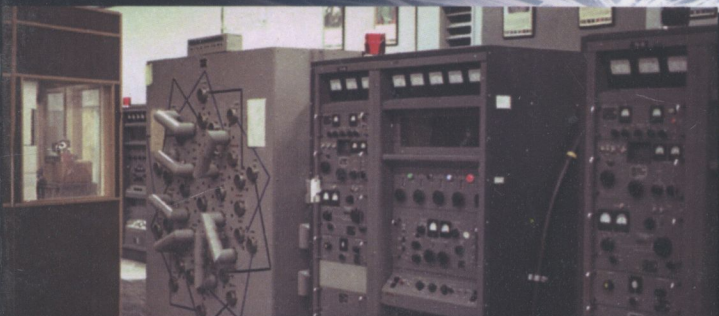
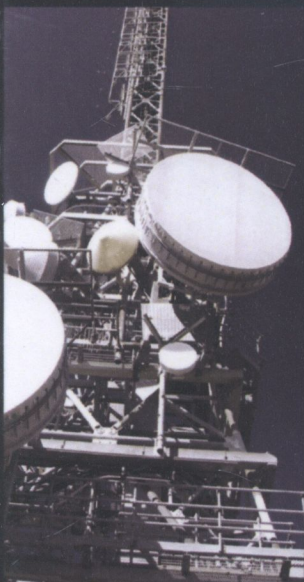


**Новосядлий С. П.  
Мандзюк В. І.**



**ТЕХНІКА І  
ЕЛЕКТРОНІКА  
НВЧ**



**2013**

БДЛ. 32 (075)  
Н 74

**Міністерство освіти і науки України**  
**ДВНЗ “Прикарпатський національний університет**  
**імені Василя Стефаника”**

**С.П. Новосядлий, В.І. Мандзюк**

## **ТЕХНІКА І ЕЛЕКТРОНІКА НВЧ**

**Навчальний посібник**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

**Івано-Франківськ**  
**ДВНЗ “Прикарпатський національний університет**  
**імені Василя Стефаника”**  
**2013**

УДК 621.38: 537-96  
ББК 22.336  
Н74

[621.37 + 621.38] : (074)  
+ 621.3.029.02

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів фізико-технічних спеціальностей  
вищих навчальних закладів  
(наказ №1/11-10200 від 17.06.2013)*

**Рецензенти:**

доктор фізико-математичних наук, професор Б.В. Павлик;  
доктор технічних наук, професор Л.Ф. Політанський;  
доктор фізико-математичних наук, професор І.О. Анісімов;  
доктор фізико-математичних наук, професор О.В. Коваленко

**Новосядлий С. П.**

Н74 Техніка і електроніка НВЧ : навч. посіб. [для студ. вищих навч. закл.] /  
С. П. Новосядлий, В. І. Мандзюк. – Івано-Франківськ : Видавництво  
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника,  
2013. – 524 с. : іл., табл. – Бібліогр. 113 найм.  
ISBN 978-966

Розглянуто теоретичні основи елементів теорії поля, основні положення теорії електромагнетизму, поширення електромагнітних хвиль у середовищах із частотною дисперсією та падіння плоских електромагнітних хвиль на межу двох середовищ.

Описано фізичні принципи функціонування багатьох сучасних НВЧ-пристроїв та функцій, які використовуються в елементній базі та пристроях НВЧ-систем з поданням особливостей реалізації цих функцій на надвисоких частотах. Значну увагу приділено пасивним й активним мікроелектронним пристроям НВЧ і багатополюсним елементам та антенам НВЧ в інтегрованому виконанні.

Навчальний посібник адресовано передовсім студентам фізико-технічних факультетів вищих навчальних закладів, що навчаються на спеціальностях “Радіофізика і електроніка”, “Комп’ютерна інженерія”, “Радіотехніка”, “Радіоелектронні пристрої, системи та комплекси”, “Апаратура радіозв’язку, радіомовлення і телебачення”, а також аспірантам та інженерам за даними напрямками підготовки.

476110

УДК 621.38: 537-96  
ББК 22.336

ISBN 978-966-640-379-0

© Новосядлий С. П., Мандзюк В. І., 2013  
© Видавництво ДВНЗ “Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника”, 2013

## ПЕРЕДМОВА

Техніка й електроніка НВЧ є складовою частиною радіотехніки (радіоелектроніки) як науки про методи й засоби передачі та приймання повідомлень на відстані за допомогою електромагнітних хвиль, які поширюються у вільному просторі. У рамках самої радіоелектроніки вивчаються насамперед пристрої та функціонування радіотехнічних пристроїв і систем із застосуванням широкого спектра електронних приладів – напівпровідникових, електровакуумних, оптоелектронних та антенно-фідерних пристроїв.

Розглянемо, що являє собою радіоелектроніка, зокрема техніка й електроніка НВЧ, як сформована з числа високих технологій науково-технічна дисципліна.

У технічному плані техніка й електроніка НВЧ об'єднує різні пристрої, призначені для передавання, приймання та обробки інформації в рамках певних систем – радіозв'язку, радіомовлення, радіолокації, радіоуправління, в основі яких знаходяться електромагнітні хвилі надвисоких частот, їх генерація, перетворення та передавання на значні відстані.

У технологічному сенсі пристрої НВЧ являють собою різні пристрої: діоди, транзистори, електровакуумні прилади, конденсатори, індуктивності, які з'єднані в певні електричні кола НВЧ. Із них слід виділити направляючі системи: хвилеводи, довгі лінії, резонатори та системи космічного й мобільного зв'язку.

З наукової точки зору техніка й електроніка НВЧ займається аналізом, синтезом і розрахунком радіотехнічних пристроїв та дослідженням у них процесів, пов'язаних з генерацією, формуванням, прийманням та обробкою всіх видів радіохвиль. Особливої уваги заслуговують прилади, робота яких базується на взаємодії електронних пучків з електромагнітним полем: клістронів, магнетронів, ламп біжучої та оберненої хвилі.

У математичному плані ця наука спирається на відповідні розділи вищої математики: лінійні й нелінійні диференціальні рівняння, комплексні змінні, матричну алгебру, нелінійне програмування, математичний аналіз, математичну фізику.

У зв'язку з розвитком і поширенням бездротових телекомунікаційних систем, мобільного телефонного зв'язку, переносних і портативних комп'ютерів усе більш актуальною стає проблема впровадження техніки та електроніки НВЧ у виробництво й вивчення у вищих навчальних закладах. Останнє є важливою передумовою підготовки висококваліфікованих спеціалістів, що працюватимуть не тільки у сферах радіотехніки й електроніки, але й в інших сферах науки і техніки (фізика твердого тіла і

плазми, оптика, хімія, медицина і т. д), у яких достатньо часто використовуються як пристрої, так і теоретичні основи НВЧ.

Навчальний посібник, який містить 11 розділів, умовно можна поділити на дві частини – теоретичну і практичну.

Теоретична частина, що складається із 4 розділів, охоплює теоретичні основи елементів теорії поля та положення теорії електромагнетизму, розглядає поширення електромагнітних хвиль у середовищах із частотною дисперсією (провідному середовищі, плазмі та надпровіднику) і падіння плоских електромагнітних хвиль на межу двох середовищ, описує структуру електромагнітного поля  $E$ -,  $H$ -,  $T$ - і  $EH$ -типів.

У практичній частині розкриваються питання прикладного використання НВЧ-хвиль у багатьох сучасних пристроях (хвилеводи, пасивні й активні мікроелектронні пристрої НВЧ, багатополіусники, антени НВЧ, прилади вакуумної електроніки НВЧ, клістри, електровакуумні діоди й тріоди, лампи біжучої та оберненої хвиль, резистивні й плазмові підсилювачі та ін.).

Посібник призначений для студентів базового напрямку “Радіофізика і електроніка”, “Прикладна фізика” та “Комп’ютерна інженерія” спеціальностей “Твердотільна електроніка”, “Оптоелектроніка”, “Теоретична радіотехніка”, “Електричні системи і мережі”, “Фізична та біометрична електроніка”, “Радіоелектричні апарати і засоби, пристрої системи і комплекси”. Він також може бути корисним для науковців, аспірантів і фахівців, які працюють у галузі радіотехніки та електроніки.

Автори висловлюють щире подяку рецензентам посібника – доктору фізико-математичних наук, професору, завідувачу кафедри електроніки Львівського національного університету імені Івана Франка Б.В. Павлику, доктору технічних наук, професору, завідувачу кафедри радіотехніки та інформаційної безпеки Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича Л.Ф. Політанському, доктору фізико-математичних наук, професору, завідувачу кафедри радіоелектроніки Дніпропетровського національного університету О.В. Коваленку, доктору фізико-математичних наук, професору, декану радіофізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка І.О. Анісімову.

У підготовці посібника активну участь узяли наукові співробітники та аспіранти кафедри комп’ютерної інженерії та електроніки О.П.Онуфрик, Ю.В.Возняк, Т.П.Кіндрат та В.М.Варварук.

*Автори*

## ВСТУП

Характерною ознакою сьогодення є історичні зміни у всіх сферах українського суспільства. Не минули вони й вищу школу, яка стала на шлях глибокої та органічної інтеграції зі світовим освітнім і науково-технічним співтовариством. Наближення якості національної освіти до світових стандартів у рамках болонського процесу вимагає проведення цілого комплексу високомасштабних організаційно-методичних заходів, як-от впровадження у вітчизняну навчальну практику новітніх технологій організації навчального процесу, зокрема з використанням комп'ютерних відеосистем.

Звідси й випливає важливий висновок: реалізація таких заходів потребує створення нового універсального навчально-методичного комплексу робочих матеріалів. Запропонований авторами навчальний посібник “Техніка і електроніка НВЧ” – одна зі складових такого комплексу для побудови навчального процесу зі студентами фізико-технічних спеціальностей класичних університетів.

Посібник є результатом довготривалої та різнопланової роботи зі студентами напряму “Прикладна фізика” спеціальності “Радіофізика і електроніка”, починаючи з 2000 року. Він складається з 11 розділів, які охоплюють найсучасніші досягнення теорії поля, технічної електродинаміки, НВЧ-електроніки, її елементної бази й пристроїв, а також антенно-фідерних пристроїв.

Питання НВЧ-електроніки в різних його аспектах висвітлено в багатьох технічних і навчальних виданнях. Цей посібник покликаний поповнити перелік україномовної літератури в галузі техніки й електроніки НВЧ з використанням досягнень сучасної мікроелектроніки НВЧ. Метою авторів було якомога компактніше відобразити різноманіття засобів сучасної електроніки НВЧ, їх взаємний вплив та основні принципи функціонування в пристроях і системах, що є дуже актуальним для сучасного цифрового телебачення та стільникового зв'язку.

Навчальний посібник побудований, на відміну від інших багатьох джерел, не за принципом опису різноманітних упроваджених технічних систем, а за принципом опису фізичних принципів й опису функцій, які використовуються в елементній базі та пристроях НВЧ-систем з поданням особливостей реалізації цих функцій на надвисоких частотах. Для глибшого розуміння предмета посібник висвітлює основні елементи теорії поля, його різновиди для умілого

використання в технічній електродинаміці під час розв'язування різних електродинамічних задач для направляючих і коливальних систем. Велику увагу звернено на пасивні й активні мікроелектронні пристрої НВЧ та багатополосні елементи й антени НВЧ в інтегрованому виконанні.

Крім цього, два останні розділи присвячено вакуумній електроніці НВЧ та її пристроям, які використовують взаємодію електронних потоків із зосередженими електромагнітними полями та хвилями, що дозволяє студентам глибше пізнати потужну електроніку НВЧ, яку використовують у радіолокації, телебаченні, радіопередавальних і радіоприймальних пристроях.

Навчальний посібник стане ще одним вагомим внеском авторів у розвиток комплексного методичного забезпечення дисципліни “Техніка і електроніка НВЧ” і доповнить виданий 2007 року лабораторний практикум, що включає 11 лабораторних робіт, у яких вивчаються програма моделювання НВЧ-пристроїв Microwave Office, редактор топології НВЧ-схем EmSight, побудова та методи розрахунку мікросмугових фільтрів, коаксіальних ліній, нелінійних підсилювачів потужності, автогенераторів НВЧ-коливачів, проводиться вимірювання довжини хвилі й коефіцієнта біжучої хвилі за допомогою вимірювальної коаксіальної та вимірювальної ліній, вивчаються основи роботи з круговою діаграмою Вольперта – Смітта для визначення параметрів НВЧ-ліній.

Посібник буде корисний студентам, які навчаються за напрямками “Радіофізика і електроніка”, “Радіотехніка”, “Радіоелектронні пристрої, системи та комплекси”, “Апаратура радіозв'язку, радіомовлення і телебачення”, а також аспірантам за цими ж напрямками підготовки.

## РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

### 1.1 Градієнт скалярного поля

#### 1.1.1 Градієнт і диференціал

Фізичні величини, які у вибраній системі одиниць вимірювання повністю визначаються одним тільки числом (модулем), називаються скалярними величинами або скалярами. Прикладами скалярних величин є температура, маса, тиск, густина, енергія, потенціал. Числове значення скаляра може бути додатним, від'ємним або дорівнювати нулю.

Тільки скаляри одного й того самого фізичного типу можна порівнювати за величиною. Неможливо порівняти скаляри істотно різних типів. Тут слід відзначити, що два фізично однотипні скаляри є рівними, якщо під час вимірювання їх однією й тією ж одиницею міри отримують однакові числа.

Багато інших фізичних величин за своїм змістом зв'язані з напрямом у просторі. Щоб задати таку величину, слід указати не тільки її числове значення, а й певний напрям у просторі. Прикладами таких величин можуть бути швидкість, прискорення, сила, напруженість електричного чи магнітного поля. Їх називають векторами.

Тут слід підкреслити, що векторні величини підлягають правилу геометричного додавання й саме цим вони відрізняються від скалярів, які додаються алгебраїчно. Вектори поділяються на вільні, ковзні та зв'язані. Точку прикладання вільного вектора можна вибрати довільно (прикладом може бути швидкість поступального руху тіла, яка є однаковою як за величиною, так і за напрямом для всіх точок тіла); точку прикладання ковзного вектора можна довільно зміщувати вздовж прямої, на якій розміщений вектор (ковзним вектором є сила, яка діє на абсолютно тверде тіло, а її можна змістити тільки по лінії дії сили); точка прикладання зв'язаного вектора цілком визначена фізично (зв'язним вектором є швидкість матеріальної точки, прикладена до неї). Вивчення ковзних і зв'язаних векторів зводиться до вивчення вільних векторів. Тому ми обмежимося розглядом тільки вільних векторів.

А тепер дамо визначення скалярного поля. Скалярним полем називають частину простору або простір, у кожній точці якого відповідно до певного закону фізики задано числове значення деякої скалярної величини (наприклад, поле температури в об'ємі при-



міщення, поле тиску в атмосфері, поле електростатичного потенціалу).

У загальному випадку скалярне поле характеризують функцією координат простору  $f(x, y, z)$ , яку й називають функцією поля. У процесі викладення матеріалу вважатимемо, що функція поля є однозначною, неперервною і диференційованою. Якщо функція поля визначається тільки двома координатами  $f(x, y)$ , то поле є плоским або двовимірним. Навколо однорідно нагрітої кулі скалярне поле температури є сферичним, для нагрітого дроту плоске поле температури є циліндричним.

Поверхнею рівня скалярного поля  $f(x, y, z)$  називають геометричне місце точок, у яких значення функції  $f(x, y, z) = \text{const}$ . Якщо константи надати різних числових значень, то отримаємо сімейство поверхонь рівня (рис. 1.1).

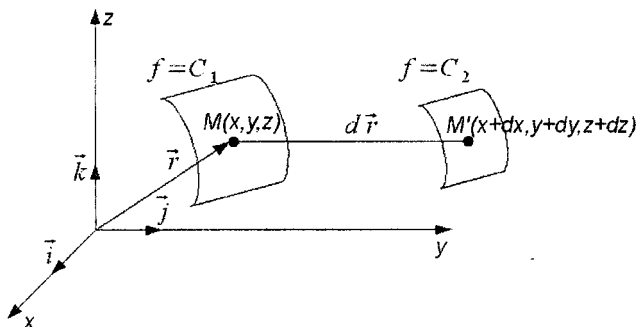


Рис. 1.1. Поверхні рівня скалярного поля

Нехай  $M(x, y, z)$  і  $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$  – дві нескінченно близькі точки простору; вектор  $\overline{MM'}$ , що з'єднує ці дві точки, позначають через  $d\vec{r}$ , для якого можна записати

$$d\vec{r} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz . \quad (1.1)$$

Якщо в просторі задане скалярне поле  $f(x, y, z)$ , то цим двом точкам  $M$  і  $M'$  у просторі вже будуть відповідати поверхні рівнів  $C_1$  і  $C_2$ . А тепер введемо основну характеристику скалярного поля – градієнт. Для цього запишемо диференціал функції поля  $f(x, y, z)$  як

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz . \quad (1.2)$$

Три величини  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  утворюють, очевидно, вектор  $d\vec{r}$ , а інші три величини  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$  теж утворюють вектор. Такий вектор, який визначений у кожній точці скалярного поля, називають градієнтом поля й позначають символом  $\text{grad } f$ :

$$\text{grad } f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (1.3)$$

Об'єднуючи формули (1.2) і (1.3), можна записати у вигляді

$$df = \text{grad } f \cdot d\vec{r}, \quad (1.4)$$

тобто скалярного добутку двох векторів, один з яких  $\text{grad } f$ , а другий —  $d\vec{r}$ .

Тепер доведемо дві теореми, які характеризують властивості градієнта скалярного поля.

**Теорема 1.** У кожній точці скалярного поля вектор  $\text{grad } f$  напрямлений по нормалі до поверхні рівня, що проходить через точку  $M(x, y, z)$  (рис. 1.2).

Для кожного простору  $d\vec{r}$  на поверхні рівня приріст функції  $df$  (диференціал) рівний нулю і для скалярного добутку

$$df = \text{grad } f \cdot d\vec{r} = 0$$

впливає, що  $\text{grad } f \perp d\vec{r}$ , інакше вектор  $d\vec{r}$  є дотичним до поверхні рівня в точці  $M$ .

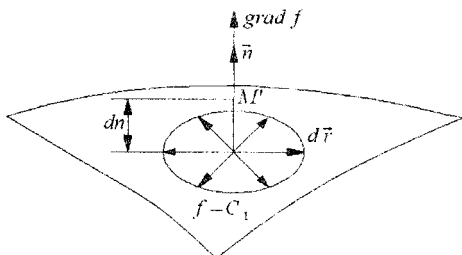


Рис. 1.2. Поверхня рівня і градієнт скалярного поля

**Теорема 2.** Градієнт скалярного поля напрямлений до поверхні рівня в бік зростання (а не спадання) функції поля  $f(x, y, z)$ .

Оскільки вектори  $\text{grad } f$  і  $d\vec{r}$  мають однаковий напрям, то їх скалярний добуток є додатним і можна записати:

$$df = \text{grad } f \cdot d\vec{r} > 0,$$

тобто в напрямі градієнта функція поля зростає. Якщо прийняти, що  $d\vec{r} = \vec{n} dn$ , то

$$df = \text{grad } f \cdot \vec{n} dn = |\text{grad } f| dn \quad (1.5)$$

або

$$|\text{grad } f| = \frac{df}{dn}.$$

Отже, абсолютна величина градієнта є мірою густини поверхонь рівня скалярного поля

$$\text{grad } f = \vec{n} \frac{df}{dn}, \quad (1.6)$$

де

$$|\text{grad } f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Скалярне поле характеризується лініями скалярного поля, у точках яких градієнт розміщений уздовж дотичної. Нескінченно малий вектор  $d\vec{r}(dx, dy, dz)$ , розміщений уздовж лінії поля, є паралельний вектору  $\text{grad } f$ . Тому складові цих двох векторів є пропорційними, а саме:

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \quad (1.7)$$

що представляє диференціальне рівняння ліній скалярного поля. Звідси видно, що лінії скалярного поля є ортогональними до поверхонь рівня поля (рис. 1.3).

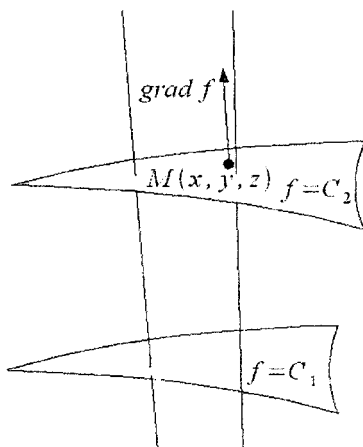


Рис. 1.3. Лінії скалярного поля та поверхні рівня  $f(x, y, z) = \text{const}$

А тепер розглянемо властивості градієнта скалярного поля. Якщо  $\varphi(M)$  і  $\psi(M)$  – скалярні поля, для яких існують градієнти, а  $\alpha$  і  $\beta$  – константи, то для поля  $F(M) = \alpha\varphi(M) + \beta\psi(M)$  теж існує градієнт, який визначається

$$\text{grad}(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \text{grad} \varphi + \beta \text{grad} \psi. \quad (1.8)$$

Ця властивість означає лінійність градієнта.

Аналогічно обґрунтовуються рівності:

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \varphi \text{grad} \psi + \psi \text{grad} \varphi,$$

$$\text{grad} \left( \frac{\varphi}{\psi} \right) = \frac{1}{\psi^2} (\psi \text{grad} \varphi - \varphi \text{grad} \psi), \quad (1.9)$$

$$\text{grad} F(\varphi) = \frac{dF}{d\varphi} \text{grad} \varphi.$$

Якщо  $F(\varphi, \psi)$  – функція двох змінних  $\varphi(M)$  і  $\psi(M)$ , кожна з яких залежить від координат точок простору, то матимемо:

$$\text{grad} F = \frac{\partial F}{\partial \varphi} \text{grad} \varphi + \frac{\partial F}{\partial \psi} \text{grad} \psi. \quad (1.10)$$

### 1.1.2 Оператор Набла ( $\nabla$ ). Похідна скалярного поля за даним напрямом

Для спрощення обчислень Гамільтон увів для користування оператор Набла  $\nabla$  такого виду:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.11)$$

Властивості цього оператора здебільшого такі ж, як і властивості вектора. Його записують і в іншому вигляді:  $\nabla = \vec{i}\nabla_x + \vec{j}\nabla_y + \vec{k}\nabla_z$ ,

де  $\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}$ . Градієнт скалярного поля можна розглядати як добуток вектора набла ( $\nabla$ ) на скаляр  $f$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot f &= (\vec{i}\nabla_x + \vec{j}\nabla_y + \vec{k}\nabla_z) \cdot f = \vec{i}\nabla_x \cdot f + \vec{j}\nabla_y \cdot f + \vec{k}\nabla_z \cdot f = \\ &= \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} = \text{grad} f. \end{aligned} \quad (1.12)$$

У символній формі запису формула (1.4) може бути записана у вигляді:

$$df = \text{grad } f \cdot d\vec{r} = \nabla f \cdot d\vec{r}. \quad (1.13)$$

Визначимо похідну скалярного поля за даним напрямом, виходячи з виразу

$$df = \nabla f \cdot d\vec{r} = d\vec{r} \cdot \nabla f = (d\vec{r} \cdot \nabla) f = ds(\vec{s} \nabla) f = (\vec{s} \nabla) f \cdot ds, \quad (1.14)$$

звідки

$$\frac{df}{ds} = (\vec{s} \nabla) f = \vec{s} \nabla f = \vec{s} \cdot \text{grad } f,$$

оскільки  $d\vec{r} = \vec{s} ds$ , де  $\vec{s}$  – одиничний вектор довільного напрямку, а  $ds$  – модуль вектора  $d\vec{r}$ .

Похідна поля  $\frac{df}{ds}$  за даним напрямом характеризує швидкість зміни скалярного поля за цим напрямом у даній точці. Формулу (1.14) запишемо у вигляді:

$$\frac{df}{ds} = \vec{s} \text{grad } f = \text{grad}_s f. \quad (1.15)$$

Тобто похідна функції поля за будь-яким напрямом рівна проекції градієнта поля на цей напрям. Звідси випливає, що у всіх похідних за напрямом в даній точці найбільшою є похідна за напрямом нормалі  $\vec{n}$  до поверхні рівня в бік зростання функції даного поля. Якщо  $\vec{s} = \vec{n}$ , то  $\frac{df}{dn} = |\text{grad } f|$ . Тому справедливе й таке визначення градієнта: градієнтом скалярного поля в точці називають вектор, направлений від даної точки в бік найшвидшого зростання функції поля, який за абсолютною величиною рівний похідній функції поля за цим заданим напрямом.

## 1.2 Векторне поле. Дивергенція векторного поля

### 1.2.1 Дивергенція і потік

Векторним полем називають частину простору (або весь простір), у кожній точці якого відповідно до певного закону задано деякий вектор. Це еквівалентно заданню векторної функції  $\vec{a}(x, y, z)$ , яку ми теж вважатимемо однозначною, неперервною та диференційованою. Як приклади до векторних полів можна віднести: напруженість електростатичного поля  $\vec{E}$ , індукцію магнітного поля  $\vec{B}$ , швидкість рухомої частинки  $\vec{v}$ , поле градієнта скаляра  $\text{grad } f$ .

Векторною лінією поля  $\vec{a}(x, y, z)$  називають криву, у кожній точці якої дотична має напрям векторного поля. Диференціальне рівняння векторних ліній у декартових координатах має вигляд:

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}. \quad (1.16)$$

Ця рівність виражає умову паралельності нескінченно малого елемента векторної лінії  $d\vec{r}$  (з проекціями  $dx, dy, dz$ ) і вектора поля  $\vec{a}$  (з проекціями  $a_x, a_y, a_z$ ).

Дивергенцією вектора  $\vec{a}$  ( $div \vec{a}$ ) відповідно називають суму частинних похідних проекцій цього вектора:

$$div \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (1.17)$$

Тобто дивергенція однозначно віднесена до кожної точки векторного поля й визначає певне скалярне поле.

А тепер обчислимо скалярний добуток оператора Набла  $\nabla$  і вектора  $\vec{a}$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{a} &= (\vec{i} \nabla_x + \vec{j} \nabla_y + \vec{k} \nabla_z) (\vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z) = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = div \vec{a}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

бо  $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ .

Розглянемо властивості дивергенції. Якщо дивергенція є лінійним оператором, то це означає, що якщо  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  – вектори поля, для яких існують дивергенції, а  $\alpha$  і  $\beta$  – константи, то для поля  $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$  також існує дивергенція, яка є рівною

$$div \vec{c} = div(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \alpha div \vec{a} + \beta div \vec{b} \quad (1.19)$$

і визначає лінійність дивергенції.

