двух материальных точек  $A$  и  $B$ . Будем говорить, что точка  $B$  действует на точку  $A$ , а точка  $A$  противодействует ей. Обе эти силы, *действие* и *противодействие*, имеют *общую линию действия, равны между собою по величине и противоположны по направлению*. Эта закономерность составляет содержание *третьего закона Ньютона\**, сформулированного им как общий механический закон, одинаково справедливый как для материальных точек, находящихся в относительном покое, так и при любом их взаимном движении.

Очень важно подчеркнуть, что, хотя действие равно и противоположно по направлению противодействию, они не уравниваются, так как приложены к *разным* материальным точкам.

---

\* Первые два закона Ньютона: закон инерции и закон зависимости силы от ускорения — будут изложены в отделе динамики, во втором томе курса.

В природе не существует одностороннего действия сил. Материальные тела могут только взаимодействовать, причем, благодаря наличию этого взаимодействия, при учете сил, действующих в системе, мы всегда будем иметь *четное* число сил, так как всякому действию всегда будет соответствовать равное ему по величине и противоположное по направлению противодействие. Выделяя в системе какое-нибудь одно тело и ставя вопрос о его равновесии или вообще о действии сил на него, мы должны разграничить приложенные к выделенному свободному телу действия других тел от противодействий рассматриваемого тела, приложенных к этим телам. Так, например, рассматривая груз, висящий на цепи, мы можем различать по отдельности следующие совокупности сил:

- ✓ действия веса груза и натяжения цепи, приложенные непосредственно к грузу;
- ✓ противодействие цепи, приложенное к крюку, на котором висит груз, и действие на крюк силы, приложенной к нему со стороны потолка, в который крюк ввинчен.

Все эти силы, как действия, так и противодействия, приведены на рис. 2, причем указываются также силы  $G'$ , приложенные к полу, и сила  $N'$ , приложенная к потолку со стороны крюка.

Практически необходимо сосредоточить свое внимание на одном из тел и учитывать лишь силы, приложенные к этому телу (в рассмотренном примере — к грузу). В некоторых задачах рассмотрением одного тела обойтись нельзя; в этом случае после изучения сил, приложенных к данному телу, мы переходим к изучению сил, приложенных к следующему телу; естественно,

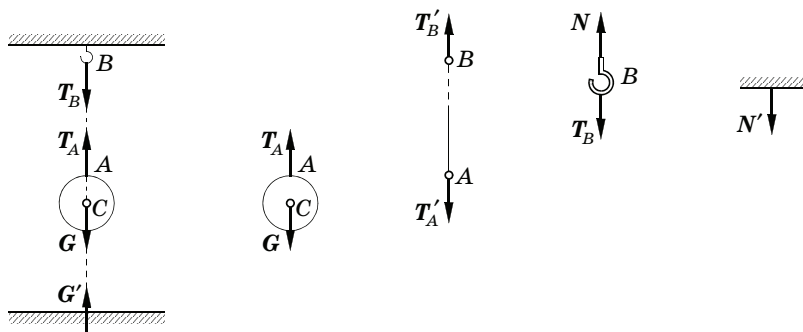


Рис. 2

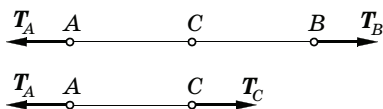


Рис. 3

что при этом некоторые силы окажутся теми же по величине, что и прежде, но направленными в противоположную сторону. Таким образом, выбирая только те тела, которые действительно имеют значение для данной задачи, и рассматривая лишь те силы, которые приложены к этим телам, мы наиболее просто поставим и решим задачу.

При изучении условий равновесия данного тела рассматриваем его как свободное, для чего мысленно выделяем его из общей цепи взаимодействующих тел и сосредоточиваем все внимание на силах, приложенных к этому телу.

Такой прием может быть применен не только в случае отдельных тел, но и в случае непрерывных систем (упругих, жидких и газообразных тел). Пусть, например, требуется определить силы взаимодействия частиц в некоторой точке  $C$  натянутой проволоки или стержня (рис. 3). Для этого, сосредоточив свое внимание на отрезке  $AC$ , выделим его из всего куска  $AB$  и отметим силу  $T_C$ , с которой часть  $CB$  действует на рассматриваемый отрезок  $AC$ . При этом в наше рассуждение войдет сила  $T_C$ , которая представит *натяжение* проволоки или стержня в точке  $C$ . Этот прием выделения сил взаимодействия между частицами непрерывной среды — *внутренних сил* — называют *методом сечений*.

Метод сечений используется не только в указанном простейшем случае линейного тела, но и вообще при изучении внутренних сил в сплошных средах, в том числе и в абсолютно твердом теле, когда вместо одной силы — *натяжения* — возникает система *напряжений*. Этому вопросу будет в дальнейшем посвящена глава VII.

## § 5. Опорные реакции и простейшие типы опор

Тело, условия равновесия которого изучаются, в подавляющем большинстве случаев находится в непосредственном взаимодействии с другими окружающими его телами, ограничивающими свободу данного тела. В статике рассматриваются условия равновесия свободного твердого тела; поэтому мы должны в число приложенных к телу сил включать и все воздействия на это те-

ло со стороны окружающих его тел, после чего уже рассматривать тело как свободное. Этот прием будет обобщен в динамике и составит содержание *принципа освобождаемости*.

Тела, ограничивающие свободу данного тела, являются по отношению к нему *связями*, воздействия связей на тело — *реакциями связей*. Подробное рассмотрение связей приводится в динамике.

Простейшим примером реакций связей служит опора, осуществленная непосредственным соприкосновением поверхностей тел (рис. 4). Реакция опорной плоскости, на которой покоится тело  $M$ , подверженное действию веса  $G$  и тяги  $P$ , складывается из нормальной реакции  $N_A$ , направленной по нормали к обеим поверхностям в точке  $A$  в плоскости соприкосновения их и обусловленной давлением одного тела на другое, и из касательной реакции  $F_A$ , зависящей от шероховатости поверхности. Сила  $F_A$  называется *силой трения*.

■ Если поверхности взаимно соприкасающихся тел хорошо отполированы и смазаны, то сила трения мала. В этом случае можно с достаточной степенью приближения говорить об *идеально гладких* поверхностях и принимать силу трения равной нулю. Такая идеальная опора будет характеризоваться одной нормальной реакцией.

Примером может служить применяемая в мостовых и других конструкциях *опора на каток* (рис. 5, а). Подвижность катка настолько велика, что можно пренебречь трением по сравнению с другими приложенными силами и при расчете опорную реакцию считать нормальной.

При определении направления нормальной реакции следует руководствоваться геометрическим расположением поверхностей в точке соприкосновения и строить общую нормаль к обеим поверхностям в этой точке (рис. 5, б). В некоторых случаях, однако, направление этой нормали может оказаться неопределенным. Примером может служить опора ребром или вершиной угла

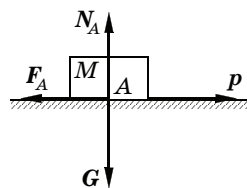


Рис. 4

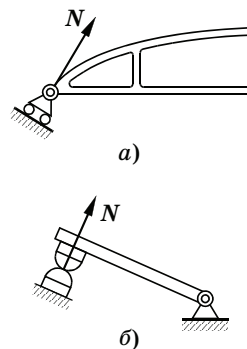


Рис. 5



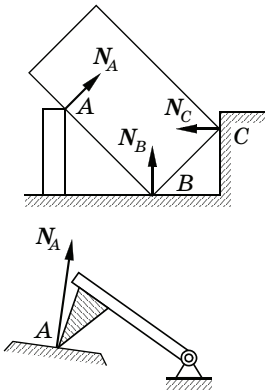


Рис. 6

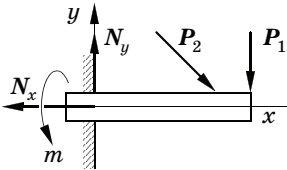


Рис. 7

(рис. 6); в этом случае нормальная реакция направлена по перпендикуляру к той из поверхностей, к которой проведение перпендикуляра представляет операцию определенную.

■ В случае *заделки* одного тела в другое (рис. 7) реакция опоры  $N$  становится *неопределенной* и, кроме того, не единственным фактором взаимодействия между телами. Кроме силы  $N$  с проекциями  $N_x < 0$ ,  $N_y > 0$ , реакцию определяет еще *пара сил* с моментом  $m$  (см. § 12). Эта совокупность силы и пары сил зависит от условий работы опоры и должна определяться из общих уравнений равновесия тела, опирающегося в заделку.

■ *Подшипник*, или *цилиндрический шарнир* (рис. 8). По самой своей конструкции этот весьма распространенный вид опоры таков, что в зависимости от системы сил, приложенной к телу, вал

или палец могут прижиматься к самым различным точкам обоймы; ввиду этого даже при отсутствии трения реакция такого шарнира неизвестна по направлению; можно лишь утверждать, что реакция цилиндрического шарнира лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, если в осевом направлении трение в шарнире ничтожно. Если можно пренебречь трением в шарнире, то реакция пересекает ось шарнира (этот случай изображен на рис. 8).

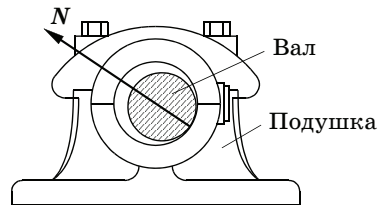
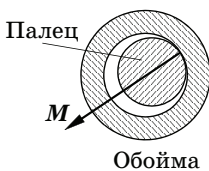


Рис. 8

■ *Сферический шарнир* (рис. 9, а) и *подпятник* (рис. 9, б). Реакция такой опоры неизвестна по направлению. Она проходит через центр сферического шарнира, если трение в шарнире пренебрежимо мало.

Другого типа опорами являются опоры, осуществленные через промежуточные тела. Такой случай мы имеем при подвешивании тела при помощи гибкой нити или цепи. Реакция при этом будет направлена вдоль нити или цепи от подвешенного тела к точке подвеса. Само промежуточное тело, осуществляющее подвешивание (нить, цепь), при этом будет растянуто; растягивающие силы мы условимся в дальнейшем обозначать буквой  $T$ , отмечая буквой, поставленной в индексе, точки приложения этих сил (например, на рис. 10 — силы  $T_C$ ,  $T_B$  и т. д.). На рис. 10, а показан подвес на двух цепях.

Другим примером такого типа опоры может служить подвешивание или подпираание при помощи жестких стержней (рис. 10, б). Реакции идеальных (лишенных трения) шарниров в случае невесомого абсолютно твердого стержня направлены вдоль стержня; действительно, по предыдущему невесомый стержень под действием двух сил (реакций шарниров) может быть в равновесии лишь в том случае, когда реакции направлены вдоль одной прямой (оси стержня); при этом реакции будут играть роль сжимающих или растягивающих сил. Сжимающее усилие обозначим

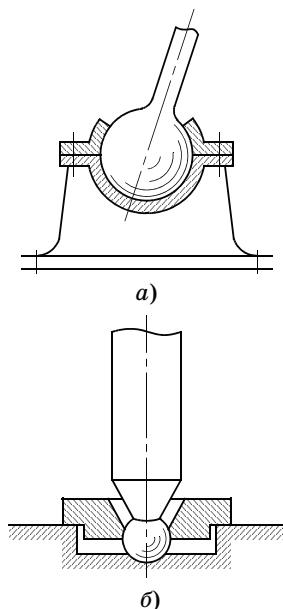


Рис. 9

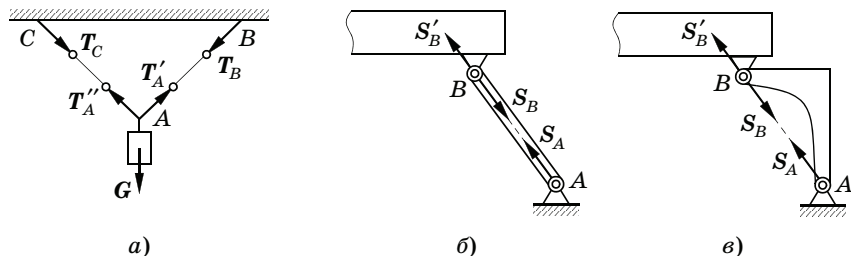


Рис. 10

буквой  $S$ , причем, как и ранее, подстрочная буква будет обозначать точку приложения силы ( $S_A$ ,  $S_B$  и т. д.). Роль стержня может играть и изогнутый рычаг (рис. 10,  $e$ ); в этом случае реакции также направлены по прямой, соединяющей шарниры.

## Глава II

### Приведение пространственной совокупности сил, сходящихся в точке, к равнодействующей силе

#### § 6. Силовой многоугольник

Предположим, что к некоторому абсолютно твердому телу в точках  $M_1, M_2, \dots, M_n$  (рис. 11) приложены силы  $F_1, F_2, \dots, F_n$  (на рисунке показаны четыре силы), причем линии действия этих сил пересекаются в одной точке  $O$ . Такую совокупность сил будем называть *сходящейся*.

По свойству абсолютно твердого тела силы могут быть перенесены вдоль линии действия в точку  $O$ , так что сходящаяся совокупность сил эквивалентна совокупности сил, приложенных в одной точке (§ 3).

Эта сходящаяся совокупность сил может быть приведена к одной силе  $R$  — равнодействующей, приложенной в той же точке  $O$ .

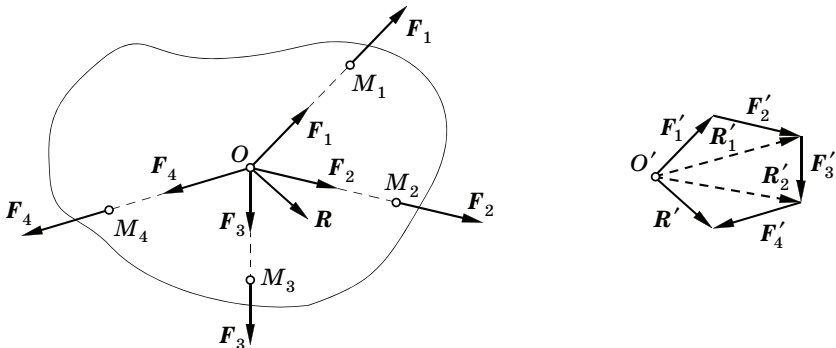


Рис. 11

Для определения величины и направления равнодействующей будем последовательно складывать силы по правилу силового треугольника. Чтобы не загромождать рисунка, сделаем это в стороне, построив векторную диаграмму — *силовой многоугольник*.

Напомним известный из общего курса физики порядок построения. Из произвольной точки  $O'$  откладываем вектор  $F'_1$ , геометрически равный  $F_1$ , т. е. равный по величине, параллельный и направленный в ту же сторону; из конца\* его откладываем вектор  $F'_2$ , геометрически равный  $F_2$ . Соединив  $O'$  с концом этого второго вектора, мы найдем вектор  $R'_1$ , геометрически равный равнодействующей  $R_1$  сил  $F_1$  и  $F_2$ . Построение такого треугольника полностью определяет вектор  $R'_1$  и делает излишним построение затемняющего рисунок параллелограмма сил.

Продолжая построение, откладываем на диаграмме из конца  $F'_2$  или, что то же, из конца  $R'_1$  вектор  $F'_3$ , геометрически равный силе  $F_3$ . Снова соединяя начало  $O'$  диаграммы с концом этого вектора, получим вектор, геометрически равный равнодействующей  $R_1$  и  $F_3$ , или равнодействующей трех сил  $F_1, F_2, F_3$ .

Продолжая таким же образом, сложим сколько угодно сил (на рисунке — четыре силы) и получим вектор  $R'$ , геометрически равный равнодействующей  $R$  заданной совокупности сил.

Совершив построение, замечаем, что проведение промежуточных векторов  $R'_1, R'_2$  было излишним; можно было, отложив на диаграмме вектор  $F'_1$ , к концу его приложить начало вектора  $F'_2$ , затем к концу  $F'_2$  — начало  $F'_3$ , к концу  $F'_3$  — начало  $F'_4$  и т. д., после этого начало  $O'$  первого вектора соединить вектором  $R'$  с концом последнего вектора  $F'_4$ , направив  $R'$  навстречу последней силе. Этот вектор  $R'$  и даст нам величину и направление равнодействующей.

Будем называть векторы  $F'_1, F'_2, \dots$  *составляющими*, вектор  $R'$ , соединяющий начало первой составляющей с концом последней и направленный ей навстречу, — *замыкающим*.

*Равнодействующая сходящейся совокупности сил равна векторной (геометрической) сумме слагаемых сил*

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (2.1)$$

\* Конец вектора — острие изображающей его стрелки; начало — противоположная точка.

и определяется замыкающей стороной силового многоугольника, построенного на слагаемых силах как на составляющих; точка приложения равнодействующей совпадает с точкой пересечения линий действия слагаемых сил.

В формуле (2.1) символ  $\sum_{i=1}^n$  («сигма») обозначает суммирование стоящих справа от него, отмеченных индексом  $i$  величин по всем последовательным значениям этого индекса от  $i = 1$  до  $i = n$ .

Построение силового многоугольника в частном случае плоской совокупности сходящихся сил может быть использовано для определения равнодействующей чисто графическим путем. Для этого необходимо только следить за тем, чтобы векторы на диаграмме достаточно точно изображали в принятом масштабе приложенные к телу силы. Равнодействующая при этом может быть непосредственно снята с рисунка, ее величина определится в том же масштабе.

В случае пространственной совокупности сил указанное графическое построение непосредственно невыполнимо; в этом случае разыскание равнодействующей приходится проводить аналитически.

Поскольку сходящаяся совокупность сил может быть заменена одной силой — равнодействующей, можно сформулировать следующее условие равновесия.

*Необходимым и достаточным условием равновесия тела под действием сходящейся совокупности сил является равенство нулю этой равнодействующей.*

Таким образом, условием равновесия сходящейся совокупности сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$  служит следующее векторное равенство:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i = 0. \quad (2.2)$$

Геометрически это условие выражается требованием, чтобы конец последнего вектора совпадал с началом первого, т. е. чтобы приложенные силы сами по себе образовывали на векторной диаграмме замкнутый многоугольник. Подчеркнем, что в замкнутом силовом многоугольнике стрелки векторов определяют направление обхода периметра этого многоугольника.

В частном случае трех уравновешивающихся сходящихся сил силовой многоугольник сводится к *силовому треугольнику*. Ре-

шение задач на равновесие в этом случае требует нахождения неизвестных элементов треугольника с помощью тригонометрических формул.

При решении задач полезно иметь в виду следующую теорему.

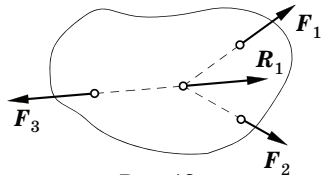


Рис. 12

**ТЕОРЕМА О ТРЕХ СИЛАХ.** Если тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил обязательно пересекаются в одной точке, т. е. силы образуют сходящуюся систему.

Для доказательства теоремы сложим какие-нибудь две из приложенных сил, например  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 12), в одну равнодействующую  $R_1$ ; тогда, для того чтобы тело было в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сила  $F_3$  уравновесила силу  $R_1$ , а это возможно лишь в том случае, если  $F_3$  имеет общую линию действия с  $R_1$ , равна ей по величине и противоположна по направлению. Отсюда следует необходимость пересечения линий действия трех сил в одной точке.

Доказанная теорема в своей формулировке требовала, чтобы рассматриваемая совокупность трех сил была плоской (компланарной). Как это непосредственно видно из рис. 12, при равновесии трех сил они должны образовывать компланарную совокупность сил, так как по условию равновесия сила  $F_3$  должна лежать в плоскости первых двух сил (см. конец § 20).

## § 7. Геометрический метод решения задач

Непосредственное использование многоугольника сил при решении задач статики приводит к геометрическим построениям с последующим определением неизвестных элементов с помощью тригонометрических формул. В отличие от аналитических методов, излагаемых далее, эти приемы решения задач можно называть геометрическими. В большинстве случаев задача сводится к составлению и последующему решению одного или нескольких силовых треугольников, чем и определяются число и характер необходимых исходных данных.

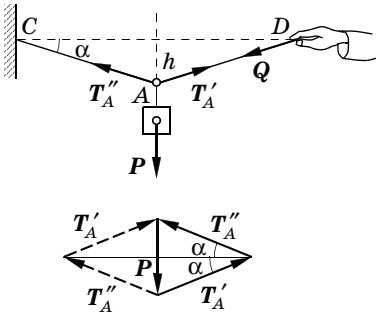


Рис. 13

Чтобы найти связь между  $T'_A$  и  $P$ , рассмотрим узел  $A$  и составим условие его равновесия: треугольник, построенный на приложенных к узлу силах  $P$ ,  $T'_A$  и  $T''_A$ , должен быть замкнутым. Начинаем построение силового треугольника с заданной силы, в данном случае  $P$ . Через начало и конец силы  $P$  (рис. 13, внизу) проведем лучи, параллельные направлениям сил  $T'_A$  и  $T''_A$  (левая и правая ветви веревки), и отметим точку пересечения их. Полученный при этом треугольник и будет искомым силовым треугольником\*; направление сил показано на рисунке. Оно находится по правилу обхода периметра треугольника в сторону, указываемую заданной силой  $P$ .

Остается определить величину  $T'_A$ ; сразу видно, что

$$T'_A = \frac{P}{2 \sin \alpha} = Q.$$

Вместо угла наклона веревки можно ввести ее стрелу провисания  $h$ ; получим

$$Q = \frac{Pl}{2h}.$$

Из формулы видно, что чем меньше стрела провисания  $h$  (или угол  $\alpha$ ), тем большее усилие надо приложить к свободному концу веревки, чтобы удержать груз в равновесии. При малых углах  $\alpha$  усилие  $Q$  становится очень большим. Например,  $\alpha = 5^\circ$  соответствуют  $\sin \alpha = 0,0875$ ,  $Q = 5,75P$ ; при  $\alpha = 1^\circ$  получаем  $Q = 28,6P$  и т. д. При  $\alpha \rightarrow 0$  имеем  $Q \rightarrow \infty$ ; это означает, что при наличии нагрузки веревка не может быть вытянута в одну прямую.

\* Отложив силу  $P$ , можно было бы вслед за нею вместо силы  $T'_A$  нанести силу  $T''_A$ . При этом мы получили бы силовой треугольник, показанный на рис. 13 пунктиром. Такая возможность имеет место во всех случаях построения силовых треугольников; это не отражается на решении задачи.

**Пример 1.** Один конец веревки длиной  $2l$  неподвижно закреплен в точке  $C$  (рис. 13), другой,  $D$ , находится в руке у человека на одном уровне с точкой  $C$ . В середине веревки в точке  $A$  прикреплен груз весом  $P$ . Определить, как будет изменяться в зависимости от угла  $\alpha$  наклона веревки к горизонту усилие  $Q$ , испытываемое рукой.

Прежде всего заметим, что искомое усилие  $Q$  равно по величине натяжению веревки  $T'_A$ , ясно, далее, что вследствие симметрии  $T'_A = T''_A$ .

**Пример 2.** Определить опорные реакции в шарнирах стержневой системы  $ABC$  (рис. 14) пренебрежимо малого веса, один из стержней которой нагружен посередине силой  $P = 2$  кН; стержни равны по длине и наклонены к горизонту под углом  $\alpha = 30^\circ$ .

Рассмотрим сначала равновесие ненагруженного стержня  $BC$ . На стержень действуют только две сжимающие его силы  $S_B$  и  $S_C$ : они равны по величине и противоположны по направлению; сила, с которой стержень  $BC$  действует на точку  $C$  стержня  $AC$ , т. е. реакция  $N_C$ , будет поэтому направлена вдоль  $BC$ . Это позволяет найти линию действия реакции в точке  $A$ . По теореме о трех силах ищем точку  $D$  пересечения линий действия сил  $P$  и  $N_C$  и проводим линию действия силы  $N_A$  через точки  $A$  и  $D$ . Строим теперь силовой треугольник и отмечаем его углы. По теореме синусов

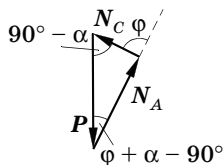
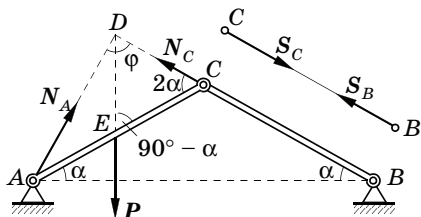


Рис. 14

$$\frac{N_A}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{N_C}{\sin(\varphi + \alpha - 90^\circ)} = \frac{P}{\sin(180^\circ - \varphi)},$$

или

$$\frac{N_A}{\cos \alpha} = -\frac{N_C}{\cos(\varphi + \alpha)} = \frac{P}{\sin \varphi}.$$

Для определения тригонометрических функций неизвестного угла  $\varphi$  обратимся к рассмотрению  $\triangle CDE$  и  $\triangle ACD$ . Замечая, что  $\triangle CDE$  равнобедренный и, следовательно,  $DC = AC/2$ , из  $\triangle ACD$  находим  $\frac{CD}{AC} = \frac{1}{2} = \frac{\sin(\varphi + 2\alpha)}{\sin \varphi}$ , откуда  $\text{ctg } \varphi = \frac{1/2 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$ ; при  $\alpha = 30^\circ$  имеем  $\text{ctg } \varphi = 0$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ; получаем  $\frac{N_A}{\cos 30^\circ} = \frac{N_C}{\sin 30^\circ} = P$ , откуда  $N_A = 2\cos 30^\circ = 1,73$  кН,  $N_C = 1$  кН.

Рассмотренная задача эквивалентна задаче об опорных реакциях двухарочной фермы (рис. 15), если здесь положить  $\text{tg } \alpha = 2h/L$ .

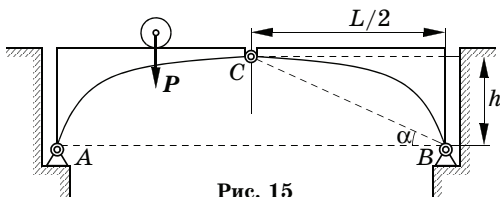


Рис. 15



К тому же типу задач относятся и задачи, в которых вместо шарниров могут быть другие по характеру опоры, но с реакциями, так же неопределенными по направлению, как и в шарнире (врубленная балка, балка, опирающаяся в угол между двумя плоскостями, и т. д.). Такова, например, задача об опорных реакциях балки, показанной на рис. 16.

**Пример 3.** Зная величину и направление усилия  $P$ , приложенного к пальцу  $B$  кривошипа  $AB$  (рис. 17) шарнирного четырехзвенника  $ABCD$ , найти уравновешивающее усилие  $Q$ , приложенное к пальцу  $C$  коромысла  $CD$ , действующее в данном направлении.

В шарнире  $B$  заданная сила  $P$  уравновешивается реакциями  $N_B$  и  $S_B$ , направленными вдоль стержней  $AB$  и  $BC$ ; составив силовой треугольник, находим эти реакции; их направления определяются обходом периметра треугольника в сторону, указываемую силой  $P$ . Поскольку  $N_B$  и  $S_B$  представляют собой силы, приложенные к шарниру  $B$ , то, согласно закону действия и противодействия, к стержням  $AB$  и  $BC$  в точке  $B$  приложены силы, направленные внутрь стержней, так что последние будут сжаты.

К шарниру  $C$  приложены сила  $S_C$ , равная по величине силе  $S_B$ , но направленная в противоположную сторону, а также сила  $N_C$ , направленная вдоль стержня  $CD$ , и сила  $Q$ , направление которой задано. Начиная построение силового треугольника с силы  $S_C$ , которая уже имеется на рисунке, проводим через ее начало и конец линии, параллельные стержню  $CD$  и заданному направлению силы  $Q$ .

Пользуясь обозначениями углов, показанными на рис. 17, получаем по теореме синусов

$$S_B = P \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\alpha - \varphi)}, \quad S_C = Q \frac{\sin(\beta + \delta)}{\sin(\beta + \varphi)},$$

откуда ( $S_B = S_C$ )

$$Q = P \frac{\sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta + \varphi)}{\sin(\alpha - \varphi) \sin(\beta + \delta)}.$$

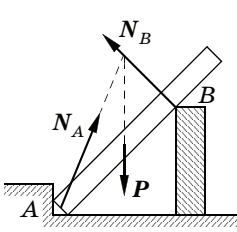


Рис. 16

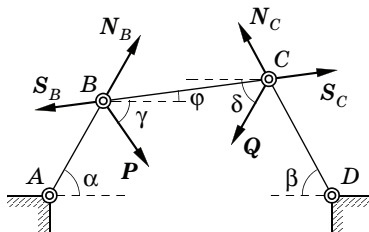
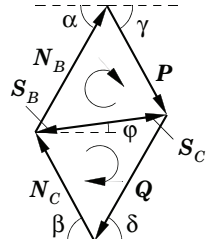


Рис. 17



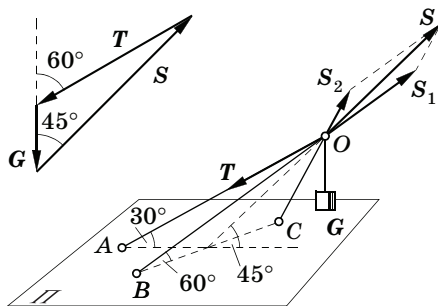


Рис. 18

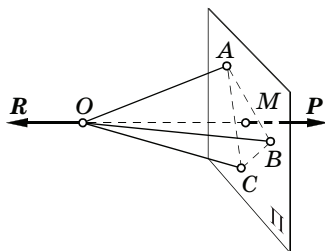


Рис. 19

**Пример 4.** Груз весом  $G$  (рис. 18) подвешен в точке  $O$  соединения двух брусьев  $OB$  и  $OC$  одинаковой длины, удерживаемых тросом  $OA$ , закрепленным в точке  $A$ , равноотстоящей от точек  $B$  и  $C$ . Определить усилия в брусьях и тросе при указанном на рис. 18 расположении.

Узел  $O$  находится в равновесии под действием пространственной совокупности сходящихся сил: усилий  $S_1$  и  $S_2$  в брусьях, натяжения троса  $T$  и веса груза  $G$ . Вследствие симметрии  $S_1 = S_2$  и их равнодействующая  $S$ , направленная по биссектрисе угла  $BOC$ , будет лежать в одной плоскости с силами  $G$  и  $T$ . Таким образом, рассмотрение пространственной совокупности сил сводится к рассмотрению двух плоских совокупностей  $G, S, T$  и  $S, S_1, S_2$ .

На рис. 18 показано построение треугольника сил  $G, S, T$ . Из этого треугольника находим

$$\frac{S}{\sin 60^\circ} = \frac{T}{\sin 45^\circ} = \frac{G}{\sin 15^\circ},$$

откуда имеем

$$S = 3,36G, \quad T = 2,74G.$$

Из рассмотрения ромба, построенного на силах  $S_1$  и  $S_2$ , находим

$$S_1 = S_2 = \frac{S}{2\cos 30^\circ} = 1,93G.$$

**Пример 5.** Три точки  $A, B, C$  (рис. 19) невесомой твердой пластинки  $\Pi$  соединены нитями с неподвижной точкой  $O$ . Нити находятся в натянутом состоянии, так как в некоторой точке  $M$  пластинки приложена сила  $P$ . Доказать, что если за направление линии действия силы  $P$  принять диагональ параллелепипеда, построенного на отрезках  $OA, OB, OC$ , то натяжения нитей будут пропорциональны их длинам, а линия действия растягивающей силы пересечет плоскость пластинки в точке пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

По теореме о равновесии тела (в данном случае пластинки  $\Pi$ ) под действием двух сил растягивающая сила  $P$  должна быть равна по величине

равнодействующей  $\mathbf{R}$  сил натяжения нитей  $\mathbf{T}_A$ ,  $\mathbf{T}_B$  и  $\mathbf{T}_C$ , противоположна ей по направлению и имеет с ней общую линию действия. Равнодействующая  $\mathbf{R}$  направлена по диагонали параллелепипеда, построенного на натяжениях  $\mathbf{T}_A$ ,  $\mathbf{T}_B$ ,  $\mathbf{T}_C$ , а с другой стороны, по условию — по диагонали параллелепипеда, построенного на отрезках  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$ . Эти два параллелепипеда, построенные на отрезках одинакового направления (натяжения нитей направлены вдоль нитей) и имеющие общее направление диагонали, подобны между собой; следовательно, стороны параллелепипеда сил действительно пропорциональны длинам нитей.

Равнодействующая  $\mathbf{T}_{AB}$  двух сил  $\mathbf{T}_A$  и  $\mathbf{T}_B$ , пропорциональных по величине отрезкам  $OA$  и  $OB$ , проходит через середину отрезка  $AB$ ; добавляя к  $\mathbf{T}_{AB}$  силу  $\mathbf{T}_C$ , найдем общую равнодействующую  $\mathbf{R}$  трех натяжений, которая будет лежать в плоскости, проходящей через  $OC$  и медиану стороны  $AB$  треугольника  $ABC$ . Равнодействующая  $\mathbf{R}$  пересечет плоскость пластинки  $\Pi$  в некоторой точке медианы. Повторяя аналогичное рассуждение в отношении сил  $\mathbf{T}_B$  и  $\mathbf{T}_C$  или  $\mathbf{T}_C$  и  $\mathbf{T}_A$ , убедимся, что точка  $M$  действительно лежит на пересечении медиан треугольника  $ABC$ .

**Пример 6.** Однородная треугольная пластинка  $ABC$  весом  $G$  подвешена к неподвижной точке  $O$  на трех нитях, закрепленных в углах пластинки. Найти натяжения нитей (рис. 20). Предполагается известным, что вес пластинки приложен в ее центре тяжести, находящемся на пересечении медиан треугольника.

По теореме о двух силах равнодействующая натяжений нитей, приложенная в точке  $O$ , должна быть равна по величине силе  $G$ , противоположна по направлению и иметь с нею общую линию действия, проходящую через центр тяжести  $M$  треугольника  $ABC$ , т. е. через точку пересечения медиан треугольника. По доказанному в предыдущем примере натяжения нитей  $\mathbf{T}_A$ ,  $\mathbf{T}_B$ ,  $\mathbf{T}_C$  будут по величине пропорциональны длинам нитей  $OA = r_A$ ,  $OB = r_B$ ,  $OC = r_C$ , т. е. можно положить

$$\mathbf{T}_A = -\lambda r_A, \quad \mathbf{T}_B = -\lambda r_B, \quad \mathbf{T}_C = -\lambda r_C,$$

где  $\lambda$  — неизвестный положительный скалярный множитель, а  $r_A$ ,  $r_B$ ,  $r_C$  — векторы  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$ ; знак *минус* выражает тот факт, что реакции нитей направлены к точке  $O$ . По условию равновесия

$$-(\mathbf{T}_A + \mathbf{T}_B + \mathbf{T}_C) = \lambda(r_A + r_B + r_C) = \mathbf{G}.$$

Докажем, что

$$r_A + r_B + r_C = 3r_M,$$

где вектор  $r_M = \overrightarrow{OM}$  определяет положение центра тяжести треугольника на вертикали, проходящей через точку  $O$ . Имеем

$$\frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD},$$

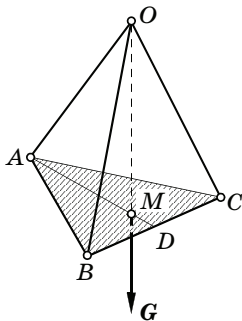


Рис. 20

где  $D$  — середина отрезка  $BC$ . Таким образом,

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OA}$$

и, далее,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3} (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C).$$

Итак,

$$3\lambda r_M = G, \quad \lambda = \frac{G}{3r_M},$$

и, следовательно,

$$T_A = \frac{Gr_A}{3r_M}, \quad T_B = \frac{Gr_B}{3r_M}, \quad T_C = \frac{Gr_C}{3r_M}.$$

### § 8. Проекция силы на оси прямоугольной системы координат

Изложенный ранее способ задания силы ее величиной, линией действия и направлением вдоль линии действия не является единственным способом задания силы. В некоторых случаях этому геометрическому способу задания силы следует предпочесть другой способ — *аналитический*.

Аналитический метод задания силы заключается в том, что, выбрав совершенно произвольно некоторую прямоугольную систему координатных осей  $Oxyz$  (рис. 21), задают:

- ✓ проекции силы  $F$  на координатные оси  $F_x, F_y, F_z$ ;
- ✓ координаты точки  $A$  приложения силы.

Для получения проекций силы поместим в точку  $A$  приложения силы (рис. 21) начала трех осей  $Ax', Ay', Az'$ , параллельных заданным осям  $Ox, Oy, Oz$ . Тогда, проводя через конец  $B$  вектора три плоскости, перпендикулярные координатным осям и, следовательно, параллельные координатным плоскостям, отсечем этими плоскостями на осях проекции  $F_x, F_y, F_z$ . Обозначим через  $\alpha, \beta, \gamma$  углы, образованные направлением силы  $F$

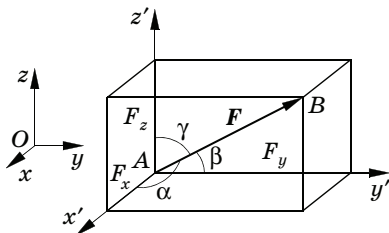


Рис. 21

с направлениями осей координат. Тогда, вспоминая, что проекция  $a_n$  любого вектора  $a$  на ось  $ON$  определяется по формуле

$$a_n = a \cos \varphi, \quad (2.3)$$

где  $\varphi$  — угол между вектором и выбранным на оси  $ON$  положительным направлением, будем иметь

$$F_x = F \cos \alpha, \quad F_y = F \cos \beta, \quad F_z = F \cos \gamma. \quad (2.4)$$

С другой стороны, по известному свойству диагонали прямоугольного параллелепипеда

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad (2.5)$$

причем берется, конечно, арифметическое значение корня.

Из формул (2.4) и (2.5) можем найти выражения косинусов углов силы с осями координат:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{F_x}{F} = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{F_y}{F} = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{F_z}{F} = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Формулы (2.4) определяют проекции силы по заданной ее величине и направлению действия, формулы (2.5) и (2.6), наоборот, определяют величину и направление силы по заданным проекциям силы. На рис. 22 показан другой прием получения проекций сил на оси координат: сначала сила проецируется на координатную плоскость, содержащую выбранную ось проекций, например  $Oy$  ( $A'B' = \text{пр. } \overrightarrow{AB} \text{ на плоскость } xy \text{ или } A''B'' = \text{пр. } \overrightarrow{AB} \text{ на плоскость } yz$ ),

затем полученный отрезок повторно проецируется на ось, лежащую в этой плоскости ( $A''B'' = \text{пр. } A'B' \text{ на ось } Oy \text{ или } A''B'' = \text{пр. } A''B'' \text{ на ось } Oy$ ). Этот прием бывает часто более удобным.

Пусть  $F_1, F_2, \dots, F_n$  представляют собой сходящуюся совокупность сил. В таком случае по формуле (2.1) их равнодействующая  $R$  равна их геометрической сумме, и по известной

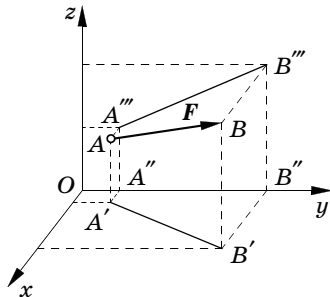


Рис. 22

теореме о проекции геометрической суммы векторов проекции  $\mathbf{R}$  на оси координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  будут равны

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}. \quad (2.7)$$

Проекции равнодействующей сходящейся совокупности сил на оси координат равны алгебраическим суммам проекций составляющих сил на эти оси.

Формулы (2.7) дают аналитические выражения проекций равнодействующей на оси координат. Зная проекции слагаемых сил  $F_{ix}$ ,  $F_{iy}$ ,  $F_{iz}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , по формулам (2.7) находим проекции равнодействующей  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$ , а затем по (2.5) и (2.6) — величину и направление равнодействующей:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad \cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}. \quad (2.8)$$

Формулы (2.7) и (2.8) полностью решают задачу об аналитическом определении равнодействующей по заданным составляющим силам.

### § 9. Уравнения равновесия твердого тела под действием сходящейся совокупности сил

Если тело под действием данной сходящейся совокупности сил находится в равновесии, то  $\mathbf{R} = 0$  и, следовательно,  $R_x = 0$ ,  $R_y = 0$ ,  $R_z = 0$ , и по (2.7) получаем следующие *уравнения равновесия тела под действием сходящейся совокупности сил*:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^n F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0, \\ R_y &= \sum_{i=1}^n F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0, \\ R_z &= \sum_{i=1}^n F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В случае сходящейся плоской совокупности сил можно принять плоскость, в которой расположены силы, за плоскость  $xOy$ ; тогда проекция любой силы на ось  $z$  будет равна нулю, третье уравнение равновесия будет выполнено тождественно и условия равновесия плоской совокупности сходящихся сил сведутся к двум уравнениям:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0. \quad (2.10)$$

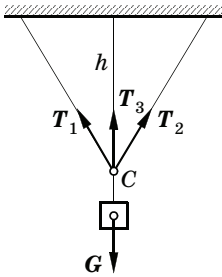


Рис. 23

Итак, необходимые и достаточные условия равновесия твердого тела, находящегося под действием совокупности сходящихся сил, сводятся к равенству нулю алгебраических сумм проекций на оси координат всех приложенных сил. Число уравнений равновесия равно *трем* в случае пространственной совокупности сил и *двум* — для плоской совокупности.

Число неизвестных, подлежащих определению при решении задач о равновесии тела, подверженного действию совокупности сходящихся сил, не должно превосходить числа уравнений, т. е. *двух* для плоской и *трех* для пространственной системы. Поэтому в тех задачах, где число неизвестных превышает число уравнений равновесия, методы статики твердого тела оказываются недостаточными для определения неизвестных. Так, например, если груз подвешен на трех лежащих в одной плоскости канатах (рис. 23), то из двух уравнений статики нельзя найти натяжений канатов.

Предположим сначала, что груз подвешен на двух канатах. Присоединение третьего каната, который для простоты предположим вертикальным, существенно изменяет распределение нагрузки на канаты; даже малое отклонение длины третьего каната от той длины  $h$ , которая определяет расстояние узла  $C$  от потолка, может привести или к полной разгрузке боковых канатов (если взятая длина несколько меньше, чем  $h$ ), или же к сохранению прежнего распределения нагрузки боковых канатов, причем вертикальный канат окажется незагруженным вовсе (если его длина превысит  $h$ ). Эти случаи являются крайними. Будем предполагать, что вес груза окажется распределенным между всеми канатами. Натяжения канатов можно определить, лишь используя дополнительные данные о сопротивляемости канатов растяжению. Поэтому рассматриваемая задача станет определенной, если к уравнениям статики твердого тела присоединить уравнение, вытекающее из рассмотрения деформаций канатов.

Задачи такого рода называются *статически неопределимыми*; другим примером статически неопределенной задачи является разыскание натяжений в четырех поддерживающих груз, не расположенных в одной плоскости канатах.

Рассмотрим примеры применения уравнений статики.

## § 10. Примеры

**Пример 7.** Груз  $G = 20$  кН (рис. 24) поднимается лебедкой при помощи каната, перекинутого через неподвижный блок в точке  $B$ . Пренебрегая трением в блоке, определить натяжение  $T$  бруса  $AB$  и усилие  $S$  в брус  $CB$ .

Выбрав оси координат, как показано на рисунке, будем иметь следующие два уравнения равновесия:

✓ уравнение проекций на ось  $Bx$ :

$$S \cos 30^\circ - T - Q \cos 60^\circ = 0;$$

✓ уравнение проекций на ось  $Bu$ :

$$-S \cos 60^\circ + Q \cos 30^\circ + G = 0.$$

Замечая, что по свойству идеального блока\*  $Q = G = 20$  кН, находим

$$S = 74,64 \text{ кН}, \quad T = 54,63 \text{ кН}.$$

**Пример 8.** Определить натяжения  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  (рис. 25) проволок  $OC$ ,  $OA$  и  $OB$ , если узел  $O$  нагружен гирей весом  $G$ . Плоскость проволок  $OA$  и  $OB$  наклонена к вертикали под углом  $\beta$  и перпендикулярна вертикальной плоскости, проходящей через ось проволоки  $OC$ . Сами проволоки расположены симметрично относительно указанной плоскости и образуют с нею углы  $\alpha$ .

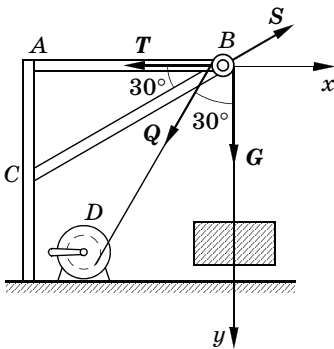


Рис. 24

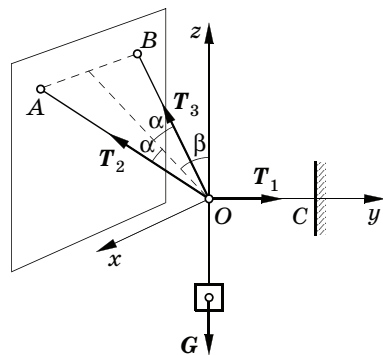


Рис. 25

\* Блок называется *идеальным*, если трением в шарнире можно пренебречь по сравнению с натяжениями веревок. Тогда линия действия реакции оси блока пройдет через его центр и на основании теоремы о трех силах будет направлена по биссектрисе угла между силами  $Q$  и  $G$ . Поэтому *при равновесии* идеальный блок изменяет направление передаваемого усилия, но сохраняет неизменной его величину.



Выбираем оси:  $Ox$  — по линии пересечения плоскости проволок  $AOB$  с проходящей через точку  $O$  горизонтальной плоскостью,  $Oy$  — по проволоке  $OC$ ,  $Oz$  — по вертикали вверх. Составляем затем уравнения равновесия:

✓ уравнение проекций на ось  $Ox$ :

$$T_2 \sin \alpha - T_3 \sin \alpha = 0; \quad (\alpha)$$

✓ уравнение проекций на ось  $Oy$ :

$$T_1 - T_2 \cos \alpha \sin \beta - T_3 \cos \alpha \sin \beta = 0; \quad (\beta)$$

✓ уравнение проекций на ось  $Oz$ :

$$T_2 \cos \alpha \cos \beta + T_3 \cos \alpha \cos \beta - G = 0. \quad (\gamma)$$

При проецировании сил  $T_2$  и  $T_3$  на ось  $Oy$  вместо того, чтобы разыскивать углы между  $T_2$  и  $Oy$ , гораздо проще воспользоваться ранее указанным приемом: сначала спроецировать силу  $T_2$  на плоскость  $yOz$ , что даст  $T_2 \cos \alpha$ , а уже потом этот отрезок спроецировать на ось  $Oy$ .

Аналогично проецируем силы  $T_2$  и  $T_3$  на ось  $Oz$ . Из уравнения  $(\alpha)$  следует

$$T_2 = T_3,$$

о чем можно было догадаться и сразу из соображений симметрии. Из уравнения  $(\gamma)$  найдем

$$T_2 = T_3 = \frac{G}{2 \cos \alpha \cos \beta}.$$

Наконец, из уравнения  $(\beta)$  получим

$$T_1 = 2T_2 \cos \alpha \sin \beta = G \operatorname{tg} \beta.$$

### Глава III

## Приведение несходящейся совокупности сил к простейшему виду

### § 11. Момент силы относительно точки как вектор. Моменты силы относительно осей координат и их аналитические выражения

В постановке задачи о приведении несходящейся совокупности сил к простейшему виду важное значение приобретают два основных понятия статики: *момент силы относительно точки*

и *момент силы относительно оси*. Понятия эти исторически возникли в учении Архимеда о равновесии рычагов и впоследствии были обобщены на любые пространственные совокупности сил.

Напомним, что в этом учении момент силы относительно точки рассматривался в плоскости, проходящей через линию действия силы и точку, называемую *центром момента*, и определялся алгебраической величиной произведения величины силы на плечо, т. е. кратчайшее расстояние линии действия силы от центра момента; эта величина бралась со знаком *плюс* либо *минус* в зависимости от того, в какую сторону стремилась повернуть тело приложенная к нему сила.

При переходе к пространственной совокупности сил, с произвольным расположением их в пространстве, такое алгебраическое определение момента силы становится недостаточным. Появляется необходимость учесть различные возможные направления плоскостей, проходящих через линии действия сил совокупности и общий для них центр моментов.

Направление плоскости в пространстве, как известно, может быть задано перпендикуляром к этой плоскости. Чтобы одновременно определить величину момента силы относительно точки и направление плоскости, проходящей через линию действия силы и центр момента, естественно рассматривать момент силы  $m_0(\mathbf{F})$  относительно точки  $O$  (рис. 26) как *вектор*, приложенный в этой точке, равный по абсолютной величине произведению величины силы  $F$  на кратчайшее расстояние  $h$  от линии действия силы до центра момента, т. е. плечо, и направленный по перпендикуляру к плоскости, содержащей линию действия силы и центр момента, в ту или другую сторону, в зависимости от того, в каком на-

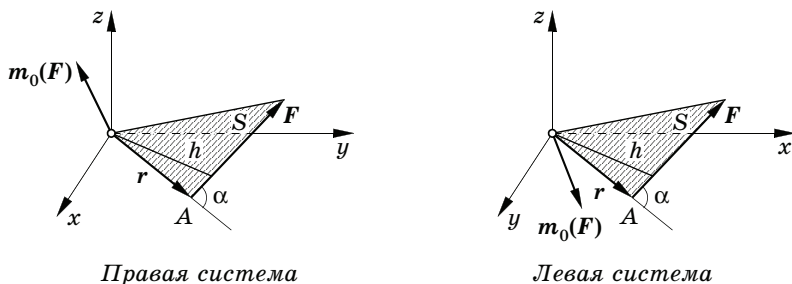


Рис. 26

правлении будет стремиться приложенная к телу сила повернуть его вокруг центра момента.

Чтобы *единым* образом определить сторону направления вектора  $m_O(\mathbf{F})$ , вспомним, что в выборе положительных направлений осей координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  имеется произвол, который может привести как к *правой* (в левой части рис. 26), так и к *левой* (в правой части рис. 26) системам координат.

Выберем *одинаковое* для обеих систем координат определение *положительного поворота*, как поворота оси  $Ox$  к оси  $Oy$  на угол  $\pi/2$ , если смотреть *вдоль* оси  $Oz$ . Иными словами, против вращения часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси  $z$ , в правой системе или по часовой стрелке — в левой.

Такой выбор положительного поворота приводит к следующей единой для обеих систем координат формулировке понятия вектора момента силы относительно точки.

*Моментом силы относительно точки (центра момента) назовем вектор, равный по величине произведению силы на кратчайшее расстояние от ее линии действия до центра момента (плечо силы) и направленный по перпендикуляру к плоскости, содержащей силу и центр момента, в ту сторону, чтобы для наблюдателя, смотрящего вдоль указанного стрелкой направления вектора момента или с его конца, поворот тела приложенной к нему силой был положительным.*

В дальнейшем будем пользоваться только *правой* системой координат. Это позволяет применять широко принятое *правило буравчика*, согласно которому положительным поворотом является поворот, вызывающий *внедрение* буравчика в материал.

Вышеприведенное определение, являясь более общим, т. е. справедливым безотносительно к тому, будет ли принятая система координат правой или левой, содержит в себе полезное с принципиальной стороны следующее дополнительное соображение. Как известно, истинный физический вектор, как, например, сила, скорость, ускорение, ни по величине, ни по направлению не может зависеть от выбора системы координат, при помощи которой он аналитически выражен (об этом см. далее гл. VIII, § 32). Вектор момента силы относительно точки, как это непосредственно следует из обоих рис. 26, такому условию не удовлетворяет. При переходе от правой системы координат к левой или наоборот вектор  $m_O(\mathbf{F})$ , сохраняя величину, меняет направление на противоположное. Такие векторы называют *псевдовекторами*, иногда *аксиальными векторами*. В дальнейшем

мы будем часто встречаться с такого рода векторами. К ним относятся, в частности, векторы угловой скорости, углового ускорения и др.

Легко видеть (рис. 26), что по численной величине момент силы относительно точки равен удвоенной площади  $2S$  треугольника, построенного на силе как на основании и с вершиной в центре момента. Вместо удвоенной площади треугольника можно взять площадь параллелограмма со сторонами, равными силе и отрезку  $r$ , соединяющему центр моментов с точкой приложения силы, так что

$$|m_o(\mathbf{F})| = Fr \sin \alpha. \quad (3.1)$$

Если сила не равна нулю, то момент ее может обратиться в нуль только тогда, когда плечо равно нулю, т. е. когда линия действия силы проходит через центр момента.

Если заданы величина и направление силы  $\mathbf{F}$  и ее момент  $m_o(\mathbf{F})$  относительно центра  $O$ , то этим вполне определяется линия действия силы.

Действительно, проведя через точку  $O$  плоскость  $\Pi$  (рис. 27), перпендикулярную вектору  $m_o(\mathbf{F})$ , мы найдем в этой плоскости искомую линию действия силы, если проведем от точки  $O$  на расстоянии, равном  $h = |m_o(\mathbf{F})|/F$ , линию, параллельную силе  $\mathbf{F}$ ; из двух возможных положений линии ( $LL$  и  $L'L'$ ) выбираем такое ( $LL$ ), чтобы сила  $\mathbf{F}$ , направленная вдоль нее, давала вектор момента заданного направления.

Рассматривая величину вектора момента  $m_o(\mathbf{F})$ , определяемую по формуле (3.1), и принимая во внимание его направление, приходим к заключению, что вектор момента  $m_o(\mathbf{F})$  представляет собой *векторное произведение*:

$$m_o(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (3.2)$$

в котором первый множитель,  $\mathbf{r}$ , есть вектор-радиус  $\overrightarrow{OA}$  (рис. 26) точки  $A$  приложения силы относительно центра моментов  $O$ . Действительно, по величине вектор  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  равен произведению  $rF \sin \alpha = hF$ , а по направлению совпадает с направлением перпендикуляра к плоскости векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{F}$  в ту сторону, чтобы, смотря вдоль него, видеть вращение  $\mathbf{r}$  к  $\mathbf{F}$  на наименьший угол в положительном направлении.

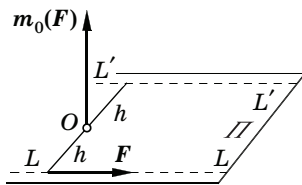


Рис. 27

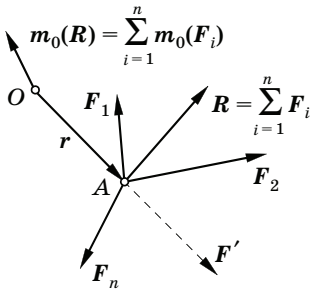


Рис. 28

Момент силы относительно некоторого центра равен векторному произведению вектора-радиуса точки приложения силы на вектор силы.

Известное свойство распределительности векторного произведения, заключающееся в том, что

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c} + \dots) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \dots,$$

выражает в применении к пространственной совокупности сходящихся сил теорему Вариньона.

**ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА.** Момент равнодействующей пространственной сходящейся совокупности сил относительно произвольной точки равен векторной сумме моментов слагаемых сил относительно той же точки.

Действительно (рис. 28), если совокупность сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$  сходится в точке  $A$ , то ее равнодействующая представляется силой

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i,$$

приложенной в той же точке  $A$ .

Возьмем какую-нибудь точку  $O$  и обозначим через  $\mathbf{r}$  вектор-радиус точки  $A$  относительно точки  $O$ . Тогда по определению момента равнодействующей и свойству распределительности найдем

$$\begin{aligned} m_O(\mathbf{R}) &= \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n) = \\ &= (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_1) + (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_2) + \dots + (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_n) = \\ &= m_O(\mathbf{F}_1) + m_O(\mathbf{F}_2) + \dots + m_O(\mathbf{F}_n), \end{aligned} \quad (3.3)$$

что и доказывает теорему.

Подчеркнем, что теорема Вариньона верна только для сходящейся совокупности сил, а также, как далее будет показано (§ 25), и для совокупности сил с параллельными друг другу линиями действия. Последний случай можно рассматривать как предельный, соответствующий удалению точки  $A$  пересечения линий действия на бесконечность.

В случае *несходящейся* совокупности сил, как это станет ясным из последующего, само представление о равнодействующей несходящейся совокупности сил будет лишено смысла и заменится более общим понятием *главного вектора*. Для дальнейшего полезно подчеркнуть, что присоединение к заданной сходящейся совокупности сил дополнительной силы  $F'$  (на рис. 28 показанной пунктиром) с линией действия, проходящей через центр моментов  $A$ , момента равнодействующей не изменяет.

Вектор момента силы относительно точки может быть спроецирован на оси координат. Покажем, что этим проекциям можно придать более простой смысл *моментов силы относительно оси*.

Введем сначала *векторное* представление о *составляющей вектора по плоскости*.

Чтобы получить составляющую вектора силы  $F$  по плоскости  $\Pi$  (рис. 29), опустим из начала  $A$  и конца  $B$  вектора  $F$  перпендикуляры  $AA'$  и  $BB'$  на плоскость  $\Pi$ ; определенному таким образом отрезку  $A'B'$  сообщим направление от  $A'$  к  $B'$ , соответствующее направлению вектора  $F$ . Вектор  $F_{\Pi}$ , лежащий в плоскости  $\Pi$ , и будет искомой составляющей силы  $F$  по плоскости  $\Pi$ .

Введем теперь в плоскости  $\Pi$  момент силы  $F_{\Pi}$  относительно центра  $O$ , определенный алгебраически как произведение величины  $F_{\Pi}$  на плечо  $h'$  со знаком *плюс* либо *минус* в зависимости от направления вращения тела силой  $F_{\Pi}$ .

Алгебраическую величину момента составляющей силы  $F_{\Pi}$  по плоскости  $\Pi$  относительно точки пересечения оси  $Ox$  с плоскостью  $\Pi$ , взятую со знаком *плюс* либо *минус* в зависимости от того, будет ли поворот тела вокруг оси  $Ox$  составляющей силой  $F_{\Pi}$  по плоскости  $\Pi$  положительным или отрицательным, на-

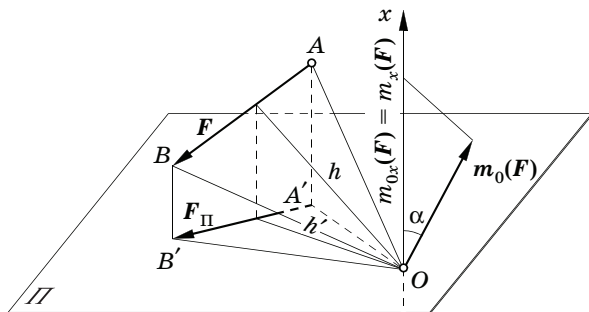


Рис. 29

зовем *моментом силы относительно оси  $Ox$*  и будем обозначать символом  $m_x(\mathbf{F})$  (аналогично вводятся  $m_y(\mathbf{F})$ ,  $m_z(\mathbf{F})$ ).

Из определения момента силы относительно оси следует, что он может быть *равным нулю* в двух случаях:

- ✓ если линия действия силы пересекается с осью;
- ✓ если линия действия силы параллельна оси, т. е. если сила и ось лежат в одной плоскости.

Приняв указанное определение момента силы относительно оси, легко доказать следующую теорему.

**ТЕОРЕМА.** *Проекция вектора момента силы относительно некоторой точки на ось, проходящую через точку, равна моменту силы относительно этой оси.*

Для доказательства заметим, что проекция  $m_{Ox}(\mathbf{F})$  вектора момента  $m_O(\mathbf{F})$  силы  $\mathbf{F}$  относительно точки  $O$  (рис. 29) на некоторую ось  $Ox$  равна\*

$$m_{Ox}(\mathbf{F}) = |m_O(\mathbf{F})| \cos \alpha = 2 \text{ пл. } \triangle OAB \cos \alpha = \pm 2 \text{ пл. } \triangle OA'B',$$

так как угол  $\alpha$  между вектором  $m_O(\mathbf{F})$  и осью  $x$  равен углу между плоскостью  $\triangle OAB$  и плоскостью  $\Pi$ , а площадь  $\triangle OA'B'$  есть проекция площади  $\triangle OAB$ ; вместе с тем, согласно определению момента силы относительно оси,

$$\pm 2 \text{ пл. } \triangle OA'B' = m_x(\mathbf{F})$$

и, следовательно,

$$m_{Ox}(\mathbf{F}) = m_x(\mathbf{F}), \quad (3.4)$$

что и требовалось доказать.

Если сила  $\mathbf{F}$  задана аналитически, т. е. своими проекциями  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  и координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  точки приложения, то по формулам (3.2) и (3.4) имеем

$$m_x(\mathbf{F}) = m_{Ox}(\mathbf{F}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_x.$$

Вспоминая выражение проекций векторного произведения на оси координат, найдем следующие *аналитические выражения моментов силы относительно осей координат*:

$$m_x(\mathbf{F}) = yF_z - zF_y, \quad m_y(\mathbf{F}) = zF_x - xF_z, \quad m_z(\mathbf{F}) = xF_y - yF_x. \quad (3.5)$$

\* Площадь треугольника представляет собой положительную величину; поэтому знак *плюс* или *минус* должен быть взят в зависимости от знака  $\cos \alpha$ .

Вводя единичные векторы (орты) осей координат  $i, j, k$ , можно переписать систему равенств (3.5) в форме одного векторного равенства:

$$m_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (3.6)$$

Раскладывая этот определитель по элементам первой строки, получим

$$m_O(\mathbf{F}) = \mathbf{i} (yF_z - zF_y) + \mathbf{j} (zF_x - xF_z) + \mathbf{k} (xF_y - yF_x),$$

что эквивалентно системе равенств (3.5).

Формулы (3.5) можно было бы получить также, заменяя силу  $\mathbf{F}$  ее составляющими по осям координат  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$  (рис. 30). Воспользовавшись теоремой Вариньона о моменте равнодействующей сходящейся системы сил, получим

$$\begin{aligned} m_x(\mathbf{F}) &= m_{Ox}(\mathbf{F}) = m_{Ox}(\mathbf{F}_1) + m_{Ox}(\mathbf{F}_2) + m_{Ox}(\mathbf{F}_3) = \\ &= m_x(\mathbf{F}_1) + m_x(\mathbf{F}_2) + m_x(\mathbf{F}_3) = 0 - zF_y + yF_z = yF_z - zF_y \end{aligned}$$

и аналогично для моментов относительно осей  $y$  и  $z$ .

Составим еще выражение для момента силы относительно оси  $OL$  любого направления, проходящей через начало координат. Направление оси  $OL$  зададим единичным вектором  $l$ ; проекции  $l$  на оси координат представляют собой косинусы углов между  $OL$  и координатными осями:

$$l_x = \cos \alpha, \quad l_y = \cos \beta, \quad l_z = \cos \gamma.$$

Согласно только что доказанной теореме момент силы относительно оси  $OL$  равен проекции на эту ось вектора момента силы относительно точки на оси, т. е. по определению скалярного произведения

$$m_L(\mathbf{F}) = |m_O(\mathbf{F})| \cos \delta = l \cdot m_O(\mathbf{F}),$$

где  $\delta$  — угол между осью  $OL$  и вектором  $m_O(\mathbf{F})$ .

Вспоминая о том, что скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их одноименных проекций на оси координат:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

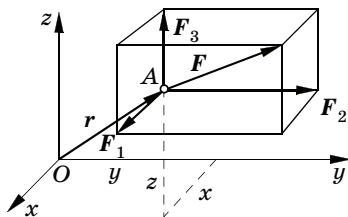


Рис. 30



будем иметь

$$m_L(\mathbf{F}) = m_{Ox}(\mathbf{F}) \cos \alpha + m_{Oy}(\mathbf{F}) \cos \beta + m_{Oz}(\mathbf{F}) \cos \gamma,$$

или, по формулам (3.4) и (3.5),

$$\begin{aligned} m_L(\mathbf{F}) &= m_x(\mathbf{F}) \cos \alpha + m_y(\mathbf{F}) \cos \beta + m_z(\mathbf{F}) \cos \gamma = \\ &= (yF_z - zF_y) \cos \alpha + (zF_x - xF_z) \cos \beta + (xF_y - yF_x) \cos \gamma. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Это выражение можно также представить в виде определителя

$$m_L(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

## § 12. Пара сил и ее момент. Свойства пар. Сложение пар

*Парой сил* называют совокупность двух равных по величине сил, имеющих параллельные линии действия, но направленных в разные стороны. Плоскость, проведенная через линии действия сил пары, образует *плоскость пары*.

Рассмотрим в плоскости  $\Pi$  пары (рис. 31) две равные по величине, параллельные, но противоположные по направлению силы  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Q} = -\mathbf{P}$ , образующие пару. Обозначим векторы-радиусы точек  $A$  и  $B$  приложения сил  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  через  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$  соответственно. Сумму векторов моментов этих сил относительно произвольного центра  $O$ , равную,

$$\begin{aligned} m_O(\mathbf{P}) + m_O(\mathbf{Q}) &= (\mathbf{r} \times \mathbf{P}) + (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{Q}) = \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{P} - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{P} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{P} = \mathbf{m}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

не зависящую от выбора центра моментов  $O$ , а только от вектора  $\overrightarrow{BA} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ , определяющего взаимное расположение точек  $A$  и  $B$ , назовем *моментом пары сил* и обозначим через  $\mathbf{m}$ .

Согласно определению момента пары (3.9), длина этого вектора равна (рис. 31)

$$m = P|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \sin \alpha = P \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \sin \alpha = Ph,$$

где кратчайшее расстояние  $h$  между линиями действия сил пары называется *плечом пары*. Момент пары  $\mathbf{m}$  направлен по перпендикуляру к плоскости  $\Pi$  пары, причем так, чтобы, смотря *вдоль* указанного стрелкой его направления, увидеть поворот тела парой сил положительным, т. е. при пользовании правой

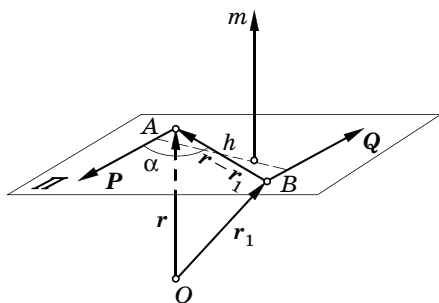


Рис. 31

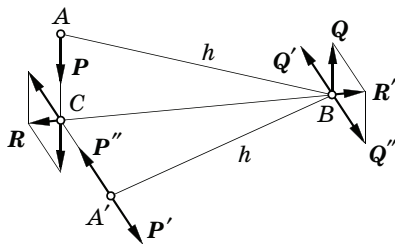


Рис. 32

системой координат, вектор  $m$  направлен по ходу винта с правой нарезкой.

Момент пары вполне определяет статическое действие пары на абсолютно твердое тело. Иными словами, справедлива следующая теорема.

**ТЕОРЕМА.** Две пары с одинаковыми по величине, направлению и стороне поворота моментами статически эквивалентны.

Эту почти очевидную теорему докажем по частям.

1°. Не нарушая действия пары на абсолютно твердое тело, ее можно повернуть в своей плоскости на произвольный угол.

Пусть к твердому телу приложена пара сил (рис. 32)  $(P, Q)$  с плечом  $\overline{AB} = h$ , стремящаяся повернуть тело против часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего на рисунок). Проведем через точку  $B$  отрезок  $A'B$ , равный по величине  $\overline{AB} = h$ , и в точках  $A'$  и  $B$  приложим эквивалентную нулю совокупность сил  $P', P'', Q', Q''$ , не изменяющую действия пары. Сложим по правилу параллелограмма силы  $P$  и  $P''$ , перенесенные вдоль линий своего действия в точку  $C$ , в одну равнодействующую  $R$  и аналогично поступим с силами  $Q$  и  $Q''$ , приводящимися к одной равнодействующей  $R'$ . Силы  $R$  и  $R'$ , очевидно, уравниваются, и к твердому телу остается приложенной лишь пара сил  $(P', Q')$  с плечом  $\overline{A'B} = h$ , т. е. пара  $(P, Q)$  статически эквивалентна паре  $(P', Q')$ , повернутой по отношению к паре  $(P, Q)$  на произвольный угол. Моменты этих двух пар равны друг другу. Поворачивая пару и перемещая силы пары вдоль их линий действия, сможем, не нарушая ее действия, *переносить пару в любое место в ее плоскости.*

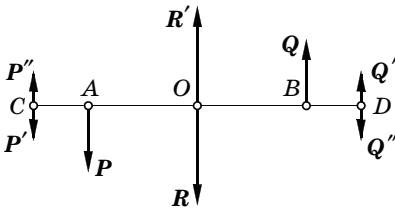


Рис. 33

2°. Не изменяя действия пары, можно менять величину входящей в нее силы и длину плеча, но так, чтобы их произведение — абсолютная величина момента — сохранялась.

Пусть дана пара  $(P, Q)$  (рис. 33) с плечом  $AB = h$ . Отложим от середины плеча  $O$  в обе стороны равные отрезки  $OC$  и  $OD$  и в точках  $C$  и  $D$  по две *уравновешивающиеся* силы  $(P', P'')$  и  $(Q', Q'')$ . Полученная таким образом совокупность шести сил  $P, Q, P', Q', P'', Q''$  статически эквивалентна паре сил  $(P, Q)$ . Равнодействующая двух неравных, параллельных друг другу и направленных в ту же сторону сил, как известно из курса физики, равна по величине их сумме, направлена в ту же сторону, что и складываемые силы, причем точка приложения равнодействующей лежит на отрезке, соединяющем точки приложения слагаемых сил, и делит этот отрезок обратно пропорционально величинам слагаемых сил.

Сложим силы  $P$  и  $Q''$  (рис. 33). Их равнодействующая  $R$  будет равна сумме  $R = P + Q''$ , направлена параллельно им в ту же сторону, а точка приложения равнодействующей окажется в точке  $O$ , так как по условию  $P \cdot \overline{OA} = Q'' \cdot \overline{OD}$ . Аналогично, складывая силы  $Q$  и  $P''$ , получим равнодействующую  $R'$ , равную сумме тех же по величине сил, совпадающую по линии действия с силой  $R$ , но направленную, по сравнению с  $R$ , в противоположную сторону. Силы  $R$  и  $R'$  взаимно уничтожаются, и остается лишь пара сил  $(P', Q')$ , статически эквивалентная паре сил  $(P, Q)$ , что и доказывает вышесформулированную теорему.

Аналогичным приемом доказывается и необходимое для дальнейшего последнее свойство пар сил.

3°. Не изменяя действия пары на абсолютно твердое тело, можно менять плоскость пары на любую параллельную ей плоскость.

Пусть в плоскости  $\Pi$  (рис. 34) задана пара сил  $(P, Q)$  с плечом  $AB$ . В любой другой, но параллельной  $\Pi$  плоскости  $\Pi'$  проведем отрезок  $A'B'$ , равный и параллельный отрезку  $AB$ , и в точках  $A'$  и  $B'$  отложим, как и в предыдущем пункте, взаимно друг друга уравновешивающую совокупность четырех параллельных  $P$  и  $Q$

сил  $P', P'', Q', Q''$ . Полученная таким образом совокупность шести сил  $P, Q, P', Q', P'', Q''$  статически эквивалентна заданной паре  $(P, Q)$ . Складывая теперь по отдельности параллельные силы  $P$  и  $Q''$  и  $Q$  и  $P''$ , приходим, очевидно, к двум уравновешивающим друг друга равнодействующим  $R$  и  $R'$ , так что остающаяся пара сил  $(P', Q')$  соответствует образу пары сил  $(P, Q)$ , перенесенной из плоскости  $\Pi$  в параллельную ей плоскость  $\Pi'$ .

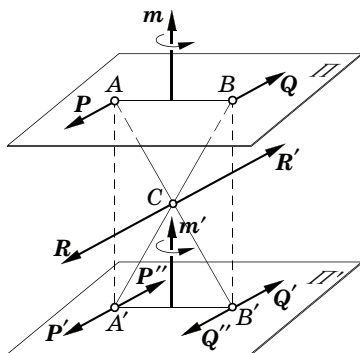


Рис. 34

Изложенные в пп. 1°, 2° и 3° свойства пар приводят к заключению, что единственной, полностью определяющей ее действие количественной характеристикой пары является ранее введенный вектор  $m$  момента пары. Вектор  $m$  не имеет ни определенной точки приложения, ни линии действия, т. е. не является ни приложенным, ни скользящим вектором, а задается лишь своей величиной и направлением. Такие векторы называют *свободными векторами*.

Докажем следующую теорему.

**ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ ПАР.** Совокупность пар, как угодно расположенных в пространстве, статически эквивалентна одной паре с моментом, равным векторной сумме моментов слагаемых пар.

Сложим две пары  $(P_1, Q_1)$  и  $(P_2, Q_2)$  (рис. 35) с моментами  $m_1$  и  $m_2$ . Для этого, предполагая, что в общем случае плоскости пар  $\Pi$  и  $\Pi'$  не параллельны, отметим линию пересечения их  $LL$ , отложим на ней отрезок  $AB$  и приведем, на основании п. 2°, обе пары

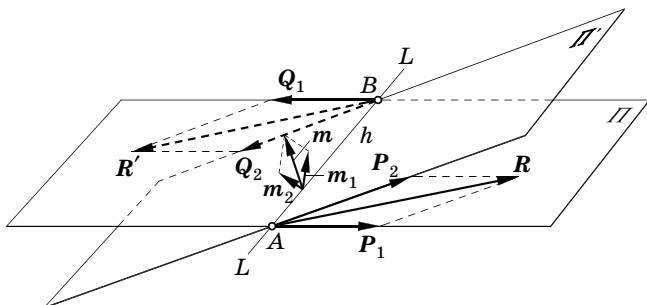


Рис. 35

к одному плечу  $\overline{AB} = h$ . При этом силы  $P_1, P_2$  и силы  $Q_1, Q_2$  будут соответственно приложены в точках  $A$  и  $B$ . Складывая эти силы по правилу параллелограмма, придем к равнодействующей паре сил  $(R, R')$ . По теореме Вариньона (§ 11) моменты силы  $R$  и силы  $R'$  относительно любой точки  $O$  будут равны сумме моментов слагаемых сил, т. е.

$$\begin{aligned} m_O(R) &= m_O(P_1) + m_O(P_2), \\ m_O(R') &= m_O(Q_1) + m_O(Q_2), \end{aligned} \quad (3.10)$$

а искомый момент  $m$  равнодействующей пары  $(R, R')$  по формуле (3.9) будет равен сумме моментов:

$$\begin{aligned} m &= m_O(R) + m_O(R') = \\ &= m_O(P_1) + m_O(Q_1) + m_O(P_2) + m_O(Q_2) = m_1 + m_2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Таким образом, теорема о сложении пар доказана. В случаях пар сил с параллельными плоскостями, а следовательно, и моментами сложение векторов моментов упрощается и сводится к сложению векторов  $m_1$  и  $m_2$ , расположенных вдоль одной прямой и направленных в одну или разные стороны. Сложение многих пар сил производится по правилу векторного многоугольника (§ 6) их моментов.

### § 13. Приведение пространственной несходящейся совокупности сил к одной силе и одной паре.

#### Главный вектор и главный момент совокупности сил

Как уже упоминалось, основной задачей статики, а следовательно, и ее применений в динамике, является *приведение заданной несходящейся совокупности сил к простейшему виду*.

Остановимся на общепринятом *методе Пуансо* ([9]) приведения несходящейся совокупности сил к одной силе и одной паре сил. Метод этот основан на изложенных в § 12 свойствах пространственных пар сил и операции их сложения или разложения.

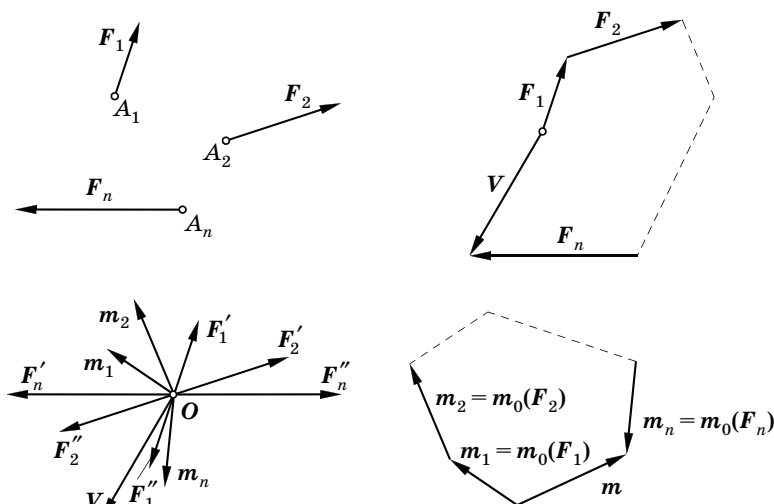


Рис. 36

Предположим, что к абсолютно твердому телу в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$  (рис. 36) приложена пространственная несходящаяся система сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Возьмем произвольную, принадлежащую телу или условно к нему жестко присоединенную точку  $O$ , и назовем ее *центром приведения*. Применим следующий лежащий в основе метода Пуансо общий прием переноса сил с точками приложения  $A_1, A_2, \dots, A_n$  в одну точку — центр приведения  $O$ . Приложим в точке  $O$  две взаимно уравновешивающие друг друга силы  $F'_1$  и  $F''_1$ , равные по абсолютной величине силе  $F_1$ , параллельные  $F_1$ , но направленные в разные стороны. Затем аналогичную операцию произведем над силой  $F_2$ , приложив к центру приведения  $O$  две друг друга уравновешивающие силы  $F'_2$  и  $F''_2$ , и т. д.

Силу  $F'_1$  можно рассматривать как силу  $F_1$ , *перенесенную из точки  $A_1$  в точку  $O$* , а совокупность двух равных, параллельных, но направленных в противоположные стороны сил  $(F_1, F''_1)$  — как «присоединенную» *пару сил* с моментом  $m_1$ . Точно так же сила  $F_2$  может быть перенесена из точки  $A_2$  в точку  $O$ , а пара сил  $(F_2, F''_2)$  с моментом  $m_2$  будет служить «присоединенной» парой сил и т. д. Продолжая идти тем же путем, приведем заданную произвольную несходящуюся совокупность сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$  к эквивалентной ей сходящейся совокупности сил  $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$

в точке  $O$  и к совокупности пар с моментами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , являющимися свободными векторами (§ 12).

Сходящаяся совокупность сил  $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$  эквивалентна одной силе, равной сумме

$$V = F'_1 + F'_2 + \dots + F'_n$$

или, что все равно с точки зрения построения силового многоугольника,

$$V = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i. \quad (3.12)$$

Вектор, полученный геометрическим сложением совокупности векторов, т. е. вектор, определяемый замыкающей стороной многоугольника, будем называть *главным вектором* совокупности векторов. Главный вектор не заменяет физически действия совокупности векторов, суммированием которых он получен. Говоря, что вектор  $V$  есть главный вектор совокупности сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , а не равнодействующая той же совокупности сил, мы подчеркиваем, что сила  $V$  не может заменить действия совокупности сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , т. е. не эквивалентна этой совокупности сил. Сила  $V$  является равнодействующей совокупности сил  $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$ , а не заданной совокупности сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$ .

Особенно отчетливо сказывается разница между понятиями главного вектора и равнодействующей в случае совокупности сил, приложенных к различным телам. В этом случае понятие равнодействующей вообще не имеет смысла, так как нельзя складывать силы, приложенные к различным телам; главный же вектор такой совокупности можно построить.

Итак, полученный вектор  $V$ , приложенный в выбранном по произволу центре приведения  $O$ , является главным вектором приложенных к телу сил.

Рассмотрим теперь совокупность присоединенных пар; по теореме, доказанной в § 12, эта совокупность пар эквивалентна одной паре с моментом  $m$ , равным геометрической сумме моментов слагаемых пар:

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n. \quad (3.13)$$

Вспоминая, что момент пары всегда можно рассматривать как сумму моментов входящих в пару сил относительно произвольной точки (§ 12), имеем, например, для пары сил  $F_1, F'_1$

$$m_1 = m_O(\mathbf{F}_1) + m_O(\mathbf{F}'_1) = m_O(\mathbf{F}_1),$$

так как линия действия силы  $\mathbf{F}'_1$  проходит через точку  $O$ .

Момент присоединенной пары равен моменту приложенной к телу силы относительно выбранного центра приведения.

Аналогичным образом получим

$$m_2 = m_O(\mathbf{F}_2), \dots, m_n = m_O(\mathbf{F}_n) \quad (3.14)$$

и согласно (3.13) найдем

$$\mathbf{m} = m_O(\mathbf{F}_1) + m_O(\mathbf{F}_2) + \dots + m_O(\mathbf{F}_n). \quad (3.15)$$

Вектор  $\mathbf{m}$ , равный геометрической сумме моментов приложенных к телу сил относительно произвольного центра приведения, назовем *главным моментом* совокупности сил относительно центра приведения и будем обозначать  $\mathbf{m}^{(O)}$ .

Метод Пуансо приводит к следующей общей теореме.

#### ОБЩАЯ ТЕОРЕМА СТАТИКИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА.

*Произвольная пространственная несходящаяся совокупность сил, действующая на абсолютно твердое тело, статически эквивалентна одной силе — главному вектору, приложенному в произвольно выбранной точке тела (в центре приведения), и одной паре с моментом, равным главному моменту сил относительно центра приведения.*

В аналитических методах расчета пространственных несходящихся совокупностей сил главный вектор  $\mathbf{V}$  заменяют проекциями его  $V_x, V_y, V_z$  на выбранные оси координат, а главный момент  $\mathbf{m}^{(O)}$  относительно начала координат  $O$  — проекциями  $m_x^{(O)}, m_y^{(O)}, m_z^{(O)}$ , равными, согласно соотношениям (3.14) и (3.15),

$$\begin{aligned} m_x^{(O)} &= \sum_{i=1}^n m_{Ox}(\mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^n m_x(\mathbf{F}_i), \\ m_y^{(O)} &= \sum_{i=1}^n m_{Oy}(\mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^n m_y(\mathbf{F}_i), \\ m_z^{(O)} &= \sum_{i=1}^n m_{Oz}(\mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^n m_z(\mathbf{F}_i). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Алгебраическую сумму моментов всех входящих в совокупность сил относительно некоторой оси называют *главным моментом* совокупности сил относительно этой оси.



Главные моменты относительно осей  $x, y, z$  будем обозначать  $m_x, m_y, m_z$ .

Согласно этому определению и уравнениям (3.16) имеем

$$m_x^{(O)} = m_x, \quad m_y^{(O)} = m_y, \quad m_z^{(O)} = m_z. \quad (3.17)$$

Соответственно формулам (3.5) найдем теперь по формулам (3.16) *аналитические выражения для главных моментов совокупности сил относительно осей координат*:

$$\begin{aligned} m_x &= \sum_{i=1}^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}), \\ m_y &= \sum_{i=1}^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}), \\ m_z &= \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Здесь  $F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}$  — проекции сил  $F_i$  на оси координат, а  $x_i, y_i, z_i$  — координаты точек их приложения.

#### § 14. Уравнения равновесия абсолютно твердого тела под действием несходящейся совокупности сил

Рассмотрим теперь условия равновесия абсолютно твердого тела под действием пространственной несходящейся совокупности сил. Подчеркнем, что под равновесием в случае твердого тела понимается его относительный покой в данной системе координат, а не движение «по инерции», которое в случае твердого тела, не подверженного действию внешних сил и пар, в зависимости от его формы и распределения в нем массы может быть очень сложным.

Определяя так понятие равновесия абсолютно твердого тела, получим условия равновесия в виде равенств нулю главного вектора и главного момента сил:

$$V = 0, \quad m^{(O)} = 0. \quad (3.19)$$

Очевидно, что под действием такой совокупности сил свободное твердое тело сохранит свой относительный покой. Обратное, если равновесие имеет место, то должны быть выполнены условия (3.19). Действительно, если бы, например, было  $V \neq 0$ ,  $m^{(O)} = 0$ , то совокупность сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$  привелась бы к одной силе  $V$ , приложенной в точке  $O$ , и равновесия не было бы; при

$V = 0$ , но  $m^{(O)} \neq 0$  мы имели бы пару и равновесия также не было бы. Не будет равновесия и при  $V \neq 0$  и  $m^{(O)} \neq 0$ , так как сила и пара не могут уравновесить друг друга. Итак, условия (3.19), которые, согласно (3.12) и (3.15), можно также записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n &= \mathbf{0}, \\ m_O(\mathbf{F}_1) + m_O(\mathbf{F}_2) + \dots + m_O(\mathbf{F}_n) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

представляют собой *необходимые и достаточные условия равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием совокупности сил, произвольным образом расположенных в пространстве.*

Два векторных условия (3.20) могут быть в общем случае приведены к шести алгебраическим уравнениям; для этого надо спроецировать левые части этих уравнений на три оси координат, произвольно выбранные в пространстве. Тогда, вспоминая еще, что проекция вектора момента тела на ось равна моменту относительно оси, будем иметь следующие шесть уравнений равновесия абсолютно твердого тела:

$$\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} &= \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \\ F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} &= \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \\ F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} &= \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, \\ m_x(\mathbf{F}_1) + m_x(\mathbf{F}_2) + \dots + m_x(\mathbf{F}_n) &= \sum_{i=1}^n m_x(\mathbf{F}_i) = 0, \\ m_y(\mathbf{F}_1) + m_y(\mathbf{F}_2) + \dots + m_y(\mathbf{F}_n) &= \sum_{i=1}^n m_y(\mathbf{F}_i) = 0, \\ m_z(\mathbf{F}_1) + m_z(\mathbf{F}_2) + \dots + m_z(\mathbf{F}_n) &= \sum_{i=1}^n m_z(\mathbf{F}_i) = 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

которые выражают следующее положение.

*При равновесии твердого тела под действием пространственной совокупности сил суммы проекций приложенных сил на оси координат и суммы моментов приложенных сил относительно осей координат обращаются в нуль.*

В отдельных частных случаях некоторые из этих шести уравнений могут выполняться тождественно; при этом число уравнений равновесия уменьшается. Отметим важнейшие из этих частных случаев.

■ **Сходящаяся совокупность сил.** Выбирая точку, в которой сходятся линии действия сил, за центр моментов, заметим, что левые части последних трех уравнений (3.21) тождественно обратятся в нуль, так как линии действия сил пересекут оси координат. В соответствии с теорией, изложенной в § 9, число уравнений равновесия сокращается до трех уравнений проекций на оси координат.

■ **Плоская совокупность сил,** т. е. такая, что *все силы совокупности лежат в одной плоскости.* Расположим ось  $z$  перпендикулярно плоскости действия сил. Тогда тождественно обратятся в нуль левые части третьего уравнения (3.21), так как силы перпендикулярны оси, и четвертого, и пятого, так как линии действия сил пересекают ось моментов или параллельны ей.

Остающиеся при этом уравнения равновесия тела под действием плоской совокупности сил будут

$$\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} &= \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \\ F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} &= \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \\ m_z(F_1) + m_z(F_2) + \dots + m_z(F_n) &= \sum_{i=1}^n m_z(F_i) = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

■ **Совокупность параллельных сил.** Направим ось  $z$  параллельно линиям действия сил; тогда первые два и последнее уравнения системы (3.21) выполняются тождественно, и уравнения

$$\begin{aligned} F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} &= \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, \\ m_x(F_1) + m_x(F_2) + \dots + m_x(F_n) &= \sum_{i=1}^n m_x(F_i) = 0, \\ m_y(F_1) + m_y(F_2) + \dots + m_y(F_n) &= \sum_{i=1}^n m_y(F_i) = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

будут служить уравнениями равновесия пространственной совокупности параллельных сил.

Возвращаясь к общему случаю совокупности сил, произвольно расположенных в пространстве, заметим, что задача будет *статически определенной*, если число неизвестных не превышает шести. Рассмотрим, какое число неизвестных вводят в задачу различные способы закрепления тела.

Неподвижное закрепление точки тела можно осуществить, например, при помощи *сферического шарнира*, т. е. приспособ-

ления, обеспечивающего неподвижность точки закрепления тела и допускающего возможность поворота тела вокруг любой оси, проходящей через эту точку. Реакция неподвижно закрепленной точки не известна ни по величине, ни по направлению; в уравнения статики войдут при этом *три* неизвестные проекции сил.

Закрепление тела может быть осуществлено также в форме *подпятника*, в форме конического или полусферического углубления, в которое вставляется тело своим коническим или сферическим концом, и т. д.

Реакция опоры, допускающей свободное перемещение тела вдоль некоторой оси, например реакция лишенного трения цилиндрического подшипника (или муфты, цилиндрического шарнира и т. п.), перпендикулярна этой оси. В уравнения статики при наличии соединения этого рода войдут *две* неизвестные проекции реакции. *Одну* неизвестную будем иметь в случае соприкосновения гладких тел (реакция нормальна к гладкой опорной поверхности), в случае подвижной опоры на катках и т. д.

Чтобы сделать неподвижным твердое тело, достаточно закрепить три его точки, не лежащие на одной прямой линии. Если закрепления осуществить, например, при помощи трех сферических шарниров, то в уравнения статики войдут *девять* неизвестных проекций реакций и задача будет *статически неопределенной*.

Прием придания неподвижности телу, при использовании которого задача нахождения реакций опорных закреплений оказывается статически определенной, состоит в том, что одна точка тела делается неподвижной (три неизвестные), вторая точка ставится в направляющий прямолинейный желобок и может перемещаться по его направлению (реакция перпендикулярна желобку — две неизвестные), третья точка опирается на гладкую плоскость и может по ней скользить в любом направлении (реакция перпендикулярна плоскости — одна неизвестная). Такой прием применяется в строительном деле, а также при установке физических приборов и геодезических инструментов. Он обеспечивает вполне неподвижную установку прибора всегда в одном и том же положении, а также оставляет возможность конструкции свободно расширяться при изменениях температуры.

Другой прием состоит в закреплении тела при помощи шести нерастяжимых стержней, шарнирно присоединенных концами к телу и опорам. Такое крепление может обеспечивать неподвижность тела при всевозможных способах его загрузки.

Условия обращения в нуль главного вектора и главного момента, конечно, не обязательно формулировать аналитически в форме уравнений (3.21). Чтобы обратить в нуль некоторый вектор, достаточно обратить в нуль его проекции на три любых (необязательно взаимно-перпендикулярных) направления, не лежащих в одной плоскости. Это допускает широкий произвол в выборе осей проекций и моментов, пользуясь которым можно максимально упростить вид уравнений статики в каждой частной задаче. Оси следует выбирать так, чтобы система шести уравнений распалась на несколько систем, в каждую из которых входила бы только часть неизвестных.

Например, можно доказать в общем виде, что в случае тела, закрепленного шестью стержнями, реакции стержней определяются из решения трех систем уравнений, в каждую из которых входят лишь две неизвестные.

Покажем это с помощью нескольких примеров, так как общее рассмотрение вопроса требует довольно сложных геометрических рассуждений.

В качестве первого примера рассмотрим ферму крана, поддерживаемую шестью попарно пересекающимися стержнями (рис. 37). Желая определить усилия  $T_5$  и  $T_6$ , мы можем составить одно уравнение моментов относительно показанной на рисунке пунктирной линии, соединяющей общие точки стержней 1, 2

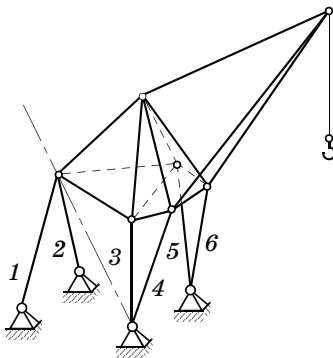


Рис. 37

и 3, 4; второе уравнение моментов надо будет составить относительно линии пересечения плоскостей (1, 2) и (3, 4), определяемых указанными стержнями. Если бы эти плоскости оказались параллельными, то второе уравнение пришлось бы написать в виде уравнения проекций на направление, перпендикулярное этим плоскостям. Аналогичным образом мы могли бы выписать две системы, состоящие каждая из двух уравнений, для определения реакций в стержнях 1, 2 и 3, 4.

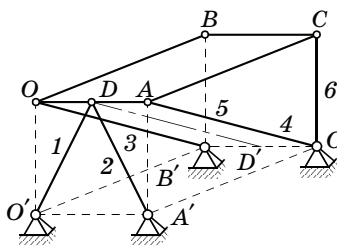


Рис. 38

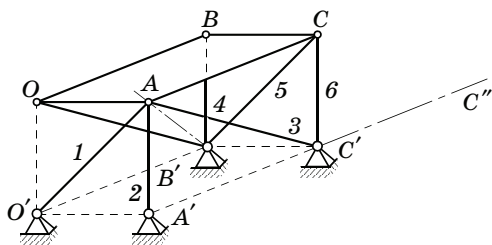


Рис. 39

На рис. 38 имеем более простую схему стержневой системы, поддерживающей плиту  $OACB$ ; ход решения задачи таков:

- ✓ уравнение моментов относительно оси  $OA$  и уравнение моментов относительно оси  $DD'$  определяют  $T_5$  и  $T_6$ ;
- ✓ уравнение моментов относительно оси  $A'A$  определяет  $T_3$ ;
- ✓ уравнение моментов относительно оси  $O'O$  определяет  $T_4$ ;
- ✓ уравнение моментов относительно оси  $B'C'$  и уравнение проекций всех сил на ось  $OA$  определяют  $T_1$  и  $T_2$ .

На рис. 39 имеем три стержня, пересекающихся в одной точке, и другие три стержня, лежащих в одной плоскости. Здесь можно определить каждую из неизвестных реакций по отдельности:

- ✓ уравнение моментов относительно оси  $CC'$  определяет  $T_1$ ;
- ✓ уравнение моментов относительно оси  $C'C''$ , проведенной в плоскости  $(4, 5, 6)$  параллельно стержню 5, определяет  $T_2$ ;
- ✓ уравнение проекций на ось  $AC$  определяет  $T_3$ ;
- ✓ уравнение моментов относительно оси  $AC$  определяет  $T_4$ ;
- ✓ уравнение моментов относительно оси  $AA'$  определяет  $T_5$ ;
- ✓ уравнение моментов относительно оси  $AB'$  определяет  $T_6$ .

Еще один случай представлен на рис. 40. Составив здесь уравнение моментов относительно оси  $CC'$ , убедимся, что это уравнение вовсе не будет содержать неизвестных реакций (стержни 2, 4 пересекают ось, стержни 1, 3, 5, 6 ей параллельны). Равновесие будет возможно, только если главный момент системы заданных нагрузок относительно указанной оси равен ну-

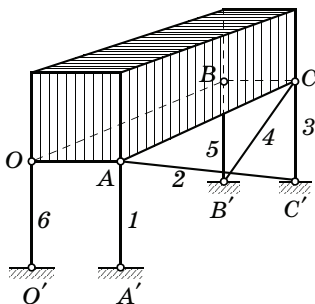


Рис. 40

лю. Если составить каким бы то ни было образом шесть уравнений статики для рассматриваемого случая, то определитель этих уравнений обратится в нуль, т. е. уравнения равновесия не будут независимы друг от друга. Система стержней не обеспечивает равновесия при произвольной системе нагрузок, и применения ее следует избегать.

Из приведенных рассуждений можно сделать вывод: при использовании уравнений равновесия можно, сохраняя достаточное их число, менять содержание каждого из них, т. е. не придерживаться обязательно трех уравнений проекций и трех уравнений моментов. Можно, когда это приводит к уменьшению числа неизвестных в данном уравнении, увеличивать количество уравнений проекций либо уравнений моментов. Сюда же можно отнести замечание о том, что с той же целью надо стремиться применять наиболее удачный выбор направлений осей проецирования и осей, относительно которых определяются моменты, так чтобы в каждое из уравнений входило наименьшее число неизвестных сил.

### § 15. Равновесие тела с двумя закрепленными точками

Предположим, что точки  $O$  и  $O'$  (рис. 41) закреплены; тогда тело будет иметь возможность поворачиваться вокруг оси  $OO'$ . Проекции на оси координат реакций в точках закрепления обозначим соответственно через  $N_1, N_2, N_3$  и  $N'_1, N'_2, N'_3$ .

Задача будет статически неопределенной; одна неизвестная окажется лишней, так как только пять из шести уравнений статики

будут содержать эти неизвестные: в уравнение моментов относительно оси  $z$  (ось вращения  $OO'$ ) реакции, пересекающие эту ось, не войдут.

Обозначим через  $F_1, F_2, \dots, F_n$  заданные силы, приложенные к телу. Три уравнения проекций сил будут

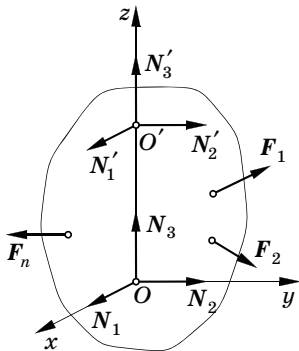


Рис. 41

$$\begin{aligned} N_1 + N'_1 + \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0, \\ N_2 + N'_2 + \sum_{i=1}^n F_{iy} &= 0, \\ N_3 + N'_3 + \sum_{i=1}^n F_{iz} &= 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

В уравнения моментов относительно осей  $x$  и  $y$  войдут только неизвестные составляющие  $N'_2$  и  $N'_1$  (составляющая  $N'_3$  по оси  $z$  пересекает эти оси). Обозначая длину  $OO'$  через  $h$ , получим

$$\begin{aligned} -hN'_2 + \sum_{i=1}^n m_x(\mathbf{F}_i) &= 0, \\ hN'_1 + \sum_{i=1}^n m_y(\mathbf{F}_i) &= 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Наконец, уравнение моментов относительно оси  $z$  не содержит реакций; оно имеет вид

$$\sum_{i=1}^n m_z(\mathbf{F}_i) = 0 \quad (3.26)$$

и выражает условие, налагаемое на силы  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ , обеспечивающее равновесие тела.

Из первых двух уравнений (3.24) и двух уравнений (3.25) определяются четыре поперечные реакции  $N_1, N_2, N'_1, N'_2$ .

Для определения двух продольных реакций  $N_3$  и  $N'_3$  остается лишь одно уравнение — последнее из уравнений (3.24). Из него находим сумму этих реакций; каждая же реакция по отдельности остается неопределимой, что естественно, так как прибавление или отбрасывание системы двух уравновешивающихся сил любой величины, направленных вдоль оси  $OO'$ , ничего не изменит в условиях равновесия тела.

Статическая неопределимость устраняется, если предположить, что в одной из точек закрепления, например  $O'$ , имеется подшипник; при отсутствии в нем трения  $N'_3 = 0$ , и  $N_3$  может быть найдено из последнего уравнения (3.24).

## § 16. Примеры

В настоящем параграфе приводятся примеры решения задач как на плоские, так и на пространственные совокупности сил.

**Пример 9.** Реактивный самолет (рис. 42) весом  $P$  под действием постоянной реактивной тяги  $T$  летит поступательно, прямолинейно и равномерно под углом  $\alpha$  к горизонтальной плоскости. Располагаясь указанными на рисунке размерами  $a, b$  и  $c$ , определить отношение  $K$  полной подъемной силы, равной сумме подъемных сил крыла  $L$

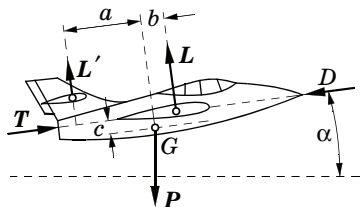


Рис. 42



и стабилизатора  $L'$ , к полному сопротивлению самолета  $D$  (это отношение называют суммарным *качеством* самолета), а также отдельно  $L$ ,  $L'$  и  $D$ , выразив их через заданные вес  $P$  и тягу  $T$ .

Проецируя совокупность приложенных сил один раз на продольную, другой — на поперечную оси, получим

$$D = T - P \sin \alpha, \quad L + L' = P \cos \alpha, \quad (\alpha)$$

так что на первый вопрос сразу получается ответ:

$$K = \frac{L + L'}{D} = \frac{P \cos \alpha}{T - P \sin \alpha}.$$

Для отдельного определения  $L$  и  $L'$  составим уравнение моментов относительно центра тяжести  $G$  самолета:

$$(T - D)c + L'a - Lb = 0. \quad (\beta)$$

Используя уравнения  $(\alpha)$  и  $(\beta)$ , найдем

$$L = \frac{a \cos \alpha + c \sin \alpha}{a + b} P, \quad L' = \frac{b \cos \alpha - c \sin \alpha}{a + b} P.$$

**Пример 10.** Катер на подводных крыльях (рис. 43) движется поступательно, прямолинейно и равномерно, опираясь на крылья с центрами в точках  $A$  (передние крылья) и  $B$  (задние крылья), расположенных на расстоянии  $h$  от горизонтали, проходящей через центр тяжести  $G$  катера. Считая, что движение происходит на режиме полного выхода катера над водой, определить подъемные силы передних крыльев ( $L_1$ ) и задних крыльев ( $L_2$ ), а также их сопротивления ( $D_1$  и  $D_2$ ) по заданному весу катера  $P$  и тяге винта  $T$ . Пользуясь терминами (см. пример 9) *качества* крыла  $K$  для отношения подъемной силы крыла к его сопротивлению и *обратного качества*  $\mu = 1/K$ , найти условие, которому должны быть подчинены *качества* передних и задних крыльев при равновесии катера, заданных  $P$  и  $T$ , а также при указанном на рисунке расположении линий действия сил.

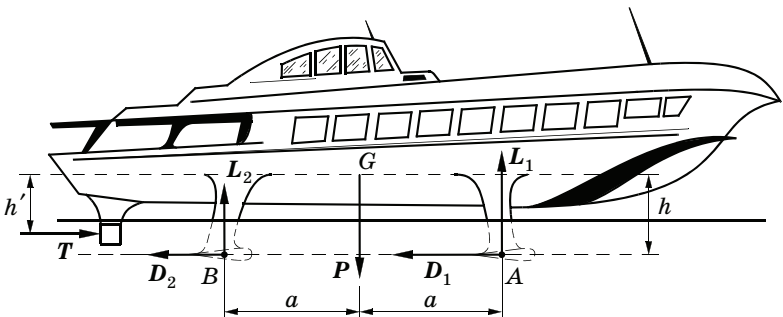


Рис. 43

Составим три уравнения моментов приложенных сил относительно центров  $A$ ,  $B$  и  $G$  (центра тяжести катера):

$$\begin{aligned} A: & L_2 \cdot 2a + T(h - h') - Pa = 0, \\ B: & -L_1 \cdot 2a + T(h - h') + Pa = 0, \\ G: & -L_1 a + L_2 a - Th' + D_1 h + D_2 h = 0. \end{aligned} \quad (\alpha)$$

Из первых двух уравнений прямо определяем *подъемные* силы крыльев:

$$L_1 = \frac{1}{2} \left( P + T \frac{h - h'}{a} \right), \quad L_2 = \frac{1}{2} \left( P - T \frac{h - h'}{a} \right), \quad (\beta)$$

а по определению коэффициента *качества*

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{2K_1} \left( P + T \frac{h - h'}{a} \right), & D_2 &= \frac{1}{2K_2} \left( P - T \frac{h - h'}{a} \right), \\ D_1 &= \frac{1}{2} \mu_1 \left( P + T \frac{h - h'}{a} \right), & D_2 &= \frac{1}{2} \mu_2 \left( P - T \frac{h - h'}{a} \right). \end{aligned} \quad (\gamma)$$

Третье из равенств  $(\alpha)$  (уравнение моментов относительно  $G$ ) после простых приведений и замены  $L_1 = \frac{1}{\mu_1} D_1$ ,  $L_2 = \frac{1}{\mu_2} D_2$  примет вид

$$\mu_1 \left( P + T \frac{h - h'}{a} \right) + \mu_2 \left( P - T \frac{h - h'}{a} \right) = 2T. \quad (\delta)$$

Непосредственной проверкой правильности вышеприведенных равенств служат очевидные требования:

$$L_1 + L_2 = P, \quad (\epsilon)$$

выполняемое согласно  $(\beta)$ , и

$$D_1 + D_2 = T, \quad (\zeta)$$

вытекающее из  $(\gamma)$  и  $(\delta)$ .

При данных  $P$  и  $T$ , а также определяющих конструкцию катера расстояниях между линиями действия сил (см. рис. 43)  $h$ ,  $h'$  и  $a$  соотношение  $(\delta)$  между *обратными качествами* передних и задних крыльев  $\mu_1$  и  $\mu_2$  должно выполняться как обязательное условие равновесия катера при его поступательном прямолинейном и равномерном движении.

Для выбранного одного и того же профиля крыльев *обратное качество*  $\mu$  зависит от угла атаки, который изменяется при переходе от одного режима к другому.

Уравнение  $(\delta)$  можно удовлетворить, положив  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ . Это будет непосредственно следовать из  $(\delta)$ ,  $(\epsilon)$  и  $(\zeta)$ . В этом случае сопротивления определяются равенствами

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{2} \mu \left( P + T \frac{h - h'}{a} \right), \\ D_2 &= \frac{1}{2} \mu \left( P - T \frac{h - h'}{a} \right). \end{aligned}$$

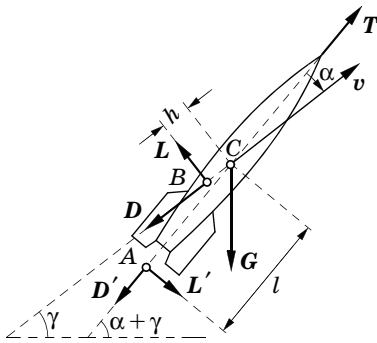


Рис. 44

**Пример 11.** Ракета (рис. 44) движется в направлении, образующем угол  $\alpha$  с ее осью и угол  $\gamma$  с горизонтальной плоскостью. Считая заданными вес ракеты  $G$  и тягу двигателя  $T$  и принимая движение ракеты за равновесное, определить подъемную силу  $L$ , лобовое сопротивление ее  $D$ , а также поперечную силу  $L'$ , сообщаемую ракете газовым рулем. Сопротивлением газового руля  $D'$  и силами, сообщаемыми ракете воздушными рулями, пренебрегаем.

Для определения трех неизвестных сил  $L$ ,  $D$  и  $L'$  составляем три уравнения равновесия: одно при помощи проецирования всей совокупности сил на ось ракеты, другое — на направление движения центра тяжести ракеты  $C$  и третье — уравнение моментов приложенных сил относительно центра тяжести ракеты  $C$ .

Имеем систему уравнений относительно  $L$ ,  $L'$  и  $D$ :

$$\begin{aligned} L \sin \alpha - D \cos \alpha &= G \sin (\alpha + \gamma) - T, \\ L' \sin \alpha - D &= G \sin \gamma - T \cos \alpha, \\ L \cdot h - L' \cdot l &= 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений дает искомые величины:

$$\begin{aligned} L &= \frac{l \cos \gamma}{l - h \cos \alpha} G - \frac{l \sin \alpha}{l - h \cos \alpha} T, \\ L' &= \frac{h \cos \gamma}{l - h \cos \alpha} G - \frac{h \sin \alpha}{l - h \cos \alpha} T, \\ D &= \frac{h \sin (\alpha + \gamma) - l \sin \gamma}{l - h \cos \alpha} G - \frac{h - l \cos \alpha}{l - h \cos \alpha} T. \end{aligned}$$

**Пример 12.** На рис. 45 показана ременная трансмиссия. По заданным натяжениям  $T'_1$  и  $T''_1$  вертикальных ветвей ремня первого шкива и натя-

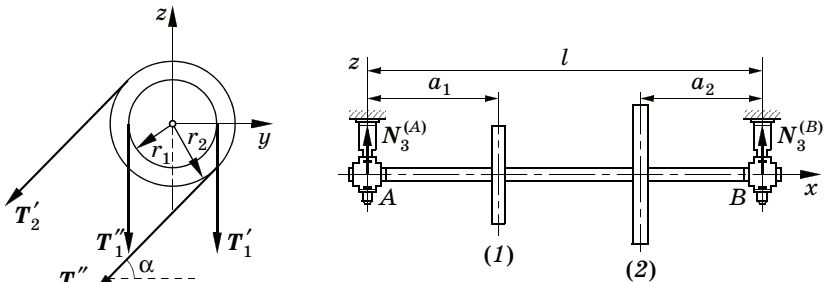


Рис. 45

жению  $T'_2$  одной из ветвей ремня второго шкива найти реакцию подшипников  $A$  и  $B$  и натяжение  $T''_2$  другой ветви второго шкива; ремни второго шкива расположены в его плоскости, параллельны друг другу и составляют угол  $\alpha$  с горизонтом.

Начинаем решение задачи с определения  $T''_2$ . Для этого составим уравнение моментов относительно оси  $x$ , в которое не войдут реакции подшипников  $A$  и  $B$ , пересекающие эту ось. Получаем

$$-T'_1 r_1 + T''_1 r_1 - T''_2 r_2 + T'_2 r_2 = 0$$

и, следовательно,

$$T''_2 = T'_2 + (T''_1 - T'_1) \frac{r_1}{r_2}.$$

Переходим к определению поперечных реакций подшипников:  $N_2^{(A)}$ ,  $N_3^{(A)}$ ,  $N_2^{(B)}$ ,  $N_3^{(B)}$ . Подшипник не препятствует смещению вдоль оси  $x$ . Поэтому продольные реакции  $N_1^{(A)}$ ,  $N_1^{(B)}$  обращаются в нуль. Уравнение проекций на ось  $x$  удовлетворяется тождественно. В нашем распоряжении остаются еще четыре уравнения статики: два уравнения проекций на оси  $y$  и  $z$  и два уравнения моментов относительно этих осей. Начало координатной системы возьмем в центре левого подшипника  $A$ . Получаем

$$-(T'_2 + T''_2) \cos \alpha + N_2^{(A)} + N_2^{(B)} = 0,$$

$$-(T'_1 + T''_1) - (T'_2 + T''_2) \sin \alpha + N_3^{(A)} + N_3^{(B)} = 0,$$

$$(T'_1 + T''_1) a_1 + (T'_2 + T''_2) (l - a_2) \sin \alpha - l N_3^{(B)} = 0,$$

$$-(T'_2 + T''_2) (l - a_2) \cos \alpha + l N_2^{(B)} = 0.$$

Решив эти уравнения, найдем

$$N_2^{(B)} = (1 - a_2/l) (T'_2 + T''_2) \cos \alpha,$$

$$N_3^{(B)} = (1 - a_2/l) (T'_2 + T''_2) \sin \alpha + (T'_1 + T''_1) a_1/l,$$

$$N_2^{(A)} = (a_2/l) (T'_2 + T''_2) \cos \alpha,$$

$$N_3^{(A)} = (1 - a_1/l) (T'_1 + T''_1) + (T'_2 + T''_2) (a_2/l) \sin \alpha.$$

**Пример 13.** Подшипник двигателя установлен на кронштейне  $\mathcal{L}$  (рис. 46). Основанием кронштейна служит плита, имеющая форму равнобедренного треугольника ( $AC = BC$ ) с основанием  $l$  и углом при вершине  $\alpha$ . Эта плита притянута к гладкой горизонтальной поверхности фундамента болтами в точках  $A$  и  $B$  и свободно опирается на нее в точке  $C$ . Болт  $A$  проходит через круглое отверстие в плите, тогда как для поста-

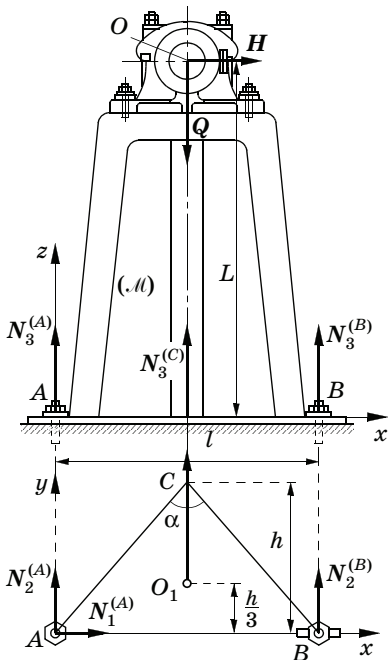


Рис. 46

новки болта  $B$  в плите сделан продолговатый паз, имеющий направление стороны  $AB$ , вдоль которого болт может свободно скользить. На подшипник, в его центре  $O$ , расположенном на высоте  $L$  над основанием кронштейна, передается со стороны двигателя горизонтальное усилие  $H$  и вертикальное  $Q$ . Считая, что точка  $O$  проецируется на плоскость основания в центр тяжести  $O_1$  (точка пересечения медиан) треугольника  $ACB$ , определить опорные реакции в точках  $A, B, C$ . Весом кронштейна пренебречь.

Кроме заданных сил  $H$  и  $Q$ , к кронштейну приложены реакции  $N^{(A)}, N^{(B)}$  и  $N^{(C)}$  в точках  $A, B, C$ . Первая из этих реакций не известна ни по величине, ни по направлению; заменим ее тремя составляющими  $N_1^{(A)}, N_2^{(A)}, N_3^{(A)}$  по осям  $x, y, z$ . Реакция в точке  $B$  по направлению перпендикулярна к пазу, и ее составляющая по оси  $x$  обращается в нуль;

надо определить составляющие  $N_2^{(B)}$  и  $N_3^{(B)}$  по осям  $y$  и  $z$ . Наконец, реакция в точке  $C$  дает составляющую  $N_3^{(C)}$  только по оси  $z$ .

Имеем шесть неизвестных:  $N_1^{(A)}, N_2^{(A)}, N_3^{(A)}, N_2^{(B)}, N_3^{(B)}, N_3^{(C)}$ , для определения которых надо составить шесть уравнений статики.

Возьмем координатную систему  $xuz$  с началом в точке  $A$  и составим три уравнения проекций на эти оси:

✓ уравнение проекций на ось  $x$ :

$$N_1^{(A)} + H = 0;$$

✓ уравнение проекций на ось  $y$ :

$$N_2^{(A)} + N_2^{(B)} = 0;$$

✓ уравнение проекций на ось  $z$  содержит уже три неизвестные:

$$N_3^{(A)} + N_3^{(B)} + N_3^{(C)} - Q = 0.$$

Чтобы упростить решение задачи, уравнения моментов составим относительно осей  $AB, AC$  и оси  $Az$ .

Уравнение моментов относительно оси  $AB$  содержит лишь одну неизвестную  $N_3^{(C)}$  (все остальные реакции либо параллельны оси, либо пересекаются с ней):

$$N_3^{(C)}h - \frac{1}{3}Qh = 0.$$

В уравнение моментов относительно оси  $AC$  также войдет лишь одна неизвестная  $N_3^{(B)}$ :

$$-N_3^{(B)}l \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{2}{3}Qh \sin \frac{\alpha}{2} + HL \cos \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Наконец, в уравнение моментов относительно оси  $Az$  войдет одна неизвестная  $N_2^{(B)}$ :

$$N_2^{(B)}l - \frac{1}{3}hH = 0.$$

Остается заметить, что  $h = \frac{1}{2}l \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ . Решая полученные уравнения, находим

$$N_1^{(A)} = -H, \quad -N_2^{(A)} = N_2^{(B)} = \frac{1}{6}H \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad N_3^{(A)} = \frac{1}{3}Q - \frac{L}{l}H,$$

$$N_3^{(B)} = \frac{1}{3}Q + \frac{L}{l}H, \quad N_3^{(C)} = \frac{1}{3}Q.$$

Пр и м е р 14. Поплавок подвешен к несущей поверхности гидросамолета при помощи стержней, изображенных в трех проекциях на рис. 47, а.

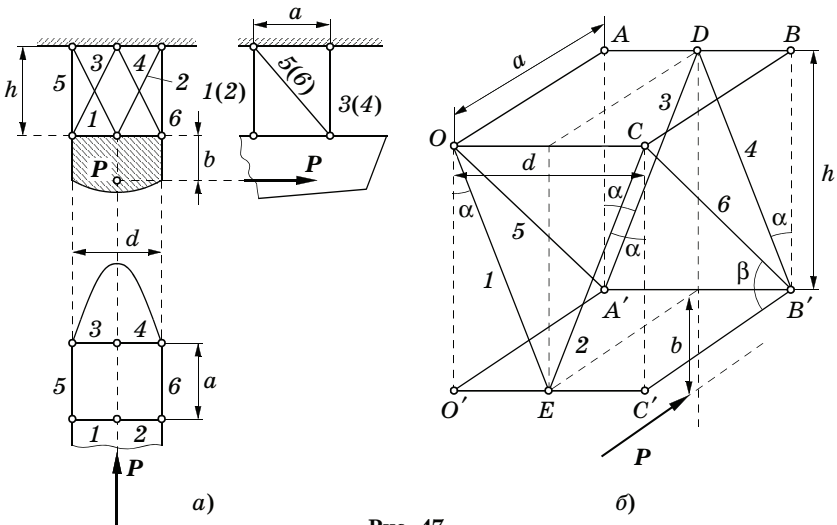


Рис. 47

Определить усилия в стержнях, предполагая, что к поплавку приложена, как показано на рисунке, реакция воды  $P$ .

Расположение стержней показано в перспективе на рис. 47, б. Рассмотрим группы стержней (1, 2), (3, 4), (5, 6). Вследствие симметрии расположения стержней и линии действия силы  $P$  имеем

$$T_1 = T_2, \quad T_3 = T_4, \quad T_5 = T_6.$$

Определяем  $T_1$  и  $T_2$  из уравнения моментов относительно оси  $A'B'$  (линия пересечения плоскостей, проведенных через стержни 5, 6 и 3, 4):

$$-a(T_1 + T_2) \cos \alpha + Pb = 0;$$

следовательно,

$$T_1 = T_2 = \frac{Pb}{2a \cos \alpha};$$

здесь  $\operatorname{tg} \alpha = (1/2)(d/h)$ .

Определяем  $T_3$  и  $T_4$  из уравнения моментов относительно оси  $OC$ :

$$a(T_3 + T_4) \cos \alpha + P(h + b) = 0, \quad T_3 = T_4 = -\frac{P(h + b)}{2a \cos \alpha}.$$

Стержни 3 и 4 сжаты.

Наконец, определяем  $T_5$  и  $T_6$ , проецируя все силы на ось  $AO$ :

$$(T_5 + T_6) \cos \beta - P = 0, \quad T_5 = T_6 = \frac{P}{2 \cos \beta}.$$

## Глава IV

### Приведение пространственной несходящейся совокупности сил к динаме

#### § 17. Влияние изменения центра приведения на главный момент

В § 13 было показано, что совокупность сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , приложенных к твердому телу, статически эквивалентна одной силе  $V$  и одной паре с моментом  $m$ . Сила  $V$  — главный вектор совокупности сил — приложена в произвольно выбранной точке — центре приведения, а по величине и направлению определяется как векторная сумма сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Момент  $m$  пары равен главному моменту  $m^{(O)}$  совокупности сил относительно центра приведе-

ния  $O$ , т. е. векторной сумме моментов относительно точки  $O$  сил, входящих в совокупность.

