В. І. Мамчук

Числові методи

Навчальний посібник

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

В. І. Мамчук

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом підготовки «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Київ 2015

УДК 378.14:519.6 (075.8)
ББК 19 я7
М 228

Рецензенти:

В. В. Бабенко – лауреат премій НАНУ імені О. М. Динника, лауреат премій НАНУ імені О. К. Антонова, д-р техн. наук, проф. (Інститут гідромеханіки Національної академії наук України);

В. Ю. Слюсарчук – заслужений працівник освіти України, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Національний університет водного господарства та природокористування);

А. Я. Бомба – д-р техн. наук, проф. (Рівненський державний гуманітарний університет)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України, як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (лист № 1/11-17264 від 31.10.2014).

Мамчук В. І.

М 228 Числові методи: навч. посібник / В. І. Мамчук. – К. : НАУ, 2015. – 388 с.

ISBN 978-966-598-854-0

У навчальному посібнику викладено курс числових методів.

Навчальний матеріал поділено на логічно завершені розділи, які складаються з теоретичної частини, більшість понять якої обґрунтовано та доведено; достатньої кількості розв'язаних завдань та завдань для самостійної і домашньої роботи; тридцяти варіантів завдань для самостійної і домашньої роботи та прикладів їх розв'язання.

Для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом підготовки «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

УДК 378.14:519.6 (075.8)
ББК 19 я7

ISBN 978-966-598-854-0

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Оптимальне та максимальне використання сучасних комп'ютерів неможливе без умілого застосування наближеного й числового аналізу. Цим пояснюється висока зацікавленість методами наближених обчислень.

Навчальна дисципліна «Числові методи» займає важливе місце в навчальних планах усіх без винятку навчальних закладах. Тому так стрімко виникає потреба у виданні навчальних посібників з цієї дисципліни, особливо в практикумах до розв'язування задач з числових методів.

Посібник має таку структуру. На початку кожного розділу подаються теоретичні відомості, більшість з яких обґрунтовується, а деякі – стисло; здійснюється постановка задач; наводяться робочі формули та обчислювальні схеми; наводяться типові приклади; оцінюються похибки; порівнюються окремі методи з точки зору їх трудомісткості та ступеня точності, що досягається; обумовлюється зручність комп'ютерної реалізації тощо. Далі наводиться детальне розв'язування типових задач, на яких ілюструються відповідні алгоритми. У кінці розділу наводяться завдання для самостійної роботи, до більшості з яких подаються відповіді, та 30 варіантів завдань для можливої контрольної, самостійної і домашньої роботи з наведеними прикладами їх розв'язування, що важливо у випадку кредитно-модульної системи навчання.

З метою кращого сприйняття більшість завдань, до яких наведено відповіді, підібрана так, щоб обчислення не були надто громіздкими та не потребували високого рівня знання методів програмування.

Посібник розрахований на студентів вищих навчальних закладів різних напрямів навчання. Він може буди корисним аспірантам і науковим співробітникам, що працюють у сфері прикладних наук.

Розділ 1. ПРАВИЛА НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ТА ОЦІННЮВАННЯ ПОХИБОК

1.1. Наближені числа, їх абсолютні та відносні похибки

Розрахунки, як правило, проводять з наближеними значеннями величин – *наближеними числами*. Уже початкові дані для розрахунків містять деякі похибки. В процесі обчислень похибки накопичуються від округлень, застосування наближених формул тощо. Правильне врахування похибок при обчисленнях дає змогу вказувати оптимальну кількість знаків, які необхідно зберігати в розрахунках та в кінцевому результаті.

Похибка наближеного числа a, тобто різниця (між ним і точним значенням a_0) $a - a_0$, як правило, невідома.

Під *оцінкою похибки* наближеного числа a розуміють встановлення нерівності

$$|a - a_0| \leq \Delta_a. \quad (1.1)$$

Число Δ_a називається *абсолютною похибкою наближеного числа* a (інколи вживають термін «гранична абсолютна похибка»). Це число визначається неоднозначно: його можна збільшити. Як правило, намагаються вказати якомога менше Δ_a, що задовольняє нерівність (1.1).

Абсолютні похибки записують не більше як з двома – трьома значущими цифрами (при підрахунку числа значущих цифр не враховують нулів, які стоять зліва від першої значущої цифри, відмінної від нуля; наприклад, число 0,070130 містить п'ять значущих цифр). У наближеному числі a не зберігають ті розряди, які заокруглюються в його абсолютній похибці Δ_a.

Приклад 1.1. З точністю до 1 см виміряно довжину й ширину ділянки, які відповідно становлять: $a = 7{,}42$ м і $b = 4{,}83$ м. Оцінити похибку визначення площі ділянки: $S = ab = 35{,}8386$ м^2.

Розв'язання. За умовою задачі $\Delta_a = \Delta_b = 0{,}01$ м. Граничні можливі значення площі:

$$(a + 0{,}01)(b + 0{,}01) = 35{,}9612 \text{ м}^2,$$

$$(a - 0{,}01)(b - 0{,}01) = 35{,}7162 \text{ м}^2.$$

Порівнюючи їх з даним значенням S у завданні, одержуємо оцінку:

$$|S - S_0| \leq 0{,}1226,$$

що дає можливість встановити абсолютну похибку числа S:

$$\Delta_S = 0{,}1226 \text{ м}^2.$$

Можна заокруглити значення Δ_S, наприклад, так:

$\Delta_S = 0{,}123 \text{ м}^2$ або $\Delta_S = 0{,}13 \text{ м}^2$ (абсолютні похибки заокруглюють у більшу сторону). При цьому наближене значення площі можна записати у вигляді: $S = 35{,}839 \text{ м}^2$, або $S = 35{,}84 \text{ м}^2$, або навіть $S = 35{,}8 \text{ м}^2$.

Приклад 1.2. Нехай у комп'ютер вводяться числа з п'ятьма значущими цифрами. З якою точністю в нього будуть введені числа π, e та $1/3$?

Розв'язання. Покладемо $\pi \cong 3{,}1416 = a$ замість $\pi = 3{,}141592\ldots$; $e = 2{,}7183 = b$ замість $e = 2{,}7182818\ldots$; $1/3 \cong 0{,}333 = c$ замість $1/3 = 0{,}33333\ldots = c$. Похибку числа a можна оцінити числом $\Delta_a = 0{,}000093$ або числом $\Delta_a = 0{,}0001$; числа b – числом $\Delta_b = 0{,}000082$ або $\Delta_b = 0{,}00009$; числа c – числом $\Delta_c = 0{,}000034$ або $\Delta_c = 0{,}00004$.

Відносною похибкою δ_a наближеного числа a називається відношення його абсолютної похибки Δ_a до абсолютної величини числа a, тобто

$$\delta_a = \Delta_a/|a| \quad (a \neq 0). \tag{1.2}$$

Відносна похибка, як правило, виражається у відсотках, і її прийнято записувати не більше як з двома-трьома значущими цифрами (знаками).

Іноді під відносною похибкою розуміють відношення $\Delta_a/|a_0|$, де a_0 – точне (але невідоме) значення числа; якщо відносна похибка числа a не перевищує 5 %, то різниця між величинами $\Delta_a/|a|$ і $\Delta_a/|a_0|$ виявляється тільки в другому знаку похибки, що не суттєво.

Приклад 1.3. Визначити відносну похибку числа S з прикладу 1.1.

Розв'язання. $S = 35{,}8386$, $\Delta_S = 0{,}1226$ тому:

$$\delta_S = \frac{0{,}1226}{35{,}8386} = 0{,}0035 \text{ або } 0{,}35 \text{ %}.$$

У багатьох технічних розрахунках прийнято характеризувати точність наближених чисел їх відносною похибкою.

Відносна похибка наближеного числа пов'язана з кількістю його правильних знаків. *Кількість правильних знаків числа* відраховується від його першої значущої цифри до першої значущої цифри його абсолютної похибки. Наприклад, число $S = 35{,}8386$ з абсолютною похибкою $\Delta_S = 0{,}1226$ має два правильні знаки (цифри 3 і 5), останні знаки сумнівні.

Орієнтовно можна вважати, що наявність тільки одного правильного знака відповідає відносній похибці порядку 10 %, двох правильних знаків – похибці порядку 1 %, трьох правильних знаків – похибці порядку 0,1 % тощо.

У математичних таблицях усі числа заокруглено до правильних знаків, при чому абсолютна похибка не перевищує половини одиниці останнього «залишеного» розряду. Наприклад, якщо за таблицею знайдено $e = 2{,}718$, то абсолютна похибка не перевищує $0{,}5 \cdot 10^{-3}$.

У кінцевих результатах обчислень залишають, крім правильних, один сумнівний знак.

У проміжних результатах обчислень зберігають два-три сумнівні знаки, щоб не накопичувати зайві похибки від заокруглень.

Приклад 1.4. Заокруглити число $S = 35{,}8386$ з прикладу 1.1 до правильних знаків.

Розв'язання. Оскільки в числі S два правильні знаки, то природньо записати $S = 35$.

При цьому до абсолютної похибки $\Delta_S = 0{,}1226$ доводиться додати величину $0{,}8386$, відкинуту при заокругленні. Нова абсолютна похибка $\Delta_S = 0{,}9612$ змушує вважати сумнівним третій знак числа S, і, відповідно, число S доводиться заокруглювати до двох знаків (нова похибка не вплинула на кількість правильних знаків).

У деяких випадках абсолютна похибка й величина, одержана відкиданням при заокругленні числа до кількості правильних знаків, відрізняються на порядок, тобто сума їх знижує кількість правильних знаків числа на одиницю (нова похибка впливає на кількість правильних знаків). Це вказує на те, що заокруглення розрахункових результатів до правильних знаків не завжди доцільне.

Зауваження 1. У цьому прикладі, як і прийнято, застосовано *правило доповнення при заокругленні*: якщо перша цифра, що відкидається, більша 5, то остання цифра, що зберігається, збільшується на одиницю. Вона збільшується й тоді, коли перша цифра, що відкидається, дорівнює 5 і за нею є одна або кілька значущих цифр.

Зауваження 2. Якщо відкидається цифра 5, а за нею немає значущих цифр, то заокруглення проводиться *до найближчого парного числа*, тобто остання цифра, що зберігається, залишається незмінною, якщо вона *парна*, і збільшується, якщо вона непарна. Це пов'язано з тим, що, заокруглюючи одне число, ми не збільшуємо точності заокруглення. Але при багаторазових заокругленнях, числа з надлишком траплятимуться приблизно стільки ж разів, скільки й з недостачею. Тому взаємна компенсація похибок забезпечить найбільшу точність результату.

Сказане в *зауваженні 2* можна змінити й завжди застосовувати заокруглення до найближчого непарного числа. Точність буде та сама, але оперувати парними цифрами зручніше, ніж непарними.

Завдання для самостійної роботи

1. Заокруглюючи наступні числа до трьох значущих цифр, визначити Δ – абсолютну і δ – відносну похибки одержаних наближених чисел:

а) 2,1514; б) 0,16152; в) 0,01204; г) 1,225; ґ) – 0,0015281;
д) – 92,85; е) 0,1545; є) 0,003922; ж) 625,55; з) 94,525.

2. Визначити абсолютну похибку наступних наближених чисел за їх відносними похибками:

а) $a = 13267$; $\delta = 0{,}1$ %; б) $a = 2{,}32$; $\delta = 0{,}7$ %;
в) $a = 35{,}72$; $\delta = 1$ %; г) $a = 0{,}896$; $\delta = 10$ %;
ґ) $a = 232{,}44$; $\delta = 1$ %.

3. При вимірюванні деяких кутів одержали величини: $a_1 = 21^\circ 37' 3''$; $a_2 = 45^\circ$; $a_3 = 1^\circ 10''$; $a_4 = 75^\circ 20' 44''$. Визначити відносні похибки величин a_1, a_2, a_3, a_4, вважаючи, що абсолютна похибка вимірювань становить $1''$.

4. Встановити кількість правильних знаків числа x, якщо відомо його абсолютну похибку:

а) $x = 0{,}3941$; $\Delta_x = 0{,}25 \cdot 10^{-2}$;
б) $x = 0{,}1132$; $\Delta_x = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$;
в) $x = 38{,}2543$; $\Delta_x = 0{,}27 \cdot 10^{-2}$;
г) $x = 293{,}481$; $\Delta_x = 0{,}1$;
ґ) $x = 2{,}325$; $\Delta_x = 0{,}1 \cdot 10^{-1}$;
д) $x = 14{,}00231$; $\Delta_x = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$;

е) $x = 0{,}0842$; $\Delta_x = 0{,}15 \cdot 10^{-2}$;
є) $x = 0{,}00381$; $\Delta_x = 0{,}1 \cdot 10^{-4}$;
ж) $x = -32{,}285$; $\Delta_x = 0{,}2 \cdot 10^{-2}$;
з) $x = -0{,}2113$; $\Delta_x = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$.

5. Встановити кількість правильних знаків числа a, якщо відомо його відносну похибку:

а) $a = 1{,}8921$; $\delta_a = 0{,}1 \cdot 10^{-2}$; б) $a = 0{,}2218$; $\delta_a = 0{,}2 \cdot 10^{-1}$;
в) $a = 22{,}351$; $\delta_a = 0{,}1$; г) $a = 0{,}02425$; $\delta_a = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$;
ґ) $a = 0{,}000135$; $\delta_a = 0{,}15$; д) $a = 9{,}3598$; $\delta_a = 0{,}1$ %;
е) $a = 0{,}11452$; $\delta_a = 10$ %; є) $a = 48361$; $\delta_a = 1$ %;
ж) $a = 592{,}8$; $\delta_a = 2$ %; з) $a = 14{,}9360$; $\delta_a = 1$ %.

Відповіді

1. а) $a = 2{,}15$; $\Delta = 0{,}14 \cdot 10^{-2}$; $\delta = 0{,}65 \cdot 10^{-3}$;
б) $a = 0{,}162$; $\Delta = 0{,}48 \cdot 10^{-3}$; $\delta = 0{,}3 \cdot 10^{-2}$;
в) $a = 0{,}0120$; $\Delta = 0{,}4 \cdot 10^{-4}$; $\delta = 0{,}33 \cdot 10^{-2}$;
г) $a = 1{,}23$; $\Delta = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$; $\delta = 0{,}41 \cdot 10^{-2}$;
ґ) $a = -0{,}00153$; $\Delta = 0{,}19 \cdot 10^{-5}$; $\delta = 0{,}12 \cdot 10^{-2}$;
д) $a = -393$; $\Delta = 0{,}15$; $\delta = 0{,}38 \cdot 10^{-3}$;
е) $a = 0{,}155$; $\Delta = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$; $\delta = 0{,}32 \cdot 10^{-2}$;
є) $a = 0{,}00392$; $\Delta = 0{,}2 \cdot 10^{-5}$; $\delta = 0{,}51 \cdot 10^{-3}$;
ж) $a = 626$; $\Delta = 0{,}45$; $\delta = 0{,}72 \cdot 10^{-3}$;
з) $a = 94{,}5$; $\Delta = 0{,}25 \cdot 10^{-1}$; $\delta = 0{,}26 \cdot 10^{-3}$.

2. а) $\Delta = 0{,}13 \cdot 10^{2}$; б) $\Delta = 0{,}16 \cdot 10^{-1}$; в) $\Delta = 0{,}36$;
г) $\Delta = 0{,}9 \cdot 10^{-1}$; ґ) $\Delta = 0{,}23 \cdot 10$.

3. $\delta_{a_1} = 0{,}13 \cdot 10^{-4}$; $\delta_{a_2} = 0{,}62 \cdot 10^{-5}$; $\delta_{a_3} = 0{,}28 \cdot 10^{-3}$;
$\delta_a = 0{,}37 \cdot 10^{-5}$.

4. а) 2; б) 3; в) 4; г) 3; ґ) 2; д) 5; е) 1; є) 2; ж) 4; з) 2.

5. а) 3; б) 2; в) 1; г) 2; ґ) 1; д) 3; е) 1; є) 2; ж) 1; з) 2.

1.2. Додавання та віднімання наближених чисел

Абсолютна похибка алгебраїчної суми декількох наближених чисел дорівнює сумі абсолютних похибок доданків, якщо

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

то

$$\Delta_S = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_1} + \ldots + \Delta_{a_n}. \qquad (1.3)$$

При великій кількості доданків оцінка абсолютної похибки суми за формулою (1.3) виявляється дуже завищеною, оскільки відбувається часткова компенсація похибок різних знаків. Якщо усі доданки заокруглено до m-го десяткового розряду, тобто їх похибки оцінюються величиною $0{,}5 \cdot 10^{-m}$, то *статистичну оцінку* абсолютної похибки суми можна визначити за правилом *Чеботарьова*:

$$\Delta_S = \sqrt{3n} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-m}, \tag{1.4}$$

де n – число доданків (це правило застосовують при $n > 10$).

Якщо серед доданків міститься одне число, абсолютна похибка якого значно перевищує абсолютні похибки останніх доданків, то абсолютна похибка суми приймається рівною цій найбільшій похибці. При цьому в сумі доцільно зберігати стільки десяткових знаків, скільки їх містить доданок з найбільшою абсолютною похибкою.

Покажемо на прикладі, як проводиться додавання наближених чисел та оцінка похибки.

Приклад 1.5. Знайти суму наближених чисел $0{,}237; 0{,}1934; 236{,}4; 247{,}2; 12{,}65; 7{,}38; 0{,}0648; 0{,}0218; 0{,}000251$, враховуючи, що в них усі знаки правильні, тобто, що абсолютна похибка кожного доданка не перевищує половини одиниці меншого відкинутого розряду.

Розв'язання. Найбільшу абсолютну похибку $\Delta = 0{,}05$ мають два числа: $236{,}4$ та $247{,}2$, тому можна вважати, що абсолютна похибка суми становить $2\Delta = 0{,}10$. Оскільки кількість доданків невелика, то в розрахунках зберігаємо тільки один запасний знак, тобто заокруглюємо доданки до $0{,}01$:

$$S = 0{,}24 + 0{,}19 + 236{,}4 + 247{,}2 + 12{,}65 + 7{,}38 + 0{,}06 +$$
$$+0{,}02 + 0{,}00 = 504{,}14.$$

В остаточному результаті запасний знак відкидаємо:

$$S = 504{,}1.$$

При цьому до вказаної вище абсолютної похибки $0{,}10$ додаємо похибку заокруглення $0{,}05$, що дає:

$$\Delta_S = 0{,}15 \text{ або } \Delta_S = 0{,}2.$$

Зауважимо, що в цьому прикладі повне врахування усіх похибок доданків за формулою (1.3) тільки ускладнило б розрахунок, суттєво не уточнивши кінцевий результат.

Відносна похибка δ_S суми декількох чисел одного й того ж знака міститься між найменшою і найбільшою з відносних похибок доданків:

$$\min \delta_{a_k} \leq \delta_S \leq \max \delta_{a_k} \ (a_k > 0, k = \overline{1,n}). \qquad (1.5)$$

Приклад 1.6. Оцінити відносну похибку суми чисел з прикладу 1.5 та порівняти їх з відносними похибками доданків.

Розв'язання. Відносна похибка суми S становить:

$$\Delta_S = \frac{0{,}10}{504{,}14} \cdot 100\% = 0{,}020\,\%.$$

Відносні похибки доданків відповідно становлять:

$$\frac{0{,}5}{234} \cdot 100\,\% = 0{,}21\,\%; \ \frac{0{,}5}{1934} \cdot 100\,\% = 0{,}026\,\%;$$

$$\frac{0{,}5}{2364} \cdot 100\,\% = 0{,}021\,\%;$$

$$\frac{0{,}5}{2472} \cdot 100\,\% = 0{,}020\,\%; \ \frac{0{,}5}{1265} \cdot 100\,\% = 0{,}040\,\%;$$

$$\frac{0{,}5}{738} \cdot 100\,\% = 0{,}068\,\%; \ \frac{0{,}5}{648} \cdot 100\,\% = 0{,}077\,\%;$$

$$\frac{0{,}5}{218} \cdot 100\,\% = 0{,}23\,\%; \ \frac{0{,}5}{251} \cdot 100\,\% = 0{,}20\,\%.$$

Найбільший внесок у суму дають доданки 236,4 та 247,2 з відносними похибками 0,021 і 0,020 %. Тому відносна похибка міститься між 0,020 та 0,021 %.

Відносна похибка різниці двох додатних чисел більша відносних похибок цих чисел, особливо якщо ці числа «близькі» між собою (тобто якщо їх різниця значно менша порівняно із самими числами). Це призводить до *втрати точності* при відніманні таких чисел, що необхідно враховувати при виборі розрахункових схем.

Приклад 1.7. Дано числа $a = 2{,}126$ і $b = 2{,}053$ з абсолютними похибками $\Delta_a = \Delta_b = 0{,}012$. Оцінити похибку їх різниці: $c = a - b$.

Розв'язання. $c = 0{,}073$; $\Delta_c = \Delta_a + \Delta_b = 0{,}024$;

$$\delta_c = (24/73) \cdot 100\,\% = 33\,\%.$$

Таким чином, у кінцевому результаті немає жодного правильного знака, хоча самі числа мають відносну похибку:

$$\delta_a \cong \delta_b \cong 0{,}6\,\%.$$

Приклад 1.8. Обчислити $1 - \cos 1°$ за допомогою чотиризначних математичних таблиць та оцінити похибку результату.

Розв'язання. Одержуємо (значення $\cos 1°$ взято з таблиць):

$$a = \cos 1^\circ = 0{,}9998, \ \ \Delta_a = 0{,}00005,$$

$$b = 1 - \cos 1^\circ = 0{,}0002, \ \ \Delta_b = 0{,}00005.$$

Тоді відносна похибка становить: $\delta_b = (0{,}5/2) \cdot 100\,\% = 25\,\%$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти суми наближених чисел та вказати їх похибки:

а) $0{,}145 + 321 + 78{,}2$ (усі знаки правильні);

б) $0{,}301 + 193{,}1 + 11{,}58$ (усі знаки правильні);

в) $398{,}5 - 72{,}28 + 0{,}34567$ (усі знаки правильні);

г) $x_1 + x_2 - x_3$, де $x_1 = 197{,}6$; $\Delta_{x_1} = 0{,}2$;
$x_2 = 23{,}44$; $\Delta_{x_2} = 0{,}22$; $x_3 = 201{,}55$; $\Delta_{x_3} = 0{,}17$.

Відповіді

1. а) 399; $\Delta = 0{,}9$; $\delta = 0{,}23\,\%$;

б) $205{,}0$; $\Delta = 0{,}07$; $\delta = 0{,}034\,\%$;

в) $326{,}6$; $\Delta = 0{,}09$; $\delta = 0{,}028\,\%$;

г) $19{,}5$; $\Delta = 0{,}6$; $\delta = 3\,\%$.

1.3. Множення та ділення наближених чисел

При множенні й діленні наближених чисел додаються їх відносні похибки (а не абсолютні); ***відносна похибка виразу***

$$r = a_1 a_2 \dots a_m / b_1 b_2 \dots b_n, \tag{1.6}$$

оцінюється величиною

$$\delta_r = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \dots + \delta_{a_m} + \delta_{b_1} + \delta_{b_2} + \dots + \delta_{b_n}. \tag{1.7}$$

У випадку великого числа $m + n$ краще використовувати ***статистичну оцінку***, яка частково компенсує похибки різних знаків: якщо усі числа a_i $(i = \overline{1,m})$; b_j $(j = \overline{1,n})$ мають приблизно однакову відносну похибку δ, то відносна похибка виразу (1.6) вважається рівною:

$$\delta_r = \sqrt{3(n+m)} \cdot \delta \quad (n + m > 10). \tag{1.8}$$

Якщо в одного з чисел a_i, b_j відносна похибка значно перевищує відносні похибки останніх чисел, то відносну похибку виразу (1.6) приймають рівною цій найбільшій похибці. При цьому в кінцевому результаті доцільно зберігати стільки знаків (значущих цифр), скільки їх містить число з найбільшою відносною похибкою.

Абсолютна похибка виразу (1.6) ***обчислюється за його відносною похибкою***:

$$\Delta_r = |r|\delta_r.$$

Покажемо на прикладі, як проводиться множення й ділення наближених чисел та оцінюється похибка результату.

Приклад 1.9. Обчислити вираз

$$r = \frac{1{,}3 \cdot 457{,}6 \cdot 0{,}0582}{6{,}7347 \cdot 41{,}67},$$

вважаючи, що усі числа подано з правильними знаками, тобто їх абсолютні похибки не перевищують половини одиниці найменшого відкинутого розряду.

Розв'язання. Найбільшу відносну похибку має число $a = 1{,}3$, яке містить усього два правильних знаки:

$$\delta_r = \frac{0{,}05}{1{,}3} \cdot 100\ \% = 3{,}9\ \%.$$

Тому відносна похибка кінцевого результату становить $\delta_r = 3{,}9\ \%$, тобто результат має містити не більше двох правильних знаків. Оскільки кількість чисел виразу невелика, то для розрахунку в кожному числі виразу зберігаємо один запасний знак, заокруглюючи їх до трьох знаків:

$$r = \frac{1{,}3 \cdot 458 \cdot 0{,}0582}{6{,}73 \cdot 41{,}7} = 0{,}123.$$

Абсолютну похибку результату обчислюємо за його відносною похибкою та знайденим значенням виразу:

$$\Delta_r = r \cdot \delta_r = 0{,}123 \cdot 0{,}039 = 0{,}0048.$$

Заокруглюючи знайдене числове значення виразу до правильних знаків та відкидаючи запасний знак, одержуємо:

$$r = 0{,}12$$

з абсолютною похибкою $\Delta_r < 0{,}005$.

Зауваження. Якщо видозмінити формулу для обчислення b з прикладу 1.8 таким чином:

$$b = 1 - \cos 1^\circ = 2\sin^2 0^\circ 30',$$

то послідовно одержимо:

$$c = \sin 0^\circ 30' = 0{,}0087;\ \Delta_c = 0{,}00005;\ \delta_c = \frac{0{,}5}{87} \cdot 100\ \% = 0{,}58\ \%;$$

$b = 2c^2 = 0{,}000151$. Згідно (1.7): $\delta_b = \delta_{c^2} = 2\delta_c = 1{,}16$ %.

Тому

$$\Delta_b = b \cdot \delta_b = 0{,}000151 \cdot 0{,}0116 = 0{,}0000018.$$

Таким чином, наведена видозміна дозволила обчислити шукане число b з двома правильними знаками та зменшити його відносну похибку більше, ніж у 20 разів.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти добутки наближених чисел та вказати їх похибки (вважати у вхідних даних усі знаки правильними):

а) $3{,}49 \cdot 8{,}6$; б) $25{,}1 \cdot 1{,}743$; в) $0{,}02 \cdot 16{,}5$;

г) $0{,}253 \cdot 654 \cdot 83{,}6$; ґ) $1{,}78 \cdot 9{,}1 \cdot 1{,}183$;

д) $482{,}56 \cdot 7256 \cdot 0{,}0052$.

2. Знайти частки наближених чисел:

а) $5{,}684 : 5{,}032$; б) $0{,}144 : 1{,}2$; в) $216 : 4$; г) $726{,}676 : 829$;

ґ) $754{,}9367 : 36{,}5$; д) $7{,}3 : 4491$.

3. Відомо довжини сторін прямокутника: $(4{,}02 \pm 0{,}01)$ м, $(4{,}96 \pm 0{,}01)$ м. Знайти площу прямокутника.

4. Відомо катети прямокутного трикутника: $(12{,}10 \pm 0{,}01)$ см, $(25{,}21 \pm 0{,}01)$ см. Обчислити тангенс кута, протилежного першому катету.

5. При вимірюванні радіуса R круга з точністю до 0,5 см одержали число 12 см. Знайти абсолютну й відносну похибки при обчисленні площі круга.

6. Ребро куба, виміряно з точністю до 0,02 см, виявилося рівним 8 см. Знайти абсолютну й відносну похибки при обчисленні об'єму куба.

7. Висота h і радіус основи R циліндра виміряно з точністю до 0,5 %. Яка гранична відносна похибка при обчисленні об'єму циліндра?

Відповіді

1. а) 30; $\delta = 0{,}72$ %; $\Delta = 0{,}2$;

б) $43{,}7$; $\delta = 0{,}23$ %; $\Delta = 0{,}1$;

в) $0{,}3$; $\delta = 28$ %; $\Delta = 0{,}1$;

г) $138 \cdot 10^2$; $\delta = 0{,}34$ %; $\Delta = 0{,}48 \cdot 10^2$;

ґ) 19; $\delta = 0{,}87$ %; $\Delta = 0{,}22$;

д) $18 \cdot 10^3$; $\delta = 0{,}96$ %; $\Delta = 0{,}18 \cdot 10^3$.

2. а) 1,130; $\delta = 0{,}019$ %; $\Delta = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$;
   б) 0,12; $\delta = 4{,}6$ %; $\Delta = 0{,}55 \cdot 10^{-2}$;
   в) 54; $\delta = 13$ %; $\Delta = 7$;
   г) 0,877; $\delta = 0{,}06$ %; $\Delta = 0{,}53 \cdot 10^{-3}$;
   ґ) 20,7; $\delta = 0{,}14$ %; $\Delta = 0{,}29 \cdot 10^{-1}$;
   д) 0,0016; $\delta = 0{,}7$ %; $\Delta = 0{,}11 \cdot 10^{-4}$.
3. 19,9 м^2 з абсолютною похибкою 0,1 м^2.
4. 0,4800 з абсолютною похибкою 0,00044.
5. $\Delta = 12\pi$ см$^2 \cong 38$ см^2; $\delta = 8{,}3$ %.
6. $\Delta = 3{,}84$ см^3; $\delta = 0{,}75$ %.
7. $\delta = 1{,}5$ %.

1.4. Похибки обчислення значень функції

1.4.1. Функції однієї змінної

Абсолютна похибка диференційованої функції $y = f(x)$, зумовлена достатньо малою похибкою аргумента Δ_x, оцінюється величиною:

$$\Delta_y = |f'(x)|\Delta_x. \tag{1.9}$$

Якщо значення функції $f(x)$ додатні, то для *відносної похибки* має місце оцінка

$$\delta_y = (|f'(x)|/f(x))\Delta_x = |[\ln f(x)]'|\Delta_x\,. \tag{1.10}$$

Зокрема, для основних елементарних функцій одержуємо такі правила.

1) ***Степенева функція*** $y = x^a$. *Абсолютна похибка*:

$$\Delta_y = ax^{a-1}\Delta_x. \tag{1.11}$$

Відносна похибка:

$$\delta_y = |a|\delta_x. \tag{1.12}$$

Зокрема, відносна похибка x^2 удвічі більша відносної похибки x, відносна похибка $\sqrt{x}$ удвічі менша відносної похибки x, відносна похибка $1/x$ дорівнює відносній похибці x.

2) ***Показникова функція*** $y = a^x (a > 0 \text{ і } a \neq 1)$. *Абсолютна похибка*:

$$\Delta_y = a^x \ln a \cdot \Delta_x. \tag{1.13}$$

Відносна похибка:

$$\delta_y = \Delta_x |\ln a|. \tag{1.14}$$

Тобто відносна похибка показникової функції пропорційна абсолютній похибці аргумента.

Для функції $y = e^x$:

$$\delta_y = \Delta_x. \tag{1.15}$$

3) ***Логарифмічна функція.*** Для $y = \ln x$ *абсолютна похибка*:

$$\Delta_y = \frac{1}{x} \cdot \Delta_x = \delta_x. \tag{1.16}$$

Для $y = \log_a x$ ($a > 0$ і $a \neq 1$):

$$\Delta_y = \frac{1}{|\ln a|} \delta_x; \tag{1.17}$$

для $y = \lg x$:

$$\Delta_y \cong 0{,}4343\delta_x. \tag{1.18}$$

З виразу (1.18) випливає, що при розрахунках з числами, які мають m правильних знаків, потрібно користуватися $(m+1)$-значними таблицями логарифмів.

4) ***Тригонометричні функції.*** *Абсолютні похибки синуса й косинуса* не перевищують абсолютних похибок аргумента:

$$\Delta_{\sin x} = |\cos x|\Delta_x \leq \Delta_x; \ \Delta_{\cos x} = |\sin x|\, \Delta_x \leq \Delta_x. \tag{1.19}$$

Абсолютна похибка тангенса й котангенса завжди більша абсолютної похибки аргумента:

$$\Delta_{\mathrm{tg}\, x} = (1 + \mathrm{tg}^2 x)\Delta_x \geq \Delta_x; \ \Delta_{\mathrm{ctg}\, x} = (1 + \mathrm{ctg}^2 x)\, \Delta_x \geq \Delta_x. \tag{1.20}$$

Приклад 1.10. Діаметр круга $d = 0{,}543$ м виміряно з точністю до 1 мм. Обчислити площу круга.

Розв'язання. Площа круга – $S = \pi d^2/4$. Оскільки для розрахунку число π можна взяти з будь-якою точністю, то похибка обчислення площі визначається похибкою обчислення d^2. Відносна похибка d^2 становить:

$$\delta_{d^2} = 2\delta_d = 2 \cdot \frac{1}{543} \cdot 100\% = 0{,}37\ \%.$$

Щоб при заокруглюванні числа π не збільшити відносну похибку $\delta_S = \delta(\pi/4) + 2\delta_d$, потрібно взяти число π хоча б з чотирма правильними знаками. Одержуємо:

$$S = \frac{3{,}1416}{4} \cdot 0{,}543^2\ \text{м}^2 = 0{,}2316\ \text{м}^2.$$

Абсолютна похибка результату становить:

$$\Delta_S = S \cdot \delta_S = 0{,}232 \cdot 0{,}0037 = 0{,}0009.$$

Заокруглюючи результат до трьох знаків та відкинувши запасний знак остаточно одержимо:

$$S = 0{,}232\ \text{м}^2,\ \ \Delta_S = 0{,}001.$$

Приклад 1.11. Кут $x = 24°20'$ виміряно з точністю до $1'$. Визначити $\cos x$ і його абсолютну похибку.

Розв'язання. Обчислимо спочатку абсолютну похибку $\cos x$ за формулою (1.19) перевівши $1'$ в радіани ($1'$ відповідає $0{,}000291$ рад.):

$$\Delta_{\cos x} = |\sin x| \cdot \Delta_x = \sin 24^{\circ}20' \cdot 0{,}000291 = 0{,}00012.$$

Тому для обчислення $\cos x$ можна взяти чотиризначні математичні таблиці, що дасть:

$$\cos x = \cos 24^{\circ}\,20' = 0{,}9112.$$

1.4.2. Функції багатьох змінних

Абсолютна похибка диференційованої функції $y = f\,(x_1;\ x_2; \ldots;\ x_n)$, викликана достатньо малими похибками $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \ldots, \Delta_{x_n}$ аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$, оцінюється величиною

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} |\partial f / \partial x_i| \Delta_{x_i}\,. \tag{1.21}$$

Якщо значення функції додатні, то для *відносної похибки* має місце оцінка

$$\delta_y = \sum_{i=1}^{n} (1/f) |\partial f / \partial x_i| \Delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |\partial \ln f / \partial x_i| \Delta_{x_i}. \tag{1.22}$$

Приклад 1.12. Обчислити значення функції $u = x^3 y^2 z$, якщо

$$x = 11{,}1;\ y = 3{,}77;\ z = 13{,}072,$$

причому

$$\Delta_x = 0{,}4; \Delta_y = 0{,}13; \Delta_z = 0{,}027.$$

Розв'язання. Знаходимо відносні похибки аргументів:

$$\delta_x = \frac{4}{111} \cdot 100\,\% = 0{,}36\,\%;\ \delta_y = \frac{13}{377} \cdot 100\,\% = 3{,}45\,\%;$$

$$\delta_z = \frac{27}{13072} \cdot 100\,\% = 0{,}21\,\%.$$

Відносна похибка функції:

$$\delta_u = 3\delta_x + 2\delta_y + \delta_z = 7{,}83\,\%.$$

Тому значення функції достатньо обчислювати не більше, ніж з двома-трьома знаками:

$$u = 254 \cdot 10^3$$

(не можна записати 254000, оскільки це мало б інший смисл). Абсолютна похибка при цьому становить:

$$\Delta_u = u\delta_u = 254 \cdot 10^3 \cdot 0{,}0783 = 19{,}9 \cdot 10^3.$$

Доцільно заокруглити результат до двох знаків:

$$u = 2{,}5 \cdot 10^5;\ \Delta_u = 0{,}2 \cdot 10^5.$$

Приклад 1.13. Обчислити значення $z = \ln\left(11{,}2 + \sqrt{3{,}9}\right)$, вважаючи правильними усі знаки наближених чисел $x = 11{,}2$ і $y = 3{,}9$.

Розв'язання. Число y має відносну похибку $\delta_y = (0{,}5/39) \cdot 100\,\% = 1{,}3\,\%$, тому $\sqrt{y}$ має відносну похибку 0,7 % і його необхідно записати з трьома знаками:

$$\sqrt{y} = \sqrt{3{,}9} = 1{,}97,$$

при цьому абсолютна похибка цього кореня становить:

$$\Delta_{\sqrt{y}} = 1{,}97 \cdot 0{,}007 = 0{,}014\,.$$

Абсолютна похибка суми $x + \sqrt{y} = 11{,}2 + 1{,}97 = 13{,}2$ оцінюється величиною $0{,}05 + 0{,}014 = 0{,}064$, і її відносна похибка становить: $(0{,}64/132) \cdot 100\,\% = 0{,}5\,\%$.

За формулою (1.16) такою ж буде абсолютна похибка натурального логарифма, тобто $\Delta_z = 0{,}005$. Тому

$$z = \ln(11{,}2 + 1{,}97) = \ln 13{,}17 = 2{,}577.$$

Кінцевий результат має три правильні знаки; заокруглення до правильних знаків проводити недоцільно, оскільки при цьому значення Δ_z потрібно подавати з урахуванням похибки заокруглення: $z = 2{,}58$; $\Delta_z = 0{,}008$.

Завдання для самостійної роботи

1. Кути x виміряно з граничною абсолютною похибкою Δ_x. Визначити абсолютну та відносну похибки функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$ і $y = \operatorname{tg} x$. Знайти за таблицями значення функцій, зберігши в результаті лише правильні цифри.

а) $x = 11^\circ 20'$; $\Delta_x = 1'$; б) $x = 48^\circ 42' 31''$; $\Delta_x = 5''$;

в) $x = 45^\circ$; $\Delta_x = 1'$; г) $x = 50^\circ 10'$; $\Delta_x = 0{,}05^\circ$;

ґ) $x = 0{,}45$; $\Delta_x = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$; д) $x = 1{,}115$; $\Delta_x = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$.

2. Обчислити значення функцій за вказаних значень x, вказати абсолютну та відносну похибки результатів:

а) $y = x^3 \sin x$ при $x = \sqrt{2}$, замінивши $\sqrt{2} \cong 1{,}414$;

б) $y = x \ln x$ при $x = \pi$, замінивши $\pi \cong 3{,}142$;

в) $y = e^x \cos x$ при $x = \sqrt{3}$, замінивши $\sqrt{3} \cong 1{,}732$.

3. Обчислити значення функцій за вказаними значеннями аргументів. Вказати абсолютну та відносну похибки результатів, вважаючи усі знаки даних правильними.

а) $u = \ln(x_1 + x_2^2)$; $x_1 = 0{,}97$; $x_2 = 1{,}132$;

б) $u = \dfrac{x_1 + x_2^2}{x_3}$; $x_1 = 3{,}28$; $x_2 = 0{,}932$; $x_3 = 1{,}132$;

в) $u = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$; $x_1 = 2{,}104$; $x_2 = 1{,}935$; $x_3 = 0{,}845$.

4. Визначити відносну похибку при обчисленні повної поверхні зрізаного конуса, якщо радіуси його основ R і r та твірну l виміряно з точністю до 0,01 см: $R = 23{,}64$ см; $r = 17{,}31$ см; $l = 10{,}21$ см.

Відповіді

1. $y = \sin x$:

а) $\Delta_y = 0{,}28 \cdot 10^{-3}$; $\delta_y = 0{,}13 \cdot 10^{-2}$; $\sin x = 0{,}196$;

б) $\Delta_y = 0{,}16 \cdot 10^{-4}$; $\delta_y = 0.21 \cdot 10^{-4}$; $\sin x = 0{,}7513$;

в) $\Delta_y = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$; $\delta_y = 0{,}29 \cdot 10^{-3}$; $\sin x = 0{,}707$;

г) $\Delta_y = 0{,}56 \cdot 10^{-3}$; $\delta_y = 0{,}72 \cdot 10^{-3}$; $\sin x = 0{,}768$;

ґ) $\Delta_y = 0{,}45 \cdot 10^{-2}$; $\delta_y = 0{,}9 \cdot 10^{-2}$; $\sin x = 0{,}43$;

д) $\Delta_y = 0{,}44 \cdot 10^{-4}$; $\delta_y = 0{,}22 \cdot 10^{-4}$; $\sin x = 0{,}8979$.

$y = \cos x$:

а) $\Delta_y = 0{,}57 \cdot 10^{-4}$; $\delta_y = 0{,}11 \cdot 10^{-4}$; $\cos x = 0{,}9805$;

б) $\Delta_y = 0{,}18 \cdot 10^{-4}$; $\delta_y = 0{,}2 \cdot 10^{-4}$; $\cos x = 0{,}6600$;

в) $\Delta_y = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$; $\delta_y = 0{,}29 \cdot 10^{-3}$; $\cos x = 0{,}707$;

г) $\Delta_y = 0{,}67 \cdot 10^{-3}$; $\delta_y = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$; $\cos x = 0{,}64$;

ґ) $\Delta_y = 0{,}21 \cdot 10^{-2}$; $\delta_y = 0{,}1 \cdot 10^{-2}$; $\cos x = 0{,}90$;

д) $\Delta_y = 0{,}9 \cdot 10^{-4}$; $\delta_y = 0{,}18 \cdot 10^{-3}$; $\cos x = 0{,}4402$.

$y = \operatorname{tg} x$:

а) $\Delta_y = 0{,}3 \cdot 10^{-4}$; $\delta_y = 0{,}15 \cdot 10^{-2}$; $\operatorname{tg} x = 0{,}2004$;

б) $\Delta_y = 0{,}55 \cdot 10^{-4}$; $\delta_y = 0{,}48 \cdot 10^{-4}$; $\operatorname{tg} x = 1{,}1383$;

в) $\Delta_y = 0{,}58 \cdot 10^{-3}$; $\delta_y = 0{,}12 \cdot 10^{-2}$; $\operatorname{tg} x = 1{,}0$;
г) $\Delta_y = 0{,}21 \cdot 10^{-2}$; $\delta_y = 0{,}43 \cdot 10^{-2}$; $\operatorname{tg} x = 1{,}20$;
ґ) $\Delta_y = 0{,}62 \cdot 10^{-2}$; $\delta_y = 0{,}16 \cdot 10^{-1}$; $\operatorname{tg} x = 0{,}48$;
д) $\Delta_y = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$; $\delta_y = 0{,}12 \cdot 10^{-2}$; $\operatorname{tg} x = 2{,}040$.

2. а) $y = 8{,}379$; $\Delta_y = 0{,}19 \cdot 10^{-2}$; $\delta_y = 0{,}23 \cdot 10^{-3}$;
б) $y = 3{,}598$; $\Delta_y = 0{,}11 \cdot 10^{-2}$; $\delta_y = 0{,}31 \cdot 10^{-3}$;
в) $y = 0{,}1046$; $\Delta_y = 0{,}37 \cdot 10^{-3}$; $\delta_y = 0{,}36 \cdot 10^{-3}$.

3. а) $u = 0{,}81$; $\Delta_u = 0{,}27 \cdot 10^{-2}$; $\delta_u = 0{,}33 \cdot 10^{-2}$;
б) $u = 3{,}66$; $\Delta_u = 0{,}1 \cdot 10^{-2}$; $\delta_u = 0{,}27 \cdot 10^{-2}$;
в) $u = 7{,}48$; $\Delta_u = 0{,}49 \cdot 10^{-2}$; $\delta_u = 0{,}64 \cdot 10^{-3}$.

4. $\delta = 0{,}12 \cdot 10^{-2}$ (0,12 %).

1.5. Визначення допустимої похибки аргументів за допустимою похибкою функції

Така задача має однозначний розв'язок тільки для функції однієї змінної $y = f(x)$, якщо функція диференційована і $f'(x) \neq 0$, то

$$\Delta_x = \frac{1}{|f'(x)|}\Delta_y. \qquad (1.23)$$

Для функції багатьох змінних $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задача розв'язується за умови введення певних додаткових обмежень. Наприклад, якщо значення одного з аргументів значно складніше виміряти або обчислити з більшою точністю, ніж значення останніх аргументів, то похибку цього аргументу потрібно узгоджувати з указаною похибкою функції.

Якщо значення усіх аргументів можна з однаковою «легкістю» визначити з довільною точністю, то, як правило, застосовують *принцип рівних впливів*, вважаючи, що у формулі (1.21) усі доданки $|\partial f/\partial x_i|\Delta_{x_i}$ рівні між собою; що дає формулу:

$$\Delta_{x_i} = \frac{\Delta_y}{n|\partial f/\partial x_i|} \quad (i = \overline{1,n}). \qquad (1.24)$$

На практиці ж часто трапляються завдання проміжного типу між указаними крайніми випадками. Нижче розглянемо відповідні приклади.

Приклад 1.14. З якою точністю необхідно виміряти x – кут першої чверті для одержання значення $\sin x$ з п'ятьма правильними знаками?

Розв'язання. Якщо відомо, що кут $x > 6^\circ$, так що $\sin x > 0{,}1$, то потрібно визначити Δ_x так, щоб виконувалася нерівність $\Delta_{\sin x} < 0{,}5 \cdot 10^{-5}$. Для цього, відповідно до формули (1.19), достатньо взяти $\Delta_x < 0{,}5 \cdot 10^{-5}$, тобто виміряти кут x з точністю до $1''$. Якщо відомо, що кут $x > 60^\circ$ і, отже, $\cos x < 0{,}5$, то варто скористатися формулою (1.23), звідки

$$\Delta_x = \frac{1}{\cos x}\Delta_{\sin x} > 2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-5} = 10^{-5},$$

тобто достатньо виміряти кут x з точністю всього до $2''$.

Якщо ж кут $x < 6^\circ$, наприклад, $1^\circ < x < 6^\circ$, то $0{,}01 < \sin x < 0{,}1$ і для забезпечення п'яти правильних знаків у значенні $\sin x$, доведеться задовольняти нерівність $\Delta_{\sin x} < 0{,}5 \cdot 10^{-6}$, для цього кут x доведеться вимірювати з точністю до $0{,}1''$.

Приклад 1.15. З якою точністю необхідно визначити радіус основи R і висоту H циліндричної банки, щоб її ємність можна було визначити з точністю до 1 %?

Розв'язання. У формулі $V = \pi R^2 H$ число π можна взяти з довільним числом правильних знаків, так що його похибка не вплине на результат, і тому можна вважати $\delta_V = 2\delta_R + \delta_H$. Якщо можна забезпечити будь-яку точність визначення R і H, то за *принципом рівних впливів* на долю $2\delta_R$ і δ_H припадає по 0,5 %.

Таким чином, згідно з *принципом рівних впливів*, потрібно визначити радіус з відносною похибкою 0,25 %, а висоту – з відносною похибкою 0,5 %. На практиці найчастіше трапляються такі випадки, коли, навпаки, радіус банки визначається з меншою точністю порівняно з висотою. Наприклад, якщо радіус визначається з точністю вдвоє меншою, ніж висота, то, поклавши $\delta_R = 2\delta_H$ і з умови

$$2\delta_R + \delta_H = 5\delta_H = 1\ \%$$

знаходимо

$$\delta_H = 0{,}2\ \%, \delta_R = 0{,}4\ \%.$$

Що стосується числа π, то в усіх розглянутих випадках потрібно брати його з відносною похибкою порядку 0,01 %, щоб її можна було не враховувати в остаточному результаті. Це означає, що можна підставити $\pi = 3{,}142$ з відносною похибкою $(0{,}4/3142) \cdot 100\ \% = 0{,}013\ \%$, але не варто заміняти $\pi = 3{,}14$ з відносною похибкою $(0{,}16/314) \cdot 100\ \% = 0{,}051\ \%$.

Приклад 1.16. Знайти допустиму абсолютну похибку наближених величин $x = 15,2$; $y = 57°$, для яких можливо знайти значення функції $u = 6x^2(\lg x - \sin 2y)$ з точністю до двох десяткових знаків після коми.

Розв'язання. Знаходимо:

$$u = 6x^2(\lg x - \sin 2y)\Big|_{\substack{x=15,2 \\ y=57°}} =$$

$$= 6(15,2)^2\left(\lg 15,2 - \sin 114^{\circ}\right) = 371,9;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (12x(\lg x - \sin 2y) + 6x \cdot \lg e)\Big|_{\substack{x=15,2 \\ y=57°}} = 88,54;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (-12x^2 \cos 2y)\Big|_{\substack{x=15,2 \\ y=57°}} = 1127,7.$$

За умовою $\Delta_u = 0,005$. Тоді, згідно з *принципом рівних впливів*, за формулою (1.24) знаходимо:

$$\Delta_x = \frac{\Delta_u}{2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|} = \frac{0,005}{2 \cdot 88,54} = 0,28 \cdot 10^{-4},$$

$$\Delta_y = \Delta_u/2|\partial u/\partial y| = 0,005/(2 \cdot 1127,7) = 0,22 \cdot 10^{-5} \text{ або } 0'', 45.$$

Завдання для самостійної роботи

1. З якою точністю необхідно взяти наближені числа x, щоб значення $\sin x$ можна було знайти з вказаним числом m правильних знаків?

а) $x = 1^{\circ}$; $m = 3$; б) $x = 25^{\circ}$; $m = 4$;

в) $x = 30,75^{\circ}$; $m = 3$; г) $x = 1,05$; $m = 2$;

ґ) $x = 0,075$; $m = 2$.

2. Встановити, з якою точністю визначено кути x за значеннями $\sin x$, взятими з п'ятизначної математичної таблиці:

а) $x = 2^{\circ}\, 1'$; б) $x = 15°30'$; в) $x = 44°$; г) $x = 50°18'$;

ґ) $x = 65°23'$; д) $x = 87°$.

3. Встановити, з якою точністю можна визначити число x, скориставшись логарифмом за допомогою п'ятизначної математичної таблиці, якщо воно міститься в указаних межах:

а) $300 < x < 400$; б) $35 < x < 40$; в) $1,5 < x < 1,7$;

г) $3,25 < x < 3,29$; ґ) $5000 < x < 6000$.

4. Встановити, з яким числом правильних знаків необхідно взяти значення аргументу x, щоб одержати значення вказаних функцій з точністю до $0{,}1 \cdot 10^{-5}$:

а) $y = x^3 \sin x$; $x = \sqrt{2}$; б) $y = x \ln x$; $x = \pi$;

в) $y = e^x \cos x$; $x = \sqrt{3}$.

5. Встановити, з яким числом правильних знаків необхідно взяти вільний член рівняння $x^2 - 2x + \lg 2 = 0$, щоб одержати корені з чотирма правильними знаками.

6. Знайти допустимі абсолютні похибки аргументів, які дозволяють обчислювати значення даних функцій з чотирма правильними знаками:

а) $u = \ln(x_1 + x_2^2)$; $x_1 = 0{,}9731$; $x_2 = 1{,}13214$;

б) $u = (x_1 + x_2^2)/x_3$; $x_1 = 3{,}2835$; $x_2 = 0{,}93221$;
$x_3 = 0{,}13214$;

в) $u = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$; $x_1 = 2{,}10415$; $x_2 = 1{,}93521$;
$x_3 = 0{,}84542$.

7. Для визначення модуля Юнга за прогином стрижня прямокутного перерізу застосовується формула

$$E = \frac{1}{4}\frac{l^3P}{d^3bs},$$

де l – довжина стрижня; P – навантаження; b і d – основа й висота поперечного перерізу; s – стріла прогину.

З якою точністю необхідно виміряти довжину l і стрілу s, щоб похибка E не перевищила 5,5 % за умови, що P відоме з точністю до 0,1 %, величини b і d – з точністю до 1 %, $l \cong 50$ см, $s \cong 2{,}5$ см?

Відповіді

1. а) $20''$; б) $20''$; в) $4'$; г) $0{,}2 \cdot 10^{-1}$; ґ) $0{,}1 \cdot 10^{-2}$.

2. а) $0{,}50 \cdot 10^{-5}$; б) $0{,}52 \cdot 10^{-5}$; в) $0{,}68 \cdot 10^{-5}$;
г) $0{,}78 \cdot 10^{-5}$; ґ) $0{,}12 \cdot 10^{-4}$; д) $0{,}96 \cdot 10^{-4}$.

3. а) $0{,}5 \cdot 10^{-2}$; б) $0{,}5 \cdot 10^{-3}$; в) $0{,}2 \cdot 10^{-4}$; г) $0{,}4 \cdot 10^{-4}$;
ґ) $0{,}7 \cdot 10^{-1}$.

4. а) 6; б) 6; в) 5.

5. 4.

6. а) $\Delta_{x_1} = 0{,}56 \cdot 10^{-4}$; $\Delta_{x_2} = 0{,}25 \cdot 10^{-4}$;
б) $\Delta_{x_1} = 0{,}28 \cdot 10^{-4}$; $\Delta_{x_2} = 0{,}15 \cdot 10^{-4}$; $\Delta_{x_3} = 0{,}77 \cdot 10^{-5}$;
в) $\Delta_{x_1} = 0{,}90 \cdot 10^{-5}$; $\Delta_{x_2} = 0{,}85 \cdot 10^{-5}$; $\Delta_{x_3} = 0{,}62 \cdot 10^{-5}$.

7. $\delta_l = 0{,}2$ %; $\delta_s = 0{,}7$ %.

Розділ 2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Теоретичні відомості

2.1.1. Норми матриці

Нехай дано матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$\|A\|_{\mathrm{I}}=\max\limits_{i}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ – *перша* норма; $\|A\|_{\mathrm{II}}=\max\limits_{j}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$ – *друга* норма; $\|A\|_{\mathrm{III}}=\sqrt{\sum_{i,j}^{m}|a_{ij}|}$ – *третя* норма.

2.1.2. Формули Крамера

Нехай дано систему n рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\quad \dots\quad \dots\quad \dots\quad \dots \\ a_{1n}x_1+a_{n2}x_2+\ \dots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

Якщо визначник системи відмінний від нуля, то її розв'язок знаходиться за формулами:

$$x_1=\Delta_{x_1}/\Delta,\, x_2=\Delta_{x_2}/\Delta,\, x_3=\Delta_{x_3}/\Delta,\dots,x_n=\Delta_{x_n}/\Delta,$$

де $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$ – визначник системи;

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};\quad \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};\ \dots;$$

$$\Delta_{x_n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

– додаткові визначники для $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$.

2.1.3. Схема єдиного ділення (схема Гаусса) для розв'язування системи рівнянь

Розглянемо схему Гаусса на прикладі системи чотирьох рівнянь. Нехай необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35}, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45}. \end{cases}$$

Розв'язання проводять за допомогою таблиці:

Коефіцієнти при невідомих				Вільні члени	Контрольні суми
x_1	x_2	x_3	x_4		
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	c_1
a_{21}	a_{22}	a_{32}	a_{24}	a_{25}	c_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	c_3
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	c_4
1	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	β_1
	a'_{22}	a'_{23}	a'_{24}	a'_{25}	c'_2
	a'_{32}	a'_{33}	a'_{34}	a'_{35}	c'_3
	a'_{42}	a'_{43}	a'_{44}	a'_{45}	c'_4
	1	α_{23}	α_{24}	α_{25}	β_2
		a''_{33}	a''_{34}	a''_{35}	c''_3
		a''_{43}	a''_{44}	a''_{45}	c''_4
		1	α_{34}	α_{35}	β_3
			a'''_{44}	a'''_{45}	c'''_4
			1	α_{45}	β_4
			1	x_4	$\bar{x}_4$
		1		x_3	$\bar{x}_3$
	1			x_2	$\bar{x}_2$
1				x_1	$\bar{x}_1$

Формули для обчислень	Контрольні співвідношення
$c_i = \sum_{j=1}^{5} a_{ij} \quad (i = \overline{1,4})$	
$\alpha_{1j} = a_{ij}/a_{11} \ \left(i = \overline{2,5}\right)$; $\beta_1 = c_1/a_{11}$	$1 + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{15} = \beta_1$
$a'_{ij} = a_{ij} - a_{i1}\alpha_{1j}$ $\left(i = \overline{2,4};\ j = \overline{2,5}\right)$; $c'_i = c_i - a_{i1} \cdot \beta_1 \quad (i = \overline{2,4})$	$a'_{i2} + a'_{i3} + a'_{i4} + a'_{i5} = c'_i$ $(i = \overline{2,4})$
$\alpha_{2j} = a_{2j}/a_{22} \ \left(i = \overline{3,5}\right)$; $\beta_2 = c'_2/a'_{22}$	$1 + \alpha_{23} + \alpha_{24} + \alpha_{25} = \beta_2$
$a''_{ij} = a_{ij} - a_{i2}\alpha_{2j}$ $\left(i = 3,4;\ j = \overline{3,5}\right)$; $c''_i = c'_i - a'_{i2} \cdot \beta_2 \quad (i = 3,4)$	$a''_{i3} + a''_{i4} + a''_{i5} = c'_i$ $(i = 3,4)$
$\alpha_{4j} = a''_{3j}/a''_{33} \ (j = 4,5)$; $\beta_3 = c''_3/a''_{33}$	$1 + \alpha_{34} + \alpha_{35} = \beta_3$
$a'''_{4j} = a''_{4j} - a''_{43}\alpha_{3j} \ (j = 4,5)$; $c'''_4 = c''_4 - a''_{43}\beta_3$	$a'''_{44} + a'''_{45} = c'''_4$
$\alpha_{45} = a'''_{45}/a'''_{44}$; $\beta_4 = c'''_4/a'''_{44}$	$1 + \alpha_{45} = \beta_4$
$x_4 = \alpha_{45}$; $x_3 = \alpha_{33} - \alpha_{34}x_4$; $x_2 = \alpha_{25} - \alpha_{24}x_4 - \alpha_{23}\bar{x}_3$; $\bar{x}_2 = \beta_2\alpha_{24}\bar{x}_4 - \alpha_{23}\bar{x}_3$; $x_1 = \alpha_{15} - \alpha_{14}x_4 - \alpha_{13}x_3 - \alpha_{12}x_2$; $\bar{x}_1 = \beta_1 - \alpha_{14}\bar{x}_4 - \alpha_{13}\bar{x}_3 - \alpha_{12}\bar{x}_2$; $\bar{x}_3 = \beta_3 - \alpha_{34}\bar{x}_4$; $\bar{x}_4 = \beta_4$	$1 + x_4 = \bar{x}_4$; $1 + x_3 = \bar{x}_3$; $1 + x_2 = \bar{x}_2$; $1 + x_1 = \bar{x}_1$

2.1.4. Схема Гаусса з вибором головного елемента (метод головних елементів)

Розглянемо лінійну систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \dots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Запишемо розширену матрицю коефіцієнтів системи:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} & \dots & a_{1n} & a_{1\,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} & \dots & a_{pn} & a_{p\,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nq} & \dots & a_{nn} & a_{n\,n+1} \end{pmatrix}.$$

Серед елементів матриці a_{ij} $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n+1})$ обирають найбільший за модулем, який називають *головним елементом.* Нехай ним буде, наприклад, елемент a_{pq}. Рядок з номером p, який містить головний елемент, називають *головним рядком.*

Далі обчислюють множники (*вагові коефіцієнти*)

$$m_i = a_{iq}/a_{pq}$$

для всіх $i \neq p$.

Перетворюють матрицю таким чином: з кожного неголовного рядка віднімають почленно головний рядок, помножений на m_i. У результаті одержують матрицю, в якій усі елементи q-го стовпця, за виключенням a_{pq}, дорівнюють нулю. Відкидаючи цей стовпець і головний рядок, одержують нову матрицю M_1 з меншим на одиницю числом рядків і стовпців.

Над матрицею M_1 проводять такі самі операції, як і над матрицею M, після чого одержують матрицю M_2 і т. д. Такі перетворення продовжуються доти, доки не одержать матрицю, яка містить один рядок з двох елементів її вважають також головною. Об'єднавши всі головні рядки, починаючи з останнього, та зробивши деякі перестановки, одержують трикутну матрицю, еквівалентну початковій. На цьому закінчується етап обчислень, який називають *прямим ходом.* Розв'язавши систему з трикутною матрицею коефіцієнтів, знаходять послідовно значення невідомих x_i $(i = \overline{1,n})$. Цей етап обчислень називають *зворотним ходом.* Усі описані обчислення, як правило, подають таблицею, аналогічно компактній схемі Гаусса, проводячи на кожному етапі розглянутий вище контроль обчислень (див. приклад 2.1).

Сенс вибору головного елемента полягає в тому, щоб зробити можливо меншими (за модулем) вагові числа m_i і тим самим зменшити похибку обчислень. Тому при реалізації методу Гаусса на комп'ютері зазвичай використовують схему з вибором *головного елемента.*

Зауваження. При застосуванні комп'ютера вибір головного елемента може виявитися досить трудомістким завданням, якщо число рівнянь системи велике. У цьому випадку як головний рядок можна обрати перший, а як головний елемент – найбільший за модулем його елемент.

Приклад 2.1. Користуючись схемою Гаусса з вибором головного елемента розв'язати систему:

$$1{,}1161x_1 + 0{,}1254x_2 + 0{,}1397x_3 + 0{,}1490x_4 = 1{,}5471;$$
$$0{,}1582x_1 + 1{,}1675x_2 + 0{,}1768x_3 + 0{,}1871x_4 = 1{,}6471;$$
$$0{,}1968x_1 + 0{,}2071x_2 + 1{,}2168x_3 + 0{,}2271x_4 = 1{,}7471;$$
$$0{,}2368x_1 + 0{,}2471x_2 + 0{,}2568x_3 + 1{,}2671x_4 = 1{,}8471.$$

Розв'язання. Результати обчислень зручно подати однією табл. 2.1 у такому порядку.

Таблиця 2.1

	i	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\sum = a_{i6}$
I	1	0,11759	1,11610	0,12540	0,13970	0,14900	1,54710	3,07730
	2	0,14766	0,15820	1,16750	0,17680	0,18710	1,64710	3,33760
	3	0,17923	0,19680	0,20710	1,21680	0,22710	1,74710	3,59490
	4		0,23680	0,24710	0,25680	$\boxed{1{,}26710}$	1,84710	3,85490
II	1	0,09353	1,08825	0,09634	0,10950		1,32990	2,62399
	2	0,11862	0,12323	1,13101	0,13888		1,37436	2,76748
	3		0,15436	0,16281	$\boxed{1{,}17077}$		1,41604	2,90398
III	1	0,07296	1,07381	0,08111			1,19746	2,35238
	2		0,10492	$\boxed{1{,}11170}$			1,20639	2,42301
IV	1		$\boxed{1{,}06616}$				1,10944	2,17560
V	1		1				1,04059	2,04059
	2			1			0,98697	1,98697
	3				1		0,93505	1,93505
	4					1	0,88130	1,88130

Прямий хід.

1) Записуємо в першому етапі (I) табл. 2.1 коефіцієнти системи a_{ij} $(i = \overline{1,4};\ j = \overline{1,5})$.

У стовпці $\sum = a_{i6}$ записуємо суми коефіцієнтів за кожним рядком.

Знаходимо головний елемент та помічаємо його, як і наступні, прямокутною рамочкою. У даній системі ним є коефіцієнт

$$a_{44} = 1{,}26710 \; (p = 4; \; q = 4).$$

Знаходимо вагові коефіцієнти m_i $(i = \overline{1,3})$. Для цього ділимо елементи стовпця a_{i4} на a_{44} і результат записуємо в стовпець m_i – це І-й етап:

$$m_1 = \frac{a_{14}}{a_{44}} = \frac{0{,}14900}{1{,}26710} = 0{,}11759;$$

$$m_2 = \frac{a_{24}}{a_{44}} = \frac{0{,}18710}{1{,}26710} = 0{,}14766;$$

$$m_3 = \frac{a_{34}}{a_{44}} = \frac{0{,}22710}{1{,}26710} = 0{,}17923.$$

Обчислюємо коефіцієнти нової матриці. З кожного i-го рядка $(i = \overline{1,3})$ віднімаємо головний рядок, помножений на відповідний елемент m_i. Так, при $i = 1$ одержимо:

$$a_{11}^{(1)} = a_{11} - m_1 a_{41} = 1{,}11610 - 0{,}11759 \cdot 0{,}23680 = 1{,}08825;$$

$$a_{12}^{(1)} = a_{12} - m_1 a_{42} = 0{,}12540 - 0{,}11759 \cdot 0{,}24710 = 0{,}09634;$$

$$a_{13}^{(1)} = a_{13} - m_1 a_{43} = 1{,}13970 - 0{,}11759 \cdot 0{,}25680 = 0{,}10950;$$

$$a_{14}^{(1)} = 0;$$

$$a_{15}^{(1)} = a_{15} - m_1 a_{45} = 1{,}54710 - 0{,}11759 \cdot 1{,}84710 = 1{,}32990;$$

$$a_{16}^{(1)} = a_{16} - m_1 a_{46} = 3{,}07730 - 0{,}11759 \cdot 3{,}85490 = 2{,}62399.$$

При $i = 2, 3$ обчислення проводимо аналогічним чином. Результати записуємо в ІІ-й етап. При цьому головний рядок (з нього, в останню чергу, буде знайдено змінну, коефіцієнтом якої є головний елемент) та стовпець a_{i4} опускаємо, оскільки вони містять нулі.

Контроль: знаходимо суми $\sum_{j=1}^{5} a_{ij}^{(1)}$ і порівнюємо їх з $a_{i6}^{(1)}$, наприклад, $\sum_{j=1}^{5} a_{1j}^{(1)} = 2{,}62399 = a_{16}^{(1)}$ і т. д.

Вибираємо головний елемент ІІ-го етапу. В нашому випадку це $a_{33}^{(1)} = 1{,}17077$.

Ділимо елементи стовпця a_{i3} на $a_{33}^{(1)}$. Одержуємо числа:

$$m_1^{(1)} = \frac{a_{13}^{(1)}}{a_{33}^{(1)}} = \frac{0{,}10950}{1{,}17077} = 0{,}09353;$$

$$m_2^{(1)} = \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{33}^{(1)}} = \frac{0{,}13888}{1{,}17077} = 0{,}11862.$$

Обчислюємо коефіцієнти $a_{ij}^{(2)}$. Для цього з кожного рядка i $(i = 1, 2)$ віднімаємо головний рядок, помножений на відповідне m_i. Так, при $i = 1$ одержимо:

$$a_{11}^{(2)} = a_{11}^{(1)} - m_1^{(1)} a_{31}^{(1)} = 1{,}08825 - 0{,}09353 \cdot 0{,}15436 = 1{,}07381;$$

$$a_{12}^{(2)} = a_{12}^{(1)} - m_1^{(1)} a_{32}^{(1)} = 0{,}09634 - 0{,}09353 \cdot 0{,}16281 = 0{,}08111;$$

$$a_{13}^{(2)} = a_{13}^{(1)} - m_1^{(1)} a_{33}^{(1)} = 0;$$

$$a_{15}^{(2)} = a_{15}^{(1)} - m_1^{(1)} a_{35}^{(1)} = 1{,}32990 - 0{,}09353 \cdot 1{,}41604 = 1{,}19746;$$

$$a_{16}^{(2)} = a_{16}^{(1)} - m_1^{(1)} a_{36}^{(1)} = 2{,}62399 - 0{,}09353 \cdot 2{,}90398 = 2{,}35238.$$

При $i = 2$ обчислення проводяться аналогічно. Результати записуємо в III-й етап, залишаючи вільними вже стовпці a_{i3} та a_{i4}.

Контроль: Сума $\sum_{j=1}^{5} a_{ij}$ $(i = 1, 2)$ повинна дорівнювати a_{i6}; ця умова виконується.

Виберемо головний елемент та підкреслимо його. Ним буде $a_{22}^{(2)} = 1{,}11170$.

Знаходимо $m_1^{(2)} = a_{12}^{(2)}/a_{22}^{(2)} = 0{,}08111/1{,}11170 = 0{,}07296$. Записуємо в стовпці m_i III-го етапу.

Від першого рядка віднімемо другий (головний) рядок, помножений на $m_1^{(2)}$. Одержуємо

$$a_{11}^{(3)} = a_{11}^{(2)} - m_1^{(2)} a_{21}^{(2)} = 1{,}07381 - 0{,}10492 \cdot 0{,}07296 = 1{,}06616;$$

$$a_{12}^{(3)} = a_{12}^{(2)} - m_1^{(2)} a_{22}^{(2)} = 0;$$

$$a_{15}^{(3)} = a_{15}^{(2)} - m_1^{(2)} a_{25}^{(2)} = 1{,}19746 - 0{,}07296 \cdot 1{,}20639 = 1{,}10944;$$

$$a_{16}^{(3)} = a_{16}^{(2)} - m_1^{(2)} a_{26}^{(2)} = 2{,}35238 - 0{,}07296 \cdot 2{,}42301 = 2{,}17560.$$

Результати записуємо в IV-й етап.

2) *Контроль*:

$$a_{11}^{(3)} + a_{15}^{(3)} = 1{,}06616 + 1{,}10944 = 2{,}17560 = a_{16}^{(3)}.$$

3) Виписавши головні рядки кожного етапу, одержимо систему, еквівалентну даній:

$$\begin{cases} 1{,}06616x_1 = 1{,}10944; \\ 0{,}10492x_1 + 1{,}11170x_2 = 1{,}20639; \\ 0{,}15436x_1 + 0{,}16281x_2 + 1{,}17077x_3 = 1{,}41604; \\ 0{,}23680x_1 + 0{,}24710x_2 + 0{,}25680x_3 + 1{,}26710x_4 = 1{,}84710. \end{cases} \quad (2.2)$$

Зворотний хід. Результати обчислень при реалізації зворотного ходу записуємо в V-й етап. Послідовно одержуємо:

$$x_1 = \frac{1{,}10944}{1{,}06616} = 1{,}04059;$$

$$x_2 = \frac{1{,}20639 - 0{,}10492 \cdot 1{,}04059}{1{,}11170} = 0{,}98697;$$

$$x_3 = \frac{1{,}41604 - 0{,}15436 \cdot 1{,}04059 - 0{,}16281 \cdot 0{,}98697}{1{,}17077} = 0{,}93505;$$

$$x_4 = (1{,}84710 - 0{,}23680 \cdot 1{,}04059 - 0{,}24710 \cdot 0{,}98697 -$$
$$-0{,}25680 \cdot 0{,}93505)/1{,}26710 = 0{,}88130.$$

Контроль зворотного ходу здійснюється за допомогою стовпця суми: знаходимо $\bar{x}_i$ $(i = \overline{1,4})$ – значення невідомих з надлишком та перевіряємо умову $\bar{x}_i - x_i = 1$.

Завдання для самостійної роботи

1. Подані нижче системи розв'язати методом Гаусса з вибором головного елемента та звичайним методом Гаусса, виконавши всі обчислення з п'ятьма значущими цифрами. Порівняти одержані значення із вказаними точними.

а) $A = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 2{,}11 & 30{,}75 \\ 0{,}64 & 1{,}21 & 2{,}05 \\ 3{,}21 & 1{,}53 & 1{,}04 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -26{,}38 \\ 1{,}01 \\ 5{,}23 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1{,}15 & 0{,}42 & 100{,}71 \\ 1{,}19 & 0{,}55 & 0{,}32 \\ 1{,}00 & 0{,}35 & 3{,}00 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -198{,}70 \\ 2{,}29 \\ -0{,}65 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати подану нижче систему: а) звичайним методом Гаусса; б) методом Гаусса з вибором головного елемента:

$$\begin{cases} x + 592y = 437; \\ 592x + 4308y = 2251. \end{cases}$$

Усі обчислення проводити з точністю до чотирьох значущих цифр.

Відповіді

2. а) $x = -1{,}4000, y = 0{,}7406$; б) $x = -1{,}590, y = 0{,}7409$.

Для поданих нижче систем методом Гаусса з вибором головного елемента знайти значення невідомих з вказаним числом m значущих цифр.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -12 \\ 29 \\ 5 \end{pmatrix}$, $m = 4$.

4. $A = \begin{pmatrix} 2{,}10 & -4{,}50 & -2{,}00 \\ 3{,}00 & 2{,}50 & 4{,}30 \\ -6{,}00 & 3{,}50 & 2{,}50 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 19{,}07 \\ 3{,}21 \\ -18{,}25 \end{pmatrix}$, $m = 3$.

5. $A = \begin{pmatrix} 21{,}547 & -95{,}510 & -96{,}121 \\ 10{,}223 & -91{,}065 & -7{,}343 \\ 51{,}218 & 12{,}269 & 86{,}457 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -49{,}930 \\ -12{,}465 \\ 60{,}812 \end{pmatrix}$, $m = 4$.

6. $A = \begin{pmatrix} 3{,}24 & -2{,}18 & 5{,}09 & -2{,}37 & 1{,}21 \\ 0{,}73 & 3{,}85 & -6{,}23 & 4{,}80 & -5{,}93 \\ 2{,}88 & 5{,}73 & -7{,}02 & -9{,}17 & 3{,}58 \\ 2{,}10 & 3{,}02 & -0{,}78 & 3{,}85 & -6{,}00 \\ 1{,}20 & -4{,}13 & 6{,}48 & 0{,}00 & -3{,}24 \end{pmatrix}$,

$b = \begin{pmatrix} 28{,}38 \\ -36{,}00 \\ 24{,}48 \\ -16{,}23 \\ 4{,}34 \end{pmatrix}$, $m = 3$.

7. $A = \begin{pmatrix} 2{,}6 & -4{,}5 & -2{,}0 \\ 3{,}0 & 3{,}0 & 4{,}3 \\ -6{,}0 & 3{,}5 & 3{,}0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 19{,}07 \\ 3{,}21 \\ -18{,}25 \end{pmatrix}$, $m = 5$.

8. $A = \begin{pmatrix} 4{,}21 & 22{,}42 + \alpha & 3{,}85 \\ 2{,}31 & 31{,}49 & 1{,}52 \\ 3{,}49 & 4{,}85 & 28{,}72 + \alpha \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 30{,}24 \\ 40{,}95 - \beta \\ 42{,}81 \end{pmatrix}$,

$m = 5;\ \alpha = 0{,}25 \cdot k,\ k = 0 \cup \overline{1,4};\ \beta = 0{,}35 \cdot k,\ k = 0 \cup \overline{1,5}.$

9. $A = \begin{pmatrix} 3{,}81 & 0{,}25 & 1{,}28 & 0{,}75+\alpha \\ 2{,}25 & 1{,}32 & 4{,}52+\alpha & 0{,}49 \\ 5{,}31 & 6{,}28+\alpha & 0{,}98 & 1{,}04 \\ 9{,}39+\alpha & 2{,}45 & 3{,}35 & 2{,}28 \end{pmatrix},$

$b = \begin{pmatrix} 4{,}21 \\ 6{,}47+\beta \\ 2{,}38 \\ 10{,}48+\beta \end{pmatrix},\ m = 5;\ \alpha = 0{,}5 \cdot k,\ k = 0 \cup \overline{1,4};$

$\beta = 0{,}5 \cdot k,\ k = 0 \cup \overline{1,5}.$

Відповіді

3. $x_1 = 3{,}000;\ x_2 = -2{,}000;\ x_3 = 6{,}000.$

4. $x_1 = 1{,}34;\ x_2 = -4{,}76;\ x_3 = 2{,}58.$

5. $x_1 = 0{,}3732;\ x_2 = 0{,}1415;\ x_3 = 0{,}4622.$

6. $x_1 = 3{,}04;\ x_2 = 1{,}80;\ x_3 = 2{,}92;\ x_4 = -1{,}53;\ x_5 = 3{,}32.$

7. $x_1 = 1{,}7781;\ x_2 = 0{,}1415;\ x_3 = 2{,}5304.$

Метод головних елементів для розв'язування системи трьох лінійних рівнянь з трьома змінними:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14}; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24}; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34}. \end{cases}$$

На кожному етапі виключення невідомого вибирають *головний елемент* – найбільший за модулем коефіцієнт при невідомих, потім знаходять значення m_i, що дорівнюють частці від ділення елементів стовпчика, який містить головний елемент, на головний елемент, що береться з протилежним знаком.

Для одержання елементів наступного етапу додають головний рядок (рядок, що містить головний елемент) до останніх рядків, помноживши його на відповідне значення m_i. Головний рядок у наступному етапі відсутній, оскільки всі його елементи перетворюються на «0». З нього знаходять невідоме, коефіцієнтом при якому є головний елемент.

Один із можливих варіантів схеми головних елементів наводиться нижче.

У наведеній схемі $|a_{23}| = \max\limits_{i,j}|a_{ij}|$, де $i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,3}$; $|a'_{11}| = \max\limits_{i,j}|a'_{ij}|$, де $i = 1,3$; $j = 1,2$.

m_i	Коефіцієнти при невідомих			Вільні члени	Контрольні суми	
	x_1	x_2	x_3			
m_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	1–й етап
-1	a_{21}	a_{22}	$\boxed{a_{23}}$	a_{24}	a_{25}	
m_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	
-1	$\boxed{a'_{11}}$	a'_{12}	–	a'_{14}	a'_{15}	2–й
m'_3	a'_{31}	a'_{32}	–	a'_{34}	a'_{35}	
	–	$\boxed{a''_{32}}$	–	a''_{34}	a'_{35}	3–й
	x_1	x_2	x_3			
	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$			

Обчислення проводяться за формулами:

$$m_1 = \frac{-a_{13}}{a_{23}};\ m_3 = \frac{-a_{33}}{a_{23}};$$

$$a'_{1j} = a_{1j} + m_1 a_{2j}\ \left(j = \overline{1,5}\right);\ a'_{3j} = a_{3j} + m_3 a_{2j}\ \left(j = \overline{1,5}\right);$$

$$a''_{3j} = a'_{3j} + m'_3 a'_{1j}\ \ (j = \overline{2,5}).$$

Невідомі знаходять із співвідношень:

$$x_1 = \frac{a'_{14} - a'_{12}x_2}{a'_{11}};\ \ \bar{x}_1 = \frac{a'_{15} - a'_{12}\bar{x}_2}{a'_{11}};$$

$$x_2 = \frac{a''_{34}}{a''_{32}};\ \bar{x}_2 = \frac{a''_{35}}{a''_{32}};$$

$$x_3 = \frac{a_{24} - a_{21}x_1 - a_{22}x_2}{a_{23}};\ \bar{x}_3 = \frac{a_{25} - a_{21}\bar{x}_1 - a_{22}\bar{x}_2}{a_{23}}.$$

Контроль обчислення здійснюють так, як і в схемі єдиного ділення.

2.1.5. Метод послідовних наближень для розв'язування системи рівнянь (метод простої ітерації)

Нехай система лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{2.3}$$

якимось чином зведена до вигляду

$$\vec{x} = C\vec{x} + \vec{f}, \tag{2.4}$$

де C – деяка матриця, а $\vec{f}$ – вектор–стовпець.

Виходячи з довільного вектора $\vec{x}^{(0)}$

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \cdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix},$$

будуємо ітераційний процес

$$\vec{x}^{(k+1)} = C\vec{x}^{(k)} + \vec{f} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

або в розгорнутій формі:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \ \dots + c_{1n}x_n^{(k)} + f_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k)} + c_{n2}x_2^{(k)} + \ \dots + c_{nn}x_n^{(k)} + f_n. \end{cases} \tag{2.5}$$

Виконуючи ітерації, одержимо послідовність векторів $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots, \vec{x}^{(k)}, \dots$.

Якщо елементи матриці C задовольняють одну з умов:

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}| \le \alpha < 1 \ \ (i = \overline{1,n}) \tag{2.6}$$

або

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}| \le \beta < 1 \ \ (j = \overline{1,n}), \tag{2.7}$$

то процес ітерації збігається до точного розв'язку системи $\vec{x}$ при будь-якому початковому векторі $\vec{x}^{(0)}$,

$$\vec{x} = \lim_{k\to\infty} \vec{x}^{(k)}.$$

Отже, точний розв'язок системи одержується в результаті нескінченного процесу і будь-який вектор $\vec{x}^{(k)}$ з одержаної послідовності є наближеним розв'язком. Оцінка похибки цього наближеного розв'язку $\vec{x}^{(k)}$ виражається однією з формул:

$$\left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \frac{\alpha}{1-\alpha}\max_{j=\overline{1,n}}\left|x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}\right|, \tag{2.8}$$

якщо виконується умова (2.6), або

$$\left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \frac{\beta}{1-\beta}\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}\right|, \tag{2.9}$$

якщо виконується умова (2.7). Останні оцінки можна підсилити відповідно так:

$$\max\left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \frac{\alpha}{1-\alpha}\max\left|x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}\right| \tag{2.10}$$

або

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \frac{\beta}{1-\beta}\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}\right|. \tag{2.11}$$

Процес ітерації закінчують, коли вказані оцінки засвідчують про досягнення заданої точності.

Початковий вектор $\vec{x}^{(0)}$ можна вибрати довільно. Іноді приймають $\vec{x}^{(0)} = \vec{f}$. Але найбільш доцільно за вектор $\vec{x}^{(0)}$ взяти наближені значення невідомих, що одержуються грубим припущенням.

Зведення системи (2.3) до вигляду (2.4) можна здійснити різними методами. Головне, щоб виконувалася хоча б одна з умов (2.6) або (2.7). Обмежимося розглядом двох таких способів.

Перший спосіб. Якщо діагональні елементи матриці A відмінні від нуля:

$$a_{ii} \ne 0 \quad (i = \overline{1,n}),$$

то систему (2.3) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \ \dots - a_{1n}x_n); \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ \dots - a_{2n}x_n); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - \ \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}\right). \end{cases} \tag{2.12}$$

У цьому випадку елементи матриці C знаходяться так:

$$c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \ (i \ne j), \ \ c_{ii} = 0,$$

тоді умови (2.6) і (2.7) відповідно набувають вигляду

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \leq \alpha < 1 \quad (i = \overline{1,n}), \tag{2.13}$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \leq \beta < 1 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{2.14}$$

Нерівності (2.13), (2.14) будуть виконуватися, якщо діагональні елементи матриці A задовольняють умову

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (i = \overline{1,n}), \tag{2.15}$$

тобто якщо модулі діагональних коефіцієнтів для кожного рівняння системи більші за суму модулів усіх останніх коефіцієнтів (не рахуючи вільних членів).

Другий спосіб показано на прикладі 2.3 і пояснення не потребує.

Загалом, для будь-якої системи з невиродженою матрицею існують ітераційні методи розв'язування, які збігаються, але не завжди зручні для практичних обчислень.

Якщо метод ітерації збіжний, то він дає такі переваги порівняно з методами, розглянутими вище:

1) Якщо ітерації збігаються достатньо швидко, тобто якщо для розв'язання системи необхідно менше n ітерацій, то одержуємо виграш у часі, оскільки число арифметичних дій, необхідних для однієї ітерації, пропорційне n^2, а, наприклад, загальне число арифметичних дій у методі Гаусса пропорційне n^3.

2) Похибки округлення в методі ітерацій впливають значно менше, ніж у методі Гаусса. Крім того, метод ітерацій є *самовиправляючим*, тобто, окрема помилка, допущена в обчисленнях, не впливає на кінцевий результат, оскільки помилкове наближення можна розглядати як новий початковий вектор.

Остання обставина часто використовується для уточнення значень невідомих, одержаних методом Гаусса.

3) Метод ітерацій стає особливо ефективним при розв'язуванні систем, у яких значне число коефіцієнтів дорівнює нулю. Такі системи одержуються, наприклад, при розв'язуванні рівнянь у частинних похідних.

4) Процес ітерації приводить до виконання однотипних операцій і порівняно легко програмується на комп'ютері.

Приклад 2.2. Методом простої ітерації розв'язати систему

$$\begin{cases} 20{,}9x_1 + 1{,}2x_2 + 2{,}1x_3 + 0{,}9x_4 = 21{,}70; \\ 1{,}2x_1 + 21{,}2x_2 + 1{,}5x_3 + 2{,}5x_4 = 27{,}46; \\ 2{,}1x_1 + 1{,}5x_2 + 19{,}8x_3 + 1{,}3x_4 = 28{,}76; \\ 0{,}9x_1 + 2{,}5x_2 + 1{,}3x_3 + 32{,}1x_4 = 49{,}72. \end{cases} \tag{2.16}$$

Розв'язання. Зведемо систему до вигляду (2.12):

$$x_1 = \frac{1}{20{,}9}(21{,}70 - 1{,}2x_2 - 2{,}1x_3 - 0{,}9x_4);$$

$$x_2 = \frac{1}{21{,}2}(27{,}46 - 1{,}2x_1 - 1{,}5x_3 - 2{,}5x_4);$$

$$x_3 = \frac{1}{19{,}8}(28{,}76 - 2{,}1x_1 - 1{,}5x_2 - 1{,}3x_4);$$

$$x_4 = \frac{1}{32{,}1}(49{,}72 - 0{,}9x_1 - 2{,}5x_2 - 1{,}3x_3).$$

Коефіцієнти одержаної системи задовольняють умову (2.6).

$$\sum_{j=1}^{4}|c_{1j}| \cong 0{,}20 < 1, \quad \sum_{j=1}^{4}|c_{2j}| \cong 0{,}24 < 1,$$
$$\sum_{j=1}^{4}|c_{3j}| \cong 0{,}25 < 1, \quad \sum_{j=1}^{4}|c_{4j}| \cong 0{,}15 < 1.$$

Таким чином, збіжність ітерацій гарантована. При цьому $\alpha = 0{,}25$, звідси точність k-го наближення можна оцінити за формулою (2.10) при

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{3}.$$

Як початковий вектор $\vec{x}^{(0)}$ візьмемо елементи стовпця вільних членів, заокругливши їх значення до двох знаків після коми:

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1{,}04 \\ 1{,}30 \\ 1{,}45 \\ 1{,}55 \end{pmatrix}.$$

Обчислення проводитимемо доти, доки величини $\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|$ $(i = \overline{1,4})$ не стануть меншими від $\varepsilon = 10^{-3}$.

Послідовно обчислюємо

при $k = 1$:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{20{,}9}(21{,}70 - 1{,}560 - 3{,}045 - 1{,}395) = 0{,}75;$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{21{,}2}(27{,}46 - 1{,}248 - 2{,}175 - 3{,}875) = 0{,}95;$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{19{,}8}(28{,}76 - 2{,}184 - 1{,}950 - 2{,}015) = 1{,}14;$$

$$x_4^{(1)} = \frac{1}{32{,}1}(49{,}72 - 0{,}936 - 3{,}250 - 1{,}885) = 1{,}36;$$

при $k = 2$:

$$x_1^{(2)} = \frac{16{,}942}{20{,}9} = 0{,}8106;\ x_2^{(2)} = \frac{21{,}450}{21{,}2} = 1{,}0118;$$

$$x_3^{(2)} = \frac{23{,}992}{19{,}8} = 1{,}2117;\ x_4^{(2)} = \frac{45{,}188}{32{,}1} = 1{,}4077;$$

при $k = 3$:

$$x_1^{(3)} = \frac{16{,}67434}{20{,}9} = 0{,}7978;\ x_2^{(3)} = \frac{21{,}15048}{21{,}2} = 0{,}9977;$$

$$x_3^{(3)} = \frac{23{,}71003}{19{,}8} = 1{,}1975;\ x_4^{(3)} = \frac{44{,}88575}{32{,}1} = 1{,}3983;$$

при $k = 4$:

$$x_1^{(4)} = \frac{16{,}7295}{20{,}9} = 0{,}8004;\ x_2^{(4)} = \frac{21{,}2106}{21{,}2} = 1{,}0005;$$

$$x_3^{(4)} = \frac{23{,}7703}{19{,}8} = 1{,}2005;\ x_4^{(4)} = \frac{44{,}9510}{32{,}1} = 1{,}4003.$$

Обчислюємо модулі різниць значень $x_i^{(k)}$ при $k = 3$ і $k = 4$:

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(4)}\right| = 0{,}0026;\ \left|x_2^{(3)} - x_2^{(4)}\right| = 0{,}0028;$$

$$\left|x_3^{(3)} - x_3^{(4)}\right| = 0{,}0030;\ \left|x_4^{(3)} - x_4^{(4)}\right| = 0{,}0020.$$

Оскільки вони більші ніж задане число $\varepsilon = 10^{-3}$, продовжуємо ітерації.

При $k = 5$ одержуємо:

$$x_1^{(5)} = \frac{16{,}71808}{20{,}9} = 0{,}7999;\ x_2^{(5)} = \frac{21{,}19802}{21{,}2} = 0{,}9999;$$

$$x_3^{(5)} = \frac{23{,}75802}{19{,}8} = 1{,}1999;\ x_4^{(5)} = \frac{44{,}93774}{32{,}1} = 1{,}3999.$$

Знаходимо модулі різниць значень $x_i^{(k)}$ при $k = 4$ і $k = 5$:

$$\left|x_1^{(4)} - x_1^{(5)}\right| = 0{,}0005;\ \left|x_2^{(4)} - x_2^{(5)}\right| = 0{,}0006;$$

$$\left|x_3^{(4)} - x_3^{(5)}\right| = 0{,}0006;\ \left|x_4^{(4)} - x_4^{(5)}\right| = 0{,}0004.$$

Вони менші ніж задане число ε, тому як розв'язок беремо $x_1 = 0{,}7999;\ x_2 = 0{,}9999;\ x_3 = 1{,}1999;\ x_4 = 1{,}3999.$

Відповідно до оцінки (2.10) похибки цих значень не повинні перевищувати $(1/3) \cdot 0{,}0006 = 0{,}0002.$

Для порівняння наведемо точні значення невідомих:

$x_1 = 0{,}8;\ x_2 = 1{,}0;\ x_3 = 1{,}2;\ x_4 = 1{,}4.$

Приклад 2.3. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 1{,}02x_1 - 0{,}05x_2 - 0{,}10x_3 = 0{,}795; \\ -0{,}11x_1 + 1{,}03x_2 - 0{,}05x_3 = 0{,}849; \\ -0{,}11x_1 - 0{,}12x_2 + 1{,}04x_3 = 1{,}398, \end{cases} \qquad (2.17)$$

виконавши три ітерації. Вказати похибку одержаного результату.

Розв'язання. Матриця даної системи така, що діагональні елементи близькі до одиниці, а всі інші – значно менші одиниці. Тому для застосування методу ітерації доцільно буде записати систему (2.17) у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}795 - 0{,}02x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}10x_3; \\ x_2 = 0{,}849 + 0{,}11x_1 - 0{,}03x_2 + 0{,}05x_3; \\ x_3 = 1{,}398 + 0{,}11x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}04x_3. \end{cases}$$

Умови збіжності (2.6) для одержаної системи виконуються.

$$\sum_{i=1}^{3} |c_{1j}| = 0{,}02 + 0{,}05 + 0{,}10 = 0{,}17 < 1;$$

$$\sum_{i=1}^{3} |c_{2j}| = 0{,}11 + 0{,}03 + 0{,}05 = 0{,}19 < 1;$$

$$\sum_{i=1}^{3} |c_{3j}| = 0{,}11 + 0{,}12 + 0{,}04 = 0{,}27 < 1.$$

Як початковий вектор $\vec{x}^{(0)}$ обираємо стовпець вільних членів, округливши його елементи до двох знаків після коми:

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0{,}80 \\ 0{,}85 \\ 1{,}40 \end{pmatrix}.$$

Далі послідовно знаходимо
при $k = 1$:

$x_1^{(1)} = 0{,}795 - 0{,}016 + 0{,}0425 + 0{,}140 = 0{,}9615 \cong 0{,}962;$
$x_2^{(1)} = 0{,}849 + 0{,}088 - 0{,}0255 + 0{,}070 = 0{,}9815 \cong 0{,}982;$
$x_3^{(1)} = 1{,}398 + 0{,}088 + 0{,}1020 - 0{,}056 = 1{,}532;$

при $k = 2$:

$$x_1^{(2)} = 0{,}97806 \cong 0{,}978;\ x_2^{(2)} = 1{,}00196 \cong 1{,}002;$$
$$x_3^{(2)} = 1{,}56038 \cong 1{,}560;$$

при $k = 3$:

$$x_1^{(3)} = 0{,}980;\ x_2^{(3)} = 1{,}004;\ x_3^{(3)} = 1{,}563.$$

Значення невідомих при $k = 2$ і $k = 3$ відрізняються не більше ніж на $3 \cdot 10^{-3}$; тому, якщо в якості наближених значень невідомих узяти:

$$x_1 \cong 0{,}980;\ x_2 \cong 1{,}004;\ x_3 \cong 1{,}563,$$

то похибка цих наближених значень не перевищить

$$\frac{0{,}27}{1 - 0{,}27} \cdot 3 \cdot 10^{-3} < 1{,}1 \cdot 10^{-3}.$$

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати системи методом простої ітерації. Продовжувати ітерації доти, доки різниця між послідовними наближеннями невідомих $x_i^{(k)}$ не стане меншою ε.

У завданнях 1, 2 порівняти відповідь з поданими точними значеннями невідомих.

1. $A = \begin{pmatrix} 1{,}02 & -0{,}25 & -0{,}30 \\ -0{,}41 & 1{,}13 & -0{,}15 \\ -0{,}25 & -0{,}14 & 1{,}21 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0{,}515 \\ 1{,}555 \\ 2{,}780 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}0 \\ 2{,}5 \\ 3{,}0 \end{pmatrix},$

$$\varepsilon = 10^{-3}.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 10,9 & 1,2 & 2,1 & 0,9 \\ 1,2 & 11,2 & 1,5 & 2,5 \\ 2,1 & 1,5 & 9,8 & 1,3 \\ 0,9 & 2,5 & 1,3 & 12,1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -7,0 \\ 5,3 \\ 10,3 \\ 24,6 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

$$\varepsilon = 10^{-3}.$$

3. $A = \begin{pmatrix} 4,00 & 0,24 & -0,08 & 0,16 \\ 0,09 & 3,00 & -0,15 & -0,12 \\ 0,04 & -0,08 & 4,00 & 0,06 \\ 0,02 & 0,06 & 0,04 & -10,00 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix},$

$$\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}.$$

4. $A = \begin{pmatrix} 8,714 & 2,180 & 5,684 \\ -1,351 & 10,724 & 5,224 \\ 2,489 & -0,459 & 6,799 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 49,91 \\ 50,17 \\ 32,68 \end{pmatrix}, \varepsilon = 10^{-4}.$

5. $A = \begin{pmatrix} 24,21 + \alpha & 2,42 & 3,85 \\ 2,31 & 31,49 & 1,52 \\ 3,49 & 4,85 & 28,72 + \alpha \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 30,24 \\ 40,95 - \beta \\ 42,81 \end{pmatrix},$

$$\varepsilon = 10^{-4};$$

$$\alpha = 0,2 \cdot k, \quad k = 0 \cup \overline{1,4}; \quad \beta = 0,2 \cdot k, \quad k = 0 \cup \overline{1,5}.$$

Відповіді

3. $x_1 = 1,9031; x_2 = 3,2007; x_3 = 5,0428; x_4 = 0,1432.$

4. $x_1 = 2,9274; x_2 = 3,0505; x_3 = 4,8286.$

5.

α	β	x_1	x_2	x_3
0,0	0,0	0,9444	1,1743	1,1775
	0,2	0,9449	1,1679	1,1786
	0,4	0,9454	1,1614	1,1796
	0,6	0,9459	1,1550	1,1806
	0,8	0,9463	1,1485	1,1816
	1,0	0,9468	1,1421	1,1827
0,2	0,0	0,9378	1,1751	1,1700
	0,2	0,9383	1,1687	1,1711
	0,4	0,9387	1,1623	1,1721
	0,6	0,9392	1,1558	1,1731
	0,8	0,9397	1,1494	1,1741
	1,0	0,9402	1,1430	1,1752

α	β	x_1	x_2	x_3
0,4	0,0	0,9312	1,1760	1,1626
	0,2	0,9317	1,1695	1,1637
	0,4	0,9322	1,1631	1,1647
	0,6	0,9327	1,1567	1,1657
	0,8	0,9331	1,1502	1,1667
	1,0	0,9336	1,1438	1,1677
0,6	0,0	0,9248	1,1768	1,1554
	0,2	0,9253	1,1704	1,1564
	0,4	0,9257	1,1639	1,1574
	0,6	0,9262	1,1575	1,1584
	0,8	0,9267	1,1511	1,1594
	1,0	0,9271	1,1446	1,1604
0,8	0,0	0,9184	1,1776	1,1481
	0,2	0,9189	1,1712	1,1491
	0,4	0,9194	1,1648	1,1501
	0,6	0,9198	1,1583	1,1512
	0,8	0,9203	1,1519	1,1522
	1,0	0,9208	1,1454	1,1632

2.1.6. Метод Зейделя для розв'язання системи рівнянь

Метод Зейделя є модифікацією методу простої ітерації. Він полягає в тому, що при обчисленні $(k+1)$-го наближення невідомого x_i при $i > 1$ використовуються вже обчислені раніше $(k+1)$-і наближення невідомих $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$. Таким чином, для системи (2.5) обчислення за методом Зейделя виконуються за формулами:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \ \dots + c_{1n}x_n^{(k)} + f_1; \\ x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{22}x_2^{(k)} + \ \dots + c_{2n}x_n^{(k)} + f_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + \ \dots + c_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} + c_{nn}x_n^{(k)} + f_n. \end{cases} \qquad (2.18)$$

Вказані вище умови збіжності для методу простої ітерації залишаються правильними і для методу Зейделя. Як правило, метод Зейделя дає кращу збіжність, ніж метод простої ітерації, хоча це буває не завжди. Крім того, метод Зейделя може виявитися більш зручним при програмуванні, оскільки при обчисленні $x_i^{(k+1)}$ немає необхідності зберігати значення $x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$.

Рекомендації до застосування методу Зейделя залишаються такими, як і для методу простої ітерації.

Приклад 2.4. Методом Зейделя розв'язати систему (2.16).

Розв'язання. У прикладі 2.3 цю систему вже було зведено до вигляду (2.12) і вибрано початковий вектора $\vec{x}^{(0)}$. Проведемо тепер ітерації методом Зейделя. При $k = 1$:

$$x_1^{(1)} = (1/20{,}9)(21{,}70 - 1{,}560 - 3{,}045 - 1{,}395) = 0{,}7512.$$

При обчисленні $x_2^{(1)}$ використаємо вже одержане значення $x_1^{(1)}$:

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{21{,}2}(27{,}46 - 0{,}900 - 2{,}175 - 3{,}875) = 0{,}9674.$$

При обчисленні $x_3^{(1)}$ використаємо значення $x_1^{(1)}$ і $x_2^{(1)}$:

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{19{,}8}(28{,}76 - 1{,}575 - 1{,}455 - 2{,}015) = 1{,}1977.$$

Нарешті, використовуючи значення $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$, одержуємо:

$$x_4^{(1)} = \frac{1}{32{,}1}(49{,}72 - 0{,}675 - 2{,}425 - 1{,}560) = 1{,}4037.$$

Аналогічно проводимо обчислення при $k = 2$ і $k = 3$.

Одержуємо:

при $k = 2$:

$$x_1^{(2)} = \frac{16{,}76062}{20{,}9} = 0{,}8019;\ x_2^{(2)} = \frac{21{,}19202}{21{,}2} = 0{,}9996;$$

$$x_3^{(2)} = \frac{23{,}75180}{19{,}8} = 1{,}9996;\ x_4^{(2)} = \frac{44{,}93981}{32{,}1} = 1{,}4000;$$

при $k = 3$:

$$x_1^{(3)} = \frac{16{,}72132}{20{,}9} = 0{,}80006;\ x_2^{(3)} = \frac{21{,}200528}{21{,}2} = 1{,}00002;$$

$$x_3^{(3)} = \frac{23{,}759844}{19{,}8} = 1{,}19999;\ x_4^{(3)} = \frac{44{,}939909}{32{,}1} = 1{,}40000.$$

У табл. 2.2 наводяться значення невідомих системи (2.16), одержані на третьому кроці методом Зейделя і методом простої ітерації, та точні значення. Порівняння показує, що в даному випадку методом Зейделя мета досягається швидше.

Таблиця 2.2

	x_1	x_2	x_3	x_4
Метод простої ітерації	0,7978	0,9977	1,1975	1,3983
Метод Зейделя	0,80006	1,00002	1,19999	1,40000
Точні значення	0,8	1,0	1,2	1,4

Приклад 2.5. Для системи

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 - x_3 = 11{,}33; \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 = 32; \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = 42 \end{cases} \qquad (2.19)$$

відомі наближені значення невідомих одержано з трьома значущими цифрами методом Гаусса:

$$x_1 \cong 4{,}67; \quad x_2 \cong 7{,}62; \quad x_3 \cong 9{,}05.$$

Методом Зейделя уточнити розв'язок так, щоб значення невідомих $x_i^{(k)}$ і $x_i^{(k+1)}$ відрізнялися не більше ніж на $5 \cdot 10^{-4}$.

Розв'язання. Зведемо систему (2.19) до вигляду:

$$x_1 = (1/6) \cdot (11{,}33 + x_2 + x_3);$$
$$x_2 = (1/6) \cdot (32 + x_1 + x_3);$$
$$x_3 = (1/6) \cdot (42 + x_1 + x_2).$$

Узявши як початкові наближення значення, одержані методом Гаусса:

$$x_1^{(0)} = 4{,}67; \quad x_2^{(0)} = 7{,}62; \quad x_3^{(0)} = 9{,}05,$$

матимемо:

при $k = 1$:

$$x_1^{(1)} = (1/6) \cdot (11{,}33 + 16{,}67) = 4{,}66667;$$
$$x_2^{(1)} = (1/6) \cdot (32 + 13{,}71667) = 7{,}61944;$$
$$x_3^{(1)} = (1/6) \cdot (42 + 12{,}28611) = 9{,}04768;$$

при $k = 2$:

$$x_1^{(2)} = (1/6) \cdot (11{,}33 + 16{,}66712) = 4{,}66619;$$
$$x_2^{(2)} = (1/6) \cdot (32 + 13{,}71387) = 7{,}61897;$$
$$x_3^{(2)} = (1/6) \cdot (42 + 12{,}28516) = 9{,}04752.$$

Оскільки для наведеної системи виконується умова (2.6) при $\alpha = 1/3$, то одержане наближення має похибку, яка не перевищує

$$(1/2) \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}.$$

Тому як розв'язок приймаємо:

$$x_1 \cong 4{,}666;\ x_2 \cong 7{,}619;\ x_3 \cong 9{,}048.$$

Завдання для самостійної роботи

Системи 1, 2 розв'язати методами простої ітерації та Зейделя. Порівняти: а) швидкості збіжності ітерацій; б) одержані значення з наведеними точними.

1. $A = \begin{pmatrix} 6{,}1 & 2{,}2 & 1{,}2 \\ 2{,}2 & 5{,}5 & -1{,}5 \\ 1{,}2 & -1{,}5 & 7{,}2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 16{,}55 \\ 10{,}55 \\ 16{,}80 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 3{,}82 & 1{,}02 & 0{,}75 & 0{,}81 \\ 1{,}05 & 4{,}53 & 0{,}98 & 1{,}53 \\ 0{,}73 & 0{,}85 & 4{,}71 & 0{,}81 \\ 0{,}88 & 0{,}81 & 1{,}28 & 3{,}5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 15{,}655 \\ 22{,}605 \\ 23{,}480 \\ 16{,}110 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 3{,}0 \\ 3{,}5 \\ 2{,}0 \end{pmatrix}$.

3. Розв'язати методом Зейделя системи задач 3–5 з підрозд. 2.1.5.

4. Розв'язати дану систему методом Зейделя. Ітерації проводити доти, доки модуль різниці між послідовними наближеннями невідомих $\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)}\right|$ $(i = \overline{1,3})$ не стане меншим 0,02.

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2{,}8; \\ x_1 + 10x_2 + 9x_3 = 7; \\ 2x_1 - 7x_2 - 10x_3 = -17. \end{cases}$$

2.2. Завдання для самостійної, домашньої роботи і приклади їх розв'язання

Варіанти до завдання 1

Завдання 1

1. Дослідити систему за допомогою рангів відповідних матриць та розв'язати її: а) за правилом Крамера та методом Гаусса; б) методом Гаусса.

2. Виконати дії над матрицями.

3. Розв'язати систему матричним методом.

4. Розв'язати матричне рівняння.

№ 1

1\. а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 4; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 4y + z = 8; \\ x - 2y + 2z = 7; \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$

2\. $3(A + B)(2B - A)$, де $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

3\. $\begin{cases} 5x + 8y - z = -7; \\ x + 2y + 3z = 1; \\ 2x - 3y + 2z = 9. \end{cases}$ 4. $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 16 \end{pmatrix}$.

№ 2

1\. а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 8; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -8; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2z = -4; \\ x - y - 3z = -4; \\ x + y - z = -4. \end{cases}$

2\. $3A - (2A + B)B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

3\. $\begin{cases} x - 7y - 2z = -8; \\ 3x - 5y + 3z = 1; \\ x + 2y + z = 4. \end{cases}$ 4. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 13 & 21 \end{pmatrix}$.

№ 3

1\. а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -5; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1; \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x + 5y - 3z = 7; \\ x + 2y - z = 4; \\ 2x - 3y + 2z = -3. \end{cases}$

2\. $(A^2 - B^2)(2A + B)$, де $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3\. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 11; \\ 2x + y + 3z = 1; \\ 3x + y + 2z = 5. \end{cases}$ 4. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

№ 4

1. а) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5; \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12; \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4; \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 7; \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -3; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -10. \end{cases}$

2. $(A - B)(A^2 + B)$, де $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -10 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 29; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 31; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$ 4. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

№ 5

1. а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 16; \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 4; \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 = 12. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y - 2z = -5; \\ 4x + 2y + z = 1; \\ x + y + 3z = 6. \end{cases}$

2. $(2A - B)(A + B)$, де $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 5x + 6y - 2z = 18; \\ 2x + 5y - 3z = 4; \\ 4x - 3y + 2z = 9. \end{cases}$ 4. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -14 & 3 \\ 6 & -7 & 0 \\ 11 & 3 & 15 \end{pmatrix}$.

№ 6

1. а) $\begin{cases} 3x_2 - 5x_3 = 1; \\ 5x_1 - 7x_2 + 10x_4 = -9; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9; \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 20. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1; \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

2. $(A - B)(A + 2B)$, де $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11. \end{cases}$ 4. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ 17 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

№ 7

1. а) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0; \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9; \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5; \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 10; \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

2. $(A + B)(2A - B)$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$ 4. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

№ 8

1. а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ x_1 + x_2 - 6x_3 = -1. \end{cases}$

2. $3(A - 0{,}5B) + AB$, де $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 = 5. \end{cases}$ 4. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

№ 9

1. а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 10; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -7; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

2. $2A - (A^2 + B)B$, де $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -1; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ 4. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

№ 10

1. a) $\begin{cases} 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 12; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0; \\ 4x_1 + x_2 - x_4 = -9; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 = -5; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -5; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

2. $3(A^2 - B^2) - 2AB$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 8; \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$ 4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

№ 11

1. a) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2; \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5; \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$

2. $(A + B)(3A - B) - A$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 13 & 21 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ 4. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

№ 12

1. a) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -4; \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -4; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

2. $2A(A^2 - B) - B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x_2 + 7x_3 = 17; \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$ 4. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

№ 13

1. а) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_4 = 0; \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = -16; \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -7; \\ 5x_1 + x_2 - x_4 = -9. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -3; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5; \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

2. $A(3A + B) - B(A - B)$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -7. \end{cases}$ 4. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

№ 14

1. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 4x_4 = 9; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + y - 3z = 2; \\ x + y + 2z = 1; \\ 5x + 2y - z = 3. \end{cases}$

2. $(A + B)A - 3B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 16 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 16; \\ x - 2y + 3z = 6; \\ 3x - 2y - 5z = 12. \end{cases}$ 4. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

№ 15

1. а) $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4; \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 12. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 2; \\ 2x - y - 2z = 4; \\ x + y + 5z = -2. \end{cases}$

2. $(A + 2B)(AB - 2A)$, де $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 22 & -14 & 3 \\ 6 & -7 & 0 \\ 11 & 3 & 15 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} x + 5y + z = 0; \\ 2x - y - 3z = -1; \\ 3x + 4y + 2z = 8. \end{cases}$ 4. $\begin{pmatrix} 12 & 15 & -6 \\ 9 & -3 & 0 \\ 12 & 0 & 21 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 & 7 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 16 & 16 & 13 \end{pmatrix}$.