Друга властивість дивергенції виражає добуток скаляра і вектора:

$$div(u \vec{a}) = u div \vec{a} + \vec{a} grad u. \quad (1.20)$$

З дивергенцією тісно пов'язаний потік векторного поля. Нехай у заданому векторному полі  $\vec{a}(x, y, z)$  візьмемо малу площину  $dS$  з одиничним вектором нормалі  $\vec{n}$  ( $\vec{n} \perp dS$ ) у точці  $P$ . Розглянемо в точці  $P$  вектор поля  $\vec{a}(P)$  і позначимо через  $a_n$  його проекцію на

нормаль. Тоді добуток  $a_n$  і  $dS$  буде елементарним векторним потоком вектора поля  $\vec{a}$  (рис. 1.4, а):

$$dN = a_n dS. \tag{1.21}$$

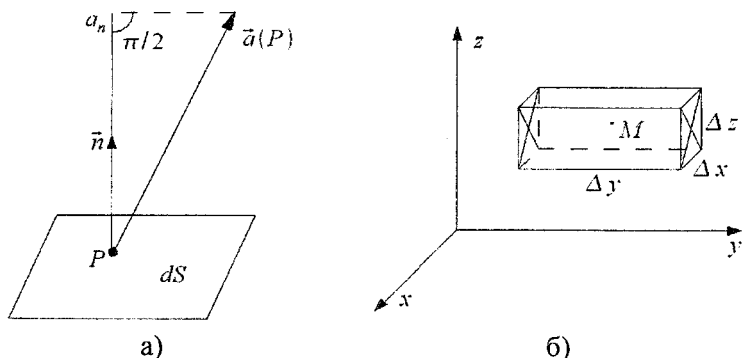


Рис. 1.4. Потік вектора поля  $\vec{a}$  (а) і зв'язок між дивергенцією і потоком (б)

На основі поняття поверхневого інтеграла введемо поняття потоку вектора  $\vec{a}$  через поверхню. Саме векторне поле  $\vec{a}(M)$  визначає в точках поверхні  $S$  деяку скалярну функцію  $a_n(x, y, z)$ , бо  $a_n$  – проекція вектора  $\vec{a}$  на напрям нормалі  $\vec{n}$  у точках поверхні  $S$ . Тоді поверхневий інтеграл по поверхні  $S$   $\iint_S a_n dS$  буде називатися потоком вектора  $\vec{a}$  через поверхню  $S$  у заданому напрямі  $\vec{n}$ :

$$N = \iint_S a_n dS = \iint_S \vec{a} \vec{n} dS. \tag{1.22}$$

Отже, потік вектора має зміст поверхневого інтеграла від нормальної складової векторного поля.

Установимо зв'язок між потоком і дивергенцією. Для цього побудуємо в заданому векторному полі  $\vec{a}(x, y, z)$  невеликий паралелепіпед із центром у довільній точці  $M(x, y, z)$  (рис. 1.4, б). Повний потік вектора  $\vec{a}$  через поверхню паралелепіпеда буде рівний

$$\Delta N = \Delta N_x + \Delta N_y + \Delta N_z,$$

де  $\Delta N_x = \frac{\partial a_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$ ,  $\Delta N_y = \frac{\partial a_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$ ,  $\Delta N_z = \frac{\partial a_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$ ,  $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$ .

Тоді 
$$\Delta N = dN = \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV,$$

звідки 
$$N = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV.$$

Тобто ми можемо записати таку рівність

$$\int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \iint_S a_n dS = \oint_S a_n dS. \quad (1.23)$$

Ця рівність виражає знамениту теорему Остроградського – Гаусса: об'ємний інтеграл від дивергенції векторного поля дорівнює потоку вектора поля через поверхню, що обмежує об'єм інтегрування.

Тепер повернемося до інваріантності дивергенції. Рівність (1.23), яка виражає теорему Остроградського – Гаусса, дозволяє подати дивергенцію формулою, яка не зв'язана з вибором системи координат. Застосовуючи до об'ємного інтеграла теорему про середнє значення, подамо цю рівність у вигляді:

$$(\operatorname{div} \vec{a})_p V = \oint_S a_n dS,$$

бо

$$(\operatorname{div} \vec{a})_p \int_V dV = (\operatorname{div} \vec{a})_p V,$$

звідки отримаємо

$$(\operatorname{div} \vec{a})_p = \frac{\oint_S a_n dS}{V}. \quad (1.24)$$

Тобто дивергенція вектора є не що інше як об'ємна густина потоку й не залежить від вибору системи координат.

Розглянемо тепер інший оператор – оператор Лапласа. Нехай у просторі існує скалярне поле  $f(x, y, z)$ . Лапласіаном функції  $f$  називають вираз

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f.$$

У декартовій системі координат отримаємо:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{grad}_x f + \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{grad}_y f + \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{grad}_z f = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (1.25)$$



Тобто в декартовій системі координат лапласіан функції рівний сумі трьох частинних похідних другого порядку за координатами. Тому оператор Лапласа має вигляд

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

і його можна розглядати формально як скалярний добуток операторів Набла:

$$\nabla \cdot \nabla = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

бо  $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ , а  $\vec{i} \vec{j} = \vec{j} \vec{k} = \vec{i} \vec{k} = 0$ .

Отож ми можемо записати  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ .

### 1.3 Ротор векторного поля

Вище було подано дві важливі характеристики скалярного й векторного полів: градієнт  $\nabla f$  і дивергенцію  $\nabla \cdot \vec{a}$ . Градієнт  $\nabla f$  є інваріантом скалярного поля; це означає, що величина і напрям вектора  $\nabla f$  не залежать від напрямку декартових осей і вибору системи координат. Аналогічно  $\nabla \cdot \vec{a}$  є інваріантом векторного поля.

Проте дивергенція – це не єдиний інваріант векторного поля. Якщо простий скалярний добуток вектора  $\nabla$  на скаляр  $f$  і скалярний добуток вектора  $\nabla$  на вектор  $\vec{a}$  утворюють інваріанти, то інваріантом буде також і векторний добуток  $[\nabla \times \vec{a}]$ , який являє собою також вектор.

Дамо тепер визначення іншої характеристики векторного поля – ротора. За означенням уже векторний добуток  $[\nabla \times \vec{a}]$  називають ротором вектора  $\vec{a}$  і записують як

$$\text{rot } \vec{a} = [\nabla \times \vec{a}]. \quad (1.26)$$

Відповідно маємо два інваріанти векторного поля: скаляр  $\nabla \cdot \vec{a}$  (дивергенція) і вектор  $[\nabla \times \vec{a}]$  (ротор). За формулою (1.26) отримаємо:

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}, \quad (1.27)$$

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}$$

і

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{i} \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right).$$

Ротор однозначно визначений у кожній точці векторного поля. Складові вектора  $\operatorname{rot} \vec{a} = [\nabla \times \vec{a}]$  визначаються як:

$$\operatorname{rot}_x \vec{a} = [\nabla \times \vec{a}]_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}_y \vec{a} = [\nabla \times \vec{a}]_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x},$$

$$\operatorname{rot}_z \vec{a} = [\nabla \times \vec{a}]_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

За аналогією з дивергенцією розглянемо властивості ротора. Ротор є лінійною дією: якщо  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  – векторні поля, то існують ротори

$$\operatorname{rot}(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \alpha \operatorname{rot} \vec{a} + \beta \operatorname{rot} \vec{b}, \quad (1.28)$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  – сталі.

Відмітимо другу властивість – ротор від добутку скаляра на вектор:

$$\operatorname{rot}(u \vec{a}) = u \operatorname{rot} \vec{a} + [\operatorname{grad} u \times \vec{a}]. \quad (1.29)$$

Із ротором тісно пов'язані поняття циркуляції та завихрення. Дамо їх визначення. Криволінійний інтеграл по замкнутому контуру  $C$  називають циркуляцією вектора  $\vec{a}$  по контуру і записують як

$$\Gamma = \oint_C \vec{a} d\vec{r}. \quad (1.30)$$

Під час обчислення циркуляції  $\Gamma$  контур  $C$  обходять в одному з двох можливих напрямів; зміна напрямку обходу контуру зумовлює зміну знака циркуляції.

У полі  $\vec{a}(x, y, z)$  розглянемо довільний плоский замкнутий контур  $C$ , який обмежує площу  $S$ , і нехай точка  $M$  лежить усередині цього контуру. Оберемо один з двох можливих напрямів обходу вздовж контуру за додатний і побудуємо відповідно до правила гвинта з правою різкою одиничний вектор нормалі  $\vec{n}$  до площини

контур у точці  $M$  (рис. 1.5, а). Відношення циркуляції поля до площі, тобто  $\frac{\oint \vec{a} d\vec{r}}{S}$ , називають середнім завихренням поля  $\vec{a}(x, y, z)$  по контуру  $C$ . Якщо контур  $C$  стягується в точку  $M$ , то цю границю називають завихренням поля  $\vec{a}(x, y, z)$  у точці  $M$  навколо напрямку  $\vec{n}$ .

$$R_n = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{a} d\vec{r}}{S}. \quad (1.31)$$

Таким чином, завихрення поля  $\vec{a}(x, y, z)$  у точці  $M$  навколо напрямку  $\vec{n}$  є віднесена до одиниці площі циркуляція вектора  $\vec{a}$  по нескінченно малому плоскому контуру  $C$ , який охоплює точку  $M$ , стягується до неї й орієнтований перпендикулярно до напрямку  $\vec{n}$ ; при цьому напрям обходу контуру повинен утворювати з напрямом одиничного вектора  $\vec{n}$  гвинт із правою різьбою.

Виведемо основну формулу для завихрення поля  $\vec{a}(x, y, z)$ . Для цього з довільної точки  $M$  простору проведемо паралельно координатним осям напрями  $Mx$ ,  $My$ ,  $Mz$  і побудуємо тетраедр  $MABC$  (рис. 1.5, б).

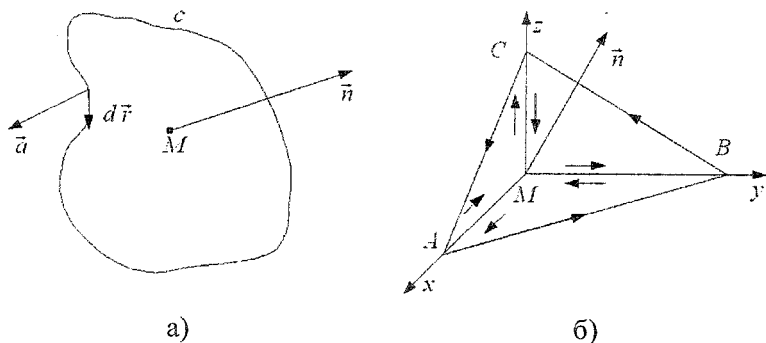


Рис. 1.5. Визначення завихрення поля (а) і визначення його величини (б)

Визначимо циркуляцію вектора  $\vec{a}$  по контуру  $ABCA$ :

$$\oint_{ABCA} \vec{a} d\vec{r} = \oint_{BCMB} \vec{a} d\vec{r} + \oint_{CAMC} \vec{a} d\vec{r} + \oint_{ABMA} \vec{a} d\vec{r}$$

і площу  $ABC$ :

$$nl ABC = \frac{nl MBC}{\cos(\widehat{nx})} = \frac{nl MCA}{\cos(\widehat{ny})} = \frac{nl MAB}{\cos(\widehat{nz})}.$$

Розділивши ці дві рівності, отримуємо

$$\frac{\oint_{ABCA} \vec{a} d\vec{r}}{nl ABC} = \frac{\oint_{BCMB} \vec{a} d\vec{r}}{nl MBC} \cos(\widehat{nx}) + \frac{\oint_{CAMC} \vec{a} d\vec{r}}{nl MCA} \cos(\widehat{ny}) + \frac{\oint_{ABMA} \vec{a} d\vec{r}}{nl MAB} \cos(\widehat{nz}).$$

Перейшовши до границі, коли площина  $ABC$  стискається в точку  $M$ , отримаємо:

$$R_n = R_x \cos(\widehat{nx}) + R_y \cos(\widehat{ny}) + R_z \cos(\widehat{nz}), \quad (1.32)$$

де  $R_n$  – завихрення вектора  $\vec{a}$  в точці  $M$ , а  $R_x, R_y, R_z$  – завихрення в точці  $M$  навколо напрямів  $x, y, z$ .

Таким чином, завихрення  $R_n$  у точці  $M$  поля  $\vec{a}(x, y, z)$  навколо довільного напрямку  $\vec{n}$  виражається через завихрення  $R_x, R_y, R_z$  навколо напрямів, паралельних координатним осям. Ця формула дозволяє зробити дуже важливий висновок, що завихрення  $R_x, R_y, R_z$  утворюють вектор:

$$R_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad R_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad R_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

Тому ми можемо записати, що  $R = rot \vec{a}$ , тобто вектор завихрення рівний ротору поля  $\vec{a}(x, y, z)$ . Цю формулу можна подати й так:

$$R_n = rot_n \vec{a} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{a} d\vec{r}}{S}. \quad (1.33)$$

Як вектор  $rot \vec{a}$  геометрично не змінюється при повороті осей систем  $OXYZ$ . Це видно з рівності (1.33), яка подає проєкцію ротора на довільний напрям  $\vec{n}$  незалежно від вибору системи координат і, зокрема, від орієнтації осей декартової системи.

Якщо за напрям  $\vec{n}$  узяти напрям вектора  $rot \vec{a}$  в даній точці  $M$  поля, то ми можемо визначити абсолютну величину ротора:

$$|rot \vec{a}| = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{a} d\vec{r}}{S}, \quad (1.34)$$

де  $\gamma$  – контур у точці  $M$ , орієнтований перпендикулярно до вектора  $rot \vec{a}$  (рис. 1.6, а). Тобто можна сказати, що абсолютна величина ротора в точці  $M$  рівна віднесеній до одиниці площі циркуляції вектора  $\vec{a}$  по нескінченно малому контуру  $\gamma$ , який охоплює точку  $M$  і зорієнтований у ній так, що величина циркуляції є найбільшою. Напрямок вектора  $rot \vec{a}$  в точці  $M$  перпендикулярний до площини зорієнтованого в точці  $M$  елементарного контуру  $\gamma$ , так що циркуляція по контуру є максимальною.

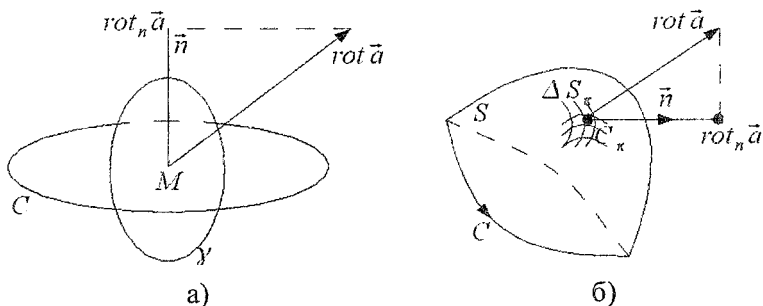


Рис. 1.6. Визначення абсолютної величини ротора (а) і визначення його проекції на поверхню  $\Delta S_k$  (б)

Якщо з характеристикою поля дивергенцією пов'язана теорема Остроградського – Гаусса, то з характеристикою ротора пов'язана теорема Стокса. Розглянемо в просторі, де задано векторне поле  $\vec{a}(x, y, z)$ , довільну поверхню  $S$ , яка обмежена контуром  $C$  (рис. 1.6, б). Поділимо поверхню  $S$  двома сімействами кривих на невеликі елементи площі  $\Delta S_k$  і кожному такому елементу відповідно поставимо нормаль, напрям якої узгодимо з напрямом обходу контуру  $C_k$  елемента за правилом гвинта з правою різьку. Для такого малого елемента  $\Delta S_k$  ми можемо записати

$$rot_n \vec{a} = \lim_{\Delta S_k \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_k} \vec{a} d\vec{r}}{\Delta S_k}$$

або

$$rot_n \vec{a} \Delta S_k = \oint_{C_k} \vec{a} d\vec{r}.$$

Додаючи такі рівності до всіх елементів  $\Delta S_x$ , що розміщені на площі  $S$ , отримаємо в лівій частині інтеграл по поверхні  $S$ , а в правій – інтеграл по зовнішній межі  $C$  за властивістю циркуляції, тобто

$$\iint_S \text{rot}_n \vec{a} dS = \oint_C \vec{a} d\vec{r} = \Gamma. \quad (1.35)$$

Така формула виражає другу інтегральну теорему теорії поля – теорему Стокса: потік вектора поля  $\vec{a}$  через довільну замкнену поверхню  $S$ , обмежену контуром  $C$ , дорівнює циркуляції вектора  $\vec{a}$  за цим контуром.

#### 1.4 Типи векторних полів

Розрізняють три типи векторних полів: потенціальне, соленоїдальне й лапласівське.

Векторне поле  $\vec{a}$  називають потенціальним в області  $V$ , якщо існує така однозначна скалярна функція  $\varphi(M)$ , що задана в області  $V$ , і для всіх точок цієї області виконується умова:

$$\vec{a} = -\text{grad } \varphi. \quad (1.36)$$

Функцію  $\varphi(M)$  називають відповідно скалярним потенціалом векторного поля  $\vec{a}(M)$ . Скалярний потенціал визначається рівністю (1.36) з точністю до адитивної сталої. Справді, якщо до  $\varphi(M)$  додати константу  $C$  і розглянути нову функцію  $\varphi' = \varphi + C$ , то матимемо  $\vec{a} = -\text{grad } \varphi'$ , тобто  $\varphi'$  є також скалярним потенціалом цього ж поля.

Якщо довільне векторне поле  $\vec{a}(M)$  характеризують трьома скалярними функціями  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$ , то потенціальне поле – тільки однією функцією  $\varphi(M)$ . Разом із цим потенціальне поле має ряд властивостей:

- Криволінійний інтеграл векторного потенціального поля  $\int_A^M \vec{a} d\vec{r}$  не залежить від шляху інтегрування; його значення залежить лише від положення кінцевих точок  $A$  і  $M$ , тобто

$$\int_A^M \vec{a} d\vec{r} = -\int_A^M \vec{a} d\vec{r} = \varphi(A) - \varphi(M). \quad (1.37)$$

• Криволінійний інтеграл вектора поля по довільному замкнутому контуру  $C$  (циркуляція вектора) рівний нулю. Дійсно, якщо у формулі (1.37) точка  $M$  збігається з точкою  $A$ , то

$$\Gamma = \oint_C \vec{a} d\vec{r} = -\oint_C d\varphi = \varphi(A) - \varphi(M) = 0.$$

А тепер розглянемо критерій потенціальності поля, що формулюється таким чином: необхідною й достатньою умовою того, щоб в однозначній області векторне поле  $\vec{a}$  було потенціальним, є виконання у всіх точках області рівності  $\text{rot } \vec{a} = 0$ .

Векторне поле  $\vec{a}(M)$  називають соленоїдальним в області простору  $V$ , якщо існує інше таке векторне поле  $\vec{A}$ , яке теж задане в області  $V$ , що у всіх точках цієї області  $\vec{a} = \text{rot } \vec{A}$ . Тоді функцію  $\vec{A}(M)$  називають векторним потенціалом поля  $\vec{a}(M)$ . Векторний потенціал поля визначається рівністю  $\vec{a} = \text{rot } \vec{A}$  з точністю до градієнта довільної функції. Справді, якщо до  $\vec{A}$  додати  $\text{grad } \varphi$  (де  $\varphi$  – довільна скалярна функція) і розглянути нову функцію  $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \varphi$ , то знову  $\vec{a} = \text{rot } \vec{A}'$ , тому що  $\text{rot grad } \varphi = 0$ .

Соленоїдальне поле має такі властивості:

• Потік вектора соленоїдального поля  $\vec{a}$  через довільну замкнуту поверхню  $S$  дорівнює нулю, якщо тільки в об'ємі, обмеженому поверхнею  $S$ , поле  $\vec{a}$  всюди існує:

$$\oint_S a_n dS = 0.$$

Така властивість випливає з інтегральної формули Остроградського – Гаусса. Якщо поле соленоїдальне, то  $\vec{a} = \text{rot } \vec{A}$ . Тому

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{a} &= \text{div rot } \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} \text{rot}_x \vec{A} + \frac{\partial}{\partial y} \text{rot}_y \vec{A} + \frac{\partial}{\partial z} \text{rot}_z \vec{A} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.38)$$

• Потік вектора соленоїдального поля  $\vec{a}$  через поверхню  $S$ , обмежену контуром  $C$ , не залежить від вибору поверхні  $S$  і визначається цілком заданням контуру  $C$ .

Аналогічно розглянемо критерій соленоїдальності векторного поля: необхідною і достатньою умовою соленоїдальності поля є

рівність нулю його дивергенції, тобто виконання в усіх точках простору умови

$$\operatorname{div} \vec{a} = 0.$$

Саме електромагнітне поле є соленоїдальним. Цю властивість використав Максвелл.

I, насамкінець, розглянемо третій вид векторного поля – лапласівське, або гармонічне. Векторне поле  $\vec{a}$  називають лапласівським, якщо в кожній точці області задання поля стверджуються дві рівності:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = 0 \text{ і } \operatorname{div} \vec{a} = 0.$$

Отже, лапласівське поле є однозначно потенціальним і соленоїдальним.

У випадку, коли лапласівське поле задано в однозв'язній області, з умов гармонічності поля випливає, що існує скалярний потенціал  $\varphi$  поля, тобто  $\vec{a} = -\operatorname{grad} \varphi$ . Узнявши дивергенцію від цього виразу, отримаємо рівняння Лапласа:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = 0. \quad (1.39)$$

Використавши такі співвідношення для векторних полів, перевіримо, що поле магнітної індукції, яке визначається законом Біо – Савара – Лапласа

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi v} \int \frac{[\vec{j} \times \vec{r}]}{r^2} dV,$$

є соленоїдальним з векторним потенціалом

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi v} \int \frac{\vec{j}}{r} dV,$$

де  $\mu_0$  – стала.

Для цього переконаємося, що  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ :

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} \frac{\mu_0}{4\pi v} \int \frac{\vec{j}}{r} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \int \frac{\vec{j}}{r} dV.$$

Але

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{j}}{r} = \left[ \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \vec{j} \right] = \left[ -\frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{j} \right] = \frac{[\vec{j} \times \vec{r}]}{r^3},$$

тобто



$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi V} \int \frac{[\vec{j} \times \vec{r}]}{r^3} dV = \vec{B}(M).$$

А тепер повернемося до задачі векторного аналізу – визначити векторне поле за його ротором і дивергенцією, тобто знайти в певній області поле  $\vec{a}(M)$ , якщо в ній задані  $\operatorname{rot} \vec{a}$  і  $\operatorname{div} \vec{a}$ .

Будемо вважати, що в кожній точці  $P$  певної області  $V$  справедливі рівності:

$$\operatorname{div} \vec{a}(P) = \rho(P), \text{ а } \operatorname{rot} \vec{a}(P) = \vec{j}(P).$$

Тут  $\rho(P)$  і  $\vec{j}(P)$  – густини зарядів і струмів, які задані в області  $V$  і є неперервними, а  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ , тому що  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$ . Наша система рівнянь має частинний розв'язок такого вигляду:

$$\vec{a}_1(P) = -\operatorname{grad} \frac{1}{4\pi V} \int \frac{\rho(M)}{r_{PM}} dV_M + \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi V} \int \frac{\vec{j}(M)}{r_{PM}} dV_M, \quad (1.40)$$

де  $M$  – біжуча точка області  $V$ , а  $P$  – точка, у якій векторне поле визначається,  $r_{PM}$  – відстань між точками  $P$  і  $M$ ,  $dV_M$  – елемент об'єму в точці  $M$ .

Загальний розв'язок нашої системи  $\operatorname{div} \vec{a}(P) = \rho(P)$  і  $\operatorname{rot} \vec{a}(P) = \vec{j}(P)$  матимемо, коли до частинного розв'язку (1.40) додамо загальний розв'язок відповідної однорідної системи:

$$\operatorname{div} \vec{a}(P) = 0,$$

$$\operatorname{rot} \vec{a}(P) = 0.$$

Однак ці рівняння визначають умову гармонічного (лапласівського) поля. Отже, загальний розв'язок неоднорідної системи отримаємо, коли до частинного розв'язку (1.40) додамо довільне гармонічне поле  $\vec{a}_2(P)$ , тобто

$$\vec{a}(P) = \vec{a}_1(P) + \vec{a}_2(P).$$

Якщо  $\vec{a}_2(P) = 0$ , то ми отримаємо таке:

1) векторне поле  $\vec{a}$  однозначно визначається у всьому просторі за формулою

$$\vec{a}(P) = -\operatorname{grad} \frac{1}{4\pi R} \int \frac{\rho(M)}{r_{PM}} dV_M + \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi R} \int \frac{\vec{j}(M)}{r_{PM}} dV_M, \quad (1.41)$$

де  $R$  – весь простір, а функції  $\rho$  і  $\vec{j}$  відмінні від нуля лише в скінченій частині простору, де  $\rho = \operatorname{div} \vec{a}$ , а  $\vec{j} = \operatorname{rot} \vec{a}$ ;

2) якщо поле  $\vec{a}$  має джерела  $\rho(P)$ , тоді як густина циркуляції  $\vec{j} = 0$ , то вектор  $\vec{a}$  визначається за формулою

$$\vec{a}(P) = -\text{grad} \frac{1}{4\pi R} \int \frac{\rho(M)}{r_{PM}} dV_M, \quad (1.42)$$

і поле в цьому випадку є потенціальним зі скалярним потенціалом

$$\varphi = \frac{1}{4\pi R} \int \frac{\rho(M)}{r_{PM}} dV_M;$$

3) якщо в заданому просторі густина циркуляції  $\vec{j}$  відмінна від нуля, а густина джерел зарядів  $\rho = 0$ , то векторне поле  $\vec{a}$  визначається рівністю

$$\vec{a}(P) = \text{rot} \frac{1}{4\pi R} \int \frac{\vec{j}(M)}{r_{PM}} dV_M, \quad (1.43)$$

і поле вектора  $\vec{a}$  є соленоїдальним з векторним потенціалом

$$\vec{A}(P) = \frac{1}{4\pi R} \int \frac{\vec{j}(M)}{r_{PM}} dV_M.$$

## 1.5 Інтегральні формули теорії поля та операції другого порядку

Тепер ми можемо дійти певного висновку, розглянувши вище основні характеристики скалярного й векторного полів на інтегральні рівняння Остроградського – Гаусса і Стокса:

$$\int_V \text{grad} f dV = \oint_S \vec{n} f dS, \quad (1.44.1)$$

$$\int_V \text{div} \vec{a} dV = \oint_S \vec{n} \vec{a} dS, \quad (1.44.2)$$

$$\int_V \text{rot} \vec{a} dV = \oint_S [\vec{n} \times \vec{a}] dS. \quad (1.44.3)$$

Ці формули можна подати також у розгорнутому вигляді:

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x} dV = \oint_S n_x f dS,$$

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial y} dV = \oint_S n_y f dS,$$

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial z} dV = \oint_S n_z f dS.$$

Помноживши ці три формули на орти  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  і додаючи їх, переконаємося, що формула (1.44.1) правильна.

Щоб довести формулу (1.44.3), запишемо рівності:

$$\int_V \frac{\partial a_z}{\partial y} dV = \oint_S n_y a_z dS,$$

$$\int_V \frac{\partial a_y}{\partial z} dV = \oint_S n_z a_y dS.$$

Віднявши їх, отримаємо

$$\int_V \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) dV = \oint_S (n_y a_z - n_z a_y) dS$$

або

$$\begin{aligned} \int_V \text{rot}_x \vec{a} dV &= \oint_S [\vec{n} \times \vec{a}]_x dS, \\ \int_V \text{rot}_y \vec{a} dV &= \oint_S [\vec{n} \times \vec{a}]_y dS, \\ \int_V \text{rot}_z \vec{a} dV &= \oint_S [\vec{n} \times \vec{a}]_z dS, \end{aligned} \quad (1.45)$$

що й доводить справедливість формули (1.44.3).

