

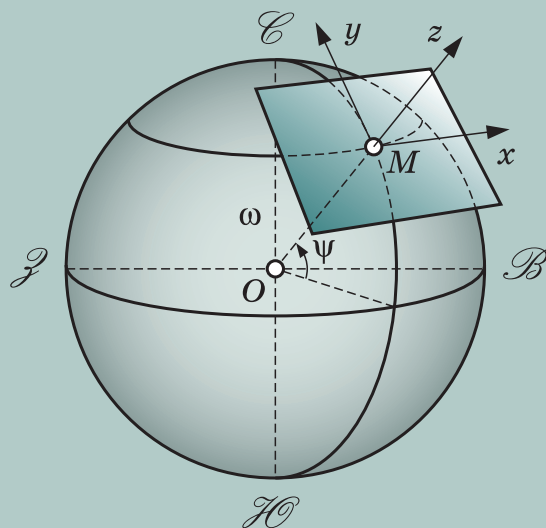
Высшее образование

Классики отечественной науки

Л. Г. Лойцянский
А. И. Лурье

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Том второй



ДРОФА



Классики
отечественной
науки

Классики отечественной науки



ЕСТЕСТВЕННЫЕ
ТЕХНИЧЕСКИЕ
ГУМАНИТАРНЫЕ
НАУКИ



ДРОФА

Классики отечественной науки

Л. Г. Лойцянский
А. И. Лурье

КУРС
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКИ

Том второй

Динамика

Издание седьмое, исправленное и дополненное

Допущено
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности
010500 «Механика»

МОСКВА 2006



ДРОФА

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73
Л72

*Серия «Классики отечественной науки»
основана в 2003 году*

Рецензенты:

академик РАН, д-р техн. наук *Р. Ф. Ганиев*
(директор Научного центра
нелинейной волновой механики и технологии РАН);
чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук *В. Г. Веретенников*
(зав. кафедрой теоретической механики МАИ)

В оформлении обложки использованы автографы и рисунки Л. Эйлера из его переписки с Клеро, д'Аламбером и Лагранжем (Euleri Leonhardi. Opera omnia / Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae. Basileae: Birkhäuser Basileae, MCMLXXX, Ser. Quarta A. Commmercium Epistolicum. Commmercium cum A. C. Clairaut, J. d'Alembert et J. L. Lagrange. Vol. quintum.)

Лойцянский, Л. Г.

Л72 Курс теоретической механики. В 2 т. / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. — М. : Дрофа, 2006. — (Классики отечественной науки).

ISBN 5-358-01275-3

Т. 2: Динамика : учеб. пособие для вузов. — 7-е изд., испр. и доп. — 2006. — 719, [1] с. : 250 ил.

ISBN 5-358-01277-X

Второй том курса теоретической механики посвящен динамике в объеме программ высших учебных заведений, а также ряду дополнительных вопросов.

Во втором томе, наряду с рассмотрением общих теорем динамики, уравнений динамики материальной точки, динамики несвободной системы и специальных задач динамики (колебания, динамика твердого тела), предмет курса несколько расширяется в сторону сплошных деформируемых сред и, кроме того, излагаются элементы релятивистской механики.

Курс предназначен для студентов университетов и вузов, обучающихся по специальности «Механика», аспирантов и преподавателей.

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73

ISBN 5-358-01277-X (т. 2)
ISBN 5-358-01275-3

© ООО «Дрофа», 2006



А. И. Лурье и Л. Г. Лойцянский
в Доме ученых в Лесном. 1961 г.

Оглавление

Предисловие к шестому изданию	13
---	----

Отдел третий

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Глава XIX. **Основные уравнения динамики материальной точки**

§ 79. Предмет и основные задачи динамики. Пространство и время в классической механике Ньютона	15
§ 80. Первый закон Ньютона	18
§ 81. Второй закон Ньютона	20
§ 82. Независимость действия сил. Третий закон Ньютона	23
§ 83. Различные формы основного уравнения динамики точки	25
§ 84. Две задачи динамики. Простейшие примеры первой задачи	27
§ 85. Специальная постановка первой задачи динамики. Определение закона действия силы по заданному классу движений. Задача Бертрана	32
§ 86. Законы сил	36
§ 87. Вторая задача динамики материальной точки	40
§ 88. Связь между первой и второй задачами динамики материальной точки	48

Глава XX. **Некоторые задачи динамики точки**

§ 89. Вертикальное движение тяжелой точки в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости	49
§ 90. Движение снаряда в сопротивляющейся среде	57

§ 91. Движение снаряда по настильной траектории при сопротивлении среды, пропорциональном квадрату скорости	61
§ 92. Движение точки под действием центральной силы . .	63
§ 93. Определение времени в эллиптическом движении . .	67
§ 94. Эллиптическое движение тела, брошенного с Земли с большой начальной скоростью	71

Глава XXI. **Прямолинейные колебания малой амплитуды**

§ 95. Свободные незатухающие колебания точки под действием линейной восстанавливающей силы	75
§ 96. Колебания точки под действием гармонической возмущающей силы	81
§ 97. Колебания точки под действием периодической возмущающей силы	90
§ 98. Влияние силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости, на свободные колебания точки	95
§ 99. Влияние силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости, на вынужденные колебания точки	102
§ 100. Свободные колебания точки при наличии кулонова трения	113

Отдел четвертый

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

Глава XXII. **Теорема об изменении количества движения системы материальных точек**

§ 101. Предварительные замечания об общих теоремах динамики	119
§ 102. Теорема об изменении количества движения системы материальных точек	121
§ 103. Динамика точки переменной массы	125
§ 104. Теорема о движении центра масс системы материальных точек	131
§ 105. Уравнения движения центра масс одноступенчатой ракеты	140
§ 106. Теорема импульсов и ее применение в теории удара	149

§ 107. Удар точки о преграду. Коэффициент восстановления	153
§ 108. Прямой удар двух тел	156
§ 109. Косой удар двух тел	160
§ 110. Применение теоремы количества движения к сплошной среде. Теорема Эйлера. Дифференциаль- ные уравнения динамики сплошной среды. Распространение малых возмущений	163

*Глава XXIII. Теорема об изменении момента количеств
движения системы материальных точек*

§ 111. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки	174
§ 112. Малые колебания математического маятника	178
§ 113. Теорема об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек. Теорема Резаля	180
§ 114. Главный момент количеств движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси	183
§ 115. Вычисление моментов инерции. Моменты инерции относительно параллельных осей	185
§ 116. Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси	193
§ 117. Малые колебания физического маятника	201
§ 118. Влияние внешних ударов на главный момент количеств движения системы	203
§ 119. Главный момент количеств движения в неподвижной и в движущейся системах отсчета	205
§ 120. Теорема об изменении главного момента количеств движения системы относительно центра масс	209
§ 121. Теорема о сохранении главного момента количеств движения	211
§ 122. Применение теоремы моментов к сплошной среде. Уравнение Эйлера теории турбомашин	214

Глава XXIV. Теорема об изменении кинетической энергии

§ 123. Работа силы. Мощность	219
§ 124. Вычисление работы в некоторых частных случаях	223
§ 125. Кинетическая энергия системы материальных точек. Теорема Кёнига	230
§ 126. Кинетическая энергия абсолютно твердого тела	233
§ 127. Теорема об изменении кинетической энергии	237
§ 128. Потенциальная энергия силового поля	243

§ 129.	Потенциалы силовых полей	250
§ 130.	Закон сохранения механической энергии	257
§ 131.	Механическая энергия при вынужденных колебаниях	260
§ 132.	Потеря кинетической энергии при неупругом ударе. Теорема Карно	263
§ 133.	Теорема об изменении кинетической энергии сплошной среды. Теоремы Бернулли и Борда — Карно. Общее дифференциальное уравнение кинетической энергии. Диссипация механической энергии	272
<i>Глава XXV. Динамика плоского движения твердого тела</i>		
§ 134.	Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела	285
§ 135.	Качение тяжелого цилиндра по наклонной плоскости и криволинейной поверхности	291
§ 136.	Движение самолета в вертикальной плоскости.	297
§ 137.	Критическая угловая скорость гибкого вала.	303
§ 138.	Удар в плоском движении твердого тела.	307
<i>Глава XXVI. Тензор инерции твердого тела</i>		
§ 139.	Тензор инерции и его компоненты. Формула для момента инерции тела относительно произвольной оси	312
§ 140.	Главные оси инерции	316
§ 141.	Кинетическая энергия и главный момент количеств движения	328

Отдел пятый

ДИНАМИКА НЕСВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ

<i>Глава XXVII. Связи. Статика несвободной системы</i>		
§ 142.	Классификация связей	333
§ 143.	Возможные перемещения системы. Число степеней свободы	338
§ 144.	Принцип освобождаемости. Идеальные связи	347
§ 145.	Принцип возможных перемещений	353
§ 146.	Применения принципа возможных перемещений	359
§ 147.	Устойчивость равновесия системы. Теорема Лагранжа — Дирихле. Понятие о теоремах Ляпунова	372

Глава XXVIII. Кинестатика и общее уравнение динамики

§ 148. Принцип д'Аламбера	381
§ 149. Метод кинестатики	384
§ 150. Кинестатика плоского движения твердого тела.	384
§ 151. Реакции оси вращающегося тела	392
§ 152. Реакции оси вращающегося тела при ударе. Центр удара	401
§ 153. Метод кинестатики в приближенной теории гироскопа	406
§ 154. Общее уравнение динамики	416
§ 155. Применение общего уравнения динамики к выводу основных теорем	418
§ 156. Применение общего уравнения динамики в теории удара	420

Глава XXIX. Уравнения Лагранжа

§ 157. Уравнения Лагранжа первого рода для голономной системы	425
§ 158. Движение точки по гладкой поверхности или кривой	428
§ 159. Уравнения Лагранжа второго рода	436
§ 160. Интеграл энергии и циклические интегралы	440
§ 161. Примеры применения уравнений Лагранжа второго рода	445
§ 162. Уравнение движения машины	458
§ 163. Уравнения Лагранжа второго рода с множителями	463

Отдел шестой**СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ****Глава XXX. Динамика относительного движения**

§ 164. Уравнения динамики относительного движения точки	465
§ 165. Относительное движение системы материальных точек в равномерно вращающейся системе отсчета	473
§ 166. Относительное равновесие точки вблизи поверхности Земли	479
§ 167. Влияние вращения Земли на падение тяжелой точки в пустоте	480

§ 168.	Влияние вращения Земли на движение тяжелой точки по горизонтальной плоскости	483
§ 169.	Опыты, служащие для доказательства вращения Земли	485
<i>Глава XXXI. Основы механики специальной теории относительности</i>		
§ 170.	Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея. Постулаты специальной теории относительности Эйнштейна	489
§ 171.	Преобразование Лоренца. Диаграмма Минковского . .	494
§ 172.	Четырехмерные векторы в пространстве Минковского	507
§ 173.	Релятивистское обобщение второго закона Ньютона	510
§ 174.	Движение заряженной частицы в однородных электрическом и магнитном полях	518
§ 175.	О силовых взаимодействиях в теории относительности. Проблема инерции и переход к общей теории относительности.	521
<i>Глава XXXII. Свободные колебания системы с одной степенью свободы</i>		
§ 176.	Свободные незатухающие колебания системы с одной степенью свободы	529
§ 177.	Движение математического маятника	544
§ 178.	Колебания при нелинейной восстанавливающей силе	557
§ 179.	Свободные затухающие колебания системы при силе сопротивления, пропорциональной первой степени скорости. Диссипативная функция Рэля	562
§ 180.	Колебания системы с одной степенью свободы при наличии кулонова трения	572
§ 181.	Колебания системы с одной степенью свободы при наличии силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости	575
<i>Глава XXXIII. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы</i>		
§ 182.	Общее решение уравнения вынужденных колебаний	582
§ 183.	Верхняя граница отклонения при ограниченной силе.	591
§ 184.	Периодическое решение уравнения вынужденных колебаний	594

Глава XXXIV. Колебания системы с двумя степенями свободы	
§ 185. Дифференциальные уравнения свободных колебаний	602
§ 186. Интегрирование уравнений свободных колебаний . . .	606
§ 187. Главные координаты	617
§ 188. Применение коэффициентов влияния к составлению дифференциальных уравнений свободных колебаний	630
§ 189. Вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы	645
§ 190. Свободные колебания системы с произвольным конечным числом степеней свободы	653
Глава XXXV. Некоторые задачи динамики твердого тела	
§ 191. Уравнения Эйлера динамики твердого тела	658
§ 192. Вращение симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки	661
§ 193. Регулярная прецессия симметричного тела	664
§ 194. Уравнения движения гироскопа на подвижном основании	669
§ 195. Гироскопы Фуко	682
§ 196. Задача о <i>спящем волчке</i>	688
§ 197. Устойчивость вращающегося снаряда	693
§ 198. Гироскопический маятник. Применение уравнений Лагранжа второго рода в динамике твердого тела	696
Литература	706
Предметный указатель	710
Именной указатель	715
<i>А. И. Лурье.</i> О значении теоретической механики в развитии техники	717

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

При работе над новым изданием второго тома, посвященного динамике, особенно остро ощущалась тяжелая утрата безвременно скончавшегося Анатолия Исааковича Лурье, роль которого как автора в создании настоящего тома курса была особенно велика. Положение несколько облегчилось тем, что еще в 1956 г. им был составлен список замечаний по переработке текста второго тома и указаны некоторые сокращения, а незадолго до кончины Анатолия Исааковича представилась возможность совместного обсуждения перечня и характера предполагаемых дополнений и изменений в содержании курса.

В связи с появлением новых задачникков по теоретической механике было решено не только не увеличивать числа примеров, а даже сократить те из них, сложность которых не оправдывалась их значением для иллюстрации теоретического материала. Было также полностью опущено учение о неголономных связях, представляющее специальный раздел аналитической механики.

Вместе с тем появились и существенные дополнения, среди которых следует отметить написанную К. А. Лурье новую (тридцать первую) главу, содержащую изложение основ специальной теории относительности. В заново написанных параграфах получили освещение вопросы полета ракеты простейшей схемы, теории колебаний систем с произвольным конечным числом степеней свободы, применения общих теорем динамики систем материальных точек к сплошным средам (теоремы Эйлера, Бернулли, Борда), а также к выводу общих дифференциальных уравнений динамики сплошных сред и выражения мощности внутренних сил в сплошной среде. Последнее в случае сред с внутренним трением позволяет глубже судить о важном для механики понятии *потерь* (диссипации) механической энергии при движении среды.

Осуществленное в новом издании расширение предмета механики в сторону модели сплошной среды не может, конечно, заме-

нить изложения тех же вопросов в специальных курсах теории упругости и гидрогазодинамики. Здесь преследуются совершенно другие цели. Главная из них — показать учащемуся широту и мощь охвата теоретической механикой самых различных движений материальных тел, включая сюда и сплошные среды (упругие, жидкие и газообразные). С другой стороны, это дополнение органически связывает курс теоретической механики с непосредственно следующими за ним в учебных планах втузов курсами сопротивления материалов и гидравлики (технической гидродинамики), в которых обычно изложению общих основ механики сплошных сред не уделяется должного внимания.

Чтобы не требовать от читателя обязательно изучать эти дополнительные вопросы, в первом томе они помещены в конце отделов статики и кинематики, а во втором томе в конце глав, содержащих изложение общих теорем динамики. Такая структура курса сохраняет его традиционное построение, приуроченное к действующим программам втузов. То же относится и к разделу «Специальные задачи динамики», начиная с гл. XXXI и до конца курса.

Указанные выше дополнения позволяют рекомендовать настоящее издание курса широкому кругу студентов, аспирантов и инженеров, а также тем читателям, которые будут изучать теоретическую механику в порядке самообразования.

С глубокой благодарностью обращаюсь я к проф. Г. Ю. Степанову, не только взявшему на себя труд рецензирования рукописи настоящего тома, но и сделавшему по ней много существенных критических замечаний, которые мной с признательностью приняты во внимание. Многим я обязан доценту кафедры теоретической механики Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина* И. Л. Лойцянской, принявшей большое участие в нашей совместной работе над рукописью, а в дальнейшем и в чтении корректур. Я особенно благодарен Г. М. Ильичевой за ее большую высококвалифицированную работу по редактированию рукописи настоящего тома.

Л. Г. Лойцянский

* Ныне Санкт-Петербургский государственный технический университет.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Глава XIX

Основные уравнения динамики материальной точки

§ 79. Предмет и основные задачи динамики.

Пространство и время в классической механике Ньютона

Предметом динамики являются те же модели материальных тел: материальная точка, система дискретных материальных точек, сплошная материальная среда (в том числе и абсолютно твердое тело), что и в предыдущих отделах — статике и кинематике. Однако задачи у них разные.

В статике рассматривались механические силовые взаимодействия материальных тел в равновесных их состояниях. В кинематике были установлены методы изучения происходящих в пространстве и во времени механических движений материальных тел и их систем, но вне связи с механическими взаимодействиями, обуславливающими эти движения. Динамика ставит целью изучение движения материальных тел в связи с механическими взаимодействиями между ними. При этом динамика заимствует у статики законы сложения сил и приведения сложных их совокупностей к простейшему виду и пользуется принятыми в кинематике приемами описания движений. Задачей динамики является установление законов связи действующих сил с кинематическими характеристиками движений и применение этих законов к изучению частных видов движений. Лучше всего это сформулировано самим Ньютоном, создателем классической системы механики. Динамика должна, говорит он [40],

«по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам изъяснить остальные явления».

НЬЮТОН ИСААК (*Newton Isaac, 1643—1727*) — английский физик и математик, создавший теоретические основы механики и астрономии, открывший закон всемирного тяготения, разработавший (наряду с Г. Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисление.

Эта формулировка точно передает сущность динамики и будет подробно разъяснена в дальнейшем.

Основную роль в динамике играет отсутствовавшая в статике и кинематике количественная материальная характеристика тел — их масса, а в случае сплошной среды — плотность распределения массы в теле, короче именуемая просто плотностью.

Основные законы классической механики были сформулированы Ньютоном как законы движения по отношению к некоторой абсолютно неподвижной системе — *абсолютному пространству* — или любой другой *инерциальной* или *галилеевой* системе, движущейся по отношению к *абсолютному пространству* поступательно, прямолинейно и равномерно; за время, в течение которого движение протекает, Ньютон принимал *абсолютное время*, не зависящее от движения тел и систем отсчета.

Понятия абсолютных пространства и времени относительны. Лишь в некотором (достаточном для земных применений) приближении можно вводить *статистический*, имеющий смысл лишь «в среднем» образ *универсальной абсолютной системы**, относительно которой предполагаются покоящимися так называемые неподвижные звезды. При этом следует оговориться, что представление о такого рода *абсолютной* системе зависит от числа принятых во внимание *неподвижных* звезд и что, собственно говоря, нет никаких оснований считать эту систему строго неподвижной в масштабе Вселенной.

Абсолютное время рассматривается как *одинаковое* во всех взаимно движущихся системах отсчета, что находится в противоречии с *конечностью* скорости света, а также скорости распространения электромагнитных возмущений и радиосигналов. Вопрос о связи между отсчетами времени в двух взаимно движущихся инерциальных системах отсчета в настоящее время решается просто и наглядно благодаря использованию *радиолокационного* метода**. Об этом будет частично идти речь в гл. XXXI, посвященной основным понятиям специальной теории относительности. Сейчас, подчеркнем это еще раз, в классической механике Ньютона используется *абсолютное время*, единое во всех движущихся друг по отношению к другу системах отсчета.

* Неванлинна Р. [39, с. 136].

** См., например, Бонди Г. [30, с. 36—51].

В основу своей системы механики Ньютон положил следующие, приведенные в его «Началах» [40] определения времени и пространства:

«1. Абсолютное, истинное математическое время — само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью.

2. Абсолютное пространство по самой своей сущности безотносительно к чему бы то ни было внешнему остается всегда одинаковым и неподвижным».

Внешняя форма этих определений, несмотря на наличие в них явных противоречий, вполне соответствует критическому отношению к этим определениям самого Ньютона. В своих «Началах» Ньютон говорит:

«Возможно, не существует такого равномерного движения, которым время могло бы измеряться с совершенной точностью»,

точно так же, как

«может оказаться, что в действительности не существует покоящегося тела, к которому можно было бы относить места и движения прочих».

А. Эйнштейн подверг глубокой критике представления Ньютона о пространстве и времени, но вместе с тем указал на их громадное мировоззренческое значение для того этапа научного прогресса, активным участником которого был Ньютон.

В настоящее время ясно понимается, что «...воистину трудный шаг был в свое время сделан Ньютоном и Галилеем и что трудности, которые пришлось преодолеть Эйнштейну, были значительно меньше... Эйнштейн просто вернул нас к Ньютону...», и, далее, «...в относительности нет ничего более трудного для понимания, чем осознание *ньютонической* относительности: существует множество инерциальных наблюдателей, каждый из которых ничем не лучше и не хуже остальных...» (Г. Бонди, [30]).

ЭЙНШТЕЙН АЛЬБЕРТ (*Einstein Albert*, 1879—1955) — выдающийся физик-теоретик, один из создателей современной физики. В 1902—1908 гг. работал экспертом в патентном бюро в Берне, в 1909—1911 гг. — профессор Цюрихского политехникума, в 1914—1933 гг. — профессор Берлинского ун-та, с 1933 работал в Принстонском ин-те перспективных исследований (США). Член многих академий и научных обществ, в частности, иностр. чл. АН СССР (1926).

С этой точки зрения стоит привести высказывание самого Эйнштейна:

«Ясные и широкие идеи Ньютона сохраняют свое значение фундамента, на котором построены наши современные физические представления».

Как будет выяснено в гл. XXXI, система механики Ньютона является *частным случаем* релятивистской механики Эйнштейна, примененной к движениям в областях, малых по масштабу по сравнению с масштабами Вселенной, и со скоростями, малыми по сравнению со скоростью распространения света в пустоте. Такое приближение совершенно достаточно для земной практики, включая и современные космические полеты ракетных аппаратов с их пока еще сравнительно малым удалением от Земли и малыми по сравнению со скоростью света скоростями.

Это позволяет нам посвятить весь настоящий курс, за исключением гл. XXXI, в которой излагаются основы специального принципа относительности, изложению классической динамики Ньютона и ее применениям к разнообразным механическим движениям.

§ 80. Первый закон Ньютона

В основе классической механики Ньютона лежат три установленные им и сформулированные в «Началах» закона движения. Подчеркнем, что законы эти предполагают существование *абсолютного времени* и установлены для движений материальной точки по отношению к *абсолютно неподвижной* системе координат, а согласно принципу Галилея (см. начало гл. XXXI) — и по отношению к произвольной инерциальной (галилеевой) системе отсчета.

ПЕРВЫЙ ЗАКОН НЬЮТОНА — ЗАКОН ИНЕРЦИИ — описывает простейшее из возможных механических движений — движение материальной точки в отвлеченных условиях полной ее изолированности от действия других материальных тел. Закон инерции в формулировке Ньютона [40] гласит:

«Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку приложенные силы не заставят его изменить это состояние».

Термин *тело* здесь означает *материальную точку*, не имеющую размера, но обладающую массой, которая и обуславливает указанное в формулировке движение материальной точки *по инерции*. Как будет показано в следующем параграфе, масса может быть принята за *меру инертности* тела.

Заметим (и в дальнейшем это будет оправдано), что движение изолированного от внешних воздействий тела конечного размера также может быть названо *движением по инерции*, но уже не будет столь простым, как движение по инерции материальной точки.

Закон инерции не в столь широкой обобщенной форме, как это сделал Ньютон, был установлен ранее Галилеем [33] для частного случая движения тела по гладкой горизонтальной плоскости. Приведем эту формулировку:

«Когда тело движется по горизонтальной плоскости, не встречая никакого сопротивления, то движение его является равномерным и продолжалось бы бесконечно, если бы плоскость простиралась в пространстве без конца».

Чтобы достойным образом оценить заслугу Галилея в открытии закона инерции, стоит вспомнить о борьбе против схоластической науки Средневековья, которая выпала на его долю. Следуя Аристотелю, средневековые ученые утверждали, что материя *косна*, естественным ее состоянием является абсолютный покой, а для поддержания движения тела необходимо постоянное внешнее воздействие. Велика заслуга Галилея, который ввел в механику понятие об ускорении и противопоставил прямолинейному равномерному движению по инерции неравномерное равноускоренное движение точки, свободно падающей в пустоте вблизи поверхности Земли.

Прав был Лагранж (1736—1813), когда, сравнивая достижения Галилея в области астрономии с созданием основ динамики, писал [36]:

«Открытие спутников Юпитера, фаз Венеры, солнечных пятен и др. потребовало лишь наличия телескопа и известного трудолюбия, но нужен был необыкновенный гений, чтобы открыть законы природы в таких явлениях, которые всегда пребывали перед глазами, но объяснение которых тем не менее всегда ускользало от изыскания философов».

Открытие Галилеем законов свободного падения тел сыграло основополагающую роль в деле создания ньютоновской динамики и, в частности, второго закона Ньютона.

Заслуга Галилея была высоко оценена Ньютоном, который говорил, что он

«далеко видел вперед, так как стоял на плечах у гигантов».

§ 81. Второй закон Ньютона

Основой ньютоновской механики является *второй закон* — фундаментальный закон естествознания.

ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА устанавливает количественную связь между изменением движения, совершаемого материальной точкой и приложенной к ней силой. Формулировка второго закона (в переводе А. Н. Крылова) гласит:

«Изменение движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит в направлении линии действия этой силы».

Под *изменением движения* подразумевается отнесенное к единице времени изменение вектора скорости точки, т. е. ее ускорение. Такое понимание термина *изменение движения* можно найти, например, в классическом, относящемся к 1743 г. «Трактате по динамике» д'Аламбера [31, в переводе с. 108], который называет *движением* «скорость тела с учетом ее направления». Ньютон под *движением* понимал то, что мы сейчас называем *количеством движения*, т. е. произведение массы на вектор скорости. При ньютоновском представлении о постоянстве массы во все время движения обе трактовки совпадают. Возникающее различие разъясняется в специальном разделе настоящего курса «Динамика точки переменной массы» — § 103.

Таким образом, второй закон утверждает пропорциональность вектора ускорения точки вектору приложенной к ней силы, что можно записать в виде

$$Cw = F.$$

(19.1)

Коэффициент пропорциональности C представляет собой величину, зависящую не от внешних характеристик движения (приложенной силы и наблюдаемого ускорения), а лишь от собственного материального свойства точки — ее вещественности. Это

свойство Ньютон связывает с *количеством вещества* в точке — характеристикой точки, не поддающейся ни строгому определению, ни непосредственному измерению.

Чтобы избежать этой трудности, вводят представление об *инертности*, понимая под ней свойство материальной точки приобретать под действием заданной по величине силы тем большее ускорение, чем меньше характеристика C ее вещественности, и, наоборот, тем меньшее ускорение, чем больше эта характеристика.

Сохраняя за константой C приписываемое ей Ньютоном *качественное* понятие меры *количества вещества* в теле (материальной точке), примем за количественную характеристику вещественности материальной точки ее меру инертности; назовем эту меру *массой* и обозначим ее через m . За единицу массы в системе СИ принимают *килограмм* [кг] как такую массу, которая под действием силы в 1 Н приобретает ускорение, равное 1 м/с^2 . В качестве более крупной единицы массы принимают *тонну* [т], равную 10^3 кг.

Окончательной формой уравнения (19.1), в котором можно положить $C = m$, будет **ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ**

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}. \quad (19.2)$$

Рассмотрим две материальные точки с разными массами m_1 и m_2 , движущиеся под действием двух сил \boldsymbol{F}_1 и \boldsymbol{F}_2 с одним и тем же ускорением \boldsymbol{w} согласно уравнениям

$$m_1\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}_1, \quad m_2\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}_2.$$

Не нарушая движения, можем мысленно объединить эти две материальные точки в одну точку массы m . Почленно складывая два предыдущих равенства, получаем

$$(m_1 + m_2)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2,$$

откуда следует **ЗАКОН АДДИТИВНОСТИ МАСС**

$$m = m_1 + m_2.$$

Понятие массы как меры инертности, введенное для материальной точки, применимо и к поступательно движущемуся твердому телу: все частицы такого тела (в общем случае обладающие разными массами) имеют одинаковые ускорения, и поэтому

масса тела в силу закона аддитивности масс равна сумме масс его отдельных частиц.

В некоторых руководствах по механике еще можно иногда встретиться с двумя отличными от СИ системами единиц: *физической* и *технической*. Первая из них, система CGS (сантиметр — грамм — секунда), отличается от СИ только количественно.

В системе CGS за единицу длины принят *сантиметр*, равный 10^{-2} м, за единицу массы — *грамм*, равный 10^{-3} кг, а единицей силы служит *дина*, определяемая как сила, вызывающая у массы в 1 г ускорение 1 см/с^2 . Единица силы в системе СИ — *ньютон* равна

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2 = 10^5 \text{ г} \cdot \text{см/с}^2 = 10^5 \text{ дин.}$$

Техническая система единиц отличается от СИ выбором основных единиц. В технической системе основными единицами являются сила, длина и время, причем за единицу силы принят *килограмм (силы)*, за единицу длины — *метр*, за единицу времени — *секунда*. Единица массы в технической системе является производной и определяется как *масса* тела, приобретающего под действием силы в один килограмм ускорение 1 м/с^2 .

Чтобы установить связь между единицами силы и массы в различных системах единиц, применим формулу (19.2) к падению точки в пустоте вблизи земной поверхности. Обозначая силу тяжести через G , ускорение свободного падения через g , а массу через m , будем иметь

$$G = mg. \tag{19.3}$$

Численная величина ускорения g изменяется в зависимости от широты пункта земного шара и его высоты над уровнем моря. Крайние значения g на полюсе и экваторе (на уровне моря) соответственно равны $9,8311 \text{ м/с}^2$ и $9,7810 \text{ м/с}^2$. Значения g для некоторых пунктов Советского Союза* даны в табл. 1.

При дальнейшем изложении будем пользоваться общепринятым средним значением

$$g = 9,81 \text{ м/с}^2,$$

иногда заменяя его менее точным $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

* Здесь и в табл. 1 текст сохранен в соответствии с последним прижизненным изданием (1983). — *Ред.*

Таблица 1

**Значения ускорения g свободного падения
для некоторых пунктов Советского Союза**

Название города	$g, \text{ м/с}^2$	Название города	$g, \text{ м/с}^2$
Тбилиси	9,8032	Москва	9,8152
Одесса	9,8074	Ленинград	9,8193
Киев	9,8108	Архангельск	9,8218

Из формулы (19.3) следует, что в физической системе единиц массе в 1 г соответствует сила тяжести

$$981 \text{ г} \cdot \text{см/с}^2 = 981 \text{ дин.}$$

Выражая массу в кг, длину в м, время в с, получаем, что вес тела массой в 1 кг составляет 9,81 Н или $9,81 \cdot 10^5$ дин.

В дальнейшем используется общепринятая система СИ.

Наряду с понятием о массе как мере инертности — *инертной массе* — в механике приходится иметь дело также с *тяготеющей массой*, входящей в формулировку закона всемирного тяготения. Как показали многочисленные опыты и в первую очередь опыты самого Ньютона, численные величины инертной и тяготеющей массы для одного и того же тела равны между собой. Этот принцип эквивалентности инертной и тяготеющей масс был в дальнейшем обобщен и на область движений, требующих для своего рассмотрения применения специальной теории относительности (см. гл. XXXI).

§ 82. Независимость действия сил. Третий закон Ньютона

Если к материальной точке приложены две или несколько сил, то ускорение, приобретаемое ею под действием равнодействующей этих сил, построенной по правилу параллелограмма, определится как векторная сумма ускорений точки под действием каждой слагаемой силы по отдельности. Это заключение является простым следствием второго закона Ньютона в принятой векторной формулировке (19.2). При этом используется допущение, что в динамических условиях, так же как и в статических, приложенные к материальной точке силы действуют на нее независимо друг от друга, т. е. наличие одних сил не вызывает изменений в действии других. Это положение составляет содержание принципа независимости действия сил, позволяющего

применять в динамике правило параллелограмма сил и все те операции над системами сил, которые были установлены в статике.

Ньютон излагает принцип независимости действия сил совместно с правилом параллелограмма, тем самым утверждая векторный характер силы в первом следствии законов движения; формулировка Ньютона гласит:

«При совместном действии двух сил тело описывает диагональ параллелограмма в то же самое время, как стороны параллелограмма при отдельном действии сил».

В разделе статики было установлено, что действие и противодействие (сила и реакция) представляют собой две равные по величине, противоположные по направлению и имеющие общую линию действия силы. Так же как и в статике, из равенства взаимодействий по величине и противоположности их по направлению отнюдь не следует их взаимное уравнивание, так как действие и противодействие приложены к различным телам. Этот общий механический закон имеет место как в статических, так и в динамических условиях.

Приводим формулировку ТРЕТЬЕГО ЗАКОНА НЬЮТОНА:

Действию всегда соответствует равное ему и противоположно направленное противодействие, т. е. действия двух тел друг на друга всегда равны и направлены в противоположные стороны.

В то время как первые два закона Ньютона относятся к одной материальной точке, третий закон рассматривает взаимодействие двух материальных точек и является основой динамики системы материальных точек.

Обозначим массы двух взаимодействующих в случае мгновенного дальнего действия материальных точек через m_1 и m_2 , векторы их скорости через v_1 и v_2 , а векторы их ускорения через w_1 и w_2 . Тогда, согласно первому и третьему законам, предполагая, что никаких других сил, кроме взаимодействия точек, нет, получим

$$m_1 w_1 = -m_2 w_2, \quad (19.4)$$

или, интегрируя,

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{const}. \quad (19.5)$$

Ньютон определил количество движения материальной точки как произведение ее массы на скорость. Количество движения

системы точек равно геометрической сумме количеств движения отдельных точек системы. Согласно (19.5) количество движения системы двух взаимодействующих материальных точек во время движения сохраняется. Этот закон сохранения количества движения в своем простейшем виде был известен еще до Ньютона и применялся для изучения явления удара шаров.

Дифференцирование равенства (19.5) по времени приводит к равенству (19.4), а из последнего, согласно второму закону, вытекает третий закон. Ньютон при установлении третьего закона использовал накопленный к его времени опыт применения закона сохранения количества движения, о чем можно судить по пояснению, сопровождающему формулировку третьего закона, и по «Поучению», завершающему изложение основных законов динамики. Однако Ньютон придает третьему закону *самостоятельное* значение как общемеханическому закону, а закон сохранения количества движения системы точек выводит из него как следствие. В этом — принципиальное отличие механических воззрений Ньютона от соответствующих воззрений Декарта, считавшего закон сохранения движения *основным* физическим законом.

§ 83. Различные формы основного уравнения динамики точки

Равенство (19.2), как уже упоминалось, является *основным уравнением динамики материальной точки*.

Вспоминая, что

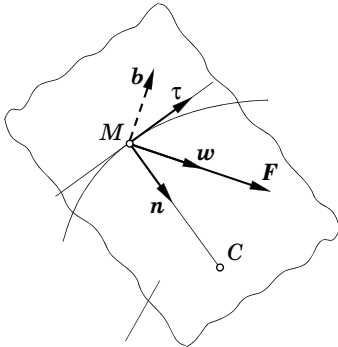
$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2},$$

где \boldsymbol{v} — вектор скорости, \boldsymbol{r} — вектор-радиус точки, можем придать уравнению (19.2) один из следующих видов:

$$m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}, \quad m \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}. \quad (19.6)$$

От векторной формы этих основных соотношений можно перейти к аналитической форме в проекциях на оси. Наиболее принятой формой в проекциях на оси декартовой системы координат будет

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z. \quad (19.7)$$



Соприкасающаяся плоскость

Рис. 234

Большое значение имеют также *естественные уравнения* движения. Эта форма уравнений динамики получается проецированием основного уравнения (19.2) на оси натурального триэдра (§ 46), т. е. направления касательной, нормали и бинормали к траектории (рис. 234):

$$\begin{aligned} mw_\tau &= m \frac{dv}{dt} = F_\tau, \\ mw_n &= m \frac{v^2}{\rho} = F_n, \\ mw_b &= 0 = F_b. \end{aligned} \tag{19.8}$$

Из последнего уравнения следует, что сила, так же как и ускорение, лежит в соприкасающейся плоскости траектории точки. При движении по плоской траектории естественные уравнения приводятся к виду

$$m \frac{dv}{dt} = F_\tau, \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n. \tag{19.9}$$

Проецируя обе части уравнения (19.2) на оси любой криволинейной системы координат, получаем уравнения движения точки в криволинейных координатах

$$mw_{q_i} = F_{q_i}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{19.10}$$

где w_{q_i} — проекция ускорения на ось q_i системы криволинейных координат q_1, q_2, q_3 , а F_{q_i} — проекция силы на ту же ось.

Согласно § 48, имеем

$$w_{q_i} = \frac{1}{H_i} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q_i} \right],$$

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}.$$

Если ввести в рассмотрение величину

$$T = \frac{1}{2} mv^2,$$

называемую *кинетической энергией материальной точки*, то уравнениям (19.10) можно придать вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (19.11)$$

где положено для краткости

$$Q_i = H_i F_{q_i}. \quad (19.12)$$

Уравнения (19.11) представляют собой уравнения движения материальной точки в форме Лагранжа. Величины Q_i носят наименование *обобщенных сил*; подробнее об этом будет сказано в гл. XXIX.

Так, например, в полярной системе координат, обозначая индексами r и φ проекции силы на направления радиуса r и перпендикулярное к нему направление в сторону возрастания полярного угла φ , получаем по (19.11) (вспомним формулы § 48)

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = F_\varphi. \quad (19.13)$$

В сферической системе координат (R, φ, θ) будем иметь по формулам того же параграфа

$$\begin{aligned} m(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - R\dot{\theta}^2) &= F_R, \\ \frac{m}{R \sin \theta} \frac{d}{dt} (R^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta) &= F_\varphi, \\ \frac{m}{R} \left[\frac{d}{dt} (R^2 \dot{\theta}) - R^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \right] &= F_\theta. \end{aligned} \quad (19.14)$$

§ 84. Две задачи динамики. Простейшие примеры первой задачи

Имея основные динамические уравнения в одном из указанных выше видов, можно поставить и разрешить две задачи.

■ Дано движение материальной точки заданной массы, т. е. известны координаты точки как функции времени — кинематические уравнения движения; требуется найти силу, действующую на точку (*первая задача динамики*).

■ Дана сила, приложенная к материальной точке заданной массы; требуется найти движение точки, т. е. кинематические уравнения движения (*вторая задача динамики*).

Из постановки этих двух основных задач динамики непосредственно следует, что из трех переменных, входящих в формулу (19.2) второго закона (масса, кинематика движения, сила), задаются только две: масса и кинематические уравнения движения — в первой задаче динамики, масса и сила — во второй.

Это говорит о том, что *второй закон Ньютона, выраженный векторной формулой (19.2) или аналитически системой (19.7), не является тождеством (определением понятия силы), а представляет собой уравнение с неизвестным вектором силы \mathbf{F} (первая задача динамики) или вектором-радиусом $\mathbf{r}(t)$ (вторая задача динамики).*

Решение первой задачи в приведенной постановке не составляет труда. Если заданы кинематические уравнения движения, например, в декартовой системе координат

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \quad (19.15)$$

и масса точки m , то сила, вызывающая это движение, будет, согласно (19.7), иметь проекции

$$F_x = m\ddot{x} = m f_1''(t), \quad F_y = m\ddot{y} = m f_2''(t), \quad F_z = m\ddot{z} = m f_3''(t) \quad (19.16)$$

и, таким образом, в любой момент времени может быть найдена простым дифференцированием по времени равенств (19.15).

Вторая задача динамики сложнее уже хотя бы потому, что связана с необходимостью *интегрирования* основного дифференциального уравнения (19.2) при заданных силе, массе и начальных условиях движения.

Поясним это простейшими примерами. Начнем с первой задачи динамики.

Пример 73. Тело массой m спускается по прямолинейной направляющей, наклоненной к горизонту под углом α , с известным ускорением w , регистрируемым специальным прибором — акселерометром. Определить силу \mathbf{F} торможения.

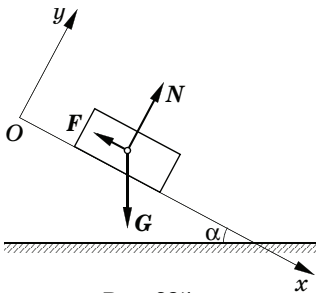


Рис. 235

Рассматривая тело как материальную точку, на которую действуют три силы — сила тяжести $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$, сила торможения \mathbf{F} и нормальная реакция \mathbf{N} направляющей, составим уравнения его движения в проекциях на оси Ox и Oy , указанные на рис. 235. Будем иметь

$$\begin{aligned} mw_x &= mg \sin \alpha - F, \\ mw_y &= 0 = -mg \cos \alpha + N. \end{aligned}$$

Отсюда сразу определяются сила торможения

$$F = m(g \sin \alpha - w)$$

и нормальная реакция направляющей

$$N = mg \cos \alpha.$$

Если, подобно тому как это делалось в статике, ввести в рассмотрение коэффициент трения движения f , определив его отношением величины F силы торможения к величине N нормальной реакции, $f = F/N$, то на основании предыдущих формул для определения этого коэффициента получим равенство

$$f = \operatorname{tg} \alpha - \frac{w}{g \cos \alpha}.$$

Изменяя уклон направляющей, можно найти такое значение угла $\alpha = \varphi$, при котором тело будет спускаться равномерно, т. е. ускорение w будет равно нулю. Этот угол φ , определяемый, согласно последней формуле, равенством $\operatorname{tg} \varphi = f$, соответствует рассмотренному в статике углу трения (§ 21).

Решение только что рассмотренного примера можно было бы интерпретировать иначе, а именно как решение задачи о равновесии тела под действием сил G , F , N и дополнительной силы, определяемой вектором $-mw$, где w — ускорение спускающегося тела. Действительно, уравнения равновесия тела в проекциях на оси Ox , и Oy при этом имели бы вид

$$\begin{aligned} -F - mw + mg \sin \alpha &= 0, \\ N - mg \cos \alpha &= 0 \end{aligned}$$

и ничем не отличались бы от выписанных ранее уравнений движения тела.

Вообще, если основное уравнение динамики (19.2) переписать в тождественной форме

$$F - mw = 0 \tag{19.17}$$

и ввести обозначение

$$-mw = S, \tag{19.18}$$

то уравнение (19.17) примет вид

$$F + S = 0. \tag{19.19}$$

Вектор S , равный по величине произведению массы точки на ее ускорение и направленный в сторону, противоположную ускорению, называется *силой инерции* материальной точки и

считается приложенным к этой точке. Представление о силах инерции будет расширено в гл. XXX в связи с рассмотрением динамики относительного движения. Сейчас уделим внимание принятому формальному определению силы инерции и заметим, что в результате такого подхода уравнение динамики (19.2) свелось к уравнению равновесия (19.19) материальной точки под действием приложенной силы и силы инерции. Изложенный прием сведения задачи динамики к задаче статики лежит в основе метода *кинетостатики*, который будет в более общем виде изложен в гл. XXVIII. По своей сути метод этот относится к первой задаче динамики. Как выяснится из следующих примеров, данный метод особенно полезен при рассмотрении движений в естественной форме.

Проекции силы инерции на декартовы и естественные оси будут соответственно равны

$$S_x = -m\ddot{x}, \quad S_y = -m\ddot{y}, \quad S_z = -m\ddot{z} \quad (19.20)$$

и

$$S_\tau = -m\dot{w}_\tau, \quad S_n = -m\dot{w}_n, \quad S_b = 0. \quad (19.21)$$

Составляющие силы инерции S_τ и S_n по направлению естественных осей — касательной и главной нормали к траектории — называются естественно *касательной* и *центробежной силами инерции*; эти силы направлены противоположно соответствующим составляющим ускорения точки и по величине равны $m|\dot{v}|$ и mv^2/ρ .

Пример 74. Определить угол крена самолета при вираже, равный углу φ (рис. 236) между плоскостью крыльев и горизонтом, если вираж осуществляется со скоростью v в горизонтальной плоскости; радиус виража a .

Из условия равновесия силы тяжести самолета $G = mg$, подъемной силы L , принятой равной

$$L = C_y \frac{\rho v^2}{2} \sigma,$$

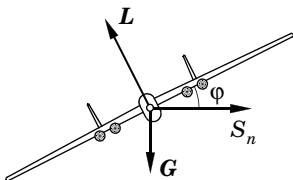


Рис. 236

где C_y — коэффициент подъемной силы, принимаемый пропорциональным углу атаки, ρ — массовая плотность воздуха, σ — общая площадь несущих поверхностей, и центробежной силы

$$S_n = \frac{mv^2}{a}$$

получим

$$\frac{mv^2}{a} = C_y \frac{\rho v^2}{2} \sigma \sin \varphi,$$

$$mg = C_y \frac{\rho v^2}{2} \sigma \cos \varphi.$$

Разделив эти два равенства почленно одно на другое, найдем угол крена

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{v^2}{ga},$$

а радиус виража определим по первому из предыдущих равенств:

$$a = \frac{2m}{\rho \sigma C_y \sin \varphi}.$$

Из этой формулы вытекает, что для совершения виража по возможности малого радиуса следует увеличивать угол крена и коэффициент подъемной силы, т. е. вместе с углом крена увеличивать угол атаки.

Аналогичный расчет проводится в следующем примере.

Пример 75. Велосипедист описывает окружность радиусом a , лежащую в горизонтальной плоскости, с постоянной по величине скоростью v (рис. 237). Какой угол α должна при этом составлять плоскость рамы велосипеда с вертикалью?

Будем предполагать силу тяжести $G = mg$ велосипедиста и велосипеда сосредоточенной в их общем центре тяжести C , лежащем в плоскости рамы велосипеда. В этой же точке приложена и центробежная сила $S_n = mv^2/a$. Будем считать также, что силы реакции почвы: нормальная N и боковая сила трения F , приложенные в точке пересечения линии соприкосновения колес с почвой и плоскости чертежа, приводятся к одной равнодействующей R . Из условия равновесия тела под действием трех сил G , S_n и R заключим, что линии действия силы R должны проходить через точку C пересечения линий действия первых двух сил. Из силового треугольника, показанного на рис. 237 справа, сразу следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{S_n}{G} = \frac{v^2}{ga}.$$

Для движения по закруглению велосипедист должен тем больше отклонять плоскость рамы от вертикальной плоскости, чем больше его скорость и чем меньше желательный радиус поворота.

Пример 76. Кузов вагона массой m совершает на рессорах гармонические вертикальные колебания амплитудой a и периодом T . Определить максимальное и минимальное давление N кузова на рессоры.

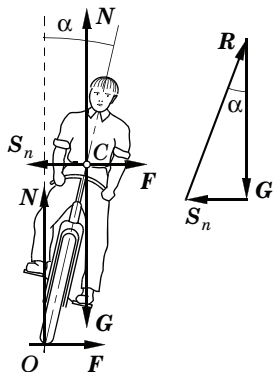


Рис. 237

Направив ось Ox вертикально вниз, зададим уравнение движения кузова в виде

$$x = a \sin (2\pi/T)t. \quad (19.22)$$

Началу координат здесь соответствует среднее положение кузова, а крайним верхнему и нижнему положениям — значения

$$x = -a, \quad x = a.$$

К кузову приложены сила тяжести $G = mg$ и реакция рессор N . Дифференциальное уравнение движения кузова будет

$$mw_x = G - N = mg - N.$$

Дважды дифференцируя обе части уравнения движения (19.22) по времени, получаем

$$w_x = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Давление кузова на рессоры будет

$$N = G - mw_x = mg - mw_x = mg \left(1 + \frac{4\pi^2 a}{gT^2} \sin \frac{2\pi t}{T} \right).$$

В крайнем верхнем положении

$$N = N_{\min} = mg \left(1 - \frac{4\pi^2 a}{gT^2} \right),$$

в крайнем нижнем

$$N = N_{\max} = mg \left(1 + \frac{4\pi^2 a}{gT^2} \right).$$

§ 85. Специальная постановка первой задачи динамики.

Определение закона действия силы по заданному классу движений. Задача Бертрана

Первая задача динамики материальной точки окажется не столь простой, если ее обобщить, потребовав определить *общий закон сил*, вызывающих данный класс движений, которые отличаются друг от друга начальными условиями, т. е. начальным положением точки и начальной ее скоростью, а следовательно, и траекториями движения.

Простейшим примером такой специальной постановки первой задачи динамики может служить следующий одномерный случай.

Материальная точка массой m совершает гармоническое колебательное движение по оси Ox согласно уравнению

$$x = a \sin(\omega t + \varepsilon), \quad (19.23)$$

где, как это было выяснено в кинематике, a — амплитуда колебания, ω — круговая частота колебания, а ε — начальная фаза.

Составляя выражение проекции ускорения на ось Ox

$$w_x = \ddot{x} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (19.24)$$

и подставляя его в формулу второго закона (19.7), находим

$$F_x = m\ddot{x} = -ma\omega^2 \sin(\omega t + \varepsilon). \quad (19.25)$$

Это служит решением первой задачи динамики. Перепишем теперь равенство (19.25) на основании (19.24) в форме

$$F_x = -m\omega^2 x = -cx, \quad c = m\omega^2. \quad (19.26)$$

В этой форме для гармонических колебаний открывается закон пропорциональности величины силы величине отклонения точки от центра равновесия ($x = 0$) и направления ее в сторону этого центра. Такая сила будет действовать на материальную точку со стороны упругой нити или пружины, притягивающей эту точку к центру ($x = 0$). Входящий в правую часть (19.26) коэффициент c определяется только упругими свойствами пружины (об этом будет еще речь впереди) и никак не связан с начальным положением точки и начальной скоростью движения точки. Закон (19.26) является общим и может применяться для решения разнообразных задач, служащих для предсказания прямолинейных движений материальной точки под действием упругой силы притяжения к данному центру.

В несколько более общем случае, когда материальная точка M описывает в плоскости Oxy фигуры Лиссажу (§ 41), согласно уравнениям колебания этой точки по осям Ox и Oy ,

$$x = a_1 \sin(\omega t + \varepsilon_1), \quad y = a_2 \sin(\omega t + \varepsilon_2) \quad (19.27)$$

с разными амплитудами a_1 , a_2 и начальными фазами ε_1 , ε_2 , но с одинаковой частотой ω , повторяя тот же анализ, находим

$$\begin{aligned} F_x &= mw_x = -ma_1\omega^2 \sin(\omega t + \varepsilon_1) = -m\omega^2 x = -cx, \\ F_y &= mw_y = -ma_2\omega^2 \sin(\omega t + \varepsilon_2) = -m\omega^2 y = -cy. \end{aligned} \quad (19.28)$$

Отсюда можно заключить, что движения материальной точки по всевозможным фигурам Лиссажу, согласно уравнениям (19.27), будут происходить по коническим сечениям независимо от того, каковы будут значения зависящих от начальных условий

движения амплитуд a_1 , a_2 и начальных фаз ε_1 , ε_2 , если сила, действующая на материальную точку, будет по величине пропорциональна расстоянию от точки до начала координат и направлена во все время движения к этому началу. Приложенная к движущейся точке сила, линия действия которой всегда проходит через одну и ту же неподвижную точку (в данном случае начало координат), называется *центральной силой*. Итак, можно заключить, что движения точки по коническим сечениям, параметрически заданным уравнениями (19.27), будут происходить под действием центральной силы притяжения к началу координат (19.28), прямо пропорциональной по величине расстоянию от точки до этого начала.

К такой специальной постановке первой задачи динамики материальной точки относится задача Ж. Бертрана, сформулированная им в следующих словах:

«найти законы центральных сил, зависящих только от положения движущейся точки и вынуждающих ее независимо от начальных условий описывать конические сечения».

Бертран показал, что этим условиям удовлетворяют центральные силы притяжения к неподвижной точке $F_r = -\mu r$ и $F_r = -\mu/r^2$. Первый случай был только что разобран, а второй будет рассмотрен на следующем примере, содержащем вывод закона Ньютона о всемирном тяготении из уравнений Кеплера.

Пример 77. Определить закон притяжения планет к Солнцу, считая известными законы Кеплера (§ 48).

Согласно *первому закону Кеплера* (1571—1630) планеты Солнечной системы движутся по эллипсам, в общем фокусе которых находится Солнце. Помещая начало координат в центр Солнца S (рис. 238) и обозначая через r радиус-вектор планеты относительно Солнца, а через φ полярный угол, отсчитываемый от радиуса-вектора SP планеты в ее наиболее близком к Солнцу расстоянии (в перигелии), будем иметь уравнение орбиты планеты

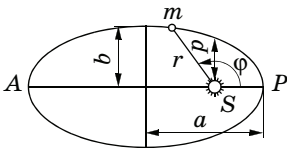


Рис. 238

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad (19.29)$$

БЕРТРАН ЖОЗЕФ ЛУИ ФРАНСУА (*Bertrand Joseph Louis François*, 1822—1900) — французский математик, иностр. чл.-корр. (1859) и иностр. почетный чл. (1896) Петербургской АН, чл. Парижской АН (1856), с 1862 г. проф. Коллеж де Франс.

где p — параметр эллипса, равный отношению квадрата меньшей полуоси b к длине большей полуоси a , и $e < 1$ — эксцентриситет эллипса, равный отношению фокусного расстояния к длине большей полуоси.

По второму закону Кеплера секториальная скорость планеты (§ 48) постоянна, т. е.

$$r^2 \dot{\varphi} = C. \quad (19.30)$$

Вспоминая уравнения движения в полярных координатах (19.13), заключаем, что искомая сила F притяжения планеты с массой m к Солнцу имеет проекции

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2), \quad F_\varphi = 0. \quad (19.31)$$

Отсюда сразу следует, что на планету действует сила, направленная по радиусу-вектору планеты — *центральная сила*, а орбита (траектория) — *центральная орбита*.

Остается определить величину F_r и сторону, в которую направлена сила F . Для этого по (19.29) и (19.30) вычисляем

$$\dot{r} = \frac{pe \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}}{(1 + e \cos \varphi)^2} = \frac{pe \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} \cdot \frac{C}{r^2} = \frac{Ce}{p} \sin \varphi,$$

$$\ddot{r} = \frac{Ce}{p} \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = \frac{Ce}{p} \cos \varphi \cdot \frac{C}{r^2} = \frac{C^2 e \cos \varphi}{p r^2},$$

после чего по первой из формул (19.31) с учетом (19.29) и (19.27) находим

$$F_r = -\frac{mC^2}{pr^2}, \quad (19.32)$$

откуда заключаем, что планета движется под действием силы притяжения к Солнцу, прямо пропорциональной массе планеты и обратно пропорциональной квадрату расстояния от нее до Солнца.

Обозначая через τ период обращения планеты и вспоминая, что площадь эллипса равна πab , по определению секториальной скорости находим

$$C\tau/2 = \pi ab,$$

так что

$$\frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{\tau^2 (b^2/a)} = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2},$$

после чего вместо (19.32) получим

$$F = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2} \cdot \frac{m}{r^2}. \quad (19.33)$$

Согласно *третьему закону Кеплера* отношение a^3/τ^2 одинаково для всех планет Солнечной системы. Предположив, что масса Солнца M ана-

логично массе планеты m входит в формулу для силы притяжения в виде множителя, примем, что

$$\frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2} = fM, \quad (19.34)$$

где f — коэффициент пропорциональности, который не должен зависеть ни от массы Солнца, ни от массы притягиваемой к Солнцу планеты, т. е. быть универсальной константой. Тогда формула (19.33) запишется в виде

$$F = f \frac{Mm}{r^2}. \quad (19.35)$$

Таков *общий вид* формулы закона всемирного тяготения, справедливого для любых тяготеющих масс.

Универсальная постоянная тяготения f , выражающая силу взаимного притяжения двух масс в 1 г каждая, находящихся друг от друга на расстоянии 1 м, была определена путем непосредственного измерения (с помощью точных крутильных весов) силы притяжения двух шаров впервые Кавендишем в 1798 г., позднее более точно Этвешем в 1912 г.; по современным данным

$$f = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2). \quad (19.36)$$

§ 86. Законы сил

Установление закона силы может происходить путем непосредственного обобщения результатов опыта, заключающегося в определении закона силы по наблюдаемому движению. Примером может служить только что приведенный вывод закона всемирного тяготения Ньютона из экспериментально установленных Кеплером кинематических законов движения планет (§ 48).

Остановимся подробнее на рассмотрении некоторых наиболее важных законов сил.

■ **Постоянная по величине и направлению сила.** Таковы: сила тяжести, т. е. сила тяготения при движении тела в области, малой по протяженности в сравнении с размерами земного шара, действие на электрон постоянного во времени и однородного электрического поля, сила кулонова трения, действующая на

КАВЕНДИШ ГЕНРИ (*Cavendish Henry*, 1731—1810) — английский физик и химик, чл. Лондонского королевского общества (1760).

ЭТВЕШ ЛОРАНД (РОЛАНД) ФОН (*Eötvös Lorand von*, 1848—1919) — венгерский физик, президент Венгерской АН (1889).

тело, движущееся по наклонной плоскости. Принимая, например, вертикальное направление в данном пункте земного шара за ось z , будем иметь закон силы тяжести $F_z = \pm G$, где G — вес тела, а знак зависит от того, будет ли ось z направлена вниз или вверх.

■ **Сила, зависящая от времени.** Примером может служить сила, втягивающая (выталкивающая) намагниченный сердечник в катушку, по обмотке которой течет переменный электрический ток. Если предположить, что длина катушки велика по сравнению с ее радиусом, а смещения сердечника малы по сравнению с длиной катушки, то проекция на ось катушки силы взаимодействия сердечника с катушкой может быть представлена формулой

$$Q_x = 4\pi m n i = 4\pi m n i_0 \sin(2\pi t/T), \quad (19.37)$$

где m — магнитная масса сердечника, n — число витков проволоки на единицу длины катушки, T — период переменного тока, i_0 — амплитуда величины тока.

■ **Сила, зависящая от положения точки в пространстве** (позиционная сила). Простейшим примером такого рода силы может служить натяжение F упругой нити, связывающей (рис. 239) движущуюся точку M с некоторым центром O , который можно выбрать так, чтобы при совпадении точек M и O удлинение нити равнялось нулю. Тогда, согласно закону Гука о пропорциональности величины упругой силы относительному удлинению нити, будем иметь

$$F = -c \cdot \overrightarrow{OM} = -cr, \quad (19.38)$$

где учтено, что сила упругости F направлена вдоль OM от точки M к точке O . Коэффициент пропорциональности c характеризует упругие свойства нити и численно равен силе, растягивающей нить на единицу длины.

Проекции упругой силы на оси координат будут

$$F_x = -cx, \quad F_y = -cy, \quad F_z = -cz. \quad (19.39)$$

Аналогично можно найти проекции силы тяготения двух масс или притяжения (отталкивания) двух электрически заряженных тел. Помещая (рис. 239) в точку O массу m_1 , а в точку M массу m_2 , будем иметь

$$F = -f \frac{m_1 m_2}{r^3} r, \quad (19.40)$$

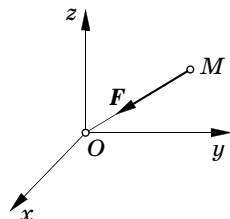


Рис. 239

причем в этой векторной формуле учитываются как величина, так и направление силы, приложенной к точке M ; проекции той же силы на оси координат равны

$$\begin{aligned} F_x &= -f \frac{m_1 m_2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} x, \\ F_y &= -f \frac{m_1 m_2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} y, \\ F_z &= -f \frac{m_1 m_2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} z. \end{aligned} \quad (19.41)$$

■ **Сила, зависящая от скорости точки.** Примером силы, зависящей по величине и направлению только от скорости точки, может служить сила, действующая со стороны однородного магнитного поля на частицу, несущую электрический заряд (лоренцева сила). Если напряжение магнитного поля обозначить через \mathbf{H} , скорость частицы через \mathbf{v} , а электрический заряд через e , то действующая на движущуюся частицу сила будет определяться по величине и направлению формулой

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{H}. \quad (19.42)$$

Если для упрощения выражения проекций этой силы на оси координат принять за ось Ox направление магнитного поля, задаваемое вектором напряжения \mathbf{H} , то $H_x = H$, $H_y = 0$, $H_z = 0$, и выражения проекций силы \mathbf{F} примут вид

$$F_x = 0, \quad F_y = eHv_z, \quad F_z = -eHv_y. \quad (19.43)$$

Сила сопротивления среды движущемуся в ней поступательно, прямолинейно и равномерно телу зависит от его скорости. Если $f(v)$ обозначает численную величину силы сопротивления среды, то вектор силы сопротивления будет (по условию противоположности его направления направлению вектора скорости \mathbf{v}) определяться формулой

$$\mathbf{D} = -\frac{f(v)}{v} \mathbf{v}, \quad (19.44)$$

а проекции этой силы на оси координат могут быть представлены следующим образом:

$$D_x = -\frac{f(v)}{v} \dot{x}, \quad D_y = -\frac{f(v)}{v} \dot{y}, \quad D_z = -\frac{f(v)}{v} \dot{z}. \quad (19.45)$$

Если, например, сила сопротивления может быть принята пропорциональной первой степени скорости, т. е. $f(v) = kv$, где

k — коэффициент пропорциональности, зависящий от физических свойств среды и формы тела, то получим

$$D_x = -k\dot{x}, \quad D_y = -k\dot{y}, \quad D_z = -k\dot{z}; \quad (19.46)$$

такова, в частности, сила сопротивления медленному движению в очень вязкой жидкости шарика, определяемая формулой Стокса (μ — коэффициент вязкости, a — радиус шарика)

$$D = 6\pi\mu av, \quad (19.47)$$

так что в этом случае $k = 6\pi\mu a$.

■ **Сила, зависящая от ускорения.** Если шарик радиуса a движется поступательно и прямолинейно с ускорением \boldsymbol{w} в идеальной (невязкой) жидкости, то сила сопротивления жидкости (согласно ее свойству инертности) ускоренному движению шарика будет равна по величине половине произведения массы жидкости в объеме шарика на его ускорение и направлена в сторону, противоположную направлению вектора ускорения. Эта сила сопротивления \boldsymbol{D} может быть выражена векторной формулой*

$$\boldsymbol{D} = -\frac{2}{3} \pi a^3 \rho \boldsymbol{w} = -\lambda \boldsymbol{w}, \quad (19.48)$$

где ρ — плотность жидкости.

Коэффициент λ , имеющий размерность массы, носит наименование *присоединенной массы* шара. Происхождение этого наименования связано с тем, что уравнение движения шарика собственной массой m под действием силы \boldsymbol{D} и другой какой-нибудь силы \boldsymbol{P}

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{D} = \boldsymbol{P} - \lambda \boldsymbol{w}$$

может быть переписано в виде

$$(m + \lambda)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{P}.$$

Это уравнение допускает следующую трактовку: под действием силы \boldsymbol{P} шарик в жидкости движется так, как шарик в пустоте, но с массой, увеличенной на *присоединенную массу*, равную половине массы жидкости в объеме шарика. Присоединенная масса оказывает значительное влияние на движение тела в жидкости только в случае, когда она имеет тот же порядок величины, что и собственная масса тела, т. е. когда плотность жидкости сравнима по величине с плотностью движущегося в ней тела.

* См., например, *Лойцянский Л. Г.* [16, с. 320].

В проекциях на оси координат сила сопротивления, пропорциональная ускорению, будет выражаться следующим образом:

$$D_x = -\lambda\ddot{x}, \quad D_y = -\lambda\ddot{y}, \quad D_z = -\lambda\ddot{z}. \quad (19.49)$$

В дальнейшем нам придется иметь дело по преимуществу лишь с силами, зависящими от времени, положения точки в пространстве и ее скорости. При этом проекции равнодействующей силы, приложенной к движущейся точке, будут определяться как функции времени, координат и проекций скорости, так что закон силы будет выражаться формулами вида

$$\begin{aligned} F_x &= F_x(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ F_y &= F_y(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ F_z &= F_z(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \end{aligned} \quad (19.50)$$

в полярной системе координат аналогично

$$\begin{aligned} F_r &= F_r(t; r, \varphi; \dot{r}, \dot{\varphi}), \\ F_\varphi &= F_\varphi(t; r, \varphi; \dot{r}, \dot{\varphi}); \end{aligned} \quad (19.51)$$

соответствующие выражения будем иметь и в других системах координат.

§ 87. Вторая задача динамики материальной точки

В отличие от первой задачи динамики, решение которой позволяет найти закон силы по заданным конечным кинематическим уравнениям движения, целью второй задачи динамики является определение движения по заданному закону действия сил. Изложение методов решения этой задачи составляет, по существу, основное содержание всех разделов динамики.

Возвращаясь к основному уравнению динамики точки в декартовых координатах (19.7), перепишем его, согласно (19.50), в форме

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} &= F_y(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} &= F_z(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \quad (19.52)$$

Совокупность равенств (19.52) представляет собой систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно трех неизвестных функций — координат точки $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — и носит наименование основных дифференциальных уравнений движения материальной точки.

пользуясь которыми, выразим C_1, C_2, \dots, C_6 через начальные координаты и проекции скорости (19.55). Подставляя эти значения постоянных в систему (19.53) и разрешая ее относительно координат, находим искомые конечные уравнения движения материальной точки:

$$\begin{aligned}x &= f_1(t; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\y &= f_2(t; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\z &= f_3(t; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).\end{aligned}\tag{19.57}$$

Определение решения системы дифференциальных уравнений движения (19.52) при заданных начальных значениях координат и скоростей (19.55) представляет собой пример так называемой *задачи Коши*. Эта задача, как доказывается в теории дифференциальных уравнений, при весьма общих ограничениях, накладываемых на правые части дифференциальных уравнений, имеет решение и притом единственное. В теоретической механике могут ставиться задачи и другого типа — *краевые задачи*. Так, например, можно задать положения точки, соответствующие двум различным моментам времени $t = t_0$ и $t = t_1$; при этом система (19.53) также приведет к шести уравнениям с шестью неизвестными, но, в отличие от задачи Коши, такого рода краевая задача может и не иметь решения, а если будет иметь, то это решение может оказаться не единственным.

Поясним сказанное простыми примерами; более сложные задачи составляют содержание следующих глав. Начнем со случая прямолинейного движения материальной точки под действием постоянной по величине и направлению силы.

Пример 78. Тело (рис. 235, с. 28) спускается под уклон в 5° ; считая сопротивление трения постоянным и коэффициент трения равным 0,02, определить скорость тела через 10 с после начала движения и пройденный им к этому времени путь.

Запишем дифференциальное уравнение движения (см. пример 73) в проекции на ось Ox :

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F = mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha.$$

Ввиду малости угла $\alpha = 5^\circ \approx 0,087$ имеем $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, и, следовательно,

$$\ddot{x} = 9,81(0,087 - 0,02) = 0,657 \text{ м/с}^2.$$

Интегрируя, находим первый интеграл движения

$$\dot{x} = 0,657t + C.$$

В начальный момент $t = 0$ значение $\dot{x} = 0$, так что и $C = 0$. Следовательно, скорость будет равна

$$v_x = \dot{x} = 0,657t \text{ м/с.}$$

При $t = 10$ с найдем $v_x = 6,57$ м/с. Повторное интегрирование определит абсциссу x движущегося тела; будем иметь второй интеграл

$$x = 0,3285t^2 + C_1.$$

Совмещая начало координат O с положением тела в начальный момент, т. е. полагая $x = 0$ при $t = 0$, получаем $C_1 = 0$, и уравнение движения тела будет

$$x = 0,3285t^2 \text{ м.}$$

При $t = 10$ с найдем $x \approx 33$ м.

В тех случаях, когда сила задается различными функциями времени на отдельных участках движения, интегрирование уравнений движения приходится производить раздельно по этим участкам, а затем уже, пользуясь произвольными постоянными интегрирования, своими для каждого участка, сращивать полученные решения между собой на краях участков.

Пример 79. К материальной точке массой m , находящейся в покое, прикладывается в момент времени $t = 0$ сила, величина которой меняется по гармоническому закону

$$F = F_0 \cos \omega t.$$

Определить движение точки под действием этой силы.

Принимая линию действия силы F за ось Ox и положение покоя точки за начало координат, проинтегрируем один раз уравнение движения

$$m\ddot{x} = F = F_0 \cos \omega t.$$

Получим первый интеграл

$$\dot{x} = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t + C.$$

Повторное интегрирование дает второй интеграл

$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t + Ct + C_1.$$

Из первого интеграла следует, что $C = 0$, так как в начальный момент точка находилась в покое и $\dot{x} = 0$ при $t = 0$. Вторую постоянную C_1 определим из второго интеграла, воспользовавшись условием, что $x = 0$ при $t = 0$; будем иметь

$$C_1 = \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

Окончательно находим

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t).$$

Точка совершает гармоническое колебание с амплитудой $F_0/(m\omega^2)$ около центра колебаний с абсциссой $x^* = F_0/(m\omega^2)$.

Пример 80. Рассмотреть вертикальное движение материальной точки под действием земного тяготения, обратно пропорционального квадрату расстояния от точки до центра Земли.

Поместив начало координат O в центр Земли, направим ось Ox по радиусу Земли, проведенному через данный пункт земной поверхности. Дифференциальное уравнение движения, если пренебречь сопротивлением воздуха и вращением Земли, будет

$$m\ddot{x} = -C/x^2. \quad (19.58)$$

Примем его к поверхности Земли, положив $x = R$, где R — радиус Земли в рассматриваемом пункте поверхности, а $\ddot{x} = -g$; тогда получим

$$C = mgR^2.$$

Уравнение движения при этом переписется в форме

$$\ddot{x} = -gR^2/x^2. \quad (19.59)$$

Для его интегрирования произведем замену

$$\dot{x} = v_x, \quad \ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}.$$

Разделяя в уравнении (19.59) переменные, будем иметь

$$v_x dv_x = -gR^2 \frac{dx}{x^2}.$$

Введя начальные условия

$$x = x_0 \geq R, \quad \dot{x} = v_x = \pm v_0 \quad \text{при } t = 0,$$

проинтегрируем обе части предыдущего уравнения и получим следующий первый интеграл уравнения движения:

$$v_x^2 - v_0^2 = 2gR^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right). \quad (19.60)$$

Определим максимальное расстояние H , на которое удалится тело, брошенное с поверхности Земли с заданной начальной скоростью v_0 . Полагая в (19.60) $v_x = 0$, $x_0 = R$, $x = H$, получаем

$$v_0^2 = 2gR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{H} \right), \quad H = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2}. \quad (19.61)$$

Из первой формулы (19.61) вытекает, что начальная скорость движения, которую необходимо сообщить телу для того, чтобы оно удалилось на бесконечность ($H = \infty$), будет равна

$$v_{\infty} = \sqrt{2gR}. \quad (19.62)$$

Полагая в (19.60) $x_0 = \infty$, $x = R$, $v_0 = 0$, убедимся, что с той же скоростью достигнет Земли тело, начавшее падение из бесконечно удаленной точки с нулевой начальной скоростью. Скорость v_{∞} , определенная формулой (19.62), представляет характерную для рассматриваемого движения величину и называется *скоростью из бесконечности*. Как будет показано в следующей главе, снаряд, выпущенный с поверхности Земли с такой скоростью, не вернется на Землю независимо от того, под каким углом будет произведен выстрел. Если принять $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ и $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$, то скорость v_{∞} будет равна

$$v_{\infty} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 6400 \cdot 10^3} = 11\,206 \text{ м/с} \approx 11,2 \text{ км/с}.$$

В настоящее время скорость $v_{\infty} = v_2$, определенную по формуле (19.62), называют *второй космической скоростью*.

Понятие второй космической скорости, или скорости из бесконечности, может быть обобщено на случаи притяжения к любой планете массой M и радиусом R . Согласно общему закону тяготения (19.40), постоянная C , стоящая в правой части (19.58), равна fM . Заменяя в равенстве (19.62)

$$gR = \frac{gR^2}{R} = \frac{C}{mR} = \frac{fM}{R},$$

получим в случае притяжения к телу массой M следующее общее выражение для второй космической скорости:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2fM}{R}}. \quad (19.63)$$

Пример 81. Определить движение точки под действием силы, постоянной по величине и направлению.

Таким будет, например, движение тяжелой точки вблизи поверхности Земли, если отвлечься от вращения Земли и сопротивления воздуха, или движение наэлектризованной частицы в однородном электрическом поле.

Пусть на точку M массой m действует постоянная сила F . Дифференциальное уравнение движения $m\ddot{\mathbf{r}} = F$ или

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} F$$

по условию постоянства вектора силы имеет первый интеграл

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} Ft + C.$$

Замечая, что интеграл $\dot{\mathbf{r}}$ равен скорости, найдем, что постоянный вектор \mathbf{C} представляет собой начальную скорость v_0 , и получаем

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \mathbf{F}t + v_0.$$

Интегрируя второй раз, будем иметь второй интеграл

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \frac{1}{2m} \mathbf{F}t^2 + v_0t, \quad (19.64)$$

где \mathbf{r}_0 — начальный вектор-радиус точки M . Это соотношение показывает, что вектор $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ расположен в плоскости векторов \mathbf{F} и v_0 и, следовательно, траектория точки представляет собой плоскую кривую, расположенную в этой плоскости.

Примем начальное положение точки за начало координат O ($\mathbf{r}_0 = 0$, $x_0 = y_0 = 0$), ось Ox направим перпендикулярно силе \mathbf{F} так, чтобы вектор начальной скорости v_0 образовывал с осью Ox острый угол θ_0 ; ось Oy будет при этом совпадать по направлению с силой \mathbf{F} или направлена в противоположную сторону, так что

$$\begin{aligned} F_x &= 0, & F_y &= \pm F, & F_z &= 0, \\ v_{0x} &= v_0 \cos \theta_0, & v_{0y} &= v_0 \sin \theta_0, & v_{0z} &= 0. \end{aligned}$$

Второй интеграл в проекциях на оси будет

$$x = v_0t \cos \theta_0, \quad y = \pm \frac{F}{2m} t^2 + v_0t \sin \theta_0, \quad z = 0. \quad (19.65)$$

Это — известное из кинематики (§ 44) параболическое движение. Рассматривая, например, движение снаряда в пустоте как движение материальной точки массой $m = G/g$ под действием силы тяжести G и направляя ось y в плоскости стрельбы вертикально вверх ($F_y = -G$), будем иметь

$$x = v_0t \cos \theta_0, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0t \sin \theta_0. \quad (19.66)$$

Траектория этого движения — парабола с уравнением

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} \quad (19.67)$$

была подробно изучена в кинематике (§ 44); эта парабола симметрична относительно вертикали, проходящей через ее вершину; угол падения снаряда равен углу вылета; скорости падения и вылета также равны друг другу.

Напомним формулы максимальной высоты H снаряда над горизонтом и горизонтальной дальности L :

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}, \quad L = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}. \quad (19.68)$$

Изменения, вносимые в это движение сопротивлением воздуха и удалением снаряда на большие расстояния от поверхности Земли, будут рассмотрены в следующей главе.

Движение, соответствующее уравнениям (19.65), будет совершать и частица, несущая электрический заряд $\pm e$ в однородном электрическом поле напряжением \mathbf{E} . В этом случае надо будет положить $\mathbf{F} = \pm e\mathbf{E}$.

П р и м е р 82. Определить траекторию заряженной частицы массой m и зарядом e в однородном магнитном поле напряженностью \mathbf{H} , если сила взаимодействия частицы и поля равна $e\mathbf{v} \times \mathbf{H}$, где \mathbf{v} — скорость частицы.

Основное уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{v} \times \mathbf{H}. \quad (19.69)$$

Переходя к естественным уравнениям (§ 83) и проецируя на касательную ($\boldsymbol{\tau}$) и нормаль (\mathbf{n}) к траектории, получаем

$$m \frac{dv}{dt} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}. \quad (19.70)$$

Замечая, что единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$ параллелен \mathbf{v} и, следовательно, перпендикулярен вектору $\mathbf{v} \times \mathbf{H}$, находим

$$m \frac{dv}{dt} = 0, \quad v = \text{const} = v_0,$$

т. е. касательное ускорение равно нулю и скорость частицы постоянна по величине; полное ускорение сводится к нормальному, а вектор \mathbf{n} параллелен $\mathbf{v} \times \mathbf{H}$. Тогда из второго уравнения (19.70) будем иметь

$$m \frac{v_0^2}{\rho} = ev_0 H \sin \varphi, \quad (19.71)$$

где φ — угол между вектором скорости \mathbf{v} и вектором напряженности поля \mathbf{H} . Легко показать, что этот угол также постоянен. Для этого умножим обе части векторного уравнения движения (19.69) скалярно на единичный вектор \mathbf{H}/H ; вследствие постоянства направления \mathbf{H} будем иметь

$$m \frac{dv_H}{dt} = 0, \quad v_H = v_0 \cos \varphi = \text{const},$$

откуда следует, что $\varphi = \varphi_0$. Из уравнения (19.71) при этом получим

$$\rho = \frac{mv_0}{eH \sin \varphi_0}.$$

Мы видим, что траектория имеет постоянный радиус кривизны и образует постоянный угол с магнитными линиями. Это — винтовая линия на круговом цилиндре с осью, параллельной магнитным линиям. Радиус цилиндра a (§ 46) связан с радиусом кривизны соотношением

$$a = \rho \frac{4\pi^2 a^2}{h^2 + 4\pi^2 a^2} = \rho \sin^2 \varphi_0 = \frac{mv_0 \sin \varphi_0}{eH},$$

а шаг h винтовой линии равен

$$h = 2\pi a \operatorname{ctg} \varphi_0 = \frac{2\pi m v_0 \cos \varphi_0}{eH}.$$

§ 88. Связь между первой и второй задачами динамики материальной точки

Как видно из только что приведенных простейших примеров, при решении второй, основной задачи динамики материальной точки приходится пользоваться как *статическими* законами сил (постоянная сила тяжести, упругая сила, сила тяготения), так и *динамическими* законами (сила сопротивления, лоренцева сила). Эти законы сил устанавливаются в результате решения частных задач и последующего *обобщения* этих решений на широкие классы явлений, моделирующих движения материальных точек.

Может возникнуть мысль, что такое определение сил из уравнения динамики и обратная подстановка этих сил в то же уравнение представит собой порочный круг. Некоторые авторы курсов теоретической механики вообще не признают значения *уравнения динамики* как *основного закона естествознания*, сохраняя за ним лишь роль *определения силы*.

Ошибочность такого взгляда заключается в том, что не учитывается смысл изложенной выше специальной постановки первой задачи динамики (в частности, задачи Бертрана), определяющей не просто силу, а общий *закон* сил, соответствующий обширному классу явлений.

Здесь уместно еще и еще раз повторить слова Ньютона, так поясняющие основную задачу динамики:

«по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам изъяснить остальные явления».

Согласно принципу независимости действия сил, можно решить первую задачу в специальной ее постановке для различных законов сил, взятых по отдельности, а затем поставить вторую задачу динамики, т. е. найти движение материальной точки под действием *совокупности законов сил*. Таким образом, специальная постановка, определяя общие законы сил, позволяет предсказывать движение материальной точки при разнообразных по физической сущности силах и начальных условиях движения, приводящих к кинематическим характеристикам движений в конкретных случаях.

Методы решения второй задачи динамики разъясняются на примерах, помещенных в следующих главах. Решение этих примеров требует интегрирования некоторых простейших дифференциальных уравнений второго порядка, для чего достаточно первоначального знакомства с дифференциальным и интегральным исчислениями.

Глава XX

Некоторые задачи динамики точки

§ 89. Вертикальное движение тяжелой точки в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости

Примем силу сопротивления D равной по величине λv^2 , где λ — постоянный коэффициент сопротивления, зависящий только от физических свойств среды, геометрической формы и размеров тела, а v — величина скорости. Направим ось Ox (рис. 240) по вертикали вниз; тогда дифференциальное уравнение движения будет иметь вид

$$m\ddot{x} = G + D_x = G \mp \lambda \dot{x}^2; \quad (20.1)$$

заменяя G на mg и деля обе части на m , получаем

$$\ddot{x} = g \mp \frac{\lambda}{m} \dot{x}^2 = \frac{\lambda g}{m} \left(\frac{m}{\lambda} \mp \frac{\dot{x}^2}{g} \right), \quad (20.2)$$

причем верхний знак относится к случаю движения точки вниз (нисходящее движение), нижний — к случаю движения вверх (восходящее движение). Введем обозначения для постоянных

$$\frac{\lambda}{m} = a, \quad \frac{mg}{\lambda} = c^2 \quad (20.3)$$

и сделаем замену переменной

$$\dot{x} = v_x. \quad (20.4)$$

Тогда дифференциальное уравнение движения (20.2) примет вид

$$\frac{dv_x}{dt} = a(c^2 \mp v_x^2). \quad (20.5)$$

Рассмотрим отдельно случаи нисходящего и восходящего движений.

■ **Нисходящее движение.** Такого рода движение возникнет, если проекция на ось Ox начальной скорости будет положительна ($v_{0x} = v_0 > 0$). В этом случае уравнение (20.5) интегрируется следующим образом. Разделим переменные

$$\frac{dv_x}{c^2 - v_x^2} = a dt,$$



Рис. 240

и проинтегрируем, обозначив через δ постоянную интегрирования:

$$\frac{1}{2c} \ln \left| \frac{c + v_x}{c - v_x} \right| = at + \frac{\delta}{c}. \quad (20.6)$$

Отдельному рассмотрению подлежат два случая нисходящего движения:

1°. **Случай $v_x < c$.** Тогда, согласно (20.6), имеем

$$\frac{c + v_x}{c - v_x} = e^{2(act + \delta)}, \quad (20.7)$$

или

$$v_x = c \frac{e^{2(act + \delta)} - 1}{e^{2(act + \delta)} + 1}. \quad (20.8)$$

Вводя гиперболический тангенс, связанный с показательной функцией формулами

$$\text{th } z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, \quad (20.9)$$

перепишем уравнение (20.7) в виде

$$v_x = c \text{th } (act + \delta). \quad (20.10)$$

Для определения постоянной интегрирования δ имеем начальное условие $v_x = v_0$ при $t = 0$, так что по (20.10)

$$v_0 = c \text{th } \delta. \quad (20.11)$$

Устремив время к бесконечности, согласно соотношениям (20.9) и (20.10), получим

$$v_x \rightarrow c \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, определенная, согласно (20.3), постоянная c , равная

$$c = \sqrt{mg/\lambda}, \quad (20.12)$$

имеет смысл *предельной скорости*, которая установилась бы по прошествии бесконечно большого времени, если бы точка продолжала падать вертикально под действием постоянной силы

тяжести G в среде с сопротивлением, характеризуемым коэффициентом λ .

Гиперболический тангенс представляет собой функцию, монотонно возрастающую от -1 до $+1$ при возрастании аргумента от $-\infty$ до $+\infty$. По (20.10) и (20.11) заключаем, что в рассматриваемом случае скорость точки монотонно *возрастает* от начального значения $v_0 < c$ до величины предельной скорости $v = c$.

2°. Случай $v_x > c$. Перепишем (20.6) в виде

$$\frac{v_x + c}{v_x - c} = e^{2(act + \delta)}, \quad (20.13)$$

или

$$v_x = c \frac{e^{2(act + \delta)} + 1}{e^{2(act + \delta)} - 1}. \quad (20.14)$$

Используя гиперболический котангенс

$$\operatorname{cth} z = \frac{1}{\operatorname{th} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1},$$

перепишем равенство (20.14) в форме

$$v_x = c \operatorname{cth} (act + \delta). \quad (20.15)$$

В этом случае постоянная интегрирования δ определится из соотношения

$$v_0 = c \operatorname{cth} \delta; \quad (20.16)$$

скорость точки будет монотонно *убывать* от значения $v_0 > c$ до величины предельной скорости $v = c$.

Пользуясь таблицами гиперболических функций, по формулам (20.10) или (20.15) определим скорость в любой момент времени. При увеличении аргумента гиперболический тангенс, так же как и котангенс, быстро стремится к единице; например, $\operatorname{th} 3 = 0,995$, $\operatorname{cth} 3 = 1,005$, т. е. только на 0,5% разнятся от единицы; таким образом, скорость падения стремится к предельной скорости c , практически (с ошибкой 0,5%) достигая ее уже по прошествии времени

$$\tau = \frac{3 - \delta}{ac}. \quad (20.17)$$

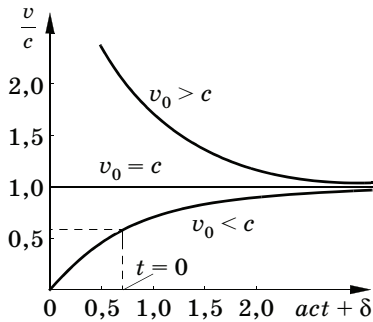


Рис. 241

На рис. 241 показаны графики скорости в случаях 1° и 2° . В первом случае скорость асимптотически возрастает от $v_0 < c$ до значения $v = c$, во втором — убывает от значения $v_0 > c$ до $v = c$. Если с самого начала придать точке скорость $v_0 = c$, то, очевидно, эта скорость будет сохраняться во все время движения. Через точку на оси ординат, отвечающую заданному отношению v_0/c , проведем прямую, параллельную

оси абсцисс, до пересечения с графиком скорости. Абсцисса точки пересечения определит значение δ , т. е. значение аргумента в правых частях (20.11) или (20.16) при $t = 0$, начиная с которого и следует пользоваться графиком скорости (см. штриховые прямые на рис. 241).

Найдем вторые интегралы в случаях 1° и 2° . В случае 1° будем иметь

$$v_x = \dot{x} = c \operatorname{th}(act + \delta), \quad x = c \int \operatorname{th}(act + \delta) dt + \beta.$$

Интеграл в правой части легко вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{th}(act + \delta) dt &= \int \frac{\operatorname{sh}(act + \delta)}{\operatorname{ch}(act + \delta)} dt = \frac{1}{ac} \int \frac{d \operatorname{ch}(act + \delta)}{\operatorname{ch}(act + \delta)} = \\ &= \frac{1}{ac} \ln \operatorname{ch}(act + \delta), \end{aligned}$$

так что

$$x = \frac{1}{a} \ln \operatorname{ch}(act + \delta) + \beta.$$

Для определения постоянной интегрирования β примем начальное условие

$$x = 0 \quad \text{при } t = 0;$$

тогда

$$\beta = -\frac{1}{a} \ln \operatorname{ch} \delta.$$

Для простоты остановимся на случае $\delta = 0$, т. е. $v_0 = 0$; тогда $\text{ch } \delta = 1$, $\beta = 0$ и

$$x = \frac{1}{a} \ln \text{ch } act. \quad (20.18)$$

Из уравнений (20.10) и (20.18) легко исключить время и найти зависимость v от высоты падения h . Из уравнения (20.18) имеем

$$\text{ch } act = e^{ax} = e^{gh/c^2};$$

подставляя это в равенство (20.10), переписанное в виде

$$v_x = c \frac{\text{sh } act}{\text{ch } act} = c \frac{\sqrt{\text{ch}^2 act - 1}}{\text{ch } act} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\text{ch}^2 act}},$$

получим искомую зависимость

$$v_x = c \sqrt{1 - e^{-2gh/c^2}}. \quad (20.19)$$

При малых λ , т. е. больших c , разлагая e^{-2gh/c^2} в ряд, будем иметь

$$\begin{aligned} v_x &= c \sqrt{1 - 1 + \frac{2gh}{c^2} - \frac{2g^2h^2}{c^4} + \dots} = \sqrt{2gh} \sqrt{1 - \frac{gh}{c^2} + \dots} \approx \\ &\approx \sqrt{2gh} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{gh}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Спротивляющаяся среда вносит поправку в известную формулу скорости в пустоте $v_{\Pi} = \sqrt{2gh}$ — происходит относительное уменьшение скорости, равное по величине

$$\frac{v_{\Pi} - v_x}{v_{\Pi}} = \frac{1}{2} \frac{gh}{c^2}.$$

В случае 2° аналогично получим

$$x = \frac{1}{a} \ln \frac{\text{sh}(act + \delta)}{\text{sh } \delta}.$$

■ **Восходящее движение.** Сохраняя направление оси Ox по вертикали вниз и выбор начала координат O в начальном положении движущейся точки, будем иметь при подъеме $v_x < 0$ и $D_x = \lambda \dot{x}^2$, так что в уравнении (20.5) следует взять нижний знак; это приведет к интегрированию дифференциального уравнения

$$\frac{dv_x}{dt} = a(c^2 + v_x^2). \quad (20.20)$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\int \frac{dv_x}{c^2 + v_x^2} = \frac{1}{c} \operatorname{arctg} \frac{v_x}{c} = at + \frac{\delta}{c},$$

где δ — новая постоянная интегрирования. Из последнего уравнения сразу следует

$$v_x = c \operatorname{tg} (act + \delta), \quad (20.21)$$

где, согласно начальному условию ($v_x = -v_0$ при $t = 0$), постоянная интегрирования δ равна

$$\delta = -\operatorname{arctg} \frac{v_0}{c}. \quad (20.22)$$

Повторное интегрирование (20.21) дает

$$x = c \int_0^t \operatorname{tg} (act + \delta) dt = -\frac{1}{a} \ln \frac{\cos (act + \delta)}{\cos \delta}, \quad (20.23)$$

причем здесь уже учтено начальное условие $x = 0$ при $t = 0$. Восходящее движение будет продолжаться до тех пор, пока скорость не обратится в нуль, т. е. по (20.21) до момента времени

$$t_1 = -\frac{\delta}{ac} = \frac{1}{ac} \operatorname{arctg} \frac{v_0}{c}. \quad (20.24)$$

При этом максимальная высота подъема h будет, согласно (20.23), равна

$$h = |x(t_1)| = -\frac{1}{a} \ln \cos \delta = \frac{1}{2a} \ln \left(1 + \frac{v_0^2}{c^2} \right). \quad (20.25)$$

При малом сопротивлении, т. е. при большом по сравнению с v_0 значении предельной скорости c , будем иметь, разлагая правую часть (20.25) в ряд и довольствуясь первыми двумя членами разложения,

$$h = \frac{1}{2a} \left(\frac{v_0^2}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{v_0^4}{c^4} \right) = \frac{v_0^2}{2ac^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{c^2} \right).$$

Вспоминая принятые в начале параграфа обозначения, получим

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 - \frac{\lambda v_0^2}{2G} \right); \quad (20.26)$$

формула эта дает относительное уменьшение высоты подъема из-за сопротивления среды по сравнению с соответствующей высотой в пустоте h_{Π}

$$\frac{h_{\Pi} - h}{h_{\Pi}} = \frac{\lambda v_0^2}{2G}. \quad (20.27)$$

Изложенная выше теория падения тел в среде, сила сопротивления которой пропорциональна квадрату скорости тела, может найти применение в расчете движения спускаемых с космических кораблей аппаратов, а также спасения самих ракет, как это имеет место, например, в случае сравнительно небольших *метеорологических ракет*. Однако на пути непосредственного применения этой теории стоят многие трудности.

Наименьшая из них заключается в том, что спуск ракеты тормозится системой последовательно раскрывающихся парашютов — сначала вспомогательных, служащих для раскрытия основного парашюта, а затем и куполом раскрывшегося основного парашюта. Поэтапный расчет влияния этих парашютов не вызвал бы особо больших затруднений, если бы не было значительно большей трудности — необходимости учета влияния переменной плотности воздуха, существенно зависящей от высоты над поверхностью Земли, причем по законам, значительно различающимся между собой на разных этапах спуска в атмосфере. Так, в нижнем слое атмосферы — *тропосфере* ($H < 11 \cdot 10^3$ м) крайние значения плотности отличаются *втрое*, а эмпирический закон относительного изменения плотности воздуха в тропосфере имеет вид

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{H}{44\,300}\right)^{4,256},$$

где $\rho_0 = 1,23$ кг/м³ — плотность воздуха на уровне моря при $t = 15$ °С, а H — высота над уровнем моря в метрах.

Применение современной вычислительной техники делает решение таких задач вполне выполнимым.

Полезно на примере* спасания метеорологической ракеты В-2А, предназначенной для исследования атмосферы на высотах порядка $200 \cdot 10^3$ м, проследить за последовательными этапами спуска и соответствующими этим этапам изменениями характерных параметров движения ракеты (t — время в с, v — вертикаль-

* См. Королев С. П. [8, с. 368].

ная скорость снижения в м/с, H — высота ракеты над уровнем моря в м, F — миделевая площадь купола парашюта в м^2 :

- ✓ $t = 0$, $v = 200$ м/с, $H = 5 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10^3$ м;
- ✓ выход вспомогательного вытяжного купола ($F = 0,52$ м^2);
- ✓ вытягивание основного вытяжного купола ($F = 2$ м^2);
- ✓ наполнение основного вытяжного купола, отделение вспомогательного вытяжного купола, выход парашютной камеры, выход тормозного купола ($F = 5,3$ м^2) из парашютной камеры, наполнение тормозного купола;
- ✓ отделение основного вытяжного купола от парашютной камеры:
 - $t = 24$ с, $v = 65,5$ м/с, $H = 3 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^3$ м;
- ✓ вытягивание основных куполов из парашютной камеры, стягивание чехлов и отделение основного вытяжного купола с чехлами от основных куполов:
 - $t = 27$ с, $v = 68$ м/с, $H = 2790 - 1790$ м;
- ✓ наполнение двух основных куполов площадью $F = 418 \times 2 = 836$ м^2 :
 - $v = 6,7$ м/с, $H = 2660 - 1660$ м;
- ✓ $t = 452$ с, v (приземления) = $5,9$ м/с, $H = 0$.

При малых скоростях силу сопротивления среды можно считать пропорциональной величине скорости. Именно так обстоит дело в случае падения тела в вязкой жидкости, которое рассматривается в приведенном ниже примере.

Пример 83. Стальной шарик радиусом $r = 10^{-3}$ м падает без начальной скорости в глицерине. Определить движение шарика при условии, что сила сопротивления задается формулой $D = 6\pi\mu r v$; здесь μ — динамический коэффициент вязкости глицерина, при 18°C равный $1,07$ Па·с; плотность стали $\rho = 8 \cdot 10^3$ кг/м³.

Дифференциальное уравнение падения шарика будет (см. рис. 240)

$$m\ddot{x} = mg - 6\pi\mu r \dot{x}$$

или после деления на m

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} = g, \quad (20.28)$$

где

$$\lambda = \frac{6\pi\mu r}{m} = \frac{6\pi\mu r}{(4/3)\pi r^3 \rho} \approx 600 \text{ 1/с.}$$

Рассматривая уравнение (20.28) как неоднородное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, представим решение как сумму общего интеграла $x_1 = C_1 + C_2 e^{-\lambda t}$ соответствующего

однородного уравнения и частного решения $x_2 = gt/\lambda$ неоднородного уравнения. Общий интеграл уравнения (20.28), т. е. второй интеграл уравнения движения, равен

$$x = gt/\lambda + C_1 + C_2 e^{-\lambda t}. \quad (20.29)$$

Дифференцируя по времени, находим первый интеграл уравнения движения:

$$\dot{x} = g/\lambda - \lambda C_2 e^{-\lambda t}. \quad (20.30)$$

Начальные условия будут

$$x = 0, \quad \dot{x} = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (20.31)$$

Подставляя эти значения в первый и второй интегралы, получаем

$$g/\lambda - \lambda C_2 = 0, \quad C_1 + C_2 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -g/\lambda^2, \quad C_2 = g/\lambda^2.$$

Таким образом, согласно (20.29), имеем конечное уравнение движения

$$x = \frac{g}{\lambda} t - \frac{g}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (20.32)$$

и формулу для скорости

$$\dot{x} = v = \frac{g}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}). \quad (20.33)$$

Так же как и в случае квадратичного сопротивления, существует *предельная скорость*

$$c = g/\lambda, \quad (20.34)$$

к которой с точностью до 0,5% этой скорости точка приближается по прошествии времени

$$\tau = 5,3/\lambda, \quad (20.35)$$

пройдя при этом, согласно (20.32), путь

$$h = 4,3 g/\lambda^2. \quad (20.36)$$

При принятом значении $\lambda = 600 \text{ 1/с}$ получим

$$c \approx 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}, \quad \tau \approx 0,01 \text{ с}, \quad h = 10^{-4} \text{ м}.$$

Как следует из этого расчета, предельная скорость шарика невелика и достигается за малый промежуток времени на коротком пути.

§ 90. Движение снаряда в сопротивляющейся среде

Изучением движения снаряда в воздухе занимается внешняя баллистика. В настоящем параграфе мы рассмотрим основную задачу внешней баллистики в схематизированной и упрощенной

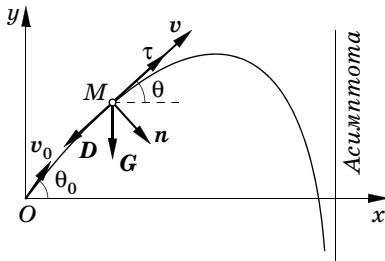


Рис. 242

постановке. Отвлекаясь от влияния формы снаряда и его вращения, от изменения плотности воздуха с высотой полета снаряда, от влияния вращения Земли, скорости ветра и многих других факторов, рассматриваемых во внешней баллистике, примем снаряд за материальную точку M массой m , совершающую движение под действием двух сил (рис. 242): силы тяжести $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ и силы сопротивления воздуха \mathbf{D} , направленной по касательной к траектории снаряда в сторону, противоположную движению, и являющейся заданной функцией скорости v ; эту функцию обозначим через $mf(v)$. Естественные уравнения движения снаряда будут иметь вид

$$m \frac{dv}{dt} = -mf(v) - mg \sin \theta, \quad m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos \theta, \quad (20.37)$$

где θ — угол вектора скорости с осью Ox (горизонтом). Замечая, что бесконечно малый угол $d\theta$ представляет собой угол между касательными в двух смежных точках кривой, т. е. угол смежности, найдем

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{v} \frac{d\theta}{dt} \quad (20.38)$$

(знак минус взят потому, что θ убывает с возрастанием дуги σ — расстояния, вычисленного вдоль траектории); при этом уравнения (20.37) переписутся в виде

$$\frac{dv}{dt} = -f(v) - g \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos \theta}{v}. \quad (20.39)$$

Исключая из этих уравнений dt , найдем

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{vf(v)}{g \cos \theta} + v \operatorname{tg} \theta, \quad (20.40)$$

что можно переписать также в виде

$$\frac{d(v \cos \theta)}{d\theta} = \frac{vf(v)}{g}. \quad (20.41)$$

Предположим, что удалось найти решение уравнения (20.40), удовлетворяющее начальным условиям задачи ($v = v_0$ при $\theta = \theta_0$).

Пусть это решение, дающее связь между величиной скорости и углом наклона ее к горизонту, т. е. уравнение годографа скорости в полярных координатах, имеет вид

$$v = \psi(\theta). \quad (20.42)$$

Из второго уравнения (20.39) найдем

$$dt = -\frac{\psi(\theta) d\theta}{g \cos \theta}, \quad (20.43)$$

и, следовательно, поскольку $\theta = \theta_0$ при $t = 0$,

$$t = -\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\psi(\theta)}{g \cos \theta} d\theta. \quad (20.44)$$

Далее, в силу (20.42) и (20.43) имеем

$$dx = v_x dt = v \cos \theta dt = -\frac{1}{g} \psi^2(\theta) d\theta, \quad (20.45)$$

$$dy = v_y dt = v \sin \theta dt = -\frac{1}{g} \psi^2(\theta) \operatorname{tg} \theta d\theta. \quad (20.46)$$

Помещая начало координат в начальном положении движущейся точки ($x = 0$, $y = 0$ при $\theta = \theta_0$), находим

$$x = -\frac{1}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} \psi^2(\theta) d\theta, \quad y = -\frac{1}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} \psi^2(\theta) \operatorname{tg} \theta d\theta. \quad (20.47)$$

Формулы (20.44) и (20.47) решают поставленную задачу в предположении, что известно решение (20.42) дифференциального уравнения (20.40); это уравнение приводится к квадратурам лишь при некоторых частных предположениях о виде функции $f(v)$, например: $f(v) = av$, $f(v) = bv^2$, $f(v) = av + bv^2$ (Ньютон, Эйлер), $f(v) = cv^n$ (И. Бернулли), $f(v) = a + bv^n$ (д'Аламбер) и др. Во внешней баллистике уравнение (20.40) обычно интегрируют численными методами.

Отметим некоторые общие свойства траектории снаряда, которые можно установить на основании выведенных уравнений движения.

■ Перепишав уравнение (20.41) в виде

$$\frac{dv_x}{d\theta} = \frac{dv_x}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{vf(v)}{g} > 0$$

и замечая, что $d\theta/dt < 0$, находим $dv_x/dt < 0$, т. е. *горизонтальная составляющая скорости все время убывает*. В силу (20.46) далее имеем

$$\frac{g \, dy}{v_x^2} = \frac{g \, dy}{v^2 \cos^2 \theta} = -\operatorname{tg} \theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = -d \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \theta \right); \quad (20.48)$$

интегрируя это выражение для восходящей ветви траектории по y от 0 до h ($y = h$ соответствует вершине кривой) и, следовательно, по θ от θ_0 до 0, получим

$$\int_0^h \frac{g \, dy}{v_x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \theta_0.$$

Если через θ_1 обозначить угол падения снаряда, то, интегрируя (20.48) по нисходящей ветви, находим

$$\int_0^h \frac{g \, dy}{v_x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \theta_1;$$

второй интеграл больше первого, так как знаменатель подинтегрального выражения, согласно только что доказанной закономерности убывания горизонтальной проекции скорости v_x , меньше, чем в первом интеграле. Итак, $\operatorname{tg}^2 \theta_1 > \operatorname{tg}^2 \theta_0$, т. е. $\theta_1 > \theta_0$ — *угол падения снаряда больше угла вылета*.

■ Умножая первое уравнение (20.39) на v , получаем равенство

$$v \frac{dv}{dt} = -vf(v) - gv \sin \theta$$

или, вспоминая, что $v \sin \theta = v_y = dy/dt$, равенство

$$d\left(\frac{1}{2} v^2\right) = -f(v)v \, dt - g \, dy.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = -\int_0^t f(v)v \, dt - gy.$$

В частности, при $t = t_1$, где t_1 — момент падения снаряда на Землю, имеем $y = 0$, $v = v_1$ (скорость падения) и предыдущее соотношение дает

$$\frac{1}{2} (v_1^2 - v_0^2) = -\int_0^{t_1} vf(v) \, dt < 0,$$

т. е. *скорость падения снаряда меньше скорости вылета*.

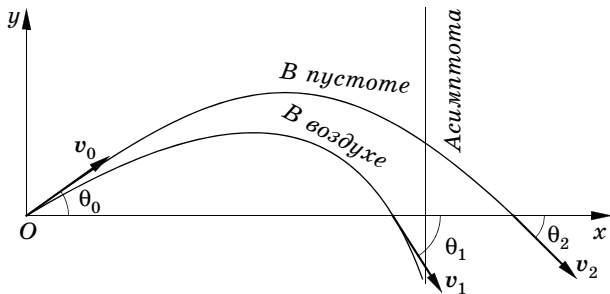


Рис. 243

■ Угол θ с течением времени уменьшается от начального значения θ_0 , обращаясь в вершине траектории в нуль и принимая отрицательные значения на нисходящей ветви. При $\theta \rightarrow -\pi/2$ из (20.44) получаем $t \rightarrow \infty$. При этом x , согласно (20.47), стремится к величине

$$x^* = \frac{1}{g} \int_{-\pi/2}^{\theta_0} v^2 d\theta,$$

которая вследствие ограниченности скорости падения снаряда в сопротивляющейся среде остается конечной. Это показывает, что траектория снаряда в сопротивляющейся среде имеет вертикальную асимптоту (рис. 243).

§ 91. Движение снаряда по настильной траектории при сопротивлении среды, пропорциональном квадрату скорости

В случае сопротивления, пропорционального квадрату скорости снаряда, примем

$$D = mf(v) = mbv^2. \tag{20.49}$$

Уравнение (20.41) приводится к виду

$$\frac{d(v \cos \theta)}{d\theta} = \frac{b}{g} v^3$$

или после деления обеих частей на $\cos^3 \theta$

$$\frac{d(v \cos \theta)}{(v \cos \theta)^3} = \frac{b}{g} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta}. \tag{20.50}$$

Для стрельбы по хорошо видимым объектам, допускающим прямую наводку, используют пологую, образующую малые углы

(обычно не более 15°) с горизонтом траекторию, которую называют *настильной*. В этом случае уравнение (20.50) допускает простое приближенное интегрирование. Пользуясь тем, что $\cos \theta$ слабо изменяется (обычно в пределах $0,966 - 1$), положим в знаменателе в правой части $\cos^3 \theta \approx \cos \theta_0 \cos^2 \theta$ и перепишем уравнение (20.50) в виде

$$\frac{d(v \cos \theta)}{(v \cos \theta)^3} = \frac{b}{g \cos \theta_0} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}, \quad (20.51)$$

откуда следует

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{g \cos \theta_0}{b} \frac{d(v \cos \theta)}{(v \cos \theta)^3},$$

и, согласно (20.45),

$$dx = -\frac{v^2}{g} d\theta = -\frac{(v \cos \theta)^2}{g} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = -\frac{\cos \theta_0}{b} \frac{d(v \cos \theta)}{v \cos \theta}.$$

После интегрирования получим

$$x = \frac{\cos \theta_0}{b} \ln \left(\frac{v_0 \cos \theta_0}{v \cos \theta} \right),$$

или

$$v \cos \theta = v_0 \cos \theta_0 e^{-\xi}, \quad (20.52)$$

где

$$\xi = bx / \cos \theta_0. \quad (20.53)$$

Возвращаясь к равенству (20.51), подставим в него вместо $v \cos \theta$ его выражение (20.52); тогда будем иметь

$$\frac{1}{v_0^2 \cos^2 \theta_0} \frac{d(e^{-\xi})}{e^{-3\xi}} = \frac{b}{g \cos \theta_0} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta},$$

что после интегрирования дает

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{g}{2b^2 v_0^2 \cos \theta_0} (e^{2\xi} - 1). \quad (20.54)$$

Заменяя $\operatorname{tg} \theta$ на dy/dx и интегрируя еще раз, получаем приближенное уравнение траектории снаряда

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{g}{4b^2 v_0^2} (e^{2\xi} - 2\xi - 1). \quad (20.55)$$

Чтобы сравнить траекторию в сопротивляющейся среде с траекторией в пустоте, разложим $e^{2\xi}$ в ряд по степеням ξ и после очевидных сокращений получим

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} - \frac{gbx^3}{3v_0^2 \cos^2 \theta_0} - \dots \quad (20.56)$$

Совокупность первых двух членов, не зависящих от коэффициента сопротивления b , совпадает с уравнением траектории снаряда в пустоте, третий член дает поправку, обусловленную влиянием сопротивления; как видно из уравнения (20.56), действительная траектория располагается ниже параболы (рис. 243).

§ 92. Движение точки под действием центральной силы

Рассмотрим движение точки M массой m , подверженной действию силы F , линия действия которой во все время движения проходит через неподвижный центр O ; такая сила называется *центральной* (§ 85, пример 77). Заметим, что траектория будет расположена в плоскости Π (рис. 244), проходящей через начальный вектор-радиус r_0 и вектор начальной скорости v_0 . Доказательство того, что траектория движения под действием центральной силы является плоской кривой, будет дано ниже.

Составим уравнения движения в полярных координатах (r, φ) в плоскости Π , проведя полярную ось через центр притяжения O и начальное положение точки M_0 (рис. 245); будем иметь

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0. \quad (20.57)$$

Начальные условия таковы:

$$\begin{aligned} r &= r_0, & \varphi &= 0, \\ \dot{r} &= \dot{r}_0 = v_0 \cos \alpha, & r_0 \dot{\varphi}_0 &= v_0 \sin \alpha \end{aligned} \quad \text{при } t = 0. \quad (20.58)$$

Из второго уравнения системы (20.57) сразу следует первый интеграл уравнений движения, который запишем в форме

$$r^2 \dot{\varphi} = 2C; \quad (20.59)$$

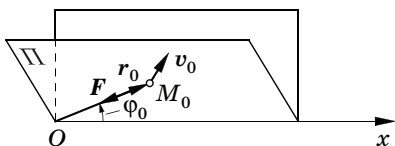


Рис. 244

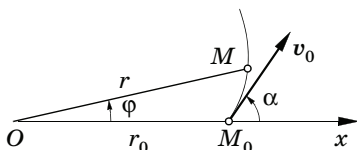


Рис. 245

здесь C — постоянная интегрирования, равная, как известно из кинематики (§ 48), секториальной скорости \dot{S} , т. е. производной по времени от площади S , описываемой радиусом-вектором. Пользуясь начальными условиями, определим величину этой постоянной

$$\dot{S} = C = \frac{1}{2} r_0^2 \dot{\phi}_0 = \frac{1}{2} r_0 v_0 \sin \alpha, \quad (20.60)$$

после чего (20.59) может быть переписано так:

$$r^2 \dot{\phi} = r_0 v_0 \sin \alpha. \quad (20.61)$$

Этот первый интеграл уравнений движения носит наименование *интеграла площадей*.

Выведем дифференциальное уравнение траекторий движения материальной точки в плоскости под действием центральной силы. С этой целью исключим время из системы (20.57), используя интеграл площадей (20.59). Имеем

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \frac{2C}{r^2} \frac{dr}{d\phi} = -2C \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right), \\ \ddot{r} &= \frac{d\dot{r}}{d\phi} \dot{\phi} = -\frac{4C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (20.62)$$

Подставляя полученное значение \ddot{r} в первое из равенств (20.57) и снова используя (20.59), получим искомое дифференциальное уравнение траекторий в форме, указанной Ж. Бине,

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2 F_r}{4mC^2}. \quad (20.63)$$

Вектор ускорения, а следовательно, по второму закону Ньютона и сила всегда направлены в сторону вогнутости траектории. В рассматриваемом сейчас движении под действием центральной силы можно заключить, что в случае притяжения ($F_r < 0$) траектория обращена вогнутостью к полюсу (центру притяжения), а в случае отталкивания ($F_r > 0$) — выпуклостью к полюсу (центру отталкивания). Траектория в центральном движении может иметь точку перегиба только в той точке пространства, где сила обращается в нуль.

Из уравнения Бине при этом вытекает следующий известный из дифференциальной геометрии признак; если выражение

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r}$$

положительно, то кривая обращена к полюсу вогнутостью, в противном случае — выпуклостью.

Обратимся теперь к рассмотрению частного случая — движения точки под действием тяготения к центральному телу, массу которого m_0 будем считать сосредоточенной в центре O . В этом случае будем иметь

$$F_r = -f \frac{mm_0}{r^2}. \quad (20.64)$$

Уравнение Бине (20.63) примет вид

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{fm_0}{4C^2} = \frac{1}{p}. \quad (20.65)$$

Введенная для краткости величина p , имеющая размерность длины, может быть выражена через начальные данные движения при помощи соотношения (20.60) и введенного выше понятия скорости из бесконечности v_∞ (19.63). Используя указанные формулы, получаем

$$p = \frac{4C^2}{fm_0} = 2r_0 \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \sin^2 \alpha; \quad (20.66)$$

геометрический смысл величины p будет сейчас выяснен.

Общее решение уравнения (20.65) складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения; составив характеристическое уравнение, убедимся, что корнями его будут $\pm i$, так что

$$\frac{1}{r} = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + \frac{1}{p}. \quad (20.67)$$

Это — второй интеграл уравнения (20.65); первый интеграл получим дифференцированием:

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi. \quad (20.68)$$

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 подставим во второй и первый интегралы начальные условия (20.58) и найдем

$$\frac{1}{r_0} = C_1 + \frac{1}{p}, \quad C_1 = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{p},$$

$$C_2 = -\frac{1}{r_0^2} \frac{\dot{r}_0}{\dot{\varphi}_0} = -\frac{1}{r_0} \frac{\dot{r}_0}{r_0 \dot{\varphi}_0} = -\frac{\text{ctg } \alpha}{r_0}.$$

Равенство (20.67) принимает вид

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{p} \right) \cos \varphi - \frac{\text{ctg } \alpha}{r_0} \sin \varphi + \frac{1}{p}. \quad (20.69)$$

Введем в рассмотрение новые постоянные δ и ε , положив

$$\frac{1}{r_0} - \frac{1}{p} = \delta \cos \varepsilon, \quad \frac{\text{ctg } \alpha}{r_0} = -\delta \sin \varepsilon, \quad (20.70)$$

так что

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{p} \right)^2 + \frac{\text{ctg}^2 \alpha}{r_0^2}} = \sqrt{\frac{1}{r_0^2 \sin^2 \alpha} + \frac{1}{p^2} - \frac{2}{r_0 p}},$$

$$\varepsilon = \text{arctg } \frac{p \text{ ctg } \alpha}{r_0 - p}. \quad (20.71)$$

Уравнение (20.69) может быть теперь переписано в виде

$$\frac{1}{r} = \delta \cos (\varphi - \varepsilon) + \frac{1}{p};$$

если ввести новую постоянную $e = p\delta$, равную, согласно (20.66) и (20.71),

$$e = \sqrt{1 - 4 \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \right] \sin^2 \alpha}, \quad (20.72)$$

то предыдущее равенство приведет к уравнению конического сечения в каноническом виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos w}, \quad (20.73)$$

где введен новый угол

$$w = \varphi - \varepsilon, \quad (20.74)$$

которой носит наименование *истинной аномалии*. Как следует из (20.73), величины p и e служат основными параметрами, определяющими форму конического сечения. Таким образом:

- ✓ если начальная скорость v_0 меньше скорости из бесконечности v_∞ , то $e < 1$ и траекторией будет служить эллипс;
- ✓ если $v_0 = v_\infty$, то $e = 1$ и точка полетит по параболе;
- ✓ если $v_0 > v_\infty$, то $e > 1$ и траекторией будет служить гипербола.

Имея выражение e и p через начальные данные и скорость из бесконечности, можем по известным формулам геометрии определить полуоси эллипса:

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{r_0}{2 [1 - (v_0/v_\infty)^2]}, \tag{20.75}$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{r_0 (v_0/v_\infty) \sin \alpha}{\sqrt{1 - (v_0/v_\infty)^2}},$$

а также и расстояние между фокусами, равное

$$2c = 2ae = \frac{r_0 \sqrt{1 - 4(v_0/v_\infty)^2 [1 - (v_0/v_\infty)^2]} \sin^2 \alpha}{1 - (v_0/v_\infty)^2}. \tag{20.76}$$

Точка P (рис. 246) на эллиптической орбите, находящаяся на наименьшем расстоянии от притягивающего центра O , называется *перигелием*, наиболее удаленная от центра O точка A — *афелием*. При прохождении точки M через перигелий P

$$w = 0, \quad r = r_{\min} = \frac{p}{1 + e}; \tag{20.77}$$

в афелии A

$$w = \pi, \quad r = r_{\max} = \frac{p}{1 - e}. \tag{20.78}$$

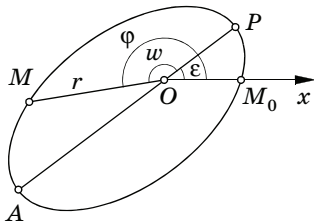


Рис. 246

§ 93. Определение времени в эллиптическом движении

Обозначим через τ момент прохождения планеты через перигелий. Согласно уравнению (20.60), имеем (рис. 246)

$$S = C(t - \tau) = \frac{\pi ab}{T} (t - \tau) = \frac{1}{2} ab \zeta, \tag{20.79}$$

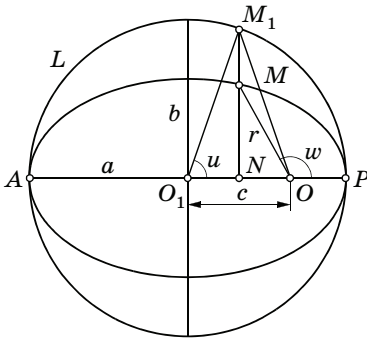


Рис. 247

Вычисление времени сводится к нахождению площади сектора POM . Для этого вводят в рассмотрение еще один угол u , называемый *эксцентрисической аномалией*. На большой оси эллипса, как на диаметре, строим окружность L (рис. 247) и продолжаем ординату эллипса в точке M до пересечения с этой окружностью в точке M_1 . Эксцентрисической аномалией u будет служить угол PO_1M_1 между вектором-радиусом точки M_1 , проведенным из центра эллипса O_1 , и большой осью эллипса. Эллипс можно рассматривать как проекцию круга L , плоскость которого наклонена к плоскости эллипса на угол с косинусом, равным b/a ; площадь какой-либо части эллипса равна площади соответственной части круга, умноженной на b/a :

$$S = \text{пл. } POM = \frac{b}{a} \text{ пл. } POM_1 = \frac{b}{a} (\text{пл. } PO_1M_1 - \text{пл. } O_1M_1O).$$

Заметив, что

$$\text{пл. } PO_1M_1 = \frac{1}{2} a^2 u, \quad \text{пл. } O_1M_1O = \frac{1}{2} ca \sin u = \frac{1}{2} a^2 e \sin u,$$

получим

$$S = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} a^2 (u - e \sin u) = \frac{1}{2} ab (u - e \sin u),$$

и соотношение (20.79) после сокращения на общий множитель $ab/2$ приводит к *уравнению Кеплера*, связывающему эксцентрисическую и среднюю аномалии:

$$u - e \sin u = \zeta = \frac{2\pi}{T} (t - \tau). \quad (20.81)$$

где S — площадь сектора POM , отсчитываемая от вектора-радиуса перигелия, T — период полного обращения точки, т. е. время, за которое вектор-радиус опишет площадь эллипса lab . Через ζ , равное

$$\zeta = \frac{2\pi}{T} (t - \tau), \quad (20.80)$$

обозначен угол, на который повернулся бы за время $(t - \tau)$ вектор-радиус точки, описывающей окружность с постоянной угловой скоростью и периодом обращения T . Угол ζ называется *средней аномалией*.

Выражение истинной аномалии w через эксцентрическую найдем, рассматривая отрезок ON , равный

$$ON = -r \cos w = OO_1 - O_1N = c - a \cos u = ae - a \cos u,$$

откуда, воспользовавшись уравнением эллипса, получим

$$r \cos w + ae = \frac{p \cos w}{1 + e \cos w} + ae = a \cos u.$$

Замечая, что

$$\frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2,$$

будем иметь

$$\cos u = \frac{e + \cos w}{1 + e \cos w}. \quad (20.82)$$

Если выразить косинус через тангенс половинного угла, то это соотношение приведет к виду

$$\operatorname{tg} \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}; \quad (20.83)$$

перед корнем взят знак плюс, так как углы $w/2$ и $u/2$ всегда лежат в одном и том же квадранте.

Для решения уравнения Кеплера (20.81) было предложено большое число методов. Наиболее совершенный из них был дан в 1824 г. В. Бесселем. Из уравнения Кеплера следует, что разность функций $u - \zeta$ представляет собой периодическую функцию от ζ , обращающуюся в нуль в точках P и A , т. е. при значениях ζ , кратных π . Поэтому ее можно представить в виде ряда Фурье по синусам кратных углов

$$u - \zeta = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\zeta,$$

и дело сведется к вычислению коэффициентов A_k по формулам, определяющим коэффициенты ряда Фурье:

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (u - \zeta) \sin k\zeta \, d\zeta.$$

БЁССЕЛЬ ФРИДРИХ ВИЛЬГЕЛЬМ (*Bessel Friedrich Wilhelm, 1784—1846*) — немецкий астроном, геодезист и математик, иностр. почетный чл. Петербургской АН (1814), чл. Берлинской АН (1812).

ФУРЬЁ ЖАН БАТИСТ ЖОЗЕФ (*Fourier Jean Baptiste Joseph, 1768—1830*) — французский математик, иностр. почетный чл. Петербургской АН (1829), чл. Парижской АН (1817).

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} A_k &= -\frac{2}{\pi k} \left\{ \left[(u - \zeta) \cos k\zeta \right] \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos k\zeta (du - d\zeta) \right\} = \\ &= \frac{2e}{\pi k} \int_0^\pi \cos k\zeta \cos u \, du = \\ &= \frac{e}{\pi k} \left[\int_0^\pi \cos (k\zeta + u) \, du + \int_0^\pi \cos (k\zeta - u) \, du \right], \end{aligned}$$

или после замены ζ его выражением по уравнению Кеплера (20.81)

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{e}{\pi k} \int_0^\pi \cos [ke \sin u - (k+1)u] \, du + \\ &+ \frac{e}{\pi k} \int_0^\pi \cos [ke \sin u - (k-1)u] \, du. \end{aligned}$$

Оба интеграла в правой части этого равенства имеют вид

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos (x \sin u - nu) \, du.$$

Функция от x и n , представляемая этим интегралом, называется *бесселевой функцией n -го порядка* и обозначается $J_n(x)$. Именно таким образом Бессель и ввел впервые в рассмотрение функции, впоследствии названные его именем. Итак,

$$A_k = \frac{e}{k} [J_{k+1}(ke) - J_{k-1}(ke)], \quad k = 1, 2, \dots$$

В теории бесселевых функций доказывается рекуррентное соотношение

$$J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x),$$

позволяющее записать выражение коэффициента A_k в форме

$$A_k = \frac{2}{k} J_k(ke).$$

Решение уравнения Кеплера принимает окончательный вид

$$u = \zeta + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \sin k\zeta. \quad (20.84)$$

Согласно уравнению Кеплера имеем также

$$\sin u = \frac{2}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \sin k\zeta. \quad (20.85)$$

Полученные ряды сходятся при любых значениях параметра e , как меньших, так и равных или больших единицы, что соответствует движениям по эллиптическим, параболическим и гиперболическим орбитам.

Определив по (20.84) эксцентриситетную аномалию u как функцию средней аномалии ζ , пропорциональной времени, вернемся к соотношению (20.83) и найдем зависимость от ζ истинной аномалии w , а затем по уравнению траектории (20.73) и радиус-вектор r .

§ 94. Эллиптическое движение тела, брошенного с Земли с большой начальной скоростью

Изложенная в § 92 теория, имеющая основное приложение в небесной механике (движение планет), может быть применена также к исследованию движения тел, бросаемых с большой начальной скоростью с поверхности земного шара. В этом случае скорость из бесконечности равна $v_\infty = \sqrt{2gR}$. Вместо угла α между направлением начальной скорости и начальным радиусом-вектором, т. е. вертикалью данного пункта поверхности Земли, удобнее ввести угол бросания λ (рис. 248) между вектором начальной скорости и горизонтальной плоскостью. Основной формулой, связывающей начальную скорость v_0 и эксцентриситет эллипса e , является равенство (20.72), которое может быть переписано в виде

$$e = \sqrt{1 - 4 \frac{v_0^2}{v_\infty^2} \left(1 - \frac{v_0^2}{v_\infty^2}\right) \cos^2 \lambda}. \quad (20.86)$$

Будем менять начальную скорость v_0 от нуля до максимального ее значения $v_{0 \max} = v_\infty$, при котором, как уже ранее было выяснено, траектория перестает быть замкнутой (при $v_0 = v_\infty$ имеем параболу, при $v_0 > v_\infty$ — гиперболу). В интервале $0 \leq v_0 \leq v_\infty$ эксцентриситет e убывает от значения $e = 1$ до некоторого минимального значения e_{\min} и затем вновь возрастает до $e = 1$. Минимальное значение e_{\min} легко определяется и оказывается равным

$$e_{\min} = \sin \lambda$$

при $v_0 = \frac{v_\infty}{\sqrt{2}} = \sqrt{gR}$. (20.87)

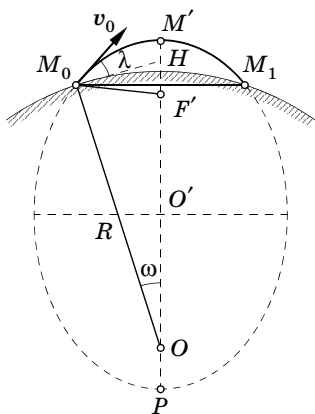


Рис. 248

Максимальная скорость $v_0 = v_1$, которая определяется вторым равенством (20.87) и при превышении которой траектория перестает быть замкнутой, называется *первой космической скоростью*. В земных условиях она равна

$$v_1 = \sqrt{9,81 \cdot 6400 \cdot 10^3} = 7925 \text{ м/с} \approx 7,9 \text{ км/с.}$$

Если угол бросания $\lambda = 0$, то при этом $e_{\min} = 0$.

При малых v_0 траекториями тела служат эллипсы, близкие к параболе, что вполне соответствует ранее изученному параболическому движению в однородном поле тяжести, которое является, таким образом, первым приближением к действительному движению в поле тяготения. Наиболее удаленный фокус этих эллипсов находится в центре Земли, ближайший — близ поверхности Земли. При возрастании начальной скорости v_0 эксцентриситет уменьшается, что соответствует удалению ближайшего фокуса от поверхности Земли вглубь. Если начальный угол бросания λ выбрать равным нулю, то e при $v_0 = \sqrt{gR}$ станет равным нулю и траектория превратится в окружность; тело, брошенное горизонтально с начальной скоростью $v_0 = \sqrt{gR}$, будет описывать круговую орбиту с постоянной скоростью v_0 вокруг Земли, став тем самым ее спутником. Если же $\lambda > 0$, то, достигнув своего минимального значения (20.87), e начнет вновь возрастать вместе с начальной скоростью, пока не достигнет значения единицы, эллипс превратится в параболу и далее при $e > 1$ — в гиперболу.

Рассмотрим случай *эллиптического* движения тела несколько детальнее. Пусть тело M (рис. 248) брошено из точки M_0 земной поверхности с начальной скоростью $v_0 < v_\infty$, образующей с горизонтом угол λ . Поверхность Земли показана на рисунке штриховкой, траектория тела — сплошной линией, остальная часть эллипса — штриховой линией. Поставим задачу: по данным v_0 и λ определить максимальную высоту траектории H над поверхностью Земли, а также горизонтальную дальность, отсчитанную по дуге круга $\widehat{M_0M_1}$ и по хорде M_0M_1 .

Высоту H определим как разность

$$H = OM' - R = c + a - R = a(1 + e) - R,$$

равную по (20.75)

$$H = \left[\frac{(1 + e)/2}{1 - (v_0/v_\infty)^2} - 1 \right] R = \frac{(e - 1)/2 + (v_0/v_\infty)^2}{1 - (v_0/v_\infty)^2} R. \quad (20.88)$$

В случае малых скоростей $v_0/v_\infty \ll 1$. Разлагая радикал (20.86) в ряд по степеням малой величины $(v_0/v_\infty)^2$ и отбрасывая величины в степенях выше четвертой, получаем

$$e = \left\{ 1 - 4 \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \right] \cos^2 \lambda \right\}^{1/2} = \\ = 1 - 2 \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \cos^2 \lambda + 2 \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^4 \cos^2 \lambda \sin^2 \lambda.$$

Подставляя эту величину e в равенство (20.88) и используя малость $(v_0/v_\infty)^2$ в знаменателе, найдем

$$H = \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 R \sin^2 \lambda \left[1 + \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \cos^2 \lambda \right] \left[1 + \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \right] = \\ = \frac{v_0^2}{v_\infty^2} R \sin^2 \lambda \left[1 + \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 (1 + \cos^2 \lambda) \right],$$

или, заменяя v_∞^2 его выражением $v_\infty^2 = 2gR$,

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \lambda}{2g} \left[1 + \frac{v_0^2}{2gR} (1 + \cos^2 \lambda) \right] = \\ = \frac{v_0^2 \sin^2 \lambda}{2g} + \frac{v_0^4}{4g^2 R} (1 + \cos^2 \lambda) \sin^2 \lambda. \quad (20.89)$$

Первое слагаемое соответствует максимальной высоте подъема тела — первая из формул (19.68) — в параболической теории движения в однородном поле силы тяжести. Учтя уменьшение силы притяжения с удалением от центра Земли, мы, естественно, пришли к увеличению высоты подъема; второе слагаемое дает соответствующую поправку.

Для определения максимальной дальности по дуге круга $\widehat{M_0 M_1}$ заметим, что, сравнивая рис. 245, 246 и 248, в принятых раньше обозначениях будем иметь

$$\angle M_0 O P = \varepsilon, \quad \alpha = 3\pi/2 + \lambda,$$

и, следовательно, обозначая угол $M_0 O M' = \omega$, получим, согласно (20.70),

$$\sin \omega = \sin (\pi - \varepsilon) = \sin \varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\delta R} = \frac{p \operatorname{tg} \lambda}{eR}$$

или по (20.66)

$$\sin \omega = \frac{1}{e} \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \sin 2\lambda.$$

Отсюда находим

$$\widetilde{M_0 M_1} = R \cdot 2\omega = 2R \arcsin \left[\frac{1}{e} \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \sin 2\lambda \right]. \quad (20.90)$$

При малых v_0/v_∞ , пользуясь разложением арксинуса в ряд и отбрасывая члены, содержащие $(v_0/v_\infty)^6$, будем иметь

$$\widetilde{M_0 M_1} = \frac{2R}{e} \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \sin 2\lambda = \frac{v_0^2 \sin 2\lambda}{eg}. \quad (20.91)$$

Вспоминая разложение величины e , заключим, что с той же точностью

$$\widetilde{M_0 M_1} = \frac{v_0^2 \sin 2\lambda}{g} \left[1 + 2 \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \cos^2 \lambda \right]. \quad (20.92)$$

Сравнивая этот результат с параболической теорией — вторая из формул (19.68) — убеждаемся, что за счет уменьшения силы тяжести с высотой горизонтальная дальность несколько увеличивается.

Заметим, что расстояние $M_0 M_1$, отсчитанное по хорде, будет равно

$$M_0 M_1 = 2R \sin \omega = \frac{2Rg}{v_\infty^2} \cdot \frac{v_0^2 \sin 2\lambda}{eg} = \frac{v_0^2 \sin 2\lambda}{eg}, \quad (20.93)$$

т. е. совпадает с приближенным выражением (20.91). Как показывает последнее выражение, кратчайшее расстояние между точкой вылета и падения тела на Земле только множителем $1/e$ отличается от известной величины горизонтальной дальности в параболической теории движения тела в однородном поле тяжести.

Рассмотренное эллиптическое движение материальной точки под действием земного тяготения совпадает с движением центра масс ракеты на пассивном участке ее траектории, где отсутствует тяга двигателя, а сопротивлением разреженного воздуха на больших высотах полета можно пренебречь. В этом случае начальное положение центра масс ракеты и начальная скорость этого центра определяются их значениями, соответствующими концу активного участка полета ракеты и исчезновению сопротивления воздуха. Этому вопросу, а также некоторым начальным представлениям о динамике ракеты будет далее посвящен специальный параграф — § 105.

Глава XXI

Прямолинейные колебания малой амплитуды

§ 95. Свободные незатухающие колебания точки под действием линейной восстанавливающей силы

Колебания представляют собой один из наиболее распространенных видов движений. Изучение свойств колебательных движений необходимо для понимания многих физических и механических явлений, но особенно велика роль теории колебаний в инженерном деле. Движение машин, транспортных средств, приборов и механизмов всегда сопровождается колебаниями, или, как еще говорят, вибрациями. Возрастание интенсивности колебаний выше допустимой нормы грозит катастрофой; в задачи теории колебаний и ее разнообразных приложений в технических науках входит указание причин этих опасных явлений, например резонанса, и мер борьбы с ними. Колебания с успехом используют и как полезный процесс в вибромашинах: дробилках, упрочнителях, обогащающих руду ситах и т. п.

В настоящей главе рассматривается лишь простейший вид колебательного процесса в механике — прямолинейные колебания материальной точки. Более сложные задачи будут рассмотрены в гл. XXXII—XXXIV.

Рассмотрим (рис. 249) прямолинейное движение материальной точки M массой m под действием силы P , направленной к неподвижному центру O и пропорциональной первой степени расстояния OM от точки M до центра O :

$$P = -cr; \quad (21.1)$$

здесь c — положительный коэффициент пропорциональности, а знак минус показывает, что сила всегда направлена в сторону, противоположную вектору-радиусу r , т. е. к центру O , соответствующему равновесному положению точки.

Силу, стремящуюся вернуть точку в положение равновесия, называют *восстанавливающей*. Примерами восстанавливающей силы могут служить силы разнообразной природы. Такова реакция растянутой пружины. При колебаниях маятника в вертикальной плоскости роль вос-

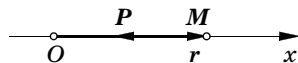


Рис. 249

становливающей силы, стремящейся вернуть маятник в равновесное вертикальное положение, играет составляющая силы веса по направлению касательной к траектории центра тяжести маятника. При колебаниях жидкости в U-образной трубке восстанавливающей силой служит вес столба жидкости, возвышающейся в одной части трубки над уровнем во второй.

Отклоним точку M из положения равновесия и отпустим без начальной скорости или с начальной скоростью, направленной по прямой Ox , проходящей через начальное положение точки и центр O . Ускоряясь, если скорость направлена в ту же сторону, что и сила, т. е. к центру O , и замедляясь в противном случае, точка по инерции будет проходить мимо центра O , совершая около него прямолинейное колебательное движение. Если кроме восстанавливающей силы других сил, в частности сопротивлений движению, нет, то такие движения носят наименование *свободных* или *собственных незатухающих колебаний* точки; восстанавливающую силу, пропорциональную первой степени отклонения точки от равновесного положения, назовем *линейной восстанавливающей силой*, сами колебания — *линейными*.

Принимая прямую, вдоль которой происходит движение, за ось Ox и помещая начало координат в центр равновесия O , составим основное дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний точки; согласно равенству (21.1) будем иметь

$$m\ddot{x} = -cx. \quad (21.2)$$

Разделив обе части на m и обозначив через k^2 отношение

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad (21.3)$$

приведем уравнение (21.2) к виду

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \quad (21.4)$$

Это линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами легко решается обычным приемом составления характеристического уравнения. Замечая, что корни характеристического уравнения в данном случае будут чисто мнимыми и равными $\pm ki$, заключаем, что общее решение (второй интеграл) уравнения движения (21.4) будет

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (21.5)$$

Подставляя начальные условия

$$x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 \quad \text{при } t = 0 \quad (21.6)$$

во второй интеграл (21.5) и в первый интеграл

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt, \quad (21.7)$$

получаемый из второго интеграла (21.5) путем дифференцирования, находим постоянные интегрирования:

$$x_0 = C_1, \quad \dot{x}_0/k = C_2.$$

Таким образом, конечное уравнение движения будет

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt. \quad (21.8)$$

Вводя амплитуду a и начальную фазу α , запишем

$$x = a \sin(kt + \alpha), \quad (21.9)$$

где

$$a = \sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2/k^2},$$

$$\sin \alpha = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2/k^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{\dot{x}_0}{k \sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2/k^2}}. \quad (21.10)$$

Итак, рассматриваемое прямолинейное движение точки под действием линейной восстанавливающей силы представляет собой гармоническое колебательное движение с частотой k и периодом T , равными

$$k = \sqrt{c/m}, \quad T = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{m/c}, \quad (21.11)$$

не зависящими от начальных условий, а зависящими только от коэффициента пропорциональности в линейном законе восстанавливающей силы и массы колеблющейся точки. Условимся в дальнейшем такую частоту называть *собственной частотой* колеблющейся точки или ее *частотой свободных колебаний*. Амплитуда и фаза колебания определяются по формулам (21.10) и зависят от начальных условий движения.

Свойство независимости частоты или периода колебаний от начальных условий (свойство *изохронности* колебаний) связано с линейностью восстанавливающей силы (оно было открыто Галилеем). В случае нелинейной восстанавливающей силы свойство изохронности не имеет места.

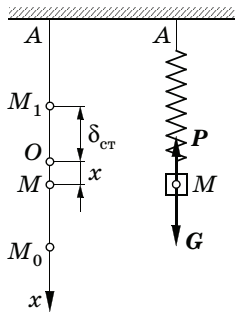


Рис. 250

Подвесим на пружине (рис. 250) груз M массой m . Положение равновесия груза примем за начало координат O оси Ox (отнесенной на рисунке для удобства влево от прямой, на которой происходит колебание). Если AM_1 обозначает длину нерастянутой пружины, то отрезок OM_1 представляет собой статическое удлинение $\delta_{\text{ст}}$ пружины под нагрузкой $G = mg$. По закону Гука о пропорциональности нагрузки и деформации будем иметь

$$\delta_{\text{ст}} = mg/c, \quad (21.12)$$

где коэффициент c (жесткость пружины) равен отношению нагрузки к статическому удлинению

$$c = mg/\delta_{\text{ст}}, \quad (21.13)$$

или, что то же самое, нагрузке, вызывающей деформацию, равную единице длины. Отклоним груз из положения равновесия O до положения M_0 и сообщим ему некоторую начальную скорость. Груз придет в движение около состояния равновесия и будет совершать свободные (собственные) колебания.

Дифференциальное уравнение движения груза, висящего на пружине, при выбранном направлении оси будет иметь вид

$$m\ddot{x} = mg + P_x,$$

где P_x представляет собой проекцию на ось Ox реакции пружины при длине ее AM , соответствующей текущему положению груза M . Имеем по (21.13)

$$P_x = -c(x + \delta_{\text{ст}}) = -cx - c\delta_{\text{ст}} = -cx - mg;$$

таким образом, предыдущее дифференциальное уравнение принимает вид

$$m\ddot{x} = -cx,$$

соответствующий общему уравнению (21.2). По формуле (21.3) заключим, что частота и период свободных колебаний груза на пружине равны

$$k = \sqrt{c/m} = \sqrt{g/\delta_{\text{ст}}}, \quad (21.14)$$

$$T = 2\pi\sqrt{m/c} = 2\pi\sqrt{\delta_{\text{ст}}/g}. \quad (21.15)$$

Число колебаний в секунду определяется как

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{ст}}}}.$$

Величина f измеряется в герцах [Гц]. Число колебаний в минуту n составляет

$$n = 60f = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{ст}}}}. \quad (21.16)$$

Те же формулы справедливы и для вертикальных колебаний груза, расположенного на горизонтальной упругой балке или рессоре. При этом, если l — пролет балки, J — момент инерции поперечного сечения и E — модуль упругости материала, то статический прогиб под действием груза при различных способах закрепления концов балки и расположения груза вычисляется по следующим формулам, которые выводятся в курсах сопротивления материалов:

✓ оба конца заделаны, груз находится на середине балки:

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{1}{192} \frac{Gl^3}{EJ};$$

✓ оба конца оперты, груз находится на середине балки:

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{1}{48} \frac{Gl^3}{EJ};$$

✓ один конец заделан, груз находится на свободном конце:

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{1}{3} \frac{Gl^3}{EJ}.$$

Пример 84. Тележка двадцатитонного четырехосного пассажирского вагона имеет сложную систему рессор. Статический прогиб всего рессорного устройства равен 0,24 м. Определить число колебаний в минуту такого вагона на рессорах.

По формуле (21.16) имеем

$$n = \frac{30}{\sqrt{0,240}} \approx 61 \frac{1}{\text{мин}},$$

т. е. пассажирские вагоны имеют плавные колебания с периодом T , приблизительно равным 1 с. Товарные вагоны имеют более жесткие рессоры: у них $\delta_{\text{ст}}$ около 0,03 м, так что

$$n = \frac{30}{\sqrt{0,03}} \approx 173 \frac{1}{\text{мин}},$$

а период T равен 0,35 с, т. е. почти в три раза меньше, чем у пассажирских вагонов.

Пример 85. При испытании упругой рессоры на удар на ее середину падает с высоты 1 м груз. Зная, что статический прогиб рессоры под тем же грузом, сосредоточенным на ее середине, равен 10^{-3} м, найти уравнение колебания рессоры с грузом, после того как груз упадет и будет двигаться совместно с рессорой; массой рессоры пренебрегаем; ось x направлена вертикально вниз.

В этом случае начальные условия движения таковы:

$$x = 0, \quad \dot{x} = v_0 = \sqrt{2gh} \approx 4,4 \text{ м/с} \quad \text{при } t = 0.$$

Частоту колебаний найдем по формуле (21.14):

$$k = \sqrt{9,81/0,001} \approx 99 \text{ 1/с}.$$

Частота f в герцах будет равна

$$f = k/(2\pi) = 15 \text{ Гц}.$$

Уравнение движения, согласно (21.8), будет

$$x = 4,44 \cdot 10^{-2} \sin 99t.$$

По первой из формул (21.10) амплитуда колебаний равна

$$a = \sqrt{\delta_{\text{ст}}^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} \approx \frac{v_0}{k} \approx 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

(ввиду относительной малости $\delta_{\text{ст}}$). Обратим внимание на большую разницу в данном случае между амплитудой колебаний и статическим прогибом рессоры. Амплитуда колебаний почти в 45 раз превосходит статическую деформацию рессоры.

Пример 86. Определить отношение периодов колебаний груза, висящего на двух одинаковых пружинах с жесткостями c_1 и c_2 при последовательном (рис. 251, а) и параллельном (рис. 251, б) соединении пружин.

Если G — вес груза, то в первом случае статическое удлинение δ_1 будет равно сумме статических удлинений первой и второй пружин:

$$\delta_1 = \frac{G}{c_1} + \frac{G}{c_2};$$

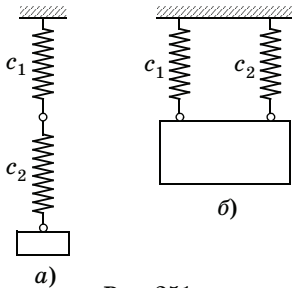


Рис. 251

во втором случае статическое удлинение δ_2 равно удлинению каждой из пружин по отдельности:

$$\delta_2 = \frac{N'}{c_1} = \frac{N''}{c_2},$$

где N' и N'' — натяжения пружин при статическом равновесии; очевидно, что

$$N' + N'' = G, \quad \delta_2 = \frac{G}{c_1 + c_2}.$$

Согласно второй из формул (21.13), отношение соответствующих периодов колебаний будет

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}} = \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{c_1 c_2}}.$$

В частном случае, когда $c_1 = c_2 = c$, находим $T_1 = 2T_2$.

§ 96. Колебания точки под действием гармонической возмущающей силы

Предположим, что наряду с восстанавливающей силой на точку действует еще возмущающая сила, являющаяся заданной функцией времени. Рассмотрим сначала наиболее простой случай периодической возмущающей силы $F(t)$, меняющейся по гармоническому закону:

$$F(t) = H \sin(pt + \delta),$$

где H — амплитуда, p — частота, δ — начальная фаза возмущающей силы. Не нарушая общности, будем всегда считать $H > 0$, так как в противном случае этого всегда можно добиться изменением фазы δ . При наличии возмущающей силы дифференциальное уравнение движения будет иметь вид

$$m\ddot{x} + cx = H \sin(pt + \delta),$$

или, если разделить обе части на m ,

$$\ddot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta), \quad (21.17)$$

где, как и раньше, $k = \sqrt{c/m}$ — частота свободных колебаний, $h = H/m$.

Общий интеграл дифференциального уравнения (21.17), как известно, является суммой общего интеграла x_1 соответствующего однородного уравнения, т. е. уравнения свободных колебаний (21.4), и какого-либо частного решения x_2 уравнения (21.17)

$$x = x_1 + x_2,$$

причем, согласно (21.5),

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Частное решение x_2 ищем в виде

$$x_2 = a \sin(pt + \delta). \quad (21.18)$$

Подстановка x_2 в (21.17) приводит к соотношению

$$a(k^2 - p^2) = h,$$

откуда при $k \neq p$ находим

$$a = \frac{h}{k^2 - p^2}. \quad (21.19)$$

Следовательно, общий интеграл будет

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (21.20)$$

Правая часть этого равенства представляет собой результат наложения свободных колебаний на колебания, происходящие с частотой возмущающей силы и называемые *вынужденными колебаниями*.

Если $k > p$, т. е. частота собственных колебаний больше частоты возмущающей силы, то $a > 0$ и, согласно (21.18), вынужденные колебания имеют ту же фазу, что и возмущающая сила.

Если же $k < p$, т. е. частота собственных колебаний меньше частоты возмущающей силы, то $a < 0$ и из формулы (21.18) для вынужденных колебаний получим, согласно формуле (21.19),

$$x_2 = -\frac{h}{p^2 - k^2} \sin(pt + \delta) = \frac{h}{p^2 - k^2} \sin(pt + \delta + \pi).$$

Таким образом, при $k < p$ вынужденные колебания сдвинуты по фазе относительно возмущающей силы на π .

Отметим, что по формуле (21.19) амплитуда вынужденных колебаний не зависит от начальных условий движения.

Как будет выяснено в дальнейшем, силы сопротивления, которые здесь не учитывались, гасят свободные колебания и почти не изменяют амплитуд вынужденных колебаний, если частота p возмущающей силы значительно отличается от частоты k свободных колебаний. Поэтому при указанном условии для определения движения точки по истечении достаточно большого промежутка времени от начала движения — *установившегося режима* движения — можно ограничиться рассмотрением только вынужденных колебаний, сохранив в выражении (21.20) лишь последнее слагаемое.

Для изучения начальных режимов движения или режимов, переходных к установившемуся движению, необходимо рассмат-

ривать полностью общее решение (21.20). Зададимся вновь начальными условиями

$$x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = v_{0x} \quad \text{при } t = 0$$

и подставим их во второй интеграл (21.20) уравнения движения (21.17) и в первый интеграл

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt + \frac{ph}{k^2 - p^2} \cos (pt + \delta),$$

который получим дифференцированием второго интеграла.

Тогда постоянные интегрирования выразятся через начальные данные следующим образом:

$$C_1 = x_0 - \frac{h}{k^2 - p^2} \sin \delta, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{ph}{k(k^2 - p^2)} \cos \delta,$$

и равенство (21.20) приведет к окончательному виду

$$\begin{aligned} x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \\ - \frac{h}{k^2 - p^2} \left(\sin \delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt \right) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin (pt + \delta). \end{aligned} \quad (21.21)$$

Движение, представленное равенством (21.21), можно рассматривать как результат сложения:

- ✓ свободных колебаний точки, которые возникли бы при отсутствии возмущающей силы, если точку вывести из равновесия,

$$x^{(1)} = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt;$$

- ✓ вызванных возмущающей силой колебаний с собственной частотой

$$x^{(2)} = -\frac{h}{k^2 - p^2} \left(\sin \delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt \right);$$

- ✓ *вынужденных* колебаний, совпадающих по частоте с частотой возмущающей силы,

$$x^{(3)} = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin (pt + \delta).$$

Если частота возмущающей силы p совпадает по величине с частотой собственных колебаний k , то возникает явление, кото-

рое называют *резонансом*. При резонансе возмущающая сила действует «в такт» с собственными колебаниями точки, что приводит к особенно интенсивному раскачиванию точки. При резонансе колебания нарастают, в чем можно убедиться следующим образом. Устремим в равенстве (21.21) p к k ; при этом совокупность двух последних колебаний, описываемая выражением

$$x^{(2)} + x^{(3)} = \frac{h [-(\sin \delta \cos kt + (p/k) \cos \delta \sin kt) + \sin (pt + \delta)]}{k^2 - p^2},$$

при $p = k$ представляет собой неопределенность вида $0/0$. Раскрывая эту неопределенность по известному правилу (заменяя числитель и знаменатель их производными по p), найдем

$$\begin{aligned} [x^{(2)} + x^{(3)}]_{p=k} &= h \left[\frac{-(1/k) \cos \delta \sin kt + t \cos (pt + \delta)}{-2p} \right]_{p=k} = \\ &= \frac{h}{2k^2} [\cos \delta \sin kt - kt \cos (kt + \delta)]. \end{aligned}$$

Итак, в случае резонанса ($p = k$) движение точки определяется уравнением

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt + \frac{h}{2k^2} [\cos \delta \sin kt - kt \cos (kt + \delta)], \quad (21.22)$$

содержащим в числе составляющих колебаний характерное для резонанса слагаемое

$$-\frac{ht}{2k} \cos (kt + \delta),$$

в котором время t стоит множителем перед косинусом. Благодаря наличию этого множителя абсцисса x точки, переходя от положительных значений к отрицательным, будет вместе с тем неограниченно возрастать. Если коэффициент при косинусе в последнем выражении условно принять за амплитуду и отвлечься от остальных сравнительно малых членов в (21.22), то можно сказать,

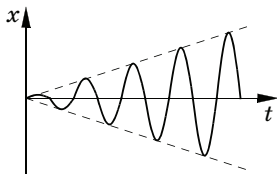


Рис. 252

что колебания при резонансе происходят с возрастающей пропорционально времени амплитудой. В частном случае $\delta = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ график резонансного колебания показан на рис. 252. При неизбежном наличии сопротивлений (или нелинейности восстанавливающей силы) вы-

нужденные колебания не увеличивают безгранично свою амплитуду (§ 99).

Явление резонанса, сопровождающееся колебаниями нарастающей амплитуды, может служить причиной разрушения конструкции или создавать в ней опасные напряжения. Поэтому важной задачей является избежание возможности возникновения резонанса. Для этого частоты возмущающих сил, которые мы можем предвидеть в сооружении или машине, должны быть по возможности далеки от частот собственных колебаний.

Представим амплитуду вынужденных колебаний (21.18)

$$a = \frac{h}{|k^2 - p^2|}$$

как произведение двух сомножителей

$$a = \frac{h}{k^2} \cdot \frac{1}{|1 - (p/k)^2|}. \quad (21.23)$$

Заметим, что первый множитель представляет собой статическое смещение точки под действием постоянной силы H . Действительно, согласно (21.3) и (21.12), имеем

$$\frac{h}{k^2} = \frac{H}{mk^2} = \frac{H}{c}.$$

Назовем *коэффициентом динамичности* величину λ , определяемую отношением амплитуды вынужденных колебаний A к тому статическому смещению h/k^2 , которое имело бы место, если бы возмущающая сила была постоянной величиной H . Отношение $z = p/k$ назовем *коэффициентом расстройки*. Тогда в новых обозначениях равенство (21.23) примет вид

$$\lambda = \frac{1}{|1 - z^2|}. \quad (21.24)$$

Зависимость λ от z представлена графически на рис. 253 (см. также два первых столбца табл. 3 в § 99). При $z = 0$ имеем $\lambda = 1$; при $z = 1$, что соответствует резонансу, $\lambda = \infty$. Надо, однако, иметь в виду, что в области частот возмущающей силы, близких к частоте свободных колебаний, нельзя рассматривать только вынужденные колебания и отбрасывать свободные, так как

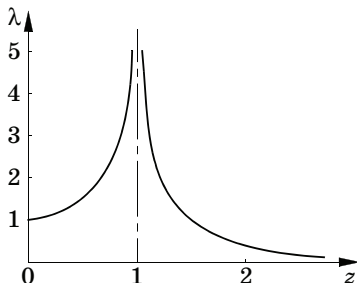


Рис. 253

при взаимодействии свободных и вынужденных колебаний при $p = k$ возникает движение с возрастающими пропорционально времени отклонениями; резонанс представляет собой явление наложения движений, а не «вынужденное колебание с бесконечно большой амплитудой».

Отметим еще, что $\lambda \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, т. е. при весьма большой частоте возмущающей силы вынужденные колебания весьма малы.

Пример 87. Индикатор. Явление вынужденных колебаний покажем на примере движения поршня индикатора — прибора, служащего для записи переменных давлений в цилиндрах поршневых двигателей. Устройство индикатора схематически показано на рис. 254. Цилиндр индикатора 1 сообщается при помощи патрубка 2 с цилиндром двигателя. В цилиндре 1 ходит плотно притертый поршень 3, к которому прикреплены штанга 4 и нижний конец пружины 5, верхний конец которой упирается в крышку цилиндра. Движение, получаемое поршнем под действием изменяющегося давления $p(t)$, записывается в увеличенном масштабе на барабан, вращающийся с угловой скоростью, пропорциональной угловой скорости главного вала машины.

Положим

$$p(t) = p_0 + p_1(t),$$

где p_0 — среднее давление, отнесенное к моменту $t = 0$. Пусть в положении равновесия пружина под действием веса поршня и среднего давления p_0 изменила свою длину на $\delta_{\text{ст}}$. Если c — жесткость пружины, m — масса поршня и σ — его площадь, то

$$c\delta_{\text{ст}} = mg - \sigma p_0.$$

Направим ось Ox вверх, взяв начало отсчета в положении равновесия поршня. Тогда уравнение движения поршня, абсциссу которого обозначим через x , будет (пренебрегаем массами пружины и стержней пишущего механизма)

$$m\ddot{x} = -c(x - \delta_{\text{ст}}) - mg + \sigma p_0 + \sigma p_1(t),$$

или, принимая во внимание предыдущее равенство,

$$\ddot{x} + k^2x = \frac{\sigma}{m} p_1(t),$$

где $k = \sqrt{c/m}$ — частота свободных колебаний поршня индикатора.

Обозначим через ω частоту колебаний давления в цилиндре и рассмотрим простейший случай:

$$p_1 = a \sin \omega t, \quad p = p_0 + a \sin \omega t.$$

Уравнение движения будет

$$\ddot{x} + k^2x = \frac{\sigma a}{m} \sin \omega t.$$

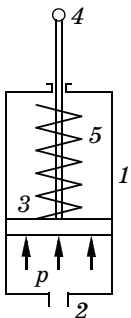


Рис. 254

Полагая, что $x = 0$ и $\dot{x} = 0$ при $t = 0$, найдем по (21.21)

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sigma}{m} \frac{a}{k^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin kt \right) = \\ &= \frac{a\sigma}{c} \frac{k^2}{k^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin kt \right). \end{aligned} \tag{21.25}$$

Перемещения поршня абсолютно точного индикатора должны в каждый момент определяться по формуле

$$x = \frac{a\sigma}{c} \sin \omega t,$$

что соответствовало бы статической деформации пружины под действием силы σp_1 . Разность между этим значением и полученным выше дает погрешность индикатора

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{a\sigma}{c} \sin \omega t - \frac{a\sigma}{c} \frac{k^2}{k^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin kt \right) = \\ &= \frac{a\sigma}{c} \frac{1}{1 - (\omega/k)^2} \left(\frac{\omega}{k} \sin kt - \frac{\omega^2}{k^2} \sin \omega t \right). \end{aligned} \tag{21.26}$$

Эта погрешность будет мала, если частота свободных колебаний индикатора k весьма велика по сравнению с частотой возмущающей силы ω (пропорциональной угловой скорости двигателя).

В качестве примера для случая $k/\omega = 20$ на рис. 255 построен график движения поршня индикатора, согласно уравнению (21.25), причем масштабный множитель

$$\frac{a\sigma}{c} \frac{k^2}{k^2 - \omega^2}$$

принят за единицу длины. На том же графике штриховой линией показана полуволна синусоиды, построенной по ординатам, пропорциональным действительному изменению давления $p_1(t)$. Кривые дают наглядное представление о погрешности, вносимой свободными колебаниями индикатора в его показания. Благодаря сопротивлению, которое будет гасить свободные колебания, отклонения значений x от значений, соответствующих кривой давления, будут на самом деле еще меньше.

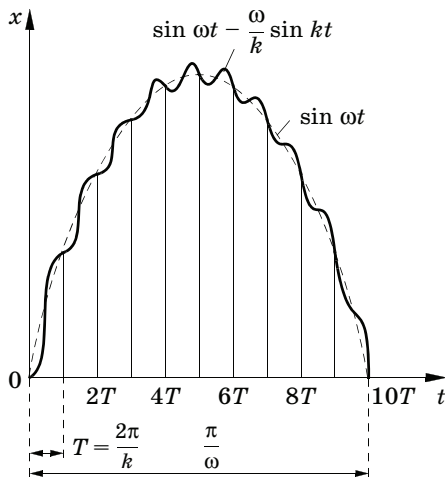


Рис. 255

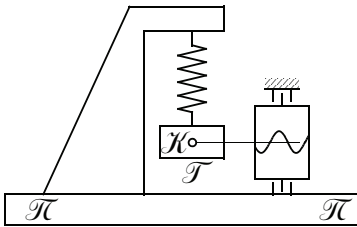


Рис. 256

Пример 88. Виброграф. В качестве другого примера разберем теорию вибрографа, служащего для записи вертикальных колебаний фундаментов машин, перекрытий зданий и других сооружений.

Задача о регистрации вертикальных колебаний могла бы быть разрешена принципиально весьма просто, если бы, жестко соединив с колеблющимся телом пишущее приспособление, мы могли бы регистрировать колебания на ленте барабана, не связанного с колеблющимся телом. При записи сотрясений почвы, вибраций корабля или фундамента больших размеров мы не можем воспользоваться этим приемом, так как неподвижного предмета, на котором можно было бы установить барабан, не имеется. Приблизительно можно решить задачу записи колебаний так, как это схематически показано на рис. 256. Груз \mathcal{T} подвешен к пружине, другой конец которой жестко связан с платформой $\mathcal{П}\mathcal{П}$. Очевидно, что чем тяжелее груз и чем слабее его связь с колеблющейся платформой, или, иными словами, чем мягче пружина, тем менее груз принимает участие в движении платформы, т. е. с тем большим приближением пишущее приспособление \mathcal{K} , жестко связанное с грузом, можно считать точкой, неподвижной относительно Земли. Обратное, при абсолютно жесткой пружине груз будет воспроизводить то же движение, что и платформа, т. е. оставаться относительно нее неподвижным, и на барабане, установленном на платформе, записи колебаний не будет.

Из этих соображений вытекает основное требование, предъявляемое к приборам для записи колебаний: *частота свободных колебаний такого прибора должна быть весьма малой (большая масса, малая жесткость) по сравнению с частотой колебаний платформы.*

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на неподвижную вертикальную ось $O\xi$ (на рисунке ось опущена). Если через x обозначить смещение груза относительно платформы, совершающей относительно неподвижной среды, например Земли, вертикальное гармоническое колебание

$$\xi_{\text{п}} = a \sin pt,$$

то абсолютное смещение груза относительно Земли будет $\xi = x + \xi_{\text{п}}$; при этом проекция на ось $O\xi$ абсолютного ускорения груза w_{ξ} составит

$$w_{\xi} = \ddot{\xi} = \ddot{x} + \ddot{\xi}_{\text{п}} = \ddot{x} - pa^2 \sin pt.$$

Силами, действующими на груз, являются сила тяжести $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ (m — масса груза) и реакция пружины \mathbf{N} ; направляя ось $O\xi$ вертикально вниз и пренебрегая силами сопротивления, получаем

$$mw_{\xi} = mg + N_{\xi}.$$

Но по предыдущему $N_{\xi} = -c(x + \delta_{ст}) = -cx - mg$, где c — жесткость пружины. Таким образом, из предыдущих равенств находим

$$m\ddot{x} + cx = map^2 \sin pt,$$

или ($k = \sqrt{c/m}$ — частота свободных колебаний груза на пружине)

$$\ddot{x} + k^2x = ap^2 \sin pt.$$

Рассмотрим установившийся режим колебаний. Как указывалось ранее, колебания с частотой свободных колебаний при наличии сопротивлений быстро затухают. Обратимся поэтому к вынужденным колебаниям. Согласно (21.18) и (21.19) уравнение этих колебаний имеет вид

$$x = a \frac{p^2}{k^2 - p^2} \sin pt = -a \frac{1}{1 - (k/p)^2} \sin pt = \frac{-\xi_n}{1 - (k/p)^2}. \quad (21.27)$$

Движение это записывается с некоторым изменением масштаба, так что запись на барабане будет характеризоваться уравнением

$$x = -\frac{A}{1 - (k/p)^2} \xi_n,$$

в котором A — масштабный коэффициент. Искажение, вносимое прибором, определяется множителем

$$\frac{A}{1 - (k/p)^2}.$$

Этот множитель, помимо постоянных прибора (A и k), зависит еще от частоты возмущающей силы p . Однако влияние последней будет невелико, если отношение k/p мало. Например, при $k/p = 0,2$ найдем

$$\frac{A}{1 - (k/p)^2} = \frac{A}{0,96} \approx 1,04 A,$$

т. е. ошибка, даваемая прибором, не превысит 4%.

Таким образом, приборы, предназначенные для записи колебательных движений, — вибрографы и сейсмографы — должны иметь частоту свободных колебаний, весьма малую по сравнению с частотой регистрируемых ими колебаний; как было показано перед этим, приборы, измеряющие периодически изменяющиеся усилия (индикаторы, динамометры), наоборот, характеризуются высокими отношениями частоты собственных колебаний к частоте изменения измеряемой силы.

§ 97. Колебания точки под действием периодической возмущающей силы

Если возмущающая сила $F(t)$ является произвольной периодической функцией времени с периодом $\tau = 2\pi/p$, то при весьма общих предположениях (выполнении условий Дирихле) функция $F(t)$ может быть представлена тригонометрическим рядом вида

$$F(t) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos pt + a_2 \cos 2pt + \dots + a_s \cos spt + \dots + b_1 \sin pt + b_2 \sin 2pt + \dots + b_s \sin spt + \dots \quad (21.28)$$

(рядом Фурье). Коэффициенты этого ряда определяются формулами

$$a_s = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \cos spt \, dt, \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_s = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \sin spt \, dt, \quad s = 1, 2, \dots$$

Если ввести обозначения

$$H_s = \sqrt{a_s^2 + b_s^2}, \quad \sin \delta_s = \frac{a_s}{H_s}, \quad \cos \delta_s = \frac{b_s}{H_s},$$

то ряд (21.28) можно представить в виде

$$F(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} H_s \sin (spt + \delta_s). \quad (21.29)$$

Отдельные члены этого ряда называются *гармониками*; значениям $s = 1, 2, 3$ и т. д. соответствуют гармоники первого, второго, третьего и т. д. порядков.

Дифференциальное уравнение движения (21.17) принимает вид

$$\ddot{x} + k^2 x = h_0 + \sum_{s=1}^{\infty} h_s \sin (spt + \delta_s), \quad (21.30)$$

где

$$h_0 = a_0/2m, \quad h_s = H_s/m.$$

Частное решение, соответствующее постоянному свободному члену, представляет постоянное отклонение h_0/k^2 ; оно несущественно, и в дальнейшем мы будем предполагать, что $h_0 = 0$.

Общий интеграл уравнения (21.30) будет

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h_s}{k^2 - s^2 p^2} \left(\sin \delta_s \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta_s \sin kt \right) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h_s}{k^2 - s^2 p^2} \sin (spt + \delta_s). \quad (21.31)$$

Как и выше, мы получили

- ✓ свободные колебания, обусловленные наличием начальных отклонений и скоростей:

$$x^{(1)} = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt;$$

- ✓ колебания, происходящие вследствие наличия возмущающих сил, но имеющие собственную частоту:

$$x^{(2)} = - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h_s}{k^2 - s^2 p^2} \left(\sin \delta_s \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta_s \sin kt \right);$$

- ✓ вынужденные колебания с частотами, кратными p :

$$x^{(3)} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h_s}{k^2 - s^2 p^2} \sin (spt + \delta_s). \quad (21.32)$$

Свободные колебания $x^{(1)} + x^{(2)}$ даже при малом сопротивлении быстро становятся пренебрежимо малыми, так что во многих случаях можно ограничиться рассмотрением только вынужденных колебаний $x^{(3)}$.

Если частота собственных колебаний равна целому кратному частоты возмущающей силы $k = np$, где n — целое число, то возникает резонанс n -го порядка.

Члены разложения (21.31) с номером $s \neq n$ сохраняют свой вид, что же касается членов с номером $s = n$, то они, аналогично изложенному в предыдущем параграфе, приводят к неопределенности вида $0/0$ и после раскрытия неопределенности дают

$$- \frac{h_n}{2k} t \cos (kt + \delta_n) + \frac{h_n}{2k^2} \cos \delta_n \sin kt,$$

так что в случае резонанса n -го порядка будем иметь решение

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt + \frac{h_n}{2k^2} \cos \delta_n \sin kt - \frac{h_n}{2k} t \cos (kt + \delta_n) - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h_s}{k^2 - s^2 p^2} \left(\sin \delta_s \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta_s \sin kt \right) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h_s}{k^2 - s^2 p^2} \sin (spt + \delta_s), \quad (21.33)$$

где штрих при знаке суммы указывает, что при суммировании следует опустить член, соответствующий $s = n$. При достаточно большом t всеми членами, в которых t входит только под знаком тригонометрических функций, можно пренебречь, и мы получим

$$x = -\frac{h_n}{2k} t \cos(kt + \delta_n),$$

т. е. x возрастает здесь неограниченно вместе с t . В общем случае периодической силы колебания точки представляют собой результат наложения колебаний, соответствующих каждой гармонической составляющей возмущающей силы по отдельности; резонанс имеет место при $k = np$, $n = 1, 2, \dots$, т. е. при равенстве частоты свободных колебаний целому кратному частоты возмущающей силы.

Если в разложении периодической силы в ряд Фурье отсутствуют гармоника одного из порядков, то соответствующего ей резонанса не будет. Пусть, например, $F(t)$ разлагается в ряд, в котором отсутствуют все четные гармоники; резонанс будет иметь место при $k = p, 3p, 5p$ и т. д., но не при $k = 2p, 4p$ и т. д.

Вернемся к рассмотренным в примере 88 (с. 88) колебаниям вибрографа с грузом на пружине. Если предположить, что платформа совершает вертикальные колебания

$$\xi_{\text{II}} = a_1 \sin pt + a_2 \sin 2pt + \dots,$$

то дифференциальное уравнение колебаний груза по отношению к платформе будет

$$m\ddot{x} + cx = -m\ddot{\xi}_{\text{II}} = ma_1 p^2 \sin pt + 4ma_2 p^2 \sin 2pt + \dots,$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = a_1 p^2 \sin pt + 4a_2 p^2 \sin 2pt + \dots$$

Согласно (21.30) и (21.32) уравнение вынужденных колебаний запишется в виде

$$x = -\frac{a_1}{1 - (k/p)^2} \sin pt - \frac{a_2}{1 - [k/(2p)]^2} \sin 2pt - \dots$$

Из этого равенства видно, что гармоники высших порядков записываются на ленту вибрографа с тем меньшим искажением, чем выше их номер. Если, исходя из высказанного в предыдущем параграфе соображения, выбрать отношение k/p настолько малым, чтобы погрешность записи первой гармоники не выходила

за заданные тесные пределы, то относительная погрешность записи второй гармоники будет в четыре, третьей — в девять и т. д. раз меньше, чем первой.

Не всегда возмущающие силы представляют непрерывные функции времени. Часто приходится иметь дело с кусочно-непрерывными возмущающими силами, задаваемыми различными непрерывными функциями в следующих друг за другом интервалах времени. Примером этого может служить постоянная по величине, но периодически меняющая свое направление возмущающая сила. Возмущающая сила может представлять также ряд периодических толчков, сообщаемых движущейся точке.

Пример 89. Определить вынужденные колебания материальной точки массой m под действием постоянных по величине и направлению периодически повторяющихся через промежутки времени τ импульсов S , если частота собственных колебаний равна k .

Как известно, импульсом постоянной по величине и направлению силы называют произведение силы на время ее действия. В данном случае к точке прикладываются мгновенные толчки (удары), продолжительность действия которых ничтожна, а сила соответственно настолько велика, что произведение величины силы на промежуток времени ее действия, т. е. импульс, конечно и задается величиной S . Мгновенно приложенный к точке импульс не успевает за время своего действия вызвать заметное изменение в положении точки, но приводит к резкому изменению ее количества движения, по величине и направлению равному приложенному импульсу:

$$S = m\Delta v. \quad (21.34)$$

Теорема о связи между изменением количества движения точки и приложенным к ней импульсом, выражаемая формулой (21.34), будет доказана в следующей главе.

Вынужденные колебания под действием периодических импульсов можно рассматривать как установившийся в интервале времени $(t_0, t_0 + \tau)$ режим колебаний при наличии восстанавливающей силы $(-mk^2x)$ с периодически повторяющимися начальными условиями

$$x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 \quad \text{при } t = t_0, \quad (21.35)$$

причем, нисколько не нарушая общности, можно считать начальный момент t_0 этого интервала равным нулю.

Согласно условиям задачи, мы знаем величину S и период τ повторяющихся импульсов, но ничего не можем сказать заранее о том, какова будет начальная абсцисса x_0 и начальная скорость \dot{x}_0 в установившемся режиме колебаний. Для определения этих величин рассмотрим бесконечно малый интервал времени $(\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$, в течение которого точка

претерпевает толчок. Как уже было указано, за этот интервал времени абсцисса точки не успевает измениться и, следовательно,

$$x(\tau + \varepsilon) = x(\tau - \varepsilon);$$

скорость же изменится, согласно (21.34), на величину

$$\dot{x}(\tau + \varepsilon) - \dot{x}(\tau - \varepsilon) = S/m.$$

Используя периодичность процесса и переходя к пределу при $\varepsilon = 0$ со стороны положительных ε , перепишем последние два условия в виде

$$x(0) = x(\tau), \quad \dot{x}_0(0) - \dot{x}(\tau) = S/m, \quad (21.36)$$

где $\dot{x}_0(0)$ — скорость в момент, следующий за сообщением импульса, а $\dot{x}(\tau)$ — скорость в момент, предшествующий последующему импульсу.

Решение уравнения колебаний

$$\ddot{x} + k^2x = 0$$

при начальных условиях (21.35) будет, по предыдущему, иметь вид

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt. \quad (21.37)$$

Используя условия (21.36), получим систему двух уравнений для определения неизвестных x_0 и \dot{x}_0 :

$$x_0 = x_0 \cos k\tau + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin k\tau,$$

$$\dot{x}_0 + kx_0 \sin k\tau - \dot{x}_0 \cos k\tau = S/m,$$

решения которой будут

$$x_0 = \frac{S \sin k\tau}{mk[(1 - \cos k\tau)^2 + \sin^2 k\tau]} = \frac{S \sin k\tau}{2mk(1 - \cos k\tau)} = \\ = \frac{2S \sin(k\tau/2) \cos(k\tau/2)}{4mk \sin^2(k\tau/2)} = \frac{S}{2mk} \operatorname{ctg} \frac{k\tau}{2},$$

$$\dot{x}_0 = \frac{S(1 - \cos k\tau)}{m[(1 - \cos k\tau)^2 + \sin^2 k\tau]} = \frac{S}{2m}.$$

Таким образом, уравнение (21.37) принимает окончательный вид

$$x(t) = \frac{S}{2mk} \left(\sin kt + \operatorname{ctg} \frac{k\tau}{2} \cos kt \right) = \frac{S}{2mk \sin(k\tau/2)} \cos k \left(t - \frac{\tau}{2} \right). \quad (21.38)$$

Резонанс имеет место при $k\tau/2 = n\pi$ (n — целое число), т. е. при совпадении собственной частоты с целым кратным частоты прикладываемых импульсов. Полученное выражение годно для промежутка $0 \leq t < \tau$; чтобы найти $x(t)$ в любой момент времени, вследствие периодичности решения следует повторить график функции $x(t)$, построенный в интервале $(0, \tau)$, в соответствующем интервале $(\tau, 2\tau)$, $(2\tau, 3\tau)$ и т. д.

Пример 90. Каков должен быть статический прогиб рессор железнодорожных вагонов для того, чтобы при скорости $v = 16,7$ м/с (приблизительно 60 км/ч) и длине l каждого рельса в 12 м вагон не попадал в резонанс с толчками на стыках?

Период возмущающей силы в данном случае будет $\tau = l/v \approx 0,7$ с.

Резонанс будет иметь место при $k = 2\pi n/\tau$, или

$$\sqrt{g/\delta_{\text{ст}}} = 2\pi n/\tau, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

откуда получим

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{13}{n^2} \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Во избежание резонанса необходимо подобрать рессоры так, чтобы $\delta_{\text{ст}} > 13 \cdot 10^{-2}$ м.

§ 98. Влияние силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости, на свободные колебания точки

При наличии силы сопротивления D , пропорциональной первой степени скорости, к уравнению свободных колебаний (21.2) в правой его части добавится еще член

$$D_x = -\beta \dot{x}, \quad (21.39)$$

где β — коэффициент сопротивления, а знак минус означает, что сила сопротивления всегда направлена в сторону, противоположную движению точки. Дифференциальное уравнение движения точки будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -cx - \beta \dot{x}, \quad (21.40)$$

или после деления обеих частей уравнения на массу точки m и переноса всех членов в левую часть

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0, \quad (21.41)$$

где, кроме введенного обозначения величины $k^2 = c/m$, положено

$$2n = \frac{\beta}{m}. \quad (21.42)$$

Обращаясь к интегрированию уравнения (21.41), составим характеристическое уравнение

$$s^2 + 2ns + k^2 = 0,$$

корнями которого будут величины

$$s_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (21.43)$$

Естественно рассмотреть отдельно следующие три случая движения.

■ **Затухающее колебательное движение** ($n < k$). Если $n < k$, то корни характеристического уравнения (21.43) представятся так:

$$s_1 = -n + i \sqrt{k^2 - n^2}, \quad s_2 = -n - i \sqrt{k^2 - n^2},$$

и, следовательно, общий интеграл уравнения (21.41) будет

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t). \quad (21.44)$$

Составим первую производную по времени

$$\begin{aligned} \dot{x} = e^{-nt} [(-nC_1 + \sqrt{k^2 - n^2} C_2) \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + \\ + (-\sqrt{k^2 - n^2} C_1 - nC_2) \sin \sqrt{k^2 - n^2} t] \end{aligned} \quad (21.45)$$

и используем для определения постоянных интегрирования начальные условия

$$x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 \quad \text{при } t = 0.$$

Подставляя эти значения координаты и проекции скорости в (21.44) и (21.45), находим

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{\sqrt{k^2 - n^2}},$$

так что интеграл (21.44) уравнения движения (21.41) принимает вид

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right), \quad (21.46)$$

или после выделения амплитуды

$$x = ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \alpha), \quad (21.47)$$

где для краткости положено

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}}, \quad \text{ctg } \alpha = \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{x_0 \sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (21.48)$$

Из уравнения движения в конечном виде (21.47) следует, что x периодически меняет знак, так что движение точки имеет колебательный характер. Период колебания равен

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{k\sqrt{1 - (n/k)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (n/k)^2}}, \quad (21.49)$$

где $T_0 = 2\pi/k$ — период свободных колебаний точки при отсутствии сил сопротивления. Если отношение n/k мало, то

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{k} \right)^2 + \dots \right]$$

и относительное увеличение периода свободных колебаний за счет сопротивления будет иметь порядок квадрата малого отношения n/k , т. е. очень мало.

Абсолютные величины a_1, a_2, \dots максимальных отклонений от центра колебаний образуют, как было выяснено уже в кинематике (§ 43), геометрическую прогрессию со знаменателем

$$\eta = \frac{a_i}{a_{i+1}} = e^{nT/2},$$

иногда называемым *фактором затухания* колебаний.

Натуральный логарифм отношения двух последовательных амплитуд носит наименование *логарифмического декремента*; он равен

$$\Delta = \ln \eta = n \frac{T}{2} = \frac{\pi n}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (21.50)$$

Сравнивая последнее равенство с (21.49), найдем выражение периода колебания через логарифмический декремент

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{\pi^2}}. \quad (21.51)$$

Зависимость между η и T/T_0 изображена на рис. 257. Например, $T/T_0 = 1,024$ при $\eta = 2$, т. е. введение сопротивления, при котором каждый последующий размах вдвое меньше предыдущего, изменяет период колебания только на 2,4%.

Увеличение периода на 10% будет иметь место при $\eta = 4,2$; при этом по истечении, например, двух периодов отклонение станет в $4,2^4 = 311$ раз меньше первоначального, т. е. точка практически остановится. Таким образом, небольшое сопротивление весьма мало изменяет период, но интенсивно гасит свободные колебания. Это позволяет, с одной стороны, при вычислении периода свободных колебаний пренебрегать

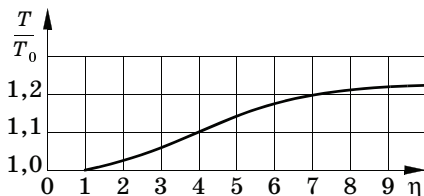


Рис. 257

силами сопротивления, с другой стороны, считать свободные колебания по истечении достаточно большого промежутка времени от начала движения при установившемся режиме практически исчезнувшими. Первое соображение имеет существенное значение, так как расчет периода свободных колебаний с учетом влияния сопротивления был бы весьма неопределенной задачей, поскольку почти никогда заранее ничего нельзя сказать о величине коэффициента сопротивления β . Второе позволяет в теории вынужденных колебаний не усложнять рассмотрения вопроса введением членов, соответствующих свободным колебаниям.

■ **Апериодическое движение** ($n > k$). При достаточно большом сопротивлении, когда $(n^2 - k^2) > 0$, общий интеграл уравнения (21.41) будет

$$x = e^{-nt} (C_1 \operatorname{ch} \sqrt{n^2 - k^2} t + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{n^2 - k^2} t). \quad (21.52)$$

Движение не будет носить колебательного характера (оно называется *апериодическим*). При большом t имеем

$$\operatorname{ch} \sqrt{n^2 - k^2} t \sim \operatorname{sh} \sqrt{n^2 - k^2} t \sim \frac{1}{2} e^{\sqrt{n^2 - k^2} t}$$

и, следовательно,

$$x \sim \frac{1}{2} (C_1 + C_2) e^{-(n - \sqrt{n^2 - k^2}) t};$$

здесь использован знак \sim *асимптотического* (при $t \rightarrow \infty$) равенства. Так как $(n - \sqrt{n^2 - k^2}) > 0$, имеем $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Вследствие быстрого убывания показательной функции величина x будет весьма мала уже при небольших t , и систему можно практически считать вернувшейся в положение равновесия.

Характер движения зависит от начальных условий. Пусть $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$. Тогда, аналогично предыдущему случаю, получим

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \operatorname{ch} \sqrt{n^2 - k^2} t + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\sqrt{n^2 - k^2}} \operatorname{sh} \sqrt{n^2 - k^2} t \right), \quad (21.53)$$

$$\dot{x} = e^{-nt} \left(\dot{x}_0 \operatorname{ch} \sqrt{n^2 - k^2} t - \frac{n\dot{x}_0 + k^2 x_0}{\sqrt{n^2 - k^2}} \operatorname{sh} \sqrt{n^2 - k^2} t \right).$$

Из последнего уравнения следует, что \dot{x} обращается в нуль, т. е. точка достигает максимального отклонения от положения равновесия в момент времени t_m , определяемый из уравнения

$$\operatorname{th} \sqrt{n^2 - k^2} t_m = \frac{\dot{x}_0 \sqrt{n^2 - k^2}}{n \dot{x}_0 + k^2 x_0} = \frac{\sqrt{1 - (k/n)^2}}{1 + k^2 x_0 / (n \dot{x}_0)}, \quad (21.54)$$

причем в этот момент времени значение x будет

$$x_m = e^{-n t_m} x_0 \left(1 + \frac{1 + \dot{x}_0 / (n x_0)}{1 + k^2 x_0 / (n \dot{x}_0)} \right) \operatorname{ch} \sqrt{n^2 - k^2} t_m.$$

Будем считать $x_0 > 0$. Так как при $0 \leq z \leq \infty$ функция $\operatorname{th} z$ монотонно возрастает от 0 до 1, уравнение (21.54) может иметь положительный корень t_m , и только один, лишь при выполнении неравенства

$$0 < \frac{\sqrt{1 - (k/n)^2}}{1 + k^2 x_0 / (n \dot{x}_0)} < 1. \quad (21.55)$$

В дальнейшем различаем три случая.

1°. Неравенство (21.55) соблюдается при $\dot{x} > 0$. Тогда x_m также положительно и характер движения можно изобразить графически (рис. 258, а): точка сначала отклоняется до некоторого максимума $x_m > x_0$, а затем постепенно начинает приближаться к положению равновесия, не достигая его.

2°. Если $\dot{x} < 0$ и притом

$$\frac{k^2 x_0}{n \dot{x}_0} > \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} - 1,$$

т. е.

$$|\dot{x}_0| > x_0 (n + \sqrt{n^2 - k^2}),$$

то неравенство (21.55) также имеет место; при этом $x_m < 0$ и график движения имеет характер, представленный на рис. 258, б: точка проходит один раз через положение равновесия и, удалившись от него в отрицательную сторону на x_m , в дальнейшем движении приближается к положению равновесия.

3°. Если $\dot{x} < 0$ и притом

$$\frac{k^2 x_0}{n \dot{x}_0} < \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} - 1,$$

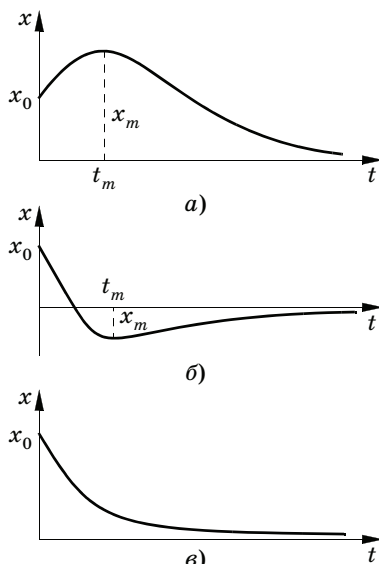


Рис. 258

для $|\dot{x}_0|$ получаем

$$|\dot{x}_0| < x_0 (n + \sqrt{n^2 - k^2});$$

тогда неравенство (21.55) не имеет места; x монотонно уменьшается, тогда точка приближается к положению равновесия, не достигая его; этот случай движения изображен на рис. 258, в.

Случаи 1° и 2° соответствуют аperiодическому движению первого рода, случай 3° — аperiодическому движению второго рода.

■ **Предельное аperiодическое движение ($n = k$).** Общий интеграл уравнения (21.41) в этом случае будет иметь вид

$$x = e^{-nt} (C_1 + C_2). \quad (21.56)$$

Очевидно, $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. точка постепенно (практически весьма быстро) возвращается в положение равновесия. Примем следующие начальные условия: $x = x_0 > 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$. Получим

$$\begin{aligned} x &= e^{-nt} [x_0 + (\dot{x}_0 + nx_0) t], \\ \dot{x} &= e^{-nt} [\dot{x}_0 - n(\dot{x}_0 + nx_0) t]; \end{aligned} \quad (21.57)$$

\dot{x} обратится в нуль при

$$t = t_m = \frac{\dot{x}_0}{n(\dot{x}_0 + nx_0)};$$

соответствующее значение координаты x будет

$$x_m = \frac{e^{-nt_m}}{n} (nx_0 + \dot{x}_0).$$

Если при этом $\dot{x}_0 > 0$, то $t_m > 0$, а также $x_m > 0$. Соответствующее движение (первый случай предельного аperiодического движения первого рода) изображено на рис. 258, а. Другой случай предельного аperiодического движения первого рода (рис. 258, б) имеем при $x_0 < 0$, но $|\dot{x}_0| > nx_0$ и, следовательно, $t_m > 0$, $x_m < 0$. Наконец, при $\dot{x}_0 < 0$ и $|\dot{x}_0| < nx_0$ имеем предельное аperiодическое движение второго рода ($t_m < 0$) (рис. 258, в).

Пример 91. Гидравлический демпфер. Разберем движение груза, подвешенного на пружине, при наличии тормозящего приспособления — демпфера, или катаракта. Демпфирование может осуществляться различными механическими, в частности гидравлическими, электромагнитными (например, вихревыми токами Фуко) и другими

способами. Гидравлический демпфер (рис. 259) представляет собой закрытый цилиндр C с поршнем P , соединенным жестким стержнем S с телом M . В цилиндр налита вязкая жидкость; при движении груза и связанного с ним поршня жидкость перетекает из одной части цилиндра в другую через перепускные трубки K (которых может быть несколько) или непосредственно через просверленные в поршне отверстия.

Обозначим, как и ранее, через x вертикальное смещение тела (груза со стержнем и поршнем) из положения равновесия. Поскольку жидкость практически несжимаема, объем ее, прошедший сквозь перепускные трубки K за время dt , в течение которого поршень сместится на расстояние dx , будет равен σdx (σ — площадь поршня); следовательно, секундный объемный расход Q через трубки равен

$$Q = \frac{\sigma dx}{dt} = \sigma \dot{x}. \quad (21.58)$$

С другой стороны, секундный объемный расход q через одну трубку или отверстие в поршне может быть выражен через разность давлений Δp на концах трубки (или отверстия) и динамический коэффициент вязкости μ жидкости по известной формуле Пуазейля [16, с. 382, формула (63), где $a = d/2$]

$$q = \frac{\pi d^4 \Delta p}{128 \mu l}, \quad (21.59)$$

где d — внутренний диаметр трубки (или отверстия), l — ее длина; коэффициент вязкости μ в системе СИ выражается в паскалях-секундах: $1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 1 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$. Предполагается, что движение вязкой жидкости в трубке происходит квазистационарно (как бы с постоянной скоростью в каждый момент времени) и ламинарно. Это предположение справедливо, если длина трубки или отверстия во много раз превосходит диаметр сечения.

Если z — число перепускных трубок (отверстий), то $Q = zq$, и, сравнивая (21.59) и (21.58), получаем

$$|\Delta p| = \frac{128 \mu l \sigma |\dot{x}|}{\pi d^4 z}. \quad (21.60)$$

Эта же разность давлений будет иметь место между объемами цилиндра, разделенными поршнем. Силу R , действующую на поршень, определим как произведение Δp на площадь поршня σ . Замечая, что направление этой силы противоположно направлению движения поршня, находим

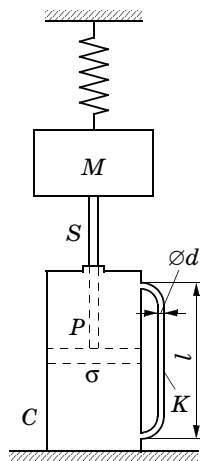


Рис. 259

искомое выражение проекции силы сопротивления жидкости движению поршня в виде

$$R_x = -\frac{128\mu l\sigma^2}{\pi d^4 z} \dot{x}, \quad (21.61)$$

или, вспоминая определение (21.39) коэффициента сопротивления β ,

$$\beta = \frac{128\mu l\sigma^2}{\pi d^4 z}. \quad (21.62)$$

Если через m обозначить массу движущегося тела, включая сюда груз M , стержень S и поршень P , то, согласно (21.42), будем иметь

$$n = \frac{\beta}{2m} = \frac{64}{\pi} \frac{\mu l\sigma^2}{m d^4 z} = \frac{4\pi\mu l}{mz} \left(\frac{d^*}{d}\right)^4; \quad (21.63)$$

здесь d^* — диаметр поршня; в случае наличия отверстий в поршне уменьшением площади поршня за счет этих отверстий пренебрегаем.

Из формулы (21.63) вытекает, что основное значение для изменения коэффициента n имеет отношение диаметра поршня к диаметру перепускных трубок или отверстий. Пользуясь формулой (21.63), можно рассчитать конструкцию демпфера и выбрать жидкость для его заполнения под заданное торможение. Пусть, например, число перепускных трубок у демпфера $z = 10$, длина каждой из них $l = 5 \cdot 10^{-2}$ м, отношение d^*/d примем равным 10. Из жидкостей, имеющих сравнительно малую вязкость, выберем толуол с коэффициентом вязкости, приблизительно равным $0,0613 \cdot 10^{-2}$ Па·с при 18 °С (вязкость воды при 18 °С равна $0,105 \cdot 10^{-2}$ Па·с).

Подставляя эти числа, получаем

$$n \approx \frac{0,0365}{m} \frac{1}{с}, \quad k = 31,3 \frac{1}{с}.$$

Если, например, $m = 10^{-1}$ кг, $\delta_{ст} = 10^{-2}$ м, то $k = 31,3$ 1/с, а $n = 0,365$ 1/с; движение будет колебательным. Затухание амплитуд определится логарифмическим декрементом (21.50)

$$\Delta = \frac{0,365\pi}{\sqrt{31,3^2 - 0,365^2}} \approx 0,037.$$

§ 99. Влияние силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости, на вынужденные колебания точки

Пренебрегая влиянием сил сопротивления, мы пришли к выводу, что при резонансе амплитуды вынужденных колебаний растут пропорционально времени, вследствие чего должно было бы наступить разрушение системы, как бы ни была мала ампли-

туда попавшей в резонанс гармонике возмущающей силы. Это противоречие с опытом может быть устранено, если учесть влияние сил сопротивления; ограничимся рассмотрением сопротивления, пропорционального первой степени скорости.