При переносе центра приведения из точки  $O$  в новый центр  $O^*$  главный вектор сохраняет свою величину и направление; чтобы разобраться, как при этом будет изменяться главный момент, найдем связь между моментом силы  $F$  относительно точки  $O$  и моментом этой силы относительно другой точки  $O^*$ . Пусть (рис. 48)  $r$  — вектор-радиус точки  $M$  приложения силы  $F$  относительно точки  $O$ ,  $r_0$  — вектор-радиус точки  $O^*$  также относительно  $O$ . Тогда

$$\overrightarrow{O^*M} = r^* = r - r_0$$

представит вектор-радиус точки  $M$  относительно точки  $O^*$ . По определению момента силы относительно точки

$$m_O(F) = r \times F = (r^* + r_0) \times F = (r^* \times F) + (r_0 \times F),$$

или

$$m_O(F) = m_{O^*}(F) + (r_0 \times F). \tag{4.1}$$

Векторное произведение  $r_0 \times F$  можно рассматривать как момент силы  $F$ , перенесенной в точку  $O^*$ , т. е. силы  $F^*$  относительно точки  $O$ . Таким образом, получаем вместо (4.1)

$$m_O(F) = m_{O^*}(F) + m_O(F^*). \tag{4.2}$$

*Момент силы относительно некоторой точки равен моменту этой силы относительно другой точки, сложенному векторно с моментом относительно первой точки той же силы, перенесенной во вторую точку.*

Пользуясь этим результатом, можно найти связь между главным моментом совокупности сил относительно точки  $O$  — обозначим его через  $m^{(O)}$  — и главным моментом  $m^{(O^*)}$  той же совокупности относительно точки  $O^*$ ; имеем

$$\begin{aligned} m^{(O)} &= \sum_{i=1}^n m_O(F_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n m_{O^*}(F_i) + \sum_{i=1}^n m_O(F_i^*). \end{aligned}$$

Первая сумма с правой стороны есть не что иное, как  $m^{(O^*)}$ , вторая же по

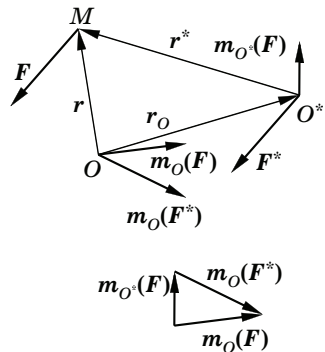


Рис. 48



теореме Вариньона о моменте совокупности сил  $F_i^*$ , сходящейся в точке  $O^*$ , представляет момент главного вектора  $V^*$ , приложенного в точке  $O^*$ , относительно точки  $O$ , так что

$$m^{(O)} = m^{(O^*)} + m_O(V^*). \quad (4.3)$$

Главный момент совокупности сил относительно некоторой точки равен главному моменту этой совокупности относительно другой точки, сложенному векторно с моментом относительно первой точки главного вектора, перенесенного во вторую точку.

Спроецируем обе части равенства (4.3) на направление главного вектора. Тогда, замечая, что момент  $m_O(V^*)$  перпендикулярен главному вектору (по определению момента), получим

$$\text{пр. } \sqrt{m}^{(O)} = \text{пр. } \sqrt{m}^{(O^*)}. \quad (4.4)$$

Проекция главного момента на направление главного вектора не зависит от выбора центра приведения.

Вместо проекции главного момента на направление главного вектора можно рассматривать скалярное произведение  $m^{(O)} \cdot V$  главного момента на главный вектор, отличающееся от предыдущей проекции лишь множителем  $V$ , а именно:

$$m^{(O)} \cdot V = m^{(O^*)} \cdot V. \quad (4.5)$$

Таким образом, скалярное произведение главного момента на главный вектор не зависит от выбора центра приведения.

Чтобы отметить независимость этого произведения от выбора центра приведения, его называют *первым инвариантом совокупности сил* или *первым статическим инвариантом*. Вторым независимым статическим инвариантом совокупности сил является сама численная величина  $V$  главного вектора.

## § 18. Приведение несходящейся совокупности сил к динаме

Как выше было доказано, произвольную совокупность сил можно заменить эквивалентной ей совокупностью двух векторов — силы  $V$  и момента  $m^{(O)}$ , приложенных в точке  $O$  (рис. 49). При изменении положения центра приведения  $O$  главный вектор  $V$  будет сохранять величину и направление, а главный мо-

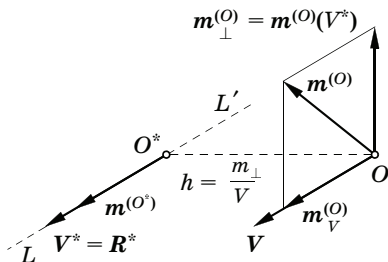


Рис. 49

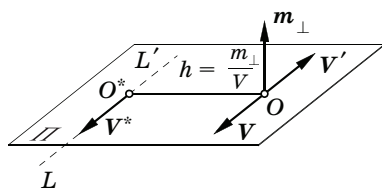


Рис. 50

мент  $m^{(O)}$  будет изменяться. Докажем, что если главный вектор отличен от нуля и не перпендикулярен главному моменту, т. е.

$$V \neq 0, \quad V \cdot m^{(O)} \neq 0,$$

то за центр приведения может быть выбрана такая точка  $O^*$ , что главный момент  $m^{(O^*)}$  относительно этой точки и главный вектор расположатся на одной прямой.

Для доказательства разложим момент  $m^{(O)}$  на две составляющие — одну  $m_V^{(O)}$ , направленную вдоль главного вектора, и другую  $m_{\perp}^{(O)}$  — перпендикулярную главному вектору. Тем самым пара сил с моментом  $m$  раскладывается на две пары с моментами  $m_V = m_V^{(O)}$  и  $m_{\perp} = m_{\perp}^{(O)}$ , причем плоскость первой пары перпендикулярна  $V$ , а плоскость второй пары  $\Pi$ , перпендикулярная вектору  $m_{\perp}$  (рис. 49), содержит вектор  $V$ .

Совокупность пары с моментом  $m_{\perp}$  и силы  $V$  образует плоскую совокупность сил, которая может быть сведена к одной равнодействующей силе. Действительно, выберем плечо пары равным  $h = m_{\perp}/V$ ; тогда силы  $V^*, V'$  (рис. 50), составляющие пару, будут равны по величине  $V$ . Располагая пару так, чтобы одна из входящих в нее сил,  $V'$ , была приложена в точке  $O$  и направлена противоположно  $V$ , сведем совокупность трех сил  $V, V^*, V'$  к одной равнодействующей силе  $V^*$ , линия действия которой  $LL'$  проходит через точку  $O^*$ ; момент  $m_{O^*}(V')$  силы  $V'$  относительно точки  $O^*$  равен  $m_{\perp}$  и не зависит от выбора точки  $O^*$  на линии  $LL'$ .

Таким образом, совокупность главного вектора  $V$  и главного момента  $m^{(O)}$  в точке  $O$  сведена к силе  $V^*$  с линией действия  $LL'$ , проходящей через точку  $O^*$ , и паре с моментом  $m_V$  (рис. 50), параллельным этой прямой, что и требовалось доказать.

Легко показать, что момент этой пары  $m_V$  равен главному моменту  $m^{(O^*)}$  рассматриваемой совокупности сил относительно точки  $O^*$ . Для этой цели применим равенство (4.3), связывающее главные моменты сил относительно разных центров приведения; будем иметь

$$m^{(O)} = m^{(O^*)} + m_O(V^*),$$

откуда (рис. 49)

$$m^{(O)} - m_O(V^*) = m^{(O)} - m_{\perp}^{(O)} = m_V^{(O)} = m^{(O^*)} = m_V. \quad (4.6)$$

Здесь за точку  $O^*$  может быть принята любая точка на линии  $LL'$ .

*Совокупность силы и пары, плоскость которой перпендикулярна линии действия силы, называется динамой.*

Наглядное представление о динаме дает совокупность усилий, развиваемых при сверлении отверстия буровчиком. При этом прикладывают силу, направленную по оси буровчика, и пару, создающую поворот буровчика вокруг его оси. Рис. 51 дает изображение динамы в случае векторов  $V$  и  $m_V$  одинакового направления; здесь имеется совокупность усилий, развиваемых в буровчике с правой нарезкой; чтобы такой буровчик перемещался в осевом направлении вдоль  $V$ , наблюдатель, смотрящий вдоль  $V$ , должен вращать буровчик по часовой стрелке; рис. 52, на котором векторы  $V$  и  $m_V$  имеют противоположные направления, соответствует буровчику с левой нарезкой.

*Итак, пространственная совокупность сил, главный вектор которой не равен нулю и не перпендикулярен главному моменту, может быть приведена к динаме.*

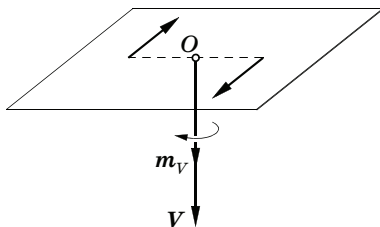


Рис. 51

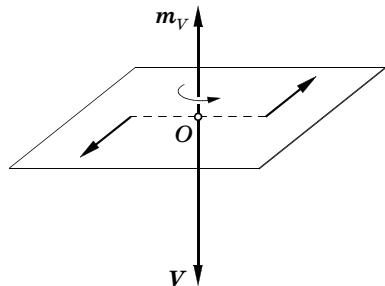


Рис. 52

Линию действия силы, входящей в динаму, назовем *центральной осью*.

Входящие в определение динамы величины  $V$  главного вектора и проекции  $m_V^{(O)}$  главного момента  $m^{(O)}$  относительно произвольной точки  $O$ , принятой за центр приведения, на направление главного вектора не зависят от выбора этой точки, так как эти величины являются статическими инвариантами совокупности сил (§ 17). В следующем параграфе будет доказано, что от выбора центра приведения  $O$  не зависит также и положение центральной оси в пространстве.

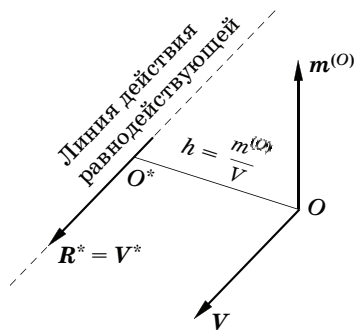


Рис. 53

Центральную ось иногда еще называют *осью минимальных моментов*, так как при выборе центра приведения на ней мы всегда получим меньший главный момент, чем относительно всякой другой точки, не лежащей на центральной оси; в самом деле, для любой точки  $O$  (рис. 53), не лежащей на центральной оси, главный момент равен векторной сумме момента  $m_V^{(O)}$ , равного моменту  $m^{(O*)}$  относительно точки на центральной оси, и дополнительного слагаемого  $m_{\perp}^{(O)}$ , убывающего до нулевого значения при приближении к центральной оси.

Обратимся к рассмотрению частных случаев приведения совокупности сил к простейшему виду.

■ **Составляющая главного момента по направлению главного вектора равна нулю** ( $m_V^{(O)} = 0$ ), т. е. главный момент перпендикулярен главному вектору. В этом случае *совокупность сил приводится к одной равнодействующей*. Центральная ось превращается в линию действия равнодействующей. Для разыскивания линии действия равнодействующей применим ранее указанный прием: зная главный момент  $m^{(O)}$ , ищем такую линию действия силы  $V^*$ , чтобы имело место равенство

$$m_O(V^*) = m^{(O)}. \quad (4.7)$$

Для этого в плоскости, перпендикулярной  $m^{(O)}$ , откладываем перпендикулярно  $V$  отрезок  $h = m^{(O)}/V$  в такую сторону, чтобы поворот тела под действием силы  $V^*$  был положительным.

Рассмотренный случай перпендикулярности главного момента и главного вектора будет иметь место при приведении к простейшему виду плоской совокупности сил, так как при этом главный вектор и равнодействующая пара будут лежать в одной плоскости и момент пары будет перпендикулярен главному вектору. Следовательно, если главный вектор не равен нулю, то совокупность сил приведет к одной равнодействующей.

Другими примерами совокупности сил, приводящихся к одной равнодействующей, могут служить совокупность сходящихся сил и любая пространственная совокупность параллельных сил, направленных в одну сторону или в разные стороны, если совокупность не приводится к паре.

■ **Составляющая главного момента по направлению, перпендикулярному главному вектору, равна нулю;** это соответствует расположению центра приведения на центральной оси совокупности сил.

■ **Главный момент равен нулю, главный вектор не равен нулю** — центр приведения находится на линии действия равнодействующей совокупности сил; при центре приведения, не лежащем на этой линии, главный момент будет отличен от нуля, но перпендикулярен главному вектору.

Обратимся еще раз к формуле (4.7):  $V^*$  есть равнодействующая, к которой, по предположению, приводится рассматриваемая совокупность сил, а  $m^{(O)}$  — главный момент системы сил относительно произвольной точки  $O$ ; поэтому можно сформулировать самую общую форму теоремы Вариньона.

**ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА ДЛЯ СОВОКУПНОСТИ СИЛ, ПРИВОДЯЩЕЙСЯ К ОДНОЙ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ.** *Если совокупность сил приводится к одной равнодействующей, то момент этой равнодействующей относительно произвольной точки равен геометрической сумме моментов слагаемых сил относительно этой точки.*

## § 19. Аналитические выражения элементов динами

Покажем, как элементы динами могут быть разысканы по заданным *аналитически* силам и координатам точек их приложения, т. е. по величинам

$$F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}; x_i, y_i, z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Главный вектор по величине и направлению определяется по неоднократно упоминавшимся формулам

$$V_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad V_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad V_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}. \quad (4.8)$$

Аналитическое выражение главного вектора  $V$  (второй статический инвариант) будет

$$V = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iz}\right)^2}. \quad (4.9)$$

Главный момент относительно начала координат  $O$  определяется формулами

$$\begin{aligned} m_x^{(O)} &= \sum_{i=1}^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}), \\ m_y^{(O)} &= \sum_{i=1}^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}), \\ m_z^{(O)} &= \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Зная их, можно найти первый статический инвариант — проекцию главного момента на направление главного вектора:

$$m^{(O)} \cdot \frac{V}{V} = \frac{1}{V} (m_x^{(O)} \cdot V_x + m_y^{(O)} \cdot V_y + m_z^{(O)} \cdot V_z). \quad (4.11)$$

Выражение

$$p = \frac{1}{V^2} m^{(O)} \cdot V = \frac{m_x^{(O)} V_x + m_y^{(O)} V_y + m_z^{(O)} V_z}{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (4.12)$$

часто называют *параметром динами*. Знание главного вектора и параметра динами дает, как это видно из (4.12), возможность определить силу и пару динами. Остается найти уравнение центральной оси в пространстве.

Для вывода *уравнения центральной оси* достаточно заметить, что центральная ось представляет собой геометрическое место точек  $O^*$ , для которых главный момент  $m^{(O^*)}$  параллелен главному вектору  $V$ , и написать условие параллельности этих векторов:

$$\frac{m_x^{(O^*)}}{V_x} = \frac{m_y^{(O^*)}}{V_y} = \frac{m_z^{(O^*)}}{V_z}. \quad (4.13)$$

Вспомним, что по (4.3)

$$m^{(O^*)} = m^{(O)} - m_O(V^*), \quad (4.14)$$

где  $m_O(V^*)$  — момент относительно точки  $O$  силы  $V^* = V$ , действующей вдоль центральной оси, и применим формулы

$$m_{Ox}(V^*) = yV_z - zV_y, \quad m_{Oy}(V^*) = zV_x - xV_z, \quad m_{Oz}(V^*) = xV_y - yV_x,$$

где  $x, y, z$  — координаты текущей точки  $O^*$  на центральной оси, когда за начало координат принят центр приведения  $O$ . Тогда по (4.13) получим уравнения центральной оси

$$\frac{m_x^{(O)} - yV_z + zV_y}{V_x} = \frac{m_y^{(O)} - zV_x + xV_z}{V_y} = \frac{m_z^{(O)} - xV_y + yV_x}{V_z}. \quad (4.15)$$

Пользуясь этими уравнениями, легко доказать, что положение центральной оси в пространстве не зависит от выбора центра приведения сил. Действительно, примем за центр приведения вместо начала координат  $O$  точку  $A$  с координатами  $a, b, c$ ; уравнения центральной оси по (4.15) будут

$$\begin{aligned} \frac{m_x^{(A)} - (y - b)V_z + (z - c)V_y}{V_x} &= \frac{m_y^{(A)} - (z - c)V_x + (x - a)V_z}{V_y} = \\ &= \frac{m_z^{(A)} - (x - a)V_y + (y - b)V_x}{V_z}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Но по (4.3) имеем

$$m^{(A)} = m^{(O)} + m_A(V'),$$

где  $V'$  — главный вектор, перенесенный в точку  $O$ , координаты которой по отношению к точке  $A$  равны  $-a, -b, -c$ . Проецируя последнее равенство на оси, получим

$$m_x^{(A)} = m_x^{(O)} - bV_z + cV_y,$$

$$m_y^{(A)} = m_y^{(O)} - cV_x + aV_z,$$

$$m_z^{(A)} = m_z^{(O)} - aV_y + bV_x.$$

Подставляя эти выражения в (4.16), после простых сокращений получим уравнения (4.15), что и доказывает независимость положения центральной оси от выбора центра приведения.

Удовольствуемся этими краткими сведениями об аналитических свойствах динами. Пример аналитического определения динами и уравнения центральной оси будет дан в следующем параграфе для частного случая двух сил с непересекающимися и непараллельными линиями действия — *скрещивающихся* сил.

### § 20. Приведение пространственной несходящейся совокупности сил к двум непересекающимся силам

Покажем сначала, как пространственная несходящаяся совокупность сил может быть приведена к эквивалентной совокупности *трех сил*.

Обозначим через  $O_i$  (рис. 54) точку приложения какой-нибудь  $i$ -й силы  $F_i$  (любую точку на линии ее действия) и зафиксируем одинаковые для всех сил  $F_i$  три, не лежащие на одной прямой точки  $A, B$  и  $C$ . Разложим силу  $F_i$  по направлениям лучей  $O_iA, O_iB$  и  $O_iC$ . Соответствующие составляющие сил, приложенные в точках  $A, B$  и  $C$ , обозначим через  $F_{iA}, F_{iB}, F_{iC}$ . Повторяя аналогичное разложение для всех сил  $F_i, i = 1, 2, \dots, n$ , придем к совокупности *трех*, вообще говоря, *несходящихся сил*:

$$F_A = \sum_{i=1}^n F_{iA}, \quad F_B = \sum_{i=1}^n F_{iB}, \quad F_C = \sum_{i=1}^n F_{iC}. \quad (4.17)$$

Докажем теперь следующую теорему.

**ТЕОРЕМА.** Любая пространственная несходящаяся совокупность сил может быть приведена к эквивалентной ей совокупности двух сил с непересекающимися и непараллельными линиями действия.

Восстановим с этой целью на рис. 55 только что найденные силы  $F_A, F_B, F_C$  в точках  $A, B, C$ . Проведем через точку  $A$  две плоскости: одну, содержащую линию действия силы  $F_B$ , а другую — линию действия силы  $F_C$ . На линии пересечения этих плоскостей  $d-d$  выберем произвольную точку  $D$  и соединим ее с точками  $B$  и  $C$ . Разложим силы  $F_B$  и  $F_C$  соответственно по направлениям  $AB, BD$  и  $AC, CD$ . Согласно основному свойству абсолютно твердого

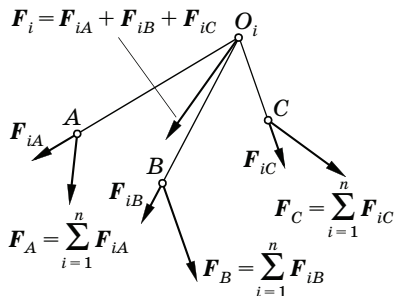


Рис. 54

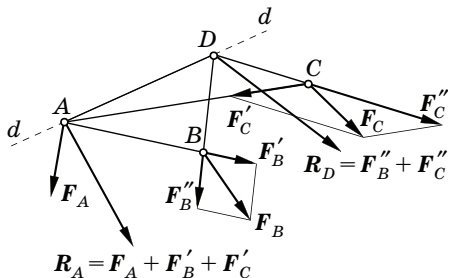


Рис. 55



тела, составляющие  $F'_B$  и  $F'_C$  можно перенести вдоль линий их действия в точку  $A$ , а  $F''_B$  и  $F''_C$  — в точку  $D$ . Тогда заданная *несходящаяся* совокупность сил  $F_A, F_B, F_C$  сведется к *двум сходящимся*:  $F_A, F'_B, F'_C$  в точке  $A$  и  $F''_B, F''_C$  в точке  $D$ . Равнодействующие каждой из этих двух совокупностей сил соответственно будут равны  $R_A = F_A + F'_B + F'_C$  и  $R_D = F''_B + F''_C$ . Таким образом, пространственная несходящаяся совокупность сил  $F_i, i = 1, 2, \dots, n$ , свелась к эквивалентной ей совокупности *двух* сил  $R_A$  и  $R_D$ , линии действия которых не пересекаются и не параллельны.

Изложенный метод содержит довольно сложные геометрические построения и поэтому не получил практического применения. В частности, условие равновесия заданной пространственной несходящейся системы сил заключается, согласно только что изложенному методу, в совпадении линий действия сил  $R_A$  и  $R_D$ , равенстве их по величине и противоположности по направлению. Этим требованиям удовлетворить при решении конкретных задач на вывод условий равновесия тела было бы крайне затруднительно; такая методика не разрабатывалась. Однако легко убедиться, что, поскольку все проведенные операции сложения и разложения сил приводили к эквивалентным совокупностям сил, главный вектор сил  $R_A$  и  $R_D$  равен главному вектору  $V$  сил  $F_i, i = 1, 2, \dots, n$ , а главный момент этих сил относительно произвольного центра  $O$  будет равен главному моменту  $m^{(O)}$  совокупности сил  $F_i$  относительно центра  $O$ . В этом можно убедиться и непосредственно, сопровождая все этапы приведенного доказательства формулами сложения и разложения сил и моментов.

Пользуясь теорией, изложенной в § 19, определим элементы динамики и уравнения центральной оси несходящейся совокупности сил  $R_A$  и  $R_D$ .

Обозначим через  $h$  кратчайшее расстояние между линиями действия сил  $R_A$  и  $R_D$ . Ось  $z$  направим по общему перпендикуляру к этим линиям и за начало координат примем точку пересечения линии действия силы  $R_A$  с этим перпендикуляром; ось  $x$  направим по этой линии действия. Переноса силы вдоль линии действия, примем, что их точки приложения лежат на оси  $z$ .

Проекции сил на оси координат и координаты точек приложения будут для силы  $R_A$ :  $R_{Ax} = R_A, R_{Ay} = 0, R_{Az} = 0; x = 0, y = 0, z = 0$ ; для силы  $R_D$ :  $R_{Dx} = R_D \cos \alpha, R_{Dy} = R_D \sin \alpha, R_{Dz} = 0; x = 0, y = 0, z = h$ , причем  $\alpha$  обозначает угол, образованный направлением силы  $R_D$  с осью  $x$ .

Имеем

$$\begin{aligned} R_x &= R_A + R_D \cos \alpha, & R_y &= R_D \sin \alpha, & R_z &= 0, \\ m_x^{(O)} &= -hR_D \sin \alpha, & m_y^{(O)} &= hR_D \cos \alpha, & m_z^{(O)} &= 0. \end{aligned}$$

По (4.15) уравнения центральной оси будут

$$\begin{aligned} \frac{-hR_D \sin \alpha + zR_D \sin \alpha}{R_A + R_D \cos \alpha} &= \frac{hR_D \cos \alpha - z(R_A + R_D \cos \alpha)}{R_D \sin \alpha} = \\ &= \frac{xR_D \sin \alpha + y(R_A + R_D \cos \alpha)}{0}, \end{aligned}$$

откуда следует, что центральная ось лежит в плоскости, параллельной  $xOy$  и находящейся от нее на расстоянии

$$z = h \frac{R_D(R_A \cos \alpha + R_D)}{R_A^2 + R_D^2 + 2R_A R_D \cos \alpha}.$$

В этой плоскости центральная ось совпадает с прямой, пересекающей ось  $z$  и имеющей уравнение

$$y = x \frac{R_D \sin \alpha}{R_A + R_D \cos \alpha}.$$

Результат упрощается, если величины сил равны между собой:

$$R_A = R_D.$$

В этом случае будем иметь

$$z = h/2, \quad y = x \operatorname{tg}(\alpha/2),$$

т. е. центральная ось делит отрезок  $h$  пополам и образует одинаковые углы с направлениями сил.

Из рассмотренного следует, что совокупность двух несходящихся, т. е. непересекающихся ( $h \neq 0$ ) и непараллельных ( $\alpha \neq 0$  и  $\alpha \neq \pi$ ), сил приводится к динаме с силой, равной по величине

$$R = \sqrt{R_A^2 + R_D^2 + 2R_A R_D \cos \alpha},$$

и с парой, проекция момента которой на направление главного вектора будет

$$m_R = \frac{1}{R} (m_x^{(O)} R_x + m_y^{(O)} R_y + m_z^{(O)} R_z) = -\frac{hR_A R_D \sin \alpha}{R}.$$

Таким образом, тело, находящееся под действием двух несходящихся сил, не может ни находиться в равновесии, ни быть уравновешенным одной силой. Поэтому если тело находится в *равновесии* под действием трех сил, то никакая комбинация двух из них не может быть несходящейся, т. е. все три силы должны лежать в одной плоскости (см. § 6).

---

*Глава V*

---

**Равновесие при наличии сил трения****§ 21. Трение скольжения и трение верчения**

Трение друг о друга двух соприкасающихся твердых тел представляет собой сложное физическое явление, сопровождаемое нагревом трущихся тел, их электризацией, разрушением поверхностей, диффузией вещества и т. д. Явление трения можно себе представить как сопровождающееся сцеплением вдавливание бугорков шероховатости (иногда волнистости) поверхности одного из тел в промежутки между бугорками другого, вызывающее при взаимном движении тел деформацию, а иногда и разрушение этих бугорков. Интенсивность такого рода взаимодействия трущихся поверхностей зависит от многих обстоятельств, среди которых наибольшее значение имеют интенсивность сдавливания тел, характеризующаяся нормальной составляющей реакции взаимодействия между телами, скорость их относительного перемещения, степень обработки поверхностей, наличие смазки.

Различают три основные формы взаимодействия между трущимися поверхностями тел:

- ✓ трение *скольжения*, соответствующее поступательному (без вращения) движению тел друг по другу, как, например, ползуна кривошипного механизма по направляющей;
- ✓ близкое по природе трению скольжения трение *верчения* (подпятник);
- ✓ трение *качения*, например колеса по рельсу.

**Трение скольжения** впервые экспериментально изучалось в конце XVII в. Г. Амонтоном, который обнаружил независимость силы трения от величины поверхности соприкосновения тел. Законы трения были сформулированы почти сто лет спустя Ш. Кулоном.

---

АМОНТОН ГИЙОМ (*Amontons Guillaume, 1663—1705*) — французский физик, чл. Парижской АН (1699).

КУЛОН ШАРЛЬ ОГЮСТЕН (*Coulomb Charles Augustin, 1736—1806*) — французский физик, чл. Парижской АН (1774).

К телу весом  $G$ , лежащему на горизонтальном столе (рис. 56), будем прикладывать горизонтальное усилие  $S$ . Если  $S = 0$ , то тело будет в равновесии (в данном случае в покое по отношению к столу); если силу  $S$  начнем увеличивать, то тело все же будет оставаться в покое; следовательно, горизонтальная составляющая реакции стола, называемая *силой трения*  $F$ , уравнивает приложенную силу  $S$  и возрастает вместе с ней до тех пор, пока равновесие не нарушится. Это произойдет в тот момент, когда сила трения достигнет своего максимального значения.

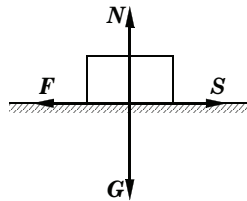


Рис. 56

Опыты показали, что максимальное значение силы трения пропорционально нормальному давлению  $N$  тела на плоскость (в рассматриваемом случае, конечно,  $N = G$ ):

$$F_{\max} = fN, \quad (5.1)$$

причем коэффициент пропорциональности  $f$ , называемый коэффициентом трения скольжения, определяется экспериментально и оказывается зависящим только от материала и состояния (шероховатости) поверхностей трущихся тел.

Коэффициент трения скольжения, как отношение двух сил, представляет безразмерную величину; значения его для различных материалов помещаются в справочниках.

Наряду с коэффициентом трения  $f$  введем в рассмотрение *угол трения*  $\varphi$ , определяя его соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = f. \quad (5.2)$$

Происхождение этого равенства и наименование *угол трения* будут объяснены ниже.

Когда  $F$  достигнет значения  $F_{\max}$ , наступит критический (пусковой) момент равновесия: если  $S$  останется равным  $F_{\max}$ , то равновесие не нарушится, но достаточно самого ничтожного приращения усилия  $S$ , чтобы тело сдвинулось с места. Можно заметить, что, как только тело сдвинется с места, сила трения сразу несколько уменьшится.

Опыты показали, что трение при взаимном движении тел несколько меньше трения при взаимном покое их.

Важно отметить, что до наступления критического момента, т. е. пока тело находится в покое, сила трения равна приложенному усилию:

$$F = S,$$

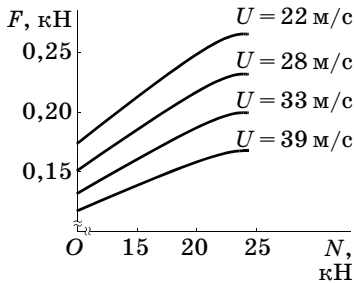


Рис. 57

и можно лишь утверждать, что

$$F \leq fN. \quad (5.3)$$

Знак равенства относится к критическому моменту равновесия. В дальнейшем, если знак неравенства опускается, то это означает, что рассматривается равновесие в критический момент.

Направление силы трения при покое противоположно направлению

силы  $S$  и меняется с изменением направления этой силы.

Наоборот, при движении тела сила трения имеет определенное направление, противоположное скорости тела, и величину, зависящую от нормального давления  $N$  между телами и пропорциональную этому давлению:

$$F = f'N, \quad (5.4)$$

причем, как указывалось,  $f' < f$ . Коэффициент трения  $f'$  зависит от скорости тела, уменьшаясь для большинства материалов при увеличении скорости\*. Примером могут служить экспериментальные данные по трению скольжения двух чугунных поверхностей, показанные на рис. 57. Коэффициент трения  $f'$  при нормальных давлениях  $N$ , имеющих порядок 20 кН, и относительных скоростях скольжения поверхностей, не превышающих 22 м/с, имеет порядок  $f' = 0,1$ . С возрастанием скорости скольжения коэффициент трения убывает ( $f' = 0,075$  при  $U = 39$  м/с). С возрастанием нормального давления сила трения скольжения  $F$  перестает определяться линейной зависимостью (5.4) от нормального давления  $N$ .

Соотношение (5.4) достаточно хорошо отвечает наблюдениям при трении сухих или слабо смазанных тел; теория трения при наличии слоя смазки, созданная Н. П. Петровым и О. Рейнольдсом, представляет собой специальный раздел гидродинамики вязкой жидкости.

\* Как на исключение, можно указать на случай трения кожи о металл: здесь  $f'$  увеличивается при увеличении относительной скорости.

ПЕТРОВ НИКОЛАЙ ПАВЛОВИЧ (1836—1920) — русский и советский ученый-механик; в 1866—1893 гг. преподавал в Санкт-Петербургском политехническом институте.

РЕЙНОЛЬДС ОСБОРН (*Reynolds Osborne, 1842—1912*) — английский физик и инженер, чл. Лондонского королевского общества.

**Угол трения, конус трения.** Рассматривая трение покоя, предположим, что к телу, покоящемуся на горизонтальной шероховатой плоскости, приложена сила  $Q$ , составляющая угол  $\alpha$  с нормалью к плоскости (рис. 58).

Сила  $Q$  может быть разложена на две силы: силу  $P$ , прижимающую тело к поверхности, уравновешиваемую нормальной реакцией  $N$  поверхности:

$$N = P = Q \cos \alpha,$$

и силу  $S$ , стремящуюся сдвинуть тело с места и равную

$$S = Q \sin \alpha.$$

Шероховатость соприкасающихся поверхностей вызывает трение между ними, и вследствие этого на тело в направлении, противоположном направлению силы  $S$ , действует сила трения

$$S = F \leq F_{\max} = fN = fQ \cos \alpha.$$

Для того чтобы тело под действием приложенного усилия могло быть сдвинуто с места, необходимо, чтобы  $S$  была по величине больше или равна  $F_{\max}$ , т. е. чтобы было  $Q \sin \alpha \geq fQ \cos \alpha$ , или  $f = \operatorname{tg} \varphi \leq \operatorname{tg} \alpha$ , откуда будет следовать

$$\alpha \geq \varphi.$$

Таким образом, в зависимости от материала и характера поверхности трущихся тел можно по заданному коэффициенту трения  $f$  определить такой угол  $\varphi$ , что если приложенная к телу сила будет наклонена к нормали на угол, меньший угла  $\varphi$ , то, как бы ни была велика эта сила, тело останется в равновесии. Это и объясняет наименование угла  $\varphi$  углом трения. Заштрихованная на рис. 59 зона представляет собой область, обладающую замечательным свойством; как бы ни была велика по интенсивности сила, линия действия которой расположена внутри этой области, эта сила не приведет в движение тело, опирающееся на плоскость.

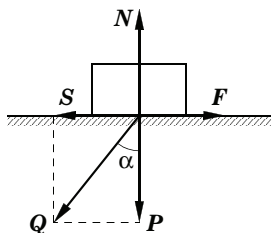


Рис. 58

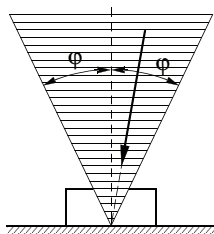


Рис. 59

Если мы рассматриваем тело, имеющее возможность передвигаться в любом направлении вдоль плоскости, то область трения будет ограничена поверхностью конуса с углом раствора, равным  $2\varphi$  — *конусом трения*\*. Наличием области трения объясняется явление заклинивания, или, как говорят, «заедания», частей машин, когда никакой приложенной внутри конуса силой не удастся сдвинуть с места соответствующую часть машины. Приложенная сила увеличивает нормальную реакцию, последняя, в свою очередь, вызывает возрастание силы трения, и приложенная сила оказывается недостаточной для преодоления сопротивления трения.

**Трение верчения.** В отличие от абсолютно твердых тел, которые могут соприкасаться в одной точке, соприкосновение прижатых друг к другу реальных тел происходит всегда по некоторой площадке. Приведению одного из тел во вращение по другому телу препятствуют силы трения скольжения, которые распределены по площадке соприкосновения и определяют в своей совокупности *трение верчения*.

Совокупность этих сил может быть приведена к паре, которая уравновешивается парой, приложенной к телу и стремящейся повернуть его вокруг оси, перпендикулярной площадке соприкосновения.

Определение предельной величины момента пары трения верчения представляет собой сложную задачу, так как этот момент зависит от распределения давлений по площадке соприкосновения, а последние, в свою очередь, — от формы поверхностей и упругих свойств прижатых друг к другу тел. *Предельную величину момента трения верчения  $M$*  принимают пропорциональной прижимающей силе  $N$  и определяют формулой

$$M = \mu N;$$

здесь  $\mu$  — *коэффициент трения верчения*, имеющий размерность длины. Этот коэффициент, в свою очередь, зависит от коэффициента трения скольжения  $f$ . Так, например, при соприкосновении плоского основания круглого цилиндра радиусом  $a$  с плоской поверхностью коэффициент трения верчения  $\mu$  может быть определен теоретически и оказывается равным

$$\mu = \frac{\pi}{4} fa \approx 0,79fa.$$

\* Коэффициент трения может иметь различные значения для различных направлений на плоскости (например, при трении по дереву вдоль и поперек волокон, при трении по прокатному железу по направлению и перпендикулярно направлению прокатки). Поэтому конус трения не всегда представляет собой прямой круговой конус.

В более сложном случае соприкосновения тела, ограниченного поверхностью вращения, с телом, ограниченным плоской поверхностью, имеем

$$\mu = \frac{3\pi}{16} fa \approx 0,59fa,$$

где  $a$  — радиус образующейся при соприкосновении тел круговой площадки, в свою очередь зависящий от силы, которая прижимает тела друг к другу, от радиуса кривизны поверхности вращения в точке соприкосновения ее с плоской поверхностью и от упругих постоянных (Галин Л. А., [2, с. 204]).

## § 22. Трение качения

Представим себе каток весом  $Q$  и радиусом  $a$ , покоящийся на горизонтальной плоскости (рис. 60). Опыт показывает, что, если приложить к оси катка горизонтальную силу  $S$ , каток будет оставаться в покое, пока величина этой силы не достигнет некоторого значения. Чтобы объяснить этот факт, составим уравнения статики для плоской системы сил, действующих на каток; этими силами являются вес  $Q$ , усилие  $S$ , нормальная реакция  $N$  и сила трения  $F$ .

Проецируя все силы на горизонтальное и вертикальное направления, получим

$$Q = N, \quad S = F.$$

Остается составить уравнение моментов; за центр моментов примем точку  $O$  соприкосновения контура колеса с плоскостью; имеем

$$m_O(Q) = 0, \quad m_O(F) = 0, \quad m_O(S) = -aS,$$

и уравнение моментов дает соотношение

$$m_O(N) = aS.$$

Мы приходим, таким образом, к необходимости принять, что нормальная реакция  $N$  приложена не в точке  $O$ , а несколько сдвинута от нее в сторону действия силы  $S$ . Физически этот сдвиг можно объяснить наличием деформаций катка и опорной плоскости в области точки  $O$ ; фактически соприкосновение происходит по некоторой площадке, размеры которой зависят от величины нормального давления, свойств материалов и состояний поверхностей катка и опорной плоскости.

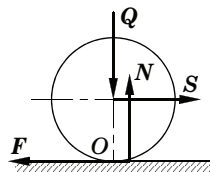


Рис. 60



Можно считать, что к катку приложена пара, момент которой  $m$  равен  $m_0(N)$ . Момент  $m$  называется *моментом трения качения*. Его предельная величина  $m_{\max}$ , как показывают опыты, пропорциональна нормальному давлению катка на плоскость:

$$m_{\max} = kN, \quad (5.5)$$

причем имеющий размерность длины коэффициент трения качения  $k$  определяется опытным путем. Очевидно, что  $k$  можно рассматривать как отрезок, на который сдвинута сила  $N$  в направлении силы  $S$  в критический момент равновесия. Пока каток находится в покое, имеем

$$m = aS < m_{\max},$$

следовательно,

$$S < (k/a)N.$$

С другой стороны,

$$S = F < fN,$$

где  $f$  — коэффициент трения скольжения. Обычно  $k/a$  значительно меньше, чем  $f$ ; это значит, что нарушение покоя, которое произойдет при постепенном увеличении силы  $S$ , будет заключаться в том, что каток начнет катиться по опорной плоскости, не скользя по ней. Возникающие здесь вопросы, однако, не могут быть рассмотрены без применения средств динамики.

### § 23. Некоторые случаи равновесия тел при наличии трения

**Ползун.** Предположим, что рассматриваемое тело (ползун) имеет вертикальную плоскость симметрии; пусть сечение тела этой плоскостью представляет собой прямоугольник со сторонами  $2a$  и  $2h$  (рис. 61). К ползуну приложены вертикальная нагрузка  $Q$  и горизонтальная сила  $P$ , линии действия которых будем считать пересекающимися в центре  $C$  прямоугольника. Реакция плоскости основания на ползун приводится к нормальной реакции  $N$  и силе трения  $F$ , причем линия действия  $N$  неизвестна; ее расстояние от точки  $C$  обозначим через  $x$ . Очевидно,  $x \leq a$ .

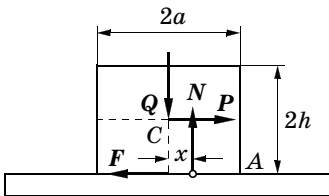


Рис. 61

Составляем три уравнения равновесия плоской совокупности сил  $Q$ ,  $P$ ,  $N$ ,  $F$  в виде двух уравнений проекций на горизонтальную и вертикальную оси и уравнения моментов относительно точки  $C$ :

$$N - Q = 0, \quad P - F = 0, \quad Nx - Fh = 0,$$

или

$$N = Q, \quad F = P, \quad x = \frac{Fh}{N} = \frac{Ph}{Q}.$$

Согласно закону трения имеем  $F < fN$ , т. е.

$$P \leq fQ,$$

и, как указано выше,  $x = Ph/Q \leq a$ , т. е.

$$P \leq (a/h)Q.$$

Будем постепенно увеличивать  $P$ . Если  $f < a/h$ , то равновесие будет иметь место до тех пор, пока сила трения не достигнет своей предельной величины, после чего начнется скольжение ползуна; если же  $f > a/h$ , то, как только  $P$  станет больше, чем  $aQ/h$ , тело, раньше чем начнется скольжение, опрокинется вокруг ребра  $A$ .

**Наклонная плоскость.** Рассмотрим ту же задачу, что и в предыдущем примере, но в предположении, что ползун положен на плоскость, наклоненную к горизонту под углом  $\alpha$  (рис. 62). Усилие, стремящееся сдвинуть тело вдоль наклонной плоскости, равно по величине  $|P - Q \sin \alpha|$  и направлено:

✓ вверх, если

$$P - Q \sin \alpha > 0, \quad (\alpha)$$

✓ вниз, если

$$P - Q \sin \alpha < 0. \quad (\beta)$$

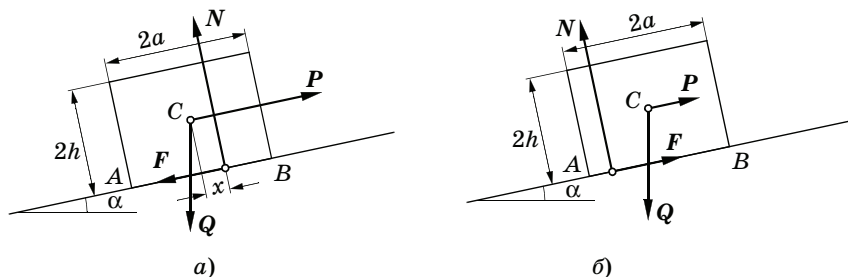


Рис. 62

В случае ( $\alpha$ ) сила трения  $F$  при покое направлена противоположно  $P$ . Уравнения равновесия дают (рис. 62,  $a$ )

$$P - Q \sin \alpha - F = 0, \quad Q \cos \alpha - N = 0, \quad Nx - Fh = 0.$$

Как и выше, находим, что при равновесии

$$P \leq Q (\sin \alpha - f \cos \alpha), \quad (\gamma)$$

$$P \leq Q \left( \sin \alpha + \frac{a}{h} \cos \alpha \right). \quad (\delta)$$

Если постепенно увеличивать силу  $P$  от значения  $Q \sin \alpha$ , то при  $f < a/h$  равновесие будет иметь место до тех пор, пока  $P$  не достигнет значения, даваемого неравенством ( $\gamma$ ); когда это значение будет превзойдено, тело начнет скользить вверх по плоскости. Если же  $f > a/h$  и  $P$  достигнет и превзойдет значение, даваемое неравенством ( $\delta$ ), то до наступления скольжения тело начнет опрокидываться вокруг правого ребра  $B$ .

В случае ( $\beta$ ) сила трения будет иметь направление силы  $P$ . Как и выше, получим (рис. 62,  $b$ )

$$P \geq Q (\sin \alpha - f \cos \alpha), \quad (\epsilon)$$

$$P \geq Q \left( \sin \alpha - \frac{a}{h} \cos \alpha \right). \quad (\zeta)$$

Если  $f < a/h$ , то при постепенном уменьшении  $P$  от значения  $Q \sin \alpha$  равновесие будет иметь место, пока будет удовлетворено неравенство ( $\epsilon$ ) (в противном случае тело станет скользить вниз по наклонной плоскости). Наконец, при  $f > a/h$  равновесие имеет место, если соблюдено неравенство ( $\zeta$ ) (в противном случае произойдет опрокидывание вокруг левого ребра  $A$ ).

В итоге можно сказать, что при равновесии сила  $P$  должна удовлетворять (при  $f < a/h$ ) неравенствам

$$Q (\sin \alpha - f \cos \alpha) \leq P \leq Q (\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Если ввести в рассмотрение угол трения  $\varphi$ , то эти соотношения можно записать еще в виде

$$Q \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \leq P \leq Q \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Заметим, что при  $\alpha < \varphi$  тело будет оставаться в равновесии при любом значении  $Q$  и при отсутствии силы  $P$  (самоторможение на наклонной плоскости).

**Вкладыш и цапфа.** Предположим, что вкладыш подшипника неплотно облегает цапфу, т. е. радиус последней  $r$  несколько меньше радиуса вкладыша (рис. 63). Пусть цапфа нагружена силой  $Q$  и некоторой парой, момент которой  $m$ . Вследствие наличия этой пары точка  $A$  соприкосновения цапфы и вкладыша сместится при равновесии немного над нижней точкой вкладыша: цапфа «взбегает» по вкладышу.

Будем пренебрегать трением качения и влиянием смазки на трение скольжения. Реакция вкладыша на цапфу при равновесии должна сводиться к силе  $R$ , равной по величине  $Q$  и направленной противоположно  $Q$  (так как главный вектор всех сил, действующих на цапфу, должен равняться нулю). Но этого недостаточно; нужно еще, чтобы пара сил  $(Q, R)$  уравновешивалась приложенной парой  $m$ . Если через  $\psi$  обозначить угол, на который отклонена реакция  $R$  от общей нормали в точке  $A$  к поверхностям вкладыша и цапфы, то получим

$$R - Q = 0, \quad Rr \sin \psi - m = 0,$$

т. е.  $m = Qr \sin \psi$ ; имея в виду, что  $\psi \leq \varphi$ , где  $\varphi$  — угол трения, находим

$$m \leq Qr \sin \varphi.$$

Если это неравенство не соблюдено, то цапфа будет вращаться, скользить по вкладышу.

Построим круг радиусом  $r_1$ ,  $r_1 = r \sin \varphi$  с центром в центре цапфы (так как радиусы вкладыша и цапфы очень мало отличаются друг от друга, то за центр этого круга можно принять без большой ошибки и центр вкладыша). Это — *круг трения*. При равновесии линия действия реакции  $R$  должна пересекать круг трения или касаться его.

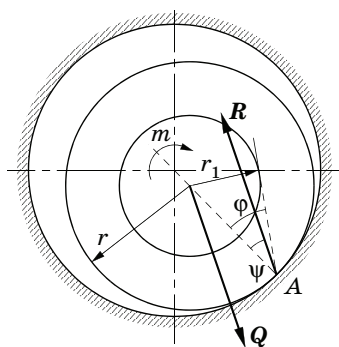


Рис. 63

**Трение каната о шкив.** Предварительно рассмотрим такую задачу: определить усилие  $P$  (рис. 64), необходимое для перетягивания через ребро  $B$  призмы  $ABC$  веревки, к другому концу которой приложено некоторое заданное сопротивление  $Q$ . Коэффициент трения веревки о ребро призмы равен  $f$ ; внешний

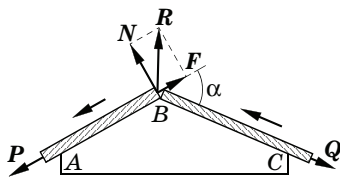


Рис. 64

угол призмы равен  $\alpha$ ; трением веревки о грани  $AB$  и  $BC$  пренебрегаем, считая реакцию поверхности сосредоточенной в точке  $B$ . Ветви веревки растянуты силами  $P$  и  $Q$ ; точка  $B$  веревки находится в равновесии под действием указанных сил  $P$ ,  $Q$  и реакции ребра  $R$ . Реакция  $R$ , в свою очередь, может быть разложена на давление  $N$  ребра призмы на веревку и силу трения  $F$ , направленную перпендикулярно силе  $N$ . Если бы мы знали направление реакции  $N$ , то задачу легко было бы решить. Но в угле  $B$  нет определенной нормали к поверхности призмы, точно так же неизвестна форма соприкасающейся с ребром веревки. Здесь мы встречаемся с задачей неопределенной; по одной заданной силе  $Q$  и направлению второй силы  $P$  треугольник сил  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  построить нельзя. Чтобы сделать задачу определенной, необходимо принять какие-то дополнительные гипотезы о направлении силы  $N$ . Так, например, если принять во внимание жесткость веревки, т. е. ее сопротивление изгибу при переходе через ребро призмы, то можно себе представить, что веревка при перетягивании ее в направлении стрелки силой  $P$  примет форму, указанную на рис. 65, и считать, что реакция  $N$  направлена перпендикулярно грани  $AB$ . Составляя силовой многоугольник  $P$ ,  $Q$ ,  $N$ ,  $F$ , получаем

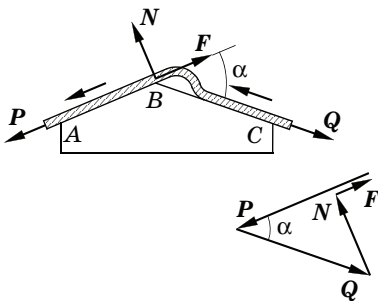


Рис. 65

$$P - F = Q \cos \alpha, \quad N = Q \cos \alpha.$$

Ограничиваясь рассмотрением критического момента равновесия, полагаем  $F = fN$ . Тогда получим

$$P = Q (\cos \alpha + f \sin \alpha).$$

При малых  $\alpha$  ( $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ ) будем приближенно иметь

$$P = Q(1 + f\alpha).$$

Применяя эту формулу к случаю многоугольной призмы с малыми внешними углами  $\alpha$  (рис. 66), будем иметь

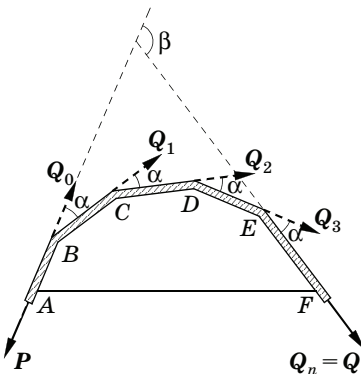


Рис. 66

$$\begin{aligned} Q_{n-1} &= Q_n(1 + f\alpha) = Q(1 + f\alpha), \\ Q_{n-2} &= Q_{n-1}(1 + f\alpha) = Q(1 + f\alpha)^2, \\ &\dots\dots\dots \\ Q_1 &= Q_2(1 + f\alpha) = Q(1 + f\alpha)^{n-1}, \\ Q_0 &= P = Q_1(1 + f\alpha) = Q(1 + f\alpha)^n, \end{aligned}$$

где  $n$  — число ребер, на которых происходит изгиб веревки.

Обозначая через  $\beta$  полный угол отклонения веревки, равный  $\beta = n\alpha$ , окончательно имеем

$$P = Q \left( 1 + f \frac{\beta}{n} \right)^n. \tag{\alpha}$$

Полученная формула позволяет решить следующую задачу: веревка навита на неподвижный горизонтальный цилиндр, и к нижнему концу ее прикреплен груз  $P$  (рис. 67). Какое усилие  $Q$  надо приложить к другому ее концу, чтобы удержать груз от падения, если угол охвата равен  $\beta$ , а коэффициент трения веревки о цилиндр равен  $f$ ?

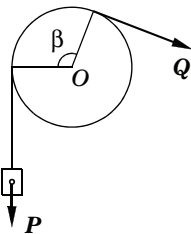


Рис. 67

Эта классическая задача была впервые решена Эйлером. Переходя к пределу в формуле (5), находим

$$P = Q \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + f \frac{\beta}{n} \right)^n = Q e^{f\beta},$$

или ( $e$  — основание натуральных логарифмов)

$$Q = P e^{-f\beta}. \tag{5.6}$$

Из формулы (5.6) следует, что уравнивающая сила не зависит от радиуса цилиндра, а зависит лишь от коэффициента трения веревки о цилиндр и от угла охвата цилиндра веревкой. Сила  $Q$  убывает с ростом угла охвата по показательному закону; так, например, при  $\beta = 2\pi + \pi/2$  и  $f = 0,2$  будем иметь  $Q = 0,21P$ .

### § 24. Примеры

**Пример 15.** Каковы должны быть размеры механизма, показанного на рис. 68, для того, чтобы при коэффициенте трения  $f = 0,6$  между стенкой и ползунами  $A$  и  $B$  механизм был самотормозящимся?

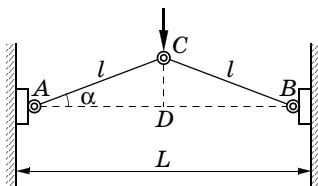


Рис. 68

Ставим условие, чтобы линия действия силы давления стержня на ползун лежала в области трения, т. е. чтобы выполнялось неравенство

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{L} \sqrt{l^2 - \frac{1}{4}L^2} < 0,6;$$

тогда, замечая, что  $AC > AD$ , после простых вычислений получим

$$0,5 < l/L < 0,585.$$

Эти неравенства определяют конструкцию.

**Пример 16.** Определить наименьшее расстояние  $x$  (рис. 69) от центра груза до оси  $CC$  платформы  $E$ , при котором груз с платформой (весом платформы пренебрегаем) будет в равновесии, если коэффициент трения подвижного стержня  $CC$  о направляющие стойки  $A$  и  $B$  равен  $f$ .

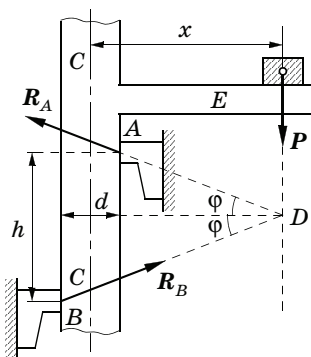


Рис. 69

При равновесии линия действия силы  $P$  должна проходить через точку пересечения линий действия опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$ . Так как последние в критический момент направлены под известными углами трения  $\varphi$  к горизонтали, то точку пересечения  $D$  этих реакций легко найти. Из геометрических соображений получим

$$x_{\min} = \frac{h}{2} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{d}{2} = \frac{h}{2f} + \frac{d}{2}.$$

Ясно, что чем меньше коэффициент трения, тем большее расстояние от груза до оси стойки придется взять, чтобы сохранить равновесие. При  $x > x_{\min}$ , т. е. при

$$x > \frac{h}{2f} + \frac{d}{2},$$

платформа будет самотормозящейся, так как при любой величине нагрузки  $P$  платформа сохранит равновесие. На свойствах самоторможения такого рода конструкций основан ряд строительных приспособлений и других механизмов.

**Пример 17.** Определить, в каких пределах может изменяться при равновесии клинового пресса (рис. 70) сила  $P$  при заданной нагрузке на пресс  $Q$ . Даны коэффициенты трения  $f, f_1$  и  $f_2$  (или соответствующие углы трения  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ ) и угол клина  $\alpha$ .

На тело (2) действуют: сила  $Q$ , реакция  $R_2$  опоры  $B$  и реакция  $R$  тела (1). Каждая из этих реакций отклонена от нормали на некоторый угол, не превосходящий угла трения между соответствующими поверхностями ( $\rho \leq \varphi, \rho_2 \leq \varphi_2$ ). Поскольку тело (2) находится в равновесии под действием плоской совокупности трех сил, то линии действия этих сил должны пересекаться в одной точке, что и показано на рисунке. На тело (1) действуют: перемещающая клин сила  $P$ , реакция  $R_1$  опоры  $A$  и реакция  $R^*$  тела (2), также пересекающиеся в одной точке; конечно,  $R^* = -R$  и  $\rho_1 \leq \varphi_1$ .

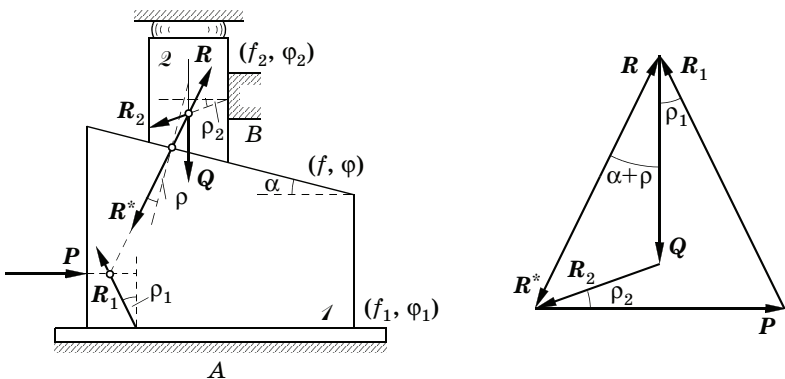


Рис. 70

Направлениям сил на рисунке соответствует случай, когда некоторое увеличение силы  $P$  сопровождается перемещением тела (2) вверх, а тела (1) — вправо. Составим силовые треугольники для первого и второго тел; из них получим

$$\frac{R}{Q} = \frac{\sin [(\pi/2) + \rho_2]}{\sin [(\pi/2) - (\alpha + \rho + \rho_2)]}, \quad \frac{P}{R^*} = \frac{\sin (\alpha + \rho + \rho_1)}{\sin [(\pi/2) - \rho_1]},$$

имея в виду, что  $R = R^*$ , находим теперь

$$P = Q \frac{\sin (\alpha + \rho + \rho_1) \cos \rho_2}{\cos (\alpha + \rho + \rho_2) \cos \rho_1}.$$

Конечно, углы  $\rho$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  неизвестны. Из построения силовых треугольников\* можно, однако, заключить, что увеличение этих углов при фиксированных  $Q$  и  $\alpha$  сопровождается увеличением  $P$ . Поэтому

$$P \leq Q \frac{\sin (\alpha + \varphi + \varphi_1) \cos \varphi_2}{\cos (\alpha + \varphi + \varphi_2) \cos \varphi_1}. \quad (\alpha)$$

Рассмотрев аналогичным образом случай, когда некоторое уменьшение силы  $P$  может сопровождаться перемещением тела (2) вниз, а тела (1) — влево, получим

$$P \geq Q \frac{\sin (\alpha - \varphi - \varphi_1) \cos \varphi_2}{\cos (\alpha - \varphi - \varphi_2) \cos \varphi_1}.$$

Этот случай отличается от предыдущего тем, что в критический момент равновесия реакции  $R$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  отклонены от нормалей в стороны, противоположные принятым на рис. 70. Поэтому можно просто в правой части неравенства ( $\alpha$ ) изменить знаки углов  $\varphi$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , изменив одновременно знак  $\leq$  на знак  $\geq$ .

Итак, при равновесии клинового пресса имеем

$$Q \frac{\sin (\alpha - \varphi - \varphi_1) \cos \varphi_2}{\cos (\alpha - \varphi - \varphi_2) \cos \varphi_1} \leq P \leq Q \frac{\sin (\alpha + \varphi + \varphi_1) \cos \varphi_2}{\cos (\alpha + \varphi + \varphi_2) \cos \varphi_1}.$$

Пресс будет самотормозящимся (т. е. будет оставаться в равновесии при исчезновении давления на клин  $P$  и при любом  $Q$ ), если  $\alpha < \varphi + \varphi_1$ .

**Пример 18.** Учитывая трение в шарнире, определить, в каких пределах может при равновесии углового прямоугольного рычага изменяться сила  $P$ , уравнивающая заданную нагрузку  $Q$ . Радиус шипа  $r$ , угол трения  $\varphi$ , длины сторон рычага соответственно равны  $a$  и  $b$  (рис. 71).

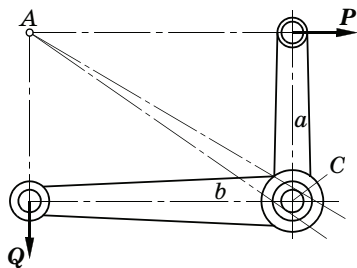


Рис. 71

\* Это легко доказать и более строго; нужно только проверить, что частные производные  $\partial P / \partial \rho$ ,  $\partial P / \partial \rho_1$ ,  $\partial P / \partial \rho_2$  положительны.



Реакция шарнира  $\mathbf{R}$ , очевидно, равна по величине равнодействующей  $\sqrt{P^2 + Q^2}$  сил  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$ . Построим круг трения, т. е. круг радиусом  $r_1 = r \sin \varphi$  с центром в центре шипа  $C$  (на рисунке показан пунктиром). Линия действия реакции  $\mathbf{R}$  при равновесии рычага проходит через точку  $A$  пересечения линий действия сил  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  внутри круга трения (или в крайнем случае касается этого круга). Иными словами, линия действия  $\mathbf{R}$  проходит внутри (или по сторонам) угла между касательными, проведенными из  $A$  к кругу трения.

Поэтому уравнение моментов относительно точки  $C$  имеет один из двух видов: или

$$Pa = Qb - r_1' \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad (\alpha)$$

или

$$Pa = Qb + r_1'' \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad (\beta)$$

причем  $r_1' \leq r_1$ ,  $r_1'' \leq r_1$ . Можно убедиться, что значение  $P$ , определяемое равенством  $(\alpha)$ , убывает, когда  $r_1'$  возрастает  $\left\{ \begin{array}{l} \text{действительно, рассматри-} \\ \text{вая } P \text{ как неявную функцию от } r_1', \text{ имеем } \frac{dP}{dr_1'} = -\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{a + \frac{r_1' P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}} < 0 \end{array} \right\}$ ; на-

оборот,  $P$ , определяемое равенством  $(\beta)$ , возрастает вместе с  $r_1''$ . Поэтому

$$Qb - r_1 \sqrt{P^2 + Q^2} \leq Pa \leq Qb + r_1 \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (\gamma)$$

Решение этих неравенств относительно  $P$  приводит к сложным выражениям. Поэтому мы воспользуемся приближенным представлением радикала, предложенным Ж. Понселе\*; пусть  $x > y > 0$ ; тогда с относительной погрешностью, не превосходящей  $\pm 4\%$ , можно принять

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \alpha x + \beta y, \quad \alpha = 0,960, \quad \beta = 0,398,$$

что соответствует замене дуги окружности в пределах  $(0, \pi/4)$  секущей прямой с коэффициентами, определенными из условия наименьшего отклонения этой секущей (в смысле Чебышёва) от дуги окружности [см. текст в фигурных скобках на этой странице выше].

Пусть  $a > b$ , тогда  $P < Q$  (если трение невелико). Из неравенств  $(\gamma)$  получаем  $Pa \geq Qb - r_1 (\alpha Q + \beta P)$ , т. е.

$$P \geq Q \frac{b - r_1 \alpha}{a + r_1 \beta}, \quad (\delta)$$

\* ПОНСЕЛÉ ЖАН ВИКТОР (*Poncelet Jean Victor, 1788—1876*) — французский математик и инженер, один из основателей прикладной механики. Доказательство формулы Понселе, основанное на теории П. Л. Чебышёва функций, наименее уклоняющихся от нуля, приведено в «Лекциях о функциях, наименее уклоняющихся от нуля» А. А. Маркова [6].

и  $Pa \leq Qb + r_1(\alpha Q + \beta P)$ , т. е.

$$P \leq Q \frac{b + r_1 \alpha}{a - r_1 \beta}. \quad (\epsilon)$$

Если  $P$  меньше, чем величина в правой части неравенства (δ), то груз  $Q$  станет опускаться; если же  $P$  превзойдет величину правой части неравенства (ε), то нарушение равновесия будет сопровождаться подъемом груза  $Q$ .

## Глава VI

### Центр параллельных сил и центр тяжести

#### § 25. Центр параллельных сил

Предположим, что к твердому телу приложена совокупность параллельных сил  $F_1 F_2, \dots, F_n$  (рис. 72), приводящаяся к одной равнодействующей. Будем считать точки приложения сил  $F_i$  фиксированными, т. е. откажемся от возможности перемещать эти силы вдоль их линий действия; координаты точек приложения сил  $F_i$  назовем  $x_i, y_i, z_i$ .

Докажем, что при повороте всех сил на один и тот же произвольный угол так, чтобы сохранилась их параллельность и сторона, в которую они направлены, равнодействующая повернется на тот же угол вокруг некоторой точки, называемой *центром параллельных сил*.

При этом сначала сложим все силы, направленные в одну сторону; их равнодействующую обозначим через  $R_1$ ; равнодействующая сил, направленных в противоположную сторону, пусть будет  $R_2$ . Величина каждой из этих равнодействующих равна сумме величин слагаемых, а направления совпадают с направлением слагаемых сил.

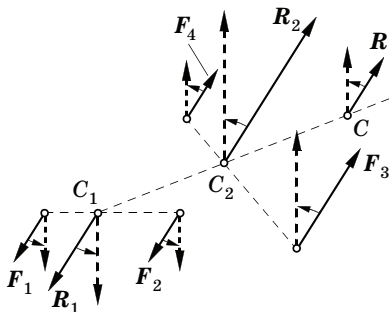


Рис. 72

При повороте точка приложения равнодействующей каждой из двух сил, которые мы последовательно складываем, не изменит своего положения на отрезке, соединяющем точки приложения слагаемых сил, так как положение указанной точки зависит только от отношения величин слагаемых сил и не изменяется при перемене их направления. Поэтому при повороте не изменится положение точек  $C_1$  и  $C_2$  приложения равнодействующих  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$ , а следовательно, и положение точки  $C$  приложения равнодействующей  $\mathbf{R}$  всей совокупности сил.

Величина и направление равнодействующей определяются формулой

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i. \quad (6.1)$$

Для последующих приложений важно иметь формулы, определяющие координаты  $x_C$ ,  $y_C$ ,  $z_C$  точки приложения равнодействующей — центра параллельных сил.

Поскольку совокупность сил приводится к одной равнодействующей, момент равнодействующей относительно произвольной точки равен геометрической сумме моментов слагаемых сил относительно той же точки (теорема Вариньона). Поэтому момент равнодействующей относительно произвольной оси будет равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно той же оси.

Повернув все силы на одинаковый угол так, чтобы линии действия их стали параллельными оси  $Oz$ , составим выражение момента равнодействующей относительно оси  $Oy$ :

$$m_y(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^n m_y(\mathbf{F}_i). \quad (6.2)$$

Заметим, что после поворота

$$F_{ix} = F_{iy} = 0, \quad F_{iz} = \tilde{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где через  $\tilde{F}_i$  обозначена алгебраическая величина, равная  $F_i$  (величине силы), если повернутая сила направлена в положительную сторону оси  $z$ , и равная  $(-F_i)$  в противном случае. Поэтому

$$R_x = R_y = 0, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = \sum_{i=1}^n \tilde{F}_i. \quad (6.3)$$

Вспоминая аналитическое выражение момента силы относительно оси и пользуясь только что указанными обозначениями, получим по (6.2)

$$x_C \sum_{i=1}^n \tilde{F}_i = \sum_{i=1}^n x_i \tilde{F}_i,$$

или

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \tilde{F}_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{F}_i}. \quad (6.4)$$

Заменяя  $x$  на  $y$  и  $y$  на  $z$ , получим следующие формулы для координат центра параллельных сил:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \tilde{F}_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{F}_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \tilde{F}_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{F}_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \tilde{F}_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{F}_i}. \quad (6.5)$$

Полученные формулы можно рассматривать как результат проецирования на координатные оси выражения вектора-радиуса центра параллельных сил

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \tilde{F}_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{F}_i}, \quad (6.6)$$

где  $\mathbf{r}_i$  — векторы-радиусы точек приложения сил  $\mathbf{F}_i$ .

## § 26. Центры тяжести объема, поверхности, линии

Предположим теперь, что параллельные силы непрерывно распределены по объему тела. Это значит, что к каждому из весьма малых (элементарных) объемов  $\Delta\tau_i$ , на которые можно мысленно разбить тело, приложена сила  $\tilde{F}_i = \tilde{p}_i \Delta\tau_i$ , пропорциональная по величине рассматриваемому объему; величина  $\tilde{p}_i$  определяет силу, отнесенную к единице объема, и может быть постоянной во всех точках тела, но может и изменяться от точки к точке. В дальнейшем считаем, что все силы имеют одинаковое направление, и отбрасываем поэтому значок над буквой  $p_i$ . Из формул (6.5) получаем

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i \Delta\tau_i}{\sum_{i=1}^n p_i \Delta\tau_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i p_i \Delta\tau_i}{\sum_{i=1}^n p_i \Delta\tau_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i p_i \Delta\tau_i}{\sum_{i=1}^n p_i \Delta\tau_i}. \quad (6.7)$$

Эти формулы являются приближенными, так как значения координат  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  определяются с точностью до размеров объемов  $\Delta\tau_i$ . Чем меньше эти объемы, тем меньшую ошибку мы сделаем, определяя координаты центра параллельных сил по формулам (6.7). Поэтому к вполне точным выражениям координат центра параллельных сил можно прийти в результате предельного перехода, устремляя объемы  $\Delta\tau_i$  к нулю, а их число  $n$  к бесконечности. Предел такого рода называется *определенным интегралом*.

Формулы (6.7) в векторном обозначении могут быть при этом переписаны так ( $\mathbf{r}_C$  — вектор-радиус центра параллельных сил,  $\mathbf{r}$  — текущий вектор-радиус):

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int \mathbf{r} p \, \delta\tau}{\int p \, \delta\tau}. \quad (6.8)$$

Наиболее важное значение имеет случай силы тяжести. При небольших размерах тела во всех технических приложениях можно считать силы тяжести отдельных частиц тела системой практически параллельных сил\*. Формулы (6.8) дают координаты центра параллельных сил тяжести частиц тела, или, кратко говоря, *координаты центра тяжести тела*. В этих формулах величина  $p$  есть вес единицы объема, т. е. удельный вес тела  $\gamma$ . В случае *однородного* тела величина  $\gamma$  постоянна (не зависит от координат) и может быть вынесена за знак суммы в числителе и знаменателе, а затем сокращена. Таким образом, получаем формулы для *координат центра тяжести однородного тела*:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \Delta\tau_i}{\tau}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \Delta\tau_i}{\tau}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \Delta\tau_i}{\tau}, \quad (6.9)$$

или в пределе и в векторном обозначении ( $\mathbf{r}_C$  — вектор-радиус центра тяжести):

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{\tau} \int \mathbf{r} \, \delta\tau. \quad (6.10)$$

Здесь через  $\tau$  обозначен объем тела. Так как в последних формулах фигурируют только геометрические величины, то говорят, что они определяют *центр тяжести объема*.

\* Угол между направлениями сил тяжести двух точек, расположенных на поверхности Земли на расстоянии 1 км друг от друга по меридиану, равен  $32''$ .

Если параллельные силы непрерывно распределены по некоторой поверхности  $\sigma$ , то в формулах (6.5) надо положить  $\vec{F}_i = f_i \Delta\sigma_i$ , где  $f_i$  — сила, отнесенная к единице площади поверхности (напряжение), а  $\Delta\sigma_i$  — элементарные площадки, на которые мысленно разбита поверхность. Получаем

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i \Delta\sigma_i}{\sum_{i=1}^n f_i \Delta\sigma_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i f_i \Delta\sigma_i}{\sum_{i=1}^n f_i \Delta\sigma_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i f_i \Delta\sigma_i}{\sum_{i=1}^n f_i \Delta\sigma_i}. \quad (6.11)$$

Считая  $f_i$  весом единицы площади, будем иметь дело с центром тяжести тонкой плоской пластинки или с центром тяжести неплоской тонкой оболочки. При однородном материале и постоянной толщине пластинки или оболочки  $f_i$  будет постоянным, и мы получаем формулы для *координат центра тяжести однородной поверхности*:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \Delta\sigma_i}{\sigma}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \Delta\sigma_i}{\sigma}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \Delta\sigma_i}{\sigma}. \quad (6.12)$$

И в этом случае суммы могут быть заменены интегралами, но уже вычисляемыми по поверхности тела, т. е. поверхностными интегралами; так, например, в случае однородной поверхности будем иметь ( $\sigma$  — общая поверхность)

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} \mathbf{r} d\sigma,$$

где  $\sigma = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i$  — площадь поверхности. Здесь понятие центра тяжести, как и в случае формул (6.9), уже имеет чисто геометрическое значение.

Сила тяжести не является единственным примером непрерывного поверхностного распределения параллельных сил. Чтобы дать другой пример, представим себе плоскую пластинку, погруженную в жидкость. Сила гидростатического давления жидкости на пластинку дает пример совокупности непрерывно распределенных параллельных сил (они перпендикулярны пластинке), величина которых пропорциональна расстоянию от свободной поверхности жидкости до рассматриваемой точки. В этом случае центр параллельных сил называется *центром давления жидкости на пластинку*. Точно так же можно говорить о центре давления сыпучего тела на опорную стенку.

Параллельные силы могут быть также непрерывно распределены вдоль некоторой линии, как, например, силы тяжести, приложенные к тонкой проволоке, ось которой представляет данную линию. Полагаем  $F_i = q_i \Delta l_i$ . При однородном материале и постоянном поперечном сечении вес  $q_i$  единицы длины — погонный вес — проволоки будет постоянным, и мы получаем формулы для координат центра тяжести однородной линии:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \Delta l_i}{L}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \Delta l_i}{L}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \Delta l_i}{L}, \quad (6.13)$$

где  $L = \sum_{i=1}^n \Delta l_i$  — длина линии. В случае плоской кривой, расположенной в плоскости  $xy$ , получим  $z_C = 0$ . Так же как и ранее, суммы должны заменяться на свои предельные значения — интегралы:

$$r_C = \frac{1}{L} \int_L r \delta l. \quad (6.14)$$

Вопрос о нахождении центра непрерывно распределенных вдоль линии параллельных сил возникает не только в случае сил веса. Речь, например, может идти о вычислении координат центра непрерывно распределенных параллельных нагрузок на балку (с прямолинейной или криволинейной осью), причем эти нагрузки могут изменяться по тому или иному закону вдоль оси балки. Во всех этих случаях следует пользоваться формулами (6.5), выражая  $F_i$  по данным задачи.

В случае плоской фигуры (ее плоскость примем за плоскость  $xy$ ) координаты центра тяжести будут

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \Delta \sigma_i}{\sigma}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \Delta \sigma_i}{\sigma}. \quad (6.15)$$

Числители этих выражений называются *статическими моментами площади относительно осей  $y$  и  $x$* :

$$M_y = \sum_{i=1}^n x_i \Delta \sigma_i, \quad M_x = \sum_{i=1}^n y_i \Delta \sigma_i. \quad (6.16)$$

Вообще, *статическим моментом площади относительно оси называется сумма произведений элементарных площадок, на которые разбита площадь, на расстояние от каждой площадки до оси.*

Знание статического момента площади относительно некоторой оси позволяет определить расстояние от оси центра тяжести площади согласно формулам

$$x_C = \frac{M_y}{\sigma}, \quad y_C = \frac{M_x}{\sigma}. \quad (6.17)$$

## § 27. Методы определения координат центра тяжести

Фактическое разыскание координат центра тяжести объема, поверхности или линии требует применения методов интегрального исчисления. В практических приложениях часто приходится иметь дело с телами, составленными из нескольких тел, имеющих правильную геометрическую форму, положение центров тяжести которых известно. Для таких тел положение центра тяжести может быть определено без вычисления интегралов.

1°. Пусть однородное тело имеет *плоскость симметрии*, которую примем за плоскость  $xу$ . Это значит, что каждому элементу объема  $\Delta\tau_i$  с координатами  $x_i, y_i, z_i$  будет соответствовать равный по величине элемент объема с координатами  $x_i, y_i, -z_i$ . Поэтому

$$\sum_{i=1}^n z_i \Delta\tau_i = 0,$$

откуда

$$z_C = 0,$$

т. е. *центр тяжести лежит в плоскости симметрии*.

При наличии двух плоскостей симметрии центр тяжести будет находиться на прямой их пересечения; в частности, при наличии оси симметрии центр тяжести расположен на этой оси. Наконец, в случае трех плоскостей симметрии центр тяжести совпадает с точкой пересечения этих плоскостей.

В случае симметричной плоской фигуры центр тяжести будет лежать в плоскости этой фигуры на ее оси симметрии, а в случае наличия двух осей симметрии — совпадать с точкой их пересечения.

2°. Представим себе, что однородный объем  $\tau$  может быть разбит на несколько объемов  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ , координаты центров тяжести которых известны. Тогда нетрудно найти и координаты центра тяжести объема  $\tau$ . В самом деле, имеем

$$x_C = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n x_i \Delta\tau_i = \frac{1}{\tau} \left[ \sum_{(\tau_1)} x_i \Delta\tau_i + \sum_{(\tau_2)} x_i \Delta\tau_i + \dots + \sum_{(\tau_m)} x_i \Delta\tau_i \right],$$



откуда следует

$$\tau \cdot x_C = \sum_{(\tau_1)} x_i \Delta \tau_i + \sum_{(\tau_2)} x_i \Delta \tau_i + \dots + \sum_{(\tau_m)} x_i \Delta \tau_i.$$

Но, обозначая через  $x_C^{(k)}$  координату по оси  $x$  центра тяжести объема  $\tau_k$ , получим

$$x_C^{(k)} = \frac{1}{\tau_k} \sum_{(V_k)} x_i \Delta \tau_i$$

и, следовательно,

$$\tau \cdot x_C = \tau_1 x_C^{(1)} + \tau_2 x_C^{(2)} + \dots + \tau_m x_C^{(m)} = \sum_{k=1}^m \tau_k x_C^{(k)}.$$

Имеем

$$x_C = \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^m \tau_k x_C^{(k)}, \quad y_C = \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^m \tau_k y_C^{(k)}, \quad z_C = \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^m \tau_k z_C^{(k)}. \quad (6.18)$$

Аналогичные формулы могут быть выписаны в случае поверхности плоской фигуры, а также и для неоднородных тел, поверхностей и линий.

В случае, если для составления объема  $\tau$  некоторые из слагаемых объемов нужно вычесть (тело с отверстиями), можно пользоваться теми же формулами (6.18), если условиться слагаемые, соответствующие отбрасываемым объемам, брать с отрицательными знаками.

Для плоской фигуры соответствующие формулы будут иметь вид

$$x_C = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^m \sigma_k x_C^{(k)}, \quad y_C = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^m \sigma_k y_C^{(k)} \quad (6.19)$$

или, если воспользоваться понятием статического момента площади,

$$\begin{aligned} \sigma_{x_C} = M_y &= \sum_{k=1}^m \sigma_k x_C^{(k)} = \sum_{k=1}^m M_y^{(k)}, \\ \sigma_{y_C} = M_x &= \sum_{k=1}^m \sigma_k y_C^{(k)} = \sum_{k=1}^m M_x^{(k)}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

**3°.** Определение центров тяжести линий и площадей во многих случаях может быть облегчено, если воспользоваться теоремами Паппа — Гульдина\*.

\* ПАПП АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ (Паллос) — древнегреческий математик, деятельность которого одни авторы относят к третьему, другие — к четвертому веку н. э.; сочинение ГУЛЬДИНА ПАУЛЯ (Guldin Paul, 1577—1643) — швейцарского математика — о центре тяжести появилось в 1635 г.

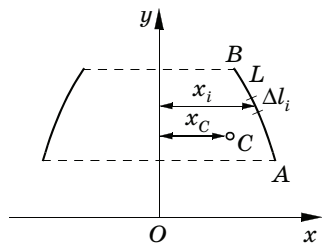


Рис. 73

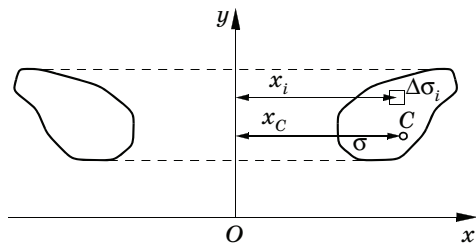


Рис. 74

**ТЕОРЕМА ПАППА—ГУЛЬДИНА 1.** Боковая поверхность тела вращения, описанного дугой плоской кривой, вращающейся вокруг оси, расположенной в плоскости кривой и ее не пересекающей, равна длине дуги, умноженной на длину окружности, описываемой центром тяжести дуги.

**ТЕОРЕМА ПАППА—ГУЛЬДИНА 2.** Объем тела вращения, описанного плоской фигурой, вращающейся вокруг оси, расположенной в плоскости фигуры и не пересекающей ее контура, равен произведению площади фигуры на длину пути, описанного ее центром тяжести.

Действительно, согласно рис. 73, элемент боковой поверхности тела вращения, описанного дугой  $AB$  вокруг оси  $y$ , будет равен  $2\pi x_i \Delta l_i$ . Поэтому вся боковая поверхность будет

$$F = 2\pi \sum_{i=1}^n x_i \Delta l_i,$$

причем суммирование ведется по всем элементам дуги  $\overset{\frown}{AB} = L$ . Но по формулам (6.13)

$$\sum_{i=1}^n x_i \Delta l_i = L x_C,$$

и, следовательно,

$$F = 2\pi x_C L. \quad (6.21)$$

Точно так же, обращаясь к рис. 74, видим, что объем элементарного кольца, описываемого площадкой  $\Delta \sigma_i$  вокруг оси  $y$ , равен  $2\pi x_i \Delta \sigma_i$ . Получаем

$$\tau = 2\pi \sum_{i=1}^n x_i \Delta \sigma_i = 2\pi x_C \sigma. \quad (6.22)$$

Формулы Паппа — Гульдина позволяют определять положение центра тяжести линии и плоской фигуры в тех случаях, когда известны поверхность или объем тела, полученного вращением этой линии или фигуры вокруг оси.

## § 28. Центры тяжести некоторых линий, плоских фигур и тел

**1°.** Центр тяжести площади треугольника находится в точке пересечения медиан треугольника. Это легко получить из таких соображений. Разбиваем треугольник прямыми, параллельными основанию, на бесконечно тонкие полоски. Центр тяжести каждой такой полоски находится в ее середине; но середины всех прямых, параллельных основанию треугольника, лежат на медиане этого основания; поэтому центр тяжести треугольника должен лежать на этой медиане; так как аналогичное рассуждение применимо и к медиане другой стороны треугольника, то искомый центр тяжести должен лежать в точке пересечения медиан. Отсюда следует также, что центр тяжести треугольника находится на расстоянии, равном одной трети высоты треугольника от соответствующего основания.

**2°.** Центр тяжести четырехугольника. Зная центр тяжести треугольника, можно найти центр тяжести произвольного многоугольника, разбивая его на треугольники и пользуясь далее приемом, изложенным в § 27, п. 2°.

В частности, для произвольного четырехугольника (рис. 75) построение производится так. Разбиваем четырехугольник  $ABED$  диагональю  $BD$  на два треугольника и отмечаем их центры тяжести  $C_1, C_2$ . Центр тяжести четырехугольника находится на отрезке  $C_1C_2$ . Точно так же, проведя диагональ  $AE$ , наметим положение центров тяжести  $C_3$  и  $C_4$  треугольников  $ADE$  и  $ABE$ . Искомый центр тяжести  $C$  находится на пересечении прямых  $C_1C_2$  и  $C_3C_4$ , так как центр тяжести двух материальных точек лежит на прямой, их соединяющей.

**3°.** Центр тяжести трапеции можно найти также, применяя следующий прием. Повторяя рассуждение, приведенное для треугольника, убедимся, что центр тяжести трапеции должен лежать на прямой  $MN$ , соединяющей середины параллельных сторон (рис. 76). Чтобы найти высоту  $h_C$  центра тяжести над нижним основанием, разбиваем трапецию на два треугольника  $ABG$  и  $BGD$ .

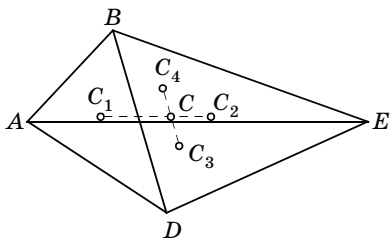


Рис. 75

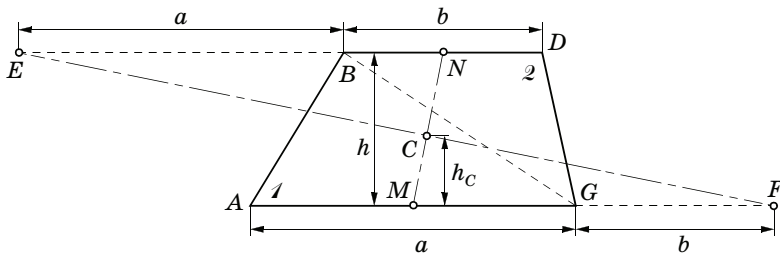


Рис. 76

В формуле (6.19)

$$y_C = h_C = \frac{1}{\sigma} (\sigma_1 y_C^1 + \sigma_2 y_C^2),$$

где индексы 1 и 2 относятся соответственно к треугольникам  $ABG$  и  $BGD$ , имеем

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} ah, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} bh, \quad y_C^1 = \frac{1}{3} h, \quad y_C^2 = \frac{2}{3} h$$

и, следовательно,

$$h_C = \frac{1}{3} \cdot \frac{h(a + 2b)}{a + b}.$$

Из этой формулы вытекает следующее построение: на продолжениях параллельных сторон откладываем  $BE = a$ ,  $GF = b$ . Центр тяжести  $C$  находим в пересечении прямых  $MN$  и  $FE$ .

**4°. Центр тяжести дуги окружности радиусом  $R$  с центральным углом  $2\alpha$ .** В силу симметрии центр тяжести лежит на биссектрисе центрального угла, которую примем за ось  $y$ , так что  $x_C = 0$ .

Для определения координаты  $y_C$  следует обратиться к формуле (6.13).

Разбиваем дугу  $L = \overset{\frown}{AB}$  (рис. 77) на весьма большое число дуг  $\Delta l_i$ . Имеем

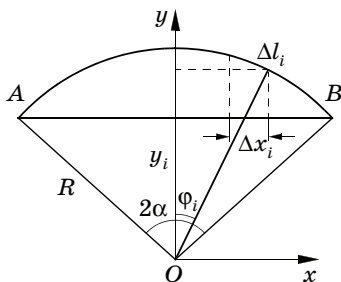


Рис. 77

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{1}{L} \sum y_i \Delta l_i = \frac{1}{L} \sum \frac{y_i}{\cos \varphi_i} \Delta l_i \cos \varphi_i = \frac{1}{L} \sum R \Delta x_i = \frac{R}{L} \sum \Delta x_i = \\ &= \frac{R}{L} \cdot AB = R \frac{AB}{\overset{\frown}{AB}} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

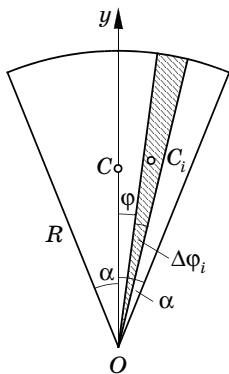


Рис. 78

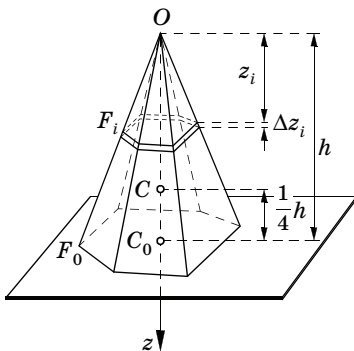


Рис. 79

В частности, для полуокружнoсти ( $\alpha = \pi/2$ ) находим

$$y_C = \frac{2R}{\pi} = 0,637R.$$

**5°. Центр тяжести площади кругового сектора** (рис. 78). Разбиваем сектор на элементарные секторы с центральными углами  $\Delta\varphi_i$ . Центр тяжести каждого такого сектора (его можно рассматривать как треугольник с высотой  $R$  и основанием  $R \Delta\varphi_i$ ) лежит на расстоянии  $(2/3)R$  от центра круга. Остается найти центр тяжести дуги круга радиусом  $(2/3)R$ ; по п. 4° находим

$$y_C = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

В частности, для площади полуокруга получим

$$y_C = \frac{4R}{3\pi} = 0,424R.$$

Этот же результат легко получается по второй теореме Палпа — Гульдина.

**6°. Центр тяжести многогранной пирамиды** лежит на прямой, соединяющей вершину  $O$  (рис. 79) с центром тяжести  $C_0$  площади основания. Докажем, что искомый центр тяжести возвышается над плоскостью основания на  $(1/4)h$ , где  $h$  — высота пирамиды. Направляя ось  $Oz$  вниз, имеем выражение элементарного объема:

$$\Delta\tau_i = F_i \Delta z_i, \quad \Delta z_i = h/n,$$

где  $F_i$  — площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной основанию и отстоящей от вершины  $O$  на расстоянии  $z_i$ . По известной теореме о площадях подобных фигур  $F_i/F_0 = z_i^2/h^2$  или

$$F_i = \frac{F_0}{h^2} z_i^2,$$

где  $F_0$  — площадь основания. По формуле (6.9) имеем

$$z_C = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n z_i \Delta \tau_i = \frac{F_0}{\tau h^2} \sum_{i=1}^n z_i^3 \Delta z_i.$$

Вычисление предела полученной суммы при  $n \rightarrow \infty$  сводится к нахождению определенного интеграла:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n z_i^3 \Delta z_i = \int_0^h z^3 dz = \frac{1}{4} h^4.$$

Таким образом, получим

$$z_C = \frac{F_0 h^2}{4\tau}.$$

Замечая, что  $\tau = (1/3)F_0 h$ , найдем

$$z_C = \frac{3}{4} h,$$

откуда и следует сказанное выше.

Из хода вывода видно, что результат не зависит от формы фигуры, лежащей в основании, и от наклона пирамиды. Поэтому центр тяжести любого наклонного конуса также располагается на расстоянии одной четверти высоты конуса от плоскости основания.

В справочных изданиях приводятся формулы для координат центров тяжести других геометрических фигур и тел.

**Пример 19.** Определить центры тяжести плоских фигур, изображенных на рис. 80, 81.

Координату  $y_C$  проще всего получить, воспользовавшись второй теоремой Паппа — Гульдина. Для случая, изображенного на рис. 80, находим по формуле (6.22)

$$\frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{4}{3} \pi \left(\frac{r}{2}\right)^3 = \left[\frac{1}{2} \pi r^2 - \frac{1}{2} \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2\right] 2\pi y_C,$$

откуда

$$y_C = \frac{14}{9\pi} r.$$

По формуле (6.19) находим  $x_C$ :

$$x_C = \frac{\frac{\pi r^2}{2} \cdot r - \frac{\pi r^2}{8} \cdot \frac{3}{2} r}{\frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi r^2}{8}} = \frac{5}{6} r.$$

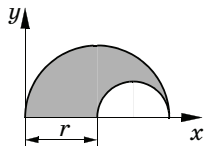


Рис. 80

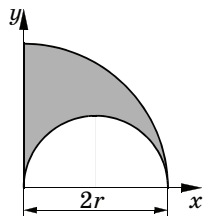


Рис. 81

Для фигуры, изображенной на рис. 81, найдем

$$x_C = \left( \frac{16}{3\pi} - 1 \right) r, \quad y_C = \frac{4}{\pi} r.$$

**Пример 20.** Определить положение центра тяжести  $C$  площади поперечного сечения однородного штампа, размеры которого показаны на рис. 82.

Проведем вдоль вертикальной оси симметрии сечения ось  $Oy$  (рис. 83), а перпендикулярно ей по основанию сечения ось  $Ox$ .

Определение положения центра тяжести сводится к вычислению лишь координаты  $y_C$ ; здесь  $x_C = 0$ .

Вспомогательной линией  $PS$  разобьем площадь сечения на три одинаковых прямоугольника с центрами тяжести  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  (рис. 83, а). Используя формулу (6.15), найдем

$$y_C = \frac{4a^2 \cdot 3a + 4a^2 \cdot 3a + 4a^2 \cdot (a/2)}{3 \cdot 4a^2} \approx 2,17a.$$

Центр тяжести площади сечения находится в точке  $C$  с координатами  $x_C = 0$ ,  $y_C \approx 2,17a$ .

Эту же задачу можно решить иначе, проведя вспомогательную прямую  $KL$  (рис. 83, б) и представив площадь сечения штампа в виде разности площадей двух прямоугольников  $ABDE$  и  $KLMN$  с центрами тяжести соответственно  $C_1$  и  $C_2$ . Используя опять формулу (6.15), вновь получим ( $x_C = 0$ )

$$y_C = \frac{4a \cdot 5a \cdot 2,5a - 2a \cdot 4a \cdot 3a}{4a \cdot 5a - 2a \cdot 4a} \approx 2,17a.$$

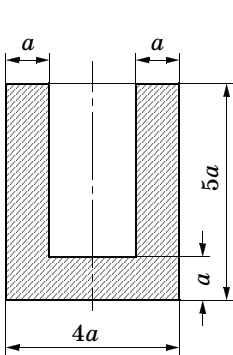


Рис. 82

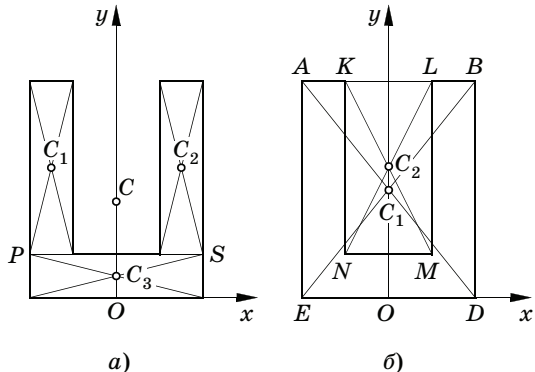


Рис. 83

---

*Глава VII*

---

## Распределение сил в сплошной среде. Напряжения

### § 29. Сплошная среда.

#### Объемные и поверхностные силы. Напряжения

Систему материальных точек в том случае, когда число их очень велико и они расположены плотно друг по отношению к другу, можно приближенно заменить моделью сплошной среды: с *непрерывным распределением* вещества, его физических свойств (плотности, вязкости, тепло- и электропроводности и др.), а также общих механических характеристик движения среды (перемещений, скоростей, ускорений, сил и др.).

Как известно из общего курса физики, материальные тела обладают сложной молекулярной структурой, причем молекулы среды совершают *тепловые* движения: хаотичные в газах, более или менее упорядоченные в жидкостях и аморфных телах и колебательные в кристаллических решетках твердых тел. Эти внутренние движения определяют физические свойства тел, которые в модели сплошной среды задаются наперед основными *феноменологическими* закономерностями (например, законы Бойля — Мариотта, Клапейрона — в газах, законы вязкости — в ньютоновских и неньютоновских жидкостях, закон Гука — в твердых телах).

Простейшим примером сплошной среды служит рассмотренная в предыдущих главах модель абсолютно твердого тела. Характерная особенность статики абсолютно твердого тела заключается в отсутствии сколько-нибудь значительного внимания к вопросу о *внутренних* силах в такого рода телах. В § 4 коротко говорилось о принципе затвердевания, который устанавливает

---

БОЙЛЬ РОБЕРТ (*Boyle Robert, 1627—1691*) — английский физик и химик, с 1680 г. президент Лондонского королевского общества.

МАРИОТТ ЭДМ (*Mariotte Edme, 1620—1684*) — французский физик и механик, был настоятелем монастыря близ Дижона; одним из первых вошел в состав сформированной в 1666 г. Французской АН.

КЛАПЕЙРОН БЕНУА ПОЛЬ ЭМИЛЬ (*Clapeyron Benois Paul Emile, 1799—1864*) — французский физик, чл. Парижской АН (1858).



*необходимые* условия равновесия деформируемых сред, сводящиеся к уравнениям равновесия соответствующих, выделенных в них, «затвердевших» объемов под действием приложенной совокупности внешних сил. Понятие о *внутренних* силах вводилось в том же § 4 в связи с применением *метода сечений*, идея которого сохраняет свою силу и в статике сплошной деформируемой среды. Именно в механике сплошных сред понятие о *внутренних* силах раскрывается во всей своей глубине, и это способствует расширению кругозора в направлении общего учения о силах, каковым является *стати́ка*.

Для описания движения и, в частности, равновесия сплошной среды приходится переходить от сосредоточенных в отдельных точках среды значений физических величин к их *непрерывным распределениям* по среде и количественно характеризовать эти распределения *плотностью распределения* физической величины по сплошной среде.

Простейшим примером, выходящим за границы статики, но хорошо известным из общего курса физики, является понятие о плотности среды, кратко выражающее, собственно говоря, слова: плотность распределения массы в сплошной среде.

Поскольку понятие плотности распределения физической величины получает дальнейшие применения, осветим несколько подробнее его содержание.

Напомним, что *средняя плотность*  $\rho_{\text{ср}}$  *распределения массы* в объеме  $\tau$  определяется отношением массы среды  $m$  в этом объеме к величине объема  $\tau$  и выражается в  $\text{кг}/\text{м}^3$ :

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m}{\tau}. \quad (7.1)$$

Стягивая поверхность, окружающую выделенный объем среды, в данную точку, получим плотность распределения массы, т. е. просто *плотность* среды  $\rho$  в этой точке:

$$\rho = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{m}{\tau}$$

или, вводя для *бесконечно малых* масс и объемов обозначения  $\delta m$  и  $\delta \tau$ ,

$$\rho = \frac{\delta m}{\delta \tau}. \quad (7.2)$$

Поясним, что здесь и в дальнейшем под символом  $\delta$  понимается произвольная бесконечно малая величина в пространстве; она не должна смешиваться с понятием дифференциала  $d$  — бес-

конечно малого приращения некоторой величины в зависимости от бесконечно малого приращения (дифференциала) времени  $dt$ .

Из равенства (7.2) непосредственно следует выражение бесконечно малой, будем говорить *элементарной*, массы  $\delta m$  через плотность среды  $\rho$  и элементарный объем  $\delta\tau$ :

$$\delta m = \rho \delta\tau. \quad (7.3)$$

Аналогично, под *средней плотностью распределения сил*, приложенных в точках сплошной среды, будем понимать отношение главного вектора  $\mathbf{V}$  сил, приложенных в точках объема среды  $\tau$ , к массе объема  $m = \rho_{\text{ср}}\tau$  и назовем это отношение *средней объемной силой*. Сохраним для этой, имеющей размерность [Н/кг], т. е. [м/с<sup>2</sup>], величины обычное обозначение вектора  $\mathbf{F}$ .

Средняя объемная сила определится равенством

$$\mathbf{F}_{\text{ср}} = \frac{\mathbf{V}}{\rho_{\text{ср}}\tau}, \quad (7.4)$$

а объемная сила в данной точке — пределом

$$\mathbf{F} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}}{\rho_{\text{ср}}\tau} = \frac{\delta\mathbf{V}}{\rho \delta\tau}, \quad (7.5)$$

откуда следует выражение главного вектора сил в данной точке:

$$\delta\mathbf{V} = \rho\mathbf{F}\delta\tau. \quad (7.6)$$

Так, например, объемной силой для сил тяжести будет служить вектор ускорения  $\mathbf{g}$  свободного падения тел, для инерционной, центробежной силы — центробежное ускорение  $\omega^2\mathbf{r}$ , где  $\omega$  — угловая скорость вращения системы отсчета,  $\mathbf{r}$  — вектор, направленный по кратчайшему расстоянию от точки приложения центробежной силы до оси в сторону от оси.

Объемные силы, действие которых не проникает сколько-нибудь глубоко внутрь сплошной среды, как, например, силу трения между отдельными слоями среды или силу давления, приложенную в областях контакта между двумя средами, заменяют *предельным* понятием *поверхностных сил*, определяемых плотностью распределения их по геометрической поверхности, разграничивающей области взаимодействующих сред.

Среднюю плотность распределения поверхностных сил определяют как отношение главного вектора  $\mathbf{V}_{\text{пов}}$  поверхностных сил к площади  $\sigma$  поверхности, на которой эти силы действуют, и называют *средним напряжением*:

$$\mathbf{P}_{\text{ср}} = \frac{\mathbf{V}_{\text{пов}}}{\sigma}. \quad (7.7)$$

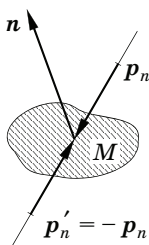


Рис. 84

Напряжение имеет размерность  $[\text{Н}/\text{м}^2]$  и выражается в паскалях [Па]. Переходя к пределу путем стягивания площадки  $\sigma$  в данную точку поверхности, получим *вектор напряжения* в этой точке, равный

$$\mathbf{p} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{V_{\text{пов}}}{\sigma} = \frac{\delta V_{\text{пов}}}{\delta \sigma}. \quad (7.8)$$

Произведение  $\delta \sigma$  напряжения  $\mathbf{p}$  в данной точке на элементарную площадку  $\delta \sigma$  определит поверхностную силу, приложенную к элементарной площадке  $\delta \sigma$  в данной точке сплошной среды; будем ее называть *элементарной поверхностной силой*.

Главные векторы объемных и поверхностных сил, приложенных к конечным объемам  $\tau$  или к конечным площадям поверхностей  $\sigma$ , определяют суммированием элементарных объемных или поверхностных сил соответственно по объему  $\tau$  или поверхности  $\sigma$ . В сплошной среде с непрерывными распределениями объемных и поверхностных сил такие суммарные силы определяются объемными или поверхностными интегралами.

Напряжения в сплошной среде находятся тем же *методом сечений*, о котором в случае линейного тела (о *натяжении* в проволоке) была уже речь ранее, в § 4. В общем случае в каждой точке сплошной среды можно провести бесчисленное множество бесконечно малых, будем говорить *элементарных*, плоских сечений, различно ориентированных в пространстве. Отбрасывая мысленно с одной стороны данного сечения сплошную среду, но учитывая действие отброшенной части на сохраненную ее часть, найдем *внутреннюю* поверхностную силу, приложенную к сечению со стороны отброшенной части среды. Отнеся эту, подчеркнем, *внутреннюю* силу к площади сечения, определим плотность распределения поверхностной силы по сечению, т. е. *напряжение* в данной точке среды. Напряжение, по самому его определению, является *вектором*. Специфической чертой напряжения служит зависимость его не только от положения данной точки среды, но и от *ориентации сечения в пространстве*.

Определим ориентацию элементарной площадки  $\delta \sigma$  в точке M единичным вектором (ортом) нормали  $\mathbf{n}$  к плоскости площадки (рис. 84). У площадки имеются две стороны. Ту из них, к которой приложен орт  $\mathbf{n}$  (на рис. 84 заштрихована), назовем *лицевой* и вектор напряжения, приложенный к лицевой стороне, обозначим

через  $p_n$ . Тогда, по закону действия и противодействия, напряжение, приложенное к другой, скажем *тыльной*, стороне площадки, будет равно  $p'_n = -p_n$ . Выбор одной из сторон площадки за лицевую, конечно, произволен, но наличием орта нормали лицевая сторона площадки фиксируется, и в дальнейшем рассуждении это наименование за ней сохраняется.

### § 30. Равенства Коши

Выделим мысленно в сплошной среде бесконечно малый объем в форме тетраэдра (пирамиды)  $MM_1M_2M_3$  (рис. 85), боковые грани которого  $M_1MM_2$ ,  $M_1MM_3$ ,  $M_2MM_3$  лежат, соответственно, в координатных плоскостях  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$ , а ориентация наклонной грани  $M_1M_2M_3$  определяется единичным вектором  $n$  нормали к ней. Чтобы не вводить новых обозначений, воспользуемся в качестве ортов нормалей к боковым граням оортами осей координат  $i$ ,  $j$ ,  $k$ . Обозначим бесконечно малые площадки, ограничивающие тетраэдр, через  $\delta\sigma_x$ ,  $\delta\sigma_y$ ,  $\delta\sigma_z$ ,  $\delta\sigma_n$ , причем заметим, что в силу выбора ортов нормалей к боковым граням внешние по отношению к объему тетраэдра стороны граней  $\delta\sigma_x$ ,  $\delta\sigma_y$ ,  $\delta\sigma_z$  будут *тыльными*, а наклонная грань  $\delta\sigma_n$  — *лицевой*.

Применяя метод сечений, отнимем окружающую тетраэдр сплошную среду и заменим ее действие силами  $-p_x\delta\sigma_x$ ,  $-p_y\delta\sigma_y$ ,  $-p_z\delta\sigma_z$ ,  $p_n\delta\sigma_n$ . Знак *минус* у первых трех сил показывает, что они приложены к *тыльным* сторонам боковых граней; знак *плюс* у последней силы выражает тот факт, что сила  $p_n\delta\sigma_n$  приложена к *лицевой* грани тетраэдра. Индексы  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $n$  у напряжений служат указанием направлений нормалей к площадкам.

Выделенный в среде объем тетраэдра  $\delta t$  находится в равновесии под действием силы  $\rho F\delta t$ , где  $\rho$  — плотность среды,  $F$  — объемная сила, и четырех только что указанных сил, приложенных к четырем граням тетраэдра.

Согласно принципу затвердевания (§ 3), условия равновесия тетраэдра выражаются равенствами нулю главного вектора и главного момента приложенных к нему сил. Обратим внимание на то, что эти

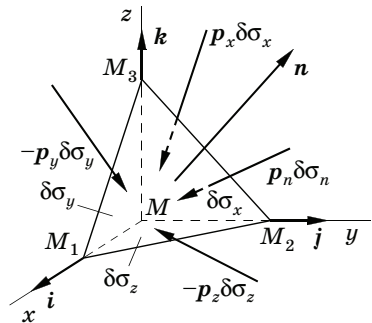


Рис. 85

силы имеют различный *порядок малости*, а именно: силы, приложенные к граням тетраэдра, содержащие множители  $\delta\sigma_x$ ,  $\delta\sigma_y$ ,  $\delta\sigma_z$ , — *второй* порядок малости, а сила  $\rho F \delta\tau$  из-за наличия множителя  $\delta\tau$  — *третий* порядок малости. Отсюда следует, что в условиях равенства нулю главного вектора и главного момента сил, приложенных к тетраэдру, последняя сила, как величина более высокого порядка малости, может быть опущена.

Равенство нулю *главного вектора* сил, приложенных к элементарному тетраэдру, может быть записано в виде

$$p_n \delta\sigma_n = p_x \delta\sigma_x + p_y \delta\sigma_y + p_z \delta\sigma_z, \quad (7.9)$$

или, замечая, что площадки  $\delta\sigma_x$ ,  $\delta\sigma_y$ ,  $\delta\sigma_z$  служат проекциями площадки  $\delta\sigma_n$  на координатные плоскости, и обозначая косинусы углов между ортом  $n$  нормали к наклонной площадке и осями координат, представляющими нормали к координатным площадкам, через  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ , получим

$$\delta\sigma_x = n_x \delta\sigma_n, \quad \delta\sigma_y = n_y \delta\sigma_n, \quad \delta\sigma_z = n_z \delta\sigma_n. \quad (7.10)$$

Подставляя эти значения  $\delta\sigma_x$ ,  $\delta\sigma_y$ ,  $\delta\sigma_z$  в правую часть (7.9) и сокращая на  $\delta\sigma_n$ , получим искомое равенство, связывающее  $p_n$  и  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ .

Переходя, для удобства, к цифровой индексации, т. е. полагая  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ;  $n_1 = n_x$ ,  $n_2 = n_y$ ,  $n_3 = n_z$ ;  $p_1 = p_x$ ,  $p_2 = p_y$ ,  $p_3 = p_z$ , получим указанное равенство в виде

$$p_n = n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3. \quad (7.11)$$

Векторы напряжений  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ , приложенные к координатным площадкам, не имеют объективного физического смысла, так как зависят от выбора системы координат, по отношению к которой они определены. Такие величины — подробнее об этом говорится в начале следующей главы — не могут быть причислены к истинным физическим векторам, а носят наименование *квазивекторов*. Заметим, что к ним можно применять все операции, применимые к физическим векторам, в частности, проецировать их на оси координат.

Проецируя обе части (7.11) на оси координат, придем к системе трех равенств:

$$\begin{aligned} p_{n1} &= n_1 p_{11} + n_2 p_{21} + n_3 p_{31}, \\ p_{n2} &= n_1 p_{12} + n_2 p_{22} + n_3 p_{32}, \\ p_{n3} &= n_1 p_{13} + n_2 p_{23} + n_3 p_{33}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

В этих равенствах, в полном соответствии с принятыми обозначениями, первый индекс при  $p$  отмечает принадлежность напряжения к площадке, перпендикулярной данной оси координат, второй — ось проекций. Так, например,  $p_{31}$  обозначает проекцию на ось  $x_1$  напряжения, приложенного к площадке, перпендикулярной оси  $Ox_3$ .

Равенства (7.12) или, что то же, (7.11) носят имя *Коши*, опубликовавшего их в 1827 г. Они выражают напряжение, приложенное к любой элементарной площадке в сплошной среде, через напряжения, приложенные к трем взаимно-перпендикулярным площадкам в той же точке среды.

Отдельные слагаемые в правой части равенства (7.11) зависят от выбора направлений осей координат, их можно было бы в этом смысле назвать квазивекторами, но их совокупность, определяемая суммированием, является физическим вектором, определяющим вектор напряжения, приложенный к любой элементарной площадке. Отметим одну существенную особенность физических векторов напряжения  $p_n$  — они *не образуют поля*, так как в каждой точке сплошной среды имеется бесчисленное множество напряжений, зависящих от ориентации в пространстве площадки, к которой они приложены. Напряжения  $p_n$  не представляют собой векторы-функции точки.

Величины с разными индексами:  $p_{12}, p_{13}, p_{21}, p_{23}, p_{31}, p_{32}$  — называются *касательными напряжениями*, так как, согласно принятому правилу обозначений, соответствующие им проекции вектора напряжения расположены в координатных плоскостях. Величины с одинаковыми индексами:  $p_{11}, p_{22}, p_{33}$  — представляют собой проекции на нормали к координатным плоскостям и называются *нормальными напряжениями*. К первым относятся, например, *напряжения трения*, ко вторым — *напряжения давления* в сплошной среде.

В технических курсах принимают следующие обозначения для нормальных и касательных напряжений:

$$p_{11} = \sigma_1, \quad p_{22} = \sigma_2, \quad p_{33} = \sigma_3; \quad p_{12} = \tau_{12}, \quad p_{23} = \tau_{23}, \quad \dots,$$

а иногда еще

$$p_{11} = X_x, \quad p_{22} = Y_y, \quad p_{33} = Z_z; \quad p_{12} = X_y, \quad p_{23} = Y_z, \quad \dots$$

### § 31. Взаимность касательных напряжений

Обратимся ко второму условию равновесия тетраэдра — к равенству нулю главного момента приложенных сил, вытекающему из принципа затвердевания (§ 3).

Пользуясь малостью площадок граней тетраэдра, можем считать распределения напряжений по этим площадкам *однородными* и сосредоточенными в геометрических центрах граней, т. е. в точках пересечения *медиан* треугольников (§ 28, 1°). Обозначим векторы-радиусы этих точек пересечения (рис. 86) так:

$$\overrightarrow{MN} = \mathbf{r}, \quad \overrightarrow{MN}_1 = \mathbf{r}^{(1)}, \quad \overrightarrow{MN}_2 = \mathbf{r}^{(2)}, \quad \overrightarrow{MN}_3 = \mathbf{r}^{(3)}.$$

Чтобы не затемнять чертежа, на рис. 86 нанесены лишь векторы-радиусы точек  $N$  и  $N_3$ . Уравнение моментов в цифровой индексации будет

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n \delta\sigma_n = \mathbf{r}^{(1)} \times \mathbf{p}_1 \delta\sigma_1 + \mathbf{r}^{(2)} \times \mathbf{p}_2 \delta\sigma_2 + \mathbf{r}^{(3)} \times \mathbf{p}_3 \delta\sigma_3. \quad (7.13)$$

Заменяя  $\mathbf{p}_n$  его разложением (7.11) и принимая во внимание равенство (7.13), получим

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(1)}) \times \mathbf{p}_1 \mathbf{n}_1 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(2)}) \times \mathbf{p}_2 \mathbf{n}_2 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(3)}) \times \mathbf{p}_3 \mathbf{n}_3 = \mathbf{0}. \quad (7.14)$$

Точка  $N_3$  пересечения медиан треугольника  $M_1 M M_2$  является проекцией соответствующей точки  $N$  пересечения медиан в треугольнике  $M_1 M_2 M_3$  на плоскость  $x_1 x_2$ .

Направленный отрезок  $\overrightarrow{N_3 N}$  равен

$$\overrightarrow{N_3 N} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MN}_3 = \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(3)}$$

и как проецирующий точку  $N$  на плоскость  $x_1 x_2$  перпендикулярен этой плоскости и параллелен оси  $Mx_3$ . Следовательно, его направление совпадает с направлением единичного вектора  $\mathbf{i}_3$ .

Аналогично покажем, что векторы  $\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(1)}$  и  $\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(2)}$  параллельны единичным векторам  $\mathbf{i}_1$  и  $\mathbf{i}_2$ . Введя пока не определенные скаляры  $\lambda^{(1)}$ ,  $\lambda^{(2)}$ ,  $\lambda^{(3)}$ , можем написать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(1)} &= \lambda^{(1)} \mathbf{i}_1, \\ \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(2)} &= \lambda^{(2)} \mathbf{i}_2, \\ \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(3)} &= \lambda^{(3)} \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (7.15)$$

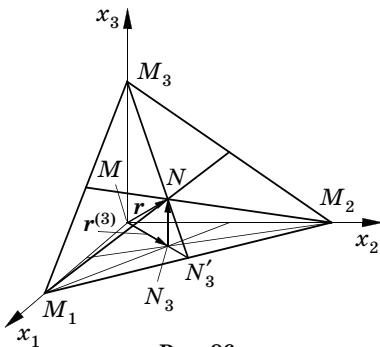


Рис. 86

Подставляя эти значения разностей векторов в (7.14), получим

$$\lambda^{(1)}n_1(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{p}_1) + \lambda^{(2)}n_2(\mathbf{i}_2 \times \mathbf{p}_2) + \lambda^{(3)}n_3(\mathbf{i}_3 \times \mathbf{p}_3) = 0. \quad (7.16)$$

Остается найти значения скаляров  $\lambda^{(1)}$ ,  $\lambda^{(2)}$ ,  $\lambda^{(3)}$ . Для этого продлим направленные отрезки  $\overrightarrow{MN}_1$ ,  $\overrightarrow{MN}_2$ ,  $\overrightarrow{MN}_3$  (на рис. 86 показан только отрезок  $\overrightarrow{MN}_3$ ) до пересечения их в точках  $N'_1$ ,  $N'_2$ ,  $N'_3$  с плоскостью  $M_1M_2M_3$ . Полученные при этом векторы  $MN'_1$ ,  $MN'_2$ ,  $MN'_3$ , согласно известной теореме о положении точки пересечения медиан в треугольнике, будут, соответственно, равны

$$\overrightarrow{MN}'_1 = \frac{3}{2}\overrightarrow{MN}_1 = \frac{3}{2}\mathbf{r}^{(1)}, \quad \overrightarrow{MN}'_2 = \frac{3}{2}\mathbf{r}^{(2)}, \quad \overrightarrow{MN}'_3 = \frac{3}{2}\mathbf{r}^{(3)}.$$

Поскольку концы векторов  $\overrightarrow{MN}'_1$ ,  $\overrightarrow{MN}'_2$ ,  $\overrightarrow{MN}'_3$ , так же как и  $\overrightarrow{MN}$ , лежат в наклонной плоскости  $M_1M_2M_3$ , проекции их на нормаль  $\mathbf{n}$  к плоскости  $M_1M_2M_3$  будут равны одной и той же величине расстояния  $h$  от точки  $M$  до плоскости  $M_1M_2M_3$ , так что

$$\frac{3}{2}(\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{n}) = \frac{3}{2}(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{n}) = \frac{3}{2}(\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{n}) = h. \quad (7.17)$$

Умножая обе части каждого из равенств (7.15) скалярно на  $\mathbf{n}$ , получим по (7.17)

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(1)}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{n} = h - \frac{2}{3}h = \frac{1}{2}h = \lambda^{(1)}n_1$$

и аналогичные выражения для других разностей. Отсюда следует, что

$$\lambda^{(1)}n_1 = \lambda^{(2)}n_2 = \lambda^{(3)}n_3 = \frac{1}{3}h. \quad (7.18)$$

Подставляя эти значения  $\lambda^{(1)}$ ,  $\lambda^{(2)}$ ,  $\lambda^{(3)}$  в равенство (7.16) и сокращая обе части полученного равенства на  $h$ , придем к следующему соотношению:

$$\mathbf{i}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{i}_2 \times \mathbf{p}_2 + \mathbf{i}_3 \times \mathbf{p}_3 = 0. \quad (7.19)$$

Проецируя обе части этого равенства на оси координат и пользуясь известными формулами проекций векторного произведения на те же оси, окончательно получим систему равенств

$$P_{12} = P_{21}, \quad P_{23} = P_{32}, \quad P_{31} = P_{13}, \quad (7.20)$$

выражающих следующую теорему.



**ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ.** Если через какую-нибудь точку среды провести три взаимно-перпендикулярные бесконечно малые (элементарные) площадки, то для каждой двух из них проекции вектора напряжения, приложенного к площадке, на нормаль к другой равны между собой.

Совокупность девяти величин  $p_{kl}$ ,  $k, l = 1, 2, 3$ , при выполнении некоторых условий, о которых пойдет речь в следующей главе, образует тензор второго порядка, именуемый *тензором напряжений*.

## Глава VIII

### Элементы тензорной алгебры

#### § 32. Поле физической величины. Условия физической объективности аналитического определения вектора

В отличие от механики системы дискретных материальных точек и механики абсолютно твердого тела, требующих лишь знакомства с операциями векторного исчисления, механика сплошных сред не может обойтись без основных сведений из области тензорного исчисления. В дальнейшем предполагается, что основы векторной алгебры известны, что же касается начальных представлений тензорной алгебры, то они излагаются в ближайших параграфах.

Напомним, что в векторном исчислении приходилось иметь дело с физическими величинами, представимыми либо одной величиной — *скаляром*, либо тремя алгебраическими величинами — *вектором*. Требование физической *объективности* существования величин в том смысле, что по самой своей сущности они не могут зависеть от расположения в пространстве той или другой системы координат, при помощи которых эти физические величины определяются, приводит к специальным ограничениям, налагаемым на аналитические их представления.

Имея в виду дальнейшие приложения в механике сплошных сред, будем считать, что все рассматриваемые физические вели-

чины непрерывно распределены в пространстве, занимаемом сплошной средой, причем в каждой точке этого пространства *однозначно* определены значения физических величин как непрерывных функций координат точек пространства, или, как иногда говорят, *функций точек пространства*.

Такая совокупность значений физической величины, однозначно сопоставляемая точкам пространства в некоторой области, определяет *поле* физической величины.

Поле задается функциями координат в области определения физической величины, а в общем случае — и времени, причем на эти функции накладываются ограничения непрерывности и существования производных по координатам и времени такого порядка, который необходим для проводимого исследования.

В отдельных специальных случаях в пространстве, где задано поле, могут существовать точки, кривые или поверхности *разрыва* непрерывности величины, описываемой полем. Такие точки, кривые и поверхности, соответственно, образуют *особые* точки, кривые и поверхности поля.

Рассмотрим сначала *поле скалярной величины*, например температурное поле. Оно задается одной функцией  $\varphi(x, y, z; t)$  координат точек поля и времени, представляющей температуру среды. Значение этой функции должно быть одним и тем же независимо от того, в какой координатной системе функция определена. В этой *инвариантности* функции, задающей поле скалярной величины, т. е. независимости от выбора системы координат, заключается условие *физической объективности* поля скалярной величины. Это требование распространяется на все скалярные величины.

Сложнее обстоит дело с понятием физической объективности *вектора* и соответствующего ему векторного поля. Три его проекции на оси координат зависят от выбора направления этих осей в пространстве; *проекции вектора* в этом смысле *вариантны*, но длина вектора, выражающая в выбранном масштабе абсолютное значение физической величины, не может зависеть от произвольного выбора координатной системы. Эта *инвариантность длины вектора* налагает на функции координат, представляющие его проекции, определенные ограничения.

Воспользуемся ранее введенной *числовой индексацией* координат  $(x_1, x_2, x_3)$  и проекций вектора  $\mathbf{a}$  на соответствующие оси  $(a_1, a_2, a_3)$ . Косинусы углов между *старыми* и отмечаемыми штрихами *новыми* осями будем обозначать буквой  $\alpha$  с двумя ин-

дексами, поясняющими, о каких осях идет речь. Так, например,  $\alpha_{21}$  обозначает косинус угла между первой осью *старой* системы  $Ox_1$  и второй осью  $Ox'_2$  *новой* системы. Начало координат у обеих систем возьмем общее, так как параллельный перенос осей на проекциях вектора сказываться не будет.

Формулы связи между *старыми* и *новыми* координатами легко выписываются, если воспользоваться таблицей 1 и разлагать любую из координат по другим, применяя в качестве коэффициентов в этих разложениях те косинусы, которые расположены в *строках* (при разложении  $x'$  по  $x$ ) или в *столбцах* (при разложении  $x$  по  $x'$ , согласно принятой таблице).