Використавши оператор Набла, можна надати всім трьом формулам (1.44) однотипного вигляду:

$$\begin{aligned} \int_V dV \nabla f &= \oint_S \vec{n} f dS, \\ \int_V dV \nabla \vec{a} &= \oint_S \vec{n} \vec{a} dS, \\ \int_V dV [\nabla \times \vec{a}] &= \oint_S [\vec{n} \times \vec{a}] dS. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Розглянемо тепер диференціальні операції другого порядку, які отримують двократним застосуванням оператора Набла. Спочатку з'ясуємо кількість можливих операцій другого порядку.

Скалярне поле має тільки одну характеристику – градієнт; векторне поле має вже дві характеристики – дивергенцію й ротор. Тому тут можна утворити тільки п'ять операцій другого порядку:

- операції першого порядку:  $\text{grad } \varphi$ ,  $\text{div } \vec{a}$ ,  $\text{rot } \vec{a}$ ;
- операції другого порядку:  $\text{div grad } \varphi$ ,  $\text{rot grad } \varphi$ ,  $\text{grad div } \varphi$ ,  $\text{div rot } \vec{a}$ ,  $\text{rot rot } \vec{a}$ .

Дві операція, як ми з'ясували раніше, дають тотожний нуль.

1.  $\text{rot grad } \varphi = 0$  (потенціальне поле є безвихровим).

2.  $\text{div rot } \vec{a} = 0$  (вихрове поле є соленоїдальним).

3. Вираз  $\text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi$  представляє оператор Лапласа.

Обчислимо із цих рівнянь  $\text{rot rot } \vec{a}$ :

$$\text{rot rot } \vec{a} = [\nabla \times \text{rot } \vec{a}] = [\nabla \times [\nabla \times \vec{a}]].$$

Використавши формулу векторної алгебри для подвоєного векторного добутку

$$[a \times [b \times c]] = b(a \cdot c) - c(a \cdot b),$$

отримаємо:

$$[\nabla \times [\nabla \times \vec{a}]] = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - (\nabla \cdot \nabla \cdot \vec{a}) = \nabla \text{div } \vec{a} - \nabla^2 \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \nabla^2 \vec{a}. \quad (1.47)$$

Цю тотожність ми використаємо пізніше в теорії електромагнітного поля, розглядаючи рівняння Максвелла. Із формули (1.47) визначимо лапласіан вектора  $\vec{a}$ :

$$\nabla^2 \vec{a} = \Delta \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \text{rot rot } \vec{a}, \quad (1.48)$$

тоді як лапласіан скалярного поля

$$\nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = \text{div grad } \varphi.$$

## 1.6 Криволінійні координати. Градієнт, дивергенція і ротор у криволінійних координатах

Положення точки  $M$  у просторі можна визначати, як відомо з математичної фізики, трьома декартовими координатами  $(x, y, z)$ . Але в багатьох задачах техніки НВЧ використовують так звані криволінійні координати, які значно спрощують обчислення. Прикладом криволінійних координат є полярні координати  $(r, \varphi)$  на площині; циліндричні координати  $(r, \varphi, z)$ ; сферичні координати  $(r, \theta, \varphi)$ ; еліптичні координати в просторі. Розглянемо їх.

### 1.6.1 Полярні координати $(r, \varphi)$

Полярними координатами точки  $M$  площини  $xOy$  є  $r$  – відстань  $MO$  точки  $M$  до початку координат  $O$ ,  $\varphi$  – полярний кут, відрахований від полярної осі  $Ox$  до радіус-вектора  $OM$  точки. Полярні й декартові координати (рис. 1.7) пов'язані відповідно залежностями:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Щоб мати всі точки площини, досить обмежитися координатами:

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Залежність між парами координат  $(x, y)$  і  $(r, \varphi)$  можна інтерпретувати геометрично, якщо ввести до розгляду ще одну координатну площину  $r\varphi$ , на якій  $r$  і  $\varphi$  відкладають за двома взаємно перпендикулярними осями.

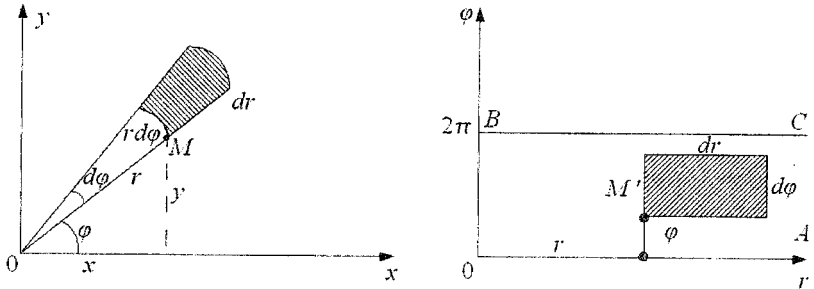


Рис. 1.7. Зв'язок декартових і полярних координат

Функції, які встановлюють взаємно однозначну відповідність точок  $M$  і  $M'$ , запишемо через диференціали координат  $dx$  і  $dy$ :

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Систему рівнянь (1.49) можна розглядати як лінійну неоднорідну систему алгебраїчних рівнянь відносно  $dr$  і  $d\varphi$ . Щоб цей розв'язок був однозначним, необхідно, щоб якобіан перетворення цих систем був відмінним від нуля.

Величини

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \varphi, & \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -r \sin \varphi, \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \varphi, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= r \cos \varphi \end{aligned}$$

визначають якобіан

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Взаємно однозначна відповідність точок під час перетворення цих двох координатних систем порушується, коли  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = 0$ , тобто при  $r = 0$ . Іншими словами, порушення однозначності спостерігається в початку координат площини  $xOy$ . Тут слід указати на простий спосіб обчислення якобіана: за абсолютною величиною він рівний відношенню елемента площі в полярних координатах до елемента площі на площині  $r, \varphi$  (рис. 1.7, б):

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right| = \frac{r dr d\varphi}{dr d\varphi} = r. \quad (1.50)$$

Цей спосіб обчислення якобіана допускає узагальнення на будь-які криволінійні координати.

### 1.6.2 Циліндричні координати $(r, \varphi, z)$

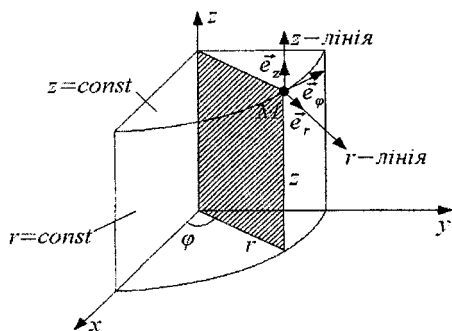


Рис. 1.8. Циліндричні координати та їх зв'язок з декартовими

Ці координати поєднують полярні координати  $r, \varphi$  у площині  $x y$  і декартову координату  $z$  (рис. 1.8).

Зв'язок між декартовими й циліндричними координатами такий:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

причому

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ -\infty < z < +\infty.$$

Лінії перетину координатних площин називають координатними лініями:  $r$ -лінія,  $\varphi$ -лінія і  $z$ -лінія. Три одиничні вектори – орти  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ , побудовані в регулярній точці простору  $x y z$

у напрямі координатних ліній, утворюють так званий місцевий координатний базис. Ці орти є взаємно перпендикулярні. Елементи дуг трьох координатних ліній дорівнюють  $dr, d\varphi$  і  $dz$ . Тому елемент довільної кривої дорівнює:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Елемент об'єму в циліндричних координатах рівний:

$$dV = r dr d\varphi dz.$$

Тоді якобіан перетворення для циліндричної системи координат буде рівний:

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} \right| = \frac{r dr d\varphi dz}{dr d\varphi dz} = r. \quad (1.51)$$

Тобто тут регулярними точками будуть усі точки простору  $x y z$ , крім точок осі  $z$ , де якобіан рівний нулю.

### 1.6.3 Сферичні координати $(r, \theta, \varphi)$

Положення точки  $M$  у просторі  $x y z$  визначають відстанню її до початку координат  $r$  і двома кутами – довготою  $\varphi$  та широтою  $\theta$  (рис. 1.9, а). Сферичні координати зв'язані з декартовими такими залежностями:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

де

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

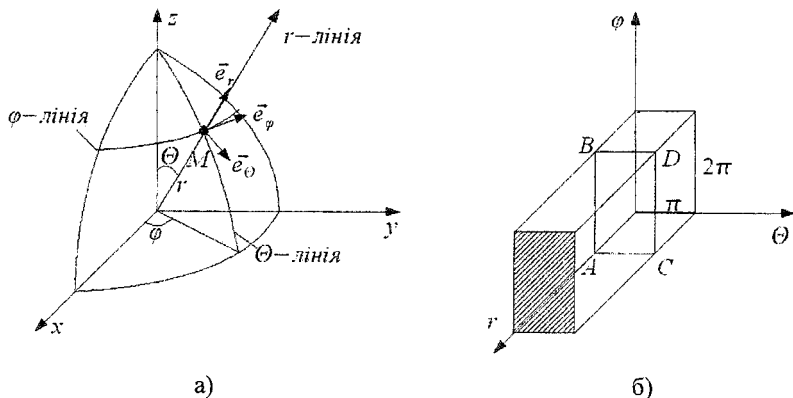


Рис. 1.9. Зв'язок сферичних координат з декартовими

Ці формули встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками простору  $x y z$  (за винятком точок осі  $z$ ) і точками простору  $r, \theta, \varphi$ . Взаємно однозначний характер відповідності точок порушується на двох вертикальних гранях (рис. 1.9, б) і на грані

$z = 0$ . Справді, грань  $z = 0$  відтворюється в точку  $x = y = z = 0$ ; грані  $\theta = 0$  і  $\varphi = 0$  відтворюються в точки  $x = y = 0, z = \pm r$ . Тут також маємо три сімейства координатних поверхонь:  $r = const, \theta = const, \varphi = const$ . Координатними лініями для кожної регулярної точки є: півпряма, що виходить з початку координат і проходить через точку  $M$  ( $r$ -лінія), меридіан ( $\theta$ -лінія) і паралель ( $\varphi$ -лінія), що зображено на рис. 1.9, а.

Місцевий координатний базис утворюють три взаємно перпендикулярні орти  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ . Звернемо увагу на те, що послідовність  $r, \theta, \varphi$  координат відповідає правій системі координат. Елементи дуг трьох координатних ліній такі:  $dr, r d\theta, r \sin \theta d\varphi$ . Квадрат елемента дуги довільної кривої визначається як

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Елемент об'єму у сферичних координатах дорівнює добутку елементів дуг трьох координатних ліній

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi,$$

а якобіан перетворення в даному випадку буде

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \right| = \frac{r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi}{dr d\theta d\varphi} = r^2 \sin \theta, \quad (1.52)$$

який перетворюється в нуль, якщо  $r = 0, \theta = 0$  і  $\varphi = 0$ , де порушується однозначний характер відображення.

#### 1.6.4 Довільні криволінійні координати

Вище для визначення положення точки в просторі  $x, y, z$  ми користувалися такими координатами: декартові  $(x, y, z)$ , полярні  $(r, \varphi)$ , циліндричні  $(r, \varphi, z)$ , сферичні  $(r, \theta, \varphi)$ . Узагалі можна користуватися довільними параметрами  $q_1, q_2, q_3$ , але такими, щоб, кожній точці простору  $x, y, z$  відповідала тільки одна певна трійка чисел  $q_1, q_2, q_3$  і навпаки. Інакше кажучи, між системами значень  $x, y, z$  і системами значень параметрів  $q_1, q_2, q_3$  повинна існувати взаємно однозначна відповідь у вигляді функцій:



$$x = f_1(q_1, q_2, q_3),$$

$$y = f_2(q_1, q_2, q_3),$$

$$z = f_3(q_1, q_2, q_3),$$

для яких якобіан перетворення повинен бути відмінним від нуля

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \right| \neq 0.$$

Самі числа  $q_1, q_2, q_3$ , що однозначно визначають положення точки в просторі  $xuz$ , називають криволінійними координатами.

Точки простору, для яких одна з координат  $q_1, q_2, q_3$  зберігає стале значення, утворюють координатну поверхню. Точки простору, де зберігають стале значення дві криволінійні координати, утворюють координатну лінію:  $q_1$ -лінія,  $q_2$ -лінія,  $q_3$ -лінія (рис. 1.10).

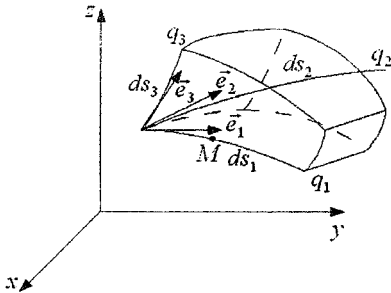


Рис. 1.10. Зв'язок криволінійних координат з декартовими

Три одиничні вектори  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , дотичні до координатних ліній у точці  $M$ , утворюють координатний базис. При цьому вважатимемо, що орти  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  є взаємно перпендикулярні, тобто ортогональні.

Під час зміщення від точки  $M$  уздовж  $q_i$ -лінії дуга координата  $s_i$  змінюється. Похідна  $\frac{ds_i}{dq_i}$  характеризує відповідну швидкість зміни  $s_i$  залежно від зміни криволінійної координати  $q_i$ . Три величини

$$H_1 = \frac{ds_1}{dq_1}, H_2 = \frac{ds_2}{dq_2}, H_3 = \frac{ds_3}{dq_3}$$

називають коефіцієнтами Ляме. Для коефіцієнтів Ляме можна встановити інші формули, користуючись зв'язками, які у векторній формі визначаються функцією  $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$ . Довільне нескінченно мале переміщення в просторі характеризується вектором

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3$$

або для  $d\vec{r}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1$ , що відповідає

$$d\vec{r}_1 = \frac{\partial}{\partial q_1} \left[ \vec{i} x(q_1, q_2, q_3) + \vec{j} y(q_1, q_2, q_3) + \vec{k} z(q_1, q_2, q_3) \right] dq_1.$$

Але  $|d\vec{r}_1| = ds_1$ , то  $ds_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} dq_1$ . Звідси

визначаємо коефіцієнти Ляме:

$$H_1 = \frac{ds_1}{dq_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} dq_1,$$

$$H_2 = \frac{ds_2}{dq_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2} dq_2,$$

$$H_3 = \frac{ds_3}{dq_3} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} dq_3.$$

Елементи дуг трьох координатних ліній, очевидно, будуть рівні:

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2, \quad ds_3 = H_3 dq_3.$$

Тоді елемент дуги довільної кривої в ортогональних криволінійних координатах дорівнює

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2.$$

Це, відповідно, через коефіцієнти Ляме складає

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2.$$

Елементи площ трьох координатних площин будуть такими:

$$d\Sigma_{12} = ds_1 ds_2 = H_1 H_2 dq_1 dq_2,$$

$$d\Sigma_{13} = ds_1 ds_3 = H_1 H_3 dq_1 dq_3,$$

$$d\Sigma_{23} = ds_2 ds_3 = H_2 H_3 dq_2 dq_3.$$

Але елемент об'єму в криволінійних координатах буде визначатись як

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

На основі цих формул ми можемо визначити коефіцієнти Ляме в циліндричних і сферичних координатах.

Для циліндричних координат:

$$ds_r = dr, ds_\varphi = r d\varphi, ds_z = dz, \text{ а } dq_r = dr, dq_\varphi = d\varphi, dq_z = dz.$$

Звідси

$$H_r = \frac{ds_r}{dq_r} = 1, H_\varphi = \frac{ds_\varphi}{dq_\varphi} = r, H_z = \frac{ds_z}{dq_z} = 1.$$

Для сферичних координат:

$$H_r = \frac{ds_r}{dq_r} = \frac{dr}{dr} = 1, H_\theta = \frac{ds_\theta}{dq_\theta} = \frac{r d\theta}{d\theta} = r, H_\varphi = \frac{ds_\varphi}{dq_\varphi} = \frac{r \sin \theta d\varphi}{d\varphi} = r \sin \theta.$$

Ці значення коефіцієнтів Ляме ми використаємо, визначаючи градієнт, дивергенцію, лапласіан і ротор у криволінійних координатах, які, у свою чергу, використаємо для побудови циліндричних і сферичних електромагнітних хвиль.

## 1.7 Градієнт, дивергенція, лапласіан і ротор у криволінійних координатах

### 1.7.1 Градієнт

Визначимо проекції градієнта на напрям одиничних векторів  $\vec{e}_i$ , дотичних до координатних ліній  $q_i$ :

$$\begin{aligned} \text{grad}_{\vec{e}_1} f &= \frac{\partial f}{\partial s_1}, \\ \text{grad}_{\vec{e}_2} f &= \frac{\partial f}{\partial s_2}, \\ \text{grad}_{\vec{e}_3} f &= \frac{\partial f}{\partial s_3}. \end{aligned} \tag{1.53}$$

Вектор  $\text{grad } f$  знайдемо за трьома проекціями:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial s_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial s_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial s_3} \vec{e}_3 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \vec{e}_3.$$

Відповідно тепер можемо подати градієнт у циліндричних координатах, коли коефіцієнти Ляме дорівнюють  $H_r = 1, H_\varphi = r, H_z = 1$ :

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z, \tag{1.54}$$

$$|\text{grad } f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Градiєнт у сферичних координатах, коли коефіцієнти Ляме рівні  $H_r = 1$ ,  $H_\theta = r$ ,  $H_\varphi = r \sin \theta$ , має вигляд:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi,$$

$$|\text{grad } f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2}. \quad (1.55)$$

### 1.7.2 Дивергенція

Її визначимо за допомогою суми потоків через грані, перпендикулярні до  $q_i$ -лінії ( $q_1, q_2, q_3$ ):

$$dN_1 = \frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_2 H_3) dq_1 dq_2 dq_3,$$

де  $a_1$  – проекція вектора  $\vec{a}$  на напрям дотичної до лінії  $q_1$ . Аналогічно обчислюються потоки вектора  $\vec{a}$  через інші пари граней паралелепіпеда, побудованого за напрямками  $q_1, q_2, q_3$ :

$$dN_2 = \frac{\partial}{\partial q_2} (a_2 H_3 H_1) dq_1 dq_2 dq_3,$$

$$dN_3 = \frac{\partial}{\partial q_3} (a_3 H_1 H_2) dq_1 dq_2 dq_3.$$

Якщо  $dN = dN_1 + dN_2 + dN_3$ , а  $dV = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3$ , то відношення

$$\frac{dN}{dV} = \text{div} \vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (a_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (a_3 H_1 H_2) \right] \quad (1.56)$$

визначає дивергенцію векторного поля  $\vec{a}$  в криволінійних координатах.

Визначимо дивергенцію в циліндричних координатах, для яких  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = z$ ,  $H_r = 1$ ,  $H_\varphi = r$ ,  $H_z = 1$ . Тоді

$$\text{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (1.57)$$

Тут  $a_r, a_\varphi, a_z$  – складові вектора  $\vec{a}(r, \varphi, z)$  у циліндричних координатах.

У сферичних координатах дивергенція буде виражатися таким виразом, якщо  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \theta$ ,  $q_3 = \varphi$ ,  $H_r = 1$ ,  $H_\theta = r$ ,  $H_\varphi = r \sin \theta$ :

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (1.58)$$

Тут  $a_r$ ,  $a_\theta$ ,  $a_\varphi$  – складові вектора  $\vec{a}(r, \theta, \varphi)$  у сферичних координатах.

### 1.7.3 Лапласіан скалярної функції

Як ми уже знаємо, вираз  $\operatorname{div} \operatorname{grad} f$  є лапласіаном функції  $f$ :

$$\nabla^2 f = \Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Якщо  $\operatorname{grad} f = \vec{a}$ , то  $\nabla^2 f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \operatorname{div} \vec{a}$ .

Складові вектора  $\vec{a}$  в напрямі одиничних векторів  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$  координатного базису виражаються через криволінійні координати таким чином:

$$a_1 = \frac{\partial f}{\partial s_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad a_2 = \frac{\partial f}{\partial s_2} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad a_3 = \frac{\partial f}{\partial s_3} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial f}{\partial q_3}.$$

Тоді

$$\Delta f = \nabla^2 f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \times \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (1.59)$$

Отже, тепер ми можемо визначити лапласіан скалярної функції в декартових, циліндричних і сферичних координатах.

Якщо в декартовій системі координат  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ ,  $q_3 = z$ ,  $H_1 = H_2 = H_3 = 1$ , то

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (1.60)$$

Лапласіан скалярної функції у циліндричних координатах при  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = z$ ,  $H_r = 1$ ,  $H_\varphi = r$ ,  $H_z = 1$  рівний

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (1.61)$$

Лапласіан скалярної функції у сферичних координатах при  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \theta$ ,  $q_3 = \varphi$ ,  $H_r = 1$ ,  $H_\theta = r$ ,  $H_\varphi = r \sin \theta$  буде рівний

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}. \quad (1.62)$$

### 1.7.4 Ротор у криволінійних координатах

Для його визначення проведемо через довільну точку  $M$  простору три координатні лінії:  $q_1$ -,  $q_2$ -,  $q_3$ -лінії, і в координатній площині  $q_1 = const$  розглянемо елементарний прямокутник  $ABCD$ , розміри якого – відрізки координатних ліній  $M_1M_3 = H_3 dq_3$  і  $M_4M_2 = H_2 dq_2$  (рис. 1.11). Тут  $H_2$  і  $H_3$  – коефіцієнти Ляме для точки  $M$ , яка має такі координати  $M = M(q_1, q_2, q_3)$ . Інші точки в межах прямокутника  $ABCD$  мають такі координати:

$$M_1 \left( q_1, q_2, q_3 - \frac{dq_3}{2} \right), M_2 \left( q_1, q_2 + \frac{dq_2}{2}, q_3 \right),$$

$$M_3 \left( q_1, q_2, q_3 + \frac{dq_3}{2} \right), M_4 \left( q_1, q_2 - \frac{dq_2}{2}, q_3 \right).$$

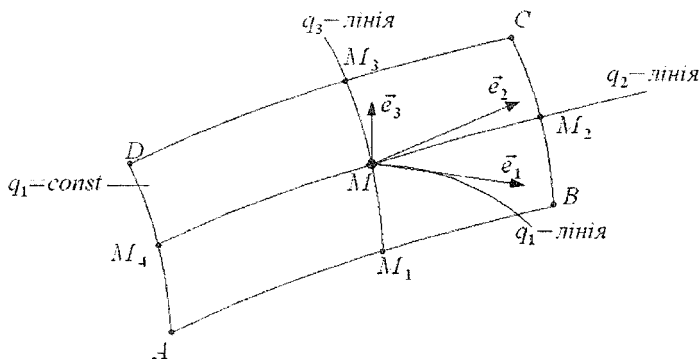


Рис. 1.11. Визначення ротора в криволінійних координатах

Тепер обчислимо завихрення поля в точці  $M$  навколо напрямку  $\vec{e}_1$  першої координатної лінії. Це завихрення позначимо через  $rot_1 \vec{a}$ :

$$rot_1 \vec{a} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_{ABCD} \vec{a} d\vec{r}}{S},$$

де  $S = M_4M_2 \cdot M_1M_3 = H_2 H_3 dq_2 dq_3$  – площа прямокутника  $ABCD$ .

Обчислимо криволінійний інтеграл:

$$\oint_{ABCD} \vec{a} d\vec{r} = \vec{a}(M_1) AB + \vec{a}(M_2) BC + \vec{a}(M_3) CD + \vec{a}(M_4) DA. \quad (1.63)$$

Тут скалярні добутки правої частини обчислимо за формулою  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_b \cdot b$ . Тому

$$\vec{a}(M_1) \overline{AB} = a_2(M_1) AB = (a_2 H_2)_{M_1} dq_2,$$

де  $a_2(M_1)$  – проекція вектора  $\vec{a}$  на напрям  $q_2$ -лінії (на напрям  $M_1B$  у точці  $M_1$ ),  $AB = H_2 dq_2$ .

Аналогічно знаходимо інші скалярні добутки:

$$\vec{a}(M_2) \overline{BC} = a_3(M_2) BC = (a_3 H_3)_{M_2} dq_3,$$

$$\vec{a}(M_3) \overline{CD} = a_{-2}(M_3) CD = -(a_2 H_2)_{M_3} dq_2,$$

$$\vec{a}(M_4) \overline{DA} = a_{-3}(M_4) DA = -(a_3 H_3)_{M_4} dq_3,$$

де  $a_{-2}(M_3)$  означає проекцію вектора  $\vec{a}$  на напрям, протилежний напрямку  $q_2$ - лінії в точці  $M_3$ , тобто на напрям  $M_3D$ , і, очевидно, що  $a_{-2} = -a_2$ .

Підставляючи всі чотири доданки у вираз (1.63) криволінійного інтеграла, отримаємо:

$$\oint_{ABCD} \vec{a} d\vec{r} = \left[ (a_2 H_2)_{M_1} - (a_2 H_2)_{M_3} \right] dq_2 + \left[ (a_3 H_3)_{M_2} - (a_3 H_3)_{M_4} \right] dq_3.$$

Замінюючи різниці в квадратних дужках через прирости функції, матимемо:

$$(a_2 H_2)_{M_1} - (a_2 H_2)_{M_3} = \frac{\partial}{\partial q_3} (a_2 H_2) dq_3 + \dots,$$

$$(a_3 H_3)_{M_2} - (a_3 H_3)_{M_4} = \frac{\partial}{\partial q_2} (a_3 H_3) dq_2 + \dots$$

Тоді завихрення поля в точці  $M$  навколо напрямку  $\vec{e}_1$  в границі отримаємо:

$$rot_1 \vec{a} = \frac{1}{H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (a_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (a_2 H_2) \right]. \quad (1.64.1)$$

Аналогічно обчислюємо завихрення в точці  $M$  навколо напрямків  $\vec{e}_2$  і  $\vec{e}_3$ :

$$rot_2 \vec{a} = \frac{1}{H_3 H_1} \left[ \frac{\partial}{\partial q_3} (a_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (a_3 H_3) \right], \quad (1.64.2)$$

$$\text{rot}_3 \vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (a_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (a_1 H_1) \right]. \quad (1.64.3)$$

Таким чином, ми отримали формули, які визначають складові ротора за напрямками координатного базису в криволінійних координатах.

Використаємо їх для обчислення ротора в циліндричних і сферичних координатах:

а) ротор у циліндричних координатах, коли  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = z$ ,  $H_r = 1$ ,  $H_\varphi = r$ ,  $H_z = 1$  буде визначатися своїми складовими:

$$\begin{aligned} \text{rot}_r \vec{a} &= \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}, \\ \text{rot}_\varphi \vec{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}, \\ \text{rot}_z \vec{a} &= \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} a_\varphi. \end{aligned} \quad (1.65)$$

б) ротор у сферичних координатах, коли  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \theta$ ,  $q_3 = \varphi$ ,  $H_r = 1$ ,  $H_\theta = r$ ,  $H_\varphi = r \sin \theta$  буде визначатися такими складовими:

$$\begin{aligned} \text{rot}_r \vec{a} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\varphi \sin \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}, \\ \text{rot}_\theta \vec{a} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi), \\ \text{rot}_\varphi \vec{a} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Ці формули будемо використовувати під час розгляду проходження електромагнітних хвиль у направляючих системах (хвилеводах) і резонаторах.