Остановимся сначала на случае гармонической возмущающей силы

$$F(t) = H \sin(pt + \delta).$$

Добавляя в левую часть дифференциального уравнения (21.17) член $2n\dot{x}$, соответствующий силе сопротивления, пропорциональной первой степени скорости, и обозначая $h = H/m$, получаем

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta). \quad (21.64)$$

Общее решение этого уравнения представим в виде суммы общего решения x_1 соответствующего однородного уравнения и частного решения x_2 неоднородного уравнения; x_1 при $k > n$ представляет свободное затухающее колебание, а при $k \leq n$ — апериодическое движение. Займемся поисками частного решения x_2 ; положим

$$\begin{aligned} x_2 &= D \sin(pt + \delta) + E \cos(pt + \delta), \\ \dot{x}_2 &= p [D \cos(pt + \delta) - E \sin(pt + \delta)], \\ \ddot{x}_2 &= -p^2 [D \sin(pt + \delta) + E \cos(pt + \delta)]. \end{aligned}$$

Подстановка в дифференциальное уравнение (21.64) дает

$$(k^2D - p^2D - 2npE) \sin(pt + \delta) + (k^2E - p^2E + 2npD) \cos(pt + \delta) = h \sin(pt + \delta),$$

откуда находим два уравнения, определяющие неизвестные D и E :

$$(k^2 - p^2)D - 2npE = h, \quad 2npD + (k^2 - p^2)E = 0.$$

Решив эти уравнения, получим

$$D = \frac{h(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}, \quad E = -\frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2},$$

и, следовательно,

$$x_2 = \frac{h}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2} [(k^2 - p^2) \sin(pt + \delta) - 2np \cos(pt + \delta)].$$

Полагая

$$\frac{k^2 - p^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = \cos \varepsilon, \quad \frac{2np}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = \sin \varepsilon, \quad (21.65)$$

т. е.

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}, \quad (21.66)$$

получаем

$$x_2 = a \sin (pt + \delta - \varepsilon), \quad (21.67)$$

где амплитуда a определяется формулой

$$a = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}. \quad (21.68)$$

В случае малого сопротивления ($k > n$) общий интеграл будет

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t) + a \sin (pt + \delta - \varepsilon),$$

и если $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$, то, определив произвольные постоянные C_1 и C_2 , найдем

$$\begin{aligned} x = e^{-nt} & \left(x_0 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right) - \\ & - ae^{-nt} \left[\sin (\delta - \varepsilon) \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + \right. \\ & \left. + \frac{p \cos (\delta - \varepsilon) + n \sin (\delta - \varepsilon)}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right] + a \sin (pt + \delta - \varepsilon). \end{aligned} \quad (21.69)$$

■ Первое слагаемое в этом выражении

$$e^{-nt} \left(x_0 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right)$$

представляет затухающие свободные колебания, происходящие вследствие начального отклонения системы от положения равновесия и сообщения ей начальной скорости. Частота этих колебаний меньше собственной частоты.

■ Второе слагаемое

$$\begin{aligned} -ae^{-nt} & \left[\sin (\delta - \varepsilon) \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + \right. \\ & \left. + \frac{p \cos (\delta - \varepsilon) + n \sin (\delta - \varepsilon)}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right] \end{aligned}$$

представляет затухающие колебания той же частоты, что и свободные, но возникающие вследствие наличия возмущающей силы.

■ Наконец, третье слагаемое

$$a \sin (pt + \delta - \varepsilon)$$

представляет *вынужденные колебания, имеющие частоту возмущающей силы*. Эти колебания происходят с постоянной амплитудой, не зависящей от времени, тогда как амплитуды колебаний, соответствующих первым двум слагаемым, вследствие наличия показательного множителя e^{-nt} будут более или менее быстро затухать. Поэтому, ограничиваясь рассмотрением установившегося режима, т. е. рассматривая движение, установившееся по истечении достаточно большого промежутка времени от момента $t = 0$, к которому отнесено начало движения, мы можем пренебречь первыми двумя слагаемыми в формуле (21.69). Конечно, сказанное относится и к случаю большого сопротивления ($n \geq k$).

Итак, при установившемся режиме

$$x = a \sin (pt + \delta - \varepsilon), \quad (21.70)$$

т. е. движение происходит с частотой возмущающей силы и с некоторым сдвигом относительно силы по фазе.

Займемся исследованием зависимости амплитуды a установившегося режима от частоты p возмущающей силы. Имеем

$$a = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = \frac{h}{k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{[1 - (p/k)^2]^2 + 4(n/k)^2(p/k)^2}}.$$

Назовем, как и ранее, отношение

$$\frac{a}{a_0} = \lambda = \frac{1}{\sqrt{[1 - (p/k)^2]^2 + 4(n/k)^2(p/k)^2}} \quad (21.71)$$

коэффициентом динамичности ($a_0 = h/k^2$ — отклонение системы от положения равновесия под действием постоянной силы H). Обозначив отношения

$$p/k = z, \quad n/k = v,$$

получим

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4v^2z^2}}. \quad (21.72)$$

Считая v постоянным параметром, построим график зависимости λ от z в области $z \geq 0$.

Максимуму λ соответствует минимум подкоренного выражения в знаменателе

$$y = (1 - z^2)^2 + 4v^2z^2.$$

Вычисляем производные y по z :

$$y' = -4z(1 - z^2) + 8v^2z,$$

$$y'' = -4 + 12z^2 + 8v^2.$$

Находим, что $y' = 0$ при $z = 0$ и при $z = z_m = \sqrt{1 - 2v^2}$. Если $1 - 2v^2 > 0$, $v < 1/\sqrt{2} \approx 0,707$, т. е. $n \leq 0,707k$, то второй корень действителен; если же $n > 0,707k$, то z_m — мнимое число и y при $z > 0$ является монотонно возрастающей, а λ — монотонно убывающей функцией z . Подставляя $z_m^2 = 1 - 2v^2$ в выражение для y'' , находим

$$y'' = -4 + 12(1 - 2v^2) + 8v^2 = 8(1 - 2v^2) > 0.$$

Так как $y'' > 0$, то $z_m^2 = 1 - 2v^2$ соответствует минимуму y и, следовательно, максимуму λ . Вычислив этот максимум, получим

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{2v \sqrt{1 - v^2}}. \quad (21.73)$$

Максимальное значение амплитуды колебаний установившегося режима получается при $z = z_m = \sqrt{1 - 2v^2}$, а не при резонансе; под резонансом здесь можно понимать как случай $z = 1$, т. е. совпадение частот возмущающей силы и свободных колебаний при отсутствии сопротивления, так и случай $z = \sqrt{1 - v^2}$, соответствующий совпадению частоты p с частотой $\sqrt{k^2 - n^2} = k \sqrt{1 - v^2}$ свободных колебаний при наличии сопротивления. Следуя установившейся терминологии, сохраним наименование *резонанс* за первым случаем. Значения коэффициента динамичности λ при $z = 1$ и $z = \sqrt{1 - v^2}$ соответственно будут

$$\lambda_r = \lambda(1) = \frac{1}{2v}, \quad \lambda^* = \lambda(\sqrt{1 - v^2}) = \frac{1}{2v \sqrt{1 - 3v^2/4}};$$

конечно, λ_r и λ^* меньше, чем λ_{\max} ; иными словами, при наличии силы сопротивления имеет место сдвиг максимума амплитуды в сторону меньшего значения p . Надо, впрочем, отметить, что при малых сопротивлениях этот сдвиг максимума амплитуды, равно как и разности $\lambda_{\max} - \lambda_r$ и $\lambda_{\max} - \lambda^*$, невелики, как показано в табл. 2.

Таблица 2

**Влияние сопротивления на характерные значения
коэффициента динамичности**

ν	$z_m = \sqrt{1 - 2\nu^2}$	λ_{\max}	λ_r	λ^*
0,05	0,9975	10,013	10,000	10,010
0,10	0,9899	5,025	5,000	5,019
0,15	0,9772	3,371	3,333	3,362
0,20	0,9695	2,552	2,500	2,538
0,25	0,9357	2,065	2,000	2,049
0,30	0,9055	1,747	1,667	1,726
0,40	0,8246	1,366	1,250	1,333
0,50	0,7071	1,155	1,000	1,102
0,707	0	1,000	0,707	0,894

Отметим еще, что $\lambda(0) = 1$, $\lambda'(0) = 0$ при $z = 0$ независимо от значения ν ; $\lambda(\infty) = 0$ при $z \rightarrow \infty$.

После сказанного нетрудно отдать себе отчет в характере зависимости λ от z :

- ✓ если $\nu^2 > 1/2$, то λ монотонно убывает от значения $\lambda(0) = 1$ до $\lambda(\infty) = 0$ (рис. 260);
- ✓ если $\nu^2 < 1/2$, то λ имеет максимум при $z = z_m = \sqrt{1 - 2\nu^2}$, выраженный тем более резко, чем меньше ν . При $0 < z < z_m$ (область *малых* частот возмущающей силы) λ возрастает от $\lambda(0) = 1$ до $\lambda_{\max} = 1/(2\nu \sqrt{1 - \nu^2})$, а при $z_m < z < \infty$ (область *больших* частот) убывает от λ_{\max} до нуля (рис. 261).

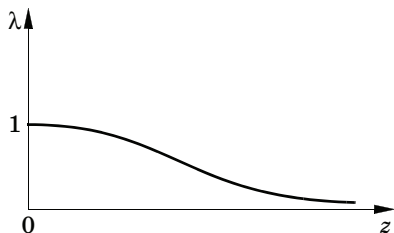


Рис. 260

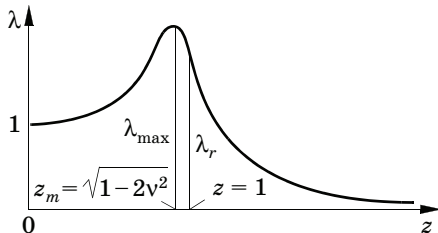


Рис. 261

Сдвиг фаз ε между колебанием при установившемся режиме и возмущающей силой определяется формулой

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2} = \frac{2vz}{1 - z^2}.$$

При $z = 1$ имеем $\operatorname{tg} \varepsilon = \infty$, $\varepsilon = \pi/2$, т. е. при резонансе сдвиг фаз равен $\pi/2$; при $z = 0$ и $z = \infty$ также независимо от v находим $\varepsilon(0) = 0$, $\varepsilon(\infty) = \pi$. Вычислив производную

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = 2v\lambda^2(1 + z^2),$$

убеждаемся, что она положительна при любых z и v ; ε монотонно возрастает при частотах возмущающей силы, соответствующих $z < 1$, от нуля до $\pi/2$ и при $z > 1$ — от $\pi/2$ до π . При $v = 0$ сдвиг фаз ε представляет собой разрывную функцию от z , причем $\varepsilon = 0$ при $z < 1$ и $\varepsilon = \pi$ при $z > 1$. В табл. 3 (с. 110) даны значения λ и ε при различных v и z .

На рис. 262 и 263 приведены графики зависимости λ и ε от z для различных v . Табл. 3 и графики показывают, что в случае ма-

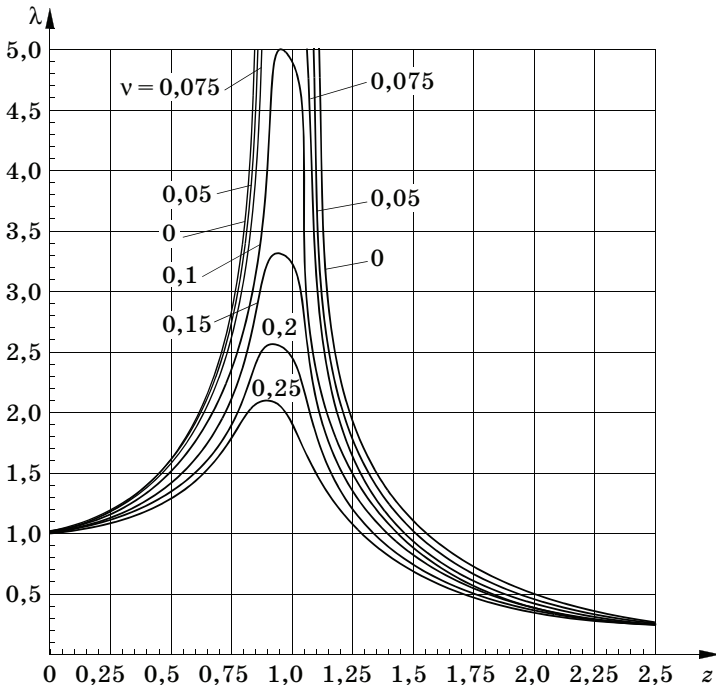


Рис. 262

лых сопротивлений в области, достаточно удаленной от резонанса, значения λ весьма мало зависят от ν . Это позволяет при малом сопротивлении и при z , значительно отличающемся от 1, не учитывать влияния сопротивления на амплитуды вынужденных колебаний.

Во многих приложениях (см., в частности, приводимый ниже пример 92 расчета вибрографа) амплитуда H возмущающей силы оказывается пропорциональной квадрату частоты p :

$$H = Kp^2.$$

Обозначая $K/m = h_1$, получаем для амплитуды колебаний установившегося режима вместо (21.71) и (21.72) выражение

$$a = \frac{h_1 p^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{h_1 z^2}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\nu^2 z^2}}.$$

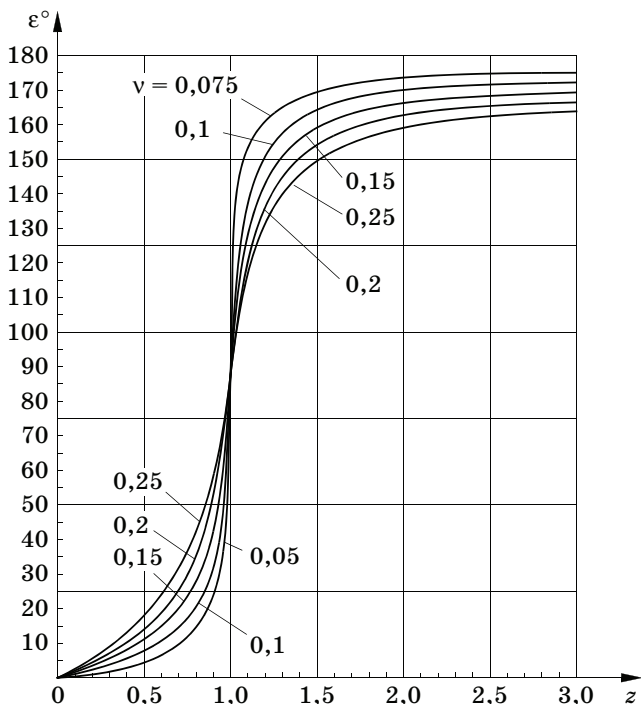


Рис. 263

Таблица 3

Зависимость коэффициента динамичности и сдвига фазы от z и ν

z	$\nu = 0$		$\nu = 0,05$		$\nu = 0,10$		$\nu = 0,15$		$\nu = 0,20$		$\nu = 0,25$		
	λ	λ	ε°	λ	ε°	λ	ε°	λ	ε°	λ	ε°	λ	ε°
0,00	1,00	1,00	0,0	1,00	0,0	1,00	0,0	1,00	0,0	1,00	0,0	1,00	0,0
0,10	1,01	1,01	0,6	1,01	1,3	1,01	1,9	1,01	2,5	1,01	2,9	1,01	2,9
0,20	1,04	1,04	1,2	1,04	2,4	1,04	3,6	1,04	4,7	1,04	5,9	1,04	5,9
0,30	1,10	1,10	1,9	1,10	3,7	1,10	5,6	1,09	7,5	1,09	9,4	1,09	9,4
0,40	1,19	1,19	2,8	1,18	5,4	1,18	8,1	1,17	10,8	1,16	13,4	1,16	13,4
0,50	1,33	1,33	3,8	1,32	7,6	1,30	11,3	1,29	15,0	1,26	18,5	1,26	18,5
0,60	1,56	1,55	5,3	1,54	10,6	1,50	15,7	1,46	20,6	1,41	25,2	1,41	25,2
0,70	1,96	1,94	7,8	1,89	15,4	1,82	22,4	1,72	28,8	1,62	34,5	1,62	34,5
0,75	2,28	2,25	9,7	2,16	18,9	2,03	27,2	1,88	34,4	1,72	40,6	1,72	40,6
0,80	2,78	2,71	12,5	2,53	23,9	2,31	33,7	2,08	41,7	1,86	48,0	1,86	48,0
0,85	3,60	3,44	17,0	3,07	31,4	2,65	42,5	2,28	50,8	1,98	56,8	1,98	56,8
0,90	5,26	4,76	25,3	3,82	43,5	3,03	55,0	2,46	62,2	2,05	67,2	2,05	67,2
0,925	6,95	5,85	32,7	4,27	52,2	3,20	62,5	2,52	68,7	2,07	72,7	2,07	72,7
0,95	10,26	7,33	44,1	4,67	62,7	3,30	71,0	2,55	75,5	2,06	78,3	2,06	78,3
0,975	20,50	9,16	63,4	4,98	75,9	3,36	80,5	2,55	82,9	2,04	84,2	2,04	84,2
1,000	∞	10,00	90,0	5,00	90,0	3,33	90,0	2,50	90,0	2,00	90,0	2,00	90,0
1,025	19,76	8,73	116,5	4,73	104,0	3,20	99,4	2,42	97,1	1,94	95,6	1,94	95,6
1,05	9,76	6,80	134,8	4,28	116,5	3,02	108,3	2,31	103,9	1,87	101,1	1,87	101,1
1,075	6,45	5,31	145,3	3,77	125,8	2,80	115,7	2,19	109,8	1,79	106,2	1,79	106,2
1,10	4,76	4,22	152,3	3,29	133,7	2,55	122,3	2,05	115,5	1,70	110,8	1,70	110,8
1,15	3,11	2,94	160,3	2,53	144,8	2,17	133,0	1,78	125,4	1,52	119,3	1,52	119,3
1,20	2,27	2,19	164,8	1,99	151,4	1,76	140,6	1,54	132,5	1,36	126,3	1,36	126,3
1,25	1,78	1,74	167,4	1,63	156,0	1,48	146,3	1,33	138,2	1,19	132,0	1,19	132,0
1,30	1,45	1,42	169,3	1,36	159,4	1,26	150,5	1,16	143,0	1,06	136,7	1,06	136,7
1,40	1,04	1,03	171,8	1,00	163,9	0,96	156,4	0,90	149,7	0,84	143,8	0,84	143,8
1,50	0,80	0,80	173,2	0,77	166,5	0,75	160,2	0,72	154,3	0,69	149,0	0,69	149,0
1,75	0,49	0,48	175,1	0,48	171,5	0,47	166,7	0,45	161,3	0,45	157,0	0,45	157,0
2,00	0,33	0,33	176,2	0,33	172,4	0,33	168,7	0,32	165,0	0,32	161,6	0,32	161,6
2,50	0,19	0,19	177,2	0,19	174,5	0,19	171,9	0,19	169,2	0,18	166,6	0,18	166,6
3,00	0,125	0,125	177,8	0,125	175,7	0,123	173,5	0,123	171,5	0,123	169,5	0,123	169,5
4,00	0,067	0,067	178,5	0,067	177,0	0,066	175,5	0,065	174,0	0,066	172,3	0,066	172,3
5,00	0,042	0,042	178,9	0,042	177,6	0,042	176,4	0,042	175,3	0,042	174,0	0,042	174,0

Графики отношения

$$\frac{a}{h_1} = \lambda_1 = \lambda z^2 = \frac{z^2}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4v^2z^2}} \quad (21.74)$$

для различных v в зависимости от z представлены на рис. 264. Числа, показанные на отдельных кривых, дают отношение двух последовательных размахов при свободных колебаниях, т. е. величину, обозначенную в § 98 через η и связанную, согласно (21.50), с логарифмическим декрементом Δ и с v соотношениями

$$\Delta = \ln \eta = \frac{\pi v}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (21.75)$$

В общем случае периодической силы $F(t)$ представляем ее рядом Фурье

$$F(t) = \sum_{s=1}^{\infty} H_s \sin (spt + \delta_s)$$

и при установившемся режиме получаем

$$\begin{aligned} x &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h_s}{k^2 \sqrt{(1-s^2z^2)^2 + 4v^2s^2z^2}} \sin (spt + \delta_s - \varepsilon_s) = \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h_s}{k^2} \lambda_s \sin (spt + \delta_s - \varepsilon_s), \end{aligned} \quad (21.76)$$

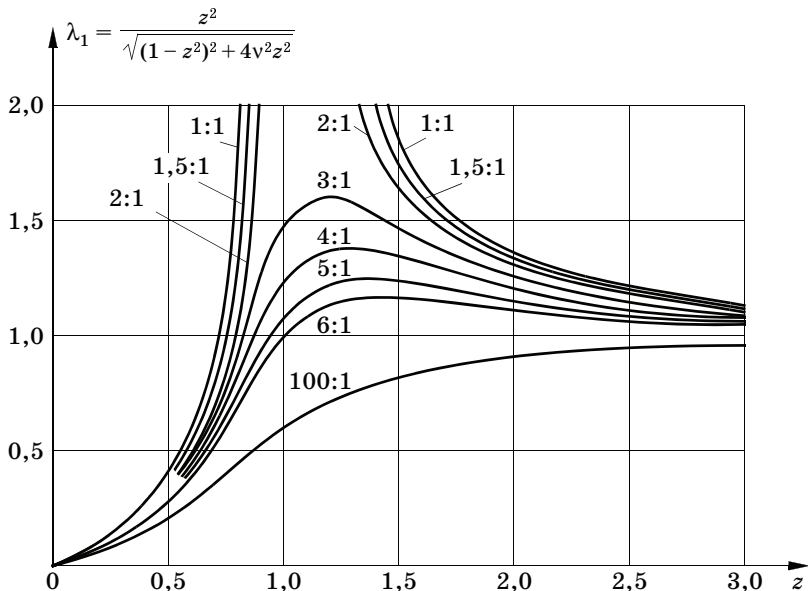


Рис. 264

где $h_s = H_s/m$, а сдвиг фаз ϵ_s s -й гармоники вынужденного колебания относительно той же гармоники возмущающей силы определяется формулой

$$\operatorname{tg} \epsilon_s = \frac{2szv}{1 - s^2z^2}. \quad (21.77)$$

Вычисление λ_s и $\operatorname{tg} \epsilon_s$ можно производить по приведенным выше формулам и таблицам.

При равенстве частоты свободных колебаний целому кратному sp , $s = 1, 2, 3, \dots$, частоты p возмущающей силы имеется резонанс соответствующего порядка. Амплитуда какой-либо гармоники вынужденного колебания будет максимальной не при резонансе, а при $k = sp \sqrt{1 - 2v^2}$ что при малых v , впрочем, мало отличается от sp . При большом сопротивлении ($v > 0,707$) понятие резонанса теряет смысл, так как все λ_s , $s = 1, 2, \dots$, монотонно убывают при возрастании p .

Пример 92. Виброграф, снабженный затуханием, установлен на платформе, совершающей периодическое колебательное движение в вертикальном направлении. Определить, с каким искажением записываются отдельные гармонические составляющие колебательного движения платформы при условии, что затухание прибора доведено до границы аperiodичности.

Предположим сначала, что платформа колеблется по гармоническому закону

$$\xi_n = a \sin pt.$$

Уравнение движения груза относительно платформы будет

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = ap^2 \sin pt;$$

x — вертикальное перемещение груза относительно платформы.

При установившемся режиме по формуле (21.74) имеем

$$x = \frac{ap^2 \sin(pt - \epsilon)}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = \frac{z^2}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4v^2z^2}} a \sin(pt - \epsilon).$$

На границе аperiodичности $v = 1$ и, следовательно,

$$x = \frac{z^2}{1 + z^2} a \sin(pt - \epsilon),$$

т. е. виброграф записывает амплитуду колебаний платформы с искажением

$$\frac{z^2}{1 + z^2} = \frac{1}{(k/p)^2 + 1}$$

и со сдвигом фазы, определяемым формулой

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2z}{1 - z^2}.$$

В случае произвольного периодического движения платформы

$$\xi_{\text{п}} = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \sin (spt + \delta_s).$$

При установившемся движении груза и при $\nu = 1$ получим

$$x = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{[k/(sp)]^2} a_s \sin (spt + \delta_s - \varepsilon_s), \quad \operatorname{tg} \varepsilon_s = \frac{2sz}{1 - s^2z^2}.$$

Искажение амплитуды отдельных гармоник записываемого колебательного движения здесь различно; однако если взять z достаточно большим, например $z = 5$, то уже для второй гармоники

$$\frac{1}{[k/(2p)]^2 + 1} = \frac{1}{0,1^2 + 1} \approx 0,99$$

и искажением ее амплитуды можно пренебречь. Сдвиг фаз ε_s при больших z для гармоник высших порядков мало отличается от 180° ; например, при $z = 5$ имеем $\varepsilon_2 = 180^\circ - 11^\circ$, $\varepsilon_3 = 180^\circ - 7^\circ$ и т. д.

Здесь подтверждается указанный выше факт: для записи колебаний фундаментов, машин, платформ и т. п. при помощи упруго связанного с ними груза выгодно применение приборов с малой частотой свободных колебаний.

§ 100. Свободные колебания точки при наличии кулонова трения

Рассмотрим движение тела M (рис. 265), способного перемещаться по горизонтальной шероховатой плоскости и находящегося под действием двух пружин AB и A_1B_1 .

При движении тела в горизонтальном направлении (вдоль оси Ox) к нему будут приложены, во-первых, восстанавливающая сила F пружин, проекция которой на ось Ox равна $(-cx)$, во-вторых, сила трения R , равная по величине произведению коэффициента трения f на нормальную реакцию плоскости N ; в рассматриваемом случае реакция N равна силе тяжести тела $G = mg$. Так как сила R всегда направлена противоположно скорости (рис. 265), то,

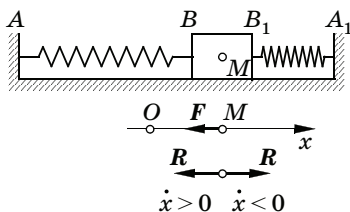


Рис. 265

вводя для обозначения знака какой-либо величины α символ* $\text{sign } \alpha$, можно записать

$$R_x = -fN \text{sign } \dot{x} = -fmg \text{sign } \dot{x},$$

т. е.

$$\begin{aligned} R_x &= -fmg & \text{при } \dot{x} > 0, \\ R_x &= fmg & \text{при } \dot{x} < 0. \end{aligned}$$

Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = -fmg \text{sign } \dot{x}. \quad (21.78)$$

При $\dot{x} = 0$ сила трения не должна превосходить предельной величины силы трения покоя f_1N , где f_1 — коэффициент трения покоя ($f < f_1$).

Переходя к интегрированию уравнения движения (21.78), заметим, что наличие в правой его части разрывной функции, меняющей в точке $\dot{x} = 0$ свой знак на противоположный, т. е. претерпевающей конечный скачок на величину $2fG$, заставляет вести интегрирование в пределах каждого размаха отдельно. Кулоново трение представляет собой пример сопротивления с нелинейным законом зависимости от скорости движения.

Рассмотрим последовательные этапы колебаний тела M , начиная с момента $t = 0$, в который $x = x_0$, а $\dot{x} = 0$. Движение начнется, если реакция пружин, возвращающая тело в положение равновесия, будет по величине больше силы трения покоя:

$$c|x_0| > f_1G, \quad |x_0| > \frac{f_1G}{c}. \quad (21.79)$$

Будем предполагать, что это неравенство имеет место, т. е. что тело достаточно удалено от положения равновесия. Пусть $x_0 > 0$; движение начнется в сторону отрицательной оси Ox , $\text{sign } \dot{x} = -1$. Уравнение движения (21.75) будет при этом иметь вид

$$m\ddot{x} + cx = fmg$$

или с введением параметра $k^2 = c/m$

$$\ddot{x} + k^2x = fg. \quad (21.80)$$

Интеграл этого уравнения, удовлетворяющий указанным выше начальным условиям, будет

$$x = fg/k^2 + (x_0 - fg/k^2) \cos kt, \quad (21.81)$$

* Сигнум (от лат. *signum* — знак) — функция действительного переменного: $\text{sign } \alpha = +1$ при $\alpha > 0$, $\text{sign } \alpha = 0$ при $\alpha = 0$, $\text{sign } \alpha = -1$ при $\alpha < 0$; допустимо написание $\text{sgn } \alpha$.

откуда найдем

$$\dot{x} = -k(x_0 - fg/k^2) \sin kt. \quad (21.82)$$

Проекция скорости \dot{x} остается отрицательной, пока $\sin kt > 0$, т. е. при $0 < t < \pi/k$. В момент $t = t_1 = \pi/k$ величина \dot{x} обращается в нуль, меняя свой знак; в этот момент времени значение x будет

$$x_1 = x(t_1) = -x_0 + 2fg/k^2,$$

и движение не прекратится, если — см. неравенство (21.79) — $c|x_1| > f_1 mg$, т. е.

$$c|-x_0 + 2fg/k^2| > f_1 mg$$

или, замечая, что $mg/c = g/k^2$,

$$|x_1| = |-x_0 + 2fg/k^2| > f_1 g/k^2. \quad (21.83)$$

Предположим, что это неравенство выполняется; в таком случае должно быть $x_1 = -x_0 + 2fg/k^2 < 0$. Действительно, в противном случае мы имели бы $|x_1| = x_1$ и, согласно (21.83),

$$|x_1| = x_1 = -x_0 + 2fg/k^2 > f_1 g/k^2,$$

т. е.

$$2fg/k^2 > f_1 g/k^2 + x_0.$$

Если заменить здесь x_0 величиной, заведомо меньшей ее — см. (21.79), — то это неравенство усилится:

$$2fg/k^2 > f_1 g/k^2 + f_1 G/c$$

или

$$fg/k^2 > f_1 g/k^2,$$

что неверно, так как $f_1 > f$. Итак, $x_1 < 0$, и движение в момент t_1 начнется в положительную сторону оси Ox , т. е. при $t > t_1$ в течение некоторого промежутка времени $\dot{x} > 0$, $\text{sign } \dot{x} = +1$. Уравнение движения (21.78) примет вид

$$\dot{x} + k^2 x = -fg, \quad (21.84)$$

причем начальные условия будут таковы: $x = x_1$, $\dot{x} = 0$ при $t = t_1$.

Как и выше, получим

$$x = -fg/k^2 + (x_1 + fg/k^2) \cos k(t - t_1),$$

или, подставляя значения t_1 и x_1 :

$$x = -fg/k^2 - (3fg/k^2 - x_0) \cos kt, \quad (21.85)$$

откуда найдем

$$\dot{x} = k(3fg/k^2 - x_0) \sin kt. \quad (21.86)$$

Так как $x_1 < 0$, по (21.83) имеем $x_0 - 2fg/k^2 > f_1g/k^2$, т. е.

$$x_0 > 2fg/k^2 + f_1g/k^2,$$

и поскольку $f_1 > f$, то тем более $x_0 - 3fg/k^2 > 0$. Поэтому будет $\dot{x} > 0$ при $t_1 < t < 2\pi/k$. В момент $t_2 = 2\pi/k$ величина $\sin kt$, а следовательно, \dot{x} обращается в нуль. В этот момент

$$x_2 = x(t_2) = x_0 - 4fg/k^2. \quad (21.87)$$

Движение не прекратится, если (см. выше)

$$|x_2| = |x_0 - 4fg/k^2| > f_1g/k^2. \quad (21.88)$$

Если это неравенство выполняется, то, как и выше, можно доказать, что $x_2 > 0$, а следовательно, скорость \dot{x} в момент t_2 изменит знак и в течение некоторого промежутка времени будем иметь $\text{sign } \dot{x} = -1$. Мы снова возвращаемся к дифференциальному уравнению (21.80) с новыми начальными условиями: $x = x_2 > 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = t_2$.

Итак, максимальные по абсолютной величине последовательные отклонения от положения равновесия будут

$$\begin{aligned} x_0, \quad x_1 = -x_0 + 2fg/k^2, \quad x_2 = x_0 - 4fg/k^2, \\ x_3 = -x_0 + 6fg/k^2, \dots, \quad x_n = (-1)^n (x_0 - 2nfg/k^2), \end{aligned}$$

а соответствующие им моменты остановок тела

$$t = 0, \pi/k, 2\pi/k, \dots, n\pi/k.$$

Каждое последующее отклонение по абсолютной величине на $2fg/k^2$ меньше предыдущего. Промежуток времени между моментами двух остановок по одну сторону от положения равновесия равен

$$T = t_n - t_{n-2} = 2\pi/k,$$

т. е. периоду колебаний при отсутствии силы трения.

Итак, сила трения не влияет на период колебания; последовательные отклонения уменьшаются в арифметической прогрессии на величину $2fg/k^2$ за полупериод.

При некотором n отклонение x_n должно стать по абсолютной величине меньше f_1g/k^2 и в соответствующий момент времени t_n движение прекратится, так как реакция пружин окажется мень-

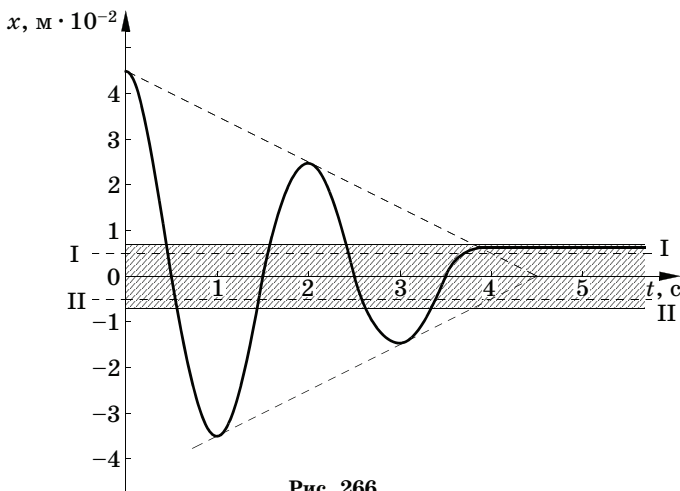


Рис. 266

ше, чем сила трения покоя. Поэтому рассматриваемые колебания являются *останавливающимися*.

В качестве примера построим график движения (рис. 266) при следующих условиях:

$$T = 2 \text{ с}, \quad x_0 = 4,6 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad f = 0,005, \quad f_1 = 0,007.$$

Получим

$$\frac{fg}{k^2} = \frac{fgT^2}{4\pi^2} = \frac{0,005 \cdot 981 \cdot 4}{4\pi^2} \approx 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad \frac{f_1g}{k^2} \approx 0,7 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

За полупериод колебания амплитуды уменьшаются на 10^{-2} м. Находим

$$\begin{aligned} x_0 &= 4,6 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \\ x_1 &= (-4,6 + 1) \cdot 10^{-2} = -3,6 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \\ x_2 &= (4,6 - 2) \cdot 10^{-2} = 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \\ x_3 &= (-4,6 + 3) \cdot 10^{-2} = -1,6 \cdot 10^{-2} \text{ м}. \end{aligned}$$

Все эти отклонения по абсолютной величине больше 0,7, поэтому движение будет продолжаться; но в момент времени $t = t_4 = 4 \text{ с}$ мы уже получим

$$x_4 = (4,6 - 4) \cdot 10^{-2} = 0,6 \cdot 10^{-2} < f_1g/k^2$$

и движение прекратится. Назовем заштрихованную на рис. 266 область шириной $2f_1g/k^2$ *мертвой зоной*. Если скорость обраца-

ется в нуль во время прохождения мертвой зоны, то тело останавливается и движение далее не происходит.

Согласно (21.81), график движения в промежутке времени $0 < t < t_1$ представляет собой отрезок косинусоиды амплитудой $4,1 \cdot 10^{-2}$ м; осью косинусоиды является прямая I—I, параллельная оси абсцисс и проведенная на расстоянии $fg/k^2 = 0,5 \cdot 10^{-2}$ м от нее; в интервале $t_1 < t < t_2$ имеем отрезок косинусоиды амплитудой $3,1 \cdot 10^{-2}$ м, причем осью является прямая II—II, проведенная снизу от оси абсцисс на том же расстоянии, и т. д. (рис. 266). В момент времени $t = t_4 = 4$ с вершина соответствующей косинусоиды окажется внутри мертвой зоны, и точка останется в покое, т. е. график движения при $t > t_4$ представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс.

Вершины косинусоид x_0, x_2, x_4 и т. д. должны лежать на одной прямой; если это свойство можно заметить на заснятой диаграмме свободных колебаний, то причиной уменьшения размахов является кулоново трение.

В настоящей главе мы имели дело с прямолинейными колебаниями материальной точки, причем такими, которые описываются *линейными* дифференциальными уравнениями. Такие колебания называют *линейными*. Они наиболее просты с математической стороны и поэтому вынесены в начало этого тома. В некотором роде исключением является случай прямолинейных колебаний при наличии кулонова трения, которые следует отнести к нелинейным колебаниям, описываемым кусочно-линейными уравнениями. Более сложные случаи колебаний системы материальных точек и абсолютно твердых тел, как линейных, так и нелинейных, будут рассмотрены в шестом отделе курса (гл. XXXII—XXXIV).

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

Глава XXII

Теорема об изменении количества движения системы материальных точек

§ 101. Предварительные замечания об общих теоремах динамики

Задача об интегрировании дифференциальных уравнений движения материальной точки, представляющая даже в случае одной точки некоторые трудности, становится подчас непосильной, когда приходится иметь дело с движением системы материальных точек. Силы, приложенные к отдельным точкам системы, могут зависеть от положения и движения остальных точек системы, так что правые части дифференциальных уравнений, написанных для каждой точки в отдельности, будут содержать время, координаты и проекции скорости *всех точек* системы. В результате вопрос сводится к интегрированию *системы* дифференциальных уравнений, что далеко не просто.

Если по существу поставленной задачи необходимо изучить движение каждой точки системы в отдельности, то полное интегрирование уравнений движения системы точек, приводящее к определению координат точек системы в зависимости от времени, неизбежно. Таковы, например, задачи о движении двух, трех или нескольких тяготеющих друг к другу тел в небесной механике. В других случаях оказывается достаточным определить изменение некоторых суммарных мер движения системы в целом (количества движения, момента количества движения, кинетической энергии) в зависимости от суммарных мер действия сил (главный вектор и главный момент приложенных сил, работа сил, потенциальная энергия).

Такого рода соотношения между изменениями во времени суммарных мер движения системы материальных точек и суммарными мерами действия приложенных к точкам совокупности сил выражают общие теоремы динамики системы материальных точек, применяемые как для отдельных точек и их систем, так и для сплошных сред.

Общие теоремы динамики могут быть выведены из дифференциальных уравнений движения как в дифференциальной, так и в конечной (интегральной) формах.

К числу *общих теорем динамики* относятся:

- ✓ теорема об изменении количества движения с ее модификациями — теоремой импульсов и теоремой о движении центра масс;
- ✓ теорема об изменении момента количества движения, сводящаяся в частном случае центральных сил к теореме площадей;
- ✓ теорема об изменении кинетической энергии (теорема живых сил), при консервативности сил (см. ниже) выражающая закон сохранения механической энергии.

В основе вывода первых двух общих теорем динамики — *количества движения* и *момента количества движения* — лежит идея выделения из всех сил, приложенных к системе, *внутренних* сил взаимодействия между материальными точками системы. Внутренние силы в своей совокупности не могут влиять на такие суммарные меры движения, как главный вектор и главный момент количества движения точек системы. Только внешние силы, действующие на точки системы со стороны внешних тел, не принадлежащих к рассматриваемой системе, могут изменять главный вектор и главный момент количества движения системы. В использовании этого свойства внутренних сил, представляющего собой одно из важнейших следствий третьего закона Ньютона, заключается главное значение двух первых общих теорем динамики.

Теорема об *изменении кинетической энергии* устанавливает связь между изменением основной меры движения системы материальных точек — кинетической энергии — и мерой действия сил на протяжении путей движения точек системы — *работой* сил; для широкого класса сил, носящих наименование *консервативных*, работа может быть выражена как изменение потенциальной энергии. Таким образом, в круг вопросов механики вводится понятие *энергии*. Значение этого понятия состоит в том, что им определяется единая физическая величина, проявляющаяся в различных физических явлениях и, таким образом, связывающая их между собой. Понятие энергии объединяет механику с термодинамикой, с учением об электрических явлениях и т. п. Преобразование механической энергии в другие формы энергии

и обратное преобразование этих форм в механическую энергию представляет собой важную задачу современной техники.

В отличие от изменения количества движения и момента количества движения изменение кинетической энергии материальной системы зависит от работы как внешних, так и внутренних сил. Однако и в этом случае выделение класса внутренних сил оказывается полезным, так как, например, в случае движения абсолютно твердого тела или системы абсолютно твердых тел работа внутренних сил равна нулю, а в случае сплошной среды она позволяет судить о потерях механической энергии за счет внутреннего трения.

Применением общих теорем динамики можно удовольствоваться лишь при изучении наиболее простых движений систем или при рассмотрении лишь какой-либо одной стороны сложных движений. Исчерпывающие сведения о движении системы может дать только полное интегрирование дифференциальных уравнений ее движения.

§ 102. Теорема об изменении количества движения системы материальных точек

Положение системы материальных точек M_i , $i = 1, 2, \dots, n$, будем определять векторами-радиусами r_i этих точек относительно неподвижного начала координат O ; скорости и ускорения точек системы обозначим соответственно через

$$v_i = \dot{r}_i, \quad w_i = \dot{v}_i = \ddot{r}_i.$$

Тела, не включаемые в рассматриваемую систему, назовем *внешними* по отношению к системе. Такое разделение тел на входящие в систему и не входящие в нее зависит от способа рассмотрения. Мы можем (и в дальнейшем будем так неоднократно поступать) то включать некоторые тела в данную систему, то исключать их из этой системы.

Таким образом, силы, приложенные к данной системе, мы разбиваем на две категории:

- ✓ *внутренние силы* — силы взаимодействия материальных точек, входящих в данную систему;
- ✓ *внешние силы* — силы взаимодействия системы с телами, внешними по отношению к системе.

Так, например, если рассматривать поезд как одну систему, то внутренними силами будут упругие силы, возникающие в тягах

и в буферах, силы давления груза на пол вагона, силы трения в осях; внешними силами будут реакции рельсов, силы трения между колесами и рельсами, сопротивление воздуха.

Обозначим равнодействующую всех внешних сил, приложенных к точке M_i , через F_i , а всех внутренних — через F'_i ; тогда дифференциальные уравнения движения системы материальных точек могут быть представлены совокупностью основных уравнений динамики для отдельных точек системы

$$m_i w_i = F_i + F'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (22.1)$$

или в проекциях на оси неподвижной (или инерциальной) декартовой системы координат

$$m_i \ddot{x}_i = F_{ix} + F'_{ix}, \quad m_i \ddot{y}_i = F_{iy} + F'_{iy}, \quad m_i \ddot{z}_i = F_{iz} + F'_{iz} \\ i = 1, 2, \dots, n. \quad (22.2)$$

Проекции F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} равнодействующей внешних сил, приложенных к i -й точке, так же как и проекции $F'_{ix}, F'_{iy}, F'_{iz}$ равнодействующей внутренних сил, представляют собой заданные функции времени, координат и проекций скоростей не только i -й, но и в общем случае всех точек системы. Таким образом, уравнения (22.2) образуют систему $3n$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с $3n$ неизвестными величинами x_i, y_i, z_i , которые должны быть определены как функции времени. Начальные условия, необходимые для определения произвольных постоянных интегрирования, представляют собой совокупность начальных условий для каждой точки системы в отдельности. Оставляя пока в стороне вопрос об интегрировании уравнений (22.2), займемся применением этих уравнений к выводу первой основной теоремы динамики — *теоремы об изменении количества движения системы*.

Вывод теоремы об изменении количества движения системы, или, как ее кратко называют, *теоремы количества движения*, основан на идее исключения внутренних сил из дифференциальных уравнений движения системы материальных точек (22.1). Пользуясь третьим законом Ньютона о равенстве действия и противодействия, можно утверждать, что главный вектор внутренних сил V' равен нулю:

$$V' = \sum_{i=1}^n F'_i = 0. \quad (22.3)$$

Действительно, для определения главного вектора внутренних сил мы должны сложить все силы взаимодействия между точками рассматриваемой системы. Но каждому действию, приложенному к одной точке от другой, соответствует равное по величине и противоположно направленное противодействие, приложенное ко второй точке от первой. При сложении этих действий и противодействий в один главный вектор они все парно уничтожаются, что и приведет к равенству (22.3).

Просуммируем уравнения (22.1) по всем точкам системы:

$$\sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{w}_i = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{F}_i + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{F}'_i. \quad (22.4)$$

В силу уравнения (22.3) второе слагаемое в правой части этого равенства обращается в нуль. Векторная сумма

$$\sum_{i=1}^n \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{V} \quad (22.5)$$

представляет собой *главный вектор внешних сил*. Заметим, что эту сумму внешних сил, приложенных к различным точкам системы, выражаемую одним вектором — главным вектором внешних сил, — нельзя рассматривать как *равнодействующую* внешних сил. В случае системы отдельных материальных точек, движущихся одна относительно другой, само понятие равнодействующей лишено смысла.

Уравнение (22.4) на основании (22.3) и (22.5) принимает вид

$$\sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{V}. \quad (22.6)$$

Вспоминая еще, что $\boldsymbol{w}_i = d\boldsymbol{v}_i/dt$, перепишем уравнение (22.6) в форме

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{V}. \quad (22.7)$$

Вектор \boldsymbol{q} , равный по величине произведению массы m материальной точки на вектор скорости \boldsymbol{v} и имеющий направление скорости, называется *количеством движения точки*:

$$\boldsymbol{q} = m\boldsymbol{v}. \quad (22.8)$$

Количество движения измеряется в $\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$.

Главный вектор \boldsymbol{Q} количества движения точек системы

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{q}_i = \sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{v}_i \quad (22.9)$$

называют *количеством движения системы*; его проекции на оси неподвижной декартовой системы координат будут

$$Q_x = \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i, \quad Q_y = \sum_{i=1}^n m_i \dot{y}_i, \quad Q_z = \sum_{i=1}^n m_i \dot{z}_i. \quad (22.10)$$

Из равенств (22.5), (22.7) и (22.9) следует, что

$$\frac{dQ}{dt} = V = \sum_{i=1}^n F_i. \quad (22.11)$$

Это соотношение выражает теорему количества движения.

ТЕОРЕМА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ. *Векторная производная по времени от количества движения системы равна главному вектору внешних сил, приложенных к системе.*

Равенство нулю главного вектора внутренних сил приводит к заключению, что внутренние силы не могут влиять на изменение количества движения системы.

Проецируя векторное равенство (22.11) на неподвижные оси декартовой системы координат, получаем систему трех равенств

$$\frac{dQ_x}{dt} = V_x, \quad \frac{dQ_y}{dt} = V_y, \quad \frac{dQ_z}{dt} = V_z. \quad (22.12)$$

Предположим, что внешние силы, приложенные к системе, таковы, что проекция их главного вектора на одну из осей координат равна нулю. Тогда, как это сразу следует из равенств (22.12), проекция вектора количества движения системы на ту же ось будет во все время движения сохранять постоянную величину. Это предложение называют *законом сохранения проекции количества движения системы*.

Если главный вектор внешних сил равен нулю, т. е. система изолирована от воздействий внешних по отношению к ней тел, то количество движения системы будет сохраняться во времени как по величине, так и по направлению. В этом заключается *закон сохранения количества движения*.

Поясним закон сохранения количества движения простым примером. Рассмотрим систему «орудие — снаряд», причем для простоты будем пренебрегать массой пороховых газов, образующихся при выстреле. Пусть тело орудия имеет массу $m_{\text{ор}}$, снаряд — массу $m_{\text{сн}}$. Будем предполагать, что конструкция лафета такова, что ствол расположен горизонтально и откат его происходит также в горизонтальном направлении. Примем ось ствола

в направлении выстрела за ось Ox ; тогда силы тяжести не дают проекций на эту ось, точно так же, как и опорные реакции лафета, если пренебречь трением ствола в направляющих и реакцией гидротормоза, возникающими при откате орудия. При этих условиях, применяя закон сохранения количества движения в проекции на ось Ox и обозначая соответственно через $v_{ор}$ и $v_{сн}$ абсолютные величины скоростей орудия и снаряда после выстрела, будем иметь

$$-m_{ор}v_{ор} + m_{сн}v_{сн} = \text{const.}$$

Для определения постоянной заметим, что до выстрела и орудие и снаряд были в покое, так что

$$-m_{ор}v_{ор} + m_{сн}v_{сн} = 0.$$

Отсюда следует простое соотношение между скоростью вылета снаряда и скоростью отката орудия в момент непосредственно за выстрелом (в дальнейшем скорость отката уменьшается благодаря трению и действию гидротормоза):

$$v_{сн} : v_{ор} = m_{ор} : m_{сн},$$

т. е. обратная пропорциональность этих скоростей массам орудия и снаряда.

§ 103. Динамика точки переменной массы

Под словом *точка* в дальнейшем, как и выше, понимается тело, кинематическими элементами вращательного движения которого при рассмотрении данного вопроса можно пренебречь по сравнению с кинематическими элементами его поступательного движения. *Точка переменной массы* — это тело, некоторая часть массы которого в процессе движения отделяется от него или, наоборот, к массе которого присоединяются новые массы. Примерами могут служить ракетный снаряд, отбрасывающий продукты сгорания топлива, самолет, сбрасывающий бомбовую нагрузку, привязной аэростат, поднимающий канат, все новые части которого включаются в движение, плавающая льдина, масса которой возрастает вследствие намерзания или убывает вследствие таяния, и многое другое.

Динамика точки переменной массы представляет собой раздел общей динамики постоянной массы. Следует заметить, что излагаемый в настоящем параграфе метод расчета реактивных дви-

жений никак не связан с изучаемым в *релятивистской механике* изменением массы при движении со скоростями, близкими к скоростям света (см. гл. XXXI). Являясь лишь своеобразной интерпретацией классических методов механики постоянной массы, метод механики переменной массы получил свое развитие и широкое распространение главным образом благодаря своим важным применениям к расчету реактивных движений.

Следуя одному из основоположников динамики переменной массы И. В. Мещерскому* [22], будем в дальнейшем предполагать, что

«...к системе непрерывно присоединяются частицы бесконечно малых масс таким образом, что скорости точек системы изменяются непрерывно, тогда как скорости частиц в момент их присоединения к системе изменяются на конечные величины».

Рассмотрим в момент времени t две точки: одну массой $m(t)$, имеющую абсолютную скорость \mathbf{v} , другую массой $dm(t)$ с абсолютной скоростью \mathbf{u} ; в дальнейшем принимается, что масса $m(t)$ представляет собой непрерывную дифференцируемую функцию времени. В момент времени $t + dt$ эти две точки образуют одну точку массой $m + dm$ (в случае присоединяющейся массы $dm > 0$, в случае отделяющейся массы $dm < 0$), скорость которой равна $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Применим теорему количества движения к системе, состоящей из этих двух точек. Количество движения равно $m\mathbf{v} + \mathbf{u}dm$ в момент t и $(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$ в момент $t + dt$.

Приращение количества движения за время dt будет

$$m d\mathbf{v} + dm(\mathbf{v} - \mathbf{u}),$$

и, следовательно, переходя к производной количества движения системы по времени и обозначая через \mathbf{F} равнодействующую внешних сил, приложенных к точке с конечной массой, получаем

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \frac{dm}{dt} = \mathbf{F}. \quad (22.13)$$

Вектор

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{c} \quad (22.14)$$

* МЕЩЕРСКИЙ ИВАН ВСЕВОЛОДОВИЧ (1859—1935) — профессор механики Санкт-Петербургского имени Петра Великого, а впоследствии Ленинградского политехнического института. Его научная и педагогическая деятельность оставила глубокий след в развитии теоретической механики и в деле преподавания ее в нашей стране.

представляет собой *относительную скорость присоединяющейся массы*.

Вектор

$$\Phi = \frac{dm}{dt} c \quad (22.15)$$

назовем *реактивной силой*. Уравнение (22.13) может быть записано в виде основного уравнения динамики точки переменной массы

$$m \frac{dv}{dt} = F + \Phi. \quad (22.16)$$

ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ. Уравнение движения точки переменной массы приводится к виду уравнения движения точки постоянной массы, если к приложенным к точке силам присоединить реактивную силу*.

Если абсолютная скорость присоединяющейся массы равна нулю ($u = 0$), то уравнение (22.13) преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt} (mv) = F. \quad (22.17)$$

Если обращается в нуль относительная скорость c присоединяющейся массы, то $\Phi = 0$ и уравнение (22.16) принимает обычную форму уравнения движения точки постоянной массы

$$m \frac{dv}{dt} = F.$$

Надо, конечно, иметь в виду, что во всех этих уравнениях m не является постоянной величиной, а зависит от времени как явно, так и неявно через посредство величин, определяющих

* Уравнение это по справедливости приписывается И. В. Мещерскому, который не только дал строгий его вывод, но и решил с его помощью ряд интересных задач. Исследования Г. К. Михайлова, изложенные в его докторской диссертации (Развитие основ динамики системы переменного состава и теории реактивного движения. — М., 1977), показали, что аналогичное уравнение впервые было установлено Г. Букуа в работах 1812—1814 гг.

БУКУА́ ГЕОРГ ФРАНЦ АВГУСТ ДЕ ЛОНГЕВАЛЬ, ГРАФ ФОН (*Buquoy* (*Bucquoy*) *Georg Franz August de Longueval, Graf von*, 1781—1851) — чешский ученый.

МИХАЙЛОВ ГЛЕБ КОНСТАНТИНОВИЧ (1929) — российский механик, Ученый секретарь Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике.

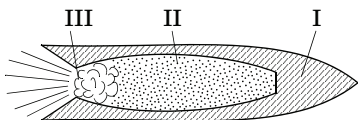


Рис. 267

положение или движение точки (координат, скорости). Если, например, $m = f(x, \dot{x}, t)$, то

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial m}{\partial \dot{x}} \ddot{x}.$$

В качестве иллюстрации применения уравнения (22.16) рассмотрим поступательное движение ракетного снаряда, причем отвлечемся от влияния сил тяжести и сопротивления воздуха. Обозначим через m_k постоянную массу корпуса I (рис. 267), через m_T переменную массу топлива II и, наконец, через $M = -dm_T/dt$ массовый расход газов, проходящих через выхлопное отверстие сопла III. Будем предполагать, что скорость истечения газов постоянна и равна c . Согласно (22.16) уравнение движения ракеты будет

$$(m_k + m_T) \frac{dv}{dt} = c \frac{dm_T}{dt}.$$

Проецируя на ось Ox и замечая, что $v_x = v$, $c_x = -c$, находим

$$(m_k + m_T) \frac{dv}{dt} = -c \frac{dm_T}{dt},$$

откуда, умножая на dt и интегрируя, получаем

$$v = c \ln \frac{m_k + m_T^0}{m_k + m_T},$$

где положено, что $m_T = m_T^0$, $v = 0$ при $t = 0$.

В конце горения $m_T = 0$; обозначая скорость в этот момент через v_1 , получим *первую формулу Циолковского**

$$v_1 = c \ln \left(1 + \frac{m_T^0}{m_k} \right).$$

Пример 93. Составить уравнение движения аэростата, поднимающегося вертикально вверх и непрерывно сбрасывающего балласт с постоянной относительной скоростью. При каком законе изменения массы балласта подъем аэростата будет равномерным?

Действующие на аэростат силы суть: сила тяжести mg , подъемная архимедова сила Q , равная весу вытесненного объема воздуха, и сила сопротивления, которую примем пропорциональной квадрату скорости.

* ЦИОЛКОВСКИЙ КОНСТАНТИН ЭДУАРДОВИЧ (1857—1935) — выдающийся русский изобретатель и исследователь в области реактивного движения. (Вторая формула Циолковского соответствует вертикальному старту ракеты с учетом действия постоянной силы тяжести.)

Относительная скорость c сбрасываемого балласта направлена вниз, поэтому ее проекция на направление восходящей вертикали (оси Oz) равна $(-c)$. По основному уравнению (22.16) получаем

$$m\ddot{z} = -mg + Q - k\dot{z}^2 - c \frac{dm}{dt}.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка относительно \dot{z} , в котором m — функция времени (уравнение Риккати), не интегрируется элементарно. Обратимся к рассмотрению частной задачи об условиях равномерного подъема. Пусть $\dot{z} = v_0 = \text{const}$; тогда предыдущее уравнение приведет к виду

$$c \frac{dm}{dt} = Q - kv_0^2 - mg,$$

или

$$\frac{c \, dm}{Q - kv_0^2 - mg} = dt.$$

После интегрирования получим

$$\ln(Q - kv_0^2 - mg) = \ln C - gt/c.$$

Произвольную постоянную C находим по условию: $m = m_0$ при $t = 0$; будем иметь

$$m = \frac{Q - kv_0^2}{g} (1 - e^{-gt/c}) + m_0 e^{-gt/c}.$$

Обозначим через M постоянную массу снаряжения, а через μ — переменную массу балласта; предыдущее выражение примет вид

$$M + \mu = \frac{Q - kv_0^2}{g} (1 - e^{-gt/c}) + (M + \mu_0)e^{-gt/c}. \quad (22.18)$$

Предположим, что весь балласт будет сброшен по истечении достаточно большого промежутка времени, когда практически можно будет считать $e^{-gt/c}$ равным нулю ($\mu \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$). Получаем соотношение

$$M = \frac{Q - kv_0^2}{g},$$

выражающее условие равновесия сил веса снаряжения, силы сопротивления воздуха и подъемной силы аэростата. Условие (22.18) принимает вид

$$M + \mu = M(1 - e^{-gt/c}) + (M + \mu_0)e^{-gt/c}$$

или

$$\mu = \mu_0 e^{-gt/c},$$

т. е. масса балласта должна уменьшаться по показательному закону.

Пример 94. Вывести закон движения тяжелой цепи, конец которой свешивается с горизонтального стола, тогда как не вступившая еще в движение часть цепи свернута в клубок у самого края стола. (Эта задача была рассмотрена Кэйли в 1857 г.)

Пусть x обозначает длину свешивающейся и движущейся части цепи; присоединяющаяся масса — это масса того элемента цепи dx , который вступает в движение в момент t ; его абсолютная скорость в момент присоединения к движущейся части цепи становится равной общей скорости \dot{x} этой части, а непосредственно до этого момента была равна нулю.

Итак, в данном случае (ρ — масса единицы длины цепи)

$$m = \rho x, \quad u = 0, \quad F = \rho gx, \quad (v - u) \frac{dm}{dt} = \rho \dot{x}^2$$

и уравнение (22.13) приводится к $\rho x \ddot{x} + \rho \dot{x}^2 = \rho gx$ или

$$x \ddot{x} = gx - \dot{x}^2. \quad (22.19)$$

Легко найти первый интеграл этого уравнения. Имеем

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\dot{x}^2) = \frac{1}{2} \frac{dz}{dx}, \quad z = \dot{x}^2,$$

так что предыдущее уравнение становится линейным уравнением первого порядка

$$\frac{1}{2} x \frac{dz}{dx} + z = gx,$$

общий интеграл которого будет

$$z = \frac{C}{x^2} + \frac{2}{3} gx = \dot{x}^2.$$

Примем в качестве начальных условий: $x = 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$; тогда из последнего равенства следует, что $C = 0$. Получим

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3} gx}, \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2}{3} g} dt$$

и после вторичного интегрирования найдем

$$2\sqrt{x} = \sqrt{(2/3)g} t$$

или

$$x = gt^2/6.$$

Полученное решение не единственно; тем же начальным условиям и дифференциальному уравнению (22.19) можно удовлетворить, полагая $x \equiv 0$. В обсуждение этого на первый взгляд парадоксального для задач

КЭЙЛИ, КЭЙЛИ АРТУР (*Cayley Arthur, 1821—1895*) — английский математик, иностр. чл. Петербургской АН (1870), чл. Лондонского королевского общества (1852).

динамики результата мы подробнее вдаваться не будем, укажем лишь, что полученный результат не противоречит сказанному в § 87 об единственности решения задачи типа Коши. Точка $t = 0$, $x = 0$ является *особой точкой*, так как в ней обращается в нуль коэффициент при старшей производной в уравнении (22.19). В этой точке ускорение неопределенно: нетривиальному решению $x = gt^2/6$ при $t = 0$ соответствует, как легко убедиться, ускорение $\ddot{x}_0 = g/3$, в то время как решение $x = 0$ дает $\ddot{x}_0 = 0$.

§ 104. Теорема о движении центра масс системы материальных точек

Рассмотрим систему n материальных точек с векторами-радиусами r_i и массами m_i . *Массой системы точек* назовем сумму

$$M = \sum_{i=1}^n m_i.$$

По аналогии с понятием о центре тяжести твердого тела (§ 26) введем в рассмотрение точку C с вектором-радиусом

$$r_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i r_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i r_i, \quad (22.20)$$

или в декартовых координатах

$$x_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad z_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i; \quad (22.21)$$

назовем эту точку *центром масс системы материальных точек*.

Понятие центра масс является более общим, чем понятие центра тяжести: в отличие от понятия центра тяжести понятие центра масс не связано с наличием однородного гравитационного поля.

Взяв производную по времени от обеих частей равенства (22.20), определяющего вектор-радиус центра масс, получим

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i v_i = Q = M \dot{r}_C = M v_C. \quad (22.22)$$

Из этого следует, что количество движения системы материальных точек равно произведению массы системы на скорость движения ее центра масс, или, иными словами, количеству движения центра масс, в котором предположена сосредоточенной вся масса системы.

Дифференцируя (22.22) еще раз по времени и вспоминая теорему количества движения (22.11), будем иметь

$$M\mathbf{w}_C = M\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i. \quad (22.23)$$

Уравнение это можно рассматривать как основное уравнение динамики точки — центра масс C системы, — если в этой точке считать сосредоточенной массу M и к ней приложенной силу \mathbf{V} — главный вектор внешних сил. Отсюда вытекает теорема о движении центра масс.

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС. *Центр масс системы движется как точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложен главный вектор внешних сил, действующих на систему.*

Из приведенной формулировки следует, что *внутренние силы не влияют на движение центра масс; только внешние силы могут изменять его движение.*

Если система находится в покое, то внутренними силами нельзя вывести из покоя ее центр масс; вызванное внутренними силами движение системы будет происходить так, что центр масс останется неподвижным. Точно так же, если центр масс находился в движении, то внутренними силами нельзя изменить его движение.

В частном случае *абсолютно твердого тела*, представляющего собой неизменяемую систему материальных точек (и находящегося в однородном гравитационном поле), центр масс совпадает с центром тяжести; приведем формулировку предыдущей теоремы для этого случая.

ТЕОРЕМА. *Центр тяжести твердого тела движется так, как будто в нем сосредоточена вся масса тела и на него действует главный вектор внешних сил, приложенных к твердому телу.*

Пользуясь этой теоремой, можно трактовать материальную точку как центр тяжести твердого тела, схематически представляемого материальной точкой, безотносительно к тому, движется ли тело поступательно или вращается. Замена движущегося твердого тела материальной точкой допустима во всех случаях, когда вращательное движение тела не представляет интереса.

Рассмотрим некоторые частные случаи движения системы.

1°. Главный вектор внешних сил равен нулю. В этом случае из уравнения (22.23) следует, что

$$w_C = 0,$$

т. е. центр масс находится в покое или движется прямолинейно и равномерно. Будет ли иметь место покой или движение, зависит от начальных условий.

2°. Проекция главного вектора внешних сил на некоторое направление равна нулю.

Пусть $V_x = 0$; тогда, проецируя основное уравнение (22.23) на эту ось, будем иметь $\ddot{x}_C = 0$, т. е.

$$x_C = at + b = v_{0x}t + x_{C0};$$

это означает, что проекция центра масс на ось Ox неподвижна (при $v_{0x} = 0$) или движется равномерно вдоль оси Ox со скоростью v_{0x} .

Перейдем к описанию некоторых явлений, иллюстрирующих содержание теоремы движения центра масс.

■ Рассмотрим движение тепловоза по горизонтальному пути; внутренние силы не могут привести его в движение, так как только внешние силы создают изменение движения центра масс. Этими внешними силами являются: сила тяжести тепловоза, реакции рельсов, сопротивление воздуха и сопротивление вагонного состава. Последние два сопротивления тормозят движение тепловоза, сила тяжести по направлению вертикальна и по предыдущему не может вызвать горизонтального движения центра масс тепловоза. Остается рассмотреть реакции рельсов.

Реакции эти можно разложить на направления, перпендикулярное и параллельное рельсам. Первая составляющая вертикальна и горизонтального ускорения тепловоза не создает. Единственной движущей силой является горизонтальная составляющая реакции, т. е. сила трения скольжения между ведущими колесами и рельсами. Ведущие колеса сцепляются благодаря силам трения скольжения с рельсами (рис. 268) и отталкиваются от них вперед силой $F_{\text{вед}}$. Главный вектор этих ведущих сил и дает *двигательную силу тепловоза*.

Ведомые колеса, наоборот, лишь тормозят движение. Сначала приводятся в движение ведущие колеса и получают двигательную силу за счет трения их о рельсы. Между колесом и рельсом развивается трение скольже-

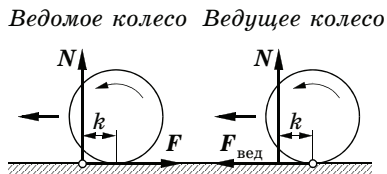


Рис. 268

ния, причем если колесо скользит по рельсу, как это бывает в первый момент приведения в ход тепловоза, то двигательная сила будет равна произведению коэффициента трения скольжения f на ту часть G_1 силы тяжести тепловоза, которая приходится на оси ведущих колес. Если же ведущие колеса не скользят, а катятся по рельсам, то можно только утверждать, что равнодействующая ведущих сил $\Sigma F_{\text{вед}}$ меньше fG_1 , так как при отсутствии скольжения сила трения может иметь любое значение от нуля до максимального своего значения в момент начала скольжения*.

При условии $fG_1 > W$, где W — полное сопротивление всего поезда, тепловоз приведет в движение поезд, в противном случае ведущие колеса будут буксовать.

Силы трения ведомых колес о рельсы при незаторможенных и хорошо смазанных осях сводятся к силам трения качения, главный момент которых можно принять равным kG , где k — коэффициент трения качения, G — полный вес поезда с тепловозом, уменьшенный на G_1 (вес, приходящийся на ведущие оси). Вес G обычно в десять и в большее число раз превосходит G_1 , но отношение коэффициента k к радиусу колес значительно меньше, чем f . За счет этой разницы и получается избыток сил, создающий ускорение при приведении поезда в движение. Обстоятельства несколько изменяются в сырую погоду, когда коэффициент f уменьшается; при этом тепловоз часто буксует. Подсыпая под колеса песок, можно довести коэффициент трения f до больших значений. Желая затормозить поезд, тормозят вращение колес, заставляя их частично скользить по рельсам и за счет появляющегося трения скольжения, значительного при большом весе поезда, получают большую тормозящую силу.

■ Человек при отсутствии трения не мог бы перемещаться по горизонтальной гладкой плоскости усилиями собственной мускулатуры. Только благодаря силам трения подошв о пол возникает горизонтальная реакция, переносящая центр масс тела в горизонтальном направлении. Человек, стоящий на абсолютно гладком горизонтальном полу, может привести себя в движение, бросая в горизонтальном направлении предметы в сторону, противоположную желательному направлению движения, и тем самым создавая реактивную силу. При этом часть массы системы перемещается, остальная часть массы системы должна переместиться

* Мы несколько упрощаем задачу, не различая коэффициентов кулонова трения при покое и при движении.

в противоположном направлении так, чтобы сумма произведений масс на их абсциссы осталась прежней и центр масс сохранил свое начальное положение. И наоборот, если бы пол был идеально гладок, движущийся человек не мог бы остановиться. Но бросая предметы в сторону своего движения, человек мог бы затормозиться и при отсутствии трения.

■ Колебания поршней и других возвратно-поступательно движущихся масс служат источниками периодических возмущающих сил, вызывающих вибрации фундамента двигателя внутреннего сгорания. Упругие реакции грунта или балочного настила вместе с силами тяжести являются единственными внешними силами, приложенными к системе «машина — фундамент». Если сосредоточить внимание на движении только фундамента со станиной и неподвижными частями машины, а возвратно-поступательно движущиеся массы в машине отнести к числу внешних тел, то воздействия этих тел на фундамент перейдут из класса внутренних сил во внешние и станут играть роль возмущающих сил, вызывающих вынужденные колебания фундамента. Такого рода вибрации особенно велики в нестационарных двигателях, например у автомобиля. При работе мотора кузов автомобиля совершает колебания на рессорах. Взаимное движение поршней рассчитывается так, чтобы их общий центр масс при этом по возможности смещался незначительно; этим добиваются уменьшения вибраций кузова.

■ В непоршневых двигателях, например электромоторах, вибрации статора объясняются тем, что при недостаточной центровке ротора его центр тяжести не совпадает с осью вращения. Перемещение центра тяжести ротора вызывает вибрации статора с фундаментом и переменность опорных реакций точно так же, как и в поршневых двигателях.

■ Особого внимания заслуживает случай резонанса, когда период обращения вала машины (будь то поршневой двигатель, электромотор или другой тип машины) совпадает с периодом колебаний упругой системы (стол, кронштейн, фундамент), на которой машина закреплена. В этих условиях машина, попадая в такт колебаниям фундамента, может раскачать фундамент до значительной амплитуды.

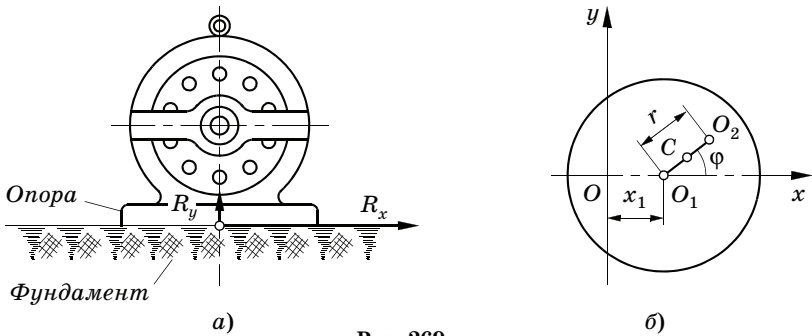


Рис. 269

Поясним сказанное с помощью ряда примеров.

Пример 95. Электромотор (рис. 269, а), массы статора и ротора которого соответственно равны M и m , может свободно скользить по неподвижным горизонтальным направляющим. Ось вращения ротора проходит через центр тяжести O_1 статора, а центр тяжести O_2 ротора (рис. 269, б) расположен на малом расстоянии r (эксцентриситет ротора) от оси вращения. Пренебрегая силами трения между статором и направляющими, определить колебания статора и реакцию направляющих. Какова будет эта реакция, если мотор жестко прикреплен к направляющим?

Координаты центра масс C системы, состоящей из статора и ротора, будут

$$x_C = \frac{Mx_1 + mx_2}{M + m}, \quad y_C = \frac{My_1 + my_2}{M + m} = \frac{m}{M + m} y_2,$$

где x_1 и $y_1 = 0$ — координаты центра тяжести O_1 статора, а x_2, y_2 — координаты центра тяжести O_2 ротора (рис. 269, б), причем все координаты берутся по отношению к системе координат Oxy , связанной с неподвижным фундаментом.

Внешними силами, приложенными к системе, будут: сила тяжести статора P , сила тяжести ротора p и реакция R опоры.

Дифференциальные уравнения движения центра масс при незакрепленном моторе имеют вид ($P = Mg, p = mg$)

$$(M + m)\ddot{x}_C = 0, \quad (M + m)\ddot{y}_C = R - Mg - mg.$$

Если через ω обозначить угловую скорость ротора, то координаты центра масс ротора будут

$$x_2 = x_1 + r \cos \varphi = x_1 + r \cos \omega t, \quad y_2 = r \sin \varphi = r \sin \omega t;$$

подставляя эти значения в дифференциальные уравнения движения центра масс, получаем

$$M\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_1 - m r \omega^2 \cos \omega t = 0, \quad -\frac{m r \omega^2}{g} \sin \omega t = R - Mg - mg.$$

Из первого уравнения можно найти уравнение движения статора, из второго — переменное давление мотора на направляющие. Имеем

$$\ddot{x}_1 = \frac{m}{M+m} r\omega^2 \cos \omega t,$$

откуда следует

$$\dot{x}_1 = \frac{m}{M+m} r\omega \sin \omega t + C_1, \quad x_1 = -\frac{m}{M+m} r \cos \omega t + C_1 t + C_2.$$

Замечая, что в начальный момент (до запуска мотора) статор был неподвижен, т. е. что $\dot{x}_1 = 0$ при $t = 0$, находим $C_1 = 0$. Помещая начало координат O в начальное положение (при $\varphi = 0$) центра масс C системы, будем иметь (индекс 0 характеризует начальный момент движения)

$$C_2 = x_{10} + \frac{m}{M+m} r = \frac{Mx_{10} + m(x_{10} + r)}{M+m} = x_{C_0} = 0.$$

Окончательное уравнение колебаний статора будет

$$x_1 = -\frac{m}{M+m} r \cos \omega t.$$

Это — гармонические колебания с амплитудой

$$a = \frac{m}{M+m}$$

и частотой, равной угловой скорости вращения ротора.

Из второго уравнения находим

$$R = (M+m)g - mr\omega^2 \sin \omega t.$$

Максимальное и минимальное значения опорной реакции будут

$$R_{\max} = (M+m)g + mr\omega^2, \quad R_{\min} = (M+m)g - mr\omega^2.$$

Условие отсутствия вертикального движения статора будет иметь вид

$$M+m \left(1 - \frac{r\omega^2}{g} \right) \geq 0,$$

т. е. угловая скорость должна удовлетворять условию

$$\omega^2 \leq \frac{M+m}{m} \frac{g}{r}.$$

При невыполнении этого условия, т. е. при достаточно больших угловых скоростях, статор придет в вертикальное движение.

Если мотор закреплен в направляющих, то центр статора O_1 будет неподвижен и его можно принять за начало координат ($x_1 = y_1 = 0$). Опорная реакция \mathbf{R} будет иметь в этом случае две проекции: горизонтальную R_x и вертикальную R_y (рис. 269).

Дифференциальные уравнения движения центра масс будут иметь вид

$$(M+m)\ddot{x}_C = R_x, \quad (M+m)\ddot{y}_C = R_y - Mg - mg,$$

причем

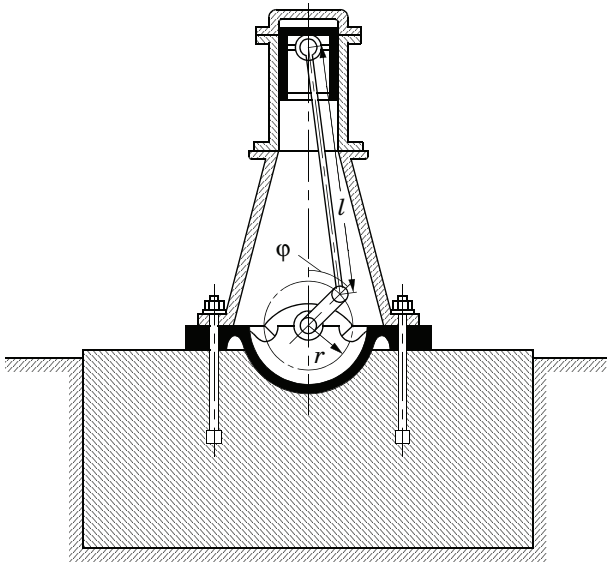


Рис. 270

$$x_C = \frac{mx_2}{M+m},$$

$$y_C = \frac{my_2}{M+m}.$$

Из этих уравнений находим реакции

$$R_x = m\ddot{x}_2 = -mr\omega^2 \cos \omega t,$$

$$R_y = (M+m)g - mr\omega^2 \sin \omega t.$$

Вертикальная реакция сохранила прежний вид, а за счет уничтожения горизонтальных колебаний появилась горизонтальная реакция. Реакция эта переменна по величине и направлению; максимальное ее значение по абсолютной величине равно

$$|R_x|_{\max} = mr\omega^2.$$

Пример 96. В вертикальном одноцилиндровом дизеле (рис. 270), имеющем частоту вращения $n = 300$ об/мин (с угловой скоростью вала $\omega = \pi n/30$ 1/с = 10π 1/с), длина кривошипа $r = 10^{-1}$ м, шатуна $l = 5 \cdot 10^{-1}$ м. Масса дизеля вместе с фундаментом $M = 100$ т, масса дизеля без поршня $M_1 = 10$ т, масса поршня $m = 250$ кг; массами шатуна и кривошипа пренебрегаем. Зная, что упругое основание, на котором покоится фундамент, дает под дизелем осадку $\delta_{\text{ст}} = 2 \cdot 10^{-2}$ м, определить вынужденные колебания фундамента и максимальное и минимальное давление дизеля на фундамент.

Рассмотрим сначала движение центра масс системы, состоящей из фундамента, станины и поршня. Дифференциальное уравнение движения центра масс по вертикальной оси составим, принимая за начало координат положение центра тяжести фундамента со станией при не-

подвижном поршне. При этом в правой части уравнения силы тяжести и составляющая упругой реакции, соответствующая статической осадке фундамента, нагруженного дизелем, взаимно уничтожатся, так что будем иметь

$$(M + m)\ddot{y}_C = -cy_1,$$

где y_1 — ордината центра масс дизеля с фундаментом, c — коэффициент упругости основания, на котором покоится фундамент, определится из условия

$$c\delta_{\text{ст}} = (M + m)g.$$

По формуле для координаты центра масс системы двигателя, фундамента и поршня будем иметь

$$y_C = \frac{(M + m)y_1 + my_2}{M + m},$$

где y_2 — ордината центра тяжести поршня, равная

$$y_2 = y_1 + l \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} + \varepsilon \cos \omega t + \frac{\varepsilon^2}{4} \cos 2\omega t \right) + \text{const};$$

здесь $\varepsilon = r/l$, а выражение справа (вывод его дан в § 40) выписано с точностью до ε^2 .

Подставляя это значение y_2 в формулу для y_C , дифференцируя y_C два раза по времени и подставляя результат в дифференциальное уравнение движения центра масс всей системы, получаем

$$(M + m)\ddot{y}_1 = -cy_1 + mr\omega^2 (\cos \omega t + \varepsilon \cos 2\omega t),$$

или, деля на коэффициент при \ddot{y}_1 ,

$$\ddot{y}_1 = -k^2 y_1 + h(\cos \omega t + \varepsilon \cos 2\omega t),$$

где

$$k^2 = \frac{c}{M + m} = \frac{g}{\delta_{\text{ст}}}, \quad h = \frac{mr\omega^2}{M + m}.$$

Вынужденные колебания по формуле (21.32) будут определяться равенством

$$y_1 = \frac{h}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t + \frac{h\varepsilon}{k^2 - 4\omega^2} \cos 2\omega t.$$

Подставив численные данные, получим уравнение движения фундамента

$$y_1 = (-0,050 \cos 31,4t - 0,0014 \cos 62,8t) \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Фундамент будет совершать малые периодические колебания. Если ограничиться первым членом, то амплитуда колебаний будет равна 0,5 мм.

Перейдем к определению давления дизеля на фундамент. Для этого рассмотрим движение системы, состоящей только из дизеля и поршня,

а фундамент будем рассматривать как внешнее тело; тогда реакция N фундамента будет внешней силой, и мы получим следующее уравнение движения центра масс C' дизеля (с поршнем):

$$(M_1 + m)\ddot{y}_{C'} = (M_1 + m)g - N,$$

где N — искомая реакция, а $\ddot{y}_{C'}$ — известная функция времени, определяемая равенством

$$\ddot{y}_{C'} = y \frac{M_1 \ddot{y}_1 + m \ddot{y}_2}{M_1 + m}.$$

Из последних двух равенств следует

$$N = (M_1 + m)g - M_1 \ddot{y}_1 - m \ddot{y}_2.$$

Подставив сюда вместо y_2 его значение, а вместо y_1 полученное ранее выражение, найдем

$$N = (M_1 + m)g + \omega^2 \left[\frac{h(M_1 + m)}{k^2 - \omega^2} + mr \right] \cos \omega t + \\ + \varepsilon \omega^2 \left[\frac{4h(M_1 + m)}{k^2 - 4\omega^2} + mr \right] \cos 2\omega t,$$

или, принимая во внимание численные значения,

$$N = (100,55 + 23,35 \cos 31,4t + 4,36 \cos 62,8t) \text{ кН}.$$

Отсюда имеем

$$N_{\max} = 100,55 + 23,35 + 4,36 = 128,26 \text{ кН},$$

$$N_{\min} = 100,55 - 23,35 + 4,36 = 81,56 \text{ кН}.$$

Отметим, что в *многоцилиндровом* двигателе переменная (динамическая) часть реакции меньше и что задача ее уменьшения называется задачей уравновешивания динамических нагрузок (см. далее § 151).

§ 105. Уравнения движения центра масс одноступенчатой ракеты

Решение задачи динамики полета ракет представляет значительные расчетные трудности, связанные с необходимостью использования в уравнениях движения ракет эмпирических членов, количественно определяемых при испытаниях ракетных двигателей (а также по результатам опытов в натуральных условиях) и задаваемых графиками или таблицами. В связи с этим уравнения динамики полета ракет приходится интегрировать численными методами с широким привлечением для этой цели современной вычислительной техники. Обработка результатов

такого рода вычислений позволяет установить некоторые общие закономерности, использование которых при проектировании ракет оказывается существенным.

В настоящем курсе мы можем лишь вкратце объяснить постановку задач динамики ракет и осветить некоторые выводы из решений этих задач, полностью опуская вопросы численного интегрирования основных дифференциальных уравнений движения ракет.

Ограничимся в дальнейшем простейшим случаем одноступенчатой ракеты или — по формулировке С. П. Королева* — «нормальной баллистической схемы».

В общепринятой схеме расчета траектория полета ракеты разбивается на два основных участка:

- ✓ «активный участок» движения ракеты под действием реактивной тяги, тяготения и взаимодействия ракеты с окружающим ее воздухом;
- ✓ «пассивный участок» движения ракеты под действием только тяготения и взаимодействия с окружающей средой при выключенном двигателе (исчерпании ресурсов топлива).

Пассивный участок траектории при достижении ракетой достаточно большой высоты и выхода ее из плотных слоев атмосферы соответствует тому свободному от сопротивления воздуха участку полета ракеты, который был рассмотрен ранее в § 92—94.

Для упрощения расчета принимаются следующие допущения:

- ✓ на *активном* участке траектории полета (рис. 271) направление вектора скорости v центра масс C совпадает с осью ракеты и касательной к траектории в данной точке. Вдоль этой касательной направлена сила тяги P , а в противоположную сторону

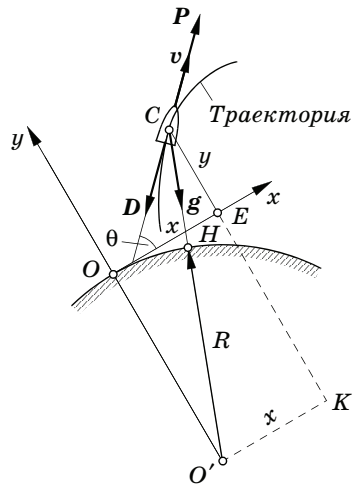


Рис. 271

* В изложении настоящего параграфа мы следуем содержанию первой лекции С. П. Королева, прочитанной им в МВТУ в 1949 г. [8, с. 208—290].

сила лобового сопротивления воздуха D движению ракеты — см. далее формулу (22.27). Вектор ускорения силы тяжести g на активном участке считается направленным по местной вертикали;

- ✓ в той части *пассивного* участка траектории ($P = 0$), где еще заметно влияние сопротивления воздуха, коэффициент сопротивления — см. далее формулу (22.27) — принимается постоянным, не зависящим от угла атаки ракеты;
- ✓ пренебрегается изменением лобового сопротивления за счет поворота газовых рулей;
- ✓ не учитывается влияние вращения Земли вокруг ее оси и движения ее по орбите;
- ✓ секундный расход топлива на активном участке траектории полагается неизменным;
- ✓ движение центра масс ракеты считается происходящим в одной и той же плоскости;
- ✓ не учитывается смещение (за счет сгорания топлива) центра масс ракеты относительно ее корпуса.

В данной точке земной поверхности выберем неизменное начало координат O (рис. 271). Земные оси координат направим по местной горизонтали и местной вертикали. Координаты центра масс ракеты C обозначим через x и y , угол касательной к траектории с местной осью Ox — через θ . Уравнения движения центра масс ракеты в проекции на касательную к траектории на активном участке движения могут быть записаны в следующем виде (кривизна поверхности Земли не учитывается):

$$m \frac{dv}{dt} = P - D - mg \sin \theta; \quad (22.24)$$

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \theta.$$

Тяга в полете P связана с тягой на Земле P_0 формулой

$$P = P_0 + S_a(p_0 - p), \quad (22.25)$$

где S_a — площадь выходного сечения сопла, p_0 — атмосферное давление у поверхности Земли, p — давление на данной высоте. Тягу на Земле P_0 , в свою очередь, определяют равенством

$$P_0 = P_{\text{ст}} - F_{\text{газ}},$$

выражающим разность между *стендовой* тягой самого двигателя без газовых рулей $P_{\text{ст}}$ и сопротивлением газовых рулей $F_{\text{газ}}$.

Переменная на активном участке масса ракеты представляется разностью

$$m = m_0 - \dot{m}t \quad (22.26)$$

между начальной ее массой m_0 (включающей и начальную массу топлива) и массовым расходом топлива к моменту t (\dot{m} обозначает секундный массовый расход).

Величину силы лобового сопротивления D выражают принятой в аэродинамике формулой

$$D = C_x \frac{\rho v^2}{2} S, \quad (22.27)$$

учитывающей зависимость этой силы от скорости движения v ракеты и плотности ρ воздуха на данной высоте. Величину коэффициента сопротивления C_x принимают в некотором приближении за постоянную, зависящую от формы корпуса ракеты, S — площадь миделя ракеты.

Изменение в полете угла θ определяется программой полета ракеты на активном участке ее траектории.

Уравнения движения ракеты на той части *пассивного* участка, где нельзя пренебрегать действием на ракету окружающего воздуха, в указанных земных координатах будут иметь вид

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= mg_x - D_x, & m \frac{dv_y}{dt} &= mg_y - D_y, \\ v_x &= \frac{dx}{dt}, & v_y &= \frac{dy}{dt}. \end{aligned} \quad (22.28)$$

Масса ракеты m здесь уже постоянна; если через R обозначить радиус Земли, то проекции D_x , D_y , g_x , g_y определяются формулами

$$\begin{aligned} D_x &= D \frac{v_x}{v} = \frac{1}{2} C_x S \rho v v_x, & D_y &= D \frac{v_y}{v} = \frac{1}{2} C_x S \rho v v_y, \\ g_x &= g \frac{x}{R+h} \approx g \frac{x}{R}, & g_y &= g \frac{R+y}{R+h} \approx g. \end{aligned} \quad (22.29)$$

Последние два равенства выводятся из треугольника $O'KC$ (рис. 271), если рассмотреть высоту центра масс ракеты над поверхностью Земли $CH = h$ [м] и заметить, что

$$\cos(\widehat{g, Ox}) = O'K : (O'H + HC) = x : (R + h),$$

$$\cos(\widehat{g, Oy}) = CK : (O'H + HC) = (R + y) : (R + h).$$

гут непосредственно ознакомиться с лекциями С. П. Королева. Вместо земных координат x, y введем полярные координаты r, φ (рис. 272) и выпишем уравнения движения центра масс ракеты в той же форме (20.57), что и ранее, но для частного случая земного тяготения, когда радиальная компонента ускорения, стоящая в правой части первого уравнения и равная $(-g)$, может быть представлена как $(-g_0 R^2/r^2)$, где g_0 — ускорение свободного падения тел на поверхности Земли.

Будем иметь следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 &= -g = -g_0 \frac{R^2}{r^2}, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (22.30)$$

Второе уравнение дает интеграл площадей (см. далее § 111)

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const} = C_1, \quad (22.31)$$

после чего первое уравнение может быть переписано в форме

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \frac{C_1^2}{r^4} = -\frac{g_0 R^2}{r^2}. \quad (22.32)$$

Вместо использованного ранее приведения к уравнению Бине — формула (20.63) — можно пойти другим путем, заметив, что последнее уравнение имеет интегрирующий множитель $2dr/dt$. Действительно, умножая обе части уравнения (22.32) на этот множитель, приходим к уравнению

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{d}{dt} \frac{g_0 R^2}{r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{C_1^2}{r^2} \right),$$

или, интегрируя (C_2 — новая постоянная интегрирования),

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{2g_0 R^2}{r} - \frac{C_1^2}{r^2} + C_2. \quad (22.33)$$

Отсюда можно найти dt , равное

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{C_2 + 2g_0 R^2/r + C_1^2/r^2}},$$

и исключить его из уравнения (22.33), что приведет к уравнению

$$d\varphi = \pm \frac{C_1}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{C_2 + 2g_0 R^2/r + C_1^2/r^2}} = C_1 \frac{dr}{r \sqrt{-C_1^2 + 2g_0 Rr + C_2 r^2}}.$$

Почленное интегрирование обеих частей этого равенства не составляет труда, причем интеграл, стоящий в правой части, будет иметь обычный табличный вид и сведется к арксинусу. Выбором подходящего начала отсчета углов φ результат интегрирования предыдущего равенства можно привести к виду

$$r = \frac{C_1/(g_0 R^2)}{1 + \sqrt{1 + C_2[C_1/(g_0 R^2)]^2} \cos \varphi}. \quad (22.34)$$

Введем обозначения

$$p = \frac{C_1^2}{g_0 R^2}, \quad e = \sqrt{1 + C_2 \left(\frac{C_1}{g_0 R^2}\right)^2} \quad (22.35)$$

и получим, как и в § 92, уравнение эллипса

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi};$$

если вместо φ ввести угол β (рис. 272): $\varphi = \pi - \beta$, то предыдущее уравнение примет форму

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \beta}. \quad (22.36)$$

Условимся обозначать индексом «нуль» значения величин на выходе из активного участка, но сохраним все же обозначение g_0 для величины ускорения на поверхности Земли. Выразим постоянные C_1 и C_2 , входящие в (22.34), через параметры движения в начальном положении ракеты на выходе ее из активного участка.

Введем отличный от предыдущего угол θ между направлениями вектора скорости v и координатной оси r . Из рис. 272 следует, что $r d\varphi = v dt \cdot \cos \theta$, или

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v \cos \theta}{r},$$

так что постоянная C_1 определится как

$$C_1 = r_0^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = v_0 r_0 \cos \theta_0. \quad (22.37)$$

Постоянную C_2 определим из уравнения (22.33), приняв для всех входящих в него величин их значения в конце активного участка. Найдем

$$C_2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)_0^2 - \frac{2g_0 R^2}{r_0} + \frac{C_1^2}{r_0^2},$$

а по тому же рисунку $dr = v_0 dt \cdot \sin \theta_0$ на выходе из активного участка, так что окончательно

$$C_2 = v_0^2 - \frac{2g_0 R^2}{r_0}. \quad (22.38)$$

Введем безразмерную величину

$$v = \frac{v_0^2 r_0}{g_0 R^2}, \quad (22.39)$$

связанную с использованным в § 92 отношением v_0/v_∞ — здесь

$v_\infty = \sqrt{2g_0 R}$ — очевидным равенством

$$v = \left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)^2 \cdot \frac{2r_0}{R}.$$

По определению параметра эллипса p и эксцентриситета e будем иметь

$$p = \frac{C_1^2}{g_0 R^2} = \frac{v_0^2 r_0^2 \cos^2 \theta_0}{g_0 R^2} = r_0 v \cos^2 \theta_0, \quad (22.40)$$

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{1 + \frac{C_1^2 C_2}{g_0^2 R^4}} = \sqrt{1 + \left(v_0^2 - \frac{2g_0 R^2}{r_0}\right) \frac{v_0^2 r_0^2 \cos^2 \theta_0}{g_0^2 R^4}} = \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{v_0^2 r_0}{g_0 R^2} - 2\right) \frac{v_0^2 r_0}{g_0 R^2} \cos^2 \theta_0} = \sqrt{1 - (2-v) v \cos^2 \theta_0}. \end{aligned} \quad (22.41)$$

Далее, исходя из уравнения эллипса (22.36), переписанного в виде

$$\cos \beta_0 = \frac{1 - p/r_0}{e} = \frac{1 - r_0 v \cos^2 \theta_0 / r_0}{\sqrt{1 - (2-v) v \cos^2 \theta_0}},$$

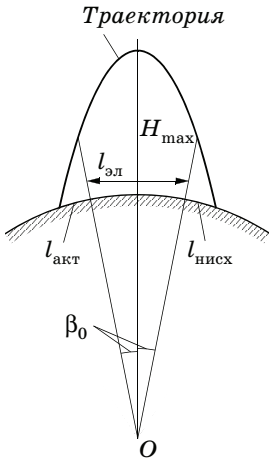


Рис. 273

выразим $\cos \beta_0$ через v :

$$\cos \beta_0 = \frac{1 - v \cos^2 \theta_0}{\sqrt{1 - (2 - v) v \cos^2 \theta_0}},$$

или, переходя от $\cos \beta_0$ к $\operatorname{tg} \beta_0$,

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{v \operatorname{tg} \theta_0}{\sqrt{1 - v + \operatorname{tg}^2 \theta_0}}.$$

Введем в рассмотрение угол

$$\delta_0 = \theta_0 + \beta_0$$

и после простых преобразований получим

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{1 - v}. \quad (22.42)$$

Пользуясь выведенными формулами, можно решать вопросы, относящиеся к расчету свободного полета ракеты в пустоте. Так, задаваясь значением параметра v , определенного по начальным условиям в конце активного участка, найдем по (22.42) угол δ_0 , а следовательно, и угол β_0 , равный

$$\beta_0 = \delta_0 - \theta_0. \quad (22.43)$$

По известному углу β_0 определим *эллиптическую дальность* полета (рис. 273)

$$l_{\text{эл}} = 2\beta_0 R, \quad (22.44)$$

а затем и *полную дальность* L , равную сумме эллиптической дальности и дальностей $l_{\text{акт}}$ на активном участке и $l_{\text{нисх}}$ на нисходящей ветви траектории:

$$L = l_{\text{акт}} + l_{\text{эл}} + l_{\text{нисх}}. \quad (22.45)$$

Максимальная высота H_{max} подъема ракеты с учетом соотношений $r_{\text{max}} = (r)_{\beta_0=0} = p/(1 - \varepsilon)$ определится равенством

$$H_{\text{max}} = r_{\text{max}} - R = \frac{p}{1 - \varepsilon} - R = \frac{r_0 v \cos^2 \theta_0}{1 - \sqrt{1 - (2 - v) v \cos^2 \theta_0}} - R. \quad (22.46)$$

Как показывают расчеты, при полных дальностях, не превышающих 5 км, суммарная поправка на дальности в активном $l_{\text{акт}}$ и нисходящем $l_{\text{нисх}}$ участках траектории будет иметь порядок

$$l_{\text{акт}} + l_{\text{нисх}} \approx (0,1 - 0,15)L,$$

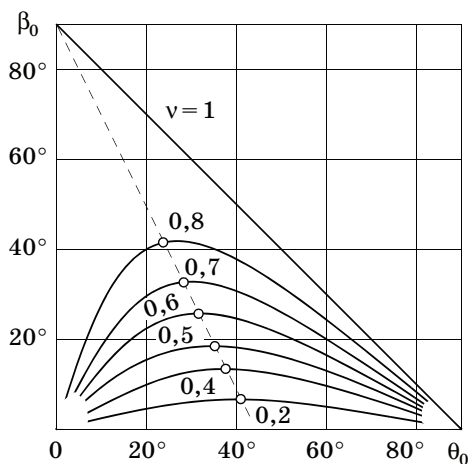


Рис. 274

так что с достаточным приближением в этом случае можно считать

$$L = kl_{\text{эл}}, \quad k = 1,10—1,15. \quad (22.47)$$

В цитированной первой лекции С. П. Королева [8] приводится сетка кривых (рис. 274), позволяющая по заданным ν и θ_0 определять β_0 , т. е., согласно (22.44), эллиптическую, а по (22.45) и полную дальности. По той же сетке можно при заданном ν находить θ_0 , при котором эллиптическая дальность будет *максимальна*. Это возможно лишь при $\theta_0 < 45^\circ$. Из диаграммы на рис. 274 можно также при заданном θ_0 найти значение ν (т. е. ν_0), при котором дальность будет максимальной.

Диаграмма на рис. 274 может быть использована в ориентировочных расчетах на начальной стадии проектирования ракеты.

§ 106. Теорема импульсов и ее применение в теории удара

Вернемся к основному уравнению (22.11), выражающему теорему количества движения, и проинтегрируем обе его части по времени в пределах (t_1, t_2) . Получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dQ}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n F_i dt,$$

или

$$\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1 = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i dt. \quad (22.48)$$

Векторное приращение количества движения системы точек за промежутки времени (t_1, t_2) , стоящее в левой части уравнения (22.48), обозначим через $\Delta\mathbf{Q}$.

Предполагая в общем случае, что сила \mathbf{F} переменна во времени, назовем *элементарным импульсом силы* бесконечно малый вектор

$$d\mathbf{S} = \mathbf{F} dt, \quad (22.49)$$

а *импульсом силы за конечный промежуток времени* (t_1, t_2) — вектор

$$\mathbf{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt. \quad (22.50)$$

Импульс силы характеризует эффект действия силы в зависимости от ее величины и времени действия; он измеряется в Н·с.

Импульс векторной суммы сил равен векторной сумме импульсов слагаемых сил, или, иначе, импульс главного вектора сил равен главному вектору импульсов сил — это следует из определения понятия импульса силы.

Равенство (22.48), переписанное в виде

$$\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1 = \Delta\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n \mathbf{S}_i = \mathbf{S}, \quad (22.51)$$

представляет собой теорему импульсов.

ТЕОРЕМА ИМПУЛЬСОВ. *Векторное приращение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно главному вектору импульсов внешних сил, приложенных к системе.*

Из теоремы следует: на изменение количества движения системы влияют только импульсы внешних сил, или, как будем для краткости в дальнейшем говорить, внешние импульсы; внутренние импульсы не могут изменять количество движения системы.

В частном случае отдельной материальной точки имеем ту же формулу (22.51), но слева будет стоять изменение количества движения одной этой точки, а справа — импульс равнодействующей всех приложенных к точке сил.

Обратимся к рассмотрению применений теоремы импульсов при изучении явления удара.

Если движущаяся материальная точка мгновенно изменяет свою скорость на конечную величину, то говорят, что она претерпевает удар.

Пусть, например, материальная точка M при своем движении встречает преграду в виде неподвижной стенки AA (рис. 275). Ударившись о нее со скоростью v_1 в момент t_1 , точка через небольшой промежуток времени τ отразится с другой скоростью v_2 , причем изменение скорости представляется вектором Δv конечной величины, хотя продолжительность удара τ была мала.

На рис. 275, *а* показан прямой удар точки о преграду. В этом случае величина Δv равна сумме величин скоростей отражения v_2 (несколько меньшей скорости падения) и падения v_1 , т. е.

$$|\Delta v| = v_1 + v_2,$$

а это — величина того же порядка, что и сами скорости. Точно так же и в случае косо́го удара, изображенного на рис. 275, *б*, величина $|\Delta v|$ является конечной.

В качестве другого примера рассмотрим пулю, пробивающую доску. В первый момент пуля имеет скорость v_1 (рис. 276); после прохождения сквозь доску пуля в значительной мере теряет свою скорость, причем величина изменения скорости будет равна

$$|\Delta v| = v_1 - v_2.$$

Продолжительность удара — в данном случае время прохождения пули сквозь доску — весьма мала; между тем скачок скорости (а следовательно, и скачок количества движения) пули конечен.

Явление удара тела о неподвижную преграду или соударения двух движущихся тел между собой связано с процессом деформации тел вблизи точки их соприкосновения и распространением волн сжатия внутри этих тел. Этот процесс не может быть изучен в рамках механики абсолютно твердого тела, отвлекающейся от действительных физических свойств тела и, в частности,

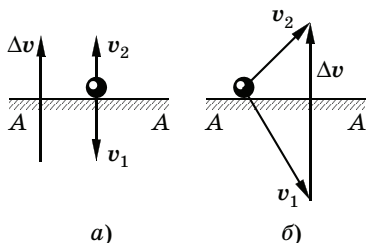


Рис. 275

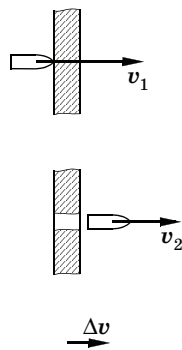


Рис. 276

от деформируемости тел. Предметом изучения теоретической механики служит лишь сравнение движения точки или системы точек до удара и после него; при этом явление удара рассматривается как некоторый скачкообразный процесс, продолжительность которого бесконечно мала. На самом деле продолжительность удара представляет собой хотя и очень малую, но конечную величину, зависящую от многочисленных физических факторов: упругих характеристик материала соударяющихся тел, их формы и размеров, относительной скорости сближения и др. В качестве примера укажем, что продолжительность соударения двух латунных шариков диаметром $26 \cdot 10^{-3}$ м при относительной скорости их сближения $74 \cdot 10^{-3}$ м/с равна $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$ с.

Применим теорему импульсов к точке, испытывающей удар, причем за интервал времени $(t, t + \tau)$, в течение которого вычисляется импульс, примем продолжительность удара τ . По (22.48) будем иметь

$$\Delta Q = S = \int_t^{t+\tau} F dt. \quad (22.52)$$

По ранее принятому определению удара вектор ΔQ (а следовательно, и импульс S за время удара равнодействующей F сил, приложенных к точке) конечен. Поскольку интервал интегрирования τ бесконечно мал, это может быть только в том случае, когда интегрируемый вектор имеет по модулю порядок, обратный τ , т. е. сила F бесконечно велика. Отсюда следует, что во время удара в точке соприкосновения соударяющихся тел должны возникать бесконечно большие по величине, но мгновенно действующие *мгновенные силы*, приводящие к конечному изменению количества движения точки. Конечный импульс мгновенной силы за время удара условимся называть кратко *ударом*. Так, будем говорить: «к точке приложен удар», «к системе точек приложены внешние удары» и т. п., понимая под этим, что к точке или системе точек приложены мгновенные силы с конечными импульсами за время удара.

На систему материальных точек наряду с мгновенными силами, возникающими только в процессе соударения, действуют конечные по величине силы, например сила тяжести и др.; импульсы этих сил за бесконечно малое время удара будут бесконечно малы и при наличии конечных по величине импульсов мгновенных сил могут быть опущены.

Пусть система точек с главным вектором количеств движения Q подвергается в момент времени t совокупности ударов со сторо-

ны внешних по отношению к рассматриваемой системе тел. Применяя к этой системе теорему импульсов (22.51) и замечая, что по предыдущему импульсы конечных по величине сил могут быть опущены, приходим к следующей формулировке теоремы об изменении количества движения системы за время удара.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ЗА ВРЕМЯ УДАРА. *Изменение количества движения системы материальных точек, подвергшейся в некоторый момент времени ударам со стороны внешних тел, равно главному вектору внешних ударов.*

Скорости точек системы в результате соударения претерпевают конечные изменения и остаются конечными по величине; следовательно, за бесконечно малое время удара точки системы могут получить лишь бесконечно малые перемещения.

При использовании принятой схемы явления удара можно считать, что точки системы остаются неподвижными, а скорости их претерпевают скачкообразные, конечные по величине изменения.

При рассмотрении движения системы материальных точек, в некоторые моменты времени подвергающейся ударам, мы каждый раз, зная координаты точек системы в момент удара и определив проекции скоростей после удара, принимаем эти координаты и скорости за новые начальные условия и можем изучать последующее непрерывное движение до следующего удара и т. д. Таким путем, например, мы уже шли при рассмотрении задачи о вынужденных колебаниях точки под действием периодических импульсов (§ 97).

§ 107. Удар точки о преграду. Коэффициент восстановления

Разберем явление удара материальной точки о преграду. Пусть в некоторый момент времени точка встречается с преградой (рис. 277), имея скорость v_1 , образующую с нормалью к стенке угол падения α ; по прошествии малого промежутка времени t точка отскакивает от стенки со скоростью v_2 , причем угол отражения равен β .

Возникает задача: зная направление и величину скорости падения, найти величину и направление скорости отражения, а также вектор удара.

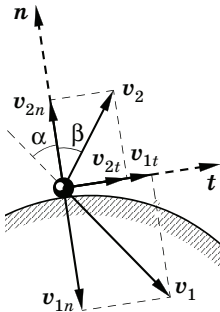


Рис. 277

Проведем нормальное сечение к поверхности преграды плоскостью, содержащей вектор скорости v_1 , и отметим направления касательной t и нормали n к поверхности преграды в сечении. Пренебрегая импульсом силы трения между точкой и поверхностью преграды за время удара, будем иметь по теореме импульсов в проекции на касательную и нормаль

$$mv_{2t} - mv_{1t} = S_t = 0, \quad (22.53)$$

$$mv_{2n} - mv_{1n} = S_n. \quad (22.54)$$

Эти два уравнения содержат три неизвестные величины: v_{2t} , v_{2n} и S_n . Чтобы сделать задачу определенной, необходимо ввести дополнительное допущение о физических свойствах ударяющейся точки и преграды. Простейшим допущением, позволяющим определить нормальную составляющую скорости после удара, является *допущение*, высказанное для *общего случая соударения двух тел* еще Ньютоном.

Отношение абсолютных величин проекций относительной скорости тел после удара и до удара на направление общей нормали к поверхности тел в точке соприкосновения есть постоянная величина, не зависящая ни от относительной скорости, ни от размеров тел, а лишь от их материала.

Это отношение называется *коэффициентом восстановления* и будет в дальнейшем обозначаться через k . В рассматриваемом случае удара точки о преграду будем иметь $v_{2n}/|v_{1n}| = k$, или

$$v_{2n} = -kv_{1n}, \quad (22.55)$$

так как по определению k — положительная величина, а v_{1n} (рис. 277) и v_{2n} имеют разные знаки ($v_{1n} < 0$, $v_{2n} > 0$).

Коэффициент восстановления k характеризует, насколько восстанавливается нормальная составляющая скорости после удара. Удар называется *абсолютно упругим*, если нормальная составляющая скорости сближения соударяющихся тел равна по величине нормальной составляющей скорости удаления их друг от друга после удара, т. е. $k = 1$. Если тела после удара не отделяются друг от друга, то удар называется *абсолютно неупругим* и $k = 0$. Для реальных физических тел

$$0 < k < 1.$$

В табл. 4 приведены значения k для некоторых материалов, которые, как и сама гипотеза Ньютона, представляют собой весьма грубое приближение к действительным закономерностям соударения реальных тел. Значения коэффициентов восстановления существенно зависят от относительной скорости соударения тел. При малых скоростях эти значения независимо от материалов тел близки к единице. Приведенные в табл. 4 значения приближаются к асимптотическим, соответствующим большим скоростям соударения.

Для определения величины коэффициента восстановления можно использовать следующий простой опыт. С высоты h_1 над горизонтальной массивной плитой из испытуемого материала, представляющей преграду, опустим без начальной скорости шарик из другого или того же самого материала и заметим высоту h_2 , которой достигнет шарик, отскочив от плиты. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то скорости падения и отражения шарика определяются равенствами

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}, \quad v_2 = \sqrt{2gh_2}$$

и, следовательно, коэффициент восстановления определится отношением

$$k = v_2/v_1 = \sqrt{h_2/h_1}. \quad (22.56)$$

Согласно (22.54) и (22.55) найдем нормальную составляющую импульса

$$S_n = -mv_{1n}(1 - v_{2n}/v_{1n}) = -mv_{1n}(1 + k); \quad (22.57)$$

знак минус при $v_{1n} < 0$ указывает, что $S_n \rightarrow 0$.

Коэффициенту восстановления можно придать динамическое истолкование. Разобьем продолжительность удара на два интервала: τ_1 — от момента первого соприкосновения до максимального сближения тел при деформации их поверхностей и τ_2 — от момента максимального сближения до отделения тел друг от друга; при этом недеформированное состояние полностью или частично восстанавливается.

Таблица 4

**Коэффициенты
восстановления для
некоторых материалов**

Соударяющиеся тела	k
Дерево о резину	0,26
Деревянные шары	0,50
Стальные шары	0,56
Стеклянные шары	0,94

В интервале τ_1 нормальная составляющая количества движения mv_{1n} уменьшается до нуля, что соответствует нормальной составляющей импульса

$$S_{1n} = \int_t^{t+\tau_1} F_n dt = -mv_{1n};$$

во втором интервале нормальная составляющая импульса —

$$S_{2n} = \int_{t+\tau_1}^{t+\tau_1+\tau_2} F_n dt = mv_{2n}.$$

Отношение нормальных составляющих импульсов второго и первого этапов удара равно коэффициенту восстановления

$$\frac{S_{2n}}{S_{1n}} = -\frac{mv_{2n}}{mv_{1n}} = -\frac{v_{2n}}{v_{1n}} = k. \quad (22.58)$$

Из равенства (22.53) следует, что при отсутствии мгновенного трения касательные составляющие скорости точки до удара и после него равны между собой:

$$v_{1t} = v_{2t}. \quad (22.59)$$

Найдем связь между углом падения точки α и углом отражения β . Замечая, что

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_{1t}}{v_{1n}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{v_{2t}}{v_{2n}}, \quad (22.60)$$

из (22.55) и (22.59) получим

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{v_{1t}}{kv_{1n}} = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha. \quad (22.61)$$

В частном случае абсолютно упругого удара ($k = 1$) будем иметь

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha, \quad (22.62)$$

т. е. угол падения равен углу отражения.

§ 108. Прямой удар двух тел

Прямым ударом двух тел называется такой удар, при котором точка соприкосновения тел лежит на прямой, соединяющей их центры тяжести, а скорости центров тяжести направлены вдоль этой прямой.

Обозначим вектор скорости центра тяжести C_1 тела I (рис. 278) через u , массу — через m , а для тела II — соответственно v и M .

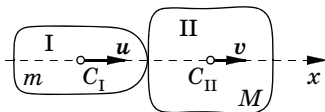


Рис. 278

Для того чтобы удар был возможен, необходимо прежде всего, чтобы до удара относительная скорость центра тяжести одного из тел, например первого по отношению ко второму, была направлена к центру тяжести второго, причем

$$u_{1x} > v_{1x}, \quad (22.63)$$

в противном случае тела не будут сталкиваться; условие (22.63) будет выполняться:

- ✓ если первое тело нагоняет второе ($u_{1x} > 0, v_{1x} > 0$),
- ✓ если тела движутся навстречу друг другу ($u_{1x} > 0, v_{1x} < 0$).

Направляя соответственно ось Ox , можно считать $u_{1x} > 0$.

Для определения абсолютных скоростей u_{2x}, v_{2x} после удара, а также импульсов мгновенных сил, развивающихся при ударе, применим теорему импульсов. Внешних ударов нет, поэтому количество движения системы до удара и после удара — одно и то же; таким образом, проецируя векторы количеств движения на ось Ox , получим

$$mu_{1x} + Mv_{1x} = mu_{2x} + Mv_{2x}. \quad (22.64)$$

В этом уравнении две неизвестные: u_{2x} и v_{2x} ; задача останется неопределенной, если не задаться дополнительно характером удара, т. е. коэффициентом восстановления, определяемым как частное от деления относительной скорости отражения на относительную скорость падения, т. е.

$$k = \frac{v_{2x} - u_{2x}}{u_{1x} - v_{1x}}; \quad (22.65)$$

здесь знаки выбраны так, чтобы коэффициент k был положительным. Из уравнений (22.64) и (22.65) находим

$$\begin{aligned} u_{2x} &= \frac{(m - kM)u_{1x} + M(1 + k)v_{1x}}{M + m}, \\ v_{2x} &= \frac{M(1 + k)u_{1x} + (M - km)v_{1x}}{M + m}. \end{aligned} \quad (22.66)$$

Для определения вектора удара S применим теорему импульсов только к первому телу; тогда внутренний удар в системе станет внешним ударом по отношению к первому телу и мы получим

$$S_x = m(u_{2x} - u_{1x}),$$

откуда по (22.66)

$$S_x = -(1 + k) \frac{mM}{M + m} (u_{1x} - v_{1x}). \quad (22.67)$$

Рассмотрим частные случаи.

■ **Абсолютно упругий удар** ($k = 1$). В этом случае формулы (22.66) и (22.67) дают

$$\begin{aligned} u_{2x} &= \frac{(m - M)u_{1x} + 2Mv_{1x}}{M + m}, \\ v_{2x} &= \frac{2mu_{1x} + (M - m)v_{1x}}{M + m}, \\ S_x &= -2 \frac{mM}{M + m} (u_{1x} - v_{1x}). \end{aligned} \quad (22.68)$$

Если, кроме того, массы тел равны, то

$$u_{2x} = v_{1x}, \quad v_{2x} = u_{1x},$$

т. е. тела при ударе как бы обмениваются скоростями и количествами движения. Таким путем происходит перенос количеств движений в идеальных газах при столкновении молекул. Если второе тело было неподвижно, а первое ударило о него, то второе тело придет в то движение, которое было у первого, а первое останется на его месте неподвижным.

■ **Абсолютно неупругий удар** ($k = 0$). Уравнения (22.66) принимают вид

$$v_{2x} = u_{2x} = \frac{mu_{1x} + Mv_{1x}}{M + m}, \quad (22.69)$$

т. е. после удара скорости тел становятся одинаковыми; тела после удара двигаются совместно. Если одно тело до удара было неподвижно ($v_{1x} = 0$), то после удара устанавливается скорость

$$u_{2x} = v_{2x} = \frac{m}{M + m} u_{1x}.$$

Импульс силы при ударе равен

$$S_x = -\frac{mM}{M+m}(u_{1x} - v_{1x}),$$

т. е. вдвое меньше, чем при абсолютно упругом ударе.

Рассмотренный в § 107 удар точки о преграду можно получить из формул (22.66), если положить $v_{1x} = 0$, $M = \infty$. Деля числитель и знаменатель на M и переходя к пределу, когда $M \rightarrow \infty$, получаем

$$u_{2x} = -ku_{1x}, \quad v_{2x} = 0$$

в полном соответствии с изложенным выше.

Выражения (22.66) скоростей после удара можно привести к более наглядной форме, если ввести в рассмотрение скорость движения центра масс системы соударяющихся тел. Если все удары внутренние, т. е. возникают между телами, входящими в систему, то центр масс системы сохраняет свою скорость — обозначим ее через c — неизменной по величине и направлению. Это позволяет интерпретировать соударение двух тел как совокупность отдельных их ударов о движущуюся со скоростью c преграду. По формуле (22.66), принимая во внимание, что в данном случае следует говорить об относительных скоростях тел по отношению к преграде, движущейся со скоростью c , и что роль нормали играет ось Ox , получим для первого и второго тела

$$u_{2x} - c_x = -k(u_{1x} - c_x), \quad v_{2x} - c_x = -k(v_{1x} - c_x), \quad (22.70)$$

откуда следует

$$u_{2x} = c_x + k(c_x - u_{1x}), \quad v_{2x} = c_x + k(c_x - v_{1x}). \quad (22.71)$$

По определению скорости центра масс входящая сюда величина c_x выражается через скорости тел до удара или после него по формулам

$$c_x = \frac{mu_{1x} + Mv_{1x}}{m + M} = \frac{mu_{2x} + Mv_{2x}}{m + M}. \quad (22.72)$$

Введенное понятие скорости центра масс позволяет дать *динамическое истолкование* коэффициенту восстановления. Рассмотрим первый этап удара от момента начального соприкосновения поверхностей тел до наибольшей деформации их, когда относительная скорость тел станет равной нулю, а общая их скорость —

равной c . Применяя теорему импульсов к этому первому этапу удара, получим

$$S_{1x} = m(u_{1x} - c_x).$$

Аналогично для второго этапа удара, очевидно, получим

$$S_{2x} = m(c_x - u_{2x}).$$

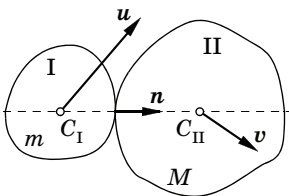
Составляя отношение $S_{2x} : S_{1x}$, используя формулы (22.72) и сравнивая результат с кинематическим определением коэффициента восстановления, получаем

$$\frac{S_{2x}}{S_{1x}} = \frac{c_x - u_{2x}}{u_{1x} - c_x} = \frac{(mu_{2x} + Mv_{2x})/(m + M) - u_{2x}}{u_{1x} - (mu_{1x} + Mv_{1x})/(m + M)} = \frac{v_{2x} - u_{2x}}{u_{1x} - v_{1x}} = k.$$

Таким образом, коэффициент восстановления при прямом ударе двух тел с динамической точки зрения можно трактовать как отношение импульсов мгновенных сил, возникающих между телами на втором и первом этапах удара.

§ 109. Косой удар двух тел

Если абсолютные скорости центров масс тел до удара не направлены вдоль прямой, соединяющей эти центры, то удар называют *косым*. Обозначим вновь через u и v векторы скоростей центров масс тел I и II (рис. 279) и через c — скорость центра масс системы; индексом n будем отмечать проекции векторов на общую нормаль n к поверхностям тел в точке их соприкосновения при ударе. Тогда, используя указанный в конце предыдущего параграфа прием рассмотрения скорости центра масс как скорости движения преграды, о которую ударяется каждое из рассматриваемых тел, получим, согласно определению коэффициента восстановления (22.31),



$$\begin{aligned} u_{2n} &= c_n + k(c_n - u_{1n}), \\ v_{2n} &= c_n + k(c_n - v_{1n}), \end{aligned} \quad (22.73)$$

где

$$c_n = \frac{mu_{1n} + Mv_{1n}}{m + M}, \quad (22.74)$$

а индексы 1 и 2 относятся к движению до удара и после него.

Рис. 279

Рассматривая изменение проекции количества движения* одного из тел, например первого, на направление нормали и используя формулы (22.54), (22.73) и (22.74), получим выражение проекции на нормаль импульса мгновенной силы, развивающейся при ударе

$$\begin{aligned} S_n &= m(u_{2n} - u_{1n}) = m[c_n + k(c_n - u_{1n}) - u_{1n}] = \\ &= m(1+k)(c_n - u_{1n}) = -\frac{mM}{m+M}(1+k)(u_{1n} - v_{1n}), \end{aligned} \quad (22.75)$$

причем условием осуществимости удара является положительность величины, стоящей в последней скобке.

Если отвлечься от разницы между составляющими скоростей в плоскости соприкосновения тел до удара и после него, т. е. предположить отсутствие импульса мгновенного трения, то формулы (22.73), (22.70) и (22.71) дают искомое решение задачи об определении скоростей центров тяжести тел после удара и импульса мгновенной силы при ударе.

Для частного случая, когда векторы скоростей центров тяжести тел до удара лежат в одной плоскости, можно привести простое графическое построение скоростей после удара, предложенное Максвеллом в 1860 г. По заданным u_1 и v_1 построим вектор c , для чего соединяем концы векторов u_1 и v_1 на диаграмме (рис. 280) и на полученном отрезке откладываем, согласно (22.70), точку, делящую отрезок обратно пропорционально массам тел. Далее, из конца вектора v_1 опускаем перпендикуляр на касательную t в точке соприкосновения тел и, продолжив его, отложим отрезок, который относился бы к длине перпендикуляра, как $k : 1$; конец отрезка определит конец вектора v_2 , проведенного из общего полюса скоростей O . Проведя затем через концы векторов v_2 и c прямую до пересечения с перпендикуляром,

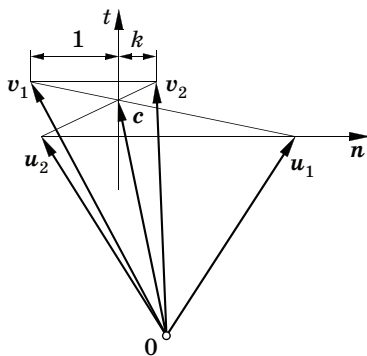


Рис. 280

* При косом ударе возникает вращение тел, что требует применения теоремы моментов при ударе (см. далее § 118).

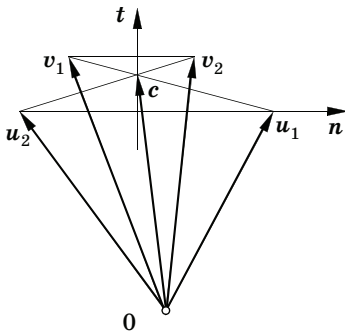


Рис. 281

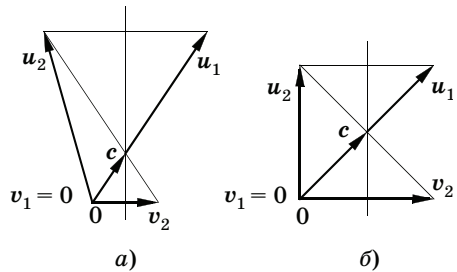


Рис. 282

опущенным из конца вектора u_1 на ту же ось t , получаем в точке пересечения конец вектора u_2 , начало которого также находится в полюсе диаграммы.

Правильность построения следует из того, что, во-первых, проекции u_{1t} и u_{2t} равны между собой, точно так же $v_{1t} = v_{2t}$, так что условия сохранения касательных составляющих скоростей при ударе выполнены; во-вторых, проекции на ось n векторных разностей $u_2 - c$ и $c - u_1$, а также $v_2 - c$ и $c - v_1$, относятся между собой как $k : 1$, что соответствует уравнениям (22.73).

Указанное построение упрощается, если удар абсолютно упруг. В этом случае $k = 1$ и концы векторов u_2 и v_2 получаются зеркальным отображением концов векторов u_1 и v_1 относительно оси t , проведенной через конец вектора c (рис. 281).

На рис. 282 дано построение диаграмм Максвелла для случая, когда одно тело, например тело II (см. рис. 279), до удара неподвижно и удар абсолютно упругий. Диаграмма *а)* относится к случаю неравных масс, диаграмма *б)* — к случаю равных масс.

Не будем сопровождать настоящую простейшую теорию соударений поступательно перемещающихся абсолютно твердых тел, рассматриваемых как материальные точки, численными примерами. Они обычно рассматриваются в общем курсе физики. Более сложные задачи, связанные с ударом вращающихся тел, приведены в следующей главе. В дальнейшем будут рассмотрены и задачи с учетом изменения кинетической энергии при ударах.

§ 110. Применение теоремы количества движения к сплошной среде. Теорема Эйлера.

Дифференциальные уравнения динамики сплошной среды. Распространение малых возмущений

Рассмотрим некоторую сплошную среду, например жидкость. Выделим в ней *жидкий** объем τ , ограниченный поверхностью σ , и будем следить за движением этого объема.

Внешние силы, действующие на объем τ и поверхность σ со стороны остальной жидкости, а также и других внешних тел, можно разбить на две группы.

1°. **Силы массовые** или **объемные**, т. е. такие, которые действуют на все частицы объема τ , как внутренние, так и находящиеся на поверхности объема; таковы, например, силы тяжести частиц.

2°. **Силы поверхностные**, действующие только на частицы, лежащие на внешней поверхности объема, как, например, силы давления на поверхность σ со стороны окружающей жидкости или твердых стенок, между которыми движение происходит. К этой же группе сил относятся и силы трения выделенного объема об окружающую его жидкость или твердые стенки.

Обозначим главный вектор внешних объемных сил через $V_{об}$, а внешних поверхностных сил через $V_{пов}$.

Если количество движения жидкого объема в данный момент равно Q , то по теореме количества движения имеем

$$\frac{dQ}{dt} = V_{об} + V_{пов}. \quad (22.76)$$

Предположим, что жидкость течет по трубе переменного сечения (рис. 283). Рассмотрим объем τ жидкости между какими-нибудь двумя плоскими сечениями трубы σ_1 и σ_2 , перпендикулярными стенкам трубы, — если сечения трубы малы, то с известным приближением это всегда возможно. При этом, отвлекаясь от разницы скоростей в данном сечении вблизи стенок и на оси трубы (такой приближенный подход принят в гидравлике), обозначим через v_1 скорость жидкос-

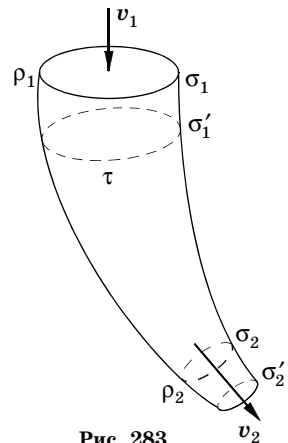


Рис. 283

* То есть состоящий из частиц жидкости.

ти в сечении σ_1 и через v_2 — скорость жидкости в сечении σ_2 . Скорости v_1 и v_2 можно представить себе как некоторые средние скорости в сечениях σ_1 и σ_2 . Обозначим через ρ плотность среды, т. е. массу единицы объема в данной точке среды; плотность в сечении σ_1 будет ρ_1 , а в сечении σ_2 будет ρ_2 .

Произведение $\rho_1 v_1 \sigma_1$ определит массу жидкости, протекающую в единицу времени сквозь сечение σ_1 . По закону сохранения массы эта же масса будет протекать и через сечение σ_2 , так что

$$\rho_1 v_1 \sigma_1 = \rho_2 v_2 \sigma_2.$$

Массу жидкости, протекающую в единицу времени через любое сечение трубы, обозначим через M :

$$M = \rho_1 v_1 \sigma_1 = \rho_2 v_2 \sigma_2 \quad (22.77)$$

и будем называть *секундной массой* или *массовым расходом в единицу времени*.

Вычислим теперь изменение dQ количества движения выделенного объема τ за время dt . Для этого заметим, что за время dt частицы объема τ сместятся по трубе (на рис. 283 показано штриховыми линиями) и изменят свои скорости в связи с переходом в другие сечения. Если движение установившееся, т. е. средняя скорость в данном сечении трубы не зависит от времени, то за время dt в объеме между сечениями σ_1 и σ_2 останутся частицы прежнего объема τ , и новое количество движения в этой части объема будет то же, что и раньше. Таким образом, изменение количества движения произойдет только за счет потери количества движения в объеме между сечениями σ_1 , σ'_1 и прибавления количества движения в объеме между сечениями σ_2 , σ'_2 . Определив количество движения в бесконечно малом объеме как произведение массы на вектор скорости, получим

$$dQ = \rho_2 v_2 \sigma_2 dt v_2 - \rho_1 v_1 \sigma_1 dt v_1$$

или по (22.77)

$$dQ = M(v_2 - v_1) dt.$$

Отсюда следует, что секундное изменение dQ/dt количества движения в выделенном объеме будет равно

$$\frac{dQ}{dt} = M(v_2 - v_1), \quad (22.78)$$

т. е. разности секундных количеств движения, переносимых через сечения трубы, ограничивающие выделенный объем.

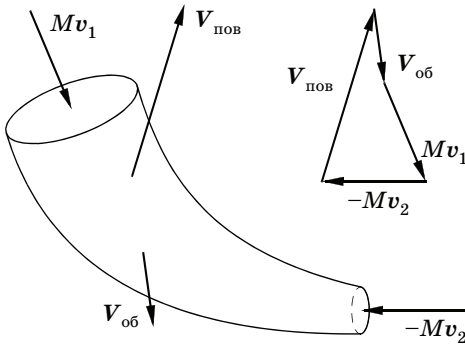


Рис. 284

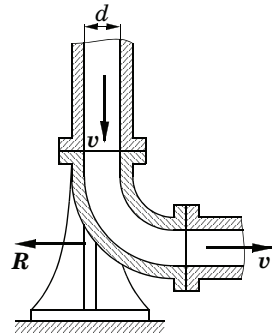


Рис. 285

Подставляя полученное значение изменения количества движения в уравнение (22.76), получим

$$Mv_1 - Mv_2 + V_{об} + V_{пов} = 0. \tag{22.79}$$

Отсюда следует теорема Эйлера (1707—1783)*.

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА. Главные векторы объемных и поверхностных сил вместе с векторами секундных количеств движения жидкости, протекающих через два каких-нибудь сечения трубы и направленных внутрь выделенного объема, образуют замкнутый многоугольник, т. е. геометрическая сумма их равна нулю (рис. 284).

Пример 97. Определить величину горизонтальной составляющей **R** силы динамического (дополнительного к гидростатическому) давления воды на колено трубы (рис. 285) диаметром $d = 0,3$ м, если скорость движения воды по трубе равна $v = 2$ м/с. Плотность воды принята равной $\rho = 1000$ кг/м³.

Замечая, что по закону равенства действия и противодействия искомая сила равна по величине соответствующей составляющей давления стенки трубы на жидкость, по теореме Эйлера получим

$$R = Mv = \rho v \frac{\pi d^2}{4} v = \rho v^2 \cdot \frac{\pi d^2}{4}.$$

Подставляя числовые данные, находим

$$R = 283 \text{ Н.}$$

Пример 98. Определить давление **R** струи, вытекающей со скоростью v_1 из трубы сечением σ на безграничную стенку, плоскость которой пер-

* Подробнее о Л. Эйлере см. т. I, с. 159.

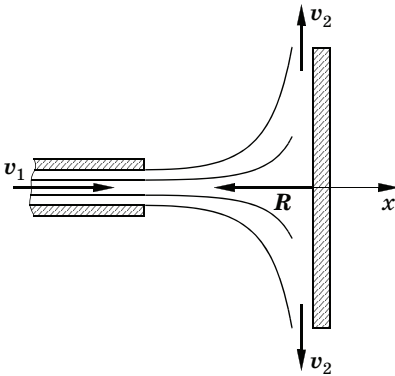


Рис. 286

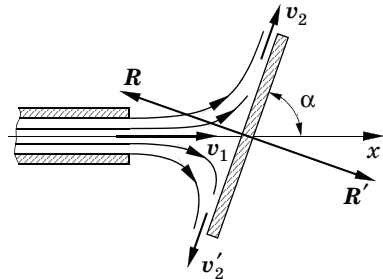


Рис. 287

пендикулярна направлению струи (рис. 286) или образует с нею угол α (рис. 287).

Применяя теорему Эйлера в проекции на ось x (ось струи), получаем при $\alpha = \pi/2$

$$R = Mv_1 = \rho v_1^2 \sigma;$$

эта формула была впервые дана Даниилом Бернулли* в 1736 г.

Простота этого решения обусловлена тем, что стенка предполагается безграничной. В случае удара струи о пластинку конечной ширины явление усложнилось бы за счет необходимости учета обтекания ее концов. Выведенная формула Бернулли приближенно верна, если считать ширину пластинки значительно превосходящей ширину струи.

В том же допущении можно рассмотреть и *косой* удар струи о стенку, образующую с направлением струи угол α (рис. 287).

В этом случае будем иметь векторы секундных количеств движения Mv_1 , $(-M_2v_2)$, $(-M'_2v'_2)$ и давление стенки на струю R , которое, пренебрегая трением жидкости о стенку, будем считать перпендикулярным стенке.

Проецируя сумму вышеуказанных векторов на направление нормали к стенке, находим величину реакции

$$R = Mv_1 \sin \alpha = \sigma \rho v_1^2 \sin \alpha;$$

при $\alpha = \pi/2$ вернемся к предыдущей формуле Бернулли. Положение точки приложения реакции R можно было бы уточнить, применяя теорему моментов; для нас это сейчас не существенно.

* Подробнее о Д. Бернулли см. т. I, с. 412.

Проецируя ту же векторную сумму на направление стенки, можно определить секундные количества движения $M_2 v_2$ и $M'_2 v'_2$ вдоль стенки. По теореме Эйлера будем иметь

$$M v_1 \cos \alpha + M'_2 v'_2 - M_2 v_2 = 0,$$

а из условия сохранения массового расхода всей струи найдем

$$M_2 + M'_2 = M.$$

В грубом приближении можно принять

$$v_2 = v'_2 = v_1,$$

т. е. считать, что различие между массовыми расходами M_2 и M'_2 определяется лишь разницей в сечениях растекающихся струй. Тогда из предыдущих равенств будет следовать

$$M_2 - M'_2 = M \cos \alpha, \quad M_2 + M'_2 = M,$$

откуда найдем

$$M_2 = M \frac{1 + \cos \alpha}{2} = M \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad M'_2 = M \frac{1 - \cos \alpha}{2} = M \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Пользуясь теоремой об изменении количества движения, можно вывести и общее уравнение динамики сплошной среды — так называемое *уравнение в напряжениях*. Уравнение это служит обобщением аналогичного уравнения статики сплошной среды, которое было выведено в § 38. Приводимый далее вывод *уравнения в напряжениях* предполагает знакомство читателя с содержанием этого параграфа.

Выделим в движущейся сплошной среде произвольный объем τ , ограниченный поверхностью σ . Обозначим через $\delta\tau$ бесконечно малую часть объема τ и будем называть ее *элементом объема* τ ; аналогично под $\delta\sigma$ будем понимать *элемент поверхности* σ . В § 29 было пояснено, что в сплошной среде вместо обычных объемных и поверхностных сил вводятся плотности их распределения соответственно в объемах и на поверхностях: \mathbf{F} — для объемных и \mathbf{p}_n — для поверхностных сил; в последнем случае \mathbf{p}_n представляет собой *напряжение*, приложенное к внешней стороне элементарной площадки $\delta\sigma$, единичный вектор нормали к которой обозначен через \mathbf{n} .

Главный вектор количества движения сплошной среды \mathbf{Q} , равный векторной сумме элементарных количеств движения

$v \delta m = \rho v \delta \tau$ (ρ — плотность распределения массы в объеме τ), будет определяться вычисленным по объему τ интегралом

$$Q = \int_{(\tau)} \rho v \delta \tau. \quad (22.80)$$

Теорема об изменении со временем количества движения среды в объеме τ запишется следующим образом:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{(\tau)} \rho F \delta \tau + \int_{(\sigma)} p_n \delta \sigma. \quad (22.81)$$

Производная по времени, стоящая слева, понимается как индивидуальная (субстанциональная) производная (см. § 76), т. е. производная, которая следует за всеми изменениями со временем — локальными и конвективными (§ 76) — некоторой величины, в данном случае главного вектора количества движения среды в движущемся вместе со средой объеме τ . Эту производную можно вычислить по общим правилам дифференцирования интеграла

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{(\tau)} \rho v \delta \tau = \int_{(\tau)} \rho \frac{dv}{dt} \delta \tau + \int_{(\tau)} v \frac{d}{dt} (\rho \delta \tau). \quad (22.82)$$

Но в силу общего закона сохранения массы $\rho \delta \tau$ движущегося элементарного объема $\delta \tau$ и только что поясненного смысла символа d/dt будет

$$\frac{d}{dt} (\rho \delta \tau) = 0. \quad (22.83)$$

Таким образом, по (22.82) имеем

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{(\tau)} \rho \frac{dv}{dt} \delta \tau. \quad (22.84)$$

Согласно известным равенствам Коши (§ 30), представленным в тензорной форме (§ 36), и формулам Гаусса — Остроградского (§ 37) найдем значение последнего члена в равенстве (22.81) в форме интеграла по объему

$$\int_{(\sigma)} p_n \delta \sigma = \int_{(\sigma)} n P \delta \sigma = \int_{(\tau)} \text{Div } P \delta \tau, \quad (22.85)$$

где P — тензор напряжений (§ 36), а символ Div представляет операцию пространственного дифференцирования в поле тензора P , с которой уже нам приходилось иметь дело при выводе уравнений статики сплошной среды.

Подставляя в равенство (22.81) выражение (22.84) для члена в левой части и выражение (22.85) для второго члена в правой части и собирая все члены под знак общего интеграла по объему, получаем

$$\int_{(\tau)} \left(\rho \frac{dv}{dt} - \rho \mathbf{F} - \text{Div } P \right) \delta\tau = 0.$$

Пользуясь произволом в выборе объема τ — обычным приемом, использованным ранее в § 38, — убедимся в равенстве нулю выражения, стоящего в круглых скобках под знаком интеграла, и придем к уравнению

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho \mathbf{F} + \text{Div } P, \quad (22.86)$$

которое и представляет собой искомое уравнение динамики сплошной среды «в напряжениях». Перепишем его в аналитической форме, взяв проекции левой и правой частей равенства (22.86) на оси прямоугольной декартовой системы координат. Вспоминая выражения проекций ускорения в эйлеровых переменных (§ 76) и проекций вектора $\text{Div } P$ (§ 38), получаем

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= \rho F_x + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}, \\ \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= \rho F_y + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z}, \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \rho F_z + \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (22.87)$$

К уравнениям (22.87) нужно присоединить еще одно, также динамическое, уравнение, которое легко выводится из уравнения сохранения (22.83) элементарной массы $\delta m = \rho \delta\tau$. Продифференцировав обе части уравнения (22.83), получаем

$$\frac{d\rho}{dt} \delta\tau + \rho \frac{d}{dt} (\delta\tau) = 0.$$

В конце § 78 было показано, что скорость объемного расширения элемента объема $\delta\tau$ при движении среды равна

$$\frac{d}{dt} (\delta\tau) = \text{div } \mathbf{v} \delta\tau,$$

где $\text{div } \mathbf{v}$ — дивергенция вектора скорости \mathbf{v} — символ скалярной пространственной производной (§ 75) в векторном поле век-

тора v . Используя последнее равенство, перепишем предыдущее в виде

$$\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v \right) \delta\tau = 0,$$

или, в силу произвольности выбора элемента объема $\delta\tau$,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0. \quad (22.88)$$

Это уравнение можно было бы записать в развернутом (вспомогательном § 75) виде

$$\frac{d\rho}{dt} + v \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} v = 0$$

и, пользуясь известной формулой векторного анализа

$$v \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} v = \operatorname{div}(\rho v),$$

легко выводимой из символического равенства

$$\nabla(\rho v) = v (\nabla \rho) + \rho (\nabla \cdot v),$$

переписать в следующем виде:

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad (22.89)$$

или, выразив оператор div в прямоугольных декартовых координатах, в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0. \quad (22.90)$$

Уравнение (22.88) или другие виды того же уравнения ((22.89), (22.90)) носят традиционное наименование уравнения *сплошности* или *неразрывности*, хотя выражают, собственно говоря, закон сохранения массы.

Уравнения (22.87) и (22.90) не образуют замкнутой системы уравнений для определения тринадцати неизвестных: ρ , v_x , v_y , v_z , P_{xx} , P_{yx} , P_{zx} , P_{xy} , P_{yy} , P_{zy} , P_{xz} , P_{yz} , P_{zz} . Для замыкания этой системы уравнений необходимо применять те или иные допущения о математических моделях среды: идеально упругая среда, подчиняющаяся линейному закону Гука, идеальная жидкость, лишенная внутреннего трения, вязкая жидкость, движение которой описывается законом Ньютона, и т. д. Так, например, если принять модель *идеальной жидкости* как жидкости, в которой нет внутреннего трения, то все касательные составляющие тензора напряжений будут равны нулю

$$P_{xy} = P_{yx} = P_{yz} = P_{zy} = P_{zx} = P_{xz} = 0,$$

а тогда, как это будет следовать (ср. § 38) из равенств Коши, все нормальные составляющие тензора напряжений будут равны между собой и можно положить

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p,$$

где p — скалярная величина, выражающая *гидродинамическое давление* или просто *давление*. Согласно принятой модели идеальной жидкости, совокупность уравнений (22.87) и (22.90) перейдет в следующую замкнутую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \tag{22.91}$$

$$\rho = \rho(p);$$

здесь зависимость плотности от давления задается последним уравнением этой системы, представляющим собой уравнение *баротропности* движения (если $\rho = \text{const}$, то жидкость *несжимаема*; если $\rho p^k = \text{const}$, где k — показатель адиабаты, то происходит *адиабатическое* движение).

Если мы вернемся к векторной форме уравнений, то получим УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА ДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } (\rho v) &= 0, \\ \rho &= \rho(p). \end{aligned} \tag{22.92}$$

Можно заметить, что при *равновесии* ($v = 0$, $\partial \rho / \partial t = 0$) уравнения (22.91) перейдут в ранее выведенные *уравнения Эйлера** статики идеальной текучей среды (9.38).

Применим уравнения Эйлера (22.91) к представляющей принципиальный интерес задаче *одномерного распространения малых возмущений в неподвижном газе*.

* См. т. I, § 38, с. 157.

Пусть в безграничной вдоль оси Ox цилиндрической трубе по-коится ($u_0 = 0$) газ с параметрами p_0, ρ_0 . Зададим в газе малые возмущения этих параметров: давления p' , плотности ρ' , скорости u' , так что

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad v_x = u = u'.$$

Подставим эти значения в уравнения (22.91), предварительно заметив, что при допущении о *баротропности* последующего движения (закрывающейся в зависимости плотности ρ только от давления p , но не от температуры) будет

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \approx \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x}, \quad (22.93)$$

причем, как обычно, в газах с повышением давления возрастает и плотность ($dp/d\rho > 0$), что позволяет положить

$$\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 = a_0^2. \quad (22.94)$$

Пренебрегая малыми величинами второго порядка и опуская объемную силу, приходим к линейной системе уравнений

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} = -a_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x}, \quad \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial t},$$

которую, исключая ρ' , можно привести к одному уравнению

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = 0. \quad (22.95)$$

Уравнение (22.95), как легко проверить непосредственным дифференцированием, имеет общий *интеграл д'Аламбера*

$$u' = f_1(x + a_0 t) + f_2(x - a_0 t), \quad (22.96)$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции.

Введем преобразование

$$x + a_0 t = \xi_1, \quad x - a_0 t = \xi_2, \quad (22.97)$$

обладающее простым кинематическим смыслом: ось $O_1 \xi_1$ движется в *отрицательном* направлении оси Ox со скоростью $(-a_0)$, а ось $O_2 \xi_2$ — в *положительном* направлении оси Ox со скоростью a_0 . Тогда решение (22.96), переписанное в виде

$$u' = f_1(\xi_1) + f_2(\xi_2), \quad (22.98)$$

будет означать сумму двух фиксированных в плоскостях (u', ξ_1) и (u', ξ_2) произвольно заданных кривых (шаблонов), движущихся со скоростями a_0 вдоль отрицательного и соответственно положительного направлений оси Ox .

Каждое из этих двух движений, взятое по отдельности, характеризует движение *простой волны*, а совокупность их (22.98) или, что то же самое, (22.96) — наложение двух движущихся навстречу друг другу волн с равными по абсолютной величине скоростями a_0 каждая*. Контуры этих волн определяются видом функций $f_1(\xi_1)$ и $f_2(\xi_2)$; в частности, волны могут быть *синусоидальными*, описывающими колебательный процесс возмущений скорости, плотности или давления в газе. К таким процессам относится *распространение звука* в газе с характерной для него последовательностью повышений и понижений давления в данной точке. В связи с этим принято скорость распространения малых возмущений в среде коротко называть *скоростью звука*. Процессами распространения звуковых волн занимается *акустика*. Для нас сейчас важен сам факт *конечности* скорости распространения малых возмущений в среде или скорости распространения в ней звука.

Формула (22.94) показывает, что скорость звука зависит от вида уравнения состояния среды $\rho = \rho(p)$. Так, например, замечая, что скорость звука велика по сравнению со скоростью отвода тепла, образованного сжатием газа при прохождении звуковой волны через данную точку, считают процесс сжатия газа *адиабатическим* и используют известную из курса физики формулу

$$p/\rho^k = \text{const.}$$

Если, кроме того, газ является совершенным, т. е. удовлетворяет *уравнению Клапейрона*

$$\frac{dp}{d\rho} = k \frac{p}{\rho} = kR\theta,$$

где R — газовая постоянная, а θ — абсолютная температура, согласно (22.94), получим *формулу Лапласа — Пуассона*

$$a = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} = \sqrt{kR\theta};$$

здесь индекс «0» при a опущен.

* Уравнение (22.95) и совершенно аналогичные по форме уравнения для ρ' и p' называются *волновыми уравнениями*.

Адиабатическая скорость звука в совершенном газе пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры газа.

Замечая, что величину $dp/d\rho$ можно принять за характеристику сжимаемости среды — роста плотности с давлением, — заключим, что чем больше сопротивляемость среды сжатию, тем больше скорость распространения звука в ней. Приведем округленные значения скорости распространения звука в разных средах: в воздухе — 340 м/с, в воде — 1500 м/с, в твердом теле — 5000 м/с (вопрос о распространении малых возмущений в твердых телах представляет особые трудности, так как требует рассмотрения уравнений динамики упругого тела с характерными для него двумя скоростями распространения возмущений). Очень малые скорости распространения звука наблюдаются в легко сжимаемых жидких пенах.

Предположение о *несжимаемости* среды, в частности жидкости в гидродинамике и гидравлике, оправдываемое большой скоростью распространения звука в ограниченной области течения при сравнительно малых скоростях движения среды, приводит к *бесконечной* скорости распространения звука

$$a^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho = \text{const}} = \infty,$$

что может рассматриваться как допустимое в этих условиях приближение.

Глава XXIII

Теорема об изменении момента количеств движения системы материальных точек

§ 111. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки

Напомним (§ 11), что момент силы F относительно точки был определен как вектор (точнее псевдовектор), по величине и направлению равный векторному произведению вектора-радиуса r

точки M приложения силы и вектора силы \mathbf{F} (за начало вектора-радиуса принят центр момента O (рис. 288):

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (23.1)$$

Так же, как момент силы, может быть определен момент вектора количества движения $\mathbf{q} = m\mathbf{v}$ материальной точки. Моментом количества движения будет вектор \mathbf{k} , величина и направление которого определяются векторным произведением \mathbf{r} и \mathbf{q} :

$$\mathbf{k} = \mathbf{r} \times \mathbf{q} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}. \quad (23.2)$$

Проекции вектора момента количества движения на оси координат будут

$$k_x = m(yv_z - zv_y), \quad k_y = m(zv_x - xv_z), \quad k_z = m(xv_y - yv_x), \quad (23.3)$$

где x, y, z — проекции вектора-радиуса \mathbf{r} , т. е. координаты движущейся точки, а $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$ — проекции вектора скорости \mathbf{v} этой точки.

Вспомним, что проекция на некоторую ось вектора момента силы относительно точки, взятой на оси, представляет собой момент силы относительно этой оси (§ 11); аналогично величины k_x, k_y, k_z являются моментами количества движения точки относительно осей x, y, z .

Дифференцируя выражение (23.2) момента количества движения по времени, получаем

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{q} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{q}}{dt}; \quad (23.4)$$

но первое слагаемое правой части равно нулю, так как сомножители параллельны:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{q} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Далее на основании теоремы об изменении количества движения материальной точки имеем

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{F},$$

где \mathbf{F} — равнодействующая сил, приложенных к точке. Итак, по (23.4)

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}). \quad (23.5)$$

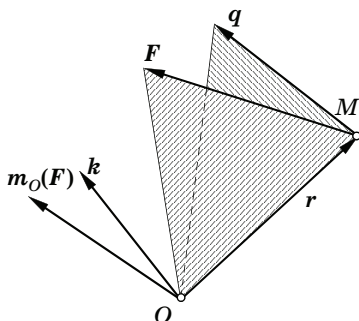


Рис. 288

Соотношение (23.5) представляет собой теорему.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА. *Векторная производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно центра равна моменту равнодействующей приложенных к точке сил относительно того же центра.*

Проецируя (23.5) на неподвижные оси координат, получаем

$$\frac{dk_x}{dt} = m_x(\mathbf{F}), \quad \frac{dk_y}{dt} = m_y(\mathbf{F}), \quad \frac{dk_z}{dt} = m_z(\mathbf{F}) \quad (23.6)$$

и приходим к другой теореме.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТОВ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСЕЙ. *Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно неподвижной оси равна моменту равнодействующей сил, приложенных к точке, относительно этой оси.*

Теорема об изменении момента количества движения в приложении к одной материальной точке представляет собой простое следствие основного закона Ньютона. Это следствие оказывается полезным при решении некоторых задач динамики; характер этих задач подсказывается формой уравнений (23.5) и (23.6).

1°. Если сила \mathbf{F} все время остается в одной плоскости с некоторой прямой, например с осью Ox , т. е. пересекает эту ось или ей параллельна, то момент силы относительно этой оси равен нулю, и уравнение (23.6) дает

$$\frac{dk_x}{dt} = 0;$$

интегрируя, находим

$$k_x = m(yv_z - zv_y) = \text{const.}$$

Применение теоремы об изменении момента количества движения относительно оси позволило получить зависимость между проекциями скорости и координатами движущейся точки, т. е. один из первых интегралов уравнений динамики (его называют — вспомним формулы (20.59), (20.60) — *интегралом площадей* в проекции на плоскость yz ; происхождение названия станет понятным из следующего пункта).

2°. Случай центральной силы. Напомним, что центральной называется сила, линия действия которой во все время движения проходит через один и тот же неподвижный центр.

Обозначая через F_r проекцию силы F на направление вектора радиуса $r = \overrightarrow{OM}$ движущейся точки M и замечая, что r/r представляет собой единичный вектор направления r , мы можем записать выражение силы в виде

$$F = \frac{r}{r} F_r, \tag{23.7}$$

причем F_r положительна в случае силы отталкивания и отрицательна для силы притяжения к центру O .

Возвращаясь к теореме о моменте количества движения, в случае центральной силы получаем

$$\frac{dk}{dt} = r \times F = r \times \frac{F_r}{r} r = 0,$$

и, следовательно, вектор момента количества движения сохраняет постоянное направление и имеет постоянную величину. Таким образом, векторы r и v все время остаются в неподвижной плоскости, перпендикулярной вектору k , т. е. траектория движущейся точки представляет собой плоскую кривую. Это уже было использовано в § 92.

Заметим далее, что

$$k = r \times mv = mr \times \frac{dr}{dt}, \tag{23.8}$$

но векторное произведение $(1/2)r \times dr$ по величине равно площади $dS = (1/2)r|dr| \sin(\widehat{r, dr}) = (1/2)r^2 d\varphi$ (рис. 289), описываемой вектором-радиусом r за промежуток времени dt , и, следовательно-

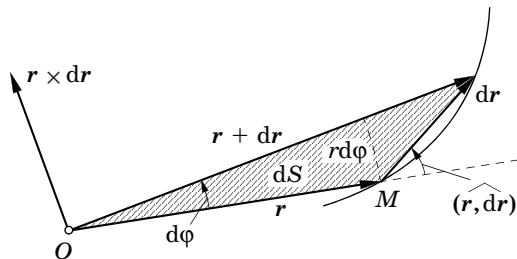


Рис. 289

но, dS/dt есть секториальная скорость (§ 48) рассматриваемой точки. Таким образом,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{k}{2m} = C = \text{const}, \quad (23.9)$$

откуда следует, что

$$S = Ct + S_0. \quad (23.10)$$

В движении под действием центральной силы площадь, описываемая вектором-радиусом, изменяется пропорционально времени. Это — закон площадей, включающий как частный случай второй закон Кеплера движения планет.

Проецируя соотношение (23.8) на оси координат, получаем *интегралы площадей*

$$\begin{aligned} k_x &= m(yv_z - zv_y) = C_1, & k_y &= m(zv_x - xv_z) = C_2, \\ k_z &= m(xv_y - yv_x) = C_3, \end{aligned}$$

выражающие постоянство секториальной скорости проекции движущейся точки соответственно на плоскости yz , zx , xy ; последние равенства дают, таким образом, три первых интеграла уравнения движения точки под действием центральной силы. При действии на точку силы, пересекающей в течение всего времени движения одну из осей координат, имеет место один первый интеграл, выражающий сохранение секториальной скорости проекции точки на плоскость, перпендикулярную этой оси.

§ 112. Малые колебания математического маятника

Применим теорему об изменении момента количества движения к составлению уравнения движения материальной точки, принужденной двигаться в поле силы тяжести по окружности, расположенной в вертикальной плоскости. Такое движение осуществляет *математический маятник*, т. е. тяжелый груз (рассматриваемый как материальная точка M), подвешенный при помощи нерастяжимой и невесомой нити к неподвижной точке и движущийся в вертикальной плоскости (рис. 290).

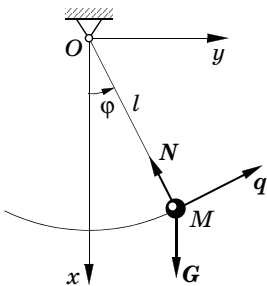


Рис. 290

На груз действуют сила тяжести G и реакция нити N . Вектор количества дви-

жения q по величине равен произведению массы m груза на его скорость $l|\dot{\varphi}|$ и имеет направление скорости; при возрастании угла φ , т. е. при движении от оси Ox к оси Oy , когда $\dot{\varphi} > 0$,

$$q = ml\dot{\varphi},$$

если же движение происходит в обратную сторону, то $\dot{\varphi} < 0$, и величина вектора q будет

$$q = -ml\dot{\varphi}.$$

В том и другом случае момент количества движения груза относительно перпендикулярной плоскости чертежа оси Oz , равный произведению величины вектора q на расстояние l от него до оси Oz , взятому с соответствующим знаком, будет

$$k_z = ml^2\dot{\varphi}. \quad (23.11)$$

Момент силы тяжести относительно оси Oz равен

$$m_z = -Gy = -Gl \sin \varphi = -mgl \sin \varphi.$$

Момент натяжения нити N равен нулю; применение теоремы моментов позволяет исключить эту неизвестную силу из уравнения движения. Согласно (23.6) будем иметь

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (23.12)$$

В начальный момент маятнику дается отклонение от положения равновесия и сообщается начальная скорость, что соответствует следующим начальным условиям:

$$\varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \quad \text{при } t = 0.$$

Рассмотрим малые колебания маятника; в этом случае в уравнении (23.12) можно (с точностью до малых величин порядка φ^3) заменить $\sin \varphi$ на φ . Тогда придем к уравнению

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0, \quad (23.13)$$

решение которого при указанных начальных условиях будет — формула (21.8) —

$$\varphi = \varphi_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t + \sqrt{\frac{l}{g}} \dot{\varphi}_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t. \quad (23.14)$$

Период малых колебаний маятника выражается формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (23.15)$$

из которой следует независимость периода малых колебаний математического маятника от начальных условий: *малые колебания маятника изохронны*. Этот факт был экспериментально установлен еще Галилеем в 1583 г., хотя формулы, определяющей период колебаний, Галилей не дал.

Более полно задача о движении маятника будет рассмотрена далее в § 177.

§ 113. Теорема об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек. Теорема Резала

Наиболее интересные приложения теоремы об изменении момента количества движения связаны с ее обобщением на случай системы материальных точек.

Пусть M_1, M_2, \dots, M_n — точки, входящие в рассматриваемую систему. Через F_i обозначим равнодействующую внешних сил, приложенных в точке M_i ; равнодействующая F'_i внутренних сил, приложенных в этой точке, определяется векторной суммой

$$F'_i = F'_{i1} + F'_{i2} + \dots + F'_{i, i-1} + F'_{i, i+1} + \dots + F'_{in} = \sum_{k=1}^n F'_{ik},$$

в которой F'_{ik} представляет воздействие на точку M_i со стороны точки M_k , также включенной в систему; звездочка при знаке суммы указывает, что слагаемое, для которого $k = i$, при суммировании исключается. По закону равенства действия и противодействия имеем

$$F'_{ik} = -F'_{ki}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq k.$$

Согласно теореме Вариньона (§ 11) главный момент совокупности сходящихся сил относительно произвольной точки O равен моменту равнодействующей силы относительно той же точки; применяя эту теорему к точке M_i , получаем выражение момента внутренних сил, приложенных к этой точке,

$$m_O(F'_i) = \sum_{k=1}^n m_O(F'_{ik}).$$

Составим теперь геометрическую сумму моментов всех внутренних сил

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{m}_O(\mathbf{F}'_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbf{m}_O(\mathbf{F}'_{ik}).$$

Слагаемые этой двойной суммы будем рассматривать попарно: $\mathbf{m}_O(\mathbf{F}'_{ik})$ и $\mathbf{m}_O(\mathbf{F}'_{ki})$. Эти моменты представляют собой векторы, равные по величине и противоположные по направлению, т. е. дающие равную нулю векторную сумму; сказанное следует из того, что силы \mathbf{F}'_{ik} и \mathbf{F}'_{ki} равны по величине и направлены в противоположные стороны по прямой, соединяющей точки M_i и M_k . Итак, векторная сумма моментов всех внутренних сил равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{m}_O(\mathbf{F}'_i) = 0. \quad (23.16)$$

Теорема об изменении момента количества движения в применении к точке M_i , согласно уравнению (23.5), записывается в виде

$$\frac{d\mathbf{k}_i}{dt} = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_i) + \mathbf{m}_O(\mathbf{F}'_i).$$

Просуммировав эти уравнения по всем точкам системы и учитывая соотношение (23.16), получим

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{k}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_i). \quad (23.17)$$

Главным моментом количеств движения системы относительно центра (или кинетическим моментом) называется векторная сумма моментов количеств движения всех входящих в систему материальных точек относительно того же центра.

Обозначая главный момент количеств движения через \mathbf{K} , т. е., полагая

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i, \quad (23.18)$$

по (23.17) получаем

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{m}^{(O)}, \quad (23.19)$$

где

$$m^{(0)} = \sum_{i=1}^n m_O(\mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad (23.20)$$

обозначает главный момент *внешних* сил, приложенных к системе (§ 13); при $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ возвращаемся к известному условию равновесия в статике — главный момент приложенных сил равен нулю.

Формула (23.19) выражает, коротко говоря, *теорему моментов*.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ГЛАВНОГО МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК. *Векторная производная по времени от главного момента количества движения системы равна взятому относительно того же центра главному моменту внешних сил, приложенных к системе.*

Проецируя уравнение (23.19) на неподвижные оси, получаем

$$\dot{K}_x = m_x, \quad \dot{K}_y = m_y, \quad \dot{K}_z = m_z. \quad (23.21)$$

Производная по времени от главного момента количества движения системы относительно некоторой оси неизменного направления равна главному моменту внешних сил относительно этой оси.

Если внешние силы лежат в одной плоскости, например, с осью Ox , то

$$m_x = \sum_{i=1}^n m_x(\mathbf{F}_i) = 0;$$

при этом

$$K_x = \text{const} \quad (23.22)$$

и имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА СОХРАНЕНИЯ ГЛАВНОГО МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ. *Главный момент количества движения системы относительно оси сохраняет постоянное значение, если главный момент внешних сил относительно этой оси равен нулю.*

При обращении в нуль главного момента внешних сил относительно некоторой точки главный момент количества движения системы \mathbf{K} относительно этой точки будет иметь постоянную величину и неизменное направление.

Теореме об изменении главного момента количества движения можно придать геометрическую форму, если заметить, что про-

изводная вектора по времени представляет собой скорость конца этого вектора на его годографе; в частности, вектор

$$\dot{\mathbf{K}} = \frac{d\mathbf{K}}{dt} \tag{23.23}$$

представляет собой скорость конца вектора \mathbf{K} , если началом вектора является неподвижный центр моментов O . Теорема об изменении главного момента количеств движения, таким образом, дает

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{m}^{(O)}, \tag{23.24}$$

т. е. теорему об изменении момента количеств движения в форме, носящей наименование теоремы Резаля.

ТЕОРЕМА РЕЗАЛЯ. *Скорость конца вектора главного момента количеств движения системы материальных точек относительно некоторого центра равна главному моменту относительно того же центра внешних сил, приложенных к системе.*

Отметим, что величина $\dot{\mathbf{K}}$, как следует из (23.24), имеет размерность момента силы $[\text{Н} \cdot \text{м}]$, так как изображает скорость конца отрезка, представляющего вектор \mathbf{K} , т. е. величину, измеряемую в $\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

§ 114. Главный момент количеств движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси Oz (рис. 291) и вычислим главный момент количеств движения твердого тела относительно этой оси.

Момент количества движения материальной точки массой m_i относительно оси Oz будет

$$k_{iz} = h_i q_i = h_i m_i v_i;$$

вспоминая, что $v_i = \tilde{\omega} h_i$, где $\tilde{\omega} = \dot{\varphi}$ — угловая скорость, получим

$$k_{iz} = \tilde{\omega} m h_i^2 = \tilde{\omega} m_i (x_i^2 + y_i^2). \tag{23.25}$$

Главный момент количеств движения относительно оси будет, согласно

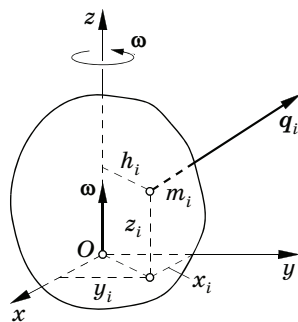


Рис. 291

РЕЗАЛЬ ЭМЕ АНРИ (*Résal Aime Henry, 1828—1896*) — французский ученый в области механики, чл. Парижской АН (1873).

(23.18), равен алгебраической сумме этих выражений для всех точек системы

$$K_z = \sum_{i=1}^n k_{iz} = \tilde{\omega} \sum_{i=1}^n m_i h_i^2. \quad (23.26)$$

Величина

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad (23.27)$$

т. е. сумма произведений масс частиц тела на квадраты их расстояний от некоторой оси называется моментом инерции тела относительно этой оси.

Момент инерции зависит только от формы тела и расположения масс в нем, но не зависит от состояния движения тела.

Момент инерции тела имеет размерность массы, умноженной на квадрат длины (кг · м²), так что отношение

$$J_z/M,$$

где M — масса тела, имеет размерность квадрата длины. Обозначим его через ρ^2 :

$$\rho^2 = \frac{J_z}{M}, \quad J_z = M\rho^2. \quad (23.28)$$

Величина ρ называется *радиусом инерции тела* относительно оси Oz .

Возвращаясь к формуле (23.26), получаем

$$K_z = J_z \tilde{\omega}, \quad (23.29)$$

т. е. главный момент количества движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, относительно этой оси равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на взятую со знаком плюс или минус угловую скорость вращения тела.

Моменты количества движения твердого тела относительно осей x и y , перпендикулярных неподвижной оси вращения z , в общем случае не равны нулю. Поэтому было бы ошибкой считать, что *вектор* главного момента количества движения \mathbf{K} твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, направлен по этой оси.

Формулы, служащие для вычисления проекций главного момента количества движения \mathbf{K} твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, приводятся далее в § 141. Из них, в частности при $\omega_x = \omega_y = 0$, следуют выражения проекций K_x и K_y вектора \mathbf{K} для случая вращения вокруг неподвижной оси Oz .

§ 115. Вычисление моментов инерции. Моменты инерции относительно параллельных осей

Вычисление моментов инерции однородных тел правильной геометрической формы производится с помощью методов интегрального исчисления. В случае тел, не имеющих правильной формы, моменты инерции определяются или экспериментально, или приближенно путем вычислений, для чего данное тело разбивают на несколько тел, имеющих правильную геометрическую форму. О способах экспериментального определения моментов инерции будет сказано ниже.

По определению момента инерции имеем

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i h_i^2.$$

При *непрерывном* распределении масс следует заменить m_i на dm , h_i — на расстояние h от рассматриваемого элемента массой dm до оси, относительно которой берется момент инерции. Сумма заменяется интегралом, распространенным по всей массе M тела

$$J_z = \int_{(M)} h^2 dm. \quad (23.30)$$

Обозначая* плотность через δ , элемент объема через $d\tau$, будем иметь

$$dm = \delta d\tau, \quad J_z = \int_{(\tau)} h^2 \delta d\tau.$$

В случае однородного тела имеем $\delta = M/\tau = \text{const}$; следовательно,

$$J_z = \frac{M}{\tau} \int_{(\tau)} h^2 d\tau. \quad (23.31)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1°. Момент инерции однородного тонкого стержня постоянного сечения относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец. Согласно формуле (23.31) имеем (рис. 292)

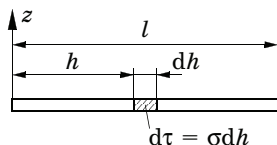


Рис. 292

$$J_z = \frac{M}{\tau} \int_{(\tau)} h^2 d\tau = \frac{M}{l} \int_0^l h^2 dh = \frac{1}{3} Ml^2, \quad (23.32)$$

* Это обозначение принято потому, что общепринятое обозначение плотности ρ здесь уже использовано для столь же общепринятого обозначения радиуса инерции.

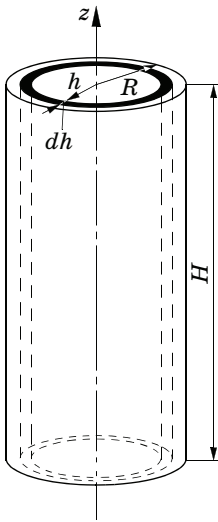


Рис. 293

так как в рассматриваемом случае $d\tau = \sigma dh$, $\tau = \delta l$, где σ — площадь поперечного сечения стержня; интегрирование по объему заменяется интегрированием по длине. По (23.28) радиус инерции стержня будет

$$\rho = \sqrt{\frac{J_z}{M}} = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577l.$$

2°. Момент инерции однородного кругового цилиндра относительно его оси. За элемент объема примем цилиндрический слой, образуемый двумя коаксиальными цилиндрами радиусами h и $h + dh$ (рис. 293). Получим

$$d\tau = H \cdot 2\pi h dh,$$

$$J_z = \frac{2\pi MH}{\tau} \int_0^R h^3 dh = \frac{\pi MHR^4}{2\tau}.$$

С другой стороны, для цилиндра радиусом R

$$\tau = \pi R^2 H;$$

следовательно,

$$J_z = \frac{1}{2} MR^2. \quad (23.33)$$

Момент инерции полого цилиндра с внешним радиусом R и внутренним R_0 найдем как разность моментов инерции сплошных цилиндров этих же радиусов:

$$\begin{aligned} \pi R^2 H \delta \cdot \frac{1}{2} R^2 - \pi R_0^2 H \delta \cdot \frac{1}{2} R_0^2 &= \frac{1}{2} \pi H \delta (R^4 - R_0^4) = \\ &= \frac{1}{2} \pi (R^2 - R_0^2) H \delta (R^2 + R_0^2). \end{aligned}$$

Итак, момент инерции полого цилиндра массой M равен

$$J_z = \frac{1}{2} M(R^2 + R_0^2). \quad (23.34)$$

3°. Моменты инерции однородного тела вращения. Примем ось вращения за ось Oz и будем пользоваться цилиндрическими координатами r , z , φ . Сечение тела плоскостью меридиана, т. е. плоскостью, проходящей через ось вращения, ограничено

кривой C (рис. 294); пусть уравнение этой кривой на участке $N_1N'N_2$

$$r' = f_1(z),$$

а на участке $N_2N''N_1$

$$r'' = f_2(z).$$

Момент инерции тела относительно оси Oz равен (M — масса тела, τ — его объем)

$$J_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm = \delta \int_{(\tau)} r^2 d\tau;$$

в цилиндрических координатах элемент объема $d\tau$ равен

$$d\tau = r dr d\varphi dz.$$

Получаем

$$J_z = \delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{r'}^{r''} r^3 dr = \delta \frac{\pi}{2} \int_{z_1}^{z_2} \{[f_2(z)]^4 - [f_1(z)]^4\} dz.$$

Если известна масса тела M , то, замечая, что $\delta = M/\tau$ и

$$\tau = \int_{(\tau)} d\tau = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{r'}^{r''} r dr = \pi \int_{z_1}^{z_2} \{[f_2(z)]^2 - [f_1(z)]^2\} dz,$$

получаем

$$J_z = \frac{1}{2} M \frac{\int_{z_1}^{z_2} \{[f_2(z)]^4 - [f_1(z)]^4\} dz}{\int_{z_1}^{z_2} \{[f_2(z)]^2 - [f_1(z)]^2\} dz}. \quad (23.35)$$

Для вычисления моментов инерции относительно осей Ox и Oy , перпендикулярных оси вращения, заметим, что для тела вращения

$$\int_{(M)} x^2 dm = \int_{(M)} y^2 dm = \frac{1}{2} \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm = \frac{1}{2} J_z,$$

так как расположения масс относительно осей Ox и Oy не отличаются друг от друга. Получаем

$$J_x = J_y = \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm = \int_{(M)} (z^2 + x^2) dm = \int_{(M)} z^2 dm + \frac{1}{2} J_z.$$

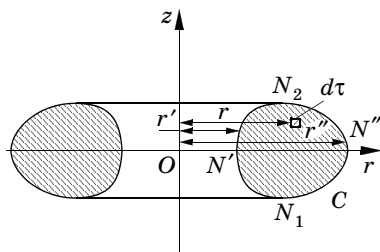


Рис. 294

Остается вычислить интеграл

$$\int_{(M)} z^2 dm = \pi\delta \int_{z_1}^{z_2} z^2 \{[f_2(z)]^2 - [f_1(z)]^2\} dz.$$

Подставляя вместо плотности δ ее значение, находим момент инерции относительно осей Ox и Oy :

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_z + M \frac{\int_{z_1}^{z_2} z^2 \{[f_2(z)]^2 - [f_1(z)]^2\} dz}{\int_{z_1}^{z_2} \{[f_2(z)]^2 - [f_1(z)]^2\} dz}. \quad (23.36)$$

Для тела вращения момент инерции J_z относительно оси вращения называют *аксиальным моментом инерции*, а момент инерции относительно оси, перпендикулярной оси вращения и проходящей через центр тяжести тела, — *экваториальным моментом инерции*.

Применим формулу (23.35) к случаю *конуса*. Имеем (рис. 295)

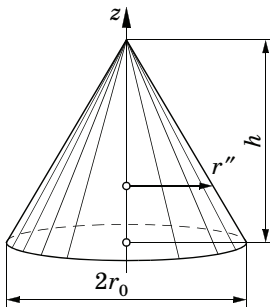


Рис. 295

$$r' = 0, \quad r'' = f_2(z) = r_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right),$$

$$z_1 = 0, \quad z_2 = h,$$

и вычисление по формуле (23.35) дает

$$J_z = \frac{M}{2} \frac{\int_0^h r_0^4 (1 - z/h)^4 dz}{\int_0^h r_0^2 (1 - z/h)^2 dz} = 0,3Mr_0^2.$$

Располагая оси Ox и Oy в плоскости основания конуса, по (23.36) также найдем

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_z + M \frac{\int_0^h r_0^2 (1 - z/h)^2 z^2 dz}{\int_0^h r_0^2 (1 - z/h)^2 dz} = 0,15Mr_0^2 + 0,1Mh^2.$$

Рассмотрим случай *шара* (рис. 296). Применение формулы (23.35) привело бы к излишне сложному вычислению; поэтому воспользуемся следующим приемом. Вследствие симметрии имеем

$$\int_{(M)} x^2 dm = \int_{(M)} y^2 dm = \int_{(M)} z^2 dm,$$

и, следовательно,

$$\int_{(M)} (x^2 + y^2) dm = \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm = \int_{(M)} (z^2 + x^2) dm = \frac{2}{3} J_0,$$

где J_0 — *полярный момент инерции*

$$J_0 = \int_{(M)} (x^2 + y^2 + z^2) dm = \int_{(M)} r^2 dm.$$

За dm можно принять элементарную массу, заключенную между двумя концентрическими сферами радиусами r и $r + dr$:

$$dm = \frac{M}{\tau} 4\pi r^2 dr = \frac{3M}{R^3} r^2 dr,$$

где M — масса, R — радиус шара. Получаем

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2M}{R^3} \int_0^R r^4 dm = \frac{2}{5} MR^2.$$

Для *полого шара* с внутренним R_0 и внешним R радиусами получаем аналогично

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} M \frac{R^5 - R_0^5}{R^3 - R_0^3}.$$

Момент инерции однородного *цилиндра* или *призмы произвольного поперечного сечения* относительно оси Oz , параллельной образующим цилиндра (призмы) и перпендикулярной его основаниям, не зависит от высоты цилиндра h . Действительно, в этом случае выражение элемента массой dm имеет вид

$$dm = \frac{M}{\tau} dx dy dz = \frac{M}{Sh} dz dx dy;$$

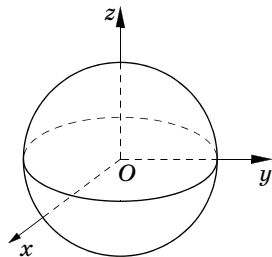


Рис. 296

здесь S — площадь поперечного сечения тела. Поэтому

$$J_z = \frac{M}{Sh} \int_0^h dz \int_{(S)} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Величина

$$\int_{(S)} (x^2 + y^2) dx dy = J_S,$$

не зависящая от z , представляет собой *полярный момент инерции площади поперечного сечения* цилиндра (призмы), причем полюсом является точка пересечения оси Oz с плоскостью сечения. Эта величина имеет размерность четвертой степени длины. Итак,

$$J_z = \frac{M}{Sh} J_S \int_0^h dz = \frac{M}{S} J_S = M \rho_S^2, \quad (23.37)$$

где ρ_S — *полярный радиус инерции сечения*. Величина h не входит в выражение (23.37), что и доказывает сказанное.

Например, в случае прямоугольного параллелепипеда со сторонами a , b , h момент инерции относительно оси z , проходящей через центр основания параллельно ребру h , равен по (23.37)

$$J_z = \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} (x^2 + y^2) dy = \frac{M}{12} (a^2 + b^2).$$

В табл. 5 приведены моменты инерции некоторых тел. Более подробные таблицы можно найти в справочных изданиях.

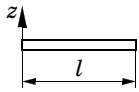
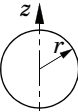
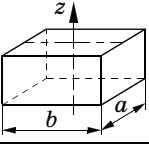
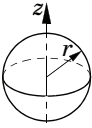
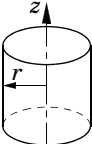
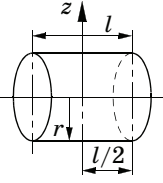
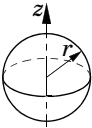
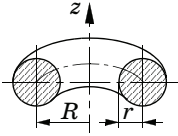
Докажем теорему о моментах инерции относительно параллельных осей (теорему Гюйгенса — Штейнера).

ТЕОРЕМА ГЮЙГЕНСА — ШТЕЙНЕРА. *Момент инерции тела относительно некоторой оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.*

ШТЕЙНЕР ЯКОБ (*Steiner Jacob, 1796—1863*) — швейцарский математик, чл. Берлинской АН (1834); о Гюйгенсе см. т. I, с. 393.

Таблица 5

Моменты инерции однородных тел

Форма тела	Схематическое изображение	Момент инерции J	Радиус инерции ρ
Стержень весьма малого поперечного сечения		$\frac{Ml^2}{3}$	$\frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577l$
Круглая пластинка весьма малой толщины		$\frac{Mr^2}{4}$	$0,5r$
Прямоугольный параллелепипед (относительно оси симметрии)		$M \frac{a^2 + b^2}{12}$	$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2\sqrt{3}} = 0,289\sqrt{a^2 + b^2}$
Полый шар со стенкой весьма малой толщины		$\frac{2}{3} Mr^2$	$\sqrt{\frac{2}{3}} r = 0,816r$
Круглый диск и круговой цилиндр (относительно оси)		$\frac{Mr^2}{2}$	$\frac{r}{\sqrt{2}} = 0,707r$
Круговой цилиндр (относительно поперечной оси)		$\frac{M}{12} (l^2 + 3r^2)$	$\sqrt{\frac{l^2 + 3r^2}{12}}$
Шар		$\frac{2}{5} Mr^2$	$0,632r$
Тор		$M \left(R^2 + \frac{3r^2}{4} \right)$	$0,5 \sqrt{4R^2 + 3r^2}$

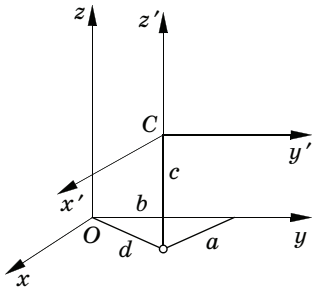


Рис. 297

Введем две системы осей: $Oxyz$ и $Cx'y'z'$, причем вторая система имеет начало в центре масс C тела, а оси ее параллельны соответствующим осям первой системы. Через a, b, c обозначим координаты центра инерции C в системе осей $Oxyz$; тогда (рис. 297)

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

будет расстоянием между осями Oz и Cz' . Координаты точки M_i в рассматриваемых системах осей связаны соотношениями

$$x_i = x'_i + a, \quad y_i = y'_i + b, \quad z_i = z'_i + c.$$

По определению момента инерции имеем

$$\begin{aligned} J_z &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_{i=1}^n m_i [(x'_i + a)^2 + (y'_i + b)^2] = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + (a^2 + b^2) \sum_{i=1}^n m_i + 2a \sum_{i=1}^n m_i x'_i + 2b \sum_{i=1}^n m_i y'_i. \end{aligned}$$

Остается заметить, что

$$\sum_{i=1}^n m_i x'_i = M x'_C = 0, \quad \sum_{i=1}^n m_i y'_i = M y'_C = 0,$$

так как началом системы осей $Cx'y'z'$ является центр масс тела. Обозначив далее

$$\sum_{i=1}^n m_i = M, \quad \sum_{i=1}^n m_i (x_i'^2 + y_i'^2) = J_{z'},$$

где M — масса тела, $J_{z'}$ — его момент инерции относительно оси Cz' , придем к требуемому соотношению

$$J_z = J_{z'} + Md^2. \quad (23.38)$$

Очевидным следствием доказанной теоремы является то, что момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела, меньше момента инерции относительно любой другой параллельной оси.

В качестве примера найдем момент инерции однородного прямоугольного параллелепипеда относительно его ребра. Имеем в этом случае

$$J_{z'} = \frac{M}{12} (a^2 + b^2), \quad d^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2)$$

и по формуле (23.38) получим

$$J_z = \frac{M}{3} (a^2 + b^2).$$

Более подробные сведения о моментах инерции будут приведены в гл. XXVI.

§ 116. Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Приложенные к телу заданные внешние силы обозначим через F_1, F_2, \dots, F_n (рис. 298). Кроме этих сил, к числу внешних принадлежат также реакции N_1 и N_2 закрепленных точек O_1 и O_2 ; моменты этих реакций относительно оси вращения равны нулю. Поэтому в правую часть уравнения моментов количества движения относительно оси Oz войдут только моменты заданных сил F_i . Подставив в последнее из уравнений (23.21) вместо K_z выражение (23.29), получим ($\tilde{\epsilon} = \dot{\dot{\omega}}$ — угловое ускорение тела) *дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси*

$$J_z \tilde{\epsilon} = J_z \dot{\dot{\omega}} = J_z \ddot{\phi} = m_z = \sum_{i=1}^n m_z(F_i). \quad (23.39)$$

Оно представляет полную аналогию с дифференциальным уравнением прямолинейного движения точки

$$m \ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_{ix}. \quad (23.40)$$

Из сопоставления этих уравнений видно, что момент инерции в уравнении (23.39) вращательного движения твердого тела играет ту же роль, что масса в уравнении (23.40) прямолинейного движения материальной точки.

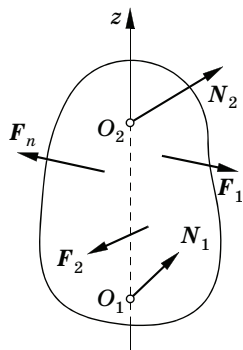


Рис. 298

Таким образом, момент инерции характеризует инертность тела при вращательном движении.

Выводы и предложения, относящиеся к прямолинейному движению точки (и поступательному прямолинейному движению тела), могут быть перенесены на случай твердого тела, вращающегося вокруг оси, если заменить термины в соответствии с таблицей.

Прямолинейное движение	Вращение вокруг оси
Абсцисса	Угол поворота
Скорость	Угловая скорость
Ускорение	Угловое ускорение
Масса	Момент инерции
Сила	Момент силы

Эта аналогия представляет собой частный случай так называемых обобщенных координат, скоростей, ускорений и др. (см далее § 142).

Допустим теперь, что

$$\sum_{i=1}^n m_z(\mathbf{F}_i) = 0;$$

из (23.39) находим $\dot{\omega} = \text{const}$. Иными словами, вращение тела с постоянной угловой скоростью (*по инерции*) имеет место в том случае, когда главный момент относительно оси вращения всех сил, приложенных к телу, равен нулю. Так, при равномерном вращении вала машины моменты движущих сил и сил сопротивления равны по величине. Если первый момент превосходит по величине второй, то угловая скорость машины возрастает; обратное имеет место, когда момент движущих сил меньше момента сил сопротивления, и машина замедляет ход. Вращение с постоянным угловым ускорением возможно, если вращающий момент

$$m_z = \sum_{i=1}^n m_z(\mathbf{F}_i) \quad (23.41)$$

имеет постоянное значение.

Имея в виду указанную аналогию между движением твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и прямолинейным движением материальной точки, не будем останавливаться на примерах, относящихся к первой задаче динамики и покажем несколько примеров решения второй задачи динамики, относящейся к вращению твердого тела вокруг неподвижной оси.

Будем искать закон вращения твердого тела при действии заданного вращающего момента и начнем с простейшей задачи определения времени T_a , по истечении которого твердое тело, находящееся в состоянии покоя, приобретает под действием постоянного вращающего момента $m_z^{(0)}$ заданную угловую скорость $\tilde{\omega}_0$.

Из дифференциального уравнения вращения

$$J_z \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = m_z^{(0)}$$

непосредственно получаем

$$J_z \tilde{\omega} = m_z^{(0)} t,$$

и, следовательно,

$$T_a = \frac{J_z \tilde{\omega}_0}{m_z^{(0)}}. \quad (23.42)$$

Примем $\tilde{\omega}_0$ за угловую скорость вращения тела в некотором режиме и назовем ее *номинальной угловой скоростью*; T_a будет *временем разгона** до номинальной угловой скорости при действии постоянного вращающего момента $m_z^{(0)}$. В общем случае действия на тело какого угодно вращающего момента m_z дифференциальное уравнение вращения

$$J_z \dot{\tilde{\omega}} = m_z$$

бывает удобно выразить в безразмерных величинах. Для этого вводят в рассмотрение относительную угловую скорость

$$\psi = \frac{\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0}{\tilde{\omega}_0}, \quad (23.43)$$

представляющую собой отклонение угловой скорости от номинального значения, выраженное в долях последнего; обозначим через μ относительное значение вращающего момента:

$$\mu = \frac{m_z}{m_z^{(0)}}. \quad (23.44)$$

Дифференциальное уравнение вращения примет вид

$$T_a \dot{\psi} = \mu; \quad (23.45)$$

* Термин, принятый в теории регулирования машин.

здесь время разгона T_a вычислено для принятых значений номинальной угловой скорости $\tilde{\omega}_0$ и вращающего момента $m_z^{(0)}$.

Пример 99. Маховое колесо приводится во вращение электромотором постоянного тока, зависимость вращающего момента которого от угловой скорости дается соотношением

$$M = M_0 \left(1 - \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_1} \right),$$

в котором M_0 — вращающий момент при $\tilde{\omega} = 0$, $\tilde{\omega}_1$ — угловая скорость холостого хода (при $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1$ вращающий момент $M = 0$ и электромотор не совершает полезной работы). Принимая момент трения в подшипниках $M_{\text{тр}}$ известным, найти закон изменения угловой скорости колеса.

Главный момент всех сил относительно оси вращения маховика будет

$$m_z = M_0 \left(1 - \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_1} \right) - M_{\text{тр}} = M_0 - M_{\text{тр}} - M_0 \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_1}.$$

За номинальное значение $\tilde{\omega}_0$ угловой скорости примем значение $\tilde{\omega}$, обращающее выражение m_z в нуль, т. е.

$$\tilde{\omega}_0 = \tilde{\omega}_1 \frac{M_0 - M_{\text{тр}}}{M_0}.$$

Тогда по (23.43) будем иметь

$$m_z = (M_0 - M_{\text{тр}}) \left(1 - \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_0} \right) = -(M_0 - M_{\text{тр}})\psi.$$

Полагая $m_z^{(0)} = M_0 - M_{\text{тр}}$, получаем по (23.44) $\mu = -\psi$, и уравнение вращения в безразмерной форме (23.45) принимает вид

$$T_a \dot{\psi} = -\psi. \quad (23.46)$$

Его решением будет

$$\psi = C e^{-t/T_a}.$$

Начальное значение угловой скорости $\tilde{\omega}$ примем равным нулю, тогда по (23.43) $\psi = -1$ при $t = 0$, и мы получаем

$$\psi = -e^{-t/T_a},$$

причем время разгона определяется по (23.42) и будет равно

$$T_a = \frac{J_z \tilde{\omega}_0}{m_z^{(0)}} = J_z \frac{\tilde{\omega}_1}{M_0}.$$

Время разгона T_a в рассматриваемой задаче представляет промежуток времени, по истечении которого

$$\psi = -1/e, \quad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0(1 - e^{-1}) = 0,632\tilde{\omega}_0.$$

Угловая скорость тела по истечении времени T_a станет приблизительно равной 63% от ее номинального значения.

При $t \rightarrow \infty$ имеем $\psi \rightarrow 0$, т. е. угловая скорость приближается к номинальному значению $\tilde{\omega}_0$, определенному выше.

Пример 100. Разгон электрического двигателя постоянного тока. Вращающий момент электрического двигателя постоянного тока представляется формулой

$$M = C_M \Phi i_{\text{я}},$$

где $i_{\text{я}}$ — величина тока в якоре двигателя, Φ — магнитный поток, C_M — постоянная величина. Обозначая через $M_{\text{тр}}$ момент сопротивления на валу якоря и через J_z его момент инерции относительно оси вращения, можем написать уравнение вращения якоря в форме

$$J_z \dot{\omega} = M - M_{\text{тр}} = C_M \Phi i_{\text{я}} - M_{\text{тр}}. \quad (23.47)$$

К зажимам двигателя подведено напряжение e ; уравнение электрической цепи якоря может быть записано в форме

$$e = L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + R_{\text{я}} i_{\text{я}} + C_e \Phi \tilde{\omega}, \quad (23.48)$$

выражающей, что внешнее напряжение e затрачивается на преодоление электродвижущей силы самоиндукции $L_{\text{я}} di_{\text{я}}/dt$, омических потерь $R_{\text{я}} i_{\text{я}}$ и обратной электродвижущей силы $C_e \Phi \tilde{\omega}$. Через $L_{\text{я}}$, $R_{\text{я}}$, C_e обозначены соответственно самоиндукция, омическое сопротивление цепи якоря и постоянный коэффициент пропорциональности в выражении обратной электродвижущей силы. В дальнейшем будем считать, что магнитный поток Φ и внешняя электродвижущая сила e сохраняют постоянные значения.

Рассмотрим сначала установившийся режим работы двигателя, в котором угловая скорость и величина тока в цепи якоря имеют постоянные значения $\tilde{\omega}_0$ и $i_{\text{я}}^0$ и приведенные выше уравнения принимают вид

$$C_M \Phi i_{\text{я}}^0 - M_{\text{тр}} = 0, \quad e = R_{\text{я}} i_{\text{я}}^0 + C_e \Phi \tilde{\omega}_0. \quad (23.49)$$

Введем в рассмотрение безразмерные величины — ср. (23.43) —

$$\psi = \frac{\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0}{\tilde{\omega}_0}, \quad \xi = \frac{i_{\text{я}} - i_{\text{я}}^0}{i_{\text{я}}^0}.$$

Тогда, заметив, что

$$\dot{\omega} = \tilde{\omega}_0 \dot{\psi}, \quad \frac{di_{\text{я}}}{dt} = i_{\text{я}}^0 \dot{\xi}, \quad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0(1 + \psi), \quad i_{\text{я}} = i_{\text{я}}^0(1 + \xi),$$

перепишем уравнения (23.47) и (23.48) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_0 J_z \dot{\psi} &= C_M \Phi i_{\text{я}}^0 (1 + \xi) - M_{\text{тр}}, \\ L_{\text{я}} i_{\text{я}}^0 \dot{\xi} + R_{\text{я}} i_{\text{я}}^0 (1 + \xi) + C_e \Phi \tilde{\omega}_0 (1 + \psi) &= e. \end{aligned}$$

Свободные члены (не содержащие ψ , ξ и их производных) сокращаются на основании уравнений (23.49), с помощью которых был определен установившийся режим. Получаем однородную систему двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_0 J_z \dot{\psi} &= C_M \Phi i_{я}^0 \xi, \\ L_{я} i_{я}^0 \dot{\xi} + R_{я} i_{я}^0 \xi + C_e \Phi \tilde{\omega}_0 \psi &= 0.\end{aligned}\tag{23.50}$$

Исключим из этих уравнений ξ , для чего продифференцируем первое уравнение по времени и подставим в него значение $\dot{\xi}$ из второго уравнения; тогда получим

$$\tilde{\omega}_0 J_z L_{я} \ddot{\psi} = -C_M \Phi (R_{я} i_{я}^0 \xi + C_e \Phi \tilde{\omega}_0 \psi).$$

Заменив в этом соотношении ξ его значением из первого уравнения (23.41), будем иметь

$$\tilde{\omega}_0 J_z L_{я} \ddot{\psi} = -C_e C_M \Phi^2 \tilde{\omega}_0 \psi - R_{я} \tilde{\omega}_0 J_z \psi.\tag{23.51}$$

Введем теперь обозначения

$$T_{я} = \frac{L_{я}}{R_{я}}, \quad \frac{J_z R_{я}}{C_e C_M \Phi^2} = T_a,\tag{23.52}$$

при которых уравнение (23.51) примет вид

$$\ddot{\psi} + \frac{\dot{\psi}}{T_{я}} + \frac{\psi}{T_a T_{я}} = 0.\tag{23.53}$$

Постоянные T_a и $T_{я}$ имеют размерность времени. Чтобы выяснить их смысл, предположим, что двигатель заторможен, т. е. $\tilde{\omega}_0 = 0$. Из второго уравнения (23.50) получим

$$T_{я} \dot{\xi} + \xi = 0,$$

и сравнение с уравнением (23.46) позволяет заключить, что $T_{я}$ является постоянной времени (*временем разгона*) электрической цепи якоря.