В развернутом виде формулы преобразования координат будут иметь вид

$$\begin{aligned}x'_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, \\x'_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3, \\x'_3 &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3,\end{aligned}\tag{8.1}$$

а для обратного преобразования

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{21}x'_2 + \alpha_{31}x'_3, \\x_2 &= \alpha_{12}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \alpha_{32}x'_3, \\x_3 &= \alpha_{13}x'_1 + \alpha_{23}x'_2 + \alpha_{33}x'_3,\end{aligned}\tag{8.2}$$

Следует обратить внимание на разницу в порядке индексов при  $\alpha$  в случаях перехода от  $x_i$  к  $x'_k$  и от  $x'_i$  к  $x_k$ . Группы формул (8.1), (8.2) можно записать в виде

$$x'_m = \sum_{n=1}^3 \alpha_{mn}x_n, \quad x_n = \sum_{m=1}^3 \alpha_{mn}x'_m$$

или, пользуясь общепринятым приемом опускания знака суммы, когда подразумевается суммирование по дважды повторяющемуся индексу от 1 до 3 в суммируемых одночленах, короче:

$$x'_m = \alpha_{mn}x_n, \quad m = 1, 2, 3; \quad x_n = \alpha_{mn}x'_m, \quad n = 1, 2, 3.\tag{8.3}$$

Таблица 1

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x'_1$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{13}$
$x'_2$	$\alpha_{21}$	$\alpha_{22}$	$\alpha_{23}$
$x'_3$	$\alpha_{31}$	$\alpha_{32}$	$\alpha_{33}$

Дважды повторяющиеся индексы, по которым предполагается суммирование, называют *немymi* в знак того, что наименование их совершенно произвольно и может в процессе вычислений изменяться, а после выполнения суммирования они исчезают. Сохраняющиеся в процессе

суммирования индексы носят наименование *свободных*. Например, в первой из формул (8.3) безразлично, писать ли  $\alpha_{mn}x_n$  или  $\alpha_{mp}x_p$  и т. п., так как индекс  $n$  — *немой*. Индекс  $t$  — *свободный*; он определяет координату *новой* системы, которая выражается через *старые* координаты; во второй из формул (8.3), наоборот, индекс  $t$  — *немой*, а  $n$  — *свободный*. Указанный прием опускания символа суммирования значительно упрощает выкладки, особенно если приходится перемножать суммы одночленов.

Формулы (8.3) сохраняют свою силу и в применении к *проекциям вектора*  $a'_m$  и  $a_n$  в сравниваемых координатных системах: *новой*, отмечаемой штрихом, и *старой* — без штриха. Это вытекает из того, что проекция вектора на ось равна разности координат конца и начала вектора. Применив формулы (8.3) один раз к концу вектора  $\mathbf{a}$ , а в другой раз — к началу и вычтя почленно эти равенства одно из другого, получим

$$a'_m = \alpha_{mn}a_n, \quad a_n = \alpha_{mn}a'_m. \quad (8.4)$$

Покажем, что эти формулы выражают условие *физичности*, или, как иногда говорят, *объективности*, вектора  $\mathbf{a}$  в том смысле, что при переходе от одной системы координат к другой, неподвижной по отношению к ней системе величина вектора  $\mathbf{a}$  не меняется (например, скорость самолета по отношению к Земле не зависит от того, в какой неподвижно связанной с Землей системе координат мы рассматриваем скорость самолета). Для этого заметим следующее обстоятельство.

*Сумма квадратов проекций вектора на оси координат не меняется при переходе от одних осей координат к другим и, таким образом, квадрат длины вектора, т. е. квадрат абсолютного значения вектора, является инвариантом по отношению к изменению системы координат.*

Для доказательства вычислим сумму квадратов проекций вектора  $\mathbf{a}$ , которую для сохранения возможности использования краткой записи формул представим согласно (8.4) так (здесь все индексы немые):

$$a'_p a'_p = \alpha_{pr}a_r \alpha_{ps}a_s = \alpha_{pr} \alpha_{ps} a_r a_s. \quad (8.5)$$

Как известно из курса аналитической геометрии, сумма произведений  $\alpha_{pr} \alpha_{ps}$  по повторяющемуся индексу  $p$  представляет со-

бой косинус угла между  $r$ -й и  $s$ -й осями координат и, следовательно, будет равна единице, если  $r = s$ , или нулю, если  $r \neq s$ :

$$\alpha_{pr}\alpha_{ps} = \begin{cases} 1, & \text{если } r = s, \\ 0, & \text{если } r \neq s. \end{cases} \quad (8.6)$$

Равенство (8.5) при этом переходит в следующее (суммирование по  $p$  слева и по  $s$  справа):

$$a'_p a'_p = a_s a_s, \quad (8.7)$$

что и доказывает *инвариантность* суммы квадратов проекций вектора, т. е. квадрата его длины.

### § 33. Линейная вектор-функция.

#### Тензор второго ранга.

#### Условия его физической объективности.

#### Простейшие операции над тензорами.

#### Перемножение тензора и вектора.

#### Диада и диадное представление тензора

В статике и кинематике сплошной среды важную роль играет операция перехода от одного вектора  $\mathbf{a}$  к другому  $\mathbf{b}$ , задаваемая линейным преобразованием

$$\mathbf{b} = \mathbf{L}\mathbf{a}, \quad (8.8)$$

в проекциях, выражаемым тремя линейными функциями:

$$\begin{aligned} b_1 &= l_{11}a_1 + l_{12}a_2 + l_{13}a_3, \\ b_2 &= l_{21}a_1 + l_{22}a_2 + l_{23}a_3, \\ b_3 &= l_{31}a_1 + l_{32}a_2 + l_{33}a_3, \end{aligned} \quad (8.9)$$

или, в принятом выше кратком обозначении,

$$b_p = l_{pq}a_q, \quad p = 1, 2, 3. \quad (8.10)$$

Пример такого преобразования мы рассматривали в § 30. Это — равенства Коши (7.12), в которых единичный вектор  $\mathbf{n}$  преобразуется в вектор напряжений  $\mathbf{p}_n$ .

Если в результате преобразования (8.9) физический вектор  $\mathbf{a}$  переходит в также физический вектор  $\mathbf{b}$ , то совокупность коэффициентов преобразования  $l_{pq}$  имеет объективный физический

смысл, определяемый процессом перехода вектора  $a$  в вектор  $b$ . Совокупность коэффициентов линейного преобразования (8.9)

$$L \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}, \quad (8.11)$$

преобразующего физический вектор в также физический, определяет тензор *второго* (по числу индексов при  $l$ ) *ранга*  $L$ , а таблица (8.11) представляет собой *матрицу* тензора  $L$ .

Тензоры в дальнейшем обозначаются заглавными буквами. Элементы их матриц называют *компонентами тензора* и иногда для упрощения письма обозначают соответствующими заглавной букве строчными буквами.

По числу компонент — в случае вектора это три его проекции на оси координат — *вектор* можно рассматривать как *тензор первого ранга*, *скаляр* — как *тензор нулевого ранга*.

В дальнейшем нам придется иметь дело с тензорами только второго ранга, в связи с чем указание ранга тензора будет опускаться.

Подчеркнем с самого начала, что, так же как в случае вектора, компоненты тензора  $L$  являются функциями координат, определяющими поле тензора  $L$ . Компоненты тензора *вариантны*, т. е. зависят от выбора координатной системы, в которой они записаны, но *совокупность компонент* в целом определяет *единую физическую величину*, имеющую вполне конкретный объективный смысл и, как все физические величины, не зависящую от выбора направлений осей координат.

Для того чтобы тензор имел объективный, не зависящий от выбранной системы координат смысл, т. е. был *физическим тензором*, компоненты его, в полной аналогии с вектором, должны подчиняться некоторым ограничениям, следующим из наличия линейной связи (8.9) между двумя физическими векторами.

Используя (8.4) и (8.10), получим

$$b'_p = \alpha_{pq} b_q, \quad b_q = l_{qr} a_r, \quad a_r = \alpha_{sr} a'_s.$$

Из этой цепочки равенств следует

$$b'_p = \alpha_{pq} l_{qr} a_r = \alpha_{pq} l_{qr} \alpha_{sr} a'_s,$$

но в новой системе координат (со штрихами) должно быть

$$b'_p = l'_{ps} a'_s.$$

Из сравнения с предыдущим равенством получим формулу преобразования компонент тензора  $L$

$$l'_{ps} = \alpha_{pq} \alpha_{sr} l_{qr}, \quad p, s = 1, 2, 3 \quad (8.12)$$

и обратного преобразования

$$l_{qr} = \alpha_{tq} \alpha_{sr} l'_{ts}, \quad q, r = 1, 2, 3. \quad (8.13)$$

Равенства (8.12), (8.13) выражают следующий важный факт.

*Компоненты физического тензора при переходе от одной системы координат к другой преобразуются, как произведения координат при том же переходе.*

Это положение можно было бы принять за *определение тензора*, эквивалентное ранее данному его определению как совокупности коэффициентов линейной связи (8.10) между проекциями двух физических векторов.

Отметим два примера линейных преобразований вектора в вектор, совокупности коэффициентов которых образуют тензоры. Это, как уже упоминалось, равенства Коши (7.12), в которых коэффициенты представляют собой нормальные и касательные напряжения. Эта совокупность образует *тензор напряжений*  $P$  с компонентами  $p_{kl}$ ,  $k, l = 1, 2, 3$ .

Вторым примером служит совокупность равенств (8.1) или (8.2), которые можно рассматривать как преобразования, переводящие векторы-радиусы точек пространства из *старого* в *новое* положение, т. е. как *поворот* абсолютно твердого тела, связанного с координатными системами. Тензор, матрицей которого служит таблица косинусов углов между *старыми* и *новыми* осями, называется *тензором поворота*.

Операции сложения и вычитания тензоров, а также умножения их на скаляр те же, что и у векторов:

$$(P \pm Q \pm \dots)_{ks} = P_{ks} \pm Q_{ks} \pm \dots, \quad (8.14)$$

$$(\lambda P)_{ks} = (\lambda P)_{ks} = \lambda P_{ks}, \quad k = 1, 2, 3; \quad s = 1, 2, 3. \quad (8.15)$$

Введем операцию *умножения тензора  $P$  на вектор  $a$  справа*, обозначаемую как  $Pa$  и определяемую вектором  $b$  с проекциями

$$b_k = (Pa)_k = P_{k1} a_1 + P_{k2} a_2 + P_{k3} a_3 = P_{ks} a_s, \quad k = 1, 2, 3. \quad (8.16)$$

Аналогично, назовем *произведением вектора  $a$  на тензор  $P$*  или *произведением тензора на вектор слева* вектор  $c = aP$  с проекциями

$$c_k = (aP)_k = a_1P_{1k} + a_2P_{2k} + a_3P_{3k} = a_sP_{sk}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (8.17)$$

Введенная операция определяет векторы  $b$  и  $c$  как линейные векторы-функции вектора  $a$  с коэффициентами, равными компонентам тензора  $P$ .

Отметим, что определение произведения тензора на вектор или вектора на тензор соответствует операции перемножения матрицы  $\|p_{ks}\|$  тензора  $P$  на матрицу  $|a_1 a_2 a_3|$  или  $\|a_s\|$  вектора  $a$ .

Операции умножения тензора на вектор и вектора на тензор отличаются порядком индексов у тензора.

Условимся в дальнейшем тензору  $P$  приписывать матрицу его компонент

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}, \quad (8.18)$$

в которой первый индекс у компонент показывает номер *строки*, а второй — *столбца*.

Тензор с матрицей

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{pmatrix}, \quad (8.19)$$

отличающейся от матрицы тензора (8.18) порядком индексов, называют тензором, *сопряженным* с данным, или, иначе, *транспонированным* тензором и обозначают через  $P^*$ , так что

$$P_{rs}^* = P_{sr}, \quad r = 1, 2, 3, \quad s = 1, 2, 3. \quad (8.20)$$

Пользуясь понятием о сопряженном тензоре и равенствами (8.16), (8.17), найдем

$$Pa = aP^*, \quad P^*a = aP. \quad (8.21)$$

Введем в рассмотрение *мультипликативный* тензор, или *диду*, как тензор с компонентами, равными попарным произведе-



ниям проекций двух физических векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Матрицей такого тензора будет служить таблица

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}. \quad (8.22)$$

Обозначается диада при помощи рядом поставленных векторов  $\mathbf{ab}$  без каких-либо знаков между ними. Диаду можно рассматривать как третью операцию умножения вектора на вектор — *диадное произведение* двух векторов, приводящее, в отличие от скалярного и векторного произведений, к тензору.

Убедимся в том, что если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  являются физическими векторами, то составленная из них диада будет *физическим тензором*. Вспоминая условия физичности вектора (8.4), будем иметь

$$a'_p = \alpha_{pq} a_q, \quad b'_s = \alpha_{sr} b_r.$$

Составляя произведение

$$a'_p b'_s = \alpha_{pq} \alpha_{sr} a_q b_r, \quad p, s = 1, 2, 3$$

и сравнивая эти равенства с определением физического тензора (8.12), убедимся, что компоненты диады  $a'_p b'_s$  в новой системе выражаются через компоненты диады в старой системе  $a_q b_r$  по определяющим физичность тензора диады формулам, составленным как проекции двух физических векторов. Из единичных векторов (ортов) осей координат  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ , соединяя их попарно в диадные произведения  $\mathbf{i}_p \mathbf{i}_q$ ,  $p = 1, 2, 3$ ,  $q = 1, 2, 3$ , можно составить девять *координатных диад*. Составим матрицу какой-нибудь из них. Замечая, что компоненты матрицы равны

$$(\mathbf{i}_p \mathbf{i}_q)_{rs} = (\mathbf{i}_p \cdot \mathbf{i}_r) (\mathbf{i}_q \cdot \mathbf{i}_s),$$

где справа стоит обычное произведение двух скалярных произведений ортов осей, удовлетворяющих равенствам

$$\mathbf{i}_p \cdot \mathbf{i}_r = \begin{cases} 1, & \text{если } r = p, \\ 0, & \text{если } r \neq p, \end{cases} \quad \mathbf{i}_q \cdot \mathbf{i}_s = \begin{cases} 1, & \text{если } s = q, \\ 0, & \text{если } s \neq q, \end{cases}$$

закключаем, что в каждой из матриц (не будем их выписывать) элемент, находящийся на пересечении  $p$ -й строки и  $q$ -го столбца, будет равен единице, а все остальные равны нулю. Такой тензор носит наименование *тензорной единицы* и обозначается заглавной буквой  $E$ .

Не будем останавливаться на деталях различных применений диад и, в частности, координатных диад; отметим лишь следующее. Аналогично тому, как вектор  $a$  может быть представлен суммой

$$a = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 = a_p i_p,$$

так и тензор  $P$  с компонентами  $p_{qr}$  допускает разложение

$$P = p_{qr} i_q i_r \quad (8.23)$$

по диадам  $i_q i_r$ .

### § 34. Разложение тензора второго ранга

на симметричную и антисимметричную части.

Сопутствующий антисимметричному тензору вектор.

Инварианты. Сферическая и девиаторная части тензора

Тензор  $P$ , компоненты которого не зависят от порядка индексов, так что

$$P^* = P, \quad P_{sr}^* = P_{rs}, \quad (8.24)$$

называется *самосопряженным* или *симметричным* тензором. Последнее наименование оправдывается тем, что, согласно (8.24), в матрице самосопряженного тензора  $P$  компоненты, зеркально расположенные по отношению к *главной* диагонали матрицы, одинаковы:

$$P_{12} = P_{21}, \quad P_{23} = P_{32}, \quad P_{31} = P_{13}.$$

У симметричного тензора *различных компонент* будет только *шесть*. Простейшим примером симметричного тензора может служить тензорная единица  $E$ , компоненты которой условимся, как это принято, обозначать через  $\delta_{pq}$ . Тензор  $E = \delta$  определяется равенством

$$Ea = aE = a, \quad (8.25)$$

что поясняет его наименование.

Из определения (8.25) следуют значения компонент тензорной единицы (тензор  $\delta = E$  называют *символом Кронекера*):

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 1, & \text{если } p = q, \\ 0, & \text{если } p \neq q, \end{cases} \quad (8.26)$$

так что матрица тензорной единицы имеет вид

$$E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.27)$$

Приняв за определение тензора  $E$  задание его компонент (8.26), необходимо убедиться, что компоненты удовлетворяют равенствам (8.26) в *любой* системе координат. Имеем по определению тензора  $E$

$$\delta'_{pq} = \alpha_{pr} \alpha_{qs} \delta_{rs},$$

или по (8.26)

$$\delta'_{pq} = \alpha_{pr} \alpha_{qr}. \quad (8.28)$$

Сумма  $\alpha_{pr} \alpha_{qr}$ , стоящая в правой части равенств (8.28), согласно (8.6), равна нулю, если  $q \neq p$ , и единице, если  $q = p$ , т. е.

$$\delta'_{pq} = \delta_{pq},$$

а это и означает, что матрица (8.27) сохранит свой вид в любой системе координат (свойство *изотропии* тензорной единицы).

Пользуясь ранее отмеченным свойством матриц координатных диад, разложим по ним тензорную единицу. Будем, очевидно, иметь

$$E = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3 = \delta_{pq} i_p i_q. \quad (8.29)$$

Наряду с симметричными тензорами рассматриваются еще *антисимметричные*, или *кососимметричные*, тензоры  $Q$ , обладающие свойством

$$Q^* = -Q, \quad Q_{rs} = -Q_{sr},$$

т. е. такие, что при изменении порядка индексов знак компонент меняется на противоположный:

$$Q_{12} = -Q_{21}, \quad Q_{23} = -Q_{32}, \quad Q_{31} = -Q_{13}, \quad (8.30)$$

причем, очевидно,

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = 0. \quad (8.31)$$

Среди возможных видов матрицы антисимметричного тензора выделим тот, в котором будут фигурировать только компоненты  $Q_{12}$ ,  $Q_{23}$ ,  $Q_{31}$  с индексами, имеющими порядок *круговых* перестановок индексов 1, 2, 3. Матрица будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 & Q_{12} & -Q_{31} \\ -Q_{12} & 0 & Q_{23} \\ Q_{31} & -Q_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.32)$$

Различных компонент у антисимметричного тензора — *три*.

Докажем, что из взятых в порядке

$$c_1 = Q_{23}, \quad c_2 = Q_{31}, \quad c_3 = Q_{12} \quad (8.33)$$

компонент антисимметричного тензора  $Q$  с подстрочными индексами, образующими круговую перестановку, можно образовать *физический вектор*  $c$ . Примером такого вектора может служить угловая скорость, о чем будет речь в конце настоящего тома курса.

Для доказательства воспользуемся условием (8.12) физичности тензора  $Q$ , причем в целях простоты выпишем в развернутом виде выражение одной из компонент, например  $Q'_{23} = c'_1$  в *новой* системе координат («2» и «3» — *свободные*,  $r$ ,  $s$  — *немые* индексы):

$$Q'_{23} = c'_1 = \alpha_{2r}\alpha_{3s}Q_{rs} = (\alpha_{21}\alpha_{32}Q_{12} + \alpha_{22}\alpha_{31}Q_{21}) + \\ + (\alpha_{23}\alpha_{32}Q_{32} + \alpha_{22}\alpha_{33}Q_{23}) + (\alpha_{21}\alpha_{33}Q_{13} + \alpha_{23}\alpha_{31}Q_{13});$$

в этом равенстве учтено, что  $Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = 0$ . Замечая, что по (8.30) и (8.31)  $Q_{32} = -Q_{23} = -c_1$ ,  $Q_{13} = -Q_{31} = -c_2$ ,  $Q_{21} = -Q_{12} = -c_3$ , перепишем предыдущее равенство в виде

$$c'_1 = (\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{23}\alpha_{32})c_1 + (\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{21}\alpha_{33})c_2 + \\ + (\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31})c_3. \quad (8.34)$$

Возведем определитель матрицы (таблицы) косинусов углов между осями координат (см. табл. 1, с. 130) в квадрат. Членами полученного при этом нового определителя будут суммы произведений  $\alpha_{pr}\alpha_{qr}$ , равные, согласно (8.6), единице при  $p = q$  и нулю при  $p \neq q$ , что соответствует диагональным и недиагональным членам определителя. Квадрат определителя равен единице, а следовательно, будет равен взятой со знаком *плюс* либо *минус* единице и определитель матрицы косинусов углов между осями старой и новой систем координат (вертикальные черты обозначают определитель)

$$|\alpha_{rs}| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \pm 1,$$

причем знак *плюс* в правой части выражает то, что старая и новая системы координат *сонаправлены*, т. е. обе правые или обе левые, знак *минус* соответствует случаю *разнонаправленных* координатных систем.

По свойству *взаимности* определителя можно приравнять элементы его первой строки алгебраическим их дополнениям, т. е. положить

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \pm(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}), & \alpha_{12} &= \pm(\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{21}\alpha_{33}), \\ \alpha_{13} &= \pm(\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31}). \end{aligned}$$

При этом равенство (8.34) переписется в виде

$$c'_1 = \pm(\alpha_{11}c_1 + \alpha_{12}c_2 + \alpha_{13}c_3),$$

и к нему можно присоединить аналогичные равенства для других компонент  $\mathbf{c}$  в новых координатах:

$$c'_2 = \pm(\alpha_{21}c_1 + \alpha_{22}c_2 + \alpha_{23}c_3),$$

$$c'_3 = \pm(\alpha_{31}c_1 + \alpha_{32}c_2 + \alpha_{33}c_3).$$

Полученные выражения проекций вектора  $\mathbf{c}'_r$  в новых координатах через старые  $c_s$  запишутся в краткой форме так:

$$c'_r = \pm\alpha_{rs}c_s, \quad r=1, 2, 3. \quad (8.35)$$

Вектор  $\mathbf{c}$  с компонентами  $Q_{23}$ ,  $Q_{31}$ ,  $Q_{12}$  носит наименование *сопутствующего* антисимметричному тензору  $\mathbf{Q}$ . При помощи этого сопутствующего вектора можно доказать следующее.

Произведение антисимметричного тензора на вектор справа или слева приводит к векторному произведению, сомножителями в котором служат данный и сопутствующий антисимметричному тензору векторы.

Действительно, имеем для произведения на вектор справа

$$\begin{aligned}(Qa)_1 &= Q_{11}a_1 + Q_{12}a_2 + Q_{13}a_3 = Q_{12}a_2 - Q_{31}a_3 = c_3a_2 - c_2a_3, \\(Qa)_2 &= Q_{21}a_1 + Q_{22}a_2 + Q_{23}a_3 = -Q_{12}a_1 + Q_{23}a_3 = c_1a_3 - c_3a_1, \\(Qa)_3 &= Q_{31}a_1 + Q_{32}a_2 + Q_{33}a_3 = Q_{31}a_1 - Q_{23}a_2 = c_2a_1 - c_1a_2\end{aligned}$$

и для произведения на вектор слева

$$\begin{aligned}(aQ)_1 &= a_1Q_{11} + a_2Q_{21} + a_3Q_{31} = -Q_{12}a_2 + Q_{31}a_3 = c_2a_3 - c_3a_2, \\(aQ)_2 &= a_1Q_{12} + a_2Q_{22} + a_3Q_{32} = Q_{12}a_1 - Q_{23}a_3 = c_3a_1 - c_1a_3, \\(aQ)_3 &= a_1Q_{13} + a_2Q_{23} + a_3Q_{33} = Q_{23}a_2 - Q_{31}a_1 = c_1a_2 - c_2a_1.\end{aligned}$$

Эти равенства эквивалентны векторным, в которых порядок сомножителей в левой и правой частях различен:

$$Qa = a \times c, \quad aQ = c \times a. \quad (8.36)$$

Если обозначить через  $c^* = -c$  сопутствующий вектор для сопряженного с  $Q$  антисимметричного тензора  $Q^*$ , то можно предыдущие равенства переписать еще в виде

$$\left. \begin{aligned}Qa &= aQ^* = c^* \times a, \\aQ &= Q^*a = a \times c^*,\end{aligned} \right\} \quad (8.37)$$

сохраняющем порядок сомножителей слева и справа.

Наличие двух знаков в правой части (8.35) говорит о том, что при разнонаправленности старой и новой координатных систем переход от одной из них к другой сопровождается *изменением направления вектора на противоположное*. Векторы, обладающие этим свойством, *объективны* по величине и линии действия, но не по стороне, в которую они направлены. Это характерное отличие лишает их права полностью считаться *истинными, физическими* векторами; их называют *псевдовекторами*, иногда *аксиальными* векторами.

Примерами таких псевдовекторов могут служить, как мы только что видели, векторное произведение двух физических векторов, а следовательно, вектор момента силы относительно точки, момент пары сил, вектор угловой скорости вращения абсолютно твердого тела.

Покажем, что всякий, вообще говоря, асимметричный тензор  $P$  можно представить в виде *суммы* двух тензоров: *симметричного*  $S$  и *антисимметричного*  $A$ .

Пользуясь определенными ранее операциями сложения тензоров и умножения их на скаляр, составим тождество

$$P \equiv \frac{1}{2}(P + P^*) + \frac{1}{2}(P - P^*). \quad (8.38)$$

В первой скобке стоит симметричный тензор, так как от замены  $P$  на  $P^*$  и  $P^*$  на  $P$  значение этой скобки не изменится, вторая скобка содержит антисимметричный тензор, так как при замене  $P$  на  $P^*$  и  $P^*$  на  $P$  изменится знак заключенной в этой скобке величины. Таким образом, вводя обозначения

$$S = \frac{1}{2}(P + P^*); \quad A = \frac{1}{2}(P - P^*), \quad (8.39)$$

получим

$$P \equiv S + A. \quad (8.40)$$

Это разложение будет иметь важное значение при рассмотрении в отделе кинематики вопроса о бесконечно малом перемещении, а также о движении элементарного объема деформируемой сплошной среды, в частности жидкости.

В связи с применениями тензорной алгебры в механике сплошных сред необходимо познакомиться со свойством инвариантности, т. е. независимости от выбора системы координат, некоторых скалярных совокупностей компонент тензоров второго ранга, именуемых *инвариантами* тензора.

Физический скаляр представляет, как уже было ранее пояснено, сам по себе инвариант. *Физический вектор* имеет *один инвариант*; это — его длина, т. е. абсолютное значение изображаемой вектором физической величины.

Тензору второго ранга соответствуют следующие *три*, являющиеся скалярами, инварианта:

✓ *линейный* инвариант  $J_1$ , равный сумме диагональных компонент тензора  $P$ :

$$J_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33} = p_{rr}, \quad (8.41)$$

называемый *следом* тензора;

- ✓ *квадратичный* инвариант  $J_2$ , равный сумме попарно взятых произведений всех компонент тензора:

$$J_2 = p_{rs} p_{rs}, \quad (8.42)$$

служащий аналогом квадрата длины  $a_k a_k$  вектора  $\mathbf{a}$ ;

- ✓ *кубический* инвариант  $J_3$ , равный определителю матрицы тензора:

$$J_3 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \det p_{rs}. \quad (8.43)$$

Не будем останавливаться на доказательствах инвариантности  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$ . Доказательства эти основываются на условиях физичности (8.12) или (8.13) тензора  $P$ .

Пользуясь первым инвариантом  $J_1$ , можем получить разложение тензора второго ранга на *сферическую* (шаровую) и *девиаторную* части. Имеем тождество

$$P \equiv \frac{1}{3} J_1 E + \left( P - \frac{1}{3} J_1 E \right) \equiv P^{(s)} + P^{(d)}. \quad (8.44)$$

Первое слагаемое  $P^{(s)}$ , как произведение скаляра  $(1/3)J_1$  на тензорную единицу  $E$ , обладает тем же свойством *изотропии*, что и  $E$ . Компоненты тензора  $P^{(s)}$  не зависят от изменения системы координат, т. е. от поворота осей; они удовлетворяют условию сферической симметрии, и поэтому тензор  $P^{(s)}$  называется *сферическим* или *шаровым*. Тензор  $P^{(d)}$  представляет собой отклонение (девиацию) тензора  $P$  от сферической части и носит наименование *девиатора* тензора  $P$ .

### § 35. Главные оси и главные значения симметричного тензора

Пусть задан симметричный тензор  $S$  и некоторое, пока неопределенное направление с единичным вектором  $\mathbf{e}$ . Выясним, существуют ли для данного тензора  $S$  такие направления, соответствующие вектору  $\mathbf{e}$ , чтобы в результате умножения тензора  $S$  на вектор  $\mathbf{e}$  получился вектор того же направления, скажем  $\lambda \mathbf{e}$ , где  $\lambda$  — пока неизвестный *скаляр*. Для исследования такой возмож-



ности запишем требуемое условие в виде равенства ( $E$  — тензорная единица)  $Se = \lambda e$ , или

$$(S - \lambda E)e = 0. \quad (8.45)$$

Проецируя это векторное равенство на оси координат и выражая тензоры через их компоненты, получим три равенства:

$$\begin{aligned} (s_{11} - \lambda)e_1 + s_{12}e_2 + s_{13}e_3 &= 0, \\ s_{12}e_1 + (s_{22} - \lambda)e_2 + s_{23}e_3 &= 0, \\ s_{13}e_1 + s_{23}e_2 + (s_{33} - \lambda)e_3 &= 0, \end{aligned} \quad (8.46)$$

которые можно рассматривать как однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $e_1, e_2, e_3$ . Система эта имеет тривиальное решение  $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ , которое, однако, противоречит очевидному условию

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1. \quad (8.47)$$

Условие того, чтобы однородная система уравнений (8.46) имела решения, отличные от нуля, заключается, как известно, в равенстве нулю определителя системы:

$$\begin{vmatrix} s_{11} - \lambda & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} - \lambda & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (8.48)$$

а это приводит к необходимости решения относительно  $\lambda$  алгебраического уравнения третьей степени, называемого *характеристическим*.

Остановимся на общем случае *трех неравных корней* уравнения (8.48), которые обозначим  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$ ; подчеркнем, что это три скаляра. Система уравнений (8.46) при выполнении условия (8.48) позволит определить *три* единичных, соответствующих каждому из корней  $\lambda^{(p)}$ ,  $p = 1, 2, 3$ , вектора  $e^{(p)}$ ,  $p = 1, 2, 3$ , и тем самым *три различных направления* в пространстве.

Докажем, что эти три направления *взаимно ортогональны*. Для доказательства составим уравнения (8.45) для двух каких-нибудь значений  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$  и соответствующих им  $e^{(1)}, e^{(2)}$ . Будем иметь

$$(S - \lambda^{(1)}E)e^{(1)} = 0, \quad (S - \lambda^{(2)}E)e^{(2)} = 0.$$

В левых частях этих равенств стоят произведения тензоров на векторы, т. е. векторы. Умножим обе части этих равенств скалярно на  $e^{(2)}$  и  $e^{(1)}$ . Найдем

$$e^{(2)} \cdot Se^{(1)} = \lambda^{(1)} e^{(1)} \cdot e^{(2)}, \quad e^{(1)} \cdot Se^{(2)} = \lambda^{(2)} e^{(1)} \cdot e^{(2)}. \quad (8.49)$$

Заметим, что, в силу симметричности тензора  $S$ , будет

$$e^{(2)} \cdot Se^{(1)} = e_p^{(2)} (s_{pq} e_q^{(1)}) = e_q^{(1)} (s_{pq} e_p^{(2)}) = e^{(1)} \cdot Se^{(2)},$$

так что, вычитая почленно одну из другой обе части равенств (8.49), получим

$$0 = (\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}) e^{(1)} \cdot e^{(2)},$$

откуда, в силу предположенного неравенства корней характеристического уравнения ( $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)}$ ), следует

$$e^{(1)} \cdot e^{(2)} = 0. \quad (8.50)$$

Аналогично доказываются и равенства  $e^{(2)} \cdot e^{(3)} = 0$  и  $e^{(3)} \cdot e^{(1)} = 0$ , что подтверждает *взаимную ортогональность* единичных векторов  $e^{(1)}$ ,  $e^{(2)}$ ,  $e^{(3)}$ , а следовательно, и осей, по которым они направлены.

Можно убедиться, что три не равные друг другу корня  $\lambda^{(1)}$ ,  $\lambda^{(2)}$  и  $\lambda^{(3)}$  должны быть *вещественны*. Действительно, пусть, например, корни  $\lambda^{(1)}$  и  $\lambda^{(2)}$  — комплексные и, следовательно, сопряженные величины, тогда таковыми же будут и проекции

$$e_p^{(1)} = \mu_p + \nu_p i, \quad e_p^{(2)} = \mu_p - \nu_p i,$$

сумма произведений которых будет равна (суммирование по  $p = 1, 2$ )

$$\mu_p \mu_p + \nu_p \nu_p \neq 0.$$

Скалярное произведение  $e^{(1)} \cdot e^{(2)}$ , равное этой величине, не могло бы быть, по только что доказанному, равным нулю, что и доказывает *вещественность* не равных между собой корней характеристического уравнения (8.48).

Три взаимно ортогональных направления, соответствующих единичным векторам  $e^{(1)}$ ,  $e^{(2)}$ ,  $e^{(3)}$ , определяют *главные оси* симметричного тензора. Докажем, что если принять за оси координат главные оси, то *диагональные* компоненты симметричного тензора  $S$  будут равны корням характеристического уравнения  $\lambda^{(1)}$ ,  $\lambda^{(2)}$ ,  $\lambda^{(3)}$ , а недиагональные равны нулю; диагональные компоненты называются *главными значениями* симметричного тензора.

Действительно, из равенства (8.45) следует, что (по  $p$  не суммировать!)

$$S e^{(p)} = \lambda^{(p)} e^{(p)};$$

тогда

$$S e^{(p)} \cdot e^{(q)} = \lambda^{(p)} e^{(p)} \cdot e^{(q)} = \lambda^{(p)} \delta_{pq}.$$

Обозначим штрихом компоненты тензора  $S$  в главных осях; тогда из последнего равенства будет следовать

$$s'_{pq} = \lambda^{(p)} \delta_{pq} = \begin{cases} \lambda^{(p)}, & \text{если } q = p, \\ 0, & \text{если } q \neq p, \end{cases} \quad (8.51)$$

что и доказывает ранее высказанное положение. Матрица симметричного тензора в *главных осях* будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(3)} \end{vmatrix}. \quad (8.52)$$

В случае *кратности* корней, например  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}$ , только *третья* главная ось будет иметь определенное направление в пространстве, характеризуемое единичным вектором  $e^{(3)}$ . Остальные главные оси будут расположены в перпендикулярной  $e^{(3)}$  плоскости, и положение их будет определяться с точностью до произвольного поворота вокруг третьей главной оси с ортом  $e^{(3)}$ . Не будем останавливаться на доказательстве этого положения.

В случае *равенства* между собой трех корней характеристического уравнения ( $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = \lambda$ ) *все направления* в пространстве являются *главными*. Такой тензор  $S$  обладает свойством *изотропии* и называется, по предыдущему, *шаровым* или *сферическим*. У этого тензора все компоненты равны  $\lambda$ , так что

$$S = \lambda E,$$

или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выражение для компонент  $s_{pq}$  тензора  $S$  в произвольных осях координат через главные компоненты  $s^{(1)} = \lambda^{(1)}$ ,  $s^{(2)} = \lambda^{(2)}$ ,  $s^{(3)} = \lambda^{(3)}$

по общим формулам связи компонент в двух системах координат (8.12) будет иметь вид

$$s_{pq} = \alpha_{p1}\alpha_{q1}\lambda^{(1)} + \alpha_{p2}\alpha_{q2}\lambda^{(2)} + \alpha_{p3}\alpha_{q3}\lambda^{(3)}, \quad (8.53)$$

где главные оси приняты за старые; краткая форма этой записи в данном случае непригодна, так как индексы 1, 2, 3, по которым производится суммирование в правой части, повторяются в каждом слагаемом не два, а три раза.

Тензор  $S$  в главных осях имеет *диадное представление*

$$S = \lambda^{(1)}\mathbf{e}^{(1)}\mathbf{e}^{(1)} + \lambda^{(2)}\mathbf{e}^{(2)}\mathbf{e}^{(2)} + \lambda^{(3)}\mathbf{e}^{(3)}\mathbf{e}^{(3)}. \quad (8.54)$$

Проекции вектора, равного произведению вектора  $\mathbf{a}$  на тензор  $S$  или, что в случае симметричного тензора одно и то же, тензора  $S$  на вектор  $\mathbf{a}$ , на главные оси будут по определению (8.16) равны (по  $p$  не суммировать!)

$$(\mathbf{S}\mathbf{a})_p = \lambda^{(p)}a_p, \quad p = 1, 2, 3. \quad (8.55)$$

## Глава IX

### Тензор напряжений.

Необходимые условия равновесия сплошной среды

#### § 36. Тензор напряжений

Равенства Коши (7.12) можно рассматривать как линейную векторную связь между физическими векторами  $\mathbf{p}_n$  и  $\mathbf{n}$ , а коэффициенты  $p_{11}$ ,  $p_{21}$  и т. д. — как компоненты физического тензора, который, как уже упоминалось в § 30, называется *тензором напряжений* и будет обозначаться заглавной буквой  $P$ . Название это объясняется тем, что компонентами тензора  $P$  являются касательные и нормальные напряжения в данной точке среды.

Тензор  $T$ , как *единая физическая величина*, характеризует *напряженное состояние* сплошной среды в данной ее точке. В отличие от вектора напряжения  $\mathbf{p}_n$ , тензор напряжений  $P$  является *однозначной функцией точки* и, следовательно, образует *поле*.

Матрица коэффициентов при  $n_1, n_2, n_3$  в системе равенств (7.12)

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

соответствует *сопряженному* тензору  $P^*$ , так как первый индекс относится к столбцу, а второй — к строке, но, как было показано в конце § 28, касательные напряжения обладают свойством взаимности, а следовательно, *тензор напряжений симметричен*, так что  $P = P^*$  и матрица (9.1) может быть переписана в обычном стандартном виде:

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

Правые части равенств Коши (7.12) можно рассматривать как проекции произведения, в данном случае благодаря симметрии тензора напряжений, безразлично тензора на вектор или вектора на тензор:

$$p_n = Pn = nP. \quad (9.3)$$

Преимущество формулы (9.3) перед аналитической формой тех же равенств (7.12) заключается в том, что в (9.3) напряжение, приложенное к любой площадке в сплошной среде, прямо выражается через произведение *двух* основных факторов: *напряженности* в данной точке среды и *ориентации площадки* в ней. Формула (9.3) имеет объективный характер, не зависящий от выбора направлений осей координатной системы.

Линейный инвариант (8.41) тензора напряжений равен сумме нормальных напряжений:

$$J_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33}, \quad (9.4)$$

а взятое с обратным знаком среднее арифметическое трех нормальных напряжений принимают за *давление*  $p$  в данной точке среды, полагая

$$p = -\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) = -\frac{1}{3}J_1, \quad (9.5)$$

так что, разлагая тензор напряжений на сферический тензор и девиатор, будем иметь, согласно (8.44),

$$P = -pE + (P + pE). \quad (9.6)$$

В главных осях тензора напряжений  $P$  *недиагональные* компоненты его матрицы — касательные напряжения — *равны нулю*, а *диагональные* — нормальные напряжения — *главным напряжениям*, которые обозначим через  $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}$ .

Выражения компонент  $p_{rs}$  тензора напряжений  $P$  в любой системе координат через главные напряжения  $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}$  будут, согласно (8.53), иметь вид

$$p_{rs} = \alpha_{r1}\alpha_{s1}p^{(1)} + \alpha_{r2}\alpha_{s2}p^{(2)} + \alpha_{r3}\alpha_{s3}p^{(3)}, \quad r, s = 1, 2, 3. \quad (9.7)$$

В системе главных осей тензора напряжений  $P$  равенства Коши (7.12) примут вид

$$p_{n1} = p^{(1)}n^{(1)}, \quad p_{n2} = p^{(2)}n^{(2)}, \quad p_{n3} = p^{(3)}n^{(3)}, \quad (9.8)$$

где  $n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}$  — косинусы углов между нормалью  $\mathbf{n}$  к площадке, к которой приложен вектор напряжения  $\mathbf{p}_n$ , и *главными* осями.

Проиллюстрируем изложенные представления с помощью некоторых простейших примеров напряженного состояния сплошной среды в условиях ее относительного покоя.

■ **Равновесие идеально текучей среды.** В качестве первого примера рассмотрим *равновесие идеально текучей среды*, т. е. такой, в которой при ее относительном покое отсутствуют касательные напряжения. К такого рода средам принадлежат все газы и большинство жидкостей (вода, спирт и др.), не обладающих специальной молекулярной структурой. Исключением являются масляные краски, глинистые растворы и другие *вязкопластичные* жидкости. В такого рода реологических жидкостях при равновесии их касательные напряжения (например, трение) отличны от нуля и обладают некоторым предельным значением.

Из условия отсутствия касательных напряжений при равновесии идеально текучей среды следуют равенства

$$p_{12} = p_{21} = p_{23} = p_{32} = p_{31} = p_{13} = 0, \quad (9.9)$$

и, кроме того, из того же условия на наклонной площадке следует, что

$$\mathbf{p}_n = p_n \mathbf{n}. \quad (9.10)$$

Таким образом, равенства Коши (7.12) сведутся к следующим:

$$p_n n_1 = p_{11} n_1, \quad p_n n_2 = p_{22} n_2, \quad p_n n_3 = p_{33} n_3.$$

Произведя очевидные сокращения, найдем

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = p_n. \quad (9.11)$$

Отсюда следует, что при равновесии идеально текучей среды нормальные напряжения не зависят от ориентации сечения в среде. Общую для всех площадок в данной точке среды величину  $p_n$  обозначим через  $-p$ , а самое величину  $p$  назовем *гидростатическим давлением* в данной точке среды.

Гидростатическое давление представляет собой скалярную, инвариантную величину, измеряемую в ньютонах на квадратный метр [Н/м<sup>2</sup>] или, что то же, в *паскалях* [Па].

Таблица тензора напряжений в случае равновесия идеально текучей среды принимает вид

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

или, согласно определению тензорной единицы  $E$ ,

$$P = -pE. \quad (9.13)$$

Отмеченная только что *изотропия* тензора напряжений в находящейся в равновесии идеально текучей среде, т. е. независимость величины нормального напряжения от ориентации площадки, к которой оно приложено, составляет содержание известного *закона Паскаля*.

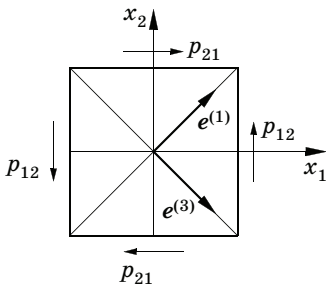


Рис. 87

■ **Чистый сдвиг среды.** Другим, также простым примером может служить плоское напряженное состояние, соответствующее *чистому сдвигу* среды. Будем считать, что сдвиг осуществлен в плоскостях, параллельных плоскости чертежа  $x_1 x_2$ , так что третья ось  $x_3$  перпендикулярна

этой плоскости (рис. 87). Опуская пока вопрос о деформации тела в подобном случае — об этом пойдет речь в конце следующего отдела, — заметим, что при чистом сдвиге отсутствуют напряжения, приложенные к площадкам, перпендикулярным оси  $x_3$ , т. е.

$$p_{13} = p_{23} = p_{33} = 0;$$

кроме того, равны нулю и нормальные напряжения  $p_{11}$  и  $p_{22}$ . Остаются лишь касательное напряжение  $p_{12}$  и равное ему  $p_{21}$ .

Диадное представление тензора напряжений, согласно (8.23), будет иметь вид

$$P = p_{12}(i_1 i_2 + i_2 i_1). \quad (9.14)$$

Найдем главные оси и главные напряжения тензора  $P$ . Для этого составим характеристическое уравнение. При равенстве нулю всех нормальных напряжений и наличии только двух касательных  $p_{12}$  и  $p_{21}$  характеристическое уравнение примет форму

$$\begin{vmatrix} -p & p_{12} & 0 \\ p_{21} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix} = -p(p^2 - p_{12}^2) = 0, \quad (9.15)$$

а главные напряжения будут равны

$$p^{(1)} = p_{12}, \quad p^{(2)} = 0, \quad p^{(3)} = -p_{12}. \quad (9.16)$$

Чтобы указать направление главных осей тензора  $P$ , применим систему уравнений (8.46) и дополнительное условие (8.47) к проекциям единичных векторов (ортов) главных направлений  $e^{(1)}$ ,  $e^{(2)}$ ,  $e^{(3)}$  на оси  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ . Тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} -p_{12}e_1^{(1)} + p_{12}e_2^{(1)} &= 0, & p_{21}e_1^{(1)} - p_{12}e_2^{(1)} &= 0, \\ -p_{12}e_3^{(1)} &= 0, & e_1^{(1)2} + e_2^{(1)2} + e_3^{(1)2} &= 1. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Согласно известному условию нетривиальности (не равенства нулю) корней однородной системы уравнений, одно из предыдущих уравнений должно быть следствием других. Это положение оправдывается тем, что второе уравнение повторяет первое. Решая остающуюся систему уравнений, найдем

$$\begin{aligned} e_1^{(1)} = e_2^{(1)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, & \quad e_3^{(1)} = 0, & \quad e_1^{(2)} = e_2^{(2)} = 0, \\ e_3^{(2)} = \pm 1, & \quad e_1^{(3)} = -e_2^{(3)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, & \quad e_3^{(3)} = 0. \end{aligned}$$



Сопоставляя полученные значения проекций единичных векторов  $e^{(1)}$ ,  $e^{(2)}$ ,  $e^{(3)}$ , убедимся, что главные оси  $e^{(1)}$  и  $e^{(3)}$  будут направлены (рис. 87) по диагоналям квадрата, стороны которого параллельны осям координат  $x_1$  и  $x_2$ , а орт главной оси  $e^{(3)}$  будет перпендикулярен плоскости сдвига, т. е. направлен по  $i_3$ .

### § 37. Формула Гаусса — Остроградского

Для вывода уравнений равновесия сплошной среды нам понадобится общая формула векторного анализа, носящая наименование *интегральной формулы Гаусса — Остроградского*. Эта формула связывает интеграл, взятый по замкнутой поверхности, с интегралом по объему, ограниченному этой поверхностью.

Остановимся на выводе формулы Гаусса — Остроградского в ее простейшем применении к скалярной функции  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$  и ее производной по координате  $x_1$ .

В дальнейшем условимся различать дифференциалы, выражающие приращения некоторой величины вследствие бесконечно малого *изменения времени*, и сохраним для таких дифференциалов обычное обозначение  $d$ , а для дифференциалов, определяющих *произвольные малые величины в пространстве в данный фиксированный момент времени*, например бесконечно малые отрезки, площадки, объемы и т. п., будем применять символ  $\delta$ .

В рассматриваемом простейшем случае формула Гаусса — Остроградского имеет вид

$$\int_{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \delta \tau = \int_{\sigma} \varphi n_1 \delta \sigma, \quad (9.18)$$

где слева стоит интеграл, вычисляемый по некоторому объему  $\tau$ , — *объемный интеграл* от частной производной функции  $\varphi$  по  $x_1$ , а справа — интеграл, вычисляемый по поверхности  $\sigma$ , ограничивающей объем  $\tau$ , — *поверхностный интеграл* от значений функции  $\varphi$ , умноженных на косинус угла между единичным век-

ГАУСС КАРЛ ФРИДРИХ (*Gauß Carl Friedrich, 1777—1855*) — немецкий математик, иностр. чл.-корр. (1802) и иностр. почетный чл. Петербургской АН (1824).

ОСТРОГРАДСКИЙ МИХАИЛ ВАСИЛЬЕВИЧ (*1801—1861*) — русский математик, акад. Петербургской АН (1830).

тором внешней нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $\sigma$  и осью  $x_1$ . Интегралы представляют суммы бесконечно малых величин  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \delta \tau$  по элементарным объемам — в объемном интеграле и  $\varphi n_1 \delta \sigma$  — по элементам поверхности — в поверхностном интеграле. Мы тотчас будем производить непосредственное вычисление этих сумм, что поможет выяснению смысла введенных в (9.18) интегралов.

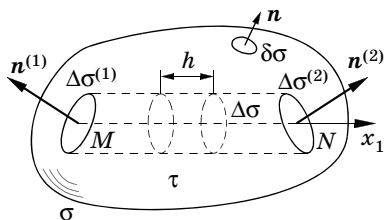


Рис. 88

С этой целью разобьем объем  $\tau$  (рис. 88) на тонкие цилиндрические трубки вдоль оси  $x_1$  (на рис. 88 они показаны пунктиром), ограниченные по краям, в точках  $M$  и  $N$ , малыми площадками  $\Delta\sigma^{(1)}$  и  $\Delta\sigma^{(2)}$ . Для простоты будем считать поверхность  $\sigma$  выпуклой, т. е. такой, что ось  $Mx_1$  цилиндрической трубки будет пересекать поверхность  $\sigma$  только в двух точках  $M$  и  $N$ . Разделим отрезок  $\overline{MN}$  на  $k$  равных малых частей  $h$  и через точки деления проведем равные между собой нормальные сечения  $\Delta\sigma$ . Объем трубки разобьется на малые объемы  $\Delta\tau = h\Delta\sigma$ . Производную  $\partial\varphi/\partial x_1$  можно приближенно выразить как ( $\approx$  — знак приближенного равенства)

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)_s \approx \frac{\varphi_{s+1} - \varphi_s}{h},$$

где индекс  $s$  обозначает номер сечения, а  $\varphi_s$  — значения функции  $\varphi$  в этом сечении.

Часть объемного интеграла, стоящего в левой части равенства (9.18), вычисленную по длине выделенной трубки, можно приближенно представить суммой

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{h} \Delta\sigma \cdot h + \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{h} \Delta\sigma \cdot h + \dots + \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{h} \Delta\sigma \cdot h = \\ = (\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_2 + \dots + \varphi_{k+1} - \varphi_k) \Delta\sigma, \end{aligned}$$

или, после очевидных сокращений, в форме только двух крайних слагаемых:

$$-\varphi_1 \Delta\sigma + \varphi_{k+1} \Delta\sigma. \tag{9.19}$$

Для крайних значений функции  $\varphi$  на поверхности  $\sigma$  введем обозначения  $\varphi^{(1)}$  и  $\varphi^{(2)}$ ; кроме того, обозначим через  $\Delta\sigma^{(1)}$ ,  $\Delta\sigma^{(2)}$  ма-

лые площадки, образующиеся в пересечении поверхности цилиндрической трубки с поверхностью  $\sigma$ , а через  $\mathbf{n}^{(1)}$  и  $\mathbf{n}^{(2)}$  — орты внешних нормалей к этим площадкам. Легко видеть, что сечения  $\Delta\sigma$  являются *проекциями* площадки  $\Delta\sigma^{(1)}$  или  $\Delta\sigma^{(2)}$  на плоскости, перпендикулярные оси  $x_1$  так что, принимая во внимание отрицательный знак косинуса *тупого* угла между  $\mathbf{n}^{(1)}$  и осью  $x_1$ , получим

$$\Delta\sigma = -n_1^{(1)} \Delta\sigma^{(1)} = n_1^{(2)} \Delta\sigma^{(2)}. \quad (9.20)$$

Это позволит переписать выражение (9.19) в виде

$$\varphi^{(1)} n_1^{(1)} \Delta\sigma^{(1)} + \varphi^{(2)} n_1^{(2)} \Delta\sigma^{(2)}, \quad (9.21)$$

представляющем собой сумму двух элементов *поверхностного* интеграла, стоящего в *правой* части равенства (9.18), относящихся к краям трубки.

Суммируя теперь элементы объемного интеграла в цилиндрической трубке для всех трубок, составляющих объем  $\tau$ , и элементы поверхностного интеграла (9.21) по поверхности  $\sigma$  и затем переходя к пределу, соответствующему убыванию величин интервалов дробления объема  $\tau$  и поверхности  $\sigma$  до нуля, докажем справедливость формулы (9.18).

Аналогично (9.18), для осей, параллельных  $x_2$  и  $x_3$ , получим

$$\int_{\tau} \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \delta\tau = \int_{\sigma} n_2 \varphi \delta\sigma, \quad (9.22)$$

$$\int_{\tau} \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \delta\tau = \int_{\sigma} n_3 \varphi \delta\sigma.$$

Умножая почленно обе части равенств (9.18) и (9.22) на орты осей координат  $\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{i}_2$ ,  $\mathbf{i}_3$  и складывая, получим

$$\int_{\tau} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \mathbf{i}_3 \right) \delta\tau = \int_{\sigma} (n_1 \mathbf{i}_1 + n_2 \mathbf{i}_2 + n_3 \mathbf{i}_3) \varphi \delta\sigma. \quad (9.23)$$

Вектор с проекциями  $\partial\varphi/\partial x_1$ ,  $\partial\varphi/\partial x_2$ ,  $\partial\varphi/\partial x_3$  носит наименование *градиента* скалярной функции  $\varphi$  и обозначается символом  $\text{grad } \varphi$ . Подробнее о градиенте будет сказано в начале § 75, специально посвященного дифференциальным операциям поля. Формуле (9.23) можно придать вид

$$\int_{\tau} \text{grad } \varphi \delta\tau = \int_{\sigma} \mathbf{n} \varphi \delta\sigma, \quad (9.24)$$

являющийся векторным представлением формулы Гаусса — Остроградского для операции градиента над скалярной функцией.

Применим широко распространенный в векторном анализе символический прием, полезный для запоминания последней и следующих формул. Введем *дифференциальный оператор*  $\nabla$  как условный вектор с проекциями  $\nabla_i = \partial/\partial x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , так что, например, только что введенный вектор градиента  $\text{grad } \varphi$  будет символически выражаться как произведение  $\nabla\varphi$ . Тогда предыдущая формула Гаусса — Остроградского примет символический вид

$$\int_{\tau} \nabla \varphi \delta\tau = \int_{\sigma} \mathbf{n} \varphi \delta\sigma, \quad (9.25)$$

который легко запоминается, если заметить, что *оператору*  $\nabla$  в объемном интеграле слева соответствует *единичный вектор*  $\mathbf{n}$  нормали к поверхности  $\sigma$  в поверхностном интеграле справа.

Равенству (9.25) можно придать символическую операторную форму

$$\int_{\tau} \nabla \dots \delta\tau = \int_{\sigma} \mathbf{n} \dots \delta\sigma, \quad (9.26)$$

где вместо многоточий, стоящих в обеих частях этого равенства, можно подставлять любую, как *скалярную*, что будет соответствовать символическому равенству (9.25), так и *векторную* либо *тензорную*, функцию. Для доказательства только что указанной общности символической формулы (9.26) достаточно применить равенства (9.18) или (9.22) сначала к проекциям вектора или компонентам тензора, а затем объединить полученные результаты в соответствующие векторные или тензорные формулы. Покажем это на примере непосредственно нужной для дальнейшего тензорной функции  $\Phi$ .

Объединяя формулы (9.18) и (9.22) в применении к алгебраическим величинам компонент  $\Phi_{kl}$ ,  $k, l = 1, 2, 3$ , тензора  $\Phi$ , будем иметь ( $k$  — *немой* индекс суммирования)

$$\int_{\tau} \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial x_k} \delta\tau = \int_{\sigma} n_k \Phi_{kl} \delta\sigma, \quad l = 1, 2, 3,$$

или, согласно принятой символике,

$$\int_{\tau} \nabla_k \Phi_{kl} \delta\tau = \int_{\sigma} \mathbf{n}_k \Phi_{kl} \delta\sigma, \quad l = 1, 2, 3. \quad (9.27)$$

Вспоминая введенное в гл. VIII определение операции умножения вектора на тензор, получим вместо (9.27)

$$\int_{\tau} (\nabla\Phi)_l \delta\tau = \int_{\sigma} (\mathbf{n}\Phi)_l \delta\sigma, \quad l = 1, 2, 3,$$

или, умножая последовательно обе части этих равенств на  $i_l$  и складывая их между собой,

$$\int_{\tau} \nabla\Phi \delta\tau = \int_{\sigma} \mathbf{n}\Phi \delta\sigma. \quad (9.28)$$

Вектор  $\nabla\Phi$  с проекциями (суммирование по  $k$ )

$$(\nabla\Phi)_l = \nabla_k \Phi_{kl} = \frac{\partial\Phi_{kl}}{\partial x_k}$$

называют *дивергенцией тензора* и обозначают символом  $\text{Div } \Phi$ .

Проекции вектора  $\text{Div } \Phi$  на оси координат будут (для запоминания их полезно подробно выписать)

$$\begin{aligned} (\text{Div } \Phi)_1 &= (\nabla\Phi)_1 = \frac{\partial\Phi_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial\Phi_{31}}{\partial x_3}, \\ (\text{Div } \Phi)_2 &= (\nabla\Phi)_2 = \frac{\partial\Phi_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\Phi_{32}}{\partial x_3}, \\ (\text{Div } \Phi)_3 &= (\nabla\Phi)_3 = \frac{\partial\Phi_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\Phi_{33}}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (9.29)$$

или, в краткой форме (суммирование по  $k$ ),

$$(\text{Div } \Phi)_i = \frac{\partial\Phi_{ki}}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9.30)$$

Равенство (9.28) принимает свой обычный вид:

$$\int_{\tau} \text{Div } \Phi \delta\tau = \int_{\sigma} \mathbf{n} \Phi \delta\sigma, \quad (9.31)$$

где под знаком поверхностного интеграла стоит произведение вектора  $\mathbf{n}$  на тензор  $\Phi$  слева.

Тензорная форма формулы Гаусса — Остроградского (9.31) получает применение в следующем параграфе при выводе уравнений равновесия сплошной среды.

### § 38. Уравнения статики сплошной среды «в напряжениях»

Согласно изложенному в § 3 принципу затвердевания, в число необходимых условий равновесия деформируемого тела входят уравнения равновесия абсолютно твердого тела, соответствующего *затвердевшему* деформируемому телу, под действием внешних сил. Эти условия являются *необходимыми*, но не достаточными условиями равновесия деформируемого тела.

Составим еще одно, также только *необходимое* условие равновесия деформируемого тела, но, в отличие от предыдущего, учитывающее взаимодействие внутренних сил в сплошной среде.

Для получения *необходимых* и *достаточных* условий равновесия надо принять во внимание физические свойства сплошной среды (упругость), без чего система уравнений равновесия сплошной среды сохраняет свой неопределенный характер, а задача о равновесии остается *статически неопределенной*.

Выделим в сплошной среде произвольный объем  $\tau$  (рис. 89), ограниченный поверхностью  $\sigma$ . К элементу объема  $\delta\tau$  приложена сила  $\rho\mathbf{F}\delta\tau$ , где  $\mathbf{F}$  — ранее упомянутая *объемная* сила, а к элементарной площадке  $\delta\sigma$ , ориентированной согласно единичному вектору нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $\sigma$ , — сила  $\mathbf{p}_n\delta\sigma$ , где  $\mathbf{p}_n$  — *вектор напряжения* в точке  $N$  поверхности  $\sigma$ .

Запишем *необходимое*, согласно *принципу затвердевания*, условие равенства нулю главного вектора приложенной к объему  $\tau$  и к ограничивающей его поверхности  $\sigma$  совокупности сил.

Будем иметь

$$\int_{\sigma} \mathbf{p}_n \delta\sigma + \int_{\tau} \rho\mathbf{F}\delta\tau = 0, \quad (9.32)$$

где первый интеграл, взятый по поверхности  $\sigma$ , представляет собой главный вектор внешних поверхностных сил  $\mathbf{p}_n\delta\sigma$ , приложенных к элементам поверхности  $\sigma$ , а второй — сумму (главный вектор) сил  $\rho\mathbf{F}\delta\tau$ , приложенных к элементам объема  $\tau$ .

Применяя равенство Коши в форме (9.3), приведем уравнение равновесия (9.32) к виду

$$\int_{\sigma} \mathbf{n}P \delta\sigma + \int_{\tau} \rho\mathbf{F}\delta\tau = 0. \quad (9.33)$$

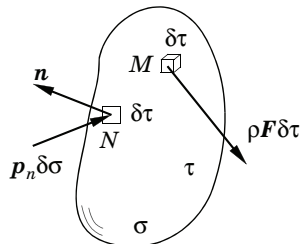


Рис. 89

Перейдем от поверхностного интеграла к объемному его эквиваленту, используя для этого формулу (9.30). Будем иметь

$$\int_{\sigma} \mathbf{n} P \delta\sigma = \int_{\tau} \text{Div } P \delta\tau,$$

и уравнение равновесия (9.32) приведет к виду

$$\int_{\tau} (\text{Div } P + \rho \mathbf{F}) \delta\tau = 0. \quad (9.34)$$

Пользуясь произволом в выборе объема  $\tau$ , применим равенство (9.33) к элементарному объему  $\delta\tau$ . Тогда интеграл, стоящий в левой части, сведется к одному слагаемому, так что вместо (9.34) получим равенство

$$(\text{Div } P + \rho \mathbf{F}) \delta\tau = 0.$$

Замечая, что  $\delta\tau$  представляет собой произвольную бесконечно малую величину, но не равную нулю, разделим обе части предыдущего равенства на  $\delta\tau$  и получим искомое *уравнение статики «в напряжениях»*:

$$\text{Div } P + \rho \mathbf{F} = 0, \quad (9.35)$$

которое, в проекциях на оси координат  $x_1, x_2, x_3$ , согласно (9.29), приведет к системе трех дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_3} + \rho F_1 &= 0, \\ \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_3} + \rho F_2 &= 0, \\ \frac{\partial p_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} + \rho F_3 &= 0. \end{aligned} \quad (9.36)$$

По ранее доказанному свойству *симметрии* тензора напряжений касательные напряжения, отличающиеся *порядком* индексов, равны между собой:

$$p_{12} = p_{21}, \quad p_{23} = p_{32}, \quad p_{31} = p_{13}.$$

Система *трех* уравнений равновесия включает в себе *шесть* неизвестных компонент тензора напряжений, что делает ее недостаточной для определения этих *шести* неизвестных.

Как уже ранее упоминалось, такой статической неопределенности можно избежать, только вводя дополнительные допу-

щения о физических свойствах сплошной среды, например о ее *упругости*, подчиняющейся закону Гука о пропорциональности тензора напряжений тензору деформаций. Об этом тензоре пойдет речь в конце второго отдела настоящего курса, посвященного кинематике.

Задачи равновесия *упругой среды* рассматриваются в курсах сопротивления материалов и теории упругости.

Наиболее прост вопрос о равновесии идеально текучей среды (§ 32), в которой касательные напряжения отсутствуют, а нормальные определяются сферическим тензором  $-pE$ , где  $p$  — гидростатическое давление.

В этом случае, как легко видеть,

$$\operatorname{Div} P = -\operatorname{grad} p,$$

и уравнение равновесия в векторной форме примет вид

$$\rho F = \operatorname{grad} p, \quad (9.37)$$

или, в проекциях на оси координат,

$$\rho F_1 = \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad \rho F_2 = \frac{\partial p}{\partial x_2}, \quad \rho F_3 = \frac{\partial p}{\partial x_3}. \quad (9.38)$$

Уравнения (9.38) носят наименование *уравнений Эйлера гидростатики*.

Интегрирование этих уравнений для различных заданий объемных сил  $F$  и представляющих практический интерес форм границ жидкости рассматривается в разделах гидростатики курсов теоретической и технической гидродинамики, а также гидравлики.

Уравнения (9.38) легко интегрируются для случая *объемной силы тяжести*, равной, как мы уже знаем,  $F = g$ . Жидкость, подверженную силе тяжести, в отличие от *невесомой* называют *тяжелой жидкостью*. В этом случае уравнение (9.37) примет вид

$$\rho g = \operatorname{grad} p. \quad (9.39)$$

ЭЙЛЕР ЛЕОНАРД (*Euler Leonhard, 1707—1783*) — математик, механик и физик, швейцарец по происхождению; с 1727 до 1741 и с 1766 до конца жизни жил и работал в Санкт-Петербурге. Акад. Петербургской и Берлинской АН, состоял также членом Парижской АН, Лондонского королевского общества и т. д. С 1956 г. прах Э. покоится в Ленинградском (ныне — Санкт-Петербургском) некрополе.



Направляя ось  $Ox_3$  вертикально вниз, будем иметь  $g_1 = g_2 = 0$ ,  $g_3 = g$ , и уравнения (9.38) сведутся к одному:

$$\rho g = \frac{dp}{dx_3}. \quad (9.40)$$

Отсюда следует закон гидростатического давления в тяжелой жидкости:

$$p = \rho g x_3 + \text{const},$$

или, если ввести удельный вес  $\gamma = \rho g$ ,

$$p = \gamma x_3 + \text{const}. \quad (9.41)$$

Для определения константы поместим начало координат в точку на поверхности жидкости и обозначим давление в этой точке через  $p_a$  (обычно это атмосферное давление). Тогда, вводя за определение давления в жидкости величину

$$p' = p - p_a,$$

т. е. превышение гидростатического давления  $p$  над давлением на поверхности жидкости, запишем гидростатический закон (9.41) в форме

$$p' = \gamma x_3. \quad (9.42)$$

Погрузим в тяжелую жидкость с удельным весом  $\gamma$  твердое тело объемом  $\tau$  и с поверхностью  $\sigma$ . Главный вектор  $\mathbf{R}$  сил давления жидкости на поверхность тела, согласно равенству Гаусса — Остроградского, будет равен

$$\mathbf{R} = - \int_{\sigma} p \mathbf{r} d\sigma = - \int_{\tau} \text{grad } p d\tau.$$

Но по (9.39)

$$\text{grad } p = \rho g = \rho g \cdot \frac{\mathbf{g}}{g} = \rho g \frac{\mathbf{G}}{G},$$

где  $\mathbf{G}$  — вектор силы тяжести жидкости в объеме  $\tau$ , так что

$$\mathbf{R} = - \frac{\mathbf{G}}{G} \int_{\tau} \rho g d\tau = -\mathbf{G}. \quad (9.43)$$

В этом заключается известный закон Архимеда: тело, погруженное в жидкость, теряет в своем весе столько, сколько весит

жидкость в объеме погруженного тела. Главный вектор  $\mathbf{R}$  называют *архимедовой силой* или *гидростатической подъемной силой* в знак того, что она стремится вытолкнуть тело из окружающей его жидкости.

Легко вычисляется также *момент* сил давления тяжелой жидкости на поверхность погруженного в нее тела. Имеем по той же формуле Гаусса — Остроградского (см. (18.24) в гл. XVIII, § 75):

$$\mathbf{L} = - \int_{\sigma} \mathbf{r} \times n p \delta \sigma = \int_{\sigma} \mathbf{n} \times r p \delta \sigma = \int_{\tau} \nabla \times r p \delta \tau = \int_{\tau} \text{rot} (pr) \delta \tau. \quad (9.44)$$

По известной формуле векторного исчисления, по (9.39) и очевидному тождеству  $\text{rot } \mathbf{r} \equiv 0$

$$\text{rot} (pr) = p \text{rot } \mathbf{r} + \text{grad } p \times \mathbf{r} = -\mathbf{r} \times \text{grad } p = -\mathbf{r} \times p \mathbf{g}.$$

Перепишем (9.44) в форме

$$\mathbf{L} = - \int_{\tau} \mathbf{r} \times \text{grad } p \delta \tau = - \int_{\tau} \mathbf{r} \times p \mathbf{g} \delta \tau. \quad (9.45)$$

Вводя выражение вектора-радиуса  $\mathbf{r}_C$  центра тяжести вытесненного телом объема жидкости (§ 26)

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \mathbf{r} \delta \tau = \frac{1}{G} \int_{\tau} r p \mathbf{g} \delta \tau,$$

убедимся, что момент  $\mathbf{L}$  можно представить как

$$\mathbf{L} = - \frac{1}{G} \int_{\tau} r p \mathbf{g} \delta \tau \times \mathbf{G} = -\mathbf{r}_C \times \mathbf{G},$$

или, по (9.43),

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{R}. \quad (9.46)$$

Отсюда следует, что линия действия главного вектора сил давления жидкости на погруженное в нее тело проходит через центр тяжести вытесненного телом объема жидкости.

За деталями применения закона Архимеда к явлению плавания тел отсылаем к разделам гидростатики курсов гидравлики, а также теоретической и технической гидродинамики.

Во втором томе нашего «Курса теоретической механики», посвященном изложению динамики, основываясь на тех же представлениях, что и в настоящем параграфе, но обобщенных на случай движения сплошной среды, выведем уравнения *динамики* сплошной среды «в напряжениях».

## КИНЕМАТИКА

### Глава X

---

#### Уравнения движения точки

##### **§ 39. Введение. Основные особенности кинематического описания движения**

*Все движения материи происходят в пространстве и во времени.*

Это фундаментальное положение естествознания, относящееся к наиболее общему представлению о движении материи, в механике отражается только той своей частью, которая относится к *механическому движению*, заключающемуся в *изменении во времени взаимного расположения материальных тел в пространстве*.

В отличие от статики, в настоящем отделе, посвященном кинематике, отвлекаются от силовых взаимодействий между материальными телами и влияния на них силовых полей, а рассматривают механические движения тел в отрыве от того, какие силы создают и поддерживают их движения.

В связи с этим в отделе кинематики полностью отсутствуют такие физические понятия, как сила и масса. Принятая степень абстракции сближает кинематику с геометрией, но отличается от нее своей связью с изменением времени.

В отделе кинематики мы будем пользоваться представлением об *абсолютном пространстве*, сопоставляя ему образ безграничного абсолютно твердого тела, чисто геометрические свойства которого не зависят ни от размещения в нем, ни от движения по отношению к нему материальных тел. В этом пространстве выбирается начало координат и три взаимно-перпендикулярные координатные оси, служащие для определения положения отдельных точек тел.

Абсолютное пространство рассматривается как *евклидово*, т. е. все геометрические построения в нем отвечают основным положениям *геометрии Евклида*. Так, применение *теоремы Пифагора* позволяет определить квадрат расстояния между двумя точками как сумму квадратов разностей соответствующих координат точек и т. п.

Наряду с абсолютным пространством в классической кинематике используется также понятие *абсолютного времени*, одинаково и равномерно текущего во всех точках абсолютного пространства.

Такие абсолютные представления о пространстве и времени характерны для классической механики Ньютона, но противоречат современным взглядам на эти основные атрибуты материи в релятивистской механике Эйнштейна. Этому вопросу будет посвящена отдельная глава во втором томе курса; заметим лишь, что все выводы классической механики с достаточной для практики точностью справедливы, если скорости движения малы по сравнению со скоростью распространения света, а размеры областей пространства, в которых происходит движение, далеки от космических расстояний.

Существенной особенностью содержания кинематики служит то, что движения тел происходят в системах координат (системах отсчета), *движущихся* друг по отношению к другу. В кинематике переход от одной системы координат к другой, движущейся по отношению к первой, приобретает самостоятельное и важное значение. Это служит основанием теории относительных движений, в которой устанавливаются связи между кинематическими характеристиками движений (траекториями, скоростями и ускорениями) в двух *произвольно* движущихся друг по отношению к другу системах координат. В этой теории одна какая-то координатная система принимается условно за *абсолютно неподвижную*, а другие — за движущиеся по отношению к ней *относительные* системы координат. В отличие от динамики, абсолютная неподвижность какой-то одной, положенной в основу рассуждений системы отсчета не имеет объективного значения.

---

ЕВКЛІД (Εὐκλείδης, III в. до н. э.) — древнегреческий математик, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике.

ПИФАГО́Р САМО́СКИЙ (Πυθαγόρας, ок. 570 — ок. 500 до н. э.) — древнегреческий мыслитель, основатель пифагореизма.

Только в динамике стремление к установлению такой *абсолютно неподвижной* системы приобретает смысл. Так, среди всех возможных систем координат выделяют *гелиоцентрическую систему* с центром в Солнце и осями координат, ориентированными на так называемые *неподвижные* звезды. В динамике рассматриваются также *инерциальные*, или *галилеевы*, системы координат, движущиеся поступательно, прямолинейно и равномерно по отношению к системе, выбранной за *абсолютно неподвижную*, а следовательно, и друг по отношению к другу.

*Подвижными, относительными* системами при этом явятся, например, *земные*, т. е. жестко связанные с вращающейся Землей, *лабораторные* системы координат, а также различные *планетные* системы.

Требование *объективности* физических величин, упомянутое в гл. VII, заключалось в независимости их от произвольно выбранных, но *неподвижных* друг по отношению к другу систем координат. В кинематике это требование, конечно, сохраняется, но не относится к изменяющим во времени свое положение в пространстве *подвижным* системам. Так, например, вектор скорости по отношению к различным инерциальным системам координат будет иметь разные значения, хотя, как это будет разъяснено в начале следующего тома, *динамические* процессы во всех инерциальных системах будут одинаковы.

Предметом изучения кинематики служат те же модели материальных тел, что и принятые в статике. Это — материальная точка и система материальных точек, сплошная среда и ее частный вид — абсолютно твердое тело, но, конечно, в той степени абстракции от физических свойств, которая присуща геометрическим образам кинематики, о чем уже была речь выше.

Как уже подчеркивалось во введении, в отличие от большинства традиционных курсов теоретической механики, в заключительной части настоящего отдела уделяется внимание основам кинематики сплошных деформируемых сред. В частности, излагается расширение основной теоремы кинематики абсолютно твердого тела об общем случае перемещения и движения тела в пространстве на случай деформируемой среды и проводится выяснение кинематического смысла компонент тензоров деформаций и скоростей деформаций.

### § 40. Уравнения движения точки. Траектория.

#### Примеры прямолинейных движений. Графики движений

Положение точки в пространстве будем определять ее вектором-радиусом  $r$  относительно начала координатной системы  $Oxyz$ . Как уже известно из отдела статики, проекции вектора-радиуса на оси координат равны координатам точки:

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z, \quad (10.1)$$

причем длина вектора  $r$  равна

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (10.2)$$

а косинусы его углов с осями декартовых координат определяются формулами

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{r, x}) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos(\widehat{r, y}) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos(\widehat{r, z}) &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

При движении точки в пространстве координаты ее изменяются с течением времени. По закону изменения этих координат можно судить о характере движения точки. Предположим, что нам заданы координаты точки в функции времени, т. е. заданы уравнения

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (10.4)$$

Эти уравнения называют *уравнениями движения точки* в декартовых координатах. Вместо декартовых координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  можно взять какие угодно другие координаты: полярные, сферические, цилиндрические и др. Выраженные в функции времени, они дадут уравнения движения точки в соответствующей системе координат.

Линия, описываемая движущейся точкой в пространстве, называется *траекторией* точки.

Уравнения движения (10.4), определяющие координаты точки в любой момент времени, могут рассматриваться как *параметрические* уравнения траектории. При переходе от параметрических уравнений кривой линии к уравнениям, связывающим

координаты точки, исключают параметр; так же поступают и в кинематике, исключая время из уравнений движения.

Итак, для получения уравнений траектории необходимо из уравнений движения исключить время.

Рассмотрим сначала простейший случай движения точки — *прямолинейное движение*, когда траекторией служит прямая линия.

В случае прямолинейного движения можно принять прямую, по которой движется точка, за одну из координатных осей, например за ось  $x$ . Положение точки на этой оси вполне определяется ее абсциссой  $x$ , и уравнение движения точки (в этом случае одно) будет

$$x = f(t). \quad (10.5)$$

Чтобы сделать эту зависимость более наглядной, прибегают к построению *графиков движения*, т. е. изображают закон движения графически в виде соответствующей ему кривой, откладывая по горизонтальной оси время  $t$ , а по вертикальной — абсциссу  $x$ .

Примером прямолинейного движения является *равнопеременное движение*, заключающее в себе как частный случай *равномерное* прямолинейное движение. Направим ось  $Ox$  так, чтобы она совпала с направлением движения точки в начальный момент, и пусть начальная абсцисса  $x_0$  для определенности положительна. В отличие от равномерного движения, которое описывается *линейной* функцией

$$x = x_0 + ct, \quad (10.6)$$

равнопеременное движение может быть описано *квадратичной* функцией времени:

$$x = x_0 + ct \pm a \frac{t^2}{2}. \quad (10.7)$$

Здесь, как известно из курса физики,  $a$  — положительная величина, определяющая *ускорение*,  $c$  — скорость в начальный момент ( $c > 0$ ). Характер движения зависит от знака *плюс* либо *минус* в уравнении движения (10.7). Знаку *плюс* соответствует

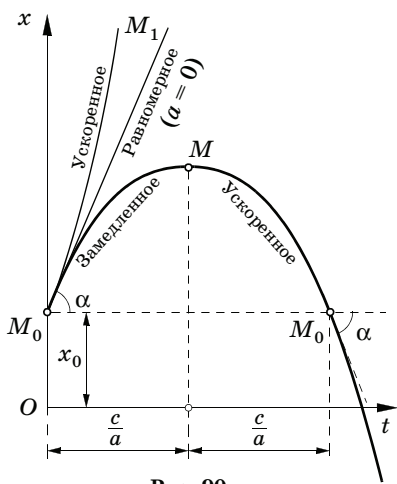


Рис. 90

ускоренное движение, знаку *минус* — замедленное. Графики движения показаны на рис. 90. Это — параболы.

Для сравнения на рисунке приведена прямая линия, представляющая график равномерного движения с той же начальной абсциссой  $x_0$  и скоростью  $c$ . Очевидно,  $\operatorname{tg} \alpha = c$ .

Примером широко распространенного *прямолинейного неравномерного* движения служит прямолинейное *гармоническое колебательное движение*, уравнение которого имеет один из следующих видов:

$$x = a \sin(\omega t + \alpha), \quad x = a \cos(\omega t + \beta), \quad (10.8)$$

причем второе уравнение получается из первого заменой  $\alpha$  на  $\pi/2 + \beta$ .

Выясним значение постоянных величин  $a$ ,  $\omega$  и  $\alpha$ . Если увеличить время  $t$  на такую постоянную  $T$ , чтобы аргумент функции *синус* или *косинус* увеличился на  $2\pi$ , т. е. определить  $T$  из условия

$$\omega(t + T) + \alpha = \omega t + \alpha + 2\pi,$$

то уравнение движения вследствие периодичности функций *синус* и *косинус* не изменится. Иными словами, начиная с момента  $t + T$  точка будет двигаться точно так же, как она двигалась в интервале  $(t, t + T)$ . Таким образом, в интервалах  $(t + T, t + 2T)$ ,  $(t + 2T, t + 3T)$  и т. д. движение будет тождественно движению в интервале времени  $(t, t + T)$ . За время  $(t, t + T)$  точка совершит *полное колебание*. Интервал времени, в течение которого происходит полное колебание, называется *периодом колебания*. Из предыдущего равенства следует, что

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (10.9)$$

Величина  $\omega$  называется *круговой частотой* колебательного движения в отличие от более краткого термина *частота*, под которой обычно понимают величину  $\nu = 1/T$ . Происхождение термина *круговая частота* вскоре станет понятным. В дальнейшем круговая частота  $\omega$  будет называться для краткости просто частотой. Частота  $\nu$  может быть выражена или в величинах, обратных секунде [1/с], или в герцах [Гц]. Единица частоты 1 Гц соответствует частоте, при которой одно полное колебание совершается в течение одной секунды.

Абсцисса в гармоническом колебательном движении, представленном уравнением (10.8), меняется от  $-a$  до  $a$ , а движущаяся точка отклоняется симметрично в обе стороны от некоторого



центра колебания на расстояния, равные по абсолютной величине  $a$ . Согласно уравнению (10.8), центр колебания находится в начале координат ( $x = 0$ ).

Максимальное отклонение точки от центра колебания называется *амплитудой* колебания, расстояние между крайними положениями колеблющейся точки — *размахом* колебания. Наконец, постоянная  $\alpha$  (или  $\beta$ ) характеризует начальное положение точки при  $t = 0$  и называется *начальной фазой* колебания, а выражение  $\omega t + \alpha$  (или  $\omega t + \beta$ ) — *фазой* колебания.

Формулам (10.8) можно придать *комплексную форму*. Введем в рассмотрение известную из курса высшей математики формулу Эйлера ( $\varphi$  — действительная величина,  $i = \sqrt{-1}$ )

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

и примем обычное обозначение  $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(x + i\varphi) = x$  для *действительной части\** комплексной величины  $z = x + i\varphi$ . Тогда вторую из формул (10.8) можно выразить в комплексной форме так:

$$x = \operatorname{Re} [ae^{i(\omega t + \beta)}] = \operatorname{Re} (ae^{i\beta} \cdot e^{i\omega t}) = \operatorname{Re} (Ae^{i\omega t}).$$

Комплексная величина

$$A = ae^{i\beta} = a(\cos \beta + i \sin \beta)$$

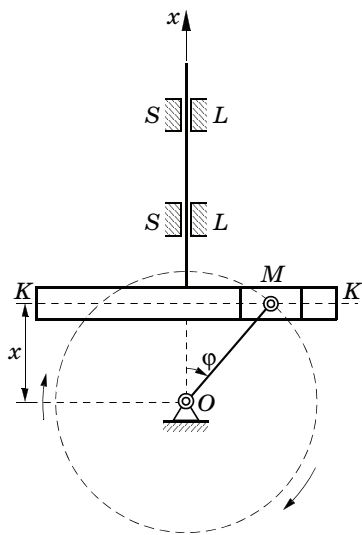


Рис. 91

носит наименование *комплексной амплитуды* гармонического колебания. Комплексная амплитуда, в отличие от обычной, действительной амплитуды  $a$ , является функцией амплитуды  $a$  и фазы  $\alpha$ .

Метод комплексных амплитуд общепринят для рассмотрения гармонических колебаний в линейных электрических цепях.

Прямолинейное гармоническое колебательное движение совпадает, в частности, проекция точки, движущейся с постоянной скоростью по окружности, на диаметр этой окружности. Таково будет, например, движение рамки  $KK$  кулисного механизма, представленного на рис. 91, если кривошип  $OM$

\* Действительная часть — *partie réelle* (фр.).

вращается равномерно, а стержень  $LL$ , жестко соединенный с рамкой, может скользить в направляющих  $SS$ . Рамка снабжена прорезью, вдоль которой движется ползунок  $M$ , шарнирно соединенный с кривошипом. Угол  $\varphi$ , образованный кривошипом  $OM$  с осью  $Ox$ , будет изменяться по закону

$$\varphi = \omega t + \beta,$$

где постоянный коэффициент  $\omega$  определяет угол, описываемый кривошипом в 1 с (угловая скорость кривошипа), а постоянная  $\beta$  равна значению угла в начальный момент времени  $t = 0$ . Абсцисса рамки  $x$ , как непосредственно видно из рисунка, равна

$$x = OM \cos \varphi = a \cos (\omega t + \beta),$$

где  $a$  — амплитуда, равная длине кривошипа. Это и есть *уравнение гармонического колебательного движения*. Период колебаний, очевидно, совпадает с продолжительностью полного оборота кривошипа.

Совпадение частоты колебаний  $\omega$  с угловой скоростью кривошипа объясняет происхождение термина *круговая частота*. Угол  $\varphi$  между кривошипом и осью  $Ox$  является фазой колебания, начальное его значение при  $t = 0$ , т. е.  $\beta$ , определяет начальную фазу колебания.

Примеров гармонического прямолинейного колебания можно привести очень много. При качании длинных маятников с малыми углами отклонения от вертикали нижний конец маятника совершает гармонические колебания, причем ввиду большой длины маятника можно дугу круга принимать за прямолинейный отрезок. Точно так же, если закрепить один конец упругой плас-

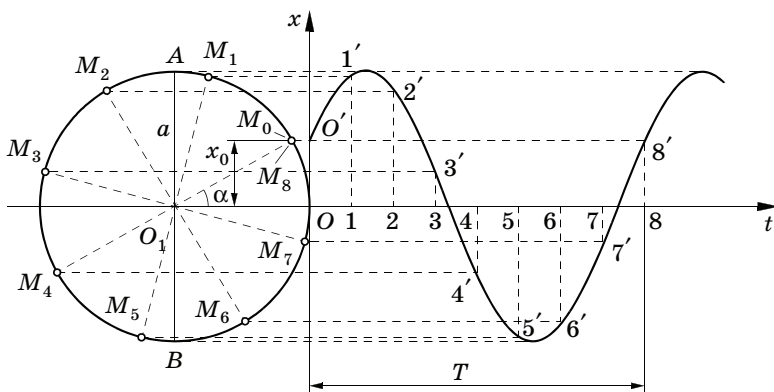


Рис. 92

тинки и привести в движение другой, то последний при малых отклонениях будет совершать гармоническое колебательное движение, тем больше приближающееся к прямолинейному, чем длиннее пластинка или чем меньше размахи ее колебания.

Воспользовавшись определением гармонического колебания как проекции равномерного движения точки по окружности на диаметр, построим график этого движения — синусоиду или косинусоиду.

Проведя окружность радиусом  $a$  (рис. 92), отложим на ней дугу  $OM_0$  с центральным углом  $\alpha$  и через точку  $M_0$  проведем горизонтальную прямую до пересечения с осью  $Ox$ ; это даст начальную точку кривой, соответствующей моменту  $t = 0$ , это  $x_0 = a \sin \alpha$ . Для построения всей кривой разметим прежде всего шкалу времени. Примем некоторый отрезок на оси  $t$  за период колебания  $T = 2\pi/\omega$  и разделим его на 8, 16, 32, ... (или другое число  $2^n$ ) равных частей. На чертеже период разделен на восемь частей; аналогично этому и дугу полной окружности, начиная от точки  $M_0$ , разделим тоже на восемь частей. Через эти точки проведем горизонтальные прямые до пересечения с перпендикулярами, восстановленными из точек деления периода  $T$ , имеющих соответствующие номера. Тогда в пересечении получатся точки искомой кривой  $1', 2'$  и т. д. Горизонтальные прямые, проведенные через точки  $A$  и  $B$  окружности, дадут верхнюю и нижнюю границы кривой.

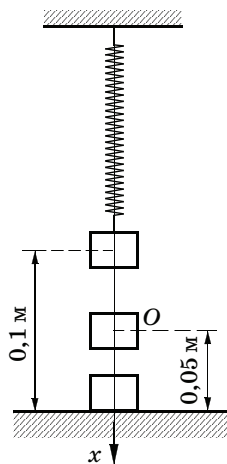


Рис. 93

**Пример 21.** Колеблющийся на пружине груз в начальный момент касается пола; при наивысшем положении высота его над полом равна 0,1 м. Продолжительность 10 размахов равна 15 с. Составить уравнение движения груза, считая колебание груза гармоническим.

Выберем за ось координат  $Ox$  (рис. 93) вертикальную прямую, направленную вниз, и поместим начало координат в точку на оси, соответствующую центру колебаний, находящуюся над полом на половине размаха, т. е. на высоте 0,05 м. Период колебания равен  $15/5 = 3$  с, следовательно, частота будет  $(2\pi/3)$  1/с. Искомое уравнение имеет вид

$$x = 0,05 \sin \left( \frac{2\pi t}{3} + \alpha \right) \text{ м.}$$

Для определения начальной фазы полагаем здесь  $t = 0$ ; будем иметь

$$x_0 = 0,05 \sin \alpha \text{ м,}$$

тогда как по условию  $x_0 = 0,05$  м; следовательно,  $\alpha = \pi/2$ , и уравнение движения примет вид

$$x = 0,05 \sin \left( \frac{2\pi}{3} t + \frac{\pi}{2} \right) = 0,05 \cos \frac{2\pi}{3} t \text{ м.}$$

В дальнейшем часто придется встречаться с уравнениями движения, правая часть которых представляет сумму нескольких гармонических колебаний одинаковой или разной частоты. Отдельные слагаемые такой суммы называют *гармониками*.

**ТЕОРЕМА.** Сумма нескольких гармоник одинаковой частоты дает уравнение гармонического колебательного движения той же частоты.

Достаточно доказать это для двух гармоник; пусть общая их частота равна  $\omega$ , амплитуды их  $a_1$  и  $a_2$ , фазы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ; тогда уравнение движения будет иметь вид

$$x = a_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + a_2 \sin(\omega t + \alpha_2). \quad (10.10)$$

Приведем составное колебательное движение (10.10) к одному колебанию с амплитудой  $a$  и начальной фазой  $\alpha$ . Воспользуемся формулой для синуса суммы углов, получим

$$x = a_1 \cos \alpha_1 \sin \omega t + a_1 \sin \alpha_1 \cos \omega t + a_2 \cos \alpha_2 \sin \omega t + a_2 \sin \alpha_2 \cos \omega t = a \sin(\omega t + \alpha),$$

где для краткости введены новые постоянные  $a$  и  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 &= a \cos \alpha, \\ a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 &= a \sin \alpha. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Постоянную  $a$ , т. е. амплитуду результирующего колебания, находим, взяв сумму квадратов левых и правых частей уравнений (10.11); получим

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad (10.12)$$

Начальную фазу  $\alpha$  результирующего колебания можно определять по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}, \quad (10.13)$$

принимая во внимание при определении  $\alpha$  знаки  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ , совпадающие по (10.11) со знаками числителя и знаменателя в формуле (10.13).

Рассмотрим случай сложения гармоник *разной* частоты.

**ТЕОРЕМА.** Если частоты или периоды слагаемых гармоник соизмеримы, то движение будет периодическим, в противном случае — непериодическим.

Пусть движение задается уравнением

$$\begin{aligned} x &= a_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) = \\ &= a_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} t + \alpha_1\right) + a_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T_2} t + \alpha_2\right) \end{aligned} \quad (10.14)$$

и пусть периоды гармоник соизмеримы. Это значит, что отношение периодов представляет рациональное число, т. е.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2},$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — целые числа, причем, не нарушая общности, можно считать, что числа  $n_1$  и  $n_2$  взаимно простые. При этом

$$T = n_2 T_1 = n_1 T_2$$

и будет искомым периодом, так как по прошествии времени  $T$  повторится наименьшее целое число периодов слагаемых гармоник; оба слагаемых и сумма их вернуться к прежним значениям. Если, например, период одной гармоники  $T_1 = 2$  с, а второй  $T_2 = 5$  с, то период сложного движения будет  $T = 10$  с; действительно, за 10 с повторится пять раз полное колебание первой гармоники и два раза — второй, и, поскольку пройдет целое число периодов, движение точки начнет повторяться.

Обращаясь к частотам, видим, что частота результирующего колебания выражается следующим образом:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{n_2 T_1} = \frac{2\pi}{n_1 T_2},$$

т. е.

$$\omega = \frac{\omega_1}{n_2} = \frac{\omega_2}{n_1}.$$

Особый интерес представляет случай сложения колебаний с мало отличающимися друг от друга периодами. При этом получается результирующее колебание большого периода. Например, если периоды разнятся на 1 с, один из периодов слагаемых коле-

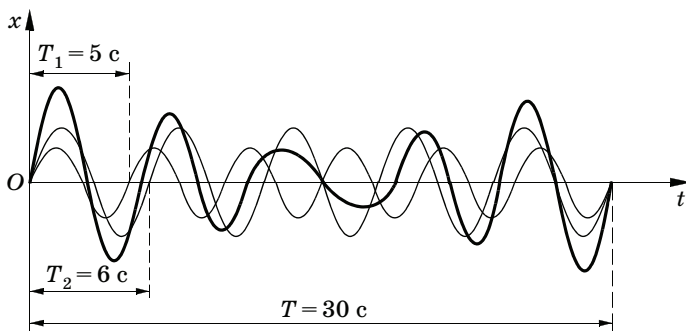


Рис. 94

баний равен  $T_1 = 5$  с, а другой  $T_2 = 6$  с, то период результирующего колебания будет равен  $T = 30$  с.

На рис. 94 показаны графики слагаемых колебаний и результирующего колебания (жирная линия), отвечающие указанному отношению периодов. Такое периодическое колебание носит наименование *биения*.

При несоизмеримых периодах слагаемых колебаний результирующее движение будет непериодическим, так как не существует такого промежутка времени  $T$ , который был бы целым кратным двух несоизмеримых друг с другом периодов  $T_1$ ,  $T_2$  слагаемых колебаний.

**Пример 22. Кривошипно-ползунный механизм.** Составим уравнение прямолинейного движения ползуна  $K$  кривошипно-ползунного механизма  $OAK$  (рис. 95), предполагая, что кривошип вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega$  и что отношение  $\lambda$  длины кривошипа  $a$  к длине шатуна  $l$  мало.

Механизм состоит из кривошипа  $OA$ , вращающегося вокруг оси  $O$ , и шатуна  $AK$ , шарнирно соединенного с кривошипом в пальце кривошипа  $A$  и с ползуном  $K$ , движущимся взад и вперед по направляющей линейке  $B$ . При заданном угле  $\varphi$  кривошипа с осью  $Ox$  определим положение ползуна  $K$  его абсциссой  $x$ .

Из треугольника  $OAK$  имеем

$$x = a \cos \varphi + l \cos \psi;$$

с другой стороны,

$$\sin \psi = \frac{a}{l} \sin \varphi = \lambda \sin \varphi,$$

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi},$$

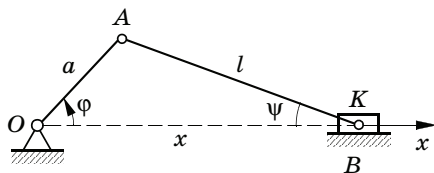


Рис. 95

и, следовательно,

$$x = a \cos \varphi + l \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi},$$

причем радикалу приписываются лишь положительные значения, так как  $\psi < \pi/2$  и  $\cos \psi > 0$ .

По условию задачи кривошип вращается равномерно, т. е. угол  $\varphi$  растет пропорционально времени; полагая  $\varphi = \omega t$  (где  $\omega$  — угловая скорость вращения кривошипа), будем иметь

$$x = a \cos \omega t + l \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}.$$

Движение ползуна, очевидно, колебательное, так как при возрастании времени *косинус* и *синус* будут возвращаться к прежним значениям; ползун будет ходить влево и вправо по линейке между крайними своими положениями

$$x_{\min} = l - a, \quad x_{\max} = l + a,$$

соответствующими горизонтальным расположениям кривошипа. Движение будет периодическим. Найдем его период. Для этого заметим, что  $\sin^2 \omega t = (1 - \cos 2\omega t)/2$  имеет период  $\pi/\omega$ , а  $\cos \omega t$  имеет период, в два раза больший, т. е.  $2\pi/\omega$ ; последний период включает в себе предыдущий, так что общий период движения будет равен  $T = 2\pi/\omega$ , т. е. времени оборота вала. Периодическое колебание ползуна не является гармоническим; действительно, оно состоит из гармонического члена, представленного первым слагаемым в правой части уравнения движения, и дополнительного слагаемого — квадратного корня, которое нарушает гармоничность колебания.

Всякое периодическое движение частоты  $\omega$  может быть представлено в общем случае бесконечной ( $a$  в частных случаях или в допустимом приближении конечной) суммой гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте  $\omega$ . Такое представление осуществляется с помощью приемов гармонического анализа; в рассматриваемом случае можно с вполне удовлетворительной точностью представить уравнение движения ползуна в виде суммы двух гармоник.

Для этого заметим, что по условию отношение длины кривошипа к длине шатуна  $\lambda = a/l$  мало. При таком предположении уравнение движения может быть упрощено. Именно, разлагая радикал в ряд

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t} &= (1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t)^{1/2} = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \omega t + \dots = 1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\omega t + \dots \end{aligned}$$

и пренебрегая членами порядка  $\lambda^4$  ввиду их малости, получим

$$x = l \left( 1 - \frac{\lambda^2}{4} + \lambda \cos \omega t + \frac{\lambda^2}{4} \cos 2\omega t \right).$$

Здесь колебание представлено в форме суммы постоянного члена  $l(1 - \lambda^2/4)$ , от которого можно освободиться переносом начала координат в точку с абсциссой  $l(1 - \lambda^2/4)$ , и двух гармоник с частотами  $\omega$  и  $2\omega$ .

Положим, что  $\lambda = 1/5$  и что вал делает 100 об/мин. Тогда время полного оборота вала  $T = 60/100$  с; следовательно,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{60} \cdot 100 \approx 10,5 \text{ 1/с.}$$

Уравнение движения принимает вид

$$\frac{x}{l} = 0,99 + 0,2\cos 10,5t + 0,01\cos 21t.$$

Желая вычертить график, заметим, что на чертеже надо показать величину порядка единицы (первое слагаемое) и величину порядка одной сотой (третье слагаемое). Величины эти настолько различны, что откладывать их на чертеже в одном и том же масштабе невозможно. Для избежания этого неудобства поместим начало координат не в точку  $x = 0$ , а в точку  $x = l$  (рис. 96); тогда первое слагаемое изобразится в виде прямой, параллельной оси времени и показанной на рисунке пунктиром. Нанеся два гармонических слагаемых и складывая их по ординатам, получим искомую кривую (жирная линия).

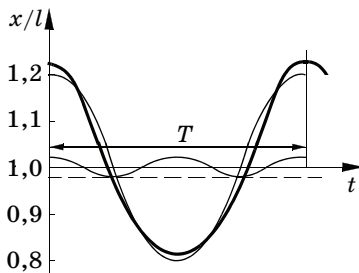


Рис. 96

## § 41. Криволинейные движения точки. Примеры

Число уравнений движения в криволинейном движении равно *двум*, если движение *плоское*, а траектория — плоская кривая, или *трем* в общем *пространственном* случае, когда траектория — кривая двойкой кривизны.

Рассмотрим сначала некоторые частные примеры криволинейного движения.

Если координаты точки изменяются по закону

$$x = a_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad y = a_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad (10.15)$$

т. е. если проекции движущейся точки на оси координат совершают простые гармонические колебания, то сама точка описывает в плоскости  $xOy$  кривые, называемые *фигурами Лиссажу*.



В зависимости от соотношения амплитуд, частот и начальных фаз этих колебаний получаются те или другие кривые. Отсюда вытекают практические применения этих кривых в акустике, оптике, электротехнике и механике для изучения колебательных движений. Проецируя след «зайчика» или вообще колеблющуюся прямолинейно точку на фотопластинку, совершающую в свою очередь определенное гармоническое колебание в перпендикулярном направлении, анализируют полученную фигуру Лиссажу и по ней определяют амплитуды, частоты и фазы составляющих взаимно-перпендикулярных гармонических колебаний. Таково, например, применение фигур Лиссажу в катодном осциллографе и других приборах.

Рассмотрим уравнение фигур Лиссажу, причем сначала остановимся на простейшем случае равных частот взаимно-перпендикулярных колебаний.

**Случай одинаковых частот взаимно-перпендикулярных колебаний.** Уравнения движения будут иметь вид

$$\begin{aligned}x &= a_1 \sin(\omega t + \alpha_1), \\y &= a_2 \sin(\omega t + \alpha_2).\end{aligned}$$

Для нахождения траектории будем исключать время из уравнений движения. Проще всего это сделать так. Представив синус суммы по известной формуле тригонометрии, получим уравнения движения в виде

$$\begin{aligned}x &= a_1 \cos \alpha_1 \sin \omega t + a_1 \sin \alpha_1 \cos \omega t, \\y &= a_2 \cos \alpha_2 \sin \omega t + a_2 \sin \alpha_2 \cos \omega t.\end{aligned}$$

Определим отсюда  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$  как две неизвестные из двух уравнений. Получим

$$\begin{aligned}\sin \omega t &= \frac{x a_2 \sin \alpha_2 - y a_1 \sin \alpha_1}{a_1 a_2 (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \alpha_2 \sin \alpha_1)}, \\ \cos \omega t &= \frac{y a_1 \cos \alpha_1 - x a_2 \cos \alpha_2}{a_1 a_2 (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \alpha_2 \sin \alpha_1)}.\end{aligned}$$

Возведя эти выражения в квадрат и сложив результаты, получим уравнение траектории в виде

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - 2 \frac{x}{a_1} \frac{y}{a_2} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (10.16)$$

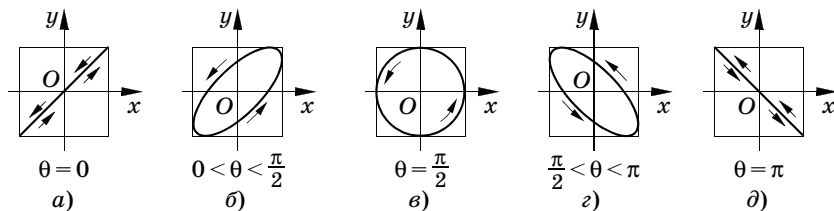


Рис. 97

Это — уравнение эллипса, имеющего центр в начале координат, с осями симметрии, наклоненными к осям координат под некоторым углом. Исследуем этот эллипс. Заметим прежде всего, что форма и расположение эллипса зависят (как это видно из его уравнения) не от значений фаз  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в отдельности, а от сдвига фаз ( $\alpha_1 - \alpha_2$ ), который обозначим через  $\theta$ .

Вычертим фигуру Лиссажу в предположении, что  $a_1 = a_2 = a$ , т. е. что амплитуды слагаемых колебаний одинаковы. Уравнение (10.16) переписется тогда в виде

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta = a^2 \sin^2 \theta.$$

При  $\theta = 0$  эллипс вырождается в отрезок прямой

$$x - y = 0,$$

именно в диагональ квадрата со стороной  $2a$  (рис. 97, а); при  $0 < \theta < \pi/2$  получим эллипс, большая ось которого наклонена под острым углом к оси  $x$  (рис. 97, б); при  $\theta = \pi/2$  получим окружность  $x^2 + y^2 = a^2$  (рис. 97, в); при  $\pi/2 < \theta < \pi$  будем иметь снова эллипс (рис. 97, г), но с большой осью, расположенной уже во II и IV квадрантах, и, наконец, при  $\theta = \pi$  снова получаем отрезок прямой  $x + y = 0$  (рис. 97, д). На всех рисунках стрелки показывают направления движения точки. При изменении  $\theta$  от  $\pi$  до  $2\pi$  получатся те же фигуры.

Для примера был взят случай  $a_1 = a_2 = a$ ; при  $a_1 \neq a_2$  фигуры Лиссажу были бы те же, только в случае  $\theta = \pi/2$  имели бы не окружность, а эллипс, оси симметрии которого совпадали бы с осями координат.

Как легко видеть из уравнений движения, абсолютные значения  $x$  и  $y$  не превосходят соответственно  $a_1$  и  $a_2$ . Отсюда следует, что все фигуры Лиссажу ограничены прямоугольником со сторонами  $2a_1$  и  $2a_2$  (у нас на рисунке они все вписаны в квадрат со стороной  $2a$ ).

Из только что приведенного примера видно, что при исключении времени теряются некоторые необходимые сведения о траектории. Например, в случае  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  получаем уравнения

$$x - y = 0, \quad x + y = 0,$$

т. е. уравнения бесконечных прямых, а на самом деле траекториями служат лишь отрезки данных прямых, заключенные в квадрате со стороной  $2a$ . Из уравнений движения это ясно видно, из уравнений же траекторий этого не следует.

**Случай различных частот взаимно-перпендикулярных колебаний.** Определим кривые Лиссажу в случае не равных между собой частот взаимно-перпендикулярных колебаний. Рассмотрим для простоты частный случай, когда частота одного из колебаний в два раза больше частоты другого, а начальные фазы и амплитуды одинаковы.

Равенство начальных фаз не является ограничительным условием, так как всегда можно так изменить начало отсчета времени, что фазы станут одинаковыми. Такое выравнивание фаз возможно, конечно, при разных частотах.

Уравнения движения имеют вид

$$x = a \sin(2\omega t - \alpha), \quad y = a \sin(\omega t - \alpha).$$

Здесь исключение времени приведет к уравнению алгебраической кривой четвертого порядка. Чтобы вычертить траекторию, проще нанести на рисунке точки  $M(x, y)$  при разных значениях  $t$  и потом их соединить плавной кривой. Получатся кривые, показанные на рис. 98.

При значениях  $\alpha$  от  $\pi$  до  $2\pi$  получим фигуры, симметричные вычерченным относительно вертикали.

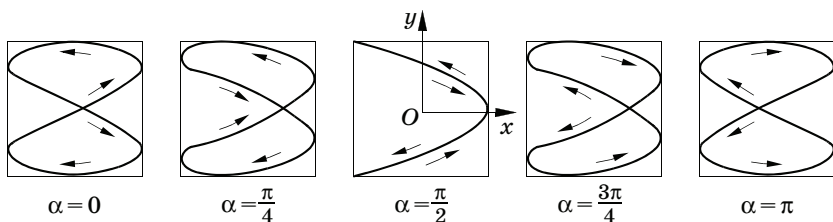


Рис. 98

В случае  $\alpha = \pi/2$  траекторией будет служить отрезок параболы, заключенной, как и все фигуры Лиссажу, в квадрат со стороной  $2a$ . Действительно, в этом случае уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} x &= a \sin (2\omega t - \pi/2) = -a \cos 2\omega t, \\ y &= a \sin (\omega t - \pi/2) = -a \cos \omega t. \end{aligned}$$

Из этих двух уравнений время  $t$  легко исключается, так как

$$x = a (\sin^2 \omega t - \cos^2 \omega t) = a (1 - 2\cos^2 \omega t) = a(1 - 2y^2/a^2),$$

и, следовательно,

$$y^2 = a^2/2 - (a/2)x,$$

а это есть уравнение параболы с вершиной в точке  $(a, 0)$  и осью  $Ox$ , служащей осью симметрии.

Отметим следующее свойство кривых Лиссажу: если частоты (или периоды) колебаний соизмеримы, то движение будет периодическим и кривые будут замкнутыми, т. е. точка будет описывать одну и ту же кривую, повторяя ее; если же периоды несоизмеримы, то точка никогда не попадет на старое место; оставаясь в границах квадрата или прямоугольника и делая все новые и новые петли, фигура Лиссажу никогда не замкнется.

Действительно, если между периодами перпендикулярных колебаний  $T_1$  и  $T_2$  существует соотношение

$$T_1 : T_2 = n_1 : n_2,$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — целые взаимно простые числа, то за время  $T = n_2 T_1 = n_1 T_2$  повторяется целое число периодов  $T_1$  и  $T_2$ , т. е.  $x$  и  $y$  вернутся к прежним положениям, и кривая замкнется. После этого движение начнет повторяться. Если же периоды несоизмеримы, то такого значения  $T$  нельзя будет указать и точка никогда не вернется в прежнее положение.

**Пример 23. Кривошипно-ползунный механизм.** По заданному закону вращения кривошипа составим уравнения движения точек шатуна кривошипно-ползунного механизма и определим траектории этих точек.

Возьмем какую-нибудь точку  $M$  шатуна (рис. 99), находящуюся на

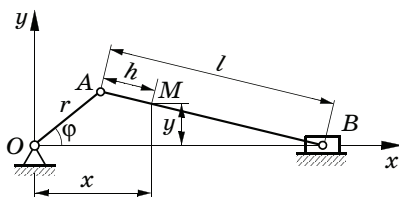


Рис. 99

расстоянии  $h$  от пальца кривошипа  $A$ . Обозначая абсциссы и ординаты точек  $A, M, B$  соответствующими значками, можем написать

$$\frac{x_M - x_A}{x_B - x_A} = \frac{h}{l}, \quad \frac{y_M - y_A}{y_B - y_A} = \frac{h}{l}.$$

Замечая, что

$$x_A = r \cos \varphi, \quad y_A = r \sin \varphi,$$

$$x_B = r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}, \quad y_B = 0,$$

получим, опуская при  $x$  и  $y$  значки, относящиеся к точке  $M$ :

$$x = r \cos \varphi + \frac{h}{l} \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}, \quad y = \left(1 - \frac{h}{l}\right) r \sin \varphi. \quad (10.17)$$

Подставляя сюда вместо  $\varphi$  функцию времени, определяющую заданный закон вращения кривошипа, получим искомые уравнения движения точки  $M$  шатуна. В частности, предполагая вращение кривошипа равномерным, положим  $\varphi = \omega t$ ; тогда будем иметь

$$x = r \cos \omega t + \frac{h}{l} \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}, \quad y = \left(1 - \frac{h}{l}\right) r \sin \omega t. \quad (10.18)$$

Для разыскания траектории нет необходимости знать закон вращения кривошипа, так как зависимость между координатами  $x$  и  $y$  получается из уравнений (10.17) путем исключения угла  $\varphi$ . Это ясно и из того простого соображения, что вид траекторий точек механизма зависит от конструкции механизма, а не от того, как будет вращаться кривошип.

Из второго уравнения (10.17) имеем

$$r^2 \sin^2 \varphi = \frac{l^2 y^2}{(l-h)^2}, \quad r^2 \cos^2 \varphi = r^2 - \frac{l^2 y^2}{(l-h)^2}.$$

Подставляя эти значения в первое из уравнений (10.17) и избавляясь от радикалов, получим

$$\left(x^2 - \frac{l+h}{l-h} y^2 + r^2 - h^2\right)^2 = 4x^2 \left[r^2 - \frac{l^2 y^2}{(l-h)^2}\right]. \quad (10.19)$$

Траектория представляет собой алгебраическую кривую четвертого порядка, имеющую форму овала. Она, в отличие от эллипса, не имеет вертикальной оси симметрии. Рассмотрим некоторые частные случаи.

■ Случай  $h = 0$ , т. е. движение пальца кривошипа  $A$ . В этом случае уравнение (10.19) переходит в уравнение окружности:

$$(x^2 + y^2 - r^2)^2 = 0.$$

■ Случай  $h = l$ , т. е. движение ползуна  $B$ . В этом случае, как ясно из рисунка, из второго уравнения (10.17) следует

$$y = 0.$$

■ Случай  $r = l$ . В этом случае из уравнений (10.17) имеем непосредственно

$$x = (l + h) \cos \varphi, \quad y = (l - h) \sin \varphi,$$

откуда получим

$$\frac{x^2}{(l + h)^2} + \frac{y^2}{(l - h)^2} = 1.$$

Это — уравнение эллипса с осями симметрии, расположенными по осям  $Ox$  и  $Oy$ . Полуоси эллипса равны  $l + h$  и  $l - h$ . Точка  $M_1$  (рис. 100), лежащая на шатуне  $AB$  ( $h > 0$ ), опишет эллипс  $C_1$ , горизонтальная полуось которого больше вертикальной; точка  $M_2$ , взятая на продолжении шатуна выше пальца кривошипа  $A$  ( $h < 0$ ), опишет эллипс  $C_2$  с большей вертикальной полуосью. Точка  $D$ , для которой  $h = -l$ , т. е.  $AD = AB$ , описывает отрезок оси  $Oy$ , и поэтому в нее может быть помещен ползунок, перемещающийся по оси  $Oy$ , а кривошип отброшен. Такой механизм называется *эллипсографом*. Все точки линейки  $BD$  описывают эллипсы, вырождающиеся в окружность для точки  $A$  и в прямые линии для точек  $B$  и  $D$ .

При  $r = l$  уравнение (10.19) распадается на два уравнения:

$$(l - h)^2 x^2 + (l + h)^2 y^2 - (l + h)^2 (l - h)^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - (l - h)^2 = 0.$$

Первое соответствует ранее указанному эллипсу, второе — окружности, описываемой точкой  $M$ , когда кривошип и шатун сливаются в одну линию, что возможно при  $r = l$ .

**Пример 24. Движение по винтовой линии.** Проекция  $M'$  (рис. 101) движущейся точки  $M$  на плоскость  $xOy$  совершает движение

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t,$$

а проекция ее  $M''$  на ось  $Oz$  движется равномерно по оси согласно уравнению  $z = ct$ . Найдем траекторию пространственного движения точки.

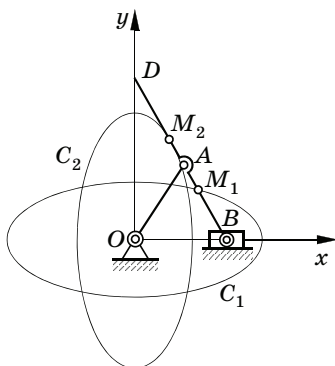


Рис. 100

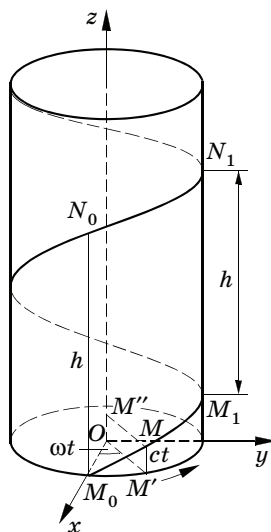


Рис. 101

Для разыскания траектории исключим время из уравнений движения

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = ct. \quad (10.20)$$

Из последнего уравнения определим  $t$  и подставим в первые два. Будем иметь уравнения траектории

$$x = a \cos \frac{\omega}{c} z, \quad y = a \sin \frac{\omega}{c} z. \quad (10.21)$$

Из первых двух уравнений движения следует, что проекция движущейся точки на плоскость  $xOy$  описывает полную окружность за время  $2\pi/\omega$  с. За это же время проекция точки на ось  $Oz$  перемещается на отрезок

$$h = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

Движение точки, проекция которой на некоторую плоскость совершает равномерное круговое движение, а на ось, перпендикулярную этой плоскости, — равномерное прямолинейное движение, называется *винтовым движением*, а соответствующая траектория — *винтовой линией*. Винтовая линия выется по поверхности цилиндра радиусом  $a$ ; расстояние  $h$  между двумя витками, взятое по образующей цилиндра, называется *шагом* винтовой линии.

Таков будет след неподвижного резца на равномерно вращающемся и равномерно перемещающемся вдоль своей оси цилиндре.

Уравнения (10.21) могут быть переписаны следующим образом:

$$x = a \cos 2\pi \frac{z}{h}, \quad (\alpha)$$

$$y = a \sin 2\pi \frac{z}{h}. \quad (\beta)$$

Каждое из этих уравнений в отдельности представляет собой уравнение цилиндрической поверхности:  $(\alpha)$  — с образующей, параллельной оси  $Oy$ , и направляющей косинусоидой в плоскости  $xz$  и  $(\beta)$  — с образующей, параллельной оси  $Ox$ , и направляющей синусоидой в плоскости  $yz$ . Пересечение этих двух цилиндрических поверхностей определяет винтовую линию. Проекциями винтовой линии на плоскости  $xOz$  и  $yOz$  служат косинусоида и синусоида.

Исключив из первых двух уравнений (10.20) время, получим уравнение прямого кругового цилиндра

$$x^2 + y^2 = a^2$$

с образующими, параллельными оси  $Oz$ , и направляющим кругом радиусом  $a$  с центром в начале координат, лежащим в плоскости  $xy$ . Пересечение этого цилиндра с любой из предыдущих цилиндрических поверхностей определит винтовую линию.

## Глава XI

## Кинематические элементы движения точки

## § 42. Скорость и ускорение

Основными характеристиками движения точки по траектории являются пройденный путь, скорость и ускорение.

Предположим, что точка  $M$  движется по заданной криволинейной траектории и в различные моменты времени  $t = t_0, t_1, t_2, \dots$  занимает соответственно положения  $M_0, M_1, M_2, \dots$ . Чтобы определить эти положения точки на траектории, примем произвольную точку  $O$  за начало отсчета дуг и каждому положению точки  $M$  сопоставим свою дуговую координату  $\sigma$ , подобно тому как на прямолинейной оси каждой точке сопоставляется абсцисса. Тогда точкам  $M_0, M_1, M_2, \dots$  будут соответствовать дуговые координаты  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ , положительные или отрицательные в зависимости от направления отсчета дуг.

Зададим движение точки  $M$  по траектории уравнением

$$\sigma = F(t). \quad (11.1)$$

Найдем *дифференциал дуги*

$$d\sigma = F'(t)dt; \quad (11.2)$$

этот дифференциал может быть положительным при возрастании дуговой координаты, т. е. при движении в сторону возрастания дуг, и отрицательным в противоположном случае. Приращение пути  $ds$  будем считать всегда положительным и равным

$$ds = |d\sigma| = |F'(t)|dt. \quad (11.3)$$

Пройденный путь  $s_{01}$  за некоторый интервал времени  $(t_0, t_1)$  можно определить как сумму дифференциалов пройденного пути за этот промежуток времени, т. е. как интеграл

$$s_{01} = \int_{t_0}^{t_1} |F'(t)|dt. \quad (11.4)$$

Если движение задано в декартовых прямоугольных координатах уравнениями

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \quad (11.5)$$



то по известной формуле геометрии

$$\begin{aligned} |d\sigma| = ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \\ &= \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + f_3'^2(t)} dt, \end{aligned} \quad (11.6)$$

а пройденный путь найдется как определенный интеграл:

$$s_{01} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + f_3'^2(t)} dt. \quad (11.7)$$

Обозначая через  $s$  текущее значение пройденного пути к моменту времени  $t$ , будем иметь уравнение пройденного пути

$$s = \Phi(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + f_3'^2(t)} dt. \quad (11.8)$$

График функции  $\Phi(t)$  даст *график пути*. Отличительная черта этого графика заключается в том, что функция  $\Phi(t)$  монотонно возрастает, а кривая на графике пути поднимается вверх и только при остановках точки превращается в прямую, параллельную оси времени. Приводим (рис. 102) для сравнения график пройденного пути и график движения в случае простого гармонического колебательного движения.

Перейдем к выяснению понятия *скорости движения*.

Подобно тому как понятие движения включает в себе понятие развития вообще, т. е. является основным при изучении всякого явления природы, так же и понятие скорости в механике является частным случаем более общего представления — быстроты, или темпа, развития.

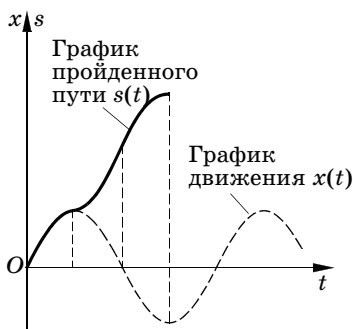


Рис. 102

В кинематике рассматривают быстроту роста пути, проходимого точкой, с течением времени, и эту величину называют *скоростью* точки; быстрота изменения угла поворота твердого тела со временем определяет *угловую скорость* вращения тела; быстрота изменения скорости точки с течением времени, так сказать «*скорость скорости*», называется *ускорением* точки и т. д.

Если изменению времени  $t$  на  $\Delta t$  соответствует увеличение пройденного пути  $s$  на  $\Delta s$ , то отношение  $\Delta s : \Delta t$  характеризует среднюю быстроту изменения пути со временем за интервал времени  $(t, t + \Delta t)$ , или *среднюю скорость* движения за интервал времени  $(t, t + \Delta t)$ :

$$v_{\text{cp}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (11.9)$$

Чем меньше интервал времени  $\Delta t$ , тем точнее подходит величина (11.9) к описанию скорости движения в момент  $t$ . Предел средней скорости за интервал времени  $(t, t + \Delta t)$  при  $\Delta t$ , стремящемся к нулю, называется *скоростью в данный момент  $t$* . Условимся точкой, поставленной над буквой, в дальнейшем обозначать производную по времени. По определению производной функции имеем следующее выражение скорости  $v$  в данный момент (точка над буквой — производная по  $t$ ):

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \quad (11.10)$$

*Величина скорости равна производной пройденного пути по времени.*

Зная уравнение пройденного пути (11.8), легко найдем скорость в данный момент по формуле

$$v = \dot{s} = \Phi'(t). \quad (11.11)$$

Из определения следует, что скорость представляет собой физическую величину, измеряемую в единицах длины, деленных на единицы времени, т. е. единицей скорости служит величина 1 м/с.

Уравнение пройденного пути позволяет определить скорость движения, но оно ничего не говорит о направлении движения. Желая одновременно знать и величину скорости движения, и направление движения, введем понятие *вектора скорости*. Для этого будем определять положение движущейся по траектории точки  $M$  ее вектором-радиусом  $r$ . Каждому моменту времени соответствует свой вектор  $r$ ; по аналогии с обычным понятием функции можно назвать вектор  $r$  вектором-функцией аргумента  $t$  и обозначить через  $r(t)$ .

Для наглядного представления об изменении вектора-функции служит следующее геометрическое построение. Отложив от некоторого произвольно выбранного полюса векторы, соответствующие последовательным значениям аргумента, отметим кривую, образованную концами этих векторов. Эту кривую называют *годографом вектора-функции*.

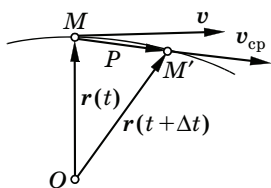


Рис. 103

Очевидно, что траектория точки является годографом переменного вектора-радиуса  $r(t)$  этой точки.