### Контрольні запитання

1. Яким чином визначається градієнт скалярного поля? Назвіть основні властивості градієнта скалярного поля. Як визначається абсолютна величина градієнта скалярного поля?

2. Як пов'язаний оператор Набла (Гамільтона) із градієнтом скалярного поля? Який існує зв'язок між градієнтом поля та похідною за даним напрямком?



3. Що називається дивергенцією? Яке поле визначає дивергенція? Як пов'язаний оператор Набла з дивергенцією вектора? Назвіть основні властивості дивергенції.

4. Як пов'язаний потік векторного поля з поверхневим інтегралом? Дайте визначення теореми Остроградського – Гаусса. Що фізично розкриває зміст дивергенції векторного поля?

5. Назвіть основні властивості ротора. Дайте визначення циркуляції векторного поля за контуром. Який існує зв'язок між циркуляцією та завихренням векторного поля? Дайте визначення теореми Стокса.

6. Визначте критерій потенціальності поля. Дайте визначення векторного потенціалу соленоїдального поля. Визначте критерій соленоїдальності. Яке поле називається лапласівським, які його критерії?

7. Які координати називаються криволінійними? Яким чином визначаються коефіцієнти Ляме в циліндричних і сферичних координатах? Дайте визначення градієнта, дивергенції та ротора в криволінійних, циліндричних і сферичних координатах. Як визначається лапласіан скалярної функції в циліндричних і сферичних координатах?

### **Рекомендована література**

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1988. – 512 с.

2. Воловик П. М. Фізика для університетів : Повний курс в одному томі / П. М. Воловик. – К. ; Ірпінь : Перун, 2005. – 864 с.

3. Бугаєнко Г.О. Методи математичної фізики / Г. О. Бугаєнко. – К. : Вища школа, 1980. – 310 с.

4. Гнациус Г. И. Теория поля / Г. И. Гнациус. – М. : Знание, 1971. – 212 с.

5. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. Н. Самарский. – М. : Гостехиздат, 1976. – 735 с.

6. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – М. : Радио и связь, 1988. – 440 с.

7. Гольдфарб И. А. Векторный анализ и теория поля / И. А. Гольдфарб. – М. : Физматгиз, 1962. – 182 с.

8. Борисенко А. И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления / А. И. Борисенко, И. Е. Таранов. – М. : Высшая школа, 1966. – 252 с.

9. Валь С. Основи векторного та тензорного аналізу / С. Валь, С. Королюк, С. Мельничук. – Чернівці : Книга ХХІ, 2006. – 228 с.

## РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМУ – РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА

### 2.1 Електромагнітне поле і його математичні моделі

У фізиці прийнято розмежовувати об'єкти матеріального світу на два великі самостійні класи. Один із них називають речовиною, а другий – полем. В основі принципу, який дозволяє проводити такий поділ, знаходиться той факт, що речовина, на відміну від поля, має інертну масу. Рух мікроскопічних об'єктів, основою яких є речовина, описується відомими нам законами механіки Ньютона.

Різновидність матерії, яку називають полем, не має інертної маси. Коли йдеться про поле, то можна назвати добре відомі нам із життєвого досвіду електромагнітне та гравітаційне поля. Також відома наука, яка займається вивченням електромагнітного поля, – електродинаміка. Електромагнітне поле проявляє себе за рахунок силової взаємодії з тими частинами речовини, які несуть на собі електричний заряд. Заряд частинки може бути як додатним, так і від'ємним. Експериментально встановлено, що заряд є дискретним: величини будь-яких зарядів, які ми зустрічаємо в природі, з точністю до знака, є кратні елементарному заряду  $e$ , рівному  $1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл. Заряд електрона є від'ємним і складає  $-e$ .

Оскільки сили, які діють на заряджені частинки з боку електромагнітного поля, є векторними величинами, то маємо можливість описати електромагнітне поле за допомогою абстрактних математичних моделей векторних полів.

Пригадаємо, що в математиці векторне поле  $\vec{A}$ , яке задане в тримірному просторі з декартовими координатами  $x, y, z$ , описується трьома проекціями на вибрані осі:

$$\vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}, \quad (2.1)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – одиничні вектори (орти) уздовж указаних осей.

Графічно векторні поля зручно зображати за допомогою картин силових ліній – просторових кривих, які мають таку властивість, що в кожній їх точці вектор поля направлений уздовж дотичної. У цих областях простору, де довжина вектора більша, силові лінії проводять густіше і навпаки (рис. 2.1), тобто електромагнітне поле є векторним.

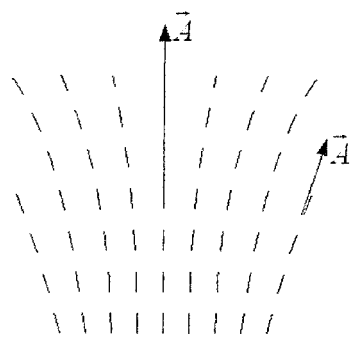


Рис. 2.1. Векторне поле та його силові лінії

не поле  $\vec{E}$  – напруженість електричного поля, яка визначається

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}), \quad (2.2)$$

де  $\vec{F}(\vec{r})$  – вектор сили, що діє на пробний заряд  $q$  у деякій точці простору з радіус-вектором  $\vec{r}$ .

Якщо досліджувати електромагнітні процеси у вакуумі, то для опису електричного поля в кожній точці простору достатньо задати вектор напруженості електричного поля  $\vec{E}$ . Однак, як буде показано нижче, для опису електромагнітного поля в матеріальному середовищі, наприклад у діелектрику, необхідно ввести ще одне векторне поле  $\vec{D}$ , яке називають полем електричного зміщення або електричної індукції. Вектор  $\vec{D}$  у вакуумі пов'язаний з вектором напруженості електричного поля  $\vec{E}$  співвідношенням:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (2.3)$$

де  $\varepsilon_0$  – діелектрична постійна, яка рівна  $\varepsilon_0 = 10^9/36\pi = 8,842 \cdot 10^{-12} \text{ Фл/м}$ . У СІ величина  $\vec{E}$  має розмірність  $\text{В/м}$ , а  $\vec{D}$  –  $\text{Кл/м}^2$ .

Магнітне поле, на відміну від електричного, взаємодіє лише з рухомими зарядженими частинками. У вакуумі його можна описати за допомогою єдиного векторного поля магнітної індукції  $\vec{B}$ . Принцип його визначення базується на тому, що на точковий заряд  $q$ , який рухається в електромагнітному полі зі швидкістю  $\vec{v}$ , діє так звана сила Лоренца:

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (2.4)$$

Усю сукупність електромагнітних явищ прийнято поділяти на дві групи: електричні й магнітні. Відповідно до цього виділяють дві різновидності електромагнітного поля, які мають назву електричного і магнітного полів.

Електричному полю властива силова взаємодія як з нерухомими, так і з рухомими зарядами. У результаті такої взаємодії кінетична енергія рухомої зарядженої частинки речовини змінюється. Тому математичною моделлю електричного поля у вакуумі є вектор-

Перший доданок у рівнянні (2.4) є уже відомою силою, яка зумовлена електричним полем. Другий доданок уже описує силу, яка викликана магнітним полем. Магнітна частина сили Лоренца, що пропорційна векторному добутку  $\vec{v}$  і  $\vec{B}$ , завжди перпендикулярна траєкторії руху. Тому магнітне поле не впливає на кінетичну енергію частинки, а лише змінює її траєкторію. Ця властивість магнітного поля широко використовується в електроніці для фокусування пучків заряджених частинок, наприклад в імплантаторах чи електронних гарматах.

Відомий цілий клас речовин, усередині яких проходить суттєва зміна прикладеного магнітного поля. Такі речовини називаються магнетиками. До них відноситься залізо, нікель, кобальт, сплави цих металів, рідкісноземельні метали. Для опису явищ у магнетиках, крім векторного поля  $\vec{B}$ , додатково вводять векторне поле  $\vec{H}$ , яке називають напруженістю магнітного поля. У вакуумі вектори  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  є пропорційними:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (2.5)$$

де  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$ , яку називають магнітною проникністю. У СІ величина  $\vec{B}$  виражається в Тл, а  $\vec{H}$  – в А/м.

## 2.2 Диференціальна форма закону Ома

Струмом провідності називають упорядкований рух заряджених частинок у матеріальному середовищі або у вакуумі.

Припустимо, що до межі розділу між вакуумом і провідною речовиною підведено два електроди, які під'єднані до джерела е.р.с. (рис. 2.2, а). Лінії струму всередині речовини розподіляються таким чином, що найбільша їх частина проходить по області, яка створює для струму малий опір; лише незначна частина струму відвілюється в глибину провідного середовища та інтенсивність струму за глибиною є різною.

Із цією метою і вводиться поняття векторного поля густини струму провідності  $\vec{j}_{np}$ , яка визначається співвідношенням

$$\vec{j}_{np} = nq\vec{v}, \quad (2.6)$$

де  $n$  – концентрація носіїв заряду,  $q$  – заряд одного носія,  $\vec{v}$  – швидкість носія заряду в даній точці простору.

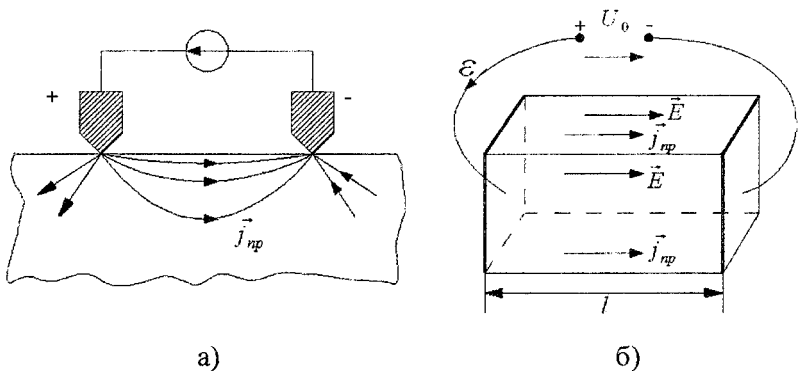


Рис. 2.2. Струм провідності (а) і диференціальна форма закону Ома (б)

Таким чином, густина струму провідності характеризує силу струму через одиничну площадку, яка перпендикулярна вектору швидкості носіїв заряду  $\vec{v}$ . Цей струм провідності пропорційний напруженості електричного поля  $\vec{E}$ :

$$\vec{j}_{np} = \sigma \vec{E}, \quad (2.7)$$

де  $\sigma$  має розмірність питомої провідності даної речовини.

Доведемо, що ця рівність є однією з форм закону Ома для резистивного кола. Для цього розглянемо куб з ребром довжиною  $l$ , який виготовлений із досліджуваної речовини (рис. 2.2, б). Припустимо, що дві протилежні грані куба покриті шаром ідеального провідника і до них прикладено напругу  $U$ . Під дією цієї напруги у зовнішньому колі протікає деякий струм  $i$ . Очевидно, що  $i = |\vec{j}_{np}| l^2$ , але  $|\vec{E}| = U/l$ . Тоді  $i = \sigma l U = U/R$ , коли  $\sigma l = 1/R$ .

Рівність (2.7) називають диференціальною формою закону Ома, оскільки вона встановлює зв'язок між густиною струму провідності та напруженістю електричного поля для певної точки простору.

### 2.3 Закон збереження заряду і закон Гаусса

Одне з фундаментальних положень теорії електромагнетизму полягає в тому, що ні за яких обставин електричний заряд не може ні зароджуватися, ні зникати. Цей факт, багатократно перевірений експериментально, складає основу закону збереження електричного заряду.

Припустимо, що всередині довільного замкнутого об'єму  $V$ , обмеженого поверхнею  $S$ , міститься деякий електричний заряд  $Q$ , розподілений у просторі з об'ємною густиною  $\rho$  (Кл/м<sup>3</sup>). Очевидно, що  $Q = \int_V \rho dV$ .

Якщо протягом часу значення  $Q$  змінюється, то на основі закону збереження заряду це пов'язано з тим, що або частина заряду покидає об'єм  $V$ , або заряд поступає ззовні. Як наслідок, у просторі виникає струм провідності з деякою густиною  $\vec{j}_{np}$ . Інтегруючи функцію  $\vec{j}_{np}$  по замкненій поверхні  $S$ , знаходимо результуючий струм провідності в такій системі:

$$i = \oint_S \vec{j}_{np} dS. \quad (2.8)$$

За визначенням поняття струму, у даному випадку  $i = -\frac{dQ}{dt}$  (струм вважається додатним, якщо заряд усередині об'єму  $V$  зменшується). Тоді ми можемо записати:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\oint_S \vec{j}_{np} dS. \quad (2.9)$$

Перетворивши праву частину формули (2.9) за теоремою Остроградського – Гаусса, отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV &= -\int_V \operatorname{div} \vec{j}_{np} dV, \\ \int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_{np} \right) dV &= 0. \end{aligned}$$

Звідси приходимо до закону збереження заряду в диференціальній формі:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_{np} = 0. \quad (2.10)$$

Ця рівність називається ще рівнянням неперервності і за фізичним змістом є еквівалентною першому закону Кірхгофа.

А тепер стосовно закону Гаусса. Цей закон, знайдений експериментально, встановлює зв'язок між векторним полем  $\vec{E}$  і величиною заряду  $Q$ , який і формує це електричне поле. Розглянемо деякий об'єм  $V$ , обмежений замкненою поверхнею  $S$  (рис. 2.3). Нехай усередині об'єму довільним чином розміщено заряд  $Q$ . Згідно із

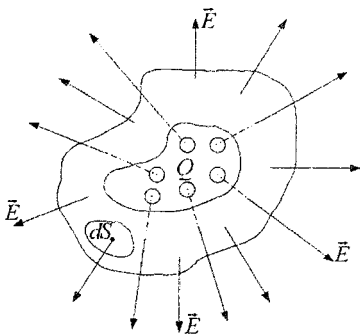


Рис. 2.3. Визначення закону Гаусса

законом Гаусса, потік векторного поля  $\vec{E}$ , породженого зарядом  $Q$ , через замкнену поверхню  $S$  рівний величині заряду, розділеному на діелектричну постійну  $\epsilon_0$ , тобто:

$$\oint_S \vec{E} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2.11)$$

Формула (2.11) виражає закон Гаусса в інтегральній

формі. Використовуючи формулу Остроградського – Гаусса, можна отримати закон Гаусса в диференціальній формі, а саме:

$$\oint_S \vec{E} dS = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{Q}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV.$$

Звідси отримуємо, що

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.12)$$

або  $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ , оскільки  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ .

Це і є відомий закон Гаусса в диференціальній формі. Таке співвідношення фізично означає, що силові лінії векторного поля  $\vec{E}$  мають джерела (витоки) і стоки в тих точках простору, де розміщені електричні заряди.

## 2.4 Закон нерозривності магнітних силових ліній і властивість соленоїдальності магнітного поля

Експериментально встановлено, що силові лінії векторного поля магнітної індукції  $\vec{B}$  завжди замкнуті в просторі (рис. 2.4), незалежно від того, чи створюється поле постійним магнітом, чи колушкою зі струмом.

Для математичного опису (моделі) цього факту зручно, як це робиться у векторному аналізі, представити силові лінії магнітного поля як уявні лінії швидкості руху частинок нестисливої рідини. Розмістимо всередині існуючого магнітного поля довільний об'єм  $V$ , обмежений поверхнею  $S$ . Якщо силові лінії замкнені, то потік

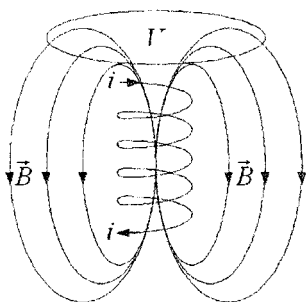


Рис. 2.4. Силлові лінії магнітної індукції в котушці зі струмом

рідини, що втікає, рівний потоку, що витікає з об'єму. Тому ми можемо це явище описати за допомогою моделі:

$$\oint_S \vec{B} dS = 0. \quad (2.13)$$

Використавши теорему Остроградського – Гаусса, можна записати:

$$\oint_S \vec{B} dS = \int_V \text{div } \vec{B} dV = 0 \quad (2.14)$$

або  $\text{div } \vec{B} = 0.$

Формули (2.13) і (2.14) математично виражають закон нерозривності магнітних силових ліній в інтегральній та диференціальній формах відповідно. Еквівалентною властивістю цього закону є те, що векторне поле  $\vec{B}$  немає джерел, або інакше ця властивість, як ми вже знаємо, називається властивістю соленоїдальності магнітного поля, що виражає відсутність магнітних зарядів. Іншими словами, векторні поля без джерел, тобто з нульовою дивергенцією, називають соленоїдальними полями.

## 2.5 Закон повного струму (Ампера) і струм зміщення

На початку XIX ст. датський фізик Г.Х. Ерстед експериментально відкрив принципово важливий факт: протікання електричного струму по провіднику супроводжується виникненням у навколишньому просторі магнітного поля. Досліди Ерстеда дозволили французькому вченому А.М. Амперу сформулювати теоретичне положення, яке називається законом повного струму, або законом Ампера.

Нехай ми маємо уявний замкнений контур  $L$ , на який опирається певна гладка поверхня  $S$ . Задамо на цьому контурі напрям обходу таким чином, щоб з кінця вектора елементарної площадки  $dS$  рух уздовж контуру спостерігався в напрямі проти руху стрілки годинника (рис. 2.5).

Припустимо, що поверхня  $S$  пронизується деякою системою струмів. Ці струми можуть бути дискретними (у вигляді окремих провідників) або розподіленими неперервно (подібно до електрон-



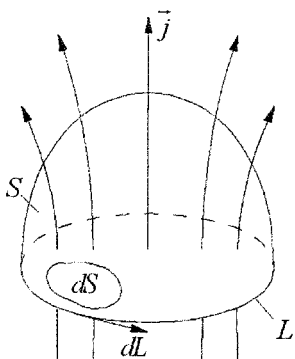


Рис. 2.5. До визначення закону Ампера

ного потоку). Якщо ці струми розподілені з густиною  $\vec{j}$ , то повний струм через поверхню  $S$  буде рівний:

$$I = \int_S \vec{j} dS.$$

Закон повного струму формулюється так: циркуляція вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  по контуру  $L$  рівна потоку струму або магніторушійній силі, тобто

$$\oint_L \vec{H} dL = I = m. p. c. \quad (2.15)$$

Співвідношення (2.15) виражає закон повного струму в інтегральній формі. Для того, щоб отримати його в диференціальній формі, тобто локальним чином пов'язати густину повного струму з напруженістю магнітного поля, необхідно скористатися відомою з розділу 1 теоремою Стокса:

$$\oint_L \vec{H} dL = \int_S \text{rot } \vec{H} dS = \int_S \vec{j} dS. \quad (2.16)$$

Звідси отримуємо закон Ампера в диференціальній формі:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}. \quad (2.17)$$

Це важливе співвідношення, яке пов'язує густину струму електричних зарядів із напруженістю магнітного поля.

Із практики відомо, що змінний електричний струм здатний протікати по замкнутому колу, яке містить конденсатор, незважаючи на те, що між обкладинками конденсатора відсутні будь-які носії заряду. Можна припустити, що в цій області протікає деякий струм, який за своєю природою відмінний від розглянутого раніше струму провідності. Цей струм називається струмом зміщення, який увів Максвелл.

Розглянемо коло з конденсатором, подане на рис. 2.6. Одна з обкладинок конденсатора обмежена уявною замкнутою поверхнею  $S$ . Будемо вважати, що між обкладинками знаходиться вакуум. Використавши закон Гаусса, можна записати:

$$\oint_S \vec{E} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

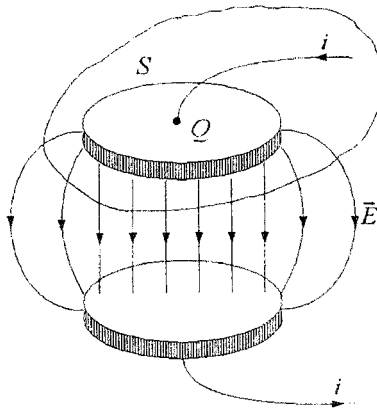


Рис. 2.6. Електричне поле в конденсаторі, яке визначає струм зміщення

Струм у колі  $i$  пов'язаний із зарядом  $Q$  виділеної обкладинки площею  $S$  виразом

$$i = \frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 \oint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dS = \oint_S \vec{j}_{zm} dS. \quad (2.18)$$

З виразу (2.18) випливає, що величина  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  має розмірність густини струму, який називається струмом зміщення:

$$\vec{j}_{zm} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.19)$$

Таким чином, Максвелл запропонував увести величину  $\vec{j}_{zm}$  у праву частину закону Ампера поряд з густиною струму провідності. Ця думка була дуже слушною, бо мала принципове значення для електродинаміки, оскільки встановлювався внутрішній взаємозв'язок електричного й магнітного полів. Дійсно, зміна в часі електричного поля в будь-якій точці простору приводить до виникнення струму зміщення в околі цієї точки. А струми зміщення, у свою чергу, викликають появу змінного магнітного поля.

## 2.6 Закон електромагнітної індукції Фарадея

Картина динаміки електромагнітного поля стане більш яскравою, якщо припустити, що зміна в часі магнітного поля веде до

виникнення електричного поля. Така властивість електромагнітного поля дійсно має місце. 1931 року М. Фарадей експериментально виявив, що на затискачах провідної котушки, яка знаходилася в змінному магнітному полі, виникає різниця електричних потенціалів. Базуючись на цьому відкритті, Максвелл сформулював один з основних законів теорії електромагнетизму, який отримав назву закону електромагнітної індукції.

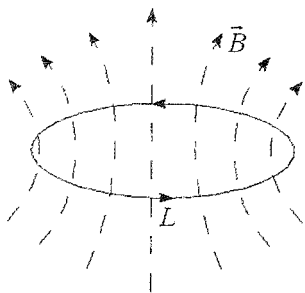


Рис. 2.7. До закону електромагнітної індукції

Нехай у деякій точці простору існує змінне магнітне поле. Силкові лінії магнітної індукції  $\vec{B}$  у фіксований момент часу зображені на рис. 2.7. Розглянемо уявний замкнутий контур  $L$ , напрям обходу якого вибраний проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця вектора  $\vec{B}$ . Якщо  $\vec{E}$  – вектор напруженості електричного поля, то закон електромагнітної індукції в інтегральній формі математично виражається так:

$$\oint_L \vec{E} dL = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} dS. \quad (2.20)$$

Циркуляцію вектора  $\vec{E}$  по контуру  $L$  у лівій частині рівняння (2.20) називають ще електрорушійною силою (е.р.с.) електромагнітної індукції в даному контурі.

Тобто закон електромагнітної індукції Фарадея не тільки фіксує факт виникнення електричного поля під дією змінного в часі магнітного поля, але й установлює кількісну міру цього явища.

Якщо на місці уявного контуру  $L$  розмістити реальний контур, який виконаний із провідника, то наявність е.р.с. приведе до протікання в ньому електричного струму в напрямі вектора  $\vec{E}$ . Скалярну величину  $\Phi = \int_S \vec{B} dS$  називають магнітним потоком, який пронизує контур  $L$ .

Оскільки поле  $\vec{B}$  немає джерел, значення магнітного потоку не залежить від вибору поверхні  $S$ , що опирається на контур  $L$ . Використавши формулу Стокса і вносячи операцію диференцію-

вання за часом під знак поверхневого інтеграла, що є допустимим, матимемо:

$$\oint_L \vec{E} dL = \int_S \text{rot } \vec{E} dS = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dS. \quad (2.21)$$

Звідси безпосередньо отримуємо закон електромагнітної індукції в диференціальній формі:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.22)$$

Слід також зазначити, що електричне поле, яке виникає під дією змінного в часі магнітного поля, має в кожній точці простору відмінний від нуля ротор (вихор). Подібні векторні поля в математичній фізиці називають вихровими полями. Якщо  $a$  і  $b$  – дві довільні точки в просторі, а  $\vec{E}$  – вихрове векторне поле, то криволінійний інтеграл  $A = \int_a^b \vec{E} dl$  залежить не тільки від положення кінцевих точок  $a$  і  $b$ , але й від вибору шляху інтегрування. Дійсно, рухаючись від  $a$  до  $b$  уздовж кривої  $L_1$  і повертаючись від  $b$  до  $a$  вздовж кривої  $L_2$ , отримаємо:

$$\int_a^b \vec{E} dl + \int_b^a \vec{E} dl \neq 0.$$

Це значить, що робота сил поля  $\vec{E}$ , індукованого в просторі змінним магнітним полем, при обході контуру не дорівнює нулю. За термінологією, прийнятою у фізиці, поле  $\vec{E}$  вже не є потенціальним, і в цьому плані якісно відрізняється від електричного поля в системі нерухомих і постійних у часі зарядів.

Проте в багатьох практичних задачах магнітне поле в часі змінюється досить повільно, так що праву частину формули (2.22) можна наближено вважати рівною нулеві. При цьому електричне поле близьке за своїми властивостями до безвихрового, і робота сил поля вже не залежить від шляху інтегрування. Саме в цих умовах стає можливим наближений аналіз електромагнітних систем методами теорії кіл, зокрема з використанням другого закону Кірхгофа, фізична сутність якого саме й пов'язана з незалежністю роботи сил поля від геометричної конфігурації самого контуру.

## 2.7 Матеріальні рівняння електромагнітного поля

Для опису електромагнітних явищ у матеріальних середовищах необхідно мати співвідношення, які б пов'язували попарно векторні поля  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  та  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$ . Рівняння подібного зв'язку прийнято називати матеріальними рівняннями. Їх виведення повинно спиратися на мікроскопічну (атомно-молекулярну) картину процесів, які відбуваються в речовині під дією сил електромагнітного поля.

Розглянемо спочатку властивості діелектриків. Як ми знаємо, існують багаточисельні діелектрики – речовини, які не проводять електричного струму. Самі діелектрики здатні специфічним чином змінювати свій стан, будучи розміщеними в електричному полі. Розглянемо сутність цього явища.

Як відомо з фізики, молекули й атоми речовини являють собою об'єднання електрично заряджених частинок. У неіонізованому стані сумарний заряд молекули (атома) рівний нулю. Для діелектриків характерний міцний зв'язок електронів з атомами, тобто йому властиві високі значення енергії зв'язку. Тому при розміщенні діелектриків в електричне поле наскрізного дрейфового руху носіїв заряду в матеріалі не відбувається навіть у сильних полях.

Молекула під впливом електричного поля деформується таким чином, що її можна представити сукупністю двох різнойменних зарядів  $+q$  і  $-q$ , зміщених у просторі на деяку відстань  $l$ . Таку систему із двох зарядів називають електричним диполем. Очевидно, що величина  $l$  тим більша, чим вища напруженість прикладеного електричного поля.