Примем, что можно пренебречь индуктивностью $L_{я}$ цепи якоря; тогда $T_{я} = 0$, и уравнение (23.53) будет

$$\dot{\psi} + \frac{\psi}{T_a} = 0,$$

т. е. T_a представляет собой время разгона электродвигателя при пренебрежении индуктивностью электрической цепи якоря.

Интегрирование уравнения вида (23.53) рассмотрено в § 98, характер движения существенно зависит от соотношений между постоянными времени T_a и $T_{я}$. Остановимся на предположении, что

$$T_a > 4T_{я}.$$

Тогда общее решение будет иметь вид

$$\psi = e^{-nt}(C_1 \operatorname{ch} \sqrt{n^2 - k^2} t + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{n^2 - k^2} t), \quad (23.54)$$

где $2n = 1/T_{\text{я}}$, $k^2 = 1/(T_a T_{\text{я}})$. Угловая скорость якоря будет изменяться *апериодически*.

Если же соблюдается неравенство противоположного знака

$$T_a < 4T_{\text{я}},$$

то угловая скорость изменяется по закону *затухающих* колебаний. В том и в другом случае при $t \rightarrow \infty$ имеем $\psi \rightarrow 0$ и $\dot{\psi} \rightarrow 0$, т. е. по первому уравнению (23.50) и определению величин ψ и ξ

$$\tilde{\omega} \rightarrow \tilde{\omega}_0, \quad i_{\text{я}} \rightarrow i_{\text{я}}^0.$$

Таким образом, установившийся режим теоретически наступает по истечении большого промежутка времени от начала движения, каковы бы ни были начальные условия. Практически состояние электродвигателя будет уже мало отличаться от установившегося по истечении конечного промежутка времени, тем меньшего, чем меньше $T_{\text{я}}$.

Пример 101. Определение момента инерции по способу крутильных колебаний. Испытуемое тело подвешивается в центре масс C на проволоке к неподвижной точке O (рис. 299). Проволока закручивается на некоторый угол, после чего тело предоставляется самому себе. Предполагая, что тело будет совершать крутильные колебания вокруг оси OA проволоки, составить дифференциальное уравнение вращения тела.

Момент силы тяжести относительно оси вращения равен нулю, так как эта ось вертикальна. Моментом сил сопротивления воздуха, а также сил сопротивления, возникающих в материале проволоки при колебаниях, пренебрегаем. Не учитываем также массы проволоки. Момент упругих сил проволоки, пропорциональный углу ее закручивания, принимается равным $(-c\varphi)$, причем коэффициент пропорциональности c зависит от размеров проволоки и упругих свойств ее материала.

Обозначая через J момент инерции тела относительно оси OA , получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$J\ddot{\varphi} = -c\varphi, \quad (23.55)$$

и выражение периода колебаний будет

$$T = 2\pi \sqrt{J/c}.$$

Для определения постоянной c находят период крутильных колебаний T_0 на той же проволоке эталонного тела с известным моментом инерции J_0 относительно оси OA . Имеем

$$T_0 = 2\pi \sqrt{J_0/c}.$$

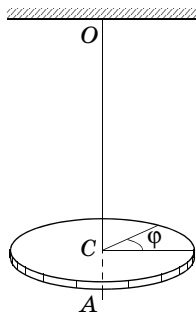


Рис. 299

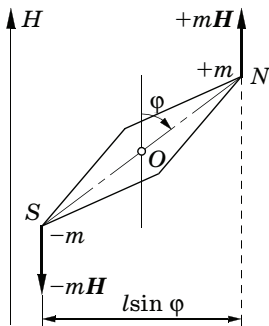


Рис. 300

Таким образом,

$$J = J_0 \frac{T^2}{T_0^2}.$$

Пример 102. Колебания магнитной стрелки в однородном магнитном поле. Поместим в однородное магнитное поле элементарный магнитный диполь, т. е. воображаемый магнит, магнитные массы которого $+m$ и $-m$ сосредоточены в его концах, отстоящих друг от друга на расстояние l (рис. 300); пусть ось магнита составляет угол φ с направлением магнитного поля. Если обозначить через H напряженность поля, т. е. силу, действующую на единицу положительной магнитной массы, помещенной в магнитное поле, то к концам элементарного магнита будут приложены равные и противоположно направленные силы mH и $-mH$. Эти силы образуют пару, момент которой по величине равен

$$mlH \sin \varphi = MH \sin \varphi.$$

Произведение $ml = M$ называется *магнитным моментом* диполя. Приведенная формула имеет место и для всякого физического магнита, если под M понимать магнитный момент этого магнита, т. е. сумму моментов элементарных магнитных диполей, на которые можно мысленно разложить физический магнит.

Допустим теперь, что магнит, помещенный в магнитное поле Земли, может вращаться вокруг вертикальной оси Oz , проходящей через центр тяжести магнита. Сила H будет в этом случае горизонтальной составляющей магнитного поля Земли, ее направление определит магнитный меридиан в данном месте, и угол φ будет отсчитываться теперь от плоскости этого меридиана.

Обозначим через J_z момент инерции магнита относительно оси вращения. Дифференциальное уравнение вращения магнита будет

$$J_z \ddot{\varphi} = -MH \sin \varphi;$$

оно отличается от уравнения колебаний математического маятника (23.12) только заменой постоянной g/l на MH/J_z . Поэтому период малых колебаний магнита определится формулой (23.15):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{MH}}.$$

Момент инерции J_z не может быть с достаточной точностью определен путем вычисления вследствие неоднородностей материала магнита. Поэтому J_z находят опытным путем. Для этого определяют сначала период T_1 малых колебаний магнита, а затем, присоединив к магниту

эталонное тело правильной геометрической формы с известным моментом инерции $J_z^{(0)}$ относительно оси вращения, находят новый период колебаний T_2 . Имеем в первом и втором случаях

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2 J_z}{MH}, \quad T_2^2 = \frac{4\pi^2 (J_z + J_z^{(0)})}{MH},$$

откуда следует

$$J_z = \frac{J_z^{(0)}}{(T_2/T_1)^2 - 1}.$$

§ 117. Малые колебания физического маятника

Физический маятник представляет собой тяжелое твердое тело произвольной формы, имеющее неподвижную горизонтальную ось вращения; эта ось называется осью подвеса маятника.

Пусть плоскость чертежа (рис. 301) представляет вертикальную плоскость, перпендикулярную оси подвеса и проходящую через центр тяжести C тела. Расстояние OC от центра тяжести до оси подвеса обозначим через s , угол между OC и вертикалью Ox — через φ . Радиус инерции тела относительно оси, параллельной оси подвеса и проходящей через центр масс C , обозначим через ρ ; тогда момент инерции относительно оси подвеса, согласно (23.38), будет

$$J = m(\rho^2 + s^2).$$

Если пренебречь силами сопротивления воздуха и моментом трения в оси, то внешними силами, приложенными к телу, будут реакция оси и сила тяжести G . Однако момент реакции относительно оси подвеса равен нулю, момент же силы тяжести равен $-Gs \sin \varphi$. Дифференциальное уравнение вращения тела принимает вид

$$\ddot{\varphi} = -\frac{gs}{\rho^2 + s^2} \sin \varphi.$$

В уравнение колебаний математического маятника вместо $gs/(\rho^2 + s^2)$ входило g/l . Поэтому длина l эквивалентного по

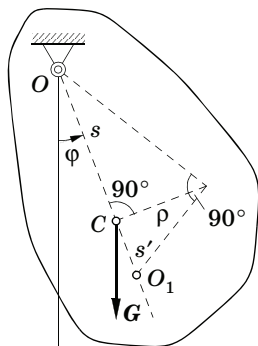


Рис. 301

периоду математического маятника — *приведенная длина физического маятника* — будет

$$l = \frac{\rho^2 + s^2}{s}. \quad (23.56)$$

Период малых колебаний определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho^2 + s^2}{s}}. \quad (23.57)$$

Вдоль OC отложим от оси подвеса отрезок $OO_1 = l$. Прямая, проходящая через конец O_1 этого отрезка параллельно оси подвеса, называется *осью качаний* физического маятника.

Отметим свойство *взаимности* этих двух осей. Для вывода его перепишем уравнение (23.56) в виде

$$s^2 - ls + \rho^2 = 0.$$

Обозначая корни этого квадратного уравнения через s и s' , будем иметь

$$s + s' = l, \quad ss' = \rho^2. \quad (23.58)$$

Величины s и s' входят в эти соотношения симметрично. Поэтому данную длину l эквивалентного математического маятника, или, что то же, данный период колебаний T можно получить, поместив ось подвеса на расстоянии s или на расстоянии s' от центра тяжести тела; в первом случае ось качаний будет находиться на расстоянии $s' = l - s$, а во втором — на расстоянии $s = l - s'$ от центра тяжести. Иными словами, ось качаний станет во втором случае осью подвеса, а ось подвеса — осью качаний. Это свойство физического маятника используется в *оборотном* маятнике, служащем для определения ускорения силы тяжести g . Построение отрезка s' по известным s и ρ показано на рис. 301.

Теория физического маятника является исторически *первой разрешенной задачей динамики системы*. Интерес к этой задаче возник в связи с вопросом об усовершенствовании часов. Создание теории физического маятника на заре развития динамики принадлежит Гюйгенсу (1629—1695).

По экспериментально определенному периоду малых колебаний физического маятника можно вычислить его момент инерции относительно оси подвеса; этим пользуются при экспериментальном определении моментов инерции тел. Зная расстояние от оси подвеса до центра тяжести тела, найдем момент инерции J_{z_C} тела относительно оси, параллельной оси подвеса и проходящей

через центр тяжести C . Вычисление проводится по формуле (23.57), из которой по известным T и s находим ρ^2 , а потом J_{z_C} :

$$J_{z_C} = m\rho^2 = mgs \left(\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{s}{g} \right).$$

§ 118. Влияние внешних ударов на главный момент количеств движения системы

Пусть на систему материальных точек начинают в момент времени t_0 действовать мгновенные силы, прекращающие свое действие в момент $t_0 + \tau = t$, где τ — весьма малый промежуток времени. Результатом действия мгновенных сил будет, как известно, резкое изменение скоростей точек системы, а следовательно, и ее главного момента количеств движения.

В течение короткого промежутка времени τ действия мгновенных сил следует пренебречь действием всех прочих сил, кроме мгновенных; поэтому, записывая равенства (23.19) и (23.20) для этого промежутка времени, будем под внешними силами F_i подразумевать только мгновенные силы, а под $m_O(F_i) = r_i \times F_i$ — моменты этих сил.

Из уравнения (23.19) получаем

$$dK = \sum_{i=1}^n r_i \times F_i dt, \quad (23.59)$$

или, интегрируя в пределах от t_0 до t ,

$$K - K_0 = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t r_i \times F_i dt,$$

где K и K_0 — значения главного момента количеств движения в моменты t и t_0 . Вспоминая, что за время действия мгновенных сил можно пренебречь перемещениями точек системы, иными словами, что векторы-радиусы r_i можно при интегрировании считать постоянными, получаем

$$\int_{t_0}^t r_i \times F_i dt = r_i \times \int_{t_0}^t F_i dt = r_i \times S_i,$$

где $S_i = \int_{t_0}^t F_i dt$ — импульс мгновенной силы F_i . Таким образом, будем иметь

$$K - K_0 = \sum_{i=1}^n r_i \times S_i = \sum_{i=1}^n m_O(S_i). \quad (23.60)$$

Векторное выражение главного момента количества движения системы за время удара равно векторной сумме моментов импульсов всех внешних мгновенных сил (ударов).

Если, в частности, речь идет о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси, то, проецируя уравнение (23.60) на ось вращения (ось Oz), получаем

$$J_z(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) = \sum_{i=1}^n m_z(S_i), \quad (23.61)$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси вращения Oz , $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}_0$ — угловые скорости его в моменты t и t_0 ; в правой части уравнения стоит сумма моментов импульсов внешних мгновенных сил относительно оси Oz ; отметим, что к числу таких сил принадлежат и мгновенные силы реакций в подшипниках, появляющиеся вследствие действия мгновенных сил; в уравнение (23.61) импульсы этих реакций не входят, так как их моменты относительно оси вращения равны нулю.

Пример 103. Два шкива вращаются в одной плоскости вокруг своих осей с угловыми скоростями $\tilde{\omega}_{10}$ и $\tilde{\omega}_{20}$ (рис. 302). Определить угловые скорости $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_2$ после того, как на шкивы будет накинута ремень. Радиусы шкивов равны соответственно R_1 и R_2 ; их моменты инерции — J_1 и J_2 . Скольжением ремня пренебрегаем.

Применяя формулу (23.60) к вращению первого шкива, имеем

$$J_1(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_{10}) = SR_1,$$

где S — импульс мгновенной силы натяжения ремня (помимо этого импульса, к шкиву приложен импульс мгновенной реакции оси; его момент относительно оси вращения равен нулю). Для второго шкива получим

$$J_2(\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_{20}) = -SR_2,$$

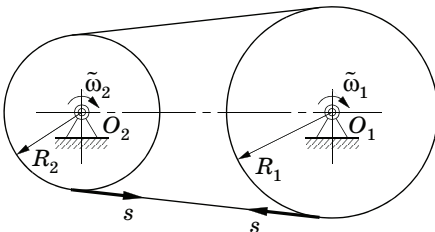


Рис. 302

и так как скольжение ремня отсутствует, то

$$\tilde{\omega}_1 R_1 = \tilde{\omega}_2 R_2.$$

Таким образом,

$$\frac{\tilde{\omega}_2}{R_1} = \frac{\tilde{\omega}_1}{R_2} = \frac{J_1 R_2 \tilde{\omega}_{10} + J_2 R_1 \tilde{\omega}_{20}}{J_1 R_2^2 + J_2 R_1^2},$$

откуда находятся $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_2$.

**§ 119. Главный момент количеств движения
в неподвижной и в движущейся системах отсчета**

В выражение главного момента количеств движения

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \tag{23.62}$$

входят величины, определяющие абсолютное движение точек системы, т. е. векторы-радиусы \mathbf{r}_i и скорости \mathbf{v}_i относительно неподвижной (или любой инерциальной) системы отсчета $Oxyz$, по отношению к началу O которой вычислен вектор \mathbf{K} .

Введем наряду с абсолютной системой $Oxyz$ движущуюся систему $O'x'y'z'$; вектор-радиус начала O' этой системы относительно начала O неподвижной системы обозначим через \mathbf{r}_0 , скорость точки O' — через $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0$; угловую скорость системы $O'x'y'z'$ обозначим через $\boldsymbol{\omega}^*$.

Пусть \mathbf{r}'_i — вектор-радиус некоторой точки M_i по отношению к O' . Тогда

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_i \tag{23.63}$$

и после подстановки в (23.62) выражение \mathbf{K} разобьется на два слагаемых:

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_0 \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i. \tag{23.64}$$

В первом члене вектор \mathbf{r}_0 , одинаковый для всех слагаемых, стоящих под знаком суммы, вынесен за знак этой суммы. Вспоминая определение главного вектора количеств движения

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{v}_C, \tag{23.65}$$

здесь \mathbf{v}_C — скорость центра масс, $M = \sum_{i=1}^n m_i$ — масса системы, получаем

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{Q} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i. \tag{23.66}$$

По теореме о сложении скоростей абсолютная скорость \mathbf{v}_i точки M_i определяется соотношением

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^{(r)} + \mathbf{v}_i^{(e)} = \mathbf{v}_i^{(r)} + \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{r}'_i, \tag{23.67}$$

где $\mathbf{v}_i^{(r)}$ — относительная скорость этой точки, т. е. ее скорость в подвижной системе $Ox'y'z'$, а $\mathbf{v}_i^{(e)}$ — переносная скорость, т. е.

скорость точки системы $O'x'y'z'$ с вектором-радиусом r'_i . Как указано в формуле (23.67), переносная скорость складывается из двух слагаемых: скорости v_0 начала O' подвижной системы и вращательной скорости $\omega^* \times r'_i$. Остается подставить выражение скорости (23.67) во второе слагаемое правой части (23.66).

Рассмотрим частный случай, когда начало O' подвижной системы осей помещено в центр масс исследуемой системы материальных точек, а подвижная система движется поступательно, т. е. $\omega^* = 0$. Тогда

$$r_0 = r_C, \quad v_i^{(e)} = v_0 = v_C, \quad v_i = v_i^{(r)} + v_C \quad (23.68)$$

и подстановка в (23.66) дает

$$K = r_C \times Q + \sum_{i=1}^n r'_i \times m_i v_i^{(r)} + \left(\sum_{i=1}^n m_i r'_i \right) \times v_C. \quad (23.69)$$

В этом случае последнее слагаемое в правой части равенства (23.69) будет равно нулю. Это следует из определения центра масс. В самом деле, согласно этому определению и соотношению (23.63) имеем

$$Mr_C = \sum_{i=1}^n m_i r_i = \sum_{i=1}^n m_i (r_0 + r'_i) = r_0 M + \sum_{i=1}^n m_i r'_i,$$

так что

$$\sum_{i=1}^n m_i r'_i = M(r_C - r_0) = Mr'_i, \quad (23.70)$$

где r'_C — вектор-радиус центра масс относительно начала подвижной системы $O'x'y'z'$. Но, по предположению, $r_C = r_0$, т. е. $r'_C = 0$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^n m_i r'_i = 0.$$

Введем еще обозначение

$$K' = \sum_{i=1}^n r'_i \times m_i v_i^{(r)}. \quad (23.71)$$

Этот вектор представляет собой главный момент количеств движения системы материальных точек в их относительном движении в подвижной системе $O'x'y'z'$, вычисленный относительно начала O' этой системы. По (23.69) получаем

$$K = r_C \times Q + K'. \quad (23.72)$$

Это значит, что главный момент количеств движения системы материальных точек относительно некоторого неподвижного центра равен векторной сумме момента относительно этого центра главного вектора количеств движения системы, помещенного в центр масс и главного момента относительно центра масс количеств движения материальных точек в их относительном движении в системе, поступательно движущейся вместе с центром масс.

Вернемся теперь к общему случаю. Подставив выражение (23.67) для скорости v_i во второе слагаемое правой части соотношения (23.66), получим по (23.70) и (23.71)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i v_i &= \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i v_i^{(r)} + \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \right) \times v_0 + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{r}'_i) = \\ &= \mathbf{K}' + \mathbf{r}'_C \times M v_0 + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{r}'_i). \end{aligned}$$

Итак, при произвольно движущейся системе $O'x'y'z'$ имеем

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{Q} + \mathbf{K}' + \mathbf{r}'_C \times M v_0 + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{r}'_i). \quad (23.73)$$

Если, в частности, система материальных точек представляет собой *твердое* тело, имеющее угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$, а система осей $O'x'y'z'$ неизменно связана с этим телом, т. е.

$$\boldsymbol{\omega}^* = \boldsymbol{\omega}, \quad (23.74)$$

то по отношению к этой системе осей твердое тело неподвижно, т. е. вектор $\mathbf{K}' = 0$. Формула (23.72) примет вид

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{Q} + \mathbf{r}'_C \times M v_0 + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i). \quad (23.75)$$

Если при этом начало подвижной системы помещено в центр масс твердого тела, то второе слагаемое в (23.75) исчезает ($\mathbf{r}'_C = 0$) и мы получаем

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{Q} + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i). \quad (23.76)$$

Известно (§ 64), что движение твердого тела в общем случае можно рассматривать как результат сложения поступательного движения его вместе с некоторым полюсом и вращения вокруг этого полюса. Формула (23.76) показывает, что если за полюс принят центр масс тела, то можно разбить вектор \mathbf{K} на два слагаемых, соответствующих этим двум движениям.

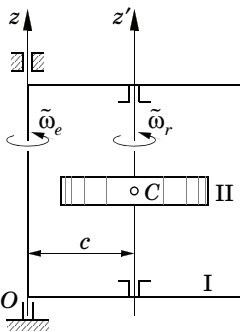


Рис. 303

Главный момент количеств движения твердого тела относительно неподвижного центра равен векторной сумме момента относительно этого центра главного вектора количеств движения тела, помещенного в его центр масс, и главного момента относительно центра масс количеств движения тела в его вращении вокруг центра масс.

Пример 104. Определить главный момент количеств движения относительно неподвижной оси Oz системы, изображенной на рис. 303, состоящей из двух тел: из рамки I, вращающейся вокруг оси Oz с угловой скоростью $\tilde{\omega}_e$ и несущей подшипники оси Cz' , и из тела II, вращающегося вокруг оси Cz' с угловой скоростью $\tilde{\omega}_r$ относительно рамки. Центр тяжести тела II расположен на оси Cz' . Расстояние между осями Oz и Cz' равно c .

Если обозначить моменты количеств движения относительно оси Oz рамки I и тела II соответственно через $K_z^{(1)}$ и $K_z^{(2)}$, то

$$K_z = K_z^{(1)} + K_z^{(2)}.$$

Из формулы (23.29) следует (J_1 — момент инерции рамки I относительно оси Oz) соотношение

$$K_z^{(1)} = J_1 \tilde{\omega}_e.$$

Для вычисления $K_z^{(2)}$ применим формулу (23.76); первое ее слагаемое дает

$$(\mathbf{r}_C \times \mathbf{Q})_z = c \cdot M_2 c \tilde{\omega}_e,$$

так как $M_2 c \tilde{\omega}_e$ представляет величину вектора количества движения тела II, равную произведению его массы M_2 на величину скорости $c \tilde{\omega}_e$ центра масс — формула (22.22). Проекция на ось Oz второго слагаемого в формуле (23.76) в рассматриваемом примере будет равна

$$J_2 \tilde{\omega} = J_2 (\tilde{\omega}_e + \tilde{\omega}_r),$$

где J_2 — момент инерции тела II относительно оси Cz' . Получаем

$$K_z = (J_1 + M_2 c^2) \tilde{\omega}_e + J_2 (\tilde{\omega}_e + \tilde{\omega}_r). \quad (23.77)$$

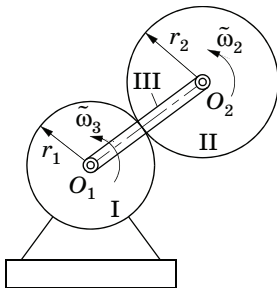


Рис. 304

Пример 105. В эпициклическом механизме (рис. 304) подвижное колесо II радиусом r_2 катится без скольжения по неподвижному колесу I радиусом r_1 . Колесо II приводится в движение кривошипом III, вращающимся с угло-

вой скоростью $\tilde{\omega}_3$ вокруг неподвижной оси O_1 . Составить выражение момента количеств движения K_z системы относительно неподвижной оси O_1 вращения кривошипа.

Имеем

$$K_z = K_z^{(3)} + K_z^{(2)},$$

где момент количеств движения кривошипа

$$K_z^{(3)} = J_3 \tilde{\omega}_3,$$

а J_3 — момент инерции кривошипа относительно его оси вращения, проходящей через точку O_1 . Момент относительно той же оси количества движения колеса II по (23.76) будет

$$K_z^{(2)} = m_2(r_1 + r_2)^2 \tilde{\omega}_3 + J_2 \tilde{\omega}_2,$$

причем J_2 — момент инерции колеса II относительно оси, проходящей через точку O_2 , m_2 — его масса, $\tilde{\omega}_2$ — абсолютная угловая скорость колеса. Она определяется из соотношения

$$\tilde{\omega}_2 r_2 = \tilde{\omega}_3 (r_1 + r_2),$$

выражающего равенство линейных скоростей точки O_2 , если рассматривать ее как принадлежащую одновременно колесу II и кривошипу III.

Получаем

$$K_z = \left[J_3 + J_2 \frac{r_1 + r_2}{r_2} + m_2(r_1 + r_2)^2 \right] \tilde{\omega}_3.$$

§ 120. Теорема об изменении главного момента количеств движения системы относительно центра масс

В левой части выражения теоремы моментов

$$\frac{dK}{dt} = m^{(O)} \quad (23.78)$$

заменяем главный момент количеств движения K его выражением (23.72), а в правой части выразим главный момент $m^{(O)}$ внешних сил относительно неподвижного центра O через главный момент этой системы сил $m^{(C)}$ относительно центра масс C . Для этого используем соотношение, доказанное в статике (§ 17):

$$m^{(O)} = m^{(C)} + r_C \times V, \quad (23.79)$$

где V — главный вектор системы сил. Получаем

$$\frac{d}{dt} (r_C \times Q) + \frac{dK'}{dt} = m^{(C)} + r_C \times V. \quad (23.80)$$

Теперь заметим, что

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r}_C \times \mathbf{Q}) = \dot{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{Q} + \mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{Q}},$$

и воспользуемся выражением (23.65) главного вектора количеств движения \mathbf{Q} , причем учтем, что $\dot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{v}_C$. Получим

$$\dot{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{Q} = \dot{\mathbf{r}}_C \times M \dot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{0}.$$

Далее, по теореме об изменении количества движения (§ 102, с. 124) имеем

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{V}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r}_C \times \mathbf{Q}) = \mathbf{r}_C \times \mathbf{V},$$

и соотношение (23.80) дает

$$\mathbf{r}_C \times \mathbf{V} + \dot{\mathbf{K}}' = \mathbf{m}^{(C)} + \mathbf{r}_C \times \mathbf{V};$$

окончательно

$$\frac{d\mathbf{K}'}{dt} = \dot{\mathbf{K}}' = \mathbf{m}^{(C)}. \quad (23.81)$$

Производная по времени от главного момента количеств движения системы материальных точек относительно центра масс в их относительном движении в системе отсчета, движущейся поступательно вместе с центром масс, равна главному моменту внешних сил относительно центра масс.

Теорема об изменении главного момента количеств движения сохраняет формулировку в относительном движении по отношению к центру масс, причем количества движения точек системы и их моменты вычисляются в системе осей, движущейся поступательно вместе с центром масс.

В том случае, когда движущаяся система материальных точек представляет собой твердое тело, можно в левой части (23.78) заменить \mathbf{K} его выражением (23.76). Тогда, повторив проведенное выше рассуждение, снова придем к уравнению (23.81), если под \mathbf{K}' будем понимать второе слагаемое в (23.76), т. е. вектор

$$\mathbf{K}' = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i), \quad (23.82)$$

равный главному моменту количеств движения твердого тела относительно его центра масс.

§ 121. Теорема о сохранении главного момента количеств движения

При равенстве нулю главного момента внешних сил относительно некоторой неподвижной точки ($\mathbf{m}^{(O)} = 0$) главный момент количеств движения \mathbf{K} относительно этой точки должен оставаться постоянным, т. е. сохранять неизменные величину и направление. То же самое на основании теоремы предшествующего параграфа может быть повторено в случае обращения в нуль главного момента внешних сил относительно центра масс системы ($\mathbf{m}^{(C)} = 0$). Тогда неизменные величину и направление будет сохранять главный момент \mathbf{K}' количеств движения системы относительно центра масс в системе отсчета, движущейся поступательно вместе с центром масс.

Если момент внешних сил относительно неподвижной точки O (или центра масс C) не равен нулю, но обращается в нуль его проекция на ось неизменного направления Oz (или Cz), то неизменной при движении будет проекция главного момента K_z (или K'_z) на эту ось.

Солнечная система, т. е. Солнце, планеты и их спутники, представляет собой пример изолированной системы: силы взаимного притяжения между телами, входящими в систему, являются внутренними силами, внешние же силы, если пренебречь действием неподвижных звезд, отсутствуют. Возьмем звездную координатную систему, т. е. направим оси координат к трем «неподвижным» звездам. Главный момент количеств движения \mathbf{K} Солнечной системы относительно ее центра масс должен оставаться постоянным по величине и сохранять неизменное направление в звездной системе координат. Направление вектора \mathbf{K} определяет перпендикулярную к нему плоскость, называемую *неизменяемой плоскостью планетной системы*. Существование этой плоскости было установлено Лапласом (1749—1827)*.

Ранее уже было указано на невозможность перемещения человека по абсолютно гладкому полу. Возникает вопрос, может ли стоящий на абсолютно гладком полу человек повернуться вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр тяжести.

Внешними силами, приложенными к человеку, являются сила его тяжести и реакция пола. Обе эти силы вертикальны,

* О П. С. Лапласе см. т. I, с. 403.

и их моменты относительно вертикальной оси Cz равны нулю; по предположению, отсутствует и трение. Итак,

$$m_z = 0,$$

откуда следует, что

$$K_z = \text{const.}$$

Постоянная равна нулю, так как сначала человек неподвижен. Предположим теперь, что человек начнет вращать над головой руку с угловой скоростью $\tilde{\omega}_1$, описывая ею круги в горизонтальной плоскости. Если обозначить через J_1 момент инерции руки относительно оси Cz , то момент количества движения относительно этой оси будет $J_1\tilde{\omega}_1$; тело человека начнет вращаться в противоположную сторону так, чтобы момент количества движения тела компенсировал момент количества движения руки. Обозначим через J_2 момент инерции тела человека относительно оси Cz , через $\tilde{\omega}_2$ — его угловую скорость. Получим

$$J_1\tilde{\omega}_1 + J_2\tilde{\omega}_2 = 0,$$

откуда найдем

$$\tilde{\omega}_2 = -\tilde{\omega}_1 \frac{J_1}{J_2}.$$

Чтобы ускорить вращение тела, нужно или увеличить $\tilde{\omega}_1$, или же увеличить J_1 , для чего человек должен взять в руку какой-либо предмет, например длинный стержень или вращающееся колесо. Для иллюстрации сказанного служит *опыт Жуковского*. Круглая площадка может поворачиваться вокруг вертикальной оси, причем влияние трения сведено к минимуму; человек, стоящий на площадке и имеющий в руке вращающееся колесо или просто вращающий рукой, будет поворачиваться вместе с площадкой в сторону, противоположную вращению колеса.

Способность кошки, падающей с большой высоты лапками вверх, переворачиваться в воздухе во время падения и становиться на землю также может быть объяснена с точки зрения теоремы сохранения момента количества движения. Внешняя сила — сила тяжести — не создает момента относительно центра тяжести. Быстро вращая хвостом, кошка поворачивает свое тело в противоположную сторону: момент количества движения в относительном движении по отношению к центру тяжести остается при этом равным нулю, как и в начале падения.

Акробат, совершающий сальто, отталкиваясь от земли, сообщает своему телу угловую скорость вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести его тела. Так как внешняя сила — сила тяжести — приложена в центре тяжести, момент количества движения относительно этой оси сохранит постоянное значение. Акробат может изменить свою угловую скорость, поджимая ноги и руки и уменьшая тем самым момент инерции своего тела относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести; угловая скорость при этом увеличивается, так как произведение ее на момент инерции должно оставаться постоянным.

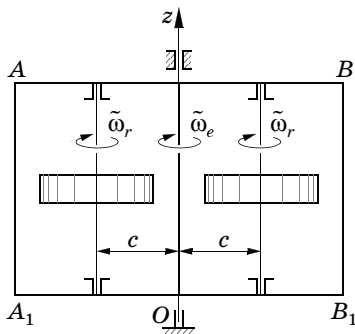


Рис. 305

Пример 106. Рамка ABA_1B_1 может вращаться вокруг проходящей через ее центр тяжести вертикальной оси Oz ; в рамке симметрично относительно оси Oz укреплены вертикальные оси двух одинаковых дисков массами m (рис. 305). Момент инерции рамки относительно оси Oz равен J_1 , момент инерции каждого диска относительно собственной оси равен J_2 . Сначала система находится в покое, а затем диски начинают вращаться в одну сторону с одинаковыми угловыми скоростями $\tilde{\omega}_r$ относительно рамки. Чтобы осуществить это, не вводя внешних по отношению к системе сил, в рамке имеется (не показанный на рисунке) часовой механизм, отпускающий в некоторый момент первоначально напряженную пружину. Определить угловую скорость рамки.

При вычислении главного момента количества движения системы относительно оси Oz используем результат § 119. Удваивая в формуле (23.77) слагаемые, определяющие главный момент количества движения тела (II), получаем

$$K_z = J_1 \tilde{\omega}_e + 2J_2(\tilde{\omega}_e + \tilde{\omega}_r) + 2mc^2 \tilde{\omega}_e.$$

Заметив теперь, что главный момент количества движения системы относительно оси Oz должен оставаться постоянным и равным нулю, получим

$$\tilde{\omega}_e = -\frac{2J_2 \tilde{\omega}_r}{2J_2 + J_1 + 2mc^2}.$$

Знак минус указывает, что рамка вращается в сторону, противоположную вращению дисков.

§ 122. Применение теоремы моментов к сплошной среде. Уравнение Эйлера теории турбомашин

В качестве примера применения теоремы моментов к сплошной среде приведем вывод известного *уравнения Эйлера теории турбомашин*, выражающего вращающий момент, сообщаемый рабочему колесу турбины протекающей сквозь него жидкостью. В дальнейшем будем предполагать, что колесо вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси.

Применим теорему моментов к совокупности частиц жидкости, заполняющей в момент времени t один из каналов между лопастями турбин. Имеем

$$\frac{dK_z}{dt} = m_z,$$

где m_z — главный момент относительно оси турбины (вертикальной оси Oz) внешних сил, приложенных к рассматриваемому объему жидкости. Этими внешними силами являются сила тяжести жидкости и реакции на нее стенок канала. Но момент силы тяжести относительно оси Oz равен нулю, и, следовательно, m_z является моментом реакции стенок; последний же равен по величине и противоположен по знаку искомому вращающему моменту m_z^* , отнесенному к одному каналу колеса; получаем

$$m_z^* = -m_z = -\frac{dK_z}{dt}.$$

Остается вычислить dK_z . Жидкость, заполняющая в момент t канал $abcd$ (рис. 306), к моменту $t + dt$ получит некоторое перемещение, причем частицы, находящиеся в сечении ab , займут положение a_1b_1 ; частицы, занимавшие положение ed , окажутся в e_1d_1 .

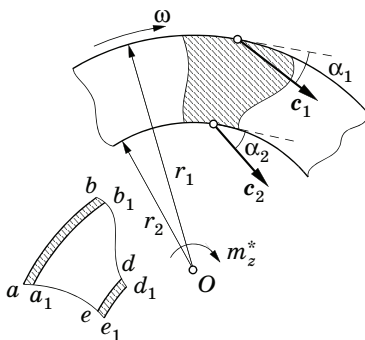


Рис. 306

Обозначим через M секундный массовый расход, т. е. массу жидкости, протекающую через канал в единицу времени.

В момент времени t главный момент количеств движения частиц жидкости в канале относи-

тельно к неподвижной оси Oz равен

тельно вертикальной оси (перпендикулярной плоскости чертежа) можно представить состоящим из двух слагаемых:

- ✓ главного момента количеств движения K'_z жидкости в объеме aba_1b_1 ;
- ✓ главного момента количеств движения в объеме a_1b_1ed .

Если обозначить через c_1 абсолютную скорость жидкости (относительно Земли, а не относительно вращающегося канала) при входе в колесо, то при обозначениях, указанных на рис. 304, получим

$$K'_z = M dt r_1 c_1 \cos \alpha_1.$$

В момент времени $t + dt$ главный момент количеств движения жидкости, занимающей теперь объем $a_1b_1e_1d_1$, будет слагаться из:

- ✓ главного момента количеств движения K''_z частиц жидкости в объеме ede_1d_1 ;

$$K''_z = M dt r_2 c_2 \cos \alpha_2,$$

причем c_2 — абсолютная скорость жидкости в выходном сечении канала;

- ✓ главного момента количеств движения жидкости в объеме a_1b_1ed .

Считая угловую скорость турбины постоянной и движение установившимся, мы должны принять, что скорости и, следовательно, моменты количеств движения жидкости в объеме a_1b_1ed одинаковы для двух рассматриваемых моментов времени t и $t + dt$. Поэтому приращение dK_z момента количеств движения за промежуток времени dt будет обусловлено только разностью моментов количества движения объемов ede_1d_1 и aba_1b_1 . Получаем

$$dK_z = K''_z - K'_z = M dt (r_2 c_2 \cos \alpha_2 - r_1 c_1 \cos \alpha_1);$$

отсюда находим искомый вращающий момент

$$m_z^* = -\frac{dK_z}{dt} = M (r_1 c_1 \cos \alpha_1 - r_2 c_2 \cos \alpha_2). \quad (23.83)$$

Вращающий момент оказывается не зависящим от формы канала и обуславливается значениями величин и направлений абсолютных скоростей жидкости во входном и выходном сечениях. Формула (23.83) дает выражение момента, вращающего турбину, ес-

ли под M подразумевать секундный массовый расход жидкости через все каналы колеса турбины.

Аналогично тому, как это было сделано в конце предыдущей главы (в конце § 110), применим теорему об изменении момента количеств движения системы к произвольному объему τ , ограниченному поверхностью σ . Замечая, что момент количества движения элемента объема $\delta\tau$ относительно некоторого центра O будет равен $\mathbf{r} \times \mathbf{v} \delta m = \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} \delta\tau$, где \mathbf{r} , по предыдущему, вектор-радиус элемента объема $\delta\tau$, будем иметь выражение главного момента количеств движения в виде суммы (интеграла)

$$\mathbf{K} = \int_{(\tau)} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) \delta\tau. \quad (23.84)$$

Сохраняя обозначения \mathbf{F} и \mathbf{p}_n для *плотностей* распределения внешних объемных сил по объему τ , а поверхностных сил (напряжений) по поверхности σ , будем иметь векторное представление теоремы об изменении момента количества движения в движущемся объеме τ :

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{(\tau)} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) \delta\tau = \int_{(\tau)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} \delta\tau + \int_{(\sigma)} \mathbf{r} \times \mathbf{p}_n \delta\sigma. \quad (23.85)$$

Интеграл, стоящий в левой части этого равенства, в развернутом виде может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(\tau)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} \delta\tau &= \\ &= \int_{(\tau)} \left(\mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \delta\tau + \int_{(\tau)} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \rho \mathbf{v} \delta\tau + \int_{(\tau)} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \frac{d}{dt} (\rho \delta\tau). \end{aligned}$$

Заметим, что второй интеграл в правой части здесь равен нулю, так как $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, а $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$. Третий интеграл также равен нулю в силу равенства $d(\rho \delta\tau)/dt = 0$, выражающего закон сохранения массы $\delta m = \rho \delta\tau$.

Таким образом, получим

$$\frac{d}{dt} \int_{(\tau)} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) \delta\tau = \int_{(\tau)} \left(\mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \delta\tau. \quad (23.86)$$

Сложнее обстоит дело с преобразованием интеграла по поверхности $\int_{(\sigma)} \mathbf{r} \times \mathbf{p}_n \delta\sigma$ в интеграл по объему. Используя равенство Коши

[т. I, § 30, формула (7.11)], будем иметь в проекциях на оси координат с единичными векторами i, j, k

$$\int_{(\sigma)} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n)_x \delta\sigma = \int_{(\sigma)} (\mathbf{r} \times \mathbf{n}P)_x \delta\sigma = \int_{(\sigma)} [y(\mathbf{n}P)_z - z(\mathbf{n}P)_y] \delta\sigma,$$

или, вспоминая определение произведения вектора на тензор «слева» [т. I, § 33, формула (8.17)],

$$\begin{aligned} \int_{(\sigma)} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n)_x \delta\sigma &= \\ &= \int_{(\sigma)} [y(n_x p_{xz} + n_y p_{yz} + n_z p_{zz}) - z(n_x p_{xy} + n_y p_{yy} + n_z p_{zy})] \delta\sigma = \\ &= \int_{(\sigma)} [n_x (y p_{xz} - z p_{xy}) + n_y (y p_{yz} - z p_{yy}) + n_z (y p_{zz} - z p_{zy})] \delta\sigma. \end{aligned}$$

Применяя в правой части формулу Гаусса — Остроградского преобразования интеграла по поверхности в интеграл по объему [т. I, § 37, формула (9.24)], перепишем предыдущее равенство в форме

$$\begin{aligned} \int_{(\tau)} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n)_x \delta\sigma &= \\ &= \int_{(\tau)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (y p_{xz} - z p_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (y p_{yz} - z p_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (y p_{zz} - z p_{zy}) \right] \delta\tau, \end{aligned}$$

откуда, замечая, что $\partial y / \partial y = \partial z / \partial z = 1$, а $\partial y / \partial z = \partial z / \partial y = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{(\sigma)} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n)_x \delta\sigma &= \\ &= \int_{(\tau)} \left[y \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) - z \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) + p_{yz} - p_{zy} \right] \delta\tau. \end{aligned}$$

Напомним формулы проекций $\text{Div } P$ на оси координат:

$$\text{Div}_y P = \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z},$$

$$\text{Div}_z P = \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}.$$

Тогда предыдущее равенство приведет к виду

$$\int_{(\sigma)} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n)_x \delta\sigma = \int_{(\tau)} [(\mathbf{r} \times \text{Div } P)_x + p_{yz} - p_{zy}] \delta\tau$$

и аналогично в проекциях на другие оси:

$$\int_{(\sigma)} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n)_y \delta\sigma = \int_{(\tau)} [(\mathbf{r} \times \text{Div } P)_y + p_{zx} - p_{xz}] \delta\tau,$$

$$\int_{(\sigma)} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n)_z \delta\sigma = \int_{(\tau)} [(\mathbf{r} \times \text{Div } P)_z + p_{xy} - p_{yx}] \delta\tau.$$

Умножая обе части этих трех равенств соответственно на единичные векторы осей координат \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} и почленно складывая результаты, находим

$$\begin{aligned} \int_{(\sigma)} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n) \delta\sigma &= \\ &= \int_{(\tau)} (\mathbf{r} \times \text{Div } P) \delta\tau + \int_{(\tau)} [(p_{yz} - p_{zy})\mathbf{i} + (p_{zx} - p_{xz})\mathbf{j} + (p_{xy} - p_{yx})\mathbf{k}] \delta\tau. \end{aligned} \quad (23.87)$$

Вернемся к основному уравнению (23.85). Подставляя в него выражения (23.86) и (23.87) интегралов, стоящих в левой части и на последнем месте в правой части, получаем

$$\begin{aligned} \int_{(\tau)} \left[\mathbf{r} \times \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{F} - \text{Div } P \right) \right] \delta\tau &= \\ &= \int_{(\tau)} [(p_{yz} - p_{zy})\mathbf{i} + (p_{zx} - p_{xz})\mathbf{j} + (p_{xy} - p_{yx})\mathbf{k}] \delta\tau. \end{aligned}$$

Величина, стоящая в круглых скобках в левой части, обращается в нуль в силу уравнения динамики *в напряжениях* — уравнение (22.86), — так что левая часть предыдущего равенства равна нулю. В силу произвольности выбора объема τ предыдущее равенство приведет к векторному равенству

$$(p_{yz} - p_{zy})\mathbf{i} + (p_{zx} - p_{xz})\mathbf{j} + (p_{xy} - p_{yx})\mathbf{k} = 0$$

или к равенствам в проекциях

$$p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz}, \quad p_{xy} = p_{yx}, \quad (23.88)$$

в которых нетрудно узнать уже знакомые нам по § 31 выражения *теоремы о взаимности касательных напряжений* или условия *симметричности тензора напряжений*, справедливые как в статике, так и в динамике сплошной среды при отсутствии, конечно, *распределенных* объемных пар, о чем уже упоминалось в § 31.

Итак, теорема об изменении момента количества движения системы дала три дополнительных равенства (23.88). Это приводит к уменьшению числа неизвестных в уравнениях динамики *в напряжениях* на три, что все же сохраняет его незамкнутость, о которой шла речь в конце предыдущей главы.

Глава XXIV

Теорема об изменении кинетической энергии

§ 123. Работа силы. Мощность

Для характеристики действия силы на материальную точку на протяжении некоторого пути вводится мера этого действия, называемая *работой силы*.

Работа W силы F , имеющей постоянные величину и направление, на прямолинейном перемещении u определяется как произведение величины F силы на величину u перемещения и на косинус угла α между ними, т. е. (рис. 307)

$$W = Fu \cos \alpha. \quad (24.1)$$

Если сила перпендикулярна перемещению, то $\alpha = \pi/2$, $\cos \alpha = 0$ и работа равна нулю; если сила направлена по перемещению, то $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$ и работа равна произведению величины силы на величину перемещения, и, наконец, если сила направлена против движения, то $\cos \alpha = -1$, работа равна произведению величины силы на величину перемещения, но произведение уже берется со знаком минус. Таким образом, в определении работы учитывается зависимость эффекта действия силы от направления ее по отношению к перемещению.

По определению (24.1) работа равна скалярному произведению векторов силы и перемещения:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}. \quad (24.2)$$

Измеряется работа в джоулях [Дж], равных $1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Отметим некоторые свойства, непосредственно следующие из определения работы как скалярного произведения силы и перемещения.

■ Работа постоянной по величине и направлению силы F , имеющей проекции F_x , F_y , F_z на оси $Oxyz$, на перемещении u с проекциями u_x , u_y , u_z на те же оси равна

$$W = F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z.$$

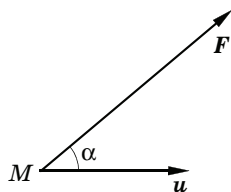


Рис. 307

■ Работа равнодействующей нескольких сил, приложенных к движущейся точке, равна сумме работ слагаемых сил на общем для них перемещении точки приложения сил. Если к точке, совершающей перемещение \mathbf{u} , приложены силы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$ с равнодействующей \mathbf{R} , то работа равнодействующей равна

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots) \cdot \mathbf{u} = \\ &= \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{u} + \dots = W_1 + W_2 + W_3 + \dots \end{aligned}$$

■ Работа силы на совокупности последовательных перемещений равна работе силы на результирующем перемещении. Доказательство аналогично предыдущему.

Данное выше определение работы обобщим на случай силы, *переменной* по величине и направлению, и криволинейного пути. Характер этого обобщения основан на общих приемах анализа бесконечно малых.

Сначала введем в рассмотрение понятие элементарной работы. Будем определять положение точки M на кривой M_1M_2 (рис. 308) дугой s , отсчитываемой от точки M_1 . Вектор-радиус \mathbf{r} точки M будет вектором-функцией $\mathbf{r}(s)$ от s , и элементарное перемещение по бесконечно малой дуге ds определится бесконечно малым вектором

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds.$$

Работа силы \mathbf{F} на этом элементарном перемещении, или *элементарная работа* δW , определится выражением

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F ds \cos \alpha = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (24.3)$$

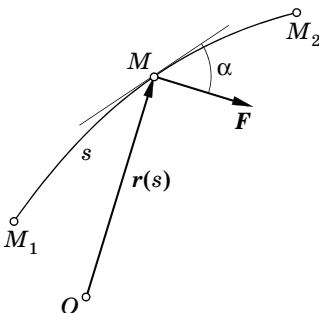


Рис. 308

Работу силы на конечном пути M_1M_2 найдем как сумму элементарных работ на отдельных бесконечно малых путях, т. е. как интеграл

$$W_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_1}^{M_2} F \cos \alpha ds. \quad (24.4)$$

Индексы при W показывают, что работа вычисляется на пути от положения M_1 до положения M_2 . Интегрирование в выражении (24.4) производится по величинам, отнесен-

ным к бесконечно малым дугам кривой M_1M_2 . Интеграл (24.4) называется *криволинейным интегралом*, взятым вдоль дуги кривой от точки M_1 до точки M_2 . Он определяет *циркуляцию вектора F по дуге M_1M_2* . Такие интегралы часто встречаются в различных вопросах механики, гидродинамики и электродинамики.

Работа силы на криволинейном пути равна циркуляции силы по этому пути.

Заменив дугу M_1M_2 замкнутым контуром C , в котором точки M_1 и M_2 совпадают, получим работу силы F на замкнутом контуре C . Она определяется контурным интегралом

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (24.5)$$

носящим название *циркуляции вектора F по замкнутому контуру C* (в частности, циркуляции силы по замкнутому контуру). Этот интеграл, вообще говоря, отличен от нуля. Случай равенства нулю циркуляции силы по замкнутому контуру рассматривается далее.

Покажем, что вычисление работы по формуле (24.5) может быть сведено к вычислению простого определенного интеграла. Для этого предположим, что движение точки задано уравнением

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \quad (24.6)$$

и, кроме того, задан закон изменения силы в зависимости от изменения времени, координат и скорости:

$$\begin{aligned} F_x &= F_1(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ F_y &= F_2(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ F_z &= F_3(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \quad (24.7)$$

Тогда, записав выражение (24.4) элементарной работы силы через проекции силы и перемещения на оси координат

$$\delta W = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (24.8)$$

и подставив всюду вместо x , y , z и \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} их выражения через время t , получим

$$\delta W = F_1[t; f_1(t), f_2(t), f_3(t); f'_1(t), f'_2(t), f'_3(t)] f'_1(t) dt + \dots,$$

или, вынося dt за скобку,

$$\delta M = \Phi(t) dt,$$

где $\Phi(t)$ — известная функция времени, равная

$$\Phi(t) = F_1[t; f_1(t), \dots]f_1'(t) + F_2[t; f_1(t), \dots]f_2'(t) + \\ + F_3[t; f_1(t), \dots]f_3'(t).$$

Чтобы найти работу на пути M_1M_2 , надо просуммировать значения δW ; таким образом, будем иметь

$$W_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} \delta W = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t) dt;$$

здесь t_1 и t_2 — моменты, соответствующие прохождению движущейся точкой положений M_1 и M_2 . Задача свелась к вычислению определенного интеграла по аргументу t .

Обозначение элементарной работы через δW объясняется тем, что символ dW мог бы привести к неправильному представлению об элементарной работе как дифференциале от некоторой функции W . Если бы движение происходило по прямой, например по оси Ox , и сила являлась функцией одного только x , то элементарная работа

$$\delta W = F_x(x) dx$$

действительно представляла бы дифференциал от величины

$$\int_{x_1}^x F_x(x) dx.$$

В общем случае выражение

$$\delta W = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

не представляет собой полного дифференциала и символ δ следует понимать только как символ бесконечно малой величины, а отнюдь не дифференциала.

В дальнейшем будет выяснено наличие частных классов сил, элементарная работа которых является полным дифференциалом некоторой функции от координат точки.

Желая охарактеризовать работу с точки зрения времени, в течение которого она производится, вводят понятие *мощности* как отношения произведенной работы к протекшему времени или

как работы, отнесенной к единице времени. Обозначая мощность через N , можем написать

$$N = \frac{\delta W}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z. \quad (24.9)$$

Мощность равна скалярному произведению векторов силы и скорости.

За единицу мощности принят *ватт* (джоуль в секунду),

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с.}$$

В случае движения системы точек работу и мощность определяют как сумму работ или мощностей сил, приложенных к отдельным точкам системы, т. е. по формулам

$$W_{1,2} = \sum_{i=1}^n \int_{M_{i1}}^{M_{i2}} (F_{ix} dx_i + F_{iy} dy_i + F_{iz} dz_i), \quad (24.10)$$

$$N = \sum_{i=1}^n (F_{ix} v_{ix} + F_{iy} v_{iy} + F_{iz} v_{iz}).$$

§ 124. Вычисление работы в некоторых частных случаях

1°. Работа силы тяжести материальной точки и сил тяжести системы материальных точек. Вычислим работу силы тяжести \mathbf{G} отдельной материальной точки. Пусть точка M (рис. 309) массой m переместилась по некоторой траектории L из точки M_1 в точку M_2 . Элементарная работа на перемещение $d\mathbf{r}$ будет равна

$$\delta W = \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = G_x dx + G_y dy + G_z dz,$$

но при выбранном направлении осей

$$G_x = 0, \quad G_y = 0, \quad G_z = -G = -mg,$$

так что элементарная работа имеет вид полного дифференциала:

$$\delta W = -d(Gz). \quad (24.11)$$

Полная работа силы тяжести на конечном участке траектории $M_1 M_2$ будет равна

$$\begin{aligned} W_{1,2} &= - \int_{M_1}^{M_2} d(Gz) = G(z_1 - z_2) = \\ &= mg(z_1 - z_2). \end{aligned}$$

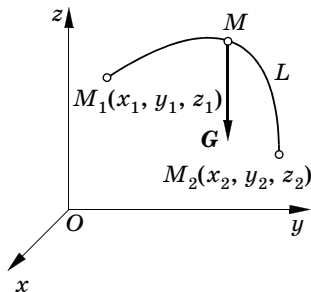


Рис. 309

Замечая, что разность ординат ($z_1 - z_2$) определяет разность высот начального и конечного положений точки над горизонтальной плоскостью xOy (причем эта разность положительна, если точка опускается вниз), можем высказать положение.

Работа силы тяжести материальной точки равна произведению силы тяжести на разность высот начального и конечного положений точки, причем работа положительна, если конечное положение ниже начального, и отрицательна — в противном случае. В частности, если точка вернется вновь на ту же высоту над горизонтом, то работа силы тяжести будет равна нулю.

Работа силы тяжести не зависит от формы траектории, по которой точка перешла из начального положения в конечное; работа определяется весом и начальным и конечным положениями точки.

Это свойство силы тяжести оказывается характерным и для широкого класса других сил, которые в дальнейшем получают наименование *потенциальных* или *консервативных*; отметим, что элементарная работа силы тяжести выражается *полным дифференциалом* некоторой функции координат, и именно поэтому работа на конечном участке оказалась не зависящей от формы траектории.

В случае системы материальных точек работу силы тяжести следует определить как сумму работ сил тяжести отдельных точек, составляющих систему, т. е.

$$W_{1,2} = \sum_{i=1}^n G_i(z_{i1} - z_{i2}) = \left(\sum_{i=1}^n G_i z_i \right)_1 - \left(\sum_{i=1}^n G_i z_i \right)_2.$$

Здесь индексы 1 и 2 соответствуют начальному и конечному положениям системы. Вспоминая определение центра тяжести (т. I, § 26)

$$\sum_{i=1}^n G_i m_i = G z_C, \quad G = \sum_{i=1}^n G_i,$$

где z_C — ордината центра тяжести, а $G = Mg$ (M — общая масса системы), находим

$$W_{1,2} = G(z_{C1} - z_{C2}) = Mg(z_{C1} - z_{C2}), \quad M = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (24.12)$$

Учитывая, что в данном случае центр тяжести совпадает с центром масс, мы приходим к следующему выводу.

Работа сил тяжести на конечном участке пути при любом движении системы равна произведению суммарной силы тяжести системы на разность высот начального и конечного положений центра масс системы, причем работа отрицательна при поднятии центра масс и положительна при опускании его.

При вычислении работы силы тяжести любую систему материальных точек, как бы ни было сложно ее движение, можно рассматривать как материальную точку, которая находится в центре масс, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложена сила тяжести всей системы. Это положение еще раз подчеркивает значение понятия центра масс в динамике.

2°. Работа сил, приложенных к абсолютно твердому телу.

Пусть силы F_1, F_2, \dots, F_n приложены к твердому телу в точках M_1, M_2, \dots, M_n . Выбирая произвольную точку тела O за полюс и обозначая вектор-радиус i -й точки тела через $\overrightarrow{OM}_i = r'_i$, получаем

$$dr_i = dr_0 + \Theta \times r'_i,$$

т. е. перемещение dr_i точки M_i равно геометрической сумме перемещения полюса dr_0 и перемещения поворота $\Theta \times r'_i$ вокруг полюса (Θ — бесконечно малый вектор поворота). Элементарная работа силы F_i будет

$$\delta W_i = F_i \cdot dr_i = F_i \cdot dr_0 + F_i \cdot (\Theta \times r'_i).$$

Второе слагаемое, согласно свойству скалярно-векторного произведения, может быть записано в виде

$$F_i(\Theta \times r'_i) = \Theta \cdot (r'_i \times F_i) = \Theta \cdot m_O(F_i);$$

обозначим через $d\varphi$ бесконечно малый угол поворота тела вокруг его мгновенной оси, т. е. величину вектора поворота. Тогда получим

$$\Theta \cdot m_O(F_i) = m_O(F_i) \cos(m_O, \Theta) d\varphi.$$

Но согласно известной теореме статики проекция момента силы относительно точки на какую-либо ось, проходящую через точку, равна моменту силы относительно этой оси; поэтому предыдущее выражение представляет произведение бесконечно малого угла поворота $d\varphi$ на момент силы F_i относительно оси L , параллельной мгновенной оси и проходящей через полюс O . Находим

$$\delta W_i = F_i \cdot dr_0 + m_O(F_i) \cdot \Theta = F_i \cdot dr_0 + m_L(F_i) d\varphi. \quad (24.13)$$

Элементарная работа всех сил будет

$$\delta W = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \right) \cdot d\mathbf{r}_0 + \left[\sum_{i=1}^n m_O(\mathbf{F}_i) \right] \cdot \Theta = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \right) \cdot d\mathbf{r}_0 + \left[\sum_{i=1}^n m_L(\mathbf{F}_i) \right] d\varphi.$$

Обозначая через $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$ главный вектор совокупности сил, через $\mathbf{m}^{(O)}$ — ее главный момент относительно полюса O и через m_L — главный момент относительно оси L , получим

$$\delta W = \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}_0 + \mathbf{m}^{(O)} \cdot \Theta = \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}_0 + m_L d\varphi. \quad (24.14)$$

В частном случае *поступательного движения* твердого тела

$$\delta W = \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}, \quad (24.15)$$

где $d\mathbf{r}$ — элементарное перемещение, одинаковое для всех точек тела. При вращении тела вокруг неподвижной оси (пусть это будет ось Oz), выбирая за полюс точку, лежащую на оси вращения, получим $d\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ и, следовательно,

$$\delta W = m_L d\varphi. \quad (24.16)$$

В случае *плоского движения* твердого тела имеем

$$\delta W = \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}_0 + m_z d\varphi, \quad (24.17)$$

где m_z — главный момент совокупности сил относительно оси Oz , перпендикулярной плоскости движения и проходящей через полюс O .

При *вращении* твердого тела вокруг неподвижной точки вектор Θ бесконечно малого поворота определяется, как следует из § 61, следующей формулой:

$$\Theta = k d\psi + n d\vartheta + k' d\varphi,$$

где \mathbf{k} , \mathbf{n} , \mathbf{k}' — единичные векторы соответственно неподвижной оси Oz , линии узлов ON и подвижной оси Oz' , а $d\psi$, $d\vartheta$, $d\varphi$ — дифференциалы углов прецессии, нутации и чистого вращения. Получаем

$$\delta W = \mathbf{m}^{(O)} \cdot \Theta = m_z d\psi + m_N d\vartheta + m_z d\varphi,$$

где

$$m_z = \mathbf{m}^{(O)} \cdot \mathbf{k}, \quad m_N = \mathbf{m}^{(O)} \cdot \mathbf{n}, \quad m_{z'} = \mathbf{m}^{(O)} \cdot \mathbf{k}' \quad (24.18)$$

представляют собой главные моменты совокупности сил относительно трех указанных (не взаимно ортогональных!) осей.

В общем случае движения твердого тела получаем

$$\delta W = \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}_0 + m_z d\psi + m_N d\vartheta + m_z d\varphi. \quad (24.19)$$

Работа сил, приложенных к твердому телу, выражается через главный вектор и главный момент этих сил.

Работа внутренних сил взаимодействия частиц твердого тела равна нулю, так как главный вектор и главный момент этих сил равны нулю.

3°. Работа упругой силы. Остановимся сначала на случае прямолинейного движения, т. е. будем рассматривать схему упругой пружины (§ 95), коэффициент жесткости которой обозначим через c . Вычислим, какую работу произведут упругие силы при растяжении конца пружины на длину f из *натурального* (нерастянутого) состояния.

Вспоминая, что при удлинении пружины на x проекция силы упругости на ось x равна $-cx$, получаем

$$dW = F_x dx = -cx dx = d\left(-\frac{cx^2}{2}\right),$$

и, следовательно, полная работа силы упругости при переходе конечной точки пружины из положения M_1 с абсциссой x_1 в положение M_2 с абсциссой x_2 определится интегрированием:

$$W_{1,2} = \int_M^{M_2} \delta W = \int_{x_1}^{x_2} d\left(-\frac{cx^2}{2}\right) = \frac{1}{2}c(x_1^2 - x_2^2).$$

Работа силы упругости пружины при переходе конца ее из натурального положения ($x = 0$) до некоторого отклонения f будет равна

$$W_{0,1} = -\frac{cf^2}{2} = -\frac{1}{2}Pf, \quad (24.20)$$

где через P обозначена нагрузка, соответствующая удлинению f .

Работа упругой силы при переходе точки, к которой приложена сила упругости, из положения, соответствующего недеформированному состоянию, в данное деформированное оказалась пропорциональной квадрату перемещения. Работу $W_{0,1}$ можно также выразить как произведение перемещения на силу, равную среднему арифметическому сил упругости до деформации и в конечный момент деформации.

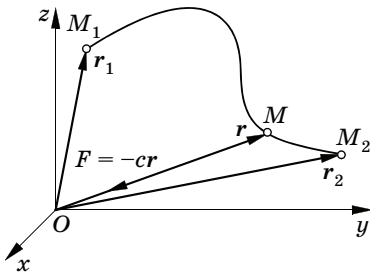


Рис. 310

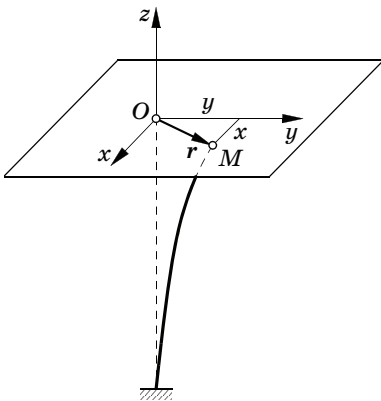


Рис. 311

Упругие постоянные материала и геометрические размеры деформируемого тела (пружины) входят в формулу (24.20) через коэффициент жесткости c . Последний может быть определен как отношение силы P , приложенной к пружине, к производимому ею статическому удлинению $f_{ст}$:

$$c = \frac{P}{f_{ст}}.$$

Рассмотрим теперь работу силы упругости при движении точки по любой кривой. Предположим, что к точке, выведенной из положения O , соответствующего отсутствию деформации, приложена сила упругости, направленная к центру O и пропорциональная удалению точки от этого центра (рис. 310). Такая сила будет действовать, например, на массу M , закрепленную на отклоненном от положения равновесия свободном конце упругого стержня

(рис. 311), другой конец которого заделан, при условии, что моменты инерции поперечного сечения стержня относительно любой оси, расположенной в плоскости этого сечения, равны друг другу. (Таково, например, круговое сечение.) Тогда проекции силы упругой реакции изогнутого стержня на две взаимно-перпендикулярные оси x, y , лежащие в плоскости поперечного сечения стержня, будут пропорциональны смещениям x, y конца оси стержня:

$$F_x = -cx, \quad F_y = -cy,$$

причем постоянная c , одинаковая по условию для любых направлений, определится формулой

$$c = \frac{3EJ}{l^3},$$

где l — длина стержня, J — момент инерции поперечного сечения относительно оси, лежащей в этом сечении, E — модуль продольной упругости.

Обозначая вектор-радиус точки M через r и коэффициент упругости через c , будем иметь

$$F = -cr. \quad (24.21)$$

Элементарная работа силы F равна

$$\delta W = F \cdot dr = -c (r \cdot dr) = -c d \frac{r \cdot r}{2} = -c d \frac{r^2}{2}.$$

Подобно силе веса элементарная работа силы упругости представляется полным дифференциалом, а следовательно, работа упругости на конечном участке $M_1 M_2$ легко вычисляется и оказывается равной

$$W_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} \delta W = - \int_{r_1}^{r_2} c d \frac{r^2}{2} = \frac{1}{2} c (r_1^2 - r_2^2). \quad (24.22)$$

Результат получается аналогичным случаем прямолинейного движения.

Работа силы упругости при отклонении из недеформированного состояния пропорциональна квадрату отклонения от этого состояния.

Как и в случае силы тяжести, работа силы упругости зависит не от траектории, а только от начального и конечного положений точки. Если начальное и конечное положения точки находятся на одном и том же расстоянии от центра, то работа на соответствующем перемещении равна нулю. При удалении от центра работа упругой силы отрицательна, при приближении к центру — положительна.

Аналогичным путем определяется работа упругих сил при кручении. Если сечение упругого вала (проволоки, нити) закручено на угол φ по отношению к недеформированному сечению, то образующийся в этом сечении момент упругих сил относительно оси вала пропорционален углу кручения, т. е.

$$m_z = -k\varphi,$$

где коэффициент k зависит от упругих свойств тела, геометрических размеров сечения и его положения, причем знак *минус* показывает, что момент всегда создает вращение, противоположное

закручиванию (упругие силы стремятся восстановить равновесие). Элементарную работу момента кручения найдем по формуле (24.16):

$$\delta W = -k\varphi \, d\varphi,$$

и, следовательно, полная работа при кручении от начального угла φ_1 до конечного угла φ_2 будет

$$W_{1,2} = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} k\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} k (\varphi_1^2 - \varphi_2^2),$$

что аналогично выражению (24.22).

§ 125. Кинетическая энергия системы материальных точек. Теорема Кёнига

Мера движения материальной точки, называемая *кинетической энергией*, определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} m v^2, \quad (24.23)$$

в которой через m и v обозначены соответственно масса и величина скорости рассматриваемой точки. Очень часто кинетическую энергию называют *живой силой* (лучше избегать этого термина, так как речь идет не о силе, а об энергии).

Кинетической энергией системы материальных точек называется сумма кинетических энергий всех входящих в систему точек

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2. \quad (24.24)$$

Кинетическая энергия, согласно этому определению, является существенно положительной величиной, обращающейся в нуль лишь в том случае, когда скорости всех входящих в систему точек обращаются в нуль, т. е. в случае покоя системы.

Так как квадрат величины вектора может быть представлен как скалярное произведение вектора на самого себя, формулы (24.23) и (24.24) могут быть в случае одной материальной точки переписаны в виде

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad (24.25)$$

и в случае системы материальных точек — в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i \cdot v_i. \quad (24.26)$$

Как это следует из определения (24.23), за единицу кинетической энергии следует принять ту же единицу, что и для работы:

$$\frac{1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ Дж}.$$

При вычислении кинетической энергии оказывается полезным прием разложения движения системы на поступательное движение ее вместе с центром масс и относительное движение вокруг центра масс. Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА КЁНИГА. *Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в ее центре масс и движущейся со скоростью центра масс, и кинетической энергии системы в ее относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе отсчета с началом в центре масс:*

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + T'. \quad (24.27)$$

Эта теорема была установлена С. Кёнигом в 1751 г.

В формуле (24.27) через M обозначена масса всей системы, через v_C — скорость ее центра масс; кинетическая энергия системы в ее относительном движении равна

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v_i^{(r)})^2, \quad (24.28)$$

где $v_i^{(r)}$ — величина скорости массы m_i по отношению к системе, поступательно движущейся с центром масс.

Отбросим сначала предположение, что начало O поступательно движущейся системы $Ox'y'z'$ взято в центре масс движущейся системы материальных точек.

Абсолютную скорость v_i точки системы представим как геометрическую сумму ее относительной скорости $v_i^{(r)}$ в системе

КЁНИГ ИОГАНН САМУЭЛЬ (*König Johann Samuel, 1712—1757*) — швейцарский математик и механик, с 1744 г. работал в Голландии; чл. Берлинской АН (1749), чл.-корр. Французской АН, чл. Лондонского королевского общества (1751), чл. Гёттингенской АН.

$Ox'y'z'$ и переносной скорости $v_i^{(e)}$, т. е. скорости точки системы, через которую в рассматриваемый момент проходит точка M_i ; при поступательном движении системы скорости всех ее точек одинаковы; поэтому, обозначая через v_0 скорость начала O этой системы, имеем

$$v_i^{(e)} = v_0 \quad (24.29)$$

и далее

$$v_i = v_i^{(r)} + v_0. \quad (24.30)$$

Подстановка этого выражения в (24.26) дает

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v_i^{(r)} + v_0) \cdot (v_i^{(r)} + v_0) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v_i^{(r)})^2 + \sum_{i=1}^n m_i v_0 \cdot v_i^{(r)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_0^2. \end{aligned}$$

Теперь, заметив, что $\sum_{i=1}^n m_i = M$, вынося за знаки сумм множители, не зависящие от i , и воспользовавшись обозначением (24.28), получим

$$T = T' + v_0 \cdot \sum_{i=1}^n m_i v_i^{(r)} + \frac{1}{2} M v_0^2. \quad (24.31)$$

Преобразуем выражение суммы, стоящей во втором слагаемом в правой части этой формулы. Для этого вспомним, что по формуле (22.20)

$$\sum_{i=1}^n m_i r_i' = M(r_C - r_0). \quad (24.32)$$

С другой стороны, при поступательном движении системы $Ox'y'z'$

$$v_i^{(r)} = \dot{r}_i'. \quad (24.33)$$

Поэтому, продифференцировав выражение (24.32) по времени и заметив, что

$$\dot{r}_C = v_C, \quad \dot{r}_0 = v_0,$$

где v_C — скорость центра масс, а v_0 — скорость начала системы отсчета, получим

$$\sum_{i=1}^n m_i v_i^{(r)} = M(v_C - v_0) = M v_C^{(r)}, \quad (24.34)$$

где $v_C^{(r)}$, согласно (24.30), представляет собой скорость центра масс по отношению к движущейся системе $Ox'y'z'$. Подстановка в (24.31) приводит теперь к соотношению

$$T = T' + Mv_0 \cdot v_C^{(r)} + \frac{1}{2} M v_0^2. \quad (24.35)$$

Это представление выражения кинетической энергии в ряде случаев может оказаться полезным, но чаще всего следует предпочтительнее принять за начало отсчета подвижной системы осей центр масс движущейся системы; тогда

$$v_0 = v_C, \quad v_C^{(r)} = 0,$$

и из (24.35) получаем теорему в вышеприведенной формулировке (24.27):

$$T = T' + \frac{1}{2} M v_C^2.$$

Отметим, что в (24.35) через T' обозначена кинетическая энергия системы в ее движении относительно поступательно движущейся системы $Ox'y'z'$ с началом в точке O , а в (24.27) — такая же величина, но при условии, что началом системы отсчета является центр масс.

§ 126. Кинетическая энергия абсолютно твердого тела

Ограничимся рассмотрением простейших случаев движения твердого тела.

■ В случае *поступательного* движения твердого тела, обозначая через v скорость, одинаковую для всех точек тела, и через M — массу тела, согласно формуле (24.24) находим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum_{i=1}^n m_i = \frac{1}{2} M v^2. \quad (24.36)$$

■ В случае *вращения тела вокруг неподвижной оси Oz* , обозначая угловую скорость через ω , расстояние элементарной массы m_i от оси вращения — через h_i , момент инерции тела относительно оси вращения — через J_z , имеем

$$v_i = \omega h_i,$$

и формула (24.24) дает

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\omega h_i)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2. \quad (24.37)$$

■ В случае *плоского движения* твердого тела относительным движением по отношению к поступательно движущимся осям является вращение тела с его угловой скоростью ω . Поэтому, поместив начало поступательно движущейся системы в центр масс тела C , можем применить для вычисления величины T' , входящей в выражение (24.27), только что полученную формулу (24.37):

$$T' = \frac{1}{2} J_z^{(C)} \omega^2,$$

где $J_z^{(C)}$ — момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через центр масс. Применив (24.27), найдем

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_z^{(C)} \omega^2. \quad (24.38)$$

Эту формулу можно преобразовать к виду, более удобному для некоторых приложений. Напомним, что

$$\omega = \frac{v_C}{PC},$$

где PC — расстояние между мгновенным центром скоростей P и центром масс C ; заменив $J_z^{(C)}$ на $M \rho_C^2$, найдем

$$T = \frac{1}{2} M \left[1 + \left(\frac{\rho_C}{PC} \right)^2 \right] v_C^2, \quad (24.39)$$

где ρ_C — радиус инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через центр масс.

Величина

$$\mu_C = M \left[1 + \left(\frac{\rho_C}{PC} \right)^2 \right], \quad (24.40)$$

не зависящая от скоростей точек тела, называется *массой, приведенной к центру масс*; воображаемая масса μ_C , движущаяся со скоростью центра масс, имела бы ту же кинетическую энергию, что и тело в рассматриваемом плоском движении. Так как мгновенный центр меняет в процессе движения свое положение, со-

впадая с различными точками фигуры, отрезок PC изменяет свою длину, зависящую от положения фигуры, т. е. μ_C не является постоянной величиной.

В некоторых случаях за начало поступательно движущейся системы осей принимают не центр масс, а какую-либо другую точку тела O , совершающего плоское движение. Тогда по (24.35) будем иметь

$$T = \frac{1}{2} J_z^{(O)} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_0^2 + M \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_C^{(r)}, \tag{24.41}$$

где $J_z^{(O)}$ — момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через точку O .

Вектор $\mathbf{v}_C^{(r)}$ представляет вращательную скорость центра масс C , когда за полюс фигуры, совершающей плоское движение, принята точка O (рис. 312). Поэтому

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_C^{(r)} = \mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{OC}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}'_{OC} \times \mathbf{v}_0),$$

где \mathbf{r}'_{OC} — вектор-радиус точки C по отношению к полюсу O .

Предположим (рис. 312, *а*), что вектор \mathbf{v}_0 отклонен от вектора \mathbf{r}'_{OC} на угол α (меньший π) в сторону вращения фигуры (или — во втором случае — в сторону, противоположную этому вращению: рис. 312, *б*). Тогда вектор $\mathbf{r}'_{OC} \times \mathbf{v}_0$, равный по величине $r'_{OC} v_0 \sin \alpha = OC \cdot v_0 \sin \alpha$, будет иметь направление вектора $\boldsymbol{\omega}$ (противоположное вектору $\boldsymbol{\omega}$ во втором случае). Итак,

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_C^{(r)} = \pm OC \cdot \omega v_0 \sin \alpha, \tag{24.42}$$

причем тот или иной знак нужно выбирать в соответствии со сказанным выше. Замечая, что $\omega = v_0/OP$, где OP — отрезок, соеди-

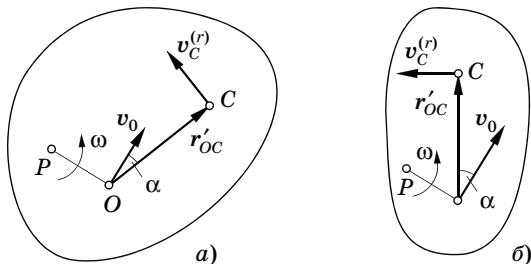


Рис. 312

няющий полюс O с мгновенным центром скоростей P , получаем по (24.41)

$$T = \frac{1}{2} M v_0^2 \left[1 + \left(\frac{\rho_0}{OP} \right)^2 \pm 2 \frac{OC}{OP} \sin \alpha \right], \quad (24.43)$$

где ρ_0 — радиус инерции тела относительно оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через полюс O . Величину

$$\mu_0 = M \left[1 + \left(\frac{\rho_0}{OP} \right)^2 \pm 2 \frac{OC}{OP} \sin \alpha \right] \quad (24.44)$$

можно назвать *массой, приведенной к полюсу O* .

При *аналитическом* рассмотрении плоского движения положение фигуры, как известно, задается координатами x_0, y_0 полюса O и углом поворота φ . Тогда

$$v_{0x} = \dot{x}_0, \quad v_{0y} = \dot{y}_0, \quad \ddot{\omega} = \dot{\phi}.$$

Обозначая через x'_C, y'_C координаты центра масс в системе осей $Ox'y'$, связанных с плоской фигурой и имеющих начало в ее полюсе O , получаем

$$v_{Cx'}^{(r)} = -\dot{\phi} y'_C, \quad v_{Cy'}^{(r)} = \dot{\phi} x'_C$$

и далее

$$v_0 \cdot v_C^{(r)} = \dot{\phi} (-v_{0x'} y'_C + v_{0y'} x'_C);$$

здесь $v_{0x'}$ и $v_{0y'}$ — проекции на указанные оси скорости полюса, равные (т. I, § 55, формула (14.14))

$$v_{0x'} = v_{0x} \cos \varphi + v_{0y} \sin \varphi, \quad v_{0y'} = -v_{0x} \sin \varphi + v_{0y} \cos \varphi.$$

Выражение кинетической энергии T записывается, согласно (24.41), в виде

$$T = \frac{1}{2} J_z^{(O)} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) - M \dot{\phi} (v_{0x'} y'_C - v_{0y'} x'_C). \quad (24.45)$$

Оно значительно упростится, если полюс O поместить в центре масс; тогда $x'_C = y'_C = 0$, и мы получаем

$$T = \frac{1}{2} J_z^{(C)} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2). \quad (24.46)$$

Вычисление кинетической энергии твердого тела, вращающегося вокруг неподвижного центра, а также в общем случае движения твердого тела будет дано ниже, после того как мы более подробно разовьем учение о моментах инерции.

§ 127. Теорема об изменении кинетической энергии

Теорема об изменении кинетической энергии, или, как еще иногда ее называют, *теорема живых сил*, связывает изменение кинетической энергии системы точек с работой сил, вызывающих это изменение.

Для вывода этой теоремы сначала в случае одной материальной точки умножим обе части основного дифференциального уравнения динамики точки

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (24.47)$$

скалярно на элементарное перемещение точки dr . Получим

$$m \frac{dv}{dt} \cdot dr = F \cdot dr. \quad (24.48)$$

Замечая, что $dr = v dt$, находим

$$m \frac{dv}{dt} \cdot v dt = m dv \cdot v = d \frac{m}{2} (v \cdot v) = d \frac{mv^2}{2};$$

в правой части равенства (24.48) стоит выражение элементарной работы δW ; следовательно,

$$d \frac{mv^2}{2} = \delta W, \quad (24.49)$$

или, вспоминая определение кинетической энергии,

$$dT = \delta W. \quad (24.50)$$

Это соотношение представляет собой теорему в дифференциальной форме.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ. *Приращение кинетической энергии материальной точки на элементарном перемещении равно элементарной работе приложенных к точке сил на этом перемещении.*

Интегрируя уравнение (24.49) между пределами, соответствующими начальному M_1 и конечному M_2 положениям движущейся точки, и обозначая соответственно через v_1 и v_2 скорости точки в этих положениях (рис. 313), получаем

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \int_{M_1}^{M_2} \delta W = W_{1,2},$$

или

$$T_2 - T_1 = W_{1,2}, \quad (24.51)$$

причем через $W_{1,2}$ обозначена работа сил, действовавших на точку на перемещении $M_1 M_2$. Уравнение (24.51) представляет собой теорему в интегральной форме.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ. Произведение кинетической энергии материальной точки на конечном перемещении равно сумме работ сил, действовавших на точку на этом перемещении.

Для ряда приложений имеет значение другая формулировка доказанной теоремы.

ТЕОРЕМА. Производная по времени от кинетической энергии материальной точки равна мощности действующих на точку сил:

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = N. \quad (24.52)$$

Для доказательства умножим обе части уравнения (24.47) скалярно на вектор скорости \mathbf{v} . Получим

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = N;$$

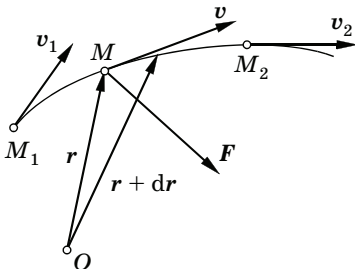


Рис. 313

замечая, что

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \frac{m v^2}{2} = \frac{dT}{dt},$$

приходим к сформулированному в теореме соотношению (24.52).

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки легко обобщается на случай

системы материальных точек. Для этого предположим, что уравнение (24.49) составлено для каждой точки M_i системы

$$d \frac{m_i v_i^2}{2} = \delta W_i.$$

Суммируя эти уравнения по всем точкам, включенным в систему, и вспоминая, что кинетическая энергия системы есть сумма кинетических энергий всех ее точек

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2,$$

получаем

$$dT = d \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \delta W_i.$$

Здесь $\sum_{i=1}^n \delta W_i$ представляет собой сумму элементарных работ сил, действовавших на рассматриваемом элементарном перемещении на каждую точку системы. На данную точку действуют *внешние* по отношению к системе силы — воздействия на нее со стороны тел, не принадлежащих системе, и *внутренние* силы — воздействия на ту же точку со стороны точек, принадлежащих этой системе. Поэтому величина $\sum_{i=1}^n \delta W_i$ может быть представлена как сумма двух слагаемых: элементарной работы внешних сил — обозначим ее через δW — и элементарной работы $\delta W'$ внутренних сил. Итак, получаем теорему в дифференциальной форме:

$$dT = \delta W + \delta W'. \quad (24.53)$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ. *Приращение кинетической энергии системы материальных точек на элементарном перемещении равно сумме элементарных работ внешних и внутренних сил, действовавших на систему на этом перемещении.*

Интегрируя между пределами, соответствующими двум положениям системы — начальному 1 и конечному 2, — и обозначая через T_1 и T_2 кинетические энергии в этих положениях, получим теорему в интегральной форме:

$$T_2 - T_1 = \int_{(1)}^{(2)} \delta W + \int_{(1)}^{(2)} \delta W' = W_{1,2} + W'_{1,2}. \quad (24.54)$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ — ТЕОРЕМА ЖИВЫХ СИЛ. Приращение кинетической энергии системы на конечном перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действовавших на этом перемещении.

Теорема об изменении кинетической энергии в форме (24.52) также может быть обобщена на случай системы материальных точек.

ТЕОРЕМА. Производная по времени от кинетической энергии системы материальных точек равна мощности внешних и внутренних сил, приложенных к системе:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}'_i \cdot \mathbf{v}_i = N + N'. \quad (24.55)$$

Пример 107. Определить кинетическую энергию снаряда при вылете из дула орудия, принимая следующие данные*: масса снаряда $M = 360$ кг, полукалнбр $R = 0,152$ м, радиус инерции снаряда относительно оси вращения $\rho_C = 0,735 R$, угловая скорость снаряда вокруг оси (начальная) $\tilde{\omega}_0 = 552$ 1/с, скорость центра масс (в начальный момент) $v_0 = 800$ м/с.

По формуле (24.27) имеем

$$T = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} M \rho_C^2 \tilde{\omega}_0^2 = \frac{360}{2} (800^2 + 0,735^2 \cdot 0,152^2 \cdot 552^2) = 1,16 \cdot 10^8 \text{ Дж.}$$

Кинетическая энергия вращательного движения в этом случае составляет лишь 0,6% от энергии поступательного движения.

Полученный результат дает представление об огромной разрушительной работе, которую даже не разрывающийся снаряд может произвести при ударе о препятствие. Товарный поезд в составе 50 груженых вагонов (скорость принимаем 24 км/час, масса груженого вагона 25 т) при двух тепловозах (считаем кинетическую энергию тепловоза равной удесятеренной энергии одного вагона) имеет запас кинетической энергии, равный только 38% энергии снаряда. Это объясняется громадной скоростью снаряда, в два с лишним раза большей скорости звука в воздухе; кинетическая же энергия пропорциональна квадрату скорости.

Пример 108. Груз массой M опускается на канате с постоянной скоростью v_0 . Определить растяжение каната при мгновенной остановке его верхнего конца; массу каната пренебрегаем (рис. 314).

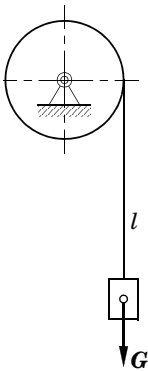


Рис. 314

* См. Крылов А. Н. [10, с. 200].

Рассмотрим два положения: начальное — в момент остановки верхнего конца каната — и конечное — в момент остановки груза. В начальном положении кинетическая энергия системы, если пренебречь массой каната, равна

$$T_1 = Mv_0^2/2,$$

а в конечном положении кинетическая энергия $T_2 = 0$.

При равномерном движении груза со скоростью v_0 канат растянут грузом на некоторую длину $f_{\text{ст}}$ (статическая деформация), определяемую соотношением

$$cf_{\text{ст}} = G = Mg.$$

После остановки верхнего конца каната груз продолжает двигаться, растягивая канат. Обозначим через y смещение груза, отсчитываемое от его положения в момент остановки верхнего конца каната, и через f_d дополнительную деформацию каната к моменту остановки груза (динамическую часть общей деформации каната). Тогда работа приложенной к грузу упругой реакции каната будет равна

$$-c \int_0^{f_d} (f_{\text{ст}} + y) dy = -c \left(f_{\text{ст}} f_d + \frac{1}{2} f_d^2 \right).$$

Работа силы тяжести G на рассматриваемом участке равна

$$Gf_d = Mgf_d = cf_{\text{ст}}f_d.$$

Применяя теорему об изменении кинетической энергии, находим

$$-T_1 = Mgf_d - cf_{\text{ст}}f_d - \frac{1}{2} cf_d^2 = -c \frac{f_d^2}{2}.$$

Подставляя начальное значение кинетической энергии, получаем

$$f_d = v_0 \sqrt{f_{\text{ст}}/g}.$$

В канате возникнет дополнительное (по отношению к первоначальному статическому) напряжение, которое по известной формуле сопротивления материалов составляет

$$\sigma_d = \frac{Ef_d}{l} = \frac{E}{l} v_0 \sqrt{\frac{M}{c}}.$$

Замечая, что жесткость каната c равна $c = EF/l$, получаем

$$\sigma_d = v_0 \sqrt{\frac{EM}{Fl}}.$$

Здесь l — длина свешивающейся части каната в момент остановки верхнего конца его, E — модуль Юнга материала, F — площадь поперечного сечения каната. Из полученной формулы следует, что опасной является внезапная задержка верхнего конца каната при малой l , т. е. в начальный период движения груза; вместе с тем при малой l масса каната будет невелика, и можно довольствоваться полученным приближенным результатом.

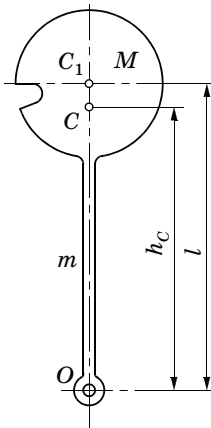


Рис. 315

Пример 109. Копер представляет собой физический маятник (рис. 315), состоящий из однородного стержня массой m , на конце которого закреплена тяжелая отливка массой M ; длина стержня от оси вращения до центра тяжести отливки равна l . Отливка падает с пренебрежимо малой начальной скоростью из вертикального верхнего положения. Пренебрегая размерами отливки, определить угловую скорость копра в момент прохождения через нижнее положение равновесия и усилие в стержне в этот момент времени.

Для определения угловой скорости ω стержня в момент прохождения через нижнее положение равновесия применим теорему об изменении кинетической энергии. Имеем

$$T_1 = 0, \quad T_2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2,$$

где момент инерции J_z системы относительно оси вращения складывается из момента инерции стержня $(1/3)ml^2$ и момента инерции отливки, равного Ml^2 . Работа силы тяжести стержня и отливки равна

$$W_{1,2} = (m + 2M)lg.$$

Находим

$$\omega^2 = \frac{6(m + 2M)}{M + 3M} \frac{g}{l}. \quad (\alpha)$$

Максимальное натяжение S будет иметь место в сечении стержня, примыкающем к оси вращения. По теореме о движении центра масс C системы

$$(M + m)\omega_C = \sum_{i=1}^n F_i;$$

проецируя это уравнение на главную нормаль к траектории в момент прохождения системой нижнего равновесного положения, получаем

$$(m + M)h_C\omega^2 = -mg - Mg + S,$$

здесь

$$h_C = \frac{m + 2M}{2(m + M)} l. \quad (\beta)$$

Отсюда имеем

$$S = (m + M)(g + h_C\omega^2),$$

или после подстановки выражений (α) и (β)

$$S = \left[m + M + \frac{3(m + 2M)^2}{m + 3M} \right] g.$$

Пример 110. Цепь шахтного подъемника (рис. 316) приводится в движение воротом, находящимся на одном валу с электромотором. Определить мощность электромотора N , принимая следующие данные: подъем груза весом G_1 начинается с ускорением w ; достигнув значения v_{\max} , скорость груза далее остается постоянной. Диаметр ворота $2r_1$, диаметры блоков $2r_2, 2r_3$, моменты инерции блоков J_2 и J_3 , вес поднимаемой вагонетки с грузом G_1 , вес опускающейся вагонетки G_2 , вес единицы длины цепи q , общая длина цепи l . Моменты инерции даны относительно осей вращения соответствующих тел.

Теорема об изменении кинетической энергии, записанная в форме (24.55), дает

$$\frac{dT}{dt} = N - (G_1 - G_2)v,$$

где второе слагаемое в правой части представляет мощность сил тяжести. При этом предполагается, что центр тяжести цепи сохраняет при ее движении неизменное положение, так что работа силы тяжести цепи равна нулю. Подставляя значение

$$T = \left(\frac{G_1 + G_2 + ql}{2g} + \frac{J_1}{2r_1^2} + \frac{J_2}{2r_2^2} + \frac{J_3}{2r_3^2} \right) v^2$$

и замечая, что $\dot{v} = w$, получаем

$$N = \left[\left(\frac{G_1 + G_2 + ql}{g} + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} + \frac{J_3}{r_3^2} \right) w + G_1 - G_2 \right] v.$$

В период установившегося движения с постоянной скоростью $v = v_{\max}$ имеем

$$w = 0, \quad N = (G_1 - G_2) v_{\max}.$$

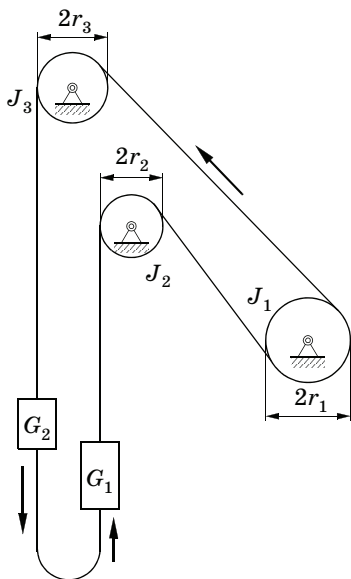


Рис. 316

§ 128. Потенциальная энергия силового поля

Среди сил разнообразной природы, с которыми приходится иметь дело в механике, особое место занимает класс сил, величина и направление которых зависят только от положения точки

пространства, в которой находится рассматриваемая материальная точка, или от взаимного расположения взаимодействующих точек.

Примером может служить сила тяготения двух точечных масс, обратно пропорциональная квадрату расстояния между этими массами и, следовательно, зависящая от их взаимного расположения. Точно так же сила, действующая на электрически заряженную частицу в электростатическом поле, зависит лишь от положения частицы в этом поле и также принадлежит к рассматриваемому классу сил. В качестве еще одного примера можно привести упругие силы.

Если точка или система точек движется в пространстве под действием сил, однозначно определяемых положением тех точек пространства, в которых в данный момент находятся точка или система, то говорят, что точка или система движется в силовом поле.

Силовое поле может быть как одинаковым в разные моменты времени, так и изменяться с течением времени. В первом случае поле называется *стационарным*, во втором — *нестационарным*. Так, например, силовое электростатическое поле вокруг заряженного тела будет стационарным, если заряд тела постоянен во времени, и нестационарным в противоположном случае. В дальнейшем будут рассматриваться лишь стационарные силовые поля.

Класс сил, зависящих от положения, принципиально отличается от сил, зависящих от скорости, каковыми являются силы сопротивления среды движению в ней тела или сила, с которой магнитное поле действует на движущийся электрический заряд.

Это различие выражается в том, что проекции силы \mathbf{F} , с которой силовое поле действует на движущуюся в нем материальную точку, являются наперед заданными функциями координат

$$F_x = F_x(x, y, z), \quad F_y = F_y(x, y, z), \quad F_z = F_z(x, y, z) \quad (24.56)$$

независимо от того, какое движение совершает материальная точка в этом поле.

Через точку поля M проведем вектор силы \mathbf{F} , с которой поле действует в этом месте на данную материальную точку. Возьмем на направлении этого вектора смежную точку M' , через нее проведем соответствующую ей силу \mathbf{F}' и т. д. (рис. 317); получим ломаную $MM'M'' \dots$, которая в пределе при неограниченном сближении смежных точек M, M', M'', \dots превращается в кривую, называемую *силовой линией* поля.

Согласно этому определению сила, действующая в силовом поле на точку, направлена по касательной к силовой линии, проходящей через данное положение движущейся точки.

Через каждую точку поля можно провести единственную силовую линию*, и поле можно считать заполненным силовыми линиями. По силовой линии будет двигаться в первый момент точка, если ее отпустить без начальной скорости.

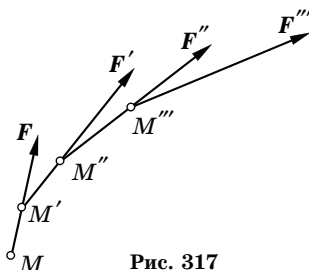


Рис. 317

Пусть в заданном равенствами (24.56) силовом поле движется материальная точка M . При переходе точки из положения M_0 в положение M совершается, по предыдущему, работа

$$W_{0,1} = \int_{M_0}^M \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_0}^M (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (24.57)$$

Криволинейный интеграл, стоящий справа, в общем случае силового поля зависит от формы траектории, по которой точка переходит из положения M_0 в положение M . Но уже в § 124 было отмечено существование сил (сила тяжести, упругая сила), работа которых не зависит от траектории точки, а определяется только координатами ее конечного и начального положений.

Докажем общую теорему.

ТЕОРЕМА. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы работа силы \mathbf{F} не зависела от формы траектории материальной точки в силовом поле, а определялась только конечным и начальным положениями точки в этом поле, является существование однозначной функции координат, частные производные которой по x , y , z равны проекциям силы \mathbf{F} на соответствующие оси координат.*

Обозначим эту функцию через $[-\Pi(x, y, z)]$. Таким образом, указанные условия имеют вид

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (24.58)$$

Как известно из т. I, § 75, эта система равенств эквивалентна одному векторному равенству

$$\mathbf{F} = -\text{grad } \Pi. \quad (24.59)$$

* Исключения представляют особые точки силового поля. Через особую точку или совсем не проходят силовые линии, или проходит не единственная линия.

Функция $\Pi(x, y, z)$ называется *потенциалом* или (происхождение второго термина станет ясным в дальнейшем) *потенциальной энергией силового поля*, а само силовое поле при этом — *потенциальным*.

Предполагается, как указано, что функция $\Pi(x, y, z)$ определена единственным образом в любой точке рассматриваемой области изменения переменных x, y, z , т. е. однозначна. Так, например, из рассмотрения исключается выражающая полярный угол точки функция $\varphi = \text{arctg}(y/x)$, принимающая в любой точке, отличной от точки $x = 0, y = 0$, в которой она не определена, бесчисленное множество значений, отличающихся целым кратным 2π .

■ *Достаточность* условий (24.58) доказывается тем, что при соблюдении их выражение (24.57) работы $W_{0,1}$ принимает вид

$$W_{0,1} = - \int_{M_0}^M \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz \right) = - \int_{M_0}^M d\Pi,$$

где $d\Pi$ — полный дифференциал потенциальной энергии. Обозначая через x, y, z координаты точки M и через x_0, y_0, z_0 — координаты точки M_0 и замечая, что интеграл от полного дифференциала функции равен разности значений ее при значениях переменных, соответствующих верхнему и нижнему пределам, получаем

$$W_{0,1} = \Pi(x_0, y_0, z_0) - \Pi(x, y, z). \quad (24.60)$$

Таким образом, работа действительно оказалась зависящей не от траектории перехода точки из положения M_0 в положение M , а только от координат, определяющих эти положения. Фиксируя начальное положение M_0 , можно сказать, что работа является в рассматриваемом случае функцией координат x, y, z конечного положения точки.

Следствием предположения об однозначности потенциальной энергии является обращение в нуль работы при совпадении начальной и конечной точек пути интегрирования.

Работа в потенциальном силовом поле по любому замкнутому пути равна нулю.

Этот признак может быть принят за определение потенциального силового поля. Можно сказать также, что циркуляция вектора силы по замкнутому контуру в потенциальном поле равна нулю.

■ Для доказательства *необходимости* следует предположить, что

$$W_{0,1} = \int_{M_0}^M (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -\Pi(x, y, z) + \Pi(x_0, y_0, z_0), \quad (24.61)$$

и доказать справедливость равенств (24.58).

Зафиксировав положение M_0 , рассмотрим работу $W_{0,1'}$ на пути M_0MM' , где M' — точка, бесконечно близкая к M и имеющая координаты $(x + dx, y + dy, z + dz)$. По (24.60) будем иметь

$$\begin{aligned} W_{0,1'} &= \int_{M_0}^M (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \\ &= -\Pi(x + dx, y + dy, z + dz) + \Pi(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Разность работ $W_{0,1'} - W_{0,1}$ представляет собой элементарную работу на пути MM' :

$$\begin{aligned} \delta W &= F_x dx + F_y dy + F_z dz = \\ &= -\Pi(x + dx, y + dy, z + dz) + \Pi(x, y, z). \end{aligned}$$

Но величина справа с точностью до малых высших порядков равна полному дифференциалу ($-d\Pi$):

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -d\Pi = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz \right), \quad (24.62)$$

или

$$\left(F_x + \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right) dx + \left(F_y + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right) dy + \left(F_z + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right) dz = 0.$$

Дифференциалы dx, dy, dz независимы друг от друга; можно, например, взять $dy = 0, dz = 0, dx \neq 0$, что соответствует смещению конца пути интегрирования в интеграле (24.60) на бесконечно малый отрезок, параллельный оси x . Тогда из предыдущего равенства получим

$$\left(F_x + \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right) dx = 0;$$

отсюда, поскольку $dx \neq 0$, получаем первое из равенств (24.58). Аналогично приходим к двум остальным равенствам, что и доказывает теорему.

Из соотношения (24.60) следует, что работа силы в потенциальном силовом поле при перемещении точки из некоторого начального положения (0) в конечное (1) равна уменьшению (падению) потенциальной энергии между этими двумя положениями точки.

В выражение работы потенциальная энергия входит как разность ее значений в двух точках. Поэтому потенциальную энергию можно определять с точностью до некоторой аддитивной постоянной, значение которой совершенно произвольно. Располаясь этим, выберем значение потенциальной энергии в начальном положении точки (0) равным нулю, т. е. примем

$$\Pi(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Тогда, переписывая (24.60) в виде

$$\Pi(x, y, z) = -W_{0,1} = W_{1,0}, \quad (24.63)$$

заклучим, что потенциальная энергия в данной точке равна работе, которую совершили бы силы поля при перемещении точки из данного положения в начальное.

Элементарная работа потенциальной силы по (24.61) равна взятому со знаком минус полному дифференциалу функции Π . Поэтому если вычисление элементарной работы приводит к выражению, являющемуся полным дифференциалом, то сила будет потенциальной.

Вспомяная введенную в т. I, § 75 операцию вихря $\text{rot } a$, можем на основе известного тождества

$$\text{rot grad } \varphi \equiv 0$$

записать условие потенциальности силового поля в форме

$$\text{rot } \mathbf{F} = 0,$$

или в проекциях на оси координат

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}. \quad (24.64)$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство поверхностей

$$\Pi(x, y, z) = \text{const} = C. \quad (24.65)$$

На каждой из таких поверхностей, соответствующей некоторому фиксированному значению параметра C , потенциальная энергия сохраняет одно и то же значение C . Такая поверхность называется *поверхностью уровня* потенциальной энергии или *изопотенциальной поверхностью*.

Возьмем какую-нибудь точку M_1 с координатами x_1, y_1, z_1 и проведем через нее изопотенциальную поверхность. Уравнение такой поверхности будет, очевидно,

$$\Pi(x, y, z) = \Pi(x_1, y_1, z_1). \quad (24.66)$$

Через каждую точку силового поля можно провести поверхность уровня потенциальной энергии, так что все поле будет заполнено поверхностями уровня. Из соотношения (24.60) теперь следует, что работа в потенциальном силовом поле не зависит не только от траектории, но также и от точного указания начального и конечного положений точки; для определения работы достаточно задать поверхности уровня, на которых точка находилась в начальный и конечный моменты движения. Выбирая вновь значение потенциальной энергии на начальной изопотенциальной поверхности равным нулю, делаем следующее заключение.

Потенциальная энергия в данной точке поля равна работе сил при переводе движущейся точки с данной поверхности уровня на некоторую условно «нулевую» поверхность уровня. Таким образом, потенциальная энергия характеризует возможность силового поля совершать работу.

Вспоминая т. I, § 75, где вектор градиента скалярной функции по направлению определен перпендикуляром (нормалью) к поверхности уровня скалярной функции, отложенным в сторону возрастания скалярной функции, а по величине — производной скалярной функции по *положительному* направлению нормали — *внешней* нормали, — и принимая во внимание определяющее силу равенство (24.59), можем сделать следующий вывод.

В потенциальном силовом поле сила направлена по нормали к изопотенциальной поверхности в сторону убывания потенциальной энергии и по величине равна абсолютному значению производной потенциальной энергии по нормали к изопотенциальной поверхности.

В случае системы материальных точек потенциальной энергией называется функция координат (x_i, y_i, z_i) точек системы

$$\Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n),$$

частные производные которой по координатам точки, взятые со знаком минус, равны соответствующим проекциям силы, действующей на эту точку:

$$F_{ix} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}. \quad (24.67)$$

При этом выражение элементарной работы будет

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{i=1}^n (F_{ix} dx_i + F_{iy} dy_i + F_{iz} dz_i) = \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} dz_i \right) = -d\Pi. \end{aligned} \quad (24.68)$$

Интегрируя это выражение элементарной работы при перемещении точек системы из некоторого положения 1 в положение 2, получаем

$$W_{1,2} = \Pi_1 - \Pi_2. \quad (24.69)$$

Работа потенциальных сил при переходе системы из одного положения в другое определяется уменьшением (падением) потенциальной энергии от значения в начальном положении системы до значения в конечном ее положении.

§ 129. Потенциалы силовых полей

Рассмотрим некоторые простейшие силовые поля.

1°. Потенциальная энергия поля силы тяжести. Выбирая систему координат так, чтобы горизонтальная плоскость на заданном произвольно уровне была плоскостью xOy , а ось Oz была направлена вертикально вверх, будем иметь в случае одной точки весом G (и массой m)

$$\delta W = -d\Pi = -G dz = -mg dz, \quad (24.70)$$

откуда

$$\Pi = Gz = mgz. \quad (24.71)$$

Постоянную интегрирования можно, как было указано, выбрать совершенно произвольно, например опустить.

Потенциальную энергию системы тяжелых точек M_i с весами G_i (массами m_i) и ординатами z_i определим интегрированием равенства

$$\delta W = -d\Pi = \sum_{i=1}^n (-G_i dz_i) = \sum_{i=1}^n (-m_i g dz_i),$$

откуда

$$\Pi = \sum_{i=1}^n G_i z_i = Gz_C = \sum_{i=1}^n m_i g z_i = Mgz_C, \quad (24.72)$$

где z_C — ордината центра масс системы, G — сумма весов отдельных точек системы (M — сумма масс этих точек).

Работу силы тяжести при переходе системы из положения 1 в положение 2 найдем по формуле (24.69):

$$W_{1,2} = \Pi_1 - \Pi_2 = G(z_{C_1} - z_{C_2}) = Mg(z_{C_1} - z_{C_2}). \quad (24.73)$$

Работа силы тяжести не зависит от траекторий точек системы; поле тяжести — потенциальное поле. Поверхностями уровня будут, очевидно, являться горизонтальные плоскости, силовыми линиями — вертикали.

2°. Потенциальная энергия упруго деформированного тела.

В случае растянутой пружины, удлинение которой из натурального (недеформированного) состояния равно x , определяя потенциальную энергию как работу, совершаемую упругими силами при возвращении пружины в недеформированное состояние, будем иметь

$$\Pi(x) = \int_x^0 F_x dx = -c \int_x^0 x dx = \frac{1}{2} cx^2. \quad (24.74)$$

В этом случае потенциальная энергия упруго деформированного тела пропорциональна квадрату величины, характеризующей перемещение из натурального состояния. Точно так же потенциальная энергия скрученного стержня определяется формулой

$$\Pi = \frac{1}{2} k\varphi^2, \quad (24.75)$$

где k — жесткость при кручении, φ — угол кручения между крайними сечениями стержня.

Рассмотрим точечную массу, закрепленную в точке некоторой упругой конструкции, которая может состоять из пружин, стержней, плит и т. п. Предположим, что начало координат помещено в этой точке при натуральном состоянии конструкции. При малом отклонении массы из начала координат в точку с координатами x , y , z возникнет упругая реакция, проекции которой на оси координат, согласно закону Гука, будут линейными функциями координат:

$$\begin{aligned} F_x &= -(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z), \\ F_y &= -(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z), \\ F_z &= -(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z). \end{aligned} \quad (24.76)$$

Коэффициенты a_{ij} зависят от размеров элементов конструкции, упругих постоянных их материалов и выбора направлений

осей взятой системы координат. Они обладают важным *свойством взаимности*

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{23} = a_{32}, \quad a_{31} = a_{13}, \quad (24.77)$$

являющимся следствием потенциальности упругих сил. Действительно, для потенциальных сил имеют место соотношения (24.64), первое из которых в нашем случае дает

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -a_{12} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = -a_{21},$$

т. е. $a_{12} = a_{21}$. Аналогично получаются остальные равенства (24.77).

Чтобы найти выражение потенциальной энергии, проинтегрируем ее полный дифференциал:

$$d\Pi = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)dx + \\ + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)dy + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)dz$$

и получим

$$\Pi = \frac{1}{2} (a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2). \quad (24.78)$$

Потенциальная энергия упругой конструкции, подчиняющейся закону Гука, является однородной квадратичной формой координат точки, отсчитываемых от положения ее при недеформированном состоянии конструкции.

Принятое выше физическое допущение, что упругие силы потенциальны, является выражением свойства идеально упругого тела накапливать при постепенном нагружении потенциальную энергию и возвращать ее без потерь, когда тело вернется в исходное натуральное состояние при постепенном разгрузении.

Как пример рассмотрим стержень, нижний конец которого заделан (рис. 311). При сообщении верхнему концу малого перемещения ξ в направлении одной из *главных осей инерции поперечного сечения** возникает упругая реакция, направленная противоположно смещению и пропорциональная ему по величине; такое же явление будет иметь место, если сообщить концу стержня малое перемещение η в направлении второй главной оси. Таким образом, на точечную массу, закрепленную в конце стержня, при смещении ее в положение с координатами ξ, η в плоскости,

* Понятие о главных осях инерции сечения предполагается известным из курса сопротивления материалов (см. также § 140). В случае однородного стержня с симметричным относительно двух взаимно перпендикулярных осей сечением эти оси будут главными осями инерции.

перпендикулярной оси стержня в недеформированном состоянии, будет действовать упругая сила F , проекции которой равны

$$F_{\xi} = -c_1 \xi, \quad F_{\eta} = -c_2 \eta. \quad (24.79)$$

Коэффициенты c_1 и c_2 определяются формулами

$$c_1 = \frac{3EJ_{\eta}}{l^3}, \quad c_2 = \frac{3EJ_{\xi}}{l^3}, \quad (24.80)$$

где J_{η} и J_{ξ} — моменты инерции сечения относительно соответствующих главных осей, l — длина стержня, E — модуль Юнга. В общем случае, когда $J_{\xi} \neq J_{\eta}$, упругая сила F не является центральной.

Потенциальная энергия изогнутого стержня равна

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_1 \xi^2 + c_2 \eta^2). \quad (24.81)$$

Если оси координат x и y не совпадают с главными осями инерции, то по формулам преобразования координат имеем

$$\xi = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad \eta = x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad (24.82)$$

где α — угол оси x с главной осью ξ . Выражение потенциальной энергии принимает в соответствии с общей формулой (24.78) вид

$$\Pi = \frac{1}{2} (a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}x^2); \quad (24.83)$$

здесь

$$a_{11} = c_1 \cos^2 \alpha + c_2 \sin^2 \alpha, \quad a_{22} = c_1 \sin^2 \alpha + c_2 \cos^2 \alpha, \\ a_{12} = (c_2 - c_1) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Проекции упругой силы на оси x и y поэтому будут — ср. (24.76) и (24.77) —

$$F_x = -(a_{11}x + a_{12}y), \quad F_y = -(a_{12}x + a_{22}y). \quad (24.84)$$

3°. Потенциальная энергия системы тяготеющих масс. Рассмотрим массу m , находящуюся в точке M с вектором-радиусом r в поле притяжения, создаваемом системой n масс m_i , находящихся в точках M_i с векторами-радиусами r_i (рис. 318). На массу m действует совокупность сил

$$F_i = fmm_i \frac{r_i - r}{|r - r_i|^3}, \quad i = 1, 2, \dots, h; \quad (24.85)$$

здесь f — постоянная тяготения.

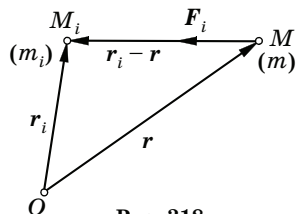


Рис. 318

Элементарная работа этих сил при перемещении $d\mathbf{r}$ массы m равна

$$\begin{aligned} \delta W &= fm \sum_{i=1}^n m_i \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = -fm \sum_{i=1}^n m_i \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot (d\mathbf{r} - d\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = \\ &= -fm \sum_{i=1}^n m_i \frac{d(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^2/2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = -fm \sum_{i=1}^n m_i \frac{d|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} = \\ &= -fmd \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r - r_i}. \end{aligned} \quad (24.86)$$

Приравнивая это выражение элементарному уменьшению $-d\Pi$ потенциальной энергии поля, находим

$$\Pi = -fm \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (24.87)$$

Каждое слагаемое этой суммы представляет собой потенциальную энергию тяготения, создаваемого точкой массы m_i в точке M ; но таково же выражение потенциальной энергии тяготения, создаваемого массой m в точке M_i . По этим соображениям выражение

$$\Pi_{ij} = -f \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = -f \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad (24.88)$$

в котором

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, \quad (24.89)$$

можно назвать взаимной потенциальной энергией системы двух притягивающихся масс m_i и m_j . Взаимная потенциальная энергия системы n точечных масс m_1, m_2, \dots, m_n поэтому будет

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Pi_{ij} = -\frac{1}{2} f \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad i \neq j. \quad (24.90)$$

Множитель $1/2$ нужен потому, что, раскрывая двойную сумму, мы каждое слагаемое берем дважды (например, задавая $i = 1, j = 2$ и $j = 1, i = 2$).

Пример 111. Упругий подвес состоит из стержней $O_1M_0, O_2M_0, \dots, O_nM_0$, соединенных в вершине M_0 и прикрепленных с помощью сферических шарниров O_1, O_2, \dots, O_n к неподвижной опоре (рис. 319). В начальном состоянии стержни не напряжены и имеют длины $l_1^0, l_2^0, \dots, l_n^0$. Требуется составить выражение потенциальной энергии системы, предполагая, что вершина M_0 получила малое перемещение.

При деформации k -й стержень O_kM_0 (рис. 320) приобретет удлинение $f_k = M_0M'_k$ и, совершив малый поворот вокруг центра шарнира O_k , займет положение O_kM . Потенциальная энергия этого стержня по (24.74) равна

$$\Pi_k = \frac{1}{2} c_k f_k^2, \quad c_k = \frac{EF_k}{l_k^0}.$$

В треугольнике $M_0MM'_k$ угол $M_0M'_kM$ можно (с ошибкой второго порядка малости относительно угла поворота стержня O_kM_0) считать прямым; при этом отрезок $M_0M'_k$ будет проекцией отрезка M_0M . Обозначая через x, y, z проекции перемещения $\overrightarrow{M_0M}$ на оси неподвижной системы координат с началом в точке M_0 и через $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ косинусы углов стержня O_kM_0 с теми же осями, получаем

$$f_k = x\alpha_k + y\beta_k + z\gamma_k.$$

Выражение потенциальной энергии примет вид

$$\Pi = \sum_{k=1}^n \Pi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k (x\alpha_k + y\beta_k + z\gamma_k)^2,$$

и в соответствии с формулой (24.78) потенциальная энергия оказывается квадратичной формой координат x, y, z точки M , коэффициенты которой вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sum_{k=1}^n c_k \alpha_k^2, & a_{12} &= \sum_{k=1}^n c_k \alpha_k \beta_k, & a_{13} &= \sum_{k=1}^n c_k \alpha_k \gamma_k, \\ a_{22} &= \sum_{k=1}^n c_k \beta_k^2, & a_{23} &= \sum_{k=1}^n c_k \beta_k \gamma_k, & a_{33} &= \sum_{k=1}^n c_k \gamma_k^2. \end{aligned}$$

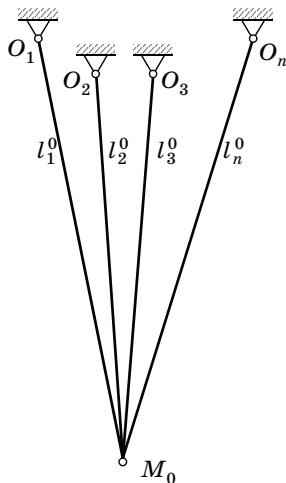


Рис. 319

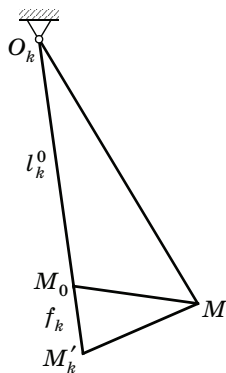


Рис. 320

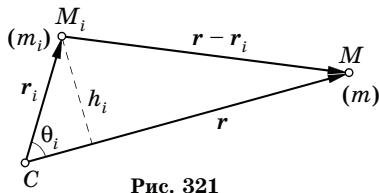


Рис. 321

Пример 112. Найти приближенное значение потенциальной энергии поля тяготения, создаваемого системой притягивающих масс m_1, m_2, \dots, m_n в точке поля M , расположенной на весьма большом расстоянии от этих масс (рис. 321).

Надо рассмотреть выражение (24.87) при условии, что отношения $r_i/r, i = 1, 2, \dots, n$, значительно меньше единицы. При таком условии в разложении выражения

$$\frac{1}{|r - r_i|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_i \cos \theta_i + r_i^2}} = \frac{1}{r} \left(1 - 2\frac{r_i}{r} \cos \theta_i + \frac{r_i^2}{r^2} \right)^{-1/2}$$

в ряд по степеням этого отношения можно ограничиться небольшим числом членов. Так, сохранив только члены первой и второй степени, получим*

$$\frac{1}{|r - r_i|} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r_i}{r} \cos \theta_i - \frac{1}{2} \frac{r_i^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{r_i^2}{r^2} \cos^2 \theta_i + \dots \right)$$

и далее найдем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|r - r_i|} &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n m_i + \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^n m_i r_i \cos \theta_i - \frac{1}{2r^3} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 + \\ &+ \frac{3}{2r^3} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \cos^2 \theta_i + \dots \end{aligned}$$

Можно представить это выражение в более простой форме, заметив, что

$$\sum_{i=1}^n m_i = M,$$

где M — сумма масс притягивающих тел; далее имеем

$$\sum_{i=1}^n m_i r_i \cos \theta_i = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n m_i r_i \cdot r = \frac{r}{r} \cdot \sum_{i=1}^n m_i r_i.$$

Эта сумма будет равна нулю, если за начало отсчета векторов r_i принять центр масс C системы притягивающих масс m_1, m_2, \dots, m_n . Наконец,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n m_i (r_i \cos \theta_i)^2 &= \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n m_i (r_i \sin \theta_i)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n m_i h_i^2. \end{aligned}$$

Согласно формуле (23.27)

$$\sum_{i=1}^n m_i h_i^2 = J_{CM}$$

* Коэффициент при (r_i^n/r^{n+1}) в этом разложении представляет собой известный полином Лежандра $P_n(\cos \theta_i)$.

представляет собой момент инерции притягивающих масс относительно прямой CM , проходящей через центр масс и притягиваемую точку. Точно так же

$$\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J_C$$

можно назвать полярным моментом инерции притягивающих масс относительно центра масс C .

С указанной выше степенью точности получаем

$$\Pi = -f \frac{mM}{r} - f \frac{m(J_C - (3/2)J_{CM})}{r^3} + \dots$$

Этот результат остается справедливым и при непрерывном распределении притягивающих масс, т. е. при рассмотрении притяжения, создаваемого сплошным телом. Следует лишь при вычислении величин M , J_C , J_{CM} заменить суммы соответствующими интегралами по объему тела.

В простейшем случае притяжения точки сплошной однородной сферой вследствие симметрии имеем

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i z_i^2 = \frac{1}{3} J_C,$$

откуда следует, что

$$J_{CM} = \frac{3}{2} J_C,$$

и в выражении потенциальной энергии исчезнут слагаемые, обратно пропорциональные кубу расстояния r . Можно доказать, что в этом случае исчезнут также все последующие члены. Выражение потенциальной энергии примет вид

$$\Pi = -\frac{f m M}{r},$$

т. е. сфера массой M притягивает внешнюю точку так же, как материальная точка с такой же массой, помещенная в центре сферы.

§ 130. Закон сохранения механической энергии

Если все (внутренние и внешние) силы, под действием которых происходит движение системы, являются потенциальными, то согласно равенствам (24.54) и (24.69) теорема об изменении кинетической энергии может быть записана в виде

$$T_2 - T_1 = \Pi_1 - \Pi_2. \quad (24.91)$$

Равенство (24.91) показывает, что *приращение кинетической энергии* на некотором участке пути системы в потенциальном силовом поле равно *уменьшению потенциальной энергии* на том же участке.

Если в числе сил, действующих на систему, наряду с потенциальными силами имеются и непотенциальные, то вместо (24.91) будем иметь

$$T_2 - T_1 = \Pi_1 - \Pi_2 + W_{1,2} + W'_{1,2}, \quad (24.92)$$

где $W_{1,2}$ и $W'_{1,2}$ — работа непотенциальных внешних и внутренних сил. В дифференциальной форме можно написать

$$dT = -d\Pi + \delta W + \delta W'. \quad (24.93)$$

Возвращаясь к движению в потенциальном поле сил, перепишем равенство (24.91) в форме

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2. \quad (24.94)$$

При движении в потенциальном силовом поле сумма кинетической и потенциальной энергий системы сохраняет постоянную величину.

Сумму кинетической и потенциальной энергий системы назовем *полной механической энергией* системы и обозначим буквой E , так что

$$E = T + \Pi. \quad (24.95)$$

При этом (24.94) переписывается в виде

$$E_1 = E_2$$

или вообще

$$E = \text{const}, \quad (24.96)$$

что приводит к закону сохранения механической энергии.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ. Если система движется под действием только потенциальных сил, то полная механическая энергия ее во время движения сохраняет свою величину.

Значение постоянной в равенстве (24.96) определяется заданием координат и скоростей в каком-нибудь промежуточном состоянии системы, в частности в начале движения. Помещая систему при начале движения в определенное положение в потенциальном силовом поле и сообщая начальные скорости точкам системы, тем самым сообщают системе некоторую начальную

механическую энергию; во все остальное время движения в заданном поле система сохранит сообщенную ей энергию.

Так, например, подвешивая к пружине груз и давая грузу начальный толчок, тем самым сообщают системе начальную потенциальную энергию, определяемую начальной деформацией пружины, и начальную кинетическую энергию, зависящую от приданной грузу скорости. Груз придет в колебание, причем в крайних положениях его кинетическая энергия будет равна нулю, а в среднем положении будет иметь максимальное значение. Так как полная механическая энергия постоянна, там, где кинетическая энергия равна нулю, имеется максимум потенциальной энергии, а там, где кинетическая энергия максимальна, потенциальная энергия будет минимальной.

Важно отметить, что на основании закона сохранения энергии можно заранее указать связь между координатами любого промежуточного положения груза и его скоростью, если известна начальная энергия. Это — отличительная особенность движения в потенциальном силовом поле.

С математической точки зрения закон сохранения энергии дает один из *первых интегралов* уравнений движения, так как уравнение, представляющее закон сохранения энергии, содержит только координаты и скорости, т. е. первые производные от координат по времени, и не содержит ускорений (вторых производных от координат по времени); поэтому иногда выражение закона сохранения энергии называют *интегралом энергии* или *интегралом живых сил*.

Наблюдая действительно происходящие движения, можно заметить, что полная механическая энергия не остается постоянной. С одной стороны, часть энергии движения уходит на преодоление всевозможных вредных сопротивлений, так что с течением времени полная энергия системы уменьшается; с другой стороны, для поддержания движения или для его ускорения необходимо создать приток энергии, уходящей частично на компенсацию потерь энергии на преодоление вредных сопротивлений, частично на увеличение кинетической энергии системы. Таким образом, никогда не приходится наблюдать движения в потенциальных силовых полях, удовлетворяющие закону сохранения механической энергии в чистом виде, а всегда наблюдается наложение друг на друга нескольких сложных процессов, среди которых процесс движения в потенциальном поле играет более или менее значительную роль.

Этот дополнительный приток и расход энергии не всегда проявляется в виде механической энергии. В большинстве случаев приходится иметь дело с превращением механической энергии в различные другие виды: энергия уходит в виде тепла, звука, света и электричества; обратный приток энергии может происходить также в виде тепла, электричества и других видов энергии, превращаемых в механическую энергию. Поэтому в наиболее общей форме уравнение, выражающее теорему об изменении кинетической энергии, может быть записано в виде

$$dT = -d\Pi + \delta W' - \delta W'' \quad (24.97)$$

Здесь dT — приращение кинетической энергии системы, $-d\Pi$ — уменьшение потенциальной энергии, т. е. элементарная работа потенциальных сил, $\delta W'$ — элементарная работа непотенциальных сил, совершенная за счет притекшей энергии, и, наконец, $-\delta W''$ — потеря энергии на преодоление вредных сопротивлений. Переходя к конечному перемещению, будем иметь

$$E_2 - E_1 = \int_{(1)}^{(2)} \delta W' - \int_{(1)}^{(2)} \delta W'' = E' - E'' \quad (24.98)$$

Приращение механической энергии на некотором перемещении равно разности притекшей и рассеявшейся энергии.

Весьма существенна возможность измерять приходящую и уходящую энергию, в каких бы видах она не проявлялась, в механических единицах.

§ 131. Механическая энергия при вынужденных колебаниях

В установившемся режиме вынужденных колебаний при наличии силы сопротивления (§ 99) приращение механической энергии за один период изменения возмущающей силы должно равняться нулю, так как в противном случае движение не могло бы быть установившимся. Поэтому из (24.98) следует, что

$$E' = E'', \quad (24.99)$$

т. е. работа E' возмущающей силы за один период ее изменения $\tau = 2\pi/p$ равна абсолютному значению работы силы сопротивления $D_x = -\beta\dot{x}$ за тот же промежуток времени. Эту работу легко вычислить, зная движение точки в установившемся режиме.

В случае синусоидальной возмущающей силы $F = H \sin(pt + \delta)$, воспользовавшись формулой (21.70), получим

$$E'' = E' = \left| -\int_0^\tau \beta \dot{x} \, dx \right| = \beta a^2 p^2 \int_0^\tau \cos^2(pt + \delta - \varepsilon) \, dt = \frac{1}{2} \beta a^2 p^2 \tau.$$

Средняя мощность N , подводимая для преодоления силы сопротивления, поэтому будет

$$N = \frac{E'}{\tau} = \frac{1}{2} \beta a^2 p^2. \quad (24.100)$$

При резонансе ($p = k$), используя зависимость между амплитудой колебаний a и амплитудой возмущающей силы

$$a = \frac{h}{k^2} \lambda_r = \frac{H}{2mk^2\nu} = \frac{H}{2mkn} = \frac{H}{k\beta},$$

получающуюся из соотношений § 99, найдем

$$N_r = \frac{H^2}{2\beta}. \quad (24.101)$$

В общем случае периодической возмущающей силы по формуле (21.70) можем записать:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{s=1}^{\infty} s p a_s \cos(spt + \delta_s - \varepsilon_s), \\ dx &= \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sigma p a_\sigma \cos(\sigma pt + \delta_\sigma - \varepsilon_\sigma) \, dt, \end{aligned}$$

и подстановка в выражение E'' дает

$$\begin{aligned} E'' &= \left| -\int_0^\tau \beta \dot{x} \, dx \right| = \\ &= \beta \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{\infty} s \sigma p^2 a_s a_\sigma \int_0^\tau \cos(spt + \delta_s - \varepsilon_s) \cos(\sigma pt + \delta_\sigma - \varepsilon_\sigma) \, dt = \\ &= \frac{1}{2} \beta \tau \sum_{s=1}^{\infty} s^2 p^2 a_s^2, \end{aligned}$$

так как

$$\int_0^\tau \cos(spt + \delta_s - \varepsilon_s) \cos(\sigma pt + \delta_\sigma - \varepsilon_\sigma) \, dt = \begin{cases} (1/2) \tau & \text{при } \sigma = s, \\ 0 & \text{при } \sigma \neq s. \end{cases}$$

Поэтому

$$N = \frac{E''}{\tau} = \frac{E'}{\tau} = \frac{1}{2} \beta \sum_{s=1}^{\infty} (sp)^2 A_s^2 = \sum_{s=1}^{\infty} N_s, \quad (24.102)$$

где $N_s = (1/2)\beta(sp)^2 A_s^2$ на основании формулы (24.100) представляет собой среднюю мощность, соответствующую s -й гармонике частоты sp .

Уравнения (24.97) и (24.98) являются основными в расчетах движения систем с потерей и притоком энергии. Представляя собой обобщение закона сохранения механической энергии на случай любых видов энергии, эти уравнения расширяют круг рассмотрения явлений за пределы, которые ставятся другими теоремами механики.

Потенциальные силы, для которых справедлив закон сохранения энергии, называются иначе *консервативными** силами, все остальные — *неконсервативными*. Входящие в число неконсервативных сил силы вредных сопротивлений, при наличии которых энергия системы рассеивается или диссипируется, называют *диссипативными силами*. С точки зрения механики диссипация механической энергии есть потеря энергии, уход ее из поля механического использования. В действительности энергия, конечно, не исчезает, а превращается в другие виды (тепловую, электрическую и др.).

Пример 113. В опыте Зоммерфельда, иллюстрирующем поглощение энергии двигателя колеблющимся фундаментом, неуравновешенный мотор установлен на столе (рис. 322), ножки которого прикреплены к полу.

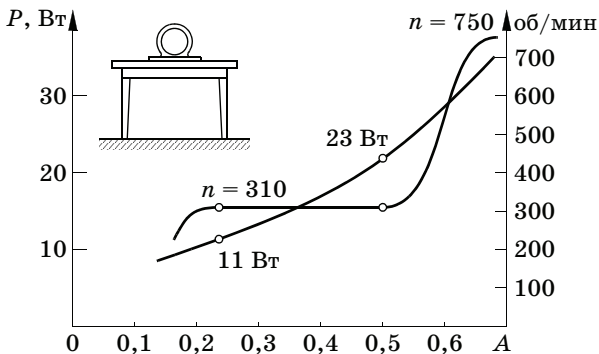


Рис. 322

* При наличии этих сил сохраняется (консервируется) механическая энергия, откуда и происходит название этого класса сил.

При 310 об/мин верхняя доска стола начинает совершать горизонтальные колебания с амплитудой 5 мм, причем число оборотов мотора остается неизменным до тех пор, пока мощность P не повышается с 11 до 23 Вт. Определим по этим данным коэффициент сопротивления β .

Угловая скорость 310 об/мин как раз соответствует частоте свободных горизонтальных колебаний системы; мощность, расходуемая на колебания при резонансе, равна 12 Вт. В тот момент, когда она повышается до 23 Вт, число оборотов резко увеличивается и колебания стола сразу уменьшаются, так как при изменившемся числе оборотов резонанс уже не имеет места. При 750 об/мин снова наступает резонанс с вертикальными колебаниями стола и число оборотов мотора остается постоянным, несмотря на увеличение подводимой мощности (см. на рис. 322 графики изменения угловой скорости и потребляемой мощности в зависимости от величины тока).

Коэффициент сопротивления β может быть определен по формуле

$$N_r = \frac{1}{2} \beta a^2 \omega^2,$$

откуда при заданных численных значениях $N_r = 12$ Вт, $a = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $\omega = 310 \pi/30$, получим

$$\beta \approx 912 \text{ кг/с.}$$

§ 132. Потеря кинетической энергии при неупругом ударе. Теорема Карно

Вернемся к случаю прямого центрального удара двух поступательно движущихся тел, рассмотренному в § 108. По теореме импульсов имеем

$$m(u_{2x} - u_{1x}) = S_x, \quad M(v_{2x} - v_{1x}) = -S_x, \quad (24.103)$$

где u_{2x} , v_{2x} , u_{1x} , v_{1x} — проекции скорости первого и второго тел соответственно после удара и до удара на ось x , т. е. на направление линии удара. К этим соотношениям присоединим уравнение, определяющее коэффициент восстановления при ударе k , которое по (22.65) можно записать в виде

$$u_{2x} + ku_{1x} = v_{2x} + kv_{1x}. \quad (24.104)$$

Величины, стоящие в каждой из частей этого равенства, вообще говоря, отличны от нуля. Допустив противное, т. е. что

$$u_{2x} = -ku_{1x}, \quad v_{2x} = -kv_{1x},$$

мы пришли бы из этих соотношений и теоремы количества движения

$$mu_{1x} + Mv_{1x} = mu_{2x} + Mv_{2x} \quad (24.105)$$

после сокращения на общий множитель $(1 + k)$ к заключению, что

$$mu_{1x} + Mv_{1x} = 0,$$

т. е. что количество движения тел до удара равно нулю. Но это в общем случае не соответствует условию задачи. Итак,

$$u_{2x} + ku_{1x} = v_{2x} + kv_{1x} \neq 0. \quad (24.106)$$

Умножим обе части первого соотношения (24.103) на отличный от нуля множитель $(u_{2x} + ku_{1x})$, а второго — на равный ему множитель $(v_{2x} + kv_{1x})$; после сложения результатов, пользуясь (24.104), получим

$$m(u_{2x} - u_{1x})(u_{2x} + ku_{1x}) + M(v_{2x} - v_{1x})(v_{2x} + kv_{1x}) = 0. \quad (24.107)$$

Таким образом, возможны два способа исключения импульсов из уравнений (24.103); первый, когда эти уравнения просто складываются, приводит к теореме сохранения количества движения (24.105); второй — к соотношению (24.107), которое после алгебраических преобразований дает выражение, определяющее потерю кинетической энергии при ударе. Отметим, что соотношение (24.107), в противоположность теореме сохранения количества движения, содержит коэффициент восстановления при ударе и, следовательно, зависит от предположения о физических свойствах соударяющихся тел.

Для преобразования выражения (24.107) напомним тождества

$$\begin{aligned} (u_{2x} - u_{1x})u_{2x} &\equiv \frac{1}{2} \left(u_{2x}^2 - u_{1x}^2 \right) + \frac{1}{2} (u_{1x} - u_{2x})^2, \\ k(u_{2x} - u_{1x})u_{1x} &\equiv \frac{1}{2} k \left(u_{2x}^2 - u_{1x}^2 \right) - \frac{1}{2} k(u_{1x} - u_{2x})^2. \end{aligned}$$

Складывая их, находим

$$\begin{aligned} (u_{2x} - u_{1x})(u_{2x} - ku_{1x}) &= \\ &= \frac{1}{2} (1 + k) \left(u_{2x}^2 - u_{1x}^2 \right) + \frac{1}{2} (1 - k)(u_{1x} - u_{2x})^2, \end{aligned}$$

и уравнение (24.107) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (1 + k) \left[mu_{2x}^2 + Mv_{2x}^2 - \left(mu_{1x}^2 + Mv_{1x}^2 \right) \right] + \\ + \frac{1}{2} (1 - k) \left[m(u_{1x} - u_{2x})^2 + M(v_{1x} - v_{2x})^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Выражения

$$T_1 = \frac{1}{2} \left(m u_{1x}^2 + M v_{1x}^2 \right), \quad T_2 = \frac{1}{2} \left(m u_{2x}^2 + M v_{2x}^2 \right), \quad (24.108)$$

представляют кинетические энергии системы до удара и после него, а выражение

$$T^* = \frac{1}{2} m (u_{1x} - u_{2x})^2 + \frac{1}{2} M (v_{1x} - v_{2x})^2 \quad (24.109)$$

можно назвать *кинетической энергией, соответствующей потерянными скоростям*. Итак, соотношение (24.107) приводится к виду

$$T_1 - T_2 = \frac{1-k}{1+k} T^*. \quad (24.110)$$

Кинетическая энергия, теряемая при ударе, равна $\frac{1-k}{1+k}$ — доле кинетической энергии, соответствующей потерянными скоростям.

Результат, полученный здесь для частного случая центрального удара двух тел, выражает общую ТЕОРЕМУ КАРНО О ПОТЕРЕ ЭНЕРГИИ ПРИ УДАРЕ.

При абсолютно упругом ударе $k = 1$ и

$$T_1 = T_2, \quad (24.111)$$

т. е. абсолютно упругий удар не сопровождается потерей энергии; другой крайний случай имеет место при абсолютно неупругом ударе, когда $k = 0$ и потеря энергии (переход механической энергии в другие формы) будет максимальной:

$$T_1 - T_2 = T^*. \quad (24.112)$$

Соотношение (24.110) является следствием равенств (24.104) и (24.105). В соединении с одним из этих равенств оно может служить для определения скоростей тел u_{2x} , v_{2x} после удара. Для этого придется решать систему, состоящую из одного линейного уравнения и одного квадратного, а по исключении одного из неизвестных — квадратное уравнение. Из двух решений этого урав-

нения одно соответствует обращению в нуль величин (24.106), на которые производилось умножение в ходе вывода. Это решение следует отбросить. Конечно, определить скорости после удара можно непосредственно из двух линейных уравнений (24.104), (24.105), и для этой цели соотношение, выражающее теорему Карно при прямом центральном ударе двух тел, не дает ничего нового. Оно имеет, однако, существенное значение, так как выражает в отчетливой форме энергетическое соотношение при ударе тел.

В частном случае неупругого удара, когда $u_{2x} = v_{2x}$, теорема Карно дает наиболее простой способ для определения общей скорости тел после удара. При составлении выражения кинетических энергий устраняется возможность сделать ошибку в знаке, которая не исключена при использовании теоремы количества движения.

Чтобы выразить потерю энергии через заданные начальные скорости тел, заметим, что, как легко вывести из уравнений (24.104) и (24.105),

$$\begin{aligned} u_{2x} - u_{1x} &= \frac{M(1+k)}{m+M} (v_{1x} - u_{1x}), \\ v_{2x} - v_{1x} &= \frac{m(1+k)}{m+M} (u_{1x} - v_{1x}). \end{aligned} \quad (24.113)$$

Кинетическая энергия, соответствующая потерянным скоростям, поэтому будет

$$T^* = \frac{mM(1+k)^2}{2(m+M)} (u_{1x} - v_{1x})^2 \quad (24.114)$$

и, следовательно,

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} (1-k^2) \frac{mM}{m+M} (u_{1x} - v_{1x})^2. \quad (24.115)$$

В частном случае, когда одно из тел до удара неподвижно, т. е. $v_{1x} = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= \frac{1}{2} (1-k^2) \frac{mM}{m+M} u_{1x}^2, \\ T_1 &= \frac{1}{2} m u_{1x}^2, \quad T_2 = \frac{m+k^2M}{m+M} T_1. \end{aligned} \quad (24.116)$$

Пользуясь этими формулами, определим в качестве примера коэффициент полезного действия молота массой m , ударяющего

по наковальне массой M . В этом случае полезной является потерянная кинетическая энергия $T_1 - T_2$, затрачиваемая на деформацию отковываемого куска; энергия T_2 , сохраняющаяся после удара и определяемая скоростями, которые будут после удара иметь молот и наковальня, является бесполезной. Коэффициент полезного действия молота поэтому равен

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{M(1 - k^2)}{m + M},$$

т. е. для получения высокого коэффициента полезного действия масса молота должна быть малой по сравнению с массой наковальни. К противоположному выводу придем, рассматривая случай копра с бойком массой m , забивающего сваю массой M . Теперь под коэффициентом полезного действия следует понимать отношение

$$\eta_1 = \frac{T_2}{T_1} = \frac{m + k^2 M}{m + M},$$

так как полезным является запас механической энергии, который остается в системе, не переходя в иные формы энергии. Потерянная энергия $T_1 - T_2$, идущая преимущественно на деформацию сваи, должна быть по возможности уменьшена. Вес бойка должен быть велик по сравнению с весом сваи. В первом случае коэффициент полезного действия увеличивается при неупругом ударе, во втором — при упругом.

Удовольствуемся пока настоящей, простейшей трактовкой теоремы Карно для случая прямого удара двух тел. Теорема эта на самом деле имеет гораздо более общее значение в динамике систем материальных точек и твердых тел. К этому вопросу мы еще вернемся при описании применений общего уравнения динамики несвободной системы (§ 156).

Соотношения, выведенные выше, относятся к прямому центральному удару двух поступательно движущихся тел. Они могут быть распространены на случай *соударения двух тел, вращающихся вокруг неподвижных осей* (рис. 323), при условии, что линейные скорости точек соударяющих-

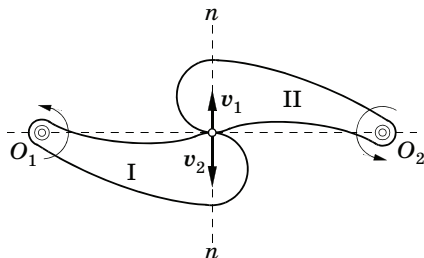


Рис. 323

ся тел направлены по одной прямой, являющейся нормалью к поверхностям, по которым происходит соприкосание. Сказанное следует из аналогии, существующей между уравнением прямолинейного движения материальной точки и уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси (§ 116)

Приведем вывод, не основывающийся на указанной аналогии. Для этого составим уравнения моментов количеств движения при ударе для первого и второго тела (§ 117):

$$\begin{aligned} J_1(\omega_1 - \omega_{10}) &= r_1 \times S, \\ J_2(\omega_2 - \omega_{20}) &= -r_2 \times S. \end{aligned} \quad (24.117)$$

Здесь J_1, J_2 — моменты инерции тел относительно их осей вращения, ω_{10}, ω_{20} — их угловые скорости до удара, ω_1, ω_2 — угловые скорости после удара. Через S обозначен импульс, прикладываемый к первому телу со стороны второго при ударе; тогда на второе тело будет действовать импульс противоположного направления $-S$; r_1 и r_2 — векторы-радиусы общей точки тел, в которой прикладывается удар, причем начала этих векторов-радиусов расположены на осях вращения соответствующих тел.

Умножая обе части первого равенства (24.117) скалярно на $\omega_1 + k\omega_{10}$, второго — на $\omega_2 + k\omega_{20}$ и складывая результаты, получаем

$$\begin{aligned} J_1(\omega_1 - \omega_{10}) \cdot (\omega_1 + k\omega_{10}) + J_2(\omega_2 - \omega_{20}) \cdot (\omega_2 + k\omega_{20}) = \\ = (\omega_1 + k\omega_{10}) \cdot (r_1 \times S) - (\omega_2 + k\omega_{20}) \cdot (r_2 \times S). \end{aligned}$$

Применив правило преобразования скалярного произведения вектора на векторное произведение двух векторов, преобразуем правую часть к виду

$$\begin{aligned} [(\omega_1 + k\omega_{10}) \times r_1] \cdot S - [(\omega_2 + k\omega_{20}) \times r_2] \cdot S = \\ = (v_1 + kv_{10} - v_2 - kv_{20}) \cdot S = [(v_1 - v_2) + k(v_{10} - v_{20})] \cdot S, \end{aligned} \quad (24.118)$$

где v_1, v_2, v_{10}, v_{20} — линейные скорости после удара и до удара точек первого и второго тела, вступающих в соприкосание при ударе. Относительные скорости $v_1 - v_2$ и $v_{10} - v_{20}$ направлены, согласно условию, по общей нормали к поверхности соприкосания. Поэтому, по определению коэффициента восстановления, имеем подобно (24.104)

$$v_1 - v_2 + k(v_{10} - v_{20}) = 0 \quad (24.119)$$

и по (24.118) получаем

$$J_1(\omega_1 - \omega_{10}) \cdot (\omega_1 + k\omega_{10}) + J_2(\omega_2 - \omega_{20}) \cdot (\omega_2 + k\omega_{20}) = 0.$$

Полагая $\omega_1 = \tilde{\omega}_1 e_1, \omega_2 = \tilde{\omega}_2 e_2$, где e_1, e_2 — единичные векторы, направленные по осям вращения, можем также записать

$$J_1(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_{10}) \cdot (\tilde{\omega}_1 + k\tilde{\omega}_{10}) + J_2(\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_{20}) \cdot (\tilde{\omega}_2 + k\tilde{\omega}_{20}) = 0. \quad (24.120)$$

Дальнейшее преобразование не отличается от проведенного выше. Приходим к соотношению (24.112), в котором теперь кинетические энергии системы до удара

$$T_1 = \frac{1}{2} (J_1 \omega_{10}^2 + J_2 \omega_{20}^2),$$

$$T_2 = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2) \quad (24.121)$$

и кинетическая энергия, соответствующая потерянными скоростям, —

$$T^* = \frac{1}{2} [J_1(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_{10})^2 + J_2(\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_{20})^2]. \quad (24.122)$$

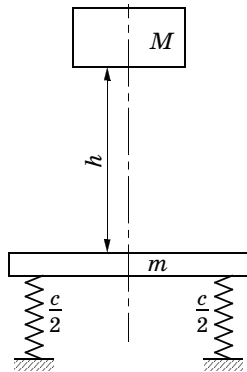


Рис. 324

Пример 114. Груз массой M падает с высоты h на платформу массой m , опирающуюся на пружины с общей жесткостью c . Пренебрегая массой пружин и считая удар абсолютно неупругим, определить максимальное перемещение f_d платформы при ударе (рис. 324).

Кинетическая энергия системы после удара определяется по последней из формул (24.116); получим

$$T_2 = \frac{M}{M + m} Mgh.$$

В момент времени, когда платформа с грузом на ней в результате действия удара достигнет максимального отклонения f_d от начального положения, кинетическая энергия системы станет равной нулю, а изменение потенциальной энергии к этому моменту станет равным

$$\Pi_1 - \Pi_0 = \left[\frac{c}{2} (f_d + f_0)^2 - \frac{c}{2} f_0^2 \right] - (M + m) gf_d,$$

причем слагаемое в квадратных скобках представляет собой приращение потенциальной энергии пружин, а второе слагаемое — уменьшение потенциальной энергии силы тяжести груза и платформы; через f_0 обозначено статическое сжатие пружин под действием тяжести платформы (в течение акта удара платформа не сместилась!). Применив закон сохранения механической энергии, получим

$$\frac{M}{M + m} Mgh = \frac{c}{2} f_d^2 + c f_d f_0 - (M + m) gf_d. \quad (24.123)$$

Пусть $f_{ст}$ обозначает статическое сжатие пружин под действием общей силы тяжести груза и платформы; тогда

$$c = \frac{(M + m) g}{f_{ст}} = \frac{mg}{f_0},$$

т. е. $f_0 = f_{\text{ст}} m / (M + m)$, и соотношение (24.123) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{M}{M+m} Mgh &= \frac{(M+m)g}{2f_{\text{ст}}} f_{\text{д}} + \frac{(M+m)g}{f_{\text{ст}}} f_{\text{д}} f_{\text{ст}} \frac{M}{M+m} - (M+m)gf_{\text{д}} = \\ &= \frac{(M+m)g}{2f_{\text{ст}}} f_{\text{д}}^2 - Mgf_{\text{д}}. \end{aligned}$$

Таким образом, максимальное перемещение $f_{\text{д}}$ определяется как больший по модулю корень квадратного уравнения

$$f_{\text{д}}^2 - 2 \frac{M}{M+m} f_{\text{ст}} f_{\text{д}} - 2hf_{\text{ст}} \left(\frac{M}{M+m} \right)^2 = 0,$$

равный

$$f_{\text{д}} = \frac{M}{M+m} f_{\text{ст}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{\text{ст}}}} \right). \quad (24.124)$$

В частности, при $h = 0$, т. е. при мгновенном (динамическом) присоединении массы груза M , получим

$$f_{\text{д}} = \frac{2M}{M+m} f_{\text{ст}}, \quad (24.125)$$

а в случае платформы пренебрежимо малой массы ($m = 0$)

$$f_{\text{д}} = 2f_{\text{ст}}, \quad (24.126)$$

т. е. перемещение верхнего конца пружины пренебрежимо малого веса при мгновенном присоединении массы M вдвое больше статического перемещения при присоединении постепенно нарастающей от нуля до M массы.

Пример 115. Мишень представляет собой однородную призму массой M с квадратным основанием (сторона равна a) и высотой b ; в центр C боковой грани, противолежащей ребру AB , ударяет пуля массой m со скоростью v_0 (рис. 325). Считая удар неупругим, определить, с какой угловой скоростью ω начнет вращаться мишень вокруг ребра AB после удара.

В данном случае

$$T_1 = \frac{mv_0^2}{2}, \quad T_2 = \frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{mv^2}{2},$$

причем

$$J = \frac{1}{3} M(a^2 + b^2) —$$

момент инерции мишени относительно ребра AB ; скорость v пули после удара равна скорости точки мишени, в которую попадает пуля, т. е.

$$v = \sqrt{a^2 + b^2} \omega / 4.$$

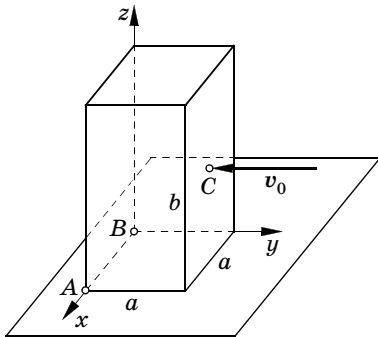


Рис. 325

Кинетическая энергия, соответствующая потерянным скоростям мишени, равна

$$T_{\text{м}}^* = \frac{1}{2} J \omega^2,$$

так как до удара мишень находилась в покое; для пули имеем

$$T_{\text{п}}^* = \frac{m}{2} [(v_{0y} - v_y)^2 + v_z^2] = \frac{m}{2} \left[\left(v_0 - \frac{1}{2} b \omega \right)^2 + (a \omega)^2 \right].$$

Соотношение (24.112), выражающее теорему Карно, дает

$$\begin{aligned} \frac{m v_0^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{M(a^2 + b^2)}{3} \omega^2 - \frac{m}{2} \left(a^2 + \frac{1}{4} b^2 \right) \omega^2 = \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{M(a^2 + b^2)}{3} \omega^2 + m \left(v_0 - \frac{1}{2} b \omega \right)^2 + m a^2 \omega^2 \right], \end{aligned}$$

откуда находим

$$\omega = \frac{6 m v_0 b}{4 M(a^2 + b^2) + m(12 a^2 + 3 b^2)}.$$

К этому же результату можно прийти, выразив неизменность главного момента количества движения системы при ударе, в частности неизменность его проекции на ось x :

$$K_x^{(1)} = K_x^{(2)}.$$

Имеем

$$K_x^{(1)} = m v_0 \frac{b}{2}, \quad K_x^{(2)} = \left[\frac{M}{3} (a^2 + b^2) + m \left(a^2 + \frac{b^2}{4} \right) \right] \omega,$$

где величина в квадратных скобках представляет собой момент инерции относительно оси x массы мишени вместе с точечной массой пули. Итак,

$$m v_0 \frac{b}{2} = \left[\frac{M}{3} (a^2 + b^2) + m \left(a^2 + \frac{b^2}{4} \right) \right] \omega,$$

откуда получаем приведенное выше значение ω .

Считая, что после удара мишень и пуля движутся вместе, определим, при какой начальной скорости пули произойдет опрокидывание мишени. Для этого заметим, что кинетическая энергия системы после удара определяется равенством

$$T_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{M(a^2 + b^2)}{3} + m \left(\frac{b^2}{4} + a^2 \right) \right] \omega^2 = \frac{3 m^2 b^2 v_0^2}{2[(12 a^2 + 3 b^2) m + 4(a^2 + b^2) M]}.$$

Опрокидывание мишени может иметь место при условии, что центр тяжести системы пройдет через вертикальную плоскость, проведенную через ось вращения. По теореме об изменении кинетической энергии имеем

$$T'' - T' = W,$$

где T'' — кинетическая энергия в момент прохождения центра тяжести системы через указанную вертикальную плоскость, T' — начальное значение кинетической энергии, ранее обозначенное через T_2 , и W — работа сил тяжести.

Центр тяжести мишени и пули находится на расстояниях

$$x_{\text{ц}} = \frac{a}{2} \frac{M + 2m}{M + m}, \quad z_{\text{ц}} = \frac{b}{2}$$

от граней призмы, проходящих через ребро AB . Поэтому в момент прохождения через указанную плоскость центр тяжести поднимается на высоту

$$\sqrt{x_{\text{ц}}^2 + b^2/4} - b/2,$$

и работа W будет равна

$$W = -\frac{1}{2} (M + m) \left[\sqrt{b^2 + \left(\frac{M + 2m}{M + m}\right)^2 a^2} - b \right] g.$$

Теорема об изменении кинетической энергии дает теперь

$$\begin{aligned} \frac{3m^2 b^2 v_0^2}{2[(12a^2 + 3b^2)m + 4(a^2 + b^2)M]} - T'' = \\ = \frac{1}{2} (M + m) \left[\sqrt{b^2 + \left(\frac{M + 2m}{M + m}\right)^2 a^2} - b \right] g. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$v_0^2 \geq \frac{4M(a^2 + b^2) + m(12a^2 + 3b^2)}{3m^2 b^2} (M + m) \left[\sqrt{b^2 + \left(\frac{M + 2m}{M + m}\right)^2 a^2} - b \right] g.$$

§ 133. Теорема об изменении кинетической энергии сплошной среды. Теоремы Бернулли и Борда — Карно. Общее дифференциальное уравнение кинетической энергии. Диссипация механической энергии

Проведем в установившемся потоке (т. е. таком, что поле скоростей в нем не зависит от времени — стационарно) однородной идеальной несжимаемой жидкости бесконечно тонкую трубку

тока (рис. 326). Если жидкость однородна и несжимаема, то плотность ее одинакова во всем потоке. Идеальная жидкость представляется такой моделью сплошной среды, в которой при ее движении полностью отсутствуют касательные напряжения (внутреннее трение). Выделим в трубке в данный момент времени t объем, заключенный между двумя ортогональными к боковой поверхности трубки сечениями σ_1 и σ_2 . В смежный момент $t + dt$ выделенный объем жидкости сместится вдоль трубки тока и займет положение, ограниченное сечениями σ'_1 и σ'_2 .

В установившемся движении новый объем будет отличаться от предыдущего только тем, что к верхней части трубки присоединится элементарный объем, заключенный между сечениями σ_2 и σ'_2 , а от нижней вычтется такой же объем между сечениями σ и σ'_1 . Изменение кинетической энергии в рассматриваемом объеме трубки сведется к разности

$$M dt \frac{v_2^2}{2} - M dt \frac{v_1^2}{2}, \tag{24.127}$$

где M — секундный массовый расход жидкости, одинаковый для всех сечений трубки тока, а произведение $M dt$ — масса жидкости, протекающая через любое сечение трубки за время dt .

Замечая, что перемещения частиц в сечениях σ_1 и σ_2 будут соответственно равны $v_1 dt$ и $v_2 dt$, составим выражение элементарной работы приложенных к сечениям σ_1 и σ_2 сил давления, равных по величине $p_1 \sigma_1$ и $p_2 \sigma_2$, в виде

$$p_1 \sigma_1 \cdot v_1 dt - p_2 \sigma_2 \cdot v_2 dt,$$

или, замечая, что по определению секундного массового расхода $M = \rho_1 \sigma_1 v_1 = \rho_2 \sigma_2 v_2$ (ρ — постоянная плотность), в виде

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} M dt. \tag{24.128}$$

Работа сил давления, приложенных к боковой поверхности трубки тока, очевидно, равна нулю, так как перемещения жидкости вдоль боковой поверхности трубки тока перпендикулярны силам давления.

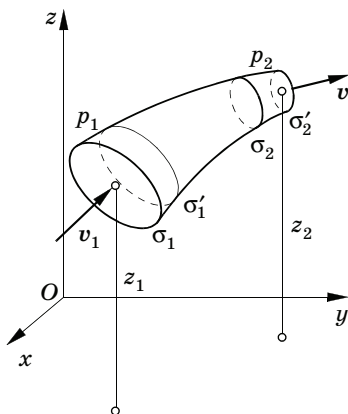


Рис. 326

Работу сил тяжести получим как *уменьшение* потенциала при перемещении выделенного объема жидкости из начального положения в конечное. При расчете этого уменьшения потенциала примем во внимание, что потенциал общей части начального и конечного объемов при этом выпадает и работа сил тяжести будет равна

$$M dt \cdot g (z_1 - z_2). \quad (24.129)$$

Приравнявая, согласно теореме об изменении кинетической энергии, выражение (24.127) сумме выражений (24.128) и (24.129), а затем сокращая обе части полученного равенства на $M dt$, получаем

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2. \quad (24.130)$$

Выражение

$$\frac{v_2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = B \quad (24.131)$$

называют *трехчленом Бернулли*. Этот трехчлен можно трактовать как *отнесенную к единице массы полную механическую энергию* жидкости в данной точке. Действительно, первое и третье слагаемые в левой части (24.131) представляют собой отнесенные к единице массы соответственно кинетическую энергию и потенциальную энергию сил тяжести. Второе слагаемое представляет собой потенциал объемной силы $-(1/\rho)\text{grad } p$, выражающей в уравнении Эйлера (§ 38, (9.37)) объемное действие поверхностных сил давления. Отсюда следует, что слагаемое p/ρ в уравнении (24.131) является потенциалом этой объемной силы, так как

$$-(1/\rho) \text{grad } p = -\text{grad } (p/\rho).$$

Таким образом, трехчлен Бернулли B действительно является суммой кинетической и потенциальной энергий тяжести и объемного действия сил давления, т. е. отнесенной к единице массы *полной механической энергией* жидкости в данной точке потока.

Согласно равенству (24.130) полная механическая энергия B сохраняет свою величину вдоль трубки тока или — что то же самое в случае стационарного поля скоростей — вдоль траектории. Приведем простейшую формулировку классической теоремы Бернулли.

ТЕОРЕМА БЕРНУЛЛИ. *Равенство*

$$B = \frac{v_2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const} \quad (\text{вдоль линии тока}) \quad (24.132)$$

выражает закон сохранения полной механической энергии единицы массы идеальной однородной несжимаемой жидкости вдоль трубки тока, а следовательно, и вдоль линии тока.

Следует еще отметить, что равенство (24.132) служит *первым интегралом* уравнений Эйлера — уравнения (22.91) при $\mathbf{F} = \mathbf{g}$ (тяжелая жидкость!), — вследствие чего равенство (24.132) можно еще именовать *интегралом Бернулли*.

Разделив обе части равенства (24.132) на ускорение свободного падения g и обозначив через γ удельный вес жидкости, $\gamma = \rho g$, преобразуем это равенство к виду

$$\frac{B}{g} = H = \frac{v_2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{const} \quad (\text{вдоль линии тока}). \quad (24.133)$$

Все члены равенства (24.133), как легко убедиться, имеют размерность длины и им в технической гидромеханике (гидравлике), по аналогии с последним слагаемым z , приписывают термин *высота*. Так, слагаемое $v^2/(2g)$ принято называть *скоростной высотой*, p/γ — *пьезометрической высотой*, z — *nivelировочной высотой* или, просто, *высотой*, а сумму этих высот H — *гидравлической* или *полной высотой*.

В частном случае движения жидкости параллельно горизонтальной плоскости потенциальная энергия сил тяжести сохраняется и может быть введена в константу. Уравнение Бернулли (24.132) тогда переписется в форме

$$p + \frac{\rho v_2}{2} = \text{const} = p_0, \quad (24.134)$$

где p_0 — давление в покоящейся жидкости ($v = 0$).

В этом случае отдельные слагаемые равенства (24.134) называют *напорами*, а именно: p — *пьезометрическим* напором, $\rho v^2/2$ — *динамическим* или *скоростным* напором, p_0 — *полным* напором.

О применении теоремы Бернулли подробно говорится в курсах технической гидромеханики; здесь мы отметим лишь роль этой теоремы в объяснении некоторых широко распространенных явлений.

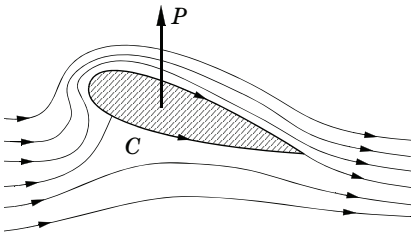


Рис. 327

Рассмотрим однородный горизонтальный воздушный поток, набегающий на крыло самолета, наклоненное к потоку под некоторым углом (углом атаки). Верхняя поверхность крыла при этом является выпуклой, и при ее обтекании линии тока сближаются, трубки тока утоньшаются, а это при

сохранении расхода воздуха вдоль трубок тока вызывает увеличение скоростей потока вблизи верхней поверхности крыла по сравнению с потоком вблизи нижней поверхности, где трубки тока, наоборот, расширяются, а поток подтормаживается (рис. 327).

Согласно теореме Бернулли, выраженной в этом случае в форме (24.134), местное увеличение скорости на верхней поверхности крыла приводит к уменьшению давления, или, что то же самое, к увеличению разрежения в потоке по сравнению с давлением вдали от крыла. На нижней поверхности сохраняются положительные разности давлений. За счет этой разницы давлений возникает подъемная сила крыла P (рис. 327). Аналогичная подъемная сила образуется и на лопатках рабочих колес турбин и насосов. Сумма моментов этих сил относительно оси вращения колеса определяет вращающий момент, приложенный к рабочему колесу турбины или насоса.

Определение величины и направления подъемной силы сводится к нахождению главного вектора сил давления, в случае обтекания замкнутого контура идеальной жидкостью перпендикулярных поверхности контура, что можно сделать с помощью теоремы количества движения (теорема Эйлера, § 110) и кинетической энергии (теорема Бернулли).

Не приводя здесь вывода, отошлем интересующихся к книге Л. Г. Лойцянского «Механика жидкости и газа»*. Из этого вывода следует, что величина главного вектора сил давления, а вместе с тем и подъемной силы P определяется формулой Жуковского

$$P = \rho V_{\infty} \Gamma,$$

где Γ — циркуляция скорости потока V по контуру профиля C , определяемая контурным интегралом

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{r},$$

* [16, § 54, с. 192—195].

аналогичным контурному интегралу (24.5), который представлял работу силы по замкнутому контуру как циркуляцию вектора силы по этому контуру; V_∞ — скорость набегающего на контур потока, ρ — плотность жидкости. Если условно назвать «направлением циркуляции» направление такого обхода контура при интегрировании, чтобы циркуляция оказалась положительной, то, по Жуковскому, вектор подъемной силы \mathbf{P} направлен по вектору скорости набегающего потока V_∞ , повернутому на 90° в сторону, противоположную направлению циркуляции.

При плавном стекании жидкости с задней кромки крылового профиля, как это показано на рис. 327, циркуляция Γ определяется формулой

$$\Gamma = \text{const} \cdot V_\infty a \sin \alpha,$$

где a — хорда крылового профиля, α — «теоретический» угол атаки между хордой профиля и вектором V_∞ , причем направление хорды (направление нулевой циркуляции) выбирается так, чтобы $\Gamma = 0$ при $\alpha = 0$; постоянный множитель зависит от формы крылового профиля.

В принятых в аэродинамике обозначениях величина подъемной силы, согласно только что приведенным формулам, может быть выражена в виде

$$R_y = c_y \frac{\rho V_\infty^2}{2} a,$$

где c_y — коэффициент подъемной силы, в случае идеальной несжимаемой жидкости зависящий от угла атаки и формы крылового профиля. Для тонкого профиля зависимость c_y от α близка к линейной ($c_y \approx 2\pi\alpha$) и по уклону несколько превышает опытную. За деталями отсылаем к с. 196 и далее цитированного курса [16].

Из условия перпендикулярности главного вектора сил давления к вектору скорости набегающего потока следует, что в случае плоского потока идеальной жидкости составляющая главного вектора по направлению вектора скорости набегающего потока — *сила сопротивления* движению крылового профиля — независимо от его формы *равна нулю*. Это утверждение представляет собой частный случай более общего *парадокса д'Аламбера*.

При сужении канала рабочего колеса средние скорости в его сечениях возрастают, что, согласно теореме Бернулли, вызывает появление разрежений в местах сужения. На этом явлении осно-

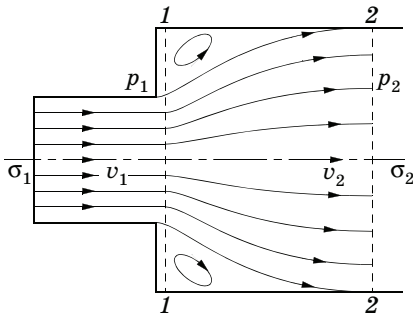


Рис. 328

вано применение трубки Вентури, представляющей собой сначала сужающийся, а затем расширяющийся канал. Такая трубка служит для отсасывания жидкости или воздуха через ниппель, соединенный с узким сечением канала. Так, например, если такую трубку повесить на кран водопровода, а к ниппелю присоединить камеру, заполненную воздухом, то, пус-

тив воду, получим водоструйный насос, откачивающий воздух из камеры. Такой прибор может использоваться как форвакуумный насос, создающий в камере сравнительно слабое разрежение.

Теорему Бернулли совместно с теоремой Эйлера, изложенной в § 110, можно применить для вывода теоремы Борда — Карно (рис. 328). Теорема эта служит аналогом теоремы Карно (§ 132).

ТЕОРЕМА БОРДА — КАРНО О ПОТЕРЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПОТОКА ЖИДКОСТИ ПРИ ВНЕЗАПНОМ ЕГО РАСШИРЕНИИ. Потеря полной механической энергии потока идеальной жидкости при внезапном его расширении равна кинетической энергии, соответствующей «потерянным» скоростям.

Под отнесенной к единице объема полной механической энергией потока будем, согласно (24.134), понимать величину

$$p_0 = p + \frac{\rho v^2}{2}.$$

Потерей отнесенной к единице объема полной механической энергии на участке внезапного расширения потока является разность

$$p_{01} - p_{02} = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} - p_2 - \frac{\rho v_2^2}{2}, \quad (24.135)$$

ВЕНТУРИ ДЖОВАННИ БАТТИСТА (*Venturi Giovanni Battista, 1746—1822*) — итальянский физик.

БОРДА ЖАН ШАРЛЬ (*Borda Jean Charles, 1733—1799*) — французский физик и геодезист, чл. Парижской АН.

где индексы 1 и 2 относятся к сечениям потока 1—1 и 2—2, показанным на рис. 328 штриховыми линиями.

Докажем, что эта отнесенная к единице объема потеря равна кинетической энергии, соответствующей потерянными скоростям, т. е. величине

$$\frac{\rho}{2} (v_1 - v_2)^2. \quad (24.136)$$

Применим теорему Эйлера (§ 110) к объему, ограниченному сечениями 1—1 и 2—2. Обозначая через σ_1 площадь сечения потока до его расширения, а через σ_2 — после расширения, находим

$$p_1\sigma_2 + \rho v_1^2 \sigma_1 - p_2\sigma_2 - \rho v_2^2 \sigma_2 = 0. \quad (24.137)$$

В этом равенстве первое слагаемое соответствует предположению о том, что во всем сечении 1—1 давление практически постоянно. Во втором слагаемом использовано сечение σ_1 , так как только через него переносится количество движения.

Замечая, что из условия постоянства массового расхода при $\rho = \text{const}$ следует, что

$$v_1\sigma_1 = v_2\sigma_2,$$

заменим второе слагаемое в равенстве (24.137) равной ему величиной $\rho v_1 v_2 \sigma_2$. Будем иметь, сокращая обе части полученного равенства на σ_2 ,

$$p_1 - p_2 = \rho v_2 (v_2 - v_1).$$

Подставив значение $(p_1 - p_2)$ в правую часть выражения (24.135), придем к искомому результату:

$$\begin{aligned} p_{01} - p_{02} &= \rho v_2 (v_2 - v_1) + \frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v_2^2}{2} = \\ &= \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2 + 2v_2^2 - 2v_1 v_2) = \frac{\rho}{2} (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2) = \\ &= \frac{\rho}{2} (v_1 - v_2)^2, \end{aligned} \quad (24.138)$$

доказывающему справедливость теоремы Борда — Карно.

Так же как в конце двух предыдущих глав были показаны применения теорем об изменениях количества движения и мо-

мента количества движения систем к выводу основных дифференциальных уравнений механики сплошных сред, так и в конце настоящей главы применим с этой целью теорему об изменении кинетической энергии системы.

Снова рассмотрим произвольный объем τ движущейся среды, ограниченный поверхностью σ , обозначим через $\delta\tau$ и $\delta\sigma$ элементы объема τ и соответственно поверхности σ . Кинетическая энергия элементарного объема $\delta\tau$ будет равна $(1/2) \delta m \cdot v^2$ или $(1/2) \rho v^2 \delta\tau$, а кинетическая энергия всего объема τ определится как сумма этих элементарных кинетических энергий, т. е. как интеграл

$$T = \int_{(\tau)} \frac{1}{2} \rho v^2 \delta\tau.$$

Теорема об изменении во времени кинетической энергии движущегося объема τ приведет к равенству

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \frac{1}{2} \rho v^2 \delta\tau = \int_{\tau} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \delta\tau + \int_{\sigma} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} \delta\sigma + \int_{\tau} N_{\text{вн}} \delta\tau, \quad (24.139)$$

где интегралы в правой части представляют суммарные мощности *внешних* объемных и поверхностных сил, а также, в отличие от теорем количества и момента количества движения, суммарную мощность *внутренних* сил, причем $N_{\text{вн}}$ — мощность внутренних сил, отнесенная к единице объема среды, или, что то же самое, объемная плотность распределения мощности внутренних сил по среде. Как и в предыдущих двух главах, приведем интеграл по поверхности к интегралу по объему, но прежде всего преобразуем выражение для мощности с учетом закона сохранения элементарной массы $\delta m = \rho \delta\tau$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\tau} \frac{\rho v^2}{2} \delta\tau &= \int_{\tau} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) \delta\tau + \int_{\tau} \frac{v^2}{2} \frac{d}{dt} (\rho \delta\tau) = \\ &= \int_{\tau} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) \delta\tau. \end{aligned} \quad (24.140)$$

Несколько сложнее обстоит дело с интегралом по поверхности, равным, согласно формуле Коши — формула (9.3), —

$$\int_{\sigma} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} \delta\sigma = \int_{\sigma} (\mathbf{n}P) \cdot \mathbf{v} \delta\sigma. \quad (24.141)$$

Записав выражение подинтегральной величины в правой части в проекциях на оси координат, получим, по определению операции умножения вектора на тензор слева,

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}P) \cdot \mathbf{v} &= (\mathbf{n}P)_x v_x + (\mathbf{n}P)_y v_y + (\mathbf{n}P)_z v_z = (n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx}) v_x + \\ &+ (n_x p_{xy} + n_y p_{yy} + n_z p_{zy}) v_y + (n_x p_{xz} + n_y p_{yz} + n_z p_{zz}) v_z = \\ &= n_x (p_{xx} v_x + p_{xy} v_y + p_{xz} v_z) + n_y (p_{yx} v_x + p_{yy} v_y + p_{yz} v_z) + \\ &+ n_z (p_{zx} v_x + p_{zy} v_y + p_{zz} v_z) = \\ &= n_x (Pv)_x + n_y (Pv)_y + n_z (Pv)_z = \mathbf{n} \cdot (Pv). \end{aligned}$$

Тогда с учетом (24.141) интеграл по поверхности в правой части (24.139) по формуле Гаусса — Остроградского (§ 37) преобразуется в интеграл по объему:

$$\int_{\sigma} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} \delta\sigma = \int_{\sigma} \mathbf{n} \cdot (Pv) \delta\sigma = \int_{\tau} \operatorname{div} (Pv) \delta\tau. \quad (24.142)$$

Принимая во внимание (24.140) и (24.142), перепишем (24.139) в виде

$$\int_{\tau} \left[\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - \operatorname{div} (Pv) - N_{\text{вн}} \right] \delta\tau = 0,$$

откуда в силу произвольности выбора объема τ получим искомое уравнение изменения кинетической энергии в дифференциальной форме

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div} (Pv) + N_{\text{вн}}. \quad (24.143)$$

Чтобы выяснить зависимость плотности распределения мощности внутренних сил $N_{\text{вн}}$ от характера движения, умножим скалярно на вектор скорости \mathbf{v} обе части уравнения динамики «в напряжениях» (22.86) и полученное уравнение

$$\mathbf{v} \cdot \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{Div} P \quad (24.144)$$

почленно вычтем из обеих частей уравнения (24.143). Тогда найдем

$$N_{\text{вн}} = \mathbf{v} \cdot \operatorname{Div} P - \operatorname{div} (Pv). \quad (24.145)$$

Полученное выражение $N_{\text{вн}}$ можно преобразовать к более простому виду. Чтобы избежать длинных выкладок, перейдем к число-

вой индексации и, раскрывая векторные и тензорные символы (см. гл. VIII), получим (суммирование по $i, j = 1, 2, 3$)

$$N_{\text{вн}} = v_j \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (p_{ij} v_j) = v_j \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i} - v_j \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i} - p_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -p_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}.$$

Раскладывая дифференциальный тензор dv_j/dx_i на симметричную \dot{S}_{ij} и антисимметричную \dot{A}_i части (§ 34, 78), будем иметь

$$N_{\text{вн}} = -p_{ij} \dot{S}_{ij} - p_{ij} \dot{A}_{ij}.$$

Вспоминая, что $\dot{A}_{ij} = -\dot{A}_{ji}$, а $p_{ij} = p_{ji}$, убедимся, что второе слагаемое в правой части тождественно равно нулю. Итак,

$$N_{\text{вн}} = -p_{ij} \dot{S}_{ij}. \quad (24.146)$$

Сумму попарно взятых компонент двух тензоров («свертку» по обоим индексам) примем за определение *скалярного произведения двух тензоров* и перепишем равенство (24.146) окончательно в виде

$$N_{\text{вн}} = -P \cdot \dot{S}. \quad (24.147)$$

Обратим внимание на некоторое сходство структуры выражения (24.147) с мощностью силы F — равенство (24.9), — приложенной к точке, движущейся со скоростью v . В последнем случае мощность равна скалярному произведению $F \cdot v$ вектора силы на вектор скорости, в случае же сплошной среды плотность мощности внутренних сил равна также скалярному произведению тензора напряжений на тензор скоростей деформаций (§ 78).

В абсолютно твердом теле деформации отсутствуют, тензор скоростей деформаций равен нулю, равна нулю и отнесенная к единице объема мощность внутренних сил. Об этом было уже упомянуто ранее.

В случае движения идеальной жидкости, в которой можно положить $P = -pE$ (p — давление, E — тензорная единица), мощность внутренних сил (касательных напряжений нет) будет определяться формулой

$$N_{\text{вн}} = -P \cdot \dot{S} = pE \cdot \dot{S}.$$

Вспоминая, что $E_{ij} = 0$, если $i \neq j$, и 1, если $i = j$, найдем

$$N_{\text{вн}} = p \dot{S}_{ii} = p \operatorname{div} v, \quad i = 1, 2, 3. \quad (24.148)$$

Если жидкость, кроме того, *несжимаема* ($\operatorname{div} v = 0$), то плотность распределения в ней мощности внутренних сил равна нулю так же, как и в абсолютно твердом теле.

Разделив обе части последнего равенства на ρ , т. е. перейдя к мощности $N_{\text{вн}}^*$, отнесенной к единице массы (удельной мощности), получим

$$N_{\text{вн}}^* = \frac{p}{\rho} \operatorname{div} v. \quad (24.149)$$

Вспомним уравнение неразрывности в форме (22.88), согласно которому

$$\operatorname{div} v = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt}.$$

Тогда выражению удельной мощности (24.149) можно придать вид

$$N_{\text{вн}}^* = -\frac{p}{\rho^2} \frac{dp}{dt} = p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right).$$

Величина, обратная плотности ρ , носит наименование *удельного объема* $V = 1/\rho$. Предыдущая формула может быть записана как

$$N_{\text{вн}}^* = p \frac{dV}{dt},$$

а элементарная работа внутренних сил за время dt — см. (24.9) — как

$$N_{\text{вн}}^* dt = \delta W' = p dV. \quad (24.150)$$

Эта формула используется в термодинамике. Вспомнив, что $\dot{S} dt = S$ представляет собой тензор деформаций (§ 78), элементарную работу внутренних сил можно записать также в следующем виде:

$$N_{\text{вн}}^* dt = \delta W' = -P \cdot S. \quad (24.151)$$

Формулы (24.146), (24.147), (24.151) имеют важное значение в теории упругости, гидродинамике и других разделах механики сплошных сред. В теории упругости тензор напряжений P заменяется линейной функцией тензора деформаций (обобщенный закон Гука), в гидродинамике вязкой жидкости — также линейной функцией тензора скоростей деформаций (обобщенный закон Ньютона). Покажем это на простом примере *вязкой несжимаемой жидкости*.

Обобщенный закон Ньютона имеет вид [16, § 84, с. 362, 363]:

$$P = 2\mu \dot{S} - pE, \quad (24.152)$$

где μ — динамический коэффициент вязкости, а E — тензорная единица.

Подставив это выражение тензора напряжений P в равенство (24.147), получим (по условию несжимаемости $\operatorname{div} v = 0$)

$$N_{\text{вн}} = -2\mu \dot{S}^2 - p \operatorname{div} v = -2\mu \dot{S}^2; \quad (24.153)$$

здесь применено краткое обозначение \dot{S}^2 для $\dot{S} \cdot \dot{S}$, равного

$$\begin{aligned} \dot{S}^2 = \dot{S} \cdot \dot{S} = \dot{S}_{ij} \dot{S}_{ij} = & \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2, \\ & i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (24.154)$$

В отличие от теории упругости, где при использовании выражения P по обобщенному закону Гука формула (24.151) дает элементарную работу упругих взаимодействий в теле и, следовательно, приводит к выражению *потенциальной энергии упругого взаимодействия*, которая в процессе деформирования *обратима*, мощность внутренних сил вязкости (трения) в жидкости *необратима* [16, § 93, с. 412, 413]. Механическая энергия, затраченная на преодоление сил вязкости, переходит в тепловую, т. е. *диссипируется* в жидкости. *Диссипированная мощность* $N_{\text{дис}}$ определяется как $N_{\text{вн}}$ с противоположным знаком. Она выражает отнесенную к единице объема и времени *потерю механической энергии*, превращающуюся в тепло и другие виды энергии. Об этих потерях в настоящей главе уже упоминалось. Судя по выражению \dot{S}^2 в виде (24.154), представляющему собой сумму квадратов, потери исчезают только при квазитвердом движении несжимаемой вязкой жидкости, когда деформации, а следовательно, и скорости деформаций полностью отсутствуют.

Вернемся в заключение к уравнению (24.144), причем сделаем несколько предположений.

1°. Жидкость идеальна, т. е. отсутствуют касательные напряжения (вязкости).

2°. Жидкость несжимаема, и плотность ее всюду одна и та же ($\rho = \text{const}$).

3°. Объемные силы имеют потенциал, т. е. $F = -\operatorname{grad} \Pi$, причем, в частности, в случае сил тяжести $\Pi = gz$ (ось z вертикальна и направлена вверх).

4°. Движение стационарно, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) = 0.$$

Кроме того, по 1°

$$P = -pE, \quad \text{Div } P = -\text{grad } p.$$

Уравнение (24.144) в этих предположениях принимает вид

$$v \cdot \text{grad} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) = -pv \cdot \text{grad } \Pi - v \cdot \text{grad } p,$$

или, если собрать все члены под общий оператор grad и заменить Π на gz , вид

$$v \cdot \text{grad} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho gz + p \right) = 0.$$

Вводя символ d/ds для дифференцирования вдоль линии тока, вспоминая определение производной по направлению как скалярного произведения градиента на единичный вектор (в данном случае v/v) этого направления и сокращая обе части равенства на $\rho v g$ ($\gamma = \rho g$ — удельный вес), получаем

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} \right) = \text{const (вдоль линии тока)},$$

откуда следует выведенная ранее другим путем формула Бернулли (24.133).

Глава XXV

Динамика плоского движения твердого тела

§ 134. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела

Кинематика *плоского* движения абсолютно твердого тела была изложена в гл. XIV. Динамике этого сравнительно простого случая движения твердого тела посвящается настоящая глава.

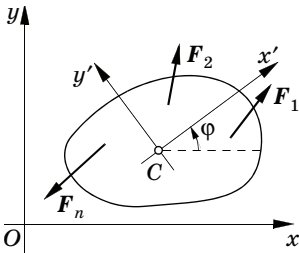


Рис. 329

Предположим, что масса рассматриваемого твердого тела распределена симметрично относительно плоскости Oxy , что все внешние силы F_1, F_2, \dots, F_n , приложенные к телу, действуют в этой плоскости и что начальные скорости точек тела ей параллельны. При этих условиях тело будет совершать плоское движение, и для изучения его достаточно рассмотреть движение плоской фигуры, получающейся в сечении тела плоскостью Oxy (рис. 329). В последующем, если не оговорено противное, предполагается, что начало координат системы осей x', y' , связанных с телом, помещено в центре масс C тела.

Движение плоской фигуры определяется уравнениями движения полюса

$$x_C = f_1(t), \quad y_C = f_2(t),$$

и уравнением вращения фигуры вокруг полюса

$$\varphi = f_3(t).$$

Задачей динамики плоского движения твердого тела является нахождение этих уравнений по заданным силам — вторая задача динамики — или определение сил в заданном движении — первая задача.

Очень часто встречаются также смешанные задачи, когда между величинами, определяющими положение тела, имеются наперед известные соотношения, а действующие силы частью известны, частью должны быть определены по ходу решения задачи.

Теорема о движении центра масс дает соотношение

$$Mw_C = V, \tag{25.1}$$

где M — масса тела, w_C — ускорение его центра масс, V — главный вектор внешних сил, действующих на тело:

$$V = \sum_{i=1}^n F_i. \tag{25.2}$$

Векторное равенство (25.1) можно проецировать на те или иные оси. Проецируя его на оси неизменного направления x, y , получаем два уравнения

$$M\ddot{x}_C = V_x, \quad M\ddot{y}_C = V_y, \tag{25.3}$$

в которых x_C и y_C обозначают координаты центра масс.

При проецировании векторного равенства (25.1) на оси x' , y' , связанные с телом, следует воспользоваться леммой § 68 о дифференцировании вектора по времени

$$\mathbf{w}_C = \frac{dv_C}{dt} = \frac{d'v_C}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times v_C.$$

Первое слагаемое в правой части этого соотношения представляет собой вектор, проекции которого на оси x' , y' равны производным по времени от проекций $v_{Cx'}$ и $v_{Cy'}$ вектора v_C на эти оси; заметив также, что $\omega_{x'} = \omega_{y'} = 0$, $\omega_z = \dot{\omega} = \dot{\phi}$, получим

$$\begin{aligned} w_{Cx'} &= \dot{v}_{Cx'} - \tilde{\omega} v_{Cy'}, \\ w_{Cy'} &= \dot{v}_{Cy'} + \tilde{\omega} v_{Cx'}. \end{aligned}$$

Уравнения движения центра масс принимают вид

$$\begin{aligned} M(\dot{v}_{Cx'} - \tilde{\omega} v_{Cy'}) &= V_{x'}, \\ M(\dot{v}_{Cy'} + \tilde{\omega} v_{Cx'}) &= V_{y'}. \end{aligned} \quad (25.4)$$

Эта форма уравнений движения центра масс используется в динамике самолета.

Часто применяют также проецирование на касательную (τ) и главную нормаль (\mathbf{n}) плоской траектории центра масс (рис. 330):

$$M \dot{v}_C = V_\tau, \quad M \frac{v_C^2}{\rho} = \pm M v_C \dot{\theta} = V_n. \quad (25.5)$$

Здесь ρ — радиус кривизны траектории центра масс, θ — угол между вектором скорости $\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}$ и неизменным направлением оси Ox ; при $\dot{\theta} > 0$ берется знак плюс, при $\dot{\theta} < 0$ — знак минус. В первом случае угол θ возрастает с течением времени, а во втором — убывает. При составлении уравнения движения неизвестно, как с ростом времени будет изменяться θ ; но это не может представить затруднения, так как предположение, что O , например, возрастает (рис. 330, а), определяет направление единичного вектора \mathbf{n} *главной* нормали (в сторону вогнутости траектории); при обратном предположении придется изменить знак в левой части второго уравнения (25.5), но при этом изменится на противоположное предполагаемое направление \mathbf{n} (рис. 330, б) и, следовательно, знак V_n в правой части того же уравнения.

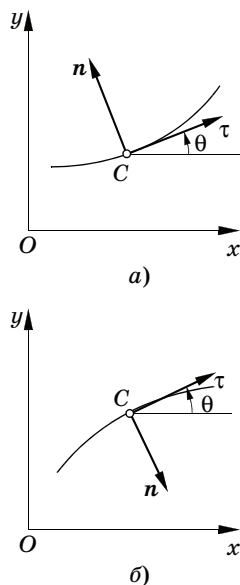


Рис. 330

Дифференциальное уравнение вращения составим, применив теорему об изменении момента количества движения относительно центра масс (§ 120). В случае плоского движения твердого тела относительным движением по отношению к центру масс является вращение тела с его угловой скоростью ω вокруг оси z , перпендикулярной плоскости движения и проходящей через центр масс C . Поэтому вектор K' в выражении (23.81) определяется равенством

$$K' = J_z^{(C)} \omega, \quad (25.6)$$

где $J_z^{(C)}$ — момент инерции относительно указанной оси. К этому соотношению можно прийти, воспользовавшись формулой (23.82); действительно, при плоском движении

$$r'_i \times (\omega \times r'_i) = \omega r_i'^2 - r'_i(\omega \cdot r'_i) = \omega r_i'^2.$$

и, следовательно,

$$K' = \sum_{i=1}^n m_i r'_i \times (\omega \times r'_i) = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i'^2 = J_z^{(C)} \omega.$$

Получаем по формуле (23.81)

$$J_z^{(C)} \dot{\omega} = m^{(C)}, \quad (25.7)$$

причем

$$m^{(C)} = \sum_{i=1}^n r'_i \times F_i \quad (25.8)$$

представляет собой главный момент внешних сил относительно центра масс. Проецируя векторное равенство (25.7) на ось z , получаем дифференциальное уравнение вращения плоской фигуры

$$J_z^{(C)} \dot{\omega} = J_z^{(C)} \ddot{\phi} = m_z^{(C)} = \sum_{i=1}^n (x'_i F_{iy'} - y'_i F_{ix'}), \quad (25.9)$$

где x'_i, y'_i — координаты точки приложения силы F_i в системе осей $Cx'y'$.

Могут представиться случаи, когда при составлении уравнения вращения предпочтительно принять за полюс не центр масс C , а какую-либо другую точку O тела. При обозначениях рис. 331 получим

$$\begin{aligned} m^{(C)} &= \sum_{i=1}^n r'_{iC} \times F_i = \sum_{i=1}^n (r'_i - r'_C) \times F_i = \\ &= m^{(O)} - r'_C \times V, \end{aligned}$$

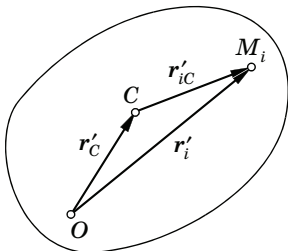


Рис. 331

что выражает известную теорему статики о переносе центра момента. Заменяя V согласно равенству (25.1) и вспомнив формулу распределения ускорений в плоском движении (§ 58), можем записать также

$$\begin{aligned} m^{(C)} &= m^{(O)} - r'_C \times M w_C = m^{(O)} - M r'_C \times [w_O - \omega^2 r'_C + \dot{\omega} \times r'_C] = \\ &= m^{(O)} - M r'_C \times w_O + M \omega^2 r'_C \times r'_C - M r'_C \times (\dot{\omega} \times r'_C). \end{aligned}$$

Замечая, что

$$r'_C \times r'_C = 0, \quad r'_C \times (\dot{\omega} \times r'_C) = \dot{\omega} r_C'^2,$$

получаем

$$m^{(C)} = m^{(O)} - M r'_C \times w_O - M r_C'^2 \dot{\omega},$$

и подстановка в равенство (25.7) дает

$$(J_z^{(C)} + M r_C'^2) \dot{\omega} + M r'_C \times w_O = m^{(O)}.$$

Остается заметить, что по теореме о моментах инерции относительно параллельных осей

$$J_z^{(C)} + M r_C'^2 = J_z^{(O)}$$

и, следовательно,

$$J_z^{(O)} \dot{\omega} + M r'_C \times w_O = m^{(O)}. \quad (25.10)$$

Уравнение (25.10) упрощается, если за полюс O выбрать точки плоской фигуры, в данный момент времени совпадающие с мгновенными центрами скоростей P или ускорений Q (см. § 56 и 58). Обозначим через v_P скорость перемещения мгновенного центра P по плоскости фигуры. Тогда $v_P = dr_P/dt$. По формуле (14.18)* имеем

$$r_P = r_O + \frac{\omega \times v_Q}{\omega^2},$$

откуда

$$v_P = \frac{dr_P}{dt} = \frac{dr_O}{dt} + \frac{1}{\omega^4} \left[\omega^2 (\varepsilon \times v_O) + \omega^2 (\omega \times w_O) - (\omega \times v_O) \frac{d}{dt} (\omega^2) \right].$$

Из условия параллельности ε и ω следует, что $\varepsilon/\tilde{\varepsilon} = \omega/\tilde{\omega}$, так что последний член в квадратной скобке справа преобразуется к виду

$$\begin{aligned} -(\omega \times v_O) \frac{d}{dt} (\omega \cdot \omega) &= -2 (\omega \times v_O) (\omega \cdot \varepsilon) = -2 \left(\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\varepsilon}} \varepsilon \times v_O \right) \left(\omega \cdot \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\omega}} \omega \right) = \\ &= -2\omega^2 (\varepsilon \times v_O). \end{aligned}$$

* См. т. I, § 56, с. 270.

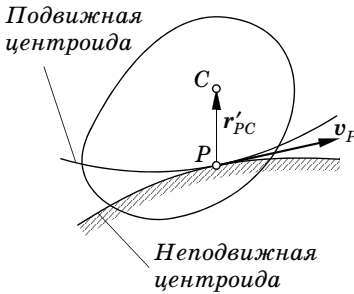


Рис. 332

Получим

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \frac{1}{\omega^2} [(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_O) - (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{v}_O)].$$

Выберем за полюс O ту точку P фигуры, которая в данный момент времени совпадает с мгновенным центром скоростей P (рис. 332); тогда $\mathbf{v}_O = 0$, $\boldsymbol{\omega}_O = \boldsymbol{\omega}_P$ и предыдущее равенство примет вид

$$\mathbf{v}_P = \frac{1}{\omega^2} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_P),$$

откуда, векторно умножая обе части на $\boldsymbol{\omega}$ и замечая, что $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}_P = 0$, получаем ускорение точки фигуры, в данный момент времени совпадающей с P ,

$$\boldsymbol{\omega}_P = \mathbf{v}_P \times \boldsymbol{\omega}. \quad (25.11)$$

При таком выборе полюса уравнение (25.10) перейдет в следующее:

$$J_z^{(P)} \dot{\boldsymbol{\omega}} + M \mathbf{r}'_{PC} \times (\mathbf{v}_P \times \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{m}^{(P)}, \quad (25.12)$$

или в иной форме

$$J_z^{(P)} \dot{\boldsymbol{\omega}} - M \boldsymbol{\omega} (\mathbf{r}'_{PC} \cdot \mathbf{v}_P) = \mathbf{m}^{(P)}. \quad (25.13)$$

В частном случае, когда центр масс лежит на общей нормали к центроидам в точке P ,

$$\mathbf{r}'_{PC} \cdot \mathbf{v}_P = 0 \quad (25.14)$$

и уравнение (25.13) имеет вид

$$J_z^{(P)} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{m}^{(P)}. \quad (25.15)$$

Если за полюс O принять мгновенный центр ускорений Q , то в соотношении (25.10) будем иметь $\boldsymbol{\omega}_O = \boldsymbol{\omega}_Q = 0$, поэтому

$$J_z^{(Q)} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{m}^{(Q)}. \quad (25.16)$$

Таким образом, уравнение вращения (25.7) сохраняет свой вид при переносе полюса из центра масс в мгновенный центр ускорений.