№ 16

1. а) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -1; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

2. $3AB - (2A + B)(A - B)$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$ 4. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

№ 17

1. а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ x_1 - 4x_2 - x_4 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 4y + 3z = 3; \\ 4x + 2y - z = -4; \\ 5x - 2y + 2z = -1. \end{cases}$

2. $3A + 2B(AB - A)$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 3x + 4y - 5z = -8; \\ 2x - y - 3z = 3; \\ 2x + y + 4z = 20. \end{cases}$ 4. $\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 18

1. а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1; \\ 5x_1 - 7x_2 - 3x_3 = -11; \\ x_1 - x_2 - 7x_3 = -9. \end{cases}$

2. $(2A - B)(A + B) - A$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 4; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ 4. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 5 \\ -1 & -2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 11 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 19

1\. а) $\begin{cases} 3x_1 - x_3 + x_4 = -3; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + x_3 = 10; \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

2\. $3A - B(B - A) + B$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

3\. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$ 4. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

№ 20

1\. а) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0; \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y + z = 3; \\ 3x - 2y + 2z = 5; \\ 5x - 3y + 3z = 8. \end{cases}$

2\. $A^2 - 3B(A + B)$, де $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3\. $\begin{cases} x + y + z = 2; \\ 2x + 5y - 5z = 0; \\ 11x + 3y - z = 2. \end{cases}$ 4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

№ 21

1\. а) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y + 4z = -6; \\ x + 2y - 3z = 3; \\ 3x + 2y - 2z = 0. \end{cases}$

2\. $2(A + 2B) + 3AB$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3\. $\begin{cases} x + y + 2z = -2; \\ 7x + 5y + 2z = 18; \\ x - y - z = 3. \end{cases}$ 4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 \\ 4 & 11 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 22

1. а) $\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -4; \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5; \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 1; \\ x_1 - 3x_3 + 4x_4 = -5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = -1; \\ 4x - 3y - 4z = -5; \\ 3x - 5y - 7z = -4. \end{cases}$

2. $2(A + B) - (A - B)3A$, де $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} x + z = 0; \\ 2x + 3y + z = 1; \\ x - y - z = 2. \end{cases}$ 4. $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

№ 23

1. а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y - 2z = 1; \\ 5x + y - z = -7; \\ x + 7y + 3z = -9. \end{cases}$

2. $(2A + B)2B - 0{,}5A$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} x - y - z = 1; \\ x + y - 2z = 0; \\ x - 2y - 2z = 3. \end{cases}$ 4. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 24

1. а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 28; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_3 = -6; \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

2. $2A(A - B) + B(A + B)$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -7; \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ 4. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

№ 25

1. а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -3; \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -15; \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -2; \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

2. $AB - 5(A + B)A$, де $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 15; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$ 4. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 26

1. а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 7x_4 = -2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 8; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2; \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -7; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2; \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5. \end{cases}$

2. $(2A + B)(A - 2B)$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ 4. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 27

1. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3; \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -3; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5; \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 = -5; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -10. \end{cases}$

2. $2AB + A(B - A)$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5; \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3; \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$ 4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

№ 28

1. а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 2; \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1; \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 3; \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

2. $(3A + 0{,}5B)(5B - A)$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -1; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9. \end{cases}$ 4. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 29

1. а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = -3; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -3; \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 6; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -13; \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 16. \end{cases}$

2. $3A(A + B) - 2B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 = -4; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$ 4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

№ 30

1. а) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = -3; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = -5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 1; \\ 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 3; \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

2. $3AB + (A - B)(A + 2B)$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4; \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$ 4. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Приклад виконання завдання

1. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1; \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = -7; \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3; \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -11. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

2. $(3A + B)(2A - B)$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$ 4. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 13 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

---

1. а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ – матриця системи;

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & -3 & -7 \\ 4 & -2 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & -1 & -11 \end{pmatrix}$ – розширена матриця системи.

Знайдемо ранги матриць A та B:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & -3 & -7 \\ 4 & -2 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & -1 & -11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 9 & -7 & -11 \\ 8 & -2 & -1 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & -3 & -13 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 9 & -7 & -11 \\ 8 & 0 & -1 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 & -13 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 20 & 106 \\ 6 & 0 & 0 & -5 & -8 \\ -2 & 0 & 1 & -3 & -13 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 20 & 106 \\ 6 & 0 & 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & -4 & 106 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 37 & 0 & 0 & -4 & 74 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\end{array}\right).$$

Оскільки $r(A)=r(B)=4=n$ – кількість невідомих, то система а) сумісна й визначена (має один розв'язок).

б) $A=\begin{pmatrix}1&2&-4\\2&1&-5\\1&-1&-1\end{pmatrix}$ – матриця системи; $B=\begin{pmatrix}1&2&-4&1\\2&1&-5&-1\\1&-1&-1&-2\end{pmatrix}$ – розширена матриця системи. Знайдемо ранги матриць A та B:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-4&1\\2&1&-5&-1\\1&-1&-1&-2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\2&-3&3&-3\\1&-3&3&-3\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

Оскільки $r(A)=r(B)=2\neq n=3$, то система б) сумісна й невизначена (має безліч розв'язків).

Розв'яжемо системи.

а) ***правило Крамера***:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&-2&1\\3&4&1&-3\\4&-2&3&-4\\2&2&-3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\-5&4&4&-7\\8&-2&7&-2\\-2&2&-1&-3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-5&4&-7\\8&7&-2\\-2&-1&-3\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}-13&4&-19\\-6&7&-23\\0&-1&0\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}-13&-19\\-6&-23\end{vmatrix}=-185;$$

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}1&1&-2&1\\-7&4&1&-3\\3&-2&3&-4\\-11&2&-3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\-11&4&9&-7\\5&-2&-1&-2\\-13&2&1&-3\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}-11&9&-7\\5&-1&-2\\-13&1&-3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}34&0&-25\\5&-1&-2\\-8&0&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}34&-25\\-8&-5\end{vmatrix}=-370;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -7 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 3 & -4 \\ 2 & -11 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & -13 & 4 \\ 7 & 3 & 9 & -7 \\ -1 & 11 & -25 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 4 & -13 & 4 \\ 7 & 9 & -7 \\ -1 & -25 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -113 & 44 \\ 7 & -166 & 63 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -113 & 44 \\ -166 & 63 \end{vmatrix} = 185;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -7 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -11 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & -11 & -7 \\ 8 & -2 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & -13 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -5 & -11 & -7 \\ 8 & 5 & -2 \\ -2 & -13 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -5 & -11 & -7 \\ 8 & 5 & -2 \\ -10 & -18 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 65 & 115 & 0 \\ 28 & 41 & 0 \\ -10 & -18 & -1 \end{vmatrix} = -555;$$

$$\Delta_{x_4} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & -7 \\ 4 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 4 & -11 \\ 8 & -2 & 7 & 5 \\ -2 & 2 & -1 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -5 & 4 & -11 \\ 8 & 7 & 5 \\ -2 & -1 & -13 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -13 & 0 & -63 \\ -6 & 0 & -86 \\ -2 & -1 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -13 & -63 \\ -6 & -86 \end{vmatrix} = -740;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-370}{-185} = 2; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{185}{-185} = -1;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-555}{-185} = 3; x_4 = \frac{\Delta_{x_4}}{\Delta} = \frac{-740}{-185} = 4.$$

Метод Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1; \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = -7; \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3; \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -11. \end{cases}$

Для того щоб не мати справи з дробовими числами замінимо *перше* рівняння системи різницею *другого* й *четвертого* (в разі необхідності аналогічно діятимемо і в інших випадках) та застосуємо метод Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = -7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3; \end{cases} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4, \\ -3x_2 - 10x_3 + 5x_4 = -7, \\ -2x_2 - 11x_3 + 3x_4 = -19, \\ -10x_2 - 13x_3 + 4x_4 = -13; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -12, \\ -2x_2 - 11x_3 + 3x_4 = -19, \\ -10x_2 - 13x_3 + 4x_4 = -13; \end{cases} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -12, \\ -13x_3 - x_4 = -43, \\ -23x_3 - 16x_4 = -133; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -12, \\ 3x_3 - 14x_4 = -47, \\ 13x_3 + x_4 = 43; \end{cases} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -12, \\ x_3 + 57x_4 = 231, \\ 3x_3 - 14x_4 = -47; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -12, \\ x_3 + 57x_4 = 231, \\ -185x_4 = -740; \end{cases} \begin{cases} x_4 = 4, \\ x_3 = 3, \\ x_2 = -1, \\ x_1 = 2. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 2; x_2 = -1; x_3 = 3; x_4 = 4.$

б) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2; \end{cases} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ -3x_2 + 3x_3 = -3, \\ -3x_2 + 3x_3 = -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_3 = t, \ t \in R, \\ x_2 = x_3 + 1 = t + 1, \\ x_1 = -2x_2 + 4x_3 + 1 = 2t - 1; \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2t - 1, \\ x_2 = t + 1, \\ x_3 = t; \ t \in R. \end{cases}$$

2. $$3A + B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -8 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix};$$

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & -7 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(3A + B)(2A - B) = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -8 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & -7 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 43 & -74 \\ -30 & 67 & -71 \\ 21 & -29 & 11 \end{pmatrix}.$$

3. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1; \end{cases}$ $X = \frac{1}{\Delta_A}\tilde{A} \cdot B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -10 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -14 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -10 & -1 \\ -14 & -2 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 22, A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 1, A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2, A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -14, A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -2, A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10;$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 22 & 1 & -17 \\ 2 & -1 & -1 \\ -14 & -2 & 10 \end{pmatrix}; \tilde{A} \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 1 & -17 \\ 2 & -1 & -1 \\ -14 & -2 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 22 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + (-17) \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + (-1) \cdot 1 \\ (-14) \cdot 1 + (-2) \cdot 4 + 10 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -1/6 \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{cases} x_1 = -3/2, \\ x_2 = 1/2, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 13 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Дано $A \cdot X = B$, звідки

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\Delta_A}\tilde{A} \cdot B.$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2, A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1, A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \tilde{A} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & -21 & -35 \\ -28 & 14 & 0 \\ -7 & -7 & 7 \end{pmatrix};$$

$$X = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -14 & -21 & -35 \\ -28 & 14 & 0 \\ -7 & -7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 2

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом головних елементів з точністю до 0,001.

Варіанти до завдання 2

№ 1

$$\begin{cases} 1{,}53x_1 - 1{,}63x_2 - 0{,}76x_3 = 2{,}18; \\ 0{,}32x_1 - 0{,}65x_2 + 1{,}11x_3 = -0{,}47; \\ 0{,}86x_1 + 1{,}17x_2 + 1{,}84x_3 = 1{,}95. \end{cases}$$

№ 2

$$\begin{cases} 0{,}76x_1 + 0{,}65x_2 - 1{,}18x_3 = 0{,}28; \\ 1{,}07x_1 + 0{,}53x_2 - 0{,}63x_3 = 1{,}27; \\ 0{,}28x_1 - 1{,}16x_2 - 2{,}16x_3 = -1{,}16. \end{cases}$$

№ 3

$$\begin{cases} 0{,}18x_1 - 0{,}56x_2 - 1{,}03x_3 = -0{,}15; \\ 0{,}93x_1 - 0{,}65x_2 - 0{,}45x_3 = 0{,}72; \\ 0{,}43x_1 + 1{,}15x_2 - 0{,}72x_3 = 1{,}24. \end{cases}$$

№ 4

$$\begin{cases} 1{,}08x_1 - 1{,}23x_2 + 1{,}16x_3 = -0{,}97; \\ 0{,}72x_1 + 0{,}95x_2 - 1{,}14x_3 = 2{,}15; \\ 0{,}24x_1 + 0{,}63x_2 + 0{,}38x_3 = 0{,}74. \end{cases}$$

№ 5

$$\begin{cases} 0{,}48x_1 - 0{,}56x_2 - 1{,}95x_3 = 0{,}76; \\ 0{,}83x_1 - 1{,}73x_2 - 1{,}82x_3 = -0{,}36; \\ 0{,}53x_1 + 0{,}27x_2 - 0{,}64x_3 = 1{,}23. \end{cases}$$

№ 6

$$\begin{cases} 1{,}42x_1 + 0{,}73x_2 - 0{,}34x_3 = 2{,}18; \\ 0{,}88x_1 - 1{,}32x_2 - 1{,}76x_3 = -2{,}07; \\ 0{,}56x_1 + 0{,}62x_2 - 0{,}43x_3 = 1{,}16. \end{cases}$$

№ 7

$$\begin{cases}0{,}83x_1 - 1{,}72x_2 - 1{,}57x_3 = -3{,}88;\\ 0{,}62x_1 + 1{,}24x_2 - 0{,}95x_3 = 1{,}43;\\ 1{,}18x_1 - 2{,}15x_2 - 0{,}57x_3 = -2{,}43.\end{cases}$$

№ 8

$$\begin{cases}1{,}05x_1 - 3{,}05x_2 + 0{,}63x_3 = 1{,}25;\\ 1{,}27x_1 + 2{,}34x_2 + 3{,}15x_3 = 2{,}16;\\ 2{,}73x_1 + 4{,}24x_2 - 1{,}55x_3 = 1{,}87.\end{cases}$$

№ 9

$$\begin{cases}1{,}73x_1 - 0{,}86x_2 + 1{,}08x_3 = -3{,}15;\\ 0{,}65x_1 + 2{,}47x_2 - 1{,}88x_3 = 1{,}24;\\ 1{,}17x_1 + 1{,}34x_2 + 2{,}54x_3 = 2{,}35.\end{cases}$$

№ 10

$$\begin{cases}1{,}27x_1 + 0{,}18x_2 + 0{,}76x_3 = 3{,}23;\\ 1{,}18x_1 - 2{,}74x_2 - 3{,}17x_3 = -2{,}18;\\ 0{,}83x_1 + 1{,}12x_2 - 2{,}16x_3 = -1{,}15.\end{cases}$$

№ 11

$$\begin{cases}1{,}22x_1 + 0{,}75x_2 - 0{,}83x_3 = 0{,}92;\\ 0{,}66x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}78x_3 = 0{,}66;\\ 1{,}24x_1 + 0{,}73x_2 - 0{,}38x_3 = 0{,}58.\end{cases}$$

№ 12

$$\begin{cases}0{,}45x_1 - 2{,}11x_2 - 1{,}44x_3 = -1{,}50;\\ 0{,}87x_1 - 1{,}24x_2 + 3{,}17x_3 = -0{,}46;\\ 1{,}25x_1 + 0{,}48x_2 - 0{,}63x_3 = 0{,}35.\end{cases}$$

№ 13

$$\begin{cases}0{,}81x_1 - 0{,}73x_2 + 0{,}67x_3 = -0{,}88;\\ 0{,}54x_1 - 0{,}24x_2 - 0{,}43x_3 = -0{,}62;\\ 0{,}83x_1 - 0{,}92x_2 - 0{,}62x_3 = -2{,}15.\end{cases}$$

№ 14

$$\begin{cases}0{,}11x_1 - 0{,}33x_2 + 3{,}01x_3 = 0{,}13;\\ 0{,}75x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}21x_3 = 0{,}11;\\ 0{,}11x_1 + 0{,}75x_2 - 0{,}13x_3 = -2{,}00.\end{cases}$$

№ 15

$$\begin{cases}2{,}35x_1 - 1{,}17x_2 - 0{,}75x_3 = -1{,}28;\\ 0{,}65x_1 - 0{,}71x_2 + 0{,}18x_3 = -0{,}17;\\ 0{,}71x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}63x_3 = 2{,}08.\end{cases}$$

№ 16

$$\begin{cases}0{,}14x_1 - 0{,}13x_2 + 2{,}00x_3 = -0{,}15;\\ 0{,}18x_1 + 0{,}75x_2 - 0{,}77x_3 = 0{,}11;\\ 0{,}17x_1 - 0{,}28x_2 - 0{,}39x_3 = -0{,}12.\end{cases}$$

№ 17

$$\begin{cases}0{,}13x_1 + 1{,}11x_2 - 0{,}75x_3 = 0{,}13;\\ 0{,}14x_1 - 3{,}01x_2 + 0{,}15x_3 = -1{,}00;\\ 2{,}11x_1 - 0{,}17x_2 - 0{,}71x_3 = -0{,}17.\end{cases}$$

№ 18

$$\begin{cases}0{,}77x_1 + 0{,}86x_2 + 0{,}88x_3 = -0{,}54;\\ 0{,}83x_1 - 0{,}58x_2 - 1{,}43x_3 = -1{,}71;\\ 0{,}83x_1 - 0{,}64x_2 - 4{,}20x_3 = -2{,}23.\end{cases}$$

№ 19

$$\begin{cases}0{,}85x_1 - 0{,}42x_2 + 0{,}32x_3 = 1{,}32;\\ 0{,}58x_1 + 1{,}43x_2 - 0{,}63x_3 = 0{,}44;\\ 0{,}52x_1 + 2{,}23x_2 - 0{,}84x_3 = -0{,}64.\end{cases}$$

№ 20

$$\begin{cases}1{,}24x_1 + 0{,}75x_2 - 0{,}48x_3 = -1{,}17;\\ 1{,}85x_1 - 3{,}44x_2 - 1{,}16x_3 = -1{,}83;\\ 2{,}34x_1 - 1{,}26x_2 - 1{,}17x_3 = -3{,}14.\end{cases}$$

№ 21

$$\begin{cases}0{,}86x_1 + 0{,}75x_2 + 3{,}72x_3 = 1{,}06;\\ 1{,}72x_1 + 0{,}46x_2 + 2{,}53x_3 = 2{,}44;\\ 2{,}32x_1 - 1{,}53x_2 + 1{,}83x_3 = -2{,}83.\end{cases}$$

№ 22

$$\begin{cases}1{,}58x_1 - 1{,}43x_2 - 0{,}83x_3 = -1{,}03;\\ 1{,}24x_1 + 0{,}43x_2 - 0{,}58x_3 = 2{,}71;\\ 0{,}83x_1 + 0{,}74x_2 + 1{,}17x_3 = 1{,}26.\end{cases}$$

№ 23

$$\begin{cases}0{,}83x_1 - 1{,}64x_2 + 2{,}45x_3 = -1{,}84;\\ 1{,}55x_1 + 0{,}58x_2 + 3{,}18x_3 = 0{,}74;\\ 0{,}63x_1 + 0{,}43x_2 + 1{,}44x_3 = 2{,}18.\end{cases}$$

№ 24

$$\begin{cases}0{,}34x_1 + 1{,}06x_2 + 1{,}26x_3 = 1{,}17;\\ 1{,}16x_1 - 2{,}54x_2 - 0{,}55x_3 = -2{,}23;\\ 0{,}47x_1 - 1{,}34x_2 + 0{,}83x_3 = -3{,}26.\end{cases}$$

№ 25

$$\begin{cases}1{,}34x_1 - 2{,}57x_2 + 0{,}68x_3 = -1{,}03;\\ 1{,}72x_1 - 3{,}15x_2 + 1{,}23x_3 = 2{,}15;\\ 0{,}67x_1 + 0{,}72x_2 + 1{,}18x_3 = 1{,}43.\end{cases}$$

№ 26

$$\begin{cases}0{,}18x_1 + 1{,}42x_2 + 1{,}12x_3 = 2{,}07;\\ 1{,}14x_1 - 0{,}92x_2 + 2{,}53x_3 = 0{,}45;\\ 1{,}72x_1 + 2{,}18x_2 - 0{,}93x_3 = 1{,}06.\end{cases}$$

№ 27

$$\begin{cases}0{,}72x_1 + 0{,}83x_2 + 2{,}12x_3 = 1{,}42;\\ 0{,}73x_1 - 2{,}23x_2 - 1{,}27x_3 = -2{,}43;\\ 3{,}17x_1 + 2{,}15x_2 - 1{,}43x_3 = -0{,}73.\end{cases}$$

№ 28

$$\begin{cases}1{,}03x_1 - 0{,}72x_2 + 0{,}35x_3 = 0{,}82;\\ 0{,}83x_1 - 2{,}17x_2 - 1{,}71x_3 = -1{,}25;\\ 1{,}15x_1 - 2{,}83x_2 + 2{,}16x_3 = 2{,}32.\end{cases}$$

№ 29

$$\begin{cases}2{,}32x_1 + 1{,}78x_2 + 0{,}74x_3 = 1{,}16;\\ 0{,}72x_1 + 1{,}02x_2 - 0{,}65x_3 = 1{,}27;\\ 1{,}24x_1 - 0{,}74x_2 + 1{,}73x_3 = -0{,}77.\end{cases}$$

№ 30

$$\begin{cases}1{,}03x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}56x_3 = 2{,}15;\\ 0{,}45x_1 - 0{,}93x_2 + 0{,}65x_3 = -0{,}72;\\ 0{,}72x_1 - 0{,}43x_2 - 1{,}15x_3 = -1{,}24.\end{cases}$$

Приклад виконання завдання

$$\begin{cases}3{,}75x_1 - 0{,}28x_2 + 0{,}17x_3 = 0{,}75;\\ 2{,}11x_1 - 0{,}11x_2 - 0{,}12x_3 = 1{,}11;\\ 0{,}22x_1 - 3{,}17x_2 + 1{,}81x_3 = 0{,}05.\end{cases}$$

---

m_i	Коефіцієнти при невідомих			Вільні члени	Суми
	x_1	x_2	x_3		
−1 −0,5627 −0,0587	$\boxed{3{,}75}$ 2,11 0,22	−0,28 −0,11 −3,17	0,17 −0,12 1,81	0,75 1,11 0,05	4,39 2,99 −1,09
0,0151 −1		0,0476 $\boxed{-3{,}1536}$	−0,2157 1,8000	0,6880 0,0060	0,5199 −1,3476
			$\boxed{-0{,}1885}$	0,6881	0,4996
	0,2098	−2,0855	−3,6504		
	1,2098	−1,0855	−2,6504		

$$x_3 = \frac{0{,}6881}{-0{,}1885} \cong -3{,}6504;\ \bar{x}_3 = \frac{0{,}4996}{-0{,}1885} \cong -2{,}6504.$$

Контроль: $1 + (-3{,}6504) = -2{,}6504 \to 1 + x_3 = \bar{x}_3$;

$$x_2 = \frac{0{,}0060 - 1{,}8000 \cdot (-3{,}6504)}{-3{,}1536} \cong -2{,}0855;$$

$$\bar{x}_2 = \frac{-1{,}3476 - 1{,}8 \cdot (-2{,}6504)}{-3{,}1536} \cong -1{,}0855.$$

Контроль: $1 + (-2{,}0855) = -1{,}0855 \to 1 + x_2 = \bar{x}_2$;

$$x_1 = \frac{0{,}75 + 0{,}28 \cdot (-2{,}0855) - 0{,}17 \cdot (-3{,}6504)}{3{,}75} \cong 0{,}2098;$$

$$\bar{x}_1 = \frac{4{,}39 + 0{,}28 \cdot (-1{,}0855) - 0{,}17 \cdot (-2{,}6504)}{3{,}75} \cong 1{,}2098.$$

Контроль: $1 + 0{,}2098 = 1{,}2098 \to 1 + x_1 = \bar{x}_1$.

Відповідь: $x_1 \cong 0{,}2098$; $x_2 \cong -2{,}0855$; $x_3 \cong -3{,}6504$.

Завдання 3

1. Методом Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь з точністю до 0,001, звівши її до вигляду, зручного для ітерацій.

Варіанти до завдання 3

№ 1

$$\begin{cases} 3{,}1x_1 - 1{,}6x_2 + 3{,}8x_3 = 2{,}9; \\ 0{,}9x_1 + 1{,}4x_2 - 6{,}5x_3 = -5{,}7; \\ 2{,}5x_1 + 6{,}9x_2 - 1{,}5x_3 = 5{,}5. \end{cases}$$

№ 2

$$\begin{cases} 3{,}9x_1 - 2{,}3x_2 - 3{,}4x_3 = 5{,}7; \\ 2{,}4x_1 + 7{,}0x_2 - 1{,}2x_3 = 4{,}4; \\ 2{,}6x_1 - 0{,}7x_2 + 1{,}3x_3 = -3{,}6. \end{cases}$$

№ 3

$$\begin{cases} 1{,}1x_1 + 2{,}9x_2 - 4{,}1x_3 = 2{,}3; \\ 2{,}4x_1 + 6{,}1x_2 - 0{,}7x_3 = 3{,}4; \\ 4{,}8x_1 - 2{,}3x_2 + 3{,}3x_3 = -1{,}3. \end{cases}$$

№ 4

$$\begin{cases} 6{,}6x_1 + 4{,}9x_2 - 0{,}8x_3 = 2{,}1; \\ 3{,}3x_1 - 2{,}4x_2 + 3{,}6x_3 = 2{,}5; \\ 1{,}1x_1 + 1{,}5x_2 + 3{,}7x_3 = -2{,}4. \end{cases}$$

№ 5

$$\begin{cases} 3{,}8x_1 + 2{,}7x_2 - 7{,}1x_3 = 6{,}8; \\ 3{,}7x_1 - 3{,}2x_2 - 4{,}3x_3 = 5{,}1; \\ 8{,}3x_1 + 4{,}1x_2 - 2{,}3x_3 = 5{,}3. \end{cases}$$

№ 6

$$\begin{cases} 4{,}1x_1 + 9{,}8x_2 + 5{,}1x_3 = +6{,}9; \\ 5{,}3x_1 - 4{,}8x_2 - 5{,}0x_3 = +3{,}1; \\ 7{,}1x_1 - 2{,}8x_2 + 4{,}2x_3 = -4{,}8. \end{cases}$$

№ 7

$$\begin{cases} 4{,}1x_1 - 3{,}7x_2 - 2{,}8x_3 = -4{,}5; \\ 2{,}7x_1 + 4{,}8x_2 + 1{,}5x_3 = 5{,}9; \\ 1{,}8x_1 - 7{,}1x_2 + 7{,}7x_3 = 6{,}1. \end{cases}$$

№ 8

$$\begin{cases} 2{,}3x_1 - 4{,}1x_2 - 3{,}8x_3 = 4{,}8; \\ 1{,}1x_1 - 2{,}9x_2 + 5{,}8x_3 = -3{,}3; \\ 1{,}8x_1 + 4{,}4x_2 + 2{,}1x_3 = 2{,}8. \end{cases}$$

№ 9

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 6{,}2x_2 - 5{,}4x_3 = -0{,}52; \\ 0{,}8x_1 + 2{,}3x_2 + 3{,}4x_3 = -0{,}8; \\ 3{,}8x_1 - 1{,}1x_2 - 2{,}4x_3 = 1{,}8. \end{cases}$$

№ 10

$$\begin{cases} 7{,}4x_1 - 3{,}5x_2 + 4{,}5x_3 = 2{,}4; \\ 5{,}7x_1 + 0{,}6x_2 - 4{,}7x_3 = 1{,}2; \\ 0{,}5x_1 - 7{,}4x_2 - 0{,}8x_3 = 3{,}4. \end{cases}$$

№ 11

$$\begin{cases} 1{,}7x_1 - 2{,}7x_2 - 5{,}6x_3 = -2{,}7; \\ 6{,}7x_1 + 3{,}6x_2 - 2{,}4x_3 = 2{,}1; \\ 3{,}7x_1 - 5{,}3x_2 + 0{,}8x_3 = -0{,}9. \end{cases}$$

№ 12

$$\begin{cases} 3{,}7x_1 - 3{,}5x_2 + 5{,}4x_3 = 2{,}7; \\ 2{,}2x_1 + 1{,}9x_2 - 7{,}2x_3 = -2{,}5; \\ 7{,}4x_1 + 2{,}4x_2 + 3{,}4x_3 = 1{,}7. \end{cases}$$

№ 13

$$\begin{cases}2{,}7x_1+3{,}8x_2+6{,}9x_3=10{,}3;\\2{,}7x_1+7{,}1x_2+3{,}8x_3=9{,}7;\\5{,}8x_1+2{,}1x_2+2{,}9x_3=8{,}7.\end{cases}$$

№ 14

$$\begin{cases}9{,}8x_1+5{,}5x_2+4{,}1x_3=9{,}7;\\2{,}8x_1+4{,}7x_2+7{,}8x_3=7{,}1;\\1{,}2x_1+5{,}7x_2+4{,}1x_3=5{,}8.\end{cases}$$

№ 15

$$\begin{cases}1{,}9x_1+2{,}8x_2+1{,}7x_3=5{,}7;\\1{,}8x_1-3{,}4x_2+1{,}1x_3=1{,}2;\\1{,}3x_1-1{,}7x_2+4{,}2x_3=3{,}1.\end{cases}$$

№ 16

$$\begin{cases}1{,}3x_1+4{,}3x_2+2{,}7x_3=2{,}1;\\2{,}8x_1-2{,}7x_2+3{,}5x_3=1{,}7;\\5{,}9x_1-1{,}7x_2-4{,}1x_3=-0{,}8.\end{cases}$$

№ 17

$$\begin{cases}1{,}9x_1-2{,}8x_2-3{,}1x_3=0{,}2;\\2{,}9x_1+6{,}1x_2+2{,}8x_3=2{,}1;\\3{,}8x_1+2{,}7x_2+7{,}5x_3=5{,}6.\end{cases}$$

№ 18

$$\begin{cases}2{,}8x_1-2{,}1x_2+3{,}3x_3=-2{,}8;\\4{,}8x_1+2{,}7x_2+2{,}0x_3=+5{,}3;\\2{,}1x_1-5{,}8x_2+3{,}1x_3=+1{,}2.\end{cases}$$

№ 19

$$\begin{cases}3{,}7x_1-2{,}5x_2-3{,}5x_3=-1{,}5;\\1{,}7x_1+0{,}4x_2+3{,}5x_3=0{,}4;\\0{,}5x_1-2{,}3x_2+3{,}6x_3=-4{,}3.\end{cases}$$

№ 20

$$\begin{cases}4{,}7x_1-1{,}8x_2-1{,}6x_3=-3{,}8;\\4{,}9x_1-3{,}6x_2+2{,}7x_3=0{,}4;\\3{,}1x_1+4{,}5x_2+1{,}2x_3=-1{,}6.\end{cases}$$

№ 21

$$\begin{cases}1{,}5x_1+0{,}9x_2-2{,}7x_3=-3{,}5;\\6{,}7x_1-2{,}8x_2+2{,}5x_3=2{,}6;\\1{,}4x_1-3{,}7x_2-5{,}4x_3=0{,}14.\end{cases}$$

№ 22

$$\begin{cases}1{,}2x_1-6{,}7x_2-3{,}8x_3=-5{,}2;\\2{,}7x_1-1{,}3x_2-6{,}4x_3=-3{,}8;\\3{,}5x_1+4{,}5x_2+2{,}4x_3=-0{,}6.\end{cases}$$

№ 23

$$\begin{cases}1{,}8x_1+5{,}3x_2-7{,}7x_3=1{,}8;\\5{,}8x_1+1{,}1x_2+3{,}3x_3=2{,}3;\\2{,}8x_1+3{,}3x_2+4{,}5x_3=3{,}4.\end{cases}$$

№ 24

$$\begin{cases}3{,}0x_1-2{,}2x_2+1{,}7x_3=1{,}8;\\2{,}3x_1-4{,}9x_2-2{,}1x_3=-2{,}8;\\2{,}1x_1+1{,}9x_2-4{,}2x_3=-5{,}1.\end{cases}$$

№ 25

$$\begin{cases}4{,}2x_1-3{,}6x_2+3{,}3x_3=3{,}8;\\2{,}2x_1+5{,}3x_2-1{,}7x_3=-4{,}1;\\1{,}7x_1-1{,}8x_2-4{,}1x_3=-1{,}9.\end{cases}$$

№ 26

$$\begin{cases}4{,}1x_1+3{,}1x_2+3{,}7x_3=4{,}2;\\1{,}8x_1-4{,}5x_2-2{,}5x_3=-3{,}9;\\2{,}9x_1+1{,}7x_2-1{,}1x_3=1{,}8.\end{cases}$$

№ 27

$$\begin{cases}3{,}5x_1-2{,}3x_2+6{,}7x_3=2{,}7;\\0{,}2x_1-4{,}7x_2-3{,}5x_3=-3{,}8;\\3{,}1x_1+5{,}1x_2+1{,}9x_3=5{,}3.\end{cases}$$

№ 28

$$\begin{cases}3{,}7x_1+3{,}3x_2-2{,}1x_3=-4{,}5;\\6{,}3x_1+3{,}1x_2+2{,}8x_3=2{,}3;\\3{,}1x_1+7{,}3x_2-4{,}1x_3=-5{,}6.\end{cases}$$

№ 29

$$\begin{cases}3{,}6x_1+1{,}8x_2+4{,}5x_3=1{,}9;\\1{,}2x_1-2{,}3x_2+4{,}1x_3=-2{,}6;\\4{,}6x_1+2{,}5x_2+1{,}8x_3=3{,}2.\end{cases}$$

№ 30

$$\begin{cases}8{,}3x_1-3{,}7x_2-4{,}2x_3=-1{,}2;\\1{,}2x_1+4{,}7x_2+1{,}4x_3=7{,}3;\\5{,}5x_1+2{,}3x_2-6{,}2x_3=2{,}7.\end{cases}$$

Приклад виконання завдання

$$\begin{cases} 2{,}4x_1+2{,}5x_2-2{,}9x_3=4{,}5; & (1\text{ р.})\\ 0{,}8x_1+3{,}5x_2-1{,}4x_3=3{,}2; & (2\text{ р.})\\ 1{,}5x_1-2{,}3x_2+8{,}6x_3=-5{,}5. & (3\text{ р.}) \end{cases}$$

Зведемо систему до вигляду, в якому елементи головної діагоналі перевищували б (за модулем) останні елементи рядків:

$$\begin{cases} 6{,}3x_1+2{,}7x_2+2{,}8x_3=3{,}5; & (2\cdot 1\text{ р.}+3\text{ р.})\\ 0{,}8x_1+3{,}5x_2-1{,}4x_3=3{,}2; & \\ 1{,}5x_1-2{,}3x_2+8{,}6x_3=-5{,}5. & \end{cases}$$

Зведемо одержану систему до вигляду, зручного для ітерацій:

$$\begin{cases} 10x_1= \ \ 3{,}7x_1-2{,}7x_2-2{,}8x_3+3{,}5;\\ 10x_2=-0{,}8x_1+6{,}5x_2+1{,}4x_3+3{,}2;\\ 10x_3=-1{,}5x_1+2{,}3x_2+1{,}4x_3-5{,}5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1= \ \ 0{,}37x_1-0{,}27x_2-0{,}28x_3+0{,}35;\\ x_2=-0{,}08x_1+0{,}65x_2+0{,}14x_3+0{,}32;\\ x_3=-0{,}15x_1+0{,}23x_2+0{,}14x_3-0{,}55. \end{cases}$$

Елементами матриці A є числа, які дорівнюють сумі модулів коефіцієнтів при невідомих кожного з рівнянь відповідно, тобто

$$A=(0{,}92;\ 0{,}87;\ 0{,}52).$$

Тому норма $\|A\|_\text{I}$ матриці становить:

$\|A\|_\text{I}=\max(0{,}92;\ 0{,}87;\ 0{,}52)=0{,}92<1$ – процес Зейделя збіжний.

Обчислення розташуємо в таблиці:

№	x_1	x_2	x_3	№	x_1	x_2	x_3
0	0,3500	0,3200	–0,55	9	0,6029	0,5261	–0,6057
1	0,5471	0,4230	–0,6059	10	0,6006	0,5289	–0,6042
2	0,6079	0,4664	–0,6196	11	0,5985	0,5311	–0,6030
3	0,6225	0,4878	–0,6207	12	0,5969	0,5329	–0,6020
4	0,6224	0,5004	–0,6180	13	0,5955	0,5343	–0,6012
5	0,6182	0,5089	–0,6148	14	0,5944	0,5355	–0,6006
6	0,6135	0,5153	–0,6118	15	0,5935	0,5364	–0,6001
7	0,6092	0,5202	–0,6092	16	0,5928	0,5372	–0,5997
8	0,6055	0,5224	–0,6070	17	0,5922	0,5378	–0,5993

Відповідь: $x_1\cong 0{,}592$; $x_2\cong 0{,}537$; $x_3\cong -0{,}599$.

Наведемо ще один характерний приклад зведення системи до вигляду, зручного для ітерацій.

Нехай маємо систему:

$$\begin{cases} 4{,}5x_1 - 2{,}3x_2 + 3{,}7x_3 = 2{,}4; & (1\text{ р.}) \\ 7{,}8x_1 - 4{,}7x_2 - 2{,}5x_3 = -3{,}5; & (2\text{ р.}) \\ 1{,}3x_1 + 5{,}3x_2 + 1{,}6x_3 = -2{,}4. & (3\text{ р.}) \end{cases}$$

Послідовно одержуємо:

$$\begin{cases} 7{,}8x_1 - 4{,}7x_2 - 2{,}5x_3 = -3{,}5; \ (1) \leftarrow (2\text{ р.}) \\ 1{,}3x_1 + 5{,}3x_2 + 1{,}6x_3 = -2{,}4; \ (2) \leftarrow (3\text{ р.}) \\ 3{,}3x_1 - 2{,}4x_2 - 6{,}2x_3 = -5{,}9; \ (3) \leftarrow (2\text{ р.}) - (1\text{ р.}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x_1 = +2{,}2x_1 + 4{,}7x_2 + 2{,}5x_3 - 3{,}5; \\ 10x_2 = -1{,}3x_1 + 4{,}7x_2 - 1{,}6x_3 - 2{,}4; \\ -10x_3 = -3{,}3x_1 + 2{,}4x_2 - 3{,}8x_3 - 5{,}9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \ \ 0{,}22x_1 + 0{,}47x_2 + 0{,}25x_3 - 0{,}35; \\ x_2 = -0{,}13x_1 + 0{,}47x_2 - 0{,}16x_3 - 0{,}24; \\ x_3 = \ \ 0{,}33x_1 - 0{,}24x_2 + 0{,}38x_3 + 0{,}59. \end{cases}$$

$$A = (0{,}94;\ 0{,}76;\ 0{,}95),$$

$\|A\|_{\mathrm{I}} = \max(0{,}94;\ 0{,}76;\ 0{,}95) = 0{,}95 < 1$ – процес Зейделя збіжний.

Розділ 3. ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ І ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ РІВНЯНЬ

3.1. Загальні відомості

Корені тільки перших чотирьох степенів алгебраїчних і небагатьох трансцендентних рівнянь можна знайти у вигляді явної функції їх коефіцієнтів. Для більшості рівнянь, коефіцієнти яких задано чисельно, доводиться обмежуватися обчисленням числових значень, їх дійсних та комплексних коренів.

Задачу розв'язування рівняння

$$f(x) = 0, \tag{3.1}$$

де $f(x)$ – неперервна, в загальному випадку комплекснозначна функція, визначена в деякому околі шуканого кореня, можна розбити на два етапи.

1) ***Перший етап*** – знаходження *нульового наближення кореня* рівняння (3.1) або достатньо вузької області, в якій він знаходиться. Якщо таку область знайдено, то говорять, що корінь відокремлено, або ізольовано.

У деяких випадках числове розв'язування рівняння доцільно почати з побудови графіка функції $f(x)$, за яким можна визначити характер зміни функції, точки перетину графіка з віссю абсцис та з'ясувати інтервали, в яких лежать дійсні корені рівняння.

Іноді рівняння (3.1) подають у вигляді $u(x) = v(x)$. Будують графіки функцій $u(x)$ і $v(x)$ та знаходять точки їх перетину, абсциси яких наближено відповідають значенням коренів.

Для визначення проміжку, в якому знаходиться корінь рівняння, використовують (особливо у випадках, коли процес побудови графіка громіздкий) і ***теорему* 1** (Больцано – Коші):

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$ і на його кінцях значення функції мають різні знаки ($f(a) \cdot f(b) < 0$), то існує хоча б одна точка $c \in (a;\ b)$, в якій функція перетворюється на нуль ($f(c) = 0$).

Подамо доведення теореми, оскільки на ньому базується метод наближеного розв'язування рівнянь, що має назву – *метод половинного поділу відрізка* або *дихотомії*.

Поділимо $[a;\ b]$ навпіл: $[a;\ (a+b)/2]$ та $[(a+b)/2\ ;\ b]$. Якщо $f((a+b)/2) = 0$, то теорему доведено. Якщо ні, то вибираємо ту половину, на якій знаки $f(x)$ різні. Позначимо через $[a_1;\ b_1]$ ту, на якій $f(a_1)f(b_1) < 0$. Далі ділимо $[a_1;\ b_1]$ навпіл та продовжуємо описаний процес. При цьому можливе таке:

1) у деякій точці $(a_n + b_n)/2$, $n \in N$ $f((a_n + b_n)/2) = 0$ – теорему доведено;

2) процес поділу відрізка може тривати необмежено (послідовність вкладених відрізків) –

$$[a;\ b] \supset [a_1;\ b_1] \supset \ \dots \supset [a_n;\ b_n] \supset \ \dots$$

таких, що

$$f(a_n)f(b_n) < 0,\ \ n \in N;\ a_n - b_n = \frac{b-a}{2^n},\ \ n \to \infty.$$

Тоді, відповідно до принципу вкладених відрізків:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c,\ \ c \in [a;\ b].$$

Функція $f(x)$ неперервна в точці c, і тому

$$f(c) = \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n. \qquad (3.1\ \text{а})$$

Оскільки $f(a_n)f(b_n) < 0,\ n \in N$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) \le 0$, і враховуючи (3.1 а): $f^2(c) \le 0$, звідки $f(c) = 0$. Оскільки на кінцях $[a;\ b]$ $f(x) \ne 0$, то $c \in [a;\ b]$.

Для знаходження комплексно-спряжених коренів рівняння (3.1) можна застосувати такі способи.

1. Покладають $x = u + iv$. Тоді рівняння (3.1) приймає вигляд

$$f(x) = f(u + iv) = X(u;\ v) + iY(u;\ v).$$

Координати точок перетину кривих $X(u;\ v) = 0$ та $Y(u;\ v) = 0$, побудованих у площині $u0v$, дозволять визначити початкові значення дійсних і уявних частин шуканих комплексно-спряжених коренів рівняння.

2. У рівнянні (3.1) x замінюють на z й одержують $f(z) = 0$. Далі проводять заміну $z = x + iy$ та відділяють дійсну частину від уявної. Тоді останнє рівняння набуває вигляду

$$\psi(x;\ y) + i\varphi(x;\ y) = 0$$

і з нього одержують систему

$$\begin{cases} \psi(x;\ y) = 0, \\ \varphi(x;\ y) = 0. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Розв'язавши систему (3.2), наприклад, графічно, одержують *нульове* наближення кореня рівняння або розв'язку системи.

Викладені прийоми дають можливість знайти наближені значення кореня рівняння або розв'язку системи з малою точністю. Тому їх приймають за *нульові* наближення.

2) ***Другий етап*** – уточнення знайденого *нульового* наближення кореня рівняння або розв'язку системи за заданою (практично будь-якою) точністю може розв'язуватися різними способами.

Нижче розглядаються деякі з них.

3.2. Метод проб (половинного поділу або дихотомії)

Якщо корінь рівняння $f(x) = 0$ належить відрізку$[a;\ b]$, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$, то його ділять навпіл:

$$[a;\ (a+b)/2] \text{ та } [(a+b)/2\,;\ b].$$

Якщо

$$f((a+b)/2) = 0, \text{то } x_0 = (a+b)/2 \ - \text{ корінь рівняння.}$$

Якщо

$$f((a+b)/2) \neq 0,$$

то вибирають ту половину, на якій знаки $f(x)$ різні, і позначають її через $[a_1;\ b_1]$ (виконується умова $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$). Ітераційний процес (поділ) продовжують доти, доки довжина відрізка $[a_n;\ b_n]$ не стане меншою від заданої точності ε. Його припиняють і тоді, коли поблизу кореня значення функції $f(x)$ виявляться порівнюваними з ε.

3.3. Метод ітерації

Рівняння (3.1) запишемо в еквівалентній формі:

$$x = \varphi(x). \tag{3.3}$$

Перехід від рівняння (3.1) до рівняння (3.3) можна здійснити різними способами, при цьому вигляд функції $\varphi(x)$ може істотно впливати на збіжність методу. Деякі способи перетворення рівняння (3.1) розглядатимуться нижче.

Якщо взяти будь-яке число x_0 з інтервалу ізоляції кореня, а $\varphi(x)$ і $\varphi'(x)$ задовольняють деякі умови, про які йдеться нижче, то числове значення кореня можна знайти за допомогою прийому, що носить назву *методу ітерацій.*

Підставивши в праву частину рівняння (3.3) число x_0, знаходять $x_1 = \varphi(x_0)$, далі послідовно знаходять $x_2 = \varphi(x_1)$, $x_3 = \varphi(x_2)$, $\ldots, x_n = \varphi(x_{n-1})$. Ітерацію проводять доти, доки в межах заданої точності не виконається рівність $x_n = x_{n-1}$. Процес ітерації не завжди збіжний. З'ясуємо умови збіжності методу.

Припустимо, що рівняння (3.1) записано у вигляді (3.3) і функція $\varphi(x)$ диференційована в інтервалі ізоляції кореня. Якщо x_0 і x_1 – відповідно нульове і перше наближення кореня x, то $x = \varphi(x)$, $x_1 = \varphi(x_0)$. Віднявши від першої рівності другу й застосувавши до правої частини одержаної рівності формулу скінчених приростів Лагранжа, знайдемо

$$x - x_1 = \varphi(x) - \varphi(x_0) = (x - x_0)\varphi'(c_0), \tag{3.4}$$

де c_0 – число, що лежить між x та x_0. Аналогічно одержуємо рівності:

$$\begin{aligned} x - x_2 &= (x - x_1)\varphi'(c_1), \\ x - x_3 &= (x - x_2)\varphi'(c_2), \\ x - x_4 &= (x - x_3)\varphi'(c_3), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x - x_n &= (x - x_{n-1})\varphi'(c_{n-1}), \end{aligned} \tag{3.5}$$

де $x_2, x_3, \ldots, x_n$ – наближені значення кореня x, а c_1, $c_2, \ldots$, c_{n-1} – числа, що лежать, відповідно, між x і x_1, x і $x_2, \ldots, x$ і x_n.

Перемноживши почленно рівності (3.4) і (3.5), одержимо

$$x - x_n = (x - x_0)\varphi'(c_0)\varphi'(c_1)\ldots\varphi'(c_{n-1}).$$

Якщо в розглядуваному інтервалі найбільше за модулем значення похідної функції $\varphi(x)$ менше одиниці, тобто $\max|\varphi'(x)| = m < 1$, то з попередньої рівності випливає оцінка

$$|x - x_n| \le |x - x_0| m^n.$$

Оскільки $m < 1$, то при достатньо великому n величина $|x - x_n|$ може стати як завгодно малою; звідси випливає, що послідовність $\{x_n\}$ має границею x – зміст **теореми 1**:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

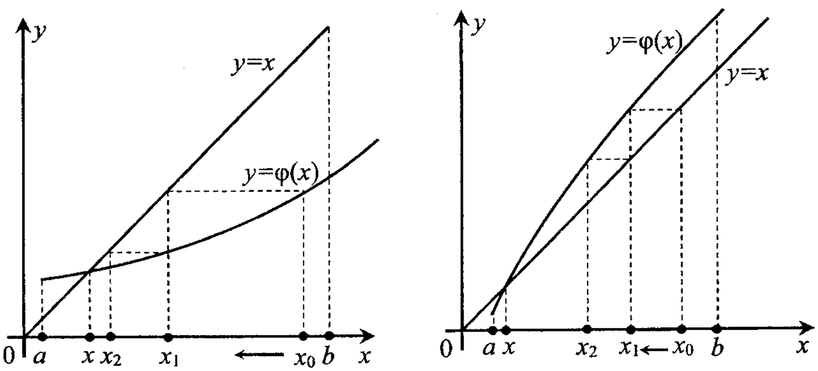
Теорема 2. *Якщо відрізок* $[a;\ b]$ *містить тільки один корінь рівняння* $x = \varphi(x)$ *і якщо в усіх його точках похідна функції* $\varphi(x)$ *не перевищує за модулем деякого числа* $m < 1$, то *ітераційний процес збіжний до кореня* x, причому *за початкове наближення кореня можна прийняти будь-яке число з інтервалу* $(a;\ b)$.

Рівняння (3.1) можна перетворити до вигляду (3.3) різними способами.

а) ***Перший спосіб.*** Для того, щоб забезпечити збіжність ітераційного процесу, його перетворюють так: розглядають рівняння, рівносильне початковому $\mu f(x) = 0$ ($\mu \ne 0$ – const), і до обох його частин додають x: $\mu f(x) + x = x$.

Позначивши $\mu f(x) + x = \varphi(x)$, одержимо рівняння (3.3). Параметр μ підбирають так, щоб $\varphi'(x)$ була за модулем менше одиниці на відрізку $[a;\ b]$.

Методу можна дати геометричну інтерпретацію. Рис. 3.1 і 3.2 дають наочне уявлення про метод ітерації та його збіжність. На рис. 3.1 подано випадок, для якого $\varphi(x) > 0$ (і вгнута (може бути опуклою, але лежати *під прямою* зі сторони b) – рис. 3.1, *а*; і опукла (може бути вгнутою, але лежати *над прямою* зі сторони b) – рис. 3.1, *б*). На рис. 3.2 $\varphi'(x) < 0$ (і опукла – рис. 3.2, *а*; і вгнута – рис. 3.2, *б*). Для рис. 3.1, *а*: через x_0 проводимо пряму паралельну $0y$ до перетину з графіком функції $y = \varphi(x)$; через точку «зустрічі» проводимо пряму, паралельну осі $0x$, та через точку «зустрічі» її з прямою $y = x$ – пряму, паралельну $0y$, яка в перетині з $0x$ дає x_1. Далі оперуємо з x_1 так, як з x_0 і т.д.



а *б*

Рис. 3.1

Тоді абсциси $x_1, x_2, ...$ прямують до кореня x справа. Для рис. 3.1, *б* пряму, паралельну $0y$, проводимо до перетину з прямою $y = x$, а потім з точки перетину – пряму, паралельну осі $0x$, до точки перетину з графіком функції $y = \varphi(x)$ і т. д.

На рис. 3.2 абсциси $x_1, x_2, ...$ приймають почергово значення, то більші, то менші кореня (як вони одержуються, зрозуміти неважко).

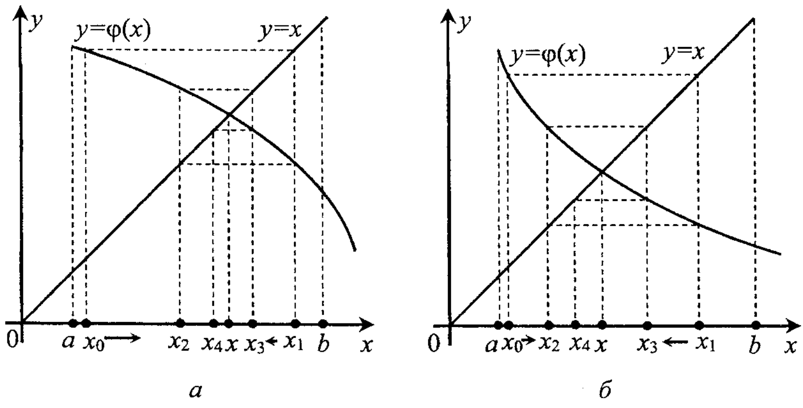


Рис. 3.2

За допомогою *методу ітерації* можна знаходити й комплексно-спряжені корені.

Приклад 3.1. Знайти дійсний корінь рівняння $3x - \ln x = 7$ з чотирма правильними десятковими знаками.

Розв'язання. Якщо подати дане рівняння у вигляді $3x - 7 = \ln x$ та побудувати графіки лівої і правої частин останньої рівності (рис. 3.3), то переконаємося, що корінь даного рівняння x належить інтервалу (2; 3).

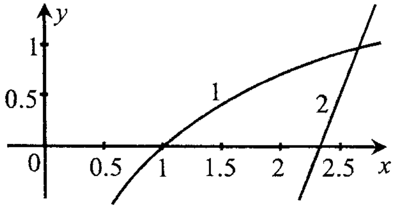


Рис. 3.3

Запишемо рівняння у вигляді $x = (1/3)(7 + \ln x)$.

За початкове наближення візьмемо число $x_0 = 3$. Для даного прикладу маємо $\varphi(x) = (1/3) \cdot (7 + \ln x)$, а $\varphi'(x) = (1/3) \cdot x$.

Тоді $\varphi'(3) = (1/9) < 1$, отже, ітераційний процес збіжний. Тому послідовно одержуємо:

$$x_1 = (1/3)\,(7 + \ln 3) \cong 2{,}69954;$$
$$x_2 \cong (1/3)\,(7 + \ln 2{,}69954) \cong 2{,}66436;$$
$$x_3 \cong (1/3)\,(7 + \ln 2{,}66436) \cong 2{,}65999;$$
$$x_4 \cong (1/3)\,(7 + \ln 2{,}65999) \cong 2{,}65944;$$
$$x_5 \cong (1/3)\,(7 + \ln 2{,}65944) \cong 2{,}65937;$$
$$x_6 \cong (1/3)\,(7 + \ln 2{,}65937) \cong 2{,}65936.$$

Тому $x \cong 2{,}6593$.

Реалізованій ітерації відповідає геометрична інтерпретація зображена на рис. 3.1.

Приклад 3.2. Знайти додатний дійсний корінь рівняння $e^x - x - 3 = 0$ з чотирма десятковими знаками.

Розв'язання. Оскільки $f(1{,}45) < 0$ і $f(1{,}55) > 0$, то $x_0 = 1{,}5$ (таке початкове наближення кореня можна одержати, побудувавши графіки функцій $y = e^x$ та $y = x + 3$).

Для цього завдання, безпосередньо до рівняння $x = e^x - 3$, метод ітерації застосувати не можна, оскільки похідна правої частини $\varphi'(x) = e^x$ більша від одиниці в околі x_0: можлива розбіжність ітераційного процесу.

Розглянемо рівняння $\mu(e^x - x - 3) = 0$, рівносильне даному. Перетворивши його (див. вище): $x = \mu(e^x - x - 3) + x$ та врахувавши, що вираз (значення $\varphi'(x) = \mu(e^x - 1) + 1$ при $\mu = -1/3$ та $x = x_0 = 1{,}5$) $\left|(-1/3)\,(e^{1,5} - 1) + 1\right| < 1$, для ітерацій застосуємо співвідношення:

$$x_{i+1} = (-1/3)\,(e^{x_i} - x_i - 3) + x_i, \text{ де } i = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Послідовно одержимо:

$$x_1 = (-1/3)\,(e^{1,5} - 1{,}5 - 3) + 1{,}5 \cong 1{,}506104;$$

$$x_2 = (-1/3)\,(e^{1,50610} - 1{,}50610 - 3) + 1{,}50610 \cong 1{,}50510;$$

$$x_3 = (-1/3)\,(e^{1,50510} - 1{,}50510 - 3) + 1{,}50510 \cong 1{,}50526;$$

$$x_4 = (-1/3)\,(e^{1,50526} - 1{,}50526 - 3) + 1{,}50526 \cong 1{,}50524;$$

$$x \cong 1{,}5052.$$

Реалізованій ітерації відповідає геометрична інтерпретація, зображена на рис. 3.2.

б) ***Другий спосіб.*** Записують рівняння (3.1) у вигляді

$$\varphi(x) = \psi(x).$$

Графічне зображення кривих $y = \varphi(x)$ та $y = \psi(x)$ дає значення x_0 абсциси точки перетину графіків. Його і приймають за наближене значення кореня. Пряма $x = x_0$ перетне розглядувані криві у двох різних точках.

Вибирають ту з точок, для якої нахил дотичної має меншу за модулем величину. Нехай, наприклад,

$$|\varphi'(x_0)| < |\psi'(x_0)|. \tag{3.6}$$

Візьмемо точку x_0, $y_0 = \varphi(x_0)$. Проведемо через неї пряму, паралельну осі абсцис, яка перетне криву $y = \psi(x)$ в точці з координатами $x_1, y_1 = \varphi(x_1)$. Далі оперуємо з точкою $(x_1;\ y_1)$ так, як з точкою $(x_0;\ y_0)$, і т. д.

Якщо нахили обох кривих мають поблизу точки перетину однаковий знак, то абсциси $x_1, x_2, \ldots$ прямують до кореня з однієї сторони (рис. 3.4).

Якщо нахили кривих мають протилежні знаки, то абсциси $x_1, x_2, \ldots$ приймають почергово значення то більші, то менші, ніж корінь (рис. 3.5).

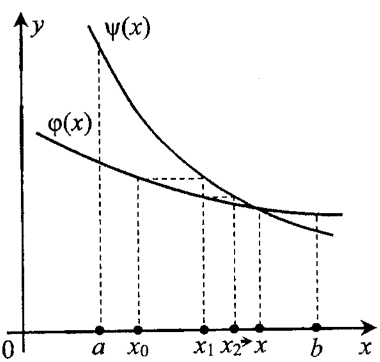


Рис. 3.4

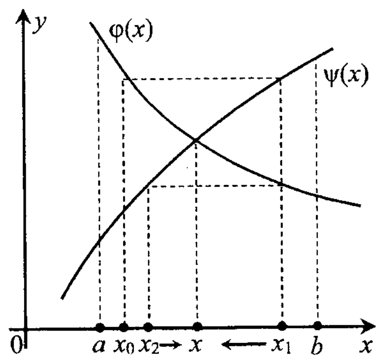


Рис. 3.5

Очевидно, що швидкість збіжності тим швидша, чим більше відрізняються нахили кривих $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ в точці перетину.

Зауваження. Якщо криві перетинаються під дуже гострим кутом, то точність може виявитися не зовсім задовільною. Така небезпека відсутня при знаходженні комплексно-спряжених коренів, коли коефіцієнти рівняння – дійсні числа, оскільки обидві криві при цьому ортогональні.

Приклад 3.3. Обчислити дійсний корінь рівняння

$$\cos x - x + 4 = 0.$$

Розв'язання. Побудова графіків $y = \cos x$ та $y = x - 4$ показує (рис. 3.6), що абсциса точки перетину графіків (наближено) є: $x_0 = 3$.

Приймаємо: $\varphi(x) = \cos x$, $\psi(x) = x - 4$.

Нерівність (3.6) виконується. Послідовно одержуємо:

$y_0 = \cos x_0 = \cos 3 = -0{,}98999, x_1 = y_0 + 4 = 3{,}01001;$

$y_1 = \cos 3{,}01001 = -0{,}99135, \quad x_2 = y_1 + 4 = 3{,}00865;$

$y_2 = \cos 3{,}00865 = -0{,}99013, \quad x_3 = y_2 + 4 = 3{,}00987;$

$y_3 = \cos 3{,}00987 = -0{,}990135, \quad x_4 = y_3 + 4 = 3{,}009865.$

Тому шуканий корінь становить 3,0098 (з усіма правильними значущими цифрами).

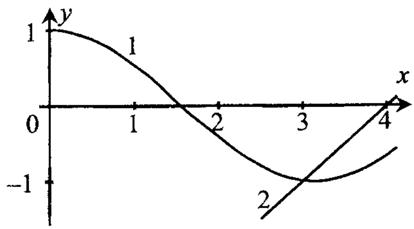


Рис. 3.6

Зауваження. Зупинимося, зокрема, на застосуванні *методу ітерації* для розв'язування алгебраїчних рівнянь.

Нехай необхідно обчислити корінь полінома:

$$g(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ ... + a_1 z + a_n = 0,$$

близький до z_0. Покладемо

$$x = z - z_0.$$

Тоді, повинні знайти близький до нуля корінь полінома:

$$f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ ... + b_1 x + b_n = 0.$$

Якщо коефіцієнт $b_{n-1} = g'(z_0)$ не менший за інші коефіцієнти полінома $f(x)$, то можна прийняти

$$\psi(x) = b_{n-1} x, \ \varphi(x) = -b_0 x^n - b_1 x^{n-1} - \ ... - b_{n-2} x^2 - b_n.$$

При цьому

$$\psi'(0) = b_{n-1}, \psi'(0) = 0,$$

і ці величини суттєво відрізняються. Можна сподіватися, що в точці перетину кривих $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ їх нахили, що лежать поблизу точки $x = 0$, суттєво відрізнятимуться.

Приклад 3.4. Обчислити близький до 2 (рис. 3.7) корінь рівняння:

$$z^3 - 2z - 5 = 0.$$

Розв'язання. Покладемо $x = z - 2$.

Одержуємо:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 10x - 1 = 0.$$

Тобто потрібно розв'язати рівняння

$$\psi(x) = 10x = -x^3 - 6x^2 + 1 = \varphi(x).$$

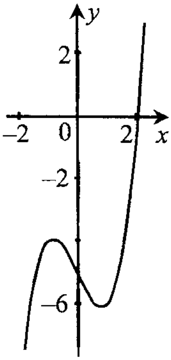


Рис. 3.7

Послідовно одержуємо:

$x_0 = 0;$ $\quad y_0 = \varphi(x_0) = 1;$

$10x_1 = y_0 = 1;$ $\quad x_1 = 0{,}1;$

$y_1 = \varphi(0{,}1) = 0{,}939;$

$10x_2 = y_1 = 0{,}939;$ $\quad x_2 = 0{,}0939;$

$y_2 = \varphi(x_2) = 0{,}946\ldots;$

$10x_3 = y_2 = 0{,}946\ldots;$ $\quad x_3 = 0{,}0946\ldots;$

$y_3 = \varphi(x_3) = 0{,}94546\ldots;$

$10x_4 = y_3 = 0{,}94546\ldots;$ $\quad x_4 = 0{,}094546\ldots;$

$y_4 = \varphi(x_4) = 0{,}94552\ldots;$

$10x_5 = y_4 = 0{,}94552\ldots;$ $\quad x_5 = 0{,}094552\ldots.$

На цій стадії наближення $z = 2{,}094552\ldots$ (точний корінь – $z = 2{,}09455148\ldots$).

3.4. Метод Ньютона (метод дотичних)

Нехай задано рівняння

$$f(x) = 0. \tag{3.7}$$

Функція $f(x)$ повинна задовольняти умови: бути двічі диференційованою в околі шуканого кореня, при чому похідні відмінні від нуля, знакосталі; початкове наближення кореня $x = x_0$ належить вказаному околу.

Позначимо через h поправку, яку необхідно надати x_0, щоб одержати точне значення кореня x:

$$x = x_0 + h, x - x_0 = h.$$

Рівняння (3.7) можна подати так: $f(x_0 + h) = 0$.

Функцію $f(x_0 + h)$ подамо рядом Тейлора:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \ \ldots = 0.$$

Відкидаючи члени розкладу, що містять похідні, вищі першого порядку, одержимо рівняння для визначення наближеного значення кореня x_1:

$$f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0) = 0,$$

звідки

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{3.8}$$

Знаючи x_1, наступне, покращене значення кореня x_2 знаходимо за формулою

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Подібним же чином:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

і взагалі

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (i = \overline{1,n}). \qquad (3.9)$$

Обчислення необхідно проводити доти, доки в межах прийнятої точності x_n дорівнюватиме x_{n+1}.

Метод Ньютона має просту геометричну інтерпретацію, якщо $f(x)$, шуканий корінь x та початкове наближення x_0 дійсні.

Побудуємо на проміжку $[a;\ b]$, що містить один корінь рівняння $f(x) = 0$, графік функції $f(x)$. Твердження про те, що на відрізку $[a;\ b]$ похідні $f'(x)$ і $f''(x)$ неперервні, знакосталі й відмінні від нуля, геометрично означає, що в будь-якій точці проміжку $[a;\ b]$ крива $y = f(x)$ має дотичну, не має екстремумів і точок перегину. Оскільки відрізок містить один корінь рівняння, то крива в одній точці перетинає вісь абсцис. Виберемо на кривій довільну точку M_0 з абсцисою x_0 таку, що $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, і проведемо дотичну до кривої в цій точці, рівняння якої

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Знайдемо точку x_1 перетину дотичної з віссю абсцис. У точці $x = x_1$, $f(x_1) = 0$ маємо: $-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$. З останньої рівності одержуємо формулу (3.8)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Тепер проведемо дотичну до графіка функції в точці M_1 з абсцисою x_1 і знайдемо точку перетину нової дотичної з віссю $0x$:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Описаний процес побудови дотичних й обчислення їх перетину з віссю $0x$ можна продовжувати. Точку x_{n+1} перетину дотичної з віссю $0x$ знаходимо за формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

що співпадає з формулою (3.9).

Покажемо тепер, що якщо $f(x_k)$ і $f''(x_k)$ одного знака, то число

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

лежить між дійсним значенням кореня x і числом x_k, тобто x_{k+1} ближче до x, ніж x_k. Для визначеності припустимо, що $f(x_k)$, $f'(x_k)$ і $f''(x_k)$ додатні. Формула (3.9) дозволяє записати нерівності

$$x_{k+1} - x_k < 0, x_{k+1} < x_k. \quad (3.10)$$

Подамо функцію $f(x_k + h)$ через формулу Тейлора при $n = 2$:

$$f(x_k) + \frac{(x - x_k)}{1!} f'(x_k) + \frac{(x - x_k)^2}{2!} f''(c) = 0,$$

звідки

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + (x - x_k) + \frac{(x - x_k)}{2!} \frac{f''(c)}{f'(x_k)} = 0. \quad (3.11)$$

Віднімаючи почленно з (3.11) рівність

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

одержимо:

$$x - x_{k+1} = -\frac{(x - x_k)}{2!} \frac{f''(c)}{f'(x_k)}.$$

За умовою, похідні $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ і знакосталі, то і $f''(c) > 0$; тому

$$x - x_{k+1} < 0, \;\; x < x_{k+1}. \quad (3.12)$$

Зіставляючи нерівності (3.10) і (3.12), робимо висновок:

$$x < x_{k+1} < x_k. \quad (3.13)$$

Якщо похідна $f'(x)$ зберігає знак на проміжку, але від'ємна, то останнє твердження залишається справедливим, проте зміст нерівності (3.13) буде іншим: $x > x_{k+1} > x_k$.

Легко переконатися, що якщо:

1) $f(x_k) < 0$, $f''(x_k) < 0$, $f'(x_k) > 0$, то $x > x_{k+1} > x_k$;

2) $f(x_k) < 0$, $f''(x_k) < 0$, $f'(x_k) < 0$, то $x < x_{k+1} < x_k$.

На рис. 3.8, *а*, *б*, *в*, *г* показано суть методу дотичних.

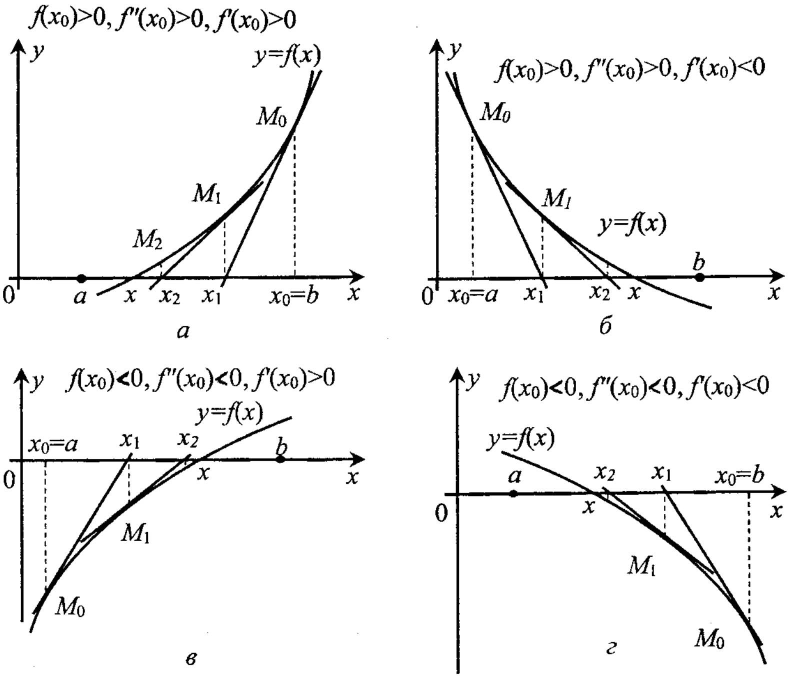


Рис. 3.8

3.4.1. Оцінка похибки методу Ньютона

Поправка h, яку необхідно надати початковому наближенню кореня x_0, щоб одержати точне його значення, визначається з рівності

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(c) = 0, \quad (3.14)$$

$$c = x_0 + \theta h \ (0 < \theta < 1);$$

а поправка $h_1 = x_1 - x_0$ визначається з рівності

$$f(x_0) + h_1 f'(x_0) = 0. \quad (3.15)$$

Віднявши з рівності (3.14) рівність (3.15), одержимо:

$$(h - h_1) f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(c) = 0.$$

Нехай M – найбільше значення модуля другої похідної $f''(x)$ на проміжку ізоляції кореня $|f''(x)| \leq M$, величина $|f''(x_0)|$ більша від одиниці і $h, h_1, h - h_1$ достатньо малі. Тоді з попередньої рівності випливає оцінка

$$|h - h_1| \leq \frac{h_1 M}{2|f'(x_0)|},$$

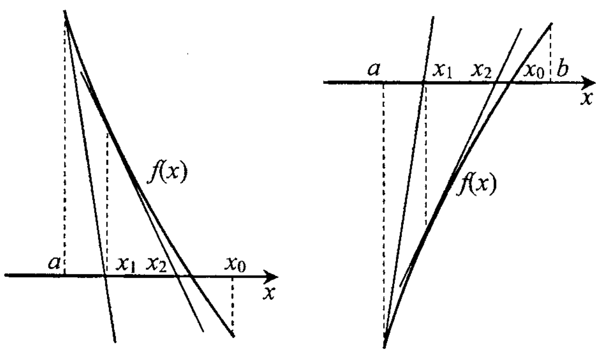
з точністю до найменших вищого порядку порівняно з h_1^2.

При практичному застосуванні методу Ньютона використовують такий алгоритм:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

причому $x_0 = a$, якщо $f(a) \cdot f''(x) > 0$.

На рис. 3.9 наведено геометричну інтерпретацію умови $f(a) \cdot f''(x) > 0$: як потрібно проводити дотичні, точки перетину яких з віссю $0x$ дають x_i – наближення точного значення кореня x_0.



а *б*

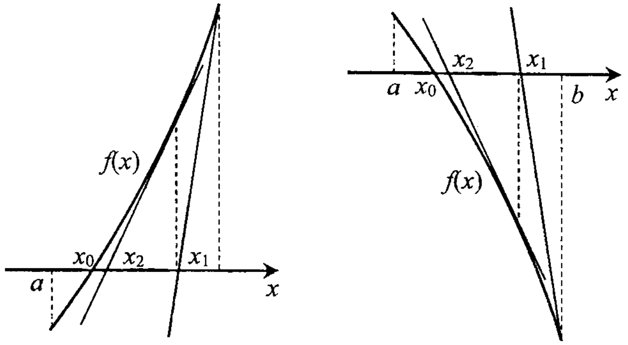
Рис. 3.9

Якщо $f(b) \cdot f''(x) > 0$ на $[a;\ b]$, то $x_0 = b$.

На рис. 3.10 наведено геометричну інтерпретацію умови $f(b) \cdot f''(x) > 0$: як потрібно проводити дотичні, точки перетину яких з віссю $0x$ дають x_i – наближення точного значення кореня x_0.

Видозмінена формула має вигляд:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$



а *б*

Рис. 3.10

Приклад 3.5. З п'ятьма правильними значущими цифрами знайти дійсний корінь рівняння $\operatorname{tg} x - x - 1 = 0$.

Розв'язання. За початкове значення кореня приймемо число $x_0 = 1{,}1$, яке легко знайти графічно. Маємо:

$$f(x) = \operatorname{tg} x - x - 1; \;\; f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1;$$

$$|f'(1{,}1)| = |2{,}2046^2 - 1| > 1,$$

тому метод Ньютона можна застосовувати.

Наближене значення кореня знайдемо за формулою (3.9).

Перше наближення:

$$x_1 = 1{,}1 - \frac{1{,}9648 - 1{,}1 - 1}{(2{,}2046)^2 - 1} = 1{,}1 + 0{,}0350 = 1{,}1350;$$

друге наближення:

$$x_2 = 1{,}1350 - \frac{2{,}1475 - 1{,}1250 - 1}{(2{,}3689)^2 - 1} = 1{,}1350 - 0{,}0027 = 1{,}1323;$$

третє наближення:

$$x_3 = 1{,}1323 - \frac{2{,}1324 - 1{,}1323 - 1}{(2{,}3553)^2 - 1} = 1{,}1323 - \frac{0{,}0001}{(2{,}3553)^2 - 1} =$$

$$= 1{,}1332 + 0{,}0000 = 1{,}1323;$$

$$x \cong 1{,}1323.$$

Приклад 3.6. Знайти всі корені рівняння $x^3 - x - 2 = 0$ з чотирма правильними знаками.

Розв'язання. Позначимо $f(x) = x^3 - x - 2$, тоді $f'(x) = 3x^2 - 1$.

Обчислимо дійсні корені. Побудувавши графіки функцій $f(x) = x^3$ та $f(x) = x + 2$, знайдемо: $x_0 = 1{,}51$. Для значень x, близьких до x_0, похідна $f'(x)$ значно більша за одиницю, тому можна очікувати, що збіжність методу Ньютона буде досить швидкою. Обчислення наближених значень кореня проведемо за формулою (3.9):

$$x_1 = 1{,}51 - \frac{f(1{,}51)}{f'(1{,}51)} = 1{,}52148;$$

$$x_2 = 1{,}52148 - \frac{f(1{,}52148)}{f'(1{,}52148)} = 1{,}52138;$$

$$x_3 = 1{,}52138 - \frac{f(1{,}52138)}{f'(1{,}52138)} = 1{,}52138;$$

$$x \cong 1{,}52138 \text{ (п'ять правильних знаків).}$$

Обчислимо комплексно-спряжені корені. Розглянемо рівняння (в цьому рівнянні змінну x замінено комплексною змінною z)

$$z^3 - z - 2 = 0.$$

Поклавши $z = x + iy$ та зробивши відповідні перетворення, одержимо систему:

$$\begin{cases} f(x;\ y) = y(3x^2 - y^2 - 1) = 0; & (3.15\ а) \\ \varphi(x;\ y) = x^3 - 3xy^2 - x - 2 = 0. & (3.15\ б) \end{cases}$$

Із системи (3.15 а) $y = 0$ відповідає дійсному кореню. У площині $x0y$ крива $3x^2 - y^2 - 1 = 0$ – гіпербола (на рис. 3.11 її графік позначено цифрою 2). Вона перетинає криву третього порядку (на рис. 3.11 вона позначена цифрою 1) у двох симетричних відносно осі $0x$ точках, координати яких наближено дорівнюють:

$$x = -0{,}7;\ y = \pm 0{,}8.$$

Тому за початкове наближення приймаємо:

$$x_0 = -0{,}7 + 0{,}8i.$$

Для уточнення x_0 скористаємося формулою (3.9):

$$x_1 = -0{,}7 + 0{,}8i - \frac{(-0{,}7 + 0{,}8i)^3 - (-0{,}7 + 0{,}8i) - 2}{3(-0{,}7 + 0{,}8i)^2 - 1} =$$
$$= -0{,}7665 + 0{,}8603i;$$

$$x_2 = -0{,}7665 + 0{,}8603i -$$
$$-\frac{(-0{,}7665 + 0{,}8603i)^3 - (-0{,}7665 + 0{,}8603i) - 2}{3(-0{,}7665 + 0{,}8603i)^2 - 1} =$$
$$= -0{,}7608 + 0{,}8579i;$$
$$x_3 = -0{,}7608 + 0{,}8579i -$$
$$-\frac{(-0{,}7607 + 0{,}8579i)^3 - (-0{,}7607 + 0{,}8579i) - 2}{3(-0{,}7607 + 0{,}8579i)^2 - 1} =$$
$$= -0{,}7608 + 0{,}8581i.$$

Тому комплексно-спряженими коренями даного рівняння є:

$$-0{,}7608 \pm 0{,}8581i.$$

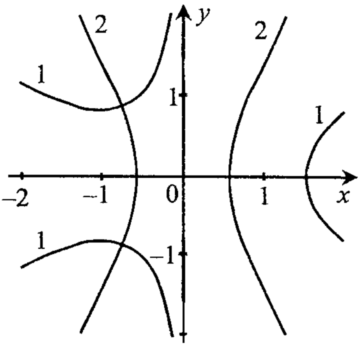


Рис. 3.11

3.5. Метод Ньютона для систем рівнянь

Нехай задано систему рівнянь:

$$\begin{cases} f(x;\ y) = 0; \\ \varphi(x;\ y) = 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Потреба в розв'язуванні системи (3.16) може виникнути, зокрема, при знаходженні комплексних коренів рівняння

$$\psi(z) = 0. \tag{3.17}$$

Справді, поклавши $z = x + iy$ та відділивши дійсну частину від уявної, рівняння (3.17) можна подати у вигляді

$$f(x;\ y) + i\varphi(x;\ y) = 0.$$

З останньої рівності одержаємо систему (3.16).

Функції $f(x;\ y)$ та $\varphi(x;\ y)$ в області D, що містить розв'язок, мають неперервні частинні похідні першого порядку за обома аргументами, і в околі розв'язку матриця

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y \end{pmatrix} - \text{невироджена.}$$

Нехай початкове наближення розв'язку x_0 та y_0 відоме, наприклад, знайдене графічно.

Позначимо через h і k поправки, які необхідно надати x_0 та y_0 для одержання точних значень коренів $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$; систему рівнянь (3.16) можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} f(x_0 + h;\ y_0 + k) = 0; \\ \varphi(x_0 + h;\ y_0 + k) = 0. \end{cases}$$

Розкладемо функції $f(x_0 + h;\ y_0 + k)$, $\varphi(x_0 + h;\ y_0 + k)$ в ряд Тейлора, утримуючи в розкладі тільки лінійні члени відносно h і k:

$$f(x_0 + h;\ y_0 + k) = f(x_0;\ y_0) + f'_x(x_0;\ y_0)h +$$
$$+ f'_y(x_0;\ y_0)k + \ ... = 0;$$
$$\varphi(x_0 + h;\ y_0 + k) = \varphi(x_0;\ y_0) + \varphi'_x(x_0;\ y_0)h +$$
$$+ \varphi'_y(x_0;\ y_0)k + \ ... = 0.$$

Частинні похідні, що містять розклади, обчислюються для значень $x = x_0$, $y = y_0$. Тепер замість системи (3.16) потрібно розв'язувати систему рівнянь:

$$\begin{cases} f(x_0;\ y_0) + f'_x(x_0;\ y_0)h + f'_y(x_0;\ y_0)k = 0; \\ \varphi(x_0;\ y_0) + \varphi'_x(x_0;\ y_0)h + \varphi'_y(x_0;\ y_0)k = 0, \end{cases}$$

лінійну відносно поправок h і k.

Знайдені поправки через те, що в тейлорівському розкладі утримувалися тільки лінійні члени, будуть неточними. Далі обчислюють перше наближення шуканих поправок, які позначають h_1 та k_1. Числа h_1 та k_1 знаходять з останньої системи (лінійної). Її можна розв'язати кількома способами, в тому числі й за формулами Крамера:

$$h_1 = \frac{\begin{vmatrix} -f(x_0;\ y_0) & f'_y(x_0;\ y_0) \\ -\varphi(x_0;\ y_0) & \varphi'_y(x_0;\ y_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_x(x_0;\ y_0) & f'_y(x_0;\ y_0) \\ \varphi'_x(x_0;\ y_0) & \varphi'_y(x_0;\ y_0) \end{vmatrix}};\ k_1 = \frac{\begin{vmatrix} f'_x(x_0;\ y_0) & -f(x_0;\ y_0) \\ \varphi'_x(x_0;\ y_0) & -\varphi(x_0;\ y_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_x(x_0;\ y_0) & f'_y(x_0;\ y_0) \\ \varphi'_x(x_0;\ y_0) & \varphi'_y(x_0;\ y_0) \end{vmatrix}}. \quad (3.18)$$

Додавши до x_0 та y_0 знайдені поправки h_1 і k_1, знайдемо перше наближення шуканого розв'язку $x_1 = x_0 + h_1$, $y_1 = y_0 + k_1$. За формулами, аналогічними (3.18), можна знайти й другі наближення поправок – числа h_2 і k_2, причому значення функцій $f(x;\ y)$, $\varphi(x;\ y)$ і їх похідних обчислюються для значень аргументів x_1 та y_1. Значення невідомих x_2 та y_2 знаходять за формулами:

$$x_2 = x_1 + h_2;\ y_2 = y_1 + k_2.$$

Описаний процес обчислень продовжують доти, доки в межах прийнятої точності не одержать: $x_n = x_{n+1}$; $y_n = y_{n+1}$.

Метод Ньютона, викладений для системи двох рівнянь з двома невідомими, поширюється на системи n рівнянь з n невідомими.

Приклад 3.7. Знайти розв'язок системи рівнянь, що відповідає меншій абсцисі:

$$\begin{cases} f(x;\ y) = 2x^2 - xy - 5x + 5 = 0; & (3.18\ а) \\ \varphi(x;\ y) = x + y\sin x - 5y + 7{,}3 = 0, & (3.18\ б) \end{cases}$$

з чотирма значущими цифрами.

Розв'язання. З графіків співвідношень (3.18 а) і (3.18 б) (рис. 3.12) видно, що за початкове на– ближення розв'язку можна взяти $x_0 = 0{,}85$, $y_0 = 2{,}15$.

Послідовно одержуємо:

$$f'_x = 4x - y - 5;\ f'_y = -x;$$
$$\varphi'_x = 1 + y\cos x;\ \varphi'_y = \sin x - 5.$$

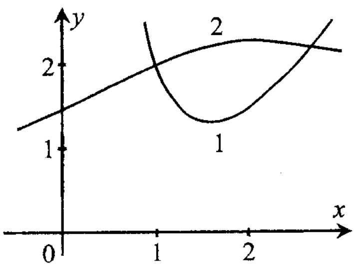


Рис. 3.12

Перше наближення:

$$f(0{,}85;\ 2{,}15) = 0{,}3675;\ f'_x(0{,}85;\ 2{,}15) = -3{,}75;$$
$$f'_y(0{,}85;\ 2{,}15) = -0{,}85;\ \varphi(0{,}85;\ 2{,}15) = -0{,}9847;$$
$$\varphi'_x(0{,}85;\ 2{,}15) = 2{,}4190;\ \varphi'_y(0{,}85;\ 2{,}15) = -4{,}2487;$$

$$h_1 = \frac{\begin{vmatrix} -0{,}3675 & -0{,}85 \\ 0{,}9847 & -4{,}2487 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3{,}75 & -0{,}85 \\ 2{,}4190 & -4{,}2487 \end{vmatrix}} = \frac{2{,}4504}{17{,}9888} = 0{,}1333;$$

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} -3{,}75 & -0{,}3675 \\ 2{,}4190 & 0{,}9847 \end{vmatrix}}{17{,}9888} = -0{,}1559;$$

$$x_1 = 0{,}85 + 0{,}1333 = 0{,}9833;\ y_1 = 2{,}15 - 0{,}1559 = 1{,}9941.$$

Друге наближення:

$$f(0{,}9833;\ 1{,}9941) = 0{,}0565;\ \varphi(0{,}9833;\ 1{,}9941) = -0{,}0274;$$
$$f'_x(0{,}9833;\ 1{,}9941) = -3{,}0609;\ f'_y(0{,}9833;\ 1{,}9941) = -0{,}9833;$$
$$\varphi'_x(0{,}9833;\ 1{,}9941) = 2{,}1053;\ \varphi'_y(0{,}9833;\ 1{,}9941) = -4{,}1677;$$
$$h_2 = 0{,}0177;\ k_2 = 0{,}0024;\ x_2 = 0{,}9833 + 0{,}0177 = 1{,}0010;$$
$$y_2 = 1{,}9941 + 0{,}0024 = 1{,}9965.$$

Третє наближення:

$$f(1{,}0010;\ 1{,}9965) = 0{,}0005;\ \varphi(1{,}0010;\ 1{,}9965) = -0{,}0004;$$
$$f'_x(1{,}0010;\ 1{,}9965) = -2{,}9807;\ f'_y(1{,}0010;\ 1{,}9965) = -1{,}0034;$$
$$\varphi'_x(1{,}0010;\ 1{,}9965) = 2{,}0718;\ \varphi'_y(1{,}0010;\ 1{,}9965) = -4{,}1567;$$
$$h_3 = 0{,}0000;\ k_3 = -0{,}0000;\ x_3 = 1{,}0010 + 0{,}0000 = 1{,}0010;$$
$$y_3 = 1{,}9965 - 0{,}0000 = 1{,}9965.$$

Значення x_2 і x_3, y_2 і y_3 співпадають з вказаною точністю. Тому пара чисел x_3 і y_3 – розв'язок системи, що задовольняє умову завдання.

Завдання для самостійної роботи

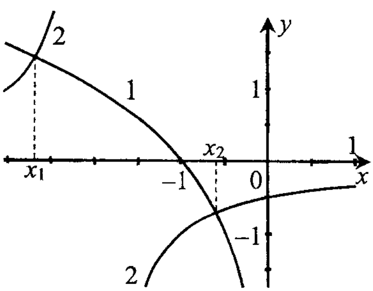


Рис. 3.13

1. Розв'язати рівняння

$$4z^3 - 3z^2 - 6z - 3 = 0.$$

Примітка. Для знаходження комплексно-спряжених коренів зробити заміну $z = x + iy$ та скористатися рис. 3.13.

Відповідь: $z_1 = -1{,}8086$;

$$z_{2,3} = -0{,}5293 \pm 0{,}3666i.$$

3.6. Метод хорд

1) Якщо $f(b) \cdot f''(x) > 0$ на $[a;\ b]$, то:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n)\ (\text{причому}\ x_0 = a).$$

На рис. 3.14 наведено геометричну інтерпретацію умови $f(b) \cdot f''(x) > 0$: як потрібно проводити хорди, точки перетину яких з віссю $0x$ дають x_i – наближення точного значення кореня x_0.

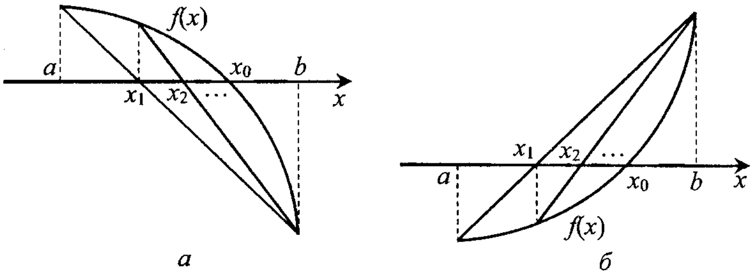


Рис. 3.14

2) Якщо $f(a) \cdot f''(x) > 0$ на $[a;\ b]$, то:

$$x_{n+1} = a - \frac{f(a)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a) \ \ (\text{причому } x_0 = b).$$

На рис. 3.15 наведено геометричну інтерпретацію умови $f(a) \cdot f''(x) > 0$: як потрібно проводити хорди, точки перетину яких з віссю $0x$ дають x_i – наближення точного значення кореня x_0.

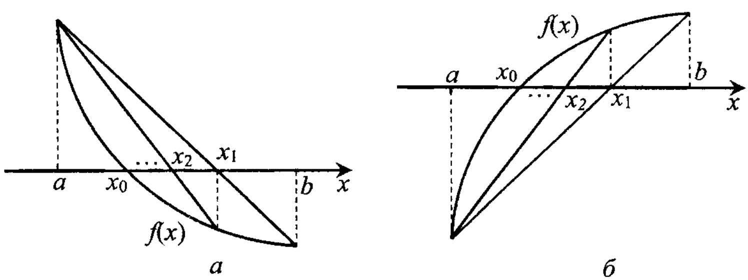


Рис. 3.15

3.7. Комбінований метод хорд і дотичних

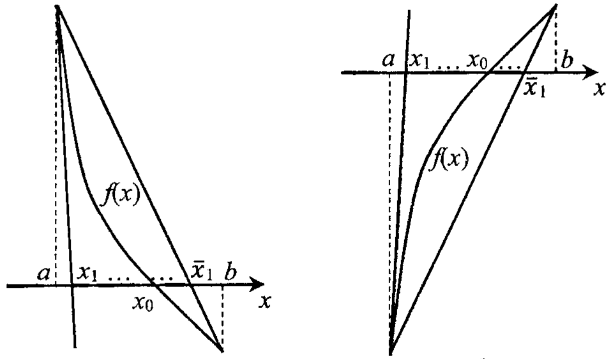
Нехай x_{n+1} і $\bar{x}_{n+1}$ – наближені значення кореня з недостачею та надлишком відповідно.

1) Якщо $f(a) \cdot f''(x) > 0$ на $[a;\ b]$, то:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \quad \bar{x}_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n),$$

(причому $x_0 = a, \bar{x}_0 = b$).

На рис. 3.16 наведено геометричну інтерпретацію умови $f(a) \cdot f''(x) > 0$: як потрібно проводити дотичні й хорди, точки перетину яких з віссю $0x$ дають x_i та $\bar{x}_i$ – наближення відповідно з недостачею та надлишком точного значення кореня x_0.



а *б*

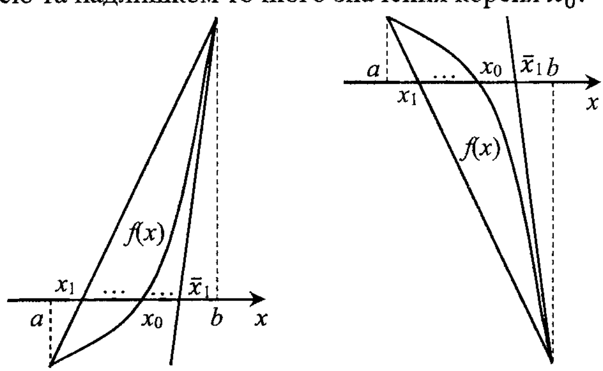
Рис. 3.16

2) Якщо $f(b) \cdot f''(x) > 0$ на $[a;\ b]$, то:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n); \quad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)},$$

(причому $x_0 = a, \bar{x}_0 = b$).

На рис. 3.17 наведено геометричну інтерпретацію умови $f(b) \cdot f''(x) > 0$: як потрібно проводити хорди й дотичні, точки перетину яких з віссю $0x$ дають x_i та $\bar{x}_i$ – наближення відповідно з недостачею та надлишком точного значення кореня x_0.



а *б*

Рис. 3.17

3.8. Класичні способи розв'язування рівнянь третього та четвертого степеня

1. Дано рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Виконавши заміну змінної $x = z - a/3$, зведемо дане рівняння до вигляду $z^3 - pz - q = 0$.

Можливі такі випадки:

1) $p < 0$.

Змінивши

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2p}{3q} \cdot \sqrt{\frac{-p}{3}}, \ \operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}(\theta/2)} \ ,$$

одержимо корені:

$$-2 \cdot \sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2\varphi}, \ \sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2\varphi} \pm i\sqrt{-p} \cdot \frac{1}{\sin 2\varphi}.$$

2) $p > 0, \ \left(\frac{p}{3}\right)^3 < \left(\frac{q}{2}\right)^2$.

Замінивши

$$\sin\theta = -\frac{2p}{3q} \cdot \sqrt{\frac{p}{3}}, \ \ \operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}(\theta/2)} \ ,$$

одержимо корені:

$$2 \cdot \sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{\sin 2\varphi}, \ \ -\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{\sin 2\varphi} \pm i\sqrt{p} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2\varphi}.$$

3) $p > 0, \ \left({}^{p}/_{3}\right)^3 > \left({}^{q}/_{2}\right)^2$.

Замінивши

$$\cos\varphi = \frac{3q}{2p} \cdot \sqrt{{}^{3}/_{p}},$$

одержимо корені:

$$2 \cdot \sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos\frac{\varphi}{3}, \ \ -2 \cdot \sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3}\right), \ \ -2 \cdot \sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right).$$

4) $p > 0, \ \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{q}{2}\right)^2$.

Корені:

$$-\frac{3q}{2p}, \ \ -\frac{3q}{2p}, \ \ \frac{3q}{2p}.$$

Заміна $x = z - a/3$ дає корені початкового рівняння.

Приклад 3.8. Розв'язати рівняння $x^3 - 3x^2 - 8x + 4 = 0$.

Розв'язання. Замінивши $x = z + 1$, одержимо рівняння:

$$z^3 - 11z - 6 = 0.$$

Це третій випадок:

$$\cos\varphi = \frac{18}{22} \cdot \sqrt{3/_{11}} = 0{,}42728, \ \ \varphi = 64^\circ 42' 17''.$$

$$z_1 = 2 \cdot \sqrt{11/_3} \cdot \cos 21^\circ 34' 5'' = 2 \cdot \sqrt{11/_3} \cdot 0{,}92998 = 3{,}5615;$$

$$z_2 = -2 \cdot \sqrt{11/_3} \cos 38^\circ 25' 55'' = -2 \cdot \sqrt{11/_3} \cdot 0{,}78334 = -2{,}9999;$$

$$z_3 = -2 \cdot \sqrt{11/_3} \cos 81^\circ 34' 5'' = -2 \cdot \sqrt{11/_3} \cdot 0{,}14664 = -0{,}56158.$$

Тому

$$x_1 = 4{,}5615, \ \ x_2 = -1{,}9999, \ \ x_3 = 0{,}43841.$$

Добуток $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ дає

$$x^3 - 3{,}00001x^2 - 7{,}9995x + 3{,}9994.$$

2. Дано рівняння $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Розглянемо рівняння третього степеня

$$z^3 + rz^2 + sz + t = 0,$$

коефіцієнти якого визначаються формулами

$$r = -b, \ \ s = ac - 4d, \ \ t = d(4b - a^2) - c^2.$$

Нехай Z – найбільший дійсний корінь рівняння. Цей корінь знайдемо таким способом. Обчислимо величини:

$$p = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(a/_2\right)^2 - b + Z}; \ \ q = \frac{Z}{2} + \varepsilon \cdot \sqrt{\left(Z/_2\right)^2 - d}\,;$$

$$p' = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(a/_2\right)^2 - b + Z}; \quad q' = \frac{Z}{2} - \varepsilon \cdot \sqrt{\left(Z/_2\right)^2 - d}\,,$$

в яких

$$\varepsilon = +1, \text{ якщо } \ \frac{aZ}{2} - c > 0; \ \varepsilon = -1, \text{ якщо } \ \frac{aZ}{2} - c < 0.$$

Шукані корені знаходять з двох рівнянь:

$$x^2 + px + q = 0;$$
$$x^2 + p'x + q' = 0.$$

Приклад 3.9. Розв'язати рівняння:

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Розв'язання. Одержимо:

$$r = -3, \; s = -8, \quad t = 4.$$

Допоміжне рівняння

$$z^3 - 3z^2 - 8z + 4 = 0$$

розв'язано в попередньому прикладі. Тому $Z = 4{,}5615$. Маємо $\varepsilon = +1$ і

$$p = 1 + \sqrt{1 - 3 + 4{,}5615} = 2{,}6005;$$

$$p' = 1 - \sqrt{1 - 3 + 4{,}5615} = -0{,}6005;$$

$$q = \frac{4{,}5615}{2} + \sqrt{\left(\frac{4{,}5615}{2}\right)^2 - 1} = 4{,}33058;$$

$$q' = \frac{4{,}5615}{2} - \sqrt{\left(\frac{4{,}5615}{2}\right)^2 - 1} = 0{,}23092.$$

Одержимо два рівняння:

$$x^2 + 2{,}6005x + 4{,}33058 = 0;$$

$$x^2 - 0{,}6005x + 0{,}23092 = 0,$$

корені яких:

$$-1{,}3002 \pm 1{,}6248i; \; 0{,}3002 \pm 0{,}37519i.$$

Обчисливши добутки лівих частин обох рівнянь другого степеня, знайдемо:

$$x^4 + 2{,}0000x^3 + 2{,}9999x^2 - 2{,}000005x + 1{,}00001 = 0,$$

що підтверджує високу точність обчислень.

3.9. Спосіб Лагранжа

Нехай $f_1(x_1) = 0$ – алгебраїчне рівняння, яке необхідно розв'язати. Потрібно знайти його корінь a, що належить інтервалу $(a_1;\, a_1 + 1)$.

Виконаємо заміну змінної

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}.$$

Одержимо при цьому алгебраїчне рівняння $f_2(x_2) = 0$, один корінь якого належить інтервалу $(1;\, \infty)$. Нехай a_2 і $a_2 + 1$ – два цілих числа, між якими лежить цей корінь. Проведемо заміну змінної

$$x_2 = a_2 + {}^1/_{x_3}$$

і т. д. Шуканий корінь визначається рівністю

$$x_1 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\dots}}}},$$

і, якщо він раціональний, то останній неперервний дріб скінченний.

Приклад 3.10. Знайти корінь рівняння

$$f_1(x_1) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 12x - 1 = 0,$$

що належить інтервалу (3; 4).

Розв'язання. Змінивши $x_1 = 3 + {}^1/_{x_2}$,

одержимо рівняння

$$f_2(x_2) = 10x_2^3 - 24x_2^2 - 15x_2 - 2 = 0,$$

корінь якого, більший за «+1», належить інтервалу (2; 3). На це вказує та обставина, що в послідовності чисел $f_2(1), f_2(2), f_2(3), \dots$ вперше зміна знака спостерігається при переході від $f_2(2)$ до $f_2(3)$. Замінивши

$$x_2 = 2 + {}^1/_{x_3},$$

одержимо рівняння

$$f_3(x_3) = 48x_3^3 - 9x_3^2 - 36x_3 - 10 = 0,$$

корінь якого, більший за «+1», належить інтервалу (1; 2). Замінивши

$$x_3 = 1 + {}^1/_{x_4},$$

одержимо рівняння

$$f_4(x_4) = 7x_4^3 - 90x_4^2 - 135x_4 - 48 = 0,$$

корінь якого, більший за «+1», належить інтервалу (14; 15).

Замінивши

$$x_4 = 14 + {}^1/_{x_5},$$

одержимо рівняння:

$$f_5(x_5) = 370x_5^3 - 1461x_5^2 - 204x_5 - 7 = 0,$$

корінь якого, більший за «+1», належить інтервалу (4; 5).

Якщо на цьому припинити наближення, то шуканий корінь міститиметься між

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{14+\frac{1}{4}}}}=3{,}34078 \text{ і } 3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{14+\frac{1}{5}}}}=3{,}34080.$$

3.10. Завдання для самостійної, домашньої роботи і приклади їх розв'язання

Завдання 1

1. Відокремити корені аналітично.

2. Відокремити корені аналітично й уточнити один з них методом проб з точністю $\varepsilon = 0{,}01$.

3. Відокремити корені графічно.

4. Відокремити корені графічно й уточнити один з них методом проб з точністю $\varepsilon = 0{,}01$.

Варіанти до завдання 1

№ 1

1. $2e^x = 5x + 2$;
2. $x^4 - x - 1 = 0$;
3. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + x^2 = 3x - 2$;
4. $(x-3)\cos x = 1, \quad -2\pi \le x \le 2\pi$.

№ 2

1. $5^x + 3x = 0$;
2. $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$;
3. $x \cdot \log_3(x+1) = 1$;
4. $x^2\log_{0,5}(x+1) = 1$.

№ 3

1. $2^x + 5x - 3 = 0$;
2. $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$;
3. $x^2 - 2 + 0,5^x = 0$;
4. $\cos(x + 0{,}5) = x^3$.

№ 4

1. $5^x - 6x - 3 = 0$;
2. $2x^4 - x^2 - 10 = 0$;
3. $0,5^x + 1 = (x-2)^2$;
4. $(x-1)^2 \cdot \lg(x+11) = 1$.

№ 5

1. $5^x - 6x - 3 = 0$;
2. $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0$;
3. $x^2 \cdot 2^x = 1$;
4. $5\sin x = x$.

№ 6

1. $e^{-2x} - 2x + 1 = 0$;
2. $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0$;
3. $2x^2 - 0,5^x - 3 = 0$;
4. $\operatorname{tg} x = x + 1, \quad {}^{-\pi}/_2 \le x \le {}^{\pi}/_2$.

№ 7

1. $2\operatorname{arctg} x - {}^1/_{2x^3} = 0$;
2. $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$;
3. $0,5^x - 1 = (x+2)^2$;
4. $x\lg(x+1) = 1$.

№ 8

1. $3^{x-1} - 2 - x = 0$;
2. $x^4 - 18x^2 + 6 = 0$;
3. $(x-4)^2 \cdot \log_{0,5}(x-3) = -1$;
4. $x^2\cos 2x = -1$.

№ 9

1. $2\,\mathrm{arctg}\,x - 3x + 2 = 0$;
2. $2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0$;
3. $2\sin\left(x + {}^{\pi}/_{3}\right) = 0{,}5x^2 - 1$;
4. $x^2 - 20\sin x = 0$.

№ 10

1. $3^x + 2x - 2 = 0$;
2. $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$;
3. $2^x\left((x-2)^2 - 1\right) = 1$;
4. $2\lg x - {}^{x}/_{2} + 1 = 0$.

№ 11

1. $2\,\mathrm{arcctg}\,x - x + 3 = 0$;
2. $3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2 = 0$;
3. $(x-2)^2 2^x = 1$;
4. $(x-2)\cos x = 1,\ -2\pi \le x \le 2\pi$.

№ 12

1. $\mathrm{arctg}(x-1) + 2x = 0$;
2. $2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0$;
3. $(x-1)\log_2(x+2) = 1$;
4. $\sin(x - 0{,}5) - x + 0{,}8 = 0$.

№ 13

1. $\mathrm{arctg}\,x - {}^{1}/_{3x^3} = 0$;
2. $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$;
3. $x\log_3(x+1) = 2$;
4. $(x-2)^2\lg(x+9) = 1$.

№ 14

1. $3^{x-1} - 4 - x = 0$;
2. $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$;
3. $(x-1)^2 2^x = 1$;
4. $\cos(x + 0{,}3) = x^2$.

№ 15

1. $2e^x + 3x + 1 = 0$;
2. $x^4 - x - 1 = 0$;
3. $x^2 - 3 + 0{,}5^x = 0$;
4. $\mathrm{tg}^3 x = x - 1,\ {}^{-\pi}/_{2} \le x \le {}^{\pi}/_{2}$.

№ 16

1. $3^x + 2x - 5 = 0$;
2. $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 1 = 0$;
3. $(x-3)^2\log_{0,5}(x-2) = -1$;
4. $5\sin x = x - 1$.

№ 17

1. $2\,\mathrm{arcctg}\,x - x + 3 = 0$;
2. $x^4 - 18x^2 + 6 = 0$;
3. $2x^2 - 0{,}5^x - 2 = 0$;
4. $x^2\cos 2x = -1,\ -2\pi \le x \le 2\pi$.

№ 18

1. $\mathrm{arctg}(x-1) + 3x - 2 = 0$;
2. $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0$;
3. $0{,}5^x - 3 = (x+2)^2$;
4. $x\lg(x+1) = 1$.

№ 19

1. $3^x - 2x + 5 = 0$;
2. $2x^4 - x^2 - 10 = 0$;
3. $2\sin\left(x + {}^{\pi}/_{3}\right) = x^2 - 0{,}5$;
4. $x^2 - 20\sin x = 0$.

№ 20

1. $e^x + x + 1 = 0$;
2. $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0$;
3. $(x-2)^2 2^x = 1$;
4. $2\lg x - {}^{\pi}/_{2} + 1 = 0$.

№ 21

1. $2e^x - 2x - 3 = 0$;
2. $3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2 = 0$;
3. $(x+2)\log_2(x) = 1$;
4. $(x-3)\cos x = 1,\ -2\pi \le x \le 2\pi$.

№ 22

1. $3^x + 2x - 3 = 0$;
2. $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$;
3. $x\log_3(x+1) = 1$;
4. $\sin(x+1) = 0{,}5x$.

№ 23

1. $\operatorname{arcctg} x + 2x - 1 = 0$;
2. $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$;
3. $(0{,}5)^x + 1 = (x-2)^2$;
4. $\cos(x + 0{,}5) = x^3$.

№ 24

1. $2^x - 3x - 2 = 0$;
2. $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$;
3. $x^2 - 4 + 0,5^x = 0$;
4. $(x-1)^2 \lg(x+11) = 5$.

№ 25

1. $3^x - 2x - 5 = 0$;
2. $2x^4 - x^2 - 10 = 0$;
3. $(x-1)^2 2^x = 1$;
4. $5 \sin x = x - 0{,}5$.

№ 26

1. $e^{-2x} - 2x + 1 = 0$;
2. $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$;
3. $2x^2 - 0,5^x - 3 = 0$;
4. $x \cos 2x = -1, -\pi \le x \le \pi$

№ 27

1. $3^x + 5x - 2 = 0$;
2. $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0$;
3. $(x-4)^2 \log_{0,5}(x-3) = -1$;
4. $(x+3)\cos x = 1,\ -2\pi \le x \le 2\pi$.

№ 28

1. $\operatorname{arctg}(x-1) + 2x = 0$;
2. $x^4 - x - 1 = 0$;
3. $0,5^x - 3 = -(x+1)^2$;
4. $x^2 - 10 \sin x = 0$.

№ 29

1. $3^x + 2 + x = 0$;
2. $x^4 - 18x^2 + 6 = 0$;
3. $0,5^x + 1 = (x-2)^2$;
4. $x \lg(x-2) = 1$.

№ 30

1. $\operatorname{arcctg}(x-1) + 2x - 3 = 0$;
2. $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$;
3. $(x-2)^2 2^x = 1$;
4. $\operatorname{tg}^3 x = x + 1,\ {}^{-\pi}/_2 \le x \le {}^{\pi}/_2$.

Приклад виконання завдання

1. а) $\operatorname{arctg} x - {}^1/_{3x^3} = 0$; б) $3^x - 3x - 2 = 0$;

2. $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$; **3.** $(x+2)\log_2(-x) = -1$;

4. $\sin\left(x + {}^{\pi}/_3\right) - 0{,}5x = 0$.

---

1. а) Позначимо: $f(x) = \operatorname{arctg} x - {}^1/_{3x^3}$. Знайдемо похідну $f'(x) = 1/(1+x^2) + 1/x^4$. Знайдемо корінь похідної $1/(1+x^2) + 1/x^4 = 0$. Оскільки $f'(x) > 0$, то останнє рівняння коренів не має.

Оскільки ОДЗ рівняння є: $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$, то функція може мати не більше ніж по одному кореню на кожному з інтервалів: $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ \infty)$.

Знайдемо інтервали, які містять корені, так щоб їх довжина не перевищувала «1».