Таке явище спостерігається і в атомах. Після прикладання електричного поля орбіти зовнішніх електронів витягуються. Центри позитивного і негативного зарядів перестають збігатися в просторі і, наприклад, атом водню починає себе поводити як електричний диполь. Таке явище називають поляризацією речовини. Саме електрична поляризація властива діелектрикам, молекули чи атоми яких за відсутності зовнішнього поля не мають дипольних властивостей. Такі речовини відносять до класу неполярних діелектриків, типовими представниками яких є кварц, оксид алюмінію, поліетилен.

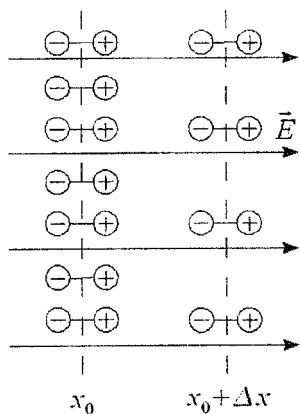


Рис. 2.8. Явище виникнення неоднорідної густини поляризованих зарядів

Однак відомо багато речовин, молекули яких проявляють дипольні властивості й без зовнішнього електричного поля. Такі речовини називають полярними діелектриками. До них належать як деякі непровідні рідини (хімічно чиста вода, спирти), так і тверді діелектрики (полівінілхлорид). Тут за відсутності зовнішнього поля  $\vec{E}$  молекулярні диполі зорієнтовані в просторі хаотично. Під дією зовнішнього поля відбувається орієнтація молекулярних диполів. Очевидно, що ступінь вираженості такої орієнтації тим менший, чим вища температура,

оскільки хаотичний рух порушує порядок розміщення молекул.

Для кількісного опису ступеня поляризованості окремої молекули вводять її дипольний момент  $\vec{p} = q\vec{l}$ , який являє собою вектор, колінеарний одиничному вектору  $\vec{i}_l$ , направленому вздовж осі диполя від від'ємного заряду до додатного. Якщо в об'ємі речовини є  $N$  молекулярних диполів, вектор поляризованості речовини  $\vec{P} = N\vec{p}$ .

Конфігурація силових ліній векторного поля поляризованості залежить від концентрації молекулярних диполів і напрямів векторів електричного поля всередині речовини.

Проте якщо векторне поле  $\vec{P}$  просторово неоднорідне, то всередині діелектрика виникає деяка відмінна від нуля об'ємна густина електричного заряду, спричинена переміщенням зарядів у просторі.

Розглянемо нескінченну плоску область товщиною  $\Delta x$  усередині діелектрика, поляризованого вздовж осі  $x$  (рис. 2.8) так, що

$$\vec{P} = P_x(x)\vec{i}$$

За відсутності зовнішнього поля  $\vec{E}$  всередині даної області додатні й від'ємні заряди, які входять у молекули, компенсують один одного, тому густина електричного заряду  $\rho = 0$ . При поляризації ді-

електрика всередині вказаної області через одиницю поверхні лівої межі входить позитивний заряд:

$$Q^+(x_0) = N(x_0)ql(x_0) = P_x(x_0).$$

Від'ємний заряд, який поступив через праву межу:

$$\begin{aligned} Q^-(x_0 + \Delta x) &= -N(x_0 + \Delta x)ql(x_0 + \Delta x) = \\ &= P_x(x_0 + \Delta x). \end{aligned}$$

У загальному випадку  $P_x(x_0)$  і  $P_x(x_0 + \Delta x)$  не є рівними. Тому в просторі між уявними площинами меж буде виявлено поляризований електричний заряд з об'ємною густиною:

$$\rho_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P_x(x_0) - P_x(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = -\frac{\partial P_x}{\partial x}.$$

Цю задачу можна розглядати і в більш загальній постановці, допускаючи, що поляризованість є неоднорідною за всіма трьома просторовими координатами, тобто  $\vec{P} = \vec{P}(x, y, z)$ . Нехай  $d\vec{S}$  – елементарна площадка. Величина позитивного заряду, що перетинає цю площадку в процесі поляризації, рівна добутку векторів  $\vec{P}$  і  $d\vec{S}$ , помноженому на косинус кута між ними, тобто скалярному добутку  $\vec{P} \cdot d\vec{S}$ . Тоді позитивний заряд, який виходить за межі об'єму  $V$  з поверхнею  $S$ , буде рівний:

$$Q^+ = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}. \quad (2.23)$$

Усередині об'єму  $V$  виявляється рівний за величиною від'ємний заряд:

$$Q^- = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}.$$

Використавши теорему Остроградського – Гаусса, будемо мати:

$$Q^- = -\int_V \text{div} \vec{P} dV.$$

Звідси, переходячи до диференціальної форми запису, отримаємо:

$$\rho_n = -\text{div} \vec{P}. \quad (2.24)$$

Розглянемо на цій основі матеріальні рівняння електричного заряду в діелектрику. Якщо в діелектрику є вільні заряди з об'ємною густиною  $\rho_{\text{віль}}$ , то згідно із законом Гаусса поляризаційні заряди будуть визначатись як

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \frac{\rho_{\text{віль}} + \rho_n}{\epsilon_0} dV.$$

Урахувавши, що густина поляризаційних зарядів визначається формулою (2.24), отримаємо:

$$\oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = \int_V \rho_{\text{ext}} dV.$$

Якщо ввести  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , то закон Гаусса відносно поля  $\vec{D}$  набуде вигляду:

$$\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{ext}}.$$

У багатьох діелектриках при несильних полях спостерігається пряма пропорційність між векторами  $\vec{E}$  і  $\vec{P}$  у кожній точці простору:  $\vec{P} = k_e \vec{E}$ . Такий коефіцієнт  $k_e$  називають діелектричною сприйнятливістю речовини. Тоді

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + k_e \vec{E} = (\varepsilon_0 + k_e) \vec{E},$$

звідки отримуємо універсальну характеристику поляризованої речовини – абсолютну діелектричну проникність:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 + k_e \quad \text{і} \quad \vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}.$$

Остання формула і виражає перше матеріальне рівняння для електричного поля в діелектрику.

В інженерних розрахунках часто використовують безрозмірну характеристику матеріалу – відносну діелектричну проникність:  $\varepsilon = \varepsilon_a / \varepsilon_0$ .

Для виведення другого матеріального рівняння розглянемо властивості інших матеріалів – магнетиків. Раніше Ампер надав гіпотезу про те, що молекули магнетиків несуть у собі замкнені струми, і в цьому сенсі подібні мікроскопічним малим магнітам. Згідно з його гіпотезою магнітні властивості окремої молекули магнетика описуються таким чином. Нехай  $i_m$  – круговий молекулярний струм,  $\Delta \vec{S}$  – площа круга, що обтікається цим струмом. Тоді магнітний момент окремого молекулярного струму є вектором  $\vec{m} = i_m \Delta \vec{S}$ . Якщо помістити такі магнетики в зовнішнє магнітне поле  $\vec{H}$ , то частина магнетиків частково орієнтуються. При цьому можливі два випадки:

1) напрями молекулярних струмів такі, що магнітні моменти молекул орієнтовані проти зовнішнього поля. Тобто присутність молекулярних струмів зменшує результуюче поле в середовищі. Такі речовини називають діамагнетиками;



2) магнітні моменти окремих молекул орієнтовані за напрямом зовнішнього поля. Дія молекулярних струмів веде до росту магнітного поля всередині речовини. Такі середовища називають парамагнетиками.

З точки зору квантової механіки молекули або атоми парамагнітних речовин обов'язково повинні мати відмінну від нуля суму орбітальних і спінових магнітних моментів електронів.

Нехай  $n$  – концентрація молекулярних струмів у речовині. Тоді в кожній точці середовища можна ввести поле намагніченості  $\vec{M} = n\vec{m}$ .

Магнітну індукцію  $\vec{B}$  у порівнянні з електричною  $\vec{D}$  можна визначити за формулою:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}).$$

Таким чином, ми можемо побачити певну аналогію між поведінкою поляризованих діелектриків в електричному полі та магнетиків, які знаходяться у зовнішньому магнітному полі. Експериментально також встановлено, що в несильних полях зв'язок між векторами  $\vec{M}$  і  $\vec{H}$  є лінійним:

$$\vec{M} = R_M \vec{H},$$

де  $R_M$  – магнітна сприйнятливості речовини.

Тоді магнітна індукція

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + R_M \vec{H}) = \mu_0 (1 + R_M) \vec{H} = \mu_a \vec{H}.$$

Таким чином,  $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ , що і являє собою друге матеріальне рівняння. Величину  $\mu_a = \mu_0 (1 + R_M)$  називають абсолютною магнітною проникністю. В інженерних розрахунках часто використовують відносну магнітну проникність  $\mu = \mu_a / \mu_0$ .

Відносна магнітна проникність усіх діамагнітних і більшості парамагнітних речовин дуже мало відрізняється від одиниці. Тому в практичних розрахунках ефектами діа- і парамагнетизму нехтують і вважають, що  $\mu_a = \mu_0 = 1$ .

Особливий клас речовин являють собою кристалічні середовища, парамагнітні властивості яких виражені дуже сильно, і  $\mu_a \gg 1$ . Такі речовини називають феромагнетиками. Феромагнетизм можливий за температур не вище температури Кюрі, яка складає

декілька сотень кельвін. Явище феромагнетизму описує вже квантова механіка.

Дуже цікавими в теоретичному плані й важливими в прикладних задачах такі матеріальні середовища, у яких вектори  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$  є неколінеарними. Якщо обмежитися лінійним випадком, то матеріальне рівняння для такого середовища запишемо так:

$$D_x = \varepsilon_{a11} E_x + \varepsilon_{a12} E_y + \varepsilon_{a13} E_z,$$

$$D_y = \varepsilon_{a21} E_x + \varepsilon_{a22} E_y + \varepsilon_{a23} E_z,$$

$$D_z = \varepsilon_{a31} E_x + \varepsilon_{a32} E_y + \varepsilon_{a33} E_z.$$

Квадратна матриця  $\varepsilon_{a_{ij}}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) являє собою тензор абсолютної діелектричної проникності  $\vec{\varepsilon}_a$ , і матеріальне рівняння матиме вигляд:  $\vec{D} = \vec{\varepsilon}_a \vec{E}$ .

Існують також матеріальні середовища, у яких неколінеарними є вектори  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$ , так що:

$$B_x = \mu_{a11} H_x + \mu_{a12} H_y + \mu_{a13} H_z,$$

$$B_y = \mu_{a21} H_x + \mu_{a22} H_y + \mu_{a23} H_z,$$

$$B_z = \mu_{a31} H_x + \mu_{a32} H_y + \mu_{a33} H_z.$$

За аналогією з попереднім, 9 величин  $\mu_{a_{ij}}$  утворюють тензор абсолютної магнітної проникності  $\vec{\mu}_a$ , і друге матеріальне рівняння записується як  $\vec{B} = \vec{\mu}_a \vec{H}$ .

Такі речовини з тензорними характеристиками називають анізотропними середовищами.

Ефект поляризації діелектриків, який ми розглянули вище, пов'язаний з переміщенням у просторі заряджених частинок. Це рівнозначно тому, що в області, зайнятій діелектриком, протікають деякі струми, які називаються поляризаційними. Тут необхідно підкреслити, що між струмами провідності й поляризаційними струмами немає принципової різниці з точки зору їх здатності створювати магнітне поле.

Тому можна записати рівняння неперервності відносно густини поляризаційного заряду  $\rho_n$  і поляризаційного струму  $\vec{j}_n$ :

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = -\text{div } \vec{j}_n.$$

Ураховуючи те, що  $\rho_n = -\operatorname{div} \vec{P}$ , то, диференціюючи його, отримаємо:

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

Порівнюючи ці два вирази, можемо сказати, що в кожній точці простору густина поляризаційного струму є похідною за часом від вектора поляризованості:

$$\vec{j}_n = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

Отже, насамкінець, можна розшифрувати фізичний зміст тих складових, із яких складається вектор густини сумарного струму  $\vec{j}$ , що входить у формулу (2.17). Дві перших складові вже відомі – це густина струму зміщення  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  і густина струму провідності  $\sigma \vec{E}$ . Процес поляризації діелектричного середовища додає третю складову – густину поляризаційного струму  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ .

Загальність трьох вищеперерахованих струмів полягає в тому, що їх густини залежать від стану самого досліджуваного електромагнітного поля у вибраній точці простору. Тому ці струми називають внутрішніми, або вільними.

Великий ряд інженерних задач пов'язаний зі знаходженням електромагнітних полів, що створюються зовнішніми джерелами (антени, струми в яких збуджуються генераторами). Такі струми прийнято називати сторонніми. І вони теж сумуються із трьома внутрішніми, тому диференціальна форма запису повного струму (закону Ампера) набуває такого розгорнутого вигляду:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + \vec{j}_{cm}.$$

Оскільки  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , то ми отримуємо вираз

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + \vec{j}_{cm}, \quad (2.25)$$

який використовується в диференціальних рівняннях Максвелла.

## 2.8 Рівняння Максвелла для електромагнітного поля

1873 року вийшла у світ видатна робота Дж. Кларка Максвелла (1931–1879) “Трактат про електрику і магнетизм”. У праці були кінцево сформульовані рівняння, які узагальнили всі відкриті на той час властивості електричних зарядів, струмів та електромагнітних полів. Незважаючи на те, що за минуле століття фізика пішла далеко вперед у розумінні природи електромагнетизму, рівняння Максвелла й нині служать міцним фундаментом тих галузей науки, які пов’язані з практичним використанням електромагнітних явищ та безпровідною передачею інформації.

В оригінальній роботі Максвелла застосовувалася складна форма запису основних рівнянь, що дуже утруднювало їх розуміння для практичного використання. Рівняння Максвелла набули сучасного вигляду в працях Г. Герца (1857–1894), Г. Лорентца (1853–1928) і Д. Хевісайда (1850–1925). Рівняння Максвелла залежно від сфери використання подають в інтегральній або диференціальній формах. Перший варіант використовується для певної області середовища, а другий – для конкретної точки простору.

- Рівняння Максвелла в інтегральній формі:

$$\begin{aligned} 1. \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} &= \int_S \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + \vec{j}_{cm} \right) d\vec{S}. \\ 2. \quad \oint_L \vec{E} d\vec{l} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}. \\ 3. \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} &= \int_V \rho dV. \\ 4. \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} &= 0. \\ 5. \quad \vec{D} &= \epsilon_a \vec{E}. \\ 6. \quad \vec{B} &= \mu_a \vec{H}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

- Рівняння Максвелла в диференціальній формі:

$$\begin{aligned}
1. \quad \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + \vec{j}_{cm}. \\
2. \quad \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \\
3. \quad \operatorname{div} \vec{D} &= \rho. \\
4. \quad \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \\
5. \quad \vec{D} &= \varepsilon_a \vec{E}. \\
6. \quad \vec{B} &= \mu_a \vec{H}.
\end{aligned}
\tag{2.27}$$

У цих системах основними є 1 і 2 рівняння, які відображають закон повного струму (закон Ампера) і закон електромагнітної індукції Фарадея. Часто говорять, що співвідношення 1 і 2 утворюють першу групу рівнянь Максвелла.

До другої групи рівнянь Максвелла входить рівняння 3, що є законом Гаусса, і рівняння 4, яке відображає закон нерозривності силових ліній магнітного поля або властивість соленоїдальності.

Насамкінець, третю групу рівнянь утворюють матеріальні рівняння 5 і 6, які характеризують електродинамічні властивості матеріального середовища.

Частіше всього під час розв'язання задач електродинаміки використовують рівняння Максвелла в диференціальній формі. Операції  $\operatorname{rot}$  і  $\operatorname{div}$ , які входять до них, являють собою деякі комбінації частинних похідних першого порядку від проекцій векторних полів; конкретна форма запису залежить від вибраної координатної системи (декартова, циліндрична, сферична).

Тут слід зазначити, що достатньо знайти один електричний вектор, наприклад  $\vec{E}$ , й один магнітний вектор  $\vec{H}$ . Інші два вектори можна отримати, скориставшись матеріальними рівняннями.

Таким чином, рівняння Максвелла складають систему диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку відносно шести невідомих функцій ( $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ ), які залежать від трьох просторових координат  $x, y, z$  і часу  $t$ .

У більшості практичних застосувань можна вважати, що розглянуті нами матеріальні рівняння є лінійними. У таких середовищах має місце принцип суперпозиції електромагнітних полів: якщо  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$  і  $(\vec{E}_2, \vec{H}_2)$  – часткові розв'язки рівнянь Максвелла,

то розв'язком цієї системи буде і їх сума  $(\alpha_1 \vec{E}_1 + \alpha_2 \vec{E}_2, \alpha_1 \vec{H}_1 + \alpha_2 \vec{H}_2)$  з довільними постійними коефіцієнтами  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ . Принцип суперпозиції безпосередньо впливає з того, що операція диференціювання за часом  $\partial/\partial t$  і векторні диференціальні операції *rot* і *div* є також лінійними.

А тепер розглянемо рівняння Максвелла для гармонічних коливань і комплексні амплітуди полів. Як нам відомо, у систему рівнянь Максвелла входять частинні похідні за чотирма аргументами  $x, y, z, t$ . Процедура розв'язання сильно спрощується, якщо з рівнянь удасться визначити часову змінну  $t$ . Цього легко досягти, якщо розглянутий електромагнітний процес протікає в часі за гармонічним законом з деякою постійною частотою  $\omega$ . Такі процеси досить часто зустрічаються на практиці. До того ж, знаючи поведінку поля на всіх частотах, можна відновити поле з будь-яким законом зміни в часі, використовуючи метод перетворення Фур'є. Такий оригінальний метод називають символічним, або методом комплексних амплітуд, який вивчають у курсі основ радіоелектроніки.

У найбільш загальному випадку вектор якого-небудь поля, наприклад  $\vec{E}$ , який змінюється в часі за гармонічним законом, у деякій заданій точці простору матиме вигляд:

$$\vec{E}(t) = E_{m_x} \cos(\omega t + \varphi_x) \vec{i}_x + E_{m_y} \cos(\omega t + \varphi_y) \vec{i}_y + E_{m_z} \cos(\omega t + \varphi_z) \vec{i}_z, \quad (2.28)$$

де  $E_{m_x}, E_{m_y}, E_{m_z}$  – амплітуди окремих складових поля;  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  – відповідні початкові фази. Усі шість величин є дійсними величинами.

Еквівалентна форма запису цього виразу має такий вигляд:

$$\vec{E}(t) = \text{Re} \left( E_{m_x} e^{j\varphi_x} \vec{i}_x + E_{m_y} e^{j\varphi_y} \vec{i}_y + E_{m_z} e^{j\varphi_z} \vec{i}_z \right), \quad (2.29)$$

а вектор

$$\dot{\vec{E}} = \text{Re} \left( E_{m_x} e^{j\varphi_x} \vec{i}_x + E_{m_y} e^{j\varphi_y} \vec{i}_y + E_{m_z} e^{j\varphi_z} \vec{i}_z \right), \quad (2.30)$$

який набуває в загальному випадку комплексних значень, прийнято називати комплексною амплітудою поля  $\vec{E}$  в заданій точці простору. При цьому вважається, що частота  $\omega$  зміни поля в часі є відомою. Надалі всі комплексні амплітуди будуть позначатися точками зверху.

Як відомо з курсу основ радіоелектроніки, метод комплексних амплітуд широко застосовують у теорії електричних кіл і сигналів. Проте тут слід указати на одну особливість: в електродинамічних задачах комплексні амплітуди являють собою просторові, тривимірні вектори. Тому зобразити їх у вигляді деяких допоміжних векторів, які обертаються на комплексній площині, принципово неможливо. Експоненціальні множники з уявними показниками, які входять у комплексні амплітуди окремих проекцій поля, характеризують виключно фазові співвідношення між проекціями. Наприклад, якщо комплексні амплітуди двох гармонічно змінних у часі векторів мають вид  $\vec{E}_1 = E_0 \vec{i}_x$  і  $\vec{E}_2 = j E_0 \vec{i}_x$ , то це не означає, що ці вектори утворюють кут у просторі  $90^\circ$  (у дійсності ці два вектори паралельні орту  $\vec{i}_x$ ), а лише свідчить про те, що за змін у часі вектор  $\vec{E}_2$  випереджає вектор  $\vec{E}_1$  на чверть періоду.

Тому миттєве значення вектора, який гармонічно змінюється в часі, виражається через комплексну амплітуду таким чином:

$$\vec{E}(t) = \text{Re}(\vec{E} e^{j\omega t}). \quad (2.31)$$

Комплексні амплітуди дуже легко ввести в рівняння Максвелла, приймаючи, що величини  $\vec{E}(x, y, z)$  і  $\vec{H}(x, y, z)$  залежать від просторових координат  $x, y, z$ . Наприклад, візьмемо перше рівняння Максвелла (закон Ампера) системи (2.27) і підставимо в нього відповідні векторні поля, виражені через комплексні амплітуди:

$$\text{rot Re}(\vec{H} e^{j\omega t}) = \frac{\partial}{\partial t} \text{Re}(\vec{D} e^{j\omega t}) + \sigma \text{Re}(\vec{E} e^{j\omega t}) + \text{Re}(\vec{j}_{cm} e^{j\omega t}). \quad (2.32)$$

Скоротивши загальний експоненціальний множник  $e^{j\omega t}$  і помінявши місцями операції диференціювання та розкриття дійсної частини, отримаємо:

$$\text{rot } \vec{H} = j\omega \vec{D} + \sigma \vec{E} + \vec{j}_{cm}. \quad (2.33)$$

Таким чином, перехід до комплексних амплітуд полів здійснюється за тими ж правилами, що і в теорії кіл чи основ радіоелектроніки – оператор диференціювання за часом, який діє на миттєве значення поля, замінюється множником  $j\omega$  за відповідної комплексної амплітуди.

Аналогічно перетворюється решта рівнянь Максвелла в комплексну форму, і система рівнянь (2.27) виглядатиме так:

1.  $\text{rot } \dot{H} = j\omega \dot{D} + \sigma \dot{E} + \dot{j}_{cm}$ ,
2.  $\text{rot } \dot{E} = -j\omega \dot{B}$ .
3.  $\text{div } \dot{D} = \rho$ .
4.  $\text{div } \dot{B} = 0$ .
5.  $\dot{D} = \varepsilon_a \dot{E}$ .
6.  $\dot{B} = \mu_a \dot{H}$ .

(2.34)

Саме така форма запису рівнянь Максвелла подається в прикладних дослідженнях і розрахунках. За допомогою цих перетворень здійснюється алгебризація диференціальних рівнянь Максвелла.

Тут також доцільно повернутися до комплексної діелектричної проникності. Якщо об'єднати рівняння 1 і 5 із системи (2.34), отримаємо:

$$\text{rot } \dot{H} = j\omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{E} + \dot{j}_{cm},$$

де величина  $\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - \frac{j\sigma}{\omega}$  являє собою комплексну діелектричну проникність даної речовини.

Уводячи такий параметр, ми можемо одночасно врахувати як поляризаційні, так і провідні властивості речовини (середовища). Значення дійсної частини комплексної діелектричної проникності описує інтенсивність процесу поляризації, а уявної враховує вже густину струму провідності на певній частоті.

Зображаючи число  $\tilde{\varepsilon}_a$  у вигляді вектора на комплексній площині (рис. 2.9), можна описати співвідношення між дійсною та уявною

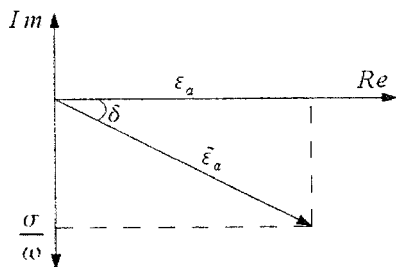


Рис. 2.9. Кут діелектричних утрат  $\text{tg } \delta$

частинами комплексної діелектричної проникності за допомогою кута  $\delta$  ( $\text{tg } \delta$ ), який називають кутом діелектричних утрат. Чим більший цей кут, тим більша частка електромагнітної енергії, що розсіюється у вигляді теплоти у процесі протікання струму провід-



ності:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_a}. \quad (2.35)$$

Тангенс кута втрат ( $\operatorname{tg} \delta$ ) добрих діелектриків у НВЧ-діапазоні знаходиться в межах від  $10^{-5}$  до  $10^{-4}$ , а при значенні  $\operatorname{tg} \delta > 10^{-3}$  такий діелектрик низької якості.

## 2.9 Енергетичне співвідношення в електромагнітному полі. Вектор Пойтінга

Електромагнітне поле здатне накопичувати й переносити енергію. Закони руху енергії в електромагнітному полі слідує із рівнянь Максвелла.

Припустимо, що всередині замкненого об'єму  $V$ , обмеженого поверхнею  $S$  (рис. 2.10), існує електромагнітне поле з деяким запасом енергії  $W$ . Будемо вважати, що всередині цього об'єму частина енергії поля необоротно перетворюється в теплоту, і нехай  $P_{\text{вт}}$  – миттєве значення потужності теплових утрат. Енергія електромагнітного поля може також змінюватися в часі за рахунок дії сторонніх струмів, зосереджених усередині об'єму  $V$ . Позначимо символом  $P_{\text{ст}}$  миттєву потужність цих джерел:  $P_{\text{ст}}$  будемо вважати від'ємною, якщо сторонні джерела (генератори) збільшують енергію поля, і додатною, якщо сторонні джерела відбирають енергію від електромагнітного поля, діючи подібно до зовнішніх навантажень.

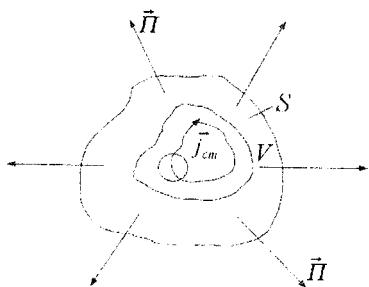


Рис. 2.10. До викладення теорему Пойтінга

Також припустимо, що в кожній точці поверхні задано деякий вектор  $\vec{P}$ , який своїм модулем і напрямом характеризує густину потоку потужності. Вектор  $\vec{P}$  має розмірність  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ; якщо цей вектор орієнтований за напрямом від поверхні, то це означає, що в точці задання даного вектора енергія покидає об'єм  $V$ . На основі закону збереження енергії природно треба вважати, що перера-

ховані вище фізичні величини пов'язані між собою співвідношенням:

$$\oint_s \vec{H} d\vec{S} = -\frac{dW}{dt} - P_{em} - P_{cm}. \quad (2.36)$$

1884 року англійський учений Дж. Пойтінг, розвиваючи ідеї Максвелла, показав, що вектор густини потоку потужності електромагнітного поля рівний

$$\vec{H} = [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (2.37)$$

Цей вектор називають вектором Пойтінга. Для виведення формули (2.37) використаємо перші два рівняння Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + \vec{j}_{cm}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

і помножимо скалярно перше рівняння на вектор  $\vec{E}$ , друге – на вектор  $\vec{H}$ , а потім почленно віднімемо друге рівняння від першого. У результаті отримаємо:

$$\vec{H} \text{ rot } \vec{E} - \vec{E} \text{ rot } \vec{H} = -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \sigma \vec{E}^2 - \vec{j}_{cm} \vec{E}.$$

Ліву частину цього рівняння можна перетворити, виходячи з відомої тотожності векторного аналізу з розділу 1:

$$\vec{H} \text{ rot } \vec{E} - \vec{E} \text{ rot } \vec{H} = \text{div} [\vec{E} \times \vec{H}].$$

Ураховуючи матеріальні рівняння Максвелла  $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ ,  $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$ , можна записати:

$$\begin{aligned} \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{B} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \vec{H}), \\ \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{D} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \vec{E}). \end{aligned}$$

Тоді приведемо нашу рівність до вигляду:

$$\text{div} [\vec{E} \times \vec{H}] = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{B} \vec{H} + \vec{D} \vec{E}}{2} \right) - \sigma \vec{E}^2 - \vec{j}_{cm} \vec{E}.$$

Використовуючи теорему Остроградського – Гаусса, отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_V \text{div} [\vec{E} \times \vec{H}] dV &= \oint_S [\vec{E} \times \vec{H}] d\vec{S} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\vec{B} \vec{H} + \vec{D} \vec{E}}{2} dV - \int_V \sigma \vec{E}^2 dV - \int_V \vec{j}_{cm} \vec{E} dV. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Порівнюючи вирази (2.36) і (2.38), можемо прирівняти  $\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}]$ , а  $w = \int_V \frac{\vec{B} \dot{H} + \vec{D} \dot{E}}{2} dV$ , що являє собою повний запас енергії електромагнітного поля всередині об'єму  $V$  у фіксований момент часу. Енергія поля розподілена в просторі неперервно з об'ємною густиною (Дж/м<sup>2</sup>):

$$w = \frac{1}{2} (\vec{B} \dot{H} + \vec{D} \dot{E}) = \frac{\mu_a H^2}{2} + \frac{\varepsilon_a E^2}{2}.$$

Потужність теплових утрат в об'ємі завжди є додатною:  $P_{\text{em}} = \int_V \sigma \vec{E}^2 dV$ . Тоді об'ємна густина потужності теплових утрат пропорційна квадрату модуля вектора напруженості електричного поля:  $P_{\text{em}} = \sigma \vec{E}^2$ .