Два уравнения движения центра масс и уравнение вращения, взятые в одном из указанных выше видов, представляют полную систему дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела. При действии потенциальных сил следует использовать соотношение, даваемое теоремой об изменении кинетической энергии и представляющее собой один из *первых интегралов* указанной системы дифференциальных уравнений.

§ 135. Качение тяжелого цилиндра по наклонной плоскости и криволинейной поверхности

Сначала рассмотрим сравнительно простую задачу. Однородный круговой цилиндр, ось которого горизонтальна, скатывается по неподвижной плоскости, наклонной к горизонту (рис. 333). Пренебрегая моментом сил трения качения, определим движение цилиндра: а) при отсутствии скольжения и б) при наличии скольжения. Коэффициент трения скольжения f считаем известным. Внешними силами, приложенными к цилиндру, являются: сила тяжести $G = mg$, нормальная реакция плоскости N и сила трения F_1 .

В случае качения без скольжения точка P соприкосновения цилиндра и плоскости есть мгновенный центр скоростей. Обозначая угловую скорость цилиндра через $\dot{\omega}$, а его радиус через a , получаем

$$v_x = \dot{x} = a\dot{\omega} = a\dot{\phi}, \quad (25.17)$$

где $v_x = \dot{x}$ — скорость центра тяжести цилиндра ($v_y = 0$).

Располагая неподвижные оси Ox и Oy так, как указано на рис. 333, будем иметь

$$\dot{y} = -a = \text{const}, \quad \dot{y} = \ddot{y} = 0, \quad \ddot{x} = a\ddot{\phi},$$

$$V_x = mg \sin \alpha - F_1, \quad V_y = mg \cos \alpha - N, \quad m_z^{(C)} = F_1 a;$$

дифференциальные уравнения плоского движения (25.3) и (25.9) примут вид

$$ma\ddot{\phi} = mg \sin \alpha - F_1, \quad 0 = mg \cos \alpha - N, \quad J_z^{(C)} \ddot{\phi} = F_1 a. \quad (25.18)$$

Второе уравнение определяет нормальную реакцию; первое и третье служат для определения углового ускорения $\ddot{\phi}$ и силы трения F_1 . Решая эти уравнения, получаем

$$\ddot{\phi} = \frac{ga}{a^2 + \rho_c^2} \sin \alpha, \quad (25.19)$$

$$\begin{aligned} F_1 &= mg \frac{\rho_c^2}{a^2 + \rho_c^2} \sin \alpha = \\ &= \mu mg \sin \alpha; \end{aligned} \quad (25.20)$$

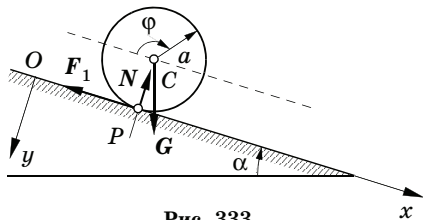


Рис. 333

ускорение центра тяжести цилиндра равно ($w_y = 0$)

$$w_x = \ddot{x} = a \ddot{\varphi} = \frac{a^2}{\rho_C^2 + a^2} g \sin \alpha = v g \sin \alpha, \quad (25.21)$$

где

$$\mu = \frac{\rho_C^2}{\rho_C^2 + a^2}, \quad v = 1 - \mu = \frac{a^2}{\rho_C^2 + a^2}. \quad (25.22)$$

Все сказанное относится в равной мере и к тем случаям, когда катящееся тело является не цилиндром, а шаром или колесом; в последнем случае будем считать массу колеса сосредоточенной на его ободе (обруч). Коэффициенты μ и v имеют в этих случаях значения, приведенные в табл. 6.

Таблица 6

Коэффициенты в выражениях силы трения и ускорения центра тяжести тела, скатывающегося по наклонной плоскости

Форма тела	$\frac{\rho_C^2}{a^2}$	$\mu = \frac{\rho_C^2}{a^2 + \rho_C^2}$	$v = \frac{a^2}{a^2 + \rho_C^2}$	$\alpha_0 = \arctg \frac{f}{\mu}$		
				$f = 0,05$	$f = 0,10$	$f = 0,15$
Шар	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7} \approx 0,29$	$\frac{5}{7} \approx 0,71$	10°	$19^\circ 20'$	$27^\circ 30'$
Цилиндр	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3} \approx 0,33$	$\frac{2}{3} \approx 0,67$	$8^\circ 30'$	$16^\circ 40'$	$24^\circ 10'$
Обруч	1	$\frac{1}{2} = 0,50$	$\frac{1}{2} = 0,50$	$5^\circ 40'$	$11^\circ 20'$	$16^\circ 40'$

Определим путь, пройденный центром тяжести цилиндра. Так как ускорение w_x постоянно, то, считая начальную скорость равной нулю, получаем

$$x = \frac{w_x t^2}{2} = \frac{1}{2} v g t^2 \sin \alpha. \quad (25.23)$$

За то же время t тело (любой формы), скользя по абсолютно гладкой плоскости, прошло бы путь

$$x^* = (g t^2 / 2) \sin \alpha.$$

Таблица показывает, что шар проходит при чистом качении 71% этого пути; цилиндр, двигаясь немного медленнее, сделает 67%,

наконец, всего медленнее станет двигаться обруч — его путь составляет только 50% от x^* .

Рассматриваемый случай *чистого качения* может иметь место при условии, что сила трения при качении F_1 не превосходит по величине силы трения скольжения F_2 . Последняя же, согласно закону Кулона, определяется формулой

$$F_2 = fN = fG \cos \alpha = fmg \cos \alpha,$$

и вышеуказанное условие принимает вид

$$\mu G \sin \alpha \leq fG \cos \alpha,$$

откуда получаем

$$\mu \operatorname{tg} \alpha \leq f, \quad (25.24)$$

т. е. качение не будет сопровождаться скольжением, если угол α не превосходит некоторой величины α_0 , определяемой этим неравенством. Значения α_0 при различных f даны в приведенной выше табл. 6.

Если $\alpha > \alpha_0$, то *качение сопровождается скольжением* и трение тела о плоскость будет трением скольжения, определяемым законом Кулона. Уравнения движения при этом будут

$$m \ddot{x} = mg \sin \alpha - F_2, \quad m \rho_C^2 \ddot{\phi} = F_2 a;$$

подставив сюда значение F_2 , получим

$$\ddot{x} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha), \quad \ddot{\phi} = \frac{ag}{\rho_C} f \cos \alpha, \quad (25.25)$$

откуда x и ϕ можно определить интегрированием.

Разность

$$v_x^* = \dot{x} - a \dot{\phi}$$

есть скорость скольжения точки соприкосновения P цилиндра с плоскостью. Имеем

$$\begin{aligned} \dot{v}_x^* = \ddot{x} - a \ddot{\phi} &= g \left(\sin \alpha - f \cos \alpha - f \frac{a^2}{\rho_C} \cos \alpha \right) = \\ &= g \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha_0). \end{aligned}$$

При $\alpha > \alpha_0$ величина в скобках положительна и скорость скольжения будет возрастать по мере опускания тела по плоскости.

Рассмотрим теперь задачу о *качении тяжелого цилиндра по шероховатой наклонной плоскости, учитывая момент сил трения качения*. В последнее уравнение (25.18) — уравнение враще-

ния — следует внести слагаемое, выражающее момент трения качения, равный произведению нормального давления N цилиндра на плоскость на коэффициент k трения качения, имеющий размерность длины. В дальнейшем полагаем $k = f'a$, где a — радиус цилиндра; тогда f' будет безразмерным коэффициентом трения качения. Уравнения (25.18) после исключения N примут вид

$$ma\ddot{\varphi} = mg \sin \alpha - F_1, \quad m\rho_C^2 \ddot{\varphi} = (F_1 - f' mg \cos \alpha) a,$$

и вместо соотношений (25.20), (25.21) получим

$$F_1 = mg(\mu \sin \alpha + f'v \cos \alpha), \quad \ddot{x} = vg(\sin \alpha - f' \cos \alpha).$$

Неравенство (25.24), выражающее условие отсутствия скольжения, перейдет в

$$\mu \sin \alpha + f'v \cos \alpha < f \cos \alpha$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha < \frac{f - f'v}{\mu} = \frac{f - f'v}{1 - v}.$$

В рассматриваемом движении проекция ускорения центра тяжести цилиндра на ось x должна быть положительной ($\ddot{x} > 0$); поэтому

$$f' < \operatorname{tg} \alpha,$$

и для осуществимости скатывания по наклонной плоскости без скольжения тяжелого цилиндра при учете момента сопротивления качению должны выполняться неравенства

$$f' < \operatorname{tg} \alpha < \frac{f - f'v}{1 - v}.$$

Рассмотрим более общую задачу (рис. 334). Однородный круговой цилиндр с горизонтальной осью скатывается без скольжения по криво-

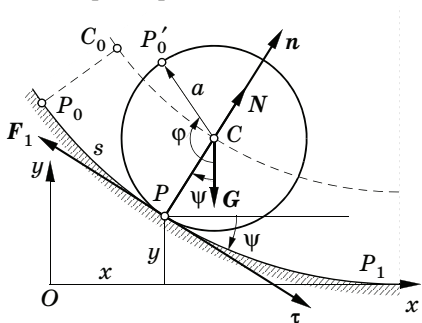


Рис. 334

линейному цилиндрическому желобу P_0P_1 ; кривая P_0P_1 задана, т. е. известны, например, ее координаты x, y как функции дуги $P_0P = s$; угол ψ касательной к кривой с осью x при этом определится из соотношений

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{dx}{ds}, \\ \sin \psi &= -\frac{dy}{ds}. \end{aligned} \quad (25.26)$$

Отметим также, что

$$\frac{d\psi}{ds} = -\frac{1}{\rho}, \quad (25.27)$$

где $1/\rho$ — кривизна кривой (ψ уменьшается с ростом s). Радиус цилиндра CP'_0 в начальный момент движения был расположен вдоль C_0P_0 , где P_0 — точка, являющаяся началом отсчета дуги s . Так как скольжение отсутствует, то $s = \overbrace{P'_0P}$. Угол ϕ прямой CP'_0 с неизменным направлением вертикали можно принять за угол поворота цилиндра. Поэтому

$$s = a(\phi - \psi), \quad \phi = \frac{s}{a} + \psi. \quad (25.28)$$

Внешними силами, действующими на цилиндр, являются сила тяжести G , касательная (трение при качении) F_1 и нормальная N составляющие реакции. Можно сразу исключить неизвестные силы F_1 и N , составив уравнение вращения в форме (25.15), что возможно, так как нормаль в точке P к центроидам проходит через центр тяжести цилиндра. Замечая, что по (25.27)

$$\ddot{\omega} = \dot{\phi} = \frac{\dot{s}}{a} + \frac{d\psi}{ds} \dot{s} = \frac{\dot{s}}{a} \left(1 - \frac{a}{\rho}\right), \quad \dot{\omega} = \frac{\dot{s}}{a} \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) + \frac{\dot{s}^2}{\rho^2} \cdot \frac{d\rho}{ds}, \quad (25.29)$$

получаем, согласно (25.15),

$$J_z^{(P)} \dot{\omega} = m(\rho_C^2 + a^2) \left[\frac{\dot{s}}{a} \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) + \frac{\dot{s}^2}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} \right] = mga \sin \psi. \quad (25.30)$$

Как уже указывалось, угол ψ можно считать известной функцией дуги s .

Кинетическая энергия цилиндра по (24.39) и (25.29) имеет выражение

$$T = \frac{1}{2} m \left(\rho_C^2 + a^2 \right) \frac{\dot{s}^2}{a^2} \left(1 - \frac{a}{\rho} \right)^2, \quad (25.31)$$

а потенциальная энергия определяется равенством

$$\Pi = mgy_C = mg(a \cos \psi + y). \quad (25.32)$$

Работа реакций F_1 и N равна нулю, так как с точностью до малых второго порядка перемещение точки их приложения в каждый момент времени обращается в нуль. Принимая, что цилиндр начал движение из состояния покоя, по закону сохранения механической энергии получаем

$$\frac{1}{2} m \left(\rho_C^2 + a^2 \right) \frac{\dot{s}^2}{a^2} \left(1 - \frac{a}{\rho} \right)^2 + mg(a \cos \psi + y) = mgy_C^0. \quad (25.33)$$

Это соотношение представляет собой первый интеграл уравнения (25.30), что можно проверить, определяя \ddot{s} из (25.33) дифференцированием и учитывая (25.26) и (25.27).

Реакции F_1 и N находим из уравнений движения центра тяжести в форме (25.5):

$$\frac{mv_C^2}{\rho} = m \frac{a^2}{\rho} \dot{\varphi}^2 = m \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2 \frac{\dot{s}^2}{\rho} = N - mg \cos \psi, \quad (25.34)$$

$$m \dot{v}_C = ma \ddot{\varphi} = m \left[\left(1 - \frac{a}{\rho}\right) \ddot{s} + a \frac{\dot{s}^2}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} \right] = -F_1 + mg \sin \psi,$$

откуда после исключения \dot{s} и \ddot{s} с помощью (25.30) и (25.33) получим

$$F_1 = \mu mg \sin \psi, \quad N = mg \left[\left(1 + 2\nu \frac{a}{\rho}\right) \cos \psi + 2\nu \frac{y_C^0 - y_C}{\rho} \right], \quad (25.35)$$

где сохранены обозначения (25.22). Условие отсутствия скольжения принимает вид $F_1 \leq fN$, т. е.

$$\mu \operatorname{tg} \psi < f \left[\left(1 + 2\nu \frac{a}{\rho}\right) + 2\nu \frac{y_C^0 - y_C}{\rho \cos \psi} \right]. \quad (25.36)$$

Если, в частности, желоб представляет собой поверхность кругового цилиндра радиусом R , то, согласно рис. 335, имеем $s = R(\psi_0 - \psi)$, и уравнение (25.30) приводится к виду уравнения движения математического маятника

$$\ddot{\psi} = -\frac{\nu}{R-a} g \sin \psi, \quad (25.37)$$

имеющего длину

$$l = (R - a)/\nu.$$

Пример 116. Центр тяжести кругового цилиндра радиусом a , катящегося без скольжения по внутренней поверхности неподвижного цилиндра радиусом R , расположен на расстоянии $OC = e$ от оси цилиндра (рис. 336). Составим уравнение движения цилиндра.

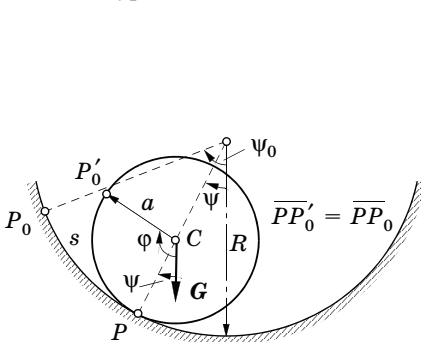


Рис. 335

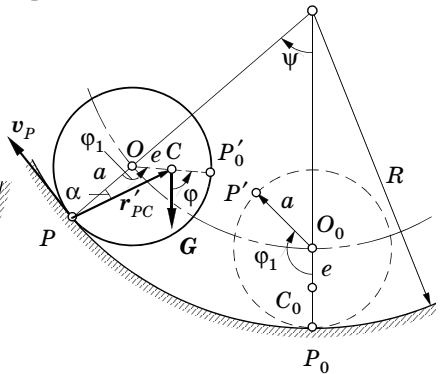


Рис. 336

Повторив рассуждение, приведенное выше, получим

$$\overbrace{PP_0} = \overbrace{P_0P} = \overbrace{P'P_0} = s = a\varphi_1 = R\psi, \quad \varphi = \varphi_1 - \psi,$$

где φ — угол поворота цилиндра. Соотношение (25.14) теперь не имеет места, и уравнение движения надо записать в форме (25.13), причем

$$v_P = R\dot{\psi} = \frac{aR}{R-a} \dot{\varphi}, \quad r'_{PC} \cdot v_P = -v_P \cdot PC \sin \alpha = -\frac{aR}{R-a} \dot{\varphi} e \sin \varphi_1.$$

Заметив также, что

$$J_z^{(P)} = m(\rho_C^2 + PC^2) = m(\rho_C^2 + a^2 + e^2 - 2ae \cos \varphi_1),$$

$$m_z^{(P)} = -(a \sin \psi + e \sin \varphi) mg,$$

получим

$$(\rho_C^2 + a^2 + e^2 - 2ae \cos \varphi_1) \ddot{\varphi} + \frac{aeR}{R-a} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi_1 = -g(a \sin \psi + e \sin \varphi),$$

причем φ_1 и ψ связаны с φ соотношениями

$$\psi = \frac{a}{R-a} \varphi, \quad \varphi_1 = \frac{R}{R-a} \varphi.$$

При весьма малых отклонениях от положения равновесия уравнение движения принимает вид

$$[\rho_C^2 + (a-e)^2] \ddot{\varphi} = -g \frac{a^2 + e(R-a)}{R-a} \varphi,$$

и период весьма малых колебаний будет

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R-a}{g} \frac{\rho_C^2 + (a-e)^2}{a^2 + e(R-a)}}.$$

§ 136. Движение самолета в вертикальной плоскости

Рассмотрим плоское движение самолета, при котором траектория его центра масс расположена в некоторой фиксированной вертикальной плоскости, служащей плоскостью материальной симметрии самолета. Силами, действующими на самолет, являются сила тяги винта P , направленная по оси винта и составляющая с хордой крыла постоянный угол ψ , сила тяжести G и аэродинамические силы. Совокупность последних может быть приведена к главному вектору, приложенному в центре масс C самолета, и паре с моментом M_z относительно оси Cz , перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через центр масс. Составляющая главного вектора по направлению, противоположному скорости v

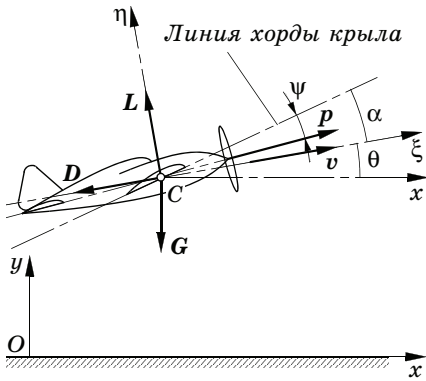


Рис. 337

центра масс, представляет собой силу сопротивления D , а перпендикулярная ей составляющая — подъемную силу L (рис. 337).

Назовем *углом атаки* α острый угол между хордой крыла и вектором скорости центра масс самолета v , отсчитываемый от вектора скорости против часовой стрелки для наблюдателя, смотрящего на плоскость рисунка. Угол между горизонтальной осью x и вектором скорости v — угол подъема траектории центра масс — обозначим через θ . Тогда $\varphi = \theta + \alpha$ определит угол между осью x и неизменным направле-

нием в движущемся теле; φ называется *углом тангажа*. Дифференциальные уравнения движения самолета составим, пользуясь (25.5) и (25.6); это — уравнения движения центра масс в естественной форме

$$\frac{G}{g} \dot{v} = P \cos(\alpha - \psi) - D - G \sin \theta, \quad (25.38)$$

$$\frac{G}{g} v \dot{\theta} = P \sin(\alpha - \psi) + L - G \cos \theta$$

и уравнение вращения

$$J_z^{(C)} \ddot{\varphi} = J_z^{(C)} (\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) = M_z. \quad (25.39)$$

Силы D и L и момент M_z определяются известными аэродинамическими соотношениями

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \rho c_x S v^2, \\ L &= \frac{1}{2} \rho c_y S v^2, \\ M_z &= \frac{1}{2} \rho c_{mz} S b v^2, \end{aligned} \quad (25.40)$$

в которых S — площадь несущих поверхностей, b — длина хорды крыла, ρ — плотность воздуха. Коэффициент сопротивления c_x и коэффициент подъемной силы c_y являются функциями угла атаки α , а коэффициент момента c_{mz} зависит еще от угла установки руля высоты, угловой скорости самолета $\dot{\varphi} = \dot{\alpha} + \dot{\theta}$ и отдельно от $\dot{\alpha}$. Зная еще закон изменения силы тяги, которая при заданном режиме работы двигателя

зависит от скорости, мы, проинтегрировав уравнения движения самолета, могли бы найти v , θ , α как функции времени, после чего координаты центра масс были бы выражены с помощью соотношений

$$x_C = \int v \cos \theta dt, \quad (25.41)$$

$$y_C = \int v \sin \theta dt.$$

Однако интегрирование системы уравнений (25.38), (25.39) представляет значительные трудности.

Ограничимся в дальнейшей рассмотрением *фугоидных колебаний* самолета, представляющих собой малые колебательные движения, накладывающиеся на режим поступательного равномерного прямолинейного горизонтального полета и возникающие при нарушении этого режима по какой-либо причине. Через v_0 обозначим величину скорости в установившемся режиме, через α_0 — постоянное значение угла атаки; угол θ при горизонтальном полете равен нулю. Уравнения движения (25.38), (25.39) превращаются в уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} P \cos(\alpha_0 - \psi) &= D_0, \\ P \sin(\alpha_0 - \psi) + L_0 - G &= 0, \\ M_z &= 0. \end{aligned} \quad (25.42)$$

Из двух первых уравнений находятся значения v_0 и α_0 при данных условиях работы двигателя, а последнее определяет соответствующий угол установки руля.

Предположим теперь, что вследствие какого-либо возмущения, например попадания самолета в поток воздуха или изменения тяги двигателя, произошло малое нарушение рассматриваемого равновесного режима. В последующем движении самолета скорость уже не имеет прежнего значения v_0 , а становится переменной и равной

$$v = v_0 + v', \quad (25.43)$$

причем v' — малая по сравнению с v_0 величина. Угол подъема также будет отличен от нуля, но мал настолько, что можно считать $\sin \theta = \theta$, $\cos \theta = 1$. Должно измениться также и значение угла атаки α . При изменении угла атаки возникает стабилизирующий момент, стремящийся уменьшить это изменение, и если этот момент достаточно велик (самолет обладает, как говорят, значительной статической устойчивостью), а момент инерции $J_z^{(C)}$ достаточно мал, то угол атаки α практически сохранит в возмущенном движении то же значение, что и в исходном невозмущенном; его малые изменения могут быть скорректированы с помощью соответствующих движений руля высоты.

Перейдем к составлению дифференциальных уравнений возмущенного движения. Для упрощения мы предположим, что угол $(\alpha - \psi)$ настолько мал, что можно принять $\cos(\alpha - \psi) = 1$ и пренебречь слагаемым,

содержащим $\sin(\alpha - \psi)$, во втором уравнении (25.38). Уравнения (25.38) и уравнения равновесия (25.42) примут вид

$$m \dot{v}' = P - \frac{1}{2} c_x \rho S (v_0 + v')^2 - mg\theta, \quad (25.44)$$

$$m (v_0 + v') \dot{\theta} = \frac{1}{2} \rho c_y S (v_0 + v')^2 - mg,$$

$$0 = P_0 - \frac{1}{2} c_x \rho S v_0^2, \quad 0 = \frac{1}{2} \rho c_y S v_0^2 - mg. \quad (25.45)$$

Вследствие предположения о неизменности угла атаки коэффициенты c_x и c_y в уравнениях движения имеют те же значения, что и в уравнениях равновесия. Уравнения моментов (25.39) выписывать не надо, поскольку было принято, что оно выполняется и в возмущенном движении. Почленно вычитая уравнения (25.45) из (25.44), отбрасывая произведения малых величин v' и θ , а также $(v')^2$, получаем

$$m \dot{v}' = P - P_0 - c_x \rho S v_0 v' - G\theta, \quad m v_0 \dot{\theta} = \rho c_y S v_0 v'. \quad (25.46)$$

Разность $P - P_0$ можно представить в виде

$$P - P_0 = P(v_0 + v') - P(v_0) \approx \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_0 v'. \quad (25.47)$$

причем постоянная $(\partial P / \partial v)_0$, определяющая быстроту изменения силы тяги при изменении скорости установившегося режима, отрицательна, так как сила тяги при данном режиме работы двигателя уменьшается с ростом скорости. Замечая еще, что по второму уравнению равновесия $\rho c_y S = 2G/v_0^2$, приходим к уравнениям *возмущенного движения* самолета

$$\dot{v}' = g \left[\frac{v_0 (\partial P / \partial v)_0}{mg} - \frac{2c_x}{c_y} \right] \frac{v'}{v_0} - g\theta, \quad \dot{\theta} = \frac{2g}{v_0^2} v'. \quad (25.48)$$

Исключив из них величину θ , получим одно дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\ddot{v}' + 2n \dot{v}' + \frac{2g^2}{v_0^2} v' = 0, \quad (25.49)$$

где

$$n = \left[\frac{c_x}{c_y} - \frac{v_0}{2mg} \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_0 \right] \frac{g}{v_0}, \quad (25.50)$$

причем $n > 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид (§ 98, формула (21.47))

$$v = C e^{-nt} \sin \left\{ \frac{\sqrt{2} g}{v_0} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left[\frac{c_x}{c_y} - \frac{v_0}{2mg} \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_0 \right]^2} t + \varepsilon \right\}. \quad (25.51)$$

Величина, стоящая в квадратных скобках под знаком радикала, всегда мала, и квадратом ее по сравнению с единицей можно пренебречь. Получаем

$$\begin{aligned} v' &= Ce^{-nt} \sin\left(\frac{g\sqrt{2}}{v_0} t + \varepsilon\right) = \\ &= e^{-nt} \left(C_1 \sin \frac{g\sqrt{2}}{v_0} t + C_2 \cos \frac{g\sqrt{2}}{v_0} t \right). \end{aligned} \quad (25.52)$$

Таким образом, скорость изменяется по закону затухающих колебаний с периодом

$$\tau = \frac{2\pi v_0}{g\sqrt{2}}. \quad (25.53)$$

Интересно отметить, что длина эквивалентного математического маятника составляет $h = v_0^2/(2g)$, т. е. равна высоте, на которую поднялась бы материальная точка, брошенная вертикально вверх со скоростью v_0 . Период колебаний, совершаемых самолетом при возмущении прямолинейного горизонтального полета, велик; это — *длиннопериодические*, или *фугоидные, колебания*. Если бы мы учли изменяемость угла атаки, то получили бы наложение на эти длиннопериодические колебания другой группы колебаний — *короткопериодических*.

Коэффициент при g/v_0 в выражении n (25.50) обычно является малой величиной (порядка 0,1). Поэтому длиннопериодические колебания затухают медленно, например, для $c_x = 0,027$, $c_y = 0,4$ и $v_0 = 124$ м/с при $P = 0$ (в режиме планирования) имеем*: $\tau = 56$ с, $n = 5,35 \cdot 10^{-3}$ 1/с. Время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится вдвое, будет равно

$$t_2 = 10^3 \cdot \frac{\ln 2}{5,35} = 119 \text{ с} = 2,12\tau.$$

При учете изменения угла атаки было получено для длиннопериодических колебаний $\tau = 65,7$ с при времени уменьшения амплитуды вдвое, равном $t_2 = 113,5$ с; на них налагаются быстро затухающие короткопериодические колебания с периодом 4 с; амплитуда их уменьшается вдвое за 0,5 с. Таким образом, предположение о постоянстве угла атаки приводит по крайней мере к качественно верному представлению о движении, хотя и не позволяет учесть быстрозатухающих и сравнительно высокочастотных колебаний.

Имея выражение скорости (25.52), из первого уравнения (25.48) найдем угол подъема θ . Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются по начальным условиям. Примем, например, что самолет, двигавшийся

* Данные взяты из книги И. В. Остославского, Г. С. Калачева [25].

равномерно по горизонтальной прямой со скоростью v_0 относительно Земли, попадает во встречный горизонтальный равномерный поток воздуха, имеющий скорость W ; уравнения движения (25.48) остаются справедливыми в системе отсчета, движущейся вместе с потоком, причем скорость самолета в этой системе в момент встречи с потоком, принимаемый за начальный, будет $v_0 + W$. Поэтому начальные условия по (25.43) будут

$$v' = W, \quad \theta = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (25.54)$$

С помощью первого из уравнений (25.48), которое при введенном обозначении (25.50) может быть представлено в виде

$$\theta = -\frac{1}{g} (\dot{v}' + 2nv'), \quad (25.55)$$

второе начальное условие дает

$$\dot{v}_0 = -2nW.$$

Постоянные C_1 и C_2 в решении (25.52) будут

$$C_1 = -\frac{nWv_0}{g\sqrt{2}}, \quad C_2 = W. \quad (25.56)$$

Таким образом, скорость самолета относительно Земли и угол подъема определяются выражениями

$$\begin{aligned} v' &= v_0 - W + We^{-nt} \left(\cos \frac{g\sqrt{2}}{v_0} t - \frac{nv_0}{g\sqrt{2}} \sin \frac{g\sqrt{2}}{v_0} t \right), \\ \theta &= \frac{\sqrt{2}W}{v_0} e^{-nt} \sin \frac{g\sqrt{2}}{v_0} t, \end{aligned} \quad (25.57)$$

причем в выражении θ множитель $[1 + n^2 v_0^2 / (2g^2)]$ заменен единицей. Уравнения движения центра масс самолета в конечной форме получим из соотношений — см. (25.41) —

$$x_C = \int_0^t v dt, \quad y_C = v \int_0^t \theta dt. \quad (25.58)$$

Проинтегрировав, найдем

$$\begin{aligned} x_C &= v_0 t - Wt \left[1 - e^{-nt} \frac{\sin (g\sqrt{2} t / v_0)}{(g\sqrt{2} / v_0) t} \right], \\ y_C &= \frac{Wv_0}{g} \left[1 - e^{-nt} \left(\cos \frac{g\sqrt{2}}{v_0} t + \frac{nv_0}{g\sqrt{2}} \sin \frac{g\sqrt{2}}{v_0} t \right) \right]. \end{aligned} \quad (25.59)$$

Заменив t в выражении y_C его приближенным значением x_C/v_0 , получим уравнение траектории центра масс самолета

$$y_C = \frac{Wv_0}{g} \left[1 - e^{-nx_C/v_0} \left(\cos \frac{x_C}{h\sqrt{2}} + \frac{nv_0}{g\sqrt{2}} \sin \frac{x_C}{h\sqrt{2}} \right) \right] \approx \frac{Wv_0}{g} \left[1 - e^{-nx_C/v_0} \cos \left(\frac{x_C}{h\sqrt{2}} - \varepsilon \right) \right], \tag{25.60}$$

где $h = v_0^2/(2g)$, $\sin \varepsilon \approx \varepsilon = nv_0/(g\sqrt{2})$ и, как выше, множитель

$$1 + n^2v_0^2/(2g^2)$$

заменен единицей.

При значениях

$$x_C = \varepsilon h \sqrt{2} + \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{2}} h, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{25.61}$$

(т. е. через каждый полупериод) самолет попадает на уровень с высотой Wv_0/g над первоначальным и с ростом t асимптотически приближается к этому среднему уровню, опускаясь ниже него и поднимаясь над ним.

§ 137. Критическая угловая скорость гибкого вала

Рассмотрим вращающийся вертикальный вал кругового поперечного сечения (рис. 338). При изгибе вала касательная в средней точке оси вала будет параллельна неизогнутой оси вала; при этом плоскость диска, насаженного на вал в среднем сечении перпендикулярно его оси, не будет перекашиваться, если вал изогнется.

Пусть точка C — центр тяжести диска. Через M обозначим точку пересечения оси изогнутого вала с плоскостью диска; $e = MC$ представляет собой эксцентриситет диска. Наконец, O есть точка пересечения плоскости диска с прямой, соединяющей центры подшипников вала; прогиб вала в его середине равен OM .

Внешней силой, приложенной к диску, является реакция F изогнутого вала; эта сила имеет направление от M к O (рис. 339) и, если, как принято в дальнейшем, масса вала пренебрежимо мала по сравнению с массой диска, по величине пропорциональна прогибу OM :

$$F = -c \cdot \overrightarrow{OM} = -cr_M. \tag{25.62}$$

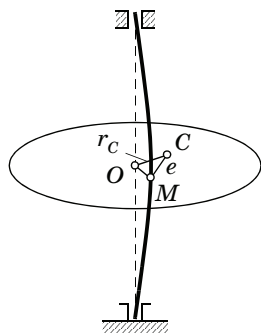


Рис. 338

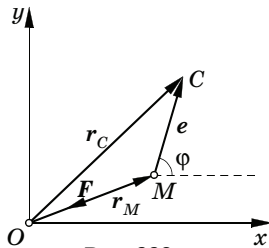


Рис. 339

Коэффициент пропорциональности c зависит от упругих свойств и размеров вала, а также от способа закрепления его концов.

Дифференциальные уравнения движения центра тяжести диска будут (m — масса диска):

$$m\ddot{x}_C = F_x = -cx_M, \quad m\ddot{y}_C = F_y = -cy_M. \quad (25.63)$$

Замечая, что

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_C - \mathbf{e}, \quad (25.64)$$

или

$$x_M = x_C - e \cos \varphi, \quad y_M = y_C - e \sin \varphi, \quad (25.65)$$

приведем уравнения (25.63) к виду

$$\ddot{x}_C + k^2 x_C = ek^2 \cos \varphi, \quad \ddot{y}_C + k^2 y_C = ek^2 \sin \varphi, \quad (25.66)$$

где

$$k^2 = c/m. \quad (25.67)$$

Величина k представляет собой частоту свободных колебаний диска.

Остается составить дифференциальное уравнение вращения диска. Обозначая через ρ радиус инерции диска относительно оси Cz , проходящей через центр тяжести, получим

$$m\rho^2 \ddot{\varphi} = m_z^{(C)}(\mathbf{F}). \quad (25.68)$$

Предполагается, что вращающий момент уравновешивается моментом сил сопротивления. Момент $m_z^{(C)}(\mathbf{F})$ представляет собой проекцию на ось Cz вектора момента силы $m^{(C)}(\mathbf{F})$ относительно точки C ; замечая, что

$$m^{(C)}(\mathbf{F}) = -\mathbf{e} \times \mathbf{F} = \mathbf{e} \times c\mathbf{r}_M = \mathbf{e} \times c(\mathbf{r}_C - \mathbf{e}) = c\mathbf{e} \times \mathbf{r}_C,$$

получаем

$$m_z^{(C)}(\mathbf{F}) = ce(y_C \cos \varphi - x_C \sin \varphi). \quad (25.69)$$

Уравнение вращения принимает вид

$$\rho^2 \ddot{\varphi} = k^2 e(y_C \cos \varphi - x_C \sin \varphi). \quad (25.70)$$

Точное интегрирование полученной системы уравнений (25.66) и (25.70) представляет значительные трудности. Решение может быть упрощено, так как в дисках паровых турбин эксцентриситет e и отклонения x_C и y_C не превышают нескольких тысячных долей радиуса инерции ρ ; поэтому отношение $\ddot{\varphi}/k^2$ имеет порядок не выше 10^{-5} . Такой же порядок будет иметь и отношение $\ddot{\varphi}/\omega^2$, поскольку нас будут интересовать угловые скорости диска, имеющие тот же порядок, что и k . Поэтому, если угловое ускорение сохраняло бы даже постоянную величину $\ddot{\varphi}/\omega^2$ в продолжение всего времени оборота диска, то возникающее при этом

относительное изменение угловой скорости $\Delta\omega/\omega$ имело бы порядок $2\pi \cdot 10^{-5}$. Это дает основание пренебречь в уравнении (25.70) правой частью. Тогда получим

$$\rho^2 \ddot{\varphi} = 0, \quad (25.71)$$

откуда следует, что

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad (25.72)$$

где ω — угловая скорость диска; константу φ_0 примем равной нулю.

Уравнения движения центра тяжести в этом приближении принимают вид

$$\ddot{x}_C + k^2 x_C = k^2 e \cos \omega t, \quad \ddot{y}_C + k^2 y_C = k^2 e \sin \omega t. \quad (25.73)$$

Общее решение этих уравнений состоит из слагаемого, соответствующего свободным колебаниям:

$$x_1 = c_1 \cos(kt + \alpha_1), \quad y_1 = c_2 \cos(kt + \alpha_2), \quad (25.74)$$

и слагаемого, представляющего вынужденные колебания:

$$x_2 = \frac{k^2 e}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t, \quad y_2 = \frac{k^2 e}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (25.75)$$

Резонанс имеет место при

$$\omega = \omega_{кр} = k = \sqrt{c/m}. \quad (25.76)$$

Значение ω , соответствующее резонансу, называется *критической угловой скоростью*. Критическая угловая скорость равна частоте свободных колебаний диска. Переходя от критической угловой скорости к частоте вращения в оборотах в минуту, получаем

$$n_{кр} = \frac{300}{\sqrt{f_{ст}}} \text{ об/мин}, \quad (25.77)$$

где статический прогиб вала $f_{ст}$ должен быть выражен в сантиметрах.

Наличие сил сопротивления должно способствовать быстрому исчезновению свободных колебаний. При установившемся ходе турбины с угловой скоростью, значительно отличающейся от критической, эти колебания никакого значения иметь не будут. Пренебрегая ими, получим $x_C = x_2$, $y_C = y_2$, и так как $\omega t = \varphi$, то

$$x_C = \frac{k^2 e}{k^2 - \omega^2} \cos \varphi, \quad y_C = \frac{k^2 e}{k^2 - \omega^2} \sin \varphi, \quad (25.78)$$

или

$$r_C = \frac{k^2}{k^2 - \omega^2} e. \quad (25.79)$$

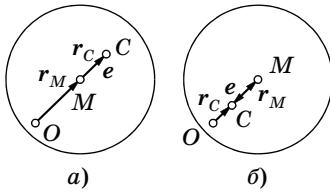


Рис. 340

Но в таком случае

$$m^{(C)}(\mathbf{F}) = c\mathbf{e} \times \mathbf{r}_C = \frac{ck^2}{k^2 - \omega^2} \mathbf{e} \times \mathbf{e} = 0,$$

и уравнение (25.70) в точности удовлетворяется. Это показывает, что только при наличии значительных свободных колебаний можно ожидать изменения угловой скорости диска и что точность рассмотренного приближенного решения тем выше, чем с большим основанием можно пренебречь свободными колебаниями. Получаем

$$r_M = e \frac{\omega^2}{k^2 - \omega^2}, \quad r_C = \left| \frac{\omega^2}{k^2 - \omega^2} \right| e. \quad (25.80)$$

Векторы $\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OM}$ и $\mathbf{r}_C = \overrightarrow{OC}$ (рис. 340) имеют, таким образом, одинаковое направление, т. е. три точки O , M , C лежат на одной прямой; эта прямая вращается с угловой скоростью ω вокруг точки O , т. е. центр тяжести диска, а также точки M и C описывают окружность.

Если $\omega < \omega_{\text{кр}}$, то $r_C > r_M$; точки O , C , M расположены так, как указано на рис. 340, а; если же $\omega > \omega_{\text{кр}}$, то $r_C < r_M$ и эти точки располагаются, как указано на рис. 340, б.

Центр тяжести диска приближается к точке O ; если к тому же $\omega > \omega_{\text{кр}} \sqrt{2}$, то $r_C < e$, т. е. при достаточно больших угловых скоростях диск, насаженный на гибкий вал, автоматически центрируется; центр тяжести диска приближается к геометрической оси вращения вала.

Пусть, например, $\omega = 5\omega_{\text{кр}} = 5k$; получим

$$r_C = \frac{e}{(\omega/\omega_{\text{кр}})^2 - 1} = \frac{1}{24} e,$$

т. е. погрешность в центровке диска уменьшается в 24 раза.

Явление самоцентрирования быстро вращающегося диска на гибком валу было замечено Лавалем. Изложенное выше объяснение этого явления было дано А. Фёпплом в 1895 г. вскоре после открытия Лавалем. Н. Е. Жуковский (1847—1921) в работе «Об упругой оси турбины Лавала и об осях с качающимися подшипниками» (1899) [4] распространил теорию Фёппля на задачу о критической скорости вала (центрифуги, веретена и т. п.), снабженного упругими подшипниками.

ЛАВАЛЬ ГУСТАВ ДЕ (*Laval Gustaf De*, 1845—1913) — шведский инженер.

ФЁППЛЬ АВГУСТ ОТТО (*Föppl August Otto*, 1854—1924) — немецкий физик.

§ 138. Удар в плоском движении твердого тела

Если к твердому телу, совершающему плоское движение, в некоторый момент времени прикладываются такие мгновенные силы, что в результате действия их движение остается плоским, то для определения скорости центра тяжести и угловой скорости тела после удара имеем два уравнения, выражающих теорему импульсов (§ 106):

$$m(v_x - v_{0x}) = \sum_{i=1}^n S_{ix}, \quad m(v_y - v_{0y}) = \sum_{i=1}^n S_{iy}, \quad (25.81)$$

и уравнение изменения момента количества движения в относительном движении вокруг центра тяжести при ударе (§ 118, 120)

$$J_z^{(C)} (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) = \sum_{i=1}^n m_z^{(C)} (S_i). \quad (25.82)$$

Здесь S_1, S_2, \dots, S_n — импульсы внешних мгновенных сил, v и $\tilde{\omega}$ — скорость центра тяжести C и угловая скорость тела после удара, v_0 и $\tilde{\omega}_0$ — те же величины до удара. К уравнениям (25.81) и (25.82) должны быть добавлены условия, определяющие характер удара.

Рассмотрим случай удара плоской фигуры о неподвижную преграду (рис. 341). Внешней мгновенной силой является реакция преграды, приложенная в точке O , в которой соприкасаются поверхности преграды MM и ударяющего тела в момент удара. Импульс этой реакции обозначим через S и, выбрав начало координат в точке O , направим ось y по нормали к MM внутрь тела, а ось x — по касательной к этой поверхности. Координаты центра тяжести в этой системе осей обозначим x_C, y_C , а его вектор-радиус r_C . Скорость точки O до удара обозначим через V_0 , а после удара — через V ; по известным формулам кинематики имеем

$$V_0 = v_0 - \tilde{\omega}_0 \times r_C, \quad V = v - \tilde{\omega} \times r_C,$$

причем знак минус объясняется тем, что вектор-радиус \overrightarrow{CO} равен $-r_C$. Проецируя эти уравнения на оси x, y , получаем

$$\begin{aligned} V_{0x} &= v_{0x} + \tilde{\omega}_0 y_C, \\ V_{0y} &= v_{0y} - \tilde{\omega}_0 x_C, \\ V_x &= v_x + \tilde{\omega} y_C, \\ V_y &= v_y - \tilde{\omega} x_C. \end{aligned} \quad (25.83)$$

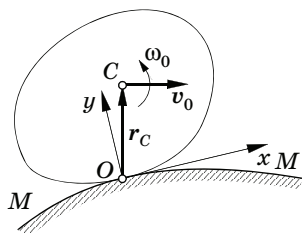


Рис. 341

Нормальные к преграде составляющие скорости точки O до удара и после него связаны соотношением

$$V_y + kV_{0y} = 0, \quad (25.84)$$

где k — коэффициент восстановления.

Уравнения (25.81) и (25.82) запишем в форме

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + \frac{S_x}{m}, & v_y &= v_{0y} + \frac{S_y}{m}, \\ \tilde{\omega} &= \tilde{\omega}_0 - \frac{1}{m\rho_C^2} (x_C S_y - y_C S_x). \end{aligned} \quad (25.85)$$

Заменяя в выражениях V_x и V_y проекции скорости центра тяжести и угловую скорость этими значениями, получим

$$\begin{aligned} V_x &= V_{0x} + \frac{1}{m\rho_C^2} [(\rho_C^2 + y_C^2)S_x - x_C y_C S_y], \\ V_y &= V_{0y} + \frac{1}{m\rho_C^2} [-x_C y_C S_x + (\rho_C^2 + x_C^2)S_y], \end{aligned} \quad (25.86)$$

и соотношение (25.84) приведет к виду

$$-m\rho_C^2 (1+k)V_{0y} = -x_C y_C S_x + (\rho_C^2 + x_C^2)S_y. \quad (25.87)$$

Четыре уравнения (25.85) и (25.87) содержат пять неизвестных: v_x , v_y , $\tilde{\omega}$, S_x , S_y . Недостающее уравнение получим, приняв то или иное предположение о характере поверхности преграды.

Ограничимся рассмотрением двух предельных случаев.

1°. Поверхность преграды абсолютно гладка; тогда

$$S_x = 0$$

и мы находим

$$\begin{aligned} S_y &= -\frac{m\rho_C^2 (1+k)}{\rho_C^2 + x_C^2} V_{0y}, \\ v_x &= v_{0x}, & v_y &= v_{0y} - \frac{\rho_C^2 (1+k)}{\rho_C^2 + x_C^2} V_{0y}, \\ \tilde{\omega} &= \tilde{\omega}_0 + \frac{(1+k)x_C}{\rho_C^2 + x_C^2} V_{0y}. \end{aligned} \quad (25.88)$$

В этих формулах величину V_{0y} надо заменить ее значением (25.83).

2°. Поверхность преграды абсолютно шероховата, т. е. не допускает скольжения по ней ударяющего тела; тогда

$$V_x = 0,$$

или, согласно (25.86),

$$-m\rho_C^2 V_{0x} = (\rho_C^2 + y_C^2)S_x - x_C y_C S_y. \quad (25.89)$$

Из двух уравнений (25.87) и (25.89) находим неизвестные S_x и S_y :

$$S_x = -\frac{m}{\rho_O} [(\rho_C^2 + x_C^2) V_{0x} + (1+k) x_C y_C V_{0y}], \quad (25.90)$$

$$S_y = -\frac{m}{\rho_O} [x_C y_C V_{0x} + (1+k) (\rho_C^2 + y_C^2) V_{0y}],$$

где

$$\rho_O^2 = \rho_C^2 + x_C^2 + y_C^2. \quad (25.91)$$

Очевидно, что ρ_O представляет собой радиус инерции тела относительно оси z , проходящей через точку соприкасания тел. Теперь, согласно уравнениям (25.85), получаем

$$v_x = v_{0x} - \frac{1}{\rho_O} [(\rho_C^2 + x_C^2) V_{0x} + (1+k) x_C y_C V_{0y}],$$

$$v_y = v_{0y} - \frac{1}{\rho_O} [x_C y_C V_{0x} + (1+k) (\rho_C^2 + y_C^2) V_{0y}], \quad (25.92)$$

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + \frac{1}{\rho_O} [(1+k) x_C V_{0y} - y_C V_{0x}].$$

Здесь V_{0x} и V_{0y} можно заменить их значениями (25.83); ограничимся написанием формул, относящихся к случаю неупругого удара ($k = 0$); они легко приводятся к виду

$$v_x = -\tilde{\omega} y_C, \quad v_y = \tilde{\omega} x_C, \quad \tilde{\omega} = \frac{1}{\rho_O} (x_C v_{0y} - y_C v_{0x} + \rho_C^2 \tilde{\omega}_0) \quad (25.93)$$

и дают решение задачи об определении движения плоской фигуры после того, как одна ее точка O была мгновенно остановлена; фигура станет, очевидно, вращаться вокруг точки O , причем угловая скорость $\tilde{\omega}$ находится из последнего уравнения (25.93), которое другим путем будет получено в конце § 156 (с. 425).

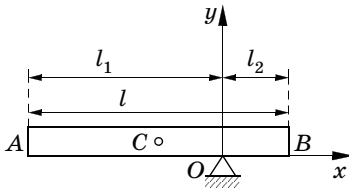


Рис. 342

Пример 117. Однородный брусok длиной $AB = l$ (рис. 342), падающий поступательно, встречает неподвижное препятствие O , отстоящее на расстояниях l_1 и l_2 от A и B . Скорость бруска до удара равна v_0 . Определить скорость центра тяжести бруска и его угловую скорость после удара. Коэффициент восстановления равен k .

В данном случае

$$\begin{aligned} v_{0x} &= 0, & v_{0y} &= -v_0, & \tilde{\omega}_0 &= 0, \\ x_C &= -\frac{1}{2}(l_1 - l_2), & y_C &\approx 0, & \rho_C^2 &= \frac{1}{12}l^2. \end{aligned}$$

По (25.83) и (25.92) получаем

$$v_y = -\frac{v_0}{\rho_O^2} \left[\frac{1}{4}(l_1 - l_2)^2 - k \frac{l^2}{12} \right], \quad \tilde{\omega} = \frac{l_1 - l_2}{2\rho_O^2} v_0(1 + k),$$

где по (25.91)

$$\rho_O^2 = \frac{1}{4}(l_1 - l_2)^2 + \frac{1}{12}l^2.$$

При $l_1 = (3/4)l$ находим

$$v_y = -\frac{1}{7}(3 - 4k)v_0, \quad \tilde{\omega} = \frac{12}{7}(1 + k)\frac{v_0}{l}.$$

При абсолютно неупругом ударе получаем $v_y = -(3/7)v_0$, а при абсолютно упругом $v_y = (1/7)v_0$; в последнем случае скорость центра тяжести меняет свое направление на противоположное.

Пример 118. При падении полого шара радиусом a на землю скорость центра равна по величине v_0 и направлена под углом α к вертикали (рис. 343). Определить движение шара после удара о землю, если в момент падения шар имел угловую скорость $\tilde{\omega}_0$ вокруг оси, перпендикулярной вертикальной плоскости, содержащей скорость v_0 .

Будем предполагать, что скольжение по поверхности земли отсутствует. В рассматриваемом примере имеем

$$x_C = 0, \quad y_C = a, \quad \rho_C^2 = \frac{2}{3}a^2,$$

$$v_{0x} = v_0 \sin \alpha, \quad v_{0y} = -v_0 \cos \alpha.$$

Выражения проекций скорости центра шара и его угловой скорости после удара по (25.92) и (25.83) будут

$$v_x = \frac{1}{5}(3v_0 \sin \alpha - 2a\tilde{\omega}_0),$$

$$v_y = kv_0 \cos \alpha, \quad \tilde{\omega} = -\frac{v_x}{a}.$$

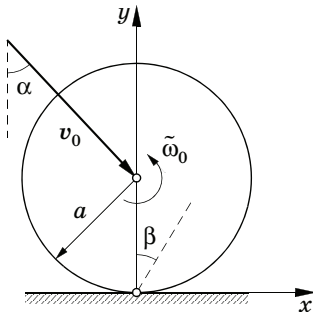


Рис. 343

Угол отражения шара от земли определится из соотношения

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_x}{v_y} = \frac{1}{5k} \left(3 \operatorname{tg} \alpha - \frac{2a\tilde{\omega}_0}{v_0 \cos \alpha} \right).$$

При условии $\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha$ шар отразится по направлению падения. При абсолютно упругом ударе ($k = 1$) это будет иметь место, если

$$\tilde{\omega}_0 = \frac{4v_0}{a} \sin \alpha.$$

Теннисный мяч, которому сообщена такая угловая скорость, отразится по направлению падения, имея скорость центра тяжести, равную по величине скорости падения v_0 , и угловую скорость

$$\tilde{\omega} = -\frac{v_x}{a} = \frac{v_0 \sin \alpha}{a} = \frac{1}{4} \tilde{\omega}_0.$$

Пример 119. Платформа AB массой m опирается в точках A и B на пружины одинаковой жесткости c . Центр тяжести C платформы находится в середине отрезка AB ; радиус инерции платформы относительно оси, проходящей через C перпендикулярно рисунку, равен ρ_C ; $AB = 2l$. Под действием импульса S точка A приобрела скорость v_0 . Определить последующие колебания платформы, считая ее отклонения от положения равновесия весьма малыми и пренебрегая силами сопротивления (рис. 344).

Сначала определим скорость v_y центра тяжести платформы и угловую скорость $\tilde{\omega}$ после удара. Это даст начальные условия для последующего движения платформы. Имеем

$$mv_y = S, \quad m\rho_C^2 \tilde{\omega} = lS,$$

причем ось Oy направлена вертикально вниз, а $\tilde{\omega}$ считается положительной при вращении против часовой стрелки. Далее имеем

$$v_0 = v_y + \tilde{\omega}l.$$

Из этих уравнений находим

$$v_y = \frac{\rho_C^2}{\rho_C^2 + l^2} v_0, \quad \tilde{\omega} = \frac{l}{\rho_C^2 + l^2} v_0.$$

При движении, возникающем после удара, силами, действующими на платформу, будут сила тяжести $G = mg$ и реакция пружин. Пусть y_C — перемещение центра тяжести, φ — угол поворота платформы. Обозначая статическое укорочение пружин через $f_{ст}$ и замечая, что полные осадки пружин B и A при малых колебаниях платформы в произвольный момент движения соответственно равны

$$f_B = f_{ст} + y_C - l\varphi, \quad f_A = f_{ст} + y_C + l\varphi,$$

получаем уравнение движения центра тяжести

$$m\ddot{y}_C = -cf_B - cf_A + G.$$

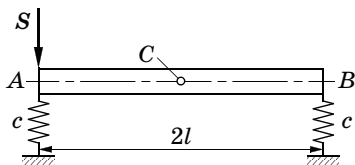


Рис. 344

Замечая, что $2cf_{ст} = mg$, приведем это уравнение к виду

$$\ddot{y}_C + k_1^2 y_C = 0,$$

где $k_1^2 = 2c/m$.

Составим теперь уравнение вращения платформы

$$m \rho_C^2 \ddot{\varphi} = cl (f_B - f_A),$$

или

$$\ddot{\varphi} + k_2^2 \varphi = 0,$$

где

$$k_2^2 = \frac{2cl^2}{\rho_C^2 m} = \frac{l^2}{\rho_C^2} k_1^2.$$

Остается найти решение этих уравнений при начальных условиях

$$\varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{l}{\rho_C + l^2} v_0,$$

$$y_C = 0, \quad \dot{y}_C = v_y = \frac{\rho_C^2}{\rho_C + l^2} v_0 \quad \text{при } t = 0.$$

Получим

$$y_C = \sqrt{\frac{m}{2c}} \frac{\rho_C^2}{\rho_C + l^2} v_0 \sin k_1 t, \quad \varphi = \sqrt{\frac{m}{2c}} \frac{\rho_C}{\rho_C + l^2} v_0 \sin k_2 t.$$

Глава XXVI

Тензор инерции твердого тела

§ 139. Тензор инерции и его компоненты.

Формула для момента инерции тела относительно произвольной оси

В предыдущей главе при рассмотрении динамики плоского движения абсолютно твердого тела, при котором ось вращения тела сохраняет перпендикулярное плоскости движения направление, можно было довольствоваться простейшим понятием момента инерции тела относительно данной оси или оси, ей параллельной, как мер инертности тела в его вращении вокруг оси.

В специальных задачах динамики твердого тела (теория гироскопов и др.), о которых будет идти речь далее, необходимо изложить учение об инертности абсолютно твердого тела в его вращении около неподвижного центра и в более общих случаях, включающих такое вращение как составляющую.

В § 119 была указана общая формула (23.62) главного момента количеств движения системы материальных точек. В случае сплошного твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки (центра вращения), эта формула заменяется интегральным выражением

$$\mathbf{K} = \int_{(M)} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \, dm, \quad (26.1)$$

где \mathbf{r} (рис. 345) — вектор-радиус точки N тела, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения тела вокруг неподвижного центра O , dm — элементарная масса тела в точке N ; интеграл берется по всей массе M тела.

Раскрывая тройное произведение по известному правилу

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) = r^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}$$

и замечая, что скорость $\boldsymbol{\omega}$ одинакова по всему объему твердого тела, приведем равенство (26.1) к виду

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\omega} \int_{(M)} r^2 \, dm - \int_{(M)} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} \, dm. \quad (26.2)$$

Проецируя обе части этого равенства на оси координат и собирая в каждом из полученных трех равенств члены при ω_x , ω_y и ω_z , получаем

$$\begin{aligned} K_x &= J_{xx} \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z, \\ K_y &= -J_{yx} \omega_x + J_{yy} \omega_y - J_{yz} \omega_z, \\ K_z &= -J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y + J_{zz} \omega_z, \end{aligned} \quad (26.3)$$

где введены обозначения

$$J_{xx} = \int_{(M)} (y^2 + z^2) \, dm, \quad J_{yy} = \int_{(M)} (x^2 + z^2) \, dm, \quad J_{zz} = \int_{(M)} (x^2 + y^2) \, dm,$$

$$J_{xy} = J_{yx} = \int_{(M)} xy \, dm, \quad J_{yz} = J_{zy} = \int_{(M)} yz \, dm, \quad J_{xz} = J_{zx} = \int_{(M)} xz \, dm. \quad (26.4)$$

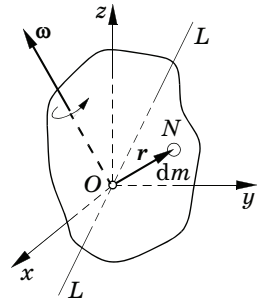


Рис. 345

Совокупность равенств (26.3) выражает вектор \mathbf{K} как линейную вектор-функцию от $\boldsymbol{\omega}$ с коэффициентами, представленными таблицей (матрицей)

$$\begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix}. \quad (26.5)$$

Поскольку векторы \mathbf{K} и $\boldsymbol{\omega}$ представляют собой *объективные* физические величины: главный вектор момента количества движения твердого тела в его вращательном движении вокруг неподвижного центра O и вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ [точнее говоря, \mathbf{K} и $\boldsymbol{\omega}$ являются *псевдовекторами* (см. § 34 и указанные там примеры псевдовекторов)], совокупность коэффициентов при ω_x , ω_y , ω_z в системе равенств (26.3), представленная матрицей (26.5), образует физический (объективный) тензор второго ранга, который мы обозначим буквой \mathcal{J} и назовем *тензором инерции* тела в данной его точке.

По определению операции *умножения вектора на тензор* слева или справа (в данном случае это безразлично, так как тензор инерции, очевидно, симметричен) системе равенств (26.3) можно придать (см. § 33) тензорную форму

$$\mathbf{K} = \mathcal{J}\boldsymbol{\omega}. \quad (26.6)$$

Замечая, что суммы $y^2 + z^2$, $x^2 + z^2$, $x^2 + y^2$ представляют собой квадраты расстояний от точки N соответственно до осей Ox , Oy , Oz , заключим, что *диагональные* компоненты матрицы (26.5) — их для сокращения записи принято обозначать через J_x , J_y , J_z — представляют собой *моменты инерции тела относительно осей Ox , Oy и Oz* . *Недиагональные* компоненты матрицы (26.5), взятые с положительными знаками, называют *центробежными* моментами инерции или *произведениями инерции* в соответствующих плоскостях.

Подчеркнем, что моменты инерции J_x , J_y , J_z , так же как и произведения инерции J_{xy} , J_{yz} , J_{xz} , зависят от выбора в теле осей координат, но совокупность этих величин в целом представляет собой не зависящую от этого выбора *единую* физическую величину — *тензор инерции \mathcal{J}* .

Сравнивая формулу (26.6) с выражением вектора количества движения для поступательно движущегося тела или материальной точки $\mathbf{q} = m\mathbf{v}$, видим, что подобно массе m , характеризующей

инертность тела в его *поступательном* движении, тензор инерции J выражает инертность абсолютно твердого тела при его *вращении* вокруг некоторого центра. В этом заключается физическое значение тензора инерции. Тензор инерции имеет различные значения в разных точках твердого тела; он является функцией точки, т. е. образует в твердом теле тензорное поле. Связь между тензорами инерции в разных точках твердого тела будет установлена далее.

При изложении основ тензорной алгебры (§ 33) было выяснено, что определение тензора как совокупности коэффициентов в выражении линейной связи между двумя физическими векторами не является единственным. Возможно и другое определение тензора как совокупности величин, преобразующихся при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой по формулам преобразования произведений проекций двух векторов. Переходя от буквенной индексации к цифровой ($x = x_1, y = x_2, z = x_3$, причем в следующих формулах предполагается суммирование по дважды повторяющимся в одночленах *немым* (§ 33) индексам r и s , а знак \pm принят в соответствии с матрицей (26.5), где плюс относится к случаю $p = q$, а минус — к случаю $p \neq q$), будем иметь

$$J'_{pq} = \alpha_{pr}\alpha_{qs} (\pm J_{rs}), \quad J_{pq} = \alpha_{rp}\alpha_{sq} (\pm J_{rs}),$$

$$p = 1, 2, 3, \quad q = 1, 2, 3, \quad (26.7)$$

где $\pm J'_{pq}$ — компоненты тензора инерции в *новой* системе координат $Ox'_1x'_2x'_3$, а $\pm J_{pq}$ — в *старой* системе $Ox_1x_2x_3$. Величины α_{mn} , $m = 1, 2, 3, n = 1, 2, 3$, представляют собой косинусы углов между осями Ox'_m и Ox_n согласно следующей таблице (§ 32):

	x_1	x_2	x_3	
x'_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	(26.8)
x'_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}	
x'_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}	

Формулы (26.7) можно непосредственно использовать для составления выражения момента инерции J_L тела относительно произвольной прямой LL (рис. 345), проведенной через точку O

в теле. Для этого достаточно представить себе прямую LL как ось новой системы координат, например как ось Ox'_1 . Тогда из первой формулы (26.7) при $p = q = 1$ будет следовать (суммировать по r и s)

$$J'_{11} = J_L = \alpha_{1r}\alpha_{1s}(\pm J_{rs}),$$

или, если записать эту двойную сумму в развернутом виде,

$$J_L = \alpha_{11}^2 J_1 + \alpha_{12}^2 J_2 + \alpha_{13}^2 J_3 - 2\alpha_{11}\alpha_{12} J_{12} - 2\alpha_{12}\alpha_{13} J_{23} - 2\alpha_{11}\alpha_{13} J_{13}. \quad (26.9)$$

Если обозначить косинусы углов прямой LL с осями системы координат $Ox_1x_2x_3$ через α , β , γ и вернуться к буквенной индексации, то формула (26.9) примет вид

$$J_L = J_x \alpha^2 + J_y \beta^2 + J_z \gamma^2 - 2J_{xy} \alpha \beta - 2J_{yz} \beta \gamma - 2J_{zx} \gamma \alpha. \quad (26.10)$$

При помощи этой формулы момент инерции тела относительно оси, произвольно проведенной через некоторую точку тела, выражается через моменты инерции относительно трех пересекающихся в этой точке взаимно-перпендикулярных осей и соответствующие этим осям центробежные моменты инерции.

Выражение (26.10) представляет собой однородную квадратичную функцию — *квадратичную форму* — от направляющих косинусов оси, относительно которой определяется момент инерции, в выбранной в данной точке оси системе осей координат. Шесть инерционных характеристик тела в рассматриваемой точке — три момента инерции относительно осей координат и три центробежных момента — образуют коэффициенты этой квадратичной формы.

§ 140. Главные оси инерции

В § 35 было показано, что симметричный тензор второго ранга в каждой точке пространства обладает тремя взаимно-перпендикулярными *главными осями*. Если принять эти оси за оси координат, то недиагональные компоненты будут равны нулю, а три отличные от нуля диагональные компоненты образуют систему *главных значений* тензора. В рассматриваемом случае тензора инерции главные оси тензора инерции именуется *главными осями инерции*, а главные значения тензора инерции — *главными моментами инерции*.

Приведем здесь применительно к тензору инерции другое доказательство существования главных осей инерции, основанное на геометрическом представлении тензора инерции.

Итак, докажем, что в любой точке твердого тела существуют три взаимно-перпендикулярные главные оси инерции.

Для доказательства используем следующую геометрическую интерпретацию формулы (26.10): вдоль оси OL (рис. 346) отложим отрезок $ON = 1/\sqrt{J_L}$. Координаты конца этого отрезка в системе осей $Oxyz$ будут

$$x = ON \cos(\vec{OL}, x) = \alpha/\sqrt{J_L},$$

$$y = ON \cos(\vec{OL}, y) = \beta/\sqrt{J_L},$$

$$z = ON \cos(\vec{OL}, z) = \gamma/\sqrt{J_L},$$

откуда

$$\alpha = x\sqrt{J_L}, \quad \beta = y\sqrt{J_L}, \quad \gamma = z\sqrt{J_L}.$$

Подставляя эти выражения в (26.10) и сокращая общий множитель J_L , получаем

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}zx = 1. \quad (26.11)$$

Поверхность второго порядка, представляемая этим уравнением, дает геометрическое место концов отрезков ON при всевозможных направлениях оси OL . Вектор-радиус, проведенный из начала координат к любой точке поверхности (26.11), по величине обратно пропорционален квадратному корню из момента инерции относительно оси, имеющей направление этого вектора-радиуса. Поскольку момент инерции относительно любой оси есть величина существенно положительная и не обращающаяся в нуль, поверхность (26.11) не имеет бесконечно удаленных точек и, следовательно, представляет собой *эллипсоид*. Этот эллипсоид называется *эллипсоидом инерции тела* в рассматриваемой точке O (рис. 346).

Изображение тензора инерции в форме эллипсоида не является чем-то специфическим для тензора инерции. Аналогичные

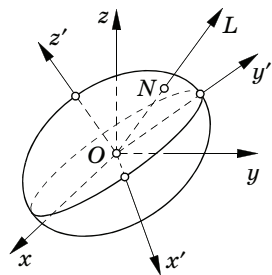


Рис. 346

интерпретации возможны и для всех других симметричных тензоров второго ранга. Так, тензору напряжений (§ 36) можно было бы сопоставить *эллипсоид напряжений*, тензору деформаций — *эллипсоид деформаций* (§ 78), тензору скоростей деформаций — *эллипсоид скоростей деформаций* (§ 78). Происхождение названия *сферический тензор* для тензора, обладающего изотропией, т. е. такого, что все его диагональные компоненты в данной точке равны между собой (единичный тензор, тензор напряжений в идеально текучей жидкости), связано с тем, что в геометрической интерпретации такому тензору соответствует сфера.

Уравнение эллипсоида (26.10) можно привести к более простому (так называемому каноническому) виду, если оси координат направить по осям эллипсоида. В новых осях координат $Ox'y'z'$ вместо (26.11) получим

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1,$$

где a, b, c — полуоси эллипсоида. Если обозначить через J_1, J_2, J_3 моменты инерции относительно осей Ox', Oy', Oz' , то по построению эллипсоида инерции

$$a = 1/\sqrt{J_1}, \quad b = 1/\sqrt{J_2}, \quad c = 1/\sqrt{J_3},$$

и подстановка дает

$$J_1 x'^2 + J_2 y'^2 + J_3 z'^2 = 1.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (26.11), видим, что *все центробежные моменты инерции в системе осей $Ox'y'z'$ обратились в нуль*. Этим доказывается существование в каждой точке твердого тела трех взаимно-перпендикулярных главных осей инерции; они совпадают по направлению с осями *эллипсоида инерции тела* в этой точке. Моменты инерции J_1, J_2, J_3 представляют собой *главные моменты инерции*.

Метод определения направлений главных осей и величин главных значений любого симметричного тензора второго ранга был уже описан ранее (§ 35), причем метод этот носил чисто аналитический характер, не связанный с образом эллипсоида, геометрически изображающего рассматриваемый тензор.

Приведем другую постановку того же вопроса, исходящую из *геометрической интерпретации* тензора инерции. Направлениям главных осей инерции соответствуют оси симметрии эл-

липсоида инерции, а следовательно, экстремальные значения моментов инерции. Поэтому дело сводится к нахождению значений α , β , γ , связанных соотношением

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = 0 \quad (26.12)$$

и сообщающих экстремальное значение однородной квадратичной форме (26.9)

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = J = J_x \alpha^2 + J_y \beta^2 + J_z \gamma^2 - 2J_{xy} \alpha \beta - 2J_{yz} \beta \gamma - 2J_{zx} \gamma \alpha.$$

Эта задача на условный экстремум сводится к задаче о нахождении безусловного экстремума функции

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = F(\alpha, \beta, \gamma) - \lambda f(\alpha, \beta, \gamma), \quad (26.13)$$

где λ — пока неопределенный множитель. Для решения последней задачи приравниваем нулю частные производные Φ по α , β , γ ; получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = \frac{\partial F}{\partial \beta} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} = \frac{\partial F}{\partial \gamma} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0. \quad (26.14)$$

Чтобы выяснить значение множителя λ , умножим каждое из этих уравнений соответственно на α , β , γ и сложим результаты; учитывая (26.12), получаем

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial F}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial F}{\partial \gamma} \gamma = 2\lambda.$$

Левая часть по теореме Эйлера об однородных функциях равна $2F = 2J$. Таким образом, для значений α , β , γ , удовлетворяющих уравнениям (26.14), т. е. сообщающих экстремум функции $F(\alpha, \beta, \gamma)$, имеем

$$\lambda = J,$$

т. е. *множитель λ равен искомому экстремальному значению момента инерции.*

В развернутом виде уравнения (26.14) записываются в виде

$$\begin{aligned} (J_x - \lambda) \alpha - J_{xy} \beta - J_{zx} \gamma &= 0, \\ -J_{xy} \alpha + (J_y - \lambda) \beta - J_{yz} \gamma &= 0, \\ -J_{zx} \alpha - J_{yz} \beta + (J_z - \lambda) \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (26.15)$$

Эта однородная система линейных относительно α , β , γ уравнений может иметь отличные от нуля решения только в том случае,

когда ее определитель равен нулю. Для определения λ будем иметь, таким образом, уравнение

$$\begin{vmatrix} J_x - \lambda & -J_{xy} & -J_{zx} \\ -J_{xy} & J_y - \lambda & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{yz} & J_z - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (26.16)$$

Раскрывая определитель, получаем полином третьей степени относительно λ . В § 35 было доказано, что все три его корня вещественны. Предположим, что они различны, и обозначим их, как выше, через J_1, J_2, J_3 — это и будут искомые главные моменты инерции.

Обозначим через $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ косинусы углов с осями координат Ox, Oy, Oz той главной оси, которой соответствует момент инерции J_i (индекс i может быть равен 1, 2 или 3). Для определения $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ получаем уравнения

$$\begin{aligned} (J_x - J_i) \alpha_i & - J_{xy} \beta_i & - J_{zx} \gamma_i & = 0, \\ - J_{xy} \alpha_i + (J_y - J_i) \beta_i & & - J_{yz} \gamma_i & = 0, \\ - J_{zx} \alpha_i & - J_{yz} \beta_i + (J_z - J_i) \gamma_i & & = 0. \end{aligned} \quad (26.17)$$

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1. \quad (26.18)$$

Из трех уравнений (26.17) одно является следствием двух других, так как J_i определено так, чтобы определитель (26.16) системы уравнений (26.15) обращался в нуль. Поэтому для определения трех неизвестных имеем три уравнения: уравнение (26.18) и два из уравнений (26.17).

Таким образом, решая кубическое уравнение (26.16), можно определить три главных момента инерции и для каждого из них найти направление соответствующей оси. Проверим, что эти направления взаимно-перпендикулярны. Для этого примем в системе (26.17) $i = 1$ и, умножив каждое из уравнений соответственно на $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, сложим результаты; получим

$$\begin{aligned} J_x \alpha_1 \alpha_2 + J_y \beta_1 \beta_2 + J_z \gamma_1 \gamma_2 - J_{xy} (\beta_1 \alpha_2 + \beta_2 \alpha_1) - \\ - J_{yz} (\gamma_1 \beta_2 + \gamma_2 \beta_1) - J_{zx} (\gamma_1 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_1) = J_1 (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2). \end{aligned}$$

Если проделать то же самое с системой уравнений (26.17) для $i = 2$, умножив каждое уравнение соответственно на $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, то слева получим то же самое выражение (это очевидно вследствие симметрии его относительно индексов 1 и 2); справа же будет стоять

$$J_2 (\alpha_2 \alpha_1 + \beta_2 \beta_1 + \gamma_2 \gamma_1).$$

Итак, получается

$$(J_1 - J_2) (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2) = 0,$$

и поскольку по условию J_1 и J_2 различны,

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0,$$

что и доказывает перпендикулярность первой и второй осей.

Если $J_1 = J_2$, то это заключение отпадает; в этом случае эллипсоид

инерции представляет собой эллипсоид вращения вокруг третьей главной оси и любая прямая в плоскости, перпендикулярной этой оси и проходящей через точку O , может быть принята за главную ось инерции. Наконец, при $J_1 = J_2 = J_3$ эллипсоид инерции вырождается в сферу и любая прямая, проходящая через рассматриваемую точку, является главной осью инерции.

Эллипсоид инерции с центром в центре масс тела называют *центральной эллипсоидом инерции*, его оси — *главными центральными осями инерции*, а моменты инерции относительно этих осей — *главными центральными моментами инерции*. Обозначим их через

$$J_1^{(C)}, J_2^{(C)}, J_3^{(C)}.$$

Пользуясь теоремой § 115 о моментах инерции относительно параллельных осей, легко выразить момент инерции относительно произвольной оси через главные центральные моменты инерции. Согласно упомянутой теореме, момент инерции относительно произвольной оси OA_1 (рис. 347), направление которой характеризуется косинусами α , β , γ углов, составляемых ею с главными центральными осями инерции Cx, Cy, Cz , будет

$$J = J^{(C)} + Md^2,$$

где $J^{(C)}$ — момент инерции относительно оси CA , параллельной OA_1 и проходящей через центр масс тела, d — расстояние между осями, M — масса тела. Но по формуле (26.10)

$$J^{(C)} = J_1^{(C)} \alpha^2 + J_2^{(C)} \beta^2 + J_3^{(C)} \gamma^2, \quad (26.19)$$

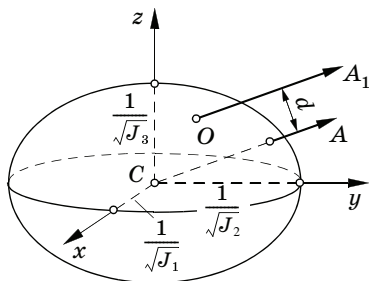


Рис. 347

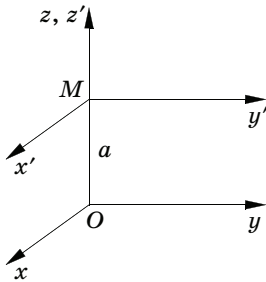


Рис. 348

так как центробежные моменты относительно главных осей равны нулю; следовательно,

$$J = Md^2 + J_1^{(C)}\alpha^2 + J_2^{(C)}\beta^2 + J_3^{(C)}\gamma^2. \quad (26.20)$$

Предположим, что в точке O твердого тела определены направления главных осей $Oxyz$. Если перейти из точки O в другую точку M , лежащую на оси Oz на расстоянии $OM = a$, то ось z уже не останется главной осью инерции в точке M . В самом деле, построим в точке M систему осей $Mx'y'z'$, параллельных главным осям в точке O (рис. 348); тогда координаты какой-либо точки тела в системе осей $Mx'y'z'$ будут равны

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - a,$$

где x, y, z — координаты этой точки тела в системе $Oxyz$. Центробежные моменты инерции $J_{y'z'}$ и $J_{z'x'}$ будут

$$\begin{aligned} J_{y'z'} &= \int_{(M)} y'z' dm = \int_{(M)} y(z-a) dm = \int_{(M)} yz dm - a \int_{(M)} y dm, \\ J_{z'x'} &= \int_{(M)} z'x' dm = \int_{(M)} (z-a)x dm = \int_{(M)} zx dm - a \int_{(M)} x dm. \end{aligned} \quad (26.21)$$

Но Oz есть главная ось инерции в точке O , т. е.

$$\int_{(M)} zx dm = J_{zx} = 0, \quad \int_{(M)} yz dm = J_{yz} = 0;$$

с другой стороны,

$$\int_{(M)} x dm = Mx_C, \quad \int_{(M)} y dm = My_C,$$

где x_C, y_C — координаты центра масс, M — масса тела. Поэтому из равенств (26.21) получаем

$$J_{y'z'} = -May_C, \quad J_{z'x'} = -Max_C, \quad (26.22)$$

т. е. главная ось инерции Oz в точке O уже не является таковой в точке M . Это будет иметь место только в том случае, когда $x_C = y_C = 0$, т. е. когда ось Oz проходит через центр масс тела.

Главная центральная ось инерции является главной осью инерции во всех своих точках.

Направления главных осей инерции тела часто можно определить из соображений симметрии.

Пусть, например, тело имеет ось материальной симметрии; примем ее за ось z ; на этой оси лежит центр масс тела. Легко доказать, что ось z будет *главной центральной осью инерции*. В самом деле, поскольку ось z является осью материальной симметрии, для всякой точки M с координатами (x, y, z) можно будет найти симметрично расположенную относительно оси z точку M' с координатами $(-x, -y, z)$, причем массы dm , сосредоточенные в точках M и M' , в силу предположений симметрии равны. Таким образом, в интеграле

$$J_{yz} = \int_{(M)} yz \, dm$$

каждому слагаемому $yz \, dm$ будет соответствовать равное по величине и противоположное по знаку слагаемое $(-yz \, dm)$; следовательно,

$$J_{yz} = 0$$

и аналогично

$$J_{zx} = 0,$$

т. е. ось z является главной центральной осью инерции тела.

Если тело имеет плоскость материальной симметрии Π , то любая прямая, перпендикулярная этой плоскости, будет главной осью инерции в точке O пересечения ее с плоскостью Π . Действительно, если принять эту прямую за ось z и O за начало координат, то для любой точки M с координатами x, y, z можно найти точку M' с теми же координатами x, y и с третьей координатой $(-z)$; массы, сосредоточенные в точках M и M' , равны, так как по предположению Π — плоскость материальной симметрии. Таким образом, интегралы

$$J_{yz} = \int_{(M)} yz \, dm, \quad J_{zx} = \int_{(M)} zx \, dm$$

и в этом случае обращаются в нуль, т. е. Oz является главной осью инерции в точке O .

Рассмотрим также однородное тело вращения с осью симметрии z . Так как ось z — ось симметрии, она является главной центральной осью; две любые взаимно-перпендикулярные прямые, перпендикулярные оси z и пересекающие ее, могут быть приняты за главные оси инерции в какой-либо точке оси вращения тела. Действительно, для тела вращения всякая плоскость,

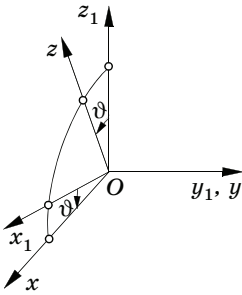


Рис. 349

проходящая через ось z , является плоскостью симметрии; значит, перпендикулярная этой плоскости прямая, т. е. любая прямая, является главной осью. Эллипсоид инерции в любой точке оси z является *эллипсоидом вращения*. Момент инерции относительно оси вращения эллипсоида инерции называется *аксиальным*; моменты инерции относительно осей, перпендикулярных оси вращения эллипсоида инерции, называются *экваториальными*. Очевидно, экваториальные моменты равны между собой, так как равны соответствующие полуоси эллипсоида инерции.

Пусть J_3 обозначает аксиальный, а $J_1 = J_2$ — экваториальные моменты инерции однородного тела вращения с осью симметрии Oz_1 . Выразим через них моменты инерции и центробежные моменты в системе осей $Oxyz$, получающейся при повороте системы главных осей инерции $Ox_1y_1z_1$ на угол ϑ вокруг главной оси Oy_1 (рис. 349).

По формуле (26.10) находим

$$J_x = J_1 \cos^2 \vartheta + J_3 \sin^2 \vartheta, \quad J_y = J_1, \quad J_z = J_1 \sin^2 \vartheta + J_3 \cos^2 \vartheta.$$

Для определения центробежного момента J_{zx} заметим, что по формулам преобразования координат будет

$$x = x_1 \cos \vartheta - z_1 \sin \vartheta, \quad y = y_1, \quad z = x_1 \sin \vartheta + z_1 \cos \vartheta,$$

и получим

$$\begin{aligned} J_{zx} &= \int_{(M)} zx \, dm = \int_{(M)} (x_1 \sin \theta + z_1 \cos \theta)(x_1 \cos \theta - z_1 \sin \theta) = \\ &= \sin \theta \cos \theta \int_{(M)} (x_1^2 - z_1^2) \, dm + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \int_{(M)} x_1 z_1 \, dm. \end{aligned}$$

Последний интеграл равен нулю, так как оси z_1 и x_1 являются главными; далее

$$\int_{(M)} (x_1^2 - z_1^2) \, dm = \int_{(M)} (x_1^2 + y_1^2) \, dm - \int_{(M)} (z_1^2 + y_1^2) \, dm = J_3 - J_1,$$

и, следовательно,

$$J_{zx} = \frac{1}{2} (J_3 - J_1) \sin 2\vartheta. \quad (26.23)$$

Центробежные моменты J_{xy} и J_{yz} обращаются в нуль, так как ось Oy (или Oy_1) является главной осью.

Пример 120. При каком отношении радиуса r прямого кругового однородного цилиндра к его высоте h центральный эллипсоид инерции обратится в сферу? Тот же вопрос — для прямого кругового конуса.

В случае *однородного кругового цилиндра* момент инерции относительно оси вращения $J_3^{(C)}$, а также моменты инерции относительно двух других главных центральных осей $J_1^{(C)}$, $J_2^{(C)}$ (см. табл. 5, § 115) определяются формулами

$$J_3^{(C)} = \frac{1}{2} Mr^2;$$

$$J_1^{(C)} = J_2^{(C)} = \frac{1}{4} Mr^2 + \frac{1}{12} Mh^2.$$

Условие равенства моментов инерции $J_1^{(C)}$ и $J_3^{(C)}$ дает

$$r/h = 1/\sqrt{3}.$$

В случае *прямого кругового конуса* имеем

$$J_3^{(C)} = \frac{3}{10} Mr^2, \quad J_1^{(C)} = J_2^{(C)} = \frac{3}{20} Mr^2 + \frac{3}{80} Mh^2.$$

Центральный эллипсоид инерции будет сферой при условии

$$r/h = 1/2.$$

Пример 121. Тело состоит из двух одинаковых однородных круговых цилиндров с параллельными осями, вделанных в тонкую доску; срединная плоскость доски параллельна основаниям цилиндров и делит высоту цилиндров на равные части (рис. 350). Масса каждого цилиндра равна M , высота $2H$, радиус R , расстояние между осями цилиндров рав-

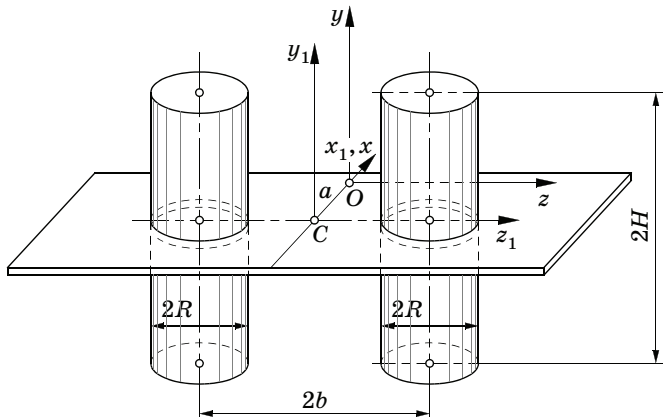


Рис. 350

но 2b. Определить, пренебрегая массой доски, главные центральные моменты инерции тела, а также его моменты инерции относительно системы осей $Oxyz$, параллельных главным центральным осям и имеющим начало в точке O , расположенной на главной центральной оси, перпендикулярной плоскости, проходящей через оси цилиндров. Найти такое положение точки O , чтобы $J_x = J_y = 2J_z$.

Система главных центральных осей $Cx_1y_1z_1$ показана на рис. 350. Применив теорему о моментах инерции относительно параллельных осей, найдем выражения главных центральных моментов инерции

$$J_x^{(C)} = 2M\left(\frac{1}{3}H^2 + \frac{1}{4}R^2 + b^2\right),$$

$$J_y^{(C)} = 2M\left(\frac{1}{2}R^2 + b^2\right),$$

$$J_z^{(C)} = 2M\left(\frac{1}{3}H^2 + \frac{1}{4}R^2\right).$$

Оси системы $Oxyz$ (причем $OC = a$) также представляют собой главные оси в точке O . Это следует из того, что ось Cx является главной центральной осью, а ось Oz перпендикулярна в точке O плоскости симметрии тела. Снова применив упомянутую теорему, получим

$$J_x = J_x^{(C)}, \quad J_y = J_y^{(C)} + 2Ma^2, \quad J_z = J_z^{(C)} + 2Ma^2.$$

Подчинив теперь выбор размеров a и b требованиям

$$J_x = J_y = 2J_z,$$

получим уравнения

$$\frac{1}{3}H^2 + \frac{1}{4}R^2 + b^2 = \frac{1}{2}R^2 + b^2 + a^2 = \frac{2}{3}H^2 + \frac{1}{2}R^2 + 2a^2,$$

из которых найдем

$$a^2 = \frac{1}{3}H^2 - \frac{1}{4}R^2, \quad b^2 = H^2 - \frac{1}{4}R^2.$$

Положительность величин a^2 и b^2 следует из очевидного условия

$$b > R.$$

Приняв указанные значения a^2 и b^2 , найдем

$$J_x = J_y = \frac{8}{3}MH^2, \quad J_z = \frac{4}{3}MH^2.$$

Эллипсоид инерции тела в точке O представляет собой эллипсоид вращения вокруг оси Oz с отношением полуосей $1 : 1 : \sqrt{2}$; центр тяжести этого тела лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции (в точке $x = -a$, $y = 0$). Если в точке O поместить острие, предоставив телу возможность вращаться вокруг этого острия, то придем к реализации

классического интегрируемого случая вращения твердого тела под действием силы тяжести, открытого С. В. Ковалевской [7, с. 153—220].

Пример 122. Колесо ветряной мельницы состоит из n одинаковых лопастей, расположенных по кругу на одинаковых угловых расстояниях друг от друга. Масса лопасти равна m и считается равномерно распределенной по радиусу колеса r и сосредоточенной в его средней плоскости. Убедиться, что при $n > 2$ центральный эллипсоид инерции колеса обращается в эллипсоид вращения (ось вращения перпендикулярна плоскости колеса). Чему равно отношение осей эллипсоида? Во что вырождается эллипсоид инерции при $n = 2$?

Расположим оси x и y в средней плоскости колеса и обозначим через α_0 угол одной из лопастей с осью x . В таком случае другие лопасти будут составлять с этой осью углы

$$\alpha_0 + \frac{2\pi}{n}, \quad \alpha_0 + \frac{4\pi}{n}, \quad \dots, \quad \alpha_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Находим

$$J_x = \frac{mr^2}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2 \left(\alpha_0 + \frac{2\pi k}{n} \right) = \frac{mr^2}{6} \left[n - \sum_{k=0}^{n-1} \cos 2 \left(\alpha_0 + \frac{2\pi k}{n} \right) \right],$$

$$J_y = \frac{mr^2}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 \left(\alpha_0 + \frac{2\pi k}{n} \right) = \frac{mr^2}{6} \left[n + \sum_{k=0}^{n-1} \cos 2 \left(\alpha_0 + \frac{2\pi k}{n} \right) \right],$$

$$J_z = J_x + J_y = \frac{mr^2}{3} n.$$

Но

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos 2 \left(\alpha_0 + \frac{2\pi k}{n} \right) = \frac{1}{2} e^{2i\alpha_0} \sum_{k=0}^{n-1} e^{4\pi ki/n} + \frac{1}{2} e^{-2i\alpha_0} \sum_{k=0}^{n-1} e^{4\pi ki/n};$$

суммируя эти геометрические прогрессии, получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos 2 \left(\alpha_0 + \frac{2\pi k}{n} \right) = \frac{1}{2} e^{2i\alpha_0} \frac{1 - e^{4\pi i}}{1 - e^{(4\pi/n)i}} + \frac{1}{2} e^{-2i\alpha_0} \frac{1 - e^{4\pi i}}{1 - e^{-(4\pi/n)i}};$$

при $n > 2$ знаменатели слагаемых дробей отличны от нуля, а числители равны нулю; поэтому

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos 2 \left(\alpha_0 + \frac{2\pi k}{n} \right) = 0, \quad n = 3, 4, \dots$$

Итак,

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_z = \frac{Mr^2}{3},$$

где $M = mn$ — масса всех лопастей. Эллипсоид инерции — эллипсоид вращения. Отношение осей эллипсоида равно $\sqrt{2}$.

При $n = 2$, направив ось x вдоль общей оси лопастей, получим

$$J_x = 0, \quad J_y = J_z = \frac{mr^2}{6} \cdot 2 = \frac{Mr^2}{3},$$

и эллипсоид инерции вырождается в круговой цилиндр.

§ 141. Кинетическая энергия и главный момент количеств движения

Для вычисления кинетической энергии твердого тела в общем случае его движения представим скорость v_i любой точки тела как геометрическую сумму скоростей полюса O и вращательной скорости:

$$v_i = v_0 + \omega \times r'_i. \quad (26.24)$$

Если за полюс принять центр тяжести C тела, то $v_0 = v_C$ и по формуле (24.27) выражение кинетической энергии может быть представлено в виде суммы двух слагаемых:

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + T', \quad (26.25)$$

причем первое слагаемое представляет кинетическую энергию массы M тела, мысленно сосредоточенной в центре тяжести и движущейся со скоростью последнего, а второе T' — кинетическую энергию вращательного движения с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси, проведенной через центр тяжести. Повторив в точности вывод формулы (24.37), найдем

$$T' = \frac{1}{2} J^{(C)} \omega^2, \quad (26.26)$$

где $J^{(C)}$ — момент инерции тела относительно мгновенной оси. При движении тела мгновенная ось перемещается в теле и $J^{(C)}$ меняется с течением времени. Желая перейти к постоянным во времени характеристикам инертности тела, свяжем с телом систему координат $Cxyz$, обозначим через α, β, γ косинусы углов мгновенной оси с этими осями и выразим момент инерции $J^{(C)}$ через моменты инерции и центробежные моменты инерции по формуле (26.10)

$$J^{(C)} = J_x \alpha^2 + J_y \beta^2 + J_z \gamma^2 - 2J_{xy} \alpha \beta - 2J_{yz} \beta \gamma - 2J_{zx} \gamma \alpha.$$

Подставляя это выражение в предыдущую формулу и замечая, что

$$\omega\alpha = \omega_x, \quad \omega\beta = \omega_y, \quad \omega\gamma = \omega_z,$$

получаем

$$2T' = J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 - 2J_{xy} \omega_x \omega_y - 2J_{yz} \omega_y \omega_z - 2J_{zx} \omega_z \omega_x. \quad (26.27)$$

Если, в частности, за оси координат $Cxyz$ принять главные центральные оси инерции тела, то $J_{xy} = J_{yz} = J_{zy} = 0$ и выражение (26.27) упрощается; будем иметь

$$2T' = J_1^{(C)} \omega_x^2 + J_2^{(C)} \omega_y^2 + J_3^{(C)} \omega_z^2, \quad (26.28)$$

где $J_1^{(C)}$, $J_2^{(C)}$, $J_3^{(C)}$ — главные центральные моменты инерции.

Формула (26.27) дает также выражение *полной* кинетической энергии T твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки O , если под J_x, \dots, J_{zx} подразумевать моменты инерции и центробежные моменты в системе осей $Oxyz$, связанных с телом и имеющих начало в точке O . Если, в частности, за оси $Oxyz$ принять главные оси инерции в точке O , то придем к выражению (26.23), в котором J_1, J_2, J_3 (индексы C нужно опустить) — главные моменты инерции в точке O .

Возвращаясь к общему случаю движения твердого тела, по (26.25) и (26.28) находим

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \left(J_1^{(C)} \omega_x^2 + J_2^{(C)} \omega_y^2 + J_3^{(C)} \omega_z^2 \right). \quad (26.29)$$

Выразим проекции угловых скоростей в формуле кинетической энергии через производные эйлеровых углов (§ 61). Ограничимся случаем, когда тело, имеющее неподвижную точку O , представляет собой тело вращения вокруг оси Oz ; кинетическая энергия T дана формулой

$$T = \frac{1}{2} \left[J_1 \left(\omega_x^2 + \omega_y^2 \right) + J_3 \omega_z^2 \right]. \quad (26.30)$$

Также выразится кинетическая энергия T' во вращательном движении вокруг центра тяжести; в этом случае

$$J_1 = J_1^{(C)}, \quad J_3 = J_3^{(C)}.$$

Пользуясь выражениями проекции угловой скорости на оси, связанные с телом, через производные эйлеровых углов

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi,$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi,$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}$$

получаем

$$T = \frac{1}{2} [J_1 (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + J_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2]. \quad (26.31)$$

Если в общем случае движения твердого тела выбрать за полюс произвольную точку тела O , то для вычисления кинетической энергии тела следует использовать выражение (24.35), в котором v_0 — скорость полюса O , а $v_C^{(r)}$ — скорость центра тяжести тела по отношению к системе отсчета, движущейся поступательно вместе с полюсом, т. е. в рассматриваемом случае

$$v_C^{(r)} = \omega \times r'_C,$$

где ω — угловая скорость тела, r'_C — вектор-радиус центра тяжести по отношению к полюсу O . Замечая, что

$$v_0 \cdot v_C^{(r)} = v_0 \cdot (\omega \times r'_C) = r'_C \cdot (v_0 \times \omega),$$

получаем

$$T = \frac{1}{2} M v_0^2 + M [x_C (v_{0y} \omega_z - v_{0z} \omega_y) + y_C (v_{0z} \omega_x - v_{0x} \omega_z) + z_C (v_{0x} \omega_y - v_{0y} \omega_x)] + T', \quad (26.32)$$

где x_C, y_C, z_C — координаты центра тяжести C в системе осей $Oxyz$, связанных с телом, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} — проекции на эти оси соответственно векторов ω и v_0 ; T' вычисляется по формуле (26.27) или же (26.28), если оси $Oxyz$ — главные оси в точке O [причем в (26.28) надо опустить индексы C].

Для вычисления главного момента количества движения твердого тела относительно неподвижного центра следует обратиться к одному из выражений (23.76) и (23.75). Остановимся сначала на формуле (23.76) как более простой; получим

$$K = r_C \times Q + \sum_{i=1}^n m_i r'_i \times (\omega \times r'_i) = r_C \times Q + K', \quad (26.33)$$

где вектор \mathbf{K}' уже был определен ранее формулами (26.2) и (26.3). В формулах (26.3) моменты инерции и центробежные моменты вычисляются относительно осей, связанных с твердым телом и имеющих начало в неподвижной точке. В частности, при вращении вокруг неподвижной оси Oz имеем $\omega_x = \omega_y = 0$ и

$$K_x = -J_{xz}\omega_z, \quad K_y = -J_{yz}\omega_z, \quad K_z = J_z\omega_z. \quad (26.34)$$

Если за оси координат принять главные центральные оси инерции, то

$$K'_x = J_1^{(C)}\omega_x, \quad K'_y = J_2^{(C)}\omega_y, \quad K'_z = J_3^{(C)}\omega_z. \quad (26.35)$$

В случае твердого тела, имеющего неподвижную точку O , имеем

$$K_x = J_1\omega_x, \quad K_y = J_2\omega_y, \quad K_z = J_3\omega_z. \quad (26.36)$$

Здесь $Oxyz$ — главные оси инерции тела в точке O ; K_x , K_y , K_z — проекции на эти оси главного момента количества движения тела относительно неподвижной точки.

Не представит труда составить по (23.75) формулы, дающие проекции главного момента количества движения твердого тела относительно неподвижного центра, выбрав за полюс произвольную точку O . Получим

$$K_x = M(r_{0y}v_{Cz} - r_{0z}v_{Cy}) + M(y_C v_{0z} - z_C v_{0y}) + J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z \quad (26.37)$$

и два аналогичных выражения для проекций на оси Oy , Oz . Здесь r_{0x} , r_{0y} , r_{0z} , v_{0x} , v_{0y} , v_{0z} — проекции на оси $Oxyz$, связанные с телом и имеющие начало в полюсе O , векторов \mathbf{r}_0 (вектора-радиуса полюса O относительно центра момента) и \mathbf{v}_0 (скорости полюса); через v_{Cx} , v_{Cy} , v_{Cz} обозначены проекции на те же оси вектора скорости центра тяжести тела C , а через x_C , y_C , z_C — координаты центра тяжести в этих осях; наконец, в трех последних слагаемых моменты инерции и центробежные моменты должны быть вычислены в указанной системе осей, связанных с телом; ω_x , ω_y , ω_z — проекции вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на эти оси.

П р и м е р 123. Бегун представляет собой тяжелое тело вращения, вращающееся с угловой скоростью ω_0 вокруг своей оси, которая в свою очередь вращается от привода с заданной угловой скоростью ω^* (рис. 351). Составить выражение кинетической энергии бегуна; радиус инерции бегуна относительно оси OC равен ρ , масса бегуна M , углы α и ϑ , указанные на рисунке, известны; $OC = c$.

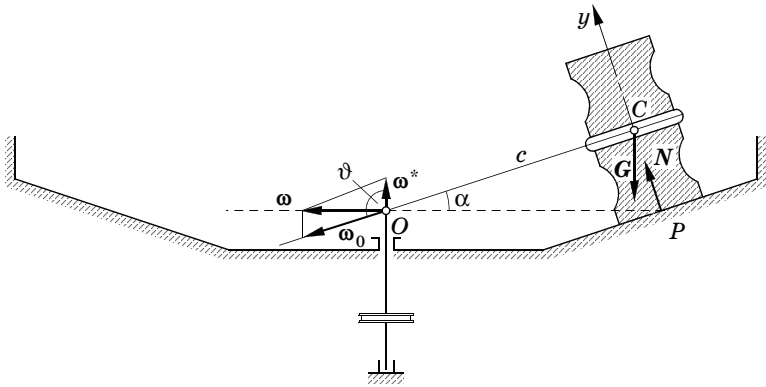


Рис. 351

Кинетическая энергия поступательного движения бегуна равна

$$\frac{M}{2} v_C^2 = \frac{M}{2} \omega^{*2} c^2 \sin^2 \vartheta.$$

Переходя к составлению выражения кинетической энергии вращательного движения бегуна, примем ось вращения OC за ось Cz , а перпендикуляр к ней в плоскости векторов ω_0 и ω^* — за ось Cy ; ось Cx направим перпендикулярно этой плоскости. Начало системы осей $Cxyz$ помещено в центре тяжести бегуна C . Так как бегун представляет собой тело вращения, оси системы $Cxyz$ будут главными центральными осями инерции. Мгновенная угловая скорость бегуна ω определится как сумма угловых скоростей ω_0 и ω^* . Имеем

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \omega^* \sin \vartheta, \quad \omega_z = \omega_0 + \omega^* \cos \vartheta,$$

и формула (26.28) дает

$$2T' = J_3^{(C)} (\omega_0 + \omega^* \cos \vartheta)^2 + J_1^{(C)} \omega^{*2} \sin^2 \vartheta.$$

Считая, что мгновенная ось проходит через среднюю точку P бегуна, из треугольника угловых скоростей находим

$$\omega_0 = \omega^* \frac{\sin(\vartheta - \alpha)}{\sin \alpha}$$

и, следовательно,

$$\omega_0 + \omega^* \cos \vartheta = \omega^* \sin \vartheta \operatorname{ctg} \alpha.$$

Замечая, что

$$J_1^{(C)} \approx \frac{1}{2} J_3^{(C)}, \quad J_3^{(C)} = \frac{G}{g} \rho^2,$$

получаем

$$T = \frac{Mc^2}{2} \omega^{*2} \sin^2 \vartheta \left(1 + \frac{\rho^2}{c^2} \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{\rho^2}{2c^2} \right).$$

ДИНАМИКА НЕСВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ

Глава XXVII

Связи. Статика несвободной системы

§ 142. Классификация связей

Положение системы n материальных точек определяется совокупностью $3n$ декартовых координат:

$$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$$

этих точек. Положение твердого тела задается тремя координатами x_0, y_0, z_0 одной из его точек, принятой за полюс, и тремя эйлеровыми углами ψ, φ и θ (§ 64). Если система состоит из нескольких твердых тел, то для определения положения такой системы в пространстве достаточно задать координаты полюсов и значения эйлеровых углов для каждого из тел.

Для определения положения точки в пространстве пользуются также криволинейными координатами (§ 47); положение твердых тел можно задавать не только эйлеровыми углами, но и другими параметрами, играющими аналогичную роль. Таким образом, для определения положения материальной системы в пространстве применяют самые разнообразные приемы.

Любая совокупность параметров, достаточная для определения положения системы в пространстве, называется обобщенными координатами системы.

При этом не предрешается вопрос о том, все ли координаты необходимы для указанной цели, нельзя ли определить положение системы при помощи только части этих параметров или вообще меньшего числа параметров.

Так, например, положение системы n материальных точек, абсолютно жестко связанных между собой, может быть задано при помощи $3n$ декартовых координат (x_i, y_i, z_i) ; с другой стороны, поскольку точки системы образуют абсолютно твердое тело, для этой цели могут служить шесть параметров: три координаты

полюса (x_0, y_0, z_0) и три эйлеровых угла (ψ, φ, θ) . При этом две совокупности координат связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(x_0, y_0, z_0; \psi, \varphi, \theta), & y_i &= y_i(x_0, y_0, z_0; \psi, \varphi, \theta), \\ z_i &= z_i(x_0, y_0, z_0; \psi, \varphi, \theta), & i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (27.1)$$

Вообще, если положение движущейся системы n материальных точек M_i с прямоугольными координатами (x_i, y_i, z_i) в любой момент времени может быть задано при помощи какой-нибудь совокупности *обобщенных* координат (q_1, q_2, \dots, q_r) , то между первой и второй совокупностями должны существовать соотношения вида

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(t; q_1, q_2, \dots, q_r), & y_i &= y_i(t; q_1, q_2, \dots, q_r), \\ z_i &= z_i(t; q_1, q_2, \dots, q_r), & i &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (27.2)$$

в общем случае явно содержащие время.

Если материальная система не свободна, то ее обобщенные координаты q_1, q_2, \dots, q_r , так же как и их производные по времени — *обобщенные скорости* $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_r$, — подчиняются определенным условиям, которые мы называем *связями*. Аналитически связи выражаются равенствами, заключающими время, координаты и их производные, иногда сопровождаемые знаками неравенств; последние указывают на возможность прекращения действия связей. Остановимся на случае связей, выражаемых равенствами.

Связи, выражаемые аналитически уравнениями вида

$$\Phi_\alpha(t; q_1, q_2, \dots, q_r; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_r) = 0, \quad (27.3)$$

носят общее наименование *кинематических*; обобщенные скорости в соотношении (27.3), как правило, входят линейно.

Если время не входит явно в уравнения связей, то такие связи называют *стационарными*, в противном случае — *нестационарными*.

Кинематические связи, уравнения которых не содержат обобщенных скоростей или путем интегрирования могут быть к такому виду приведены, называют *голономными* или *интегрируемыми*, в противном случае — *неголономными* или *неинтегрируемыми*.

Голономные связи накладывают ограничения только на координаты точек системы, т. е. на ее положение в пространстве. Вместе с тем будучи продифференцированы по времени, уравнения голономных связей представляют ограничения, накладываемые

мые на скорости точек системы. В противоположность этому неголономны связи ограничивают и координаты, и скорости точек системы, так как уравнения связей не могут быть проинтегрированы и, следовательно, не существует конечных соотношений между координатами, соответствующих неголономным связям.

Примером голономной нестационарной связи может служить математический маятник переменной длины. Тяжелая точка M привешена на нити, верхний конец которой проходит через отверстие O , причем нить может укорачиваться по заданному закону так, что длина нити l будет известной функцией времени $l(t)$. Уравнение связи, налагающее ограничение на координаты x и y точки в вертикальной плоскости, будет

$$x^2 + y^2 = l^2(t),$$

или в полярной системе координат

$$r = l(t).$$

Если нить не изменяет свою длину ($l = \text{const}$), то мы приходим к стационарной голономной связи

$$x^2 + y^2 = l^2$$

или $r = l$, соответствующей движению несвободной точки по вертикальной окружности (математический маятник постоянной длины).

Физический маятник (§ 117) представляет собой твердое тело, подчиненное голономным связям, выражающим условия вращения тела вокруг неподвижной оси. Уравнения голономных стационарных связей в этом случае можно представить в виде следующих условий, налагаемых на обобщенные координаты твердого тела:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0; \quad \psi = 0, \quad \theta = 0.$$

Вращение тела определяется изменением одного угла φ — угла чистого вращения.

В качестве примера голономной несвободной системы, состоящей из нескольких тел, рассмотрим плоское движение четырехзвенного механизма $O_1M_1M_2O_2$ (рис. 352). Если для заданных положений движущихся его звеньев

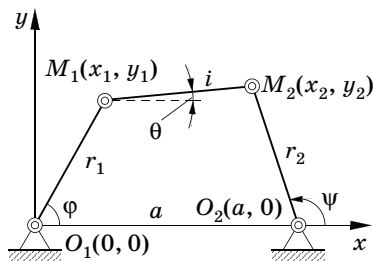


Рис. 352

O_1M_1 , M_1M_2 и O_2M_2 пользоваться координатами точек M_1 и M_2 , то уравнения связей будут (размеры звеньев указаны на рисунке)

$$x_1^2 + y_1^2 = r_1^2, \quad (a - x_2)^2 + y_2^2 = r_2^2, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2. \quad (27.4)$$

Эти уравнения связывают между собой четыре обобщенные координаты системы: x_1, y_1, x_2, y_2 . Если принять за координаты системы три угла φ, θ и ψ , образованных стержнями с осью Ox , то соответствующие этим координатам уравнения связей получим, рассматривая вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$ как замыкающую сторону векторного многоугольника $O_1M_1M_2O_2$. Проецируя на оси, находим

$$\begin{aligned} r_1 \cos \varphi + l \cos \theta - r_2 \cos \psi &= a, \\ r_1 \sin \varphi + l \sin \theta - r_2 \sin \psi &= 0; \end{aligned} \quad (27.5)$$

при том и другом выборе координат число *независимых* координат будет равно единице.

Гладкая горизонтальная плоскость H , по которой катится идеально отполированный шар (рис. 353), дает также пример голономной связи. Положение шара в пространстве ограничено условием сохранения расстояния от его центра C до плоскости равным радиусу шара a . При этом центр его может перемещаться только в плоскости, параллельной H , а вектор скорости центра шара должен лежать в этой плоскости. В остальных положениях и перемещения шара произвольны: шар может скользить по плоскости или катиться по ней с любым скольжением; единственным голономным условием будет служить равенство

$$z_C = a. \quad (27.6)$$

Если плоскость абсолютно шероховата, то возникает дополнительная связь — условие отсутствия скольжения, заключающееся

в том, что скорость точки M шара, которая в данный момент соприкасается с плоскостью (вектор-радиус этой точки относительно центра шара обозначаем через r), равна нулю. Это условие может быть записано в виде равенства

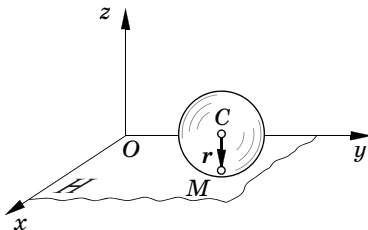


Рис. 353

$$v_C + \omega \times r = 0.$$

Здесь v_C — скорость центра шара, ω — угловая скорость шара, имеющая проекции на неподвижные оси (§ 61):

$$\omega_x = \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi,$$

$$\omega_y = -\dot{\phi} \cos \psi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \psi,$$

$$\omega_z = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi},$$

а вектор $r = \overrightarrow{CM}$ имеет проекции на неподвижные оси $(0, 0, -a)$, так что предыдущее векторное условие эквивалентно следующим трем:

$$\dot{x}_C + a (\dot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi) = 0,$$

$$\dot{y}_C + a (\dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi) = 0, \quad (27.7)$$

$$\dot{z}_C = 0.$$

Первые два дифференциальных уравнения неинтегрируемы и дают пример неголономных связей. Последнее из равенств (27.7) интегрируется и вновь приводит к голономному условию (27.6).

Аналогичный пример неголономной системы дает катящийся по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости диск, плоскость которого может произвольно наклоняться к горизонту. Движение такого диска было изучено в кинематике (§ 65). Неголономная связь в этом случае выражается неинтегрируемым векторным уравнением или соответственно его проекциями на оси координат.

Заметим, что в условиях плоского движения того же диска (рис. 354) по шероховатой плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка, уравнения связей

$$\dot{x}_C - a \dot{\phi} = 0, \quad \dot{y}_C = 0$$

будут интегрируемыми, т. е. голономными. Интегрирование первого из них приведет к условию отсутствия скольжения $x_C = a\phi$, второго — к ранее уже рассмотренному голономному условию $y_C = a$.

В дальнейшем будут рассматриваться только *голономные* связи. Учение о неголономных связях и движении систем, подчиненных такого рода связям, рассматриваются в специальных курсах аналитической механики.

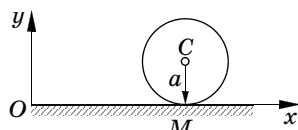


Рис. 354

Как уже упоминалось, связи могут задаваться равенствами, соединенными с неравенствами. Так, например, несвободное движение тяжелой точки по сфере (сферический маятник) радиусом l можно осуществить при помощи нерастяжимой нити. Такая нить не позволит движущейся точке удалиться от центра сферы на расстояние, большее l , но нить может «ослабнуть» и тогда точка станет свободна (это может произойти в верхней половине сферы при достаточно малой скорости точки). Желая подчеркнуть, что при некоторых условиях связь теряет свое назначение — ограничивать положение системы, — такую связь называют *неудерживающей*. Аналитически неудерживающие связи представляются в форме равенств, соединенных с неравенствами, показывающими, в какую именно сторону может двигаться освобожденная от связей система. В только что рассмотренном случае тяжелой точки на нерастяжимой нити неудерживающая связь должна быть представлена так:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2.$$

Знак неравенства показывает, что точка может сойти со сферы внутрь ее. Если бы тяжелая точка (шарик) двигалась по внешней части сферического купола, то связь также была бы неудерживающей и аналитически представлялась в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq l^2.$$

в этом случае неравенство говорит о возможности схода точки со сферы во внешнюю по отношению к ней часть пространства.

Неудерживающие связи могут прекращать свое действие в одном направлении и сохранять в другом, как это имеет место в только что указанном примере; поэтому их иногда называют *односторонними* связями в отличие от *двусторонних* (удерживающих) связей.

§ 143. Возможные перемещения системы.

Число степеней свободы

Рассмотрим бесконечно малые перемещения точек системы, совместимые со связями, наложенными на систему. В число этих перемещений системы входят, в частности, *действительные перемещения* точек системы, осуществляемые за данный беско-

нечно малый промежуток времени точками несвободной системы в их действительном движении под действием приложенных сил.

Если связи не стационарны, то бесконечно малые перемещения точек системы можно представить себе разложенными на два слагаемых:

- ✓ совместимые со связями бесконечно малые перемещения, которые имели бы место, если бы связи на мгновение перестали изменяться (например, перемещаться в пространстве, деформироваться);
- ✓ перемещения, обусловленные изменением самих связей.

Для дальнейшего имеют основное значение лишь первые слагаемые.

Мы назовем их *возможными перемещениями системы и определим как бесконечно малые перемещения точек системы, совместимые со связями, зафиксированными в данный момент**.

Выделение класса возможных перемещений из общего понятия совместимых со связями бесконечно малых перемещений системы существенно, конечно, лишь в случае наличия *нестационарных* связей. В случае *стационарных* связей возможные перемещения определяются как бесконечно малые перемещения точек системы, совместимые со связями.

Возможные перемещения представляют собой некоторый геометрический образ, не связанный ни с движением, совершаемым системой, ни с изменением самих связей. Это — совокупность бесконечно малых векторов, зависящая только от структуры на мгновение «затвердевших» связей.

Возможные перемещения должны удовлетворять дифференциальным соотношениям, представляемым уравнениями связей или выводимым из них в предположении, что время является не основным аргументом, а лишь *параметром*, фиксируемым в данном состоянии связей.

Чтобы вывести аналитические условия, которым подчиняются возможные перемещения, рассмотрим два различных вида бесконечно малых приращений функций $f(t; x, y, z, \dots)$ от аргументов t, x, y, z, \dots .

* В некоторых курсах теоретической механики для рассматриваемой части бесконечно малых перемещений системы принят термин *виртуальные перемещения*, а под *возможными перемещениями* понимают общие совместимые со связями бесконечно малые перемещения.

Определяя бесконечно малое приращение функции f вследствие бесконечно малого приращения аргументов t, x, y, z , найдем выражение полного дифференциала функции

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots \quad (27.8)$$

Наряду с полным дифференциалом рассмотрим другой вид бесконечно малого приращения функции, вычисляемый в предположении, что аргумент t является фиксированным параметром, а x, y, z, \dots представляют изменяющиеся независимо от аргумента t величины. Такого рода бесконечно малое изменение функции назовем *вариацией* и обозначим символом δf . Согласно принятому определению будем иметь следующую формулу вариации функции:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z + \dots \quad (27.9)$$

Условимся в дальнейшем обозначать бесконечно малые перемещения точек системы символом dr_i , а их проекции соответственно dx_i, dy_i, dz_i ; в обобщенных координатах эти перемещения будем определять совокупностью величин dq_1, dq_2, \dots, dq_r .

Согласно только что приведенному определению вариаций *возможным* перемещениям естественно приписать символ δr_i , а их проекциям — символы $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$. В обобщенных координатах возможные перемещения определяются совокупностью вариаций этих координат $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_r$.

Составляя соответственно дифференциалы или вариации от обеих частей уравнений связей, получаем аналитические выражения ограничений, налагаемых связями на бесконечно малые перемещения точек несвободной системы. Рассмотрим ограничения, налагаемые на общие бесконечно малые перемещения системы *голономными* связями.

Если положение системы n точек M_i задается их декартовыми координатами x_i, y_i, z_i , а голономные связи — совокупностью s соотношений

$$\Phi_\alpha(t; x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s, \quad (27.10)$$

то $3n$ проекций перемещений (dx_i, dy_i, dz_i) должны подчиняться ограничениям в виде дифференциальных равенств

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_i} dz_i \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s, \quad (27.11)$$

полученных в результате составления полного дифференциала от обеих частей равенств (27.10).

Возможные перемещения $(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$ будут удовлетворять совокупности соотношений

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s, \quad (27.12)$$

составленных вычислением вариации от обеих частей уравнений связей (27.10).

Если голономные связи стационарны, т. е. время t не входит явно в уравнение (27.10), то соотношения (27.11) примут вид

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_i} dz_i \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (27.13)$$

Сравнивая (27.13) с (27.12), убедимся, что действительно, как уже ранее указывалось, в случае стационарных голономных связей возможные перемещения ничем не отличаются от общей совокупности бесконечно малых перемещений системы, совместимых со связями.

Так, например, в рассмотренном ранее случае математического маятника постоянной длины l возможные перемещения, так же как и общие, будут удовлетворять одному и тому же соотношению

$$x \delta x + y \delta y = 0, \quad (27.14)$$

выражающему то обстоятельство, что бесконечно малые перемещения тяжелой точки должны быть перпендикулярны направлению нити, т. е. направлены по касательной к вертикальной окружности. Иное будет иметь место в случае математического маятника переменной длины $l(t)$. Общие бесконечно малые перемещения будут в этом случае удовлетворять дифференциальному равенству

$$x dx + y dy = l dl = l \dot{l} dt, \quad (27.15)$$

выражающему условие нерастяжимости нити: проекция перемещения за время dt тяжелой точки M на направление нити равна бесконечно малому увеличению (уменьшению) длины нити за то же время вследствие заданного ее движения сквозь отверстие в точке O . Что касается возможных перемещений, то они будут удовлетворять тому же соотношению (27.14), что и в случае постоянной длины.

Предположим, что точка M с вектором-радиусом r и координатами x, y, z вынуждена двигаться по поверхности, которая может заданным образом перемещаться и деформироваться. Уравнение соответствующей голономной нестационарной связи зададим в форме

$$\Phi(t; x, y, z) = 0. \quad (27.16)$$

Возможные перемещения точки δr с проекциями $\delta x, \delta y, \delta z$ должны удовлетворять условию

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \delta z = 0. \quad (27.17)$$

Согласно определению градиента от скалярной функции Φ как вектора $\text{grad } \Phi$ с проекциями $\partial\Phi/\partial x, \partial\Phi/\partial y, \partial\Phi/\partial z$, можно переписать последнее равенство в форме

$$\text{grad } \Phi \cdot \delta r = 0. \quad (27.18)$$

Вспоминая, что $\text{grad } \Phi$ представляет собой вектор, направленный по внешней нормали n к поверхности уровня (27.16), перепишем равенство (27.18) в виде

$$n \cdot \delta r = 0, \quad (27.19)$$

показывающем, что при движении точки по поверхности (27.16) возможные перемещения представляют собой бесконечно малые векторы, лежащие в касательной плоскости к поверхности в фиксированном ее состоянии в рассматриваемый момент времени.

Согласно условию (27.17) из трех проекций возможных перемещений $\delta x, \delta y, \delta z$ произвольными являются лишь две.

Общие бесконечно малые перемещения точки M должны, по предыдущему, удовлетворять условию

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} dt + \text{grad } \Phi \cdot dr = \frac{\partial\Phi}{\partial t} dt + |\text{grad } \Phi| n \cdot dr = 0, \quad (27.20)$$

или

$$n \cdot dr = - \frac{(\partial\Phi/\partial t)dt}{|\text{grad } \Phi|} = - \frac{(\partial\Phi/\partial t)dt}{\sqrt{(\partial\Phi/\partial x)^2 + (\partial\Phi/\partial y)^2 + (\partial\Phi/\partial z)^2}}. \quad (27.21)$$

К тому же равенству (27.20) мы пришли бы, дифференцируя выражение (27.16) по времени в предположении, что точка M принадлежит поверхности. Поэтому соотношение (27.21) выражает то обстоятельство, что в случае как угодно движущейся и деформирующейся поверхности проекция бесконечно малого

перемещения точки на внешнюю нормаль к поверхности равна проекции на то же направление перемещения точки поверхности, в которой находилась до перемещения движущаяся точка.

Рассмотрим бесконечно малые перемещения точки, вынужденной двигаться по кривой, в общем случае заданным образом движущейся и деформирующейся. Составим уравнения связей, определив кривую как пересечение двух поверхностей

$$\Phi_1(t; x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(t; x, y, z) = 0. \quad (27.22)$$

Возможные перемещения должны в этом случае удовлетворять системе двух равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \delta z &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \delta z &= 0, \end{aligned} \quad (27.23)$$

или, в векторных обозначениях,

$$\text{grad } \Phi_1 \cdot \delta r = 0, \quad \text{grad } \Phi_2 \cdot \delta r = 0. \quad (27.24)$$

Вспоминая, что векторы $\text{grad } \Phi_1$ и $\text{grad } \Phi_2$ направлены по нормальям n_1 и n_2 к поверхностям (27.22), перепишем (27.24) в виде

$$n_1 \cdot \delta r = 0, \quad n_2 \cdot \delta r = 0. \quad (27.25)$$

Полученные соотношения выражают условия перпендикулярности вектора возможного перемещения и нормалей к поверхностям (27.22). Это означает, что возможные перемещения точки, вынужденной во время движения оставаться на заданном образом движущейся и деформирующейся кривой, направлены по касательной к кривой в данном ее мгновенном состоянии. Из выражения (27.24) следует, что направление вектора δr совпадает с направлением векторного произведения $\text{grad } \Phi_1 \times \text{grad } \Phi_2$ и, следовательно,

$$\delta r = \lambda \text{grad } \Phi_1 \times \text{grad } \Phi_2; \quad (27.26)$$

здесь λ — произвольный бесконечно малый скалярный множитель, который можно представить как

$$\lambda = \frac{\delta \sigma}{|\text{grad } \Phi_1 \times \text{grad } \Phi_2|},$$

где $\delta \sigma$ — вариация дуги кривой.

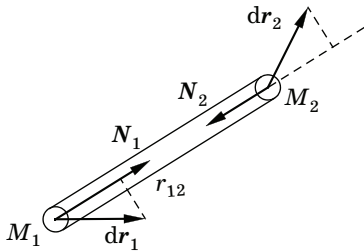


Рис. 355

Общие перемещения dr будут удовлетворять равенствам

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} dt + \text{grad } \Phi_1 \cdot dr &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} dt + \text{grad } \Phi_2 \cdot dr &= 0. \end{aligned} \quad (27.27)$$

Рассмотрим еще систему двух точек M_1 и M_2 (рис. 355), соединенных жестким стержнем длиной r_{12} . Одна из точек, например M_1 , может иметь совершенно произвольное бесконечно малое перемещение, направленное как угодно в пространстве. Вторая может при этом иметь только такое перемещение, проекция которого на направление стержня равна проекции перемещения первой точки на то же направление (§ 55). Аналитически в общем случае пространственного движения это условие может быть получено дифференцированием уравнения стационарной связи

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = r_{12}^2$$

и имеет вид

$$(x_2 - x_1)(dx_2 - dx_1) + (y_2 - y_1)(dy_2 - dy_1) + (z_2 - z_1)(dz_2 - dz_1) = 0,$$

или

$$r_{12} \cdot dr_1 = r_{12} \cdot dr_2,$$

где r_{12} — вектор, направленный по стержню и равный по величине длине стержня. Последнее уравнение выражает равенство проекций перемещений концов стержня на его направление.

Если положение материальной системы задается r обобщенными координатами q_1, q_2, \dots, q_r , подчиненными s голономным связям

$$\Phi_\alpha(t; q_1, q_2, \dots, q_r) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s, \quad (27.28)$$

то обобщенные бесконечно малые перемещения dq_j будут удовлетворять условиям

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^r \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j} dq_j = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s, \quad (27.29)$$

а обобщенные возможные перемещения δq_j — условиям

$$\sum_{j=1}^r \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (27.30)$$

Равенства (27.29) получены дифференцированием уравнений связей (27.28), а равенства (27.30) — варьированием тех же уравнений.

Чем больше число условий, налагаемых связями на бесконечно малые перемещения системы, тем меньше произвола остается в определении возможных перемещений. Это обстоятельство характеризуют *числом степеней свободы системы, которое определяется как число независимых, допускающих выбор по произволу вариаций координат системы.*

Только в случае систем, подчиненных голономным связям, число степеней свободы совпадает с числом независимых обобщенных координат. Так, например, если система, состоящая из n точек, подчинена s голономным связям, то число степеней свободы такой системы, согласно (27.12), будет совпадать с числом независимых координат

$$k = 3n - s. \quad (27.31)$$

Точка, вынужденная двигаться по заданной поверхности, будет по (27.17) иметь две степени свободы; точка, движущаяся по заданной пространственной кривой, будет, как это следует из (27.23), иметь одну степень свободы и т. д. Система, состоящая из двух точек ($n = 2$), связанных жестким стержнем ($s = 1$), имеет $k = 3 \cdot 2 - 1 = 5$ степеней свободы.

В тех случаях, когда положение системы определяется r обобщенными координатами q_j , $j = 1, 2, \dots, r$, не являющимися, вообще говоря, независимыми, а подчиненными s голономным связям, число степеней свободы системы будет, согласно (27.31), равно

$$k = r - s,$$

т. е. опять равно числу независимых обобщенных координат системы. Так, свободное твердое тело ($r = 6$, $s = 0$) имеет шесть степеней свободы, тело, вращающееся вокруг неподвижного центра, — три степени свободы; тело, совершающее плоское движение, — также три степени свободы.

Машины и станки дают примеры весьма сложных несвободных систем с голономными связями. Число степеней свободы таких систем обычно не превышает единицы. Действительно,

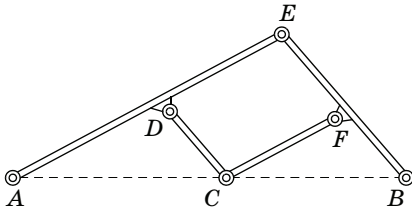


Рис. 356

конструкция машины такова, что ее положение и движение однозначно определяются положением и вращением основного ведущего вала. Угол поворота этого вала может быть принят за единственную обобщенную координату.

Пример 124. Плоская система четырех стержней (рис. 356) AE , EB , DC и CF , шарнирно соединенных между собой так, что фигура $DCFE$ представляет собой параллелограмм, перемещается в своей плоскости. Доказать, что:

- ✓ если точки A , B , C в каком-нибудь положении системы лежат на одной прямой, то при любом другом положении они останутся на одной прямой;
- ✓ если длины отрезков AD и DE находятся между собой в отношении $m : n$, то возможное перемещение точки C выражается через возможные перемещения точек A и B следующим образом:

$$\delta r_C = \frac{n \delta r_A + m \delta r_B}{n + m}.$$

Замечая, что

$$\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC}, \quad \vec{CB} = \vec{CF} + \vec{FB},$$

составим векторное произведение

$$\vec{AC} \times \vec{CB} = \vec{AD} \times \vec{CF} + \vec{AD} \times \vec{FB} + \vec{DC} \times \vec{CF} + \vec{DC} \times \vec{FB}.$$

Из условия параллельности векторов \vec{AD} и \vec{CF} , \vec{DC} и \vec{FB} следует, что первое и последнее векторные произведения в правой части этого равенства обращаются в нуль, так что

$$\vec{AC} \times \vec{CB} = \vec{AD} \times \vec{FB} + \vec{DC} \times \vec{CF} = \vec{AD} \times \vec{FB} - \vec{CF} \times \vec{DC}. \quad (27.32)$$

Пусть в каком-нибудь положении системы точки A , B , C лежали на одной прямой; тогда из подобия треугольников можно заключить, что

$$AD : CF = DC : FB = m : n,$$

причем это соотношение сохранится при любой конфигурации системы.

Принимая во внимание, что $\vec{AD} \parallel \vec{CF}$ и $\vec{FB} \parallel \vec{DC}$, получаем

$$\vec{AD} = \frac{m}{n} \vec{CF}, \quad \vec{FB} = \frac{n}{m} \vec{DC}.$$

Подставляя эти выражения в (27.32), убедимся, что в любом положении системы

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CB} = \left(\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} - 1 \right) \left(\overrightarrow{CF} \times \overrightarrow{DC} \right) = 0, \quad (27.33)$$

а это доказывает, что точки A , B и C расположены на одной прямой. При выполнении условия (27.33) имеем

$$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n} \overrightarrow{CB},$$

или, вводя векторы-радиусы r_A , r_B , r_C точек A , B , C относительно какой-нибудь неподвижной точки O ,

$$r_C - r_A = \frac{m}{n} (r_B - r_C).$$

Отсюда следует, что

$$r_C = \frac{nr_A + mr_B}{n + m}, \quad \delta r_C = \frac{n\delta r_A + m\delta r_B}{n + m}.$$

Если принять $n = m$, то возможное перемещение точки C

$$\delta r_C = \frac{1}{2} (\delta r_A + \delta r_B)$$

будет равно среднему векторному возможных перемещений точек A и B .

Система обладает *четырьмя* степенями свободы, причем за независимые обобщенные координаты можно было бы принять, например, координаты точек A и B или координаты одной из этих точек и два угла: угол, образованный стержнем AE с каким-нибудь неподвижным направлением, и угол между стержнями DC и AE .

Закрепляя точку A , получим механизм с *двумя* степенями свободы — пантограф, служащий для увеличения или уменьшения географических карт, планов и т. п. Приведенные выше рассуждения показывают, что если точка C опишет какую-нибудь фигуру, то карандаш, помещенный в точку B , вычертит подобную ей фигуру в масштабе $AB : AC = AE : AD = (m + n) : m$.

§ 144. Принцип освобождаемости. Идеальные связи

Ограничивая свободу движения системы, связи действуют на точки системы посредством сил, называемых *реакциями связей*.

Чтобы не смешивать реакции связей с остальными силами, приложенными к точкам несвободной системы, условно назовем эти последние силы *задаваемыми** или *активными*. Можно ска-

* В некоторых случаях *задаваемые* силы могут играть роль *искомых*, так что термин *задаваемые силы* условен.

зять, что задаваемыми силами являются те из сил, приложенных к системе, которые сохраняются, если связи мгновенно исчезнут, или, как иногда говорят, «ослабнут».

Прикладывая к точкам M_i системы с массами m_i , наряду с равнодействующей F_i задаваемых сил, равнодействующую реакций связей R_i , составим уравнения движения системы точек:

$$m_i w_i = F_i + R_i. \quad (27.34)$$

Уравнения эти показывают, что с динамической точки зрения несвободную систему можно рассматривать как свободную, движущуюся под действием задаваемых сил и реакций связей.

Использование этого положения, именуемого *принципом освобожденности*, оказывает большие услуги при изучении равновесия и движения несвободной системы. Напомним, что в статике твердого тела мы уже пользовались этим принципом, заменяя опоры их реакциями и составляя уравнения равновесия твердого тела под действием задаваемых сил и опорных реакций так, как будто тело свободно. В предыдущих главах настоящего тома мы также часто имели дело с реакциями опор, но, не фиксируя на этом особого внимания, рассматривали реакции как любые другие приложенные силы.

В свете учения о связях смысл принципа освобожденности становится более ясным. Применяя принцип освобожденности, мы мысленно отбрасываем связи, заменяя их действие динамически эквивалентным действием реакций связей. При этом число степеней свободы системы увеличивается и многообразие возможных перемещений расширяется. Поясним это с помощью следующего простого примера. Тяжелая балка, лежащая на двух опорах (считаем связь удерживающей), не имеет свободы перемещения. Отбрасывая одну из опор и прикладывая к балке соответствующую опорную реакцию, мы этим не нарушаем равновесия балки, но балка получает свободу перемещения — вращения вокруг оставшейся опоры — и может уже рассматриваться как система с одной степенью свободы.

Принцип освобожденности позволяет переводить реакции связей в класс задаваемых сил, что в ряде случаев может оказаться полезным.

Известно, что чем более совершенно отполирована поверхность, по которой происходит движение тела, тем меньше касательная составляющая реакции, т. е. сила трения.

В случае идеально гладкой поверхности реакция целиком сводится к силе, нормальной к поверхности. Таким образом, если связью служит поверхность без трения, то реакция связи нормальна к связи.

Элементарная работа реакции на любом возможном перемещении точки по идеально гладкой поверхности равна нулю, так как сила направлена перпендикулярно перемещению.

Подчеркнем, что по определению возможных перемещений только что сказанное верно как в случае стационарных, так и нестационарных связей. Само собой разумеется, что элементарная работа реакций на той части бесконечно малого перемещения, которая соответствует собственному перемещению связи, может быть в общем случае и не равна нулю. Точно так же в случае движения по идеальной абсолютно гладкой кривой реакция будет нормальна к кривой и работа реакции на возможном перемещении будет равна нулю. Если же поверхности или кривые не идеально гладки, то работа реакций не будет равна нулю. Аналогичное заключение относится к твердому телу, скользящему по плоскости. Если поверхности соприкасающихся тел идеально отполированы, реакция будет направлена по общей нормали к ним; при этом работа реакции на любом возможном перемещении будет равна нулю.

Если абсолютно твердое тело катится по другому абсолютно твердому телу и поверхности их шероховаты, причем качение не сопровождается ни скольжением, ни деформацией катящихся поверхностей (трение качения отсутствует), то хотя тела и шероховаты и сила трения не равна нулю, все же работа реакции на любом возможном перемещении будет равна нулю, так как реакция приложена в той точке тела, которая лежит в данный момент на мгновенной оси, а перемещение этой точки есть бесконечно малая более высокого порядка, чем перемещения других точек тела. В этом случае можно с точностью до малых величин высшего порядка принять работу реакций на любом возможном перемещении равной нулю.

В действительности не существует ни абсолютно гладких, ни абсолютно твердых тел, так что работа реакций на любом возможном перемещении отлична от нуля, но, с другой стороны, во многих практических случаях (хорошо отполированные и смазанные поверхности, колеса из хорошо закаленной стали и т. п.)

работа сил трения оказывается настолько малой по сравнению с работой других приложенных сил, что в первом приближении можно пренебречь работой сил трения и говорить о «практически» гладких поверхностях.

Если точки M_1 и M_2 (рис. 355) связаны жестким стержнем, то возможные перемещения δr_1 и δr_2 точек приложения реакций N_1 и N_2 не равны нулю и не перпендикулярны направлению реакций, как это имело место в ранее рассмотренных случаях; при этом работы отдельных реакций на возможных перемещениях точек приложения не равны нулю, но сумма работ этих реакций на любом возможном перемещении стержня все же равна нулю, так как реакции одинаковы по величине, но противоположны по направлению, а проекции возможных перемещений на направление стержня равны между собой (§ 55). Это соображение позволяет считать равной нулю сумму работ сил взаимодействия точек в абсолютно твердом теле, так как точки его можно представить себе связанными недеформируемыми стержнями.

Перечисленные случаи равенства нулю суммы работ реакций связей не единственны. Степень совершенства конструкции машины характеризуется малостью потерь мощности, затрачиваемой на преодоление вредных сопротивлений (трения частей машины, внутренней вязкости металла и материала, проявляющейся при деформации деталей, и т. д.), по сравнению с мощностью основного двигателя, приводящего машину в движение. Эти потери обусловлены работой реакции связей, определяющих конструкцию машины, и при расчете машины в первом приближении могут быть опущены.

Тот факт, что на практике постоянно приходилось встречаться со связями, сумма работ которых на любом возможном перемещении системы может быть в допустимом приближении принята равной нулю, привел к установлению важной механической абстракции *идеальных связей*.

Идеальными связями называют такие связи, сумма элементарных работ реакций которых на любом возможном перемещении системы равна нулю.

Обозначим через N_i , равнодействующую реакций идеальных связей, приложенных к точке M_i системы, и через δr_i вектор возможного перемещения этой точки. Тогда условие идеальности связей будет, по предыдущему, заключаться в равенстве нулю

элементарной работы δW^* реакций связей на возможном перемещении системы

$$\delta W^* = \sum_{i=1}^n N_i \cdot \delta r_i = 0, \quad (27.35)$$

или, в проекциях на оси декартовых координат,

$$\delta W^* = \sum_{i=1}^n (N_{ix} \delta x_i + N_{iy} \delta y_i + N_{iz} \delta z_i) = 0. \quad (27.36)$$

Пусть положение несвободной системы, подчиненной как голономным, так и неголономным связям, определяется при помощи r обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_r , в общем случае зависящих друг от друга, согласно s уравнениям голономных связей (27.28). Тогда, составляя по (27.2) вариации x_i, y_i, z_i ,

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^r \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \delta y_i = \sum_{j=1}^r \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \delta z_i = \sum_{j=1}^r \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (27.37)$$

подставляя эти выражения проекций возможных перемещений в (27.36) и меняя порядок суммирования, получаем

$$\delta W^* = \sum_{j=1}^r \left[\sum_{i=1}^n \left(N_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + N_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + N_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j = 0. \quad (27.38)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, обозначим через Q_j^* и назовем *обобщенной реакцией*. При этом условии идеальности связей примет вид

$$\delta W^* = \sum_{j=1}^n Q_j^* \delta q_j = 0, \quad (27.39)$$

где

$$Q_j^* = \sum_{i=1}^n \left(N_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + N_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + N_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right). \quad (27.40)$$

Предположим, что при выборе обобщенных координат все голономные связи были учтены, так что координаты q_1, q_2, \dots, q_r *независимы*, и что неголономные связи отсутствуют. Тогда обобщенные возможные перемещения $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_r$ будут также независимы и, следовательно, произвольны, а число их будет равно числу степеней свободы ($r = k$).

Из равенства (27.39) при произвольности величин δq_j вытекает, что

$$Q_j^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (27.41)$$

Следовательно, если несвободная система подчинена идеальным голономным связям, то все обобщенные реакции, соответствующие независимым возможным перемещениям системы, равны нулю.

Предположим теперь, что мы имеем дело с общим случаем, когда при выборе обобщенных координат были удовлетворены только некоторые голономные связи. При этом обобщенные координаты q_1, q_2, \dots, q_r , $r > k$, зависимы, а обобщенные перемещения δq_j удовлетворяют системе условий (27.30). Умножив каждое из условий (27.30) на некоторый пока неопределенный множитель $(-\lambda_\alpha)$ и сложив результаты с равенствами (27.39), получим

$$\sum_{j=1}^r \left(Q_j^* - \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \quad (27.42)$$

Подчиним пока еще неопределенные множители λ_α , число которых равно s , условиям обращения в нуль выражений в каких-нибудь s круглых скобках в уравнении (27.42). После этого левая часть уравнения (27.41) будет включать $k = (r - s)$ слагаемых, каждое из которых состоит из двух множителей: 1) выражения в круглой скобке и 2) величины δq_j , входящей в число оставшихся $k = (r - s)$ произвольных возможных перемещений (k — число степеней свободы). Но сумма произведений некоторых выражений на произвольные величины может быть равна нулю только в том случае, когда все эти выражения по отдельности равны нулю. Таким образом, приходим к заключению, что оставшиеся $k = (r - s)$ выражений в круглых скобках в равенстве (27.42) также равны нулю.

Итак, условия идеальности связей в рассматриваемом общем случае приводят к системе r соотношений

$$Q_j^* = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (27.43)$$

Полученные равенства выражают обобщенные реакции через множители λ_α , называемые *множителями связей*. Каждый из множителей λ_α характеризует реакцию соответствующей ему по номеру голономной связи из числа не использованных при установлении обобщенных координат.

С другой стороны, обобщенные реакции Q_j^* как коэффициенты при δq_j в формуле (27.38) элементарной работы δW^* реакции связей выражаются через эти реакции. Таким образом, равенства

(27.43) могут служить для определения зависимости между реакциями связей и множителями связей (см. § 145).

Описанный выше процесс перехода от равенств (27.39) и (27.30) к равенству (27.42) с последующим выводом системы уравнений (27.43) представляет собой пример применения общего *метода неопределенных множителей*. Метод этот, предложенный Лагранжем в его «Аналитической механике» [36], получил широкое распространение в математическом анализе и механике.

§ 145. Принцип возможных перемещений

В статике твердого тела (отдел первый) были выведены уравнения равновесия твердого тела, заключающиеся в равенстве нулю сумм проекций приложенных к телу сил на оси координат и сумм моментов этих сил относительно тех же осей. При решении задач статики реакции связей не выделялись из общего числа приложенных к телу сил, что соответствовало применению принципа освобожденности.

Для изучения условий равновесия сложных несвободных систем, состоящих из большого числа тел, подчиненных голономным связям, изложенный в статике твердого тела метод становится непригодным. Статика несвободных систем основывается на *принципе возможных перемещений*, использующем, как показывает само наименование принципа, представления о возможных *перемещениях* системы. В этом заключается отличие излагаемого в настоящем отделе метода от методов статики твердого тела, имевших, по существу, чисто геометрический характер.

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. *Необходимое и достаточное условие равновесия системы, подчиненной стационарным идеальным связям, заключается в равенстве нулю суммы элементарных работ задаваемых сил на любом возможном перемещении системы из рассматриваемого положения равновесия.*

Обозначим через F_i равнодействующую задаваемых сил, приложенных к какой-нибудь точке M_i системы, через δr_i — возможное перемещение этой точки и через δW — сумму элементарных работ задаваемых сил на возможном перемещении системы.

Тогда аналитическое выражение принципа возможных перемещений будет иметь одну из следующих трех форм:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (27.44)$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^n (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = 0, \quad (27.45)$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^n F_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0; \quad (27.46)$$

в последнем равенстве δs_i — длина перемещения $\delta \mathbf{r}_i$, α_i — угол между силой \mathbf{F}_i и перемещением $\delta \mathbf{r}_i$.

■ Чтобы доказать *необходимость* принципа, предположим, что несвободная система, подчиненная нестационарным связям, находится в положении равновесия. Тогда каждая ее точка находится в равновесии и по принципу освобождаемости равнодействующая заданных сил \mathbf{F}_i и реакций связи \mathbf{N}_i , приложенная к какой-либо точке M_i , должна быть равна нулю. Равна нулю будет и работа этой равнодействующей, так что

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0;$$

но вторая сумма равна нулю по условию идеальности связей; следовательно, необходимость принципа доказана.

■ Для доказательства *достаточности* принципа, т. е. существования равновесия при выполнении условия (27.44), рассуждение ведется от обратного. Предположим, что условие (27.44) выполнено, а система в рассматриваемом положении все же *не находится в равновесии*. Тогда система (если в начальный момент считать ее покоящейся) под действием задаваемых сил и реакций связи придет в движение и за малый промежуток времени совершит некоторое *действительное* перемещение, в случае стационарных связей входящее в число возможных. Так как перемещения отдельных точек системы из состояния покоя будут направлены по равнодействующей сил \mathbf{F}_i и \mathbf{N}_i , при этом будет совершена положительная работа

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i > 0.$$

Разбивая на две суммы, получаем

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^n N_i \cdot \delta \mathbf{r}_i > 0,$$

но вторая сумма по условию идеальности связей равна нулю, следовательно,

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i > 0,$$

что противоречит принятому предположению (27.44). Таким образом, доказана *достаточность* принципа.

Если задаваемые силы \mathbf{F}_i консервативны, т. е. существует потенциальная энергия $\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$, то по § 128

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^n (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} \delta z_i \right) = -\delta \Pi; \end{aligned}$$

при этом выражение принципа возможных перемещений (27.43) приведет к равенству

$$\delta \Pi = 0, \quad (27.47)$$

выражающему *необходимое условие экстремальности потенциальной энергии в положении равновесия системы*.

Следовательно, из принципа возможных перемещений вытекает, что *необходимые и достаточные условия равновесия несвободной системы с идеальными связями под действием консервативных задаваемых сил совпадают с необходимым (но не достаточным) условием экстремума потенциальной энергии*.

Составим выражение принципа возможных перемещений в обобщенных координатах q_1, q_2, \dots, q_r , число которых, вообще говоря, больше числа k степеней свободы системы. Подставляя в (27.45) значения $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, учитывая равенство (27.37) и меняя порядок суммирования, получаем

$$\delta W = \sum_{j=1}^r \mathbf{Q}_j \delta q_j = 0, \quad (27.48)$$

где \mathbf{Q}_j представляет собой выражение

$$\mathbf{Q}_j = \sum_{i=1}^n \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad (27.49)$$

называемое *обобщенной силой*.

При вычислении обобщенных сил Q_j не рекомендуется пользоваться формулой (27.49); проще непосредственно составить элементарную работу δW задаваемых сил на возможном перемещении системы, выражая ее через вариации обобщенных координат δq_j . Коэффициенты при соответствующих δq_j в полученном выражении элементарной работы δW и будут, согласно (27.48), обобщенными силами Q_j .

Если задаваемые силы консервативны, то, рассматривая потенциальную энергию Π как сложную функцию обобщенных координат q_j , по (27.49) получаем

$$Q_j = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j},$$

$$j = 1, 2, \dots, r. \quad (27.50)$$

Выразив предварительно потенциальную энергию в обобщенных координатах, дифференцированием по координатам найдем обобщенные силы, соответствующие этим координатам.

Этим же путем найдем и обобщенные реакции Q_j^* , составляя выражение элементарной работы δW^* реакций связей на возможном перемещении и пользуясь тем, что, согласно (27.39), коэффициенты при вариациях δq_j обобщенных координат в выражении δW^* равны обобщенным реакциям Q_j^* .

Если обобщенные координаты выбраны *независимыми*, т. е. все уравнения голономных связей удовлетворены, то обобщенные возможные перемещения δq_j в числе k , равном числу степеней свободы, будут произвольны. Тогда из равенства (27.48) следует, что все коэффициенты Q_j при произвольных величинах δq_j должны по отдельности быть равны нулю:

$$Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (27.51)$$

Итак, *необходимое и достаточное условие равновесия несвободной системы с голономными идеальными связями заключается в равенстве нулю всех соответствующих независимым обобщенным координатам обобщенных сил в рассматриваемом положении равновесия системы.*

Полагая в этом случае, что потенциальная энергия Π задаваемых сил также выражена в независимых обобщенных координатах, будем иметь по (27.50) и (27.51) условия равновесия системы в виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (27.52)$$

Эти равенства, так же как и (27.47), выражают *необходимые* условия экстремума потенциальной энергии в положении равновесия системы.

Обратимся, наконец, к общему случаю обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_r , $r > k$, вариации которых подчинены условиям (27.30). Применим, как и в предыдущем параграфе, метод множителей к совокупности уравнений (27.48) и (27.30). Умножим каждое из равенств (27.30) на λ_α , после чего сложим все эти равенства с (27.48). Меняя порядок суммирования, получаем

$$\sum_{j=1}^r \left(Q_j + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \quad (27.53)$$

Используя произвол в выборе s множителей λ_α , подчиним их условиям обращения в нуль каких-нибудь выражений в s круглых скобках из общего числа r входящих в левую часть (27.53) скобок. Тогда выражения в оставшихся $k = (r - s)$ скобках также должны обратиться в нуль, как коэффициенты при произвольных k вариациях δq_j в равной нулю сумме произведений этих коэффициентов на δq_j ; здесь k — число степеней свободы. Итак, все выражения, стоящие в круглых скобках в левой части (27.53), равны нулю, и мы приходим к следующим общим условиям равновесия несвободной системы, подчиненной голономным связям:

$$Q_j + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (27.54)$$

Здесь по предыдущему обобщенные силы Q_j являются заданными функциями обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_r так же как Φ_α . Замечая, что $\delta W + \delta W^* = 0$ и поэтому, согласно (27.39) и (27.48), $Q_j^* = -Q_j$, $j = 1, 2, \dots, r$, убеждаемся в тождественности уравнений (27.43) и (27.54), а следовательно, и в тождественности величин $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ с множителями связей, введенными в предыдущем параграфе. Система уравнений (27.54) должна служить для нахождения координат $q_1^0, q_2^0, \dots, q_r^0$ в равновесных положениях несвободной системы и множителей λ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, s$, определяющих обобщенные реакции. Имеем r уравнений с $r + s$ неизвестными:

$$q_1^0, q_2^0, \dots, q_r^0; \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s.$$

Присоединяя к (27.54) уравнения связей (27.29), которые в рассматриваемом случае равновесия должны быть стационарны, будем иметь наряду с (27.54) еще следующую систему уравнений относительно $q_1^0, q_2^0, \dots, q_r^0$:

$$\Phi_\alpha(q_1^0, q_2^0, \dots, q_r^0) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (27.55)$$

В этом случае (27.54) и (27.55) представляют собой систему $r + s$ уравнений с $r + s$ неизвестными: $q_1^0, q_2^0, \dots, q_r^0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$. Исключив из s уравнений

$$Q_j + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j} \right)_0 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (27.56)$$

s неизвестных множителей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, подставим их значения в остающиеся r уравнений:

$$\sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j} \right)_0 = -Q_j, \quad j = s + 1, s + 2, \dots, r,$$

$$\Phi_\alpha(q_1^0, q_2^0, \dots, q_r^0) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s;$$

из этих r уравнений можно найти r неизвестных координат, определяющих равновесное положение системы: $q_1^0, q_2^0, \dots, q_r^0$.

Если задаваемые силы консервативны, то, согласно (27.50), условия равновесия системы (27.54) будут

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \left(-\Pi + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \Phi_\alpha \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (27.57)$$

и совпадут с необходимыми условиями экстремума функции координат

$$-\Pi + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \Phi_\alpha.$$

Задача об определении экстремума этой функции эквивалентна задаче нахождения относительного экстремума функции $(-\Pi)$ при наличии добавочных условий

$$\Phi_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_k) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s,$$

представляющих собой уравнения голономных стационарных связей.

§ 146. Применения принципа возможных перемещений

Пользуясь принципом возможных перемещений, выведем условия равновесия свободного твердого тела под действием произвольной заданной совокупности сил.

Заметим прежде всего, что по известной формуле кинематики бесконечно малое перемещение δr_i произвольной точки M_i твердого тела с вектором-радиусом r'_i относительно выбранного в теле полюса O' с вектором-радиусом r_0 будет определяться выражением

$$\delta r_i = \delta r_0 + \Theta \times r'_i,$$

в котором Θ — соответствующий вектор бесконечно малого поворота тела.

Пусть в точках M_i с векторами-радиусами r_i приложены задаваемые силы F_i ; тогда по принципу возможных перемещений будем иметь условие равновесия

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r_i = 0,$$

или по предыдущему равенству

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r_0 + \sum_{i=1}^n F_i \cdot (\Theta \times r'_i) = 0.$$

Пользуясь одинаковостью векторов δr_0 и Θ для всех точек тела и известным свойством скалярно-векторного произведения, перепишем последнее равенство в виде

$$\left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \cdot \delta r_0 + \left(\sum_{i=1}^n r'_i \times F_i \right) \cdot \Theta = 0.$$

В силу произвольности векторов δr_0 и Θ для свободного твердого тела получим

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n r'_i \times F_i = 0. \quad (27.58)$$

Это — уже известные нам из статики условия равенства нулю главного вектора и главного момента приложенных сил.

При выводе предполагалось, что твердое тело свободно, т. е. не подчинено связям. Используя принцип освобожденности (§ 144), обобщим условия (27.58) и на случай несвободного твердого тела. Для этого достаточно, отбросив связи, принять тело за свободное, но включить в число задаваемых сил реакции связей (реакции опор).

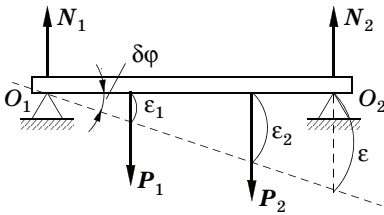


Рис. 357

ты сил. Подчеркнем особенности этих двух различных подходов на простом примере определения реакций балки, лежащей на двух опорах (рис. 357).

Применяя принцип освобождаемости, отбросим правую опору, приложив к балке соответствующую реакцию N_2 ; тогда балка приобретет одну степень свободы — вращение около оставшейся опоры O_1 . Обозначая возможные перемещения точек приложения сил P_1 и P_2 через ε_1 и ε_2 , а перемещение точки приложения реакции N_2 через ε и применяя принцип возможных перемещений, будем иметь

$$-N_2\varepsilon + P_2\varepsilon_2 + P_1\varepsilon_1 = 0.$$

Обозначая через $\delta\varphi$ угол бесконечно малого поворота балки вокруг опоры O_1 , через l — расстояние между опорами, l_1 и l_2 — соответственно расстояния от опоры O_1 до точек приложения сил P_1 и P_2 и замечая, что возможные перемещения будут равны

$$\varepsilon = l \delta\varphi, \quad \varepsilon_1 = l_1 \delta\varphi, \quad \varepsilon_2 = l_2 \delta\varphi,$$

подставим эти значения перемещений в предыдущее равенство и после сокращения обеих частей на $\delta\varphi$ получим

$$-N_2l + P_1l_1 + P_2l_2 = 0.$$

Аналогичным путем, отбрасывая левую опору, составим уравнение для определения реакции N_1 . В полученных таким образом равенствах нетрудно узнать уравнения моментов относительно центров O_1 и O_2 . В статике эти уравнения были выведены на основании теоремы Вариньона, не заключающей в себе кинематического понятия поворота тела.

Представим себе машину в виде следующей упрощенной схемы. К некоторому ее звену, которое назовем *приемником*, приложена сила P или вращающий момент M от двигателя; таковы, например, поршень в цилиндре паровой машины, основной вал

Приведенный только что вывод условий равновесия твердого тела (27.58) отличается от изложенного в первом отделе геометрического вывода Пуансо использованием кинематического представления о перемещениях твердого тела и динамического понятия работы

станка, приводимый в движение электромотором, рукоятка ручного прессы и т. п. К *рабочему инструменту* машины — резцу, сверлу, и т. п. — приложена сила Q или момент M_u *полезного сопротивления*, производящие полезную работу*. Между приемником и рабочим инструментом располагается кинематическая цепь звеньев, служащих для передачи рабочему инструменту энергии, сообщаемой приемнику. Эта цепь звеньев образует *передаточный механизм*. В передаточном механизме действуют реакции связей, работа которых на возможном перемещении машины сводится главным образом к сравнительно малым потерям на вредные сопротивления; элементарная работа прочих задаваемых сил (например, силы тяжести) в передаточном механизме или мала по сравнению с соответствующими работами двигательной силы и полезного сопротивления, или может быть легко учтена.

Остановимся сначала на применении принципа возможных перемещений к *идеальным* машинам, т. е. таким, в которых работой вредных сопротивлений и задаваемых сил в передаточном механизме можно пренебречь.

Обозначим через P и Q двигательную силу и полезное сопротивление, а через δp и δq — возможные перемещения точек их приложения. Элементарные работы этих сил на возможных перемещениях будут соответственно обозначаться следующим образом**:

$$\delta W_m = P \cdot \delta p, \quad \delta W_u = Q \cdot \delta q. \quad (27.59)$$

Если машина идеальна, т. е. можно пренебречь элементарной работой вредных сопротивлений и элементарной работой задаваемых сил в передаточном механизме, то, согласно принципу возможных перемещений, уравнение равновесия машины в данном положении будет

$$\delta W_m + \delta W_u = P \cdot \delta p + Q \cdot \delta q = 0. \quad (27.60)$$

Пусть $P' > 0$ представляет собой проекцию двигательной силы P на направление перемещения δp , а Q' — абсолютное значение проекции полезного сопротивления Q на направление δq ; тогда будем иметь

$$\delta W_m = P' \delta p, \quad \delta W_u = -Q' \delta q, \quad (27.61)$$

* Индекс u соответствует французскому слову *utile* — полезный.

** Индекс m соответствует французскому слову *moteur* — движущий.

причем знак минус во втором равенстве показывает, что полезное сопротивление Q всегда направлено в сторону, противоположную возможному перемещению точки ее приложения или, во всяком случае, образует с ним тупой угол. Уравнение равновесия (27.60) приводится к виду

$$P'\delta p = Q'\delta q,$$

или, после отнесения обеих его частей к некоторому промежутку времени δt , к виду

$$\frac{P'}{Q'} = \frac{\frac{\partial q}{\partial t}}{\frac{\partial p}{\partial t}} = \frac{v_q}{v_p}. \quad (27.62)$$

Согласно этому равенству приложенные к машине двигательная сила и полезное сопротивление (точнее, проекции на направления перемещения точек их приложения) обратно пропорциональны возможным скоростям точек приложения сил. В этом заключается известное *золотое правило механики*, сформулированное впервые Галилеем в словах:

«что выигрывается в силе, теряется в скорости».

Известно, что простейшие машины (рычаг, наклонная плоскость, домкрат, винтовой пресс и др.) позволяют малой двигательной силой преодолеть большое полезное сопротивление. Этот выигрыш в силе получается за счет потери в скорости или в перемещении.

Чтобы учесть значение элементарной работы вредных сопротивлений, которую обозначим через $-\delta W_f$ (знак минус указывает, что она всегда отрицательна)*, отнесем вредные сопротивления к задаваемым силам и снова применим к машине принцип возможных перемещений. Уравнение равновесия машины будет

$$\delta W_m - \delta W_u - \delta W_f = 0. \quad (27.63)$$

Отношение полезной работы δW_u к затраченной dW_m называют *коэффициентом полезного действия* η , так что

$$\eta = \frac{\delta W_u}{\delta W_m}. \quad (27.64)$$

* Индекс f соответствует французскому слову *frottement* — трение.

Из уравнения (27.63) можно заключить, что

$$\eta = 1 - \frac{\delta W_f}{\delta W_m}. \quad (27.65)$$

Из этого равенства следует, что машины должны иметь коэффициент полезного действия, меньший единицы (меньше 100%), причем чем меньше отношение элементарной работы вредных сопротивлений к элементарной работе двигательной силы, тем машина ближе к идеальной.

Приведенные формулы выражают соотношение элементарных работ двигательной силы, полезного и вредного сопротивлений в предположении, что машина находится в равновесии.

Разберем пример расчета равновесия простейшей машины — винтового пресса, схематически изображенного на рис. 358. К рукоятке пресса приложена двигательная пара с моментом $M = Ph$ (h — плечо пары), а к перемещающейся платформе — реакция Q сжимаемого прессом тела, играющая в данном случае роль полезного сопротивления. Предположим сначала, что пресс — идеальная машина. Тогда, согласно (27.60), запишем уравнение работ

$$M \delta\varphi - Q \delta z = 0,$$

где $\delta\varphi$ — бесконечно малый угол поворота винта, $\delta z = r \operatorname{tg} \alpha \delta\varphi$ — соответствующее этому повороту бесконечно малое расстояние, на которое опустится платформа, причем r — средний радиус винтовой нарезки, а α — угол наклона нарезки. Подставляя в предыдущее равенство значение δz и сокращая обе части на $\delta\varphi$, получаем

$$M = Ph = Qr \operatorname{tg} \alpha. \quad (27.66)$$

Из этого равенства видно, что благодаря малым значениям отношения r/h и угла α можно, прикладывая небольшие силы P , получать значительные сжимающие усилия Q . Вместе с тем равенство (27.66) подтверждает *золотое правило*, так как отношение $r \operatorname{tg} \alpha/h$ равно отношению шага винта к удвоенной длине окружности, описываемой концом рукоятки. Следовательно, для получения значительного выигрыша в величине отношения сил Q/P надо брать либо меньший шаг, что приведет к необходимости

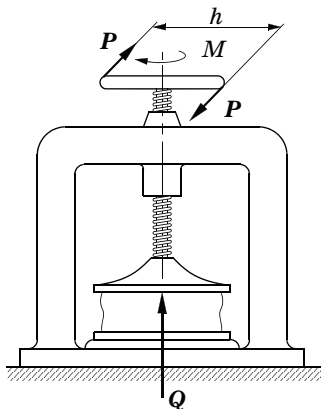


Рис. 358

большого числа поворотов рукоятки, либо бóльшую длину окружности, описываемую руками, т. е. увеличивать путь точек приложения двигательных сил.

Чтобы учесть влияние вредных сопротивлений — в данном случае трения в винтовой нарезке (трением в направляющих пазах можно пренебречь), введем дополнительно возможное перемещение δs винта по нарезке. Предполагая нарезку прямоугольной, как это обычно делают в ходовых винтах, и считая, что при работе пресса винт прижимается своей верхней плоскостью к нарезке, будем иметь расположение сил, указанное на рис. 359. Уравнение работ примет вид

$$M \delta\varphi - Q \delta z - \sum F \delta s = 0,$$

где знак суммы показывает, что работу сил трения $F = fN$ следует распространить на всю площадь соприкосновения винта с нарезкой.

Для нахождения $\sum N$ проще всего использовать условие равенства нулю суммы проекций приложенных сил на вертикальную ось:

$$Q - \sum N \cos \alpha + \sum fN \sin \alpha = 0;$$

отсюда найдем

$$\sum N = \frac{Q}{\cos \alpha - f \sin \alpha},$$

и, следовательно, получим

$$M \delta\varphi = Q \delta z + \frac{fQ}{\cos \alpha - f \sin \alpha} \delta s.$$

Соотношения между возможными перемещениями видны из треугольника перемещений, построенного на рис. 359:

$$\delta z = r \delta\varphi \operatorname{tg} \alpha, \quad \delta s = \frac{r \delta\varphi}{\cos \alpha}.$$

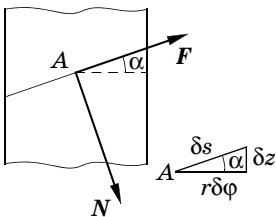


Рис. 359

Подставляя эти значения в предыдущее равенство, получаем

$$M = Qr \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha}, \quad (27.67)$$

или, если еще ввести угол трения $\psi = \arctg f$,

$$M = Qr \operatorname{tg} (\alpha + \psi). \quad (27.68)$$

Сравнивая эту формулу с полученным ранее соотношением для идеального винта (27.66), мы видим, что при малых α большого выигрыша в моменте не получается. Интересно отметить, что при $\alpha = \pi/2 - \psi$, чтобы привести пресс в движение, к рукоятке необходимо приложить бесконечный момент: под действием приложенного момента винт будет все сильнее прижиматься к нарезке, но с места не сдвинется.

Коэффициент полезного действия определяется по формуле (27.64):

$$\eta = \frac{Q\delta z}{M\delta\phi} = \frac{Qr \operatorname{tg} \alpha}{M} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \psi)}. \quad (27.69)$$

По своему назначению винтовой пресс должен быть *самотормозящимся*. Это значит, что, каково бы ни было полезное сопротивление Q при снятии с рукоятки крутящей пары ($M = 0$), пресс не должен раскручиваться. Переходя к рассмотрению выполнимости этого условия, применим равенство (27.68) в предположении, что направление вращения винта изменилось на противоположное, что потребует изменения знака угла трения ψ в формуле (27.68). Будем иметь предельное условие самоторможения винта: $\operatorname{tg}(\alpha - \psi) = 0$, т. е.

$$\alpha = \psi.$$

Очевидно, что при любом $\alpha < \psi$ винт будет самотормозящимся. Такого рода самотормозящиеся винтовые прессы должны иметь сравнительно низкие коэффициенты полезного действия. В самом деле, из условия $\alpha < \psi$, согласно (27.69), найдем

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \psi)} < \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1}{2} (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

и, следовательно, во всяком случае, $\eta < 1/2$. Таково общее свойство машин с самоторможением.

Пример 125. На рис. 360 показана схема конструкции рычажного прессы. Предполагая, что тяга BC горизонтальна, определить отношение сжимающей тело силы S к приложенной нормально к рукоятке в точке A силе P в зависимости от углов α , θ и ψ , если отношение O_1A к O_1B равно n . Размеры указаны на рисунке.

Уравнение принципа возможных перемещений дает

$$P \delta a - S \delta d = 0;$$

задача сводится к определению зависимости между перемещениями δa и δd . Для этого вспомним, что проекции возможных перемещений

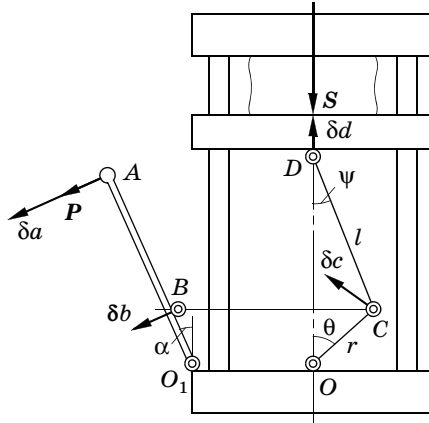


Рис. 360

концов жесткого стержня на направление самого стержня должны быть равны между собой. Таким образом, δd и δc связаны равенством

$$\delta c \cos(90^\circ - \theta - \psi) = \delta d \cos \psi,$$

или

$$\delta c \sin(\theta + \psi) = \delta d \cos \psi.$$

При помощи той же теоремы свяжем δc и δb :

$$\delta c \cos \theta = \delta b \cos \alpha,$$

и, кроме того, заметим, что

$$\delta a = \frac{O_1A}{O_1B} \delta b = n \delta b.$$

Сравнивая эти соотношения с предыдущим, находим

$$\delta a = n \delta b = n \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} \delta c = n \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} \frac{\cos \psi}{\sin(\theta + \psi)} \delta d.$$

Определив отношение перемещений δa и δd , получим по уравнению работ нужное отношение усилий:

$$\frac{S}{P} = \frac{\delta a}{\delta d} = n \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} \frac{\cos \psi}{\sin(\theta + \psi)} = \frac{n}{\cos \alpha} \frac{1}{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \psi}. \quad (27.70)$$

Очевидно, что выигрыш в усилиях S будет тем больше, чем меньше углы θ и ψ . При желании последнюю формулу можно выразить с помощью одного угла (механизм имеет, очевидно, одну степень свободы), если воспользоваться очевидными соотношениями ($r_1 = O_1B$)

$$\sin \psi = \frac{r}{l} \sin \theta, \quad r_1 \sin \alpha + r \sin \theta = BC - OO_1 = \text{const}.$$

Проиллюстрируем на этом примере метод множителей. Примем за обобщенные координаты α , θ и ψ , а предыдущие два равенства — за уравнения связей:

$$\Phi_1 = l \sin \psi - r \sin \theta = 0, \quad \Phi_2 = r_1 \sin \alpha + r \sin \theta = \text{const.} \quad (27.71)$$

Составим выражение элементарной работы задаваемых сил P и S на возможном перемещении прессы:

$$\begin{aligned} \delta W = P \cdot O_1 A \delta \alpha - S \delta d &= P n r_1 \delta \alpha - S \delta (r \cos \theta + l \cos \psi) = \\ &= n P r_1 \delta \alpha + S r \sin \theta \delta \theta + S l \sin \psi \delta \psi. \end{aligned}$$

Обозначим обобщенные силы такими же индексами, что и координаты, к которым они относятся. Тогда, вспоминая, что обобщенные силы равны коэффициентам при соответствующих вариациях координат в выражении элементарной работы, получим

$$Q_\alpha = n P r_1, \quad Q_\theta = S r \sin \theta, \quad Q_\psi = S l \sin \psi.$$

Условия равновесия (27.54) в настоящем случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} Q_\alpha + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} &= n P r_1 + \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 r_1 \cos \alpha = 0, \\ Q_\theta + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} &= S r \sin \theta - \lambda_1 r \cos \theta + \lambda_2 r \cos \theta = 0, \\ Q_\psi + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \psi} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \psi} &= S l \sin \psi + \lambda_1 l \cos \psi + \lambda_2 \cdot 0 = 0. \end{aligned} \quad (27.72)$$

Первое и третье из этих равенств дают

$$\lambda_1 = -S \operatorname{tg} \psi, \quad \lambda_2 = -\frac{n P}{\cos \alpha}; \quad (27.73)$$

подставив во второе равенство эти значения, а также выражения для Q_θ , $\partial \Phi_1 / \partial \theta$ и $\partial \Phi_2 / \partial \theta$, снова получим соотношение (27.70). Усилия в стержнях могут быть легко выражены через множители связей λ_1 и λ_2 . Составим выражения обобщенных реакций Q_α^* , Q_θ^* , Q_ψ^* , соответствующих выбранным обобщенным координатам. Для этого по тому же правилу, что и для обобщенных задаваемых сил, вычислим элементарную работу δW^* реакций на возможном перемещении системы:

$$\begin{aligned} \delta W^* &= -N_{bc} \delta b \cos \alpha + N_{bc} \delta c \cos \theta - N_{cd} \delta c \sin (\psi + \theta) + N_{cd} \delta d \cos \psi = \\ &= -N_{bc} r_1 \cos \alpha \delta \alpha - N_{bc} r \cos \theta \delta \theta + N_{cd} \sin (\psi + \theta) r \delta \theta + \\ &\quad + N_{cd} \delta (r \cos \theta + l \cos \psi) \cdot \cos \psi = \\ &= -N_{bc} r_1 \cos \alpha \delta \alpha + (-N_{bc} r \cos \theta + N_{cd} r \cos \theta \sin \psi) \delta \theta - \\ &\quad - N_{cd} l \sin \psi \cos \psi \delta \psi. \end{aligned}$$

Коэффициенты при $\delta\alpha$, $\delta\theta$ и $\delta\psi$ в этом выражении определяют искомые обобщенные реакции:

$$\begin{aligned} Q_\alpha^* &= -N_{bc}r_1 \cos \alpha, \\ Q_\theta^* &= -N_{bc}r \cos \theta + N_{cd}r \cos \theta \sin \psi, \\ Q_\psi^* &= -N_{cd}l \sin \psi \cos \psi. \end{aligned} \quad (27.74)$$

Сопоставление (27.74) и (27.72) с (27.43) и (27.54) дает

$$\begin{aligned} \lambda_2 r_1 \cos \alpha &= -N_{bc} r_1 \cos \alpha, \\ -\lambda_1 r \cos \theta + \lambda_2 r \cos \theta &= -N_{bc} r \cos \theta + N_{cd} r \cos \theta \sin \psi, \\ \lambda_1 l \cos \psi &= -N_{cd} l \sin \psi \cos \psi. \end{aligned}$$

Из первого и третьего равенств следует

$$N_{bc} = -\lambda_2 = \frac{nP}{\cos \alpha}, \quad N_{cd} = -\frac{\lambda_1}{\sin \psi} = \frac{S}{\cos \psi}; \quad (27.75)$$

второе равенство выполняется тождественно. Конечно, в этом простом примере реакции можно было определить, рассматривая равновесие узлов B , C и D .

Пример 126. Статика кардановой передачи (шарнир Гука — Кардана). Устройство кардановой передачи известно из курса кинематики (§ 71, пример 72) и схематически показано на рис. 361. Определим зависимость между моментами M_1 на ведущем валу O_1O и M_2 — на ведомом валу, а также моменты реакций в шарнирах, соединяющих крестовину $AA'BB'$ с вилками O_1AA' и O_2BB' , и в подшипниках O_1 и O_2 ведущего и ведомого валов.

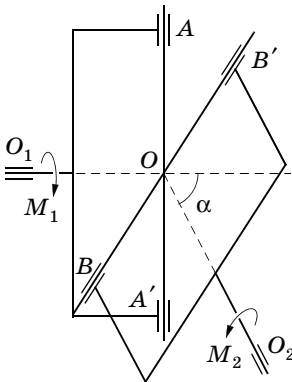


Рис. 361

Для установления зависимости между M_1 и M_2 применим уравнение принципа возможных перемещений

$$\delta W = M_1 \delta\varphi - M_2 \delta\psi = 0, \quad (27.76)$$

где $\delta\varphi$ и $\delta\psi$ — бесконечно малые повороты ведущего и ведомого валов. Отношение $\delta\psi : \delta\varphi$ представляет собой так называемое передаточное число, зависимость которого от угла φ поворота ведущего вала была установлена в примере 72. Применяя выведенную там формулу, будем иметь

$$\begin{aligned} \delta\psi &= \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi} \delta\varphi = \\ &= \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} \delta\varphi \end{aligned} \quad (27.77)$$

и, следовательно, по (27.76)

$$M_2 = M_1 \left(\cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \sin^2 \varphi \right). \quad (27.78)$$

Для уравнивания постоянного момента полезного сопротивления $M_2 = \text{const}$ необходимо к ведущему валу прикладывать различные для последовательных положений механизма моменты M_1 , колеблющиеся между значениями

$$M_{1 \max} = M_2 / \cos \alpha \quad \text{при } \varphi = \pi/2, 3\pi/2, \dots,$$

$$M_{1 \min} = M_2 \cos \alpha \quad \text{при } \varphi = 0, \pi, \dots,$$

так что коэффициент неравномерности момента M_1 будет равен

$$\frac{M_{1 \max} - M_{1 \min}}{M_2} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}.$$

Чем меньше угол α между валами, тем меньше коэффициент неравномерности. Первая часть задачи решена; обратимся к расчету реакций.

Обозначим через M_1^* момент сил реакций подшипника ведущего вала, через M_2^* — момент сил реакций ведомого вала и через M^* и $(-M^*)$ — моменты сил реакции в шарнирах, соединяющих крестовину с вилками. Поскольку крестовина находится в равновесии под действием этих двух моментов, они отличаются только знаками.

Применим метод множителей. Механизм имеет одну степень свободы: следовательно, между обобщенными координатами φ и ψ существует соотношение. В дифференциальном виде оно представлено уравнением (27.77); чтобы получить его в конечной форме, надо проинтегрировать это уравнение, что даст

$$\text{tg } \varphi = \cos \alpha \text{ tg } \psi; \quad (27.79)$$

при этом начала отсчетов углов φ и ψ выбраны так, чтобы они одновременно обращались в нуль.

Имея в виду дальнейшее, дадим непосредственный геометрический вывод этого соотношения, для чего обратимся к рис. 362. Вертикальная и наклонная окружности единичного радиуса представляют собой траектории концов перекладин крестовины, полушины которых примем равными единице. Начальное положение крестовины зададим единичными векторами a_0 и b_0 , причем будем считать вектор a_0 расположенным в плоскости пересечения валов O_1O и OO_2 ; отметим еще вспомогательный

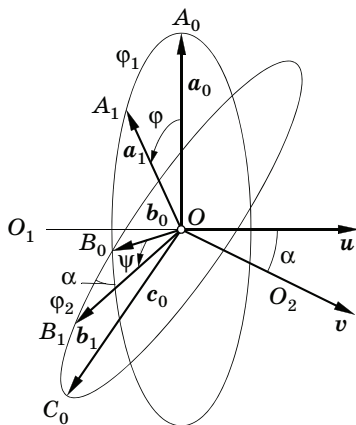


Рис. 362

единичный вектор c_0 , расположенный в плоскости наклонной окружности по отношению к b_0 так же, как расположен в плоскости вертикальной окружности вектор b_0 по отношению к a_0 .

Если ведущий вал повернется на угол A_0OA_1 , равный φ , то ведомый вал повернется на угол B_0OB_1 , равный ψ ; при этом векторы a_0 и b_0 перейдут в новые положения a_1 и b_1 .

Разложив текущие значения векторов a_1 и b_1 по направлениям a_0 , b_0 и c_0 , будем иметь

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 \cos \varphi + b_0 \sin \varphi, \\ b_1 &= b_0 \cos \psi + c_0 \sin \psi \end{aligned} \quad (27.80)$$

и, перемножив эти выражения скалярно, найдем

$$\begin{aligned} a_1 \cdot b_1 &= a_0 \cdot b_0 \cos \varphi \cos \psi + a_0 \cdot c_0 \cos \varphi \sin \psi + b_0 \cdot b_0 \sin \varphi \cos \psi + \\ &+ b_0 \cdot c_0 \sin \varphi \sin \psi; \end{aligned}$$

но

$$a_1 \cdot b_1 = 0, \quad a_0 \cdot b_0 = 0, \quad a_0 \cdot c_0 = -\cos \alpha, \quad b_0 \cdot b_0 = 1, \quad b_0 \cdot c_0 = 0,$$

так что

$$-\cos \varphi \sin \psi \cos \alpha + \sin \varphi \cos \psi = 0,$$

откуда непосредственно вытекает (27.79). Итак, имеем уравнение связи

$$\Phi = \operatorname{tg} \varphi - \cos \alpha \operatorname{tg} \psi = 0. \quad (27.81)$$

Из уравнения (27.76) определяем обобщенные силы

$$Q_\varphi = M_1, \quad Q_\psi = -M_2,$$

и тогда условия равновесия будут

$$\begin{aligned} M_1 + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= M_1 + \frac{\lambda}{\cos^2 \varphi} = 0, \\ -M_2 + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} &= -M_2 - \frac{\lambda \cos \alpha}{\cos^2 \psi} = 0. \end{aligned} \quad (27.82)$$

Исключив λ , получим

$$M_2 = M_1 \frac{\lambda \cos^2 \psi}{\cos \alpha \cos^2 \varphi}. \quad (27.83)$$

Соотношение (27.83), если исключить ψ при помощи (27.79), совпадает с (27.78). Множитель λ равен

$$\lambda = -M_1 \cos^2 \varphi. \quad (27.84)$$

Составим условие идеальности связей. Обозначим через u и v единичные векторы направлений осей валов; тогда условие равенства нулю суммы элементарных работ реакций связей будет

$$\delta W^* = M_1^* \cdot u \delta \varphi + M^* \cdot u \delta \varphi - M^* \cdot v \delta \psi + M_2^* \cdot v \delta \psi = 0. \quad (27.85)$$

Но моменты пар реакций идеальных подшипников перпендикулярны их осям, т. е.

$$\mathbf{M}_1^* \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{M}_2^* \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Из (27.85) при этом следует, что

$$Q_\varphi^* = M_1 \cdot \mathbf{u}, \quad Q_\psi^* = -M^* \cdot \mathbf{v},$$

и по (27.43) и (27.84)

$$\mathbf{M}^* \cdot \mathbf{u} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{\lambda}{\cos^2 \varphi} = -M_1. \quad (27.86)$$

Последнее соотношение показывает, что в настоящем случае множитель λ пропорционален составляющей момента \mathbf{M}^* реакций шарниров по оси ведущего вала. Сам же момент \mathbf{M}^* , так же как и моменты реакций подшипников \mathbf{M}_1^* и \mathbf{M}_2^* , остается пока неопределенным.

Замечая, что по условию идеальности связей момент \mathbf{M}^* перпендикулярен осям шарнирных соединений крестовины с вилками, представим его в виде

$$\mathbf{M}^* = M^* \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1, \quad (27.87)$$

так как вектор $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1$ имеет единичную длину. Подставляя в (27.86), находим величину момента M^* как отношение

$$M^* = -\frac{M_1}{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1) \cdot \mathbf{u}} = -\frac{M_1}{\cos \theta}, \quad (27.88)$$

где θ — угол между текущим положением плоскости крестовины A_1OB_1 и плоскостью вертикального круга A_0OB_0 . Согласно (27.80) имеем

$$\cos \theta = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1) \cdot \mathbf{u} = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos \alpha,$$

или по (27.79)

$$\cos \theta = \cos \varphi \cos \psi (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi \cos \alpha) = \cos \varphi \cos \psi (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}. \quad (27.89)$$

Подставляя это значение $\cos \theta$ в (27.88), получаем

$$M^* = -\frac{M_1 \cos \varphi}{\cos \psi}. \quad (27.90)$$

Возвращаясь к (27.87), в котором \mathbf{a}_1 и \mathbf{b}_1 можно заменить их выражениями (27.80), а M^* — выражением (27.90), находим

$$\mathbf{M}^* = -M_1 (\mathbf{u} \cos^2 \varphi + \mathbf{v} \sin \varphi \cos \varphi \operatorname{tg} \psi - \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cos^2 \varphi \operatorname{tg} \psi),$$

или по (27.79)

$$\mathbf{M}^* = -M_1 \left(\mathbf{u} \cos^2 \varphi + \mathbf{v} \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \alpha} - \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin \varphi \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha \right). \quad (27.91)$$

При $\varphi = 0, \pi, \dots$ имеем $M^* = -M_1 u = -M_1$, т. е. момент реакций равен по величине и противоположен по направлению задаваемому моменту M_1 ; при $\varphi = \pi/2, 3\pi/2, \dots$, согласно (27.83), момент пары реакций, приложенной к вилке ведомого вала, будет равен $-M^* = (M_1/\cos \alpha)v = M_2 v$, т. е. одинаков по величине и противоположен по направлению моменту полезного сопротивления $-M_2 v$.

Чтобы вычислить моменты M_1^* и M_2^* реакций подшипников ведущего и ведомого валов, составим уравнения равновесия вилок

$$M_1 + M^* + M_1^* = 0, \quad M_2 - M^* + M_2^* = 0$$

и найдем

$$M_1^* = -M_1 - M^* = -M_1 \sin \varphi \left(u \sin \varphi - v \frac{\sin \varphi}{\cos \alpha} + u \times v \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha \right). \quad (27.92)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} M_2^* &= -M_2 + M^* = M_2 v + M^* = \\ &= -M_1 u \cos^2 \varphi + \left(M_2 - M_1 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \alpha} \right) v + M_1 u \times v \sin \varphi \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned}$$

или по (27.91)

$$M_2^* = -M_1 \cos \varphi (u \cos \varphi - v \cos \alpha \cos \varphi - u \times v \sin \varphi \operatorname{tg} \alpha). \quad (27.93)$$

Согласно полученным формулам момент M_1^* обращается в нуль при $\varphi = 0, \pi, \dots$, а момент M_2^* — при $\varphi = \pi/2, 3\pi/2, \dots$.

Таким образом, все моменты реакций определены как по величине, так и по направлению. Легко проверить, что условия ортогональности моментов M^*, M_1^*, M_2^* соответствующим осям OA_1 и OB_1, O_1O и OO_2 выполняются.

§ 147. Устойчивость равновесия системы.

Теорема Лагранжа — Дирихле. Понятие о теоремах Ляпунова

Определение понятия устойчивости равновесия связано с рассмотрением тех движений, которые система станет совершать, будучи выведена из положения равновесия путем сообщения ее точкам весьма малых начальных отклонений от положения равновесия и весьма малых начальных скоростей.

Если после нарушения равновесия система в своем последующем движении будет весьма мало отклоняться от исследуемого равновесного положения, то такое положение равновесия называется устойчивым.

Будем определять положение системы при помощи независимых обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_k , число которых равно числу степеней свободы системы.

Условимся вести отсчет обобщенных координат от рассматриваемого положения равновесия, т. е. считать, что этому положению соответствуют значения обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_k , равные нулю. Начальные значения обобщенных координат и скоростей (в момент $t = 0$) обозначим соответственно через q_j^0, \dot{q}_j^0 , а их текущие значения (т. е. значения в любой момент времени t) — через q_j и $\dot{q}_j, j = 1, 2, \dots, k$. Согласно данному выше определению исследуемое положение равновесия устойчиво, если при наперед выбранных положительных достаточно малых ε и ε_1 можно указать такие зависящие от ε и ε_1 положительные числа η и η_1 , что при

$$|q_j^0| < \eta, \quad |\dot{q}_j^0| < \eta_1$$

все текущие значения координат q_j и обобщенных скоростей \dot{q}_j при любом t , как бы велико оно ни было, останутся меньшими по абсолютной величине, чем ε и ε_1 :

$$|q_j| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_j| < \varepsilon_1.$$

Например, нижнее вертикальное положение математического маятника устойчиво, так как, произвольно задав угол отклонения маятника от вертикали $\varphi = \varepsilon$ и угловую скорость $\dot{\varphi} = \varepsilon_1$, мы сможем указать такие не равные одновременно нулю и зависящие от ε и ε_1 границы значений для начального угла отклонения φ_0 и начальной скорости $\dot{\varphi}_0$, что в последующем движении маятника $|\varphi|$ и $|\dot{\varphi}|$ при любом t не превзойдут величин ε и ε_1 . Наоборот, вертикальное верхнее положение маятника неустойчиво.

Лагранж установил следующее *достаточное* условие устойчивости равновесия голономной системы с идеальными связями в консервативном силовом поле.

ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА — ДИРИХЛЕ. Если в некотором положении системы, подчиненной идеальным голономным связям и находящейся под действием консервативных сил, потенциальная энергия имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Точное доказательство этой теоремы дал Л. Дирихле.

Напомним, что в положении равновесия потенциальная энергия Π удовлетворяет необходимым условиям экстремальности (§ 145)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (27.94)$$

Согласно теореме Лагранжа — Дирихле, если этот экстремум представляет минимум, то положение равновесия устойчиво. Так, в нижнем вертикальном положении математического маятника потенциальная энергия имеет минимум по сравнению с ее значениями в любых других положениях маятника; это положение соответствует устойчивому равновесию маятника.

Не нарушая общности доказательства теоремы, можно, во-первых, как условлено выше, считать все координаты в положении равновесия равными нулю; во-вторых, можно принять потенциальную энергию в положении равновесия также равной нулю, подбирая соответствующим образом произвольную аддитивную постоянную, с точностью до которой определяется потенциальная энергия. Если в положении системы, определяемом значениями координат $(0, 0, \dots, 0)$, потенциальная энергия принимает минимальное свое значение, равное нулю, то по определению минимума можно вблизи положения равновесия указать такую область значений координат

$$|q_j| < \varepsilon,$$

что внутри и на границах этой области значения потенциальной энергии будут положительны; это — так называемая *область минимума функции*.

Зафиксируем одну из координат, например q_1 , на границе области минимума, положив

$$q_1 = \pm \varepsilon,$$

а остальным координатам предоставим возможность изменяться как угодно внутри области минимума или даже достигать границ ее. Наименьшее значение потенциальной энергии при этом обозначим через A_1 . Это число A_1 обязательно положительно. Точно так же зафиксируем вторую координату на границе области минимума и предоставим другим координатам (в том числе и первой) изменяться внутри области минимума или достигать границ ее; соответствующее минимальное значение потенциальной энергии обозначим через A_2 (также положительное число). Поступив

так же со всеми k обобщенными координатами, получим ряд положительных чисел

$$A_1, A_2, \dots, A_k,$$

наименьшее из которых обозначим через A . При таком выборе числа A условие

$$П < A \tag{27.95}$$

будет обозначать, что ни одна из координат не достигла границ области минимума, т. е. система находится вблизи равновесного положения внутри заранее указанных границ.

Выведем систему из исследуемого положения равновесия. Пусть Π_0 — начальное значение потенциальной энергии; по заданному ϵ можно так определить $\eta(\epsilon)$, чтобы при всех $|q_j^0| < \eta(\epsilon)$ имело место неравенство

$$\Pi_0 < A, \tag{27.96}$$

для чего, согласно сказанному выше, достаточно выбрать начальное положение системы лежащим внутри области минимума функции Π .

Если система подчинена идеальным стационарным связям, то в действительном ее движении работа реакций связей равна нулю. Следовательно, к такого рода движениям применим закон сохранения механической энергии

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0$$

и, значит, по условию существенной положительности кинетической энергии

$$\Pi < T_0 + \Pi_0.$$

Если $\Pi_0 < A$, то всегда можно так подобрать начальные скорости, чтобы и $(\Pi_0 + T_0)$ было меньше A ; для этого достаточно положить T_0 меньшим разности $A - \Pi_0$, которая по условию (27.96) больше нуля. Следовательно, начальные скорости точек системы можно определить так, чтобы во все время движения выполнялось условие

$$\Pi < A,$$

а это на основании (27.95) означает, что система останется в ограниченной области, произвольно выбранной нами вблизи положения равновесия, т. е. что исследуемое положение является положением устойчивого равновесия.

Теорема Лагранжа — Дирихле содержит утверждение об устойчивости равновесия системы в том ее положении, где потенциальная энергия задаваемых сил достигает минимума, но не дает никаких оснований судить о том, будет ли равновесие неустойчиво, если потенциальная энергия в этом положении системы имеет максимум. Ответ на этот важный вопрос для весьма обширного класса случаев, практически вполне исчерпывающих мыслимые приложения, содержится в теоремах Ляпунова (1857—1918). Доказательство теорем Ляпунова не может быть здесь дано; удовлетворимся их формулировкой*.

Заметим сначала, что вблизи положения равновесия системы ($q_1 = 0, q_2 = 0, \dots, q_k = 0$) потенциальная энергия $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_k)$ может быть разложена в степенной ряд, сходимость которого в области достаточно малых q_j обеспечена. Принимая во внимание, что в точке $(0, 0, \dots, 0)$ потенциальная энергия принята равной нулю и что по условию экстремума равны нулю все ее первые производные в этой точке, будем иметь следующее разложение потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \Pi(q_1, q_2, \dots, q_k) = & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} \right)_0 q_1^2 + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} \right)_0 q_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_k^2} \right)_0 q_k^2 + \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0 q_1 q_2 + \dots + 2 \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_{k-1} \partial q_k} \right)_0 q_{k-1} q_k \right] + \dots \end{aligned} \quad (27.97)$$

Однородный многочлен второй степени (квадратичная форма) будет *знакоопределенным*, если он сохраняет постоянный знак при вещественных значениях аргументов, обращаясь в нуль только при обращении в нуль всех аргументов. Если же этот многочлен, сохраняя знак, может обращаться в нуль при значениях аргументов, не равных одновременно нулю, то он называется *знакопостоянным*. Так, квадратичная форма

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2$$

является знакоопределенной, тогда как форма

$$f_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

будет положительной знакопостоянной, так как она обращается в нуль на прямой $y = -x$, а не только в начале координат.

Известно, что если члены второго порядка, входящие в разложение (27.97), образуют знакоопределенную положительную квадратичную форму, то функция Π при достаточно малых значениях аргументов остается положительной, т. е. имеет в начале ко-

* См. книги А. М. Ляпунова [19], Н. Г. Четаева [28], Д. Р. Меркина [20].

ординат минимум. Если же эта квадратичная форма знакопостоянна и положительна, то суждение о наличии или отсутствии минимума Π не может быть получено из рассмотрения членов второго порядка и требует привлечения членов высших порядков.

Точно так же функция Π будет иметь в начале координат максимум, если члены второго порядка в ее разложении (27.97) образуют знакоопределенную отрицательную форму. Если же эти члены образуют знакопостоянную отрицательную форму, то суждение о наличии максимума не может быть высказано без привлечения к рассмотрению членов высших порядков.

В том случае, когда квадратичная форма в разложении (27.97) может принимать как положительные, так и отрицательные значения (является *знакопеременной*), функция Π не имеет в начале координат ни максимума, ни минимума.