Для цього складемо таблицю знаків функції $f(x)$:

x	$-\infty$	...	-2	-1	$-0{,}1$	$0{,}1$	1	2	...	∞
$\operatorname{sign} f(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$

З таблиці видно, що корені містяться в таких інтервалах:

$$x_1 \in (-1;\ -0{,}1);\ x_2 \in (0{,}1;\ 1).$$

б) Позначимо $f(x) = 3^x - 3x - 2$. $D(f(x)) = R$. Знайдемо похідну $f'(x) = 3^x \ln 3 - 3$. $D(f'(x)) = D(f(x))$. Обчислимо корінь похідної: $3^x \ln 3 - 3 = 0$; $3^x = 3/\ln 3$;

$$x = \frac{\ln 3 - \ln(\ln 3)}{\ln 3} = 1 - \frac{\ln(\ln 3)}{\ln 3} \cong 0{,}92.$$

Складемо таблицю знаків функції $f(x)$, приймаючи x рівним:

а) критичним значенням функції (кореням похідної) чи близьким до них;

б) граничним значенням (враховуючи область допустимих значень невідомого).

x	$-\infty$	...	1	...	$+\infty$
$\operatorname{sign} f(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$

Оскільки функція двічі змінює знак, то рівняння має два дійсних корені. Щоб завершити операцію відокремлення коренів, необхідно зменшити інтервали, які їх містять, так, щоб їх довжина була не більшою 1. Для цього складемо нову таблицю знаків функції $f(x)$:

x	-2	-1	0	1	2
$\operatorname{sign} f(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$

З таблиці видно, що корені містяться в таких інтервалах: $x_1 \in (-1;\ 0)$; $x_2 \in (1;\ 2)$.

2. Оскільки $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$, то: $f'(x) = 6x^2 - 18x - 60 = 0$ (враховано, що $D(f'(x)) = D(f(x))$). Знайдемо корені похідної: $6x^2 - 18x - 60 = 0$. З останнього рівняння одержимо $x_1 = -2$; $x_2 = 5$.

Складемо таблицю знаків функцій $f(x)$:

x	$-\infty$	...	-4	-3	-2	-1	0	1	...	8	9	...	∞
$\operatorname{sign} f(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

З таблиці видно, що рівняння має три дійсних корені: $x_1 \in (-4;\ -3)$; $x_2 \in (0;\ 1)$; $x_3 \in (8;\ 9)$.

Уточнимо один з коренів, наприклад, $x_2 \in (0;\ 1)$, методом проб до сотих частин. Усі обчислення зручно робити, використовуючи таку таблицю (верхній індекс – знак функції на кінцях інтервалу):

n	a_n^+	b_n^-	$x_n = (a_n + b_n)/2$	$\operatorname{sign} f(x_n)$
0	0	1	0,5	–
1	0	0,5	0,25	–
2	0	0,25	0,125	–
3	0	0,125	0,0625	–
4	0	0,0625	0,03125	–
5	0	0,03125	0,015625	+
6	0,015625	0,03125	0,023437	–
7	0,015625	0,02344	0,01953	–
8	0,015625	0,01953	0,01758	–
9	0,015625	0,01758	0,01660	+
10	0,01660	0,01758	0,01709	–
11	0,01660	0,01709	0,01685	–
12	0,01660	0,01685		

Відповідь: $x_2 \cong 0{,}016$.

3. Подамо рівняння $(x+2)\log_2(-x) = -1$ у вигляді: $\log_2(-x) = -1/(x+2)$. Позначивши $y_1 = \log_2(-x), y_2 = -1/(x+2)$, побудову графіків вказаних функцій здійснимо в такому порядку:

а) для y_2: 1) $y_2 = {}^{-1}/_{x}$; 2) $y_2 = -1/(x+2)$ – зміщення осі $0y$ на «2»;

б) для y_1:

1) $y_1 = \log_2(x)$;

2) $y_1 = \log_2(-x)$ – симетричне відображення графіка відносно осі $0y$. Графіки зображено на рис. 3.18.

З графіка видно, що рівняння має два корені:

$x_1 \cong -2{,}7;\ x_2 \cong -0{,}6.$

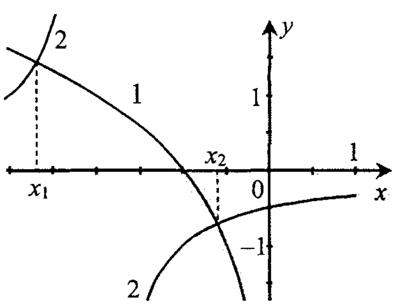


Рис. 3.18

4. Представимо рівняння у вигляді:

$$\sin(x + {}^{\pi}/_{3}) = 0{,}5x.$$

Позначимо $y_1 = \sin(x + {}^{\pi}/_{3})$, $y_2 = 0{,}5x$. Побудуємо графік цих функцій у такій послідовності: 1) $y_1 = \sin x$, 2) $y_1 = \sin(x + {}^{\pi}/_{3})$ – зміщення осі $0y$ на «$\pi/3$» (порівняно з кроком 1)); $y_2 = 0{,}5x$.

Графіки зображено на рис. 3.19, з якого видно, що рівняння має один корінь $x_1 \cong 1{,}2$.

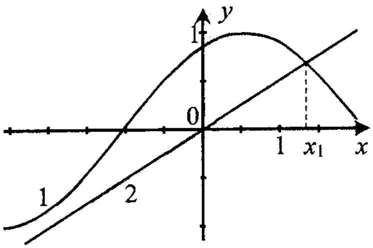


Рис. 3.19

Для уточнення цього кореня методом проб виберемо проміжок, на кінцях якого функція $f(x) = \sin(x + {}^{\pi}/_{3}) - 0{,}5x$ має різні знаки.

Складемо таблицю:

x	1,2	1,4
$\operatorname{sign} f(x)$	+	–

Подальші обчислення заносимо до таблиці:

n	a_n^+	b_n^-	$x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	$\operatorname{sign} f(x_n)$
0	1,2	1,4	1,3	+
1	1,3	1,4	1,35	+
2	1,35	1,4	1,375	–
3	1,35	1,375	1,3625	–
4	1,35	1,3625	1,35625	–
5	1,35	1,356	1,3530	–
6	1,353	1,356		

Відповідь: $x_1 \cong 1{,}35$.

Завдання 2

1. Відокремити корені рівняння графічно й уточнити один з них методом хорд з точністю до 0,001.

2. Відокремити корені рівняння аналітично й уточнити один з них методом хорд з точністю до 0,001.

Варіанти до завдання 2

№ 1 1. $2\lg x - x/_2 + 1 = 0$; 2. $x^3 + 4x - 6 = 0$.

№ 2 1. $\operatorname{ctg} x - x/_5 = 0$; 2. $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 0{,}8 = 0$.

№ 3 1. $x + \lg x = 0{,}5$; 2. $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$.

№ 4 1. $\operatorname{tg}(0{,}36x + 0{,}4) = x^2$; 2. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}3x + 1{,}2 = 0$.

№ 5 1. $x^2 + 4\sin x = 0$; 2. $x^3 - 2x + 4 = 0$.

№ 6 1. $\operatorname{ctg} x - x/_{10} = 0$; 2. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1{,}4 = 0$.

№ 7 1. $3x - \cos x - 1 = 0$; 2. $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$.

№ 8 1. $\operatorname{tg}(0{,}44x + 0{,}3) = x^2$; 2. $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x + 1{,}2 = 0$.

№ 9 1. $2x - \lg x - 7 = 0$; 2. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1 = 0$.

№ 10 1. $\operatorname{ctg} x - x/_2 = 0$; 2. $x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$.

№ 11 1. $x^2 + 4\sin x = 0$; 2. $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x + 2 = 0$.

№ 12 1. $\operatorname{tg}(0{,}47x + 0{,}2) = x^2$; 2. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}4x + 1{,}4 = 0$.

№ 13 1. $\operatorname{ctg} x - x/_3 = 0$; 2. $x^3 - 0{,}4x^2 + 0{,}6x + 1{,}6 = 0$.

№ 14 1. $x^2 - 20\sin x = 0$; 2. $x^3 + x - 3 = 0$.

№ 15 1. $\operatorname{tg}(0{,}3x + 0{,}4) = x^2$; 2. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 1{,}4 = 0$.

№ 16 1. $\operatorname{ctg} x - x/_4 = 0$; 2. $x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$.

№ 17 1. $1{,}8x^2 - \sin 10x = 0$; 2. $x^3 - 6x - 8 = 0$.

№ 18 1. $x\lg x - 1{,}2 = 0$; 2. $x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$.

№ 19 1. $\operatorname{tg}(0{,}4x + 0{,}3) = x^2$; 2. $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}5 = 0$.

№ 20 1. $\operatorname{ctg} 1{,}05x - x^2 = 0$; 2. $x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$.

№ 21 1. $x^2 + 4\sin x = 0$; 2. $x^3 - 0{,}2^2 + 0{,}5x + 1{,}5 = 0$.

№ 22 1. $\operatorname{tg}(0{,}5x + 0{,}1) = x^2$; 2. $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1{,}2 = 0$.

№ 23 1. $x + \lg x = 0{,}5$; 2. $x^3 + 3x + 1 = 0$.

№ 24 1. $3x - \cos x - 1 = 0$; 2. $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 2 = 0$.

№ 25 1. $\operatorname{tg}(0.55x + 0.1) = x^2$; 2. $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$.

№ 26 1. $\lg x - 7/_{(2x+6)} = 0$; 2. $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}3x - 1{,}2 = 0$.

№ 27 1. $\operatorname{tg}(0{,}4x + 0{,}4) = x^2$; 2. $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$.

№ 28 1. $\sqrt{x} - \cos(0{,}387x) = 0$; 2. $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}5 = 0$.

№ 29 1. $\operatorname{tg}(0{,}58x + 0{,}1) = x^2$; 2. $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$.

№ 30 1. $x - \sin x = 0{,}25$; 2. $x^3 + 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}2 = 0$.

Приклад виконання завдання

1. $\mathrm{tg}(0{,}5x + 0{,}2) = x^2$; **2.** $x^3 + x - 5 = 0$.

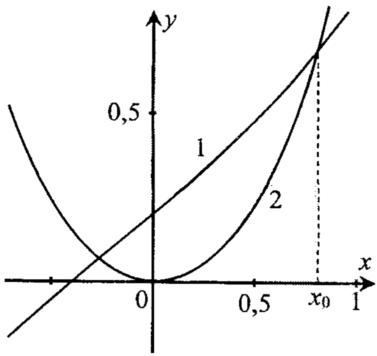


Рис. 3.20

1. Відокремимо корінь графічно. Побудуємо графіки функцій $y_1 = \mathrm{tg}(0{,}5x + 0{,}2)$ і $y_2 = x^2$. Графік y_1 будуємо у послідовності:

а) $y_1 = \mathrm{tg}\,x$;

б) $y_1 = \mathrm{tg}(0{,}5x)$ – розтягнення попереднього графіка по осі $0x$ в два рази;

в) $y_1 = \mathrm{tg}(0{,}5(x + 0{,}4))$ – зміщення осі $0y$ на 0,4; $y_2 = x^2$ – парабола.

Графіки функцій y_1 і y_2 зображено на рис. 3.20, з якого видно, що додатній корінь рівняння міститься в інтервалі $x_0 \in (0{,}8;\ 1)$.

Для уточнення кореня методом хорд визначимо знаки функції $f(x) = \mathrm{tg}(0{,}5x + 0{,}2) - x^2$ на кінцях інтервалу $(0{,}8;\ 1)$ та знак її другої похідної в ньому:

$$f(0{,}8) > 0;\ f(1) < 0;$$

$$f'(x) = \frac{0{,}5}{\cos^2(0{,}5x + 0{,}2)} - 2x;$$

$$f''(x) = \frac{-0{,}5 \cdot 2\cos(0{,}5x + 0{,}2)\,(-\sin(0{,}5x + 0{,}2)) \cdot 0{,}5}{\cos^4(0{,}5x + 0{,}2)} - 2 =$$

$$= \frac{0{,}5\sin(0{,}5x + 0{,}2)}{\cos^3(0{,}5x + 0{,}2)} - 2 < 0,$$

при $x \in (0{,}8;\ 1)$.

Оскільки при $x \in (0{,}8;\ 1)$ $f(1) \cdot f''(x) > 0$, то для розрахунку використовуємо формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \cdot (b - x_n),$$

де $b = 1$; $x_0 = 0{,}8$.

Обчислення зручно розташувати в таблиці:

n	x_n	$f(1)$	$f(x_n)$	$f(1)-f(x_n)$	$1-x_n$	$\frac{f(x_n)\cdot(1-x_n)}{f(1)-f(x_n)}$
0	0,8	–0,1577	0,0441	–0,2018	0,2	–0,0437
1	0,8437		0,0049	–0,1626	0,1563	–0,0047
2	0,8484		0,0005	–0,1582	0,1516	–0,0005
3	0,8489					

Відповідь: $x \cong 0{,}848$.

2. Відокремимо корені аналітично. Одержимо:

$$f(x) = x^3 + x - 5;\ f'(x) = 3x^2 + 1;\ 3x^2 + 1 = 0,\ x \in \emptyset.$$

Складемо таблицю знаків функції $f(x)$:

x	$-\infty$	1,5	1,6	$+\infty$
$\operatorname{sign} f(x)$	–	–	+	+

Рівняння має один дійсний корінь: $x_1 \in (1{,}5;\ 1{,}6)$.

Для уточнення кореня знайдемо другу похідну:

$$f''(x) = 6x > 0 \text{ при } x \in (1{,}5;\ 1{,}6).$$

Оскільки $f(1{,}6)\cdot f''(x) > 0$, то застосуємо формулу:

$$x_{n+1} = x_n - h = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}\cdot(b - x_n),$$

де $b = 1{,}6$; $x_0 = 1{,}5$.

Розрахунки зручно подати таблицею:

n	x_n	$f(1{,}6)$	$f(x_n)$	$f(1{,}6) - f(x_n)$	$1{,}6 - x_n$	$\frac{f(x_n)\cdot(1{,}6-x_n)}{f(1{,}6)-f(x_n)}$
0	1,5	0,696	–0,125	0,821	0,1	–0,0152
1	1,5152		–0,0062	0,7022	0,0848	–0,0007
2	1,5159		–0,0006	0,6966	0,0841	–0,00001
3	1,51591					
4						

Відповідь: $x \cong 1{,}5159$.

Завдання 3

1. Відокремити корені рівняння графічно й уточнити один з них методом дотичних з точністю до 0,001.
2. Відокремити корені рівняння аналітично й уточнити один з них методом дотичних з точністю до 0,001.

Використати варіанти завдання 2.

Приклад виконання завдання

1. $\operatorname{tg}(0{,}5x + 0{,}2) = x^2$;

2. $x^3 + x - 5 = 0$.

1. Вище (*завдання 2*) відокремили один з коренів рівняння і встановили, що він міститься в інтервалі (0,8; 1). Уточнимо цей корінь методом дотичних. Оскільки $f(0{,}8) > 0$, $f(1) < 0$ і $f''(x) < 0$, то за початкове наближення приймемо $x_0 = 1$ $(f(1) \cdot f''(x) > 0)$. Обчислення проведемо за формулою:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

Попередньо знайдемо:

$$f'(1) = \frac{0{,}5}{\cos^2(0{,}5 \cdot 1 + 0{,}2)} - 2 \cdot 1 \cong -1{,}1453.$$

Складемо таблицю:

n	x_n	$f(x_n)$	$\dfrac{f(x_n)}{-1{,}1453}$
0	1	–0,1577	0,1377
1	0,8623	–0,0127	0,0111
2	0,8512	–0,0022	0,0019
3	0,8493	–0,0004	0,0003
4	0,8490	–0,0001	0,0001
5	0,8487		

Відповідь: $x \cong 0{,}848$.

2. Вище встановлено, що рівняння має дійсний корінь, який належить інтервалу (1,5; 1,6). Уточнимо цей корінь методом дотичних. Оскільки $f(1{,}5) < 0$, $f(1{,}6) > 0$ і $f''(x) > 0$, то за початкове наближення приймемо $x_0 = 1{,}6$ $(f(1{,}6) \cdot f''(x) > 0)$. Для обчислень застосуємо формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\left(\text{можна застосовувати й формулу: } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}\right).$$

Попередньо врахувавши, що $f(x) = x^3 + x - 5$, знайдемо: $f'(x) = 3x^2 + 1$.

Для обчислень використаємо таблицю:

n	x_n	$f'(x_n)$	$f(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1,6	8,68	0,696	0,0802
1	1,5198	7,9294	0,0302	0,0038
2	1,5160	7,8948	0,00016	0,00002
3	1,5158			

Відповідь: $x \cong 1{,}515$.

Завдання 4

1. Комбінованим методом хорд і дотичних розв'язати рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до 0,001.

Варіанти до завдання 4

№ 1 $x^3 - 3x^2 + 3{,}5 = 0.$ **№ 2** $x^3 - 3x^2 - 1 = 0.$
№ 3 $2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 0.$ **№ 4** $2x^3 + 9x^2 - 4 = 0.$
№ 5 $x^3 - 12x - 10 = 0.$ **№ 6** $x^3 + 3x^2 - 24x - 3 = 0.$
№ 7 $x^3 - 3x^2 - 24x + 10 = 0.$ **№ 8** $x^3 - 3x^2 + 1{,}5 = 0.$
№ 9 $2x^3 - 9x^2 - 6 = 0.$ **№ 10** $2x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = 0.$
№ 11 $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0.$ **№ 12** $x^3 - 12x - 5 = 0.$
№ 13 $x^3 - 4x^2 + 2 = 0.$ **№ 14** $x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0.$
№ 15 $2x^3 + 9x^2 - 10 = 0.$ **№ 16** $x^3 - 12x + 10 = 0.$
№ 17 $2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0.$ **№ 18** $x^3 + 3x^2 - 3 = 0.$
№ 19 $x^3 - 3x^2 - 24x - 8 = 0.$ **№ 20** $x^3 + 3x^2 - 24x + 10 = 0.$
№ 21 $x^3 + 3x^2 - 3{,}5 = 0.$ **№ 22** $x^3 + 3x^2 - 2 = 0.$
№ 23 $x^3 - 3x^2 + 2{,}5 = 0.$ **№ 24** $2x^3 + 9x^2 - 21 = 0.$
№ 25 $2x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = 0.$ **№ 26** $x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0.$
№ 27 $x^3 - 2x^2 - 4x + 7 = 0.$ **№ 28** $x^3 - 3x^2 + 3 = 0.$
№ 29 $x^3 - 3x^2 - 24x - 3 = 0.$ **№ 30** $2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0.$

Приклад виконання завдання

За умовами *завдання 4* розв'язати рівняння

$$x^3 - 12x + 6 = 0.$$

Відокремимо корені аналітично. Одержимо:

$$f(x) = x^3 - 12x + 6,\ f'(x) = 3x^2 - 12 = 0,$$

$$x^2 - 4 = 0;\ x_1 = -2;\ x_2 = 2.$$

Складемо таблицю знаків функції $f(x)$:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$\operatorname{sign} f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Отже, рівняння має три дійсних корені:
$x_1 \in (-\infty;\ -2)$; $x_2 \in (-2;\ 2)$; $x_3 \in (2;\ +\infty)$.

Зменшимо інтервали, що містять корені, до одиничної довжини:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$\operatorname{sign} f(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

Таким чином, $x_1 \in (-4;\ -3)$, $x_2 \in (0;\ 1)$,$x_3 \in (3;\ 4)$.

Уточнимо корені комбінованим методом хорд і дотичних.

1) $x_1 \in (-4;\ -3)$; $f(-4) < 0$; $f(-3) > 0$; $f''(x) = 6x < 0$ при $x_1 \in (-4;\ -3)$.

Для розрахунків застосовуємо формули:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)};\ \bar{x}_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n), \qquad (3.18\text{ в})$$

де x_n і $\bar{x}_n$ – значення кореня відповідно з недостачею і надлишком. Підставимо $x_0 = -4$; $\bar{x}_0 = -3$.

Всі обчислення заносимо до таблиці:

n	x_n / $\bar{x}_n$	$\bar{x}_n - x_n$	$f(x_n)$ / $f(\bar{x}_n)$	$f'(x_n)$	$f(\bar{x}_n) - f(x_n)$	$f(x_n)/f'(x_n)$ / $\dfrac{f(x_n)\cdot(\bar{x}_n - x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}$
0	–4	1	–10	36	25	–0,2778
	–3		15			–0,4
1	–3,7222	0,1222	–0,9038	29,5643	3,4478	–0,0306
	–3,6000		2,544			–0,0320
2	–3,6916	0,0014	–0,0096	28,8837	0,0212	–0,0003
	–3,6902		0,0308			–0,0006
3	–3,6913					
	–3,6910					

Відповідь: $x_1 \cong -3{,}691$.

2) $x_2 \in (0;\ 1)$; $f(0) > 0$; $f(1) < 0$ $f''(x) > 0$ при $x \in (0;\ 1)$. Для розрахунків використаємо формули (3.18 в), прийнявши $x_0 = 0$, $\bar{x}_0 = 1$.

Обчислення заносимо до таблиці:

n	x_n	$\bar{x}_n - x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(\bar{x}_n) - f(x_n)$	$f(x_n)/f'(x_n)$
	$\bar{x}_n$		$f(\bar{x}_n)$			$\dfrac{f(x_n)\cdot(\bar{x}_n - x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}$
0	0	1	6	–12	–11	–0,5
	1		–5			–0,5455
1	0,5	0,0455	0,125	–11,25	–0,2587	–0,0111
	0,5455		–0,3837			–0,0220
2	0,5111	0,0109	0,0003	–11,2166	–0,1221	–0,00003
	0,5220		–0,1218			–0,00003
3	0,51113					
	0,51113					

Відповідь: $x_2 \cong 0{,}5111$.

3) $x_3 \in (3;\ 4)$; $f(3) < 0$; $f(4) > 0$; $f''(x) > 0$ при $x \in (3;\ 4)$. Для розрахунків використаємо формули:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} \cdot (\bar{x}_n - x_n);\ \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)},$$

де $x_0 = 3$, $\bar{x}_0 = 4$.

Обчислення заносимо до таблиці:

n	x_n	$\bar{x}_n - x_n$	$f(x_n)$	$f'(\bar{x}_n)$	$f(\bar{x}_n) - f(x_n)$	$\dfrac{f(x_n)\cdot(\bar{x}_n - x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}$
	$\bar{x}_n$		$f(\bar{x}_n)$			$f(\bar{x}_n)/f'(\bar{x}_n)$
0	3	1	–3	36	25	–0,12
	4		22			0,6111
1	3,12	0,2689	–1,0687	42,2768	5,3222	–0,0540
	3,3889		4,2535			0,1006
2	3,1740	0,1143	–0,1122	20,4387	2,2087	–0,0058
	3,2883		2,0965			0,1026
3	3,1798	0,0059	–0,0062	18,4460	0,1085	–0,0003
	3,1857		0,1023			0,0055
4	3,1801					
	3,1802					

Відповідь: $x_3 \cong 3{,}180$.

Розділ 4. ІНТЕРПОЛЮВАННЯ ТА ЕКСТРАПОЛЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

Інтерполювання – це наближення функції всередині заданого проміжку (області), а *екстраполювання* – за його межами.

При розв'язуванні багатьох задач аналізу й прикладних наук виникає необхідність замість функції дійсного змінного $f(x)$, що належить певному широкому класу функцій A, розглядати функцію $\varphi(x)$, що належить вужчому класу функцій B й у відомому сенсі представляє функцію $f(x)$ на певному проміжку. Наприклад, класом A може бути безліч неперервних функцій, клас B можуть складати «простіші» функції – алгебраїчні многочлени або тригонометричні функції, що широко застосовуються як такі, що наближають.

Із загального курсу аналізу відомо деякі способи наближення функцій. Так, довільну функцію $f(x)$, що неперервна й має неперервні похідні до порядку n включно на деякому інтервалі, можна подати за допомогою формули Тейлора:

$$f(x) = \left[f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)\right] + R_n(x);$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x); \qquad f(x) \cong P_n(x),$$

тут x_0 – деяка фіксована точка інтервалу; $P_n(x)$ – многочлен Тейлора степеня n; $R_n(x)$ – залишковий член. Про точність наближення судять за величиною залишкового члена.

Відомо й те, що функцію $\varphi(x)$, що задовольняє досить загальні умови, можна наблизити за допомогою тригонометричного многочлена – відрізком ряду Фур'є.

У твердження, що функція $\varphi(x)$ близька до функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$, можна вкласти різний смисл. Наприклад:

1) можна вимагати, щоб функція $\varphi(x)$, що наближає, співпадала з функцією $f(x)$ в $(n+1)$ точках проміжку, тобто виконувалася рівність $f(x_i) = \varphi(x_i)$ $(i = 0 \cup \overline{1,n})$. Якщо $\varphi(x)$ – многочлен степеня n, то розглядуваний процес наближення називається *параболічною інтерполяцією* або *процесом побудови інтерполяційного многочлена*;

2) функцію $\varphi(x)$ можна вибрати так, щоб інтеграл $\int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx$ або сума $\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - \varphi(x_i))^2$ досягали мінімуму. Таке наближення називається *квадратичним*;

3) функцію $\varphi(x)$ можна вибрати так, щоб $\max|f(x) - \varphi(x)|$ був найменшим. У цьому випадку говорять про *рівномірне* наближення функції $f(x)$ функцією $\varphi(x)$. Алгебраїчні та тригонометричні многочлени, як правило, застосовують в якості функцій, що наближають.

Принципова можливість наближення будь-якої неперервної функції $f(x)$, заданої на проміжку $[a;\ b]$ многочленом, випливає з таких теорем.

Теорема 1 (***перша теорема Вейерштрасса***). *Якщо функція дійсної змінної $f(x)$ неперервна на замкнутому інтервалі $[a;\ b]$, то, яким би малим не було наперед задане число $\varepsilon > 0$, можна вказати такий многочлен $P(x)$, що для всіх значень змінної x на відрізку $[a;\ b]$ виконуватиметься нерівність $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$.*

Теорема 2 (***друга теорема Вейерштрасса***). *Якщо функція $f(x)$ дійсної змінної має період 2π і неперервна на відрізку $[-\pi;\ \pi]$, то, яким би малим не було наперед задане число $\varepsilon > 0$, можна вказати такий тригонометричний многочлен $F(x)$, що для всіх значень x з даного відрізка виконуватиметься нерівність $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$.*

У більшості задач прикладного характеру функція $f(x)$ задається емпірично, тобто відомо лише таблицю значень $y_0, y_1, \dots, y_n$, які вона приймає при значеннях аргумента $x_0, x_1, \dots, x_n$. Найпростіше – замінити $f(x)$ поліномом n-го степеня, що приймає ті самі значення, що і $f(x)$. Інакше кажучи, замінити криву $f(x)$, що проходить через $n + 1$ точку $x_0, y_0; \dots; x_n, y_n$ параболою n-го степеня, що проходить через ті самі точки. При цьому можуть виникнути два випадки:

1) абсциси $x_0, x_1, \dots, x_n$, розподілено *нерівномірно*;

2) абсциси $x_0, x, \dots, x_n$, складають *арифметичну прогресію*. Це найбільш розповсюджені випадки, тому їх розглянемо детальніше.

Можна розв'язувати по-іншому: замість того, щоб шукати параболу n-го степеня, що проходить точно через $n + 1$ точку, знаходять параболу нижчого степеня p, що проходить як можна ближче до $(n + 1)$-ї точки. Якщо при цьому абсциси знаходяться в арифметичній прогресії, обчислення спростяться, але не набагато.

Заміна $f(x)$ більш «простою» функцією повинна полегшити не тільки обчислення значень функції для значень аргумента, що відсутній у відправній таблиці, але й обчислення значення похідної для довільної точки інтервалу та, особливо, для наближеного знаходження інтегралів, що застосовуються, зокрема, для наближеного розв'язування диференціальних рівнянь.

4.1. Наближення функції поліномами

4.1.1. Значення аргумента розподілено нерівномірно. Параболічна інтерполяція. Інтерполяційний поліном Лагранжа

Нехай $x_0, x_1, \dots, x_n$ (вузли інтерполяції) – значення аргумента й $y_0, y_1, \dots, y_n$ – значення функції $f(x)$ в $n+1$ точці, а $P(x)$ – шуканий поліном n-го степеня, що приймає ті самі значення при тих же значеннях аргумента.

Потрібно побудувати многочлен степеня не вище m:

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \dots + a_m x^m,$$

значення якого у вузлах інтерполяції були б рівні значенням функції $f(x)$ у тих же вузлах, тобто має виконуватися рівність:

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ \dots + a_m x_0^m = y_0; \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ \dots + a_m x_1^m = y_0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ \dots + a_m x_n^m = y^n. \end{array} \qquad (4.1)$$

З рівнянь системи (4.1) потрібно визначити невідомі $a_0, a_1, \dots, a_m$. Відомо (теорема *Кронекера–Капеллі*), що якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи й дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок. За припущенням, що всі x_i $(i = 0 \cup \overline{1,n})$ різні, якщо покласти $n = m$, то визначник системи

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_2^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = W,$$

що називається *визначником Вандермонда*, відмінний від нуля і система (4.1) має єдиний розв'язок. Коефіцієнти многочлена $P_m(x) = P_n(x)$ можна знайти одним способом.

Дану задачу можна сформулювати й так: знайти многочлен $P_n(x)$, графік якого проходив би через $(n+1)$-у задану точку: $(x_0;\ y_0)$, $(x_1;\ y_1)$, ..., $(x_n;\ y_n)$, що лежать на графіку функції $f(x)$.

Для спрощення обчислень не розв'язуватимемо (4.1), а підемо іншим шляхом. Многочлен

$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ ... + a_nx^n$ запишемо у вигляді

$$\begin{gathered} P_n(x) = A_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) + \\ +A_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) + \\ +A_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n) + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ +A_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1}). \end{gathered} \tag{4.2}$$

Сталі $A_0, A_1, \dots, A_n$ визначимо з умов:

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i \ (i = 0 \cup \overline{1,n}).$$

Замінивши у формулі (4.2) $x = x_0$, знайдемо:

$$P_n(x_0) = y_0 = A_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n),$$

звідки:

$$A_0 = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}y_0.$$

Підставивши $x = x_1$, визначимо:

$$A_1 = \frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}y_1$$

і далі

$$A_2 = \frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)}y_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_n = \frac{1}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}y_n.$$

Підставляючи знайдені значення $A_0, A_1, \dots, A_n$ у рівність (4.2), одержимо *інтерполяційну формулу* (многочлен) *Лагранжа*:

$$P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}y_0 +$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}y_1 +$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2+x_n)}y_2+$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}y_n. \qquad (4.3)$$

Формулу Лагранжа зручно подавати в іншій формі; увівши позначення $L(x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ й зауваживши, що

$$L'(x_i)=(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n);$$

$$P_n(x)=\sum\nolimits_{i=0}^{n}\frac{L(x)}{(x-x_i)L'(x_i)}y_i. \qquad (4.4)$$

Вузли $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ можуть бути нерівно- і рівновіддаленими один від одного. У разі рівновіддалених вузлів обчислення спрощуються. Складено таблиці, що полегшують обчислення коефіцієнтів.

Властивості інтерпольованої функції й розташування інтерполяційних вузлів істотно впливають на якість наближення.

У деяких випадках може трапитися, що в точках, розташованих між вузлами, відхилення інтерполяційного многочлена від функції буде значним. Як правило, збільшення числа вузлів покращує наближення, але існують і відхилення від правила.

Розглянемо деякі окремі випадки формули Лагранжа. Підставивши у формулу (4.3) $n=1$, одержимо:

$$P_1(x)=y=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1; \qquad (4.5)$$

при $n=2$:

$$P_2(x)=y=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2. \qquad (4.6)$$

Геометрично формулу (4.5) можна тлумачити як рівняння прямої лінії, що проходить через точки $(x_0;\ y_0)$, $(x_1;\ y_1)$ і називається *формулою лінійної інтерполяції*. Рівняння (4.6) – рівняння параболи другого порядку, що проходить через точки $(x_0;\ y_0)$, $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$ і має вісь симетрії паралельну осі ординат. Формула (4.6) називається *формулою квадратичної інтерполяції*.

Приклад 4.1. Побудувати многочлен першого степеня, який в точках $x_0 = 2$ і $x_1 = 4$ дорівнював би 5 і 11 відповідно.

Розв'язання. Скористаємося формулою (4.5):

$$y = \frac{x-4}{2-4}5 + \frac{x-2}{4-2}11, \quad y = 3x - 1.$$

Приклад 4.2. Нехай задано функцію:

x	-1	0	1
$f(x)$	13	8	7

Скласти многочлен другого степеня, значення якого у вказаних точках співпадали б зі значеннями функції $f(x)$.

Розв'язання. Застосуємо формулу квадратичної інтерполяції (4.6):

$$y = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}13 + \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}8 + \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}7;$$

$y = 2x^2 - 3x + 8.$

Приклад 4.3. Знайти многочлен Лагранжа третього степеня, значення якого в точках з абсцисами 0, 1, 3, 4 співпадали б зі значеннями заданої функції $f(x) = 3^x$ $(0 \le x \le 4)$.

Розв'язання. Складемо таблицю значень функції

x	0	1	3	4
3^x	1	3	27	81

та обчислимо інтерполяційний многочлен за формулою (4.3):

$$y = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)}1 + \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)}3 +$$

$$+\frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)}27 + \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)}81;$$

$$y = {}^1\!/_3\,(8x^3 - 22x^2 + 20x + 3).$$

У табл. 4.1 зіставлено значення функції $f(x) = 3^x$ і значення обчисленого многочлена Лагранжа в проміжку $[0;\ 4]$.

Таблиця 4.1

x	0,0	0,5	1,0	1,8	2,0	2,4	2,7	3,0	3,6	4,0
3^x	1,00	1,73	3,00	7,23	9,00	13,98	19,44	27,00	52,28	81,0
$P_3(x)$	1,00	2,83	3,00	4,79	6,33	11,63	17,42	27,00	53,30	81,0

Формулу Лагранжа можна застосовувати і для розв'язування завдання «зворотньої інтерполяції» – знаходження значення аргумента, відповідного даному значенню функції. У формулі Лагранжа, що пов'язує дві змінні x і y, будь-яку із змінних можна вважати незалежною; тому, якщо відомо значення функції $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n$, і відповідні їм значення аргумента $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$, то значення аргумента x_k можна обчислити за формулою:

$$x_k = \frac{(y_k - y_1)(y_k - y_2)\dots(y_k - y_n)}{(y_0 - y_1)(y_0 - y_2)\dots(y_0 - y_n)}x_0 +$$

$$+\frac{(y_k - y_0)(y_k - y_2)\dots(y_k - y_n)}{(y_1 - y_0)(y_1 - y_2)\dots(y_1 - y_n)}x_1 + \dots +$$

$$+\frac{(y_k - y_0)\dots(y_k - y_{k-1})(y_k - y_{k+1})\dots(y_k - y_n)}{(y_{k-1} - y_0)\dots(y_{k-1} - y_{k-2})\dots(y_{k-1} - y_n)}x_{k-1} +$$

$$+\frac{(y_k - y_0)\dots(y_k - y_{k-1})(y_k - y_{k+1})\dots(y_k - y_n)}{(y_{k+1} - y_0)\dots(y_{k+1} - y_k)(y_{k+1} - y_{k+2})\dots(y_{k+1} - y_n)}x_{k+1} +$$

$$+ \dots + \frac{(y_k - y_0)(y_k - y_1)\dots(y_k - y_{n-1})}{(y_n - y_0)(y_n - y_1)\dots(y_n - y_{n-1})}x_n.$$

Приклад 4.4. Функцію задано таблицею:

x	0	1	3	4
y	–4	1	13	24

При якому значенні аргумента x значення функції дорівнює 6?

Розв'язання. Скориставшись наведеною формулою і даними таблиці, знайдемо:

$$x = \frac{(6-1)(6-13)(6-24)}{(-4-1)(-4-13)(-4-24)} \cdot 0 +$$

$$+\frac{(6+4)(6-13)(6-24)}{(1+4)(1-13)(1-24)} \cdot 1 + \frac{(6+4)(6-1)(6-24)}{(13+4)(13-1)(13-24)} \cdot 3 +$$

$$+\frac{(6+4)(6-1)(6-13)}{(24+4)(24-1)(24-13)} \cdot 4 = 1{,}92;$$

$x = 1{,}92.$

У наведеному прикладі таблицею було задано функцію $y = 2^x + 3x - 4$, яка при значенні аргумента $x = 2$ дорівнює 6.

Застосування кубічної сплайн-функції (4.29) дає: $x = 1{,}93367$.

За допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа, побудованого для проміжку $[a; b]$, можна розв'язати задачу екстраполяції, тобто обчислити значення функції для значень аргумента, що містяться за межами проміжку. Екстраполяція, як правило, є менш точною, порівняно з інтерполяцією, і задовільні результати вдається одержати тільки для точок, близьких до основного проміжку.

Обчислення, пов'язані із застосуванням формули Лагранжа, як правило, досить громіздкі. Якщо побудований многочлен певного степеня недостатньо добре апроксимує задану функцію й потрібно підвищити степінь многочлена (збільшити число вузлів інтерполяції), то обчислення потрібно проводити заново.

Покажемо інший вигляд інтерполяційної формули Лагранжа, яка важлива з теоретичного погляду.

Розкладемо на прості дроби відношення $P(x)/D(x)$, позначивши через $D(x)$ поліном степеня $n+1$:

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Одержимо:

$$\frac{P(x)}{D(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{x - x_k}$$

або

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k \prod_{\substack{s=0 \\ s\neq k}}^{n} (x - x_s).$$

Надамо x значення x_i. $P(x)$ набуде значень y_i, і всі члени суми перетворяться на нуль, крім добутку, для якого $k = i$, звідки:

$$y_i = A_i \prod_{\substack{s=0 \\ s\neq i}}^{n} (x_i - x_s).$$

Тоді шуканий поліном $P(x)$ можна подати у вигляді

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\prod_{\substack{s=0 \\ s\neq i}}^{n} (x - x_s)}{\prod_{\substack{s=0 \\ s\neq i}}^{n} (x_i - x_s)}.$$

Це *інтерполяційна формула Лагранжа*. Важливо зазначити, що вона незручна для швидких обчислень, але має велике теоретичне значення.

Поліном $P(x)$ можна знайти й таким способом. Запишемо $P(x)$ у вигляді

$$P(x) = B_0 + B_1(x - x_0) + B_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$
$$\dots + B_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Одержимо:

$$P(x_0) = y_0 = B_0.$$

Розглянемо поліном

$$Q(x) = \frac{P(x) - y_0}{x - x_0} = B_1 + B_2(x - x_1) + \dots$$
$$\dots + B_n(x - x_1)\dots(x - x_{n-1});$$
$$Q(x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = B_1.$$

Далі розглянемо поліном

$$R(x) = \frac{Q(x) - Q(x_1)}{x - x_1} = B_2 + B_3(x - x_2) + \dots$$
$$\dots + B_n(x - x_2)\dots(x - x_{n-1});$$
$$R(x_2) = \frac{Q(x_2) - Q(x_1)}{x - x_1} = B_2$$

і т. д. Крок за кроком визначаються всі коефіцієнти B, що й дає шуканий поліном $P(x)$. Обчислення роміщують у вигляді таблиці:

x	$P(x)$	$Q(x)$	$R(x)$	$S(x)$
x_0	$y_0 = B_0$			
x_1	y_1	$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_0} = q_1 = B_1$		
x_2	y_2	$\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = q_2$	$\frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} = r_2 = B_2$	
x_3	y_3	$\frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0} = q_3$	$\frac{q_3 - q_1}{x_3 - x_1} = r_3$	$\frac{r_3 - r_2}{x_3 - x_2} = s_3 = B_3$
...	....	....	....	....
x_n	y_n	$\frac{y_n - y_0}{y_n - y_0} = q_n$	$\frac{q_n - q_1}{x_n - x_1} = r_n$	$\frac{r_n - r_2}{x_n - x_2} = s_n$

Знайдемо *межу похибки*, здійснюваної при заміні $f(x)$ на $P(x)$. Розглянемо функцію

$$F(u) = f(u) - P(u) -$$
$$-[f(x) - P(x)]\frac{(u - x_0)(u - x_1)\dots(u - x_n)}{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)}$$

і припустимо, що функція $f(u)$ диференційовна $n+1$ разів. Одержимо:

$$F^{(n+1)}(u) = f^{(n+1)}(u) -$$
$$-[f(x) - P(x)]\frac{(n+1)!}{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)}.$$

Функція $F(u)$ перетворюється на нуль при значеннях

$$u = x_0,\ x_1, \dots, x_n \text{ та } u = x.$$

Повторне застосування теореми Ролля дозволяє показати, що похідна $F^{(n+1)}(u)$ перетвориться на нуль при значенні η, що міститься між найбільшим та найменшим з попередніх чисел. Тому

$$f(x) - P(x) = R(x) =$$
$$= (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}. \qquad (4.7)$$

Якщо M_{n+1} – верхня межа $\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ в інтервалі, що містить усі точки $x_0, x_1, \dots, x_n, x$, то

$$|R(x)| \le |(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)|\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (4.8)$$

Очевидно, що похибка буде тим меншою, чим ближче x знаходиться до однієї з точок x_i і що інтерполяція буде точнішою, ніж екстраполяція.

Приклад 4.5. Експериментально одержано чотири точки, що визначають певну емпіричну функцію:

$$x_0 = 23{,}30,\ x_2 = 25{,}25,\ y_0 = 299,\ y_2 = 373$$
$$x_1 = 24{,}25,\ x_3 = 26{,}10,\ y_1 = 328,\ y_3 = 415.$$

Ідеться про опір антени як функції відношення її довжини до довжини хвилі: $a = 100(l/\lambda)$.

Знайти параболу третього степеня, що проходить через чотири задані точки.

Розв'язання. 1. *Спосіб Лагранжа* полягає в заміні змінних їх значеннями у виразі:

$$P(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} +$$
$$+y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$
$$+y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} +$$
$$+y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Після підстановки значень і досить громіздких обчислень можна знайти

$$P(x) = -1{,}7992x^3 + 138{,}40x^2 - 3497{,}8x + 29444.$$

2. *Другий спосіб* дає таблицю:

x	y	q	r	s
23,30	$299 = y_0 = $ $= B_0$			
24,25	$328 = y_1$	$30{,}5263 =$ $= q_1 = B_1$		
25,25	$373 = y_2$	$37{,}9487 = q_2$	$7{,}4224 =$ $= r_2 = B_2$	
26,10	$415 = y_3$	$41{,}42 = q_3$	$5{,}8931 = r_3$	$-1{,}7992 = s_3 =$ $= B_3$

звідки знаходимо поліном:

$$P(x) = 299 + 30{,}5263(x - 23{,}30) +$$
$$+7{,}4224(x - 23{,}30)(x - 24{,}25) -$$
$$-1{,}7992(x - 23{,}30)(x - 24{,}25)(x - 25{,}25) =$$
$$= -1{,}7992x^3 + 138{,}40x^2 - 3499x + 29450,$$

значення якого співпадають зі значеннями уже знайденого полінома з точністю до похибок обчислення.

4.1.2. Значення змінної знаходяться в арифметичній прогресії. Таблиця різниць

Нехай задано функцію $f(x)$, що прийймає значення $y_0, y_1, \ldots, y_n$ при значеннях x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h, \ldots, x_0 + nh$ змінної x. Вираз

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

називають *першою різницею* для значення аргумента, що дорівнює x.

Перша різниця для значення $x+ph$ має вигляд:

$$\Delta y_P = y_{P+1} - y_P = f(x_0 + (p+1)h) - f(x_0 + ph).$$

Другу різницю, *третю*, ... , різницю k-го порядку визначають, застосовуючи попереднє обчислення до *першої* різниці, *другої*, ... , різниці порядку $k - 1$:

$$\Delta y_{p+1} - \Delta y_p = \Delta^2 y_p;$$

$$\Delta^2 y_{p+1} - \Delta^2 y_p = \Delta^3 y_p;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta^{k-1} y_{p+1} - \Delta^{k-1} y_p = \Delta^k y_p.$$

Легко помітити, що у випадку, коли $f(x)$ є поліномом k-го степеня, різниці k-го порядку рівні між собою, а різниці вищі k-го порядку дорівнюють нулю. Дійсно, перші різниці для значення змінної x – це поліноми степеня $(k-1)$ і т.д. до різниць k-го порядку, які зводяться до сталого числа.

На практиці, якщо емпіричну функцію задано таблицею, то різниці різних порядків подають такою таблицею:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0			
		Δy_0		
$x_0 + h$	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
$x_0 + 2h$	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
$x_0 + 3h$	y_3			

Кожний член дорівнює різниці між найближчими знизу та зверху членами сусіднього зліва стовпця:

$$\begin{array}{c|c} C & \\ & A \\ B & \end{array} \quad A = B - C.$$

Приклад 4.6. Скласти таблицю різниць до 3-го порядку для функції $y = \cos x$ при $x \in [-4^\circ;\ 28^\circ]$ через 2°.

Розв'язання. Розв'язок подано таблицею:

x	$y = \cos x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
−4	0,99756			
		+183		
−2	0,99939		−122	
		+61		0
0	1,00000		−122	
		−61		0
2	0,99939		−122	
		−183		+1
4	0,99756		−121	
		−304		0
6	0,99452		−121	
		−425		0
8	0,99027		−121	
		−546		+1
10	0,98481		−120	
		−666		+1
12	0,97815		−119	
		−785		0
14	0,97030		−119	
		−904		+3
16	0,96126		−116	
		−1020		+1
18	0,95106		−117	
		−1137		+3
20	0,93969		−114	
		−1251		+2
22	0,92718		−112	
		−1363		−1
24	0,91355		−113	
		−1476		+5
26	0,89879		−108	
		−1584		
28	0,88295			

Зауваження. Різниці відповідного порядку (3-й, 4-й, 5-й стовпці таблиці) помножено на 10^5, тому для одержання дійсного результату їх необхідно домножувати на 10^{-5}.

Приклад 4.7. Дано функцію $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Таблиці дають значення $f(x)$ для значень x, що змінюються через 0,001 на проміжку [0,515; 0,520]. Скласти таблицю різниць до 5-го порядку.

Розв'язання. Для цього завдання одержуємо таку таблицю різниць:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0,515	0,475575472717					
		790051505				
0,516	0,476365524222		−643630			
		789407875		−197		
0,517	0,477154932097		−643827		4	
		788764048		−193		1
0,518	0,477943696145		−644020		5	
		788120028		−188		
0,519	0,478731816173		−644208			
		787475820				
0,520	0,479519291993					

***Зауваження*:**

а) діє зауваження до прикладу 4.6 (показник для 10 обирається залежно від точності чисел, які беруть участь в обчисленнях);

б) значення x_0 не обв'язково має бути початковим. Якщо відомо значення функції для $x = x_0 - h,\ x_0 - 2h, x_0 - 3h, \ldots$, то можна, користуючись від'ємними індексами, продовжити вверх таблицю різниць для y і $\Delta y, \Delta^2 y, \ldots$:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$x-4h$	y_{-4}				
		Δy_{-4}			
$x-3h$	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$		
		Δy_{-3}		$\Delta^3 y_{-4}$	
$x-2h$	y_{-2}		$\Delta^2 y$		$\Delta^4 y_{-4}$
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$	
$x-h$	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$	
x	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$	

Закінчення таблиці

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$x+h$	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
$x+2h$	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
$x+3h$	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
$x+4h$	y_4				

Існує й інша схема позначень різниць. Наступна таблиця наочно показує сенс позначень, що вводяться:

Значення функції	Різниці					
	1-го порядку	2-го порядку	3-го порядку	4-го порядку	5-го порядку	6-го порядку
f_{-3} f_{-2} f_{-1} f_0 f_1 f_2 f_3	$f^1_{-5/2}$ $f^1_{-1/2}$ $f^1_{-1/2}$ $f^1_{1/2}$ $f^1_{3/2}$ $f^1_{5/2}$	f^2_{-2} f^2_{-1} f^2_0 f^2_1 f^2_2	$f^3_{-3/2}$ $f^3_{-1/2}$ $f^3_{1/2}$ $f^3_{3/2}$	f^4_{-1} f^4_0 f^4_1	$f^5_{-1/2}$ $f^5_{1/2}$	f^6_0

Приклад 4.8. Скласти таблицю різниць функції $f(x) = x^4$ для значень x: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Розв'язання подано таблицею:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 16 81 255 625 1296 2401 4096	1 15 65 175 369 671 1105 1695	14 50 110 194 302 434 590	36 60 84 108 132 156	24 24 24 24 24	0 0 0 0

4.2. Інтерполяційні поліноми

Знайдемо поліном $P(x)$ n-го порядку, що приймає точно $n+1$ значення $y_0, y_1, \dots, y_n$ для значень аргумента $x_0, x_0+h, \dots, x_0+nh$.

Подамо його у декількох виглядах, які називають *основними класичними інтерполяційними поліномами*.

4.2.1. Інтерполяційний поліном Ньютона

Подамо поліном $P(x)$ у вигляді

$$P(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_0-h) + \dots$$
$$\dots + A_n(x-x_0)(x-x_0-h)\dots[x-x_0-(n-1)h]. \quad (4.9)$$

Надамо x послідовних значень $x_0, x_0+h, \dots, x_0+nh$. Тоді

$$y_0 = A_0,\ \ y_1 = A_0 + hA_1,\ \ y_2 = A_0 + 2hA_1 + 21h^2A_2, \dots,$$
$$y_{n-1} = A_0 + (n-1)hA_1 + \ \dots + (n-1)!\,h^{n-1}A_{n-1},$$
$$y_n = A_0 + nhA_1 + \ \dots + n!\,h^nA_n.$$

З останнього одержимо:

$$A_0 = y_0,\ \ A_1 = \frac{y_1-y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h},$$
$$A_2 = \frac{y_2-y_1-(y_1-y_0)}{2!\,h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}, \dots,$$
$$A_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!\,h^k}, \dots,\ \ A_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}.$$

Для того, щоб одержати формулу, зручну для застосувань, підставимо $u = (x-x_0)/h$.

Тоді поліном (4.9) набуде вигляду

$$y = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{1}{2!}u(u-1)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3!}u(u-1)(u-2)\Delta^3 y_0 + \ \dots$$
$$\dots + \frac{1}{n!}u(u-1)\dots[u-(n-1)]\Delta^n y_0. \quad (4.10)$$

Подамо поліном $P(x)$ у вигляді

$$P(x) = B_0 + B_1(x-x_0) + B_2(x-x_0)(x-x_0+h) + \ \dots$$
$$\dots + B_n(x-x_0)(x-x_0+h)\dots[x-x_0+(n-1)h]. \quad (4.11)$$

Означимо коефіцієнти B_i умовою, що $P(x)$ приймає значення для значень змінної $x_0, x_0-h, \dots, x_0-nh$. Обчислення, аналогічні попереднім, дають:

$$y_0 = B_0,\ \ y_{-1} = B_0 - hB_1,\ \ y_{-2} = B_0 - 2hB_1 + 2!\,h^2B^2, \dots,$$
$$y_{-n} = B_0 - nhB_1 + \ \dots + (-1)^n n!\,h^n B_n.$$

З останього

$$B_0 = y_0,\ \ B_1 = \frac{y_0 - y_{-1}}{h} = \frac{\Delta y_{-1}}{h}, \dots, B_k = \frac{\Delta^k y_{-k}}{k!\,b^k}, \dots, B_n = \frac{\Delta^n y_{-n}}{n!\,h^n}.$$

Виконаємо заміну $u = (x - x_0)/h$.

Тоді поліном (4.11) набуде вигляду

$$y = y_0 + u\Delta y_{-1} + \frac{1}{2!}u(u+1)\Delta^2 y_{-2} + \ \dots$$
$$\dots + \frac{1}{n!}u(u+1)\dots(u+n-1)\Delta^n y_{-n}. \qquad (4.12)$$

У зв'язку з тим, що різниці $y_0, \Delta y_0,\ \Delta^2 y_0, \dots, \Delta^n y_0$ розміщуються в таблиці різниць на *низхідному* косому рядку, а різниці $y_0, \Delta y_{-1}, \Delta^2 y_{-2}, \dots, \Delta^n y_{-n}$ – на *висхідному* косому рядку, то поліном (4.10) називається *інтерполяційним поліномом* (*многочленом*) *Ньютона за низхідними різницями*, або *першим інтерполяційним поліномом Ньютона* (формула Ньютона для інтерполювання вперед), а поліном (4.12) – *інтерполяційним поліномом Ньютона за висхідними різницями*, або *другим інтерполяційним поліномом Ньютона* (формула Ньютона для інтерполювання назад).

Приклад 4.9. Уточнити умови застосування обох інтерполяційних поліномів Ньютона для бесселевої функції $J_1(x)$ для $1 \le x \le 2$ при $h = 0{,}1$.

Розв'язання. У таблиці наведемо значення $10^4 J_1(x)$, після чого обчислимо різниці до третього порядку включно:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,0	4401			
		308		
1,1	4709		−34	
		274		−3
1,2	4983		−37	
		237		−1
1,3	5220		−38	
		199		−1
1,4	5419		−39	
		160		−1

Закінчення таблиці

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,5	5579		−40	
		120		−1
1,6	5699		−41	
		79		−1
1,7	5778		−42	
		37		2
1,8	5815		−40	
		−3		−2
1,9	5812		−42	
		−45		
2,0	5767			

Обчислимо $J_1(1{,}049)$, замінивши функцію $J_1(x)$ параболою третього степеня, що проходить через чотири послідовно розміщені точки. Оскільки аргумент близький до початку таблиці, то краще взяти інтерполяційний поліном Ньютона (4.10) за *низхідними різницями* при $x_0 = 1$, оскільки він вводить тільки

$$y_0 = 4401,\ \ \Delta y_0 = 308,\ \ \Delta^2 y_0 = -34,\ \ \Delta^3 y_0 = -3.$$

Значення функції, що вводяться: y_0, y_1, y_2, y_3 з переважаючим впливом y_0. І це логічно, оскільки $1{,}049$ знаходиться дуже близько від $x_0 = 1$. Було б значно гірше брати поліном (4.12) при $x_0 = 1{,}3$. Дійсно, довелося б вводити $y_0 = 5220$, $\Delta y_{-1} = 237$, $\Delta^2 y_{-2} = -37$, $\Delta^3 y_{-3} = -3$ при переважаючому впливові y_0, яке відповідає аргументу 1,3, що знаходиться далеко від 1,049.

Поліном Ньютона (4.10) для $x_0 = 1$ має вигляд

$$y = 4401 + 308u - 17u(u-1) - (1/2)\,u(u-1)(u-2),$$

що при $u = (1{,}049 - 1)/0{,}1 = 0{,}49$ дає $J_1(0{,}49) = 0{,}4556$.

Детальніші таблиці дають значення $J_1(1{,}049) = 0{,}45558$. Тобто, за вказаною формулою, одержано хороше наближення, незважаючи на достатньо неточні значення вихідної таблиці, в якій похибка задавання чисел y_i може досягати $5 \cdot 10^{-5}$.

Застосування кубічної сплайн-функції (4.29) дає

$$J_1(1{,}049) = 0{,}45545.$$

Якщо ж скористатися формулою полінома Ньютона за *висхідними різницями* (4.12) для $x_0 = 1{,}3$, то

$$y = 5220 + 237u - 18{,}5u(u+1) - (1/2)u(u+1)(u+2).$$

При $u = (1{,}049 - 1{,}3)/0{,}1 = -2{,}51$ одержимо:

$J_1(1{,}049) = 0{,}4557$ – наближення гірше.

Обчислимо $J_1(1{,}941)$. Оскільки аргумент знаходиться в кінці таблиці, то скористаємося формулою (4.12) полінома Ньютона. Вона при $x_0 = 2$ має вигляд

$$y = 5767 - 45u - 21u(u+1) - (1/3)u(u+1)(u+2).$$

При $u = (1{,}941 - 2)/0{,}1 = -0{,}59$ одержимо:

$$J_1(1{,}941) = 0{,}5799.$$

Детальніші таблиці дають 0,57982.

Застосування кубічної сплайн-функції (4.29) дає

$$J_1(1{,}941) = 0{,}57991$$

Формула полінома Ньютона при застосуванні $x_0 = 1{,}7$ у зв'язку з причинами, викладеними вище, не дала б хорошого наближення.

Зауваження. Інтерполяційним поліномам Ньютона можна надати й іншого вигляду. Наведемо один з них.

Оберемо як вузли точки $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0$.

Число $h = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0 \cup \overline{1, n-1})$ – інтервал або крок таблиці. Значення функції у вузлах відомо:

$f(x_i) = y_i$ $(i = \overline{n, 1} \cup 0)$. Побудуємо многочлен:

$$\begin{aligned} P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_n) + A_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \\ +A_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots \\ \dots + A_n(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \dots (x - x_1) - \end{aligned} \tag{4.13}$$

такий, що $P_n(x_i) = f(x_i) = y_i$ $(i = 0 \cup \overline{1, n})$.

Зробивши заміну 1) $x = x_n$, 2) $x = x_{n-1}$, 3) $x = x_{n-2} \dots$ та виконавши обчислення, аналогічні викладеним вище, знайдемо коефіцієнти многочлена (4.13):

$$A_0 = y_n, A_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{1!\,h}, A_2 = \frac{\Delta y_{n-2}}{2!\,h^2}, A_3 = \frac{\Delta y_{n-3}}{3!\,h^3}, \dots, A_n = \frac{\Delta y_0}{n!\,h^n}.$$

Підставивши обчислені коефіцієнти в рівність (4.13) та зробивши в ній заміну змінної (з метою спрощення формули для обчислень) за формулами $(x - x_n)/h = u$, $x = x_n + hu$, поліном (4.13) набуде вигляду (*другий інтерполяційний многочлен Ньютона* (формула Ньютона для інтерполяції назад))

$$\begin{aligned} P_n(x) = P_n(x_n + hu) = y_n + \frac{u}{1!}\Delta y_{n-1} + \\ + \frac{u(u+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \dots \\ + \frac{u(u+1)\dots(u+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Приклад 4.10. Обчислити $f(1{,}13)$, знаючи, що

$$f(1{,}00) = 0{,}8415;\ f(1{,}05) = 0{,}8674;\ f(1{,}10) = 0{,}8912;$$
$$f(1{,}15) = 0{,}9128.$$

Розв'язання. Складемо таблицю різниць заданої функції і скористаємося інтерполяційною формулою Ньютона для інтерполяції назад:

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$
1,00	0,8415		
		0,0259	
1,05	0,8674		−0,0021
		0,0238	
1,10	0,8912		−0,0022
		0,0216	
1,15	0,9128		

У даному випадку $u = (1{,}13 - 1{,}15)/0{,}05 = -0{,}4$;

$$y = 0{,}9128 - 0{,}4 \cdot 0{,}0216 + \frac{-0{,}4 \cdot 0{,}6}{2}(-0{,}0022) = 0{,}9044;$$

$$f(1{,}13) = 0{,}9044.$$

Застосування кубічної сплайн-функції (4.29) дає

$$f(1{,}13) = 0{,}904402.$$

4.2.2. Розділені різниці. Інтерполяційний многочлен Ньютона з розділеними різницями

Якщо в довільних точках $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ задано значення функції $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n-1}), f(x_n)$, то числа

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_1;\ x_0);\quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f(x_2;\ x_1);\ \dots$$

$$\dots \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = f(x_n;\ x_{n-1})$$

називаються *розділеними різницями першого порядку*, або *першими розділеними різницями* функції $f(x)$. *Розділеними різницями другого порядку* називаються числа

$$\frac{f(x_2;\ x_1) - f(x_1;\ x_0)}{x_2 - x_0} = f(x_2;\ x_1;\ x_0);$$

$$\frac{f(x_3;\ x_2) - f(x_2;\ x_1)}{x_3 - x_1} = f(x_3;\ x_2;\ x_1), \dots;$$

$$\frac{f(x_n;\ x_{n-1}) - f(x_{n-1};\ x_{n-2})}{x_n - x_{n-2}} = f(x_n;\ x_{n-1};\ x_{n-2}).$$

Аналогічно визначаються розділені різниці *третього* порядку, *четвертого* і так далі. Різниця n-го порядку записується так:

$$\frac{f(x_n;\ x_{n-1};\ldots;\ x_1) - f(x_{n-1};\ x_{n-2};\ldots;\ x_0)}{x_n - x_0} = f(x_n;\ldots;x_0).$$

Для рівновіддалених значень вузлів $x_0, x_1, \ldots, x_n$ розділені різниці – це звичайні скінченні різниці, про які йшлося раніше.

Розділені різниці можна записати в такому вигляді:

$$f(x_1;\ x_0) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1};$$

$$f(x_2;\ x_0) = \frac{1}{x_2 - x_0}\left(\frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{x_0 - x_2}\left(\frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}\right) = \frac{f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} +$$

$$+ \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(x_n;\ x_{n-1};\ldots;\ x_1;\ x_0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Розділені різниці зручно записувати у вигляді табл. 4.2, вона містить значення функції, заданої нерівновіддаленими значеннями аргумента, та її розділені різниці.

Таблиця 4.2

Значення аргумента	Значення функції	Розділені різниці			
		1-го порядку	2-го порядку	3-го порядку	4-го порядку
x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5	$f(x_0)$ $f(x_1)$ $f(x_2)$ $f(x_3)$ $f(x_4)$ $f(x_5)$	$f(x_1;x_0)$ $f(x_2;x_1)$ $f(x_3;x_2)$ $f(x_4;x_3)$ $f(x_5;x_4)$	$f(x_2;x_1;x_0)$ $f(x_3;x_2;x_1)$ $f(x_4;x_3;x_2)$ $f(x_5;x_4;x_3)$	$f(x_3;\ldots;x_0)$ $f(x_4;\ldots;x_1)$ $f(x_5;\ldots;x_2)$	$f(x_4;\ldots;x_0)$ $f(x_5;\ldots;x_1)$

Розділеними різницями можна подати *інтерполяційний многочлен Ньютона* для нерівновіддалених вузлів $x_0, x_1, ..., x_n$. Нехай у вузлах $x_0, x_1, ..., x_n$ задано функцію $f(x)$: $f(x_0), ..., f(x_n)$.

Знайдемо многочлен

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + A_n(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) -$$

такий, щоб виконувалася $(n + 1)$-ша рівність:

$$f(x_i) = P_n(x_i) \quad (i = 0 \cup \overline{1, n}). \tag{4.15}$$

Практичний приклад заповнення табл. 4.2 наведено в табл. 4.3.

Таблиця 4.3

Значення аргумента	Значення функції	Розділені різниці			
		1-го порядку	2-го порядку	3-го порядку	4-го порядку
3 7 9 14 17	9 49 81 196 7009	10 16 23 2271	1 1 281	0 28	2

Умови (4.15) дозволяють визначити коефіцієнти многочлена: $A_0, A_1, ..., A_n$. Детальних обчислень для загального випадку ми наводити не будемо. Як приклад обчислимо коефіцієнти многочлена другого степеня:

$$P_2(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) \tag{4.16}$$

за умови, що $f(x_0) = P_2(x_0), f(x_1) = P_2(x_1), f(x_2) = P_2(x_2)$.

Замінивши в многочлені (4.16) x на x_0, тоді:

$$A_0 = P_2(x_0) = f(x_0).$$

Замінивши x на x_1, знайдемо:

$$P_2(x_1) = f(x_1) = A_0 + A_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + A_1(x_1 - x_0);$$

$$A_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_1;\ x_0).$$

Нарешті, замінивши x на x_2, обчислимо A_2:

$$f(x_2) = A_0 + A_1(x_2 - x_0) = A_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) =$$

$$= f(x_0) + (x_2 - x_0)\left[\frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}\right] + A_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1);$$

$$A_2 = \frac{f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} +$$
$$+ \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} = f(x_2;\ x_1;\ x_0).$$

Коефіцієнти многочлена (4.16) знайдено, вони є розділеними різницями функції $f(x)$. Побудовано інтерполяційний многочлен другого степеня з розділеними різницями:

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_1 - x_0) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_2; x_1; x_0).$$

Аналогічно можна побудувати інтерполяційний многочлен Ньютона степеня n:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_1;\ x_0) +$$
$$+(x - x_0)(x - x_1)f(x_2;\ x_1;\ x_0) + \ldots \qquad (4.17)$$
$$\ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})f(x_n;\ x_{n-1};\ \ldots;\ x_1;\ x_0).$$

Приклад 4.11. Скориставшись даними табл. 4.3, знайти інтерполяційний многочлен Ньютона четвертого степеня.

Розв'язання. За формулою (4.9) одержимо:

$$P(x) = 9 + (x - 3)10 + (x - 3)(x - 7) \cdot 1 +$$
$$+(x - 3)(x - 7)(x - 9) \cdot 0 +$$
$$+(x - 3)(x - 7)(x - 9)(x - 14) \cdot 2 =$$
$$= 2x^4 - 66x^3 + 755x^2 - 348x + 5292.$$

Приклад 4.12. Обчислити $\lg 21$ за даними таблиці:

x	$y = \lg x$	1-ші розділені різниці	2-гі розділені різниці
20 22 25 29	1,3010 1,3424 1,3979 1,4624	207 185 161,5	–0,00045 –0,00034

Розв'язання.

$$\lg 21 = 1{,}3010 + (21 - 20) \cdot 0{,}0207 + (21 - 20)(21 - 22) \times$$
$$\times (-0{,}00045) + (21 - 20)(21 - 22)(21 - 25) \cdot 0{,}00001 = 1{,}3222.$$

Результат обчислень співпадає з табличними даними.

Застосування кубічної сплайн-функції (4.29) дає

$$\lg 21 = 1{,}3219711.$$

4.2.3. Інтерполяційний поліном Стирлінга

При інтерполюванні функцій часто користуються «формулами центральних різниць». Ці формули складаються з різниць, які лежать близько до рядка, що містить $y_0 = f(x_0)$. Такі формули, взагалі, збігаються швидше, ніж формули Ньютона і Лагранжа. Найважливішими з них є *формули Стирлінга* і *Бесселя*, які можна одержати різними способами, наприклад, шляхом перетворення інтерполяційної формули Ньютона.

Подамо поліном $P(x)$ у вигляді

$$\begin{aligned} P(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0 + h)(x - x_0) + \\ +C_3(x - x_0 + h)(x - x_0)(x - x_0 - h) + \ldots \\ \ldots + C_{2k}(x - x_0 + kh)\ldots[x - x_0 - (k-1)h] + \\ +C_{2k+1}(x - x_0 + kh)\ldots(x - x_0 - kh) + \ldots. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Надаючи x значень $x_0, x_0 - h, x_0 + h, x_0 - 2h, x_0 + 2h, \ldots$, можна поступово одержати:

$$y_0 = C_0, \quad y_{-1} = C_0 - hC_1, \ldots.$$

З останнього обчисленнями, подібними обчисленням у попередніх пунктах, одержимо:

$$C_0 = y_0, \ldots, C_{2k} = \frac{1}{(2k)!} \cdot \frac{\Delta^{2k} y_{-k}}{h^{2k}};$$

$$C_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)!} \frac{\Delta^{2k+1} y_{-k-1}}{h^{2k+1}}, \ldots.$$

Знову виконаємо заміну $u = (x - x_0)/h$, тоді поліном (4.18) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} y = y_0 + u\Delta y_{-1} + \frac{1}{2!}u(u+1)\Delta^2 y_{-1} + \\ + \frac{1}{3!}u(u^2-1)\Delta^3 y_{-2} + \frac{1}{4!}u(u^2-1)(u+2)\Delta^4 y_{-2} + \\ + \frac{1}{5!}u(u^2-1)(u^2-4)\Delta^5 y_{-3} + \ldots. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Подамо інтерполяційний поліном $P(x)$ у вигляді

$$\begin{aligned} P(x) = D_0 + D_1(x - x_0) + D_2(x - x_0)(x - x_0 - h) + \\ +D_3(x - x_0 + h)(x - x_0)(x - x_0 - h) + \ldots \\ \ldots + D_{2k}[x - x_0 + (k-1)h]\ldots(x - x_0 - kh) + \\ +D_{2k+1}(x - x_0 + kh)\ldots(x - x_0 - kh) + \ldots. \end{aligned} \tag{4.20}$$

У цьому випадку коефіцієнти визначаються так:

$$D_0 = y_0, \dots, D_{2k} = \frac{1}{(2k)!}\frac{\Delta^{2k}y_{-k}}{h^{2k}},$$

$$D_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)!}\frac{\Delta^{2k+1}y_{-k}}{h^{2k+1}}, \dots .$$

Поліном записується з тією ж заміною змінних у формі

$$y = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{1}{2!}u(u-1)\Delta^2 y_{-1} +$$
$$+\frac{1}{3!}u(u^2-1)\Delta^3 y_{-1} + \frac{1}{4!}u(u^2-1)(u-2)\Delta^4 y_{-2} +$$
$$+\frac{1}{5!}u(u^2-1)(u^2-4)\Delta^5 y_{-2} + \dots . \qquad (4.21)$$

Додавши рівності (4.19) та (4.21) і розділивши на 2, одержимо:

$$y = y_0 + u\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} + \frac{u^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} +$$
$$+\frac{u(u^2-1)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} + \frac{u^2(u^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} +$$
$$+\frac{u(u^2-1)(u^2-4)}{5!}\cdot\frac{\Delta^5 y_{-2} + \Delta^5 y_{-3}}{2} + \dots . \qquad (4.22)$$

Поліном (4.22) називається *інтерполяційним поліномом Стирлінга*. Застосування його дає особливу точність для точок x, близьких до x_0.

Зауваження. Обчислення з використанням полінома Стирлінга необхідно обривати на члені $\Delta^{2k}y_{-k}$, а не на попередньому члені:

$$1/2\left(\Delta^{2k-1}y_{-k+1} + \Delta^{2k-1}y_{-k}\right),$$

оскільки знання двох останніх різниць дає різницю $\Delta^{2k}y_{-k}$ без обчислення функції в нових точках. Тому поліном Стирлінга – поліном парного степеня $(2k)$, і, щоб побудувати його, необхідно знати значення функції в непарній кількості точок $2k+1$.

4.2.4. Інтерполяційний поліном Бесселя

Напишемо для точки $(x_0 + h;\ y_1)$ формулу, одержану для точки $(x_0;\ y_0)$. Це зводиться до заміни у формулі (4.19) u на $(u-1)$ та $y_0, y_{-1}, y_{-2}, \dots,$ на $y_1, y_0, y_{-1}, \dots$. Знайдемо:

$$y = y_1 + (u-1)\Delta y_0 + \frac{(u-1)u}{2!}\Delta^2 y_0 +$$
$$+\frac{(u-1)u(u-2)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(u^2-1)u(u-2)}{4!}\Delta^4 y_{-1} + \ \dots \quad (4.23)$$

Додавши (4.23) і (4.21) та розділивши на 2, одержимо:

$$y = \frac{y_0 + y_1}{2} + (u - {}^1\!/_2)\Delta y_0 +$$
$$+\frac{u(u-1)}{2!}\cdot\frac{\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_{-1}}{2} + \frac{u(u-1)(u-{}^1\!/_2)}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$$
$$+\frac{u(u^2-1)(u-2)}{4!}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-1} + \Delta^4 y_{-2}}{2} + \ \dots \quad (4.24)$$

Поліном (4.24) називається *інтерполяційним поліномом Бесселя*. Застосування його дає особливу точність для точок x, близьких до середини інтервала $x_0 + h/2$.

Зауваження. Очевидно, що, як і для полінома Стирлінга, закінчувати обчислення полінома Бесселя потрібно на члені $\Delta^{2k+1}y_{-k}$.

Степінь полінома Бесселя має бути непарним: $(2k+1)$, а для побудови його потрібно знати функцію в парній кількості точок $(2k+2)$.

Приклад 4.13. Використовуючи таблицю прикладу 4.9, обчислити $J_1(1{,}511)$.

Розв'язання. Скористаємося поліномом Стирлінга, обмежившись членом другого степеня, який вимагає знання трьох точок. Одержимо:

$$x_0 = 1{,}5;\ y_0 = 5579;\ \Delta y_0 = 120;\ \Delta y_{-1} = 160;\ \Delta^2 y_{-1} = -40.$$

Поліном: $y = 5579 + 140u - 20u^2$, звідки при

$$u = \frac{1{,}511 - 1{,}5}{0{,}1} = 0{,}11$$

знайдемо $J_1(1{,}511) = 0{,}5594$.

Детальніші таблиці дають $J_1(1{,}511) = 0{,}55945\ \dots$.

Застосування кубічної сплайн-функції (4.29) дає

$$J_1(1{,}511) = 0{,}559417\ \dots.$$

Приклад 4.14. Обчислити $J_1(1{,}541)$.

Розв'язання. Використаємо поліном Бесселя, обмежуючись членом третього степеня: необхідно знати чотири точки. Одержимо:

$$x_0 = 1{,}5; \quad y_0 = 5579; \quad y_1 = 5699.$$

$$\Delta y_0 = 120, \; \Delta^2 y_0 = -41, \quad \Delta^2 y_{-1} = -40, \quad \Delta^3 y_{-1} = -1,$$

звідки знаходимо поліном:

$$y = 5639 + 120(u - 0{,}5) - \frac{81}{4}u(u-1) - \frac{1}{6}u(u-1)(u-0{,}5),$$

який при $u = 0{,}41$ дає: $J_1(1{,}541) = 0{,}56333$.

Детальніші таблиці дають $J_1(1{,}541) = 0{,}56333\ldots$.

Застосування кубічної сплайн-функції (4.29) дає

$$J_1(1{,}541) = 0{,}563307\ldots.$$

4.2.5. Області застосування інтерполяційних поліномів Ньютона, Стирлінга, Бесселя

Значення x_0 повинно вибиратися в безпосередній близькості до значення, для якого потрібно обчислити наближення функції. Можна використовувати будь-яку з інтерполяційних формул (4.10), (4.12), (4.22), (4.24) за єдиної умови: різниці, необхідні для обчислення, повинні знаходитися в таблиці. Тому при недостатньо детальних таблицях формули Ньютона повинні застосовуватися для значень аргумента, які розташовані на краях таблиці, а формули Стирлінга і Бесселя – для значень аргумента – всередині таблиці.

Подана таблицею схема показує положення різниць, необхідних для обчислення, в залежності від формули, що застосовується:

	x_0	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	Формули
	×	×					
			×				
$x_0 \rightarrow$	×	N		×			
			N		×		
	×	×		N		×	
			×		N		
$\downarrow$	×	×		×		N	← Ньютона за низхідними різницями
h			×		×		
$\uparrow$	×	×		×		×	
			S		S		
$x_0 \rightarrow$	×	S		S		S	← Стирлінга
			S		S		

	x_0	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	Формули
	×	×		×		×	
			×		×		
	×	×		×		×	
			×		×		
$x_0 \to$	×	*B*		*B*		*B*	
			B		*B*		← Бесселя
	×	*B*		*B*		*B*	
			×		×		
	×	×		×		×	
			×		×		
	×	×		×		*N*	← Ньютона за висхідними різницями
			×		*N*		
	×	×		*N*			
			N				
$x_0 \to$	×	*N*					

4.2.6. Верхня межа похибки, яка виникає при застосуванні інтерполяційних формул Ньютона, Стирлінга, Бесселя

Якщо можна обчислити послідовні похідні функції $f(x)$, то застосування формул (4.7), (4.8), які дають верхню межу похибки, що одержується при використанні полінома Лагранжа, дає змогу одержати такі результати.

1. *Формула Ньютона за низхідними різницями.* Якщо M_{n+1} – верхня межа $\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ в інтервалі $(x_0;\ x_0 + nh)$, то при $(n+1)$-й точці та врахувавши те, що $u = (x - x_0)/h$, можна одержати

$$|R_n| \le |u(u-1)\dots(u-n)| \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}.$$

Припустивши, що $(n+1)$-ша різниця стала (або майже стала), можна прийняти

$$f^{(n+1)}(\eta) \cong \frac{\Delta^{n+1} y_n}{h^{n+1}}$$

і для залишкового члена першої інтерполяційної формули Ньютона одержимо наближену рівність:

$$|R_n| \cong |u(u-1)\dots(u-n)| \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!}.$$

2. *Формула Ньютона за висхідними різницями.* Якщо M_{n+1} – та сама межа, але в інтервалі $(x_0;\ x_0 - nh)$, то при $(n+1)$-й точці

$$|R_n| \leq |u(u+1)\ldots(u+n)|\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}M_{n+1}.$$

3. *Формула Стирлінга.* Якщо M_{2n+1} – верхня межа $\left|f^{(2n+1)}(x)\right|$ в інтервалі $(x_0 - nh;\ x_0 + (n+1)h)$, то (при $2n+1$ точці) одержимо:

$$|R_{2n+1}| \leq |u(u^2-1)\ldots(u^2-n^2)|\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}M_{2n+1}.$$

Наближено можна вважати, що

$$f^{(2n+1)}(\eta) \cong m_{2n+1} \cong (\Delta^{2n+1}y_{-n-1} + \Delta^{2n+1}y_{-n})/2,$$

тоді

$$|R_{2n+1}| \leq |u(u^2-1)\ldots(u^2-n^2)|\frac{m_{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

4. *Для інтерполяційної формули Бесселя*, якщо M_{2n+2} – верхня межа $\left|f^{(2n+2)}(x)\right|$ в інтервалі $(x_0 - nh;\ x_0 + (n+1)h)$, при $(2n+2)$-х точках одержимо відповідно:

$$|R_{2n+2}| \leq |u(u^2-1)\ldots(u^2-n^2)[u-(n+1)]|\frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!}M_{2n+2};$$

$$|R_{2n+2}| \leq |u(u^2-1)\ldots(u^2-n^2)[u-(n+1)]|\frac{m_{2n+2}}{(2n+2)!},$$

де $$f^{(2n+1)}(\eta) \cong m_{2n+2} \cong (\Delta^{2n+2}y_{-n-1} + \Delta^{2n+2}y_{-n})/2.$$

4.3. Наближення лінійною комбінацією функцій, визначеною за допомогою критерію найменших квадратів

1. *Емпірична функція*

Нехай $f(x)$ – дана функція, яка для абсцис $x_0, x_1, \ldots, x_n$ приймає значення $y_0, y_1, \ldots, y_n$ і $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p$ – p вибраних деяких функцій $(p < n)$. Визначимо коефіцієнти A_k у виразі

$$\Phi(x) = A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \ldots + A_p\varphi_p(x)$$

так, щоб сума E квадратів похибок, що одержуються при заміні $f(x)$ на $\Phi(x)$ в розглядуваних точках, була найменшою. Одержимо:

$$E = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i^2 \quad \text{при} \quad \varepsilon_i = b_i - A_0\varphi_0(x_i) - A_1\varphi_1(x_i) - \ldots - A_p\varphi_p(x_i).$$

З умови (необхідна умова існування екстремуму функції багатьох змінних)

$$\frac{\partial E}{\partial A_k} = A_0 \sum_{i=0}^{n} \varphi_k(x_i)\varphi_0(x) + \ldots + A_p \sum_{i=0}^{n} \varphi_k(x_i)\varphi_p(x_i) -$$

$$-\sum_{i=0}^{n} \varphi_k(x_i)y_i = 0 \ \ (k = 0 \cup \overline{1,p})$$

можна визначити коефіцієнти A_k. Тоді середня величина квадрата похибки становитиме:

$$M = E/(n+1) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{i=0}^{n} y_i^2 - \left(A_0 \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i)y_i + \ldots + A_p \sum_{i=0}^{n} \varphi_p(x_i)y_i\right)\right].$$

2. *Функція, визначена аналітично*

При тих же позначеннях необхідно визначити коефіцієнти A_k таким чином, щоб інтеграл квадрата похибки при заміні $f(x)$ на $\Phi(x)$ в інтервалі $(a;\ b)$ був найменшим. Цей інтеграл має вигляд:

$$E = \int_a^b \varepsilon^2(x)dx \text{ при } \varepsilon(x) = f(x) - A_0\varphi(x) - \ldots - A_p\varphi_p(x).$$

Коефіцієнти A_k визначаються системою, що одержується з умови мінімуму:

$$\frac{\partial E}{\partial A_k} = A_0 \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_0(x)dx + \ldots + A_p \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_p(x)dx -$$

$$-\int_a^b \varphi_k(x)f(x)dx = 0.$$

4.4. Наближення поліномом, визначеним за допомогою критерію найменших квадратів

1. *Емпірична функція.* Тут вибрано функції

$$\varphi_0 = x^p,\ \ \varphi_1 = x^{p-1}, \ldots, \varphi_{p-1} = x,\ \ \varphi_p = 1$$

і наближувану функцію-поліном

$$A_0x^p + A_1x^{p-1} + \ldots + A_{p-1}x + A_p.$$

Тобто, замість того, щоб замінити графік емпіричної функції, заданої $(n+1)$ точками, параболою n-го степеня, що проходить через них, можна обрати параболу степеня $p < n$. Така парабола, природно, не пройде через вказану $(n+1)$ точку, як правило, не пройде вона ні через одну з них, але задовольнить вимогу якомога ближчого проходження до них.

Ця умова математично формулюється так: *сума квадратів похибок – найменша*. В точках $(x_0;\, y_0)$, $(x_1;\, y_1), \dots, (x_n;\, y_n)$ одержимо похибки:

$$\varepsilon_0 = y_0 - \left(A_0 x_0^p + \dots + A_p\right);$$
$$\varepsilon_1 = y_1 - \left(A_1 x_1^p + \dots + A_p\right);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\varepsilon_n = y_n - \left(A_n x_n^p + \dots + A_p\right).$$

Сума квадратів похибок становить:

$$E = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2.$$

Умови для мінімуму E задаються так:

$$\frac{\partial E}{\partial A_0} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial A_1} = 0, \dots .$$

З останніх умов одержимо систему для визначення $A_0, A_1, \dots, A_p$:

$$A_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^{2p} + A_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^{2p-1} + \dots + A_p \sum_{i=0}^{n} x_i^p = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^p\,;$$
$$A_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^{2p-1} + A_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^{2p-2} + \dots + A_p \sum_{i=0}^{n} x_i^{p-1} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^{p-1}\,;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^p + A_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^{p-1} + \dots + A_p \sum_{i=0}^{n} 1 = \sum_{i=0}^{n} y_i. \quad (4.25)$$

Якщо дані абсциси є рівновіддаленими чи, більш загально, симетрично розміщені навколо центра ваги, то доцільно прийняти цей центр ваги за новий початок координат. Це перетворить на нуль суми:

$$\sum_{i=0}^{n} x^{2k+1}.$$

Середня величина квадрата похибки M становить:

$$M = \frac{E}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - (A_0 x_i^p + \dots + A_p)\right)^2.$$

Приклад 4.15. Для $10^4 J_1(x)$ за емпіричну функцію прийняти функцію, що визначається чотирма першими рядками прикладу 4.9 та подати її параболою другого степеня.

Розв'язання. Перемістимо початок координат у точку $x = 1{,}15$. Тоді емпірична функція визначиться такими даними:

$$x_1 = -0{,}15; \quad x_2 = -0{,}05; \quad x_3 = 0{,}05; \quad x_4 = 0{,}15;$$

$$y_1 = 4401; \quad y_2 = 4709; \quad y_3 = 4983; \quad y_4 = 5220.$$

Коефіцієнти A_0, A_1, A_2, визначимо з системи

$$A_0 \sum_1^4 x_i^4 + A_2 \sum_1^4 x_i^2 = \sum_1^4 x_i^2 y_i,$$

$$A_1 \sum_1^4 x_i^2 = \sum_1^4 x_i y_i, \; A_0 \sum_1^4 x_i^2 + A_2 \sum_1^4 1 = \sum_1^4 y_i$$

або

$$0{,}001025A_0 + 0{,}05A_2 = 240{,}70;$$

$$0{,}05A_1 = 136{,}55;$$

$$0{,}05A_0 + 4A_2 = 19313.$$

З останньої одержимо:

$$A_0 = -1781{,}2; \quad A_1 = 2731; \quad A_2 = 4850{,}5.$$

Парабола, яка представляє в середньому дану функцію в проміжку $[1;\ 1{,}3]$, має вигляд:

$$y = -1781{,}2(x - 1{,}15)^2 + 2731(x - 1{,}15) + 4850{,}5.$$

Середня величина квадрата похибки дорівнює

$$M = \frac{1}{4}[(0{,}2)^2 + (0{,}5)^2 + (0{,}4)^2 + (0{,}1)^2] = 11.$$

2. *Функція визначена аналітично.* Якщо функцію $f(x)$ визначено аналітично і, крім того, легко обчислюються інтеграли

$$\int_a^b x^k f(x)\, dx\,,$$

де k – ціле додатне число, то для визначення полінома $A_0 x^p + \ldots +$ $+ A_p$, який може замінити в інтервалі $(a;\ b)$ функцію $f(x)$ з найменшим інтегралом від квадрата похибки, діють так. Похибка в точці x:

$$\varepsilon(x) = f(x) - \left[A_0 x^p + \ldots + A_p\right]. \qquad (4.26)$$

Інтеграл від квадрата похибки:

$$E = \int_a^b \varepsilon^2(x)\,dx. \qquad (4.27)$$

Коефіцієнти $A_0, A_1, \dots, A_p$ визначаються умовами мінімуму E, тобто

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial A_0} = \int_a^b x^p\left[A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ \dots + A_p - f(x)\right]dx = 0,$$

……………………………………………………………………… .

Звідси одержимо систему:

$$A_0\int_a^b x^{2p}\,dx + A_1\int_a^b x^{2p-1}\,dx + \ \dots + A_p\int_a^b x^p\,dx = \int_a^b x^p f(x)\,dx,$$

………………………………………………………………………….

$$A_0\int_a^b x^p\,dx + A_1\int_a^b x^{p-1}\,dx + \ \dots + A_p\int_a^b dx = \int_a^b f(x)\,dx\,. \ (4.28)$$

Обчислення значно спростяться, якщо проміжок інтегрування становитиме $[-1;\ 1]$. Перейдемо до цього вупадку за допомогою заміни змінної:

$$x = (x_0 + y_0)/2 + ((x_0 - y_0)/2)X.$$

Тоді потрібно знайти поліном $B_0X^p + \ \dots + B_p$, який найкраще наближається в середньому до функції

$$\varphi(X) = f\left(\frac{y_0 + x_0}{2} + \frac{y_0 - x_0}{2}X\right)$$

у проміжку $[-1;\ 1]$.

Виконаємо заміну

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} X^k\varphi(X)\,dx = I_k.$$

Оскільки

$$\int_{-1}^{1} X^{2k}\,dx = \frac{2}{2k+1} \quad \text{і} \quad \int_{-1}^{1} X^{2k+1}\,dx = 0,$$

то система (4.28) набуде вигляду

$$B_p + \frac{1}{3}B_{p-2} + \frac{1}{5}B_{p-4} + \ \dots = I_0;$$

$$\frac{1}{3}B_{p-1} + \frac{1}{5}B_{p-3} + \frac{1}{7}B_{p-5} + \ldots = I_1;$$
$$\frac{1}{3}B_p + \frac{1}{5}B_{p-2} + \frac{1}{7}B_{p-4} + \ldots = I_2;$$
$$\frac{1}{5}B_{p-1} + \frac{1}{7}B_{p-3} + \frac{1}{9}B_{p-5} + \ldots = I_3;$$
$$\frac{1}{5}B_p + \frac{1}{7}B_{p-2} + \frac{1}{9}B_{p-4} + \ldots = I_4,$$
....

Середня величина квадрата похибки становитиме:

$$M = E/(1-(-1)) = E/2.$$

Враховуючи формули (4.26), (4.27) та систему (4.28), можна записати:

$$M = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi^2(X)\,dx - \sum_{i=0}^{p} B_{p-i}I_i.$$

Результат обчислення коефіцієнтів B та величин

$$\alpha_p = \sum_{i=0}^{p} B_{p-i}I_i$$

як функції інтегралів I для різних значень p наведено в таблиці:

p	B	α
1	$B_0 = 3I_1$ $B_1 = I_0$	$\alpha_1 = I_0^2 + 3I_1^2$
2	$B_0 = (15/4)[-I_0 + 3I_2]$ $B_1 = 3I_1$ $B_2 = (3/4)[3I_0 - 5I_2]$	$\alpha_2 = I_0^2 + 3I_1^2 + (5/4)[3I_2 - I_0]^2$
3	$B_0 = (35/4)[-3I_1 + 5I_3]$ $B_1 = (15/4)[-I_0 + 3I_2]$ $B_2 = (15/4)[5I_1 - 7I_3]$ $B_3 = (3/4)[3I_0 - 5I_2]$	$\alpha_3 = I_0^2 + 3I_1^2 +$ $+(5/4)[3I_2 - I_0]^2 +$ $+(7/4)[5I_3 - 3I_1]^2$
4	$B_0 = (315/64)[3I_0 - 30I_2 + 35I_4]$ $B_1 = (35/4)[-3I_1 + 5I_3]$ $B_2 = (105/32)[-5I_0 + 42I_2 - 45I_4]$ $B_3 = (15/4)[5I_1 - 7I_3]$ $B_4 = (15/64)[15I_0 - 70I_2 + 63I_4]$	$\alpha_4 = I_0^2 + 3I_1^2 +$ $+(5/4)[3I_2 - I_0]^2 +$ $+(7/4)[5I_3 - 3I_1]^2 +$ $+(9/64)[35I_4 - 30I_2 + 3I_0]^2$

p	B	α
5	$B_0 = (693/64)[15I_1 - 70I_3 + 63I_5]$ $B_1 = (315/64)[3I_0 - 30I_2 + 35I_4]$ $B_2 = (315/32)[-21I_1 + 90I_3 - 77I_5]$ $B_3 = (105/32)[-5I_0 + 42I_2 - 45I_4]$ $B_4 = (105/64)[35I_1 - 126I_3 + 99I_5]$ $B_5 = (15/64)[15I_0 - 70I_2 + 63I_4]$	$\alpha_5 = I_0^2 + 3I_1^2 +$ $+(5/4)[3I_2 - I_0]^2 +$ $+(7/4)[5I_3 - 3I_1]^2 +$ $+(9/64)[35I_4 - 30I_2 + 3I_0]^2 +$ $+(11/64)[63I_5 - 70I_3 + 15I_1]^2$

Приклад 4.16. Визначити поліном третього степеня, який в проміжку [1; 2] найбільш близький до функції $\ln x$.

Розв'язання. Завдання можна звести до визначення полінома

$$B_0X^3 + B_1X^2 + B_2X + B_3,$$

найбільш близького до функції $\ln(1{,}5 + 0{,}5X)$ у вказаному проміжку.

Послідовно одержимо:

$$I_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \ln(1{,}5 + 0{,}5X)\,dX = \int_1^2 \ln x\,dx = 2\ln 2 - 1\,;$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} X\ln(1{,}5 + 0{,}5X)\,dX =$$

$$= \int_1^2 (2x - 3)\ln x\,dx = -2\ln 2 + \frac{3}{2}\,;$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} X^2\ln(1{,}5 + 0{,}5X)\,dX =$$

$$= \int_{-1}^{1} (2x - 3)^2\ln x\,dx = \frac{14}{3}\ln 2 - \frac{28}{9}\,;$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} X^3\ln(1{,}5 + 0{,}5X)\,dX =$$

$$= \int_{-1}^{1} (2x - 3)^3\ln x\,dx = -10\ln 2 + 7\,.$$

Звідси, скориставшись формулами попередньої таблиці та значенням $\ln 2 = 0{,}6931472$, похибка якого не перевищує $2 \cdot 10^{-8}$, одержимо:

$$B_0 = 0{,}0133;\;\; B_1 = -0{,}0583;\;\; B_2 = 0{,}3331;\;\; B_3 = 0{,}4057.$$

Одержимо:

$$\int_1^2 (\ln x)^2\,dx = 2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2 = 0{,}18831736;$$

$$\alpha = 0{,}18831731.$$

Тому середньоквадратична похибка (тобто корінь з середньої величини квадрата похибки) становить $\sqrt{M} = 2 \cdot 10^{-4}$. Функцію $\ln x$ на проміжку $[1;\ 2]$ можна наближено замінити поліномом $0{,}0133(2x-3)^3 - 0{,}0583(2x-3)^2 + 0{,}3331(2x-3) + 0{,}4057$.

Зауваження. Розглянутий спосіб обчислення застосовується і до випадку, коли емпірична функція задана графіком. При цьому інтеграли $I_0, I_1, \ldots$ обчислюються також графічно.

4.5. Інтерполювання та екстраполювання кубічними сплайн-фукціями

Кубічна сплайн-функція на $[i;\ i+1]$ має такий вигляд:

$$S(x) = \frac{M_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{M_{i+1}}{6h_i}(x-x_i)^3 +$$

$$+\left(\frac{f_{i+1}}{h_i} - \frac{M_{i+1}h_i}{6}\right)(x-x_i) + \left(\frac{f_i}{h_i} - \frac{M_i h_i}{6}\right)(x_{i+1}-x),$$

$$i = \overline{1, n-1}, \tag{4.29}$$

де f_i – значення функції, що апроксимується; $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Коефіцієнти M_i визначаються з системи

$$C_i M_{i-1} + 2(1+C_i)M_i + M_{i+1} = d_i,\quad i = \overline{2, n-1},$$

де

$$C_i = \frac{h_{i-1}}{h_i};\ d_i = \frac{6}{h_i}\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right);\ p_1 = 0, q_1 = 0,$$

$$p_{i+1} = \frac{-1}{C_i p_i + 2(1+C_i)},\quad q_{i+1} = \frac{d_i - C_i q_i}{C_i p_i + 2(1+C_i)},\quad i = \overline{2, n-1};$$

$$M[i] =$$

$$= \begin{cases} M_n = 0, \\ M_i = \dfrac{-1}{C_i p_i + 2(1+C_i)} \cdot M_{i+1} + \dfrac{d_i - C_i q_i}{C_i p_i + 2(1+C_i)}, & i = \overline{n-1, 2}. \\ M_0 = 0. \end{cases}$$

Якщо $M_0 = M_n = 0$, то одержуємо натуральні сплайн-функції.

Якщо $M_0 = 6d_1 - M_1 - M_2$, $M_n = 6d_{n-1} - M_{n-1} - M_{n-2}$, то одержуємо покращені сплайн-функції, де

$$d_i = \frac{(1-a_i)\, f_{i-1} - f_i + a_i\, f_{i+1}}{h_{i-1}\, h_i}, a_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, i = \overline{2, n-1}.$$

Зауваження до розділу.

1. Значення аргумента x_i $(i = 0 \cup \overline{1,n})$ можна позначати через a_i а функції y_i – через b_i, $u = (x-a)/h = q$ і т. ін.

2. Знаходячи коефіцієнти Лагранжа (при застосуванні інтерполяційної формули Лагранжа),

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{D_i} -$$

різниці зручно подавати розрахунковою таблицею так:

$\underline{x-x_0}$	x_0-x_1	x_0-x_2	……	x_0-x_n
x_1-x_0	$\underline{x-x_1}$	x_1-x_2	……	x_1-x_n
x_2-x_0	x_2-x_1	$\underline{x-x_2}$	……	x_2-x_n
……	……	……	$\underline{……}$	……
x_n-x_0	x_n-x_1	x_n-x_2	……	$\underline{x-x_n}$

Якщо позначити добуток елементів головної діагоналі (підкреслені) вище поданої таблиці через

$$\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

та врахувати, що $D_i(i = 0 \cup \overline{1,n})$ – добуток елементів її рядків, то одержимо формулу

$$P_n(x) = \Pi_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{D_i}.$$

Зауваження. Тут з метою оптимізації обчислень прийнято:

$$\Pi_{n+1}(x) = L(x), D_i = (x-x_i)L'(x_i).$$

Тоді у випадку рівновіддалених вузлів інтерполяційна формула Лагранжа набуває вигляду

$$P_n(x) = \Pi_{n+1}(t)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(t-i)i!\,(n-i)!\,(-1)^{n-i}},$$

де $t = (x-x_0)/h$, $h = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0 \cup \overline{1,n})$.

Для оцінки похибки інтерполяційної формули Лагранжа можна використовувати співвідношення

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}|\Pi_{n+1}(x)|}{(n+1)!},$$

де

$$M_{n+1} = \max_{[a;\,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

3. Інтерполяційні формули Ньютона можна застосовувати у такому вигляді:

а) *перша інтерполяційна формула Ньютона* (*за низхідними різницями*) або інтерполювання «вперед»:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots +$$

$$+\frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

де $q = (x - x_0)/h$, $h = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0 \cup \overline{1,n})$, $\Delta^i y_0$ — скінченна різниця i-го порядку, причому $\Delta^i y_0 = \Delta^{i-1}y_1 - \Delta^{i-1}y_0$ $(i = \overline{1,n})$.

При $n = 1$ одержимо *формулу лінійної інтерполяції*:

$$P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0.$$

При $n = 2$ одержимо *формулу квадратичної інтерполяції*:

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0;$$

б) *друга інтерполяційна формула Ньютона*:

$$P_n(x) = y = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{1}{2!}q(q+1)\Delta^2 y_{-2} + \ \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}q(q+1)\ldots(q+n-1)\Delta^n y_{-n}$$

– *за висхідними різницями*, або інтерполювання «назад»;

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ \ldots$$

$$\ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0;$$

в) *інтерполяційна формула Ньютона для нерівновіддалених значень аргумента*:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) +$$

$$+(x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \ \ldots$$

$$\ldots + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$
де
$$f(x_0, x_1, \ldots, x_i) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i) - f(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1})}{x_i - x_0}$$
– розділена різниця i-го порядку.

4. При *апроксимації експериментальних даних методом найменших квадратів* (*МНК*), у найпростіших випадках, достатньо пам'ятати таке.

Основою *МНК* є вимога мінімальності суми квадратів відхилень фактичних значень (даних) y_i від розрахункових $\bar{y}_i$, тобто $\min S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}_i)^2$, де $\bar{y}_i = f(x_i)$ – конкретне значення апроксимаційної функції для відповідних x_i; або
$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (y - a_0 - a_1 x)^2 \to \min,$$
якщо $f(x) = a_0 + a_1 x$ – лінійна апроксимаційна функція (або рівняння регресії).

При розгляді $S = S(a_0;\ a_1)$ як функції двох параметрів, $\min S$ буде в точці, для якої
$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0$$
– необхідна умова існування екстремуму, яка у випадку лінійної функції дає так звану систему нормальних рівнянь:
$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, визначають параметри a_0, a_1 лінійної функції – рівняння апроксимаційної залежності $\bar{y} = a_0 + a_1 x$.

Для деяких випадків, коли функція не лінійна, вона за допомогою аргумента-фактора зводиться до лінійної – це метод лінеаризації рівнянь апроксимаційної залежності.

До таких випадків відносяться й такі.

Якщо:

1. $\bar{y} = a_0 + (a_1/t)$, то заміна аргумента $x = 1/t$ зводить рівняння до виду $\bar{y} = a_0 + a_1 x$;

2. $\bar{y} = a_0 + \frac{a_1}{t^2}$ $\left(\text{заміна}: x = \frac{1}{t^2}\right)$;

3. $\bar{y} = a_0 \ln t + a_1$ (заміна: $x = \ln t$);

4. $\bar{y} = a_0 + a_1\sqrt{t}$ (заміна: $x = \sqrt{t}$);

5. $\bar{y} = a_0 + a_1 t^2$ (заміна: $x = t^2$);

6. $\bar{y} = a_0 \cdot a_1^t$, то, прологарифмувавши рівняння, одержимо:

$$\ln \bar{y} = \ln a_0 + t \ln a_1$$

і заміна змінних $z = \ln \bar{y}$, $\alpha_0 = \ln a_0$, $\alpha_1 = \ln a_1$ дасть: $z = \alpha_0 + \alpha_1 t$;

7. $\bar{y} = a_0 \cdot t^{a_1}$, то (аналогічно до випадку 5):

$\ln\bar{y} = \ln a_0 + a_1 \ln t$, $z = \ln\bar{y}$, $\alpha_0 = \ln a_0$, $x = \ln t$ і $z = \alpha_0 + a_1 x$.

Аналогічно діють і у випадку $\bar{y} = a_0 \cdot e^{a_1 t}$.

8. Формули

$$\bar{y} = \frac{1}{at+b}, \bar{y} = \frac{t}{at+b}, \bar{y} = \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n}{b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_m t^m}$$

також можна перетворити так, що вони стануть лінійними відносно коефіцієнтів, увівши відповідно заміну:

$$at + b = \frac{1}{\bar{y}} = z, \;\; at + b = \frac{t}{\bar{y}} = z;$$

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n - \bar{y}(b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m) = 0.$$

В інших випадках для апроксимаційної функції $y = f(x)$ складається відповідна система нормальних рівнянь, з якої і знаходять невідомі параметри (коефіцієнти), що визначають конкретне рівняння функції $y = f(x)$.

4.6. Завдання для самостійної, домашньої роботи і приклади їх роз'язання

Завдання 1

Знайти наближене значення функції при даному значенні аргумента за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа, якщо функцію задано:

1) у нерівновіддалених вузлах таблиці (задача 1);

2) у рівновіддалених вузлах таблиці (задача 2).

Варіанти до завдання 1

Таблиці значень функції до задачі 1

Таблиця 1

x_i	y_i	№	x
0,35	2,73951	1	0,526
0,41	2,30080	7	0,453
0,47	1,96864	13	0,482
0,51	1,78776	19	0,552
0,56	1,59502	25	0,436
0,64	1,34310		

Таблиця 2

x_i	y_i	№	x
0,41	2,57418	2	0,616
0,46	2,32513	8	0,478
0,52	2,09336	14	0,665
0,60	1,86203	20	0,537
0,65	1,74926	26	0,673
0,72	1,62098		

Таблиця 3

x_i	y_i	№	x
0,68	0,80866	3	0,89
0,73	0,89492	9	0,812
0,80	1,02964	15	0,774
0,88	1,20966	21	0,955
0,93	1,34087	27	0,715
0,99	1,52368		

Таблиця 4

x_i	y_i	№	x
0,11	9,05421	4	0,314
0,15	6,61659	10	0,235
0,21	4,69170	16	0,332
0,29	3,35106	22	0,275
0,35	2,73951	28	0,186
0,40	2,36522		

Таблиця 5

x_i	y_i	№	x
0,43	1,63597	5	0,702
0,48	1,73234	11	0,512
0,55	1,87686	17	0,645
0,62	2,03345	23	0,736
0,70	2,22846	29	0,608
0,75	2,35973		

Таблиця 6

x_i	y_i	№	x
0,05	0,050042	6	0,263
0,10	0,100335	12	0,114
0,17	0,171657	18	0,125
0,25	0,255342	24	0,203
0,30	0,309336	30	0,154
0,36	0,376303		

Таблиці значень функції до задачі 2

Таблиця 1

x_i	y_i	№	x_i
0,210	4,83170	1	0,2121
0,215	4,72261	7	0,2165
0,220	4,61855	13	0,2232
0,225	4,51919	19	0,2263
0,230	4,42422	25	0,2244
0,235	4,33337		

Таблиця 2

x_i	y_i	№	x
1,415	0,888551	2	1,4179
1,420	0,889599	8	1,4258
1,425	0,890637	14	1,4396
1,430	0,891667	20	1,4236
1,435	0,892687	26	1,4315
1,440	0,893698		

Таблиця 3

x_i	y_i	№	x
1,375	5,04192	3	1,3832
1,380	5,17744	9	1,3926
1,385	5,32016	15	1,3862
1,390	5,47069	21	1,3934
1,395	5,62968	27	1,3866
1,400	5,79788		

Таблиця 4

x_i	y_i	№	x
0,101	1,26183	4	0,1157
0,106	1,27644	10	0,1125
0,111	1,29122	16	0,1232
0,116	1,30617	22	0,1334
0,121	1,32113	28	0,1285
0,126	1,32660		

Таблиця 5

x_i	y_i	№	x
0,150	6,61659	5	0,1521
0,155	6,39989	11	0,1611
0,160	6,19658	17	0,1662
0,165	6,00551	23	0,1542
0,170	5,82558	29	0,1625
0,175	5,65583		

Таблиця 6

x_i	y_i	№	x
0,180	5,61543	6	0,1838
0,185	5,46693	12	0,1875
0,190	5,32634	18	0,1944
0,195	5,19304	24	0,1976
0,200	5,06649	30	0,2038
0,205	4,94619		

Приклад виконання завдання

Задача 1

x_i	y_i
0,02	1,02316
0,08	1,09590
0,12	1,14725
0,17	1,21483
0,23	1,30120
0,30	1,40976

Обчислити значення функції $f(x) = y(x)$ при $x = 0{,}122$.

Задача 2

x_i	y_i
0,115	8,65729
0,120	8,29329
0,125	7,95829
0,130	7,64893
0,135	7,36235
0,140	7,09613

Визначити значення функції $y(x)$ при $x = 0{,}1264$.

Задача 1. Використаємо формулу (4.4) та *зауваження до розділу*:

$$f(x) = \Pi_{n+1}(x) \cdot \sum_{i=0}^{n}(y_i/D_i).$$

Обчислення наведено таблицею:

i	Різниці						D_i	y_i/D_i
0	0,102	–0,06	–0,10	–0,15	–0,21	–0,28	$-0{,}539784\cdot10^{-5}$	–189549,894
1	0,06	0,042	–0,04	–0,09	–0,15	–0,22	$0{,}299376\cdot10^{-6}$	3660614,0773
2	0,10	0,04	0,002	–0,05	–0,11	–0,18	$-0{,}792\cdot10^{-8}$	–144854798,0
3	0,15	0,09	0,05	–0,048	–0,06	–0,13	$-0{,}25272\cdot10^{-6}$	–4807019,626
4	0,21	0,15	0,11	0,06	–0,108	–0,07	$0{,}1571724\cdot10^{-5}$	827880,7221
5	0,28	0,22	0,18	0,13	0,07	–0,178	$-0{,}17960342\cdot10^{-4}$	–78492,93738

Тоді, $\Pi_{n+1}(x) = -0{,}79061391 \cdot 10^{-8}$,

$$\sum_{i=0}^{5}(y_i/D_i) = -145441365{,}63834.$$

Тому $\quad f(0{,}122) \cong \Pi_{n+1}(x) \cdot \sum_{i=0}^{5}(y_i/D_i) =$

$$= -0{,}79061391 \cdot (-1{,}45441365) \cong 1{,}14988.$$

Застосування кубічної сплайн-функції (4.29) дає

$$f(0{,}122) \cong 1{,}1498836.$$

Задача 2. Для обчислень використовуємо спрощену формулу Лагранжа:

$$f(x) = y(x) \cong \Pi_{n+1}(t)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(t-i)C_i},$$

де $\Pi_{n+1}(t) = t(t-1)\ldots(t-n)$; $t = (x-x_0)/h$; $h = x_{i+1} - x_i$;

$$C_i = (-1)^{n-i}\cdot i!\cdot(n-i)!$$

Тут $t = (0{,}1264 - 0{,}115)/0{,}005 = 2{,}28$.

Обчислення розміщуємо в таблиці:

i	x_i	y_i	$t-i$	C_i	$(t-i)\cdot C_i$	$\dfrac{y_i}{(t-i)\cdot C_i}$
0	0,115	8,65729	2,28	–120	–273,6	–0,031642141813
1	0,120	8,29329	1,28	24	30,72	0,269963867188
2	0,125	7,95829	0,28	–12	–3,36	–2,368538690476
3	0,130	7,64893	–0,72	12	–8,64	–0,885292824074
4	0,135	7,36235	–1,72	–24	41,28	0,178351501938
5	0,140	7,09613	–2,72	120	–326,4	–0,021740594363

Отже,

$$\Pi_{n+1}(t) = -2{,}752534020096;$$

$$\sum_{i=0}^{5} \frac{y_i}{(t-i)C_i} = -2{,}8588988816.$$

Тому, $f(0{,}1264) = -2{,}752534020096 \cdot (-2{,}8588988816) \cong$
$\cong 7{,}869216431618.$

Застосування кубічної сплайн-функції (4.29) дає
$$f(0{,}1264) \cong 7{,}869360943663.$$

Завдання 2

Задача 1. Використовуючи лінійну інтерполяцію (див. *зауваження* до розділу), обчислити значення функції при заданих значеннях аргумента. Попередньо переконатися в застосовності формули, для чого вибрати шість значень із таблиці Брадіса і скласти таблицю різниць.