Насамкінець, потужність сторонніх джерел  $P_{\text{cm}} = \int_V \vec{j}_{\text{cm}} \vec{E} dV$  розподілена в просторі з об'ємною густиною  $P_{\text{cm}} = \vec{j}_{\text{cm}} \vec{E}$ , яка може бути як додатною, так і від'ємною залежно від взаємної орієнтації векторів  $\vec{j}_{\text{cm}}$  і  $\vec{E}$ .

Якщо електромагнітне поле змінюється з часом гармонічно, то вектор Пойнтінга можна виразити через комплексні амплітуди  $\dot{E}$  і  $\dot{H}$  відповідних полів, оскільки дійсна частина будь-якого комплексного числа є півсумою комплексно-спряжених чисел, так що

$$\vec{E} = \text{Re}(\dot{E} e^{j\omega t}) = \frac{1}{2} (\dot{E} e^{j\omega t} + \dot{E}^* e^{-j\omega t}),$$

$$\vec{H} = \text{Re}(\dot{H} e^{j\omega t}) = \frac{1}{2} (\dot{H} e^{j\omega t} + \dot{H}^* e^{-j\omega t}).$$

Підставляючи ці вирази у формулу (2.37), знаходимо

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \frac{1}{4} \left\{ [\dot{E} \times \dot{H}^*] + [\dot{E}^* \times \dot{H}] + [\dot{E} \times \dot{H}] e^{j2\omega t} + [\dot{E}^* \times \dot{H}^*] e^{-j2\omega t} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} [\dot{E} \times \dot{H}^*] + \frac{1}{2} \text{Re} [\dot{E} \times \dot{H}] e^{j2\omega t}. \end{aligned}$$

Тут перший доданок є постійним у часі, а другий змінюється з подвоєною частотою.

Таким чином, процес перенесення енергії в гармонічному електромагнітному полі характеризується, з одного боку дійсним вектором

$$\vec{P}_{\text{сеп}} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{P} dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \dot{E} \times \dot{H}^* \right], \quad (2.39)$$

який рівний густині потоку потужності, усередненої за період, і, з другого боку, – дійсним вектором

$$\vec{P}_{\text{коп}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \dot{E} \times \dot{H} \right] e^{j2\omega t}, \quad (2.40)$$

який представляє собою коливальну складову вектора Пойтінга. Тут слід зауважити, що середнє за період значення вектора  $\vec{P}_{\text{коп}}$  рівне нулю.

Під час аналізу гармонічних електромагнітних полів часто вводять комплексний вектор Пойтінга

$$\dot{P} = \frac{1}{2} \left[ \dot{E} \times \dot{H}^* \right], \quad (2.41)$$

який має таку властивість, що  $\vec{P}_{\text{сеп}} = \operatorname{Re} \dot{P}$ .

Тут легко зауважити, що існує певна аналогія між комплексним вектором Пойтінга й відомою з теорії кіл комплексною потужністю гармонічного колювання. Якщо комплексний вектор Пойтінга стає уявним, то це означає, що розглядуваний електромагнітний процес у середньому за період не переносить потужності. Тоді прийнято говорити, що часто уявному значенню комплексного вектора Пойтінга відповідає перенесення електромагнітним полем тільки реактивної потужності.

Концепція вектора Пойтінга дозволяє правильно описати будь-які процеси передачі енергії електромагнітним полем. Як приклад, на рис. 2.11, а зображено передачу енергії електромагнітного поля двопровідною лінією передачі, уздовж якої енергія від джерела е.р.с. передається в резистивне навантаження. Тут же (рис. 2.11, б) подано й картину силових ліній полів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ . У кожній точці простору існує відмінний від нуля вектор Пойтінга, який орієнтований уздовж лінії від генератора до навантаження. Потужність, яка переноситься двопровідною лінією, рівна інтегралу від вектора Пойтінга по поперечній площині, узятому в нескінченних межах. Аналізуючи дану систему, доходимо оригінального висновку, що енергія електромагнітного поля переноситься не струмами в про-

відниках лінії, а електромагнітним полем у навколишньому середовищі. Наявність провідників двопровідної лінії служить лише умовою існування полів необхідної конфігурації.

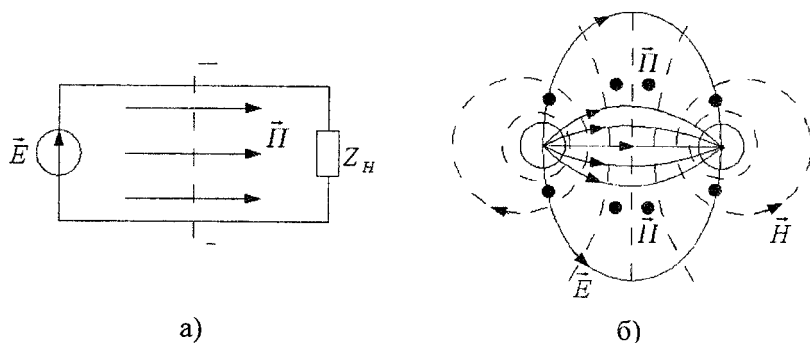


Рис. 2.11. Передача електромагнітної енергії по двопровідній лінії:  
а) принципова схема; б) конфігурація силових ліній поля в поперечному перерізі

## 2.10 Магнітний струм та принцип дуальності. Лема Лорентца

Розглянемо картину магнітних силових ліній, які виникають поблизу тонкої провідної смужки шириною  $\Delta$ , по якій протікає струм  $I_e$  (рис. 2.12, а). У безпосередній близькості від провідника магнітні силові лінії деякою мірою повторюють його контур. На самій поверхні провідника магнітний вектор є дотичним до площини смужки, що показано суцільною лінією. При віддаленні від смужки силові лінії, поступово деформуючись, перетворюються в кола.

На рис. 2.12, б зображено картину силових ліній електричного вектора в системі із двох заряджених металевих напівплощин, які розділені зазором  $\Delta$ . З точністю до напрямку стрілок у верхньому й нижньому півпросторах ця картина тотожна розглянутій раніше.

Подібність картин даних полів дозволяє чисто формально припустити, що в щілині паралельно кромкам протікає деякий гіпотетичний (уявний) струм  $I_m$ , який називається магнітним струмом.

Підкреслимо, що через соленоїдальний характер магнітного поля самих фізичних носіїв заряду магнітного струму не існує. По-

няття магнітного струму відіграє другорядну (допоміжну) роль, яка дозволяє в ряді практичних задач значно спростити розрахунки.

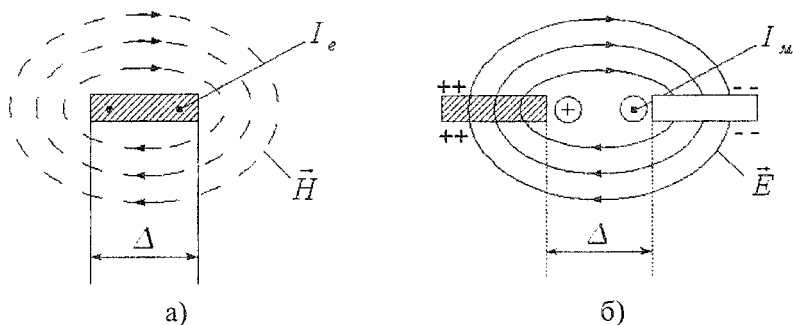


Рис. 2.12. Картина силових ліній магнітного (а) й електричного (б) полів

Геометрична подібність двох рисунків (2.12, а і 2.12, б) є наслідком симетрії двох основних рівнянь Максвелла:

$$1. \operatorname{rot} \dot{H} = j \omega \varepsilon_a \dot{E}; \quad 2. \operatorname{rot} \dot{E} = -j \omega \mu_a \dot{H},$$

які переходять одне в одне за умови перестановки  $\dot{E} \leftrightarrow \dot{H}$  і  $\varepsilon_a \leftrightarrow -\mu_a$ .

Якщо в правій частині 1 рівняння Максвелла фігурує густина стороннього електричного струму  $\vec{j}_{cm e}$ , то для збереження симетрії рівнянь у праву частину 2 рівняння Максвелла необхідно ввести гіпотетичну густина стороннього магнітного струму  $\vec{j}_{cm m}$ , таку, що  $\vec{j}_{cm e} \leftrightarrow -\vec{j}_{cm m}$ .

За такої постановки пояснень сама система рівнянь Максвелла набуде вигляду:

$$\begin{aligned} 1. \operatorname{rot} \dot{H} &= j \omega \varepsilon_a \dot{E} + \vec{j}_{cm e}, \\ 2. \operatorname{rot} \dot{E} &= -j \omega \mu_a \dot{H} - \vec{j}_{cm m}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ці два рівняння відображають принцип перестановки дуальності для електромагнітного поля (за аналогією до електричних кіл). Відповідно до цього принципу, якщо відоме рішення якої-небудь електродинамічної задачі, то проста перестановка дозволяє отримати рішення дуальної задачі, у якій конфігурація силових ліній магнітного поля повторює конфігурацію силових ліній електрич-

ного поля у вихідному процесі. При цьому рішення не змінюють свого вигляду.

У теоретичних питаннях електромагнітного поля важливу роль відіграє співвідношення, назване лемою Лорентца, що встановлює зв'язок між полями, які збуджуються в просторі двома незалежними системами сторонніх струмів.

Нехай існує система гармонічних сторонніх струмів ( $j_{cm\epsilon}^{(1)}$  і  $j_{cm\mu}^{(1)}$ ), які створюють електромагнітне поле з комплексними амплітудами  $\dot{E}_1$  і  $\dot{H}_1$ , що задовольняють рівнянням Максвелла (виходячи з їх дуальності)

$$\begin{aligned} 1. \operatorname{rot} \dot{H}_1 &= j \omega \epsilon_a \dot{E}_1 + j_{cm\epsilon}^{(1)}, \\ 2. \operatorname{rot} \dot{E}_1 &= -j \omega \mu_a \dot{H}_1 - j_{cm\mu}^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Поряд із цим розглянемо другу систему гармонічних сторонніх струмів ( $j_{cm\epsilon}^{(2)}$  і  $j_{cm\mu}^{(2)}$ ), які мають ту ж саму частоту. Ці струми також збуджують електромагнітне поле з комплексними амплітудами  $\dot{E}_2$ ,  $\dot{H}_2$  і задовольняють рівнянням Максвелла (ураховуючи дуальність):

$$\begin{aligned} 1. \operatorname{rot} \dot{H}_2 &= j \omega \epsilon_a \dot{E}_2 + j_{cm\epsilon}^{(2)}, \\ 2. \operatorname{rot} \dot{E}_2 &= -j \omega \mu_a \dot{H}_2 - j_{cm\mu}^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Помножимо скалярно перше рівняння з (2.43) на вектор  $\dot{E}_2$ , потім друге рівняння з (2.44) на вектор  $\dot{H}_1$  і віднімемо друге рівняння від першого. У результаті отримаємо:

$$-\operatorname{div}[\dot{E}_2 \times \dot{H}_1] = j \omega \epsilon_a \dot{E}_1 \dot{E}_2 + j \omega \mu_a \dot{H}_1 \dot{H}_2 + j_{cm\epsilon}^{(1)} \dot{E}_2 + j_{cm\mu}^{(2)} \dot{H}_1.$$

Тепер помножимо скалярно друге рівняння системи (2.43) на вектор  $\dot{H}_2$ , перше рівняння системи (2.44) на вектор  $\dot{E}_1$  і віднімемо друге рівняння від першого. Результатом таких дій буде:

$$\operatorname{div}[\dot{E}_1 \times \dot{H}_2] = -j \omega \epsilon_a \dot{E}_1 \dot{E}_2 - j \omega \mu_a \dot{H}_1 \dot{H}_2 - j_{cm\epsilon}^{(2)} \dot{E}_1 - j_{cm\mu}^{(1)} \dot{H}_2.$$

Додавши останні два рівняння, отримаємо:

$$\operatorname{div}[\dot{E}_1 \times \dot{H}_2] - \operatorname{div}[\dot{E}_2 \times \dot{H}_1] = j_{cm\epsilon}^{(1)} \dot{E}_2 + j_{cm\mu}^{(2)} \dot{H}_1 - j_{cm\epsilon}^{(2)} \dot{E}_1 - j_{cm\mu}^{(1)} \dot{H}_2, \quad (2.45)$$

яке виражає лему Лорентца в диференціальній формі: векторні добутки  $[\dot{E}_1 \times \dot{H}_2]$  і  $[\dot{E}_2 \times \dot{H}_1]$  виражають взаємні вектори Пойтінга двох незалежних електромагнітних процесів.

Можлива також інтегральна форма леми Лорентца. Для того, щоб її отримати, застосуємо її для об'єму  $V$ , що обмежений поверхнею  $S$ . Застосувавши теорему Остроградського – Гаусса, отримаємо її в такому вигляді:

$$\oint_S \left\{ \left[ \dot{E}_1 \times \dot{H}_2 \right] - \left[ \dot{E}_2 \times \dot{H}_1 \right] \right\} dS = \int_V \left\{ j_{\text{сн.е}}^{(1)} \dot{E}_2 + j_{\text{сн.м}}^{(2)} \dot{H}_1 - j_{\text{сн.е}}^{(2)} \dot{E}_1 - j_{\text{сн.м}}^{(1)} \dot{H}_2 \right\} dV. \quad (2.46)$$

Цю форму використовують в електромагнітних задачах антен.

## 2.11 Плоскі електромагнітні хвилі

Дослідження, проведені Максвеллом, показали, що змінне за часом електромагнітне поле має хвильовий характер. У подальшому Г. Герц теоретично підтвердив передбачення Максвелла прямого експерименту.

Хвилею у фізиці називають коливальний рух неперервного середовища. Існує принципова відмінність між хвильовими процесами в суцільних середовищах та коливаннями струмів і напруг в електричних колах. Якщо в теорії кіл стан системи повністю визначається кінцевим числом струмів і напруг в окремих вітках кола, то для задання хвильового процесу необхідно знати його стан у нескінченній кількості точок простору. Тому говорять, що середовище, у якому поширюються хвилі, є вже розподіленою фізичною системою.

Порівняємо спочатку два добре відомі й легко представлені хвильові процеси – звукові хвилі в повітрі та хвилі на поверхні води (рис. 2.13). Нехай ці хвилі поширюються в напрямі зліва направо або справа наліво. Звукові хвилі пов'язані з переміщенням у просторі областей стиснення й розрідження газу (повітря). Кожна окрема частинка газу коливається в напрямі поширення хвилі. Такі хвилі ще називають поздовжніми або акустичними чи скалярними.

Зовсім інший характер мають хвилі на поверхні води. Тут коливальні частинки вже переміщуються перпендикулярно до напрямку поширення хвилі. Для хвиль такого роду необхідно вказати ту площину, у якій проходять коливання частинки. Цю площину називають площиною поляризації, а самі хвилі поперечними, поляризованими або векторними. Звідси також видно, що математична теорія поперечних хвиль складніша за теорію поздовжніх хвиль. Крім цього, для них характерні свої фізичні ефекти.



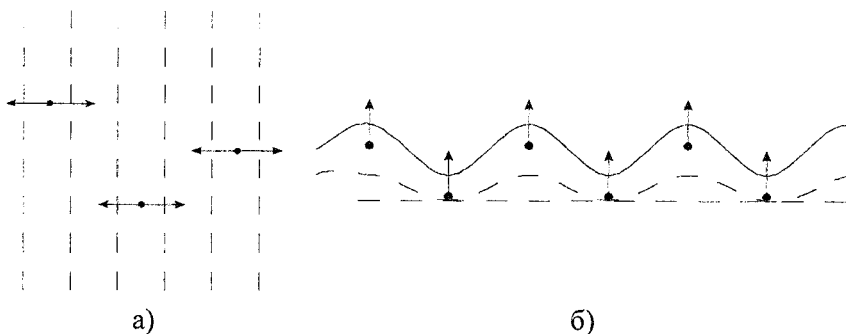


Рис. 2.13. Хвильові процеси: а) звукові хвилі в повітрі; б) хвилі на поверхні води

Якщо в кожній точці простору в декартовій системі координат  $x, y, z$  деяка фізична величина  $v$  описується виразом

$$v(z, t) = V_m \cos(\omega t - \beta z), \quad (2.47)$$

де  $V_m, \omega, \beta$  – дійсні числа, то вважають, що така залежність є математичною моделлю однорідної плоскої хвилі. Тобто ми бачимо, що миттєве значення однорідної плоскої хвилі не залежить від поперечних координат  $x$  та  $y$ .

Тут також слід звернути увагу, що як і часова, так і просторова залежності  $v(z, t)$  описуються гармонічними функціями. Дійсно, зафіксувавши точку  $z = 0$ , отримуємо  $v(0, t) = V_m \cos \omega t$ . А коливання в точці  $z > 0$  вже мають вид (2.47), тобто характеризуються тією ж амплітудою  $V_m$  і частотою  $\omega$ , але змінюються за фазою на  $\beta z$  радіан. Це ілюструє графік на рис. 2.14.

Розглянемо тепер миттєву фотографію процесу  $v(z, t)$  при  $t = 0$ . Ця залежність уже описується гармонічною функцією  $v(z, 0) = V_m \cos \beta z$ . Тут параметр  $\beta$  відіграє роль просторової частоти процесу й називається коефіцієнтом фази плоскої хвилі (розмірність  $m^{-1}$ ). Функція  $v(z, 0)$  теж періодична: її період  $\lambda$  називають довжиною хвилі, а зв'язок між величинами  $\beta$  і  $\lambda$  виражається формулою:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.48)$$

Для того щоб зобразити графік функції  $v(z, t)$  при  $t > 0$ , формулу (2.47) зручно подати у вигляді  $v(z, t) = V_m \cos(\beta z - \omega t)$ . При цьому вже видно, що з ростом  $t$  фазовий зсув  $\omega t$  збільшується, так що наша крива зсувається вздовж осі  $t$  вправо, тобто в бік збільшення координати  $z$  (рис. 2.14, б).

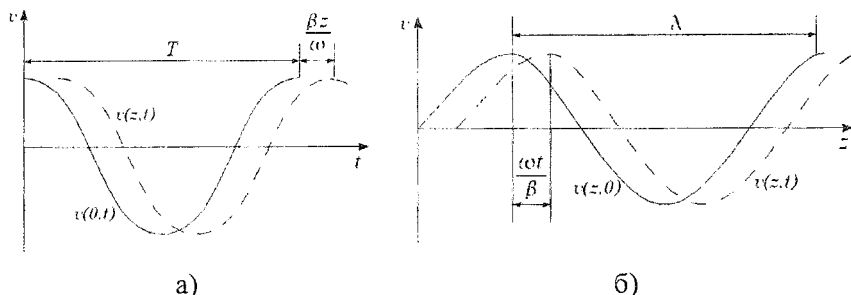


Рис. 2.14. Однорідна плоска хвиля: а) зміна поля в часі; б) зміна поля в просторі

Назвемо площиною рівних фаз або хвильовим фронтом нескінченно протяжну область, перпендикулярну до осі  $z$ ; координата  $z$  цієї площини за будь-яких  $t$  задовольняє співвідношення  $\omega t - \beta z = \text{const}$ , де  $z = \frac{\omega t - \text{const}}{\beta}$ .

Хвильовий фронт даної плоскої хвилі переміщується вздовж осі  $z$  з так званою фазовою швидкістю:

$$v_\phi = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega t - \text{const}}{\beta} \right) = \frac{\omega}{\beta}. \quad (2.49)$$

Якщо  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ , то

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{2\pi} \lambda = \frac{2\pi f}{2\pi} \lambda = f \lambda.$$

Таким чином, із трьох параметрів  $v_\phi$ ,  $\omega$ ,  $\beta$  лише два можна вибирати довільно ( $\omega, \beta$ ).

Розглянемо тепер однорідну плоску хвилю з математичною моделлю виду

$$v(z, t) = V_m \cos(\omega t + \beta z). \quad (2.50)$$

Тут уже рівняння хвильового фронту буде  $\omega t + \beta z = const$ . Тому фазова швидкість

$$v_\phi = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{const - \omega t}{\beta} \right) = -\frac{\omega}{\beta}. \quad (2.51)$$

Порівнюючи вирази (2.49) і (2.51), можемо сказати, що плоска електромагнітна хвиля із хвильовим фронтом  $\omega t + \beta z = const$  поширюється вже в бік зменшення  $z$  і її називають оберненою до біжучої.

У будь-якому реальному середовищі амплітуда хвильового процесу зменшується у міру поширення хвилі. Тому таку зміну амплітуди можна записати як  $V_m(z) = V_{m0} e^{-\alpha z}$ , де  $\alpha$  – коефіцієнт затухання ( $M^{-1}$ ). У технічних розрахунках часто використовують особливу логарифмічну одиницю – погонне затухання

$$\Delta_{noz} = 20 \lg \frac{V_{m0}}{V_{m1}} = 20 \lg e^\alpha = 8,686 \alpha.$$

Отже, для миттєвого значення поля однорідної плоскої хвилі в середовищі із затуханням можна записати

$$v(z, t) = V_{m0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z). \quad (2.52)$$

Оскільки ця залежність є гармонічною відносно часу  $t$ , то можна таку хвилю подати через комплексну амплітуду поля:

$$\dot{V}(z) = V_{m0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = V_{m0} e^{-(\alpha + j\beta)z}, \quad (2.53)$$

бо  $v(z, t) = \text{Re}[\dot{V}(z)e^{j\beta z}]$ .

Коефіцієнт фази  $\beta$  і коефіцієнт затухання  $\alpha$  об'єднуються в єдину комплексну величину – коефіцієнт поширення  $\gamma = \alpha + j\beta$ , таку, що комплексна амплітуда поля плоскої хвилі поширюється в бік зростання координати  $z$  і має вигляд  $\dot{V}_+(z) = V_{m0} e^{-\gamma z}$ . Відповідно, комплексна амплітуда хвилі, яка поширюється в бік зменшення  $z$ , буде  $\dot{V}_-(z) = V_{m0} e^{\gamma z}$ . Якщо  $\alpha = 0$ , то  $\gamma = j\beta$ .

## 2.12 Рівняння Гельмгольца

Розглянемо нескінченний тривимірний простір із заданими електродинамічними параметрами  $\tilde{\epsilon}_a$  і  $\mu_a$ , які є однаковими у всіх точках простору. Якщо припустити, що в такому просторі вільні

електричні заряди відсутні, то їх об'ємна густина  $\rho = 0$ . Тоді електромагнітний процес, який гармонічно змінюється в часі з частотою  $\omega$ , характеризується комплексними амплітудами полів  $\dot{E}$  і  $\dot{H}$ , які задовольняють систему рівнянь Максвелла:

$$\begin{aligned} 1. \operatorname{rot} \dot{H} &= j \omega \tilde{\epsilon}_a \dot{E}, & 2. \operatorname{rot} \dot{E} &= -j \omega \mu_a \dot{H}, \\ 3. \operatorname{div} \dot{E} &= 0, & 4. \operatorname{div} \dot{H} &= 0. \end{aligned}$$

Проведемо деяку трансформацію цих рівнянь. Для цього до рівняння 2 застосуємо диференціальну операцію *rot* та врахуємо рівняння 1. Тоді

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{E} = -j \omega \mu_a \operatorname{rot} \dot{H} = \omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a \dot{E}.$$

Ураховуючи тотожність із розділу 1

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{E} - \nabla^2 \dot{E}$$

і рівняння 3 системи, отримаємо

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{E} = -\nabla^2 \dot{E}$$

або

$$\nabla^2 \dot{E} + \omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a \dot{E} = 0. \quad (2.54)$$

Рівність (2.54) називають рівнянням Гельмгольца.

Уведемо параметр  $\gamma$  (у загальному випадку комплексний), який задовольняє співвідношення  $\gamma^2 = -\omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a$  і являє собою коефіцієнт поширення плоскої хвилі. Тоді рівняння Гельмгольца набуває вигляду:

$$\nabla^2 \dot{E} - \gamma^2 \dot{E} = 0. \quad (2.55)$$

Очевидно, що так само можна сформулювати рівняння Гельмгольца для комплексних амплітуд  $\dot{H}$ :

$$\nabla^2 \dot{H} - \gamma^2 \dot{H} = 0. \quad (2.56)$$

Рівняння (2.55) і (2.56) є однорідними векторними диференціальними рівняннями другого порядку. Кожне з них еквівалентне трьом диференціальним рівнянням у частинних похідних відносно декартових проекцій комплексних амплітуд векторів поля. У розгорнутому вигляді рівняння (2.55) запишеться так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} - \gamma^2 \dot{E}_x &= 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2} - \gamma^2 \dot{E}_y &= 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} - \gamma^2 \dot{E}_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Розв'язок даної системи відносно трьох невідомих функцій  $\dot{E}_x$ ,  $\dot{E}_y$ ,  $\dot{E}_z$ , кожна з яких, у свою чергу, залежить від просторових координат  $x, y, z$ , описує в загальному випадку поле з дуже складною просторовою конфігурацією функцій  $\dot{E}_x$ ,  $\dot{E}_y$ ,  $\dot{E}_z$ . Якщо спростити задачу й прийняти таке:

1) проекція  $\dot{E}_x \neq 0$ , тоді як  $\dot{E}_y = \dot{E}_z = 0$ ;

2) відмінна від нуля проекція  $\dot{E}_x$  залежить тільки від координати  $z$ , тоді як  $\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x} = \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = 0$ .