Пусть  $M$  и  $M'$  — два положения движущейся точки в моменты времени  $t$  и  $t + \Delta t$ . Вектор (рис. 103)

$$\mathbf{p} = \overrightarrow{MM'} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t), \quad (11.12)$$

соединяющий начальное и конечное положения точки, называется *перемещением* точки за промежуток времени  $\Delta t$ . Взяв отношение

$$\frac{\mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t},$$

получим вектор, имеющий направление  $\mathbf{p}$  и характеризующий среднюю быстроту перемещения. Этот вектор называется *вектором средней скорости* за промежуток времени  $\Delta t$  и обозначается через  $\mathbf{v}_{\text{cp}}$ . Чем меньше величина промежутка времени  $\Delta t$ , тем более точно представит средняя скорость быстроту перемещения. Естественно поэтому перейти к пределу и назвать вектором скорости  $\mathbf{v}$  движущейся точки в данный момент времени предел отношения вектора перемещения  $\mathbf{p}$  к промежутку времени  $\Delta t$ , в течение которого перемещение происходило, когда этот промежуток стремится к нулю:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}. \quad (11.13)$$

Выражение, стоящее с правой стороны, напоминает обычную производную, так как, подобно последней, это выражение представляет собой предел отношения приращения (векторного) вектора-функции (вектора-радиуса точки) к приращению аргумента (времени), когда это приращение стремится к нулю. По аналогии с дифференциальным исчислением будем этот предел называть *векторной производной вектора-функции по ее аргументу* и сохраним для векторной производной обычное обозначение. Согласно (11.13) имеем

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \dot{\mathbf{r}}. \quad (11.14)$$

*Вектор скорости точки равен векторной производной вектора-радиуса точки по времени.*

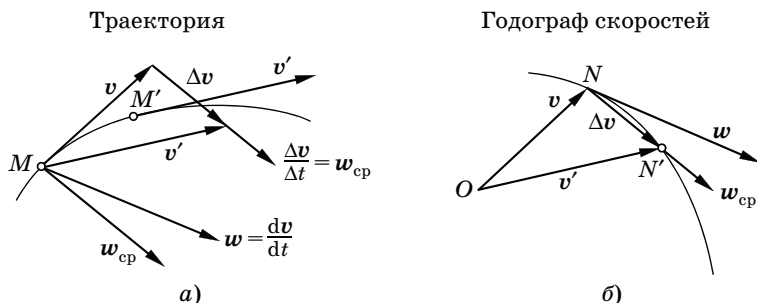


Рис. 104

Из (11.13) следует, что направление вектора скорости является предельным для направления вектора перемещения  $\mathbf{p}$  при стремлении  $\Delta t$  к нулю. Вектор  $\mathbf{p}$  направлен по секущей, предельным положением которой служит касательная к траектории; поэтому *вектор скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения точки*. Величина вектора скорости определяется совпадающим с (11.11) равенством

$$|\mathbf{v}| = v = \frac{|d\mathbf{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt}.$$

В общем случае движение точки происходит с переменной по величине и по направлению скоростью. Желая охарактеризовать изменение скорости, вводят меру быстроты этого изменения со временем — *ускорение*, которое должно учитывать векторное (геометрическое) изменение скорости, т. е. изменение ее по величине и по направлению.

Пусть в момент времени  $t$  движущаяся точка, находясь в положении  $M$  (рис. 104, а), имела скорость, величина и направление которой определяются вектором  $\mathbf{v}$ . В момент  $t + \Delta t$  эта точка заняла положение  $M'$ , имея скорость  $\mathbf{v}'$ . Таким образом, за промежуток времени  $\Delta t$  скорость получила геометрическое приращение

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}.$$

Вектор  $\Delta \mathbf{v}$  можно построить, перенеся  $\mathbf{v}'$  в точку  $M$  и найдя геометрическую разность  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{v}$ . Составив отношение приращения  $\Delta \mathbf{v}$  к промежутку времени  $\Delta t$ , получим вектор, имеющий то же

направление, что и  $\Delta v$ . Обозначим его через  $w_{\text{cp}}$  и будем называть *средним ускорением* за промежуток времени  $\Delta t$ . Имеем

$$w_{\text{cp}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v' - v}{\Delta t}. \quad (11.15)$$

Таким образом, среднее ускорение характеризует среднее изменение вектора скорости, отнесенное к единице времени.

Чтобы перейти теперь к определению *истинного ускорения*, или ускорения в данный момент, остается, уменьшая промежуток времени  $\Delta t$ , найти предел, к которому стремится отношение  $\Delta v/\Delta t$  при  $\Delta t$ , стремящемся к нулю. По определению производной вектора-функции этот предел равен производной вектора скорости  $v$  по времени.

*Вектор ускорения равен векторной производной вектора скорости по времени:*

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}. \quad (11.16)$$

Вспоминая, что сам вектор скорости равен производной по времени от вектора-радиуса движущейся точки, найдем

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{r}. \quad (11.17)$$

Как следует из определения, ускорение измеряется в единицах, равных отношению единиц скорости к единицам времени. Таким образом, единицей ускорения служит  $1 \text{ м/с}^2$ .

На практике, чтобы нагляднее оценить величину наблюдаемого ускорения, иногда выражают его в частях ускорения  $g$  свободного падения тел в пустоте, равного приблизительно  $9,81 \text{ м/с}^2$ .

На отдельной диаграмме (рис. 104, б) смежные значения вектора скорости  $v$  и  $v'$  отложены от общего полюса  $O$ . Концы этих векторов  $N$  и  $N'$  располагаются на годографе скорости. Геометрическая разность  $v' - v = \Delta v$  имеет направление секущей к годографу скорости. При стремлении  $\Delta t$  к нулю вектор  $w_{\text{cp}}$  поворачивается вокруг точки  $N$  и в пределе занимает положение касательной к годографу.

Отсюда следует, что *вектор ускорения направлен по касательной к годографу скорости.*

Для вычисления скорости и ускорения по заданным уравнениям движения в декартовых координатах

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \quad (11.18)$$

представим в формулах (11.14) и (11.17) вектор-радиус в виде его разложения по единичным векторам  $i, j, k$ , направленным по осям неподвижной системы координат  $x, y, z$ :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad (11.19)$$

Дифференцируя обе части этого равенства по времени и учитывая, что векторы  $i, j, k$  постоянны по величине и направлению, будем по правилам дифференцирования суммы произведений иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \\ \mathbf{w} &= \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Замечая, что, с другой стороны, векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}, \\ \mathbf{w} &= w_x\mathbf{i} + w_y\mathbf{j} + w_z\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (11.21)$$

где через  $v_x, \dots, w_x, \dots$  обозначены проекции векторов скорости и ускорения на координатные оси, получим, сравнивая (11.20) и (11.21):

$$v_x = \dot{x} = f'_1(t), \quad v_y = \dot{y} = f'_2(t), \quad v_z = \dot{z} = f'_3(t), \quad (11.22)$$

$$\begin{aligned} w_x = \dot{v}_x = \ddot{x} &= f''_1(t), & w_y = \dot{v}_y = \ddot{y} &= f''_2(t), \\ w_z = \dot{v}_z = \ddot{z} &= f''_3(t), \end{aligned} \quad (11.23)$$

Итак,

- ✓ проекции вектора скорости на неподвижные оси координат равны производным по времени от соответствующих координат;
- ✓ проекции вектора ускорения на неподвижные оси координат равны производным по времени от соответствующих проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат.

Вектор скорости  $\mathbf{v}$  вполне определяется заданием его проекций; величина вектора скорости равна

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \quad (11.24)$$

направление вектора скорости может быть определено косинусами углов, составляемых им с осями координат:

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{v, x}) &= \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ \cos(\widehat{v, y}) &= \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ \cos(\widehat{v, z}) &= \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}.\end{aligned}\tag{11.25}$$

Точно так же определяется величина вектора ускорения:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.\tag{11.26}$$

Направление вектора  $w$  задается косинусами углов, составляемых им с осями координат:

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{w, x}) &= \frac{w_x}{w} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}, \\ \cos(\widehat{w, y}) &= \frac{w_y}{w} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}, \\ \cos(\widehat{w, z}) &= \frac{w_z}{w} = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}.\end{aligned}\tag{11.27}$$

Формулы (11.22) можно рассматривать как параметрические уравнения кривой, описываемой концом  $N$  вектора  $v$  (рис. 104, б), если начало этого вектора помещено в некоторой точке (полюсе)  $O$ . Действительно, тогда  $v_x, v_y, v_z$  могут быть рассматриваемы как координаты точки  $N$ , и уравнения (11.22) представляют параметрические уравнения траектории точки  $N$ , т. е. годографа вектора скорости. Точно так же уравнения (11.23) представляют параметрические уравнения годографа вектора ускорения.

Считая  $v_x, v_y, v_z$  координатами точки  $N$  — конца вектора скорости, можно, согласно (11.23), рассматривать вектор ускорения как *скорость конца вектора скорости*, т. е. точки  $N$  при движении ее по годографу скорости. Отсюда вновь следует, что вектор ускорения направлен по касательной к годографу скорости в сторону движения конца вектора скорости.

### § 43. Скорость и ускорение в прямолинейном движении

В частном случае прямолинейного движения можно выбрать прямую, по которой движется точка, за ось  $Ox$ . Тогда положение точки будет определяться одной координатой (абсциссой)  $x$ , скорость — проекцией  $v_x$ , ускорение — проекцией  $w_x$ .

Если точка движется в положительном направлении оси  $x$ , то  $v_x > 0$ , причем в случае ускоренного движения  $w_x = dv_x/dt > 0$ , а в случае замедленного  $w_x < 0$ .

Если точка движется в отрицательном направлении оси  $x$ ,  $v_x < 0$ , то в случае ускоренного движения  $v_x$  — отрицательная и возрастающая по модулю, т. е. убывающая, функция времени и  $w_x = dv_x/dt < 0$ ; если же движение замедленное, то  $v_x$ , как убывающая по модулю отрицательная функция, является возрастающей функцией и, следовательно,  $w_x > 0$ . Отсюда можно вывести общий признак.

Если в данный момент времени знаки  $v_x$  и  $w_x$  совпадают — движение ускоренное; если знаки  $v_x$  и  $w_x$  различны — движение замедленное.

Рассмотрим *равнопеременное* прямолинейное движение. По определению проекция ускорения  $w_x$  есть величина постоянная. Направим ось  $Ox$  в сторону вектора начальной скорости  $v_0$ . Тогда  $v_{0x} = v_0 > 0$ , а  $w_x = \pm a$ , где  $a > 0$  и знак *плюс* соответствует ускорению, направленному в ту же сторону, что и начальная скорость, знак *минус* — в сторону, противоположную начальной скорости.

Интегрируя равенство

$$\frac{dv_x}{dt} = \pm a,$$

получим

$$v_x = C \pm at.$$

В начальный момент  $t = 0$  скорость равна  $v_0$ ; поэтому  $C = v_0$  и

$$v_x = v_0 \pm at. \quad (11.28)$$

Для определения абсциссы  $x$  напомним, что

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \pm at,$$



и проинтегрируем это равенство по  $x$ . Будем иметь

$$x = C_1 + v_0 t \pm at^2/2.$$

Для определения постоянной  $C_1$  положим, что при  $t = 0$  точка занимала начальное положение с координатой  $x = x_0$ ; тогда  $C_1 = x_0$  и окончательно

$$x = x_0 + v_0 t \pm at^2/2. \quad (11.29)$$

Если начало координат выбрать в начальном положении точки, то  $x_0 = 0$  и формула (11.29) принимает вид

$$x = v_0 t \pm at^2/2. \quad (11.30)$$

Если вектор ускорения  $w$  направлен в ту же сторону, что и начальная скорость, т. е.  $w_x > 0$ , то во всех формулах следует взять знак *плюс*, и из (11.28) вытекает, что движение ускоренное. Если  $w_x < 0$ , то в (11.28) надо выбрать знак *минус*; тогда при  $0 \leq t < v_0/a$ ,  $v_x > 0$  знаки  $v_x$  и  $w_x$  различны и движение замедленное. При  $t > v_0/a$ ,  $v_x < 0$  знак  $v_x$  совпадает со знаком  $w_x$ , и движение становится вновь ускоренным.

Полученные формулы связывают абсциссу, скорость и время. Исключая из них время, можно найти формулу, связывающую абсциссу и скорость:

$$x = x_0 \pm \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \quad (11.31)$$

Рассмотрим, например, вертикальное движение тяжелого тела вблизи поверхности Земли, пренебрегая сопротивлением воздуха. Ускорение  $a$  в данном случае равно ускорению силы тяжести  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>.

При падении без начальной скорости с высоты  $h$  будем иметь, полагая в (11.31)  $x_0 = 0$ ,  $x = h$ ,  $a = g$ ,  $v_0 = 0$ , хорошо известную формулу

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Наоборот, зная  $v$ , можем найти высоту, с которой тело упало, по формуле

$$h = v^2/(2g).$$

По формуле (11.31) находится также высота, на которую поднимается тело, имеющее начальную скорость  $v_0$ . Направим ось  $Ox$  вертикально вверх и выберем начало координат в начальном положении точки. Сохраняя в формуле (11.31) нижний знак, за-

метим, что в тот момент, когда тело займет наивысшее положение, скорость  $v$  обратится в нуль, так что, подставляя в (11.31)  $x = h$ ,  $v = 0$ ,  $a = g$ ,  $x_0 = 0$ , найдем

$$h = v_0^2 / (2g).$$

Итак, при отсутствии сопротивления высота, на которую поднимается тяжелое тело, брошенное вверх с вертикальной начальной скоростью, равна той высоте, упав с которой тело приобретает ту же скорость.

Исследуем вопрос о скорости и ускорении в *прямолинейном гармоническом колебательном движении*. Дифференцируя по времени обе части уравнения движения

$$x = a \sin(\omega t + \alpha), \quad (11.32)$$

найдем

$$v_x = a\omega \cos(\omega t + \alpha), \quad (11.33)$$

$$w_x = -a\omega^2 \sin(\omega t + \alpha). \quad (11.34)$$

Обращаясь к уравнению движения, видим, что ускорение может быть представлено еще следующим образом:

$$w_x = -\omega^2 x. \quad (11.35)$$

Отсюда следует, что при гармонических колебаниях точки ускорение по величине пропорционально расстоянию от центра колебания, причем точка движется ускоренно, приближаясь к центру, и замедленно, удаляясь от него. В самом деле, при приближении к центру со стороны отрицательных абсцисс  $v_x > 0$ ,  $x < 0$  и  $w_x > 0$ , т. е. движение ускоренное; при  $x > 0$  приближение к центру совершается при  $v_x < 0$ , при этом  $w_x < 0$  — проекции скорости и ускорения имеют опять одинаковый знак и движение ускоренное. Точно так же можно показать, что при удалении точки от центра движение будет замедленным.

На рис. 105 представлен график ускорения в колебательном движении совместно с графиками движения и скорости. Из графика видно, что в тот момент, когда  $x$  принимает максимальное значение,  $v_x = 0$  и  $w_x$  до-

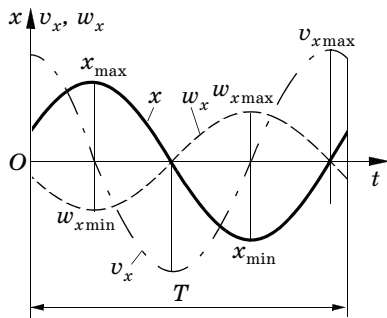


Рис. 105

стигает минимума, будучи отрицательным; по абсолютной величине оно имеет максимальное значение. После этого точка движется с убывающим по абсолютной величине ускорением и растущей по абсолютной величине скоростью. В центре колебания  $x = 0$  скорость имеет по абсолютной величине максимальное значение, но так как  $v_x < 0$ , то  $v_x$  будет иметь минимум; ускорение при этом равно нулю вместе с  $x$ . При дальнейшем движении  $x$  становится отрицательным, скорость убывает с удалением от центра, ускорение, наоборот, возрастает, и при  $x = x_{\min}$  скорость опять равна нулю, а ускорение достигает максимума.

В качестве примера вычисления скорости и ускорения при гармоническом колебательном движении найдем максимальные значения скорости и ускорения средней точки рессоры, если амплитуда ее колебаний  $a = 4$  мм, а период  $T = 0,1$  с. По формулам (11.33) и (11.34) имеем

$$v_{\max} = \omega a = \frac{2\pi}{T} a = 0,25 \text{ м/с},$$

$$w_{\max} = \omega^2 a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a = 15,8 \text{ м/с}^2.$$

Рассмотрим *затухающие* колебания точки в некоторой среде, которая тормозит движение, заставляя колебания затухать. Уравнение движения задается в виде

$$x = ae^{-pt} \sin(\omega t + \alpha), \quad (11.36)$$

где  $a$ ,  $p$  и  $\omega$  — положительные постоянные,  $p$  — коэффициент, или фактор, затухания,  $a$  и  $\omega$ , как и раньше, — амплитуда и частота колебания,  $\alpha$  — начальная фаза.

Исследуем рассматриваемое движение. Найдем его скорость:

$$v_x = \dot{x} = ae^{-pt} [\omega \cos(\omega t + \alpha) - p \sin(\omega t + \alpha)]. \quad (11.37)$$

Приравнявая скорость нулю, найдем моменты времени, соответствующие максимальным и минимальным значениям абсциссы  $x$ , т. е. крайним положениям точки; приходим к уравнению

$$\omega \cos(\omega t + \alpha) - p \sin(\omega t + \alpha) = 0;$$

оно может быть переписано следующим образом:

$$\operatorname{tg}(\omega t + \alpha) = \omega/p;$$

отсюда получаем

$$\omega t + \alpha = \operatorname{arctg}(\omega/p) + n\pi,$$

где предполагается, что для  $\operatorname{arctg}(\omega/p)$  взято его наименьшее положительное значение и  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Обозначая  $n$ -й корень этого уравнения через  $t_n$  и замечая, что

$$\omega t_0 + \alpha = \operatorname{arctg}(\omega/p),$$

будем иметь

$$t_n = t_0 + n \frac{\pi}{\omega}.$$

Итак, моменты обращения скорости в нуль, т. е. моменты, соответствующие крайним положениям точки, образуют арифметическую прогрессию с разностью  $\pi/\omega$ .

Найдем закон убывания амплитуд. Для этого определим абсциссы крайних положений точки. Подставив в уравнение (11.36)  $t_n$  вместо  $t$ , будем иметь

$$\begin{aligned} x_n &= a e^{-pt_n} \sin(\omega t_n + \alpha) = a e^{-pt_0 - pn(\pi/\omega)} \sin(\omega t_0 + \alpha + n\pi) = \\ &= (-1)^n e^{-pt_0} \sin(\omega t_0 + \alpha) e^{-pn(\pi/\omega)} = (-1)^n x_0 e^{-pn(\pi/\omega)}. \end{aligned}$$

Замечая, что амплитуда  $a_n$  равна  $|x_n|$ , окончательно найдем

$$a_n = a_0 e^{-pn(\pi/\omega)}.$$

Таким образом, амплитуды затухающего колебания убывают в геометрической прогрессии со знаменателем  $e^{-p(\pi/\omega)}$ ; отношение двух последовательных амплитуд равно

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = e^{-p(\pi/\omega)}.$$

Эта величина меньше единицы, причем чем больше значение  $p$ , тем скорее происходит затухание амплитуд;  $p$  называется *фактором затухания*.

Вместо фактора затухания обычно рассматривают натуральный логарифм отношения двух последовательных амплитуд:

$$\delta = \ln \frac{a_{n-1}}{a_n} = p \frac{\pi}{\omega} = p \frac{T}{2}.$$

Эта безразмерная величина называется *логарифмическим декрементом*. Логарифмический декремент пропорционален фактору затухания.

Дифференцируя (11.37) еще один раз по времени, найдем

$$\begin{aligned} w_x &= -pae^{-pt}\omega \cos(\omega t + \alpha) - a\omega^2 e^{-pt} \sin(\omega t + \alpha) + \\ &+ ap^2 e^{-pt} \sin(\omega t + \alpha) - a p \omega e^{-pt} \cos(\omega t + \alpha), \end{aligned}$$

или, после простых преобразований,

$$w_x = -(p^2 + \omega^2)x - 2p\dot{x}. \quad (11.38)$$

Ускорение складывается из двух слагаемых: одного, пропорционального отклонению точки от центра колебания, и другого, пропорционального скорости.

**Пример 25.** Определим скорость и ускорение ползуна кривошипно-ползунного механизма, шатун которого имеет длину  $l = 1$  м; отношение длины кривошипа к длине шатуна  $\lambda = 1/5$ ; вал делает 100 об/мин.

Приближенное уравнение движения такого ползуна имеет вид (§ 40, пример 22)

$$x = 0,99 + 0,2 \cos 10,5t + 0,01 \cos 21t.$$

Дифференцируя по времени, найдем

$$v_x = -2,1 \sin 10,5t - 0,21 \sin 21t,$$

$$w_x = -22 \cos 10,5t - 4,41 \cos 21t.$$

Из этого примера следует, что в случае сложных колебаний, составленных из нескольких гармонических, скорость и ускорение суммарного колебания складываются из скоростей и ускорений составляющих колебаний.

**Пример 26.** Рассмотрим затухающее колебательное движение точки:

$$x = 10e^{-0,7t} \sin 3,927t.$$

На рис. 106 отдельно вычерчены кривые:

$$x_1 = 10 \sin 3,927t, \quad x_2 = e^{-0,7t},$$

$$x = x_1 \cdot x_2 = 10e^{-0,7t} \sin 3,927t.$$

Период движения равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 1,6 \text{ с.}$$

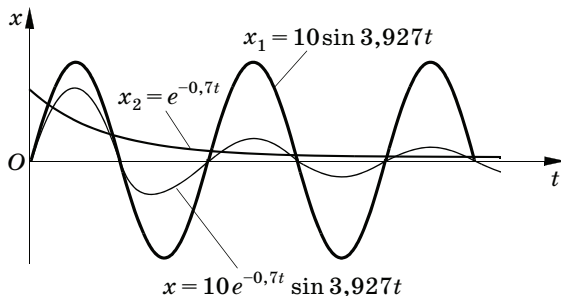


Рис. 106

Фактор затухания и логарифмический декремент равны

$$p = 0,7 \frac{1}{c}, \quad \delta = 0,7 \cdot \frac{1,6}{2} = 0,56.$$

Скорость только что рассмотренного колебания будет равна

$$v_x = \dot{x} = e^{-0,7t} (39,27 \cos 3,927t - 7 \sin 3,927t).$$

Полагая  $39,27 = A \sin \alpha$ ,  $7 = A \cos \alpha$ , найдем:

$$A = \sqrt{39,27^2 + 7^2} \approx 39,9,$$

$$\alpha = \arctg 5,61 = 79^\circ 53' \approx 1,39,$$

$$v_x = -39,9 e^{-0,7t} \sin (3,927t - 1,39).$$

#### § 44. Скорость и ускорение в криволинейном движении

Начнем с рассмотрения криволинейного движения с постоянным по величине и направлению ускорением. Такое движение будет совершать тяжелое тело вблизи поверхности Земли под действием силы веса, если пренебречь сопротивлением воздуха. В этом случае ускорение равно по величине  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  и направлено вертикально вниз. Заряженная частица, движущаяся в однородном электрическом поле (между пластинами плоского конденсатора), также будет иметь постоянное ускорение, перпендикулярное поверхности пластин.

Величину ускорения обозначим через  $a$  и выберем направление осей так, чтобы оси  $Oz$  и  $Ox$  были расположены в плоскости, перпендикулярной вектору ускорения, а ось  $Oy$  была направлена в сторону, противоположную ускорению. Тогда будем иметь

$$w_x = 0, \quad w_y = -a, \quad w_z = 0. \quad (11.39)$$

Найдем скорость, уравнения движения и траекторию точки. Имеем

$$\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad \frac{dv_y}{dt} = -a, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0,$$

откуда

$$v_x = C_1, \quad v_y = -a \int dt = -t + C_2, \quad v_z = C_3. \quad (11.40)$$

Произвольные постоянные интегрирования  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  могут быть выражены через *начальные условия*, т. е. величину и направление скорости в начальный момент времени; пусть при  $t = 0$

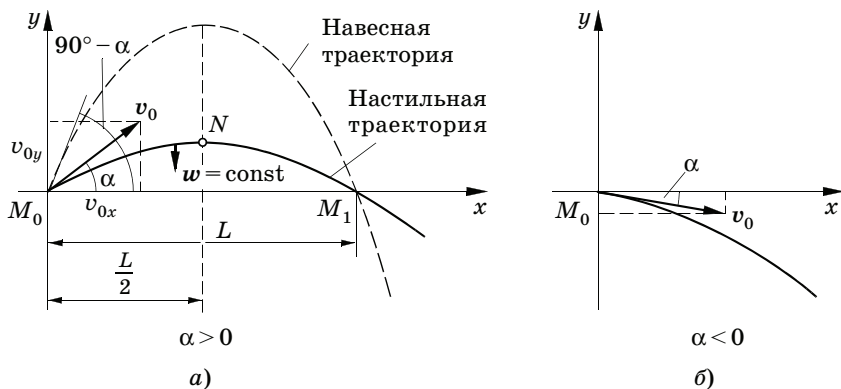


Рис. 107

$v = v_0$ , причем начальная скорость  $v_0$  лежит в плоскости  $xy$  и составляет острый угол  $\alpha$  с осью  $x$  (рис. 107). В таком случае проекции начальной скорости на оси будут равны

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha, \quad v_{0z} = 0.$$

Однако по (11.40) проекция скорости на  $Ox$  постоянна в течение всего времени движения и, следовательно, остается равной своему начальному значению. Итак,

$$v_x = v_0 \cos \alpha = C_1.$$

Аналогично получим, что

$$v_z = C_3 = 0,$$

т. е. вектор скорости  $v$  будет в течение всего движения расположен в плоскости  $xy$ , а траектория точки будет плоской кривой.

Остается определить  $C_2$ . Подставляя в выражение (11.40) для  $v_y$  вместо  $t$  нуль, получим

$$(v_y)_{t=0} = C_2.$$

Но при  $t = 0$  имеем  $v_y = v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ , следовательно,

$$C_2 = v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

и по (11.40)

$$v_y = -at + v_0 \sin \alpha. \quad (11.41)$$

Перейдем к выводу уравнений движения в плоскости  $xy$ . Мы имеем

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -at + v_0 \sin \alpha, \quad (11.42)$$

откуда следует, что

$$dx = v_0 \cos \alpha dt, \quad dy = (-at + v_0 \sin \alpha) dt.$$

Интегрируя, найдем

$$x = \int v_0 \cos \alpha dt = v_0 t \cos \alpha + C_4,$$

$$y = \int (-at + v_0 \sin \alpha) dt = -a \int t dt + v_0 \sin \alpha \int dt = \\ = -\frac{at^2}{2} + v_0 t \sin \alpha + C_5.$$

Результат интегрирования содержит две произвольные постоянные  $C_4$ ,  $C_5$ . Для определения их используем значения  $x$  и  $y$  в начальный момент движения, т. е. начальное положение движущейся точки.

Возьмем начало координат в начальном положении движущейся точки. Это дает условия:

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{при } t = 0.$$

Подставляя в выражения для  $x$  и  $y$  их начальные значения, а вместо  $t$  нуль, получим

$$0 = C_4, \quad 0 = C_5.$$

Окончательно найдем

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{at^2}{2}. \quad (11.43)$$

Это и будут уравнения движения. Очевидно, что  $x$  всегда положительно, так как  $\alpha$  — острый угол.

Чтобы получить траекторию, нужно исключить время из уравнений движения; из первого уравнения (11.43) находим

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha};$$

подставляя во второе уравнение, получим

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{ax^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}; \quad (11.44)$$

траектория движущейся точки — *парабола*.

Найдем точки пересечения кривой с осью абсцисс. Полагая в уравнении траектории  $y = 0$ , получим

$$x \operatorname{tg} \alpha - \frac{ax^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0,$$



откуда найдем  $x = 0$  или

$$x = \frac{v_0^2}{a} \sin 2\alpha.$$

Первый корень соответствует началу координат ( $x = 0, y = 0$ ), т. е. начальному положению точки. Второй корень соответствует точке пересечения кривой с осью  $x$ , если  $0 < \alpha < \pi/2$ , т. е.  $\sin 2\alpha > 0$ , так как значение  $x$  должно быть положительным. Если же  $-\pi/2 < \alpha < 0$ , то траектория располагается целиком под осью  $x$  (рис. 107, б) и точки пересечения с осью  $Ox$  в области  $x > 0$  не существует.

При  $\alpha > 0$  абсцисса  $L$  точки пересечения траектории с осью  $x$ , равная

$$L = \frac{v_0^2}{a} \sin 2\alpha,$$

называется *дальностью полета*.

При заданной  $v_0$  максимальное значение дальности достигается при  $\sin 2\alpha = 1$ , т. е. при  $\alpha = \pi/4$ ; при этом  $L_{\max} = v_0^2/a$ . Заметим, что одна и та же дальность достигается при двух различных значениях угла  $\alpha$ , ибо  $\sin 2\alpha$  принимает одинаковое значение при  $\alpha = \alpha_0$  и  $\alpha = \pi/2 - \alpha_0$ .

Найдем вершину кривой. Для этого достаточно заметить, что  $y$  достигает максимального значения в момент, когда  $v_y$  обращается в нуль, так как в этот момент времени скорость и, следовательно, касательная к траектории параллельны оси  $Ox$ . Приравняв  $v_y$  нулю, получаем  $v_0 \sin \alpha - at = 0$ , т. е.

$$t = \frac{v_0}{a} \sin \alpha.$$

Найдем положение вершины. Подставив в уравнения движения полученное значение  $t$ , будем иметь

$$x = \frac{v_0^2}{a} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{L}{2}, \quad y_{\max} = \frac{v_0^2}{2a} \sin^2 \alpha.$$

На рис. 107, а построены траектории для двух значений угла  $\alpha$ , дополняющих друг друга до  $90^\circ$ . Употребляя принятую в баллистике терминологию, назовем параболу, соответствующую меньшему значению угла  $\alpha$ , *настильной*, а большему  $\alpha$  — *навесной* траекторией (штриховая кривая).

Для иллюстрации произведем следующий расчет.

Струя воды выбрасывается пожарным рукавом под углом  $30^\circ$  к горизонту. Рукав поддерживается на высоте 1,5 м от земли,

и струя падает на землю на расстоянии 25 м от места выхода. По этим данным определим начальную скорость частиц воды. Для этого подставляем в уравнение (11.44):  $\alpha = 30^\circ$ ,  $x = 25$  м,  $y = -1,5$  м,  $a = g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>; получаем

$$-1,5 = 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{9,81}{2v_0^2} \cdot \frac{25^2}{3/4}; \quad v_0 \approx 16 \text{ м/с.}$$

Построим *годограф скорости* в движении с постоянным ускорением. Так как

$$v_x = v_0 \cos \alpha = \text{const},$$

то годографом скорости служит прямая (рис. 108), параллельная оси  $v_y$  и находящаяся на расстоянии  $v_0 \cos \alpha$  от начала координат. Чтобы найти скорость движущейся точки в тот момент, когда точка занимает положение  $M$  на своей траектории, нужно через полюс  $O^*$  годографа провести вектор  $O^*M^*$ , параллельный касательной к траектории в точке  $M$ . При движении по восходящей ветви параболы конец вектора скорости описывает отрезок  $M_0^*N^*$  годографа, при движении по нисходящей ветви описывается отрезок  $N^*M_1^*$ .

**Пример 27.** Криволинейное движение задается уравнениями

$$x = a \cos kt, \quad y = a \sin kt.$$

Траектория представляет собой окружность с радиусом  $a$  (рис. 109); проекции скорости и ускорения будут равны

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= -ak \sin kt, & v_y = \dot{y} &= ak \cos kt, \\ w_x = \ddot{x} &= -ak^2 \cos kt, & w_y = \ddot{y} &= -ak^2 \sin kt. \end{aligned}$$

Теперь находим величины скорости и ускорения:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = ak = \text{const}, \quad w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = ak^2 = \text{const}.$$

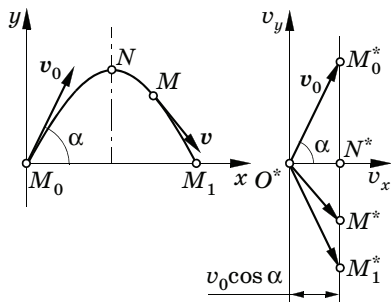


Рис. 108

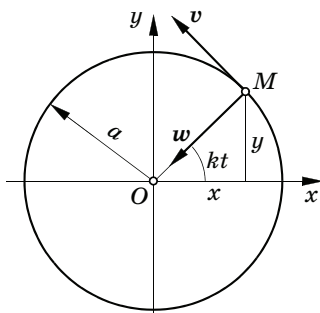


Рис. 109

Направление скорости определяется косинусами углов:

$$\cos(\widehat{v, x}) = -\sin kt, \quad \cos(\widehat{v, y}) = \cos kt.$$

Вектор скорости перпендикулярен вектору-радиусу  $\overrightarrow{OM}$  точки  $M$  и направлен в сторону, показанную на рисунке. Направление ускорения определим, используя равенства

$$w_x = -ak^2 \cos kt = -k^2 x, \quad w_y = -ak^2 \sin kt = -k^2 y,$$

указывающие на то, что проекции  $w$  противоположны по знаку и пропорциональны по величине координатам, т. е. проекциям вектора-радиуса  $r$  движущейся точки. Таким образом,

$$w = -k^2 r,$$

т. е. ускорение направлено к центру круга (см. рис. 109).

В рассмотренном примере, несмотря на постоянство величины скорости, ускорение не обращается в нуль. Это объясняется тем, что движение происходит по криволинейной траектории и скорость все время изменяет свое направление.

**П р и м е р 28.** Определим скорость и ускорение середины шатуна кривошипно-шатунного механизма при равномерном вращении кривошипа (рис. 99, с. 179).

Разлагая радикал в уравнениях (10.17) в ряд по степеням  $\lambda = r/l$  и полагая для середины шатуна  $h = l/2$ , получим уравнения движения середины шатуна в виде

$$x = a \cos \omega t + \frac{l}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \omega t \right), \quad y = \frac{1}{2} a \sin \omega t.$$

Дифференцируя эти выражения по времени, получим проекции скорости:

$$v_x = \dot{x} = -a\omega \left( \sin \omega t + \frac{\lambda}{4} \sin 2\omega t \right), \quad v_y = \dot{y} = \frac{1}{2} a\omega \cos \omega t.$$

При переходе механизма через *мертвые положения*  $\omega t = 0$  или  $\omega t = \pi$  имеем  $v_x = 0$ ,  $v_y = \frac{1}{2} a\omega$ , т. е. скорость равна половине скорости пальца кривошипа  $a\omega$  и направлена перпендикулярно шатуну.

При  $\omega t = \pi/2$  и  $\omega t = 3\pi/2$  проекция скорости  $v_y$  обращается в нуль, т. е. траектория имеет касательную, параллельную оси  $Ox$ . В эти моменты  $v_x = \mp a\omega$ , т. е. скорость равна по величине скорости пальца кривошипа. Чтобы найти уравнение годографа скорости, нужно исключить время из выражений для  $v_x$  и  $v_y$ . Имеем

$$\frac{v_x}{a\omega} = -\left( 1 + \frac{1}{2} \lambda \cos \omega t \right) \sin \omega t, \quad \frac{v_y}{a\omega} = \frac{1}{2} \cos \omega t.$$

Отсюда получаем

$$\frac{v_x}{a\omega} = \mp \sqrt{1 - 4\left(\frac{v_y}{a\omega}\right)^2} \left(1 + \lambda \frac{v_y}{a\omega}\right),$$

или

$$\left(\frac{v_x}{a\omega}\right)^2 = \left[1 - 4\left(\frac{v_y}{a\omega}\right)^2\right] \left(1 + \lambda \frac{v_y}{a\omega}\right)^2.$$

Если в первом приближении пренебречь членом  $\lambda \frac{v_y}{a\omega}$  по сравнению с единицей, то уравнение годографа приобретает вид

$$\frac{v_x^2}{(a\omega)^2} + \frac{v_y^2}{(a\omega/2)^2} = 1.$$

Это — уравнение эллипса с полуосями  $a\omega$  и  $a\omega/2$ . Наличие добавочных членов искажает форму этого эллипса.

Дифференцируя по времени выражения проекции скорости, получим проекции ускорения:

$$w_x = -a\omega^2 \left( \cos \omega t + \frac{1}{2} \lambda \cos 2\omega t \right),$$

$$w_y = -\frac{1}{2} a\omega^2 \sin \omega t.$$

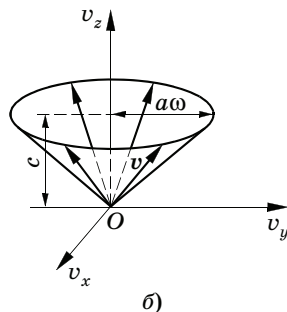
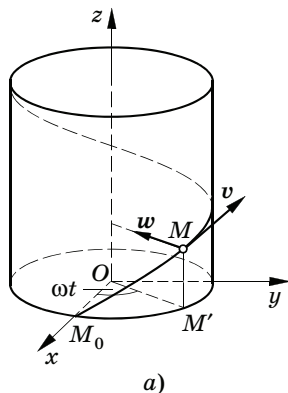


Рис. 110

**Пример 29.** Определим скорость и ускорение при равномерном движении точки по винтовой линии (рис. 110, а).

Уравнения движения были даны в § 41, примере 24. Дифференцируя выражения координат по времени, найдем проекции вектора скорости:

$$v_x = -a\omega \sin \omega t, \quad v_y = a\omega \cos \omega t, \quad v_z = c.$$

Проекция движущейся точки на плоскость  $xy$  описывает окружность со скоростью

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = a\omega$$

в направлении против движения часовой стрелки, если смотреть вдоль оси  $Oz$ . Вместе с тем точка перемещается вдоль оси  $Oz$  со скоростью  $c$ . Полная величина скорости равна

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{a^2\omega^2 + c^2}.$$

Направление скорости, т. е. касательной к винтовой линии, определяется формулами

$$\cos(\widehat{v, x}) = -\frac{a\omega \sin \omega t}{\sqrt{a^2\omega^2 + c^2}},$$

$$\cos(\widehat{v, y}) = \frac{a\omega \cos \omega t}{\sqrt{a^2\omega^2 + c^2}},$$

$$\cos(\widehat{v, z}) = \frac{c}{\sqrt{a^2\omega^2 + c^2}}.$$

Годограф скорости представляет собой окружность радиусом  $a\omega$  с центром на оси  $v_z$  в точке  $v_z = c$ ; его уравнения:

$$v_x^2 + v_y^2 = a^2\omega^2, \quad v_z = c.$$

Отрезки образующих прямого кругового конуса с вершиной в начале координат, имеющего в основании годограф, дают направление и величину скорости в различных положениях движущейся точки (рис. 110, б).

Определим величину и направление ускорения в рассматриваемом движении. Имеем

$$\begin{aligned} w_x = \ddot{x} &= -a\omega^2 \cos \omega t, & w_y = \ddot{y} &= -a\omega^2 \sin \omega t, & w_z = \ddot{z} &= 0, \\ \cos(\widehat{w, x}) &= -\cos \omega t, & \cos(\widehat{w, y}) &= -\sin \omega t, & \cos(\widehat{w, z}) &= 0. \end{aligned}$$

Ускорение направлено по перпендикуляру, опущенному из движущейся точки на ось цилиндра.

### § 45. Натуральный триэд (естественный трехгранник) траектории

Прежде всего несколько разовьем ранее сказанное о вектор-функции и ее производной. Пусть  $A(u)$  — непрерывная вектор-функция скалярного аргумента  $u$ , геометрически изображаемая своим годографом, т. е. траекторией конца  $N$  векторов  $A$  при непрерывно изменяющихся значениях аргумента  $u$ , когда начало этих векторов откладывается от некоторого полюса  $O$  (рис. 111). Производная  $A'(u)$  определяется как предел

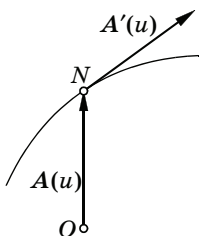


Рис. 111

$$A'(u) = \frac{dA}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{A(u + \Delta u) - A(u)}{\Delta u} \quad (11.45)$$

и представляет собой вектор, имеющий направление касательной к годографу, проведенной в сторону, соответствующую возрастанию аргумента  $u$ . Вектор  $A'(u)$  характеризует быстроту изменения по величине и направлению вектора  $A(u)$  с изменением аргумента  $u$ .

Величину, или модуль, производной  $A'(u)$  будем обозначать через  $|A'(u)|$ . Так как буквой  $A$  обозначается величина вектора  $A$ , то  $A'(u)$  будет производной величины  $A$  вектора  $A$ .

*Величина производной вектора не равна абсолютному значению производной его величины:*

$$|A'(u)| \neq |A'(u)|, \quad (11.46)$$

так как, с одной стороны, речь идет о величине вектора  $A'(u)$ , с другой — об абсолютном значении производной скаляра  $A(u)$ .

Покажем это с помощью примера. Пусть  $A$  — вектор постоянной длины, при всех изменениях остающийся в некоторой плоскости. Годографом его является дуга окружности (рис. 112). Касательная к ней, очевидно, перпендикулярна вектору-радиусу, проведенному в точку касания. Итак, если  $A = \text{const}$ , то вектор  $A'(u)$  перпендикулярен вектору  $A(u)$ . Вместе с тем, так как  $A(u)$  изменяет свое направление, *геометрическая разность*

$$\Delta A = A(u + \Delta u) - A(u)$$

не равна нулю; не равно нулю и отношение

$$\frac{A(u + \Delta u) - A(u)}{\Delta u},$$

как и его предел, т. е.  $A'(u)$ . Производная же от  $A$ , как производная постоянной величины, равна нулю.

При дифференцировании векторов сохраняются те же правила, что и при дифференцировании функций. Производная геометрической суммы равна геометрической сумме производных. Точно так же сохраняется и правило дифференцирования произведения скалярной функции  $\lambda(u)$  на вектор  $A(u)$ :

$$\frac{d}{du} (\lambda A) = \frac{d\lambda}{du} A + \lambda \frac{dA}{du}. \quad (11.47)$$

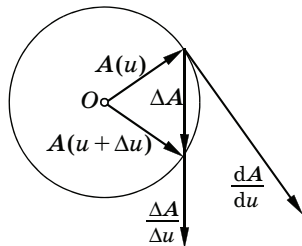


Рис. 112

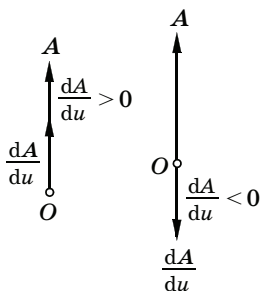


Рис. 113

Как одно из применений рассмотрим производную вектора *постоянного* направления. Всякий вектор  $A$  может быть представлен как произведение его величины  $A$  на единичный вектор  $e$ :

$$A = Ae. \quad (11.48)$$

Если вектор  $A$  имеет постоянное направление, то  $e$  является постоянным вектором; тогда

$$\frac{de}{du} = 0,$$

и, применяя формулу (11.47), получим

$$\frac{dA}{du} = \frac{dA}{du} e. \quad (11.49)$$

Если  $dA/du > 0$ , т. е.  $A$  возрастает при возрастании  $u$ , то произведение  $e$  на положительное число  $dA/du$  имеет то же направление, что и  $e$ , т. е. направление вектора  $A$ ; в случае же  $dA/du < 0$  произведение  $e$  на отрицательное число  $dA/du$  имеет направление, противоположное  $A$ . Итак, производная вектора постоянно направления имеет то же направление, что и дифференцируемый вектор, если величина последнего возрастает при возрастании аргумента, и противоположное направление, если величина дифференцируемого вектора с возрастанием аргумента убывает (рис. 113).

Правило дифференцирования скалярного и векторного произведений двух векторов также ничем не отличается от соответствующего правила в случае произведения функций. Иными словами,

$$\frac{d}{du} (A \cdot B) = \frac{dA}{du} \cdot B + A \cdot \frac{dB}{du}, \quad (11.50)$$

$$\frac{d}{du} (A \times B) = \frac{dA}{du} \times B + A \times \frac{dB}{du}. \quad (11.51)$$

Докажем, что производная вектора постоянной длины перпендикулярна самому вектору. Для этого заметим, что

$$\frac{d}{du} (A \cdot A) = \frac{dA^2}{du} = 0,$$

так как по условию  $A = \text{const}$ . По формуле (11.50) находим теперь

$$\frac{d}{du} (A \cdot A) = \frac{dA}{du} \cdot A + A \cdot \frac{dA}{du} = 2A \cdot \frac{dA}{du}$$

и, следовательно,  $A \cdot \frac{dA}{du} = 0$ , что и выражает условие перпендикулярности векторов  $A$  и  $dA/du$ .

К этому же результату можно было прийти из простого геометрического соображения: годограф вектора  $A$  постоянной величины представляет собой кривую, все точки которой одинаково отстоят от полюса годографа, т. е. кривую на сфере. Производная  $dA/du$ , будучи направлена по касательной к годографу, лежит в касательной плоскости к сфере и, следовательно, перпендикулярна ее радиусу, т. е. вектору  $A$ .

Ранее на примере вектора-радиуса  $r$  было показано, что проекции его производной по времени, т. е. вектора скорости  $v$ , на оси неизменного направления равны производным по времени от проекций вектора-радиуса на те же оси. Точно так же проекции ускорения  $w$  на неподвижные оси равны производным от проекции скорости на те же оси. Вообще, если вектор-функция  $A(u)$  задана своим разложением по единичным векторам неподвижных осей:

$$A(u) = A_x(u)\mathbf{i} + A_y(u)\mathbf{j} + A_z(u)\mathbf{k},$$

то

$$\frac{dA}{du} = \frac{dA_x}{du}\mathbf{i} + \frac{dA_y}{du}\mathbf{j} + \frac{dA_z}{du}\mathbf{k}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{dA}{du}\right)_x = \frac{dA_x}{du}, \quad \left(\frac{dA}{du}\right)_y = \frac{dA_y}{du}, \quad \left(\frac{dA}{du}\right)_z = \frac{dA_z}{du}.$$

*Проекция производной вектора на оси постоянного направления равны производным от проекций дифференцируемого вектора на те же оси\*.*

Замечая, что величина вектора  $A$  выражается через его проекции по формуле

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2},$$

\* При проецировании на *переменное* направление эта теорема не имеет места: проекция производной вектора на переменное направление не равна производной от проекции дифференцируемого вектора на это направление (см. § 68).



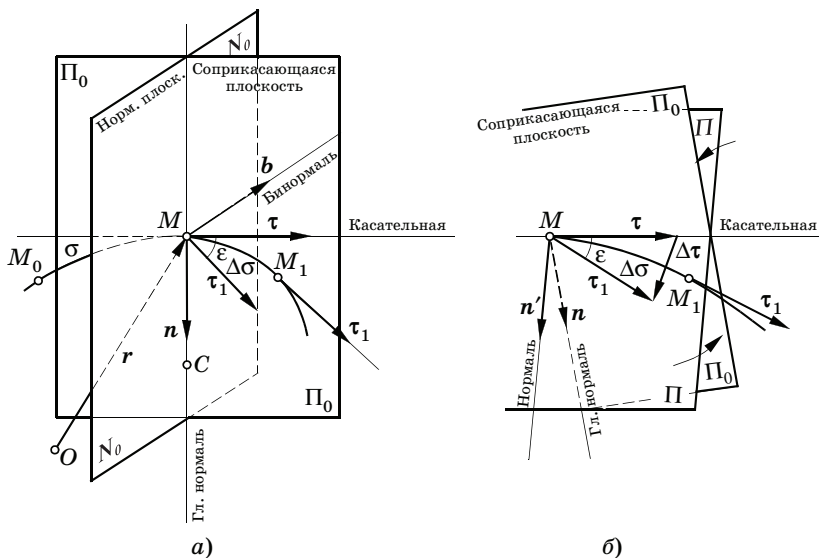


Рис. 114

а величина производной равна

$$\left| \frac{dA}{du} \right| = \sqrt{\left( \frac{dA_x}{du} \right)^2 + \left( \frac{dA_y}{du} \right)^2 + \left( \frac{dA_z}{du} \right)^2},$$

сразу видим, что величина производной не равна  $dA/du$ , так как, дифференцируя выражение  $A$ , получили бы

$$\frac{dA}{du} = \frac{A_x \frac{dA_x}{du} + A_y \frac{dA_y}{du} + A_z \frac{dA_z}{du}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}.$$

Понятия вектора-функции и ее производной облегчают рассмотрение основных геометрических свойств траектории, необходимых для дальнейшего развития представления об ускорении.

Рассмотрим некоторую кривую, не лежащую, вообще говоря, в одной плоскости (кривую двойкой кривизны). Установим на этой кривой начало  $M_0$  и положительное направление отсчета дуг  $\sigma$  (рис. 114, а). Возьмем какую-нибудь текущую точку  $M$ , положение которой определим либо дугой  $\sigma$ , либо вектором-радиусом  $r$  относительно некоторой неподвижной точки  $O$ . Через точку  $M$  проведем касательную к кривой; направление касательной в

сторону возрастающих значений  $\sigma$  зададим единичным вектором касательной  $\tau$ .

Возьмем на кривой весьма близкую к  $M$  точку  $M_1$ ; пусть положение ее определяется значением дуги  $\sigma + \Delta\sigma$ , причем  $\Delta\sigma > 0$ , т. е.  $M_1$  лежит за  $M$  в сторону положительного отсчета дуги. Единичный вектор касательной в точке  $M_1$  обозначим через  $\tau_1$ . Проведем через  $\tau$  плоскость  $\Pi$  (рис. 114, б), параллельную  $\tau_1$ ; чтобы построить ее, достаточно перенести  $\tau_1$  в точку  $M$ ; два вектора  $\tau$  и  $\tau_1$ , имеющие начало в точке  $M$ , определяют положение  $\Pi$ . При изменении положения  $M_1$  плоскость  $\Pi$ , очевидно, также меняет свое положение, вращаясь вокруг  $\tau$ ; если будем приближать  $M_1$  к  $M$ , уменьшая  $\Delta\sigma$  до нуля, то эта плоскость будет приближаться к некоторому предельному положению  $\Pi_0$ , называемому *соприкасающейся плоскостью* (рис. 114, б).

В точке  $M$  проведем плоскость  $N_0$ , перпендикулярную касательной (рис. 114, а). Эта плоскость называется *нормальной плоскостью* кривой. Любая прямая, проведенная в этой плоскости через точку  $M$ , будет перпендикулярна  $\tau$ , т. е. будет *нормальна* кривой; линия пересечения нормальной и соприкасающейся плоскостей определяет *главную нормаль* кривой. Иными словами, главной нормалью называется нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости. Нормаль, перпендикулярная главной нормали, называется *бинормалью* кривой.

Если, в частности, кривая — плоская, то соприкасающейся плоскостью будет плоскость, в которой расположена кривая, а главной нормалью — нормаль кривой, лежащая в этой плоскости.

Совокупность трех взаимно-перпендикулярных осей:

- ✓ касательной, направленной в сторону возрастания дуги,
- ✓ главной нормали, направленной в сторону вогнутости кривой,
- ✓ бинормали, направленной по отношению к касательной и главной нормали так же, как ось  $Oz$  расположена по отношению к осям  $Ox$  и  $Oy$ , —

образует так называемый *натуральный триэдр* (естественный трехгранник) кривой.

Единичные векторы этих осей обозначим соответственно через  $\tau$ ,  $n$  и  $b$ . Найдем выражения этих трех единичных векторов натурального триэдра через вектор-радиус точки на кривой, заданный как вектор-функция дуги:

$$r = r(\sigma). \quad (11.52)$$

Найдем прежде всего  $\tau$ . По определению векторной производной вектор  $d\mathbf{r}/d\sigma$  направлен по касательной к годографу вектора  $\mathbf{r}$  в сторону возрастающих  $\sigma$ . С другой стороны, численная величина производной равна

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} \right| = \frac{|d\mathbf{r}|}{d\sigma} = 1.$$

Таким образом, векторная производная представляет собой искомый единичный вектор касательной:

$$\tau = \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}. \quad (11.53)$$

Для определения единичного вектора главной нормали  $\mathbf{n}$  обратимся к рис. 114, б. Рассмотрим равнобедренный треугольник, образованный векторами  $\tau$  и  $\tau_1$  в плоскости  $\Pi$ . Если точка  $M_1$  взята на весьма малом расстоянии  $\Delta\sigma$  от точки  $M$ , то угол  $\varepsilon$  между касательными  $\tau$  и  $\tau_1$  в смежных точках кривой — его называют *углом смежности* — будет также мал и вектор  $\Delta\tau$  с тем меньшей ошибкой, чем меньше  $\Delta\sigma$ , можно считать перпендикулярным  $\tau$  и, следовательно, параллельным вектору нормали  $\mathbf{n}'$ , лежащему с  $\Delta\tau$  в одной и той же плоскости  $\Pi$ . По величине  $|\Delta\tau|$ , как основание равнобедренного треугольника с малым углом  $\varepsilon$  при вершине и боковыми сторонами, равными единице, будет равен

$$|\Delta\tau| = 2|\tau|\sin \frac{\varepsilon}{2} \approx 2 \cdot 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда найдем (с точностью до малых высших порядков)

$$\Delta\tau = \varepsilon\mathbf{n}',$$

или

$$\mathbf{n}' = \frac{1}{\varepsilon} \Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{\Delta\sigma} \cdot \frac{\Delta\sigma}{\varepsilon}.$$

Будем приближать  $\Delta\sigma$  к нулю, тогда точка  $M_1$  будет стремиться к  $M$ , плоскость  $\Pi$ , как уже упоминалось, — к соприкасающейся плоскости  $\Pi_0$ , единичный вектор нормали  $\mathbf{n}'$  — к искомому единичному вектору  $\mathbf{n}$ , и мы будем иметь

$$\mathbf{n} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\tau}{\varepsilon} \cdot \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\varepsilon}. \quad (11.54)$$

Первый предел равен векторной производной

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} \right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{d\sigma^2}; \quad (11.55)$$

что же касается второго предела, то заметим, что отношение  $\varepsilon/\Delta\sigma$ , определяющее среднюю скорость поворота касательной к кривой при переходе от данной точки к смежной, характеризует *среднюю кривизну* кривой на участке  $(\sigma, \sigma + \Delta\sigma)$ , а величина

$$\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\Delta\sigma} = K \quad (11.56)$$

определяет *кривизну* кривой в данной точке.

Таким образом, имеем следующее выражение единичного вектора *главной нормали*:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{K} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma} = \frac{1}{K} \frac{d^2\mathbf{r}}{d\sigma^2}. \quad (11.57)$$

Величину  $1/K = \rho$ , имеющую размерность длины, называют *радиусом кривизны* кривой в данной точке. Происхождение этого понятия станет ясным, если рассмотреть кривизну окружности; в этом случае угол смежности  $\varepsilon$  равен центральному углу между радиусами, проведенными в точки касания, а соответствующая дуга равна произведению этого угла на радиус, так что отношение  $\varepsilon/\Delta\sigma$ , характеризующее кривизну окружности, равно единице, деленной на радиус окружности, а обратная кривизне величина есть радиус окружности.

В случае произвольной кривой через данную ее точку и две смежные с нею точки можно провести круг, который при стремлении смежных точек к данной рассматриваемой будет стремиться к некоторому предельному кругу, называемому *соприкасающимся кругом* или *кругом кривизны*. Радиус этого круга будет радиусом кривизны кривой, центр круга  $C$  (рис. 114, а) — *центром кривизны* кривой. Очевидно, круг кривизны лежит в соприкасающейся плоскости, центр кривизны  $C$  — на главной нормали со стороны вогнутости кривой.

Введя радиус кривизны  $\rho$ , получим

$$\mathbf{n} = \rho \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma} = \rho \frac{d^2\mathbf{r}}{d\sigma^2}. \quad (11.58)$$

Теперь уже не составляет труда найти и единичный вектор бинормали. Из условия выбора положительного направления на бинормали следует:

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n} = \frac{1}{K} \left( \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{d\sigma^2} \right) = \rho \left( \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{d\sigma^2} \right). \quad (11.59)$$

### § 46. Разложение ускорения по осям натурального триэдра траектории

Применяя полученные выражения единичных векторов осей натурального триэдра траектории, найдем составляющие вектора ускорения по этим осям.

Обозначим через  $v_\tau$  проекцию вектора скорости на направление касательной к траектории. Очевидно, что  $v_\tau$  по абсолютной величине равна численной величине скорости  $v$ ; что же касается знака  $v_\tau$ , то  $v_\tau$  положительна, если направление движения в данный момент совпадает с направлением положительного отсчета дуг  $\sigma$  по траектории, и отрицательна в противоположном случае. Будем иметь

$$\mathbf{v} = v_\tau \boldsymbol{\tau}. \quad (11.60)$$

Заметим, что

$$v_\tau = \frac{d\sigma}{dt} = \pm \frac{ds}{dt} = \pm v, \quad (11.61)$$

так как  $d\sigma = ds$ , когда  $d\sigma > 0$ , и  $d\sigma = -ds$ , если  $d\sigma < 0$ , где  $s$  — пройденный путь.

Вспомнив, что вектор ускорения есть производная по времени от вектора скорости, получим по (11.60)

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_\tau \boldsymbol{\tau}) = \frac{dv_\tau}{dt} \boldsymbol{\tau} + v_\tau \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}. \quad (11.62)$$

Далее, имеем

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt};$$

согласно формулам (11.57) и (11.61) найдем

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{1}{\rho} n v_\tau.$$

Подставив полученное выражение в равенство (11.62), будем иметь

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\tau} \frac{dv_\tau}{dt} + n \frac{v_\tau^2}{\rho}, \quad (11.63)$$

где  $v_\tau^2$  заменено на равное ему  $v^2$ . Равенство (11.63) представляет собой *разложение вектора ускорения по осям натурального триэдра*.

Обозначим коэффициенты при единичных векторах  $\tau$ ,  $n$  и  $b$  в разложении (11.63), т. е. проекции ускорения на оси натурального триэдра, соответственно через  $w_\tau$ ,  $w_n$  и  $w_b$ ; тогда будем иметь

$$w = w_\tau \tau + w_n n + w_b b, \quad (11.64)$$

причем из (11.63) следует, что

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d^2\sigma}{dt^2}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad w_b = 0. \quad (11.65)$$

Последнее равенство говорит о том, что вектор ускорения перпендикулярен бинормали, т. е. *ускорение лежит в соприкасающейся плоскости*.

Первое слагаемое в разложении (11.64),  $w_\tau \tau$ , дает *касательную* (тангенциальную) составляющую ускорения, второе,  $w_n n$ , — *нормальную* составляющую ускорения. Иногда для краткости их называют просто касательным и нормальным ускорениями.

В случае ускоренного движения знаки  $w_\tau$  и  $v_\tau$  одинаковы, в случае замедленного движения — противоположны, т. е. при ускоренном движении касательное ускорение направлено в ту же сторону, что и вектор скорости, а при замедленном движении имеет направление, противоположное скорости (рис. 115).

Нормальное ускорение всегда совпадает по направлению с главной нормалью, так как  $w_n = v^2/\rho$  — существенно положительная величина. Вспоминая ранее сказанное о направлении  $n$ , видим, что *нормальное ускорение направлено к центру кривизны траектории* (нормальное ускорение иногда еще называют поэтому *центростремительным*), т. е. по главной нормали к траектории в сторону ее вогнутости. Отсюда вытекает свойство ускорения: *вектор ускорения направлен в сторону вогнутости траектории*.

Вектор ускорения в криволинейном движении может быть представлен как геометрическая сумма двух ускорений: касательного и нормального.

Величина ускорения может быть представлена так:

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}, \quad (11.66)$$

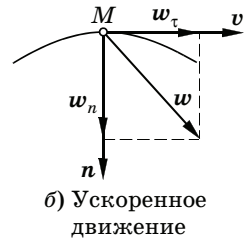
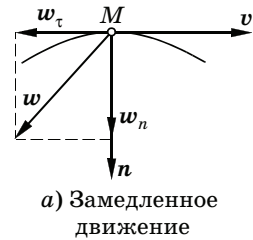


Рис. 115

а направление задано косинусами углов, составляемых им с касательной и главной нормалью к траектории:

$$\cos(\widehat{\mathbf{w}, \boldsymbol{\tau}}) = \frac{w_{\tau}}{w}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{w}, \mathbf{n}}) = \frac{w_n}{w}. \quad (11.67)$$

Отметим два частных случая.

■ Случай *равномерного* движения; величина скорости постоянна, так что

$$w_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt} = 0, \quad \mathbf{w} = \mathbf{n} \frac{v^2}{\rho}.$$

Величина ускорения  $w$  равна в этом случае  $w_n$ :

$$w = w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

■ Случай *прямолинейного* движения; кривизна прямой линии равна нулю, и, следовательно,

$$w_n = 0, \quad \mathbf{w} = \boldsymbol{\tau} \frac{dv_{\tau}}{dt}, \quad w_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt} = \ddot{\sigma}.$$

Из сопоставления этих двух случаев следует, что в *равномерном прямолинейном движении ускорение равно нулю*.

В общем случае движения касательное ускорение обращается в нуль в тех точках траектории, где скорость принимает максимальное или минимальное значение ( $\dot{v}_{\tau} = 0$ ). Нормальное ускорение равно нулю в точках перегиба траектории ( $1/\rho = 0$ ), а также в тех точках траектории, где меняется направление движения, т. е. скорость обращается в нуль.

Отметим, что не следует смешивать  $|dv/dt|$  и  $|d\mathbf{v}/dt|$ , так как первое выражение определяет величину полного ускорения, а второе — абсолютное значение лишь одной его касательной составляющей. На различие этих величин указывалось уже выше — см. (11.46).

Разложение ускорения на касательную и нормальную части имеет простое кинематическое значение. Вектор ускорения, определяющий быстроту изменения вектора скорости по величине и направлению, представляется суммой касательного ускорения, характеризующего изменение *величины* скорости, и нормального, характеризующего изменение ее по *направлению*.

В прямолинейном движении направление скорости не изменяется и нормальное ускорение отсутствует; в движении равномерном не изменяется величина скорости и отсутствует касательное ускорение.

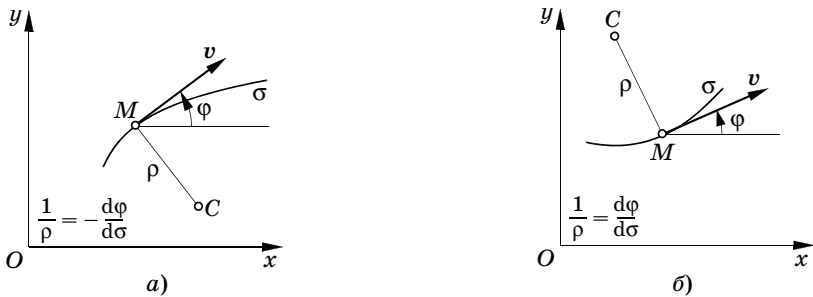


Рис. 116

При движении точки по плоской траектории можно дать формулу, выражающую непосредственную связь нормального ускорения со скоростью изменения направления касательной к траектории. Для этого введем в рассмотрение угол  $\varphi$  (рис. 116) касательной с неизменным направлением, например с осью  $Ox$ . Тогда в обоих показанных на рисунке случаях будем иметь

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\varphi}{d\sigma} \right| = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v} |\dot{\varphi}|$$

и выражение нормального ускорения  $w_n$  можно записать в виде

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = v |\dot{\varphi}|. \tag{11.68}$$

Если движение точки задано уравнениями в декартовых координатах, то для вычисления проекций ускорения на касательную и главную нормаль к траектории нет необходимости в вычислении кривизны траектории. Замечая, что единичный вектор касательной может быть представлен формулой  $\tau = v/v_\tau$ , напишем:

$$w_\tau = \mathbf{w} \cdot \tau = \mathbf{w} \cdot \frac{v}{v_\tau} = \frac{1}{v_\tau} (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}),$$

$$\begin{aligned} w_n &= |\mathbf{w} \times \tau| = \frac{1}{v} |\mathbf{w} \times \mathbf{v}| = \\ &= \frac{1}{v} \sqrt{(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})^2 + (\dot{y}\ddot{z} - \ddot{y}\dot{z})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \ddot{z}\dot{x})^2}, \end{aligned} \tag{11.69}$$

$$v = \pm v_\tau = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Значения этих выражений непосредственно определяются дифференцированием по времени уравнений движения (11.5).



**Пример 30.** Вагон движется по закруглению  $ABCD$  (рис. 117,  $a$ ) с постоянной по величине скоростью  $v$ . Определим ускорение вагона, если участки  $AB$  и  $CD$  прямолинейны, а участок  $BC$  представляет собой дугу окружности радиусом  $\rho$  с центральным углом  $\alpha$ .

Касательное ускорение  $w_\tau$  повсюду равно нулю, так как скорость по величине постоянна; следовательно, ускорение сводится к нормальному, равному

$$w = w_n = \begin{cases} 0 & \text{на отрезке } AB, \\ v^2/\rho & \text{на отрезке } BC, \\ 0 & \text{на отрезке } CD. \end{cases}$$

График ускорения получается разрывным (рис. 117,  $b$ ).

Если скорость материальной точки имеет в некоторый момент времени разрыв, т. е. ее величина или направление резко изменяется, то говорят, что материальная точка испытывает *жесткий* удар; если скорость изменяется непрерывно, а ускорение претерпевает разрыв, то такое явление называют *мягким* ударом. Таким образом, при входе и выходе вагона с окружности имеет место мягкий удар. Во избежание мягкого удара совершают переход от  $AB$  и  $CD$  к дуге  $BC$  не сразу, а постепенно, по какой-нибудь кривой, радиус кривизны которой изменяется непрерывно от бесконечности до требуемой величины  $\rho$ . При этом график приобретает вид, показанный на рис. 117,  $в$ .

**Пример 31.** Определить радиус кривизны винтовой линии по заданному ее шагу  $h$  и радиусу кругового цилиндра  $a$ , на который она навита.

Предположим, что рассматриваемая винтовая линия является траекторией в равномерном движении точки. Тогда, как уже известно (§ 44, пример 29),

$$v^2 = a^2\omega^2 + c^2, \quad w = a\omega^2.$$

Поскольку движение принято равномерным,  $w_\tau = 0$  и  $w = w_n = \frac{v^2}{\rho}$ ; следовательно,

$$a\omega^2 = \frac{a^2\omega^2 + c^2}{\rho}.$$

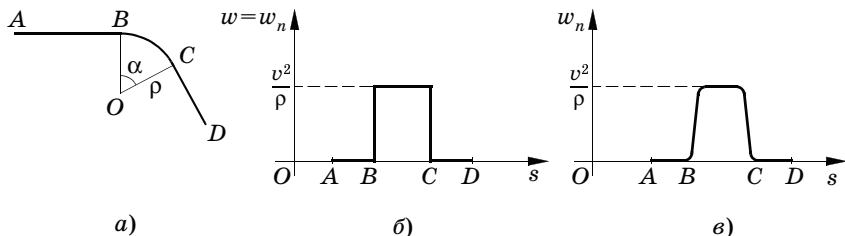


Рис. 117

Отсюда находим

$$\rho = a + \frac{1}{a} \left( \frac{c}{\omega} \right)^2.$$

Вспомяная, что шаг винтовой линии  $h$  равен  $2\pi(c/\omega)^2$ , получим окончательно

$$\rho = a \left( 1 + \frac{h^2}{4\pi^2 a^2} \right).$$

**Пример 32.** Колесо радиусом  $a$  (рис. 118) катится без скольжения по неподвижному прямому рельсу. Определить радиус кривизны траектории (циклоиды), описываемой какой-нибудь точкой обода колеса.

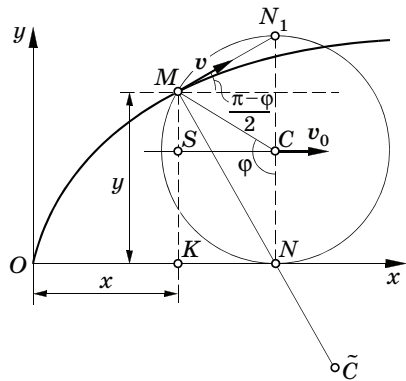


Рис. 118

Рассмотрим движение точки  $M$ . Отложим от точки касания  $N$  в сторону, противоположную движению колеса, отрезок  $NO = \widetilde{NM}$  и примем точку  $O$  за начало координат. Угол  $MCN$  обозначим через  $\varphi$ .

Из рис. 118 имеем

$$x = OK = ON - CS = \widetilde{NM} - CS = a(\varphi - \sin \varphi),$$

$$y = MK = MS + SK = a(1 - \cos \varphi).$$

Так как траектория не зависит от скорости движения, то можно принять скорость центра колеса постоянной и равной  $v_0$ . Пройденный им путь будет  $s = v_0 t$ ; если движение происходит без скольжения, то  $s = ON = a\varphi$  и  $a\varphi = v_0 t$ . Обозначая еще  $v_0/a = k$ , получим

$$\varphi = kt, \quad x = a(kt - \sin kt), \quad y = a(1 - \cos kt).$$

Найдем проекции скорости точки  $M$ :

$$v_x = ak(1 - \cos kt), \quad v_y = aks \sin kt$$

и величину скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = ak \sqrt{2(1 - \cos kt)} = 2ak \left| \sin \frac{kt}{2} \right|.$$

Таким образом,

$$v = \begin{cases} 2ak \sin \frac{kt}{2} & \text{при } 0 \leq kt \leq 2\pi, \quad 4\pi \leq kt \leq 6\pi \quad \text{и т. д.}, \\ -2ak \sin \frac{kt}{2} & \text{при } 2\pi \leq kt \leq 4\pi, \quad 6\pi \leq kt \leq 8\pi \quad \text{и т. д.} \end{cases}$$

Проекция ускорения и величина ускорения будут равны

$$w_x = \dot{v}_x = ak^2 \sin kt, \quad w_y = ak^2 \cos kt, \quad w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = ak^2.$$

Находим (в данном случае  $v_\tau = v$ )

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \begin{cases} ak^2 \cos \frac{kt}{2} & \text{при } 0 < kt < 2\pi, \quad 4\pi < kt < 6\pi \quad \text{и т. д.}, \\ -ak^2 \cos \frac{kt}{2} & \text{при } 2\pi < kt < 4\pi, \quad 6\pi < kt < 8\pi \quad \text{и т. д.}, \end{cases}$$

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = ak^2 \left| \sin \frac{kt}{2} \right|.$$

Разрыв в выражении для  $w_\tau$  при  $kt = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$  объясняется наличием точек возврата траектории на оси  $Ox$ .

Радиус кривизны равен

$$\rho = \frac{v^2}{\omega_n} = 4a \left| \sin \frac{kt}{2} \right|.$$

Отсюда получается простое правило для построения центра кривизны  $\tilde{C}$  циклоиды: соединив рассматриваемую точку  $M$  с точкой соприкосновения  $N$  катящегося круга с рельсом, продолжаем отрезок  $MN$  на расстояние  $N\tilde{C} = MN$ . Точка  $\tilde{C}$  будет центром кривизны; в самом деле,

$$MN = 2a \left| \sin \frac{kt}{2} \right|, \quad M\tilde{C} = 2MN = \rho.$$

**Пример 33.** Движение точки  $M$  в пространстве задано в функции от времени величиной скорости точки  $v$  и углами  $\varphi$  и  $\psi$  (рис. 119). Найдем уравнения движения точки в декартовой системе координат, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Имеем

$$v_x = \dot{x} = v \cos \psi \cos \varphi,$$

$$v_y = \dot{y} = v \cos \psi \sin \varphi,$$

$$v_z = \dot{z} = v \sin \psi.$$

Интегрируя, придем к соотношениям

$$x = x_0 + \int_0^t v \cos \psi \cos \varphi dt,$$

$$y = y_0 + \int_0^t v \cos \psi \sin \varphi dt,$$

$$z = z_0 + \int_0^t v \sin \psi dt.$$

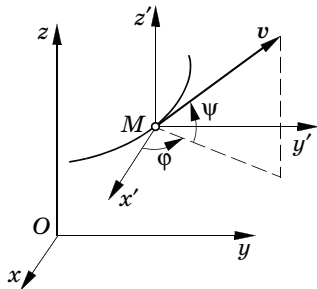


Рис. 119

Взяв производную по времени от проекций скорости, получим

$$\ddot{x} = \dot{v} \cos \psi \cos \varphi - v \dot{\psi} \sin \psi \cos \varphi - v \dot{\varphi} \cos \psi \sin \varphi,$$

$$\ddot{y} = \dot{v} \cos \psi \sin \varphi - v \dot{\psi} \sin \psi \sin \varphi + v \dot{\varphi} \cos \psi \cos \varphi,$$

$$\ddot{z} = \dot{v} \sin \psi + v \dot{\psi} \cos \psi.$$

Составляем выражения

$$\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = v^2 \dot{\phi} \cos^2 \psi,$$

$$\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y} = v^2 \dot{\psi} \sin \phi - v^2 \dot{\phi} \sin \psi \cos \psi \cos \phi,$$

$$\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z} = -v^2 \dot{\psi} \cos \phi - v^2 \dot{\phi} \cos \psi \sin \psi \sin \phi.$$

Возводим их в квадрат и складываем, тогда по второй из формул (11.69) получим

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{1}{v} \sqrt{(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2 + (\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2} = \\ &= \frac{1}{v} \sqrt{v^4(\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \psi)} = v \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \psi}. \end{aligned}$$

Вспоминая, что  $w_n = v^2/\rho$ , найдем

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{v}{\sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \psi}}.$$

Касательное ускорение равно

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

В частном случае движения точки в плоскости  $xOy$  вновь получаем  $\psi = \dot{\psi} = 0$ ,  $\cos \psi = 1$  и выражение нормального ускорения приобретает вид (11.68):

$$w_n = v|\dot{\phi}|.$$

## Глава XII

### Кинематика точки в криволинейных координатах

#### § 47. Криволинейные координаты точки

Все три числа, однозначно определяющие положение точки в пространстве трех измерений, могут рассматриваться как координаты этой точки. Установив закон выбора этих чисел для любой точки, мы тем самым выберем определенную систему координат, которую, в отличие от прямолинейной декартовой системы, условимся называть *криволинейной*.

Обозначим через  $q_1, q_2, q_3$  криволинейные координаты точки  $M$ , имеющей вектор-радиус  $\mathbf{r}$  по отношению к точке  $O$ , выбранной произвольно за начало. Тогда в силу однозначного соответствия между определением положения точки  $M$  при помощи вектора-радиуса  $\mathbf{r}$  и определением ее положения при помощи совокупности чисел  $(q_1, q_2, q_3)$  можно написать

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3), \quad (12.1)$$

т. е. утверждать, что вектор-радиус точки  $M$  есть вектор-функция трех криволинейных координат этой точки.

Кривую, которую вычертит точка  $M$ , если изменять одну только координату  $q_i$ , а двум другим дать некоторые фиксированные значения, будем называть *координатной линией* ( $q_i$ ), так что кривая

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_{20}, q_{30}),$$

где индекс «0» обозначает частное, фиксированное значение координат  $q_2 = q_{20}$  и  $q_3 = q_{30}$ , дает координатную линию ( $q_1$ ) и т. д.

Через каждую точку  $M_0(q_{10}, q_{20}, q_{30})$  можно провести три координатные линии:

$$\text{линия } (q_1): \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_{20}, q_{30}),$$

$$\text{линия } (q_2): \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q_{10}, q_2, q_{30}),$$

$$\text{линия } (q_3): \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q_{10}, q_{20}, q_3).$$

Касательные к координатным линиям в данной точке  $M_0$ , направленные в сторону возрастания соответствующих координат, будем называть *координатными осями*  $[q_1], [q_2], [q_3]$  в данной точке.

Направление этих осей зададим *единичными векторами*  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ .

Если изменять сразу две координаты, а оставшуюся одну фиксировать, то получим поверхности, заданные следующими уравнениями:

$$\text{поверхность } (q_1 q_2): \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_{30}),$$

$$\text{поверхность } (q_2 q_3): \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q_{10}, q_2, q_3),$$

$$\text{поверхность } (q_3 q_1): \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_{20}, q_3).$$

Эти поверхности будем называть *координатными поверхностями*, а касательные плоскости к ним в точке  $M_0$  — *координатными плоскостями*.

Из определения ясно, что координатные линии  $(q_1)$  и  $(q_2)$  лежат на координатной поверхности  $(q_1q_2)$ , линии  $(q_2)$  и  $(q_3)$  — на поверхности  $(q_2q_3)$  и линии  $(q_3)$  и  $(q_1)$  — на поверхности  $(q_3q_1)$ . Точно так же координатные оси лежат в соответствующих координатных плоскостях.

Рассмотрим для иллюстрации введенных понятий несколько частных систем криволинейных координат.

■ **Декартова прямоугольная система  $(x_1, x_2, x_3)$ .** В этом случае (рис. 120) координатные линии и оси совпадают. Это — прямые, параллельные осям координат, проведенным через точку  $O$ , и одинаково с ними направленные. Точно так же и координатные поверхности совпадают с координатными плоскостями, параллельными координатным плоскостям, проходящим через начало  $O$ .

■ **Цилиндрическая система координат  $(\rho, \varphi, z)$ .** Изменяя одну лишь координату  $\rho$ , получим (рис. 121) прямую, пересекающую ось  $Oz$  под прямым углом; это одновременно и координатная линия  $(\rho)$ , и координатная ось  $[\rho]$ . Изменяя  $\varphi$ , получим окружность радиусом  $\rho$ , лежащую в плоскости, перпендикулярной оси  $Oz$  и находящейся на расстоянии  $z$  от плоскости  $Oxy$ . Эта окружность является координатной линией  $(\varphi)$ , касательная к ней в сторону возрастания угла  $\varphi$  — координатной осью  $[\varphi]$ ; наконец, прямая, параллельная оси  $Oz$ , будет одновременно координатной линией  $(z)$  и координатной осью  $[z]$ .

Координатными поверхностями будут следующие поверхности: поверхность  $(\rho\varphi)$ , соответствующая заданному значению  $z$ , — плоскость, перпендикулярная оси  $Oz$ ; поверхность  $(\varphi z)$ , соответствующая заданному значению  $\rho$ , — цилиндрическая поверхность радиусом  $\rho$  с осью  $Oz$  и, наконец, поверхность  $(z\rho)$  —

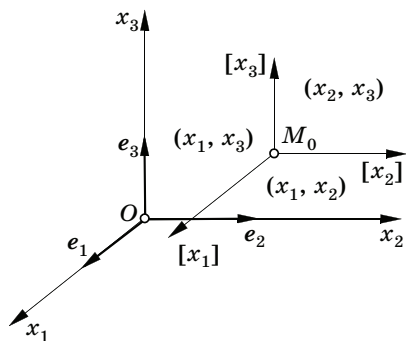


Рис. 120

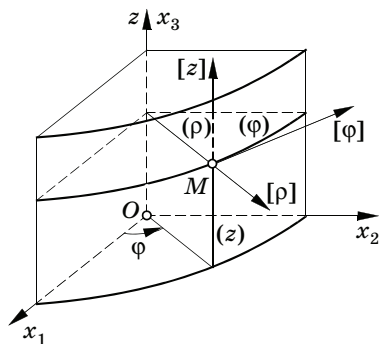


Рис. 121

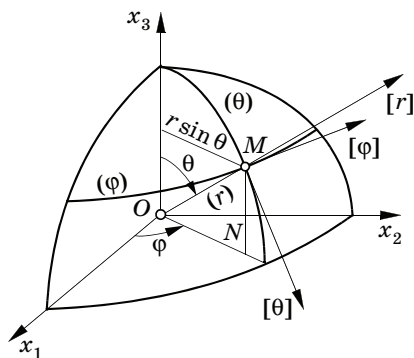


Рис. 122

плоскость, проходящая через ось  $Oz$  и взятую точку  $M$  и соответствующая заданному значению  $\varphi$ .

■ **Сферическая система координат**  $(r, \theta, \varphi)$  (рис. 122). Линией  $(r)$  и осью  $[r]$  будет служить прямая, выходящая из начала координат и проходящая через взятую точку; линией  $(\theta)$  — окружность большого круга, осью  $[\theta]$  — касательная к этой

окружности в сторону возрастания угла  $\theta$  и, наконец, линией  $(\varphi)$  будет окружность параллельного круга радиусом  $r \sin \theta$ , осью  $[\varphi]$  — касательная к ней в сторону возрастания угла  $\varphi$ .

Координатными поверхностями будут: сфера  $(r = \text{const})$ , коническая поверхность  $(\theta = \text{const})$  с осью  $Oz$  в качестве оси симметрии и с углом раствора  $2\theta$  и плоскость  $(\varphi = \text{const})$ , проходящая через ось  $Oz$  и взятую точку  $M$ . Координатные плоскости найдем как касательные плоскости к этим координатным поверхностям.

Для определения единичных векторов координатных осей вспомним, что координатная ось  $[q_i]$  направлена по касательной к координатной линии  $(q_i)$ , соответствующей возрастанию координаты  $q_i$ . На основании известного свойства векторной производной можно утверждать, что единичный вектор  $\mathbf{k}_i$  имеет направление вектора  $\partial \mathbf{r} / \partial q_i$ . Если эту производную разделить на ее численную величину

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x_1}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial q_i} \right)^2} = H_i, \quad (12.2)$$

где  $H_i$  — так называемые *коэффициенты Ляме*, то получим

$$\mathbf{k}_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (12.3)$$

ЛЯМЁ, ЛАМЕ ГАБРИЭЛЬ (*Lamé Gabriel, 1795—1870*) — французский механик и инженер; с 1820 по 1831 г. преподавал в Институте инженеров путей сообщения в Санкт-Петербурге. Чл.-корр. Петербургской АН (1824), чл. Парижской АН (1843).

Пользуясь формулой (12.3), легко найти косинусы углов криволинейных координатных осей с осями декартовых координат. В самом деле, например (по  $i$  не суммировать!),

$$\cos(\widehat{\mathbf{k}_i, \mathbf{x}_1}) = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{H_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_i}$$

и, вообще (по  $i$  не суммировать!),

$$\cos(\widehat{\mathbf{k}_i, \mathbf{x}_j}) = \frac{1}{H_i} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}.$$

Таким образом, получим таблицу косинусов углов между осями криволинейных и декартовых координат:

	$[q_1]$	$[q_2]$	$[q_3]$	
$[x_1]$	$\frac{1}{H_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_1}$	$\frac{1}{H_2} \frac{\partial x_1}{\partial q_2}$	$\frac{1}{H_3} \frac{\partial x_1}{\partial q_3}$	
$[x_2]$	$\frac{1}{H_1} \frac{\partial x_2}{\partial q_1}$	$\frac{1}{H_2} \frac{\partial x_2}{\partial q_2}$	$\frac{1}{H_3} \frac{\partial x_2}{\partial q_3}$	(12.4)
$[x_3]$	$\frac{1}{H_1} \frac{\partial x_3}{\partial q_1}$	$\frac{1}{H_2} \frac{\partial x_3}{\partial q_2}$	$\frac{1}{H_3} \frac{\partial x_3}{\partial q_3}$	

Если в любой точке пространства координатные оси взаимно перпендикулярны, то система криволинейных координат называется *ортогональной*.

Условие ортогональности имеет вид

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_j = 0, \quad i \neq j,$$

или по (12.3)

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_i} \frac{\partial x_1}{\partial q_j} + \frac{\partial x_2}{\partial q_i} \frac{\partial x_2}{\partial q_j} + \frac{\partial x_3}{\partial q_i} \frac{\partial x_3}{\partial q_j} = 0. \quad (12.5)$$

В дальнейшем будем рассматривать лишь ортогональные системы; в ортогональной системе координат единичные векторы  $\mathbf{k}_i$  определяют не только направление координатной оси  $[q_i]$ , но вместе с тем и координатную плоскость, перпендикулярную этой оси.

Легко вывести формулу *дифференциала дуги* произвольной кривой в заданной системе криволинейных координат. Для этого



возьмем общее выражение произвольного бесконечно малого перемещения

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3$$

и определим квадрат дифференциала дуги как квадрат величины этого перемещения:

$$ds^2 = |d\mathbf{r}|^2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3 \right|^2.$$

Производя скалярное перемножение, по (12.2) и (12.5) получим выражение дифференциала дуги в ортогональной криволинейной системе:

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2. \quad (12.6)$$

Из этой формулы вытекает простой прием определения коэффициентов Ляме: полагая поочередно, что изменяется лишь одна координата, а две другие фиксированы, находим дифференциалы дуг координатных линий:

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2, \quad ds_3 = H_3 dq_3. \quad (12.7)$$

Отсюда следует, что коэффициенты Ляме представляют собой множители при дифференциалах координат в выражениях дифференциалов дуг соответствующих координатных линий.

Определим этим путем коэффициенты Ляме в цилиндрической и сферической системах координат:

✓ в *цилиндрической* системе

$$ds_1 = dr, \quad ds_2 = r d\varphi, \quad ds_3 = dz,$$

следовательно,

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r, \quad H_z = 1; \quad (12.8)$$

✓ в частности, в *полярной* системе координат  $(\rho, \varphi)$  на плоскости имеют место первые две из этих формул;

✓ в *сферической* системе

$$ds_1 = dr, \quad ds_2 = r d\theta, \quad ds_3 = r \sin \theta d\varphi,$$

следовательно,

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r \sin \theta. \quad (12.9)$$

### § 48. Проекция скорости и ускорения на оси криволинейных координат

Для разыскания проекций *скорости* точки на координатные оси проще всего поступить следующим образом: напомним производную вектора-радиуса  $\mathbf{r}$  точки по времени, т. е. вектор скорости, в виде

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3; \quad (12.10)$$

тогда по формулам (12.3) получим

$$\mathbf{v} = H_1 \dot{q}_1 \mathbf{k}_1 + H_2 \dot{q}_2 \mathbf{k}_2 + H_3 \dot{q}_3 \mathbf{k}_3. \quad (12.11)$$

Это равенство можно рассматривать как разложение вектора скорости по единичным векторам осей криволинейных координат; для проекций скорости на координатные оси будем иметь

$$v_{q_i} = H_i \dot{q}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (12.12)$$

Квадрат величины скорости равен

$$v^2 = H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2 \quad (12.13)$$

в полном соответствии с равенством (12.6) и формулой

$$v^2 = \left( \frac{ds}{dt} \right)^2.$$

Для определения проекций *ускорения* представим их в виде

$$w_{q_i} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{k}_i = \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{1}{H_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i},$$

откуда получим

$$H_i w_{q_i} = \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}. \quad (12.14)$$

Из равенства (12.10) непосредственно следует

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}. \quad (12.15)$$

Кроме того, по определению полной производной

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_2 \partial q_i} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_3 \partial q_i} \dot{q}_3;$$

но это же выражение получим, если возьмем от обеих частей (12.10) частную производную по  $q_i$ . Действительно, так как  $\dot{q}_1$ ,  $\dot{q}_2$ ,  $\dot{q}_3$  зависят только от времени, а не от  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ , то

$$\frac{\partial v}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 r}{\partial q_2 \partial q_i} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 r}{\partial q_3 \partial q_i} \dot{q}_3.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial r}{\partial q_i} = \frac{\partial v}{\partial q_i}. \quad (12.16)$$

Подставляя значения  $\frac{\partial r}{\partial q_i}$  по (12.15) и  $\frac{d}{dt} \frac{\partial r}{\partial q_i}$  по (12.16) в равенство (12.14), получим

$$H_i w_{q_i} = \frac{d}{dt} \left( v \cdot \frac{\partial v}{\partial \dot{q}_i} \right) - v \cdot \frac{\partial v}{\partial q_i}. \quad (12.17)$$

Замечая еще, что

$$v \cdot \frac{\partial v}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{v \cdot v}{2} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{v^2}{2},$$

$$v \cdot \frac{\partial v}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{v \cdot v}{2} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{v^2}{2},$$

на основании (12.17) окончательно получим выражение проекций ускорения на оси криволинейной системы координат:

$$w_{q_i} = \frac{1}{H_i} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right), \quad (12.18)$$

где для краткости введено обозначение

$$T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2). \quad (12.19)$$

Итак, для разыскания проекций ускорения на координатную ось  $[q_i]$  следует найти выражение квадрата скорости. Тогда по формуле (12.18) дифференцированием получим проекции ускорения на ось.

■ **Скорость и ускорение в цилиндрической системе координат.** В этой системе координат по формулам (12.8) и (12.12) мы будем иметь

$$\begin{aligned}v_\rho &= \dot{\rho}, \\v_\varphi &= \rho \dot{\varphi}, \\v_z &= \dot{z};\end{aligned}\tag{12.20}$$

затем по (12.19)

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2);\tag{12.21}$$

отсюда по (12.18) определим проекции ускорения:

$$\begin{aligned}w_\rho &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial T}{\partial \rho} = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \\w_\varphi &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}), \\w_z &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z} = \ddot{z}.\end{aligned}\tag{12.22}$$

Первые две формулы дают выражения для проекций ускорения на оси *полярной* системы координат.

■ **Скорость и ускорение в сферической системе координат.** В сферической системе координат получим

$$\begin{aligned}v_r &= \dot{r}, \\v_\theta &= r \dot{\theta}, \\v_\varphi &= r \dot{\varphi} \sin \theta.\end{aligned}\tag{12.23}$$

Составляем величину  $T$ :

$$T = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta);\tag{12.24}$$

проекция ускорения будут иметь вид

$$\begin{aligned}w_r &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta, \\w_\theta &= \frac{1}{r} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \right], \\w_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta).\end{aligned}\tag{12.25}$$

Применим формулы ускорений в полярных координатах к определению ускорения планеты, считая известными следующие три закона Кеплера.

I. Планеты обращаются вокруг Солнца по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

II. Площади, описываемые радиусами-векторами планеты, пропорциональны времени.

III. Квадраты времен обращения относятся как кубы средних расстояний планет до Солнца, или как кубы больших полуосей.

По первому закону Кеплера уравнение траектории планеты имеет вид

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad (12.26)$$

где  $p = \frac{b^2}{a}$  — параметр,  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  — эксцентриситет,  $a$  и  $b$  — большая и малая полуоси эллипса.

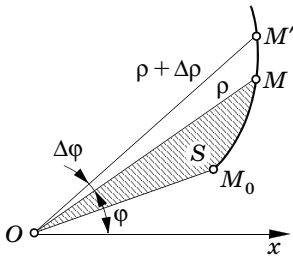


Рис. 123

Как легко видеть из рис. 123, приращение площади  $S$ , описываемой радиусом-вектором  $OM$ , можно определить по формуле

$$\Delta S = \frac{1}{2} \rho(\rho + \Delta\rho)\Delta\varphi \approx \frac{1}{2} \rho^2 \Delta\varphi.$$

Отсюда получим

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi}. \quad (12.27)$$

Эта величина, характеризующая быстроту изменения площади, описываемой радиусом-вектором точки, называется *секториальной скоростью*.

По второму закону Кеплера секториальная скорость постоянна:

$$\rho^2 \dot{\varphi} = C. \quad (12.28)$$

По третьему закону Кеплера

$$\frac{a^3}{\tau^2} = k, \quad (12.29)$$

где  $a$  — большая полуось,  $\tau$  — время обращения планеты вокруг Солнца и  $k$  — постоянная, одинаковая для всех планет.

Пользуясь этими соотношениями, определим проекции ускорения планеты на оси полярных координат.

Прежде всего по второму закону Кеплера (12.28) и по второй из формул (12.22) получим

$$w_\varphi = 0;$$

следовательно, остается найти лишь проекцию ускорения планеты  $w_\rho$ ; по первой из формул (12.22) и первому и второму законам Кеплера будем иметь

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{p e \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} \cdot \frac{C}{\rho^2} = \frac{C e \sin \varphi}{p},$$

и, следовательно,

$$\ddot{\rho} = \frac{C e \cos \varphi}{p} \dot{\varphi} = \frac{C^2 e \cos \varphi}{p \rho^2}.$$

Таким образом, находим

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 = -\frac{C^2}{p} \frac{1}{\rho^2}. \quad (12.30)$$

Если планета сделает полный оборот, то по определению секториальной скорости

$$\frac{1}{2} C \tau = \pi a b,$$

откуда

$$\frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{\tau^2 (b^2/a)} = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2},$$

а следовательно, по третьему закону Кеплера (12.29)

$$\frac{C^2}{p} = 4\pi^2 k.$$

Окончательно будем иметь по формуле (12.30)

$$w_\rho = -\frac{4\pi^2 k}{\rho^2}, \quad (12.31)$$

т. е. ускорение планет обратно пропорционально квадрату их расстояния от Солнца и направлено от планеты к Солнцу — закон, открытый впервые Ньютоном и положенный в основу знаменитого закона всемирного тяготения.

**Пример 34.** Найти годограф скорости точки, движущейся по коническому сечению с постоянной секториальной скоростью.

Уравнение конических сечений имеет вид (12.26), причем  $e < 1$  в случае эллипса,  $e = 1$  для параболы и  $e > 1$  для гиперболы. Напомним, что начало системы полярных координат при этом взято в фокусе конического сечения.

Учитывая условие (12.28) постоянства секториальной скорости, получим

$$v_\rho = \dot{\rho} = \frac{Ce}{p} \sin \varphi,$$

$$v_\varphi = \rho \dot{\varphi} = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \dot{\varphi} = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \frac{C}{p^2} = \frac{C}{p} (1 + e \cos \varphi).$$

Переходя к проекциям  $v_x, v_y$  в декартовой системе, получим

$$v_x = v_\rho \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi = -\frac{C}{p} \sin \varphi,$$

$$v_y = v_\rho \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi = \frac{Ce}{p} + \frac{C}{p} \cos \varphi.$$

Из последних двух уравнений следует уравнение годографа

$$v_x^2 + \left( v_y - \frac{Ce}{p} \right)^2 = \frac{C^2}{p^2}.$$

Это — окружность круга с центром на оси  $Ov_y$  в точке  $O'$  с ординатой  $Ce/p$  и радиусом  $a = C/p$ . Если  $e = 1$ , что соответствует параболе, окружность касается оси  $Ov_x$ ; если  $e < 1$  (эллипс), то  $a > Ce/p$  — окружность пересечет ось  $Ov_x$ ; если  $e > 1$  (гипербола), то  $a < Ce/p$  — окружность рас-

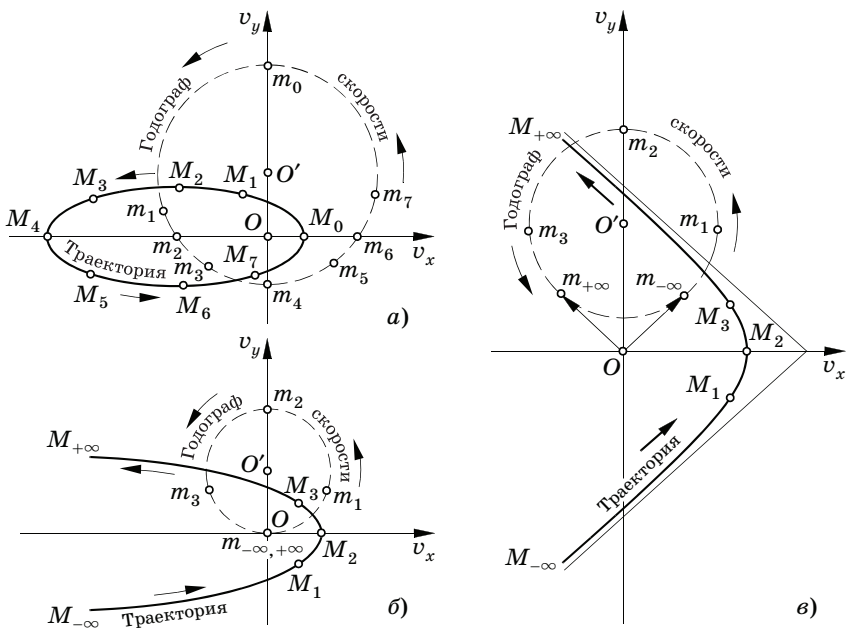


Рис. 124

положится выше оси  $Ov_x$ . На рис. 124, *a*, *б*, *в* показано расположение траекторий и годографов скорости. Отрезки  $Om_0$ ,  $Om_1$ ,  $Om_2$  и т. д., не показанные на рисунках, чтобы их не затемнять, соответственно определяют векторы скоростей в точках  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  и т. д.

**Пример 35. Движение точки на сфере под постоянным углом к меридиану.** Угол  $\alpha$  между направлением вектора скорости и меридианом места можно найти по формуле

$$\operatorname{ctg} \alpha = m = \frac{v_\theta}{v_\varphi} = \frac{r\dot{\theta}}{r(\sin\theta)\dot{\varphi}} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{d\theta}{d\varphi}.$$

Отсюда следует дифференциальное уравнение траектории в сферических координатах

$$\frac{d\theta}{\sin\theta} = m d\varphi.$$

Интегрируя, получим

$$\ln \operatorname{tg} (\theta/2) = m\varphi + \ln C,$$

или, освобождаясь от логарифмов,

$$\operatorname{tg} (\theta/2) = Ce^{m\varphi}.$$

Здесь  $C$  — постоянная, которая является положительной, так как  $\theta$  заключено в промежутке  $(0, \pi)$ .

Пусть  $m > 0$ , тогда при стремлении  $\varphi$  к бесконечности угол  $\theta$  будет стремиться к  $\pi$ ; иными словами, траекторией будет служить сферическая кривая, спиралью закручивающаяся вокруг Южного полюса (предполагаем, что ось  $Oz$  своей положительной стороной проходит через Северный полюс Земли). Если  $m < 0$ , то при  $\varphi$ , стремящемся к бесконечности, угол  $\theta$  будет стремиться к нулю, т. е. кривая будет завиваться вокруг Северного полюса.

В проекции Меркатора, при которой меридианы переходят в параллельные прямые, а параллели — в перпендикулярные им прямые, траекторией точки будет служить прямая, расположенная под углом  $\alpha = \arctg (1/m)$  к прямым, изображающим меридианы.

Полученная в настоящем примере спиральная траектория на сфере носит наименование *локсодромии*. По такой кривой двигался бы корабль на сферическом земном шаре, если бы курс корабля был неизменен по отношению к меридианам. В частном случае  $m = 0$ ,  $v_\theta = 0$  угол  $\theta$  будет постоянным, т. е. локсодромия вырождается в параллель. При  $m = \infty$ ,  $v_\varphi = 0$  угол  $\varphi$  будет постоянным, т. е. движение будет происходить по меридиану.



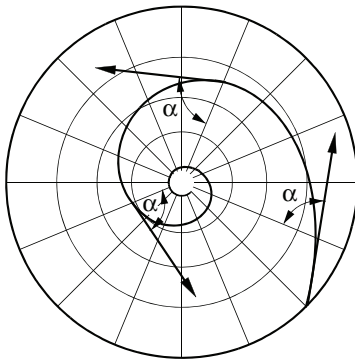


Рис. 125

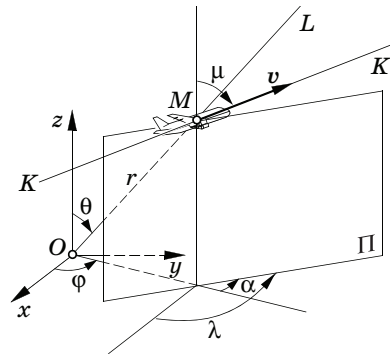


Рис. 126

На рис. 125 показан вид локсодромии в проекции на плоскость, перпендикулярную оси Земли.

**Пример 36.** Луч прожектора  $OL$  (рис. 126) следит за самолетом  $M$ , движущимся с постоянной скоростью  $v$  по прямой  $KK$ . Поставим перед собой задачу вычислить первые и вторые производные по времени от углов  $\varphi$  и  $\theta$ , задающих направление луча в пространстве; через эти производные выражаются угловая скорость и угловое ускорение следящего приспособления прожектора.

Через прямую  $KK$  проведем вертикальную плоскость  $\Pi$  и обозначим через  $\lambda$  двугранный угол плоскостей  $\Pi$  и  $zOx$ ; направление  $KK$  в плоскости  $\Pi$  определим углом  $\mu$ , образуемым этой линией с вертикалью  $Oz$ . Положение точки  $M$  определим ее сферическими координатами  $r, \theta, \varphi$ .

Составим по формулам (12.23) выражения проекций скорости точки на оси сферической системы координат:

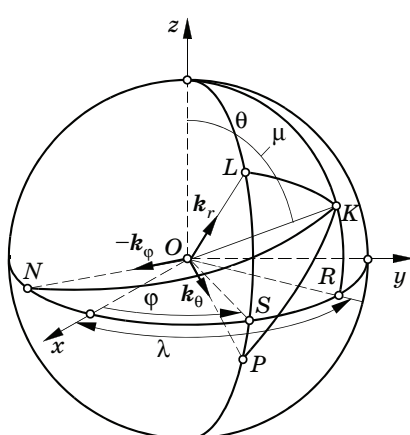


Рис. 127

$$v_r = \dot{r} = v \cos(\widehat{v, k_r}),$$

$$v_\theta = r \dot{\theta} = v \cos(\widehat{v, k_\theta}), \tag{12.32}$$

$$v_\varphi = r \dot{\varphi} \sin \theta = v \cos(\widehat{v, k_\varphi})$$

где  $k_r, k_\theta, k_\varphi$  — единичные векторы координатных осей сферической системы (рис. 127).

Для определения косинусов, входящих в выражения (12.32), воспользуемся основной формулой сферической тригонометрии (см. далее § 59). Замечая, что вектор  $v$  имеет направление  $OK$  и что сферические координаты

точки  $K$  суть  $\overset{\sim}{zK} = \mu$ ,  $\overset{\sim}{xR} = \lambda$ , из сферического треугольника  $KLz$  получим

$$\cos(\widehat{v, k_r}) = \cos \overset{\sim}{KL} = \cos \theta \cos \mu + \sin \theta \sin \mu \cos(\lambda - \varphi). \quad (12.33)$$

Аналогично из сферического треугольника  $KPz$  получим

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{v, k_\theta}) &= \cos \overset{\sim}{KP} = \cos(\pi/2 + \theta) \cos \mu + \sin(\pi/2 + \theta) \sin \mu \cos(\lambda - \varphi) = \\ &= -\sin \theta \cos \mu + \cos \theta \sin \mu \cos(\lambda - \varphi). \end{aligned} \quad (12.34)$$

На рис. 127 для ясности показан вектор  $(-k_\varphi)$ , имеющий направление, противоположное вектору  $k_\varphi$ . Поэтому из сферического треугольника  $KNP$  имеем

$$\begin{aligned} -\cos(\widehat{v, k_\varphi}) &= \cos \overset{\sim}{KN} = \cos \overset{\sim}{KR} \cos \overset{\sim}{NR} + \sin \overset{\sim}{KR} \sin \overset{\sim}{NR} \cos(\pi/2) = \\ &= \cos(\pi/2 - \mu) \cos(\pi/2 + \lambda - \varphi), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\cos(\widehat{v, k_\varphi}) = \sin \mu \sin(\lambda - \varphi). \quad (12.35)$$

После подстановки полученных значений косинусов в (12.32) будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v(\cos \theta \cos \mu + \sin \theta \sin \mu \cos \alpha), \\ \dot{\theta} &= \frac{v}{r}(-\sin \theta \cos \mu + \cos \theta \sin \mu \cos \alpha), \\ \dot{\varphi} &= \frac{v}{r \sin \theta} \sin \mu \sin \alpha, \end{aligned} \quad (12.36)$$

где

$$\alpha = \lambda - \varphi \quad (12.37)$$

представляет собой двугранный угол между вертикальными плоскостями  $\Pi$  и  $zOL$  (рис. 126).

Последние две формулы (12.36) решают первую часть задачи. Для определения вторых производных  $\ddot{\theta}$  и  $\ddot{\varphi}$  составим выражения проекций ускорения точки  $M$  на оси  $[\theta]$  и  $[\varphi]$  сферических координат и приравняем их нулю, так как точка  $M$  движется равномерно и прямолинейно. Будем иметь

$$\ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - 2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\theta}, \quad \ddot{\varphi} = -2 \dot{\varphi} \left( \frac{\dot{r}}{r} + \dot{\theta} \operatorname{ctg} \theta \right). \quad (12.38)$$

В правые части этих выражений надо подставить значения  $\dot{r}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\varphi}$  по формулам (12.36). Тогда вторые производные  $\ddot{\theta}$ ,  $\ddot{\varphi}$  выразятся через сферические координаты точки  $M$  и величины, определяющие вектор скорости точки  $M$ .

---

### Глава XIII

---

## Простейшие движения абсолютно твердого тела

### § 49. Поступательное движение твердого тела

Начальные сведения о простейших движениях твердого тела: поступательном и вращательном, — вокруг неподвижной оси известны из школьных курсов физики.

В настоящей главе будут изложены основные представления о движении твердого тела и даны характеристики этого движения.

Под *поступательным* движением абсолютно твердого тела понимают такое его движение, при котором прямая, проведенная через любые две точки тела и жестко с ним связанная, остается во все время движения *параллельной самой себе*. В этом определении подчеркнуто, что требование сохранения параллельности относится к *любой* прямой, жестко связанной с телом. Так, например, в случае вращения тела вокруг неподвижной оси прямые, проведенные в теле параллельно оси вращения, будут вращаться вокруг оси, оставаясь параллельными самим себе, но это относится только к прямым, параллельным оси вращения тела. Прямые, наклоненные к оси вращения, уже не будут перемещаться, сохраняя параллельность.

Понятие *вращения* в дальнейшем сохраняется только для твердых тел и частей сплошной среды, но не будет применяться к материальным точкам, движущимся по *круговым* траекториям. Нельзя при этом говорить, что точки *вращаются вокруг центров окружностей*. К точкам не применимы термины поступательного или вращательного движений. Можно говорить лишь о прямолинейном или криволинейном их движении.

Точки *поступательно* движущегося тела могут описывать *любые криволинейные траектории*, в частности окружности, но движение тела сохраняет свой *поступательный* характер.

Докажем, что *при поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и в любой момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения*.

Для доказательства рассмотрим в данный момент  $t$  какие-нибудь две точки тела  $A$  и  $B$  (рис. 128), которые в момент  $t + \Delta t$  займут положения  $A'$ ,  $B'$ . По определению поступательного движе-

ния жесткие отрезки  $AB$  и  $A'B'$  будут равны и параллельны друг другу. Следовательно, фигура  $ABB'A'$  является параллелограммом и отрезки  $AA'$  и  $BB'$  равны и параллельны. Отсюда следует, что векторы бесконечно малых перемещений  $AA'$  и  $BB'$  равны между собой. Одинаковость во всех точках бесконечно малых перемещений означает, что при поступательном движении тела всеми точками будут описываться одинаковые траектории и будут одинаковы векторы скорости и ускорения.

К тому же результату можно прийти, если определять положение любой точки  $M$  твердого тела вектором-радиусом  $r'$ , проведенным из некоторой точки  $O'$ , также принадлежащей телу (рис. 129). Если движение поступательное, то по определению вектор  $r'$  остается параллельным самому себе. Величина вектора  $r'$  ( $r' = O'M$ ) не изменяется, так как тело твердое. Итак,  $r'$  является постоянным вектором.

Обозначим через  $r_0$  вектор-радиус точки  $O'$  относительно некоторой неподвижной точки  $O$ . Равенство

$$r = r_0 + r' \quad (13.1)$$

показывает, что траектория точки  $M$  получается из траектории точки  $O'$  путем параллельного перенесения ее на постоянный по величине и направлению вектор  $r'$ .

Следовательно, траектории точек твердого тела, движущегося поступательно, представляют собой конгруэнтные кривые, получающиеся друг из друга путем параллельного переноса.

Дифференцируя обе части формулы (13.1) по времени и замечая, что производная постоянного вектора  $r'$  равна нулю, получим

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr_0}{dt},$$

или, вспоминая определение вектора скорости,

$$v = v_0. \quad (13.2)$$

Скорости всех точек твердого тела, движущегося поступательно, в любой момент времени друг другу равны как по величине, так и по направлению.

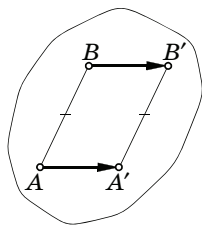


Рис. 128

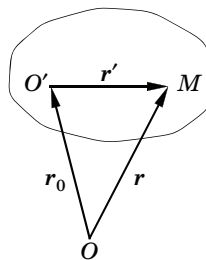


Рис. 129

Дифференцируя обе части (13.2) еще раз по времени, получаем

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_0. \quad (13.3)$$

Ускорения всех точек поступательно движущегося твердого тела в любой момент времени одинаковы.

Из доказанного следует, что поступательное движение твердого тела вполне определяется движением какой-нибудь одной из его точек; следовательно, для изучения поступательного движения тела достаточно знания кинематики точки.

### § 50. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость. Угловое ускорение

Рассмотрим движение твердого тела, при котором две точки его остаются неподвижными; такое движение представляет собой вращение тела вокруг проходящей через неподвижные точки прямой, называемой *осью вращения*.

Пусть ось вращения тела совпадает с осью  $Oz$ . Чтобы определить положение тела, проведем через ось  $Oz$  две полуплоскости: подвижную  $Q$ , твердо связанную с вращающимся телом, и неподвижную  $P$  (рис. 130). Заданием двугранного угла  $\varphi$  между этими полуплоскостями положение твердого тела вполне определяется. Например, углом поворота визирной трубы вокруг вертикальной

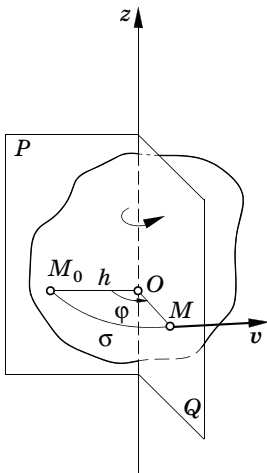


Рис. 130

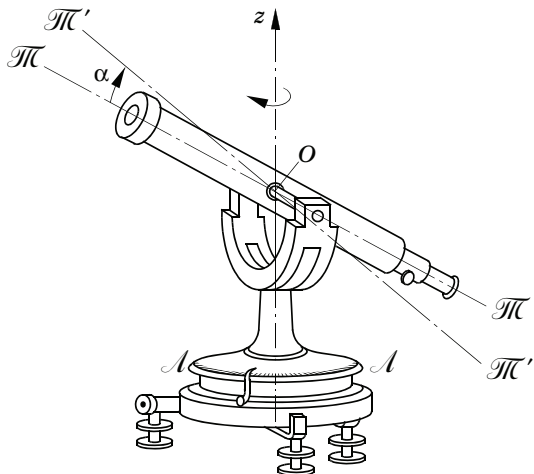


Рис. 131

оси  $Oz$  является не угол  $\alpha$  между двумя положениями оси трубы  $\Pi\Pi$  и  $\Pi'\Pi'$  (рис. 131), а линейный угол двугранного угла между плоскостями, проведенными через ось вращения  $Oz$  и ось трубы в двух положениях последней; этот угол  $\varphi$  и отсчитывается по лимбу  $AA$ .

Численное значение угла поворота будем выражать в радианах, т. е. в частях угла, длина дуги которого равна радиусу. Углы в радианах выражаются безразмерными числами. Окружность содержит  $2\pi$  радиан; один радиан эквивалентен углу

$$\frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ 17' 44,8'',$$

выраженному в градусах.

Часто угол поворота выражают числом оборотов  $N$ . Очевидно, что угол  $\varphi$  в радианах, соответствующий  $N$  оборотам, равен

$$\varphi = 2\pi N. \quad (13.4)$$

Положительное направление отсчета углов уже было определено в § 11.

Движение твердого тела, имеющего неподвижную ось вращения, определяется заданием угла  $\varphi$  в функции времени:

$$\varphi = f(t). \quad (13.5)$$

Это уравнение называется *уравнением вращения* тела.

При изучении вращательного движения вокруг неподвижной оси вводится в рассмотрение величина, учитывающая быстроту изменения угла поворота со временем. Эта величина называется *угловой скоростью* тела или *частотой его вращения*.

Остановимся сначала на случае равномерного вращения, при котором за одинаковые промежутки времени тело поворачивается на одинаковые углы. Угол поворота за единицу времени будет в этом случае численно равен угловой скорости. Последнюю будем обозначать буквой  $\omega$ . Согласно определению,

$$\omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}, \quad (13.6)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — значения угла поворота  $\varphi$  в моменты  $t_1$  и  $t_2$ .

Если за единицу угла принять 1 радиан, а за единицу времени 1 секунду, то единицей угловой скорости будет являться 1/с. В технике угловую скорость вала машины обычно характеризуют числом оборотов в минуту и обозначают буквой  $n$ . Замечая,

что  $n$  об/мин соответствует  $n/60$  об/с и что 1 оборот соответствует  $2\pi$  радианам, получим

$$\omega = \pi n / 30 \text{ 1/с.}$$

Например, угловая скорость маховика, совершающего 500 об/мин, выраженная в 1/с, будет равна

$$\omega = 500\pi / 30 = 52,36 \text{ 1/с.}$$

Угловая скорость вращения Земли, выраженная в 1/с, будет равна

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60^2} \text{ 1/с} = 0,0000726 \text{ 1/с.}$$

Для ориентировки полезно запомнить, что в *грубом приближении* угловая скорость, выраженная в об/мин, в 10 раз больше, чем угловая скорость, выраженная в 1/с. Действительно,

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \approx \frac{n}{10} \text{ 1/с.}$$

Из определения угловой скорости как отношения приращения угла к приращению времени следует, что угловая скорость  $\omega$  может быть положительной и отрицательной. Если угол поворота возрастает ( $\varphi_2 > \varphi_1$ ), т. е. тело вращается в положительном направлении, то  $\omega > 0$ ; если же угол поворота убывает ( $\varphi_2 < \varphi_1$ ), то тело вращается в отрицательном направлении и  $\omega < 0$ . Сохраняя обозначение  $\omega$  для *абсолютного* значения угловой скорости, условимся обозначать алгебраическую величину угловой скорости символом  $\tilde{\omega}$ . Конечно,  $|\tilde{\omega}| = \omega$ .

Если вращение неравномерно, то отношение приращения угла поворота  $\Delta\varphi$  к интервалу времени  $\Delta t$ , в течение которого это приращение произошло, определит лишь некоторую среднюю угловую скорость за время  $\Delta t = t_2 - t_1$ :

$$\tilde{\omega}_{\text{ср}} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Желая перейти от средней угловой скорости за некоторый промежуток времени к *истинной угловой скорости* в *данный момент*, будем стремиться интервал времени  $\Delta t$  к нулю. По определению производной угловая скорость  $\dot{\omega}$  в данный момент будет равна

$$\tilde{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \tilde{\omega}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (13.7)$$

Пользуясь этой формулой, по заданному уравнению (13.5) вращения тела получим

$$\tilde{\omega} = \dot{\varphi} = f'(t).$$

Если угол  $\varphi$  в данный момент возрастает,  $\tilde{\omega} > 0$ ; если угол  $\varphi$  убывает,  $\tilde{\omega} < 0$ . Знак  $\tilde{\omega}$  говорит о направлении вращения тела, если принято определенное правило положительного (вспомнить определение положительного поворота тела в § 11) и отрицательного отсчета углов поворота вокруг заданной оси вращения тела. Если  $\tilde{\omega}$  в данный момент обращается в нуль и меняет знак, то угол поворота  $\varphi$  достигает своего максимального или минимального значения, а тело *меняет направление вращения*.

За меру быстроты изменения угловой скорости с течением времени примем отношение приращения угловой скорости  $\Delta\tilde{\omega}$  к промежутку времени  $\Delta t$ , в течение которого это приращение произошло. Такое отношение назовем *средним угловым ускорением* за промежуток времени  $\Delta t$  и обозначим

$$\tilde{\epsilon}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\tilde{\omega}}{\Delta t} = \frac{\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1}{t_2 - t_1}.$$

Конечно,  $\tilde{\epsilon}_{\text{ср}}$  может быть как положительной ( $\tilde{\omega}_2 > \tilde{\omega}_1$ ), так и отрицательной ( $\tilde{\omega}_2 < \tilde{\omega}_1$ ) величиной, что и отмечено тильдой над буквой  $\epsilon$ .

*Угловое ускорение в данный момент* определится как предел отношения  $\Delta\tilde{\omega}/\Delta t$  при  $\Delta t$ , стремящемся к нулю, т. е.

$$\tilde{\epsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \tilde{\epsilon}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\tilde{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \dot{\tilde{\omega}}. \quad (13.8)$$

Из формулы (13.7) будет также следовать

$$\tilde{\epsilon} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (13.9)$$

Подобно тому как знак  $\tilde{\omega}$  определяет, вращается ли тело вокруг заданной оси в положительную или отрицательную сторону, точно так же знак  $\tilde{\epsilon}$  дает суждение о том, является ли вращение тела в данный момент *ускоренным* или *замедленным*. В самом деле, если знаки  $\tilde{\omega}$  и  $\tilde{\epsilon}$  совпадают, то возможен один из двух вариантов:

- ✓  $\tilde{\omega} > 0$ ,  $\tilde{\epsilon} > 0$ , т. е.  $\tilde{\omega}$  положительна и возрастает,
- ✓  $\tilde{\omega} < 0$ ,  $\tilde{\epsilon} < 0$ , т. е.  $\tilde{\omega}$  отрицательна и убывает.



И в том и в другом случае  $\tilde{\omega}$  по абсолютной величине возрастает, т. е. вращение *ускоренное*; аналогичное рассуждение показывает, что если знаки  $\tilde{\omega}$  и  $\tilde{\varepsilon}$  различны, то вращение *замедленное*.

Угловое ускорение равно нулю при равномерном вращении тела. Условие  $\tilde{\varepsilon} = 0$  в данный момент времени может говорить о максимуме или минимуме угловой скорости в этот момент.

Рассмотрим случай *равнопеременного вращения*. Так называется вращательное движение с постоянным угловым ускорением. Переписывая формулу (13.8) в виде

$$d\tilde{\omega} = \tilde{\varepsilon} dt,$$

можем в этом случае при интегрировании вынести  $\tilde{\varepsilon}$ , как постоянную, за знак интеграла. Получим

$$\tilde{\omega} = \tilde{\varepsilon} t + \tilde{\omega}_0; \quad (13.10)$$

постоянная интегрирования  $\tilde{\omega}_0$  есть значение  $\tilde{\omega}$  при  $t = 0$ , т. е. угловая скорость в момент, принимаемый за начало отсчета времени.

Решая уравнение (13.10), найдем

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0}{t}.$$

Отсюда следует, что за единицу углового ускорения надо принять угловое ускорение такого равнопеременного вращения, в котором в каждую единицу времени угловая скорость возрастает на единицу угловой скорости.

Если за единицу угла принять 1 радиан, а за единицу времени 1 секунду, то единицей углового ускорения будет  $1/c^2$ ; если же за единицу угла принять 1 оборот и за единицу времени 1 минуту, то единица углового ускорения будет  $1 \text{ об/мин}^2$ .

Вопрос о переходе от одних единиц к другим поясним с помощью примеров. Выразим в  $1/c^2$  угловое ускорение, равное  $10 \text{ об/мин}^2$ . Имеем

$$10 \text{ об/мин}^2 = 10 \cdot \frac{2\pi}{60^2} 1/c^2 = \frac{\pi}{180} 1/c^2.$$

Выразим угловое ускорение  $\pi [1/c^2]$  в  $\text{об/мин}^2$ . Имеем

$$\pi 1/c^2 = \pi \cdot \frac{60^2}{2\pi} \text{ об/мин}^2 = 1800 \text{ об/мин}^2.$$

Из формул (13.7) и (13.10) следует

$$d\varphi = \tilde{\omega}_0 dt + \tilde{\varepsilon} t dt.$$

Интегрируя, найдем

$$\varphi = \varphi_0 + \tilde{\omega}_0 t + \frac{\tilde{\varepsilon} t^2}{2}. \quad (13.11)$$

Заметим, что приведенные здесь формулы аналогичны формулам равноускоренного прямолинейного движения точки, если сопоставить  $\varphi \rightarrow x$ ,  $\dot{\varphi} \rightarrow \tilde{v}$ ,  $\ddot{\varphi} \rightarrow \tilde{w}$ .