Задача 2. Використовуючи квадратичну інтерполяцію (див. зауваження до розділу), обчислити значення функції при заданих значеннях аргумента. Попередньо переконатися в застосовності формули.

Варіанти до завдання 2

Варіанти до задачі 1

№ 1	а) $\sin 0{,}1436$;	б) $\cos 1{,}1754$.	**№ 2**	а) $\sin 0{,}4974$;	б) $\cos 0{,}9818$.
№ 3	а) $\sin 0{,}2453$;	б) $\cos 1{,}0938$.	**№ 4**	а) $\mathrm{tg}\, 0{,}3864$;	б) $\cos 0{,}9222$.
№ 5	а) $\sin 0{,}4456$;	б) $\cos 1{,}0045$.	**№ 6**	а) $\mathrm{tg}\, 0{,}3224$;	б) $\cos 0{,}8465$.
№ 7	а) $\sin 0{,}6235$;	б) $\cos 0{,}9464$.	**№ 8**	а) $\mathrm{tg}\, 0{,}2816$;	б) $\cos 0{,}8065$.
№ 9	а) $\sin 0{,}7243$;	б) $\cos 0{,}8675$.	**№ 10**	а) $\mathrm{tg}\, 0{,}2464$;	б) $\cos 0{,}7312$.
№ 11	а) $\sin 0{,}8453$;	б) $\cos 0{,}4324$.	**№ 12**	а) $\mathrm{tg}\, 0{,}2016$;	б) $\cos 0{,}7075$.
№ 13	а) $\sin 0{,}9675$;	б) $\cos 0{,}3436$.	**№ 14**	а) $\mathrm{tg}\, 0{,}1636$;	б) $\cos 0{,}6865$.
№ 15	а) $\sin 1{,}0618$;	б) $\cos 0{,}1458$.	**№ 16**	а) $\mathrm{tg}\, 0{,}1858$;	б) $\cos 0{,}5635$.
№ 17	а) $\sin 1{,}1238$;	б) $\cos 0{,}1658$.	**№ 18**	а) $\mathrm{tg}\, 0{,}1362$;	б) $\cos 0{,}5423$.
№ 19	а) $\mathrm{tg}\, 0{,}4052$;	б) $\cos 0{,}7645$.	**№ 20**	а) $\sin 0{,}2134$;	б) $\cos 1{,}1274$.
№ 21	а) $\mathrm{tg}\, 0{,}4527$;	б) $\cos 0{,}7466$.	**№ 22**	а) $\sin 0{,}3425$;	б) $\cos 1{,}0252$.
№ 23	а) $\sin 0{,}1648$;	б) $\cos 1{,}1462$.	**№ 24**	а) $\sin 0{,}5438$;	б) $\cos 0{,}9656$.
№ 25	а) $\sin 0{,}2642$;	б) $\cos 1{,}0665$.	**№ 26**	а) $\mathrm{tg}\, 0{,}3654$;	б) $\cos 0{,}9035$.
№ 27	а) $\mathrm{tg}\, 0{,}3083$;	б) $\cos 0{,}8235$.	**№ 28**	а) $\sin 1{,}0236$;	б) $\cos 0{,}2267$.

№ 29 а) sin 1,1438; б) cos 0,7672. **№ 30** а) sin 0,9057; б) cos 0,2632.

Таблиці значень функції до задачі 2

Таблиця 1

x_i	y_i	№ варіанта	Значення аргумента	
			x_1	x_2
1,675	9,5618	1	1,6763	1,6787
1,676	9,4703	2	1,6778	1,6792
1,677	9,3804	3	1,6785	1,6762
1,678	9,2923	4	1,6794	1,6776
1,679	9,2057	5	1,6801	1,6786
1,680	9,1208	6	1,6816	1,6803
1,681	9,0373	7	1,6822	1,6808
1,682	8,9554	8	1,6837	1,6814
1,683	8,8749	9	1,6849	1,6823
1,684	8,7959	10	1,6853	1,6838
1,685	8,7182	11	1,6868	1,6843
1,686	8,6418	12	1,6773	1,6798
1,687	8,5668	13	1,6788	1,6802
1,688	8,4931	14	1,6813	1,6797
		15	1,6845	1,6821

Таблиця 2

x_i	y_i	№ варіанта	Значення аргумента	
			x_1	x_2
1,520	19,670	16	1,5223	1,5237
1,521	20,065	17	1,5228	1,5243
1,522	20,477	18	1,5239	1,5214
1,523	20,906	19	1,5241	1,5257
1,524	21,354	20	1,5256	1,5233
1,525	21,821	21	1,5267	1,5244
1,526	22,308	22	1,5272	1,5257
1,527	22,818	23	1,5284	1,5268
1,528	23,352	24	1,5295	1,5273
1,529	23,911	25	1,5303	1,5287
1,530	24,498	26	1,5318	1,5292
1,531	25,115	27	1,5242	1,5276
1,532	25,763	28	1,5263	1,5286
1,533	26,445	29	1,5288	1,5313
		30	1,5293	1,5308

Приклад виконання завдання

Задача 1. Визначити: а) sin 0,6682; б) cos 0,3033.

Задача 2. Користуючись табл. 1 або табл. 2, визначити значення функції $y(x)$ при $x_1 = 1{,}5306$ і $x_2 = 1{,}5282$.

Задача 1. а) Виберемо з таблиці синусів декілька значень і складемо *таблицю* різниць першого і другого порядків:

На можливість використання лінійної інтерполяції вказує той факт, що різниці першого порядку практично сталі та виконання співвідношення

$$(1/8)\max_i|\Delta^2 y_i| < 10^{-4};$$

дійсно, $(1/8)\cdot 0{,}0001 < 0{,}0001$.

x_i	$\sin x_i$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0,63	0,5891		
		0,0081	
0,64	0,5972		–0,0001
		0,0080	
0,65	0,6052		–0,0001
		0,0079	
0,66	0,6131		0,0000
		0,0079	
0,67	0,6210		–0,0001
		0,0078	
0,68	0,6288		

При обчисленні скористаємося формулою (див. зауваження до розділу) $y(x) = y(x_0) + q\cdot\Delta y(x_0)$, де $q = (x - x_0)/h$, а x_0 – найближче значення в таблиці, менше ніж 0,6682. Одержимо:

$$x_0 = 0{,}66;\ q = (0{,}6682 - 0{,}66)/0{,}01 = 0{,}82;$$

$$\sin 0{,}6682 \cong 0{,}6131 + 0{,}82\cdot 0{,}0079 =$$

$$= 0{,}6131 + 0{,}0065 = 0{,}6196.$$

Застосування кубічної сплайн-функції (4.29) дає:

$$\sin 0{,}6682 \cong 0{,}619583$$

б) Виберемо з таблиці косинусів декілька значень і складемо таблицю різниць першого та другого порядків:

Різниці першого порядку прак – тично незмінні, а також вико – нується співвідношення

$$(1/8)\max_i|\Delta^2 y_i| < 10^{-4},$$

оскільки $(1/8)\cdot 0{,}0001 < 0{,}0001$, що вказує на можливість застосування лінійної інтерполяції.

x_i	$\cos x_i$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0,28	0,9611		
		–0,0029	
0,29	0,9582		0
		–0,0029	
0,30	0,9553		–0,0001
		–0,0030	
0,31	0,9523		–0,0001
		–0,0031	
0,32	0,9492		

Приймемо $x_0 = 0{,}30$; тоді $q = (0{,}3033 - 0{,}30)/0{,}01 = 0{,}33$; тому $\cos 0{,}3033 \cong 0{,}9553 + 0{,}33\cdot$ $\cdot(-0{,}0030) = 0{,}9543$.

Застосування кубічної сплайн-функції (4.29) дає:

$$\cos 0{,}3033 \cong 0{,}9543237.$$

Задача 2. Виберемо з табл. 2 ($x_1 = 1{,}5306$) декілька значень і складемо таблицю різниць першого, другого та третього порядків:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1,527	22,818			
		0,534		
1,528	23,352		0,025	
		0,559		0,003
1,529	23,911		0,028	
		0,587		0,002
1,530	24,498		0,030	
		0,617		0,001
1,531	25,115		0,031	
		0,648		
1,532	25,763			

У цій таблиці різниці другого порядку практично сталі, крім того, виконується співвідношення

$$\frac{1}{15}\max_i |\Delta^3 y_i| < 10^{-3},$$

оскільки

$$(1/15) \cdot 0{,}003 < 0{,}001; 0{,}0002 < 0{,}001.$$

Це вказує на можливість застосування квадратичної інтерполяції.

Для обчислення застосуємо формулу (див. зауваження до розділу):

$$y(x) \cong y(x_0) + q\Delta y(x_0) + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y(x_0),$$

де $q = (x - x_0)/h$. Якщо $x = 1{,}5306$, то $x_0 = 1{,}530$;

$$q = (1{,}5306 - 1.530)/0.001 = 0{,}6;$$

$$y(1{,}5306) = 24{,}498 + 0{,}6 \cdot 0{,}617 + \frac{0{,}6(-0{,}4)}{2} \cdot 0{,}031 =$$

$$= 24{,}498 + 0{,}3702 - 0{,}0037 = 24{,}8645.$$

Приймемо $y(1{,}5306) \cong 24{,}864$.

Застосування кубічної сплайн-функції (4.29) дає:

$$y(1{,}5306) \cong 24{,}864091.$$

Якщо $x = 1{,}5282$, то $x_0 = 1{,}528$;

$$q = (1{,}5282 - 1{,}528)/0{,}001 = 0{,}2;$$

$$y(1{,}5282) = 23{,}352 + 0{,}2 \cdot 0{,}559 + \frac{0{,}2(-0{,}8)}{2} \cdot 0{,}028 =$$

$$= 23{,}352 + 0{,}1118 - 0{,}0022 = 23{,}4616.$$

Приймемо $y(1{,}5282) \cong 23{,}462$.

Застосування кубічної сплайн-функції (4.29) дає:

$$y(1{,}5282) \cong 23{,}461455.$$

Завдання 3

Експериментально одержано 5 значень деякої функціональної залежності $y(t) = f(t)$, які подано таблицею. Підібрати функцію $\bar{y}(t) = \bar{f}(t)$ одного з видів 1 – 4 поданих в теоретичних відомостях, яка апроксимує (виражає наближено) функціональну залежність $y(t) = f(t)$. Для знаходження параметрів функції $\bar{y}(t) = \bar{f}(t)$ (рівняння регресії) МНК попередньо лінеаризувати її. Зробити рисунок, на якому колами зобразити експериментальні дані а точками і суцільною лінією – графік функції $\bar{y}(t) = \bar{f}(t)$.

Варіанти до завдання 3

№ 1

t_i	1	2	3	4	5
$y_i(t)$	3,9	2,1	1,2	0,6	0,4

№ 2–6

t_i	1	2	3	4	5
$y_i(t) = y_i(t)(з\ №1) + 0{,}1 \cdot i,\ \ i = \overline{1,5}$					

№ 7

t_i	1	2	3	4	5
$y_i(t)$	2,9	4,1	6,0	9,0	12,0

№ 8–12

t_i	1	2	3	4	5
$y_i(t) = y_i(t)(з\ №7) + 0{,}1 \cdot i,\ \ i = \overline{1,5}$					

№ 13

t_i	1	2	3	4	5
$y_i(t)$	1,0	1,9	2,3	3,0	3,3

№ 14–18

t_i	1	2	3	4	5
$y_i(t) = y_i(t)(\text{з №}\mathbf{13}) + 0{,}1 \cdot i,\ \ i = \overline{1,5}$					

№ 19

t_i	1	2	3	4	5
$y_i(t)$	1,0	1,2	2,8	4,9	8,0

№ 20–24

t_i	1	2	3	4	5
$y_i(t) = y_i(t)(\text{з №}\mathbf{19}) + 0{,}1 \cdot i,\ \ i = \overline{1,5}$					

№ 25

t_i	1	2	3	4	5
$y_i(t)$	1,0	2,8	6,9	11,9	18,0

№ 26–30

t_i	1	2	3	4	5
$y_i(t) = y_i(t)(\text{з №}\mathbf{25}) + 0{,}1 \cdot i,\ \ i = \overline{1,5}$					

Приклад виконання завдання

Експериментальні дані задано таблицею

t_i	1	2	3	4	5
$y_i(t)$	12,0	7,0	3,1	3,0	2,1

Для полегшення знаходження рівняння регресії, попередньо наносимо на координатну площину експериментальні дані (на рис. 4.1 їх зображено колами). Характер розташування експериментальних даних вказує на те, що при збільшенні t, значення y зменшуються, але не рівномірно. З рис. 4.1 видно, що за лінію регресії доцільно вибрати гіперболу вигляду:

$$\bar{y}(t) = a_0 + \frac{a_1}{t}.$$

За допомогою заміни $x = 1/t$, вибране рівняння регресії лінеаризуємо:

$$\bar{y}(x) = a_0 + a_1 x \text{ (теоретичне рівняння регресії).}$$

Для знаходження параметрів a_0, a_1, заповнюємо таблицю (до неї занесено і розрахункові значення):

t_i	x_i	x_i^2	$y_i(t_i)$	$x_i y_i(t_i)$	$\bar{y}_i(t_i)$	$\bar{y}_i(x_i)$	$\bar{y}_i^*(t_i)$
1	1,0	1	12,0	12,0	12,261	12,261	12,0
2	0,5	0,25	7,0	3,5	5,98	5,98	7,0
3	0,333	0,111	3,1	1,032	3,888	3,888	3,1
4	0,250	0,062	3	0,75	2,840	2,840	3
5	0,2	0,040	2,1	0,42	2,212	2,212	2,1
$\sum$	2,283	1,464	27,2	17,702			

З урахуванням табличних даних система рівнянь для визначення параметрів рівняння регресії має такий вигляд:

$$\begin{cases} 5a_0 + 2{,}283a_1 = 27{,}2; \\ 2{,}283a_0 + 1{,}464a_1 = 17{,}702. \end{cases}$$

Оскільки $a_0 = 5{,}44 - 0{,}457a_1$, то

$$2{,}283(5{,}44 - 0{,}457a_1) + 1{,}464a_1 = 17{,}702.$$

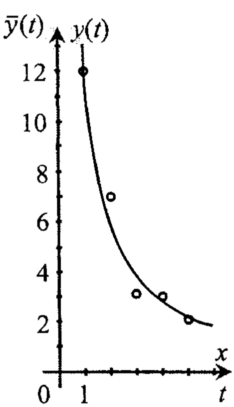


Рис. 4.1

З останньої рівності

$$0{,}421a_1 = 5{,}288, \text{ тому}$$

$$a_1 = 12{,}561, \; a_0 = -0{,}300.$$

Отже, одержимо такі рівняння регресії:

$\bar{y}(x) = -0{,}3 + 12{,}561x$ – теоретичне,

$\bar{y}(t) = -0{,}3 + 12{,}561/t$ – шукане.

$\bar{y}_i^*(t_i)$ – розрахункові значення, одержані за допомогою кубічної сплайн-функції (4.29).

За цими формулами для t_i і x_i визначаємо, відповідно, $\bar{y}_i(t_i)$ і $\bar{y}_i(x_i)$ (які співпадають) та занесемо їх до таблиці. За точкам побудуємо лінію регресії (на рис. 4.1 – суцільна лінія). Точками на рис. 4.1 позначено експериментальні дані, які співпадають з даними одержаними за допомогою кубічної сплайн-функції (що очевидно).

Розділ 5. ЧИСЛОВЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

5.1. Теоретичні відомості

Нехай в деякій скінченій кількості точок проміжку $[a;\ b]$ відомо числові значення функції $f(x)$, n разів диференційованої на ньому. Завдання числового диференціювання – обчислення числових значень похідних функції $f(x)$ в точках проміжку $[a;\ b]$.

Функція $f(x)$, задана на проміжку $[a;\, b]$ таблицею, апроксимується інтерполяційним многочленом $P_n(x)$:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \tag{5.1}$$

де $R_n(x)$ – залишковий член.

Послідовно диференціюючи рівність (5.1):

$$f'(x) = P_n'(x) + R_n'(x);$$
$$f''(x) = P_n''(x) + R_n''(x);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(k)}(x) = P_n^{(k)}(x) + R_n^{(k)}(x),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

і вважаючи, що похідними залишкових членів можна знехтувати, одержуємо наближені рівності:

$$f'(x) = P'_n(x), f''(x) = P''_n(x), \dots, f^{(k)}(x) = P_n{}^{(k)}(x).$$

Таким чином, k-ту похідну інтерполяційного многочлена вважають рівною k-й похідній функції $f(x)$.

5.1.1. Диференціювання, що базується на інтерполяційному поліномі Ньютона

Позначатимемо крок інтерполяції через h, початкове значення x через x_0 і через u — змінну:

$$u = (x - x_0)/h.$$

Врахувавши те, що

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{1}{h}$$

та *диференціюючи* за змінною x ***інтерполяційний поліном Ньютона за низхідними різницями*** (формула (4.10)), одержимо формули для обчислення похідних перших шести порядків:

$$y'(x = x_0 + hu) =$$
$$= \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2u - 1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3u^2 - 6u + 2}{3!}\Delta^3 y_0 + \right.$$
$$+ \frac{4u^3 - 18u + 22u - 6}{4!}\Delta^4 y_0 +$$
$$+ \frac{5u^4 - 40u^3 + 105u^2 - 100u + 24}{5!}\Delta^5 y_0 +$$
$$\left. + \frac{6u^5 - 75u^4 + 340u^3 - 675u^2 + 548u - 120}{6!}\Delta^6 y_0 + \ ...\right);$$
$$y'' = \frac{1}{h^2}\left(\frac{2}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{6u - 6}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{12u^2 - 36u + 22}{4!}\Delta^4 y_0 + \right.$$
$$+ \frac{20u^3 - 120u^2 + 210u - 100}{5!}\Delta^5 y_0 +$$
$$\left. + \frac{30u^4 - 300u^3 + 1020u^2 - 1350u + 548}{6!}\Delta^6 y_0 + \ ...\right);$$
$$y''' = \frac{1}{h^3}\left(\frac{6}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{24u - 36}{4!}\Delta^4 y_0 + \frac{60u^2 - 240u + 210}{5!}\Delta^5 y_0 + \right.$$
$$\left. + \frac{120u^3 - 900u^2 + 2040u - 1350}{6!}\Delta^6 y_0 + \ ...\right); \quad (5.2)$$
$$y^{(IV)} = \frac{1}{h^4}\left(\frac{24}{4!}\Delta^4 y_0 + \frac{120u - 240}{5!}\Delta^5 y_0 + \right.$$
$$\left. + \frac{360u^2 - 1800u + 2040}{6!}\Delta^6 y_0 + \ ...\right);$$
$$y^{(V)} = \frac{1}{h^5}\left(\frac{120}{5!}\Delta^5 y_0 + \frac{720u - 1800}{6!}\Delta^6 y_0 + \ ...\right);$$
$$y^{(VI)} = \frac{1}{h^6}\left(\frac{720}{6!}\Delta^6 y_0 + \ ...\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Якщо в (5.2) прийняти $u = 0$, тобто $x = x_0$, то:

$$y'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \right.$$

$$-\frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0 - \frac{1}{6}\Delta^6 y_0 + \ \dots\Big);$$

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \frac{137}{180}\Delta^6 y_0 - \ \dots\right);$$

$$y'''(x_0) = \frac{1}{h^3}\left(\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \frac{7}{4}\Delta^5 y_0 - \frac{15}{8}\Delta^6 y_0 + \ \dots\right); \quad (5.3)$$

$$y^{(IV)}(x_0) = \frac{1}{h^4}\left(\Delta^4 y_0 - 2\Delta^5 y_0 + \frac{17}{6}\Delta^6 y_0 + \ \dots\right);$$

$$y^{(V)}(x_0) = \frac{1}{h^5}\left(\Delta^5 y_0 - \frac{5}{2}\Delta^6 y_0 + \ \dots\right);$$

$$y^{(VI)}(x_0) = \frac{1}{h^6}(\Delta^6 y_0 + \ \dots),$$

… …

$$y^{(n)}(x_0) = \frac{1}{h^n}\left(\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^n - \frac{1}{4}\Delta^4 + \frac{1}{5}\Delta^5 - \ \dots\right)^n y_0.$$

Останній рядок подано в операційній формі, що не повинно викликати труднощів.

Приклад 5.1. У точці $x_0 = 0{,}45$ обчислити першу і другу похідні функції, заданої таблично:

x_k	y_k	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,4	1,58365				
		0,21379			
0,5	1,79744		0,03301		
		0,24680		0,00345	
0,6	2,04424		0,03646		0,00041
		0,28326		0,00386	
0,7	2,32750		0,04032		
		0,32358			
0,8	2,65108				

Розв'язання. Тут $h = 0{,}1$; $u = 1/2$. Згідно з формулами (5.2) одержимо:

$$y' = 10\left(0{,}21379 + \frac{2 \cdot {}^{1}\!/_{2} - 1}{2!}0{,}03301 + \frac{{}^{3}\!/_{4} - {}^{6}\!/_{2} + 2}{3!}0{,}00345 + \right.$$

$$\left. + \frac{{}^{4}\!/_{8} - {}^{18}\!/_{4} + {}^{22}\!/_{2} + 6}{4!}0{,}00041\right) = 2{,}13868;$$

$$y'' = 100(0{,}03301 - 0{,}00172 + 0{,}00012) = 3{,}142.$$

Похідні заданої функції з п'ятьма значущими цифрами відповідно дорівнюватимуть:

$$y'_{|x=0{,}45} = 2{,}1363; y''_{|x=0{,}45} = 3{,}1366.$$

Якщо у виразі (5.2) надавати u послідовно значення $1, 2, 3, \dots$, то легко одержати вирази для:

$$y'(x_0 + h);\ y''(x_0 + h); \dots ; y'(x_0 + 2h);\ y''(x_0 + 2h); \dots ;$$
$$y'(x_0 + 3h);\ y''(x_0 + 3h); \dots .$$

У формулах (5.2) і (5.3) використовуються різниці *низхідної* діагоналі, що проходить через $f(x_0) = y_0$. Наведемо формули, що одержуються з інтерполяційного полінома Ньютона за висхідними різницями (використовуються різниці, розміщені на *висхідній* діагоналі).

Застосовуючи ***інтерполяційний поліном Ньютона за висхідними різницями*** (4.12), одержимо (при $x = x_0$):

$$y'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_{-1} + \frac{1}{2}\Delta^2 y_{-2} + \frac{1}{3}\Delta^3 y_{-3} + \ \dots\right);$$

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-2} + \Delta^3 y_{-3} + \frac{11}{12}\Delta^4 y_{-4} + \right.$$
$$\left. + \frac{5}{6}\Delta^5 y_{-5} + \frac{137}{180}\Delta^6 y_{-6} + \ \dots\right);$$

$$y'''(x_0) = \frac{1}{h^3}\left(\Delta^3 y_{-3} + \frac{3}{2}\Delta^4 y_{-4} + \frac{7}{4}\Delta^5 y_{-5} + \frac{15}{8}\Delta^6 y_{-6} + \ \dots\right);$$

....

$$y^{(n)}(x_0) = \frac{1}{h^n}\left(\Delta + \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 + \frac{1}{4}\Delta^4 + \frac{1}{5}\Delta^5 + \ \dots\right)^n y_{-\alpha}, \quad (5.4)$$

де індекс α дорівнює показнику при Δ.

5.1.2. Диференціювання, що базується на інтерполяційному поліномі Стирлінга

В інтерполяційному поліномі Стирлінга використовуються різниці, розміщені на висхідній діагоналі та з обох боків горизонталі, що проходить через y_0. Застосувавши ***інтерполяційний поліном Стирлінга*** (4.22) можна одержати:

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left(\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + u\Delta^2 y_{-1} + \frac{3u^2 - 1}{3!}\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \right.$$

$$+\frac{4u^3-2u}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\frac{5u^4-15u^2+4}{5!}\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}+$$

$$+\frac{6u^5-20u^3+8u}{6!}\Delta^6 y_{-3}+\ \dots\Bigg);$$

$$y''(x)=\frac{1}{h^2}\Bigg(\Delta^2 y_{-1}+u\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2!}+\frac{12u^2-2}{4!}\Delta^4 y_{-2}+$$

$$+\frac{20u^3-30u}{5!}\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}+\frac{30u^4-60u^2+8}{6!}\Delta^6 y_{-3}+\ \dots\Bigg);$$

$$y'''(x)=\frac{1}{h^3}\Bigg(\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+u\Delta^4 y_{-2}+$$

$$+\frac{60u^2-30}{5!}\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}+\frac{120u^3-120u}{6!}\Delta^6 y_{-3}+\Bigg);$$

$$y^{(IV)}(x)=\frac{1}{h^4}\Bigg(\Delta^4 y_{-2}+\frac{120u}{5!}\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}+$$

$$+\frac{360u^2-120}{6!}\Delta^6 y_{-3}+\ \dots\Bigg);$$

$$y^{(V)}(x)=\frac{1}{h^5}\Bigg(\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}+\frac{720u}{6!}\Delta^6 y_{-3}+\ \dots\Bigg);$$

$$y^{(VI)}(x)=\frac{1}{h^6}(\Delta^6 y_{-3}+\ \dots), \qquad (5.5)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .$$

Для точки $x = x_0$ $(u = 0)$ формули (5.5) спрощуються:

$$y'(x_0)=\frac{1}{h}\Bigg(\frac{\Delta y_0+\Delta y_{-1}}{2}-\frac{1}{6}\frac{\Delta^3 y_{-1}+\Delta^3 y_{-2}}{2}+$$

$$+\frac{1}{30}\frac{\Delta^5 y_{-2}+\Delta^5 y_{-3}}{2}-\ \dots\Bigg);$$

$$y''(x_0)=\frac{1}{h^2}\Bigg(\Delta^2 y_{-1}-\frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2}+\frac{1}{90}\Delta^6 y_{-3}-\ \dots\Bigg);$$

$$y'''(x_0)=\frac{1}{h^3}\Bigg(\frac{\Delta^3 y_{-1}+\Delta^3 y_{-2}}{2}-\frac{1}{4}\frac{\Delta^5 y_{-2}+\Delta^5 y_{-3}}{2}+$$

$$+\frac{7}{12}\frac{\Delta^7 y_{-3}+\Delta^7 y_{-4}}{2}-\ \dots\Bigg);$$

$$y^{(IV)}(x_0)=\frac{1}{h^4}\left(\Delta^4 y_{-2}-\frac{1}{6}\Delta^6 y_{-4}+\frac{7}{240}\Delta^8 y_{-6}-\ \dots\right);$$

$$y^{(V)}(x_0)=\frac{1}{h^5}\left(\frac{\Delta^5 y_{-2}+\Delta^5 y_{-3}}{2}-\frac{1}{3}\frac{\Delta^7 y_{-3}+\Delta^7 y_{-4}}{2}+\ \dots\right);$$

$$y^{(VI)}(x_0)=\frac{1}{h^6}(\Delta^6 y_{-3}+\ \dots), \qquad (5.6)$$

… .

Приклад 5.2. Користуючись даними таблиці прикладу 5.1 та формулами (5.6), обчислити значення першої й другої похідних заданої функції в точці $x=0{,}6$.

Розв'язання. Одержуємо:

$$y'(0{,}6)=10\left(\frac{0{,}24680+0{,}28326}{2}-\frac{1}{6}\frac{0{,}00345+0{,}00386}{2}\right)=$$

$$=2{,}6432;$$

$$y''(0{,}6)=100\left(0{,}03646-\frac{1}{12}0{,}00041\right)=3{,}643.$$

Більш точні значення похідних:

$$f'(0{,}6)=2{,}644238; f''(0{,}6)=3{,}644238.$$

Приклад 5.3. Обчислити похідну $y=\operatorname{arctg}x$ для $x=0{,}515$, використавши таблицю різниць цієї функції, наведену в прикладі 4.7 ($h=0{,}001$).

Розв'язання. Тут необхідно застосувати першу формулу (5.3), з використанням різниць, що знаходяться на *низхідній* діагоналі, починаючи з $0{,}515$. Тоді

$$y'(0{,}515)\cong(1/0{,}001)\cdot(0{,}000790051505+0{,}000000321815-$$

$$-0{,}000000000066+0{,}000000000001)=$$

$$=0{,}790373255.$$

Точне значення $y'(0{,}515)$ становить:

$$1/(0{,}515^2+1)=0{,}790373254\dots.$$

За допомогою тієї самої таблиці обчислимо $y'(0{,}518)$. При цьому необхідно застосувати першу формулу, одержану з полінома Стирлінга, з використанням різниць, що знаходяться в безпосередній близькості від горизонталі, що проходить через 0,518. Тоді

$$y'(0{,}518) \cong \frac{1}{0{,}001}(0{,}0007884420380 + 0{,}0000000000325) =$$

$$= 0{,}7884420705.$$

Точне значення $y'(0{,}518)$ становить:

$$1/(0{,}518^2 + 1) = 0{,}788442070.$$

5.1.3. Диференціювання, що базується на інтерполяційному поліномі Бесселя

Застосувавши ***інтерполяційний поліном Бесселя*** (4.24) можна одержати:

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2u-1}{2}\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{6u^2 - 6u + 1}{12}\Delta^3 y_{-1} + \right.$$

$$+ \frac{2u^3 - 3u^2 - u + 1}{12}\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1} 2}{2} +$$

$$\left. + \frac{5u^4 - 10u^3 + 5u - 1}{120}\Delta^5 y_{-2} + \ldots\right);$$

$$y'' = \frac{1}{h^2}\left(\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{2u-1}{2}\Delta^3 y_{-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{6u^2 - 6u - 1}{12}\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \frac{4u^3 - 6u^2 + 1}{24}\Delta^5 y_{-2} + \ldots\right);$$

$$y''' = \frac{1}{h^3}\left(\Delta^3 y_{-1} + \frac{2u-1}{2}\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \frac{u^2 - u}{2}\Delta^5 y_{-2} + \ldots\right);$$

$$y^{(IV)} = \frac{1}{h^4}\left(\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \frac{2u-1}{2}\Delta^5 y_{-2} + \ldots\right),$$

……………………………………………………………………… .

З останніх рівностей легко одержуються ***формули Бесселя для диференціювання*** при $x = x_0$.

Зауваження 1. У випадку емпіричної кривої, коли ординати одержуються з похибками, розглянуті способи досить часто призводять до досить хибних результатів. Можна порівняти числове обчислення похідної функції, відомої наближено, з графічно проведеною дотичною до грубо нарисованої кривої. Зрозуміло, що невелика зміна форми кривої поблизу розглядуваної точки значно впливає на розміщення дотичної, тоді як область, обмежена кривою, зазнає незначних змін.

Зауваження 2. Області застосування інтерполяційних поліномів Ньютона, Стирлінга та Бесселя наведено в розд. 4.

5.1.4. Формули числового диференціювання, що базуються на інтерполяційній формулі Ньютона з розділеними різницями

Формули числового диференціювання для функції $f(x)$, засновані на інтерполяційній формулі Ньютона з розділеними різницями:

$$
\begin{gathered}
P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_1;\, x_0) + \\
+(x - x_0)(x - x_1)f(x_2;\, x_1;\, x_0) + \\
+(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f(x_3;\, x_2;\, x_1;\, x_0) + \, ... + \\
+(x - x_0)(x - x_1)\, ... \,(x - x_{n-1})f(x_n;\, x_{n-1};\, ...;\, x_1;\, x_0); \\
f(x) = P_n(x) + R_n(x),
\end{gathered}
$$

одержуються послідовним диференціюванням рівності (4.17).

Позначимо $x - x_0 = v_0,\ x - x_1 = v_1, ..., x - x_n = v_{n,}$, тоді

$$
\begin{gathered}
P_n(x) = f(x_0) + v_0 f(x_1;\, x_0) + v_0 v_1 f(x_2;\, x_1;\, x_0) + \\
+v_0 v_1 v_2 f(x_3;\, x_2;\, x_1;\, x_0) + \, ... + v_0 v_1 \, ... \, v_{n-1} f(x_n;\, x_{n-1};\, ...;\, x_0); \\
f'(x) = f(x_1;\, x_0) + (v_0 + v_1)f(x_2;\, x_1;\, x_0) + \\
+(v_0 v_1 + v_0 v_2 + v_1 v_2)f(x_3;\, x_2;\, x_1;\, x_0) + \, ... + R_n'(x); \\
{}^1/_{2!} f''(x) = f(x_2;\, x_1;\, x_0) + (v_0 + v_1 + v_2)f(x_3;\, x_2;\, x_1;\, x_0) + \\
+(v_0 v_1 + v_0 v_2 + v_0 v_3 + v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3) \times \\
\times f(x_4;\, x_3;\, x_2;\, x_1;\, x_0) + \, ... + R_n''(x); \\
{}^1/_{3!} f'''(x) = f(x_3;\, x_2;\, x_1;\, x_0) + \qquad (5.7) \\
+(v_0 + v_2 + v_2 + v_3)f(x_4;\, x_3;\, x_2;\, x_1;\, x_0) + \, ... + R_n'''(x); \\
{}^1/_{4!} f^{(IV)}(x) = f(x_4;\, x_3;\, x_2;\, x_1;\, x_0) + \\
+(v_0 + v_2 + v_2 + v_3 + v_4)f(x_5;\, x_4;\, x_3;\, x_2;\, x_1;\, x_0) + \, ... + R_n^{(IV)}(x), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots .
\end{gathered}
$$

Для частинного випадку $x = x_0,\ v_0 = 0$ формули (5.7) спрощуються:

$$
\begin{gathered}
f'(x_0) = f(x_1;\, x_0) + v_1 f(x_2;\, x_1;\, x_0) + \\
+v_1 v_2 f(x_3;\, x_2;\, x_1;\, x_0) + \, ... + R_n';
\end{gathered}
$$

$$\frac{1}{2!}f''(x) = f(x_2;\ x_1;\ x_0) + (v_1 + v_2)f(x_3;\ x_2;\ x_1;\ x_0) +$$
$$+(v_1v_2 + v_1v_3 + v_2v_3)f(x_4;\ x_3;\ x_2;\ x_1;\ x_0) + \ldots + R_n''(x);$$
$$\frac{1}{3!}f'''(x) = f(x_3;\ x_2;\ x_1;\ x_0) +$$
$$+(v_1 + v_2 + v_3)f(x_4;\ x_3;\ x_2;\ x_1;\ x_0) + \ldots + R_n''';$$
$$\frac{1}{4!}f^{(IV)}(x) = f(x_4;\ x_3;\ x_2;\ x_1;\ x_0) +$$
$$+(v_1 + v_2 + v_3 + v_4)f(x_4;\ x_4;\ x_3;\ x_2;\ x_1;\ x_0) + \ldots + R_n^{(IV)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

Залишкові члени формул (5.7) можна одержати диференціюванням рівності (4.7):

$$R_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} = L(x)\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!},$$

де $L(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.

5.1.5. Залишкові члени формул числового диференціювання

Коротко розглянемо питання про встановлення точності формул числового диференціювання.

Наприклад, формули (5.2) і (5.5) для обчислення похідних одержано за умови, що похідними залишкового члена можна знехтувати. Оцінивши величину похідних залишкового члена, з'ясуємо точність формул числового диференціювання.

1) Залишковий член формули Ньютона, як відомо, має вигляд:

$$R_n = h^{n+1}\frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\eta),$$

де η – деяке число, що лежить між вузлами інтерполювання.

Продиференціювавши останню рівність за x, визначимо похідні залишкового члена. Знайдемо похідну першого порядку в точці $x = x_0$, тобто при $u = 0$:

$$R_n'(x)_{|x=x_0} =$$
$$= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!\,h}\Big([u(u-1)(u-2)\ldots(u-n)]'f^{(n+1)}(\eta) +$$
$$+[u(u-1)(u-2)\ldots(u-n)]f^{(n+2)}(\eta)\Big)_{u=0} =$$
$$= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!\,h}(-1)^n n!\,f^{(n+1)}(\eta) = (-1)^n\frac{h^n}{n+1}f^{(n+1)}(\eta).$$

Якщо ж скористатися формулою для залишкового члена першої інтерполяційної формули Ньютона, то легко одержати оцінку першої похідної залишкового члена у вигляді:

$$R'_n(x_0) \cong (-1)^n \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h(n+1)}.$$

2) Для похідної залишкового члена інтерполяційної формули Стирлінга маємо:

$$R_n = h^{2n+1} \frac{u(u^2-1^2)(u^2-2^2)\dots(u^2-n^2)}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(\eta),$$

де η – число, що лежить між $-x_n$ і x_n; аналогічно до попереднього одержимо:

$$R'_n(x_0) = h^{2n} \frac{(n^2)!}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(\eta).$$

Зауваження до розділу.

1. *Нижче наведено інший вигляд* ***формул числового диференціювання*** таких, що $q = u = (x - x_0)/h \neq 0$,

$$h = x_{i+1} - x_i \ (i = 0, 1, 2, \dots):$$

а) які ґрунтуються на першій інтерполяційній формулі Ньютона:

$$y'(x) \cong \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 +$$
$$+ \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 +$$
$$+ \frac{5q^4-40q^3+105q^5-100q+24}{120}\Delta^5 y_0 + \dots);$$

$$y''(x) \cong \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 +$$
$$+ \frac{2q^3-12q^2+21q-10}{12}\Delta^5 y_0 + \dots);$$

б) *які ґрунтуються на першій формулі Гаусса* (для x, які знаходяться всередині та в кінці таблиці):

$$y'(x) \cong \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2-1}{3!}\Delta^3 y_{-1} +\right.$$
$$\left. + \frac{2q^3-3q^2-q+1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \dots\right);$$

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1} + q\Delta^3 y_{-1} + \frac{6q^2 - 6q + 1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \ \dots\right);$$

в) які ґрунтуються на другій формулі Гаусса:

$$y'(x) \cong \frac{1}{h}\left(\Delta y_{-1} + \frac{2q+1}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2-1}{6}\Delta^3 y_{-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2q^3 + 3q^2 - q - 1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \ \dots\right);$$

$$y''(x) \cong \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1} + q\Delta^3 y_{-2} + \frac{6q^2 - 6q - 1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \ \dots\right);$$

г) які ґрунтуються на формулі Стирлінга (для x, які знаходяться всередині та в кінці таблиці):

$$y'(x) \cong \frac{1}{h}\left(\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} + q\Delta^2 y_{-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{3q^2 - 1}{6}\frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} + \frac{2q^3 - q}{12}\Delta^4 y_{-2} + \ \dots\right);$$

$$y''^{(x)} \cong \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1} + q\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{6q^2 - 1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \ \dots\right);$$

д) які ґрунтуються на формулі Бесселя (для x, які знаходяться всередині та в кінці таблиці):

$$y'(x) \cong \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{3q^2 - 3q + {}^1\!/_2}{6}\Delta^3 y_{-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{2q^3 - 3q^2 - q + 1}{12}\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \ \dots\right);$$

$$y''(x) \cong \frac{1}{h^2}\left(\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{2q-1}{2}\Delta^3 y_{-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{6q^2 - 6q - 1}{12}\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \ \dots\right).$$

2. Формулам числового диференціювання можна надати іншого вигляду, виразивши шукані похідні через значення функції у вузлах інтерполювання. Формули, записані таким чином, зручніші при обчисленнях з використанням комп'ютерів.

Покажемо це на деяких прикладах.

1) Підставивши в праві частини перших двох рівностей формули (5.3) замість різниць їх значення та утримуючи тільки члени, що містять різниці до четвертого порядку включно матимемо:

$$y'(x_0) = {}^1/_h\,(y_1 - y_0 - {}^1/_2(y_2 - 2y_1 + y_0) +$$

$$+ {}^1/_3\,(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0) - {}^1/_4\,(y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0)\big) =$$

$$= {}^1/_h\left(-{}^{25}/_{12}\,y_0 + 4y_1 - 3y_2 + {}^4/_3\,y_3 - {}^1/_4\,y_4\right);$$

$$y''(x_0) = {}^1/_{h^2}\,[y_2 - 2y_1 + y_0 - (y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0) +$$

$$+ {}^{11}/_{12}\,(y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0)] =$$

$$= {}^1/_{h^2}\,({}^{32}/_{12}\,y_0 - {}^{26}/_3\,y_1 + {}^{19}/_2\,y_2 - {}^{14}/_3\,y_3 + {}^{11}/_{12}\,y_4).$$

2) Якщо потрібно знайти значення першої похідної в деякому вузлі x_k, наприклад в точці x_2, то для цього можна використати першу рівність формул (5.2), причому $u = (x_2 - x_0)/h = 2$:

$$y'(x_2) = {}^1/_h\left(\Delta y_0 + {}^3/_2\,\Delta^2 y_0 + {}^1/_3\,\Delta^3 y_0 - {}^1/_{12}\,\Delta^4 y_0\right) =$$

$$= {}^1/_{12h}\,(y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4).$$

5.2. Завдання для самостійної, домашньої роботи і приклади їх розв'язання

Завдання 1

1. За допомогою інтерполяційних формул Ньютона, Гаусса, Стирлінга і Бесселя знайти значення першої і другої похідних при заданих значеннях аргумента для функцій заданих таблично.

Варіанти до завдання 1

Таблиця 1

x	$y(x)$	x	$y(x)$
2,3	3,521	3,5	4,187
2,5	3,765	3,7	4,269
2,7	3,881	3,9	4,453
2,9	4,029	4,1	4,698
3,1	3,985	4,3	5,129
3,3	4,148	4,5	5,671

1) $x = 2{,}3 + 0{,}05n$;
2) $x = 2{,}91 + 0{,}03n$;
3) $x = 4{,}46 - 0{,}05n$;
4) $x = 4{,}16 - 0{,}04n$;
$(n = \overline{1,29})$.

Таблиця 2

x	$y(x)$	x	$y(x)$
1,6	10,493	4,6	8,377
2,1	10,221	5,1	8,391
2,6	9,907	5,6	8,763
3,1	9,417	6,1	9,801
3,6	8,877	6,6	11,121
4,1	8,623	7,1	13,287

1) $x = 1{,}7 + 0{,}07n$;
2) $x = 3{,}17 + 0{,}12n$;
3) $x = 6{,}4 - 0{,}11n$
4) $x = 5{,}90 - 0{,}08n$;
$(n = \overline{2,30})$.

Приклад виконання завдання

x	$y(x)$	x	$y(x)$	
0,6	2,850	2,2	6,496	Знайти значення 1-ї і 2-ї похідних даних функцій при: 1) $x_1 = 1{,}0$; 2) $x_2 = 1{,}91$; 3) $x_3 = 2{,}56$; 4) $x_4 = 2{,}72$.
1,0	3,938	2,6	7,002	
1,4	4,931	3,0	7,283	
1,8	5,795	3,4	7,294	

Складемо таблицю скінченних різниць даної функції:

x	$y(x)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0,6	2,850			
		1,088		
1,0	3,938		–0,095	
		0,993		–0,034
1,4	4,931		–0,129	
		0,864		–0,034
1,8	5,795		–0,163	
		0,701		–0,032
2,2	6,496		–0,195	
		0,506		–0,030
2,6	7,002		–0,225	
		0,281		–0,045
3,0	7,283		–0,270	
		0,011		
3,4	7,294			

1) Підставимо $x_0 = 1{,}0$; тоді:

$$q = (x - x_0)/h = (1{,}0 - 1{,}0)/0{,}4 = 0.$$

Скористаємось для обчислень формулами, які одержуються з першої інтерполяційної формули Ньютона:

$$y'(x) \cong {}^1/_h \left(\Delta y_0 - {}^1/_2 \, \Delta^2 y_0 + {}^1/_3 \, \Delta^3 y_0 + \ \dots\right);$$

$$y''(x) \cong \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \ \dots\right).$$

Знайдемо:

$$y'(1{,}0) \cong \frac{1}{0{,}4}\left(0{,}993 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-0{,}129) + \frac{1}{3}(-0{,}034)\right) = 2{,}613;$$

$$y''(1{,}0) \cong \frac{1}{0{,}4^2}(-0{,}129 + 0{,}034) = -0{,}594.$$

2) Підставимо $x_0 = 1{,}8$; тоді:

$$q = (1{,}91 - 1{,}8)/0{,}4 = 0{,}275.$$

Скористаємось для обчислень формулами, які одержуються з формули Бесселя:

$$y'(x) \cong \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{3q^2 - 3q + 0{,}5}{6} \Delta^3 y_{-1} + \ \dots \right);$$

$$y''(x) \cong \frac{1}{h^2}\left(\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{2q-1}{2}\Delta^3 y_{-1} + \ \dots\right).$$

Знайдемо:

$$y'(1{,}91) \cong \frac{1}{0{,}4}\left(0{,}701 + \frac{0{,}55 - 1}{2} \cdot \frac{-0{,}163 - 0{,}195}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{0{,}2269 - 0{,}825 + 0{,}5}{6}(-0{,}032)\right) = 1{,}860;$$

$$y''(1{,}91) \cong \frac{1}{0{,}4^2}\left(\frac{-0{,}163 - 0{,}195}{2} + \frac{0{,}55 - 1}{2}(-0{,}032)\right) = -1{,}074.$$

3) Підставимо $x_0 = 2{,}2$; тоді:

$$q = (2{,}56 - 2{,}2)/0{,}4 = 0{,}9.$$

Скористаємось для обчислень формулами, які одержуються з формули Стирлінга:

$$y'(x) \cong \frac{1}{h}\left(\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + q \cdot \Delta^2 y_{-1} + \right.$$

$$+\frac{3q^2-1}{6}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+\ \ldots\Bigg);$$

$$y''(x)\cong\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1}+q\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+\ \ldots\right).$$

Знайдемо:

$$y'(2{,}56)\cong\frac{1}{0{,}4}\left(\frac{0{,}701+0{,}506}{2}+0.9\cdot(-0{,}163)+\right.$$

$$\left.+\frac{2{,}43-1}{6}\cdot\frac{-0{,}034-0{,}032}{2}\right)=1{,}129.$$

$$y''(2{,}56)\cong\frac{1}{0{,}4^2}\left(-0{,}163+0{,}9\frac{-0{,}034-0{,}032}{2}\right)=-1{,}204.$$

4) Підставимо $x_0=2{,}6$; тоді:

$$q=\frac{2{,}72-2{,}6}{0{,}4}=0{,}3.$$

Скористаємось для обчислень формулами, які одержуються з першої формули Гаусса:

$$y'(x)\cong\frac{1}{h}\left(\Delta y_0+\frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_{-1}+\frac{3q^2-1}{6}\Delta^3 y_{-1}+\ \ldots\right);$$

$$y''(x)\cong\frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-1}+q\Delta^3 y_{-1}+\ \ldots).$$

Знайдемо:

$$y'(2{,}72)\cong\frac{1}{0{,}4}\left(0{,}281+\frac{0{,}6-1}{2}(-0{,}225)+\right.$$

$$\left.+\frac{0{,}27-1}{6}(-0{,}045)\right)=0{,}828;$$

$$y''(2{,}72)\cong\frac{1}{0{,}4^2}\big(-0{,}225+0{,}3(-0{,}045)\big)=-1{,}491.$$

Розділ 6. ЧИСЛОВЕ ІНТЕГРУВАННЯ

6.1. Теоретичні відомості

Обчислення визначеного інтеграла від неперервної функції за допомогою формули Ньютона – Лейбніца зводиться до знаходження її первісної, яка завжди існує, але не завжди є елементарною функцією або функцією, для якої складено таблиці, що дають можливість одержати значення інтеграла. В багатьох застосуваннях інтегрована функція задається таблично і формула Ньютона – Лейбніца безпосередньо незастосовна.

Тому виникає задача про числове обчислення визначеного інтеграла, яка, як правило, розв'язується за допомогою формул, які називаються *квадратурними.*

Найпростіші формули числового інтегрування одержуються при заміні підінтегральної функції тим або іншим інтерполяційним многочленом, утримуванням в ньому певного числа членів, певним розбиттям проміжку інтегрування $[a;\ b]$ та вибором числа n – кількість рівних частин поділу $[a;\ b]$, яке в практичних обчисленнях не перевищує 20-ти.

Якщо, наприклад, в ньому утримується один член, то одержується та чи інша *формула прямокутників* (підінтегральна функція $f(x)$ на інтервалі $[x_k;\ y_k]$ замінюється відрізком прямої $y = y_k$); два перших члени – *формула трапецій* (відрізком прямої $y = y_k + u\Delta y_k$); три перших члени – *формула Сімпсона* (параболою $y = y_k + u\Delta y_k + u(u-1)/2!\,\Delta^2 y_k$). Точність таких формул не велика (зрозуміло, що найточніша серед них *формула Сімпсона*). Хоча, якщо проміжок інтегрування розбити на число кратне шести та утримати сім перших членів, то можна одержати одну з *найточніших* формул – *формулу Уеддля.*

У зв'язку з цим розглянемо спочатку й інший підхід.

6.1.1. Числа Бернуллі

За означенням, число Бернуллі – це коефіцієнт при «$-t^{2n}/(2n!)$» розкладу в ряд за зростаючими степенями t функції

$$\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}:$$

$$\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} = 1 - B_1\frac{t^2}{2!} - B_2\frac{t^4}{4!} - \ldots - B_n\frac{t^{2n}}{(2n)!} - \ \ldots\ . \quad (6.1)$$

Ліву частину (6.1) можна записати у вигляді:

$$i\frac{t}{2}\cdot\frac{e^{it}+1}{e^{it}-1}.$$

Замінивши it на t в обох частинах формули (6.1), одержимо:

$$\frac{t}{2}\frac{e^t+1}{e^t-1}=1+B_1\frac{t^2}{2!}-B_2\frac{t^4}{4!}+\ \dots+(-1)^{(n+1)}B_n\frac{t^{2n}}{(2n)!}+\ \dots\ . \quad (6.2)$$

Віднявши від обох частин рівності (6.2) $t/2$ одержимо:

$$\frac{t}{e^t-1}=1-\frac{t}{2}+B_1\frac{t^2}{2!}-B_2\frac{t^4}{4!}+\ \dots+(-1)^{(n+1)}B_n\frac{t^{2n}}{(2n)!}+\ \dots\ . \quad (6.3)$$

Якщо помножити обидві частини рівності (6.2) на e^t-1 та розкласти e^t в ряд, то прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях t в обох частинах одержаної рівності для перших чисел Бернуллі дає:

$$B_1=1/6\,,B_2=1/30\,,B_3=1/42\,,B_4=1/30\,,B_5=5/66,$$
$$B_6=691/2730\,,B_7=7/6\,,B_8=3617/510\,,B_9=43867/798,$$
$$B_{10}=174611/330\,,B_{11}=854513/138,$$
$$B_{12}=236364091/2730\,,B_{13}=8533103/6\,,\dots.$$

Замінивши в очевидній рівності

$$\operatorname{ctg}\pi x-\frac{1}{\pi x}=-\frac{2x}{\pi}\left[\frac{1}{1^2-x^2}+\frac{1}{2^2-x^2}+\ \dots\right]$$

πx на $t/2$ одержимо:

$$\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}=1-\frac{1}{2}\sum\nolimits_{p=1}^{\infty}\frac{t^2}{p^2\pi^2}\left[1-\left(\frac{t}{2\pi p}\right)^2\right]^{-1}$$

або

$$\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}=1-\frac{1}{2}\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2\pi)^{2n}}\sum\nolimits_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^{2n}}. \quad (6.4)$$

Порівнявши (6.1) і (6.4), одержимо:

$$B_n=\frac{1}{2}\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum\nolimits_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^{2n}}.$$

Починаючи з $n=5$, числа Бернуллі із зростанням n зростають дуже швидко.

6.1.2. Поліном Бернуллі

Позначимо через $\Phi_n(z)$ поліном Бернуллі n-го степеня. Визначимо його за допомогою функції

$$t\frac{e^{zt}-1}{e^t-1}=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\Phi_n(z)\frac{t^n}{n!}. \qquad (6.5)$$

Одержуємо:

$$t\frac{e^{zt}-1}{e^t-1}=\left(\frac{zt}{1}+\frac{z^2t^2}{2!}+\ \dots\right)\left(1-\frac{t}{2}+\frac{B_1}{2!}t^2-\frac{B_2}{4!}t^4+\ \dots\right).$$

Порівнявши останню формулу з (6.5), одержимо:

$$\Phi_n(z)=z^n-\frac{1}{2}nz^{n-1}+C_n^2B_1z^{n-2}-$$

$$-C_n^4B_2z^{n-4}+\ \dots+(-1)^{k+1}C_n^{2k}B_kz^{n-2k}+\ \dots\ . \qquad (6.6)$$

Якщо n – парне число, більше 2, то останній член має вигляд

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n(n-1)}{2}B_{\frac{n}{2}-1}z^2.$$

Якщо n – непарне число, більше 1, то останній член має вигляд

$$(-1)^{\frac{n+1}{2}}nB_{\frac{n-1}{2}}z.$$

Поліноми Бернуллі володіють такою властивістю: якщо, використавши формулу (6.5), записати:

$$te^{tz}=t\frac{e^{t(z+1)}-1}{e^t-1}-t\frac{e^{tz}-1}{e^t-1}=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}[\Phi_n(z+1)-\Phi_n(z)]\frac{t^n}{n!},$$

то, розклавши ліву частину в степеневий ряд та прирівнявши коефіцієнти при $t^n/n!$ обох частин, одержимо:

$$\Phi_n(z+1)-\Phi_n(z)=nz^{n-1}. \qquad (6.7)$$

Замінивши послідовно z цілими числами $p-1, p-2, \dots$ та додавши одержані вирази, для $n>1$ (прийнявши $\Phi_0(z)=0$) знайдемо:

$$\frac{\Phi_n(p)}{n}=1^{n-1}+2^{n-1}+3^{n-1}+\ \dots+(p-1)^{n-1}.$$

Розклавши в ряд обидві частини тотожності

$$t\frac{e^{tz}-1}{e^t-1}-t=-t\frac{e^{-t(1-z)}-1}{e^{-t}-1}$$

та прирівнявши коефіцієнти при $t^n/n!$ обох частин, одержимо:

$$\Phi_n(z)=(-1)^n\Phi_n(1-z). \qquad (6.8)$$

З формул (6.6) – (6.8) одержуємо:

$$\Phi_n(0) = \Phi_n(1) = 0 \qquad (n > 1); \qquad (6.9)$$

$$\Phi_{2m\pm1}(1/2) = 0 \qquad (m > 1). \qquad (6.10)$$

Щоб знайти значення $\Phi_{2m}(1/2)$, достатньо визначити коефіцієнти при $t^{2m}/(2m)!$ в розкладі функції (6.5) за умови, що $z = 1/2$. Одержуємо:

$$t\frac{e^{\frac{t}{2}} - 1}{e^t - 1} = \frac{t}{e^{\frac{t}{2}} - 1} - \frac{2t}{e^t - 1}.$$

З розкладу (6.3) знаходимо шуканий коефіцієнт:

$$\Phi_{2m}(1/2) = 2(-1)^{m+1}B_m(1/2^{2m} - 1). \qquad (6.11)$$

Похідна $\Phi'_n(z)$ полінома Бернуллі n-го порядку така, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi'_n(z)\frac{t^n}{n!} = \frac{t^2e^{zt}}{e^t - 1} = \frac{t^2(e^{zt} - 1)}{e^t - 1} + \frac{t^2}{e^t - 1}. \qquad (6.12)$$

Якщо $n = 2m$ $(m > 1)$, то, оскільки розклад другого члена правої частини (6.12) не містить згідно (6.3) членів непарного порядку більшого 2, можна записати: $\Phi'_{2m}(z) = 2m\Phi_{2m-1}(z)$. Тому,

$$\Phi'_{2m}(1/2) = 0.$$

Аналогічно можна показати, що

$$\Phi''_{2m+1}(z) = \Phi_{2m-1}(z).$$

Якщо $n = 2m + 1$, то, прирівнявши коефіцієнти при $t^{2m+1}/(2m + 1)!$ в обох частинах (6.12), з урахуванням (6.3) та (6.5), одержимо:

$$\frac{1}{2m + 1}\Phi'_{2m+1}(z) = \Phi_{2m}(z) + (-1)^{m+1}B_m. \qquad (6.13)$$

Тепер можна зробити деякі *висновки* про корені $\Phi_n(z)$. Поліном $\Phi_{2m+1}(z)$ рівний нулю при $z = 0$, $z = 1$, не перетворюється на нуль в інтервалі (0; 1), за винятком точки $z = 1/2$. Дійсно, якби поліном Φ_{2m+1} перетворювався в цьому інтервалі на нуль два рази, то його похідна Φ'_{2m+1} перетворювалася б на нуль принаймні три рази, а його друга похідна – принаймні два рази. Іншими словами, поліном Φ_{2m-1} перетворювався б на нуль принаймні два рази. Продовжуючи міркування до Φ_3, можна показати, що цей поліном третього степеня два рази перетворювався б на нуль всередині проміжку (0; 1), а з врахуванням точок 0 і 1 – чотири рази, що неможливо.

Поліном Φ_{2m}, рівний нулю при $z = 0$, $z = 1$, не перетворюється на нуль в проміжку $(0;\ 1)$. Дійсно, якби це було не так, то його перша похідна перетворювалася б на нуль, у вказаному проміжку, принаймні двічі. Але це неможливо в силу попереднього міркування, оскільки $\Phi'_{2m} = 2m\Phi_{2m-1}$. Поліном Φ_{2m} проходить через максимум при $z = 1/2$.

Перші поліноми Бернуллі мають такий вигляд:

$$\Phi_1 = z;$$

$$\Phi_2 = z^2 - z = z(z-1);$$

$$\Phi_3 = z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2}z = z\left(z - \frac{1}{2}\right)(z-1);$$

$$\Phi_4 = z^4 - 2z^3 + z^2 = z^2(z-1)^2;$$

$$\Phi_5 = z^5 - \frac{5}{2}z^4 + \frac{5}{3}z^3 - \frac{1}{6}z = z\left(z - \frac{1}{2}\right)(z-1)\left(z(z-1) - \frac{1}{3}\right);$$

$$\Phi_6 = z^6 - 3z^5 + \frac{5}{2}z^4 - \frac{1}{2}z^2 = z^2(z-1)^2\left(z(z-1) - \frac{1}{2}\right).$$

6.2. Формула Ейлера

Розглянемо тотожність:

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} F'(t)dt = \int_0^h F'(x+h-t)dt.$$

Проінтегруємо послідовно останню рівність за частинами:

$$\left.\begin{aligned}
&F(x+h) - F(x) = hF'(x) + \int_0^h F''(x+h-t)dt;\\
&F(x+h) - F(x) = hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \int_0^h F'''(x+h-t)\frac{t^2}{2!}dt;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&F(x+h) - F(x) = hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \dots + \frac{h^{2p}}{(2p)!}F^{(2p)}(x) +\\
&\qquad + \int_0^h F^{(2p+1)}(x+h-t)\frac{t^{2p}}{2!}dt.
\end{aligned}\right\} \quad (6.14)$$

Застосуємо формулу (6.14) до послідовних похідних $F'(x)$, $F''(x), \dots, F^{(2p-1)}(x)$, обмеживши розклади членами, що містять похідну $F^{(2p)}(x)$, та помноживши їх відповідно на $h, h^2, \dots, h^{2p-1}$:

$$\left.\begin{array}{c} h\big(F'(x+h)-F'(x)\big)=h^2F''(x)+\ \dots+\dfrac{h^{2p}}{(2p-1)!}F^{(2p)}(x)+ \\ +h\displaystyle\int_0^h F^{(2p+1)}(x+h-t)\frac{t^{2p-1}}{(2p-1)!}dt; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ h^{2p-1}\left(F^{(2p-1)}(x+h)-F^{(2p-1)}(x)\right)= \\ =h^{2p}F^{(2p)}(x)+h^{2p-1}\displaystyle\int_0^h F^{(2p+1)}(x+h-t)t\,dt. \end{array}\right\} \quad (6.15)$$

Домножимо рівність (6.14) на одиницю, першу рівність (6.15) на «$-1/2$», другу рівність (6.15) на $B_1/2!$, третю рівність (6.15) на нуль, четверту – на «$-B_2/4!$»$, \dots, (2p-2)$-гу на «$(-1)^p B_{p-1}/(2p-2)!$» і результати додамо. В правій частині одержаної таким чином суми коефіцієнт при F'' буде дорівнювати нулю, коефіцієнт при F''' дорівнює

$$\frac{1}{3!}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2!}$$

– також нуль. Легко показати, що коефіцієнт при $F^{(k)}$ дорівнює

$$C=\frac{1}{k!}-\frac{1}{2}\frac{1}{(k-1)!}+\frac{B_1}{2!}\frac{1}{(k-2)!}-\frac{B_2}{4!}\frac{1}{(k-4)!}+\frac{B_3}{6!}\frac{1}{(k-6)!}+\ \dots,$$

є нулем. Дійсно, виносячи за дужки множник $1/k!$, одержуємо:

$$C=\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k}{2}+C_k^2B_1-C_k^4B_2+C_k^6B_3+\ \dots\right),$$

і згідно з формулою (6.6), при $z=1$

$$C=\frac{1}{k!}\Phi_k(1).$$

Як показує формула (6.9), цей вираз рівний нулю. Тому результатом додавання є вираз:

$$F(x+h)-F(x)=\frac{1}{2}h\big(F'(x+h)-F'(x)\big)-$$

$$-\frac{B_1}{2!}h^2\big(F''(x+h)-F''(x)\big)+\ \dots$$

$$\dots+(-1)^k\frac{B_k}{(2k)!}\left(F^{(2k)}(x+h)-F^{(2k)}(x)\right)+\ \dots$$

$$\dots+(-p)^{p-1}\frac{B_{p-1}}{(2p-2)!}h^{2p-2}\left(F^{(2p-2)}(x+h)-F^{(2p-2)}(x)\right)+$$

$$+\int_0^h F^{(2p+1)}(x+h-t)\left(\frac{t^{2p}}{(2p)!}-\frac{1}{2}h\frac{t^{2p-1}}{(2p-1)!}+\right.$$
$$+\frac{B_1}{2!}\frac{h^2}{(2p-2)!}t^{2p-2}+(-1)^{k+1}\frac{B_k}{(2k)!}\frac{h^{2k}}{(2p-2k)!}t^{2p-2k}+\ ...$$
$$\left.+(-1)^p\frac{B_{p-1}}{(2p-2)!}\frac{h^{2p-2}}{2!}t^2\right)dt. \qquad (6.16)$$

За формулою (6.6) поліном у дужках під знаком інтеграла можна записати у вигляді

$$\frac{h^{2p}}{(2p)!}\Phi_{2p}\left(\frac{t}{h}\right).$$

Замінимо $F'(x)=f(x)$. Тоді рівність (6.16) можна подати у вигляді:

$$\int_x^{x-h} f(x)dx=\frac{h}{2}\big(f(x+h)-f(x)\big)-$$
$$-\frac{B_1}{2!}h^2\left(f'(x+h)-f'(x)\right)+\ ...+(-1)^{p-1}\frac{B_{p-1}}{(2p-1)!}h^{2p-2}\times$$
$$\times\left(f^{(2p-3)}(x+h)-f^{(2p-3)}(x)\right)+R, \qquad (6.17)$$

де

$$R=\frac{h^{2p}}{(2p)!}\int_0^h f^{(2p)}(x+h-t)\Phi_{2p}\left(\frac{t}{h}\right)dt.$$

Обґрунтуємо для R дві формули, зручні для використання.

1. Відомо, що $\Phi_{2p}(z)$ зберігає знак в інтервалі (0; 1). Тому можна застосувати теорему про середнє і, позначивши через θ_1 число, що належить інтервалу (0; 1), одержимо:

$$R=\frac{h^{2p}}{(2p)!}f^{(2p)}(x+\theta_1 h)\int_0^h \Phi_{2p}\left(\frac{t}{h}\right)dt.$$

Згідно з формулою (6.13) можна замінити Φ_{2p} на

$$\frac{1}{2p+1}\Phi'_{2p+1}+(-1)^p B_p.$$

Оскільки $\Phi_{2p+1}(0)=\Phi_{2p+1}(1)=0$, то

$$R=(-1)^p h^{2p+1}\frac{B_p}{(2p)!}f^{(2p)}(x+\theta_1 h). \qquad (6.18)$$

2. $\Phi_{2p}(1/2)$ – найбільше за абсолютною величиною значення $\Phi_{2p}(z)$ в $(0;\ 1)$. Якщо $f^{(2p)}$ зберігає в інтервалі $(x;\ x+h)$ сталий знак, то згідно з теоремою про середнє:

$$R = \frac{h^{2p}}{(2p)!}\Phi_{2p}(\theta_1)\int_0^h f^{(2p)}(x+h-t)dt$$

при

$$\Phi_{2p}(\theta_1) = \theta_2\Phi_{2p}(1/2),$$

де θ_1 і θ_2 – деякі два числа, що належать інтервалу $(0;\ 1)$.

Уведемо значення $\Phi_{2p}(1/2)$ згідно рівності (6.11). Тоді

$$R = 2\theta_2(-1)^{p+1}h^{2p}\frac{B_p}{(2p)!}\left(\frac{1}{2^{2p}}-1\right)\times$$
$$\times\left[f^{(2p-1)}(x+h) - f^{(2p-1)}(x)\right]. \qquad (6.19)$$

Застосуємо формулу (6.17) послідовно до інтервалів

$$(a;\ a+h), (a+h;\ a+2h), (a+2h;\ a+3h), \dots,$$
$$(a+(n-1)h;\ a+nh=b).$$

Виконаємо заміну:

$$f(a) = y_0, f(a+h) = y_1, \dots, f(a+nh) = f(b) = y_n.$$

Додавши n одержаних виразів, одержимо ***формулу Ейлера***:

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) -$$
$$-\frac{B_1}{2!}h^2\big(f'(b) - f'(a)\big) + \frac{B_2}{4!}h^4\big(f'''(b) - f'''(a)\big) + \ \dots + (-1)^{p-1}\times$$
$$\times\frac{B_{p-1}}{(2p-2)!}h^{2p-2}\left(f^{(2p-3)}(b) - f^{(2p-3)}(a)\right) + R_1 \qquad (6.20)$$

при

$$R_1 = (-1)^p\frac{B_p}{(2p)!}h^{2p+1}\times$$
$$\times\left[f^{(2p)}(x_1) + f^{(2p)}(x_2) + \ \dots + f^{(2p)}(x_n)\right]. \qquad (6.21)$$

Останній вираз можна одержати і з формули (6.18), якщо позначити через $x_1, \dots, x_n$ абсциси точок, що містяться в інтервалах $(a;\ a+h), \dots, (a+(n-1)h;\ b)$.

Якщо функція $f^{(2p)}(x)$ зберігає сталий знак в інтервалі $(a;\ b)$, то з урахуванням формули (6.19) одержимо:

$$R_1 = 2\theta_2(-1)^p \frac{B_p}{(2p)!} h^{2p}\left[f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)\right]. \qquad (6.22)$$

Суттєве зауваження. Оскільки числа Бернуллі дуже швидко зростають разом з p, то важливо зауважити, що залишковий член R нескінченно зростає разом з p, якщо h фіксоване. Але якщо h прямує до нуля, а p фіксоване, то R швидко прямує до нуля. Формула Ейлера (6.20) являє собою асимптотичний ряд.

Приклад 6.1. Обчислити:

$$\int_1^{1,6} \frac{dx}{x}.$$

Результат відомо: $\ln 1{,}6 = 0{,}4700036292 \ldots$.

Розв'язання. Ділимо проміжок інтегрування на шість частинних інтервалів ($h = 0{,}1$) і застосовуємо формулу Ейлера при $p = 3$. Обчислимо спочатку верхню межу допустимої похибки. Оскільки послідовні похідні $1/x$ зберігають сталий знак в інтервалі [1; 1,6], то R необхідно взяти у вигляді (6.22):

$$R = \theta(-2)\frac{1}{42}(0{,}1)^6\frac{1}{6!}\left[\frac{5}{1!} - \frac{5!}{(1{,}6)^6}\right] = -8 \cdot 10^{-9}\theta.$$

Застосування формули Ейлера дає:

$$\ln 1{,}6 = 0{,}1\left(0{,}5 + \frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}2} + \frac{1}{1{,}3} + \frac{1}{1{,}4} + \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{2}\frac{1}{1{,}6}\right) -$$

$$-\frac{0{,}01}{12}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{(1{,}6)^2}\right) + \frac{1}{720}\cdot 0{,}0001\left(\frac{6}{1^4} - \frac{6}{(1{,}6)^4}\right) =$$

$$= 0{,}0500000000 + 0{,}0909090909 + 0{,}0833333333 +$$

$$+0{,}0769230769 + 0{,}0714285714 + 0{,}0666666666 +$$

$$+0{,}0312500000 - 0{,}0005078125 +$$

$$+0{,}0000007061 = 0{,}4700036327,$$

звідки $0{,}470003624 < \ln 1{,}6 < 0{,}470003632$.

Зауваження. З попереднього прикладу видно, що застосування формули Ейлера дозволяє одержати *високу точність* при наближеному обчисленні визначеного інтеграла. Це правильно за умови, що можливо обчислити послідовні значення похідних інтегрованих функцій на кінцях проміжку інтегрування і, більш того, можна для обчислення здійснюваної похибки знайти оцінку похідної достатньо високого порядку всередині проміжку інтегрування. Це неможливо, якщо функцію задано емпіричною формулою, і зазвичай це зробити досить важко, якщо аналітична форма інтегрованої функції складна. Звідси виникає необхідність встановлення деякої кількості формул достатньої точності, що вводять похідні інтегрованої функції тільки в необов'язковий перший поправковий член.

6.3. Формула трапецій

Якщо в формулі Ейлера покласти $p = 1$, то одержимо ***формулу трапецій***:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) + R_1. \quad (6.23)$$

Якщо функція емпірична, то обчислити похибку R_1 неможливо. Якщо можна обчислити другу похідну й позначити через M'' верхню межу абсолютного значення цієї похідної в інтервалі $(a;\ b)$, то:

$$|R_1| < \frac{n}{12}h^3M''. \quad (6.24)$$

Застосувавши формулу трапецій до прикладу 6.1, одержимо:

$$\ln 1{,}6 = 0{,}1\left(0{,}5 + \frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}2} + \frac{1}{1{,}3} + \frac{1}{1{,}4} + \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{2}\frac{1}{1{,}6}\right) =$$

$$= 0{,}050000 + 0{,}090909 + 0{,}83333 + 0{,}076923 + 0{,}071428 +$$

$$+0{,}066666 + 0{,}031250 = 0{,}470509,$$

при похибці $\mathrm{R}_1 < (6/12)(0{,}1)^3 \cdot 2 = 0{,}001$ – точність досить посередня. Якщо обчислення перших похідних можливе, то можна обчислити поправковий член, підставивши $p = 2$ в формулу Ейлера:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \ \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) -$$

$$-\frac{h^2}{12}\big(f'(b) - f'(a)\big) + R_1 \quad (6.25)$$

з похибкою

$$|R_1| < \frac{n}{720}h^5M^{(IV)}, \quad (6.26)$$

де $M^{(IV)}$ означає верхню межу абсолютного значення похідної $f^{(IV)}(x)$. У розглянутому прикладі цей поправковий член рівний $-0{,}000507$, звідки $\ln 1{,}6 = 0{,}470002$ при похибці, меншій $0{,}000002$ (за абсолютною величиною).

6.4. Формула Сімпсона

Припустимо, що число частинних інтервалів парне. Запишемо формулу Ейлера для $p = 2$, інакше кажучи, рівність (6.25) з залишковим членом, що одержується з (6.1) при $p = 2$:

$$|R_1| < \frac{R_1}{720}\left(f(x_1) + \ \dots + f^{(IV)}(x_n)\ \right).$$

Застосувавши формулу (6.25) до $n/2$ інтервалів, одержаних злиттям кожних двох суміжних інтервалів, одержимо:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_2 + y_4 + \ \dots + y_{n-2} + \frac{1}{2}y_n\right) -$$

$$-\frac{4h^2}{12}\left(f'(b) - f'(a)\right) + R_2, \qquad (6.27)$$

при

$$|R_2| < \frac{32h^5}{720}\left(f^{(IV)}(x_1') + \ \dots + f^{(IV)}\left(\frac{x_n'}{2}\right)\right),$$

де $x_1' \in (a;\ a + 2h),\ x_2' \in (a + 2h;\ a + 4h), \dots$.

Виключимо поправковий член з виразів (6.25) і (6.27). Для цього достатньо відняти друге від першого, помножене на 4.

Одержуємо ***формулу Сімпсона***:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 +$$

$$+4y_3 + \ \dots + 4y_{n-1} + y_n) + R_3. \qquad (6.28)$$

Якщо обчислюється верхня межа $M^{(IV)}$ абсолютного значення четвертої похідної в інтервалі $(a;\ b)$, то при цьому допускається похибка:

$$|R_3| = |(4R_1 - R_2)/3| < \frac{n}{108}h^5M^{(IV)}. \qquad (6.29)$$

Застосуємо формулу Сімпсона до прикладу 6.1:

$$\ln 1{,}6 = \frac{0{,}1}{3}\left(1 + \frac{4}{1{,}1} + \frac{2}{1{,}2} + \frac{4}{1{,}3} + \frac{2}{1{,}4} + \frac{4}{1{,}5} + \frac{1}{1{,}6}\right) =$$

$$= 0{,}03333333 + 0{,}12121212 + 0{,}05555555 + 0{,}10256410 +$$

$$+0{,}04761904 + 0{,}08888888 + 0{,}02083333 = 0{,}47000636$$

з похибкою

$$|R_3| < (6/108)(0{,}1)^5 \cdot 24 = 1{,}3 \cdot 10^{-5}.$$

Якщо у формулу Ейлера підставити $p = 3$, то попередні обчислення дають можливість подати *формулу Сімпсона з поправковим членом*:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n) -$$

$$-(h^4/180)\big(f'''(b) - f'''(a)\big) + R_4. \quad (6.30)$$

Це покращення дає в якості верхньої межі абсолютного значення похибки:

$$|R_4| < (17/22680)\, nh^7 M^{(VI)}, \quad (6.31)$$

де $M^{(VI)}$ – верхня межа абсолютного значення $f^{(VI)}(x)$ в інтервалі (a; b). Застосуємо формулу (6.30) до прикладу 6.1. Поправковий член: $-0{,}00000282\ldots$. Звідки $\ln 1{,}6 = 0{,}47000356\ldots$ з похибкою, меншою (за абсолютною величиною):

$$\frac{17 \cdot 6}{22680}(0{,}1)^7 6! = 0{,}00000032.$$

6.5. Формула Уеддля

Припустимо, що інтервал інтегрування розділено на n інтервалів, де n кратне 6. Тоді за допомогою обчислення, подібного попередньому, можна записати формулу Ейлера при $p = 3$ спочатку для n інтервалів, потім для $n/2$ інтервалів, одержаних об'єднанням суміжних інтервалів по два, а потім для $n/3$ інтервалів, одержаних об'єднанням суміжних інтервалів по три.

Усі три утворені таким чином вирази дозволяють виключити обидва члени, що містять перші та треті похідні. Достатньо для цього перший вираз, помножений на 15, додати до третього та відняти другий, помножений на 6.

Таким чином одержимо ***формулу Уеддля***:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{10}(y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + 2y_6 + 5y_7 +$$

$$+y_8 + 6y_9 + \ldots + 6y_{n-3} + y_{n-2} + 5y_{n-1} + y_n) + R_5 \quad (6.32)$$

з оцінкою похибки

$$|R_5| < \frac{47}{12600} nh^7 M^{(VI)}, \quad (6.33)$$

де $M^{(VI)}$ – верхня межа абсолютного значення $f^{(VI)}(x)$ в інтервалі (a; b).

Повернемося до прикладу 6.1:

$$\ln 1{,}6 = 0{,}03\left(1+\frac{5}{1{,}1}+\frac{1}{1{,}2}+\frac{6}{1{,}3}+\frac{1}{1{,}4}+\frac{5}{1{,}5}+\frac{1}{1{,}6}\right)=$$

$$= 0{,}030000000 + 0{,}136363636 + 0{,}025000000 + 0{,}138461538 +$$

$$+0{,}021428571 + 0{,}100000000 + 0{,}018750000 = 0{,}470003745$$

з похибкою, меншою за абсолютним значенням:

$$\frac{47}{12600}6(0{,}1)^7\cdot 6! = 0{,}0000016.$$

Якщо провести викладки, виходячи з формули Ейлера для $p = 4$, то одержали б формулу Уеддля з поправковим членом:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{10}(y_0 + 5y_1 + 2y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + \dots +$$

$$+5y_{n-1} + y_n) - \frac{h^6}{840}\left(f^{(V)}(b) - f^{(V)}(a)\right) + \mathrm{R}_6 \quad (6.34)$$

при

$$|R_6| < \frac{169}{252000}nh^9M^{(VIII)}, \quad (6.35)$$

де $M^{(VIII)}$ – верхня межа абсолютного значення $f^{(VIII)}(x)$ в інтервалі (a; b). Для попереднього прикладу поправковий член в формулі (6.34) буде: $-0{,}000000134$. Звідки $\ln 1{,}6 = 0{,}470003612$ з похибкою, меншою за абсолютною величиною:

$$\frac{169}{252000}6(0{,}1)^9 8! = 0{,}00000016.$$

6.6. Формула Грегорі

Якщо функцію задано емпірично, то можна скласти таблицю різниць. Якщо в формулу Ейлера ввести значення похідних, виражених за формулами (5.3) через різниці, то після деяких обчислень одержимо ***формулу Грегорі***:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) -$$

$$-\frac{h}{12}(\Delta y_{n-1} - \Delta y_0) - \frac{h}{24}(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0) -$$

$$-\frac{19h}{720}(\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0) - \frac{3h}{160}(\Delta^4 y_{n-4} + \Delta^4 y_0) -$$

$$-\frac{836h}{60480}(\Delta^5 y_{n-5} - \Delta^5 y_0) - \frac{275h}{24192}(\Delta^6 y_{n-6} + \Delta^6 y_0) -$$

$$-\frac{33953h}{3628800}(\Delta^7 y_{n-7} - \Delta^7 y_0) - \ \dots \ . \qquad (6.36)$$

Приклад 6.2. Обчислити:

$$\int_{0,515}^{0,520} \operatorname{arctg} x \, dx.$$

Розв'язання. Таблиця різниць $f(x) = \operatorname{arctg} x$, складена в прикладі 4.7, дає:

$$\begin{array}{lcr}
0{,}001 \, \frac{y_0}{2} & = & 0{,}000237787736358; \\
0{,}001 \, y_1 & = & 0{,}000476365524222; \\
0{,}001 \, y_2 & = & 0{,}000477154932097; \\
0{,}001 \, y_3 & = & 0{,}000477943696145; \\
0{,}001 \, y_4 & = & 0{,}000478731816173; \\
0{,}001 \, \frac{y_5}{2} & = & 0{,}000239759645996; \\
-(\Delta y_4 - \Delta y_0)\frac{0{,}001}{12} & = & 214640; \\
-(\Delta^2 y_3 + \Delta^2 y_0)\frac{0{,}001}{24} & = & 53660; \\
-(\Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_0)\frac{19 \cdot 0{,}001}{720} & = & 0; \\
\hline
 & & 0{,}002387743619291
\end{array}$$

Зауваження. Неважко обчислити первісну для функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$:

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2),$$

та, не дивлячись на це, обчислення інтеграла через первісну –

$$I = 0{,}520 \operatorname{arctg} 0{,}520 - 0{,}515 \operatorname{arctg} 0{,}515 - (1/2)\ln 1{,}2704 +$$
$$+(1/2)\ln 1{,}265225,$$

– значно громіздкіше і (якщо використовувати таблиці арктангенсів і логарифмів з невисокою точністю) дає менш точний результат, у порівнянні з прямим обчисленням за таблицею різниць та формулою Грегорі.

Формула Грегорі використовує різниці, розміщені на низхідній і висхідній діагоналях таблиці різниць, що мають початок в a i b. Використовуючи при обчисленні, подібному до попереднього, вирази для послідовних похідних, заданих формулами (5.6), і провівши підстановку в формулу Ейлера, одержимо формулу інтегрування. Вона утворюється різницями, що знаходяться по обидві сторони від горизонтальних рядків таблиці різниць, що мають початки в a i b:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) -$$
$$-\frac{h}{12}\left(\frac{\Delta y_n + \Delta y_{n-1}}{2} - \frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2}\right) +$$
$$+\frac{11h}{720}\left(\frac{\Delta^3 y_{n-1} + \Delta^3 y_{n-2}}{2} - \frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2}\right) -$$
$$-\frac{191h}{60480}\left(\frac{\Delta^5 y_{n-2} - \Delta^5 y_{n-3}}{2} - \frac{\Delta^5 y_{-2} - \Delta^5 y_{-3}}{2}\right) + \ldots \,. \quad (6.37)$$

Приклад 6.3. Обчислити інтеграл $I = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 0{,}5$.

Розв'язання. Використаємо таблицю косинусів, наведену в розд. 4. Довжина інтервалу в 2° становить 0,0349066. Формула трапецій дає:

$$I = 0{,}49994942.$$

Через «неправильну поведінку» різниць третього порядку обмежимося обчисленням першого поправкового члена, який дорівнює 0,00005076, тому:

$$I = 0{,}50000018.$$

Одержали дуже точне наближення, не дивлячись на малочисельність табличних даних.

6.7. Формула Чебишева

Розглянемо числове обчислення визначеного інтеграла

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx,$$

до якого можна звести обчислення інтеграла

$$\int_a^b f(t)dt,$$

якщо провести заміну змінної

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x.$$

В квадратурну формулу

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = A_1 f(x_1) + A_2(x_2) + \ ... + A_n(x_n)$$

підставимо: всі коефіцієнти A_i $(i = \overline{1,n})$ рівні між собою $(A_i = A)$ та підберемо вузли $x_1, x_2, ..., x_n$ так, щоб квадратурна формула була точною для довільного многочлена $(n-1)$-го степеня:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ ... + a_{n-1} x^{n-1}.$$

Число A й абсциси квадратурної формули потрібно вибирати так, щоб рівність

$$\int_{-1}^{+1} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ ... + a_{n-1} x^{n-1}) dx =$$

$$= A[(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2^2 + \ ... + a_{n-1} x^{n-1}) +$$

$$+(a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ ... + a_{n-1} x_2^{n-1}) +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+(a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ ... + a_{n-1} x_n^{n-1})]$$

була точною при довільних $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$. Інтегруючи ліву частину останньої рівності й перетворюючи праву частину, одержимо рівність

$$2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \ ...\right) =$$

$$= A\left(na_0 + a_1 \sum_{k=1}^{n} x_k + a_2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + a_3 \sum_{k=1}^{n} x_k^3 + \ ...\right).$$

Ця рівність має справджуватись для довільних значень $a_0, a_1, a_2, ...$, тому для визначення A і $x_1, x_2, x_3, ..., nA = 2$, $A = 2/n$ можна скласти таку систему рівнянь:

$$x_1 + x_2 + \ ... + x_n = 0; \quad x_1^2 + x_2^3 + \ ... + x_n^2 = \frac{2}{3A} = \frac{n}{2};$$

$$x_1^3 + x_2^3 + \ ... + x_n^3 = 0; \quad x_1^4 + x_2^4 + \ ... + x_n^4 = \frac{2}{5A} = \frac{n}{5}; \quad (6.38)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .$$

У табл. 6.1 наведено абсциси квадратурної формули Чебишева (з шістьма цифрами після коми) для $n = \overline{3,9}$. При $n = 8$ і для всіх

$n > 9$ серед коренів системи (6.38) є комплексні корені. Квадратурна формула:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \frac{2}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ ... + f(x_n)], \qquad (6.39)$$

в якій числа $x_1, x_2, ..., x_n$ визначено з рівнянь (6.38) і n дорівнює одному з чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, називається ***формулою Чебишева.***

Таблиця 6.1

n	A_n	Значення абсцис
3	2/3	$x_1 = -x_3 = 0{,}707107$, $x_2 = 0{,}000000$
4	1/2	$x_1 = -x_4 = 0{,}794654$, $x_2 = -x_3 = 0{,}187592$
5	2/5	$x_1 = -x_5 = 0{,}832498$, $x_2 = -x_4 = 0{,}374541$, $x_3 = 0{,}000000$
6	1/3	$x_1 = -x_6 = 0{,}866247$, $x_2 = -x_5 = 0{,}422519$, $x_3 = -x_4 = 0{,}266635$
7	2/7	$x_1 = -x_7 = 0{,}883862$, $x_2 = -x_6 = 0{,}529657$, $x_3 = -x_5 = 0{,}323912$, $x_4 = 0{,}000000$
9	2/3	$x_1 = -x_9 = 0{,}911589$, $x_2 = -x_8 = 0{,}601019$, $x_3 = -x_7 = 0{,}528762$, $x_4 = -x_6 = 0{,}167906$, $x_5 = 0{,}000000$

Для інтеграла

$$\int_a^b f(t)dt$$

формула Чебишева записується у вигляді:

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{n}(f(t_1) + f(t_2) + \ ... + f(t_n)), \qquad (6.40)$$

де

$$t_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}x_i \quad (i = \overline{1,n}),$$

x_i – абсциси, знайдені з рівнянь (6.38).

Зауваження 1. Теоретичне значення оцінок залишкових членів для відповідних наближених формул, що застосовуються в наближених обчисленнях, велике, оскільки за ними можна судити про порядок точності квадратурних формул. Так, порядок формули трапеції $O(h^4)$, формули Сімпсона $O(h^4)$, а формули Уеддля $O(h^6)$. Тут $O(h^k)$ – *символ Ландау*, який розуміють так: величина не перевищує сталу, помножену на модуль h^k.

Розрахунки, за відповідними оцінками, в деяких випадках ускладнюються, оскільки доволі часто значення похідних другого, четвертого, шостого порядків і модулів їх найбільших значень невідомо або важко знаходяться. Менш точні, але практично більш зручні оцінки точності квадратурних формул можна одержати, якщо похідні замінити відповідними скінченними різницями й припустити, що різниця порядку r стала або майже не змінюється:

$$f^{(r)}(x) = \frac{\Delta^r f}{h^r}.$$

Хорошим контролем може слугувати знаходження інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ за двома квадратурними формулами або за однією і тією ж квадратурною формулою при діленні інтервалу інтегрування $[a;\ b]$ на різне число частин, наприклад на n та $2n$. Порівняння одержаних результатів – числа співпадаючих значущих цифр, дає можливість оцінити точність обчислень.

Зауваження 2. Квадратурні формули дають хороші за точністю результати тільки тоді, коли інтегрована функція достатньо гладка. При неплавній зміні графіка підінтегральної функції, при великій кількості максимумів і мінімумів; різких «сплесків» функції, точність квадратурної формули значно погіршується.

Перед тим як приступити до знаходження інтеграла за квадратурною формулою, потрібно скласти уявлення про характер зміни функції, побудувавши її графік або склавши таблицю її різниць. Іноді доцільно, врахувавши «поведінку» функції, основний проміжок інтегрування розбити на декілька проміжків і на кожному інтегрувати з різним кроком. Необхідно пам’ятати, що збільшення точок ділення інтервалу $[a;\ b]$ приводить до збільшення обчислень і, як наслідок, до накопичення помилок округлення.

6.8. Застосування інтерполяційних поліномів Ньютона для одержання формул Ейлера, трапецій, Сімпсона, Уеддля

Нехай необхідно обчислити

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Провівши в інтегралі заміну змінної за формулами

$$b - a = nh, \ \ u = \frac{x-a}{h}, \quad \varphi(u) = f(a+hu).$$

Одержимо:

$$I = h\int_0^n \varphi(u)du.$$

Якщо підставити замість $\varphi(u)$ *інтерполяційний поліном Ньютона за низхідними різницями* (формула (4.10)), що проходить через $n+1$ точку: $(a;\ f(a)),\ (a+h;\ f(a+h)), \dots, (a+nh;\ f(a+nh))$ та повернутися до змінної x, то одержимо:

$$I = h\left[nf(a) + \frac{n^2}{2}\Delta f(a) + \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2}\right)\frac{1}{2!}\Delta^2 f(a) + \right.$$

$$+\left(\frac{n^4}{4} - n^3 + n^2\right)\frac{1}{3!}\Delta^3 f(a) +$$

$$+\left(\frac{n^5}{5} - \frac{3n^4}{2} + \frac{11n^3}{3} - 3n^2\right)\frac{1}{4!}\Delta^4 f(a) +$$

$$+\left(\frac{n^6}{6} - 2n^5 + \frac{35n^4}{4} - \frac{50n^3}{3} + 12n^2\right)\frac{1}{5!}\Delta^5 f(a) +$$

$$+\left(\frac{n^7}{7} - \frac{15n^6}{6} + 17n^5 - \frac{225n^4}{4} + \frac{274n^3}{3} - 60n^2\right)\times$$

$$\left.\times\frac{1}{6!}\Delta^6 f(a) + \ \dots\right]. \qquad (6.41)$$

Діючи аналогічно, але скориставшись *поліномом Ньютона за висхідними різницями* (формула (4.12)), одержимо:

$$I = h\left[nf(b) + \frac{n^2}{2}\Delta f(b-h) + \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2}\right)\frac{1}{2!}\Delta^2 f(b-2h) + \right.$$

$$+\left(\frac{n^4}{4} + n^3 + n^2\right)\frac{1}{3!}\Delta^3 f(b-3h) +$$

$$+\left(\frac{n^5}{5}+\frac{3n^4}{2}+\frac{11n^3}{3}+3n^2\right)\frac{1}{4!}\Delta^4 f(b-4h)+$$

$$+\left(\frac{n^6}{6}+2n^5+\frac{35n^4}{4}+\frac{50n^3}{3}+12n^2\right)\frac{1}{5!}\Delta^5 f(b-5h)+$$

$$+\left(\frac{n^7}{7}+\frac{5n^6}{2}+9n^5+\frac{225n^4}{4}+\frac{274n^3}{3}+60n^2\right)\times$$

$$\left.\times\frac{1}{6!}\Delta^5 f(b-6h)+\ \dots\right]. \qquad (6.42)$$

Зауваження. Якщо в формулі (6.42) прийняти $n=1$, то застосувавши цю формулу до кожного з інтервалів

$$(a;\ a+h), (a+h;\ a+2h), \dots, (a+(p-1)h;\ a+ph)$$

та додавши результати, одержимо:

$$\int_a^{a+ph} f(x)\,dx = h\left(\frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+\ \dots+\frac{1}{2}f(a+ph)\right).$$

Знову одержали ***формулу трапецій.***

Діючи аналогічно при парному числі p і $n=2$ з кожним з *інтервалів* $(a;\ a+2h)$, $(a+2h;\ a+4h), \dots$ довжини $2h$, одержимо коефіцієнт при $\Delta^3 f(a)$, рівний нулю. При цьому, порядок похибки – $\Delta^4 f(a)$. Одержуємо ***формулу Сімпсона***:

$$\int_a^{a+2ph} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+$$

$$+4f(a+3h)+\ \dots$$

$$\dots+2f(a+(2p-2)h)+4f(a+(2p-1)h)+f(a+2ph)].$$

Аналогічно, при p, що ділиться на 6, приймаючи $n=6$ і застосовуючи формулу до кожного з інтервалів $(a;\ a+6h)$, $(a+6h;\ a+12h), \dots$ довжини $6h$, одержимо коефіцієнт при $\Delta^7 f(a)$ рівний нулю. Для першого інтервалу матимемо:

$$\int_a^{a+6h} f(x)\,dx = h\left[\frac{41}{140}f(a)+\frac{216}{140}f(a+h)+\frac{27}{140}f(a+2h)+\right.$$

$$+\frac{272}{140}f(a+3h)+\frac{27}{140}f(a+4h)+\frac{216}{140}f(a+5h)+$$

$$\left.+\frac{41}{140}f(a+6h)\right].$$

Додавши до цього виразу величину, якою можна знехтувати:

$$\frac{h}{140}\Delta^6 f(a) = \frac{h}{140}[f(a) - 6f(a+h) + 15f(a+2h) -$$

$$-20f(a+3h) + 15f(a+4h) - 6f(a+5h) + f(a+6h)]$$

та діючи аналогічно для кожного з $p/6$ інтервалів, після чого, додавши результати, одержимо, з похибкою порядку $0{,}007h\Delta^8 f(a)$ ***формулу Уеддля***:

$$\int_a^{a+6ph} f(x)\,dx = \frac{3h}{10}[f(a) + 5f(a+h) + f(a+2h) + 6f(a+3h) +$$

$$+f(a+4h) + 5f(a+5h) + 2f(a+6h) + 5f(a+7h) +$$

$$+f(a+8h) + \dots].$$

Формула Уеддля одна з найкращих формул інтегрування оскільки вона одна з найточніших та найпростіша в застосуванні.

6.9. Деякі окремі випадки інтегрування

Викладені способи інтегрування функцій, заданих аналітично, не дають хороших результатів в таких випадках:

1) підінтегральна функція перетворюється в нескінченність на проміжку інтегрування;

2) похідна підінтегральної функції нескінченна на проміжку інтегрування;

3) одна з меж інтегрування нескінченна.

У цих випадках доводиться переходити до заміни змінної під знаком інтеграла. Наведемо приклади на кожен з випадків 1)–3).

Приклад 6.4. Обчислити інтеграл:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(1-x)}}.$$

Розв'язання. Розкладемо інтеграл на три інтеграли:

$$I = \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(1-x)}} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(1-x)}} +$$

$$+\int_{x_2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(1-x)}} = I_1 + I_2 + I_3,$$

де $0 < x_1 < x_2 < 1$. Обчислення інтеграла I_2 не створює особливих труднощів. Для обчислення I_1 проводимо заміну змінної $x = y^2$:

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{x_1}} \frac{2dy}{\sqrt{1 - y^4}}.$$

Підставимо $x_1 = 0{,}36$, звідки $y_1 = \sqrt{x_1} = 0{,}6$. *Метод Уеддля* при $h = 0{,}1$, дає: $I_1 = 1{,}2165$.

Для обчислення I_3 проводимо заміну змінної $1 - x = y^2$:

$$I_3 = \int_0^{\sqrt{1-x_2}} \frac{2dy}{\sqrt{(1 - y^2)(2 - y^2)}}.$$

Покладаємо $x_2 = 0{,}64$, звідки $y_2 = \sqrt{1 - x_2} = 0{,}6$. Той же метод при збереженні кроку $h = 0{,}1$ дає $I_3 = 0{,}9416$.

Метод трапецій, застосований до обчислення I_2, при 7 інтервалах, рівних 0,04, дає $I_2 = 0{,}4642$. Звідси $I = 2{,}6223$.
Точне, значення: 2,622056 ... .

2) Наведемо простий приклад для другого випадку, коли інтеграл легко й безпосередньо обчислити.

Приклад 6.5. Знайти інтеграл

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Розв'язання. Виконаємо заміну змінної $1 - x = y^2$. Тоді

$$I = 2\int_0^1 y^2\sqrt{2 - y^2}\, dy.$$

Метод Сімпсона при 10 інтервалах, рівних 0,1, дає $I = 0{,}78537$.
Точне значення: $\pi/4 = 0{,}78539$ ... .

3) Коли одна з меж інтегрування є «∞», то природньо зробити заміну змінної: $x = 1/y$.

Така заміна «погана», якщо друга межа є «0». Тоді можна провести більш складну заміну змінної $x = e^{-y}$. Краще однак розділити інтегрування на дві частини, як це показано в наступному прикладі (в ньому інтеграл також обчислюється безпосередньо).

Приклад 6.6. Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Розв'язання. Одержуємо:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Метод Сімпсона при 10 рівних інтервалах дає $I = 1{,}57079$. Точний результат: $\pi/2 = 1{,}570769\ldots$.

6.10. Метод зрізу при обчисленні інтегралів з нескінченними межами

Для того, щоб наближено обчислити збіжний невласний інтеграл

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

з точністю до ε, його подають у вигляді:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^\infty f(x)\,dx,$$

де b обирають настільки великим, щоб виконувалася нерівність:

$$\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Після цього визначений інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

обчислюється за однією з квадратурних формул з точністю до $\varepsilon/2$ і наближено покладають:

$$\int_a^\infty f(x)dx \cong \int_a^b f(x)dx.$$

Приклад 6.7. Обчислити наближено інтеграл

$$\int_2^\infty \frac{dx}{1+x^3}$$

з точністю до $\varepsilon = 10^{-2}$.

Розв'язання. Вибираєм число b так, щоб виконувалась нерівність:

$$\int_b^\infty \frac{dx}{1+x^3} < \frac{10^{-2}}{2}.$$

Зазначивши, що

$$\int_b^\infty \frac{dx}{1+x^3} < \int_b^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2b^2},$$

вибираємо b з умови

$$\frac{1}{2b^2} = \frac{10^{-2}}{2},$$

звідки одержуємо: $b = 10$. Наближено приймаємо:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \int_2^{10} \frac{dx}{1+x^3} = I$$

й обчислюємо одержаний визначений інтеграл з точністю до $(1/2)\cdot 10^{-2}$ за *формулою Сімпсона.* Кроками розрахунку оберемо: $h_1 = 1, h_2 = 2$.

Результати обчислень інтеграла I за формулою Сімпсона занесено в табл. 6.2. В останньому рядку наведено суми $\sum y_k m_k$ і $\sum y_k m'_k$, за допомогою яких обчислюються наближені значення інтеграла. При кроці $h_1 = 1$ одержуємо: $I_1 = (1/3)\cdot 0{,}3477 = 0{,}1159$; при $h_2 = 2$: $I_2 = (2/3)\cdot 0{,}1809 =$ $= 0{,}1206$.

Ці значення відрізняються менше, ніж на $(1/2)\cdot 10^{-2}$.

Тому остаточно:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{1+x^3} = 0{,}12.$$

Таблиця 6.2

k	x_k	$1+x^3$	y_k	m_k	m'_k
0	2,0	9	0,1111	1	1
1	3,0	28	0,0357	4	
2	4,0	65	0,0154	2	4
3	5,0	126	0,0079	4	
4	6,0	217	0,0046	2	2
5	7,0	344	0,0029	4	
6	8,0	513	0,0020	2	4
7	9,0	730	0,0014	4	
8	10,0	1001	0,0010	1	1
Суми				0,3477	0,1809

Завдання для самостійної роботи

Обчислити з указаною точністю ε невласні інтеграли методом зрізу:

1. $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^3} dx, \varepsilon = 10^{-2}$; **2.** $\int_1^{\infty} \frac{xe^{-x^2}}{2+\sin x} dx, \varepsilon = 10^{-5}$;

3. $\int_5^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+ax^5}} dx, \varepsilon = 10^{-3}, a = 0{,}5 + 0{,}1k, k = 0 \cup \overline{1,10}$;

4. $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{a+x} dx, \varepsilon = 10^{-5}, a = 0{,}4 + 0{,}2k, k = 0 \cup \overline{1,12}$.

Відповіді

1. 0,38.

2. 0,06270.

3.

a	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
I	0,077	0,071	0,066	0,061	0,058	0,055
a	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	
I	0,052	0,050	0,048	0,046	0,045	

6.11. Завдання для самостійної, домашньої роботи і приклади їх розв'язання

Завдання 1

1) Обчислити інтеграл за формулами лівих та правих прямокутників при $n = 10$, оцінюючи точність за допомогою порівняння одержаних результатів.

2) Обчислити інтеграл за формулою середніх прямокутників, використовуючи для оцінки точності подвійний підрахунок при $n_1 = 8$; $n_2 = 10$.

Варіанти до завдання 1

№ 1. **1)** $\int_{1,2}^{2,0} \frac{\sqrt{2x^2+1{,}6}\,dx}{2x+\sqrt{0{,}5x^2+3}}$; **2)** $\int_{0,5}^{1,3} \frac{\sin(0{,}7x+0{,}4)dx}{2{,}2+\cos(0{,}3x^2+0{,}7)}$.

№ 2. **1)** $\int_{1,3}^{2,5} \frac{\sqrt{x^2+0{,}6}\,dx}{1{,}4x+\sqrt{0{,}8x^2+1{,}3}}$; **2)** $\int_{0,4}^{1,4} \frac{\cos(0{,}8x^2+1)dx}{1{,}4+\sin(0{,}3x+0{,}5)}$.

№ 3. 1) $\int_{1,2}^{2,6} \frac{\sqrt{0,4x + 1,7}dx}{1,5x + \sqrt{x^2 + 1,3}}$; 2) $\int_{0,2}^{1} \frac{\sin(0,8x^2 + 0,3)dx}{0,7 + \cos(1,2x + 0,3)}$.

№ 4. 1) $\int_{0,8}^{1,6} \frac{\sqrt{0,3x^2 + 2,3}dx}{1,8x + \sqrt{2x + 1,6}}$; 2) $\int_{0,3}^{1,1} \frac{\cos(0,3x + 0,5)dx}{1,8 + \sin(x^2 + 0,8)}$.

№ 5. 1) $\int_{0,6}^{1,4} \frac{\sqrt{x^2 + 5}dx}{2x + \sqrt{x^2 + 0,5}}$; 2) $\int_{0,3}^{1,1} \frac{\sin(0,6x^2 + 0,3)dx}{2,4 + \cos(x + 0,5)}$.

№ 6. 1) $\int_{1,5}^{2,3} \frac{\sqrt{0,3x + 1,2}dx}{1,6 + \sqrt{x^2 + 0,5}}$; 2) $\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(0,4x + 0,6)dx}{0,8 + \sin^2(x + 0,5)}$.

№ 7. 1) $\int_{0,8}^{1,8} \frac{\sqrt{0,8x^2 + 1}dx}{x + \sqrt{1,5x^2 + 2}}$; 2) $\int_{0,4}^{1,8} \frac{\sin(0,2x^2 + 0,7)dx}{1,4 + \cos(0,5x + 0,2)}$.

№ 8. 1) $\int_{1,0}^{2,2} \frac{\sqrt{1,5x + 0,6}dx}{1,6 + \sqrt{0,8x^2 + 2}}$; 2) $\int_{0,2}^{1} \frac{\cos(0,3x + 0,8)dx}{0,9 + 2\sin(0,4x + 0,3)}$.

№ 9. 1) $\int_{0,7}^{2,1} \frac{\sqrt{0,6x + 1,5}dx}{2x + \sqrt{x^2 + 3}}$; 2) $\int_{0,3}^{1,1} \frac{\sin(0,8x + 0,3)dx}{1,2 + \cos(x^2 + 0,4)}$.

№ 10. 1) $\int_{0,8}^{2,4} \frac{\sqrt{1,5x + 2,3}dx}{3 + \sqrt{0,3x + 1}}$; 2) $\int_{0,5}^{1,3} \frac{\cos(x^2 + 0,2)dx}{1,3 + \sin(2x + 0,4)}$.

№ 11. 1) $\int_{1,9}^{2,6} \frac{\sqrt{2x + 1,7}dx}{2,4 + \sqrt{1,2x^2 + 0,6}}$; 2) $\int_{0,2}^{0,8} \frac{\sin(2x + 0,5)dx}{2 + \cos(x^2 + 1)}$.

№ 12. 1) $\int_{0,5}^{1,9} \frac{\sqrt{0,7x^2 + 2,3}dx}{3,2 + \sqrt{0,8x + 1,4}}$; 2) $\int_{0,4}^{1,2} \frac{\sin(0,6x + 0,3)dx}{1,7 + \cos(x^2 + 1,2)}$.

№ 13. 1) $\int_{1,2}^{2} \frac{\sqrt{0,6x + 1,7}dx}{2,1x + \sqrt{0,7x^2 + 1}}$; 2) $\int_{0,4}^{1,0} \frac{\sin(x + 1,4)dx}{0,8 + \cos(2x^2 + 0,5)}$.

№ 14. 1) $\int_{0,8}^{2,4} \frac{\sqrt{0,4x^2 + 1,5}dx}{2,5 + \sqrt{2x + 0,8}}$; 2) $\int_{0,6}^{1,0} \frac{\cos(0,6x^2 + 0,4)dx}{1,4 + \sin^2(x + 0,7)}$.

№ 15. 1) $\int_{1,2}^{2,8} \frac{\sqrt{1,2x + 0,7}dx}{1,4x + \sqrt{1,3x^2 + 0,5}}$; 2) $\int_{0,5}^{1,3} \frac{\sin(0,5x + 0,4)dx}{1,2 + \cos(x^2 + 0,4)}$.

№ 16. 1) $\int_{0,6}^{2,4} \frac{\sqrt{1,1x^2 + 0,9}dx}{1,6 + \sqrt{0,8x^2 + 1,4}}$; 2) $\int_{0,4}^{0,8} \frac{\cos(x^2 + 0,6)dx}{0,7 + \sin(0,8x + 1)}$.

№ 17. 1) $\int_{1,3}^{2,7} \frac{\sqrt{1,3x^2 + 0,8}dx}{1,7x + \sqrt{2x + 0,5}}$; 2) $\int_{0,3}^{1,5} \frac{\sin(0,3x + 1,2)dx}{1,3 + \cos^2(0,5x + 1)}$.

№ 18. 1) $\int_{0,6}^{1,4} \frac{\sqrt{x^2+0,5}dx}{2x+\sqrt{x^2+2,5}}$; 2) $\int_{0,5}^{1,8} \frac{\cos(x^2+0,6)dx}{1,2+\sin(0,7x+0,2)}$.

№ 19. 1) $\int_{0,4}^{1,2} \frac{\sqrt{2x^2+1}dx}{0,8x+\sqrt{0,5x+2}}$; 2) $\int_{0,4}^{1,2} \frac{\sin(1,5x+0,3)dx}{2,3+\cos(0,4x^2+1)}$.

№ 20. 1) $\int_{0,8}^{1,8} \frac{\sqrt{1,5x^2+2}dx}{x+\sqrt{0,8x^2+1}}$; 2) $\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(x^2+0,8)dx}{1,5+\sin(0,6x+0,5)}$.

№ 21. 1) $\int_{1}^{2,6} \frac{\sqrt{0,4x+3}dx}{0,7x+\sqrt{2x^2+0,5}}$; 2) $\int_{0,5}^{1,3} \frac{\cos(x^2+0,4)dx}{1,2+\sin(0,5x+0,4)}$.

№ 22. 1) $\int_{0,7}^{2,1} \frac{\sqrt{1,7x^2+0,5}dx}{1,4+\sqrt{1,2x+1,3}}$; 2) $\int_{0,4}^{0,8} \frac{\sin(0,8x+1)dx}{0,7+\cos(x^2+0,6)}$.

№ 23. 1) $\int_{0,6}^{2,2} \frac{\sqrt{1,5x+1}dx}{1,2x+\sqrt{x^2+1,8}}$; 2) $\int_{0,3}^{1,5} \frac{\cos(0,5x^2+1)dx}{1,3+\sin(0,3x+1,2)}$.

№ 24. 1) $\int_{1,2}^{3} \frac{\sqrt{2x^2+0,7}dx}{1,5+\sqrt{0,8x+1}}$; 2) $\int_{0,5}^{1,1} \frac{\cos(0.7x+0,2)dx}{1,2+\sin(x^2+0,6)}$.

№ 25. 1) $\int_{1,2}^{2} \frac{\sqrt{0,7x^2+1}dx}{2,1x+\sqrt{0,6x+1,7}}$; 2) $\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(0,4x^2+1)dx}{2,3+\sin(1,5x+0,3)}$.

№ 26. 1) $\int_{0,8}^{1,6} \frac{\sqrt{2x+1,6}dx}{1,8+\sqrt{0,3x^2+2,3}}$; 2) $\int_{0,4}^{1,2} \frac{\sin(0,6x+0,5)dx}{1,5+\cos(x^2+0,4)}$.