Тоді рівняння з частинних похідних переходить у звичайні похідні. А саме

$$\frac{d^2 \dot{E}_x}{dz^2} - \gamma^2 \dot{E}_x = 0. \quad (2.58)$$

Розв'язок цього рівняння записується у вигляді

$$\dot{E}_x(z) = \dot{E}_1 e^{\gamma_1 z} + \dot{E}_2 e^{\gamma_2 z},$$

де  $\gamma_{1,2}$  – корені рівняння

$$\gamma^2 = -\omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a = -\omega^2 \epsilon_a \mu_a - j \sigma \omega \mu_a,$$

має від'ємну дійсну й додатну уявну частини, тобто відображається вектором у II квадранті (рис. 2.15), причому  $\arg \gamma_1 = \frac{1}{2} \arg \gamma^2$  і лежить

у I квадранті, а  $\gamma_2 = -\gamma_1$ .  $\gamma = \sqrt{-\omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a} = j \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \mu_a} = \alpha + j \beta$ .

Таким чином, можна записати, коли  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ,

$$\dot{E}_x(z) = \dot{E}_1 e^{\gamma z} + \dot{E}_2 e^{-\gamma z} = \dot{E}_1 e^{(\alpha + j\beta)z} + \dot{E}_2 e^{-(\alpha + j\beta)z}.$$

Це не що інше, як однорідні плоскі хвилі: перша поширюється в бік зменшення  $z$ , а друга описує таку ж хвилю, яка біжить у бік зростання  $z$ , тобто маємо біжучу й обернену хвилі.

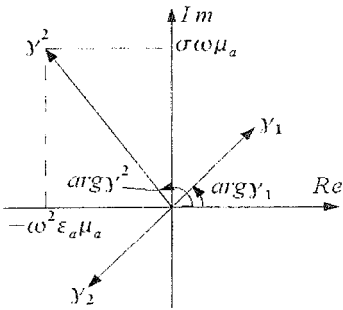


Рис. 2.15. Коэффициент поширення плоскої хвилі

А тепер визначимо характеристичний опір для плоскої електромагнітної хвилі. Для цього використаємо рівняння 2 Максвелла  $\text{rot } \dot{E} = -j\omega\mu_a \dot{H}$  і визначимо  $\dot{H}$ :

$$\dot{H} = \frac{j}{\omega\mu_a} \text{rot } \dot{E}.$$

Розглядаючи електромагнітну хвилю, яка поширюється в бік  $z > 0$  і характеризується амплітудою  $\dot{E} = \dot{E}_x e^{-\gamma z} \vec{i}_x$ , визначимо  $\dot{H}$ :

$$\dot{H} = \frac{j}{\omega\mu_a} \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_x e^{-\gamma z} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-j\gamma}{\omega\mu_a} \dot{E}_x e^{-\gamma z} \vec{i}_y.$$

Якщо  $\gamma = j\omega\sqrt{\tilde{\epsilon}_a\mu_a}$ , то  $\dot{H} = \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_a}{\mu_a}} \dot{E}_x e^{-\gamma z} \vec{i}_y$ .

Отже можна зробити такі висновки:

- Якщо вектор  $\vec{E}$  орієнтований уздовж осі  $x$ , то вектор  $\vec{H}$  вже буде направлений уздовж осі  $y$ , тобто вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  є взаємно перпендикулярними.
- Обидва вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  перпендикулярні до осі поширення  $z$ , тому однорідна плоска електромагнітна хвиля є поперечною хвилею.
- Значення комплексних амплітуд векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  у кожній точці простору пов'язані деяким коефіцієнтом пропорційності. Такий коефіцієнт пропорційності називають характеристичним (хвильовим) опором:

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\tilde{\epsilon}_a}} = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y}.$$

- Густина потоку потужності плоскої електромагнітної хвилі рівна середньому за період значенню вектора Пойтінга:

$$\dot{P} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \dot{E} \times \dot{H}^* \right] = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \dot{E}_x \dot{H}_y^* \right) \left[ \vec{i}_x \times \vec{i}_y \right] = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \dot{E}_x \dot{H}_y^* \right) \vec{i}_z,$$

і цей вектор орієнтований уздовж осі  $z$ . Виразивши його через одну складову, матимемо:

$$P_{\text{сеп } z} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{\dot{E}_x E_x^*}{Z_c} \right) = \frac{E_{xm}^2}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{Z_c} \right) \text{ — через складову } E_x,$$

$$P_{\text{сеп } z} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( Z_c \dot{H}_y H_y^* \right) = \frac{H_{ym}^2}{2} \operatorname{Re} Z_c \text{ — через складову } H_y.$$

## 2.13 Поляризація електромагнітних хвиль та її види

Усі розглянуті до цього часу електромагнітні хвилі мали таку властивість, що в них вектор  $\vec{E}$  мав єдину проекцію ( $\vec{E}_x$ ) і здійснював коливання в певній площині, яка називається площиною поляризації електромагнітної хвилі, тобто коли вектор  $\vec{E}$  лежить у цій площині. Якщо ця площина фіксована, то тоді плоска однорідна електромагнітна хвиля має лінійну поляризацію.

У загальному випадку площина поляризації може займати довільне положення. Щоб переконатися в цьому, припустимо, що деякий хвильовий процес є сумою двох гармонічних плоских хвиль однакової частоти, причому одна хвиля поляризована в площині  $xOz$ , а друга — у площині  $yOz$ . Нехай ці коливання проходять синфазно. При цьому результуюча хвиля у фіксованій точці простору буде мати такі проекції вектора напруженості електричного поля:  $E_x = E_{m1} \cos \omega t$ ,  $E_y = E_{m2} \cos \omega t$ . Легко помітити, що сумарний вектор  $\vec{E}$  буде переміщуватися вздовж діагоналі прямокутника зі сторонами  $2E_{m1}$  і  $2E_{m2}$  (рис. 2.16, а). Тоді площина поляризації результуючої хвилі утворить із віссю  $x$  кут  $\varphi$  ( $\operatorname{tg} \varphi = E_{m2}/E_{m1}$ ).

Зовсім іншого характеру набуває хвильовий процес у тому випадку, коли дві складові вектора  $\vec{E}$  будуть не тільки ортогональними в просторі, але й зсунуті за фазою в часі. Конкретно розглянемо випадок, коли  $E_x = E_{m1} \cos \omega t$ , а  $E_y = E_{m2} \sin \omega t$ . Знайдемо рівняння кривої, яка є геометричним місцем кінця вектора  $\vec{E}$  сумарного процесу. Якщо складові вектора  $\vec{E}$  записати у вигляді

$\frac{E_x}{E_{m1}} = \cos \omega t$  і  $\frac{E_y}{E_{m2}} = \sin \omega t$ , то, піднісши ці дві рівності до квадрата й додавши, одержимо:

$$\left(\frac{E_x}{E_{m1}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{m2}}\right)^2 = 1.$$

Ми отримали рівняння еліпса, який розміщений у площині  $xOy$  і вписаний у прямокутник зі сторонами  $2E_{m1}$  і  $2E_{m2}$  (рис. 2.16, б). У цьому випадку ми маємо еліптичну поляризацію плоскої електромагнітної хвилі. Результуючий вектор  $\vec{E}$  буде обертатися з частотою  $\omega$ , причому так, що якщо дивитися з кінця одиначного вектора поздовжнього напрямку  $\vec{i}_z$ , то обертання вектора  $\vec{E}$  буде направлене проти руху годинникової стрілки. Тому таку хвилю ще називають лівополяризованою.

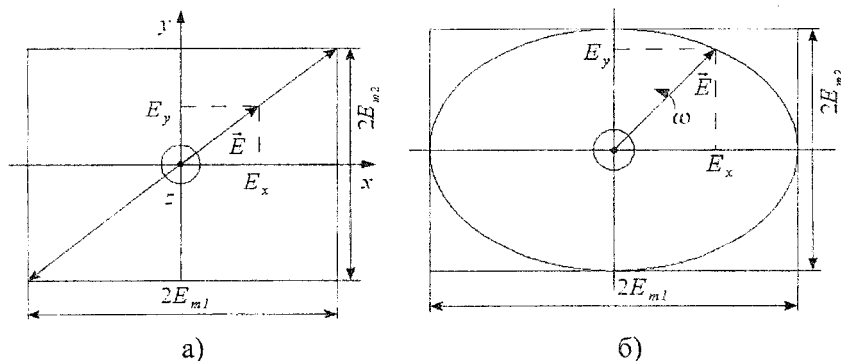


Рис. 2.16. Плоска електромагнітна хвиля з лінійною (а) й еліптичною (б) поляризаціями

Стає очевидним, що електромагнітний хвильовий процес, для якого  $E_x = E_{m1} \cos \omega t$ , а  $E_y = -E_{m2} \sin \omega t$ , уже є правополяризованою хвилею.

На основі формул  $E_x = E_{m1} \cos \omega t$  і  $E_y = E_{m2} \sin \omega t$  можна записати вираз комплексної амплітуди вектора напруженості електричного поля еліптично поляризованої хвилі з лівим напрямом обертання, що поширюється в бік збільшення координати  $z$ :

$$\vec{E} = (E_{m1} \vec{i}_x - j E_{m2} \vec{i}_y) e^{-j\beta z}.$$



Тоді, використовуючи характеристичний опір  $Z_c$ , отримаємо вираз для вектора  $\vec{H}$ :

$$\vec{H} = \left( \frac{j E_{m2}}{Z_c} \vec{i}_x + \frac{E_{m1}}{Z_c} \vec{i}_y \right) e^{-j\beta z}.$$

На основі цих двох виразів можна визначити вектор Пойтінга

$$P_{\text{сеп}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ E_{m1} & -j E_{m2} & 0 \\ \frac{j E_{m2}}{Z_c} & \frac{E_{m1}}{Z_c} & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{E_{m1}^2}{2 Z_c} + \frac{E_{m2}^2}{2 Z_c} \right) \vec{i}_z,$$

тобто середнє значення вектора Пойтінга еліптично поляризованої хвилі рівне сумі середніх густин потужності двох ортогональних компонентів з лінійною поляризацією.

Якщо  $E_{m1} = E_{m2} = E_m$ , то при цьому поляризаційний еліпс перетворюється в коло з радіусом  $E_m$ . Така поляризація називається коловою.

Існує ще два види поляризації залежно від того, у якій площині розташований вектор напруженості електромагнітного поля. Якщо вектор  $\vec{E}$  лежить у площині падіння електромагнітної хвилі, то поляризація називається вертикальною, а коли в цій площині вже знаходиться вектор  $\vec{H}$ , то поляризація називається горизонтальною.

Поляризаційні властивості плоских електромагнітних хвиль мають велике практичне значення для антенно-фідерних пристроїв. Так, якщо в полі хвилі з лінійною поляризацією розмістити штирову антену, орієнтовану перпендикулярно до площини поляризації, то на заряди в провідниках антени не діють ніякі сили з боку електромагнітного поля. Як наслідок, сигнал на виході такої антени відсутній. За рахунок цього з'являється можливість створити два незалежні радіоканали, суміщені в просторі, проте розв'язані один відносно одного завдяки поляризаційним властивостям електромагнітного поля.

З другого боку, така ж штирова антена, розміщена в полі хвилі з коловою поляризацією перпендикулярно до осі розповсюдження, буде створювати вихідний сигнал незмінної амплітуди незалежно від орієнтації в поперечній площині. Ця обставина робить хвилі з

коловою поляризацією переважаючими для організації радіозв'язку з рухомими об'єктами, які можуть займати в просторі будь-яке положення.

## 2.14 Граничні умови для векторів електромагнітного поля

Задача про граничні умови для векторів електромагнітного поля має такий вигляд. Нехай є деяка межа розділу  $S$  (рис. 2.17) між середовищем 1 з параметрами  $\varepsilon_{a1}, \mu_{a1}, \sigma_1$  і середовищем 2, у якого відповідними параметрами є  $\varepsilon_{a2}, \mu_{a2}, \sigma_2$ . Виділимо на поверхні  $S$  довільну точку  $P$  з параметрами середовища 1. Необхідно знайти поле в околі цієї точки, але яке вже належить середовищу 2.

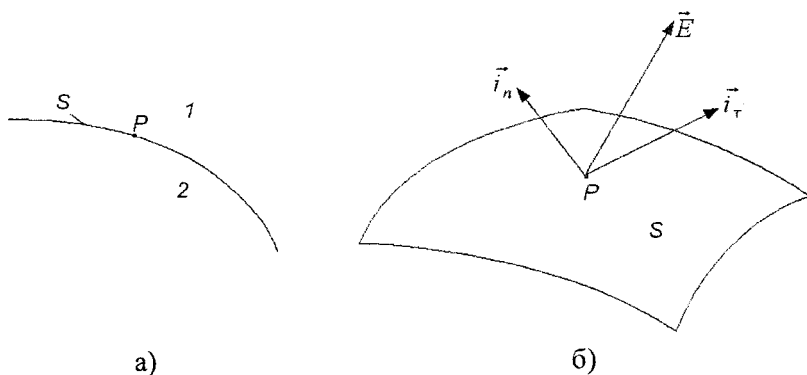


Рис. 2.17. Межа розділу двох середовищ (а) і розклад вектора  $\vec{E}$  на нормальну й тангенціальну складові (б)

Для розв'язання поставленої задачі вектори електромагнітного поля в околі точки  $P$  розкладемо на дотичні (тангенціальні) і нормальні складові. Наприклад, вектор  $\vec{E}$  на межі розділу цих середовищ можна подати у вигляді

$$\vec{E} = E_\tau \vec{i}_\tau + E_n \vec{i}_n,$$

де  $\vec{i}_\tau$ ,  $\vec{i}_n$  – орти тангенціального й нормального напрямів. Ці вектори лежать у площині, утвореній вектором  $\vec{E}$  і нормаллю до межі розділу, проведеної у точці  $P$ .

Розглянемо спочатку умови для нормальних складових векторів магнітного поля. Позначимо через  $\vec{B}_1$  і  $\vec{B}_2$  векторні поля магнітної

індукції в середовищах 1 і 2 відповідно (рис. 2.18). Виділимо в околі точки  $P$  циліндричний об'єм з основою  $\Delta S$  та висотою  $\Delta n$ . Нехай цей об'єм настільки малий, що поля  $\vec{B}_1$  і  $\vec{B}_2$  можуть бути незмінними в межах основ циліндра. Тут також слід звернути увагу на те, що одиничний вектор нормалі до межі розділу паралельний вектору елементарної площадки на верхньому циліндрі й антипаралельний такому ж вектору на нижньому. Тоді потік векторів магнітної індукції через повну поверхню циліндра запишеться як:

$$\oint_{S_z} \vec{B} d\vec{S} \approx \vec{B}_1 \vec{i}_n \Delta S - \vec{B}_2 \vec{i}_n \Delta S + \text{потік через бічну поверхню}.$$

Якщо  $\Delta S \rightarrow 0$ ,  $\Delta n \rightarrow 0$ , то потік вектора магнітної індукції через бічну поверхню буде також наближатися до нуля. Відповідно отримаємо:

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \oint_{S_z} \vec{B} d\vec{S} \approx \vec{B}_1 \vec{i}_n \Delta S - \vec{B}_2 \vec{i}_n \Delta S.$$

Але якщо  $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{B} dV = 0$ , то  $\vec{B}_1 \vec{i}_n - \vec{B}_2 \vec{i}_n = 0$ , звідки  $B_{1n} = B_{2n}$ , тобто нормальні складові вектора магнітної індукції на межі розділу двох середовищ є неперервними. Використовуючи матеріальне рівняння  $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ , це співвідношення можна записати так:

$$\mu_{a1} H_{1n} = \mu_{a2} H_{2n}. \quad (2.59)$$

Звідси випливає, що якщо магнітні проникності граничних (крайових) середовищ є неоднаковими, то нормальні складові векторів  $\vec{H}$  на межі розділу зазнають певного стрибка, що визначається відношенням їх проникностей.

А тепер таку ж процедуру виконаємо для нормальних складових векторів електричного поля. Якщо для магнітного поля  $\text{div } \vec{B} = 0$ , то для електричного поля  $\text{div } \vec{E} = \rho$ . Тут можливі два випадки:

1. Поверхневий електричний заряд на межі розділу відсутній. Тому  $\oint_{S_z} \vec{D} d\vec{S} = 0$ , звідки випливає, що  $D_{1n} = D_{2n}$  і відповідно

$$D_{1n} = \varepsilon_{a1} E_{1n} = \varepsilon_{a2} E_{2n} = D_{2n}. \quad (2.60)$$

Таким чином, за відсутності електричних зарядів нормальні складові векторів електричного зміщення (індукції) на межі двох середовищ є неперервними й не залежать від параметрів цих

середовищ. У той же час нормальні складові векторів напруженості електричного поля на межі розділу зазнають стрибка, величина якого визначається відношенням їх діелектричних проникностей  $\epsilon$ .

2. На межі розділу середовищ рівномірно розподілений електричний поверхневий заряд з густиною  $\sigma_{нов}$ . Застосувавши інтегральне формулювання закону Гаусса, можна для рис. 2.18 записати

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \oint_{S_{\Sigma}} \vec{D} d\vec{S} = \vec{D}_1 \vec{i}_n \Delta S - \vec{D}_2 \vec{i}_n \Delta S = \sigma_{нов} \Delta S,$$

звідки

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_{нов}. \quad (2.61)$$

Отож висновок такий: за наявності на межі розділу поверхневого заряду з густиною  $\sigma_{нов}$  нормальні складові вектора електричної індукції теж зазнають стрибка на величину  $\sigma_{нов}$ . Це означає, що цей заряд створює своє поле, яке з одного боку сумується із зовнішнім, а з другого – віднімається від зовнішнього поля.

Аналогічні граничні умови слід розглянути й для дотичних (тангенціальних) складових векторів магнітного й електричного полів. Задача про взаємозв'язок дотичних складових вектора магнітної індукції на межі розділу двох середовищ вирішується на основі інтегрального закону повного струму для деякого малого контуру  $L$  (рис. 2.19), проведеного в околі точки  $P$  таким чином, що одна його половина знаходиться в середовищі 1, а друга – у середовищі 2. Уведемо до точки  $P$  три взаємно ортогональні вектори  $\vec{i}_r$ ,  $\vec{i}_n$ ,  $\vec{i}_r$ . Два перших є ортами дотичного й нормального напрямків. Вектор  $\vec{i}_r$  направлений по нормалі до площини, утвореної векторами  $\vec{i}_r$  та  $\vec{i}_n$ .

Виділимо в околі точки  $P$  прямокутний контур  $L$  зі сторонами  $\Delta l$  і  $\Delta n$ . Будемо вважати, що на контурі задано такий напрям обходу, що з кінця вектора  $\vec{i}_r$  спостерігається рух проти годинникової стрілки.

Загалом в обох областях простору, розділених межею  $S$ , протікають деякі струми, зокрема струми провідності й струми

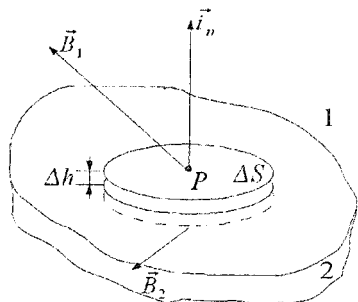


Рис. 2.18. До граничних умов нормальних складових електромагнітного поля

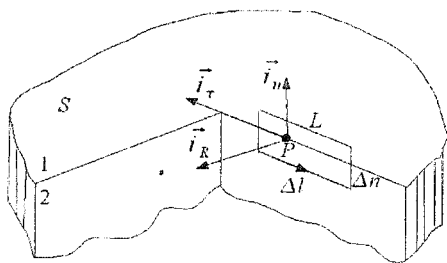


Рис. 2.19. До граничних умов нормальних складових електромагнітного поля

зміщення з об'ємними густинами  $\vec{j}_{np}$  і  $\vec{j}_{зм}$  відповідно. Застосуємо до цього контуру закон повного струму (Ампера):

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \vec{H}_1 \vec{i}_\tau \Delta l - \vec{H}_2 \vec{i}_\tau \Delta l + \text{інтеграли по бічних поверхнях} =$$

$$= (\vec{j}_{np} \vec{i}_R + \vec{j}_{зм} \vec{i}_R) \Delta l \Delta n.$$

Тут слід розглянути два випадки:

1. Числові значення електродинамічних параметрів обох граничних середовищ мають обмежені значення. Якщо  $\Delta n \rightarrow 0$ , то в границі отримаємо

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} (\vec{j}_{np} \vec{i}_R + \vec{j}_{зм} \vec{i}_R) \Delta l \Delta n = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \vec{H}_1 \vec{i}_\tau \Delta l - \vec{H}_2 \vec{i}_\tau \Delta l = 0,$$

звідки матимемо  $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ .

Таким чином, на межі розділу двох середовищ із кінцевими значеннями електродинамічних параметрів дотичні складові векторів напруженості магнітного поля є неперервними. Проте дотичні складові векторів магнітної індукції на межі розділу

зазнають розриву (стрибок):  $\frac{B_{1\tau}}{\mu_{a1}} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_{a2}}$ .

2. Провідність одного з граничних середовищ необмежено велика. Нехай  $\sigma_2 = \infty$ . Це можливо лише у випадку поверхневої провідності.

Для математичного опису явищ на поверхні такого ідеального провідника з  $\sigma_2 = \infty$  уведемо поняття вектора густини поверхневого

електричного струму  $\vec{j}_{\text{пов } e}$  (рис. 2.20). Проведемо одиничний вектор  $\vec{i}_n$  як дотичну до ліній поверхневого струму у вибраній точці поверхні. Тоді знаходимо струм  $\Delta i$ , який протікає впоперек відрізка  $\Delta l$ , перпендикулярно вектору  $\vec{i}_n$ . Отже, можемо записати, що

$$\vec{j}_{\text{пов } e} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta l} \vec{i}_n \quad \text{і, застосувавши закон повного струму, отримаємо:}$$

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \vec{j}_{\text{пов } e} \vec{i}_R \Delta l = \vec{H}_1 \vec{i}_\tau \Delta l - \vec{H}_2 \vec{i}_\tau \Delta l.$$

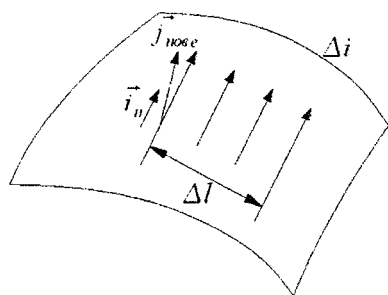


Рис. 2.20. Векторне поле поверхневого струму  $\vec{j}_{\text{пов } e}$

Якщо  $\sigma_2 = \infty$  (ідеальний провідник), то  $\vec{E}_2$  і  $\vec{H}_2$  рівні нулю. Тоді можна записати  $\vec{H}_1 \vec{i}_\tau = \vec{j}_{\text{пов } e} \vec{i}_R$  і, враховуючи, що  $\vec{i}_\tau = -[\vec{i}_n \times \vec{i}_R]$ , отримаємо:

$$\vec{j}_{\text{пов } e} = [\vec{i}_n \times \vec{H}_1].$$

Таким чином, якщо  $\sigma_2 = \infty$ , то поверхневий струм на межі розділу цих середовищ протікає в напрямі, перпендикулярному вектору  $\vec{H}_1$ , а густина цього струму чисельно рівна дотичній проекції вектора напруженості магнітного поля.

Тож, завершуючи, визначимо граничні умови для дотичних складових векторів електричного поля. Використаємо закон електромагнітної індукції для контуру  $L$ :

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \vec{E}_1 \vec{i}_\tau \Delta l - \vec{E}_2 \vec{i}_\tau \Delta l + \text{інтеграли по бічних поверхнях} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \vec{i}_R \Delta l \Delta n.$$

Якщо  $\Delta n \rightarrow 0$ , то в границі отримаємо

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \vec{E}_1 \vec{i}_\tau \Delta l - \vec{E}_2 \vec{i}_\tau \Delta l = 0,$$

звідки слідує, що  $\vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}$  або  $\frac{D_{1\tau}}{\epsilon_{a1}} = \frac{D_{2\tau}}{\epsilon_{a2}}$ .

Отже, дотичні складові векторів напруженості електричного поля на межі розділу двох середовищ є неперервними, а дотичні складові векторів електричної індукції (зміщення) зазнають стрибка, який визначається відношенням діелектричних проникностей.

## Контрольні запитання

1. Що являють собою математичні моделі електромагнітного поля?
2. У якому вигляді записується диференціальна форма закону Ома? Сформулюйте закон збереження зарядів. Дайте формулювання законів Гауса, закону Ампера в інтегральній та диференціальній формах.
3. Запишіть закон електромагнітної індукції в інтегральній та диференціальній формах. З якою метою Максвелл увів струм зміщення?
4. Що визначають матеріальні рівняння? Що являють собою абсолютні діелектрична й магнітна проникливості?
5. Подайте диференціальну форму закону повного струму (Ампера) з урахуванням поляризаційного та стороннього струму.
6. Запишіть рівняння Максвелла в інтегральній і диференціальній формах і в комплексній формі для гармонічного коливання.
7. Визначте закон збереження електромагнітного поля та його зв'язок з вектором Пойтінга.
8. Що виражає принцип дуальності магнітного струму?
9. Сформулюйте лему Лорентца в диференціальній та інтегральній формах.
10. Дайте визначення поздовжніх і поперечних хвиль, плоскої електромагнітної хвилі та її параметрів.
11. Який існує зв'язок між рівняннями Максвелла в комплексній формі запису та рівняннями Гельмгольца?
12. Що являє собою характеристичний опір однорідної плоскої хвилі, вакууму та магнітодіелектричного середовища?
13. Що визначають граничні умови для векторів електромагнітного поля? Сформулюйте граничні умови для нормальних і тангенціальних складових векторів електричного й магнітного полів.

## Рекомендована література

1. Григорьев А. Д. Электродинамика и техника СВЧ / А. Д. Григорьев. – М. : Высшая школа, 1990. – 335 с.
2. Головкин Д. Б. Загальні основи фізики : Електродинаміка / Д. Б. Головкин. – К. : Либідь, 1994. – 128 с.
3. Бредов М. М. Классическая электродинамика / М. М. Бредов, В. В. Румянцев, И. Н. Топтыгин. – М. : Наука, 1985. – 401 с.
4. Вайнштейн Л. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике / Л. А. Вайнштейн, В. А. Солнцев. – М. : Советское радио, 1973. – 399 с.
5. Гайдук В. И. Физические основы электроники СВЧ / В. И. Гайдук, К. И. Палатов, Д. И. Петров. – М. : Советское радио, 1971. – 600 с.
6. Дуков В. М. Электродинамика / В. М. Дуков. – М. : Высшая школа, 1975. – 248 с.

7. Максвелл Дж. К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля / Дж. К. Максвелл. – М. : Гос. тех. изд-во техн.-теорет. л-ры, 1954. – 688 с.

8. Марков Г. Г. Электродинамика и распространение радиоволн / Г. Г. Марков, Б. М. Петров, Г. П. Грудинская. – М. : Советское радио, 1979. – 374 с.

9. Венгер Є. Ф. Основи електродинаміки та спеціальної теорії відносності / Є. Ф. Венгер, В. М. Рибаль, О. В. Мельничук. – К. : Вища школа, 2009. – 352 с.

10. Вольман В. И. Техническая электродинамика / В. И. Вольман. – М. : Связь, 1971. – 487 с.