Приводим формулировку теорем Ляпунова.

ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА ЛЯПУНОВА. *Равновесие неустойчиво, если отсутствие минимума потенциальной энергии узнается по членам второго порядка в разложении потенциальной энергии без необходимости рассматривать члены высших порядков.*

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА ЛЯПУНОВА. *Равновесие неустойчиво, если потенциальная энергия имеет максимум и наличие этого максимума может быть установлено из рассмотрения членов наименее высокого порядка, которые действительно имеются в разложении потенциальной энергии в степенной ряд.*

Рассмотрим теперь частный случай, когда на систему точек M_i , $i = 1, 2, \dots, n$, действуют постоянные по величине и одинаковые по направлению силы F_i с отличным от нуля главным вектором; тогда, принимая общее направление этих сил за ось Oz , будем иметь следующее выражение потенциальной энергии:

$$\Pi = \sum_{i=1}^n (\pm F_i z_i) = z_C \sum_{i=1}^n (\pm F_i),$$

где z_C — координата центра параллельных сил F_i .

На основании принципа возможных перемещений, выраженного в форме (27.47), убедимся, что необходимое и достаточное условие равновесия такого рода системы совпадает с необходимым условием экстремальности координаты z_C ; действительно,

$$\delta\Pi = \left[\sum_{i=1}^n (\pm F_i) \right] \delta z_C = 0,$$

или $\delta z_C = 0$.

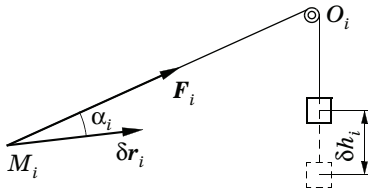


Рис. 363

В частности, если за силы F_i принять силы тяжести, пропорциональные массам точек, то последнее условие приведет к необходимому условию экстремальности высоты центра масс системы над горизонтальной плоскостью.

Теорема Лагранжа — Дирихле приводит в этом случае к следующему положению.

Если центр масс системы тяжелых точек занимает наинизшее из возможных смежных положений, то это положение равновесия системы будет устойчивым.

Э. Торричелли в исследованиях по статике твердых и жидких тел считал этот принцип основным и самоочевидным. Лагранж в «Аналитической механике» [36] использовал принцип Торричелли для доказательства принципа возможных перемещений. Не останавливаясь на подробном изложении этого классического доказательства, приведем следующее простое рассуждение. Заменим приложенные к системе силы натяжениями переброшенных через идеальные блоки нитей, к концам которых привешены грузы, соответственно равные по величине приложенным к системам силам. Рассматривая полученную таким образом новую систему как эквивалентную предыдущей и принимая принцип Торричелли, составим условие равновесия системы в виде (рис. 363)

$$\sum_{i=1}^n F_i \delta h_i = 0.$$

Если $\vec{r}_i = \overline{O_i M_i}$ — вектор-радиус точки M_i относительно неподвижной оси O_i блока, размеры которого пренебрежимо малы, а $\delta \vec{r}_i$ — возможное перемещение точки M_i системы, то

$$\delta h_i = -\delta r_i = \delta s_i \cos(\widehat{\vec{F}_i, \delta \vec{r}_i}) = \delta s_i \cos \alpha_i,$$

где $\delta s_i = |\delta \vec{r}_i|$, $\delta r_i = \delta |\vec{r}_i|$. При этом предыдущее уравнение принимает вид

$$\sum_{i=1}^n F_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0,$$

тождественный с уравнением принципа возможных перемещений (27.46).

Приведенное доказательство отличается от классического доказательства Лагранжа тем, что в последнем вместо блоков используется система полиспаатов, вследствие чего вопрос сводится к рассмотрению равновесия лишь одного груза.

Пример 127. Груз M весом G подвешен на стержне OM , свободно проходящем сквозь вращающийся вокруг оси O цилиндр и шарнирно соединенном в точке A с коромыслом AO_1 , вращающимся около неподвижного центра O_1 (размеры указаны на рисунке). Исследовать устойчивость вертикального положения равновесия маятника (рис. 364).

Составим выражение потенциальной энергии системы, пренебрегая весом стержней по сравнению с весом груза M :

$$\Pi = -Gy_C,$$

где ордината y_C центра тяжести груза равна

$$y_C = h - r \cos \varphi + l \cos \psi,$$

причем углы φ и ψ (система имеет одну степень свободы) связаны соотношением

$$\frac{\sin(\varphi + \psi)}{h} = \frac{\sin \psi}{r}.$$

Предполагая исследовать устойчивость системы вблизи положения, определяемого углами $\varphi = 0$, $\psi = 0$, можно считать углы φ и ψ малыми и принять

$$\sin \varphi \approx \varphi, \quad \sin \psi \approx \psi; \quad \cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \quad \cos \psi \approx 1 - \frac{\psi^2}{2};$$

тогда будем иметь

$$\frac{\psi + \varphi}{h} = \frac{\psi}{r}, \quad \psi = \frac{r}{h-r} \varphi,$$

и, следовательно,

$$y_C = h - r + l + \frac{1}{2} (r\varphi^2 - l\psi^2) = h - r + l + \frac{r}{2} \left[1 - \frac{rl}{(h-r)^2} \right] \varphi^2,$$

$$\Pi = \frac{Gr}{2} \left[\frac{rl}{(h-r)^2} - 1 \right] \varphi^2.$$

Потенциальная энергия будет при $\varphi = 0$ иметь минимум, если

$$\frac{rl}{(h-r)^2} - 1 > 0,$$

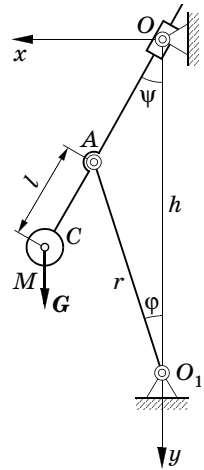


Рис. 364

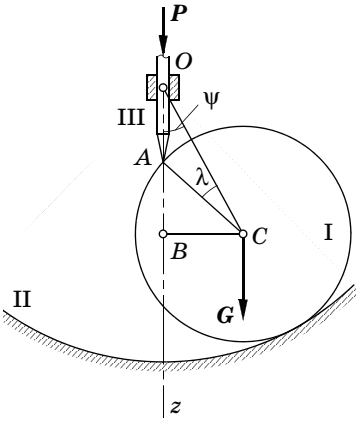


Рис. 365

и, таким образом,

$$\sqrt{rl} > h - r.$$

При этом условии исследуемое положение равновесия устойчиво. Наоборот, при

$$\sqrt{rl} < h - r$$

оно будет неустойчивым (по первой теореме Ляпунова). Чтобы решить вопрос об устойчивости равновесия при $\sqrt{rl} < h - r$, необходимо иметь разложение потенциальной энергии в ряд с точностью до членов по крайней мере порядка φ^4 (вследствие симметрии механизма относительно вертикальной оси нечетные степени φ в этом разложении отсутствуют).

Пример 128. Цилиндр I (рис. 365) радиусом a соприкасается с внутренней поверхностью неподвижного цилиндра II радиусом R и находится под действием силы тяжести G и постоянной по величине и направлению силы P , передаваемой ему при помощи вертикального штифта III, скользящего в направляющих вдоль вертикального диаметра цилиндра II. Исследовать устойчивость наинизшего положения цилиндра I, пренебрегая силами трения между штифтом и поверхностью этого цилиндра.

Обозначив через z_C и z_A координаты точек C и A приложения сил G и P к цилиндру, составим выражение потенциальной энергии

$$\Pi = -Gz_C - Pz_A.$$

Согласно рис. 365 имеем (O — след оси цилиндра II)

$$z_C = OB = OC \cos \psi = (R - a) \cos \psi,$$

$$z_A = OB - AB = (R - a) \cos \psi - a \cos(\psi + \lambda).$$

Между углами ψ и λ существует соотношение

$$\sin(\psi + \lambda) = \frac{R - a}{a} \sin \psi,$$

которое легко получить, рассматривая треугольник OAC .

Используя малость углов ψ и λ в положении цилиндра, смежном с исследуемым наинизшим его положением, получаем

$$\psi + \lambda = \frac{R - a}{a} \psi,$$

$$z_C = R - a - \frac{1}{2} (R - a) \psi^2,$$

$$z_A = R - 2a - \frac{1}{2} (R - a) \psi^2 + \frac{1}{2} a (\psi + \lambda)^2 = R - 2a + \frac{1}{2} \frac{(R - a)(R - 2a)}{a} \psi^2.$$

Опуская несущественную постоянную, получим следующее выражение потенциальной энергии:

$$\Pi = \frac{1}{2} (R - a) \left(G - \frac{R - 2a}{a} P \right) \Psi^2. \quad (27.98)$$

Отсюда следуют следующие выводы.

■ Если $R \leq 2a$, то исследуемое положение равновесия устойчиво при любом соотношении сил P и G ; в частности, при $R = 2a$ сила P не будет фигурировать в выражении потенциальной энергии (27.98), что и естественно, так как в этом случае точка A будет совпадать с неподвижной точкой O .

■ Если $R > 2a$ и

$$\frac{P}{G} \frac{R - 2a}{a} < 1,$$

то равновесие устойчиво.

■ Если $R > 2a$, но

$$\frac{P}{G} \frac{R - 2a}{a} > 1,$$

то, согласно первой теореме Ляпунова, равновесие неустойчиво.

■ В случае

$$\frac{P}{G} \frac{R - 2a}{a} = 1$$

требуется рассмотреть знак членов четвертого порядка малости в выражении потенциальной энергии.

Глава XXVIII

Кинетостатика и общее уравнение динамики

§ 148. Принцип д'Аламбера

В истории механики принцип д'Аламбера получал различные трактовки. Начнем с той его формулировки, которая наиболее близка в приведенной в классическом «Трактате по динамике» д'Аламбера [31], вышедшем в свет в издании Парижской академии в 1743 г.

Дополняя динамику свободных тел Ньютона, д'Аламбер* рассматривает несвободные тела как окруженные действующими на них другими телами. Определяя *движение* тела как *скорость тела с учетом ее направления*, т. е. как вектор скорости материальной точки, д'Аламбер отличает *передаваемое* телу движение от действительно *воспринимаемого* телом движения и поясняет, что из-за действия на данное тело окружающих его тел часть движения, определяемая разностью между передаваемым и воспринимаемым, не может быть воспринята телом и является *потерянной*.

Совокупность *потерянных движений*, взятая отдельно и сообщенная несвободному телу или системе тел, как *невоспринимаемая*, не может изменить состояния их движения. Эти простые соображения приводят к следующей исторически первой формулировке принципа д'Аламбера.

ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА. I. Если несвободной системе тел сообщить только *потерянные движения*, то эти движения взаимно уничтожатся, а тела сохраняют состояние покоя.

В приведенном рассуждении используется характерный для той эпохи образ мгновенной передачи точкам системы конечных скоростей, т. е. перенос движения с помощью ударов.

Рассматривая непрерывную передачу точкам системы бесконечно малых скоростей и отнеся их к бесконечно малым промежуткам времени, перейдем к формулировке принципа, использующей понятие *ускорения*.

Обозначим через w'_i передаваемые точкам M_i системы ускорения, а через w_i действительно воспринимаемые ускорения. Тогда геометрические разности

$$\Delta w_i = w'_i - w_i \quad (28.1)$$

определяют *потерянные ускорения*, а величины

$$P_i = m_i \Delta w_i = m_i (w'_i - w_i), \quad (28.2)$$

равные произведению масс m_i точек M_i на потерянные ускорения, могут быть названы *потерянными силами*. Принцип д'Аламбера при этом получает следующую формулировку.

* О д'Аламбере см. т. I, с. 407.

ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА. II. Потерянные силы, будучи приложены к точкам несвободной системы, не нарушают ее равновесия.

Принцип д'Аламбера сводит, таким образом, динамику несвободной системы к задаче статики о равновесии несвободной системы под действием совокупности потерянных сил.

В приведенных выше формулировках принцип д'Аламбера является самостоятельным принципом динамики несвободных систем, не зависящим ни от появившегося значительно позднее понятия связи, ни от принципа освобождаемости.

Выражение потерянной силы (28.2) можно несколько видоизменить, если, применяя второй закон Ньютона, справедливый для свободной точки, определить произведение

$$m_i w'_i = F_i$$

как равнодействующую *задаваемых* сил, т. е. по предыдущему сил, которые продолжали бы действовать на систему по исчезновении связей. Потерянные силы (28.2) могут быть теперь представлены в виде

$$P_i = F_i - m_i w_i. \quad (28.3)$$

Другую трактовку потерянных сил можно получить, если, пользуясь принципом освобождаемости, ввести в рассмотрение равнодействующую R_i реакций связей и написать уравнение движения несвободной точки M массы m_i в форме

$$m_i w_i = F_i + R_i;$$

тогда, сравнивая с (28.3), будем иметь

$$P_i = -R_i. \quad (28.4)$$

Равенство (28.4) можно трактовать следующим образом.

ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА. III. Потерянные силы, будучи приложены сами по себе к точкам системы, уравниваются реакциями связей, или, как еще иногда говорят, уравниваются на связях.

В следующем параграфе приводится еще одна трактовка потерянных сил, основанная на использовании понятия *сил инерции*. Такая трактовка приближает принцип д'Аламбера к известному принципу Германа — Эйлера. В этой своей форме принцип д'Аламбера становится основой технических применений динамики несвободных систем, объединяемых под общим наименованием *кинетостатика*.

§ 149. Метод кинетостатики

Введем в рассмотрение силы инерции точек системы S_i , определяя их, как это уже делалось в § 84, равенствами

$$S_i = -m_i w_i. \quad (28.5)$$

Тогда, согласно (28.4), потерянная сила представится геометрической суммой задаваемой силы и силы инерции

$$P_i = F_i + S_i.$$

Ранее приведенная формулировка принципа д'Аламбера может быть теперь заменена следующей.

ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА. IV. *Если к точкам несвободной системы наряду с задаваемыми силами приложить силы инерции, то совокупность этих сил уравновешивается реакциями связей.*

Применение принципа д'Аламбера в только что указанной формулировке служит основанием сведения задачи динамики к задаче статики с последующим использованием принципа возможных перемещений (см. далее § 154). С простейшим случаем применения приема сведения задачи динамики к задаче статики мы уже имели дело в § 84, рассматривая движение отдельной материальной точки. Физическое разъяснение такого приема для указанного простейшего случая будет дано в гл. XXX, посвященной динамике относительного движения. В общем случае несвободной системы материальных точек прием сведения задач динамики к задачам статики оправдывается приведенной выше формулировкой принципа д'Аламбера.

Именно эта трактовка принципа д'Аламбера легла в основу *кинетостатики* — отрасли технической механики, ставящей целью применение методов статики к решению динамических задач теории машин и механизмов. Эти методы зародились в начале XIX века и получили свое завершение в начале XX века.

§ 150. Кинетостатика плоского движения твердого тела

Остановимся на основной для кинетостатики плоских механизмов задаче о плоском движении твердого тела, уже рассмотренной ранее (§ 134) другим способом. Пусть твердое тело совершает плоское движение параллельно плоскости, являющейся

плоскостью симметрии тела. Обозначим через F_1, F_2, \dots, F_n задаваемые силы, приложенные к телу и действующие в указанной плоскости симметрии. Обозначим через V главный вектор этих сил, через $m^{(O)}$ — их главный момент относительно некоторого полюса O :

$$V = \sum_{i=1}^N F_i, \quad m^{(O)} = \sum_{i=1}^N m_O(F_i), \quad (28.7)$$

а через S и $m_S^{(O)}$ — главный вектор сил инерции и главный момент сил инерции относительно того же полюса:

$$S = \sum_{i=1}^N S_i = -\sum_{i=1}^N m_i w_i, \quad m_S^{(O)} = \sum_{i=1}^N m_O(S_i), \quad (28.8)$$

где N — число частиц, на которое мысленно подразделено тело. В соответствии со сказанным выше уравнения движения тела можно написать в форме уравнений статики для плоской системы сил, добавив к приложенным силам силы инерции; поэтому получим

$$V + S = 0, \quad m^{(O)} + m_S^{(O)} = 0. \quad (28.9)$$

Остается составить выражения для S и $m_S^{(O)}$. По определению центра масс имеем (§ 104)

$$S = -\sum_{i=1}^N m_i w_i = -M w_C, \quad (28.10)$$

где w_C — ускорение центра масс тела. Это выражение главного вектора сил инерции является общим для любых систем материальных точек, а не относящимся только к случаю плоского движения твердого тела. В последнем же случае (§ 58) имеем

$$w_C = -\omega^2 r'_{QC} + \varepsilon \times r'_{QC}, \quad (28.11)$$

где r'_{QC} — вектор-радиус центра масс относительно мгновенного центра ускорений Q . В соответствии с этим можно разложить силу инерции (28.10) на две:

$$S = S^{(n)} + S^{(b)}, \quad (28.12)$$

где $S^{(n)}$ — *центростремительная*, а $S^{(b)}$ — *вращательная* сила инерции:

$$S^{(n)} = M\omega^2 r'_{QC}, \quad S^{(b)} = -M\varepsilon \times r'_{QC}. \quad (28.13)$$

Переходим к вычислению главного момента сил инерции $m_S^{(O)}$. За полюс O примем пока произвольную точку тела в его плоскости симметрии. Имеем

$$w_i = w_0 + \varepsilon \times r'_i - \omega^2 r'_i, \quad (28.14)$$

где r'_i — вектор-радиус точки тела относительно полюса O .

Воспользовавшись соотношениями

$$r'_i \times r'_i = 0, \quad r'_i \times (\varepsilon \times r'_i) = \varepsilon r_i'^2 - r'_i (r'_i \cdot \varepsilon) = \varepsilon r_i'^2,$$

причем последнее имеет место, так как $r'_i \perp \varepsilon$, получим

$$m_O(S_i) = -r'_i \times m_i (w_0 + \varepsilon \times r'_i - \omega^2 r'_i) = w_0 \times m_i r_i - \varepsilon m_i r_i'^2.$$

После суммирования в соответствии со второй формулой (28.8) найдем, вспомнив определение центра масс и момента инерции,

$$m_S^{(O)} = -r'_C \times M w_0 - J_O \varepsilon, \quad (28.15)$$

где r'_C — вектор-радиус центра масс относительно полюса O , J_O — момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через O .

Рассмотрим два частных случая. Примем за полюс O центр масс C тела. Тогда $r'_i = 0$ и, согласно (28.15), будет

$$m_S^{(C)} = -J_C \varepsilon. \quad (28.16)$$

Силы инерции приводятся к главному вектору S , определяемому в соответствии с (28.13), и паре с моментом $m_S^{(C)}$ (рис. 366). Уравнения (28.9) принимают вид

$$V - M w_C = 0, \quad m^{(C)} - J_C \varepsilon = 0. \quad (28.17)$$

Примем теперь за полюс O мгновенный центр ускорения Q . Тогда $w_0 = 0$; далее, по известной теореме о моментах инерции относительно параллельных осей (§ 115),

$$J_Q = M(\rho_C^2 + d^2),$$

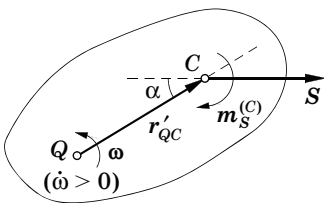


Рис. 366

где ρ_C — радиус инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, а $d = r'_{QC}$ — расстояние от мгновенного центра ускорений до центра масс. Из (28.15) находим

$$m_S^{(Q)} = -M (\rho_C^2 + d^2) \varepsilon. \quad (28.18)$$

Плоская система сил инерции S_i , таким образом, приведена к силе S и паре с моментом $m_S^{(Q)}$; эту систему сил можно свести также к одной равнодействующей S^* , равной S по величине и направлению и расположенной надлежащим образом. Отложим вдоль прямой, соединяющей точки Q и C , отрезок QL длиной

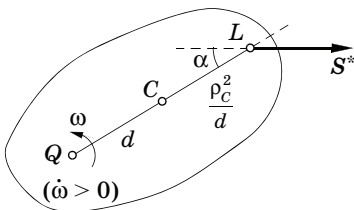


Рис. 367

$$l = \frac{\rho_C^2 + d^2}{d}. \tag{28.19}$$

Пусть r'_{QL} — вектор-радиус конца L (рис. 367) этого отрезка относительно точки Q ; тогда

$$r'_{QL} = r'_{QC} \frac{l}{d} = r'_{QC} \frac{\rho_C^2 + d^2}{d^2}. \tag{28.20}$$

Если представить себе физический маятник, имеющий Q осью подвеса, то точка L будет осью качаний этого маятника (§ 117). Нетрудно видеть, что линия действия равнодействующей S^* сил инерции должна проходить через точку L . Действительно,

$$m_{S^*}^{(Q)} = r'_{QL} \times S^* = r'_{QL} \times S^{(ц)} + r'_{QL} \times S^{(в)} = r'_{QL} \times S^{(в)},$$

так как первое слагаемое (момент центробежной силы инерции) обращается в нуль, поскольку $r'_{QL} \times r'_{QC} = 0$. Остается вычислить второе слагаемое. По (28.13) и (28.20) найдем

$$\begin{aligned} r'_{QL} \times S^{(в)} &= -M \frac{\rho_C^2 + d^2}{d^2} r'_{QC} \times (\epsilon \times r'_{QC}) = \\ &= -M \frac{\rho_C^2 + d^2}{d^2} \left[\epsilon r'_{QC}{}^2 - r'_{QC} (\epsilon \cdot r'_{QC}) \right]. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в скобках равно нулю (скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов); замечая еще, что $r'_{QL} = d^2$, получаем по (28.18)

$$r'_{QL} \times S^{(в)} = -M (\rho_C^2 + d^2) \epsilon = m_S^{(Q)}. \tag{28.21}$$

Таким образом, главный момент $m_S^{(Q)}$ относительно точки Q плоской системы сил инерции S_i равен моменту относительно той

же точки главного вектора этих сил S , если за линию действия последнего принять прямую, проходящую через точку L параллельно S . Это и доказывает, что S^* по величине, направлению и линии действия совпадает с равнодействующей сил инерции твердого тела, совершающего плоское движение (рис. 366).

Обозначим через R^* равнодействующую плоской системы приложенных сил F_1, F_2, \dots, F_n . Теперь можно получить уравнения движения, потребовав, чтобы две силы R^* и S^* были равны по величине, противоположны по направлению и приложены вдоль одной прямой, проходящей через ось качания воображаемого физического маятника, осью подвеса которого является мгновенный центр ускорений.

В частном случае твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости симметрии тела, все выводы остаются справедливыми; за мгновенный центр ускорений в этом случае надо принять точку пересечения оси вращения с указанной плоскостью. Если в еще более частном случае ось вращения проходит через центр масс тела (последний обязательно лежит в плоскости симметрии тела), то по (28.13) и (28.15)

$$S = 0, \quad m_S^{(O)} = -J_C \varepsilon, \quad (28.22)$$

т. е. совокупность сил инерции в этом случае приводится к паре с моментом $m_S^{(O)}$, равным по величине $J_C \varepsilon$ и направленным в сторону, противоположную вектору углового ускорения ε .

Пример 129. Рассмотреть движение системы, состоящей из барабана весом G (массой M) и радиусом R и груза весом G_1 (массой M_1), висящего на веревке, намотанной на барабан (рис. 368); массой веревки пренебрегаем. Определить движение такой системы и натяжение веревки, пренебрегая силой трения в оси барабана и считая барабан однородным сплошным цилиндром.

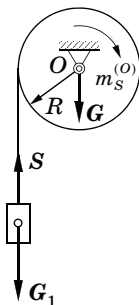


Рис. 368

Обозначим угловое ускорение барабана через $\tilde{\varepsilon}$, считая $\tilde{\varepsilon}$ положительным, если барабан вращается ускоренно в направлении, обратном часовой стрелке. Вводя в рассмотрение силу инерции груза, равную $S = M_1 R \varepsilon$, и вспоминая, что по (28.22) силы инерции барабана статически эквивалентны паре $m_S^{(O)} = J_O \varepsilon$, составляем уравнение моментов относительно оси вращения:

$$M_1 g R - S R - m_S^{(O)} = 0,$$

или

$$M_1 g R - M_1 R^2 \varepsilon - J_O \varepsilon = 0. \quad (28.23)$$

Вспоминая, что $J_0 = MR^2/2$, получаем

$$\varepsilon = \frac{M_1}{(2M_1 + M) R} g.$$

Желая найти натяжение веревки, применим принцип освобождаемости: рассечем веревку и приложим к грузу натяжение веревки N как задаваемую силу; тогда, написав уравнение равновесия груза под действием силы тяжести G_1 , натяжения N и силы инерции S , найдем

$$G_1 - N - S = 0,$$

$$N = G_1 - S = M_1 g - M_1 R \varepsilon = \frac{M}{2M_1 + M} M_1 g.$$

Пример 130. Центр тяжести C физического маятника (рис. 369) весом G и массой M находится на расстоянии s от оси подвеса O . Радиус инерции относительно оси, параллельной оси подвеса и проходящей через центр тяжести, равен ρ_C . Определить реакции оси.

Равнодействующая сил инерции приложена в центре качаний L маятника; ее можно разложить на центробежную и вращательную составляющие, равные

$$S^{(ц)} = Ms\dot{\varphi}^2, \quad S^{(в)} = Ms\ddot{\varphi}.$$

Остается рассмотреть задачу статики, т. е. написать три уравнения равновесия для плоской системы сил $S^{(в)}$, $S^{(ц)}$, G , T , N , где G — сила тяжести, N , T — составляющие реакции оси O , направления которых, принимаемые за положительные, указаны на рис. 369. Получаем

$$\begin{aligned} T + Mg \sin \varphi + Ms\ddot{\varphi} &= 0, \\ -N + Mg \cos \varphi + M\dot{\varphi}^2 &= 0 \end{aligned} \tag{28.24}$$

и

$$Ms \left(s + \frac{\rho_C^2}{s} \right) \ddot{\varphi} + Mgs \sin \varphi = 0. \tag{28.25}$$

Из последнего уравнения найдем

$$\ddot{\varphi} = -\frac{gs}{\rho_C^2 + s^2} \sin \varphi, \tag{28.26}$$

или после интегрирования

$$\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_0^2 = \frac{2gs}{\rho_C^2 + s^2} (\cos \varphi - \cos \varphi_0), \tag{28.27}$$

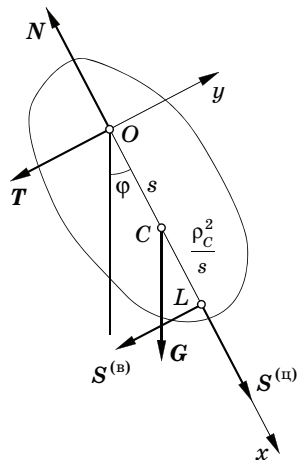


Рис. 369

где $\dot{\varphi}_0$, φ_0 — начальные значения угловой скорости и угла отклонения маятника; это соотношение можно получить также, применив теорему об изменении кинетической энергии. Получаем

$$T = -\frac{Mg\rho_C^2}{s^2 + \rho_C^2} \sin \varphi,$$

$$N = \left(\frac{3s^2 + \rho_C^2}{s^2 + \rho_C^2} \cos \varphi - \frac{2s^2}{s^2 + \rho_C^2} \cos \varphi_0 \right) Mg + Ms\dot{\varphi}^2.$$

Пусть, в частности, маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной l ; тогда $s = l/2$, $\rho_C^2 = l^2/12$ и, следовательно,

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{2l} \sin \varphi, \quad \dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_0^2 = \frac{3g}{2l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

Значения составляющих реакций оси будут

$$T = -\frac{1}{4} Mg \sin \varphi, \quad N = \frac{Ml\dot{\varphi}^2}{2} + \left(\frac{5}{2} \cos \varphi - \frac{3}{2} \cos \varphi_0 \right) Mg.$$

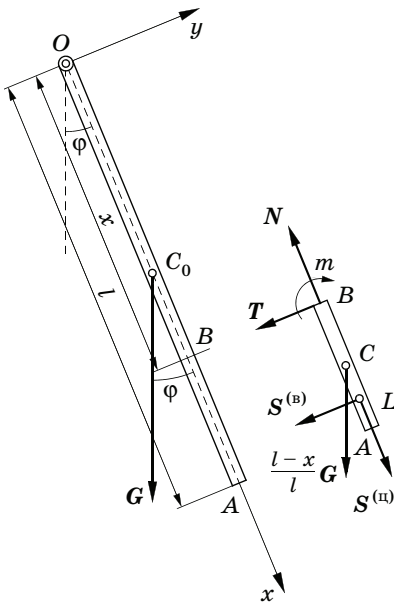


Рис. 370

Пример 131. Тонкий однородный стержень OA весом G , массой M и длиной l совершает колебания в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня O . Определить продольное усилие N , поперечное усилие T и изгибающий момент в любом сечении x стержня (рис. 370).

Рассмотрим часть стержня BA длиной $(l-x)$; вес этой части равен $G(l-x)/l$, ее центр тяжести C расположен на расстоянии $OC = (l+x)/2$ от оси вращения, радиус инерции ее относительно оси, параллельной оси вращения и проходящей через C , находится из соотношения $\rho_C^2 = (l-x)^2/12$, положение оси качаний воображаемого физического маятника (вращающегося вокруг точки O) определяется отрезком

$$CL = \frac{\rho_C^2}{OC} = \frac{1}{6} \frac{(l-x)^2}{l+x}.$$

На часть стержня BA действуют следующие силы: сила тяжести $[(l-x)/l]G$, приложенная в центре тяжести C этой части, силы N , T и пара с моментом m , представляющие действие на BA верхней части стержня — они и являются искомыми продольной и поперечной силами и изгибающим моментом в сечении B ; направления их, принимаемые за положительные, изображены на рис. 370 справа. Применяя метод кинестатики, присоединим к указанным силам силы инерции рассматриваемой части стержня; они могут быть заменены одной равнодействующей S , проходящей через точку L ; сила S может быть разложена на центробежную составляющую $S^{(u)}$, равную по величине

$$S^{(u)} = M \frac{l-x}{l} \frac{1}{2} (l+x) \dot{\varphi}^2 = \frac{M(l^2-x^2)}{2l} \dot{\varphi}^2,$$

и вращательную составляющую $S^{(v)}$, равную

$$S^{(v)} = M \frac{l-x}{l} \frac{1}{2} (l+x) \ddot{\varphi} = \frac{M(l^2-x^2)}{2l} \ddot{\varphi}.$$

Остается написать уравнения статики для части стержня. Из уравнений проекций на оси x и y найдем

$$N = \frac{Mg(l-x)}{l} \cos \varphi + \frac{M(l^2-x^2)}{2l} \dot{\varphi}^2,$$

$$T = \frac{Mg(l-x)}{l} \sin \varphi - \frac{M(l^2-x^2)}{2l} \ddot{\varphi},$$

а из уравнения моментов относительно точки B получим

$$m = -\frac{Mg(l-x)^2}{2l} \sin \varphi - \frac{M(l^2-x^2)}{2l} \left[\frac{1}{6} \frac{(l-x)^2}{l+x} + \frac{l-x}{2} \right] \ddot{\varphi}.$$

Вместо $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ подставим их значения, приведенные в решении предыдущего примера. Получим

$$T = -\frac{Mg(l-x)(l-3x)}{4l^2} \sin \varphi,$$

$$N = \frac{Mg(l-x)}{l} \left[\left(1 + \frac{3}{2} \frac{l+x}{l} \right) \cos \varphi - \frac{3(l+x)}{2l} \cos \varphi_0 \right] + \frac{M(l^2-x^2)}{2l} \dot{\varphi}_0^2,$$

и далее

$$m = \frac{Mgx(l-x)^2}{4l^2} \sin \varphi_0.$$

При $x=l$ находим $T=0$, $N=0$, что и должно быть, так как конец стержня A не нагружен; при $x=0$ получаем значения T и N , найденные в предыдущем примере. Изгибающий момент m обращается в нуль при

$x = 0$ и $x = l$; он достигает максимума, равного $(Gl/27) \sin \varphi$ при $x = l/3$. Нетрудно проверить, что $T = -dm/dx$, как это должно быть на основании известной теоремы, доказываемой в курсах сопротивления материалов.

§ 151. Реакции оси вращающегося тела

Переходя к отдельным задачам динамики твердого тела, остановимся на вопросе об определении реакций в двух точках закрепления оси вращающегося твердого тела.

Примем ось вращения (рис. 371) за ось O_1z , поместив начало системы осей O_1xyz , связанных с телом, в закрепленной точке O_1 (подпятник); в точке O_2 на расстоянии $O_1O_2 = h$ помещен подшипник оси вращения.

Применим метод кинестатики; мысленно освободив тело от опорных закреплений O_1 и O_2 и введя в рассмотрение искомые реакции N_1^* и N_2^* , потребуем, чтобы главный вектор этих реакций, всех задаваемых сил F_1, F_2, \dots, F_n и сил инерции, а также их главный момент относительно некоторой точки были равны нулю.

Главный вектор сил инерции по формуле (28.10) равен (M — масса тела)

$$S = -Mw_C = -M(\varepsilon \times r_C + \omega \times v_C), \quad (28.28)$$

где ω — вектор угловой скорости тела, ε — вектор углового ускорения, $v_C = \omega \times r_C$ — скорость центра масс, r_C — его вектор-радиус.

Вычислим главный момент L сил инерции относительно точки O_1 ; сила инерции элементарной массы dm в точке с вектором-радиусом r равна

$$dS = -(\varepsilon \times r + \omega \times v) dm,$$

а ее момент относительно точки O_1 будет

$$\begin{aligned} dL &= r \times dS = \\ &= -[r \times (\varepsilon \times r) + r \times (\omega \times v)] dm. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} r \times (\varepsilon \times r) &= \varepsilon r^2 - r (\varepsilon \cdot r), \\ r \times (\omega \times v) &= \\ &= \omega (r \cdot v) - v (r \cdot \omega) = -v (r \cdot \omega), \end{aligned}$$

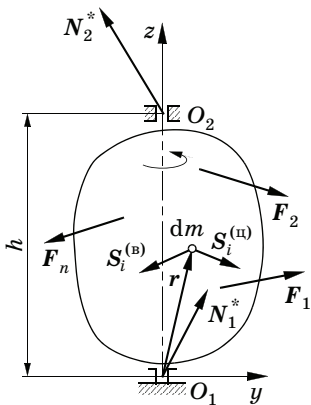


Рис. 371

так как скалярное произведение $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$ двух взаимно-перпендикулярных векторов равно нулю; следовательно,

$$\mathbf{L} = \int_{(M)} d\mathbf{L} = -\boldsymbol{\varepsilon} \int_{(M)} r^2 dm + \int_{(M)} \mathbf{r} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{r}) dm + \int_{(M)} \mathbf{v} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) dm. \quad (28.29)$$

Найдем проекции момента \mathbf{L} на оси O_1x , O_1y , O_1z , т. е. главные моменты сил инерции относительно этих осей. Проекции векторов, входящих в выражение (28.29), равны

$$\begin{aligned} \mathbf{r}: (x, y, z), & \quad \boldsymbol{\varepsilon}: (0, 0, \tilde{\varepsilon}), \\ \boldsymbol{\omega}: (0, 0, \tilde{\omega}), & \quad \mathbf{v}: (-\tilde{\omega}y, \tilde{\omega}x, 0). \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} L_x &= \tilde{\varepsilon} \int_{(M)} xz dm - \omega^2 \int_{(M)} yz dm, \\ L_y &= \tilde{\varepsilon} \int_{(M)} yz dm + \omega^2 \int_{(M)} xz dm, \\ L_z &= -\tilde{\varepsilon} \int_{(M)} (x^2 + y^2 + z^2) dm + \tilde{\varepsilon} \int_{(M)} z^2 dm = -\tilde{\varepsilon} \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm, \end{aligned}$$

или по формулам (26.4)

$$L_x = J_{zx} \tilde{\varepsilon} - J_{yz} \omega^2, \quad L_y = J_{yz} \tilde{\varepsilon} + J_{zx} \omega^2, \quad L_z = -J_z \tilde{\varepsilon}. \quad (28.30)$$

Каждую из реакций N_1^* и N_2^* представим в виде суммы двух слагаемых:

$$N_1^* = N_1^{(\text{ст})} + N_1, \quad N_2^* = N_2^{(\text{ст})} + N_2,$$

определив $N_1^{(\text{ст})}$ и $N_2^{(\text{ст})}$ как статические части реакций, т. е. те реакции опор, которые возникли бы, если бы тело оставалось под действием задаваемых сил в покое; слагаемые N_1 и N_2 представляют собой добавки к опорным реакциям — *динамические* реакции, возникающие вследствие вращения тела.

Статические реакции $N_1^{(\text{ст})}$ и $N_2^{(\text{ст})}$ могли бы быть найдены из уравнений статики

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} + N_{1x}^{(\text{ст})} + N_{2x}^{(\text{ст})} &= 0, & \sum_{i=1}^n F_{iy} + N_{1y}^{(\text{ст})} + N_{2y}^{(\text{ст})} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} + N_{1z}^{(\text{ст})} + N_{2z}^{(\text{ст})} &= 0, & & \\ \sum_{i=1}^n m_x(\mathbf{F}_i) - h N_{2y}^{(\text{ст})} &= 0, & \sum_{i=1}^n m_y(\mathbf{F}_i) + h N_{2x}^{(\text{ст})} &= 0. \end{aligned} \quad (28.31)$$

Последнего уравнения — уравнения моментов относительно оси вращения — мы не написали; реакции в него не входят, и само это уравнение как уравнение статики не имеет места, так как вращающий момент $\sum_{i=1}^n m_z(\mathbf{F}_i)$, вообще говоря, отличен от нуля.

Составим уравнения кинестатики, содержащие динамические добавки к реакциям; они имеют вид

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n F_{ix} + N_{1x}^{(cr)} + N_{2x}^{(cr)} + N_{1x} + N_{2x} + S_x &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n F_{iy} + N_{1y}^{(cr)} + N_{2y}^{(cr)} + N_{1y} + N_{2y} + S_y &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n F_{iz} + N_{1z}^{(cr)} + N_{2z}^{(cr)} + N_{1z} + N_{2z} &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n m_x(\mathbf{F}_i) - h N_{2y}^{(cr)} - hN_{2y} + L_x &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n m_y(\mathbf{F}_i) + h N_{2x}^{(cr)} + hN_{2x} + L_y &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n m_z(\mathbf{F}_i) + L_z &= 0.
 \end{aligned} \tag{28.32}$$

Здесь учтено, что $S_z = 0$. В полученной системе в силу уравнений (28.31) можно отбросить по три первых члена в первых трех уравнениях и по два первых члена — в четвертом и пятом; для определения динамических добавок к опорным реакциям получаем три уравнения проекций сил

$$N_{1x} + N_{2x} + S_x = 0, \quad N_{1y} + N_{2y} + S_y = 0, \quad N_{1z} + N_{2z} = 0 \tag{28.33}$$

и два уравнения моментов

$$-hN_{2y} + L_x = 0, \quad hN_{2x} + L_y = 0. \tag{28.34}$$

Третье уравнение моментов

$$\sum_{i=1}^n m_z(\mathbf{F}_i) + L_z = 0,$$

или

$$J_z \tilde{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n m_z(\mathbf{F}_i) \tag{28.35}$$

представляет собой уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси; реакции в него не входят.

По (28.28) имеем

$$S_x = -Mw_{Cx} = M(\omega^2 x_C + \tilde{\varepsilon} y_C), \quad (28.36)$$

$$S_y = -Mw_{Cy} = M(\omega^2 y_C - \tilde{\varepsilon} x_C),$$

и два первых уравнения (28.33) принимают вид

$$N_{1x} + N_{2x} = -M(\omega^2 x_C + \tilde{\varepsilon} y_C), \quad (28.37)$$

$$N_{1y} + N_{2y} = -M(\omega^2 y_C - \tilde{\varepsilon} x_C).$$

Из уравнений (28.34), учитывая (28.30), находим

$$N_{2x} = -\frac{1}{h} L_y = -\frac{1}{h} (J_{yz} \tilde{\varepsilon} + J_{zx} \omega^2), \quad (28.38)$$

$$N_{2y} = \frac{1}{h} L_x = \frac{1}{h} (J_{zx} \tilde{\varepsilon} - J_{yz} \omega^2),$$

что в связи с (28.37) дает

$$N_{1x} = Mw_{Cx} + \frac{1}{h} (J_{yz} \tilde{\varepsilon} + J_{zx} \omega^2), \quad (28.39)$$

$$N_{1y} = Mw_{Cy} - \frac{1}{h} (J_{zx} \tilde{\varepsilon} - J_{yz} \omega^2).$$

Продольные составляющие N_{1z} и N_{2z} динамических реакций связаны одним соотношением — третьим уравнением (28.32); как и в статике, задача их нахождения не является определенной. Если трение в подшипнике пренебрежимо мало, то $N_{2z}^{(ст)} = N_{2z} = 0$, $N_{1z} = 0$, а $N_{1z}^{(ст)}$ находится из третьего уравнения (28.32). В дальнейшем примем, что $N_{1z} = N_{2z} = 0$, т. е. что силы N_1 и N_2 действуют в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

Из (28.33) и (28.34) или (28.38) и (28.39) следует, что динамические реакции обращаются в нуль, если

$$S_x = S_y = 0, \quad L_x = L_y = 0.$$

Это приводит к двум системам однородных уравнений

$$x_C \omega^2 + y_C \tilde{\varepsilon} = 0, \quad J_{zx} \tilde{\varepsilon} - J_{yx} \omega^2 = 0,$$

$$-x_C \tilde{\varepsilon} + y_C \omega^2 = 0, \quad J_{zx} \omega^2 + J_{yz} \tilde{\varepsilon} = 0$$

с общим определителем, отличным от нуля:

$$\omega^4 + \varepsilon^2 \neq 0,$$

так что единственным решением будет

$$x_C = 0, \quad y_C = 0; \quad J_{zx} = 0, \quad J_{yz} = 0. \quad (28.40)$$

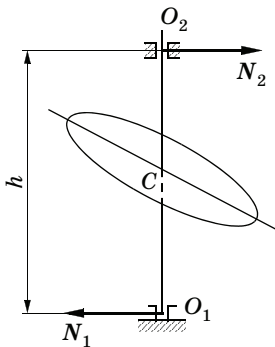


Рис. 372

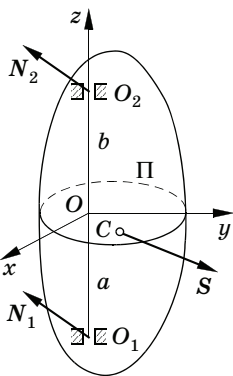


Рис. 373

Итак, если ось вращения является главной центральной осью инерции тела, то реакции подшипников этой оси при вращении тела не отличаются от статических реакций.

В этом случае говорят, что вращающееся тело уравновешено, а ось вращения называют *свободной осью*.

Предположим, что тело не уравновешено и будем различать три случая.

■ Пусть центр тяжести лежит на оси вращения, но ось вращения не является главной осью. Из уравнений (28.37) следует тогда, что

$$N_1 = -N_2; \quad (28.41)$$

дополнительное динамическое воздействие вращающегося тела на ось вращения *приводится к паре сил*; величина момента этой пары определится по формуле

$$\begin{aligned} L &= hN_1 = h \sqrt{N_{1x}^2 + N_{1y}^2} = \\ &= \sqrt{J_{zx}^2 + J_{yz}^2} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \end{aligned} \quad (28.42)$$

а его проекции на оси O_1x и O_1y найдутся из уравнений (28.38). В этом случае говорят, что тело *статически уравновешено*, но динамически не уравновешено; динамическая неуравновешенность не может быть обнаружена путем статических испытаний. Примером может служить однородный диск (рис. 372), вращающийся вокруг неподвижной оси, проходящей через центр диска, но не перпендикулярной средней плоскости диска (см. далее пример 134, с. 400).

■ Рассмотрим теперь случай, когда центр тяжести не лежит на оси вращения, но тело имеет плоскость Π материальной симметрии (рис. 373), перпендикулярную оси вращения; в этой плоскости, которую примем теперь за плоскость Oxy , будет находиться центр тяжести C тела.

Ось вращения будет главной осью в точке O , т. е. $J_{zx} = J_{yz} = 0$ и уравнения моментов (28.34) примут вид ($a = OO_1$, $b = OO_2$)

$$-N_{2y}b + N_{1y}a = 0, \quad N_{2x}b - N_{1x}a = 0,$$

т. е.

$$bN_2 = aN_1. \quad (28.43)$$

Динамические реакции представляют собой *параллельные силы*, кинетостатически уравновешивающиеся с главным вектором сил инерции S , который в этом случае можно считать приложенным в центре тяжести тела. Такая неуравновешенность называется *статической*; ее можно обнаружить и устранить, установив путем статического испытания, что центр тяжести не лежит на оси вращения (см. пример 132).

■ В общем случае силы N_1 и N_2 должны быть определены по формулам (28.38) и (28.39); динамические реакции *приводятся к силе и к паре*, которые кинетостатически уравновешивают главный вектор и главный момент силы инерции.

При больших угловых скоростях наличие даже малой неуравновешенности вызывает значительные *перегрузки подшипников* вращающегося тела. В общем случае неуравновешенность можно устранить путем присоединения или удаления двух точечных масс в произвольно выбранных плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Выбор величин m_1 и m_2 этих масс, а также их координат (x_1, y_1) и (x_2, y_2) в плоскостях $z = z_1$ и соответственно $z = z_2$ производится по уравнениям

$$\begin{aligned} Mx_C + m_1x_1 + m_2x_2 &= 0, & J_{zx} + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 &= 0, \\ My_C + m_1y_1 + m_2y_2 &= 0, & J_{yz} + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 &= 0, \end{aligned} \quad (28.44)$$

выражающим то обстоятельство, что после присоединения масс ось вращения должна стать главной центральной осью инерции. Получаем

$$\begin{aligned} m_1x_1 &= \frac{J_{zx} - Mx_Cz_2}{z_2 - z_1}, & m_1y_1 &= \frac{J_{yz} - My_Cz_2}{z_2 - z_1}, \\ m_2x_2 &= \frac{J_{zx} - Mx_Cz_1}{z_1 - z_2}, & m_2y_2 &= \frac{J_{yz} - My_Cz_1}{z_1 - z_2}. \end{aligned}$$

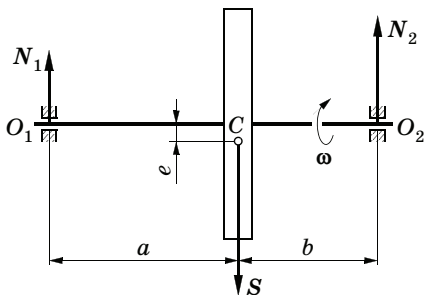


Рис. 374

Обнаружение и устранение неуравновешенности производится на специальных стендах, описываемых в литературе по уравниванию вращающихся масс.

Пример 132. Центр тяжести маховика массой M находится на расстоянии e от оси вращения; маховик вращается с постоянной угловой скоростью ω ; расстояния от его плоскости симметрии до подшипников O_1 и O_2 составляют соответственно a и b . Определить реакции подшипников (рис. 374).

К статическим реакциям силы тяжести маховика (ось вращения предполагаем горизонтальной), имеющим постоянное направление (вертикально вверх), присоединяются динамические реакции; плоскость, проходящую через центр тяжести перпендикулярно оси вращения, будем считать плоскостью материальной симметрии маховика. Приложим в центре тяжести центробежную силу инерции

$$S = -M\omega^2 e = M\omega^2 e,$$

где e — вектор-радиус центра тяжести относительно точки пересечения оси и плоскости симметрии маховика. Задача определения добавочных динамических реакций сводится к задаче статики; найдем

$$N_1 = -\frac{b}{a+b} M\omega^2 e,$$

$$N_2 = -\frac{a}{a+b} M\omega^2 e.$$

Неуравновешенность в рассматриваемом случае является статической; чтобы обнаружить ее, концы оси маховика укладывают на два хорошо выверенных горизонтальных параллельных бруска. Если центр тяжести лежит на оси вращения, то маховик будет находиться в равновесии в любом положении, в противном случае он покатится, пока центр тяжести не займет наинизшего положения.

Рассмотрим два численных примера.

■ Масса маховика $M = 3 \cdot 10^3$ кг, $e = 1 \cdot 10^{-3}$ м, $n = 300$ об/мин, $a = b$. Статические реакции будут равны

$$N_1^{(ст)} = N_2^{(ст)} = 14,72 \text{ кН.}$$

Добавочные динамические реакции будут

$$N_1 = N_2 = \frac{1}{2} Me\omega^2 \approx 1,47 \text{ кН.}$$

По сравнению со статическими динамические реакции в этом примере невелики; это объясняется малым эксцентриситетом e и сравнительно

малым числом оборотов. Последний фактор имеет преобладающее значение, так как реакции пропорциональны квадрату числа оборотов. Это иллюстрируется следующим примером.

■ Масса диска $M = 20$ кг, $n = 12\,000$ об/мин, $e = 1 \cdot 10^{-4}$ м. Получим

$$N_1^{(ст)} = N_2^{(ст)} = 98,1 \text{ Н}, \quad N_1 = N_2 = 1,57 \text{ кН},$$

т. е. динамические реакции превосходят статические в 16 раз.

П р и м е р 133. Тонкая пластинка F (рис. 375) массой M вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, расположенной в плоскости пластинки. При заданных координатах x_C и y_C центра тяжести C определить величину равнодействующей центробежных сил инерции и линию ее действия, а также положение добавочной массы величины m , присоединение которой к пластинке устраняет динамические реакции подшипников.

Направим ось Oy по оси вращения, а перпендикулярную ей ось Ox — в плоскости пластинки. Центробежные силы инерции элементарных масс пластинки представляют собой плоскую систему сил, параллельных оси Ox , проекция равнодействующей которых на эту ось равна

$$S_x = \omega^2 \iint_{(F)} x \, dm = M\omega^2 x_C.$$

Чтобы найти ординату y_0 линии действия равнодействующей, вспомним, что момент равнодействующей относительно начала координат (или, что то же, оси Oz) равен сумме моментов элементарных центробежных сил:

$$-y_0 S_x = -\omega^2 \iint_{(F)} xy \, dm = -J_{xy} \omega^2,$$

откуда следует, что

$$y_0 = J_{xy} / (Mx_C). \quad (28.45)$$

Добавочную массу надо поместить в точке с координатами (x_0, y_0) , при этом y_0 определено по (28.45), а

$$mx_0 + Mx_C = 0. \quad (28.46)$$

Действительно, тогда главный вектор центробежных сил будет равен нулю, так как центр масс системы (пластинка с присоединенной массой) расположен на оси вращения; главный момент центробежных сил при этом также будет равен нулю. При другом расположении добавочной массы, удовлетворяющем

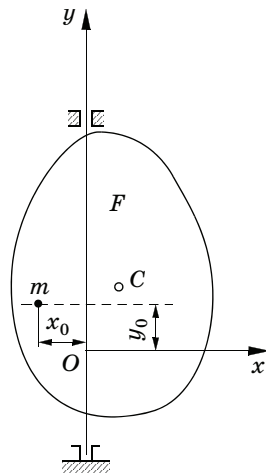


Рис. 375

условию (28.46), центр масс системы находился бы на оси вращения, но последняя не была бы главной осью инерции, и центробежные силы привелись бы к паре, момент которой L определяется соотношением

$$L = -y_1 m \omega^2 x_0 - y_0 M \omega^2 x_C = M x_C (y_1 - y_0) \omega^2,$$

где y_1 — ордината присоединенной точечной массы.

Например, при вращении однородной пластинки, имеющей форму прямоугольного треугольника с катетами a и b , вокруг вертикальной оси, совпадающей со вторым катетом (рис. 376), имеем

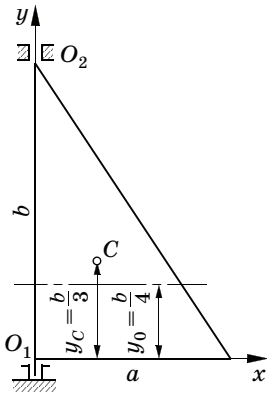


Рис. 376

$$x_C = \frac{1}{3} a,$$

$$J_{xy} = \frac{2M}{ab} \int_0^a x dx \int_0^{b(1-x/a)} y dy = \frac{1}{12} Mab,$$

и по (28.45) получаем $y_0 = b/4$.

Динамические реакции в точках закрепления оси вращения создаются силой, равной по величине $M\omega^2 a/3$, линия действия которой проходит на высоте $y_0 = b/4$. Для определения реакций служат уравнения моментов относительно точек O_2 и O_1

$$N_{1x} b + \frac{1}{3} M \omega^2 a \cdot \frac{3b}{4} = 0,$$

$$-N_{2x} b - \frac{1}{3} M \omega^2 a \cdot \frac{b}{4} = 0,$$

откуда следует

$$N_{1x} = -\frac{1}{4} M a \omega^2, \quad N_{2x} = -\frac{1}{12} M a \omega^2.$$

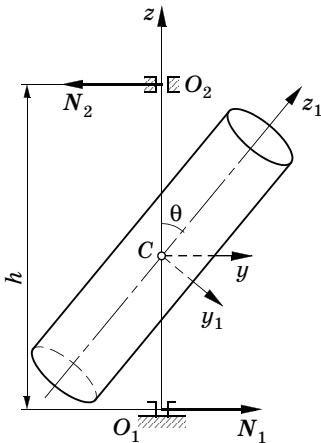


Рис. 377

Пример 134. Ось симметрии Cz_1 (рис. 377) тела вращения составляет с осью вращения Cz угол θ ; центр тяжести C тела расположен на оси вращения; центральные экваториальный и аксиальный моменты инерции равны соответственно J_3 и J_2 . Тело вращается с постоянной угловой скоростью ω . Определить реакции точек закрепления O_1 и O_2 оси (расстояние $O_1 O_2 = h$).

Ось Cx системы осей $Cxyz$, вращающихся с телом, направим перпендикулярно плоскости Czz_1 ; на рис. 377 эта плоскость совпадает с плоскостью рисунка. Оси $Cx_1 y_1 z_1$ — главные центральные, причем

Cx и Cx_1 совпадают по направлению. Поэтому центробежный момент $J_{zx} = 0$. Центробежный момент J_{yz} равен — ср. формулу (26.23) —

$$J_{yz} = \frac{1}{2} (J_2 - J_3) \sin 2\theta.$$

По (28.37), (28.38) и (28.39), предполагая, что вращение происходит с постоянной угловой скоростью ω , получим

$$N_{1x} = N_{2x} = 0, \quad N_{1y} = -N_{2y} = \frac{J_2 - J_3}{2h} \omega^2 \sin 2\theta.$$

Если тело представляет собой круговой цилиндр радиусом R и высотой l , то

$$J_2 - J_3 = \frac{1}{4} M \left(\frac{l^2}{3} - r^2 \right)$$

и, следовательно,

$$N_{1y} = -N_{2y} = \frac{1}{8} \frac{M}{h} \left(\frac{l^2}{3} - r^2 \right) \omega^2 \sin 2\theta.$$

Так, в случае тонкого диска ($l \approx 0$) получаем (рис. 372)

$$-N_{1y} = N_{2y} = \frac{1}{8} \frac{Mr^2}{h} \omega^2 \sin 2\theta.$$

Для стержня ($r \approx 0$) направления реакций изменяются:

$$N_{1y} = -N_{2y} = \frac{Ml^2}{24h} \omega^2 \sin 2\theta.$$

Динамические реакции обращаются в нуль при $l = r\sqrt{3}$; тогда центральный эллипсоид инерции вырождается в сферу (пример 120) и любая ось вращения, проходящая через центр тяжести, будет свободной осью.

§ 152. Реакции оси вращающегося тела при ударе. Центр удара

Исследование действия удара на твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, которому был посвящен § 118, следует дополнить рассмотрением мгновенных импульсных реакций точек закрепления оси, а также выяснением условий, при которых приложение удара не создает таких реакций.

В некоторой точке M твердого тела (рис. 378), вращающегося вокруг неподвижной оси, приложена мгновенная сила, импульс которой равен S . Приложение этой силы вызывает появление мгновенных

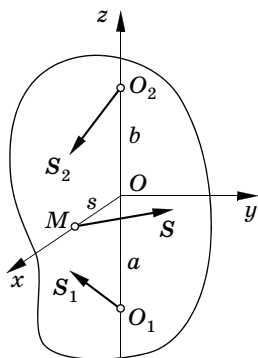


Рис. 378

венных реакций в точках O_1 и O_2 закрепления оси; определим импульсы S_1 и S_2 этих реакций.

Примем ось вращения за ось Oz , а плоскость, содержащую точку M и перпендикулярную оси вращения, за плоскость Oxy , причем ось Ox проведем через точку M (рис. 378); координаты этой точки будут

$$x_M = OM = s, \quad y_M = 0, \quad z_M = 0.$$

Запишем теоремы импульсов (§ 106, с. 150) и моментов импульсов относительно точки O (§ 118, с. 204):

$$\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0 = M(\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_{0C}) = \mathbf{S} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2, \quad (28.47)$$

$$\mathbf{K} - \mathbf{K}_0 = m_O(\mathbf{S}) + m_O(\mathbf{S}_1) + m_O(\mathbf{S}_2). \quad (28.48)$$

В рассматриваемом случае

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \tilde{\omega}$$

и

$$v_{Cx} = -\tilde{\omega}y_C, \quad v_{Cy} = \tilde{\omega}x_C, \quad v_{Cz} = 0;$$

далее, по формулам (26.34),

$$K_x = -J_{zx}\tilde{\omega}, \quad K_y = -J_{yz}\tilde{\omega}, \quad K_z = J_z\tilde{\omega}.$$

Проецируя (28.47) и (28.48) на оси, получим ($a = OO_1$, $b = OO_2$)

$$\begin{aligned} -My_C(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) &= S_x + S_{1x} + S_{2x}, \\ Mx_C(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) &= S_y + S_{1y} + S_{2y}, \\ 0 &= S_z + S_{1z} + S_{2z} \end{aligned} \quad (28.49)$$

и

$$\begin{aligned} -J_{zx}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) &= aS_{1y} - bS_{2y}, \\ -J_{yz}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) &= -aS_{1x} + bS_{2x} - sS_z, \\ J_z(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) &= sS_y. \end{aligned} \quad (28.50)$$

Последнее уравнение определяет приращение угловой скорости при ударе (§ 118), после чего из прочих уравнений находятся поперечные импульсивные реакции S_{1x} , S_{1y} , S_{2x} , S_{2y} и сумма продольных импульсивных реакций $S_{1z} + S_{2z}$.

Поставим теперь вопрос о нахождении тех условий, при которых ось вращающегося тела не испытывает удара, т. е.

$$S_{1x}, S_{1y}, S_{2x}, S_{2y}, S_{1z} + S_{2z}$$

обращаются в нуль. Уравнения (28.49) и (28.50) при этом примут вид

$$-My_C(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) = S_x, \quad (\alpha) \qquad -J_{zx}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) = 0, \quad (\delta)$$

$$Mx_C(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) = S_y, \quad (\beta) \qquad -J_{yz}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) = 0, \quad (\epsilon)$$

$$0 = S_z, \quad (\gamma) \qquad J_z(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) = sS_y. \quad (\zeta)$$

Искомые условия можно поэтому сформулировать следующим образом:

- ✓ согласно (γ) удар должен быть направлен перпендикулярно оси вращения;
- ✓ согласно (δ) и (ε) $J_{zx} = J_{yz} = 0$, т. е. ось вращения Oz должна быть главной осью инерции в точке ее пересечения с плоскостью Oxy ;
- ✓ согласно (α) и (β) имеем $x_C S_x + y_C S_y = 0$; это показывает, что вектор S и вектор-радиус r_C центра тяжести должны быть взаимно-перпендикулярны, т. е. удар должен быть направлен перпендикулярно плоскости, проведенной через ось вращения и центр тяжести;
- ✓ из (β) и (ζ) находим, наконец,

$$x_C s = \frac{J_z}{M} = \rho^2; \tag{28.51}$$

эта формула определяет положение точки приложения удара.

Указанные условия упрощаются, если тело имеет перпендикулярную оси вращения плоскость материальной симметрии Π . Ось вращения будет в этом случае главной осью инерции в точке пересечения ее O с плоскостью Π ; центр тяжести C тела также лежит в плоскости Π . Мгновенные реакции оси обратятся в нуль при соблюдении следующих условий (рис. 379):

- ✓ импульс S должен лежать в плоскости Π и быть перпендикулярным OC ;
- ✓ расстояние линии действия импульса до оси вращения определяется формулой

$$s = OM = \frac{\rho^2}{OC}, \tag{28.52}$$

где ρ — радиус инерции тела относительно оси вращения.

Иными словами, точка приложения импульса должна совпадать с осью качаний, соответствующей оси вращения тела (§ 117).

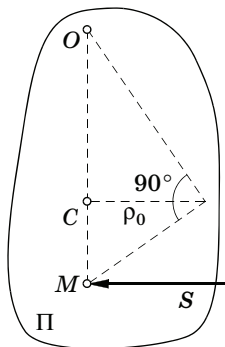


Рис. 379

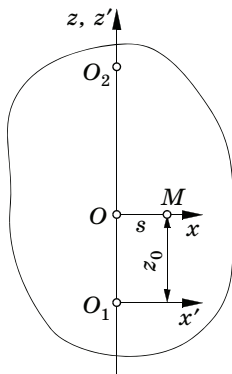


Рис. 380

Точка M , отвечающая вышеприведенным условиям, называется *центром удара*. Замечая, что

$$\rho^2 = \rho_C^2 + OC^2, \quad OM = OC + CM,$$

можно преобразовать формулу (28.52) и получить

$$CM = \frac{\rho_C^2}{OC}, \quad (28.53)$$

где ρ_C — радиус инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести тела параллельно оси вращения. На рис. 379 дано графическое построение центра удара, основанное на формуле (28.53). Условие (28.51) должно соблюдаться, например, в ручном молотке, чтобы ось вращения молотка (кистевое сочленение) не испытывала удара. При работе молотком мы инстинктивно находим на рукоятке то положение оси вращения, при котором рука не испытывает удара.

В случае тонкой пластинки, вращающейся вокруг оси O_1O_2 , лежащей в плоскости пластинки (рис. 380), удар должен быть перпендикулярен плоскости пластинки (в которой расположен ее центр тяжести) и приложен в определенной точке M — центре удара. Условие (ζ) в этом случае удовлетворяется автоматически, так как для любой массы m_i координата $y_i = 0$ и, следовательно, $J_{yz} = 0$. Надо потребовать, чтобы J_{zx} также обращалось в нуль. В системе осей $O_1x'z'$ имеем (рис. 380)

$$z_i = z'_i - z_0, \quad x'_i = x_i$$

и, следовательно, приходим к условию

$$J_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i = \sum_{i=1}^n m_i z'_i x_i - M z_0 x_C = 0.$$

Таким образом, находим

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z'_i x_i}{(M x_C)}. \quad (28.54)$$

По формуле (28.51) получаем также следующее выражение для расстояния от центра удара до оси вращения:

$$s = \frac{\rho_C^2}{x_C} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i^2}{(M x_C)}. \quad (28.55)$$

В случае однородной пластинки координаты центра удара будут

$$z_0 = \frac{\iint (F) xz' dF}{x_c F}, \quad s = \frac{\iint (F) x^2 dF}{x_c F}, \quad (28.56)$$

где F — площадь пластинки и dF — элемент площади.

Сравнение полученного выражения для z_0 с формулой (28.45) показывает, что центр удара пластинки может быть найден как точка пересечения двух прямых: прямой, параллельной оси вращения и проходящей через ось качаний физического маятника, для которого ось вращения служит осью подвеса, и перпендикулярной ей прямой, являющейся линией действия равнодействующей центробежных сил инерции при вращении пластинки вокруг указанной оси.

Пример 135. Маятник ударной машины состоит из стального диска радиусом $r = 1 \cdot 10^{-1}$ м, толщиной $\delta = 5 \cdot 10^{-2}$ м и стального круглого стержня диаметром $d = 2 \cdot 10^{-2}$ м, длиной $l = 9 \cdot 10^{-1}$ м. Найти, на каком расстоянии s от оси вращения нужно поместить разбиваемый машиной брусок, чтобы ось вращения не испытывала удара (рис. 381).

Имеем

$$OC = \frac{ql/2 + Q(l+r)}{q+Q},$$

$$\rho^2 = \frac{ql^2/3 + Q(l+r)^2 + Qr^2/2}{q+Q},$$

где q и Q — веса стержня и диска; обозначая через γ вес единицы объема стали, находим

$$q = \gamma l \frac{\pi d^2}{4}, \quad Q = \gamma \pi r^2 \delta,$$

$$s = OM = \frac{l^3 d^2 / 12 + r^2 \delta [(l+r)^2 + r^2 / 2]}{l^2 d^2 / 8 + r^2 \delta (l+r)} \approx 0,925 \text{ м.}$$

Пример 136. Определить центр удара прямоугольной мишени для стрельбы (рис. 382).

Здесь вследствие симметрии $z_0 = 0$; по формуле (28.56) находим

$$s = \frac{\iint (F) x^2 dF}{x_c F} = \frac{0}{(h/2) lh} = \frac{2}{3} h.$$

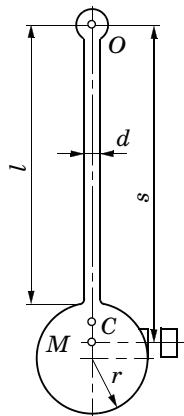


Рис. 381

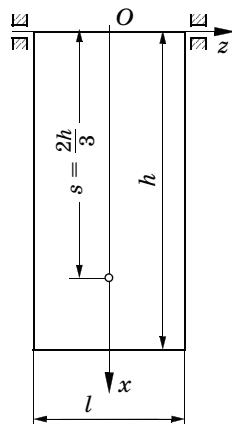


Рис. 382

§ 153. Метод кинетостатики в приближенной теории гироскопа

Гироскопом называют тело вращения, обладающее динамической симметрией относительно некоторой оси и совершающее вращательное движение вокруг некоторой точки этой оси*. Рассмотрим движение гироскопа вокруг неподвижной точки O на его оси и обозначим через ω_0 вектор угловой скорости гироскопа в его собственном вращении вокруг оси симметрии, а через ω — вектор угловой скорости вращения гироскопа вокруг мгновенной оси, проходящей через неподвижную точку O . Тогда векторная разность

$$\omega^* = \omega - \omega_0 \quad (28.57)$$

определит, очевидно, вектор угловой скорости вращения оси гироскопа в ее вращении вокруг неподвижной оси, проходящей через ту же неподвижную точку.

Приближенная теория движения гироскопа может применяться в тех случаях, когда величина векторной разности ω^* мала по сравнению с величиной угловой скорости ω_0 собственного вращения гироскопа; это значит, что движение гироскопа мало отклоняется от основного его вращения вокруг оси, совпадающей с осью материальной симметрии гироскопа.

Найдем выражение главного момента количества движения гироскопа \mathbf{K} , соответствующее принятой приближенной схеме его движения. Предположим сначала, что гироскоп вращается вокруг неподвижной оси Oz (рис. 383), так что вектор угловой скорости собственного вращения ω_0 совпадает с вектором ω угловой скорости движения гироскопа. Тогда $\omega_x = \omega_y = 0$ и, согласно формулам (26.36),

$$\mathbf{K} = J_3 \omega, \quad (28.58)$$

где J_3 — момент инерции гироскопа относительно его оси материальной симметрии.

Предположим теперь, что ось материальной симметрии гироскопа, имеющего весьма большую угловую скорость собственного вращения ω_0 , в свою очередь вращается вокруг неподвиж-

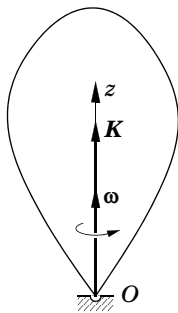


Рис. 383

* Термин *гироскоп* (от греч. γυρεύω — кружусь, вращаюсь и σκοπέω — смотрю), означающий *указатель вращения*, введен французским физиком Л. Фуко. (Подробнее о нем см. т. I, с. 418. — *Ред.*)

ной оси с угловой скоростью ω^* , малой по величине по сравнению с ω_0 . Вектор ω^* называется *угловой скоростью прецессии*. Мгновенная ось вращения гироскопа, направленная по вектору угловой скорости ω_0 (рис. 384), уже не будет совпадать с осью материальной симметрии гироскопа, а окажется несколько отклоненной от нее, причем отклонение это будет тем меньше, чем меньше по величине относительная разность $\omega^*/\omega_0 = (\omega - \omega_0)/\omega_0$ векторов ω и ω_0 . Вектор главного момента количеств движения \mathbf{K} гироскопа уже не будет направлен по оси материальной симметрии гироскопа и не будет равен $J_3\omega_0$. Однако рассматриваемая сейчас приближенная теория движения гироскопа пренебрегает этой разницей, а также изменением величины ω_0 — угловой скорости собственного вращения гироскопа за исследуемый интервал времени. Таким образом, основное допущение приближенной теории движения гироскопа заключается в том, что при постоянной по величине угловой скорости ω_0 собственного вращения гироскопа, значительно превышающей угловую скорость ω^* вращения его оси, главный момент количеств движения гироскопа \mathbf{K} можно рассматривать как вектор

$$\mathbf{K} = J_3\omega_0, \tag{28.59}$$

сохраняющий во время движения постоянную величину и совпадающий по направлению с движущейся осью материальной симметрии гироскопа.

Движение оси материальной симметрии гироскопа может быть определено движением той ее точки, которая в принятом приближении совпадает с концом вектора \mathbf{K} . Скорость \mathbf{u} этой точки по основной формуле распределения скоростей в твердом теле, вращающемся вокруг неподвижного центра, будет равна

$$\mathbf{u} = \omega^* \times \mathbf{K}. \tag{28.60}$$

С другой стороны, по теореме Резаля (см. § 113, с. 183) эта скорость равна главному моменту $\mathbf{m}^{(O)}$ внешних сил, приложенных к гироскопу, относительно неподвижного центра O , т. е.

$$\mathbf{u} = \mathbf{m}^{(O)}. \tag{28.61}$$

Сравнивая между собой (28.60) и (28.61) и принимая во внимание равенство (28.59), получаем

$$J_3\omega^* \times \omega_0 = \mathbf{m}^{(O)}. \tag{28.62}$$

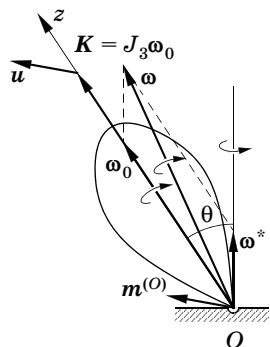


Рис. 384

Применяя метод кинетостатики, придадим этому уравнению движения гироскопа форму уравнения его равновесия под действием двух моментов

$$\mathbf{L} + \mathbf{m}^{(O)} = \mathbf{0}, \quad (28.63)$$

из которых первый

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}_3 \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}^*, \quad (28.64)$$

представляющий собой главный момент сил инерции гироскопа, носит наименование *гироскопического момента*. Величина гироскопического момента равна

$$L = J_3 \omega_0 \omega^* \sin \theta, \quad (28.65)$$

где θ — угол между векторами $\boldsymbol{\omega}_0$ и $\boldsymbol{\omega}^*$, направленными соответственно по оси материальной симметрии гироскопа и неподвижной оси, вокруг которой вращается ось гироскопа.

Как видно из формулы (28.64), гироскопический момент направлен перпендикулярно плоскости, содержащей векторы $\boldsymbol{\omega}_0$ и $\boldsymbol{\omega}^*$, причем так, что соответствующая ему пара сил стремится совместить вектор угловой скорости собственного вращения с вектором угловой скорости прецессии (правило Фуко).

Остановимся на примерах применения приближенной теории движения гироскопа. Приведем колесо (рис. 385) в быстрое вращение вокруг оси O_1O_2 и, взяв ось в руки в точках O_1 и O_2 , повернем ее в направлении, указанном на рисунке круговой стрелкой, так, чтобы точка O осталась неподвижной. Казалось бы, что для этого к оси в точках O_1 и O_2 нужно приложить усилия, направления которых на рисунке указаны штриховыми линиями. Однако это не так. Действительно, конец вектора \mathbf{K} при указанном повороте колеса приобретает скорость, направленную в плоскости рисунка перпендикулярно оси O_1O_2 вниз, и согласно (28.61) так же будет расположен вектор $\mathbf{m}^{(O)}$ момента внешних сил, которые нужно приложить к колесу. Усилия рук \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 должны быть перпендикулярны плоскости рисунка; желая повернуть ось вращающегося колеса, нужно приложить к ней усилия, перпендикулярные плоскости перемещения. Рассматриваемый эффект появляется при всяком изменении направления оси быстро вращающегося

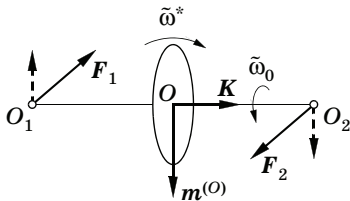


Рис. 385

тела. Давления на подшипники, равные по величине и направленные противоположно реакциям подшипников, образуют пару, момент которой равен гироскопическому моменту.

Современное судно несет большое число вращающихся тел; это — маховики двигателей, гребные винты с их валами, роторы динамомашин, гребные колеса колесных пароходов и т. д. Оси вращения располагаются или по продольной, или по поперечной оси корпуса судна, или вертикально. При своем движении судно может совершать колебания вокруг продольной оси (боковая качка) или поперечной оси (килевая качка) и может поворачиваться при маневрах вокруг вертикали. Все эти движения связаны с поворотами осей вращающихся тел, установленных на судне, и сопровождаются гироскопическими явлениями.

Возьмем правую систему осей координат $Oxyz$, направив их соответственно по поперечной оси, по продольной оси судна от кормы к носу и вертикально вверх (рис. 386). Если, например, ось вращения тела расположена вдоль судна и происходит килевая качка, то в формуле (28.64) нужно положить

$$\omega_0 = \tilde{\omega}_0 i_2, \quad \omega^* = \tilde{\omega}^* i_1$$

и для гироскопического момента L получится выражение (здесь i_1, i_2, i_3 — единичные векторы осей координат $Oxyz$)

$$L = J_3 \tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}^* i_2 \times i_1 = -i_3 J_3 \tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}^*,$$

т. е. в рассматриваемом случае этот момент направлен вертикально вверх или вниз сообразно тому, будет ли $\tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}^* < 0$ или $\tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}^* > 0$; величина гироскопического момента равна $J_3 \omega_0 \omega^*$.

В качестве примера подсчитаем гироскопический момент от турбины, ось которой расположена параллельно продольной оси корпуса судна, при наличии килевой качки амплитудой β_0 и периодом T . Считая, что угол поворота корпуса (*дифферент*) β изменяется по гармоническому закону, имеем

$$\beta = \beta_0 \sin \frac{2\pi t}{T},$$

откуда следует

$$\tilde{\omega}^* = \dot{\beta} = \frac{2\pi\beta_0}{T} \cos \frac{2\pi t}{T},$$

и максимальное значение гироскопического момента будет

$$L_{\max} = \frac{2\pi\beta_0}{T} J_3 \omega_0.$$

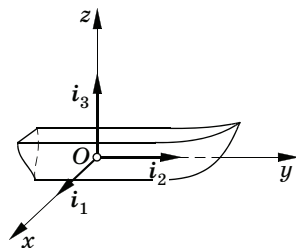


Рис. 386

Если расстояние между подшипниками равно l , то максимальные усилия $N_{1 \max}$ и $N_{2 \max}$, передаваемые им (равные и направленные противоположно), определяются по формуле

$$N_{1 \max} = N_{2 \max} = \frac{2\pi\beta_0 J_3 \omega_0}{Tl}.$$

Пусть масса ротора турбины $M = 2500$ кг, его радиус инерции $\rho = 0,9$ м, $\omega_0 = 1200$ об/мин, $l = 1,9$ м, $\beta_0 = 6^\circ = \pi/30$, $T = 6$ с; тогда

$$N_{1 \max} = N_{2 \max} = \frac{2\pi \cdot \pi \cdot 2500 \cdot 0,9^2 \cdot 1200\pi}{30 \cdot 6 \cdot 1,9 \cdot 30} \approx 14,7 \text{ кН}.$$

Влиянием гироскопических моментов от вращающихся частей на движение самого судна вследствие значительной устойчивости последнего и громадного по сравнению с вращающимися частями веса можно пренебречь.

Иначе обстоит дело при движении самолета. Вес вращающихся частей составляет здесь заметную долю веса конструкции. Поворот оси мотора самолета в какой-либо плоскости вызывает в перпендикулярной плоскости гироскопическую пару сил, передающуюся через подшипники корпусу самолета. Если ось направлена вдоль корпуса, то при поворотах в горизонтальной плоскости (виражах) эта пара будет создавать колебания угла тангажа, поднимая и опуская самолет. В конструкциях, снабженных двумя винтами, вращающимися в противоположные стороны, гироскопические моменты, передаваемые корпусу самолета, уравновешиваются; эти конструкции допускают более резкие виражи, не проявляя тенденций к колебаниям угла тангажа.

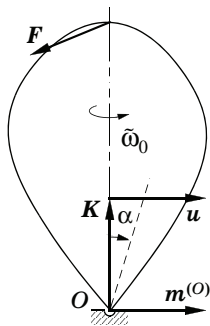


Рис. 387

Приближенная теория гироскопических явлений позволяет дать элементарное объяснение движению тяжелого гироскопа (волчка). Сообщим (рис. 387) симметричному однородному телу вращения быстрое вращение вокруг его оси. Допустим, что эта ось, будучи в исследуемом положении вертикальна, может вращаться вокруг неподвижной точки O . Если бы гироскоп не вращался, то имелось бы неустойчивое положение равновесия. Быстрое вращение сообщает гироскопу свойство устойчивости. В самом деле, дадим оси толчок в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, прило-

жив к ней в течение весьма малого промежутка времени силу F . Следствием этого, если оставаться в рамках элементарной теории, будет перемещение оси материальной симметрии тела (т. е. вектора K) на некоторый угол в направлении момента $m^{(0)}$ силы F относительно неподвижной точки O , т. е. в направлении, перпендикулярном F (новое положение оси указано на рис. 387 штриховой линией).

С прекращением действия силы F исчезнет и ее момент $m^{(0)}$, и вектор K (а следовательно, и ось гироскопа) дальше отклоняться не будет. Ряд толчков, сообщаемых быстро вращающемуся гироскопу, отклоняет его ось в направлении, перпендикулярном толчкам.

Учтем теперь действие момента силы тяжести относительно точки опоры (рис. 388). Наличие этого момента вызывает перемещение конца вектора K , т. е. оси гироскопа, в горизонтальном направлении, перпендикулярном плоскости, содержащей силу тяжести и ось гироскопа; угол θ остается при принятых допущениях постоянным, и ось описывает коническую поверхность, вращаясь с угловой скоростью ω^* вокруг вертикали, проходящей через точку опоры O . Величина этой угловой скорости найдется по формуле (28.65). Имеем

$$m^{(0)} = Gl \sin \theta = J_3 \omega_0 \omega^* \sin \theta,$$

где $l = OC$. Итак,

$$\omega^* = \frac{Gl}{J_3 \omega_0} = \text{const.} \quad (28.66)$$

Такое движение гироскопа называется *регулярной прецессией*.

При более строгом рассмотрении оказывается, что на описанное движение оси гироскопа будут накладываться периодические изменения малой амплитуды и высокой частоты угла θ и угловой скорости ω^* — так называемые *нутационные колебания*.

Рассмотрим *уравновешенный гироскоп с тремя степенями свободы*. В таком гироскопе неподвижной точкой является центр тяжести, так что внешние силы, действующие на гироскоп, — сила тяжести и реакция закрепленной

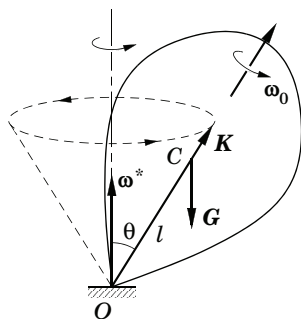


Рис. 388

точки — уравниваются. Чтобы закрепить ротор G гироскопа в центре тяжести, применяется карданов подвес (рис. 389). Ось AA_1 ротора укреплена во внутреннем кольце — в раме ABA_1B_1 , которая может вращаться вокруг оси BB_1 . Наружное кольцо подвеса — рама BCB_1D , которая несет подшипники внутреннего кольца ABA_1B_1 , в свою очередь может вращаться вокруг оси CD , перпендикулярной оси вращения BB_1 внутреннего кольца. Три оси AA_1 , BB_1 и CD пересекаются в центре тяжести ротора. Ротору сообщается большая угловая скорость. Предположим, что трение в подшипниках и сопротивление воздуха сведены к минимуму и ими можно пренебречь; пренебрегаем также массой колец по сравнению с массой ротора. При этих условиях момент внешних сил $m^{(0)}$ относительно центра тяжести ротора равен нулю и, следовательно, его главный момент количества движения \mathbf{K} относительно центра тяжести имеет постоянное направление и постоянную величину; так как (по основной предпосылке приближенной теории) вектор \mathbf{K} совпадает с осью вращения AA_1 , последняя будет сохранять неизменное направление в пространстве. Наблюдатель,

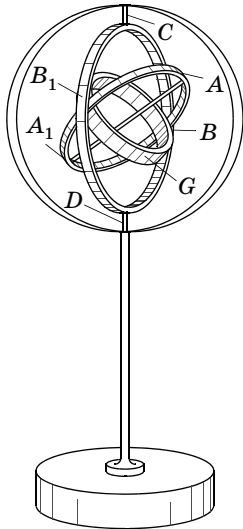


Рис. 389

находящийся на Земле и меняющий вследствие вращения Земли свою ориентировку по отношению к неподвижным звездам, должен заметить перемещение оси гироскопа, направленной на неподвижную звезду, по отношению к Земле. Этот принцип был применен для доказательства вращения Земли в опытах Фуко (1852).

Это же свойство быстро вращающегося тела, закрепленного в центре тяжести и имеющего три степени свободы, сохранять неизменным направление своей оси, используется в некоторых технических применениях гироскопа.

В торпеде гироскоп (*прибор Обри*) предназначается для обеспечения устойчивости траектории. Ось гироскопа располагается параллельно продольной оси торпеды; когда торпеда находится в канале и пускается

ОБРИ ЛЮДВИГ (ЛАЙОШ) (*Obry Ludwig (Lajos)*) — главный механик военно-морской верфи в Австро-Венгрии; в 90-х годах XIX в. разработал и запатентовал упомянутый механизм.

в цель, ось гироскопа освобождается, а маховику сообщается большая угловая скорость. При всяком отклонении торпеды в горизонтальной плоскости от прямолинейной траектории (ход по глубине не регулируется прибором Обри) кольца карданова подвеса приходят в движение, так как ось гироскопа своего направления не изменяет; это движение передается рулям, управляющим ходом торпеды. Прибор Обри должен быть собран весьма точно. Если точка пересечения осей подвеса не совпадает в точности с центром тяжести маховика, то создающийся момент силы тяжести $m^{(O)}$ вызывает прецессионное движение оси с угловой скоростью

$$\omega^* = \frac{m^{(O)}}{J_3 \omega_0}.$$

При $m^{(O)} = 0,98 \cdot 10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{м}$, $\omega_0 = 80\pi \text{ 1/с}$, массе гироскопа $0,75 \text{ кг}$ и радиусе инерции его $4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, получим

$$\omega^* = 0,000326 \text{ 1/с}.$$

Считая продолжительность хода торпеды равной 60 с , получим угол отклонения гироскопа $(0,000326 \cdot 60 \cdot 180^\circ/\pi) \approx 1,12^\circ$; эта ошибка при принятом значении $m^{(O)}$ довольно велика.

В приборе Обри гироскоп применяется как *стабилизатор непрерывного действия*. Иными словами, свойство оси гироскопа используется для передачи движения устройствам, осуществляющим стабилизацию. В других случаях эта стабилизация выполняется непосредственно самим гироскопом. Сюда относится, например, применение гироскопа для уменьшения качки корабля и гироскопические однорельсовые вагоны различных систем.

Схема *гироскопического успокоителя качки Шлика* представлена на рис. 390. Маховику гироскопа сообщается весьма большая угловая скорость ω_0 вокруг его оси Oz , имеющей в среднем положении вертикальное направление. Рама, несущая подшипники B и B_1 оси гироскопа, сама может вращаться вокруг поперечной оси Ox корпуса корабля. Центр тяжести системы находится на оси Oz ниже центра тяжести маховика, для чего рама снабжается противовесом.

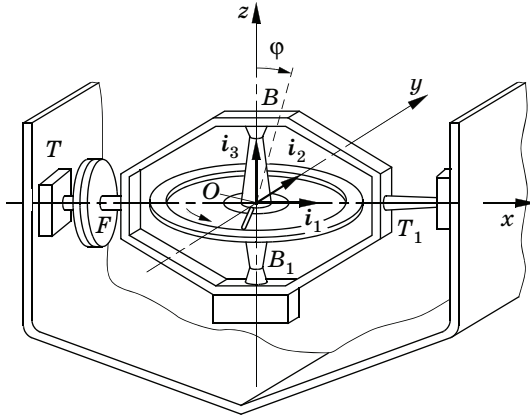


Рис. 390

Пусть под действием волн корабль кренится, поворачиваясь вокруг продольной оси Oy на угол φ в положительном направлении. Конец оси гироскопа получит при этом некоторое перемещение в поперечной плоскости судна; согласно (28.64) к раме, несущей подшипники B и B_1 оси гироскопа, будет вследствие этого приложен гироскопический момент

$$L_1 = J_3 i_3 \omega_0 \times i_2 \dot{\varphi} = -i_1 J_3 \omega_0 \dot{\varphi}, \quad (28.67)$$

который вызовет поворот рамы вокруг поперечной оси Ox на некоторый угол ψ с угловой скоростью $-i_1 \dot{\psi}$; вместе с тем конец оси гироскопа получит новое перемещение в продольной плоскости Oyz , что в свою очередь вызовет появление гироскопического момента

$$L_2 = J_3 i_3 \omega_0 \times (-i_1 \dot{\psi}) = -J_3 \omega_0 \dot{\psi} i_2, \quad (28.68)$$

передаваемого через подшипники рамы T и T_1 корпусу судна. Этот момент, противодействуя моменту, вызвавшему крен судна, способствует уменьшению крена. Энергия волн, раскачивающих судно, преобразуется успокоителем в энергию колебаний рамы гироскопа; чтобы эти колебания заключались в небольших пределах, необходимо гасить их, для чего ставится ленточный тормоз F или гидравлический гаситель.

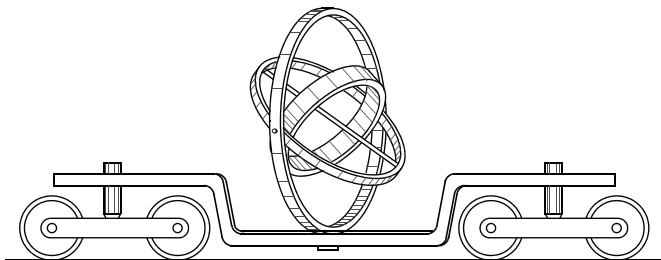


Рис. 391

В современной системе гироскопического успокоителя движение оси гироскопа вызывается внешним источником энергии. Маховик гироскопа, установленный так же, как и маховик успокоителя Шлика, приводится во вращение электромотором; другой электромотор сообщает оси маховика прецессионное движение в продольной плоскости судна. Это движение регулируется чувствительным малым контрольным гироскопом, регистрирующим наклон судна при качке; контрольный гироскоп замыкает в надлежащую сторону ток через реле, обеспечивающее такое движение мотора, при котором создается момент, противодействующий моменту волн, вызывающих качку.

На рис. 391 представлена модель *гироскопического однорельсового вагона*. Свойство гироскопа сообщать вагону устойчивость объясняется так же, как и в случае успокоителя Шлика; при наклоне вагона в какую-либо сторону вокруг продольной оси рама гироскопа повернется вокруг поперечной оси, что сопровождается появлением гироскопического момента, стремящегося выправить вагон — снова установить его в вертикальное положение. В противоположность гироскопу Шлика центр тяжести рамы и маховика должен в рассматриваемом случае находиться над осью вращения рамы (добавочный груз сверху), т. е. система гироскопа и рамы сама по себе неустойчива, как и вагон.

Отметим еще, что если вагон наклоняется, то можно способствовать его выпрямлению, сообщая раме гироскопа легкие толчки в направлении отклонения вагона. Объяснение этих явлений можно дать, основываясь на рассмотрении колебаний системы.

Более детальное рассмотрение движений некоторых гироскопов, основанное на интегрировании уравнений динамики твердого тела и уравнений Лагранжа второго рода, проводится в гл. XXXV. Рекомендуем также монографию А. Ю. Ишлинского [6].

§ 154. Общее уравнение динамики

Вытекающее из принципа д'Аламбера условие равновесия несвободной системы под действием *потерянных сил* Лагранж выразил в аналитической форме, используя для этой цели принцип возможных перемещений.

Рассмотрим несвободную систему с идеальными связями. Обозначая, как и ранее, массы точек M_i системы через m_i , равнодействующую задаваемых сил, приложенных к точке M_i , — через F_i , действительное ускорение точки M_i — через w_i и возможное перемещение — через δr_i , будем иметь условие равновесия системы под действием потерянных сил P_i в форме общего уравнения статики — формула (27.44) —

$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta r_i = 0, \quad (28.69)$$

или, вспоминая выражение (28.3) потерянной силы P_i ,

$$\sum_{i=1}^n (F_i - m_i w_i) \cdot \delta r_i = 0. \quad (28.70)$$

Это основное, как мы далее увидим, для всей динамики несвободной системы соотношение получило наименование *общего уравнения динамики*.

Выражая входящее в левую часть равенства (28.70) скалярное произведение через проекции сомножителей на оси декартовой системы координат, получим общее уравнение динамики в форме

$$\sum_{i=1}^n [(F_{ix} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (F_{iy} - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (F_{iz} - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] = 0, \quad (28.71)$$

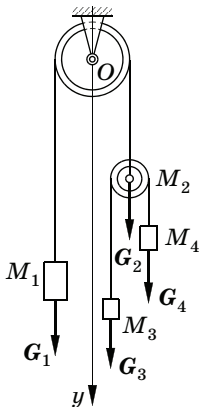


Рис. 392

предложенной впервые в 1788 г. Лагранжем в его «Аналитической механике» [36].

Только что выведенные уравнения справедливы и для связей с трением. В этом случае следует формально включить силы трения в число задаваемых сил.

Пример 137. Через блок O с центром в начале координат (рис. 392) перекинут шнур длиной l_1 , на одном конце которого подвешено тело M_1 массой m_1 , а на другом — блок M_2 массой m_2 ; через блок M_2 перекинут шнур длиной l_2 , на концах которого подвешены грузы M_3 и M_4 массами m_3 и m_4 . Исследовать движение системы, считая размеры блоков пренебрежимо малыми и связи идеальными.

Обозначим ординаты груза M_1 , блока M_2 , грузов M_3 и M_4 соответственно через y_1, y_2, y_3, y_4 , а их ускорения — через $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{y}_4$. Присоединив к задаваемым силам тяжести $\mathbf{G}_1 = m_1\mathbf{g}$, $\mathbf{G}_2 = m_2\mathbf{g}$, $\mathbf{G}_3 = m_3\mathbf{g}$, $\mathbf{G}_4 = m_4\mathbf{g}$ силы инерции $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4$ с проекциями $-m_1\ddot{y}_1, -m_2\ddot{y}_2, -m_3\ddot{y}_3, -m_4\ddot{y}_4$ на ось Oy , сможем рассматривать данную систему блоков и грузов как несвободную систему, находящуюся в равновесии. Условие равновесия напишем в форме уравнения принципа возможных перемещений

$$(m_1g - m_1\ddot{y}_1) \delta y_1 + (m_2g - m_2\ddot{y}_2) \delta y_2 + (m_3g - m_3\ddot{y}_3) \delta y_3 + (m_4g - m_4\ddot{y}_4) \delta y_4 = 0. \quad (28.72)$$

Мы составили общее уравнение динамики для данного случая. Возможные перемещения $\delta y_1, \delta y_2, \delta y_3, \delta y_4$ подчинены двум условиям

$$\delta y_1 + \delta y_2 = 0, \quad \delta y_3 + \delta y_4 - 2\delta y_2 = 0,$$

которые легко получить, варьируя очевидные уравнения связей

$$y_1 + y_2 = l_1, \\ y_3 - y_2 + y_4 - y_2 = y_3 + y_4 - 2y_2 = l_2.$$

Система имеет две степени свободы. Выразим два каких-нибудь возможных перемещения, например δy_1 и δy_3 , через независимые δy_2 и δy_4 :

$$\delta y_1 = -\delta y_2, \quad \delta y_3 = 2\delta y_2 - \delta y_4,$$

подставим в (28.72), соберем члены с независимыми перемещениями $\delta y_2, \delta y_4$ и приравняем коэффициенты при них нулю; тогда будем иметь

$$m_1\ddot{y}_1 - m_2\ddot{y}_2 - 2m_3\ddot{y}_3 = m_1g - m_2g - 2m_3g, \\ m_3\ddot{y}_3 - m_4\ddot{y}_4 = m_3g - m_4g.$$

К этим двум уравнениям с четырьмя неизвестными $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3$ и \ddot{y}_4 присоединим еще два уравнения:

$$\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0, \\ \ddot{y}_3 + \ddot{y}_4 - 2\ddot{y}_2 = 0,$$

получаемые двукратным дифференцированием уравнений связей. Из этой системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными находим

$$\ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2 = \frac{(m_3 - m_4)^2 + (m_3 + m_4)(m_1 - m_2 - m_3 - m_4)}{2m_4(m_4 - m_3) - (2m_4 + m_1 + m_2)(m_3 + m_4)} g, \\ \ddot{y}_3 = \frac{1}{m_3 + m_4} \left[m_3 - m_4 + \right. \\ \left. + 2m_4 \frac{(m_3 - m_4)^2 + (m_3 + m_4)(m_1 - m_2 - m_3 - m_4)}{2m_4(m_4 - m_3) - (2m_4 + m_1 + m_2)(m_3 + m_4)} \right] g, \\ \ddot{y}_4 = 2\ddot{y}_2 - \ddot{y}_3. \quad (28.73)$$

Подберем массы тел так, чтобы при ускоренном движении грузов M_3 и M_4 блок M_2 и груз M_1 оставались неподвижными. Для этого, согласно первому из равенств (28.73), должно выполняться равенство

$$(m_3 - m_4)^2 + (m_3 + m_4)(m_1 - m_2 - m_3 - m_4) = 0$$

и, кроме того, из второго равенства (28.73) следует, что $m_3 \neq m_4$, так как в противном случае система в целом будет в равновесии, что противоречит принятому условию ускоренного движения грузов M_3 и M_4 .

Не составляет труда и найти реакции. Это можно сделать как методом сечения шнуров, так и методом множителей (см. § 157, пример 138).

§ 155. Применение общего уравнения динамики к выводу основных теорем

Предположим, что связи, наложенные на систему, допускают одинаковое для всех точек системы перемещение в направлении некоторой оси, которую примем за ось Ox . Тогда элементарное перемещение

$$\delta x_i = \delta x_0, \quad \delta y_i = 0, \quad \delta z_i = 0 \quad (28.74)$$

будет одним из возможных, и общее уравнение динамики (28.71) примет вид

$$\sum_{i=1}^n (F_{ix} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_0 = 0,$$

или, после сокращения на общий множитель δx_0 ,

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i = \sum_{i=1}^n F_{ix}. \quad (28.75)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой производную по времени от проекции на ось Ox количества движения системы; поэтому уравнение (28.75) записывается в виде

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = V_x. \quad (28.76)$$

Итак, если связи допускают одинаковое для всех точек системы перемещение в направлении некоторой оси, то производная по времени от проекции количества движения на эту ось равна проекции на нее главного вектора V всех задаваемых сил. В приведенной ранее в § 102 формулировке теоремы количества движения не упоминалось о характере связей и говорилось о внешних силах. Применяя принцип освобожденности, т. е. присоединяя к числу задаваемых сил соответствующие реакции в направлении

оси Ox , можно допустить, что перемещение (28.74) принадлежит к числу возможных. С другой стороны, главный вектор внутренних сил равен нулю. Поэтому можно считать, что V_x в правой части (28.76) представляет собой проекцию на ось Ox главного вектора V внешних сил (включая реакции связей).

Предположим теперь, что связи допускают поворот вокруг некоторой оси на угол $\delta\varphi$, одинаковый для всех точек системы. Принимая эту ось за ось Oz , заключаем, что перемещение

$$\delta x_i = -y_i \delta\varphi, \quad \delta y_i = x_i \delta\varphi, \quad \delta z_i = 0 \quad (28.77)$$

принадлежит к числу возможных, и общее уравнение динамики (28.71) по сокращении на $\delta\varphi$ дает

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i \ddot{y}_i - y_i \ddot{x}_i) = \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}). \quad (28.78)$$

В левой части стоит производная по времени от проекции главного момента количеств движения системы на ось Oz

$$K_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i),$$

а в правой — главный момент $m_z^{(O)}$ всех задаваемых сил относительно той же оси. Получаем

$$\frac{dK_z}{dt} = m_z^{(O)}. \quad (28.79)$$

Итак, если связи допускают одинаковый для всех точек системы поворот вокруг некоторой оси, то производная по времени от проекции на эту ось главного момента количеств движения системы равна главному моменту относительно нее всех задаваемых сил. Нетрудно убедиться, что и здесь можно вернуться к формулировке теоремы моментов, данной в § 113.

Переходим к выводу теоремы об изменении кинетической энергии (теоремы живых сил). Предположим, что связи не зависят от времени (стационарны); тогда действительные перемещения точек системы

$$dx_i = \dot{x}_i dt, \quad dy_i = \dot{y}_i dt, \quad dz_i = \dot{z}_i dt \quad (28.80)$$

принадлежат к совокупности возможных перемещений. Подставив в общее уравнение динамики (28.71) вместо $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ соответственно dx_i, dy_i, dz_i , получим

$$\sum_{i=1}^n m_i (\ddot{x}_i \dot{x}_i + \ddot{y}_i \dot{y}_i + \ddot{z}_i \dot{z}_i) dt = \sum_{i=1}^n (F_{ix} dx_i + F_{iy} dy_i + F_{iz} dz_i).$$

Правая часть этого соотношения представляет собой элементарную работу задаваемых сил δW . В левой части стоит дифференциал кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2.$$

Итак,

$$dT = \delta W, \quad (28.81)$$

т. е. дифференциал кинетической энергии системы, подчиненной стационарным идеальным связям, равен элементарной работе всех задаваемых сил. Конечно, теорему можно представить также в интегральной форме:

$$\int_{(1)}^{(2)} dT = \int_{(1)}^{(2)} \delta W,$$

или

$$T_2 - T_1 = W_{1,2}. \quad (28.82)$$

Заметим, что здесь приходится — и это лежит в существе дела — наложить ограничение на характер связей (стационарность), но автоматическое исключение работы реакций связей, которые предполагаются идеальными, и введение в рассмотрение работы только задаваемых, а не внешних и внутренних сил в ряде случаев облегчает применение теоремы к частным задачам.

§ 156. Применение общего уравнения динамики в теории удара

Предположим, что в данный момент времени t среди задаваемых сил имеются мгновенные силы, импульсы которых за время удара ($t, t + \tau$) обозначим, как и ранее, через S_i . В результате происшедших ударов количества движений точек $m_i v_i^{(1)}$ получают конечные изменения $m_i \Delta v_i = m_i (v_i^{(2)} - v_i^{(1)})$, а векторы-радиусы r_i , по известному свойству явления удара, сохраняются неизменными. По определению возможных перемещений векторы δr_i определяют допускаемые существующими во время удара связями бесконечно малые перемещения точек системы в фиксированный момент времени. Отсюда следует, что если за время удара не возникает новых связей, то при интегрировании в этом проме-

жутке времени векторы возможных перемещений δr_i могут считаться постоянными.

При действии на точки системы мгновенных сил возникнут и мгновенные реакции связей. Предположим, что связи, идеальные до удара, останутся идеальными во время удара и после него, т. е. что мгновенное увеличение реакций не разрушает связей и не лишает их свойства идеальности.

Используя сказанное, проинтегрируем обе части общего уравнения динамики (28.71) во времени за промежуток удара ($t, t + \tau$) и получим *общее уравнение теории удара*

$$\sum_{i=1}^n (S_i - m_i \Delta v_i) \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^n [(S_{ix} - m_i \Delta v_{ix}) \delta x_i + (S_{iy} - m_i \Delta v_{iy}) \delta y_i + (S_{iz} - m_i \Delta v_{iz}) \delta z_i] = 0. \quad (28.83)$$

Поступая так же, как и в предыдущем параграфе, убедимся, что в этом общем уравнении содержатся соответствующие частным предположениям о характере возможных перемещений теоремы импульсов и моментов при ударе, уже рассмотренные в § 106 и § 118.

Обратимся к использованию общего уравнения теории удара для вывода теоремы Карно в форме, более общей, чем указанная в § 132 для удара двух тел.

Предположим, что, помимо существующих идеальных связей, в некоторый момент времени t внезапно возникают и сохраняются в дальнейшем новые идеальные связи, так что движущаяся непрерывно система в этот момент подвергается ударному воздействию реакций вновь возникших связей. Назовем *потерянными скоростями* геометрические разности скоростей до удара и после него, т. е. взятые с обратным знаком векторы Δv_i ; соответственно назовем *потерянной кинетической энергией* системы разность кинетических энергий системы до удара и после него, т. е. величину

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i (v_i^{(1)})^2}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{m_i (v_i^{(2)})^2}{2}. \quad (28.84)$$

Введем еще понятие *кинетической энергии потерянных скоростей*, определив ее выражением

$$T^* = \sum_{i=1}^n \frac{m_i (\Delta v_i)^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i (v_i^{(1)} - v_i^{(2)})^2}{2}. \quad (28.85)$$

Это выражение представляет собой результат подстановки в выражение кинетической энергии потерянных скоростей взамен действительных.

Докажем следующую теорему Карно.

ТЕОРЕМА КАРНО. *Если внезапно возникшие идеальные связи сохраняются в дальнейшем вместе с ранее существовавшими идеальными связями, то потерянная в результате возникновения новых связей кинетическая энергия системы равна кинетической энергии потерянных скоростей.*

Имея в виду применить для доказательства этой теоремы общее уравнение теории удара (28.83), поясним, что в данном случае следует понимать под возможными перемещениями δr_i . Пусть до возникновения новых связей возможные перемещения были равны $\delta r_i^{(1)}$, а затем при новых связях стали равными $\delta r_i^{(2)}$. В соответствии с принципом освобождаемости происходящее явление можно трактовать двояко. Во-первых, можно считать, что новых связей не возникало, а в некоторый момент времени при наличии старых связей к системе были приложены новые задаваемые мгновенные силы — реакции новых связей. Тогда в уравнении (28.83) следует положить $\delta r_i = \delta r_i^{(1)}$; при этом в силу идеальности новых связей никаких дополнительных слагаемых в уравнении (28.83) не появится. Очевидно, можно было и наоборот, считать одновременно существовавшими и старые и новые связи, но до момента действительного возникновения новых связей к задаваемым силам присоединить взятые с обратным знаком реакции этих новых связей. Это также не дает дополнительных слагаемых в уравнении (28.83), но под возможными перемещениями системы уже придется понимать векторы $\delta r_i = \delta r_i^{(2)}$. Итак, под возможными перемещениями δr_i в общем уравнении теории удара (28.83) при наличии внезапно возникающих идеальных связей можно понимать как возможные перемещения, допускаемые старыми связями, так и возможные перемещения, соответствующие новым связям.

Для доказательства теоремы Карно заметим, что задаваемых ударов в момент появления новых связей нет, так что, полагая $\delta r_i = \delta r_i^{(2)}$, перепишем уравнение (28.83) в виде

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta v_i \cdot \delta r_i^{(2)} = 0. \quad (28.86)$$

Выбор в качестве возможных перемещений векторов $\delta \mathbf{r}_i^{(2)}$, соответствующих последующему движению системы, ограниченному как старыми, так и вновь возникшими и сохраняющими свое действие связями, позволяет заменить эти возможные перемещения входящими в их совокупность действительными перемещениями $d\mathbf{r}_i^{(2)} = \mathbf{v}_i^{(2)} dt$. Тогда, сокращая на dt , вместо (28.86) будем иметь

$$\sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_i^{(2)} - \mathbf{v}_i^{(1)}) \cdot \mathbf{v}_i^{(2)} = 0. \quad (28.87)$$

Используя тождество

$$\mathbf{v}_i^{(2)} \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{v}_i^{(2)} + \mathbf{v}_i^{(1)}) + \frac{1}{2} (\mathbf{v}_i^{(2)} - \mathbf{v}_i^{(1)}),$$

согласно (28.87) получаем

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i (\mathbf{v}_i^{(1)})^2}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{m_i (\mathbf{v}_i^{(2)})^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i (\mathbf{v}_i^{(1)} - \mathbf{v}_i^{(2)})^2}{2}. \quad (28.88)$$

Вспоминая введенное ранее определение *потерянной* кинетической энергии (28.84) и кинетической энергии *потерянных* скоростей (28.85), видим, что равенство (28.88) доказывает теорему Карно.

Случай исчезновения связей можно рассмотреть аналогично предыдущему. В этом случае примем в уравнении (28.83)

$\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{r}_i^{(1)}$; тогда вместо (28.86) будем иметь

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta \mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (28.89)$$

Полагая $\delta \mathbf{r}_i^{(1)} = d\mathbf{r}_i^{(1)} = \mathbf{v}_i^{(1)} dt$, находим

$$\sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_i^{(2)} - \mathbf{v}_i^{(1)}) \cdot \mathbf{v}_i^{(1)} = 0. \quad (28.90)$$

Используя теперь тождество

$$\mathbf{v}_i^{(1)} \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{v}_i^{(1)} + \mathbf{v}_i^{(2)}) + \frac{1}{2} (\mathbf{v}_i^{(1)} - \mathbf{v}_i^{(2)}),$$

как и выше, получаем

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_i^{(2)})^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_i^{(1)})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_i^{(2)} - \mathbf{v}_i^{(1)})^2. \quad (28.91)$$

Таким образом, кинетическая энергия, приобретенная при исчезновении связей, равна «кинетической энергии приобретенных скоростей», как естественно в данном случае именовать правую часть равенства (28.91).

В качестве примера рассмотрим случай наложения на движение плоской фигуры новой связи, заключающейся в том, что одну из точек фигуры внезапно останавливают.

Обозначая через v_{Cx} и v_{Cy} проекции скоростей центра масс фигуры и через $\tilde{\omega}_1$ — ее угловую скорость до удара, найдем выражение кинетической энергии фигуры до удара

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} M (v_{Cx}^{(2)} + v_{Cy}^{(2)} + \rho_C^2 \omega_1^2). \quad (28.92)$$

После удара фигура будет вращаться с угловой скоростью ω_2 вокруг остановленной точки O и кинетическая энергия будет равна

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} M \rho_O^2 \omega_2^2. \quad (28.93)$$

Взяв начало системы координат в центре масс и обозначая через x и y координаты какой-либо точки M фигуры в этой системе, будем иметь следующие выражения проекций на оси скорости точки до удара:

$$v_x^{(1)} = v_{Cx} - \tilde{\omega}_1 y, \quad v_y^{(1)} = v_{Cy} - \tilde{\omega}_1 x$$

и после удара:

$$v_{ix}^{(2)} = -\tilde{\omega}_2 (y_C + y), \quad v_{iy}^{(2)} = \tilde{\omega}_2 (x_C + x),$$

где x_C , y_C — координаты центра масс в системе параллельных осей, имеющих начало в точке O . Квадрат потерянной скорости точки равен

$$\begin{aligned} (v_x^{(1)} - v_x^{(2)})^2 + (v_y^{(1)} - v_y^{(2)})^2 &= v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2 + (\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1)^2 (x^2 + y^2) + \\ &+ \omega_2^2 (x_C^2 + y_C^2) + 2(\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1) (y v_{Cx} - x v_{Cy}) - 2\tilde{\omega}_2 (x_C v_{Cy} - y_C v_{Cx}) + \\ &+ 2\tilde{\omega}_2 (\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1) (x x_C + y y_C). \end{aligned}$$

При вычислении кинетической энергии T^* , соответствующей потерянным скоростям,

$$T^* = \frac{1}{2} \int_{(M)} \left[(v_x^{(1)} - v_x^{(2)})^2 + (v_y^{(1)} - v_y^{(2)})^2 \right] dm,$$

следует пользоваться соотношениями

$$\int_{(M)} (x^2 + y^2) dm = M \rho_C^2, \quad \int_{(M)} x dm = \int_{(M)} y dm = 0, \quad \int_{(M)} dm = M,$$

а также равенством

$$\rho_O^2 = \rho_C^2 + x_C^2 + y_C^2,$$

выражающим теорему о моментах инерции относительно параллельных осей. Получим

$$T^* = \frac{1}{2} M \left[v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2 + \omega_1^2 \rho_C^2 + \omega_2^2 \rho_O^2 - 2\tilde{\omega}_2 (x_C v_{Cy} - y_C v_{Cx} + \rho_C^2 \tilde{\omega}_1) \right].$$

Составив соотношение

$$T^* = T^{(1)} - T^{(2)},$$

выражающее теорему Карно, приходим к формуле для угловой скорости $\tilde{\omega}_2$ фигуры после удара

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{1}{\rho_O} (x_C v_{Cy} - y_C v_{Cx} + \rho_C^2 \tilde{\omega}_1).$$

полученной иным путем в § 138 (с. 309).

Глава XXIX

Уравнения Лагранжа

§ 157. Уравнения Лагранжа первого рода для голономной системы

Методы статики несвободной системы, изложенные в гл. XXVII, обобщаются и на динамику. Подобно тому как использование уравнения принципа возможных перемещений — общего уравнения статики — привело к различным формам уравнений равновесия (в декартовых координатах, в обобщенных зависимых и независимых координатах), точно так же из общего уравнения динамики выводятся аналогичные формы дифференциальных уравнений движения несвободной системы. Уравнения эти получили наименование *уравнений Лагранжа*, так как

были впервые опубликованы в «Аналитической механике» Лагранжа [36].

Рассмотрим систему n материальных точек M_i массами m_i , подчиненную s голономным связям вида

$$\Phi_\alpha(t; x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (29.1)$$

Составляя вариации, найдем s уравнений, связывающих $3n$ возможных перемещений δx_i , δy_i и δz_i :

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (29.2)$$

В соответствии с этими уравнениями независимых возможных перемещений будет $3n - s = k$, где k — число степеней свободы системы.

Умножая каждое из уравнений (29.2) на произвольный пока множитель λ_α , складывая их между собой и с общим уравнением динамики (28.71), перегруппировывая слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[\left(F_{ix} - m_i \ddot{x}_i + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \left(F_{iy} - m_i \ddot{y}_i + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i} \right) \delta y_i + \right. \\ \left. + \left(F_{iz} - m_i \ddot{z}_i + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_i} \right) \delta z_i \right] = 0. \quad (29.3) \end{aligned}$$

Следуя далее обычным для метода неопределенных множителей (§ 144) рассуждениям, подчиним s множителей λ_α условию обращения в нуль выражений в каких-нибудь s круглых скобках в предыдущем уравнении. Тогда оставшаяся сумма будет состоять из $(3n - s)$ скобок, умножаемых на $(3n - s)$ произвольных вариаций координат. Поскольку эта сумма должна быть равна нулю при любых значениях вариаций, и выражения, стоящие в остальных $(3n - s)$ скобках, должны обращаться в нуль. Таким образом, выражения, стоящие в $3n$ круглых скобках в уравнении (29.3), равны нулю, что приводит к системе $3n$ уравнений

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= F_{ix} + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i}, \\ m_i \ddot{y}_i &= F_{iy} + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i}, \\ m_i \ddot{z}_i &= F_{iz} + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (29.4)$$

которые вместе с s уравнениями связей (29.1) образуют систему $3n + s$ уравнений с $3n + s$ неизвестными: $3n$ координатами x_i, y_i, z_i и s множителями связей λ_α .

Уравнения эти носят наименование *уравнений Лагранжа первого рода* или *уравнений с множителями в декартовых координатах*.

Сравнивая правые части уравнений (29.4) с уравнениями движения точек несвободной системы, составленных непосредственно по второму закону Ньютона и *принципу освобожденности*

$$m_i \ddot{x}_i = F_{ix} + N_{ix}, \quad m_i \ddot{y}_i = F_{iy} + N_{iy}, \quad m_i \ddot{z}_i = F_{iz} + N_{iz}, \quad (29.5)$$

мы видим, что

$$N_{ix} = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i}, \quad N_{iy} = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i}, \quad N_{iz} = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_i}. \quad (29.6)$$

Таким образом, решив систему уравнений (29.4) и (29.1), мы определим не только движение точек механической системы, но по формулам (29.6) и реакции связей.

Обычный путь решения уравнений Лагранжа первого рода заключается в том, что сначала из s уравнений, произвольно выбранных среди $3n$ уравнений (29.4), определяют s множителей связей λ_α . Подставляя эти значения λ_α в остальные $(3n - s)$ уравнений (29.4) и объединяя их с уравнениями связей (29.1), получают систему $3n$ уравнений, из которых находят $3n$ координат как функций от времени; после этого определяют λ_α , а затем по (29.6) — реакции связей N_{ix}, N_{iy}, N_{iz} .

Пример 138. С помощью метода неопределенных множителей определить натяжения шнуров в примере 137, с. 416.

Уравнения связей перепишем в виде

$$\Phi_1 = y_1 + y_2 - l_1 = 0, \quad \Phi_2 = y_3 + y_4 - 2y_2 - l_2 = 0.$$

По числу уравнений связей вводим два множителя λ_1 и λ_2 . Уравнения Лагранжа первого рода (29.4) приводятся к следующим четырем уравнениям:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= m_1 g + \lambda_1, & m_2 \ddot{y}_2 &= m_2 g + \lambda_1 - 2\lambda_2, \\ m_3 \ddot{y}_3 &= m_3 g + \lambda_2, & m_4 \ddot{y}_4 &= m_4 g + \lambda_2. \end{aligned} \quad (29.7)$$

Исключая множители λ_1 и λ_2 , вновь получим уравнения примера 137. Воспользовавшись, таким образом, полученными значениями вторых производных от координат по времени, определим из (29.7) λ_1 и λ_2 , а затем по (29.6) и искомые реакции, которые в настоящем случае представляют не что иное, как натяжения шнуров, и равны

$$N_{1y} = \lambda_1, \quad N_{2y} = \lambda_1 - 2\lambda_2, \quad N_{3y} = \lambda_2, \quad N_{4y} = \lambda_2.$$

§ 158. Движение точки по гладкой поверхности или кривой

Уравнения Лагранжа первого рода могут быть применены для изучения движения точки по поверхности или кривой. Если поверхность, в общем случае как угодно движущаяся и деформирующаяся, задана уравнением

$$\Phi(t; x, y, z) = 0, \quad (29.8)$$

то уравнения Лагранжа первого рода (29.4) примут вид

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = F_y + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = F_z + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (29.9)$$

или в векторной форме

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \lambda \operatorname{grad} \Phi. \quad (29.10)$$

Сравнивая с уравнением, соответствующим принципу освобожденности,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{N},$$

мы видим, что

$$\mathbf{N} = \lambda \operatorname{grad} \Phi. \quad (29.11)$$

Абсолютная величина множителя связи в этом случае равна

$$|\lambda| = \frac{N}{|\operatorname{grad} \Phi|} = \frac{N}{\sqrt{(\partial \Phi / \partial x)^2 + (\partial \Phi / \partial y)^2 + (\partial \Phi / \partial z)^2}}. \quad (29.12)$$

Чтобы определить знак множителя связи, напомним, что вектор $\operatorname{grad} \Phi$ имеет направление *внешней* нормали к поверхности $\Phi = 0$, т. е. направлен в ту область пространства, где $\Phi > 0$. Обозначая через \mathbf{n} единичный вектор внешней нормали, будем иметь

$$\operatorname{grad} \Phi = |\operatorname{grad} \Phi| \mathbf{n}.$$

При этом, согласно (29.11), можно написать

$$\lambda = \frac{N_n}{|\operatorname{grad} \Phi|}. \quad (29.13)$$

Подчеркнем, что направление внешней нормали зависит от вида выбора уравнения поверхности, так как, меняя знак левой части уравнения (29.8), мы тем самым изменим направление внешней нормали на противоположное.

Аналогично, в случае движения по кривой, которую можно представить как пересечение двух поверхностей

$$\Phi_1(t; x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(t; x, y, z) = 0, \quad (29.14)$$

будем, согласно (29.4), иметь уравнения Лагранжа первого рода с двумя множителями λ_1 и λ_2 :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}, \end{aligned} \quad (29.15)$$

или в векторной форме

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \lambda_1 \operatorname{grad} \Phi_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} \Phi_2. \quad (29.16)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{N} = \mathbf{F} + N_1 + N_2,$$

где \mathbf{N} — реакция кривой, по которой движется точка, а N_1 и N_2 — соответственно реакции поверхностей (29.14), пересечением которых кривая может быть представлена, заключаем, что

$$\begin{aligned} N_1 &= \lambda_1 \operatorname{grad} \Phi_1, & N_2 &= \lambda_2 \operatorname{grad} \Phi_2, \\ |\lambda_1| &= \frac{N_1}{|\operatorname{grad} \Phi_1|}, & |\lambda_2| &= \frac{N_2}{|\operatorname{grad} \Phi_2|}. \end{aligned} \quad (29.17)$$

Желая учесть знаки λ_1 и λ_2 , будем по предыдущему иметь

$$\lambda_1 = \frac{N_1 n_1}{|\operatorname{grad} \Phi_1|}, \quad \lambda_2 = \frac{N_2 n_2}{|\operatorname{grad} \Phi_2|},$$

где \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 — внешние нормали к поверхностям (29.14), положительное направление которых зависит от выбора вида этих уравнений.

Таким образом, при движении точки по идеальным поверхностям или кривым множители связей представляют собой величины, пропорциональные реакциям связей.

Пример 139. Математический маятник. Как уже известно из § 112, под математическим маятником понимают тяжелую точку, движущуюся по вертикальной окружности (например, точку, подвешенную на нити). Для того чтобы внешняя нормаль совпала с главной нормалью, выберем уравнение связи (l — радиус окружности) в виде

$$\Phi = l^2 - x^2 - y^2 = 0; \quad (29.18)$$

в этом случае внутренней (в геометрическом смысле) части круга соответствует $\Phi > 0$. Уравнения Лагранжа первого рода будут

$$m\ddot{x} = -2\lambda x, \quad m\ddot{y} = mg - 2\lambda y, \quad (29.19)$$

причем ось Oy направлена по вертикали вниз (рис. 393).

Исключение λ можно провести двояким образом. Умножим обе части второго равенства на x , а первого — на y и вычтем из второго первое; будем иметь

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = gx,$$

или

$$\frac{d}{dt} (x\dot{y} - y\dot{x}) = gx. \quad (29.20)$$

В этом соотношении нетрудно узнать уравнение моментов относительно оси Oz , перпендикулярной плоскости чертежа. Полагая

$$x = -l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi, \\ x\dot{y} - y\dot{x} = l^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \dot{\varphi} = l^2 \dot{\varphi},$$

получаем вместо (29.20) известное уже дифференциальное уравнение движения математического маятника (§ 112)

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (29.21)$$

интегрирование которого для случая малых углов было проведено ранее; случай конечных по величине углов будет разобран далее (§ 177).

Умножим обе части первого из уравнений (29.19) на \dot{x} , второго — на \dot{y} и сложим; тогда будем иметь

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) = mg\dot{y} - 2\lambda(x\dot{x} + y\dot{y})$$

или

$$m \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} = mg \frac{dy}{dt} - \lambda \frac{d}{dt} (x^2 + y^2).$$

Второе слагаемое в правой части равно нулю по (29.18); интегрируя, получаем соотношение

$$\frac{mv^2}{2} - mgy = \frac{mv_0^2}{2} - mgy_0, \quad (29.22)$$

представляющее собой интеграл энергии, причем v_0 и y_0 — начальные значения скорости и ординаты. Интеграл энергии имеет место, так как задаваемая сила (сила тяжести) консервативна, а связь идеальна и стационарна. Если

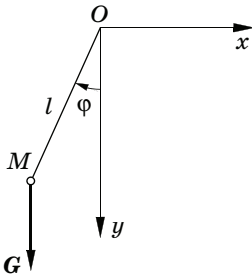


Рис. 393

бы маятник имел переменную длину, изменяющуюся по заданному закону $l = l(t)$ (§ 142), то выражение

$$\lambda \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = \lambda \frac{d}{dt} l^2$$

являлось бы неинтегрируемой комбинацией и интеграл (29.22) отсутствовал бы.

Найдем множитель λ и реакцию связи. Для этого проще всего умножить первое равенство (29.19) на x , второе — на y и сложить; это приведет к равенству

$$m(x\ddot{x} + y\ddot{y}) = mgy - 2\lambda(x^2 + y^2)$$

или

$$m \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) - m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = mgy - 2\lambda(x^2 + y^2),$$

т. е. по (29.18)

$$2l^2\lambda = mgy + mv^2. \quad (29.23)$$

Отсюда с учетом (29.13) и (29.18) определим проекцию реакции на главную нормаль

$$N_n = \lambda |\text{grad } \Phi| = \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2} = 2\lambda l = mg \frac{y}{l} + \frac{mv^2}{l}. \quad (29.24)$$

Воспользовавшись соотношением (29.22), перепишем последнее равенство в виде

$$N_n = 3mg \frac{y}{l} + \frac{mv_0^2}{l} - 2mg \frac{y_0}{l}. \quad (29.25)$$

С помощью равенства (29.25) можно установить величину начальной скорости, при которой, какова бы ни была начальная ордината y_0 , точка не сойдет с окружности, т. е. нить не ослабнет. Для этого, замечая, что N_n будет иметь минимум при $y = -l$, потребуем, чтобы это минимальное значение N_n оставалось положительным при любом значении y_0 :

$$N_{n \min} = \frac{mv_0^2}{l} - mg\left(3 + 2\frac{y_0}{l}\right) > 0,$$

т. е. чтобы

$$v_0^2 > \left(3 + 2\frac{y_0}{l}\right)gl.$$

Замечая, что максимальное значение y_0 равно l , окончательно получим искомое неравенство

$$v_0 > \sqrt{5gl}. \quad (29.26)$$

Пример 140. Составить и исследовать уравнение движения тяжелой точки (рис. 394) по поверхности сферы (сферический маятник).

Уравнение сферы зададим в виде (l — радиус сферы)

$$\Phi = l^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0. \quad (29.27)$$

Уравнения Лагранжа первого рода будут (ось Oz направим по вертикали вниз)

$$m\ddot{x} = -2\lambda x, \quad m\ddot{y} = -2\lambda y, \quad m\ddot{z} = mg - 2\lambda z. \quad (29.28)$$

Для исключения λ поступим по предыдущему: умножим обе части первого равенства на \dot{x} , второго на \dot{y} , третьего на \dot{z} и сложим их между собой; будем иметь

$$m \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} = mg\dot{z} - \lambda \frac{d}{dt} (x^2 + y^2 + z^2),$$

или, в соответствии с (29.27), после интегрирования

$$\frac{mv^2}{2} - mgz = \frac{mv_0^2}{2} - mgz_0. \quad (29.29)$$

Это выражение представляет собой интеграл энергии.

Умножая второе равенство (29.28) на x , первое — на y и вычитая из второго первое, получим

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0$$

или

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \text{const.}$$

Это — интеграл площадей в плоскости xOy , имеющий место, так как ни сила тяжести, ни реакция не создают момента относительно оси Oz . Введем цилиндрические координаты (r, φ, z), выбрав их так, как показано на рис. 394. Тогда $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, и интеграл площадей приведет к виду

$$r^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \quad (29.30)$$

Вместе с интегралом энергии (29.29), который можно переписать в цилиндрических координатах в форме

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 - 2gz = \text{const.}, \quad (29.31)$$

и уравнением связи (29.27), записанным в виде

$$r^2 + z^2 = l^2, \quad (29.32)$$

имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными функциями времени r, φ, z . Интегрирование этой системы уравнений определит движение точки на сфере (§ 161).

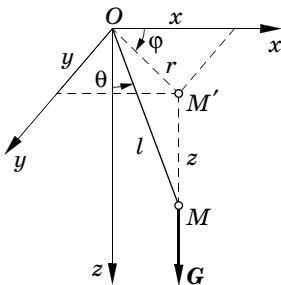


Рис. 394

Обратимся к определению множителя связи и реакции. Умножая обе части первого равенства (29.28) на x , второго — на y и третьего — на z , получаем

$$m \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \right) - m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = mgz - 2\lambda (x^2 + y^2 + z^2)$$

или, используя (29.27),

$$2\lambda l^2 = mgz + mv^2. \quad (29.33)$$

По (29.13) и (29.27) определим проекцию реакции на нормаль

$$N_n = \lambda |\text{grad } \Phi| = 2\lambda l = mg \frac{z}{l} + \frac{mv^2}{l}$$

или, согласно (29.29),

$$N_n = 3mg \frac{z}{l} + \frac{mv_0^2}{2} - 2mg \frac{z_0}{l}. \quad (29.34)$$

Условие, налагаемое на v_0 , — чтобы точка при любом значении z_0 не сошла со связи, — сохраняет вид (29.26).

В только что рассмотренных примерах определить реакции можно было и без применения уравнений Лагранжа первого рода, непосредственно составляя условия равновесия движущейся точки под действием силы тяжести, реакции и центробежной силы инерции. Метод множителей Лагранжа оказывает существенную пользу в случаях, когда поверхность или кривая не обладают теми простыми геометрическими свойствами, как сфера или окружность; покажем это на следующем примере.

Пример 141. Тяжелая точка массой m совершает движение по эллипсу, плоскость которого наклонена к горизонту под углом α (рис. 395); проекцией эллипса на горизонтальную поверхность служит окружность радиусом r_0 . Составить уравнения движения и определить реакцию связи, считая ее идеальной.

Представим себе эллипс как пересечение поверхности кругового цилиндра, радиус которого равен r_0 , а образующая параллельна вертикальной оси, с плоскостью, наклоненной к горизонту под углом α (цилиндр и плоскость не показаны на рисунке, чтобы не усложнять его). Уравнения связей будут иметь вид

$$\Phi_1 = r_0^2 - x^2 - y^2 = 0, \quad \Phi_2 = z - kx = 0, \quad (29.35)$$

где $k = \text{tg } \alpha$. Составим уравнения Лагранжа первого рода (29.4):

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -2\lambda_1 x - k\lambda_2, \\ m\ddot{y} &= -2\lambda_1 y, \\ m\ddot{z} &= mg + \lambda_2. \end{aligned} \quad (29.36)$$

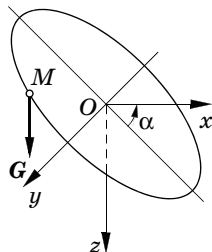


Рис. 395

Для определения движения можно воспользоваться, как и в предыдущих примерах, интегралом энергии, который можно получить и непосредственно, и путем сложения уравнений (29.36), соответственно умноженных на \dot{x} , \dot{y} и \dot{z} . Проводя вычисление последним путем, полезно проследить, как при помощи уравнений связей (29.35) можно исключить из уравнения движения множители λ_1 и λ_2 . Будем иметь

$$\frac{mv^2}{2} - mgz = C,$$

где C — постоянная, определяемая из начальных условий. Этого уравнения совместно с двумя уравнениями связей (29.35) достаточно для определения движения точки по эллипсу. Пользуясь очевидными соотношениями

$$x = r_0 \cos \varphi, \quad y = r_0 \sin \varphi, \quad z = kx = kr_0 \cos \varphi, \quad (29.37)$$

сведем задачу к исследованию приводящегося к квадратуре уравнения

$$(1 + k^2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 = C' + \frac{2kg}{r_0} \cos \varphi. \quad (29.38)$$

Перейдем к нахождению множителей связей λ_1 и λ_2 и реакции. Умножим уравнения (29.36) соответственно на x , y , z и сложим; тогда получим

$$m(x\ddot{x} + y\ddot{y}) + mz\ddot{z} = -2\lambda_1(x^2 + y^2) - k\lambda_2x + \lambda_2z + mgz$$

или

$$m \frac{d^2}{dt^2} \frac{x^2 + y^2}{2} - m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mz\ddot{z} = -2\lambda_1(x^2 + y^2) + \lambda_2(z - kx) + mgz.$$

Отсюда, согласно уравнениям связей (29.35), будем иметь

$$2r_0^2\lambda_1 + (m\ddot{z} - mg)z = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

или в силу последнего из уравнений (29.36)

$$2r_0^2\lambda_1 + z\lambda_2 = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = mr_0^2\dot{\varphi}^2. \quad (29.39)$$

Вычтем еще из последнего уравнения (29.36) первое, умноженное на k ; тогда, согласно второму из уравнений связей (29.35), получим

$$m(\ddot{z} - k\ddot{x}) = 0 = mg + \lambda_2 + 2k\lambda_1x + k^2\lambda_2$$

или

$$2kx\lambda_1 + (1 + k^2)\lambda_2 = -mg. \quad (29.40)$$

Из двух уравнений (29.39) и (29.40) найдем

$$\lambda_1 = \frac{m(1 + k^2)r_0^2\dot{\varphi}^2 + gz}{2[(1 + k^2)r_0^2 - kxz]}, \quad \lambda_2 = \frac{mr_0^2(g + kx\dot{\varphi}^2)}{(1 + k^2)r_0^2 - kxz}, \quad (29.41)$$

после чего реакции эллипса определяются по формулам

$$\begin{aligned} N_x &= \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = -2\lambda_1 x - k\lambda_2, \\ N_y &= \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = -2\lambda_1 y, \\ N_z &= \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \lambda_2 \end{aligned} \quad (29.42)$$

или после подстановки выражений (29.41)

$$\begin{aligned} N_x &= m \frac{g(kr_0^2 - xz) - xr_0^2\dot{\varphi}^2}{(1+k^2)r_0^2 - kxz}, \\ N_y &= -my \frac{(1+k^2)r_0^2\dot{\varphi}^2 + gz}{(1+k^2)r_0^2 - kxz}, \\ N_z &= -mr_0^2 \frac{g + kx\dot{\varphi}^2}{(1+k^2)r_0^2 - kxz}. \end{aligned} \quad (29.43)$$

В силу соотношений (29.37) эти выражения можно представить как функции от $\dot{\varphi}$ и φ :

$$\begin{aligned} N_x &= m \frac{kg \sin^2 \varphi - r_0\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi}{1 + k^2 \sin^2 \varphi}, \\ N_y &= -m \frac{(1+k^2)r_0\dot{\varphi}^2 + kg \cos \varphi}{1 + k^2 \sin^2 \varphi} \sin \varphi, \\ N_z &= -m \frac{g + kr_0\dot{\varphi}^2 \cos \varphi}{1 + k^2 \sin^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (29.44)$$

Пользуясь (29.38), можно в последних равенствах выразить $\dot{\varphi}^2$ через угол φ , который в данном случае играет роль независимой обобщенной координаты. При $k = 0$ эллипс превращается в горизонтальную окружность, по которой, согласно (29.38), точка будет двигаться с постоянной скоростью. Такое движение совершает *конический маятник*. Реакция окружности в этом случае, согласно (29.44), будет определяться равенствами

$$N_x = -mr_0\dot{\varphi}^2 \cos \varphi, \quad N_y = -mr_0\dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \quad N_z = -mg,$$

смысл которых очевиден. При $k \rightarrow \infty$ проекции реакции стремятся к нулю; связь в этом случае представляет собой совокупность двух вертикальных прямых, совпадающих с траекториями свободной тяжелой точки, брошенной вертикально.

§ 159. Уравнения Лагранжа второго рода

Уравнения Лагранжа второго рода представляют собой дифференциальные уравнения движения несвободной системы, составленные в обобщенных координатах. Наибольшее распространение получили уравнения в *независимых* обобщенных координатах, — их обычно называют *уравнениями Лагранжа второго рода*, а иногда просто *уравнениями Лагранжа*, так как уравнениями Лагранжа первого рода пользуются сравнительно редко.

Рассмотрим систему с k степенями свободы, подчиненную идеальным голономным связям. Положение системы в пространстве будем определять k независимыми обобщенными координатами q_1, \dots, q_k . Вектор-радиус r_i любой точки системы может быть, как это следует из § 142, выражен через обобщенные координаты (и время, если связи нестационарны) по формулам

$$r_i = r_i(t; q_1, q_2, \dots, q_k), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (29.45)$$

а возможные перемещения определяются как вариации векторов-радиусов

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (29.46)$$

причем, согласно принятому условию о независимости обобщенных координат, все вариации δq_j , $j = 1, 2, \dots, k$, представляют собой произвольные бесконечно малые величины.

Составим выражения векторов скоростей точек системы:

$$v_i = \dot{r}_i = \frac{\partial r_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (29.47)$$

Производные обобщенных координат по времени, т. е. величины \dot{q}_i , как уже упоминалось в § 142, называются *обобщенными скоростями*. Формулы (29.47) показывают, что скорость v_i любой точки линейно выражается через обобщенные скорости, так как по (29.45) $\partial r_i / \partial t$ и $\partial r_i / \partial q_j$ зависят только от обобщенных координат и времени, но не от обобщенных скоростей. Поэтому, обозначая через α произвольный индекс, изменяющийся от 1 до k , будем иметь

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}. \quad (29.48)$$

Докажем еще, что

$$\frac{\partial v_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}. \quad (29.49)$$

Для этого продифференцируем обе части (29.47) по q_α и получим

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_\alpha \partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_\alpha \partial q_j} \dot{q}_j.$$

С другой стороны, составим непосредственно

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial^2 r_i}{\partial t \partial q_\alpha} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_\alpha} \dot{q}_j.$$

Сравнивая последние два равенства, убеждаемся в справедливости соотношения (29.49).

Обратимся к общему уравнению динамики (28.70) и перепишем его в виде

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \dot{v}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (29.50)$$

Первая сумма уже была выражена через обобщенные координаты (см. формулу (27.49)); она равна

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^k \mathbf{Q}_j \delta q_j, \quad (29.51)$$

где \mathbf{Q}_j — обобщенная сила.

Что касается второй суммы в уравнении (29.50), то, пользуясь (29.46) и меняя порядок суммирования, ее можно преобразовать так:

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{v}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n \left(m_i \dot{v}_i \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n m_i \dot{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j; \quad (29.52)$$

скалярное произведение под знаком суммы преобразуется к виду

$$m_i \dot{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j},$$

или по формулам (29.48) и (29.49)

$$m \dot{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{m_i v_i^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{m_i v_i^2}{2} \right).$$

Подставляя последнее выражение в правую часть равенства (29.52) и замечая, что сумма

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i v_i^2}{2} \right) = T \quad (29.53)$$

определяет кинетическую энергию системы, получаем

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^k \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j.$$

Уравнение (29.50) теперь переписется следующим образом:

$$\sum_{j=1}^k \left(Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \quad (29.54)$$

Последнее равенство может выполняться при произвольных δq_j только в том случае, когда все выражения в круглых скобках равны нулю. Таким образом, мы приходим к *уравнениям Лагранжа второго рода*, составленным в *независимых обобщенных координатах для системы с голономными связями*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (29.55)$$

Уравнения (29.55) представляют собой систему k (по числу степеней свободы) обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с k независимыми обобщенными координатами, являющимися искомыми функциями времени.

При составлении уравнений Лагранжа второго рода (29.55) приходится прежде всего разыскивать выражение кинетической энергии через обобщенные скорости и координаты (и, кроме того, через время, если связи нестационарны).

Докажем, что *кинетическая энергия является квадратичной функцией обобщенных скоростей*.

Для этого заметим, что, согласно (29.47),

$$v_i^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + 2 \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_j \dot{q}_\alpha$$

и полная кинетическая энергия будет равна

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = T_0 + T_1 + T_2, \quad (29.56)$$

где T_0 — функция нулевой степени относительно обобщенных скоростей \dot{q}_j :

$$T_0 = T_0(t; q_1, \dots, q_k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial r_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial t}, \quad (29.57)$$

T_1 — линейная функция обобщенных скоростей

$$T_1 = \sum_{j=1}^k B_j \dot{q}_j, \quad (29.58)$$

где

$$B_j(t; q_1, q_2, \dots, q_k) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial r_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}, \quad (29.59)$$

и T_2 — функция второй степени от обобщенных скоростей:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=1}^k A_{j\alpha} \dot{q}_j \dot{q}_\alpha, \quad (29.60)$$

причем

$$A_{j\alpha}(t; q_1, q_2, \dots, q_k) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}. \quad (29.61)$$

Из определения функций $A_{j\alpha}$ следует, что $A_{j\alpha} = A_{\alpha j}$, $j = 1, 2, \dots, k$; $\alpha = 1, 2, \dots, k$, т. е. эти величины симметричны.

Итак, выражение кинетической энергии в обобщенных координатах будет

$$T = T_0(t; q_1, \dots, q_k) + \sum_{j=1}^k B_j(t; q_1, \dots, q_k) \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=1}^k A_{j\alpha}(t; q_1, \dots, q_k) \dot{q}_j \dot{q}_\alpha. \quad (29.62)$$

Если все связи стационарны, то r_i не зависят явно от времени; тогда, очевидно,

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} = 0, \quad T_0 = 0, \quad B_j = 0, \quad T_1 = 0$$

и выражение кинетической энергии сводится к однородной функции второй степени обобщенных скоростей (квадратичной форме), коэффициенты которой зависят только от обобщенных координат:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=1}^k A_{j\alpha} \dot{q}_j \dot{q}_\alpha. \quad (29.63)$$

Об определении величин Q_j уже говорилось в § 145; напомним, что они определяются как коэффициенты при соответствующих по индексу вариациях обобщенных координат q_j в выражении суммы элементарных работ задаваемых сил на совокупности возможных перемещений системы

$$\delta W = \sum_{j=1}^k Q_j \delta q_j.$$

Если задаваемые силы *консервативны*, то, согласно формуле (27.50),

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

и уравнения (29.55) будут иметь вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (29.64)$$

или, поскольку потенциальная энергия Π не зависит от обобщенных скоростей,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_j} = 0.$$

Введем в рассмотрение *функцию Лагранжа*, или *кинетический потенциал*

$$L(t; q_1, q_2, \dots, q_k; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k) = T - \Pi. \quad (29.65)$$

Тогда предыдущие уравнения примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (29.66)$$

§ 160. Интеграл энергии и циклические интегралы

Предположим, что время не входит явно в выражение кинетического потенциала L . Это безусловно будет иметь место, если связи стационарны; однако L может явно не содержать t и в тех случаях, когда связи зависят от времени, что будет показано ниже с помощью примеров.

Составим полную производную кинетического потенциала по времени, рассматривая его как сложную функцию, зависящую от времени через обобщенные координаты и скорости:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right).$$

Пользуясь уравнениями Лагранжа в форме (29.66), произведем замену

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j};$$

тогда будем иметь

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^k \left(\dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \ddot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

или, перенеся все члены в одну сторону,

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right) = 0. \quad (29.67)$$

Отсюда следует наличие первого интеграла уравнений Лагранжа

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = h, \quad (29.68)$$

называемого *интегралом энергии*. Это наименование объясняется тем, что в случае стационарных связей равенство (29.68) выражает не что иное, как закон сохранения механической энергии. Действительно, в этом случае кинетическая энергия представляет, согласно (29.63), однородную квадратичную форму обобщенных скоростей, и по известной теореме Эйлера об однородных функциях будем иметь

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T, \quad (29.69)$$

так что (29.68) преобразуется к виду

$$2T - L = 2T - (T - \Pi) = h,$$

или

$$T + \Pi = h, \quad (29.70)$$

что и выражает закон сохранения механической энергии. Входящая сюда постоянная интегрирования h представляет полную механическую энергию системы, равную сумме начальных значений кинетической и потенциальной энергий.

Первый интеграл уравнений движения (29.68) имеет место при достаточно широких предположениях относительно свойств задаваемых сил (консервативность) и характера связей (стационарность) или, несколько более общо, относительно вида

функции Лагранжа L (независимость ее от времени). Обратимся теперь к рассмотрению других первых интегралов, существование которых требует более сильных ограничений, накладываемых на выражение кинетического потенциала.

Условимся называть *циклическими* такие обобщенные координаты системы, которые не входят явно в выражение функции Лагранжа. Так, например, если тяжелая точка массой m движется в пространстве, то в случае отсутствия сопротивления среды кинетическая энергия и функция Лагранжа точки в декартовых прямоугольных координатах (ось Oz направлена по вертикали вверх) будут таковы:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad \Pi = mgz, \quad L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

Координаты x и y являются циклическими. Точно так же, если материальная точка массой m движется в плоскости под действием центральной силы, направленной к началу координат, как к центру, и являющейся функцией только расстояния r от точки до центра, то, пользуясь полярными координатами, будем иметь

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2), \quad \Pi = f(r), \quad L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - f(r).$$

Угловая координата ϕ при этом будет циклической.

Предположим, что среди k обобщенных координат оказалось некоторое число $\nu < k$ циклических координат

$$q_1, q_2, \dots, q_\nu;$$

тогда по определению циклических координат

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \nu, \quad (29.71)$$

и из уравнений Лагранжа (29.66) сразу следует, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \nu,$$

откуда получаем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = C_j = \text{const}, \quad j = 1, 2, \dots, \nu. \quad (29.72)$$

Эти равенства, связывающие обобщенные скорости, координаты, время и постоянные интегрирования, являются первыми

интегралами уравнений Лагранжа и называются *циклическими интегралами*.

Производные от функции L по обобщенным скоростям q_j , или, что все равно, от кинетической энергии T по тем же переменным, называют *обобщенными импульсами* и обозначают так:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = p_j. \quad (29.73)$$

Величинам p_j можно дать следующую интерпретацию. Пусть в момент времени t к точкам системы прикладываются некоторые задаваемые удары, т. е. мгновенные силы F_i , время действия которых τ настолько мало, что изменением положения точек системы за это время можно пренебречь. Интегрируя в интервале времени $(t, t + \tau)$ левые и правые части уравнений (29.55), получаем

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)_{t+\tau} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)_t - \int_t^{t+\tau} \frac{\partial T}{\partial q_j} dt = \int_t^{t+\tau} Q_j dt. \quad (29.74)$$

Интеграл в левой части равенства (29.74) имеет порядок τ , так как подинтегральные величины $\partial T/\partial q_j$ во время удара претерпевают лишь конечные изменения. Интеграл в правой части этого равенства можно по формуле (27.49) переписать в виде

$$\int_t^{t+\tau} Q_j dt = \int_t^{t+\tau} \sum_{i=1}^n F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} dt,$$

причем по предыдущему величины $\partial r_i/\partial q_j$ за время удара изменяются ничтожно и могут быть приняты при интегрировании за постоянные; поэтому будем иметь

$$\int_t^{t+\tau} Q_j dt = \sum_{i=1}^n S_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}, \quad (29.75)$$

где векторы

$$S_i = \int_t^{t+\tau} F_i dt$$

представляют собой импульсы за время удара мгновенных сил, приложенных к точкам системы, называемые *обобщенными импульсами мгновенных сил*.

Система уравнений (29.74) приводится к виду

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)_{t+\tau} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)_t = \int_t^{t+\tau} Q_j dt, \quad (29.76)$$

или, пользуясь обозначениями (29.73),

$$(p_j)_{t+\tau} - (p_j)_t = \int_t^{t+\tau} Q_j dt. \quad (29.77)$$

Из последней формулы следует, что обобщенный импульс p_j в данный момент равен обобщенному импульсу мгновенных сил, который надо сообщить *покоящейся* системе, чтобы она мгновенно приобрела то движение, которое она на самом деле совершает в этот момент. Этим можно объяснить применение термина *обобщенный импульс* для величин p_j , определенных равенствами (29.73).

В декартовой системе координат обобщенные импульсы равны

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} = m\dot{x}, \quad (29.78)$$

$$p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z},$$

т. е. представляют собой *проекции количества движения*.

В полярной системе координат импульс p_ϕ , соответствующий угловой координате, равен

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) = mr^2 \dot{\phi}, \quad (29.79)$$

т. е. равен *моменту количества движения точки*.

Пользуясь понятием импульса, можно выразить (29.72) короче так:

$$p_j = C_j, \quad j = 1, 2, \dots, v. \quad (29.80)$$

Отсюда следует, что циклические импульсы сохраняют постоянную величину. В полярных координатах это соответствует известной теореме сохранения момента количества движения при равенстве нулю момента приложенной силы, а в декартовых — теореме сохранения проекции количества движения при равенстве нулю проекции главного вектора внешних сил на соответствующую ось.

§ 161. Примеры применения уравнений Лагранжа второго рода

Пример 142. Циклоидальный маятник. Тяжелая точка массой m движется по циклоиде с вертикальной осью (рис. 396). Найти движение точки.

Если начало координат взять в точке O , то уравнения циклоиды будут ($2a$ — диаметр производящего круга)

$$\begin{aligned} x &= a(\theta - \sin \theta), \\ y &= a(1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

За независимую обобщенную координату примем длину дуги σ от вершины C циклоиды до движущейся точки. Зависимость угла θ от σ легко найти, написав

$$\sigma = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int 2a \sin \frac{\theta}{2} d\theta = -4a \cos \frac{\theta}{2} + \text{const.}$$

Помещая начало координат и отсчета дуг в точку C (рис. 396), будем иметь

$$y' = -a(1 + \cos \theta) = -2a \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{\sigma^2}{8a}.$$

Кинетическая энергия равна

$$T = \frac{m}{2} \dot{\sigma}^2,$$

потенциальная энергия

$$\Pi = -mgy' = \frac{mg}{8a} \sigma^2,$$

и уравнение Лагранжа записывается в виде

$$\ddot{\sigma} = -\frac{g}{4a} \sigma.$$

Это — уравнение гармонических колебаний с периодом

$$\tau = 2\pi \sqrt{4\frac{a}{g}}.$$

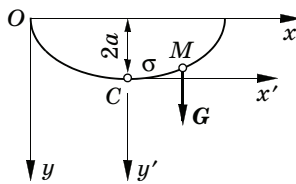


Рис. 396

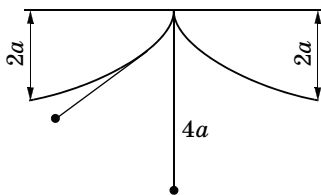


Рис. 397

Циклоидальный маятник (маятник Гюйгенса) обладает свойством *изохронности*, т. е. период колебаний его не зависит от начальных условий движения. В этом его отличие от математического маятника, у которого *изохронность* имеет место только при малых углах отклонения. Маятник Гюйгенса может быть осуществлен, если нить, на которой висит грузик, заставить при колебаниях навиваться на шаблон, имеющий фор-

му циклоиды (рис. 397). Тогда, как известно, грузик будет двигаться по эвольвенте циклоиды, т. е. по такой же, но сдвинутой циклоиде. Циклоидальный маятник движется синхронно с математическим маятником длиной $4a$, совершающим малые колебания.

Пример 143. Сферический маятник. Тяжелая точка массой m движется по поверхности гладкой сферы радиусом l . Исследовать характер движения при различных начальных условиях, считая связь удерживающей.

Кинетическая энергия точки в сферических координатах (рис. 394) равна (ср. равенство (12.24) при $r = l = \text{const}$)

$$T = \frac{m}{2} (l^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2);$$

потенциальная энергия

$$\Pi = -mgz = -mgl \cos \theta.$$

Координата ϕ является циклической; соответствующий ей первый интеграл уравнения движения будет $ml^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta = C_1$ или

$$\dot{\phi} \sin^2 \theta = C.$$

Составим еще один первый интеграл — интеграл энергии

$$T + \Pi = \text{const},$$

который может быть записан в виде

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - \frac{2g}{l} \cos \theta = 2h.$$

После исключения $\dot{\phi}$ получим

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{C^2}{\sin^2 \theta} + \frac{2g}{l} \cos \theta + 2h.$$

Произведя замену $l \cos \theta = z$, получим

$$l^2 \dot{z}^2 = 2 (l^2 - z^2) (hl^2 + gz) - C^2 l^4 = F(z),$$

откуда

$$t = \pm \int_{z_0}^z \frac{l dz}{\sqrt{F(z)}},$$

где z_0 определяется начальным значением угла θ . Очевидно, что

$$F(z_0) = l^2 \dot{z}_0^2 > 0.$$

Интеграл в выражении для t эллиптический, так как под знаком радикала стоит полином третьей степени. Обращая интеграл, можно найти

z как функцию от времени. Определив z или θ , найдем φ , исключив dt из равенства

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{\sin^2 \theta} = \frac{Cl^2}{l^2 - z^2}$$

и предыдущего равенства, записанного в виде

$$dt = \pm \frac{l dz}{\sqrt{F(z)}}.$$

Получим

$$d\varphi = \pm \frac{Cl^3}{l^2 - z^2} \frac{dz}{\sqrt{F(z)}},$$

откуда следует, что

$$\varphi = \pm \int_{z_0}^z \frac{Cl^3}{l^2 - z^2} \frac{dz}{\sqrt{F(z)}}.$$

Покажем, как, не вычисляя интеграла, можно судить качественно о характере движения сферического маятника.

Для этого заметим прежде всего, что функция $F(z)$ имеет в интервале $(-\infty, +\infty)$ три действительных корня α , β и γ , так как

$$F(-\infty) = (-2gz^3 + \dots)_{z=-\infty} = +\infty,$$

$$F(-l) = -C^2l^4 < 0,$$

$$F(z_0) > 0,$$

$$F(+l) = -C^2l^4 < 0,$$

$$F(+\infty) = (-2gz^3 + \dots)_{z=+\infty} = -\infty.$$

Следовательно, корни располагаются так, как показано на рис. 398. Движение может происходить только в области, где $F(z) > 0$, т. е. в области* между корнями $z = \beta$ и $z = \alpha$. Эти значения z определяют на сфере две параллельные окружности, между которыми может происходить движение. Параллельные окружности

$$\theta_1 = \arccos(\beta/l),$$

$$\theta_2 = \arccos(\alpha/l)$$

с радиусами

$$R = \sqrt{l^2 - \beta^2},$$

$$r = \sqrt{l^2 - \alpha^2}$$

* Интервал $(-\infty, \gamma)$ исключается, как не удовлетворяющий очевидному условию $|z| \leq l$.

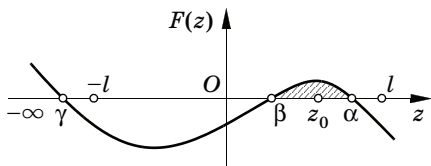


Рис. 398

называются *предельными окружностями*. Из уравнения

$$l^2 \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = F(z)$$

следует, что на этих окружностях z становится наибольшим и наименьшим.

Среднее по высоте положение точки всегда находится ниже центра сферы, т. е.

$$\alpha + \beta > 0.$$

Для доказательства этого утверждения сравним коэффициенты при z в тождестве

$$F(z) = -2gz^3 - 2hl^2z^2 + 2l^2gz + 2hl^4 - C^2l^4 = -2g(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma);$$

тогда получим

$$2l^2g = -2g(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma),$$

откуда следует

$$\gamma = -\frac{l^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta}.$$

Но $\gamma < 0$, а

$$l^2 + \alpha\beta > 0$$

(так как $|\alpha| < l$, $|\beta| < l$); таким образом,

$$\alpha + \beta > 0.$$

Итак, z колеблется между значениями β и α . Что касается φ , то из условия

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Cl^2}{l^2 - z^2}$$

следует, что φ изменяется монотонно.

При сравнительно малых начальных отклонениях от нижнего положения равновесия и малых начальных скоростях точка будет описывать на нижней полусфере траекторию, горизонтальная проекция которой напоминает эллипс, с той разницей, что траектория не замыкается, а образует петли (рис. 399). Явление это протекает так, как будто точка движется по эллипсу, большая ось которого поворачивается, причем направление поворота этой оси совпадает с направлением обращения точки по эллипсу. Как показывает подробное исследование*, за время полного обращения точки по эллипсу ось эллипса повернется на угол, пропорциональный площади описываемого проекцией точки эллипса.

* Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях [9, с. 266—273].

Если вектор начальной скорости лежит в плоскости, проходящей через начальное положение точки и равновесное положение нити, то сферический маятник вырождается в математический и φ будет равно нулю.

Отметим еще один частный случай. Подберем параметры так, чтобы уравнение $F(z) = 0$ имело кратный корень $z_0 = \alpha = \beta$. Тогда предельные окружности сливаются и точка будет двигаться по окружности $z = z_0$ или

$$\theta = \arccos \frac{z_0}{l}.$$

Такое движение сферического маятника возможно, если

$$F(z_0) = 2(l^2 - z_0^2)(hl^2 + gz_0) - C^2l^4 = 0,$$

$$F'(z_0) = -4z_0(hl^2 + gz_0) + 2g(l^2 - z_0^2) = 0,$$

т. е. если

$$C = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{g}{z_0}} (l^2 - z_0^2).$$

Следовательно, в этом случае

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Cl^2}{l^2 - z_0^2} = \sqrt{\frac{g}{z_0}}, \quad \varphi = \sqrt{\frac{g}{z_0}} t,$$

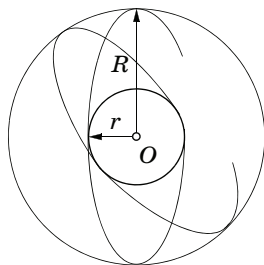


Рис. 399

откуда время τ полного обращения маятника по окружности $z = z_0$ будет равно

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{z_0}{g}},$$

т. е. периоду малых колебаний математического маятника, имеющего длину, равную расстоянию от центра до плоскости обращения.

Маятник, совершающий такое круговое движение, называется *коническим маятником* (рис. 400). Если тяжелый шарик, подвешенный на нити, отклонить от вертикали на угол $\theta = \theta_0$ и сообщить ему скорость v_0 , перпендикулярную плоскости, проведенной через вертикаль и нить, равную

$$v_0 = l \sin \theta_0 \sqrt{\frac{g}{z_0}} = \sin \theta_0 \sqrt{\frac{gl}{\cos \theta_0}},$$

то при отсутствии сил сопротивления шарик будет вращаться с этой постоянной скоростью по окружности радиусом $r_0 = l \sin \theta_0$.

К тому же результату можно было бы прийти из кинестатического расчета, написав, что проекции силы тяжести и центробежной силы на направление, перпендикулярное нити (в плоскости, проходящей через ось Oz и нить), равны между собой.

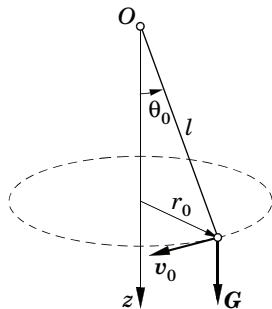


Рис. 400

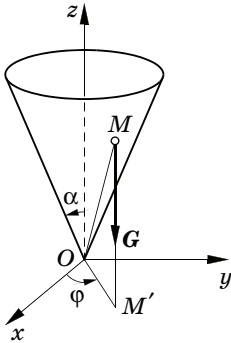


Рис. 401

Пример 144. Движение тяжелой частицы массой m по конической поверхности. Исследуем это явление (рис. 401).

Пусть координаты частицы будут r , φ и z ; полный угол раствора конуса 2α . Кинетическая энергия выражается формулой (12.21)

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

(т. I, § 48); заменив в ней ρ на \dot{r} , получим

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2).$$

Замечая, что

$$z = r \operatorname{ctg} \alpha,$$

перепишем это выражение в виде

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{\dot{r}^2}{\sin^2 \alpha} + r^2 \dot{\phi}^2 \right).$$

Потенциальная энергия равна

$$\Pi = mgz = mgr \operatorname{ctg} \alpha.$$

Циклический интеграл и интеграл энергии могут быть написаны в форме

$$r^2 \dot{\phi} = C, \quad \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \alpha + gr \sin 2\alpha = 2h,$$

причем первое из этих равенств представляет собой, очевидно, интеграл площадей в проекции на горизонтальную плоскость. Исключая отсюда $\dot{\phi}$, получаем

$$\dot{r}^2 + C^2 \sin^2 \alpha \cdot \frac{1}{r^2} + gr \sin 2\alpha = 2h$$

или

$$r^2 \dot{r}^2 = -g \sin 2\alpha \cdot r^3 + 2hr^2 - C^2 \sin^2 \alpha = F(r).$$

В дальнейшем исследовании примем, что частица поступает на поверхность, имея начальную скорость v_0 , направленную по касательной к окружности радиуса r_0 , т. е.

$$r = r_0, \quad \dot{r} = 0, \quad r \dot{\phi} = v_\varphi = v_0, \quad \text{при } t = t_0.$$

Отсюда находим значения постоянных C и h :

$$C = v_0 r_0,$$

$$h = \frac{C^2 \sin^2 \alpha}{2r_0^2} + \frac{r_0 g \sin 2\alpha}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2} + \frac{r_0 g \sin 2\alpha}{2},$$

подстановка которых в выражение $F(r)$ дает

$$F(r) = g(r_0 - r) \left(r^2 - \frac{v_0^2 \operatorname{tg} \alpha}{2g} r - \frac{v_0^2 r_0 \operatorname{tg} \alpha}{2g} \right) \sin 2\alpha.$$

Корнями трехчлена, заключенного во вторую скобку, будут служить величины

$$r_{1,2} = \frac{v_0^2 \operatorname{tg} \alpha}{4g} \pm \sqrt{\frac{v_0^4 \operatorname{tg}^2 \alpha}{16g^2} + \frac{v_0^2 r_0 \operatorname{tg} \alpha}{2g}} = \frac{v_0^2 \operatorname{tg} \alpha}{4g} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{8gr_0}{v_0^2 \operatorname{tg} \alpha}} \right),$$

и функция $F(r)$ может быть представлена в виде

$$F(r) = g (r_0 - r) (r - r_1) (r - r_2) \sin 2\alpha.$$

Оба корня r_1 и r_2 вещественны, причем $r_2 < 0$; следовательно, движение может происходить в одном из интервалов

$$r_0 < r < r_1, \tag{\alpha}$$

$$r_1 < r < r_0, \tag{\beta}$$

так как только в этих интервалах функция $F(r)$ положительна.

В интервале (α) r возрастает от r_0 до r_1 согласно уравнению

$$\int_{r_0}^r \frac{r \, dr}{\sqrt{F(r)}} = t.$$

Время τ , необходимое для прихода в верхнюю точку, измеряется величиной

$$\tau = \int_{r_0}^{r_1} \frac{r \, dr}{\sqrt{F(r)}}.$$

Закон изменения φ определяется интегралом

$$\varphi = v_0 r_0 \int_{r_0}^r \frac{dr}{r \sqrt{F(r)}}.$$

Траектория вьется конической кривой между двумя предельными окружностями (рис. 402):

$$r = r_0, \quad r = r_1 \quad (r_1 > r_0).$$

В случае (β) имеет место, очевидно, то же самое, только $r_1 < r_0$, т. е. предельная окружность $r = r_1$ находится ниже начальной окружности $r = r_0$.

Исследуем, когда будет происходить первое движение и когда второе. Для этого выясним, при каких ограничениях, наложенных на начальную скорость v_0 , будут иметь место первое или второе неравенство. Легко видеть, что:

$$v_0 > \sqrt{gr_0 / \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{при } r_1 > r_0,$$

$$v_0 < \sqrt{gr_0 / \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{при } r_1 < r_0.$$

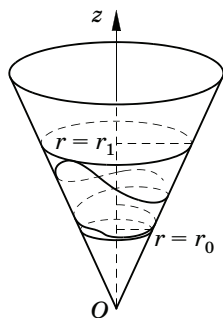


Рис. 402

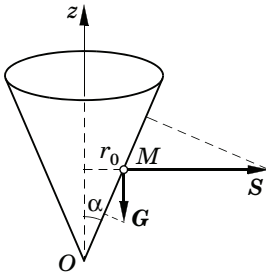


Рис. 403

В предельном случае

$$v_0 = \sqrt{gr_0/\operatorname{tg} \alpha}$$

обе окружности сливаются в одну и частица будет двигаться по окружности со скоростью v_0 .

Легко объяснить это, пользуясь соображениями кинестатики. Если задать достаточно большую начальную скорость

$$v_0 > \sqrt{gr_0/\operatorname{tg} \alpha},$$

то (рис. 403) проекция центробежной силы на образующую конуса будет больше проекции силы тяжести:

$$S \sin \alpha = \frac{mv_0^2}{r_0} \sin \alpha > mg \cos \alpha$$

и частица будет подниматься по конической поверхности, причем вследствие увеличения расстояния ее до оси конуса величина $\dot{\phi}$, связанная с r уравнением

$$r^2 \dot{\phi} = C,$$

будет уменьшаться; вместе с тем будет уменьшаться и окружная скорость, а следовательно, и центробежная сила. Когда частица коснется верхней предельной окружности, проекции станут равны, частица будет иметь скорость, параллельную горизонтальной плоскости, и затем начнет опускаться вниз. На этом пути скорость вновь будет возрастать до тех пор, пока частица не коснется нижней предельной окружности и т. д. Случай $r_0 > r_1$ приводит к тем же самым рассуждениям, только в обратном порядке. Ясно, что и другие начальные условия, в частности условие $v_{0r} \neq 0$, ничего нового не дают. Действительно, при этом частица, выйдя под углом к горизонтальной плоскости, коснется некоторой предельной окружности, положение которой зависит от абсолютного значения скорости вылета частицы, и уже затем начнется описанный ранее процесс.

Частица дойдет до вершины конуса только в том случае, если пустить ее по образующей конуса, если же скорость частицы имеет начальную горизонтальную составляющую, то при приближении частицы к вершине конуса скорость, согласно интегралу площадей, должна настолько возрасти, что частица вновь начнет подниматься вверх и будет колебаться между предельными окружностями. Конечно, весь этот процесс имеет место только при отсутствии трения; силы трения сделают процесс затухающим, скорость вследствие рассеяния энергии уменьшится и частица в конце концов окажется в вершине конуса.

Пример 145. Эллиптический маятник. Исследовать движение системы двух тел (рис. 404), из которых одно M_1 массой m_1 скользит без трения по горизонтальной плоскости, а второе M_2 массой m_2 соединено с ним невесомым стержнем длиной l и совершает колебания в вертикальной плоскости.

Обозначая координаты тел, рассматриваемых как материальные точки, соответственно через x_1, y_1 и x_2, y_2 , видим, что между ними и углом φ стержня с вертикалью существуют соотношения

$$x_2 = x_1 - l \sin \varphi, \quad y_2 = l \cos \varphi.$$

Система имеет две степени свободы; за независимые обобщенные координаты примем x_1 и φ .

Кинетические энергии отдельных тел легко вычисляются:

$$T_1 = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2,$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_1^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi - 2l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) = \\ &= \frac{m_2}{2} (\dot{x}_1^2 - 2l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2). \end{aligned}$$

Полная кинетическая энергия равна

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{m_2 l}{2} (l \dot{\varphi}^2 - 2 \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi).$$

Потенциальная энергия определяется по формуле

$$\Pi = -m_2 g y_2 = -m_2 g l \cos \varphi.$$

Функция Лагранжа будет равна

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{m_2 l}{2} (l \dot{\varphi}^2 - 2 \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi) + m_2 g l \cos \varphi.$$

Координата x_1 является циклической. Соответствующий ей интеграл будет

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2) \dot{x}_1 - m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi = \text{const} = C_1.$$

Это уравнение легко интегрируется; получаем

$$(m_1 + m_2) x_1 - m_2 l \sin \varphi = C_1 t + C_2,$$

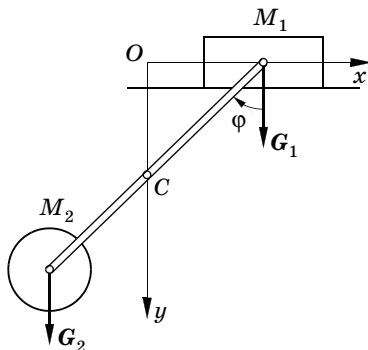


Рис. 404

откуда при надлежащем выборе начальных условий следует, что

$$x_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin \varphi.$$

Это соотношение имеет простой физический смысл: вследствие отсутствия горизонтальных сил центр масс C системы тел движется по вертикали, которую можно выбрать за ось Oy .

Составим уравнение Лагранжа для координаты φ . Имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l (\dot{\varphi} - \dot{x}_1 \cos \varphi), \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = m_2 l (\dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - g \sin \varphi)$$

и, следовательно,

$$m_2 l \frac{d}{dt} (l \dot{\varphi} - \dot{x}_1 \cos \varphi) - m_2 l (\dot{x}_1 \dot{\varphi} - g) \sin \varphi = 0.$$

Это уравнение заменой x_1 ранее приведенным его выражением через φ , а также заменой

$$\sin \varphi \approx \varphi, \quad \cos \varphi \approx 1,$$

справедливой при достаточно малых φ , приводится к следующему виду:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 \ddot{\varphi} + m_2 g l \varphi = 0,$$

или после сокращений

$$\ddot{\varphi} + \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Это — уравнение гармонических колебаний с периодом

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Если $m_1 \gg m_2$, то перемещения груза M_1 будут очень малы, и период приближается к периоду колебаний обычного маятника

$$\lim_{m_1 \rightarrow \infty} \tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Эллиптический маятник интересен тем, что подбором отношений масс грузов можно менять период колебаний, не меняя длины маятника; чем меньше m_1 , тем меньше период колебаний. Происхождение названия *эллиптический маятник* объясняется тем, что при движении точки M_1 по оси x , а точки C по оси y центр груза M_2 будет двигаться по эллипсу (§ 41).

Пример 146. Изотомеограф. Устройство изотомеографа* показано на рис. 405. Вдоль балки, подвешенной к потолку на двух проволоках, могут перемещаться два груза, каждый из которых имеет массу m . Балке сообщается начальная угловая скорость ω_0 вокруг вертикальной оси в тот момент, когда грузы находятся на одинаковых расстояниях a от оси вращения; затем ее предоставляют самой себе. Определить движение грузов по балке и вращение балки.

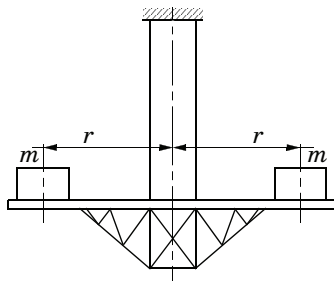


Рис. 405

Если через J обозначить момент инерции балки относительно оси вращения, через r — расстояние от груза до оси и через ϕ — угол поворота балки, то будем иметь (силы тяжести при движении в горизонтальной плоскости не совершают работы; сопротивлением проволок закручиванию пренебрегаем):

$$L = T = \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) = \frac{1}{2} (J + 2mr^2) \dot{\phi}^2 + m\dot{r}^2.$$

Угол ϕ является циклической координатой; циклический интеграл имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (J + 2mr^2) \dot{\phi} = C,$$

или

$$\dot{\phi} = \frac{C}{J + 2mr^2}.$$

Составляем интеграл энергии

$$T = \frac{1}{2} (J + 2mr^2) \dot{\phi}^2 + m\dot{r}^2 = h.$$

Подставив сюда значение $\dot{\phi}$, найдем следующую форму интеграла энергии:

$$m\dot{r}^2 + \frac{C^2}{2(J + 2mr^2)} = h.$$

Зададим начальные условия:

$$r = a, \quad \dot{r} = 0, \quad \dot{\phi} = \omega_0 \quad \text{при } t = 0.$$

Согласно циклическому интегралу будем иметь

$$C = (J + 2ma^2) \omega_0,$$

* Назначение прибора разъясняется в § 169.

затем из интеграла энергии следует, что

$$h = \frac{C^2}{2(J + 2ma^2)} = \frac{1}{2} \omega_0^2 (J + 2ma^2).$$

Интеграл энергии при этом приводится к виду

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 &= \frac{C^2}{2m} \left(\frac{1}{J + 2ma^2} - \frac{1}{J + 2mr^2}\right) = \frac{(J + 2ma^2) \omega_0^2 (r^2 - a^2)}{J + 2mr^2} = \\ &= \frac{(J + 2ma^2) \omega_0^2}{2m} \cdot \frac{r^2 - a^2}{r^2 + J/(2m)}. \end{aligned}$$

Для упрощения дальнейшего интегрирования сделаем предположение о малости величины

$$k^2 = \frac{J}{2ma^2}.$$

Тогда, приведя последнее уравнение к виду

$$\frac{r dr}{\sqrt{r^2 - a^2}} \sqrt{1 + k^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2} = a \sqrt{1 + k^2} \omega_0 dt,$$

заменяем радикалы, содержащие k^2 , их разложениями в степенные ряды. Будем иметь

$$\frac{r dr}{\sqrt{r^2 - a^2}} \left[1 + \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \dots\right] = a \left(1 + \frac{1}{2} k^2 + \dots\right) \omega_0 dt.$$

Замечая, что $r > a$, в первом приближении отбросим члены с k^2 и получим

$$\int_a^r \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - a^2}} = a \omega_0 dt,$$

откуда следует

$$\sqrt{r^2 - a^2} = a \omega_0 t, \quad r = a \sqrt{1 + \omega_0^2 t^2}.$$

Подставляя это значение r в циклический интеграл, находим

$$\dot{\phi} = \frac{C}{J + 2ma^2(1 + \omega_0^2 t^2)} = \frac{(J + 2ma^2) \omega_0}{J + 2ma^2 + 2ma^2 \omega_0^2 t^2} = \frac{(1 + k^2) \omega_0}{1 + k^2 + \omega_0^2 t^2},$$

откуда в указанном приближении получаем

$$\omega = \dot{\phi} = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2 t^2}.$$

Таков приближенный закон убывания угловой скорости балки со временем. Угол φ при этом определяется простой квадратурой

$$\varphi = \int_0^t \frac{\omega_0 dt}{1 + \omega_0^2 t^2} = \operatorname{arctg} \omega_0 t.$$

При росте t до бесконечности φ стремится к $\pi/2$. Такую систему со свободными грузами нельзя привести толчком во вращательное движение. Грузы разойдутся до отказа, балка при этом повернется на угол, меньший $\pi/2$, и только потом, если грузам не давать возможности дальнейшего движения, балка будет продолжать вращаться.

Рассмотрим теперь эту же задачу, но в предположении, что балка вращается с заданной постоянной угловой скоростью ω (от постороннего привода).

Выражение кинетического потенциала системы грузов имеет в этом случае вид

$$L = T = \frac{1}{2} \cdot 2m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = m(\dot{r}^2 + r^2 \omega^2).$$

Кинетическая энергия уже не является однородной квадратичной формой обобщенных скоростей, так как в ее выражение входит слагаемое T_0 , не содержащее обобщенной скорости \dot{r} . Это объясняется тем, что связи в данном случае *нестационарны*; действительно, выражения декартовых координат массой m в неподвижной системе осей имеют вид

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t, \quad z = \text{const},$$

где ωt — угол поворота балки вокруг оси z .

Поскольку выражение L не содержит времени, интеграл энергии может быть написан в форме (29.68)

$$\dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - L = 2m\dot{r}^2 - m\dot{r}^2 - mr^2\omega^2 = m\dot{r}^2 - mr^2\omega^2 = h.$$

При указанных выше начальных условиях получим

$$\dot{r}^2 = \omega^2 (r^2 - a^2).$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее упомянутым условиям, как нетрудно проверить, имеет вид

$$r = \frac{1}{2} a (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = a \operatorname{ch} \omega t.$$

Не обратив внимания на то, что связи нестационарны, мы получили бы интеграл энергии $T = \text{const}$ в ошибочной форме, отличающийся знаком слагаемого $mr^2\omega^2$ от вышеприведенного правильного его выражения.

§ 162. Уравнение движения машины

Как уже упоминалось, *машиной* называют совокупность твердых тел (звеньев), соединенных между собой так, что положение и движение любого звена вполне определяются положением и движением одного звена, называемого ведущим. При этом предполагается, что положение ведущего звена в каждый момент времени может быть определено заданием одного параметра; таким образом, машина является системой с одной степенью свободы. Примерами машин по этому определению могут служить многочисленные плоские механизмы (кривошипный, двухкривошипный и др.), представляющие собой соединения абсолютно твердых тел (шатуны, ведомые кривошипы, ползуны и пр.), приводимых в движение ведущим звеном; положение последнего задается одной величиной, например углом поворота φ . Наоборот, механизм дифференциала (§ 71) не является машиной в принятом здесь смысле, так как вследствие наличия сателлитов угловая скорость ведущего вала в этом случае еще не определяет угловой скорости ведомого вала.

Составим общее уравнение движения машины, пользуясь для этого методом уравнений Лагранжа второго рода.

При составлении выражения кинетической энергии предположим, что в качестве ведущего взято звено, вращающееся вокруг некоторой неподвижной оси (ведущий кривошип).

Обозначим через φ угол поворота ведущего кривошипа и через $\tilde{\omega} = \dot{\varphi}$ его угловую скорость. Тогда кинетическая энергия ведущего звена будет

$$T_0 = \frac{1}{2} J_0 \tilde{\omega}^2,$$

где J_0 — момент инерции его относительно оси вращения.

Через ω_k обозначим угловую скорость k -го звена и через $v_C^{(k)}$ — скорость его центра масс. Согласно приведенному определению машины эти величины для каждого положения ведущего звена могут быть выражены через угловую скорость последнего. Иными словами, отношения

$$\frac{\omega_k}{\tilde{\omega}}, \quad \frac{v_C^{(k)}}{\tilde{\omega}}$$

можно рассматривать как известные векторные функции угла φ .

Кинетическая энергия k -го звена может быть определена по формуле

$$T_k = \frac{1}{2} J_C^{(k)} \omega_k^2 + \frac{1}{2} m_k v_C^{(k)2} = \frac{1}{2} \omega^2 \left[J_C^{(k)} \left(\frac{\omega_k}{\omega} \right)^2 + m_k \left(\frac{v_C^{(k)}}{\omega} \right)^2 \right],$$

в которой $J_C^{(k)}$ — момент инерции k -го звена относительно оси, параллельной оси вращения и проходящей через его центр масс, а m_k — масса этого звена.

Кинетическая энергия машины, состоящей из ведущего звена и еще n звеньев, равна сумме кинетических энергий звеньев:

$$T = T_0 + \sum_{k=1}^n T_k = \frac{1}{2} \omega^2 \left\{ J_0 + \sum_{k=1}^n \left[J_C^{(k)} \left(\frac{\omega_k}{\omega} \right)^2 + m_k \left(\frac{v_C^{(k)}}{\omega} \right)^2 \right] \right\}.$$

Величина, стоящая в скобках, называется *моментом инерции машины, приведенным к оси вращения ведущего звена*; обозначая эту величину через $\Theta(\varphi)$, имеем

$$T = \frac{1}{2} \Theta(\varphi) \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \Theta(\varphi) \omega^2, \quad (29.81)$$

$$\Theta(\varphi) = J_0 + \sum_{k=1}^n \left[J_C^{(k)} \left(\frac{\omega_k}{\omega} \right)^2 + m_k \left(\frac{v_C^{(k)}}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (29.82)$$

Функция $\Theta(\varphi)$ находится из чисто геометрических соображений и может быть или определена графическим построением, или выражена в аналитической форме. Последнее представление в большинстве случаев приводит к громоздким выражениям.

Переходя к вычислению обобщенной силы, вычислим элементарную работу δW задаваемых сил на возможном перемещении машины. Пусть $\mathbf{F}_i^{(k)}$ обозначает задаваемую силу, приложенную к точке $M_i^{(k)}$ — некоторой i -й точке k -го звена машины, — причем $i = 1, 2, \dots, n_k$. Вектор скорости $\mathbf{v}_i^{(k)}$ может по предыдущему считаться выраженным через $\tilde{\omega}$, причем отношение $\mathbf{v}_i^{(k)}/\tilde{\omega}$ является вектором-функцией угла φ .

Составляем выражение δW как двойную сумму

$$\delta W = \left[\sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^{n_k} \left(\mathbf{F}_i^{(k)} \cdot \mathbf{v}_i^{(k)} \right) \right] \delta t,$$

в которой элементарный промежуток времени δt может быть заменен отношением

$$\delta t = \frac{\delta \varphi}{\dot{\omega}}.$$

Таким образом, будем иметь

$$\delta W = \left[\sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^{n_k} \left(\mathbf{F}_i^{(k)} \cdot \frac{\mathbf{v}_i^{(k)}}{\dot{\omega}} \right) \right] \delta \varphi.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, будучи множителем при вариации независимой обобщенной координаты φ , представляет собой искомую обобщенную силу Q , равную

$$Q = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^{n_k} \left(\mathbf{F}_i^{(k)} \cdot \frac{\mathbf{v}_i^{(k)}}{\dot{\omega}} \right). \quad (29.83)$$

Полученное выражение обобщенной силы имеет размерность момента силы и носит наименование *вращающего момента, приведенного к оси вращения ведущего звена*.

Кроме задаваемых сил, на машину действуют многочисленные другие силы; таковы внутренние силы взаимодействия между точками одного и того же звена, силы взаимодействия между отдельными звеньями в сочленениях и, наконец, внешние силы реакций неподвижных опор на соприкасающиеся с ними звенья машины. Все указанные силы принадлежат к числу реакций связей, и их элементарная работа на любом возможном перемещении равна нулю. Эта работа равняется нулю и при наличии трения в сочленениях звеньев, если относительное движение этих звеньев представляет качение, не сопровождающееся скольжением, так как при этом отсутствуют относительные перемещения в точке соприкосновения звеньев (трением качения пренебрегаем).

В машинах могут иметься упругие звенья, изменение размеров которых определяется из чисто геометрических соображений; такой случай мы имеем, например, при присоединении к ползуну кривошипного механизма пружины пренебрежимо малой массы, если другой конец пружины закреплен в неподвижной точке. Реакция этой пружины должна быть отнесена к числу задаваемых сил, так как закон изменения ее в зависимости от положения ведущего звена известен. Наоборот, учет деформируемости шатуна кривошипного механизма, скручивания валов и т. п. выходит за рамки поставленной задачи, так как, согласно принятому выше определению, механизм с деформируемыми

звеньями не является машиной — положение и движение такого механизма уже не определяется заданием одного параметра.

Рассмотрим сначала *идеальную* машину, представляющую собой систему с *идеальными* связями. В этом случае можно пренебречь вредными сопротивлениями и разбить все задаваемые силы на два класса:

- ✓ движущие силы, элементарная работа которых на действительном перемещении машины будет положительна, так что соответствующая обобщенная сила $Q^{(1)}$ при $\delta\varphi > 0$ будет тоже положительной;
- ✓ силы полезного сопротивления, которым соответствует отрицательная обобщенная сила, обозначаемая далее через $-Q^{(2)}$.

При принятых обозначениях уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q \quad (29.84)$$

может быть, согласно (29.81), приведено к виду

$$\frac{d}{dt} [\Theta(\varphi) \dot{\varphi}] - \frac{1}{2} \Theta'(\varphi) \dot{\varphi}^2 = Q^{(1)} - Q^{(2)}$$

или

$$\Theta(\varphi) \dot{\omega} + \frac{1}{2} \Theta'(\varphi) \omega^2 = Q^{(1)} - Q^{(2)}. \quad (29.85)$$

Таково *общее уравнение движения идеальной машины* (идеального механизма с одной степенью свободы).

Учитывая элементарную работу вредных сопротивлений на возможном перемещении машины как взятое с отрицательным знаком произведение соответствующей обобщенной силы $Q^{(3)}$ на считающуюся положительной вариацию $\delta\varphi$ угла поворота ведущего звена, получим *общее уравнение движения реальной машины* (реального механизма)

$$\Theta(\varphi) \dot{\omega} + \frac{1}{2} \Theta'(\varphi) \omega^2 = Q^{(1)} - Q^{(2)} - Q^{(3)}. \quad (29.86)$$

Вычисление обобщенной силы $Q^{(3)}$ вредных сопротивлений требует в каждом частном случае длительного расчета, связанного с необходимостью предварительного нахождения реакций неподвижных опор и в подвижных сочленениях. Это может быть достигнуто путем составления уравнений движения каждого зве-

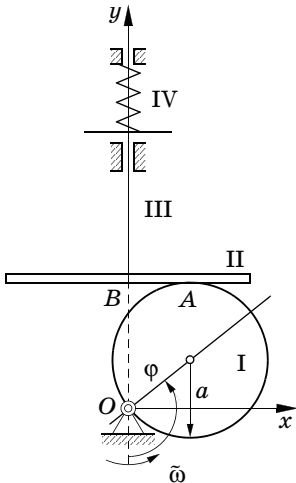


Рис. 406

на по отдельности с использованием определяемых законами трения соотношений между нормальными и касательными составляющими искоемых реакций. Необходимость применения законов трения снижает достоверность результатов подобных расчетов. Поэтому часто элементарную работу вредных сопротивлений (или соответствующую им обобщенную силу) оценивают суммарно как некоторую долю соответствующей элементарной работы (или обобщенной силы, соответствующей движущим силам). При линейных силах вредных сопротивлений учет их влияния можно осуществить, введя диссипативную функцию Рэля (см. ниже § 179).

Пример 147. В изображенном на рис. 406 механизме круглая кулачковая шайба I радиусом a , вращающаяся вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O на окружности шайбы, сообщает поступательное движение линейке II, неизменно соединенной со стержнем III, прижимаемым к шайбе пружиной IV; направление стержня проходит через точку O . Составить уравнение движения механизма, предполагая, что пружина жесткостью c не напряжена в момент, когда линейка проходит через ось вращения шайбы, и что реакция сжатой пружины пропорциональна ее укорочению. Пренебрегая силой тяжести и силами трения, считаем известным вращающий момент M_0 , приложенный к шайбе.

Положение шайбы определим углом φ , составленным диаметром, проходящим через ось вращения, с отрицательным направлением оси y ; тогда $\tilde{\omega} = \dot{\varphi}$. Скорость \dot{y} линейки II и стержня III равна проекции на ось y скорости точки A шайбы, в которой в данный момент происходит соприкосновение с линейкой:

$$\dot{y} = \tilde{\omega} \cdot AB = a \dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Поэтому кинетическая энергия механизма (если пренебречь массой пружины) будет равна

$$T = \frac{1}{2} (J_0 + ma^2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2,$$

где J_0 — момент инерции шайбы относительно оси вращения и m — масса поступательно движущихся частей; массой пружины пренебрегаем.

Потенциальная энергия сжатой пружины определяется равенством

$$\Pi = \frac{1}{2} c (OB)^2 = \frac{1}{2} ca^2 (1 - \cos \varphi)^2.$$

Приведенный к оси O вращающий момент находим из соотношения

$$Q = M_0 - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = M_0 - ca^2(1 - \cos \varphi) \sin \varphi.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение движения механизма (29.85) в рассматриваемом случае принимает вид

$$(J_0 + ma^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} + ma^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi = M_0 - ca^2(1 - \cos \varphi) \sin \varphi.$$

§ 163. Уравнения Лагранжа второго рода с множителями

Обратимся теперь к случаю уравнений Лагранжа второго рода с обобщенными координатами q_1, q_2, \dots, q_r , $r > k$, подчиненными совокупности идеальных голономных связей вида

$$\Phi_\alpha(t; q_1, q_2, \dots, q_r) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (29.87)$$

Как было показано в гл. XXVII, возможные перемещения δq_j в этом случае подчинены s уравнениям (формула (27.30))

$$\sum_{j=1}^r \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (29.88)$$

Таким образом, среди r вариаций δq_j независимыми и произвольными будут лишь $k = r - s$. Следуя тому же пути, что в § 157, запишем общее уравнение динамики (28.70) в виде уравнения (29.54)

$$\sum_{j=1}^r \left(Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \quad (29.89)$$

Здесь, в отличие от уравнения (29.54), число r , стоящее в верхнем пределе суммирования, определяет число *зависимых* обобщенных координат и превышает число степеней свободы k на число s связей. Вариации обобщенных координат δq_j не произвольны, а подчинены системе s уравнений (29.88), так что из равенства (29.89) нельзя уже, как ранее, сделать заключение о равенстве нулю выражений, стоящих в скобках.

Применим метод неопределенных множителей (§ 144). Умножим обе части уравнений (29.88) на произвольные множители λ_α и сложим эти результаты почленно с уравнением (29.89); тогда получим

$$\sum_{j=1}^r \left(Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \quad (29.90)$$

Используя произвол в выборе s множителей λ_α , подчиним их условию обращения в нуль выражений в каких-нибудь s скобках в равенстве (29.90). Оставшееся при этом в левой части равенства (29.90) выражение будет содержать $k = r - s$ скобок; выражения, заключенные в них, явятся коэффициентами при $k = r - s$ произвольных вариациях δq_j . Из условия равенства нулю выражений, стоящих в этих $k = r - s$ скобках, получается система r уравнений Лагранжа второго рода с множителями

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (29.91)$$

которая совместно с s равенствами (29.87) служит для определения $r + s$ неизвестных величин: $q_1, q_2, \dots, q_r; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$.

Уравнения Лагранжа второго рода с множителями применяются главным образом для исследования движений систем с неголономными связями, а также в тех случаях сложных голономных связей, когда выявление некоторых обобщенных координат оказывается затруднительным. Подробное изложение теории уравнений Лагранжа, в том числе и уравнений с множителями, относится к специальному курсу аналитической механики*.

* См. монографию А. И. Лурье «Аналитическая механика» [17, гл. 7, с. 282—367].

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

Глава XXX

Динамика относительного движения

§ 164. Уравнения динамики относительного движения точки

Если система $O'x'y'z'$ представляет собой абсолютную [неподвижную или инерциально движущуюся галилееву (см. ниже)] систему координат в том смысле, как об этом говорилось во вводной части настоящего тома (§ 79), то в этой системе движение материальной точки, согласно второму закону Ньютона, будет определяться уравнением

$$m\mathbf{w}_a = \mathbf{F}, \quad (30.1)$$

где \mathbf{w}_a — ускорение точки по отношению к абсолютной системе координат $O'x'y'z'$, иначе говоря, абсолютное ускорение, а \mathbf{F} — равнодействующая сил, приложенных к этой точке в ее абсолютном движении по отношению к системе $O'x'y'z'$.

Пусть $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ и \mathbf{w}_0 — соответственно векторы угловой скорости, углового ускорения и ускорения начала O (полюса) *относительной* системы координат $Oxyz$, рассматриваемой как твердое тело, движущееся произвольным образом по отношению к *абсолютной* системе координат $O'x'y'z'$. Тогда, согласно изложенному в гл. XVII, § 69,

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c; \quad (30.2)$$

здесь \mathbf{w}_r — относительное, \mathbf{w}_e — переносное, \mathbf{w}_c — кориолисово ускорения. Далее будем также использовать кинематические соотношения, приведенные в § 69,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_e &= \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \\ \mathbf{w}_c &= 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r. \end{aligned} \quad (30.3)$$

Подставляя значения (30.2) в уравнение (30.1), перепишем его в форме

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} - m\mathbf{w}_e - m\mathbf{w}_c; \quad (30.4)$$

вводя обозначения (§ 84) для сил инерции,

$$S_e = -m\omega_e, \quad S_c = -m\omega_c, \quad (30.5)$$

и опуская индекс r у элементов относительного движения, приведем равенство (30.4) к виду

$$m\omega = F + S_e + S_c. \quad (30.6)$$

Векторы S_e и S_c соответственно называются: S_e — *переносной силой инерции* и S_c — *кориолисовой* или *поворотной силой инерции*. Формула (30.6) приводит к следующему выводу.

Дифференциальные уравнения динамики относительно неинерциальной системы координат составляются так же, как и в абсолютной системе, только к приложенным силам добавляются силы инерции — переносная и кориолисова.

Если относительная система координат $Oxuz$ движется по отношению к абсолютной системе $O'x'y'z'$ поступательно, прямолинейно и равномерно, то она представляет собой *инерциальную* или *галилееву* систему, и уравнение движения в ней не должно ничем отличаться от уравнения движения в абсолютной системе; действительно, в этом случае $S_e = S_c = 0$, так что уравнение (30.6) совпадает с (30.1).

Можно представить себе бесчисленное множество таких систем координат, движущихся по отношению к абсолютной системе и друг по отношению к другу поступательно, равномерно и прямолинейно. Все они являются инерциальными (галилеевыми), и по отношению к любой из них уравнение (30.1) будет оставаться неизменным. Ни одной из этих систем нельзя отдать предпочтение с точки зрения изучения механических движений. К этому вопросу мы вернемся в следующей главе, посвященной изложению специальной теории относительности.