№ 27. 1) $\int_{1,2}^{2,6} \frac{\sqrt{x^2+1,3}dx}{1,5x+\sqrt{0,4x+1,7}}$; 2) $\int_{0,2}^{0,8} \frac{\cos(x^2+1)dx}{2+\sin(2x+0,5)}$.

№ 28. 1) $\int_{1,3}^{2,5} \frac{\sqrt{0,8x^2+1,3}dx}{1,4+\sqrt{x^2+0,6}}$; 2) $\int_{0,3}^{0,9} \frac{\sin(x^2+0,6)dx}{1,5+\cos(0,8x+1,2)}$.

№ 29. 1) $\int_{1,2}^{2,0} \frac{\sqrt{0,5x^2+3}dx}{2x+\sqrt{2x^2+1,6}}$; 2) $\int_{0,4}^{1} \frac{\cos(2x^2+0,5)dx}{0,8+\sin(x+1,4)}$.

№ 30. 1) $\int_{1}^{2,2} \frac{\sqrt{0,8x^2+2}dx}{1,6+\sqrt{1,5x+0,6}}$; 2) $\int_{0,6}^{1} \frac{\sin(x+0,7)dx}{1,4+\cos(0,6x+0,4)}$.

Приклад виконання завдання

$$1)\ I=\int_{0,4}^{1,2}\frac{\sqrt{0,5x+2}dx}{\sqrt{2x^2+1}+0,8};\quad 2)\ I=\int_{0,1}^{0,9}\frac{\cos(0,8x+1,2)dx}{1,5+\sin(x^2+0,6)}.$$

1) Для обчислення за формулами лівих та правих прямокутників при $n=10$ розіб'ємо відрізок інтегрування на 10 частин з кроком:

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1,2-0,4}{10}=0,08.$$

Складемо таблицю значень підінтегральної функції:

i	x_i	y_i
0	0,4	0,7611
1	0,48	0,7451
2	0,56	0,7275
3	0,64	0,7088
4	0,72	0,6898
5	0,80	0,6707
6	0,88	0,6518
7	0,96	0,6334
8	1,04	0,6156
9	1,12	0,5985
10	1,20	0,5822
$\sum_1=6,8023$		
$\sum_2=6,6234$		

$$y(x)=\frac{\sqrt{0,5x+2}}{\sqrt{2x^2+1}+0,8}$$

в точках поділу відрізка.

Таблиця містить знайдені значення сум:

$$\Sigma_1=\sum_{i=0}^{9}y_i=6,8023,$$

$$\Sigma_2=\sum_{i=1}^{10}y_i=6,6234.$$

Знайдемо наближені значення інтеграла:

а) за формулою лівих прямокутників:

$$I_1=h\cdot\sum_{i=0}^{9}y_i=0,08\cdot6,8023\cong0,5442;$$

б) за формулою правих прямокутників:

$$I_2=h\cdot\sum_{i=1}^{10}y_i=0,08\cdot6,6234\cong0,5299.$$

Результати відрізняються вже сотими частинами. За остаточне наближене значення інтеграла приймемо півсуму знайдених значень, округливши результат до тисячних:

$$I=\frac{I_1+I_2}{2}=\frac{0,5442+0,5299}{2}\cong0,537.$$

2) Для розв'язування скористаємося формулою середніх прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx\cong h\sum_{i=0}^{n-1}y\left(x_i+\frac{h}{2}\right).$$

Обчислення виконаємо двічі при $n_1 = 8$ і $n_2 = 10$ відповідно:

$$h_1 = (b - a)/n_1 = (0{,}9 - 0{,}1)/8 = 0{,}1 \text{ і}$$

$$h_2 = (b - a)/n_2 = (0{,}9 - 0{,}1)/10 = 0{,}08.$$

$$y(x) = \frac{\cos(0{,}8x + 1{,}2)}{1{,}5 + \sin(x^2 + 0{,}6)}.$$

Результати обчислень наведено в табл. 6.3 і 6.4.

Таблиця 6.3

i	x_i	$x_i + h/2$	$y(x_i + h/2)$
0	0,1	0,15	0,11914
1	0,2	0,25	0,08036
2	0,3	0,35	0,04195
3	0,4	0,45	0,00487
4	0,5	0,55	–0,03026
5	0,6	0,65	–0,06316
6	0,7	0,75	–0,09397
7	0,8	0,85	–0,12323
			$\sum_1 = -0{,}0643$

Таблиця 6.4

i	x_i	$x_i + h/2$	$y(x_i + h/2)$
0	0,1	0,14	0,12300
1	0,18	0,22	0,09200
2	0,26	0,30	0,06104
3	0,34	0,38	0,03065
4	0,42	0,46	0,00126
5	0,50	0,54	–0,02685
6	0,58	0,62	–0,05353
7	0,66	0,70	–0,07880
8	0,74	0,78	–0,10288
9	0,82	0,86	–0,12611
			$\sum_2 = -0{,}0802$

Знайдемо наближені значення інтеграла:

$$I_1 = h_1 \textstyle\sum_1 \cong 0{,}1 \cdot (-0{,}0643) \cong -0{,}00643;$$

$$I_2 = h_2 \textstyle\sum_2 \cong 0{,}08 \cdot (-0{,}0802) \cong -0{,}00642.$$

Значення відрізняються п'ятим знаком після коми, хоча друге значення точніше першого, але оскільки обчислення проводилося з п'ятьма десятковими знаками, то приймаємо $I \cong -0{,}0064$.

Завдання 2

1) Обчислити інтеграл за формулами Ейлера, трапецій, Сімпсона та Уеддля з п'ятьма десятковими знаками (відповідно формули 6.20, 6.23, 6.28, 6.32). Порівняти результати.

Вказівка. Приклади розв'язання даного завдання наведено відповідно в прикладі 6.1 та підрозд. 6.3 – 6.5.

2) Обчислити інтеграл з точністю до $\varepsilon = 0{,}001$.

3) Обчислити інтеграл за формулою Сімпсона при $n = 8$. Оцінити похибку результату, склавши таблицю скінченних різниць.

Варіанти до завдання 2

№ 1 1) $\int_{2}^{2{,}6} \frac{dx}{x-1}$; 2) $\int_{0{,}8}^{1{,}6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$; 3) $\int_{1{,}2}^{2} \frac{\lg(x+2)}{x} dx$.

№ 2 1) $\int_{0}^{0{,}6} \frac{dx}{x+1}$; 2) $\int_{1{,}2}^{2{,}7} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3{,}2}}$; 3) $\int_{1{,}6}^{2{,}4} (x+1)\sin x\, dx$.

№ 3 1) $\int_{-1}^{-0{,}4} \frac{dx}{x+2}$; 2) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1{,}3}}$; 3) $\int_{0{,}2}^{1} \frac{\operatorname{tg}(x^2)}{x^2+1} dx$.

№ 4 1) $\int_{1{,}6}^{2{,}2} \frac{dx}{x-0{,}6}$; 2) $\int_{0{,}2}^{1{,}2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; 3) $\int_{0{,}6}^{1{,}4} \frac{\cos x}{x+1} dx$.

№ 5 1) $\int_{0{,}9}^{1{,}5} \frac{dx}{x+0{,}1}$; 2) $\int_{0{,}4}^{1{,}2} \frac{dx}{\sqrt{2+0{,}5x^2}}$; 3) $\int_{0{,}4}^{1{,}2} \sqrt{x}\cos(x^2) dx$.

№ 6 1) $\int_{2{,}2}^{2{,}8} \frac{dx}{x-1{,}2}$; 2) $\int_{1{,}4}^{2{,}1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$; 3) $\int_{0{,}8}^{1{,}2} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx$.

№ 7 1) $\int_{-0{,}4}^{0{,}2} \frac{dx}{x+1{,}4}$; 2) $\int_{1{,}2}^{2{,}4} \frac{dx}{\sqrt{0{,}5+x^2}}$; 3) $\int_{1{,}8}^{1{,}6} \frac{\lg(x^2+1)}{x} dx$.

№ 8 1) $\int_{1{,}8}^{2{,}4} \frac{dx}{x-0{,}8}$; 2) $\int_{0{,}4}^{1{,}2} \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$; 3) $\int_{0{,}4}^{1{,}2} \frac{\cos x}{x+21} dx$.

№ 9 1) $\int_{3}^{3{,}6} \frac{dx}{x-2}$; 2) $\int_{0{,}4}^{1{,}2} \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$; 3) $\int_{0{,}4}^{1{,}2} (2x+0{,}5)\sin x\, dx$.

№ 10 1) $\int_{-2}^{-1{,}4} \frac{dx}{x+3}$; 2) $\int_{0{,}6}^{1{,}5} \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$; 3) $\int_{0{,}4}^{0{,}8} \frac{\operatorname{tg}(x^2+0{,}5)}{1+2x^2} dx$.

№ 11 **1)** $\int_{-0,6}^{0} \frac{dx}{1-x}$; **2)** $\int_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$; **3)** $\int_{0,18}^{0,98} \frac{\sin x}{x+1} dx$.

№ 12 **1)** $\int_{0,2}^{0,8} \frac{dx}{x+0,8}$; **2)** $\int_{0,5}^{1,3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; **3)** $\int_{0,2}^{1,8} \sqrt{x+1}\cos(x^2) dx$.

№ 13 **1)** $\int_{0,4}^{1} \frac{dx}{2-x}$; **2)** $\int_{1,2}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,6}}$; **3)** $\int_{1,4}^{3} x^2 \lg x \ \ dx$.

№ 14 **1)** $\int_{0,4}^{1} \frac{dx}{x+0,6}$; **2)** $\int_{1,4}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$; **3)** $\int_{1,2}^{2,2} \frac{\lg(x^2+2)}{x+1} dx$.

№ 15 **1)** $\int_{1,1}^{1,7} \frac{dx}{x-0,1}$; **2)** $\int_{0,8}^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$; **3)** $\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(x^2)}{x+1} dx$.

№ 16 1) $\int_{0,3}^{2,9} \frac{dx}{1,3-x}$; **2)** $\int_{1,6}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2,5}}$; **3)** $\int_{0,8}^{1,6} x^2 \sin(x-0,5) dx$.

№ 17 **1)** $\int_{0,1}^{0,7} \frac{dx}{0,9+x}$; **2)** $\int_{0,6}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,8}}$; **3)** $\int_{0,6}^{1,4} x^2 \cos x \, dx$.

№ 18 **1)** $\int_{1,2}^{1,8} \frac{dx}{x-0,2}$; **2)** $\int_{1,2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1,2}}$; **3)** $\int_{1,2}^{2} \frac{\lg(x^2+3)}{2x} dx$.

№ 19 **1)** $\int_{2}^{2,6} \frac{dx}{x-1}$; **2)** $\int_{1,4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2\,x^2+0,7}}$; **3)** $\int_{2,5}^{3,3} \frac{\operatorname{tg}(x^2+0,8)}{x-1} dx$.

№ 20 **1)** $\int_{0,1}^{0,7} \frac{dx}{x+0,9}$; **2)** $\int_{3,2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1}}$; **3)** $\int_{0,5}^{1,2} \frac{\lg(x^2)}{x+1} dx$.

№ 21 **1)** $\int_{1}^{1,6} \frac{dx}{x}$; **2)** $\int_{0,8}^{1,7} \frac{dx}{\sqrt{2\,x^2+0,3}}$; **3)** $\int_{1,3}^{2,1} \frac{\sin(x^2-1)}{2\sqrt{x}} dx$.

№ 22 **1)** $\int_{0,8}^{1,4} \frac{dx}{0,2+x}$; **2)** $\int_{1,2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1,5}}$; **3)** $\int_{0,2}^{1} (x+1)\cos(x^2) dx$.

№ 23 **1)** $\int_{0}^{0,6} \frac{dx}{x+1}$; **2)** $\int_{2,1}^{3,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$; **3)** $\int_{0,8}^{1,2} \frac{\sin(x^2-0,4)}{x+2} dx$.

№ 24 **1)** $\int_{0}^{0,6} \frac{dx}{1,6-x}$; **2)** $\int_{1,3}^{2,5} \frac{dx}{\sqrt{0,2\,x^2+1}}$; **3)** $\int_{0,15}^{0,63} \sqrt{x+1}\lg(x+3) dx$.

№ 25 **1)** $\int_{0,8}^{1,4} \frac{dx}{x+0,2}$; **2)** $\int_{0,6}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{12\,x^2+0,5}}$; **3)** $\int_{1,2}^{2,8} \frac{\lg(1+x^2)}{2x-1} dx$.

№ 26 **1)** $\int_{0,4}^{1} \frac{dx}{2-x}$; **2)** $\int_{1,3}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{3\,x^2-0,4}}$; **3)** $\int_{0,6}^{0,72} (\sqrt{x}+1)\operatorname{tg} 2x \, dx$.

№ 27 **1)** $\int_{8,5}^{1,45} \frac{dx}{x+0,15}$; **2)** $\int_{1,4}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{1,5\,x^2+7}}$; **3)** $\int_{0,8}^{1,2} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$.

№ 28 **1)** $\int_{-0,1}^{0,5} \frac{dx}{1,5-x}$; 2) $\int_{0,15}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{2\,x^2+6}}$; 3) $\int_{1,2}^{2,8} \left(\frac{x}{2}+1\right) \sin\frac{x}{2} dx$.

№ 29 **1)** $\int_{0,6}^{1,2} \frac{dx}{x+0,4}$; **2)** $\int_{2,3}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$; **3)** $\int_{0,8}^{1,6} \frac{\lg(x^2+1)}{x+1} dx$.

№ 30 **1)** $\int_{-0,5}^{0,1} \frac{dx}{1,1-x}$; **2)** $\int_{0,32}^{0,66} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2,3}}$; **3)** $\int_{1,6}^{3,2} \frac{x}{2} \lg\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$.

Приклад виконання завдання

$$2)\; I = \int_{1,2}^{2,7} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3,2}}; \quad 3)\; I = \int_{1,6}^{2,4} (x+1)\sin x\, dx.$$

---

2) Для досягнення ступеня точності необхідно визначити значення n так, щоб:

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2 < 0{,}0005. \qquad (6.42\text{ а})$$

Тут $a = 1{,}2;\; b = 2{,}7;\;\; M_2 \geq \max\limits_{[1,2;\, 2,7]} |f''(x)|$,

де $f(x) = 1/\sqrt{x^2+3{,}2}$. Знаходимо:

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+3{,}2)^3}}, \quad f''(x) = \frac{2x^2-3{,}2}{\sqrt{(x^2+3{,}2)^5}};$$

$$\max_{[1,2;\, 2,7]} |f''(x)| < \frac{2\cdot 2{,}7^2 - 3{,}2}{\sqrt{(2{,}7^2+3{,}2)^5}} \cong 0{,}032.$$

Підставимо $M_2 = 0{,}04$, тоді нерівність (6.42 а) набуде вигляду:

$$\frac{1{,}5^3 \cdot 0.04}{12n^2} < 0{,}0005,$$

звідки $n^2 > 22{,}5$, тобто $n > 4{,}7$; візьмемо $n = 5$.

Обчислення інтеграла проведемо за формулою

$$I \cong h\left(\frac{y_0+y_5}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4\right),$$

де $h = (b-a)/n = 1{,}5/5 = 0{,}3; \quad y_i = y(x_i) = 1\Big/\sqrt{x_i^2+3{,}2}\,;$

$$x_i = 1{,}2 + ih \;\; (i = 0 \cup \overline{1,5}).$$

Усі розрахунки подано таблицею:

i	x_i	y_0, y_5	y_i $(i = \overline{1,4})$
0	1,2	0,46423	
1	1,5		0,42284
2	1,8		0,39406
3	2,1		0,36250
4	2,4		0,33408
5	2,7	0,30875	
Σ		0,77298	1,51348

Таким чином:

$$I = 0{,}3\left(\frac{0{,}77298}{2} + 1{,}51348\right) = 0{,}569991 \cong 0{,}570.$$

3) Відповідно до умови $n = 8$, тому

$$h = (b - a)/n = (2{,}4 - 1{,}6)/8 = 0{,}1.$$

$$I = {}^{h}/_{3}\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + y_8),$$

де $y_i = y(x_i) = (x + 1)\sin x, \quad x_i = 1{,}6 + ih \quad (i = 0 \cup \overline{1,8})$.

Обчислені значення функції занесемо до таблиці:

i	x_i	y_0, y_8	y_1, y_3, y_5, y_7	y_2, y_4, y_6
0	1,6	2,59889		
1	1,7		2,67750	
2	1,8			2,72677
3	1,9		2,74427	
4	2,0			2,72789
5	2,1		2,67595	
6	2,2			2,58719
7	2,3		2,46083	
8	2,4	2,29657		
Σ		4,89546	10,55855	8,04185

Отже,

$$I \cong \frac{0{,}1}{3}(4{,}89546 + 4 \cdot 10{,}55855 + 2 \cdot 8{,}04185) \cong 2{,}10711.$$

Для оцінки точності одержаного результату складемо таблицю скінченних різниць четвертого порядку:

i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	2,59889				
		0,07861			
1	2,67750		–0,02934		
		0,04927		–0,00243	
2	2,72677		–0,03177		0,00032
		0,01750		–0,00211	
3	2,74427		–0,03388		0,00043
		–0,01638		–0,00168	
4	2,72779		–0,03556		0,00042
		–0,05194		–0,00126	
5	2,67595		–0,03682		0,00038
		–0,08876		–0,00088	
6	2,58719		–0,03760		0,00058
		–0,12636		–0,00030	
7	2,46083		–0,03790		
		–0,16426			
8	2,29657				

Оскільки $\max|\Delta^4 y_i| = 0{,}00058$, то залишковий член становить:

$$R_{\text{зал}} < \frac{(b-a)\cdot\max|\Delta^4 y_i|}{180} \cong \frac{0{,}8\cdot 0{,}00058}{180} \cong 0{,}0000025.$$

Обчислення проводилися з п'ятьма значущими цифрами. Для того щоб величина залишкового члена не впливала на похибку обчислення, необхідно залишити чотири цифри після коми:

$$I \cong 2{,}1071.$$

Похибку обчислення можна оцінити співвідношенням:

$$\Delta I = (b-a)\max|\Delta^4 y| \le 0{,}8\cdot 0{,}00058 < 0{,}0005$$

Тому, правильні три одержані цифри після коми.

Завдання 3

1. Знайти наближене значення інтеграла за формулою «трьох восьмих», використовуючи для контролю точності обчислень подвійний розрахунок при $n_1 = 9$ і $n_2 = 12$.

Варіанти до завдання 3

№ 1 $\int_{0,6}^{2,4} \frac{(1+0,5x^2)dx}{1+\sqrt{0,8x^2+1,4}}$

№ 2 $\int_{1,2}^{2,64} \frac{(1+1,2x^2)dx}{0,8+\sqrt{x^2+1,3}}$

№ 3 $\int_{0,8}^{2,96} \frac{(1+0,7x^2)dx}{1,5+\sqrt{2x^2+0,3}}$

№ 4 $\int_{0,8}^{2,6} \frac{(1+1,5x^2)dx}{0,7+\sqrt{2,2x^2+0,5}}$

№ 5 $\int_{1,3}^{2,74} \frac{(1+0,6x^2)dx}{0,9+\sqrt{x^2+1,5}}$

№ 6 $\int_{0,5}^{2,66} \frac{(1+0,3x^2)dx}{1,2+\sqrt{0,6x^2+1,2}}$

№ 7 $\int_{0,7}^{2,5} \frac{(1+1,5x^2)dx}{0,5+\sqrt{x^2+0,8}}$

№ 8 $\int_{0,9}^{2,34} \frac{(1+0,9x^2)dx}{1,3+\sqrt{0,5x^2+1}}$

№ 9 $\int_{1}^{3,16} \frac{(1+0,6x^2)dx}{1,5+\sqrt{0,4x^2+2,5}}$

№ 10 $\int_{1,1}^{2,9} \frac{(1+0,7x^2)dx}{0,4+\sqrt{x^2+1,5}}$

№ 11 $\int_{1,4}^{2,84} \frac{(1+0,4x^2)dx}{1,2+\sqrt{1,2x^2+1}}$

№ 12 $\int_{0,4}^{2,56} \frac{(1+0,3x^2)dx}{0,8+\sqrt{0,6x^2+1,3}}$

№ 13 $\int_{1,2}^{2,64} \frac{(1+0,2x^2)dx}{0,7+\sqrt{0,5x^2+1,2}}$

№ 14 $\int_{1,3}^{3,46} \frac{(1+0,9x^2)dx}{1,5+\sqrt{0,4x^2+0,7}}$

№ 15 $\int_{0,5}^{2,3} \frac{(1+0,2x^2)dx}{0,7+\sqrt{0,5x^2+1,2}}$

№ 16 $\int_{0,6}^{2,4} \frac{(1+0,4x^2)dx}{1,3+\sqrt{0,8x^2+0,4}}$

№ 17 $\int_{1,2}^{2,64} \frac{(1+0,4x^2)dx}{0,8+\sqrt{0,7x^2+1,3}}$

№ 18 $\int_{0,8}^{2,96} \frac{(1+0,6x^2)dx}{1,4+\sqrt{2x^2+0,5}}$

№ 19 $\int_{0,8}^{2,6} \frac{(1+0,9x^2)dx}{0,7+\sqrt{1,2x^2+0,5}}$

№ 20 $\int_{1,3}^{2,74} \frac{(1+0,6x^2)dx}{1,9+\sqrt{0,7x^2+1,5}}$

№ 21 $\int_{0,5}^{2,66} \frac{(1+0,6x^2)dx}{1,4+\sqrt{0,6x^2+1,5}}$

№ 22 $\int_{0,7}^{2,5} \frac{(1+0,5x^2)dx}{1,5+\sqrt{2x^2+0,4}}$

№ 23 $\int_{0,9}^{2,34} \frac{(1+0,7x^2)dx}{0,8+\sqrt{0,4x^2+1,3}}$

№ 24 $\int_{1}^{3,16} \frac{(1+0,8x^2)dx}{1,3+\sqrt{0,4x^2+2,1}}$

№ 25 $\int_{1,1}^{2,9} \frac{(1+0,4x^2)dx}{0,7+\sqrt{1,1x^2+1,2}}$

№ 26 $\int_{1,4}^{2,84} \frac{(1+0,8x^2)dx}{1,5+\sqrt{0,4x^2+1}}$

№ 27 $\int_{0,4}^{2,56} \frac{(1+0,5x^2)dx}{1,2+\sqrt{0,6x^2+1,5}}$

№ 28 $\int_{1,2}^{2,64} \frac{(1+0,3x^2)dx}{0,9+\sqrt{1,2x^2+0,5}}$

№ 29 $\int_{1,3}^{3,46} \frac{(1+1,2x^2)dx}{2,3+\sqrt{0,4x^2+3,2}}$

№ 30 $\int_{0,5}^{2,3} \frac{(1+0,6x^2)dx}{2,5+\sqrt{0,3x^2+1,6}}$

Приклад виконання завдання

$$I = \int_{0,7}^{2,5} \frac{(1 + 0,5x^2)dx}{1,5 + \sqrt{2x^2 + 0,4}}.$$

Для виконання завдання використаємо формулу «трьох восьмих»

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{3h}{8}(\Sigma_1 + 3\Sigma_2 + 2\Sigma_3),$$

де

$$h = \frac{b-a}{n};\ \Sigma_1 = y_0 + y_n;\ \Sigma_2 = y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + y_7 + y_8 + \ \dots;$$

$$\Sigma_3 = y_3 + y_6 + y_9 + \ \dots .$$

Число розбиттів n має бути кратним трьом:

$$n_1 = 9;\ \ h_1 = \frac{2,5 - 0,7}{9} = 0,2;\ \ y_i = \frac{1 + 0,5x_i^2}{1,5 + \sqrt{2x_i^2 + 0,4}}.$$

Обчислення занесемо до таблиці:

i	x_i	$y_{0,9}$	$y_{1,2,4,5,7,8}$	$y_{3,6}$
0	0,7	0,465467		
1	0,9		0,480956	
2	1,1		0,504830	
3	1,3			0,535680
4	1,5		0,572222	
5	1,7		0,613403	
6	1,9			0,658383
7	2,1		0,706500	
8	2,3		0,757228	
9	2,5	0,810149		
		1,275616	3,635139	1,194063
		Σ_1	Σ_2	Σ_3

$$I_1 = \frac{3 \cdot 0,2}{8}(1,275616 + 3 \cdot 3,635139 + 2 \cdot 1,194063) = 1,092687;$$

$$n_2 = 12;\ \ h_2 = (2,5 - 0,7)/12 = 0,15.$$

Заповнимо таблицю:

i	x_i	$y_{0,12}$	$y_{1,2,4,5,7,8,10,11}$	$y_{3,6,9}$
0	0,7	0,465467		
1	0,85		0,476243	
2	1,00		0,491933	
3	1,15			0,511943
4	1,30		0,535680	
5	1,45		0,562614	
6	1,60			0,592290
7	1,75		0,624321	
8	1,90		0,658383	
9	2,05			0,694208
10	2,20		0,731566	
11	2,35		0,770267	
12	2,50	0,810149		
		1,275616	4,851007	1,798441
		Σ_1	Σ_2	Σ_3

$$I_2 = \frac{3 \cdot 0{,}15}{8}(1{,}275616 + 3 \cdot 4{,}851007 + 2 \cdot 1{,}798441) =$$
$$= 1{,}092685.$$

Одержані результати збігаються з точністю до стотисячних.

Розділ 7. НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

7.1. Задача Коші. Загальні зауваження

Задача Коші для диференціального рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} = f\left(x;\ y;\ y';\ \dots;\ y^{(n-1)}\right) \tag{7.1}$$

полягає у знаходженні функції $y = y(x)$, яка задовольняє дане рівняння та початкові умови:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{7.2}$$

де $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ – задані числа.

Задача Коші для системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x;\ y_1;\ y_2;\ \dots;\ y_n);\quad \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x;\ y_1;\ y_2;\ \dots;\ y_n), \dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x;\ y_1;\ y_2;\ \dots;\ y_n) \end{cases} \tag{7.3}$$

полягає у знаходженні функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$, які задовольняють дану систему (7.3) та початкові умови:

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}. \tag{7.4}$$

Систему, яка містить похідні вищих порядків і розв'язану відносно старших похідних шуканих функцій шляхом уведення нових невідомих функцій, можна звести до вигляду (7.3). Зокрема, диференціальне рівняння *n*-го порядку (7.1) набирає вигляду (7.3) за допомогою заміни:

$$y_1 = y', y_2 = y'', \dots, y_{n-1} = y^{(n-1)},$$

що дає таку систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y_1;\ \dfrac{dy_1}{dx} = y_2;\ \dots;\dfrac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}; \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = f(x; y_1; y_2; \dots; y_{n-1}). \end{cases} \tag{7.5}$$

Таким чином, числові методи розв'язування системи диференціальних рівнянь першого порядку включають в себе методи числового розв'язування рівняння (7.1) як частинний випадок.

Якщо вдається знайти загальний розв'язок рівняння (7.1) або системи (7.3), то задача Коші зводиться до знаходження значень довільних сталих. Але знайти загальний розв'язок задачі Коші вдається в небагатьох випадках, частіше за все потрібно розв'язувати задачу Коші наближено.

Наближені методи залежно від форми, в якій вони подають розв'язок, можна поділити на дві групи:

1. *Аналітичні методи*, які дають наближений розв'язок диференціального рівняння у вигляді аналітичного виразу;

2. *Числові методи*, які дають наближений розв'язок у вигляді таблиці.

У подальшому передбачається, що для розглядуваних рівнянь виконуються умови існування і єдиності розв'язку.

У даному розділі розглядаються деякі методи числового розв'язування диференціальних рівняння першого та другого порядку (крім методу застосування рядів Тейлора, який розглядається у розд. 8 і застосування його обмежується випадком, коли частинні похідні функції $f(x;\ y)$ обчислюються легко).

7.2. Наближене інтегрування диференціальних рівнянь першого порядку

Дано диференціальне рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = f(x;\ y). \qquad (7.6)$$

Розв'язати його чисельно – це означає знайти як можна точніші значення $y_1, y_2, \dots$, що відповідають значенням $x_1, x_2, \dots$, незалежної змінної функції y, яка є розв'язком рівняння (7.6), що приймає значення y_0 при $x = x_0$.

Існує багато методів розв'язування такого рівняння. Наведемо деякі з них, які відносяться до найбільш простих та зручних у використанні. Абсолютно загальний метод – *метод Адамса* – вимагає меншого об'єму обчислень, порівняно з іншими загальними класичними методами, як, наприклад, *метод Рунге–Кутти* та його варіанти. Розглянемо також *метод Пікара*, або спосіб ітерацій, оскільки застосування його часто буває зручним, а теоретичне значення велике, та деякі інші.

7.2.1. Метод Адамса

Нехай значення незалежної змінної x знаходяться в арифметичній прогресії з різницею h і $y(x_0) = y_0$. Проінтегруємо (7.6) від x_i до x_{i+1}. Тоді

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x;\ y).$$

Замінимо $f(x;\ y)$ інтерполяційним поліномом Ньютона за *висхідними* різницями:

$$f(x;\ y) = f(x_i;\ y_i) + u\Delta f(x_{i-1};\ y_{i-1}) + \\ + \frac{1}{2!}u(u+1)\Delta^2 f(x_{i-2};\ y_{i-2}) + \ ...$$

при

$$u = \frac{x - x_i}{h},\ \ x_i = x_{i-1} + h = x_{i-2} + 2h = \ \dots .$$

Одержимо:

$$y_{i+1} = y_i + h\big(f(x_i;\ y_i) + {}^1\!/_2\,\Delta f(x_{i-1};\ y_{i-1}) + \\ + {}^5\!/_{12}\,\Delta^2 f(x_{i-2};\ y_{i-2}) + {}^3\!/_8\,\Delta^3 f(x_{i-3};\ y_{i-3}) + \\ + \frac{251}{720}\Delta^4 f(x_{i-4};\ y_{i-4}) + \frac{95}{288}\Delta^5 f(x_{i-5};\ y_{i-5}) + \\ + \frac{19087}{60480}\Delta^6 f(x_{i-6};\ y_{i-6})\Big). \qquad (7.7)$$

Якщо у виразі (7.7) залишити k різниць а решту, починаючи з $(k+1)$-ї, відкинути, то це приведе до того, що $f(x;\ y)$ заміниться параболою k-го степеня, що пройде через $k+1$ точку: $(x_i;\ y_i), (x_{i-1};\ y_{i-1}), \dots, (x_{i-k};\ y_{i-k})$.

Метод Адамса складається з двох етапів: встановлення *вихідної* (*початкової*) бази, яка складається з k значень $y_1, y_2, \dots, y_k$, що відповідають $x_1, x_2, \dots, x_k$ та визначених як можна точніше (y_0 відоме). Далі – *екстраполяція*, яка полягає в тому, щоб застосовувати формулу (7.7), обмежену k-ю різницею, послідовно для $i = k$, що дає y_{k+1}, для $i = k+1$, що дає $y_{k+2}, \dots$. Покажемо детальніше застосування цього методу при $k = 4$, оскільки, це найбільш розповсюджене наближення.

а) Встановлення початкової бази. Йдеться про визначення y_1, y_2, y_3, y_4. Дуже зручно використовувати ряд Тейлора та можна застосовувати спосіб, при якому функція $f(x;\ y)$ замінюється поліномом Ньютона за *низхідними* різницями:

$$f(x;\ y) = f(x_0;\ y_0) + u\Delta f(x_0;\ y_0) + {}^1\!/_{2!}\,u(u-1)\Delta^2 f(x_0;\ y_0) +$$

$$+ {}^{1}/_{3!}\, u(u-1)(u-2)\Delta^3 f(x_0;\, y_0) +$$

$$+ {}^{1}/_{4!}\, u(u-1)(u-2)(u-3)\Delta^4 f(x_0;\, y_0) + \ \dots .$$

Інтегруючи рівняння (7.6), в якому $f(x;\ y)$ замінено попереднім поліномом, обмеженим четвертою різницею, одержимо:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0;\, y_0) + {}^{1}/_{2}\, h\Delta f(x_0;\, y_0) - {}^{1}/_{12}\, h\Delta^2 f(x_0;\, y_0) +$$

$$+ {}^{1}/_{24}\, h\Delta^3 f(x_0;\, y_0) - {}^{19}/_{720}\, h\Delta^4 f(x_0;\, y_0);$$

$$y_2 = y_0 + 2hf(x_0;\, y_0) + 2h\Delta f(x_0;\, y_0) +$$

$$+ {}^{1}/_{3}\, h\Delta^2 f(x_0;\, y_0) + 0 - {}^{1}/_{90}\, h\Delta^4 f(x_0;\, y_0);$$

$$y_3 = y_0 + 3hf(x_0;\, y_0) + {}^{9}/_{2}\, h\Delta f(x_0;\, y_0) + {}^{27}/_{12}\, h\Delta^2 f(x_0;\, y_0) +$$

$$+ {}^{3}/_{8}\, h\Delta^3 f(x_0;\, y_0) - {}^{3}/_{80}\, h\Delta^4 f(x_0;\, y_0);$$

$$y_4 = y_0 + 4hf(x_0;\, y_0) + 8h\Delta f(x_0;\, y_0) + {}^{20}/_{3}\, h\Delta^2 f(x_0;\, y_0) +$$

$$+ {}^{8}/_{3}\, h\Delta^3 f(x_0; y_0) + {}^{14}/_{15}\, h\Delta^4 f(x_0; y_0).$$

Позначимо перші, другі, треті, четверті й п'яті наближення величини K через:

$$(K)', (K)'', (K)''', (K)^{(IV)}, (K)^{(V)}.$$

Обчислення проводять послідовними наближеннями:

1) $$(y_1)' = y_0 + hf(x_0;\, y_0),$$

що дозволяє обчислити:

$$f[x_1;\ (y_1)'] \text{ та } [\Delta f(x_0;\, y_0)]';$$

2) $$(y_1)'' = y_0 + hf(x_0;\, y_0) + {}^{1}/_{2}\, h[\Delta f(x_0;\, y_0)]'';$$

$$(y_2)'' = y_0 + 2hf(x_0;\, y_0) + 2h[\Delta f(x_0;\, y_0)]',$$

звідки знаходять:

$$f[x;\ (y_1)''], f[x_2;\ (y_2)''], [\Delta f(x_0;\, y_0)]'', [\Delta^2 f(x_0;\, y_0)]'';$$

3) $$(y_1)''' = y_0 + hf(x_0;\, y_0) +$$

$$+ {}^{1}/_{2}\, h[\Delta f(x_0;\, y_0)]'' - {}^{1}/_{12}\, h[\Delta^2 f(x_0;\, y_0)]'';$$

$$(y_2)''' = y_0 + 2hf(x_0;\, y_0) +$$

$$+2h[\Delta f(x_0;\, y_0)]'' + {}^{1}/_{3}\, h[\Delta^2 f(x_0;\, y_0)]'';$$

$$(y_3)''' = y_0 + 3hf(x_0;\, y_0) +$$

$$+{}^{9}/_{2}\,h[\Delta f(x_0;\,y_0)]'' + {}^{9}/_{4}\,h[\Delta^2 f(x_0;\,y_0)]'',$$

звідки знаходять:

$$f[x_1;\,(y_1)'''], f[x_2;\,(y_2)'''], f[x_3;\,(y_3)'''];$$

$$[\Delta f(x_0;\,y_0)]''', [\Delta^2 f(x_0;\,y_0)]''', [\Delta^3 f(x_0;\,y_0)]''';$$

4)
$$(y_1)^{(IV)} = y_0 + hf(x_0;\,y_0) +$$
$$+{}^{1}/_{2}\,h[\Delta f(x_0;\,y_0)]''' - {}^{1}/_{12}\,h[\Delta^2 f(x_0;\,y_0)]''' +$$
$$+{}^{1}/_{24}\,h[\Delta^3 f(x_0;\,y_0)]''';$$
$$(y_2)^{(IV)} = y_0 + 2hf(x_0;\,y_0) +$$
$$+2h\Delta f(x_0;\,y_0)''' + {}^{1}/_{3}\,h[\Delta^2 f(x_0;\,y_0)]''' + 0;$$
$$(y_3)^{(IV)} = y_0 + 3hf(x_0;\,y_0) + {}^{9}/_{2}\,h[\Delta f(x_0;\,y_0)]''' +$$
$$+{}^{27}/_{12}\,h[\Delta^2 f(x_0;\,y_0)]''' + {}^{3}/_{8}\,h[\Delta^3 f(x_0;\,y_0)]''';$$
$$(y_4)^{(IV)} = y_0 + 4hf(x_0;\,y_0) + 8h[\Delta f(x_0;\,y_0)]''' +$$
$$+{}^{20}/_{3}\,h[\Delta^2 f(x_0;\,y_0)]''' + {}^{8}/_{3}\,h[\Delta^3 f(x_0;\,y_0)]''',$$

звідки знаходять:

$$f\left[x_1;\,(y_1)^{(IV)}\right], f\left[x_2;\,(y_2)^{(IV)}\right], f\left[x_3;\,(y_3)^{(IV)}\right], f\left[x_4;\,(y_4)^{(IV)}\right],$$
$$[\Delta f(x_0;\,y_0)]^{(IV)}, [\Delta^2 f(x_0;\,y_0)]^{(IV)}, [\Delta^3 f(x_0;\,y_0)]^{(IV)}, [\Delta^4 f(x_0;\,y_0)]^{(IV)};$$

5)
$$(y_1)^{(V)} = y_0 + hf(x_0;\,y_0) +$$
$$+{}^{1}/_{2}\,h[\Delta f(x_0;\,y_0)]^{(IV)} - {}^{1}/_{12}\,h[\Delta^2 f(x_0;\,y_0)]^{(IV)} +$$
$$+{}^{1}/_{24}\,h[\Delta^3 f(x_0;\,y_0)]^{(IV)} - {}^{19}/_{720}\,h[\Delta^4 f(x_0;\,y_0)]^{(IV)};$$
$$(y_2)^{(V)} = y_0 + 2hf(x_0;\,y_0) +$$
$$+2h[\Delta f(x_0;\,y_0)]^{(IV)} + {}^{1}/_{3}\,h[\Delta^2 f(x_0;\,y_0)]^{(IV)} +$$
$$+0 - {}^{1}/_{90}\,h[\Delta^4 f(x_0;\,y_0)]^{(IV)};$$
$$(y_3)^{(V)} = y_0 + 3hf(x_0;\,y_0) +$$
$$+{}^{9}/_{2}\,h[\Delta f(x_0;\,y_0)]^{(IV)} + {}^{27}/_{12}\,h[\Delta^2 f(x_0;\,y_0)]^{(IV)} +$$
$$+{}^{3}/_{8}\,h[\Delta^3 f(x_0;\,y_0)]^{(IV)} - {}^{3}/_{80}\,h[\Delta^4 f(x_0;\,y_0)]^{(IV)};$$
$$(y_4)^{(V)} = y_0 + 4hf(x_0;\,y_0) +$$
$$+8h[\Delta f(x_0;\,y_0)]^{(IV)} + {}^{20}/_{3}\,h[\Delta^2 f(x_0;\,y_0)]^{(IV)} +$$

$$+{}^{8}/_{3}\,h[\Delta^3 f(x_0;\ y_0)]^{(IV)} + {}^{14}/_{15}\,h[\Delta^4 f(x_0;\ y_0)]^{(IV)}.$$

Можна покращити значення y, обчисливши $f\left[\left(x;\ (y)\right)^{(V)}\right]$, потім різниці та застосувавши попередні формули вдруге і т. д. доти, доки результати не почнуть повторюватися.

б) Екстраполяція. Одержимо наближене значення y_5, застосовуючи формулу (7.7), обмежену членом з Δ^4 для $i = 4$:

$$(y^5)' = y_4 + h\Big(f(x_4;\ y_4) + {}^{1}/_{2}\,\Delta f(x_3;\ y_3) + {}^{5}/_{12}\,\Delta^2 f(x_2;\ y_2) +$$

$$+ {}^{3}/_{8}\,\Delta^3 f(x_1;\ y_1) + {}^{251}/_{720}\,\Delta^4 f(x_0;\ y_0)\Big). \qquad (7.8)$$

Значення $\Delta f_3, \Delta^2 f_2, \Delta^3 f_1, \Delta^4 f_0$, подаються висхідними різницями таблиці для $f(x;\ y)$.

Потрібно уточнити одержане значення y_5. Для цього за допомогою $f[x_5;\ (y_5)']$ складають таблицю різниць. Нехай $[\Delta f(x_4;\ y_4)]', \ldots$ – покращені різниці складеної таблиці. Одержимо:

$$y_i = y_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x;\ y)\,dx,$$

де функція $f(x;\ y)$ виражена через інтерполяційний поліном Ньютона за висхідними різницями.

Для $i = 5$ інтегрування дасть:

$$(y_5)'' = y_4 + h\big(f[x_5;\ (y_5)'] - {}^{1}/_{2}\,[\Delta f(x_4;\ y_4)]'\big) -$$

$$- {}^{1}/_{12}\,[\Delta^2 f(x_3;\ y_3)]' - {}^{1}/_{24}\,[\Delta^3 f(x_2;\ y_2)]' -$$

$$- {}^{19}/_{72}\,[\Delta^4 f(x_1;\ y_1)]' - {}^{3}/_{160}\,[\Delta^5 f(x_0;\ y_0)]'. \qquad (7.9)$$

За допомогою цього покращеного значення складають нову таблицю різниць та одержують нове покращення і так продовжують доти, доки не одержать два однакових послідовних наближення.

Приклад 7.1. Чисельно розв'язати диференціальне рівняння

$$y' = 1 - y/x$$

при початкових умовах $x_0 = y_0 = 2$ з кроком $h = 0{,}05$.

Розв'язання. Маємо:

1) $$(y_1)' = 2 + 0{,}05(1 - 1) = 2;$$

$$f[x_1;\ (y_1)'] = 1 - {}^{2}/_{2{,}05} = 0{,}0244;$$

x	f	Δf
2	0	0,0244
2,05	0,0244	

2) $$(y_1)'' = 2 + 0{,}05 \cdot 0 + {}^1/_2\, 0{,}05 \cdot 0{,}0244 = 2{,}00061;$$

$$(y_2)'' = 2 + 0{,}10 \cdot 0 + 2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}0244 = 2{,}00244;$$

$$f[x_1;\ (y_1)''] = 1 - \frac{2{,}00061}{2{,}05} = 0{,}0241;$$

$$f[x_2;\ (y_2)''] = 1 - \frac{2{,}00244}{2{,}10} = 0{,}0465;$$

x	f	Δf	$\Delta^2 f$
2	0		
		0,0241	
2,05	0,0241		−0,0017
		0,0224	
2,10	0,0465		

3) $$(y_1)''' = 2 + 0 + {}^1/_2\, 0{,}05 \cdot 0{,}0241 + {}^1/_{12}\, 0{,}05 \cdot 0{,}0017 = $$
$$= 2{,}0006095;$$

$$(y_2)''' = 2 + 0 + 2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}0241 - {}^1/_3\, 0{,}05 \cdot 0{,}0017 = 2{,}0023817;$$

$$(y_3)''' = 2 + 0 + {}^9/_2\, 0{,}05 \cdot 0{,}0241 - {}^9/_4\, 0{,}05 \cdot 0{,}0017 = 2{,}0052312;$$

$$f[x_1;\ (y_1)'''] = 1 - \frac{2{,}0006095}{2{,}05} = 0{,}02409293;$$

$$f[x_2;\ (y_2)'''] = 1 - \frac{2{,}0023817}{2{,}10} = 0{,}04648491;$$

$$f[x_3;\ (y_3)'''] = 1 - \frac{2{,}0052312}{2{,}15} = 0{,}06733433;$$

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
2	0			
		0,02409293		
2,05	0,02409293		−0,00170095	
		0,02239198		0,00015839
2,10	0,04648491		−0,00154256	
		0,02084942		
2,15	0,06733433			

4) $$(y_1)^{(IV)} = 2{,}0006099, (y_2)^{(IV)} = 2{,}0023809;$$

$$(y_3)^{(IV)} = 2{,}0052343, (y_4)^{(IV)} = 2{,}0091046;$$

$$f\left[x_1;\ (y_1)^{(IV)}\right] = 1 - \frac{2{,}0006099}{2{,}05} = 0{,}02409273;$$

$$f\left[x_2;\ (y_2)^{(IV)}\right] = 1 - \frac{2{,}0023809}{2{,}10} = 0{,}04648529;$$

$$f\left[x_3;\ (y_3)^{(IV)}\right] = 1 - \frac{2{,}0052343}{2{,}15} = 0{,}06733288;$$

$$f\left[x_4;\ (y_4)^{(IV)}\right] = 1 - \frac{2{,}0091046}{2{,}20} = 0{,}08677064;$$

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
2	0				
		0,02409273			
2,05	0,02409273		−0,00170017		
		0,02239256		0,00015520	
2,10	0,04648529		−0,00154497		−0,00002006
		0,02084759		0,00013514	
2,15	0,06733288		−0,00140983		
		0,01943776			
2,20	0,08677064				

5) $$(y_1)^{(V)} = 2{,}00060975, (y_2)^{(V)} = 2{,}00238095;$$

$$(y_3)^{(V)} = 2{,}00523256, (y_4)^{(V)} = 2{,}00909080.$$

Ці значення можна вважати остаточними, в тому випадку, коли наступні послідовні покращення дають той же результат. Тому складемо нову таблицю різниць функції $f(x;\ y)$:

$$f\left[x_1;\ (y_1)^{(V)}\right] = 0{,}02409280, f\left[x_2;\ (y_2)^{(V)}\right] = 0{,}04648526;$$

$$f\left[x_3;\ (y_3)^{(V)}\right] = 0{,}06733369, f\left[x_4;\ (y_4)^{(V)}\right] = 0{,}08677691;$$

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
2	0				
		0,02409280			
2,05	0,02409280		−0,00170034		
		0,02239246		0,00015631	
2,10	0,04648526		−0,00154403		−0,00001749
		0,02084843		0,00013882	
2,15	0,06733369		−0,00140521		
		0,01944322			
2,20	0,08677691				

що дає покращені значення:

$$(y_1)^{(VI)} = 2{,}00060975, (y_2)^{(VI)} = 2{,}00238095;$$

$$(y_3)^{(VI)} = 2{,}00523255, (y_4)^{(VI)} = 2{,}00909091.$$

Остання складена таблиця різниць функції $f(x;\, y)$ дала наближення, які практично точно повторюють попередні значення, тому їх можна прийняти за остаточну початкову базу.

Переходимо до *екстраполяції*. За формулою (7.8) одержимо:

$$(y_5)' = 2{,}01388846;$$

$$f[x_5;\, (y_5)'] = 1 - \frac{2{,}01388846}{2{,}25} = 0{,}10493846.$$

Звідси одержуємо нову таблицю різниць, обмежену п'ятою різницею. Оскільки потрібні лише висхідні різниці, то наведено лише нижню частину таблиці (таблиця містить результати для f і її різниць, які домножено на 10^3, тобто, щоб одержати істинний результат, необхідно вказані домножити на 10^{-3}):

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
					−0,01749	
				0,13882		0,00221
			−1,40521		−0,01528	
		19,44322		0,12354		
2,20	86,77691		−1,28167			
		18,16155				
2,25	104,93846					

Формула (7.9) як перше покращення y_5, дає такий результат:

$$(y_5)'' = 2{,}01388889.$$

Нове обчислення (складання) таблиці різниць, що ґрунтується на останньому наведеному значенні y_5, точно його повторює. Тому, можна переходити до обчислення y_6 і т. д.

Зауваживши, що дане диференціальне рівняння лінійне, можна точно обчислити його розв'язок, що задовольняє початкову умову: $y_0 = y(2) = 2$. Дане рівняння можна записати у вигляді

$$(xy)' = x,$$

звідки легко одержується частинний розв'язок:

$$y = {}^{x}/_{2} + {}^{2}/_{x}.$$

Точне обчислення y для заданих значень x показує, що апроксимації y збігаються до восьмого десяткового знака.

Зауваження. В більшості випадків не потрібно проводити обчислення з такою великою точністю, як у наведеному прикладі. Значення h буває заданим, і тоді можна застосовувати формулу апроксимації лише при значеннях k, менших 4. При цьому формули відповідним чином «обрізаються»; етапи встановлення початкової бази скорочуються, як і всі обчислення, стосовно різниць менш високого порядку. Буває, що h не задається і його можна вибрати достатньо великим, щоб скоротити загальну суму обчислень, потрібних для заповнення повного проміжку, в якому бажано знати y за заданим наближенням. Можна об'єднувати обидва способи дій вдалим вибором h і k. Тут важко встановити загальні правила. При обчисленнях потрібно помітити момент, в який варто змінити h або шляхом подвоєння, або подвійним зменшенням, таким чином, щоб при найменшій кількості обчислень та з потрібною точністю одержати повторення послідовних наближень y.

Скорочений варіант методу Адамса. Якщо можна задовольнитися початковою базою, що складається із значень y_0 (початкове дане), y_1, y_2, y_3, то буває зручно використовувати такий спосіб.

Ігноруючи четвертою різницею, можна встановити виключно просту формулу. Інтегруємо (7.6) від x_i до x_{i+4}:

$$y_{i+4} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+4}} f(x;\ y)dx.$$

Замінивши $f(x;\ y)$ інтерполяційним поліномом Ньютона за низхідними різницями та обмежившись третьою різницею, після інтегрування можна одержати:

$$^3/_h\,(y_{i+4}-y_i)=12f_i+24\Delta f_i+20\Delta^2 f_i+8\Delta^3 f_i. \qquad (7.10)$$

Замінивши Δ, Δ^2, Δ^3 їх виразами, знайдемо:

$$y_{i+4}-y_i={}^{4h}/_3\,(2f_{i+1}-f_{i+2}+2f_{i+3}). \qquad (7.11)$$

Перший відкинутий член рівний $(28/90)h\Delta^4 f$. Як тільки y_{i+4} обчислено, можна обчислити f_{i+4} та знову знайти значення y_{i+4} застосувавши формулу (одержують з формули Сімпсона):

$$y_{i+4}=y_{i+2}+{}^3/_h\,(f_{i+4}+4f_{i+3}+f_{i+2}). \qquad (7.12)$$

При цьому ігнорується член порядку $(1/90)h\Delta^4 f$.

Для того щоб почати обчислення крок за кроком, необхідно мати початкову базу, утворену значеннями y_0 (точне), y_1, y_2, y_3 (обчислені). Її легко знайти за допомогою ряду Тейлора.

Різниця значень y_{i+4}, одержаних за формулами (7.11) та (7.12), приблизно дорівнює $(29/90)h\Delta^4 f$.

Вона приблизно в 30 разів більша від поправки, яку потрібно внести в результат, одержаний за формулою (7.12). Таким чином, якщо одна тридцята цієї різниці менша точності обчислень, то можна знехтувати похибкою формули (7.12).

Якщо ця різниця дуже велика, то корисно зменшити вдвоє інтервал h. Якщо ж вона настільки мала, що нею можна знехтувати, то інтервал подвоюють, що значно скорочує обчислення.

Приклад 7.2. Для $x = 0{,}4$ одержати числовий розв'язок рівняння $y' = y + x^2$ при початкових умовах $y_0 = 1$, $x_0 = 1$. Розв'язок одержати з точністю до п'ятої значущої цифри.

Розв'язання. Початкову базу легко одержати за допомогою ряду Тейлора:

$$y_1 = 1{,}1055, y_2 = 1{,}2242, y_3 = 1{,}3595.$$

Для $h = 0{,}1$ одержуємо:

$$y_4 = y_0 + {}^{0,4}/_3\,(2f_1 - f_2 + 2f_3);$$

$$f_1 = y_1 + x_1^2 = 1{,}1155;$$

$$f_2 = y_2 + x_2^2 = 1{,}2642;$$

$$f_3 = y_3 + x_3^2 = 1{,}4495.$$

Звідки:

$$y_4 = 1{,}5154.$$

Формула Сімпсона дасть:

$$y_4 = y_2 + {}^{0,1}/_3\,(f_4 + 4f_3 + f_2);$$

$$f_4 = y_4 + x_4^2 = 1{,}6754,$$

звідки

$$y_4 = 1{,}5154.$$

Уточнювати значення y_4 більше не потрібно.

Обчислення y на наступному інтервалі необхідно проводити при $h = 0{,}2$.

7.2.2. Метод Пікара

Нехай дано диференціальне рівняння, розв'язане відносно dy/dx:

$$dy/_{dx} = f(x;\ y)$$

з початковою умовою $y(x_0) = y_0$.

Проінтегрувавши від x_0 до x, одержимо:

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(x;\ y)\,dx$$

або

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x;\ y)\,dx, \tag{7.13}$$

де y – невідома функція від x, що міститься і під знаком інтеграла. Розв'язуватимемо це інтегральне рівняння послідовними наближеннями.

За перше наближення невідомої функції приймемо:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x;\ y_0)\,dx.$$

Підставивши це значення y_1 в праву частину інтегрального рівняння (7.13), одержимо:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(x;\ y_1(x)\big)\,dx,$$

… … … … … … … … … … … … … … …

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(x;\ y_{n-1}(x)\big)dx.$$

Усі функції $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ приймають значення y_0 при $x = x_0$ і їх можна розглядати як усе точніші наближення до $y(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x).$$

Збіжність одержується за умови, що $f(x;\ y)$ і $\partial f(x;\ y)/\partial y$ неперервні в околі точки $(x_0;\ y_0)$. Розглянутий метод, легкий у викладках, часто виявляється важким у застосуваннях. Послідовні інтегрування можуть виявитися дуже складними, а головне, збіжність у більшості випадків дуже повільна, що незручно в числових розрахунках.

Видозмінений метод Пікара. Можна значно покращити *метод Пікара*, вдосконаливши початкову базу (перше наближення). Для цього розкладають $f(x;\ y)$ як функцію y в ряд Тейлора в околі y_0:

$$f(x;\ y) = f(x;\ y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0} + R(x;\ y).$$

Підставивши останній вираз в диференціальне рівняння та нехтуючи залишковим членом $R(x;\ y)$, одержимо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y_0}y + \left(f(x;\ y_0) - y_0\frac{\partial f}{\partial y_0}\right).$$

Це – лінійне рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = y\varphi(x) + \psi(x),$$

яке розв'язується за допомогою підстановки $y = u(x)v(x)$. Тут

$$\varphi(x) = \frac{\partial f}{\partial y_0},\quad \psi(x) = f(x;\ y_0) - y_0\frac{\partial f}{\partial y_0}.$$

Якщо підставити розв'язок, що приймає значення y_0 при $x = x_0$, у праву частину рівняння (7.13), то одержимо наближення, яке, в більшості випадків, є достатнім.

Приклад 7.3. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = y^3,$$

що задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

Розв'язання. Тут $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Одержуємо рівняння з розділяючими змінними, що дозволяє знайти точний розв'язок $y = (1 - 2x)^{-1/2}$. Він служитиме для перевірки.

Застосуємо *метод Пікара*. Перше наближення: $y_0 = 1$. Друге –

$$y_1 = 1 + \int_0^x dx = 1 + x,$$

потім:

$$y_2 = 1 + \int_0^x (1+x)^3 dx = \frac{3}{4} + \frac{(1+x)^4}{4} \quad \text{і}$$

$$y_3 = 1 + \frac{1}{64}\int_0^x (3 + (1+x)^4)^3 dx = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 +$$

$$+\frac{13}{4}x^4 + \frac{18}{5}x^5 + \frac{27}{8}x^6 + \frac{147}{56}x^7 + \frac{27}{16}x^8 + \frac{7}{8}x^9 +$$

$$+\frac{11}{20}x^{10} + \frac{33}{352}x^{11} + \frac{1}{64}x^{12} + \frac{1}{832}x^{13}.$$

Зауважимо, що перші 4 члени співпадають з початком розкладу в ряд Тейлора точного розв'язку.

Застосуємо *видозмінений метод Пікара*. Одержуємо:

$$\varphi(x) = 3, \quad \psi(x) = -2,$$

інакше кажучи,

$$\bar{y}_0 = {}^2/_3 + {}^1/_3\, e^{3x}.$$

Друге наближення:

$$\bar{y}_1 = 1 + \int_0^x \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{3x}\right)^3 dx =$$

$$= 1 + \frac{1}{27}\left(-\frac{46}{9} + 8x + 4e^{3x} + e^{6x} + \frac{1}{9}e^{9x}\right).$$

Порівнявши четверте наближення y_3, друге наближення $\bar{y}_1$ та точний розв'язок y для $x = 0{,}2$, одержимо:

$$y(0{,}2) = 1{,}29099, \bar{y}_1(0{,}2) = 1{,}28776, y_3(0{,}2) = 1{,}28676.$$

Цей приклад показує, що при використанні методу Пікара хороше початкове наближення надає значну перевагу.

7.2.3. Метод Ейлера

Диференціальне рівняння $y' = f(x;\ y)$ визначає на площині, так зване, *поле напрямів*, тобто в кожній точці площини, в якій існує функція $f(x;\ y)$, задає напрям інтегральної кривої рівняння, що проходить через цю точку. Нехай необхідно розв'язати задачу Коші, тобто знайти розв'язок рівняння $y' = f(x;\ y)$, що задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$. Поділимо відрізок $[x_0;\ x]$ на n рівних частин і проведемо заміну $(x - x_0)/n = h$ (h – крок зміни аргумента). Припустимо, що всередині елементарного проміжку від x_0 до $x_0 + h$ функція y' зберігає стале значення $f(x_0;\ y_0)$.

Тоді $y_1 - y_0 \cong h \cdot f(x_0;\ y_0)$, де y_1 – значення шуканої функції, що відповідає значенню $x_1 = x_0 + h$.

Звідси одержуємо $y_1 \cong y_0 + h \cdot f(x_0;\ y_0)$. Повторюючи цю операцію, одержимо послідовні значення функції:

$$y_2 \cong y_1 + h \cdot f(x_1;\ y_1),\ y_3 \cong y_2 + h \cdot f(x_2;\ y_2), \ldots,$$

$$y_{k+1} \cong y_k + h \cdot f(x_k;\ y_k).$$

Таким чином, можна наближено побудувати інтегральну криву у вигляді ламаної з вершинами $M_k(x_k;\ y_k)$, де $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$, $y_{k+1} \cong y_k + h \cdot f(x_k;\ y_k)$.

Цей метод ще називають ***методом ламаних Ейлера***.

7.2.4. Удосконалений метод Ейлера

Спочатку обчислюють проміжні значення

$$x_{i+1/2} = x_i + {}^{h}\!/_{2};\ \ y_{i+1/2} = y_i + {}^{h}\!/_{2}\, f(x_i\,;\ y_i),$$

а потім знаходять:

$$y_{i+1} = y_i + hf\big(x_{i+1/2};\ y_{i+1/2}\big).$$

Метод має дещо більшу точність порівняно з методом Ейлера. Його ще називають ***удосконалений метод ламаних***.

7.2.5. Удосконалений метод Ейлера–Коші

Спочатку обчислюють «грубе» наближення розв'язку

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i;\ y_i),$$

а потім уточнюють його за формулою

$$y_{i+1} = y_i + {}^{1}\!/_{2}\, h\left(f(x_i;\ y_i) + f\left(x_{i+1};\ y_{i+1}^{(0)}\right)\right).$$

Похибка методу на кожному кроці має порядок h^3.

7.2.6. Метод Рунге–Кутти

Обчислення на кожному кроці виконують за формулою

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right),$$

де

$$k_1^{(i)} = hf(x_i;\ y_i);\quad k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2};\ y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right);$$

$$k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2};\ y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right);\quad k_4^{(i)} = hf\left(x_i + h;\ y_i + k_3^{(i)}\right),$$

причому $x_i = x_0 + ih\ \ (i = \overline{1,n})$. Похибка методу на кожному кроці має порядок h^5.

Приклад 7.4. Знайти розв'язок задачі Коші $y' = x + y$ на відрізку $[0;\ 0{,}5]$ з кроком $h = 0{,}1$.

Розв'язання. Результати обчислень подано таблицею:

	Методи		
x_i	Удосконалений Ейлера y_i	Ейлера–Коші y_i	Точний розв'язок $2e^x - x - 1$
0	1	1	1
0,1	1,11	1,11	1,1103
0,2	1,2421	1,2421	1,2428
0,3	1,3985	1,3985	1,3997
0,4	1,5819	1,5819	1,5836
0,5	1,7950	1,7950	1,7974

7.3. Наближене інтегрування звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

7.3.1. Формулювання завдання

Нехай задано диференціальне рівняння другого порядку:

$$F(x;\ y;\ y';\ y'') = 0. \tag{7.14}$$

Двохточкова крайова задача для рівняння (7.14) формулюється таким чином: знайти функцію $y = y(x)$, яка всередині відрізка $[a;\ b]$ задовольняє рівняння (7.14) а на його кінцях – крайові умови:

$$\begin{cases} \varphi_1(y(a);\ y'(a)) = 0, \\ \varphi_2(y(b);\ y'(b)) = 0. \end{cases} \tag{7.15}$$

Випадок, для якого рівняння (7.14) і граничні умови (7.15) лінійні називається *лінійною крайовою задачею.*

У цьому випадку диференціальне рівняння та крайові умови набувають вигляду:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x); \tag{7.16}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'^{(a)} = A; \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{cases} \tag{7.17}$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – відомі неперервні на відрізку $[a;\ b]$ функції; α_0, α_1, β_0, β_1, A, B – задані сталі, причому $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Якщо $A = B = 0$, то крайові умови (7.17) називаються *однорідними*.

Тут розглядатимуться *різницеві методи* наближеного розв'язування лінійної крайової задачі.

7.3.2. Метод скінченних різниць для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

Нехай $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i = x_0 + ih$ $(i = \overline{1,\ n-1})$ – система рівновіддалених вузлів з деяким кроком $h = (b-a)/n$ і $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$. Нехай y_i, y_i', y_i'' відповідно наближені значення шуканої функції $y(x)$ та її похідних $y'(x)$, $y''(x)$, що одержуються у вузлах x_i в результаті розрахунків. Далі наближено замінюють в кожному внутрішньому вузлі похідні $y'(x_i)$, $y''(x_i)$ *скінченно-різницевими відношеннями*:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y''_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2}, \tag{7.18}$$

а на кінцях (для крайових точок $x_0 = a$ і $x_n = b$) роблять заміну

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}. \tag{7.19}$$

Використовуючи формули (7.18) та (7.19), наближено замінюють рівняння (7.16) та крайові умови (7.17) системою рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} + q_i y_i = f_i \ (i = 0 \cup \overline{1, n-1}); \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A;\ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases} \tag{7.20}$$

У результаті одержують лінійну алгебраїчну систему з $n+1$ рівняння і з $n+1$ невідомим: $y_0, y_1, \dots, y_n$. Розв'язавши систему, одержують таблицю наближених значень шуканої функції. Умови розв'язуваності такої системи розглядаються в [1] та [15].

Більш точні формули можна одержати якщо замінити $y'(x_i)$, $y''(x_i)$ *центрально-різницевими відношеннями*:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \qquad (7.21)$$

У цьому випадку одержують систему:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \ (i = \overline{1, n-1}); \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A; \ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases} \qquad (7.22)$$

При великому n безпосереднє розв'язування систем (7.20), (7.22) стає громіздким. Для розв'язування таких систем існує достатньо простий метод – *метод прогонки*, який викладено нижче. Оцінка похибки методу скінченних різниць для задачі (7.16), (7.17) має вигляд:

$$|y_i - y(x_i)| \le \frac{h^2 M_4}{96}(b-a)^2, \qquad (7.23)$$

де $y(x_i)$ – значення точного розв'язку при $x = x_i$,

$$M_4 = \max_{[a;\, b]} \left| y^{(IV)}(x) \right|.$$

Точність різницевого методу можна значно підвищити, якщо при заміні похідних використати багатоточкові різницеві схеми (див. розд. 9).

На практиці часто трапляються рівняння, в яких функції $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ задаються таблично з деяким кроком h. Тому природно такі рівняння розв'язувати різницевим методом з заданим кроком (див. приклад 7.9).

Приклад 7.5. Методом скінченних різниць знайти розв'язок крайової задачі:

$$\begin{cases} x^2 y'' + x y' = 1; \\ y(-1{,}4) = {}^1\!/_2 \ln^2|-1{,}4| = 0{,}0566; \ y(-1) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Використовуючи формули (7.21), замінимо диференціальне рівняння крайової задачі системою скінченно-різницевих рівнянь:

$$x_i^2 \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 1.$$

Після зведення подібних членів одержимо:

$$y_{i-1}(2x_i^2 - hx_i) - 4x_i^2 y_i + y_{i+1}(2x_i^2 + hx_i) = 2h^2. \qquad (7.23\text{ а})$$

Якщо прийняти $h = 0{,}1$, то одержимо три внутрішні вузли $x_i = -1{,}4 + 0{,}1i$ $(i = \overline{1,3})$. Написавши рівняння (7.23 а) для кожного із цих вузлів, одержимо систему:

$$\begin{cases} 3{,}51y_0 - 6{,}76y_1 + 3{,}25y_2 = 0{,}02; \\ 2{,}76y_1 - 5{,}76y_2 + 3{,}00y_3 = 0{,}02; \\ 2{,}53y_2 - 4{,}84y_3 + 2{,}31y_4 = 0{,}02. \end{cases} \qquad (7.23\text{ б})$$

Врахувавши, що в граничних вузлах $y_0 = 0{,}0566, y_4 = 0$ та розв'язавши систему (7.23 б), одержимо:

$$y_1 = 0{,}0345, y_2 = 0{,}0167, y_3 = 0{,}0046.$$

Точний розв'язок (при $C_1 = C_2 = 0$) $y = (1/2)\ln^2|x|$ у відповідних точках дасть:

$$y(x_1) = 0{,}0344, y(x_2) = 0{,}0166, y(x_3) = 0{,}0045.$$

7.3.3. Метод прогонки

1. Розглянемо систему (7.20), яка одержується при заміні диференціального рівняння (7.16) та крайових умов (7.17) *скінченно-різницевими відношеннями*:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} + q_i y_i = f_i \ (i = 0 \cup \overline{1, n-1}); \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A; \ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases}$$

Розв'язування систем методом прогонки полягає в такому. Спочатку записують перші $n-1$ рівняння системи у вигляді:

$$y_{i+2} + m_i y_{i+1} + k_i y_i = h^2 f_i \ \ (i = 0 \cup \overline{1, n-2}),$$

де

$$m_i = -2 + hp_i, \quad k_i = 1 - hp_i + h^2 q_i. \qquad (7.24)$$

Потім система зводиться до вигляду:

$$y_{i+1} = c_i(d_i - y_{i+2}) \quad (i = 0 \cup \overline{1, n-2}). \qquad (7.25)$$

Числа c_i, d_i послідовно знаходять за такими формулами: при $i = 0$:

$$c_0 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 h}{m_0(\alpha_1 - \alpha_0 h) + k_0 \alpha_1}, d_0 = \frac{k_0 A h}{\alpha_1 - \alpha_0 h} + h^2 f_0; \quad (7.26)$$

при $i = \overline{1, n-2}$:

$$c_i = \frac{1}{m_i - k_i c_{i-1}}, \quad d_i = f_i h^2 - k_i c_{i-1} d_{i-1}. \qquad (7.27)$$

Обчислення проводяться в такій послідовності

Прямий хід. За формулами (7.24) обчислюють значення m_i та k_i. Знаходять c_0, d_0 а потім, послідовно застосовуючи рекурентні формули (7.27), одержують значення c_i, d_i при $i = \overline{1, n-2}$.

Зворотний хід. З рівнянь (7.25) при $i = n-2$ і останнього рівняння системи (7.20) одержуємо:

$$y_{n-1} = c_{n-2}(d_{n-2} - y_n);$$

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B.$$

Розв'язавши останню систему, одержимо:

$$y_n = \frac{\beta_1 c_{n-2} d_{n-2} + Bh}{\beta_1(1 + c_{n-2}) + \beta_0 h}. \qquad (7.28)$$

Використовуючи вже відомі числа c_{n-2}, d_{n-2}, знаходять y_n. Потім обчислюють значення y_i $(i = \overline{n-1, 1})$, послідовно застосовуючи рекурентні формули:

$$\begin{cases} y_{n-1} = c_{n-2}(d_{n-2} - y_n); \\ y_{n-2} = c_{n-3}(d_{n-3} - y_{n-1}); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1 = c_0(d_0 - y_2). \end{cases} \qquad (7.29)$$

Значення y_0 знаходять з передостаннього рівняння системи:

$$y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h}. \qquad (7.30)$$

Таким чином, усі обчислення немов би «проганяються» двічі. Обчислення *прямого ходу* визначають допоміжні числа c_i, d_i в порядку зростання індекса i. При цьому для обчислення значень c_0, d_0 використовують крайові умови на лівому кінці відрізка інтегрування. Потім на першому кроці *зворотного ходу* відбувається узгодження одержаних чисел c_{n-2}, d_{n-2} з крайовою умовою на правому кінці відрізка інтегрування, після чого послідовно одер – жують значення шуканої функції y_i в порядку спадання індекса i.

Обчислення зручно подавати такою таблицею:

i	x_i	m_i	k_i	f_i	Прямий хід		Зворотний хід
					c_i	d_i	y_i
0	x_0	m_0	k_0	f_0	$c_0\downarrow$	$d_0\downarrow$	$y_0\uparrow$
1	x_1	m_1	k_1	f_1	$c_1\downarrow$	$d_1\downarrow$	$y_1\uparrow$
2	x_2	m_2	k_2	f_2	$c_2\downarrow$	$d_2\downarrow$	$y_2\uparrow$
…	…	…	…	…	…	…	…
$n-2$	x_{n-2}	m_{n-2}	k_{n-2}	f_{n-2}	$c_{n-2}\downarrow$	$d_{n-2}\downarrow$	$y_{n-2}\uparrow$
$n-1$	x_{n-1}						$y_{n-1}\uparrow$
n	x_n						$y_n\uparrow$

Приклад 7.6. Методом прогонки знайти наближений розв'язок рівняння

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x,$$

що задовольняє крайові умови:

$$y(0) - y'(0) = 0, \qquad y(1) = 1 + e = 3{,}718.$$

Розв'язання. Візьмемо $h = 0{,}1$ і замінимо рівняння та крайові умови системою скінченно-різницевих рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{0{,}01} - 2x_i \dfrac{y_{i+1} - y_i}{0{,}1} - 2y_i = -4x_i \ (i = 0 \cup \overline{1,8}); \\ y_0 - \dfrac{y_1 - y_0}{0{,}1} = 0; \ y_{10} = 3{,}718. \end{cases}$$

Після зведення подібних членів одержимо:

$$y_{i+2} + (-2 - 0{,}2x_i)y_{i+1} + (0{,}98 + 0{,}2x_i)y_i = -0{,}01 \cdot 4x_i.$$

Таким чином, одержимо:

$$m_i = -2 - 0{,}2x_i, \qquad \alpha_0 = 1, \qquad \beta_0 = 1,$$
$$k_i = 0{,}98 + 0{,}2x_i, \qquad \alpha_1 = -1, \qquad \beta_1 = 0,$$
$$f_i = -4x_i, \qquad A = 0, \qquad B = 3{,}718.$$

Порядок заповнення таблиці

Прямий хід. Записуємо в табл. 7.1 числа $x_i = 0{,}1i$ й обчислюємо величини m_i, k_i, f_i $(i = 0 \cup \overline{1,8})$.

Таблиця 7.1

i	x_i	m_i	k_i	f_i	Прямий хід		Зворотний хід	$y(x_i)$
					c_i	d_i	y_i	
0	0,0	–2,00	0,98	0,0	–0,9016	0,0000	1,117	1,00
1	0,1	–2,02	1,00	–0,4	–0,8941	–0,0040	1,229	1,110
2	0,2	–2,04	1,02	–0,8	–0,8865	–0,0117	1,363	1,241
3	0,3	–2,06	1,04	–1,2	–0,8787	–0,0228	1,521	1,394
4	0,4	–2,08	1,06	–1,6	–0,8706	–0,0372	1,704	1,574
5	0,5	–2,10	1,08	–2,0	–0,8623	–0,0550	1,916	1,784
6	0,6	–2,12	1,10	–2,4	–0,8536	–0,0761	2,164	2,033
7	0,7	–2,14	1,12	–2,8	–0,8446	–0,1007	2,455	2,332
8	0,8	–2,16	1,14	–3,2	–0,8354	–0,1290	2,800	2,696
9	0,9						3,214	3,148
10	1,0						3,718	3,718

Далі знаходимо:

$$c_0 = \frac{-1-0{,}1}{-2(-1{,}1)-0{,}98} = 0{,}92, \;\; d_0 = 0.$$

Заносимо одержані числа до табл. 7.1 та послідовно обчислюємо c_i, d_i при $i = \overline{1,8}$. Так, при $i = 1$ за формулою (7.27) одержуємо:

$$c_1 = \frac{1}{m_1 - k_1 c_0} = \frac{1}{-2{,}02 + 1 \cdot 0{,}9016} = -0{,}8941;$$

$$d_1 = f_1 h^2 - k_1 c_0 d_0 = -0{,}0040.$$

При $i = 2$:

$$c_2 = \frac{1}{m_2 - k_2 c_1} = \frac{1}{-2{,}04 + 1{,}02 \cdot 0{,}8941} = -0{,}8865;$$

$$d_2 = f_2 h^2 - k_2 c_1 d_1 = -0{,}8 \cdot 0{,}01 - 1{,}02 \cdot 0{,}8941 \cdot 0{,}004 =$$
$$= -0{,}0117.$$

Продовжуючи за аналогією, визначаємо всі значення c_i та d_i, які занесено в стовпці *прямого ходу* табл. 7.1.

Зворотний хід. За формулою (7.28) знаходимо y_n:

$$y_{10} = {}^{B}/_{\beta_0} = 3{,}718.$$

Після цього обчислюємо значення y_i $(i = \overline{9,1})$ за формулами (7.29) та заповнюємо стовпець *зворотного ходу* табл. 7.1.

Так, при $i = 9$ і $i = 8$ одержуємо відповідно:

$$y_9 = c_8(d_8 - y_{10}) = -0{,}8354(-0{,}129 - 3{,}718) = 3{,}214,$$

$y_8 = c_7(d_7 - y_9) = -0{,}8446(-0{,}1007 - 3{,}214) = 2{,}800$ і т. д.

Значення y_0 знаходимо за формулою (7.30):

$$y_0 = \frac{1{,}229}{1 + 0{,}1} = 1{,}117$$

і записуємо в стовпці y_i табл. 7.1 при $i = 0$. В останьому стовпці таблиці наведено, для порівняння, значення точного розв'язку

$$y = x + e^{x^2}.$$

2. Розглянемо систему (7.22), яку одержуємо при заміні диференціального рівняння (7.16) та другої крайової умови (7.17) *центральними скінченно-різницевими відношеннями*:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \ (i = \overline{1, n-1}); \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A; \ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = B. \end{cases}$$

Запишемо перші $n - 1$ рівняння системи у вигляді:

$$y_{i+1} + m_i y_i + k_i y_{i-1} = \frac{2h^2 f_i}{2 + hp_i} = \varphi_i, \ \text{де}$$

$$m_i = \frac{2q_i h^2 - 4}{2 + hp_i}, k_i = \frac{2 - hp_i}{2 + hp_i}. \qquad (7.31)$$

Потім зводимо рівняння до вигляду:

$$y_i = c_i(d_i - y_{i+1}) \quad (i = \overline{1, n-1}), \qquad (7.32)$$

де коефіцієнти c_i, d_i обчислюються за формулами: при $i = 1$:

$$c_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 h}{m_1(\alpha_1 - \alpha_0 h) + k_1 \alpha_1};$$

$$d_1 = \frac{2f_1 h^2}{2 + p_1 h} + \frac{k_1 A h}{\alpha_1 - \alpha_0 h} = \varphi_1 + k_1 \frac{Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h}; \qquad (7.33)$$

при $i = \overline{2, n}$:

$$c_i = \frac{1}{m_i - k_i c_{i-1}}, d_i = \frac{2h^2 f_i}{2 + hp_i} - k_i c_{i-1} d_{i-1} =$$

$$= \varphi_i - k_i c_{i-1} d_{i-1}. \qquad (7.34)$$

Обчислення проводяться в такій послідовності.

Прямий хід. За формулами (7.31) обчислюють значення m_i та k_i. Знаходять c_1, d_1 а потім, послідовно застосовуючи рекурентні формули (7.34), одержують значення c_i, d_i при $i = \overline{2, n}$.

Зворотний хід. З рівнянь (7.32) при $i = n, n-1$ й останнього рівняння системи (7.22) маємо:

$$\begin{cases} y_n = c_n(d_n - y_{n+1}); \\ y_{n-1} = c_{n-1}(d_{n-1} - y_n); \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = B. \end{cases} \tag{7.35}$$

Розв'язавши систему (7.35) відносно y_n, одержимо:

$$y_n = \frac{2Bh - \beta_1(d_n - c_{n-1}d_{n-1})}{\beta_1\left(c_{n-1} - \dfrac{1}{c_n}\right) + 2\beta_0 h}. \tag{7.36}$$

Використовуючи вже відомі числа $c_n, d_n, c_{n-1,} d_{n-1}$, знаходять y_n. Значення y_i $(i = \overline{n-1, 1})$ одержують з рекурентних формул (7.32). Значення y_0 знаходять із передостаннього рівняння системи (7.22):

$$y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h}. \tag{7.37}$$

Приклад 7.7. Методом прогонки знайти наближений розв'язок рівняння $y'' - 2xy' - 2y = -4x$, що задовольняє крайові умови:

$$y(0) - y'(0) = 0; 2y(1) - y'(1) = 1.$$

Розв'язання. Візьмемо $h = 0{,}1$ і замінимо рівняння та крайові умови системою скінченно-різницевих рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - 2x_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 2y_i = -4x_i \ (i = \overline{1,9}); \\ y_0 - \dfrac{y_1 - y_0}{h} = 0; \quad 2y_{10} - \dfrac{y_{11} - y_9}{2h} = 1. \end{cases}$$

Після зведення подібних членів одержимо:

$$y_{i+1} - \frac{2 + 2h^2}{1 - hx_i} y_i + \frac{1 + hx_i}{1 - hx_i} y_{i-1} = -\frac{4h^2}{1 - hx_i} x_i.$$

Таким чином, одержуємо:

$$m_i = -\frac{2 + 2h^2}{1 - hx_i}, k_i = \frac{1 + hx_i}{1 - hx_i}, \varphi_i = -\frac{4h^2}{1 - hx_i} x_i,$$

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = -1, \beta_0 = 2, \beta_1 = -1, A = 0, B = 1.$$

$$(i = 0 \cup \overline{1, 10})$$

Прямий хід. Записуємо в табл. 7.2 числа $x_i = 0{,}1i$ і, врахувавши, що h=0,1, обчислюємо величини m_i, k_i, φ_i ($i = 0 \cup \overline{1,10}$). Потім за формулами (7.33) знаходимо:

$$c_1 = \frac{-1{,}1}{2{,}040 \cdot 1{,}1 - 1{,}020} = -0{,}899, \qquad d_1 = -0{,}004.$$

Записуємо одержані числа в табл.7.2 та послідовно обчислюємо c_i, d_i за формулами (7.34). Так, при $i = 2$, одержуємо:

$$c_2 = \frac{1}{m_2 - k_2 c_1} = \frac{1}{-2{,}060 + 1{,}040 \cdot 0{,}899} = -0{,}889,$$

$$d_2 = \varphi_2 - k_2 c_1 d_1 = -0{,}0088 - 1{,}040 \cdot 0{,}899 \cdot 0{,}004 = -0{,}012.$$

Обчислення при $i = \overline{3,10}$ проводяться аналогічно. Всі результати записуємо у відповідні стовпці прямого ходу табл. 7.2.

Таблиця 7.2

i	x_i	m_i	k_i	φ_i	Прямий хід		Зворотний хід	$y(x_i)$
					c_i	d_i	y_i	
0	0,0						1,03	1,00
1	0,1	–2,040	1,020	–0,004	–0,899	–0,004	1,13	1,11
2	0,2	–2,061	1,040	–0,008	–0,889	–0,012	1,26	1,24
3	0,3	–2,083	1,062	–0,012	–0,878	–0,023	1,41	1,39
4	0,4	–2,105	1,083	–0,017	–0,868	–0,039	1,60	1,57
5	0,5	–2,127	1,105	–0,021	–0,856	–0,058	1,81	1,78
6	0,6	–2,149	1,128	–0,025	–0,845	–0,081	2,06	2,03
7	0,7	–2,172	1,151	–0,030	–0,833	–0,109	2,36	2,33
8	0,8	–2,196	1,174	–0,035	–0,822	–0,142	2,72	2,70
9	0,9	–2,220	1,198	–0,040	–0,810	–0,180	3,17	3,15
10	1,0	–2,244	1,222	–0,044	–0,797	–0,222	3,73	3,72

Зворотний хід. За формулою (7.36) знаходимо y_n:

$$y_{10} = \frac{0{,}2 - 0{,}222 - 0{,}810 \cdot 0{,}180}{0{,}4 + 0{,}810 - {}^1\!/_{0{,}797}} = 3{,}73.$$

Після цього обчислюємо значення y_i ($i = \overline{9,1}$) за формулами (7.32):

$$y_9 = c_9(d_9 - y_{10}) = -0{,}810(-0{,}18 - 3{,}73) = 3{,}17,$$
$$y_8 = c_8(d_8 - y_9) = -0{,}822(-0{,}14 - 3{,}17) = 2{,}72 \text{ і т. д.}$$

Значення y_0 знаходимо за формулою (7.37):

$$y_0 = \frac{-1{,}13}{-1{,}1} = 1{,}03$$

і записуємо в стовпці y_i табл. 7.2 при $i = 0$. В останьому стовпці таблиці наведено, для порівняння, значення точного розв'язку

$$y = x + e^{x^2}.$$

Зауваження. В підрозд. 7.3.2 для оцінки похибки методу скін – ченних різниць наведено формулу (7.23). Але для практичного за – стосування вона малопридатна. Як правило, застосовують подвій – ний перерахунок і, виходячи з *принципу Рунге* (див. приклад 7.8), одержують наближену оцінку похибки – значення y_i^*:

$$|y_i^* - y(x_i)| \cong {}^1/_3\,|y_i^* - y_i|,$$

де $y(x_i)$ – значення точного розв'язку крайової задачі в точці $x = x_i$, а y_i, y_i^* – значення наближених розв'язків у тій самій точці, одержаних з кроками h і $h/2$ відповідно.

Приклад 7.8. Методом прогонки знайти з точністю до $\varepsilon = 0{,}001$ наближений розв'язок рівняння $y'' + 2xy' + 2y = 4x$, що задовольняє крайові умови:

$$y(0) = 1,\;\; y(0{,}5) = e^{-0{,}25} + 0{,}5 = 1{,}279.$$

Розв'язання. Щоб знайти наближений розв'язок даного рівняння із заданою точністю, проведемо спочатку обчислення з кроком $h = 0{,}05$, потім з кроком $h = 0{,}1$ та порівняєм одержані результати.

Для даного рівняння одержуємо:

$$p(x) = 2x, q(x) = 2, f(x) = 4x.$$

За формулами (7.31) обчислюємо m_i, k_i, $\varphi_i = 2h^2 f_i/(2 + hp_i)$ з кроком $h = 0{,}05$. Врахувавши, що $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$, за формулами (7.33) знаходимо:

$$c_1 = {}^1/_{m_1} = -0{,}502,\;\; d_1 = \varphi_1 - k_1 = -0{,}994.$$

Послідовно застосовуючи формули (7.34), обчислюємо значення c_i, d_i $(i = \overline{2,9})$.

З крайової умови знаходимо $y_{10} = y(0{,}5) = 1{,}279$ та обчислюємо y_i $(i = \overline{9,1})$, застосувавши рекурентну формулу (7.32). Всі обчислення подано табл. 7.3.

Таблиця 7.3

i	x_i	m_i	k_i	φ_i	Прямий хід		Зворотний хід
					c_i	d_i	y_i
1	0,05	–1,990	0,995	0,0005	–0,502	–0,994	1,046
2	0,10	–1,985	0,990	0,0010	–0,672	–0,493	1,088
3	0,15	–1,980	0,985	0,0015	–0,759	–0,325	1,125
4	0,20	–1,975	0,980	0,0020	–0,812	–0,239	1,158
5	0,25	–1,970	0,975	0,0025	–0,848	–0,187	1,187
6	0,30	–1,965	0,970	0,030	–0,876	–0,151	1,213
7	0,35	–1,967	0,966	0,0035	–0,897	–0,124	1,234
8	0,40	–1,956	0,961	0,0040	–0,914	–0,103	1,253
9	0,45	–1,951	0,956	0,0045	–0,928	–0,087	1,267
10	0,50						1,279

Вибравши крок $h = 0{,}1$ та провівши розрахунки, аналогічні попереднім, одержимо табл. 7.4.

Таблиця 7.4

i	x_i	m_i	k_i	φ_i	Прямий хід		Зворотний хід
					c_i	d_i	y_i
1	0,1	–1,960	0,980	0,004	–0,510	–0,976	1,089
2	0,2	–1,941	0,961	0,008	–0,689	–0,470	1,160
3	0,3	–1,992	0,942	0,012	–0,786	–0,293	1,214
4	0,4	–1,904	0,923	0,015	–0,848	–0,197	1,252
5	0,5						1,279

Порівнявши відповідні значення y_i при $x = 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4$, що містять табл. 7.3 і 7.4, бачимо, що їх різниця не перевищує 0,002, тому похибка більш точного розв'язку з кроком $h = 0{,}05$ задовольняє умову завдання і його можна прийняти як розв'язок.

Приклад 7.9. Знайти розв'язок рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

що задовольняє крайовим умовам:

$$y(0) = 0, y(0{,}4) = 0{,}335,$$

якщо функції $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ задано табл. 7.5.

Таблиця 7.5

x_i	p_i	q_i	f_i
0,0	–1,20	0,78	0,28
0,1	–1,22	0,75	0,25
0,2	–1,24	0,69	0,20
0,3	–1,26	0,64	0,18
0,4	–1,28	0,60	0,15

Розв'язання. Результати обчислень з кроком $h = 0{,}1$ містяться в табл. 7.6.

Таблиця 7.6

x_i	m_i	k_i	$h^2 f_i$	c_i	d_i	y_i
0,0	–2,120	1,128	0,0028	–0,472	0,003	0,000
0,1	–2,122	1,129	0,0025	–0,629	0,004	0,074
0,2	–2,124	1,131	0,0020	–0,768	0,005	0,157
0,3	–2,126	1,132	0,0018			0,254
0,4	–2,128	1,134	0,0015			0,335

Порядок заповнення табл. 7.6.

Прямий хід. Використовуючи дані табл. 7.5, за формулами (7.24) обчислюємо m_i, k_i, $h^2 f$. Врахувавши, що $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $A = 0$, за формулами (7.26) одержуємо:

$$c_0 = {}^1\!/_{m_0} = -0{,}472, \quad d_0 = f_0 h^2 = 0{,}003.$$

Далі, використовуючи формули (7.27), послідовно знаходимо c_1, c_2, d_1, d_2.

Зворотний хід. З крайових умов одержуємо: $y_0 = 0$, $y_4 = 0{,}335$. Останні значення y_i $(i = \overline{3,1})$ послідовно знаходимо за формулами (7.25), наприклад:

$$y_3 = c_2(d_2 - y_4) = -0{,}768(0{,}005 - 0{,}335) = 0{,}254.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Методом прогонки, з точністю до 10^{-2}, знайти розв'язок наступних диференціальних рівнянь, що задовольняють крайові умови: $y(0) = 1$, $y(1) = e^{-1} + 1 = 1{,}367$.

а) $y'' + {}^x\!/_2\, y' + (1 + 2\pi^2 x^2)y = 4x$;

б) $y'' + (x - 1)y' + +3{,}125y = 4x$;

с) $y'' + 2xy' + 2y = \dfrac{2(5 - 2x)}{(2 - x)^3}$.

2. Методом прогонки знайти наближений розв'язок такої крайової задачі:

$$y'' + f_i(x)y' + \cos(ax)y = 2x^2 + 2x - 4, \;\; y(0) = 0, \;\; y(1) = 0,$$
$$a = 0{,}7 + 0{,}05 \cdot k, \quad k = 0 \cup \overline{1,4},$$

якщо функції $f_i(x)$ $(i = \overline{1,5})$ задано табл. 7.7:

Таблиця 7.7

x_i	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$
0,0	–1,7930	–1,7012	–1,6184	–1,5432	–1,4747
0,2	–1,7863	–1,6877	–1,5994	–1,5200	–1,4480
0,4	–1,7832	–1,6776	–1,5838	–1,5000	–1,4246
0,6	–1,7838	–1,6709	–1,5714	–1,4832	–1,4043
0,8	–1,7878	–1,6673	–1,5630	–1,4692	–1,3869
1,0	–1,7953	–1,6668	–1,5555	–1,4581	–1,3722

3. На відрізку $[0;1]$ з кроком $h = 0{,}1$, за крайовими умовами $y(0) = y(1) = 0$, знайти розв'язок таких рівнянь методом прогонки:

а) $y'' + (a + x^3)y' + (1 - x^2)y = e^{1-bx^2}$;

б) $y'' + \dfrac{y'}{\sqrt{x^2 + b}} + ay = x$;

с) $y'' + x^2y' + (a - x)y = \dfrac{x}{x^2 + b}$;

д) $y'' + x^2y' \sin ax + y = \dfrac{1}{b + \sin^2 ax}$.

Параметри a і b приймають значення:

$a = 1 + 0{,}4 \cdot k, k = 0 \cup \overline{1,3}$; $b = 2{,}5 + 0{,}5 \cdot n, n = 0 \cup \overline{1,5}$.

Відповіді

1.

	x								
№ в.	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
а)	1,10	1,25	1,44	1,67	2,01	2,22	2,33	2,25	1,86
б)	1,17	1,31	1,42	1,50	1,64	1,66	1,63	1,58	1,49
с)	1,59	1,68	1,75	1,81	1,97	2.03	2,09	2,17	2,27

2.

i	x	a				
		0,70	0,75	0,80	0,85	0,90
1	0,2	0,20261	0,20249	0,20237	0,20224	0,20211
	0,4	0,31383	0,31358	0,31331	0,31303	0,31273
	0,6	0,31995	0,31959	0,31922	0,31882	0,31840
	0,8	0,21436	0,21406	0,21375	0,21341	0,21306
2	0,2	0,20504	0,20492	0,20480	0,20467	0,20453
	0,4	0,31583	0,31558	0,31530	0,31501	0,31471
	0,6	0,31972	0,31936	0,31899	0,31859	0,31817
	0,8	0,21231	0,21201	0,21170	0,21136	0,21101

i	x	a				
		0,70	0,75	0,80	0,85	0,90
4	0,2	0,20915	0,20902	0,20889	0,20875	0,20861
	0,4	0,31905	0,31878	0,31850	0,31821	0,31789
	0,6	0,31913	0,31877	0,31839	0,31798	0,31756
	0,8	0,20879	0,20850	0,20818	0,20785	0,20751
5	0,2	0,21089	0,21077	0,21064	0,21049	0,21035
	0,4	0,32036	0,32009	0,31980	0,31950	0,31918
	0,6	0,31879	0,31843	0,31805	0,31764	0,31722
	0,8	0,20727	0,20698	0,20667	0,20634	0,20600

3. а)

a	x	b					
		2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
1,0	0,2	–0,19423	–0,18510	–0,17703	–0,16984	–0,16339	–0,15759
	0,4	–0,24802	–0,23242	–0,21869	–0,20653	–0,19571	–0,18600
	0,6	–0,20214	–0,18541	–0,17096	–0,15814	–0,14745	–0,13782
	0,8	–0,10519	–0,09429	–0,08518	–0,07750	–0,07098	–0,06541
1,4	0,2	–0,20076	–0,19096	–0,18232	–0,17472	–0,16776	–0,16158
	0,4	–0,24773	–0,23161	–0,21745	–0,20495	–0,19384	–0,18391
	0,6	–0,19496	–0,17823	–0,16382	–0,15133	–0,14045	–0,13092
	0,8	–0,09782	–0,08724	–0,07843	–0,07103	–0,06477	–0,05945
1,8	0,2	–0,20620	–0,19576	–0,18657	–0,17842	–0,17116	–0,16465
	0,4	–0,24537	–0,22885	–0,21438	–0,20163	–0,19032	–0,18024
	0,6	–0,18622	–0,16962	–0,15536	–0,14304	–0,13234	–0,12299
	0,8	–0,09001	–0,07983	–0,07137	–0,06430	–0,05835	–0,05331
2,2	0,2	–0,21039	–0,19936	–0,18969	–0,18113	–0,17351	–0,16670
	0,4	–0,24097	–0,22420	–0,20953	–0,19664	–0,18524	–0,17059
	0,6	–0,17618	–0,15984	–0,14585	–0,13380	–0,12336	–0,11426
	0,8	–0,08202	–0,07228	–0,06423	–0,05752	–0,05191	–0,04717

б)

a	x	b					
		2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
1,0	0,2	–0,03077	–0,03040	–0,03011	–0,02988	–0,02969	–0,02953
	0,4	–0,05324	–0,05285	–0,05255	–0,05230	–0,05210	–0,05193
	0,6	–0,05964	–0,05944	–0,05929	–0,05917	–0,05907	–0,05899
	0,8	–0,04358	–0,04359	–0,04359	–0,04360	–0,04361	–0,04361
1,4	0,2	–0,03229	–0,03187	–0,03158	–0,03133	–0,03112	–0,03095
	0,4	–0,05579	–0,05537	–0,05504	–0,05478	–0,05456	–0,05437
	0,6	–0,06233	–0,06211	–0,06195	–0,06181	–0,06170	–0,06160
	0,8	–0,04535	–0,04535	–0,04535	–0,04535	–0,04536	–0,04536

a	x	b					
		2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
2,2	0,2	–0,03579	–0,03532	–0,03496	–0,03467	–0,03443	–0,03423
	0,4	–0,06169	–0,06119	–0,06080	–0,06048	–0,06023	–0,06000
	0,6	–0,06853	–0,06826	–0,06806	–0,06789	–0,06775	–0,06763
	0,8	–0,04942	–0,04940	–0,04939	–0,04938	–0,04938	–0,04937

в)

a	x	b					
		2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
1,0	0,2	–0,00925	–0,00782	–0,00677	–0,00597	–0,00534	–0,00483
	0,4	–0,01673	–0,01415	–0,01227	–0,01082	–0,00968	–0,00876
	0,6	–0,01914	–0,01623	–0,01409	–0,01245	–0,01115	–0,01010
	0,8	–0,01394	–0,01187	–0,01033	–0,00915	–0,00821	–0,00744
1,4	0,2	–0,00964	–0,00815	–0,00705	–0,00622	–0,00556	–0,00503
	0,4	–0,01743	–0,01474	–0,01278	–0,01127	–0,01009	–0,00913
	0,6	–0,01990	–0,01687	–0,01465	–0,01294	–0,01159	–0,01050
	0,8	–0,01445	–0,01230	–0,01071	–0,00948	–0,00850	–0,00771
1,8	0,2	–0,01006	–0,00850	–0,00736	–0,00649	–0,00581	–0,00525
	0,4	–0,01818	–0,01538	–0,01333	–0,01176	–0,01052	–0,00952
	0,6	–0,02072	–0,01757	–0,01526	–0,01348	–0,01207	–0,01093
	0,8	–0,01500	–0,01277	–0,01111	–0,00984	–0,00883	–0,00800
2,2	0,2	–0,01053	–0,00889	–0,00771	–0,00679	–0,00608	–0,00549
	0,4	–0,01901	–0,01608	–0,01393	–0,01230	–0,01100	–0,00996
	0,6	–0,02162	–0,01834	–0,01592	–0,01406	–0,01260	–0,01141
	0,8	–0,01560	–0,01328	–0,01155	–0,01023	–0,00917	–0,00832

г)

a	x	b					
		2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
1,0	0,2	–0,03325	–0,02791	–0,02406	–0,02114	–0,01885	–0,01701
	0,4	–0,04938	–0,04155	–0,03586	–0,03154	–0,02816	–0,02542
	0,6	–0,04778	–0,04080	–0,03485	–0,03070	–0,02743	–0,02479
	0,8	–0,03018	–0,02552	–0,02212	–0,01951	–0,01746	–0,01580
1,4	0,2	–0,03217	–0,02714	–0,02348	–0,02069	–0,01849	–0,01672
	0,4	–0,04718	–0,03994	–0,03464	–0,03058	–0,02737	–0,02477
	0,6	–0,04484	–0,03811	–0,03314	–0,02932	–0,02630	–0,02384
	0,8	–0,02777	–0,02369	–0,02067	–0,01833	–0,01647	–0,01495
1,8	0,2	–0,03122	–0,02646	–0,02297	–0,02029	–0,01818	–0,01646
	0,4	–0,04528	–0,03854	–0,03357	–0,02974	–0,02669	–0,02422
	0,6	–0,04242	–0,03630	–0,03174	–0,02819	–0,02536	–0,02305
	0,8	–0,02599	–0,02234	–0,01959	–0,01745	–0,01574	–0,01433

a	x	b					
		2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
2,2	0,2	–0,03053	–0,02598	–0,02261	–0,02002	–0,01797	–0,01630
	0,4	–0,04387	–0,03754	–0,03282	–0,02915	–0,02623	–0,02384
	0,6	–0,04082	–0,03511	–0,03082	–0,02746	–0,02477	–0,02256
	0,8	–0,02503	–0,02162	–0,01903	–0,01700	–0,01536	–0,01401

7.4. Завдання для самостійної, домашньої роботи і приклади їх розв'язання

Завдання 1

1. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку удосконаленим методом ламаних на відрізку $[a;\ b] = [0{,}1;\ 1{,}1]$ з кроком $h = 0{,}1$ при початковій умові $y(0{,}1) = 0{,}15$. Усі обчислення виконувати з чотирма десятковими знаками.

Варіанти до завдання 1

№ 1 $y' = 0{,}133(x^2 + \sin 2x) + 0{,}872y.$

№ 2 $y' = 0{,}215(x^2 + \cos 1{,}5x) + 1{,}283y.$

№ 3 $y' = 0{,}158(x^2 + \sin 0{,}8x) + 1{,}164y.$

№ 4 $y' = 0{,}173(x^2 + \cos 0{,}7x) + 0{,}754y.$

№ 5 $y' = 0{,}221(x^2 + \sin 1{,}2x) + 0{,}452y.$

№ 6 $y' = 0{,}163(x^2 + \cos 0{,}4x) + 0{,}635y.$

№ 7 $y' = 0{,}218(x^2 + \sin 1{,}6x) + 0{,}718y.$

№ 8 $y' = 0{,}145(x^2 + \cos 0{,}5x) + 0{,}842y.$

№ 9 $y' = 0{,}213(x^2 + \sin 1{,}8x) + 0{,}368y.$

№ 10 $y' = 0{,}127(x^2 + \cos 0{,}6x) + 0{,}573y.$

№ 11 $y' = 0{,}232(x^2 + \sin 1{,}4x) + 1{,}453y.$

№ 12 $y' = 0{,}417(x^2 + \cos 0{,}8x) + 0{,}972y.$

№ 13 $y' = 0{,}324(x^2 + \sin 1{,}5x) + 1{,}612y.$

№ 14 $y' = 0{,}263(x^2 + \cos 1{,}2x) + 0{,}453y.$

№ 15 $y' = 0{,}372(x^2 + \sin 0{,}7x) + 0{,}758y.$

№ 16 $y' = 0{,}343(x^2 + \cos 0{,}4x) + 1{,}315y.$

№ 17 $y' = 0{,}276(x^2 + \sin 1{,}6x) + 0{,}988y.$

№ 18 $y' = 0{,}173(x^2 + \cos 0{,}6x) + 1{,}534y.$

№ 19 $y' = 0{,}258(x^2 + \sin 0{,}4x) + 0{,}724y.$

№ 20 $y' = 0{,}317(x^2 + \cos 1{,}4x) + 1{,}344y.$

№ 21 $y' = 0{,}166(x^2 + \sin 1{,}1x) + 0{,}883y.$

№ 22 $y' = 0{,}215(x^2 + \cos 0{,}9x) + 1{,}213y.$

№ 23	$y' = 0{,}188(x^2 + \sin 1{,}5x) + 0{,}885y.$
№ 24	$y' = 0{,}314(x^2 + \cos 0{,}6x) + 0{,}772y.$
№ 25	$y' = 0{,}418(x^2 + \sin 1{,}2x) + 1{,}344y.$
№ 26	$y' = 0{,}273(x^2 + \cos 1{,}3x) + 0{,}687y.$
№ 27	$y' = 0{,}176(x^2 + \sin 0{,}8x) + 1{,}247y.$
№ 28	$y' = 0{,}245(x^2 + \cos 0{,}4x) + 1{,}452y.$
№ 29	$y' = 0{,}184(x^2 + \sin 0{,}6x) + 0{,}747y.$
№ 30	$y' = 0{,}212(x^2 + \cos 1{,}2x) + 1{,}544y.$

Приклад виконання завдання

За умовами *завдання 1* розв'яжемо рівняння

$$y' = 0{,}233(x^2 + \sin 2x) + 0{,}873y.$$

Це рівняння виду: $y' = f(x;\ y)$.

Використовуємо формулу $y_{i+1} = y_i + hy'_{i+\frac{1}{2}}$,

де: $$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + {}^{h}\!/_{2},$$

$$y_i' = f(x_i;\ y_i),\quad y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \left({}^{h}\!/_{2}\right)y_i' = y_i + hf\left(x_{i+\frac{1}{2}};\ y_{i+\frac{1}{2}}\right),$$

$$y'_{i+\frac{1}{2}} = y'\left(x_i + {}^{h}\!/_{2};\ y_{i+\frac{1}{2}}\right) = f\left(x_i + {}^{h}\!/_{2};\ y_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

(враховуємо, що $x_0 = a = 0{,}1$; $y(x_0) = y(0{,}1) = y_0 = 0{,}15$; $x_n = b, i = 0 \cup \overline{1,n}$).

Всі обчислення заносимо до таблиці ($h/2 = 0{,}05$):

i	x_i	y_i	y'_i	${}^{h}\!/_{2} \cdot y_i'$	$x_i + {}^{h}\!/_{2}$	$y_{i+\frac{1}{2}}$	$y'_{i+\frac{1}{2}}$	$hy'_{i+\frac{1}{2}}$
0	0,1	0,15	0,1796	0,0090	0,15	0,1590	0,2129	0,0213
1	0,2	0,1713	0,2496	0,0125	0,25	0,1838	0,2867	0,0287
2	0,3	0,2000	0,3271	0,0164	0,35	0,2164	0,3675	0,0368
3	0,4	0,2368	0,4111	0,0206	0,45	0,2574	0,4544	0,0454
4	0,5	0,2822	0,5007	0,0250	0,55	0,3072	0,5470	0,0547
5	0,6	0,3369	0,5951	0,0296	0,65	0,3667	0,6431	0,0643
6	0,7	0,4012	0,6941	0,0347	0,75	0,4359	0,7440	0,0744
7	0,8	0,4756	0,7972	0,0399	0,85	0,5155	0,8494	0,0849
8	0,9	0,5605	0,8933	0,0447	0,95	0,6052	0,9591	0,0959
9	1,0	0,6564	1,0179	0,0509	1,05	0,7073	1,0755	0,1076
10	1,1	0,7640	–	–	–	–	–	–

Розв'язок – це значення x_i, y_i ($i = 0 \cup \overline{1,10}$), одержані в процесі обчислень (другий та третій стовпці таблиці).

Завдання 2

Використовуючи метод скінченних різниць, одержати розв'язок крайової задачі для звичайного диференціального рівняння з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$; крок $h = 0{,}1$.

Варіанти до завдання 2

№ 1 $y'' + y'/x + 2y = x$, $\begin{cases} y(0{,}7) = 0{,}5, \\ 2y(1) + 3y'(1) = 1{,}2. \end{cases}$

№ 2 $y'' + xy' - 0{,}5\,y/x = 1$, $\begin{cases} y(2) + 2y'(2) = 1, \\ y(2{,}3) = 2{,}15. \end{cases}$

№ 3 $y'' - xy' + y = x + 1$, $\begin{cases} y(0{,}5) + 2y'(0{,}5) = 1, \\ y'(0{,}8) = 1{,}2. \end{cases}$

№ 4 $y'' + 2y' - y/x = 3$, $\begin{cases} y(0{,}2) = 2, \\ 0{,}5y(0{,}5) - y'(0{,}5) = 1. \end{cases}$

№ 5 $y'' - 2y' - xy = x^2$, $\begin{cases} y'(0{,}6) = 0{,}7, \\ y(0{,}9) - 0{,}5y'(0{,}9) = 1. \end{cases}$

№ 6 $y'' - y' + 2y/x = x + 0{,}4$, $\begin{cases} y(1{,}1) - 0{,}5y'(1{,}1) = 2, \\ y'(1{,}4) = 4. \end{cases}$

№ 7 $y'' - 3y' + y/x = 1$, $\begin{cases} y(0{,}4) = 2, \\ y(0{,}7) + 2y'(0{,}7) = 0{,}7. \end{cases}$

№ 8 $y'' + 3y' - y/x = x + 1$, $\begin{cases} y'(1{,}2) = 1, \\ 2y(1{,}5) - y'(1{,}5) = 0{,}5. \end{cases}$

№ 9 $y'' + y'/2 + 3y = 2x^2$, $\begin{cases} y(1) + 2y'(1) = 0{,}6, \\ y(1{,}3) = 1. \end{cases}$

№ 10 $y'' - 1{,}5y' - xy = 0{,}5$, $\begin{cases} 2y(1{,}3) - y'(1{,}3) = 1, \\ y(1{,}6) = 3. \end{cases}$

№ 11 $y'' + 2xy' - y = 0{,}4$, $\begin{cases} 2y(0{,}3) + y'(0{,}3) = 1, \\ y'(0{,}6) = 2. \end{cases}$

№ 12 $y'' - 0{,}5xy' + y = 2$, $\begin{cases} y(0{,}4) = 1{,}2, \\ y(0{,}7) + 2y'(0{,}7) = 1{,}4. \end{cases}$

№ 13 $y'' + 2y'/x - 3y = 2$, $\begin{cases} y'(0{,}8) = 1{,}5, \\ 2y(1{,}1) + y'(1{,}1) = 3. \end{cases}$

№ 14 $y'' + 2x^2y' + y = x$, $\begin{cases} 2y(0{,}5) - y'(0{,}5) = 1, \\ y(0{,}8) = 3. \end{cases}$

№ 15 $y'' - 3xy' + 2y = 1{,}5$, $\begin{cases} y'(0{,}7) = 1{,}3, \\ 0{,}5y(1) + y'(1) = 2. \end{cases}$

№ 16 $y'' + 2xy' - 2y = 0{,}6$, $\begin{cases} y'(2) = 1, \\ 0{,}4y(2{,}3) - y'(2{,}3) = 1. \end{cases}$

№ 17 $y'' + y'/x - 0{,}4y = 2x$, $\begin{cases} y'(0{,}9) = 1{,}7, \\ y(0{,}6) - 0{,}3y'(0{,}6) = 0{,}6. \end{cases}$

№ 18 $y'' - y'/2x + 0{,}8y = x$, $\begin{cases} y(1{,}7) + 1{,}2y'(1{,}7) = 2, \\ y'(2) = 1. \end{cases}$

№ 19 $y'' - y'/3 + xy = 2,$
$\begin{cases} y(0{,}8) = 1{,}6, \\ 3y(1{,}1) - 0{,}5y'(1{,}1) = 1. \end{cases}$

№ 20 $y'' + 0{,}8y' - xy = 1{,}4,$
$\begin{cases} y(1{,}8) = 0{,}5, \\ 2y(2{,}1) + y'(2{,}1) = 1{,}7. \end{cases}$

№ 21 $y'' + 2y' - y/x = 1/x,$
$\begin{cases} 0{,}5y(0{,}9) + y'(0{,}9) = 1, \\ y(1{,}2) = 0{,}8. \end{cases}$

№ 22 $y'' - y'/4 + 2y/x = x/2,$
$\begin{cases} 1{,}5y(1{,}3) - y'(1{,}3) = 0{,}6, \\ 2y(1{,}6) = 0{,}3. \end{cases}$

№ 23 $y'' - 0{,}5y' + 0{,}5xy = 2x,$
$\begin{cases} y'(1) = 0{,}5, \\ 2y(1{,}3) - y'(1{,}3) = 2. \end{cases}$

№ 24 $y'' + 2y' - 1{,}5xy = 2/x,$
$\begin{cases} y(0{,}8) = 1, \\ y(1{,}1) + 2y'(1{,}1) = 1. \end{cases}$

№ 25 $y'' + 2xy' - 1{,}5 = x,$
$\begin{cases} 1{,}4y(1{,}1) + 0{,}5y'(1{,}1) = 2, \\ y'(1{,}4) = 2{,}5. \end{cases}$

№ 26 $y'' - xy'/2 + 0{,}5y = 2x,$
$\begin{cases} 0{,}4y(0{,}2) - y'(0{,}2) = 1{,}5, \\ y'(0{,}5) = 0{,}4. \end{cases}$

№ 27 $y'' + 0{,}6xy' - 2y = 1,$
$\begin{cases} y(1{,}5) = 0{,}6, \\ 2y(1{,}8) - 0{,}8y'(1{,}8) = 3. \end{cases}$

№ 28 $y'' + y'/2x - y = 2/x,$
$\begin{cases} y(0{,}6) = 1{,}3, \\ 0{,}5y(0{,}9) - 1{,}2y'(0{,}9) = 1. \end{cases}$

№ 29 $y'' - 0{,}5x^2y' + 2y = x^2,$
$\begin{cases} y(1{,}9) = 0{,}8, \\ y(1{,}6) + 0{,}7y'(1{,}6) = 2. \end{cases}$

№ 30 $y'' - xy' + 2y = 0{,}8,$
$\begin{cases} y(1{,}2) - 0{,}5y'(1{,}2) = 1, \\ y'(1{,}5) = 2. \end{cases}$

Приклад виконання завдання

$$y'' - xy' + 2y = x + 1;$$
$$\begin{cases} y(0{,}9) - 0{,}5y'(0{,}9) = 2; \\ y(1{,}2) = 1. \end{cases}$$

Розбивши відрізок $[0{,}9; 1{,}2]$ на частини з кроком $h = 0{,}1$, одержимо чотири вузлові точки з абсцисами $x_0 = 0{,}9$; $x_1 = 1{,}0$; $x_2 = 1{,}1$; $x_3 = 1{,}2$. Дві точки $x_0 = 0{,}9$ і $x_3 = 1{,}2$ є крайовими, а дві інші – внутрішніми (рис. 7.1).