Постоянная интегрирования  $\varphi_0$  есть значение угла поворота при  $t = 0$ . Формулы (13.11) и (13.10) аналогичны соответствующим формулам равнопеременного прямолинейного движения (§ 43).

Исключая время из (13.10) и (13.11), получим (при  $\varphi_0 = 0$ ) формулу

$$\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\tilde{\varepsilon}}, \quad (13.12)$$

аналогичную выражению пройденного пути через скорость и ускорение. Выведенные формулы часто применяются при решении задач о пуске в ход и остановке машины в предположении, что угловое ускорение (замедление) машины остается постоянным. В динамике будет доказано, что это предположение справедливо при допущении постоянства вращающего момента.

**Пример 37.** Угловая скорость вала двигателя, равная 1200 об/мин, вследствие увеличения нагрузки падает в течение 90 с до 800 об/мин. Вычислим угловое ускорение, считая его постоянным, и число оборотов, совершенных двигателем за указанный промежуток времени.

Имеем

$$\omega_0 = 1200 \text{ об/мин}, \quad \omega = (1200 + \tilde{\varepsilon}t) \text{ об/мин};$$

$\omega = 800$  об/мин при  $t = 90$  с, что дает

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{800 - 1200}{1,5} = -\frac{400}{1,5} \text{ об/мин}^2 = -267 \text{ об/мин}^2.$$

Далее получим

$$\varphi = 1200t - \frac{400t^2}{1,5 \cdot 2} = 1200 \cdot 1,5 - \frac{400 \cdot 1,5^2}{1,5 \cdot 2} = 1500 \text{ об.}$$

К этому же результату можно прийти, подставляя найденное значение  $\tilde{\varepsilon}$  в формулу (13.12).

**Пример 38.** Стрелка гальванометра совершает колебания амплитудой  $\varphi_0 = 15^\circ$  и периодом  $T = 4$  с. Считая колебания гармоническими, написать уравнение вращения, а также найти угловую скорость и угловое ускорение стрелки.

Вопрос о гармоническом колебании в прямолинейном движении подробно разбирался в § 40. Особенность настоящего случая лишь в том, что величиной, изменяющейся по гармоническому закону, является не абсцисса движущейся точки, а угол поворота тела. Имеем

$$\varphi = \varphi_0 \sin (kt + \alpha),$$

где  $k$  — частота, связанная с периодом формулой  $k = 2\pi/T$ ,  $\varphi_0$  — амплитуда,  $\alpha$  — начальная фаза.

При заданных численных значениях получим

$$k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} \approx 1,57 \text{ 1/с};$$

амплитуда, выраженная в радианах, будет равна

$$\varphi_0 = \frac{\pi \cdot 15^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{12}.$$

Итак,

$$\varphi = \frac{\pi}{12} \sin \left( \frac{\pi t}{2} + \alpha \right).$$

Для определения начальной фазы предположим, что отсчет времени ведется от того момента, когда конец стрелки занимал крайнее правое положение на шкале. Тогда  $\varphi = \varphi_0$  при  $t = 0$ ; следовательно,  $\alpha = \pi/2$ , т. е.

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left( kt + \frac{\pi}{2} \right) = \varphi_0 \cos kt = \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi t}{2}.$$

Угловая скорость стрелки и ее угловое ускорение соответственно равны

$$\tilde{\omega} = -\frac{\pi^2}{24} \sin \frac{\pi t}{2}, \quad \tilde{\varepsilon} = -\frac{\pi^3}{48} \cos \frac{\pi t}{2}.$$

**Пример 39.** Средняя угловая скорость четырехтактного одноцилиндрового двигателя равна 300 об/мин; коэффициент неравномерности хода  $\delta = 0,03$ . Найдем закон изменения угловой скорости, считая, что разность  $\omega - \omega_m$  ее мгновенного и среднего значений изменяется в течение периода по гармоническому закону.

При установившемся движении, когда отдаваемая двигателем мощность равна потребляемой, двигатель или идет равномерно (паровые турбины), или имеет периодическую неравномерность хода (поршневые машины); в последнем случае угловая скорость изменяется периодически, возвращаясь к первоначальному значению через определенный период. Этот период равен времени, в течение которого происходит рабочий цикл в двигателе. Например, в случае двухтактного одноцилиндрового двигателя он равен времени одного оборота главного вала, для четырехтактного одноцилиндрового двигателя — времени двух оборотов и т. д.

Величина периодической неравномерности хода характеризуется так называемым *коэффициентом неравномерности*  $\delta$ :

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_m},$$

где  $\omega_{\max}$  — максимальное,  $\omega_{\min}$  — минимальное,  $\omega_m$  — среднее значение угловой скорости:

$$\omega_m = (1/2) (\omega_{\max} + \omega_{\min}).$$

Решая эти уравнения относительно  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$ , найдем

$$\omega_{\max} = \omega_m(1 + \delta/2), \quad \omega_{\min} = \omega_m(1 - \delta/2).$$

По условию разность  $\omega - \omega_m$  изменяется в течение периода по гармоническому закону

$$\omega - \omega_m = a \sin(kt + \alpha);$$

остается определить амплитуду  $a$  и частоту  $k$ ; величина начальной фазы может быть принята равной нулю.

Для определения амплитуды  $a$  заметим, что  $\omega = \omega_{\max}$  при  $\sin kt = 1$ . Это дает условие

$$\omega_{\max} - \omega_m = a;$$

заменяя  $\omega_{\max}$  его значением, получаем

$$\omega_m(1 + \delta/2) - \omega_m = a,$$

т. е.

$$a = (\delta/2) \omega_m.$$

В случае одноцилиндрового четырехтактного двигателя период равен времени двух оборотов вала ( $2T$ ) и

$$k = \frac{2\pi}{2T} = \frac{1}{2} \omega_m.$$

Получаем

$$\omega - \omega_m = \omega_m \frac{\delta}{2} \sin \frac{\omega_m t}{2},$$

или

$$\omega = \omega_m \left( 1 + \frac{\delta}{2} \sin \frac{\omega_m t}{2} \right).$$

В рассматриваемом численном примере  $\omega_m = 300 \cdot 2\pi/60 = 10\pi$  1/с,  $\delta = 0,03$ ; находим

$$\omega = 10\pi (1 + 0,015 \sin 5\pi t) \text{ 1/с.}$$

Дифференцируя, найдем угловое ускорение:

$$\tilde{\epsilon} = 0,75\pi^2 \cos 5\pi t \approx 7,4 \cos 5\pi t \text{ 1/с}^2.$$

### § 51. Скорости и ускорения точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Траекторией любой точки  $M$  твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, является окружность (рис. 130), расположенная в плоскости, проведенной через  $M$  перпендикулярно оси вращения; центр этой окружности находится в пересечении только что упомянутой плоскости и оси вращения; радиус окружности равен расстоянию  $h$  от точки  $M$  от оси вращения. Дуга  $\sigma$ , отсчитанная от начального положения  $M_0$  точки до положения ее  $M$  в момент  $t$ , соответствующая углу поворота  $\varphi$ , равна

$$\sigma = h\varphi. \quad (13.13)$$

Направление положительного отсчета дуг окружности  $\sigma$  соответствует направлению положительного отсчета углов поворота  $\varphi$ .

Направляя, как всегда, касательную к траектории точки, в данном случае к окружности, в сторону возрастания дуги  $\sigma$ , определим скорость в проекции ее на касательную:

$$v_{\tau} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d}{dt} h\varphi = h \frac{d\varphi}{dt} = h\dot{\omega}; \quad (13.14)$$

величина  $h$  вынесена за знак производной по времени, как расстояние от точки до оси, не изменяющееся при вращении твердого тела.

Численная величина скорости будет равна

$$v = \omega h. \quad (13.15)$$

*Скорость любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна произведению угловой скорости тела на расстояние от точки до оси вращения.*

Чтобы подчеркнуть отличие угловой скорости тела от скорости какой-либо его точки, последнюю называют часто *линейной скоростью*, а иногда *окружной скоростью*.

Скорости различных точек твердого тела в данный момент времени будут различаться лишь множителем  $h$ , так как угловая скорость  $\omega$  для всех точек тела в данный момент времени одна и та же и определяется законом изменения угла поворота тела во времени.

Направление вектора скорости  $v$  определится касательной к окружности, по которой движется точка, или, что все равно, перпендикуляром к плоскости, проходящей через ось вращения и данную точку, проведенным в сторону вращения тела.

Таким образом, можно установить следующий закон распределения скоростей в теле, вращающемся вокруг неподвижной оси.

*В данный момент времени скорости различных точек тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения и направлены в сторону вращения тела перпендикулярно плоскостям, проходящим через ось вращения и рассматриваемые точки.*

При вычислении линейных скоростей точек вращающегося тела по формуле (13.15) необходимо помнить, что угловая скорость должна быть выражена в 1/с, 1/мин и др., а не в об/с или об/мин, так как только тогда будет правильно соблюдена размерность скорости.

Перейдем к рассмотрению ускорений точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Воспользуемся для этого формулами проекций ускорения на касательную и главную нормаль к траектории — в данном случае к окружности радиусом  $h$ , — выведенными ранее в § 46:

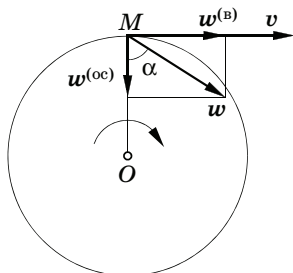
$$w_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt} = \frac{d}{dt}(\tilde{\omega}h) = \tilde{\epsilon}h, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 h^2}{h} = \omega^2 h. \quad (13.16)$$

В рассматриваемом случае вращения тела касательную и нормальную составляющие ускорения принято называть соответственно *вращательной* и *осеостремительной* составляющими вектора ускорения или кратко *вращательным* и *осеостремительным ускорениями* и обозначать  $w^{(в)}$  и  $w^{(ос)}$ . Для проекций этих составляющих на касательную и главную нормаль к траектории примем обозначения

$$w^{(в)} = \tilde{\epsilon}h, \quad w^{(ос)} = \omega^2 h. \quad (13.17)$$

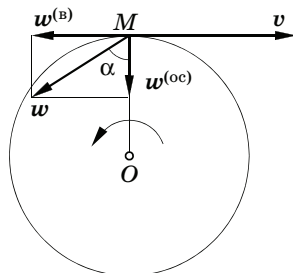
При вычислениях по этим формулам  $\tilde{\epsilon}$  и  $\omega$  следует выражать в 1/с<sup>2</sup> и 1/с, а не в об/мин<sup>2</sup> и об/мин.

Проекция осеостремительного ускорения на главную нормаль к траектории, как это видно из последней формулы, всегда положительна, т. е. осеостремительное ускорение  $w^{(ос)} = w^{(ос)}\mathbf{n}$  всегда направлено по радиусу окружности от точки к оси вращения, почему его и называют *осеостремительным ускорением*. Что же касается вращательной составляющей  $w^{(в)} = w^{(в)}\boldsymbol{\tau}$ , то она направлена по касательной в сторону положительного отсчета углов (и дуг), если  $\tilde{\epsilon} > 0$ , и в противоположную сторону при  $\tilde{\epsilon} < 0$ . Если вспомнить, что направление  $v = v_{\tau}\boldsymbol{\tau} = h\tilde{\omega}\boldsymbol{\tau}$  определяется знаком  $\tilde{\omega}$ , то можно прийти к следующему легко запоминаемому правилу.



Ускоренное вращение

Рис. 132



Замедленное вращение

Рис. 133

Вращательное ускорение направлено в ту же сторону, что и скорость, если вращение тела ускоренное, и в сторону, противоположную скорости, если вращение замедленное.

На рис. 132, 133 показано взаимное расположение вращательного и осеостремительного ускорений и скорости при одном и том же направлении вращения тела. Рис. 132 относится к ускоренному, рис. 133 — к замедленному вращению. Чтобы не затемнять чертеж, само тело опущено и нарисована траектория (окружность) в том виде, как она представится наблюдателю, смотрящему вдоль оси вращения тела.

Пользуясь формулами проекций ускорения (13.17), найдем полное ускорение точки вращающегося тела\*:

$$w = \sqrt{[w^{(B)}]^2 + [w^{(oc)}]^2} = h \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}. \quad (13.18)$$

а также и острый угол  $\alpha$ , образованный вектором ускорения  $w$  (рис. 132, 133) и направлением нормали  $\vec{MO}$  к траектории:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w^{(B)}}{w^{(oc)}} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\omega^2}. \quad (13.19)$$

В данный момент времени для всех точек вращающегося тела  $\tilde{\varepsilon}$  и  $\tilde{\omega}$  одинаковы; следовательно, полные ускорения по величине будут различаться лишь множителем  $h$ , характеризующим расстояние от рассматриваемой точки до оси вращения; угол, образованный вектором ускорения с соответствующим радиусом вращения точки, будет в данный момент времени одним и тем же для всех точек.

\* Значок «~» над  $\varepsilon$  и  $\omega$  опускается в тех случаях, когда по смыслу формулы фигурируют лишь положительные величины.

Таким образом, приходим к следующему закону распределения ускорений в твердом теле, вращающемся вокруг неподвижной оси.

*В данный момент времени ускорения точек тела пропорциональны расстояниям от точек до оси вращения и направлены под одинаковыми углами к радиусам вращения.*

Обратим внимание на следующие частные случаи.

- Если тело вращается равномерно, то  $\dot{\epsilon} = 0$  и, следовательно, во все время движения вращательное ускорение точек тела равно нулю; ускорение сводится к осеостремительному.
- Если в некоторый момент времени угловая скорость  $\tilde{\omega}$  тела достигает максимального или минимального значения, то  $d\tilde{\omega}/dt$  в этот момент обращается в нуль и вращательное ускорение всех точек тела также обращается в нуль.
- Если в некоторый момент угол поворота достигает максимального или минимального значения, то  $\tilde{\omega} = d\varphi/dt$  обращается в нуль и осеостремительное ускорение в этот момент для всех точек тела равно нулю.

Последние два случая наблюдаются, например, при колебательных вращениях тела.

**Пример 40.** Сравним скорости и ускорения на ободе маховика паровой машины, имеющего диаметр  $D = 1,5$  м и вращающегося с угловой скоростью  $n = 240$  об/мин, и турбинного диска, имеющего диаметр  $0,7$  м и совершающего  $18\,000$  об/мин.

В первом случае

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{240\pi}{30} = 8\pi \text{ 1/с}, \quad h = \frac{D}{2} = 0,75 \text{ м}$$

и, следовательно,

$$v = 0,75 \cdot 8\pi = 18,85 \text{ м/с}, \quad w = w^{(oc)} = 0,75 \cdot (8\pi)^2 = 473 \text{ м/с}^2.$$

Окружная скорость и осеостремительное ускорение точки обода турбинного диска будут равны

$$v = \frac{18\,000\pi}{30} \cdot 0,35 = 659,7 \text{ м/с},$$

$$w = w^{(oc)} = h\omega^2 = 0,35 \cdot 600^2\pi^2 = 1,24 \cdot 10^6 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение частиц на ободе диска в  $126\,000$  раз превосходит ускорение силы тяжести  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .



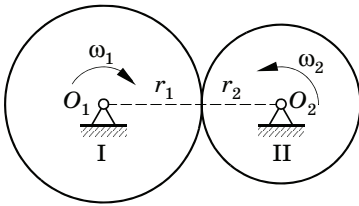


Рис. 134

**Пример 41.** Колесо I вращается с угловой скоростью  $\omega_1$  вокруг неподвижной оси  $O_1$  и находится в зацеплении с колесом II, вращающимся вокруг неподвижной оси  $O_2$  (рис. 134). Радиусы окружностей, в точках которых происходит соприкосновение колес, равны соответственно  $r_1$  и  $r_2$ . Найдём угловую скорость колеса II.

При отсутствии скольжения между поверхностями колес линейная скорость точки соприкосновения одна и та же, будем ли считать эту точку принадлежащей первому колесу или второму, т. е.

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2.$$

Обозначая через  $z_1$  и  $z_2$  числа зубьев первого и второго колес, а через  $t$  — шаг зацепления, т. е. расстояние между какими-нибудь соответствующими друг другу точками двух смежных зубьев, измеренное по начальной окружности, имеем

$$2\pi r_1 = z_1 t, \quad 2\pi r_2 = z_2 t.$$

В паре сцепляющихся колес шаги должны быть равны друг другу. Получаем

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1},$$

т. е. угловые скорости колес обратно пропорциональны числам зубьев или радиусам начальных окружностей.

В случае *внешнего* зацепления направления вращения колес противоположны, в случае *внутреннего* зацепления — одинаковы. Желая отметить это, введем вместо абсолютных значений  $\omega_1$  и  $\omega_2$  их алгебраические значения  $\tilde{\omega}_1$  и  $\tilde{\omega}_2$ . Тогда последняя формула примет вид

$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1},$$

где верхний знак относится к внутреннему зацеплению, нижний — к внешнему.

Последняя формула применима не только к случаю круглых колес, но и к любому случаю передачи вращения от одного вала к другому при помощи колес любых очертаний. Разница состоит в том, что в общем случае отношение  $r_2/r_1$  переменное, и при постоянной угловой скорости  $\omega_1$  первого колеса угловая скорость  $\omega_2$  второго колеса получается переменной.

**Пример 42. Лобовая передача.** Ведущий валик II (рис. 135) лобовой передачи вращается с угловой скоростью 600 об/мин.

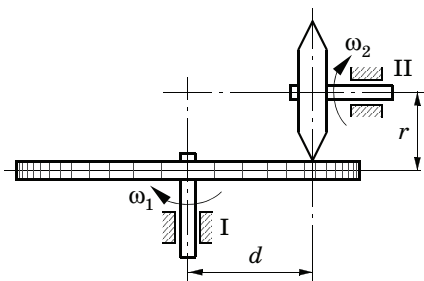


Рис. 135

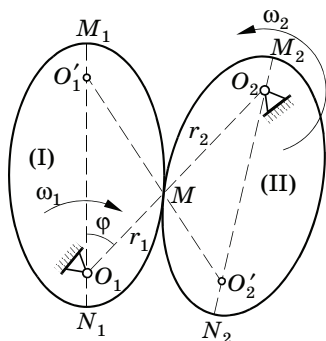


Рис. 136

В начальный момент времени расстояние  $d$  от плоскости ведущего колеса до оси вращения ведомого колеса (диска) I было равно  $0,1$  м и валик начал передвигаться вдоль своей оси со скоростью  $0,004$  м/с так, что расстояние  $d$  стало уменьшаться. Пренебрегая скольжением между поверхностями ведущего валика II и диска I, определить угловую скорость и угловое ускорение ведомого диска, если радиус ведущего колеса  $r$  равен  $0,02$  м.

Из условия отсутствия скольжения между колесами в плоскости ведущего колеса следует равенство окружных скоростей точек соприкосновения ведущего и ведомого колес:

$$\omega_1 d = \omega_2 r.$$

Закон изменения расстояния  $d$  со временем имеет вид

$$d = 10 - 0,4t;$$

следовательно,

$$\omega_1 = \frac{r}{d} \omega_2 = \frac{2 \cdot 600}{10 - 0,4t} \cdot \frac{2\pi}{60} = \frac{40\pi}{10 - 0,4t} \text{ 1/с.}$$

Отсюда дифференцированием по времени найдем угловое ускорение ведомого колеса:

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{16\pi}{(10 - 0,4t)^2} \text{ 1/с}^2.$$

**Пример 43. Эллиптические колеса.** Передача вращения между осями  $O_1$  и  $O_2$  осуществлена при помощи двух равных эллиптических колес (рис. 136). Оси  $O_1$  и  $O_2$  проходят через фокусы эллипсов. По заданной постоянной угловой скорости  $\omega_1$  первого колеса найдем угловую скорость  $\omega_2$  и угловое ускорение  $\varepsilon_2$  второго колеса. Большая полуось эллипсов равна  $a$ , малая —  $b$ , расстояние между осями  $O_1 O_2 = 2a$ , расстояние между фокусами  $O_1 O'_1 = O_2 O'_2 = 2\sqrt{a^2 - b^2} = 2c$ .

Имеем, поскольку зацепление *внешнее* (см. пример 41),

$$\tilde{\omega}_2 = -\tilde{\omega}_1 \frac{r_1}{r_2}.$$

Найдем сначала максимальную и минимальную по абсолютным значениям величины  $\omega_2$ . Первая будет иметь место при максимальном  $r_1$  и минимальном  $r_2$ , т. е. когда в соприкосновение вступят точки  $M_1$  и  $M_2$ :

$$O_1M_1 = r_{1 \max} = a + \sqrt{a^2 - b^2} = a + c,$$

$$O_2M_2 = r_{2 \min} = a - \sqrt{a^2 - b^2} = a - c.$$

Следовательно,

$$\omega_{2 \max} = \frac{a + c}{a - c} \omega_1.$$

Точно так же найдем

$$\omega_{2 \min} = \frac{a - c}{a + c} \omega_1.$$

Несколько сложнее получить закон передачи вращения. Обозначим через  $\varphi$  угол поворота первого колеса. Заметим, что

$$r_2 = O_2M = O'_1M,$$

так как

$$r_1 + r_2 = O_1O_2 = 2a$$

и по свойству эллипса сумма  $(r_1 + O'_1M)$  также равна  $2a$ . Из  $\triangle O_1MO'_1$  имеем

$$(O'_1M)^2 = r_2^2 = r_1^2 + 4c^2 - 4cr_1 \cos \varphi;$$

но

$$r_2 = 2a - r_1,$$

и, следовательно,

$$(2a - r_1)^2 = 4a^2 - 4ar_1 + r_1^2 = r_1^2 + 4c^2 - 4cr_1 \cos \varphi,$$

т. е.

$$r_1 = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \varphi}, \quad r_2 = 2a - r_1 = \frac{a^2 - 2ac \cos \varphi + c^2}{a - c \cos \varphi}.$$

Получаем

$$\tilde{\omega}_2 = -\frac{r_1}{r_2} \omega_1 = -\frac{a^2 - c^2}{a^2 - 2ac \cos \varphi + c^2} \omega_1.$$

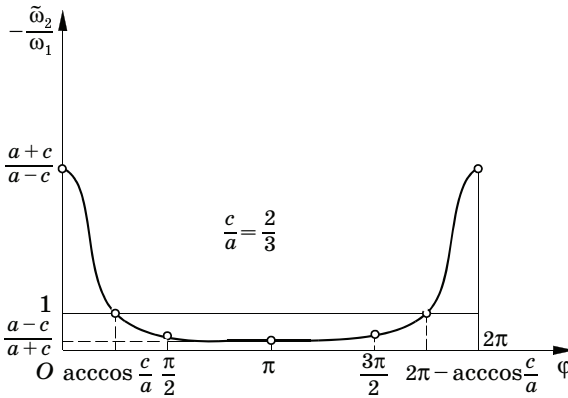


Рис. 137

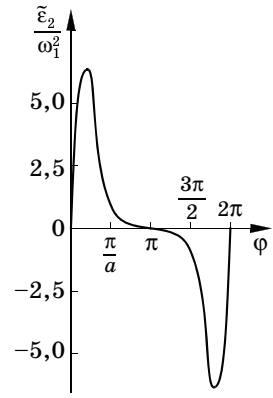


Рис. 138

При значениях  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  получаем результат, уже найденный выше. На рис. 137 дан график  $-\tilde{\omega}_2/\omega_1$  в зависимости от угла поворота  $\varphi$  при  $c/a = 2/3$ .

Дифференцируя  $\tilde{\omega}_2$  при постоянном  $\omega_1$  и имея в виду, что  $\dot{\varphi} = \omega_1$ , получим угловое ускорение второго колеса:

$$\tilde{\epsilon}_2 = \frac{2ac(a^2 - c^2) \sin \varphi}{(a^2 - 2ac \cos \varphi + c^2)^2} \omega_1^2.$$

График изменения  $\tilde{\epsilon}_2$  представлен на рис. 138; при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  имеем  $\tilde{\epsilon}_2 = 0$ , как и должно быть, так как в этих положениях  $\tilde{\omega}_2$  имеет экстремальные значения.

### § 52. Векторные формулы скорости и ускорения точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

В дальнейшем при рассмотрении общих случаев движения твердых тел придется иметь дело с вращениями вокруг *подвижных* осей, меняющих свое направление в пространстве. В этих случаях уже нельзя довольствоваться рассмотрением угловой скорости и углового ускорения как алгебраических величин, а становится необходимым связывать их с ориентацией в пространстве. Это достигается, если ввести угловые скорости и ускорения как *векторы* и в связи с этим для векторов линейных скоростей и ускорений установить векторные формулы, представляющие эти величины как по величине, так и по направлению.

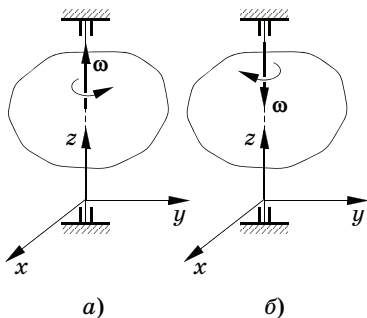


Рис. 139

Введем в рассмотрение *вектор угловой скорости*, который будем обозначать через  $\omega$ .

Величиной вектора угловой скорости  $\omega$  является

$$\omega = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|.$$

Направление вектора угловой скорости естественно связать с осью вращения твердого тела. Необходимо указать, в какую сторону по оси вращения откладывать вектор  $\omega$ .

Выбрав положительное направление оси вращения, условимся относительно направления положительного отсчета углов поворота тела, связывая его с направлением поворота оси  $Ox$  к оси  $Oy$  на  $\pi/2$ , если смотреть с положительной стороны оси  $Oz$  (§ 11). Такое условие позволяет сохранить одинаковое определение положительного поворота как в правой, так и в левой системе координат, хотя положительный поворот в правой системе происходит в сторону, противоположную положительному повороту в левой системе; при этом все аналитические формулы (т. е. формулы, заключающие проекции на оси координат) сохраняют одинаковый вид как в правой, так и в левой системе координат.

Условимся направлять вектор угловой скорости  $\omega$  по оси вращения так, чтобы наблюдатель, смотрящий с конца вектора  $\omega$ , видел вращение тела в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки при правой системе координат (рис. 139).

Так, например, при правой системе координат вектор угловой скорости вращения Земли направлен к Северному полюсу.

Направление вектора угловой скорости совпадает с направлением осевого движения правого винта при ввинчивании его в неподвижную гайку.

Вектор  $\omega$  можно расположить в любом месте на оси вращения. Такие векторы, как мы уже знаем, называют *скользящими* в отличие от закрепленных векторов, какими являются, например, скорость и ускорение точек. Напомним, что вектор силы, приложенный к абсолютно твердому телу, также был скользящим вектором. В этом случае роль прямой, вдоль которой допускалось скольжение вектора, играла линия действия силы.

Векторы силы, скорости, ускорения и т. д. имеют определенное направление, не зависящее от выбора правой или левой системы координатных осей. Иначе обстоит дело с вектором угловой скорости. При замене левой системы координат на правую вектор угловой скорости твердого тела, вращающегося в определенном направлении, будет менять свое направление на противоположное. То же самое можно сказать о векторе момента силы относительно точки или о моменте пары.

Векторы, направление которых остается неизменным при переходе от одной (правой или левой) системы осей к другой (левой или правой) и определяется направлением той физической величины, которая ими описывается, называют *истинными векторами*; в противоположность им векторы, направление которых приходится менять на противоположное при замене левой системы осей на правую (или правой на левую), называются *псевдовекторами*.

Существуют также и скалярные величины, обладающие свойством менять свой знак при переходе от правой системы координат к левой. Простейшим примером служит скалярное произведение истинного вектора на псевдовектор. Такие скаляры называют *псевдоскалярами*.

Псевдовектор  $\omega$  угловой скорости вращения абсолютно твердого тела получает применение и в случае вращения элементарного объема любой деформируемой сплошной среды. Вектор  $\omega$  является «сопутствующим» вектором (§ 34) дифференциального тензора поля скоростей, который обозначается символом  $\text{Grad } V$  (см. далее § 76). В § 34 было показано, что «сопутствующий» вектор любого антисимметричного тензора при переходе от *правой* системы координат к *левой* или наоборот меняет направление на противоположное, т. е. ведет себя как *псевдовектор*. Свойство псевдовекторности является общим для всех векторов  $\omega$ , эквивалентных *антисимметричной* части *асимметричного* тензора второго ранга (см. далее § 76).

Откладывая вектор  $\omega$  по оси вращения, можно определить вектор линейной скорости  $v$  любой точки  $M$  как векторное произведение вектора угловой скорости на вектор-радиус этой точки относительно любой точки оси вращения (рис. 140):

$$v = \omega \times r. \quad (13.20)$$

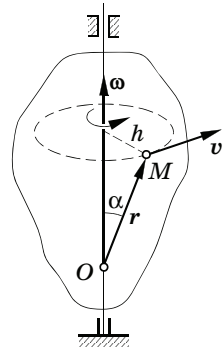


Рис. 140

В самом деле, величина векторного произведения (13.20) равна

$$v = \omega r \sin \alpha = \omega h, \quad (13.21)$$

т. е. величине скорости; пусть, далее, принята правая система осей, тогда при показанном стрелкой направлении вращения вектор угловой скорости должен быть отложен по оси вращения вверх (рис. 140). Векторное произведение  $\omega \times r$  перпендикулярно  $\omega$  и  $r$  и направлено так, чтобы, смотря с его конца, видеть поворот от  $\omega$  к  $r$  на наименьший угол против часовой стрелки; но это и будет направление скорости  $v$ .

К равенству (13.20) можно прийти также, рассматривая величину вектора скорости  $v$  по (13.21) как величину момента вектора угловой скорости  $\omega$  относительно центра  $M$ . По определению момента будем иметь

$$v = m_M(\omega) = r' \times \omega,$$

где  $r' = -r$  есть вектор-радиус точки  $O$  относительно  $M$ . Отсюда по известному свойству векторного произведения следует

$$v = -r \times \omega = \omega \times r.$$

Формула (13.20) является *основной формулой кинематики твердого тела*; как увидим далее, она сохраняет свой вид не только в случае вращения вокруг неподвижной оси, но и в случае вращения тела вокруг неподвижной точки.

Проецируя обе части (13.20) на координатные оси, найдем проекции скорости. Если принять ось вращения за ось  $Oz$ , то проекции вектора  $\omega$  будут равны

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \tilde{\omega} = \dot{\phi}.$$

По известным формулам проекций векторного произведения получим

$$v_x = -\tilde{\omega}y, \quad v_y = \tilde{\omega}x, \quad v_z = 0, \quad (13.22)$$

где  $x$  и  $y$  ( $z$  не входит в эти формулы) — координаты точки  $M$ .

Если координатные оси ориентированы произвольно, то, обозначая через  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  проекции на них вектора  $\omega$ , получим *формулы Эйлера*:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x. \quad (13.23)$$

Формулам Эйлера (13.23) можно придать удобный для запоминания вид определителя:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Выведем теперь векторную формулу ускорения. Для этого возьмем векторную производную по времени от обеих частей равенства (13.20); будем иметь

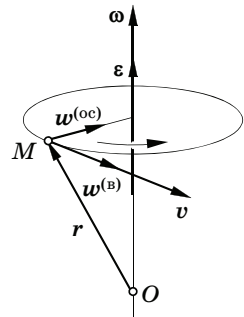
$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (13.24)$$

Производную по времени от вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  назовем *вектором углового ускорения*. Так как в рассматриваемом случае  $\boldsymbol{\omega}$  является вектором постоянно-го направления (ось вращения неподвижна), то, согласно сказанному в начале § 45, величина углового ускорения будет равна абсолютному значению производной от величины угловой скорости, а направление его или совпадает, или противоположно  $\boldsymbol{\omega}$  сообразно тому, возрастает или убывает с течением времени величина угловой скорости (рис. 141). Называя вектор углового ускорения в согласии с ранее введенным обозначением  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и замечая еще, что по определению скорости  $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ , приведем (13.24) к виду

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \quad (13.25)$$

Первое слагаемое,  $\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$ , представляет собой *вращательную* составляющую ускорения. Действительно, оно равно по величине  $\varepsilon r \sin(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}}) = \varepsilon h$ , а по направлению совпадает со скоростью  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , если векторы  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  сонаправлены, и противоположно скорости, если  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  разнонаправлены; первое будет иметь место в ускоренном, а второе — в замедленном вращении.

Ускоренное вращение



Замедленное вращение

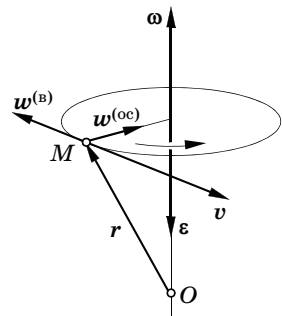


Рис. 141



Второе слагаемое в формуле (13.25) представляет собой *осе-стремительное* ускорение. Его величина равна  $\omega v \sin(\widehat{\omega, v}) = \omega^2 h$ , так как векторы  $\omega$  и  $v$  взаимно-перпендикулярны, а  $v = \omega h$ .

Направление векторного произведения  $\omega \times v$  перпендикулярно оси вращения (вектору  $\omega$ ) и скорости  $v$ , т. е. идет по радиусу круга, описываемого точкой, к его центру. Итак, действительно,

$$\boldsymbol{w}^{(B)} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{w}^{(oc)} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}. \quad (13.26)$$

Расположение этих векторов при ускоренном и замедленном вращении показано на рис. 141.

Формулы (13.20) и (13.26) представляют собой векторные обобщения формул (13.15) и (13.17).

## Глава XIV

### Плоское движение твердого тела

#### § 53. Уравнения плоского движения

Следующим в порядке сложности движения абсолютно твердого тела будет *плоское* движение, при котором ось вращения остается во все время движения параллельной самой себе, но движется поступательно в пространстве. Определим плоское движение как такое, при котором все точки твердого тела, расположенные в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости, во все время движения остаются в тех же плоскостях. Если разбить мысленно тело на плоские сечения, параллельные заданной плоскости, то эти сечения будут оставаться каждое в своей плоскости.

Этот случай движения имеет большое техническое значение: механизмы, встречающиеся в технике, за немногочисленными исключениями, представляют собой системы твердых тел, совершающих плоское движение. Плоское движение совершают механизмы для вычерчивания разных кривых (эллипсограф, конхотограф), всевозможные кулисные механизмы, эпициклические механизмы, применяемые в редукторах скоростей, и т. д.

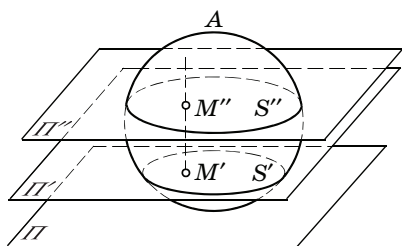


Рис. 142

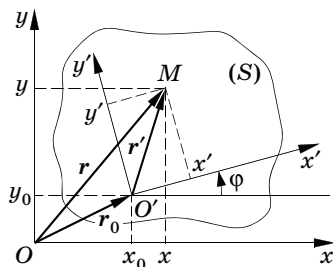


Рис. 143

Пусть тело  $A$  (рис. 142) совершает движение, параллельное плоскости  $\Pi$ . Проведем мысленно в теле ряд плоскостей  $\Pi'$ ,  $\Pi''$ , ..., параллельных  $\Pi$ . Тело разобьется на ряд плоских фигур  $S'$ ,  $S''$ , ... . Все точки, принадлежащие какой-нибудь фигуре, движутся в плоскости фигуры, и, следовательно, фигура в целом движется в своей плоскости. Движение одной такой плоской фигуры вполне определяет движение всего твердого тела, так как плоскости, которыми мы разбили твердое тело, друг с другом неизменно связаны и не могут двигаться друг по отношению к другу.

Если мы возьмем в какой-нибудь фигуре  $S'$  точку  $M'$  и восставим в ней перпендикуляр к плоскости фигуры  $S'$ , то точки  $M'$  и  $M''$  фигур  $S'$  и  $S''$ , лежащие на этом перпендикуляре, будут иметь одинаковое движение, т. е. будут описывать одинаковые траектории, иметь одинаковые скорости, одинаковые ускорения.

Таким образом, можно значительно упростить изучение плоского движения твердого тела — достаточно изучить движение одной плоской фигуры в ее плоскости.

Возьмем две системы осей в плоскости движения фигуры: одну систему  $Oxy$  — неподвижную, другую —  $O'x'y'$ , неизменно связанную с движущейся фигурой (рис. 143). Положение точки  $M$  фигуры в неподвижной плоскости будем определять вектором-радиусом  $r$ , проведенным из начала  $O$  неподвижной системы осей; выбор рассматриваемой точки фигуры определяется указанием вектора  $r'$ , проведенного из начала  $O'$  подвижной системы. Вектор-радиус начала  $O'$  относительно  $O$  обозначим через  $r_0$ . Проекциями вектора  $r$  на оси  $x$  и  $y$  будут декартовы координаты  $x$  и  $y$  в неподвижной системе осей; при движении фигуры координаты  $x$  и  $y$  изменяются со временем; в противоположность этому проекции вектора  $r'$  на подвижные оси, т. е. декартовы координаты  $x'$  и  $y'$  точки  $M$  в системе подвижных осей, остаются постоянными.

ными, как расстояния от точек твердой фигуры до проведенных на ней прямых.

Всякой точке фигуры соответствует определенная пара чисел  $x'$  и  $y'$ . В частности, точке  $O'$ , началу подвижной системы, соответствуют значения  $x'$  и  $y'$ , равные нулю; значения координат  $x$  и  $y$  для этой точки обозначим через  $x_0$  и  $y_0$  (проекции вектора  $r_0$ ).

Чтобы определить положение подвижной системы осей относительно неподвижной, достаточно задать:

- ✓ положение начала  $O'$ , т. е. координаты  $x_0$  и  $y_0$  или, что то же, вектора-радиуса  $r_0$ ;
- ✓ угол одной из подвижных осей с одной из неподвижных, например угол  $\varphi$  оси  $x$  с осью  $x'$ .

Последнее требует некоторого уточнения. Условимся считать, что перпендикулярная плоскости фигуры ось  $z$  направлена так, что оси  $xyz$  и  $x'y'z'$  составляют правые системы. Это определит положительное направление отсчета угла  $\varphi$ : смотря с конца оси  $z$  ( $z'$ ), наблюдатель должен видеть поворот оси  $x$  к оси  $x'$  происходящим против часовой стрелки. В изображенном на рисунке расположении осей ось  $z$  направлена к читателю.

Заданием трех величин  $x_0$ ,  $y_0$  и  $\varphi$  положение системы подвижных осей вполне определяется. Вместе с тем по этим данным определяется и положение плоской фигуры. Поэтому движение плоской фигуры следует считать известным, если в любой момент времени известны значения величин  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\varphi$  или, что то же самое, заданы значения их в функции времени.

Назовем начало  $O'$  подвижной системы *основной точкой* или *полюсом*; угол  $\varphi$  будет в таком случае *углом поворота* вокруг полюса.

Плоское движение твердого тела определяется:

- ✓ уравнениями движения основной точки

$$x_0 = f_1(t), \quad y_0 = f_2(t); \quad (14.1)$$

- ✓ уравнением вращения фигуры вокруг полюса

$$\varphi = \varphi(t). \quad (14.2)$$

Чтобы получить уравнения движения любой точки плоской фигуры, спроецируем на неподвижные оси  $x$  и  $y$  очевидное геометрическое равенство

$$r = r_0 + r'. \quad (14.3)$$

Получим (см. рис. 143)

$$\begin{aligned}x &= x_0 + x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\y &= y_0 + x' \sin \varphi + y' \cos \varphi.\end{aligned}\tag{14.4}$$

Здесь  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\varphi$  — заданные функции времени. Уравнения (14.4) представляют собой уравнения движения точки  $M$  или, что то же самое, параметрические уравнения ее траектории. Исключая из них время, получим уравнение траектории.

Поясним сказанное несколькими примерами, иллюстрирующими отмеченную в начале отдела связь кинематики с геометрией кривых, которые рассматриваются как траектории точек плоской фигуры.

**Пример 44. Эллипсограф.** Составить уравнение траектории любой точки  $M$  (рис. 144) плоской фигуры  $S$ , неизменно связанной с линейкой  $AB$  длиной  $2l$ , концы которой  $A$  и  $B$  скользят по двум взаимно-перпендикулярным осям  $Ox$  и  $Oy$ .

Примем за полюс середину линейки  $O'$  и обозначим через  $x'$  и  $y'$  координаты точки  $M$  в системе осей  $O'x'y'$ , неизменно связанной с движущейся плоской фигурой. Составим уравнения движения полюса:

$$x_0 = l \sin \varphi, \quad y_0 = l \cos \varphi.$$

Угол  $\varphi$  является некоторой функцией времени. Поскольку речь идет только об определении траектории, вид этой функциональной зависимости не имеет значения. Все точки фигуры  $S$  описывают вполне определенные траектории независимо от того, по какому закону изменяется во времени угол  $\varphi$ .

Уравнения (14.4) дают

$$\begin{aligned}x &= l \sin \varphi + x' \cos \varphi - y' \sin \varphi = (l - y') \sin \varphi + x' \cos \varphi, \\y &= l \cos \varphi + x' \sin \varphi + y' \cos \varphi = (l + y') \cos \varphi + x' \sin \varphi.\end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$ , получим

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \frac{x'y - (l + y')x}{x'^2 + y'^2 - l^2}, \\ \cos \varphi &= \frac{x'x - (l - y')y}{x'^2 + y'^2 - l^2}.\end{aligned}$$

Исключая теперь  $\varphi$  с помощью соотношения  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ , получим

$$\begin{aligned}[x'y - (l + y')x]^2 + [x'x - (l - y')y]^2 = \\ = (x'^2 + y'^2 - l^2)^2;\end{aligned}$$

это уравнение может быть приведено к виду

$$Ax^2 + By^2 - 2Cxy = D,$$

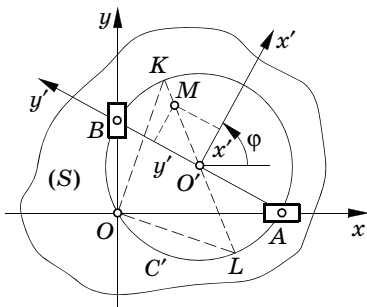


Рис. 144

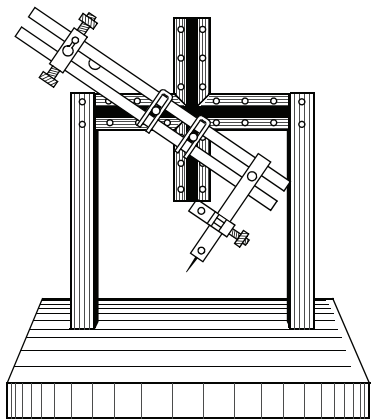


Рис. 145

где

$$\begin{aligned} A &= x'^2 + (l + y')^2, \\ B &= x'^2 + (l - y')^2, \\ C &= 2x'l, \\ D &= (x'^2 + y'^2 - l^2)^2. \end{aligned}$$

Полученная кривая второго порядка является *эллипсом*, так как коэффициенты  $A, B, C$  удовлетворяют условию

$$C^2 - AB = -(x'^2 + y'^2 - l^2)^2 < 0,$$

а это, как известно из аналитической геометрии, характеризует эллипс. Рассмотренный механизм поэтому называют *эллипсографом*, а движение — *эллиптическим*. Модель такого механизма показана на рис. 145.

Центр эллипса находится в начале координат, так как уравнение его не содержит членов первой степени относительно  $x$  и  $y$ .

Если, в частности, точка взята на линейке ( $x' = 0$ ), то уравнение эллипса перейдет в следующее:

$$(l + y')^2 x^2 + (l - y')^2 y^2 = (l^2 - y'^2)^2,$$

или по упрощении:

$$\frac{x^2}{(l - y')^2} + \frac{y^2}{(l + y')^2} = 1.$$

В этом частном случае осями симметрии эллипса являются координатные оси.

Рассмотрим другой частный случай, когда точка  $M$  лежит на окружности  $C'$  радиусом  $l$  с центром в  $O'$ . В этом случае  $x'$  и  $y'$  связаны уравнением окружности и, следовательно,

$$x'^2 + y'^2 = l^2,$$

$$A = x'^2 + y'^2 + l^2 + 2ly' = 2l(l + y'), \quad B = 2l(l - y'),$$

$$C = 2lx' = 2l\sqrt{l^2 - y'^2}, \quad D = 0.$$

Уравнение эллипса приобретает вид

$$(l + y') x^2 + (l - y') y^2 - 2\sqrt{l^2 - y'^2} xy = 0,$$

откуда получаем

$$(\sqrt{l + y'} x - \sqrt{l - y'} y)^2 = 0,$$

или

$$\frac{x}{\sqrt{l - y'}} = \frac{y}{\sqrt{l + y'}}.$$

Таким образом, точки, лежащие на круге  $C'$ , описывают отрезки прямых, проходящих через начало координат.

Этим свойством можно воспользоваться для построения осей эллипса, описываемого произвольной точкой  $M$ . Нужно через эту точку провести диаметр круга  $C'$ ; прямые  $OL$  и  $OK$ , проведенные через точку  $O$  и концы  $L$  и  $K$  этого диаметра, будут искомыми осями эллипса.

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что траекториями точек  $L$  и  $K$  являются прямые  $OL$  и  $OK$ , и, следовательно,  $LK$  можно рассматривать как линейку эллипсографа, скользящую вдоль двух взаимно-перпендикулярных прямых  $OL$  и  $OK$ .

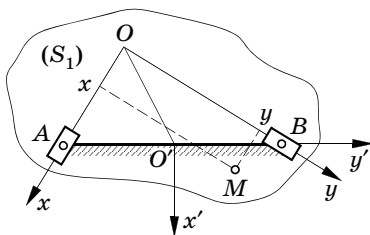


Рис. 146

**Пример 45. Обращенное эллиптическое движение.** Движение плоской фигуры  $S_1$  (рис. 146) происходит так, что связанные с этой фигурой две взаимно-перпендикулярные прямые  $Ox$  и  $Oy$  проходят через неподвижные точки  $A$  и  $B$  (это можно осуществить, заставляя стержни  $Ox$  и  $Oy$  проходить внутри направляющих трубочек, вращающихся вокруг осей  $A$  и  $B$ ). Определим траектории любой точки фигуры  $S_1$  на неподвижной плоскости  $O'x'y'$ .

Вернемся к предыдущему примеру. Любая точка движущейся плоскости  $x'O'y'$ , связанной с линейкой эллипсографа, описывает эллипс: карандаш, неизменно связанный с ней ( $x'$  и  $y'$  — постоянные), вычертит эллипс на листе бумаги, скрепленном с плоскостью  $xOy$ . Представим себе теперь, что карандаш неизменно связан с плоскостью  $xOy$  ( $x$  и  $y$  — постоянные), а лист бумаги скреплен с плоскостью  $x'O'y'$ . При этом осуществляется *обращенное эллиптическое движение*, рассматриваемое в настоящей задаче.

Уравнения предыдущего примера, устанавливающие связь между координатами точки  $M$  в системах  $xOy$  и  $x'O'y'$ , очевидно, имеют место и в рассматриваемом случае, так как геометрическая картина рис. 146 ничем не отличается от той, которая была раньше на рис. 144. Разница лишь в том, что прежде  $x'$  и  $y'$  были постоянными, а  $x$  и  $y$  переменными координатами, в обращенном же движении постоянными будут  $x$  и  $y$ , а переменными  $x'$  и  $y'$ . Уравнение траектории в обращенном движении представляется, как и в предыдущем примере, в форме

$$[yx' - x(l + y')]^2 + (xx' - y(l - y'))^2 = (x'^2 + y'^2 - l^2)^2,$$

однако теперь  $x'$  и  $y'$  — текущие координаты, а  $x$  и  $y$  — постоянные числа. Полученное уравнение алгебраической кривой четвертого порядка

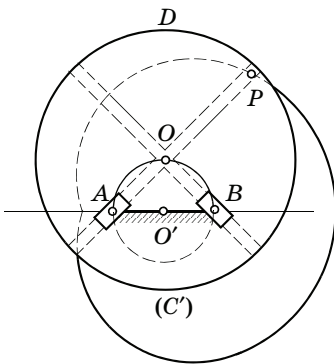


Рис. 147

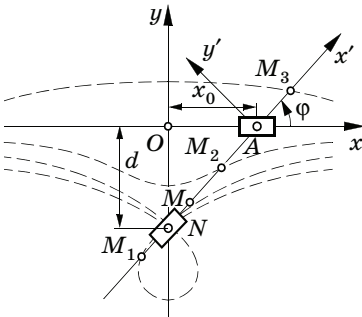


Рис. 148

представляет собой *конхоиду круга*\*. В частном случае  $x = y = 0$  уравнение упрощается и принимает вид

$$x'^2 + y'^2 = l^2,$$

т. е. вершина прямого угла  $O$  (начало координат) описывает окружность, что, впрочем, было непосредственно ясно геометрически. Для построения конхоиды круга можно использовать следующий механизм. В точках  $A$  и  $B$  (рис. 147), находящихся на неподвижном устое, помещены два поворачивающихся ползуна. На них надет диск  $D$  с крестообразной прорезью, в которой ползуны могут скользить. Точка  $O$ , т. е. центр диска, описывает окружность радиусом  $OO' = l$ , а точка  $P$  на кресте — конхоиду круга. Если прикрепить к диску лист материала и поднести к нему во время движения неподвижный резец, то он вырежет из материала эллипс. В самом деле, резец, будучи неподвижен, принадлежит устою, т. е. линейке  $AB$ . Следовательно, по отношению к движущемуся диску  $D$  резец выполняет ранее рассмотренное эллиптическое движение.

Пример иллюстрирует принцип обращения механизмов, имеющий много приложений в кинематике механизмов.

**Пример 46. Конхоидограф.** Определим траекторию точки  $M$  ( $AM = d$ ) стержня  $AM$  (рис. 148), проходящего через трубку, вращающуюся вокруг неподвижной оси  $N$  ( $ON = d$ ). Конец  $A$  стержня скользит вдоль неподвижной прямой  $Ox$ .

Примем точку  $A$  за полюс. Его уравнения движения будут иметь вид

$$OA = x_0 = f(t), \quad y_0 = 0,$$

причем, поскольку речь идет только об определении траектории, вид функциональной зависимости  $x_0$  от  $t$  не играет роли. Уравнение вращения получим, замечая, что  $\operatorname{tg} \varphi = d/x_0$ .

\* Если радиусы-векторы плоской кривой относительно некоторой точки увеличить (или уменьшить) на одну и ту же величину, то геометрическое место концов полученных радиусов-векторов представит *конхоиду* данной кривой относительно выбранной точки.

Из формул (14.4) следует ( $x' = -d, y' = 0$ ):

$$x = x_0 - d \cos \varphi, \quad y = -d \sin \varphi.$$

Исключим из этих уравнений  $\varphi$  и  $x_0$ . Получим

$$x = d(\operatorname{ctg} \varphi - \cos \varphi) = -d \left( 1 + \frac{d}{y} \right) \cos \varphi, \quad \cos \varphi = -\frac{xy}{d(d+y)}.$$

Пользуясь соотношением  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ , найдем

$$x^2 y^2 + y^2 (y + d)^2 = d^2 (y + d)^2,$$

или

$$x^2 y^2 = (d^2 - y^2)(d + y)^2.$$

Это — уравнение конхоиды прямой; легко построить кривую по точкам, вычерчивая ряд положений прямой  $AM$ . На рис. 148 показаны конхоиды, соответствующие траекториям различных точек линейки:  $M, M_1, M_2, M_3$ . При  $AM = d$  кривая имеет угловую точку, при  $AM_1 > d$  — петлю, при  $AM_2 < d$  кривая не имеет особых точек, так же как и в том случае, когда точка  $M_3$  расположена по другую сторону от ползуна  $A$ .

### § 54. Перемещение плоской фигуры

Положение плоской фигуры может быть задано положением двух ее точек  $O'$  и  $M$  или положением отрезка  $O'M$  (рис. 149).

Пусть фигура  $O'M$  переместилась из положения I в положение II. Разобьем переход на две части. Сначала переместим фигуру поступательно в положение  $I'$ , причем все точки ее получают перемещения, геометрически равные перемещению  $\vec{OO}_1$  полюса  $O'$ , а затем повернем фигуру на  $\angle M'O_1M_1$  вокруг оси, проходящей через точку  $O_1$  перпендикулярно плоскости фигуры.

Заметим, что вектор поступательного перемещения зависит от выбора полюса (основной точки), а угол поворота не зависит от этого выбора. В самом деле, тот же переход из положения I в положение II можно осуществить, приняв за полюс точку  $M$  и пере-

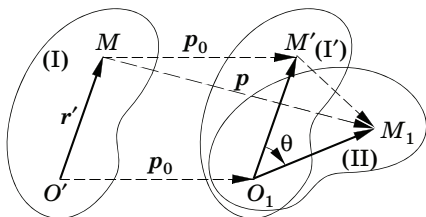


Рис. 149

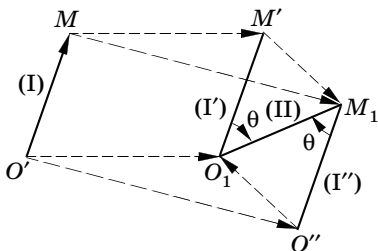


Рис. 150



местив сначала фигуру в положение I'' (рис. 150), причем все точки фигуры получают перемещения, геометрически равные  $\overrightarrow{MM_1}$  и отличные от  $\overrightarrow{OO_1}$ , а затем повернув фигуру на  $\angle O''M_1O_1$  вокруг оси, проходящей через  $M_1$ . Но по свойству поступательного перемещения  $\overrightarrow{O''M_1}$  параллелен  $\overrightarrow{O'M}$  и точно так же  $\overrightarrow{O_1M'}$  параллелен  $\overrightarrow{O'M}$ . Следовательно,  $\overrightarrow{O''M_1}$  и  $\overrightarrow{O_1M'}$  параллельны между собой и  $\angle O''M_1O_1 = \angle M'O_1M_1$ . Вместе с тем поворот вокруг точек  $O_1$  и  $M_1$  в том и другом случае происходит в одну и ту же сторону (на нашем рисунке по часовой стрелке). Окончательное положение фигуры не зависит от того, будет ли сначала совершаться поступательное перемещение или поворот.

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

**ТЕОРЕМА.** *Всякое перемещение плоской фигуры в своей плоскости, а следовательно, и всякое плоское перемещение твердого тела можно себе представить как совокупность двух перемещений: поступательного перемещения, зависящего от выбора полюса, и вращательного перемещения вокруг полюса; угол и направление поворота от выбора полюса не зависят.*

Теорема доказана для любого конечного перемещения. Для частного случая бесконечно малого перемещения дадим векторную формулу. Для этого, возвращаясь к рис. 149, обозначим перемещение полюса  $O'$  через  $p_0$ , а перемещение точки  $M$  через  $p$ ; тогда

$$p = p_0 + \overrightarrow{M'M_1}. \quad (14.5)$$

Здесь  $\overrightarrow{M'M_1}$  представляет собой перемещение точки  $M$  при повороте фигуры вокруг полюса. Обозначая угол поворота через  $\theta$ , будем иметь из треугольника  $O_1M_1M'$

$$M'M_1 = O_1M' \cdot 2 \sin(\theta/2).$$

Принимая поворот бесконечно малым, можно заменить синус его аргументом; тогда величина вектора  $\overrightarrow{M'M_1}$  будет равна

$$M'M_1 = O_1M' \cdot \theta = r'\theta.$$

Чтобы указать направление вектора  $\overrightarrow{M'M_1}$ , введем в рассмотрение вектор-радиус  $r'$  точки  $M$  относительно полюса и вектор бесконечно малого поворота  $\Theta$ , определив последний следующим образом:

✓ величина вектора поворота равна величине угла поворота,

- ✓ вектор  $\Theta$  перпендикулярен плоскости перемещения, причем направлен в ту сторону, откуда поворот фигуры виден происходящим в положительном направлении.

Введя вектор  $\Theta$ , можем представить  $\overrightarrow{M'M_1}$  в виде

$$\overrightarrow{M'M_1} = \Theta \times r'.$$

Действительно, это векторное произведение имеет величину

$$\theta r' \sin(\widehat{\Theta, r'}) = \theta r'$$

и в предельном случае бесконечно малого перемещения направлено так же, как и  $\overrightarrow{M'M_1}$  (т. е. перпендикулярно  $r'$  в сторону поворота фигуры).

Формула (14.5) дает

$$p = p_0 + \Theta \times r'. \quad (14.6)$$

Естественно возникает вопрос, нельзя ли, используя произвольность в выборе полюса, осуществить заданное перемещение тела *одним* поворотом, без поступательного перемещения.

На этот вопрос дает ответ следующая теорема\*.

**ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА.** *Всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в ее плоскости может быть осуществлено одним поворотом вокруг некоторого центра.*

Пусть фигура переместилась из положения I в положение II (рис. 151).

Восставим из середин перемещений точек A и B, т. е. из середин отрезков AA' и BB', перпендикуляры и найдем пересечение их в точке C.

Докажем, что фигура I может быть переведена в положение II поворотом вокруг центра C на  $\angle ACA' = \angle BCB'$ . В самом деле, треугольники ABC и A'CB' равны между собой, так как  $AB = A'B'$  в силу неизменяемости фигуры и  $AC = A'C$ ,  $BC = B'C$  по построению. Следовательно,

$$\angle ACB = \angle A'CB';$$

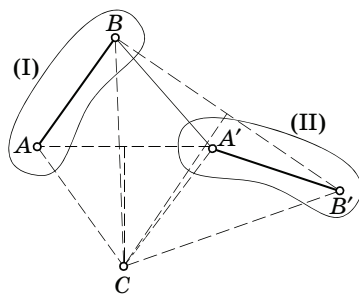


Рис. 151

\* Эта теорема была известна Паппу; о нем см. с. 112.

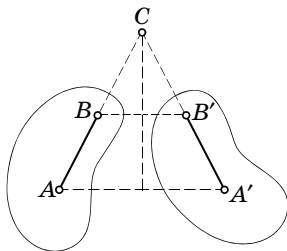


Рис. 152

прибавляя к обеим частям этого равенства по одинаковому углу  $BCA'$ , найдем, что

$$\angle ACA' = \angle BCB'.$$

Повернем теперь фигуру I на угол  $ACA'$ , тогда  $AC$  совместится с  $A'C$ ,  $BC$  — с  $B'C$ , так как углы равны, и  $AB$  совместится с  $A'B'$ , что и доказывает теорему. Точка  $C$  называется *центром поворота*.

Только что указанное построение не дает результата в двух случаях:

- ✓ если перпендикуляры, восстановленные из середин перемещений, сливаются в одну линию (рис. 152), но в этом случае центр поворота лежит на пересечении продолжений отрезков  $AB$  и  $A'B'$ ;
- ✓ если перпендикуляры параллельны между собой, что имеет место при *поступательном* перемещении; этот случай соответствует положению центра поворота в бесконечном удалении.

## § 55. Поле скоростей точек плоской фигуры

Основываясь на формуле плоского перемещения и определении скорости как предела при  $\Delta t \rightarrow 0$  отношения бесконечно малого перемещения  $p$  к промежутку времени  $\Delta t$ , в течение которого это перемещение произошло (§ 42):

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p}{\Delta t}, \quad (14.7)$$

получим по (14.6)

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_0}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Theta}{\Delta t} \times r' \right). \quad (14.8)$$

Первое слагаемое,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_0}{\Delta t}$  представляет собой скорость основной точки:

$$v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_0}{\Delta t}. \quad (14.9)$$

Вектор  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Theta}{\Delta t}$  назовем вектором *угловой скорости вращения* фигуры:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Theta}{\Delta t}. \quad (14.10)$$

Направление  $\omega$  совпадает с направлением  $\Theta$ ; поэтому вектор  $\omega$  перпендикулярен плоскости движения, и если смотреть вдоль него, то вращение фигуры должно представиться происходящим в положительном направлении. Величина  $\omega$  равна абсолютному значению производной угла поворота  $\varphi$  по времени. Действительно, если назвать значения угла  $\varphi$  в моменты  $t$  и  $t + \Delta t$  соответственно через  $\varphi$  и  $\varphi + \Delta\varphi$ , то  $\theta = |\Delta\varphi|$  и, следовательно,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\varphi|}{\Delta t} = |\dot{\varphi}|.$$

Как и выше, в тех случаях, когда возможны недоразумения, будем отличать  $\omega = |\dot{\varphi}|$  от  $\tilde{\omega} = \dot{\varphi}$ .

Отметим еще, что вектор угловой скорости  $\omega$  не изменяется при перемене полюса, так как  $\Theta$  от выбора полюса не зависит. Это дало право назвать  $\omega$  вектором угловой скорости *фигуры*.

Вернемся к формуле (14.8). Подставляя вместо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_0}{\Delta t}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Theta}{\Delta t}$$

их значения (14.9) и (14.10), получим *поле скоростей точек в плоском движении фигуры*

$$v = v_0 + \omega \times r'. \quad (14.11)$$

Рассмотрим два частных случая.

■ **Поступательное движение:**  $\omega = 0$ ; формула (14.11) дает

$$v = v_0,$$

т. е. скорости всех точек одинаковы и равны скорости полюса.

■ **Вращение вокруг неподвижной оси:**  $v_0 = 0$ ; получаем

$$v = \omega \times r',$$

т. е. уже известный нам закон распределения скоростей при вращении тела вокруг неподвижной оси.

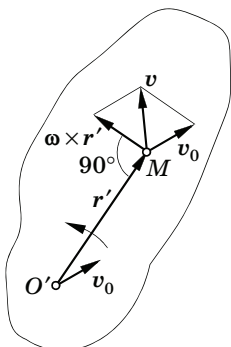


Рис. 153

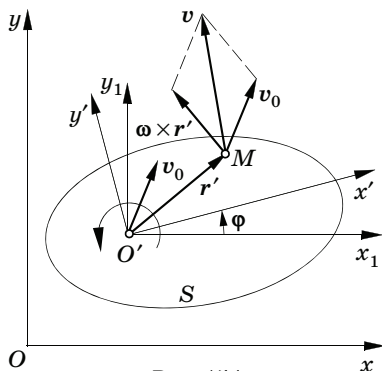


Рис. 154

В общем случае *плоского движения* тела (рис. 153) скорость любой точки складывается из скорости, которую имели бы все точки тела при поступательном движении тела со скоростью  $v_0$  полюса  $O'$ , и вращательной скорости  $\omega \times r'$  точки  $M$  вокруг полюса  $O'$ .

Говоря о *вращении тела* вокруг какой-либо точки, необходимо указать систему отсчета, по отношению к которой вращение рассматривается. С этой целью соединим с полюсом  $O'$  (рис. 154) систему координат  $O'x_1y_1$ , оси которой во время движения остаются параллельными осям неподвижной системы координат  $Oxy$ . Движение системы координат  $O'x_1y_1$  будет поступательным, определяемым движением полюса  $O'$ . Эта система и является системой отсчета, относительно которой рассматривается вращение тела вокруг полюса  $O'$ .

Назовем движение плоской фигуры по отношению к неподвижной системе  $Oxy$  *абсолютным движением*, движение той же фигуры по отношению к подвижной системе  $O'x_1y_1$  — *относительным движением* и, наконец, поступательное движение самой системы координат  $O'x_1y_1$  по отношению к неподвижной системе  $Oxy$  — *переносным движением*\*.

Пользуясь понятиями абсолютного, переносного и относительного движения, можно сказать, что абсолютное движение плоской фигуры складывается из переносного — поступательного, определяемого движением полюса, и относительного — вращательного движения вокруг полюса. При этом вращательная ско-

\* Эта терминология заимствована из теории относительного движения, которая будет изложена в гл. XVII.

рость точки  $M$  плоской фигуры есть не что иное, как относительная скорость точки по отношению к системе координат  $O'x_1y_1$ , а поступательная скорость  $v_0$ , общая всем точкам системы  $O'x'y'$ , — переносная скорость.

Отметим важное следствие формулы (14.11). Дифференцируя по времени уравнение (14.3), получим

$$v = \frac{dr_0}{dt} + \frac{dr'}{dt};$$

но первое слагаемое представляет собой скорость полюса и, следовательно,

$$\frac{dr'}{dt} = v - v_0 = \omega \times r', \tag{14.12}$$

т. е. вращательная скорость вокруг полюса равна производной вектора-радиуса  $r'$  по времени.

В дальнейшем будем часто пользоваться другими обозначениями — вектор скорости будем снабжать индексом внизу, указывающим точку, скорость которой рассматривается; например,  $v_A, v_B$  и т. д. будут обозначать скорости точек  $A, B$  и т. д. Вектор-радиус точки  $B$ , если за начало его принята точка  $A$ , будем обозначать  $r'_{AB}$ ; наконец, вращательную скорость точки  $B$ , когда за полюс принята точка  $A$ , обозначим через  $v_{AB}$ .

Формула распределения скоростей примет при этом вид (рис. 155)

$$v_B = v_A + v_{AB}, \tag{14.11'}$$

причем

$$v_{AB} = \omega \times r'_{AB},$$

т. е. вращательная скорость  $v_{AB}$  равна по величине  $\omega \cdot AB$  и направлена перпендикулярно  $AB$  в сторону вращения фигуры.

Составим формулы для проекций скорости точек плоской фигуры. Проецируя обе части основной формулы (14.11) на неподвижные оси  $Ox$  и  $Oy$ , найдем по формулам для проекций векторного произведения

$$v_x = v_{0x} - \tilde{\omega} (y - y_0), \quad v_y = v_{0y} + \tilde{\omega} (x - x_0), \tag{14.13}$$

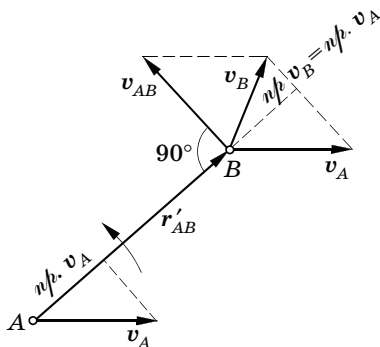


Рис. 155

так как проекции  $r'$  на оси  $Ox$  и  $Oy$  в данном случае равны  $x - x_0$  и  $y - y_0$ , а вектор угловой скорости имеет проекции  $(0, 0, \tilde{\omega})$ .

Если движение плоской фигуры известно, т. е.  $x_0, y_0, \phi$  заданы в функции времени, то по этим заданиям вычисляются

$$v_{0x} = \dot{x}_0, \quad v_{0y} = \dot{y}_0, \quad \tilde{\omega} = \dot{\phi},$$

и скорость любой точки может быть определена по формулам (14.13) и (14.4). Проекции скорости на оси подвижной системы  $O'x'y'$  получим, проецируя равенство (14.11) на оси этой системы:

$$\begin{aligned} v_{x'} &= v_{0x'} - \tilde{\omega}y' = v_{0x} \cos \phi + v_{0y} \sin \phi - \tilde{\omega}y', \\ v_{y'} &= v_{0y'} + \tilde{\omega}x' = -v_{0x} \sin \phi + v_{0y} \cos \phi + \tilde{\omega}x'. \end{aligned} \quad (14.14)$$

В заключение укажем на одну часто применяемую теорему.

**ТЕОРЕМА.** *Проекции скоростей концов отрезка на направление отрезка равны между собой.*

По формуле (14.11') будем иметь, проецируя обе ее части на направление отрезка  $AB$ :

$$n_{\phi \cdot AB} v_B = n_{\phi \cdot AB} v_A + n_{\phi \cdot AB} v_{AB};$$

но вектор  $v_{AB}$  перпендикулярен направлению отрезка  $AB$ , следовательно,  $n_{\phi \cdot} v_{AB} = 0$ , и окончательно получим (рис. 155)

$$n_{\phi \cdot AB} v_B = n_{\phi \cdot} v_A,$$

что и доказывает теорему.

## § 56. Мгновенный центр скоростей

В предыдущем параграфе формула распределения скоростей в плоском движении была получена из представления о перемещении точки плоской фигуры в виде геометрической суммы перемещения полюса и перемещения поворота вокруг полюса. Упрощение картины распределения скоростей в плоском движении можно получить, основываясь на представлении перемещения плоской фигуры по теореме Эйлера (§ 54).

Докажем следующую теорему.

**ТЕОРЕМА.** *При всяком непоступательном движении плоской фигуры существует точка фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю.*

Для доказательства (рис. 156) восставим из точки  $A$  плоской фигуры перпендикуляр  $AN$  к направлению скорости  $v_A$  так, чтобы угол  $\pi/2$  между  $v_A$  и линией  $AN$  был отсчитан в сторону вращения фигуры. Тогда по предыдущему вектор скорости любой точки  $M$  на этом перпендикуляре будет равен

$$v_M = v_A + \omega \times \overrightarrow{AM} = v_A + v_{AM},$$

а величина скорости

$$v_M = v_A - \omega \cdot AM.$$

Изменяя расстояние от точки  $M$  до точки  $A$ , можно при  $\omega \neq 0$  найти такую точку  $P$ , чтобы  $v_{AP} = -v_A$ ; тогда

$$AP = \frac{v_A}{\omega};$$

при этом будем иметь

$$v_P = v_A - \omega \cdot AP = v_A - \omega \cdot \frac{v_A}{\omega} = 0.$$

Точка  $P$  плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю, называется *мгновенным центром скоростей* фигуры.

Для любых точек фигуры будем иметь, принимая  $P$  за полюс ( $v_P = 0$ ):

$$v_A = v_P + \omega \times \overrightarrow{PA} = \omega \times \overrightarrow{PA},$$

$$v_B = v_P + \omega \times \overrightarrow{PB} = \omega \times \overrightarrow{PB}.$$

Скорости точек плоской фигуры можно рассматривать как вращательные скорости их вокруг мгновенного центра скоростей, а сам мгновенный центр — как мгновенный центр вращения плоской фигуры.

Отсюда можно сделать следующий общий вывод: поле скоростей в фигуре, совершающей плоское движение, в каждый момент таково, как будто фигура вращается вокруг неподвижного мгновенного центра. При этом скорость любой точки плоской фигуры перпендикулярна вектору-радиусу, соединяющему эту точку с мгновенным центром, и направлена в сторону вращения фигуры,

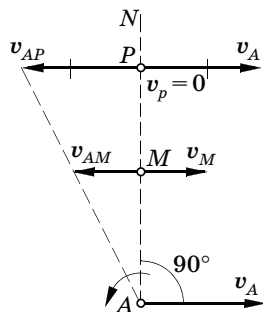


Рис. 156



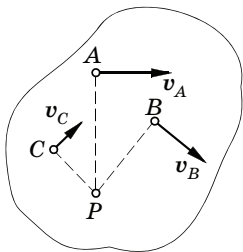


Рис. 157

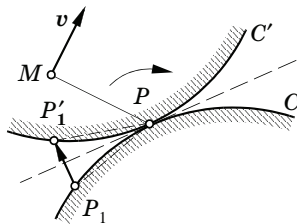


Рис. 158

а по величине пропорциональна расстоянию от точки до мгновенного центра (рис. 157).

В отличие от рассмотренного ранее случая вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, где ось вращения была жестко связана с вращающимся телом и сохраняла одно и то же положение в неподвижном пространстве, относительно которого вращение происходило, в плоском движении мгновенный центр в каждый новый момент времени занимает другое положение как в движущейся фигуре, так и в неподвижной плоскости.

Рассмотрим качение без скольжения жесткого контура  $C'$  по неподвижному жесткому контуру  $C$  (рис. 158); будем понимать под этим такое движение, при котором контуры соприкасаются только в одной точке, а длины дуг, проходимых точкой соприкосновения по обоим контурам, равны между собой:  $\check{P}P_1 = \check{P}P'_1$ .

Докажем, что точка  $P$  соприкосновения контуров служит *мгновенным центром* движения фигуры, связанной с подвижным контуром  $C'$ , т. е. что скорость той точки фигуры  $P$ , которая в данный момент совпадает с точкой соприкосновения контуров, равна нулю. С этой целью вблизи точки соприкосновения  $P$  возьмем на контурах точки  $P_1$  и  $P'_1$ , служившие некоторое малое время  $\Delta t$  тому назад общей точкой  $P_1$  соприкосновения контуров. За время  $\Delta t$  точка  $P'_1$  совершила перемещение  $\overrightarrow{PP'_1}$ . По определению качения без скольжения малый треугольник  $P_1PP'_1$  будет равнобедренным, так как его стороны  $PP_1$  и  $PP'_1$  на малые высших порядков отличаются от равных между собой дуг  $\check{P}P_1$  и  $\check{P}P'_1$ . Отсюда следует, что отрезок  $P_1P'_1$  перпендикулярен общей касательной к кривым в точке  $P$  и представляет собой, таким образом, расстояние между двумя смежными с точкой касания точками кривых. Это расстояние, как известно, является малой величиной второго или более высокого порядка (в зависимости от поряд-

ка соприкосновения кривых) по сравнению с малой величиной дуги кривой, так что

$$\lim_{P_1 \rightarrow P} \frac{P_1 P'_1}{PP_1} = 0.$$

Заметим теперь, что скорость точки  $P$  подвижного контура  $C'$  может быть определена как предел

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ P_1 \rightarrow P}} \frac{P_1 P'_1}{\Delta t} = \lim_{P_1 \rightarrow P} \frac{P_1 P'_1}{PP_1} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{PP_1}{\Delta t};$$

первый предел в правой части равен нулю, а второй представляет собой конечную величину, равную скорости движения точки соприкосновения по контурам. Таким образом, скорость точки  $P$  действительно равна нулю, т. е. эта точка фигуры, связанной с контуром  $C'$ , служит мгновенным центром скоростей. Все остальные точки фигуры  $C'$  в данный момент времени имеют скорости, соответствующие вращению этих точек вокруг мгновенного центра. При движении фигуры все новые и новые точки контура  $C'$  будут приходить в соприкосновение с контуром  $C$ , причем это соприкосновение будет происходить в точке, перемещающейся по контуру  $C$ . Таким образом, *мгновенный центр* занимает *различные положения в движущейся фигуре и на неподвижной плоскости*.

Если известны направления скоростей двух каких-нибудь точек фигуры в данный момент, то, восставляя в этих точках перпендикуляры к направлениям скоростей, в пересечении найдем искомый мгновенный центр. Указанное построение следует из ранее отмеченного свойства мгновенного центра скоростей быть центром мгновенного вращения плоской фигуры (рис. 154).

Пользуясь понятием мгновенного центра, легко получить решение такой задачи: по заданной величине и направлению скорости одной точки фигуры и по направлению скорости другой ее точки найти распределение скоростей в движущейся фигуре. К этой задаче часто сводится вопрос об исследовании скоростей точек звеньев механизма.

Пусть  $v_A$  — известная по величине и направлению скорость точки  $A$  (рис. 159),  $MBM_1$  — линия, вдоль которой направлена скорость точки  $B$ . Мгновенный центр, как было указано, должен лежать на пересечении перпендикуляров к  $v_A$  и  $MM_1$ , проведенных через точки  $A$  и  $B$ . Предполагая, что эти перпендикуляры пересекаются, найдем положение

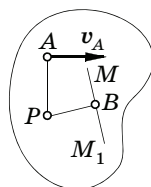


Рис. 159

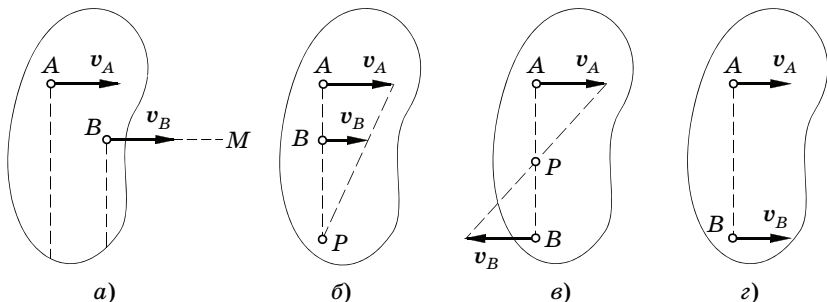


Рис. 160

мгновенного центра. Чтобы найти распределение скоростей, нужно знать еще величину угловой скорости и направление вращения. Последнее определяется по заданному направлению скорости  $v_A$ ; что же касается величины  $\omega$ , то, зная  $v_A$ , находим  $\omega = v_A/AP$ . После этого уже не составляет труда определить скорости других точек плоской фигуры.

Рассмотрим некоторые частные случаи этой задачи, когда указанный способ определения скоростей не приводит к цели.

В том случае, когда скорость  $v_A$  параллельна линии  $BM$ , причем точка  $B$  не лежит на перпендикуляре, проведенном через  $A$  к  $v_A$  (рис. 160, а), вышеуказанные перпендикуляры не пересекаются, т. е. мгновенного центра скоростей в данный момент не существует ( $AP = \infty$ ) и вращения отсутствует. Распределение скоростей в этот момент такое же, как если бы фигура совершала поступательное движение. В этом случае движение называется *мгновенно-поступательным*; скорости всех точек фигуры в рассматриваемый момент одинаковы.

Возможен еще случай, когда вектор  $v_A$  параллелен  $BM$ , причем точка  $B$  лежит на перпендикуляре, проведенном к  $v_A$  через точку  $A$  (рис. 160, б). Имеющихся данных в этом случае недостаточно для определения распределения скоростей. Необходимо знать скорость  $v_B$  точки  $B$  не только по направлению, но и по величине. Положение мгновенного центра и угловая скорость фигуры определяются из условий

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB} = \omega, \quad PA \mp PB = AB, \quad (14.15)$$

причем верхний знак соответствует одинаковому направлению скоростей  $v_A$  и  $v_B$  (рис. 160, б), а нижний — противоположному

(рис. 160, в). Из равенств (14.15) следует, что геометрическим местом концов векторов скоростей точек прямой  $AB$  является прямая, соединяющая конец вектора  $v_A$  с мгновенным центром скоростей  $P$ .

Наконец, если в рассматриваемом случае  $v_A = v_B$ , то опять имеем мгновенное поступательное движение фигуры (рис. 160, г).

Найдем *координаты мгновенного центра скоростей*. Для этой цели воспользуемся формулами (14.13) и, подставив в правые части вместо  $x$  и  $y$  координаты мгновенного центра  $x_P$  и  $y_P$ , приравняем левые части нулю, так как скорость той точки фигуры, которая в данный момент времени играет роль мгновенного центра, равна нулю. Будем иметь уравнения

$$v_{0x} - \tilde{\omega}(y_P - y_0) = 0, \quad v_{0y} + \tilde{\omega}(x_P - x_0) = 0,$$

откуда найдем

$$x_P = x_0 - v_{0y}/\tilde{\omega}, \quad y_P = y_0 + v_{0x}/\tilde{\omega}. \quad (14.16)$$

Аналогично по (14.14) найдем координаты  $x'_P$  и  $y'_P$  мгновенного центра в подвижной системе:

$$\begin{aligned} x'_P &= \frac{1}{\tilde{\omega}}(v_{0x} \sin \varphi - v_{0y} \cos \varphi), \\ y'_P &= \frac{1}{\tilde{\omega}}(v_{0x} \cos \varphi + v_{0y} \sin \varphi). \end{aligned} \quad (14.16')$$

В заданном плоском движении  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\varphi$ , а следовательно, и их производные  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$ ,  $\tilde{\omega}$  суть известные функции времени. Иными словами, уравнения (14.16) и (14.16') определяют координаты мгновенного центра в любой момент времени.

К этим же результатам можно прийти также, решая векторное уравнение

$$v_P = v_0 + \omega \times r'_P = 0.$$

Умножая обе части векторно на  $\omega$ , получим

$$\omega \times v_0 + \omega \times (\omega \times r'_P) = 0, \quad (14.17)$$

или, раскрывая двойное векторное произведение по известному правилу векторной алгебры:

$$\omega \times (\omega \times r'_P) = \omega(\omega \cdot r'_P) - r'_P(\omega \cdot \omega),$$

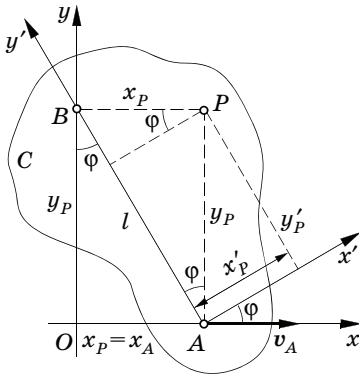


Рис. 161

и замечая, что вследствие перпендикулярности векторов  $\omega$  и  $r'_P$

$$\omega \cdot r'_P = 0,$$

получаем

$$\omega \times (\omega \times r'_P) = -\omega^2 r'_P.$$

После подстановки в (14.17) найдем вектор-радиус мгновенного центра в *подвижной* плоскости:

$$r'_P = \frac{\omega \times v_0}{\omega^2}. \quad (14.18)$$

В *неподвижной* плоскости будем иметь

$$r_P = r_0 + r'_P = r_0 + \frac{\omega \times v_0}{\omega^2}. \quad (14.18')$$

Проецируя векторные равенства (14.18') и (14.18) на оси координат, получим вышеприведенные формулы (14.16) и (14.16').

В качестве примера рассмотрим эллиптическое движение плоской фигуры (рис. 161), при котором две точки фигуры  $A$  и  $B$ , находящиеся на расстоянии  $AB = l$  друг от друга, движутся по двум взаимно-перпендикулярным осям  $Ox$  и  $Oy$ . Выбрав за полюс фигуры точку  $A$  и обозначив ее скорость через  $v_A$ , найдем

$$x_A = l \sin \varphi, \quad y_A = 0,$$

$$v_{Ax} = \dot{x}_A = l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = l \cos \varphi \cdot \tilde{\omega}, \quad v_{Ay} = 0,$$

откуда по формулам (14.16) найдем координаты мгновенного центра в неподвижной системе координат:

$$x_P = x_A = OA, \quad y_P = \frac{1}{\tilde{\omega}} v_{Ax} = l \cos \varphi = OB,$$

а по формулам (14.16') — в подвижной:

$$x'_P = \frac{1}{\tilde{\omega}} v_{Ax} \sin \varphi = l \sin \varphi \cos \varphi, \quad y'_P = \frac{1}{\tilde{\omega}} v_{Ax} \cos \varphi = l \cos^2 \varphi.$$

Положение мгновенного центра можно было бы определить и чисто геометрически, восставив в точках  $A$  и  $B$  перпендикуляры к направлениям движения этих точек.

**Пример 47.** Найдём скорость любой точки окружности колеса, катящегося без скольжения по неподвижному рельсу, по заданной скорости  $v_0$  центра колеса (рис. 162).

Обозначим через  $a$  радиус колеса. Так как колесо катится без скольжения, то мгновенный центр находится в точке соприкосновения  $P$  колеса с рельсом; получаем  $\omega = v_0/a$ . Скорость любой точки  $M$  на окружности колеса перпендикулярна  $PM$  и, следовательно, проходит через противоположной точке  $N$  конца диаметра колеса. Ее величина будет равна

$$v_M = \omega \cdot PM = 2a \cos \varphi \cdot \frac{v_0}{a} = 2v_0 \cos \varphi.$$

Из всех точек колеса наибольшую скорость имеет точка  $N$ .

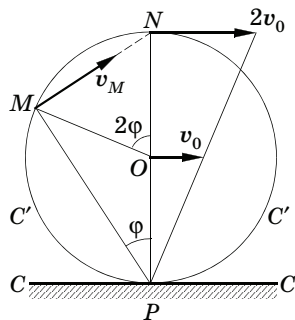


Рис. 162

**Пример 48.** Конец  $A$  линейки эллипсографа движется со скоростью  $v_A$  в отрицательную сторону оси  $x$ . Определим скорость конца  $B$  и угловую скорость линейки  $AB = l$  (рис. 163).

По теореме о проекциях скоростей концов отрезка для скоростей точек  $A$  и  $B$  линейки  $AB$  находим  $v_A \cos \varphi = v_B \sin \varphi$ , т. е.

$$v_B = v_A \operatorname{ctg} \varphi.$$

Далее, имеем  $v_{AB} = \omega l = v_A / \sin \varphi$ , т. е.

$$\omega = v_A / (l \sin \varphi).$$

Те же результаты легко получить путем построения мгновенного центра линейки  $P$ .

**Пример 49.** Найдём мгновенный центр и угловую скорость шатуна, а также линейную скорость ползуна кривошипно-ползунного механизма по заданной угловой скорости вращения кривошипа  $\omega$  и радиусу кривошипа  $OA = a$  (рис. 164).

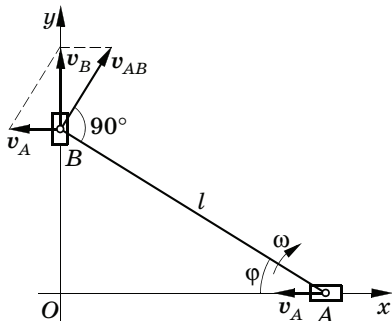


Рис. 163

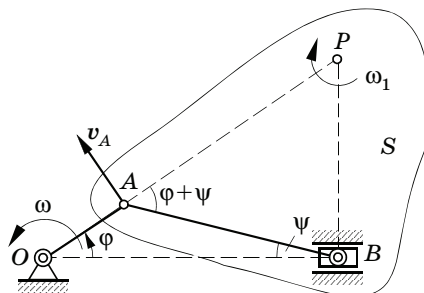


Рис. 164

Представим себе, что с шатуном  $AB$  неизменно связана плоская фигура  $S$ . Скорость точки  $A$  по величине равна  $v_A = \omega \cdot OA$  и направлена перпендикулярно  $OA$ . Скорость точки  $B$  направлена по прямой  $OB$ . Мгновенный центр  $P$  находим на пересечении перпендикуляров к скоростям, т. е. на пересечении перпендикуляра  $BP$  к  $OB$  и продолжения радиуса  $OA$ . Угловую скорость шатуна найдем по формуле

$$\omega_1 = \frac{v_A}{AP} = \frac{\omega \cdot OA}{AP}.$$

При движении механизма мгновенный центр  $P$ , как видно из построения, перемещается, занимая различные положения в плоскости  $S$  и на неподвижной плоскости. В частности, при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ , т. е. в мертвых положениях механизма,  $P$  совпадает с точкой  $B$ , как это и должно быть, так как при переходе через мертвое положение ползун имеет скорость, равную нулю. В эти моменты скорость любой точки шатуна пропорциональна расстоянию от нее до ползуна. При  $\varphi = \pi/2$  скорость  $v_A$  параллельна  $v_B$  и движение шатуна мгновенно-поступательное: все точки его имеют одинаковые скорости, равные скорости точки  $A$ .

Определим еще скорость ползуна  $B$  в функции угла  $\varphi$ . Имеем

$$v_B = \omega_1 \cdot PB = \omega \frac{OA}{AP} \cdot PB = v_A \frac{PB}{AP}.$$

Обращаясь к рис. 164, находим

$$v_B = v_A \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\sin(\pi/2 - \psi)} = v_A (\cos \varphi \operatorname{tg} \psi + \sin \varphi),$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\lambda \sin \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}},$$

где  $\lambda = a/l$  — отношение длины кривошипа к длине шатуна. Получим

$$v_B = v_A \left( 1 + \frac{\lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \sin \varphi \right).$$

**Пример 50.** Коромысло  $O_1A$  (рис. 165), качаясь вверх и вниз вокруг оси  $O_1$ , посредством шатуна  $AB$  передает движение кривошипу  $OB$ , свободно сидящему на оси  $O$ . На этой же оси сидит колесо I, другое колесо II наглухо соединено с шатуном  $AB$  и сочленено с кривошипом  $OB$  с по-

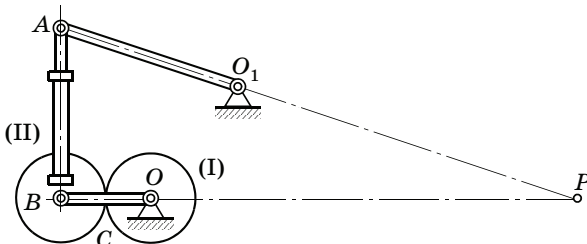


Рис. 165

мощью шарнира  $B$ . Радиусы колес I и II одинаковы ( $r_1 = r_2 = r$ ),  $OB = 2r$ . Угловая скорость кривошипа  $OB$  равна  $\omega$ . Найдём угловую скорость  $\omega_1$  колеса I.

Мгновенный центр  $P$  плоской фигуры, состоящей из шатуна  $AB$  и колеса II, найдём в пересечении  $AO_1$  и  $OB$ . Угловая скорость этой фигуры равна

$$\omega_2 = \frac{v_B}{PB} = 2\omega \frac{r}{PB}.$$

Чтобы перейти к определению угловой скорости колеса I, нужно записать, что скорость точки соприкосновения  $C$  колес I и II останется одной и той же, будем ли считать ее принадлежащей колесу I или колесу II:

$$v_C = \omega_2 \cdot PC = \omega_1 r.$$

Отсюда

$$\omega_1 = \frac{PC}{r} \omega_2 = 2 \frac{PC}{PB} \omega = 2 \frac{PC}{PC \pm r} \omega$$

(знак *плюс* соответствует положению, изображенному на рисунке). Если  $PC$  значительно больше  $r$ , то приближенно можно считать

$$\omega_1 = \frac{2\omega}{1 \pm r/PC} \approx 2\omega.$$

## § 57. Центроиды

При движении плоской фигуры в ее плоскости мгновенный центр перемещается от одной точки фигуры к другой. Точно так же и в неподвижной плоскости мгновенный центр занимает все новые и новые положения. Таким образом, следует отличать точку плоской фигуры, которая в данный момент времени совпадает с мгновенным центром и имеет скорость, равную нулю, от самого мгновенного центра, перемещающегося по фигуре и имеющего как по отношению к ней, так и по отношению к неподвижной плоскости скорости, вообще говоря, отличные от нуля и геометрически равные между собой. Последнее сразу следует из того, что мгновенный центр проходит в данный момент через точку, которую вследствие ее мгновенной неподвижности можно одинаково считать принадлежащей как плоской фигуре, так и неподвижной плоскости.

Траектория мгновенного центра в плоскости, связанной с движущейся фигурой, образует кривую, называемую *подвижной центроидой*; точно так же траектория мгновенного центра в неподвижной плоскости называется *неподвижной центроидой*.



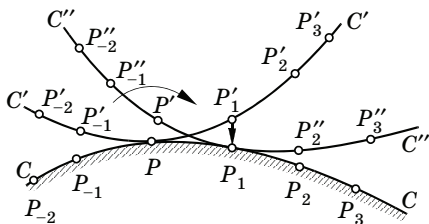


Рис. 166

Так, в указанном ранее примере качения без скольжения круглого колеса по прямолинейному рельсу (рис. 162) все точки контура  $C'$  колеса при различных положениях его будут служить мгновенными центрами скоростей, следовательно, окружность  $C'$  является подвижной центроидой. Точки рельса  $C$  будут служить мгновенными центрами в неподвижной плоскости, а прямая  $C$  представит собой неподвижную центриду.

Подвижная и неподвижная центроиды имеют в каждый момент времени общую точку — мгновенный центр, траекториями которого они служат. Вектор скорости мгновенного центра одинаковый, по предыдущему, как по отношению к неподвижной, так и подвижной плоскости, направлен по касательной к траектории мгновенного центра; следовательно, касательная — одна и та же для обеих центроид, т. е. *центроиды соприкасаются*. Наконец, из равенства по величине скоростей мгновенного центра по центроидам вытекает равенство путей, проходимых мгновенным центром по подвижной и неподвижной центроидам за один и тот же бесконечно малый промежуток времени, т. е. равенство элементарных дуг центроид между соответствующими друг другу смежными положениями на них мгновенного центра.

Отсюда, согласно определению качения без скольжения, следует, что *при движении плоской фигуры в своей плоскости подвижная центрида катится без скольжения по неподвижной*.

Пусть  $C$  и  $C'$  (рис. 166) представляют собой неподвижную и подвижную центроиды, соприкасающиеся в данный момент  $t$  в мгновенном центре  $P$ . Точки  $P_1, P_2$  и т. д. определяют положения мгновенного центра в неподвижной плоскости в последующие моменты времени  $t_1, t_2, \dots$ , точки  $\dots, P_{-2}, P_{-1}$  — в предыдущие моменты. Аналогично, точки  $P'_1, P'_2$  и т. д. отмечают положения мгновенного центра в подвижной плоскости в те же моменты времени  $t_1, t_2, \dots$ , точки  $\dots, P'_{-2}, P'_{-1}$  — в предыдущие моменты. Дуги  $\overset{\sim}{PP}'_1$  и  $\overset{\sim}{PP}_1$ ,  $\overset{\sim}{P'_1P}'_2$  и  $\overset{\sim}{P'_1P}_2$  и т. д. по предыдущему равны между собой; в момент времени  $t_1$  точка  $P'_1$  придет в точку  $P_1$ , а точка  $P'_2$  займет положение  $P''_2$ . В момент времени  $t_2$  точка  $P''_2$

совпадает с точкой  $P_2$  и т. д. Такое последовательное совпадение концов равных между собой по длине дуг подвижной и неподвижной кривых возможно лишь при отсутствии скольжения; поскольку при этом кривые соприкасаются, описанное движение является *качением без скольжения подвижной центроиды по неподвижной*.

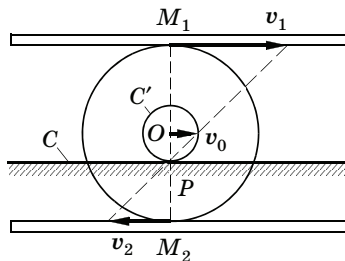


Рис. 167

**Пример 51.** Две параллельные рейки движутся в противоположные стороны со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Между ними находится диск радиусом  $a$ , который катится по ним без скольжения. Определим скорость  $v_0$  центра диска  $O$ , угловую скорость  $\omega$  и мгновенный центр диска, а также центроиды (рис. 167).

Принимая точку  $O$  за полюс, имеем

$$v_1 = v_0 + v_{OM_1}, \quad v_2 = v_0 + v_{OM_2}.$$

Вращение диска происходит по часовой стрелке. Проецируя написанные выше геометрические равенства на направление скорости  $v_1$ , получим

$$v_1 = v_0 + \omega a, \quad -v_2 = v_0 - \omega a.$$

Из последних уравнений находим

$$v_0 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2), \quad \omega = \frac{1}{2a}(v_1 + v_2).$$

Если  $v_1 = v_2$ , то центр диска останется неподвижным.

Эту же задачу можно решить, отыскивая мгновенный центр диска. По формулам (14.15) имеем

$$\frac{v_1}{PM_1} = \frac{v_2}{PM_2} = \omega, \quad PM_1 + PM_2 = M_1M_2 = 2a.$$

Составив производную пропорцию, получим

$$\frac{v_1 + v_2}{v_2} = \frac{PM_1 + PM_2}{PM_2} = \frac{2a}{PM_2},$$

и, следовательно,

$$PM_2 = \frac{2av_2}{v_1 + v_2},$$

$$OP = a - PM_2 = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} a, \quad (\alpha)$$

$$\omega = \frac{v_2}{PM_2} = \frac{v_1 + v_2}{2a}.$$

Скорость центра колеса  $v_0$  определим из соотношения

$$v_0 = \omega \cdot OP = = \frac{v_1 + v_2}{2a} \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} a = \frac{v_1 - v_2}{2},$$

которое совпадает с полученным выше результатом; мгновенный центр  $P$  находится на постоянном расстоянии  $OP$ , определяемом по формуле (α), от центра колеса  $O$ . Следовательно, геометрическое место точек колеса, с которыми в процессе движения совпадает мгновенный центр, т. е. подвижная центроида  $C'$ , есть окружность радиусом  $OP$ , концентрическая с колесом.

Неподвижная центроида  $C$ , т. е. геометрическое место мгновенных центров в неподвижной плоскости, есть прямая, находящаяся на расстоянии  $OP$  от центра колеса.

Если насадить на ось колеса концентрически с ним диск радиусом

$$OP = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} a$$

и покатыть его без скольжения по прямой  $C$ , сообщив центру диска скорость

$$v_0 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2),$$

то рейки, соприкасающиеся с колесом в точках  $M_1$  и  $M_2$ , придут в движение со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , направленными в противоположные стороны. Движение диска  $C'$  по прямой  $C$  кинематически эквивалентно рассматриваемому движению колеса между двумя рейками.

**Пример 52. Центроиды эллипсографа.** В изображенном на рис. 168 положении линейки эллипсографа мгновенный центр занимает положение  $P$ . Очевидно, что  $OP = AB$ ; иными словами, каково бы ни было положение линейки, мгновенный центр  $P$  всегда находится на постоянном расстоянии  $AB = 2l$  от начала координат  $O$  неподвижной системы осей, т. е. неподвижная центроида представляет собой окружность  $C$  радиусом  $2l$

с центром в  $O$ . С другой стороны, значение  $O'P = OP/2 = l$  также постоянно и мгновенный центр находится на одном и том же расстоянии от принадлежащей фигуре и движущейся вместе с ней точки  $O'$ . Это значит, что подвижной центроидой является окружность  $C'$  радиусом  $l$  с центром в  $O'$ .

Качение подвижной центроиды по неподвижной можно осуществить, заменив, например, окружности  $C'$  и  $C$  подвижным и неподвижным зубчатыми колесами и покатыв первое по второму с помощью рукоятки  $OO'$ . Любой

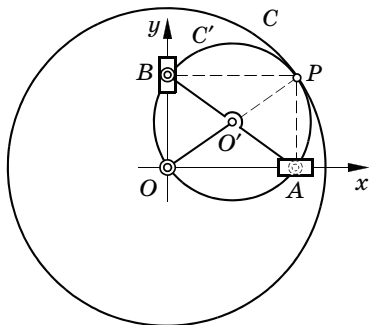


Рис. 168

диаметр колеса  $C'$  будет при этом совершать то же самое движение, которое совершала линейка эллипсографа; любая точка его будет описывать эллипс.

**Пример 53. Центроиды в обращенном эллиптическом движении.** Скорости тех точек сторон движущегося прямого угла, которые в данный момент проходят через оси вращения трубок  $A$  и  $B$ , направлены вдоль прямых  $OA$  и  $OB$  (рис. 169). Следовательно, мгновенный центр находится на пересечении перпендикуляров, восставленных к  $AO$  и  $BO$  в точках  $A$  и  $B$ . По построению  $AOBP$  — прямоугольник, т. е.  $OP = AB = = 2l$ . Точка  $P$  находится на постоянном расстоянии  $2l$  от вершины подвижного прямого угла, т. е. подвижной центроидой  $C'$  является окружность радиусом  $2l$  с центром в  $O$ . Неподвижная центроида  $C$  — окружность вдвое меньшего радиуса  $l$  с центром в  $O'$ . Сравнивая этот результат со случаем эллиптического движения, видим, что подвижные и неподвижные центроиды поменялись ролями: если покатыть большой круг по малому, то полученное движение будет кинематически эквивалентно обращенному эллиптическому движению. Вообще, меняя роль центроид, т. е. делая подвижную центроиду неподвижной, а неподвижную — подвижной, получим движение, называемое *обращенным* по отношению к первоначальному.

**Пример 54.** Определим центроиды шатуна  $BE$  механизма антипараллелограмма, изображенного на рис. 170 ( $AB = ED = 2a$ ,  $BE = AD = 2c$ ,  $a > c$ ).

В плоском движении, совершаемом звеном  $BE$ , известны траектории двух точек  $B$  и  $E$ ; это — окружности радиусами  $AB$  и  $ED$ . Мгновенный центр лежит на пересечении перпендикуляров к скоростям точек  $B$  и  $E$ , т. е. в точке  $P$  пересечения прямых  $AB$  и  $ED$ .

Имеем:  $\triangle ABE = \triangle ADE$ , так как  $AD = BE$ ,  $AB = ED$  и  $AE$  — общая сторона. Следовательно,  $\angle ABE = \angle ADE$ . Но  $\angle APD = \angle EPB$ , что при равенстве  $AD = BE$  дает  $\triangle APD = \triangle EPB$ . Отсюда получаем

$$AP = PE, \quad BP = PD,$$

и поэтому

$$AP + PD = AP + PB = 2a.$$

Точно так же

$$EP + PB = EP + PD = 2a.$$

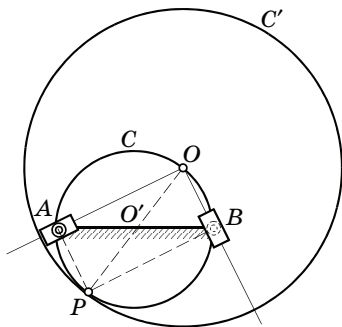


Рис. 169

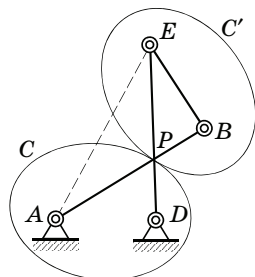


Рис. 170

Таким образом, сумма расстояний от мгновенного центра  $P$  до двух неподвижных точек  $A$  и  $D$  есть величина постоянная. Следовательно, неподвижной центроидой  $C$  является эллипс с фокусами в точках  $A$  и  $D$ , с большой полуосью  $a$  и малой  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ . Подвижная центроида  $C'$  — также эллипс с полуосями той же величины и с фокусами в  $B$  и  $E$ .

Движение, при котором эллипс  $C'$  катится без скольжения по неподвижному эллипсу  $C$ , кинематически эквивалентно движению звена  $BE$  антипараллелограмма. Точно так же можно доказать, что центроидами звена  $ED$  при неподвижном звене  $AB$  (когда звено  $AD$  освобождено) служат две одинаковые гиперболы. Достаточно убедиться, что в этом случае разность расстояний от мгновенного центра (точки пересечения линий  $BE$  и  $AD$ ) до неподвижных точек  $A$  и  $B$ , а также до точек  $D$  и  $E$  остается неизменной и равной  $AD = EB$ .

### § 58. Поле ускорений плоской фигуры. Мгновенный центр ускорений

Для определения ускорения любой точки плоской фигуры найдем производную по времени от вектора скорости этой точки.

Имеем, согласно (14.11),

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

и, следовательно,

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt}. \quad (14.19)$$

Первое слагаемое

$$\mathbf{w}_0 = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}, \quad (14.20)$$

одинаковое для всех точек фигуры и равное ускорению полюса  $O'$ , называется *поступательным ускорением*.

Второе слагаемое — обозначим его через  $\mathbf{w}^{(B)}$ , — равное

$$\mathbf{w}^{(B)} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}', \quad (14.21)$$

называется *вращательным ускорением*. Здесь вектор

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

представляет собой *вектор углового ускорения*. Вектор  $\mathbf{w}^{(B)}$  перпендикулярен  $\mathbf{r}'$  и направлен в ту же сторону, что и вращатель-

ная скорость  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$  точки плоской фигуры вокруг полюса, или в противоположную, сообразно тому, будет ли вращение фигуры ускоренным или замедленным; величина  $\boldsymbol{w}^{(B)}$  равна

$$\boldsymbol{w}^{(B)} = \varepsilon r' \sin(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}'} ) = \varepsilon r'. \quad (14.22)$$

Третье слагаемое, которое обозначим  $\boldsymbol{w}^{(oc)}$ , равно

$$\boldsymbol{w}^{(oc)} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt}. \quad (14.23)$$

Подставив сюда вместо  $d\mathbf{r}'/dt$  его значение (14.12), получим

$$\boldsymbol{w}^{(oc)} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'),$$

или по известной формуле разложения двойного векторного произведения:

$$\boldsymbol{w}^{(oc)} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}).$$

Но в плоском движении векторы  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{r}'$  взаимно-перпендикулярны, так что  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}' = 0$ , кроме того,  $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \omega^2$ , следовательно,

$$\boldsymbol{w}^{(oc)} = -\omega^2 \mathbf{r}'. \quad (14.24)$$

Эта составляющая ускорения, направленная от рассматриваемой точки к полюсу и равная по величине  $\omega^2 r'$ , называется *осестремительным ускорением*.

Итак, имеем

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{w}^{(B)} + \boldsymbol{w}^{(oc)} = \boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' - \omega^2 \mathbf{r}', \quad (14.25)$$

т. е. ускорение любой точки в плоском движении может быть представлено как геометрическая сумма поступательного ускорения, равного ускорению полюса, вращательного ускорения вокруг полюса и осестремительного ускорения к полюсу.

Заметим, что поступательное ускорение  $\boldsymbol{w}_0$  равно нулю, если полюс движется равномерно и прямолинейно;  $\boldsymbol{w}^{(B)} = 0$ , когда  $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ , т. е. когда движение фигуры происходит с постоянной угловой скоростью, или в моменты времени, когда угловая скорость имеет экстремальные значения; наконец,  $\boldsymbol{w}^{(oc)} = 0$  при  $\boldsymbol{\omega} = 0$ , т. е. при мгновенно-поступательном движении.

Составим формулы для проекций ускорения на неподвижные оси  $x, y$ . Замечая, что

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0,$$

найдем, проецируя обе части равенства (14.25) на неподвижные оси  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} w_x &= \ddot{x}_0 - \ddot{\phi} (y - y_0) - \dot{\phi}^2 (x - x_0), \\ w_y &= \ddot{y}_0 + \ddot{\phi} (x - x_0) - \dot{\phi}^2 (y - y_0). \end{aligned} \quad (14.26)$$

Аналогично найдем проекции ускорения на подвижные оси:

$$w_{x'} = w_{0x'} - \ddot{\phi} y' - \dot{\phi}^2 x', \quad w_{y'} = w_{0y'} + \ddot{\phi} x' - \dot{\phi}^2 y', \quad (14.27)$$

где  $w_{0x'}$  и  $w_{0y'}$  обозначают проекции ускорения полюса на подвижные оси координат  $x'$ ,  $y'$ ; они могут быть легко вычислены по формулам перехода от одной системы координат к другой.

Если плоское движение задано, то координаты полюса  $x_0$  и  $y_0$ , а также угол поворота  $\phi$  известны в функции времени, так что все величины в правых частях этих формул могут быть вычислены.

Условимся в дальнейшем снабжать обозначение ускорения индексом, указывающим точку, ускорение которой рассматривается: например,  $w_A$ ,  $w_B$  и т. д. будут обозначать ускорения точек  $A$ ,  $B$  и т. д.; геометрическую сумму вращательного и центростремительного ускорений точки  $B$ , когда за полюс принята точка  $A$ , обозначим через  $w_{AB}$ , т. е. положим

$$w_{AB} = \varepsilon \times r'_{AB} - \omega^2 r'_{AB}. \quad (14.28)$$

Здесь вектор  $w_{AB}$  есть ускорение точки  $B$  по отношению к точке  $A$ , т. е. ускорение по отношению к системе координат, имеющей начало в точке  $A$  и движущейся вместе с этой точкой поступательно. Отдельные слагаемые этого вектора — вращательное ускорение вокруг полюса и осеостремительное ускорение к полюсу — будем обозначать следующим образом:

$$w_{AB}^{(B)} = \varepsilon \times r'_{AB}, \quad w_{AB}^{(oc)} = -\omega^2 r'_{AB}. \quad (14.29)$$

Формула (14.25) примет вид

$$w_B = w_A + w_{AB} = w_A + w_{AB}^{(B)} + w_{AB}^{(oc)}. \quad (14.30)$$

Построение отдельных слагаемых показано на рис. 171. Замечая, что  $w_{AB}^{(B)}$  и  $w_{AB}^{(oc)}$  взаимно-перпендикулярны, получим

$$w_{AB} = r'_{AB} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (14.31)$$

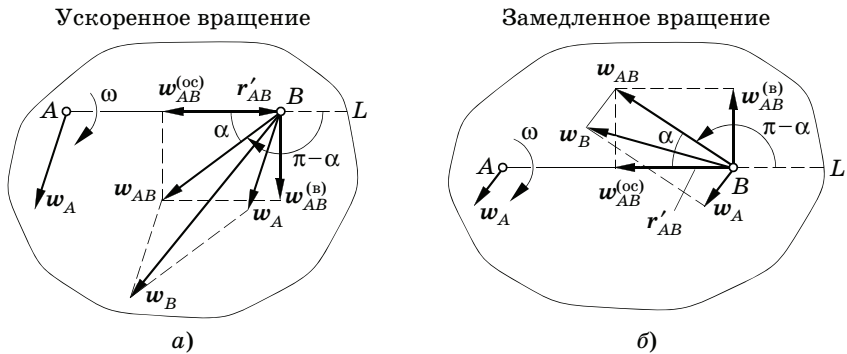


Рис. 171

Обозначим через  $(\pi - \alpha)$  тупой угол, образуемый векторами  $r'_{AB}$  и  $w_{AB}$ . Аналогично по формуле (13.19), а также и непосредственно из рис. 171 найдем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w_{AB}^{(b)}}{w_{AB}^{(oc)}} = \frac{\tilde{\epsilon}}{\omega^2}. \quad (14.32)$$

Заметим, что при ускоренном вращении (рис. 171, а) угол  $(\pi - \alpha)$  отсчитывается от  $r'_{AB}$  в сторону вращения фигуры и при замедленном вращении — в противоположную (рис. 171, б). В каждый данный момент времени угол  $\alpha$  одинаков для всех точек фигуры.

Докажем, что в любой момент времени существует точка плоской фигуры — назовем ее *мгновенным центром ускорений*, — ускорение которой в этот момент равно нулю. Чтобы убедиться в существовании мгновенного центра ускорений, проведем через какую-нибудь точку А полупрямую  $AL$  (рис. 172, а, б), под углом  $\alpha$ , определяемым по формуле (14.32), к вектору  $w_A$ , отсчитывая  $\alpha$  от  $w_A$  в сторону вращения фигуры или противоположно ему, со-

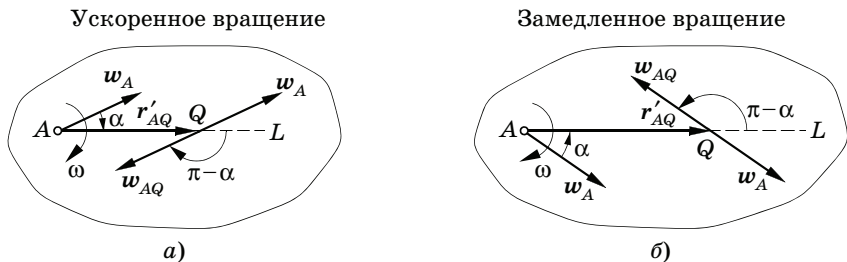


Рис. 172



образно тому, будет ли вращение ускоренным или замедленным. Отложим на  $AL$  отрезок

$$r'_{AQ} = AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (14.33)$$

Конец  $Q$  этого отрезка и будет мгновенным центром ускорений. В самом деле, согласно формуле (14.31), имеем

$$w_{AQ} = r'_{AQ} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = w_A.$$

С другой стороны, по построению вектор  $w_{AQ}$  противоположен  $w_A$  по направлению, т. е.

$$w_{AQ} = -w_A.$$

Отсюда на основании (14.30) заключаем, что

$$w_Q = 0,$$

т. е.  $Q$  — мгновенный центр ускорений.

Построение мгновенного центра ускорений на основании сказанного требует знания ускорения  $w_A$  какой-либо точки фигуры и угла  $\alpha$ . Покажем, как построить мгновенный центр ускорений, имея ускорения двух точек фигуры. Заметим для этого, что, зная  $w_A$  и  $w_B$ , тем самым можем определить на основании формулы (14.30)

$$w_{AB} = w_B - w_A,$$

и, следовательно, угол  $\alpha$  будет вполне определен. Теперь можем (рис. 173) построить луч  $AL$ , на котором лежит мгновенный центр ускорений  $Q$ . Нет надобности вычислять положение точки  $Q$  по формуле (14.33), так как можно построить ее графически, проведя еще луч  $BM$  под углом  $\alpha$  к  $w_B$ . Пересечение лучей  $AL$  и  $BM$  определит точку  $Q$ . Построение произведено на рис. 173. По заданным  $w_A$  и  $w_B$  найдена их разность  $w_{AB} = w_B - w_A$ . Это определяет угол  $(\pi - \alpha)$ , отсчитываемый от  $r'_{AB}$  к  $w_{AB}$ . В этом же направлении отсчета отложен

угол  $\alpha$  от направлений  $w_A$  и  $w_B$  и проведены лучи  $AL$  и  $BM$ . Их пересечение и дает нам точку  $Q$ .

Имея мгновенный центр ускорений, получаем весьма наглядную картину распределения ускорений в плоской фигуре. Действительно, применяя формулу (14.30) в предположении,

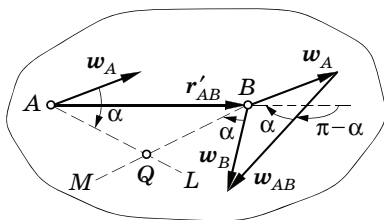


Рис. 173

что за полюс  $A$  принят мгновенный центр ускорений  $Q$ , и, замечая, что по определению  $w_Q = 0$ , получим

$$w_B = w_{QB} = w_{QB}^{(B)} + w_{QB}^{(oc)} = \varepsilon \times r'_{QB} - \omega^2 r'_{QB}. \quad (14.34)$$

Первое слагаемое в правой части — вращательное ускорение  $w_{QB}^{(B)}$  — направлено по перпендикуляру к вектору-радиусу, соединяющему центр ускорений с рассматриваемой точкой, в ту сторону, куда происходит вращение, или в противоположную, смотря по тому, является ли вращение ускоренным или замедленным.

Второе слагаемое — осестремительное ускорение  $w_{QB}^{(oc)}$  — направлено всегда от точки к мгновенному центру ускорений.

Расположение этих слагаемых показано на рис. 174. По величине они равны

$$w_{QB}^{(B)} = w_B^{(B)} = \varepsilon r'_{QB}, \quad (14.35)$$

$$w_{QB}^{(oc)} = w_B^{(oc)} = \omega^2 r'_{QB}. \quad (14.36)$$

Их геометрическая сумма  $w_B$  по величине равна

$$w_B = r'_{QB} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (14.37)$$

Таким образом, полное ускорение любой точки фигуры по величине пропорционально расстоянию от нее до мгновенного центра ускорений и направлено под одинаковым для всех точек фигуры углом к вектору-радиусу, соединяющему рассматриваемую точку с мгновенным центром ускорений.

Не следует смешивать вращательное ускорение  $w_B^{(B)}$  с касательной составляющей ускорения, а осестремительное  $w_B^{(oc)}$  — с нормальной составляющей. В самом деле, касательное  $w_\tau$  и нормальное  $w_n$  ускорения направлены по касательной и главной нормали к траектории, т. е. по перпендикуляру к вектору-радиусу  $r'_{PB}$ , соединяющему рассматриваемую точку с мгновенным центром скоростей  $P$ , и вдоль этого вектора-радиуса, в то время как  $w_B^{(B)}$  и  $w_B^{(oc)}$  направлены перпендикулярно и вдоль вектора-радиуса  $r'_{QB}$  (рис. 175).

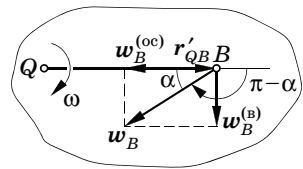


Рис. 174

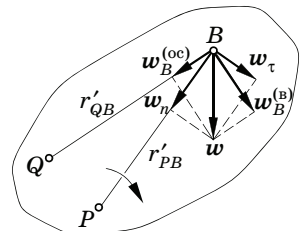


Рис. 175

Легко получить векторы-радиусы  $r_Q$  и  $r'_Q$  центра ускорения в неподвижной и подвижной системах координат; для этого решим векторное уравнение

$$w_Q = w_0 + \varepsilon \times r'_Q - \omega^2 r'_Q = 0. \quad (14.38)$$

С этой целью умножим (14.36) векторно на  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon \times w_0 + \varepsilon \times (\varepsilon \times r'_Q) - \omega^2 (\varepsilon \times r'_Q) = 0$$

и раскроем двойное векторное произведение; тогда получим

$$\varepsilon \times w_0 + \varepsilon(\varepsilon \cdot r'_Q) - r'_Q(\varepsilon \cdot \varepsilon) - \omega^2 (\varepsilon \times r'_Q) = 0.$$

Заметим, что в плоском движении  $\varepsilon \cdot r'_Q = 0$ ; далее,  $\varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2$ , а по (14.38)  $\varepsilon \times r'_Q = \omega^2 r'_Q - w_0$ . Подставляя в (14.38), получим

$$\varepsilon \times w_0 - (\varepsilon^2 + \omega^4) r'_Q + \omega^2 w_0 = 0,$$

или, разрешая уравнение относительно  $r'_Q$ ,

$$r'_Q = \frac{\varepsilon \times w_0 + \omega^2 w_0}{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad r_Q = r_0 + r'_Q = r_0 + \frac{\varepsilon \times w_0 + \omega^2 w_0}{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (14.39)$$

Проецируя первое равенство на подвижные оси координат  $x'$ ,  $y'$ , а второе — на неподвижные оси  $x$ ,  $y$ , получим формулы координат мгновенного центра ускорений:

✓ в подвижной системе осей

$$x'_Q = \frac{\omega^2 w_{0x'} - \ddot{\phi} w_{0y'}}{\ddot{\phi}^2 + \omega^4}, \quad y'_Q = \frac{\omega^2 w_{0y'} + \ddot{\phi} w_{0x'}}{\ddot{\phi}^2 + \omega^4}; \quad (14.40)$$

✓ в неподвижной системе осей

$$x_Q = x_0 + \frac{\omega^2 w_{0x} - \ddot{\phi} w_{0y}}{\ddot{\phi}^2 + \omega^4}, \quad y_Q = y_0 + \frac{\omega^2 w_{0y} + \ddot{\phi} w_{0x}}{\ddot{\phi}^2 + \omega^4}. \quad (14.41)$$

**Пример 55.** Найдем ускорение любой точки обода колеса радиусом  $a$ , катящегося без скольжения по прямолинейному рельсу, если центр колеса имеет постоянную скорость  $v_0$ . Мгновенный центр ускорений находится в центре колеса, так как эта точка движется прямолинейно и равномерно.

Имеем

$$\omega = v_0/a = \text{const}$$

и, следовательно,  $\varepsilon = 0$ ; ускорение любой точки обода направлено к центру колеса и равно по величине

$$w = \omega^2 a = v_0^2 / a.$$

Зная величину и направление скорости точки  $M$  и ее полное ускорение (рис. 176), легко найдем касательную и нормальную составляющие:

$$w_\tau = w \sin \varphi = (v_0^2 / a) \sin \varphi,$$

$$w_n = w \cos \varphi = (v_0^2 / a) \cos \varphi.$$

Замечая, что скорость точки  $M$  равна

$$v = \omega \cdot MP = 2a\omega \cos \varphi = 2v_0 \cos \varphi,$$

находим радиус кривизны траектории точки  $M$  (циклоиды):

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = 4a \cos \varphi = 2MP.$$

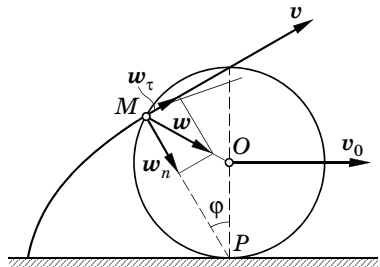


Рис. 176

**Пример 56. Ускорение при внешнем и внутреннем зацеплении колес.** На палец  $A$  (рис. 177,  $a, б$ ) кривошипа  $OA$ , вращающегося вокруг оси  $O$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , свободно насажено зубчатое колесо  $\Pi$  радиусом  $r_2$ . При вращении кривошипа оно катится без скольжения по неподвижному зубчатому колесу  $I$  радиусом  $r_1$ , имеющему центр на оси  $O$ . Найдем ускорения точек  $B$  и  $C$  колеса  $\Pi$ , а также его мгновенный центр ускорений.