Силы инерции — переносная и кориолисова — для наблюдателя, связанного с неинерциальной системой, представляются вполне реальными; они вместе с остальными приложенными силами влияют на изменение движения по отношению к этой неинерциальной системе. Отметим некоторые особые их свойства.

■ Вспоминая перечисленные в § 86 законы сил, заметим, что силы инерции, пропорциональные по самому их определению массам движущихся в неинерциальных системах отсчета точек, в некотором роде аналогичны силам тяготения. Как показы-

вается в общей теории относительности, эта аналогия имеет глубокий физический смысл.

■ Второй особенностью сил инерции является видимое отсутствие тех материальных тел, которые, согласно третьему закону Ньютона, могли бы рассматриваться как источники возникновения сил инерции. Это обстоятельство вызывает представление о «фиктивности» сил инерции*, что не оправдано, так как третий закон Ньютона сформулирован только для абсолютной или инерциальных систем отсчета и справедливость его в неинерциальной системе отсчета нуждается в подтверждении, попытки которого сейчас имеются. Происхождение (источники) сил инерции видят во взаимодействии движущегося в неинерциальной системе тела с удаленными галактиками и заполняющим мировое пространство галактическим газом. Это взаимодействие уравнивается в инерциальных системах, но обнаруживается в неинерциальных**.

■ Третьим свойством сил инерции является зависимость их от неинерциального движения системы отсчета, в которой они определены. Как уже указывалось, в инерциальных (галилеевых) системах силы инерции отсутствуют, и это обуславливает невозможность каким-либо механическим путем обнаружить отличие одной галилеевой системы от другой.

Все галилеевы системы с механической точки зрения эквивалентны. Таков принцип относительности классической механики, носящий имя Галилея.

Подробнее этот вопрос будет обсуждаться в следующей главе.

Пользуясь формулами (30.3), выразим силы инерции в явном виде:

$$\begin{aligned} S_e &= -m\omega_0 - m\varepsilon \times r - m\omega \times (\omega \times r), \\ S_c &= -2m\omega \times v. \end{aligned} \quad (30.7)$$

В случае плоского движения относительной системы вектор ω перпендикулярен r и

$$S_e = -m\omega_0 - m\varepsilon \times r + m\omega^2 r;$$

* См. у А. Ю. Ишлинского [5, с. 5—9; с. 41].

** См. по этому поводу брошюры Д. Сиамы [43, гл. 2, 3] и Г. Бонди [30, перевод на русск., с. 67].

при равномерном вращении ($\epsilon = 0$) относительной системы вокруг неподвижной или равномерно и поступательно движущейся по отношению к абсолютной системе оси ($\mathbf{w}_0 = 0$) и получим

$$\mathbf{S}_e = m\omega^2\mathbf{r};$$

это — *центробежная сила*.

Кориолисова сила не будет входить в формулы относительного движения, если относительная система движется поступательно ($\boldsymbol{\omega} = 0$) или если в силу характера связей точка вынуждена двигаться параллельно оси вращения ($\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = 0$).

Из уравнения относительного движения легко получить уравнения относительного равновесия. Для этого достаточно в формуле (30.6) положить $\mathbf{w} = 0$ и $\mathbf{v} = 0$; тогда $\mathbf{S}_c = 0$ и уравнение относительного равновесия будет

$$\mathbf{F} + \mathbf{S}_e = 0. \quad (30.8)$$

Все, что сейчас говорилось по отношению к точке, может быть перенесено на случай любой системы точек. Прикладывая силы инерции, мы можем свести рассмотрение движения в относительной системе координат к тем же уравнениям, что и в абсолютной.

При выполнении некоторых добавочных условий вопрос упрощается; например, теорему об изменении момента количества движения по отношению к центру масс в относительной системе, движущейся поступательно и имеющей начало в центре масс системы, можно применять, не принимая в расчет сил инерции. Это объясняется тем, что ускорения в переносном поступательном движении всех точек системы одинаковы и, следовательно, главный момент переносных сил инерции

$$-\sum_{i=1}^n \left(\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{w}_e \right) = -\left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{w}_e = -M\mathbf{r}_C \times \mathbf{w}_e$$

равен нулю, так как центр масс принят за начало координат относительной системы. Главный момент кориолисовых сил инерции также равен нулю, так как они, как уже указывалось, при поступательном движении относительной системы равны нулю.

Наряду с изложенным методом большое практическое значение при составлении уравнений относительного движения имеет также метод уравнений Лагранжа, идея применения которых в динамике относительного движения совершенно естественна. Поскольку движение относительной системы по отношению к абсолютной задано, абсолютные координаты (декартовы или обобщенные) движущейся системы точек могут быть выражены как

функции от относительных координат и времени. Принимая последние за независимые обобщенные координаты системы, составим уравнения Лагранжа; решая их, найдем относительные координаты как функции от времени, т. е. уравнения относительного движения.

Пример 148. Найти условие относительного равновесия тяжелой точки на гладкой кривой заданной формы, вращающейся равномерно вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω . Каков должен быть вид кривой для того, чтобы в любом положении на кривой точка была в относительном равновесии (рис. 407)?

Решение задачи сводится к применению метода кинестатики. Точка M массой m находится в относительном равновесии под действием силы тяжести G , центробежной силы

$$S_e = m\omega^2 r, \quad (30.9)$$

где $r = \overrightarrow{AM}$, и реакции кривой N , которая направлена по нормали MB к кривой. Написав условие равновесия в проекции на касательную, получим

$$mg \cos \alpha - S_e \sin \alpha = 0,$$

или после подстановки значения S_e

$$\omega^2 r \operatorname{tg} \alpha = g.$$

Отрезок $r \operatorname{tg} \alpha = AB$ представляет собой *поднормаль* кривой $r = f(z)$, на которой находится точка M , и условие равновесия дается равенством

$$AB = g/\omega^2. \quad (30.10)$$

Заменяя $\operatorname{tg} \alpha = dr/dz$, перепишем условие относительного равновесия в виде

$$r \frac{dr}{dz} = \frac{g}{\omega^2}. \quad (30.11)$$

Подставив в это уравнение $r = f(z)$, получим значение ординаты z_0 , в которой при данном ω будет иметь место равновесие.

Для решения второго вопроса проинтегрируем уравнение (30.11) и найдем уравнение параболы

$$r^2 = \frac{2g}{\omega^2} z, \quad (30.12)$$

параметр которой (начало координат помещено в точке пересечения кривой с осью z) равен g/ω^2 . При вращении этой параболы с угловой скоростью ω , соответствующей величине параметра параболы,

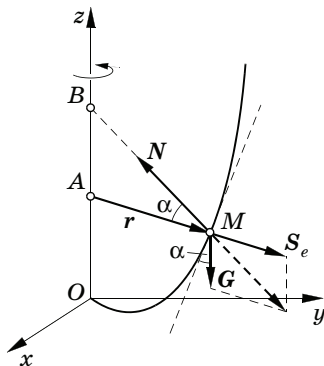


Рис. 407

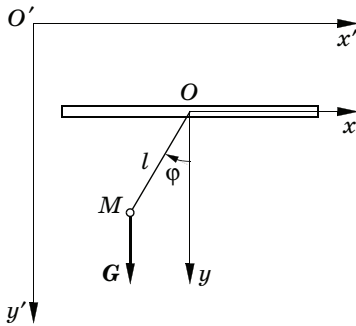


Рис. 408

тяжелый шарик будет в любой ее точке находиться в состоянии безразличного относительного равновесия. Как известно, свободная поверхность жидкости в сосуде, приведенном во вращательное движение, принимает форму параболоида вращения с соответствующим параметром.

Пример 149. Точка подвеса O *математического маятника* (рис. 408) движется произвольно в вертикальной плоскости. Составить уравнение движения маятника относительно систе-

мы координат, движущейся поступательно вместе с точкой подвеса.

Под схему настоящей задачи подходит, например, маятник, помещенный в вагоне поезда, в лифте и т. п. при прямолинейном (вообще говоря, ускоренном) их движении.

Рассмотрим маятник на платформе, поступательно движущейся по любому закону. Свяжем с платформой систему координат Oxy и зададим поступательное движение платформы уравнениями движения начала O по отношению к неподвижной системе $O'x'y'^*$

$$x'_0 = x'_0(t), \quad y'_0 = y'_0(t).$$

Дифференциальные уравнения относительного движения маятника можно получить как методом уравнений Лагранжа, так и методом сил инерции. Покажем для сравнения и тот и другой методы.

■ **Метод уравнений Лагранжа.** Примем за обобщенную координату угол φ отклонения маятника от оси Oy . Абсолютные координаты точки M равны

$$x' = x'_0 + x = x'_0 - l \sin \varphi, \quad y' = y'_0 + y = y'_0 + l \cos \varphi. \quad (30.13)$$

Пользуясь этими выражениями, составляем выражение кинетической энергии; для этого находим

$$\dot{x}' = \dot{x}'_0 - l \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y}' = \dot{y}'_0 - l \dot{\varphi} \sin \varphi$$

и затем получаем

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{x}'_0{}^2 + \dot{y}'_0{}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 - 2l (\dot{x}'_0 \cos \varphi + \dot{y}'_0 \sin \varphi) \dot{\varphi}]. \quad (30.14)$$

Потенциальная энергия будет равна

$$\Pi = -mgy = -mgl \cos \varphi. \quad (30.15)$$

* Штрихи означают, что x'_0 , y'_0 — абсолютные координаты.

Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml [l\dot{\varphi} - (\dot{x}'_0 \cos \varphi + \dot{y}'_0 \sin \varphi)],$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = ml (\dot{x}'_0 \sin \varphi - \dot{y}'_0 \cos \varphi) \dot{\varphi},$$

и уравнение Лагранжа после очевидных сокращений приведет к виду

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{1}{l} (\ddot{x}'_0 \cos \varphi + \ddot{y}'_0 \sin \varphi) = 0. \quad (30.16)$$

■ **Метод сил инерции.** В этом случае следует к точке M дополнительно приложить силу инерции переносного движения, в данном случае поступательного движения относительной системы, равную

$$-m\omega_0.$$

Проекция этой силы инерции будут

$$-m\ddot{x}'_0, \quad -m\ddot{y}'_0.$$

Составив уравнение моментов относительно точки O , получаем уравнение

$$m \frac{d}{dt} (x\dot{y} - y\dot{x}) = mgx - m(x\ddot{y}'_0 - y\ddot{x}'_0).$$

Заменяя здесь x и y их выражениями через φ , снова получаем дифференциальное уравнение (30.16).

Остановимся на частных случаях применения уравнения (30.16).

Если маятник находится в лифте, движущемся с постоянным ускорением $w_0 < g$, направленным вниз (ускоренное движение вниз или замедленное вверх), то, воспользовавшись дифференциальным уравнением (30.16), получим уравнение движения маятника в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{g - w_0}{l} \sin \varphi = 0. \quad (30.17)$$

Период малых колебаний будет равен ($w_0 < g$)

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - w_0}}. \quad (30.18)$$

Особым является случай, когда $w_0 = g$. При $\ddot{x}'_0 = 0$, $\ddot{y}'_0 = w_0 = g$ из уравнения (30.16) будет следовать

$$\ddot{\varphi} = 0, \quad \varphi = C_1 t + C_2, \quad (30.19)$$

так что точка M будет либо совершать равномерное движение по вертикальной окружности ($\varphi = C_1$), либо сохранит произвольное положение ($\varphi = C_2$) на этой окружности. Такое явление можно было бы наблюдать

и в абсолютно неподвижной или инерциальной (галилеевой) системе координат при отсутствии *силы тяжести*, иными словами, в условиях *невесомости*.

Разобранный пример с лифтом, движущимся с ускорением w_0 , равным ускорению g свободного падения тел вблизи поверхности Земли, представляет собой простейший пример осуществления невесомости. Аналогичное явление невесомости обнаруживается в кабине самолета, совершающего свободное *поступательное* движение под действием силы тяжести при выключенных двигателях и в столь разреженных слоях атмосферы, что можно пренебречь сопротивлением и подъемной силой, возникающими при взаимодействии самолета с окружающей его воздушной средой (или в обычной атмосфере при специальном управлении самолетом). Невесомость испытывают также космонавты при поступательном движении ракеты на *пассивном* участке ее траектории (§ 105) при пренебрежимо малом сопротивлении воздуха.

С некоторой поправкой на неоднородность поля тяготения, малой в сравнительно ограниченных областях наблюдения явления невесомости (кабина самолета или ракеты), можно считать, что действия полей сил инерции и тяготения в данной области наблюдения уравниваются. Неинерциальную систему отсчета, движущуюся *поступательно* с общим для всех ее точек ускорением, равным ускорению данной движущейся точки по отношению к абсолютной, а также галилеевым системам отсчета, называют *сопутствующей* системой отсчета. В сопутствующей системе материальная точка находится в состоянии безразличного равновесия. В частном случае движения в поле тяготения в сопутствующей системе, связанной с кабиной самолета или космического корабля, наблюдается состояние невесомости.

С только что изложенной точки зрения введение в § 84 сил инерции, уравнивающих с обычными приложенными силами, оправдывается возможностью рассмотрения движения как равновесия в *сопутствующей* системе отсчета.

Возвращаясь к рассматриваемому примеру относительного движения математического маятника в поступательно перемещающейся с заданным ускорением системе координат, определим равновесное направление нити маятника, подвешенного в вагоне, движущемся по прямолинейному горизонтальному пути с постоянным ускорением (замедлением) w_0 , а также период малых колебаний маятника около равновесного положения.

Равновесное положение определится углом

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = w_0/g, \quad (30.20)$$

знак которого совпадает со знаком w_0 .

Заменяя в дифференциальном уравнении (30.16), в настоящем случае записанном в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{w_0}{l} \cos \varphi = 0,$$

угол φ суммой равновесного угла φ_0 и малого отклонения ψ от равновесного направления, вследствие малости угла ψ получим

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin(\varphi_0 + \psi) = \sin \varphi_0 \cos \psi + \cos \varphi_0 \sin \psi \approx \sin \varphi_0 + \psi \cos \varphi_0, \\ \cos \varphi &= \cos(\varphi_0 + \psi) = \cos \varphi_0 \cos \psi - \sin \varphi_0 \sin \psi \approx \cos \varphi_0 - \psi \sin \varphi_0. \end{aligned}$$

Предыдущее дифференциальное уравнение перейдет в следующее:

$$\ddot{\psi} + \frac{g \cos \varphi_0 + w_0 \sin \varphi_0}{l} \psi - \frac{g \sin \varphi_0 - w_0 \cos \varphi_0}{l} = 0$$

или по (30.20)

$$\ddot{\psi} + \frac{w_0}{l \sin \varphi_0} \psi = 0. \quad (30.21)$$

Период малых колебаний будет равен

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l \sin \varphi_0}{w_0}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{w_0^2 + g^2}}}. \quad (30.22)$$

§ 165. Относительное движение системы материальных точек в равномерно вращающейся системе отсчета

Разберем частную, но весьма распространенную на практике задачу динамики относительного движения несвободной системы материальных точек в равномерно вращающейся вокруг неподвижной оси системе координат. Примем неподвижную ось вращения за ось Oz и обозначим через ω постоянную угловую скорость вращения системы координат.

Будем считать связи идеальными и голономными, причем примем, что в относительной системе координат они, кроме того, стационарны. К такому типу задач относятся разнообразные случаи движения точки и системы точек по недеформирующимся гладким кривым или поверхностям, совершающим равномерное

вращение вокруг неподвижной оси. Относительные цилиндрические координаты r_i , ϕ_i и z_i точек M_i , $i = 1, 2, \dots, n$, системы могут быть выражены как функции от обобщенных координат q_j , $j = 1, 2, \dots, k$, которые будем предполагать независимыми, так что общее их число k равно числу степеней свободы системы по отношению к вращающейся системе координат; в соответствии со сделанным допущением о стационарности связей в относительной системе функции, связывающие цилиндрические и обобщенные координаты, не будут содержать явно времени.

Желая использовать в рассматриваемом случае метод уравнений Лагранжа второго рода, составим выражение кинетической энергии в абсолютном движении:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i [\dot{z}_i^2 + \dot{r}_i^2 + r_i^2 (\dot{\phi}_i + \omega)^2] = \\ &= \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 + \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \dot{\phi}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{z}_i^2 + \dot{r}_i^2 + r_i^2 \dot{\phi}_i^2) = \\ &= T_0 + T_1 + T_2. \end{aligned} \quad (30.23)$$

Первое слагаемое T_0 является функцией только обобщенных координат; ни времени, ни обобщенных скоростей оно не содержит. Представим его в виде

$$T_0 = \omega^2 H, \quad (30.24)$$

где для краткости введена функция обобщенных координат

$$H(q_1, \dots, q_k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (30.25)$$

Если во втором слагаемом, обозначенном через T_1 , сделать замену

$$\dot{\phi}_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad (30.26)$$

то оно может быть записано в виде линейной функции обобщенных скоростей

$$T_1 = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \dot{\phi}_i = \omega \sum_{j=1}^k B_j(q_1, \dots, q_k) \dot{q}_j. \quad (30.27)$$

Наконец, последнее слагаемое

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{z}_i^2 + \dot{r}_i^2 + r_i^2 \dot{\phi}_i^2) \quad (30.28)$$

является однородной квадратичной функцией обобщенных скоростей

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k A_{ij} (q_1, \dots, q_k) \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (30.29)$$

Это выражение соответствует кинетической энергии системы точек в ее движении по отношению к вращающейся системе координат. Из выражения (30.23) видно, что $T_2 = T_{\omega=0}$.

Обозначим через Q_j , $j = 1, 2, \dots, k$ обобщенные силы, составленные обычным образом как коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражении суммы элементарных работ задаваемых сил на возможных перемещениях системы при мгновенно остановленных в абсолютном движении связях.

Уравнения Лагранжа второго рода в абсолютном движении будут иметь вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (30.30)$$

Подставив сюда выражение кинетической энергии (30.23), получим

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_0}{\partial q_j} \right) + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_1}{\partial q_j} \right) + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_2}{\partial q_j} \right) = Q_j, \\ j = 1, 2, \dots, k. \quad (30.31)$$

Обращаясь к первому слагаемому в левой части, видим, что, согласно (30.24),

$$\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad \frac{\partial T_0}{\partial q_j} = \omega^2 \frac{\partial H}{\partial q_j}. \quad (30.32)$$

Во втором слагаемом в силу (30.27) будет

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} = \omega \frac{dB_j}{dt} = \omega \sum_{s=1}^k \frac{\partial B_j}{\partial q_s} \dot{q}_s; \quad (30.33)$$

кроме того, предварительно заменив в (30.27) индекс суммирования j на s , получим

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_j} = \omega \sum_{s=1}^k \frac{\partial B_s}{\partial q_j} \dot{q}_s. \quad (30.34)$$

Вследствие этого выражение во второй круглой скобке в левой части уравнения (30.31) примет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_1}{\partial q_j} = \omega \sum_{s=1}^k \left(\frac{\partial B_j}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_j} \right) \dot{q}_s = \omega \sum_{s=1}^k \gamma_{js} \dot{q}_s. \quad (30.35)$$

Величины

$$\gamma_{js} = \frac{\partial B_j}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_j} = -\gamma_{sj} \quad (30.36)$$

носят наименование *гироскопических коэффициентов*, а отдельные слагаемые $\omega \gamma_{js} \dot{q}_s$ — *гироскопических членов* уравнений движения. Происхождение этих наименований объясняется наличием такого рода членов в уравнениях движения гироскопа (см. далее § 194). Будучи пропорциональными произведению угловой скорости вращения относительной системы на обобщенную скорость, они выражают действие *кориолисовых сил*.

Согласно (30.31), (30.32), (30.35) и (30.36) уравнения Лагранжа примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_2}{\partial q_j} = \omega \sum_{s=1}^k \gamma_{sj} \dot{q}_s + \omega^2 \frac{\partial H}{\partial q_j} + Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (30.37)$$

Совокупность слагаемых

$$\omega \sum_{s=1}^k \gamma_{sj} \dot{q}_s = K_j \quad (30.38)$$

назовем *обобщенной кориолисовой силой*. Заметим, что элементарная работа сил K_j на действительном перемещении системы равна нулю; действительно,

$$\sum_{j=1}^k K_j dq_j = \omega dt \cdot \sum_{j=1}^k \sum_{s=1}^k \gamma_{sj} \dot{q}_s \dot{q}_j = 0, \quad (30.39)$$

так как каждому слагаемому этой суммы $\gamma_{sj} \dot{q}_s \dot{q}_j$ соответствует равное по величине и, согласно (30.36), противоположное по знаку слагаемое $\gamma_{js} \dot{q}_j \dot{q}_s$. Вторые слагаемые в правых частях уравнений (30.37)

$$\omega^2 \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial}{\partial q_j} (-\omega^2 H) = -\frac{\partial}{\partial q_j} \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega^2 \right) \quad (30.40)$$

можно рассматривать как взятые с обратными знаками производные по обобщенным координатам от потенциальной энергии центробежных сил

$$\Pi_{\text{ц}} = -\omega^2 H = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega^2 = -T_0, \quad (30.41)$$

которую можно было вычислить и непосредственно, составив сумму элементарных работ центробежных сил

$$\delta W_{\text{ц}} = \sum_{i=1}^n m_i r_i \omega^2 \delta r_i = -\delta \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega^2 \right). \quad (30.42)$$

Предположив дополнительно, что задаваемые силы консервативны, придадим дифференциальным уравнениям движения по отношению к вращающейся системе окончательный вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_2}{\partial q_j} = K_j - \frac{\partial (\Pi + \Pi_{\text{ц}})}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (30.43)$$

Поскольку функция Лагранжа, согласно (30.41), равная

$$L = T - \Pi = T_2 + T_1 + T_0 - \Pi = T_2 + T_1 - \Pi - \Pi_{\text{ц}}, \quad (30.44)$$

не зависит явно от времени, можно составить интеграл энергии в форме (29.68). Получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L &= \\ &= \sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} - T_2 - T_1 + \Pi + \Pi_{\text{ц}} = h. \end{aligned} \quad (30.45)$$

Замечая, что по теореме об однородных функциях

$$\sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} = 2T_2, \quad \sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} = T_1,$$

приходим к соотношению

$$T_2 + \Pi + \Pi_{\text{ц}} = h, \quad (30.46)$$

выражающему следующий закон.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ В РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ. Сумма кинетической энергии системы материальных точек в ее движении по отношению к равномерно вращающейся системе координат, потенциальной энергии и потенциальной энергии центробежных сил инерции сохраняет постоянное значение.

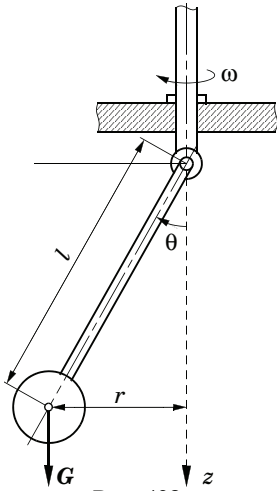


Рис. 409

В соотношении (30.46) не вошла часть T_1 кинетической энергии, линейная относительно обобщенных скоростей; это объясняется тем, что соответствующие добавочные члены в уравнениях движения системы (30.37) можно трактовать как действие кориолисовых сил, не совершающих работы на действительном перемещении точек системы.

Пример 150. Маятник (рис. 409) представляет собой стержень длиной l , масса которого пренебрежимо мала по сравнению с массой тяжелой отливки, расположенной на нижнем конце стержня. Горизонтальная ось подвеса маятника равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, совпадающей с равновесным положением оси стержня.

Составить уравнение относительного движения маятника; найти условие существования его малых колебаний и период этих колебаний.

Система в относительном движении имеет одну степень свободы, обеспечиваемую изменением угла θ . В данном случае имеем (m — масса отливки)

$$T_2 = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2, \quad \Pi = -mgz = -mgl \cos \theta,$$

$$\Pi_{\text{ц}} = -\frac{m}{2} r^2 \omega^2 = -\frac{m}{2} \omega^2 l^2 \sin^2 \theta.$$

По (30.46) найдем

$$\frac{m}{2} l^2 \left(\dot{\theta}^2 - 2 \frac{g}{l} \cos \theta - \omega^2 \sin^2 \theta \right) = h. \quad (30.47)$$

Дифференцируя по времени, получаем искомое уравнение относительного движения маятника

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta - \frac{1}{2} \omega^2 \sin 2\theta = 0. \quad (30.48)$$

Это уравнение нелинейно; остановимся на случае малых колебаний. Полагая приближенно $\sin \theta \approx \theta$ и $\sin 2\theta \approx 2\theta$, приходим к линейному уравнению

$$\ddot{\theta} + (g/l - \omega^2)\theta = 0. \quad (30.49)$$

Если $\omega^2 < g/l$, то маятник будет совершать во вращающейся плоскости малые колебания периодом

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{g/l - \omega^2}}$$

вокруг положения устойчивого равновесия ($\theta = 0$). При $\omega^2 > g/l$ это положение равновесия неустойчиво. Исследование знака четвертой производной потенциальной энергии показывает, что при $\omega^2 = g/l$ положение равновесия также будет устойчивым.

§ 166. Относительное равновесие точки вблизи поверхности Земли

Найдем условия относительного равновесия груза на нити (отвеса), принимая во внимание вращение Земли. Притяжение F (рис. 410) груза Землей искажается действием центробежной силы S_e , так что вес тела, равный натяжению нити N , не будет равен F ; кроме того, направление отвеса DM не совпадает с направлением радиуса MO Земли в данном пункте. Обозначим геоцентрическую широту, т. е. угол радиуса Земли с плоскостью земного экватора через λ , а географическую широту, т. е. угол отвесной линии с той же плоскостью, через φ ; тогда из условия равновесия, проецируя силы на кажущуюся горизонталь HH , получаем

$$S_e \sin \varphi = F \sin(\varphi - \lambda).$$

Заменим здесь S_e и F по формулам

$$S_e = m\omega^2 R \cos \lambda, \quad F = mg_0,$$

где m — масса груза, R — средний радиус Земли, g_0 — ускорение, вызываемое притяжением Земли; это ускорение не следует смешивать с кажущимся ускорением g , т. е. ускорением g_0 , искаженным центробежной силой. После замены получим

$$\sin(\varphi - \lambda) = \frac{\omega^2 R}{2g_0} \sin \varphi \cos \lambda.$$

Замечая, что угловая скорость Земли $\omega \approx 1/13\,700$ 1/с, радиус Земли $R \approx 6\,350\,000$ м и ускорение $g_0 \approx 9,82$ м/с², получаем

$$\frac{\omega^2 R}{g_0} \approx \frac{1}{290},$$

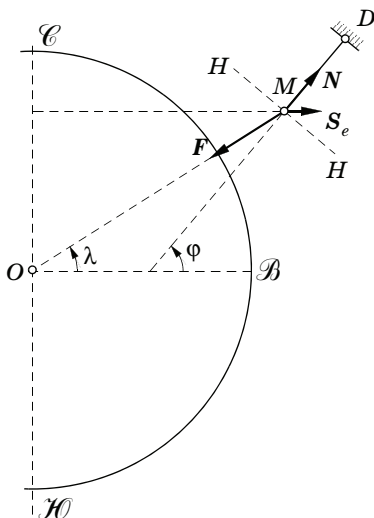


Рис. 410

так что разность $(\varphi - \lambda)$ очень мала и можно приближенно написать

$$\varphi - \lambda \approx \frac{\omega^2 R}{2g_0} \sin 2\lambda;$$

максимальное значение этой разности при $\lambda = 45^\circ$ будет

$$\max(\varphi - \lambda) \approx \frac{1}{580},$$

что соответствует приблизительно $6'$.

Проецируя силы на направление отвеса DM , найдем

$$N = mg = F \cos(\varphi - \lambda) - S_e \cos \varphi,$$

или, полагая $\cos \lambda \approx \cos \varphi$ (вследствие малости угла $\varphi - \lambda$),

$$mg = mg_0 - m\omega^2 R \cos^2 \varphi.$$

Отсюда легко найти относительную разность между g_0 и g :

$$\frac{g_0 - g}{g_0} = \frac{\omega^2 R}{g_0} \cos^2 \varphi.$$

Максимальное значение это отношение имеет на экваторе ($\varphi = 0$):

$$\max\left(\frac{g_0 - g}{g_0}\right) \approx \frac{1}{290}.$$

Кажущийся вес на экваторе будет

$$G = mg = mg_0 \left(1 - \frac{\omega^2 R}{g_0}\right).$$

Если бы Земля вращалась примерно в 17 раз быстрее, то тела на экваторе не имели бы веса. Центробежная сила уравновесила бы силу тяжести; область вблизи экватора в этом случае была бы областью невесомости (§ 164).

§ 167. Влияние вращения Земли на падение тяжелой точки в пустоте

Выберем следующие оси координат (рис. 411): ось $O'z$ направим по отвесу (кажущаяся вертикаль) вниз, ось $O'x$ — в плоскости меридиана к северу, ось $O'y$ — по параллели к востоку.

Включим центробежную силу в кажущуюся силу веса $G = mg$; тогда для составления уравнений движения придется учесть только кориолисову силу. Уравнение движения в векторной форме будет

$$m\mathbf{w} = mg - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (30.50)$$

откуда, проецируя на оси $O'x$, $O'y$ и $O'z$, будем иметь

$$m\ddot{x} = -2m(\omega_y v_z - \omega_z v_y),$$

$$m\ddot{y} = -2m(\omega_z v_x - \omega_x v_z),$$

$$m\ddot{z} = mg - 2m(\omega_x v_y - \omega_y v_x).$$

Но, как легко видеть на рисунке (при использовании правой системы координат вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен к северу \mathcal{C}),

$$\omega_x = \omega \cos \varphi, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = -\omega \sin \varphi,$$

где φ — географическая широта места. Кроме того,

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}$$

и уравнения движения после сокращения на m приведутся к виду

$$\ddot{x} = -2\omega \dot{y} \sin \varphi,$$

$$\ddot{y} = 2\omega (\dot{x} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi), \quad (30.51)$$

$$\ddot{z} = g - 2\omega \dot{y} \cos \varphi.$$

Будем интегрировать эту систему путем разложения в ряды по степеням малой безразмерной величины ωt . Если принять, например, высоту падения h равной 180 м, то время падения

$$t \approx \sqrt{2\frac{h}{g}} \approx 6 \text{ с}$$

и

$$\omega t < 0,0005.$$

Пусть начальные условия будут

$$x = y = z = 0, \quad \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0 \quad \text{при } t = 0.$$

Положим

$$x = a_2 \omega^2 t^2 + a_3 \omega^3 t^3 + \dots,$$

$$y = b_2 \omega^2 t^2 + b_3 \omega^3 t^3 + \dots,$$

$$z = c_2 \omega^2 t^2 + c_3 \omega^3 t^3 + \dots,$$

$$(30.52)$$

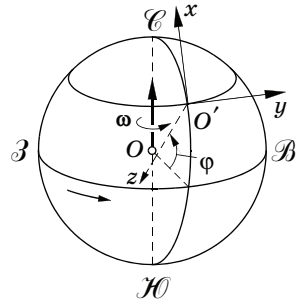


Рис. 411

подставим эти значения в приведенную выше систему дифференциальных уравнений. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в левых и правых частях уравнений, получаем систему равенств для определения постоянных:

$$\begin{aligned} 2a_2\omega^2 &= 0, & 6a_3\omega^3 &= -2\omega \sin \varphi \cdot 2b_2\omega^2, \\ 2b_2\omega^2 &= 0, & 6b_3\omega^3 &= 2\omega (\sin \varphi \cdot 2a_2\omega^2 + \cos \varphi \cdot 2c_2\omega^2), \\ 2c_2\omega^2 &= g, & 6c_3\omega^3 &= -2\omega \cos \varphi \cdot 2b_2\omega^2; \end{aligned}$$

отсюда находим

$$\begin{aligned} a_2 &= 0, & b_2 &= 0, & c_2 &= \frac{g}{2\omega^2}, \\ a_3 &= 0, & b_3 &= \frac{g}{3\omega^2} \cos \varphi, & c_3 &= 0. \end{aligned} \quad (30.53)$$

Возвращаясь к рядам (30.52) и довольствуясь членами с $\omega^3 t^3$ в разложениях, получим

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{3} g\omega \cos \varphi \cdot t^3, \quad z = \frac{gt^2}{2}.$$

Полученное решение показывает, что вследствие вращения Земли падающее тело получает отклонение к востоку \mathcal{B} ($y > 0$). При падении тела с высоты h отклонение его к востоку будет равно

$$\Delta = \frac{1}{3} g\omega \cos \varphi \cdot \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}.$$

В табл. 7 сравниваются отклонения к востоку, вычисленные по этой формуле и наблюдавшиеся в опытах. Из таблицы следует, что разница между вычисленным и наблюдавшимся отклонением в большинстве случаев довольно значительна.

Взяв следующие члены в приведенных выше рядах, мы нашли бы поправки к полученным формулам и, в частности, отклонение к югу. Такие поправки очень малы, а неучтенные факторы, как то: изменение силы тяжести с высотой, изменение широты места и притяжение точки Луной, могут дать эффект того же порядка, что и указанные поправки. Этим, по-видимому, объясняется отрицательный результат опытов по определению отклонения к югу.

Таблица 7

**Сравнение вычисленных и опытных значений отклонений тел
к востоку при падении**

Наблюдатель	Место опытов	Широта	Число опытов	Высота, м	Отклонение Δ , м $\cdot 10^{-3}$	
					вычисленное	наблюдавшееся
Гуглиемини, 1791	Болонья	40°30'	16	78,3	11,3	19 ± 2,5
Бенценберг, 1802	Гамбург	53°33'	31	76,34	8,7	9,0 ± 3,6
Бенценберг, 1804	Шлеебуш	51°25'	29	85,1	10,4	11,5 ± 2,9
Рейх, 1831	Фрейбург	50°53'	106	158,5	27,5	28,3 ± 4,0
Холл, 1902	Кембридж (США)	42°22'	948	23,0	1,77	1,5 ± 0,05
Фламарион, 1903	Париж	48°50'	144	68,0	8,1	6,3
Хаген, 1912	Рим	41°54'	66	22,96	0,899	0,899 ± 0,027

**§ 168. Влияние вращения Земли на движение тяжелой точки
по горизонтальной плоскости**

Учитывая влияние центробежной силы на величину и направление силы тяжести, проведем горизонтальную плоскость перпендикулярно отвесу. Будем иметь следующее уравнение движения тяжелой точки по этой плоскости:

$$m \frac{dv}{dt} = -2m\omega \times v + mg + N, \quad (30.54)$$

где N — нормальная реакция плоскости. Так как векторы $\omega \times v$, mg и N перпендикулярны v , скалярным умножением обеих частей на вектор v получим

$$mv \cdot \frac{dv}{dt} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} (v^2) = 0.$$

Из этого равенства следует, что скорость движения постоянна по величине:

$$v = v_0.$$

Для определения вида траектории спроецируем уравнения движения на главную нормаль к траектории, т. е. составим второе естественное уравнение движения. Обозначая через \mathbf{n} единичный вектор главной нормали, получаем

$$m\omega_n = m\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = -2m\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}),$$

так как скалярные произведения взаимно-перпендикулярных векторов \mathbf{n} , \mathbf{g} и \mathbf{n} , \mathbf{N} обращаются в нуль. Имеем далее

$$\omega_n = \frac{v_0^2}{\rho}, \quad \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) = v_0 \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}) = v_0 \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{b},$$

где ρ — радиус кривизны траектории, $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной к траектории, который условимся направлять в ту же сторону, что и \mathbf{v} , $\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$ — единичный вектор бинормали. Получаем

$$\frac{v_0}{\rho} = -2\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{b}. \quad (30.55)$$

В левой части этого соотношения стоит существенно положительная величина, поэтому в Северном полушарии вектор \mathbf{b} должен быть направлен по отвесу вниз, т. е. по положительному направлению оси z (рис. 411), и уравнение (30.55) примет форму

$$\frac{v_0}{\rho} = 2\omega \sin \varphi. \quad (30.56)$$

Таким образом, траекторией является окружность радиусом

$$\rho = \frac{v_0}{2\omega \sin \varphi}. \quad (30.57)$$

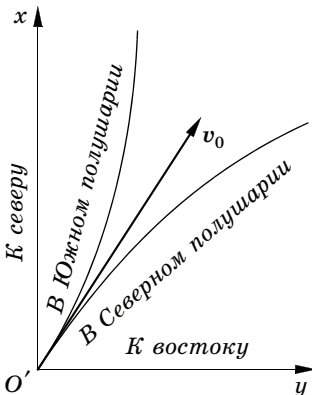


Рис. 412

Наблюдатель, который в Северном полушарии стоит на горизонтальной плоскости и смотрит по направлению движения, увидит центр кривизны этой окружности справа (рис. 412). Действительно, оси $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n} , \mathbf{b} образуют правую систему, так что, направляя ось \mathbf{b} сверху вниз и смотря вдоль $\boldsymbol{\tau}$, мы увидим \mathbf{n} направленным вправо.

В Южном полушарии в соответствии с условием (30.55) вектор бинормали должен быть направлен по отвесу вверх, и, следовательно, если смотреть вдоль вектора скорости v_0 или $\boldsymbol{\tau}$,

то вектор \mathbf{n} будет направлен влево. Это означает, что траектория отклоняется от направления движения влево.

Радиус окружности, как следует из (30.57), очень велик. Поэтому, считая постоянной широту места φ , следует ограничиться рассмотрением небольшой дуги этой окружности.

Обозначая через δ отклонение, соответствующее пройденной точкой дуге s , будем иметь следующую зависимость между δ и s :

$$\delta = \rho (1 - \cos (s/\rho)),$$

или вследствие малости угла s/ρ

$$\delta \approx s^2/(2\rho).$$

Подставляя сюда значение ρ , получаем

$$\delta \approx \frac{\omega s^2 \sin \varphi}{v_0}.$$

Например, артиллерийский снаряд, вылетевший со скоростью $v_0 = 500$ м/с на широте $\varphi = 60^\circ$, даст отклонение $\delta = 12,6 \times 10^{-8} s^2$, так что на расстоянии $s = 10^4$ м будет $\delta = 12,6$ м. Это отклонение получено в предположении горизонтального полета снаряда и сохранении им неизменной скорости, равной начальной скорости.

§ 169. Опыты, служащие для доказательства вращения Земли

Для доказательства вращения Земли вокруг оси были проведены многочисленные опыты. Основной идеей большинства из них было сделать эффект вращения Земли длительным, накапливающимся, чтобы добиться большей наглядности в наблюдениях и точности в измерениях. Остановимся на двух наиболее известных опытах:

- ✓ с использованием специального прибора — *изотомеографа*;
- ✓ *опытах Фуко* с маятником, носящим и поныне его имя.

■ Об устройстве *изотомеографа* уже упоминалось в § 161, примере 146. Покажем, как этот прибор может служить для доказательства вращения Земли. Пусть в некоторый момент грузы (рис. 413), общую массу которых обозначим через m , находятся на расстоянии a от оси и балка неподвижна по отношению к Земле. Момент количества движения системы, состоящей из балки и грузов, по отношению к оси прибора в абсолютной (солнечной) координатной системе будет равен

$$(ma^2 + J) \omega \sin \varphi,$$

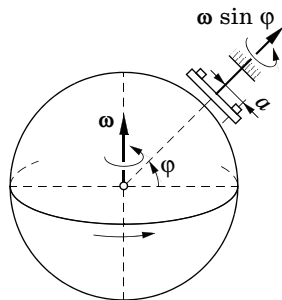


Рис. 413

где J — момент инерции балки относительно оси вращения, ω — угловая скорость вращения Земли, φ — широта места, $\omega \sin \varphi$ — составляющая угловой скорости Земли по оси подвеса балки.

Если теперь внутренними силами заставить грузы разойтись до крайнего положения, характеризуемого расстоянием b , то вследствие увеличения момента инерции и сохранения момента количества движения угловая скорость системы по отношению к Солнечной системе координат уменьшится и мы заметим вращение ранее неподвижной балки по отношению к Земле с угловой скоростью ω_1 , определяемой равенством

$$(ma^2 + J) \omega \sin \varphi = (mb^2 + J) (\omega \sin \varphi - \omega_1).$$

Относительная угловая скорость, приобретенная прибором, равна

$$\omega_1 = \frac{m(b^2 - a^2)}{mb^2 + J} \omega \sin \varphi,$$

причем вращение будет происходить в горизонтальной плоскости в направлении *СВЮЗ*. Если, наоборот, вначале грузы поместить на наибольшем расстоянии b , а затем уже внутренними силами перевести в положение a , то угловая скорость увеличится и мы заметим дополнительную угловую скорость ω_2 , определяемую равенством

$$(mb^2 + J) \omega \sin \varphi = (ma^2 + J) (\omega \sin \varphi + \omega_2),$$

т. е.

$$\omega_2 = \frac{m(b^2 - a^2)}{ma^2 + J} \omega \sin \varphi,$$

причем направление относительного вращения уже будет *СЗЮВ*. Очевидно, что второй опыт можно сделать более наглядным, так как в знаменателе ω_2 стоит выражение меньшее, чем в знаменателе ω_1 . И в том и в другом случаях приобретенные прибором угловые скорости относительного вращения имеют порядок угловой скорости вращения Земли, т. е. очень малы. При пользовании прибором можно, однако, наблюдать не угловые скорости, а углы отклонения балки от первоначального ее расположения, представляющие собой вполне заметные величины.

■ Широкою известность приобрел *опыт Фуко*, проведенный им в Пантеоне (Париж) в 1851 г. для доказательства вращения Земли. Ж. Фуко произвел свой знаменитый опыт с маятником длиной в 67 м. Это позволило сделать эффект отклонения плоскости качания маятника общедоступным для наблюдения. После Ж. Фуко его опыт был неоднократно повторен и усовершенствован.

Точку подвеса маятника поместим в начале осей координат, связанных с Землей и расположенных аналогично тому, как это показано на

рис. 411; длину нити обозначим через l . Поскольку реакция N направлена вдоль нити, имеем

$$N_x = -\frac{x}{l} N, \quad N_y = -\frac{y}{l} N, \quad N_z = -\frac{z}{l} N.$$

Ограничимся рассмотрением лишь малых движений, т. е. будем считать x и y , а также их производные по времени малыми величинами первого порядка, квадратами и произведениями которых можно пренебречь. Тогда

$$z = \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)} = l - \frac{x^2 + y^2}{2l} \approx l$$

и, следовательно, $N_z = -N$; положим также $\dot{z} = \ddot{z} = 0$.

Уравнение движения груза в тех же предположениях, что и в § 167, будет иметь векторную форму (30.54). Переходя к проекциям на оси, получаем

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -2m\omega\dot{y} \sin \varphi - N\frac{x}{l}, & m\ddot{y} &= 2m\omega\dot{x} \sin \varphi - N\frac{y}{l}, \\ 0 &= mg - 2m\omega\dot{y} \cos \varphi - N. \end{aligned} \quad (30.58)$$

Из последнего уравнения находим

$$N = mg - 2m\omega\dot{y} \cos \varphi \approx mg, \quad (30.59)$$

и подстановка в два первых уравнения дает систему уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\omega_1\dot{y} + gx/l &= 0, \\ \ddot{y} - 2\omega_1\dot{x} + gy/l &= 0, \end{aligned} \quad (30.60)$$

где для краткости принято $\omega_1 = \omega \sin \varphi$. Интегрирование этих уравнений упрощается, если применить следующий прием: умножить второе уравнение на $i = \sqrt{-1}$ и сложить с первым; тогда, обозначая $\zeta = x + iy$, получим одно уравнение для определения ζ :

$$\ddot{\zeta} - 2\omega_1 i \dot{\zeta} + g\zeta/l = 0. \quad (30.61)$$

Соответствующее этому линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами характеристическое уравнение

$$k^2 - 2\omega_1 i k + g/l = 0$$

имеет корни

$$k_1 = \omega_1 i + i\sqrt{g/l + \omega_1^2}, \quad k_2 = \omega_1 i - i\sqrt{g/l + \omega_1^2}.$$

Заметим, что $g/l \gg \omega_1^2$; действительно, период колебаний маятника Фуко ($l = 67$ м) составляет примерно 16,4 с, тогда как $2\pi/\omega_1 \approx 1,32$ суток (для $\varphi \approx 49^\circ$ — широты Парижа). Поэтому можно принять

$$k_1 = \omega_1 i + i\sqrt{g/l}, \quad k_2 = \omega_1 i - i\sqrt{g/l}.$$

Общий интеграл уравнения (30.61) поэтому будет

$$\zeta = e^{\omega_1 i t} (A e^{i\sqrt{g/l} t} + B e^{-i\sqrt{g/l} t}) = e^{\omega_1 i t} \zeta_1.$$

Множитель $e^{\omega_1 i t}$ в этом выражении является весьма медленно изменяющейся функцией времени — ее период, как указано выше, весьма велик по сравнению с периодом колебаний даже столь длинного маятника, как маятник Фуко. Разделяя в ζ_1 вещественную и мнимую части, убеждаемся, что траектория точки, движущейся по закону $\zeta_1(t)$, представляет собой эллипс (результат сложения двух взаимно-перпендикулярных гармонических колебаний одинаковой частоты $\sqrt{g/l}$). Наличие при ζ_1 множителя $e^{\omega_1 i t}$ указывает, что этот эллипс весьма медленно вращается с угловой скоростью $\omega_1 = \omega \sin \varphi$. Это вращение в северном полушарии происходит по часовой стрелке, а в южном — против часовой стрелки; его не следует смешивать с тем вращением оси эллипса, которое имеет место при движении сферического маятника в отсутствие вращения Земли. Как уже было указано в § 161 (пример 143), последнее вращение происходит всегда в ту же сторону, что и движение точки по эллипсу, а угловая скорость его зависит от начальных условий движения. Заметим, что принятое при составлении системы уравнений (30.58) приближение недостаточно для обнаружения этого вращения оси эллипса. Действительно, при $\omega = 0$ последнее из уравнений (30.58) дает

$$N = mg,$$

после чего первые два приводятся к двум отдельным уравнениям гармонических колебаний с одинаковой частотой:

$$\ddot{x} + gx/l = 0, \quad \ddot{y} + gy/l = 0.$$

Траекторией такого движения служит *неподвижный* эллипс. Таким образом, допущенное при выводе уравнений (30.58) отбрасывание малых величин второго порядка приводит к потере в интеграле существенных для описания явления членов первого порядка малости — любопытный факт, обнаруженный и объясненный А. Н. Крыловым в уже цитированном (§ 161) месте его «Лекций о приближенных вычислениях» [9].

При экспериментальном наблюдении качания маятника Фуко старались воспроизводить такие начальные условия, которые соответствовали бы отсутствию вращения оси эллипса при $\omega = 0$, т. е. условиям математического маятника. С этой целью груз оттягивают нитью и в начале движения пережигают ее. Однако и при этом, участвуя во вращении Земли, груз в абсолютном движении получает некоторую начальную окружную скорость, так что в чистом виде явление вращения оси эллипса по отношению к Земле, представляющее следствие только вращения Земли, воспроизвести не удастся.

Глава XXXI

Основы механики специальной теории
относительности*

**§ 170. Принцип относительности Галилея.
Преобразования Галилея.**

Постулаты специальной теории относительности Эйнштейна

Как уже указывалось в предыдущей главе (§ 164), в основе классической механики Ньютона лежит принцип относительности Галилея, утверждающий одинаковое протекание всех динамических явлений в любых инерциальных (галилеевых) системах. Все такие системы, согласно этому принципу, равноправны.

Иными словами, второй закон Ньютона, выражаемый равенством

$$\boxed{m\mathbf{w} = \mathbf{F}}, \quad (31.1)$$

одинаково справедлив в любой инерциальной системе. Рассмотрим это обстоятельство более подробно применительно к отдельным элементам формулы (31.1). Масса m — материальная константа точки (тела), — естественно, не зависит от выбора той или иной инерциальной или неинерциальной системы отсчета. Время определялось Ньютоном как абсолютное, одинаковое в любых, в том числе и в инерциальных, системах отсчета. Вектор \mathbf{F} равнодействующей сил, приложенных к движущейся точке, определяется, по Ньютону, взаимодействием этой точки с окружающими ее телами и, следовательно, зависит от их взаимных расстояний и относительных скоростей.

Так обстоит дело в любой инерциальной системе. С другой стороны, в § 164 было показано, что в *неинерциальных* системах дополнительно возникают силы особого рода, так называемые *силы инерции*; появление этих сил является *признаком неинерциальности системы отсчета*. Силы инерции непосредственно зависят от движения неинерциальной системы относительно

* Настоящая глава написана К. А. Лурье. При этом, кроме классической статьи А. Эйнштейна [32], использованы книги следующих авторов: Д. Боме [29], Г. Голдстейна [34] и В. А. Угарова [27].

инерциальной, в которой эти силы отсутствуют. Так, по явлениям отклонения падающих на поверхность Земли тел к востоку и югу (см. предыдущую главу), как и по другим явлениям того же рода (например, вращению плоскости колебаний маятника Фуко), можно судить о неинерциальности системы координат, связанной с вращающейся Землей.

Остановимся несколько детальнее на условиях независимости вектора ускорения материальной точки от выбора инерциальных систем, по отношению к которым этот вектор рассматривается.

Пусть $Oxyz$ и $O'x'y'z'$ — две системы координат, движущиеся поступательно, прямолинейно и равномерно друг по отношению к другу с постоянной скоростью v . Векторы-радиусы точки M по отношению к этим двум системам обозначим соответственно через $r(t)$ и $r'(t)$ (штрих — индекс второй системы; производная по времени t обозначается далее точкой над буквой). По указанному в предыдущей главе закону сложения скоростей, — а в данном случае за абсолютную скорость можно принять $\dot{r}'(t)$, за относительную $\dot{r}(t)$, а за переносную v , — будем иметь

$$\dot{r}'(t) = \dot{r}(t) + v, \quad (31.2)$$

откуда, взяв еще одну производную по общему для левой и правой частей аргумента t , получим ($v = \text{const}$) упоминавшийся выше закон равенства ускорения в двух любых инерциальных системах:

$$\ddot{r}'(t) = \ddot{r}(t), \quad (31.3)$$

а проинтегрировав (31.2) по t , найдем

$$r'(t) = r(t) + vt + C$$

(произвольная постоянная C характеризует начальное взаимное расположение систем координат). Используя условие абсолютности времени, перепишем это равенство в виде

$$r'(t') = r(t) + vt + C, \quad t' = t, \quad (31.4)$$

где t' — время в системе со штрихом, совпадающее с t .

Равенства (31.4), представляющие собой преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы к другой, носят наименование *преобразований Галилея*. Мы видели, что эти преобразования не изменяют левой части равенства (31.1); составляя равенства (31.4) один раз для одной точки, другой — для какой-то второй точки и вычитая почленно эти два равенства одно из другого, убедимся, что вектор-радиус второй

точки относительно первой остается неизменным в любой инерциальной системе. Дифференцируя этот результат, получим, что неизменной остается и *относительная* скорость этих двух точек. Вспоминая теперь, что силы F в механике Ньютона зависят только от относительных положений и относительных скоростей материальных точек (тел), найдем, что в результате преобразования Галилея не изменяется и правая часть (31.1). Таким образом, это преобразование оставляет уравнение (31.1) *инвариантным*, т. е. сохраняющим свой вид в любой из возможных инерциальных систем отсчета. Иначе говоря, движение материальной точки (тела) в двух произвольных инерциальных системах происходит по одинаковым законам: в одной — в переменных (r, t) , в другой — в переменных (r', t') , причем, по Ньютону, $t' = t$, а r' связан с r преобразованием Галилея.

Параметр v в преобразовании Галилея — скорость взаимного относительного движения систем отсчета — может принимать любое сколь угодно большое значение. Это обстоятельство тесно связано с гипотезой об абсолютном характере пространства и времени. Допуская существование сигналов, распространяющихся с бесконечной скоростью, мы обеспечиваем возможность введения абсолютного времени, одного и того же для всех инерциальных систем. Действительно, имея в своем распоряжении одни-единственные часы, расположенные в некоторой точке пространства, можно по этим часам регистрировать события, происходящие в других точках, посылая из этих точек сигналы, которые, распространяясь с бесконечной скоростью, мгновенно достигнут часов.

Предположение о бесконечно большой скорости распространения в механике Ньютона относится не только к сигналам, с помощью которых происходит регистрация событий во времени, но и к передаче силовых взаимодействий между телами: эти взаимодействия считаются происходящими мгновенно, без запаздываний. В соответствии с этим силы в механике Ньютона зависят от расстояний между точками (телами) и от их относительных скоростей, причем векторы-радиусы взаимодействующих тел берутся в *один и тот же* момент времени.

Опыт, однако, не подтверждает существования бесконечных скоростей движения каких-либо физических объектов. Наибольшая из всех скоростей — скорость света в вакууме c — имеет порядок 300 000 км/с. С этой скоростью распространяются электромагнитные волны. Естественно возникает вопрос: справедлив ли для электромагнитных волн принцип относительности

Галилея? Верна ли, в частности, для таких волн формула (31.2) сложения скоростей, иными словами, зависит ли скорость электромагнитных волн от скорости движения источника?

Ответ на этот вопрос может дать только опыт. Точнейшие эксперименты (Майкельсон и Морли, 1881 г.; Кеннеди и Торндайк, 1932 г. и многие другие гораздо более точные опыты) показали, что:

- ✓ скорость света в вакууме в данной инерциальной системе одинакова во всех ее точках и не зависит от направления;
- ✓ во всех инерциальных системах эта скорость имеет одно и то же значение c .

Таким образом, принцип относительности Галилея не оправдывается для электромагнитных явлений. Такое положение нетерпимо, так как противоречит естественному представлению о *единстве законов*, описывающих все физические явления. В самом деле, трудно согласиться с тем, что между законами механики и электродинамики существует принципиальное различие постольку, поскольку речь идет о возможности обнаружить поступательное, равномерное и прямолинейное движение системы отсчета. Гораздо более удовлетворительным было бы положение, когда все законы физики были бы в этом отношении одинаковы. Но общим для этих законов является как раз *невозможность* обнаружить такое движение: в механике об этом свидетельствует принцип относительности Галилея, а в электродинамике — эксперименты Майкельсона и др. Различие заключается в том, что *уравнения динамики* Ньютона сохраняют свой вид при преобразовании Галилея, а *уравнения электродинамики* (уравнения Максвелла) этим свойством не обладают. Возникает вопрос о том, существуют ли преобразования координат и времени, оставляющие инвариантными уравнения Максвелла. Если такие преобразования существуют, то почему мы должны положить в основу теории преобразования Галилея, а не эти новые

МАЙКЕЛЬСОН АЛЬБЕРТ АБРАХАМ (*Michelson Albert Abraham, 1852—1931*) — американский физик, чл. Национальной АН США, президент (1923—1927), иностр. чл. АН СССР (1926).

МОРЛИ ЭДВАРД ВИЛЬЯМС (*Morley Edward Williams, 1838—1923*) — американский ученый.

КЕННЕДИ РОЙ ДЖ. (*Kennedy Roy J., 1896—?*) — американский физик.

ТОРНДАЙК ЭДВАРД (*Thorndike Edward, 1905—1991*) — американский физик.

преобразования? Быть может, с такой точки зрения окажется возможным получить удовлетворительное описание как электромагнитных, так и механических явлений?

Если сохранить принятое ранее определение инерциальных систем, то придется как-то видоизменить само уравнение Ньютона (31.1), сделав его инвариантным по отношению к новым преобразованиям координат. Основная идея состоит в том, чтобы сохранить *принцип относительности* — независимость всех физических (а не только механических) явлений от поступательного, равномерного и прямолинейного движения инерциальной системы отсчета; это может быть достигнуто лишь путем отказа от преобразований Галилея и перехода к новым преобразованиям пространства и времени, влекущим за собой видоизменение основных уравнений механики.

Именно такая идея была выдвинута и реализована А. Эйнштейном в его знаменитой работе 1905 г. [32]. Осуществление этой идеи привело к совершенно новым по сравнению с привычными ньютоновскими представлениям о свойствах пространства и времени. Открытие Эйнштейна показало, в частности, что пространство и время нельзя рассматривать отдельно как независимые друг от друга формы существования материи. Эти две формы должны быть объединены в некоторый *пространственно-временной континуум*. Представление о таком континууме открыло путь к далеко идущим обобщениям естественно-научного и философского характера.

Теория Эйнштейна основана на двух *постулатах*, названных его именем.

ПОСТУЛАТ ЭЙНШТЕЙНА I. *Поступательное, равномерное и прямолинейное движение инерциальной системы отсчета не изменяет формы всех законов физики, в том числе и законов механики.*

ПОСТУЛАТ ЭЙНШТЕЙНА II. *Скорость света (распространения электромагнитных волн) в вакууме не зависит от места и направления и остается одной и той же во всех инерциальных системах отсчета.*

Обратим внимание на то, что, говоря здесь об инерциальных системах отсчета, мы принимаем определение их как таких систем, в которых уравнения механики записываются без сил инерции. На этот раз, однако, речь идет уже о новых, модифицированных по сравнению с ньютоновскими, уравнениях механики.

Выше говорилось, что ньютоновская механика основана на предположении о возможности существования сколь угодно быстрых сигналов. Это предположение, однако, не нашло подтверждения на опыте. С другой стороны, то обстоятельство, что самым быстрым из известных в физике процессов является распространение света, дало основание для другого *предположения*, сделанного Эйнштейном.

Оно состоит в том, что *скорость света вообще является предельной скоростью распространения сигналов*.

Подобная гипотеза означает, конечно, что величина предельной скорости не зависит от выбора инерциальной системы отсчета, в противном случае можно было бы обнаружить равномерное и прямолинейное движение такой системы вопреки принципу относительности.

Наконец, следует еще раз оговориться, что в этой главе мы будем иметь дело с системами отсчета, движущимися друг относительно друга поступательно, равномерно и прямолинейно. Соответствующий круг вопросов составляет содержание *специальной* теории относительности Эйнштейна. Это название подчеркивает частный, ограниченный характер теории; ограниченный постольку, поскольку полностью остается в стороне вопрос о силах инерции. Проблема сил инерции получила решение в *общей* теории относительности, построенной также Эйнштейном и установившей фундаментальный постулат об эквивалентности сил инерции и сил тяготения — так называемый *принцип эквивалентности* Эйнштейна.

§ 171. Преобразование Лоренца. Диаграмма Минковского

Преобразование координат и времени, оставляющее уравнения электродинамики *инвариантными*, было открыто Г. А. Лоренцем в 1892 г., т. е. за 13 лет до появления работы Эйнштейна. Приведем простой вывод этого преобразования.

Согласно постулатам Эйнштейна, уравнения электродинамики, а следовательно, и их решения должны сохранить свой вид в системе отсчета (x', y', z', t') , движущейся относительно исходной системы (x, y, z, t) поступательно, равномерно и прямолинейно.

ЛО́РЕНЦ, ЛОРЕНТЦ ХЕНДРИК АНТОН (*Lorentz Hendrik Anton, 1853—1928*) — нидерландский физик и математик, иностр. чл.-корр. Петербургской АН (1910), иностр. почетный чл. АН СССР (1925).

Обратим внимание на то, что, говоря о поступательном, равномерном и прямолинейном относительном движении систем отсчета, мы необходимо должны предположить, что $t' \neq t$, т. е. что *время не является абсолютным*. В самом деле, предположив противное, придем к преобразованиям Галилея, т. е. к формуле (31.2) сложения скоростей, что противоречит второму постулату Эйнштейна о постоянстве скорости света.

Переходя непосредственно к выводу преобразования Лоренца, предположим, что в начале координат O исходной системы расположен точечный источник света, испускающий сферические волны. Фронт такой волны описывается уравнением сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad (31.5)$$

расширяющейся со скоростью света c . Согласно сказанному, этот фронт должен описываться таким же точно уравнением и в другой инерциальной системе отсчета, начало O' которой совпадает с O в момент $t' = 0$; а именно:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (31.6)$$

Отсюда следует, что искомое преобразование должно удовлетворять условию инвариантности

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2, \quad (31.7)$$

поскольку ни одна из рассматриваемых систем не имеет никакого преимущества перед другой. Кроме того, преобразование должно быть *линейным*, так как в противном случае была бы нарушена *однородность* пространства и времени: их свойства зависели бы от *выбора начала отсчета*. Считая, что в момент $t = t' = 0$ начала отсчета O и O' совпадают, находим, что x', y', z', t' представляют собой линейные однородные функции аргументов x, y, z, t . Переходя к цифровой индексации осей и вводя обозначения

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict, \quad i = \sqrt{-1} \quad (31.8)$$

и аналогичные символы для системы $O'x'y'z't'$, запишем равенство (31.7) в виде

$$\sum_{i=1}^4 x_i'^2 = \sum_{i=1}^4 x_i^2,$$

или, подразумевая суммирование по повторяющимся индексам,

$$x'_i x'_i = x_i x_i, \quad (31.9)$$

а искомые преобразования представим так:

$$x'_i = a_{ik}x_k, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (31.10)$$

Совокупность величин $\{x_i\}$ и $\{x'_i\}$ (которые будем в дальнейшем называть *координатами*, не выделяя специально пространственных и временной составляющих) удобно трактовать как декартовы компоненты некоторого вектора \mathbf{R} соответственно по осям $\{x_i\}$ и $\{x'_i\}$ в *четырёхмерном евклидовом пространстве-времени Минковского*. Равенства (31.9) и (31.10) показывают, что преобразование (31.10) (ср. с т. I, § 32) оставляет неизменной абсолютную величину упомянутого вектора \mathbf{R} , т. е. представляет собой не что иное, как ортогональное преобразование координат — *вращение* в пространстве Минковского. Отличие этого вращения от обычного заключается в том, что, поскольку координата x_4 чисто мнимая, коэффициенты a_{ik} и a'_{ik} в соотношениях (31.10) не все вещественны. Именно, коэффициенты a_{i4} , a'_{i4} и a_{4i} , a'_{4i} , $i = 1, 2, 3$, должны быть чисто мнимыми, а остальные a_{ik} — вещественными.

Нас не будет интересовать случай, когда вращение в четырёхмерном пространстве-времени происходит вокруг оси x_4 (т. е. когда это вращение чисто пространственное), так как такое вращение оставляет неизменной координату x_4 ($x'_4 = x_4$) и связывает между собой чисто пространственные координаты x_1, x_2, x_3 и x'_1, x'_2, x'_3 , не вводя относительного *движения* систем координат. Желая геометрически изучить преобразование, связанное с таким движением, рассмотрим частный двумерный случай преобразования (31.10), соответствующий неизменным координатам $x'_1 = x_1, x'_2 = x_2$. Такое преобразование называется *чисто лоренцевым*. Координаты x'_3 и x'_4 в чисто лоренцевом преобразовании не должны зависеть от x_1 и x_2 в силу однородности плоскости (x_1, x_2) . Итак,

$$x'_3 = a_{33}x_3 + a_{34}x_4, \quad x'_4 = a_{43}x_3 + a_{44}x_4.$$

Это преобразование, будучи частным случаем (31.10), также является вращением, на этот раз в *плоскости* (x_3, x_4) . Введём *угол поворота* φ ; тогда последние две формулы примут известный вид

$$x'_3 = x_3 \cos \varphi + x_4 \sin \varphi, \quad x'_4 = -x_3 \sin \varphi + x_4 \cos \varphi. \quad (31.11)$$

Чтобы выяснить смысл параметра φ , свяжем преобразование (31.11) с относительным движением систем координат $O' x'_1 x'_2 x'_3 x'_4$ и $O x_1 x_2 x_3 x_4$. Первая из них пусть движется со скоростью $v = \text{const}$ вдоль оси x_3 относительно второй; это относится и к началу O' первой системы, имеющему в этой системе координату $x'_3 = 0$. Что касается координат начала O' во второй системе, то они связаны уравнением равномерного движения

$$x_3 = \frac{v}{ic} x_4. \quad (31.12)$$

Подставляя теперь координаты точки O' в обеих системах в первое из уравнений (31.11), получаем

$$\text{tg } \varphi = -\frac{v}{ic} = i \frac{v}{c} = i\beta. \quad (31.13)$$

Угол поворота, таким образом, оказался мнимым; это согласуется со сделанными выше замечаниями о коэффициентах рассматриваемых преобразований.

Формулы преобразования (31.11) принимают теперь вид

$$x'_3 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (x_3 + i\beta x_4), \quad x'_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (-i\beta x_3 + x_4), \quad (31.14)$$

или, в переменных x'_3, t', x_3, t ,

$$x'_3 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (x_3 - vt), \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(t - \frac{\beta}{c} x_3 \right). \quad (31.15)$$

Обратное преобразование определяется формулами

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (x'_3 + vt'), \quad t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(t' + \frac{\beta}{c} x'_3 \right). \quad (31.16)$$

Переход от (31.15) к (31.16) осуществляется заменой переменных (x'_3, t') на переменные (x_3, t) с одновременным изменением знака v (и $\beta = v/c$) на обратный.

Когда параметр β стремится к нулю, формулы (31.15) и (31.16) переходят в обычное преобразование Галилея. Этим объясняется тот факт, что преобразования Галилея сохраняют практическое значение в тех многочисленных случаях, когда скорость v мала по сравнению со скоростью света c .

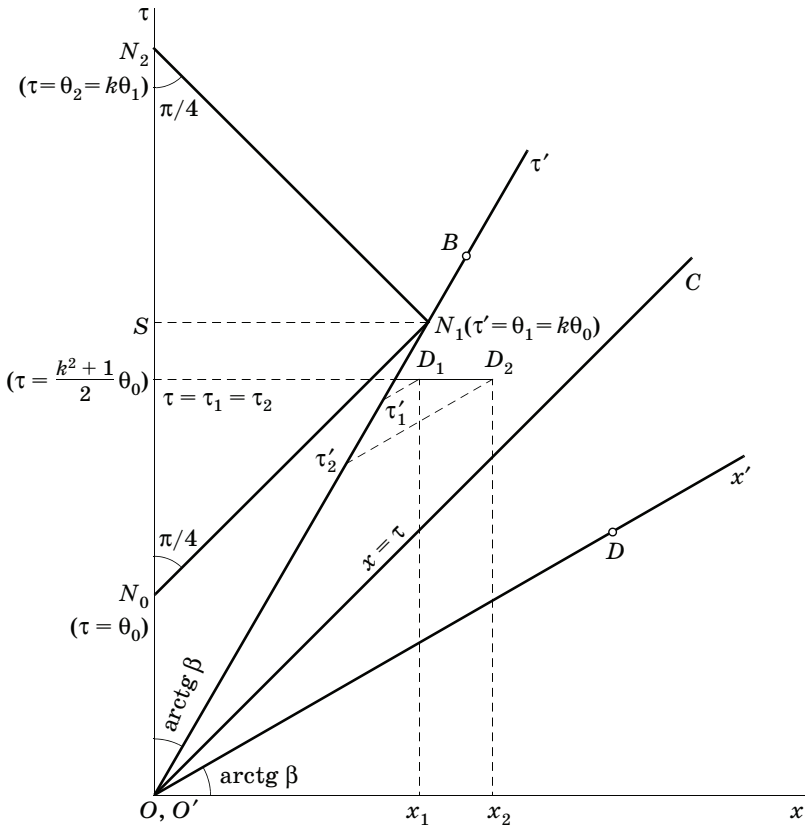


Рис. 414

Формулы (31.15) примечательны прежде всего тем, что вводят новое время t' , течение которого зависит от скорости v относительного движения систем координат. Разнообразные следствия этих формул проще всего получить с помощью их графической интерпретации, данной Г. Минковским. Введем вместо t' и t переменные размерности длины $\tau' = ct'$ и $\tau = ct$ и будем в дальнейшем писать x (x') вместо x_3 (x'_3). Согласно (31.15) оси x' и τ' займут положения, отмеченные на рис. 414 (диаграмме Минковского). Поворот на мнимый угол сближает эти оси при возрастании параметра β , превращая первоначально прямоугольную систему ко-

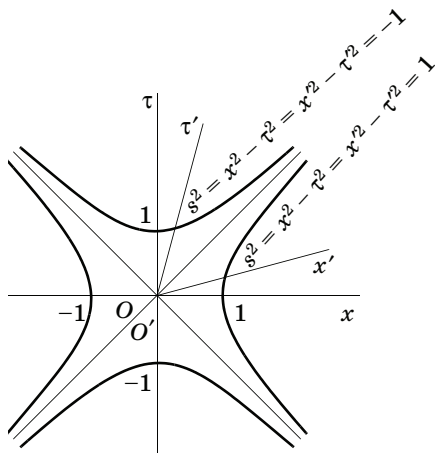


Рис. 415

ординат в косоугольную. Отметим также, что масштабы косоугольных координат x' и τ' отличаются от масштабов прямоугольных координат x и τ . Чтобы убедиться в этом, сопоставим каждой точке плоскости (x, τ) величину s , определяемую формулой

$$s^2 = x^2 - \tau^2,$$

и назовем s *пространственно-временным интервалом*; согласно (31.7) этот интервал сохраняет свое значение в системе координат $O'x'\tau'$ независимо от скорости v ее относительного движения. Это же легко проверяется непосредственно с помощью формул (31.15).

С помощью понятия интервала вводится новое (по сравнению с обычным евклидовым) понятие расстояния между двумя точками плоскости (x, τ) (или (x', τ')). Именно, квадрат расстояния между точками (x_1, τ_1) и (x_2, τ_2) определяется как

$$s_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 - (\tau_2 - \tau_1)^2, \quad (31.17)$$

и аналогично для плоскости (x', τ') . Плоскость с определенным таким образом расстоянием между точками называется *псевдоевклидовой*. Геометрическим местом точек псевдоевклидовой плоскости, равноудаленных от начала координат, будут две гиперболы $s^2 = \text{const}$ (рис. 415); если $\text{const} > 0$, то гиперболы пересекаются с осью x ; если $\text{const} < 0$, то гиперболы пересекаются с осью τ . Обе пары гипербол имеют своими асимптотами биссектрисы координатных углов.

Рассмотрим пару гипербол $s^2 = 1$ и пару $s^2 = -1$ (рис. 415). Гиперболы первой пары пересекают ось x в точках $x = \pm 1$, $\tau = 0$, а гиперболы второй — ось τ в точках $x = 0$, $\tau = \pm 1$. Обе пары гипербол отсекают, таким образом, единичные отрезки вдоль оси координат (это согласуется с тем, что квадрат псевдоевклидова расстояния s между началом координат и любой точкой гипербол равен ± 1).

Мы видели, что интервал является инвариантом преобразования Лоренца, поэтому указанные гиперболы представляются теми же уравнениями и в косоугольных координатах (x', τ') , а именно $x'^2 - \tau'^2 = 1$ и $x'^2 - \tau'^2 = -1$; эти гиперболы отсекают и на осях x' и τ' косоугольных координат единичные отрезки $x' = \pm 1$ и $\tau' = \pm 1$.

Не следует забывать, однако, что здесь речь идет о *псевдоевклидовой* единичной длине; именно эту длину мы будем иметь в виду при измерении длин и промежутков времени в различных системах отсчета. Непосредственное сравнение единичных в смысле псевдоевклидова расстояния отрезков вдоль осей различных систем, например отрезков $O'A'$ и OA на рис. 416, показывает, что *евклидова*, т. е. обычная, длина этих отрезков различна; можно убедиться в том, что отношение евклидовых длин отрезков $O'A'$ и OA (т. е. отношение масштабов косоугольных и прямоугольных координат) равно $\sqrt{(1 + \beta^2)/(1 - \beta^2)}$. Это различие в масштабах не должно, однако, служить источником недоразумений, так как измерение длин и промежутков времени в каждой системе координат будет производиться в единицах длины и времени, соответствующих *именно этой системе*.

Вернемся теперь к введенному понятию интервала. Как было указано, величина s^2 не меняется при переходе от системы Ox

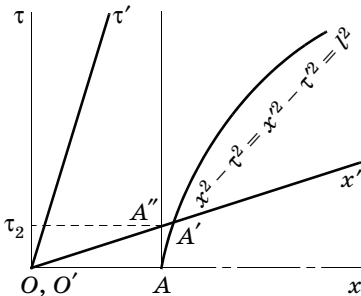


Рис. 416

к системе $O'x'\tau'$; в частности, при этом переходе остается неизменным и *знак* s^2 . Поэтому возникает естественная классификация точек плоскости (x, τ) : те из них, для которых интервал является вещественным ($s^2 > 0$), называются *пространственноподобными*, а те точки, для которых интервал является чисто мнимым или равным нулю ($s^2 \leq 0$), назы-

ваются *времениподобными*. Эти два типа точек разделяются прямыми $x^2 - \tau^2 = 0$, т. е.

$$x - \tau = 0, \quad x + \tau = 0, \quad (31.18)$$

представляющими собой, очевидно, *траектории светового луча*.

На диаграмме Минковского (рис. 414) изображена первая из прямых (31.18) — диагональ OC первого квадранта; пространственноподобные точки в этом квадранте лежат между диагональю и осью x , а времениподобные точки — на диагонали и между диагональю и осью τ .

Для каждой пространственноподобной точки D существует система координат $O'x'\tau'$, для которой интервал s представляет собой чисто пространственное расстояние: $s = x$. Сходным образом для всякой времениподобной точки B существует система $O'x'\tau'$, для которой s будет чисто временным расстоянием: $s = \pm\tau$. Для доказательства достаточно выбрать параметр β так, чтобы ось x' (либо τ') на рис. 414 прошла через заданную пространственноподобную (либо времениподобную) точку.

Рассмотрим какие-либо события, происходящие в точках O и D . В исходной системе $Ox\tau$ первое из них происходит раньше второго; можно, однако, указать такую систему $O'x'\tau'$, в которой оба события будут одновременны (точки O и D лежат на оси x' , см. рис. 414), а также систему координат, в которой событие в D произойдет *раньше*, чем в O (если точка D будет лежать ниже оси x'). Все это связано, конечно, с пространственноподобным характером точки D .

Рассмотрим теперь времениподобную точку B . Для нее дело обстоит иначе: если событие в точке O происходит раньше, чем событие в точке B в одной системе координат (x, τ) , то оно предшествует тому же событию в точке B в любой другой системе (x', τ') . Этот результат имеет принципиальное значение: он выражает, в частности, то обстоятельство, что временное расположение события-причины и события-следствия не зависит от того, в какой системе координат регистрируются эти события.

Пусть теперь какая-нибудь точка B движется равномерно со скоростью v вдоль оси x ; тогда для этой точки $x = (v/c)\tau$ и $s^2 = x^2 - \tau^2 = [(v^2/c^2) - 1]\tau^2$. Соответствующая точка на диаграмме Минковского имеет координаты $[(v/c)\tau, \tau]$ и времениподобна, если $v \leq c$. Пространственноподобной части диаграммы не может соответствовать никакое движение точки, так как это противоречило бы принципу предельности скорости света.

Независимо от того, движется частица в пространстве или покоится, ее положение на диаграмме Минковского характеризуется некоторой кривой, называемой *мировой линией* частицы. Так, частица, находящаяся в покое в начале координат исходной системы $Ox\tau$, имеет своей мировой линией ось $x = 0$; частица, равномерно движущаяся из начала координат системы $Ox\tau$ со скоростью v , имеет мировой линией прямую, образующую с осью τ угол $\arctg(v/c)$; световой луч, исходящий из начала координат, имеет мировыми линиями прямые (31.18) и т. д. Как следует из предыдущего, мировые линии частиц, совершающих произвольное (не обязательно равномерное и прямолинейное) движение, полностью состоят из времениподобных точек, так как мгновенная скорость этих частиц не может превышать c .

Пусть скорость v точки B постоянна и меньше c (рис. 414). Связанный с ней наблюдатель B находится в покое относительно системы $O'x'\tau'$; события, которые происходят в различных точках $D_1(x = x_1, \tau = \tau_1)$ и $D_2(x = x_2 \neq x_1, \tau = \tau_2 = \tau_1)$ исходной системы $Ox\tau$ и являются в этой системе одновременными ($\tau_2 = \tau_1$), уже не будут одновременными для наблюдателя B . Согласно второй формуле (31.15) между ними пройдет промежуток времени

$$\tau'_2 - \tau'_1 = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} (x_1 - x_2) \neq 0. \quad (31.19)$$

На рис. 414 этот промежуток времени получается, если провести через точки D_1 и D_2 прямые, параллельные оси x' , до пересечения с осью τ' в точках $\tau' = \tau'_1$ и $\tau' = \tau'_2$.

Пусть в исходной системе $Ox\tau$ покоится твердый стержень OA , расположенный вдоль оси x . В момент $\tau = 0$ наблюдатель, покоящийся в этой системе, измеряет длину стержня и находит, что эта длина равна $x_2 - x_1 = l$. Нас интересует, какой будет длина стержня, измеренная наблюдателем, связанным с системой координат $O'x'\tau'$, движущейся относительно исходной. Этот наблюдатель будет определять координаты концов стержня x'_2 и x'_1 в один и тот же момент *своего* времени τ' , скажем, при $\tau' = 0$, но в разные моменты времени τ (именно, координата левого конца x'_1 будет определяться в момент $\tau = 0$, а правого x'_2 — в момент $\tau = \tau_2$, рис. 416). Первая из формул (31.16) показывает, что результатом этого измерения будет

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1) \sqrt{1 - \beta^2} = l \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (31.20)$$

Иными словами, длина стержня $x'_2 - x'_1$, измеренная наблюдателем в единицах движущейся системы, уменьшается в $\sqrt{1 - \beta^2}$ раз по сравнению с длиной того же стержня, измеренной наблюдателем в единицах системы Oxt , в которой стержень и наблюдатель покоятся.

Формула (31.20) выражает эффект «сокращения» длин, обнаруженный еще до А. Эйнштейна Г. А. Лоренцем и Дж. Фитцджеральдом, хотя эти авторы вкладывали в него совсем иное содержание, нежели Эйнштейн. Именно, согласно Эйнштейну,

«вопрос о том, реально лоренцево сокращение или нет, не имеет смысла. Сокращение не является реальным, поскольку оно не существует для наблюдателя, движущегося с телом; однако оно реально, так как оно может быть принципиально доказано физическими средствами для наблюдателя, не движущегося вместе с телом».

Чтобы проиллюстрировать лоренцево сокращение на диаграмме Минковского, отметим на плоскости Oxt (рис. 416) положение стержня OA в момент $t = 0$. Мировыми линиями его концов в системе Oxt будут прямые $x = 0$ и $x = l$, параллельные оси t . Точки O' и A'' пересечения этих линий с осью x' движущейся системы будут характеризовать положения концов стержня, одновременные в системе $O'x't'$, а расстояние $O'A''$ между этими точками, измеренное в единицах длины системы $O'x't'$, будет равно длине стержня $x'_2 - x'_1$ в $O'x't'$. Если провести на той же плоскости гиперболу $s^2 = x^2 - t^2 = x'^2 - t'^2 = l^2$, то расстояние $O'A'$ между началом координат и точкой A' пересечения гиперболы с осью x' будет равно длине стержня, покоящегося в системе $O'x't'$, т. е. l единицам длины в этой системе. Из рисунка видно, что $O'A'' = x'_2 - x'_1 < O'A' = l$.

Таким образом, понятие длины движущегося стержня приобретает смысл только тогда, когда указано, в какой инерциальной системе измеряется эта длина. Значение длины стержня (точнее, число единиц длины в стержне) максимально в той системе координат, в которой стержень покоится; во всех остальных системах это значение меньше. В этом нет ничего парадоксального, так как «уменьшение» длины происходит вследствие того, что меняется способ ее измерения. Конечно, не может быть и речи о каком-то изменении физического состояния стержня: оно одно и то же во всех инерциальных системах.

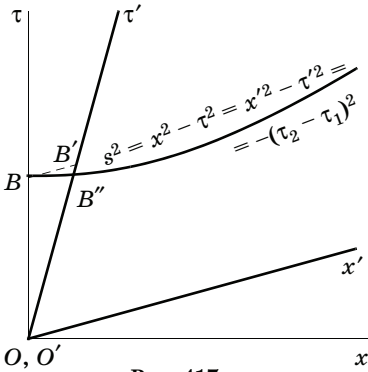


Рис. 417

Рассмотрим теперь часы, находящиеся в покое в точке x исходной системы $Ox\tau$. Согласно второй из формул (31.15), если по этим часам в исходной системе пройдет промежуток времени $\tau_2 - \tau_1$, то по другим в точности таким же часам, движущимся вместе с наблюдателем B , пройдет промежуток времени

$$\tau'_2 - \tau'_1 = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (31.21)$$

большой исходного в $1/\sqrt{1 - \beta^2}$ раз. На рис. 417 BB' изображает мировую линию движущихся часов, а также наблюдателя B ; отрезок $O'B'$ имеет в системе $O'x'\tau'$ движущегося наблюдателя длину $\tau'_2 - \tau'_1$, а отрезок $O'B''$ в той же системе имеет длину $\tau_2 - \tau_1$, равную длине отрезка OB в исходной системе $Ox\tau$. Как видно из рисунка, $O'B'' = \tau_2 - \tau_1 < O'B' = \tau'_2 - \tau'_1$.

Для наблюдателя B , измеряющего время в своих единицах, часы исходной системы *отстают*. Но исходная система и система $O'x'\tau'$ совершенно равноправны; поэтому те же самые эффекты будут зафиксированы наблюдателем, связанным с исходной системой и сравнивающим показания своих измерений длин и промежутков времени с результатами наблюдателя B . Это непосредственно следует из формул (31.15) и (31.16), имеющих *взаимный* характер.

Мы приходим к заключению, кажущемуся парадоксальным. В самом деле, предположим, что в одной точке расположены одинаково идущие часы A и B . Часы B начинают двигаться с постоянной скоростью прямолинейно сначала от A , а затем назад к A ; часы A при этом остаются в покое. Согласно сказанному часы B отстанут от A . Но с равным основанием можно сказать, что часы A отстанут от B , так как движение часов относительное.

В этом рассуждении можно заменить часы братьями-близнецами: мы придем тогда к выводу, что, например, в первом эксперименте близнец B постареет меньше, чем близнец A , а во втором — наоборот (*парадокс близнецов*).

В действительности оба эксперимента существенно различаются. В первом из них на часы B действует *сила*, заставляющая их изменять свою скорость, а на часы A сила *не действует*.

Во втором эксперименте положение обратное: часы B свободны от воздействия силы, а часы A это воздействие испытывают. Физические условия, в которых находятся различные часы, в обоих экспериментах различны и приводят к разным следствиям в отношении показаний часов. Специальная теория относительности, имеющая дело с прямолинейным и равномерным движением, не дает объяснения действия ускорения на ход часов — это объяснение может быть дано лишь в рамках общей теории относительности. Выводы, к которым приводит преобразование Лоренца, находят ясное объяснение в постулатах Эйнштейна. Физически все основано на том, что *скорость света не бесконечна*, а измерение длин и синхронизация часов в движущихся относительно друг друга системах в принципе могут производиться только с помощью световых сигналов.

Вернемся к диаграмме Минковского (рис. 414) и дадим еще один вывод формулы (31.21), выражающей эффект замедления хода движущихся часов. Пусть наблюдатель B , движущийся со скоростью $v < c$ в системе $Ox't$, и наблюдатель A , покоящийся в той же системе, находятся в начальный момент в одной и той же точке O ($x = x' = 0$) пространства, где они синхронизируют свои часы, поставив их так, что $\tau = \tau' = 0$. Покоящийся в исходной системе $Ox't$ наблюдатель A в момент $\tau = \theta_0$ по своим часам (точка N_0) посылает световой сигнал, который принимается наблюдателем B в момент, когда его часы показывают время $\tau' = \theta_1 = k\theta_0$ (точка N_1). Траекторией светового луча служит прямая N_0N_1 , параллельная диагонали OC . Сразу же по получении сигнала наблюдатель B посылает ответный сигнал (с траекторией N_1N_2 — прямой, перпендикулярной диагонали OC), который принимается покоящимся наблюдателем в момент, когда его собственные часы показывают $\tau = \theta_2 = k\theta_1$ (точка N_2). Совпадение коэффициентов пропорциональности в двух последних равенствах выражает как раз принцип относительности, т. е. совпадение законов распространения света во всех инерциальных системах отсчета. Итак, $\theta_2 = k\theta_1 = k^2\theta_0$.

Теперь легко найти k . Имеем (см. рис. 414)

$$\theta_2 - \theta_0 = (k^2 - 1) \theta_0 = ON_2 - ON_0,$$

$$SN_1 = SN_0 = \frac{1}{2} (ON_2 - ON_0) = \frac{1}{2} (k^2 - 1) \theta_0 =$$

$$= (OS) \beta = (ON_0 + SN_0) \beta = \left(\theta_0 + \frac{k^2 - 1}{2} \theta_0 \right) \beta = \frac{1}{2} (k^2 + 1) \beta \theta_0,$$

откуда

$$k = \frac{\sqrt{1 + \beta}}{\sqrt{1 - \beta}}. \quad (31.22)$$

Покоящийся наблюдатель будет считать, что событие в точке N_1 (приход сигнала из N_0 в N_1) происходит одновременно с событием в точке S , т. е. в момент

$$\tau = OS = ON_0 + N_0S = \frac{k^2 + 1}{2} \theta_0 \quad (31.23)$$

по часам покоящегося наблюдателя.

Для наблюдателя B , как мы уже знаем, событие в точке N_1 произошло в момент $\tau' = \theta_1 = k\theta_0$, а отношение промежутков времени τ и τ' оказывается равным

$$\frac{\tau}{\tau'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (31.24)$$

Этот результат вполне согласуется с формулой (31.21), если учесть, что наблюдатель B покоится в системе $O'x'\tau'$ и его время τ' соответствует времени τ в (31.21).

Рассмотрим теперь две системы, из которых первая движется относительно исходной со скоростью v_1 , а вторая движется относительно первой со скоростью v_2 . Применим формулы (31.15) дважды, связывая сначала координату и время в первой системе с координатой и временем в исходной системе, а затем координату и время во второй системе со значениями этих переменных в первой системе. Исключая из полученных формул координату и время в первой системе, получим связь между этими переменными во второй и исходной системах. Эта связь будет также иметь вид формул (31.15), где роль v выполняет выражение

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}, \quad (31.25)$$

или, вводя параметр β ,

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}.$$

Таким образом, скорость v_3 второй системы относительно исходной оказывается равной не $v_1 + v_2$, а более сложному выражению (31.25). Это выражение известно под названием *эйнштейновской формулы сложения скоростей*. Ясно, что при $v_1 \ll c$, $v_2 \ll c$ выражение (31.25) практически не отличается от галилеев-

ского $v_1 + v_2$, с другой стороны, если хотя бы одна из скоростей v_1 или v_2 равна c , то $v_3 = c$, что соответствует постулату о предельности скорости света c .

В заключение этого параграфа приведем вывод формул преобразования Лоренца для случая, когда относительное движение совершается со скоростью v , произвольно ориентированной относительно исходных осей координат. Ясно, что эти формулы не отличаются ничем существенным от полученных ранее, так как физическое значение имеет лишь направление относительного движения систем координат.

Вектор-радиус r в исходной системе можно разложить на два слагаемых, из которых одно параллельно, а другое перпендикулярно v :

$$r = r_{\parallel} + r_{\perp}.$$

При этом, очевидно, преобразование Лоренца совершается лишь над частью r_{\parallel} ; находим

$$r'_{\parallel} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (r_{\parallel} - vt), \quad r'_{\perp} = r_{\perp}, \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(t - \frac{r_{\perp} \cdot v}{c^2} \right);$$

искомые формулы получатся, если исключить отсюда r_{\parallel} и r_{\perp} с помощью соотношений

$$r_{\parallel} = v \frac{r \cdot v}{v^2}, \quad r_{\perp} = r - v \frac{r \cdot v}{v^2} = \frac{v \times (r \times v)}{v^2}.$$

§ 172. Четырехмерные векторы в пространстве Минковского

Поскольку преобразование Лоренца (31.15) линейно по координатам, оно имеет место и для приращений координат. Для этих приращений сохраняется и равенство (31.9), выражающее инвариантность интервала Δs , где

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2 (\Delta t)^2,$$

а также сохраняются и все следствия (см. (31.19)—(31.21)) из преобразований (31.15), (31.16).

Удобно ввести величину $\Delta \sigma = i\Delta s$; тогда

$$(\Delta \sigma)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2.$$

Величины $c\Delta t$, Δx , Δy , Δz преобразуются как компоненты вектора в четырехмерном пространстве-времени. Если $(\Delta\sigma)^2 \geq 0$, то в соответствии с § 171 этот вектор будем называть времениподобным, в противном случае — пространственноподобным. Как мы знаем, для времениподобного вектора существует такая система координат $O'x'y'z't'$, в которой пространственные составляющие равны нулю, и мы имеем

$$(\Delta\sigma)^2 = c^2(\Delta t')^2. \quad (31.26)$$

Поскольку $\Delta\sigma$ — инвариант, этим же свойством обладает и $\Delta t'$; промежуток $\Delta t'$, согласно (31.21), является *наименьшим* возможным среди промежутков времени между двумя событиями, измеряемых в различных системах отсчета. Если Δx , Δy , Δz — приращения координат движущейся точки и если эти приращения бесконечно малы так же, как и промежуток Δt , то (31.26) можно записать в виде

$$(d\sigma)^2 = c^2(dt')^2.$$

Здесь dt' — бесконечно малое приращение времени, измеренного в *сопутствующей* точке системе координат, т. е. в системе, в которой точка в данный момент покоится. Промежуток времени dt' (по определению инвариантный) называется промежутком *собственного* времени точки. Введем для собственного времени обозначение θ ; тогда

$$d\theta = \frac{d\sigma}{c} = \sqrt{1 - \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{c^2 dt^2}} dt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \sqrt{1 - \beta^2} dt, \quad (31.27)$$

где

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

представляет собой квадрат скорости точки в исходной системе, а параметр β характеризует сопутствующую систему координат.

Значение собственного времени для последующих рассуждений связано с его *инвариантным* характером. Обычная скорость v , представляющая собой трехмерный вектор с составляющими $(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$

$$\frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dx_2}{dt}, \quad \frac{dx_3}{dt},$$

не определяется аналогичными формулами *после* преобразования Лоренца. Этим свойством обладает *четырёхмерный вектор*

скорости V , который в пространстве Минковского $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ задается составляющими

$$\left\{ \frac{dx_1}{d\theta}, \frac{dx_2}{d\theta}, \frac{dx_3}{d\theta}, \frac{dx_4}{d\theta} \right\}.$$

Первые три из них, согласно (31.27), равны

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dx_i}{dt}, \quad i = 1, 2, 3,$$

а четвертая определяется — см. (31.8) — как

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d(ict)}{dt} = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Величина вектора V представляет собой инвариант

$$|V|^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (v^2 - c^2) = -c^2,$$

откуда следует, что V — времениподобный вектор; при преобразовании Лоренца этот вектор, разумеется, испытывает вращение в пространстве Минковского.

С помощью вектора V можно построить и *четырёхмерный вектор ускорения* W , определив его как

$$W = \frac{dV}{d\theta}$$

или в составляющих

$$W_i = \frac{dV_i}{d\theta} = \frac{d^2x_i}{d\theta^2}.$$

Можно проверить, что

$$W_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \frac{dt}{d\theta} = \frac{\dot{v}_i}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{v_i(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c^2(1-\beta^2)^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (31.28)$$

где $v_i = dx_i/dt = \dot{x}_i$ (точка сверху обозначает дифференцирование по времени t , измеряемому в исходной системе). Далее,

$$\begin{aligned} W_4 &= \frac{d}{dt} \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dt}{d\theta} = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \\ &= \frac{ic}{2} \frac{d}{dt} \frac{1}{1-\beta^2} = ic \frac{1}{(1-\beta^2)^2} \beta \dot{\beta} = \frac{i}{c} \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{(1-\beta^2)^2}. \end{aligned} \quad (31.29)$$

Если движение равномерно ($\dot{v} = 0$), то $W = 0$. В системе отсчета, где точка покоится, величины W_i , $i = 1, 2, 3$, равны соответственно \dot{v}_i , т. е. обычному ускорению, а $W_4 = 0$. При этом $|W|^2 = |\dot{v}|^2 > 0$, т. е. вектор ускорения, в отличие от скорости, пространственноподобен.

Необходимость введения четырехмерных векторов скорости, ускорения и других (см. ниже § 173) связана с тем, что в теории относительности мы имеем дело с пространством Минковского вместо *абсолютного пространства* Ньютона, характерного для дорелятивистской физики. Различие заключается в том, что классические трехмерные векторы подчиняются известному закону преобразования при обычных вращениях в трехмерном пространстве, а четырехмерные векторы теории относительности подчиняются такому же закону преобразования, как и составляющие (x_1, x_2, x_3, x_4) вектора-радиуса R в четырехмерном пространстве Минковского, т. е. закону, порождаемому вращением в этом пространстве, или, что то же самое, преобразованием Лоренца.

Четырехмерные векторы должны входить в формулировки физических законов, если мы хотим, чтобы эти законы оставались инвариантными относительно преобразования Лоренца. В следующем параграфе будет показано, как эта идея реализуется при релятивистском обобщении основного уравнения динамики материальной точки.

§ 173. Релятивистское обобщение второго закона Ньютона

Нам предстоит теперь решить поставленную в начале главы задачу обобщения основного уравнения динамики материальной точки, т. е. приведения его к форме, инвариантной относительно преобразования Лоренца. Очевидно, что при $\beta \rightarrow 0$ искомые уравнения должны превращаться в обычные уравнения, выражающие второй закон Ньютона:

$$\frac{d(mv_i)}{dt} = F_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (31.30)$$

Трехмерный вектор q с составляющими

$$mv_1, \quad mv_2, \quad mv_3$$

есть классический (ньютоновский) импульс (количество движения) частицы. В ньютоновской механике масса m является ска-

ляром — инвариантной величиной, не меняющейся ни при преобразовании Галилея, ни при вращениях трехмерного пространства. Трехмерный вектор скорости v преобразуется по известным законам как при преобразовании Галилея, так и при вращениях трехмерного пространства. Но преобразование Лоренца, по отношению к которому мы требуем инвариантности законов динамики, содержит *оба* указанных преобразования в предельном случае $\beta \rightarrow 0$; при $\beta \neq 0$ оно является *обобщением* обоих преобразований в четырехмерном пространстве Минковского. Поэтому при релятивистском обобщении естественно сохранить инвариантный характер массы*, а в качестве скорости взять введенный в предыдущем параграфе четырехмерный вектор V с составляющими

$$\left\{ \frac{dx_1}{d\theta}, \frac{dx_2}{d\theta}, \frac{dx_3}{d\theta}, \frac{dx_4}{d\theta} \right\}.$$

Ньютоновский импульс $q = mv$ заменится теперь релятивистским четырехмерным вектором $Q = mV$, который назовем *вектором энергии-импульса*. Вводя еще дифференцирование по *собственному времени* θ вместо времени t в данной исходной системе, придем к выражению

$$\frac{dQ_i}{d\theta} = \frac{d(mV_i)}{d\theta}, \quad (31.31)$$

обобщающему левую часть (31.30); это выражение представляет собой i -ю составляющую четырехмерного вектора

$$\frac{d(mV)}{d\theta}.$$

Правая часть (31.30) должна также допускать обобщение в виде некоторого четырехмерного вектора; обозначим этот вектор через \mathcal{F} и назовем его *силой Минковского*. В результате искомого обобщающее уравнение будет иметь вид

$$\frac{d(mV)}{d\theta} = \mathcal{F}. \quad (31.32)$$

* В ряде руководств по специальной теории относительности инвариантную массу m называют *массой покоя*, в отличие от *релятивистской массы* $m/\sqrt{1-\beta^2}$, зависящей от скорости. Введение *релятивистской массы* — чисто формальный акт, не имеющий какого-либо физического обоснования. Поэтому мы не будем пользоваться указанной терминологией и сохраним термин *масса* для инвариантной величины m .

Величины (31.31) легко вычисляются с помощью формул (31.28), (31.29), поскольку масса m — инвариант. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{d(mV_i)}{d\theta} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \right), & i = 1, 2, 3, \\ \frac{d(mV_4)}{d\theta} &= \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \right).\end{aligned}\quad (31.33)$$

Интересующее нас векторное уравнение в проекциях на пространственные оси x_1, x_2, x_3 будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mathcal{F}_i \sqrt{1-\beta^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (31.34)$$

а в проекции на ось x_4 приведет к равенству

$$\frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mathcal{F}_4. \quad (31.35)$$

Рассмотрим уравнение (31.34) и сравним его с (31.30). Если потребовать, чтобы подобно классическому случаю компоненты силы $F_i, i = 1, 2, 3$, определялись как производные по времени от величин

$$Q_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (31.36)$$

переходящих при $\beta \rightarrow 0$ в составляющие обычного вектора количества движения, то следует положить

$$\mathcal{F}_i = \frac{F_i}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (31.37)$$

Чтобы найти составляющую \mathcal{F}_4 , скалярно умножим обе части векторного равенства (31.32) на V . Будем иметь ($m = \text{const}$)

$$V \cdot \frac{d}{d\theta} (mV) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{m}{2} |V|^2 \right) = \mathcal{F} \cdot V.$$

Но $|V|^2 = -c^2 = \text{const}$, следовательно, $\mathcal{F} \cdot V = 0$, откуда следует что

$$\mathcal{F}_4 = \frac{i}{c} \frac{F \cdot v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (31.38)$$

и равенство (31.35) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = F \cdot v. \quad (31.39)$$

Определим теперь *энергию* \mathcal{E} условием, чтобы ее производная по времени равнялась мощности силы \mathbf{F} (это определение совпадает с классическим):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Сравнивая это равенство с (31.39), видим, что следует положить

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \text{const.} \quad (31.40)$$

Если константу в правой части выбрать равной нулю и сравнить (31.39) с (31.35), то окажется, что величину $i\mathcal{E}/c$ можно считать четвертой составляющей релятивистского *четырёхмерного вектора энергии-импульса* $\mathbf{Q} = m\mathbf{V}$. Его первые три составляющие задаются формулами (31.36), а

$$Q_4 = \frac{imc}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (31.41)$$

Условие $\text{const} = 0$ в формуле (31.40) весьма существенно, так как лишь благодаря ему выражение $i\mathcal{E}/c$ становится четвертой составляющей релятивистского вектора \mathbf{Q} . В самом деле, пусть $\text{const} = C \neq 0$, и пусть

$$Q_4 = \frac{i\mathcal{E}}{c} = \frac{imc}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{i}{c} C, \quad (31.42)$$

а Q_1, Q_2, Q_3 по-прежнему задаются формулами (31.36). Рассмотрим преобразование Лоренца вектора \mathbf{Q} , связанное с переходом к инерциальной системе $O'x'_1 x'_2 x'_3 x'_4$, движущейся со скоростью $u = bc$ относительно исходной системы в направлении оси x_3 . Будем иметь

$$\begin{aligned} Q'_1 &= Q_1, & Q'_2 &= Q_2, \\ Q'_3 &= \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}} (Q_3 + ibQ_4), & Q'_4 &= \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}} (Q_4 - ibQ_3). \end{aligned} \quad (31.43)$$

Если подставить выражения (31.36) и (31.42) в третье из соотношений (31.43), то получится равенство

$$\frac{mv'_3}{\sqrt{1 - \beta'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}} \left(\frac{mv_3}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{mu}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{Cu}{c^2} \right). \quad (31.44)$$

В нерелятивистском пределе, когда $v'_3 \rightarrow 0$, $v_3 \rightarrow 0$, $u \rightarrow 0$, должно соблюдаться галилеево правило сложения скоростей, а именно

$$m v'_3 = m v_3 - m u.$$

Соотношение (31.44), со своей стороны, приводит к равенству

$$m v'_3 = m v_3 - m u - \frac{C u}{c^2} + O(v_3'^2, v_3^2, v^2),$$

где символом $O(v_3'^2, v_3^2, u^2)$ обозначена величина, имеющая порядок малости $v_3'^2, v_3^2, u^2$; отсюда следует, что $C = 0$.

Итак, уравнение (31.32), являющееся обобщением второго закона Ньютона, принимает следующий окончательный вид:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\theta} = \frac{d(m\mathbf{V})}{d\theta} = \mathcal{F}, \quad (31.45)$$

где сила Минковского \mathcal{F} задается составляющими

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \mathbf{F}, \quad \frac{i\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (31.46)$$

Будучи четырехмерным вектором в пространстве Минковского, сила \mathcal{F} должна, разумеется, преобразовываться по формулам Лоренца (31.43). Из этих формул видно, в частности, что если на частицу в одной инерциальной системе не действует сила ($\mathcal{F} = 0$), то это же верно и в любой другой инерциальной системе.

Соотношения (31.43) указывают, какими свойствами должны обладать силы \mathbf{F} в релятивистской механике. Эти силы должны быть такими, чтобы составленные по ним в соответствии с (31.37), (31.38) силы Минковского \mathcal{F} преобразовывались как четырехмерные векторы в пространстве Минковского. Последнее условие удовлетворяется для электромагнитных сил, действующих на заряженную частицу; требование теории состоит в том, чтобы это условие соблюдалось для всех сил вообще. Таким образом, оно является руководящим принципом для построения любой физической теории, описывающей силовые взаимодействия.

Мы вернемся к этому вопросу позднее, а сейчас обсудим некоторые следствия релятивистской формулы

$$\mathcal{E} = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (31.47)$$

для энергии движущейся частицы. Если $\beta \ll 1$, то

$$\mathcal{E} = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \dots \right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + O(\beta^4).$$

Таким образом, с точностью до членов порядка β^4 величина \mathcal{E} отличается постоянной mc^2 от обычного ньютоновского выражения $mv^2/2$ для *кинетической* энергии частицы. В частности, для *покоящейся* частицы

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \equiv mc^2. \quad (31.48)$$

Этот результат является новым по сравнению с ньютоновской механикой, где полная энергия частицы определяется с точностью до *произвольной* постоянной. Никаких оснований для выбора какого-либо определенного значения этой постоянной в рамках ньютоновской механики нет, и ее просто полагают равной нулю, так что покоящаяся классическая частица обладает и нулевой полной энергией. В релятивистской механике полная энергия частицы задается выражением (31.47), лишенным каких-либо произвольных элементов (вспомним, что константа в формуле (31.40) оказалась равной нулю вследствие того, что $i\mathcal{E}/c$ — четвертая составляющая вектора \mathbf{Q}); поэтому, в частности, покоящаяся частица обладает энергией

$$\boxed{\mathcal{E}_0 = mc^2}, \quad (31.49)$$

которую естественно назвать *энергией покоя*. Кинетическую энергию T релятивистской частицы определим как разность между полной энергией и энергией покоя, т. е. как

$$T = \mathcal{E} - mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right); \quad (31.50)$$

при $\beta \rightarrow 0$ кинетическая энергия отличается слагаемыми порядка β^4 от ньютоновского выражения $mv^2/2$.

Формула (31.49) показывает, что энергия покоя, заключенная в теле, пропорциональна массе этого тела. Масса определяет количество внутренней энергии, содержащейся в теле, и всякое изменение внутренней энергии должно сопровождаться изменением массы:

$$\Delta \mathcal{E}_0 = (\Delta m) c^2. \quad (31.51)$$

Запас внутренней энергии колоссален; согласно формуле (31.49) внутренняя энергия 1 г вещества является величиной порядка 10^{21} эрг = 10^{14} Дж. Весьма примечательно, что формула (31.49) определяет количество внутренней энергии безотносительно к ее происхождению: мы можем ничего не знать о том, какую форму имеет эта энергия. Обнаружение колоссальных запасов энергии, содержащихся внутри любого тела, стало возможным в конечном счете благодаря введенным Эйнштейном новым представлениям о пространстве и времени. Только одни эти новые представления привели к величайшему открытию, выражающемуся формулой (31.49).

Нужно подчеркнуть, что полная энергия \mathcal{E} частицы, определяемая формулой (31.47), является *относительной* величиной: она различна в различных системах отсчета, поскольку величина $i\mathcal{E}/c$ представляет собой составляющую Q_4 вектора энергии-импульса \mathbf{Q} . В противоположность этому *энергия покоя* $\mathcal{E}_0 = mc^2$ — инвариантная величина, связанная с массой тела. Инвариантный характер массы обнаруживается при вычислении другой инвариантной величины — квадрата вектора \mathbf{Q} :

$$Q^2 = \frac{q^2}{1 - \beta^2} - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = -m^2c^2, \quad (31.52)$$

где $\mathbf{q} = m\mathbf{v}$ — ньютоновский импульс (количество движения) частицы.

Составляющие вектора \mathbf{Q} преобразуются по формулам (31.43). В системе отсчета, где частица покоится, $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$, а $Q_4 = \mathcal{E}_0/c = imc$. Если перейти к новой системе, движущейся относительно частицы со скоростью v вдоль оси x_3 , то, согласно (31.43), будем иметь ($\beta = v/c$)

$$Q'_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} i\beta Q_4 = -\frac{mv}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$Q'_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} Q_4 = \frac{i\mathcal{E}_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{i\mathcal{E}}{c}.$$

Частица — носитель внутренней энергии \mathcal{E}_0 , отвечающей массе m , — движется в новой системе со скоростью $-v$; ее энергия в этой системе равна $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0/\sqrt{1 - \beta^2}$ (см. (31.47)). Энергия частицы в движущейся системе возрастает до бесконечности, когда $v \rightarrow c$ ($\beta \rightarrow 1$). Двигаться со скоростью света могут только такие

частицы, для которых энергия покоя (или масса) равна нулю. Таковы световые кванты (фотоны), для которых, согласно (31.52) и (31.36), энергия \mathcal{E} связана с ньютоновским импульсом q соотношением

$$\mathcal{E} = \frac{cq}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

справедливым в любой системе отсчета. Для частиц с ненулевой массой достижение скорости света потребовало бы бесконечно большой затраты энергии.

Отметим еще, что для *свободной* частицы ($F = 0$) вектор энергии-импульса Q не зависит от времени t в данной инерциальной системе; с переходом к другой системе составляющие этого вектора меняются согласно формулам Лоренца (31.43), оставаясь, однако, постоянными в новой системе; квадрат вектора Q при этом сохраняет свое значение $-m^2c^2$ во всех инерциальных системах.

Этот вывод тривиальным образом переносится на систему *не взаимодействующих* частиц, для которых *сохраняется главный вектор энергии-импульса* $Q = \Sigma Q_i$. Как для одной частицы, так и для системы не взаимодействующих частиц существенно, что сохранение пространственных компонент Q_1, Q_2, Q_3 вектора Q влечет за собой сохранение временной компоненты Q_4 этого вектора. Иными словами, сохранение релятивистского количества движения (Q_1, Q_2, Q_3) означает сохранение и (релятивистской) полной энергии \mathcal{E} . Если бы это было не так, то при переходе по формулам (31.43) к новой системе отсчета получились бы изменяющиеся во времени составляющие Q'_1, Q'_2, Q'_3 .

Этот результат иллюстрирует еще одно отличие от ньютоновской динамики, где сохранение количества движения и сохранение кинетической энергии представляли собой независимые утверждения. В частности, при определенных взаимодействиях тел, движущихся с нерелятивистскими скоростями, сохраняется количество движения, а кинетическая энергия не сохраняется, превращаясь частично в тепло. Так, например, ведут себя тела при неупругом ударе. Тем не менее релятивистская сумма

$$mc^2 + \frac{mv^2}{2},$$

выражающая в этом случае полную энергию, должна сохраняться, откуда следует, что увеличивается масса системы, причем это

увеличение (практически, конечно, весьма малое) пропорционально количеству выделившегося тепла. В этом примере часть кинетической энергии тел перешла в энергию покоя, связанную с массой. Хорошо известны случаи обратных превращений, имеющих место при делении атомных ядер. Полная энергия и количество движения при этом сохраняются, но масса покоя уменьшается, а кинетическая энергия продуктов деления вследствие этого значительно увеличивается. Следует добавить, однако, что энергия покоя практически не реализовывалась вплоть до осуществления деления ядер, и это давало основание говорить наряду с законом сохранения энергии и о *законе сохранения массы*.

В релятивистской динамике оба закона соединяются в один, а именно в закон сохранения полной энергии \mathcal{E} . Объяснение особой «связанности» энергии покоя лежит в области квантовых явлений, в частности в дискретном характере процессов, имеющих место при превращениях элементарных частиц. Релятивистская динамика устанавливает лишь универсальную закономерность, свойственную *всем* таким процессам, а именно закон сохранения полной энергии.

§ 174. Движение заряженной частицы в однородных электрическом и магнитном полях

Силы, которые действуют на заряженные частицы в электромагнитном поле, определяются теорией Максвелла. Согласно этой теории электромагнитное поле характеризуется вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E}(E_x, E_y, E_z)$ и вектором напряженности магнитного поля $\mathbf{H}(H_x, H_y, H_z)$. По этим векторам в пространстве Минковского строится антисимметричный тензор второго ранга G , который задается следующей матрицей:

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & -cH_z & -cH_y & -iE_x \\ -cH_z & 0 & cH_x & -iE_y \\ cH_y & -cH_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{array} \right). \quad (31.53)$$

Компоненты G преобразуются как компоненты тензора в пространстве Минковского; отсюда вытекают и правила преобразования величин E_x, \dots, H_z .

Кроме того, теория Максвелла вводит в рассмотрение четырехмерный *вектор плотности тока* \mathbf{s} :

$$\mathbf{s} = \rho_0 \mathbf{V}; \quad (31.54)$$

здесь ρ_0 — *плотность заряда* (заряд единицы объема) в сопутствующей этому объему системе отсчета, а \mathbf{V} — четырехмерная скорость.

Вектор плотности силы, действующей со стороны электромагнитного поля на единицу объема, содержащего заряды, по определению равен

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} G \mathbf{s}, \quad (31.55)$$

или, в составляющих,

$$f_i = \frac{1}{c} G_{ik} s_k. \quad (31.56)$$

Выражение (31.55) представляет собой силу Минковского, действующую на единицу заряженного объема в электромагнитном поле.

Предположим, что частица с зарядом e движется в однородном магнитном поле, созданном находящимися на бесконечности источниками; в системе отсчета, в которой эти источники покоятся, будем иметь

$$\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{H} = H \mathbf{k}, \quad H = \text{const}, \quad |\mathbf{k}| = 1. \quad (31.57)$$

Отличны от нуля только компоненты $G_{12} = cH$ и $G_{21} = -cH$ тензора G ; для составляющих силы \mathbf{f} получаем

$$f_1 = \frac{ev_y H}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad f_2 = -\frac{ev_x H}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad f_3 = f_4 = 0. \quad (31.58)$$

Релятивистские уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{q}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = e \mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0, \quad (31.59)$$

где $\mathbf{q} = m\mathbf{v}$ — трехмерный нерелятивистский вектор количества движения частицы, а $\mathcal{E} = mc^2 / \sqrt{1 - \beta^2}$ — ее полная энергия. Поскольку

$$\frac{\mathbf{q}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \mathbf{v},$$

а $\mathcal{E} = \text{const}$ в силу второго уравнения системы (31.59), первое уравнение этой системы можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \omega \mathbf{v} \times \mathbf{k}, \quad \omega = \frac{ec^2 H}{\mathcal{E}}, \quad (31.60)$$

отличающемся от ньютоновского лишь значением параметра ω , которое в классическом случае равно

$$\omega_n = \frac{eH}{m} = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (31.61)$$

Решение для ньютоновского случая дано в § 87, примере 82 (с. 47); движение частицы происходит по винтовой линии. Параметр ω , равный угловой частоте вращения частицы вокруг оси винтовой линии, называется *циклотронной частотой*. Как видно из (31.61), циклотронная частота в релятивистском случае меньше, чем в ньютоновском.

Рассмотрим теперь движение той же частицы в однородном электрическом поле $\mathbf{E} = E\mathbf{i}$, $E = \text{const}$, создающемся в пространстве между двумя заряженными проводящими пластинами, перпендикулярными оси x (конденсатор). В системе координат, в которой эти пластины покоятся, отличны от нуля составляющие $G_{14} = -iE$, $G_{41} = iE$ тензора G ; для вектора \mathbf{f} получаем

$$f_1 = \frac{eE}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad f_2 = f_3 = 0, \quad f_4 = \frac{i}{c\sqrt{1 - \beta^2}} eEv_x.$$

Релятивистские уравнения движения принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{q}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = eE\mathbf{i}, \quad \mathbf{q} = m\mathbf{v}, \quad (31.62)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = eEv_x, \quad \mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (31.63)$$

Введем обозначение

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{q}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (31.64)$$

и примем начальные условия

$$p_x = 0, \quad p_y = p_0 \quad \text{при } t = 0. \quad (31.65)$$

Интегрируя (31.62) с учетом (31.65), получаем

$$p_x = eEt, \quad p_y = p_0.$$

Пользуясь формулой (31.52), находим энергию \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2} = \sqrt{m^2 c^4 + p_0^2 c^2 + (cEt)^2} = \sqrt{(\mathcal{E}^0)^2 + (cEt)^2}.$$

Теперь, учитывая, что

$$\mathbf{v} = \frac{c^2}{\mathcal{E}} \mathbf{p},$$

получаем

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{\mathcal{E}} = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{(\mathcal{E}^0)^2 + (cEt)^2}},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{p_y c^2}{\mathcal{E}} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{(\mathcal{E}^0)^2 + (cEt)^2}}.$$

Интегрируя при начальных условиях $x(0) = y(0) = 0$, находим

$$x = \frac{1}{eE} \sqrt{(\mathcal{E}^0)^2 + (ceEt)^2} - \frac{\mathcal{E}^0}{eE},$$

$$y = \frac{p_0 c}{eE} \operatorname{arsh} \frac{ceEt}{\mathcal{E}^0},$$

или, исключая t ,

$$x = \frac{\mathcal{E}^0}{eE} \left(\operatorname{ch} \frac{eEy}{cp_0} - 1 \right).$$

Траектория частицы в плоскости (x, y) оказалась цепной линией. В предельном случае малых скоростей $v \ll c$ (ср. § 87, пример 81) траектория переходит в параболу [$p_0 \sim mv_0$, $\mathcal{E}^0 \approx mc^2$, значения t (а значит, и x) должны считаться достаточно малыми, так что $\operatorname{sh} \alpha = 1 + \alpha^2/2$], и мы имеем

$$x = \frac{\mathcal{E}^0}{eE} \frac{e^2 E^2 y^2}{2c^2 p_0^2} = \frac{mc^2 e^2 E^2 y^2}{eE \cdot 2m^2 v_0^2 c^2} = \frac{eE}{2mv_0^2} y^2.$$

§ 175. О силовых взаимодействиях в теории относительности.

Проблема инерции и переход к общей теории относительности

В § 173 было указано, что для корректной релятивистской формулировки законов силовых взаимодействий необходимо, чтобы силы Минковского \mathcal{F} , составленные по правилам (31.37),

(31.38), преобразовывались как четырехмерные векторы в пространстве Минковского. Несоблюдение этого требования привело бы к нарушению принципа относительности. Выясним, как выполняется это требование, например, в теории упругости.

Упругое тело, как известно, может быть моделировано совокупностью отдельных материальных точек, соединенных друг с другом пружинами. Предположим, что массы и пружины в некоторой системе отсчета находятся в равновесии. Если перейти к другой системе, движущейся относительно исходной поступательно, равномерно и прямолинейно, то, согласно принципу относительности, равновесие должно сохраниться. Для того чтобы понять, как при этом меняется сила, с которой пружины действуют на массы, предположим, что эти массы заряжены. Закон взаимодействия зарядов удовлетворяет высказанному выше требованию: сила такого взаимодействия — четырехмерный вектор. Но, поскольку равновесие системы заряженных масс и пружин сохранилось, такому же требованию удовлетворяет и сила натяжения пружин: она изменяется с переходом к новой системе отсчета так же, как и сила взаимодействия зарядов. Ясно, с другой стороны, что это поведение пружин не зависит от того, заряжены массы или нет, поэтому полученный результат характеризует трансформационные свойства упругих сил как таковых. Эти свойства, разумеется, находят отражение в соответствующих обобщенных уравнениях теории упругости. Особенностью релятивистской формулировки этих уравнений является отсутствие понятия абсолютно твердого тела. Действительно, в таком теле упругие волны распространялись бы с бесконечно большой скоростью, а это противоречит принципу предельности скорости света.

Как видим, не все понятия классической механики допускают релятивистские аналоги. Новый взгляд на природу пространства и времени позволяет дать более точное толкование понятиям, казавшимся очевидными с позиций классической механики.

В этом отношении особенно примечательной является трактовка Эйнштейном одного из основных понятий ньютоновской динамики, именно, понятия о силах инерции.

В начале этой главы, говоря об инерциальных системах отсчета, мы определили их как такие системы, в которых отсутствуют силы инерции, а допускаются лишь силы, обусловленные взаимодействием тел и передающие свое действие со скоростями, не превышающими c . Согласно принципу относительности

Эйнштейна все законы физики сохраняют свой вид в различных инерциальных системах отсчета, или, что то же самое, остаются инвариантными по отношению к преобразованиям Лоренца.

Силы инерции обладают тем особым свойством, что они придают телам ускорение, не зависящее от их массы. Кроме того, эти силы можно совершенно исключить из уравнений путем перехода к новой, соответствующим образом подобранной системе отсчета, которая, таким образом, становится инерциальной.

Из этого рассуждения ясно виден «привилегированный» характер инерциальных систем отсчета. В этих системах действуют только силы, обусловленные взаимодействием тел.

Принцип относительности утверждает, что инерциальные системы *неразличимы*, и поэтому теряет смысл представление Ньютона об абсолютном пространстве и абсолютном времени. Тем не менее существование сил инерции как будто оставляет место для такого представления. В самом деле, равномерное вращение приводит к появлению поля центробежных сил и связанных с ними ускорений, причем единственной причиной этого приходится считать абсолютность пространства.

Такое объяснение происхождения центробежных сил нельзя считать удовлетворительным, и еще задолго до Эйнштейна Дж. Беркли и Э. Махом была выдвинута идея о том, что причиной центробежных сил являются массы, распределенные во Вселенной. Если принять эту точку зрения, то и силы инерции становятся силами взаимодействия, но взаимодействия особого рода, при котором нет зависимости ускорения от массы тел.

Со времен Галилея известно, однако, что именно этим свойством отличается поле тяготения, в котором все массы приобретают одинаковые ускорения. Масса в поле тяготения является количественной характеристикой силы, с которой тело притягивается к другим телам (*тяжелая* масса). С другой стороны, при движении тела под действием других сил, отличных от сил тяготения, масса является количественной характеристикой *инертности* тел, т. е. их способности замедлять процесс изменения собственной скорости (*инертная* масса). Понятия инертной и тяжелой масс, казалось бы, не имеют между собой ничего общего, поскольку

БЕРКЛИ ДЖОРДЖ (*Berkeley Georg, 1685—1753*) — английский философ, епископ.

МАХ ЭРНСТ (*Mach Ernst, 1838—1916*) — австрийский философ и физик.

первое из них относится к движению в любых полях, а второе — только в гравитационных полях. Тем более примечательными оказались эксперименты Р. Этвеша*, показавшего (с достаточно большой точностью), что обе массы пропорциональны друг другу, и, следовательно, выбором единиц их можно сделать просто равными. Этот результат, первоначально казавшийся случайным, Эйнштейн воспринял как фундаментальный физический принцип, давший возможность сделать вывод о *локальной эквивалентности* полей сил инерции и тяготения и тем самым установить *принцип эквивалентности инертной и тяжелой масс***.

Следующее простое рассуждение, принадлежащее Эйнштейну, иллюстрирует эту мысль. Предположим, что в кабине лифта свободно падает твердое тело. Если кабина лифта покоится относительно Земли, то тело будет двигаться в локально однородном поле тяжести с постоянным ускорением g . Пусть теперь одновременно с телом свободно падает и кабина лифта. При одинаковых начальных условиях для кабины и тела последнее будет находиться в покое относительно кабины. В *ускоренной* (неинерциальной) системе отсчета, связанной с кабиной, на тело наряду с силой тяжести будет действовать *равная и противоположная ей по направлению* сила инерции, и под действием этих двух сил тело будет находиться в равновесии (*невесомость*).

Приведенное рассуждение показывает, что движение ускоряемой системы отсчета невозможно обнаружить при помощи опытов внутри этой системы, поскольку такие опыты будут происходить при отсутствии влияния сил инерции, уравниваемых силами тяготения; другими словами, система отсчета будет вести себя как инерциальная, и в ней будут справедливы выводы специальной теории относительности.

Следует подчеркнуть, что высказанное заключение носит *локальный* характер: уравновесить поле тяготения полем сил инерции можно только в *небольших областях, пространственно-временного континуума*; в больших областях это, вообще говоря, невозможно.

Итак, приходим к *локальному принципу эквивалентности*, утверждающему, что поле тяготения в малой области пространственно-временного континуума эквивалентно полю сил инерции, возникающему при движении с ускорением. Эти два поля

* О Р. Этвеше см. с. 36.

** В настоящее время этот принцип проверен с точностью до 10^{-12} .

нельзя различить никаким физическим опытом, проводимым в указанной малой области.

Рассмотрим локально инерциальную систему отсчета, сопутствующую движущейся системе (свободно падающей кабине лифта) в упомянутой малой области пространственно-временного континуума. Будучи инерциальной, эта система характеризуется следующим выражением для квадрата пространственно-временного интервала (см. (31.17)):

$$ds^2 = dx'^2 - dt'^2,$$

или более общим образом в координатах (31.8):

$$ds^2 = dx'_i dx'_i. \quad (31.66)$$

Мы записываем выражение для квадрата бесконечно малого интервала, имея в виду, что локальный принцип эквивалентности справедлив в бесконечно малом.

Перейдем теперь от локально инерциальной системы к исходной (для примера с лифтом это система, связанная с Землей). Это равносильно переходу от координат (x'_i) к новым координатам (x_i) по формулам

$$x'_i = x'_i(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (31.67)$$

Квадрат интервала ds^2 при таком преобразовании определится формулой

$$ds^2 = g_{rs} dx_r dx_s, \quad (31.68)$$

где

$$g_{rs} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_r} \frac{\partial x'_i}{\partial x_s} = g_{sr}. \quad (31.69)$$

В частном случае псевдоевклидова пространства величина $g_{rs} = \delta_{rs}$, где δ_{rs} — символ Кронекера (см. гл. VIII).

Величины g_{rs} преобразуются как компоненты тензора, поскольку (dx_r) — вектор, а ds^2 — инвариант.

Тензор (g_{rs}) — так называемый метрический тензор — характеризует внутренние геометрические свойства пространства. Поясним эту мысль, воспользовавшись следующей аналогией. Рассмотрим две бесконечно близкие точки, расположенные

- ✓ на плоскости,
- ✓ на поверхности кругового цилиндра,
- ✓ на поверхности сферы.

Расстояние ds между этими точками будет определяться равенствами

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (\text{плоскость}), \quad (31.70)$$

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad (\text{цилиндр с радиусом } \rho), \quad (31.71)$$

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (\text{сфера с радиусом } r). \quad (31.72)$$

Сравним между собой формулы (31.70), (31.71) и затем формулы (31.70) и (31.72). В первом случае (31.71) сводится по виду к (31.70), поскольку можно ввести новую координату $\sigma = \rho\varphi$ сразу на всей поверхности цилиндра, после чего различие между (31.71) и (31.70) будет только в обозначениях. Поскольку метрический тензор определяет длины кривых на поверхности и углы, которые эти кривые составляют между собой, мы говорим, что плоскость и поверхность кругового цилиндра обладают одинаковой *внутренней геометрией*. Совпадение внутренних геометрий проявляется в том, что кусок цилиндрической поверхности можно «разогнуть» в кусок плоскости без изменения расстояний между точками и углов между направлениями.

Сравнение (31.70) и (31.72) приводит к совершенно другим выводам. Как показывается в дифференциальной геометрии, не существует такого преобразования координат, которое привело бы (31.72) к (31.70) на всей поверхности сферы. Внутренняя геометрия сферы отличается от внутренней геометрии плоскости; в частности, кусок сферической поверхности нельзя «разгладить», превратив его в кусок плоскости. Это можно сделать только локально, в малой окрестности некоторой заданной точки сферы, заменяя малую площадку на сфере малым участком касательной плоскости.

Вернемся теперь к формуле (31.68) и предположим, что величины $g_{rs} = g_{sr}$ являются произвольными функциями координат (x_i) . Спрашивается, можно ли найти такое преобразование координат (31.67), чтобы выражение для ds^2 приняло вид (31.66) сразу во всем пространстве? Ответ на этот вопрос в общем случае отрицателен. Требуемое преобразование существует не для любых тензоров (g_{rs}) , а лишь для тех из них, для которых обращается в нуль некоторый вспомогательный тензор, называемый *тензором кривизны*. Этот тензор, в частности, равен нулю для цилиндрической поверхности (31.71) и отличен от нуля для поверхности сферы (31.72). В общем случае возможно только *локальное* преобразование (31.68) к виду (31.66).

Внутренняя геометрия, определяемая формулой (31.68) для квадрата линейного элемента, носит наименование *римановой геометрии* (по имени Б. Римана). Отвечающая формуле (31.66) *евклидова* (или *псевдоевклидова*, поскольку x_4 — чисто мнимая координата) геометрия представляет собой, таким образом, частный случай римановой геометрии.

Возвращаясь к вопросу о системах отсчета, можем сказать, что инерциальные системы характеризуются (псевдо) евклидовой геометрией (31.66).

Когда мы в рассмотренном выше примере с лифтом переходим от локально инерциальной (сопутствующей кабине лифта) системы к системе, связанной с Землей, находящееся в лифте тело приобретает ускорение, обусловленное полем тяжести; при этом в новых координатах квадрат интервала ds^2 представляется в форме (31.68). Основополагающая идея А. Эйнштейна заключается в том, что отличие составляющих метрического тензора (g_{rs}) от δ_{rs} объясняется полем тяготения, которое, таким образом, делает геометрию пространственно-временного континуума римановой геометрией. Если при этом тензор (g_{rs}) таков, что вычисленный по нему тензор кривизны обращается в нуль в *протяженной* области пространственно-временного континуума, то в этой области существуют такие координаты (x'_i), в которых квадрат интервала допускает представление (31.66). В исходной системе координат (x_i) составляющие тензора (g_{rs}) характеризуют тогда специальное поле тяготения, называемое *полем сил инерции*. Может случиться, однако, что тензор кривизны не обращается в нуль в протяженной области пространственно-временного континуума, — в этом случае составляющие тензора (g_{rs}) определяют *истинное поле тяготения*, созданное распределенными в этой области материальными телами. Истинное поле тяготения нельзя «устранить» во *всей области* никаким преобразованием координат, которого в этом случае попросту не существует. В этом заключается фундаментальное отличие истинных полей тяготения от полей сил инерции: эти поля эквивалентны только локально (*в малом*), но отнюдь не глобально (*в большом*).

А. Эйнштейну принадлежат фундаментальные уравнения, связывающие геометрические свойства пространственно-времен-

ного континуума с распределением вещества в этом континууме. Отметим, что, говоря о веществе, А. Эйнштейн имеет в виду все виды энергии (массы), как это следует из выводов специальной теории относительности. Таким образом, пространственно-временной континуум, включающий поля тяготения (истинные или «устраиваемые»), уже не является евклидовым, а характеризуется внутренней кривизной. В частности, траектория свободной материальной частицы в этом поле отличается от прямой: она представляет собой так называемую геодезическую, определяемую в конечном счете тензором (g_{rs}).

В заключение отметим, что идея о связи между силовыми полями и внутренней геометрией пространства была высказана задолго до А. Эйнштейна Б. Риманом в его знаменитой диссертации «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» [42]:

«Вопрос о том, справедливы ли допущения геометрии в бесконечно малом, тесно связан с вопросом о внутренней причине метрических отношений в пространстве. Этот вопрос, конечно, также относится к области учения о пространстве и при рассмотрении его следует принять во внимание... замечание о том, что в случае дискретного многообразия принцип метрических отношений содержится уже в самом понятии этого многообразия, тогда как в случае непрерывного многообразия его следует искать где-то в другом месте. Отсюда следует, что или то реальное, что создает идею пространства, образует дискретное многообразие, или же нужно пытаться объяснить возникновение метрических отношений чем-то внешним — силами связи, действующими на это реальное.

Решение этих вопросов можно надеяться найти лишь в том случае, если, исходя из ныне существующей и проверенной опытом концепции, основа которой положена Ньютоном, станем постепенно ее совершенствовать, руководствуясь фактами, которые ею объяснены быть не могут... . Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике, и переступить его не дает нам повода сегодняшний день».

Эти пророческие слова были сказаны Б. Риманом в 1854 году.

Глава XXXIIСвободные колебания системы
с одной степенью свободы**§ 176. Свободные незатухающие колебания системы
с одной степенью свободы**

Прямолинейные колебательные движения материальной точки под действием линейной восстанавливающей силы, силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости, и постоянной силы трения были рассмотрены в гл. XXI. Полученные там результаты обобщаются в настоящей главе на случай системы материальных точек, подчиненной стационарным связям и имеющей одну степень свободы. Вместе с тем дается представление о колебаниях, развивающихся под действием нелинейных восстанавливающих сил и силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости. Содержание этой и двух следующих глав курса можно рассматривать как введение в теорию колебаний, представляющую собой одну из наиболее важных областей приложений теоретической механики к вопросам техники.

Рассмотрим систему материальных точек с одной степенью свободы, подчиненную стационарным связям и находящуюся под действием задаваемых консервативных сил. Обозначим через q текущую обобщенную координату и предположим, что положение системы, соответствующее нулевому значению координаты $q = 0$, представляет собой положение устойчивого ее равновесия (§ 147).

Кинетическая энергия системы по предыдущему может быть представлена в виде

$$T = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2, \quad (32.1)$$

а потенциальная энергия будет

$$\Pi = \Pi(q). \quad (32.2)$$

Поставим себе целью изучить характер движения системы в области малых значений обобщенной координаты q и обобщенной скорости \dot{q} , т. е. вблизи положения устойчивого равновесия

системы. С этой целью произведем разложение функций $A(q)$ и $\Pi(q)$ в ряды Тейлора вблизи точки $q = 0$ и получим

$$\begin{aligned} A(q) &= A(0) + A'(0)q + \dots, \\ \Pi(q) &= \Pi(0) + \Pi'(0)q + \frac{1}{2} \Pi''(0)q^2 + \dots \end{aligned} \quad (32.3)$$

Отбрасывая несущественную постоянную в выражении потенциальной энергии, можем положить $\Pi(0) = 0$; кроме того, как уже было показано ранее, в положении равновесия системы равна нулю обобщенная сила, а следовательно, и первая производная от потенциальной энергии

$$(Q)_{q=0} = -\Pi'(0) = 0.$$

Вторая производная от потенциальной энергии в положении устойчивого равновесия удовлетворяет условию

$$\Pi''(0) \geq 0,$$

где знак равенства относится к тому случаю, когда о наличии минимума потенциальной энергии приходится заключать по производным высших порядков. Примем

$$\Pi''(0) = c > 0. \quad (32.4)$$

На основании теоремы Лагранжа значения q и \dot{q} при движении системы в области минимума потенциальной энергии не выходят из заранее назначенных сколь угодно тесных границ ($|q| < \varepsilon$, $|\dot{q}| < \varepsilon_1$), если их начальные значения q_0 и \dot{q}_0 выбраны надлежащим образом ($|q_0| < \eta$, $|\dot{q}_0| < \eta_1$). Поэтому правильную, по крайней мере качественно, картину движения при любом t можно получить, сохраняя в разложениях потенциальной и кинетической энергий лишь члены наинизшего порядка относительно q и \dot{q} . По второму из равенств (32.3) получим

$$\Pi = (1/2)cq^2. \quad (32.5)$$

Подставляя в выражение (32.1) разложение $A(q)$ согласно (32.3), находим

$$T = (1/2)A(0)\dot{q}^2 + (1/2)[A'(0)q + \dots]\dot{q}^2,$$

или в принятом приближении

$$T = (1/2)a\dot{q}^2, \quad (32.6)$$

где по условию положительности кинетической энергии всегда будет

$$A(0) = a > 0. \quad (32.7)$$

Имея выражения (32.5) и (32.6) для потенциальной и кинетической энергий, составим уравнения движения системы в форме Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q};$$

в нашем случае

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a \dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a \ddot{q}, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -cq$$

и уравнение движения будет

$$a \ddot{q} + cq = 0. \quad (32.8)$$

Сравнивая его с уравнением прямолинейных свободных колебаний точки под действием упругой восстанавливающей силы

$$m \ddot{x} + cx = 0,$$

видим, что коэффициент a при обобщенном ускорении \ddot{q} играет ту же роль, что и масса m точки, т. е. характеризует инерционность системы, а коэффициент c аналогичен коэффициенту упругости. В связи с этим величины a и c в уравнении (32.8) принято именовать соответственно *инерционным* и *квазиупругим* коэффициентами.

Введя обозначение

$$c/a = k^2, \quad (32.9)$$

получим

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. \quad (32.10)$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид (§ 95)

$$q = A \sin(kt + \alpha), \quad (32.11)$$

где амплитуда A и начальная фаза α определяются по начальным условиям. Пусть $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$ при $t = 0$; тогда

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{k^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{kq_0}{\dot{q}_0}. \quad (32.12)$$

Из формул (32.5), (32.6) и (32.12) видно, что амплитуда колебаний A пропорциональна корню квадратному из полной энергии $E = T + \Pi$ системы.

Движение представляет гармоническое колебание частотой k и периодом τ

$$\tau = 2\pi/k = 2\pi \sqrt{a/c}. \quad (32.13)$$

Это — *свободные* или *собственные колебания* системы.

Частота (и период) свободных колебаний системы не зависит ни от начальных условий движения (изохронность малых колебаний), ни от природы обобщенной координаты; они представляют собой основные константы системы, определяемые структурой выражений кинетической и потенциальной энергий, т. е. инерционными свойствами материальной системы и характером консервативного силового поля, в котором происходит колебательное движение системы.

Качественное изучение общей картины движения системы облегчается введением в рассмотрение так называемой *фазовой плоскости* (q, \dot{q}), в которой строятся кривые — *фазовые траектории*, выражающие графически зависимость между обобщенной координатой q и обобщенной скоростью \dot{q} системы для всего многообразия интегральных кривых.

Так, в только что рассмотренном случае свободных колебаний системы вокруг положения ее устойчивого равновесия фазовые траектории можно получить путем исключения времени t из уравнений

$$q = A \sin(kt + \alpha), \quad \dot{q} = kA \cos(kt + \alpha),$$

что приведет к семейству кривых

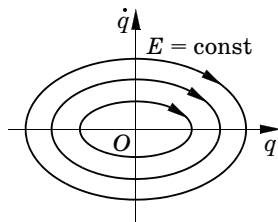
$$\frac{q^2}{A^2} + \frac{\dot{q}^2}{k^2 A^2} = 1. \quad (32.14)$$

К тому же результату, очевидно, придем, написав уравнение семейства уровней полной механической энергии E системы

$$E = T + \Pi = \frac{1}{2} (a\dot{q}^2 + cq^2) = \text{const.}$$

В рассматриваемом случае консервативной системы фазовые траектории, естественно, совпадают с кривыми уровней энергии.

Фазовые траектории (рис. 418) образуют семейство подобных между собой эллипсов, отличающихся друг от друга только масштабом, зависящим, согласно (32.12), от начальных условий движений или, точнее, от полной энергии системы. Для всех эллипсов отношение длин полуосей одно и то же — оно равно частоте k собственных колебаний системы. Здесь начало координат — это устойчивое положение равновесия типа *центр*. Покою системы в положении ее устойчивого равновесия соответствует начало координат фазовой плоскости ($q = 0, \dot{q} = 0$). При уменьшении полной энергии, а это для данной системы, согласно (32.12), может иметь место только при уменьшении начальных значений q_0 и \dot{q}_0 , фазовые траектории стягиваются к началу координат (положение равновесия), которое в этом случае называется *центром*.



Центр

Рис. 418

Каждому движению системы при заданных начальных условиях соответствует движение изображающей точки в фазовой плоскости по фазовой траектории — эллипсу — в указанном на рис. 418 направлении.

Если, как в нашем случае, по оси абсцисс отложена обобщенная координата, а по оси ординат — обобщенная скорость, то в верхней полуплоскости ($\dot{q} > 0$) координата q возрастает и изображающая точка движется слева направо. В нижней полуплоскости ($\dot{q} < 0$) движение изображающей точки происходит справа налево.

Вид семейства фазовых траекторий будет совершенно иным, если равновесие системы *неустойчиво*. Рассмотрим общий интеграл уравнения (32.8) при условии $c < 0$, соответствующем неустойчивости равновесия системы в положении $q = 0$. Введя в этом случае обозначение

$$-c/a = \kappa^2,$$

перепишем уравнение (32.8) в виде

$$\ddot{q} - \kappa^2 q = 0. \quad (32.15)$$

Общий интеграл этого уравнения выражается через показательные или гиперболические функции:

$$q = \frac{1}{2} \left(q_0 + \frac{\dot{q}_0}{\kappa} \right) e^{\kappa t} + \frac{1}{2} \left(q_0 - \frac{\dot{q}_0}{\kappa} \right) e^{-\kappa t} = q_0 \operatorname{ch} \kappa t + \frac{\dot{q}_0}{\kappa} \operatorname{sh} \kappa t, \quad (32.16)$$

а обобщенная скорость будет равна

$$\dot{q} = \frac{\kappa}{2} \left(q_0 + \frac{\dot{q}_0}{\kappa} \right) e^{\kappa t} - \frac{\kappa}{2} \left(q_0 - \frac{\dot{q}_0}{\kappa} \right) e^{-\kappa t} = \kappa q_0 \operatorname{sh} \kappa t + \dot{q}_0 \operatorname{ch} \kappa t. \quad (32.17)$$

Как видно из равенств (32.16) и (32.17), в отличие от движения системы вблизи положения устойчивого равновесия, обобщенная координата q и обобщенная скорость \dot{q} с ростом времени t могут принимать сколь угодно большие значения, а тогда становится несправедливым отбрасывание членов высших степеней в разложениях кинетической и потенциальной энергий и приведение уравнения движения к виду (32.15). Ввиду этого оговоримся, что для этого случая ($c < 0$) все последующее рассуждение относится к достаточно малым q и \dot{q} , т. е. имеется лишь *локальное* значение для области, близкой к положению неустойчивого равновесия системы.

Исключая из уравнений (32.16) и (32.17) время t или непосредственно применяя закон сохранения энергии, находим уравнение семейства фазовых траекторий

$$\kappa^2 q^2 - \dot{q}^2 = \kappa^2 q_0^2 - \dot{q}_0^2, \quad (32.18)$$

которое и в этом случае будет совпадать с уравнением семейства уровней полной механической энергии.

Если начальные значения обобщенных координаты и скорости (q_0, \dot{q}_0) удовлетворяют условию

$$\kappa^2 q_0^2 - \dot{q}_0^2 \neq 0,$$

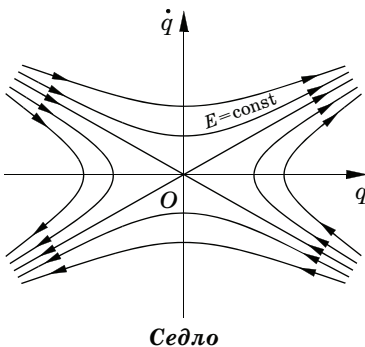


Рис. 419

то уравнение (32.18) при заданном κ , зависящем только от свойств системы и интенсивности силового поля, представляет семейство подобных *гипербол* (рис. 419), отличающихся друг от друга масштабом $\sqrt{|\kappa^2 q_0^2 - \dot{q}_0^2|}$. Все гиперболы имеют одни и те же асимптоты, уравнения которых

$$\begin{aligned} \kappa q + \dot{q} &= 0, \\ \kappa q - \dot{q} &= 0. \end{aligned} \quad (32.19)$$

Здесь начало координат — это неустойчивое положение равновесия типа *седло*.

Если начальные значения q_0 и \dot{q}_0 связаны равенством

$$\kappa^2 q_0^2 - \dot{q}_0^2 = 0, \tag{32.20}$$

т. е. изображающая точка на фазовой диаграмме расположится на одной из асимптот, то последующему движению системы будет сопоставляться движение изображающей точки по соответствующей асимптоте. Заметим, что в последнем случае время, потребное для того, чтобы система, будучи выведена из положения равновесия ($q = 0$), вновь возвратилась в него, будет бесконечно велико, каковы бы ни были начальные q_0 и \dot{q}_0 , связанные равенством (32.20). Действительно, выбирая для определенности $q_0 > 0$, $\dot{q}_0 < 0$ и полагая $\dot{q}_0 = -\kappa q_0$, будем иметь по первому из уравнений (32.19)

$$dt = -\frac{1}{\kappa} \frac{dq}{q}, \tag{32.21}$$

откуда

$$t = -\frac{1}{\kappa} \int_{q_0}^q \frac{dq}{q} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{q_0}{q}; \tag{32.22}$$

следовательно, при $q \rightarrow 0$ время $t \rightarrow \infty$.

Начало координат O , соответствующее покою системы в точке неустойчивого равновесия, представляет собой *седлообразную точку*, или *седло*.

Рассмотрим несколько примеров собственных колебаний систем с одной степенью свободы вокруг положения устойчивого равновесия.

Пример 151. Бифилярный подвес. Две нити AM и A_1M_1 (рис. 420) одинаковой длины l закреплены в неподвижных точках A и A_1 , расположенных на горизонтальной оси Ox , причем $AA_1 = 2a$. Нижние концы нитей прикреплены, как указано на рисунке, к подвесу MM_1 , на котором лежит тело S с массой m и моментом инерции J относительно вертикальной оси Oz . Поворотом вокруг этой оси система выводится из по-

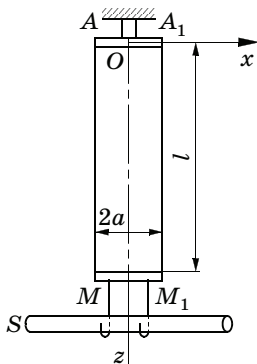


Рис. 420

ложения равновесия. Определить период собственных колебаний тела S , пренебрегая массами нитей и подвеса.

Обратимся к схематическому рис. 421. При отклонении из положения равновесия стержень MM_1 , поворачиваясь вокруг вертикальной оси Oz , приподнимается и остается параллельным горизонтальной плоскости Oxy . За обобщенную координату примем угол поворота стержня φ . По теореме Кёнига (§ 125) имеем

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_C^2,$$

где J — момент инерции тела S относительно оси Oz , v_C — скорость его центра тяжести, совпадающая со скоростью точки C стержня.

Так как центр тяжести C движется по оси Oz , то $v_C = \dot{z}_C$. Заметив, что $z_C = OC' = PM' = l \cos \alpha$, выразим угол α через обобщенную координату φ . Из $\triangle AOP$ имеем

$$AP = l \sin \alpha = 2 \cdot OA \cdot \sin(\varphi/2) = 2a \sin(\varphi/2)$$

и, следовательно,

$$z_C = l \cos \alpha = l \sqrt{1 - 4 \frac{a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

$$v_C^2 = \dot{z}_C^2 = \frac{a^4 \sin^2 \varphi}{l^2 - 4a^2 \sin^2(\varphi/2)} \dot{\varphi}^2,$$

откуда

$$T = \frac{1}{2} \left(J + m \frac{a^4 \sin^2 \varphi}{l^2 - 4a^2 \sin^2(\varphi/2)} \right) \dot{\varphi}^2.$$

Для потенциальной энергии имеем выражение

$$\begin{aligned} \Pi &= mg \cdot CC' = mg(l - l \cos \alpha) = \\ &= mgl \left(1 - \sqrt{1 - 4 \frac{a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right). \end{aligned}$$

Это выражение надо разложить в ряд. Ограничившись второй степенью малой величины φ , получим

$$\Pi = \frac{mga^2}{2l} \varphi^2, \quad c = \Pi''(0) = \frac{mga^2}{l}.$$

Согласно приведенному выше выражению кинетической энергии и по (32.1)

$$A(\varphi) = J + m \frac{a^4 \sin^2 \varphi}{l^2 - 4a^2 \sin^2(\varphi/2)}, \quad A(0) = J.$$

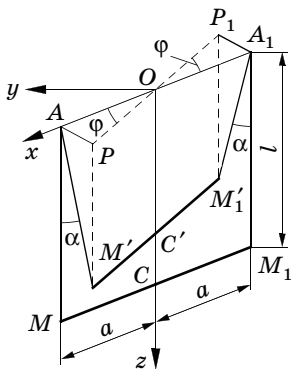


Рис. 421

По (32.13) находим период малых колебаний

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{Jl}{mga^2}} = 2\pi \frac{\rho}{a} \sqrt{\frac{l}{g}},$$

где $\rho = \sqrt{J/m}$ — радиус инерции тела S относительно оси Oz . Существенным преимуществом бифилярного подвеса по сравнению с обычным маятником является почти полная независимость периода колебаний от величины первоначального отклонения даже в случае сравнительно больших отклонений. При надлежащем выборе параметров l/a и ρ/l и при $\varphi \leq 60^\circ$ можно добиться того, чтобы период колебаний бифиляра отличался от значения $2\pi (\rho/a) \sqrt{l/g}$ не более чем на 0,2%; для обычного физического маятника при таких углах отклонения изменение периода достигает 6,8%.

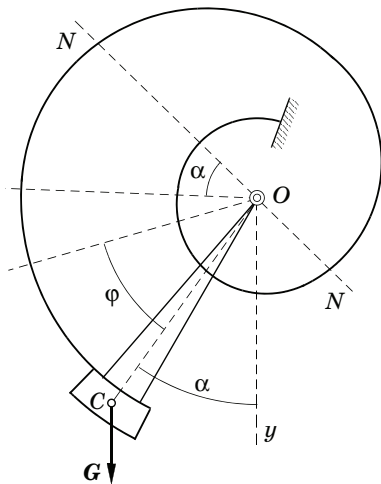


Рис. 422

Пример 152. На рис. 422 показана схема *вибрографа*, служащего для записи колебаний фундаментов, частей машин и пр. Маятник OC удерживается в положении равновесия под углом α к вертикали с помощью спиральной пружины. Заданы: жесткость пружины c , момент инерции J маятника относительно оси вращения O , его вес G и расстояние $OC = s$ от центра тяжести C до оси вращения O . Найти частоту свободных колебаний маятника, пренебрегая массой пружины. Прямая NN' , перпендикулярная OC , параллельна направлению измеряемых колебаний.

Потенциальная энергия системы при отклонении маятника на угол φ от положения равновесия складывается из потенциальной энергии силы тяжести:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= Gs [\cos \alpha - \cos (\varphi + \alpha)] = Gs [(1 - \cos \varphi) \cos \alpha + \sin \alpha \sin \varphi] \approx \\ &\approx Gs ((\varphi^2 \cos \alpha)/2 + \varphi \sin \alpha) \end{aligned}$$

и потенциальной энергии деформации пружины Π_2 . Для вычисления Π_2 обозначим через α_0 угол, на который надо закрутить пружину из ее натурального состояния, чтобы нижний конец ее оказался на вертикали Oy ; при этом к пружине придется приложить момент $c\alpha_0$; если же маятник отклонен от вертикали на угол $\alpha + \varphi$, то момент реакции пружины будет $-c(\alpha_0 - \alpha - \varphi)$; отсюда следует, что

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} c(\alpha_0 - \alpha - \varphi)^2 = \frac{1}{2} c(\alpha_0 - \alpha)^2 - c(\alpha_0 - \alpha) \varphi + \frac{1}{2} c\varphi^2.$$

Первое (постоянное) слагаемое можно отбросить; получим

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = Gs\left(\frac{1}{2}\varphi^2 \cos \alpha + \varphi \sin \alpha\right) - c(\alpha_0 - \alpha)\varphi + \frac{1}{2}c\varphi^2.$$

Но из условия равновесия следует, что $Gs \sin \alpha = c(\alpha_0 - \alpha)$, поэтому слагаемые, содержащие первую степень φ , взаимно уничтожаются. Получаем

$$\Pi = (Gs \cos \alpha + c)\varphi^2/2.$$

Далее имеем $T = J\dot{\varphi}^2/2$, и уравнение движения будет

$$J\ddot{\varphi} + (Gs \cos \alpha + c)\varphi = 0.$$

Отсюда найдем частоту свободных колебаний вибрографа

$$k = \sqrt{\frac{Gs \cos \alpha + c}{J}}.$$

При измерении горизонтальных колебаний точки подвеса O маятник в положении равновесия вертикален ($\alpha = 0$) и

$$k = \sqrt{\frac{Gs + c}{J}}.$$

Для измерения вертикальных колебаний маятник устанавливается горизонтально, т. е. $\alpha = \pi/2$ и

$$k = \sqrt{c/J}.$$

Пример 153. Схема *вертикального сейсмографа* представлена на рис. 423. Рамка OAB , на которой закреплена тяжелая отливка M , может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O , и удерживается в положении равновесия, в котором стержень OA горизонтален, пружиной DB ; один конец пружины закреплен в неподвижной точке D , другой — присоединен к рамке в некоторой точке B . Пренебрегая массой пружины и считая, что центр тяжести рамки и груза M находится в точке C , $OC = l$, найти частоту свободных колебаний прибора.

Направим неподвижную ось Ox' горизонтально вдоль стержня OA , а неподвижную ось Oy' , перпендикулярную оси Ox' , вертикально вниз; введем также подвижную систему осей координат Oxy , связанных с рамкой; в положении равновесия оси обеих систем совпадают. Пусть a и b — координаты точки крепления B пружины в системе Oxy (очевидно, что в положении равновесия также и $x'_B = a$, $y'_B = b$). Координаты точки D в системе $Ox'y'$ будут $x'_D = a$, $y'_D = -L_{ст} + b$ (рис. 423), где $L_{ст}$ — длина пружины в положении равновесия. За обобщенную координату примем угол θ поворота рамки вокруг оси O .

Выразим координаты (x', y') любой точки колеблющегося тела через координаты (x, y) в подвижной системе:

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta, \quad y' = x \sin \theta + y \cos \theta.$$

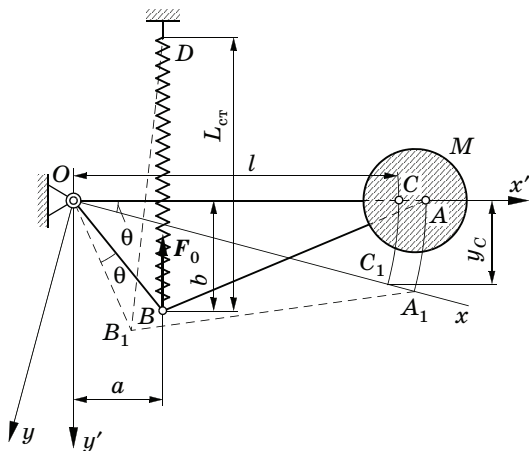


Рис. 423

В частности, для точки B_1 имеем

$$x'_{B_1} = a \cos \theta - b \sin \theta, \quad y'_{B_1} = a \sin \theta + b \cos \theta.$$

Теперь не составит труда найти выражение для длины пружины в отклоненном положении системы:

$$\begin{aligned} L = DB_1 &= \sqrt{(x'_{B_1} - x'_D)^2 - (y'_{B_1} - y'_D)^2} = \\ &= \sqrt{[a(\cos \theta - 1) - b \sin \theta]^2 + [a \sin \theta + b(\cos \theta - 1) + L_{ст}]^2} = \\ &= \sqrt{L_{ст}^2 + 2L_{ст} [a \sin \theta - b(1 - \cos \theta)] + 2(a^2 + b^2)(1 - \cos \theta)}. \end{aligned}$$

Вспомним выражение потенциальной энергии Π_1 растянутой пружины:

$$\Pi_1 = \frac{c}{2} (L - L_0)^2 = \frac{c}{2} [(L - L_{ст}) + (L_{ст} - L_0)]^2,$$

где L_0 — длина пружины в ненапряженном состоянии, c — ее жесткость. В положении равновесия момент начального напряжения F_0 пружины уравнивается моментом силы тяжести относительно оси вращения

$$F_0 a = Gl,$$

где G — сила тяжести, а l — расстояние от центра тяжести системы до оси вращения. Замечая еще, что $F_0 = c(L_{ст} - L_0)$, получаем

$$\Pi_1 = \frac{c}{2} (L - L_{ст})^2 + \frac{Gl}{a} (L - L_{ст}) + \frac{c}{2} (L_{ст} - L_0)^2,$$

причем последний член как величину постоянную можно отбросить. Так как требуется знать выражение потенциальной энергии с точностью

до величин порядка θ^2 , то с этой степенью точности нужно определить $L - L_{\text{ст}}$. Имеем, разлагая в ряд

$$L \approx L_{\text{ст}} \left(1 + 2 \frac{a}{L_{\text{ст}}} \theta + \frac{a^2 + b^2 - bL_{\text{ст}}}{2L_{\text{ст}}^2} \theta^2 \right)^{1/2} \approx \\ \approx L_{\text{ст}} \left(1 + \frac{a}{L_{\text{ст}}} \theta + \frac{a^2 + b^2 - bL_{\text{ст}}}{2L_{\text{ст}}^2} \theta^2 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{L_{\text{ст}}^2} \theta^2 \right),$$

$$L - L_{\text{ст}} \approx a \theta - \frac{b(L_{\text{ст}} - b)}{2L_{\text{ст}}} \theta^2, \quad (L - L_{\text{ст}})^2 = a^2 \theta^2 + \dots$$

Подстановка дает

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \left[ca^2 \theta^2 + 2Gl\theta - \frac{Glb}{aL_{\text{ст}}} (L_{\text{ст}} - b) \theta^2 \right].$$

Потенциальная энергия силы тяжести равна

$$\Pi_2 = -Gy'_C = -Gl \sin \theta \approx -Gl\theta.$$

Складывая Π_1 и Π_2 , находим полную потенциальную энергию

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[ca^2 - \frac{Glb}{aL_{\text{ст}}} (L_{\text{ст}} - b) \right] \theta^2 = \frac{1}{2} \left[ca^2 - F_0 b \left(1 - \frac{b}{L_{\text{ст}}} \right) \right] \theta^2.$$

Положение равновесия будет устойчивым, если

$$\Pi''(0) = ca^2 - F_0 b \left(1 - \frac{b}{L_{\text{ст}}} \right) > 0.$$

В дальнейшем предполагаем, что это неравенство соблюдается. Через J обозначим момент инерции колеблющегося тела относительно оси O . Кинетическая энергия его будет

$$T = J \dot{\theta}^2 / 2.$$

Частоту собственных колебаний найдем по формуле

$$k = \sqrt{\frac{ca^2 - F_0 b (1 - b/L_{\text{ст}})}{J}}.$$

При $b = 0$

$$k = \sqrt{ca^2/J}$$

и соответствующий период колебаний уменьшается. Приборы, предназначенные для записи колебательного движения, должны иметь достаточно малую частоту собственных колебаний (§ 96, конец примера 88 — с. 88); поэтому становится понятным, почему крепление пружины произведено не непосредственно к стержню, а отнесено вниз, в точку B . Наибольший эффект при заданном F_0 в смысле увеличения периода

колебаний достигается при $b = L_{\text{ст}}/2$, т. е. в положении равновесия середина пружины должна находиться на высоте оси вращения. В этом случае период свободных колебаний будет

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{ca^2 - F_0 b/2}}$$

Пример 154. Металлический стержень (рис. 424), оканчивающийся двумя остриями A и B , входящими в неподвижные гнезда, при помощи рамы RR соединен с тяжелой массой M (маятник *горизонтального сейсмографа*). Ось вращения прибора составляет угол i с вертикалью. Если отвести массу из ее положения равновесия, соответствующего наиболее низкому положению центра тяжести C , и в дальнейшем предоставить ее самой себе, то она начнет совершать колебания в плоскости \mathcal{P} , перпендикулярной оси вращения AB и образующей угол i с горизонтальной плоскостью. Определить период этих колебаний.

Опустим из центра тяжести C массы M перпендикуляр на ось вращения; основание этого перпендикуляра (точку O) примем за начало координат. Вертикальную плоскость, проходящую через ось вращения Oz_0 , примем за неподвижную плоскость $y'z'$. В положении равновесия в этой же плоскости располагаются оси Oy_0 и Oz_0 подвижной системы, связанной с массой M . Ось Ox' неподвижной системы проведем перпендикулярно плоскости $y'z'$; при равновесии подвижная ось Ox_0 , очевидно, совпадает с Ox' . При отклонении от положения равновесия оси x_0, y_0 , повернувшись вокруг оси Oz_0 , займут положение x, y . Угол поворота вокруг оси Oz_0 обозначим через φ и примем его за обобщенную координату. Взаимное расположение осей указано на рис. 425. Через J обозначим момент инерции системы относительно оси Oz_0 ; кинетическая энергия системы будет

$$T = J\dot{\varphi}^2/2.$$

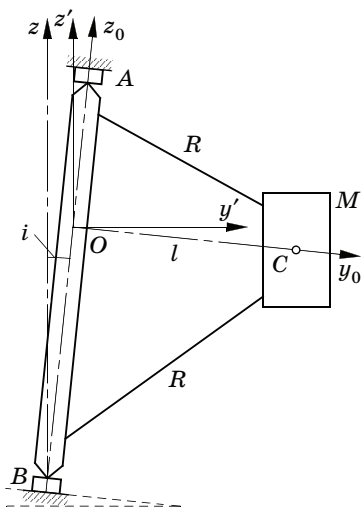


Рис. 424

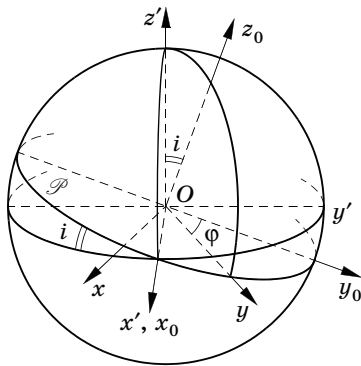


Рис. 425

Несколько сложнее составляется выражение для потенциальной энергии П силы тяжести. Имеем

$$\Pi = Mg(z'_C - z'_{C_0}),$$

где z'_C и z'_{C_0} — координаты центра тяжести C колеблющейся массы в отклоненном положении и положении равновесия. Обозначая CO через l , имеем

$$z'_{C_0} = l \cos(\widehat{z', y_0}) = l \cos(\pi/2 + i) = -l \sin i, \quad z'_C = l \cos(\widehat{z', y}).$$

Для определения этого косинуса воспользуемся основной формулой сферической тригонометрии (§ 59). Применяя эту формулу к сферическому треугольнику $(x'y'z')$, находим

$$\cos(z', y) = \cos(\widehat{z', x'}) \cos(\widehat{x', y}) + \sin(\widehat{z', x'}) \sin(\widehat{x', y}) \cos \alpha,$$

где α — угол между плоскостями $z'x'$ и x_0y_0 . Имеем

$$(\widehat{z', x'}) = \pi/2, \quad (\widehat{x', y}) = \pi/2 - \varphi, \quad \alpha = \pi/2 + i,$$

и предыдущая формула дает

$$\cos(\widehat{z', y}) = \sin(\pi/2 - \varphi) \cos(\pi/2 + i) = -\cos \varphi \sin i, \quad z'_C = -l \sin i \cos \varphi,$$

следовательно,

$$\Pi = Mgl \sin i (1 - \cos \varphi) = Mgl \sin i \left[1 - \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \dots \right) \right] \approx \frac{1}{2} Mgl \varphi^2 \sin i.$$

Период свободных колебаний будет

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mgl \sin i}}.$$

При $i = \pi/2$ получим формулу периода колебаний физического маятника; при $i = 0$ равновесие безразличное и будет иметь место при любых значениях φ .

Ввиду наличия в знаменателе множителя $\sin i$ период колебания при малых углах i становится большим. Введем обозначение

$$\frac{J}{Ml} = \frac{\rho^2}{l} = L,$$

где ρ — радиус инерции массы относительно оси вращения, L — приведенная длина соответствующего физического маятника (§ 117). Пусть $L = 1$ м; найдем, при каком угле i период колебания сейсмографа равняется 10 с. Имеем

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{g \sin i}},$$

откуда

$$\sin i = 4\pi^2 L / (gT^2) \approx 0,04, \quad i \approx 2^\circ 15'.$$

Простой физический маятник при том же периоде должен иметь приведенную длину

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2} \approx 25 \text{ м.}$$

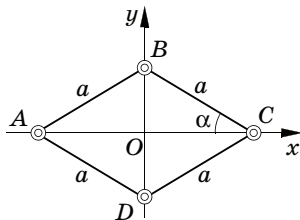


Рис. 426

Пример 155. Ромб, образованный четырьмя шарнирно соединенными однородными стержнями длиной a и массой m , лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Противоположные вершины ромба соединены упругими нитями, длины которых в нерастянутом состоянии таковы, что острый угол ромба равен $2\alpha_0$. Определить движение ромба после того, как одна из нитей слегка натягивается и затем отпускается; площади сечений и модули нормальной упругости обеих нитей одинаковы и соответственно равны F и E .

Пусть $ABCD$ (рис. 426) представляет собой текущее положение ромба, α — угол, образованный стороной BC с осью Ox . По теореме Кёнига (§ 125) кинетическая энергия каждого из стержней будет

$$\frac{1}{2} m \frac{a^2 \dot{\alpha}^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{ma^2}{12} \dot{\alpha}^2,$$

так как скорость центра тяжести каждого стержня равна $(a/2)\dot{\alpha}$. Отсюда следует, что полная кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{2}{3} ma^2 \dot{\alpha}.$$

Коэффициент жесткости c с каждой из нитей найдем как отношение произведения EF к нерастянутой их длине; будем иметь

✓ для нити AC $c_1 = \frac{EF}{2a \cos \alpha_0};$

✓ для нити BD $c_2 = \frac{EF}{2a \sin \alpha_0}.$

Потенциальную энергию упругих нитей найдем, согласно § 129, как полупроизведение коэффициента жесткости на квадрат деформации; получим

$$\Pi = \begin{cases} \frac{1}{2} c_1 \cdot 4a^2 (\cos \alpha - \cos \alpha_0)^2, & \text{если натянута нить } AC \quad (\alpha < \alpha_0), \\ \frac{1}{2} c_2 \cdot 4a^2 (\sin \alpha - \sin \alpha_0)^2, & \text{если натянута нить } BD \quad (\alpha > \alpha_0). \end{cases}$$

По условию малости отклонений стержней от положения ромба, при котором нити не растянуты, обозначив

$$\alpha_0 - \alpha = \varphi,$$

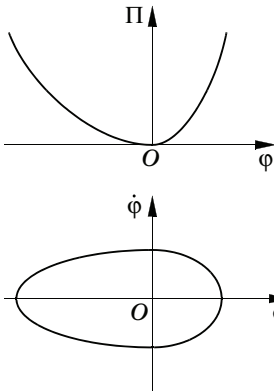


Рис. 427

имеем следующие приближенные формулы:

$$\cos \alpha - \cos \alpha_0 \approx \varphi \sin \alpha_0,$$

$$\sin \alpha - \sin \alpha_0 \approx -\varphi \cos \alpha_0.$$

Это приводит к приближенному выражению потенциальной энергии

$$\Pi = \begin{cases} \frac{aEF \sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0} \varphi^2 & \text{при } \varphi > 0, \\ \frac{aEF \cos^2 \alpha_0}{\sin \alpha_0} \varphi^2 & \text{при } \varphi < 0, \end{cases}$$

показывающему, что движение будет представлять собой малые колебания вокруг положения устойчивого равновесия, соответствующего значению $\varphi = 0$, т. е. $\alpha = \alpha_0$. Особенностью настоящего примера служит то, что потенциальная энергия задается отличающимися друг от друга функциями при положительных и отрицательных значениях угла φ . На рис. 427 построен график функции $\Pi(\varphi)$, составленный из двух парабол с различными параметрами. Соответственно этому и фазовые траектории будут состоять из двух полуэллипсов с различными отношениями полуосей. Частоты колебаний будут согласно (32.13) определяться формулами

$$k_1 = \sqrt{\frac{3BF \sin^2 \alpha_0}{2ma \cos \alpha_0}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{3EF \cos^2 \alpha_0}{2ma \sin \alpha_0}},$$

если натянуты нити AC и BD соответственно. Следовательно, по (32.14), и отношения полуосей будут различны. Общий вид фазовых траекторий показан на том же рис. 427.

§ 177. Движение математического маятника

Постановка задачи, вывод уравнения движения и рассмотрение случая малых колебаний математического маятника были даны уже ранее в § 112. В § 117 было доказано, что вопрос о движении физического маятника сводится к задаче о математическом маятнике эквивалентной длины.

Сохранив обозначения § 112, составим выражение полной механической энергии маятника:

$$E = \frac{1}{2} \frac{G}{g} l^2 \dot{\varphi}^2 + Gl(1 - \cos \varphi). \quad (32.23)$$

Обозначив через φ_0 и $\dot{\varphi}_0$ начальные значения угла отклонения маятника и угловой скорости, из закона сохранения полной механической энергии получим

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 + \frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) = \dot{\varphi}_0^2 + \frac{4g}{l} \left(\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right). \quad (32.24)$$

К этому соотношению можно было бы прийти также, интегрируя уравнение движения маятника

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi. \quad (32.25)$$

При обозначении

$$\lambda = \frac{l}{4g} \dot{\varphi}_0^2 + \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \quad (32.26)$$

основное соотношение (32.24) принимает вид

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{4g}{l} \left(\lambda - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right). \quad (32.27)$$

Обратимся к построению траекторий на фазовой плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$; величина λ , постоянная для данной фазовой траектории, является в этом случае параметром, определяющим семейство траекторий. Надо различать два случая:

$$0 < \lambda < 1, \quad (\mu)$$

$$\lambda > 1. \quad (\nu)$$

В случае (μ) можно определить такое вещественное значение α , что

$$\lambda = \sin^2 (\alpha/2), \quad 0 < \alpha < \pi/2, \quad (32.28)$$

и соотношение (32.27) приведет к виду

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{4g}{l} \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right), \quad (32.29)$$

откуда следует, что $|\varphi| \leq \alpha$ и что $\dot{\varphi}$ обращается в нуль каждый раз, когда φ достигает значений $\pm\alpha$. Движение будет иметь *колебательный* характер.

В случае (ν) $\dot{\varphi}$ не обращается в нуль, φ изменяется монотонно, т. е. маятник совершает *круговращение*.

Предельным (лимитационным) является случай $\lambda = 1$, т. е.

$$\dot{\phi}_0 = \pm 2 \sqrt{g/l} \cos(\phi_0/2), \quad (32.30)$$

отделяющий друг от друга два качественно различных рода движений. Соответствующая этому случаю фазовая траектория носит наименование *сепаратрисы*. Начнем с построения сепаратрисы (на рис. 428 она показана жирной линией). По (32.27) при $\lambda = 1$ уравнение сепаратрисы будет

$$\dot{\phi} = \pm 2 \sqrt{g/l} \cos(\phi/2). \quad (32.31)$$

Это — две косинусоиды, пересекающиеся друг с другом на оси ϕ в особых точках типа седлообразных точек, имеющих абсциссы

$$\phi = \pm\pi, \quad \pm 3\pi, \quad \pm 5\pi, \dots$$

Им соответствуют неустойчивые состояния равновесия, когда масса маятника расположена на вертикали над осью вращения и потенциальная энергия достигает максимума.

В областях I_0 , I_1 , I_{-1} и т. д. между волнами косинусоид сепаратрисы расположены замкнутые фазовые траектории, соответствующие периодическим колебательным движениям. Эти траектории, определяемые уравнением (32.29), пересекают ось ϕ в точках с абсциссами

$$\phi = \pm\alpha, \quad \pm(2\pi \pm \alpha), \dots$$

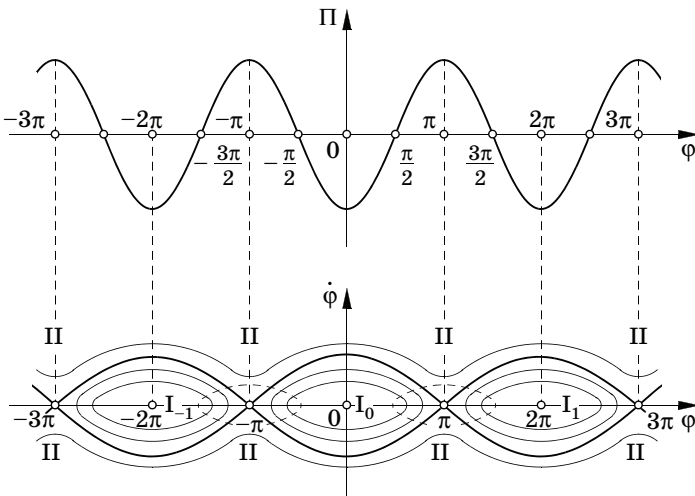


Рис. 428

и имеют в точках

$$\varphi = 0, \quad \pm 2\pi, \dots$$

максимумы и минимумы, равные $\pm 2\sqrt{g/l} \sin(\alpha/2)$.

При весьма малых α , заменяя в (32.29) синусы углами, получим в области I_0 семейство фазовых траекторий — эллипсов

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{(\sqrt{g/l}\alpha)^2} + \frac{\varphi^2}{\alpha^2} = 1,$$

соответствующие малым колебаниям маятника. Такие же эллипсы получим в остальных областях I_{-1} , I_1 и т. д.

Замкнутые фазовые траектории окружают особые точки фазовой плоскости типа *центра*

$$\varphi = 0, \quad \pm 2\pi, \dots,$$

расположенные на оси абсцисс. Эти точки соответствуют положению устойчивого равновесия маятника, в котором потенциальная энергия имеет минимум.

Область фазовой плоскости Π , расположенная выше и ниже сепаратрисы, соответствует круговращению маятника. Фазовые траектории в ней определяются уравнением (32.27) при $\lambda > 1$. Максимумы $|\dot{\varphi}|$, равные $2\sqrt{(g/l)/\lambda}$, расположены над *центрами*, а минимумы $|\dot{\varphi}| = 2\sqrt{(g/l)/(\lambda - 1)}$ — над *седлообразными* точками. При $\lambda \gg 1$, что, согласно (32.21), будет иметь место при достаточно большой начальной угловой скорости $\dot{\varphi}_0$, отличие максимумов от минимумов будет незначительно; фазовые траектории будут приближаться к прямым линиям, параллельным оси абсцисс, что соответствует равномерному вращению маятника по кругу со столь большой угловой скоростью, что влияние силы тяжести оказывается пренебрежимо малым.

Общая картина расположения фазовых траекторий представлена на рис. 428. На том же рисунке показана кривая переменной части потенциальной энергии $\Pi(\varphi)$. В полном согласии с ранее изложенными соображениями *центрам*, где положение равновесия *устойчиво*, соответствуют *минимумы* потенциальной энергии, *седлообразным* же точкам, где равновесие *неустойчиво*, — *максимумы*.

Натяжение N нити (или усилие в стержне) маятника определяется из уравнения

$$\frac{G}{g} l \dot{\varphi}^2 = -G \cos \varphi + N, \quad (32.32)$$

выражающего то обстоятельство, что сумма проекций сил, действующих на маятник, на главную нормаль траектории равна произведению массы на нормальное ускорение. Заменяв $\dot{\varphi}^2$ его значением по (32.24), найдем

$$N = \frac{G}{g} l \dot{\varphi}_0^2 + G (3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0) = G (4\lambda + 3 \cos \varphi - 2). \quad (32.33)$$

Из (32.32) следует, что N обращается в нуль при

$$\dot{\varphi}^2 = -\frac{g}{l} \cos \varphi. \quad (32.34)$$

При изображении этого соотношения на фазовой плоскости $\varphi, \dot{\varphi}$ получится ряд замкнутых ветвей, образованных кривыми (показанными штриховыми линиями на рис. 428)

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{-\cos \varphi},$$

расположенными над теми отрезками оси абсцисс, где $\cos \varphi < 0$:

$$\dots, -\frac{3\pi}{2} < \varphi < -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}, \dots$$

Для точек, лежащих внутри этих кривых, натяжение $N < 0$, а вне их $N > 0$. Поэтому в случае маятника на нити те фазовые траектории, которые пересекают кривые $N = 0$ и входят внутрь их, фактически не осуществляются: маятник сойдет с окружности в момент, соответствующий пересечению изображающей точкой ветви кривой $N = 0$. Таким образом, осуществляются те колебательные движения маятника на нити, которым соответствуют значения $|\alpha| < \pi/2$, и те круговращения, для которых

$$|\dot{\varphi}_{\min}| = 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\lambda - 1}$$

превосходит максимальную ординату кривой $N = 0$, т. е. для которых

$$2 \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\lambda - 1} > \sqrt{\frac{g}{l}}$$

или

$$\lambda > 5/4.$$

В частности, не осуществляется лимитационное движение $\lambda = 1$. Если начальные условия таковы, что это движение начнется, то

в момент, соответствующий пересечению сепаратрисы (32.31) с кривой (32.34), т. е. при

$$-\frac{g}{l} \cos \varphi = 4 \frac{g}{l} \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

или $\varphi \approx 132^\circ$, нить ослабнет и точка сойдет с окружности. Это же получим при $\lambda = 1$ из равенства (32.33).

Рассмотрим такой пример: маятнику, отклоненному от положения равновесия на угол $\varphi_0 = 75^\circ$, сообщена начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0 = -4$ 1/с; длина нити $l = 1$ м. Определим характер движения маятника. В рассматриваемом случае по (32.26)

$$\lambda = \sin^2 37^\circ 30' + \frac{1 \cdot 16}{4 \cdot 9,81} \approx 0,778 < 1$$

и может иметь место колебательное движение. Но из соотношения (32.28) следует, что $\alpha \approx 124^\circ > 90^\circ$ и должен произойти срыв точки с окружности. Движение изображающей точки происходит по нижней стороне замкнутой фазовой траектории, проходящей через точку $\varphi_0 = 75^\circ$ и $\dot{\varphi}_0 = -4$ 1/с, до пересечения этой кривой с ветвью кривой $N = 0$, расположенной слева от оси φ . Срыв происходит в точке с абсциссой, определяемой из уравнения

$$-\cos \varphi = 4(\lambda - \sin^2 \varphi/2),$$

т. е. $\varphi \approx -112^\circ$.

Вернемся к общему случаю. Период колебаний маятника τ найдем, производя интегрирование по замкнутой фазовой траектории:

$$\tau = \oint \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_1} + \int_{\alpha}^{-\alpha} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_2} = 2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_1} = 4 \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_1},$$

где $\dot{\varphi}_1$ и $\dot{\varphi}_2$ — значения угловой скорости на верхней и соответственно нижней частях фазовой траектории; α определяет максимальное отклонение маятника от положения устойчивого равновесия [амплитуду колебания, задаваемую, согласно (32.28) и (32.26), по начальным данным]. Подставив значение $\dot{\varphi}_1$, получим

$$\tau = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(\varphi/2)}}. \quad (32.35)$$

Для вычисления интеграла вводим новую переменную интегрирования ψ :

$$\sin(\varphi/2) = \sin(\alpha/2) \sin \psi, \quad (32.36)$$

принимающую значения 0 и $\pi/2$, когда φ равно нулю и соответственно α . Тогда

$$d\varphi = \frac{2\sin(\alpha/2) \cos \psi}{\cos(\varphi/2)} d\psi = \frac{2\sin(\alpha/2) \cos \psi}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha/2) \sin^2 \psi}} d\psi.$$

Замечая еще, что

$$\sin(\alpha/2) \cos \psi = \sqrt{\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(\varphi/2)},$$

придем к выражению

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha/2) \sin^2 \psi}} = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right). \quad (32.37)$$

Интеграл

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (32.38)$$

называется *полным эллиптическим интегралом первого рода*, а величина k — его *модулем* ($0 < k < 1$). Численное значение K по заданному модулю находится по таблицам эллиптических интегралов (см. также табл. 8).

Таблица 8

Полный эллиптический интеграл первого рода

α , град	$k = \sin \frac{\alpha}{2}$	$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$	α , град	$k = \sin \frac{\alpha}{2}$	$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$
0	0,0000	1,5708	60	0,5000	1,6258
5	0,0436	1,5715	90	0,7071	1,8541
10	0,0872	1,5738	120	0,8660	2,1565
20	0,1736	1,5828	150	0,9659	2,7681
40	0,3420	1,6200	180	1,0000	∞

Приближенное выражение периода колебаний для сравнительно малых значений амплитуды α получим, разлагая подынтегральное выражение в (32.37) в ряд:

$$\begin{aligned} \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi \right)^{-1/2} &= 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi + \dots = \\ &= 1 + \frac{\alpha^2}{8} \sin^2 \psi + \dots \end{aligned}$$

Ограничившись только выписанными членами, найдем

$$\tau = 2\pi \sqrt{l/g} (1 + \alpha^2/16). \quad (32.39)$$

Пренебрегая слагаемым $\alpha^2/16$ по сравнению с единицей, придем к известной уже формуле периода *малых колебаний*

$$\tau = 2\pi \sqrt{l/g}. \quad (32.40)$$

В этом приближении колебания маятника изохронны, т. е. их период не зависит от амплитуды. В табл. 9 даны значения множителя $1 + \alpha^2/16$. При $\alpha < 20^\circ$ ошибка, которую мы делаем, считая колебания изохронными, не превосходит

$$\frac{1,5828 - 1,5708}{1,5708} \approx 0,8\%.$$

Таблица 9

Приближенные значения поправки к периоду колебаний маятника

α , град	$1 + \frac{\alpha^2}{16}$	α , град	$1 + \frac{\alpha^2}{16}$	α , град	$1 + \frac{\alpha^2}{16}$
5	1,0005	20	1,0076	60	1,0684
10	1,0019	40	1,0304	90	1,1539

На рис. 429 даны графики значений периода τ в зависимости от α , вычисленные по формуле (32.40) (кривая 1), формуле (32.39) (кривая 2) и формуле (32.37) (кривая 3).

Связь между углом и временем представляется интегралом

$$t - t_0 = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_1}, \quad (32.41)$$

где t_0 — момент прохождения маятником среднего положения $\varphi = 0$. В случае колебаний маятника это представление пригодно, пока $\varphi \leq \alpha$.

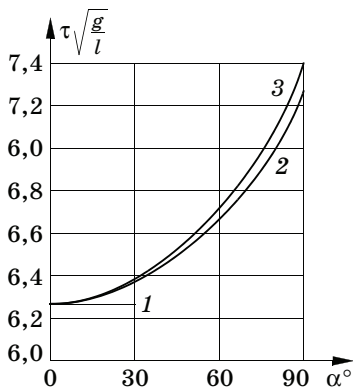


Рис. 429

При переходе изображающей точки на нижнюю часть фазовой траектории φ уменьшается от α до $-\alpha$ и время должно быть выражено формулой

$$t - t_0 = \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_1} + \int_{\alpha}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_2} = \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_1} + \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_1} = 2 \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_1} - \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_1},$$

или

$$t - t_0 = \frac{\tau}{2} - \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_1} = \frac{\tau}{2} + \int_0^{-\varphi} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_1}; \quad (32.42)$$

сравнение с (32.41) показывает, что моменты прохождения положений φ и $-\varphi$ отличаются на полупериод.

На следующем этапе движения угол φ возрастает от значения $-\alpha$; поэтому

$$t - t_0 = \frac{\tau}{2} + \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_1} + \int_{-\alpha}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_1} = \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{4} + \int_{-\alpha}^0 \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_1} + \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_1}.$$

Сделав в первом интеграле замену переменной интегрирования φ на $-\varphi$, получим

$$t - t_0 = \tau + \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_1}. \quad (32.43)$$

Угол φ принимает прежнее значение по истечении периода колебаний. Вообще один и тот же угол φ соответствует значениям t , отличающимся на целое число периодов, а углам φ противоположного знака соответствуют значения t , отличающиеся нечетным числом полупериодов. Время не однозначно выражается через угол, но угол представляет собой однозначную периодическую функцию времени, меняющую свой знак через каждый полупериод. Поэтому представление угла в зависимости от времени проще и нагляднее представления времени в зависимости от угла. Это легко обнаруживается уже в простейшей задаче о малых колебаниях маятника; первое представление дается синусом:

$$\varphi = \alpha \sin \sqrt{g/l} (t - t_0),$$

тогда как для второго требуется ввести в рассмотрение многозначную функцию арксинус:

$$t - t_0 = \sqrt{l/g} \arcsin (\varphi/\alpha).$$

Итак, задача сводится к *обращению* интеграла: нужно выразить его верхний предел φ как функцию от $t - t_0$, т. е. от величины самого интеграла. В случае маятника эта задача решается с помощью эллиптических функций.

Сделаем в (32.41) замену переменных (32.36); тогда получим

$$\frac{g}{l} (t - t_0) = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad k = \sin(\alpha/2). \quad (32.44)$$

Для упрощения записи введем обозначение

$$u = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\Delta(\psi)}, \quad \Delta(\psi) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}. \quad (32.45)$$

Функция u называется *эллиптическим интегралом первого рода*; имеются подробные таблицы Лежандра, дающие значения u при $0 \leq \psi \leq \pi/2$ и $0 \leq k < 1$. При $\psi = \pi/2$ приходим к *полному* эллиптическому интегралу первого рода $K = u(\pi/2)$. Функция $u(\psi)$ непрерывна при всех значениях ψ ; ее производная

$$\frac{du}{d\psi} = \frac{1}{\Delta(\psi)}$$

всегда положительна, вследствие чего u монотонно возрастает. Отсюда следует, что ψ также является однозначной непрерывной функцией от u . Для этой функции, введенной К. Якоби* и названной *амплитудой* от u , принято обозначение

$$\psi = \operatorname{am}(u, k) \quad (32.46)$$

или, короче,

$$\psi = \operatorname{am} u.$$

Очевидно, что

$$\frac{d\psi}{du} = \frac{d \operatorname{am} u}{du} = \Delta(\psi). \quad (32.47)$$

* О К. Якоби (1804—1851) подробнее см. т. I, с. 369.

Основными эллиптическими функциями Якоби являются

$$\sin \psi = \sin (\operatorname{am} u), \quad \cos \psi = \cos (\operatorname{am} u), \quad \Delta(\psi) = \Delta(\operatorname{am} u).$$

Для них приняты следующие обозначения:

$$\sin (\operatorname{am} u) = \operatorname{sn} u, \quad \cos (\operatorname{am} u) = \operatorname{cn} u, \quad \Delta(\operatorname{am} u) = \operatorname{dn} u. \quad (32.48)$$

Эти функции рассматриваются при фиксированном значении модуля k , что в случае необходимости и указывается в обозначении:

$$\operatorname{sn} (u, k), \quad \operatorname{cn} (u, k), \quad \operatorname{dn} (u, k).$$

Функции Якоби по определению удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u &= 1, \\ \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u &= 1. \end{aligned} \quad (32.49)$$

Легко находятся производные функций Якоби:

$$\frac{d \operatorname{sn} u}{du} = \frac{d \sin \psi}{du} = \cos \psi \frac{d\psi}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$$

и т. д. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{sn} u}{du} &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d \operatorname{cn} u}{du} &= -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d \operatorname{dn} u}{du} &= -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u. \end{aligned} \quad (32.50)$$

Таблица 10
Значения эллиптических
функций Якоби для
аргументов, кратных K^*

u	0	K	$2K$	$3K$	$4K$
$\operatorname{sn} u$	0	1	0	-1	0
$\operatorname{cn} u$	1	0	-1	0	1
$\operatorname{dn} u$	1	k'	1	k'	1

* Здесь k' — дополнительный модуль, $k' = \sqrt{1 - k^2}$.

Функции $\operatorname{sn} u$ и $\operatorname{cn} u$ — периодические с периодом $4K$. Это следует из того, что при изменении ψ на 2π аргумент u изменяется на $4K$. При изменении ψ на π этот аргумент изменяется на $2K$, вследствие чего $\operatorname{sn} u$ и $\operatorname{cn} u$ меняют свой знак через полупериод. Функция $\operatorname{dn} u$ имеет период $2K$.

В табл. 10 приведены значения эллиптических функций Якоби для аргументов $0, K, 2K, 3K$ и $4K$.

На рис. 430 построены графики $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ для нескольких значений k^2 . При k^2 , не близких к 1, графики $\operatorname{sn} u$ и $\operatorname{cn} u$ мало отличаются от графиков синуса и косинуса.

Возвращаясь к задаче о колебаниях маятника и сравнивая (32.44) и (32.45), находим

$$\begin{aligned} \psi &= \operatorname{am} \sqrt{g/l} (t - t_0), \\ \sin \psi &= \operatorname{sn} \sqrt{g/l} (t - t_0) \end{aligned}$$

и, следовательно, по (32.36)

$$\begin{aligned} \sin(\varphi/2) &= \sin(\alpha/2) \sin \psi = \\ &= k \operatorname{sn} \sqrt{g/l} (t - t_0), \end{aligned} \tag{32.51}$$

причем модулем эллиптической функции служит величина $k = \sin(\alpha/2)$. По (32.49) получаем далее

$$\begin{aligned} \cos(\varphi/2) &= \\ &= \operatorname{dn} \sqrt{g/l} (t - t_0). \end{aligned} \tag{32.52}$$

Из (32.51) и (32.52) находим также

$$\sin \varphi = 2k \operatorname{sn} \sqrt{g/l} (t - t_0) \operatorname{dn} \sqrt{g/l} (t - t_0). \tag{32.53}$$

По (32.50)—(32.52) получаем выражение угловой скорости вращения маятника

$$\dot{\varphi} = 2k \sqrt{g/l} \operatorname{cn} \sqrt{g/l} (t - t_0). \tag{32.54}$$

В случае круговращения маятника, заменив $\dot{\varphi}_1$ в (32.41) его значением (32.27)

$$\dot{\varphi}_1 = 2 \sqrt{\frac{g\lambda}{l}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

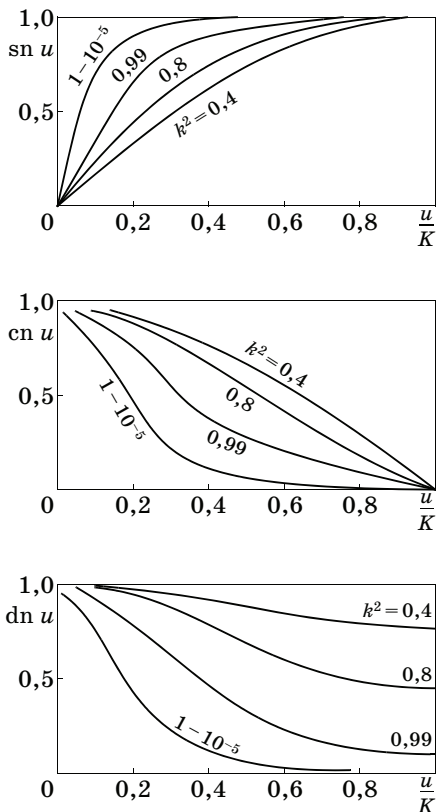


Рис. 430

получим

$$\sqrt{\frac{g\lambda}{l}} (t - t_0) = \int_0^{\varphi} \frac{d(\varphi/2)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 (\varphi/2)}} = \int_0^{\varphi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad (32.55)$$

где $k = 1/\sqrt{\lambda}$,

$$0 < k < 1. \quad (32.56)$$

Примем в выражении (32.26) $\varphi_0 = 0$. Тогда получим

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}_0(t - t_0) = \int_0^{\varphi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad k = \frac{2}{\dot{\varphi}_0} \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (32.57)$$

и, следовательно,

$$(1/2)\varphi = \text{am} [(1/2) \dot{\varphi}_0(t - t_0)]. \quad (32.58)$$

Таким образом, тригонометрические функции половины угла отклонения маятника выражаются эллиптическими функциями sn и cn аргумента $(1/2)\dot{\varphi}_0(t - t_0)$, т. е. угла поворота при постоянной угловой скорости, равной половине угловой скорости, которую имеет маятник при прохождении нижнего положения $\varphi = 0$:

$$\sin (\varphi/2) = \text{sn} [(1/2)\dot{\varphi}_0(t - t_0)], \quad \cos (\varphi/2) = \text{cn} [(1/2) \dot{\varphi}_0(t - t_0)]. \quad (32.59)$$

Из (32.58) и (32.47) получаем выражение угловой скорости маятника

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \text{dn} [(1/2) \dot{\varphi}_0(t - t_0)]. \quad (32.60)$$

Из табл. 10 следует, что $\dot{\varphi}$ колеблется между значениями

$$(\dot{\varphi})_{\max} = \dot{\varphi}_0, \quad (\dot{\varphi})_{\min} = \dot{\varphi}_0 \sqrt{1 - \frac{4g}{l\dot{\varphi}_0^2}}. \quad (32.61)$$

Наконец, период круговращения маятника, соответствующий изменению угла φ на 2π , равен

$$\tau = 4K/\dot{\varphi}_0. \quad (32.62)$$

При малых значениях k , т. е. при

$$\dot{\varphi}_0 \gg 2\sqrt{g/l}, \quad (32.63)$$

приближенно имеем

$$K = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \dots \right) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{g}{l\dot{\varphi}_0^2} + \dots \right),$$

и выражение периода круговращения будет

$$\tau = \frac{2\pi}{\dot{\phi}_0} \left(1 + \frac{g}{l\dot{\phi}_0^2} + \dots \right). \quad (32.64)$$

§ 178. Колебания при нелинейной восстанавливающей силе

Рассмотренный в предыдущем параграфе пример маятника показывает, какие математические трудности возникают при точной постановке задачи о нелинейных колебаниях. Вместе с тем необходимость в решении задач такого рода, выдвинутых вначале астрономией и механикой, а затем главным образом радиотехникой, настолько возросла, что потребовала создания приближенных методов, доступных для практических вычислений.