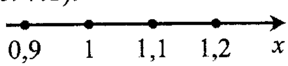


Рис. 7.1

Другу крайову умову та дане рівняння у внутрішніх точках замінимо *центральними скінченно-різницевими відношеннями.*

Рівняння:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - x_i \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + 2y_i = x_i + 1 (i = 1{,}2).$$

Врахувавши, що $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -0,5$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$, $A = 2$, $B = 1$, з крайових умов одержимо:

$$\begin{cases} y_0 - \dfrac{1}{2}\dfrac{y_1 - y_0}{0,1} = 2 \ (i = 0); \\ y_3 = 1 \ (i = 3). \end{cases}$$

Тому дана задача зводитися до розв'язування системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{0,01} - 1 \cdot \dfrac{y_2 - y_0}{0,2} + 2y_1 = 2; \\ \dfrac{y_3 - 2y_2 + y_1}{0,01} - 1,1 \cdot \dfrac{y_3 - y_1}{0,2} + 2y_2 = 2,1; \\ y_0 - \dfrac{1}{2}\dfrac{y_1 - y_0}{0,1} = 2; \\ y_3 = 1. \end{cases}$$

Врахувавши, що $y_3 = 1$ та виконавши перетворення останньої системи, для визначення інших невідомих одержимо систему:

$$\begin{cases} 1,2y_0 - y_1 = 0,4; \\ 1,05y_0 - 1,98y_1 + 0,95y_2 = 0,02; \\ 1,055y_1 - 1,98y_2 = -0,924. \end{cases}$$

Розв'язавши останню систему одним з відомих способів, одержимо: $y_0 = 1,4095$, $y_1 = 1,2914$, $y_2 = 1,1549$.

Відповідь:

x	0,9	1,0	1,1	1,2
y	1,4095	1,2914	1,1549	1,0000

Завдання 3

1. Використовуючи метод прогонки, знайти розв'язок крайової задачі для звичайного диференціального рівняння з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$; крок $h = 0,05$. Скористатися варіантом *завдання 2*.

Приклад виконання завдання

$$y'' - xy' + 2y = x + 1;$$

$$\begin{cases} y(0,9) - 0,5y'(0,9) = 2; \\ y(1,2) = 1. \end{cases}$$

Замінимо рівняння та другу крайову умову центральними скінченно-різницевими відношеннями:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - x_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + 2y_i = x_i + 1 \ (i = \overline{1,5}); \\ y_0 - \dfrac{1}{2}\dfrac{y_1 - y_0}{h} = 2, \quad 1 \cdot y_6 + 0 \cdot \dfrac{y_7 - y_5}{2h} = 1. \end{cases}$$

Звівши подібні члени першого рівняння системи, одержимо:

$$y_{i+1} + \frac{4h^2 - 4}{2 - hx_i} y_i + \frac{2 + hx_i}{2 - hx_i} y_{i-1} = \frac{2h^2(x_i + 1)}{2 - hx_i}.$$

Таким чином (з урахуванням того, що h=0,05):

$$m_i = \frac{-3{,}99}{2 - 0{,}05x_i}, k_i = \frac{2 + 0{,}05x_i}{2 - 0{,}05x_i}, \varphi_i = \frac{0{,}005(1 + x_i)}{2 - 0{,}05x_i} \ (i = 0 \cup \overline{1,6}),$$

$$\alpha_0 = 1, \ \alpha_1 = -0{,}5, \ \beta_0 = 1, \ \beta_1 = 0, \ A = 2, \ B = 1.$$

Прямий хід. Записуємо в табл. 7.8 числа $x_i = 0{,}9 + 0{,}05i$ й обчислюємо величини m_i, k_i, $\varphi_i (i = 0 \cup \overline{1,6})$. Потім за формулами (7.33) знаходимо:

$$c_1 = \frac{-0{,}5 - 1 \cdot 0{,}05}{-2{,}0409 \cdot (-0{,}55) + 1{,}0487 \cdot (-0{,}5)} = -0{,}9195,$$

$$d_1 = -0{,}1857.$$

Записуємо одержані числа в табл. 7.8 та послідовно обчислюємо c_i, d_i за формулами (7.34). Так, при $x_i = 2$ одержуємо:

$$c_2 = \frac{1}{m_2 - k_2 c_1} = \frac{1}{-2{,}0462 + 1{,}0513 \cdot 0{,}9195} = -0{,}9263,$$

$$d_2 = \varphi_2 - k_2 c_1 d_1 = 0{,}0051 - 1{,}0513 \cdot 0{,}9195 \cdot 0{,}1857 = -0{,}1747.$$

Обчислення при $i = \overline{3,6}$ проводяться аналогічно. Всі результати записуємо у відповідні стовпці прямого ходу табл. 7.8.

Зворотний хід. За формулою (7.36) знаходимо y_n:

$$y_6 = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0{,}05 - 0}{0 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}05} = 1{,}0000.$$

Після цього обчислюємо значення $y_i \ (i = \overline{5,1})$ за формулами (7.32):

$$y_5 = c_5(d_5 - y_6) = -0{,}9412(-0{,}1492 - 1) = 1{,}0816,$$

$$y_4 = c_4(d_4 - y_5) = -0{,}9361(-0{,}1560 - 1{,}0816) = 1{,}1585 \text{ і т. д.}$$

Значення y_0 знаходимо за формулою (7.37):

$$y_0 = \frac{-0{,}5 \cdot 1{,}3613 - 2 \cdot 0{,}05}{-0{,}5 - 1 \cdot 0{,}05} = 1{,}4194$$

і записуємо в стовпці y_i табл. 7.8 при $i = 0$.

Таблиця 7.8

i	x_i	m_i	k_i	φ_i	Прямий хід		Зворотний хід
					c_i	d_i	y_i
0	0,90	–2,0409	1,0460	0,0049			1,4194
1	0,95	–2,0435	1,0487	0,0050	–0,9173	–0,1857	1,3613
2	1,00	–2,0462	1,0513	0,0051	–0,9243	–0,1739	1,2985
3	1,05	–2,0488	1,0539	0,0053	–0,9307	–0,1642	1,2309
4	1,10	–2,0514	1,0566	0,0054	–0,9361	–0,1560	1,1585
5	1,15	–2,0541	1,0592	0,0055	–0,9412	–0,1492	1,0816
6	1,20	–2,0567	1,0619	0,0057	–0.9458	–0,1434	1,0000

Відповідь:

x	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20
y	1,4194	1,3613	1,2985	1,2309	1,1585	1,0816	1,0000

Розділ 8. ЗАСТОСУВАННЯ РЯДІВ У ЧИСЛОВИХ РОЗРАХУНКАХ

8.1. Ряд Тейлора для функції однієї змінної

Функцію, що має похідні будь-якого порядку в інтервалі $|x - x_0| < r$, тобто $x_0 - r < r < x_0 + r$, можна розкласти, в цьому інтервалі в збіжний до неї *ряд Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1\,!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2\,!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n\,!}(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, x \in R, \qquad (8.1)$$

якщо в цьому інтервалі виконується умова:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(f(x) - \left(f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\right)\right) = 0. \qquad (8.1^*)$$

Для оцінки залишкового члена можна використовувати формулу (*форма Лагранжа*):

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0,$$

де $r_n(x)$ – *залишковий член* формули Тейлора (або залишок ряду),

$$c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1.$$

Ряд Маклорена одержується з (8.1) при $x_0 = 0$:

$$y = f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 + \ldots$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n, x \in R. \qquad (8.2)$$

Якщо в деякому інтервалі, що містить точку x_0, при довільному n виконується нерівність $\left|f^{(n)}(x)\right| < M$, де M – додатна стала, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ і функція $f(x)$ розкладається в ряд Тейлора.

Приклад 8.1. Розкласти функцію $f(x) = \operatorname{ch} x$ в ряд за степенями x.

Розв'язання. Знаходимо похідні заданої функції: $f'(x) = \operatorname{sh} x$, $f''(x) = \operatorname{ch} x$, $f'''(x) = \operatorname{sh} x, \ldots$; взагалі $f^{(n)}(x) = \operatorname{ch} x$, якщо n – парне і $f^{(n)}(x) = \operatorname{sh} x$, якщо n – непарне. Підставивши $x_0 = 0$, одержимо: $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=1$, $f'''(0)=0, \ldots$; взагалі $f^{(n)}(0)=1$, якщо $n-$ парне і $f^{(n)}(x)=0$, якщо $n-$ непарне. Звідси, на основі (8.2), одержуємо:

$$\operatorname{ch} x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4\,!}+\ \ldots\ +\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ \ldots\,. \qquad (8.2\text{ а})$$

Для встановлення інтервалу збіжності ряду (8.1 а) застосуємо ознаку д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\Big/\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1 -$$

при довільному x. Тому даний ряд збіжний в інтервалі $x \in (-\infty;\ \infty)$. Залишковий член відповідно до формули (8.1*) має вигляд:

$$r_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\operatorname{ch}\theta x\,, \text{якщо } n - \text{непарне}$$

і

$$r_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\operatorname{sh}\theta x\,, \text{якщо } n\ - \text{парне.}$$

Оскільки $0<\theta<1$, то

$$|\operatorname{ch}\theta x| = \frac{e^{\theta x}+e^{-\theta x}}{2} \le e^{|x|}, |\operatorname{sh}\theta x| = \frac{e^{\theta x}-e^{-\theta x}}{2} \le e^{|x|},$$

тому

$$|r_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}.$$

Ряд із загальним членом

$$\frac{|x|^{n+1}}{n!}$$

збіжний при довільному x (в цьому легко переконатися за допомогою ознаки д'Аламбера), тому відповідно до необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

і відповідно:

$$\lim_{n\to\infty} r_n\,(x) = 0$$

при довільному x. Це означає, що сума ряду (8.2 а) дійсно дорівнює $\operatorname{ch} x$ для довільного x.

8.1.1. Способи, що застосовуються при розкладанні функцій у степеневі ряди

Застосовуючи основні розклади в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \ \dots\ + \frac{x^n}{n\,!} + \ \dots, \quad x \in R; \qquad (8.3)$$

$$\sin x = \frac{x}{1\,!} - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \ \dots\ + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ \dots, x \in R; \quad (8.4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \ \dots\ + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ \dots, x \in R; \qquad (8.5)$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ \dots\ + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ \dots,$$
$$x \in (-1;\ 1); \qquad (8.6)$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ \dots\ + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ \dots,$$
$$x \in (-1;\ 1]; \qquad (8.7)$$

біноміальний ряд:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1\,!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\,!}x^2 + \ \dots\ +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1) + \ \dots\ + (\alpha-n+1)}{n\,!}x^n + \ \dots, x \in (-1;\ 1), \alpha \in R; \quad (8.8)$$

при $\alpha = m \in N$ маємо (з попереднього ряду) *біном Ньютона*:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1\,!}x + \frac{m(m-1)}{2\,!}x^2 + \ \dots +$$
$$+ \frac{m(m-1) + \ \dots\ + (m-n+1)}{n\,!}x^n + \ \dots, \quad (8.9)$$

цей розклад має місце:

при $m \geq 0$, якщо $x \in [-1;\ 1]$;
при $m \in (-1;\ 0)$, якщо $x \in (-1;\ 1]$;
при $m \leq -1$, якщо $x \in (-1;\ 1)$;

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ \dots\ + x^n + \ \dots, \quad |x| < 1; \qquad (8.10)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ \dots\ + (-1)^n x^n + \ \dots, \quad |x| < 1; \quad (8.11)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} + \ \dots\ + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ \dots\ , \quad x \in R; \quad (8.12)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \ \dots\ + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ \dots\ , \quad x \in R; \quad (8.13)$$

у багатьох випадках можна просто одержувати розклади даної функції в степеневий ряд, причому відпадає необхідність в дослідженні залишкового члена. Іноді при розкладанні доцільно використовувати почленне диференціювання або інтегрування. При розкладанні в степеневі ряди раціональних функцій рекомендується розкладати ці функції на найпростіші дроби з подальшим застосуванням формули (8.10) або (8.11).

Приклад 8.2. Розкласти за степенями x функцію:

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - 2x^2}.$$

Розв'язання. Розклавши знаменник на множники а потім функцію на елементарні дроби, одержимо:

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - 2x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+2x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x}.$$

Оскільки (згідно (8.10) та (8.11))

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ \dots\ = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{і}$$

$$\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + (2x)^2 - \ \dots\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n,$$

то остаточно одержимо:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^n 2^{n+1}\right) x^n.$$

Останні геометричні прогресії відповідно збіжні при $|x| < 1$, та $|x| < 1/2$, тобто розклад функції $f(x)$ справджується при $x \in (-0{,}5;\ 0{,}5)$.

Приклад 8.3. Розкласти функцію $f(x) = 2^x$ в ряд за степенями x.

Розв'язання. Знайдемо значення функції і її похідних при $x = 0$:

$$f(x) = 2^x, \qquad f(0) = 2^0 = 1;$$

$$f'(x) = 2^x \ln 2, \qquad f'(0) = \ln 2;$$

$$f''(x) = 2^x \ln^2 2, \qquad f''(0) = \ln^2 2;$$

....

$$f^{(n)}(x) = 2^x \ln^n 2, \qquad f^{(n)}(0) = \ln^n 2.$$

Оскільки $0 < \ln 2 < 1$, то за фіксованого x виконується нерівність $|f^{(n)}(x)| < 2^x$ для довільного n. Тому дану функцію можна подати у вигляді суми ряду Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots.$$

Тобто

$$2^x = 1 + x\ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 2}{2!} + \dots, -\infty < x < \infty.$$

Останній розклад можна одержати по-іншому: достатньо в розкладі (8.3) x замінити на $x \ln 2$.

Приклад 8.4. Розкласти функцію $f(x) = \sin^2 x$ в ряд за степенями x.

Розв'язання. Продиференціюємо дану функцію $n+1$ разів:

$$f(x) = \sin^2 x;$$

$$f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x;$$

$$f''(x) = 2\cos 2x = 2\sin(2x + {}^{\pi}/_{2});$$

$$f'''(x) = -2^2 \sin 2x = 2^2 \sin(2x + 2\cdot{}^{\pi}/_{2});$$

$$f^{IV}(x) = -2^3 \cos 2x = 2^3 \sin(2x + 3\cdot{}^{\pi}/_{2});$$

....

$$f^{(n)}(x) = 2^{(n-1)} \sin(2x + {}^{\pi}/_{2}\cdot(n-1));$$

$$f^{(n+1)}(x) = 2^n.$$

Знаходимо значення функцій $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ в точці $x = 0$, а значення $f^{(n+1)}(x)$ визначаємо в точці $x = c$ (див. *форму Лагранжа* для оцінки $r_n(x)$). Одержуємо: $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 0$, $f^{(IV)}(0) = -2^3$, $f^{(V)}(0) = 0$, $f^{(VI)}(0) = 2^5, \dots, f^{(n+1)}(c) = 2^n \cdot \sin(2c + \pi n/2)$.

Знаходимо залишковий член:

$$r_n(x) = \frac{2^n \cdot \sin(2c + \pi n/2)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

тобто

$$r_n(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sin\left(2c + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

за довільного x, а $\sin(2c+\pi n/2)$ – величина обмежена, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$. Тому, функцію $f(x)=\sin^2 x$ можна подати у вигляді суми ряду Маклорена:

$$\sin^2 x=\frac{2}{2\,!}x^2-\frac{2^3}{4\,!}x^4+\frac{2^5}{6\,!}x^6-\frac{2^7}{8\,!}x^8+\ \dots\ .$$

Завдання можна розв'язати й по-іншому. В рівності

$$\sin^2 x={}^1\!/_2\,(1-\cos 2x)$$

замінити $\cos 2x$ його розкладом в степеневий ряд:

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2\,!}+\frac{(2x)^4}{4\,!}-\ \dots\ +(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ \dots\ .$$

Врахувавши, що $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, з останнього ряду одержимо знайдений вище розклад.

Приклад 8.5. Розкласти e^{-x^2} в ряд за степенями x.

Розв'язання. В розкладі (8.3) замінивши x на «$-x^2$» одержимо:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1\,!}+\frac{x^4}{2\,!}-\frac{x^6}{3\,!}+\ \dots\ +(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\,!}+\ \dots,\quad x\in R.$$

Приклад 8.6. Розкласти $\ln x$ в ряд за степенями «$x-1$».

Розв'язання. В розкладі (8.7) замінивши x на «$x-1$» одержимо:

$$\ln(x-1)=\frac{x-1}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\ \dots+$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{(x-)^n}{n}+\ \dots\ ,x\in(0;2].$$

Приклад 8.7. Розкласти $1/x$ в ряд за степенями «$x-2$».

Розв'язання. Використаємо рівність:

$$\frac{1}{x}=\frac{1/2}{1+(x-2)/2}.$$

Застосувавши до правої частини останньої рівності розклад (8.11), одержимо:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\ \dots,$$

тобто:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3+\ \dots .$$

Оскільки, $|(x-2)/2|<1$, то $0<x<4$.

8.2. Ряд Тейлора для функції двох незалежних змінних

Якщо функція $f(x;\ y)$ диференційована $n+1$ разів в деякому околі точки $P_0(x_0;\ y_0)$, то в довільній точці $P(x;\ y)$, з цього околу, функцію можна розкласти в *ряд Тейлора*:

$$f(x;y)=f(x_0;y_0)+\frac{1}{1!}\left[(x-x_0)f'_x(x_0;y_0)+(y-y_0)f'_y(x_0;y_0)\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x-x_0)^2f''_{xx}(x_0;\ y_0)+2(x-x_0)(y-y_0)f''_{xy}(x_0;\ y_0)+\right.$$

$$\left.+(y-y_0)^2f''_{yy}(x_0;\ y_0)\right]+\frac{1}{3!}\left[(x-x_0)^3f'''_{xxx}(x_0;\ y_0)+\right.$$

$$\left.+3(x-x_0)(y-y_0)^2f'''_{xyy}(x_0;\ y_0)+(y-y_0)^3f'''_{yyy}(x_0;\ y_0)\right]+\ \dots +$$

$$+\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n)}f(x_0;\ y_0)+O(\rho^n),$$

де $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

У частинному випадку, при $x_0=y_0=0$ одержуємо *ряд Маклорена*:

$$f(x;\ y)=f(0;\ 0)+\frac{1}{1!}\left[xf'_x(0;\ 0)+yf'_y(0;\ 0)\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[x^2f''_{xx}(0;\ 0)+2xyf''_{xy}(0;\ 0)+y^2f''_{yy}(0;\ 0)\right]+$$

$$+\frac{1}{3!}\left[x^3f'''_{xxx}(0;\ 0)+3x^2yf'''_{xxy}(0;\ 0)+3xy^2f'''_{xyy}(0;\ 0)+\right.$$

$$\left.+y^3f'''_{yyy}(0;\ 0)\right]+\ \dots\ +\left[x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n)}f(0;\ 0)+O(\rho^n),$$

де $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

Приклад 8.8. В околі точки $P_0(-3;\ 1)$ розкласти в ряд Тейлора функцію: $f(x;\ y)=x^2-xy+2y^2-3x+4y+8$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні даної функції та обчислюємо їх значення в точці P_0:

$f'_x(x;\ y)=2x-y-3$, $f'_y(x;\ y)=-x+4y+4$, $f''_{xx}(x;\ y)=2$,

$f''_{xy}(x;\ y) = -1, f''_{yy}(x;\ y) = 4, f(-3;\ 1) = 35, f'_x(-3;\ 1) = -10,$
$f'_y(-3;\ 1) = 11, f''_{xx}(-3;\ 1) = 2, f''_{xy}(-3;\ 1) = -1, f''_{yy}(-3;\ 1) = 4.$

Розклад у ряд Тейлора даної функції має вигляд:

$$f(x;\ y) = 35 - (x+3) + 11(y-1) + (x+3)^2 - (x+3)(y-1) +$$
$$+2(y-1)^2 + \dots .$$

Приклад 8.9. В околі точки $P_0(1;\ 1)$ розкласти в ряд Тейлора функцію: $f(x;\ y) = x^2 \ln y$ до членів другого порядку включно.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні функції першого та другого порядків:

$$f'_x(x;\ y) = 2x\ln y,\ f'_y(x;\ y) = \frac{x^2}{y}, f''_{xx}(x;\ y) = 2\ln y,$$

$$f''_{xy}(x;\ y) = \frac{2x}{y}, f''_{yy}(x;\ y) = -\frac{x^2}{y^2}.$$

Обчислюємо значення функції та її похідних в точці $P_0(1;\ 1)$:

$$f(1;\ 1) = 0, f'_x(1;\ 1) = 0,\ f'_y(1;\ 1) = 1, f''_{xx}(1;\ 1) = 0, f''_{xy}(1;\ 1) = 2,$$
$$f''_{yy}(1;\ 1) = -1.$$

Шуканий розклад набуває вигляду:

$$x^2\ln y = (y-1) + (x-1)(y-1) - {}^1\!/_2\,(y-1)^2 + O(\rho^2),$$

де $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$.

Приклад 8.10. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x;\ y) = \cos x\ \mathrm{sh}\, y$ до членів третього порядку включно.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого, другого та третього порядків:

$$f'_x(x;\ y) = -\sin x\ \mathrm{sh}\, y;\ f'_y(x;\ y) = \cos x\ \mathrm{ch}\, y;$$
$$f''_{xx}(x;\ y) = -\cos x\ \mathrm{sh}\, y;\ f''_{xy}(x;\ y) = -\sin x\ \mathrm{ch}\, y;$$
$$f''_{yy}(x;\ y) = \cos x\ \mathrm{sh}\, y;\ f'''_{xxx}(x;\ y) = \sin x\ \mathrm{sh}\, y$$
$$f'''_{xxy}(x;\ y) = -\cos x\ \mathrm{ch}\, y;\ f'''_{xyy}(x;\ y) = -\sin x\ \mathrm{sh}\, y;$$
$$f'''_{yyy}(x;\ y) = \cos x\ \mathrm{ch}\, y.$$

Обчислимо значення функції і похідних при $x_0 = y_0 = 0$:

$$f(0;\ 0) = 0;\ f'_x(0;\ 0) = 0;\ f'_y(0;\ 0) = 1;\ f''_{xx}(0;\ 0) = 0;$$
$$f''_{xy}(0;\ 0) = 0;\ f''_{yy}(0;\ 0) = 0;\ f'''_{xxx}(0;\ 0) = 0;$$

$$f'''_{xxy}(0;\ 0) = -1;\ f'''_{xyy}(0;\ 0) = 0;\ f'''_{yyy}(0;\ 0) = 1.$$

Тому

$$f(x;\ y) = y - {}^1\!/_2\, x^2 y + {}^1\!/_6\, y^3 + O(\rho^3), \text{ де } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

8.3. Наближене обчислення значень функцій

Припустимо, що функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд (Тейлора) в інтервалі $(-r;\ r)$. Тоді точне значення функції в довільній точці x_0 цього інтервалу визначається сумою числового ряду, який утворюється з степеневого ряду при $x = x_0$, а наближене значення функції $f(x)$ в точці x_0 дорівнює частинній сумі цього ряду $S_n(x_0)$. Похибку $|f(x_0) - S_n(x_0)|$ можна знайти, оцінюючи залишок $|r_n(x_0)|$ ряду.

Тобто для знаходження наближеного значення функції $f(x)$ в її розкладі в степеневий ряд зберігають перші n членів, а інші члени відкидають. Для оцінки похибки знайденого наближеного значення оцінюють суму відкинутих членів.

Якщо даний ряд знакосталий, то ряд, сформований з відкинутих членів, порівнюють з нескінченно спадною геометричною прогресією. У випадку знакозмінного ряду, члени якого задовольняють ознаку Лейбніца, використовується оцінка:

$$|r_n(x_0)| \le u_{n+1}, \tag{8.14}$$

де u_{n+1} – перший з відкинутих членів ряду.

8.3.1. Обчислення значень тригонометричних функцій

Щоб обчислити наближені значення $\sin x$ та $\cos x$, користуються відповідно рядами (8.4) та (8.5). За будь-якого фіксованого значення x ці ряди є знакозмінними рядами лейбніцівського типу, тому для забезпечення заданої точності обчислення користуються нерівністю (8.14).

8.3.2. Обчислення числа e, його степеня та числа π

Якщо в ряд (8.3) підставити $x = 1$, то одержимо числовий ряд для наближеного обчислення *числа* ***e***:

$$e = 1 + 1 + {}^1\!/_{2!} + {}^1\!/_{3!} + \ldots + {}^1\!/_{n!} + \ldots . \tag{8.15}$$

Виведемо формулу для оцінки похибки обчислень за рівністю (8.15). Для цього оцінимо n-й залишок ряду (8.15):

$$|S-S_n|=|r_n|=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\ \ldots=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)\,(n+3)}+\ \ldots\right)<$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ \ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!\,n}$$

(ряд в останніх дужках є геометричною прогресією, $u_1=1$, $q=1/(n+1)<1,\ n=1,2,\ldots$). Отже, якщо в ряді (8.15) взяти n перших членів, то похибка при цьому визначається нерівністю

$$r_n<\frac{1}{n!\,n}. \qquad (8.16)$$

Для наближеного обчислення *числа* **π** можна скористатися рядом (8.6). При $x=1/\sqrt{3}$ одержуємо:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\cdot3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\cdot3^2\sqrt{3}}-\ \ldots$$

$$+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)3^n\sqrt{3}}+\ \ldots\,.$$

З останньої рівності:

$$\pi=2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3\cdot3^1}+\frac{1}{5\cdot3^2}-\ \ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}+\ \ldots\right).$$

Це – ряд лейбніцівського типу, тому для забезпечення заданої точності користуються нерівністю (8.14).

Для знаходження *степеня числа* ***e*** використовують наближену рівність:

$$e^x\cong1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ \ldots+\frac{x^n}{n!},0<x<n+1. \qquad (8.17)$$

Похибка наближеної рівності (8.17) визначається сумою членів, наступних після $x^n/n!$ члена в розкладі e^x:

$$r_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\frac{x^{n+3}}{(n+3)!}+\ \ldots,$$

або

$$r_n = \frac{x^n}{n\,!}\left[\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)\,(n+2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{x^3}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} + \ \dots\right].$$

Замінивши кожен з множників знаменників дробів $n+2$, $n+3$, $n+4, \dots$ меншою величиною $n+1$, одержимо нерівність:

$$r_n < \frac{x^n}{n\,!}\left[\frac{x}{n+1} + \left(\frac{x}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{n+1}\right)^3 + \ \dots\right].$$

Знайдемо суму нескінченно спадної геометричної прогресії в квадратних дужках:

$$r_n < \frac{x^n}{n\,!}\cdot\frac{\frac{x}{(n+1)}}{1-\frac{x}{(n+1)}} \text{ й остаточно: } r_n < \frac{x^n}{n\,!}\cdot\frac{x}{n+1-x}. \quad (8.18)$$

8.3.3. Обчислення логарифмів

Розглянемо ряд (8.7):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ \dots, \quad x \in (-1;\ 1].$$

Коефіцієнти цього ряду спадають досить повільно. Про такі ряди кажуть, що вони збігаються повільно. Незручність використання таких рядів пов'язана з необхідністю обчислення великої кількості членів ряду для забезпечення заданої точності. Крім того, цей ряд можна використовувати тільки для чисел виду $a = 1 + x$, які належать проміжку [0; 2]. Тому виведемо більш зручну формулу для обчислення логарифмів.

Підставивши в рівність (8.7) замість x число «$-x$», одержимо:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ \dots - \frac{x^n}{n} - \ \dots, x \in [-1;\ 1). \quad (8.19)$$

Віднімемо почленно з рівності (8.7) рівність (8.19):

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ \dots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ \dots\right), x \in (-1; 1).$$

При $x = 1/(2n+1)$ остання рівність набуде вигляду:

$$\ln(n+1) = \ln n + 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \ \dots\right.$$

$$+\frac{1}{(2k+1)\ (2n+1)^{2k+1}}+\ ...\Big). \tag{8.20}$$

Цією формулою користуються для обчислення натуральних логарифмів при $n = 1, 2, \dots$. Десятковий логарифм пов'язаний з натуральним рівністю $\lg n = M \ln n$, де $M = \lg e = 1/\ln 10$ – модуль переходу. Беручи до уваги останнє, формула для обчислення десяткових логарифмів набуде вигляду:

$$\lg(n+1) = \lg n + 2M\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\ ...\right.$$

$$\left. ...+\frac{1}{(2k+1)\ (2n+1)^{2k+1}}+\ ...\right). \tag{8.21}$$

Для обчислення натуральних логарифмів можна використовувати наближену рівність (одержуємо з (8.20) заміною n на t):

$$\ln(t+1) \cong \ln t + 2\left(\frac{1}{2t+1}+\frac{1}{3(2t+1)^3}+\frac{1}{5(2t+1)^5}+\ ...\right.$$

$$\left. ...+\frac{1}{(2n-1)\ (2t+1)^{2n-1}}\right). \tag{8.22}$$

Ряд правої частини рівності (8.22) збігається тим швидше, чим більше t. Оцінимо похибку наближеної рівності (8.22) (для того, щоб цього не робити кожного разу при різних значеннях t). Задача зводиться до оцінки суми залишку ряду (8.22):

$$r_n = 2\left(\frac{1}{(2n+1)\ (2t+1)^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+3)\ (2t+1)^{2n+3}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(2n+5)\ (2t+1)^{2n+5}}+\ ...\right).$$

Замінивши кожен з множників $2n+3,\ 2n+5,\ 2n+7, \dots$ меншим числом $2n+1$, одержимо нерівність:

$$r_n < \frac{2}{2n+1}\left[\frac{1}{(2t+1)^{2n+1}}+\frac{1}{(2t+1)^{2n+3}}+\frac{1}{(2t+1)^{2n+5}}+\ ...\right].$$

Знайдемо суму нескінченно спадної геометричної прогресії в квадратних дужках:

$$r_n < \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1/(2t+1)^{2n+1}}{1-1/(2t+1)^2} =$$

$$= \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2t+1)^{2n-1}[(2t+1)^2-1]} =$$

$$= \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2t+1)^{2n-1} 4t\ (t+1)}, \text{тобто}$$

$$r_n < \frac{1}{2(2n+1)\ t\ (t+1)\ (2t+1)^{2n-1}}. \qquad (8.23)$$

8.3.4. Обчислення коренів

Для наближеного обчислення коренів користуються біноміальним рядом (8.8):

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \quad x \in (-1;\ 1).$$

При певних значеннях α за допомогою цієї рівності наближено добувають корені різного степеня із заданого дійсного числа. Формула справедлива при $|x| < 1$. На перший погляд може здатися, що використання цієї формули досить обмежене, проте в кожному конкретному випадку дійсне число подають у такому вигляді, щоб можна було користуватися рівністю (8.8).

8.3.5. Приклади розв'язання задач

Приклад 8.11. Обчислити $\cos 10°$ з точністю до 0,0001.

Розв'язання. Переведемо градусну міру кута в радіанну:

$$x = 10° \text{ відповідає } x = \frac{\pi}{180} \cdot 10 = \frac{\pi}{18} (\text{рад.}).$$

При $x = \pi/18$ з рівності (8.5) матимемо числовий ряд:

$$\cos 10° = \cos\frac{\pi}{18} = 1 - \frac{\left(\pi/18\right)^2}{2!} + \frac{\left(\pi/18\right)^4}{4!} - \frac{\left(\pi/18\right)^6}{6!} + \ldots .$$

Послідовне обчислення модулів членів останнього ряду дасть:

$$u_1 = 1;\ u_2 = \frac{\left(\pi/18\right)^2}{2!} \cong \frac{3{,}14159^2}{648} \cong 0{,}0152;$$

$$u_3 = \frac{\left(\pi/18\right)^4}{4!} \cong \frac{3{,}14159^4}{18^4 \cdot 24} \cong \frac{1}{15000} < 0{,}0001.$$

Тому, для забезпечення заданої точності відповідно до оцінки (8.14) в ряді для визначення $\cos 10°$ досить взяти два перші члени, тобто:

$$\cos 10° \cong 1 - \frac{\left(\pi/_{18}\right)^2}{2!} \cong 1 - 0{,}0152 = 0{,}9848.$$

Приклад 8.12. Користуючись розкладом $\cos x$ в ряд, обчислити $\sin 72°$ з точністю до 0,0001.

Розв'язання. Послідовно одержуємо:

$$\sin 72° = \cos 18° = \cos\frac{\pi}{10} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^6 \ldots;$$

$$\frac{\pi}{10} = 0{,}31416;\ \left(\frac{\pi}{10}\right)^2 = 0{,}09870;\ \left(\frac{\pi}{10}\right)^4 = 0{,}00974.$$

Достатньо взяти три члена ряду, оскільки $(1/6!)\cdot(\pi/10)^6 < 0{,}0001$. Тому,

$$\cos 18° \cong 1 - \frac{0{,}09870}{2} + \frac{0{,}00974}{24} \quad \text{і} \quad \cos 18° \cong 0{,}9511.$$

Аналогічно обчислюємо й значення функції $\sin x$. Саме в такий спосіб складаються таблиці значень тригонометричних функцій.

Приклад 8.13. Обчислити число $\boldsymbol{e}$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. Застосуємо співвідношення (8.15) та (8.16). Оскільки нерівність $(1/n!\,n) < 0{,}001$ виконується при $n \geq 6$, то шукане значення числа $\boldsymbol{e}$ визначається рівністю:

$$e \cong 1 + 1 + {}^1/_{2!} + {}^1/_{3!} + {}^1/_{4!} + {}^1/_{5!} \cong$$

$$\cong 2 + {}^1/_2 + 0{,}1667 + 0{,}04167 + 0{,}0083 \cong 2{,}717.$$

Приклад 8.14. Обчислити $\sqrt{e}$ з точністю до 0,00001.

Розв'язання. Використавши розклад (8.17), одержимо:

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{1!\cdot 2} + \frac{1}{2!\cdot 2^2} + \frac{1}{3!\cdot 2^3} + \ \ldots.$$

Визначимо число n так, щоб похибка наближеної рівності

$$\sqrt{e} \cong 1 + \frac{1}{1!\cdot 2} + \frac{1}{2!\cdot 2^2} + \ \ldots + \frac{1}{n!\cdot 2^n}$$

не перевищувала 0,00001. Скористаємося оцінкою похибки (8.18). Підставимо $x = 1/2$; тоді:

$$r_n < \frac{1}{n!\,2^n}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{n + \frac{1}{2}}, \ \text{ тобто } r_n < \frac{1}{n!\,2^n}\cdot\frac{1}{2n+1}.$$

Шляхом підбору визначимо, при якому значенні n буде виконуватися нерівність $r_n < 0{,}00001$. Наприклад, при $n = 3$, $r_3 < 1/(8 \cdot 6 \cdot 7)$, тобто $r_3 < 1/336$ – недостатня точність. Далі: при $n = 5$, $r_5 < 1/(32 \cdot 120 \cdot 11)$, тобто $1/100000 < r_5 < 1/42240$; при $n = 6$, $r_6 < 1/(64 \cdot 720 \cdot 13)$, тобто $r_6 < 1/100000$. Тому приймаємо $n = 6$:

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1!\,2} + \frac{1}{2!\,2^2} + \frac{1}{3!\,2^3} + \frac{1}{4!\,2^4} + \frac{1}{5!\,2^5} + \frac{1}{6!\,2^6}.$$

Знайдемо суму доданків:

$$1{,}000000 + 0{,}500000 + 0{,}125000 + 0{,}020833 + 0{,}002604 +$$
$$+0{,}000260 + 0{,}000022 = 1{,}648719.$$

Отже, $\sqrt{e} \cong 1{,}648719$. Кожний доданок обчислювався з точністю до 0,000001, щоб їх сума не перевищувала похибки в 0,00001.

Приклад 8.15. Обчислити $1/\sqrt[5]{e}$ з точністю до 0,00001.

Розв'язання. Розкладемо даний вираз у ряд:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}} = e^{-\frac{1}{5}} = 1 - \frac{1}{1!\,5} + \frac{1}{2!\,5^2} - \frac{1}{3!\,5^3} + \frac{1}{4!\,5^4} - \frac{1}{5!\,5^5} + \ \dots\ .$$

Одержаний ряд – це ряд лейбніцівського типу, оскільки $1/(5!\,5^5) < 0{,}00001$, то одержуємо:

$$1/\sqrt[5]{e} \cong 1 - \frac{1}{1!\,5} + \frac{1}{2!\,5^2} - \frac{1}{3!\,5^3} + \frac{1}{4!\,5^4} \cong 0{,}81873.$$

Приклад 8.16. Обчислити число **π** з точністю до 0,001.

Розв'язання. Застосувавши ряд (8.6) при $x = 1/\sqrt{3}$ одержимо:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^2\sqrt{3}} - \ \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot 3^n\sqrt{3}} \dots .$$

Звідки:

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3^1} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \ \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot 3^n} + \ \dots .\right)$$

Обчислимо модулі послідовних членів:

$$u_1 = 1, u_2 = 1/(3 \cdot 3) \cong 0{,}1111, u_3 = 1/(5 \cdot 3^2) \cong 0{,}0222;$$
$$u_4 = 1/(7 \cdot 3^3) \cong 0{,}0053, u_5 = 1/(9 \cdot 3^4) \cong 0{,}0014;$$
$$u_6 = 1/(11 \cdot 3^5) \cong 0{,}0004.$$

Оскільки, $u_6 < 0{,}001$, то шукане значення числа π знайдемо, залишивши в ряді перші п'ять членів, тобто

$$\pi \cong 2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\frac{1}{9\cdot 3^4}\right) \cong$$
$$\cong 3{,}4641\cdot 0{,}9072 \cong 3{,}141.$$

Приклад 8.17. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 1 і 5 см. Визначити гострий кут трикутника, який лежить проти меншого катета, з точністю до 0,0012 радіан.

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = 1/5$, то $\alpha = \operatorname{arctg}(1/5)$. Скористаємося розкладом (8.6):

$$\alpha = \operatorname{arctg}(1/5) = \frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}-\ \dots,$$

звідки $\alpha \cong 0{,}2-0{,}0027$, тобто $\alpha \cong 0{,}197$.

Приклад 8.18. Дано тотожність $\pi/4 = \operatorname{arctg}(1/2)+\operatorname{arctg}(1/3)$. Довести її й обчислити **π** з точністю до 0,001.

Розв'язання. Поклавши в рівності:

$$\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y$$

(рівність очевидна, оскільки тангенси обох частин дорівнюють $(x+y)/(1-xy)$) $x = 1/2$, $y = 1/3$, одержуємо:

$$\operatorname{arctg}1 = \operatorname{arctg}{}^1/_2+\operatorname{arctg}{}^1/_3, \text{ або}$$
$$\pi = 4\left(\operatorname{arctg}{}^1/_2+\operatorname{arctg}{}^1/_3\right).$$

Скориставшись розкладом (8.6), одержимо:

$$\pi = 4\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\ \dots\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\ \dots\right)\right).$$

Виконавши обчислення, знайдемо: $\pi \cong 3{,}1416$. Для обчислення числа π можна користуватися рядами, які збігаються швидше (див. вище), ніж застосовані в цьому прикладі.

Приклад 8.19. Обчислити $\ln 2$ з точністю до 0,001.

Розв'язання

1-й *спосіб.* З формули (8.20) при $n = 1$ знаходимо:

$$\ln 2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \dots + \frac{2}{(2n+1)3^{2n+1}} + \dots.$$

Знайдемо формулу для оцінки похибки:

$$|S - S_n| = |r_n| = 2\left(\frac{1}{2n+3} \cdot \frac{1}{3^{2n+3}} + \frac{1}{2n+5} \cdot \frac{1}{3^{2n+5}} + \dots\right) <$$

$$< \frac{2}{(2n+3)3^{2n+3}}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots\right) =$$

$$= \frac{2}{(2n+3)3^{2n+3}} \cdot \frac{1}{1 - {}^1/_9} = \frac{1}{4(2n+3)3^{2n+1}}.$$

Для забезпечення точності обчислення, потрібно взяти n членів розкладу в ряд $\ln 2$, де число n визначається нерівністю:

$$\frac{1}{4(2n+3)3^{2n+1}} < 0{,}001.$$

Цю нерівність задовольняє $n \geq 2$. Тому,

$$\ln 2 \cong \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} \cong 0{,}6667 + 0{,}0247 = 0{,}6914.$$

Таким чином, $\ln 2 \cong 0{,}691$.

2-й *спосіб.* (з точністю до 0,0001) Прийнявши у формулах (8.22) та (8.23) $t = 1$, одержимо:

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots\right); \; r_n < \frac{1}{4(2n+1)3^{2n-1}}.$$

Шляхом підбору визначимо n так, щоб виконувалася нерівність $r_n < 0{,}0001$. Якщо $n = 2$, то $r_2 < 1/(4 \cdot 5 \cdot 3^3)$, тобто $r_2 < 1/540$; якщо $n = 3$, то $r_3 < 1/(4 \cdot 7 \cdot 3^5)$, тобто $r_3 < 1/6804$; якщо $n = 4$, то $r_4 < 1/(4 \cdot 9 \cdot 3^7)$, тобто $r_4 < 1/10000$. Отже, $n = 4$ і для обчислення $\ln 2$ одержуємо наближену рівність:

$$\ln 2 \cong 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7}\right).$$

Звідки:

$$\ln 2 \cong 0{,}66667 + 0{,}02469 + 0{,}00165 + 0{,}00013 =$$
$$= 0{,}69314 \cong 0{,}6931.$$

Приклад 8.20. Обчислити $\ln 1{,}04$ з точністю до 0,0001.

Розв'язання. Скористаємося розкладом (8.7):

$$\ln 1{,}04 = \ln(1 + 0{,}04) = 0{,}04 - \frac{0{,}04^2}{2} + \frac{0{,}04^3}{3} - \frac{0{,}04^4}{4} + \ \dots,$$

або

$$\ln 1{,}04 = 0{,}04 - 0{,}0008 + 0{,}000021 - 0{,}00000064 + \ \dots,$$

звідки $\ln 1{,}04 \cong 0{,}0392$.

Приклад 8.21. Обчислити $\ln 5$ з точністю до 0,0001.

Розв'язання. Прийнявши у формулах (8.22) та (8.23) $t = 4$, одержимо:

$$\ln 5 = 2\ln 2 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \ \dots\right);$$

$$r_n < \frac{1}{40(2n+1)9^{2n-1}}.$$

Якщо $n = 1$, то $r_1 < 1/(40\cdot 3\cdot 9)$, тобто $r_1 < 1/1080$; якщо $n = 2$, то $r_2 < 1/(40\cdot 5\cdot 9^3)$, тобто $r_2 < 1/10000$. Тому для досягнення вказаної точності, достатньо взяти два члени ряду.

Врахувавши, що $\ln 2 \cong 0{,}6931$, одержуємо:

$$\ln 5 \cong 2\ln 2 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3\cdot 9^3}\right) \cong$$

$$\cong 1{,}38628 + 0{,}22222 + 0{,}00090 = 1{,}60940$$

Приклад 8.22. Обчислити $\sqrt[5]{36}$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. Подамо заданий корінь у вигляді:

$$\sqrt[5]{36} = \sqrt[5]{32+4} = 2\sqrt[5]{1 + {}^{1}/_{8}} = 2\left(1 + {}^{1}/_{8}\right)^{{}^{1}/_{5}}.$$

Прийнявши $\alpha = 1/5$ та $x = 1/8$ з рівності (8.8), одержуємо:

$$\sqrt[5]{36} = 2\left(1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8} + \frac{{}^{1}/_{5}\left({}^{1}/_{5} - 1\right)}{2!}\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{{}^{1}/_{5}\left({}^{1}/_{5} - 1\right)\left({}^{1}/_{5} - 2\right)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^3 + \ \dots\right) =$$

$$= 2 + \frac{2}{5\cdot 8} - \frac{2\cdot 4}{2!\,5^2 8^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 9}{3!\,5^3 8^3} - \frac{2\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{4!\,5^4 8^4} + \ \dots.$$

Останній ряд – це ряд лейбніцівського типу. Обчислимо його члени за модулем:

$$u_1 = 2;\ u_2 = \frac{1}{20};\ u_3 = \frac{2\cdot 4}{2!\,5^2 8^2} = \frac{1}{400};\ u_4 = \frac{2\cdot 4\cdot 9}{3!\,5^3 8^3} < 0{,}001.$$

Тому, в ряді (8.22 а) залишаємо три члени, які забезпечують значення заданого кореня з точністю до 0,001. Одержуємо:

$$\sqrt[5]{36} \cong 2 + \frac{1}{20} - \frac{1}{400} = 2{,}0475.$$

Таким чином, $\sqrt[5]{36} \cong 2{,}048.$

Приклад 8.23. Обчислити $\sqrt[5]{1{,}1}$ з точністю до 0,0001.

Розв'язання. Скористаємося розкладом (8.8), підставивши $x = 0{,}1,\ \alpha = 1/5$. Одержуємо:

$$\sqrt[5]{1{,}1} = (1+0{,}1)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}\cdot 0{,}1 + \frac{(1/5)\ (1/5-1)}{2!}0{,}01 +$$

$$+\frac{(1/5)\,(1/5-1)\ (1/5-2)}{3!}0{,}001 + \ldots =$$

$$= 1 + 0{,}02 - 0{,}0008 + 0{,}000048 - \ \ldots .$$

Відкинувши четвертий і наступні за ним члени, оскільки четвертий член менший за 0,0001, остаточно одержуємо:

$$\sqrt[5]{1{,}1} \cong 1{,}0192.$$

Приклад 8.24. Обчислити $\sqrt[3]{130}$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. Оскільки 5^3 є найближчим до числа 130 кубом цілого числа, то доцільно число 130 подати у вигляді двох доданків: $130 = 5^3 + 5$. Тоді, з урахуванням (8.8), одержуємо:

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{5^3+5} = 5\sqrt[3]{1 + {}^1\!/_{25}} = 5(1+0{,}04)^{1/3} =$$

$$= 5\left(1 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}04 + \frac{(1/3)\ (1/3-1)}{2!}\cdot 0{,}0016 +\right.$$

$$\left.+\frac{(1/3)\ (-2/3)\ (-5/3)}{3!}\cdot 0{,}000064 + \ldots\right) =$$

$$= 5 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}2 - \frac{1}{9}\cdot 0{,}008 + \frac{5}{81}\cdot 0{,}00032 - \ \ldots .$$

Оскільки четвертий член менший за 0,001, тому, відкинувши його й наступні за ним члени, остаточно одержимо:

$\sqrt[3]{130} \cong 5 + 0{,}0667 - 0{,}0009$, тобто $\sqrt[3]{130} \cong 5{,}066.$

Завдання для самостійної роботи

1. *Обчислити* з точністю до 0,0001:

а) $\sin 12°$; б) $\cos(5/4)$; в) $\operatorname{tg} 10°$; г) $\sqrt{\pi}$; д) $\ln 3$; е) $\lg 5$.

Обчислити:

2. e з точністю до 0,00001.

3. $1/\sqrt{e}$ з точністю до 0,00001.

4. $\sin 9°$ з точністю до 0, 0001.

5. ch 0,3 з точністю до 0,0001.

6. $\sqrt[3]{1{,}06}$ з точністю до 0,0001.

7. $\sqrt{27}$ з точністю до 0,001.

8. $\ln 0{,}98$ з точністю до 0,0001.

9. $\ln 1{,}1$ з точністю до 0,0001.

10. $\ln 3$ з точністю до 0,000001.

11. $\ln 10$ з точністю до 0,0001.

12. Знайти найменше додатне значення x, що задовольняє тригонометричне рівняння $2\sin x - \cos x = 0$.

13. Обчислити π з точністю до 0,0001, вважаючи, що $x = 1/\sqrt{3}$ в розкладі $\operatorname{arctg} x$.

Розв'язати задачі 1–26:

1. Обчислити наближене значення $\sqrt[3]{e}$, узявши три члени розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = e^x$, й оцінити похибку.

2. Обчислити наближене значення $\sin 18°$, узявши три члена розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = \sin x$, й оцінити похибку.

3. Обчислити наближене значення $\sqrt[3]{10} = 2\sqrt[3]{1{,}25}$, узявши чотири члена розкладу в ряд Маклорена функції $f(x) = (1 + x)^m$, й оцінити похибку.

В задачах 4–11, користуючись формулою розкладу в ряд Маклорена функцій $e^x, \sin x$ і $\cos x$, обчислити вказані вирази.

4. e^2 з точністю до 0,001.

5. $\sqrt{e}$ з точністю до 0,001.

6. $1/e$ з точністю до 0,0001.

7. $1/\sqrt[4]{e}$ з точністю до 0,0001.

8. $\sin 1°$ з точністю до 0,0001.

9. $\cos 1°$ з точністю до 0,001.

10. $\sin 10°$ з точністю до 0,00001.

11. $\cos 10°$ з точністю до 0,0001.

У задачах 12–18, користуючись формулою розкладу в ряд Маклорена функції $(1+x)^m$, обчислити вказані корені з точністю до 0,001.

12. $\sqrt[3]{30}$. 13. $\sqrt[3]{70}$. 14. $\sqrt[3]{500}$. 15. $\sqrt[3]{1{,}015}$.

16. $\sqrt[5]{250}$. 17. $\sqrt[3]{129}$. 18. $\sqrt[10]{1027}$.

В задачах 19–21, користуючись формулою розкладу в ряд Маклорена функції $\ln((1+x)/(1-x))$, обчислити вказані вирази.

19. $\ln 3$ з точністю до 0,0001.

20. $\lg e = 1/\ln 10$ з точністю до 0,000001.

21. $\lg 5$ з точністю до 0,0001.

22. Дано рівняння $xy + e^x = y$. Користуючись методом невизначених коефіцієнтів, знайти розклад функції y в ряд Тейлора за степенями x. Розв'язати задачу, знайшовши коефіцієнти ряду Тейлора послідовним диференціюванням.

23. Дано рівняння $y = \ln(1+x) - xy$. Користуючись методом невизначених коефіцієнтів, знайти розклад функції y в ряд Тейлора за степенями x. Розв'язати задачу, знайшовши коефіцієнти ряду Тейлора послідовним диференціюванням.

В *задачах 24–26* розв'язати рівняння відносно y (знайти явне вираження для y) за допомогою ряду Тейлора двома способами: *методом невизначених коефіцієнтів* і *послідовним диференціюванням*.

24. $y^3 + xy = 1$ (знайти три члени розкладу).

25. $2\sin x + \sin y = x - y$ (знайти два члени розкладу).

26. $e^x - e^y = xy$ (знайти три члени розкладу).

Відповіді (1-26)

1. 1,39; похибка 0,01. **2.** 0,3090; похибка 0,0001.
3. 2,154; похибка 0,001. **4.** 7,389. **5.** 1,649. **6.** 0,3679. **7.** 0,7788.
8. 0,0175. **9.** 1,000. **10.** 0,17365. **11.** 0,9848. **12.** 3,107. **13.** 4,121.
14. 7,937. **15.** 1,005. **16.** 3,017. **17.** 5,053. **18.** 2,001. **19.** 1,0986.
20. 0,434294. **21.** 0,6990.

22. $1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \ldots + \left[2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right] x^{n-1} + \ldots$.

23. $x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \ldots + (-1)^{n+1}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right] x^n + \ldots$.

24. $1 - \frac{x}{3} + \frac{x^3}{8!} + \ldots$. **25.** $-\frac{x}{2} + \frac{5x^3}{32} + \ldots$. **26.** $x - x^2 + 2x^3 + \ldots$.

8.4. Обчислення границь

При знаходженні границь деякі з виразів, що входять під знак границі, замінюють рядами Маклорена (при $x \to 0$) або Тейлора (при $x \to x_0$).

Приклад 8.25. Знайти

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}.$$

Розв'язання. Замінивши e^x і $\sin x$ їх розкладами в степеневі ряди, одержимо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ \dots\right)-2-2x-x^2}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ \dots\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\ \dots}{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ \dots}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3!}+\frac{2x}{4!}+\ \dots}{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\ \dots}=2.$$

Приклад 8.26. Знайти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

Розв'язання. Використовуючи розклади $\sin x$ та $\operatorname{arctg} x$ в степеневі ряди, одержимо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ \dots-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\ \dots}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5!}\right)x^2+\ \dots\right]=\frac{1}{6}.$$

Приклад 8.27. Обчислити границі:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{a^n}{n\,!};\quad б)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ \dots\ \cdot(\alpha-n+1)}{n\,!}a^n.$$

Розв'язання. Застосовуючи до обох границь ознаку д'Аламбера, одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|a|^{n+1}n\,!}{(n+1)!\;|a|^n}=0 \text{ для довільного } a \text{ і}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{n\,!\,\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\cdot(\alpha-n)a^{n+1}}{(n+1)\,!\,\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)a^n}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{n-\alpha}{n+1}|a|=|a|.$$

Тобто, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^n}{n\,!}=0$ для довільного a,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n\,!}a^n=0 \text{ при } |a|<1 \text{ і}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)|}{n\,!}|a|^n=0 \text{ при } |a|>1.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти:

$$a)\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3};\quad b)\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{e^x-1-x}.$$

Відповідь: 1. *a*) 1/3; *b*) 1.

8.5. Наближене обчислення інтегралів

Якщо підінтегральна функція у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ неперервна на відрізку $[a;\,b]$, але її первісна $F(x)$ не елементарна функція, то формула Ньютона–Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

не дає змоги обчислити цей інтеграл (одержати число). Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ \ldots+a_nx^n+\ \ldots,$$

який рівномірно збіжний до $f(x)$ на відрізку $[a;\,b]$, то, використовуючи теорему про почленне інтегрування ряду, одержимо:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b a_0\,dx+\int_a^b a_1x\,dx+\ \ldots+\int_a^b a_nx^n\,dx+\ \ldots=$$

$$=a_0(b-a)+\frac{1}{2}a_1(b^2-a^2)+\ \ldots+\frac{a_n}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})+\ \ldots.$$

Обчисливши з необхідною точністю суму ряду, одночасно з тією самою точністю знайдемо і значення визначеного інтеграла.

8.6. *Приклади розв'язання задач*

Приклад 8.28. Обчислити інтеграли із заданою точністю ε:

$$a)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{x^2}{2}}dx,\ \ b)\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{\sin x}{x}dx,\ \ \varepsilon=0{,}0001.$$

Розв'язання. *a*) У теорії ймовірностей важливу роль відіграє функція

$$F(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

яку називають *функцією Лапласа* або *інтегралом імовірностей*. Обчислити значення цієї функції точно не можна, оскільки підінтегральний вираз інтеграла

$$\int e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

не виражається через елементарні функції. Якщо підінтегральну функцію розкласти в ряд, скориставшись розкладом (8.3) (замінивши в ньому x на «$-t^2/2$»), а потім проінтегрувати одержаний ряд в межах від 0 до x, то для

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

одержимо ряд:

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{2^2 2!\,5}-\frac{x^7}{2^3 3!\,7}+\ \dots,\ \ x\in(-\infty;\ +\infty).$$

Тому

$$F(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{2^2 2!\,5}-\frac{x^7}{2^3 3!\,7}+\ \dots\right),$$

$$x\in(-\infty;\ +\infty).$$

За останньою формулою для функції $F(x)$ складають таблиці значень з наперед заданою точністю. Нам, фактично, потрібно обчислити $F(1/2)$ з точністю до 0,001. При $x=1/2$ одержуємо:

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^4\cdot 3}+\frac{1}{2^7\cdot 2!\,5}-\frac{1}{2^{10}3!\,7}+\ \dots\right).$$

Одержали ряд лейбніцівського типу. Послідовне обчислення модулів його членів дасть:

$$u_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5;\ u_2 = \frac{1}{2^4 \cdot 3} = 0{,}0208;$$

$$u_3 = \frac{1}{2^7 2!\, 5} = 0{,}0007 < 0{,}001.$$

Отже,

$$F\left(\frac{1}{2}\right) \cong \frac{2}{\sqrt{3{,}1415}}(0{,}5 - 0{,}0208) \cong 0{,}5407 \cong 0{,}541.$$

b) Функцію

$$\sin x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

називають *інтегральним синусом*. Нам, необхідно обчислити $\sin(1/4)$ з точністю до 0,0001. Розкладемо функцію $\sin t/t$ в ряд за степенями t, поділивши почленно степеневий ряд для $\sin t$ на t. Одержимо:

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \ \dots, t \in (-\infty;\ +\infty).$$

Тоді:

$$\sin\frac{1}{4} = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \ \dots\right) dt =$$

$$= \left(t - \frac{t^3}{3 \cdot 3!} + \frac{t^5}{5 \cdot 5!} - \frac{t^7}{7 \cdot 7!} + \ \dots\right)\Bigg|_0^{1/4} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 3!\, 4^3} + \frac{1}{5 \cdot 5!\, 4^5} - \frac{1}{7 \cdot 7!\, 4^7} + \ \dots .$$

Оскільки одержали ряд лейбніцівського типу, то обчислення значень модулів послідовних членів ряду дасть:

$$u_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25;\ u_2 = \frac{1}{3 \cdot 3!\, 4^3} = 0{,}00086;\ u_3 = \frac{1}{5 \cdot 5!\, 4^5} < 0{,}0001.$$

Тому

$$\sin\frac{1}{4} \cong 0{,}25 - 0{,}00086 = 0{,}24914;\ \sin\frac{1}{4} \cong 0{,}2491.$$

Приклад 8.29. З точністю $\varepsilon = 0{,}0001$, обчислити інтеграл:

$$\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

Розв'язання. Замінивши в підінтегральному виразі $\cos x$ його розкладом в степеневий ряд, одержимо:

$$\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\ \dots}{x^2}\,dx =$$

$$= \int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ \dots\right)dx = \left[\frac{1}{2!}x-\frac{x^3}{4!\cdot 3}+\frac{x^5}{6!\cdot 5}-\ \dots\right]_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2!\cdot 2}-\frac{1}{4!\cdot 3\cdot 2^3}+\frac{1}{6!\cdot 5\cdot 2^5}-\ \dots \cong$$

$$\cong 0{,}25 - 0{,}0017 = 0{,}2483.$$

Приклад 8.30. Обчислити з точністю до 0,001:

$$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx.$$

Розв'язання.

$$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \int_0^{0,1} \frac{x - {}^1\!/_2\, x^2 + {}^1\!/_3\, x^3 - {}^1\!/_4\, x^4 + \ \dots}{x}\,dx =$$

$$= \int_0^{0,1}\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\ \dots\right)dx =$$

$$= \left(x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{16}x^4+\ \dots\right)\Big|_0^{0,1} =$$

$$= 0{,}1 - {}^1\!/_4\cdot 0{,}01 + {}^1\!/_9\cdot 0{,}001 - \ \dots \cong 0{,}098.$$

Приклад 8.31. Обчислити з точністю до 0,001:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx.$$

Розв'язання.

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ \dots\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2 \cdot 5} - \frac{x^7}{6 \cdot 7} + \frac{x^9}{24 \cdot 9} - \frac{x^{11}}{120 \cdot 11} + \dots \right) \Bigg|_0^1 \cong$$

$$\cong 1 - 0{,}3333 + 0{,}1000 - 0{,}0238 + 0{,}0046 - 0{,}0008 + \dots = 0{,}747.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити з точністю до 0,001 інтеграли:

а) $\int_0^{0,3} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$; б) $\int_0^{0,5} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} dx$; в) $\int_0^{1/4} \ln(1 + \sqrt{x})\, dx$.

2. Визначити з точністю $\varepsilon = 0{,}001$ довжину однієї півхвилі синусоїди $y = \sin x$.

3. Знайти з точністю $\varepsilon = 0{,}001$ координати центра маси дуги гіперболи $y = 1/x$ між точками з абсцисами $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$.

4. При яких значеннях x наближені формули $\sin x \cong x$, $\cos x \cong 1 - x^2/2$ дають похибку, що не перевищує 0,01; 0,001?

5. Обчислити з точністю $\varepsilon = 0{,}0001$:

$$\int_0^{0,2} \frac{\sin x}{x} dx.$$

6. Обчислити з точністю $\varepsilon = 0{,}001$:

$$\int_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx.$$

7. Обчислити з точністю $\varepsilon = 0{,}001$:

$$\int_0^{0,5} x \ln(1 + x^2)\, dx.$$

8–14. За допомогою розкладу підінтегральної функції в ряд, обчислити такі інтеграли:

8. $\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx$. **9.** $\int_0^1 \frac{\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{x} dx$. **10.** $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

11. $\int_0^1 x^{p-1} \ln(1 - x^q)\, dx \, (p > 0, q > 0)$.

12. $\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1 - x)\, dx$. **13.** $\int_0^\infty \frac{x dx}{e^{2\pi x} - 1}$. **14.** $\int_0^\infty \frac{x dx}{e^x + 1}$.

15–24. Обчислити з точністю $\varepsilon = 0{,}001$ визначений інтеграл, використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд і почленне інтегрування одержаного ряду.

15. $\int_{-0,5}^{0} \frac{\ln(1-x^2)}{x} dx$. **16.** $\int_{0}^{0,6} \frac{\sin(0,6x)dx}{x}$. **17.** $\int_{0}^{0,1} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$.

18. $\int_{-1}^{1} \sin(x^2)\, dx$. **19.** $\int_{0}^{0,5} e^{-x^3}\, dx$. **20.** $\int_{0}^{3/4} \operatorname{arctg}(x^2) dx$.

21. $\int_{-0,2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$. **22.** $\int_{0}^{0,1} \frac{e^{-2x}-1}{x} dx$.

23. $\int_{-0,5}^{0} xe^{-2x^3}\, dx$. **24.** $\int_{0}^{1} \cos\sqrt{2x}\, dx$.

25–34. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^b f(x)dx$$

з точністю $\varepsilon = 0{,}001$, розклавши підінтегральну функцію в степеневий ряд та почленно проінтегрувавши його.

25. $f(x) = e^{-x^2/3}, b = 1$. **26.** $f(x) = \cos\sqrt{x}, b = 1$.

27. $f(x) = x \operatorname{arctg} x, b = 0{,}5$. **28.** $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}, b = 0{,}5$.

29. $f(x) = x\ln(1-x^2), b = 0{,}5$. **30.** $f(x) = xe^{-x}, b = 0{,}5$.

31. $f(x) = \operatorname{arctg} x^2, b = 0{,}5$. **32.** $f(x) = \sin x^2, b = 1$.

33. $f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}, b = 0{,}5$. **34.** $f(x) = \sqrt{1+x^2}, b = 0{,}5$.

У задачах 35–44 інтеграли подати у формі ряду, використовуючи розклад в ряд підінтегральних функцій; вказати області збіжності одержаних рядів.

35. $\int \frac{\sin x}{x} dx$. **36.** $\int \frac{\cos x}{x} dx$. **37.** $\int \frac{e^x}{x} dx$. **38.** $\int \frac{e^x}{x^2} dx$.

39. $\int_0^x e^{-x^2}\, dx$. **40.** $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$. **41.** $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

42. $\int_0^x \sqrt{1+x^3}\, dx$. **43.** $\int_0^x \frac{dx}{1-x^9}$. **44.** $\int_0^x \frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{x^2} dx$.

У задачах 45–49 обчислити наближене значення визначених інтегралів, взявши вказане число членів (n) розкладу підінтегральної функції в ряд; вказати похибку.

45. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{x} dx$. (3) **46.** $\int_0^{1/4} e^{-x^2} dx$. (3) **47.** $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$. (2)

48. $\int_{0,1}^{1} \frac{e^x}{x} dx$. (6) **49.** $\int_0^{\sqrt{3}/3} x^3 \operatorname{arctg} x\, dx$. (2)

У задачах 50–53 обчислити, з точністю $\varepsilon = 0{,}001$, інтеграли:

50. $\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3} dx$. **51.** $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$.

52. $\int_0^{0,8} x^{10} \sin x\, dx$. **53.** $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$.

54. Показати, що в інтервалі $(-0{,}1;\ 0{,}1)$ функція

$$\int_0^x e^{-x^2} dx$$

відрізняється від функції $\operatorname{arctg} x - x^5/10$ не більше, ніж на 10^{-7}.

55. Врахувавши тотожність $\pi/4 = 4 \operatorname{arctg}(1/5) - \operatorname{arctg}(1/239)$, обчислити π з 10-ма правильними знаками.

56. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 x^x dx.$$

57. Обчислити з точністю $\varepsilon = 0{,}0001$

$$\int_0^{0,5} e^{\sin x} dx.$$

58. Обчислити з точністю $\varepsilon = 0{,}001$

$$\int_0^{\pi/6} \sqrt{\cos x}\, dx.$$

59. Розкласти в ряд Тейлора функцію

$$y = e^{x^2} \int_0^x e^{-x^2} dx$$

двома способами: шляхом безпосереднього обчислення послідовних похідних при $x = 0$ та шляхом множення відповідних рядів.

60. Обчислити площу, обмежену лінією $y^2 = x^3 + 1$, віссю ординат і прямою $x = 1/2$, з точністю до 0,001.

61. Обчислити площу овала $x^4 + y^4 = 1$ з точністю до 0,01.

62. Обчислити довжину дуги лінії $25y^2 = 4x^5$ від вістря до точки перетину з параболою $5y = x^2$ з точністю до 0,0001.

63. Обчислити довжину однієї півхвилі синусоїди $y = \sin x$ з точністю до 0,001.

64. Фігура, обмежена лінією $y = \operatorname{arctg} x$, віссю абсцис і прямою $x = 1/2$, обертається навколо осі абсцис. Обчислити об'єм тіла обертання з точністю до 0,001.

65. Фігура, обмежена лініями $y^3 - x^3 = 1$, $4y + x^3 = 0$, прямою $y = 1/2$ і віссю ординат, обертається навколо осі ординат. Обчислити об'єм тіла обертання з точністю до 0,001.

66. Обчислити з точністю до 0,001 координати центра мас дуги гіперболи $y = 1/x$, обмеженої точками з абсцисами $x_1 = 1/4$ та $x_2 = 1/2$.

67. Обчислити з точністю до 0,01 координати центра мас криволінійної трапеції, обмеженої лінією $y = 1/\ln x$, прямими $x = 1{,}5$ і $x = 2$ та віссю абсцис.

Відповіді

9. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2}$. **10.** $\frac{\pi^2}{12}$.

11. $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(p+nq)}$. **12.** $2 - \frac{\pi^2}{6}$. **13.** $\frac{1}{24}$. **14.** $\frac{\pi^2}{12}$.

35. $C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} + \ldots,$

$$x \in (-\infty;\ +\infty).$$

36. $C + \ln|x| - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n \cdot (2n)!} + \ldots,$

$$x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty).$$

37. $C + \ln|x| + x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \ldots + \frac{x^n}{n \cdot n!} + \ldots, x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty).$

38. $C - \frac{1}{x} + \ln|x| + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3!} + \ldots + \frac{x^n}{n(n+1)!} + \ldots,$

$$x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty).$$

39. $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5 \cdot 2!} - \ ... + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)(n-1)!} + \ ...,$

$$x \in (-\infty;\ +\infty).$$

40. $x - \dfrac{x^3}{3^2} + \dfrac{x^5}{5^2} - \ ... + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2} + \ ...,\ \ x \in [-1;\ 1].$

41. $x + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \dfrac{x^9}{9} + \ ... + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!} \cdot \dfrac{x^{4n-3}}{4n-3} + \ ...,$

$$x \in [-1;\ 1].$$

42. $x + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{1}{2 \cdot 4} \cdot \dfrac{x^7}{7} + \ ... +$

$$+(-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-5)}{2^{n-1}(n-1)!} \cdot \frac{x^{3n-2}}{3n-2} + \ ...,\ \ x \in [-1;\ 1\,].$$

43. $x + \dfrac{x^{10}}{10} + \dfrac{x^{19}}{19} + \ ... + \dfrac{x^{9n-8}}{9n-8} + \ ...,\ \ x \in [-1;\ 1].$

44. $\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{4 \cdot 8}\dfrac{x^7}{7} + \ ... + (-1)^{n+1}\dfrac{3 \cdot 7 \cdot ... \cdot (4n-5)}{4^n \cdot n!}\dfrac{x^{4n-1}}{4n-1} + \ ...,$

$$x \in [-1;\ 1].$$

45. 0,3230; $\varepsilon = 0{,}0001$. **46**. 0,24488; $\varepsilon = 0{,}00001$. **47**. 0,4971; $\varepsilon = 0{,}0001$.

48. 3,518; $\varepsilon = 0{,}001$. **49**. 0,012; $\varepsilon = 0{,}001$. **50**. 32,831. **51**. 0,487. **52**. 0,006. **53**. 0,494. **55**. 3,141592654.

56. $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} - \ ... + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^n} + \ ... .$

Вказівка. Представити x^x в формі $e^{x \ln x}$, розкласти в ряд за степенями $x \ln x$ і проінтегрувати вирази вигляду $x^n \ln^n x$.

57. 0,6449. **58**. 0,511.

59. $x + \dfrac{2}{1 \cdot 3}x^3 + \dfrac{2^2}{1 \cdot 3 \cdot 5}x^5 + \ ... + \dfrac{2^{2n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2\,n-1)}x^{2n-1} + \cdots$

60. 1,015. **61**. 3,71.

Вказівка. Обчислювати площу за формулою

$$S = 4\int_0^1 \sqrt[4]{1 - x^4}\,dx$$

незручно, тому що відповідний ряд при $x = 1$ збігається повільно. Необхідно обчислити площу сектора, обмеженого лінією, віссю ординат і бісектрисою першого координатного кута. Це дає змогу одержати ряд, який швидко збігається.

62. 0,2505. **63**. 3,821. **64**. 0,119. **65**. 1,225. **66**. (0,347; 2,996).

67. (1,71; 0,94).

8.7. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів

8.7.1. Метод послідовного диференціювання

Розглянемо рівняння (7.1) з початковими умовами (7.2) з розд. 7. Припустимо, що шуканий частинний розв'язок $y = y(x)$ можна розкласти в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$ (8.1):

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{y^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots .$$

Початкові умови (7.2) безпосередньо дають нам значення $y^{(k)} = y^{(k)}(x_0)$ при $k = 0 \cup \overline{1, n-1}$. Значення $y^{(n)}(x_0)$ знайдемо із рівняння (7.1), підставляючи $x = x_0$ і використовуючи початкові умови (7.2):

$$y^{(n)}(x_0) = f\left(x_0;\, y_0;\, y_0';\, \ldots;\, y_0^{(n-1)}\right).$$

Значення $y^{(n+1)}(x_0)$, $y^{(n+2)}(x_0), \ldots$, послідовно визначаються диференціюванням рівняння (7.1) і підстановкою

$$x = x_0, y^{(k)}(x_0) = y_k \;\; (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Якщо права частина рівняння (7.1) в околі точки $\left(x_0;\, y_0;\, y_0',;\, \ldots;\, y_0^{(n-1)}\right)$ є аналітичною функцією своїх аргументів, то при значеннях x, достатньо близьких до x_0, існує єдиний розв'язок задачі Коші (7.1), (7.2), який розкладається в ряд Тейлора (8.1). Тоді частинна сума цього ряду буде наближеним розв'язком поставленої задачі.

Аналогічно, метод послідовного диференціювання застосовується і для розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь.

Зауваження. Для деяких числових методів інтегрування диференціальних рівнянь необхідно визначити значення шуканих функцій в декількох точках. Ці значення можна знайти за допомогою степеневих рядів. Таким чином, подання розв'язків степеневими рядами може використовуватися як елемент більш ефективних числових методів наближеного інтегрування диференціальних рівнянь (*методи Адамса*, *Мілна* і ін.). Нижче наведено приклад складання таблиці розв'язку з конкретним кроком.

Якщо рівняння містить особливість, наприклад невизначеність типу «0/0», то числове розв'язування неможливе. У цьому випадку використання степеневих рядів дає можливість уникнути такої особливості.

8.7.2. Метод невизначених коефіцієнтів

Цей метод рекомендується застосовувати при розв'язуванні *лінійних* диференційних рівнянь (зі змінними коефіцієнтами). Суть методу наведемо на прикладі рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \qquad (8.25)$$

з початковими умовами $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$. Нехай кожен із коефіцієнтів рівняння (8.25) можна розкласти в ряд за степенями x:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n.$$

Розв'язок даного рівняння шукатимемо у вигляді ряду

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad (8.26)$$

де c_n – невизначені коефіцієнти.

Диференціюємо обидві частини рівняння (8.26) за x:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Підставляючи одержані ряди для y, y', y'', p, q, r в рівняння (8.25), одержуємо:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n c^n x^{n-1} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n. \qquad (8.27)$$

Виконавши множення рядів і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x в лівій і правій частинах рівності (8.27) одержимо систему:

$$\begin{array}{l|c} x^0 & 2c_2 + c_1 p_0 + c_0 q_0 = r_0; \\ x^1 & 3 \cdot 2c_3 + 2c_2 p_0 + c_1 p_1 + c_1 q_0 + c_0 p_1 + c_0 q_2 = r_1; \\ x^2 & 12c_4 + 3c_3 p_0 + 2c_2 p_1 + c_1 p_2 + c_2 q_0 + c_1 q_1 + c_0 q_2 = r_2; \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^n & (n+2)(n+1)c_{n+2} + L(c_{n+1}, c_n, \dots, c_1, c_0) = q_n. \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} \quad (8.28)$$

де $L(c_{n+1}, c_n, \dots, c_1, c_0)$ означає лінійну функцію аргументів $c_0, c_1, \dots, c_n, c_{n+1}$.

Кожне рівняння системи (8.28) містить на одну невідому більше, у порівнянні з попереднім рівнянням. Коефіцієнти c_0, c_1 знаходять з початкових умов, а всі інші послідовно визначають із системи (8.28). Якщо ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$$

збіжні при $|x| < r$, то одержаний степеневий ряд збіжний в тій же області і є розв'язком рівняння (8.25).

Зауваження 1. Якщо початкові умови задано при $x = x_0$, то заміною $x - x_0 = t$, задача зводиться до розглянутої вище.

Зауваження 2. У деяких випадках, коли інтегрування диференціального рівняння в елементарних функціях неможливе, розв'язок такого рівняння шукають у вигляді степеневого ряду:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n; \qquad (8.29)$$

або ряду:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \qquad (8.30)$$

Невизначені коефіцієнти $c_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ знаходять підстановкою ряду (8.29) (або (8.30)) у відповідне рівняння і прирівнюванням коефіцієнтів при однакових степенях різниці «$x - x_0$» (або «x») в лівій і правій частинах одержаної рівності.

Якщо вдається знайти всі коефіцієнти ряду, то одержаний ряд визначає розв'язок в усій своїй області збіжності.

У тих випадках, коли для рівняння $y' = f(x;\, y)$ потрібно розв'язати задачу Коші (задано початкову умову $y|_{x=x_0} = y_0$), розв'язок можна знаходити за допомогою ряду Тейлора (8.1):

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

або ряду Маклорена (за умови, що $x_0 = 0$):

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n;$$

де $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0;\, y_0)$, а подальші похідні $y^{(n)}(x_0)$ $(n = 2, 3, \dots)$ знаходять послідовним диференціюванням початкового рівняння і підстановкою в результат диференціювання замість $x, y, y', \dots$ значень x_0, y_0, y'_0 і всіх останніх знайдених наступних похідних. Аналогічно за допомогою ряду Тейлора можна інтегрувати й рівняння вищих порядків.

Зауваження 3. Порівнявши ряди (8.29) та (8.1) одержимо:

$$c_n = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}; \tag{8.31}$$

а порівнявши (8.30) та (8.11):

$$c_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}. \tag{8.32}$$

Це означає, що при застосуванні рядів (8.29), (8.30) їх коефіцієнти можна знаходити, відповідно, за формулами (8.31) або (8.32), застосовуючи початкові умови даного диференціального рівняння та послідовно диференціюючи його.

8.7.3. Застосування ряду Тейлора для функції багатьох змінних

Нехай значення змінної x зростають в арифметичній прогресії з різницею h: $x_0, x_1 = x_0 + h, \dots, x_k = x_0 + kh$.

Розкладання в ряд Тейлора шуканої функції y дає значення y_{k+1} для значення x_{k+1} незалежної змінної як функції значення y і її послідовних похідних в точці x_k:

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2!}y''_k + \dots + \frac{h^n}{n!}y_k^{(n)} + \dots . \tag{8.33}$$

Диференціальне рівняння, яке необхідно розв'язати, дасть:

$$y'_k = f(x_k;\, y_k).$$

З останнього послідовним диференціюванням одержуємо:

$$y_k'' = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_k + y_k'\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_k,$$

$$y_k''' = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_k + 2y_k'\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_k + (y_k')^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_k + y_k''\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_k,$$

…………………………………………………………………………

Формулу (8.33) застосовують для $k = 0, 1, 2, \dots$.

Якщо припинити розкладання в ряд на члені з показником (порядок похідної) $n = p$, то це зводиться до заміни розв'язку y між абсцисами x_k і x_{k+1} поліномом p-го порядку, що в точці $(x_k;\ y_k)$ відповідає розв'язку, що проходить через цю точку. Це означає, що зазначений поліном і розв'язок диференціального рівняння співпадають при $x = x_k$ разом з похідними до порядку p.

Приклад 8.32. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - xy = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Розв'язання. Розв'яжемо дане рівняння методом невизначених коефіцієнтів, тобто шукатимемо його розв'язок у вигляді степеневого ряду:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots .$$

Останню рівність продиференціюємо двічі:

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_n\,x^{n-1} + \dots,$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots .$$

Коефіцієнти a_0 і a_1 знайдемо з початкових умов:

$$a_0 = y(0) = 0,\ \ a_1 = y'(0) = 1.$$

Підставивши у рівняння замість y і y'' їх розклади (врахувавши значення знайдених коефіцієнтів a_0 і a_1), одержимо тотожність:

$$2a_2 + 3\cdot 2a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots =$$

$$= x^2 + a_2x^3 + \dots + a_{n-3}x^{n-2} + \dots .$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо:

$$a_2 = 0, a_3 = 0, \dots, n(n-1)a_n = a_{n-3}, \dots .$$

Тому,

$$a_4 = \frac{1}{3 \cdot 4}, a_5 = a_6 = 0, a_7 = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7},$$

$$a_8 = a_9 = 0, a_{10} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}, \dots .$$

Взагалі,

$$a_{3m-1} = a_{3m} = 0,$$

$$a_{3m+1} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 3m(3m+1)}, \quad m = 1, 2, \dots .$$

Отже, шуканий розв'язок має вигляд:

$$y = x + \frac{1}{3 \cdot 4} x^4 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 3m(3m+1)} x^{3m+1} + \dots .$$

За ознакою д'Аламбера легко впевнитися в тому, що утворений ряд збіжний на всій числовій прямій.

Зазначимо, що порядок диференціального рівняння не впливає на його розв'язування за допомогою степеневих рядів.

Приклад 8.33. Розв'язати диференціальне рівняння при заданій початковій умові:

$$y' = xy^2 + 1, \quad y(1) = 0.$$

Розв'язання. Це рівняння нелінійне, і тому підстановка в нього шуканого розв'язку у вигляді степеневого ряду

$$y = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_n(x-1)^n + \dots$$

призведе до досить складних рівнянь для визначення коефіцієнтів $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Тому продиференціюємо дане рівняння декілька разів підряд:

$$y'' = y^2 + 2xyy'; \; y''' = 4yy' + 2xy'^2 + 2xyy'';$$

$$y^{(IV)} = 6y'^2 + 6yy'' + 6xy'y'' + 2xyy'''; \dots .$$

Підставляючи в дане рівнянні і в усі утворені $x = 1$ та беручи до уваги початкову умову, послідовно знайдемо:

$$y'^{(1)} = 1; \; y''^{(1)} = 0; \; y'''^{(1)} = 2; \; y^{(IV)}(1) = 6; \dots .$$

Врахувавши початкову умову та рівність (8.31), одержуємо $(a_n = c_n)$:

$$a_0 = y(1) = 0;\ a_1 = y'^{(1)} = 1;\ a_2 = \frac{1}{2!}y''(1) = 0;$$

$$a_3 = \frac{1}{3!}y'''(1) = \frac{1}{3};\ a_4 = \frac{1}{4!}y^{(IV)}(1) = \frac{1}{4};\dots.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в останній степеневий ряд, остаточно одержимо:

$$y = (x-1) + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{4} + \dots.$$

Приклад 8.34. Розв'язати рівняння:

$$y'' - xy = 0, \text{якщо } y = y_0,\ y' = y'_0 \text{ при } x = 0.$$

Розв'язання. Нехай

$$y = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + \dots.$$

З останнього, диференціюючи, одержуємо:

$$y'' = 2\cdot 1c_2 + 3\cdot 2c_3x + \dots + n(n-1)c_nx^{n-2} +$$
$$+(n+1)nc_{n+1}x^{n-1} + (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \dots.$$

Підставляючи y та y'' в дане рівняння, одержуємо тотожність:

$$(2\cdot 1c_2 + 3\cdot 2c_3x + \dots + n(n-1)c_nx^{n-2} +$$
$$+(n+1)nc_{n+1}x^{n-1} + (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \dots) -$$
$$-x(c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + \dots) = 0.$$

Групуючи в лівій частині одержаної тотожності члени з однаковими степенями x і прирівнюючи до нуля коефіцієнти при них, одержимо:

$$c_2 = 0;\ 3\cdot 2c_3 - c_1 = 0;\ c_3 = \frac{c_1}{3\cdot 2};\ 4\cdot 3c_4 - c_1 = 0;$$

$$c_4 = \frac{c_1}{4\cdot 3};\ 5\cdot 4c_5 - c_2 = 0;\ c_5 = \frac{c_2}{5\cdot 4} \text{ і т. д.}$$

Взагалі,

$$c_{3k} = \frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\dots\cdot(3k-1)3k};$$

$$c_{3k+1} = \frac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\dots\cdot 3k(3k+1)};$$

$$c_{3k+2} = 0\ (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Тому,

$$y = c_0\left(1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \dots\right.$$

$$\left.\dots + \frac{x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot \dots \cdot (3k-1)3k} + \dots\right) +$$

$$+c_1\left(x + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \dots\right.$$

$$\left.\dots + \frac{x^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot \dots \cdot 3k(3k+1)} + \dots\right),$$

де $c_0 = y_0$ і $c_1 = y'_0$.

Застосовуючи ознаку д'Аламбера, легко переконатися, що останній ряд (розв'язок) збіжний при $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Приклад 8.35. Розв'язати рівняння $y' = x + y$; $y_0 = y(0) = 1$.

Розв'язання. $x_0 = 0$, тому розв'язок шукатимемо у вигляді ряду:

$$y = y_0 + y_0'x + \frac{y_0''}{2!}x^2 + \frac{y_0'''}{2!}x^2 + \ \dots .$$

Одержуємо: $y_0 = 1, y'_0 = 0 + 1 = 1$.

Диференціюючи обидві частини рівняння $y' = x + y$, послідовно знаходимо:

$y'' = 1 + y'$; $y_0'' = 1 + 1 = 2$; $y''' = y''$; $y_0''' = 2$ і т. д.

Тому $y = 1 + x + (2/2!)x^2 + (2/3!)x^3 + \ \dots$.

Для розглянутого прикладу розв'язок можна записати в кінцевому вигляді:

$y = 1 + x + 2(e^x - 1 - x)$ або $y = 2e^x - 1 - x$.

Аналогічно слід поступати у випадку диференціальних рівнянь вищих порядків. Дослідження збіжності одержаних рядів, взагалі кажучи, складне і при розв'язуванні задач цього параграфа обов'язковим не передбачається.

Приклад 8.36. Проінтегрувати рівняння $y'' - x^2y = 0$.

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді ряду $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ \dots + c_nx^n + \ \dots$.

Підставляючи y та знайдене y'' у початкове рівняння, одержимо:

$$(2\cdot 1c_2 + 3\cdot 2c_3x + 4\cdot 3c_4x^2 + \ \dots + (n+2)(n+1)c_{n+1}x^n + \ \dots) -$$

$$-x^2(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ \dots + c_n x^n + \ \dots) = 0.$$

Групуємо члени з однаковими степенями x:

$$2 \cdot 1c_2 + 3 \cdot 2c_3x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+4)(n+3)c_{n+4} - c_n]\, x^{n+2} = 0.$$

Прирівнюючи до нуля всі коефіцієнти одержаного ряду (для перетворення рівняння в тотожність), знаходимо:

$$c_2 = c_3 = 0; \; c_{n+4} = \frac{c_n}{(n+3)(n+4)} \;\; (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Останнє співвідношення дозволяє послідовно знайти всі коефіцієнти шуканого розкладу (c_0 і c_1 залишаються довільними і відіграють роль довільних сталих інтегрування):

$$c_{4k} = \frac{c_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (4k-1) \cdot 4k};$$

$$c_{4k+1} = \frac{c_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 4k(4k+1)};$$

$$c_{4k+2} = c_{4k+3} = 0 \; (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Таким чином,

$$y = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (4k-1)4k} +$$

$$+ c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 4k(4k+1)}.$$

Одержані ряди збігаються на всій числовій осі і визначають два лінійно незалежних частинних розв'язки початкового рівняння.

Приклад 8.37. За допомогою ряду Тейлора наближено проінтегрувати рівняння $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$, залишивши шість перших членів розкладу, відмінних від нуля.

Розв'язання. З початкової умови знаходимо: $y'(0) = 0^2 + 1^2 = 1$. Диференціюючи дане рівняння, послідовно одержуємо:

$$y'' = 2x + 2yy'; \; y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy'';$$

$$y^{(IV)} = 6y'y'' + 2yy'''; \; y^{(V)} = 6y''^2 + 8y'y''' + 2yy^{(IV)}.$$

Прийнявши $x = 0$ і використовуючи значення $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, послідовно знаходимо:

$$y''^{(0)} = 2; \; y'''^{(0)} = 8; \; y^{(IV)}(0) = 28; \; y^{(V)}(0) = 14.$$

Шуканий розв'язок має вигляд:

$$y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{28x^4}{4!} + \frac{144x^5}{5!} + \dots .$$

Приклад 8.38. $y'' = x + y^2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$. Знайти чотири перших, відмінних від нуля, члени розкладу.

Розв'язання. Диференціюючи рівняння $y'' = x + y^2$, одержимо:

$$y''' = 1 + 2yy'';\ y^{(IV)} = 2y'^2 + 2yy'';\ y^{(V)} = 6y'y'' + 2yy''';$$

$$y^{(VI)} = 8y'y''' + 6y''^2 + 2yy^{(IV)}.$$

При $x = 0$ одержуємо:

$$y(0) = 0;\ y'^{(0)} = 1;\ y''^{(0)} = 0;\ y'''^{(0)} = 1;\ y^{(IV)}(0) = 2;$$

$$y^{(V)}(0) = 0;\ y^{(VI)}(0) = 16.$$

Розв'язок має вигляд:

$$y = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{16x^6}{6!} + \dots = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \dots .$$

Приклад 8.39. Знайти перші сім членів розкладу в степеневий ряд розв'язку $y = y(x)$ рівняння $y'' + 0{,}1(y')^2 + (1 + 0{,}1x)y = 0$, з початковими умовами: $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

Розв'язання. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді ряду:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots .$$

Безпосередньо з початкової умови: $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

Для визначення $y''(0)$ розв'яжемо дане рівняння відносно y'':

$$y'' = -0{,}1(y')^2 - (1 + 0{,}1x)y.$$

З початкової умови

$$y''(0) = -0{,}1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = -1{,}4.$$

Продиференціювавши послідовно по x ліву і праву частини останнього рівняння, одержимо:

$$y''' = -0{,}2y'y'' - 0{,}1(xy' + y) - y';$$

$$y^{(IV)} = -0{,}2(y'y''' + y''^2) - 0{,}1(xy'' + 2y') - y'';$$

$$y^{(V)} = -0{,}2(y'y^{(IV)} + 3y''y''') - 0{,}1(xy''' + 3y'') - y''';$$

$$y^{(VI)} = -0{,}2(y'y^{(V)} + 4y''y^{(IV)} + 3y'''^2) -$$

$$-0{,}1\left(xy^{(IV)} + 4y'''\right) - y^{(IV)}.$$

Підставляючи початкові умови і значення $y''(0)$, послідовно знаходимо:

$$y'''(0) = -1{,}54,\, y^{(IV)}(0) = 1{,}224,\, y^{(V)}(0) = 0{,}1768,$$
$$y^{(VI)}(0) = -0{,}7308.$$

Таким чином, шуканий наближений розв'язок має вигляд:

$$y(x) \cong 1 + 2x - 0{,}7x^2 - 0{,}2567x^3 + 0{,}051x^4 +$$
$$+0{,}00147x^5 - 0{,}00101x^6.$$

Приклад 8.40. Знайти перші чотири члени розкладу в степеневий ряд розв'язку $y = y(x)$, $z = z(x)$ системи

$$\begin{cases} y'(x) = y\cos x - z\sin x, \\ z'(x) = y\sin x + z\cos x; \end{cases}$$

з початковими умовами: $y(0) = 1,\ z(0) = 0$.

Розв'язання. Функції $y(x)$ і $z(x)$ шукатимемо у вигляді степеневих рядів:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(k)}(0)}{k!}x^k + \ldots;$$
$$z(x) = z(0) + \frac{z'(0)}{1!}x + \frac{z''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{z^{(k)}(0)}{k!}x^k + \ldots.$$

Безпосередньо з початкових умов маємо: $y(0) = 1,\ z(0) = 0$. Підставивши в дану систему $x = 0$ і врахувавши початкові умови, одержимо:

$$y'(0) = 1,\ \ z'(0) = 0.$$

Продиференціюємо дану систему по x:

$$\begin{cases} y''(x) = -(y + z')\sin x - (z - y')\cos x, \\ z''(x) = -(z - y')\sin x + (y + z')\cos x. \end{cases}$$

З останньої системи одержимо: $y''(0) = 1, z''(0) = 1$.

Продиференціюємо останню систему ще раз:

$$\begin{cases} y'''(x) = (z - 2y' - z'')\sin x - (y + 2z' - y'')\cos x, \\ z'''(x) = -(y + 2z' - y'')\sin x - (z - 2y' - z'')\cos x. \end{cases}$$

З останньої: $y'''(0) = 0,\ z'''(0) = 3$. Підставивши знайдені значення похідних в ряди, якими виражаються функції $y(x)$ і $z(x)$, одержимо:

$$y(x) \cong 1 + x + \frac{1}{2}x^2,\ \ z(x) \cong \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3.$$

Приклад 8.41. Для функції $y = y(x)$, яка задовольняє рівняння

$$y'' + xy' + y = 0$$

та початкові умови: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, скласти таблицю значень на відрізку $[0;\ 0{,}2]$ з кроком $h = 0{,}05$. Розв'язок одержати з похибкою, яка не перевищує $0{,}5 \cdot 10^{-4}$.

Розв'язання. Подамо функцію $y = y(x)$ у вигляді ряду:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots,$$

де $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

З даного рівняння одержуємо: $y'' = -xy' - y$. Звідки:

$$y''(0) = -y(0) = 0.$$

Продиференціювавши послідовно дане рівняння, одержимо:

$$y'''(x) = -xy'' - 2y',$$
$$y^{(IV)}(x) = -xy''' - 2y'',$$
$$y^{(V)}(x) = -xy^{(IV)} - 4y''',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n+1)}(x) = -xy^{(n)} - ny^{(n-1)}.$$

З цих рівнянь одержуємо:

$$y'''(0) = -2,\ \ y^{(IV)}(0) = 0,\ \ y^{(V)}(0) = 8,$$
$$y^{(2n)}(0) = 0, y^{(2n+1)}(0) = -2ny^{(2n-1)}(0) = (-1)^n 2^n n!$$

Остаточно

$$y(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} - \dots + (-1)^n \frac{2^n n!\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots.$$

Останній ряд знакозмінний, і його члени за абсолютною величиною на проміжку $[0;\ 0{,}2]$ монотонно спадають. Оскільки залишок такого ряду за абсолютною величиною менший першого члена, що відкидається, то наближена формула

$$y(x) \cong x - {x^3}/_{3}$$

даватиме значення шуканої функції на проміжку $[0;\ 0{,}2]$ з похибкою, меншою ніж:

$$\frac{x^5}{15} \leq \frac{(0.2)^5}{15} \cong 0.00002.$$

Використовуючи одержану формулу, складаємо табл. 8.1 – *розв'язок даного рівняння*:

Таблиця 8.1

x	0	0.05	0.10	0.15	0.20
$y = f(x)$	0	0.0500	0.0997	0.1489	0.1973

Приклад 8.42. Знайти розв'язок рівняння

$$y'' - xy' + y = 1 - \cos x.$$

Розв'язання. Розкладемо коефіцієнти даного рівняння в степеневі ряди:

$$p(x) = -x, \quad q(x) = 1,$$

$$r(x) = 1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \ \dots .$$

Шукатимемо розв'язок даного рівняння у вигляді ряду

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ \dots + c_n x^n + \ \dots .$$

Тоді

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ \dots + nc_n x^{n-1} + \ \dots ,$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + \ \dots +$$
$$+ n(n-1)c_n x^{n-2} + \ \dots .$$

Підставивши одержані ряди в дане рівняння й прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему для визначення коефіцієнтів c_i:

$$\left.\begin{array}{l|c} x^0 & c_0 + 2c_2 = 0; \\ x^1 & 6c_3 = 0; \\ x^2 & -c_2 + 12c_4 = 1/2; \\ x^3 & -2c_3 + 20c_5 = 0; \\ x^4 & -3c_4 + 30c_6 = -1/24; \\ x^5 & -4c_5 + 42c_7 = 0; \\ x^6 & -5c_6 + 56c_8 = 1/720. \end{array}\right\}$$

З початкових умов: $c_0 = 0, \ c_1 = 1$.

Легко помітити, що $c_{2n+1} = 0 \ (n = 1, 2, \dots)$. Далі

$$c_2 = 0, \ c_4 = \frac{1}{24}, \ c_6 = \frac{1}{360}, \ c_8 = \frac{11}{40320}.$$

Таким чином, одержуємо наближений розв'язок задачі у вигляді:

$$y(x) \cong x + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{360} + \frac{11x^8}{40320}.$$

Зауваження. Іноді при розв'язуванні диференційних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів вдається знайти вираз для коефіцієнтів ряду в загальному вигляді. Це продемонстровано в поданому нижче прикладі.

Приклад 8.43. Знайти розв'язок рівняння

$$y'' + xy' + 2y = 12,$$

що задовольняє початкові умови: $y(0) = 5,\ y'(0) = 2$ у вигляді ряду за степенями x.

Розв'язання. Шукатимемо розв'язок у вигляді ряду

$$y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ ... + c_nx^n + \ ... .$$

Тоді

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ ... + nc_nx^{n-1} + \ ...,$$

$$y'' = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3x + \ ... + n(n-1)c_nx^{n-2} + \ ... .$$

Підставивши одержані ряди в рівняння й прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x в лівій і правій частинах рівняння, одержимо систему:

$$\left.\begin{array}{l|c}
x^0 & 2c_2 + 2c_0 = 12; \\
x^1 & 3 \cdot 2c_3 + 3c_1 = 0; \\
x^2 & 4 \cdot 3c_4 + 4c_2 = 0; \\
x^3 & 5 \cdot 4c_5 + 5c_3 = 0; \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x^n & (n+1)(n+2)c_{n+2} + (n+2)c_n = 0.
\end{array}\right\}$$

З початкових умов: $c_0 = 5, c_1 = 2$. Розв'язуючи останню систему, послідовно знаходимо:

$$c_2 = 6 - c_0 = 1,\ \ c_3 = -\frac{c_1}{2} = -1,\ \ c_4 = -\frac{c_2}{3},$$

$$c_5 = -\frac{c_3}{4}, \ldots, c_{n+2} = -\frac{c_n}{n+1}.$$

Випишемо окремо коефіцієнти з непарними й парними номерами:

$$c_3 = -\frac{c_1}{2},\ \ c_5 = -\frac{c_3}{4}, \ldots, c_{2k+1} = -\frac{c_{2k-1}}{2k};$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{3},\ \ c_6 = -\frac{c_4}{5}, \ldots, c_{2k} = -\frac{c_{2k-2}}{2k-1}.$$

Звідки одержуємо:

$$c_{2k+1} = -\frac{(-1)^k c_1}{2 \cdot 4 \ldots 2k},\ \ c_{2k} = \frac{(-1)^{k-1} c_2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2k-1)}.$$

Підставимо в останні вирази значення c_1 і c_2:

$$c_{2k+1} = -\frac{(-1)^k \cdot 2}{(2k)!!}, \quad c_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!} \; (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Запишемо два ряди за парними й непарними степеням:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!} x^{2k}, \quad 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!!} x^{2k+1}.$$

Знайдемо області збіжності одержаних рядів.

Для першого ряду границя модуля відношення наступного члена до попереднього становить:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{2k+2} \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{3 \cdot 5 \dots (2k-1)(2k+1)x^{2k}}\right| =$$

$$= x^2 \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} = 0 < 1.$$

Аналогічно для другого ряду:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{2k+3} \cdot 2 \cdot 4 \dots 2k}{2 \cdot 4 \dots 2k(2k+2)x^{2k+1}}\right| =$$

$$= x^2 \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+2} = 0 < 1.$$

Таким чином, обидва ряди збіжні на всій числовій осі, тому розв'язок даного рівняння можна записати у вигляді:

$$y(x) = 5 + 2x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!} x^{2k} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!!} x^{2k+1}.$$

Приклад 8.44. Для абсцис 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 знайти розв'язок диференціального рівняння $y' = (x+y)^2$, що задовольняє початкові умови: $x_0 = y_0 = 0$.

Розв'язання. Оскільки інтеграл обчислюється точно, то можна буде перевірити розрахунки. Дійсно, якщо покласти $x + y = z$, то

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx},$$

і диференціальне рівняння набуває вигляду:

$$\frac{dz}{dx} = 1 + z^2.$$

Звідси

$$z = \operatorname{tg}(x + C).$$

Тому шуканий розв'язок набуває вигляду $y = \operatorname{tg} x - x$.

Встановивши це, обчислимо $y'', y''', \ldots$ послідовним диференціюванням розглядуваного рівняння. Тоді

$$y' = (x + y)^2;$$

$$y'' = 2(x + y)(1 + y');$$

$$y''' = 2(1 + y')^2 + 2(x + y)y'';$$

$$y^{(IV)} = 6y''(1 + y') + 2(x + y)y''';$$

$$y^{(V)} = 8y'''(1 + y') + 6(y'')^2 + 2(x + y)y^{(IV)};$$

$$y^{(VI)} = 10y^{(IV)}(1 + y') + 20y''y''' + 2(x + y)y^{(V)};$$

$$y^{(VII)} = 12y^{(V)}(1 + y') + 20(y''')^2 + 30y''y^{(IV)} + 2(x + y)y^{(VI)};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

Врахувавши початкові умови, одержуємо: $y = y' = y'' = 0$, $y''' = 2, y^{(IV)} = 0, y^{(V)} = 16, y^{(VI)} = 0, y^{(VII)} = 272$. При $h = 0{,}1$ восьмий член розкладу в ряд Тейлора рівний $10^{-7} \cdot 272/7!$ Він порядку $5 \cdot 10^{-9}$. У розкладі цим членом знехтуємо.

З одержаного розв'язку послідовно обчислюємо y_{k+1} а за одержаними формулами: $y'_{k+1}, y''_{k+1}, \ldots$.

Результати обчислень наведено в таблиці, в якій $y_т$ – точне значення y:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0	0,00033467	0,00271002	0,00933623	0,02279317
y'	0	0,01006704	0,04109135	0,09568890	
y''	0	0,2026895	0,4220793	0,6778725	
y'''	2	2,081144	2,338856	2,820449	
$y^{(IV)}$	0	1,64600	3,58476	6,20136	
$y^{(V)}$	16	17,3936	22,0020	31,3164	
$y^{(VI)}$	0	28,55	65,98	125,56	
$y_т$	0	0,00033467	0,00271004	0,00933625	0,02279322
$y_т - y$	0	0,00000000	0,00000002	0,00000002	0,00000005

Приклад 8.45. Знаючи диференціальне рівняння руху точки:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1 + 0{,}1t)x + 0{,}1\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0,$$

знайти швидкість x' та прискорення x'' для моментів часу t, рівних 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5, якщо $x(0) = 1, x'(0) = 2$.

Розв'язання. З даного рівняння одержуємо:

$$x'' = -x - 0{,}1tx - 0{,}1(x')^2.$$

З останнього виразу послідовним диференціюванням одержуємо:

$$x''' = -x' - 0{,}1(tx' + x) - 0{,}2x'x'';$$

$$x^{(IV)} = -x'' - 0{,}1(tx'' + 2x') - 0{,}2(x'x''' + (x'')^2);$$

$$x^{(V)} = -x''' - 0{,}1(tx''' + 3x'') - 0{,}2\big(x'x^{(IV)} + 3x''x'''\big);$$

$$x^{(VI)} = -x^{(IV)} - 0{,}1\big(tx^{(IV)} + 4x'''\big) -$$

$$-0{,}2(x'x^{(IV)} + 4x''x^{(IV)} + 3(x''')^3) \text{ і т. д.}$$

Поклавши в останніх рівностях $t = 0$ та використавши початкові умови ($x_0 = 1,\ x_0' = 2$), знайдемо:

$$x_0'' = -1{,}4;\ x_0''' = -1{,}54;\ x_0^{(IV)} = 1{,}224;$$

$$x_0^{(V)} = 0{,}1768;\ x_0^{(VI)} = -0{,}7308.$$

Оскільки (на основі ряду Маклорена):

$$x = 1 + t\frac{x_0'}{1!} + t^2\frac{x_0''}{2!} + t^3\frac{x_0'''}{3!} + t^4\frac{x_0^{(IV)}}{4!} + t^5\frac{x_0^{(V)}}{5!} + t^6\frac{x_0^{(VI)}}{6!} + \ \dots,$$

то для шуканого розв'язку, з точністю до t^6, одержуємо:

$$x = 1 + 2t - 0{,}7t^2 - 0{,}2567t^3 + 0{,}051t^4 + 0{,}00147t^5 -$$

$$-0{,}00101t^6.$$

Тому,

$$x' = 2 - 1{,}4t - 0{,}77t^2 + 0{,}204t^3 + 0{,}00735t^4 - 0{,}00606t^5,$$

$$x'' = -1{,}4 - 1{,}54t + 0{,}612t^2 + 0{,}00294t^3 - 0{,}0303t^4.$$

Нижче наведена таблиця містить значення x, x', x'' для відповідного t, обчислені за останніми трьома формулами. Для контролю наведено значення $\bar{x}''$, одержані безпосередньо з точного розв'язку даного рівняння:

t	x	x'	x''	$\bar{x}''$	$x'' - \bar{x}''$
0	1,000	2,000	–1,400	–1,400	0,000
0,1	1,193	1,852	–1,548	–1,549	0,001
0,2	1,370	1,692	–1,683	–1,684	0,001
0,3	1,530	1,517	–1,806	–1,806	0,000
0,4	1,673	1,330	–1,917	–1,917	0,000
0,5	1,796	1,137	–2,015	–2,015	0,000

При $0 \le t \le 1/2$ формули для x, x', x'' дають розв'язок задачі з точністю до третього десяткового знака. При збільшенні t точність цих формул, взагалі кажучи, буде зменшуватись, і при великих значеннях t необхідно враховувати додаткові члени ряду Тейлора.

Зауважимо, що формула одержана для визначення x зовсім непридатна для аналізу стійкості руху точки при $t \to \infty$; для цього застосовують ряди іншого виду.

Зауваження. Метод розкладу розв'язку диференціального рівняння (системи) в степеневі ряди часто використовується як елемент більш практичних методів наближеного інтегрування диференціальних рівнянь (систем). Зокрема, для деяких числових методів інтегрування диференціальних рівнянь необхідно визначити значення шуканих функцій у кількох точках. Ці значення, при дотриманні відомих умов гладкості заданого рівняння, можна з довільним ступенем точності обчислити за допомогою степеневих рядів.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1–11

1. Знайти наближені розв'язки диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах:

а) $y'' - xy' + y + 2 = 0,\ y(0) = y'(0) = 1;$

б) $y' = x - y^2,\ y(1) = 1.$

2–11. За допомогою степеневих рядів знайти розв'язок рівняння при заданих початкових умовах. В № 5–8, 10 встановити області збіжності одержаних розв'язків.

2. $y' = y + x^2$; $y = -2$ при $x = 0$.

3. $y' = 2y + x - 1$; $y = y_0$ при $x = 1$.

4. $y' = y^2 + x^3$; $y = 1/2$ при $x = 0$.

5. $y' = x^2 - y^2$; $y = 0$ при $x = 0$.

6. $(1 - x)y' = 1 + x - y$; $y = 0$ при $x = 0$.

7. $xy'' + y = 0$; $y = 0$; $y' = 1$ при $x = 0$.

8. $y'' + xy = 0$; $y = 1$; $y' = 0$ при $x = 0$.