Определим угловую скорость  $\omega_2$  колеса  $\Pi$ . Так как точка  $C$  является его мгновенным центром скоростей, то

$$\omega_2 \cdot CA = \omega \cdot OA,$$

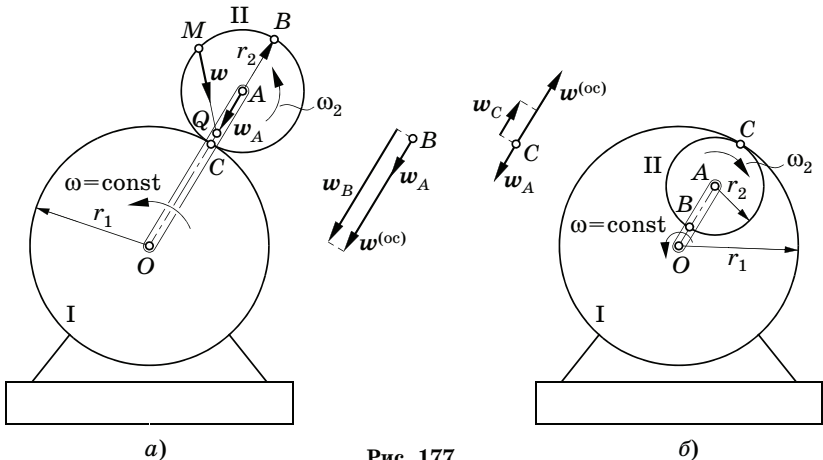


Рис. 177

т. е.

$$\omega_2 = \frac{OA}{CA} \omega = \frac{r_1 \pm r_2}{r_2} \omega;$$

верхний знак относится к случаю внешнего (рис. 177, а), а нижний — внутреннего (рис. 177, б) зацепления. Так как  $\omega_2$  постоянна, то  $\varepsilon_2 = 0$ .

Переходим к рассмотрению ускорений. За полюс примем точку  $A$ ; его ускорение направлено от  $A$  к  $O$  и по величине равно

$$w_A = \omega^2 (r_1 \pm r_2).$$

Очевидно, что вращательное ускорение любой точки второго колеса  $w^{(b)} = 0$ ; далее, имеем ( $r'$  — вектор-радиус любой точки колеса II относительно точки  $A$ )

$$w^{(oc)} = -\omega_2^2 r' = -\omega^2 \frac{(r_1 \pm r_2)^2}{r_2^2} r'.$$

Останавливаясь сначала на случае внешнего зацепления, найдем ускорения точек  $B$  и  $C$ . Для точки  $B$  имеем

$$w^{(oc)} = \omega^2 \frac{(r_1 + r_2)^2}{r_2},$$

и  $w^{(oc)}$  направлено от  $B$  к  $A$ , т. е. так же, как и ускорение  $w_A$ . Полное ускорение будет равно

$$w_B = \omega^2 (r_1 + r_2) + \omega^2 \frac{(r_1 + r_2)^2}{r_2} = \omega^2 \frac{(r_1 + r_2)(r_1 + 2r_2)}{r_2}.$$

Точно так же для точки  $C$  получим

$$w_C = \omega^2 \frac{(r_1 + r_2)^2}{r_2} - \omega^2 (r_1 + r_2) = \omega^2 (r_1 + r_2) \frac{r_1}{r_2}.$$

Ускорения  $w_B$  и  $w_C$  направлены к центру колеса.

Найдем еще мгновенный центр ускорений колеса II. В этой точке  $w^{(oc)} = -w_A$ , так как вращательное ускорение отсутствует ( $\omega_2 = \text{const}$ ), а точка  $A$  принята за полюс; следовательно, мгновенный центр ускорений  $Q$  должен лежать на радиусе  $AC$ , так как для точек этого радиуса  $w^{(oc)}$  направлено противоположно  $w_A$ . Расстояние  $r'_Q$  от мгновенного центра ускорений до точки  $A$  определится из уравнения

$$\omega^2 \left( \frac{r_1 + r_2}{r_2} \right)^2 r'_Q = \omega^2 (r_1 + r_2),$$

откуда

$$r'_Q = \frac{r_2^2}{r_1 + r_2}.$$

Так как в рассматриваемом случае вращательное ускорение отсутствует, ускорение любой точки  $M$  направлено к мгновенному центру ускорений  $Q$ .

В случае внутреннего зацепления

$$w_B = \left| \omega^2 \frac{(r_1 - r_2)^2}{r_2} - \omega^2 (r_1 - r_2) \right| = \omega^2 \frac{(r_1 - r_2) |r_1 - 2r_2|}{r_2},$$

$$w_C = \omega^2 \frac{(r_1 - r_2)^2}{r_2} + \omega^2 (r_1 - r_2) = \omega^2 \frac{r_1 - r_2}{r_2} r_1.$$

При  $r_1 > 2r_2$  вектор  $w_B$  направлен к точке  $A$ , при  $r_1 = 2r_2$  (в этом случае точка  $B$  совпадает с  $O$ )  $w_B = 0$ , наконец, при  $r_1 < 2r_2$  вектор  $w_B$  направлен в ту же сторону, что и  $w_A$ . Мгновенный центр ускорений находится на радиусе  $AB$ , причем расстояние  $r'$  от него до центра колеса II определится из уравнения

$$\omega^2 \frac{(r_1 - r_2)^2}{r_2^2} r' - \omega^2 (r_1 - r_2) = 0,$$

откуда найдем

$$r' = \frac{r_2^2}{r_1 - r_2}.$$

**Пример 57. Ускорения точек линейки эллипсографа.** Пусть точка  $A$  линейки эллипсографа движется с постоянной скоростью  $v_A$  в отрицательную сторону оси  $x$  (рис. 178). Найдем ускорение любой точки линейки ( $AB = 2l$ ).

Так как движение точки  $A$  равномерное и прямолинейное, она является центром ускорений. Имеем

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_A}{2l \cos \varphi};$$

по формуле осецистремительного ускорения

$$w_B^{(oc)} = 2l\omega^2 = \frac{v_A^2}{2l \cos^3 \varphi},$$

и, следовательно,

$$w_B = \frac{w_B^{(oc)}}{\cos \varphi} = \frac{v_A^2}{2l \cos^3 \varphi}.$$

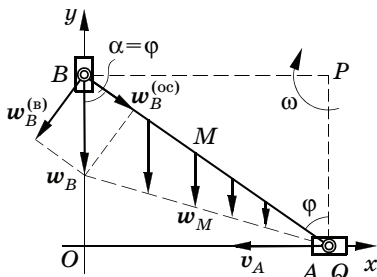


Рис. 178

Ускорение  $w_B$  направлено по оси  $y$  к началу координат, его осецистремительная составляющая идет от  $B$  к  $A$ .

На основании свойств центра ускорений ускорения всех прочих точек линейки пропорциональны расстоянию от них до точки  $A$  и имеют то же направление, что и  $w_B$ . Если соединить конец вектора  $w_B$  с мгновенным центром ускорений прямой линией, то на ней расположатся концы векторов, изображающих ускорения точек линейки.

## Глава XV

Вращение твердого тела  
вокруг неподвижной точки§ 59. Определение положения твердого тела,  
имеющего неподвижную точку. Эйлеровы углы

Обратимся к рассмотрению вращательного движения абсолютно твердого тела *вокруг неподвижной точки*. Вопрос этот имеет большое практическое значение, так как лежит в основе теории гироскопических явлений, динамики корабля, самолета, ракеты, а также движений небесных тел.

Предположим, что рассматриваемое твердое тело имеет неподвижную точку (центр)  $O$  (рис. 179) и может как угодно вращаться вокруг этой точки. Выясним прежде всего число величин, которое надо задать для определения положения твердого тела в пространстве. Для этого проведем через центр  $O$  ось  $OL$ , жестко связанную с телом; положение этой оси в пространстве определится двумя величинами: углами  $\alpha$  и  $\beta$  этой оси с осями  $Ox$  и  $Oy$  неподвижной системы координат. Но этих двух величин еще недостаточно для определения положения твердого тела, так как тело может вращаться около взятой оси. Задавая еще одну величину — угол  $\varphi$  поворота тела вокруг оси, — полностью фиксируем положение тела в пространстве.

Итак, *три* величины должны быть заданы для определения положения тела, имеющего неподвижную точку. Условимся число независимых величин (параметров), определяющих положение твердого тела в пространстве, называть *числом степеней свободы* его; твердое тело, вращающееся около неподвижного центра, имеет три степени свободы. Подробнее о степенях свободы системы тел будет сказано в отделе динамики.

Приведенный выбор трех углов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\varphi$  (рис. 179) поясняет наличие трех степеней свободы у твердого тела, имеющего одну закрепленную точку, но, однако, непригоден для определения положения (координат) точек твердого тела, скоростей и ускорений в этих точках. Один из

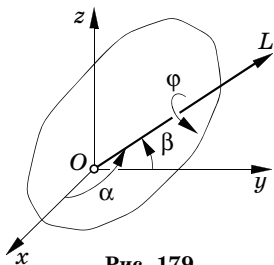


Рис. 179

наиболее практически удобных выборов трех углов был указан Эйлером, что привело к наименованию всех возможных систем такого рода углов *эйлеровыми углами*. Мы опишем далее общие принципы выбора систем эйлеровых углов и остановимся на конкретных выборах двух систем. Первая из них получила применение в задачах астрономии и гироскопии, вторая — в теории корабля.

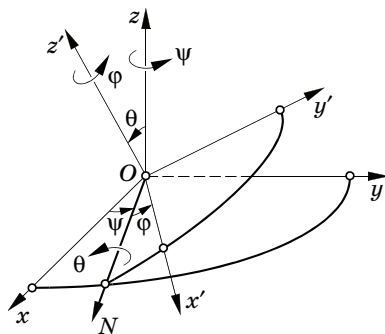


Рис. 180

Соединим жестко с вращающимся телом *подвижную* систему координат  $Ox'y'z'$  (рис. 180) и будем рассматривать вращение этой системы по отношению к *неподвижной*, в условном смысле этого слова, системе  $Oxyz$ . В отделе первом уже применялась таблица обозначений косинусов углов между осями координат (буквами обозначены не углы, а их косинусы); введем ее и здесь (табл. 2).

Отметим линию  $ON$  пересечения плоскостей  $xOy$  и  $x'Oy'$  (рис. 180) и назовем ее, как это принято в астрономических приложениях, *линией узлов*. Выберем на этой линии положительное направление  $ON$  так, чтобы, смотря с него, видеть вращение оси  $Oz$  к оси  $Oz'$  на наименьший угол в положительном направлении (т. е. в правой системе осей — против часовой стрелки); как легко видеть, плоскость  $zOz'$  перпендикулярна оси  $ON$ .

■ Первый эйлеров угол — угол *прецессии*  $\psi$ , или прецессионный угол, — образован в плоскости  $xOy$  линией узлов с неподвижной осью  $Ox$ ; отсчитывается угол  $\psi$  в положительном направлении (по часовой стрелке) от оси  $Ox$  к оси  $ON$ , если смотреть с оси  $Oz$ .

■ Второй угол — угол *нутаии*  $\theta$  — расположен в плоскости  $zOz'$  и отсчитывается от оси  $Oz$  к оси  $Oz'$  в положительном направлении (против часовой стрелки), если смотреть с положительного направления линии узлов, т. е. оси  $ON$ .

Таблица 2

■ Третий угол — угол *чистого вращения*  $\phi$  — расположен в плоскости  $x'Oy'$ , причем отсчитывается от линии узлов  $ON$  до оси  $Ox'$  в положительном направлении.

	$x$	$y$	$z$
$x'$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{13}$
$y'$	$\alpha_{21}$	$\alpha_{22}$	$\alpha_{23}$
$z'$	$\alpha_{31}$	$\alpha_{32}$	$\alpha_{33}$



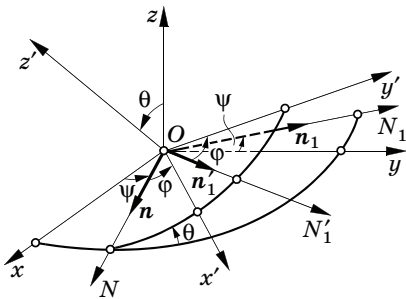


Рис. 181

Для установления зависимости между косинусами углов осей координат и эйлеровыми углами применим следующий прием. Введем, кроме единичных векторов осей координат  $i, j, k, i', j', k'$ , на рис. 181 не изображенных, еще единичные векторы следующих осей:  $n$  — линии узлов  $ON$ ;  $n_1$  — оси  $ON_1$ , перпендикулярной оси  $ON$  и лежащей в плоскости  $x'Oy'$ .

Направление оси  $ON_1$  выберем так, чтобы оси  $ONN_1z$  образовали триэдр, сонаправленный (т. е. правый) с системой осей  $Oxyz$ ; направление оси  $ON'_1$  выберем так, чтобы оси  $ONN'_1z'$  образовали сонаправленный триэдр с системой  $Ox'y'z'$ , а следовательно, и с системой  $Oxyz$ . Легко видеть, что угол между осями  $ON'_1$  и  $ON_1$ , представляет собой линейный угол двугранного угла между плоскостями  $x'Oy'$  и  $xOy$ , т. е. угол  $\theta$ . Тогда, замечая еще, что единичные векторы  $i, j$  и  $i', j'$  легко могут быть выражены через единичные векторы  $n, n_1$  и  $n'_1$  в форме зависимостей, получаемых из разложения одних единичных векторов по другим:

$$\begin{aligned}
 i &= n \cos \psi - n_1 \sin \psi, \\
 i' &= n \cos \varphi + n'_1 \sin \varphi, \\
 j &= n \sin \psi + n_1 \cos \psi, \\
 j' &= -n \sin \varphi + n'_1 \cos \varphi,
 \end{aligned}
 \tag{15.1}$$

найдем

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} = i \cdot i' &= (n \cos \psi - n_1 \sin \psi) \cdot (n \cos \varphi + n'_1 \sin \varphi) = \\
 &= (n \cdot n) \cos \psi \cos \varphi + (n \cdot n'_1) \cos \psi \sin \varphi - \\
 &\quad - (n_1 \cdot n) \sin \psi \cos \varphi - (n_1 \cdot n'_1) \sin \psi \sin \varphi.
 \end{aligned}$$

Имеем

$$n \cdot n = 1, \quad n \cdot n'_1 = 0, \quad n_1 \cdot n = 0, \quad n_1 \cdot n'_1 = \cos \theta,$$

откуда

$$\alpha_{11} = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta.$$

Аналогично получим остальные косинусы:

$$\alpha_{21} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}' = (\mathbf{n} \cos \psi - \mathbf{n}_1 \sin \psi) \cdot (-\mathbf{n} \sin \varphi + \mathbf{n}'_1 \cos \varphi) = \\ = -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta,$$

$$\alpha_{31} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k}' = (\mathbf{n} \cos \psi - \mathbf{n}_1 \sin \psi) \cdot \mathbf{k}' = -\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{k}' \sin \psi = \\ = -\sin \psi \cos (90^\circ + \theta) = \sin \psi \sin \theta,$$

$$\alpha_{12} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}' = (\mathbf{n} \sin \psi + \mathbf{n}_1 \cos \psi) \cdot (\mathbf{n} \cos \varphi + \mathbf{n}'_1 \sin \varphi) = \\ = \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta,$$

$$\alpha_{22} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' = (\mathbf{n} \sin \psi + \mathbf{n}_1 \cos \psi) \cdot (-\mathbf{n} \sin \varphi + \mathbf{n}'_1 \cos \varphi) = \\ = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta,$$

$$\alpha_{32} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}' = (\mathbf{n} \sin \psi + \mathbf{n}_1 \cos \psi) \cdot \mathbf{k}' = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{k}' \cos \psi = \\ = \cos \psi \cos (90^\circ + \theta) = -\cos \psi \sin \theta,$$

$$\alpha_{13} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i}' = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{n} \cos \varphi + \mathbf{n}'_1 \sin \varphi) = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{n}'_1 \sin \varphi = \\ = \sin \varphi \cos (90^\circ - \theta) = \sin \varphi \sin \theta,$$

$$\alpha_{23} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}' = \mathbf{k} \cdot (-\mathbf{n} \sin \varphi + \mathbf{n}'_1 \cos \varphi) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}'_1 \cos \varphi = \\ = \cos \varphi \sin \theta,$$

$$\alpha_{33} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' = \cos \theta.$$

Выделим полученную группу формул:

$$\cos \widehat{(x, x')} = \alpha_{11} = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta,$$

$$\cos \widehat{(x, y')} = \alpha_{21} = -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta,$$

$$\cos \widehat{(x, z')} = \alpha_{31} = \sin \psi \sin \theta,$$

$$\cos \widehat{(y, x')} = \alpha_{12} = \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta,$$

$$\cos \widehat{(y, y')} = \alpha_{22} = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta, \quad (15.2)$$

$$\cos \widehat{(y, z')} = \alpha_{32} = -\cos \psi \sin \theta,$$

$$\cos \widehat{(z, x')} = \alpha_{13} = \sin \varphi \sin \theta,$$

$$\cos \widehat{(z, y')} = \alpha_{23} = \cos \varphi \sin \theta,$$

$$\cos \widehat{(z, z')} = \alpha_{33} = \cos \theta.$$

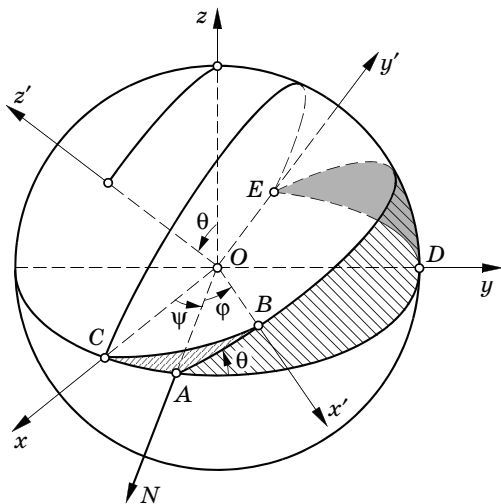


Рис. 182

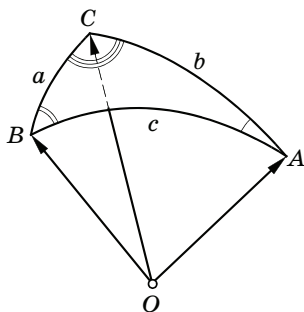


Рис. 183

Для установления зависимостей между косинусами углов, образованных осями подвижной системы (связанной с твердым телом) с осями неподвижной системы, и эйлеровыми углами можно воспользоваться также формулами сферической тригонометрии. Опишем вокруг точки  $O$  сферу единичного радиуса и отметим на поверхности сферы точки пересечения ее с осями координат и линией узлов (рис. 182). Соединяя эти точки дугами больших кругов, получаем сферические треугольники, решая которые находим искомые соотношения между косинусами углов, образуемых координатными осями, и тригонометрическими функциями эйлеровых углов.

Используем основную формулу сферической тригонометрии

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \tag{15.3}$$

где дуги  $a, b, c$  являются сторонами сферического треугольника, а  $A$  обозначает двугранный угол, противолежащий одноименной стороне (рис. 183).

Чтобы найти, например,  $\cos \widehat{(x, x')}$ , нужно (рис. 182) точки  $C$  и  $B$  пересечения осей  $Ox$  и  $Ox'$  с единичной сферой соединить с точкой  $A$  пересечения линии узлов с этой сферой. Из сферического треугольника  $ABC$  по приведенной только что формуле сферической тригонометрии следует

$$\begin{aligned} \cos \widehat{(x, x')} &= \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \cos (180^\circ - \theta) = \\ &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta. \end{aligned}$$

Аналогично из сферического треугольника  $ADE$  найдем

$$\begin{aligned}\cos \widehat{(y, y')} &= \cos(90^\circ - \psi) \cos(90^\circ + \varphi) + \sin(90^\circ - \psi) \sin(90^\circ + \varphi) \cos \theta = \\ &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta.\end{aligned}$$

Сферический треугольник  $AEC$  дает

$$\begin{aligned}\cos \widehat{(x, y')} &= \cos \psi \cos(90^\circ + \varphi) + \sin \psi \sin(90^\circ + \varphi) \cos(180^\circ - \theta) = \\ &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta\end{aligned}$$

и т. д.

Таким путем непосредственно получаются искомые соотношения в любой системе эйлеровых углов.

В теории малых колебаний твердого тела (например, в теории корабля) является существенным требование, чтобы при малых отклонениях координатного триэдра  $Ox'y'z'$  от  $Oxyz$  эйлеровы углы оставались малыми. Предыдущая система эйлеровых углов этому условию не удовлетворяет. Действительно, из первого равенства совокупности (15.2) следует, что при малых  $\theta$  правая часть близка к  $\cos(\psi + \varphi)$ , а следовательно, если ось  $Ox'$  мало отклонилась от оси  $Ox$ , т. е. дуга  $xx'$  близка к нулю, то и сумма  $\psi + \varphi$  мала, но слагаемые  $\psi$  и  $\varphi$  по отдельности могут и не быть малыми.

Укажем систему выбора эйлеровых углов, лишенную этого недостатка. Отметим прежде всего три основных принципа обеспечения правильного выбора эйлеровых углов.

■ Выбираются две *основные оси*, принадлежащие к системам осей  $Oxyz$  и  $Ox'y'z'$ . Это могут быть как одноименные, так и разноименные оси. Если оси одноименные, как это было в только что рассмотренном случае, то угол между ними обозначается через  $\theta$  (угол нутации), если разноименные, то угол полагается равным  $\pi/2 \pm \theta$ .

■ *Плоскости*, перпендикулярные основным осям, называются также *основными*. В пересечении они дают прямую линию, а сообщив этой прямой положительную сторону отсчета, получим линию узлов. Углы между основными осями будем отсчитывать в положительном направлении вокруг линии узлов.

■ В системах  $Oxyz$  и  $Ox'y'z'$ , наряду с *основными*, выбираются еще *отсчетные оси*. Угол между отсчетной осью системы  $Oxyz$  и

линией узлов, отсчитанный в положительном направлении около основной оси системы  $Oxyz$ , обозначим через  $\psi$  (угол прецессии). Угол между линией узлов и второй отсчетной осью, отсчитанный в положительную сторону вокруг основной оси системы  $Oxyz$ , обозначим буквой  $\varphi$  (угол чистого вращения).

Пользуясь этими замечаниями, можно указать целый ряд способов выбора эйлеровых углов. Легко убедиться, что ранее изложенный способ согласуется с перечисленными только что принципами.

Примем за основные оси  $Ox$  и  $Oz'$  (рис. 184). Угол между ними по общему правилу обозначим через  $\pi/2 + \theta$ . Основными плоскостями будут плоскости  $x'Oy'$  и  $y'Oz'$ ; следовательно, линия узлов  $ON$  будет лежать в плоскости  $y'Oz'$ , т. е. в плоскости рисунка. Линию узлов  $ON$  направим в ту сторону, чтобы вращение оси  $Ox$  к оси  $Oz'$  на наименьший угол происходило в положительном направлении вокруг  $ON$ . Углы  $\psi$  и  $\varphi$  выберем, положив  $y'ON = \psi$ ,  $y'ON = \varphi$ . Когда угол  $\theta$  будет стремиться к нулю, угол  $xOz'$  будет стремиться к  $\pi/2$ , линия узлов  $ON$  окажется мало отклоненной от оси  $Oy$  и углы  $\psi$  и  $\varphi$  будут также малы. Таким образом, условие одновременной малости всех углов Эйлера при малом отклонении системы  $Ox'y'z'$  от системы  $Oxyz$  будет выполнено.

Для составления выражений косинусов углов между осями системы координат  $Oxyz$  и  $Ox'y'z'$ , обозначенными в таблице 2 (см. с. 295) через  $\alpha_{rs}$  ( $r = 1, 2, 3$ ;  $s = 1, 2, 3$ ), укажем легче всего приводящий к результатам метод сферической тригонометрии, основанный на применении формулы (15.3).

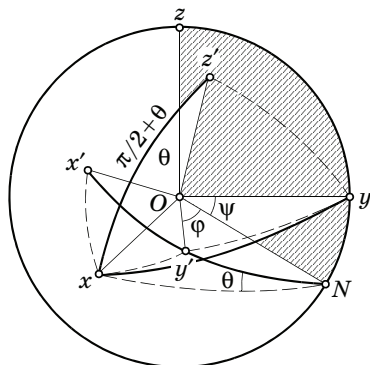


Рис. 184

В сферических треугольниках за одну из вершин всегда будем принимать точку  $N$  пересечения линии узлов со сферой единичного радиуса (рис. 184). Чтобы не затемнять чертежа, на рисунке показаны не все сферические треугольники.

Приведем формулы зависимости косинусов  $\alpha_{rs}$  от эйлеровых углов, отмечая в скобках, из каких сферических треугольников они получены:

$$\begin{aligned}
 (x'Nx) & \quad \alpha_{11} = \cos \widehat{(x', x)} = \cos \varphi \cos \theta, \\
 (y'Nx) & \quad \alpha_{21} = \cos \widehat{(y', x)} = \sin \varphi \cos \theta, \\
 (\text{по определению } \theta) & \\
 & \quad \alpha_{31} = \cos \widehat{(z', x)} = -\sin \theta, \\
 (x'Ny) & \quad \alpha_{12} = \cos \widehat{(x', y)} = -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \sin \theta, \\
 (y'Ny) & \quad \alpha_{22} = \cos \widehat{(y', y)} = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \sin \theta, \\
 (z'Ny) & \quad \alpha_{32} = \cos \widehat{(z', y)} = \sin \psi \cos \theta, \\
 (x'Nz) & \quad \alpha_{13} = \cos \widehat{(x', z)} = \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \sin \theta, \\
 (y'Nz) & \quad \alpha_{23} = \cos \widehat{(y', z)} = -\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \sin \theta, \\
 (z'Nz) & \quad \alpha_{33} = \cos \widehat{(z', z)} = \cos \psi \cos \theta.
 \end{aligned}$$

### § 60. Перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку

Докажем следующую теорему.

**ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА.** Любое перемещение тела, имеющего одну неподвижную точку, можно осуществить поворотом вокруг оси, проходящей через эту точку.

Проведем из центра  $O$  (рис. 185), вокруг которого вращается тело, сферу  $S$  произвольного радиуса. Эта сфера пересечет твердое тело по сферической фигуре  $\Gamma$ ; при движении тела вокруг центра фигура  $\Gamma$  будет скользить по сфере  $S$ . Всякому положению фигуры  $\Gamma$  соответствует вполне определенное положение твердого тела, и, наоборот, всякому положению тела соответствует определенное положение фигуры  $\Gamma$  на сфере  $S$ . Поэтому, применяя метод, аналогичный методу замены плоского движения тела движением плоской фигуры по ее плоскости, можно свести изучение перемещений тела вокруг

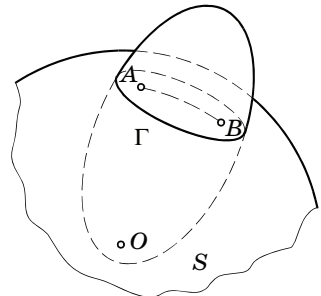


Рис. 185

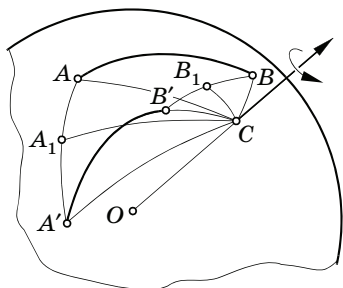


Рис. 186

центра к вопросу о перемещениях сферической фигуры по сфере. Положение сферической фигуры на сфере однозначно связано с положением отрезка дуги большого круга, проходящего через точки  $A$  и  $B$ . Поэтому будем изучать перемещения дуги по сфере.

Для доказательства теоремы Эйлера рассмотрим (рис. 186) два каких-нибудь положения одной и той

же дуги большого круга:  $\overset{\frown}{AB}$  и  $\overset{\frown}{A'B'}$ , а вместе с тем, следовательно, и два положения сферической фигуры и самого перемещающегося твердого тела. Пользуясь в точности тем же рассуждением, что и при доказательстве теоремы Эйлера для плоской фигуры, соединим концы отрезков дугами больших кругов  $\overset{\frown}{AA'}$  и  $\overset{\frown}{BB'}$ , отметим их середины  $A_1$  и  $B_1$  и через них проведем перпендикулярные предыдущим дугам большие круги. Такие круги всегда пересекутся; обозначим точку пересечения их через  $C$ . Из равенства сферических треугольников  $ACB$  и  $A'CB'$  ( $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$  по построению,  $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{A'C}$  и  $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{B'C}$ , как сферические наклонные, одинаково удаленные от оснований сферических перпендикуляров) следует, что треугольник  $ACB$  может быть совмещен с треугольником  $A'CB'$  одним поворотом на угол  $\angle ACA'$  вокруг центра  $C$ ; отсюда следует, что и сферический отрезок  $\overset{\frown}{AB}$  совместится с отрезком  $\overset{\frown}{A'B'}$ . Так как при таком перемещении останутся неподвижными две точки  $O$  и  $C$ , то и прямая  $OC$  останется неподвижной: эта прямая будет служить осью поворота тела, что и доказывает теорему Эйлера. Можно заметить, что приведенное на рис. 186 построение на сфере, где роль прямых играют дуги больших кругов, совершенно аналогично построению центра поворота в случае плоского движения.

Предположим, что тело совершило *малый поворот*. Введем в рассмотрение *вектор малого поворота*  $\Theta$ , равный по величине углу поворота тела  $\theta$  и направленный по оси поворота в такую сторону, чтобы с конца вектора  $\Theta$  вращение представлялось происходящим в положительную сторону.

Малое перемещение точки  $M$  твердого тела с вектором-радиусом  $\overline{OM} = \mathbf{r}$  с точностью до малых высшего порядка определится вектором

$$\mathbf{p} = \Theta \times \mathbf{r}. \quad (15.4)$$

Действительно (рис. 187), величина этого векторного произведения равна  $p = \theta r \sin \alpha = h\theta$ , т. е. величине перемещения, а направление совпадает с перпендикуляром к плоскости, содержащей векторы  $\Theta$  и  $\mathbf{r}$ , в сторону поворота тела.

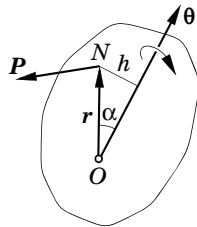


Рис. 187

Пусть тело сначала совершило малый поворот  $\Theta_1$ , затем также малый поворот  $\Theta_2$ ; согласно теореме Эйлера, эта совокупность двух поворотов может быть заменена одним поворотом с вектором поворота  $\Theta$ . Чтобы определить вектор результирующего поворота  $\Theta$ , возьмем какую-нибудь точку  $M$  тела с вектором-радиусом  $\mathbf{r}$ , которая после поворота  $\Theta_1$  перейдет в положение  $M'$  с вектором-радиусом

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{p} = \mathbf{r} + (\Theta_1 \times \mathbf{r});$$

при втором повороте  $\Theta_2$  точка  $M'$  переходит в положение  $M''$  с вектором-радиусом

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'' &= \mathbf{r}' + \mathbf{p}' = \mathbf{r}' + (\Theta_2 \times \mathbf{r}') = \mathbf{r} + (\Theta_1 \times \mathbf{r}) + \Theta_2 \times [\mathbf{r} + (\Theta_1 \times \mathbf{r})] = \\ &= \mathbf{r} + [(\Theta_1 + \Theta_2) \times \mathbf{r}] + \Theta_2 \times (\Theta_1 \times \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Пренебрегая последним слагаемым, как малым вектором второго порядка (произведением двух малых векторов первого порядка  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$ ), будем иметь

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r} + [(\Theta_1 + \Theta_2) \times \mathbf{r}].$$

Написав формулу результирующего поворота

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r} + (\Theta \times \mathbf{r})$$

и сравнивая ее с предыдущим выражением, вследствие произвольности вектора  $\mathbf{r}$  получим

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2. \quad (15.5)$$

Если бы сначала был совершен поворот  $\Theta_2$ , а потом  $\Theta_1$ , то было бы

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'' &= \mathbf{r} + (\Theta_2 \times \mathbf{r}) + \Theta_1 \times [\mathbf{r} + (\Theta_2 \times \mathbf{r})] = \\ &= \mathbf{r} + [(\Theta_2 + \Theta_1) \times \mathbf{r}] + \text{малые второго порядка.} \end{aligned}$$

Итак, приходим к результату: два последовательных малых поворота тела могут быть заменены одним результирующим поворо-



том с вектором поворота, равным геометрической сумме слагаемых векторов поворота; от перемены порядка поворотов результирующий поворот не меняется.

### § 61. Поле скоростей в твердом теле, вращающемся вокруг неподвижной точки

Уравнениями движения тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, являются уравнения, связывающие параметры (эйлеровы углы), определяющие положение тела, со временем:

$$\psi = f_1(t), \quad \theta = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (15.6)$$

Определяя скорость  $v$  как предел при  $\Delta t \rightarrow 0$  отношения малого перемещения  $p$  к промежутку времени  $\Delta t$  и основываясь на формуле (15.4), найдем

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\odot}{\Delta t} \times r \right) = \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\odot}{\Delta t} \right) \times r.$$

Вводя вектор угловой скорости

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\odot}{\Delta t}, \quad (15.7)$$

получим

$$v = \omega \times r. \quad (15.8)$$

Вектор угловой скорости направлен по предельному положению оси того поворота, который тело совершает за рассматриваемый бесконечно малый промежуток времени. Ось эта в отличие от неподвижной оси вращения называется *мгновенной осью*. Что касается величины вектора  $\omega$ , то уже нельзя, как раньше, определять ее производной от некоторого угла по времени; при вращении твердого тела вокруг неподвижного центра, так же как и в общем случае пространственного движения твердого тела, такого угла не существует. Иными словами, угол бесконечно малого поворота тела не является дифференциалом некоторого угла.

Из формулы (15.8), в полной аналогии со случаем вращения вокруг неподвижной оси, следует, что величина скорости равна произведению величины угловой скорости на кратчайшее расстояние от точки до мгновенной оси:

$$v = \omega h;$$

вектор скорости направлен по перпендикуляру к плоскости, проведенной через мгновенную ось и рассматриваемую точку, в сторону вращения тела.

Согласно известным правилам проецирования векторного произведения, получим из (15.8) выражения скорости в проекциях на неподвижные и подвижные оси (*формулы Эйлера*):

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, & v_{x'} &= \omega_{y'} z' - \omega_{z'} y', \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, & v_{y'} &= \omega_{z'} x' - \omega_{x'} z', \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x; & v_{z'} &= \omega_{x'} y' - \omega_{y'} x'. \end{aligned} \tag{15.9}$$

Покажем, как вычисляется угловая скорость по заданным уравнениям движения тела (15.6). Для этого заметим, что, согласно теореме о сложении малых поворотов (§ 60), всякий малый поворот тела можно представить в виде геометрической суммы трех составляющих поворотов:

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3,$$

а следовательно, деля обе части последнего равенства на малый промежуток времени и переходя к пределу, вектор угловой скорости этого поворота можно представить в виде суммы трех угловых скоростей составляющих поворотов:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3.$$

Разложим вектор угловой скорости  $\omega$  (рис. 188) на следующие векторы:

- ✓  $\omega_1$  — угловая скорость поворота тела вокруг оси  $Oz$ ,
- ✓  $\omega_2$  — угловая скорость поворота тела вокруг линии узлов,
- ✓  $\omega_3$  — угловая скорость поворота тела вокруг оси  $Oz'$ .

Каждый из этих поворотов соответствует изменению лишь одного из эйлеровых углов, а именно:  $\omega_1$  — изменению  $\psi$ ,  $\omega_2$  — изменению  $\theta$ ,  $\omega_3$  — изменению  $\phi$ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \dot{\psi}, \\ \tilde{\omega}_2 &= \dot{\theta}, \\ \tilde{\omega}_3 &= \dot{\phi} \end{aligned} \tag{15.10}$$

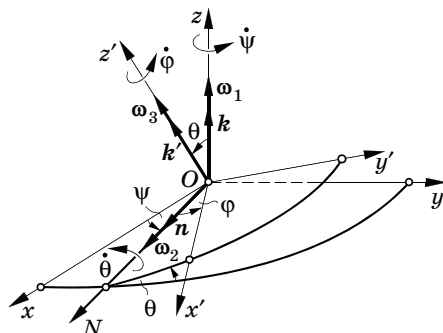


Рис. 188

и, кроме того,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{\phi} \mathbf{k}'. \quad (15.11)$$

Пользуясь этим представлением вектора  $\boldsymbol{\omega}$ , легко найдем его проекции на *неподвижные* оси  $Oxyz$ :

$$\omega_x = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \alpha_{31}, \quad \omega_y = \dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \alpha_{32}, \quad \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \alpha_{33},$$

или, пользуясь (15.2),

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_y &= -\dot{\phi} \cos \psi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_z &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Аналогично получим и проекции угловой скорости на *подвижные* оси, проецируя равенство (15.11) на оси координат  $Ox'y'z'$ , связанные с движущимся телом:

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_{y'} &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (15.13)$$

Из выведенных только что формул следует

$$\omega^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \theta. \quad (15.14)$$

Система равенств (15.2) вместе с формулами (15.12) и (15.13) решает вопрос о распределении скоростей в твердом теле, вращающемся около неподвижного центра.

Проекции угловой скорости можно выразить также и через направляющие косинусы системы осей, связанной с вращающимся телом. Для этого прежде всего найдем производные по времени от единичных векторов *подвижной* системы, равные скоростям концов этих векторов. По формуле (15.8) можем написать

$$\frac{di'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times i', \quad \frac{dj'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times j', \quad \frac{dk'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times k'; \quad (15.15)$$

разложим вектор  $\boldsymbol{\omega}$  по тем же единичным векторам:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x i' + \omega_y j' + \omega_z k',$$

и подставим в предыдущую систему равенств; тогда, вспоминая формулы для векторных произведений единичных векторов, будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{di'}{dt} &= \omega_z j' - \omega_y k', \\ \frac{dj'}{dt} &= \omega_x k' - \omega_z i', \\ \frac{dk'}{dt} &= \omega_y i' - \omega_x j'.\end{aligned}\tag{15.15'}$$

Отсюда, умножая скалярно обе части равенств (15.15') соответственно на  $j'$ ,  $k'$ ,  $i'$ , получим

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{dj'}{dt} \cdot k' = -\frac{dk'}{dt} \cdot j', \\ \omega_y &= \frac{dk'}{dt} \cdot i' = -\frac{di'}{dt} \cdot k', \\ \omega_z &= \frac{di'}{dt} \cdot j' = -\frac{dj'}{dt} \cdot i',\end{aligned}$$

или, выражая скалярные произведения через проекции сомножителей в системе координат  $Oxyz$ ,

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\alpha}_{12}\alpha_{13} + \dot{\alpha}_{22}\alpha_{23} + \dot{\alpha}_{32}\alpha_{33} = -(\alpha_{12}\dot{\alpha}_{13} + \alpha_{22}\dot{\alpha}_{23} + \alpha_{32}\dot{\alpha}_{33}), \\ \omega_y &= \dot{\alpha}_{23}\alpha_{21} + \dot{\alpha}_{33}\alpha_{31} + \dot{\alpha}_{13}\alpha_{11} = -(\alpha_{23}\dot{\alpha}_{21} + \alpha_{33}\dot{\alpha}_{31} + \alpha_{13}\dot{\alpha}_{11}), \\ \omega_z &= \dot{\alpha}_{31}\alpha_{32} + \dot{\alpha}_{11}\alpha_{12} + \dot{\alpha}_{21}\alpha_{22} = -(\alpha_{31}\dot{\alpha}_{32} + \alpha_{11}\dot{\alpha}_{12} + \alpha_{21}\dot{\alpha}_{22}).\end{aligned}\tag{15.16}$$

## § 62. Мгновенная ось вращения твердого тела. Аксоиды

Мгновенная ось была выше определена как ось бесконечно малого поворота тела. *Мгновенную ось* можно также определить как *геометрическое место точек тела, имеющих в данный момент нулевую скорость*. Если обозначить вектор-радиус какой-нибудь точки  $M$  мгновенной оси через  $r$ , то из условия равенства нулю скорости этой точки получим

$$\omega \times r = 0.\tag{15.17}$$

Уравнение (15.17) представляет собой *уравнение мгновенной оси*; оно выражает то обстоятельство, что векторы  $\omega$  и  $r$  параллельны; оба вектора имеют общее начало в точке  $O$  и, следовательно, расположены по одной прямой — мгновенной оси вращения тела.

Проецируя векторное уравнение (15.17) на неподвижные и подвижные оси координат, получим уравнения мгновенной оси:

✓ в неподвижной системе координат

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}; \quad (15.18)$$

✓ в подвижной системе координат

$$\frac{x'}{\omega_{x'}} = \frac{y'}{\omega_{y'}} = \frac{z'}{\omega_{z'}}. \quad (15.19)$$

Проекции угловой скорости будут меняться с течением времени. Мгновенная ось будет в разные моменты времени занимать различные положения как в неподвижном пространстве  $Oxyz$ , так и в самом теле, т. е. в системе  $Ox'y'z'$ . Перемещаясь в неподвижном пространстве и во вращающемся теле, мгновенная ось опишет в них некоторые линейчатые поверхности. Так как образующая эти линейчатые поверхности мгновенная ось всегда проходит через неподвижную точку  $O$ , то поверхности будут коническими с вершиной в точке  $O$ . Поверхность, образованную движением мгновенной оси в неподвижном пространстве, будем называть *неподвижным аксоидом*, а во вращающемся теле — *подвижным аксоидом*. Исключая время из уравнений (15.18), получим уравнение неподвижного аксоида, исключая время из уравнений (15.19), получим уравнение подвижного аксоида. Докажем следующую теорему.

**ТЕОРЕМА.** При вращении тела вокруг неподвижного центра подвижный аксоид катится без скольжения по неподвижному.

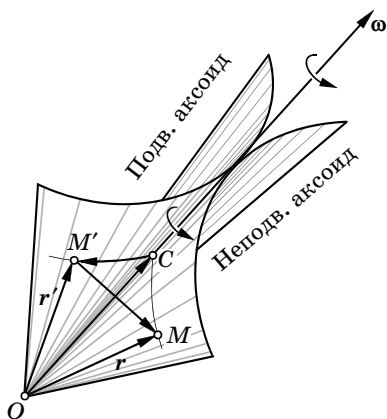


Рис. 189

Поверхности аксоидов в каждый момент времени имеют общую прямую  $OC$  (рис. 189) — мгновенную ось. Пересечем оба аксоида плоскостью, проходящей через точку  $C$  перпендикулярно мгновенной оси, и отметим те точки  $M'$  и  $M$ , принадлежащие подвижному и неподвижному аксоидам, которые в момент  $t + dt$  будут находиться на новой

мгновенной оси и, таким образом, совпадут. Перемещение точки  $M'$ , т. е. вектор  $\overrightarrow{M'M}$ , будет равно по уравнению (15.8)

$$\overrightarrow{M'M} = \omega dt \times \mathbf{r}' = \omega dt \times \overrightarrow{OM'} = \omega \times (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM'}) dt = \omega \times \overrightarrow{CM'} dt,$$

так как

$$\omega \times \overrightarrow{OC} = 0.$$

Из предыдущего равенства следует, что вектор  $\overrightarrow{M'M}$  по длине представляет собой малую величину второго порядка, если считать малыми величинами первого порядка промежутки времени  $dt$  и дугу  $M'C$ . Это доказывает, что подвижный аксоид касается неподвижного по общей образующей, т. е. катится по неподвижному. Остается заметить, что качение происходит без скольжения. Для этого достаточно вспомнить, что любая точка тела, находящаяся в данный момент на мгновенной оси, имеет скорость, равную нулю; следовательно, скольжения на оси быть не может.

Доказанная теорема о качении аксоидов представляет собой обобщение ранее выведенной в главе о плоском движении теоремы о качении без скольжения подвижной центроиды по неподвижной. Собственно говоря, и в случае плоского движения приходится иметь дело с качением аксоидов, но аксоидов цилиндрических. Сводя задачу к плоской, естественно вместо аксоидов брать следы их пересечения с плоскостью движения — центроиды.

### § 63. Поле ускорений в твердом теле, вращающемся вокруг неподвижной точки

Для определения ускорения точки  $M$  с вектором-радиусом  $\mathbf{r}$  продифференцируем по времени обе части формулы распределения скоростей (15.8). Тогда получим

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} + \omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (15.20)$$

Производная по времени от вектора угловой скорости определяет вектор *углового ускорения*

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (15.21)$$

По величине и направлению этот вектор совпадает со скоростью движения конца вектора  $\omega$  угловой скорости по его годографу.

Замечая, что по предыдущему

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

получим

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (15.22)$$

Первое слагаемое

$$\mathbf{w}^{(B)} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} \quad (15.23)$$

представляет собой *вращательное ускорение*; это — вектор, перпендикулярный плоскости, проходящей через вектор углового ускорения и вектор-радиус взятой точки тела (рис. 190). В отличие от случая вращения вокруг неподвижной оси, вектор углового ускорения не лежит на той же прямой, что и вектор угловой скорости, а направлен по некоторой прямой, проходящей через неподвижную точку; эту прямую будем называть *осью углового ускорения*.

Эта ось, как уже указывалось, параллельна скорости конца вектора  $\omega$ . Поэтому здесь вектор вращательного ускорения перпендикулярен не радиусу вращения  $h$ , а отрезку  $h'$ , представляющему собой кратчайшее расстояние от точки  $M$  до оси углового ускорения. По величине вращательное ускорение равно

$$w^{(B)} = \varepsilon h'. \quad (15.24)$$

Второе слагаемое

$$\mathbf{w}^{(oc)} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (15.25)$$

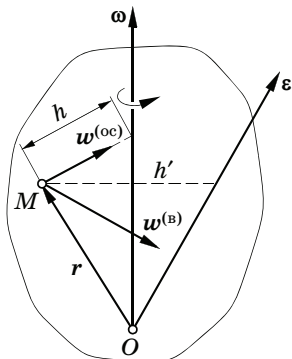


Рис. 190

определяет *осестремительное ускорение*. Оно направлено перпендикулярно плоскости, содержащей  $\omega$  и  $v$ , т. е. по кратчайшему расстоянию между точкой  $M$  и мгновенной осью, причем всегда в ту сторону, откуда вращение  $\omega$  к  $v$  на наименьший угол видно положительным; из рис. 190 видно, что  $w^{(oc)}$  направлено к оси  $\omega$ . По величине осестремительное ускорение равно

$$\begin{aligned} w^{(oc)} &= \omega v \sin(\pi/2) = \\ &= \omega \cdot \omega h = \omega^2 h. \end{aligned} \quad (15.26)$$

Возвращаясь к формуле (15.22), получаем следующую теорему.

**ТЕОРЕМА.** Ускорение точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижного центра, складывается геометрически из вращательной и осесремительной составляющих.

Ускорение  $\boldsymbol{w}$  легче всего в каждом случае определять по указанным составляющим. В некоторых случаях, однако, может представиться необходимым вычислить проекции ускорения на неподвижные и подвижные оси. Чтобы получить выражения этих проекций, запишем равенство (15.22) в форме

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}) - \omega^2 \boldsymbol{r}. \quad (15.27)$$

Проецируя равенство (15.27) по общим правилам векторной алгебры, получим

$$\begin{aligned} w_x &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x, \\ w_y &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_y(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y, \\ w_z &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_z(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z, \end{aligned} \quad (15.28)$$

$$\begin{aligned} w_{x'} &= \varepsilon_y z' - \varepsilon_z y' + \omega_{x'}(\omega_{x'} x' + \omega_{y'} y' + \omega_{z'} z') - \omega^2 x', \\ w_{y'} &= \varepsilon_z x' - \varepsilon_x z' + \omega_{y'}(\omega_{x'} x' + \omega_{y'} y' + \omega_{z'} z') - \omega^2 y', \\ w_{z'} &= \varepsilon_x y' - \varepsilon_y x' + \omega_{z'}(\omega_{x'} x' + \omega_{y'} y' + \omega_{z'} z') - \omega^2 z'. \end{aligned} \quad (15.29)$$

Для определения проекций углового ускорения на неподвижные оси заметим, что

$$\varepsilon_x = \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_x = \frac{d\omega_x}{dt}, \quad \varepsilon_y = \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_y = \frac{d\omega_y}{dt}, \quad \varepsilon_z = \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_z = \frac{d\omega_z}{dt},$$

так что, дифференцируя по времени обе части равенств (15.12), получим выражения проекций углового ускорения на неподвижные оси через эйлеровы углы и их производные.

Что касается проекций на подвижные оси, то, вообще говоря, нельзя утверждать, что проекция производной на подвижное направление равна производной от проекции на то же направление; однако в случае дифференцирования вектора  $\boldsymbol{\omega}$  и проецирования его на оси координат, связанные с телом, т. е. на систему осей, вращающуюся с той же угловой скоростью, что и твердое тело, производная от проекции совпадает с проекцией производной. Действительно, согласно формулам (15.15), имеем

$$\varepsilon_{x'} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \cdot \boldsymbol{i}' = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{i}') - \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\boldsymbol{i}'}{dt} = \frac{d\omega_{x'}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}') = \frac{d\omega_{x'}}{dt}$$



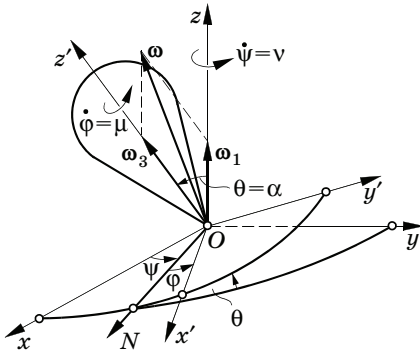


Рис. 191

и совершенно аналогично для других проекций. Таким образом, для определения проекций углового ускорения на подвижные оси следует вычислить производные по времени от проекций угловой скорости, приведенных в системе равенств (15.13).

**Пример 58. Регулярная прецессия.** При движении, называемом *регулярной прецессией*, тело вращается с постоянной угловой

скоростью  $\mu$  вокруг своей оси  $Oz'$  (рис. 191), а эта ось, в свою очередь, вращается вокруг оси  $Oz$  с постоянной угловой скоростью  $v$ , описывая коническую поверхность с постоянным углом раствора  $2\theta = 2\alpha$ .

Разметим эйлеровы углы, как показано на рис. 191. Уравнения регулярной прецессии, согласно определению, будут иметь вид

$$\psi = vt, \quad \theta = \text{const} = \alpha, \quad \phi = \mu t. \tag{15.30}$$

Прежде всего определим проекции вектора угловой скорости на неподвижные и подвижные оси; по формулам (15.12) и (15.13) найдем

$$\begin{aligned} \omega_x &= \mu \sin \alpha \sin vt, & \omega_{x'} &= v \sin \alpha \sin \mu t, \\ \omega_y &= -\mu \sin \alpha \cos vt, & \omega_{y'} &= v \sin \alpha \cos \mu t, \\ \omega_z &= \mu \cos \alpha + v, & \omega_{z'} &= \mu + v \cos \alpha. \end{aligned}$$

Угловая скорость по величине постоянна и равна, согласно формуле (15.14),

$$\omega = \sqrt{\mu^2 + v^2 + 2\mu v \cos \alpha};$$

по направлению она совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на угловых скоростях (§ 61)  $\omega_1 = \psi k = vk$ ,  $\omega_3 = \phi k' = \mu k'$ . Эта диагональ определит направление мгновенной оси.

Мгновенная ось описывает конусы в теле и в неподвижном пространстве. Уравнения этих конусов проще всего написать в декартовой системе; по формулам (15.18) и (15.19) получим уравнения мгновенной оси:

✓ в неподвижной системе

$$\frac{x}{\mu \sin \alpha \sin vt} = \frac{y}{-\mu \sin \alpha \cos vt} = \frac{z}{v + \mu \cos \alpha};$$

✓ в подвижной системе

$$\frac{x'}{v \sin \alpha \sin \mu t} = \frac{y'}{v \sin \alpha \cos \mu t} = \frac{z'}{\mu + v \cos \alpha}.$$

Исключив из этих пропорций время, получим уравнения аксоидов:

✓ неподвижного

$$\frac{x^2 + y^2}{\mu^2 \sin^2 \alpha} - \frac{z^2}{(v + \mu \cos \alpha)^2} = 0;$$

✓ подвижного

$$\frac{x'^2 + y'^2}{v^2 \sin^2 \alpha} - \frac{z'^2}{(\mu + v \cos \alpha)^2} = 0.$$

Это — прямые круговые конусы.

Для определения углов  $\gamma$  и  $\gamma'$ , равных половине углов раствора этих конусов (рис. 192), проще всего исходить из формул

$$\operatorname{ctg} \gamma = (z/x)_{y=0}, \quad \operatorname{ctg} \gamma' = (z'/x')_{y'=0}.$$

Получим

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{v/\mu + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{v}{\mu \sin \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg} \gamma' = \frac{\mu/v + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\mu}{v \sin \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha.$$

Если вектор  $\omega_1$  образует острый угол с вектором  $\omega_3$ , то прецессия называется *прямой*, в противном случае — *обратной*.

Для определения вектора углового ускорения воспользуемся определением его как скорости движения конца вектора угловой скорости  $\omega$  по его годографу. В данном случае вследствие постоянства величины вектора угловой скорости  $\omega$  искомая скорость конца его определится как скорость точки (с вектором-радиусом  $\omega$ ) твердого тела, вращающегося с угловой скоростью  $\omega_1$ , т. е.

$$\varepsilon = \omega_1 \times \omega.$$

Замечая, что по формуле (15.11) в случае регулярной прецессии ( $\dot{\theta} = 0$ ) будет

$$\omega = \omega_1 + \omega_3,$$

найдем

$$\varepsilon = \omega_1 \times (\omega_1 + \omega_3) = \omega_1 \times \omega_3. \quad (15.31)$$

Отсюда следует, что вектор  $\varepsilon$  направлен по перпендикуляру к плоскости  $zOz'$ , т. е. по линии узлов, в ту сторону, откуда вращение вектора  $\omega_1$  к  $\omega_3$  на наименьший угол представляется положительным. В случае прямой прецессии вектор углового ускорения совпадает с положительным направлением линии узлов, в случае обратной — с противоположным направлением.

Величина вектора углового ускорения равна

$$\varepsilon = \omega_1 \omega_3 \sin(\widehat{\omega_1, \omega_3}) = \mu v \sin \alpha.$$

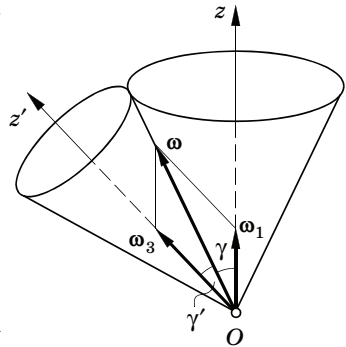


Рис. 192

К этому же результату можно прийти, дифференцируя по времени выражения проекций угловой скорости. Будем иметь

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \mu\nu \sin \alpha \cos vt, & \varepsilon_{x'} &= \mu\nu \sin \alpha \cos \mu t, \\ \varepsilon_y &= \mu\nu \sin \alpha \sin vt, & \varepsilon_{y'} &= -\mu\nu \sin \alpha \sin \mu t, \\ \varepsilon_z &= 0; & \varepsilon_{z'} &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда получим величину углового ускорения:

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{\varepsilon_{x'}^2 + \varepsilon_{y'}^2 + \varepsilon_{z'}^2} = \mu\nu \sin \alpha.$$

Для определения направления  $\varepsilon$  заметим, что

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{\varepsilon, x}) &= \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon} = \cos vt = \cos \psi, & \cos(\widehat{\varepsilon, x'}) &= \cos \varphi, \\ \cos(\widehat{\varepsilon, y}) &= \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon} = \sin vt = \sin \psi, & \cos(\widehat{\varepsilon, y'}) &= -\sin \varphi, \\ \cos(\widehat{\varepsilon, z}) &= \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} = 0; & \cos(\widehat{\varepsilon, z'}) &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда вновь следует, что вектор  $\varepsilon$  направлен по линии узлов.

## Глава XVI

### Общий случай движения абсолютно твердого тела

#### § 64. Определение положения твердого тела в пространстве.

##### Основная теорема о перемещении абсолютно твердого тела

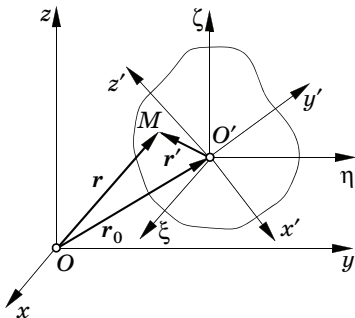


Рис. 193

Чтобы определить положение твердого тела в пространстве, зададим прежде всего положение какой-нибудь одной его *основной точки*, или *полюса*  $O'$  (рис. 193), при помощи вектора-радиуса  $r_0$  этой точки или ее координат  $(x_0, y_0, z_0)$ . Тело может вращаться около фиксированного положения полюса  $O'$ , поэтому для определения положения тела в пространст-

ве нужно еще задать три эйлеровых угла тела по отношению к системе  $O\xi\eta\zeta$ , оси которой параллельны неподвижным осям  $Oxyz$ , а начало находится в полюсе.

Итак, *твердое тело в пространстве имеет шесть степеней свободы, характеризующихся величинами*

$$x_0, y_0, z_0; \quad \psi, \theta, \varphi.$$

Уравнения движения твердого тела будут иметь вид

$$\begin{aligned} x_0 &= f_1(t), & y_0 &= f_2(t), & z_0 &= f_3(t), \\ \psi &= f_4(t), & \theta &= f_5(t), & \varphi &= f_6(t). \end{aligned} \quad (16.1)$$

Имея заданными эти шесть величин, легко составить и уравнения движения любой точки  $M$  тела. Из основного равенства

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$$

проецированием его на оси неподвижной системы получим

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z', \\ y &= y_0 + \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z', \\ z &= z_0 + \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z'. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Здесь направляющие косинусы — обозначения их приняты согласно таблице, помещенной в начале главы XV, — могут быть выражены через эйлеровы углы согласно формулам (15.2), а углы являются заданными функциями времени по (16.1); величины  $x', y', z'$  — заданные постоянные, определяющие выбор точки, движение которой разыскивается,  $x_0, y_0, z_0$  — заданные функции времени по (16.1). Таким образом, при заданных уравнениях движения тела (16.1) уравнения (16.2) дают уравнения движения точек тела.

Рассмотрение общего случая перемещения тела можно свести к изучению перемещений жесткого треугольника (рис. 194), имеющего в вершинах какие-нибудь три точки тела  $M_1, M_2, M_3$ . Положение такого треугольника однозначно связано с положением твердого тела.

Докажем прежде всего следующую теорему.

**ТЕОРЕМА ОСНОВНАЯ КИНЕМАТИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА.** *Всякое перемещение тела в пространстве может быть осуществлено поступательным перемещением вместе с полюсом и одним поворотом вокруг оси, проходящей через полюс.*

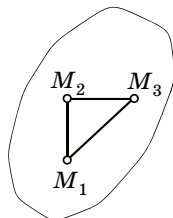


Рис. 194

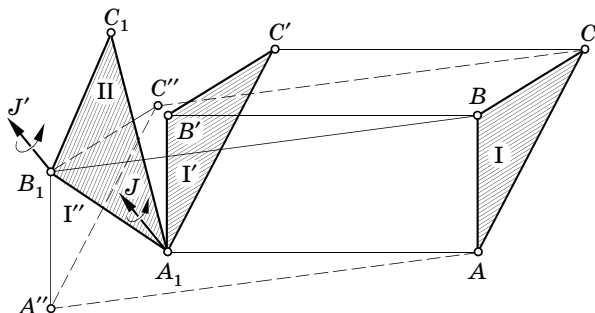


Рис. 195

Для доказательства этой теоремы предположим, что за полюс выбрана точка  $A$  тела (рис. 195). Чтобы перейти из положения I в II, совершим сначала поступательное перемещение  $\overline{AA_1}$ , переводящее тело из положения I в положение I'. Перемещение тела из положения I' в положение II является перемещением тела вокруг неподвижного центра  $A_1$ , следовательно, оно может быть по теореме Эйлера произведено одним вращением вокруг оси  $A_1J$ , проходящей через точку  $A_1$ , что и доказывает теорему.

В дополнение к этой теореме докажем еще одну.

**ТЕОРЕМА.** Вектор поворота не зависит от выбора полюса, т. е. при перемене полюса будет меняться только поступательное перемещение, а ось, угол и направление поворота не будут изменяться; проекции поступательных перемещений (при различных полюсах) на общее направление оси поворота равны между собой.

Для доказательства обратим внимание на то, что в промежуточных положениях треугольников  $A_1B'C'$  и  $A''B_1C''$  стороны их соответственно параллельны друг другу, а следовательно, как легко видеть из чертежа, для перехода их в положение  $A_1B_1C_1$  нужно совершить повороты вокруг параллельных осей на одинаковые углы и в одинаковом направлении. Далее,

$$\overline{BB_1} = \overline{BB'} + \overline{B'B_1} = \overline{AA_1} + \overline{B'B_1},$$

но по определению вектора поворота проекция вектора  $\overline{B'B_1}$  на ось  $A_1J$  или, что все равно, на ось  $B_1J'$  равна нулю, и, следовательно, проекции векторов  $\overline{BB_1}$  и  $\overline{AA_1}$  на это направление равны друг другу.

Переход тела из одного положения в смежное может быть совершен при помощи различных поступательных перемещений, зависящих от выбора той точки тела (полюса), перемещение которой определяет поступательное перемещение. Все эти поступательные перемещения будут различаться между собой как по величине, так и по направлению, но проекции их на ось поворота будут одинаковы. Можно выбрать полюс таким образом, чтобы перемещение его было наименьшим, т. е. равнялось по величине общей проекции перемещений всех остальных точек. Такая точка должна иметь перемещение, направленное параллельно оси поворота (перемещение будет при этом равно своей проекции).

*Совокупность поступательного перемещения и вращательного вокруг оси, параллельной поступательному перемещению, называется винтовым перемещением тела.*

Происхождение этого наименования следует из рассмотрения совокупности поступательных и вращательных перемещений винта, ввинчивающегося в гайку.

### § 65. Поля скоростей и ускорений в общем случае движения твердого тела

Перемещение любой точки тела, как было показано, складывается из поступательного перемещения, равного перемещению полюса, и вращательного вокруг оси, проходящей через полюс. Если рассматривать только бесконечно малые перемещения тела, соответствующие переходу тела из данного положения в бесконечно близкое, то с точностью до бесконечно малых высших порядков можно представить вращательное перемещение как векторное произведение вектора бесконечно малого поворота  $\Theta = \omega dt$  на вектор-радиус  $r'$  рассматриваемой точки по отношению к полюсу.

Обозначим (рис. 196) через  $p$  вектор перемещения любой точки тела, через  $r'$  — вектор-радиус ее относительно полюса и через  $p_0$  — вектор перемещения полю-

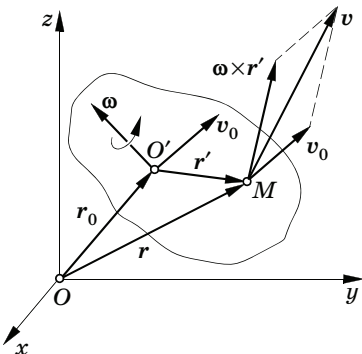


Рис. 196

са; тогда на основании только что доказанной в § 64 теоремы о перемещениях будем иметь

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \boldsymbol{\Theta} \times \mathbf{r}', \quad (16.3)$$

или, после деления на  $dt$ ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (16.4)$$

Эта *основная формула кинематики твердого тела* дает закон распределения скоростей в твердом теле в общем случае его движения. Слагаемое  $\mathbf{v}_0$  определяет *поступательную составляющую* скорости, равную скорости полюса, второе слагаемое,  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ , представляет собой *вращательную составляющую* скорости тела вокруг полюса  $O'$ .

Дадим другой вывод той же формулы. Продифференцируем по времени обе части равенства

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + x'i' + y'j' + z'k';$$

будем иметь

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + x' \frac{di'}{dt} + y' \frac{dj'}{dt} + z' \frac{dk'}{dt}.$$

По формулам (15.15)

$$\frac{di'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times i', \quad \frac{dj'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times j', \quad \frac{dk'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times k'.$$

Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = x' \frac{di'}{dt} + y' \frac{dj'}{dt} + z' \frac{dk'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (x'i' + y'j' + z'k') = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', \quad (16.5)$$

так что окончательно

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}',$$

т. е. вновь получаем формулу (16.4).

Зная движение полюса и закон вращения тела вокруг полюса, т. е. имея уравнения движения, можем по формулам (16.4) определить скорость любой точки тела. Проекция скорости на оси получим по общим правилам проецирования векторных выражений. Выпишем проекции скорости на *неподвижные* оси:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= v_{0y} + \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= v_{0z} + \omega_x y - \omega_y x, \end{aligned} \quad (16.6)$$

и на *подвижные* оси:

$$\begin{aligned} v_{x'} &= v_{0x'} + \omega_y z' - \omega_z y', \\ v_{y'} &= v_{0y'} + \omega_z x' - \omega_x z', \\ v_{z'} &= v_{0z'} + \omega_x y' - \omega_y x', \end{aligned} \tag{16.7}$$

Здесь

$$v_{0x} = \dot{x}_0, \quad v_{0y} = \dot{y}_0, \quad v_{0z} = \dot{z}_0;$$

что касается проекций скорости полюса на оси подвижных координат, то их приходится определять по проекциям на неподвижные оси при помощи формул перехода

$$\begin{aligned} v_{0x'} &= \alpha_{11}v_{0x} + \alpha_{21}v_{0y} + \alpha_{31}v_{0z}, \\ v_{0y'} &= \alpha_{12}v_{0x} + \alpha_{22}v_{0y} + \alpha_{32}v_{0z}, \\ v_{0z'} &= \alpha_{13}v_{0x} + \alpha_{23}v_{0y} + \alpha_{33}v_{0z}. \end{aligned}$$

В формулах (16.7)  $x', y', z'$  — постоянные координаты выбранной в теле точки; координаты той же точки в неподвижной системе  $x, y, z$  будут выражаться через  $x', y', z'$  по формулам перехода (16.2). Направляющие косинусы  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots$  в последних формулах выражаются известным уже нам образом через эйлеровы углы, заданные в функции от времени.

Переходим к рассмотрению вопроса о *распределении ускорений*. Для этого продифференцируем левую и правую части (16.4) по времени; получим

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv_0}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times r' + \omega \times \frac{dr'}{dt},$$

или, согласно равенству (16.5),

$$w = w_0 + \varepsilon \times r' + \omega \times (\omega \times r'). \tag{16.8}$$

Первое слагаемое,  $w_0$ , определяет *поступательное ускорение*, равное ускорению полюса, а второе и третье,  $w^{(B)} = \varepsilon \times r'$  и  $w^{(oc)} = \omega \times (\omega \times r')$ , — *вращательную* и *осестремительную* составляющие ускорения вращения тела вокруг полюса. Численные величины и направления последних двух слагаемых уже были исследованы при рассмотрении движения тела вокруг неподвижного центра (рис. 197).

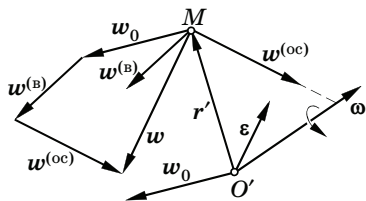


Рис. 197



Таким образом, получаем следующую теорему.

**ТЕОРЕМА.** Ускорение точки твердого тела в общем случае его движения складывается из трех составляющих:

- ✓ поступательного ускорения, одинакового в данный момент для всех точек тела и равного ускорению полюса;
- ✓ вращательного ускорения вокруг полюса, равного по величине произведению углового ускорения на кратчайшее расстояние от точки до оси вектора углового ускорения и направленного перпендикулярно плоскости, проходящей через ось вектора углового ускорения и данную точку, в ту сторону, откуда вращение вектора углового ускорения к вектору-радиусу точки на наименьший угол будет видно положительным;
- ✓ осестремительного ускорения, равного по величине произведению квадрата угловой скорости на кратчайшее расстояние от точки до мгновенной оси вращения, проведенной через полюс, и направленного перпендикулярно мгновенной оси от точки в сторону этой оси.

**Пример 59.** Две концентрические сферические поверхности с радиусами  $a$  и  $b$  вращаются с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  вокруг диаметров, составляющих между собой угол  $\alpha$ . Между сферами помещен шар, касающийся обеих поверхностей в точках  $A$  и  $B$  и катящийся без скольжения. Определим скорость  $v_C$  центра  $C$  катящегося шара и его угловую скорость  $\omega$ .

Векторы-радиусы точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  относительно неподвижного центра  $O$  сфер будут равны

$$r_A = ae, \quad r_B = be, \quad r_C = \frac{1}{2}(a + b)e, \quad (16.9)$$

где через  $e$  обозначен единичный вектор нормали к сферам, проходящий через точки соприкосновения  $A$  и  $B$ . Принимая центр  $C$  катящегося шара за полюс, найдем по формуле (16.4) скорости точек  $A$  и  $B$  шара:

$$v_A = v_C + \omega \times (r_A - r_C), \quad v_B = v_C + \omega \times (r_B - r_C). \quad (16.10)$$

Составляя сумму этих выражений, получим

$$v_A + v_B = 2v_C + \omega \times (r_A + r_B - 2r_C).$$

По третьему из равенств (16.9) выражение в скобках обращается в нуль, так что

$$v_C = \frac{1}{2}(v_A + v_B). \quad (16.11)$$

Разность тех же выражений дает

$$\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B). \quad (16.12)$$

По условию отсутствия скольжения скорости  $\mathbf{v}_A$  и  $\mathbf{v}_B$  должны быть соответственно равны скоростям точек  $A$  и  $B$ , принадлежащих вращающимся сферам, так что

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_A = a\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}, \quad \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_B = b\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}.$$

Подставив эти величины в равенства (16.11) и (16.12), получим

$$\mathbf{v}_C = \frac{1}{2}(a\boldsymbol{\omega}_1 + b\boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{e}, \quad (a\boldsymbol{\omega}_1 - b\boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{e} = (a - b)\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}. \quad (16.13)$$

Введем в рассмотрение постоянный по величине и направлению вектор  $\boldsymbol{\Omega}$ , определив его выражением

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{a\boldsymbol{\omega}_1 + b\boldsymbol{\omega}_2}{a + b}.$$

Тогда, очевидно, искомую скорость  $\mathbf{v}_C$  можно представить в виде

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_C.$$

Таким образом, вектор-радиус  $\mathbf{r}_C$  описывает прямой круговой конус, ось которого имеет направление вектора  $\boldsymbol{\Omega}$ ; траекторией центра шара  $C$  будет параллельный круг, образуемый пересечением этого конуса со сферой радиусом  $(a + b)/2$ . Обозначая через  $2\theta$  угол раствора конуса, найдем величину скорости:

$$v_C = \Omega r_C \sin \theta = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 \omega_1^2 + b^2 \omega_2^2 + 2ab\omega_1 \omega_2 \cos \alpha} \sin \theta.$$

Из второго равенства (16.13) угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  шара может быть найдена с точностью до слагаемого, параллельного вектору  $\mathbf{e}$ :

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{a\boldsymbol{\omega}_1 - b\boldsymbol{\omega}_2}{a - b} + \lambda \mathbf{e}.$$

Здесь  $\lambda \mathbf{e}$  определяет угловую скорость *верчения*, т. е. составляющую угловой скорости по общей нормали к сферам в точках соприкосновения с шаром.

**Пример 60. Качение диска по плоскости.** Диск радиусом  $a$  катится без скольжения по горизонтальной плоскости  $H$  (рис. 198). Выразим скорость центра диска через эйлеровы углы и их производные по времени.

Свяжем с диском систему осей  $O'x'y'z'$  с началом в центре диска  $O'$  и с осью  $O'z'$ , перпендикулярной плоскости диска. В той же точке  $O'$  отметим направления осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , параллельных неподвижным осям, причем ось  $Oz$  направлена по вертикали вверх. Линией узлов  $O'N$  явля-

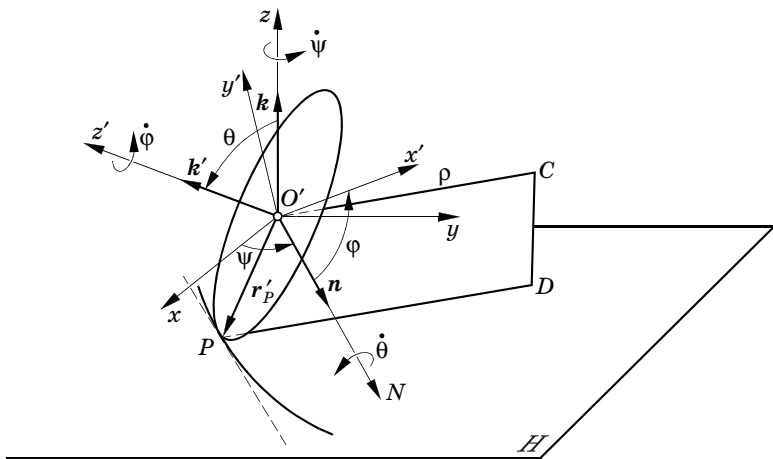


Рис. 198

ется прямая, лежащая в плоскости диска и перпендикулярная плоскости  $z'O'z$ . Эйлеровы углы  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  показаны на рис. 180.

Вектор-радиус  $\mathbf{r}'_P = \overrightarrow{O'P}$  точки соприкосновения диска с плоскостью расположен в вертикальной плоскости  $z'O'z$  перпендикулярно оси  $O'z'$ ; с другой стороны, будучи расположен в указанной плоскости, он будет перпендикулярен линии узлов  $O'N$ . Отсюда следует, что

$$\mathbf{r}'_P = a\mathbf{n} \times \mathbf{k}', \quad (16.14)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор линии узлов.

Используя условие отсутствия скольжения в точке  $P$ , напомним для точки  $P$ , принадлежащей диску:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_P = 0.$$

Отсюда, вспомнив формулу разложения (15.11) вектора  $\boldsymbol{\omega}$ , получим

$$\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{r}'_P \times \boldsymbol{\omega} = a(\mathbf{n} \times \mathbf{k}') \times (\dot{\psi}\mathbf{k} + \dot{\theta}\mathbf{n} + \dot{\varphi}\mathbf{k}'). \quad (16.15)$$

Применяя известное правило представления двойного векторного произведения, получим

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{k}') \times \mathbf{k} = \mathbf{k}'(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) - \mathbf{n}(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) = -\mathbf{n} \cos \theta,$$

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{k}') \times \mathbf{n} = \mathbf{k}'(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n}(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{k}',$$

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{k}') \times \mathbf{k}' = \mathbf{k}'(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}') - \mathbf{n}(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}') = -\mathbf{n},$$

после чего равенство (16.15) дает искомое выражение скорости центра диска:

$$\mathbf{v}_{O'} = a\dot{\theta}\mathbf{k}' - a(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})\mathbf{n}. \quad (16.16)$$

Таким образом, вектор скорости центра диска, как и следовало ожидать, расположен в плоскости, содержащей ось диска  $O'z'$  и линию узлов, т. е. перпендикулярен вектору-радиусу  $O'P$ .

Пусть  $\rho$  обозначает радиус кривизны  $O'C$  проекции на плоскость  $H$  траектории центра диска; тогда составляющая вектора скорости точки по линии узлов будет равна  $\rho\dot{\psi}n$ , и из равенства (16.16) следует, что

$$-a(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) = \rho\dot{\psi},$$

или

$$(\rho + a \cos \theta) \dot{\psi} + a\dot{\phi} = 0.$$

Величина  $\rho + a \cos \theta$  представляет собой радиус кривизны траектории точки соприкосновения диска с неподвижной плоскостью  $H$ .

### § 66. Винтовая ось. Винтовые аксоиды

Перемещение твердого тела в пространстве в общем случае может быть представлено как совокупность некоторого поступательного перемещения и поворота вокруг оси, параллельной этому перемещению. Такую совокупность перемещений, как было отмечено в конце § 64, называют *винтовым перемещением*.

Переход от конечных перемещений к бесконечно малым перемещениям, а следовательно, и к скоростям, значительно упрощает рассмотрение вопроса и позволяет дать ему простое аналитическое решение.

Докажем прежде всего, что *угловая скорость вращения тела не зависит от выбора полюса*.

Перейдем от полюса  $O'$  к новому полюсу  $O''$  (рис. 199) и предположим, что при новом полюсе угловая скорость будет уже не  $\omega$ , а  $\omega'$ . Тогда

$$v = v_{O'} + \omega \times r' = v_{O''} + \omega' \times r''.$$

Замечая, что

$$v_{O''} = v_{O'} + \omega \times r'_0, \tag{16.17}$$

перепишем предыдущее равенство после очевидных приведений в виде

$$\omega \times (r' - r_0) = \omega' \times r''$$

или

$$(\omega - \omega') \times r'' = 0.$$

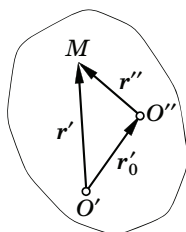


Рис. 199

Из последнего равенства вследствие произвольности вектора  $r''$  следует

$$\omega = \omega',$$

что и доказывает утверждение об одинаковости векторов угловой скорости тела при различных полюсах.

Докажем далее также, что проекция поступательной скорости на направление оси вращения не зависит от выбора полюса.

Умножим обе части равенства (16.17) скалярно на  $\omega$ , тогда получим

$$v_{O''} \cdot \omega = v_{O'} \cdot \omega, \quad (16.18)$$

так как

$$\omega \cdot (\omega \times r'_0) = 0.$$

Формула (16.18) доказывает вышеуказанное предложение.

Принимая различные точки тела за полюс, будем иметь различные поступательные скорости. Все эти скорости имеют общую проекцию на направление оси вращения, одинаковой по направлению для всех полюсов. Те точки тела, которые будут иметь скорости направленными параллельно оси вращения, будут вместе с тем иметь и наименьшие скорости. Все остальные точки будут иметь скорости большие, так как их проекции равны скоростям предыдущих точек.

Докажем прежде всего, что в теле существует в каждый момент времени ось, все точки которой имеют скорости, направленные параллельно угловой скорости.

Вместо того чтобы основываться на теореме о винтовом перемещении, изложенной в § 64, проще вывести непосредственно уравнение этой оси из последнего ее определения, пользуясь основной формулой распределения скоростей (16.4).

Поставим сначала вопрос, можно ли разыскать хотя бы одну такую точку  $C$  с вектором-радиусом  $r'_C$ , чтобы скорость ее

$$v_C = v_0 + \omega \times r'_C$$

была параллельна вектору  $\omega$ , т. е. чтобы выполнялось равенство

$$\omega \times [v_0 + (\omega \times r'_C)] = 0.$$

Раскрывая произведение, получим

$$\omega \times v_0 + \omega \times (\omega \times r'_C) = \omega \times v_0 + \omega(\omega \cdot r'_C) - r'_C \omega^2 = 0; \quad (16.19)$$

этому уравнению можно удовлетворить, если положить  $\omega \cdot r'_C = 0$ , т. е. за точку  $C$  принять основание перпендикуляра, опущенного из полюса  $O$  на искомую ось; тогда согласно соотношению (16.19) найдем

$$r'_C = \frac{\omega \times v_0}{\omega^2}. \quad (16.20)$$

Одну точку мы, таким образом, определили: ее вектор-радиус относительно неподвижного начала  $O$  будет равен

$$r_C = r_0 + r'_C = r_0 + \frac{\omega \times v_0}{\omega^2}; \quad (16.21)$$

но легко видеть, что и все точки с векторами-радиусами

$$r' = r'_C + \lambda \omega,$$

где  $\lambda$  — произвольный скаляр, также удовлетворяют уравнению (16.19), а это означает, что геометрическое место точек, скорости которых параллельны вектору угловой скорости, представляет собой прямую линию с уравнением

$$(r' - r'_C) \times \omega = 0, \quad (16.22)$$

или, переходя к векторам-радиусам по отношению к неподвижной системе,

$$(r - r_C) \times \omega = 0. \quad (16.23)$$

Если принять за полюс какую-нибудь точку на этой оси, то в данный момент времени движение тела можно будет представить разложенным на поступательное движение вдоль этой оси и вращательное вокруг нее, т. е. заданное движение можно рассматривать как *винтовое*. Такую совокупность движений иногда характеризуют термином *кинематический винт*. Аналогия его с динамой очевидна. И в статике, и в кинематике общим является метод приведения совокупности векторов к простейшему виду.

Общую для всех точек тела поступательную составляющую скорости назовем *скоростью скольжения*. Поскольку направление скорости скольжения дается винтовой осью, причем эта скорость может быть направлена как в ту же сторону, что и вектор угловой скорости, так и в противоположную сторону, будем определять скорость скольжения алгебраической величиной  $c$ , равной по (16.18)

$$c = \frac{1}{\omega} (v_0 \cdot \omega) = \frac{1}{\omega} (v_{0x}\omega_x + v_{0y}\omega_y + v_{0z}\omega_z), \quad (16.24)$$

где  $v_0$  — скорость произвольно выбранного в теле полюса.

Итак, всякое движение твердого тела можно рассматривать как *винтовое*, т. е. как совокупность поступательного движения и движения вращательного вокруг оси, параллельной направлению поступательного движения. Ось, вокруг которой тело в данный момент поворачивается и параллельно которой перемещается поступательно, называется *мгновенной винтовой осью*.

Уравнения этой оси в векторном виде по отношению к подвижным и неподвижным осям представлены равенствами (16.22) и (16.23) совместно с (16.20) и (16.21). Переходя к проекциям на подвижные и неподвижные оси, получим соответственно следующие уравнения:

$$\frac{x' - x'_C}{\omega_{x'}} = \frac{y' - y'_C}{\omega_{y'}} = \frac{z' - z'_C}{\omega_{z'}}, \quad (16.25)$$

$$\frac{x - x_C}{\omega_x} = \frac{y - y_C}{\omega_y} = \frac{z - z_C}{\omega_z},$$

где координаты точки  $C$  определяются по (16.20) и (16.21) так:

$$x'_C = \frac{1}{\omega^2} (\omega_y v_{0z'} - \omega_z v_{0y'}),$$

$$y'_C = \frac{1}{\omega^2} (\omega_z v_{0x'} - \omega_x v_{0z'}), \quad (16.26)$$

$$z'_C = \frac{1}{\omega^2} (\omega_x v_{0y'} - \omega_y v_{0x'});$$

$$x_C = x_0 + \frac{1}{\omega^2} (\omega_y v_{0z} - \omega_z v_{0y}),$$

$$y_C = y_0 + \frac{1}{\omega^2} (\omega_z v_{0x} - \omega_x v_{0z}), \quad (16.27)$$

$$z_C = z_0 + \frac{1}{\omega^2} (\omega_x v_{0y} - \omega_y v_{0x}).$$

Как уже упоминалось, точка  $C$  выбрана на винтовой оси так, чтобы вектор-радиус  $r'_C$  по отношению к полюсу  $O'$  был перпендикулярен винтовой оси, т. е. чтобы длина вектора  $r'_C$  определяла кратчайшее расстояние от полюса до винтовой оси.

В отличие от мгновенной оси вращения тела, имеющего неподвижную точку, винтовая ось не проходит через одну и ту же неподвижную точку в разные моменты времени. Как видно из уравнений (16.26) и (16.27), точка  $C$  меняет свое расположение в про-

странстве с течением времени; поэтому, исключая время из уравнений (16.25), мы не получим конических поверхностей.

Линейчатые поверхности, образованные движением винтовой оси в неподвижном пространстве и в движущемся теле, будем называть соответственно *неподвижным* и *подвижным аксоидами винтовых осей*.

Подобно тому как это было доказано для аксоидов мгновенных осей, можно было бы доказать, что при движении тела подвижный аксоид винтовых осей катится по неподвижному и скользит по нему вдоль общей образующей — винтовой оси.

**Пример 61.** Полюс  $O'$  тела описывает в плоскости  $xOy$  (рис. 200) окружность радиусом  $a$  с центром в начале координат  $O$ ; само тело вращается около этого полюса, совершая регулярное прецессионное движение, причем угловая скорость обращения полюса  $O'$  вокруг точки  $O$  равна угловой скорости  $v$  прецессии. Определим вектор угловой скорости, положение винтовой оси и уравнения винтовых аксоидов.

Уравнения движения будут (угловую скорость  $\dot{\phi}$  чистого вращения обозначим  $kv$ )

$$\begin{aligned} x_0 &= a \cos vt, & y_0 &= a \sin vt, & z_0 &= 0, \\ \psi &= vt, & \phi &= kvt, & \theta &= \theta_0. \end{aligned}$$

По формулам (15.12) найдем проекции угловой скорости на неподвижные оси:

$$\omega_x = kv \sin vt \sin \theta_0, \quad \omega_y = -kv \cos vt \sin \theta_0, \quad \omega_z = v(1 + k \cos \theta_0).$$

По равенствам (15.13) определим проекции вектора угловой скорости на подвижные оси:

$$\omega_{x'} = v \sin kvt \sin \theta_0, \quad \omega_{y'} = v \cos kvt \sin \theta_0, \quad \omega_{z'} = v(k + \cos \theta_0).$$

По формуле (15.14) находим величину угловой скорости:

$$\omega = v \sqrt{k^2 + 2k \cos \theta_0 + 1}.$$

Чтобы составить уравнения винтовой оси, определим прежде всего координаты точки  $C$ , лежащей на пересечении винтовой оси с перпендикуляром, опущенным на нее из подвижного начала  $O'$ .

Для применения формул (16.27) предварительно вычисляем:

$$\begin{aligned} v_{0x} &= \dot{x}_0 = -av \sin vt, \\ v_{0y} &= \dot{y}_0 = av \cos vt, \\ v_{0z} &= \dot{z}_0 = 0; \end{aligned}$$

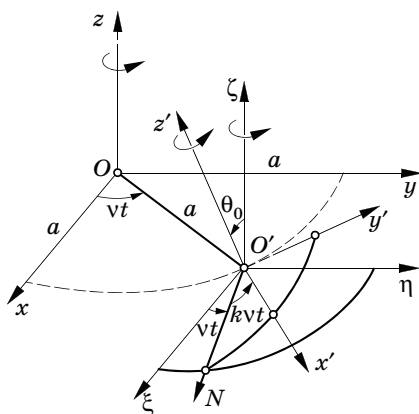


Рис. 200



тогда после простых сокращений получим

$$x_C = \frac{ak(k + \cos \theta_0)}{k^2 + 2k \cos \theta_0 + 1} \cos vt, \quad y_C = \frac{ak(k + \cos \theta_0)}{k^2 + 2k \cos \theta_0 + 1} \sin vt, \quad z_C = 0.$$

После этого согласно (16.25) можно написать уравнение винтовой оси в неподвижной системе в виде

$$\frac{x - \lambda \cos vt}{k \sin \theta_0 \sin vt} = \frac{y - \lambda \sin vt}{-k \sin \theta_0 \cos vt} = \frac{z}{1 + k \cos \theta_0}, \quad (16.28)$$

где для краткости положено

$$\lambda = \frac{ak(k + \cos \theta_0)}{k^2 + 2k \cos \theta_0 + 1}.$$

Обозначая общую величину отношений (16.28) через  $\mu$ , будем иметь

$$\begin{aligned} x &= \lambda \cos vt + \mu k \sin \theta_0 \sin vt, \\ y &= \lambda \sin vt - \mu k \sin \theta_0 \cos vt, \\ z &= \mu(1 + k \cos \theta_0), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 + \mu^2 k^2 \sin^2 \theta_0 = \lambda^2 + k^2 \sin^2 \theta_0 \frac{z^2}{(1 + k \cos \theta_0)^2}.$$

Уравнение неподвижного аксоида переписывается следующим образом:

$$\frac{x^2 + y^2}{\lambda^2} - \frac{z^2}{\lambda_1^2} = 1;$$

здесь введено новое обозначение

$$\lambda_1 = \frac{1 + k \cos \theta_0}{k \sin \theta_0} \lambda,$$

т. е. неподвижным винтовым аксоидом служит однополостный гиперболоид вращения с осью симметрии, расположенной по оси  $Oz$ .

Аналогичным путем можно показать, что подвижным винтовым аксоидом будет служить также однополостный гиперболоид вращения с осью симметрии  $O'z'$ , Уравнение этого аксоида в осях, связанных с телом, будет иметь вид

$$\frac{x'^2 + y'^2}{\lambda'^2} - \frac{z'^2}{\lambda_1'^2} = 1,$$

где введены обозначения

$$\lambda' = \frac{a(1 + k \cos \theta_0)}{k^2 + 2k \cos \theta_0 + 1}, \quad \lambda_1' = \frac{k + \cos \theta_0}{\sin \theta_0} \lambda'.$$

Заметим, что

$$\lambda_1 = \frac{a(1 + k \cos \theta_0)(k + \cos \theta_0)}{(k^2 + 2k \cos \theta_0 + 1) \sin \theta_0} = \lambda'_1,$$

т. е. у обоих гиперboloидов одинаковые мнимые полуоси. Расположение аксоидов показано на рис. 201. Подвижный аксоид катится по неподвижному и скользит по нему вдоль образующей со скоростью  $c$ , определяемой согласно формуле (16.24). Вычисление показывает, что в данном случае скорость скольжения равна по величине

$$c = \frac{akv \sin \theta_0}{\sqrt{k^2 + 2k \cos \theta_0 + 1}}.$$

Она постоянна и при прочих равных условиях тем меньше, чем меньше угол  $\theta_0$  между осями гиперboloидов. Благодаря наличию этой скорости скольжения подвижный гиперboloид, накатываясь на неподвижный, имеет возможность сохранять свой центр  $O'$  постоянно в плоскости  $xOy$ .

Угол между осями гиперboloидов сохраняется постоянным; расстояние  $OO'$  между осями тоже постоянно и равняется  $a$ . В силу этих геометрических свойств такие два гиперboloидальных колеса могут служить для передачи вращения между двумя непересекающимися осями. Закрепим оси  $Oz$  и  $O'z'$ ; тогда оба гиперboloида будут вращаться около этих осей, и если их сцепить при помощи зубьев, они смогут служить для передачи вращения между осями.

**Пример 62. Движение натурального триэдра траектории точки.** Во многих вопросах механики оказывается полезным рассмотрение движения твердого тела по отношению к системе координат, совпадающей с натуральным триэдром траектории одной из точек тела. В связи с этим необходимо знать движение самого натурального триэдра в пространстве. Задача ставится так: точка  $M$  совершает заданное движение вдоль траектории со скоростью  $v$ ; требуется найти, с какой угловой скоростью будет при этом вращаться натуральный триэдр осей  $\tau$ ,  $n$ ,  $b$  траектории. В дальнейшем будем предполагать, что движение происходит в одну сторону и в эту сторону направлен вектор  $\tau$ .

Обозначим через  $\omega$  искомый вектор угловой скорости и представим его в форме разложения по единичным векторам натурального триэдра:

$$\omega = \omega_\tau \tau + \omega_n n + \omega_b b. \tag{16.29}$$

Аналогично формулам (16.15) можно написать

$$\frac{d\tau}{dt} = \omega \times \tau, \quad \frac{dn}{dt} = \omega \times n, \quad \frac{db}{dt} = \omega \times b \tag{16.30}$$

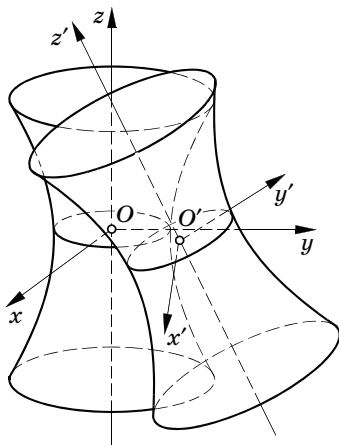


Рис. 201

или, вводя величину скорости вершины триэдра  $v = ds/dt$ ,

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{v} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\tau}), \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{1}{v} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}), \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{1}{v} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}). \quad (16.31)$$

Подставляя сюда вместо  $\boldsymbol{\omega}$  его разложение (16.29), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} &= \frac{1}{v} (\omega_\tau \boldsymbol{\tau} + \omega_n \mathbf{n} + \omega_b \mathbf{b}) \times \boldsymbol{\tau} = \frac{1}{v} (-\omega_n \mathbf{b} + \omega_b \mathbf{n}), \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= \frac{1}{v} (\omega_\tau \boldsymbol{\tau} + \omega_n \mathbf{n} + \omega_b \mathbf{b}) \times \mathbf{n} = \frac{1}{v} (-\omega_b \boldsymbol{\tau} + \omega_\tau \mathbf{b}), \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= \frac{1}{v} (\omega_\tau \boldsymbol{\tau} + \omega_n \mathbf{n} + \omega_b \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = \frac{1}{v} (-\omega_\tau \mathbf{n} + \omega_n \boldsymbol{\tau}). \end{aligned} \quad (16.32)$$

По предыдущему (§ 46) имеем

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \mathbf{n}, \quad (16.33)$$

и сравнение с первой из формул (16.32) показывает, что

$$\omega_n = 0, \quad \omega_b = \frac{1}{\rho} v. \quad (16.34)$$

Последняя из формул (16.32) после этого принимает вид

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{1}{v} \omega_\tau \mathbf{n}. \quad (16.35)$$

Эта формула аналогична (16.33), с той разницей, что абсолютная величина  $|d\boldsymbol{\tau}/ds|$ , равная отношению бесконечно малого угла поворота *касательной* (угла смежности) к дифференциалу дуги траектории, определяет *кривизну*  $1/\rho$  траектории, тогда как абсолютная величина  $|d\mathbf{b}/ds|$  равна отношению бесконечно малого угла поворота *бинормали* к тому же дифференциалу дуги. Это отношение называют *кручением* кривой и обозначают через  $1/\kappa$ , где  $\kappa$  — *радиус кручения*. В отличие от кривизны кручение может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от того, будет ли кривая закручиваться вокруг своей касательной подобно правому или левому винту, так что знак кручения будет совпадать со знаком  $\omega_\tau$ . Итак, по формуле (16.35) имеем

$$\omega_\tau = \frac{v}{\kappa}, \quad (16.36)$$

и, значит,

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{1}{\kappa} \mathbf{n}. \quad (16.37)$$

Подстановка в (16.29) дает искомое значение вектора угловой скорости натурального триэдра (*вектора Дарбу*):

$$\boldsymbol{\omega} = v \left( \frac{\boldsymbol{\tau}}{\kappa} + \frac{\mathbf{b}}{\rho} \right). \quad (16.38)$$

Формулы (16.32) принимают при этом вид

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \mathbf{n}, \quad \frac{dn}{ds} = \frac{1}{\kappa} \mathbf{b} - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\tau}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{1}{\kappa} \mathbf{n}. \quad (16.39)$$

Формулы (16.39) являются основными формулами дифференциальной геометрии кривых (*формулы Френе*).

Дифференцируя вектор  $\boldsymbol{\omega}$  по времени и используя вновь формулы (16.39), после простых выкладок получим угловое ускорение натурального триэдра:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \left( \frac{\dot{v}}{\kappa} - \frac{v^2}{\kappa^2} \frac{d\kappa}{ds} \right) \boldsymbol{\tau} + \left( \frac{\dot{v}}{\rho} - \frac{v^2}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} \right) \mathbf{b}. \quad (16.40)$$

Из последней формулы видно, что как вектор углового ускорения, так и вектор угловой скорости лежат в спрямляющей плоскости.

Покажем, что величины  $\rho$  и  $\kappa$  определяются по заданному уравнению траектории  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ . Для этого вспомним, что

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}', \quad (16.41)$$

и, следовательно, по (16.33)

$$\mathbf{n} = \rho \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \rho \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \rho \mathbf{r}'''. \quad (16.42)$$

Переписывая второе из равенств (16.39) на основании формулы (16.33) в виде

$$\frac{\mathbf{b}}{\kappa} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho} + \frac{d}{ds} \left( \rho \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right) = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho} + \frac{d\rho}{ds} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} + \rho \frac{d^2\boldsymbol{\tau}}{ds^2} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho} + \frac{\rho'}{\rho} \mathbf{n} + \rho \mathbf{r}''''$$

и умножая обе части его скалярно на  $\mathbf{b}$ , получим

$$\frac{1}{\kappa} = \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}'''' = \rho (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{r}'''' = \rho^2 (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}''''.$$

С другой стороны, согласно формулам (16.42), имеем

$$\frac{1}{\rho^2} = \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'' = |\mathbf{r}''|^2.$$

Итак,

$$\frac{1}{\rho} = |\mathbf{r}''|, \quad \frac{1}{\kappa} = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}''''}{|\mathbf{r}''|^2}. \quad (16.43)$$

Рассмотренный только что пример служит еще одним подтверждением тесной связи кинематики с геометрией, в данном случае с дифференциальной геометрией (теорией кривых двойкой кривизны).

ДАРБУ ЖАН ГАСТОН (*Darboux Jean Gaston, 1842—1917*) — французский математик, иностр. чл.-корр. Петербургской АН (1895).

ФРЕНЕ ФРЕДЕРИК ЖАН (*Frénet Frédéric Jean, 1816—1900*) — французский математик.

---

## Глава XVII

### Относительное движение

#### § 67. Абсолютное, относительное и переносное движения

Общая постановка задачи об относительном движении такова: движение точки определяется наблюдателями, связанными с двумя различными координатными системами (системами отсчета), причем эти системы движутся заданным образом друг по отношению к другу. Каждый наблюдатель определяет кинематические элементы движения: траекторию, скорость и ускорение в своей системе отсчета.

Ставится задача: зная движение одной системы отсчета по отношению к другой, найти связь между кинематическими элементами движения точки по отношению к каждой системе в отдельности.

Рассматривая одно и то же движение точки в различных координатных системах, заметим, что в одной системе ( $A$ ) движение может представиться более сложным, чем в другой ( $B$ ). Если движение системы ( $B$ ) по отношению к системе ( $A$ ) несложно, то можно сказать, что сложное по отношению к системе ( $A$ ) движение точки распадается на два более простых: одно по отношению к ( $B$ ) и другое, связанное с движением системы ( $B$ ) по отношению к ( $A$ ). Тогда можно сначала определить кинематические элементы этих простых движений, а затем уже по общим формулам теории относительного движения, изложенной в настоящей главе, перейти и к элементам сложного, или, как говорят, *составного*, движения. В этой возможности разлагать сложное движение точки на более простые и заключается основное значение метода относительного движения.

Например, в равномерном движении ползуна по вращающемуся с постоянной угловой скоростью прямолинейному пазу траекторией ползуна по отношению к неподвижной плоскости служит архимедова спираль. В то же время это движение может быть разложено на два простейших движения: равномерное прямолинейное движение ползуна по пазу и равномерное вращение твердой линейки, в которой прорезан паз, вокруг неподвижной

оси. Точно так же точки шатуна кривошипного механизма совершают сложное движение по отношению к фундаменту машины. Но если рассмотреть движение точек шатуна по отношению к системе отсчета, движущейся поступательно с пальцем кривошипа, то это будет простое вращение их вокруг пальца; в свою очередь движение системы координат, связанной с пальцем, тоже очень просто — это поступательное круговое движение. Таким образом, сложное движение точек шатуна можно рассматривать как составное из двух простых: вращения вокруг пальца кривошипа и поступательного кругового движения системы координат, связанной с пальцем. Элементы этих движений разыскиваются без труда, а по ним уже определяются и элементы составного движения точек шатуна по отношению к фундаменту машины. На той же идее было основано разложение общего движения твердого тела на поступательное движение и вращение по отношению к системе координат, поступательно движущейся вместе с полюсом.

Предположим, что движение точки  $M$  в пространстве рассматривается в двух движущихся друг по отношению к другу системах координат:  $Oxyz$ ,  $O'x'y'z'$ .

В зависимости от содержания стоящей перед нами задачи одну из этих систем,  $Oxyz$ , примем за основную и назовем *абсолютной* системой координат, а движение по отношению к ней и все кинематические элементы его — *абсолютными*. Другую систему,  $O'x'y'z'$ , назовем *относительной* и соответственно движение по отношению к этой системе, а также его кинематические элементы — *относительными*. Термины *абсолютный* и *относительный* имеют здесь условное значение; при рассмотрении движений может оказаться целесообразным то одну, то другую систему принимать за абсолютную.

Элементы абсолютного движения будем обозначать подстрочным индексом « $a$ », а относительного — индексом « $r$ ». Например,  $v_a$ ,  $w_a$  будут обозначать абсолютные скорость и ускорение,  $v_r$ ,  $w_r$  — соответственно относительные скорость и ускорение.

Введем понятие переносного движения, элементы которого будем обозначать подстрочным индексом « $e$ » (например,  $v_e$ ,  $w_e$ ).

*Переносным движением точки будем называть движение (по отношению к абсолютной системе) того пункта относительной системы, через который в рассматриваемый момент времени проходит движущаяся точка.*

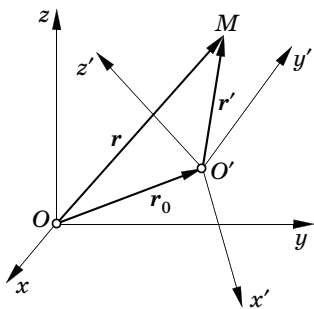


Рис. 202

Скорость, ускорение и другие кинематические элементы переносного движения будем называть переносной скоростью, переносным ускорением и т. д.

Понятие переносного движения нуждается в пояснении. Необходимо четко различать точку, абсолютное и относительное движение которой рассматривается, от той, неизменно связанной с относительной системой точки, через которую в данный момент проходит движущаяся точка. На рис. 202 та и другая точки обозначены одной буквой  $M$ , так как рисунок не передает движения; на самом деле это — две различные точки, движущиеся друг по отношению к другу.

Остановимся на двух иллюстрациях понятия переносного движения. Если человек идет по движущейся платформе, то можно рассматривать, во-первых, *абсолютное* движение человека по отношению к Земле, во-вторых, *относительное* его движение по платформе. Переносным движением при этом будет являться движение по отношению к Земле того места платформы, по которому проходит в данный момент человек.

В качестве второго примера рассмотрим движение жидкости вдоль трубки, вращающейся вокруг некоторой оси. В этом случае переносным движением частицы жидкости является движение той точки сечения трубки, через которую в данный момент проходит частица жидкости.

Возвращаясь к рис. 202, найдем зависимость между векторами-радиусами точки  $M$  в разных системах координат. Если обозначить векторы-радиусы точки  $M$  через  $r$  в абсолютной системе  $Oxyz$  и  $r'$  в относительной системе  $O'x'y'z'$ , а вектор-радиус точки  $O'$  по отношению к системе  $Oxyz$  через  $r_0$ , то

$$r = r_0 + r'. \quad (17.1)$$

По этой формуле можно, зная *уравнения относительного движения точки*

$$x' = \varphi_1(t), \quad y' = \varphi_2(t), \quad z' = \varphi_3(t) \quad (17.2)$$

и уравнения движения относительной системы по отношению к абсолютной, найти *уравнения абсолютного движения точки*.

Для этого достаточно составить известные зависимости между координатами точки  $M$  в системах координат  $Oxyz$  и  $O'x'y'z'$ :

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z', \\y &= y_0 + \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z', \\z &= z_0 + \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z'.\end{aligned}\tag{17.3}$$

Принципиальное отличие равенств (17.3) от имеющих тот же внешний вид уравнений движения твердого тела (16.3) заключается в том, что в данной главе  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  уже не постоянные величины, определяющие выбор точки твердого тела, а функции времени, заданные равенствами (17.2) и характеризующие относительное движение точки  $M$ .

Уравнения переносного движения получим, фиксируя в равенствах (17.2) величины  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ . При этом поскольку координаты полюса  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  известны как функции времени, а направляющие косинусы  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ , ... выражаются согласно формулам (13.2) через эйлеровы углы, которые в свою очередь также заданы как функции времени, — уравнения переносного движения сведутся к уравнениям движения твердого тела.

Таким образом, правые части уравнений (17.3) при заданных относительном и переносном движениях будут известными функциями времени, т. е. уравнения (17.3) будут представлять собой уравнения абсолютного движения.

Исключая по общему правилу из уравнений абсолютного движения время, получим абсолютную траекторию — след движения точки  $M$  в абсолютной системе координат; точно так же, исключая время из уравнений относительного движения, получим относительную траекторию.

Интересно отметить, что одна и та же точка описывает две различные кривые; благодаря движению относительной координатной системы точка движется различно по отношению к абсолютной и относительной системам и при этом, естественно, описывает разные траектории. Так, например, в плоском движении мгновенный центр образовывал две различные центроиды: неподвижную и подвижную.

Уравнения (17.3) упрощаются в случае *плоского* движения. Если обозначить через  $\varphi$  угол между положительными направлениями осей  $Ox$  и  $O'x'$ , то формулы (17.3) перейдут в следующие:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\y &= y_0 + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.\end{aligned}\tag{17.4}$$



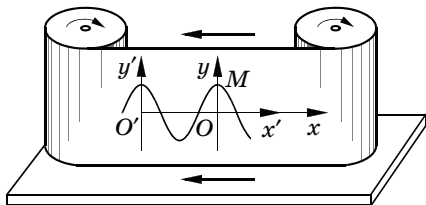


Рис. 203

В частном случае поступательного плоского движения систем друг по отношению к другу можно выбрать оси так, чтобы угол  $\varphi$  равнялся нулю. При этом формулы (17.4) переходят в такие:

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y'. \quad (17.5)$$

В случае вращения относительной системы вокруг неподвижной оси будем иметь, помещая начало координат на оси вращения, уравнения:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \end{aligned} \quad (17.6)$$

**Пример 63.** Лента самописца движется с постоянной скоростью  $c$ , перематываясь с правого барабана на левый (рис. 203). Самописец регистрирует вертикальные колебания пера  $M$ , уравнения движения которого даны в виде

$$x = 0, \quad y = a \sin(\omega t + \alpha).$$

Найдем уравнения движения пера по отношению к движущейся ленте и уравнение вычерчиваемой пером на ленте кривой (относительной траектории).

Система  $O'x'y'$  движется по отношению к системе  $Oxy$  поступательно, так что по формулам (17.5)

$$0 = x_0 + x', \quad a \sin(\omega t + \alpha) = y_0 + y'.$$

В данном случае

$$x_0 = OO' = -ct, \quad y_0 = 0;$$

следовательно, имеем

$$x' = ct, \quad y' = a \sin(\omega t + \alpha).$$

Относительной траекторией на ленте является синусоида

$$y' = a \sin(\omega x'/c + \alpha).$$

Из выведенного уравнения траектории видно, как надо обрабатывать запись на ленте. Амплитуда записываемого колебания и фаза его передаются без искажений; что же касается частоты  $\omega$  колебания, то она связана с длиной волны  $L$  синусоиды на ленте самописца соотношением

$$\omega = 2\pi c/L.$$

**Пример 64.** Найдем кривую, вычерчиваемую пишущим штифтом, движущимся (рис. 204) по оси  $Ox$  согласно уравнению  $x = f(t)$ , на диске, вращающемся равномерно с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $O$ .

Применим уравнения (17.6), приняв во внимание, что  $y = 0$ ; тогда, разрешая эти уравнения относительно  $x'$ ,  $y'$ , найдем

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi = f(t) \cos \omega t, \\y' &= -x \sin \varphi = -f(t) \sin \omega t.\end{aligned}$$

В данном случае проще применить полярную систему координат  $r'$ ,  $\varphi'$ ; будем иметь

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2} = x = f(t), \quad \varphi' = -\varphi = -\omega t.$$

Уравнение траектории имеет вид

$$r' = f(-\varphi'/\omega);$$

равномерному движению точки  $M$  по оси  $Ox$  соответствует архимедова спираль на диске. При колебании точки с амплитудой  $a$  и частотой, равной угловой скорости диска, получим

$$r' = a \cos \omega t, \quad \varphi' = -\omega t$$

и, следовательно,

$$r' = a \cos \varphi',$$

т. е. *полярное уравнение круга* диаметром  $a$ . На рис. 205 показано расположение этого круга на диске. За время полного колебания точка  $M$  два раза опишет на диске окружность диаметром  $a$ .

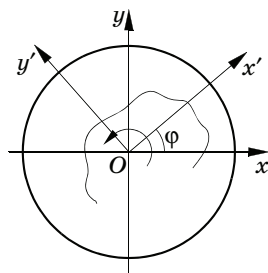


Рис. 204

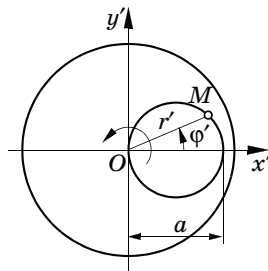


Рис. 205

## § 68. Сложение скоростей

Рассмотрим некоторую вектор-функцию  $a(t)$ , проекции которой в относительной системе координат  $a'_x$ ,  $a'_y$ ,  $a'_z$  являются заданными функциями времени, и сравним между собой векторные производные от этой функции, вычисленные наблюдателями в абсолютной и относительной системах координат. Для этого, замечая, что

$$a = a_x i' + a_y j' + a_z k', \quad (17.7)$$

составим производную по времени от вектора  $a$  в абсолютной системе координат — *абсолютную производную от вектора  $a$  по времени*:

$$\frac{da}{dt} = \frac{da_{x'}}{dt} i' + \frac{da_{y'}}{dt} j' + \frac{da_{z'}}{dt} k' + a_{x'} \frac{di'}{dt} + a_{y'} \frac{dj'}{dt} + a_{z'} \frac{dk'}{dt}. \quad (17.8)$$

Векторное выражение, стоящее в первой строке правой части равенства (17.8), является производной от вектора  $a$ , вычислен-

ной в предположении неизменности направления единичных векторов осей относительной системы координат, как это представится наблюдателю, соединенному с этой системой. Такое выражение естественно назвать *относительной производной*. В отличие от абсолютной производной  $da/dt$  обозначим относительную производную через  $d'a/dt$ , так что

$$\frac{d'a}{dt} = \frac{da_{x'}}{dt} i' + \frac{da_{y'}}{dt} j' + \frac{da_{z'}}{dt} k'. \quad (17.9)$$

Для преобразования векторного выражения, стоящего во второй строке равенства (17.8), вспомним формулы (15.15), выражающие производные по времени единичных векторов подвижной системы координат:

$$\frac{di'}{dt} = \omega \times i', \quad \frac{dj'}{dt} = \omega \times j', \quad \frac{dk'}{dt} = \omega \times k', \quad (17.10)$$

где  $\omega$  обозначает вектор угловой скорости вращения относительной системы координат  $O'x'y'z'$ ; получим

$$a_{x'} \frac{di'}{dt} + a_{y'} \frac{dj'}{dt} + a_{z'} \frac{dk'}{dt} = \omega \times (a_x i' + a_y j' + a_z k') = \omega \times a. \quad (17.11)$$

Таким образом, равенство (17.8) приобретает вид

$$\frac{da}{dt} = \frac{d'a}{dt} + \omega \times a, \quad (17.12)$$

и мы приходим к следующей весьма важной для дальнейшего лемме.

**ЛЕММА.** Абсолютная производная по времени от вектора равна геометрической сумме относительной производной того же вектора и векторного произведения вектора угловой скорости вращения относительной системы координат на дифференцируемый вектор.

Обращаясь к формуле (17.9), видим, что проекции относительной производной  $d'a/dt$  на оси относительной системы координат равны производным от проекций дифференцируемого вектора на эти оси, так как для наблюдателя, связанного с относительной системой координат, оси этой системы представляются неизменными по направлению. Таким образом,

$$\left(\frac{d'a}{dt}\right)_{x'} = \frac{da_{x'}}{dt}, \quad \left(\frac{d'a}{dt}\right)_{y'} = \frac{da_{y'}}{dt}, \quad \left(\frac{d'a}{dt}\right)_{z'} = \frac{da_{z'}}{dt}. \quad (17.13)$$

Проецируя на те же оси абсолютную производную, будем иметь согласно равенству (17.12)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{x'} &= \frac{da_{x'}}{dt} + \omega_{y'}z' - \omega_{z'}y', \\ \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{y'} &= \frac{da_{y'}}{dt} + \omega_{z'}x' - \omega_{x'}z', \\ \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{z'} &= \frac{da_{z'}}{dt} + \omega_{x'}y' - \omega_{y'}x'. \end{aligned} \quad (17.14)$$

Применим доказанную лемму для вывода *теоремы о сложении скоростей*. С этой целью вычислим абсолютную производную по времени от обеих частей равенства (17.1):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}';$$

будем иметь

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}. \quad (17.15)$$

Здесь абсолютная производная по времени от вектора-радиуса  $\mathbf{r}$  представляет собой, очевидно, абсолютную скорость  $\mathbf{v}_a$ ,  $d\mathbf{r}_0/dt$  есть вектор скорости  $\mathbf{v}_0$  начала  $O'$  относительной системы координат. Второе слагаемое справа — абсолютная производная по времени от относительного вектора-радиуса — по формуле (17.12) будет равно

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'. \quad (17.16)$$

Первое слагаемое в правой части — относительная производная по времени от относительного вектора-радиуса — представляет собой относительную скорость точки  $\mathbf{v}_r$ . Подставляя (17.16) в (17.15), получим

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}_r. \quad (17.17)$$

Но сумма первых двух слагаемых справа по известной формуле для скоростей точек твердого тела в общем случае его движения представляет собой скорость той неизменно связанной с относительной системой координат точки, через которую в данный момент проходит движущаяся точка. Это по определению — *переносная скорость*  $\mathbf{v}_e$ , равная

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'. \quad (17.18)$$

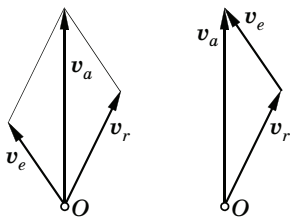


Рис. 206

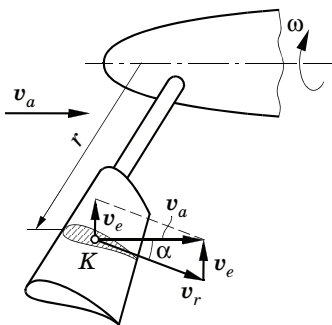


Рис. 207

Итак, окончательно получим

$$v_a = v_e + v_r, \quad (17.19)$$

что приводит к следующей теореме.

**ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ.** Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей.

Полученная теорема носит еще наименование *правила параллелограмма* или *треугольника скоростей*. Происхождение этих названий ясно из рис. 206, представляющего диаграмму сложения векторов относительной и переносной скоростей.

**Пример 65.** Воздушный поток набегаёт на вращающуюся лопасть ветряного двигателя с абсолютной скоростью  $v_a = 10$  м/с (рис. 207). Угол атаки  $\alpha$ , образованный направлением вектора абсолютной скорости  $v_a$  с хордой сечения  $K$  лопасти, переменен по ее размаху (лопасть закручена) и равен  $\alpha_0 = 30^\circ$  в среднем

сечении лопасти, находящемся на расстоянии  $r_0 = 2$  м от оси вращения. Считая, что относительная скорость частиц воздуха направлена вдоль хорды сечений лопасти, найдем угловую скорость вращения лопасти и зависимость угла атаки  $\alpha$  от расстояния  $r$  до оси вращения лопасти.

Сечение  $K$  (рис. 207), находящееся от оси вращения лопасти на расстоянии  $r$ , имеет окружную скорость, равную по величине

$$v_e = \omega r.$$

Из треугольника скоростей, изображенного на рис. 207, получаем

$$v_e = v_a \operatorname{tg} \alpha,$$

следовательно,

$$\omega = \frac{v_a}{r} \operatorname{tg} \alpha.$$

Из условия в среднем сечении находим значение угловой скорости:

$$\omega = \frac{v_a}{r_0} \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{10}{2} \operatorname{tg} 30^\circ \approx 2,9 \text{ 1/с.}$$

Искомая зависимость между углом закрутки и радиусом вращения находится из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{r_0} \operatorname{tg} \alpha_0.$$

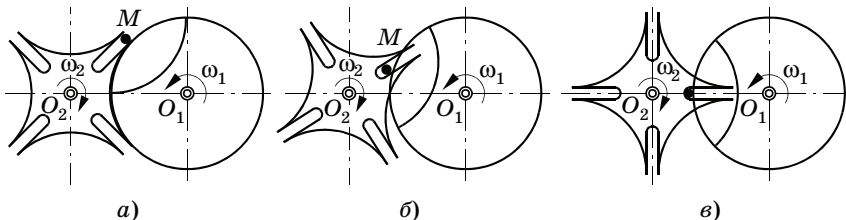


Рис. 208

**Пример 66.** На рис. 208 схематически представлен механизм *мальтийского креста*, применяемый в кинопроекторных аппаратах. Пока зуб  $M$  ведущего колеса  $O_1$  не вошел в прорезь, крест неподвижен (рис. 208, а); в момент входа угловая скорость креста  $\omega_2$  равна нулю; затем крест приходит во вращение (рис. 208, б); при расположении, указанном на рис. 208, в, крест имеет максимальную угловую скорость и т. д. Найдем закон изменения угловой скорости креста при заданной постоянной угловой скорости  $\omega_1$  ведущего колеса.

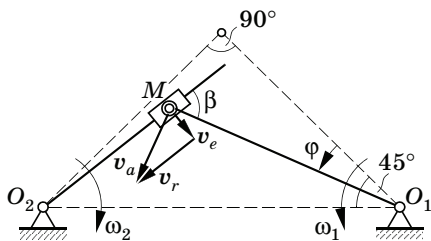


Рис. 209

Поскольку движение креста не должно сопровождаться ударами, в момент входа в прорезь скорость зуба должна быть направлена вдоль прорези. Иными словами, в положении а) угол  $O_2MO_1$  должен быть прямым. По истечении четверти оборота ведущего колеса  $O_1$  крест в течение последующих трех четвертей оборота будет оставаться неподвижным.

В начале следующего оборота зуб  $M$  должен войти в следующую прорезь, которая теперь должна занимать в точности то же положение, какое раньше занимала первая прорезь. Отсюда нетрудно заключить, что в положении а) имеем  $\angle MO_2O_1 = \angle MO_1O_2 = 45^\circ$ . Пусть  $O_1M = r$ ; в силу сказанного найдем  $O_1O_2 = r\sqrt{2}$ .

Обращаясь к схематическому рис. 209, на котором пунктиром показано начальное положение а), имеем

$$v_e = O_2M \cdot \omega_2 = v_a \cos \beta = r\omega_1 \cos \beta, \quad \omega_2 = \frac{r\omega_1 \cos \beta}{O_2M}.$$

Далее находим

$$(O_2M)^2 = (O_1M)^2 + (O_1O_2)^2 - 2O_1M \cdot O_1O_2 \cos (45^\circ - \varphi),$$

или

$$(O_2M)^2 = r^2 + 2r^2 - 2r^2 \sqrt{2} \cos (45^\circ - \varphi) = r^2(3 - 2 \cos \varphi - 2 \sin \varphi).$$

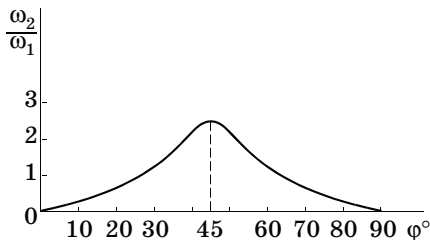


Рис. 210

Таков закон изменения угловой скорости при  $0 < \varphi < \pi/2$ . При  $\pi/2 < \varphi < 2\pi$  крест неподвижен, т. е.  $\omega_2 = 0$ . График угловой скорости креста показан на рис. 210.