Изложим один из таких методов, предложенный А. Линдстедтом [37] и теоретически обоснованный А. М. Ляпуновым [19, § 35] в 1892 г.

Ограничимся случаем, когда кинетическая энергия системы точно выражается формулой

$$T = (1/2)a\dot{q}^2,$$

где a — постоянный и, конечно, положительный коэффициент. Потенциальная энергия представляется степенным разложением вида

$$\Pi = (1/2)cq^2 + c_1q^3 + c_2q^4 + \dots,$$

где, что существенно, коэффициент c отличен от нуля; поскольку движение происходит около положения минимума потенциальной энергии, которому на основании теоремы Лагранжа (§ 147) соответствует устойчивое равновесие, нужно считать, что $c > 0$.

Уравнение движения принимает вид

$$a\ddot{q} = -cq - 3c_1q^2 - 4c_2q^3 - \dots,$$

или

$$a\ddot{q} + cq(1 + \gamma_1q + \gamma_2q^2 + \dots) = 0, \quad (32.65)$$

где

$$\gamma_1 = 3\frac{c_1}{c}, \quad \gamma_2 = \frac{4c_2}{c}, \dots \quad (32.66)$$

Выберем начальные условия:

$$q = q_1, \quad \dot{q} = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (32.67)$$

и поставим себе целью представить решение уравнения (32.65) в виде ряда

$$q(t) = q_1 x_1(t) + q_1^2 x_2(t) + \dots, \quad (32.68)$$

расположенного по степеням малого (но конечного) начального отклонения q_1 , принимаемого за параметр; член с q_1 в нулевой степени, естественно, опущен, так как при $q_1 = 0$ и $\dot{q}(0) = 0$ $q(t) \equiv 0$.

В теории дифференциальных уравнений доказывается сходимость рядов, расположенных по степеням параметров, определяемых начальными условиями. Сходимость эта, вообще говоря, не является равномерной относительно независимой переменной (в механике — времени), т. е. радиус сходимости степенного ряда убывает с ростом интервала, в котором рассматривается изменение независимой переменной. Если известно заранее, что искомое решение является периодическим и тем самым интервал изменения независимой переменной фиксируется величиной периода, то, согласно сказанному, всегда может быть указано такое достаточно малое значение параметра, чтобы ряд, представляющий решение, был равномерно сходящимся относительно независимой переменной.

Используя периодичность решения (32.68), будем иметь

$$q(t + \tau) = q_1 x_1(t + \tau) + q_1^2 x_2(t + \tau) + \dots = q(t) = q_1 x_1(t) + q_1^2 x_2(t) + \dots, \quad (32.69)$$

где τ — период колебания. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра q_1 в общих разложениях, можно на первый взгляд сделать заключение о периодичности функций $x_i(t)$. Однако такое приравнение было бы ошибочным, так как в силу нелинейности уравнения (32.65) период T в свою очередь *зависит* от q_1 . Функции $x_i(t)$ на самом деле могут содержать время t множителем вне знака тригонометрических функций, в чем легко убедиться, подставляя разложение (32.68) в уравнение (32.65), приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях q_1 и интегрируя полученные таким образом уравнения. Это приводит к появлению в решении (32.68) выражений — их называют *вековыми членами*, — неограниченно возрастающих со временем. Использование таких разложений для вычисления периодического решения недопустимо. Для избежания вековых членов применим следующий прием.

Произведем преобразование времени t к новой переменной θ и потребуем, чтобы, в отличие от периода τ , новый период τ^* не зависел от параметра q_1 и, в частности, был равен 2π . Положим для этого

$$t = \sqrt{\frac{a}{c(1 + \mu)}} \theta, \quad (32.70)$$

где μ — неопределенная пока функция параметра q_1 , которая должна быть выбрана из условия, чтобы период τ^* равнялся 2π . Тогда, повторяя в новой переменной θ рассуждение, аналогичное ранее приведенному относительно равенства (32.69), убедимся, что в новой переменной θ функции $\xi_i(\theta)$ в разложении

$$q(\theta) = q_1 \xi_1(\theta) + q_1^2 \xi_2(\theta) + \dots \quad (32.71)$$

должны быть периодическими функциями с периодом 2π ; функция $\xi_0(\theta)$ тождественно равна нулю по той же причине, что и $x_0(t)$ в равенстве (32.68).

Для определения функции $\mu(q_1)$ представим ее также в виде разложения по степеням параметра q_1 :

$$\mu(q_1) = \mu_1 q_1 + \mu_2 q_1^2 + \dots, \quad (32.72)$$

где μ_i — неопределенные постоянные, а $\mu_0 = 0$, так как $\mu \rightarrow 0$ при $q_1 \rightarrow 0$, преобразование же (32.70) соответствует переходу от зависящего от q_1 периода τ к периоду $\tau^* = 2\pi$.

Подставим разложения (32.71) и (32.72) в преобразованное к новой переменной θ уравнение (32.65)

$$(1 + \mu) \frac{d^2 q}{d\theta^2} + q = -(\gamma_1 q^2 + \gamma_2 q^3 + \dots) \quad (32.73)$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях q_1 . Получим следующую систему дифференциальных уравнений, в которых штрихами обозначены производные по новой переменной θ :

$$\begin{aligned} \xi_1'' + \xi_1 &= 0, \\ \xi_2'' + \xi_2 &= -\mu_1 \xi_1'' - \gamma_1 \xi_1^2, \\ \xi_3'' + \xi_3 &= -\mu_2 \xi_1'' - \mu_1 \xi_2'' - 2\gamma_1 \xi_1 \xi_2 - \gamma_2 \xi_1^3, \\ \xi_4'' + \xi_4 &= -\mu_3 \xi_1'' - \mu_2 \xi_2'' - \mu_1 \xi_3'' - \gamma_1 \xi_2^2 - 2\gamma_1 \xi_1 \xi_3 - 3\gamma_2 \xi_1^2 \xi_2 - \gamma_3 \xi_1^4. \end{aligned} \quad (32.74)$$

Примем следующие соответствующие (32.67) начальные условия для функций ξ_i :

$$\begin{aligned} \xi_1(0) &= 1, & \xi_2(0) &= 0, & \xi_3(0) &= 0, \dots, \\ \xi_1'(0) &= 0, & \xi_2'(0) &= 0, & \xi_3'(0) &= 0, \dots \end{aligned} \quad (32.75)$$

Из первого уравнения системы (32.74) сразу вытекает

$$\xi_1 = \cos \theta; \quad (32.76)$$

тогда второе уравнение той же системы приведет к виду

$$\xi_2'' + \xi_2 = \mu_1 \cos \theta - \gamma_1 \cos^2 \theta = \mu_1 \cos \theta - \frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_1}{2} \cos 2\theta.$$

Это — уравнение того же типа, что и уравнение вынужденных колебаний, причем наличие в правой части члена $\mu_1 \cos \theta$ с частотой, равной частоте собственных колебаний, приведет, как это было показано в § 96, к появлению в общем решении выражений, содержащих время θ множителем при тригонометрической функции. Как уже ранее было указано, функция $\xi_2(\theta)$ является периодической функцией с периодом 2π ; следовательно, множитель μ_1 должен быть равным нулю. Воспользовавшись этим, проинтегрируем последнее уравнение и получим периодическое выражение для ξ_2 :

$$\xi_2 = -\frac{1}{6} \gamma_1 (3 - 2 \cos \theta - \cos 2\theta). \quad (32.77)$$

Третье уравнение системы (32.74) может быть после простых преобразований представлено в виде

$$\begin{aligned} \xi_3'' + \xi_3 = \\ = -\frac{1}{3} \gamma_1^2 + \left(\mu_2 + \frac{5}{6} \gamma_1^2 - \frac{3}{4} \gamma_2 \right) \cos \theta - \frac{1}{3} \gamma_1^2 \cos 2\theta - \left(\frac{1}{4} \gamma_2 + \frac{1}{6} \gamma_1 \right) \cos 3\theta. \end{aligned}$$

Здесь по условию периодичности функции $\xi_3(\theta)$ следует положить равным нулю выражение в скобках, стоящее в правой части множителем при $\cos \theta$. Отсюда найдем значение неопределенной константы μ_2 :

$$\mu_2 = -\frac{5}{6} \gamma_1^2 + \frac{3}{4} \gamma_2. \quad (32.78)$$

Решение уравнения, определяющего ξ_3 , после этого будет

$$\begin{aligned} \xi_3 = -\frac{1}{3} \gamma_1^2 + \left(\frac{29}{144} \gamma_1^2 - \frac{1}{32} \gamma_2 \right) \cos \theta + \\ + \frac{1}{9} \gamma_1^2 \cos 2\theta + \left(\frac{1}{48} \gamma_1^2 + \frac{1}{32} \gamma_2 \right) \cos 3\theta. \end{aligned} \quad (32.79)$$

Аналогично определяются ξ_4 и следующие функции ξ_i .

Подставив полученные значения $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ в ряд (32.71) и перегруппировав члены, получим решение поставленной задачи в виде тригонометрического разложения

$$\begin{aligned} q = -\frac{1}{2} \gamma_1 q_1^2 - \frac{1}{3} \gamma_1^2 q_1^3 + \dots + [q_1 + \frac{1}{3} \gamma_1 q_1^2 + \left(\frac{29}{144} \gamma_1^2 - \frac{1}{32} \gamma_2 \right) q_1^3 + \dots] \cos \theta + \\ + \left(\frac{1}{6} \gamma_1 q_1^2 + \frac{1}{9} \gamma_1^2 q_1^2 + \dots \right) \cos 2\theta + \left(\frac{1}{48} \gamma_1^2 + \frac{1}{32} \gamma_2 \right) q_1^3 \cos 3\theta + \dots, \end{aligned} \quad (32.80)$$

причем по предыдущему аргумент θ связан с основным аргументом t соотношением

$$\theta = t \sqrt{\frac{c(1+\mu)}{a}} = t \sqrt{\frac{c}{a} \left[1 - \left(\frac{5}{6} \gamma_1^2 - \frac{3}{4} \gamma_2 \right) q_1^2 + \dots \right]}. \quad (32.81)$$

Период колебаний в переменной θ был принят равным 2π ; следовательно, если вернуться к переменной t , то, согласно (32.81), период будет равен

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}} \left[1 + \left(\frac{3}{4} \gamma_2 - \frac{5}{6} \gamma_1^2 \right) q_1^2 + \dots \right]^{-1/2} = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}} \left[1 - \left(\frac{3}{8} \gamma_2 - \frac{5}{12} \gamma_1^2 \right) q_1^2 + \dots \right]. \quad (32.82) \end{aligned}$$

В качестве примера применения метода Линдстедта снова рассмотрим математический маятник. Заменяя в уравнении движения

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

синус его разложением в ряд, получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi \left(1 - \frac{\varphi^2}{6} + \dots \right) = 0.$$

В этом случае

$$a = 1, \quad c = \frac{g}{l}, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{6},$$

так что по (32.82) выражение периода будет

$$\tau = 2\pi \sqrt{l/g} \left(1 + \varphi_0^2/16 \right),$$

что совпадает с соответствующим приближением (32.39) точного решения (§ 177).

Уравнение колебаний маятника найдем по (32.80):

$$\varphi = \left(\varphi_0 + \frac{1}{192} \varphi_0^3 \right) \cos \frac{2\pi t}{T} - \frac{1}{192} \varphi_0^3 \cos \frac{6\pi t}{T}.$$

Полученное уравнение отличается от простейшего уравнения гармонических колебаний

$$\varphi = \varphi_0 \cos \sqrt{g/l} t$$

на величину третьего порядка малости относительно φ_0 :

$$\frac{1}{192} \varphi_0^3 \left(\cos \frac{2\pi t}{T} - \cos \frac{6\pi t}{T} \right),$$

кроме того, еще значительно уменьшающуюся благодаря наличию множителя $1/192 \approx 0,005$.

§ 179. Свободные затухающие колебания системы при силе сопротивления, пропорциональной первой степени скорости. Диссипативная функция Рэлея

Предположим, что на отдельные точки M_i , $i = 1, 2, \dots, n$, системы действуют силы сопротивления F_i , пропорциональные по величине первой степени скорости v_i точки и направленные в сторону, противоположную движению, так что

$$F_i = -\beta_i \dot{r}_i, \quad (32.83)$$

где β_i — положительный коэффициент пропорциональности. Обобщенная сила сопротивления будет равна

$$Q = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q},$$

где суммирование распространено по точкам системы, на которые действуют силы сопротивления. Как было показано при выводе уравнений Лагранжа второго рода (§ 159),

$$\frac{\partial r_i}{\partial q} = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}},$$

так что

$$Q = - \sum_{i=1}^n \beta_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}} = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i |\dot{r}_i|^2}{2} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}, \quad (32.84)$$

где введена в рассмотрение так называемая *диссипативная функция Рэлея**, или *функция рассеяния*

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{|\dot{r}_i|^2}{2}. \quad (32.85)$$

Предполагая, что связи системы стационарны, имеем

$$r_i = r_i(q), \quad \dot{r}_i = \frac{\partial r_i}{\partial q} \dot{q},$$

* РЭЛЭЙ, РЕЙЛИ, лорд, СТРЕТТ ДЖОН УИЛЬЯМ (*Strutt John William Lord Rayleigh, 1842—1919*) — английский физик, один из основоположников теории колебаний, иностр. чл.-корр. Петербургской АН (1896), чл. Лондонского королевского общества (1873). Понятие диссипативной функции введено Рэлеем в его классическом труде «Теория звука» [41].

и, следовательно,

$$\Phi = \frac{1}{2} \dot{q}^2 \sum_{i=1}^n \beta_i \left| \frac{\partial r_i}{\partial q} \right|^2 = \frac{1}{2} \beta(q) \dot{q}^2, \quad (32.86)$$

где

$$\beta(q) = \sum_{i=1}^n \beta_i \left| \frac{\partial r_i}{\partial q} \right|^2.$$

Вспоминая, что все β_i положительны, сделаем заключение о положительности функции $\beta(q)$, а следовательно, по (32.86) и о положительности диссипативной функции Φ .

Диссипативная функция Φ имеет простой физический смысл.

ТЕОРЕМА. Удвоенная величина диссипативной функции равна уменьшению в единицу времени той полной механической энергии, которой обладала бы система при отсутствии сил сопротивления.

Для доказательства составим уравнение движения системы. К правой части уравнения Лагранжа добавим член, выражающий влияние сопротивления; согласно (32.84) получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial q}. \quad (32.87)$$

Умножим обе части (32.87) на \dot{q} и заметим, что из равенств

$$T = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2, \quad \Phi = \frac{1}{2} \beta(q) \dot{q}^2$$

и теоремы Эйлера об однородных функциях следует, что

$$\dot{q} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = 2T, \quad \dot{q} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = 2\Phi,$$

и что, кроме того, по определению производной от сложной функции

$$\ddot{q} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} + \dot{q} \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{dT}{dt}, \quad \dot{q} \frac{\partial \Pi}{\partial q} = \frac{d\Pi}{dt}.$$

Тогда получим

$$\frac{d}{dt} (T + \Pi) = \frac{dE}{dt} = -2\Phi, \quad (32.88)$$

что и доказывает теорему.

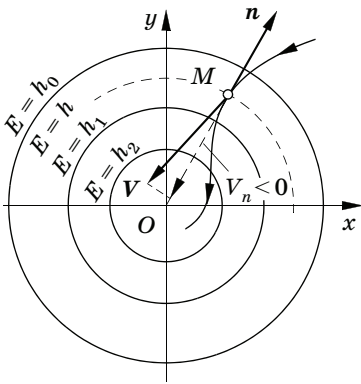


Рис. 431

Только что доказанная теорема отражает существенное свойство движения системы. Чтобы пояснить это свойство, введем новые фазовые координаты* $x = q$ и $y = \dot{q}/k$ и представим движение на фазовой плоскости x, y . Системе кривых

$$E = (1/2)aq^2 + (1/2)cq^2 = \text{const} = h$$

на плоскости q, \dot{q} будет соответствовать система окружностей (поскольку $c/a = k^2$)

$$\begin{aligned} E &= (1/2)ak^2y^2 + (1/2)cx^2 = \\ &= (1/2)c(x^2 + y^2) = h \end{aligned}$$

на плоскости x, y (рис. 431). Эти окружности имеют центр в начале координат и стягиваются к нему при уменьшении h .

Рассматривая движение изображающей точки $M(x, y)$ на фазовой плоскости, заметим, что окружности $E = h$ уже не будут траекториями изображающей точки, так как E — полная механическая энергия системы при отсутствии сил сопротивления; эта энергия не сохраняет постоянного значения при движении системы, на которую действуют силы сопротивления. Обозначив через n единичный вектор внешней нормали окружности $E = h$, а через α и β — углы вектора n с осями координат x и y , имеем

$$\cos \alpha = \frac{1}{D} \frac{\partial E}{\partial x}, \quad \cos \beta = \frac{1}{D} \frac{\partial E}{\partial y}, \quad D = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)^2}.$$

Величины $dx/dt = \dot{x} = V_x$ и $dy/dt = \dot{y} = V_y$, очевидно, представляют собой проекции вектора скорости V изображающей точки M на оси x и y ; поэтому

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y} \dot{y} = D(V_x \cos \alpha + V_y \cos \beta) = DV_n,$$

где V_n — проекция скорости точки M на направление n , и соотношение (32.88) принимает вид

$$V_n = -(2/D)\Phi.$$

* Поскольку k — частота, измеряемая в $1/c$, координаты x и y имеют одинаковую размерность, что существенно для дальнейшего изложения. Заметим, что здесь выбор фазовых координат несколько отличается от принятого ранее (§ 176).

То обстоятельство, что V_n оказалась отрицательной (напоминаем, что Φ положительна), указывает, что траектории изображающей точки пересекают окружности $E = h$ (они касаются этих окружностей при $y = 0$, т. е. на оси x) *извне внутрь*, переходя от окружностей, которым соответствуют большие значения h , к окружностям, для которых h меньше; поэтому при $t \rightarrow \infty$ мы должны иметь $E \rightarrow 0^*$. Но величина

$$E = T + \Pi = (1/2)a\dot{q}^2 + (1/2)cq^2$$

при $a > 0$, $c > 0$ может стремиться к нулю только при $q \rightarrow 0$, $\dot{q} \rightarrow 0$. Следовательно, система при $t \rightarrow \infty$ стремится к равновесному положению. Движение в этом случае называется *асимптотически устойчивым*.

Рассматривая в дальнейшем малые колебания, можно считать коэффициент β в выражении диссипативной функции постоянным; конечно, при этом $\beta > 0$ в силу положительности функции Φ . Полагая, как и ранее,

$$T = (1/2)a\dot{q}^2, \quad \Pi = (1/2)cq^2,$$

вместо (32.87) получаем уравнение

$$a\ddot{q} + \beta\dot{q} + cq = 0, \tag{32.89}$$

которое делением обеих частей на инерционный коэффициент a может быть приведено к виду

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0; \tag{32.90}$$

здесь приняты обозначения

$$\beta/a = 2n, \quad c/a = k^2. \tag{32.91}$$

Уравнение (32.90) совпадает с разобранным ранее, в § 98, уравнением (21.41), выражающим влияние сопротивления, пропорционального первой степени скорости, на свободные прямолинейные колебания материальной точки.

В дополнение к произведенному ранее исследованию рассмотрим фазовые траектории, соответствующие колебательному ($n < k$) и аperiодическому ($n > k$) движениям системы.

■ В первом случае ($n < k$) имеем

$$q = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \alpha), \tag{32.92}$$

$$\dot{q} = Ae^{-nt} [-n \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \alpha) + \sqrt{k^2 - n^2} \cos(\sqrt{k^2 - n^2} t + \alpha)].$$

* Не будем останавливаться на доказательстве того, что изображающая точка не может достигнуть начала координат за конечный промежуток времени.

Для составления уравнения семейства фазовых траекторий удобно ввести новые переменные x и y , связанные с q и \dot{q} линейными соотношениями

$$x = q, \quad y = \frac{\dot{q} + nq}{\sqrt{k^2 - n^2}}, \quad (32.93)$$

и принять x и y за прямоугольные декартовы координаты на фазовой плоскости (x, y) . В этой плоскости введем еще полярные координаты ρ и φ , отсчитывая φ от оси y к оси x . Получим

$$\begin{aligned} x &= r \sin \varphi = Ae^{-nt} \sin (\sqrt{k^2 - n^2}t + \alpha), \\ y &= r \cos \varphi = Ae^{-nt} \cos (\sqrt{k^2 - n^2}t + \alpha). \end{aligned}$$

Исключая отсюда время t , найдем уравнение семейства фазовых траекторий в полярных координатах

$$r = Ce^{-n\varphi/\sqrt{k^2 - n^2}}, \quad (32.94)$$

причем параметром семейства служит одна величина

$$C = Ae^{n\alpha/\sqrt{k^2 - n^2}},$$

выражающаяся через две постоянные интегрирования A и α .

Согласно (32.94) фазовыми траекториями служат подобные относительно начала координат логарифмические спирали (рис. 432). Изображающая точка при любых начальных условиях неограниченно приближается к началу координат ($r \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow \infty$); фазовые траектории закручиваются вокруг начала координат, которое в этом случае играет роль *устойчивого фокуса*. На рис. 432 приведены поверхности уровня механической энергии

$$\begin{aligned} E &= (1/2)(a\dot{q}^2 + cq^2) = (1/2)a(\dot{q}^2 + k^2q^2) = \\ &= (1/2)a[(k^2 + n^2)x^2 + (k^2 - n^2)y^2 - 2n\sqrt{k^2 - n^2}xy] = h. \end{aligned}$$

Это — эллипсы, полуоси которых наклонены под углом α к осям координат, причем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{\sqrt{k^2 - n^2}}{n}.$$

В соответствии с только что доказанной теоремой фазовые траектории пересекают линии уровня энергии извне внутрь.

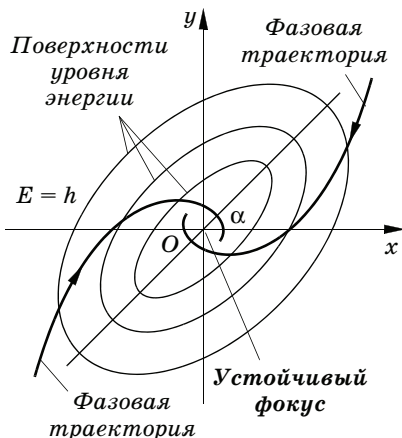


Рис. 432

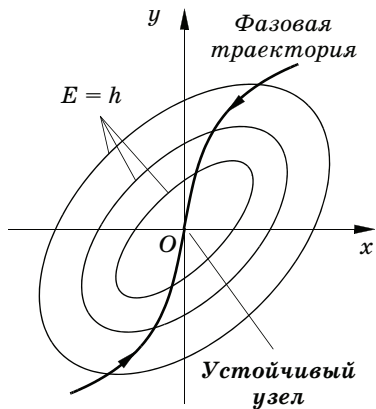


Рис. 433

■ Во втором случае ($n > k$) будем иметь

$$q = e^{-nt}(C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2}t}), \tag{32.95}$$

$$\dot{q} = -nq + \sqrt{n^2 - k^2} e^{-nt} (C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2}t} - C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2}t}).$$

Перейдем к новым координатам x, y , линейно связанным со старыми q, \dot{q} соотношениями

$$q = -e^{-nt} (C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2}t}) = y + x,$$

$$\frac{\dot{q} + nq}{\sqrt{n^2 - k^2}} = e^{-nt} (C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2}t} - C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2}t}) = y - x.$$

Тогда легко заметить, что

$$xy = C' e^{-2nt}, \quad \frac{x}{y} = C'' e^{-2\sqrt{n^2 - k^2}t},$$

где C' и C'' — новые постоянные, и, исключая из этой системы равенств время t , получить

$$y = C x^{(n - \sqrt{n^2 - k^2}) / (n + \sqrt{n^2 - k^2})}. \tag{32.96}$$

Показатель степени, очевидно, всегда положителен и меньше единицы. Фазовыми траекториями здесь служат отрезки кривых типа парабол (рис. 433), касающиеся в начале координат оси Oy

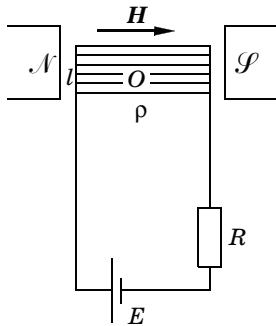


Рис. 434

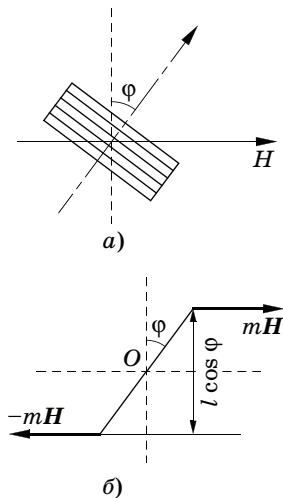


Рис. 435

($dy/dx \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$). Фазовые кривые пересекают кривые уровней энергии (эллипсы) $E = h$ извне внутрь, сходясь в начале координат, которое в этом случае играет роль *устойчивого узла*. Аналогичными по типу будут фазовые траектории и в случае предельного аperiodического движения ($n = k$).

Пример 156. На рис. 434 представлена электрическая схема гальванометра. Между полюсами \mathcal{N} и \mathcal{S} постоянного магнита подвешена в точке O на тонкой проволоке катушка малой толщины l с весьма большим числом витков тонкой изолированной проволоки. При отсутствии тока в катушке плоскость витков параллельна напряжению магнитного поля H . Если F — площадь одного витка, n — число витков и i — величина тока, то катушка эквивалентна магнитному диполю, т. е. магниту, в концах которого находятся магнитные массы $\pm m$, где

$$m = \frac{Fni}{l}.$$

Рассмотрим движение катушки, принимая во внимание, что при изменении числа N магнитных силовых линий, пересекающих контур тока, возникает (по закону Ленца) обратная электродвижущая сила $E_1 = -dN/dt$. Если пренебречь самоиндукцией катушки, то величина тока будет равна $i = (E + E_1)/(R + \rho)$, где E — постоянная внешняя электродвижущая сила, ρ — сопротивление катушки, R — сопротивление

внешней цепи; жесткость проволоки на кручение, равная моменту, который должен быть приложен к концу проволоки, чтобы создать единичный угол закручивания, равна c . При решении задачи следует иметь в виду, что (рис. 435, а) $N = FnH \sin \varphi$, а момент пары магнитных сил, выводящих катушку из положения равновесия, равен $mHl \cos \varphi$ (рис. 435, б).

Дифференциальное уравнение вращения катушки может быть написано в виде

$$J\ddot{\varphi} = -c\varphi + mHl \cos \varphi.$$

Подставляя вместо m его значение

$$m = \frac{Fn i}{l} = \frac{Fn}{l} \frac{E + E_1}{R + \rho} = \frac{EnF}{(R + \rho)l} - \frac{nF}{(R + \rho)l} \frac{dN}{dt}$$

и замечая, что

$$\frac{dN}{dt} = nFH\dot{\varphi} \cos \varphi,$$

получаем

$$J\ddot{\varphi} = -c\varphi + \left[\frac{FnH}{R + \rho} E - \frac{(FnH)^2}{R + \rho} \dot{\varphi} \cos \varphi \right] \cos \varphi.$$

Ограничиваясь рассмотрением малых колебаний, положим $\cos \varphi = 1$ и введем обозначения

$$\frac{(FnH)^2}{2J(R + \rho)} = \varepsilon, \quad \frac{c}{J} = k^2.$$

Получим

$$\ddot{\varphi} + 2\varepsilon\dot{\varphi} + k^2\varphi = \frac{FnH}{J} \cdot \frac{E}{R + \rho}.$$

Общее решение этого уравнения равно сумме его частного решения и общего решения однородного уравнения. Частное решение φ_0 при $E = \text{const}$ будет

$$\varphi_0 = \frac{FnH}{Jk^2} \cdot \frac{E}{R + \rho} = \frac{FnH}{c} \cdot \frac{E}{R + \rho} = Ci_0,$$

где C — постоянная прибора; заметим, что φ_0 — показание, пропорциональное измеряемой величине тока, которое дал бы гальванометр при равновесии.

Общее решение при малом сопротивлении ($\varepsilon < k$) будет

$$\varphi = \varphi_0 + e^{-\varepsilon t} (A \sin \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t + B \cos \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t).$$

Пусть $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ при $t = 0$; тогда

$$\varphi = \varphi_0 \left[1 - e^{-\varepsilon t} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}} \sin \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t + \cos \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t \right) \right],$$

т. е. движение катушки представляет собой затухающий колебательный процесс, приводящий (теоретически через бесконечно большое время) стрелку гальванометра к равновесному значению угла поворота $\varphi = \varphi_0$.

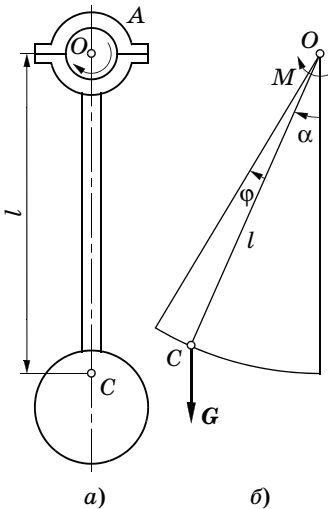


Рис. 436

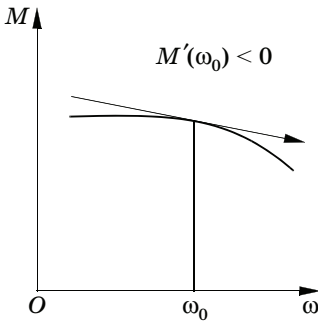


Рис. 437

Пример 157. Маятник Жуковского — Фруда. Подвес маятника (рис. 436, а) осуществлен при помощи подшипника, цапфа А которого соединена со стержнем маятника, а шип может вращаться от внешнего привода. Зная закон зависимости момента трения M в подшипнике от угловой скорости ω относительного вращения шипа и цапфы, определить движения маятника вблизи положения равновесия; сопротивление окружающей среды принимается пропорциональным первой степени угловой скорости маятника.

Предположим, что характеристика связи момента трения M с относительной угловой скоростью ω между шипом и цапфой имеет вид спадающей кривой (рис. 437), так что $M'(\omega) < 0$. Если $\omega = \omega_0$ представляет собой угловую скорость шипа, соответствующую равносному положению маятника, имеющему место при угле отклонения от вертикали α (рис. 436, б), то

$$Gl \sin \alpha = M(\omega_0), \quad (32.97)$$

где G — сила тяжести, а l — расстояние от оси O подшипника до центра тяжести C маятника.

Обозначим через φ угол отклонения маятника от равновесного положения и удовольствуемся рассмотрением малых φ и $\dot{\varphi}$. Дифференциальное уравнение движения маятника будет

$$J\ddot{\varphi} = -Gl \sin(\alpha + \varphi) + M(\omega_0 - \dot{\varphi}) - \beta\dot{\varphi}, \quad (32.98)$$

причем J обозначает момент инерции маятника относительно оси подвеса O , β — коэффициент сопротивления среды. Разложим характеристику трения в ряд по степеням $\dot{\varphi}$ и ограничимся первыми двумя членами разложения; тогда получим

$$M(\omega_0 - \dot{\varphi}) = M(\omega_0) - M'(\omega_0)\dot{\varphi}.$$

Используем еще условие малости угла φ , согласно которому

$$\sin(\alpha + \varphi) \approx \sin \alpha + \varphi \cos \alpha.$$

Дифференциальное уравнение движения маятника при этом, если использовать условие равновесия (32.97), примет вид

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \tag{32.99}$$

где

$$2n = \frac{M'(\omega_0) + \beta}{J}, \quad k^2 = \frac{Gl \cos \alpha}{J}.$$

При наличии спадающей характеристики трения в подшипнике, т. е. при $M'(\omega_0) < 0$, возможны, следовательно, два существенно отличных по характеру случая малых движений маятника.

1°. $n > 0, \beta > -M'(\omega_0)$; положение равновесия устойчиво, движение маятника будет затухающим ($\varphi \rightarrow 0$) или аperiodическим в зависимости от того, будет ли $k > n$ или $k < n$. Этот случай был рассмотрен в настоящем параграфе. Начало координат на фазовой плоскости представляет собой *устойчивый фокус* или *устойчивый узел*.

2°. $n < 0, \beta < -M'(\omega_0)$; положение равновесия неустойчиво, маятник удаляется от положения равновесия, совершая растущие по амплитуде колебания

$$\varphi = e^{\nu t} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - \nu^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - \nu^2} t), \quad \nu = -n > 0$$

или удаляется от положения равновесия аperiodически

$$\varphi = e^{\nu t} (C_1 e^{\sqrt{\nu^2 - k^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\nu^2 - k^2} t}).$$

Легко убедиться в том, что фазовые траектории сохраняют ту же форму, что и в случае 1°, но направление движения изображающей точки изменяется на противоположное (рис. 438). Начало координат фазовой плоскости в этих случаях будет являться *неустойчивым фокусом* или *неустойчивым узлом*.

Приведенное решение справедливо только в предположении, что угол φ отклонения маятника от равновесного его положения мал, так что две последние фазовые диаграммы имеют лишь локальный смысл в области, близкой к началу координат. Дальнейший ход фазовых траекторий уже не может быть определен таким анализом, а требует рассмотрения решений дифференциального уравнения движения маятника в виде (32.98).

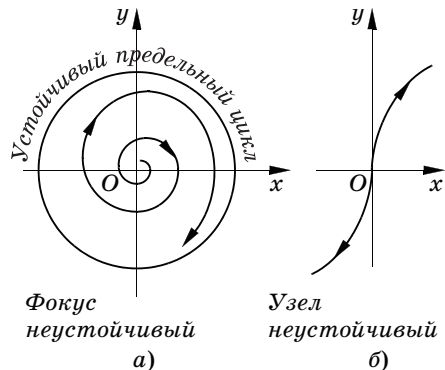


Рис. 438

Учет влияния членов высших степеней в разложении момента в уравнении (32.98) привел бы к заключению, что размахи колебаний маятника в действительности не растут неограниченно. Движение стремится к некоторому периодическому режиму, параметры которого не зависят от начальных условий. Соответствующая этому режиму фазовая траектория представляет собой замкнутую кривую (рис. 438, а), называемую *устойчивым предельным циклом*.

§ 180. Колебания системы с одной степенью свободы при наличии кулонова трения

Обобщая рассмотренное в § 100 прямолинейное колебательное движение материальной точки при действии на нее постоянной по величине силы кулонова трения на случай колебания любой системы с одной степенью свободы, будем иметь уравнение движения в форме

$$a\ddot{q} + cq = Q, \quad (32.100)$$

или

$$\ddot{q} + k^2q = \frac{Q}{a} = Q^*, \quad (32.101)$$

причем Q^* постоянно по абсолютной величине, но меняет свой знак согласно формулам

$$\begin{aligned} Q^* &= -|Q^*| && \text{при } \dot{q} > 0, \\ Q^* &= |Q^*| && \text{при } \dot{q} < 0. \end{aligned} \quad (32.102)$$

Не будем повторять в подробностях решения уравнения (32.101), так как оно ничем по существу не отличается от рассмотренного в гл. XXI, § 100 (с. 114), и обратимся к анализу движения изображающей точки в фазовой плоскости.

Примем за основные фазовые переменные $x = q$ и $y = \dot{q}/k$. Тогда для первого полупериода колебания будем аналогично формулам (21.81) и (21.82) иметь

$$\begin{aligned} x &= \frac{|Q^*|}{k^2} + \left(x_0 - \frac{|Q^*|}{k^2} \right) \cos kt, \\ y &= -\left(x_0 - \frac{|Q^*|}{k^2} \right) \sin kt. \end{aligned} \quad (32.103)$$

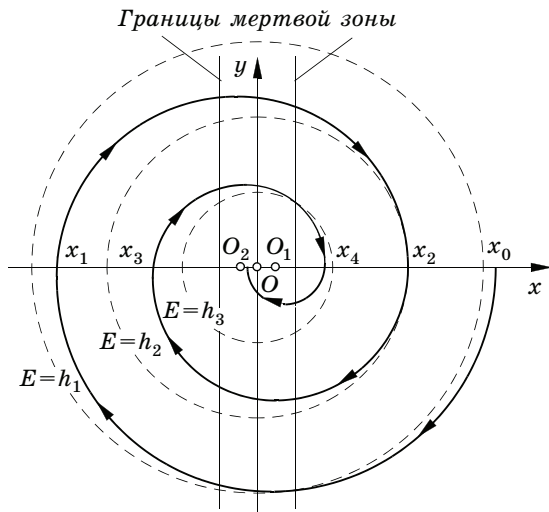


Рис. 439

Исключая время, находим уравнение фазовой траектории

$$\left(x - \frac{|Q^*|}{k^2}\right)^2 + y^2 = \left(x_0 - \frac{|Q^*|}{k^2}\right)^2. \quad (32.104)$$

Как следует из (32.104) и второго уравнения системы (32.103), фазовой траекторией является полуокружность радиусом $(x_0 - |Q^*|/k^2)$ с центром в точке $O_1 (|Q^*|/k^2, 0)$, расположенная ниже оси абсцисс (рис. 439). Для второго полупериода согласно (21.85) и (21.86) находим

$$x = -\frac{|Q^*|}{k^2} - \left(\frac{3|Q^*|}{k^2} - x_0\right) \cos kt, \quad (32.105)$$

$$y = \left(\frac{3|Q^*|}{k^2} - x\right) \sin kt,$$

так что фазовой траекторией будет верхняя часть окружности

$$\left(x + \frac{|Q^*|}{k^2}\right)^2 + y^2 = \left(x_0 - \frac{3|Q^*|}{k^2}\right)^2, \quad (32.106)$$

радиусом $|x_0 - 3|Q^*|/k^2|$ с центром $O_2 (-|Q^*|/k^2, 0)$. Построение полуокружностей с центрами в точках O_1 либо O_2 и радиусами, каждый раз уменьшающимися на $2|Q^*|/k^2$, продолжается до тех пор, пока точка пересечения полуокружности с осью x не окажется внутри мертвой зоны, что будет соответствовать остановке системы.

На том же рис. 439 штриховыми кривыми нанесены линии уровня энергии

$$E = (1/2)(a\dot{q}^2 + cq^2) = (1/2)c(y^2 + x^2) = h, \quad (32.107)$$

представляющие собой семейство окружностей с центром в начале координат. Фазовые траектории пересекают эти окружности извне внутрь, в чем легко убедиться, повторив рассуждение, аналогичное ранее проведенному (§ 179) в случае силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости. Составим выражение

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y} \dot{y} = D(V_x \cos \alpha + V_y \cos \beta) = DV_n,$$

причем, согласно (32.107),

$$D = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)^2} = c \sqrt{x^2 + y^2} = cR,$$

где R — радиус соответствующей окружности, служащей линией уровня энергии. Таким образом, с одной стороны, имеем

$$\frac{dE}{dt} = cRV_n, \quad (32.108)$$

а с другой стороны, непосредственным дифференцированием получаем равенство

$$\frac{dE}{dt} = c(x\dot{x} + y\dot{y}).$$

Используя дифференциальное уравнение движения (21.78), которое можно переписать в виде системы уравнений

$$\dot{x} = ky, \quad \dot{y} = -kx - \frac{|Q^*|}{k} \text{sign } y,$$

получаем также

$$\frac{dE}{dt} = -c \frac{|Q^*|}{k} y \text{sign } y. \quad (32.109)$$

Сравнивая (32.109) с (32.108), заключаем, что

$$V_n = -\frac{|Q^*|}{kR} |y| < 0,$$

т. е. действительно, фазовые траектории пересекают линии уровня энергии извне внутрь.

**§ 181. Колебания системы с одной степенью свободы
при наличии силы сопротивления,
пропорциональной квадрату скорости**

Обобщенную силу, соответствующую сопротивлению, пропорциональному квадрату скорости, зададим в виде

$$Q = -\gamma \dot{q}^2 \operatorname{sign} \dot{q}, \quad (32.110)$$

где γ — постоянный коэффициент сопротивления, а множитель $\operatorname{sign} \dot{q}$ поставлен для того, чтобы показать противоположность знаков сопротивления и обобщенной скорости.

Дифференциальное уравнение движения системы с одной степенью свободы при наличии квазиупругой восстанавливающей силы и силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости, будет

$$a\ddot{q} + cq = -\gamma \dot{q}^2 \operatorname{sign} \dot{q}. \quad (32.111)$$

Введем обозначения

$$\beta/2 = \gamma/a, \quad k^2 = c/a; \quad (32.112)$$

тогда уравнение (32.111) примет вид

$$\ddot{q} + (1/2)\beta \dot{q}^2 \operatorname{sign} \dot{q} + k^2 q = 0. \quad (32.113)$$

Зададим начальные условия:

$$q = q_0 > 0, \quad \dot{q}_0 = 0 \quad \text{при } t = 0$$

и рассмотрим первый интервал движения от момента $t = 0$, при котором система занимает первое крайнее положение ($q = q_0$), до того момента, когда она придет во второе крайнее положение ($q = q_1$). При таком движении обобщенная сила сопротивления будет положительна и $\operatorname{sign} \dot{q} = -1$.

Уравнение

$$\ddot{q} - (1/2)\beta \dot{q}^2 + k^2 q = 0 \quad (32.114)$$

можно проинтегрировать подстановкой $\dot{q}^2 = z$; при этом

$$2\dot{q}\ddot{q} = \dot{z}, \quad \ddot{q} = \frac{1}{2} \frac{dz}{dq},$$

и уравнение (32.114) приводится к виду

$$\frac{dz}{dq} - \beta z = -2k^2 q.$$

Решением этого уравнения будет

$$z = C_1 e^{\beta q} + 2 \frac{k^2}{\beta^2} (\beta q + 1).$$

Из начальных условий следует

$$0 = C_1 e^{\beta q_0} + 2 \frac{k^2}{\beta^2} (\beta q_0 + 1),$$

откуда, исключая постоянную C_1 , получаем

$$z = \dot{q}^2 = \frac{2k^2}{\beta^2} [1 + \beta q - e^{\beta(q - q_0)} (1 + \beta q_0)], \quad (32.115)$$

или, если разделить переменные,

$$-\frac{dq}{\sqrt{1 + \beta q - e^{\beta(q - q_0)}(1 + \beta q_0)}} = \frac{\sqrt{2k}}{\beta} dt,$$

причем знак минус взят потому, что в рассматриваемом промежутке $\dot{q} < 0$, т. е. dq и dt имеют противоположные знаки. Интеграл от выражения, стоящего в левой части последнего равенства, не выражается в элементарных функциях. Пользуясь (32.115), можно указать простой графический метод нахождения последовательных амплитуд колебания системы.

Замечая, что $\dot{q} = 0$ при $q = q_1$, по (32.115) получаем

$$1 + \beta q_1 - e^{\beta(q_1 - q_0)} (1 + \beta q_0) = 0,$$

или

$$(1 + \beta q_1) e^{-\beta q_1} = (1 + \beta q_0) e^{-\beta q_0}. \quad (32.116)$$

В следующем интервале движение будет происходить слева направо от $q = q_1$ до $q = q_2$. Уравнение движения в этом интервале будет отличаться от предыдущего только знаком при β , так что получим

$$(1 - \beta q_2) e^{\beta q_2} = (1 - \beta q_1) e^{\beta q_1};$$

в следующем интервале вновь будем иметь

$$(1 + \beta q_3) e^{-\beta q_3} = (1 + \beta q_2) e^{-\beta q_2} \quad (q_3 < 0, q_2 > 0)$$

и т. д.

Введем обозначения

$$\beta q = x,$$

$$\beta q_0 = x_0,$$

$$\beta q_1 = x_1, \dots$$

и прологарифмируем обе части равенства (32.116) и аналогичные последующие; тогда найдем

$$\ln(1 + x_1) - x_1 = \ln(1 + x_0) - x_0,$$

$$\ln(1 - x_2) + x_2 = \ln(1 - x_1) + x_1, \quad (32.117)$$

$$\ln(1 + x_3) - x_3 = \ln(1 + x_2) - x_2$$

и т. д. Эта последовательность равенств определяет по заданному x_0 величину x_1 , затем по x_1 величину x_2 и т. д.; полученные трансцендентные уравнения можно решать графически.

Вычертим кривую, соответствующую функции

$$f(x) = \ln(1 + x) - x.$$

Кривая имеет асимптоту $x = -1$, касается оси абсцисс в начале координат и уходит в бесконечность под углом 45° при $x \rightarrow \infty$.

Система (32.117) представляется в виде

$$f(x_1) = f(x_0),$$

$$f(-x_2) = f(-x_1),$$

$$f(x_3) = f(x_2) \text{ и т. д.}$$

Рис. 440 показывает, как по этой раз навсегда вычерченной кривой можно находить последовательные амплитуды. Отметим, что, каково бы ни было начальное значение q_0 , численная величина следующей безразмерной амплитуды $|q_1|$ будет всегда меньше единицы, т. е.

$$|q_1| < \frac{1}{\beta}.$$

Это непосредственно видно из приведенного выше построения.

Для малых амплитуд можно указать выражение величины последующей амплитуды через предыдущую в виде степенного ряда*. Обозначим через $\eta = |x_k|$ k -ю амплитуду, следующую за некоторой $(k - 1)$ -й амплиту-

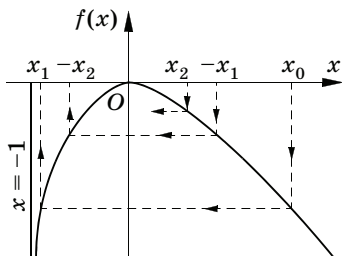


Рис. 440

* См. Б. В. Булгаков [1, с. 280—283].

дой $\xi = |x_{k-1}|$. Тогда, согласно (32.116) и последующим равенствам, всегда будет

$$(1 - \eta) e^\eta = (1 + \xi) e^{-\xi}. \quad (32.118)$$

При малых ξ и η будем иметь, разлагая $e^{-\xi}$ и e^η в ряды

$$\eta^2 + \frac{2}{3}\eta^3 + \frac{1}{4}\eta^4 + \frac{1}{15}\eta^5 + \dots = \xi^2 - \frac{2}{3}\xi^3 + \frac{1}{4}\xi^4 - \frac{1}{15}\xi^5 + \dots$$

Представляя η в виде степенного ряда

$$\eta = c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3 + \dots$$

с неопределенными коэффициентами c_1, c_2, \dots , подставим это разложение в предыдущее равенство и сравним коэффициенты при одинаковых степенях ξ . Тогда получим

$$\eta = \xi - \frac{2}{3}\xi^2 + \frac{4}{9}\xi^3 - \frac{44}{135}\xi^4 + \dots \quad (32.119)$$

В табл. 11 приведены значения затухания амплитуд η для некоторых как больших, так и малых ξ .

Таблица 11

**Затухание последовательных амплитуд
при квадратичном сопротивлении**

ξ	η	ξ	η	ξ	η
∞	1	0,5936	0,4240	0,1298	0,1194
10	0,9998	0,4240	0,3301	0,1194	0,1106
8	0,9989	0,3301	0,2704	0,1106	0,1030
6	0,9936	0,2704	0,2290	0,1030	0,0964
5	0,9849	0,2290	0,1986	0,0964	0,0906
4	0,9651	0,1986	0,1753	0,0906	0,0854
3	0,9207	0,1753	0,1570	0,0854	0,0808
2	0,8214	0,1570	0,1420	0,0808	0,0767
1	0,5936	0,1420	0,1298	0,0767	0,0730

Продолжительность τ полупериода определится интегрированием уравнения (32.115). В новых обозначениях будем иметь

$$\tau = \frac{1}{k\sqrt{2}} \int_{-\eta}^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{1 + x - (1 + \xi) e^{x - \xi}}}. \quad (32.120)$$

В табл. 12 указаны продолжительности полупериодов, рассчитанные для некоторых начальных амплитуд.

Таблица 12

Продолжительность полупериодов при квадратичном сопротивлении

ξ	η	$k\tau$	ξ	η	$k\tau$
∞	1	∞	5	0,985	3,998
1000	1	49,77	2	0,821	3,383
200	1	22,12	1	0,594	3,222
80	1	12,84	0,594	0,424	3,175
40	1	9,21	0,424	0,330	3,160
20	1	6,70	0,330	0,270	3,153
10	1	5,026	0	0	3,142 = π

Последняя строка табл. 12 показывает, что при малых ξ полупериод τ стремится к величине π/k , соответствующей свободным незатухающим колебаниям. Это и естественно, так как при малых \dot{q} сопротивление, пропорциональное квадрату \dot{q} , становится незаметным.

Определим форму фазовых траекторий. Положим

$$x = \beta q, \quad y = \frac{\beta}{k\sqrt{2}} \dot{q}. \quad (32.121)$$

Тогда, согласно (32.115), уравнение фазовой траектории при движении в интервале $x_0 \geq x \geq x_1$, где $y < 0$, будет

$$y = -\sqrt{1 + x - (1 + x_0) e^{x - x_0}}, \quad (32.122)$$

а при движении в интервале $x_1 \leq x \leq x_2$, где $y > 0$,

$$y = \sqrt{1 - x - (1 - x_1) e^{-(x - x_1)}}. \quad (32.123)$$

В последующих интервалах уравнения будут чередоваться.

Построение кривых, соответствующих уравнениям (32.122) и (32.123), не составляет труда. На рис. 441 показан вид двух фазовых траекторий, отвечающих начальным условиям $x_0 = 1$ и $x_0 = 2$. Отрезки, отсекаемые данной фазовой траекторией на оси Ox , определяют последовательные откло-

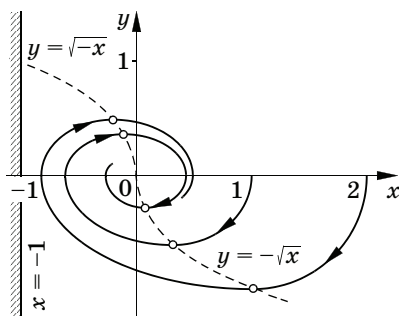


Рис. 441

нения системы и могут быть взяты из таблицы или вычислены интерполированием. При этих абсциссах величины dy/dx становятся бесконечными, что отвечает ортогональности в этих точках фазовых траекторий оси Ox . Дифференцирование правых частей (32.122) и (32.123) показывает, что максимумы и минимумы фазовых траекторий при любых начальных условиях располагаются на параболах $y = \sqrt{-x}$ и $y = -\sqrt{x}$, показанных на рис. 441 штриховыми линиями.

Как бы ни было велико начальное значение x_0 , фазовые траектории не могут перейти влево от указанной на рисунке прямой $x = -1$.

В тех случаях, когда составление уравнений фазовых траекторий в конечном виде затруднительно, применяют графическое их построение непосредственно по дифференциальному уравнению движения. Изложим способ Лъенара*, применимый для уравнения вида

$$\ddot{x} + x + \varphi(\dot{x}) = 0, \quad (32.124)$$

к которому относятся как колебания при наличии сопротивления, пропорционального первой и второй степени скорости, так и колебания в случае кулонова трения.

Полагая в уравнении (32.124) $\dot{x} = y$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + \varphi(y)}{y}, \quad (32.125)$$

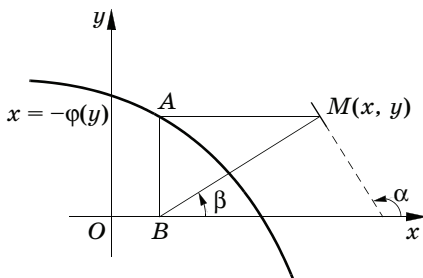


Рис. 442

интегральными кривыми которого будут являться фазовые траектории в плоскости (x, y) . Лъенар предложил следующий простой графический прием построения фазовых траекторий, определяемых уравнением (32.125). Нанесем (рис. 442) в фазовой плоскости (x, y) кривую $x = -\varphi(y)$. Выбрав произвольную точку M ,

* См. Дж. Стокер [44, перевод на русский, 1-е изд., с. 39—42].

проведем через нее прямую, параллельную оси Ox , до пересечения с этой кривой в точке A и затем через точку A прямую, параллельную оси Oy до пересечения с осью Ox в точке B . Прямая, проходящая через выбранную точку M в точку B , будет иметь направление нормали интегральной кривой уравнения (32.125) в точке M . Действительно, как об этом можно судить по уравнению (32.125) и непосредственно по рисунку,

$$\operatorname{tg} \beta = AB : AM = \frac{y}{x + \varphi(y)} = -\frac{1}{dy/dx} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Таким образом, указанным выше способом легко в каждой точке M фазовой плоскости построить малый отрезок, направленный по касательной к фазовой траектории. Переместившись вдоль этого отрезка в смежную точку, повторим еще раз то же построение, найдем новую нормаль и новое направление касательной. Беря отрезки касательной достаточно малыми, построим ломаную линию, мало отличающуюся от искомой фазовой траектории.

В частном случае колебаний при наличии кулонова трения, полагая, как и ранее,

$$q = x, \quad \frac{\dot{q}}{k} = y,$$

получим уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\pm |Q^*|/k^2 + x}{y}.$$

В этом случае роль вспомогательной кривой в методе Льенара играет совокупность полупрямых

$$x = -\varphi(y) = \begin{cases} |Q^*|/k^2 & \text{при } y < 0, \\ -|Q^*|/k^2 & \text{при } y > 0, \end{cases}$$

параллельных оси Oy и проведенных через точку O_1 (рис. 439) вниз и через точку O_2 вверх. Если пренебречь разницей между трением движения и трением покоя, то указанные полупрямые расположатся по штриховым линиям, обозначающим границы мертвой зоны. Построение Льенара показывает, что в этом случае точка B совпадает с O_1 при $y < 0$ и O_2 при $y > 0$, а фазовыми траекториями являются полуокружности, указанные на рис. 439.

Глава XXXIII

Вынужденные колебания системы
с одной степенью свободы

§ 182. Общее решение уравнения вынужденных колебаний

Вынужденные колебания возникают при действии возмущающих сил, являющихся заданными функциями времени, на систему, способную совершать малые движения около положения устойчивого равновесия.

Будем предполагать, что возмущающая обобщенная сила Q является заданной функцией времени.

При предположении о малости отклонений от положения равновесия выражения кинетической энергии, потенциальной энергии и диссипативной функции имеют вид

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c q^2, \quad \Phi = \frac{1}{2} \beta \dot{q}^2,$$

где a , c , β — положительные постоянные.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial q} + Q(t)$$

при этих условиях будет линейным неоднородным уравнением с постоянными коэффициентами

$$a\ddot{q} + \beta\dot{q} + cq = Q(t). \quad (33.1)$$

При введенных ранее обозначениях

$$c/a = k^2, \quad \beta/a = 2n \quad (33.2)$$

оно примет вид

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = \frac{1}{2} Q(t). \quad (33.3)$$

В предположении, что Q является синусоидальной функцией времени или, в более общем случае, периодической функцией, представимой рядом Фурье, при отсутствии сопротивления ($n = 0$) уравнение (33.3) было рассмотрено в § 96, 97, а при нали-

чи сопротивления — в § 99. Покажем решение в форме определенного интеграла, имеющее то преимущество, что при его составлении зависимость возмущающей силы от времени в явной форме не задается.

1°. Случай отсутствия сопротивления ($n = 0$). Дифференциальное уравнение (33.3) вынужденных колебаний примет вид

$$\ddot{q} + k^2 q = \frac{1}{a} Q(t). \quad (33.4)$$

Применим метод вариации произвольных постоянных; общее решение однородного уравнения

$$\ddot{q} + k^2 q = 0 \quad (33.5)$$

запишем в виде

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (33.6)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. В этом же виде будем искать решение неоднородного уравнения (33.4), принимая теперь, что C_1 и C_2 являются функциями времени; выбор этих функций подчинен двум условиям: во-первых, выражение \dot{q} должно при переменных C_1 и C_2 сохранять тот же вид, что и при постоянных значениях этих величин, и, во-вторых, решение (33.6) должно удовлетворять неоднородному уравнению (33.4). Первое из этих условий приводит к соотношению

$$\dot{C}_1 \cos kt + \dot{C}_2 \sin kt = 0, \quad (33.7)$$

при выполнении которого \dot{q} принимает вид

$$\dot{q} = -k(C_1 \sin kt - C_2 \cos kt). \quad (33.8)$$

Продифференцировав это выражение, получим

$$\ddot{q} = -k^2(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) - k(\dot{C}_1 \sin kt - \dot{C}_2 \cos kt),$$

или по (33.6)

$$\ddot{q} + k^2 q = -k(\dot{C}_1 \sin kt - \dot{C}_2 \cos kt).$$

Таким образом, уравнение (33.4) будет удовлетворено, если принять

$$-k(\dot{C}_1 \sin kt - \dot{C}_2 \cos kt) = \frac{1}{a} Q(t). \quad (33.9)$$

Из двух уравнений (33.7) и (33.9) получаем

$$\dot{C}_1 = -\frac{1}{ak} Q(t) \sin kt, \quad \dot{C}_2 = \frac{1}{ak} Q(t) \cos kt, \quad (33.10)$$

откуда следует, что

$$C_1(t) = D_1 - \frac{1}{ak} \int_0^t Q(\xi) \sin k\xi d\xi, \quad (33.11)$$

$$C_2(t) = D_2 + \frac{1}{ak} \int_0^t Q(\xi) \cos k\xi d\xi,$$

где D_1 и D_2 — произвольные постоянные. Из (33.6) и (33.8) находим

$$q_0 = C_1(0) = D_1, \quad \frac{1}{k} \dot{q}_0 = C_2(0) = D_2,$$

где q_0 и \dot{q}_0 — начальные значения обобщенной координаты q и обобщенной скорости \dot{q} . Подставив полученные выражения C_1 и C_2 в (33.6), придем к искомому решению:

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt + \frac{1}{ak} \left[\sin kt \int_0^t Q(\xi) \cos k\xi d\xi - \cos kt \int_0^t Q(\xi) \sin k\xi d\xi \right]. \quad (33.12)$$

Множители, не зависящие от переменной интегрирования, можно внести под знак интеграла; поэтому найденное решение записывается также в виде

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt + \frac{1}{ak} \int_0^t Q(\xi) \sin k(t - \xi) d\xi. \quad (33.13)$$

Если сила $Q(t)$ начинает действовать на первоначально покоившуюся систему, то $q_0 = 0$, $\dot{q}_0 = 0$, и выражение q принимает вид

$$q = \frac{1}{ak} \int_0^t Q(\xi) \sin k(t - \xi) d\xi. \quad (33.14)$$

Таково решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний (33.4), обращающееся в нуль вместе со своей первой производной в начальный момент времени $t = 0$. Оно дает выражение колебаний, вызванных действием силы $Q(t)$.

Слагаемое

$$q^* = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt \quad (33.15)$$

в выражении общего решения (33.13) представляет свободные колебания, создаваемые вследствие сообщения системе, находившейся в равновесии, начального отклонения и начальной скорости.

Выражение производной по времени t от определенного интеграла (33.14) состоит из двух слагаемых: первое представляет собой производную этого интеграла по верхнему пределу t и равно значению подынтегральной функции при значении переменной интегрирования ξ , равном t , второе получается при дифференцировании по t , входящему как параметр под знак интеграла:

$$\dot{q} = \frac{1}{ak} Q(t) \sin k(t-t) + \frac{1}{a} \int_0^t Q(\xi) \cos k(t-\xi) d\xi,$$

или

$$\dot{q} = \frac{1}{a} \int_0^t Q(\xi) \cos k(t-\xi) d\xi. \quad (33.16)$$

Применив еще раз указанное правило дифференцирования, получим

$$\ddot{q} = \frac{1}{a} Q(t) \cos k(t-t) - \frac{k}{a} \int_0^t Q(\xi) \sin k(t-\xi) d\xi,$$

или по (33.14)

$$\ddot{q} + k^2 q = \frac{1}{a} Q(t).$$

Таким образом, осуществлена непосредственная проверка того, что решение (33.14) удовлетворяет дифференциальному уравнению вынужденных колебаний. Из (33.14) и (33.16) сразу видно также, что решение (33.14) вместе с производной обращается в нуль в начальный момент времени.

Решение (33.14) в форме определенного интеграла можно было получить, не прибегая к методу вариации произвольных постоянных, а применив следующий наглядный способ рассуждения. Под действием импульса величины $S = 1$, прилагаемого в момент $t = 0$, покоящаяся система приобретает начальную скорость $\dot{q}_0 = S/a = 1/a$ и не получает начального отклонения.

Поэтому ее последующее движение при $t > 0$ будет определяться выражением

$$q = \psi_1(t) = \frac{1}{ak} \sin kt, \quad (33.17)$$

получаемым по (33.15) или непосредственным интегрированием уравнения (33.5) свободных колебаний при указанных начальных условиях. Функция $\psi_1(t)$ называется *реакцией системы на единичный импульс*. Если последний прикладывается не в момент $t = 0$, а при $t = \xi$, то в выражении (33.17) надо заменить t на $(t - \xi)$:

$$q(t) = \psi_1(t - \xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \xi, \\ \frac{1}{ak} \sin k(t - \xi) & \text{при } t > \xi. \end{cases}$$

Действие силы $Q(t)$ в промежутке времени $(0, t)$ можно представить как последовательное наложение импульсов бесконечно малой величины $Q(\xi) d\xi$; каждый такой импульс вызывает движение, определяемое выражением $Q(\xi)\psi_1(t - \xi) d\xi$; поэтому значение q в момент t представляет результат наложения движений, создаваемых отдельными импульсами, т. е. дается определенным интегралом:

$$q(t) = \int_0^t \psi_1(t - \xi) Q(\xi) d\xi = \frac{1}{ak} \int_0^t Q(\xi) \sin k(t - \xi) d\xi. \quad (33.18)$$

Мы снова пришли к ранее полученному решению дифференциального уравнения вынужденных колебаний, обращающемуся в нуль вместе со своей первой производной при $t = 0$. Сделав замену переменной интегрирования $t - \xi = \xi_1$, получим также

$$q(t) = \int_0^t \psi_1(\xi_1) Q(t - \xi_1) d\xi_1 = \frac{1}{ak} \int_0^t Q(t - \xi) \sin k\xi d\xi. \quad (33.19)$$

Рассмотрим, в частности, движение $q(t) = \psi_0(t)$, вызываемое действием силы Q , прилагаемой к покоящейся системе в момент $t = 0$ и сохраняющей при $t > 0$ постоянное значение $Q = 1$. По (33.19) находим

$$\psi_0(t) = \int_0^t \psi_1(\xi) d\xi = \frac{1}{ak^2} (1 - \cos kt), \quad \psi'_0(t) = \psi_1(t). \quad (33.20)$$

Функция $\psi_0(t)$ называется *реакцией системы на единичное возмущение* или *переходной проводимостью*. Реакция на единичный импульс представляет собой производную от переходной проводимости. Интегрируя (33.19) по частям, получаем представление движения через переходную проводимость

$$q(t) = \int_0^t Q(t - \xi) \psi_0'(\xi) d\xi = Q(0)\psi_0(t) + \int_0^t \psi_0(\xi) Q'(t - \xi) d\xi. \quad (33.21)$$

Полагая $Q(0) = 0$, замечая, что $ak^2 = c$, и заменяя $\psi_0(\xi)$ его значением, находим

$$q(t) = \frac{Q(t)}{c} - \frac{1}{c} \int_0^t Q'(t - \xi) \cos k\xi d\xi. \quad (33.22)$$

Первый член выражает отклонение из положения равновесия, которое получила бы система, если бы приложенная нагрузка действовала статически; действительно, отбрасывая в уравнении движения (33.4) слагаемое \ddot{q} , находим

$$q = \frac{Q(t)}{c} = q_{ст}; \quad (33.23)$$

второе слагаемое

$$\eta = -\frac{1}{c} \int_0^t Q'(t - \xi) \cos k\xi d\xi = -\frac{1}{c} \int_0^t Q'(\xi) \cos k(t - \xi) d\xi \quad (33.24)$$

дает поправку, которую нужно прибавить к статическому отклонению, чтобы получить решение рассматриваемой динамической задачи. При малом $Q'(t)$, т. е. при медленно меняющейся возмущающей силе, эта поправка будет мала.

Можно получить количественную оценку величины η . Пусть $Q(t)$ возрастает монотонно в промежутке времени $(0, t_1)$, имея при $t = t_1$ максимум, а при $t > t_1$ убывает; тогда производная $Q'(t)$ будет при $0 < t < t_1$ положительна. Предположим далее, что в указанном промежутке $Q'(t)$ имеет один максимум и это максимальное значение равно $Q'(t_m)$. Можно показать, что в таком случае

$$|\eta| < \frac{1}{c} \frac{\tau}{2} Q'(t_m), \quad (33.25)$$

где τ — период свободных колебаний; на доказательстве этой формулы, принадлежащей А. Н. Крылову [11, с. 29—30], останавливаться не будем.

Произведение $(1/2)\tau Q'(t_m)$ представляет собой максимальное возможное приращение возмущающей силы за промежуток времени, равный полупериоду свободных колебаний; обозначая это произведение через $(\Delta Q)_{\max}$, придадим формуле Крылова такую выразительную форму:

$$|\eta| < \frac{1}{c} (\Delta Q)_{\max}. \quad (33.26)$$

2°. Вынужденные колебания при наличии сопротивления. Для составления интеграла уравнения (33.3) при произвольной правой части $Q(t)$ найдем, следуя методу, изложенному выше, решение соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0 \quad (33.27)$$

при следующих начальных условиях:

$$q = 0, \quad \dot{q} = 1/a \quad \text{при } t = 0.$$

Это решение определяет реакцию $\psi_1(t)$ рассматриваемой системы на единичный импульс. Ограничившись случаем малого сопротивления ($n < k$) и введя для краткости обозначение $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$, найдем

$$\psi_1(t) = \frac{e^{-nt}}{ak_1} \sin k_1 t. \quad (33.28)$$

Таким образом, решение $q(t)$ дифференциального уравнения (33.3), обращающееся вместе со своей первой производной \dot{q} при $t = 0$ в нуль, будет иметь вид

$$q(t) = \int_0^t Q(\xi)\psi_1(t - \xi)d\xi = \frac{1}{ak_1} \int_0^t e^{-n(t - \xi)} Q(\xi) \sin k_1(t - \xi)d\xi. \quad (33.29)$$

Его производная, составляемая по указанному ранее правилу, будет

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{ak_1} \int_0^t e^{-n(t - \xi)} [k_1 \cos k_1(t - \xi) - n \sin k_1(t - \xi)] Q(\xi) d\xi, \quad (33.30)$$

или

$$\dot{q}(t) = -nq + \frac{1}{a} \int_0^t e^{-n(t - \xi)} \cos k_1(t - \xi) d\xi. \quad (33.31)$$

Нетрудно, вычислив вторую производную, непосредственно проверить, что (33.29) действительно является решением уравнения (33.3). Чтобы получить общее решение этого уравнения, надо наложить на движение (33.29), обусловленное действием силы $Q(t)$, затухающие свободные колебания $q^*(t)$, возникающие вследствие сообщения системе начального отклонения q_0 и начальной скорости \dot{q}_0 :

$$q^* = e^{-nt} \left(q_0 \cos k_1 t + \frac{nq_0 + \dot{q}_0}{k_1} \sin k_1 t \right). \quad (33.32)$$

Общее решение дифференциального уравнения (33.3) будет иметь вид

$$q = e^{-nt} \left(q_0 \cos k_1 t + \frac{nq_0 + \dot{q}_0}{k_1} \sin k_1 t \right) + \frac{1}{ak_1} \int_0^t Q(\xi) e^{-n(t-\xi)} \sin k_1(t-\xi) d\xi. \quad (33.33)$$

Переходная проводимость $\psi_0(t)$, т. е. движение, вызываемое единичной силой, прикладываемой к покоящейся системе, как и выше, определяется по формуле (33.20)

$$\psi_0(t) = \int_0^t \psi_1(t-\xi) d\xi = \int_0^t \psi_1(\xi) d\xi.$$

Подставив значение $\psi_1(\xi)$ по (33.28), найдем

$$\psi_0(t) = \frac{1}{c} \left[1 - \frac{e^{-nt}}{k_1} (k_1 \cos k_1 t + n \sin k_1 t) \right]. \quad (33.34)$$

Решение (33.29) с помощью этой функции переходной проводимости может быть записано в форме (33.21).

3°. Вынужденные колебания при действии синусоидальной силы $Q(t) = H \sin pt$. Здесь этот простейший случай рассматривается как пример применения полученных общих формул. Ограничимся случаем отсутствия сопротивления. Интеграл (33.14) принимает вид

$$q = \frac{H}{ak} \int_0^t \sin p\xi \sin k(t-\xi) d\xi = \frac{h}{k} \left(\sin kt \int_0^t \sin p\xi \cos k\xi d\xi - \cos kt \int_0^t \sin p\xi \sin k\xi d\xi \right).$$

При $p \neq k$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin p\xi \cos k\xi \, d\xi &= \\ &= \frac{1}{2(p+k)} [1 - \cos(p+k)t] + \frac{1}{2(p-k)} [1 - \cos(p-k)t], \\ \int_0^t \sin p\xi \sin k\xi \, d\xi &= \frac{\sin(p-k)t}{2(p-k)} - \frac{\sin(p+k)t}{2(p+k)}, \end{aligned}$$

тогда как при $p = k$

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin k\xi \cos k\xi \, d\xi &= \frac{1}{2k} \sin^2 kt, \\ \int_0^t \sin^2 k\xi \, d\xi &= -\frac{1}{2k} \sin kt \cos kt + \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

При $p \neq k$ подстановка в (14.33) дает

$$q = -\frac{h}{k^2 - p^2} \left(\frac{p}{k} \sin kt - \sin pt \right); \quad (33.35)$$

при $p = k$ находим

$$q = \frac{h}{2k^2} (\sin kt - kt \cos kt). \quad (33.36)$$

Приводим примеры, иллюстрирующие теорию вынужденных колебаний, изложенную в § 96, 97 для случая прямолинейного движения материальной точки. При рассмотрении этих примеров используются общие теоремы динамики и уравнения Лагранжа второго рода. Поэтому они не могли быть помещены в указанных параграфах.

Пример 158. Виброграф установлен для записи колебаний фундамента двигателя, происходящих с амплитудой a и частотой p в направлении NN (рис. 422). Определить вынужденные колебания маятника вибрографа в предположении, что колебания фундамента являются гармоническими.

Равновесное положение маятника вибрографа устанавливается перпендикулярно NN . Уравнение движения маятника получим, подставив в правую часть уравнения свободных колебаний (§ 176, пример 152) момент переносной силы инерции:

$$J\ddot{\varphi} + (Qs \cos \alpha + c)\varphi = -\frac{Q}{g} w_{es}.$$

Так как движение фундамента происходит по закону $\xi = a \sin pt$, то

$$w_e = \ddot{\xi} = -ap^2 \sin pt$$

и мы получаем

$$J\ddot{\varphi} + (Qs \cos \alpha + c)\varphi = \frac{Qs}{g} ap^2 \sin pt.$$

Вынужденные колебания маятника будут

$$\varphi = -\frac{Qs}{gJ} a \frac{1}{1 - (k/p)^2} \sin pt;$$

если перо помещено на расстоянии l от оси вращения маятника, то его перемещение составляет

$$l\varphi = -A \frac{sl}{\rho^2} \frac{a \sin pt}{1 - (k/p)^2} = -A_1 \frac{1}{1 - (k/p)^2} \ddot{\xi},$$

где A — масштабный коэффициент, ρ — радиус инерции маятника относительно оси вращения, $A_1 = (sl/\rho^2)A$. Отношение k/p берется весьма малым (§ 96); амплитуда колебаний фундамента находится поэтому из взятой по виброграмме амплитуды путем деления последней на множитель A_1 . Синусоида на виброграмме (колебание маятника) сдвинута по фазе на 180° относительно колебаний платформы, так как частота возмущающей силы превышает частоту свободных колебаний маятника.

§ 183. Верхняя граница отклонения при ограниченной силе

Во многих вопросах заранее нельзя предсказать закона изменения во времени возмущающей силы, которая может оказаться приложенной к системе, способной совершать колебания около положения равновесия, а можно лишь оценить максимальную величину силы. Важное значение в этих случаях приобретает знание величины, которой не превзойдет при нарушении равновесия координата системы. Эту величину можно определить, оценивая по модулю интеграл (33.29), в котором следует принять

$$Q(t) = Q_0 f(t), \quad (33.37)$$

где Q_0 — максимальное значение силы, а относительно функции $f(t)$ известно лишь, что

$$|f(t)| \leq 1. \quad (33.38)$$

Выражение (33.29) принимает вид

$$q(t) = \frac{Q_0}{ak_1} \int_0^t f(\xi) e^{-n(t-\xi)} \sin k_1(t-\xi) d\xi = \frac{Q_0}{ak_1} \int_0^t f(t-\xi) e^{-n\xi} \sin k_1\xi d\xi.$$

Как известно, модуль интеграла меньше либо равен интегралу от модуля подынтегральной функции. Поэтому имеем

$$|q(t)| \leq \frac{Q_0}{ak_1} \int_0^t e^{-n\xi} |f(t - \xi) \sin k_1 \xi| d\xi.$$

По условию $|f(t - \xi)| \leq 1$; поэтому

$$|q(t)| \leq \frac{Q_0}{ak_1} \int_0^t e^{-n\xi} |\sin k_1 \xi| d\xi.$$

Пусть $t = m\tau/2 + t'$, где $\tau = 2\pi/k_1$ и $0 \leq t' \leq \tau/2$; тогда

$$|\sin k_1 \xi| = \sin k_1 \xi, \quad s = 0, 1, \dots, \quad \text{при } s\tau < t < \frac{2s+1}{2}\tau,$$

$$|\sin k_1 \xi| = -\sin k_1 \xi, \quad s = 0, 1, \dots, \quad \text{при } \frac{2s+1}{2}\tau < t < (s+1)\tau$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-n\xi} |\sin k_1 \xi| d\xi &= \int_0^{\tau/2} e^{-n\xi} \sin k_1 \xi d\xi - \int_{\tau/2}^{\tau} e^{-n\xi} \sin k_1 \xi d\xi + \dots + \\ &+ (-1)^{m-1} \int_{(m-1)\tau/2}^{m\tau/2} e^{-n\xi} \sin k_1 \xi d\xi + (-1)^m \int_{m\tau/2}^{m\tau/2+t'} e^{-n\xi} \sin k_1 \xi d\xi. \end{aligned}$$

Обозначим $\zeta = e^{-n\tau/2} = e^{-n\pi/k_1}$. Дальнейшие вычисления дают

$$\begin{aligned} (-1)^s \int_{s\tau/2}^{(s+1)\tau/2} e^{-n\xi} \sin k_1 \xi d\xi &= \\ = \left[\frac{(-1)^s e^{-n\xi}}{n^2 + k_1^2} (n \sin k_1 \xi + k_1 \cos k_1 \xi) \right]_{s\tau/2}^{(s+1)\tau/2} &= \frac{k_1}{k_2} (1 + \zeta) \zeta^s, \\ & \quad s = 0, 1, 2, \dots, m-1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1)^m \int_{m\tau/2}^{m\tau/2+t'} e^{-n\xi} \sin k_1 \xi d\xi &= \\ &= \frac{k_1}{k_2} \zeta^m - \frac{1}{k_2^2} \zeta^m e^{-nt'} (n \sin k_1 t' + k_1 \cos k_1 t'). \end{aligned}$$

Находим

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-n\xi} |\sin k_1 \xi| d\xi &= \frac{k_1}{k^2} [(1 + \zeta)(1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{m-1}) + \zeta^m] - \\ &\quad - \frac{1}{k^2} \zeta^m e^{-nt'} (n \sin k_1 t' + k_1 \cos k_1 t') = \\ &= \frac{k_1}{k^2} \frac{1 + \zeta - 2\zeta^{m+1}}{1 - \zeta} - \frac{1}{k^2} \zeta^m e^{-nt'} (n \sin k_1 t' + k_1 \cos k_1 t') \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$|q(t)| \leq q_{\text{ст}} \left[\frac{1 + \zeta - 2\zeta^{m+1}}{1 - \zeta} - \zeta^m e^{-nt'} \left(\cos k_1 t' + \frac{n}{k_1} \sin k_1 t' \right) \right], \quad (33.39)$$

где $q_{\text{ст}} = Q_0/c$ — статическое отклонение под действием силы, равной по величине максимальному значению действующей силы; $c = ak^2$. При установившемся режиме ($m \rightarrow \infty$) получаем

$$|q(t)| \leq q_{\text{ст}} \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} = q_{\text{ст}} \operatorname{cth} \frac{n\tau}{4}. \quad (33.40)$$

При весьма малом сопротивлении $\zeta \approx 1 - n\tau/2 = 1 - \nu$, где принято $\nu = n/k_1$, и выражение, стоящее в правой части неравенства (33.40), равно

$$\frac{2}{\pi} \frac{q_{\text{ст}}}{\nu} \approx 0,64 \frac{q_{\text{ст}}}{\nu};$$

при синусоидальной возмущающей силе модуль максимального отклонения, вычисленный с той же степенью точности относительно ν , как указывалось в § 99, равен $0,5q_{\text{ст}}/\nu$ (в области резонанса).

В случае отсутствия сопротивления $n = 0$ и в правой части неравенства (33.39) надо совершить предельный переход

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{1 + \zeta - 2\zeta^{m+1}}{1 - \zeta} = 2m + 1,$$

что дает следующую оценку:

$$|q(t)| \leq q_{\text{ст}}(2m + 1 - \cos kt'). \quad (33.41)$$

Подставив значение $m = (k/\pi)(t - t')$, получим также

$$q(t) \leq 2q_{\text{ст}} \left[\frac{k}{\pi} (t - t') + \sin^2 \frac{kt'}{2} \right]. \quad (33.42)$$

§ 184. Периодическое решение уравнения вынужденных колебаний

Решение (21.76) в форме бесконечного ряда, относящееся к случаю произвольной периодической силы, не всегда удобно, так как ряд Фурье для возмущающей силы $Q(t)$ может сходиться медленно. Например, если функция $Q(t)$ имеет разрывы первого рода, то коэффициенты ее ряда Фурье a_n, b_n убывают не быстрее чем n^{-1} ; при наличии разрывов первого рода у производной $\dot{Q}(t)$ сходимость ряда будет порядка n^{-2} . Хотя сходимость ряда для $q(t)$ в том и другом случаях соответственно будет порядка n^{-3} и n^{-4} , исследование решения можно часто упростить, представив его в замкнутой форме.

Пусть обобщенная сила $Q(t)$ будет периодической функцией периода τ :

$$Q(t) = Q(t + \tau). \quad (33.43)$$

Поставим задачу об определении вынужденных колебаний, т. е. нахождении имеющего тот же период решения дифференциального уравнения (33.3). Это решение должно удовлетворять условиям

$$q_0 = q(0) = q(\tau), \quad \dot{q}_0 = \dot{q}(0) = \dot{q}(\tau), \quad (33.44)$$

где q_0 и \dot{q}_0 — значения обобщенной координаты и обобщенной скорости в некий момент, принимаемый за начало отсчета времени t . Обратное, решение, удовлетворяющее условиям (33.44), будет периодическим с периодом τ , так как дифференциальное уравнение движения (33.3) не меняет вида при замене t на $t + \tau$, а начальные условия, согласно (33.44), также одинаковы для моментов $t = 0$ и $t = \tau$. Частный случай этой задачи — нахождение периодического режима движения под действием периодически прикладываемых импульсов — рассмотрен в § 97 (пример 89).

* Это следует из таких соображений: в первом случае функция $Q(t)$ и, следовательно, $\ddot{q}(t)$ разрывны, тогда как q и \dot{q} непрерывны, так как координата всегда изменяется непрерывно и жестких ударов, по предположению, нет, т. е. скорости также непрерывны; ряд же Фурье для непрерывной со своей первой производной функции $q(t)$ имеет коэффициенты, убывающие как n^{-3} ; если же $q, \dot{q}, Q(t)$, т. е. и $\ddot{q}(t)$ непрерывны, то сходимость будет порядка не ниже чем n^{-4} .

По (33.33) имеем

$$q(t) = e^{-nt} \left(q_0 \cos k_1 t + \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{k_1} \sin k_1 t \right) + \frac{e^{-nt}}{ak_1} \left[\sin k_1 t \int_0^t Q(\xi) e^{n\xi} \cos k_1 \xi d\xi - \cos k_1 t \int_0^t Q(\xi) e^{n\xi} \sin k_1 \xi d\xi \right], \quad (33.45)$$

$$\frac{\dot{q}(t) + nq(t)}{k_1} = e^{-nt} \left(-q_0 \sin k_1 t + \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{k_1} \cos k_1 t \right) + \frac{e^{-nt}}{ak_1} \left[\cos k_1 t \int_0^t Q(\xi) e^{n\xi} \cos k_1 \xi d\xi + \sin k_1 t \int_0^t Q(\xi) e^{n\xi} \sin k_1 \xi d\xi \right].$$

Подставив значение $t = \tau$ и обозначив для краткости

$$\int_0^\tau Q(\xi) e^{n\xi} \cos k_1 \xi d\xi = C, \quad \int_0^\tau Q(\xi) e^{n\xi} \sin k_1 \xi d\xi = S, \quad (33.46)$$

запишем условия (33.44) периодичности решения так:

$$q_0(e^{n\tau} - \cos k_1 \tau) - \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{k_1} \sin k_1 \tau = \frac{1}{ak_1} (C \sin k_1 \tau - S \cos k_1 \tau), \quad (33.47)$$

$$q_0 \sin k_1 \tau + \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{k_1} (e^{n\tau} - \cos k_1 \tau) = \frac{1}{ak_1} (C \cos k_1 \tau + S \sin k_1 \tau).$$

Из этой системы уравнений находим

$$q_0 = \frac{1}{ak_1} \frac{e^{n\tau}(C \sin k_1 \tau - S \cos k_1 \tau) + S}{1 - 2e^{n\tau} \cos k_1 \tau + e^{2n\tau}}, \quad (33.48)$$

$$\frac{\dot{q}_0 + nq_0}{k_1} = \frac{1}{ak_1} \frac{e^{n\tau}(C \cos k_1 \tau + S \sin k_1 \tau) - C}{1 - 2e^{n\tau} \cos k_1 \tau + e^{2n\tau}}.$$

Подстановка в (33.45) дает искомое периодическое решение

$$q = \frac{e^{-nt}}{ak_1} \left\{ \frac{C[e^{n\tau} \sin k_1(t + \tau) - \sin k_1 t] - S[e^{n\tau} \cos k_1(t + \tau) - \cos k_1 t]}{1 - 2e^{n\tau} \cos k_1 \tau + e^{2n\tau}} + \int_0^t Q(\xi) e^{n\xi} \sin k_1(t - \xi) d\xi \right\}. \quad (33.49)$$

Полученное выражение определяет движение в интервале времени $(0, \tau)$. Но, поскольку оно представляет собой периодическую функцию периода τ , достаточно его знать только на протяжении этого периода; имея график $q(t)$ для $0 \leq t \leq \tau$, можно повторить его в соседних интервалах $(\tau, 2\tau)$, $(2\tau, 3\tau)$ и т. д.

Для нахождения периодического решения дифференциального уравнения (33.3), имеющего период возмущающей силы $Q(t)$, можно было бы, как указывалось в § 97, разложить $Q(t)$ в тригонометрический ряд и получить решение $q(t)$ также в форме тригонометрического ряда. Просуммировав этот ряд для интервала времени $(0, \tau)$, мы пришли бы к решению (33.49). Способ построения периодического решения, излагаемый здесь, позволил избежать как нахождения разложения $Q(t)$, так и суммирования ряда для $q(t)$.

Рассмотрим, в частности, случай периодической силы, изменяющей знак через полупериод $\tau/2$:

$$Q(t) = -Q(t + \tau/2), \quad (33.50)$$

и будем искать решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний, также меняющее знак по истечении полупериода; условия (33.44) перепишем в виде

$$q_0 = -q(\tau/2), \quad \dot{q}_0 = -\dot{q}(\tau/2). \quad (33.51)$$

Подставив в этом случае в (33.45) значение $t = \tau/2$, получим вместо (33.47) систему уравнений

$$\begin{aligned} q_0(e^{n\tau/2} + \cos(k_1\tau/2)) + ((\dot{q}_0 + nq_0)/k_1) \sin(k_1\tau/2) = \\ = -(1/(ak_1))(C_1 \sin(k_1\tau/2) - S_1 \cos(k_1\tau/2)), \end{aligned} \quad (33.52)$$

$$\begin{aligned} -q_0 \sin(k_1\tau/2) + ((\dot{q}_0 + nq_0)/k_1)(e^{n\tau/2} + \cos(k_1\tau/2)) = \\ = -(1/(ak_1))(C_1 \cos(k_1\tau/2) + S_1 \sin(k_1\tau/2)), \end{aligned}$$

где

$$C_1 = \int_0^{\tau/2} Q(\xi)e^{n\xi} \cos k_1\xi d\xi, \quad S_1 = \int_0^{\tau/2} Q(\xi)e^{n\xi} \sin k_1\xi d\xi. \quad (33.53)$$

Из (33.52) получим значения q_0 и $\dot{q}_0 + nq_0$ и после подстановки в (33.45) искомое периодическое решение для интервала времени $(0, \tau/2)$:

$$q(t) = \frac{e^{-nt}}{ak_1} \left\{ S_1 \frac{e^{n\tau/2} \cos k_1(t + \tau/2) + \cos k_1 t}{1 + 2e^{n\tau/2} \cos(k_1\tau/2) + e^{n\tau}} - C_1 \frac{e^{n\tau/2} \sin k_1(t + \tau/2) + \sin k_1 t}{1 + 2e^{n\tau/2} \cos(k_1\tau/2) + e^{n\tau}} + \int_0^t Q(\xi) e^{n\xi} \sin k_1(t - \xi) d\xi \right\}. \quad (33.54)$$

Решение (33.54) должно быть продолжено нечетным образом в интервал времени $(\tau/2, \tau)$

$$q(t + \tau/2) = -q(t), \quad 0 \leq t \leq \tau/2 \quad (33.55)$$

и далее, как указано выше, определено по условию периодичности в интервалах $(\tau, 2\tau)$, $(2\tau, 3\tau)$ и т. д.

Полученные выражения значительно упрощаются, если период возмущающей силы τ оказывается равным периоду свободных колебаний $\tau_1 = 2\pi/k_1$. Так, в случае силы, меняющей знак через полупериод, по (33.54) получим

$$q(t) = \frac{e^{-nt}}{ak_1} \left[-\frac{\zeta}{1-\zeta} (S_1 \cos k_1 t - C_1 \sin k_1 t) + \int_0^t Q(\xi) e^{n\xi} \sin k_1(t - \xi) d\xi \right], \quad (33.56)$$

где, как и выше, $\zeta = e^{-n\tau_1/2}$.

Выражения $q(t)$ значительно упрощаются и в случае отсутствия сопротивления. Так, полагая в (33.49) $n = 0$, получаем

$$q = \frac{1}{2ak \sin(k\tau/2)} \left[C \cos k \left(t + \frac{\tau}{2} \right) + S \sin k \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \right] + \frac{1}{ak} \int_0^t Q(\xi) \sin k(t - \xi) d\xi, \quad (33.57)$$

причем и в выражениях C и S надо принять $n = 0$. Если же сила через полупериод меняет знак, то по (33.54) придем к выражению

$$q = \frac{1}{2ak \cos(k\tau/4)} \left[S_1 \cos k \left(t + \frac{\tau}{4} \right) - C_1 \sin k \left(t + \frac{\tau}{4} \right) \right] + \frac{1}{ak} \int_0^t Q(\xi) \sin k(t - \xi) d\xi. \quad (33.58)$$

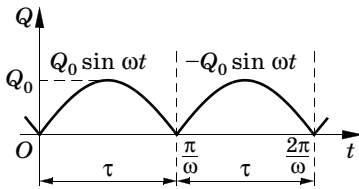


Рис. 443

Наличие в знаменателе выражения (33.57) множителя $\sin(k\tau/2)$, обращающегося в нуль при $k\tau = 2\pi s$ (s — целое число), указывает на возможность резонанса при равенстве частоты свободных колебаний целому кратному частоты возмущающей силы. Знаменатель выражения (33.58) обращается

в нуль при $k\tau = (2s + 1)2\pi$, т. е. при равенстве частоты свободных колебаний нечетному кратному частоты возмущающей силы; это объясняется тем, что в разложении в тригонометрический ряд функции, меняющей знак через полупериод, гармоники четного порядка отсутствуют.

Пример 159. Рассмотреть колебания системы, вызванные действием возмущающей силы, меняющейся по закону *выпрямленной синусоиды*

$$Q(t) = Q_0 |\sin \omega t| \quad (33.59)$$

и имеющие период этой силы. Частота свободных колебаний системы равна k . Сопротивлением пренебрегаем.

График изменения силы дан на рис. 443; ее частота равна 2ω . Вычисляем величины S и C :

$$S = Q_0 \int_0^{\pi/\omega} \sin \omega \xi \sin k \xi \, d\xi = \frac{\omega Q_0}{\omega^2 - k^2} \sin \frac{k\pi}{\omega},$$

$$C = Q_0 \int_0^{\pi/\omega} \sin \omega \xi \cos k \xi \, d\xi = \frac{\omega Q_0}{\omega^2 - k^2} \left(1 + \cos \frac{k\pi}{\omega} \right).$$

По (33.57) получим

$$q(t) = q_{\text{ст}} \left[\frac{k\omega}{\omega^2 - k^2} \left(\sin kt + \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2\omega} \cos kt \right) - \frac{k^2 \sin \omega t}{\omega^2 - k^2} \right],$$

где

$$q_{\text{ст}} = Q_0/(ak^2) = Q_0/c.$$

Резонанс имеет место при $k\pi/(2\omega)$, равном целому кратному π , т. е. при $\omega = k/2, k/4, k/6$ и т. д. (частота свободных колебаний k равна целому кратному частоты 2ω возмущающей силы). При $\omega = k$ выражение для q имеет неопределенный вид. Раскрыв неопределенность, найдем

$$q = (1/2)q_{\text{ст}}[\sin kt + (\pi/2 - kt) \cos kt].$$

Наличие множителя kt вне знака тригонометрической функции не служит признаком резонанса, так как полученное выражение имеет место лишь при $t \leq \pi/\omega$, т. е. множитель kt не превосходит π .

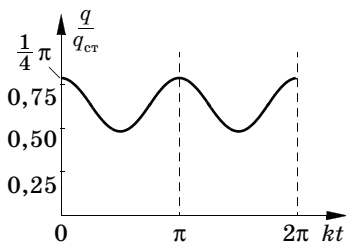


Рис. 444

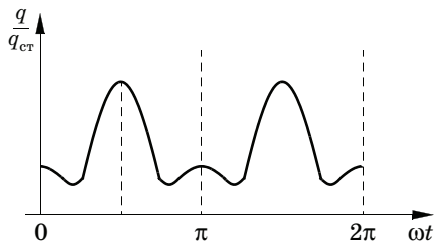


Рис. 445

График q при $\omega = k$ построен на рис. 444. Вычисления произведены для интервала $(0, \pi/\omega)$, и построенный график продолжен по свойству периодичности функции $q(t)$ в соседние интервалы.

В случае $k = 3,5\omega$ для $0 \leq t \leq \pi/\omega$ получим

$$q = \frac{49}{45} q_{\text{ст}} \left[\sin \omega t - \frac{2\sqrt{2}}{7} \sin \left(3,5\omega t - \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

По этому уравнению построен на рис. 445 график $q(t)$. Максимальная ордината (при $\omega t = \pi/2$) равна

$$\frac{49}{45} \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{7} \right) q_{\text{ст}} \approx 1,31 q_{\text{ст}}.$$

Отметим, что $q(t)$ и его производная являются непрерывными функциями t .

Пример 160. Математическому маятнику массой m и длиной l в моменты прохождения им равновесного положения сообщаются импульсы одинаковой величины I , направленные каждый раз в сторону движения маятника (схема часов со спусковым механизмом). Определить движение маятника в установившемся режиме.

Рассмотрим сначала задачу о нахождении установившегося движения маятника под действием периодически сообщаемых с периодом τ импульсов, причем за каждый период сообщается два импульса противоположного направления: один в начале периода, другой — по истечении полупериода. Речь идет, таким образом, о нахождении периодического решения дифференциального уравнения

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = Q(t)/(ml^2).$$

Здесь $Q(t)$ — периодическая (с периодом τ) функция времени, представляющая момент внешней силы относительно оси подвеса. В случае импульса следует принять

$$Q(t) = \begin{cases} Q_0 & \text{при } 0 < t < \Delta t, \\ 0 & \text{при } \Delta t < t < \tau/2 \end{cases}$$

и в результатах вычисления по формулам (33.53) и (33.54) сделать предельный переход

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} Q_0 \Delta t = Il.$$

Получаем

$$C_1 = Il, \quad S_1 = 0, \quad \int_0^t e^{n\xi} Q(\xi) \sin k_1(t - \xi) d\xi = Il \sin k_1 t,$$

и подстановка в выражение (33.54) при $0 < t < \tau/2$ дает

$$\varphi = \frac{Ie^{-nt} \sin k_1 t + \zeta_1 \sin k_1(t - \tau/2)}{mlk_1 (1 + 2\zeta_1 \cos(k_1 \tau/2) + \zeta_1^2)}, \quad \zeta_1 = e^{-n\tau/2}. \quad (33.60)$$

При $t = 0$, т. е. в момент сообщения импульса, направленного в сторону возрастания φ , получим

$$\varphi = \varphi_0 = -\frac{I}{mlk_1} \frac{\zeta_1 \sin(k_1 \tau/2)}{1 + 2\zeta_1 \cos(k_1 \tau/2) + \zeta_1^2}. \quad (33.61)$$

Выражение $\varphi(\tau/2)$, соответствующее моменту сообщения импульса противоположного направления, как следует из (33.60), будет иметь противоположный знак. Если импульсы сообщаются в момент прохождения маятником положения равновесия, то $\varphi_0 = 0$ и $k_1 \tau/2 = \pi$, т. е. частота импульсов должна равняться частоте свободных колебаний маятника; это и осуществляется в схеме часов, если механизм спуска срабатывает каждый раз при прохождении среднего положения. При такой частоте импульсов выражения φ и $\dot{\varphi}$ принимают вид

$$\varphi = \frac{Ie^{-nt} \sin k_1 \tau}{mlk_1 (1 - \zeta)}, \quad \dot{\varphi} = \frac{Ie^{-nt} [\cos k_1 t - (n/k_1) \sin k_1 t]}{ml(1 - \zeta)}, \quad \zeta = \zeta_1 = e^{-n\tau/2}, \quad (33.62)$$

откуда следует, что в момент $t = +0$, следующий за сообщением импульса, направленного в сторону возрастания угла φ , значение угловой скорости будет

$$\dot{\varphi}(+0) = \frac{I}{ml(1 - \zeta)}. \quad (33.63)$$

Значение $\dot{\varphi}$ в момент $t = \tau/2 - 0$, предшествующий сообщению очередного импульса противоположного направления, найдем, подставив значение $t = \tau/2$ в (33.62):

$$\dot{\varphi} \left(\frac{1}{2} \tau - 0 \right) = -\frac{I\zeta}{ml(1 - \zeta)}. \quad (33.64)$$

Сообщение указанного очередного импульса изменяет угловую скорость на величину $-I/(ml)$; получаем

$$\dot{\phi}\left(\frac{1}{2}\tau + 0\right) = -\frac{I}{ml} \left(\frac{\zeta}{1-\zeta} + 1\right) = -\frac{I}{ml(1-\zeta)} = -\dot{\phi}(+0),$$

что и должно быть: значения ϕ и $\dot{\phi}$ в моменты, следующие за сообщением двух последовательных импульсов, имеют одинаковые численные значения и противоположные знаки. Поэтому, продолжив решение (33.62) в интервал $(\tau/2, \tau)$ нечетным образом, действительно придем к искомому периодическому решению, представляющему установившееся движение маятника.

Максимальное отклонение маятника от положения равновесия имеет место в момент времени

$$t_m = (1/k_1) \operatorname{arctg}(k_1/n),$$

где значение арктангенса берется в первой четверти, а также в моменты, отличающиеся от t_m на целое число полупериодов $\tau/2$. Соответствующие значения ϕ будут

$$\phi_{\max} = \frac{Ie^{-nt_m} \sin \operatorname{arctg}(k_1/n)}{k_1 ml (1-\zeta)},$$

откуда, замечая, что при указанном определении арктангенса

$$\sin \operatorname{arctg}(k_1/n) = k_1/k,$$

получим

$$\phi_{\max} = \frac{Ie^{-nt_m}}{kml(1-\zeta)}. \quad (33.65)$$

Полученное решение соответствует периодическому, а отнюдь не затухающему движению, как это могло бы показаться по внешнему виду формул (33.62), так как эти формулы пригодны для нахождения движения только при $0 < t < \tau/2$; зная последнее, можно, как было указано выше, найти ϕ при любом значении t .

Решение (33.62) является некоторым частным решением, удовлетворяющим определенным начальным условиям, а именно тем, которые были указаны выше. При других начальных условиях мы получили бы решение, неограниченно приближающееся после каждого размаха маятника к установившемуся режиму. Таким образом, всякий как угодно начинающийся процесс движения в рассматриваемой системе (схеме часов со спусковым механизмом) приводится к периодическому режиму. Подобные устанавливающиеся периодические движения, которые могут возникнуть при наличии внешнего источника энергии, называются *автоколебательными движениями*. Внешняя сила (импульсы) здесь отнюдь не является заданной функцией времени, так как импульсы сообщаются не через определенные промежутки времени, а при прохождении движущимся телом определенного положения ($\phi = 0$); эти «силы» следует считать поэтому функциями положения: при всяком $\phi \neq 0$ они отсутствуют и действуют только при $\phi = 0$.

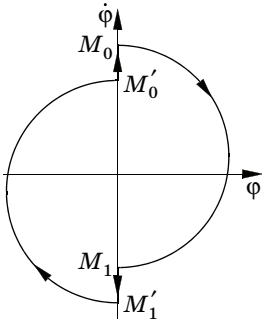


Рис. 446

На фазовой плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ рассматриваемому установившемуся периодическому движению соответствует замкнутая траектория (предельный цикл) $M_0M_1M'_1M'_0$, представленная на рис. 446. Она состоит из участков спиралей M_0M_1 , $M'_1M'_0$ и отрезков оси ординат $M_1M'_1$ и M'_0M_0 . Уравнение спирали M_0M_1 получим, исключив время из соотношений (33.62) способом, указанным в § 177. Ордината точки M_1 по (33.63) и (33.64) равна произведению ординаты точки M_0 на множитель $\zeta < 1$. Движению по участку M_0M_1 соответствуют интервалы времени $(0, \tau/2 - 0)$, $(\tau + 0, 3\tau/2 - 0)$ и т. д. Участок спирали $M'_1M'_0$ расположен симметрично участку M_0M_1 относительно начала координат; движение по $M'_1M'_0$ происходит в течение интервалов времени $(\tau/2 + 0, \tau - 0)$, $(3\tau/2 + 0, 2\tau - 0)$ и т. д. Переходам изображающей точки по отрезку оси ординат $M'_1M'_0$ соответствуют разрывы угловой скорости на величину $I/(ml)$, вызванные сообщением импульсов в моменты $0, \tau, 2\tau$ и т. д.; импульсам противоположного знака, прикладываемым в моменты $\tau/2, 3\tau/2$ и т. д., отвечает мгновенный переход изображающей точки по отрезку $M_1M'_1$.

Если сообщить покоящемуся маятнику скорость и начальное отклонение, соответствующие точке, расположенной на замкнутой фазовой траектории, то при действии импульсов, прикладываемых при прохождении положения $\varphi = 0$, сразу же возникает описанное автоколебательное движение. При всяких других начальных условиях фазовая траектория асимптотически приближается к построенной замкнутой траектории, навиваясь на нее изнутри или извне; эта незамкнутая траектория состоит из бесчисленного множества отрезков спиралей, претерпевающих разрывы непрерывности (указанных выше величины и знака) при пересечении с осью ординат.

Глава XXXIV

Колебания системы с двумя степенями свободы

§ 185. Дифференциальные уравнения свободных колебаний

Рассмотрим консервативную динамическую систему, подчиненную стационарным голономным связям и имеющую две степени свободы; независимые обобщенные координаты системы обозначим через q_1 и q_2 .

Поскольку связи стационарны, кинетическая энергия системы является однородной квадратичной формой обобщенных скоростей (§ 159):

$$T = (1/2) (A_{11} \dot{q}_1^2 + 2A_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + A_{22} \dot{q}_2^2). \quad (34.1)$$

Коэффициенты A_{ik} являются функциями от координат q_1, q_2 . Не нарушая общности, можно принять, что обобщенные координаты отсчитываются от того положения равновесия, около которого происходит рассматриваемое движение, т. е. в этом положении равновесия $q_1 = 0$ и $q_2 = 0$. Так как в дальнейшем рассматриваются только весьма малые движения, то в разложении коэффициентов $A_{ik}(q_1, q_2)$ в ряд по степеням q_1, q_2 можно ограничиваться только постоянным слагаемым:

$$A_{ik}(q_1, q_2) = A_{ik}(0, 0) + \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_2}\right)_0 q_2 + \dots \approx A_{ik}(0, 0),$$

где $i, k = 1, 2$. Положим для упрощения записи $A_{ik}(0, 0) = a_{ik} = a_{ki}$, получим

$$T = (1/2)(a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2). \quad (34.2)$$

Обозначая через $\Pi(q_1, q_2)$ потенциальную энергию системы и разлагая выражение ее в ряд Тейлора, находим

$$\begin{aligned} \Pi(q_1, q_2) = & \Pi(0, 0) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\right)_0 q_2 + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2}\right)_0 q_2^2 \right] + \dots \end{aligned} \quad (34.3)$$

Потенциальную энергию системы в положении равновесия можно без ущерба для общности считать равной нулю: $\Pi(0, 0) = 0$. Кроме того,

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\right)_0 = 0,$$

так как значениям обобщенных координат, равным нулю, соответствует положение равновесия, а в последнем обобщенные силы

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2,$$

обращаются в нуль. Для упрощения записи обозначим далее

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}\right)_0 = c_{11}, \quad \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 = c_{12} = c_{21}, \quad \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2}\right)_0 = c_{22}$$

и примем, что эти коэффициенты не обращаются все в нуль; пренебрегая в разложении (34.3) слагаемыми выше второго порядка, получаем

$$\Pi = (1/2) \left(c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2 \right). \quad (34.4)$$

Постоянные a_{ik} и c_{ik} называются соответственно *инерционными* и *квазиупругими коэффициентами*. Напомним, что функция, обращающаяся в нуль только в том случае, когда все независимые переменные равны нулю, и сохраняющая знак при любых вещественных значениях переменных, заключенных в некоторой области, называется *знакоопределенной*. Кинетическая энергия представляет пример знакоопределенной положительной однородной квадратичной формы обобщенных скоростей. Точно так же в области минимума, которому, согласно теореме Лагранжа (§ 147), соответствует положение устойчивого равновесия, потенциальная энергия представляет знакоопределенную положительную функцию обобщенных координат; в случае малых движений она аппроксимируется квадратичной формой (34.4).

Составим уравнения малых колебаний системы около положения устойчивого равновесия. Поскольку коэффициенты a_{ik} постоянны,

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2, \\ Q_1 &= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = -(c_{11} q_1 + c_{12} q_2), & Q_2 &= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = -(c_{21} q_1 + c_{22} q_2), \end{aligned}$$

причем, как было указано,

$$a_{12} = a_{21}, \quad c_{12} = c_{21}. \quad (34.5)$$

Дифференциальные уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 &= 0, \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (34.6)$$

Помимо условий (34.5), коэффициенты уравнений (34.6) должны удовлетворять еще некоторым неравенствам, вытекающим из свойства положительной знакоопределенности квадратичных форм (34.2) и (34.4). Чтобы найти эти неравенства, заметим, что квадратичную форму двух переменных

$$f = f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + f_{22}x_2^2$$

можно (предполагая $f_{22} \neq 0$) представить в виде

$$f = \frac{1}{f_{22}} [(f_{12}x_1 + f_{22}x_2)^2 + (f_{11}f_{22} - f_{12}^2)x_1^2],$$

откуда следует, что f будет определенной формой того же знака, что и f_{22} , при условии положительности дискриминанта формы

$$D = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0. \quad (34.7)$$

Если же $D < 0$, то f изменит знак, обратившись в нуль при $f_{12}x_1 + f_{22}x_2 = \pm x_1 \sqrt{-D}$. Наконец, при $D = 0$ форма будет *знакопостоянной положительной*, но не знакоопределенной: она обратится в нуль при $f_{12}x_1 + f_{22}x_2 = 0$, а не только при равных одновременно нулю x_1 и x_2 . Итак, f будет формой положительной знакоопределенной, если выполняются условия

$$f_{22} > 0, \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0. \quad (34.8)$$

Из условий (34.8) следует, что для положительной знакоопределенной формы выполняется неравенство

$$f_{11} > 0. \quad (34.9)$$

Коэффициенты a_{ik} в выражении кинетической энергии должны удовлетворять поэтому соотношениям

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0. \quad (34.10)$$

Предполагая еще, что рассматриваемые малые движения совершаются в области минимума потенциальной энергии, т. е. около положения устойчивого равновесия, имеем также

$$c_{11} > 0, \quad c_{22} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0. \quad (34.11)$$

§ 186. Интегрирование уравнений свободных колебаний

Будем искать частное решение уравнений (34.6) в виде

$$q_1 = A_1 \sin(kt + \alpha), \quad q_2 = A_2 \sin(kt + \alpha), \quad (34.12)$$

т. е. примем, что координаты q_1 и q_2 совершают гармонические колебания одинаковой частоты k и одинаковой или прямо противоположной (если знаки A_1 и A_2 различны) фазы, отличающиеся друг от друга только амплитудами. Подставляя (34.12) в (34.6) и отбрасывая одинаковый для всех членов множитель $\sin(kt + \alpha)$, получаем

$$\begin{aligned} A_1(c_{11} - k^2 a_{11}) + A_2(c_{12} - k^2 a_{12}) &= 0, \\ A_1(c_{21} - k^2 a_{21}) + A_2(c_{22} - k^2 a_{22}) &= 0. \end{aligned} \quad (34.13)$$

Эта система двух линейных однородных уравнений имеет, кроме тривиального решения $A_1 = 0, A_2 = 0$, другие решения, если отношения $A_1 : A_2$, вычисленные из первого и второго уравнений (34.13), равны друг другу, т. е. если

$$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{c_{12} - k^2 a_{12}}{c_{11} - k^2 a_{11}} = -\frac{c_{22} - k^2 a_{22}}{c_{21} - k^2 a_{21}}, \quad (34.14)$$

отсюда следует

$$\Delta(k^2) = (c_{11} - k^2 a_{11})(c_{22} - k^2 a_{22}) - (c_{12} - k^2 a_{12})^2 = 0 \quad (34.15)$$

или

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)k^4 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{13})k^2 + (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) = 0. \quad (34.16)$$

Условие (34.15) можно было бы получить и иначе, а именно потребовав, чтобы при существовании отличных от нуля решений системы (34.13) определитель из ее коэффициентов обратился в нуль:

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - k^2 a_{11} & c_{12} - k^2 a_{12} \\ c_{21} - k^2 a_{21} & c_{22} - k^2 a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

При выполнении условия (34.15) одно из уравнений (34.13) является следствием другого, т. е. каждое из этих уравнений может служить для определения отношения $A_1 : A_2$, тогда как одно из неизвестных A_1 или A_2 остается неопределенным.

Уравнение (34.15), определяющее возможные частоты k , носит название *характеристического* или *частотного уравнения*. Обозначим корни этого уравнения в порядке их возрастания через k_1^2 и k_2^2 , $k_1^2 < k_2^2$. Важно убедиться, что эти корни положительны. Если бы оба корня (или один из них) оказались отрицательными, или комплексными, то k_1 и k_2 (или один из них) были бы мнимыми или комплексными. Соответствующее решение (34.12), содержащее гиперболические функции времени, при достаточно большом t , вообще говоря, возрастало бы неограниченно, что противоречит предположению об устойчивости состояния равновесия, около которого рассматриваются малые колебания. Обратно, принимая, что движение происходит в области минимума потенциальной энергии, нетрудно показать, что k_1^2 и k_2^2 положительны.

Имеем*

$$\begin{aligned} \Delta(0) &= c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0, \\ \Delta\left(\frac{c_{11}}{a_{11}}\right) &= -\left(c_{12} - \frac{c_{11}}{a_{11}} a_{12}\right)^2 \leq 0, \\ \Delta\left(\frac{c_{22}}{a_{22}}\right) &= -\left(c_{12} - \frac{c_{22}}{a_{22}} a_{12}\right)^2 \leq 0, \\ \Delta(\pm\infty) &= +\infty; \end{aligned} \tag{34.17}$$

последнее условие является следствием того, что при достаточно большом k^2 знак $\Delta(k^2)$ определяется знаком коэффициента $(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$ при k^4 , который, согласно (34.10), положителен.

Пусть $c_{11}/a_{11} < c_{22}/a_{22}$, причем по (34.10) и (34.11) эти величины положительны. Переписав соотношения (34.17) в виде таблицы, убеждаемся, что уравнение (34.15) имеет *два положительных корня* k_1^2 и k_2^2 , лежащих в интервалах

k^2	$-\infty$	0	$\frac{c_{11}}{a_{11}}$	$\frac{c_{22}}{a_{22}}$	∞
$\Delta(k^2)$	+	+	-	-	+

$$0 < k_1^2 \leq \frac{c_{11}}{a_{11}}, \quad \frac{c_{22}}{a_{22}} \leq k_2^2 < +\infty. \tag{34.18}$$

* Случай $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0$, когда один из корней обращается в нуль, и случай кратных корней, когда $\Delta(c_{11}/a_{11})$ и $\Delta(c_{22}/a_{22})$ одновременно равны нулю, будут рассмотрены ниже.

Взяв один из корней, например k_1^2 , найдем из (34.14) соответствующее значение отношения $A_1 : A_2$:

$$\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}} = -\frac{c_{12} - k_1^2 a_{12}}{c_{11} - k_1^2 a_{11}} = -\frac{c_{22} - k_1^2 a_{22}}{c_{21} - k_1^2 a_{21}} = \beta_1, \quad (34.19)$$

где верхние индексы ⁽¹⁾ и ⁽²⁾ соответствуют номерам корней. Можно поэтому принять

$$A_1^{(1)} = C_1(c_{22} - k_1^2 a_{22}), \quad A_2^{(1)} = -C_1(c_{21} - k_1^2 a_{21}), \quad (34.20)$$

где C_1 — произвольная постоянная. Конечно, вместо (34.20) можно было бы написать

$$A_1^{(1)} = -C'_1(c_{12} - k_1^2 a_{12}), \quad A_2^{(1)} = C'_1(c_{11} - k_1^2 a_{11}).$$

Обозначая через α_1 фазу, соответствующую частоте k_1 , на основании формул (34.12) получаем

$$\begin{aligned} q_1^{(1)} &= C_1(c_{22} - k_1^2 a_{22}) \sin(k_1 t + \alpha_1), \\ q_2^{(1)} &= -C_1(c_{21} - k_1^2 a_{21}) \sin(k_1 t + \alpha_1), \end{aligned} \quad (34.21)$$

т. е.

$$q_1^{(1)} = \beta_1 q_2^{(1)}. \quad (34.22)$$

Эти формулы определяют *первое главное колебание*.

Если система совершает первое главное колебание, то обе координаты ее колеблются по гармоническому закону, имея одинаковые частоты и одинаковые или прямо противоположные фазы, т. е. одновременно приходя в положение равновесия, одновременно достигая максимальных отклонений от него и т. д.; амплитуды колебаний той и другой координаты находятся при этом в определенном отношении β_1 , не зависящем от начальных условий.

Корню k_2^2 (частоте k_2) соответствует *второе главное колебание системы*, определяемое формулами

$$\begin{aligned} q_1^{(2)} &= -C_2(c_{12} - k_2^2 a_{12}) \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ q_2^{(2)} &= C_2(c_{11} - k_2^2 a_{11}) \sin(k_2 t + \alpha_2), \end{aligned} \quad (34.23)$$

причем отношение амплитуд колебаний обеих координат будет

$$\frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}} = -\frac{c_{12} - k_2^2 a_{12}}{c_{11} - k_2^2 a_{11}} = -\frac{c_{22} - k_2^2 a_{22}}{c_{21} - k_2^2 a_{21}} = \beta_2 \quad (34.24)$$

и, следовательно,

$$q_1^{(2)} = \beta_2 q_2^{(2)}. \quad (34.25)$$

Формулы (34.21) и (34.23) определяют две системы частных решений дифференциальных уравнений (34.6), содержащие каждая по две произвольные постоянные (C_1, α_1 и C_2, α_2). В силу линейности этих уравнений их *общее решение*, содержащее *четыре* произвольные постоянные, получим, складывая частные решения:

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)} = \beta_1 q_2^{(1)} + \beta_2 q_2^{(2)} = C_1(c_{22} - k_1^2 a_{22}) \sin(k_1 t + \alpha_1) - C_2(c_{12} - k_2^2 a_{12}) \sin(k_2 t + \alpha_2), \quad (34.26)$$

$$q_2 = q_2^{(1)} + q_2^{(2)} = -C_1(c_{21} - k_1^2 a_{21}) \sin(k_1 t + \alpha_1) + C_2(c_{11} - k_2^2 a_{11}) \sin(k_2 t + \alpha_2).$$

Произвольные постоянные должны быть определены из начальных условий: при $t = 0$ задаются значения обобщенных координат и скоростей

$$q_1 = q_{10}, \quad q_2 = q_{20}, \quad \dot{q}_1 = \dot{q}_{10}, \quad \dot{q}_2 = \dot{q}_{20}. \quad (34.27)$$

Из общего решения (34.26) следует, что каждая из координат совершает колебательное движение, которое является результатом наложения главных колебаний различных частот k_1 и k_2 . Так как k_1 и k_2 , вообще говоря, несоизмеримы, движение это не будет периодическим. Введение главных колебаний допускает возможность представления движения системы в виде суммы простых гармонических движений — главных колебаний.

Если бы коэффициенты a_{12} и c_{12} были равны нулю, то система совместных дифференциальных уравнений (34.6) распалась бы на два независимых уравнения:

$$a_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 = 0, \quad a_{22}\ddot{q}_2 + c_{22}q_2 = 0. \quad (34.28)$$

Поэтому a_{12} и c_{12} иногда называют *коэффициентами связи* между избранными координатами q_1 и q_2 ; выражения

$$n_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}} \quad (34.29)$$

представляют собой частоты свободных колебаний координат q_1 и q_2 при *отсутствии связи между последними*; они называются *парциальными частотами*.

Согласно (34.18), первое главное колебание происходит с частотой меньшей, чем меньшая из парциальных частот, а второе — с частотой большей, чем большая парциальная.

Числа β_1 и β_2 , связывающие координаты q_1 и q_2 при главных колебаниях системы, называются *коэффициентами форм* этих колебаний.

Определим траектории точек системы. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2)$ — вектор-радиус какой-либо точки. В разложении его в ряд Тейлора в случае весьма малых колебаний можно ограничиться членами первого порядка:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \right)_0 q_2, \quad (34.30)$$

где \mathbf{r}_0 соответствует положению равновесия. При произвольных q_1 и q_2 уравнение (34.30) представляет плоскость, проходящую через точку с вектором-радиусом \mathbf{r}_0 (положение равновесия) перпендикулярно вектору $\mathbf{n}_0 = (\partial \mathbf{r} / \partial q_1)_0 \times (\partial \mathbf{r} / \partial q_2)_0$. Отсюда следует, что в случае весьма малых движений траектории точек системы, имеющей две степени свободы, представляют собой плоские кривые.

Заменяя q_1 и q_2 суммой главных колебаний, получаем, согласно (34.26),

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right)_0 (\beta_1 q_2^{(1)} + \beta_2 q_2^{(2)}) + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \right)_0 (q_2^{(1)} + q_2^{(2)}) = \\ &= \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right)_0 \beta_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \right)_0 \right] D_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + \\ &+ \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right)_0 \beta_2 + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \right)_0 \right] D_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \end{aligned} \quad (34.31)$$

где D_1 и D_2 — другие обозначения для произвольных постоянных интегрирования. Траектории точек системы представляют

плоские кривые Лиссажу (§ 41). В том частном случае, когда система совершает одно из главных колебаний, точки ее описывают весьма малые участки прямолинейных траекторий. Если, например, $D_2 = 0$, то система совершает первое главное колебание. Уравнения траектории в проекциях на оси будут

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)_0 \beta_1 + \left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)_0 \beta_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)_0} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)_0 \beta_1 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)_0}. \quad (34.32)$$

Остается еще рассмотреть два случая, исключенных в только что приведенном общем исследовании.

1°. Характеристическое уравнение имеет равные корни. Это будет иметь место при условиях

$$\Delta\left(\frac{c_{11}}{a_{11}}\right) = \Delta\left(\frac{c_{22}}{a_{22}}\right) = 0,$$

т. е. при выполнении равенств

$$\frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{c_{12}}{a_{12}} = \frac{c_{22}}{a_{22}}. \quad (34.33)$$

Обозначая через k^2 общее значение этих отношений, получаем

$$\Pi = (1/2)k^2(a_{11}q_1^2 + 2a_{12}q_1q_2 + a_{22}q_2^2),$$

и уравнения движения можно представить в виде

$$a_{11}(\ddot{q}_1 + k^2q_1) + a_{12}(\ddot{q}_2 + k^2q_2) = 0,$$

$$a_{21}(\ddot{q}_1 + k^2q_1) + a_{22}(\ddot{q}_2 + k^2q_2) = 0.$$

Так как определитель $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$, то из этих уравнений находим

$$\ddot{q}_1 + k^2q_1 = 0, \quad \ddot{q}_2 + k^2q_2 = 0, \quad (34.34)$$

и, следовательно,

$$q_1 = A_1 \sin(kt + \alpha_1), \quad q_2 = A_2 \sin(kt + \alpha_2). \quad (34.35)$$

Обеим координатам соответствуют гармонические колебания одинаковой частоты

$$k = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}} = \sqrt{\frac{c_{12}}{a_{12}}} = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}}.$$

Амплитуды и фазы колебаний каждой из координат определяются по начальным условиям независимо друг от друга.

Подставляя (34.35) в уравнение (34.30), получаем

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = A_1 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right)_0 \sin(kt + \alpha_1) + A_2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \right)_0 \sin(kt + \alpha_2), \quad (34.36)$$

что можно также представить в виде

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{h} \sin kt + \mathbf{l} \cos kt, \quad (34.37)$$

где \mathbf{h} и \mathbf{l} — постоянные векторы. Проецируя на оси x и y , расположенные в плоскости траектории, получаем

$$x - x_0 = h_x \sin kt + l_x \cos kt, \quad y - y_0 = h_y \sin kt + l_y \cos kt, \quad (34.38)$$

откуда следует, что траекториями точек системы в этом случае являются эллипсы (§ 41).

2°. Один из корней характеристического уравнения равен нулю. Это будет по (34.16) иметь место при условии

$$c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0.$$

Выражение потенциальной энергии может быть в таком случае приведено к виду

$$\Pi = (1/2)(c_{11}q_1^2 \pm 2\sqrt{c_{11}c_{22}}q_1q_2 + c_{22}q_2^2) = (1/2)(\sqrt{c_{11}}q_1 \pm \sqrt{c_{22}}q_2)^2,$$

т. е. потенциальная энергия представляет не знакоопределенную, а знакопостоянную функцию обобщенных координат. Равновесие, в области которого рассматривается движение, в этом случае *нельзя считать устойчивым*.

Введем новую обобщенную координату

$$\bar{q}_1 = \sqrt{c_{11}}q_1 \pm \sqrt{c_{22}}q_2.$$

Вследствие линейности и однородности этого преобразования кинетическая энергия остается однородной квадратичной функцией обобщенных скоростей \dot{q}_1 и \dot{q}_2 :

$$T = (1/2)(\bar{a}_{11}\dot{\bar{q}}_1^2 + 2\bar{a}_{12}\dot{\bar{q}}_1\dot{q}_2 + \bar{a}_{22}\dot{q}_2^2), \quad \Pi = (1/2)\bar{q}_1^2, \quad (34.39)$$

причем коэффициенты \bar{a}_{ik} выражаются через a_{ik} и c_{ik} ; уравнения движения будут (отбрасываем теперь для упрощения записи черточки над буквами)

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{\bar{q}}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + q_1 &= 0, \\ a_{12}\ddot{\bar{q}}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (34.40)$$

Исключив \ddot{q}_2 , получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\ddot{q}_1 + a_{22}q_1 = 0,$$

или

$$\ddot{q}_1 + k^2q_1 = 0, \quad k^2 = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \quad (34.41)$$

причем k^2 , согласно (34.10), положительно. Из (34.41) находим

$$q_1 = A \sin(kt + \alpha). \quad (34.42)$$

Интегрируя второе уравнение (34.40), находим теперь

$$q_2 = -\frac{a_{12}}{a_{22}}q_1 + C_1t + C_2 = -\frac{a_{12}}{a_{22}}A \sin(kt + \alpha) + C_1t + C_2. \quad (34.43)$$

Рассматриваемый случай имеет место, если выражение потенциальной энергии не содержит координаты q_2 . Положение равновесия в этом случае определяется значением координаты $q_1 = 0$, тогда как q_2 может иметь в этом положении любое значение — в отношении q_2 равновесие является *безразличным*.

Примером может служить система двух грузов массами m_1 и m_2 , связанных упругой пружиной жесткостью c и способных скользить по гладкой горизонтальной плоскости (рис. 447). Потенциальная энергия системы составляет

$$\Pi = (1/2)c(x_1 - x_2)^2,$$

где x_1 и x_2 — абсциссы грузов, отсчитываемые от некоторого равновесного положения их, в котором пружина имеет свою натуральную длину. Это равновесие является безразличным, так как оно не нарушается при любом смещении грузов, при котором разность $x_1 - x_2$ равна нулю. Введем обобщенные координаты:

$$q_1 = x_1 - x_2, \quad q_2 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

(здесь q_2 — абсцисса центра масс грузов). Имеем

$$x_1 = q_2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} q_1,$$

$$x_2 = q_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} q_1,$$

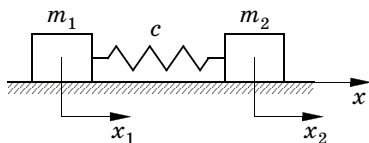


Рис. 447

и выражение кинетической энергии принимает вид

$$T = \frac{1}{2} \left(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{q}_1^2 + (m_1 + m_2) \dot{q}_2^2 \right].$$

Уравнения движения будут

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{q}_1 + c q_1 = 0, \quad \ddot{q}_2 = 0,$$

откуда в соответствии с (34.42) и (34.43) получаем

$$q_1 = A \sin \left(\sqrt{\frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} t + \alpha \right), \quad q_2 = q_{20} + \dot{q}_{20} t,$$

т. е. движение представляет собой гармоническое колебание, при котором грузы сближаются и удаляются друг от друга и на которое может накладываться равномерное и прямолинейное движение центра масс системы.

Аналогичный пример — система двух дисков, насаженных на способный скручиваться невесомый упругий вал, помещенный в гладкие подшипники (рис. 448). Разность $(\varphi_1 - \varphi_2)$ углов поворота вала в сечениях, в которых расположены диски, колеблется по гармоническому закону с частотой

$$k = \sqrt{c \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}},$$

где J_1 и J_2 — моменты инерции дисков относительно оси вала, а c — жесткость вала на кручение. На это колебание дисков может накладываться их равномерное вращение, при котором момент количества движения системы относительно оси вала сохраняет неизменную величину.

Пример 161. Определить частоты и формы свободных вертикальных колебаний двух грузов массами m_1 и m_2 , подвешенных на пружинах с жесткостями c_1 и c_2 . Схема системы представлена на рис. 449, а; массой пружин пренебрегаем.

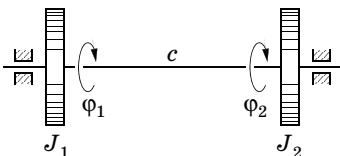


Рис. 448

За обобщенные координаты примем абсолютные вертикальные смещения грузов x_1 и x_2 из положения равновесия. Кинетическая энергия системы имеет выражение

$$T = (1/2)(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2).$$

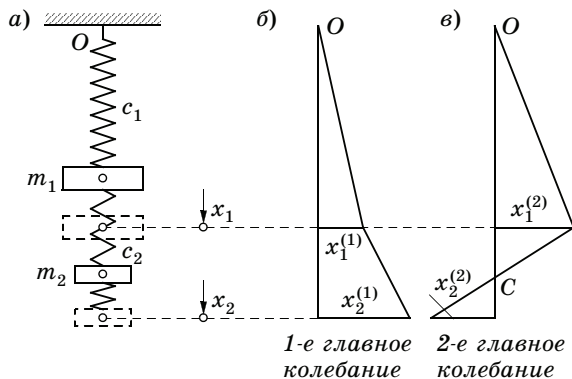


Рис. 449

Потенциальная энергия равна сумме потенциальной энергии силы тяжести Π_I и потенциальной энергии сил упругости Π_{II} . Имеем

$$\Pi_I = -(m_1 g x_1 + m_2 g x_2).$$

Переходя к вычислению Π_{II} , обозначим через $f_{\text{ст}}^{(1)}$ и $f_{\text{ст}}^{(2)}$ удлинения пружин в положении равновесия, а через f_1 и f_2 — их удлинения в произвольный момент движения. Очевидно, что

$$f_{\text{ст}}^{(1)} = \frac{1}{c_1} (m_1 + m_2)g, \quad f_{\text{ст}}^{(2)} = \frac{1}{c_2} m_2 g,$$

$$f_1 = f_{\text{ст}}^{(1)} + x_1, \quad f_2 = f_{\text{ст}}^{(2)} + x_2 - x_1$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Pi_{II} &= \frac{1}{2} (c_1 f_1^2 + c_2 f_2^2) = \frac{1}{2} \left[c_1 (f_{\text{ст}}^{(1)} + x_1)^2 + c_2 (f_{\text{ст}}^{(2)} + x_2 - x_1)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[c_1 x_1^2 + c_2 (x_2 - x_1)^2 \right] + c_1 f_{\text{ст}}^{(1)} x_1 + c_2 f_{\text{ст}}^{(2)} (x_2 - x_1) + \frac{1}{2} (c_1 f_{\text{ст}}^{(1)2} + c_2 f_{\text{ст}}^{(2)2}). \end{aligned}$$

Два последних постоянных члена, представляющих потенциальную энергию сил упругости в положении равновесия, могут быть отброшены. Находим

$$\Pi = \frac{1}{2} [c_1 x_1^2 + c_2 (x_2 - x_1)^2] + c_1 f_{\text{ст}}^{(1)} x_1 + c_2 f_{\text{ст}}^{(2)} (x_2 - x_1) - (m_1 g x_1 + m_2 g x_2),$$

но по определению $f_{\text{ст}}^{(1)}$ и $f_{\text{ст}}^{(2)}$ линейные члены сокращаются, и мы получаем

$$\Pi = \frac{1}{2} [c_1 x_1^2 + c_2 (x_2 - x_1)^2] = \frac{1}{2} [(c_1 + c_2) x_1^2 + c_2 x_2^2 - 2c_2 x_1 x_2].$$

Дифференциальные уравнения движения системы будут

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 + c_2 (x_1 - x_2) = 0, \quad m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) = 0.$$

Эти уравнения можно было бы также составить, записав закон движения каждого груза с учетом того, что при отклонении грузов из положения равновесия на них действуют реакции пружин, пропорциональные их удлинениям из этого положения (на первый груз действуют реакции обеих пружин). Силы тяжести не входят в уравнения движения, так как x_1 и x_2 отсчитываются от положения равновесия, в котором начальные натяжения пружин уравновешивают веса грузов.

Сравнивая с общими уравнениями (34.6), получаем

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1, & a_{12} &= 0, & a_{22} &= m_2, \\ c_{11} &= c_1 + c_2, & c_{12} &= -c_2, & c_{22} &= c_2, \end{aligned}$$

и характеристическое уравнение (34.15) будет

$$\Delta(k^2) = (c_1 + c_2 - k^2 m_1)(c_2 - k^2 m_2) - c_2^2 = 0.$$

Раскрывая скобки и вводя обозначения

$$\frac{c_1 + c_2}{m_1} = n_1^2, \quad \frac{c_2}{m_2} = n_2^2,$$

приведем характеристическое уравнение к виду

$$k^4 - (n_1^2 + n_2^2)k^2 + \frac{c_1}{c_1 + c_2} n_1^2 n_2^2 = 0;$$

n_1^2 и n_2^2 представляют собой парциальные частоты; это частоты свободных колебаний первого и второго грузов при неподвижных соответственно втором и первом грузах.

Вводя обозначение

$$\frac{c_2}{c_1 + c_2} = \kappa^2,$$

находим квадраты частот главных колебаний:

$$k_1^2 = \frac{1}{2} \left[n_1^2 + n_2^2 - \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + 4\kappa^2 n_1^2 n_2^2} \right],$$

$$k_2^2 = \frac{1}{2} \left[n_1^2 + n_2^2 + \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + 4\kappa^2 n_1^2 n_2^2} \right].$$

Пусть $n_1 < n_2$; при отсутствии связи, т. е. при $\kappa = 0$, получаем $k_1 = n_1$, $k_2 = n_2$; при $0 < \kappa < 1$, согласно (34.18), имеем $k_1 < n_1$, $k_2 > n_2$; при $\kappa = 1$ будет $k_1 = 0$, $k_2 = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$.

Если же $n_2 < n_1$, то $k_1 = n_2$, $k_2 = n_1$ при $\kappa = 0$; $k_1 < n_2$, $k_2 > n_1$ при $0 < \kappa < 1$ и $k_1 = 0$, $k_2 = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$ при $\kappa = 1$.

На рис. 450 приведено семейство кривых, служащих для определения частот k_1 и k_2 ; по оси абсцисс отложен квадрат отношения парциальных частот $n^2 = (n_2/n_1)^2$, а по оси ординат $\lambda_1^2 = (k_1/n_1)^2$, $\lambda_2^2 = (k_2/n_1)^2$; сплошные линии дают низшую частоту k_1 , штриховые — высшую частоту k_2 ; отдельные кривые семейства соответствуют различным значениям κ .

Пусть, например, $n^2 = 1,5$ и $\kappa = 0,4$. Из графиков находим

$$k_1^2 = 0,7 n_1^2, \quad k_2^2 = 1,85 n_1^2,$$

т. е.

$$k_1 = 0,83n_1, \quad k_2 = 1,36n_1.$$

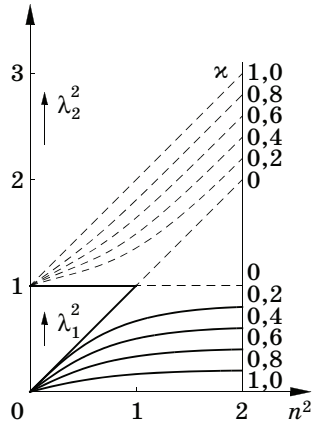


Рис. 450

По формулам (34.19) и (34.24) определяем коэффициенты форм главных колебаний:

$$\beta_1 = \frac{\kappa^2}{1 - k_1^2/n_1^2} = \frac{\kappa^2}{1 - \lambda_1^2}, \quad \beta_2 = \frac{\kappa^2}{1 - k_2^2/n_1^2} = \frac{\kappa^2}{1 - \lambda_2^2};$$

из рис. 450 сразу следует, что

$$\beta_1 > 0, \quad \beta_2 < 0.$$

Согласно формуле (34.22) знаки x_1 и x_2 в первом главном колебании одинаковы, т. е. грузы движутся в одну сторону; во втором главном колебании по формуле (34.25) знаки различны, т. е. грузы движутся в противоположные стороны.

Диаграмма, изображающая перемещения при главных колебаниях, дана на рис. 449, б и в; во втором главном колебании (рис. 449, в) (высшей частоты) на второй пружине имеется узловая точка С, остающаяся неподвижной при колебаниях грузов.

§ 187. Главные координаты

Выше указывалось, что при обращении в нуль коэффициентов a_{12} и c_{12} при произведениях переменных в выражениях (34.2) и (34.4) кинетической и потенциальной энергии система дифференциальных уравнений (34.6) распадается на два независимых уравнения (34.28). Поэтому возникает задача: найти такое линейное однородное преобразование переменных q_1 и q_2 к новым переменным θ_1 и θ_2

$$q_1 = \beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_2, \quad q_2 = \alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2, \quad (34.44)$$

чтобы указанные выражения кинетической и потенциальной энергии в результате этого преобразования одновременно приводились к виду

$$T = \frac{1}{2} (a_1 \dot{\theta}_1^2 + a_2 \dot{\theta}_2^2), \quad \Pi = \frac{1}{2} (c_1 \theta_1^2 + c_2 \theta_2^2), \quad (34.45)$$

в котором произведения переменных отсутствуют. Если такие координаты будут найдены, то уравнения движения для координат θ_1 и θ_2 примут вид

$$a_1 \ddot{\theta}_1 + c_1 \theta_1 = 0, \quad a_2 \ddot{\theta}_2 + c_2 \theta_2 = 0, \quad (34.46)$$

и решение задачи о колебаниях системы с двумя степенями свободы упростится.

Искомое преобразование (34.44) однородно, так как в положении равновесия и старые (q_1, q_2) и новые (θ_1, θ_2) обобщенные координаты должны обращаться в нуль. Не нарушая общности, можно принять $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Действительно, обозначим $\alpha_1 \theta_1 = \theta'_1$ и $\alpha_2 \theta_2 = \theta'_2$; очевидно, что если в выражениях T и Π через θ'_1 и θ'_2 отсутствуют произведения этих переменных, то они не появятся и при переходе к координатам θ_1 и θ_2 . Итак, вместо (34.44) рассмотрим преобразование

$$q_1 = \beta_1 \theta_1 + \beta_2 \theta_2, \quad q_2 = \theta_1 + \theta_2. \quad (34.47)$$

Вопрос сводится к определению коэффициентов β_1 и β_2 . Подстановка в (34.2) дает

$$\begin{aligned} T &= (1/2)[a_{11}(\beta_1 \dot{\theta}_1 + \beta_2 \dot{\theta}_2)^2 + 2a_{12}(\beta_1 \dot{\theta}_1 + \beta_2 \dot{\theta}_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + a_{22}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2] = \\ &= (1/2)\{(a_{11}\beta_1^2 + 2a_{12}\beta_1 + a_{22})\dot{\theta}_1^2 + 2[a_{11}\beta_1\beta_2 + a_{12}(\beta_1 + \beta_2) + a_{22}]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \\ &+ (a_{11}\beta_2^2 + 2a_{12}\beta_2 + a_{22})\dot{\theta}_2^2\} \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \Pi &= (1/2)\{(c_{11}\beta_2^2 + 2c_{12}\beta_1 + c_{22})\theta_1^2 + 2[c_{11}\beta_1\beta_2 + c_{12}(\beta_1 + \beta_2) + c_{22}]\theta_1\theta_2 + \\ &+ (c_{11}\beta_1^2 + 2c_{12}\beta_2 + c_{22})\theta_2^2\}. \end{aligned}$$

Чтобы эти выражения приняли вид (34.45), остается подчинить β_1 и β_2 условиям

$$\begin{aligned} a_{11}\beta_1\beta_2 + a_{12}(\beta_1 + \beta_2) + a_{22} &= 0, \\ c_{11}\beta_1\beta_2 + c_{12}(\beta_1 + \beta_2) + c_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (34.48)$$

Коэффициенты a_i и c_i в выражениях (34.45) при этом будут, $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} a_i &= a_{11}\beta_i^2 + 2a_{12}\beta_i + a_{22}, \\ c_i &= c_{11}\beta_i^2 + 2c_{12}\beta_i + c_{22}. \end{aligned} \quad (34.49)$$

Они положительны, так как a_i можно рассматривать как результат замены \dot{q}_1 и \dot{q}_2 в выражении удвоенной кинетической энергии соответственно на β_i и 1:

$$a_i = 2T(\beta_i, 1);$$

точно так же, полагая $q_1 = \beta_i$, $q_2 = 1$ в выражении $\Pi(q_1, q_2)$, можно написать

$$c_i = 2\Pi(\beta_i, 1).$$

Но T и Π по условию положительны при любых вещественных значениях аргументов, вещественность же чисел β_i будет доказана ниже.

Возвращаясь к системе уравнений (34.48), предположим, что ее определитель отличен от нуля:

$$a_{11}c_{12} - c_{11}a_{12} \neq 0, \quad (34.50)$$

и определим сумму и произведение коэффициентов β_1 и β_2 :

$$\beta_1 + \beta_2 = \frac{c_{11}a_{22} - c_{22}a_{11}}{a_{11}c_{12} - c_{11}a_{12}}, \quad \beta_1\beta_2 = \frac{c_{22}a_{12} - c_{12}a_{22}}{a_{11}c_{12} - c_{11}a_{12}}. \quad (34.51)$$

Теперь β_1 и β_2 можно найти как корни квадратного уравнения

$$\beta^2 - \frac{c_{11}a_{22} - c_{22}a_{11}}{a_{11}c_{12} - c_{11}a_{12}}\beta + \frac{c_{22}a_{12} - c_{12}a_{22}}{a_{11}c_{12} - c_{11}a_{12}} = 0; \quad (34.52)$$

эти корни вещественны, так как дискриминант уравнения (34.52)

$$D = (c_{11}a_{22} - c_{22}a_{11})^2 - 4(a_{11}c_{12} - c_{11}a_{12})(c_{22}a_{12} - c_{12}a_{22}) \quad (34.53)$$

тот же, что и уравнения (34.16), определяющего квадраты частот главных колебаний. После того как β_1 и β_2 определены, по формулам (34.49) находятся a_i и c_i . Из уравнений движения (34.46) далее получим

$$\theta_1 = C_1 \sin(k_1 t + \alpha_1), \quad \theta_2 = C_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \quad (34.54)$$

где C_i и α_i , $i = 1, 2$, — произвольные постоянные, а частоты k_1 и k_2 определяются из формул

$$k_1^2 = \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_{11}\beta_1^2 + 2c_{12}\beta_1 + c_{22}}{a_{11}\beta_1^2 + 2a_{12}\beta_1 + a_{22}},$$

$$k_2^2 = \frac{c_2}{a_2} = \frac{c_{11}\beta_2^2 + 2c_{12}\beta_2 + c_{22}}{a_{11}\beta_2^2 + 2a_{12}\beta_2 + a_{22}}.$$
(34.55)

Величины k_1 и k_2 представляют собой частоты главных колебаний системы, которые выше были определены из характеристического уравнения (34.15). Это следует из того, что физические постоянные системы, в данном случае частоты ее главных колебаний, не могут зависеть от выбора координат, при помощи которых описывается движение; можно это проверить также непосредственным вычислением*.

Каждая из координат θ_1 и θ_2 , называемых *главными координатами*, совершает колебание по гармоническому закону с частотой соответствующего главного колебания. Колебание каждой из главных координат происходит независимо от колебания другой координаты; это следует из того, что задание начального значения координаты θ_1 и соответствующей обобщенной скорости $\dot{\theta}_1$ определяет константы C_1 и α_1 в выражении этой координаты и не влияет на значение θ_2 , и наоборот. Допустим, что $\theta_2 = 0$ и $\dot{\theta}_2 = 0$ при $t = 0$; тогда $\theta_2 = 0$ во все время движения. Обращаясь к формулам (34.47), получаем

$$q_1 = \beta_1\theta_1 = \beta_1C_1 \sin(k_1t + \alpha_1), \quad q_2 = \theta_1 = C_1 \sin(k_1t + \alpha_1), \quad (34.56)$$

иными словами, при изменении первой главной координаты система совершает первое главное колебание (§ 186). Точно так же, если $\theta_1 = 0$, то имеет место второе главное колебание:

$$q_1 = \beta_2\theta_2 = \beta_2C_2 \sin(k_2t + \alpha_2), \quad q_2 = \theta_2 = C_2 \sin(k_2t + \alpha_2). \quad (34.57)$$

Обращаясь к формулам (34.22) и (34.25), видим, что определенные здесь коэффициенты β_1 и β_2 не только по обозначению, но и по их механическому значению совпадают с коэффициентами форм главных колебаний. Отсюда следует, что для определения главных координат можно применить другой путь: сначала ре-

* В курсе высшей алгебры доказывается, что корни характеристического уравнения не изменяются при любом линейном однородном преобразовании переменных q_1 и q_2 .

шить характеристическое уравнение (34.15), а затем определить коэффициенты форм по формулам (34.19) и (34.24). Любая задача о колебаниях системы с двумя степенями свободы может быть разрешена или по методу § 186, или путем введения главных координат, как это сделано в настоящем параграфе.

Чтобы дополнить исследование, рассмотрим еще случай равенства нулю определителя системы (34.48): $a_{11}c_{12} - c_{11}a_{12} = 0$, т. е.

$$\frac{c_{12}}{a_{12}} = \frac{c_{11}}{a_{11}} = \lambda.$$

Если при этом также и $a_{22}c_{12} - c_{22}a_{12} = 0$, т. е.

$$\frac{c_{12}}{a_{12}} = \frac{c_{22}}{a_{22}} = \lambda,$$

то второе уравнение (34.48) по сокращении всех коэффициентов на общий множитель λ приводится к первому уравнению этой системы; поэтому последняя будет иметь бесчисленное множество решений; но в таком случае, согласно (34.53), дискриминант $D = 0$, т. е. уравнение частот имеет равные корни (§ 186), и понятие главных координат теряет смысл.

Остается рассмотреть случай

$$a_{11}c_{12} - c_{11}a_{12} = 0, \quad a_{22}c_{12} - c_{22}a_{12} \neq 0. \quad (34.58)$$

Если вместо (34.47) при введении главных координат исходить из формул

$$q_1 = \theta_1 + \theta_2, \quad q_2 = \alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2, \quad (34.59)$$

то для определения $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1 + \alpha_2$ получим систему, аналогичную (34.48)

$$\begin{aligned} a_{11} + (\alpha_1 + \alpha_2)a_{12} + a_{22}\alpha_1\alpha_2 &= 0, \\ c_{11} + (\alpha_1 + \alpha_2)c_{12} + c_{22}\alpha_1\alpha_2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда при условиях (34.58) находим $\alpha_1\alpha_2 = 0$, т. е., например, $\alpha_2 = 0$, $q_2 = \alpha_1\theta_1$, и одна из координат является главной.

В большинстве приложений бывает затруднительно заранее указать, какие параметры являются главными координатами системы. За обобщенные координаты принимаются те или иные величины, определяющие положение системы; чтобы перейти от них к главным координатам, надо проделать вычисления, указанные в настоящем параграфе или в § 186. Введение главных координат, не упрощая вычислений, имеет, однако, важное теоретическое значение.

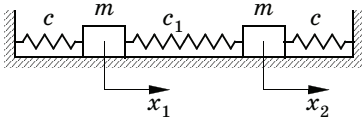


Рис. 451

Имеются простые случаи, когда главные координаты можно легко обнаружить. Такова схема, представленная на рис. 451. Два груза одинаковой массой m присоединены к неподвижным стенкам пружинами одинаковой жесткостью c и соединены между собой пружиной жесткостью c_1 .

Определим положение грузов координатами x_1 и x_2 , отсчитываемыми от положения равновесия, в котором пружины будем считать ненапряженными. При $x_1 = x_2$ средняя пружина сохраняет свою натуральную длину, и грузы колеблются, оставаясь на неизменном расстоянии; это колебание происходит с частотой

$$k_1 = \sqrt{2c/(2m)} = \sqrt{c/m},$$

определяемой жесткостью только крайних пружин.

Пусть теперь $x_1 = -x_2$; при таком движении грузов средняя точка средней пружины остается неподвижной, и каждый груз колеблется как масса между двумя пружинами с жесткостями c и $2c_1$ с частотой

$$k_2 = \sqrt{(c + 2c_1)/m}.$$

Введем координаты

$$\theta_1 = (1/2)(x_1 + x_2), \quad \theta_2 = (1/2)(x_1 - x_2).$$

Если сообщить грузам одинаковые начальные отклонения от положения равновесия ($x_{10} = x_{20}$) и одинаковые начальные скорости ($\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20}$), то x_1 и x_2 останутся равными в процессе движения, так как средняя пружина не будет напряжена; тогда $\theta_2 = 0$ и изменяется только координата θ_1 ; точно так же при начальных условиях $x_{10} = -x_{20}$ и $\dot{x}_{10} = -\dot{x}_{20}$ будем иметь $x_1(t) = -x_2(t)$, т. е. $\theta_1 = 0$ и изменяется только координата θ_2 . Таким образом, координаты θ_1 и θ_2 изменяются независимо и являются поэтому главными. Нетрудно проверить, что выражения кинетической и потенциальной энергии в этих координатах не содержат произведений переменных. Действительно,

$$T = (1/2)m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = (1/2)m(2\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_2^2),$$

$$\begin{aligned} \Pi &= (1/2)c(x_1^2 + x_2^2) + (1/2)c_1(x_1 - x_2)^2 = \\ &= (1/2)c(2\theta_1^2 + 2\theta_2^2) + (1/2)c_1 4\theta_2^2 = (1/2)[2c\theta_1^2 + 2(c + 2c_1)\theta_2^2]. \end{aligned}$$

Из этих выражений по (34.45) и (34.55) снова приходим к вышеприведенным выражениям частот главных колебаний.

Другим примером может служить система двух одинаковых маятников, соединенных упругой пружиной (рис. 452). Главными координатами, как и в предшествующем примере, являются полусумма и полуразность углов φ_1 и φ_2 отклонения маятников от вертикали.

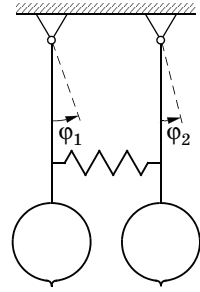


Рис. 452

Понятию о главных координатах можно дать геометрическое истолкование. Для этого заметим, что одна квадратичная форма всегда может быть при надлежащем линейном преобразовании приведена, и не единственным образом, к виду, в котором не содержится произведение переменных, причем для этого не требуется решения никаких уравнений. Рассматривая, в частности, знакоопределенную положительную форму, можно написать

$$\begin{aligned} f &= f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + f_{22}x_2^2 = \\ &= \frac{1}{f_{11}} [(f_{11}x_1 + f_{12}x_2)^2 + (f_{11}f_{22} - f_{12}^2)x_2^2]. \end{aligned}$$

Поэтому в новых переменных

$$x = \frac{1}{\sqrt{f_{11}}} (f_{11}x_1 + f_{12}x_2), \quad y = \frac{1}{\sqrt{f_{11}}} \sqrt{f_{11}f_{22} - f_{12}^2} x_2$$

выражение формы представится в виде суммы квадратов

$$f = x^2 + y^2.$$

В дальнейшем можно предположить, что обобщенные координаты системы уже выбраны так, что выражение кинетической энергии T приведено к сумме квадратов; тогда имеем

$$T = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \tag{34.60}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} (n_1^2 q_1^2 + 2n_{12}q_1q_2 + n_2^2 q_2^2),$$

причем квазиупругие коэффициенты удовлетворяют неравенствам (34.11), выражающим условие устойчивости положения равновесия. Тогда семейство кривых в плоскости q_1, q_2

$$\Pi(q_1, q_2) = \text{const} \tag{34.61}$$

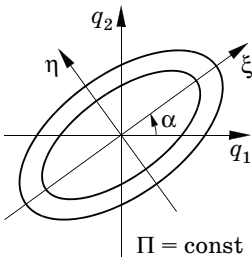


Рис. 453

будет семейством эллипсов с центром в начале координат (рис. 453) и с одинаковыми направлениями осей. Выбрав эти оси за направления осей координат ξ и η , приведем уравнение семейства эллипсов к канонической форме

$$k_1^2 \xi^2 + k_2^2 \eta^2 = \text{const}$$

или

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Преобразование переменных, осуществляющее поворот осей q_1, q_2 ,

$$q_1 = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta, \quad q_2 = \beta_1 \xi + \beta_2 \eta,$$

или

$$\xi = \alpha_1 q_1 + \beta_1 q_2, \quad \eta = \alpha_2 q_1 + \beta_2 q_2, \quad (34.62)$$

где $\alpha_1 = \beta_2 = \cos \alpha$, $\beta_1 = -\alpha_2 = \sin \alpha$, не изменяет выражения суммы квадратов переменных. Поэтому кинетическая энергия в переменных ξ, η сохранит свой вид

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2), \quad (34.63)$$

и выражение потенциальной энергии будет

$$\Pi = \frac{1}{2} (k_1^2 \xi^2 + k_2^2 \eta^2). \quad (34.64)$$

Координаты ξ, η , отсчитываемые вдоль осей семейства эллипсов (34.61), являясь, таким образом, главными; k_1 и k_2 представляют собой частоты главных колебаний. Определение коэффициентов линейного преобразования (34.62) и квадратов частот проводится с помощью того же процесса вычисления, который был применен при определении главных осей эллипсоида инерции в § 140. Частоты представляют собой корни уравнения

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} n_1^2 - k^2 & n_{12} \\ n_{12} & n_2^2 - k^2 \end{vmatrix} = k^4 - (n_1^2 + n_2^2)k^2 + n_1^2 n_2^2 - n_{12}^2 = 0, \quad (34.65)$$

аналогичного уравнению (26.16), после чего определение коэффициентов сведется к решению двух систем уравнений — можно сравнить с (26.17), (26.18), —

$$\begin{aligned}(n_1^2 - k_i^2)\alpha_i + n_{12}\beta_i &= 0, \\ n_{12}\alpha_i + (n_2^2 - k_i^2)\beta_i &= 0, \\ \alpha_i^2 + \beta_i^2 &= 1,\end{aligned}\tag{34.66}$$

где $i = 1, 2$, причем второе уравнение по (34.65) будет следствием первого.

Движение системы с двумя степенями свободы можно по (34.60) интерпретировать как движение точки единичной массы в плоскости q_1, q_2 . Из соотношений (34.64) следует, что в этой плоскости имеются два взаимно-перпендикулярных направления, таких, что при отклонении точки из положения равновесия по одному из них возникает восстанавливающая сила, имеющая направление, прямо противоположное отклонению. В этих направлениях производится отсчет главных координат и по ним же происходят главные колебания заменяющей систему точки.

Пример 162. Груз M массой m закреплен на свободном конце консольной балки, поперечное сечение которой имеет форму неравнобокого уголка (рис. 454). Пренебрегая массой балки, определить свободные колебания груза, считая известными жесткости c_1 и c_2 при изгибе балки в плоскостях, проходящих через главные оси инерции поперечного сечения.

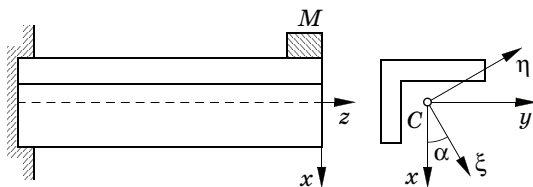


Рис. 454

Как указывалось в § 129, потенциальную энергию изогнутой балки можно представить в следующем виде (см. формулу (24.81)):

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_1\xi^2 + c_2\eta^2),$$

приняв за оси ξ и η главные центральные оси инерции поперечного сечения балки. Кинетическая энергия балки представляется выражением

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2).$$

Координаты ξ и η являются главными, и частоты главных колебаний равны

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}}.$$

Определим, например, движение массы в предположении, что ей сообщается начальное отклонение от положения равновесия в вертикальном направлении и не сообщается скорости:

$$x = x_0, \quad \dot{x} = 0, \quad y = 0, \quad \dot{y} = 0 \quad \text{при } t = 0.$$

Имеем

$$\xi = C_1 \sin(k_1 t + \varphi_1), \quad \eta = C_2 \sin(k_2 t + \varphi_2),$$

где C_i и φ_i — четыре произвольных постоянных $i = 1, 2$, которые надлежит определить. По формулам преобразования координат имеем

$$x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \quad y = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha,$$

где α — угол главной оси ξ с осью x ; по начальным условиям легко находим

$$C_1 = x_0 \cos \alpha, \quad C_2 = -x_0 \sin \alpha, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2} \pi;$$

выражения x и y могут быть преобразованы к виду

$$x = \frac{1}{2} x_0 [\cos k_1 t + \cos k_2 t + \cos 2\alpha (\cos k_1 t - \cos k_2 t)],$$

$$y = \frac{1}{2} x_0 \sin 2\alpha (\cos k_1 t - \cos k_2 t).$$

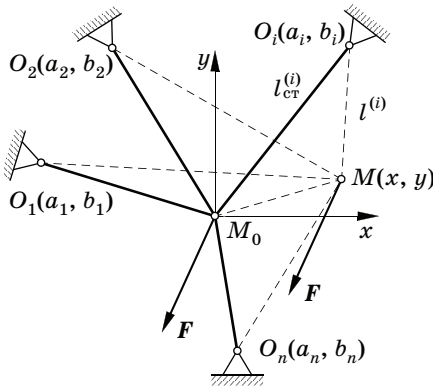


Рис. 455

Пример 163. Материальная точка массой m , на которую действует постоянная по величине и направлению сила F , удерживается в положении равновесия M_0 несколькими (n) упругими пружинами $O_i M_0$ (рис. 455), противоположные концы которых, закрепленные в точках $O_i, i = 1, 2, \dots, n$, могут свободно поворачиваться вокруг этих точек. Оси пружин и линия действия силы F расположены в одной плоскости, в которой принуждена оставаться также и точка M . Определим,

пренебрегая массой пружин, свободные колебания точки, возникающие при нарушении равновесия.

Расположим начало координат системы осей M_0xy в положении равновесия точки и обозначим через $l_{\text{ст}}^{(i)}$ длину пружины O_iM_0 при равновесии, через c_i — ее жесткость, через a_i и b_i — координаты точки O_i ; тогда длина $l_{\text{ст}}^{(i)} = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ и отношения

$$\alpha_i = \frac{a_i}{l_{\text{ст}}^{(i)}} \quad \beta_i = \frac{b_i}{l_{\text{ст}}^{(i)}}$$

равны косинусам углов оси i -й пружины при равновесии с осями координат. При отклонении точки в положение M с координатами (x, y) длина i -й пружины $l^{(i)}$ определится равенством

$$\begin{aligned} l^{(i)} &= \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2} = \sqrt{l_{\text{ст}}^{(i)2} - 2(xa_i + yb_i) + x^2 + y^2} = \\ &= l_{\text{ст}}^{(i)} \sqrt{1 - \frac{2(xa_i + yb_i)}{l_{\text{ст}}^{(i)}} + \frac{x^2 + y^2}{l_{\text{ст}}^{(i)2}}}. \end{aligned}$$

В дальнейшем, как и в примере 153 (§ 176), понадобится знание выражения $l^{(i)}$ с точностью до величин второй степени относительно предполагаемых малыми отклонений x, y от положения равновесия. Разлагая в ряд радикал и пренебрегая степенями x, y выше второй, получаем

$$l^{(i)} - l_{\text{ст}}^{(i)} = -(x\alpha_i + y\beta_i) + \frac{1}{2l_{\text{ст}}^{(i)}} [x^2 + y^2 - (x\alpha_i + y\beta_i)^2]. \quad (34.67)$$

Обозначим через $l_0^{(i)}$ длину i -й пружины в натуральном состоянии, через $\Delta_i = l_{\text{ст}}^{(i)} - l_0^{(i)}$ — ее удлинение в положении равновесия; тогда выражение потенциальной энергии i -й пружины примет вид

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{c_i}{2} \left(l^{(i)} - l_0^{(i)} \right)^2 = \frac{c_i}{2} \left[\left(l^{(i)} - l_{\text{ст}}^{(i)} \right) + \left(l_{\text{ст}}^{(i)} - l_0^{(i)} \right) \right]^2 = \\ &= \frac{c_i}{2} \left[\left(l^{(i)} - l_{\text{ст}}^{(i)} \right) + \Delta_i \right]^2 = \frac{c_i}{2} \left(l^{(i)} - l_{\text{ст}}^{(i)} \right)^2 + c_i \Delta_i \left(l^{(i)} - l_{\text{ст}}^{(i)} \right) + \frac{1}{2} c_i \Delta_i^2. \end{aligned}$$

Постоянное слагаемое в выражении потенциальной энергии можно отбросить; произведение

$$c_i \Delta_i = S_i$$

есть натяжение i -й пружины в состоянии равновесия. По (34.67) получим теперь, сохраняя слагаемые второй степени относительно x, y :

$$\Pi_i = \frac{c_i}{2} (x\alpha_i + y\beta_i)^2 - S_i (x\alpha_i + y\beta_i) + \frac{S_i}{2l_{\text{ст}}^{(i)}} [(x^2 + y^2) - (x\alpha_i + y\beta_i)^2],$$

и потенциальная энергия пружин будет иметь выражение

$$\Pi_I = \sum_{i=1}^n \Pi_i = -x \sum_{i=1}^n S_i \alpha_i - y \sum_{i=1}^n S_i \beta_i + \frac{1}{2} (c_{11} x^2 + 2c_{12} xy + c_{22} y^2),$$

где

$$\begin{aligned} c_{11} &= \sum_{i=1}^n \left(c_i \alpha_i^2 + \frac{S_i}{l_{\text{ст}}^{(i)}} \beta_i^2 \right), & c_{22} &= \sum_{i=1}^n \left(c_i \beta_i^2 + \frac{S_i}{l_{\text{ст}}^{(i)}} \alpha_i^2 \right), \\ c_{12} &= \sum_{i=1}^n \left(c_i - \frac{S_i}{l_{\text{ст}}^{(i)}} \right) \alpha_i \beta_i, \end{aligned} \quad (34.68)$$

причем использовано соотношение $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1$. Потенциальная энергия постоянной силы \mathbf{F} , т. е. работа, совершаемая этой силой при переходе точки из положения (x, y) в положение равновесия $(0, 0)$, равна

$$\Pi_{II} = -F_x x - F_y y.$$

Линейные члены

$$-x \left(\sum_{i=1}^n S_i \alpha_i + F_x \right) - y \left(\sum_{i=1}^n S_i \beta_i + F_y \right),$$

входящие в выражение потенциальной энергии системы $\Pi = \Pi_I + \Pi_{II}$, сокращаются, так как должны выполняться уравнения

$$\sum_{i=1}^n S_i \alpha_i + F_x = 0, \quad \sum_{i=1}^n S_i \beta_i + F_y = 0, \quad (34.69)$$

выражающие условия равновесия точки в положении M_0 . Получаем

$$\Pi = (1/2)(c_{11} x^2 + 2c_{12} xy + c_{22} y^2), \quad (34.70)$$

причем квазиупругие коэффициенты c_{ij} имеют приведенные выше значения (34.68).

Заметим, что величина S_i будет отрицательной при $\Delta_i < 0$, т. е. если i -я пружина в состоянии равновесия сжата. Поэтому неравенства (34.11) могут в рассматриваемом случае и не выполняться, т. е. равновесие не будет устойчивым. В дальнейшем предполагается, что оно устойчиво, т. е. что неравенства (34.11) имеют место. Тогда кривые второго порядка (34.61) будут семейством эллипсов, и, поскольку выражение кинетической энергии точки

$$T = (1/2)m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

имеет форму (34.60) (наличие множителя m не меняет сущности дела), оси семейства эллипсов определяют направления, соответствующие главным координатам. Частоты главных колебаний должны быть определены по формулам (34.65), в которых n_1^2 , n_2^2 , n_{12} следует заменить выражениями

$$n_1^2 = \frac{c_{11}}{m}, \quad n_2^2 = \frac{c_{22}}{m}, \quad n_{12} = \frac{c_{12}}{m}.$$

Рассмотрим частный случай одинаковых пружин жесткостью c , концы которых O_i закреплены в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиусом a (рис. 456), длины пружин в натуральном состоянии равны l_0 . Сила F отсутствует, и в положении равновесия точка находится в центре окружности, что будет проверено ниже.

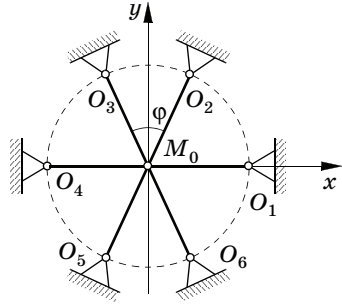


Рис. 456

Косинусы углов α_k, β_k оси k -й пружины с осями координат x, y (ось x направлена по оси первой пружины) в этом примере определяются формулами

$$\alpha_k = \cos(k-1)\varphi, \\ \beta_k = \sin(k-1)\varphi, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где $\varphi = 2\pi/n$. Статические удлинения Δ_k всех пружин одинаковы и равны $a - l_0$; при этом натяжения пружин равны $S = c(a - l_0)$.

Уравнения равновесия (34.69) удовлетворяются, так как

$$\sum_{k=1}^n S_k \alpha_k = S \sum_{k=1}^n \cos(k-1)\varphi = 0, \\ \sum_{k=1}^n S_k \beta_k = S \sum_{k=1}^n \sin(k-1)\varphi = 0,$$

что следует из соотношения

$$\sum_{k=1}^n [\cos(k-1)\varphi + i \sin(k-1)\varphi] = \sum_{k=1}^n e^{i(k-1)\varphi} = \frac{1 - e^{ni\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = \frac{1 - e^{2\pi i}}{1 - e^{i\varphi}} = 0.$$

По формулам (34.68) найдем значения коэффициентов

$$c_{11} = c \sum_{k=1}^n \cos^2(k-1)\varphi + \frac{S}{a} \sum_{k=1}^n \sin^2(k-1)\varphi, \\ c_{22} = c \sum_{k=1}^n \sin^2(k-1)\varphi + \frac{S}{a} \sum_{k=1}^n \cos^2(k-1)\varphi, \\ c_{12} = \left(c - \frac{S}{a}\right) \sum_{k=1}^n \sin(k-1)\varphi \cos(k-1)\varphi.$$

Подставив значение S , приведем эти выражения к следующему виду:

$$c_{11} = cn \frac{2a - l_0}{2a} + \frac{cl_0}{2a} \sum_{k=1}^n \cos 2(k-1)\varphi, \\ c_{22} = cn \frac{2a - l_0}{2a} - \frac{cl_0}{2a} \sum_{k=1}^n \cos 2(k-1)\varphi, \\ c_{12} = \frac{1}{2} \frac{cl_0}{a} \sum_{k=1}^n \sin 2(k-1)\varphi.$$

Вычисление подобных сумм проводилось в примере 122 (§ 140, с. 327). Получаем: при $n \neq 2$

$$c_{11} = c_{22} = cn(2a - l_0)/(2a), \quad c_{12} = 0,$$

и выражение потенциальной энергии принимает вид

$$\Pi = \frac{1}{2} cn \frac{2a - l_0}{2a} (x^2 + y^2).$$

Кривые $\Pi = \text{const}$ представляют собой окружности, и декартовы координаты, отсчитываемые по двум произвольным взаимно-перпендикулярным направлениям, будут главными координатами. Положение равновесия будет устойчивым при $l_0 < 2a$ (если предотвращена возможность перемещения по направлению, перпендикулярному плоскости xy) и станет неустойчивым при $l_0 > 2a$, т. е. при предварительном поджатии пружин на величину, бóльшую половины их первоначальной длины.

Частоты колебаний равны

$$k_1 = k_2 = \sqrt{\frac{cn(2a - l_0)}{2am}}.$$

При $n = 2$, когда масса расположена между двумя предварительно напряженными пружинами, имеем

$$c_{11} = 2c, \quad c_{22} = \frac{2c(2a - l_0)}{a}, \quad c_{12} = 0.$$

Частоты свободных колебаний вдоль оси пружин и по перпендикулярному ей направлению равны

$$k_1 = \sqrt{2c/m}, \quad k_2 = \sqrt{(2c(a - l_0))/(am)}.$$

Положение равновесия устойчиво при предварительном растяжении пружин и неустойчиво, если они предварительно сжаты.

§ 188. Применение коэффициентов влияния к составлению дифференциальных уравнений свободных колебаний

Чтобы составить дифференциальные уравнения свободных колебаний в форме уравнений Лагранжа второго рода (§ 185), нужно выразить потенциальную энергию через обобщенные координаты. В ряде задач, чаще всего при рассмотрении колебаний систем, в которых действуют упругие силы, это может вызвать затруднения. Более простым оказывается прием непосредственного составления уравнений движения методами кинетостатики, основанный на использовании вместо квазиупругих коэффициентов другой системы величин, называемых *коэффициентами*

влияния. Потенциальная энергия при этом выражается через обобщенные силы.

Рассмотрим равновесие системы, на которую действуют как потенциальные силы, так и другие заданные силы F_1, F_2, \dots, F_n . Ограничиваясь случаем системы с двумя степенями свободы со стационарными связями, будем определять ее положение независимыми обобщенными координатами q_1 и q_2 ; отсчет этих координат производится от состояния устойчивого равновесия, в котором система находилась бы при действии только потенциальных сил. Потенциальная энергия $\Pi(q_1, q_2)$ в этом положении имеет минимум, равный нулю, а при вызванном действием сил F_s малом отклонении от него в новое положение равновесия выражается знакоопределенной положительной квадратичной формой вида (34.4).

Элементарная работа всех сил, действующих на систему, при любом возможном перемещении ее из состояния равновесия по принципу возможных перемещений должна быть равной нулю. Это приводит к соотношению

$$-\delta\Pi + \sum_{s=1}^n \mathbf{F}_s \cdot \delta\mathbf{r}_s = 0. \quad (34.71)$$

Замечая, что

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial q_2} \delta q_2, \quad \delta\mathbf{r}_s = \frac{\partial\mathbf{r}_s}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial\mathbf{r}_s}{\partial q_2} \delta q_2,$$

и приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях δq_1 и δq_2 , получаем два уравнения

$$\frac{\partial\Pi}{\partial q_1} = \sum_{s=1}^n \mathbf{F}_s \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_s}{\partial q_1} = Q_1^*, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial q_2} = \sum_{s=1}^n \mathbf{F}_s \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_s}{\partial q_2} = Q_2^*, \quad (34.72)$$

где Q_1^* и Q_2^* — обобщенные силы для системы сил F_1, F_2, \dots, F_n , уравновешивающих потенциальные силы, возникающие при отклонении системы из того положения равновесия ($q_1 = 0, q_2 = 0$), в котором она находилась под действием только этих последних сил.

Заменим в уравнениях (34.72) производные потенциальной энергии их выражениями согласно (34.4). Тогда придем к двум уравнениям, определяющим значения координат q_1 и q_2 в положении равновесия, имеющем место при учете всех действующих на систему сил:

$$\begin{aligned} c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= Q_1^*, \\ c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= Q_2^*, \end{aligned} \quad (34.73)$$

причем $c_{12} = c_{21}$.

Эта система уравнений имеет решение, так как ее определитель

$$D = c_{11}c_{22} - c_{12}^2,$$

являющийся дискриминантом знакоопределенной формы (34.4), по (34.11) отличен от нуля. Решение имеет вид

$$q_1 = \alpha_{11} Q_1^* + \alpha_{12} Q_2^*, \quad q_2 = \alpha_{21} Q_1^* + \alpha_{22} Q_2^*, \quad (34.74)$$

где

$$\alpha_{11} = \frac{c_{22}}{D}, \quad \alpha_{12} = -\frac{c_{12}}{D}, \quad \alpha_{21} = -\frac{c_{21}}{D}, \quad \alpha_{22} = \frac{c_{11}}{D}. \quad (34.75)$$

Коэффициенты α_{ik} , называемые *коэффициентами влияния*, можно во многих случаях определить из простых статических соображений, не используя формул (34.75), предполагающих знание выражения потенциальной энергии. Полагаем в (34.74) $Q_2^* = 0$ и $Q_1^* = 1$; тогда найдем

$$\alpha_{11} = q_1^{(1)}, \quad \alpha_{21} = q_2^{(1)}, \quad (34.76)$$

т. е. α_{11} и α_{21} представляют собой значения координат q_1 и q_2 в положении равновесия системы при приложении к ней единичной обобщенной силы, отнесенной к первой координате. Точно так же, приняв $Q_1^* = 0$ и $Q_2^* = 1$, получим

$$\alpha_{12} = q_1^{(2)}, \quad \alpha_{22} = q_2^{(2)}. \quad (34.77)$$

Равенство

$$\alpha_{21} = \alpha_{12}, \quad (34.78)$$

следующее из (34.75), выражает свойство *взаимности коэффициентов влияния*: значение, сообщаемое координате q_2 в положении равновесия под действием единичной обобщенной силы, отнесенной к координате q_1 , равно значению, которое принимает координата q_1 под действием единичной обобщенной силы, отнесенной к координате q_2 .

Обозначим через $\Pi^*(Q_1^*, Q_2^*)$ значение потенциальной энергии $\Pi(q_1, q_2)$, выраженное через обобщенные силы. Очевидно, его можно получить, подставив в (34.4) значения координат q_1 и q_2 согласно (34.74). Эту подстановку можно непосредственно осуществить, но для определения частных производных

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial Q_1^*}, \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial Q_2^*},$$

которые нас будут интересовать, этого не требуется. Действительно, потенциальная энергия зависит от обобщенных сил через координаты q_1 и q_2 ; поэтому

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial Q_1^*} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial Q_1^*} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial Q_1^*},$$

откуда, воспользовавшись (34.72) и (34.74), получим

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial Q_1^*} = Q_1^* \alpha_{11} + Q_2^* \alpha_{21}, \quad (34.79)$$

и аналогично

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial Q_2^*} = Q_1^* \alpha_{12} + Q_2^* \alpha_{22}. \quad (34.80)$$

По (34.78) и (34.74) приходим к соотношениям

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial Q_1^*} = q_1, \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial Q_2^*} = q_2, \quad (34.81)$$

выражающим теорему Кастильяно.

ТЕОРЕМА КАСТИЛЬЯНО. Производная потенциальной энергии, выраженной через обобщенные силы Q_1^* и Q_2^* , по обобщенной силе равна значению соответствующей обобщенной координаты в положении равновесия.

По (34.79) и (34.80), учитывая (34.78), находим также

$$\Pi(Q_1^*, Q_2^*) = (1/2)(\alpha_{11}Q_1^{*2} + 2\alpha_{12}Q_1^*Q_2^* + \alpha_{22}Q_2^{*2}). \quad (34.82)$$

Поэтому коэффициенты влияния могут быть найдены также по выражению потенциальной энергии через обобщенные силы; последнее выражение во многих случаях составить проще, чем в форме (34.4) через обобщенные координаты. Из (34.82) и положительной знакоопределенности потенциальной энергии следуют неравенства

$$\alpha_{11} > 0, \quad \alpha_{22} > 0, \quad \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = \frac{1}{D} > 0. \quad (34.83)$$

Дифференциальные уравнения малых свободных колебаний консервативной системы около положения устойчивого равнове-

сия можно составить теперь, применяя метод кинетостатики. Для этого следует силы F_s заменить силами инерции ($F_s = -m\dot{v}_s$); выражения обобщенных сил Q_i^* по (34.72) при этом примут вид

$$Q_i^* = - \sum_{s=1}^n m_s \dot{v}_s \cdot \frac{\partial r_s}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2.$$

Преобразование сумм, стоящих в правых частях этих равенств, производилось в § 159 при выводе уравнений Лагранжа второго рода; повторив этот вывод, получим

$$\sum_{s=1}^n m_s \dot{v}_s \cdot \frac{\partial r_s}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}.$$

Используя выражение (34.2) кинетической энергии системы, совершающей малые колебания около положения равновесия, придем к выражениям

$$Q_1^* = -(a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2), \quad Q_2^* = -(a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2),$$

которые надо подставить в (34.74); получим дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} q_1 &= -\alpha_{11}(a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2) - \alpha_{12}(a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2), \\ q_2 &= -\alpha_{21}(a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2) - \alpha_{22}(a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2). \end{aligned} \quad (34.84)$$

К этим же уравнениям можно было бы прийти, разрешив уравнения (34.6) относительно координат q_1 и q_2 и учтя выражения (34.75) коэффициентов влияния α_{ik} через квазиупругие коэффициенты c_{ik} . Обратное, разрешив уравнения (34.84) относительно выражений, стоящих в скобках, мы пришли бы к дифференциальным уравнениям свободных колебаний в форме (34.6).

В качестве примера определим частоты и формы главных колебаний системы двух масс, закрепленных на упругом валу, не учитывая массы вала (рис. 457).

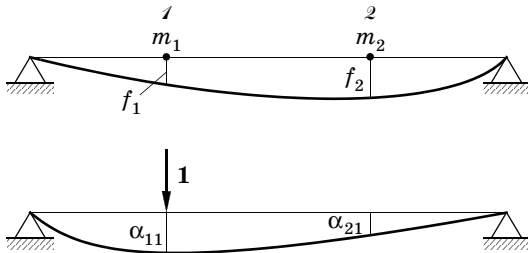


Рис. 457

Обозначим через f_1 и f_2 перемещения точек оси вала в местах закрепления масс. Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{f}_1^2 + m_2 \dot{f}_2^2).$$

Для определения коэффициентов влияния мысленно прикладываем в точке закрепления первой массы единичную силу в направлении положительного отсчета координаты f_1 ; при такой нагрузке ординаты упругой линии вала в точках расположения масс равны соответственно α_{11} и α_{21} ; аналогично находятся коэффициенты $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ и α_{22} . Вычисление производится способами, рассматриваемыми в теории изгиба балок. Далее предполагается, что коэффициенты влияния известны.

Дифференциальные уравнения свободных колебаний будут иметь вид

$$\begin{aligned} f_1 &= -\alpha_{11} m_1 \ddot{f}_1 - \alpha_{12} m_2 \ddot{f}_2, \\ f_2 &= -\alpha_{21} m_1 \ddot{f}_1 - \alpha_{22} m_2 \ddot{f}_2. \end{aligned} \tag{34.85}$$

К уравнениям этого вида придем во всех тех случаях, когда выражение кинетической энергии не содержит произведений обобщенных скоростей.

Более сложно было бы составление дифференциальных уравнений движения в форме (34.6), требующей знания квазиупругих коэффициентов c_{ik} . Действительно, из выражений (34.73)

$$Q_1^* = c_{11} f_1 + c_{12} f_2,$$

$$Q_2^* = c_{12} f_1 + c_{22} f_2$$

следует, что

$$c_{11} = (Q_1^*)_{f_1=1, f_2=0},$$

$$c_{12} = (Q_2^*)_{f_1=1, f_2=0},$$

т. е. для вычисления величин c_{11} и c_{12} следовало бы, вообразив, что в сечении 2 имеется промежуточная опора, не допускающая смещения оси стержня в этом сечении, определить значение силы c_{11} , которая, будучи приложена в сечении 1, создает в нем прогиб оси стержня, равный единице; реакция опоры определила бы коэффициент c_{12} .

Для решения дифференциальных уравнений (34.85) полагаем, как и в § 186,

$$f_1 = A_1 \sin(kt + \alpha),$$

$$f_2 = A_2 \sin(kt + \alpha).$$

Подстановка в дифференциальные уравнения приводит к двум однородным линейным уравнениям для определения A_1 и A_2 ; обозначая $\tau^2 = 1/k^2$, получаем

$$A_1(\tau^2 - m_1\alpha_{11}) - A_2m_2\alpha_{12} = 0, \quad -A_1m_1\alpha_{21} + A_2(\tau^2 - m_2\alpha_{22}) = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$\beta = \frac{A_1}{A_2} = \frac{m_2\alpha_{12}}{\tau^2 - m_1\alpha_{11}} = \frac{\tau^2 - m_2\alpha_{22}}{m_1\alpha_{21}},$$

и для определения τ^2 приходим к уравнению

$$f(\tau^2) = \tau^4 - \tau^2(m_1\alpha_{11} + m_2\alpha_{22}) + m_1m_2(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2) = 0.$$

Учитывая, что

$$f(0) = m_1m_2(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2) > 0,$$

$$f(m_1\alpha_{11}) = f(m_2\alpha_{22}) = -m_1m_2\alpha_{12}^2 < 0,$$

$$f(\infty) = +\infty,$$

закключаем, что больший корень τ_1^2 , соответствующий первому главному колебанию более низкой частоты, будет больше, чем большая из величин $m_1\alpha_{11}$, $m_2\alpha_{22}$, а меньший корень τ_2^2 (второе главное колебание) — меньше, чем меньшая из этих величин. Заметим, что

$$n_1^2 = \frac{1}{m_1\alpha_{11}}, \quad n_2^2 = \frac{1}{m_2\alpha_{22}}$$

представляют собой квадраты парциальных частот колебаний. Это — частоты свободных колебаний соответственно первой массы при отсутствии второй и второй массы при отсутствии первой.

Выражения коэффициентов формы имеют вид

$$\beta_1 = \frac{\alpha_{12}m_2}{\tau_1^2 - m_1\alpha_{11}},$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha_{12}m_2}{\tau_2^2 - m_1\alpha_{11}}.$$

(34.86)

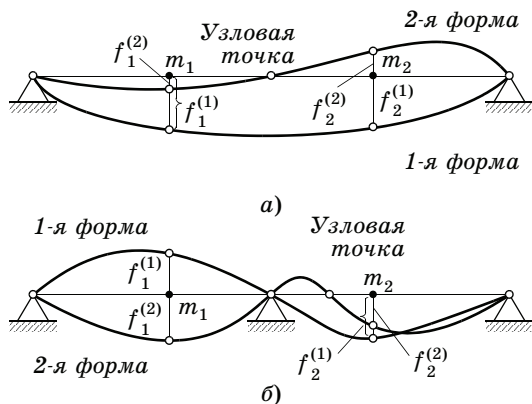


Рис. 458

Первый из них имеет знак α_{12} , а второй — знак, противоположный знаку α_{12} . Если в частном случае обе массы расположены между опорами двухопорного вала, то $\alpha_{12} > 0$, так как при приложении силы в точке внутри пролета статическая упругая линия вала не изменяет знака. В этом случае в первом главном колебании обе массы движутся в одну сторону, а во втором главном колебании — в противоположные стороны. Поэтому если осуществляется второе главное колебание, то на оси вала имеется неподвижная точка — узел формы колебаний (рис. 458, а). В случае трехопорного вала и расположения масс в различных пролетах $\alpha_{12} < 0$ и в первом главном колебании массы движутся в противоположные стороны, а во втором — в одну сторону. И в этом случае узловая точка появляется при главном колебании более высокой частоты (рис. 458, б).

Пример 164. Диск массой m насажен на упругий невесомый вал, причем центр тяжести диска находится на осевой линии вала в точке O , расположенной на расстояниях a и b от опор вала (рис. 459, а). Определить свободные колебания

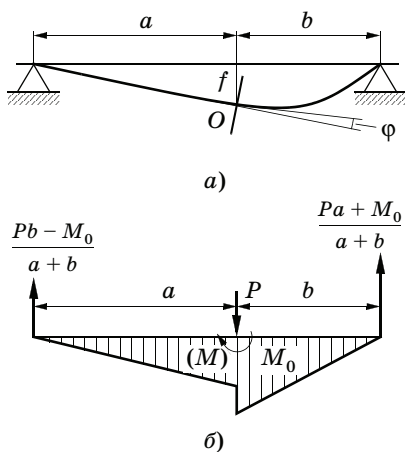


Рис. 459

диска, учитывая его повороты при изгибе вала. Момент инерции диска относительно оси, расположенной в плоскости диска, равен $m\rho^2$, а коэффициент жесткости поперечного сечения вала при изгибе EJ .

За обобщенные координаты, определяющие положение диска, примем прогиб f оси вала в точке O и угол φ , составляемый касательной к упругой линии в этой точке с осью x . Кинетическая энергия диска равна

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{f}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2).$$

Для определения коэффициентов влияния составим выражение потенциальной энергии через обобщенные силы; в рассматриваемом случае это будут сила $P = Q_f^*$ и изгибающий момент $M_0 = Q_\varphi^*$, приложенные в точке O . Через них выражается изгибающий момент M в любом сечении вала; потенциальная энергия далее вычисляется по известной из сопротивления материалов формуле

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EJ} dx,$$

где интегрирование распространяется по всей длине вала. В рассматриваемом случае имеем (рис. 459, б)

$$M = \begin{cases} \frac{Pb - M_0}{a + b} x, & 0 < x < a_0, \\ \frac{Pa + M_0}{a + b} x_1, & 0 < x_1 < b, \end{cases}$$

где

$$x_1 = a + b - x.$$

Дальнейшее вычисление дает

$$\begin{aligned} \Pi^* &= \frac{1}{2EJ} \left(\int_0^a M^2 dx + \int_0^b M^2 dx_1 \right) = \\ &= \frac{1}{2EJ(a+b)} \left[\frac{1}{3} a^2 b^2 P^2 + \frac{1}{3} (a^2 - ab + b^2) M_0^2 - \frac{2}{3} ab(a-b)PM_0 \right], \end{aligned}$$

и сравнение с (34.82) позволяет составить выражения коэффициентов влияния

$$\alpha_{ff} = \frac{1}{3} \frac{a^2 b^2}{EJ(a+b)}, \quad \alpha_{f\varphi} = \alpha_{\varphi f} = -\frac{ab(a-b)}{3EJ(a+b)}, \quad \alpha_{\varphi\varphi} = \frac{1}{3} \frac{a^2 - ab + b^2}{EJ(a+b)}.$$

В остальном ход решения задачи не отличается от изложенного в приведенном выше примере. Для определения частот главных колебаний k_1 и k_2 служит уравнение

$$z^4 - \left(1 + \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 b^2} \rho^2 \right) z^2 + \frac{\rho^2}{ab} = 0,$$

в котором

$$z^2 = \frac{3EJ(a+b)}{ma^2b^2k^2}.$$

Пример 165. Платформа массой m опирается на две рессоры с жесткостями c_1 и c_2 ; центр тяжести платформы расположен на расстояниях a и b от осей рессор A и B . Момент инерции платформы относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно плоскости рисунка, равен $m\rho^2$. Определить частоты свободных колебаний платформы, не учитывая начального сжатия рессор и их массы (рис. 460, а).

За обобщенные координаты примем вертикальное перемещение f центра тяжести платформы и ее угол поворота φ вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка. Кинетическая энергия платформы при этом выборе координат будет иметь выражение

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{f}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2).$$

Для определения коэффициентов влияния α_{ff} и $\alpha_{f\varphi}$ приложим в центре тяжести единичную вертикальную силу, направив ее в сторону возрастания координаты f (рис. 460, б).

Усилия, передаваемые рессорам A и B , при этом будут соответственно равны $b/(a+b)$ и $a/(a+b)$ и длины их уменьшатся соответственно на $b/[c_1(a+b)]$ и $a/[c_2(a+b)]$. Перемещение центра тяжести и угол поворота платформы при этом будут

$$\alpha_{ff} = \frac{b^2c_2 + a^2c_1}{c_1c_2(a+b)^2}, \quad \alpha_{f\varphi} = \frac{ac_1 - bc_2}{c_1c_2(a+b)^2}.$$

Остается определить коэффициент $\alpha_{\varphi\varphi}$. Для этого прикладываем мысленно к платформе единичный момент в сторону возрастания угла φ (рис. 460, в). На рессоры передадутся усилия величиной $1/(a+b)$, направленные в противоположные стороны; при этом левая опора поднимается на $1/[c_1(a+b)]$, а правая опустится на $1/[c_2(a+b)]$ и угол поворота платформы будет

$$\alpha_{\varphi\varphi} = \frac{c_1 + c_2}{(a+b)^2c_1c_2}.$$

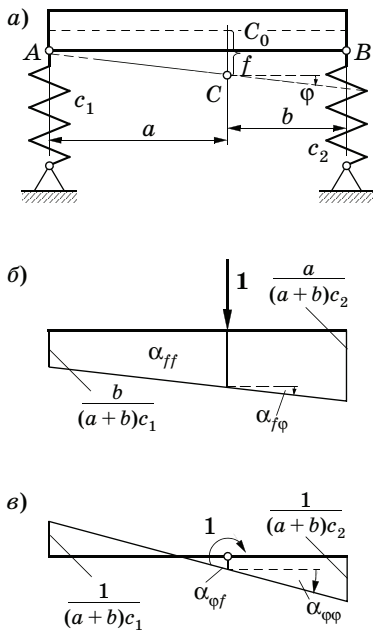


Рис. 460

Для проверки находим еще перемещение центра тяжести, вызванное приложением единичного момента:

$$\alpha_{\varphi f} = a\alpha_{\varphi\varphi} - \frac{1}{c_1(a+b)} = \frac{ac_1 - bc_2}{c_1c_2(a+b)^2} = \alpha_{f\varphi}.$$

Дифференциальные уравнения свободных колебаний по структуре не отличаются от (34.85). Для определения величин, пропорциональных периодам главных колебаний при $c_1 = c_2 = c_3 = c$ получаем уравнение

$$\begin{aligned} (z^2 - 1) \left(z^2 - \frac{2\rho^2}{a^2 + b^2} \right) - \frac{(a-b)^2\rho^2}{(a^2 + b^2)^2} &= \\ &= z^4 - z^2 \left(1 + \frac{2\rho^2}{a^2 + b^2} \right) + \frac{\rho^2(a+b)^2}{(a^2 + b^2)^2} = 0, \end{aligned}$$

где

$$z^2 = \frac{c(a+b)^2}{m(a^2 + b^2)k^2}.$$

Коэффициенты форм находятся из соотношений

$$\beta_1 = \frac{(a-b)\rho^2}{(a^2 + b^2)(z_1^2 - 1)}, \quad \beta_2 = \frac{(a-b)\rho^2}{(a^2 + b^2)(z_2^2 - 1)},$$

причем

$$f^{(1)} = \beta_1\varphi^{(1)}, \quad f^{(2)} = \beta_2\varphi^{(2)}.$$

Можно, не нарушая общности, считать, что $a > b$; тогда $\beta_1 > 0$ (первое главное колебание, соответствующее большему корню z_1^2) и $\beta_2 < 0$ (второе главное колебание, соответствующее меньшему корню z_2^2). Знаки $f^{(1)}$ и $\varphi^{(1)}$ одинаковы — движение платформы в первом главном колебании можно описать как вращение вокруг неподвижной оси O_1 , расположенной слева от центра тяжести платформы на расстоянии β_1 . Отложив же вправо от центра тяжести отрезок ($-\beta_2$), найдем ось вращения O_2 во втором главном колебании (рис. 461).