9. $y'' + (2/x)y' + y = 0$; $y = 1$; $y' = 0$ при $x = 0$.

10. $y'' + (1/x)y' + y = 0$; $y = 1$; $y' = 0$ при $x = 0$.

11. $d^2x/dt^2 + x\cos t = 0$; $x = a$; $dx/dt = 0$ при $x = 0$.

Відповіді до завдань 2–11

2. $y = -2 - 2x - x^2$.

3. $y = \left(y_0 + \frac{1}{4}\right)e^{2(x-1)} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

4. $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \frac{21}{320}x^5 + \ \dots$.

5. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7 \cdot 9}x^7 + \frac{2}{7 \cdot 11 \cdot 27}x^{11} - \ \dots$.

6. $y = x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \ \dots$; ряд збіжний при $|x| \le 1$.

7. $y = x - \frac{x^2}{(1!)^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{(2!)^2 \cdot 3} - \frac{x^4}{(3!)^2 \cdot 4} + \ \dots$;
ряд збіжний при $|x| < +\infty$.

Вказівка. Використати метод невизначених коефіцієнтів.

8. $y = 1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!}x^6 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!}x^9 + \ \dots$;
ряд збіжний при $|x| < +\infty$.

9. $y = \frac{\sin x}{x}$.

Вказівка. Використати метод невизначених коефіцієнтів.

10. $y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ \dots$;
ряд збіжний при $|x| < +\infty$.

Вказівка. Використати метод невизначених коефіцієнтів.

11. $x = a\left(1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{2}{4!}t^4 - \frac{9}{6!}t^6 + \frac{55}{8!}t^8 - \ \dots\right)$.

Завдання 12–54

12–22. За допомогою розкладу в ряд за степенями x проінтегрувати подані рівняння і встановити область існування одержаного розв'язку.

12. $y' + xy = 0$.

13. $y' = x - 2y$; $y(0) = 0$.

Згідно з початковою умовою прийняти: $c_0 = 0$.

14. $y'' + xy' + y = 0$.

15. $y'' - xy' - 2y = 0$.

16. $y'' + x^2 y = 0;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1.$

Згідно з початковою умовою, прийняти $c_0 = 0,\ c_1 = 1.$

17. $y' = x^2 y + y^3,\ y(0) = 1.$ Знайти чотири перших (відмінних від нуля) члени розкладу.

18. $y' = x + 2y^2,\ y(0) = 0.$ Знайти два перших (відмінних від нуля) члени розкладу.

19. $y'' - xy^2 = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$ Знайти чотири перших (відмінних від нуля) члени розкладу.

20. $y' = 2x - y,\ y(0) = 2.$ Знайти точний розв'язок.

21. $y' = y^2 + x,\ y(0) = 1.$ Знайти п'ять перших членів розкладу.

22. $y'' = (2x - 1)y - 1;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$ Знайти п'ять перших (відмінних від нуля) членів розкладу.

У завданнях **23–30** знайти кілька перших членів розкладу в степеневий ряд розв'язку рівняння при вказаних початкових умовах.

23. $y' = y^3 - x;\ y|_{x=0} = 1.$ **24.** $y' = x^2 y^2 - 1;\ y|_{x=0} = 1.$

25. $y' = x^2 - y^2;\ y|_{x=0} = 0.$ **26.** $y' = \dfrac{1 - x^2}{y} + 1;\ y|_{x=0} = 1.$

27. $y' = \dfrac{xy}{1 + x + y};\ y|_{x=0} = 0.$ **28.** $y' = e^y + xy;\ y|_{x=0} = 0.$

29. $y' = \sin y - \sin x;\ y|_{x=0} = 0.$

30. $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2;\ y|_{x=1} = 1.$

31–40. Знайти три перших, відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку $y = y(x)$ диференціального рівняння $y' = f(x;\ y)$, що задовольняє початкову умову $y(0) = y_0$.

31. $y' = \cos x + y^2;\ \ y(0) = 1.$ **32.** $y' = e^x + y^2;\ \ y(0) = 0.$

33. $y' = y + y^2;\ \ y(0) = 3.$ **34.** $y' = 2e^y - xy;\ \ y(0) = 0.$

35. $y' = \sin x + y^2;\ \ y(0) = 1.$ **36.** $y' = e^x + y;\ \ y(0) = 4.$

37. $y' = x^2 + y^2;\ \ y(0) = 2.$ **38.** $y' = \sin x + 0{,}5y^2;\ \ y(0) = 1.$

39. $y' = 2e^y + xy;\ \ y(0) = 0.$ **40.** $y' = x + x^2 + y^2;\ \ y(0) = 5.$

Застосовуючи метод послідовного диференціювання, знайти розв'язок рівнянь та систем рівнянь, що задовольняють дані початкові умови, у вигляді частинної суми ряду (обмежитися чотирма – п'ятьма членами).

41. $y' = y^2 + x^2,\quad y(0) = 1/2.$ **42.** $y' = \cos(x + y),\quad y(0) = 0.$

43. $y' = e^y + x^2, y(1) = 0.$ **44.** $y' = x \ln y,\quad y(1) = 1.$

45. $y'' + y\cos x = 0,\quad y(0) = a,\quad y'(0) = 0.$

46. $y'' + xy' = e^{-x^2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

47. $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = y - z; \end{cases}$ $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

48. $\begin{cases} y' = x + z^2, \\ z' = xy; \end{cases}$ $y(0) = 1$, $z(0) = -1$.

Знайти розв'язок рівнянь, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

49. $y'' + y' + x^2 y = \dfrac{x}{1 - x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

50. $y'' - xy' - 2y = e^{-x^2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = {}^1/_2$.

51. $4xy'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -{}^1/_2$.

52. $xy'' + y' + xy = 0, y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

53. $xy'' + 2y' + xy = 0, y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

54. Скласти таблицю значень розв'язку на проміжку $[0;\ 0{,}15]$ з кроком $h = 0{,}05$, використовуючи одержану частинну суму ряду:

а) для рівняння 41, б) для системи 47, в) для системи 48.

Відповіді до завдань 41–54

41. $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{3}{8}\dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{27}{4}\dfrac{x^4}{4!} + \ \dots$.

42. $y = x - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{2}{5}x^5 - \dfrac{2}{7}x^7 + \ \dots$.

43. $y = 2(x - 1) + 2(x - 1)^2 + {}^5/_3\,(x - 1)^3 + {}^4/_7\,(x - 1)^4 + \ \dots$.

44. $y = 1 + (x - 1) + (x - 1)^2 + \dfrac{1}{3!}(x - 1)^3 + \ \dots$.

45. $y = a\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2x^4}{4!} - \dfrac{9x^6}{6!} + \dfrac{55x^8}{8!} - \ \dots\right)$.

46. $y = 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{6} + \ \dots$.

47. $y = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2}{3}x^3 - \ \dots$; $z = 1 - x + x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \ \dots$.

48. $y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{6} + \ \dots$; $z = -1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{8} + \ \dots$.

49. $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{60}x^6 + \frac{17}{1260}x^7 + \ \dots .$

50. $y = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^{n-1}(2n+2)!}x^{2n+2}.$

51. $y = 1 - \frac{x}{2!} - \frac{x^2}{4!} - \ \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(2n-2)!} + \ \dots = \cos\sqrt{x}.$

52. $y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$

53. $y = 1 - \frac{x^2}{3!} + \ \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \ \dots = \frac{\sin x}{x}.$

54. а) $y_1 = 0{,}51281,\ y_2 = 0{,}52631,\ y_3 = 0{,}54052;$

б) $y_1 = 0{,}04883,\ y_2 = 0{,}09567,\ y_3 = 0{,}014088;$

$z_1 = 0{,}95246,\ z_2 = 0{,}90953,\ z_3 = 0{,}87096;$

в) $y_1 = 1{,}05121,\ y_2 = 1{,}10532,\ y_3 = 1{,}16004;$

$z_1 = -0{,}99875,\ z_2 = -0{,}99466,\ z_3 = -0{,}98757.$

8.8. Завдання для самостійної і домашньої роботи

№ 1

1. Обчислити $\sqrt[10]{1027}$ з точністю до 0,0001.
2. Визначити, з точністю $\varepsilon = 0.001$, довжину однієї півхвилі синусоїди $y = \sin x$.
3. $y' = y^2 + x^3,\quad y(0) = 1/2.$
4. $y' = \cos(2x + y),\quad y(-1) = 2.$

№ 2

1. Обчислити $\sin 12^\circ$ з точністю до 0,0001.
2. Подати $\int \sin x / x \, dx$ у формі ряду та вказати область його збіжності.
3. $y' = \sin x + y^3;\ \ y(0) = 1.$
4. $y'' + y' + x^2 y = x/(1-x),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

№ 3

1. Обчислити $1/e$ з точністю до 0,0001.
2. Обчислити $\int_0^{0,5} (e^x - e^{-x})/2x \, dx$ з точністю до 0,0001.
3. $y' = e^{2x} + y^2;\ \ y(0) = 1.$
4. $xy'' + 2y' + y = x^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1/2.$

№ 4

1. Обчислити $\cos(5/4)$ з точністю до 0,0001.
2. Подати $\int \cos x / x \, dx$ у формі ряду та вказати область його збіжності.
3. $y' = 2e^y - xy;\ \ y(0) = 1.$
4. $xy'' + 2y' + y^2 = x^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

№ 5 1. Обчислити $\sqrt[3]{129}$ з точністю до 0,0001.

2. Подати $\int e^x/x\,dx$ у формі ряду та вказати область його збіжності.

3. $y' = e^x + xy;\ \ y(0) = 3.$

4. $y'' = xe^y + y;\ \ y(1) = 2, y'(1) = 1.$

№ 6 1. Обчислити ln3 з точністю до 0,0001.

2. Обчислити площу овала $x^4 + y^4 = 1$ з точністю до 0,01.

3. $y' = \sin x + 0{,}2y^2;\ \ y(0) = 2.$

4. $y'' = \sin x + 0{,}2y^2;\ \ y(0) = 2, y'(0) = 1.$

№ 7 1. Обчислити lg 5 з точністю до 0,0001.

2. Обчислити $\int_0^{0,3} \operatorname{arctg} x/x\,dx$ з точністю до 0,0001.

3. $y' = xy + y^2;\ \ y(0) = 3.$

4. $y'' = e^y + xy;\ \ y(1) = 2, y'(1) = 1.$

№ 8 1. Обчислити tg 10° з точністю до 0,0001.

2. Подати $\int_0^x (\sqrt[4]{1 + x^4} - 1)/x^2\,dx$ у формі ряду та вказати його область збіжності.

3. $y' = e^y + x^2y;\ \ y(0) = 1.$

4. $y'' - xy' - y = \cos(1 - y)\,, y(1) = -1, y'(1) = 0.$

№ 9 1. Обчислити $\sqrt{\pi}$ з точністю до 0,0001.

2. Обчислити $\int_0^{1/4} \ln\left(1 + \sqrt{x}\right) dx$ з точністю до 0,0001.

3. $y' = x^3 + y^2;\ \ y(0) = 1.$

4. $y'' + xy' + x^2y = x/(1 - x)\,, y(2) = 0, y'(2) = 1.$

№ 10 1. Обчислити e з точністю до 0,00001.

2. Узявши 3 члени розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити наближене значення $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x/x\,dx$ та вказати похибку наближення.

3. $y' = y^2 + x^2,\ \ \ y(0) = 1/2.$

4. $y'' + y' + x^2y = x/(1 - x)\,, y(2) = 0, y'(2) = 1.$

№ 11 1.Обчислити $1/\sqrt{e}$ з точністю до 0,00001.

2. Подати $\int e^x/x^2\,dx$ у формі ряду та вказати область його збіжності.

3. $y' = y^3 + x^2,\ \ \ y(0) = 1/2.$

4. $y' = \cos(2x + y),\ \ \ y(0) = 0.$

№ 12 1. Обчислити $\sin 9°$ з точністю до 0, 0001.

2. При яких значеннях x наближена формула $\sin x \cong x$ дає похибку, що не перевищує 0,01; 0,001?

3. $y' = e^x + y^3;\; y(0) = 1.$

4. $xy'' + 2y' + y^2 = x^2,\; y(1) = 1,\; y'(1) = -1.$

№ 13 1. Обчислити ch 0,3 з точністю до 0,0001.

2. Узявши 3 члени розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити наближене значення $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin x/x\, dx$ та вказати похибку наближення.

3. $y' = xe^y + y;\; y(0) = 2.$

4. $y'' = e^x + xy;\; y(0) = 2, y'(0) = 1.$

№ 14 1. Обчислити $\sqrt[3]{1{,}06}$ з точністю до 0,0001.

2. Подати $\int_0^x e^{-x^2}\, dx$ у формі ряду та вказати область його збіжності.

3. $y' = x\sin x + 0{,}5y^2;\; y(0) = 1.$

4. $y'' = e^y + x^2y;\; y(-1) = 2, y'(-1) = 1.$

№ 15 1. Обчислити $\sqrt{27}$ з точністю до 0, 0001.

2. При яких x наближена формула $\cos x \cong 1 - x^2/2$ дає похибку, що не перевищує 0,01; 0,001?

3. $y' = x + x^3 + y^2;\; y(0) = 1.$

4. $y'' = e^y + \cos(x + y);\; y(-1) = 1, y'(-1) = 2.$

№ 16 1. Обчислити ln 0,98 з точністю до 0,0001.

2. Узявши 2 члени розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити наближене значення $\int_0^{1/2} 1/\sqrt{1 + x^4}\, dx$ та вказати похибку наближення.

3. $y' = xe^x + y;\; y(0) = 2.$

4. $y'' = e^y + \sin(2x + y);\; y(-1) = 2, y'(-1) = 1.$

№ 17 1. Обчислити ln 1,1 з точністю до 0,0001.

2. Подати $\int_0^x 1/\sqrt{1 - x^4}\, dx$ у формі ряду та вказати область його збіжності.

3. $y' = 3e^y - x^2y;\; y(0) = 1.$

4. $y'' = \sin x + 0{,}2y^2;\; y(-1) = 2, y'(-1) = 1.$

№ 18 1. Обчислити ln 3 з точністю до 0,000001.

2. Обчислити $\int_0^{0,5} x\ln(1 + x^2)\, dx$ з точністю $\varepsilon = 0.001$.

3. $y' = y + xy^2;\; y(0) = 2.$

4. $y'' + y' + x^2y = x/(1 - x);\; y(2) = 0, y'(2) = 1.$

№ 19 1. Обчислити $\ln 10$ з точністю до 0,0001.

2. Узявши 3 члени розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити наближене значення $\int_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx$ та вказати похибку наближення.

3. $y' = e^x + y^3;\ \ y(0) = 1/2.$

4. $y'' + y' + x^2 y = 0;\ \ y(-1) = 0,\ y'(-1) = 1.$

№ 20 1. Обчислити e^2 з точністю до 0,0001.

2. Обчислити $\int_0^{0,2} \sin x/x\,dx$ з точністю $\varepsilon = 0.0001$.

3. $y' = x\sin x + y^2;\ \ y(0) = 1.$

4. $xy'' + 2y' + y = 0;\ \ y(1) = 2,\ y'(1) = 1.$

№ 21 1. Обчислити $\sqrt[3]{30}$ з точністю до 0,0001.

2. Подати $\int_0^x 1/(1 - x^9)\,dx$ у формі ряду та вказати його область збіжності.

3. $y' = \cos x + y^2;\ \ y(0) = 1.$

4. $y'' - xy' - 2y = e^{-x^2};\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

№ 22 1. Обчислити $1/\sqrt[4]{e}$ з точністю до 0, 0001.

2. Фігура, обмежена лініями $y^3 - x^3 = 1,\ 4y + x^3 = 0$, прямою $y = 1/2$ і віссю ординат, обертається навколо осі ординат. Обчислити об'єм тіла обертання з точністю до 0,001.

3. $y' = x^2 + y^2;\ \ y(0) = 1/3.$

4. $y'' + xy' + y = x/(1 - x);\ y(2) = 0, y'(2) = 1.$

№ 23 1. Обчислити $\sin 1°$ з точністю до 0,0001.

2. Узявши 6 членів розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити наближене значення $\int_{0,1}^{1} e^x/x\,dx$ та вказати похибку наближення.

3. $y' = 1 + x^3 + y^2;\ \ y(0) = 2.$

4. $xy'' + 2y' + y = 0;\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = -1/2.$

№ 24 1. Обчислити $\cos 10°$ з точністю до 0,0001.

2. Обчислити $\int_0^{0,1} (e^x - 1)/x\,dx$ з точністю $\varepsilon = 0.001$.

3. $y' = x^2 e^y + y;\ \ y(0) = 1.$

4. $y'' + 2y' + xy = x^2;\ \ y(1) = 2,\ y'(1) = 1.$

№ 25 1. Обчислити $\sqrt[3]{70}$ з точністю до 0,0001.

2. Узявши 2 члени розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити наближене значення $\int_0^{\sqrt{3}/3} x^3 \operatorname{arctg} x\, dx$ та вказати похибку наближення.

3. $y' = \sin x + xy^2; \;\; y(0) = 1.$

4. $y'' + y' + xy = 0; \;\; y(1) = 0, \; y'(1) = 1.$

№ 26 1. Обчислити $\sqrt[3]{1{,}015}$ з точністю до 0,0001.

2. Подати $\int_0^x \operatorname{arctg} x/x\, dx$ у формі ряду та вказати його область збіжності.

3. $y' = x + x^3 + y^2; \;\; y(0) = 2.$

4. $y' = \sin(2x + y); \;\; y(0) = 0.$

№ 27 1. Обчислити $\cos 1°$ з точністю до 0,0001.

2. Знайти з точністю $\varepsilon = 0.001$ координати центра маси дуги гіперболи $y = 1/x$ між точками з абсцисами $x_1 = 1/4, x_2 = 1/2.$

3. $y' = \sin x + 0{,}5y^3; \;\; y(0) = 1.$

4. $x^2y'' + 2y' + y = 0; \; y(-1) = 1, \; y'(-1) = -1.$

№ 28 1. Обчислити $\sqrt[5]{250}$ з точністю до 0,0001.

2. Фігура, обмежена лінією $y = \operatorname{arctg} x$, віссю абсцис і прямою $x = 1/2$, обертається навколо осі абсцис. Обчислити об'єм тіла обертання з точністю до 0,001.

3. $y' = 3e^y + xy; \;\; y(0) = 1.$

4. $xy'' + 2y' + y = 0; \; y(0) = 1, \; y'(0) = -1/2.$

№ 29 1. Обчислити $\sqrt{e}$ з точністю до 0,0001.

2. Подати $\int_0^x \sqrt{1 + x^3}\, dx$ у формі ряду та вказати його область збіжності.

3. $y' = x^2y + y^2; \;\; y(0) = 1.$

4. $y'' - xy' - 2y = e^{-x^2}; \; y(0) = 1, y'(0) = 1/2.$

№ 30 1. Обчислити $\sqrt[3]{129}$ з точністю до 0,0001.

2. Узявши 4 члени розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити наближене значення $\int_0^{0{,}5} 1/(1 + x^2) dx$ та вказати похибку наближення.

3. $y' = \sin x + y^2; \;\; y(0) = 1.$

4. $y'' + xy' + y = x/(1 - x)\,; \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1.$

Умова до 3-го завдання кожного варіанта: знайти три перших, відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку $y = y(x)$ диференціального рівняння $y' = f(x;\ y)$, що задовольняє початкову умову $y(0) = y_0$.

Умова до 4-го завдання кожного варіанта: знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початкові умови, у вигляді частинної суми, застосувавши метод невизначених коефіцієнтів (обмежитися чотирма членами ряду).

Розділ 9. НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧИСТИННИХ ПОХІДНИХ

9.1. Класифікація диференціальних рівнянь в частинних похідних

В цьому розділі розглянуто наближені методи розв'язування деяких задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку з двома змінними. В загальному випадку таке рівняння має вигляд:

$$F(x;\ y;\ u;\ u_x;\ u_{xx};\ u_{xy};\ u_{yy}) = 0, \qquad (9.1)$$

де x, y – незалежні змінні; u – шукана функція; $u_x, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ – її перші та другі похідні за відповідними аргументами.

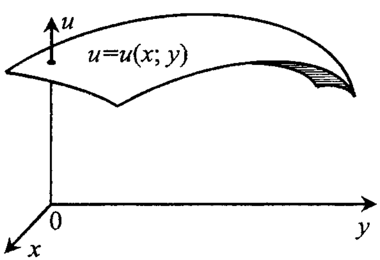


Рис. 9.1

Розв'язок рівняння (9.1) – це функція $u = u(x;\ y)$, що перетворює його в тотожність. Графік розв'язку – це поверхня в просторі $0xyu$ (*інтегральна поверхня*) (рис. 9.1).

Приклад 9.1. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Розв'язання. Інтегруючи дане рівняння за y двічі, одержимо $u = y\varphi(x) + \psi(x)$, де $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ – довільні функції. Інтегральні поверхні є собою лінійчасті поверхні, твірні яких паралельні координатній площині $0yu$.

Рівняння (9.1) називається *лінійним*, якщо воно першого степеня відносно шуканої функції та всіх її похідних і не містить їх добутків, тобто якщо його можна подати у вигляді:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x;\ y), \quad (9.2)$$

причому коефіцієнти A, B, C, a, b, c можуть залежати тільки від x і y. Зокрема, якщо ці коефіцієнти не залежать від x і y, то рівняння (9.2) – *лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами.*

Нехай $D = AC - B^2$ — *дискримінант рівняння* (9.2). Залежно від знака функції D воно належить до одного з таких типів:
$D > 0$ — *еліптичний тип*; $D = 0$ — *параболічний тип*;
$D < 0$ — *гіперболічний тип*; D не зберігає сталого знака – *мішаний тип*.

Тип лінійного рівняння (9.2) є його важливою особливістю, що зберігається при довільному *невиродженому перетворенні*

$$\xi = \varphi(x;\ y), \eta = \psi(x;\ y), \tag{9.3}$$

тобто такому, що *якобіан*

$$\frac{\partial(\varphi;\ \psi)}{\partial(x;\ y)} \neq 0.$$

Приклад 9.2. Температура $u = u(x;\ y)$ точки $(x;\ y)$ пластинки при стаціонарному розподілі (розподіл не залежить від часу) та відсутності джерела тепла задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{9.4}$$

Тут $A = 1, B = 0, C = 1$ і $D = AC - B^2 > 0$, тобто ***рівняння*** (9.4) ***еліптичного*** *типу*.

Приклад 9.3. Температура $u = u(x;\ t)$ точки однорідного тонкого стрижня з абсцисою x для кожного моменту часу t задовольняє одновимірному рівнянню *теплопровідності*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x;\ t), \tag{9.5}$$

де a — стала, що залежить від фізичних властивостей стрижня, і $F(x;\ t)$ — функція, пов'язана зі щільністю джерел розподілу тепла. Якщо в стрижні відсутні джерела тепла, то рівняння теплопровідності має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{9.6}$$

Увівши новий час $a^2 t = \tau$, одержуємо *зведене рівняння теплопровідності*:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{9.7}$$

тому в подальшому в (9.6) можна прийняти $a = 1$.

Рівняння теплопровідності (9.5), (9.6) і (9.7) – *рівняння* ***параболічного типу***.

Приклад 9.4. Поперечне зміщення $u = u(x;\ t)$ точки однорідної струни з абсцисою x (рис. 9.2) у випадку наявності зовнішньої сили для кожного моменту t задовольняє неоднорідне *хвильове рівняння*:

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x;\ t), \qquad (9.8)$$

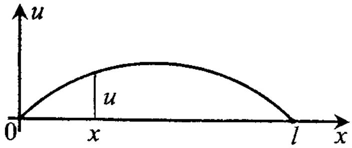


Рис. 9.2

де a – стала і $F(x;\ t)$ – функція, що залежить від зовнішньої сили. Рівняння (9.8) називають *рівнянням коливання струни*.

Якщо зовнішня сила відсутня (вільні коливання), то рівняння коливання струни (хвильове рівняння) має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (9.9)$$

Оскільки введення нової змінної $\tau = at$ зводить рівняння (9.9) до вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (9.10)$$

то в подальшому в (9.9) можна прийняти $a = 1$.

Рівняння *коливання струни* (9.8), (9.9) та (9.10) – рівняння ***гіперболічного типу***.

З лінійним диференціальним рівнянням (9.2) пов'язане звичайне диференціальне рівняння

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0, \qquad (9.11)$$

яке називається *характеристичним*; розв'язки рівняння (9.11) називаються *характеристиками рівняння* (9.2).

Для рівняння (9.2) гіперболічного типу існує два сімейства характеристик:

$$\varphi(x;\ y) = C_1 \text{ та } \psi(x;\ y) = C_2.$$

Провівши в рівнянні (9.2) заміну $\xi = \varphi(x;\ y)$, $\eta = \psi(x;\ y)$, тобто прийнявши параметри цих сімейств за нові криволінійні координати, одержимо канонічний вигляд рівняння *гіперболічного* типу:

$$u_{\xi\eta} + \alpha(\xi;\ \eta)u_\xi + \beta(\xi;\ \eta)u_\eta + \gamma(\xi;\ \eta)u = f(\xi;\ \eta).$$

Рівняння параболічного типу (9.2) має одне сімейство характеристик

$$\varphi(x;\ y) = C.$$

У результаті перетворення $\xi = \varphi(x;\ y)$, $\eta = y$ рівняння параболічного типу зводиться до канонічного виду:

$$u_{\eta\eta} + \alpha(\xi;\ \eta)u_\xi + \beta(\xi;\ \eta)u_\eta + \gamma(\xi;\ \eta)u = f(\xi;\ \eta).$$

Нарешті, рівняння (9.2) еліптичного типу допускає два сімейства комплексних характеристик:

$$\varphi(x;\ y) + i\psi(x;\ y) = C_1 \text{ та } \varphi(x;\ y) - i\psi(x;\ y) = C_2.$$

Провівши перетворення $\xi = \varphi(x;\ y)$, $\eta = \psi(x;\ y)$, одержимо канонічний вигляд рівняння еліптичного типу:

$$\Delta u + \alpha(\xi;\ \eta)u_\xi + \beta(\xi;\ \eta)u_\eta + \gamma(\xi;\ \eta)u = f(\xi;\ \eta),$$

де $\Delta u = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$ – *оператор Лапласа.*

Найпростіше рівняння еліптичного типу ($\Delta u = 0$) називається *рівнянням Лапласа.* Неоднорідне рівняння Лапласа $\Delta u = f(\xi;\ \eta)$ називається *рівнянням Пуассона.*

9.2. Початкові та крайові умови. Задача Коші. Змішана задача. Коректність постановки змішаної задачі

Диференціальне рівняння з частинними похідними має в загальному випадку нескінченну множину розв'язків. Тому, якщо фізичний процес описується за допомогою рівняння з частинними похідними, то для однозначної характеристики цього процесу потрібно приєднати деякі додаткові умови. Ці додаткові дані в найпростішому випадку складаються з *початкових* та *крайових* (*межевих*, *граничних*) умов. По суті, розрізнити ці умови можна лише в тому випадку, якщо одна з незалежних змінних диференціального рівняння грає роль часу, а інша – просторової координати (для випадку двох незалежних змінних). При цьому умови, що належать до початкового моменту часу, називаються *початковими*, а умови, що належать до фіксованих значень координат (як правило, це координати граничних точок розглядуваного лінійного континууму) – *крайовими.*

Приклад 9.5. Нехай маємо теплоізольований (крім, можливо, кінців) однорідний нагрітий стрижень $0 \le x \le l_0$, де l_0 – довжина *стрижня (рис. 9.3). Температура стрижня* $u = u(x;\ t)$ *в точці* x

($0 < x < l_0$) для довільного моменту часу t, що задовольняє рівняння теплопровідності (9.7):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

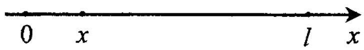


Рис. 9.3

У початковий момент $t = t_0$ для внутрішніх точок стрижня, зазвичай, задається початковий розподіл температури. Це приводить до *початкової умови*:

$$u(x;\ t_0) = f(x) \qquad (9.11\text{ а})$$

при $0 < x < l_0$, де $f(x)$ – відома функція. Умова (9.11 а) не забезпечує однозначності розв'язку диференціального рівняння (9.6), оскільки фізично зрозуміло, що розподіл температури $u(x;\ t)$ в стрижні для наступних моментів часу $t > t_0$ суттєво залежить від того, в якому стані знаходяться кінці стрижня $x = 0$ та $x = l_0$ (чи присутній витік тепла, який тепловий режим і т. п.).

Станом кінця $x = 0$ означають такі *основні крайові умови*.

1. *Кінець стрижня* $x = 0$ *підтримується при заданій температурі*:

$$u(0;\ t) = \varphi(t), \qquad (9.11\text{ б})$$

де $\varphi(t)$ – відома функція. Зокрема, якщо ця температура дорівнює нулю, то крайова умова має вигляд:

$$u(0;\ t) = 0. \qquad (9.11\text{ в})$$

2. *Кінець стрижня* $x = 0$ *теплоізольовано*, тобто витік тепла в навколишнє середовище відсутній:

$$u_x(0;\ t) = 0. \qquad (9.11\text{ г})$$

3. *На кінці стрижня* $x = 0$ *відбувається променевипускання тепла в навколишнє середовище*, температура якого змінюється за заданим законом:

$$u(0;\ t) + \alpha u_x(0;\ t) = \varphi(t), \qquad (9.11\text{ ґ})$$

де α – стала і $\varphi(t)$ – відома функція. Зокрема, якщо температура зовнішнього середовища дорівнює нулю, то

$$u(0;\ t) + \alpha u_x(0;\ t) = 0. \qquad (9.11\text{ д})$$

Змішану крайову умову (9.11 ґ) в деякому смислі можна вважати загальною, а саме: підставивши $\alpha = 0$, одержимо крайову умову (9.11 б), а при $\alpha = \infty$ матимемо крайову умову (9.11 г).

Можливі і інші типи крайових умов. Аналогічні крайові умови можуть бути й для кінця $x = l_0$. Комбінуючи крайові умови для кінців $x = 0$ і $x = l_0$, матимемо крайові задачі для стрижня, які за наявності початкової умови (9.11 б), взагалі говорячи, матимуть єдиний розв'язок.

Приклад 9.6. Розглянемо вільні коливання однорідної обмеженої струни завдовжки l_0 $(0 < x < l_0)$. Поперечне зміщення $u = u(x;\ t)$ при $0 < x < l_0$ для довільного моменту часу t задовольняє хвильове рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (9.11\ \text{е})$$

У початковий момент $t = t_0$ задається форма струни та розподіл швидкостей її точок. Це дає *початкові умови*:

$$u(x;\ t_0) = \varphi(x), \qquad u_t(x;\ t_0) = \varphi_1(x), \qquad (9.11\ \text{є})$$

де $\varphi(x)$ та $\varphi_1(x)$ – відомі функції, визначені в інтервалі $0 < x < l_0$. Залежно від способів закріплювання кінців струни $x = 0$ і $x = l_0$ будемо мати *основні крайові умови*.

1. *Кінець жорстко закріплено*:

$$u(0;\ t) = 0 \text{ (або } u(l_0;\ t) = 0). \qquad (9.11\ \text{ж})$$

2. *Кінець пружно закріплено*:

$$u_x(0;\ t) - k_1 u(0;\ t) = 0 \text{ (або } u_x(l_0;\ t) - k_2 u(l_0;\ t) = 0). \qquad (9.11\ \text{з})$$

де k_1 і k_2 – додатні сталі.

3. *Кінець вільний*:

$$u_x(0;\ t) = 0 \text{ (або } u_x(l_0;\ t) = 0). \qquad (9.11\ \text{и})$$

При достатній гладкості функцій $\varphi(x)$ і $\varphi_1(x)$ задача (9.11 е, є), ((9.11 ж), або (9.11 з), або (9.11 и)) має єдиний розв'язок.

Розглянемо загальну постановку задачі з початковими умовами.

Нехай дано лінійне диференціальне рівняння:

$$L[u] = F(x;\ y), \qquad (9.11\ \text{і})$$

де

$$L[u] = A(x;\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x;\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x;\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x;\ y)\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+ b(x;\ y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x;\ y)u. \qquad (9.11\ \text{ї})$$

Знаходження розв'язку $u = u(x;\ y)$ рівняння (9.11 і), що задовольняє початкові умови

$$u(x;\ y_0) = \varphi(x), \quad u_y(x;\ y_0) = \varphi_1(x), \tag{9.11 й}$$

називається *задачею Коші*, а самі умови носять назву *початкових даних Коші*.

Задача Коші допускає просту геометричну інтерпретацію: потрібно знайти інтегральну поверхню $u = u(x;\ y)$ рівняння (9.11 і), що проходить через задану просторову криву Г:

$$y = y_0, \quad u = \varphi(x)$$

та дотикається в точках $M(x;\ y_0;\ u)$ цієї кривої заданою системою векторів $\vec{a}$, що розміщені в площинах $x = \text{const}$ та утворюють з віссю Oy кут β, що визначається рівністю:

$$\operatorname{tg}\beta = \varphi_1(x).$$

Якщо розглядати y як час, то задача Коші має наступне механічне трактування: в початковий момент часу $y = y_0$ задано форму плоскої лінії $u = \varphi(x;\ y_0)$ та розподіл швидкостей її точок:

$$\partial u/\partial y = \varphi_1(x;\ y_0).$$

Прийнявши, що кожна точка $M(x;\ u)$ лінії рухається паралельно осі Ou, причому диференціальний закон руху задається рівнянням (9.11 і), потрібно визначити форму лінії для послідовних моментів часу $y > y_0$.

Умови (9.11 й) задають початкові дані Коші на прямій $y = y_0$. Однак це не є обов'язковим: можна задавати початкові дані на довільній гладкій кривій γ: $\Phi(x;\ y) = 0$.

Таким чином, одержуємо *загальну задачу Коші* – знайти розв'язок

$$u = u(x;\ y) \tag{9.11 к}$$

диференціального рівняння (9.11 и), що задовольняє *початкові умови*:

$$u|_\gamma = \varphi(x;\ y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_\gamma = \varphi_1(x;\ y). \tag{9.11 л}$$

Замість похідної $\partial u/\partial x$ можна задавати похідну $\partial u/\partial y$, оскільки на кривій γ маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = d\varphi(x;\ y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy = 0. \tag{9.11 м}$$

Можна задавати й нормальну похідну:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(n;\ x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(n;\ y).$$

Задача Коші, як правило, задається для лінійного рівняння (9.11 і) гіперболічного та параболічного типів.

Якщо рівняння (9.11 і) гіперболічного типу, то для єдиності розв'язку задачі Коші необхідно, щоб початкова крива γ не була характеристикою. Коефіцієнти диференціального рівняння мають бути визначеними та неперервними у відповідній області.

Нехай початкові дані Коші для рівняння (9.11 і) задано на відрізку $x \in [a;\ b]$, а розв'язок $u = u(x;\ y)$ цього рівняння потрібно визначити в півполосі: $G\{x \in [a;\ b];\ 0 \le y < \infty\}$. У цьому випадку для однозначності розв'язку необхідно додатково задати умови на прямих $x = a$ та $x = b$, що приведе до *мішаної задачі*. Достатньо загальною задачею такого типу є знаходження в півполосі G вказаного розв'язку диференціального рівняння (9.11 і), що задовольняє початкові й граничні умови:

$$u(x;\ 0) = \varphi(x),\ \ u_y(x;\ 0) = \varphi_1(x)\ (x \in [a;\ b],\ \ y = 0) \quad (9.11\text{ н})$$

та

$$\begin{cases} \alpha_0 u(a;\ y) + \alpha_1 u_x(a;\ y) = \psi(y), \\ \beta_0 u(b;\ y) + \beta_1 u_x(b;\ y) = \psi_1(y); \end{cases} \quad (9.11\text{ о})$$

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| \ne 0;\ |\beta_0| + |\beta_1| \ne 0;\ 0 < y < \infty.$$

Особливої уваги заслуговує граничний випадок, коли $a = -\infty$ або $b = \infty$. У цьому випадку крайові умови (9.11 о) або зовсім відпадають, або замінюються деякими умовами «на нескінченності».

Мішану задачу для рівняння (9.11 і) в загальному аспекті можна сформулювати так: задано скінченну чи нескінченну область G в площині Oxy, яка має кусково-гладку межу Г. Необхідно в області G знайти розв'язок диференціального рівняння (9.11 і), якщо на деяких частинах $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ межі виконуються співвідношення

$$\begin{cases} L_{i,j}[u] = \varphi_{i,j}(x;\ y), \\ (x;\ y) \in \Gamma_i (i = 1, 2, \dots;\ j = 1, 2, \dots); \end{cases} \quad (9.11\text{ п})$$

де $L_{i,j}$ – або *диференціальні оператори* за змінними x і y порядку, не вищого від першого, або *скінченні співвідношення*, а $\varphi_{i,j}(x;\ y)$ –

задані функції. Задачу Коші, очевидно, можна розглядати як частинний випадок загальної мішаної задачі.

При розгляді фізичних задач функції $\varphi_{i,j}(x;\ y)$, як правило, визначаються наближено (з досвіду, досліджень і т. ін.). Тому розв'язування такої мішаної задачі має практичну цінність лише в тому випадку, коли невеликі помилки в початкових і крайових умовах не призводять до великих відхилень розв'язку. В цьому випадку кажуть, що мішана задача поставлена *коректно*, або, інакше кажучи, неперервно залежить від початкових і крайових умов.

Означення. Мішана задача (9.11 і, ї, й, к, л, м, н, о, п) називається *коректно поставленою* в області G, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати число $\eta = \eta(\xi) > 0$, таке, що при зміні функцій $\varphi_{i,j}(x;\ y)$ на величини, модуль яких менший η розв'язок $u = u(x;\ y)$ змінюється в усій області G менше як на ε. У протилежному випадку вважають, що задача *поставлена некоректно*.

Для рівнянь еліптичного типу задача Коші не розглядається. Це пояснюється тим, що, як правило, задача Коші для рівнянь еліптичного типу поставлено некоректно, тобто зовсім незначні зміни початкових даних можуть суттєво вплинути на розв'язок.

9.2.1. Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу

Дослідження стаціонарних процесів різної фізичної природи (коливання, теплопровідність та ін.) часто приводять до рівнянь еліптичного типу:

$$L[u] = \Delta u + au_x + bu_y + cu = F(x;\ y), \qquad (9.12)$$

де $a = a(x;\ y)$, $b = b(x;\ y)$, $c = c(x;\ y)$, $F(x;\ y)$ – неперервні функції. Для таких рівнянь, як правило, ставляться тільки крайові задачі, оскільки (як зазначалося вище) задача Коші для рівнянь еліптичного типу може бути некоректною.

Найчастіше зустрічаються такі *крайові задачі*.

Перша крайова задача. На контурі Г, що обмежує область G, задано неперервну функцію $\varphi(P) = \varphi(x;\ y)$. Потрібно знайти функцію $u(P) = u(x;\ y)$, що задовольняє всередині G рівняння (9.12) і приймає на межі задані значення $\varphi(P)$, тобто повинні ввиконуватися умови: $L[u(P)] = F(P)$ при $P \in G$; $u(P) = \varphi(P)$ при $P \in \Gamma$.

Друга крайова задача. На контурі Г, що обмежує область G, задано неперервну функцію $\varphi_1(P)$. Необхідно знайти функцію $u(P) = u(x;\ y)$, що задовольняє всередині області рівняння (9.12), нормальна похідна якої на Г приймає задані значення $\varphi_1(P)$, тобто необхідно, щоб

$$L[u(P)] = F(P) \text{ при } P \in G,$$

$$\partial u(P)/_{\partial n} = \varphi_1(P) \text{ при } P \in \Gamma.$$

Третя крайова задача. На контурі Г, що обмежує область G, задано неперервну функцію $\psi(P) = \psi(x;\ y)$. Необхідно знайти функцію $u(P) = u(x;\ y)$ – таку, щоб

$$L[u(P)] = F(P) \text{ при } P \in G,$$

$$\alpha_0 u(P) + \alpha_1\, \partial u(P)/_{\partial n} = \psi(P) \text{ при } P \in \Gamma,$$

де $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$.

Третю крайову задачу можна розглядати як загальну. Дійсно, при $\alpha_0 = 1$ і $\alpha_1 = 0$ одержуємо *першу крайову задачу*, а при $\alpha_0 = 0$ і $\alpha_1 = 1$ – *другу крайову задачу.* Зауважимо, що якщо область G обмежена, то відповідна крайова задача називається *внутрішньою*, в протилежному випадку – *зовнішньою*.

Для рівняння Лапласа ($\Delta u = 0$) перша крайова задача називається *задачею Діріхле*, друга – *задачею Неймана* і третя – *змішаною крайовою задачею*.

9.2.2. Деякі відомості про гармонічні функції. Єдиність розв'язку задачі Діріхле

Означення. Функція $u(x;\ y)$, яка має неперервні частинні похідні другого порядку в області G та задовольняє всередині її рівняння Лапласа, називається *гармонічною функцією*.

Найпростішими гармонічними функціями двох змінних є: *лінійна функція* $u = ax + by + c$; *функція виду* $u = \ln r$, де $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ (головний розв'язок рівняння Лапласа).

Тоді задача *Діріхле* за цих умов формулюється так: знайти функцію, неперервну в даній замкнутій області $\bar{G} = G + \Gamma$, гармонічну в області G, яка приймає на її межі Г неперервні задані значення.

Єдиність розв'язку задачі Діріхле та *неперервна залежність її від крайових умов* (*коректність крайової задачі*) випливають з *властивостей гармонічних функцій.*

Властивість 1 (***принцип максимуму***). Гармонічна в обмеженій області функція, неперервна в замкнутій області $\bar{G} = G + \Gamma$, не може приймати всередині цієї області значень більших, ніж максимум її значень на межі, і менших, ніж мінімум її значень на Г.

Наслідок. Нехай функція $u = u(x;\ y)$ гармонічна в обмеженій області G та неперервна в замкнутій області $\bar{G} = G + \Gamma$. У цьому випадку для неї справджується нерівність: $\underline{u} \leq u(x;\ y) \leq \bar{u}$, де $\underline{u} = \min u(x;\ y)$ на Г, $\bar{u} = \max u(x;\ y)$ на Г.

Зауваження. Можна довести більш строгіше твердження: гармонічна в обмеженій і замкнутій області G функція, відмінна від константи, не приймає всередині G найбільшого і найменшого значень.

Властивість 2 (***єдиність задачі Діріхле***). Задача *Діріхле* для обмеженої і замкнутої області може мати лише єдиний розв'язок, тобто не існує двох неперервних гармонічних функцій в обмеженій замкнутій області G, яка приймає на її межі одні й ті ж значення.

Зауваження. З властивості 2 не випливає, що задача *Діріхле* для обмеженої замкнутої області G має розв'язок; ця властивість лише стверджує, що якщо існує розв'язок задачі *Діріхле* в області G, то він єдиний.

Властивість 3 (***коректність задачі Діріхле***). Розв'язок задачі *Діріхле* для обмеженої і замкнутої області G неперервно залежить від граничних даних.

9.3. Метод сіток

Загальні відомості

Багато крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, а особливо для рівнянь в частинних похідних розв'язуються *методом сіток*. Суть його полягає в тому, що задачу розв'язування диференціального рівняння з неперервною областю зміни аргумента чи аргументів та крайовими умовами замінюють іншою задачею. Замість неперервної області зміни аргументів розглядається відповідна дискретна область їх зміни, відповідне рівняння замінюється рівнянням в скінченних різницях, в яких похідні шуканої функції у вибраних дискретних точках замінюються *розділеними різницями* (*різницевими відношеннями*).

Граничні і початкові умови формулюються для нової задачі. Тому, розв'язування заданого диференціального рівняння зводиться до розв'язування рівняння в скінченних різницях – розв'язування системи алгебраїчних рівнянь з великою кількістю рівнянь і невідомих. На даний час, за наявності сучасних комп'ютерів, розв'язування таких систем не становить проблем, тим більше, що методи їх розв'язування добре розроблено й обґрунтовано, що дозволяє одержувати їх розв'язок швидко і з якою завгодно точністю. Тому, *метод сіток* став досить ефективним і часто застосовним методом розв'язування багатьох краєвих задач, головним чином, диференціальних рівнянь та систем рівнянь в частинних похідних.

Виникає питання про те, як вибирати точки дискретної зміни аргумента (аргументів) та як вибір їх впливає на точність $f(x)$. Якою повинна бути точність апроксимації похідних різницевими відношеннями, щоб розв'язок різницевої задачі був близьким до розв'язку основної неперервної задачі?

Використовуючи метод сіток, доводиться оперувати з наближеними числами. Тому необхідно з'ясовувати, як впливають похибки, внесені на початку обчислень, на подальші обчислення та на їх точність. У багатьох випадках початкова похибка (внесена на деякому етапі обчислення) при подальших обчисленнях зростає і одержаний розв'язок задачі стає суто формальним, далеким від істинного. А може трапитися, що похибки, внесені в обчислення, в подальшому не зростають, їх вплив зменшується і не суттєво впливає на остаточний результат обчислень. Прийнято вважати, що у першому випадку обчислювальна схема *нестійка*, а в другому – *стійка*. На практиці застосовують тільки стійкі схеми.

Проблемам апроксимації та стійкості обчислювальних схем методу сіток присвячено багато досліджень, та до цього часу не всі питання, що при цьому виникають, розв'язано повністю. Виявилося, що для різних типів диференціальних рівнянь вони багато в чому розв'язуються по-різному.

Зупинимося на виборі дискретної системи точок. Розглянемо двовимірну плоску область G з межею γ (або Γ), утворену однією або декількома кривими. Поставимо завдання – знайти функцію, яка в кожній точці області G задовольняє деяке диференціальне рівняння, початкові й граничні (межеві) умови.

Область G покриємо системою ліній, що перетинаються – *сіткою*. Точки перетину ліній – *вузли*, вони утворюють деяку сітчасту область D з межею Г. З урахуванням конкретних умов розв'язуваної задачі сітку можна утворювати по-різному. Найчастіше застосовують сітки, що утворюються системою прямих:

$$1)\ x = x_0 + ih, y = y_0 + jh\ (i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

h – деяке стале додатне число – *крок сітки*;

$$2)\ x = x_0 + ih, y = y_0 + jl\ (i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

h і l – деякі сталі додатні числа – *кроки сітки* по осях *абсцис* та *ординат* відповідно.

Перша сітка називається *рівномірною квадратною*, друга – *нерівномірною прямокутною* на площині. Найпростіші сітки на площині – *квадратна* та *прямокутна* – не завжди найкращі. Використовуються й інші сітки: *трикутні*, *шестикутні* та ін.

В розд. 8 розглянуто числове розв'язування диференціального рівняння першого порядку методом *Адамса* для рівновіддаленої системи вузлів $x = x_0 + ih\ (i = 0, 1, 2, \dots)$, яку можна розглядати як одновимірну рівномірну сітку на відрізку. В методі *Рунге–Кутти* значення аргументів, для яких складалася таблиця шуканої функції, складають одновимірну нерівномірну сітку.

Суттєвою є щільність, з якою вузли сітки покривають область. Чим вища щільність (чим більше вузлів містить область), тим, взагалі говорячи, задача розв'язується точніше. Але зі збільшенням числа вузлів зростають обчислювальні труднощі та можуть зростати похибки. Нелегко раціонально вибрати вид сітки та встановити щільність розміщення вузлів. Тому виникає необхідність в попередньому аналізі умов завдання. Спочатку розв'язують задачу для крупної сітки, а потім зменшують її розмір, збільшуючи число вузлів за певним правилом, та порівнюють результати. Якщо при цьому два послідовні результати співпадають чи близькі, то сітку вважають задовільною.

9.3.1. Наближені формули, що виражають частинні похідні функції двох змінних через її значення в заданих точках

В подальшому необхідно мати наближені формули, що виражають *частинні похідні функції двох змінних* через її значення в заданих точках. Рівняння, що одержується при такій заміні називаються *скінченно-різницевими*. Розглядатимемо функцію двох змінних $u = u(x;\ y)$, задану в деяких точках площини Oxy $(i, j = \pm 1, \pm 2, \dots)$. Точка з координатами $\left(x_i;\ y_j\right)$ називається *вузлом* ($(i;\ j)$ – інше позначення), а система вузлів – *сіткою*. Для того, щоб виразити значення частинних похідних через значення функції в заданих вузлах застосовують формулу Тейлора (це дає можливість оцінювати і *точність заміни*):

$$f(x+h;\ y+l) = f(x;\ y) + \left(\partial/_{\partial x} h + \partial/_{\partial y} l\right) f(x;\ y) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\partial/_{\partial x} h + \partial/_{\partial y} l\right)^2 f(x;\ y) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!}\left(\partial/_{\partial x} h + \partial/_{\partial y} l\right)^n f(x+\theta h;\ y+\theta l), \qquad (9.13)$$

де $0 < \theta < 1$.

Нижче наводяться приклади одержання деяких формул для відповідного розташування вузлів.

1) Нехай функцію $u = u(x;\ y) = f(x;\ y)$ задано в точках $(x_i - h;\ y_j), (x_i + h;\ y_j)$ (рис. 9.4, *а*). Необхідно знайти значення $\partial u/\partial x$ у вузлі $(i;\ j)$. Скористаємося рядом (9.13):

$$f(x+h;\ y+l) - f(x;\ y) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} l + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} hl + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} l^2\right) +$$

$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} h^2 l + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2} hl^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} l^3\right) + \dots .$$

Утримуючи в останньому розкладі члени, що містять h і l не вище другого ступеня, одержимо різниці:

$$u_{i+1,j} - u_{i,j} = \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2, u_{i-1,j} - u_{i,j} = -\frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2.$$

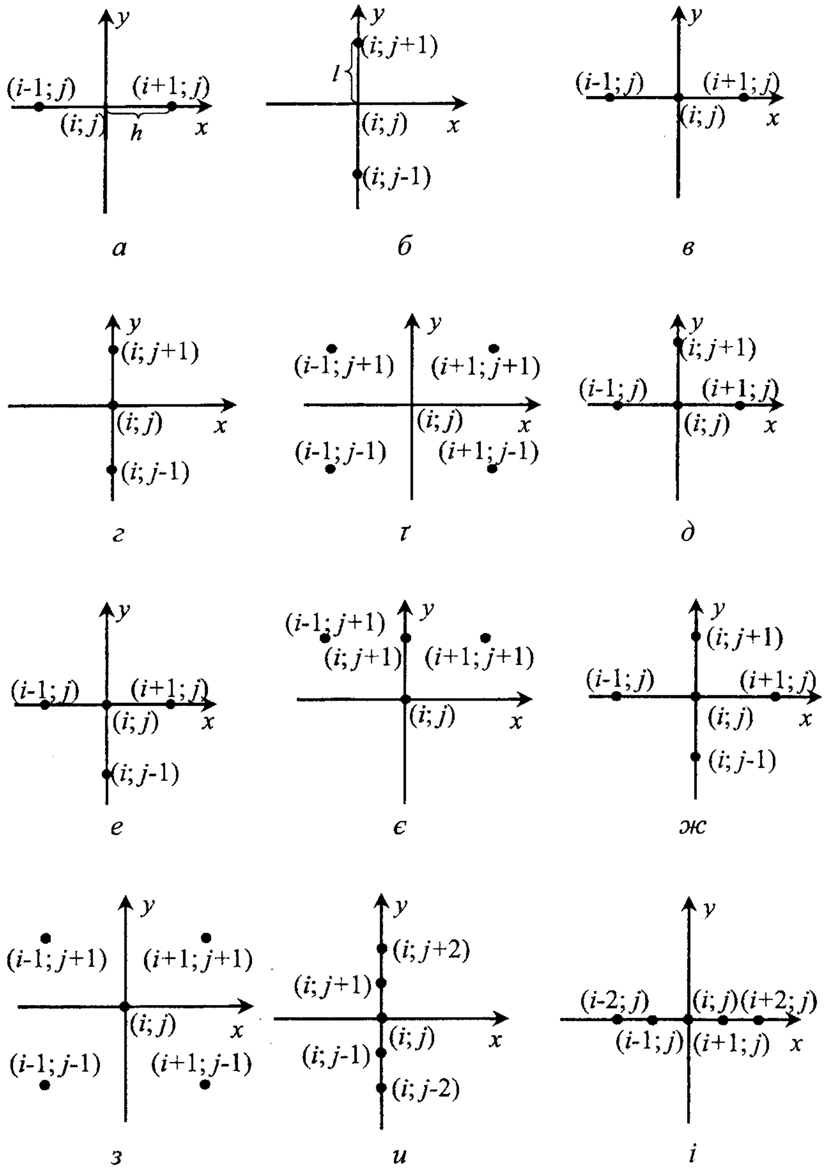


Рис. 9.4. (Див. також с. 325)

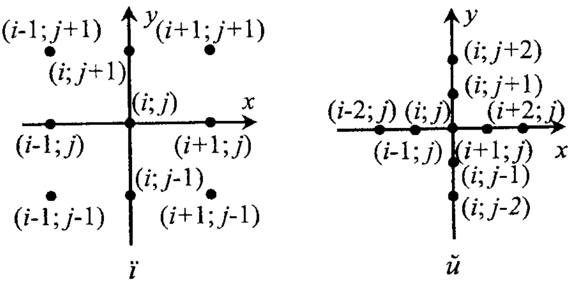


Рис. 9.4. Закінчення

Почленно віднімаючи з першої рівності другу, знайдемо наближене значення $\partial u_{i;j}/\partial x$:

$$\frac{\partial u_{i;\,j}}{\partial x}=\frac{u_{i+1;\,j}-u_{i-1;\,j}}{2h}.$$

2) Знайдемо значення $\partial u/\partial y$ за умови, що функцію $u(x;\,y)$ задано у чотирьох вузлах (рис. 9.4, ґ): $(i+1;\,j+1)$; $(i+1;\,j-1)$; $(i-1;\,j+1)$; $(i-1;\,j-1)$. Провівши обчислення, аналогічні попередніх, та обмежившись лінійними членами відносно h і l, одержимо:

$$u_{i+1;\,j+1}-u_{i;\,j}=\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}l;\;\; u_{i+1;\,j-1}-u_{i;\,j}=\frac{\partial u}{\partial x}h-\frac{\partial u}{\partial y}l;$$

$$u_{i-1;\,j+1}-u_{i;\,j}=-\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}l;\;\; u_{i-1;\,j-1}-u_{i;\,j}=-\frac{\partial u}{\partial x}h-\frac{\partial u}{\partial y}l.$$

Виключаючи значення функції у вузлі $(i;j)$, знайдемо $\partial u/\partial y$:

$$\frac{\partial u_{i;\,j}}{\partial y}=\frac{u_{i+1;\,j+1}-u_{i+1;\,j-1}+u_{i-1;\,j+1}-u_{i-1;\,j-1}}{4l}.$$

3) Обчислимо наближене значення $\partial^2 u_{i;j}/\partial y^2$ функції $u(x;\,y)$, заданої у вузлах (рис. 9.4, г) $(i;\,j), (i;\,j-1), (i;\,j+1)$:

$$u_{i;\,j+1}-u_{i;\,j}=\frac{\partial u}{\partial y}l+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}l^2;\;\; u_{i;\,j-1}-u_{i;\,j}=-\frac{\partial u}{\partial y}l+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}l^2.$$

Після додавання одержимо

$$\frac{\partial^2 u_{i;\,j}}{\partial y^2}=\frac{u_{i;\,j+1}-2u_{i;\,j}+u_{i;\,j-1}}{4l^2}.$$

У табл. 9.1 наведено деякі формули для наближення частинних похідних у випадку найпростішого розташування вузлів, що відповідають рис. 9.4, *а, б, в, г, ґ, і, ї*.

Таблиця 9.1

Вузли	Наближене значення похідної
$(i+1;\ j)$, $(i-1;\ j)$	$\dfrac{\partial u_{i;\,j}}{\partial x} = \dfrac{u_{i+1;\,j} - u_{i-1;\,j}}{2h}$
$(i;\ j+1)$, $(i;\ j-1)$	$\dfrac{\partial u_{i;\,j}}{\partial y} = \dfrac{u_{i;\,j+1} - u_{i;\,j-1}}{2l}$
$(i+1;\ j)$, $(i-1;\ j), (i;\ j)$	$\dfrac{\partial^2 u_{i;\,j}}{\partial x^2} = \dfrac{u_{i+1;\,j} - 2u_{i;\,j} + u_{i-1;\,j}}{h^2}$
$(i;\ j+1)$, $(i;\ j-1), (i;\ j)$	$\dfrac{\partial^2 u_{i;\,j}}{\partial y^2} = \dfrac{u_{i;\,j+1} - 2u_{i;\,j} + u_{i;\,j-1}}{l^2}$
$(i+1;\ j+1)$, $(i+1;\ j-1)$ $(i-1;\ j+1)$, $(i-1;\ j-1)$	$\dfrac{\partial u_{i;\,j}}{\partial x} = \dfrac{u_{i+1;\,j+1} - u_{i-1;\,j+1} + u_{i+1;\,j-1} - u_{i-1;\,j-1}}{4h}$ $\dfrac{\partial u_{i;\,j}}{\partial y} = \dfrac{u_{i+1;\,j+1} - u_{i+1;\,j-1} + u_{i-1;\,j+1} - u_{i-1;\,j-1}}{4l}$ $\dfrac{\partial^2 u_{i;\,j}}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{u_{i+1;\,j+1} - u_{i+1;\,j-1} - u_{i-1;\,j+1} + u_{i+1;\,j-1}}{4hl}$
$(i;\ j)$ $(i+1;\ j)$, $(i-1;\ j)$ $(i+2;\ j)$, $(i-2;\ j)$	$\dfrac{\partial^2 u_{i;\,j}}{\partial x^2} = \dfrac{-u_{i+2;\,j} + 16u_{i+1;\,j} - 30u_{i;\,j} + 16u_{i-1;\,j} - u_{i-2;\,j}}{12h^2}$ $\dfrac{\partial^2 u_{i;\,j}}{\partial y^2} = \dfrac{-u_{i;\,j+2} + 16u_{i;\,j+1} - 30u_{i;\,j} + 16u_{i;\,j-1} - u_{i;\,j-2}}{12l^2}$
$(i;\ j)$ $(i+1;\ j)$, $(i-1;\ j)$ $(i;\ j+1)$, $(i+1;\ j+1)$ $(i-1;\ j+1)$, $(i-1;\ j-1)$ $(i;\ j-1)$, $(i+1;\ j-1)$	$\dfrac{\partial^2 u_{i;\,j}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{3h^2}\big[u_{i+1;\,j+1} - 2u_{i;\,j+1} + u_{i-1;\,j+1} + u_{i+1;\,j} -$ $-2u_{i;\,j} + u_{i-1;\,j} + u_{i+1;\,j-1} - 2u_{i;\,j-1} + u_{i-1;\,j-1}\big]$ $\dfrac{\partial^2 u_{i;\,j}}{\partial y^2} = \dfrac{1}{3l^2}\big[u_{i+1;\,j+1} - 2u_{i+1;\,j} + u_{i+1;\,j-1} + u_{i;\,j+1} -$ $-2u_{i;\,j} + u_{i;\,j-1} + u_{i-1;\,j+1} - 2u_{i-1;\,j} + u_{i-1;\,j-1}\big]$

9.4. Метод сіток для задачі Діріхле (рівняння еліптичного типу)

Перша крайова задача, або *задача Діріхле для* ***рівняння Пуассона***:

$$\Delta u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = f(x;\ y), \qquad (9.14)$$

формулюється таким чином: знайти функцію $u = u(x;\ y)$, що задовольняє всередині деякої області G рівняння (9.14), а на межі Г – умову

$$u_\Gamma = \varphi(x;\ y) \qquad (9.15)$$

де $\varphi(x;\ y)$ – задана неперервна функція.

Вибравши кроки h і l по x і y відповідно, будуємо сітку: $x_i = x_0 + ih\ (i = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, $\quad y_j = y_0 + jl\ (j = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ і замінюємо в кожному внутрішньому вузлі $(x_i;\ y_j)$ похідні $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^2 u/\partial y^2$ скінченно-різницевими відношеннями, а рівняння (9.14) – скінченно-різницевими рівняннями

$$\frac{u_{i+1;\,j} - 2u_{i;\,j} + u_{i-1;\,j}}{h^2} + \frac{u_{i;\,j+1} - 2u_{i;\,j} + u_{i;\,j-1}}{l^2} = f_{i;\,j}, \qquad (9.16)$$

де $f_{i;\,j} = f(x_i;\ y_j)$.

Рівняння (9.16) разом із значеннями $u_{i;\,j}$ в граничних вузлах утворюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень функції $u(x;\ y)$ у вузлах $(x_i;\ y_j)$. Найбільш простий вигляд ця система має для прямокутної області при $l = h$. У цьому випадку рівняння (9.16) записуються таким чином:

$$u_{i+1;\,j} + u_{i-1;\,j} + u_{i;\,j+1} + u_{i;\,j-1} - 4u_{i;\,j} = h^2 f_{i;\,j}, \qquad (9.17)$$

а значення в граничних вузлах – значенням граничної функції. При $f(x;\ y) = 0$ рівняння (9.14) називається ***рівнянням Лапласа*** і відповідні скінченно-різницеві рівняння мають вигляд:

$$u_{i;\,j} = (1/4)\big(u_{i+1;\,j} + u_{i-1;\,j} + u_{i;\,j+1} + u_{i;\,j-1}\big). \qquad (9.18)$$

При складанні рівнянь (9.16) і (9.17) було використано схему вузлів, зображена на рис. 9.4 ж, причому $l = h$. Іноді буває зручніше використовувати схему вузлів, показану на рис. 9.4 з. У цьому випадку рівнянню Лапласа відповідають такі скінченно-різницеві рівняння:

$$u_{i;\,j} = (1/4)\big(u_{i-1;\,j-1} + u_{i+1;\,j-1} + u_{i-1;\,j+1} + u_{i+1;\,j+1}\big), \qquad (9.19)$$

а для рівняння Пуассона одержимо:

$$u_{i;\,j} = (1/4)\big(u_{i-1;\,j-1} + u_{i+1;\,j-1} + u_{i-1;\,j+1} + u_{i+1;\,j+1}\big) - {h^2}/{2}\, f_{i;\,j}.$$

Похибка заміни диференціального рівняння різницевим, тобто залишковий член $R_{i;\,j}$ для рівняння Лапласа, оцінюється нерівністю

$$|R_{i;\,j}| \le \frac{h^2}{6} M_4, \tag{9.20}$$

де $M_4 = \max\limits_{G}\left\{\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|;\ \left|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right|\right\}$.

Похибка наближеного розв'язку, одержаного різницевим методом, складається з трьох похибок:

1) заміни диференціального рівняння різницевим;
2) апроксимації крайових умов;
3) отриманої в результаті того, що система різницевих рівнянь розв'язується наближеним методом.

Можлива й інша, як розглянута, система вузлів і, відповідно, інше скінченно-різницеве подання рівнянь Лапласа та Пуассона.

Наведемо формули для систем вузлів зображених на рис. 9.4 *ї* і 9.4 *й* відповідно:

а) $u_{i;\,j} = \frac{1}{5}\left(u_{i;\,j-1} + u_{i-1;\,j} + u_{i;\,j+1} + u_{i+1;\,j}\right) +$
$+\frac{1}{20}\left(u_{i-1;\,j-1} + u_{i-1;\,j+1} + u_{i+1;\,j+1} + u_{i+1;\,j-1}\right) - \frac{3}{10}h^2 f(x_i;\ y_j);$

б) $u_{i;\,j} = \frac{1}{15}\left(u_{i;\,j-1} + u_{i-1;\,j} + u_{i;\,j+1} + u_{i+1;\,j}\right) -$
$-\frac{1}{60}\left(u_{i;\,j-2} + u_{i-2;\,j} + u_{i;\,j+2} + u_{i+2;\,j}\right) - \frac{1}{5}h^2 f(x_i;\ y_j).$

Формули для рівняння Лапласа одержуються, якщо в останніх рівностях відкинути член, що містить $f(x_i;\ y_j)$. Похибка формул, що містять пункти а) і б), характеризується величиною $O(h^4)$.

Найбільш уживаними є формули (9.18) та (9.19), їх ще називають *основними*.

9.4.1. Процес усереднення Лібмана. Розв'язування крайових задач для криволінійних областей

1. ***Процес усереднення Лібмана.*** Безпосереднє розв'язування системи скінченно-різницевих рівнянь методами послідовного виключення при великій кількості вузлів є занадто громіздким. Крім того, для криволінійної області G значення функції u можна вибрати досить грубо. Ці обставини змушують, для розв'язування згаданої

системи, застосовувати ітераційні методи з одночасним «виправленням» граничних значень.

Значно зручнішими є *ітераційні методи*, які враховують спеціальний вид таких систем і є простішими для реалізації на комп'ютерах.

Розглянемо один з найпрості –ших ітераційних методів *процес усереднення Лібмана*. Він застосовується при розв'язуванні задачі *Діріхле* для рівняння Лапласа, зокрема для систем (9.18). Відповідно до нього, вибравши початкові наближення $u_{i;\,j}^{(0)}$ (взяті з розв'язку системи чи довільно), послідовні наближення $u_{i;\,j}^{(k)}$ для *внутрішніх вузлів* $(x_i;\ y_i)$ сітки визначають за формулою:

$$u_{i;\,j}^{(k)} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1;\,j}^{(k-1)} + u_{i+1;\,j}^{(k-1)} + u_{i;\,j-1}^{(k-1)} + u_{i;\,j+1}^{(k-1)}\right)(k = 1, 2, \dots), \quad (9.21)$$

або (для послідовних наближень $u_{i;\,j}^{(k+1)}$) за формулою:

$$u_{i;\,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1;\,j}^{(k)} + u_{i-1;\,j}^{(k)} + u_{i;\,j+1}^{(k)} + u_{i;\,j-1}^{(k)}\right)(k = 0,1, 2, \dots). \quad (9.22)$$

Формули (9.21) та (9.22) відрізняються лише тим, що при їх застосуванні ітерації починаються, відповідно, з $k = 1$ або $k = 0$, що несуттєво.

2. ***Розв'язування крайових задач для криволінійних областей.*** Для *вузлових граничних точок* A_h, C_h (рис. 9.5, $\delta_1 = \delta$) значення функції, наприклад, $u(A_h)$ у таких вузлах послідовно «виправляються» за формулами *лінійної інтерполяції*:

$$u^0(A_h) = u(A) = \varphi(A),$$

$$u^{(k)}(A_h) = u(A) + \delta\frac{u^{(k-1)}(B) - u(A)}{h + \delta} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (9.23)$$

де A – найближча до A_h точка межі Γ $(u(A) = \varphi(A))$; B – найближчий до A_h внутрішній вузол сітки (рис. 9.5); δ – відстань між точками A та A_h, взята зі знаком *плюс*, якщо A_h – внутрішня точка області G (δ_1 на рис. 9.5), і зі знаком *мінус*, якщо A_h – зовнішня точка області G (δ_2 на рис. 9.5). У випадку, коли $A_h \in \Gamma$ $(A_h = A,\ \delta = 0)$, то: $u^{(k)}(A_h) = u(A) = \varphi(A)$. Як зазначалося, при застосуванні методу *Лібмана*, за початкові значення $u_{i;\,j}^{(0)}$ теоретично можна взяти довільну систему чисел.

Однак необхідно мати на увазі, що в силу *принципу максимуму* (див. підрозд. 9.2.2, *властивість* 1) для значень шуканої функції $u(x;\ y)$ повинні виконуватися нерівності:

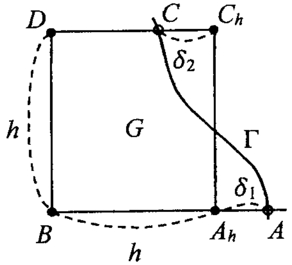


Рис. 9.5

$$m \le u_{i;\,j} \le M,$$

де $m = \min \varphi(P)$ на Г; $M = \max \varphi(P)$ на Г. Тому приймають

$$m \le u_{i;\,j}^{(0)} \le M.$$

Практично для вибору $u_{i;\,j}^{(0)}$ грубо розв'язують задачу *Діріхле* в області G за допомогою крупної сітки, а потім знайдені значення використовують для розв'язування задачі *Діріхле* на заданій дрібнішій сітці. Для початку обчислень, за необхідності, застосовують лінійну інтерполяцію.

Доведено, що для довільного кроку сітки h процес *Лібмана*, незалежно від вибору початкових значень, збіжний, тобто існує

$$\lim_{k\to\infty} u_{i;\,j}^{(k)} = u_{i;\,j},$$

причому похибка наближеного розв'язку має порядок $O(h^2)$.

Ітераційний процес буде збігатися значно швидше, якщо при розрахунку наступних середніх арифметичних використовувати не тільки значення попереднього наближення, а й знову знайдені значення (*метод Зейделя*, див. підрозд. 2.1.6).

Ітерації продовжують доти, доки у двох послідовних наближеннях не збіжиться потрібна кількість десяткових знаків. Для оцінки похибки наближеного розв'язку рівняння Лапласа можна використовувати *принцип Рунге*, згідно з яким похибка ε_h наближеного розв'язку u_h, одержаного з кроком h, визначається наближеною формулою

$$\varepsilon_h \cong \frac{u_h - u_{2h}}{3}, \tag{9.24}$$

де u_{2h} – наближений розв'язок, одержаний з кроком $2h$. Необхідно зазначити, що вказаний метод ітерацій приводить до виконання стандартної операції усереднення в кожному внутрішньому вузлі, тому він виявляється дуже зручним для програмування на комп'ютерах.

Другий спосіб для обчислення значень шуканої функції у вузлових граничних точках (для рис. 9.5). Значення $u_{i;\,j}$, для граничних вузлів одержують перенесенням значень з точок межі Г. Похибку, яка одержують у результаті такого переносу, значно зменшується, якщо для кожного граничного вузла складається рівняння виду:

1) для вузла A_h –

$$u_{A_h} = \frac{\delta_1 u_B + h u_A}{\delta_1 + h}; \tag{9.25}$$

2) для вузла C_h –

$$u_{C_h} = \frac{\delta_2 u_D - h u_C}{\delta_2 - h}. \tag{9.26}$$

Одержавши одне з таких рівнянь для кожного граничного вузла і приєднавши його до системи (9.17) або (9.18), одержують систему алгебраїчних рівнянь відносно значень $u_{i;\,j}$ у вузлах сітки. Якщо цю систему розв'язувати методом *Лібмана*, то послідовні наближення граничних значень будуть обчислюватись за формулами:

$$u_{A_h}^{(k+1)} = u_A + \frac{u_B^k - u_A}{h + \delta_1}\delta_1, \tag{9.27}$$

$$u_{C_h}^{(k+1)} = u_C + \frac{u_D^k - u_C}{\delta_2 - h}\delta_2. \tag{9.28}$$

9.5. Метод сіток для рівняння параболічного типу. Змішана задача для рівняння теплопровідності

Розглянемо *мішану задачу для рівняння теплопровідності*: знайти функцію $u(x;\ t)$, що задовольняє рівняння ($a = 1$) (9.7)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{9.28 а}$$

при початковій умові

$$u(x;\ 0) = f(x) \quad (0 \le x \le l_0,\ \ t \in [0;\ \infty)) \tag{9.28 б}$$

та крайових (граничних, межевих) умовах:

$$u(0;\ t) = \varphi(t), \quad u(l_0;\ t) = \psi(t). \tag{9.28 в}$$

Як зазначалося, до задачі (9.28 а, б, в) призводить, зокрема, задача про розповсюдження тепла в однорідному стрижні довжини l_0.

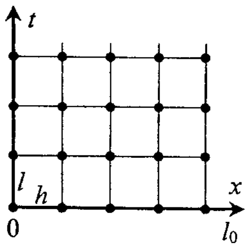


Рис. 9.6

Потрібно знайти розподіл температури $u = u(x;\ t)$ вздовж стрижня в довільний момент часу t. Розв'яжемо цю мішану задачу методом сіток. Для цього розглянемо просторово-часову систему координат (рис. 9.6).

Побудуємо в півполосі $t \geq 0$, $0 \leq x \leq l_0$ (рис. 9.6) два сімейства паралельних прямих:

$$x = ih \quad (i = 0, 1, 2, \ldots), \qquad t = jl \quad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Позначимо $x_i = ih,\ t_j = jl,\ u(x_i;\ t_j) = u_{i;\,j}$ і наближено замінимо в кожному внутрішньому вузлі $(x_i;\ t_j)$ похідну $\partial^2 u/\partial x^2$ різницевим відношенням:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i;\,j} \cong \frac{u_{i+1;\,j} - 2u_{i;\,j} + u_{i-1;\,j}}{h^2}, \tag{9.28 г}$$

а похідну $\partial u/\partial t$ одним з двох різницевих відношень

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i;\,j} \cong \frac{u_{i;\,j+1} - u_{i;\,j}}{l}; \tag{9.28 ґ}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i;\,j} \cong \frac{u_{i;\,j} - u_{i;\,j-1}}{l}. \tag{9.28 д}$$

Тоді для рівняння (9.28 а) одержуємо два типи скінченно-різницевих рівнянь:

$$\frac{u_{i;\,j+1} - u_{i;\,j}}{l} = \frac{u_{i+1;\,j} - 2u_{i;\,j} + u_{i-1;\,j}}{h^2}, \tag{9.28 е}$$

$$\frac{u_{i;\,j} - u_{i;\,j-1}}{l} = \frac{u_{i+1;\,j} - 2u_{i;\,j} + u_{i-1;\,j}}{h^2}. \tag{9.28 є}$$

Позначивши $\sigma = l/h^2$ (звідки, при визначених σ і h $l = \sigma h^2$), зводимо ці рівняння, відповідно, до вигляду:

$$u_{i;\,j+1} = (1 - 2\sigma)u_{i;\,j} + \sigma\left(u_{i+1;\,j} + u_{i-1;\,j}\right), \tag{9.28 ж}$$

$$(1 + 2\sigma)u_{i;\,j} - \sigma\left(u_{i+1;\,j} + u_{i-1;\,j}\right) - u_{i;\,j-1} = 0. \tag{9.28 з}$$

Формули (9.28 ґ, д) називають числовим диференціюванням по t «назад» та «вперед» відповідно.

Зазначимо, що для складання рівняння (9.28 е) була використана схема вузлів, зображена на рис. 9.4 д – *явна схема*, для рівняння (9.28 є) – схема вузлів, зображена на рис. 9.4 е – *неявна схема.*

Наприклад, з розгляду формули (9.28 ж) зрозуміло, що, знаючи значення функції $u(x;\ t)$ в точках j-го шару $t = jl$, за допомогою цієї формули можна обчислити значення $u(x;\ t)$ в точках наступного $(j+1)$-го шару $t = (j+1)l$ (рис. 9.4 д). При обчисленнях використовують чотири сусідні вузли (схема рис. 9.4 д). Таким чином, виходячи з початкового шару $t = 0$, значення $u(x;\ t)$ для якого визначаються з початкової умови

$$u(x_i;\ 0) = f(x_i) \quad (i = 0 \cup \overline{1,n}),$$

та використовуючи значення функції $u(x;\ t)$ в крайніх вузлах $(0;\ t_j)$, $(l;\ t_j)$ $(j = 0, 1, \ldots)$, що визначаються граничними умовами: $u(0;\ t_j) = \varphi(t_j)$, $u(l_0;\ t_j) = \psi(t_j)$, за формулою (9.28 ж) послідовно обчислюють: $u(x_i;\ t_1), u(x_i;\ t_2), u(x_i;\ t_3), \ldots$ $(i = 0 \cup \overline{1,n})$, тобто знаходять значення шуканої функції $u(x;\ t)$ в усіх вузлах півсмуги.

Залишається оптимально вибрати величину σ. При цьому необхідно виходити з вимоги, щоб похибка при заміні диференціального рівняння (9.28 а) скінченно-різницевим рівнянням (9.28 е) була найменшою.

Уведемо позначення:

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$L_h[u] = \frac{1}{h^2}\left(\left(u_{i+1;\,j} - 2u_{i;\,j} + u_{i-1;\,j}\right) - \frac{1}{\sigma}\left(u_{i;\,j+1} - u_{i;\,j}\right)\right),$$

де $L_h[u]$ – *скінченно-різницевий оператор*, що відповідає диференціальному оператору $L[u]$.

Різниця $R_h[u] = L_h[u] - L[u]$, що називається *похибкою апроксимації*, є тою похибкою, яка відбулася при заміні оператора $L[u]$ оператором $L_h[u]$. Обчислимо цю похибку у вузлах $(x_i;\ t_i)$ сітки для функції $u(x;\ t)$, що являється розв'язком рівняння (9.28 а). При цьому $L[u] = 0$ і

$$R_h[u] = L_h[u]. \tag{9.28 и}$$

Враховуючи, що

$$u_{i+1;\,j} = u(x_i + h;\ t_j), u_{i-1;\,j} = u(x_i - h;\ t_j), u_{i;\,j+1} =$$
$$= u(x_i;\ t_j + \sigma h^2),$$

та розкладаючи $L_h[u]$ за формулою Тейлора (9.13) в околі точки $(x_i;\ t_i)$, обмежившись членами порядку h^6, одержимо:

$$L_h[u]=\frac{1}{h^2}\left(u_{i;\,j}+h\frac{\partial u_{i;\,j}}{\partial x}+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u_{i;\,j}}{\partial x^2}+\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u_{i;\,j}}{\partial x^3}+\frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 u_{i;\,j}}{\partial x^4}+\right.$$

$$+\frac{h^5}{5!}\frac{\partial^5 u_{i;\,j}}{\partial x^5}+\frac{h^6}{6!}\frac{\partial^6 u_{i;\,j}}{\partial x^6}-2u_{i;\,j}+u_{i;\,j}-h\frac{\partial u_{i;\,j}}{\partial x}+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u_{i;\,j}}{\partial x^2}-$$

$$\left.-\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u_{i;\,j}}{\partial x^3}+\frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 u_{i;\,j}}{\partial x^4}-\frac{h^5}{5!}\frac{\partial^5 u_{i;\,j}}{\partial x^5}+\frac{h^6}{6!}\frac{\partial^6 u_{i;\,j}}{\partial x^6}\right)-$$

$$-\frac{1}{\sigma}\left(u_{i;\,j}+\sigma h^2\frac{\partial u_{i;\,j}}{\partial t}+\frac{\sigma^2h^4}{2!}\frac{\partial^2 u_{i;\,j}}{\partial t^2}+\frac{\sigma^3h^6}{3!}\frac{\partial^3 u_{i;\,j}}{\partial t^3}-u_{i;\,j}\right)+$$

$$+O(h^6)=\left(\frac{\partial^2 u_{i;\,j}}{\partial x^2}-\frac{\partial u_{i;\,j}}{\partial t}\right)+h^2\left(\frac{1}{12}\frac{\partial^4 u_{i;\,j}}{\partial x^4}-\frac{\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_{i;\,j}}{\partial t^2}\right)+$$

$$+h^4\left(\frac{1}{360}\frac{\partial^6 u_{i;\,j}}{\partial x^6}-\frac{\sigma^2}{6}\frac{\partial^3 u_{i;\,j}}{\partial t^3}\right)+O(h^6). \qquad (9.28\ \text{і})$$

Оскільки $u(x;\ t)$ – розв'язок рівняння (9.28 а), то

$$\frac{\partial^2 u_{i;\,j}}{\partial x^2}=\frac{\partial u_{i;\,j}}{\partial t};\ \frac{\partial^4 u_{i;\,j}}{\partial x^4}=\frac{\partial^2 u_{i;\,j}}{\partial t^2};\ \frac{\partial^6 u_{i;\,j}}{\partial x^6}=\frac{\partial^3 u_{i;\,j}}{\partial t^3}.$$

Замінивши в (9.28 і) частинні похідні за x рівними їм частинними похідними за t, одержимо:

$$L_h[u]=h^2\left(\frac{1}{12}-\frac{\sigma}{2}\right)\frac{\partial^4 u_{i;\,j}}{\partial t^4}+h^4\left(\frac{1}{360}-\frac{\sigma^2}{6}\right)\frac{\partial^6 u_{i;\,j}}{\partial t^6}+O(h^6). \qquad (9.28\ \text{ї})$$

Виберемо число σ так, щоб перша дужка формули (9.28 ї) перетворилася в нуль, тобто покладемо $\sigma/2=1/12$ і, відповідно, $\sigma=1/6$. При цьому значенні σ одержуємо:

$$L_h[u]=h^4\left(\frac{1}{360}-\frac{1}{216}\right)\frac{\partial^6 u_{i;\,j}}{\partial t^6}+O(h^6)=-\frac{h^4}{540}\frac{\partial^6 u_{i;\,j}}{\partial t^6}+O(h^6).$$

Згідно (9.28 и): $R_h[u]=L_h[u]$. Тому при такому виборі σ для похибки $R_h[u]$ одержуємо оцінку: $R_h[u]=O(h^2)$. В цьому смислі значення $\sigma=1/6$ для розрахункової схеми, що відповідає рис. 9.4 д, є найкращим.

Відповідна розрахункова формула (9.28 ж) при такому виборі σ остаточно набуває вигляду:

$$u_{i;j+1} = {}^{1}\!/_{6}\left(u_{i-1;\,j} + 4u_{i;\,j} + u_{i+1;\,j}\right). \qquad (9.29)$$

Вибораючи числа σ в рівняннях (9.28 ж, з) слід враховувати дві обставини:

1) похибка заміни диференціального рівняння різницевим має бути найменшою;

2) різницеве рівняння має бути стійким.

Рівняння (9.28 ж) буде стійким при $0 < \sigma \leq 1/2$, а рівняння (9.28 з) – за будь-якого σ.

Найбільш зручний вигляд рівняння (9.28 ж) приймає при $\sigma = 1/2$:

$$u_{i;j+1} = \frac{u_{i-1;j} + u_{i+1;j}}{2}; \qquad (9.30)$$

та при $\sigma = 1/6$ – це рівняння (9.29).

Оцінки похибок наближених розв'язків, отриманих з рівнянь (9.30), (9.29), (9.28 з) в смузі $0 \leq x \leq l_0$, $0 \leq t \leq t_0$, відповідно мають вигляд:

$$|u - \tilde{u}| \leq \frac{t_0}{3} M_1 h^2; \qquad (9.31)$$

$$|u - \tilde{u}| \leq \frac{t_0}{135} M_2 h^4; \qquad (9.32)$$

$$|u - \tilde{u}| \leq t_0 \left(\frac{l}{2} + \frac{h^2}{12}\right) M_1, \qquad (9.33)$$

де $\tilde{u}$ – точний розв'язок задачі (9.28 а, б, в),

$$M_1 = \max\left\{\left|f^{(IV)}(x)\right|;\ |\varphi''(t)|;\ |\psi''(t)|\right\} \text{ при } 0 \leq t \leq t_0, 0 \leq x \leq l_0;$$

$$M_2 = \max\left\{\left|f^{(VI)}(x)\right|;\ \left|\varphi^{(IV)}(t)\right|;\ \left|\psi^{(IV)}(t)\right|\right\} \text{ при } 0 \leq t \leq t_0,$$
$$0 \leq x \leq l_0.$$

З наведених оцінок похибок видно, що вища точність розв'язку досягається при застосуванні рівняння (9.29) порівняно з рівнянням (9.30). Але рівняння (9.30) має простіший вигляд, і, крім того, крок l за аргументом t для рівняння (9.29) має бути значно меншим, що призводить до збільшення об'єму розрахунків. Рівняння (9.28 з) дає меншу точність, але при цьому кроки l і h обираються незалежно один від одного. Рівняння (9.30) і (9.29) дозволяють обчислити значення функції $u(x;\ y)$ на кожному шарі за явними формулами через значення на попередньому шарі; рівняння (9.28 з) (*неявна схема*) не має такої властивості.

Методом сіток можна розв'язувати мішану крайову задачу для неоднорідного параболічного рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x;\ t).$$

При цьому відповідне різницеве рівняння, що використовує явну схему вузлів, має вигляд:

$$u_{i;\,j+1} = (1-2\sigma)u_{i;\,j} + \sigma\big(u_{i+1;\,j} + u_{i-1;\,j}\big) + lF_{i;\,j}. \tag{9.34}$$

При $\sigma = 1/2$ з (9.34) одержуємо:

$$u_{i;\,j+1} = {}^1\!/_2\left(u_{i+1;\,j} + u_{i-1;\,j}\right) + lF_{i;\,j}, \tag{9.35}$$

а при $\sigma = 1/6$:

$$u_{i;\,j+1} = {}^1\!/_6\left(u_{i-1;\,j} + 4u_{i;\,j} + u_{i+1;\,j}\right) + lF_{i;\,j}, \tag{9.36}$$

Для оцінки похибок застосовуються такі вирази: для рівняння (9.35):

$$|\tilde{u} - u| \le \frac{t_0}{4}\left(M_2 + \frac{1}{3}M_4\right)h^2, \tag{9.37}$$

для рівняння (9.36):

$$|\tilde{u} - u| \le \frac{t_0}{72}\left(\frac{1}{3}M_3 + \frac{1}{5}M_6\right)h^4, \tag{9.38}$$

де

$$M_2 = \max\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|,\quad M_3 = \max\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|,$$

$$M_4 = \max\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|,\quad M_6 = \max\left|\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right|.$$

9.5.1. Метод прогонки для рівняння теплопровідності

Вище було з'ясовано, що для стійкості скінченно-різницевих схем для рівняння теплопровідності кроки $h = \Delta x_i$ та $l = \Delta t_j$ повинні бути неоднаковими, причому вибір кроку h для просторової координати x накладає певні обмеження на величину кроку l для часової координати t. Оскільки при стійкій схемі крок l має порядок $O(h^2)$, причому відношення $\sigma = l/h^2$ обмежене зверху, то при малому h просування розв'язку $u(x;\ t)$ по t досить незначне, а об'єм роботи великий. Якщо, наприклад, $h = 0{,}1$ та прийняти

$l = \sigma h^2 = 1/600$, то для описування процесу розповсюдження тепла за одиничний проміжок часу $t \in [0;\ 1]$ знадобиться таблиця, що містить 600 рядків. Тому необхідно вибрати іншу обчислювальну схему.

Такою стійкою схемою, для якої відношення l/h^2 не обмежене зверху, і тому крок $l = \Delta t_j$ часової координати можна вибирати порівняно вевиким, є схема подана на рис. 9.4 є (*неявна*).

Як і раніше, в області $G: t \geq 0,\ 0 \leq x \leq l_0$, побудуємо прямокутну сітку:

$$x_i = ih \quad (i = 0 \cup \overline{1, n}),\ \ t_j = jl\ \ (j = 0, 1, 2, \dots),$$

де $h = l/n$ (n – ціле) і l — певна додатна величина.

Нехай $u_{i,j} = u(x_i;\ t_j)$.

Використавши наближену симетричну формулу для другої похідної за x та застосувавши формулу числового диференціювання за t «назад», для $(j + 1)$-го шару сітки замість диференціального рівняння (9.28 а) матимемо таке скінченно-диференціальне рівняння:

$$\frac{u_{i;\,j+1} - u_{i;\,j}}{l} = \frac{u_{i-1;\,j+1} - 2u_{i;\,j+1} + u_{i+1;\,j+1}}{h^2}$$
$$(i = \overline{1, n-1};\ j = 1, 2, \dots),$$

або

$$u_{i-1;\,j+1} - (2 + s)u_{i;\,j+1} + u_{i+1;\,j+1} = -su_{i;\,j}, \qquad (9.39)$$

де $s = h^2/l$.

З граничних умов одержуємо:

$$u_{0;\,j+1} = \varphi(t_{j+1}),\quad u_{n;\,j+1} = \psi(t_{j+1}). \qquad (9.40)$$

Схема (9.39) стійка при довільному $s > 0$, похибка апроксимації якої становить $O(h^2 + l)$.

Систему (9.39)–(9.40) розв'язуватимемо *методом «прогонки»*. Нехай

$$u_{i;\,j+1} = a_{i;\,j+1}(b_{i;\,j+1} + u_{i+1;\,j+1}), \qquad (9.41)$$

тоді:

$$u_{i-1;\,j+1} = a_{i-1;\,j+1}(b_{i-1;\,j+1} + u_{i;\,j+1}). \qquad (9.42)$$

Підставляючи вираз (9.42) у формулу (9.39), матимемо

$$a_{i-1;\,j+1}(b_{i-1;\,j+1} + u_{i;\,j+1}) - (2 + s)u_{i;\,j+1} + u_{i+1;\,j+1} = -su_{i;\,j},$$

звідки

$$u_{i;\,j+1}=\frac{a_{i-1;\,j+1}b_{i-1;\,j+1}+su_{i;\,j}+u_{i+1;\,j+1}}{2+s-a_{i-1;\,j+1}}.$$

Порівнюючи останній вираз з формулою (9.41), одержуємо:

$$a_{i;\,j+1}=\frac{1}{2+s-a_{i-1;\,j+1}},\quad b_{i;\,j+1}=a_{i-1;\,j+1}b_{i-1;\,j+1}+su_{i;\,j}\quad (9.43)$$

$$(i=\overline{2,n}).$$

При $i=1$ з формул (9.39) і (9.41) одержимо:

$$u_{0;\,j+1}-(2+s)u_{1;\,j+1}+u_{2;\,j+1}=-su_{1;\,j}\ \text{ і}$$

$$u_{1;\,j+1}=a_{1;\,j+1}\left(b_{1;\,j+1}+u_{2;\,j+1}\right).\quad (9.44)$$

З останнього, використовуючи граничні умови, одержуємо:

$$u_{1;\,j+1}=\frac{\varphi\left(t_{j+1}\right)+su_{1;\,j}+u_{2;\,j+1}}{2+s}.\quad (9.45)$$

Оскільки формули (9.43) і (9.45) повинні бути тотожними, то, порівнявши їх одержуємо:

$$a_{1;\,j+1}=\frac{1}{2+s},\quad b_{1;\,j+1}=\varphi\left(t_{j+1}\right)+su_{1;\,j}.\quad (9.46)$$

Використовуючи формули (9.43) та (9.46) проводячи «прогонку» в прямому напрямку («*прямий хід*»), визначають дві послідовності чисел:

$$a_{1;\,j+1},\ a_{2;\,j+1},\dots,a_{n-1;\,j+1}\ \text{та}\ b_{1;\,j+1},\ b_{2;\,j+1},\dots,b_{n-1;\,j+1}.$$

Звідси, застосовуючи формули (9.40) та (9.41), за допомогою «*зворотного ходу*» знаходять значення шуканої функції:

$$\begin{cases} u_{n;\,j+1}=\psi\left(t_{j+1}\right); \\ u_{n-1;\,j+1}=a_{n-1;\,j+1}\left(b_{n-1;\,j+1}+u_{n;\,j+1}\right); \\ u_{n-2;\,j+1}=a_{n-2;\,j+1}\left(b_{n-2;\,j+1}+u_{n-1;\,j+1}\right); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{1;\,j+1}=a_{1;\,j+1}\left(b_{1;\,j+1}+u_{2;\,j+1}\right). \end{cases}\quad (9.47)$$

Таким чином, обґрунтовано спосіб переходу від j-го шару до $(j+1)$-го шару. Тому, відштовхуючись від відомого початкового (нульового) шару, можна крок за кроком побудувати шуканий розв'язок $u(x;\ t)$ в усіх точках сітки $\left(x_i;\ t_j\right)$.

Вкажемо, до деякої міри, ***інший спосіб методу прогонки*** для рівняння теплопровідності.

Нехай у смузі $0 \leq x \leq l_0$, $0 \leq t \leq t_0$ необхідно знайти розв'язок рівняння (9.28 а), що задовольняє умовам (9.28 б) та (9.28 в).

Обравши кроки h, l за аргументами x і t відповідно, в кожному внутрішньому вузлі замінивши похідні скінченно-різницевими відношеннями (9.28 г) – відповідає схемі вузлів рис. 9.4 е (*неявна*), (9.28 д) – відповідає числовому диференціюванню за t «вперед», обчисливши значення функцій $f(x)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ в граничних вузлах і, позначивши $s = h^2/l$, одержимо систему:

$$u_{i-1;\,j+1} - (2+s)u_{i;\,j+1} + u_{i+1;\,j+1} + su_{i;\,j} = 0,$$
$$(i = \overline{1,n};\ j = 0, 1, 2, \dots); \tag{9.48}$$
$$u_{i;\,0} = f(x_i); \tag{9.49}$$
$$u_{0;\,j} = \varphi(t_j); \tag{9.50}$$
$$u_{n;\,j} = \psi(t_j). \tag{9.51}$$

Метод прогонки для розв'язування системи (9.48) – (9.51) полягає в тому, що рівняння (9.48) зводяться до вигляду

$$u_{i;\,j+1} = a_{i;\,j+1}\left(b_{i;\,j+1} + u_{i+1;\,j+1}\right), \tag{9.52}$$

де числа $a_{i;\,j+1}$, $b_{i;\,j+1}$ визначаються послідовно за формулами:

$$a_{1;\,j+1} = \frac{1}{2+s};\ b_{1;\,j+1} = \varphi\left(t_{j+1}\right) + su_{1;\,j}; \tag{9.53}$$

$$\begin{cases} a_{i;\,j+1} = \dfrac{1}{2+s-a_{i-1;\,j+1}}; \\ b_{i;\,j+1} = a_{i-1;\,j+1}b_{i-1;\,j+1} + su_{i;\,j}; \\ (i = \overline{2,n}). \end{cases} \tag{9.54}$$

Потім з крайової умови (9.51) знаходять $u_{n;\,j+1} = \psi(t_{j+1})$ і послідовно визначають значення $u_{i;\,j+1}$ $(i = \overline{n-1,1})$ за формулою (9.52).

Таким чином, метод прогонки дозволяє визначити значення функції $u(x;\ t)$ на шарі $t = t_{j+1}$, якщо відомо її значення на шарі $t = t_j$.

Порядок розв'язування задачі.

Прямий хід. Використовуючи крайові умови (9.50), за формулами (9.53), (9.54) знаходять числа $a_{1;\,j+1}$, $b_{1;\,j+1}$, $a_{i;\,j+1}$, $b_{i;\,j+1}$ $(i = \overline{2,n})$.

Зворотний хід. З крайової умови (9.51) одержують $u_{n;\,j+1} = \psi(t_{j+1})$. Потім за формулою (9.52) обчислюють:

$$\begin{cases} u_{n-1;\,j+1} = \left(u_{n;\,j+1} + b_{n-1;\,j+1}\right)a_{n-1;\,j+1}; \\ u_{n-2;\,j+1} = \left(u_{n-1;\,j+1} + b_{n-2;\,j+1}\right)a_{n-2;\,j+1}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{1;\,j+1} = \left(u_{2;\,j+1} + b_{1;\,j+1}\right)a_{1;\,j+1}. \end{cases} \qquad (9.55)$$

9.6. Метод сіток для рівняння гіперболічного типу. Мішана задача для рівняння коливання струни

Розглянемо *мішану задачу для рівняння коливання струни,* яка зводиться до знаходження функції, що задовольняє рівняння $(a = 1)$ (9.9):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \qquad (9.55\text{ а})$$

а також початкові умови –

$$u(x;\ 0) = f(x),\ \ u_t(x;\ 0) = \Phi(x)\ \ (0 \le x \le l_0) \qquad (9.55\text{ б})$$

та крайові (граничні) умови –

$$u(0;\ t) = \varphi(t),\ \ u(l_0;\ t) = \psi(t). \qquad (9.55\text{ в})$$

Побудувавши в смузі $t \ge 0$, $0 \le x \le l_0$ (рис. 9.7) дві сім'ї паралельних прямих:

$$x = ih\ \ (i = 0 \cup \overline{1,n}),\ \ t = jl\ \ (j = 0, 1, 2, \dots.),$$

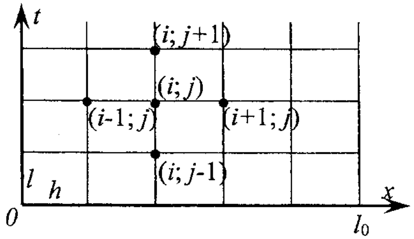


Рис. 9.7

замінюють похідні в рівнянні (9.55 а) різницевими відношеннями.

Використавши симетричні формули для похідних, одержують:

$$\frac{u_{i;\,j+1} - 2u_{i;\,j} + u_{i;\,j-1}}{l^2} = \frac{u_{i+1;\,j} - 2u_{i;\,j} + u_{i-1;\,j}}{h^2}. \qquad (9.56)$$

Позначивши в (9.56) $\alpha = l/h$, одержимо різницеве рівняння:

$$u_{i;\,j+1} = 2u_{i;\,j} - u_{i;\,j-1} + \alpha^2(u_{i+1;\,j} - 2u_{i;\,j} + u_{i-1;\,j}). \qquad (9.57)$$

При $\alpha \le 1$ різницеве рівняння (9.57) *стійке.*

При $\alpha = 1$ рівняння (9.57) набуває найбільш простого вигляду:

$$u_{i;\,j+1} = u_{i+1;\,j} + u_{i-1;\,j} - u_{i;\,j-1}. \qquad (9.58)$$

Оцінка похибки наближеного розв'язку, одержаного з рівняння (9.57) в смузі $0 \le x \le l_0$, $0 < t \le t_0$ має вигляд:

$$|\tilde{u} - u| \le \frac{h^2}{12}\left[(M_4 h + 2M_3)t_0 + {t_0}^2 M_4\right], \qquad (9.59)$$

де $\tilde{u}$ —точний розв'язок,

$$M_k = \max\left\{\left|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|;\ \left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|\right\} \quad (k = 3, 4).$$

Для одержання рівняння (9.57) була використана схема вузлів, зображених на рис. 9.7 (або рис. 9.4 ж). Вона – *явна*, оскільки рівняння (9.57) дозволяє знайти значення функції $u(x;\ t)$ на шарі t_{j+1}, якщо відомі значення на двох попередніх шарах. *Для того щоб знайти наближений розв'язок задачі* (9.55 а, б, в), *необхідно знати значення розв'язку на двох початкових шарах. Їх можна знайти з початкових умов одним з таких способів.*

Перший спосіб. Замінюємо в початковій умові (9.55, б) похідну $u_t(x;\ 0)$ різницевим відношенням

$$\frac{u_{i;\,1} - u_{i;\,0}}{l} = \Phi(x_i) = \Phi_i; \qquad (9.60)$$

для знаходження значення $u(x;\ t)$ на шарах $j = 0, j = 1$ одержуємо:

$$u_{i;\,0} = f_i,\ \ u_{i;\,1} = f_i + l\Phi_i. \qquad (9.61)$$

Оцінка похибки значень $u_{i;\,1}$ для цього випадку має вигляд:

$$\left|\tilde{u}_{i;\,1} - u_{i;\,1}\right| \le \frac{\alpha h}{2} M_2, \qquad (9.62)$$

де

$$M_2 = \max\left\{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|;\ \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|\right\}.$$

Другий спосіб. Замінюємо похідну $u_t(x;\ 0)$ різницевим відношенням $(u_{i;\,1} - u_{i\,;-1})/2l$, де $u_{i\,;-1}$ значення функції $u(x;\ t)$ на шарі $j = -1$ (*фіктивний шар*). Тоді з початкових умов (9.55 б) будемо мати:

$$u_{i;\,0} = f_i, \quad \frac{u_{i;\,1} - u_{i\,;-1}}{2l} = \Phi_i. \tag{9.63}$$

Запишемо різницеве рівняння (9.58) для шару $j = -1$:

$$u_{i;\,1} = u_{i+1;\,0} + u_{i-1;\,0} - u_{i;\,-1}. \tag{9.64}$$

Виключивши з рівнянь (9.63), (9.64) значення $u_{i\,;-1}$, одержимо:

$$u_{i;\,0} = f_i, \quad u_{i;\,1} = {}^1\!/_2\,(f_{i+1} + f_{i-1}) + l\Phi_i. \tag{9.65}$$

Оцінка похибки значень $u_{i,1}$ має вигляд:

$$\left|\tilde{u}_{i;1} - u_{i;1}\right| \le \frac{h^4}{12}M_4 + \frac{h^3}{6}M_3, \tag{9.66}$$

де

$$M_k = \max\left\{\left|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|; \left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|\right\} \quad (k = 3{,}4).$$

Цей спосіб обчислення початкових значень використано в прикладі 9.17.

Третій спосіб. Якщо функція $f(x)$ має скінченну другу похідну, то значення $u_{i,1}$ можна знайти за допомогою формули Тейлора:

$$u_{i;\,1} \cong u_{i;\,0} + l\frac{\partial u_{i;\,0}}{\partial t} + \frac{l^2}{2}\frac{\partial^2 u_{i;\,0}}{\partial t^2}. \tag{9.67}$$

Використавши рівняння (9.55 а) та початкові умови (9.55 б), можемо записати:

$$u_{i;\,0} = f_i, \quad \frac{\partial u_{i;\,0}}{\partial t} = \Phi_i, \quad \frac{\partial^2 u_{i;\,0}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{i;\,0}}{\partial x^2} = f_i''.$$

Тоді за формулою (9.67) одержуємо:

$$u_{i;\,1} \cong f_i + l\Phi_i + \frac{l^2}{2}f_i''. \tag{9.68}$$

Похибка значень $u_{i;\,1}$, одержаних за цією формулою, має порядок $O(l^3)$.

Після знаходження розв'язку на двох початкових шарах, переходять до знаходження його на наступних шарах ($j = 2, 3, ...$) *згідно з формулою* (9.57) або (9.58).

Цей спосіб обчислення початкових значень використано в прикладі 9.18.

Зауваження 1. Аналогічним чином застосовується метод сіток для розв'язування змішаної краєвої задачі для неоднорідного рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x;\ t).$$

В цьому випадку різницеве рівняння має вигляд:

$$u_{i;\,j+1} = 2u_{i;\,j} - u_{i;\,j-1} + \alpha^2\left(u_{i+1;\,j} - 2u_{i;\,j} + u_{i-1;\,j}\right) + \alpha^2 h^2 F_{i;\,j}.$$

Зауваження 2. Слід вказати таку особливість рівняння коливання струни: якщо при розв'язуванні задачі Коші для рівняння коливання струни диференціальний оператор

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

замінюється на сітці за умови, що $h = al$, скінченно-різницевим оператором

$$L_h[u] = \frac{1}{h^2}\left(u_{i;\,j+1} - u_{i+1;\,j} - u_{i-1;\,j} + u_{i;\,j-1}\right),$$

то функція, яка є розв'язком рівняння коливання струни, тобто $L[u]$, є також розв'язком рівняння $L_h[u] = 0$.

Зауваження 3. Якщо для рівняння коливання струни (9.55 а) крайові умови (9.55 в) відсутні, то за допомогою формули (9.58) можна побудувати розв'язок $u(x;\ t)$, що відповідає задачі Коші лише в сітковій області площини $0xt$, яка має форму трикутника $0AB$ (рис. 9.8), де $0B$ та AB – характеристики $t = x/a$, $t = (l_0 - x)/a$, що проходять через точки $0(0;\ 0)$ та $A(l_0;\ 0)$ відповідно.

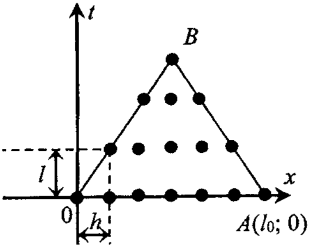


Рис. 9.8

9.7. Приклади розв'язання задач та завдання для самостійної роботи

Приклад 9.7. Розглянемо задачу про стаціонарний розподіл тепла в плоскій квадратній ізольваній пластинці зі стороною 1, якщо на межі пластинки підтримується стала температура.

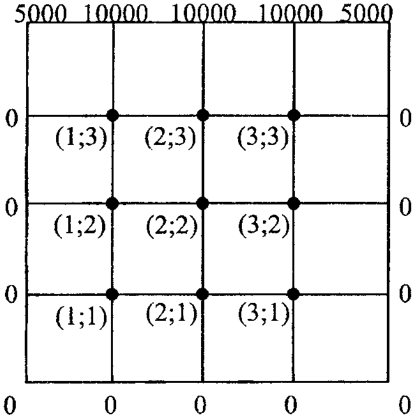


Рис. 9.9

Розв'язання. Відомо, що функція $u(x;\ y)$, яка дає розподіл температури, є розв'язком рівняння *Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

при відповідних крайових умовах. Для цієї задачі крайові умови наведено на рис. 9.9.

Побудувавши сітку з кроком $h = 1/4$, одержимо дев'ять внутрішніх вузлів (рис. 9.9). Запишемо в цих вузлах скінченно-різницеві рівняння.

Внаслідок симетрії граничних крайових умов одержимо:

$$u_{1;\,1} = u_{3;\,1};\ u_{1;\,2} = u_{3;\,2};\ u_{1;\,3} = u_{3;\,3}. \qquad (9.68\text{ а})$$

Це скорочує число невідомих значень функції u у внутрішніх вузлах до шести. Тому, у вузлах (3; 1), (3; 2), (3; 3) скінченно-різницеві рівняння записувати не потрібно. Згідно (9.18), для інших шести внутрішніх вузлів (1; 1), (2; 1), (1; 2), (2; 2), (1; 3), (2; 3) одержуємо відповідно шість рівнянь:

$$\begin{aligned}
&u_{0;\,1} + u_{2;\,1} + u_{1;\,0} + u_{1;\,2} - 4u_{1;\,1} = 0;\\
&u_{0;\,2} + u_{2;\,2} + u_{1;\,1} + u_{1;\,3} - 4u_{1;\,2} = 0;\\
&u_{0;\,3} + u_{2;\,3} + u_{1;\,2} + u_{1;\,4} - 4u_{1;\,3} = 0; \qquad (9.68\text{ б})\\
&u_{1;\,1} + u_{3;\,1} + u_{2;\,0} + u_{2;\,2} - 4u_{2;\,1} = 0;\\
&u_{1;\,2} + u_{3;\,2} + u_{2;\,1} + u_{2;\,3} - 4u_{2;\,2} = 0;\\
&u_{1;\,3} + u_{3;\,3} + u_{2;\,2} + u_{2;\,4} - 4u_{2;\,3} = 0.
\end{aligned}$$

У ці рівняння входять ще 12 значень функції в граничних точках, які знаходяться з крайових умов:

$$\begin{cases}
u_{i;\,0} = 0 \quad (i = \overline{1,3});\\
u_{0;\,j} = 0 \quad (j = \overline{1,3});\\
u_{1;\,4} = u_{2;\,4} = u_{3;\,4} = 10000.
\end{cases} \qquad (9.68\text{ в})$$

В інших вузлах крайові умови не використовуються.

Остаточно, враховуючи умови (9.68 а, в), одержуємо систему:

$$u_{2;\,1} + u_{1;\,2} - 4u_{1;\,1} = 0;$$
$$u_{2;\,2} + u_{1;\,1} + u_{1;\,3} - 4u_{1;\,2} = 0;$$
$$u_{2;\,3} + u_{1;\,2} - 4u_{1;\,3} = -10000;$$
$$2u_{1;\,1} + u_{2;\,2} - 4u_{2;\,1} = 0;$$
$$2u_{1;\,2} + u_{2;\,1} + u_{2;\,3} - 4u_{2;\,2} = 0;$$
$$2u_{1;\,3} + u_{2;\,2} - 4u_{2;\,3} = -10000.$$

Розв'язавши цю систему методом Гаусса, одержимо:

$$u_{1;\,1} = 714;\ u_{2;\,1} = 982;\ u_{1;\,2} = 1875;$$
$$u_{2;\,2} = 2500;\ u_{1;\,3} = 4286;\ u_{2;\,3} = 5268.$$

Приклад 9.8. Як відомо, задача про пружну деформацію квадратної пластинки під дією сталої сили зводиться до розв'язування рівняння Пуассона: $\Delta u = -1$ з нульовими крайовими значеннями (умовами). Знайти розв'язок цієї задачі методом сіток, прийнявши сторону квадрата рівною 1 з кроком $h = 1/4$.