Проецируя теперь стороны треугольника  $O_2MO_1$  на направление  $O_1M$ , получим

$$r\sqrt{2} \cos(45^\circ - \varphi) - O_2M \cos \beta = r,$$

или

$$O_2M \cos \beta = r(\cos \varphi + \sin \varphi - 1),$$

и, следовательно,

$$\omega_2 = \frac{\cos \varphi + \sin \varphi - 1}{3 - 2(\cos \varphi + \sin \varphi)} \omega_1.$$

### § 69. Сложение ускорений

Чтобы перейти к ускорениям, вычислим абсолютную производную по времени от обеих частей соотношения (17.17), выражающего теорему сложения скоростей. Получим

$$\frac{dv_a}{dt} = \frac{dv_r}{dt} + \frac{dv_0}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times r' + \omega \times \frac{dr'}{dt}. \quad (17.20)$$

Преобразуем это равенство так, чтобы производные от векторов брались в той системе координат, к которой дифференцируемый вектор отнесен; так,  $dv_a/dt$  берется в абсолютной системе  $Oxyz$ , так как  $v_a$  есть скорость по отношению к этой системе;  $dv_r/dt$  необходимо преобразовать к такому виду, чтобы выделилась относительная производная  $d'v_r/dt$ , так как  $v_r$  есть вектор скорости по отношению к системе  $O'x'y'z'$ . Точно так же  $dr'/dt$  следует выразить через  $d'r'/dt$ . Замечая, что на основании леммы предыдущего параграфа

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{d'v_r}{dt} + \omega \times v_r, \quad \frac{dr'}{dt} = \frac{d'r'}{dt} + \omega \times r'$$

и что, кроме того,

$$\frac{dv_a}{dt} = w_a, \quad \frac{d'v_r}{dt} = w_r, \quad \frac{dv_0}{dt} = w_0, \quad \frac{d'r'}{dt} = v_r, \quad \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon,$$

перепишем (17.20) в виде

$$w_a = w_r + w_0 + \varepsilon \times r' + \omega \times (\omega \times r') + 2\omega \times v_r. \quad (17.21)$$

Здесь  $w_a$  — абсолютное ускорение точки,  $w_r$  — ее относительное ускорение; совокупность второго, третьего и четвертого слагаемых определяет по формуле (16.8) ускорение точки твердого тела с вектором-радиусом  $r'$ , т. е. ускорение того пункта системы координат  $O'x'y'z'$ , через который проходит в данный момент движущаяся точка; это будет *переносное ускорение*

$$w_e = w_0 + \varepsilon \times r' + \omega \times (\omega \times r'); \quad (17.22)$$

последнее слагаемое в (17.21)

$$w_c = 2\omega \times v_r \quad (17.23)$$

называют *поворотным* или *кориолисовым ускорением*.

Как видно из хода вывода, поворотное ускорение составилось из двух одинаковых слагаемых  $\omega \times v_r$ . Первое из них появилось при вычислении абсолютной производной от вектора относительной скорости и выражает изменение вектора относительной скорости, обусловленное поворотом этого вектора вместе с относительной системой координат. Второе возникло при вычислении абсолютной производной от переносной скорости за счет изменения во времени относительного вектора-радиуса точки.

Итак, имеем

$$w_a = w_r + w_e + w_c. \quad (17.24)$$

Формула (17.24) представляет собой теорему сложения ускорений.

**ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ УСКОРЕНИЙ.** *Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и поворотного ускорений.*

Относительное ускорение  $w_r$  определяется в относительной системе координат по правилам кинематики точки; его проекции на оси этой системы определяются как первые производные по времени проекций относительной скорости на те же оси или как вторые производные относительных координат  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ . Можно также для вычисления относительного ускорения  $w_r$  пользоваться разложением его по осям натурального триэдра относительной траектории.



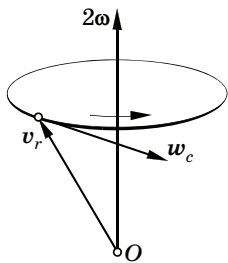


Рис. 211

Переносное ускорение вычисляется методами кинематики твердого тела. Если относительная система  $O'x'y'z'$  движется поступательно или вращается вокруг неподвижной оси, то применяются простые приемы гл. XIII, в случае плоского движения относительной системы — приемы гл. XIV и, наконец, для более сложных случаев вращения вокруг неподвижного центра и общего движения относительной системы придется использовать методы, изложенные в гл. XV и XVI.

Остановимся специально на определении третьего слагаемого в формуле сложения ускорений — поворотного (кориолисова) ускорения. Как непосредственно следует из (17.23), величина этого ускорения находится по формуле

$$w_c = 2\omega v_r \sin(\widehat{\omega, v_r}), \quad (17.25)$$

а направление — по общему правилу векторного умножения: поворотное ускорение направлено по перпендикуляру к плоскости, содержащей  $\omega$  и  $v_r$ , в ту сторону, откуда вращение  $\omega$  к  $v_r$  на наименьший угол будет видно положительным; если  $\omega$  и  $v_r$  не лежат в одной плоскости, то можно перенести их параллельно самим себе так, чтобы они пересеклись, и уже восставлять перпендикуляр к плоскости, определенной их пересечением.

Укажем другой часто употребляемый способ (рис. 211): отложим от некоторой точки  $O$  вектор  $2\omega$ , параллельный вектору угловой скорости вращения относительной системы, и от этой же точки — вектор, равный и параллельный вектору  $v_r$  относительной скорости точки.

Если вращать вектор  $v_r$  с угловой скоростью  $2\omega$ , то окружная скорость конца вектора  $v_r$  будет равна

$$2\omega \times v_r,$$

т. е. как раз представляет собой вектор  $w_c$  поворотного ускорения.

Отметим некоторые частные случаи определения поворотного ускорения.

- Поворотное ускорение *равно нулю*, если:
  - ✓  $\omega = 0$ , т. е. в случае *поступательного* движения *относительной* системы;
  - ✓ вектор  $v_r$  параллелен  $\omega$ , т. е. если точка в относительном ее движении перемещается параллельно оси вращения системы.
- Поворотное ускорение по величине *равно*  $2\omega v_r$ , если точка движется в плоскости, перпендикулярной оси вращения системы.

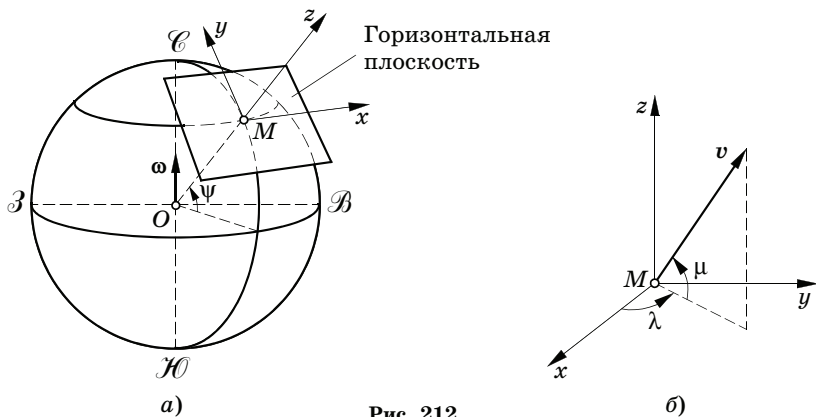


Рис. 212

Наличием поворотного ускорения объясняются многочисленные явления, происходящие на поверхности Земли вследствие ее вращения. Рассмотрим точку  $M$  (рис. 212, а), движущуюся со скоростью  $v_r$  по отношению к Земле (в дальнейшем индекс  $r$  может быть опущен). Направим ось  $Mx$  по касательной к параллели на восток, ось  $My$  по касательной к меридиану на север; тогда в правой системе координат ось  $Mz$  будет направлена по вертикали вверх. Вектор угловой скорости Земли  $\omega$  направлен по оси ее вращения к северу. Направление относительной скорости зададим углом  $\mu$  (рис. 212, б) вектора  $v$  с горизонтальной плоскостью  $xMy$  и углом  $\lambda$  проекции скорости  $v$  на эту плоскость с осью  $x$ ; широту места точки  $M$  обозначим через  $\psi$ .

Для определения поворотного ускорения  $w_c$  найдем его проекции на выбранные оси по формулам проекций векторного произведения:

$$\begin{aligned} w_{cx} &= 2(\omega_y v_z - \omega_z v_y), \\ w_{cy} &= 2(\omega_z v_x - \omega_x v_z), \\ w_{cz} &= 2(\omega_x v_y - \omega_y v_x). \end{aligned} \quad (17.26)$$

В рассматриваемом случае имеем

$$\begin{aligned} \omega_x &= 0, & \omega_y &= \omega \cos \psi, & \omega_z &= \omega \sin \psi, \\ v_x &= v \cos \mu \cos \lambda, & v_y &= v \cos \mu \sin \lambda, & v_z &= v \sin \mu, \end{aligned}$$

так что проекции поворотного ускорения, вызванного вращением Земли, будут

$$\begin{aligned} w_{cx} &= 2\omega v (\cos \psi \sin \mu - \sin \psi \cos \mu \sin \lambda), \\ w_{cy} &= 2\omega v \sin \psi \cos \mu \cos \lambda, \\ w_{cz} &= -2\omega v \cos \psi \cos \mu \cos \lambda. \end{aligned} \quad (17.27)$$

Так, например, легко убедиться, что составляющая в горизонтальной плоскости поворотного ускорения  $w_{сН}$  частиц воды в реках направлена поперек течения реки к левому берегу в Северном полушарии и к правому берегу в Южном полушарии. Действительно, в этом случае  $\mu = 0$ , так что проекции  $w_{сН}$  на оси  $x$  и  $y$  будут равны

$$w_{cx} = -2\omega v \sin \psi \sin \lambda = 2\omega \sin \psi \cdot v \cos (\pi/2 + \lambda),$$

$$w_{cy} = 2\omega v \sin \psi \cos \lambda = 2\omega \sin \psi \cdot v \sin (\pi/2 + \lambda).$$

Замечая, что  $v \cos (\pi/2 + \lambda)$  и  $v \sin (\pi/2 + \lambda)$  являются проекциями вектора, получаемого при повороте вектора относительной скорости  $v$  на угол  $\pi/2$  влево (от оси  $x$  к оси  $y$ ), если смотреть вдоль направления вектора, заключаем, что направление поворотного ускорения можно найти путем поворота вектора относительной скорости на угол  $\pi/2$  влево при  $\psi > 0$  (Северное полушарие) и на угол  $\pi/2$  вправо при  $\psi < 0$  (Южное полушарие).

В разделе динамики (т. II, § 164) будет показано, что в относительном движении на поверхности Земли поворотному ускорению соответствует *поворотная*, или *кориолисова*, сила, направленная в сторону, противоположную этому ускорению.

*Кориолисова сила вызывает дополнительные движения частиц воды: к правому берегу в Северном полушарии и к левому берегу в Южном полушарии.*

В этом заключается известный *закон Бэра*. Наблюдающееся в Северном полушарии преимущественное истирание правого рельса двухколейных железных дорог также объясняется действием кориолисовой силы.

В случае вертикально движущегося тела ( $\mu = \pm \pi/2$ ) поворотное ускорение согласно (17.26) будет иметь лишь проекцию на ось  $x$ , равную

$$w_{cx} = \pm 2\omega v \cos \psi.$$

Соответствующая кориолисова сила независимо от того, будет ли движение совершаться в Северном или Южном полушарии, действует на тело, движущееся вверх, в западном направлении, а на движущееся вниз — в восточном.

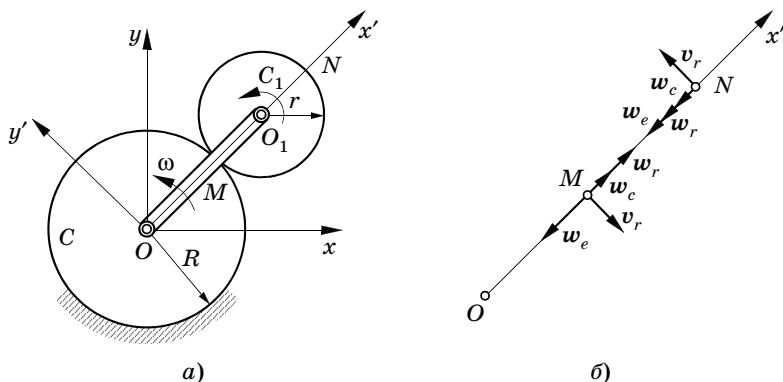


Рис. 213

**Пример 67.** Найдём абсолютное ускорение точек  $M$  и  $N$  (рис. 213) колеса  $C_1$  радиусом  $r$ , катящегося без скольжения по неподвижному колесу  $C$  радиусом  $R$ , если рукоятка  $OO_1$  вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega$ .

Свяжем относительную систему  $Ox'y'$  с вращающейся рукояткой и, замечая, что угловая скорость колеса  $C_1$  по отношению к рукоятке  $OO_1$  равна  $(R/r)\omega$ , найдём:

✓ для точки  $M$

$$w_r = \left(\frac{R}{r}\omega\right)^2 r = \frac{R^2}{r}\omega^2, \quad w_e = \omega^2 R, \quad \omega_c = 2\omega r \frac{R}{r} \omega = 2\omega^2 R;$$

✓ для точки  $N$

$$w_r = \frac{R^2\omega^2}{r}, \quad w_e = \omega^2(R + 2r), \quad w_c = 2\omega^2 R.$$

Направления соответствующих ускорений показаны на рис. 213, б. Все ускорения располагаются по одной прямой; поэтому абсолютное ускорение определится как алгебраическая сумма составляющих:

✓ для точки  $M$  абсолютное ускорение равно

$$w_a = 2\omega^2 R + \frac{R^2}{r}\omega^2 - \omega^2 R = \omega^2 R \left(1 + \frac{R}{r}\right)$$

и направлено от  $M$  к  $N$ ;

✓ для точки  $N$  абсолютное ускорение равно

$$w_a = \frac{R^2}{r}\omega^2 + \omega^2(R + 2r) + 2\omega^2 R = \omega^2 R \left(3 + \frac{2r}{R} + \frac{R}{r}\right)$$

и направлено от  $N$  к  $M$ .

Если радиусы  $R$  и  $r$  одинаковы, то  $w_{aM} = 2\omega^2 r$ ,  $w_{aN} = 6\omega^2 r$ .

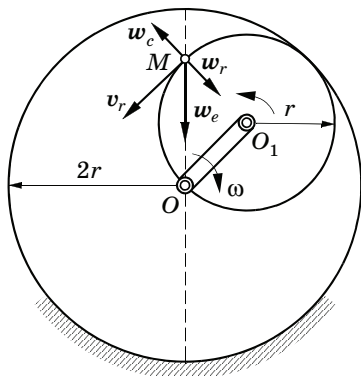


Рис. 214

**Пример 68.** Найдем ускорения точек обода колеса в случае внутреннего зацепления при отношении диаметров внешнего и внутреннего колес 2 : 1 (рис. 214).

Замечая, что в этом случае угловая скорость малого колеса по отношению к рукоятке в два раза больше угловой скорости рукоятки, будем иметь

$$\begin{aligned}w_r &= (2\omega)^2 r = 4\omega^2 r, \\w_e &= \omega^2 \cdot OM, \\w_c &= 2\omega \cdot 2\omega r = 4\omega^2 r.\end{aligned}$$

Направления этих ускорений показаны на рисунке. Как видно, в любой точке  $M$  обода поворотное ускорение равно по величине относительному ускорению точки и противоположно ему по направлению, так что абсолютное ускорение  $w_a$  сводится к ускорению переносного движения. Таким образом, имеем

$$w_a = \omega^2 \cdot OM,$$

причем ускорение всегда имеет направление к центру  $O$ . Это — ускорение прямолинейного гармонического колебания точки  $M$  по прямой, указанной на рисунке пунктиром, с периодом, равным периоду полного оборота рукоятки.

**Пример 69.** Пользуясь теорией относительного движения, найдем проекции скорости и ускорения точки на оси полярной системы координат.

Движение точки  $M$  по траектории  $KK$  (рис. 215) разложим на два движения:

- ✓ относительное движение точки по вектору-радиусу  $OM$ ,
- ✓ переносное движение, т. е. движение той точки на векторе-радиусе, которую проходит движущаяся точка  $M$ .

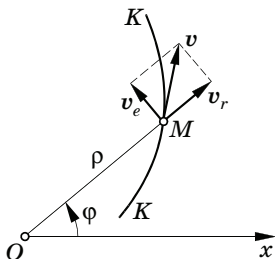


Рис. 215

Относительная скорость, направленная вдоль вектора-радиуса  $OM$ , называется *радиальной* скоростью и обозначается через  $v_\rho$ ; она равна скорости прямолинейного движения точки вдоль радиуса, так что

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho}. \quad (17.28)$$

Переносную скорость, направленную перпендикулярно радиусу в сторону возрастания угла  $\varphi$ , обозначим через  $v_\varphi$ ; очевидно, что

$$v_\varphi = \rho \dot{\varphi}. \quad (17.29)$$

Таким образом, величина абсолютной скорости, т. е. скорость точки, определится из равенства

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2. \quad (17.30)$$

Легко сообразить, что в данном случае  $w_r = \ddot{\rho}$ . Что касается переносного ускорения, то оно складывается из двух: вращательного  $w_e^{(в)}$  и осеостремительного  $w_e^{(ос)}$ , равных

$$w_e^{(в)} = \rho \ddot{\varphi}, \quad w_e^{(ос)} = \rho \dot{\varphi}^2.$$

Кориолисово ускорение будет равно

$$w_c = 2 \dot{\varphi} \dot{\rho}.$$

Из рис. 216 получим проекции  $w_r$  и  $w_\varphi$  ускорения на направление радиуса и перпендикулярное ему:

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = \rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\varphi} \dot{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}). \quad (17.31)$$

Формулы эти были получены ранее — см. (12.22) — из общих выражений для проекций ускорения в криволинейных координатах.

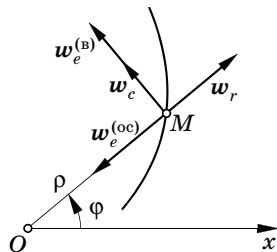


Рис. 216

### § 70. Сложение вращений твердого тела вокруг параллельных осей

Предположим, что твердое тело вращается вокруг некоторой оси, которая, в свою очередь, вращается вокруг другой, неподвижной оси, ей параллельной. Зная угловую скорость вращения тела вокруг подвижной оси и угловую скорость вращения самой оси вокруг неподвижной оси, определим абсолютное движение тела.

Относительным движением в данном случае является вращение твердого тела вокруг оси  $O'z'$  (рис. 217) по отношению к системе координат  $O'x'y'z'$ , в свою очередь вращающейся вокруг оси  $Oz$  неподвижной (абсолютной) системы координат  $Oxyz$ ; вектор угловой скорости вращения тела вокруг оси  $O'z'$ , направленный вдоль этой оси, обозначим через  $\omega_r$  и назовем *относительной угловой скоростью*. Вращение самой системы координат  $O'x'y'z'$  по отно-

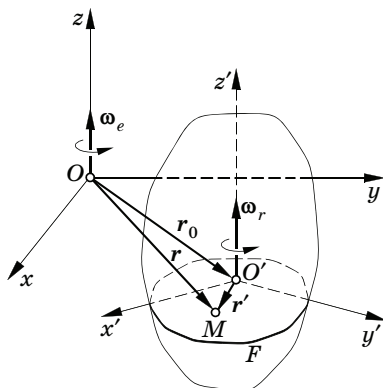


Рис. 217

пению к системе  $Oxyz$  будет переносным движением; вектор угловой скорости этого вращения, направленный по оси  $Oz$ , обозначим через  $\omega_e$  и назовем *переносной угловой скоростью*.

Заметим прежде всего, что по условию параллельности векторов  $\omega_r$  и  $\omega_e$  все точки тела как в относительном, так и в переносном движении остаются в плоскостях, перпендикулярных этим векторам, т. е. в параллельных между собой плоскостях; следовательно, абсолютное движение тела будет *плоским*; располагая оси так, чтобы плоскости  $O'x'y'$  и  $Oxy$  сливались, сведем задачу к рассмотрению плоского движения фигуры  $F$  по отношению к системам координат  $O'x'y'$  и  $Oxy$ . Точка  $M$  этой плоской фигуры, имеющая вектор-радиус  $r'$  по отношению к  $O'$  и вектор-радиус  $r$  по отношению к  $O$ , будет двигаться с абсолютной скоростью  $v_a$ , равной геометрической сумме относительной скорости  $v_r = \omega_r \times r' = \omega_r \times (r - r_0)$  и переносной скорости  $v_e = \omega_e \times r$ .

Соединяя члены с  $r$  и  $r_0$ , получим

$$v_a = v_r + v_e = \omega_r \times (r - r_0) + \omega_e \times r = (\omega_e + \omega_r) \times r - \omega_r \times r_0. \quad (17.32)$$

С другой стороны, рассматриваемое плоское движение можно представить как мгновенное вращение около оси, проходящей через мгновенный центр и перпендикулярной плоскости движения. Чтобы найти положение этой оси, обозначим вектор-радиус мгновенного центра  $P$  через  $r_p$  и выпишем условие того, что абсолютная скорость точки плоской фигуры  $P$  равна нулю. Полагая в равенстве (17.32)  $r = r_p$ ,  $v_a = v_p = 0$ , найдем

$$0 = (\omega_e + \omega_r) \times r_p - \omega_e \times r_0. \quad (17.33)$$

Умножим обе части этого равенства векторно на единичный вектор  $k$  оси  $Oz$ ; тогда, раскрывая двойное векторное произведение и пользуясь перпендикулярностью векторов  $r_p$  и  $r_0$  к единичному вектору  $k$ , получим

$$(\tilde{\omega}_e + \tilde{\omega}_r) r_p = \tilde{\omega}_r r_0,$$

где  $\tilde{\omega}_e$  и  $\tilde{\omega}_r$  согласно принятым обозначениям представляют собой алгебраические величины угловых скоростей (знак «плюс», если вращение положительно для наблюдателя, смотрящего с положительного направления оси  $Oz$  или  $O'z'$ , знак «минус» — в противоположном случае). Итак, при  $\tilde{\omega}_e + \tilde{\omega}_r \neq 0$

$$r_p = \frac{\tilde{\omega}_r}{\tilde{\omega}_e + \tilde{\omega}_r} r_0. \quad (17.34)$$

Из последнего равенства видно, что при любых зависимостях между  $\tilde{\omega}_e$  и  $\tilde{\omega}_r$  мгновенный центр  $P$  находится на линии  $OO'$  (рис. 218).

Чтобы найти угловую скорость вращения вокруг мгновенного центра, вычтем (17.33) из (17.32); получим

$$v_a = (\omega_e + \omega_r) \times (r - r_p). \quad (17.35)$$

Это — формула вращательной скорости фигуры  $F$  вокруг точки  $P$  с абсолютной угловой скоростью, равной

$$\omega_a = (\omega_e + \omega_r). \quad (17.36)$$

Итак, рассматриваемое абсолютное движение твердого тела эквивалентно вращению вокруг мгновенной оси, проходящей через мгновенный центр  $P$ , с абсолютной угловой скоростью, равной геометрической сумме переносной и относительной угловых скоростей.

Отметим возможные случаи расположения мгновенной оси.

■ *Направление вращений одинаково*, т. е.  $\tilde{\omega}_r$  и  $\tilde{\omega}_e$  имеют один и тот же знак, например положительный (рис. 218). В этом случае из уравнения (17.34) видно, что точка  $P$  лежит между центрами  $O$  и  $O'$  на расстояниях, обратно пропорциональных величинам угловых скоростей, т. е.

$$OP : O'P = \omega_r : \omega_e.$$

Абсолютная угловая скорость вращения вокруг оси, проходящей через точку  $P$ , по (17.36) равна сумме

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r$$

и направлена в ту же сторону.

■ *Направление вращений различно*, т. е.  $\tilde{\omega}_r$  и  $\tilde{\omega}_e$  имеют различные знаки, например  $\tilde{\omega}_e > 0$ , а  $\tilde{\omega}_r < 0$ , причем положим для определенности, что  $\omega_e > \omega_r$ . В этом случае из формулы (17.34) следует

$$\overrightarrow{OP} = r_p = -\frac{\omega_r}{\omega_e - \omega_r} r_0,$$

$$OP = r_p = \frac{\omega_r}{\omega_e - \omega_r} r_0.$$

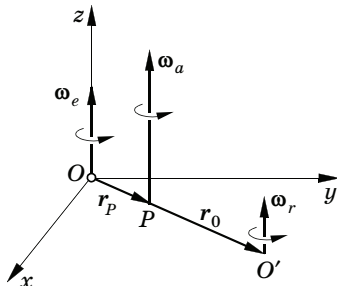


Рис. 218



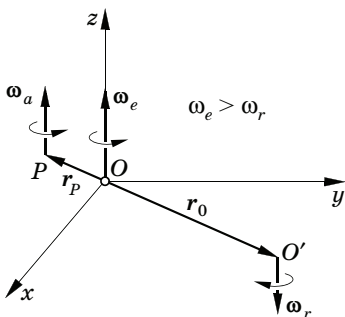


Рис. 219

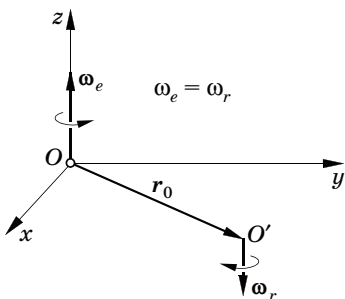


Рис. 220

Точка  $P$ , следовательно, лежит за точкой  $O$  (рис. 219). Расстояние  $O'P$  равно сумме длин  $r_0$  и  $r_p$ :

$$O'P = r_0 + \frac{\omega_r}{\omega_e - \omega_r} r_0 = \frac{\omega_e}{\omega_e - \omega_r} r_0,$$

так что опять, как и в предыдущем случае,

$$OP : O'P = \omega_r : \omega_e,$$

т. е. мгновенная ось расположена вне отрезка  $OO'$ , со стороны большей угловой скорости, на расстояниях от точек  $O$  и  $O'$ , обратно пропорциональных величинам угловых скоростей  $\omega_e$  и  $\omega_r$ .

Если бы  $\omega_e$  было меньше  $\omega_r$ , то было бы

$$r_p = \frac{\omega_r}{\omega_e - \omega_r} r_0.$$

Точка  $P$  при этом оказалась бы вне отрезка  $OO'$ , но уже за точкой  $O'$ .

Легко заметить, что и в этом случае

мгновенная ось опять расположилась бы на расстояниях, обратно пропорциональных величинам угловых скоростей  $\omega_e$  и  $\omega_r$ .

И в том и в другом случае величина  $\omega_a$  оказывается равной

$$\omega_a = |\omega_e - \omega_r|,$$

причем вектор  $\omega_a$  направлен в сторону большей угловой скорости.

■ *Направления вращений различны, но угловые скорости их равны по величине ( $\omega_e = -\omega_r$ ).* Этот случай представляет собой некоторую особенность, так как векторы  $\omega_e$  и  $\omega_r$  образуют пару векторов (рис. 220). Обращаясь к формуле (17.32), видим, что все точки тела будут иметь одну и ту же абсолютную скорость

$$v_a = -\omega_r \times r_0 = \omega_e \times r_0,$$

равную скорости полюса  $O'$ ; в этом случае имеет место *мгновенно-поступательное движение* тела.

Объединяя все три случая расположения мгновенной оси, приходим к следующему результату.

При сложении вращений вокруг параллельных осей угловые скорости складываются так же, как параллельные силы в статике.

При проведении этой аналогии переносная и относительная угловые скорости рассматриваются как *слагаемые* силы, а абсолютная угловая скорость соответствует *равнодействующей* силе.

В качестве приложения рассмотрим вопрос об определении угловых скоростей в эпициклическом зацеплении зубчатых колес.

Обычно *эпициклическим*, или *планетарным*, механизмом называют сцепление двух или нескольких колес, из которых одно вращается около неподвижной оси, другие — около осей, закрепленных на подвижной рукоятке (рис. 221), причем зацепление может быть как внешним, так и внутренним.

Колеса, соединенные с вращающейся рукояткой, называют *сателлитами*.

Выведем общее соотношение между угловыми скоростями колес и рукоятки по отношению к основанию механизма в случаях внешнего и внутреннего зацеплений. На рисунке все угловые скорости показаны в направлении по часовой стрелке; знак в дальнейшем покажет истинное направление вращений. Угловая скорость рукоятки обозначена через  $\Omega$ .

Придадим механизму в целом вращение с угловой скоростью  $(-\Omega)$ , равной по величине угловой скорости рукоятки, но противоположной ей по направлению. Тогда по теореме о сложении угловых скоростей основание механизма станет подвижным звеном, имеющим угловую скорость  $(-\Omega)$ , а рукоятка, наоборот, станет неподвижной и будет играть роль основания механизма. Механизм с перемещающимися осями превратится при этом в систему зубчатых колес с неподвижными осями, но угловые скорости колес будут уже равны соответственно  $\tilde{\omega} - \Omega$  и  $\tilde{\omega}_1 - \Omega$ .

Тогда, пользуясь известным соотношением между угловыми скоростями и радиусами, найдем для *внешнего зацепления*

$$\frac{\tilde{\omega} - \Omega}{\tilde{\omega}_1 - \Omega} = -\frac{R}{r} \quad (17.37)$$

и для *внутреннего*

$$\frac{\tilde{\omega} - \Omega}{\tilde{\omega}_1 - \Omega} = \frac{R}{r}. \quad (17.38)$$

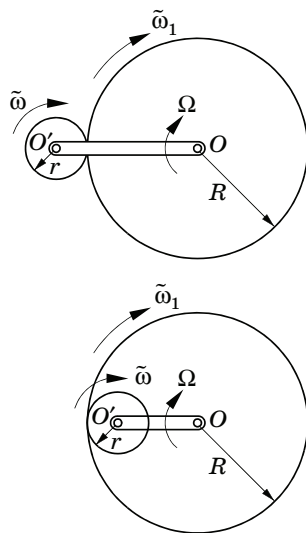


Рис. 221

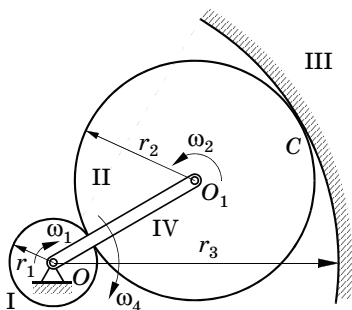


Рис. 222

**Пример 70.** Для получения больших угловых скоростей применяют следующий механизм (рис. 222). Рукоятка IV вращается вокруг неподвижного центра  $O$  и несет на своем конце  $O_1$  колесо II, сцепленное с неподвижной обоймой III. Полученное таким образом вращение колеса II передает колесу I, свободно насаженному на ось  $O$ . Найти связь между угловыми скоростями рукоятки и колеса I.

Дадим основанию механизма вращение, обратное вращению рукоятки, с угловой скоростью, равной угловой скорости рукоятки. Тогда обойма будет иметь угловую скорость  $(-\tilde{\omega}_4)$ , рукоятка станет неподвижной, а колесо I получит угловую скорость  $\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_4$ . При таком рассмотрении оси  $O$  и  $O_1$  неподвижны, а колесо II становится паразитным, не влияющим на абсолютное значение передаточного числа, но влияющим на его знак. В данном случае благодаря паразитному колесу передаточное число отрицательно, и по формуле зависимости между угловыми скоростями и радиусами сцепленных колес будем иметь

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_4}{-\tilde{\omega}_4} = -\frac{r_3}{r_1}.$$

Отсюда

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{r_1 + r_3}{r_1} \tilde{\omega}_4.$$

Взяв, например,  $r_3 = 9r_1$ , будем иметь

$$\omega_1 = 10\omega_4,$$

т.е. колесо I получает угловую скорость в 10 раз большую, чем скорость приводящей его в движение рукоятки.

## § 71. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Пусть относительное вращение тела с относительной угловой скоростью  $\omega_r$  происходит вокруг оси  $Oz'$  (рис. 223), а переносным движением является вращение системы  $Ox'y'z'$  с переносной угловой скоростью  $\omega_e$  вокруг неподвижной оси  $Oz$ , пересекающейся с осью  $Oz'$  в точке  $O$ . Абсолютным движением будет движение тела по отношению к системе координат  $Oxyz$ . Рассматриваемое абсолютное движение тела является вращением вокруг неподвижного центра  $O$ .

Всякое вращение тела вокруг неподвижного центра можно представить как вращение вокруг некоторой мгновенной оси. Определим направление мгновенной оси и найдем вектор абсолютной угловой скорости вращения тела.

Для этого возьмем какую-нибудь точку  $M$  тела с вектором-радиусом  $r$  и напишем по теореме о сложении скоростей

$$v_a = v_r + v_e. \tag{17.39}$$

В данном случае

$$v_a = \omega_a \times r, \tag{17.40}$$

где  $\omega_a$  — искомая абсолютная угловая скорость тела; относительная скорость  $v_r$  равна

$$v_r = \omega_r \times r, \tag{17.41}$$

а переносная скорость

$$v_e = \omega_e \times r. \tag{17.42}$$

По (17.39) получим после соединения двух произведений в одно

$$\omega_a \times r = (\omega_r + \omega_e) \times r. \tag{17.43}$$

Отсюда в силу произвольности  $r$  следует, что

$$\omega_a = \omega_r + \omega_e. \tag{17.44}$$

Таким образом, приходим к следующей теореме.

**ТЕОРЕМА.** *Абсолютная угловая скорость равна геометрической сумме относительной и переносной угловых скоростей.*

Для иллюстрации этой теоремы рассмотрим планетарное коническое зацепление (рис. 224, а) и, задаваясь углами раствора конусов  $2\alpha$  и  $2\beta$ , определим абсолютную угловую скорость  $\omega_a$  вращения колеса II по неподвижному колесу I, если переносная угловая скорость  $\omega_e$  вращения оси  $Oz'$  вокруг  $Oz$  задана.

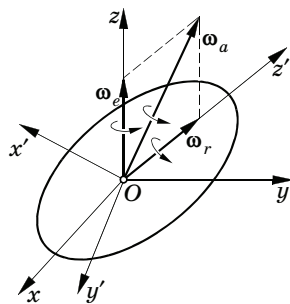


Рис. 223

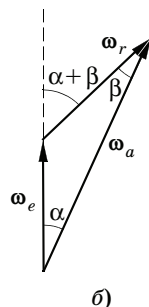
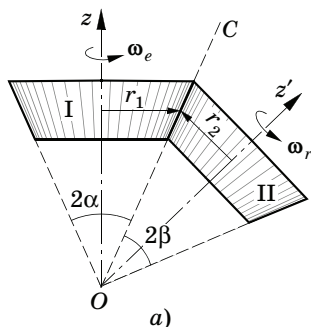


Рис. 224

Замечая, что в рассматриваемом случае абсолютная угловая скорость  $\omega_a$  направлена по мгновенной оси  $OC$ , строим треугольник угловых скоростей (рис. 224, б) по заданной величине и направлением переносной угловой скорости  $\omega_e$  и известным направлениям абсолютной  $\omega_a$  и относительной  $\omega_r$  угловых скоростей.

Из треугольника найдем

$$\omega_a = \omega_e \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}, \quad \omega_r = \omega_e \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \omega_e \frac{r_1}{r_2}.$$

В предположении, что  $\omega_e$  постоянна по величине, нетрудно найти абсолютное угловое ускорение  $\varepsilon_a$  колеса II; его можно определить как скорость конца вектора  $\omega_a$  при вращении мгновенной оси  $OC$  с угловой скоростью  $\omega_e$ . Так как  $\omega_a$  по величине постоянна, будем иметь

$$\varepsilon_a = \omega_e \times \omega_a = \omega_e \times (\omega_e + \omega_r) = \omega_e \times \omega_r.$$

Ускорение  $\varepsilon_a$  равно по величине

$$\varepsilon_a = \omega_e \omega_r \sin(\alpha + \beta) = \omega_e^2 \frac{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}$$

и направлено перпендикулярно плоскости  $zOz'$  в сторону вращения оси  $Oz'$ .

**Пример 71. Дифференциальное зацепление.** Рамка  $BB$  (рис. 225) вращается вокруг оси  $xx$  с угловой скоростью  $\Omega$  и увлекает с собой ось  $AA$ . На эту ось надета шестерня (сателлит), состоящая из двух наглухо скрепленных между собой колес радиусами  $r_1$  и  $r_2$  и свободно вращающаяся на оси  $AA$ . Колеса эти спарены с двумя колесами радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , имеющими ту же ось вращения, что и рамка  $BB$ , но ничем с нею не связанными. Обозначая угловые скорости, как показано на рисунке, найдем зависимости между угловыми скоростями колес и рамки.

Дадим основанию механизма вращение, противоположное вращению рамки и равное ему по величине. Тогда рамка станет неподвижной, угловые скорости  $\tilde{\omega}_1$  и  $\tilde{\omega}_2$  станут равными  $\tilde{\omega}_1 - \Omega$  и  $\tilde{\omega}_2 - \Omega$ ; что касается угловой скорости сателлита относительно рамки, то обозначим ее через  $\tilde{\omega}$ . При остановившейся рамке будем иметь для *верхнего* и для *нижнего* колеса соответственно

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \Omega}{\tilde{\omega}} = \frac{r_1}{R_1}, \quad \frac{\tilde{\omega}_2 - \Omega}{\tilde{\omega}} = -\frac{r_2}{R_2}.$$

В последней формуле выбран знак *минус*, потому что колеса радиусами  $R_1$  и  $R_2$  вращаются в противоположных направлениях.

Разделив первое соотношение на второе, получим

$$\Omega \left( \frac{R_1}{r_1} + \frac{R_2}{r_2} \right) = \tilde{\omega}_1 \frac{R_1}{r_1} + \tilde{\omega}_2 \frac{R_2}{r_2}. \tag{17.45}$$

Полагая в этой формуле  $r_1 = r_2$  и  $R_1 = R_2$ , т. е. беря сателлит не двойным, а одинарным, получим *механизм автомобильного дифференциала*.

В этом случае будем иметь

$$\Omega = \frac{1}{2} (\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2), \quad \tilde{\omega} = \frac{R}{2r} (\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2). \tag{17.46}$$

Схема автомобильного дифференциала видна из рис. 226. Вращение от оси мотора передается на коническое колесо  $AA$ , жестко соединенное с кожухом дифференциала  $BB$ . Кожух, вращаясь вокруг той же оси, около которой вращаются автомобильные колеса, увлекает оси  $CC$  с насаженными на них сателлитами  $S, S$ . Сателлиты сцеплены с колесами  $R, R$ , жестко связанными с задними колесами автомобиля.

Первое условие (17.46) показывает, что угловые скорости  $\tilde{\omega}_1$  и  $\tilde{\omega}_2$  каждая в отдельности произвольны, но их среднее арифметическое должно давать угловую скорость кожуха. Этим свойством дифференциала и пользуются. На прямолинейном пути угловые скорости колес автомобиля одинаковы:  $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2$  и  $\Omega = \tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2$ ; при этом  $\tilde{\omega} = 0$ , т. е. сателлиты не вращаются вокруг осей  $CC$ .

На поворотах колеса описывают окружности разных радиусов и имеют разные угловые скорости,  $\tilde{\omega}_1 \neq \tilde{\omega}_2$ ;  $\Omega$  может оставаться прежней, лишь бы полусумма  $\tilde{\omega}_1$  и  $\tilde{\omega}_2$  сохраняла свою величину. При движении на поворотах сателлиты приходят во вращение.

Предположим, что автомобиль описал на повороте колею шириной  $d$ ; радиус внешней окружности колеи  $\rho$ , скорость центра тяжести автомобиля  $v$ . Зная, что радиус задних колес автомобиля равен  $a$ , определим угловую скорость кожуха дифференциала и скорости вращения сателлитов.

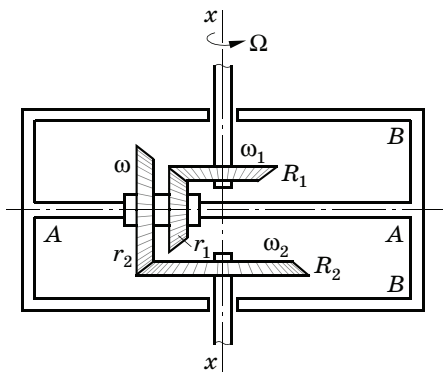


Рис. 225

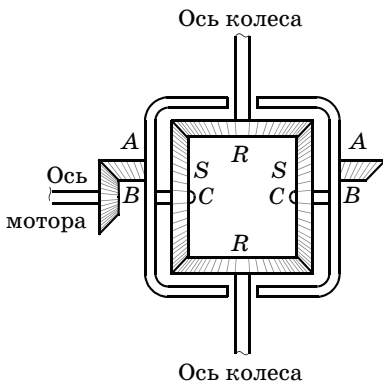


Рис. 226

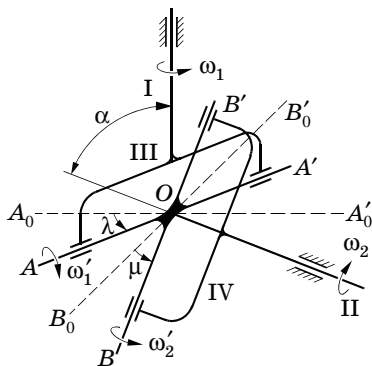


Рис. 227

Сначала определяем угловые скорости колес автомобиля, а следовательно, и угловые скорости жестко связанных с ними шестерен  $R, R$  (рис. 226). Для внешнего и внутреннего колес получим соответственно

$$\omega_2 = \frac{v}{a\rho} (\rho + d/2),$$

$$\omega_1 = \frac{v}{a\rho} (\rho - d/2).$$

Угловую скорость сателлитов и угловую скорость кожуха получим в виде

$$\omega = \frac{(\omega_1 - \omega_2)R}{2r} = \frac{vRd}{2a\rho r},$$

$$\Omega = \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) = \frac{v}{a}.$$

**Пример 72. Шарнир Гука.** Для передачи вращения с одного вала на другой применяют специальное соединение валов — шарнир Гука. Устройство этого соединения показано на рис. 227. К концам валов I, II, оси которых пересекаются под заданным углом  $\alpha$ , жестко присоединены вилки III и IV, несущие подшипники, в которых могут вращаться взаимно-перпендикулярные валики  $AA'$  и  $BB'$ , образующие жесткую крестовину. При вращении валов крестовина совершает сложное вращательное движение вокруг неподвижного центра  $O$ ; при этом передаточное число между валами I и II меняется в зависимости от углов поворота валов.

Примем вал I за ведущий, вал II — за ведомый и обозначим векторы угловых скоростей валов соответственно через  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Плоскость, в которой расположены валы, совместим с плоскостью рисунка. Условимся от этой плоскости отсчитывать угол  $\lambda$  поворота ведущего вала, определяемый как двугранный угол между подвижной плоскостью вилки III и плоскостью рисунка. На рисунке пунктиром показано начальное положение валиков крестовины:  $A_0A'_0$  — в плоскости рисунка,  $B_0B'_0$  — перпендикулярно плоскости рисунка.

Поставим сначала задачу об определении передаточного числа  $\omega_2/\omega_1$  в функции от угла поворота ведущего вала  $\lambda$  при заданном угле  $\alpha$  между осями валов. Для решения применим основную теорему о сложении вращений. Представим себе вектор  $\omega_a$  угловой скорости крестовины в ее абсолютном движении двояким образом: с одной стороны, как геометрическую сумму вектора  $\omega_1$  угловой скорости вилки III, являющейся для крестовины переносной угловой скоростью, и  $\omega'_1$  — относительной угловой скорости вращения крестовины вокруг оси  $AA'$ ; с другой стороны,

как геометрическую сумму вектора  $\omega_2$  угловой скорости вилки IV и относительной угловой скорости  $\omega'_2$  крестовины вокруг оси  $BB'$ :

$$\omega_a = \omega_1 + \omega'_1 = \omega_2 + \omega'_2. \quad (17.47)$$

Замечая, что, согласно конструкции соединения, векторы  $\omega_1$  и  $\omega'_1$ ,  $\omega_1$  и  $\omega'_2$ ,  $\omega'_2$  и  $\omega_2$  взаимно-перпендикулярны, будем иметь

$$\omega_1 \cdot \omega'_1 = 0, \quad \omega'_1 \cdot \omega'_2 = 0, \quad \omega'_2 \cdot \omega_2 = 0. \quad (17.48)$$

Если умножить скалярно обе части основного равенства (17.47) один раз на  $\omega'_1$ , другой — на  $\omega_2$ , то вследствие (17.48) получим

$$\omega_1'^2 = \omega'_1 \cdot \omega_2, \quad \omega'_1 \cdot \omega_2 = \omega_2^2 - \omega_1 \cdot \omega_2. \quad (17.49)$$

Чтобы ввести в рассмотрение угол поворота ведущего вала  $\lambda$ , составим теперь скалярное произведение двух векторов:

- ✓ вектора  $\omega_1 \times \omega_2$ , перпендикулярного плоскости рисунка,
- ✓ вектора  $\omega_1 \times \omega'_1$ , перпендикулярного плоскости ведущей вилки III.

Косинус угла между этими векторами будет, очевидно, равен  $\cos \lambda$ ; получим

$$\begin{aligned} (\omega_1 \times \omega_2) \cdot (\omega_1 \times \omega'_1) &= \omega_1 \omega_2 \sin \alpha \cdot \omega_1 \omega'_1 \sin 90^\circ \cos \lambda = \\ &= \omega_1^2 \omega'_1 \omega_2 \sin \alpha \cos \lambda. \end{aligned} \quad (17.50)$$

С другой стороны, по известной формуле векторной алгебры

$$\begin{aligned} (\omega_1 \times \omega_2) \cdot (\omega_1 \times \omega'_1) &= [(\omega_1 \times \omega_2) \times \omega_1] \cdot \omega'_1 = [\omega_1^2 \omega_2 - (\omega_1 \cdot \omega_2) \omega_1] \cdot \omega'_1 = \\ &= \omega_1^2 (\omega_2 \cdot \omega'_1) - (\omega_1 \cdot \omega_2)(\omega_1 \cdot \omega'_1), \end{aligned}$$

или по (17.48)

$$(\omega_1 \times \omega_2) \cdot (\omega_1 \times \omega'_1) = \omega_1^2 (\omega'_1 \cdot \omega_2). \quad (17.51)$$

Приравнявая это выражение предыдущему, найдем

$$\omega'_1 \cdot \omega_2 = \omega'_1 \omega_2 \sin \alpha \cos \lambda, \quad (17.52)$$

после чего из первого равенства системы (17.49) следует

$$\omega_1' = \omega_2 \sin \alpha \cos \lambda, \quad (17.53)$$

а из первого и второго равенств той же системы

$$\omega_1'^2 = \omega_2^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda = \omega_2^2 - \omega_1 \omega_2 \cos \alpha,$$

откуда нетрудно уже получить искомое передаточное число:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda}. \quad (17.54)$$



При заданном угле  $\alpha$  между осями это отношение будет максимальным, когда знаменатель будет минимальным, т. е. при  $\cos^2 \lambda = 1$ , что соответствует совпадению плоскости ведущей вилки с плоскостью, содержащей оси валов. Это максимальное значение равно

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)_{\max} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Аналогичным образом удостоверимся, что минимальное значение передаточного числа равно

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)_{\min} = \cos \alpha$$

и достигается при перпендикулярности плоскости ведущей вилки к плоскости, содержащей оси валов.

Коэффициент неравномерности передачи  $\delta$  определим как разность

$$\delta = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)_{\max} - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)_{\min} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}. \quad (17.55)$$

Из этого равенства следует, что только при малых  $\alpha$  коэффициент неравномерности будет невелик. С возрастанием  $\alpha$  коэффициент неравномерности резко увеличивается; при  $\alpha = \pi/2$  движение механизма невозможно.

Пользуясь полученными формулами, легко определить также величину абсолютной угловой скорости крестовины  $\omega_a$  и направление мгновенной оси вращения, соответствующие данному углу  $\lambda$  поворота ведущего вала. Действительно, по условию перпендикулярности  $\omega_1$  и  $\omega'_1$  будем иметь

$$\omega_a = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_1'^2} = \omega_1 \sqrt{1 + (\omega_1'/\omega_1)^2},$$

а по формулам (17.53) и (17.54)

$$\frac{\omega_1'}{\omega_1} = \frac{\omega_1'}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\sin \alpha \cos \lambda \cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda},$$

$$1 + \left(\frac{\omega_1'}{\omega_1}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cos^2 \lambda}{(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda)^2},$$

или, после простых приведений,

$$1 + \left(\frac{\omega_1'}{\omega_1}\right)^2 = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda - \sin^4 \alpha \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda}{(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda)^2}.$$

Таким образом, имеем

$$\omega_a = \omega_1 \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda - \sin^4 \alpha \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda}}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda}. \quad (17.56)$$

Поскольку вектор  $\omega_a$  всегда расположен в плоскости ведущей вилки III, направление мгновенной оси можно определить по формуле косинусов:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\omega_a, \omega_1}) &= \frac{\omega_1}{\omega_a} = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda - \sin^4 \alpha \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda}}, \\ \cos(\widehat{\omega_a, \omega'_1}) &= \frac{\omega'_1}{\omega_1} \frac{\omega_1}{\omega_a} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha \cos \lambda}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda - \sin^4 \alpha \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda}}. \end{aligned} \tag{17.57}$$

Если угол  $\alpha$  между ведущим и ведомым валами мал, можно, пренебрегая четвертыми степенями  $\sin \alpha$ , получить более простые приближенные формулы:

$$\begin{aligned} \omega_a &= \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda}}, \\ \cos(\widehat{\omega_a, \omega_1}) &\approx \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda}, \\ \cos(\widehat{\omega_a, \omega'_1}) &\approx \frac{\sin \alpha \cos \alpha \cos \lambda}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda}}. \end{aligned} \tag{17.58}$$

Возвращаясь к точным формулам (17.56) и (17.57), убедимся, что:

✓ при  $\lambda = 0, \pi, \dots$

$$\omega_a = \frac{\omega_1}{\cos \alpha} = \omega_2, \quad \cos(\widehat{\omega_a, \omega_1}) = \cos \alpha, \quad \cos(\widehat{\omega_a, \omega'_a}) = \sin \alpha.$$

т. е. при этом мгновенная ось вращения крестовины совпадает с осью ведомого вала II, а угловая скорость ее — с угловой скоростью этого вала;

✓ при  $\lambda = \pi/2, 3\pi/2, \dots$

$$\omega_a = \omega_1, \quad \cos(\widehat{\omega_a, \omega_1}) = 1, \quad \cos(\widehat{\omega_a, \omega'_1}) = 0,$$

т. е. мгновенная ось совпадает с осью ведущего вала I, а угловая скорость — с  $\omega_1$ .

При работе шарнира Гука мгновенная ось крестовины, вращаясь вместе с плоскостью ведущей вилки, совершает колебания внутри конуса с вершиной в точке  $O$ , углом раствора  $2\alpha$  и осью I. Неподвижным аксоидом будет являться некоторая коническая поверхность, заключенная внутри только что указанного конуса.

Кинематическая модель шарнира Гука показана на рис. 228.

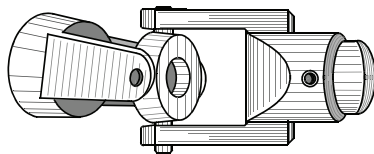


Рис. 228

### § 72. Общая задача об относительном движении твёрдого тела

Рассмотрим следующую задачу в общей постановке. Твёрдое тело совершает произвольное движение по отношению к системе координат  $O'x'y'z'$  (рис. 229), которая, в свою очередь, произвольным образом движется по отношению к неподвижной системе координат  $Oxyz$ . Требуется определить абсолютное движение твёрдого тела, т. е. движение по отношению к системе координат  $Oxyz$ .

Движение тела по отношению к системе  $O'x'y'z'$  определим *относительной скоростью*  $v_{O'}$  его полюса  $O''$  и вектором *относительной угловой скорости*  $\omega_r$  вращения вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс  $O''$ . Переносное движение, т. е. движение системы  $O'x'y'z'$  по отношению к  $Oxyz$ , зададим *абсолютной скоростью*  $v_{O'}$  полюса  $O'$  и вектором угловой скорости  $\omega_e$  вращения вокруг мгновенной оси, проходящей через  $O'$ . Определению подлежат абсолютная скорость  $(v_{O''})_a$  полюса  $O''$  и абсолютная угловая скорость тела  $\omega_a$ .

Для произвольной точки  $M$  тела, положение которой можно определить в самом теле вектором-радиусом  $\overrightarrow{O''M} = r''$ , в относительной системе — вектором-радиусом  $\overrightarrow{O'M} = r'$  и, наконец, в абсолютной системе — вектором-радиусом  $\overrightarrow{OM} = r$ , по теореме сложения скоростей имеем

$$v_a = v_e + v_r = v_{O'} + \omega_e \times r' + v_{O''} + \omega_r \times r'', \quad (17.59)$$

причем два первых слагаемых дают в сумме переносную скорость  $v_e$  точки  $M$ , а два последних — ее относительную скорость  $v_r$ . Замечая, что (рис. 229)

$$r' = r_{O''} + r'',$$

будем иметь

$$\begin{aligned} v_a &= v_{O'} + \omega_e \times r_{O''} + \omega_e \times r'' + v_{O''} + \omega_r \times r'' = \\ &= v_{O'} + \omega_e \times r_{O''} + v_{O''} + (\omega_e + \omega_r) \times r''. \end{aligned} \quad (17.60)$$

Первые два слагаемых представляют собой переносную скорость полюса  $O''$ :

$$v_{O'} + \omega_e \times r_{O''} = (v_{O''})_e,$$

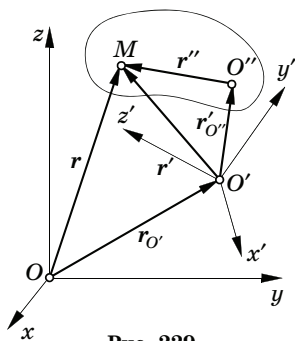


Рис. 229

которая в сумме с *относительной* скоростью  $v_{O''}$  того же полюса даст абсолютную скорость этого полюса:

$$(v_{O''})_a = v_{O'} + \omega_e \times r_{O''} + v_{O''}. \quad (17.61)$$

Подстановка в (17.60) дает

$$v_a = (v_{O''})_a + (\omega_e + \omega_r) \times r''. \quad (17.62)$$

С другой стороны, согласно определению абсолютного движения скорость точки  $M$  может быть следующим образом представлена по формуле (16.4):

$$v_a = (v_{O''})_a + \omega_a \times r''. \quad (17.63)$$

Сравнивая выражения (17.62) и (17.63), вследствие произвольности выбора вектора  $r''$  получим

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r. \quad (17.64)$$

Итак, приходим к следующей теореме.

**ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА.** *Распределение скоростей в абсолютном движении твердого тела определяется заданием абсолютной скорости полюса тела, равной геометрической сумме переносной и относительной скоростей полюса, и абсолютной угловой скорости тела, равной геометрической сумме переносной и относительной угловых скоростей тела.*

Рассмотренная выше задача об определении элементов абсолютного движения твердого тела по заданным его относительному и переносному движениям может быть сформулирована также как задача о сложении винтовых движений, т. е. об определении элементов абсолютного винтового движения по известным винтовому относительному и винтовому переносному движениям.

Остановимся на определении элементов абсолютного винтового движения, представляющего результат сложения относительного вращения тела вокруг оси  $O'z'$ , принадлежащей системе  $O'x'y'z'$  (рис. 230), и переносного вращения этой системы вокруг неподвижной оси  $Oz$ . Угловые скорости относительного и переносного вращений задаются векторами  $\omega_r$  и  $\omega_e$ .

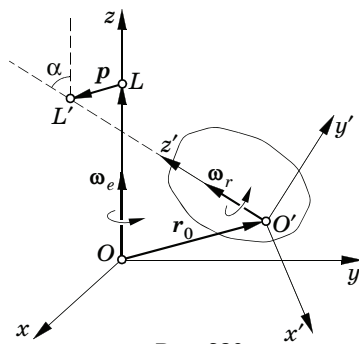


Рис. 230

Кратчайшее расстояние между осями назовем  $p$  и введем в рассмотрение вектор  $\mathbf{p}$ , направленный вдоль общего перпендикуляра  $LL'$  к осям  $Oz$  и  $O'z'$  от неподвижной оси к подвижной. Определение элементов винтового движения может быть значительно упрощено, если за начало неподвижной системы принять точку  $L$ , а за полюс тела принять конец  $L'$  вектора  $\mathbf{p}$ . Тогда абсолютная скорость полюса  $L'$  будет равна

$$\mathbf{v}_{L'} = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{p}. \quad (17.65)$$

Скорость скольжения определим по формуле (16.24):

$$c = \frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \mathbf{v}_{L'}}{\omega_a} = \frac{1}{\omega_a} (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \cdot (\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{p}). \quad (17.66)$$

Замечая, что

$$\boldsymbol{\omega}_r \cdot (\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{p}) = (\boldsymbol{\omega}_r \times \boldsymbol{\omega}_e) \cdot \mathbf{p}, \quad \boldsymbol{\omega}_e \cdot (\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{p}) = 0,$$

получим

$$c = \frac{1}{\omega_a} (\boldsymbol{\omega}_r \times \boldsymbol{\omega}_e) \cdot \mathbf{p}, \quad (17.67)$$

где  $\omega_a$  определяется очевидным равенством

$$\omega_a = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_e^2 + 2\omega_r\omega_e \cos \alpha}, \quad (17.68)$$

а через  $\alpha$  обозначен угол между осями.

Для определения положения винтовой оси найдем вектор  $\mathbf{r}'_C$ , направленный по перпендикуляру, опущенному из полюса  $L'$  на винтовую ось и пересекающему ее в точке  $C$ . Воспользуемся для этого формулой (16.20):

$$\mathbf{r}'_C = \frac{\boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{v}_{L'}}{\omega_a^2} = \frac{1}{\omega_a^2} \boldsymbol{\omega}_a \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{p}). \quad (17.69)$$

Раскроем произведение векторов; будем иметь

$$\boldsymbol{\omega}_a \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{p}) = \boldsymbol{\omega}_e (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p} (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \boldsymbol{\omega}_e) = -\mathbf{p} (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \boldsymbol{\omega}_e),$$

так как по условию вектор  $\mathbf{p}$  перпендикулярен векторам  $\boldsymbol{\omega}_e$  и  $\boldsymbol{\omega}_r$ , а следовательно, и их геометрической сумме  $\boldsymbol{\omega}_a$ . Подстановка в (17.69) дает

$$\mathbf{r}'_C = -\frac{\boldsymbol{\omega}_e \cdot \boldsymbol{\omega}_a}{\omega_a^2} \mathbf{p}. \quad (17.70)$$

Вектор  $r_C$ , определяющий положение точки  $C$  по отношению к неподвижной точке  $L$ , будет по (16.21) равен

$$r_C = p + r'_C = p \left( 1 - \frac{\omega_e \cdot \omega_a}{\omega_a^2} \right) = p \frac{\omega_a \cdot \omega_a - \omega_e \cdot \omega_a}{\omega_a^2} = p \frac{\omega_a \cdot (\omega_a - \omega_e)}{\omega_a^2},$$

или окончательно

$$r_C = p \frac{\omega_a \cdot \omega_r}{\omega_a^2}. \quad (17.71)$$

Таким образом, искомая точка  $C$  лежит на общем перпендикуляре  $LL'$  к осям относительного и переносного вращений. Нетрудно проверить, что доказанные в § 70 теоремы сложения вращений вокруг параллельных осей получаются из формул (17.64), (17.70) и (17.71), если считать, что векторы  $\omega_e$  и  $\omega_r$  параллельны друг другу.

В заключение остается показать, как по заданным векторам  $\omega_e$  и  $\omega_r$  слагаемых вращений и вектору-радиусу  $r_0$  полюса  $O'$  по отношению к началу координат системы  $Oxyz$  определяются направление, величина и положение вектора  $p$ . Согласно рис. 230 имеем

$$\overrightarrow{LL'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'L'} - \overrightarrow{OL},$$

или

$$p = r_0 + \lambda' \omega_r - \lambda \omega_e, \quad (17.72)$$

где  $\lambda$  и  $\lambda'$  — неизвестные скалярные величины. Для их определения умножим скалярно обе части соотношения (17.72) на  $\omega_r$  и соответственно на  $\omega_e$ ; тогда вследствие перпендикулярности вектора  $p$  по отношению к векторам  $\omega_r$  и  $\omega_e$  получим систему уравнений

$$\begin{aligned} -\lambda' \omega_r^2 + \lambda \omega_e \cdot \omega_r &= r_0 \cdot \omega_r, \\ -\lambda' \omega_e \cdot \omega_r + \lambda \omega_e^2 &= r_0 \cdot \omega_e. \end{aligned} \quad (17.73)$$

Решив эту систему уравнений, найдем

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{(r_0 \cdot \omega_e) \cdot (\omega_e \cdot \omega_r) - (r_0 \cdot \omega_r) \omega_e^2}{\omega_e^2 \cdot \omega_r^2 - (\omega_e \cdot \omega_r)^2}, \\ \lambda &= \frac{(r_0 \cdot \omega_e) \omega_r^2 - (r_0 \cdot \omega_r) \cdot (\omega_e \cdot \omega_r)}{\omega_e^2 \omega_r^2 - (\omega_e \cdot \omega_r)^2}, \end{aligned}$$

что можно также представить в виде

$$\lambda' = \frac{(r_0 \times \omega_e) \cdot (\omega_e \times \omega_r)}{|\omega_e \times \omega_r|^2}, \quad \lambda = \frac{(r_0 \times \omega_r) \cdot (\omega_e \times \omega_r)}{|\omega_e \times \omega_r|^2}. \quad (17.74)$$

Для определения вектора  $\mathbf{p}$  умножаем обе части (17.72) скалярно на вектор  $\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r$ . Получим

$$\mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r) = \mathbf{r}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r). \quad (17.75)$$

Но, поскольку векторы  $\mathbf{p}$  и  $(\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r)$  параллельны друг другу, можно написать

$$\mathbf{p} = \mu (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r).$$

Следовательно, по (17.75)

$$\mu = \frac{\mathbf{r}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r)}{|\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r|^2},$$

и искомый вектор  $\mathbf{p}$  равен

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{r}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r)}{|\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r|^2} (\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r). \quad (17.76)$$

Если ввести единичный вектор  $\mathbf{s}$ , направленный по общему перпендикуляру к осям вращения, положив его равным

$$\mathbf{s} = \frac{\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r}{|\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r|},$$

то выражение (17.76) вектора  $\mathbf{p}$  примет простой вид:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s}) \mathbf{s}, \quad (17.77)$$

показывающий, что величина вектора  $\mathbf{p}$  равна проекции вектора  $\mathbf{r}_0$  на направление общего перпендикуляра к осям вращения.

## Глава XVIII

### Основы кинематики сплошной среды

#### § 73. Определение положения и движения сплошной среды. Переменные Лагранжа и Эйлера

Своеобразие модели сплошной среды как бесконечного множества точек, непрерывно заполняющих некоторую область пространства, вынуждает особо подходить к способу задания ее положения в данный момент времени, а также ее движения во времени.

Для этой цели можно воспользоваться обычным для кинематики точки приемом задания в функции от времени  $t$  координат  $(x_1, x_2, x_3)$  отдельных точек сплошной среды, но, чтобы *индивидуализировать* такие уравнения для различных точек среды, необходимо как-то выделить данную точку среды из остальных. Следуя Лагранжу, в качестве определяющих выбор точки параметров можно принять ее декартовы или, вообще говоря, любые криволинейные координаты  $a_1, a_2, a_3$  в некоторый начальный момент  $t = t_0$ . Тогда уравнениями движения любой точки среды будут служить выражения

$$x_k = x_k [(a_l); t], \quad k = 1, 2, 3; \quad (18.1)$$

величина  $(a_l)$  здесь и далее будет обозначать *совокупность* всех значений  $a_l, l = 1, 2, 3$ .

Уравнения (18.1) отвечают на вопрос, где будет находиться точка с *начальными* координатами  $(a_l)$  в произвольно заданный момент времени  $t$ .

Подчиним выбор координат условию взаимно-однозначной связи между  $(a_l)$  и  $(x_k)$ , т. е. потребуем, чтобы уравнение (18.1) однозначно разрешалось относительно переменных  $(a_k)$ . Тогда будем иметь

$$a_l = a_l [(x_k), t], \quad l = 1, 2, 3. \quad (18.2)$$

Эти уравнения дают информацию о том, где находилась в начальный момент  $t = t_0$  точка, текущие координаты которой равны  $(x_k)$ . Можно сказать, что уравнения (18.2) позволяют судить об *истории* точки  $(x_k)$ .

Совокупность значений  $(a_l)$  и  $t$  носит наименование *переменных Лагранжа* и применяется повсюду, где приходится иметь дело с малыми смещениями частиц сплошной среды (например, в теории упругости, теории волн малой амплитуды, некоторых вопросах теории турбулентных движений жидкости).

Более широкое применение имеют *переменные Эйлера*, определяющие проекции перемещений  $(p_k)$  или скоростей  $(V_k)$  в данной фиксированной в пространстве точке  $x_l$  при заданном  $t$ :

$$V_k = V_k [(x_l), t], \quad k = 1, 2, 3. \quad (18.3)$$

Такое представление определяет *поле* скоростей в данной области пространства в любой момент времени. Поле, зависящее



от времени, называют *нестационарным*, не зависящее от времени — *стационарным*.

Метод Эйлера более соответствует практическим требованиям, чем метод Лагранжа, так как экспериментальное измерение скоростей в данной точке пространства легко осуществляется существующими приборами, в то время как задание начальных координат отдельных точек среды должно быть отнесено скорее к *мысленному эксперименту*.

Совокупность значений  $(V_k)$  и  $t$ , а иногда  $(x_k)$  и  $t$  причисляют к переменным Эйлера.

Установим связь между тем или другим образом определенными переменными Лагранжа и Эйлера. По определению проекций скорости имеем систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно  $(x_i)$ :

$$V_k = \frac{dx_k}{dt} = V_k(x_1, x_2, x_3; t), \quad k = 1, 2, 3. \quad (18.4)$$

В результате интегрирования уравнений (18.4) появятся три постоянные интегрирования  $C_1, C_2, C_3$  и интегралы представятся в виде

$$x_k = x_k(t; C_1, C_2, C_3), \quad k = 1, 2, 3. \quad (18.5)$$

Рассматривая переменные Лагранжа  $(a_l)$  как значения  $(x_l)$  при  $t = t_0$ , получим систему уравнений

$$a_l = a_l(t_0; C_1, C_2, C_3), \quad l = 1, 2, 3,$$

разрешая которую относительно  $(C_i)$  можно выразить  $C_1, C_2, C_3$  через  $a_k$ , после чего уравнения (18.5) примут вид (18.1). Подставляя эти значения  $(x_i)$  в равенства (18.4), найдем выражение проекций скоростей через переменные Лагранжа  $(a_k)$  и  $t$ , что и будет служить искомой связью между эйлеровыми и лагранжевыми переменными.

В дальнейшем, по преимуществу, будем пользоваться эйлеровыми переменными.

#### § 74. Перемещения, скорости и ускорения точек сплошной среды в переменных Лагранжа

Напомним, что *перемещением*  $p$  точки  $M$  из некоторого начального положения  $M_0$  с вектором-радиусом  $r_0$  в текущее положение  $M$  с вектором-радиусом  $r$  называют вектор

$$p = r - r_0; \quad p_k = x_k - x_{0k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (18.6)$$

Начальный вектор-радиус  $r_0$  выражается через переменные Лагранжа:

$$r_0 = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3, \quad (18.7)$$

конечный  $r$  — через переменные Эйлера ( $x_k$ ):

$$r = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3. \quad (18.8)$$

Обычно проекции перемещений ( $p_k$ ) частиц среды рассматривают как функции координат ( $a_k$ ) начальных их положений. Тогда по (18.6)

$$x_k = a_k + p_k(a_1, a_2, a_3; t), \quad k = 1, 2, 3. \quad (18.9)$$

Эти уравнения можно разрешить относительно  $a_k$ , считая  $p_k$  функциями ( $x$ ):

$$a_k = x_k - p_k(x_1, x_2, x_3; t), \quad k = 1, 2, 3. \quad (18.10)$$

Условием разрешимости уравнений (18.9) относительно  $a_k$  будет требование отличия от нуля определителя

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{vmatrix},$$

называемого *якобианом*.

*Скорости*  $V$  и *ускорения*  $\dot{V}$  в лагранжевых переменных будут непосредственно определяться путем частного дифференцирования по  $t$  вектора-радиуса  $r$ :

$$V = \frac{\partial r}{\partial t}, \quad \dot{V} = \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}, \quad (18.11)$$

где  $r$  предполагается выраженным в функции от  $a_k$  и  $t$ .

В переменных Эйлера *скорость* будет выражаться как  $dr/dt$ , где  $r$  определяется равенством (18.8).

*Ускорение* в переменных Эйлера выражается через один из дифференциальных операторов поля скоростей. О такого рода операторах поля будет сказано в следующем параграфе.

### § 75. Дифференциальные операции поля

В § 37 уже было дано понятие о *векторе-градиенте* скалярной функции. Для понимания основ кинематики сплошной среды, в частности для определения ускорения в переменных Эйлера, необходимо углубить представление о градиенте скалярной функции, связав его с понятием о производной в пространстве по любому направлению, причем не только от скалярной, но и от векторной функции.

Поле скалярной функции  $\varphi(x_1, x_2, x_3; t)$  можно расслоить семейством замкнутых *поверхностей уровня* функции в данный момент времени, определив их как геометрические места точек пространства, занятого полем, в которых *функция  $\varphi$  имеет одни и те же значения*. Уравнением семейства поверхностей уровня будет служить

$$\varphi(x_1, x_2, x_3; t) = \varphi(\mathbf{r}; t) = \text{const}, \quad (18.12)$$

где  $\text{const}$  может принимать различные значения, каждое из которых определяет одну из поверхностей уровня. Переход от одной поверхности уровня к другой будет сопровождаться возрастанием или убыванием значения константы, входящей в определение поверхностей уровня (18.12).

В отличие от обычных представлений о внешней и внутренней областях пространства по отношению к данной замкнутой поверхности, условимся называть *внешней областью* по отношению к поверхности уровня ту, в которой расположены семейства поверхностей уровня с возрастающими значениями констант, *внутренней* — с убывающими их значениями. Нормаль к поверхности уровня, направленную во внешнюю область, будем считать *внешней нормалью*, а нормаль, направленную во внутреннюю область, — *внутренней нормалью*.

В предположениях о непрерывности возрастания функции  $\varphi$  при переходе от одной поверхности уровня к смежной и о существовании производной  $d\varphi/dn$  от функции  $\varphi$  по направлению внешней нормали определим *градиент* функции  $\varphi$ , положив

$$\text{grad } \varphi = \frac{d\varphi}{dn} \mathbf{n}, \quad (18.13)$$

где, по определению внешней нормали, производная  $d\varphi/dn$  *положительна*, так что абсолютная величина градиента равна производной функции по внешней нормали, направление градиента совпадает с направлением единичного вектора (орта)  $\mathbf{n}$  внешней нормали.

Так как (рис. 231) малый вектор  $\overrightarrow{MN}$ , направленный по внешней нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности уровня  $\varphi = C$ , по длине  $\Delta n = \overline{MN}$  короче всякого другого наклоненного под углом  $\alpha$  к нормали отрезка  $\Delta l = \overline{MN_1}$ , соединяющего две близкие точки  $M$  и  $N_1$  смежных поверхностей уровня  $\varphi = C$  и  $\varphi = C + \Delta C$ , то величина производной по нормали будет больше, чем производная по какому-нибудь другому направлению ( $\partial\varphi/\partial n > \partial\varphi/\partial l$ ), где обе производные  $\partial\varphi/\partial l$  и  $\partial\varphi/\partial n$  определяются обычным способом как пределы (предполагается, что пределы существуют)

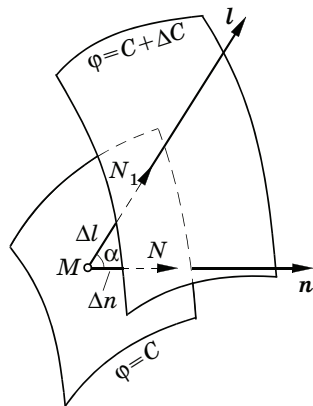


Рис. 231

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{n}) - \varphi(\mathbf{r})}{\Delta n},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{l}) - \varphi(\mathbf{r})}{\Delta l},$$

причем, по определению поверхности уровня,

$$\varphi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{l}) = \varphi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{n}).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial l} &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{l}) - \varphi(\mathbf{r})}{\Delta l} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \left[ \frac{\varphi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{n}) - \varphi(\mathbf{r})}{\Delta n} \cdot \frac{\Delta n}{\Delta l} \right] = \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cdot \frac{dn}{dl} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cos \alpha = \mathbf{l} \cdot \text{grad } \varphi, \end{aligned} \tag{18.14}$$

где  $\alpha$  — угол между направлениями  $\mathbf{l}$  и  $\mathbf{n}$ .

Таким образом, производная от функции  $j$  по любому направлению равна проекции вектора-градиента на это направление, что лишний раз подтверждает ранее указанное превышение величины производной по внешней нормали к поверхности уровня над производными по другим направлениям.

Вводя в прямоугольной декартовой системе координат символический оператор  $\nabla$  (о нем уже была речь в § 37) как вектор с проекциями

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z} \tag{18.15}$$

или, в цифровой индексации,

$$\nabla_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (18.16)$$

можно градиент функции  $\varphi$  определить в символической форме произведением векторного оператора  $\nabla$  на скалярную функцию  $\varphi$ :

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi, \quad (18.17)$$

а производную по любому направлению  $l$ , согласно (18.14), представить в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = l \cdot \nabla \varphi = l \cdot \text{grad } \varphi, \quad (18.18)$$

скалярное произведение  $l \cdot \nabla$ , равное  $[l_k = \cos(\widehat{l, x_k})]$

$$l \cdot \nabla = l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + l_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = l_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial l}, \quad (18.19)$$

выражает символически операцию дифференцирования по любому направлению. В частности, полагая последовательно  $l$  равным единичным векторам осей координат  $i_k$ , будем иметь

$$i_k \cdot \nabla = \nabla_k = \frac{\partial}{\partial x_k},$$

так что проекции градиента функции  $\varphi$  на оси координат будут равны производным от  $\varphi$  по соответствующим координатам:

$$(\text{grad } \varphi)_{x_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (18.20)$$

Операцию  $l \cdot \nabla = \partial/\partial l$  можно производить не только над скалярными, но и над векторными и тензорными функциями, что можно представить равенствами

$$\frac{\partial a}{\partial l} = (l \cdot \nabla) a, \quad \frac{\partial T}{\partial l} = (l \cdot \nabla) T. \quad (18.21)$$

В дальнейшем часто придется иметь дело с операцией

$$(a \cdot \nabla) b,$$

где  $a$  и  $b$  — две векторные функции координат  $x_1, x_2, x_3$ . Перепи-сывая эту операцию в тождественной форме

$$(a \cdot \nabla) b = a \left( \frac{a}{a} \cdot \nabla \right) b$$

и замечая, что  $\mathbf{a}/a$  является единичным вектором, определяющим направление вектора  $\mathbf{a}$ , и, кроме того, вспоминая (18.19), придем к заключению, что

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} = a \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial a}, \quad (18.22)$$

где символ  $\partial \mathbf{b}/\partial a$  обозначает производную вектора  $\mathbf{b}$  по направлению вектора  $\mathbf{a}$ .

Пользуясь символическим вектором-оператором  $\nabla$  и соединяя его скалярным и векторным произведениями с вектором-функцией координат  $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)$ , получим еще две следующие операции *пространственного дифференцирования*:

✓ *дивергенция* вектора  $\mathbf{a}$ , выражаемая символом

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \nabla_k a_k = \frac{\partial a_k}{\partial x_k} \quad (18.23)$$

(суммирование по  $k$  от 1 до 3);

✓ *вихрь (ротор)* вектора  $\mathbf{a}$ , обозначаемый символом  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  и определяемый символической формулой и проекциями на оси координат:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a};$$

$$\operatorname{rot}_1 \mathbf{a} = \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \quad \operatorname{rot}_2 \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}, \quad \operatorname{rot}_3 \mathbf{a} = \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}. \quad (18.24)$$

Можно было бы еще ввести следующее тензорное определение  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  (суммирование от 1 до 3 по трем дважды повторяющимся индексам):

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \varepsilon_{pqr} i_p \frac{\partial a_r}{\partial x_q},$$

где  $\varepsilon_{pqr}$  — тензор третьего ранга, носящий имя *Левы-Чивита*, задаваемый системой равенств

$$\varepsilon_{pqr} = \begin{cases} 0, & \text{если хоть два индекса одинаковы,} \\ 1, & \text{если } p \neq q \neq r \text{ взяты в порядке круговой подстановки,} \\ -1, & \text{если } p \neq q \neq r, \text{ но нарушена круговая подстановка.} \end{cases}$$

---

ЛÉВИ-ЧИВÍТА ТУЛЛИО (*Levi-Civita Tullio, 1873—1941*) — итальянский математик и механик, иностр. чл.-корр. Петербургской АН (1904) и иностр. почетный чл. АН СССР (1934).

Пояснение физического смысла величин  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  в частном случае поля скоростей будет дано в последних двух параграфах (§ 77 и 78) настоящего тома курса.

Присоединим к сказанному символическую операцию *диадного умножения* (§ 33) оператора  $\nabla$  на вектор  $\mathbf{a}$ , определив ее формулами:

$$D = \nabla \mathbf{a} = \mathbf{i}_p \mathbf{i}_q \frac{\partial a_q}{\partial x_p} \quad (18.25)$$

и матрицей

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (18.26)$$

с компонентами

$$D_{pq} = \nabla_p a_q = \frac{\partial a_q}{\partial x_p}.$$

Этот тензор, по внешней аналогии с градиентом скалярной функции  $\operatorname{grad} \varphi$ , называют *градиентом векторной функции* и обозначают символом  $\operatorname{Grad} \mathbf{a}$ , в котором, в отличие от обозначения  $\operatorname{grad}$ , первая буква — заглавная:

$$D = \operatorname{Grad} \mathbf{a}. \quad (18.27)$$

Сопряженный с  $D$  тензор  $D^*$  условно обозначается как *производная вектора  $\mathbf{a}$  по вектору  $\mathbf{r}$* , т. е.  $d\mathbf{a}/d\mathbf{r}$ , и имеет матрицу

$$D^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \quad (18.28)$$

Полный дифференциал  $d\mathbf{a}$  вектора  $\mathbf{a}$  можно представить как произведение тензора  $D^*$  на вектор  $d\mathbf{r}$  справа или  $D$  на вектор  $d\mathbf{r}$  слева:

$$d\mathbf{a} = D^* d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}} d\mathbf{r} = d\mathbf{r} D = d\mathbf{r} \operatorname{Grad} \mathbf{a}, \quad (18.29)$$

с проекциями (суммирование по  $q$ )

$$da_p = \frac{\partial a_p}{\partial x_q} dx_q, \quad p = 1, 2, 3. \quad (18.30)$$

Напомним еще (§ 37), что произведение оператора  $\nabla$  на тензор  $T$  определяет *вектор дивергенции тензора  $T$* :

$$\nabla T = \text{Div } T, \quad (18.31)$$

с проекциями (суммирование по  $q$ )

$$(\text{Div } T)_p = \frac{\partial T_{qp}}{\partial x_q}, \quad p = 1, 2, 3. \quad (18.32)$$

### § 76. Ускорение точек среды в переменных Эйлера. Локальное и конвективное ускорения

Пользуясь введенной в предыдущем параграфе операцией дифференцирования вектора по направлению другого вектора, найдем выражение вектора ускорения  $V$  в эйлеровых переменных.

Рассмотрим движение частицы сплошной среды, которой приписана некоторая, безразлично — скалярная, векторная или тензорная, величина  $\Phi$ .

При определении полного изменения величины  $\Phi$  за время  $dt$  надо обратить внимание на два обстоятельства, лежащие в основе этого изменения.

Первое связано с тем, что, если бы даже частица не двигалась в поле, а совпадала с некоторой фиксированной точкой пространства, относительно которого поле физической величины  $\Phi$  определено, все равно, в силу *нестационарности* поля, величина  $\Phi$  получила бы за время  $dt$  изменение  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} dt$ . Это изменение назовем *локальным* (местным), а отношение его к промежутку времени  $dt$  — *локальной производной* функции  $\Phi$  по времени  $t$ , что и отметим в обозначении  $(d/dt)_{\text{лок}}$ . Итак, имеем

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{лок}} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (18.33)$$

Второе обстоятельство заключается в том, что частица *движется* по отношению к полю величины  $\Phi$ , занимая в нем после-



довательно разные положения. Такое движение называют *конвективным*. За время  $dt$  частица совершит перемещение  $Vdt$  и перейдет в новое положение, в котором функция  $\Phi$  будет отличаться от своего исходного значения на величину, равную произведению производной по направлению перемещения, т. е. по направлению вектора  $V$ , на длину перемещения  $Vdt$ .

Вспоминая определение производной по направлению данного вектора (18.22), получим значение *конвективного изменения*  $d_{\text{конв}} \Phi$  на перемещении  $Vdt$ :

$$d_{\text{конв}} \Phi = \left( \frac{V}{V} \cdot \nabla \right) \Phi Vdt = (V \cdot \nabla) \Phi dt,$$

или, относя его к единице времени, следующее выражение для *конвективной производной* функции  $\Phi$  по времени:

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_{\text{конв}} \Phi = (V \cdot \nabla) \Phi. \quad (18.34)$$

Принимая во внимание оба эти обстоятельства, найдем следующее выражение для *полной* производной функции  $\Phi$  по  $t$  как суммы локальной и конвективной производных:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left( \frac{d}{dt} \right)_{\text{лок}} \Phi + \left( \frac{d}{dt} \right)_{\text{конв}} \Phi = \frac{d\Phi}{dt} + (V \cdot \nabla) \Phi. \quad (18.35)$$

Если  $\Phi$  — *скалярная* функция, то ее можно подвести под скобку и, вспоминая, что  $\nabla \Phi = \text{grad } \Phi$ , получить

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + V \cdot \text{grad } \Phi. \quad (18.36)$$

В случае *векторной* функции  $\Phi = \mathbf{a}$  равенство (18.35) сохранит свою форму:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (V \cdot \nabla) \mathbf{a}. \quad (18.37)$$

Можно получить векторный аналог скалярного равенства (18.36), если заметить, что по (18.25) и (18.27)

$$(V \cdot \nabla) \mathbf{a} \equiv V(\nabla \mathbf{a}) = V \text{ Grad } \mathbf{a}, \quad (18.38)$$

и записать это в форме аналогичного (18.36) равенства:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + V \text{ Grad } \mathbf{a}, \quad (18.39)$$

где, конечно, последний член в правой части обозначает произведение тензора  $\text{Grad } \mathbf{a}$  на вектор  $\mathbf{V}$  «слева».

Полагая  $\mathbf{a} = \mathbf{V}$  в равенстве (18.36), найдем выражение *ускорения в переменных Эйлера*:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \dot{\mathbf{V}} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}. \quad (18.40)$$

Первый член в правой части этого равенства называют *локальным ускорением*, второй — *конвективным*.

Полное ускорение частицы сплошной среды складывается из локального и конвективного ускорений.

Полное ускорение  $\dot{\mathbf{V}}$  вычислялось при условии наблюдения за движением *индивидуальной* частицы среды (субстанции); поэтому полное ускорение  $\dot{\mathbf{V}}$  называют еще иногда *индивидуальным* или *субстанциональным*. Вообще, полную производную от скалярной, векторной или тензорной функций также называют *индивидуальной (субстанциональной) производной*, вводя для нее обозначения:  $D/Dt$ , иногда  $D/dt$ . Сохраним для индивидуальной производной то же обозначение  $d/dt$ , что и для полной производной, но будем помнить определение

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla).$$

Проецируя обе части векторного равенства (18.40) на оси неподвижной системы координат, будем иметь

$$\dot{V}_k = \frac{\partial V_k}{\partial t} + V_l \frac{\partial V_k}{\partial x_l}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (18.41)$$

Наличие в этой сумме конвективной части делает выражение ускорения *нелинейным*, с чем связаны большие трудности в интегрировании уравнений динамики сплошной среды.

### § 77. Теорема Гельмгольца о бесконечно малом перемещении элементарного объема сплошной среды. Квазитвердое перемещение

В отличие от абсолютно твердой среды, для которой теорема о ее бесконечно малом перемещении формулировалась безотносительно к размерам перемещающегося тела, причем составляю-

щие перемещения: поступательное перемещение и малый поворот тела вокруг оси — были одинаковы в данный момент времени для всех точек тела, в более общем случае *сплошной деформируемой среды* такая теорема может быть установлена лишь для бесконечно малого (элементарного) объема среды, т. е. имеет локальный характер.

Выделим в сплошной среде (рис. 232) элементарный объем  $\delta\tau$  и изучим распределение бесконечно малых перемещений в отдельных его точках. Рассмотрим какие-нибудь две смежные точки в объеме: точку  $M$  с вектором-радиусом  $r$  относительно неподвижной точки  $O$  и точку  $M^{(1)}$  с вектором-радиусом  $r^{(1)}$  относительно той же точки  $O$ .

Векторы бесконечно малых перемещений точек  $M$  и  $M^{(1)}$ , как обычно в настоящем отделе\*, обозначим через  $p$  и  $p^{(1)}$ . Вектор-радиус точки  $M^{(1)}$  по отношению к точке  $M$  будет равен  $\delta r = r^{(1)} - r$ , а его длину  $|\delta r|$  обозначим через  $\delta s$ .

По определению (18.38) производной от  $p$  по направлению вектора  $\delta r$  будем иметь

$$p^{(1)} = p + (\delta r \cdot \nabla) p = p + \delta r (\nabla p) = p + \delta r \cdot D, \quad (18.42)$$

где под  $D$  понимается тензор с матрицей (18.26), в котором вместо  $a$  взят вектор  $p$ .

Применим выведенное в § 34 разложение любого тензора второго ранга на симметричную и антисимметричную части, положив

$$D = S + A, \quad (18.43)$$

где

$$S = \frac{1}{2} (D + D^*), \quad A = \frac{1}{2} (D - D^*). \quad (18.44)$$

Равенство (18.43) может быть теперь переписано в виде

$$p^{(1)} = p + \delta r \cdot A + \delta r \cdot S. \quad (18.45)$$

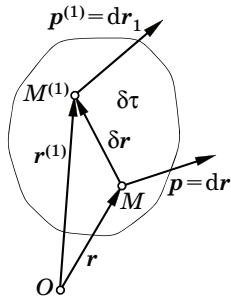


Рис. 232

\* Следуя обозначениям, принятым в гл. XI, § 42 для вектора перемещения точки  $p$ , сохраним эти обозначения и в кинематике сплошной среды. Используемое в гл. IX обозначение  $p_n$  для вектора напряжения и та же буква  $p$  для компонент тензора напряжений не должны приводить к недоразумениям, так как эти обозначения приняты в разных отделах настоящего тома и не встречаются совместно.

Рассмотрим совокупность первых двух слагаемых. Согласно изложенному в § 34 — см. (8.36) — эту совокупность можно переписать так:

$$\mathbf{p} + \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{p} + \mathbf{c} \times \delta \mathbf{r}; \quad (18.46)$$

здесь *сопутствующий* вектор  $\mathbf{c}$  по (8.33) будет иметь проекции  $c_1 = A_{23}$ ,  $c_2 = A_{31}$ ,  $c_3 = A_{12}$ .

Для вычисления этих проекций удобно применить символические изображения:

$$D = \nabla p, \quad D^* = (\nabla p)^*, \quad A = \frac{1}{2} [\nabla p - (\nabla p)^*],$$

что даст

$$c_1 = A_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial p_3}{\partial x_2} - \frac{\partial p_2}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{p})_1,$$

$$c_2 = A_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial p_1}{\partial x_3} - \frac{\partial p_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{p})_2,$$

$$c_3 = A_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial p_2}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{p})_3,$$

или, в векторной форме,

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{p}. \quad (18.47)$$

Равенство (18.46) переписется теперь так:

$$\mathbf{p} + \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{p} \times \delta \mathbf{r}. \quad (18.48)$$

Сравнивая его с формулой бесконечно малых перемещений точек абсолютно твердого тела (16.3), убедимся, что правая часть (18.48) выражает совокупность поступательного перемещения  $\mathbf{p}$  и вращательного, соответствующего вектору бесконечно малого поворота  $\Theta = (1/2) \text{rot } \mathbf{p}$ . Это позволяет правую часть (18.48) рассматривать как перемещение, которое было бы, если бы элементарный объем на мгновение *затвердел*. Назовем это перемещение *квазитвердым*\* и обозначим через  $\mathbf{p}_{\text{кт}}$ . Итак,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\text{кт}} &= \mathbf{p} + \Theta \times \delta \mathbf{r}, \\ \Theta &= \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (18.49)$$

\* От *quasi* (лат.) — как будто.

Оставшееся в равенстве (18.45) третье слагаемое  $\delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{S}$  выражает отличие перемещения элементарного объема *деформируемой* среды от перемещения того же объема абсолютно твердого тела и образует деформационное перемещение  $\mathbf{p}_{\text{деф}}$ , равное по условию симметрии тензора  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{p}_{\text{деф}} = \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S} \delta \mathbf{r}. \quad (18.50)$$

Таким образом, в равенстве (18.45) утверждается теорема Гельмгольца.

**ТЕОРЕМА ГЕЛЬМГОЛЬЦА О БЕСКОНЕЧНО МАЛОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ОБЪЕМА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ.** *Перемещение любой точки элементарного объема сплошной среды складывается из квазитвердого, состоящего из поступательного и вращательного, и деформационного перемещений.*

Тензор  $\mathbf{S}$ , входящий в определение (18.50) деформационного перемещения, носит наименование *тензора деформаций*.

Деля обе части равенства (18.45) на  $dt$ , перейдем от бесконечно малых перемещений  $\mathbf{p}$  к векторам скорости  $\mathbf{V}$ , от вектора бесконечно малого поворота  $\Theta$  — к вектору угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  вращения затвердевшего элемента, а от тензора деформаций  $\mathbf{S}$  — к *тензору скоростей деформаций*  $\dot{\mathbf{S}}$ , отличающемуся от  $\mathbf{S}$  точкой, стоящей сверху и обозначающей производную по времени  $t$ . При этом справедливо равенство

$$\mathbf{V}^{(1)} = \mathbf{V}_{\text{кт}} + \mathbf{V}_{\text{деф}} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r} + \dot{\mathbf{S}} \cdot \delta \mathbf{r}. \quad (18.51)$$

**ТЕОРЕМА ГЕЛЬМГОЛЬЦА, ВЫРАЖЕННАЯ В СКОРОСТЯХ.** *Скорость любой точки элементарного объема сплошной среды складывается из скорости квазитвердого движения точек объема, равной сумме поступательной и вращательной скоростей затвердевшего объема, и деформационной скорости.*

Перемещения и скорости в квазитвердом движении элементарного объема были подробно изучены в гл. XVI. Деформационные перемещения и скорости нуждаются в специальном рассмотрении, чему посвящен следующий, заключительный, параграф первого тома.

**§ 78. Тензоры деформаций и скоростей деформаций.  
Кинематический смысл их компонент**

Тензор деформаций  $S$  имеет матрицу

$$S \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial p_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial p_1}{\partial x_3} + \frac{\partial p_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial p_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial p_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial p_2}{\partial x_3} + \frac{\partial p_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial p_1}{\partial x_3} + \frac{\partial p_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial p_2}{\partial x_3} + \frac{\partial p_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial p_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \quad (18.52)$$

Название тензора оправдывается тем, что, как сейчас будет показано, отдельные его компоненты представляют собой характерные для деформации элементы: *относительные удлинения бесконечно малых координатных отрезков и скошения координатных углов* (сдвиги).

Введем в рассмотрение проведенную через точки деформируемой сплошной среды систему координат  $Ox_1x_2x_3$  (рис. 233) и отложим по координатным осям бесконечно малые отрезки  $\delta r_1, \delta r_2, \delta r_3$ , проекции которых на оси координат будут соответственно иметь вид  $(\delta x_1, 0, 0), (0, \delta x_2, 0), (0, 0, \delta x_3)$ .

Следуя (18.50) и вспоминая, что по определению бесконечно малого перемещения (рис. 233)

$$p = dr, \quad \delta p = \delta dr = p_1 - p = dr_1 - dr = d(r_1 - r) = d \delta r,$$

получим, опуская индекс «деф», основное равенство

$$p_1 - p = \delta p = S \delta r = d \delta r. \quad (18.53)$$

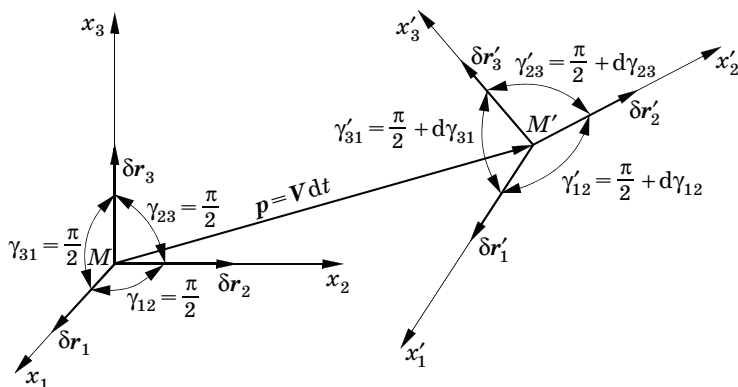


Рис. 233

Напоминаем, что здесь и далее символом  $\delta$  обозначаются произвольные бесконечно малые приращения величин при переходе в данный момент от одной точки пространства к другой, а символом  $d$  — приращение величины во времени, т. е.  $(d/dt)dt$ .

Применяя (18.53) к  $\delta r_1, \delta r_2, \delta r_3$ , получим

$$S_{11}\delta x_1 = d\delta x_1, \quad S_{22}\delta x_2 = d\delta x_2, \quad S_{33}\delta x_3 = d\delta x_3, \quad (18.54)$$

откуда сразу следует, что при деформационном перемещении *диагональные компоненты тензора деформаций  $S_{kk}$  равны относительным удлинением  $e_k$  бесконечно малых отрезков  $|\delta r_k|$  (по  $k$  не суммировать!)*:

$$S_{kk} = \frac{d\delta x_k}{\delta x_k} = e_k = \frac{\partial p_k}{\partial x_k}. \quad (18.55)$$

Обозначим (рис. 233) через  $\gamma_{kl}$  углы между  $k'$ -й и  $l'$ -й осями координат, равные до деформации  $\pi/2$ , а после деформации  $\gamma'_{kl}$ . Заметим, что, в силу бесконечной малости перемещения, координатные оси сохраняют (с точностью до отклонений высшего порядка малости) свою прямолинейность.

Изменения при деформации координатных углов будут равны  $d\gamma_{kl}$  и могут оказаться как положительными, так и отрицательными. Назовем *скошениями* координатных углов бесконечно малые величины  $\varepsilon_{kl} = -d\gamma_{kl}$ , отличающиеся от изменений углов только знаком. Под *положительным скошением* понимается *уменьшение* координатного угла, и, наоборот, под *отрицательным скошением* — его *увеличение*. Вместо *скошения координатного угла* используют еще термин *сдвиг* (в соответствующей координатной плоскости).

Чтобы выразить скошения через компоненты тензора деформаций, будем исходить из очевидных соотношений

$$\cos \gamma_{kl} = \left( \frac{\delta r_k}{\delta x_k} \cdot \frac{\delta r_l}{\delta x_l} \right) = \frac{1}{\delta x_k \delta x_l} (\delta r_k \cdot \delta r_l).$$

Взяв от обеих частей этих равенств дифференциалы, найдем

$$-\sin \gamma_{kl} d\gamma_{kl} = \frac{1}{\delta x_k \delta x_l} d(\delta r_k \cdot \delta r_l) + d \left( \frac{1}{\delta x_k \delta x_l} \right) \delta r_k \cdot \delta r_l.$$

Но до деформации мы имели ( $k \neq l$ )

$$\gamma_{kl} = \pi/2, \quad \sin \gamma_{kl} = 1, \quad \delta r_k \cdot \delta r_l = 0,$$

так что

$$-d\gamma_{kl} = \varepsilon_{kl} = \frac{1}{\delta x_k \delta x_l} d(\delta r_k \cdot \delta r_l). \quad (18.56)$$

Вычисляя дифференциал справа, получим

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{\delta x_k \delta x_l} (d\delta r_k \cdot \delta r_l + \delta r_k \cdot d\delta r_l),$$

или, имея в виду (18.54),

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{\delta x_k \delta x_l} [(S\delta r_k) \cdot \delta r_l + (S\delta r_l) \cdot \delta r_k]. \quad (18.57)$$

Вычисление правой части легче всего провести, задаваясь по отдельности значениями  $k = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$  при  $k \neq l$ . Вспоминая, что

$$\begin{aligned} (\delta r_1)_1 &= \delta x_1, & (\delta r_1)_2 &= 0, & (\delta r_1)_3 &= 0; \\ (\delta r_2)_1 &= 0, & (\delta r_2)_2 &= 0, & (\delta r_2)_3 &= 0, \end{aligned} \quad (18.58)$$

приведем сумму скалярных произведений в правой части (18.57) к виду

$$(S\delta r_1)_2 \delta x_2 + (S\delta r_2)_1 \delta x_1,$$

а затем, вычисляя проекции произведений тензора на вектор и используя (18.58), перепишем (18.57) в виде

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{\delta x_1 \delta x_2} (S_{12} \delta x_1 \delta x_2 + S_{12} \delta x_1 \delta x_2) = 2S_{12}.$$

Аналогично получим

$$\varepsilon_{23} = 2S_{23}, \quad \varepsilon_{31} = 2S_{31}.$$

Отсюда следуют выражения скошений координатных углов через компоненты тензора деформаций (18.52):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= 2S_{12} = \frac{\partial p_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial x_1}, \\ \varepsilon_{23} &= 2S_{23} = \frac{\partial p_2}{\partial x_3} + \frac{\partial p_3}{\partial x_2}, \\ \varepsilon_{13} &= 2S_{13} = \frac{\partial p_3}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (18.59)$$



и, следовательно,

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \varepsilon_{kl}, \quad k, l = 1, 2, 3; \quad k \neq l. \quad (18.60)$$

Таким образом, *недиагональные компоненты тензора деформаций равны половинам скошений координатных углов, или половинам сдвигов в соответствующих координатных плоскостях.*

Деля только что введенные элементы бесконечно малых деформаций на  $dt$ , получим *тензор скоростей деформаций*  $\dot{S}$  и его компоненты: диагональные  $\dot{e}_k$  — *скорости относительного удлинения* координатных отрезков и  $\dot{\varepsilon}_{kl}$  — *скорости скошения* координатных углов, или *скорости сдвига*, в соответствующих координатных плоскостях.

Отметим еще одну важную характеристику деформации среды — *коэффициент относительного объемного расширения*  $\vartheta$ , равный по определению

$$\vartheta = \frac{\delta\tau' - \delta\tau}{\delta\tau}, \quad (18.61)$$

где  $\delta\tau = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$  — исходный элементарный объем, имевший место до бесконечно малой деформации,  $\delta\tau'$  — значение того же объема после деформации.

Выразим коэффициент относительного объемного расширения через компоненты тензора деформаций (18.52). Для этого, по определению бесконечно малой деформации, представим числитель в правой части (18.61) как

$$\delta\tau' - \delta\tau = d(\delta\tau). \quad (18.62)$$

Заметим, что по (18.54)

$$\begin{aligned} d(\delta\tau) &= d(\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3) = \\ &= d(\delta x_1) \delta x_2 \delta x_3 + \delta x_1 d(\delta x_2) \delta x_3 + \delta x_1 \delta x_2 d(\delta x_3) = \\ &= S_{11} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 + S_{22} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 + S_{33} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 = \\ &= (S_{11} + S_{22} + S_{33}) \delta\tau. \end{aligned} \quad (18.63)$$

Подставляя это выражение в (18.62) и используя матрицу тензора  $S$  (18.52), получим

$$\vartheta = S_{11} + S_{22} + S_{33} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_3}{\partial x_3},$$

или по (18.23)

$$\vartheta = \operatorname{div} p. \quad (18.64)$$

Деля обе части на  $dt$ , найдем аналогичное выражение для *скорости* относительного объемного расширения  $\dot{\vartheta}$ :

$$\dot{\vartheta} = \operatorname{div} V. \quad (18.65)$$

В разделе динамики сплошной среды второго тома настоящего курса будет использована формула

$$\frac{d}{dt}(\delta\tau) = \dot{\vartheta}\delta\tau = \operatorname{div} V\delta\tau, \quad (18.66)$$

являющаяся прямым следствием равенств (18.63), (18.65) и выражающая *быстроту изменения со временем элементарного объема среды (жидкости) в зависимости от заданного поля скоростей*.

В *главных осях* тензора деформаций (скоростей деформаций) *недиагональные* компоненты (сдвиги, скорости сдвига) *равны нулю*.

Подробное и более широкое изложение основ кинематики сплошных сред можно найти в специальных руководствах Л. И. Седова [7, гл. 2, 3], Л. Г. Лойцянского [4, гл. II, III, см. также сводку формул векторного и тензорного исчислений в § 3], А. И. Лурье [5, гл. I, II, приложения I—III].

В современные программы по высшей математике входят элементы векторного и тензорного исчислений, однако следует рекомендовать учащимся для углубления своих знаний в этой области обратиться к специальным руководствам Н. Е. Кочина [3], а также А. И. Борисенко и И. Е. Тарапова [1].

## ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК\*

**Механика доньютоновского периода.** История механики, так же как и других естественных наук, неразрывно связана с историей развития производительных сил общества, с общей историей его материальной культуры.

Эпоху создания первых орудий производства и искусственных построек следует признать за начало накопления того опыта, который в дальнейшем в связи с необходимостью передачи этого опыта послужил основой для формулирования законов механики. Однако в то время как геометрия и астрономия античного мира представляли развитые научные системы, в области механики были известны лишь отдельные положения, относящиеся к наиболее простым случаям равновесия тел. Таким образом, ранее всех разделов теоретической механики зародилась статика. Этот отдел развивался в тесной связи со строительным искусством античного мира. Хотя первые дошедшие до нас письменные трактаты по статике относятся к IV в. до н. э. (Архит из Тарента), но остатки древних вавилонских и египетских построек позволяют предполагать, что элементарные сведения о статике и о простейших машинах для перемещения и поднятия тяжестей появились уже за несколько тысяч лет до нашей эры.

---

\* В «Курсе теоретической механики» настоящий очерк составлял часть *Введения* вплоть до седьмого издания т. I (1957 г.). Ему было предпослано следующее предуведомление авторов: «При составлении очерка предполагалось, что изучающий впервые курс теоретической механики удовлетворится сначала частью очерка, заканчивающейся эпохой Ньютона, так как изложенное в этой части не выходит за рамки элементарных сведений, известных учащемуся из общего курса физики. Ознакомление с остальным материалом рекомендуется вести параллельно с прохождением динамики. Исторический очерк должен быть прочитан еще раз после окончания изучения курса. Целостность очерка потребовала помещения сведений об истории развития аналитической механики и некоторых других вопросов, не входящих в настоящий курс». Здесь текст воспроизводится с незначительными сокращениями. — *Ред.*

Примерно к началу IV в. до н. э. уже были известны простейшие законы сложения и уравнивания сил, приложенных к одной точке вдоль одной прямой. Особый интерес привлекала задача о рычаге, при помощи которого, по словам одного из учеников Аристотеля, *«меньшее осиливает большее, маленькая тяжесть поднимает большую»*. Теория рычага была создана великим ученым древности Архимедом (287—212 гг. до н. э.). Им были установлены правила сложения и разложения параллельных сил, дано определение центра тяжести ряда геометрических фигур и тел, открыты законы равновесия тел в жидкости. Свои теоретические знания в области механики Архимед применял к различным практическим вопросам строительства и военной техники.

Кинематические представления античной науки были весьма скудны. Рассматривались только равномерные движения, которые характеризовались пройденным путем, протекшим временем и скоростью как отношением этих двух величин. Понятие об ускорении было чуждо механике древних. Скорости падающих тел Аристотель считал пропорциональными их весу, и это заблуждение продержалось вплоть до Галилея (XVII в.). Не понимая роли инерции, Аристотель объяснял свободное движение брошенного тела наличием постоянно толкающей его вперед силы, источник которой он видел в устремляющемся в пустоту за телом воздухе. Указывая на бедность общих кинематических представлений древних, следует вместе с тем отметить наличие сложной космогонической системы Птолемея, свидетельствующей о глубоких знаниях в области геометрии движений.

Последовавшие за античным периодом пятнадцать столетий не принесли в области механических наук сколько-нибудь значительных сдвигов. В своем историческом очерке развития механики Лагранж переходит от Архимеда непосредственно к Галилею, указывая, что *«промежуток времени, отделяющий этих двух гениальных людей, исчезает в истории механики»*.

Если в первые века нашей эры, особенно в кругах материалистов-атомистов, делались попытки критиковать Аристотеля, разрабатывать идеи Архимеда и развивать практические применения механики, то в средние века в связи с общим социально-экономическим застоєм и в области механики нельзя отметить сколько-нибудь существенных добавлений к античному наследию.

---

АРИСТОТЕЛЬ (Ἀριστοτέλης, 384—322 гг. до н. э.) — древнегреческий ученый, участник Академии Платона, основатель философской школы в Афинах.

В связи с развитием ремесел, мореплавания и торговли, обусловившим общий подъем производительных сил, в городах и городских республиках в эпоху Возрождения начинается расцвет наук и искусств. «Это был величайший прогрессивный переворот из всех пережитых до того времени человечеством, эпоха, которая нуждалась в титанах и которая породила титанов по силе мысли, страсти и характеру, по многосторонности и учености» (Энгельс Ф. Диалектика природы).

Крупнейшим событием явилось открытие Николаем Коперником гелиоцентрической системы мира, которая, придя на смену геоцентрической системе Птолемея, лишила Землю ее исключительного положения во Вселенной. «Коперник бросил... вызов церковному авторитету в вопросах природы. Отсюда начинается свое летоисчисление освобождение естествознания от теологии... С этого времени пошло гигантскими шагами также и развитие наук...» (Энгельс Ф. — Там же).

Величайшим деятелем эпохи Возрождения был знаменитый художник и выдающийся естествоиспытатель Леонардо да Винчи. С его именем связаны крупные открытия в области механики. Ему принадлежит первая формулировка правила параллелограмма сил в применении к частному случаю равновесия груза, расположенного на наклонной плоскости. Это правило, доказанное в дальнейшем для взаимно-перпендикулярных сил голландским ученым Стевином, а в общем случае как угодно направленных сил — французским ученым Робервалем, легло в основу современной статики.

При рассмотрении равновесия рычага Леонардо да Винчи пользуется понятием момента силы, причем кратчайшее расстояние от точки опоры до линии действия силы, т. е. плечо силы, называется *потенциальным рычагом*. Дальнейшее развитие понятие момента силы получило в «Механике» (*“Liber mechanicorum,*

---

КОПЕРНИК НИКОЛАЙ (*Kopernik Mikola, 1473—1543*) — польский астроном и математик. Классическое сочинение Коперника «*De revolutionibus orbium coelestium*» («Об обращениях небесных сфер») было опубликовано впервые в 1543 г. в Нюрнберге.

ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ (*Leonardo da Vinci, 1452—1519*).

СТЕВИН СИМОН (*Stevin Simon, 1548—1620*). Сочинение Стевина «*Hypomnema ta mathematica*» вышло первым изданием в Лейдене в 1605 г.

РОБЕРВАЛЬ ДЕ ЖИЛЬ (*Roberval de Gilles, 1602—1675*) — чл. Парижской АН (1666).

1577) Убальдо, рассматривавшего его в связи с вопросами равновесия блоков. Вполне законченная трактовка понятия момента была дана Вариньоном, который в 1687 г. в своей «Новой механике» опубликовал теорему о моменте равнодействующей двух сил, лежащих в одной плоскости. Эта теорема послужила существенным дополнением к правилу параллелограмма сил и вместе с этим правилом легла в основу статики плоской системы сил.

Чтобы к этому более не возвращаться, укажем, что своей современной формой статика обязана французскому геометру Пуансо (1777—1859), который завершил создание статики, используя замечательные свойства пар сил. Сочинение Пуансо «Элементы статики» [9], вышедшее в свет в 1804 г., было в 1831 г. переведено на русский язык и получило высокую оценку со стороны выдающегося русского механика М. В. Остроградского. Параллельно с системами статики Вариньона и Пуансо, изложенными их создателями в чисто геометрическом духе, исторически развивалась и другая, принципиально отличная от них система статики, заключающая в себе кинематические представления о возможных перемещениях точек системы и динамическое понятие работы приложенных к ним сил. О возникновении этой системы статики, основанной на принципе возможных перемещений, будет сказано далее в связи с историей развития динамики несвободной системы точек\*.

Кинематические и динамические исследования эпохи Возрождения были обращены главным образом на уточнение представлений о неравномерном и криволинейном движении точки. Не владея еще понятием об ускорении в том его общем виде, который был позднее введен Галилеем, исследователи этой эпохи рассматривали ускоренное движение как состоящее из отдельных равномерных движений, в каждом интервале имеющих свою особую скорость. Замечательные экспериментальные исследования свободного вертикального падения тяжелого тела были прове-

---

\* Весьма содержательный очерк развития принципов статики и, в частности, учения о рычаге дан в первой главе сочинения Лагранжа «Аналитическая механика» [т. II, 35] (имеется русский перевод, Гостехиздат, 1950). [Русский перевод был издан под редакцией и с вступительной статьей Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье. — *Ред.*]

дены Леонардо да Винчи; это были, вероятно, первые в истории механики специально организованные опытные исследования.

Постепенное накопление знаний, прогрессирувавшее в связи с потребностями практики производства, строительства, мореплавания и артиллерии, происходившее сначала путем простого наблюдения природных движений и размышления об их свойствах, а в дальнейшем на основе специально организуемых опытов, привело во второй половине XVII в. к обобщению этого материала и к установлению основных закономерностей движения. Так появилась динамика. Развитие динамики сопровождалось длительной борьбой передовых мыслителей против воззрений Аристотеля и его средневековых последователей.

Основоположителем динамики по праву следует считать Галилея\*, так как он впервые исследовал действие сил на движущиеся тела, т. е. динамическое действие сил, и установил соответствующие понятия; до Галилея знали лишь статическое действие сил. Прав был Лагранж, когда, сравнивая известные заслуги Галилея в области астрономии с его заслугами в деле создания основ динамики, говорил: *«Открытие спутников Юпитера, фаз Венеры, солнечных пятен и т. д. потребовало лишь наличия телескопа и известного трудолюбия, но нужен был необыкновенный гений, чтобы открыть законы природы в таких явлениях, которые всегда пребывали перед глазами, но объяснение которых тем не менее всегда ускользало от изыскания философов».*

Галилеем были проведены наиболее точные для своего времени наблюдения свободного падения тяжелых тел (с опытами Леонардо да Винчи, опубликованными лишь в XVIII столетии, Галилей не мог быть знаком). В результате своих экспериментов Галилей установил основные законы падения тел: пропорциональность пройденного пути квадрату времени падения и независимость ускорения свободного падения тела в пустоте от веса тела. Само понятие ускорения, как уже указывалось выше, было впервые введено Галилеем.

---

\* Классический труд Галилея озаглавлен «Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze, attenenti alla mecanica i movimenti locali» [т. II, 32]. Русский перевод этой книги «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению» вышел в 1934 г. (ГТТИ).

Галилей отчетливо представлял содержание закона инерции, который был сформулирован им для частного случая движения тела по гладкой горизонтальной плоскости в следующих словах:

«Когда тело движется по горизонтальной плоскости, не встречая никакого сопротивления, то движение его является равномерным и продолжалось бы бесконечно, если бы плоскость простиралась в пространстве без конца».

На долю Галилея выпала тяжелая борьба против сохранившегося с древних времен и полностью разделявшегося схоластической наукой средневековья представления о косности материи; согласно этому представлению, естественным для материи состоянием признавался абсолютный покой, а для поддержания движения считалось необходимым наличие постоянного внешнего воздействия на тело со стороны окружающих его тел. Такое представление явилось следствием некритического восприятия повседневно наблюдаемых процессов торможения тела и неумения учесть роль сил сопротивления и, в частности, сил трения как источника этого торможения. Четко сформулировав закон инерции, Галилей тем самым подготовил почву для создания понятия силы как источника изменения движения.

Меньше всего исследованными оставались в эпоху Галилея криволинейное движение и в первую очередь баллистическая задача о полете снаряда в воздухе. Относительно формы траектории снаряда делались самые различные предположения. Так, еще во второй половине XVI в. считали эту траекторию состоящей из двух прямолинейных отрезков или складывали ее из отрезков прямых и дуг окружности. Кардано высказал первые соображения об определении формы этой траектории путем сложения равномерного горизонтального и неравномерного вертикального движений снаряда. Но только Галилей доказал, что траекторией движения снаряда, брошенного в пустоте под некоторым углом к горизонту, является парабола.

Использованная здесь идея сложения горизонтального и вертикального движений была развита Галилеем в общий закон независимости действия сил. Этот закон позволяет после рассмотрения простейших движений, происходящих под действием отдельных сил, объединить их затем в данное сложное движение.



Галилею принадлежит выдающееся открытие изохронизма малых колебаний маятника, явившееся началом теории колебаний. Исследования Галилея по изгибу балок дали толчок к зарождению теории упругости. Ему же принадлежит заслуга указания первого количественного закона сопротивления жидкости движущемуся в ней телу. Галилей по праву может считаться основоположником механики как физической науки.

Французскому геометру и философу Декарту динамика обязана глубокой и плодотворной идеей сохранения механического движения. Закон сохранения движения, открытый Декартом в результате наблюдений за движениями соударяющихся шаров, был сформулирован им в следующих словах:

«Когда одно тело сталкивается с другим, оно может сообщить ему лишь столько движения, сколько само одновременно потеряет, и отнять у него лишь столько, насколько оно увеличит свое собственное движение».

Декарт не учитывал того, что количество движения является величиной направленной, и складывал количества движения арифметически. Это привело его к ошибочным выводам в теории удара тел, однако идеей Декарта о переносе движения до сих пор широко пользуются в механике и физике, например в динамике жидкости и газа, кинетической теории газов и т. д. Та же идея в условиях господствовавших в XVII в. механических и метафизических взглядов в философии и естествознании привела Декарта к механистическому представлению о том, что все физические явления должны представлять результат простого и непосредственного переноса механических движений между частицами некоторой заполняющей все мировое пространство материи. В частности, падение тел на землю Декарт объяснял давлением на эти тела *вихря* циркулирующей вокруг Земли *тонкой материи*, гораздо менее плотной, чем все земные тела. Дальнейшее развитие механики и особенно открытие Ньютоном закона всемирного тяготения показали несостоятельность *вихревой* теории Декарта, однако спор по этому поводу между последователями Декарта (картезианцами) и Ньютона продолжался еще в течение долгого времени. Механические модели физических явлений, созданные Декартом, были в дальнейшем отвергнуты, однако метод Декарта, требующий от исследователя сначала создания физической

гипотезы, основанной на некоторых простейших наблюдениях, затем дедуктивного развития теории явления и последующей проверки ее выводов на опыте, получил широкое распространение в физике XIX в.

Замечательные исследования в области кинематики и динамики были проведены продолжателем идей Декарта в философии и Галилея в механике — Гюйгенсом\*. Механика обязана Гюйгенсу обобщением введенного Галилеем понятия ускорения на случай криволинейного движения. Гюйгенс первым указал на общепринятое сейчас разложение ускорения на касательную и нормальную (центростремительную) составляющие. Производя наблюдения над качанием маятника часов, Гюйгенс установил количественную связь между скоростью движения совершающего маятниковые колебания груза и высотой поднятия груза; эта связь в дальнейшем была обобщена в закон сохранения живой силы.

До Гюйгенса аналогичную связь отметил Галилей, а его ученик Торричелли эмпирическим путем получил известную формулу пропорциональности скорости падения тела корню квадратному из высоты падения. Формулировка того же закона у Галилея гласит: «Скорости, приобретаемые одним и тем же телом при движении по наклонным плоскостям, равны между собой, если высоты этих наклонных плоскостей одинаковы». Этот закон Галилей применял как к наклонным плоскостям, так и к маятнику. Выдвинутое Гюйгенсом положение заключалось в том, что центр тяжести тела или системы тел никогда не может подняться на высоту, большую той, с которой он опустился. Это положение оправдывается Гюйгенсом при помощи общепринятой в то время гипотезы о невозможности вечного двигателя — *perpetuum mobile*. Используя указанный закон, Гюйгенс создает теорию движения простого маятника. Не довольствуясь решением этой, самой по себе сложной для того времени задачи, Гюйгенс рассматривает более трудную задачу о движении сложного маятника, состоящего из

---

\* Основное значение имеют сочинения Гюйгенса «*Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum*» («О колебаниях часовых маятников», Париж, 1673) и «*De motu corporum ex percussione*» («О движении тел после удара», 1703).

---

ГЮЙГЕНС, ХЕЙГЕНС ХРИСТИАН (*Huygens Christian*, 1629—1695) — голландский механик, физик и математик, чл. Парижской АН (1666), Лондонского королевского общества (1663).

ТОРРИЧЕЛЛИ ЭВАНДЖЕЛИСТА (*Torricelli Evangelista*, 1608—1647) — итальянский математик и физик.

нескольких материальных точек, а затем и о качаниях физического маятника, т. е. тяжелого твердого тела, имеющего возможность вращаться вокруг горизонтальной оси. Эта задача, по-видимому, была первой в истории механики задачей динамики твердого тела. Гюйгенс дал полное решение вопроса об определении центра качаний физического маятника, т. е. о длине простого маятника, изохронного данному физическому маятнику. Гюйгенс впервые ввел в динамику понятие о моменте инерции системы масс относительно оси, равно сумме произведений масс на квадрат их расстояния до оси. Пользуясь идеей о сохранении количества движения и *живой силы* (термин, введенный впоследствии Лейбницем), Гюйгенс в трактате «О движении тел после удара» изложил полную теорию удара упругих шаров. Одновременно с Гюйгенсом теорию удара шаров дали Валлис и Врен. Валлис рассматривал не только прямой удар, при котором тело ведет себя фактически как материальная точка, но и косой, эксцентрический удар, что привело его к открытию важного для динамики твердого тела понятия центра удара. Исследования по теории удара тел сыграли большую роль в развитии основных динамических представлений и в создании центрального для всей ньютоновской динамики понятия массы.

К числу предшественников Ньютона относится выдающийся продолжатель идей Коперника астроном Кеплер\* (1571—1630), установивший путем наблюдений известные законы, с большой степенью точности выражающие действительный характер движения планет вокруг Солнца. Эти кинематические законы легли в основу открытого Ньютоном закона всемирного тяготения.

**Ньютонова система динамики.** В своем трактате «Математические начала натуральной философии»\*\*, выпущенном первым изданием в 1686 г., Ньютон (1643—1727) подвел итог достижениям своих предшественников и указал пути дальнейшего развития

\* Сочинение Кеплера «*Harmonices mundi*» вышло в свет в 1619 г.

\*\* «*Philosophiae naturalis principia mathematica*» [т. II, 39]. Русский перевод принадлежит А. Н. Крылову; первое издание его вышло в 1916 г.

ВАЛЛИС, УОЛЛИС ДЖОН (*Wallis John, 1616—1703*) — английский математик, один из основателей Лондонского королевского общества.

ВРЕН, РЕН КРИСТОФЕР (*Wren Christopher, 1632—1723*) — английский архитектор и математик, один из основателей Лондонского королевского общества.

механики. Ньютон говорил про себя, что *«далеко видел вперед, так как стоял на плечах у гигантов»*.

Желая оценить значение «Начал» для теоретической механики, оставим в стороне изложенные там астрономические и физические вопросы и сосредоточим внимание на рассмотрении помещенных в начале трактата основных законов динамики материальной точки: законе инерции, законе связи между силой и ускорением, законе равенства действия и противодействия.