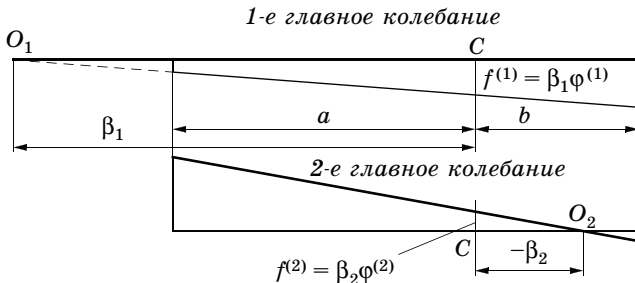


Рис. 461

Составление коэффициентов влияния значительно упрощается, но несколько усложняется форма выражения кинетической энергии, если за обобщенные координаты принять перемещения f_1 и f_2 точек платформы, соприкасающихся с рессорами. Ранее введенные координаты легко выразить через эти величины

$$f = \frac{bf_1 + af_2}{a + b}, \quad \varphi = \frac{f_1 - f_2}{a + b}.$$

Поэтому кинетическая энергия определится выражением

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \frac{m}{(a + b)^2} [(bf_1 + af_2)^2 + \rho^2(\dot{f}_1 - \dot{f}_2)^2] = \\ &= \frac{m}{2(a + b)^2} [(b^2 + \rho^2)\dot{f}_1^2 + (a^2 + \rho^2)\dot{f}_2^2 + 2(ab - \rho^2)\dot{f}_1 \dot{f}_2]. \end{aligned}$$

Приложим мысленно к правой опоре единичную силу; платформа опустится на $1/c_2$, вращаясь вокруг левой опоры; аналогичное рассуждение применимо к левой опоре; поэтому имеем

$$\alpha_{11} = 1/c_1, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{22} = 1/c_2.$$

Нетрудно проверить, что уравнение, определяющее периоды главных колебаний, может быть приведено к указанному выше виду.

Пример 166. Пластинка массой m закреплена на свободном конце A балочки (плоской пружинки), другой конец которой заделан (рис. 462). Центр тяжести пластинки расположен на продолжении оси балочки на расстоянии d от точки A ; радиус инерции пластинки относительно оси, проходящей через центр ее тяжести перпендикулярно плоскости рисунка, равен ρ . Пренебрегая массой балочки и принимая, что одна из главных осей инерции ее поперечного сечения расположена в плоскости рисунка, определить свободные колебания пластинки в этой плоскости. Длина балочки равна l , коэффициент жесткости на изгиб EJ .

За обобщенные координаты примем прогиб f балочки в точке A и угол поворота пластинки φ , равный углу, составляемому касательной к упругой линии балочки в той же точке с осью x . Скорость центра тяжести

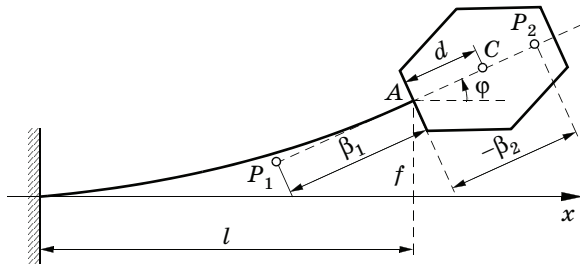


Рис. 462

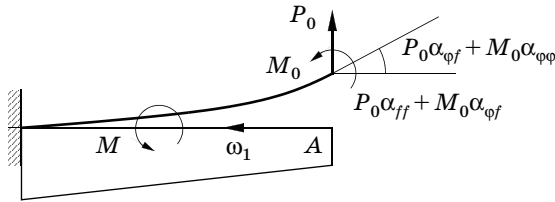


Рис. 463

пластинки будет равна $\dot{f} + \dot{\varphi} d$ и выражение кинетической энергии примет вид

$$T = \frac{1}{2} m[(\dot{f} + \dot{\varphi} d)^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2].$$

Коэффициентами влияния являются: α_{ff} — прогиб балочки в точке A под действием единичной силы в этой точке, $\alpha_{\varphi\varphi}$ — угол поворота упругой линии в точке A от действия прикладываемого в ней единичного момента, $\alpha_{f\varphi} = \alpha_{\varphi f}$ — прогиб в точке A от действия этого момента, равный углу поворота в ней упругой линии, создаваемой единичной силой. Обобщенные силы, соответствующие координатам f и φ , обозначим через $Q_f^* = P$ и $Q_\varphi^* = M_0$ (рис. 463). Изгибающий момент в любом сечении балочки при действии этой системы сил равен $M = Px_1 + M_0$, где x_1 отсчитывается от точки A по оси балочки. Потенциальная энергия Π^* изогнутой балочки определяется по приведенной (пример 164) формуле

$$\Pi^* = \frac{1}{2EJ} \int_0^l M^2 dx_1 = \frac{1}{2EJ} \left(\frac{l^3}{3} P^2 + l M_0^2 + 2 \frac{l^2}{2} P M_0 \right).$$

По (34.82) получаем

$$\alpha_{ff} = \frac{l^3}{3EJ}, \quad \alpha_{f\varphi} = \frac{l^2}{2EJ}, \quad \alpha_{\varphi\varphi} = \frac{l}{EJ},$$

и дифференциальные уравнения свободных колебаний по (34.84) будут

$$f = -\frac{ml^3}{3EJ} (\ddot{f} + \ddot{\varphi} d) - \frac{ml^2}{2EJ} [(\ddot{f} + \ddot{\varphi} d)d + \rho^2 \ddot{\varphi}],$$

$$\varphi = -\frac{ml^2}{2EJ} (\ddot{f} + \ddot{\varphi} d) - \frac{ml}{EJ} [(\ddot{f} + \ddot{\varphi} d)d + \rho^2 \ddot{\varphi}].$$

Полученная форма уравнений сложнее, чем в предыдущих примерах, что объясняется наличием в выражении кинетической энергии слагаемого с произведением переменных. После подстановки в дифференциальные уравнения колебаний выражений

$$f = A_1 \sin(kt + \alpha), \quad \varphi = A_2 \sin(kt + \alpha)$$

получим два уравнения, связывающие A_1 и A_2 . Введем в рассмотрение величину z , пропорциональную искомым периодам колебаний:

$$z = \frac{k_0}{k}, \quad k_0 = \sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}},$$

где k_0 — частота колебаний, которую мы определили бы, рассматривая пластинку как точечную массу, закрепленную на конце балочки.

Приходим к системе уравнений

$$A_1 \left[z^2 - \left(1 + \frac{3d}{2l} \right) \right] - A_2 l \left(\frac{d}{l} + \frac{3}{2} \frac{d^2 + \rho^2}{l^2} \right) = 0,$$

$$-A_1 \left(\frac{3}{2} + 3 \frac{d}{l} \right) + A_2 l \left[z^2 - \left(\frac{3}{2} \frac{d}{l} + 3 \frac{d^2 + \rho^2}{l^2} \right) \right] = 0.$$

Приравнявая нулю определитель этой системы, получаем уравнение, служащее для нахождения периодов главных колебаний; оно приводится к виду

$$f(z^2) = z^4 - z^2 \left(1 + 3 \frac{d}{l} + 3 \frac{d^2 + \rho^2}{l^2} \right) + \frac{3}{4} \frac{\rho^2}{l^2} = 0.$$

Коэффициенты форм главных колебаний β_1 и β_2 найдем, определив отношения $A_1 : A_2$ для каждого из корней z_1^2 и z_2^2 этого уравнения. Имеем

$$\beta_i = \frac{A_1^{(i)}}{A_2^{(i)}} = l \frac{d/l + [3(d^2 + \rho^2)/(2l^2)]}{z_i^2 - [1 + 3d/(2l)]} = \frac{z_i^2 - [3d/(2l) + 3(d^2 + \rho^2)/l^2]}{3/2 + 3d/l},$$

$i = 1, 2.$

Отметим теперь, что поскольку

$$f(0) > 0, \quad f\left(1 + \frac{3d}{2l}\right) = f\left(\frac{3d}{2l} + 3 \frac{d^2 + \rho^2}{l^2}\right) < 0, \quad f(\infty) > 0,$$

корни z_2^2 и z_1^2 уравнения периодов лежат в интервалах $(0, 1 + 3d/(2l))$ и $(1 + 3d/(2l), \infty)$; для большего корня z_1^2 коэффициент формы $\beta_1 > 0$, а для меньшего (во втором главном колебании) $\beta_2 < 0$. О характере движения при главных колебаниях и об осуществлении главных колебаний можно повторить сказанное в примере 165, причем точки P_1 и P_2 на рис. 462 служат мгновенными центрами вращения пластинки при первом и соответственно втором главном колебании ее.

Пример 167. Требуется составить дифференциальные уравнения свободных колебаний груза, поддерживаемого кронштейном из двух стержней $O_1M = l$ и O_2M с шарнирно закрепленными в неподвижной стене

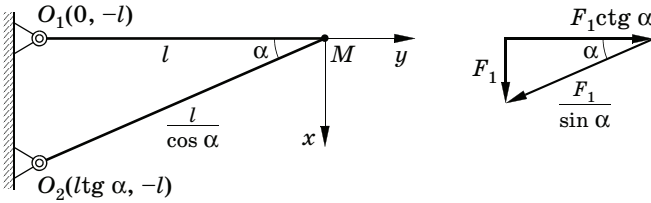


Рис. 464

концами O_1 и O_2 и шарнирно соединенными в точке M под углом α . Масса груза равна m , массой стержней пренебрегаем (рис. 464).

Усилия, возникающие в стержнях O_1M и O_2M при приложении в точке M вертикальной силы F_1 , равны соответственно $F_1 \operatorname{ctg} \alpha$ и $-F_1/\sin \alpha$; при приложении горизонтальной силы F_2 в этой точке в стержне O_1M возникает усилие F_2 ; при одновременном действии сил F_1 и F_2 усилия в стержнях будут

$$S_1 = F_1 \operatorname{ctg} \alpha + F_2, \quad S_2 = -F_1/\sin \alpha.$$

Замечая, что жесткости стержней на растяжение равны соответственно

$$c_1 = \frac{E\Omega}{l}, \quad c_2 = \frac{E\Omega \cos \alpha}{l},$$

где E — модуль нормальной упругости материала стержней, а Ω — площадь их поперечного сечения, составим выражение потенциальной энергии кронштейна в виде

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{S_1^2}{2c_1} + \frac{S_2^2}{2c_2} = \frac{l}{2E\Omega} \left[(F_1 \operatorname{ctg} \alpha + F_2)^2 + \frac{1}{\cos \alpha} \frac{F_1^2}{\sin^2 \alpha} \right] = \\ &= \frac{l}{2E\Omega} \left[\frac{1 + \cos^3 \alpha}{\cos \alpha \sin^2 \alpha} F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \operatorname{ctg} \alpha \right], \end{aligned}$$

откуда по (34.82) находим

$$\alpha_{11} = \frac{l}{E\Omega} \frac{1 + \cos^3 \alpha}{\cos \alpha \sin^2 \alpha}, \quad \alpha_{22} = \frac{l}{E\Omega}, \quad \alpha_{12} = \frac{l \operatorname{ctg} \alpha}{E\Omega}.$$

Кинетическая энергия груза равна

$$T = (1/2) m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

где x и y — вертикальное и горизонтальное смещения груза из положения равновесия. Дифференциальные уравнения движения (34.85) будут иметь вид

$$x = -\frac{ml}{E\Omega} \left(\frac{1 + \cos^3 \alpha}{\cos \alpha \sin^2 \alpha} \ddot{x} + \ddot{y} \operatorname{ctg} \alpha \right),$$

$$y = -\frac{ml}{E\Omega} (\ddot{x} \operatorname{ctg} \alpha + \ddot{y}).$$

Для составления дифференциальных уравнений можно было бы также использовать решение, приведенное в примере 163 (§ 187). В формулах (34.68) указанного примера имеем

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = -1; \quad \alpha_2 = \sin \alpha, \quad \beta_2 = -\cos \alpha.$$

Замечая, что $S_i = 0$, так как усилиями в стержнях при равновесии мы пренебрегли, получаем

$$c_{11} = \frac{E\Omega}{l} \cos \alpha \sin^2 \alpha, \quad c_{22} = \frac{E\Omega}{l} (1 + \cos^3 \alpha), \quad c_{12} = -\frac{E\Omega}{l} \cos^2 \alpha \sin \alpha.$$

и дифференциальные уравнения движения в форме (34.6) будут

$$\ddot{x} = -\frac{E\Omega}{lm} (x \cos \alpha \sin^2 \alpha - y \cos^2 \alpha \sin \alpha),$$

$$\ddot{y} = -\frac{E\Omega}{lm} [-x \cos^2 \alpha \sin \alpha + (1 + \cos^3 \alpha)y].$$

Их можно было бы получить, решив предыдущие уравнения относительно ускорений \ddot{x} , \ddot{y} .

§ 189. Вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы

Обозначим через $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ обобщенные возмущающие силы; тогда дифференциальные уравнения движения системы, кинетическая и потенциальная энергии которой выражаются формулами (34.2) и (34.4), будут иметь вид

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= Q_1(t), \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= Q_2(t). \end{aligned} \tag{34.87}$$

Общее решение этой системы дифференциальных уравнений является суммой общего решения соответствующей системы однородных уравнений, т. е. системы (34.6), и частного решения системы (34.87). Первое решение найдено выше, остается определить частное решение.

В наиболее простом случае, когда возмущающие силы являются синусоидальными функциями времени одинаковой частоты и фазы

$$Q_1 = H_1 \sin(pt + \delta), \quad Q_2 = H_2 \sin(pt + \delta), \tag{34.88}$$

вынужденные колебания, т. е. частное решение системы (34.87) можно искать в виде синусоидальных функций той же частоты и фазы

$$q_1 = B_1 \sin(pt + \delta), \quad q_2 = B_2 \sin(pt + \delta). \quad (34.89)$$

Подставив (34.89) в систему уравнений (34.87), после сокращения на общий множитель $\sin(pt + \delta)$ получим два уравнения для определения неизвестных амплитуд B_1 и B_2 :

$$\begin{aligned} (c_{11} - p^2 a_{11})B_1 + (c_{12} - p^2 a_{12})B_2 &= H_1, \\ (c_{21} - p^2 a_{21})B_1 + (c_{22} - p^2 a_{22})B_2 &= H_2. \end{aligned} \quad (34.90)$$

Предполагая, что определитель этой системы

$$\Delta(p^2) = (c_{11} - p^2 a_{11})(c_{22} - p^2 a_{22}) - (c_{12} - p^2 a_{12})^2 \quad (34.91)$$

отличен от нуля, находим

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\Delta(p^2)} [H_1(c_{22} - p^2 a_{22}) - H_2(c_{12} - p^2 a_{12})], \\ B_2 &= \frac{1}{\Delta(p^2)} [-H_1(c_{21} - p^2 a_{21}) + H_2(c_{11} - p^2 a_{11})]. \end{aligned} \quad (34.92)$$

Заметим, что правая часть выражения (34.91) имеет ту же форму, что и уравнение (34.15), определяющее частоты главных колебаний. Поэтому знаменатель в формулах (34.92) обращается в нуль при $p = k_1$ или $p = k_2$. Совпадение частоты возмущающей силы с одной из частот свободных колебаний, как станет ясно ниже, сопровождается при отсутствии сил сопротивления неограниченным возрастанием амплитуд колебаний с течением времени — явлением *резонанса*. Отметим, что при $p = k_i$, $i = 1, 2$, определитель системы уравнений (34.90) обращается в нуль, т. е. система не имеет решений относительно B_1 и B_2 . Поэтому частное решение системы дифференциальных уравнений (34.87) в условиях резонанса следует искать в форме, отличной от (34.89).

Из (34.92) находим отношение амплитуд B_1 и B_2 :

$$\begin{aligned} \frac{B_1}{B_2} &= \frac{H_1(c_{22} - p^2 a_{22}) - H_2(c_{12} - p^2 a_{12})}{H_2(c_{11} - p^2 a_{11}) - H_1(c_{12} - p^2 a_{12})} = \\ &= \frac{H_1(c_{22} - p^2 a_{22}) / (c_{12} - p^2 a_{12}) - H_2}{H_2(c_{11} - p^2 a_{11}) / (c_{12} - p^2 a_{12}) - H_1}. \end{aligned}$$

Это отношение при $p = k_i$ сохраняет конечное значение; по (34.19) и (34.24) оно оказывается равным

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{H_1\beta_i + H_2}{H_2/\beta_i + H_1} = \beta_i, \quad i = 1, 2. \quad (34.93)$$

Формы вынужденных колебаний системы при резонансе совпадают с соответствующими формами свободных колебаний.

Рассмотрение вынужденных колебаний системы с двумя степенями свободы значительно упрощается при переходе к главным координатам. По определению обобщенных сил элементарная работа возмущающих сил на возможном перемещении системы может быть представлена в виде

$$\delta W = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2.$$

Но по (34.47)

$$\delta q_1 = \beta_1\delta\theta_1 + \beta_2\delta\theta_2, \quad \delta q_2 = \delta\theta_1 + \delta\theta_2;$$

следовательно,

$$\delta W = (Q_1\beta_1 + Q_2)\delta\theta_1 + (Q_1\beta_2 + Q_2)\delta\theta_2.$$

Поэтому обобщенные силы, соответствующие главным координатам, будут

$$\Theta_1 = Q_1\beta_1 + Q_2, \quad \Theta_2 = Q_1\beta_2 + Q_2 \quad (34.94)$$

и дифференциальные уравнения движения системы в главных координатах, согласно (34.46) и (34.55), будут иметь вид

$$\ddot{\theta}_1 + k_1^2\theta_1 = \frac{Q_1\beta_1 + Q_2}{a_1}, \quad \ddot{\theta}_2 + k_2^2\theta_2 = \frac{Q_1\beta_2 + Q_2}{a_2}. \quad (34.95)$$

Задача сводится к интегрированию двух не зависящих друг от друга дифференциальных уравнений, отнесенных к главным координатам. Здесь ограничимся напоминанием основного результата: явление резонанса имеет место при совпадении одной из частот главных колебаний k_1 или k_2 с частотой одной из гармонических составляющих возмущающей силы:

$$k_i = sp, \quad i = 1, 2; \quad s = 1, 2, 3, \dots, \quad (34.96)$$

где p — частота возмущающей силы. При $s = 1, 2$ и т. д. имеем резонанс первого, второго и т. д. порядков. Амплитуды вынужден-

ных колебаний при резонансе возрастают пропорционально времени (в решении дифференциальных уравнений t является множителем при тригонометрической функции времени).

Решения дифференциальных уравнений (34.95) можно представить также в форме (33.13)

$$\theta_i = \theta_i^{(0)} \cos k_i t + \frac{\dot{\theta}_i^{(0)}}{k_i} \sin k_i t + \frac{1}{a_i k_i} \int_0^t \left[\beta_i Q_1(\xi) + Q_2(\xi) \right] \sin k_i(t - \xi) d\xi, \quad i = 1, 2. \quad (34.97)$$

По формулам (34.47) вернемся теперь к исходным неизвестным q_1 и q_2 . Тогда получим общее решение системы дифференциальных уравнений (34.87)

$$q_1(t) = \beta_1 \theta_1 + \beta_2 \theta_2, \quad q_2(t) = \theta_1 + \theta_2, \quad (34.98)$$

которая содержит четыре произвольные постоянные $\theta_i^{(0)}$ и $\dot{\theta}_i^{(0)}$, $i = 1, 2$; они должны быть определены по начальным значениям обобщенных координат $q_i^{(0)}$ и обобщенных скоростей $\dot{q}_1^{(0)}$.

Пример 168. Динамический гаситель колебаний (рис. 465). Груз массой m_1 , присоединенный к неподвижному основанию с помощью пружины с жесткостью c_1 , находится под действием синусоидальной возмущающей силы $Q = H \sin pt$. К этому грузу присоединен второй груз массой m_2 . Жесткость пружины, соединяющей грузы между собой, равна c_2 . Покажем, что при надлежащем подборе величин m_2 и c_2 вынужденные колебания первого груза, обусловленные действием на него возмущающей силы, могут быть уничтожены.

Дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

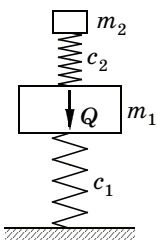
$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) x_1 - c_2 x_2 = H \sin pt,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 x_1 + c_2 x_2 = 0.$$

По формулам (34.92) находим

$$x_1 = \frac{1}{\Delta(p^2)} H (c_2 - p^2 m_2) \sin pt,$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta(p^2)} H c_2 \sin pt,$$



где

$$\Delta(p^2) = (c_1 + c_2 - m_1 p^2)(c_2 - m_2 p^2) - c_2^2.$$

Если подобрать c_2 и m_2 так, чтобы

$$p^2 = c_2/m_2 = n_2^2,$$

Рис. 465

т. е. чтобы парциальная частота n_2 второго груза (при неподвижном первом) была равна частоте возмущающей силы, то окажется, что

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -(H/c^2) \sin pt.$$

Амплитуда вынужденных колебаний первого груза оказывается равной нулю. Этот результат можно объяснить так: подставим в первое дифференциальное уравнение движения вместо x_2 его значение; получим

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 + c_2(H/c_2) \sin pt = H \sin pt,$$

где

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 = 0;$$

иными словами, в любой момент реакция второго груза уравновешивает приложенную к первому грузу возмущающую силу. Не следует думать, что указанным способом можно успокоить колебания большой массы m_1 при помощи массы m_2 , произвольно малой, если надлежащим образом подобрать жесткость c_2 ; действительно, при малой массе m_2 и данной частоте p амплитуда колебаний массы m_2 , равная $H/(m_2 p^2)$, может оказаться очень большой.

Использование гасителя имеет смысл, если при его отсутствии имеет место резонанс колебаний груза массой m_1 , т. е. если

$$\sqrt{c_1/m_1} = p.$$

При условии

$$\sqrt{c_1/m_1} = \sqrt{c_2/m_2} = n_2$$

характеристическое уравнение рассматриваемой системы с двумя степенями свободы будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta(k^2) &= m_1 m_2 \left\{ \left[n_2^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) - k^2 \right] (n_2^2 - k^2) - \frac{m_2}{m_1} n_2^4 \right\} = \\ &= m_1 m_2 \left[k^4 - \left(2 + \frac{m_2}{m_1} \right) n_2^2 k^2 + n_2^4 \right] = 0. \end{aligned}$$

Частоты главных колебаний, определяемые корнями этого уравнения, равны

$$\begin{aligned} k_1 &= n_2 \sqrt{1 + \frac{m_2}{2m_1} + \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \left(1 + \frac{m_2}{4m_1} \right)}}, \\ k_2 &= n_2 \sqrt{1 + \frac{m_2}{2m_1} - \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \left(1 + \frac{m_2}{4m_1} \right)}} \end{aligned}$$

и при малых значениях отношения m_2/m_1 будут мало отличаться друг от друга и от расчетного значения $p = n_2$ — частоты возмущающей силы. Отсюда следует, что применение гасителя допустимо лишь при строго фиксированной частоте возмущающей силы, так как при малом изменении этой частоты не исключен случай резонанса с одним из главных колебаний системы, т. е. совпадение частоты p с одной из частот k_1 и k_2 .

Пример 169*. Турбогенератор установлен на плите, поддерживаемой шестью стойками (рис. 466); S — центр тяжести ротора, D — точка пересечения оси вала со средней плоскостью ротора (рис. 466, *a*), L — точка пересечения с этой плоскостью прямой, соединяющей центры подшипников вала. Масса плиты и установленных на ней невращающихся частей двигателя равна M (массой стоек пренебрегаем), жесткость стоек при изгибе равна C , масса ротора m , жесткость вала при изгибе c , прогиб LD вала в его середине равен f , эксцентриситет DS , с которым ротор насажен на вал, равен e . Вследствие упругости стоек плита не остается неподвижной, а совершает малые колебания. Пренебрегая сжимаемостью стоек и рассматривая только горизонтальные колебания в направлении, перпендикулярном оси двигателя, изучить, как эти колебания влияют на изменение критического числа оборотов вала.

За параметры, характеризующие положение системы (обобщенные координаты), примем перемещение $x_0 = OL$ плиты при колебаниях, координаты x и y центра тяжести ротора и угол φ поворота ротора. Кинетическая энергия системы будет

$$T = (1/2)M\dot{x}_0^2 + (1/2)m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (1/2)J\dot{\varphi}^2.$$

Потенциальные энергии изогнутых стоек и вала равны соответственно

$$(1/2)Cx_0^2, \quad (1/2)cf^2.$$

Выразим прогиб f через обобщенные координаты. Согласно рис. 466, *b* получаем

$$f^2 = LD^2 = LN^2 + ND^2 = (x - x_0 - e \cos \varphi)^2 + (y - e \sin \varphi)^2$$

и, следовательно,

$$П = (1/2)Cx_0^2 + (1/2)c[(x - x_0 - e \cos \varphi)^2 + (y - e \sin \varphi)^2].$$

Уравнения движения будут

$$M\ddot{x}_0 + (C + c)x_0 - cx = -ce \cos \varphi,$$

$$m\ddot{x} + cx - cx_0 = ce \cos \varphi,$$

$$m\ddot{y} + cy = ce \sin \varphi,$$

$$J\ddot{\varphi} + ce[(x - x_0 - e \cos \varphi) \sin \varphi - (y - e \sin \varphi) \cos \varphi] = 0.$$

* Хотя в этом примере речь идет о системе с четырьмя степенями свободы, он здесь уместен, так как задача фактически сводится к решению системы двух линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка.

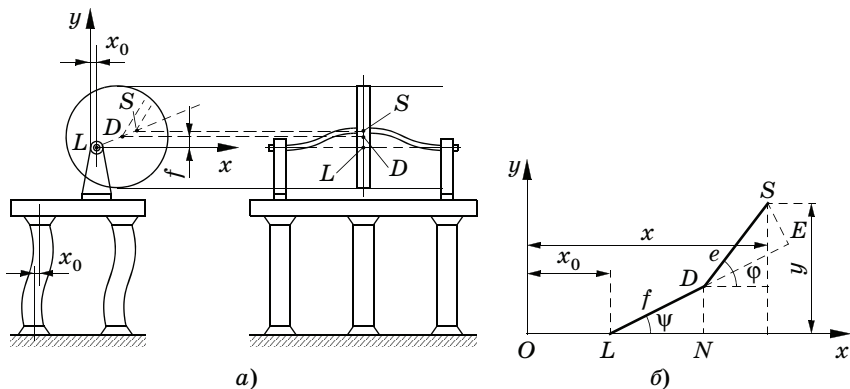


Рис. 466

При составлении последнего уравнения предполагалось, что момент, вращающий ротор, равен моменту сил сопротивления. Имеем

$$(x - x_0 - e \cos \varphi) \sin \varphi - (y - e \sin \varphi) \cos \varphi = LN \sin \varphi - ND \cos \varphi = f(\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) = f \sin (\varphi - \psi),$$

и последнее уравнение движения принимает вид

$$J \ddot{\varphi} + cef \sin (\varphi - \psi) = 0.$$

Так как произведение ef весьма мало, можно принять

$$J \ddot{\varphi} \approx 0, \quad \dot{\varphi} = p = \text{const.}$$

Получаем

$$M \ddot{x}_0 + (C + c) x_0 - cx = -ce \cos pt,$$

$$m \ddot{x} + cx - cx_0 = ce \cos pt,$$

$$m \ddot{y} + cy = ce \sin pt.$$

Последнее уравнение не зависит от двух прочих, т. е. y является главной координатой. Частное решение этого уравнения, соответствующее вынужденным колебаниям частоты p , будет

$$y = \frac{ce}{m(c/m - p^2)} \sin pt = b \sin pt,$$

причем $\sqrt{c/m} = p_{\text{кр}}$ является критической угловой скоростью вала при неподвижном фундаменте. Горизонтальные колебания фундамента не влияют на критическое число оборотов вала по отношению к вертикальным колебаниям ротора.

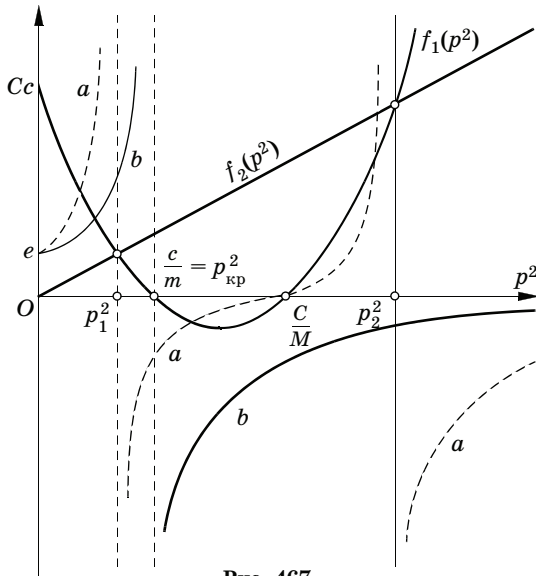


Рис. 467

Переходим к рассмотрению двух первых уравнений. Сравнение с общими уравнениями (34.87) и равенствами (34.88) дает

$$\begin{aligned} a_{11} &= M, & a_{12} &= a_{21} = 0, & a_{22} &= m, \\ c_{11} &= C + c, & c_{12} &= c_{21} = -c, & c_{22} &= c, \\ H_1 &= -H_2 = -ce, \end{aligned}$$

и по формулам (34.91) и (34.92) находим

$$\begin{aligned} \Delta(p^2) &= (C - p^2M)(c - p^2m) - ctp^2, \\ x_0 &= \frac{cemp^2}{\Delta(p^2)} \cos pt, \quad x = \frac{ce(C - Mp^2)}{\Delta(p^2)} \cos pt = a \cos pt. \end{aligned}$$

Резонанс, при котором устанавливаются интенсивные горизонтальные колебания системы, имеет место, когда угловая скорость будет равна одной из частот свободных колебаний системы, т. е. одному из корней уравнения

$$\Delta(p^2) = 0.$$

Обозначим эти корни через p_1 и p_2 . Для графического определения их на рис. 467 найдены точки пересечения прямой $f_1(p^2) = ctp^2$ и параболы $f_2(p^2) = (C - p^2M)(c - p^2m)$. Абсциссы этих точек пересечения будут искомыми корнями. Из рисунка находим $p_1 < p_{кр} < p_2$, т. е. одна из новых критических скоростей всегда меньше критической угловой скорости $p_{кр} = \sqrt{c/m}$ при неподвижном фундаменте, а другая больше ее. На том же рисунке построены графики коэффициентов a и b в выражениях x и y .

Находим: $a = e$ при $p = 0$, $a > 0$ при $0 < p < p_1$ и $a \rightarrow \pm \infty$ при $p \rightarrow p_1 \mp 0$, $a < 0$ при $p_1 < p < \sqrt{C/M}$ и $a = 0$ при $p = \sqrt{C/M}$; далее, $a > 0$ при $\sqrt{C/M} < p < p_2$ и $a \rightarrow \pm \infty$ при $p \rightarrow p_2 \mp 0$, наконец, $a < 0$ при $p > p_2$ и $a \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$. По этим данным строим график выражения a ; аналогично строится график b в зависимости от p^2 .

Центр тяжести ротора описывает эллипс, уравнение которого получается исключением времени из выражений x и y :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

При $p \rightarrow p_1$ ($a \rightarrow \infty$, b сохраняет конечное значение) устанавливаются интенсивные горизонтальные колебания ротора; при $p \rightarrow p_{кр}$ (a конечно, $b \rightarrow \infty$) имеют место интенсивные вертикальные колебания; наконец, при $p \rightarrow p_2$ снова устанавливается режим сильных горизонтальных колебаний. Вместо одной критической угловой скорости $p_{кр}$ при неподвижном фундаменте, в случае фундамента, способного вибрировать, получаются три критические угловые скорости — прежняя $p_{кр}$ и две новые: p_1 и p_2 , из которых одна меньше, а другая больше, чем $p_{кр}$.

§ 190. Свободные колебания системы с произвольным конечным числом степеней свободы

Рассмотрение малых колебаний системы с тремя и, вообще, n степенями свободы состоит в непосредственном обобщении того, что было изложено в § 186 для случая двух степеней свободы, но при наличии больших вычислительных трудностей.

Ограничимся случаем стационарного движения системы, т. е. таким, в котором уравнения связей не содержат времени,

Обозначим через q_i , $i = 1, 2, \dots, n$, значения обобщенных координат системы, отсчитываемых от положения устойчивого ее равновесия, около которого происходят малые движения системы.

Условимся в настоящем параграфе о кратком обозначении сумм одночленов, которое было пояснено в гл. VIII при изложении элементов тензорной алгебры.

Кинетическая и потенциальная энергии, а также диссипативная функция Рэля представляются *однородными квадратичными функциями*

$$T = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad \Pi = \frac{1}{2} c_{ij} q_i q_j, \quad \Phi = \frac{1}{2} b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (34.99)$$

Считая частоты определенными и различными по величине, расположим их в порядке возрастания:

$$k_1^2, k_2^2, \dots, k_n^2. \quad (34.106)$$

Найдем из характеристического уравнения (34.105), например, корень k_1^2 и подставим его в систему уравнений (34.103).

Так как определитель $\Delta(k_1^2)$ равен нулю, в системе (34.103) будет только $(n - 1)$ независимых уравнений. Опуская последнее уравнение в системе (34.103), получаем укороченную линейную систему алгебраических уравнений относительно отношений коэффициентов $A_i^{(1)} / A_n^{(1)}$, которую выпишем в развернутом виде:

$$\begin{aligned} (c_{11} - k_1^2 a_{11}) \frac{A_1^{(1)}}{A_n^{(1)}} + (c_{12} - k_1^2 a_{12}) \frac{A_2^{(1)}}{A_n^{(1)}} + \dots + \\ + (c_{1, n-1} - k_1^2 a_{1, n-1}) \frac{A_{n-1}^{(1)}}{A_n^{(1)}} = -(c_{1n} - k_1^2 a_{1n}), \\ (c_{21} - k_1^2 a_{21}) \frac{A_1^{(1)}}{A_n^{(1)}} + (c_{22} - k_1^2 a_{22}) \frac{A_2^{(1)}}{A_n^{(1)}} + \dots + \\ + (c_{2, n-1} - k_1^2 a_{2, n-1}) \frac{A_{n-1}^{(1)}}{A_n^{(1)}} = -(c_{2n} - k_1^2 a_{2n}), \end{aligned} \quad (34.107)$$

.....

$$\begin{aligned} (c_{n-1, 1} - k_1^2 a_{n-1, 1}) \frac{A_1^{(1)}}{A_n^{(1)}} + (c_{n-1, 2} - k_1^2 a_{n-1, 2}) \frac{A_2^{(1)}}{A_n^{(1)}} + \dots + \\ + (c_{n-1, n-1} - k_1^2 a_{n-1, n-1}) \frac{A_{n-1}^{(1)}}{A_n^{(1)}} = -(c_{n-1, n} - k_1^2 a_{n-1, n}), \end{aligned}$$

где верхний индекс (1) означает, что k^2 всюду заменено на k_1^2 .

Решения этого уравнения, согласно общему правилу решения линейных алгебраических систем, представляются дробями, в которых знаменателем служит минор $\Delta_n(k^2)$ основного частотного

определителя (34.104), соответствующий вычеркиванию последней строки и последнего столбца:

$$\Delta_n(k_1^2) = \|c_{ij} - k_1^2 a_{ij}\|, \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (34.108)$$

а числителем — определитель, получающийся из (34.104) заменой вычеркнутых строки и столбца свободными членами, стоящими в правой части системы (34.107), так что

$$\frac{A_1^{(1)}}{A_n^{(1)}} = -\frac{1}{\Delta_n(k_1^2)} \times \begin{vmatrix} -(c_{1n} - k_1^2 a_{1n}) & c_{12} - k_1^2 a_{12} & \dots & c_{1, n-1} - k_1^2 a_{1, n-1} \\ -(c_{2n} - k_1^2 a_{2n}) & c_{22} - k_1^2 a_{22} & \dots & c_{2, n-1} - k_1^2 a_{2, n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(c_{n-1, n} - k_1^2 a_{n-1, n}) & c_{n-1, 2} - k_1^2 a_{n-1, 2} & \dots & c_{n-1, n-1} - k_1^2 a_{n-1, n-1} \end{vmatrix} \quad (34.109)$$

Если первый столбец определителя поставить на последнее место, изменив одновременно все знаки этого столбца на противоположные, то получится

$$\frac{A_1^{(1)}}{A_n^{(1)}} = \frac{\Delta_1(k_1^2)}{\Delta_n(k_1^2)}, \quad (34.110)$$

где $\Delta_1(k_1^2)$ — минор элемента первого столбца и последней строки исходного определителя (34.104). Аналогично будем иметь

$$\frac{A_2^{(1)}}{A_n^{(1)}} = \frac{\Delta_2(k_1^2)}{\Delta_n(k_1^2)}, \dots, \frac{A_{n-1}^{(1)}}{A_n^{(1)}} = \frac{\Delta_{n-1}(k_1^2)}{\Delta_n(k_1^2)}. \quad (34.111)$$

Эти равенства можно переписать в виде пропорций

$$\frac{A_1^{(n)}}{\Delta_1(k_1^2)} = \frac{A_2^{(1)}}{\Delta_2(k_1^2)} = \dots = \frac{A_{n-1}^{(1)}}{A_{n-1}(k_1^2)} = \frac{A_n^{(1)}}{\Delta_n(k_1^2)} = C_1,$$

так что

$$A_j^{(1)} = C_1 \Delta_j(k_1^2), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (34.112)$$

где, подчеркнем, Δ_j является минором элемента последней строки с номером j .

Таким образом, вспоминая (34.102), получаем систему частных решений системы дифференциальных уравнений (34.100)

$$q_j^{(1)} = C_1 \Delta_j(k_1^2) \sin(k_1 t + \alpha_1), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (34.113)$$

Совокупность равенств (34.113) характеризует *первое главное колебание системы*. Это означает, что если система с n степенями свободы совершает первое главное колебание, то все обобщенные координаты ее колеблются с одной и той же частотой k_1 , причем в одинаковых фазах α_1 и с амплитудами $\Delta_j(k_1^2)/\Delta_n(k_1^2)$, зависящими только от структуры системы, т. е. от инерционных и квазиупругих коэффициентов и номера (частоты) главного колебания, но не от начальных условий, определяющих постоянные C_1 и α_1 (изохронность малых колебаний).

Аналогичным образом строятся и другие решения, соответствующие второму, третьему и т. д. главным колебаниям:

$$q_i^{(j)} = C_j \Delta_j(k_i^2) \sin(k_i t + \alpha_i), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (34.114)$$

Общее решение, описывающее малые колебания системы с n степенями свободы относительно положения ее устойчивого равновесия, будет определяться суммой (суперпозицией) частных решений (34.113):

$$q_j = \sum_{s=1}^n q_j^{(s)} = \sum_{s=1}^n C_s \Delta_j(k_s^2) \sin(k_s t + \alpha_s), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (34.115)$$

Постоянные интегрирования C_s и α_s должны определяться путем подстановки в равенство (34.115) и в равенство, получаемое из него дифференцированием по времени t , начальных условий

$$q_j = q_j^0, \quad \dot{q}_j = \dot{q}_j^0 \quad \text{при } t = 0.$$

В настоящем изложении опущены многие детали, в частности не доказана положительность корней характеристического уравнения, не разобран случай кратных корней этого уравнения и т. д.

Оставлен в стороне и вопрос о введении в решение *главных координат*, т. е. таких координат θ_i , в которых кинетическая и потенциальная энергии представляются суммами квадратов

$$T = (1/2)(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dots + \dot{\theta}_n^2),$$

$$\Pi = (1/2)(\mu_1 \theta_1^2 + \mu_2 \theta_2^2 + \dots + \mu_n \theta_n^2).$$

При переходе к главным координатам система (34.100) из n дифференциальных уравнений распадается на n независимых уравнений

$$\ddot{\theta}_i + \mu_i \theta_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

имеющих решения

$$\theta_i = C_i \sin(\sqrt{\mu_i} t + \alpha_i),$$

а полное решение исходной системы представляется суммой этих отдельных решений.

Удовольствуемся этими краткими сведениями об общем случае свободных малых колебаний системы с n степенями свободы. Более детальное изложение вопроса, а также обобщения на случай вынужденных колебаний системы и влияния на ее колебания сопротивлений можно найти в специальных курсах теории колебаний, в третьем томе нашей книги «Теоретическая механика» (М.: ГТТИ, 1934), а также в книге Ф. Р. Гантмахера [3, 2-е изд., гл. VI].

Глава XXXV

Некоторые задачи динамики твердого тела

§ 191. Уравнения Эйлера динамики твердого тела

Для составления дифференциальных уравнений вращения твердого тела, имеющего неподвижную точку, применим теорему об изменении момента количества движения относительно этой точки

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{m}^{(O)}. \quad (35.1)$$

Здесь $\mathbf{m}^{(O)}$ — главный момент внешних сил, а \mathbf{K} — главный момент количества движения твердого тела относительно неподвижной точки O . Выражение вектора \mathbf{K} было приведено ранее (см. формулы (26.2), (26.3), а также (26.36)).

Пусть система осей $Oxyz$ неизменно связана с твердым телом, т. е. имеет ту же угловую скорость ω , что и тело. При дифференцировании вектора \mathbf{K} воспользуемся известным соотношением (17.16)*

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d'\mathbf{K}}{dt} + \omega \times \mathbf{K}, \quad (35.2)$$

связывающим абсолютную и относительную производные вектора. Спроецировав (35.2) на оси координат Ox , Oy и Oz , получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}\right)_x &= \frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y, \\ \left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}\right)_y &= \frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z, \\ \left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}\right)_z &= \frac{dK_z}{dt} + \omega_x K_y - \omega_y K_x. \end{aligned} \quad (35.3)$$

Приняв за оси координат главные оси инерции тела в точке O и воспользовавшись формулами (26.36), найдем

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_x + (J_3 - J_2) \omega_y \omega_z &= m_x, \\ J_2 \dot{\omega}_y + (J_1 - J_3) \omega_z \omega_x &= m_y, \\ J_3 \dot{\omega}_z + (J_2 - J_1) \omega_x \omega_y &= m_z, \end{aligned} \quad (35.4)$$

где J_1, J_2, J_3 — главные моменты инерции, а m_x, m_y, m_z — главные моменты внешних сил относительно осей Ox, Oy, Oz .

Уравнения (35.4) называются *динамическими уравнениями Эйлера*.

Движение твердого тела в общем случае можно определить, зная движение его центра масс и вращение относительно центра масс. Для составления дифференциальных уравнений движения следует применить теоремы о движении центра масс

$$M\mathbf{w}_C = \mathbf{V}, \quad (35.5)$$

где \mathbf{V} — главный вектор внешних сил, приложенных к телу, а \mathbf{w}_C — ускорение центра масс C , и теорему об изменении главного момента количества движения по отношению к центру масс (§ 120)

$$\frac{d\mathbf{K}'}{dt} = \mathbf{m}^{(C)}.$$

* См. т. I, гл. 17, § 68.

Введем две системы координат: неподвижную $O\xi\eta\zeta$ и систему осей $Cxyz$, связанных с телом и имеющих начало в центре масс. Проецируя (35.5) на неподвижные оси координат $O\xi\eta\zeta$, получаем

$$M\ddot{\xi}_C = R_\xi, \quad M\ddot{\eta}_C = R_\eta, \quad M\ddot{\zeta}_C = R_\zeta. \quad (35.6)$$

Если же пользоваться системой осей $Cxyz$, то, замечая, что по формуле (17.12)*

$$\mathbf{w}_C = \frac{dv_C}{dt} = \frac{d'v_C}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_C,$$

получаем

$$\begin{aligned} M \left(\frac{dv_{Cx}}{dt} + \omega_y v_{Cz} - \omega_z v_{Cy} \right) &= R_x, \\ M \left(\frac{dv_{Cy}}{dt} + \omega_z v_{Cx} - \omega_x v_{Cz} \right) &= R_y, \\ M \left(\frac{dv_{Cz}}{dt} + \omega_x v_{Cy} - \omega_y v_{Cx} \right) &= R_z, \end{aligned} \quad (35.7)$$

где v_{Cx} , v_{Cy} , v_{Cz} — проекции скорости центра масс на эти оси.

Для определения вращательного движения надо составить уравнение моментов по отношению к центру масс. Получим уравнения Эйлера (35.4), в которых оси $Oxyz$ будут в этом случае *главными центральными осями инерции*, а J_1 , J_2 , J_3 — главными центральными моментами инерции.

Пример 170. Доказать, что вращение тяжелого твердого тела, центр тяжести которого неподвижен, будет устойчивым, если первоначально неподвижному телу сообщить вращение вокруг наибольшей или наименьшей оси эллипсоида инерции, и неустойчивым, если вращение сообщается вокруг средней оси эллипсоида инерции.

Главный момент внешних сил, т. е. силы тяжести и реакции неподвижной точки, в рассматриваемом случае равен нулю, и уравнения Эйлера (35.4) дают

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_x + (J_3 - J_2) \omega_y \omega_z &= 0, \\ J_2 \dot{\omega}_y + (J_1 - J_3) \omega_z \omega_x &= 0, \\ J_3 \dot{\omega}_z + (J_2 - J_1) \omega_x \omega_y &= 0, \end{aligned}$$

* Т. I, § 68. Напоминаем, что для некоторой вектор-функции $\mathbf{a}(t)$ через $d'a/dt$ обозначена *относительная производная*, т. е. производная от вектора \mathbf{a} , вычисленная в предположении неизменности направления единичных векторов осей относительной системы координат.

где J_1, J_2, J_3 — главные центральные моменты инерции. Этим уравнениям можно удовлетворить, полагая $\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = \omega_0 = \text{const}$. Будет ли такой режим движения устойчивым? Иными словами, если дать оси небольшой толчок в сторону, т. е. сообщить телу весьма малые угловые скорости ω_{0x} и ω_{0y} , то останется ли движение вращением вокруг оси Cz с весьма малыми колебаниями оси или характер его коренным образом изменится? Чтобы ответить на это, примем, что имеет место первое предположение, т. е. что ω_x и ω_y остаются весьма малыми по сравнению с ω_z , и найдем, при каких условиях такое предположение может оказаться верным.

Пренебрегая в третьем уравнении Эйлера произведением малых величин $\omega_x \omega_y$, получим $\omega_z = \omega_0 = \text{const}$, т. е. в этом приближении ω_z сохраняет свое значение. Первое и второе уравнения дают

$$\dot{\omega}_x + \frac{J_3 - J_2}{J_1} \omega_0 \omega_y = 0, \quad \dot{\omega}_y + \frac{J_1 - J_3}{J_2} \omega_0 \omega_x = 0,$$

откуда получаем

$$\ddot{\omega}_x + \alpha \omega_x = 0, \quad \ddot{\omega}_y + \alpha \omega_y = 0, \tag{35.8}$$

причем

$$\alpha = \frac{(J_3 - J_2)(J_3 - J_1)}{J_1 J_2} \omega_0^2.$$

Если $\alpha < 0$, что может иметь место, если разности $J_3 - J_2$ и $J_3 - J_1$ имеют противоположные знаки, т. е. ось Cz является средней осью эллипсоида инерции, то решения уравнений (35.8) выражаются через показательные функции, и при достаточно большом t угловые скорости ω_x и ω_y могут сделаться сколь угодно большими. В этом случае вращение вокруг оси Cz *неустойчиво*.

Можно доказать, что оно будет *устойчивым* при условии $\alpha > 0$, т. е. если начальное вращение задано вокруг оси наибольшего или наименьшего момента инерции. В этом случае уравнения (35.8) решаются в тригонометрических функциях, т. е. решения остаются ограниченными при любом t . До появления работы А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движений» [18] принимали, что это служит доказательством наличия устойчивости; однако вопрос этот не столь прост*.

§ 192. Вращение симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки

Уравнения Эйлера упрощаются в случае гироскопа (§ 153), т. е. твердого тела, имеющего ось материальной симметрии и вращающегося вокруг неподвижной точки, расположенной на этой

* См. А. М. Ляпунов [18, с. 453]. Строгое доказательство дано Н. Г. Четаевым [28, 2-е изд., с. 36, 37].

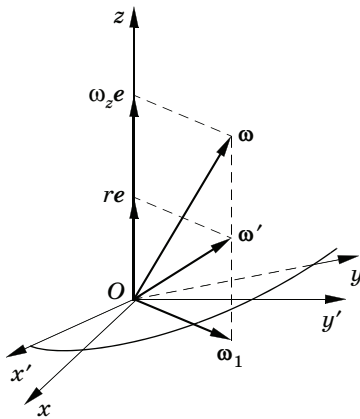


Рис. 468

оси. Будем обозначать через J_1 , $J_2 = J_1$, экваториальный, через J_3 — аксиальный момент инерции гироскопа в точке O . Единичный вектор оси материальной симметрии гироскопа (оси Oz) обозначим через e (рис. 468).

В этом параграфе и в следующих за ним предполагается, что главный момент внешних сил относительно оси гироскопа равен нулю, т. е. что главный момент этих сил относительно точки O перпендикулярен указанной оси:

$$m_z = \mathbf{m}^{(O)} \cdot \mathbf{e} = 0. \quad (35.9)$$

При этом условии и при $J_1 = J_2$ из третьего уравнения Эйлера (35.4) следует, что $\dot{\omega}_z = 0$, т. е.

$$\omega_z = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e} = \text{const.} \quad (35.10)$$

Обозначим через $\boldsymbol{\omega}_1$ составляющую вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ гироскопа в экваториальной плоскости Oxy (поперечную составляющую $\boldsymbol{\omega}$); тогда

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \omega_z \mathbf{e}. \quad (35.11)$$

Выражение главного момента количества движения гироскопа относительно точки O можно представить в виде

$$\mathbf{K} = J_1 (\omega_x \mathbf{i}_1 + \omega_y \mathbf{i}_2) + J_3 \omega_z \mathbf{e},$$

где $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ — единичные векторы двух взаимно-перпендикулярных осей Ox, Oy в экваториальной плоскости; при этом

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_x \mathbf{i}_1 + \omega_y \mathbf{i}_2,$$

и, следовательно, будем иметь

$$\mathbf{K} = J_1 \boldsymbol{\omega}_1 + J_3 \omega_z \mathbf{e}. \quad (35.12)$$

Наряду с системой осей $Oxyz$, неизменно связанной с телом, введем систему $Ox'y'z'$, вращающуюся с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}_1 + r \mathbf{e}. \quad (35.13)$$

При $r = \omega_z$ имеем $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$, т. е. система $Ox'y'z'$ также является связанной с телом; если же $r \neq \omega_z$, то система отсчета $Ox'y'z'$ в своем

вращении или отстает от вращения тела или опережает его, причем плоскость $Ox'y'z'$ все время совпадает с экваториальной плоскостью тела.

Выражение производной по времени любого вектора \mathbf{a} , пользуясь системой $Ox'y'z'$, можно, согласно § 68, записать в виде

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d'\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{a}, \quad (35.14)$$

причем первое слагаемое определяет вектор, проекции которого на оси системы $Ox'y'z'$ равны производным от соответствующих проекций вектора \mathbf{a} на эти оси, т. е. вычисляются так, как в случае осей неизменного направления; вращение системы отсчета учитывается вторым слагаемым в правой части равенства (35.14).

Применив формулу (35.14) к вектору \mathbf{K} , определяемому по (35.12), найдем

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = J_1 \left(\frac{d'\boldsymbol{\omega}_1}{dt} + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\omega}_1 \right) + J_3 \omega_z \left(\frac{d'\mathbf{e}}{dt} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{e} \right);$$

поскольку

$$\boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\omega}_1 = -r (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}), \quad \frac{d'\mathbf{e}}{dt} = 0, \quad \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{e} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e},$$

предыдущее выражение приводится к виду

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = J_1 \frac{d'\boldsymbol{\omega}_1}{dt} + (J_3 \omega_z - J_1 r) \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}. \quad (35.15)$$

Применив теорему об изменении момента количества движения, получим *векторное уравнение вращения гироскопа вокруг точки на его оси симметрии*

$$J_1 \frac{d'\boldsymbol{\omega}_1}{dt} + (J_3 \omega_z - J_1 r) \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e} = \mathbf{m}^{(O)}. \quad (35.16)$$

При $r = \omega_z$, спроецировав это уравнение на взаимно-перпендикулярные оси, лежащие в экваториальной плоскости, снова получим два первых уравнения Эйлера (35.4). Однако применение системы осей $Ox'y'z'$, не связанных с телом ($r \neq \omega_z$), позволяет во многих случаях, располагаясь выбором величины r , упростить составление уравнений. Напомним, что уравнение (35.16) имеет место лишь при условии (35.9), что видно и из формы этого уравнения.

§ 193. Регулярная прецессия симметричного тела

В § 153 было дано приближенное выражение главного момента внешних сил, которые должны быть приложены к гироскопу, имеющему угловую скорость собственного вращения ω_0 , чтобы сообщить ему угловую скорость прецессии ω^* . При этом предполагалось, что вектор угловой скорости собственного вращения имеет постоянную величину, значительно превосходящую величину вектора угловой скорости прецессии. Последний можно было считать переменным как по величине, так и по направлению. В этом параграфе рассматривается тот же вопрос об определении момента внешних сил, которые должны быть приложены к гироскопу, но в предположении, что его движение представляет собой *регулярную прецессию* (§ 63), т. е. что вектор угловой скорости собственного вращения имеет постоянную величину, вектор угловой скорости прецессии — постоянную величину и постоянное направление, а угол нутации сохраняет постоянное значение. В этом смысле постановка задачи является менее общей, чем в приближенной теории, однако при рассмотрении ее, являющимся вполне строгим, не делается никаких предположений об относительной величине угловых скоростей ω_0 и ω^* , что было существенной предпосылкой приближенной теории.

Обозначим через e и k (рис. 469) единичные векторы, имеющие направления векторов собственной угловой скорости ω_0 и угловой скорости прецессии ω^* ; тогда

$$\omega_0 = \omega_0 e, \quad \omega^* = \omega^* k, \quad (35.17)$$

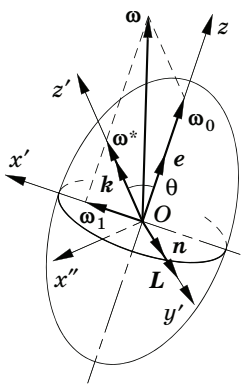


Рис. 469

причем k — единичный вектор неизменного направления, а единичный вектор e вращается с угловой скоростью ω^* ; поэтому скорость его конца, или его производная по времени, будет

$$\frac{de}{dt} = \omega^* \times e. \quad (35.18)$$

Угловая скорость тела, совершающего регулярную прецессию, по теореме сложения угловых скоростей вокруг пересекающихся осей (§ 71) равна

$$\omega = \omega_0 + \omega^*; \quad (35.19)$$

ее проекция на ось собственного вращения, т. е.

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e} = \omega_0 + \boldsymbol{\omega}^* \cdot \mathbf{e} = \omega_0 + \omega^* \cos \theta = \omega_z, \quad (35.20)$$

по условию постоянна. Поэтому можно применить уравнение (35.16). Поперечная составляющая $\boldsymbol{\omega}_1$ угловой скорости тела будет

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega} - \omega_z \mathbf{e} = \boldsymbol{\omega}^* - \omega^* \cos \theta \mathbf{e}; \quad (35.21)$$

она, как легко видеть, равна составляющей угловой скорости прецессии в плоскости, перпендикулярной оси собственного вращения. Направив ось Oz по оси собственного вращения вдоль вектора $\boldsymbol{\omega}_0$, примем за оси Ox' и Oy' правой системы $Ox'y'z$ проекцию оси прецессии на указанную плоскость и перпендикуляр к ней. Система осей $Ox'y'z$ вращается с угловой скоростью прецессии, не участвуя в собственном вращении тела; поэтому в уравнении (35.16)

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}^*. \quad (35.22)$$

Сравнение (35.21) и (35.13) дает

$$r = \omega^* \cos \theta. \quad (35.23)$$

Первое слагаемое в (35.16) обращается в нуль, так как вектор $\boldsymbol{\omega}^*$, имеющий постоянную величину, сохраняет неизменное направление по отношению к осям $Ox'y'z$. Получаем по (35.16)

$$\begin{aligned} (J_3 \omega_z - J_1 \omega^* \cos \theta) \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e} &= [J_3 (\omega_0 + \omega^* \cos \theta) - J_1 \omega^* \cos \theta] \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{e} = \\ &= J_3 \omega_0 \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{e} \left(1 + \frac{J_3 - J_1}{J_3} \frac{\omega^*}{\omega_0} \cos \theta \right) = \mathbf{m}^{(O)}, \end{aligned}$$

или по (35.17)

$$\mathbf{m}^{(O)} = J_3 (\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\omega}_0) \left(1 + \frac{J_3 - J_1}{J_3} \frac{\omega^*}{\omega_0} \cos \theta \right). \quad (35.24)$$

По (28.63) *гироскопический момент* \mathbf{L} , т. е. момент относительно точки O сил инерции гироскопа, совершающего регулярную прецессию, равен вектору $\mathbf{m}^{(O)}$ по величине и противоположен ему по направлению. Таким образом,

$$\mathbf{L} = J_3 (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}^*) \left(1 + \frac{J_3 - J_1}{J_3} \frac{\omega^*}{\omega_0} \cos \theta \right). \quad (35.25)$$

Вектор \mathbf{L} направлен перпендикулярно плоскости векторов $\boldsymbol{\omega}_0$ и $\boldsymbol{\omega}^*$ в сторону единичного вектора \mathbf{n} (по оси Oy'), определяемого ра-
внством

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}^*}{|\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}^*|} = \frac{\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}^*}{\omega_0 \omega^* \sin \theta}. \quad (35.26)$$

Действие пары сил, соответствующей гироскопическому моменту, может быть определено по правилу Фуко (§ 153). Величина гироскопического момента дается выражением

$$L = J_3 \omega_0 \omega^* \sin \theta \left(1 + \frac{J_3 - J_1}{J_3} \frac{\omega^*}{\omega_0} \cos \theta \right). \quad (35.27)$$

К выражению гироскопического момента можно прийти непосредственно, вычисляя главный момент сил инерции $S_i = -m_i \omega_i$ точек тела относительно неподвижной точки.

Формула гироскопического момента упрощается, если оси прецессии и собственного вращения взаимно-перпендикулярны, т. е.

$$\theta = \pi/2.$$

Тогда гироскопический момент определится формулой

$$L = J_3 \omega_0 \times \omega^*, \quad (35.28)$$

и по величине будет равен

$$L = J_3 \omega_0 \omega^*. \quad (35.29)$$

Формула (35.28) гироскопического момента применяется в приближенной теории гироскопических явлений и при $\theta \neq \pi/2$, так как, если угловая скорость собственного вращения значительно превосходит по величине угловую скорость прецессии, второе слагаемое в (35.25) пренебрежимо мало, и, отбрасывая его, приходим к формуле (35.28).

В качестве примера определим при заданном значении угловой скорости ω_0 собственного вращения и заданном значении угла θ отклонения оси гироскопа от вертикали значение угловой скорости ω^* , при которой имеет место регулярная прецессия (рис. 388) тяжелого гироскопа.

Применим формулу (35.27), имея в виду, что в рассматриваемом случае $m^{(0)} = Gl \sin \theta$, где G — вес гироскопа, l — расстояние от точки опоры до центра тяжести гироскопа. По сокращению на общий множитель $\sin \theta$ получим

$$Gl = J_3 \omega^* \omega_0 + (J_3 - J_1) \omega^{*2} \cos \theta, \quad (35.30)$$

откуда при заданных ω_0 и θ находим два значения угловой скорости прецессии ω^* :

$$\omega^* = \frac{-J_3 \omega_0 \pm \sqrt{J_3^2 \omega_0^2 + Gl(J_3 - J_1) \cos \theta}}{2(J_3 - J_1) \cos \theta}. \quad (35.31)$$

Регулярная прецессия возможна, если

$$J_3^2 \omega_0^2 + 4Gl(J_3 - J_1) \cos \theta > 0. \quad (35.32)$$

Если угловая скорость собственного вращения велика, то в разложении в ряд

$$\sqrt{J_3^2 \omega_0^2 + 4Gl(J_3 - J_1) \cos \theta} = J_3 \omega_0 \left(1 + \frac{2Gl(J_3 - J_1) \cos \theta}{J_3^2 \omega_0^2} + \dots \right)$$

можно ограничиться написанными слагаемыми. Взяв верхний знак перед радикалом, получим известную из приближенной теории формулу (28.66)

$$\omega_1^* = \frac{Gl}{J_3 \omega_0}. \quad (35.33)$$

Взяв нижний знак, получим

$$\omega_2^* = \frac{J_3 \omega_0}{(J_1 - J_3) \cos \theta}. \quad (35.34)$$

Угловая скорость ω_1^* соответствует *медленной*, угловая скорость ω_2^* — *быстрой прецессии*.

Пример 171. Определим в примере 123 (§ 141) давление бегуна на дно бегунной чаши (рис. 351).

Внешними силами, приложенными к бегуну, являются сила тяжести G , нормальная реакция N , сила трения, перпендикулярная плоскости рисунка, и реакция неподвижной точки O . Две последние силы не дают моментов относительно оси Ox , так как сила трения ей параллельна, а реакция неподвижной точки ее пересекает. Таким образом, момент $m^{(O)}$, определяемый формулой (35.24), должен равняться сумме моментов сил G и N . Имеем

$$cN - cG \sin \vartheta = J_3 \omega^* \omega_0 \sin \vartheta \left(1 + \frac{\omega^*}{\omega_0} \frac{J_3 - J_1}{J_3} \cos \vartheta \right); \quad (35.35)$$

подставляя вместо ω_0 его значение, получаем

$$N = G \sin \vartheta + J_3 \frac{\sin \vartheta \sin (\vartheta - \alpha)}{c \sin \alpha} \omega^{*2} \left(1 + \frac{J_3 - J_1}{J_3} \frac{\sin \alpha \cos \vartheta}{\sin (\vartheta - \alpha)} \right).$$

Здесь J_1 — экваториальный момент инерции бегуна относительно оси, проходящей через неподвижную точку O . По теореме о моментах инерции относительно параллельных осей

$$J_1 = J_1^{(C)} + \frac{G}{g} c^2,$$

где $J_1^{(C)}$ — центральный экваториальный момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести C бегуна. С достаточной точностью можно принять

$$J_1^{(C)} = \frac{1}{2} J_3 = \frac{G}{2g} \rho^2,$$

где ρ — радиус инерции бегуна относительно его оси материальной симметрии. Окончательно находим

$$N = G \left\{ \sin \vartheta + \frac{\omega^2 \rho^2}{gc} \frac{\sin \vartheta \sin (\vartheta - \alpha)}{c \sin \alpha} \left[1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{c^2}{\rho^2} \right) \frac{\sin \alpha \cos \vartheta}{\sin (\vartheta - \alpha)} \right] \right\}. \quad (35.36)$$

Пример 172. Условие наилучшего использования ветра в ветряном двигателе заключается в том, чтобы горизонтальная ось вращения двигателя была параллельна направлению ветра. Так как последнее изменяется, двигатель снабжается приспособлением, автоматически поворачивающим его ось вокруг вертикали и устанавливающим ее по направлению ветра; подшипникам оси двигателя будут передаваться при этом добавочные гироскопические реакции, которые требуется определить*.

Свяжем с двигателем систему осей $Oxyz$, направив ось Oz по оси вращения колеса, а оси Ox и Oy — в средней плоскости лопастей. Так как лопасти располагаются всегда на равных угловых расстояниях, то при двух и более лопастях $J_x = J_y$ (см. пример 122); с другой стороны, угол θ между горизонтальной осью собственного вращения и вертикальной осью прецессии равен $\pi/2$. Поэтому при двух и более лопастях формула (35.29) для гироскопического момента решает задачу. Не останавливаясь на этом, разберем случай двухлопастного двигателя.

При указанном на рис. 470 направлении осей (ось Oz , перпендикулярная плоскости рисунка, не показана; ось прецессии Oz' проведена через центр тяжести), считая массу лопасти распределенной вдоль радиуса, имеем

$$J_y = 0, \quad J_x = J_z = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 = J.$$

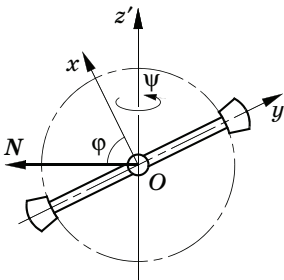


Рис. 470

Перпендикуляр к оси собственного вращения и оси прецессии определяет направление линии узлов ON . Отсчитывая от нее угол ϕ и обозначая через $\dot{\phi}$ и $\dot{\psi}$ угловые скорости собственного вращения и прецессии, которые считаем постоянными, получаем

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \phi, \quad \omega_y = \dot{\psi} \cos \phi, \quad \omega_z = \dot{\phi}.$$

Из уравнений Эйлера (35.4) получаем

$$m_x = 2J\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \phi, \quad m_y = 0,$$

$$m_z = -(1/2)J\dot{\psi}^2 \cos 2\phi.$$

* См. Г. Х. Сабинин [26].

Разлагая момент m_x по направлениям Qz' и ON , находим

$$m_{z'} = J \dot{\phi} \dot{\psi} \sin 2\varphi, \quad m_N = 2J \dot{\phi} \dot{\psi} \cos^2 \varphi.$$

К подшипникам оси приложены усилия, моменты которых равны по величине полученным и противоположны им по знаку. Так как $\dot{\psi}$ обычно мала по сравнению с $\dot{\phi}$, моментом m_z можно пренебречь. Момент m_N относительно горизонтальной оси в случае двухлопастного ветряного двигателя будет пульсировать с частотой, равной удвоенной угловой скорости двигателя, от нуля в горизонтальном положении лопасти до максимума в вертикальном положении:

$$(m_N)_{\max} = 2J \dot{\phi} \dot{\psi}.$$

В случае многолопастного двигателя по (35.29) имеем

$$m_N = J_3 \dot{\phi} \dot{\psi}.$$

§ 194. Уравнения движения гироскопа на подвижном основании

Предполагается, что центр масс гироскопа расположен в точке пересечения трех осей карданова подвеса (рис. 389), т. е. осей вращения наружного и внутреннего колец и оси вращения ротора. Применяя теорему об изменении главного момента количества движения по отношению к центру масс гироскопа, следует, отвлекаясь от поступательного движения основания, учесть вращение последнего.

Вектор угловой скорости вращения основания по отношению к галилеевой системе осей обозначим через Ω ; одновременно Ω служит угловой скоростью системы осей $Sx_1y_1z_1$, неизменно соединенных с основанием; ось Cz_1 этой системы (рис. 471) будем считать направленной по оси вращения наружного кольца карданова подвеса. Вторую систему осей $Sxyz$, связанную с подвижными осями подвеса, определим следующим образом: ось Sx направлена по оси внутреннего кольца; ее положение определяется углом ψ , отсчитываемым от

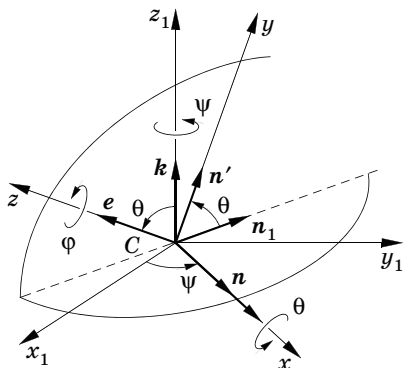


Рис. 471

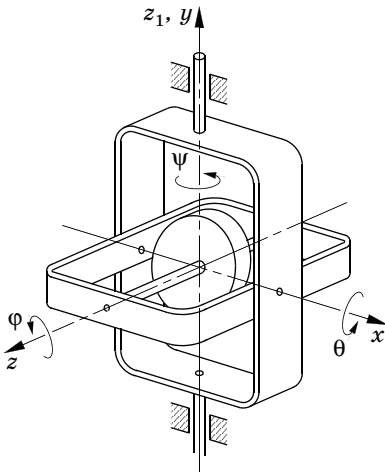


Рис. 472

оси Cx_1 вокруг оси Cz_1 ; ось Cz направлена по оси вращения ротора; ее направление задается углом θ , отсчитываемым вокруг оси Cx . Наконец, ось Cy перпендикулярна плоскости Czx и направлена так, что оси $Cxyz$ образуют правую систему; очевидно, что ось Cy расположена в плоскости Cz_1z и составляет угол $(\pi/2 - \theta)$ с осью Cz_1 . Поворот ротора вокруг оси Cz задается углом ϕ . Углы ψ , θ , ϕ представляют собой три эйлеровых угла — углы прецессии, нутации и чистого вращения, а ось вращения внутреннего кольца

Cx — линию узлов. На рис. 472 плоскость внутреннего кольца Czx изображена в положении, перпендикулярном оси вращения Cz_1 наружного кольца, так что $\theta = \pi/2$; ось Cy в этом положении располагается вдоль оси Cz_1 . Оси Cx_1 и Cy_1 , связанные с основанием, не показаны.

В дальнейшем через n , n' , e обозначим единичные векторы осей Cx , Cy , Cz . Единичный вектор направления, составляющего прямой угол с линией узлов Cx и расположенного в плоскости Cx_1y_1 под углом $\psi + \pi/2$ к оси Cx_1 , будем обозначать n_1 , а единичный вектор оси наружного кольца Cz_1 — через k (рис. 471); тогда

$$k = e \cos \theta + n' \sin \theta. \quad (35.37)$$

Угловая скорость ω' системы осей $Cxyz$ относительно галилеевой системы определяется соотношением

$$\omega' = \Omega + k\dot{\psi} + n\dot{\theta}. \quad (35.38)$$

Угловая скорость ротора ω отличается от ω' слагаемым $e\dot{\phi}$, представляющим собственное вращение ротора

$$\omega = \omega' + e\dot{\phi}. \quad (35.39)$$

Будем пренебрегать трением в подшипниках оси ротора; тогда проекция момента внешних сил $m^{(C)}$ на ось вращения ротора бу-

дет равна нулю и уравнение вращения ротора можно составить в форме (35.16). Вычислим величины, входящие в это выражение; имеем по (35.13) и (35.10)

$$\begin{aligned} r &= \omega' \cdot e = \Omega \cdot e + \dot{\psi} k \cdot e = \Omega_z + \dot{\psi} \cos \theta, \\ \omega_z &= \omega \cdot e = r + \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (35.40)$$

Поперечная (перпендикулярная оси вращения ротора) составляющая ω_1 угловой скорости ω' (или ω), как нетрудно видеть, равна (рис. 471)

$$\omega_1 = (\Omega_x + \dot{\theta})n + (\Omega_y + \dot{\psi} \sin \theta)n'. \quad (35.41)$$

Поэтому, замечая, что $n \times e = -n'$, $n' \times e = n$, получаем

$$\omega_1 \times e = -(\Omega_x + \dot{\theta})n' + (\Omega_y + \dot{\psi} \sin \theta)n.$$

Наконец,

$$J_3 \omega_z - J_1 r = J_3 \dot{\phi} + (J_3 - J_1)r = J_3 \dot{\phi} + (J_3 - J_1)(\Omega_z + \dot{\psi} \cos \theta). \quad (35.42)$$

Можно написать также

$$J_3 \omega_z - J_1 r = (J_3 - J_1)\omega_z + J_1 \dot{\phi}. \quad (35.43)$$

После подстановки в (35.16) и выделения коэффициентов при единичных векторах n и n' придем к следующим двум дифференциальным уравнениям движения гироскопа в кардановом подвесе на подвижном основании:

$$J_1 \frac{d}{dt} (\dot{\theta} + \Omega_x) + [J_3 \dot{\phi} + (J_3 - J_1)(\Omega_z + \dot{\psi} \cos \theta)] (\Omega_y + \dot{\psi} \sin \theta) = m_x^{(C)},$$

$$J_1 \frac{d}{dt} (\Omega_y + \dot{\psi} \sin \theta) - [J_3 \dot{\phi} + (J_3 - J_1)(\Omega_z + \dot{\psi} \cos \theta)] (\dot{\theta} + \Omega_x) = m_y^{(C)}. \quad (35.44)$$

Здесь $m_x^{(C)}$, $m_y^{(C)}$ — главные моменты внешних сил относительно оси вращения внутреннего кольца и относительно перпендикулярного этой оси, а также оси вращения гироскопа направления. В полученные уравнения входят проекции угловой скорости вращения основания на оси системы $Cxyz$. Они могут быть выраже-

ны через проекции этого вектора на оси, связанные с основанием. Для этого заметим, что (см. рис. 471)

$$\begin{aligned} \Omega = (\Omega_{x_1} \cos \psi + \Omega_{y_1} \sin \psi) \mathbf{n} + (-\Omega_{x_1} \sin \psi + \Omega_{y_1} \cos \psi) \mathbf{n}_1 + \\ + \Omega_{z_1} \cos \theta \mathbf{e} + \Omega_{z_1} \sin \theta \mathbf{n}' \end{aligned}$$

и что

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}' \cos \theta - \mathbf{e} \sin \theta;$$

выделив множители при \mathbf{n} , \mathbf{n}' , \mathbf{e} , получим

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \Omega_{x_1} \cos \psi + \Omega_{y_1} \sin \psi, \\ \Omega_y &= (-\Omega_{x_1} \sin \psi + \Omega_{y_1} \cos \psi) \cos \theta + \Omega_{z_1} \sin \theta, \\ \Omega_z &= -(-\Omega_{x_1} \sin \psi + \Omega_{y_1} \cos \psi) \sin \theta + \Omega_{z_1} \cos \theta. \end{aligned} \quad (35.45)$$

На дифференциальных уравнениях движения гироскопа в кардановом подвесе на подвижном основании базируется теория применений гироскопа как указателя направления и измерителя угловой скорости (гиротахометра) и углового ускорения (гиротахоакселерометра).

Гиротахометр. Если закрепить наружное кольцо относительно основания и совместить его ось вращения Cz_1 (рис. 473) с осью вращения основания, то $\psi = 0$ и по (35.45)

$$\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = \tilde{\Omega} \sin \theta, \quad \Omega_z = \tilde{\Omega} \cos \theta, \quad (35.46)$$

где $\tilde{\Omega}$ — изменяемая угловая скорость основания ($\Omega = k\tilde{\Omega}$). По первому из уравнений (35.44) имеем

$$J_1 \ddot{\theta} + [J_3 \dot{\phi} + (J_3 - J_1) \tilde{\Omega} \cos \theta] \tilde{\Omega} \sin \theta = m_x^{(c)}.$$

Начальное направление оси гироскопа возьмем перпендикулярным вектору Ω и будем считать, что ось гироскопа мало отклоняется от этого положения, т. е. $\theta = \pi/2 + \delta$, где δ — малая величина; тогда $\sin \theta = \cos \delta \approx 1$ и, полагая $|\dot{\phi}| \gg \Omega$, получаем

$$\ddot{\delta} + \frac{J_3 \dot{\phi}}{J_1} \tilde{\Omega} = \frac{m_x^{(c)}}{J_1}.$$

Чтобы осуществить измерительный прибор, присоединим к внутреннему кольцу пружину жесткостью c , другой конец которой

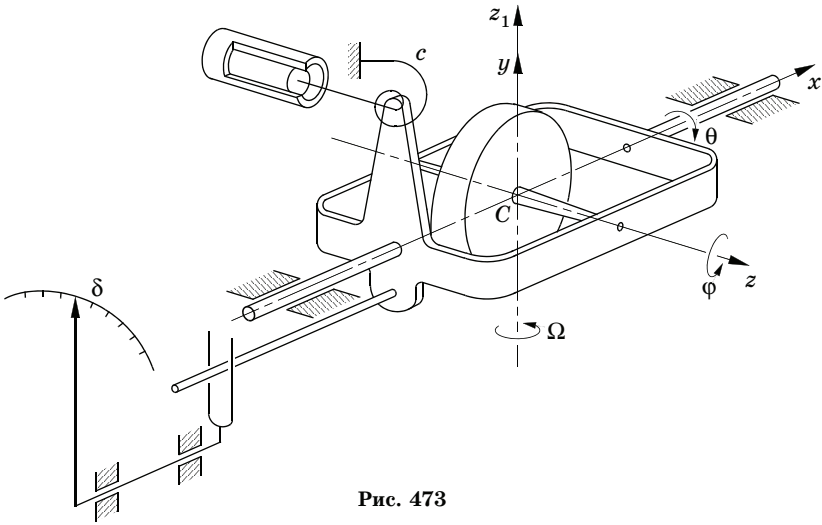


Рис. 473

закреплен в корпусе прибора (рис. 473), так что момент упругой реакции пружины относительно оси вращения внутреннего кольца оказывается пропорциональным отклонению этого кольца от начального положения. Для гашения колебаний прибора внутреннее кольцо соединено также с поршнем катаракта (§ 98, пример 91), цилиндр которого закреплен в корпусе прибора. При этих условиях

$$m_x^{(C)} = -c\delta - \beta\dot{\delta},$$

и дифференциальное уравнение вращения внутреннего кольца будет иметь вид

$$\ddot{\delta} + 2n\dot{\delta} + k^2\delta = -\frac{J_3\dot{\phi}}{J_1}\Omega, \tag{35.47}$$

где $2n = \beta/J_1$ и $k = \sqrt{c/J_1}$ — частота свободных колебаний прибора. Известно (§ 96), что если эта частота достаточно велика, то прибор будет следить за измеряемой величиной статически, т. е. можно с достаточной точностью, не учитывая колебаний прибора, принять

$$\delta \approx -\frac{J_3\dot{\phi}}{J_1k^2}\Omega = -\frac{J_3\dot{\phi}}{c}\tilde{\Omega},$$

таким образом получим

$$\tilde{\Omega} = -\frac{c\delta}{J_3\dot{\phi}}.$$

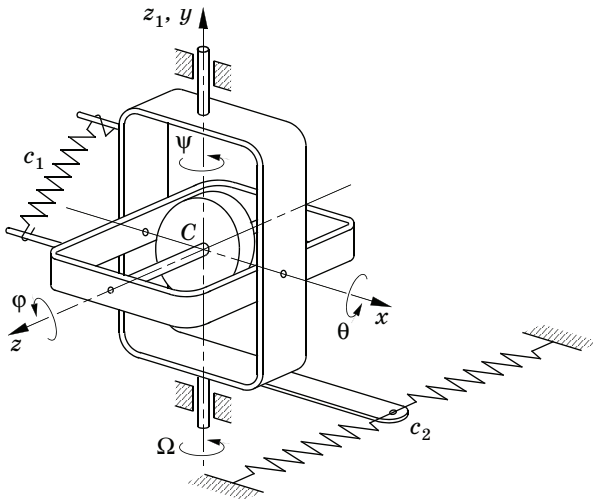


Рис. 474

Гиротахоакселерометр. Если допустить возможность вращения наружного кольца относительно основания, соединив его с основанием упруго (рис. 474), то приходим к схеме прибора, с помощью которого угловую скорость основания можно измерить по углу поворота внутреннего кольца, а его угловое ускорение — по углу поворота наружного кольца. Как выше, считаем ось вращения наружного кольца направленной по оси вращения основания. Тогда при весьма большой угловой скорости собственного вращения гироскопа дифференциальные уравнения (35.44) после подстановки значений Ω_x , Ω_y и Ω_z по (35.46) примут вид

$$J_1 \ddot{\theta} + J_3 \dot{\phi} (\dot{\psi} + \tilde{\Omega}) \sin \theta = m_x^{(C)},$$

$$J_1 \frac{d}{dt} [(\dot{\psi} + \tilde{\Omega}) \sin \theta] - J_3 \dot{\phi} \dot{\theta} = m_y^{(C)}.$$

Как выше, положим $\theta = \pi/2 + \delta$, где δ мало, т. е. примем, что начальное положение ($\delta = 0$) оси гироскопа перпендикулярно оси вращения основания. Примем также

$$m_x^{(C)} = -c_1 \delta, \quad m_{z_1}^{(C)} = -c_2 \psi,$$

т. е. предположим, что прибор снабжен двумя пружинами: первая пружина жесткостью c_1 присоединена концами к внутренне-

му и наружному кольцам подвеса, а вторая — жесткостью c_2 — к наружному кольцу и корпусу прибора, неизменно соединенно-му с основанием. Момент $m_{z_1}^{(C)}$ относительно оси вращения наружного кольца может быть заменен двумя моментами

$$m_y^{(C)} = -c_2\psi \sin \theta \approx -c_2\psi, \quad m_z^{(C)} = -c_2\psi \cos \theta.$$

Действие момента $m_x^{(C)}$ эквивалентно паре сил, передаваемой наружному кольцу через подшипники внутреннего кольца; эта пара уравновешивается парой сил реакций в подшипниках между наружным кольцом и корпусом прибора. Наличие момента $m_z^{(C)}$ не влияет на уравнения движения ротора гироскопа; последние при замене $\sin \theta$ на 1, т. е. при пренебрежении членами порядка δ^2 , принимают вид

$$J_1 \ddot{\delta} + J_3 \dot{\phi} \dot{\psi} + c_1 \delta = -J_3 \dot{\phi} \tilde{\Omega}, \quad J_1 \ddot{\psi} - J_3 \dot{\phi} \dot{\delta} + c_2 \psi = -J_1 \dot{\tilde{\Omega}}. \quad (35.48)$$

Чтобы прибор следил за измеряемыми величинами, углы поворота внутреннего и наружного колец карданова подвеса δ и ψ в каждый момент времени должны быть пропорциональны значениям в этот момент угловой скорости и углового ускорения основания $\tilde{\Omega}$ и $\dot{\tilde{\Omega}}$. Решение системы уравнений (35.48) должно дать указание, какие требования следует наложить на выбор определяемых конструкцией прибора постоянных

$$k_1^2 = c_1/J_1, \quad k_2^2 = c_2/J_1, \quad \lambda = J_3 \dot{\phi} / J_1, \quad (35.49)$$

чтобы обеспечивалось соблюдение указанных условий.

Величины k_1 и k_2 представляют собой частоты свободных колебаний внутреннего и наружного колец при невращающемся роторе. Наличие вращающегося ротора обуславливает появление в дифференциальных уравнениях (35.48) *гироскопических членов* (§ 165).

В уравнении для координаты δ этим членом является произведение *гироскопического коэффициента* $\gamma_{12} = J_3 \dot{\phi}$ и обобщенной скорости $\dot{\psi}$, в уравнение же для координаты ψ входит произведение обобщенной скорости $\dot{\delta}$ на гироскопический коэффициент $\gamma_{21} = -\gamma_{12} = -J_3 \dot{\phi}$ той же величины, но противоположного знака.

Ограничимся рассмотрением случая вращения платформы по гармоническому закону с частотой p :

$$\tilde{\Omega} = \Omega_0 \sin pt, \quad \dot{\tilde{\Omega}} = p\Omega_0 \cos pt.$$

Дифференциальные уравнения (35.48) принимают вид

$$\begin{aligned}\ddot{\delta} + \lambda \dot{\psi} + k_1^2 \delta &= -\lambda \Omega_0 \sin pt, \\ \ddot{\psi} - \lambda \dot{\delta} + k_2^2 \psi &= -p \Omega_0 \cos pt.\end{aligned}\tag{35.50}$$

Их интегрирование проводится способами, которые применялись в § 186, 189 при рассмотрении свободных и вынужденных колебаний системы с двумя степенями свободы.

Общее решение системы дифференциальных уравнений (35.50) является суммой общего решения однородной системы

$$\ddot{\delta}_0 + \lambda \dot{\psi}_0 + k_1^2 \delta_0 = 0, \quad \ddot{\psi}_0 - \lambda \dot{\delta}_0 + k_2^2 \psi_0 = 0,\tag{35.51}$$

представляющего колебания, имеющие частоты свободных колебаний, и частного решения системы (35.50).

Частное решение δ_0, ψ_0 однородной системы (35.51) можно искать в виде гармонических колебаний одинаковой частоты, отличающихся по фазе на $\pi/2$:

$$\delta_0 = A \sin(\sigma t + \alpha), \quad \psi_0 = B \cos(\sigma t + \alpha).\tag{35.52}$$

Подстановка в (35.51) приводит к двум уравнениям

$$(k_1^2 - \sigma^2)A - \lambda \sigma B = 0, \quad -\lambda \sigma A + (k_2^2 - \sigma^2)B = 0,\tag{35.53}$$

из которых находим

$$\beta = \frac{B}{A} = \frac{k_1^2 - \sigma^2}{\lambda \sigma} = \frac{\lambda \sigma}{k_2^2 - \sigma^2}.\tag{35.54}$$

Для определения σ^2 получаем характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}D(\sigma) &= (k_1^2 - \sigma^2)(k_2^2 - \sigma^2) - \lambda^2 \sigma^2 = \sigma^4 - (\lambda^2 + k_1^2 + k_2^2)\sigma^2 + k_1^2 k_2^2 = \\ &= (\sigma^2 - \sigma_1^2)(\sigma^2 - \sigma_2^2)\end{aligned}\tag{35.55}$$

(здесь σ_1^2 и σ_2^2 — корни этого уравнения). Каждому из этих корней соответствует частное решение системы уравнений (35.51):

$$\begin{aligned}\delta_0^{(1)} &= C_1 \sin(\sigma_1 t + \alpha_1), \\ \psi_0^{(1)} &= D_1 \cos(\sigma_1 t + \alpha_1) = \beta_1 C_1 \cos(\sigma_1 t + \alpha_1), \\ \delta_0^{(2)} &= C_2 \sin(\sigma_2 t + \alpha_2), \quad \psi_0^{(2)} = \beta_2 C_2 \cos(\sigma_2 t + \alpha_2),\end{aligned}\tag{35.56}$$

где множители β_1 и β_2 определяются по (35.54) при замене σ на σ_1 и соответственно на σ_2 :

$$\beta_1 = \frac{k_1^2 - \sigma_1^2}{\lambda \sigma_1} = \frac{\lambda \sigma_1}{k_2^2 - \sigma_1^2}, \quad \beta_2 = \frac{k_1^2 - \sigma_2^2}{\lambda \sigma_2} = \frac{\lambda \sigma_2}{k_2^2 - \sigma_2^2}, \quad (35.57)$$

Сумма частных решений (35.56)

$$\begin{aligned} \delta_0 &= C_1 \sin(\sigma_1 t + \alpha) + C_2 \sin(\sigma_2 t + \alpha_2), \\ \psi_0 &= \beta_1 C_1 \cos(\sigma_1 t + \alpha_1) + \beta_2 C_2 \cos(\sigma_2 t + \alpha_2) \end{aligned} \quad (35.58)$$

содержит четыре произвольных постоянных C_1 , C_2 , α_1 , α_2 и поэтому представляет собой общее решение однородной системы (35.51).

Частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (35.50) будем искать в виде гармонических колебаний частотой p :

$$\delta_1 = \Delta \sin pt, \quad \psi_1 = \Psi \cos pt. \quad (35.59)$$

Подстановка в (35.50) приводит к двум линейным уравнениям, определяющим амплитуды Δ и Ψ :

$$(k_1^2 - p^2)\Delta - \lambda p \Psi = -\lambda \Omega_0, \quad -\lambda p \Delta + (k_2^2 - p^2)\Psi = -p \Omega_0. \quad (35.60)$$

Определитель этой системы, согласно обозначению (35.55), равен

$$D(p) = (p^2 - \sigma_1^2)(p^2 - \sigma_2^2), \quad (35.61)$$

и решения ее будут

$$\Delta = -\frac{\lambda \Omega_0}{D(p)} k_2^2, \quad \Psi = -\frac{\lambda \Omega_0}{D(p)} (k_1^2 + \lambda^2 - p^2). \quad (35.62)$$

Теперь составляем по (35.58) и (35.62) общее решение системы уравнений (35.50):

$$\begin{aligned} \delta &= C_1 \sin(\sigma_1 t + \alpha) + C_2 \sin(\sigma_2 t + \alpha_2) - \frac{\lambda \Omega_0}{D(p)} k_2^2 \sin pt, \\ \psi &= C_1 \beta_1 \cos(\sigma_1 t + \alpha_1) + C_2 \beta_2 \cos(\sigma_2 t + \alpha_2) - \\ &\quad - \frac{p \Omega_0}{D(p)} (k_1^2 + \lambda^2 - p^2) \cos pt. \end{aligned} \quad (35.63)$$

Произвольные постоянные определим по начальным условиям

$$\delta = 0, \quad \dot{\delta} = 0, \quad \psi = 0, \quad \dot{\psi} = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad (35.64)$$

выражающим то обстоятельство, что в момент начала измерения прибор находится в покое. Из первого и четвертого условий получаем

$$C_1 \sin \alpha_1 + C_2 \sin \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 \sigma_1 C_1 \sin \alpha_1 + \beta_2 \sigma_2 C_2 \sin \alpha_2 = 0, \quad (35.65)$$

откуда следует, что $\sin \alpha_1 = 0$, $\sin \alpha_2 = 0$. Второе и третье условия (35.64) дают два уравнения

$$\sigma_1 C_1 + \sigma_2 C_2 = \frac{\lambda \Omega_0}{D(p)} k_2^2 p, \quad \beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 = \frac{p \Omega_0}{D(p)} (k_1^2 + \lambda^2 - p^2), \quad (35.66)$$

решив которые с учетом формул (35.57), найдем C_1 и C_2 . Подставив эти значения в (35.63), получим искомое решение

$$\begin{aligned} \delta = & -\frac{\lambda \Omega_0}{D(p)} k_2^2 \left[\sin pt + \frac{p(\sigma_2^2 - p^2)}{\sigma_1(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)} \sin \sigma_1 t - \frac{p(\sigma_1^2 - p^2)}{\sigma_2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)} \sin \sigma_2 t \right], \\ \psi = & -\frac{p \Omega_0}{D(p)} (k_1^2 - p^2 + \lambda^2) \left[\cos pt + \frac{\sigma_1^2 (k_1^2 - \sigma_1^2) (\sigma_2^2 - p^2)}{k_1^2 (k_1^2 + \lambda^2 - p^2) (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)} \cos \sigma_1 t - \right. \\ & \left. - \frac{\sigma_1^2 (k_1^2 - \sigma_2^2) (\sigma_1^2 - p^2)}{k_1^2 (k_1^2 + \lambda^2 - p^2) (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)} \cos \sigma_2 t \right]. \end{aligned} \quad (35.67)$$

Корни характеристического уравнения (35.55) таковы:

$$\sigma_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (\lambda^2 + k_1^2 + k_2^2) \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4k_1^2 k_2^2}{(\lambda^2 + k_1^2 + k_2^2)^2}} \right).$$

Угловая скорость собственного вращения ротора всегда весьма велика, $\lambda^2 \gg k_1^2 + k_2^2$ и тем более $\lambda^2 \gg 2k_1 k_2$. Разлагая в ряд выражение, содержащее радикал, получаем приближенно

$$\sigma_1^2 \approx \lambda^2, \quad \sigma_2^2 = \frac{k_1^2 k_2^2}{\sigma_1^2} \approx \frac{k_1^2 k_2^2}{\lambda^2} = \frac{c_1 c_2}{(J_3 \dot{\phi})^2}. \quad (35.68)$$

Наличие одной весьма большой частоты свободных колебаний и другой, сравнительно малой, является характерным признаком гироскопических приборов. Частоту p измеряемых колебаний будем считать малой по сравнению с низшей частотой* σ_2 свободных колебаний:

$$\mu = \frac{p}{\sigma_2} = \frac{p\sigma_1}{k_1 k_2} < 1. \quad (35.69)$$

При этих условиях выражение $D(p)$ можно представить в виде

$$D(p) \approx \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \mu^2) = k_1^2 k_2^2 (1 - \mu^2) \approx k_1^2 k_2^2 \quad (35.70)$$

и приближенное значение угла поворота внутреннего кольца будет

$$\delta \approx -\frac{\lambda\Omega_0}{k_1^2} \sin pt - \frac{\lambda\Omega_0}{k_1^2} \frac{p\sigma_2^2}{\sigma_1^3} \sin \sigma_1 t + \frac{\lambda\Omega_0}{k_1^2} \mu \sin \sigma_2 t. \quad (35.71)$$

Второе слагаемое представляет колебание весьма высокой частоты и чрезвычайно малой амплитуды. Его можно отбросить. Заметим далее, что выражение

$$-\frac{\lambda\Omega_0}{k_1^2} \sin pt = -\frac{J_3 \dot{\phi}}{c_1} \Omega_0 \sin pt = \delta_{\text{ст}}$$

представляет то отклонение, которое получило бы внутреннее кольцо, если бы прибор следил за измеряемыми величинами статически, т. е. имело бы место равновесие колец относительно платформы; действительно, при $\dot{\delta} = 0$, $\delta = 0$ и $\dot{\psi} = 0$ из (35.50) получаем

$$\delta = \delta_{\text{ст}} = -\frac{\lambda\Omega_0}{k_1^2} \sin pt = -\frac{J_3 \dot{\phi}}{c_1} \Omega_0 \sin pt. \quad (35.72)$$

Обозначая через $\delta_{\text{ст}}^{(0)}$ амплитуду $\delta_{\text{ст}}$, приведем (35.71) к виду

$$\delta \approx -\delta_{\text{ст}}^{(0)} (\sin pt - \mu \sin \sigma_2 t). \quad (35.73)$$

Искажение, вносимое прибором, определяется наложением на слагаемое, пропорциональное измеряемой угловой скорости, колебаний малой амплитуды, имеющих высокую по сравнению с измеряемой частоту σ_2 . Точность измерения углового ускорения

* В приборах, применяемых в автопилотировании, $\sigma_1 \approx 3000$ 1/с, $\sigma_2 \approx 50$ 1/с. См. Р. Граммель [35, русск. перевод, с. 224].

по углу отклонения наружного кольца оказывается худшей. Действительно, обратившись ко второму из выражений (35.67), найдем по (35.70)

$$-\frac{p\Omega_0}{D(p)} (k_1^2 - p^2 + \lambda^2) \approx -p\Omega_0 \frac{\lambda^2}{k_1^2 k_2^2} = -\frac{p\Omega_0}{\sigma_2^2}. \quad (35.74)$$

Второе слагаемое в выражении (35.67) для ψ представляет высокочастотное колебание частоты σ_1 с весьма малой амплитудой; им можно пренебречь. Остается оценить амплитуду третьего слагаемого; имеем

$$\frac{\sigma_1^2 (k_1^2 - \sigma_2^2) (\sigma_1^2 - p^2)}{k_1^2 (k_1^2 + \lambda^2 - p^2) (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)} \approx \frac{\sigma_1^2 k_1^2 (1 - k_2^2 / \sigma_1^2) \sigma_1^2}{k_1^2 \sigma_1^4} \approx 1.$$

Получаем

$$\psi \approx -\frac{p\Omega_0}{\sigma_2^2} (\cos pt - \cos \sigma_2 t), \quad (35.75)$$

т. е. на отклонение наружного кольца, пропорциональное измеряемому угловому ускорению, накладываются колебания той же амплитуды, имеющие частоту свободных колебаний σ_2 . Поэтому прибор может служить для измерения углового ускорения при введении демпфера, способствующего быстрому затуханию свободных колебаний.

Простые выражения (35.73) и (35.75) углов δ и ψ получены из точных формул (35.67) путем пренебрежения высокочастотными колебаниями малых амплитуд и упрощений, которые были сделаны в предположении, что собственная угловая скорость ротора весьма велика по сравнению с частотами свободных колебаний колец подвеса при невращающемся роторе. Но на этом же предположении основывалась приближенная теория гироскопа (§ 153). Поэтому следует ожидать, что, исходя из этой теории, можно непосредственно прийти к упрощенным дифференциальным уравнениям для углов δ и ψ , минуя громоздкий путь составления точных уравнений (35.48), нахождения их решений и последующего упрощения этих решений.

Считая вектор момента количества движения \mathbf{K} направленным по оси ротора и равным по величине $J_3 \dot{\phi}$, из рис. 474 сразу видим, что конец этого вектора, вследствие вращения вокруг осей внутреннего и наружного колец карданова подвеса с угловыми скоростями $\dot{\theta} = \dot{\delta}$ и $(\dot{\psi} + \tilde{\Omega})$, получает скорость \mathbf{u} , проекции

которой на оси Cx и Cz_1 при пренебрежении малыми второго порядка будут равны

$$u_x = J_3 \dot{\phi} (\dot{\psi} + \tilde{\Omega}), \quad u_{z_1} = -J_3 \dot{\phi} \dot{\delta}.$$

Приравняв эти проекции моментам внешних сил относительно соответствующих осей, придем к уравнениям

$$J_3 \dot{\phi} (\dot{\psi} + \tilde{\Omega}) = -c_1 \delta, \quad -J_3 \dot{\phi} \dot{\delta} = -c_2 \psi, \quad (35.76)$$

которые можно было бы получить, отбросив в (35.48) слагаемые, зависящие от угловых ускорений.

В решение этой системы двух дифференциальных уравнений первого порядка войдут две произвольные постоянные; поэтому при упрощенной постановке задачи можно задать только два начальных условия; примем, что

$$\delta = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (35.77)$$

Тогда из самих дифференциальных уравнений (35.76) получим

$$\dot{\delta} = 0, \quad \dot{\psi} = -\tilde{\Omega}(0) \quad \text{при } t = 0. \quad (35.78)$$

Исключим из системы (35.76) переменную ψ ; для этого продифференцируем по времени второе уравнение, после чего заменим $\dot{\psi}$ его значением из первого уравнения. Придем к уравнению

$$\ddot{\delta} + \frac{c_1 c_2}{(J_3 \dot{\phi})^2} \delta = -\frac{c_2}{J_3 \dot{\phi}} \tilde{\Omega}. \quad (35.79)$$

Как выше, примем, что угловая скорость платформы изменяется по синусоидальному закону, т. е. что $\tilde{\Omega} = \Omega_0 \sin pt$. Угол поворота внутреннего кольца будет приближенно пропорционален измеряемой угловой скорости, т. е. это кольцо будет следить за измеряемой величиной статически, если частота свободных колебаний прибора значительно превосходит частоту изменения угловой скорости (§ 96); это приводит к уже ранее указанному условию (35.69)

$$\frac{\sqrt{c_1 c_2}}{J_3 \dot{\phi}} = \sigma_2 > p,$$

или

$$p/\sigma_2 = \mu < 1. \quad (35.80)$$

Выражение $\delta_{\text{ст}}$, получаемое по (35.79), также имеет ранее установленный вид (35.72). Остается отметить, что решение дифференциального уравнения (35.79) при начальных условиях (35.77) и (35.78) имеет вид (ср. § 96)

$$\delta = -\frac{c_2 \Omega_0}{J_3 \dot{\Phi}} \frac{1}{\sigma_2^2 - p^2} \left(\sin pt - \frac{p}{\sigma_2} \sin \sigma_2 t \right) = -\frac{\delta_{\text{ст}}^{(0)}}{1 - \mu^2} (\sin pt - \mu \sin \sigma_2 t). \quad (35.81)$$

Пренебрегая величиной μ^2 по сравнению с единицей, снова получаем (35.73).

Как видно из второго уравнения (35.76), угол поворота наружного кольца пропорционален угловой скорости внутреннего кольца. На этом и основывается идея применения наружного кольца как измерителя углового ускорения основания, так как угол поворота внутреннего кольца измеряет угловую скорость. Но последнее измерение сопровождается ошибкой, возникающей от наложения на движение внутреннего кольца его свободных колебаний. Эта малая ошибка резко возрастает при дифференцировании. Действительно, по (35.76), (35.80) и (35.73) получаем

$$\psi = \frac{J_3 \dot{\Phi}}{c_2} \dot{\delta} = -\frac{J_3 \dot{\Phi}}{c_2} p \delta_{\text{ст}}^{(0)} (\cos pt - \cos \sigma_2 t) = -\frac{p \Omega_0}{\sigma_2^2} (\cos pt - \cos \sigma_2 t), \quad (35.82)$$

т. е. снова выражение (35.75), в котором, как указывалось выше, ошибка измерения имеет порядок измеряемой величины углового ускорения. Сказанное объясняет также необходимость гашения свободных колебаний колец карданова подвеса.

§ 195. Гироскопы Фуко

В опытах Фуко подвижным основанием является Земля; ось вращения наружного кольца Cz_1 (рис. 475) направим по вертикали места, ось Cx_1 — в плоскости горизонта на север \mathcal{E} , ось Cy_1 — в этой же плоскости на запад \mathcal{Z} . Тогда

$$\begin{aligned} \Omega_{x_1} &= \Omega \cos \lambda, \\ \Omega_{y_1} &= 0, \\ \Omega_{z_1} &= \Omega \sin \lambda, \end{aligned} \quad (35.83)$$

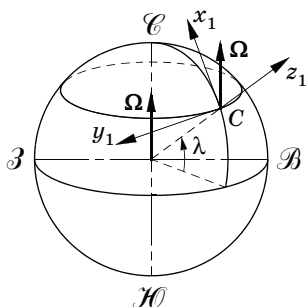


Рис. 475

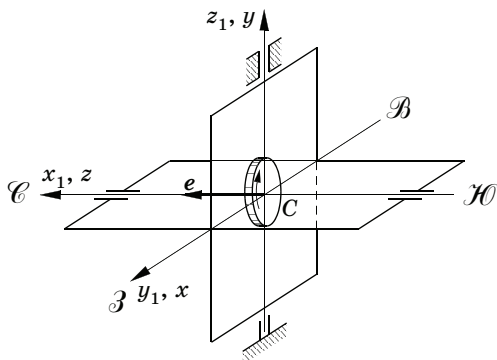


Рис. 476

где Ω — угловая скорость Земли, λ — северная широта места. Ось вращения внутреннего кольца расположена в плоскости горизонта.

В гироскопе Фуко первого рода внутреннее кольцо закреплено в плоскости горизонта, так что $\theta = \pi/2$ (рис. 476); в этой же плоскости должна оставаться ось вращения ротора Cz , причем в тот момент, когда эта ось располагается в плоскости меридиана, угол ψ равен 90° , а ось Cx перпендикулярна плоскости меридиана и направлена на запад \mathcal{Z} . Обозначая через χ угол отклонения оси гироскопа Cz от плоскости меридиана, отсчитываемый с востока \mathcal{B} на запад \mathcal{Z} , получаем $\psi = \pi/2 + \chi$. Расположение осей показано на рис. 477. По (35.45) имеем

$$\Omega_x = -\Omega \cos \lambda \sin \chi, \quad \Omega_y = \Omega \sin \lambda, \quad \Omega_z = \Omega \cos \lambda \cos \chi. \quad (35.84)$$

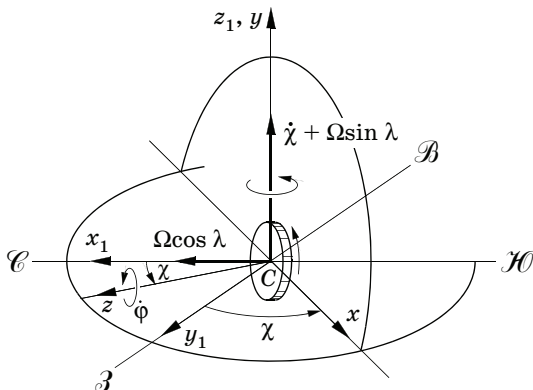


Рис. 477

Ось Sy совпадает с осью вращения наружного кольца; поэтому, пренебрегая трением, имеем $m_y^{(C)} = 0$; и наоборот, $m_x^{(C)} \neq 0$, так как к внутреннему кольцу должен быть приложен некоторый момент реакций относительно оси Sx , чтобы предотвратить вращение кольца вокруг этой оси. Величина этого момента (здесь и далее массами колец пренебрегаем) определяется по первому из уравнений (35.44):

$$m_x^{(C)} = -J_1 \dot{\chi} \Omega \cos \lambda \cos \chi + [J_3 \dot{\phi} + (J_3 - J_1) \Omega \cos \lambda \cos \chi] (\dot{\chi} + \Omega \sin \lambda).$$

Второе из уравнений (35.44) приводит к соотношению

$$J_1 \ddot{\chi} + [J_3 \dot{\phi} + (J_3 - J_1) \Omega \cos \lambda \cos \chi] \Omega \cos \lambda \sin \chi = 0. \quad (35.85)$$

При $\dot{\phi} \gg \Omega$ уравнение движения упрощается и принимает вид

$$J_1 \ddot{\chi} + J_3 \dot{\phi} \Omega \cos \lambda \sin \chi = 0. \quad (35.86)$$

Пусть $\dot{\phi} > 0$, т. е. вращение ротора происходит против часовой стрелки для наблюдателя, смотрящего с его северного конца, так же как вращение Земли, наблюдаемое с Северного полюса. Уравнение (35.86) в этом случае соответствует маятнику, для которого $\chi = 0$ является положением устойчивого равновесия; ось ротора, будучи выведена из плоскости меридиана, начнет совершать, подобно маятнику, колебания около среднего положения в этой плоскости. Период этих колебаний, считая их малыми, найдем по формуле

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{J_3 \dot{\phi} \Omega \cos \lambda}}. \quad (35.87)$$

При $\dot{\phi} < 0$ положение $\chi = 0$ оси ротора соответствует положению неустойчивого равновесия маятника; будучи помещена в это положение, ось ротора должна подобно маятнику опрокинуться в положение $\chi = \pi$, в котором конец вектора e направлен на юг \mathcal{N} , а конец вектора собственной угловой скорости $e\dot{\phi}$ — снова на север \mathcal{E} .

В гироскопе Фуко второго рода (рис. 478) наружное кольцо закреплено, а ось вращения Sx внутреннего кольца направлена на запад \mathcal{Z} перпендикулярно плоскости меридиана; при этом угол $\psi = \pi/2$. Ось вращения ротора, располагаясь в плоскости мери-

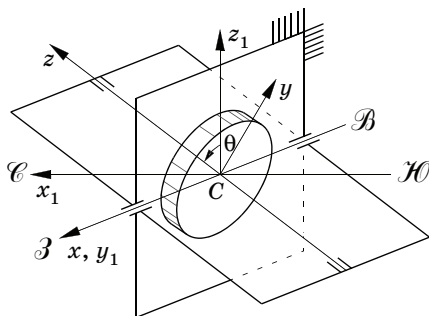


Рис. 478

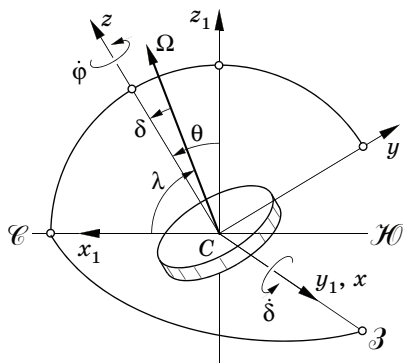


Рис. 479

диана, может вращаться в ней вокруг оси внутреннего кольца. Расположение осей показано на рис. 479. По (35.45) получаем

$$\begin{aligned} \Omega_x &= 0, \\ \Omega_y &= -\Omega (\cos \lambda \cos \theta - \sin \lambda \sin \theta) = -\Omega \cos (\lambda + \theta), \\ \Omega_z &= \Omega \sin (\lambda + \theta). \end{aligned} \tag{35.88}$$

Момент внешних сил относительно оси вращения внутреннего кольца, если пренебречь трением, будет равен нулю, и по первому из уравнений (35.44) находим

$$J_1 \ddot{\theta} - [J_3 \dot{\phi} + (J_3 - J_1) \Omega \sin (\lambda + \theta)] \Omega \cos (\lambda + \theta) = 0. \tag{35.89}$$

Введем в рассмотрение угол $\delta = \lambda + \theta - \pi/2$. При $\delta = 0$ имеем $\theta = \pi/2 - \lambda$, т. е. ось гироскопа располагается параллельно оси Земли; поэтому δ определяет отклонение оси гироскопа от земной оси, причем $\delta > 0$ при $\theta > (\pi/2 - \lambda)$, т. е. при отклонении оси гироскопа к северу. Находим

$$J_1 \ddot{\delta} + [J_3 \dot{\phi} + (J_3 - J_1) \Omega \cos \delta] \Omega \sin \delta = 0, \tag{35.90}$$

что при $\dot{\phi} \gg \Omega$ приводит к уравнению типа уравнения колебаний маятника

$$J_1 \ddot{\delta} + J_3 \dot{\phi} \Omega \sin \delta = 0. \tag{35.91}$$

Период колебаний не зависит от широты места и в случае малых колебаний равен

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{J_3 \dot{\phi} \Omega}}. \quad (35.92)$$

В положении относительного равновесия (при $\delta = 0$) ось гироскопа составляет с плоскостью горизонта угол, равный широте места.

Теория гироскопов Фуко первого и второго рода указывает на принципиальную возможность, не прибегая к астрономическим наблюдениям, во-первых, установить плоскость меридиана и, во-вторых, географическую широту места. Величина $J\dot{\phi}\Omega$, пропорциональная моменту пары, вызывающей поворот оси гироскопа, весьма мала вследствие малости угловой скорости Земли. Например, для маховика массой 2 кг с радиусом инерции $8 \cdot 10^{-2}$ м при $\dot{\phi} = 600\pi$ 1/с, имеем

$$J\dot{\phi}\Omega = \frac{2 \cdot 64 \cdot 600\pi \cdot 2\pi}{24 \cdot 60^2} \approx 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

При моменте такой величины сила трения в подшипниках и силы сопротивления воздуха могут исказить явление. Источником других ошибок является несовпадение точки пересечения осей Cz , Cx и Cz_1 с центром тяжести ротора. Появляющийся вследствие этого момент силы тяжести может быть величиной того же порядка, что и отклоняющий момент $J_3\dot{\phi}\Omega$. Ж. Фуко, пользуясь своим гироскопом, мог только качественно установить факт вращения Земли и направление этого вращения, но не определил величины угловой скорости; для определения плоскости меридиана и широты места гироскопы Фуко практически непригодны. Попытки построения *гироскопического компаса*, основанные на устранении указанных конструктивных несовершенств, не привели к положительным результатам, и в первоначальную идею гироскопа Фуко первого рода потребовалось внести существенно новые принципы. Изложение теории гироскопического компаса дается в специальных трудах по теории гироскопа*.

В заключение рассмотрим случай, когда свобода вращения обоих колец карданова подвеса ничем не ограничивается (*свободный гироскоп*). Правые части дифференциальных уравнений

* См. труды Б. И. Кудревича [15], А. Н. Крылова, Ю. А. Круткова [14], А. Н. Крылова [13, с. 127—173], Е. Л. Николаи [23], Р. Граммеля [35], Б. В. Булгакова [2], К. Магнуса [38], Д. Р. Меркина [21].

(35.16) тогда обращаются в нуль. Воспользовавшись соотношением (35.43), можно эти уравнения переписать в виде

$$\dot{\omega}_{1x} + \left(\frac{J_3 - J_1}{J_1} \omega_z + \dot{\phi} \right) \omega_{1y} = 0, \quad (35.93)$$

$$\dot{\omega}_{1y} - \left(\frac{J_3 - J_1}{J_1} \omega_z + \dot{\phi} \right) \omega_{1x} = 0,$$

Введем в рассмотрение комплексную величину

$$U = \omega_{1x} + i\omega_{1y}, \quad i = \sqrt{-1}; \quad (35.94)$$

тогда, умножив второе из уравнений (35.93) на i и сложив его с первым, придем к линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\dot{U} - i \left(\frac{J_3 - J_1}{J_1} \omega_z + \dot{\phi} \right) U = 0, \quad (35.95)$$

общее решение которого легко находится:

$$U = U_0 e^{i\{\dot{\phi} + [(J_3 - J_1)/J_1]\omega_z\}t}. \quad (35.96)$$

Таким образом, вектор поперечной угловой скорости ω_1 , соответствующий комплексному числу U , совершает, сохраняя свою величину, колебание около своего начального значения $\omega_1^{(0)}$; частота ν этого колебания равна

$$\nu = \dot{\phi} + \frac{J_3 - J_1}{J_1} \omega_z. \quad (35.97)$$

При большой угловой скорости собственного вращения

$$|\dot{\phi}| \gg |\omega_z - \dot{\phi}|$$

можно приближенно принять

$$\nu \approx \frac{J_3}{J_1} \omega_z \approx \frac{J_3}{J_1} \dot{\phi}.$$

При малом начальном возмущении $\omega_1^{(0)}$ и при достаточно большой угловой скорости собственного вращения ось гироскопа должна в среднем сохранять начальное направление неизменным в пространстве, совершая около этого направления мелкие высокочастотные дрожания (см. § 153).

остаются малыми при малых отклонениях оси Oz от вертикали $O\zeta$. Третьим углом, определяющим положение гироскопа, является угол чистого вращения φ вокруг оси Oz . Отсчет угла α производится от оси $O\zeta$ к направлению Oa вокруг прямой, перпендикулярной плоскости этого угла, т. е. вокруг оси $O\eta$. Плоскость, в которой расположен угол β , по построению перпендикулярна плоскости $\zeta O\xi$, т. е. содержит ось $O\eta$. Поэтому перпендикуляр к плоскости угла β перпендикулярен, во-первых, прямой Oa , во-вторых, оси $O\eta$, т. е. расположен в плоскости $\zeta O\xi$ под углом α к оси $O\xi$ (и углом $(\pi/2 + \alpha)$ — к оси $O\zeta$). Ось Ox' направим по этому перпендикуляру, угол β отсчитываем от Oa к Oz , поэтому поворот на угол β , наблюдаемый с конца оси Ox' , происходит по часовой стрелке и соответствующая проекция угловой скорости гироскопа на эту ось равна $-\dot{\beta}$. Рассмотрим еще направление Oy' , перпендикулярное плоскости Ozx' и такое, что система $Ox'y'z$ является правой; оно расположено в плоскости ηOz , перпендикулярной оси Ox' , и, будучи перпендикулярно к Oz , составляет угол β с осью $O\eta$.

В плоскости $Ox'y'$ расположены оси Ox и Oy (не показанные на рис. 480) системы осей $Oxyz$, связанной с вращающимся гироскопом; система же осей $Ox'y'z$ является подвижной в пространстве и в теле гироскопа, так как она не участвует в собственном вращении последнего. Проекция r угловой скорости системы $Ox'y'z$ на ось Oz , как видно из рис. 480, равна

$$r = \dot{\alpha} \sin \beta, \quad (35.98)$$

тогда как проекция на эту ось угловой скорости гироскопа (системы осей $Oxyz$) будет

$$\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta. \quad (35.99)$$

Поперечные составляющие векторов ω и ω' — угловых скоростей систем $Oxyz$ и $Ox'y'z$ — равны друг другу; они определяются вектором ω_1 , проекции которого на оси Ox' и Oy' даются выражениями

$$\omega_{1x'} = -\dot{\beta}, \quad \omega_{1y'} = \dot{\alpha} \cos \beta. \quad (35.100)$$

Заметим теперь, что внешние силы — сила тяжести \mathbf{G} и реакция опоры O — не создают момента относительно оси гироскопа: $\mathbf{m}^{(O)} \cdot \mathbf{e} = 0$ (\mathbf{e} — единичный вектор оси Oz). Поэтому $\omega_z = \text{const}$,

и для составления уравнений движения гироскопа может быть применено векторное уравнение (35.16). Остается вычислить главный момент внешних сил $m^{(O)}$, т. е. момент силы тяжести G относительно неподвижной точки O :

$$m^{(O)} = le \times G = -lGe \times k,$$

где k — единичный вектор вертикали (рис. 480), а l — расстояние от центра тяжести C до точки опоры. Обозначим через n и n' единичные векторы осей Ox' и Oy' . Тогда можно написать

$$k = -n \sin \alpha - n' \cos \alpha \sin \beta + e \cos \alpha \cos \beta. \quad (35.101)$$

Замечая, что

$$e \times n = n', \quad e \times n' = -n, \quad e \times e = 0,$$

получаем

$$m^{(O)} = lG(n' \sin \alpha - n \cos \alpha \sin \beta),$$

т. е.

$$m_{x'}^{(O)} = -lG \cos \alpha \sin \beta, \quad m_{y'}^{(O)} = lG \sin \alpha. \quad (35.102)$$

Остается спроецировать (35.16) на оси Ox' и Oy' . Имеем

$$\omega_1 \times e = (-n \dot{\beta} + n' \dot{\alpha} \cos \beta) \times e = n' \dot{\beta} + n \dot{\alpha} \cos \beta$$

и по (35.16) получаем

$$\begin{aligned} -J_1 \ddot{\beta} + (J_3 \omega_2 - J_1 \dot{\alpha} \sin \beta) \dot{\alpha} \cos \beta &= -lG \cos \alpha \sin \beta, \\ J_1 \frac{d}{dt} (\dot{\alpha} \cos \beta) + (J_3 \omega_2 - J_1 \dot{\alpha} \sin \beta) \dot{\beta} &= lG \sin \alpha. \end{aligned} \quad (35.103)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая малых отклонений оси волчка от вертикали и сохраним в уравнениях движения только члены, линейные относительно малых углов α и β и их производных по времени. Придем к системе уравнений

$$J_1 \ddot{\beta} - J_3 \omega_2 \dot{\alpha} = lG \beta, \quad J_1 \ddot{\alpha} + J_3 \omega_2 \dot{\beta} = lG \alpha. \quad (35.104)$$

Эти уравнения имеют типичную гироскопическую структуру. Как и в уравнения (35.48) движения гиротахоакселерометра, в уравнение, содержащее $\ddot{\alpha}$ (уравнение для координаты α), входит произведение обобщенной скорости $\dot{\beta}$ и проекции $J_3 \omega_2$ главного момента количества движения на ось гироскопа; в уравнение для

координаты β также входит гироскопический член — произведение множителя $J_3\omega_z$ на обобщенную скорость, соответствующую другой координате α , но взятое с противоположным знаком. Гироскопическую структуру имеют уравнения (30.51) относительно движения тяжелой точки на вращающейся Земле, в которых роль гироскопических членов выполняют слагаемые, происходящие от кориолисовой силы инерции. Таковы же уравнения (30.60) колебаний маятника Фуко.

Одинаковость коэффициентов при искомым функциях и их вторых производных в первом и втором уравнениях (35.104) позволяет упростить решение, применив прием, уже использованный ранее при рассмотрении свободного гироскопа в кардановом подвесе (§ 195) и теории маятника Фуко (§ 169). Вводим комплексную величину

$$\gamma = \alpha + i\beta, \quad i = \sqrt{-1},$$

при малых α и β представляющую в плоскости, перпендикулярной оси гироскопа, комплексную координату конца единичного вектора e — *вершины гироскопа*. Тогда, умножив первое уравнение (35.104) на i и сложив его со вторым, получим вместо системы двух дифференциальных уравнений одно уравнение

$$\ddot{\gamma} - i\lambda\dot{\gamma} - k^2\gamma = 0, \quad (35.105)$$

где

$$\lambda = J_3\omega_z/J_1 \approx J_3\dot{\phi}/J_1, \quad k^2 = lG/J_1. \quad (35.106)$$

Частное решение уравнения (35.105) ищем в виде

$$\gamma = Ce^{i(qt + \delta)},$$

где C и δ — вещественные постоянные. Для определения q получаем уравнение

$$q^2 - \lambda q + k^2 = 0, \quad (35.107)$$

корни которого равны

$$q_1 = (1/2)(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4k^2}), \quad q_2 = (1/2)(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4k^2}). \quad (35.108)$$

Они вещественны при условии $\lambda^2 > 4k^2$ или

$$J_3^2 \omega_z^2 > 4lGJ_1, \quad (35.109)$$

т. е. при достаточно большой угловой скорости собственного вращения гироскопа. Если же имеет место неравенство противоположного знака, то уравнение (35.107) будет иметь комплексные сопряженные корни вида

$$q_1 = (1/2)(\lambda + 2i\mu), \quad q_2 = (1/2)(\lambda - 2i\mu), \quad (35.110)$$

здесь $\mu = (1/2)\sqrt{4k^2 - \lambda^2}$.

В первом случае общее решение дифференциального уравнения (35.105) имеет вид

$$\gamma = C_1 e^{i(q_1 t + \delta_1)} + C_2 e^{i(q_2 t + \delta_2)},$$

а во втором

$$\gamma = e^{i\lambda t/2} (C_1 e^{i\delta_1} e^{-\mu t} + C_2 e^{i\delta_2} e^{\mu t}).$$

Отделив вещественные и мнимые части, получим в первом случае

$$\begin{aligned} \alpha &= C_1 \cos(q_1 t + \delta_1) + C_2 \cos(q_2 t + \delta_2), \\ \beta &= C_1 \sin(q_1 t + \delta_1) + C_2 \sin(q_2 t + \delta_2) \end{aligned} \quad (35.111)$$

и во втором случае

$$\begin{aligned} \alpha &= C_1 e^{-\mu t} \cos(\lambda t/2 + \delta_1) + C_2 e^{\mu t} \cos(\lambda t/2 + \delta_2), \\ \beta &= C_1 e^{-\mu t} \sin(\lambda t/2 + \delta_1) + C_2 e^{\mu t} \sin(\lambda t/2 + \delta_2). \end{aligned} \quad (35.112)$$

Таким образом, при соблюдении условия (35.109) общее решение (35.111) уравнений (35.104) выражается через тригонометрические функции времени; т. е. остается ограниченным при любом t ; если же указанное неравенство не соблюдается, то в выражение общего решения (35.112) этих уравнений войдут члены, неограниченно возрастающие с ростом t . Поэтому неравенство (35.109) является *необходимым условием устойчивости спящего волчка*. Было бы гораздо труднее доказать, что оно является также достаточным.

Выше предполагалось, что волчок может свободно поворачиваться вокруг точки опоры O . Если же волчок вставлен своим острием в прямолинейный паз, так что ось волчка должна оставаться в вертикальной плоскости, проходящей через этот паз, то устойчивость вертикального положения оси, когда центр тяжести расположен над опорой, не может быть достигнута, сколь бы ни была велика угловая скорость собственного вращения. Дей-

ствительно, пусть паз расположен по оси $O\xi$, так что ось волчка принуждена находиться в плоскости $O\xi\xi$; тогда $\beta = 0$ и из второго уравнения (35.104) получаем

$$J_1 \ddot{\alpha} = lG \sin \alpha. \quad (35.113)$$

Угловая скорость собственного вращения не вошла в это уравнение; она войдет в первое из уравнений (35.104), в правую часть которого следует внести добавочное слагаемое, выражающее момент реакции паза, который из этого уравнения и определится.

Уравнение (35.113) соответствует случаю физического маятника, для которого положение равновесия $\alpha = 0$ неустойчиво, так как потенциальная энергия в нем имеет максимум.

Таким образом, *уничтожение одной степени свободы делает спящий волчок неустойчивым.*

§ 197. Устойчивость вращающегося снаряда

В качестве приложения теории *спящего волчка* рассмотрим задачу об устойчивости вращающегося продолговатого снаряда. В задаче внешней баллистики, основные положения которой изложены в § 90 и 91, снаряд рассматривался как материальная точка, находящаяся под действием силы тяжести $G = mg$ и лобового сопротивления D , направленного противоположно скорости этой точки. Отбрасывая прочие составляющие аэродинамических сил, имеющие второстепенное значение даже в том случае, когда снаряд рассматривается как твердое тело, мы и теперь ограничимся рассмотрением только двух указанных сил.

Существенным является то, что точкой приложения силы D в продолговатом снаряде служит не центр тяжести C (рис. 481), а *центр сопротивления* K — точка на оси, расположенная в неоперенном снаряде ближе к головной части, чем центр тяжести. Вследствие этого, если направления оси снаряда и скорости центра тяжести не совпадают, то возникает момент силы сопротивления D относительно центра тяжести, стремящийся уве-

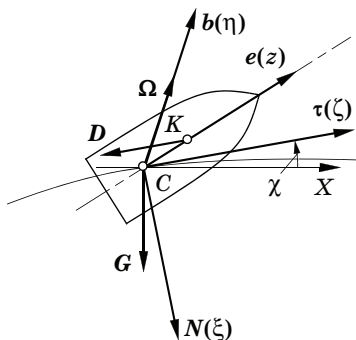


Рис. 481

личить это несовпадение. Поэтому, чтобы предотвратить опрокидывание вокруг центра тяжести, снаряду должно быть сообщено при вылете достаточно быстрое вращение вокруг его оси. Движение вращающегося снаряда является наложением на движение его центра тяжести колебаний оси, подобных колебаниям *спящего волчка*.

Введем в рассмотрение натуральный триэдр траектории центра тяжести (рис. 481), образуемый единичными векторами касательной τ , главной нормали N и бинормали b . Траекторией центра тяжести снаряда является плоская кривая, вследствие чего вектор b сохраняет неизменное направление; натуральный триэдр будет вращаться вокруг оси b с угловой скоростью

$$\Omega = -\dot{\chi}b, \quad (35.114)$$

где χ — угол вектора τ с горизонтальной осью CX .

Определим положение оси снаряда, задаваемое единичным вектором e , теми же углами α и β по отношению к натуральному триэдру τ, N, b , какими в неподвижной системе осей $O\zeta\xi\eta$ определялось в § 196 положение оси волчка, причем оси $O\zeta, O\xi, O\eta$ заменяются соответственно на τ, N, b . Угловая скорость снаряда ω_a представится при этом геометрической суммой его угловой скорости ω по отношению к натуральному триэдру и переносной угловой скорости ω_e , равной угловой скорости Ω последнего:

$$\omega_a = \omega_r + \omega_e.$$

По предыдущему имеем

$$\omega_r = -\dot{\beta}n + \dot{\alpha}b + \dot{\phi}e,$$

так как роль оси $O\eta$ переходит к бинормали. По (35.114) получаем

$$\omega_a = -\dot{\beta}n + (\dot{\alpha} - \dot{\chi})b + \dot{\phi}e.$$

Из этого выражения следует, что для составления левых частей уравнений вращения снаряда относительно его центра тяжести достаточно в уравнениях движения волчка заменить $\dot{\alpha}$ на $\dot{\alpha} - \dot{\chi}$. Что касается правых частей, то роль силы тяжести, направленной противоположно оси $O\zeta$, в уравнениях движения волчка переходит к силе сопротивления воздуха, направленной противоположно скорости центра тяжести, т. е. противоположно вектору τ , причем расстояние l от точки опоры до центра тяжести волчка заменяется расстоянием $CK = h$ между центром тяжести и центром сопротивления снаряда. Поэтому момент силы сопротивления D

относительно центра тяжести снаряда выражается, как в случае волчка, формулой

$$m_c(\mathbf{D}) = h\mathbf{e} \times \mathbf{D} = -hD\mathbf{e} \times \boldsymbol{\tau} = hD(\mathbf{n}' \sin \alpha - \mathbf{n} \cos \alpha \sin \beta).$$

По (35.103) приходим к следующим уравнениям вращения:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\beta} - [J_3 \omega_z - J_1(\dot{\alpha} - \dot{\chi}) \sin \beta](\dot{\alpha} - \dot{\chi}) \cos \beta &= hD \cos \alpha \sin \beta, \\ J_1 \frac{d}{dt} [(\dot{\alpha} - \dot{\chi}) \cos \beta] + [J_3 \omega_z - J_1(\dot{\alpha} - \dot{\chi}) \sin \beta] \dot{\beta} &= hD \sin \alpha, \end{aligned} \quad (35.115)$$

причем

$$\omega_z = \dot{\phi} + (\dot{\alpha} - \dot{\chi}) \sin \beta = \text{const.}$$

При малых значениях углов α и β аналогично (35.104) будем иметь систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\beta} - J_3 \omega_z (\dot{\alpha} - \dot{\chi}) - hD\beta &= 0, \\ J_1 (\ddot{\alpha} - \ddot{\chi}) + J_3 \omega_z \dot{\beta} - hD\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (35.116)$$

Сила сопротивления D является известной функцией скорости v центра тяжести снаряда, $D = mf(v)$; величины v и χ определяются интегрированием уравнений движения центра тяжести — основных уравнений внешней баллистики (§ 90)

$$\dot{v} = -f(v) - g \sin \chi, \quad \dot{\chi} = -g \cos \chi / v, \quad (35.117)$$

не зависящих от уравнений вращения. В уравнениях (35.115) эти величины рассматриваются как заданные функции времени.

В случае настильной стрельбы траектория центра тяжести будет пологой и $|\dot{\chi}| \ll \dot{\alpha}$; скорость центра тяжести v также является медленно изменяющейся функцией времени. Пренебрегая $\dot{\chi}$ по сравнению с $\dot{\alpha}$ и считая D постоянным, возвращаемся к уравнениям *спящего волчка* (35.104). Поэтому для настильной стрельбы движение оси снаряда относительно касательной к траектории центра тяжести по крайней мере качественно не отличается от движения оси *спящего волчка* вокруг вертикали. В частности, условие устойчивости снаряда запишется в виде (35.109)

$$J_3^2 \omega_z^2 > 4hDJ_1. \quad (35.118)$$

Это неравенство определяет *нижнюю* границу значения угловой скорости снаряда. Не нужно думать, что снаряду следует при-

давать по возможности бóльшую угловую скорость. Действительно, чем больше будет последняя, тем менее *послушным* будет снаряд; при бесконечно большой угловой скорости собственного вращения снаряда его ось под действием момента сил сопротивления конечной величины оставалась бы параллельной своему первоначальному направлению, т. е. не следила бы за направлением скорости центра тяжести снаряда. Требование, чтобы угол между осью снаряда и направлением скорости оставался в наперед заданных границах, приводит к установлению *верхней* границы величины ω_z . Установление этой границы требует знания углов α и β как функций времени, что сводится к задаче интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений (35.116) с переменными коэффициентами, рассматриваемой в специальных работах*.

§ 198. Гироскопический маятник.

Применение уравнений Лагранжа второго рода в динамике твердого тела

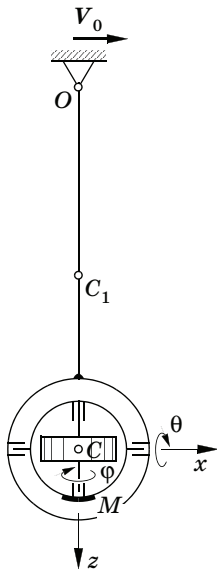


Рис. 482

Составление уравнений движения одного твердого тела, например ротора гироскопа, основывалось на применении теоремы об изменении момента количества движения. В случае системы твердых тел использовать этот метод было бы труднее, так как потребовалось бы ввести в рассмотрение взаимные реакции тел, а затем исключить эти реакции. В таких более сложных задачах быстрее и проще ведет к цели метод уравнений Лагранжа второго рода, который непосредственно дает уравнения движения, содержащие только задаваемые силы, причем число уравнений равно числу степеней свободы.

В качестве примера составим дифференциальные уравнения движения *гироскопического маятника*. Со стержнем маятника (рис. 482), имеющего ось подвеса, проходящую через точку O , неизменно соединена обойма, которую можно рассматривать как

* См. А. Н. Крылов [12, с. 303—334], Б. Н. Окунев [24].

наружное кольцо гироскопа в кардановом подвесе; обойма несет подшипники внутреннего кольца, снабженного противовесом M ; во внутреннем кольце вращается ротор гироскопа. Точка O движется по горизонтальной прямой, перпендикулярной оси подвеса маятника, с заданной скоростью $V_0(t)$.

Положение стержня маятника (оси Oz_1) определим углом его поворота χ (рис. 483), отсчитываемым от вертикали. В рассмотрение вводится далее система осей $Cxyz$ с началом в точке пересечения C осей вращения внутреннего кольца (ось Cx), ротора (ось Cz) и оси стержня Oz_1 . Ось Cy направлена перпендикулярно плоскости Czx в такую сторону, что система $Cxyz$ является правой; угол поворота внутреннего кольца вокруг оси Cx обозначаем через θ , а угол поворота ротора вокруг его оси Cz — через φ ; оси Cy и Cz составляют углы с перпендикуляром к плоскости движения стержня маятника, соответственно равные θ и $\pi/2 - \theta$. Углы χ , θ , φ являются независимыми обобщенными координатами системы. Для составления уравнений движения системы в форме уравнений Лагранжа второго рода найдем по отдельности выражения кинетической и потенциальной энергий ротора, внутреннего кольца, противовеса M и стержня с обоймой.

Проекции угловой скорости ротора на оси системы $Cxyz$ определяются выражениями

$$\omega_x = \dot{\theta}, \quad \omega_y = \dot{\chi} \cos \theta, \quad \omega_z = \dot{\chi} \sin \theta + \dot{\varphi}.$$

Введем систему осей $O\xi\eta\zeta$, движущуюся поступательно со скоростью $V_0(t)$. Ось $O\xi$ этой системы имеет направление вектора V_0 , ось $O\eta$ направлена вдоль оси подвеса и ось $O\zeta$ — по вертикали вниз. Проекции абсолютной скорости центра тяжести C ротора на оси системы $O\xi\eta\zeta$ равны

$$v_{1\xi} = V_0 + l\dot{\chi} \cos \chi, \quad v_{1\eta} = 0, \quad v_{1\zeta} = -l\dot{\chi} \sin \chi,$$

где $l = OC$ — расстояние от центра тяжести ротора до оси подвеса.

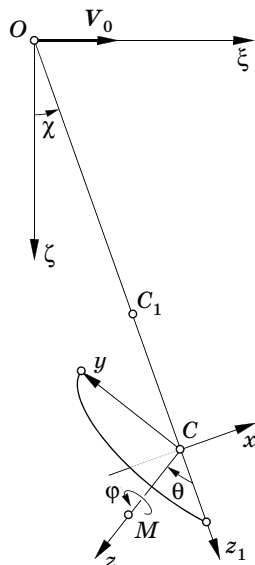


Рис. 483

Обозначая через Q_1 вес ротора, через J_1 и J_3 его экваториальный и аксиальный моменты инерции, можем представить выражение удвоенной кинетической энергии ротора в виде

$$2T_1 = \frac{Q_1}{g} (v_{1\xi}^2 + v_{1\eta}^2 + v_{1\zeta}^2) + J_1(\omega_x^2 + \omega_y^2) + J_3\omega_z^2,$$

или

$$2T_1 = \frac{Q_1}{g} (V_0^2 + l^2\dot{\chi}^2 + 2V_0l\dot{\chi} \cos \chi) + J_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\chi}^2 \cos^2 \theta) + J_3(\dot{\chi} \sin \theta + \dot{\phi})^2. \quad (35.119)$$

Потенциальная энергия силы тяжести ротора равна

$$\Pi_1 = -Q_1\zeta_1 = -Q_1l \cos \chi. \quad (35.120)$$

Экваториальные моменты инерции внутреннего кольца весом Q_2 относительно осей Cz и Cx обозначим через A_2 , а аксиальный момент инерции относительно оси Cy — через B_2 . Проекция угловой скорости на оси Cx и Cy — те же, что у ротора, а проекция на ось Cz равна $\dot{\chi} \sin \theta$, так как кольцо не участвует в собственном вращении ротора. Получаем

$$2T_2 = \frac{Q_2}{g} (V_0^2 + l^2\dot{\chi}^2 + 2V_0l\dot{\chi} \cos \chi) + A_2(\dot{\theta}^2 + \dot{\chi}^2 \sin^2 \theta) + B_2\dot{\chi}^2 \cos^2 \theta, \quad (35.121)$$

$$\Pi_2 = -Q_2\zeta_1 = -Q_2l \cos \chi. \quad (35.122)$$

Координаты противовеса в системе $O\xi\eta\zeta$ равны

$$\xi_3 = (l + a \cos \theta) \sin \chi, \quad \eta_3 = a \sin \theta, \quad \zeta_3 = (l + a \cos \theta) \cos \chi,$$

где $a = MC$. Проекцию скорости противовеса на оси этой системы определим дифференцированием выражений координат:

$$v_{3\xi} = V_0 + (l + a \cos \theta)\dot{\chi} \cos \chi - a\dot{\theta} \sin \theta \sin \chi,$$

$$v_{3\eta} = a\dot{\theta} \cos \theta,$$

$$v_{3\zeta} = -(l + a \cos \theta)\dot{\chi} \sin \chi - a\dot{\theta} \sin \theta \cos \chi.$$

Обозначив через Q_3 вес противовеса, получим

$$2T_3 = (Q_3/g)[V_0^2 + (l + a \cos \theta)^2\dot{\chi}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2V_0(l + a \cos \theta)\dot{\chi} \cos \chi - 2V_0a\dot{\theta} \sin \theta \sin \chi], \quad (35.123)$$

$$\Pi_3 = -Q_3\zeta_3 = -Q_3(l + a \cos \theta) \cos \chi. \quad (35.124)$$

Центр тяжести C_1 стержня маятника с обоймой расположен на оси стержня на расстоянии $OC_1 = l_1$ от оси подвеса. Момент инерции их относительно оси, проходящей через C_1 параллельно оси подвеса, обозначим через B_4 , вес — через Q_4 . Получим

$$2T_4 = B_4 \dot{\chi}^2 + \frac{Q_4}{g} (V_0^2 + l_1^2 \dot{\chi}^2 + 2V_0 l_1 \dot{\chi} \cos \chi), \quad (35.125)$$

$$\Pi_4 = -Q_4 \zeta_{41} = -Q_4 l_1 \cos \chi. \quad (35.126)$$

Таким образом, выражения удвоенной кинетической энергии и потенциальной энергии системы имеют вид

$$\begin{aligned} 2T = & \frac{G}{g} V_0^2 + \left[\frac{Q_1 + Q_2}{g} l^2 + \frac{Q_3}{g} (l + a \cos \theta)^2 + \frac{Q_4}{g} l_1^2 + J_1 \cos^2 \theta + \right. \\ & + A_2 \sin^2 \theta + B_2 \cos^2 \theta + B_4 \left. \right] \dot{\chi}^2 + (J_1 + A_2 + \frac{Q_3}{g} a^2) \dot{\theta}^2 + \\ & + J_3 (\dot{\chi} \sin \theta + \dot{\phi})^2 + 2 \left[\frac{Q_1 + Q_2}{g} l + \frac{Q_3}{g} (l + a \cos \theta) + \right. \\ & \left. + \frac{Q_4}{g} l_1 \right] V_0 \dot{\chi} \cos \chi - \frac{2Q_3}{g} a V_0 \dot{\theta} \sin \theta \sin \chi, \end{aligned} \quad (35.127)$$

$$\Pi = -[(Q_1 + Q_2)l + Q_3(l + a \cos \theta) + Q_4 l_1] \cos \chi, \quad (35.128)$$

где G — общий вес системы.

Координата ϕ является циклической, и соответствующий ей интеграл определяется соотношением

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = J_3 (\dot{\phi} + \dot{\chi} \sin \theta) = J_3 \omega_z = \text{const.} \quad (35.129)$$

В уравнениях движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\chi}} - \frac{\partial T}{\partial \chi} = Q_\chi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \chi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta};$$

в дальнейшем будут сохранены линейные члены относительно χ , θ и их производных. Поэтому в выражениях T и Π достаточно учесть члены не выше второго порядка относительно этих величин. Получим

$$2T \approx \frac{G}{g} V_0^2 + J_0 \dot{\chi}^2 + J_x \dot{\theta}^2 + J_3 (\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi} \dot{\chi} \theta) + \frac{2GL}{g} V_0 \dot{\chi},$$

$$\Pi = -GL \cos \chi + Q_3 a (1 - \cos \theta) \cos \chi \approx -GL + \frac{1}{2} GL \chi^2 + \frac{1}{2} Q_3 a \theta^2,$$

(35.130)

где

$$\begin{aligned}
 J_0 &= J_1 + \frac{Q_1 l^2}{g} + B_2 + \frac{Q_2 l^2}{g} + \frac{Q_3}{g} (l + a)^2 + B_4 + \frac{Q_4 l_1^2}{g}, \\
 J_x &= J_1 + A_2 + \frac{Q_3 a^2}{g}, \\
 GL &= Q_1 l + Q_2 l + Q_3 (l + a) + Q_4 l_1.
 \end{aligned} \tag{35.131}$$

Эти величины имеют наглядное механическое значение. Предположим, что ось гироскопа находится в среднем положении, т. е. направлена вдоль оси стержня ($\theta = 0$). Тогда J_0 будет моментом инерции системы относительно оси подвеса, а L — расстоянием от ее центра тяжести до этой оси; J_x представляет собой момент инерции ротора и внутреннего кольца с противовесом относительно оси Cx .

Уравнения движения теперь легко составить; получим

$$\begin{aligned}
 J_0 \ddot{\chi} + J_3 \dot{\phi} \dot{\theta} + GL\chi &= -\frac{GL}{g} V_0, \\
 J_x \ddot{\theta} - J_3 \dot{\phi} \dot{\chi} + Q_3 a \theta &= 0,
 \end{aligned} \tag{35.132}$$

причем $\dot{\phi} \approx \omega_2$ можно считать постоянной. Введя обозначения

$$\frac{J_3 \dot{\phi}}{J_0} = \lambda_1, \quad \frac{J_3 \dot{\phi}}{J_x} = \lambda_2, \quad \frac{GL}{J_0} = k_1^2, \quad \frac{Q_3 a}{J_x} = k_2^2, \tag{35.133}$$

придем к системе уравнений

$$\ddot{\chi} + \lambda_1 \dot{\theta} + k_1^2 \chi = -k_1^2 \frac{\dot{V}_0}{g}, \quad \ddot{\theta} - \lambda_2 \dot{\chi} + k_2^2 \theta = 0. \tag{35.134}$$

Механический смысл величин k_1^2 и k_2^2 легко установить, полагая, что ротор не вращается, т. е. $\dot{\phi} = 0$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Тогда соответствующая однородная система распадется на два независимых уравнения

$$\ddot{\chi} + k_1^2 \chi = 0, \quad \ddot{\theta} + k_2^2 \theta = 0,$$

которые определяют: первое — малые колебания маятника вокруг его оси подвеса, а второе — малые колебания внутреннего кольца с противовесом и ротором вокруг оси Cx ; k_1 и k_2 являются частотами этих колебаний.

Общее решение системы линейных дифференциальных уравнений (35.134) складывается из общего решения однородной системы

$$\ddot{\chi}_0 + \lambda_1 \dot{\theta}_0 + k_1^2 \chi_0 = 0, \quad \ddot{\theta}_0 - \lambda_2 \dot{\chi}_0 + k_2^2 \theta_0 = 0 \quad (35.135)$$

и частного решения, соответствующего правой части первого уравнения (35.134). Решение системы (35.135) для каждой из координат χ_0 и θ_0 ищется, как уже указывалось в § 194, в виде гармонических колебаний одинаковой частоты, отличающихся по фазе на $\pi/2$:

$$\chi_0 = C_1 \sin(\sigma t + \alpha), \quad \theta_0 = C_2 \cos(\sigma t + \alpha).$$

Подстановка в (35.135) после сокращения на общий множитель $\sin(\sigma t + \alpha)$ и соответственно $\cos(\sigma t + \alpha)$ приводит к двум линейным однородным алгебраическим уравнениям, содержащим неизвестные C_1, C_2, σ^2 :

$$(k_1^2 - \sigma^2)C_1 - \lambda_1 \sigma C_2 = 0, \quad -\lambda_2 \sigma C_1 + (k_2^2 - \sigma^2)C_2 = 0. \quad (35.136)$$

Приравнявая нулю определитель этой системы, приходим к уравнению, определяющему квадрат неизвестной частоты

$$\begin{aligned} D(\sigma) &= (k_1^2 - \sigma^2)(k_2^2 - \sigma^2) - \lambda_1 \lambda_2 \sigma^2 = \\ &= \sigma^4 - (\lambda_1 \lambda_2 + k_1^2 + k_2^2) \sigma^2 + k_1^2 k_2^2 = (\sigma^2 - \sigma_1^2)(\sigma^2 - \sigma_2^2) = 0. \end{aligned} \quad (35.137)$$

Через σ_1^2 и σ_2^2 обозначены корни этого уравнения:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{1}{2} (\lambda_1 \lambda_2 + k_1^2 + k_2^2) \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2k_1 k_2}{\lambda_1 \lambda_2 + k_1^2 + k_2^2} \right)^2} \right], \\ \sigma_2^2 &= \frac{1}{2} (\lambda_1 \lambda_2 + k_1^2 + k_2^2) \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2k_1 k_2}{\lambda_1 \lambda_2 + k_1^2 + k_2^2} \right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (35.138)$$

Значения величин β_1 и β_2 , определяющих отношения $C_2 : C_1$, соответствующие этим корням, находятся по (35.136):

$$\beta_1 = \frac{k_1^2 - \sigma_1^2}{\lambda_1 \sigma_1} = \frac{\lambda_2 \sigma_1}{k_2^2 - \sigma_1^2}, \quad \beta_2 = \frac{k_1^2 - \sigma_2^2}{\lambda_1 \sigma_2} = \frac{\lambda_2 \sigma_2}{k_2^2 - \sigma_2^2}.$$

Возвращаясь к неоднородной системе, рассмотрим случай движения оси подвеса с постоянным ускорением; тогда $V_0 = \text{const}$ и частное решение системы (35.134) можно взять в виде

$$\chi = -\dot{V}_0/g, \quad \theta = 0. \quad (35.139)$$

Общее решение системы (35.134), содержащее четыре произвольные постоянные, таким образом, представляется в виде

$$\begin{aligned} \chi &= C_1^{(1)} \sin(\sigma_1 t + \alpha_1) + C_1^{(2)} \sin(\sigma_2 t + \alpha_2) - \dot{V}_0/g, \\ \theta &= \beta_1 C_1^{(1)} \cos(\sigma_1 t + \alpha_1) + \beta_2 C_1^{(2)} \cos(\sigma_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (35.140)$$

Произвольные постоянные $C_1^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, α_1 , α_2 определяются по начальным условиям. Если предположить, что угловая скорость ротора столь велика, что отношениями величин k_1 и k_2 к λ_1 или λ_2 можно пренебречь по сравнению с единицей, то получающиеся из исследования решений (35.140) результаты совпадут с теми, к которым можно непосредственно прийти, решая дифференциальные уравнения, составляемые с помощью приближенной теории гироскопа. Эти уравнения имеют вид

$$J_3 \phi \ddot{\theta} + GL\chi = -GL(\dot{V}_0/g), \quad -J_3 \phi \dot{\chi} + Q_3 a \theta = 0. \quad (35.141)$$

Они получаются также при пренебрежении в уравнениях (35.132) членами, содержащими $\ddot{\chi}$ и $\ddot{\theta}$. Примем начальные условия

$$\chi = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (35.142)$$

Из второго дифференциального уравнения следует, что тогда

$$\dot{\chi} = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (35.143)$$

Исключив из дифференциальных уравнений (35.141) переменную θ , придем к уравнению

$$\ddot{\chi} + \sigma_2'^2 \chi = -\sigma_2'^2 (\dot{V}_0/g), \quad (35.144)$$

где

$$\sigma_2' = \frac{\sqrt{GQ_3 a L}}{J_3 \phi} \approx \sigma_2. \quad (35.145)$$

Общее решение уравнения (35.144) при условиях (35.142) и (35.143) и в предположении, что ось подвеса маятника движется с постоянным ускорением, имеет вид

$$\chi = -(\dot{V}_0/g)(1 - \cos \sigma'_2 t). \quad (35.146)$$

По второму уравнению (35.141) находим теперь угол поворота внутреннего кольца маятника

$$\theta = -\frac{\dot{V}_0}{g} \sqrt{\frac{GL}{Q_3 a}} \sin \sigma'_2 t. \quad (35.147)$$

Частота σ'_2 обратно пропорциональна угловой скорости ϕ и, следовательно, весьма мала; поэтому при сообщении платформе постоянного ускорения стержень гироскопического маятника медленно переходит от вертикального положения равновесия в новое положение, составляющее с вертикалью угол $-\dot{V}_0/g$; вокруг этого положения в дальнейшем он совершает низкочастотные колебания с амплитудой $|\dot{V}_0/g$; эти колебания сопровождаются высокочастотными колебаниями весьма малой амплитуды, которые можно было бы получить, рассматривая решения более точных уравнений (35.134). Одновременно будут происходить колебания внутреннего кольца с гироскопом вокруг оси вращения этого кольца той же низкой частоты σ'_2 и значительной амплитуды, на которые также налагаются высокочастотные колебания малой амплитуды.

При выводе уравнений движения (35.132) предполагалось, что в начальном положении маятника стержень расположен вертикально ниже оси подвеса, а противовес — на вертикали ниже оси вращения внутреннего кольца. Но если сделать обратное предположение, т. е. принять за начальное такое положение, когда и стержень и противовес расположены выше указанных осей, то в ходе вывода уравнений изменятся знаки выражений потенциальной энергии; при тех же обозначениях (35.133) придем вместо (35.134) к дифференциальным уравнениям

$$\ddot{\chi} + \lambda_1 \dot{\theta} - k_1^2 \chi = 0, \quad \ddot{\theta} - \lambda_2 \dot{\chi} - k_2^2 \theta = 0 \quad (35.148)$$

(ограничиваемся рассмотрением случая $\dot{V}_0 = 0$). В характеристическом уравнении (35.137) также придется заменить k_1^2 и k_2^2 на $-k_1^2$ и $-k_2^2$, так что оно примет вид

$$D(\sigma) = \sigma^4 - (\lambda_1 \lambda_2 - k_1^2 - k_2^2) \sigma^2 + k_1^2 k_2^2 = 0, \quad (35.149)$$

и при достаточно большой угловой скорости собственного вращения ротора, т. е. при $\lambda_1 \lambda_2 > k_1^2 + k_2^2$ оба корня его σ_1^2 и σ_2^2 останутся положительными, т. е. σ_1 и σ_2 — вещественными. Решения системы (35.148), определяющие свободные колебания маятника, по-прежнему будут выражаться, подобно (35.140), через тригонометрические функции, остающиеся ограниченными при любом значении времени t . Это обстоятельство свидетельствует о том, что положение, в котором стержень и противовес расположены по вертикали выше соответствующих осей вращения, при достаточно большой угловой скорости ротора гироскопа устойчиво сохраняется в течение сколь угодно большого промежутка времени. Впрочем, как уже указывалось (см. § 191, пример 170), строгого доказательства наличия устойчивости в этом рассуждении не содержится.

При расположении стержня маятника по вертикали над осью подвеса, а противовеса — на вертикали ниже оси вращения внутреннего кольца, т. е. при сохранении знаков в первом уравнении (35.148) и замене во втором уравнении $-k_2^2$ на k_2^2 , свободный член характеристического уравнения (35.149) станет отрицательным и один из корней (пусть σ_2^2) будет отрицательным независимо от величины угловой скорости собственного вращения ротора гироскопа. Тогда σ_2 будет чисто мнимым, и соответствующее частное решение системы выразится через тригонометрические функции мнимого аргумента, т. е. гиперболические функции, неограниченно возрастающие с ростом t . Описанное положение будет неустойчивым, как и положение, в котором стержень расположен по вертикали ниже оси подвеса, а противовес — на вертикали выше оси вращения внутреннего кольца.

Сказанное является примером применения общей теоремы теории гироскопических явлений; эта теорема принадлежит В. Томсону (Кельвину).

ТЕОРЕМА ТОМСОНА. *В гироскопически стабилизуемой системе число неустойчивых координат должно быть четно.*

При нечетном числе неустойчивых координат гироскопическая стабилизация невозможна. Другой пример применения теоремы Томсона мы имели в задаче о *спящем волчке* (§ 196).

В примере успокоителя Шлика (§ 153) корабль, испытывающий боковую качку, может рассматриваться как маятник (стер-

жень с обоймой) с осью подвеса в метацентре, расположенном над центром тяжести корабля, и противовес рамы гироскопа должен располагаться ниже ее оси вращения. В гироскопическом одно-рельсовом вагоне (§ 153) роль маятника играет вагон, а роль оси подвеса — рельс, на который вагон опирается; противовес рамы гироскопа располагается сверху. Применение в этих случаях уравнений движения вида (35.141), основанных на приближенной теории, вместо более строгих уравнений (35.132) может привести к значительной погрешности, так как величины λ_1 и λ_2 даже при очень большом значении угловой скорости ϕ не будут столь велики по сравнению с k_1 и k_2 , как в случае гироскопического маятника*, вследствие большой величины моментов инерции J_0 и J_x по сравнению с J_z .

Вопросы теории устойчивости движений в настоящем курсе затрагивались лишь вскользь при рассмотрении отдельных примеров. В настоящее время общая теория устойчивости получила широкое развитие, и ей посвящена обширная литература. Укажем на учебное пособие Д. Р. Меркина [20], обладающее значительной полнотой.

* Ссылки на дополнительную литературу см. на с. 686.

Литература

1. *Булгаков Б. В.* Колебания. — М.: Гостехтеоретиздат, 1954. — 892 с.
2. *Булгаков Б. В.* Прикладная теория гироскопов. — 2-е изд. — М.: Гостехтеоретиздат, 1955. — 355 с.; То же. — 3-е изд. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 401 с.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. — 2-е изд., испр. — М.: Наука, 1966. — 300 с.; То же. — 3-е изд. /Под ред. Е. С. Пятницкого. — М.: Физматгиз. 2001. — 262 с.
4. *Жуковский Н. Е.* Собрание сочинений: В 7 т. М. — Л.: Гостехиздат, 1948—1950. — Т. 1: Общая механика. Математика и астрономия. 1948. — 656 с.
5. *Ишлинский А. Ю.* Механика относительного движения и силы инерции. — М.: ИПМ АН СССР, 1981. — 103 с. (Препринт / Ин-т проблем механики АН СССР; № 171).
6. *Ишлинский А. Ю.* Механика специальных гироскопических систем. — Киев: Изд-во АН УССР, 1952. — 432 с.
7. *Ковалевская С. В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки. 1889 // Книга: Научные работы / Под ред. с комментариями П. Я. Полубариновой-Кочиной. — М.: Изд-во АН СССР, 1948. — 308 с.
8. *Королев С. П.* Исследование верхних слоев атмосферы с помощью ракет дальнего действия // Книга: Творческое наследие академика Сергея Павловича Королева / Сост. Ю. В. Бирюков, Н. А. Варваров; под общ. ред. М. В. Келдыша; со вступ. ст. В. П. Мишина, Б. В. Раушенбаха. — М.: Наука, 1980. — 592 с.
9. *Крылов А. Н.* Лекции о приближенных вычислениях. — 6-е изд. — М.: Гостехиздат, 1954. — 400 с.
10. *Крылов А. Н.* О вращательном движении продолговатого снаряда во время полета // Собр. трудов: В 12 т. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1936—1956. — Т. IV: Баллистика, 1937. — 444 с.
11. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах: учеб. пособие для высших учеб. заведений. — 5-е изд. — М. — Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. — 368 с.
12. *Крылов А. Н.* О некоторых приемах приближенного интегрирования уравнения вращательного движения продолговатого снаряда // Собр. трудов: В 12 т. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1936—1956. — Т. IV: Баллистика, 1937. — 444 с.
13. *Крылов А. Н.* О теории гироскопа Аншютца // Собр. трудов : В 12 т. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1936—1956. — Т. II. Ч. 1.: Компасное дело, 1943. — 179 с.

14. *Крылов А. Н., Крутков Ю. А.* Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений. — Л.: Изд-во АН СССР, 1932. — 400 с.
15. *Кудревич Б. И.* Теория и практика гироскопического компаса. — 2-е изд. — В 5 ч. — Л.: Упр. воен.-морских сил РККА, 1929—1945. — Ч. 1: Теория, 1929. — 192 с.; То же. Теория гироскопических приборов. Избр. труды : в 2 т. — Л.: Судпромгиз, 1963—1965. — Т. 1, 1963. — 328 с., Т. 2, 1965. — 296 с.
16. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — 7-е изд., испр. — М.: Дрофа, 2003. — 840 с.
17. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.
18. *Ляпунов А. М.* Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1948. — 540 с.
19. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — Харьков: Харьковское матем. общество, 1892. — 251 с.; То же. — М. — Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. — 472 с.; То же. — Собр. сочинений: В 6 т. Т. 2. — М., 1956. — 473 с.
20. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения : Учеб. пособие для вузов. — М.: Наука, 1971.; То же. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
21. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1974. — 344 с.
22. *Мещерский И. В.* Динамика точки переменной массы. — СПб.: Тип. Имп. Акад. наук, 1897. — 160 с.; То же. — Работы по механике тел переменной массы / Предисл. и вступ. ст. А. А. Космодемьянского. — 2-е изд. — М.: Гостехтеоретиздат, 1952. — 280 с.
23. *Николаи Е. Л.* Теория гироскопов. — М. — Л.: Гостехиздат, 1948. — 172 с.
24. *Окунев Б. Н.* Вращательное движение артиллерийского снаряда. — М. — Л.: Гостехтеоретиздат, 1943. — 160 с.
25. *Остославский И. В., Калачев Г. С.* Продольная устойчивость и управляемость самолета : учеб. пособие для авиац. вузов. — М.: Оборонгиз, 1951. — 368 с.
26. *Сабинин Г. Х.* Гироскопический эффект ветряных двигателей и расчет поворотных ветрячков // Труды ЦАГИ. — Вып. 22. — 1926. — 26 с.
27. *Угаров В. А.* Специальная теория относительности: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1977. — 384 с.; То же. — *Пеннер Д. И., Угаров В. А.* Электродинамика и специальная теория относительности: учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов. — М.: Просвещение, 1980. — 272 с.
28. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. — 2-е изд., испр. — М.: Гостехиздат, 1955. — 208 с.; То же. — 3-е изд. — М.: Наука, 1965. — 208 с.
29. *Bohm D.* The special theory of relativity (в пер.: *Бом Д.* Специальная теория относительности / Пер. с англ. Н. В. Мицкевича; под ред. А. З. Петрова. — М.: Мир, 1967. — 288 с.).
30. *Bondi H.* Assumption and myth in physical theory (в пер.: *Бонди Г.* Гипотезы и мифы в физической теории / Пер. с англ. В. А. Угарова. — М.: Мир, 1972. — 104 с.).

31. *D'Alembert J.* Traité de dynamique, dans lequel les loix de l'équilibre & du mouvement des corps sont réduites au plus petit nombre possible, & démontrées d'une manière nouvelle, & où l'on donne un principe général pour trouver le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres, d'une manière quelconque. Paris, 1743 (в пер. *Даламбер Ж.* Динамика. Трактат, в котором законы равновесия и движения тел сводятся к возможно меньшему числу и доказываются новым способом и в котором излагается общее правило для нахождения движения нескольких тел, действующих друг на друга произвольным образом / Пер. с фр. с примеч. В. П. Егоршина. — М. — Л.: Гостехтеоретиздат, 1955. — 344 с.).
32. *Einstein A.* Zur Elektrodynamik der bewegter Körper // *Annalen d. Phys.*, 1905. — Bd. 17 (в пер. *Эйнштейн А.* К электродинамике движущихся тел // Книга: Принцип относительности. Г. А. Лоренц, А. Пуанкаре, А. Эйнштейн, Г. Минковский. Сб. работ классиков естествознания / Под ред. В. К. Фредерикса и Д. Д. Иваненко. — М. — Л.: ОНТИ, 1935. — 386 с.; То же. — *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов: В 4 т. / Под ред. И. Е. Тамма и др. — М.: Наука, 1965. — Т. 1: Работы по теории относительности. — 704 с.).
33. *Galilei Galileo.* Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuoue scienze attenenti alla mecanica ed i movimenti locali. Leida: Appreffo gli Elsevirii, 1638 (в пер. *Галилей Галилео.* Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению / Пер. с итал. и частью лат. С. Н. Долгова; под ред., с предисл. и прим. А. Н. Долгова. — М.: Гостехтеоретиздат, 1934. — 696 с.).
34. *Goldstein H.* Classical mechanics (в пер.: *Голдстейн Г.* Классическая механика / Пер. с англ. А. Н. Рубашова. — М.: Мир, 1967. — 408 с.; То же. — 2-е изд. — М.: Наука, 1975. — 416 с.).
35. *Grammel R.* Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen. — В. 2.— Neubearb. Aufl. — Berlin: Springer, 1950 (в пер.: *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применения: В 2 т. / Пер. с нем. Г. А. Вольперта. — М.: ИЛ, 1952. — Т. 2.: Применения гироскопа. — 320 с.).
36. *Lagrange J. L.* Mécanique analytique: 2 v. — Paris: Ve Courcier (в пер.: *Лагранж Ж.* Аналитическая механика: В 2 т. / Пер. с фр. В. С. Гохмана; под ред. и с прим. Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье. — 2-е изд. — М. — Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. — Т. 1: Аналитическая механика. — 596 с.).
37. *Lindstedt A.* Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie // *Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg.* T. 31, 1883 7 sér. N 4. (К вопросу об интегрировании дифференциальных уравнений теории возмущений.)
38. *Magnus K.* Kreisel. Theorie und Anwendungen (в пер.: *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение / Пер. с нем. Г. Д. Блюмина и др.; под ред. Г. Д. Блюмина. — М.: Мир, 1974. — 526 с.).
39. *Nevanlinna R.* Raum, Zeit und Relativität (в пер.: *Неванлинна Р.* Пространство, время и относительность / Пер. с нем. Г. А. Вольперта; под ред. И. М. Яглома. — М.: Мир, 1966. — 234 с.).
40. *Newton I.* Philosophiae naturalis principia mathematica. — London, 1686 (в пер.: *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии / Пер. с лат. с прим. и пояснениями А. Н. Крылова. — Петроград, Изв. Николаев. Морской

- академии, вып. IV. — 1913; То же. — Крылов А. Н. Собр. трудов. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, т. VII — 696 с. — То же. — Ньютон И. Определения. Аксиомы или законы движения: из «Математических начал натуральной философии» / Пер. акад. А. Н. Крылова. — М., 1985. — 54 с. (Препринт / Ин-т пробл. механики АН СССР; № 249).
41. *Rayleigh J. W. Strutt, Baron*. The theory of sound.: 2 v. — London: Macmillan and Co., 1877—1878 (в пер.: *Стрэтт Дж. В. (Лорд Рэлей)*. Теория звука: В 2 т. / Пер. с 3-го англ. изд. П. Н. Успенского и С. А. Каменецкого; под общ. ред. С. М. Рыгова и К. Ф. Теодорчика. — М. — Л.: Гостехтеоретиздат, 1940—1944. — Т. I, 1940. — 500 с., Т. II, 1944. — 476 с.).
42. *Riemann G. F. B.* Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen // Abhandlungen der Königlichten Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. — Vol. 13 (1867) (в пер.: *Риман Б.* Сочинения / Пер. с нем., под ред., с предисл., обзорной ст. и примеч. В. Л. Гончарова. — М. — Л.: Гостехиздат, 1948. — 544 с.).
43. *Sciama D. W.* The physical foundations of general relativity. N.-Y.: Doubleday & Co, Inc. Garden City (в пер.: *Сиам Д.* Физические принципы общей теории относительности / Пер. с англ. В. А. Угарова. — М.: Мир, 1972. — 104 с.).
44. *Stoker J. J.* Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems. N.-Y.: Interscience Publishers, 1950. — 273 p. (в пер.: *Стокер Дж. Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах / Пер. с англ. Н. А. Талицких; под ред. А. И. Лурье. — М.: ИЛ, 1952. — 264 с.; То же. — 2-е изд. — М.: ИЛ, 1953. — 256 с.).

Предметный указатель

- Аномалия истинная 67, 69
— средняя 68
— эксцентрическая 68
Афелий 67
- Баллистика внешняя 58
Бернулли теорема 275
Бертрана задача 34, 48
Бине уравнение 64, 144
Борда — Карно теорема 278
- Вагон однорельсовый гироскопический 415, 705
Вал гибкий 303 и д.
Ватт (Вт) 223
Вектор главный внешних сил 123
— — количество движения 123
Виброграф 88, 89, 92, 112, 536, 590
Волчок *слящий* 688—695, 704
Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки 658 и д.
Время абсолютное 17, 489, 491
— разгона машины 195
Высота гидравлическая (полная) 275
— нивелировочная 275
— пьезометрическая 275
— скоростная 275
- Галилея преобразования 490
— принцип 467, 489
Гармоники 90
Гаситель колебаний динамический 648
Герц (Гц) 79
Гироскоп 406, 664
— на подвижном основании 669 и д.
— свободный 686
— уравновешенный с тремя степенями свободы 411
Гиротахоакселерометр 674
Гиротахометр 672
Грамм массы 22
Гаука — Кардана шарнир 368
Гюйгенса — Штейнера теорема 190
- Давление струи на стену 165
Д'Аламбера парадокс 277
— принцип 381—384
Движение аperiодическое 98
— — предельное 100
— баротропное 171
— восходящее 53
— нисходящее 49
— относительное 465 и д.
— параболическое 46
— тяжелой частицы по конической поверхности 449 и д.
— центра масс 132
— эллиптическое тела, брошенного с Земли 71, 72
Действие и противодействие 24
Декремент логарифмический 97
Демпфер гидравлический (катаракт) 100, 673
Джоуль 219
Дина 22
Динамометр 89
Длина приведенная физического маятника 202
- Единиц система СИ 21—23, 101
— — техническая 22
— — физическая (CGS) 22, 23
- Жуковского опыт 212
Жуковского — Фруда маятник 570
- Задача динамики вторая 27 и д., 40 и д.
— — первая 27 и д.
Закон аддитивности масс 21
— всемирного тяготения, вывод из законов Кеплера 34
— Гаука 78
— Ньютона второй 20, 28, 383, 427
— —, обобщение релятивистское 510, 514
— — первый (закон инерции) 18
— — третий 23
— сил общий 32 и д.

- Закон сохранения количества движения 124
— — механической энергии 120, 257, 441
Зона «мертвая» 117
- Идеальной жидкости модель 170, 171
Изотомеограф 455, 485
Изохронность колебаний 77, 180, 445, 532
Импульс 150
— внешний 150
— внутренний 150
— обобщенный 443
— — мгновенной силы 443
Импульсы периодические 93, 599
Индикатор 86, 89
Инертность 21
Интеграл живых сил 41, 259
— (закон) площадей 41, 64, 176, 178
— циклический 443
— энергии 259, 441
Интегралы уравнений движения 41, 259
- Карно теорема 265, 422
Кастильяно теорема 633
Келлера законы 34, 35
— уравнение 68, 69
Кёнига теорема 231
Килограмм массы 21
— силы 22
Кинестатика 383, 384, 406
Колебания вынужденные 82, 93, 105
— — системы с двумя степенями свободы 645 и д.
— — — одной степенью свободы 582 и д.
— главные 608, 610, 640, 643, 657
— затухающие 96, 104, 562
— линейные 76, 118
— магнитной стрелки 200
— нутационные 411
— останавливающиеся 117
— самолета длиннопериодические 301
— — короткопериодические 301
— свободные (собственные) 76, 529, 602
— — при наличии кулонова трения 113, 118, 572
— — системы с двумя степенями свободы 645 и д.
- Колебания вынужденные системы с произвольным числом степеней свободы 653 и д.
Количество движения 24, 124
Компас гироскопический 686
Континуум пространственно-временной 493
Координаты главные 617, 620, 623, 657
— обобщенные 333
— — циклические 442
Коэффициент восстановления 155, 160
— гироскопический 476, 675
— динамичности 85, 105, 107, 110
— инерционный 531, 604, 654
— квазиупругий 531, 604, 654
— полезного действия 266, 267, 362
— расстройки 85
Коэффициенты влияния 630—632
— связи 610
— форм главных колебаний 610
Круговращение маятника 545, 555—557
- Лагранжа уравнения второго рода 27, 436, 438 и д., 696 и д.
— — — с множителями 463
— — первого рода 425 и д.
— функция (кинетический потенциал) 440
Лагранжа — Дирихле теорема 372, 373 и д.
Лапласа — Пуассона формула 173
Линдстедта метод 557
Линия мировой частицы 501
— силовая 244, 245
Лоренца преобразование 494
Льенара способ построения фазовых траекторий 580
Ляпунова теоремы 372, 377
- Максвелла диаграмма 161, 162
Масса 21, 131
— инертная 23, 524
— переменная 125 и д.
—, —, — приведенная к полюсу 236
—, —, — центру масс 234
— присоединенная 39
— тяготеющая 23, 523
Маятник гироскопический 696
— конический 435, 449
Маятник математический 178, 429, 448, 449, 470, 544, 561, 599

- Маятник оборотный 202
 — переменной длины 335, 341
 — сферический 432, 446
 — физический 201
 — циклоидальный (маятник Гюйгенса) 445
 — эллиптический 453
 Метод Бесселя 69
 Мещерского уравнение 127
 Минковского диаграмма 498
 — пространство-время 496
 — сила 511
 Множители связей 352, 429
 Момент вращающий приведенный 460
 — гироскопический 408, 665
 — инерции 184, 193, 312
 — — аксиальный 188, 324
 — — главный 316, 318
 — — — центральный 321
 — —, экспериментальное определение 199
 — — полярный 190
 — — приведенный 459
 — — тела вращения 186
 — — центробежный (произведение инерции) 314
 — — экваториальный 188, 324
 — количества движения главный (кинетический момент) 181
 — — — гироскопа 406
 — — — твердого тела 330
 — количества движения 174
 Моменты инерции однородных тел 191
 Мощность 223
 — сил внутренних 282
 Напор динамический (скоростной) 275
 — полный 275
 — пьезометрический 275
 Неразличимость инерционных систем 523
 Неуравновешенность динамическая 396
 — статическая 397
 Ньютон (Н) 22
 Обри прибор 412
 Окружность предельная 451
 Орбита центральная 35
 Ось вращения свободная 396
 Ось инерции главная 316, 317
 — — — центральная 321
 — качаний 202
 «Парадокс близнецов» 504
 Перемещения виртуальные 339
 — возможные 339
 Перигелий 34, 67, 68
 Плоскость неизменяемая планетной системы 211
 — фазовая 532
 Подвес бифилярный 535
 Поле силовое 243, 244
 — — потенциальное 246
 Полета ракеты дальность полная 148
 — — — эллиптическая 148
 Постоянная тяготения универсальная 36
 Потенциал 246
 Правило золотое механики 362
 Пресс винтовой 363
 — рычажный 365
 Прецессия 407
 — регулярная 411, 664
 — — быстрая 667
 — — медленная 667
 Принцип возможных перемещений 353, 361
 — независимости действия сил 23
 — освобождаемости 347
 — эквивалентности инертной и тяготеющей масс 23, 524
 Проводимость переходная 587
 Пространство абсолютное 16, 491
 Процесс адиабатический 173
 Работа сил внутренних 121, 223, 239
 — —, приложенных к твердому телу 225
 — силы 219
 — — в потенциальном поле 248
 — — реакции связи 349, 350
 — — тяжести 223
 — — упругой 227
 — — элементарная 220
 Равновесие безразличное 613
 — неустойчивое 376, 533, 547
 — устойчивое 372, 373, 533, 547
 Радиус инерции 184
 — — полярный 190
 Разгон электрического двигателя 197
 Ракета 140 и д.
 — метеорологическая 55

- Ракета метеорологическая, этапы спуска 55, 56
Распространение звука 175
Расход массовый 164, 214, 273
Реакция обобщенная 351
— оси вращающегося тела 392
— — — динамическая 393
— — — при ударе 401
— статическая 393
— связи 347
— системы на единичное возмущение 587
— — — единичный импульс 586
Режим движения установившийся 82
Резаля теорема 183
Резонанс 83—86, 92, 94, 106, 598, 646
Рэля функция диссипативная 654
- Связь 334
— голономная 334, 337
— идеальная 347
— кинематическая 334
— неголономная 334
— нестационарная 334
— неудерживающая (односторонняя) 338
— стационарная 334
— удерживающая (двухсторонняя) 338
- Сейсмограф 89
— вертикальный 538
— горизонтальный 541
- Сила внешняя 120
— внутренняя 120
— восстанавливающая 75
— — линейная 76
— — нелинейная 557
— диссипативная 262
—, — — положения (позиционная) 37
—, — — скорости 38
—, — — ускорения 39
— задаваемая (активная) 347, 383
— инерции 29, 466
— касательная 30
— — кориолисова 466
— — — обобщенная 476
— — переносная 466
— — центробежная 30, 468
— консервативная 120, 262
- Сила мгновенная 152
— неконсервативная 262
— обобщенная 27, 355
— полезного сопротивления 361
— постоянная 36, 45
— потерянная 383, 421
— реактивная 127
— центральная 34, 63, 177
- Система координат абсолютная 16, 465
— — относительная 465
- Скорости вектор четырехмерный 508, 509
- Скорость из бесконечности 45, 71
— космическая вторая 45
— — первая 72
— обобщенная 334, 436
— потерянная 265, 278
— угловая номинальная 195
- Стабилизатор непрямого действия 413
- Тензор инерции 312 и д.
- Теорема импульсов 120, 150
— — при ударе 151
— о движении центра масс 131, 132
— — сохранении главного момента количества движения 182, 211
— об изменении главного момента количества движения 209, 210
— — — кинетической энергии (теорема живых сил) 120, 240, 419
— — — количества движения (теорема количества движения) 121, 122, 124, 153, 418
— — — момента количества движения (теорема моментов) 120, 176, 182, 419
- Теоремы динамики общие 119 и д., 418
- Томсона теорема 704
- Точки времениподобные 500
— пространственноподобные 500
- Траектории ракеты участок активный 141
— — — пассивный 141, 142
- Траектории фазовые 532
- Трение 133, 134, 416, 572
— качения 134, 291 и д.
- Удар 151
— абсолютно неупругий 154
— — упругий 154

- Удар косо́й 151, 160
— при плоском движении твердого тела 307 и д.
— прямой 151, 156, 263
- Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси 193
— неразрывности 170
— общее движения машины 461
— — динамики 416
- Уравнение общее теории удара 421
— основное динамики материальной точки 21, 25
— — — точки переменной массы 127
— Риккати 129
— характеристическое (частотное) 607, 654
- Уравнения движения естественные 26
— — материальной точки основные 40
- Ускорение 20, 21
— абсолютное 465
— кориолисово 465
— переносное 465
— потерянное 382
— свободного падения 22
- Ускорения вектор четырехмерный 509
- Устойчивость вращающегося снаряда 693
— равновесия 372, 373
— *спящего* волчка 692
- Устойчивый предельный цикл 572
- Ф**актор затухания колебаний 97
- Фуко гироскоп второго рода 684
— — первого рода 683
— опыты 485, 486, 682
— правило 408, 666
- Центр масс системы 131
— сопротивления снаряда 693
— удара 404
- Циолковского формула 128
- Частота парциальная 610
— свободных колебаний (собственная) 77, 78, 532
- Число степеней свободы системы 345
- Член вековой 558
— гироскопический 476, 675
- Широта географическая 479
— геоцентрическая 479
- Шлика успокоитель качки гироскопический 413, 704
- Эйлера теорема 165, 276
— уравнение теории турбомашин 214
— уравнения динамики идеальной жидкости 171
— — динамические 658—661
- Эйнштейна постулаты 493
- Эллипсоид инерции 317
- Энергии-импульса вектор четырехмерный 511—513
- Энергия кинетическая 27, 120, 230, 231, 439, 477, 478
— — твердого тела 233, 328, 329
— механическая полная 258, 441
— покоя 515
— потенциальная 246, 356, 440, 477
— — поля силы тяжести 250
— — системы тяготеющих масс 253
— — упруго деформированного тела 251
— — центробежных сил инерции 477
- Эффект «сокращения длин» 503

Именной указатель*

- Аламбер Ле Рон д' (*Alembert Le Rond d' J.*) 20, 59, 381, 382, 708
Аристотель (Ἀριστοτέλης) 19
- Беркли (*Berkeley G.*) 523
Бернулли Д. (*Bernoulli D.*) 166
Бернулли И. (*Bernoulli J.*) 59
Бертран Ф. (*Bertrand J. L. F.*) 34
Бессель (*Bessel F. W.*) 69, 70
Бине (*Binet J. Ph. M.*) 64
Бом (*Bohm D.*) 489, 707
Бонди (*Bondi H.*) 16, 17, 467, 707
Борда (*Borda J. Ch.*) 278
Букуа фон (*Buquooy von G. F. A.*) 127
Булгаков Б. В. 577, 686, 706
- Вентури (*Venturi G. B.*) 278
- Галилей (*Galilei G.*) 17, 19, 20, 77, 180, 362, 467, 490 и д., 523, 708
Гантмахер Ф. Р. 658, 706
Герман (*Hermann J.*) 383
Голдстейн (*Goldstein H.*) 489, 708
Граммель (*Grammel R.*) 679, 686, 708
Гюйгенс (*Huygens Ch.*) 190, 202
- Д'Аламбер см. Аламбер
Декарт (*Descartes R.*) 25
Дирихле (*Dirichlet P. G. L.*) 373
- Жуковский Н. Е. 212, 277, 306, 570, 706
- Зоммерфельд (*Sommerfeld A. J. W.*) 262
- Ишлинский А. Ю. 415, 467, 706
- Кавендиш (*Cavendish H.*) 36
Калачев Г. С. 301, 707
Кардано (*Cardano G.*) 368
Карно (*Carnot L. N. M.*) 265
- Кастильяно (*Castigliano A.*) 633
Кейли см. Кэли
Кельвин см. Томсон
Кеннеди (*Kennedy R. J.*) 492
Кёниг (*König J. S.*) 231
Кеплер (*Kepler J.*) 34, 36
Клапейрон (*Clapeyron B. P. E.*) 173
Ковалевская С. В. 327, 706
Королев С. П. 55, 141, 144, 145, 149, 706
Крутков Ю. А. 686, 707
Крылов А. Н. 20, 240, 448, 488, 587, 686, 688, 696, 706, 707
Кудревич Б. И. 686, 707
Кэли (*Cayley A.*) 130
- Лаваль (*Laval De G.*) 306
Лагранж (*Lagrange J. L.*) 19, 353, 373, 378, 379, 416, 426, 708
Лаплас (*Laplace P. S.*) 211
Лежандр (*Legendre A. M.*) 553
Ленц Г. Х. 568
Линдстедт (*Lindstedt A.*) 557, 708
Лиссажу (*Lissajous J. A.*) 33, 611
Лойцянский Л. Г. 39, 276, 658, 707
Лойцянская И. Л. 14
Лоренц (*Lorentz H. A.*) 494, 503
Лурье А. И. 13, 464, 658, 707
Лурье К. А. 13, 489
Льенар (*Lienard A.-M.*) 580
Ляпунов А. М. 376, 557, 661, 707
- Магнус (*Magnus K.*) 686, 708
Майкельсон (*Michelson A. A.*) 492
Максвелл (*Maxwell J. C.*) 161, 518
Мах (*Mach E.*) 523
Меркин Д. Р. 376, 686, 705, 707
Мещерский И. В. 126, 127, 707
Минковский (*Minkowski H.*) 496, 498
Михайлов Г. К. 127
Морли (*Morley E. W.*) 492

* Полуужирным шрифтом и курсивом выделены те страницы, на которых приводятся соответственно биографические данные и библиография.

- Неванлинна (*Nevanlinna R.*) 16, 708
 Николаи Е. Л. 686, 707
 Ньютон (*Newton I.*) 15—21, 23—25, 48, 59, 154, 489, 709
- Обри (*Obry L.*) 412
 Окунев Б. Н. 696, 707
 Остославский И. В. 301, 707
- Пуазёйль (*Poiseuille J. L. M.*) 101
 Пуассон (*Poisson S. D.*) 173
- Резаль (*Résal A. H.*) 183
 Риккати (*Riccati J. F.*) 129
 Риман (*Riemann G. F. B.*) 527, 528, 709
 Рэлей лорд, Стрэтт (*Strutt J. W. Lord Rayleigh*) 562, 709
- Сабинин Г. X. 686, 707
 Сиама (*Sciama D. W.*) 467, 709
 Степанов Г. Ю. 14
 Стокер (*Stoker J. J.*) 580, 709
 Стрэтт см. Рэлей
- Томсон лорд Кельвин (*Thomson W. (Lord Kelvin)*) 704
 Торричелли (*Torricelli E.*) 378
- Торндайк (*Thorndike E. M.*) 492
- Угаров В. А. 489, 707
- Фёпшль (*Föppl A. O.*) 306
 Фитцджеральд (*Fitzgerald G. F.*) 503
 Фруд (*Froude W.*) 570
 Фуко (*Foucault J. B. L.*) 406, 412, 485, 486, 682, 686
 Фурье (*Fourier J. B. J.*) 69
- Хёйгенс см. Гюйгенс
- Циолковский К. Э. 128
- Четаев Н. Г. 376, 661, 707
- Шлик (*Schlick O.*) 413, 704
 Штейнер (*Steiner J.*) 190
- Эйлер (*Euler L.*) 59, 165, 383
 Эйнштейн (*Einstein A.*) 17, 18, 489, 493, 494, 503, 516, 522, 524, 527, 708
 Этвеш (*Eötvös von L.*) 36, 524
- Якоби (*Jacobi C. G. J.*) 553

О ЗНАЧЕНИИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ В РАЗВИТИИ ТЕХНИКИ*

Особое значение в современной технике имеют колебания различного рода, возникающие в многочисленных инженерных сооружениях, в машинах и их деталях. В качестве объекта для иллюстрации значения теоретической механики в развитии техники приведем ряд примеров из этой области. <...>

К автомобилю в годы его появления предъявлялись два основных требования — его колеса должны вращаться, и он должен производить повороты. Дальнейший прогресс был связан с совершенствованием автомобильного двигателя, и тогда уже потребовались законы механики, связанной с уравниванием сил инерции кривошипно-шатунных механизмов многоцилиндрового двигателя.

Возможность повышения скоростей была найдена в применении баллонных (пневматических) шин, обеспечивающих также мягкую подвеску кузова. Здесь возникли уже совсем непримитивные задачи. Во-первых, задача о шимми передней подвески автомобиля. Оказалось, что на определенных скоростях (обычно больших) возникают устойчивые колебания передней подвески, состоящие из поворотов передних колес относительно вертикальной оси и поворотов передней оси с колесами вокруг горизонтальной оси.

Во-вторых, более общая задача о путевой устойчивости автомобиля, рассмотрение которой требует учета не только движения подвески, но и возмущенного движения кузова. Казалось, что в классической теории систем с неголономными связями имеются все средства для решения этих задач. Но действительность оказалась более сложной — пневматик деформируем, и уравнения связей в обычной форме, предусматривающей отсутствие боковых составляющих скоростей точек соприкосновения колеса с дорогой, здесь недействительны.

Правильная постановка задачи была достигнута (М. В. Келдыш) путем введения параметров, характеризующих боковое смещение площадки контакта и ее поворот, отсчитываемый от прямой пересечения диаметральной плоскости смещенного обода колеса с дорогой. В уравнения неголономных связей (по два на каждое колесо), записываемые в предположении, что проскальзывание пневматиков отсутствует, оказалось необходимым ввести эти параметры, после чего задача уложилась в схему теории линейных колебаний систем с неголономными связями. Это позволило установить существование критических скоростей и дать рекомендации по выбору параметров, гарантирующих их недостижение.

* Фрагменты статьи, опубликованной в сборнике: *Теоретическая механика во втузах: сб. статей* / Под общ. ред. А. А. Яблонского. — М.: Высш. шк., 1971. — С. 70—76.

Хорошо известно, что научное исследование часто обусловлено стремлением разяснить причину технической катастрофы. Классический пример — явление флаттера. Известно, что оно не обнаруживалось в первоначальных бипланных конструкциях с достаточно большой крутильной жесткостью, но стало причиной множества аварий за рубежом и у нас в тридцатые годы. В классической модели явление флаттера (с экспоненциально-возрастающей амплитудой) объясняется на примере жесткой пластинки, имитирующей упругое крыло и присоединенной к неподвижному основанию пружинами, создающими восстанавливающие силы и крутящий момент; платформа в состоянии равновесия расположена вдоль набегающего потока, при нарушении равновесия возникают аэродинамические силы. Простейший анализ позволяет дать объяснение причины неустойчивости и провести расчет критической скорости. Как и в предыдущем примере, здесь также речь идет о границах устойчивости, но не о явлениях в закритической области. Конечно, схемой в рамках механики системы с конечным числом степеней свободы отнюдь не исчерпывается содержание задачи.

Вероятно, нет области все усложняющейся техники, в которой в той или иной форме не ставились бы вопросы гашения колебаний. Это — вопросы комфортабельности транспорта (морского, железнодорожного, автомобильного), создание приемлемых условий работы персонала (отбойный молоток, например), защита измерительных приборов, создание неподвижной платформы на колеблющемся основании и т. д. Конечно, к ним же относится необозримый комплекс классических задач о крутильных колебаниях валов, колебаниях турбинных лопаток, дисков, валов, колебаниях при резании. Кроме того, имеется еще одна область — колебания строительных и гидротехнических сооружений.

Великое создание Лагранжа — теория малых колебаний систем относительно положения равновесия, в которую позже внесли вклад Раус, Кельвин, Релей, А. Н. Крылов, С. П. Тимошенко, была основой, на которой развивалось решение перечисленных задач, начиная от Редтенбахера (1862) и кончая примерно тридцатыми годами текущего столетия. Эта теория отражает такие достижения, как успокоительные цистерны Фрама, гироскопический успокоитель качки Шлика, сейсмометрические приборы Б. Б. Голицына; такие теоретические шедевры, как теория гибкого вала Фешпля, общая теория качки корабля на волнении, созданная А. Н. Крыловым, его же «теория крешеров и индикаторов». Поэтому нельзя считать, что теория малых колебаний себя исчерпала, она будет состоять на службе техники и получать от нее новые стимулы развития. <...>

На конференциях по колебаниям в Москве (1930) многие из нас впервые услышали в докладе А. А. Андропова слово «автоколебание». Немного позже начали появляться публикации Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова по асимптотическим методам теории колебаний. <...>

Бурный расцвет теории нелинейных колебаний начался в послевоенные (частично и в военные) годы. Появились фундаментальные труды Б. В. Булгакова и И. Г. Малкина. Не обошлось без отрыва теории от тех-

нических задач; для решения ряда нелинейных задач, выдвигаемых практикой, из множества методов трудно было определить пригодные, а некоторые пришлось создавать заново. <...>

Может возникнуть представление, что задачи механики ставятся техникой или для того, чтобы предупредить возможность аварии, или в случае, когда катастрофа уже произошла. Конечно, это не так. Можно указать на технические области, в которых механика позволяет не только проанализировать, установить сущность различных явлений, но и создать на основе исследования механических явлений новые технические средства. Примером может служить полезное использование вибраций — вибрационное перемещение, вибрационное погружение. Осуществление этих процессов требует создания установок для осуществления вибраций с заданными характеристиками по амплитудам и спектральному составу.

К ним предъявляются три требования: большой коэффициент усиления, уравновешенность, т. е. возможная малость усилия, передаваемого основанию, стабильность режима — малые изменения параметров установки не должны существенно влиять на режим создаваемой вибрации. Установка моторчика с неуравновешенным грузиком на подрессорной массе может удовлетворить одно из требований, два требования (надлежащий коэффициент усиления, уравновешенность) выполнимы в системе с двумя степенями свободы, все три — в системе не менее чем с тремя степенями свободы. Отметим еще, что сама задача создания вибрационной установки не всегда разрешима в рамках линейной теории; учет ограниченности источника энергии возбуждения требует привлечения нелинейной теории. <...>

Теоретическая механика содержит разделы — «Статика», «Кинематика», «Динамика». А выше рассматривались только некоторые и, вероятно, не самые удачные, задачи о колебаниях. Пусть это не создает ошибочного впечатления, что роль механики для технического прогресса ограничивается разделом колебаний. Это — важнейший для применения и в научном исследовании, но не единственный раздел.

Даже в «насквозь исчерпанной», казалось бы, статике твердого тела имеются «не вполне изученные места». Например, в рассмотренной еще Н. Е. Жуковским задаче опирания твердого тела на шероховатую плоскость имеется предмет не только для конкретных расчетов при различных формах площадки контакта, но и для углубленного исследования — движения при нарушении равновесия, обобщение на случай задания деформируемости конечным числом параметров (в продолжение исследования задачи о баллонном колесе) и т. д.

Кинематика твердого тела — также достаточно завершенная область, но и в наше время потребности гироскопической практики вызвали необходимость исследований по конечным поворотам твердого тела и систем твердых тел. И нет такого положения классической механики, которое не нашло бы применения в задачах космической динамики.

Учебное издание

Лойцянский Лев Герасимович
Лурье Анатолий Исакович

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В двух томах

Том 2

Динамика

Учебное пособие для вузов

Зав. редакцией *Б. В. Понкратов*
Редактор *Е. А. Вольмир*
Художественное оформление *Ю. В. Христин*
Технический редактор *С. А. Толмачева*
Компьютерная верстка *С. Л. Мамедова*
Корректор *Е. Е. Никулина*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.02.953.Д.006315.08.03 от 28.08.2003.

Подписано к печати 30.06.06. Формат 60×90¹/₁₆.

Бумага типографская. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.

Усл. печ. л. 45,0. Тираж 3000 экз. Заказ № .

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Суцеский вал, 49.

**По вопросам приобретения продукции
издательства «Дрофа» обращаться по адресу:**

127018, Москва, Суцеский вал, 49.

Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник».

109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.

Тел.: (495) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Магазины «Переплетные птицы»:

127018, Москва, ул. Октябрьская, д. 89, стр. 1.

Тел.: (495) 912-45-76;

140408, Московская обл., г. Коломна, Голутвин,

ул. Октябрьской революции, 366/2.

Тел.: (495) 741-59-76.