Розв'язання. В даному випадку має місце повна симетрія значень шуканої функції, оскільки всі крайові умови – нульові, а функція стала: $f(x;\ y) = -1$. Тому скінченно-різницеві рівняння достатньо скласти для чверті квадрата, тобто для вузлів (1;1), (2;1), (1;2), (2;2) (рис. 9.9). Згідно (9.17), врахувавши нульові крайові умови, одержуємо такі рівняння:

$$u_{2;\,1} + u_{1;\,2} - 4u_{1;\,1} = -0{,}0625;$$
$$u_{2;\,2} + 2u_{1;\,1} - 4u_{1;\,2} = -0{,}0625;$$
$$2u_{1;\,1} + u_{2;\,2} - 4u_{2;\,1} = -0{,}0625;$$
$$2u_{1;\,2} + 2u_{2;\,1} - 4u_{2;\,2} = -0{,}0625.$$

З огляду на симетрію розв'язку $\left(u_{1;\,2} = u_{2;\,1}\right)$ одержана система зводиться до системи трьох рівнянь:

$$\begin{cases} -4u_{1;\,1} + 2u_{1;\,2} = -0{,}0625; \\ 2u_{1;\,1} - 4u_{1;\,2} + u_{2;\,2} = -0{,}0625; \\ 4u_{1;\,2} - 4u_{2;\,2} = -0{,}0625. \end{cases}$$

Розв'язавши останню систему, одержимо:

$$u_{1;\,1} = 0{,}0429;\ u_{1;\,2} = u_{2;\,1} = 0{,}0547;\ u_{2;\,2} = 0{,}0703.$$

Завдання 1 та *2*

1. Застосувавши метод сіток, знайти розв'язок рівняння Лапласа в точках a, b, c, d квадрата за крайових умов, вказаних на рис. 9.10, для $\alpha = 0{,}9 + 0{,}1 \cdot k, k = 0, 1, 2$; $\beta = 1{,}01 + 0{,}01 \cdot n,\ \ n = 0 \cup \overline{1, 4}$.

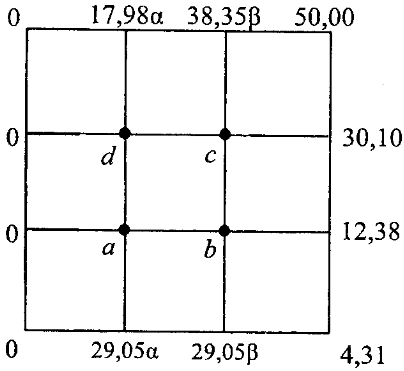


Рис. 9.10

Відповіді

Значення розв'язку (рис. 9.10) в точках a, b, c, d подано таблицею:

α	β	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
0,9	p	15,20	15,25	15,30	15,35	15,40
	q	20,53	20,69	20,84	20,99	21,14
	r	25,09	25,24	25,39	25,53	25,68
	s	14,12	14,17	14,22	14,27	14,32
1,0	p	16,32	16,37	16,42	16,47	16,52
	q	21,10	21,26	21,41	21,56	21,71
	r	26,24	26,39	26,53	26,68	26,83
	s	15,14	15,18	15,23	15,28	15,33
1,1	p	17,44	17,50	17,54	17,60	17,65
	q	21,67	21,82	21,98	22,13	22,28
	r	27,39	27,53	27,68	27,83	27,98
	s	16,15	16,20	16,25	16,30	16,35

2. Застосувавши метод сіток з кроком $h = 1/4$, знайти розв'язок рівняння Лапласа в квадраті з вершинами $A(0;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, $C(1;\ 1)$, $D(1; 0)$. Крайові умови подано табл. 9.2.

Таблиця 9.2

№	$u\|_{AB}$	$u\|_{BC}$	$u\|_{CD}$	$u\|_{AD}$
1	$30y$	$30(1-x^2)$	0	0
2	$30y$	$30\cos(\pi x/2)$	$30\cos(\pi y/2)$	0
3	$50y(1-y^2)$	0	0	$50\sin\pi x$
4	$20y$	20	$20y^2$	$50x(1-x)$
5	0	$50x(1-x)$	$50y(1-y^2)$	$50x(1-x)$
6	$30\sin\pi y$	$20x$	$20y$	$30x(1-x)$
7	$30(1-y)$	$20\sqrt{x}$	$20y$	$30(1-x)$
8	$50\sin\pi y$	$30\sqrt{x}$	$30y^2$	$50\sin\pi x$
9	$40y^2$	40	40	$40\sin(\pi x/2)$
10	$50y$	$50(1-x)$	0	$60x, 0\le x<{}^1/_2$ $60(1-x), {}^1/_2\le x\le 1$

Приклад 9.9. Знайти розв'язок рівняння Лапласа для квадрата за крайовими умовами, вказаними на рис. 9.11.

Розв'язання. Розв'яжемо задачу *методом усереднення Лібмана* (підрозд. 9.4.1): після вибору *початкового наближення*, ітерації проведемо

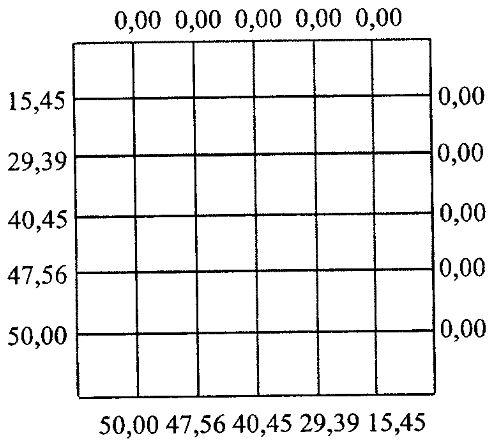


Рис. 9.11

за формулою (9.21) (можна за (9.22)).

Нижче наведено *основний обчислювальний шаблон* для даного завдання. Він будується так: кожен вузол замінюється прямокутником.

В прямокутниках, що відповідають граничним вузлам, записують дані крайові значення. Оскільки в процесі ітерації граничні значення не змінюються, то останні шаблони подано прямокутниками 5×5 (табл. 9.3), які при обчисленнях «накладають» на *основний шаблон*:

	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
15,45						0,00
29,37						0,00
40,45						0,00
47,56						0,00
50,00						0,00
	50,00	47,56	40,45	29,37	15,45	

Порядок заповнення шаблонів:

1. *Обчислення початкового наближення.* Інтерполюються граничні значення на внутрішні вузли таким чином. Заповнюють верхній рядок, вважаючи, що функція $u(x;\ y)$ спадає лінійно від 15,45 до 0. Це означає, що в якості початкового значення $u_{i;\,5}^{(0)}$ потрібно взяти:

$u_{i;\,5}^{(0)} = (15б45/6)(6 - i)$ $\left(i = \overline{1,5}\right)$, тобто $u_{1;\,5}^{(0)} = 12{,}88;$

$u_{2;\,5}^{(0)} = 10{,}30;\ u_{3;\,5}^{(0)} = 7{,}72;\ \ u_{4;\,5}^{(0)} = 5{,}15;\ u_{5;\,5}^{(0)} = 2{,}58.$

Прийнявши $u_{5;\,j}^{(0)} = u_{i;\,5}^{(0)}$, аналогічно заповнюють правий стовпець.

Потім розглядають другий зверху рядок: функція $u(x;\ y)$ спадає лінійно від 29,39 до 5,15. Діючи аналогічно до попереднього випадку, одержують значення $u_{i;\,4}^{(0)}$ $\left(i = \overline{2,5}\right)$, а отже, і $u_{4;\,j}^{(0)}$ $\left(j = \overline{1,4}\right)$. Процес продовжують до заповнення всієї таблиці *початкового наближення* (табл. 9.3, *шаблон* 1).

2. *Обчислення послідовних наближень за формулою* (9.21). Прикладаючи *шаблон* 1 до основного шаблона за формулою (9.21) при $k = 1$ послідовно одержуємо:

$$u_{1;\,5}^{(1)} = (1/4)\left(u_{2;\,5}^{(0)} + u_{0;\,5}^{(0)} + u_{1;\,6}^{(0)} + u_{1;\,4}^{(0)}\right) =$$

$$= (1/4)(10{,}30 + 15{,}45 + 0 + 24{,}54) = 12{,}57;$$

$$u_{1;\,4}^{(1)} = (1/4)\left(u_{2;\,4}^{(0)} + u_{0;\,4}^{(0)} + u_{1;\,5}^{(0)} + u_{1;\,3}^{(0)}\right) =$$

$$= (1/4)\,(19{,}69 + 29{,}39 + 34{,}05 + 12{,}88) = 24{,}00 \text{ і т. д.}$$

Усі результати записують в *шаблон* 2 та аналогічним чином знаходять наступні наближення $u_{i;\,j}^{(2)}$. Обчислення проводять до тих пір, поки значення двох послідовних ітерацій будуть відрізнятися не більше ніж на 0,05.

Таблиця 9.3

Шаблон 1

12,88	10,30	7,72	5,15	2,58
24,54	19,69	14,85	10,00	5,15
34,05	27,65	21,25	14,85	7,72
40,92	34,29	27,65	19,69	10,30
45,46	40,92	34,05	24,54	12,88

Шаблон 2

12,57	10,07	7,58	5,08	2,58
24,00	19,34	14,66	10,00	
33,39	27,32	21,25		
40,34	34,28			
45,46				

Шаблон 3

12,38	9,87	7,45	5,04	2,54
23,67	19,01	14,54	9,87	
33,03	27,06	20,99		
40,17	33,83			
45,17				

Шаблон 4

12,25	9,71	7,36	4,96	2,52
23,45	18,78	14,33	9,79	
32,84	26,72	20,80		
39,90	33,62			
45,08				

Шаблон 5

12,15	9,60	7,25	4,92	2,48
23,32	18,55	14,18	9,64	
32,63	26,51	20,52		
39,78	33,31			
44,95				

Шаблон 6

12,09	9,49	7,18	4,84	2,46
23,18	18,40	13,99	9,55	
32,52	26,25	20,34		
39,61	33,14			
44,89				

Шаблон 7

12,08	9,42	7,08	4,80	2,42
23,10	18,23	13,87	9,42	
32,37	26,10	20,12		
39,53	32,93			
44,80				

Шаблон 8

11,99	9,34	7,02	4,73	2,40
23,00	18,12	13,71	9,34	
32,30	25,91	19,98		
39,42	32,82			
44,76				

Шаблон 9

11,95	9,28	6,94	4,69	2,36
22,95	17,99	13,62	9,22	
32,20	25,80	19,81		
39,36	32,66			
44,71				

Шаблон 10

11,92	9,22	6,90	4,68	2,34
22,88	17,91	13,49	9,16	
32,14	25,66	19,71		
39,28	32,58			
44,68				

Шаблон 11

11,89	9,18	6,84	4,60	2,32
22,84	17,81	13,42	9,06	
32,07	25,58	19,58		
39,24	32,47			
44,64				

Шаблон 12

11,87	9,14	6,80	4,56	2,30
22,79	17,76	13,32	9,01	
32,03	25,48	19,50		
39,18	32,41			
44,62				

Шаблон 13

11,84	9,11	6,76	4,53	2,28
22,76	17,68	13,27	8,94	
31,98	25,42	19,40		
39,16	32,33			
44,59				

Шаблон 14

11,83	9,07	6,73	4,50	2,26
22,72	17,64	13,20	8,90	
31,95	25,35	19,34		
39,12	32,29			
44,58				

Шаблон 15

11,81	9,05	6,69	4,47	2,25
22,70	17,58	13,15	8,85	
31,91	25,30	19,28		
39,10	32,24			
44,56				

Шаблон 16

11,80	9,02	6,67	4,45	2,24
22,67	17,55	13,10	8,81	
31,89	25,25	19,22		
39,07	32,20			
44,55				

Шаблон 17

11,78	9,00	6,64	4,43	2,22
22,66	17,51	13,06	8,78	
32,86	25,22	19,18		
39,05	32,16			
44,54				

Шаблон 18

11,77	9,00	6,63	4,42	2,21
22,66	17,49	13,04	8,77	
32,85	25,20	19,16		
39,06	32,14			
4,54				

Результати 17-ї і 18-ї (16-ї і 17-ї також!) ітерацій умові задовольняють. Шаблони, що відповідають послідовним ітераціям, наведено в табл. 9.3. Таблиці шаблонів заповнено з урахуванням симетрії умови завдання.

Приклад 9.10. Знайти розв'язок рівняння Лапласа для квадрата за крайовими умовами, поданими на рис. 9.12, прийнявши за крок $h = 1/6$.

Розв'язання. 1. *Обчислення початкового наближення.* Для обчислення початкового наближення спочатку побудуємо сітку з кроком $h = 1/3$, позначивши значення шуканої функції у вузлах сітки через a, b, c, d (рис. 9.12). Зауважимо, що внаслідок симетрії крайових умов одержимо:

$$a = b = c = d. \qquad (9.68\ г)$$

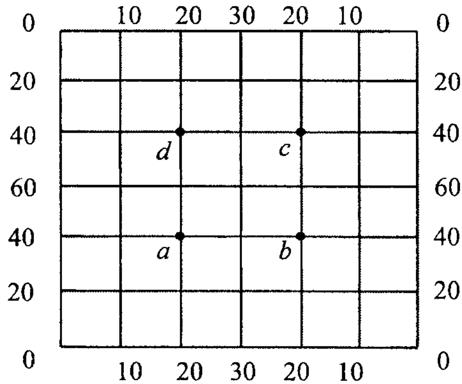


Рис. 9.12

Тому достатньо скласти тільки одне рівняння:

$$40 + b + 20 + d - 4a = 0.$$

Використавши умову (9.68 г), одержимо $a = 30$.

Далі обчислюємо перше наближення з кроком $h = 1/6$. Для цього будують шаблон (рис. 9.13), в якому записують крайові умови та одержані значення в чотирьох вузлах:

$$u_{2;\,2}^{(0)} = u_{4;\,2}^{(0)} = u_{2;\,4}^{(0)} = u_{4;\,4}^{(0)} = 30.$$

6	0	10	20	30	20	10	0
5	20	22,5	24,4	25	24,4	22,5	20
4	40	35	30	30	30	35	40
3	60	40	35	30	35	40	60
2	40	35	30	30	30	35	40
1	20	22,5	24,4	25	24,4	22,5	20
0	0	10	20	30	20	10	0
j / i	0	1	2	3	4	5	6

Рис. 9.13

Використовуючи ці величини, знаходять значення $u_{i;\,j}^{(0)}$ в останніх вузлах сітки. Розглянемо детальніше обчислення $u_{i;\,1}^{(0)}$ $(i = \overline{1,5})$. Значення $u_{1;\,1}^{(0)}$ та $u_{3;\,1}^{(0)}$ обчислюють за формулою (9.19):

$$u_{1;1}^{(0)} = \frac{1}{4}\left(u_{0;0} + u_{2;0} + u_{0;2} + u_{2;2}^{(0)}\right) = \frac{1}{4}(0 + 20 + 40 + 30) = 22{,}5,$$

$$u_{3;1}^{(0)} = \frac{1}{4}\left(u_{2;0} + u_{4;0} + u_{2;2}^{(0)} + u_{4;2}^{(0)}\right) = \frac{1}{4}(20 + 20 + 30 + 30) = 2{,}5;$$

а $u_{2;1}^{(0)}$ за формулою (9.18):

$$u_{2;1}^{(0)} = (1/4)\left(u_{2;0} + u_{2;2}^{(0)} + u_{1;1}^{(0)} + u_{3;1}^{(0)}\right) = 24{,}4.$$

З умови симетрії: $u_{5;2}^{(0)} = u_{1;1}^{(0)}$, $u_{4;2}^{(0)} = u_{2;1}^{(0)}$.

Аналогічно обчислюють значення $u_{i;j}^{(0)}$ при $j = \overline{2,5}$.

2. *Обчислення послідовних наближень.* З огляду на симетрію, достатньо провести обчислення для чверті квадрата. Для прискорення збіжності ітерацій діють таким чином: при $k = 1$ знаходять $u_{1;1}^{(1)}$ за формулою (9.21):

$$u_{1;1}^{(1)} = (1/4)\left(u_{1;0} + u_{1;2}^{(0)} + u_{0;1} + u_{2;1}^{(0)}\right) = 22{,}3.$$

Одержане значення використовують для знаходження $u_{2;1}^{(1)}$, тобто

$$u_{2;1}^{(1)} = (1/4)\left(u_{1;1}^{(1)} + u_{3;1}^{(0)} + u_{2;0} + u_{2;4}^{(0)}\right) =$$
$$= (1/4)(22{,}3 + 25 + 20 + 30) = 24{,}3.$$

При обчисленні $u_{3;1}^{(1)}$ використовують значення $u_{2;1}^{(1)} = u_{4;1}^{(1)}$ і т. д. Ітерації продовжують доти, доки результати двох послідовних наближень відрізнятимуться не більше ніж на 0,1. Для чверті квадрата результати послідовних наближень наведено в табл. 9.4.

Таблиця 9.4

40	33,1	30,6	29,6	30,6
60	40,3	32,9	31,2	32,9
40	33,1	30,6	29,6	30,6
20	22,3	24,3	27,2	24,3
0	10	20	30	20

40	33,2	30,2	29,9	30,2
60	39,8	32,8	31,3	32,8
40	33,2	30,2	29,9	30,2
20	21,9	24,9	27,4	24,9
0	10	20	30	20

40	33,1	30,2	29,9	30,2
60	39,8	32,8	31,3	32,8
40	33,1	30,2	29,9	30,2
20	22,0	24,9	27,4	24,9
0	10	20	30	20

Приклад 9.11. У табл. 9.5 наведено наближений розв'язок рівняння Лапласа для одиничного квадрата при заданих крайових значеннях з кроком $h = 0{,}1$. Оцінити похибку цього розв'язку за методом Рунге.

Таблиця 9.5

	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
6,75	5,86	5,06	4,34	3,68	3,04	2,42	1,82	1,21	0,60	0,00
13,38	11,60	10,04	8,63	7,32	6,06	4,84	3,63	2,42		0,00
19,70	17,12	14,86	12,81	10,89	9,04	7,23	5,43			0,00
25,60	22,34	19,47	16,85	14,38	11,98	9,60				0,00
30,95	27,17	23,82	20,73	17,78	14,88					0,00
35,66	31,56	27,89	24,46	21,12						0,00
39,67	35,50	31,72	28,09							0,00
42,98	39,05	35,38								0,00
45,63	42,34									0,00
	45,63	42,98	39,67	35,66	30,95	25,60	19,70	13,38	6,75	

Розв'язання. Розв'язують завдання з кроком $2h = 0{,}2$, взявши початкове наближення з табл. 9.5. Результати обчислень з кроком $2h = 0{,}2$ наведено в табл. 9.6. Потім знаходять різниці $u_h - u_{2h}$ значень наведеного розв'язку з кроком $h = 0{,}1$ та одержаного з кроком $2h = 0{,}2$ й обчислюють похибки ε_h за формулою (9.24) (табл. 9.7 та 9.8).

Таблиця 9.6

	0,00	0,00	0,00	0,00	
13,38	10,05	7,32	11,84	2,42	0,00
25,60	19,50	14,40	9,62		0,00
35,66	27,95	21,17			0,00
42,98	35,46				0,00
	42,98	35,66	25,60	13,38	

Таблиця 9.7

0,01	0,00	0,00	0,00
0,03	0,02	0,02	
0,06	0,05		
0,08			

Таблиця 9.8

	0,003		0,000		0,000		0,000	
	0,010		0,007		0,007			
	0,020		0,017					
	0,027							

Завдання 3-6

3. Застосовуючи метод усереднення Лібмана, знайти наближений розв'язок рівняння Лапласа з кроком $h = 1/8$ в квадраті з вершинами $A(0;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, $C(1;\ 1)$, $D(1;\ 0)$. Крайові умови наведено в табл. 9.9. Ітерації проводити з точністю до 10^{-2}.

4. Знайти наближений розв'язок рівняння Лапласа в квадраті $ABCD$ за крайовими умовами наведеними в табл. 9.10, з кроком $h = 1/6$ при наступних значеннях параметрів:

$$\alpha = 0{,}9 + 0{,}1k,\ \ k = 0, 1, 2;\ \beta = 1{,}01 + 0{,}02n,\ \ n = 0, 1, 2.$$

Ітерації проводити з точністю до 10^{-2}.

5. Знайти наближений розв'язок рівняння Лапласа для областей з крайовими умовами, поданими рис. 9.14, *а*, *б*, *в*. Ітерації проводити до тих пір, поки різниці між послідовними значеннями функції для всіх точок не стануть меншими $0{,}005$.

6. Знайти наближений розв'язок рівняння Лапласа для одиничного квадрата з кроком $h = 1/8$. Крайові умови на лівій стороні квадрата прийняти рівними 2,5; 5,0; 7,5; 10,0; 7,5; 5,0; 2,5; останні крайові значення – нулі. Ітерації проводити з точністю до 10^{-4}. За початкове наближення прийняти розв'язок завдання 5, одержаний з використанням крайових умов, поданих рис. 9.14, *в*.

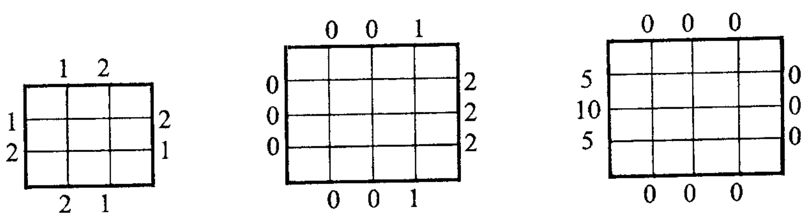
Таблиця 9.9

№	$u\|_{AB}$	$u\|_{BC}$	$u\|_{CD}$	$u\|_{AD}$
1	$30y$	$30(1-x^2)$	0	0
2	$30y$	$30\cos(\pi x/2)$	$30\cos(\pi y/2)$	0
3	$50y(1-y^2)$	0	0	$50\sin \pi x$

№	$u\|_{AB}$	$u\|_{BC}$	$u\|_{CD}$	$u\|_{AD}$
4	$20y$	20	$20y^2$	$50x(1-x)$
5	0	$50x(1-x)$	$50y(1-y^2)$	$50x(1-x)$
6	$30\sin\pi y$	$20x$	$20y$	$30x(1-x)$
7	$30(1-y)$	$20\sqrt{x}$	$20y$	$30(1-x)$
8	$50\sin\pi y$	$30\sqrt{x}$	$30y^2$	$50\sin\pi x$
9	$40y^2$	40	40	$40\sin(\pi x/2)$
10	$50y$	$50(1-x)$	0	$60x, 0 \le x < 1/2;$ $60(1-x),$ $x \in [1/2; 1]$

Таблиця 9.10

$u\|_{AD}$	0	17,28	29,05α	40,00	29,05β	17,28	4,31
$u\|_{BC}$	0	9,81	17,98α	29,12	38,25β	42,31	50,00
$u\|_{AB}$	0	0	0	0	0	0	0
$u\|_{DC}$	4,31	6,98	12,38β	19,14	30,20α	40,16	50,00



а *б* *в*

Рис. 9.14

Відповіді

4. α = 0,9; β = 1,01

8,26	15,71	24,01	30,65	35,05
7,53	14,47	20,59	24,94	27,10
7,52	14,13	19,07	21,46	21,33
8,60	15,63	20,23	20,56	17,65
11,38	19,71	25,72	22,96	16,22

α = 0,9; β = 1,03

8,29	15,78	24,14	30,95	35,15
7,58	14,55	20,74	25,12	27,20
7,57	14,23	19,21	21,62	21,44
8,64	15,72	20,36	20,74	17,81
11,11	19,77	25,83	23,20	16,32

$\alpha = 0,9;\ \beta = 1,05$

8,32	15,85	24,27	31,25	35,25
7,63	14,65	20,88	25,30	27,29
7,62	14,33	19,35	21,77	21,54
8,69	15,81	20,50	20,91	17,97
11,44	19,83	25,94	23,44	16,42

$\alpha = 1,0;\ \beta = 1,01$

8,58	16,57	24,54	31,11	35,48
7,90	15,11	21,27	25,70	28,27
7,85	14,70	19,70	22,06	21,86
8,93	16,28	20,78	21,00	17,93
11,74	20,81	20,20	23,22	16,35

$\alpha = 1,0;\ \beta = 1,03$

8,61	16,64	24,68	31,41	35,58
7,94	15,21	21,42	25,89	28,39
7,91	14,81	19,85	22,23	21,97
8,98	16,38	20,93	21,19	18,09
11,77	20,87	26,32	23,47	16,46

$\alpha = 1,0;\ \beta = 1,05$

8,64	16,71	24,82	31,72	35,68
7,99	15,31	21,58	26,08	28,50
7,96	14,92	20,01	22,40	22,08
9,03	16,48	21,08	21,37	18,26
11,80	20,94	26,44	23,72	16,56

$\alpha = 1,10;\ \beta = 1,01$

8,92	17,48	25,16	31,67	35,96
8,31	15,88	22,10	26,60	29,56
8,30	15,40	20,45	22,80	22,45
9,31	16,98	21,43	21,52	18,25
12,11	21,94	26,73	23,53	16,51

$\alpha = 1,10;\ \beta = 1,03$

8,95	17,56	25,31	31,99	36,07
8,36	15,99	22,27	26,81	29,67
8,36	15,52	20,62	22,99	22,58
9,36	17,09	21,60	21,73	18,42
12,14	22,01	26,86	23,79	16,62

$\alpha = 1,0;\ \beta = 1,05$

8,97	17,58	25,36	32,18	36,11
8,68	16,00	22,29	26,86	29,69
8,36	15,59	20,71	23,05	22,62
9,43	17,22	21,71	21,85	18,55
12,20	22,09	26,96	24,01	16,70

Вказівка. Використати відповіді до *завдання 1.*

5.

а)

	1	2	
1	1,333	1,667	2
2	1,667	1,333	1
	2	1	

б)

	0	0	1	
0	0,1875	0,5000	1,8750	2
0	0,2500	0,6250	1,2500	2
0	0,1875	0,5000	1,8750	2
	0	0	1	

в)

	0	0	0	
5	2,634	1,250	0,491	0
10	4,286	1,875	0,714	0
5	2,634	1,250	0,491	0
	0	0	0	

6.

	0	0	0	0	0	0	0	
2,5000	1,8731	1,3400	0,9281	0,6247	0,4041	0,2405	0,1120	0
5,0000	3,6525	2,5588	1,7479	1,1668	0,7513	0,4461	0,2074	0
7,50000	5,1782	3,4950	2,3380	1,5436	0,9882	0,5851	0,2717	0
10,0000	6,0654	3,9052	2,5656	1,6814	1,0730	0,6344	0,2945	0
7,5000	5,1782	3,4951	2,3380	1,5436	0,9883	0,5851	0,2718	0
5,0000	3,6525	2,5589	1,7480	1,1670	0,7514	0,4461	0,2075	0
2,5000	1,8731	1,3401	0,9282	0,6248	0,4042	0,2406	0,1120	0
	0	0	0	0	0	0	0	

Приклад 9.12. Знайти наближений розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

що на колі $x^2+y^2=16$ задовольняє умову $u|_{\Gamma}=x^2y^2$.

Розв'язання. В силу симетрії розв'язку розглянемо чверть круга.

Порядок заповнення шаблонів.

1) Візьмемо велику сітку з кроком $h=2$ (рис. 9.15).

Найближча до вузла $E(4;\ 2)$ сітки точка межі Г є $P(\sqrt{12};\ 2)$, тому покладаємо:

$u(E)\cong u(P)=12\cdot 2^2=48.$

Аналогічно, для вузла $E'(2;\ 4)$ сітки найближчою точкою межі є $P'(2;\ \sqrt{12})$, тому

$u(E')\cong u(P')=48.$

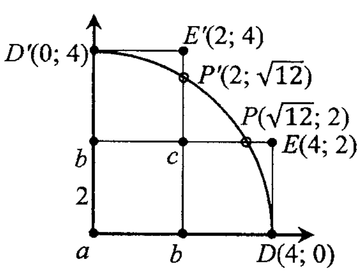


Рис. 9.15

У вузлах D (4; 0) і D' (0; 4) сітки, очевидно, одержуємо:

$$u(D)=u(D')=0.$$

Позначимо для зручності через a, b, c значення функції $u(x;\ y)$ у внутрішніх вузлах сітки (рис. 9.15) і, враховуючи симетрію задачі, складемо систему скінченно-різницевих рівнянь:

$$a = {}^1/_4 \cdot 4b, \;\; b = {}^1/_4 (2c + a + 0), \;\; c = {}^1/_4 (48 + 48 + 2b).$$

З останньої системи рівнянь знаходимо:

$$a = 24, \;\; b = 24, \;\; c = 36.$$

2) Візьмемо дрібнішу сітку (рис. 9.16) з кроком $h = 1$ при неуточнених граничних значеннях. Одержуємо:

$$u(A) = u(A') = 15, \;\; u(B) = u(B') = 48, \;\; u(C) = 63.$$

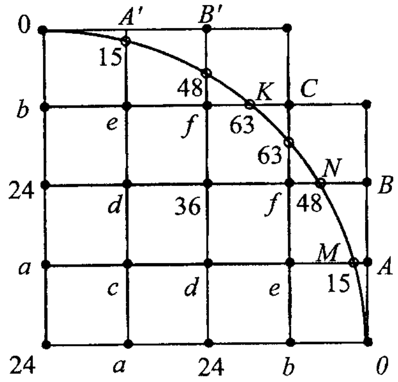


Рис. 9.16

Використовуючи значення функції $u(x;\, y)$ у вузлах сітки з кроком $h = 2$ і в граничних вузлах, та врахувавши симетрію задачі, складаємо скінченно–різницеві рівняння для значень a, b, c, d, e, f (рис. 9.16), причому для значень a, d, b, f складаємо рівняння (9.18), а для значень c, e – рівняння (9.19).

Таким чином, одержуємо:

$$a = (1/4)(24 + 24 + c + c); \;\; f = (1/4)(48 + e + 63 + 36);$$

$$b = (1/4)(e + e + 0 + 24); \;\; c = (1/4)(24 + 24 + 24 + 36);$$

$$d = (1/4)(e + c + 24 + 36); \;\; e = (1/4)(0 + 36 + 48 + 24).$$

Звідки наближено знаходимо:

$$a = 26, \;\; b = 20, \;\; c = 27, \;\; d = 28, \;\; e = 27, \;\; f = 44.$$

3) Уточнюємо значення $u(x;\, y)$ у граничних вузлах. Використовуючи формулу (9.28), для вузла A матимемо:

$$\delta_A = |MA| = 4 - \sqrt{15} \cong 0{,}13;$$

$$u_A^{(1)} = u_M + \frac{e - u_M}{\delta_A - h}\delta_A = 15 - \frac{1{,}56}{0{,}87} \cong 13.$$

Аналогічні розрахунки проводимо для вузлів B та C.

Вузол B: $\delta_B = |NB| = 4 - \sqrt{12} \cong 0{,}6$;

$$u_B^{(1)} = u_N + \frac{f - u_N}{\delta_B - h}\delta_B = 48 + \frac{0{,}4}{0{,}4} = 49.$$

Вузол C: $\delta_C = |KC| = 3 - \sqrt{7} \cong 0{,}35$;

$$u_C^{(1)} = u_K + \frac{f - u_K}{\delta_C - h}\delta_C = 63 + \frac{44 - 63}{0{,}35 - 1} \cdot 0{,}35 \cong 73.$$

Таким чином, у граничних вузлах одержали:

$$u_A^{(1)} = u_{A'}^{(1)} = 13, u_B^{(1)} = u_{B'}^{(1)} = 49, u_C^{(1)} = 73.$$

4) Складаємо таблицю початкових значень (*шаблон* 1) і послідовно уточнюємо значення шуканої функції $u(x;\, y)$ у внутрішніх вузлах за формулами (9.22) до тих пір, поки значення, одержані в двох послідовних ітераціях, будуть відрізнятися не більше ніж на одиницю.

5) Результати розрахунків записано до шаблонів 2 і 3, наведених в табл. 9.11. Наближені значення шуканої функції подано шаблонами 2 і 3, відрізняються не більше ніж на одиницю. Для порівняння у шаблоні 3*а* наводяться значення точного розв'язку задачі:

$u(x;\, y) = x^2y^2 + (1/8)[256 - (x^2 + y^2)]^2$ у вузлах сітки.

Таблиця 9.11

Результати послідовних ітерацій для прикладу 9.12

Шаблон 1

0	13	49		
20	27	44	73	
24	28	36	44	49
26	27	28	27	13
24	26	24	20	0

Шаблон 2

20	27	46	
26	29	37	46
26	27	29	27
26	26	26	20

Шаблон 3

20	27	46	
26	30	38	46
26	28	30	27
26	26	26	20

Шаблон 3*а*

0	12	46		
22	28	47	73	
30	33	40	47	46
32	32	33	28	12
32	32	30	22	0

Завдання 7 і *8*

Різницевим методом з кроком h знайти розв'язок рівняння Лапласа в області G при вказаних крайових умовах. Розв'язок скінченно-різницевої системи одержати методом Лібмана з уточненням граничних значень.

7. Крок $h = 0{,}1$, область G обмежено кривими: $2y = 1 - 4x^2$, $y = 0, x = 0$; крайові умови мають вигляд:

$$u|_{x=0} = 0,\ \ u|_{y=0} = (1 - 4x^2)x,\ \ u|_{2y=1-4x^2} = 12xy^2.$$

8. Крок $h = 0{,}2$, область G визначається умовами:

$$x^2 + (y + 3)^2 \le 16,\ \ y \ge 0;$$

крайові умови мають вигляд:

а) $u|_{y=0} = 0,\ u|_C = 2y(2x^2 + 3y)$,

де C – коло $x^2 + (y + 3)^2 = 16$;

б) $u|_{y=0} = x(7 - x^2),\ u|_C = 4xy^2$,

де C – коло $x^2 + (y + 3)^2 = 16$.

Відповіді

7.

<table>
<tr><td>1,0</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0,9</td><td>0</td><td>0,888</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0,8</td><td>0</td><td>0,704</td><td>1,384</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0,7</td><td>0</td><td>0,544</td><td>1,064</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0,6</td><td>0</td><td>0,408</td><td>0,792</td><td>1,128</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>0</td><td>0,296</td><td>0,568</td><td>0,792</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0,4</td><td>0</td><td>0,208</td><td>0,392</td><td>0,528</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0,3</td><td>0</td><td>0,144</td><td>0,264</td><td>0,336</td><td>0,336</td><td></td></tr>
<tr><td>0,2</td><td>0</td><td>0,104</td><td>0,184</td><td>0,216</td><td>0,176</td><td></td></tr>
<tr><td>0,1</td><td>0</td><td>0,088</td><td>0,152</td><td>0,168</td><td>0,112</td><td rowspan="2">0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0,096</td><td>0,168</td><td>0,192</td><td>0,144</td></tr>
<tr><td>y / x</td><td>0</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,5</td></tr>
</table>

Примітка. *У* відповіді наведено значення точного розв'язку завдання:

$$u = 12xy^2 + x(1 - 4x^2 - 2y).$$

8. а)

1,0	6,000	6,120	6,480										
0,8	5,088	5,184	5,472	5,952	6,624	7,488	8,544						
0,6	3,984	4,056	4,272	4,632	5,136	5,784	6,576	7,512	8,592				
0,4	2,736	2,784	2,800	3,168	3,504	3,936	4,464	5,038	5,808	6,624	7,536		
0,2	1,392	1,416	1,488	1,608	1,776	1,992	2,076	2,568	2,928	3,336	3,792	4,316	4,848
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
y/x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4

Примітка. *У* відповіді наведено значення точного розв'язку завдання: $u = y(3x^2 - y^2 + 7)$. У зв'язку із симетрією розв'язку, наведено половину таблиці (для $x \geq 0$).

б)

1,0	0	0,792	1,536										
0,8	0	0,816	1,584	2,256	2,784	3,120	3,216						
0,6	0	0,888	1,728	2,472	3,072	3,480	3,648	3,528	3,072				
0,4	0	1,008	1,968	2,832	3,552	4,080	4,368	4,368	4,032	3,312	2,160		
0,2	0	1,176	2,304	3,336	4,224	4,920	5,376	5,544	5,376	4,824	3,840	2,376	0,384
0	0	1,392	2,736	3,984	5,088	6,000	6,672	7,056	7,104	6,768	6,000	4,752	1,976
y/x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4

Примітка. *У* відповіді наведено значення точного розв'язку завдання: $u = x(7 - 6y + 3y^2 - x^2)$ для $x \geq 0$. Значення функції $u(x;\ y)$ при $x < 0$ легко одержати, врахувавши її непарність відносно x.

Приклад 9.13. Знайти розв'язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при таких початкових і крайових умовах:

$$u(x;\ 0) = 4x(1 - x)\ (0 \leq x \leq 1),\ \ u(0;\ t) = 0 \text{ і } u(1;\ t) = 0$$
$$(0 \leq t < \infty).$$

Розв'язання. Оскільки початкові і крайові умови симетричні відносно прямої $x = 1/2$, то й розв'язок $u(x;\ t)$ буде симетричним відносно цієї прямої.

Для розрахунків покладемо $h = 0{,}1$, тоді $l = (1/6) \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 1/600$, та будуємо систему вузлів $(x_i;\ t_j)$, де $x_i = 0{,}1i$, $t_j = j\ /\ 600$. Результати обчислень подано в табл. 9.12.

Таблиця 9.12

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0,360	0,640	0,840	0,960	1,000	0,960	0,840	0,640	0,360	0
1	0	0,347	0,627	0,827	0,947	0,987	0,947	0,827	0,627	0,347	0
2	0	0,336	0,613	0,813	0,933	0,973	0,933	0,813	0,613	0,336	0
3	0	0,326	0,600	0,800	0,920	0,960	0,920	0,800	0,600	0,326	0
4	0	0,317	0,588	0,787	0,907	0,947	0,907	0,787	0,588	0,317	0
5	0	0,309	0,576	0,774	0,894	0,934	0,894	0,774	0,576	0,309	0
6	0	0,302	0,564	0,761	0,881	0,921	0,881	0,761	0,564	0,302	0

Початковий рядок таблиці ($j = 1$) заповнюється на основі заданих початкових умов:

$$u(x_i;\ 0) = 4x_i(1 - x_i) = 0{,}4i(1 - 0{,}1i) \ \ (i = 0 \cup \overline{1,10}).$$

У перший ($i = 0$) і останній ($i = 10$) стовпці вписують дані граничних умов:

$$u(0;\ t_j) = u(1;\ t_j) = 0 \ \ (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Останні рядки $j = 1, 2, \ldots$ таблиці послідовно заповнюють за допомогою застосування розрахункової формули (9.29) за умови, що $F_{i;\,j} = 0$.

Приклад 9.14. Розв'язати приклад 9.13 методом прогонки.

Розв'язання. Приймемо $h = 0{,}1$; $l = 0{,}01$; тоді $s = h^2/l = 1$. Прийнявши $u_{i;\,j+1} = a_{i;\,j+1}\left(b_{i;\,j+1} + u_{i+1;\,j+1}\right)$, зважаючи на формули (9.46) і (9.43) одержимо: $a_{1;\,j+1} = 1/3$, $b_{1;\,j+1} = u_{1;\,j}$,

$$a_{i;\,j+1} = \frac{1}{3 - a_{i-1;\,j+1}}, \ \ b_{i;\,j+1} = a_{i-1;\,j+1} b_{i-1;\,j+1} + u_{i;\,j} \ \ (i > 1).$$

Зокрема, при $j = 0$ одержують формули для першого шару:

$$a_{1;\,1} = 1/3, \ \ b_{1;\,1} = u_{1;\,0}, \qquad (9.68\ ґ)$$

$$a_{i;\,1} = \frac{1}{3 - a_{i-1;\,1}}, \ \ b_{i;\,1} = a_{i-1;\,j+1} b_{i-1;\,1} + u_{i;\,0} \ \ (i > 1). \quad (9.68\ д)$$

Крім того, на основі формул (9.47) одержимо:

$$\begin{cases} u_{n;\,1} = 0; \\ u_{n-1;\,1} = \left(u_{n;\,1} + b_{n-1;\,1}\right) a_{n-1;\,1}; \\ u_{n-2;\,1} = \left(u_{n-1;\,1} + b_{n-2;\,1}\right) a_{n-2;\,1}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{1;\,1} = \left(u_{2;\,1} + b_{1;\,1}\right) a_{1;\,1}. \end{cases} \qquad (9.68\ е)$$

За формулами (9.68 ґ, д, е) можна обчислити значення $u_{i;\,j}$ шуканої функції для першого шару ($j = 1$). Результати обчислень наведено в табл. 9.13.

Таблиця 9.13

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u_{i;\,0}$	0	0,360	0,640	0,840	0,960	1,000	0,960	0,840	0,640	0,360	0
$a_{i;\,1}$	0	0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0
$b_{i;\,1}$	0	0,360	0,760	1,125	1,389	1,530	1,544	1,430	1,186	0,813	0
$u_{i;\,1}$	0	0,310	0,572	0,764	0,882	0,921	0,882	0,764	0,571	0,310	0
$u^*_{i;\,1}$	0	0,302	0,564	0,761	0,881	0,921	0,881	0,761	0,564	0,302	0

В останньому рядку табл. 9.13 для порівняння наведено значення $u^*_{i;\,1}$ шуканої функції, одержані звичайним методом сіток при $h = \Delta x = 1/10$ та $l = \Delta t = 1/600$ (табл. 9.12). Спостерігається деяке відхилення значень $u_{i;\,1}$ та $u^*_{i;\,1}$ поблизу межі області ($i = 1$ і $i = 9$). Це означає, що для точок, близьких до межі області, необхідно застосовувати точніші формули числового диференціювання.

Приклад 9.15. Використовуючи різницеві рівняння (9.30), знайти наближений розв'язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

що задовольняє умови: $u(x;\,0) = \sin \pi x$ $(0 \le x \le 1)$ та $u(0;\,t) = u(1;\,t) = 0$ $(0 \le t \le 0{,}025)$.

Розв'язання. Виберемо за аргументом x крок $h = 0{,}1$. Оскільки $\sigma = 1/2$, то за аргументом t крок: $l = h^2/2 = 0.005$. Заносимо в табл. 9.14 початкові та крайові значення. Враховуючи їх симетрію, заповнюємо таблицю тільки для $x = 0;\,0{,}1;\,0{,}2;\,0{,}3;\,0{,}4;\,0{,}5$.

Таблиця 9.14

j	t \ x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0	0	0,3090	0,5878	0,8090	0,9511	1,0000
1	0,005	0	0,2939	0,5590	0,7699	0,9045	0,9511
2	0,010	0	0,3795	0,5316	0,7318	0,8602	0,9045
3	0,015	0	0,2658	0,5056	0,6959	0,8182	0,8602
4	0,020	0	0,2528	0,4808	0,6619	0,7780	0,8182
5	0,025	0	0,2404	0,4574	0,6294	0,7400	0,7780
$\tilde{u}(x;\,t)$	0,025	0	0,2414	0,4593	0,6321	0,7431	0,7813
$\lvert\tilde{u} - u\rvert$	0,025	0	0,0010	0,0019	0,0027	0,0031	0,0033

Значення функції $u(x;\, t)$ на першому шарі знайдемо, використовуючи значення на початковому шарі й крайові умови, за формулою (9.30) при $j = 0$:

$$u_{i;\,1} = \frac{u_{i+1;\,0} + u_{i-1;\,0}}{2}.$$

Таким чином, одержимо:

$$u_{1;\,1} = \frac{1}{2}\left(u_{2;\,0} + u_{0;\,0}\right) = (1/2)(0{,}5878 + 0) = 0{,}2939;$$

$$u_{2;\,1} = \frac{1}{2}\left(u_{3;\,0} + u_{1;\,0}\right) = (1/2)(0{,}8090 + 0{,}3090) = 0{,}5590$$

і т. д.

Записуємо одержані значення $u_{i;\,1}$ $\left(i = \overline{1,5}\right)$ у другий рядок табл. 9.14. Після цього переходимо до обчислення значень на другому шарі за формулою (9.30) при $j = 1$:

$$u_{i;\,2} = \frac{u_{i+1;\,0} + u_{i-1;\,0}}{2}.$$

Подібним чином визначаємо послідовно значення $u_{i;\,j}$ при

$$t = 0{,}005;\ 0{,}010;\ 0{,}015; 0{,}020; 0{,}025.$$

У двох останніх рядках таблиці наведено значення точного розв'язку задачі $\tilde{u}(x;\, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$ і модуля різниці $|\tilde{u} - u|$ при $t = 0{,}025$.

Для порівняння наведемо оцінку похибки, одержану за формулою (9.31). Для даної задачі $\varphi(t) = \psi(t) = 0$, $f^{(4)}(x) = \pi^4 \sin \pi x$, а отже, $M_1 = \pi^4$. Таким чином одержуємо:

$$|\tilde{u} - u| \le \frac{0{,}025}{3}\pi^4 h^2 = \frac{0{,}025}{3} \cdot 97{,}22 \cdot 0{,}01 = 0{,}0081.$$

Приклад 9.16. Використовуючи різницеве рівняння (9.29), розв'язати приклад 9.15 при $0 \le t \le 0{,}01$. Дати оцінку похибки одержаного розв'язку.

Розв'язання. Виберемо за аргументом x крок $h = 0{,}1$. Оскільки для формули (9.29) $\sigma = 1/6$, то за аргументом t одержуємо крок $l = 0{,}01/6 \cong 0{,}0017$.

Заносимо до табл. 9.15 початкові й крайові значення.

Таблиця 9.15

j	t \ x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0	0	0,309017	0,587785	0,809017	0,951057	0,000000
1	0,0017	0	0,303976	0,578196	0,795818	0,935541	0,983686
2	0,0033	0	0,299017	0,568763	0,782835	0,920278	0,967638
3	0,0050	0	0,294138	0,559484	0,770063	0,905264	0,951852
4	0,0067	0	0,289339	0,550356	0,757500	0,890495	0,936322
5	0,0083	0	0,284619	0,541377	0,745142	0,875967	0,921046
6	0,0100	0	0,279976	0,532545	0,732982	0,861676	0,906019
$\tilde{u}(x;\ t)$	0,01	0	0,279975	0,532544	0,732984	0,861675	0,906018

З огляду симетрії розв'язку досить заповнити табл. 9.15 для $x \in [0;\ 0{,}5]$. Потім обчислення проводимо за формулою (9.29). Для першого шару при $j = 1$ одержуємо:

$$u_{i;\,1} = \frac{1}{6}\left(u_{0;\,0} + 4u_{1;\,0} + u_{2;\,0}\right),$$

звідки послідовно знаходимо:

$$u_{1;\,1} = \frac{1}{6}(0 + 4 \cdot 0{,}309017 + 0{,}587785) = 0{,}303976,$$

$$u_{2;\,1} = \frac{1}{6}(0{,}309017 + 4 \cdot 0{,}587785 + 0{,}809017) =$$

$$= 0{,}578196,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u_{5;\,1} = \frac{1}{6}(0{,}951057 + 4 \cdot 1 + 0{,}951057) = 0{,}983686.$$

Обчислення для наступних шарів проводимо аналогічно. Для оцінки похибки за формулою (9.32) при $t = 0{,}01$ одержимо:

$$\varphi(t) = \psi(t) = 0,\ f^{(6)}(x) = \pi^6 \sin \pi x,\ M_2 = \pi^6.$$

Таким чином:

$$|u - \tilde{u}| \leq (0{,}01/135)\pi^6 h^4 \cong (0{,}01/135)958{,}6 \cdot 10^{-4} \cong 7 \cdot 10^{-6}.$$

В останньому рядку табл. 9.15 наведено значення точного розв'язку $\tilde{u} = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$ при $t = 0{,}01$. Порівняння показує, що похибка одержаного розв'язку не перевищує $2 \cdot 10^{-6}$.

Завдання 9–19

Знайти наближений розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

що задовольняє умови:

$$u(x;\ 0) = f(x),\ u(0;\ t) = \varphi(t),\ u(1;\ t) = \psi(t),$$

для значень $0 \le t \le T$, узявши за аргументом x крок $h = 0{,}1$. У *завданнях 9–11* використовувати різницеве рівняння (9.30) а в *завданнях 12–14* різницеве рівняння (9.29).

9. $f(x) = (ax^2 + b)\sin \pi x$; $\varphi(t) = \psi(t) = 0$; $T = 0{,}02$; $a = 1{,}1;\ 1{,}3;\ 1{,}5$; $b = 1{,}1 + 0{,}1 \cdot n,\ \ n = 0 \cup \overline{1,4}$.

10. $f(x) = e^{-bx}$; $\varphi(t) = 0,\ \ \psi(t) = e^{-b}\sin a$; $T = 0{,}02$; $a = \pi/12,\ \pi/4,\ \pi/3$; $b = 0{,}1 \cdot k,\ \ k = \overline{1,5}$.

11. $\varphi(t) = \psi(t) = 0,\ \ f(x)$ задано таблицею:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x)$	0	0,0196	$0{,}0431 + a$	0,0742	0,1116	$0{,}1537 + 2a$

x	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$f(x)$	0,1994	0,1256	$0{,}0614 - a$	0,0031	0

$T = 0{,}02$; $a = 0{,}02 \cdot n,\ \ n = 0 \cup \overline{1,5}$.

12. $f(x) = (ax^2 + b)e^{-x}$; $\varphi(t) = b$; $\psi(t) = (a + b)e^{-1}$; $T = 0{,}01$; $a = 1{,}1;\ 1{,}3;\ 1{,}5$; $b = 2{,}1 + 0{,}1 \cdot n,\ \ n = 0 \cup \overline{1,4}$.

13. $f(x) = x(1 - x)(ax^4 + b)$; $\varphi(t) = \psi(t) = 0$; $T = 0{,}01$; $a = 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}9$; $b = 0{,}5 + 0{,}1 \cdot n,\ \ n = 0 \cup \overline{1,4}$.

14. $\varphi(t) = 0,\ \psi(t) = f(1)$; $f(x)$ задано таблицею:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$f(x)$	0	0,0221	$0{,}0425 + a$	0,1008	0,1545

x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$f(x)$	$0{,}1721 + 2a$	0,2032	0,2895	$0{,}3587 - a$	0,4010	0,4500

$$T = 0{,}01;\ a = 0{,}02 \cdot n,\ \ n = 0 \cup \overline{1,5}.$$

15. Знайти наближений розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x+t$$

з кроком $h=0{,}1$ за аргументом x, що задовольняє початкові й крайові умовам *завдання 9*. Використати різницеве рівняння (9.35).

16. Знайти наближений розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3t\sin x$$

з кроком $h=0{,}1$ за аргументом x, що задовольняє початкові й крайові умовам *завдання 10*. Використати різницеве рівняння (9.36).

17–19. Завдання 9–11 виконати методом прогонки та порівняти результати.

Приклад 9.17. Методом сіток знайти розв'язок задачі:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x;\ 0)=0{,}2x(1-x)\sin \pi x, \quad u_t(x;\ 0)=0, \\ u(0;\ t)=u(1;\ t)=0. \end{cases} \tag{9.68 є}$$

Розв'язання. Візьмемо квадратну сітку з кроком $h=l=0{,}05$. Значення $u(x;\ t)$ на двох початкових шарах знайдемо, застосувавши формули (9.63), (9.64), (9.65). Враховуючи, що $\Phi(x)=0$ та $f(x)=0{,}5x(1-x)\pi x$, одержимо:

$$\begin{cases} u_{i;\,0}=f_i; \\ u_{i;\,1}=(1/2)(f_{i+1}+f_{i-1}); \\ (i=0\cup\overline{1,10}). \end{cases} \tag{9.68 ж}$$

Порядок заповнення таблиці.

1) Обчислюємо значення $u_{i;\,0}=f(x_i)$ при $x_i=ih$ та записуємо в перший рядок (вони відповідають значенню $t_0=0$) табл. 9.16.

Внаслідок *симетрії* задачі заповнюємо таблицю при $0\le x\le 0{,}5$.

У першому стовпчику (він відповідає значенню $x_0=0$) записуємо краєві значення.

2) За формулою (9.68 ж) знаходимо $u_{i;\,1}$, використовуючи значення $u_{i;\,0}$ з першого рядка. Результати записуємо в другий рядок табл. 9.16.

3) Обчислюємо значення $u_{i;\,j}$ на наступних шарах за формулою (9.58).

Таблиця 9.16

t_j \ x_i	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
0	0	0,0015	0,0056	0,0116	0,0188	0,0265
0,05	0	0,0028	0,0065	0,0122	0,0190	0,0264
0,10	0	0,0050	0,0094	0,0139	0,0198	0,0260
0,15	0	0,0066	0,0124	0,0170	0,0209	0,0256
0,20	0	0,0074	0,0142	0,0194	0,0228	0,0251
0,25	0	0,0076	0,0144	0,0200	0,0236	0,0249
0,30	0	0,0070	0,0134	0,0186	0,0221	0,0236
0,35	0	0,0058	0,0112	0,0155	0,0186	0,0199
0,40	0	0,0042	0,0079	0,0112	0,0133	0,0144
0,45	0	0,0021	0,0042	0,0057	0,0070	0,0074
0,50	0	–0,0001	–0,0001	0,0000	–0,0002	0,0000
$\tilde{u}(x_i;\ 0{,}5)$	0	0	0	0	0	0

t_j \ x_i	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,0340	0,0405	0,0457	0,0489	0,0500
0,05	0,0335	0,0398	0,0447	0,0478	0,0489
0,10	0,0322	0,0377	0,0419	0,0447	0,0456
0,15	0,0302	0,0343	0,0377	0,0397	0,0405
0,20	0,0277	0,0302	0,0321	0,0335	0,0338
0,25	0,0251	0,0255	0,0260	0,0262	0,0265
0,30	0,0227	0,0209	0,0196	0,0190	0,0186
0,35	0,0194	0,0168	0,0139	0,0120	0,0115
0,40	0,0140	0,0124	0,0092	0,0064	0,0054
0,45	0,0074	0,0064	0,0042	0,0026	0,0013
0,50	–0,0002	–0,0001	–0,0002	–0,0002	–0,0002
$\tilde{u}(x_i;\ 0{,}5)$	0	0	0	0	0

При $j = 1$ послідовно одержуємо:

$$u_{1;\,2} = u_{2;\,1} + u_{0;\,1} - u_{1;\,0} = 0{,}0065 + 0 - 0{,}0015 = 0{,}0050,$$

$$u_{2;\,2} = u_{3;\,1} + u_{1;\,1} - u_{2;\,0} = 0{,}0122 + 0{,}0028 - 0{,}0056 = 0{,}0094,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u_{10;\,2} = u_{11;\,1} + u_{9;\,1} - u_{10;\,0} = 0{,}0478 + 0{,}478 - 0{,}0500 = 0{,}0456.$$

Обчислення при $j = \overline{2, 10}$ проводяться аналогічно. В останньому рядку табл. 9.16 наведено значення точного розв'язку при $t = 0{,}5$.

Приклад 9.18. Методом сіток знайти наближений розв'язок задачі:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x;\ 0) = x(\pi - x),\ \ u_t(x;\ 0) = 0 \quad (0 \le x \le \pi), \\ u(0;\ t) = u(\pi;\ t) = 0 \quad (0 \le t < \infty). \end{cases} \tag{9.68 з}$$

Розв'язання. Для найбільшого спрощення різницевого рівняння приймемо $\alpha = l/h = 1$. Тоді воно прийме вигляд (9.58). Покладемо $l = h = \pi/18$. Значення $u(x;\ t)$ на перших двох шарах знайдемо за формулами (9.67), (9.68), використовуючи формулу Тейлора.

Порядок заповнення таблиці.

1) З початкових умов обчислюємо значення $u_{i,0} = f_i = x_i(\pi - x_i)$ $(i = 0 \cup \overline{1, 18})$ та записуємо в перший рядок табл. 9.17. Внаслідок *симетрії* задачі (графік розв'язку $u = u(x;\ t)$ симетричний відносно площини $x = \pi/2$) заповнюємо таблицю для $x \in [0;\ \pi/2]$. У перший стовпчик таблиці записуємо крайові значення.

2) За формулою (9.68) знаходимо $u_{i;\,1}$. У задачі $\Phi_i = 0$, $f_i'' = -2$. Тому $u_{i;\,1} = u_{i;\,0} - h^2 = u_{i;\,0} - 0{,}03048$.

З останнього знаходимо значення $u_{i;\,1}$ та записуємо в другий рядок таблиці.

Обчислюємо значення $u_{i;\,j+1}$ при $j = \overline{2, 5}$ за формулою (9.58). При $j = 2$ одержуємо:

$$u_{1;\,2} = u_{2;\,1} + u_{0;\,1} - u_{1;\,0} = 0{,}944 + 0 - 0{,}518 = 0{,}426;$$

$$u_{2;\,2} = u_{3;\,1} + u_{1;\,1} - u_{2;\,0} = 1{,}340 + 0{,}487 - 0{,}975 = 0{,}853;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$u_{9;\,2} = u_{10;\,2} + u_{8;\,1} - u_{9;\,0} = 2{,}406 + 2{,}406 - 2{,}467 = 2{,}346.$$

Обчислення на наступних шарах проводяться аналогічно. Одержані значення занесено до табл. 9.17.

Таблиця 9.17

$t_j \backslash x_i$	0	$\pi/18$	$\pi/9$	$\pi/6$	$2\pi/9$	$5\pi/18$	$\pi/3$	$7\pi/18$	$4\pi/9$	$\pi/2$
0	0	0,518	0,975	1,371	1,709	1,980	2,193	2,346	2,437	2,467
h	0	0,487	0,944	1,340	1,675	1,950	2,163	2,315	2,406	2,437
$2h$	0	0,426	0,853	1,249	1,584	1,858	2,071	2,224	2,315	2,346
$3h$	0	0,366	0,731	1,097	1,432	1,706	1,919	2,071	2,163	2,193
$4h$	0	0,305	0,609	0,914	1,218	1,493	1,706	1,858	1,950	1,980
$5h$	0	0,244	0,487	0,731	0,975	1,218	1,432	1,584	1,675	1,706

9.8. Завдання для самостійної, домашньої роботи і приклади їх розв'язання

Завдання 1

1. Використовуючи метод сіток, знайти наближений розв'язок задачі *Діріхле* для рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в квадраті $ABCD$ з вершинами $A(0;0)$, $B(0;1)$, $C(1;1)$, $D(1;0)$; крок $h = 0{,}2$. При розв'язуванні задачі використати ітераційний процес усереднення Лібмана до одержання відповіді з точністю $\varepsilon = 0{,}01$.

У таблиці варіантів наведено формули, що задають шукану функцію на сторонах квадрата $ABCD$.

№	$u\|_{AB}$	$u\|_{BC}$	$u\|_{CD}$	$u\|_{AD}$
1	$30y$	$30(1-x^2)$	0	0
2	$20y$	$30\cos(\pi x/2)$	$30\cos(\pi y/2)$	$20x^2$
3	$50y(1-y^2)$	0	0	$50\sin\pi x$
4	$20y$	20	$20y^2$	$50x(1-x)$
5	0	$50x(1-x)$	$50x(1-y^2)$	$50x(1-x)$
6	$30\sin\pi y$	$20x$	$20y$	$30x(1-x)$
7	$30(1-y)$	$20\sqrt{x}$	$20y$	$30(1-x)$
8	$50\sin\pi y$	$30\sqrt{x}$	$30y^2$	$50\sin\pi x$
9	$40y^2$	40	40	$40\sin(\pi x/2)$
10	$50y^2$	$50(1-x)$	0	$60x(1-x^2)$
11	$20y^2$	20	$20y$	$10x(1-x)$
12	$40\sqrt{y}$	$40(1-x)$	$20y(1-y)$	0
13	$20\cos(\pi y/2)$	$30x(1-x)$	$30y(1-y^2)$	$20(1-x^2)$
14	$30y^2(1-y)$	$50\sin\pi x$	0	$10x^2(1-x)$
15	$20y$	$20(1-x^2)$	$30\sqrt{y}(1-y)$	0
16	$30(1-y^2)$	$30x$	30	30
17	$30\cos(\pi y/2)$	$30x^2$	$30x$	$30\cos(\pi y/2)$
18	0	$50\sin\pi x$	$50y(1-y^2)$	0
19	$20\sqrt{y}$	20	$20y^2$	$40x(1-x)$
20	$50y(1-y)$	$20x^2(1-x)$	0	$40x(1-x^2)$
21	$20\sin\pi y$	$30x$	$30y$	$20x(1-x)$

№	$u\|_{AB}$	$u\|_{BC}$	$u\|_{CD}$	$u\|_{AD}$
22	$40(1-y)$	$30\sqrt{x}$	$30y$	$40(1-x)$
23	$20\sin \pi y$	$30\sqrt{x}$	$50y^2$	$20\sin \pi x$
24	40	40	$40y^2$	$40\sin(\pi(1-x)/2)$
25	$30y^2$	$30(1-x)$	0	$40x^2(1-x)$
26	$25y^2$	25	$25y$	$20x(1-x)$
27	$15\sqrt{y}$	$15(1-x)$	$30y(1-y)$	0
28	$30\cos(\pi y/2)$	$20x(1-x)$	$25y(1-y^2)$	$30(1-x^2)$
29	$10y^2(1-y)$	$30\sin \pi x$	0	$15x(1-x^2)$
30	$25y$	$25(1-x^2)$	$30\sqrt{y}(1-y)$	0

Приклад виконання завдання

$$u|_{AB} = 20y,\ u|_{BC} = 20\cos(\pi x/2),$$
$$u|_{CD} = 20\cos(\pi y/2),\ u|_{AD} = 20x^2.$$

Розв’язування завдання розіб’ємо на декілька етапів.

Побудуємо область розв’язку, покривши її сіткою з кроком $h = 0{,}2$ (рис. 9.17); обчислимо значення шуканої функції $u(x; y)$ в граничних точках області.

1. Значення функції $u(x;\ y)$ на стороні AB знайдемо за формулою $u(x;\ y) = 20y$; одержуємо: $u(0;\ 0) = 0$; $u(0;\ 0{,}2) = 4$; $u(0;\ 0{,}4) = 8$; $u(0;\ 0{,}6) = 12$; $u(0;\ 0{,}8) = 16$; $u(0;\ 1) = 20$.

2. На стороні BC: $u(x;\ y) = 20\cos(\pi x/2)$; $u(0;\ 1) = 20$; $u(0{,}2;\ 1) = 19{,}021$; $u(0{,}4;\ 1) = 16{,}180$; $u(0{,}6;\ 1) = 11{,}756$; $u(0{,}8;\ 1) = 6{,}180$; $u(1;\ 1) = 0$.

3. На стороні CD: $u(x;\ y) = 20\cos(\pi y/2)$; $u(1;\ 1) = 0$; $u(1;\ 0{,}8) = 6{,}180$; $u(1;\ 0{,}6) = 11{,}756$; $u(1;\ 0{,}4) = 16{,}180$; $u(1;\ 0{,}2) = 19{,}021$; $u(1;\ 0) = 20$.

4. На стороні AD: $u(x;\ y) = 20x^2$; $u(0;\ 0) = 0$; $u(0{,}2;\ 0) = 0{,}8$; $u(0{,}4;\ 0) = 3{,}2$; $u(0{,}6;\ 0) = 7{,}2$; $u(0{,}8;\ 0) = 12{,}8$; $u(1;\ 0) = 20$.

5. Скориставшись схемою розміщення вузлів зображених на рис. (9.4 ж), для визначення значень функції у внутрішніх точках області методом сіток задане рівняння Лапласа в кожній точці замінимо скінченно–різницевим рівнянням за формулою (9.18):

$$u_{i;\,j} = u(x_i;\ y_i) = (1/4)\left(u_{i-1;\,j} + u_{i+1;\,j} + u_{i;\,j-1} + u_{i;\,j+1}\right).$$

Використовуючи останню формулу, складемо рівняння для кожної внутрішньої точки. Попередньо пронумеруємо шукані значення функції, зобразивши їх на рис. 9.18, що відповідають побудованій вище сітковій області; на рис. 9.18 нанесемо знайдені граничні значення.

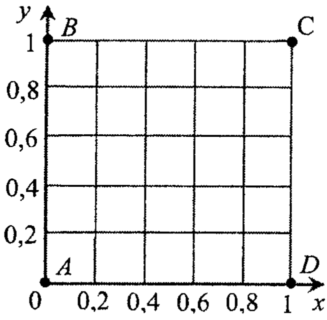


Рис. 9.17

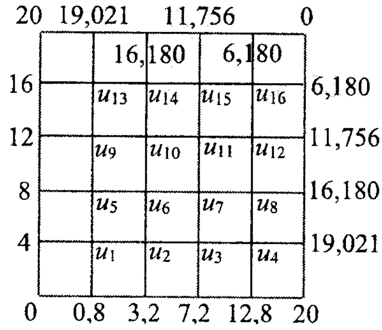


Рис. 9.18

У результаті одержимо систему рівнянь:

$u_1 = (1/4)\,(4 + 0{,}8 + u_2 + u_5);$

$u_2 = (1/4)\,(3{,}2 + u_1 + u_3 + u_6);$

$u_3 = (1/4)\,(7{,}2 + u_2 + u_4 + u_7);$

$u_4 = (1/4)\,(19{,}021 + 12{,}8 + u_3 + +u_8);$

$u_5 = (1/4)\,(8 + u_1 + u_6 + u_9);$

$u_6 = (1/4)\,(u_2 + u_5 + u_7 + u_{10});$

$u_7 = (1/4)\,(u_3 + u_6 + u_8 + u_{11});$

$u_8 = (1/4)\,(16{,}180 + u_4 + u_7 + +u_{12});$

$u_9 = (1/4)\,(12 + u_5 + u_{10} + u_{13});$

$u_{10} = (1/4)\,(u_6 + u_9 + u_{11} + +u_{14});$

$u_{11} = (1/4)\,(u_7 + u_{10} + u_{12} + u_{15});$

$u_{12} = (1/4)\,(11{,}756 + u_8 + u_{11} + u_{16});$

$u_{13} = (1/4)\,(16 + 19{,}021 + u_9 + u_{14});$

$u_{14} = (1/4)\,(16{,}180 + u_{10} + u_{13} + +u_{15});$

$u_{15} = (1/4)\,(11{,}756 + u_{11} + u_{14} + u_{16});$

$u_{16} = (1/4)\,(6{,}180 + 6{,}180 + +u_{12} + u_{15}).$

Розв'язування цієї системи проведемо ітераційним методом Зейделя. Для кожного значення складемо послідовність $u_i^{(0)}, u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(k)}, \dots$, яку продовжуватимемо до збіжності в сотих частинах. Запишемо співвідношення, за допомогою яких будемо знаходити елементи всіх послідовностей:

$$u_1^{(k)} = (1/4)\left(4{,}8 + u_2^{(k-1)} + u_5^{(k-1)}\right);$$
$$u_2^{(k)} = (1/4)\left(3{,}2 + u_1^{(k)} + u_3^{(k-1)} + u_6^{(k-1)}\right);$$
$$u_3^{(k)} = (1/4)\left(7{,}2 + u_2^{(k)} + u_4^{(k-1)} + u_7^{(k-1)}\right);$$
$$u_4^{(k)} = (1/4)\left(31{,}821 + u_3^{(k)} + u_8^{(k-1)}\right);$$
$$u_5^{(k)} = (1/4)\left(8 + u_1^{(k)} + u_6^{(k-1)} + u_9^{(k-1)}\right);$$
$$u_6^{(k)} = (1/4)\left(u_2^{(k)} + u_5^{(k)} + u_7^{(k-1)} + u_{10}^{(k-1)}\right);$$
$$u_7^{(k)} = (1/4)\left(u_3^{(k)} + u_6^{(k)} + u_8^{(k-1)} + u_{11}^{(k-1)}\right);$$
$$u_8^{(k)} = (1/4)\left(16{,}180 + u_4^{(k)} + u_7^{(k)} + u_{12}^{(k-1)}\right);$$
$$u_9^{(k)} = (1/4)\left(12 + u_5^{(k)} + u_{10}^{(k-1)} + u_{13}^{(k-1)}\right);$$
$$u_{10}^{(k)} = (1/4)\left(u_6^{(k)} + u_9^{(k)} + u_{11}^{(k-1)} + u_{14}^{(k-1)}\right);$$
$$u_{11}^{(k)} = (1/4)\left(u_7^{(k)} + u_{10}^{(k)} + u_{12}^{(k-1)} + u_{15}^{(k-1)}\right);$$
$$u_{12}^{(k)} = (1/4)\left(11{,}756 + u_8^{(k)} + u_{11}^{(k)} + u_{16}^{(k-1)}\right);$$
$$u_{13}^{(k)} = (1/4)\left(35{,}021 + u_9^{(k)} + u_{14}^{(k-1)}\right);$$
$$u_{14}^{(k)} = (1/4)\left(16{,}180 + u_{10}^{(k)} + u_{13}^{(k)} + u_{15}^{(k-1)}\right);$$
$$u_{15}^{(k)} = (1/4)\left(11{,}756 + u_{11}^{(k)} + u_{14}^{(k)} + u_{16}^{(k-1)}\right);$$
$$u_{16}^{(k)} = (1/4)\left(12{,}360 + u_{12}^{(k)} + u_{15}^{(k)}\right).$$

Для обчислень за останніми формулами потрібно визначити початкові значення u_i^0, які можна знайти одним з відомих способів.

Щоб одержати початковий наближений розв'язок задачі, будемо вважати, що функція $u(x;\ y)$ по горизонталях області розподілена рівномірно.

Спочатку розглянемо першу горизонталь з граничними точками (0; 0,2) і (1; 0,2) (рис. 9.19).

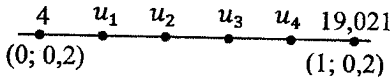


Рис. 9.19

Позначимо шукані значення функції у внутрішніх точках через $u_1^{(0)}$, $u_2^{(0)}$, $u_3^{(0)}$, $u_4^{(0)}$. Оскільки відрізок розбито на 5 частин, то крок виміру функції $K_1 = (19{,}021 - 4)/5 = 3{,}0042$. Тому одержуємо:

$$u_1^{(0)} = 4 + K_1 = 4 + 3{,}0042 = 7{,}0042;$$
$$u_2^{(0)} = u_1^{(0)} + K_1 = 7{,}0042 + 3{,}0042 = 10{,}0084;$$
$$u_3^{(0)} = u_2^{(0)} + K_1 = 10{,}0084 + 3{,}0042 = 13{,}0126;$$
$$u_4^{(0)} = u_3^{(0)} + K_1 = 13{,}0126 + 3{,}0042 = 16{,}0168.$$

Аналогічно знайдемо значення функції у внутрішніх точках інших горизонталей. Для другої горизонталі з граничними точками (0; 0,4) і (1; 0,4) (рис. 9.20) одержуємо:

$K_2 = (16{,}180 - 8)/5 = 1{,}636$ і тому

$u_5^{(0)} = 8 + 1{,}636 = 9{,}636$; $u_6^{(0)} = 9{,}636 + 1{,}636 = 11{,}272$;

$u_7^{(0)} = 11{,}272 + 1{,}636 = 12{,}908$; $u_8^{(0)} = 12{,}908 + 1{,}636 = 14{,}544$.

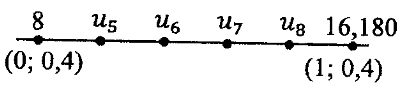


Рис. 9.20

Для третьої горизонталі (рис. 9.21):

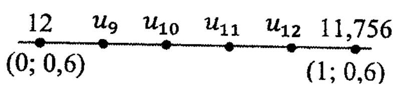


Рис. 9.21

$K_3 = (11{,}756 - 12)/5 = -0{,}0488$, тому

$u_9^{(0)} = 12 + (-0{,}0488) = 11{,}9512$;

$u_{10}^{(0)} = 11{,}9512 + (-0{,}0488) = 11{,}9024$;

$u_{11}^{(0)} = 11{,}9024 + (-0{,}0488) = 11{,}8536$; $u_{12}^{(0)} = 11{,}8048$.

Для четвертої горизонталі (рис. 9.22):

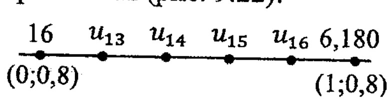


Рис. 9.22

$K_4 = (6{,}180 - 16)/5 = -1{,}964$, тому

$u_{13}^{(0)} = 16 + (-1{,}964) = 14{,}036;$

$u_{14}^{(0)} = 14{,}036 + (-1{,}964) = 12{,}072;$

$u_{15}^{(0)} = 10{,}108;\ u_{16}^{(0)} = 8{,}144.$

Усі одержані значення заносимо до таблиці, яка називається *нульовим шаблоном*:

1,0	20	19,021	16,180	11,756	6,180	0
0,8	16	14,036	12,072	10,108	8,144	6,180
0,6	12	11,9512	11,9024	11,8536	11,8048	11,756
0,4	8	9,636	11,272	12,908	14,544	16,180
0,2	4	7,0042	10,0084	13,0126	16,0168	19,021
0	0	0,8	3,2	7,2	12,8	20,0
y_j / x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1

1) Для кожного нового наближеного розв'язку задачі складатимемо таблицю – це прямокутник виділений «жирнішими» лініями, яка міститиме тільки внутрішні значення, що змінюються в процесі обчислень. Ці таблиці називаються *шаблонами*. В результаті одержимо таку послідовність шаблонів:

2)

№ 1

14,728	13,153	11,110	8,673
11,818	11,595	11,387	11,222
9,334	10,636	12,041	13,600
6,111	8,399	11,131	14,374

№ 2

15,002	10,699	8,444	8,008
11,836	11,613	11,322	11,230
9,022	10,077	11,345	13,170
5,633	7,650	10,316	13,934

№ 3

14,395	12,482	10,663	8,457
11,859	10,908	10,406	10,804
8,820	9,754	11,044	13,046
5,368	7,240	9,930	13,730

№ 4

14,751	13,137	11,030	8,558
11,502	10,953	10,769	10,951
8,707	9,421	10,656	12,823
5,215	7,025	9,750	13,654

№ 5

14,928	13,329	11,146	8,631
11,554	11,177	10,942	11,020
8,514	9,250	10,609	12,826
5,133	6,876	9,596	13,560

№ 6

14,998	13,404	11,244	8,677
11,642	11,292	11,184	11,104
8,463	9,255	10,639	12,846
5,047	6,773	9,535	13,545

№ 7

15,029	13,461	11,252	8,680
11,691	11,392	11,113	11,108
8,476	9,289	10,713	12,887
5,009	6,750	9,533	13,550

№ 8

15,053	13,474	11,258	8,683
11,729	11,410	11,123	11,113
8,496	9,339	10,724	12,895
5,006	6,757	9,555	13,566

№ 9

15,060	13,481	11,263	8,685
11,746	11,425	11,133	11,118
8,520	9,358	10,736	12,900
5,013	6,777	9,567	13,571

№ 10

15,064	13,485	11,266	8,687
11,754	11,434	11,140	11,121
8,532	9,370	10,744	12,904
5,024	6,787	9,573	13,573

№ 11

15,066	13,488	11,269	8,688
11,759	11,440	11,144	11,123
8,538	9,377	10,749	12,906
5,030	6,793	9,577	13,575

№ 12

15,068	13,490	11,270	8,689
11,762	11,444	11,147	11,125
8,542	9,382	10,753	12,908
5,033	6,797	9,580	13,577

№ 13

15,069	13,491	11,271	8,689
11,764	11,446	11,149	11,126
8,544	9,385	10,755	12,909
5,034	6,799	9,582	13,578

№ 14

15,069	13,492	11,272	8,689
11,765	11,448	11,150	11,126
8,546	9,387	10,757	12,910
5,036	6,801	9,583	13,578

Шаблони № 13 і № 14 містять значення, що відрізняються один від одного менше ніж на 0,01 (задана точність), тому обчислення припинено. Останні значення заокруглюємо до сотих частин і одержуємо *відповідь*:

1	20	19,021	16,180	11,756	6,180	0
0,8	16	15,07	13,49	11,27	8,69	6,180
0,6	12	11,77	11,45	11,15	11,13	11,756
0,4	8	8,55	9,39	10,76	12,91	16,180
0,2	4	5,04	6,80	9,58	13,58	19,021
0	0	0,8	3,2	7,2	12,8	20,0
y_j / x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1

Завдання 2

1. Використовуючи метод сіток, знайти розв'язок диференціального рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

за даними початковими умовами; крок $h = 1$. Уточнення розв'язку зробити до сотих частин за допомогою процесу Лібмана.

№ 1 $x^2/9 + y^2/16 = 1$ (Г), $u(x;\, y)|_Г = |x| + |y|$.

№ 2 $(|x| + 2)(|y| + 2) = 12$ (Г), $u(x;\, y)|_Г = 2|x| + |y|$.

№ 3 $\left.\begin{array}{l} |y| = 4 - x^2 \\ x \in [-2;\, 2] \end{array}\right\}$ (Г), $u(x;\, y)|_Г = |x| \cdot |y|$.

№ 4 $x^2 + y^2 = 16$ (Г), $u(x;\, y)|_Г = |x| + 2|y|$.

№ 5 $x^2/16 + y^2/9 = 1$ (Г), $u(x;\, y)|_Г = |x| \cdot |y|$.

№ 6 $\left.\begin{array}{l} |x| = 4 - y^2 \\ x \in [-4;\, 4] \end{array}\right\}$ (Г), $u(x;\, y)|_Г = |x| + |y|$.

№ 7 $(|x| + 2) \cdot (|y| + 2) = 12$(Г), $u(x;\, y)|_Г = |x| \cdot |y|$.

№ 8 $x^2/9 + y^2/16 = 1$ (Г), $u(x;\, y)|_Г = 2|x| + |y|$.

№ 9 $x^2/16 + y^2/25 = 1$ (Г), $u(x;\, y)|_Г = |x| \cdot |y|$.

№ 10 $\left.\begin{array}{l} |y| = 4 - x^2 \\ x \in [-2;\, 2] \end{array}\right\}$ (Г), $u(x;\, y)|_Г = |x| + |y|$.

№ 11 $x^2 + y^2 = 16$ (Г), $u(x;\, y)|_Г = 0{,}5|x| + |y|$.

№ 12 $x^2/16 + y^2/9 = 1$(Г), $u(x;\, y)|_Г = |x| + 0{,}5|y|$.

№ 13 $\left.\begin{array}{l} |x| = 4 - y^2 \\ x \in [-4;\, 4] \end{array}\right\}$ (Г), $u(x;\, y)|_Г = |x| + 0{,}5y^2$.

№ 14 $(|x| + 2)(|y| + 2) = 1$(Г), $u(x;\, y)|_Г = 2|x| + 0{,}5|y|$.

№ 15 $x^2/9 + y^2/25 = 1$(Г), $u(x;\, y)|_Г = |x| + |y|$.

№ 16	$x^2/9 + y^2/16 = 1$ (Г),	$u(x;\ y)\vert_Г = 2\vert x\vert + 0{,}5\vert y\vert$.
№ 17	$\left.\begin{matrix}\vert y\vert = 9 - x^2\\ x \in [-3;\ 3]\end{matrix}\right\}$ (Г),	$u(x;\ y)\vert_Г = \vert x\vert + 0{,}5\vert y\vert$.
№ 18	$x^2 + y^2 = 16$ (Г),	$u(x;\ y)\vert_Г = 0{,}5\vert x\vert + 2\vert y\vert$.
№ 19	$x^2/16 + y^2/9 = 1$ (Г),	$u(x;\ y)\vert_Г = 0{,}5\vert x\vert + \vert y\vert$.
№ 20	$\left.\begin{matrix}\vert x\vert = 9 - y^2\\ x \in [-9;\ 9]\end{matrix}\right\}$ (Г),	$u(x;\ y)\vert_Г = 0{,}5\vert x\vert + \vert y\vert$.
№ 21	$x^2/9 + y^2/25 = 1$ (Г),	$u(x;\ y)\vert_Г = 0{,}5\vert x\vert + 2\vert y\vert$.
№ 22	$x^2/25 + y^2/16 = 1$ (Г),	$u(x;\ y)\vert_Г = 0{,}5\vert x\vert \cdot \vert y\vert$.
№ 23	$(\vert x\vert + 3)(\vert y\vert + 2) = 8$ (Г),	$u(x;\ y)\vert_Г = \vert x\vert + 0{,}5\vert y\vert$.
№ 24	$\left.\begin{matrix}\vert y\vert = 9 - x^2\\ x \in [-3;\ 3]\end{matrix}\right\}$ (Г),	$u(x;\ y)\vert_Г = 2\vert x\vert + 0{,}5\vert y\vert$.
№ 25	$x^2 + y^2 = 16$ (Г),	$u(x;\ y)\vert_Г = 0{,}5(\vert x\vert + \vert y\vert)$.
№ 26	$x^2/16 + y^2/25 = 1$ (Г),	$u(x;\ y)\vert_Г = 0{,}5\vert x\vert + \vert y\vert$.
№ 27	$\left.\begin{matrix}\vert x\vert = 4 - y^2\\ x \in [-4;\ 4]\end{matrix}\right\}$ (Г),	$u(x;\ y)\vert_Г = \vert x\vert + 0{,}5\vert y\vert$.
№ 28	$(\vert x\vert + 2)(\vert y\vert + 3) = 18$ (Г),	$u(x;\ y)\vert_Г = 2\vert x\vert + 0{,}5\vert y\vert$.
№ 29	$x^2/9 + y^2/25 = 1$ (Г),	$u(x;\ y)\vert_Г = \vert x\vert + 0{,}5\vert y\vert$.
№ 30	$(\vert x\vert + 5)(\vert y\vert + 5) = 45$ (Г),	$u(x;\ y)\vert_Г = \vert x\vert + 0{,}5\vert y\vert$.

Приклад виконання завдання

$$x^2/16 + y^2/9 = 1(Г);\ u(x;\ y)|_Г = 0{,}5(|x| + |y|).$$

1. Використовуючи симетрію заданих початкових умов, побудуємо розв'язок тільки у I чверті. Візьмемо крок $h = 1$ і складемо таблицю значень x і y:

x	0	1	2	3	4
y	3	2,90	2,60	1,98	0

На рис. 9.23 *хрестиками* позначено граничні вузли ($A_h, B_h, C_h, D_h, E_h, F_h$); *кружечками* – внутрішні; точки (*кола*) A, B, C, D, E та F – точки, які належать межі Г області G.

Обчислимо значення функції $u(x;\ y)$ на межі:

$A(0;\ 3); u(A) = 0{,}5(0 + 3) = 1{,}5$;

$B(1;\ 2{,}90); u(B) = 0{,}5(1 + 2{,}9) = 1{,}95$;

$C(2;\ 2{,}60);\ u(C) = 0{,}5(2 + 2{,}6) = 2{,}3;$

$D(3;\ 1{,}98);\ u(D) = 0{,}5(3 + 1{,}98) = 2{,}49;$

$E(3{,}77;\ 1);\ u(E) = 0{,}5(3{,}77 + 1) = 2{,}39;$

$F(4;\ 0);\ u(F) = 0{,}5(4 + 0) = 2.$

Для визначення початкових значень функцій $u(x;\ y)$ у внутрішніх точках складемо систему рівнянь, що містять ці значення. Кожне рівняння (крім останнього) одержуємо прирівнюванням значення функції у внутрішній точці до середнього арифметичного чотирьох значень функції в сусідніх точках (з урахуванням симетрії), згідно зі схемою зображеною на рис. 9.4 ж; для останнього рівняння застосовано схему зображену на рис. 9.4 з:

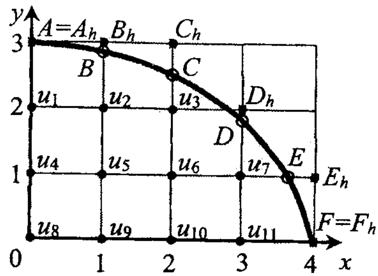


Рис. 9.23

$u_1 = (1/4)(1{,}5 + u_4 + 2u_2);\ u_2 = (1/4)(1{,}95 + u_1 + u_3 + u_5);$

$u_3 = (1/4)(4{,}79 + u_2 + u_6);\ u_4 = (1/4)(u_1 + u_8 + 2u_5);$

$u_5 = (1/4)(u_2 + u_4 + u_6 + 2u_9);\ u_6 = (1/4)(u_3 + u_5 + u_7 + u_{10});$

$u_7 = (1/4)(4{,}88 + u_6 + 2u_{11});\ u_8 = (1/4)(4u_5);$

$u_9 = (1/4)(u_8 + u_{10} + +2u_5);\ u_{10} = (1/4)(u_9 + u_{11} + 2u_6);$

$u_{11} = (1/4)(4{,}78 + 2u_6).$

Розв'язавши останню систему, одержимо:

$u_1 = 1{,}91;\ u_2 = 2{,}05;\ u_3 = 2{,}10;\ u_4 = 2{,}05;\ u_5 = 2;\ u_6 = 2{,}18;$

$u_7 = 2{,}34;\ u_8 = 2{,}11;\ u_9 = 2{,}13;\ u_{10} = 2{,}19;\ u_{11} = 2{,}28.$

Знайдені значення функції $u(x; y)$ дозволяють скласти *шаблон* № 1, у якому внутрішні значення відповідають знайденим, а граничні одержують у результаті уточнення попередніх граничних значень за формулою лінійної інтерполяції:

$$u(M_h) = u(M) + (\delta/(1 + \delta))(u(N_h) - u(M)),$$

де M_h – вузлова гранична точка; M – найближча до M_h точка, що лежить на межі; N_h– найближча до M_h вузлова точка, що лежить усередині області; δ – відстань між точками M і M_h, узята зі знаком плюс, якщо точка M_h лежить усередині області, і зі знаком мінус, якщо вона лежить поза областю.

Для даного прикладу одержуємо:

$$u(A_h) = u(A) = 1{,}5;\ \delta_B = 2{,}90 - 3 = -0{,}1;$$
$$u(B_h) = 1{,}95 - (0{,}1/0{,}9)\,(2{,}05 - 1{,}95) = 1{,}94;$$
$$\delta_C = 2{,}60 - 3 = -0{,}4;$$
$$u(C_h) = 2{,}3 - (0{,}4/0{,}6)(2{,}1 - 2{,}3) = 2{,}43;$$
$$\delta_D = 1{,}98 - 2 = 0{,}02;$$
$$u(D_h) = 2{,}49 - (0{,}02/0{,}98)(2{,}34 - 2{,}49) = 2{,}49;$$
$$\delta_E = 3{,}77 - 4 = -0{,}23;$$
$$u(E_h) = 2{,}39 - (0{,}23/0{,}77)(2{,}34 - 2{,}39) = 2{,}40;$$
$$u(F_h) = u(F) = 2.$$

№ 1

1,5	1,94	2,43		
1,91	2,05	2,10	2,49	
2,05	2,11	2,18	2,34	2,40
2,11	2,13	2,19	2,28	2

Процес Лібмана полягає в уточненні значень, що входять до *шаблону* № 1. Кожний наступний шаблон одержується з попереднього таким чином: значення функції у внутрішніх точках дорівнюють середньому арифметичному чотирьох сусідніх значень попереднього шаблона, а значення функції в граничних точках знаходять за формулою лінійної інтерполяції, яка вже використовувалася при одержанні *шаблона* № 1. Ці уточнення проводяться доти, доки два послідовних шаблони не збіжаться із заданою точністю. У результаті обчислень одержимо таку послідовність *шаблонів*:

№ 2

1,5	1,94	2,31		
1,91	2,02	2,29	2,49	
2,06	2,10	2,18	2,34	2,40
2,09	2,13	2,19	2,22	2

№ 3

1,5	1,94	2,33		
1,90	2,06	2,25	2,49	
2,05	2,10	2,23	2,32	2,41
2,10	2,12	2,18	2,22	2

№ 4

1,5	1,94	2,31		
1,92	2,05	2,28	2,49	
2,05	2,12	2,21	2,34	2,40
2,09	2,12	2,20	2,20	2

№ 5

1,5	1,94	2,33		
1,91	2,06	2,26	2,49	
2,06	2,11	2,23	2,33	2,41
2,09	2,14	2,19	2,22	2

№ 6

1,5	1,94	2,31		
1,92	2,06	2,28	2,49	
2,06	2,12	2,22	2,34	2,40
2,10	2,13	2,20	2,21	2

№ 7

1,5	1,94	2,32		
1,92	2,06	2,27	2,49	
2,06	2,12	2,23	2,33	2,41
2,10	2,20	2,22	2,22	2

№ 8

1,5	1,94	2,32		
1,92	2,06	2,27	2,49	
2,06	2,12	2,23	2,33	2,41
2,10	2,13	2,20	2,22	2

Шаблон № 8 – відповідь.

Завдання 3

1. Використовуючи метод сіток, знайти розв'язок змішаної задачі для диференціального рівняння параболічного типу $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$ (рівняння теплопровідності) за заданих початкових умов $u(x;\ 0) = f(x)$, $u(0;\ t) = \varphi(t), u(0{,}6;\ t) = \psi(t)$, де $x \in [0;\ 0{,}6]$. Розв'язання провести при $h = 0{,}1$ для $t \in [0;\ 0{,}01]$ з чотирма знаками, вважаючи $\sigma = 1/6$.

№ 1 $u(x;\ 0) = \cos 2x, u(0;\ t) = 1 - 6t, u(0{,}6;\ t) = 0{,}3624.$

№ 2 $u(x;\ 0) = x(x+1), u(0;\ t) = 0, u(0{,}6;\ t) = 2t + 0{,}96.$

№ 3 $u(x;\ 0) = 1{,}2 + \lg(x + 0{,}4), u(0;\ t) = 0{,}8 + t, u(0{,}6;\ t) = 1{,}2.$

№ 4 $u(x;\ 0) = \sin 2x, u(0;\ t) = 2t, u(0{,}6;\ t) = 0{,}932.$

№ 5 $u(x;\ 0) = 3x(2 - x), u(0;\ t) = 0, u(0{,}6;\ t) = t + 2{,}52.$

№ 6 $u(x;\ 0) = 1 - \lg(x + 0{,}4), u(0;\ t) = 1{,}4, u(0{,}6;\ t) = t + 1.$

№ 7 $u(x;\ 0) = \sin(0{,}55x + 0{,}03), u(0;\ t) = t + 0{,}03, u(0{,}6;\ t) = 0{,}354.$

№ 8 $u(x;\ 0) = 2x(1 - x) + 0{,}2,\ u(0;\ t) = 0{,}2,\ u(0{,}6;\ t) = t + 0{,}68.$

№ 9 $u(x;\ 0) = \sin x + 0{,}08, u(0;\ t) = 0{,}08 + 2t, u(0{,}6;\ t) = 0{,}6446.$

№ 10 $u(x;\ 0) = \cos(2x + 0{,}19), u(0;\ t) = 0{,}932, u(0{,}6;\ t) = 0{,}1798.$

№ 11 $u(x;\ 0) = 2x(x + 0{,}2), u(0;\ t) = 2t + 0{,}4, u(0{,}6;\ t) = 1{,}36.$

№ 12 $u(x;\ 0) = \lg(x + 0{,}26) + 1, u(0;\ t) = 0{,}415 + t, u(0{,}6;\ t) = 0{,}9345.$

№ 13 $u(x;\ 0) = \sin(x + 0{,}45), u(0;\ t) = 0{,}435 - 2t, u(0{,}6;\ t) = 0{,}8674.$

№ 14 $u(x;\ 0) = 0{,}3 + x(x + 0{,}4), u(0;\ t) = 0{,}3, u(0{,}6;\ t) = 6t + 0{,}9.$

№ 15 $u(x;\ 0) = (x - 0{,}2)(x + 1) + 0{,}2, u(0;\ t) = 6t, u(0{,}6;\ t) = 0{,}84.$

№ 16 $u(x;\ 0) = x(0{,}3 + 2x), u(0;\ t) = 0, u(0{,}6;\ t) = 6t + 0{,}9.$

№ 17 $u(x;\ 0) = \sin(x + 0{,}48)\,, u(0;\ t) = 0{,}4618, u(0{,}6;\ t) = 3t + 0{,}882.$

№ 18 $u(x;\ 0) = \sin(x + 0{,}02)\,, u(0;\ t) = 3t + 0{,}02, u(0{,}6;\ t) = 0{,}581.$

№ 19 $u(x;\ 0) = \cos(x + 0{,}48)\,, u(0;\ t) = 6t + 0{,}887, u(0{,}6;\ t) = 0{,}4713.$

№ 20 $u(x;\ 0) = \lg(2{,}63 - x), u(0;\ t) = 3(0{,}14 - t), u(0{,}6;\ t) = 0{,}3075.$

№ 21 $u(x;\ 0) = 1{,}5 - x(1 - x), u(0;\ t) = 3(0{,}5 - t), u(0{,}6;\ t) = 1{,}26.$

№ 22 $u(x;\ 0) = \cos(x + 0{,}845), u(0;\ t) = 6(t + 0{,}11), u(0{,}6;\ t) = 0{,}1205.$

№ 23 $u(x;\ 0) = \lg(2{,}42 + x), u(0;\ t) = 0{,}3838, u(0{,}6;\ t) = 6(0{,}08 - t).$

№ 24 $u(x;\ 0) = 0{,}6 + x(0{,}8 - x), u(0;\ t) = 0{,}6, u(0{,}6;\ t) = 3(0{,}24 + t).$

№ 25 $u(x;\ 0) = \cos(x + 0{,}66), u(0;\ t) = 3t + 0{,}79, u(0{,}6;\ t) = 0{,}3058.$

№ 26 $u(x;\ 0) = \lg(1{,}43 + 2x), u(0;\ t) = 0{,}1553, u(0{,}6;\ t) = 3(t + 0{,}14).$

№ 27 $u(x;\ 0) = 0{,}9 + 2x(1 - x), u(0;\ t) = 3(0{,}3 - 2t), u(0{,}6;\ t) = 1{,}38.$

№ 28 $u(x;\ 0) = \lg(1{,}95 + x), u(0;\ t) = 0{,}29 - 6t, u(0{,}6;\ t) = 0{,}4065.$

№ 29 $u(x;\ 0) = 2\cos(x + 0{,}55)\,, u(0;\ t) = 1{,}705, u(0{,}6;\ t) = 0{,}817 + 3t.$

№ 30 $u(x;\ 0) = x(1 - x) + 0{,}2, u(0;\ t) = 0{,}2, u(0{,}6;\ t) = 2(t + 0{,}22).$

Приклад виконання завдання

$$u(x;\ 0) = 3x(1 - x) + 0{,}12;\ u(0;\ t) = 2(t + 0{,}06);$$
$$u(0{,}6;\ t) = 0{,}84.$$

Параболічне рівняння розв'язано методом сіток поступовим переходом від значень функції $u(x_i;\ t_i)$ до значень $u(x_i;\ t_{j+1})$; причому $t_{j+1} = t_j + l$, де $l = h^2/6 = 0{,}01/6 = 0{,}0017$.

Обчислення проведено за формулою:

$$u_{i;\,j+1} = (1/6)\cdot\left(u_{i+1;\,j} + 4u_{i;\,j} + u_{i-1;\,j}\right)\ \ (i = \overline{1,6};\ \ j = \overline{1,6}).$$

Усі розрахунки наведено таблицею:

j	i	0	1	2	3	4	5	6
	t_j \ x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0	0,12	0,39	0,60	0,75	0,84	0,87	0,84
1	0,0017	0,1233	0,3800	0,5900	0,7400	0,8300	0,8600	0,84
2	0,0033	0,1267	0,6372	0,5800	0,7300	0,8200	0,8517	0,84
3	0,0050	0,1300	0,3659	0,5704	0,7200	0,8103	0,8445	0,84
4	0,0067	0,1333	0,3607	0,5612	0,7101	0,8010	0,8380	0,84
5	0,0083	0,1367	0,3562	0,5526	0,7004	0,7920	0,8322	0,84
6	0,01	0,1400	0,3524	0,5445	0,6910	0,7834	0,8268	0,84

Завдання 4

1. Використовуючи метод сіток, знайти розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни $\partial^2 u/\partial t^2 = \partial^2 u/\partial x^2$ за умовами: $u(x;\ 0) = f(x)$; $u_t(x;\ 0) = \Phi(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ – початкові; $u(0;\ t) = \varphi(t)$; $u(1;\ t) = \psi(t)$ – крайові; розв'язування виконати з кроком $h = 0{,}1$, визначаючи значення функції $u(x;\ t)$ з чотирма десятковими знаками, причому $0 \leq t \leq 0{,}5$.

№ 1 $f(x) = x(x+1)$,
$\Phi(x) = \cos x$,
$\varphi(t) = 0, \psi(t) = 2(t+1)$.

№ 2 $f(x) = x\cos \pi x$,
$\Phi(x) = x(2-x)$,
$\varphi(t) = 2i, \psi(t) = -1$.

№ 3 $f(x) = \cos(\pi x/2)$,
$\Phi(x) = x^2$,
$\varphi(t) = 1 + 2t, \psi(t) = 0$.

№ 4 $f(x) = (x+0{,}5)(x-1)$,
$\Phi(x) = \sin(x+0{,}2)$,
$\varphi(t) = t - 0{,}5, \psi(t) = 3t$.

№ 5 $f(x) = 2x(x+1) + 0{,}3$,
$\Phi(x) = 2\sin x$,
$\varphi(t) = 0{,}3, \psi(t) = 4{,}3 + t$.

№ 6 $f(x) = (x+0{,}2)\sin(\pi x/2)$,
$\Phi(x) = 1 + x^2$,
$\varphi(t) = 0, \psi(t) = 1{,}2(t+1)$.

№ 7 $f(x) = x\sin(\pi x)$,
$\Phi(x) = (x+1)^2$,
$\varphi(t) = 2t, \psi(t) = 0$.

№ 8 $f(x) = 3x(1-x)$,
$\Phi(x) = \cos(x+0{,}5)$,
$\varphi(t) = 2t, \psi(t) = 0$.

№ 9 $f(x) = x(2x-0{,}5)$,
$\Phi(x) = \cos 2x$,
$\varphi(t) = t^2, \psi(t) = 1{,}5$.

№ 10 $f(x) = (x+1)\sin \pi x$,
$\Phi(x) = x^2 + x$,
$\varphi(t) = 0, \psi(t) = 0{,}5t$.

№ 11 $f(x) = (1-x)\cos(\pi x/2)$,
$\Phi(x) = 2x + 1$,
$\varphi(t) = 2t + 1, \psi(t) = 0$.

№ 12 $f(x) = 0{,}5x(x+1)$,
$\Phi(x) = x\cos x$,
$\varphi(t) = 2t^2, \psi(t) = 1$.

№ 13 $f(x) = 0{,}5(x^2+1)$,
$\Phi(x) = x\sin 2x$,
$\varphi(t) = 0{,}5 + 3t, \psi(t) = 1$.

№ 14 $f(x) = (x+1)\sin(\pi x/2)$,
$\Phi(x) = 1 - x^2$,
$\varphi(t) = 0{,}5t, \psi(t) = 2$.

№ 15 $f(x) = x^2\cos \pi x$,
$\Phi(x) = x^2(x+1)$,
$\varphi(t) = 0{,}5t, \psi(t) = t - 1$.

№ 16 $f(x) = (1-x^2)\cos \pi x$,
$\Phi(x) = 2x + 0{,}6$,
$\varphi(t) = 1 + 0{,}4t, \psi(t) = 0$.

№ 17 $f(x) = (x+0{,}5)^2$,
$\Phi(x) = (x+1)\sin x$,
$\varphi(t) = 0{,}5 + t, \psi(t) = 2{,}25$.

№ 18 $f(x) = 1{,}2x - x^2$,
$\Phi(x) = (x+0{,}6)\sin x$,
$\varphi(t) = 0, \psi(t) = 0{,}2 + 0{,}5t$.

№ 19 $f(x) = (x-0{,}2)^2 x$,
$\Phi(x) = \cos(x+0{,}3)$,
$\varphi(t) = 0{,}5, \psi(t) = 3 - 2t$.

№ 20 $f(x) = 0{,}5(x+1)^2$,
$\Phi(x) = (x+0{,}5)\cos \pi x$,
$\varphi(t) = 0{,}5, \psi(t) = 2 - 3t$.

№ 21 $f(x) = (x + 0{,}4)\sin \pi x$,
$\Phi(x) = (x + 1)^2$,
$\varphi(t) = 0{,}5t, \psi(t) = 0$.

№ 22 $f(x) = (2 - x)\sin \pi x$,
$\Phi(x) = (x + 0{,}6)^2$,
$\varphi(t) = 0{,}5t, \psi(t) = 0$.

№ 23 $f(x) = x\sin(\pi x/2)$,
$\Phi(x) = 2x^2$,
$\varphi(t) = 0, \psi(t) = t^2$.

№ 24 $f(x) = (x + 0{,}4)\sin(\pi x/2)$,
$\Phi(x) = 0{,}3(x^2 + 1)$,
$\varphi(t) = 0{,}4, \psi(t) = 1{,}2t$.

№ 25 $f(x) = (1 - x^2) + x$,
$\Phi(x) = 2\sin(x + 0{,}4)$,
$\varphi(t) = 1, \psi(t) = (t + 1)^2$.

№ 26 $f(x) = 0{,}4(x + 0{,}5)^2$,
$\Phi(x) = x\sin(x + 0{,}6)$,
$\varphi(t) = 0{,}5t, \psi(t) = 0{,}9$.

№ 27 $f(x) = (x^2 + 0{,}5)\cos \pi x$,
$\Phi(x) = (x + 0{,}7)^2$,
$\varphi(t) = 0{,}5, \psi(t) = 2t - 1{,}5$.

№ 28 $f(x) = (x + 2)(0{,}5x + 1)$,
$\Phi(x) = 2\cos(x + \pi/6)$,
$\varphi(t) = 2, \psi(t) = 4{,}5 - 3t$.

№ 29 $f(x) = (x^2 + 1)(1 - x)$,
$\Phi(x) = 1 - \sin x$,
$\varphi(t) = 1, \psi(t) = 0{,}5t$.

№ 30 $f(x) = (x + 0{,}2)\sin(\pi x/2)$,
$\Phi(x) = 1 + x^2$,
$\varphi(t) = 0{,}6t, \psi(t) = 1{,}2$.

Приклад виконання завдання

$$f(x) = 2x(1 - x^2);\ \Phi(x) = (x + 0{,}4)\cos(x + 0{,}3);$$
$$\varphi(t) = 0{,}5t^2;\ \psi(t) = 0.$$

При розв'язуванні скористаємося співвідношенням

$u_{i;\,j+1} = u_{i+1;\,j} + u_{i-1;\,j} - u_{i;\,j-1}$, де $i = 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, 3, \ldots$.

При цьому $u_{i;\,0} = f_i$, а для визначення $u_{i;\,1}$ можна використати один з можливих прийомів, наприклад,

$$u_{i;\,1} = (1/2)\cdot(f_{i+1} + f_{i-1}) + h\Phi_i,$$

причому $x_i = 0 + ih\ (i = 0 \cup \overline{1, n}),\ n = (1 - 0)/h = 10,$

$$y_j = 0 + jh\ (j = 0 \cup \overline{1, 5}).$$

Крім того, $u_{0;\,j} = \varphi(t_j)$; $u_{n;\,j} = \psi(t_j)$.

Обчислення зручно подати таблицею, яка і є розв'язком:

t_j \ x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0	0,198	0,384	0,546	0,672	0,750	0,768	0,714	0,576	0,342	0
0,1	0,005	0,2381	0,4247	0,5858	0,7092	0,7677	0,7942	0,7315	0,5825	0,3354	0
0,2	0,02	0,2317	0,4399	0,5879	0,6815	0,7534	0,7312	0,6627	0,4909	0,2405	0
0,3	0,045	0,2218	0,3949	0,5356	0,6321	0,6450	0,6219	0,4906	0,3207	0,1555	0
0,4	0,08	0,2082	0,3175	0,4391	0,4991	0,5006	0,4044	0,2799	0,1552	0,0802	0
0,5	0,125	0,1757	0,2524	0,2810	0,3076	0,2585	0,1586	0,6090	0,0394	–0,0003	0

Порядок заповнення таблиці:

1. Обчислюємо значення $u_{i;\,0} = f(x_i) = 2x_i(1 - x_i^2)$ при $x_i = 0{,}1i$ й записуємо їх у перший рядок таблиці. Він відповідає значенню $t_0 = 0$.

2. Обчислюємо значення $u_{0;\,j} = \varphi(t_j) = 0{,}5t_j^2$ при $t_j = 0{,}1$ й записуємо їх у перший стовпець таблиці. Він відповідає значенню $x_0 = 0$.

3. Заносимо значення $u_{10;\,j} = \psi(t_j) = 0$ в останній стовпець таблиці. Він відповідає значенню $x_{1;\,0} = 1{,}0$.

4. Обчислюємо значення $u_{i;\,1}$ за формулою

$$u_{i;\,1} = (1/2)\cdot(f_{i+1} + f_{i-1}) + h\Phi_i,$$

де f_{i+1} і f_{i-1} беруться з першого рядка таблиці;
$\Phi_i = (x_i + 0{,}4)\cos(x_i + 0{,}3)$; $x_i = 0{,}1i$ $(i = \overline{1,9})$; $h = 0{,}1$.

Результати заносимо в другий рядок таблиці.

5. Значення $u_{i;\,j}$, що наведено в наступних рядках таблиці, обчислено за формулою:

$$u_{i;\,j+1} = u_{i+1;\,j} + u_{i-1;\,j} - u_{i;\,j-1},$$

де значення $u_{i+1;\,j}$; $u_{i-1;\,j}$; $u_{i;\,j-1}$ беруться з двох попередніх рядків таблиці.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Березин И. С.* Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – Т. I, II. – М. : Физматгиз, 1962.

2. *Копченова Н. В.* Вычислительная математика в примерах и задачах / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – М. : Наука, 1972.

3. *Гутер Р. С.* Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта / Р. С. Гутер, Б. В. Овчинский. – М. : Физматгиз, 1962.

4. *Демидович Б. П.* Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : Физматгиз, 1962.

5. *Демидович Б. П.* Численные методы анализа / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. – М. : Физматгиз, 1968.

6. *Скарборо Д.* Численные методы математического анализа / Д. Скарборо. ОНТИ, 1934.

7. *Ефимов А. В.* Математический анализ (специальные разделы). Ч. I. Общие функциональные ряды и их приложение: учеб. пособие для втузов / А. В. Ефимов. – М. : Высш. шк., 1980. – 279 с.

8. *Канторович Л. В.* Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – М. : Физматгиз, 1962.

9. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – М. : Физматгиз, 1959.

10. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы обработки наблюдений / Ю. В. Линник. – М. : Физматгиз, 1962.

11. *Мысовских И. П.* Лекции по методам вычислений / И. П. Мысовских. – М. : Физматгиз, 1962.

12. *Панов Д. Ю.* Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных / Д. Ю. Панов. – М. : Гостехиздат, 1951.

13. *Математический* практикум / Г. Н. Положий, Н. А. Пахарева, И. З. Степаненко, П. С. Бондаренко [и др.]. – М. : Физматгиз, 1960.

14. *Уиттекер Робинсон.* Математическая обработка результатов наблюдений / Робинсон Уиттекер, ОНТИ, 1935.

Навчальне видання

МАМЧУК Віталій Іванович

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ

Навчальний посібник

В авторській редакції

Технічний редактор *А. І. Лавринович*
Коректор *С. С. Остапчук*
Художник обкладинки *А. О. Олійник*
Комп'ютерна верстка *В. І. Мамчук, А. О. Олійник*

Підп. до друку. .2015. Формат 60×84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 22,55. Обл.-вид. арк. 24,25.
Тираж 300 прим. Замовлення № -1.

Видавець і виготівник
Національний авіаційний університет
03680. Київ-58, проспект Космонавта Комарова, 1.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002