Первый закон Ньютона, утверждающий, что материальная точка, изолированная от действия других тел, движется прямолинейно и равномерно, обобщает и формулирует в законченном виде закон инерции Галилея.

Основой всей классической динамики служит второй закон Ньютона, содержание которого заключается в утверждении, что действующая на материальную точку сила численно равна произведению массы точки на ее ускорение и имеет направление ускорения. Массу Ньютон определяет как *количество материи* в теле, но вслед за этим говорит и об *инерции массы* как о некоторой *врожденной силе*, которая *«проявляется телом единственно лишь, когда другая сила, к нему приложенная, производит изменение в его состоянии»*.

Ньютон произвел тщательные опыты над качаниями маятников равной длины и с одинаковыми по весу, но различными по веществу (дерево и золото) грузами, заключенными в одинаковые по внешней форме и размерам оболочки. Последнее делалось для того, чтобы и влияние сопротивления воздуха на качания грузов было одинаковым. Эти опыты были поставлены так, что, как пишет Ньютон, *«для тел одинакового веса разность количеств вещества (масс), даже меньшая одной тысячной доли полной массы, могла бы быть с ясностью обнаружена»*. Отклонив оба маятника на один и тот же угол от вертикали, Ньютон добивался одновременного пуска их в ход и наблюдал за происходящими при этом колебаниями. Если бы маятники под действием равных для них сил веса обладали различными инерционными свойствами, то они получили бы различные ускорения и колебания их должны были бы разойтись по фазе. Этот эффект, накапливаясь во времени, должен был бы стать заметным. В результате длительных наблюдений над качаниями маятников Ньютон не обнаружил сколько-нибудь значительного сдвига фаз, чем доказал эквивалентность *инертной* массы и *весомой* или *тяготеющей* массы. Заключение Ньютона по этому поводу гласит: *«Определяется масса по весу тела, ибо она*

*пропорциональна весу, что мною найдено опытами над маятниками, произведенными точнейшим образом». Несмотря на некоторую неопределенность представления о количестве материи, данная Ньютоном формулировка гораздо больше соответствует действительному содержанию понятия массы, чем чисто количественное, формальное определение массы как коэффициента пропорциональности между силой и вызываемым ею в данном теле ускорением, получившее распространение в конце XIX в.*

Утверждение о сохранении массы тела во время его движения лежит в основе ньютоновской системы механики. Согласно более точному закону, установленному только в XX в., следует отличать *покоящуюся* массу от *движущейся*. Величина движущейся массы равна величине покоящейся массы, разделенной на корень квадратный из разности между единицей и квадратом отношения скорости движения к скорости света в пустоте. Для рассматриваемых в классической механике малых по сравнению со скоростью света скоростей значение этого корня ничтожно разнится от единицы, и второй закон Ньютона оказывается правильным со вполне достаточной для макроскопических движений точностью.

Основное уравнение динамики, являющееся выражением второго закона, позволило Ньютону успешно разрешить большое число задач, относящихся главным образом к небесной механике. При решении этих задач Ньютон использует геометрические построения, а не приемы открытого им метода *флюксий*, т. е. анализа бесконечно малых, аппарат которого тогда еще не был достаточно разработан. Общие приемы решения дифференциальных уравнений динамики, служащих аналитическим выражением второго закона Ньютона, были указаны значительно позднее Эйлером, Маклореном и другими исследователями XVIII в.

Ньютон в отличие от Декарта не ставит перед собой задачи выяснения механизма взаимодействия тел. Не желая создавать *гипотез*, Ньютон считает главной задачей установление количественных связей между приложенными к материальной точке силами и изменением кинематических элементов ее движения. Такой феноменологический подход к изучению механических движений, находящийся в противоречии с деятельностью Ньютона как физика, естествен для периода первичного накопления знаний о *движущих* силах. На долю Ньютона и его ближайших последователей выпала задача объединения разрозненных и противоречивых динамических представлений о различных силах и обобщения их в единое понятие.

Третий закон Ньютона о равенстве действия и противодействия, отражающий идею Декарта о переносе движения с одного тела на другое, лежит в основе *динамики системы точек*. Пользуясь этим законом, Ньютон устанавливает закон изменения полного количества движения ограниченной системы материальных точек под действием внешних по отношению к этой системе сил, являющийся обобщением декартова закона о сохранении количества движения системы при отсутствии внешних сил. Тот же закон формулируется Ньютоном и в несколько ином виде как закон движения центра тяжести системы материальных точек.

Дополнительно к трем основным законам динамики в «Началах» приводится обобщение на случай любого движения материальной точки правила параллелограмма сил, бывшего к тому времени известным лишь в применении к статическим условиям.

В основу своей системы механики Ньютон положил следующие приведенные в «Началах» определения времени и пространства:

«1. Абсолютное, истинное математическое время само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью.

2. Абсолютное пространство по своей сущности безотносительно к чему бы то ни было внешнему остается всегда одинаковым и неподвижным».

В этих определениях, с одной стороны, признается объективное существование пространства и времени, а с другой, — они метафизически отрываются от *внешнего* материального мира. Ньютон указывает: «возможно, что не существует (в природе) такого равномерного движения, которым время могло бы измеряться с совершенною точностью», точно так же, как «может оказаться, что в действительности не существует покоящегося тела, к которому можно было бы относить места и движения прочих». Вместе с тем Ньютон стремится конкретизировать абсолютное пространство, связывая его с *неподвижными* звездами, и пытается при помощи специальных опытов с вращающимися системами доказать действительное существование абсолютно неподвижного пространства и абсолютного движения.

Галилей первым высказал мысль об одинаковом протекании механических процессов в системах, движущихся друг по отно-

шению к другу поступательно, прямолинейно и равномерно (инерциальных или галилеевых системах). То, что законы Ньютона имеют одну и ту же формулировку как в абсолютно неподвижном пространстве, так и в любой инерциальной системе, составляет содержание *принципа относительности* ньютоновской механики.

Стройность созданной Ньютоном системы механики и блестящие перспективы применения закона тяготения неизбежно привели Ньютона к преувеличению значения механики как единственного пути изучения явлений природы. В предисловии к первому изданию «Начал» Ньютон высказывает следующее характерное для торжествовавшего в то время механистического мировоззрения утверждение: «*Вся трудность физики состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам изъяснить остальные явления*». Это высказывание Ньютона оказалось весьма далеким от действительного хода развития физики и особенно физики нашего времени. История естествознания уже давно опровергла высказанную Ньютоном в том же введении к «Началам» надежду о возможности «вывести из начал механики и остальные явления природы».

Механика Ньютона послужила основой точного естествознания XVIII и XIX столетий, и в настоящее время она полностью обеспечивает потребности количественных расчетов механических движений. Эта классическая система механики оказалась, однако, недостаточной для объяснения движений со скоростями, сравнимыми по величине со скоростью света. Этой цели удовлетворяет механика, основанная на теории относительности, которая связала пространственные и временные величины с движением, исходя из ограниченной скорости передачи действий. Новая система механики не опровергла пригодности классической механики Ньютона, а подтвердила ее относительную истинность как первого приближения к действительности.

К эпохе Ньютона относится деятельность известного немецкого математика и философа Лейбница, открывшего одновременно с Ньютоном новый метод математического анализа — исчисление бесконечно малых. В истории механики с именем Лейбница

---

ЛЕЙБНИЦ ГОТФРИД ВИЛЬГЕЛЬМ (*Leibniz, Leibnitz Gottfried Wilhelm, 1646—1716*) — чл. Лондонского королевского общества (1673), чл. Парижской АН (1700). По просьбе Петра I разработал ряд проектов по развитию образования и государственного управления в России.

связан спор о двух мерах движения. Декарт под мерой движения понимал *количество движения*, равное по величине произведению массы точки на ее скорость. Лейбниц противопоставлял этой мере *живую силу*, пропорциональную массе и квадрату скорости движения. Потребовалось более столетия, чтобы разрешить этот спор. Уточнение основных динамических представлений и расширение области применения динамических методов показало, что обе меры одинаково важны и каждая из них имеет свою область применения. Так, первая мера — количество движения — применяется в тех случаях, когда необходимо выяснить свойства движения, не зависящие от внутренних взаимодействий точек системы. При этом наиболее отчетливо выявляется роль внешних сил и вызываемых ими изменений суммарных характеристик движения системы — ее общего количества движения и движения центра ее масс. Наоборот, вторая мера — живая сила (кинетическая энергия) — имеет значение для изучения тех сторон движения системы, которые связаны с внутренними взаимодействиями в движущейся системе; эта мера позволяет судить с количественной стороны о преобразовании внешне наблюдаемых механических движений во внутренние движения материи, т. е. о происходящих в движении качественных изменениях.

Во времена Декарта и Лейбница, когда учения о преобразовании энергии еще не существовало, да и позднее, в глазах крупнейшего механика XVIII в. д'Аламбера вопрос об истинной роли этих двух мер движения оставался, по существу, неясным, и спор не мог получить серьезного решения. Только в середине XIX в., после того как были достаточно точно установлены понятия работы и энергии, обе меры движения нашли свое место в механике.

Современные представления об энергии в механике развились на основе *закона сохранения живой силы*, в простейшей своей форме установленного еще Галилеем и Гюйгенсом. Свое дальнейшее развитие закон этот получил главным образом в трудах Ивана (Иоганна) Бернулли. В своем сочинении «Об истинном значении живых сил и их применении в динамике», вышедшем в свет в 1735 г., И. Бернулли приводит физическое определение понятия живой силы тела как «чего-то реального и субстанционального», т. е. присущего движущемуся телу. «*Живая сила*, — говорит



Бернулли, — имеет определенную величину, из которой ничего не может пропасть без того, чтобы мы снова не нашли эту потерю в произведенном действии». Бернулли видит в этом сущность закона сохранения живой силы. Особый интерес вызывает рассуждение Бернулли о теле, приводимом в движение сжатой пружиной, где отчетливо высказывается для частного случая упругих сил закон сохранения механической энергии. Об истории открытия этого закона говорится в дальнейшем.

**Эйлер и развитие механики в XVIII в.** Механика XVIII столетия обязана своим развитием практическим задачам, поставленным артиллерией и астрономией перед динамикой материальной точки, астрономией и кораблестроением — перед динамикой твердого тела, приборостроением и машинной техникой (паровая машина, прядильный и ткацкий станки) — перед динамикой несвободной системы. Хотя принципиальные основы динамики были заложены в «Началах» Ньютона, однако к началу XVIII столетия все еще не существовало общих аналитических методов постановки и решения конкретных задач даже динамики точки. Совершенно не была разработана теория движения твердого тела; отсутствовали еще методы кинематического описания движения его. О задачах динамики несвободной системы тел были лишь самые первоначальные представления. Все эти важнейшие задачи предстояло разрешить механике XVIII в.

В развитии динамики посленьютоновского периода основная заслуга принадлежит Леонарду Эйлеру (1707—1783). Свою исключительную по научной плодотворности жизнь Эйлер отдал в то время еще молодой Российской Академии наук, действительным членом которой он стал в 1727 г.

Эйлеру мы обязаны развитием динамики материальной точки в направлении применения методов анализа бесконечно малых к решению дифференциальных уравнений движения точки, выражающих в аналитической форме второй закон Ньютона. Трактат Эйлера «Механика, т. е. наука о движении, изложенная аналитическим методом», вышедший в свет в Петербурге в 1736 г., содержит общие, единообразные методы аналитического решения задач динамики точки. «Если анализ где-либо и необходим, так это особенно относится к механике», — писал Эйлер. Указывая на важный недостаток «Начал» Ньютона — отсутствие в них общего метода решения задач, что приводит в каждом отдельном случае

к необходимости разыскивать новые пути для их решения, — Эйлер справедливо критикует Ньютона за искусственность его *синтетически-геометрических доказательств*. Эйлер пишет: «Хотя мне казалось, что я достаточно ясно понял решение многих задач, однако задач, чуть отступающих от них, я уже решить не мог». С помощью ряда весьма общих примеров, как, например, движение точки под влиянием постоянной силы, силы притяжения к центру по любому степенному закону зависимости от расстояния и др., Эйлер показывает общность предложенного им аналитического метода как в случае прямолинейных, так и криволинейных движений.

В своей «Механике» Эйлер пользуется дифференциальными уравнениями динамики точки в *естественной* форме, т. е. в проекциях на касательную и нормаль к траектории; уравнения движения в проекции на декартовы прямоугольные оси были установлены Маклореном в 1742 г. в сочинении «Полная система флюксий». Эйлер высоко оценил идею Маклорена и в вышедшем в свет в 1765 г. почти через тридцать лет после появления «Механики» трактате «Теория движения твердых тел» уже широко использовал метод Маклорена.

Эйлер является основоположником механики твердого тела. Ему принадлежит общепринятый метод кинематического описания движения твердого тела при помощи задания в функции от времени трех и поныне носящих его имя углов, определяющих положение твердого тела. С именем Эйлера связана идея представления любого перемещения твердого тела, имеющего неподвижную точку, в форме одного или нескольких поворотов вокруг некоторых осей. Для случая бесконечно малого перемещения Эйлер указал геометрический и аналитический способы определения положения мгновенной оси поворота, эквивалентного данному перемещению. Не довольствуясь случаем бесконечно малого перемещения, Эйлер обобщил геометрическим путем этот результат и на случай любого конечного перемещения твердого тела. Аналитическое исследование этого случая произвел позже Родриг.

---

МАКЛОРЕН КОЛИН (*Maclaurin Colin*, 1698—1746) — шотландский математик, чл. Лондонского королевского общества (1719).

РОДРИГ, РОДРИГЕС БЕНЖАМИН ОЛЕНД (*Rodrigues Benjamin Olinde*, 1794—1851) — французский математик и экономист.

Фундаментальную роль в дальнейшем развитии динамики и многих ее технических приложений сыграли установленные Эйлером основные дифференциальные уравнения вращательного движения твердого тела вокруг неподвижного центра. Эти уравнения явились аналитическим выражением открытой Эйлером теоремы моментов количеств движения.

Эйлер далеко продвинул вопрос об использовании в динамических задачах закона живых сил. В «Механике» мы находим близкую к современной формулировку закона *живых сил* для случая прямолинейного движения: «*Приращение квадрата скорости будет пропорционально произведению силы на пройденный элемент пути*». Эйлер первым отметил наличие таких движений материальной точки, при которых изменение живой силы при переходе точки из одного положения в другое не зависит от формы траектории, что привело в дальнейшем к понятию потенциальной энергии и открытию закона сохранения механической энергии; этот закон был строго сформулирован лишь в первой половине XIX в., что позволило в свою очередь открыть общий закон сохранения энергии.

Эйлер является основоположником гидромеханики. Им были даны основные уравнения динамики идеальной жидкости и введено понятие давления в движущейся жидкости. Трудно переоценить сделанный Эйлером вклад в техническую науку: ему принадлежит заслуга создания основ теории корабля и теории устойчивости упругих стержней; Эйлер заложил основу теории расчета турбин, выведя турбинное уравнение; в прикладной механике имя Эйлера связано с вопросами кинематики фигурных колес, расчета трения между канатом и шкивом и другими.

К эпохе, когда жил и творил Эйлер, относится деятельность выдающегося французского механика и астронома Клеро, исследования которого по теории фигуры Земли, по движению Луны и кометы Галлея, а также другим вопросам небесной механики сыграли важную роль в деле утверждения ньютоновской системы механики. Особо заслуживает быть отмеченным факт предвычисления появления кометы Галлея, произведенного Клеро в 1758 г. Учтя возмущающее действие Юпитера и Сатурна на комету, Клеро предсказал время прохождения кометы через перигелий. Это был первый в истории небесной механики случай предвычисле-

ния появления кометы. Предсказание Клеро по справедливости можно признать выдающимся достижением ньютоновской механики. Нельзя здесь же не указать на другое не менее существенное для укрепления авторитета ньютоновской механики событие, происшедшее уже в XIX в. и явившееся новым триумфом закона всемирного тяготения. Французский астроном Ле Веррье и английский астроном и математик Адамс независимо друг от друга на основании произведенных ими вычислений возмущений в движении Урана в 1846 г. предсказали существование новой планеты Нептун и указали ее положение на небе.

Ньютоновская небесная механика была в своей значительной части завершена выдающимся французским математиком Лапласом. В обширном трактате Лапласа «Небесная механика», пять томов которого вышли в свет на протяжении 1799—1825 гг., объединены результаты исследований предшественников Лапласа — Ньютона, Маклорена, Клеро, д'Аламбера, Эйлера и Лагранжа — с собственными исследованиями Лапласа по вопросу об устойчивости солнечной системы, о задаче трех тел, о движении Луны, о кольцах Сатурна и по многим другим вопросам небесной механики. Как известно, Лаплас является создателем (одновременно с Кантом) новой космогонической гипотезы, нанесшей смелый удар по старым идеалистическим и метафизическим воззрениям на «окостенелый, неизменный, созданный сразу» мир.

Последователь французского материализма Лаплас, отдавая дань своей эпохе, придерживался механистических представлений о явлениях природы. Так же как и Ньютон, Лаплас стоял на позициях механистического и метафизического детерминизма. В своем «Опыте философии теории вероятности» он писал:

«Разумное существо, которое в каждый данный момент знало бы все движущие силы природы и имело бы полную картину состояния, в котором природа находится, могло бы — если бы только его ум был в состоянии достаточно проанализировать эти дан-

---

ЛЕ ВЕРРЬЁ, ЛЕВЕРРЬЁ УРБЕН ЖАН ЖОЗЕФ (*Le Verrier Urbain Jean Joseph*, 1811—1877) — иностр. чл.-корр. Петербургской АН (1848), чл. Парижской АН (1846).

АДАМС ДЖОН КАУЧ (*Adams John Couch*, 1819—1892) — иностр. чл.-корр. Петербургской АН (1864), чл. Лондонского королевского общества.

ЛАПЛАС ПЬЕР СИМОН (*Laplace Pierre Simon*, 1749—1827) — французский астроном, математик и физик, иностр. почетный чл. Петербургской АН (1802), чл. Парижской АН (1785), чл. Французской академии (1816).

ные — выразить одним уравнением как движение самых больших тел мира, так и движение мельчайших атомов. Ничего не осталось бы для него неизвестным, и оно могло бы обозреть одним взглядом как будущее, так и прошлое».

Последующее развитие физики и в особенности физики двадцатого столетия опровергло это высказывание, сводящее все многообразие явлений природы к механическому движению.

Одним из важнейших приложений ньютоновской теории тяготения явился вопрос о фигурах равновесия вращающихся жидких масс, частицы которых тяготеют друг к другу. К этому кругу вопросов относился, в частности, исторический спор о фигуре Земли. Ньютон считал, что Земля должна быть сплюснута у полюсов; по теории Декарта выходило, что Земля должна быть удлинена вблизи полюсов вдоль оси вращения. Основы теории равновесия вращающихся масс были изложены Ньютоном в третьей книге «Начал». Проблема фигур равновесия и устойчивости вращающейся жидкой массы сыграла значительную роль в развитии механики. В связи с этой проблемой Клеро установил понятие силовой функции. В решении проблемы равновесия и устойчивости жидкой массы приняли участие Клеро, Маклорен, д'Аламбер, Лаплас, Лежандр и позже Якоби, С. В. Ковалевская, Пуанкаре. Особенно далеко эта проблема была продвинута в выдающихся исследованиях А. М. Ляпунова.

Гениальный русский ученый М. В. Ломоносов (1711—1765) высоко оценивал значение механики для естествознания, физики и философии. Основываясь на представлении о сохранении механического движения и его переносе от тела к телу, Ломоносов был противником ньютоновского понимания силы. Ему принадлежит материалистическая, близкая к декартовой формулировка процесса механического взаимодействия двух тел: *«Когда одно тело ускоряет движение другого и сообщает ему часть своего движения, то только так, что само теряет такую же часть движения»*. Создатель фундаментального для всего естествознания закона сохранения вещества, который рассматривался им как часть общего закона сохранения материи, Ломоносов считал движение материи общей основой физических явлений. *«Все изменения тел происходят посредством движения»*, — пишет Ломоносов и с этой же точки зрения трактует вопрос о внутреннем строении вещества. Ломоносов одним из первых сформулировал основные положения кинетической теории газов и распространения тепла.

Авторитет Ломоносова как ученого-материалиста высоко ценился Эйлером. *«Ныне таковые умы, — писал Эйлер Ломоносову, — весьма редки, так как большая часть остаются только при опытах, почему и не желают пускаться в рассуждения; другие же впадают в такие нелепые толки, которые находятся в противоречии со всеми началами естествоведения».*

Ломоносову и Эйлеру мы обязаны тем, что Российская Академия вскоре после своего создания стала крупнейшим мировым центром науки и послужила расцвету русской науки в послепетровский период. Характерное для петровской эпохи бурное развитие техники — гигантский рост добычи металлов, строительство флота, городов и крепостей, возросшие требования к кораблевождению и баллистике — вызвало появление первых на русском языке руководств по механике (Скорняков-Писарев, «Наука статическая или механика», 1722 г. и др.).

В результате деятельности Ломоносова и Эйлера появились первые русские ученые, творчески овладевшие методами механики и способствовавшие ее дальнейшему развитию. Среди этих ученых должен быть отмечен ученик Эйлера и Ломоносова, академик С. К. Котельников, выпустивший в 1774 г. трактат под названием «Книга, содержащая в себе учение о равновесии и движении тел», — первый русский учебник по механике. В этой книге приводятся основные сведения из области статики твердых и частично гибких и упругих тел (нитей, канатов, балок и др.), а также элементы динамики применительно главным образом к вопросам падения тел и статики простейших машин и механизмов с учетом сил трения и прочности деталей сооружений. Котельников вел большую преподавательскую работу; благодаря предпринятой им широкой пропаганде механических знаний число образованных русских механиков и инженеров быстро росло; к концу XVIII в. Россия не уступала по уровню механического образования западноевропейским странам.

Развитию механики в России на рубеже XVIII—XIX вв. много способствовал академик С. Е. Гурьев. С. Е. Гурьеву принадлежат обширный труд «Основания механики», первая часть которого

---

КОТЁЛЬНИКОВ СИМЕОН КИРИЛЛОВИЧ (1723—1806) — русский математик, почетный чл. Петербургской АН.

ГУРЬЕВ СЕМЕН ЕМЕЛЬЯНОВИЧ (1766—1813) — русский математик и механик, акад. Петербургской АН (1798).

была опубликована в печатном виде после смерти автора, в 1815 г., и ряд сочинений, содержащих решение отдельных конкретных задач статики и динамики\*.

**Основные этапы развития динамики несвободной системы.** Методы механики Ньютона, усовершенствованные Эйлером, с успехом применялись для исследования движений свободной материальной точки, системы материальных точек и твердого тела, а также некоторых простейших случаев несвободного движения точки. Так, применение *естественных* уравнений движения позволило Эйлеру разрешить ряд задач о движении точки по заданной кривой или поверхности, не прибегая к специальным методам динамики несвободной системы. Развитие этих методов обязано запросам растущей техники и практики использования машин, механизмов и измерительных приборов.

Зарождение идей механики несвободной системы можно обнаружить уже в античной науке, когда появились первые, еще туманные формулировки условий равновесия простейших машин, содержавшие в себе зародыш идеи принципа возможных перемещений. Характерным отличием этого принципа от элементарной статики является то, что при рассмотрении равновесия системы используются кинематическое представление о возможном перемещении точек системы и динамическое понятие работы совокупности сил, приложенных к системе.

Стевин первым дал такого рода условие равновесия блока, Галилей дополнил исследования Стевина рассуждением о равновесии груза на наклонной плоскости и высказал известное *золотое правило*, согласно которому «что выигрывается в силе, то теряется в скорости».

В 1717 г. И. Бернулли дал принципу общую и близкую к современной формулировку для любых приложенных к системе сил, но, однако, все еще без доказательства\*\*. Первое наглядное и достаточно общее, но не строгое доказательство принципа было дано Лагранжем, изобразившим приложенные к системе силы при помощи натяжений нитей, перекинутых через блоки и снабженных грузами. Своей современной формулировкой, данной в 1806 г. французским физиком Ампером, принцип обязан вве-

\* Истории развития механики в России в XVIII в. посвящена статья А. А. Космодемьянского «Очерки по истории механики в России» (Ученые записки Московского гос. университета им. Ломоносова. Т. II. Механика (1948). Вып. 122. М. С. 193—215).

\*\* На русском языке изданы «Избранные сочинения по механике» И. Бернулли (М., 1937).

денной в конце XVIII в. абстракции *идеальных связей*, отразившей представление об *идеальной* машине, лишенной вредных сопротивлений в передаточном механизме.

Задача о движении сложного маятника способствовала созданию принципов динамики несвободной системы. Возникая из частных приемов решения этой задачи, выдвигаемые вновь принципы постепенно обобщались, пока не привели к установлению того общего принципа динамики, который в настоящее время известен как *принцип д'Аламбера*.

Якову Бернулли принадлежит еще недостаточно общая формулировка этого принципа, однако содержащая уже идею равновесия между *потерянными* и *приобретенными* движениями. В 1716 г. появился выдвинутый Я. Германом, впоследствии петербургским академиком, принцип статической эквивалентности совокупностей *свободных* и *фактических*, т. е. проявляющихся при наличии связей, побуждений к движению. Примененный к задаче о колебаниях гибких тел и обобщенный Эйлером принцип Германа был опубликован в 1740 г. в «Комментариях» Российской Академии наук и получил мировую известность под именем *петербургского принципа*.

Выдвинутые Я. Бернулли, Германом и Эйлером принципы легли в основу решения разнообразных задач динамики несвободных систем, предлагавшихся, по обычаю того времени, на конкурсах Петербургской и иностранных академий. Применение этих принципов в каждом отдельном случае представляло самостоятельные трудности и требовало от пользующегося ими некоторого искусства. Такое положение сохранилось до выхода в свет в 1743 г. «Трактата по динамике» выдающегося французского ученого Ж. д'Аламбера\*. Основной целью «Трактата по динами-

---

\* АЛАМБЕР ЛЕ РОН Д' ЖАН (*Alembert le Rond d' Jean, 1717—1783*) — французский математик и философ, иностр. почетный чл. Петербургской АН (1764), чл. Парижской АН (1741), Французской академии (1754). Его трактат озаглавлен «Динамика — трактат, в котором законы равновесия и движения тел сводятся к возможно меньшему числу и доказываются новым способом» [т. II, 30]. Имеется русский перевод этого классического сочинения (М.: Гостехиздат, 1950).

---

АМПЁР АНДРЕ МАРИ (*Ampère André Marie, 1775—1836*) — французский физик и математик, иностр. почетный чл. Петербургской АН (1830), чл. Парижской АН (1814).

БЕРНУЛЛИ ЯКОБ, ЯКОВ (*Bernoulli Jacob, 1654—1705*) — швейцарский математик, механик, старший брат Иоганна Бернулли.

ГЕРМАН ЯКОБ (*Hermann Jacob, 1678—1733*) — швейцарский математик, первый академик (1725) и иностр. почетный чл. (1731) Петербургской АН.



ке» явилось, по словам его автора, «показать, каким образом все задачи динамики можно решать одним и при том весьма простым и прямым методом, состоящим в сочетании принципов равновесия и сложения движений».

При наличии основного достоинства — общности постановки задач динамики несвободной системы — трактат д'Аламбера имел существенный недостаток — отсутствие аналитической формулировки принципа. Так же как и Ньютон, д'Аламбер продолжает пользоваться геометрическими построениями и доказательствами. Этот недостаток был устранен полвека спустя великим французским математиком, создателем аналитических методов динамики несвободной системы Ж.-Л. Лагранжем.

В своем фундаментальном двухтомном сочинении «Аналитическая механика» [т. II, 35], вышедшем в свет в 1788 г., Лагранж продемонстрировал общность принципа д'Аламбера и дал его аналитическое выражение.

Д'Аламбер не указал, как выбирать форму условий равновесия, заключающихся в его принципе; в отдельных случаях им применялись то принцип рычага, то правило параллелограмма сил. В разделе статики первого тома «Аналитической механики» Лагранж, излагая теорию равновесия несвободной системы, использует принцип возможных перемещений в аналитической форме, аналогичной той, которую ранее уже использовал для отдельной частицы Клеро в теории равновесия вращающейся жидкости. Эта форма уравнения равновесия носит у Лагранжа наименование *общей формулы статики*.

Установленная Лагранжем *общая формула динамики* представляет *общую формулу статики*, в которой согласно принципу д'Аламбера вместо задаваемых стоят *потерянные* силы. Она служит наиболее общим и удобным аналитическим выражением принципа д'Аламбера.

Лагранжева трактовка принципа д'Аламбера полностью соответствует современной его формулировке как условия равновесия задаваемых сил и мысленно приложенных к точкам системы сил инерции. Как указывает Лагранж, такая трактовка представляет «возврат к методу Германа и Эйлера». Представление о силах инерции легло в дальнейшем в основу практических инженерных приемов динамического расчета машин и механизмов, известных под общим наименованием *кинетостатики*.

В истории развития теоретической механики «Аналитическая механика» Лагранжа может быть поставлена в один ряд с «Ма-

тематическими Началами» Ньютона, «Механикой» Эйлера и «Трактатом по динамике» д'Аламбера. Продолжая дело, начатое для свободной точки и системы точек Эйлером, Лагранж завершает аналитическое оформление динамики свободной и несвободной системы точек и дает многочисленные примеры, иллюстрирующие практическую мощь ее методов. Отличительной чертой «Аналитической механики» Лагранжа является проходящее через всю книгу стремление автора к единообразию метода, которое достигается прежде всего использованием установленных Лагранжем *общих формул* статики и динамики. Лагранж, говоря его собственными словами, «предложил себе свести теорию механики и способ решения относящихся к ней задач к общим формулам, простое развертывание которых дает все уравнения, необходимые для решения любой задачи». По идее автора «Аналитическая механика» должна была показать, что предлагаемые в ней методы решения задач *«не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений, но нуждаются исключительно в алгебраических операциях, подчиненных правильному и единообразному течению»*. В приведенных словах Лагранжа сквозит желание противопоставить свои аналитические методы старым геометрическим приемам Ньютона и д'Аламбера, а также недооценка роли *механических рассуждений* и переоценка значения *алгебраических операций*. Такого рода утверждения были естественны в эпоху Лагранжа, когда математический анализ успешно демонстрировал свою силу в самых различных областях физики, астрономии и механики, но должны быть отвергнуты в наше время. Следуя Лагранжу, который утверждал, что *«те, кто любит анализ, увидят с удовольствием, что механика сделалась его новой ветвью»*, и сейчас еще многие продолжают считать механику чисто математической наукой. В этом проявляется игнорирование качественного отличия задач механики от задач математики.

Все содержание «Аналитической механики» проникнуто характерным для Лагранжа стремлением приблизить результаты теоретических рассуждений к практическим применениям. Обращают на себя внимание забота о доведении решения задач до численного результата и стремление к разысканию наиболее удобных для практики приближенных методов решения.

В отличие от д'Аламбера и других авторов, считавших задачу решенной, если составлена соответствующая система дифференциальных уравнений, Лагранж отмечает, что *«общие уравнения, представляя собою уравнения второго порядка, требуют еще интег-*

*рирований, которые зачастую превышают возможности известного нам анализа; поэтому приходится прибегать к приближениям, и наши формулы дают наиболее подходящие средства для этой цели».* В том же направлении идут мысли Лагранжа о необходимости при решении сложных механических задач сначала выделять действие главных, наиболее значительных по эффекту сил и только после этого, уже во втором приближении, учитывать второстепенные, *возмущающие* силы. На такой путь до Лагранжа встали астрономия и небесная механика. Для определения соответствующих *возмущений* движения Лагранж создает метод вариаций произвольных постоянных. Само собой разумеется, что эти и многие другие методы Лагранжа, требующие для правильного использования их прежде всего глубокого понимания механической сущности рассматриваемой задачи, противоречат высказанному Лагранжем в предисловии утверждению о преимущественном значении *алгебраических операций* по сравнению с *механическими рассуждениями*.

Исходя из *общей формулы динамики*, Лагранж указал две основные формы дифференциальных уравнений движения несвободной системы. Это, во-первых, уравнения с неопределенными множителями — *уравнения Лагранжа первого рода* и, во-вторых, уравнения в обобщенных координатах — *уравнения Лагранжа второго рода*. Основное значение уравнений Лагранжа второго рода состоит в том, что они не содержат реакций связей. Как показало развитие физики, уравнения эти выходят за пределы механики; они применимы не только к механическим, но и к электрическим и электромеханическим системам.

В заключительных главах основных разделов первой части «Аналитической механики» — статике и динамике — Лагранж приводит решения конкретных задач, имеющих целью иллюстрацию его методов; той же цели служит вся вторая часть «Аналитической механики». Подавляющее большинство разрешаемых Лагранжем задач отражает технические проблемы того времени. Задачи эти относятся к вопросам равновесия тел, связанных между собой нерастяжимыми и растяжимыми нитями и стержнями, равновесия упругих нитей и пластин, статики несжимаемой и сжимаемой жидкости, движений точки по заданной кривой или поверхности, вращательных движений твердого тела, динамики несжимаемой и сжимаемой жидкости. С этой точки зрения необходимо особо выделить помещенную в первой части «Аналитической механики» группу важнейших задач динамики,

объединенных Лагранжем в специальный отдел под общим наименованием «О малых колебаниях любой системы тел». Этот отдел представляет собой основу современной теории вибраций. Рассматривая малые движения системы вокруг положения устойчивого ее равновесия, Лагранж показывает, что любое такое движение можно себе представить как результат наложения друг на друга простых гармонических колебаний. Этот принцип сложения малых движений был открыт для частного случая колебаний струны с размещенными на ней грузиками еще Д. Бернулли, однако только Лагранж доказал общность этого закона.

Вторая часть «Аналитической механики» посвящена главным образом задачам небесной механики. Содержание второй части и особенно принадлежащая Лагранжу общая теория вековых возмущений планет вполне оправдывает славу Лагранжа как одного из основоположников небесной механики.

**Теоретическая механика в XIX в.** В XIX в. массовое применение машин — двигателей и станков, — появление парового транспорта, строительство мостов и крупных сооружений привели к необходимости широко популяризировать идеи и методы теоретической механики, вошедшие к тому времени в обиход технических расчетов.

Особое значение для решения прикладных задач приобретает теорема живых сил, отражающая в механике общий закон сохранения энергии. Принцип д'Аламбера становится благодаря введению сил инерции практическим методом динамических расчетов движения машин и механизмов. Потребности растущей техники послужили причиной выделения из механики специальных разделов: графической статики, кинематики и динамики машин и механизмов, теории колебаний, теории гироскопических явлений и др. Наряду с этим развитие механики в XIX в. пошло по пути теоретического обобщения ее предшествующих достижений. В этом направлении достижения механики тесно переплетаются с еще молодой теоретической физикой. Так, формулировка фундаментальных положений оптики шла параллельно установлению вариационных принципов динамики и основных уравне-

---

БЕРНУЛЛИ ДАНИИЛ (*Bernoulli Daniel*, 1700—1782) — сын Иоганна Бернулли, швейцарский математик и механик, занимался также физиологией и медициной; акад. (1725—1733) и иностр. почетный чл. Петербургской АН (1733), чл. Болонской АН (1724), Берлинской АН (1747), Парижской АН (1748), Лондонского королевского общества (1750).

ний движения и равновесия сплошной среды, теория колебаний развивалась вместе с акустикой, образы динамики идеальной жидкости вошли в теорию электричества и, наоборот, задачи этой теории получили гидродинамическую интерпретацию.

«Аналитическая механика» Лагранжа, подведя итог основным завоеваниям теоретической механики XVIII в., указала пути последующего ее развития на многие десятилетия вперед. Можно наметить следующие главные направления развития теоретической механики в XIX в.:

- ✓ расширение понятия связей и обобщение основных уравнений динамики несвободной системы на новые виды связей;
- ✓ установление вариационных принципов динамики и принципа сохранения механической энергии;
- ✓ разработка методов интегрирования уравнений динамики.

Параллельно с этим выдвигались и были разрешены новые задачи механики.

В деле обобщения понятия связей основополагающее значение имели работы выдающегося русского механика М. В. Остроградского (1801—1856)\*. Остроградский рассмотрел связи, зависящие от времени. Другим важным расширением понятия связей, принадлежащим Остроградскому, является введение понятия *неудерживающих* связей. Наряду с *удерживающими* связями, подчиняющими движения точек системы заранее указанным равенствам (конечным или дифференциальным), Остроградский вводит *неудерживающие* связи, выражающиеся аналитически при помощи неравенств. В этом случае принцип возможных перемещений принимает вид дифференциального неравенства и выражает требование равенства нулю или отрицательности суммы элементарных работ задаваемых сил на любом возможном перемещении системы. Аналогичным образом обобщается на случай неудерживающих связей и общая формула динамики, соответствующая принципу д'Аламбера. Естественным дополнением, расширяющим область применения этого принципа, явилось предложенное Остроградским приложение принципа к системам, подверженным действию мгновенных или импульсивных сил,

\* АН СССР предприняла издание Полного собрания сочинений М. В. Остроградского. Вышедшая в свет в 1946 г. ч. II первого тома содержит «Лекции по аналитической механике». Анализ трудов М. В. Остроградского посвящена речь Н. Е. Жуковского «Ученые труды М. В. Остроградского по механике». (Жуковский Н. Е. Собрание сочинений. В 7 т. — М. — Л.: Гостехиздат, 1948—1950. Т. 7, 1950.)

возникающих при действии на систему ударов. Остроградскому принадлежит также приоритет в рассмотрении дифференциальных (неголономных) связей, накладывающих ограничения на скорости точек системы. Неголономные связи выражаются аналитически при помощи неинтегрируемых дифференциальных равенств или неравенств. Идеи Остроградского были восприняты и получили свое развитие в трудах его учеников и последователей, в первую очередь в трудах Н. Д. Брашмана и Ф. А. Слудского.

Обобщение уравнений Лагранжа на случай систем с неголономными связями было в 1895 г. дано С. А. Чаплыгиным.

Другую форму уравнений движения как голономных, так и неголономных систем позднее, в 1900 г., предложил П. Аппель. Уравнения движения неголономной системы в квазикоординатах были даны немецким физиком Л. Больцманом. П. В. Воронец указал на многочисленные применения уравнений движения неголономных систем к задачам о катании тяжелого тела.

Значительно ускорившийся к началу XIX в. процесс создания новых машин и стремление к дальнейшему их усовершенствованию вызвали в первой четверти века появление прикладной или технической механики. В первых трактатах по прикладной механике окончательно оформилось понятие работы сил. Это понятие впервые вошло в формулировку закона живых сил в трактате Понселе (1788—1867) «Введение в техническую механику», появившемся в 1829 г.

Как уже ранее отмечалось, достаточно ясное представление о консервативных силах, т. е. таких, работа которых не зависит от формы траекторий, а лишь от начального и конечного положений движущейся системы, имели уже Эйлер и Лагранж, а зарож-

---

БРАШМАН НИКОЛАЙ ДМИТРИЕВИЧ (1796—1866) — русский математик и механик, чл.-корр. Петербургской АН.

СЛУДСКИЙ ФЕДОР АЛЕКСЕЕВИЧ (1841—1897) — русский механик и геодезист.

ЧАПЛЫГИН СЕРГЕЙ АЛЕКСЕЕВИЧ (1869—1942) — русский и советский математик и механик, акад. АН СССР (1929).

АППЕЛЬ ПОЛЬ ЭМИЛЬ (*Appell Paul Emile*, 1855—1930) — французский математик и механик, иностр. чл.-корр. Петербургской АН (1911), иностр. почетный чл. АН СССР (1925), чл. Парижской АН (1892).

БОЛЬЦМАН ЛЮДВИГ (*Boltzman Ludwig*, 1844—1906) — австрийский физик-теоретик, чл. Венской АН (1895).

ВОРОНЕЦ ПЕТР ВАСИЛЬЕВИЧ (1871—1922) — русский и советский ученый-механик.

дение этого понятия можно обнаружить еще у Галилея и Гюйгенса. Лагранж в «Аналитической механике» широко пользуется функцией координат точек, дифференциал которой равен элементарной работе приложенных сил, и получает путем интегрирования уравнений движения выражение принципа *сохранения живых сил*, ничем не отличающееся от современного. Однако понятие о потенциальной энергии в общем для механики, электростатики и других разделов физики смысле относится к более позднему времени. Развитием его и окончательной формулировкой закона сохранения энергии физика обязана немецким естествоиспытателям Р. Майеру и Г. Гельмгольцу.

Сопоставление сравнительно узкого, справедливого лишь для некоторых случаев механических движений принципа сохранения механической энергии с общим принципом сохранения энергии позволило теснее связать теоретическую механику с физикой. Благодаря появлению этих двух принципов механика приблизилась к другим областям физики. Понятие об энергии перебросило мост между различными по своей природе процессами. Этим был завершен спор о двух основных мерах движения: количестве движения и живой силе. Живая сила, или кинетическая энергия, заняла свое место в вопросах, связанных с преобразованием механической энергии в другие виды.

Второй закон Ньютона, аналитически выражаемый дифференциальными уравнениями движения свободной системы точек, равно как и принцип д'Аламбера, содержащий в себе наиболее общую формулировку законов движения несвободной системы, не исчерпывает всех возможностей постановки проблем динамики. В середине XVIII в. возникли и в XIX в. получили развитие новые общие принципы динамики — *вариационные принципы*.

Первым вариационным принципом явился принцип наименьшего действия, выдвинутый без какого бы то ни было доказательства как некоторый общий закон природы французским ученым Мопертюи, применившим его сначала при изучении хода лучей света и объяснении законов отражения и преломления света, а затем при изучении явлений удара тел. Принцип был опубли-

---

МАЙЕР ЮЛИУС РОБЕРТ (*Mayer Julius Robert, 1814—1878*) — немецкий ученый, медик.

МОПЕРТЮИ ДЕ МОРО ПЬЕР ЛУИ (*Mauupertuis de Moreau Pierre Lois, 1698—1759*) — французский математик, астроном, географ, биолог, философ, чл. Парижской АН (1743), президент Берлинской АН (1745).

кован в 1744 г.; над доказательством и обобщением его работали в дальнейшем Эйлер, Лагранж, Якоби и Жуковский. Мопертюи выводил принцип наименьшего действия из теологических соображений, связывая факт наименьшей затраты действия в процессах природы с необходимостью существования разумного творца мира. Это было реакционным нападением на передовое естествознание великих французских материалистов XVIII в., которое отражало обострившуюся накануне Великой французской революции борьбу идеологий борющихся классов и их стремление использовать данные точных наук в своих интересах. Д'Аламбер и Лагранж подвергли критике концепцию Мопертюи; первую строгую математическую формулировку принципа дал Эйлер. Своей современной общностью принцип Мопертюи обязан больше всего Лагранжу, который первым указал на строгую связь этого принципа с основными законами механики.

Принцип Мопертюи является простейшим из вариационных принципов динамики. С развитием вариационного исчисления, основные уравнения которого были даны Эйлером, появились более общие, чем принцип Мопертюи, вариационные принципы. Среди них как наиболее важный должен быть выделен принцип Гамильтона — Остроградского, установленный в 1834 г. для частного случая стационарных связей Гамильтоном, а несколько позже в более общей форме для нестационарных связей — М. В. Остроградским.

Важное значение вариационного принципа Гамильтона — Остроградского, как и более узкого вариационного принципа Мопертюи, заключается в инвариантной форме этих принципов, т. е. независимости их формулировки от выбора тех или иных координат, определяющих положение системы. Это свойство позволяет применять принцип в классической и релятивистской механике, в статистической механике и в электродинамике; при этом, конечно, следует различным образом определять понятие кинетического потенциала, входящего в формулировку принципа.

В истории развития общих методов интегрирования дифференциальных уравнений динамики, относящейся главным образом к середине XIX в., тесно переплетаются имена трех выдающихся ученых: Остроградского, Гамильтона и Якоби. Для по-

---

ГАМИЛЬТОН, ХАМИЛТОН УИЛЬЯМ РОУАН (*Hamilton William Rowan, 1805—1865*) — ирландский математик и астроном, иностр. чл.-корр. Петербургской АН (1837), чл. Ирландской королевской АН.



строения общей теории интегрирования уравнений механики предпочтительнее иметь дело с системой уравнений первого порядка, чем с системой уравнений второго порядка, каковыми являются уравнения динамики и в том числе уравнения Лагранжа второго рода. Первый шаг в этом направлении в 1809 г. сделал Пуассон, который, введя в рассмотрение понятие *импульса*, получил систему уравнений первого порядка, связывающих производные по времени от импульсов с обобщенными координатами. Задача о приведении уравнений механики к *канонической* системе уравнений первого порядка для случая связей, не зависящих от времени, была решена в 1834 г. Гамильтоном. Окончательное завершение ее принадлежит Остроградскому, который распространил эти уравнения на случай нестационарных связей.

В 1842 г. Якоби (1804—1851) в «Лекциях по динамике»\*, опубликованных лишь в 1866 г., изложил метод интегрирования канонических уравнений, основанный на использовании полного интеграла уравнения Остроградского — Гамильтона.

Благодаря методу Якоби канонические уравнения получили плодотворные применения для решения задач динамики; особенно важной оказалась роль этих уравнений в небесной механике при решении задач о малых возмущениях движений планет.

Канонические уравнения допускают применение для систем, состоящих из очень большого числа частиц. Этим объясняется то широкое использование в вопросах статистической механики, которое они получили к концу XIX в.

Крупнейшими проблемами динамики, постановка и решение которых относятся главным образом к XIX столетию, являются: движение тяжелого твердого тела, теория устойчивости равновесия и движения, а также тесно связанная с этой теорией задача о колебаниях материальной системы.

Первое решение задачи о вращении тяжелого твердого тела произвольной формы вокруг неподвижного центра в частном случае, когда неподвижный центр совпадает с центром тяжести, принадлежит Эйлеру. Изящное кинематическое представление этого движения было дано в 1834 г. Пуансо. Случай тяжелого тела вращения, когда неподвижный центр, не совпадающий с цент-

---

\* Имеется русский перевод (М.: ОНТИ, 1936).

ром тяжести тела, помещен на оси вращения, был рассмотрен Лагранжем во втором томе его «Аналитической механики». Решение этих двух классических задач легло в основу создания строгой теории явлений, возникающих при изменении направления оси быстро вращающегося твердого тела. Такое тело называется гироскопом, а сами явления гироскопическими. Известные исследования в этой области принадлежат французскому физiku Фуко, создавшему ряд гироскопических приборов. Эти исследования указали на принципиальную возможность, не прибегая к астрономическим наблюдениям, доказать суточное вращение Земли и определять широту места наблюдения. В настоящее время теория гироскопических явлений представляет собой широко развитую дисциплину, тесно связанную с созданием важнейших гироскопических приборов, как то: гировертикаль, гироскоп, гирокомпас, гирогоризонт и другие гироскопические навигационные приборы.

После работ Эйлера и Лагранжа, несмотря на усилия ряда выдающихся математиков, проблема вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки долго не получала дальнейшего развития. В 1888 г. С. В. Ковалевская\* разрешила задачу о вращении вокруг неподвижной точки тяжелого тела, центр тяжести которого не находится на оси вращения, а главные моменты инерции связаны друг с другом некоторым соотношением. Открытие нового случая интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки стало возможным благодаря той общности, с которой Ковалевская поставила задачу. В 1893 г. А. М. Ляпунов доказал, что случаи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской являются единственными, в которых уравнения вращения твердого тела допускают однозначные интегралы при всех (вещественных и комплексных) значениях аргумента и при любых начальных условиях. При специальных заданиях начальных условий задача о вращении твердого тела рассматривалась рядом отечественных ученых. Наибольшие до-

---

\* КОВАЛЁВСКАЯ СОФЬЯ ВАСИЛЬЕВНА (1850—1891) — русский математик, а также писатель и публицист; первая в мире женщина — профессор математики и первая женщина, избранная членом-корреспондентом в Петербургскую АН (1889). «Научные работы» С. В. Ковалевской изданы в 1948 г. Академией наук СССР [т. II, 6].

---

ФУКО ЖАН БЕРНАР ЛЕОН (*Foucault Jean Bernard Leon, 1819—1868*) — французский физик, чл. Парижской АН (1865).

стижения в этом направлении принадлежат В. А. Стеклову, С. А. Чаплыгину, Д. Н. Горячеву и Г. В. Колосову. Классическое сочинение О. Клейна и А. Зоммерфельда «Теория волчка» содержит исчерпывающее изложение математических основ теории гироскопических явлений. В этом труде большое внимание уделено также выяснению физической стороны явлений и техническим приложениям гироскопа.

Теория движения твердого тела в идеальной жидкости также может быть отнесена к аналитической динамике и является одной из наиболее серьезных ее проблем. Общая постановка задачи о движении твердого тела в идеальной жидкости принадлежит известному немецкому физическому Г. Кирхгофу — автору классических «Лекций по математической физике», первый том которых посвящен механике. Решение общих уравнений движения твердого тела в жидкости было дано Р. Клебшем, Н. Е. Жуковским, А. М. Ляпуновым, В. А. Стекловым и С. А. Чаплыгиным; последнему принадлежит геометрическая интерпретация движения твердого тела в жидкости, не уступающая по наглядности классической интерпретации Пуансо вращения твердого тела в пустоте.

Задача о движении артиллерийского снаряда составляет предмет специальной науки — внешней баллистики; с появлением в середине прошлого столетия нарезных орудий, ставивших себе целью придание снаряду вращения, необходимого для устойчивости в полете, задача внешней баллистики оказалась тесно связанной с динамикой тяжелого твердого тела в сопротивляющейся

---

СТЕКЛОВ ВЛАДИМИР АНДРЕЕВИЧ (1863—1926) — русский и советский математик, акад. Петербургской АН (1912), вице-президент АН СССР (1919).

ГОРЯЧЕВ ДМИТРИЙ НИКАНОРОВИЧ (1867—1949) — русский и советский математик и механик.

КОЛОСОВ ГУРИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ (1867—1936) — русский и советский механик, чл.-корр. АН СССР.

КЛЕЙН ОСКАР БЕНДЖАМИН (*Klein Oskar Benjamin*, 1894—1977) — шведский физик-теоретик, чл. Шведской АН.

ЗОММЕРФЕЛЬД АРНОЛЬД ИОГАНН ВИЛЬГЕЛЬМ (*Sommerfeld Arnold Johann Wilhelm*, 1868—1951) — немецкий физик-теоретик, иностр. чл. АН СССР (1929), член многих других академий и научных обществ.

КИРХГОФ ГУСТАВ РОБЕРТ (*Kirchhoff Gustav Robert*, 1824—1887) — иностр. чл.-корр. Петербургской АН (1862), чл. Берлинской АН (1874).

КЛЕБШ РУДОЛЬФ ФРИДРИХ АЛЬФРЕД (*Clebsch Rudolf Friedrich Alfred*, 1833—1872) — немецкий математик и механик.

среде. Такая постановка задачи и решение ее принадлежат русскому ученому-артиллеристу Н. В. Маиевскому. Дальнейшим своим развитием задача эта обязана главным образом Н. А. Забудскому и А. Н. Крылову.

Как упоминалось ранее, основы кинематики твердого тела были заложены Эйлером. В начале XIX столетия кинематика в связи с выросшими потребностями машинной техники выделилась в отдельную дисциплину. В развитие идей Эйлера была создана геометрическая теория конечных перемещений и движения твердого тела. Особое значение приобрела кинематика механизмов. В этой области чрезвычайно важны работы нашего гениального математика П. Л. Чебышёва, положившего созданную им теорию функций, наименее уклоняющихся от нуля, в основу синтеза механизмов и, в частности, построения приближенных прямолинейно-направляющих механизмов.

Крупнейшей проблемой механики является задача об устойчивости равновесия и движения материальных систем\*. Первая общая теорема об устойчивости равновесия системы, находящейся под действием консервативных сил, принадлежит Лагранжу и изложена в первом томе «Аналитической механики». Согласно этой теореме, достаточным условием равновесия является наличие в положении равновесия минимума потенциальной энергии. Доказательство Лагранжа основывалось на рассмотрении тех движений, которые система должна совершить при отклонении ее от состояния равновесия, соответствующего минимуму потенциальной энергии. Эти движения исследуются с помощью метода малых колебаний, и поэтому само доказательство имело присущие этому методу недостатки.

Строгое доказательство теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия консервативной системы было дано профессором уни-

---

\* История развития учения об устойчивости движения и равновесия подробно изложена в книге Н. Д. Моисеева «Очерки развития теории устойчивости» (Гостехиздат, 1949).

---

МАИЁВСКИЙ НИКОЛАЙ ВЛАДИМИРОВИЧ (1823—1892) — русский ученый-артиллерист, чл.-корр. Петербургской АН (1878).

ЗАБУДСКИЙ НИКОЛАЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ (1853—1917) — русский ученый в области артиллерии и баллистики, чл.-корр. Парижской АН (1911).

ЧЕБЫШЁВ ПАФНУТИЙ ЛЬВОВИЧ (1821—1894) — русский математик и механик, акад. Петербургской АН (1856).

верситета в Юрьеве (ныне Тарту) Ф. Г. Миндингом в 1838 г.; оно содержало в себе некоторые ограничения в выборе начальных условий, которые впоследствии, в 1846 г., были устранены в классическом и ныне общепринятом доказательстве Дирихле.

В соответствии с теоремой Лагранжа условие минимума потенциальной энергии является достаточным условием устойчивости равновесия. Естественно было поставить вопрос о его необходимости, иными словами, выяснить, будет ли равновесие неустойчивым, если в положении равновесия потенциальная энергия не имеет минимума. С практически исчерпывающей полнотой положительный ответ на этот вопрос был дан значительно позднее, в 1897 г., А. М. Ляпуновым с помощью методов, указанных им в его основном труде «Общая задача об устойчивости движения» [т. II, 18], опубликованном в 1892 г.

Метод малых колебаний, примененный Лагранжем для доказательства теоремы об устойчивости равновесия, оказался плодотворным орудием для исследования устойчивости установившихся движений. В этом направлении должен быть отмечен «Трактат об устойчивости заданного движения» Э. Рауса, опубликованный в 1877 г. В этом труде исследование устойчивости по методу малых колебаний было сведено к рассмотрению распределения корней некоторого характеристического уравнения и указаны необходимые и достаточные условия, при которых эти корни имеют отрицательные вещественные части. Важнейшие теоремы, относящиеся к задаче об устойчивости гироскопических систем, содержатся в известном труде В. Томсона и П. Тэта «Трактат по натуральной философии» (1879).

---

МИНДИНГ ФЕРДИНАНД ГОТЛИБОВИЧ, ЭРНСТ ФЕРДИНАНД АДОЛЬФ (*Minding Ernst Ferdinand Adolf, 1806—1885*) — русский математик, чл.-корр. (1864) и почетный чл. (1879) Петербургской АН.

ДИРИХЛЁ ПЕТЕР ГУСТАВ ЛЕЖЁН (*Dirichlet Peter Gustav Lejeune, 1805—1859*) — немецкий математик, иностр. чл.-корр. Петербургской АН (1837), чл. Лондонского королевского общества (1855), Парижской АН (1854), Берлинской АН.

РАЎС ЭДВАРД ДЖОН (*Routh Edward John, 1831—1907*) — английский физик и математик.

ТОМСОН ВИЛЬЯМ ЛОРД КЕЛЬВИН (*Thomson Lord Kelvin William, 1824—1907*) — английский физик и математик, иностр. чл.-корр. (1877) и иностр. почетный чл. (1896) Петербургской АН, чл. Лондонского королевского общества (1851) и его президент (1890—1895).

ТЭТ ПЕТЕР (*Tait Peter, 1831—1901*) — шотландский физик и математик, чл. Эдинбургского королевского общества.

С иной точки зрения, чем у Рауса, задача об устойчивости движения была рассмотрена в сочинении Н. Е. Жуковского «О прочности движения», относящемся к 1882 г., в котором изучалась главным образом орбитальная устойчивость. Критерии орбитальной устойчивости, установленные Н. Е. Жуковским, сформулированы им в наглядной геометрической форме, столь характерной для всего научного творчества нашего великого механика.

Строгая постановка задачи об устойчивости движения и указание наиболее общих методов ее решения, а также конкретное рассмотрение отдельных важнейших задач теории устойчивости принадлежат великому русскому ученому А. М. Ляпунову и изложены им в ранее уже упомянутом фундаментальном сочинении «Общая задача об устойчивости движения» [т. II, 18]. Отказавшись от метода малых колебаний, Ляпунов связывает решение задачи об устойчивости с рассмотрением некоторых носящих ныне его имя функций, из сопоставления знаков которых со знаками их производных по времени можно сделать заключение об устойчивости или неустойчивости рассматриваемого состояния движения. С помощью этого метода Ляпунов в своих знаменитых теоремах об устойчивости по первому приближению сумел указать границы применимости метода малых колебаний, который, оставаясь до Ляпунова необоснованным, служил лишь эвристическим средством, требовавшим в каждом отдельном случае проверки законности применения. Оказалось также, что существует класс случаев, когда метод малых колебаний вообще не может дать ответа на вопрос об устойчивости движения. Изучение этих *особых* случаев составляет наиболее трудную и до сих пор еще мало исследованную область теории устойчивости, в которой основополагающее значение и по настоящее время имеют результаты самого Ляпунова. Рассмотрение этих особых случаев тесно связано с теорией нелинейных колебаний.

Как указывалось уже выше, общая теория малых колебаний материальной системы около положения ее устойчивого равновесия была впервые изложена в «Аналитической механике» Лагранжа, который, однако, в одном существенном пункте допустил погрешность, утверждая, что в том случае, когда частотное уравнение имеет кратные корни, решение задачи должно содержать время в качестве множителя перед тригонометрической функцией. Ошибка Лагранжа была устранена в 1859 г. О. И. Со-

мовым, указавшим на то, что структура дифференциальных уравнений малых колебаний консервативной системы соответствует исключительному случаю, при котором наличие кратных корней характеристического уравнения не может вызвать появления времени вне знака тригонометрических функций; одновременно с О. И. Сомовым этот вопрос был разъяснен К. Вейерштрассом. Последующее развитие теории малых колебаний в XIX в. пошло главным образом по пути учета влияния сопротивлений, приводящих к затуханию колебаний, и внешних возмущающих сил, создающих так называемые вынужденные колебания. Задачи такого рода возникли впервые в связи с изучением затухающих колебаний магнитной стрелки. Теория вынужденных колебаний и учение о резонансе появились в ответ на запросы машинной техники и в первую очередь в связи со строительством железнодорожных мостов и созданием быстроходных паровозов. Классическая теория малых колебаний нашла свое завершение в известном трактате Рэля «Теория звука» [т. II, 40], вышедшем в 1877 г. Важной отраслью техники, развитие которой потребовало приложения методов теории колебаний, явилось регуляторостроение; основоположником современной динамики процесса регулирования является выдающийся русский ученый и инженер И. А. Вышнеградский. В 1876 г. в работе «О регуляторах прямого действия» Вышнеградский впервые сформулировал свое известное неравенство, которому должна удовлетворять всякая устойчиво работающая машина, снабженная регулятором.

Дальнейшее развитие теории малых колебаний было тесно связано с возникновением отдельных крупных технических проблем. Из наиболее выдающихся работ в этом направлении необходимо отметить прежде всего классические исследования по

---

СОМОВ ОСИП, ИОСИФ ИВАНОВИЧ (1815—1876) — русский математик и механик, акад. Петербургской АН (1862).

ВЕЙЕРШТРАСС КАРЛ ТЕОДОР ВИЛЬГЕЛЬМ (*Weierstraß Karl Theodor Wilhelm*, 1815—1897) — немецкий математик, иностр. чл.-корр. (1864) и иностр. почетный чл. (1895) Петербургской АН.

РЭЛЭЙ, РЕЙЛИ ЛОРД СТРАТТ ДЖОН УИЛЬЯМ (*Rayleigh Lord Strutt John William*, 1842—1919) — английский физик, иностр. чл.-корр. Петербургской АН (1896), чл. Лондонского королевского общества (1873).

ВЫШНЕГРАДСКИЙ ИВАН АЛЕКСЕЕВИЧ (1831—1895) — русский ученый и государственный деятель, основоположник теории автоматического регулирования, почетный чл. Петербургской АН (1888).

теории качки корабля на волнении, принадлежащие знаменитому математику и кораблестроителю А. Н. Крылову. Сложная задача взаимодействия корпуса судна и волнующейся поверхности воды приведена А. Н. Крыловым к простой и наглядно составленной системе уравнений малых колебаний корабля, описывающих с достаточной для практики степенью точности основные черты этого явления. Развитию технических приложений теории колебаний способствовали другие работы А. Н. Крылова, научная деятельность которого была направлена на применение современных достижений математики и механики к решению важнейших механических задач.

Существенное значение для теории колебаний имели созданные Б. Б. Голицыным приборы для измерения колебаний, нашедшие широкое применение как в многочисленных технических вопросах, так и в сейсмометрии (измерении колебаний земной коры).

Первые задачи, относящиеся к нелинейным колебаниям, были рассмотрены М. В. Остроградским и Рэлеем. Основы общей теории нелинейных колебаний заключаются в трудах А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре; в дальнейшем наибольшие успехи в развитии этой области принадлежат советским ученым.

К концу XIX в. выделилась особая группа механических задач, для решения которых оказалось полезным рассматривать массу как изменяющуюся в процессе движения величину. Основополагающая роль в создании новой области теоретической механики — *динамики переменной массы* — принадлежит И. В. Мещерскому. В 1897 г. им была опубликована фундаментальная работа «Динамика точки переменной массы» [т. II, 21]. Общее уравнение динамики точки переменной массы, установленное И. В. Мещерским, послужило в дальнейшем основой тео-

---

ГОЛИЦЫН БОРИС БОРИСОВИЧ (1862—1916) — русский физик и геофизик, основоположник сейсмометрии, акад. Петербургской АН (1908), чл. Лондонского королевского общества (1916), президент Международной сейсмической ассоциации (1911).

ПУАНКАРЁ ЖЮЛЬ АНРИ (*Poincaré Jules Henri*, 1854—1912) — французский математик и астроном, иностр. чл.-корр. Петербургской АН (1895), чл. Парижской АН (1887).

МЕЩЕРСКИЙ ИВАН ВСЕВОЛОДОВИЧ (1859—1935) — русский и советский ученый в области теоретической и прикладной механики. С 1902 г. заведовал кафедрой теоретической механики Санкт-Петербургского (впоследствии Ленинградского) Политехнического института.



рии реактивного движения, пионером развития которого явился известный русский ученый и изобретатель К. Э. Циолковский.

К славной плеяде русских ученых, еще в дореволюционное время поставивших механику на службу техническому прогрессу\*, принадлежал основоположник гидродинамической теории трения выдающийся ученый и инженер Н. П. Петров (1838—1920).

**Современные направления развития механики.** Преимущественное значение в теоретической механике наших дней приобрели вопросы равновесия и движения сплошных сред, т. е. задачи теории упругости, гидродинамики и газовой динамики с их многочисленными приложениями в авиации, машиностроении, кораблестроении и других областях техники. Вместе с тем продолжают успешно развиваться вопросы устойчивости движения систем с конечным числом степеней свободы, теории колебаний и динамики твердого тела, также тесно связанные с разнообразными техническими задачами и в первую очередь с теорией автоматического регулирования машин и производственных процессов, с динамикой самолета и корабля, с теорией гироскопических приборов и с многочисленными техническими проблемами технологии, горного дела, транспорта и других прикладных областей.

Благодаря плодотворной научной деятельности выдающихся ученых, среди которых особо следует выделить имена М. В. Остроградского, Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина, А. М. Ляпунова и А. Н. Крылова, теоретическая механика в нашей стране достигла больших успехов и оказалась в состоянии не только справиться с задачами, выдвинутыми перед нею отечественной техникой, но и дать мощные толчки к развитию техники во всем мире.

«Отец русской авиации» Н. Е. Жуковский заложил основы авиационной науки. Им было открыто фундаментальное положение о вихревом происхождении подъемной силы крыла и дана формула, количественно определяющая эту силу. Благодаря работам Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина выросла современная

---

\* Достижениям русских ученых в области механики посвящена книга Я. Л. Геронимуса «Очерки о работах корифеев русской механики» (Гостехиздат, 1952).

---

ЦИОЛКОВСКИЙ КОНСТАНТИН ЭДУАРДОВИЧ (1857—1935) — русский и советский ученый и изобретатель в области аэродинамики, ракетодинамики, теории самолета и дирижабля.

ЖУКОВСКИЙ НИКОЛАЙ ЕГОРОВИЧ (1847—1921) — русский ученый в области механики, чл.-корр. Петербургской АН (1894).

аэромеханика. Н. Е. Жуковским была создана первая *вихревая* теория винта, высказаны основные положения новой науки — механики полета. С. А. Чаплыгину принадлежат основополагающие исследования в области газовой динамики, указавшие на многие десятки лет вперед пути развития аэродинамики больших скоростей.

В наше время все более и более становится очевидным принципиальное и практическое значение созданной А. М. Ляпуновым общей теории устойчивости движения, особенно в связи с современными приложениями этой теории к важнейшим вопросам техники.

Работы А. Н. Крылова по теории качки корабля на волнении, а также фундаментальные исследования по вопросам плавучести и непотопляемости кораблей, прочности их корпуса, теории девиации компасов ставят его имя в первый ряд создателей современной науки о кораблестроении.

Важнейшим фактором, способствовавшим развитию в нашей стране теоретической механики, явилось преподавание ее в высшей школе, высоким уровнем которого мы обязаны в первую очередь М. В. Остроградскому и его последователям. Приближение преподавания механики к вопросам техники представляет одну из важных сторон деятельности Н. Е. Жуковского. Выдающуюся роль в организации и постановке преподавания теоретической механики сыграли Д. К. Бобылев, И. В. Мещерский, А. Н. Крылов, Г. К. Суслов, Е. Л. Николаи, А. Н. Динник, А. А. Фридман.

---

**КРЫЛÓВ АЛЕКСЕЙ НИКОЛАЕВИЧ** (1863—1945) — русский и советский кораблестроитель, механик и математик, акад. АН СССР (1916). С 1890 г. преподавал в Морской академии и в Санкт-Петербургском (впоследствии Ленинградском) Политехническом институте.

**БОБЫЛЁВ ДМИТРИЙ КОНСТАНТИНОВИЧ** (1842—1917) — русский физик и механик, чл.-корр. Петербургской АН (1896).

**СУСЛОВ ГАВРИИЛ КОНСТАНТИНОВИЧ** (1857—1935) — русский и советский ученый в области механики.

**НИКОЛАЙ ЕВГЕНИЙ ЛЕОПОЛЬДОВИЧ** (1880—1950) — русский и советский ученый в области механики; совместно с А. И. Лурье стоял у истока издания журнала «Прикладная математика и механика».

**ДИННИК АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ** (1876—1950) — русский и советский ученый в области механики и теории упругости, акад. АН СССР (1946), акад. АН УССР (1943).

**ФРИДМАН АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ** (1888—1925) — русский и советский физик и математик. В 1920-х годах Л. Г. Лойцянский был ассистентом А. А. Фридмана. Совместно ими была опубликована книга «Теоретическая механика. Кинематика» (Петроград: Изд-во Военно-Морской Академии, 1924. — 277 с.); подробнее о ней см. с. 8.

После 1917 г. теоретическая механика в нашей стране продолжала весьма успешно развиваться. Советская механика выросла в стенах Центрального аэрогидродинамического института (ЦАГИ), носящего ныне имя своего организатора Н. Е. Жуковского, в институтах Академии наук СССР и союзных республик, в головных и отраслевых научно-исследовательских институтах, конструкторских бюро и заводских лабораториях промышленности, на кафедрах и в лабораториях высших учебных заведений. Свою плодотворную научную деятельность продолжали корифеи русской механики Н. Е. Жуковский, С. А. Чаплыгин, А. Н. Крылов.

Ученым Советского Союза принадлежат результаты первостепенной важности в области теории нелинейных колебаний. Задачи теории нелинейных колебаний возникли в радиотехнике и получили широкое применение в теории автоматического регулирования машин и производственных процессов, технической акустике и электротехнике. Постановка, теоретическое рассмотрение и организация широкого экспериментального изучения нелинейных колебаний представляют важную заслугу Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси — создателей школы советских исследований в этой области.

Основы математического аппарата теории нелинейных колебаний были заключены в работах А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре; известные в качественной теории дифференциальных уравнений *предельные циклы* А. Пуанкаре были поставлены А. А. Андроновым в связи с задачей исследования возникающих в ламповом генераторе незатухающих колебаний с амплитудой, не зависящей от начальных условий. Изучение условий возникновения такого рода самовозбуждающихся колебаний, названных А. А. Андроновым *автоколебаниями*, представляет важнейшую задачу современной теории нелинейных колебаний во всех областях ее применения, в том числе и в механических системах.

Наряду с методами, основанными на качественной теории дифференциальных уравнений — топологическими — характер-

---

МАНДЕЛЬШТАМ ЛЕОНИД ИСААКОВИЧ (1879—1944) — русский и советский физик, акад. АН СССР (1929).

ПАПАЛЕКСИ НИКОЛАЙ ДМИТРИЕВИЧ (1880—1947) — русский и советский физик, акад. АН СССР (1939).

АНДРОНОВ АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ (1901—1952) — советский физик, акад. АН СССР (1946).

ными для школы А. А. Андропова, получило свое развитие и аналитическое направление в теории нелинейных колебаний. Методы, предложенные в этих исследованиях, сделали доступными разыскание и рассмотрение не только установившихся периодических движений, но и процессов установления колебаний в нелинейных системах.

Теория устойчивости движения А. М. Ляпунова получила свое развитие в многочисленных исследованиях советских ученых. Наибольшее техническое значение вопросы устойчивости движения как линейных, так и нелинейных систем имеют в задачах теории автоматического регулирования, важная роль в развитии которой принадлежит И. Н. Вознесенскому и А. А. Андронову. Современное развитие теории автоматического регулирования тесно связано с применением родственной теории электрических колебаний частотных методов исследования в линейных задачах и теории устойчивости Ляпунова и методов нелинейной теории колебаний в нелинейных задачах.

Проблемы динамики твердого тела развивались главным образом в связи с теорией гироскопических явлений. Важными исследованиями в этой области отечественная наука обязана А. Н. Крылову, Е. Л. Николаи и Б. В. Булгакову. К области динамики твердого тела относятся также работы по внешней баллистике вращающегося снаряда, основы которой, как уже указывалось, были заложены Н. В. Маиевским.

Невозможно перечислить работы по динамике материальной точки и системы точек, проведенные у нас в Союзе в связи с конкретными запросами машиностроения, приборостроения, горного дела, транспорта и других отраслей техники; решение такого рода задач отвечает нуждам промышленности и обогащает содержание теоретической механики.

Деятельность Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина в области гидроаэромеханики продолжали многочисленные советские ученые, обогатившие своими трудами теорию крыла и винта, газовую динамику, теорию фильтрационных движений жидкостей и газов и другие разделы современной гидроаэродинамики.

---

ВОЗНЕСЕНСКИЙ ИВАН НИКОЛАЕВИЧ (1887—1946) — русский и советский ученый в области гидромашиностроения и автоматического регулирования машин, чл.-корр. АН СССР (1939).

БУЛГАКОВ БОРИС ВЛАДИМИРОВИЧ (1900—1952) — советский ученый в области механики, чл.-корр. АН СССР (1946).

Фундаментальные работы в области теории упругости, относящиеся еще к дореволюционному времени, принадлежат И. Г. Бубнову, Б. Г. Галёркину и Г. В. Колосову. В советское время теория упругости интенсивно развивалась во всех своих разделах. Должны быть отмечены выдающиеся достижения наших ученых по решению так называемой плоской задачи теории упругости, по теории распространения волн в упругой среде, по устойчивости упругих систем, прочности тонкостенных конструкций. В последние годы особенно интенсивное развитие получила теория пластических деформаций.

В курсе теоретической механики вопросы гидродинамики и теории упругости не затрагиваются; в связи с этим мы удовольствуемся приведенным кратким перечислением основных направлений развития отечественных исследований по механике сплошных сред\*.

---

\* Подробному изложению современного состояния важнейших разделов механики в Советском Союзе посвящен сборник «Механика в СССР за тридцать лет» (Гостехиздат, 1950).

---

**БУБНОВ ИВАН ГРИГОРЬЕВИЧ** (1872—1919) — русский инженер-кораблестроитель, создатель строительной механики корабля как науки. Преподавал в Санкт-Петербургском политехническом институте (с 1904 г.) и в Морской академии (с 1910 г.).

**ГАЛЁРКИН БОРИС ГРИГОРЬЕВИЧ** (1871—1945) — русский и советский инженер и механик, акад. АН СССР (1935).

## Литература

1. *Борисенко И. А., Тарапов И. Е.* Векторный анализ и начала тензорного исчисления: учеб. пособие для вузов. — 3-е изд. — М.: Высш. шк., 1966. — 252 с.; То же. — 6-е изд. — Харьков: Вища шк., 1986. — 218 с.
2. *Галин А. А.* Контактные задачи теории упругости. — М.: Гостехтеоретиздат, 1953. — 264 с.; Он же. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. — М.: Наука, 1980. — 304 с.
3. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — 9-е изд. — М.: Наука, 1965. — 426 с.
4. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — 7-е изд., испр. — М.: Дрофа, 2003. — 840 с. — (Классики отечественной науки).
5. *Лурье А. И.* Теория упругости. — М.: Наука, 1970. — 939 с.; Он же. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 512 с.
6. *Марков А. А.* Избранные труды. Теория чисел. Теория вероятностей / Под ред. с коммент. Ю. В. Линника. — М.: Изд-во АН СССР, 1951. — 720 с.
7. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды: учебник для ун-тов и вузов. В 2 т. Т. 1. — М.: Наука, 1973. — 536 с.; То же. — 5-е изд., испр. — М.: Наука, 1994. — 528 с.
8. *Newton I.* Philosophiae naturalis principia mathematica. — London, 1686 (в переводе: *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии / Пер. с лат. с прим. и пояснениями А. Н. Крылова. // Изв. Николаевск. Морской акад. 1913. Вып. IV; То же. — *Крылов А. Н.* Собрание трудов. В 12 т. Т. VII. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1936. — 696 с.; То же. — *Ньютон И.* Определения. Аксиомы или законы движения: из «Математических начал натуральной философии» / Пер. акад. А. Н. Крылова. — М.: Ин-т пробл. механики АН СССР: препринт, 1985. — № 249. — 54 с.).
9. *Poinsot L.* Éléments de statique. — Paris: Gauthier — Villars, 1842 (в переводе: *Пуансо Л.* Элементы статики. — 1864).

## Предметный указатель

- Абсолютная производная 337  
Абсолютно твердое тело 26, 119  
Абсолютное время 163  
— пространство 162  
Аксиальные векторы 50, 141  
Аксонд неподвижный 308, 361  
— — винтовых осей 323, 327  
— подвижный 308  
— — винтовых осей 327  
Амплитуда колебания 168  
— комплексная гармонического колебания 168  
Анализ гармонический 174  
Архимеда закон 160, 161  
Архимедова сила 161
- Биения 173  
Бинормаль кривой 208, 209  
Близкодействие 22  
Блок идеальный 47  
Бэра закон 346
- Варианона теорема 52, 55, 84, 106  
Вектор 25, 128, 133  
— бесконечно малого поворота 264  
— главный 53, 62  
— Дарбу 330  
— единичный бинормали 211  
— — главной нормали 211  
— — касательной 210  
— напряжения 122, 157  
— поступательного перемещения 263  
— скорости 185—187, 189, 190  
—, сопутствующий антисимметричной части дифференциального тензора поля скоростей 253  
—, — антисимметричному тензору 140  
— углового ускорения 255, 284, 309  
— угловой скорости 252, 304  
— — — вращения фигуры 267  
— ускорения 188—190  
— — в криволинейном движении 213  
— — свободного падения 121
- Вектор физический 139  
Векторная производная вектора-функции по аргументу 186  
Векторное произведение 51, 141  
Вектор-радиус мгновенного центра 276  
— точки 165, 185, 220  
Вектор-функция 185  
Векторы аксиальные 50, 141  
— единичные 220  
— истинные 253  
— свободные 59  
— скользящие 27, 252  
Вихрь (ротатор) вектора 373  
Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси 236 и д.  
— — — — — точки 294  
Время 23  
— абсолютное 23
- Гармоники 171  
Гаусса — Остроградского формула 152—156  
— — —, тензорная форма 156  
Герц 167  
Главная нормаль кривой 209  
Главные значения симметричного тензора 145  
— направления в пространстве 146  
— оси симметричного тензора 145, 146  
— — тензора напряжений 151  
Главный вектор 53, 62, 78, 83, 84, 85  
— — объемных сил 122  
— — поверхностных сил 121, 122  
— — сил давления жидкости 160  
— момент совокупности сил относительно начала координат 85  
— — — — — осей координат 64  
— — — — — оси 63  
— — — — — точки 80  
— — — — — центра приведения 63, 80  
Годограф вектора-функции 185, 186  
— скорости 201, 202, 229

- Градиент векторной функции 374  
 — скалярной функции 154, 370  
 График движения 166  
 График пути 184  
 Гаука шарнир 358—361
- Давление** 148  
 — гидростатическое 150, 159  
 — нормальное 91
- Дальнодействие** 22  
**Дальность полета** 200  
**Дарбу вектор** 330  
**Движение абсолютно твердого тела,**  
 общий случай 314 и далее  
 — абсолютное 268, 333  
 — винтовое 181, 325  
 — колебательное 20  
 — — гармоническое 167  
 — конвективное 376  
 — криволинейное 175, 197  
 — мгновенно-поступательное 274,  
 352  
 — натурального триэдра траектории  
 точки 329  
 — орбитальное 20  
 — относительное 268, 332  
 — переносное 268, 333, 334  
 — плоское твердого тела 256  
 — поступательное твердого тела 234,  
 235  
 — прямолинейное 166, 214  
 — — равномерное 166, 214  
 — — равнопеременное 166, 191  
 — регулярное прецессионное 327  
 — составное 332  
 — эллиптическое обращенное 261
- Девизор тензора** 143, 149  
**Действие и противодействие** 28  
**Декартова прямоугольная система**  
 координат 221, 223  
**Декремент логарифмический** 195  
**Деформируемая среда** 24  
**Деформируемость тела** 26  
**Диада** 135, 136  
 — координатная 136
- Диадное представление тензора** 147  
 — произведение векторов 136, 374  
**Дивергенция вектора** 373  
 — тензора 156, 158, 375  
**Динама** 80, 82, 89, 325  
**Динамика** 19  
**Дифференциал дуги** 183, 223, 330  
**Дифференциалы во времени и в про-**  
 странстве 152
- Дифференциальный оператор** 155  
**Дифференцирование по направлению**  
 372
- Евклидова геометрия** 23  
**Евклидово пространство** 163
- Жидкость тяжелая** 159
- Задача статически неопределенная**  
 46, 157  
 — — определенная 46, 66  
**Закон Архимеда** 160, 161  
 — Бэра 346  
 — всемирного тяготения 229  
 — гидростатического давления в тя-  
 желой жидкости 160  
 — Ньютона второй 22, 28  
 — — первый 22, 28  
 — — третий 22, 28  
 — Паскаля 150  
**Законы Кеплера** 227, 228  
**Затвердевания принцип** 123  
**Зацепление внешнее** 248, 291, 353  
 — внутреннее 248, 291, 353  
 — дифференциальное 356  
 — эписицилическое (планетарное)  
 353  
 — — — коническое 355
- Идеально гладкая поверхность** 31  
**Изотропия тензора** 143, 146, 150  
 — тензорной единицы 138  
**Инвариант статический второй** 85  
 — — первый 80, 83, 85  
 — тензора квадратичный 143  
 — — кубический 143  
 — — линейный 142  
**Инвариантность длины вектора** 129  
 — квадрата длины вектора 132  
 — функции, задающей поле скаляр-  
 ной величины 129  
**Интеграл объемный** 152  
 — поверхностный 152, 153
- Качение без скольжения** 272  
 — — — подвижной центроиды по не-  
 подвижной 282  
**Квазивекторы** 124  
**Кинематика** 20  
 — сплошной среды 366 и далее  
**Колебания затухающие** 194, 195  
**Конус трения** 93, 94



- Конхоида круга 261, 262  
— прямой 263  
Конхоидограф 262  
Координаты криволинейные точки 219  
— центра параллельных сил 107  
— — тяжести 108, 111  
— —, методы определения 111—118  
Коши равенства 123, 125, 132, 134, 147  
Коэффициенты Ляме 222—224  
— неравномерности передачи 360  
— — хода двигателя 243  
— относительного объемного расширения сплошной среды 384  
— трения верчения 94  
— — скольжения 91  
Кривизна кривой в данной точке 211  
— траектории 330  
Кривые разрыва 129  
Кронекера символ 138  
Круг соприкасающийся (круг кривизны) 211  
— трения 99  
Кручение кривой 330
- Лагранжа переменные 367  
Линейное преобразование векторов 132, 133  
Линия винтовая 182  
— действия силы 27, 37, 83  
— координатная 220  
— узлов 295  
Лиссажу фигуры 175—179  
Лобовая передача 248  
Локсодромия 231, 232  
Ляме коэффициенты 222—224
- Масса 22  
Материальная точка 19, 20  
Материальное тело 19  
— —, модели 19, 26  
Мгновенная ось вращения твердого тела 304, 305  
Мгновенный центр скоростей 271, 272  
— — —, его координаты 275, 276  
— — ускорений 287, 288  
— — —, его координаты 290  
Меркатора проекция 231
- Метод Пуансо 60, 61, 63  
— сечений 30, 103  
Механизм автомобильного дифференциала 357  
— кривошипно-ползунный 173—175, 179, 196  
— мальтийского креста 341  
— четырехзвенный 40  
— эпициклический (планетарный) 353  
Механическое движение 19  
Момент вектора угловой скорости относительно центра 254  
— инерции 22  
— пары сил 56  
— силы относительно осей координат 54  
— — — оси 49, 53, 54  
— — — точки 48—53, 79, 80  
— трения качения 96
- Наклонная плоскость 97  
Напряжение 122  
— среднее 121  
Напряжения в сплошной среде 21  
— давления 125  
— касательные 125, 149  
— нормальные 125, 149  
— трения 125  
Натуральный триэдр (естественный трехгранник) кривой 209, 329, 330  
Начальные условия 197  
Нормаль внешняя 370  
— внутренняя 370  
— главная 208, 209
- Оператор дифференциальный 155  
Опора идеальная 31  
Оси координат 220  
Ось вращения 236  
— мгновенная винтовая 326  
— минимальных моментов 83  
— углового ускорения 310  
— центральная 83, 85  
Относительная производная 338
- Пара векторов угловой скорости 352  
— сил 32, 56  
Параметр динами 85  
Паскаль 150  
Паскаля закон 150  
Переменные Лагранжа 367  
— Эйлера 367

- Перемещение 186  
 — винтовое 317, 323  
 — деформационное 380  
 — квазитвердое 379  
 — точек сплошной среды 368  
 Период колебаний 167  
 Плоскости координатные 220  
 Плоскость пары сил 56  
 — симметрии однородного тела 111  
 Плотность распределения массы  
 средняя 120  
 — — сил средняя 121  
 — — физической величины по  
 сплошной среде 120  
 Плотность среды в точке 120  
 Поверхности координатные 220  
 — разрыва 129  
 Поворот положительный 50  
 Подпятник 33, 67, 90  
 Подшипник 32  
 — цилиндрический 67  
 Поле скоростей в плоском движении  
 267  
 — — нестационарное 368  
 — — стационарное 368  
 — ускорений в плоском движении  
 284, 285, 289  
 — в твердом теле, вращающемся  
 вокруг неподвижной точки 109,  
 311  
 — физической величины 129  
 Ползун 90, 96  
 полюс 258, 264, 269, 314  
 Правило векторного многоугольника  
 25  
 — параллелепипеда 25  
 — параллелограмма 25, 340  
 Преобразование компонент тензора  
 134  
 — — — обратное 134  
 — координат 130  
 — — обратное 130  
 Пресс клиновый 102  
 Прецессия обратная 313  
 — прямая 313  
 — регулярная 312  
 Принцип затвердевания 28, 123, 157  
 — обращения механизмов 262  
 — освобожденности от связей 31  
 Проекция скорости на оси криволинейных  
 координат 225, 226  
 — ускорения на оси криволинейных  
 координат 225, 226  
 Проекция вектора на ось 131, 132  
 — Меркатора 231  
 Производная конвективная 376  
 — локальная 376  
 — по направлению 371  
 — — нормали 371  
 Пространство 22  
 Псевдовекторы 50, 141, 253  
 Псевдоскаляры 253  
 Пуансо метод 60, 61, 63  
 Путь 20, 183  
 — в равнопеременном прямолинейном  
 движении 192  
 Равенства Коши 123, 125, 132, 147,  
 148  
 Равновесие абсолютно твердого сво-  
 бодного тела 26, 28, 36  
 Равновесие абсолютно твердого тела  
 157  
 — деформируемого тела 157  
 — идеально текучей среды 149, 159  
 — при наличии сил трения 90  
 — тела под действием несходящейся  
 совокупности сил 65  
 — — — сходящейся совокупности  
 сил 36, 45  
 — — с двумя закрепленными точка-  
 ми 70, 71  
 Равнодействующая сила 35  
 — совокупности сил 83  
 — сходящейся совокупности сил 35,  
 45  
 Радиан 237  
 Радиус кривизны 211  
 — — винтовой линии 216  
 — — циклоиды 217  
 — кручения 330  
 Разложение вектора скорости по еди-  
 ничным векторам осей криволинейных  
 координат 225, 226  
 — — — ускорения по осям натураль-  
 ного триэдра 212  
 Размах колебаний 168  
 Распределение скоростей в движу-  
 щейся плоской фигуре 273 и да-  
 лее  
 — — — — — в твердом теле в общем случае  
 его движения 318  
 — — — — — при вращении вокруг  
 неподвижной оси 245, 251, 267  
 — — — — — — — — — — — точки 306  
 — ускорений в твердом теле в общем  
 случае его движения 319

- Распределительность векторного произведения 52  
 Реакции опорные балки 40  
 — — в шарнирах 39  
 — — двухарочной фермы 39  
 Реакция связи 31  
 Сателлиты 353, 356, 357  
 Свободные векторы 59  
 Связи 31  
 Связь между «старыми» и «новыми» координатами 130, 140  
 Сдвиг среды чистый 150, 151  
 Семейство поверхностей уровня 370  
 Сила 22, 25  
 — архимедова (подъемная гидростатическая) 161  
 — гидростатического давления 109  
 — как вектор 25  
 — кориолисова 346  
 —, модель 24  
 — объемная 121, 157  
 — поверхностная элементарная 122  
 — поворотная см. кориолисова  
 — подъемная 71, 72  
 — равнодействующая 34, 353  
 — трения 31, 90  
 Силовой многоугольник 34, 35  
 — треугольник 38, 39  
 Силы внутренние 21, 30, 120, 122  
 — поверхностные 121  
 Символ Кронекера 138  
 Симметричность тензора напряжений 148  
 Система координат абсолютная 333  
 — — гелиоцентрическая 164  
 — — декартова 221, 223  
 — — криволинейная 219, 223  
 — — ортогональная 223  
 — — относительная 333  
 — — правая 49, 50, 253  
 — — сферическая 222  
 — — цилиндрическая 221, 224  
 Системы отсчета 23  
 Скаляр физический 142  
 Скорости скошения координатных углов (скорости сдвига) 384  
 Скорость 20  
 — абсолютная 340  
 — — угловая 355  
 — в криволинейном движении 197—199  
 Скорость  
 — в прямолинейном гармоническом колебательном движении 193  
 — — равнопеременном движении 191  
 — — сферической системе координат 227  
 — — цилиндрической системе координат 226  
 — линейная (окружная) 244  
 — относительная угловая 349, 355  
 — относительного объемного расширения 385  
 — переносная 334  
 — — угловая 350, 355  
 — радиальная 348  
 — секторальная 228  
 — скольжения 325  
 — точек среды в переменных Лагранжа 369  
 — — — — Эйлера 369  
 — — твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси 244  
 — точки 183, 184  
 — угловая тела 237, 238, 352  
 Сложение векторов 25, 35  
 — винтовых движений 363  
 — вращений твердого тела вокруг параллельных осей 349—354  
 — — — — пересекающихся осей 354  
 — гармоник одинаковой частоты 171  
 — — разной частоты 172  
 — скоростей 337—340  
 — ускорений 342, 343  
 Совокупность сил 25  
 — — несходящаяся 87, 88  
 — —, статическая эквивалентность 25  
 — — сходящаяся 34, 66, 88  
 Соприкасающаяся плоскость 208, 209  
 Сплошная среда, модель 119  
 Статика 19, 20, 24  
 — абсолютно твердого тела 119  
 — сплошной деформируемой среды 20, 157  
 Статическая эквивалентность совокупности сил 25  
 Статический момент площади относительно оси 110, 112  
 Стрела провисания 38

- Тензор антисимметричный (кососимметричный) 138  
 — второго ранга 132, 133  
 — деформаций 380—385  
 — Леви-Чивита 373  
 — мультипликативный 135  
 — напряжений 128, 134, 147  
 — поворота 134  
 — самосопряженный (симметричный) 137  
 — скоростей деформаций 380, 384  
 — сопряженный (транспонированный) 135, 148  
 — сферический (шаровой) 143, 146, 149  
 — физический 133, 134, 136  
 Тензорная единица 137, 138  
 Теорема Вариньона см. Вариньона теорема  
 — —, общая форма 84  
 — Гельмгольца 380  
 — кинематики твердого тела основная 315  
 — о взаимности касательных напряжений 128  
 — — проекции геометрической суммы векторов 44  
 — — равновесии тела под действием двух сил 26  
 — — — — — трех сил 37  
 — — сложении движений твердого тела 362, 363  
 — — — скоростей 339, 340  
 — — — ускорений 342, 343  
 — Паппа — Гульдина 112, 113  
 — статики абсолютно твердого тела 63  
 — Эйлера 265, 301  
 Точка основная (полюс) 258, 263, 268, 314  
 Точки разрыва 129  
 Траектория 20, 165, 186  
 — навесная 198, 200  
 — настильная 198, 200  
 Трение верчения 90, 94  
 — качения 90, 95, 96  
 — скольжения 90, 97, 98  
 Трения круг 99  
  
 Угловая скорость 184, 237  
 Угол атаки 340  
 — нутации 295  
 — поворота 236, 237, 258  
 — прецессии 295  
  
 Угол смежности 210  
 — трения 91, 93, 98  
 — чистого вращения 295  
 Углы Эйлера 291, 295  
 Удар жесткий 216  
 — мягкий 216  
 Удельный вес 160  
 Умножение вектора на тензор 135  
 — тензора на вектор 134, 135  
 Упругость среды 159  
 Уравнение вращения тела 237  
 — конических сечений 228, 229  
 — мгновенной оси 307  
 — статики в напряжениях 157  
 — характеристическое 144  
 — центральной оси 85, 86, 89  
 Уравнения движения точки 165  
 — переносного движения 335  
 — траектории 165, 166  
 — — параметрические 165  
 — Эйлера гидростатики 159  
 — эллипса 176  
 Ускорение 20, 166  
 — абсолютное 342  
 — в криволинейном движении 197  
 — — прямолинейном гармоническом колебательном движении 193  
 — — сферической системе координат 227  
 — — цилиндрической системе координат 226, 227  
 — вращательное 245, 255, 284, 289, 310, 319, 320  
 — индивидуальное (субстанциональное) 377  
 — касательное 213  
 — кориолисово 343, 344, 349  
 — нормальное 213  
 — осестремительное 245, 256, 285, 289, 310, 319, 320  
 — относительное 342  
 — переносное 334  
 — поворотное 343—346  
 — поступательное 284, 319, 320  
 — точек среды в переменных Лагранжа 369  
 — — — конвективное 377  
 — — — локальное 377  
 — — твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси 244, 246, 255  
 — точки 184, 187



## Именной указатель\*

---

- Адамов А. А. 444  
Адамс (*Adams J. C.*) 403  
Аламбер Ле Рон д' (*Alembert Le Rond d' J.*) 399, 403, 404, 407—409, 411, 412, 414, 415  
Амонтон (*Amontons G.*) 90  
Ампер (*Ampère A. M.*) 406, 407  
Андронов А. А. 426, 427  
Аппель (*Appell P. E.*) 413  
Аристотель (Ἀριστοτέλης) 387, 390  
Архимед (Ἀρχιμήδης) 49, 160, 387  
Архит (Ἀρχύτας) 386
- Бернулли Д. (*Bernoulli D.*) 411  
Бернулли И. (*Bernoulli Johann*) 399, 400, 406, 412  
Бернулли Я. (*Bernoulli Jacob*) 407  
Бернштейн С. Н. 444  
Бобылёв Д. К. 7, 425  
Бойль (*Boyle R.*) 119  
Больцман (*Boltzman L.*) 413  
Борисенко И. А. 385, 429  
Брашман Н. Д. 413  
Бубнов И. Г. 428  
Булгаков Б. В. 427  
Бурсиан В. Р. 444  
Бэр К. М. 346
- Валлис (*Wallis J.*) 394  
Вариньон (*Varignon P.*) 52, 389  
Вейерштрасс (*Weierstraß K. Th. W.*) 422  
Вознесенский И. Н. 427  
Воронец П. В. 413  
Врен (*Wren Ch.*) 394  
Вышнеградский И. А. 422
- Галёркин Б. Г. 428  
Галилей Г. (*Galilei G.*) 387, 389, 390—393, 395, 397, 399, 406, 414  
Галин А. А. 95, 429  
Гамильтон (*Hamilton W. R.*) 415, 416  
Гаусс (*Gauß C. F.*) 152  
Гельмгольц (*Helmholtz H. L. F.*) 380, 414
- Герман (*Hermann J.*) 407, 408  
Геронимус Я. Л. 424  
Голицын Б. Б. 423  
Горячев Д. А. 418  
Гринберг Г. А. 440  
Гук (*Hooke R.*) 358  
Гульдин (*Guldin P.*) 112  
Гурьев С. Е. 405  
Гюйгенс (*Huygens Ch.*) 393, 394, 399, 414  
Гюнтер Н. М. 444
- Д'Аламбер см. Аламбер  
Дарбу (*Darboux J. G.*) 331  
Декарт (*Descartes R.*) 392, 393, 396, 397, 399, 404  
Динник А. Н. 425  
Дирихле (*Dirichlet P. G. L.*) 420  
Дородницын А. А. 442
- Евклид (Ευκλείδης) 23, 163
- Жуковский Н. Е. 5, 412, 415, 418, 421, 424—427
- Забудский Н. А. 419  
Зоммерфельд (*Sommerfeld A.*) 418
- Иоффе А. Ф. 440, 444
- Кардано (*Cardano J.*) 391  
Карман фон Т. (*Kármán von Th.*) 439  
Картезий см. Декарт  
Кеплер (*Kepler J.*) 227, 394  
Кикоин И. К. 440, 441  
Кирхгоф (*Kirchhoff G. R.*) 418  
Клапейрон (*Clapeyron B. P. E.*) 119  
Клебш (*Clebsch A.*) 418  
Клейн (*Klein O. B.*) 418  
Клеро (*Clairaut A. C.*) 402—404, 408  
Ковалевская С. В. 404, 417  
Колосов Г. В. 418, 428  
Коперник (*Kopernik M.*) 388, 394  
Кориолис (*Coriolis G. G.*) 343  
Котельников С. К. 405  
Кочин Е. Е. 385, 429  
Коши (*Cauchy A. L.*) 125

---

\* Полу жирным шрифтом и курсивом выделены те страницы, на которых приводятся соответственно биографические данные и библиография.

- Кошляков Н. С. 439  
 Кронекер (*Kronecker L.*) 138  
 Крутков Ю. А. 444  
 Крылов А. Н. 7, 24, 394, 419, 423, 424, 425—427, 444  
 Крылов Н. М. 439  
 Кулон (*Coulomb Ch. A.*) 90  
 Лагранж (*Lagrange J. L.*) 367, 387, 389, 390, 403, 406, 408—417, 419—421  
 Лаплас (*Laplace P. S.*) 403, 404  
 Ле Веррье (*Le Verrier U. J. J.*) 403  
 Леви-Чивита (*Levi-Civita T.*) 373  
 Лежандр (*Legendre A. M.*) 404  
 Лейбниц (*Leibniz G. W.*) 394, 398, 399  
 Леонардо да Винчи (*Leonardo da Vinci*) 388, 390  
 Лиссажу (*Lissajous J. A.*) 175  
 Лойцянская И. Л. 6, 18  
 Лойцянский Л. Г. 385, 389, 429, 439—446  
 Ломоносов М. В. 404, 405  
 Лурье А. И. 385, 389, 429, 440, 441, 443—447  
 Лурье К. А. 6, 18, 446  
 Ляме (*Lamé G.*) 222  
 Ляпунов А. М. 404, 417, 418, 420, 421, 423—427  
 Маиевский Н. В. 419, 427  
 Майер (*Majer J. R.*) 414  
 Маклорен (*Maclaurin C.*) 396, 401, 403, 404  
 Мандельштам Л. И. 426  
 Мариотт (*Mariotte E.*) 119  
 Марков А. А. 104, 429  
 Меркатор (*Mercator G.*) 231  
 Мещерский И. В. 7, 423, 425, 440, 444  
 Миндинг (*Minding E. F. A.*) 420  
 Моисеев Н. Д. 419  
 Монте маркиз дель (*Monte G. Marchese del*) 389  
 Мопертюи (*Maupertuis de Moreau P. L.*) 414, 415  
 Николаи Е. Л. 425, 427, 444, 445  
 Ньютон (*Newton I.*) 19, 20, 22, 23, 229, 392, 394—401, 403, 404, 406, 408, 409, 414, 429, 439  
 Остроградский М. В. 152, 389, 412, 413, 415, 416, 423—425  
 Пальмов В. А. 18, 447  
 Папалекси Н. Д. 426  
 Папп (Поллос) 112, 265  
 Паскаль (*Pascal B.*) 150  
 Петров Н. П. 92, 424  
 Пифагор (*Πυθαγόρας*) 163  
 Польгаузен К. (*Pohlhausen K.*) 439  
 Понселе (*Poncelet J. V.*) 104, 413  
 Прандтль Л. (*Prandtl L.*) 439  
 Пуанкаре (*Poincaré J. H.*) 404, 423, 426  
 Пуансо (*Poinsot L.*) 60, 389, 416, 418, 429  
 Пуассон (*Poisson S. D.*) 416  
 Раус (*Routh E. J.*) 420, 421  
 Рейнольдс (*Reynolds O.*) 92  
 Рен см. Врен  
 Роберваль де (*de Roberval G.*) 388  
 Родриг (*Rodrigues B. O.*) 401  
 Рождественский Д. С. 444  
 Рэлей лорд Стрэтт (*Strutt J. W. Lord Rayleigh*) 422, 423  
 Седов Л. И. 5, 385, 429, 443  
 Семенов Н. Н. 444  
 Слудский Ф. А. 413  
 Смирнов В. И. 439  
 Сомов О. И. 7, 421, 422  
 Стевин С. (*Stevin S.*) 388, 406  
 Стеклов В. А. 418  
 Степанов Г. Ю. 10, 17, 18  
 Стрэтт см. Рэлей  
 Суслов Г. К. 425  
 Тамаркин Я. Д. 444  
 Тарапов И. Е. 385, 429  
 Томсон лорд Кельвин (*Thomson W. Lord Kelvin*) 420  
 Торричелли (*Torricelli E.*) 393  
 Тэт (*Tait P.*) 420  
 Убальдо см. Монте  
 Уоллис см. Валлис  
 Фок В. А. 445  
 Фредерикс В. К. 444  
 Френе (*Frénet F. J.*) 331  
 Френкель Я. И. 439, 444  
 Фридман А. А. 5—8, 425, 440, 441, 444  
 Фуко (*Foucault J. B. L.*) 417  
 Хамилтон см. Гамильтон  
 Хельмхольц см. Гельмгольц  
 Циолковский К. Э. 424  
 Чаплыгин С. А. 5, 413, 418, 424—427, 442  
 Чебышёв П. Л. 7, 104, 419  
 Эйлер (*Euler L.*) 101, 159, 396, 400—409, 413, 415—417, 419, 439  
 Эйнштейн (*Einstein A.*) 21, 163  
 Якоби (*Jacobi C. G. J.*) 369, 404, 415, 416

## ОБ АВТОРАХ

ЛЕВ ГЕРАСИМОВИЧ ЛОЙЦЯНСКИЙ родился 26 декабря 1900 г. в Санкт-Петербурге в семье работника типографии. Весной 1917 г. он окончил гимназию с «золотым» аттестатом, в котором особо подчеркивались успехи выпускника в математических науках. Гимназическое образование с «прекрасно поставленным» преподаванием французского, немецкого и латинского языков дало возможность Льву Герасимовичу впоследствии изучать классические труды по математике и механике в оригиналах.

«Знание французского языка позволило мне с моим другом, профессором А. И. Лурье, выполнить редактирование и составление комментариев к изданию первого тома классической «Аналитической механики» Лагранжа. Знание немецкого языка ввело меня в круг идей знаменитого немецкого механика Л. Прандтля и его учеников: Т. Кармана, К. Польшаузена... и других, — относящихся к теории пограничного слоя, которая явилась основной областью моих научных исследований. Изучение в гимназии латинского языка позволило мне в зрелые годы штудировать в оригинале труды Эйлера и Ньютона...»\*

С осени 1918 г. Л. Г. Лойцянский — студент Таврического (Крымского) университета в Симферополе. Здесь его учителями стали крупные ученые-математики Н. М. Крылов, В. И. Смирнов (будущий академик), Н. С. Кошляков, физик Я. И. Френкель и другие. Выпускная работа Льва Герасимовича «О разложении произвольной функции в ряд по полиномам Якоби» была чисто математической, однако уже в ту пору он имел научные результаты в области механики — в исследовании плоских кинематических механизмов — «конформных трансформаторов движения».

После окончания в 1921 г. Крымского университета Лев Герасимович был оставлен при кафедре математики «для подготовки к профессорской деятельности». Однако, имея желание приме-

---

\* Лойцянский Л. Г. Из моих воспоминаний. Записки профессора-политехника. С.-Петербург: Б. С. К. — 1998, 139 с.



нить свое математическое образование к технике и узнав о создании при Петроградском политехническом институте по инициативе А. Ф. Иоффе факультета нового типа — физико-механического, он вернулся в 1922 г. в свой родной город.

Дальнейшая творческая и педагогическая деятельность Л. Г. Лойцянского почти неразрывно связана с этим знаменитым факультетом. Началось все с того, что выдающийся математик и механик А. А. Фридман пригласил Льва Герасимовича на должность ассистента для преподавания теоретической механики. Фридман имел собственный взгляд на характер изложения этой науки на физико-механическом факультете и посчитал целесообразным взять молодого помощника, не связанного со сложившейся в институте школой преподавания теоретической механики.

В уже цитированных «Воспоминаниях» Л. Г. Лойцянский пишет: «Фридман считал, что на упражнениях по теоретической механике не следует обучать студентов решению стандартных задач по известному задачку Мещерского, а надо рассматривать крупные примеры движений, как в кинематике, так и, особенно, в динамике. Он сразу предложил мне на ближайшем упражнении с группой разобрать вопрос о движении материальной точки под действием сил ньютоновского притяжения к двум неподвижным центрам... Тяжела была «фридманская» требовательность, но зато я в короткий срок приобрел квалификацию преподавателя теоретической механики».

Одновременно Л. Г. Лойцянский читает лекции по теоретической механике в Ленинградском педагогическом институте им. Герцена, разработав для этого курса особую программу, отличную от предназначенной для инженеров, придав курсу исторический и в значительной мере методический характер.

Плодотворное сотрудничество Л. Г. Лойцянского с А. А. Фридманом прервалось из-за безвременной кончины последнего в 1925 г.

«Надо было сохранить его педагогические идеи на факультете. В этом мне помогли два талантливых ученика Фридмана — Г. А. Гринберг... и А. И. Лурье, бывший моим дипломантом, а в дальнейшем заведующим кафедрой механики института, основатель специальной кафедры динамики и прочности машин и сооружений, автор многих капитальных трудов по механике».\*

Вот что вспоминает о преподавании теоретической механики на факультете академик И. К. Кикоин: «Очень хочется сказать

\* Там же.

о курсе механики, который нам читал профессор Л. Г. Лойцянский, а упражнения по нему вел А. И. Лурье, оба ученики удивительного ученого, о жизни которого можно было бы складывать легенды, — Александра Александровича Фридмана. На втором курсе у нас был семинар по теории колебаний, где мы по отдельным темам делали доклады. Помнится, у меня была тема, связанная с сейсмологией, к которой я тщательно подготовился. Правда, литература, которой я пользовался, была написана аналитическим языком. Из-за этих громоздких математических выкладок доклад получился у меня длинным и скучным, за что я и получил замечание от Лойцянского, который тут же показал, насколько короче и изящней все было бы, воспользуйся я современным языком векторного анализа. Тут хочется заметить, что слово «изящный» не случайное слово. Лойцянский, как, впрочем, и Лурье, были влюблены в свою науку, умели, как никто, доносить до сознания студентов всю красоту, логичность и изящество, присущие ей. Их крылатое выражение «механика — это поэзия», быть может, и до сих пор очаровывает умы молодежи, сумевшей увидеть и прочувствовать ту красоту, которую так хорошо чувствовали эти ученые, и так хотели передать это чувство и нам, молодым их ученикам».

В последующие годы Лев Герасимович наряду с чтением лекций по теоретической механике стал излагать курс гидромеханики, содержащий новые разделы теории пограничного слоя и турбулентности. «Так началось мое вхождение в область, составившую мой основной поиск в науке до конца жизни» — писал он в «Воспоминаниях». Однако и теоретическая механика продолжала занимать заметное место в сфере интересов Льва Герасимовича. В 1924 г. был опубликован литографским способом в издательстве Военно-морской академии курс кинематики твердого тела. В результате совместной работы с Анатолием Исаковичем Лурье появился трехтомный, много раз переиздававшийся учебник «Теоретическая механика» (1-е издание в 1933 г.) и не менее популярный «Курс теоретической механики» (1-е издание в 1934 г.). Особенностью этих учебников, помимо их энциклопедичности, было новое по тому времени изложение материала в векторно-тензорной форме, что делало выводы компактными, а результаты — более «физически осязаемыми». Каждое следующее издание обогащалось новыми разделами. Лев Герасимович, со своей стороны, включил в «Курс теоретической механики» некоторые материалы по динамике жидкости.

В 1930 г. Лев Герасимович был избран профессором по кафедре теоретической механики Ленинградского индустриального (политехнического) института, а в 1935 г. по представлению академика С. А. Чаплыгина ему без защиты диссертации была присвоена ученая степень доктора физико-математических наук.

Тридцатые годы считаются временем становления новой ветви динамики вязкой жидкости — теории пограничного слоя, и именно Л. Г. Лойцянскому суждено было стать лидером этого направления у нас в стране. Уместно вспомнить, что теория пограничного слоя почему-то не пользовалась симпатиями некоторых ученых и «идеологов» тех лет. Льву Герасимовичу пришлось приложить немало усилий, чтобы преодолеть сомнения своих авторитетных оппонентов по отношению к этой ветви гидродинамики.

В 1933 г. небольшим тиражом им были изданы «Основы механики вязкой жидкости», а в 1941 г. увидела свет «Аэродинамика пограничного слоя» — первая в мировой научной литературе монография данного направления, сыгравшая исключительную роль в пропаганде идей этой теории у нас в стране. Его же позднейшая монография «Ламинарный пограничный слой» (1962 г.) была широко востребована в связи с решением задач динамики вязкого газа при больших скоростях.

Важнейшей вехой биографии Л. Г. Лойцянского было создание по его инициативе в 1935 г. в ЛПИ кафедры гидроаэродинамики, с которой он был разлучен только на период войны. В это время и до 1946 г. Лев Герасимович работал в ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского, где несколькими годами раньше он организовал физико-аэродинамический сектор. Этот период его деятельности был отмечен присуждением ему (совместно с А. А. Дородницыным) в 1946 г. Сталинской премии.

Послевоенные годы стали временем многогранной работы Льва Герасимовича с ленинградской промышленностью и научными институтами. Всего им было опубликовано более 120 оригинальных научных работ в самых различных областях механики жидкости и газа: теории ламинарного и турбулентного пограничных слоев; статистической теории турбулентности; полупэмпирической теории турбулентности; теории газовой смазки и т. д. Многие из них стали основополагающими в развитии целых направлений гидрогазодинамики. В частности, мировой резонанс получила опубликованная в 1939 г. работа, посвященная проблеме затухания однородной изотропной турбулентности. Дискуссии специалистов об условии постоянства во времени од-

ной из характеристик пульсационного поля скорости — *инварианта Лойцянского* — прослеживаются вплоть до 90-х годов.

Л. Г. Лойцянский входил в редколлегия журнала «Механика жидкости и газа», был членом Президиума Национального комитета по теоретической и прикладной механике.

Широчайшую известность получила его «Механика жидкости и газа» — «монографический», по определению академика Л. И. Седова, учебник, первое из многочисленных изданий которого относится к 1951 г. Книга эта переведена на английский язык (1965 г. — Великобритания, 1991 г. — США) и остается у нас в стране едва ли ни главным учебным пособием и научным руководством такого профиля для студентов, аспирантов, инженеров. Замечательный педагог, он неизменно привлекал аудиторию своими глубокими и блестящими по форме лекциями. Им воспитано не одно поколение специалистов в области гидроаэродинамики.

Скончался Лев Герасимович Лойцянский на 91-м году жизни 3 ноября 1991 г. Удивительно высокий творческий потенциал и равнодушие ко всему, что происходило в сфере его научного призвания, он сохранил буквально до последнего дня, завершив накануне свою последнюю работу по теории турбулентного пограничного слоя. Судьбе было угодно соединить двух друзей и соавторов «Курса теоретической механики» и после их кончины: Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье покоятся рядом в Комарово под Петербургом.

АНАТОЛИЙ ИСАКОВИЧ ЛУРЬЕ родился 19 июля 1901 года в Могилеве-на-Днепре в семье врача. В 1911 году он поступил в Могилевскую мужскую гимназию. После ее досрочного окончания с золотой медалью А. И. Лурье начинает работать в только что организованном наробразе в должности библиотечного инструктора и становится членом комиссии по ликвидации неграмотности (в анкете он числился как «секретарь внешкольного отдела Отдела народного образования при уездно-городском Исполкоме»).

В 1923 г. А. И. Лурье после нескольких лет занятий на геолого-разведочном факультете Уральского горного института переводится на физико-механический факультет (ФМФ) Петроградского политехнического института, который в то время был единственным центром физико-механического образования в стране. К преподаванию на знаменитом впоследствии физмехе были привлечены виднейшие ученые, пользовавшиеся евро-

пейской известностью. Математику преподавали С. Н. Бернштейн, Я. Д. Тамаркин, А. А. Адамов, Н. М. Гюнтер, физику — А. Ф. Иоффе, Н. Н. Семенов, Я. И. Френкель, Д. С. Рождественский, В. Р. Бурсиан, Ю. А. Крутков, В. К. Фредерикс, механику — И. В. Мещерский, Е. Л. Николаи, А. А. Фридман. Благодаря интенсивным самостоятельным занятиям А. И. Лурье был блестяще подготовлен, и ему для перевода пришлось сдать лишь несколько экзаменов.

А. И. Лурье так вспоминал время учебы: «Основное место занимала теоретическая физика, переживавшая тогда критические годы своего становления. Ее преподавание было поручено Я. И. Френкелю, выдающемуся ученому и обаятельнейшему человеку. Было трудно уследить за его лекциями в особенности из-за того, что часто математическая сторона дела приносилась в жертву призывам к физической интуиции. В еще большей степени этим отличались занятия в семинаре А. Ф. Иоффе, посещение которых мне по молодости лет и недостатку ума представлялось скучной барщиной. Увлекало преподавание механики, которое было поручено А. А. Фридману. Курс теоретической механики А. А. Фридмана последовательно строился на векторном исчислении — это у нас было тогда первым опытом (да и не только у нас); он отличался оригинальной и изящной обработкой деталей, приучал самостоятельно думать и не бояться собственных попыток исследования...»

Сейчас, когда векторное изложение механики стало общепринятым, трудно поверить, какое сопротивление оно встречало в те годы, особенно у представителей старшего поколения. Даже такой выдающийся ученый, как А. Н. Крылов, называл векторный язык «экономией мела». Усилия А. А. Фридмана, не боявшегося преодоления инерции старых представлений, не пропали даром: введенная им методика победила и получила всеобщее распространение.

В июне 1925 г. А. И. Лурье заканчивает ФМФ со званием инженера-физика по специальности «Механика». Успешно защитив дипломную работу на тему «Теория прямолинейно-направляющих механизмов», А. И. Лурье «по представлению доц. Л. Г. Лойцянского и проф. А. А. Фридмана» был оставлен аспирантом при кафедре теоретической механики, которой в то время заведовал профессор И. В. Мещерский.

Аспирантуру А. И. Лурье заканчивает в середине 1929 г. Его «квалификационная работа» (диссертация), посвященная реше-

нию ряда задач гидродинамики вязкой жидкости, была защищена 28 февраля 1930 г. В качестве оппонента выступал В. А. Фок, в будущем — академик. Сохранился план работы А. И. Лурье в аспирантуре, составленный в начале 1927 г., в котором автор намечает самостоятельно проработать более 50 монографий выдающихся иностранных и российских ученых по различным разделам математики, механики и теоретической физики. Конечно, учеба в аспирантуре совмещалась с серьезной преподавательской деятельностью на ФМФ.

Всю свою жизнь А. И. Лурье проработал на ставшем родном физмехе Ленинградского политехнического института (ЛПИ). В 1935 г. А. И. Лурье утвержден в ученом звании профессора, а в 1939 г. ему присуждена ученая степень доктора технических наук. В 1936 — 1941 гг. он заведует кафедрой «Теоретическая механика» ЛПИ, в 1942 — 1944 гг. — кафедрой теоретической механики Уральского индустриального института, с 1944 г. и до 1977 г. — кафедрой «Динамика и прочность машин» ЛПИ, которая в 1960 г. была переименована в кафедру «Механика и процессы управления».

Совместно с профессором Е. Л. Николаи А. И. Лурье основал и в 1931—1936 гг. руководил изданием журнала «Прикладная математика и механика», затем на протяжении десятилетий был членом редколлегий журналов «Прикладная математика и механика» и «Механика твердого тела». Профессор А. И. Лурье был членом Президиума Национального комитета по теоретической и прикладной механике, а также членом Национального комитета по автоматическому управлению.

10 июня 1960 г. за выдающиеся заслуги в области механики А. И. Лурье был избран членом-корреспондентом АН СССР.

Более чем полувековая научная деятельность А. И. Лурье принесла замечательные плоды — им написаны великолепные книги:

*Николаи Е. Л., Лурье А. И.* Вибрации фундаментов рамного типа. Л.—М.: Госстройиздат, 1933. — 83 с.

*Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.* Теоретическая механика. В 3 т. Л.—М.: ГМТИ, 1934.

*Лурье А. И.* Статика тонкостенных упругих оболочек. М.: Гостехиздат, 1947. — 252 с.

*Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1951. — 216 с.

*Лурье А. И.* Операционное исчисление и его приложение к задачам механики. М.: ГИТТЛ, 1951. — 432 с.

*Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: ГИТТЛ, 1955. — 492 с.

*Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.* Курс теоретической механики: В 2 т. — 5-е изд. — М.: ГМТИ, 1955. — 380 с. и 596 с.

*Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961. — 824 с.

*Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. — 940 с.

*Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. — 512 с.

Монографии и учебники, написанные А. И. Лурье, по праву считаются классическими и на протяжении десятилетий служат основой преподавания механики в России и за рубежом. За последние 70 лет эти книги многократно переиздавались, многие из них переведены на иностранные языки (английский, немецкий, французский, китайский, румынский, болгарский и армянский).

Последняя книга — «Нелинейная теория упругости» — была написана тяжело больным Анатолием Исаковичем, и ему уже не довелось увидеть корректуру и типографское издание. Эта книга была переведена на английский язык его сыном К. А. Лурье и опубликована в 1990 г. в издательстве North Holland. Книги Анатолия Исаковича Лурье продолжают выходить и в настоящее время: в 2002 г. в издательстве Springer-Verlag издана *Analytical Mechanics*, 864 p., а в 2005 г. то же издательство спустя 30 (!) лет познакомило зарубежного читателя с фундаментальной работой А. И. Лурье — «*Theory of Elasticity*».

Уже с первых работ А. И. Лурье ярко проявляется основная особенность его научного почерка: способность связывать достижения классической механики с потребностями современной техники. Конечно, он не мог не стать и ярким пропагандистом так называемого прямого, или инвариантного тензорного исчисления, которое в настоящее время широко применяется как у нас в стране, так и за рубежом.

Большую славу А. И. Лурье принесли работы в области применения операционного исчисления к изучению устойчивости механических систем с распределенными параметрами. Эти исследования стимулировали изыскания по распределению корней квазиполиномов, а наибольший резонанс в мировой науке вызвали работы А. И. Лурье по теории абсолютной устойчивости регулируемых систем. Сама постановка этой проблемы и применение

метода функций Ляпунова к ее решению были новыми и вызвали огромный поток научной литературы.

Перу Анатолия Исаковича принадлежит также большое число статей и книг по теории упругости. Последние пятнадцать лет его внимание привлекали исключительно проблемы теории упругости. Характерной особенностью всех этих работ было получение новых аналитических результатов.

Анатолий Исакович обладал исключительными человеческими качествами. Его отличало уважительное отношение к собеседнику, особенно к собеседнику, имеющему собственные научные идеи и потенциал. Это располагало к нему молодых ученых и преподавателей. Его приемная всегда была полна посетителей, желающих получить совет, рецензию на научную работу или, наконец, просто поддержку.

Он всю жизнь напряженно работал: писал книги, читал лекции, оппонировал диссертации. И очень неодобрительно, даже неприязненно относился к бездельникам, даже обладающим талантом. Весной 1979 г. он перенес тяжелую операцию. Лето ушло на реабилитацию, а в сентябре он вернулся из Москвы. Выглядел прекрасно и заявил, что будет читать свой любимый курс «Теория упругости». Заведующий кафедрой профессор В. А. Пальмов предложил читать лекции за него, предоставляя возможность отдохнуть любимому Учителю. Однако А. И. Лурье был непреклонен и настоял на своем решении, но дочитал только до ноября. Отказался, сказав, что ему трудно читать лекции. А 12 февраля 1980 г. его не стало. Было Анатолию Исаковичу Лурье 79 лет...



*Учебное издание*

**Лойцянский Лев Герасимович  
Лурье Анатолий Исакович**

## **КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

**В двух томах**

**Том 1**

**Статика и кинематика**

**Учебное пособие для вузов**

Зав. редакцией *Б. В. Понкратов*

Редактор *Е. А. Вольмир*

Художественное оформление *Ю. В. Христин*

Технический редактор *С. А. Толмачева*

Компьютерная верстка *С. Л. Мамедова, Е. В. Агуреева*

Корректор *Н. С. Соболева*

Санитарно-эпидемиологическое заключение  
№ 77.99.02.953.Д.006315.08.03 от 28.08.2003.

Подписано к печати 30.06.06. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Бумага типографская. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.

Усл. печ. л. 28,0. Тираж 3000 экз. Заказ № .

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Суцевский вал, 49.

**По вопросам приобретения продукции  
издательства «Дрофа» обращаться по адресу:**

127018, Москва, Суцевский вал, 49.

Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник».

109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.

Тел.: (495) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Магазины «Переплетные птицы»:

127018, Москва, ул. Октябрьская, д. 89, стр. 1.

Тел.: (495) 912-45-76;

140408, Московская обл., г. Коломна, Голутвин,

ул. Октябрьской революции, 366/2.

Тел.: (495) 741-59-76.