11. Захарія Й. А. Основи електродинаміки і поширення радіохвиль / Й. А. Захарія. – Львів : Політехніка, 1996. – 106 с.

12. Захарія Й. А. Методи прикладної електродинаміки / Й. А. Захарія. – Львів : Бескид Біт, 2009. – 352 с.

13. Федоров Н. Н. Основы электродинамики / Н. Н. Федоров. – М. : Высшая школа, 1980. – 399 с.

14. Паменов Ю. В. Техническая электродинамика / Ю. В. Паменов, В. И. Вольман, А. Д. Муравёв. – М. : Радио и связь, 2000. – 536 с.

15. Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский, Т. И. Никольская. – М. : Наука, 1989. – 544 с.



### РОЗДІЛ 3. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ В СЕРЕДОВИЩІ ІЗ ЧАСТОТНОЮ ДИСПЕРСІЄЮ: ХВИЛІ У ПРОВІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ, ПЛАЗМІ ТА НАДПРОВІДНИКУ

Як уже зазначалось у розділі 2, частотна дисперсія має місце в тих випадках, коли фазова швидкість, а загалом і коефіцієнт затування хвилі, залежать від частоти. У цьому розділі ми розглянемо важливі для практичної реалізації диспергуючі середовища, зокрема покажемо, як частотна дисперсія фазової швидкості спричиняє ряд цікавих фізичних ефектів, які спостерігаються під час поширення електромагнітних хвиль зі складним спектральним складом.

#### 3.1 Хвилі в добре провідному середовищі

Як було визначено в матеріалі розділу 2, частотна дисперсія під час поширення електромагнітних хвиль спостерігається щоразу, коли хоча б один з електромагнітних параметрів  $\tilde{\epsilon}_a$ ,  $\mu_a$  залежить від частоти. Дійсно, у цьому випадку коефіцієнт поширення хвилі  $\gamma$  пов'язаний з частотою нелінійним чином, і тому фазова швидкість  $v_\phi = \omega/\beta$  уже є частотно-залежною. Із цієї причини частотна дисперсія фазової швидкості характерна для будь-якого провідного середовища, у якому навіть за сталої абсолютної магнітної проникності  $\mu_a$  діелектрична проникність  $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - j\sigma/\omega$  є функцією частоти.

У такому випадку стверджують, що на заданій частоті  $\omega$  матеріальне середовище є дуже добре провідним (або металоподібним), якщо виконується умова:

$$\frac{\sigma}{\omega} \gg \epsilon_a.$$

Фізично це означає, що в такому середовищі густина струмів провідності значно перевищує густину струмів зміщення чи поляризованих струмів.

Очевидно, що чим нижча частота, тим ближче провідне середовище за своїми електродинамічними властивостями до ідеального провідника. На достатньо низьких частотах більшість неідеальних діелектриків, а також напівпровідники стають металоподібними. Наприклад, для сухого ґрунту з параметрами  $\epsilon = 4$ ,  $\sigma = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Сл/м}$

на частоті 1 МГц  $\tilde{\epsilon}_a = 3,54 \cdot 10^{-4} - j 3,18 \cdot 10^{-10} \Phi/м$ . Таким чином, у радіомовному діапазоні частот ефір проявляє себе як добре провідне середовище. Ця властивість дозволяє в ряді випадків значно спростити розрахунок полів електромагнітних хвиль, які поширюються над поверхнею Землі.

Таким чином, комплексну діелектричну проникність добре провідного середовища можна вважати чисто уявною:  $\tilde{\epsilon}_{a,m} = -j\sigma/\omega$ . Знайдемо для цього випадку коефіцієнт поширення однорідної плоскої електромагнітної хвилі:

$$\gamma_m = \alpha_m + j\beta_m = j\omega\sqrt{\tilde{\epsilon}_{a,m}\mu_{a,m}} = \sqrt{j\omega\mu_{a,m}\sigma}. \quad (3.1)$$

Якщо взяти до уваги, що  $\sqrt{j} = \exp\left(\frac{j\pi}{4}\right) = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$ , то формула (3.1) набуде вигляду:

$$\gamma_m = \sqrt{\frac{\omega\mu_{a,m}\sigma}{2}}(1+j). \quad (3.2)$$

Тобто в металоподібному середовищі коефіцієнти фази й затухання чисельно рівні:

$$\beta_m = \alpha_m = \left(\frac{\omega\mu_{a,m}\sigma}{2}\right)^{1/2}.$$

Залежність цих величин від частоти свідчить про те, що в добре провідному середовищі частотна дисперсія яскраво виражена. Визначимо для такого середовища фазову швидкість і довжину хвилі:

$$v_{\phi,m} = \frac{\omega}{\beta_m} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_{a,m}\sigma}} \quad \text{і} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta_m} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_{a,m}\sigma}}.$$

Як бачимо, зі зростанням частоти фазова швидкість однорідних плоских електромагнітних хвиль у добре провідному середовищі зростає. При цьому характеристичний опір середовища буде визначатись як:

$$Z_{c,m} = \sqrt{\frac{\mu_{a,m}}{\tilde{\epsilon}_a}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_{a,m}}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_{a,m}}{\sigma}} \exp(j45^\circ).$$

Комплексність характеристичного опору вказує на те, що в добре провідному середовищі вектор напруженості електричного поля зсунутий за фазою відносно вектора напруженості магнітного

поля на кут  $\pi/4$ , а сам модуль цього опору також залежить від частоти.

Як відомо, у середовищі з утратами амплітуда плоских електромагнітних хвиль змінюється вздовж координати поширення  $z$  за законом  $\exp(-\alpha z)$ . Відстань  $d$ , на якій амплітуда плоских хвиль зменшується в  $e = 2,718$  раз у порівнянні з початковою, називається глибиною проникнення, або товщиною поверхневого шару. У нашому випадку ця величина задовольняє умову  $\alpha_m d = 1$ . Звідси  $d = 1/\alpha_m = \lambda_m/2\pi$ .

Таким чином, ми можемо зробити висновок: матеріальне середовище стає металоподібним, якщо поле однорідної плоскої електромагнітної хвилі затухає в ньому на відстані, меншій за довжину хвилі. Тоді формула для обчислення товщини поверхневого шару матиме вигляд:

$$d = \left[ \frac{2}{\omega \mu_{ам} \sigma} \right]^{1/2}.$$

Тобто глибина проникнення електромагнітних хвиль у добре провідному середовищі зменшується з ростом частоти й питомої провідності. Це формулювання нам відоме як скін-ефект. Для НВЧ-діапазону  $d$  є дуже малою величиною. Зокрема, для міді ( $\sigma = 5,7 \cdot 10^7$  См/м) на частоті  $f = 10$  ГГц ( $\lambda = 3$  см)  $d = 0,6$  мкм. Тож ми можемо зробити дуже важливий висновок, що на струмопровідні поверхні доцільно наносити тонкий шар (10 мкм) добре провідного металу (Au, Ag). Таке покриття дозволяє значно зменшити теплові втрати в НВЧ-елементах. Це слід використовувати під час проектування інтегральних мікроелектронних НВЧ-пристроїв.

### 3.2 Плазма та її електродинамічні параметри

До числа матеріальних середовищ, у яких поширюються електромагнітні хвилі з частотною дисперсією, належить плазма. У вузькому сенсі так називають іонізований за допомогою електричного чи електромагнітного поля газ, який складається з додатно та від'ємно заряджених частинок, а також із нейтральних атомів і молекул. Плазма широко застосовується в низькотемпературних процесах епітаксії моношарів напівпровідників, осадження й трав-

лення як діелектричних, так і металевих шарів структур ВІС. Це дуже важливо для радіофізиків радіоелектронного напрямку.

Плазма часто зустрічається не тільки в техніці, але й у природі. Зокрема, наша Земля оточена плазмовою оболонкою, яку називають іоносферою і яка знаходиться на висоті 100–150 км та суттєво впливає на поширення радіохвиль у земних умовах. Плазмові властивості характерні для міжпланетного й міжзіркового простору. Тому ми більш детально зупинимося на властивостях плазми.

Одна з основних властивостей плазми – квазінейтральність: якщо в плазмі уявно виділити деяку замкнену область, то електричний заряд усередині такої області рівний нулю, незважаючи на те, що через теплову рівновагу заряджених частинок спостерігаються швидкі флуктуації сумарного заряду навколо його середнього значення. Таким чином, локальну область плазми можна описати одним параметром – електронною концентрацією  $N_e$  ( $\text{м}^{-3}$ ), яка рівна середньому числу електронів в одиниці об'єму. Типове значення  $N_e$  для земної атмосфери складає  $10^{12} \text{ см}^{-3}$ , тоді як концентрація в плазмі провідних твердих тіл досягає величини  $10^{26} \text{ м}^{-3}$  залежно від того, яким методом збуджується дана плазма.

Заряджені частинки плазми (електрони, іони, радикали) під дією сил електромагнітного поля приводяться в рух. Це спричиняє також поляризацію середовища, так що діелектрична проникність плазми вже відрізняється від проникності вакууму. Розглядаючи електронно-іонну плазму, необхідно враховувати, що маса іона на декілька порядків перевищує масу електрона. Тому іони практично нерухомі і в першому наближенні не впливають на електродинамічні властивості такого середовища.

Простий спосіб аналізу властивостей плазми базується на тому, що складають і розв'язують диференціальне рівняння, яке описує рух у просторі окремо взятого електрона. Це рівняння, яке записують на основі другого закону Ньютона, має вигляд:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m \nu \frac{d\vec{r}}{dt} = e \vec{E}, \quad (3.3)$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор відхилення електрона від того положення в просторі, яке він займав за відсутності поля;  $e, m$  – заряд і маса електрона;  $\nu$  – частота співударів.

Тепер припустимо, що зовнішнє поле  $\vec{E}$  змінюється в часі за гармонічним законом з частотою  $\omega$ . Тоді в рівнянні (3.3) величини  $\vec{r}$  та  $\vec{E}$  слід представити через комплекси (тобто в символній формі):

$$\vec{r} = \text{Re}[\dot{r} \exp(j\omega t)], \quad \vec{E} = \text{Re}[\dot{E} \exp(j\omega t)].$$

Це дає можливість перевести наше диференціальне рівняння в алгебраїчне:

$$m(-\omega^2 + j\omega\nu)\dot{r} = e\dot{E}, \quad (3.4)$$

звідки  $\dot{r} = \frac{e\dot{E}}{m(-\omega^2 + j\omega\nu)}$  і визначається як швидкість.

Тоді можна знайти комплексну амплітуду вектора поляризованості:

$$\dot{P} = N_e e \dot{r} \quad \text{і} \quad \dot{D} = \varepsilon_0 \dot{E} + \dot{P}.$$

Таким чином,

$$\dot{D} = \varepsilon_0 \left[ 1 - \frac{N_e e^2}{m \varepsilon_0 (\omega^2 - j\omega\nu)} \right] \dot{E},$$

звідки знаходимо діелектричну проникність плазмового середовища:

$$1 - \frac{N_e e^2}{m \varepsilon_0 (\omega^2 - j\omega\nu)}. \quad (3.5)$$

Як бачимо з виразу, діелектрична проникність плазми суттєво залежить від частоти прикладеного електромагнітного поля, яке збуджує цю плазму в реакторі. Як наслідок, процес поширення електромагнітних хвиль у плазмі супроводжується частотною дисперсією, причому  $\varepsilon$  має дійсну й уявну частини. Фізична причина дисперсії – інерційність процесу переміщення електронів під дією змінного поля. Ця інерційність виражається кутом фазового запізнення.

Розрахунок частоти співударів  $\nu$  у плазмовому середовищі – це важка задача, яку розв'язати дуже складно. Проте в реальних умовах  $\omega \gg 0$ , тому у формулі (3.5) можна прийняти  $\nu = 0$ . Тоді таку плазму можемо назвати безспівударною плазмою, у якій діелектрична проникність буде виражатися дійсним числом, меншим за одиницю і рівним:

$$\varepsilon = 1 - \frac{N_e e^2}{m \varepsilon_0 \omega^2}. \quad (3.6)$$

Із цієї рівності видно, що  $\varepsilon = 0$  на певній плазмовій частоті

$$\omega = \sqrt{\frac{N_e e^2}{m \varepsilon_0}},$$

яку називають ленгмюрівською. Якщо  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ ,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ ,  $\varepsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ , то  $\omega_{nl} = 54,41 \sqrt{N_e} \text{ с}^{-1}$  або  $f_{nl} = 8,98 \sqrt{N_e} \text{ Гц}$ . Для земної іоносфери  $N_e = 10^{12} \text{ м}^{-3}$ , тому  $f_{nl} = 9 \text{ МГц}$ .

Вивчаючи поширення електромагнітних хвиль у безспівударній плазмі, необхідно розглянути два крайні випадки:

1. Концентрація електронів  $N_e$  є невеликою, так що виконується нерівність  $\omega > \omega_{nl}$ . Тоді має місце поширення електромагнітних хвиль у докритичній плазмі.

2. Концентрація  $N_e$  є досить великою, коли має місце  $\omega < \omega_{nl}$ . У такому випадку йдеться про поширення хвиль у закритичній плазмі.

Розглянемо перший варіант, коли  $\varepsilon = 1 - (\omega_{nl}/\omega)^2$ , для якого визначимо коефіцієнт поширення електромагнітної хвилі:

$$\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) = j\beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{nl}}{\omega}\right)^2},$$

де  $\beta_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  – коефіцієнт фази плоскої хвилі у вакуумі. Коефіцієнт затухання в цьому випадку  $\alpha = 0$ , а коефіцієнт фази визначається як

$$\beta(\omega) = \frac{\omega}{e} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{nl}}{\omega}\right)^2},$$

звідки можна визначити фазову швидкість як

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta(\omega)} = \frac{e}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{nl}}{\omega}\right)^2}}.$$

Крива, що характеризує частотну дисперсію фазової швидкості в докритичній плазмі, зображена на рис. 3.1. Тут слід зазначити, що

фазова швидкість плоских електромагнітних хвиль завжди більша від швидкості хвиль у вакуумі, причому  $v_\phi \rightarrow \infty$ , якщо  $\omega \rightarrow \omega_m$ .

Характеристичний опір докритичної безспівударної плазми також залежить від частоти:

$$Z_c(\omega) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\tilde{\epsilon}_a}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2}},$$

де  $Z_0 = 377 \text{ Ом}$ , і, як бачимо, характеристичний опір  $Z_c$  (вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  синфазні, колінеарні) є дійсною величиною й перевищує опір  $Z_0$  у вакуумі. Дійсно, фазова швидкість відноситься до хвильового фронту й може бути більшою за швидкість світла. А принцип відносності не поширюється на фазову швидкість.

Тепер повернемося до другого варіанта, коли  $\omega < \omega_m$  і коефіцієнт поширення плоскої електромагнітної хвилі в плазмі стає дійсною величиною,  $\alpha(\omega) = \beta_0 \sqrt{(\omega_m/\omega)^2 - 1}$ , а  $\beta(\omega) = 0$ .

Тоді амплітуда електромагнітного поля вздовж вибраної осі  $z$  зменшується в міру поширення за законом  $\exp(-\alpha z)$ . Оскільки коефіцієнт фази  $\beta = 0$ , то хвильовий процес у такому середовищі фактично відсутній, а фазова швидкість необмежено велика.

Цей цікавий ефект пов'язаний з тим, що затухання амплітуди поля в плазмі зумовлено не переходом частини енергії в теплову, а чисто фазовим переходом, коли коливальні електрони плазми збуджують вторинні хвилі, які інтерферують з першими й намагаються їх компенсувати. Тут графік залежності нормованого коефіцієнта затухання  $\alpha/\beta_0$  від нормованої частоти вже має вигляд, поданий на рис. 3.2. Це особливо важливо для земного й космічного (супутникового) зв'язку.

Оскільки діелектрична проникність закритичної плазми є від'ємною, то характеристичний опір такого середовища буде чисто уявним (реактивним), тобто є чисто ємнісним, що слід ураховувати в розрахунку зв'язку.

$$Z_c(\omega) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\tilde{\epsilon}_a}} = \frac{-jZ_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2 - 1}}$$

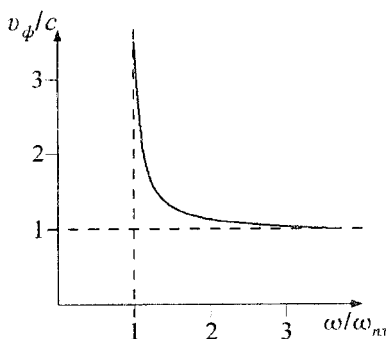


Рис. 3.1. Частотна залежність фазової швидкості плоскої хвилі в докритичній плазмі

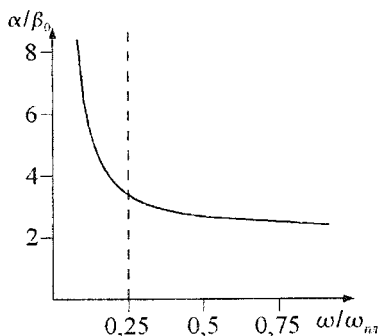


Рис. 3.2. Частотна залежність нормованого коефіцієнта затухання плоскої хвилі в докритичній плазмі

Отже можна зробити певні висновки: шар безспівударної плазми проявляє себе як фільтр верхніх частот, пропускаючи на вихід електромагнітні коливання з частотами  $\omega > \omega_m$  й ефективно послаблюючи складові з частотами  $\omega < \omega_m$ , тобто іоносфера проявляє себе як фільтруючий елемент.

Насамкінець розглянемо вплив співударів електронів у плазмі. Реально безспівударної плазми немає. Розрахуємо частоту співударів

$$\nu = 5 \cdot 10^7 \frac{p}{V \bar{T}},$$

де  $p$  – тиск газу,  $\bar{T}$  – середня температура. Якщо  $\omega \approx 0$ , тоді плазма описується діелектричною проникністю

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_0 - \frac{N_e e^2}{m(\omega^2 - j\omega\nu)} = \epsilon_0 - \frac{N_e e^2 (\omega^2 + j\omega\nu)}{m(\omega^4 + \omega^2 \nu^2)} = \epsilon_a - \frac{j\sigma}{\omega}, \quad (3.7)$$

звідки бачимо, що дійсна частина комплексної діелектричної проникності  $\epsilon_a$  та питомої провідності плазми  $\sigma$  залежить від параметрів  $\omega_m$  і частоти співударів  $\nu$ , а також зв'язана з частотою електромагнітного поля  $\omega$ :

$$\epsilon_a = \epsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_m^2}{\omega^2 + \nu^2} \right), \quad \sigma = \frac{\epsilon_0 \omega_m^2 \nu}{\omega^2 + \nu^2}.$$



Для аналізу залежностей  $\varepsilon_a(\omega)$  і  $\sigma(\omega)$  зручно ввести нормовану частоту  $\omega/\omega_{nr}$ , а також безрозмірний параметр  $b = v/\omega_{nr}$ , який характеризує темп співударів електронів з нейтральними молекулами.

На рис. 3.3 представлено серії дисперсних кривих, розрахованих за формулами:

$$\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_{nr}}\right)^2 + b^2}, \quad \frac{\sigma}{\omega_{nr} \varepsilon_0} = \frac{b}{\left(\frac{\omega}{\omega_{nr}}\right)^2 + b^2}.$$

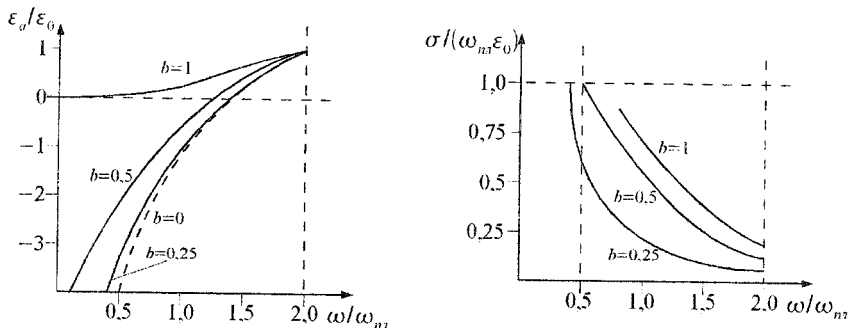


Рис. 3.3. Дисперсійні залежності дійсної (а) та уявної (б) частин комплексної нормованої діелектричної проникності від нормованої частоти для різного темпу співударів електронів  $b$

Аналізуючи ці графіки, необхідно звернути увагу на те, що при  $b \ll 1$  дійсна частина комплексної проникності плазми міняє знак поблизу плазмової частоти  $\omega_{nr}$ . Комплексний коефіцієнт поширення плоских електромагнітних хвиль визначають за формулою:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega \sqrt{\left(\varepsilon_a - \frac{j\sigma}{\omega}\right) \mu_0}. \quad (3.8)$$

До цієї формули слід зауважити, що хвиля, яка поширюється в бік збільшення координати вздовж вибраної осі  $z$ , повинна мати параметр  $\gamma$  в I квадранті комплексної площини, тобто  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ .

Потрібно також зазначити, що комплексне число  $\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j\sigma/\omega$  за будь-якої частоти  $\omega$  має додатну чи від'ємну дійсну частину та від'ємну уявну частину. Тому число  $\tilde{\varepsilon}_a$  розміщу-

ється або в III чи IV квадрантах комплексної площини. Аргумент цього числа виражається як:

$$\arg \tilde{\varepsilon}_a = \frac{3\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\omega \varepsilon_a}{\sigma}. \quad (3.9)$$

Відповідно квадратний корінь у виразі (3.8) має два можливі значення з аргументами

$$\left(\arg \sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \mu_a}\right)_1 = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega \varepsilon_a}{\sigma} - \text{розміщується в II квадранті,}$$

$$\left(\arg \sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \mu_a}\right)_2 = \frac{7\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega \varepsilon_a}{\sigma} - \text{розміщується в IV квадранті.}$$

Але реальним аргументом для коефіцієнта поширення хвилі є другий вираз, тому  $\arg \gamma = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega \varepsilon_a}{\sigma}$ . Тоді коефіцієнт поширення плоскої хвилі в плазмі з урахуванням співударів буде рівний:

$$\gamma = \omega \sqrt{(\varepsilon_a \mu_0)^2 + \left(\frac{\sigma \mu_0}{\omega}\right)^2} \exp \left[ j \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega \varepsilon_a}{\sigma} \right) \right]. \quad (3.10)$$

Якщо  $\beta_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  і  $\varepsilon = \varepsilon_a / \varepsilon_0$ , то коефіцієнт згасання й коефіцієнт фази для цього випадку будуть рівні:

$$\alpha(\omega) = \beta_0 \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}\right)^2} \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{\sigma / (\omega \varepsilon_0)} \right), \quad (3.11)$$

$$\beta(\omega) = \beta_0 \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}\right)^2} \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{\sigma / (\omega \varepsilon_0)} \right).$$

Це дає досить великі значення коефіцієнтів згасання  $\alpha$  і фази  $\beta$ . Тому співударями електронів у плазмі нехтувати не можна.

Дисперсія фазової швидкості електромагнітних хвиль спостерігається не тільки в плазмі, але й у хвилеводах, які ми розглянемо дещо нижче.

### 3.3 Електромагнітні хвилі в надпровідниках

Явище надпровідності пояснюється як електромагнітною теорією, так і квантовою. Розглянемо це фізичне явище на основі теорії Максвелла й порівняємо результати з квантовою теорією БКШ (Бардіна – Купера – Шріффера).

Явище надпровідності було відкрите 1911 р. голландським фізиком Х. Камерлінг-Оннесом, який вивчав властивості гелію в широкому температурному інтервалі. У результаті проведених ним досліджень виявилось, що за температур нижче  $4,15\text{ K}$  електричний опір зразка ртуті став майже нульовим. Тобто постійний струм, збуджений у надпровідному кільці, циркулював по ньому без сторонніх електрорушійних сил протягом тривалого часу. Виміряти опір надпровідника традиційними методами й методиками надзвичайно важко. Вважають і сьогодні, що він у  $10^{18}$  раз менший від опору міді, срібла, золота та інших звичайних металів.

Якщо температура надпровідника стає вищою за так звану критичну температуру  $T_C$ , то явище надпровідності стрибкоподібно зникає, і речовина з надпровідного стану переходить у нормальний стан.

Надпровідні властивості характерні для багатьох неферомагнітних металів, у яких значення  $T_C$  є різними. Так, для  $Al$  критична температура рівна  $1,2\text{ K}$ , для  $Pb$  –  $7,2\text{ K}$ , для  $Nb$  –  $9,2\text{ K}$ . 1986 р. був відкритий цілий ряд рідкісноземельних керамічних матеріалів з доданням іонів міді, у яких критичні температури є досить високими. Наприклад, у кераміці  $YBa_2Cu_3O_7$  значення  $T_C = 92\text{ K}$ , що є вище від температури рідкого азоту ( $T_C = 77\text{ K}$ ). Це явище також сприяло розвитку надпровідної електроніки.

Перейдемо тепер до електромагнітної теорії, яку розробили німецькі фізики Ф. і Г. Лондони 1935 року. Згідно з їх теорією відповідний вектор густини повного струму  $\vec{j}$  у кожній точці надпровідника являє собою суму двох складових:

$$\vec{j} = \vec{j}_n + \vec{j}_s,$$

де  $\vec{j}_n, \vec{j}_s$  – густини нормальної та надпровідної компонент відповідно.

Зрозуміло, що

$$\vec{j}_n = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma_n \vec{E}, \quad (3.12)$$

де  $\sigma_n$  – нормальна питома провідність речовини. Тоді система двох перших рівнянь Максвелла для надпровідного середовища матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 1. \operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma_n \vec{E} + \vec{j}_s, \\
 2. \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Нехай  $N_s$  – концентрація,  $q_s$  – заряд,  $\vec{v}_s$  – вектор швидкості надпровідних носіїв заряду. Тоді за загальним правилом:

$$\vec{j}_s = N_s q_s \vec{v}_s,$$

а швидкість носіїв заряду визначається із закону Ньютона:

$$m_s \frac{d\vec{v}_s}{dt} = q_s \vec{E}.$$

Об'єднання цих двох виразів дозволяє сформулювати таке рівняння:

$$\frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} = \frac{N_s q_s^2}{m_s} \vec{E}. \tag{3.13'}$$

Застосувавши операцію  $\operatorname{rot}$  до обох частин даного рівняння й використавши друге рівняння Максвелла, отримаємо:

$$\operatorname{rot} \left( \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} \right) = \frac{N_s q_s^2}{m_s} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{N_s q_s^2}{m_s} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Ф. і Г. Лондони припустили, що таке рівняння можна проінтегрувати за часом, прирівнявши постійну інтегрування до нуля. Тому після інтегрування отримаємо:

$$\operatorname{rot} \vec{j}_s = -\frac{N_s q_s^2}{m_s} \vec{B}, \tag{3.14}$$

тобто густина струму надпровідності формується магнітною індукцією  $\vec{B}$ .

Уведемо параметр із розмірністю довжини  $\lambda_L = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 N_s q_s^2}}$ , який називають лондонівською довжиною, і відповідно рівняння (3.14) матиме вигляд:

$$\operatorname{rot} \vec{j}_s = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{B}. \tag{3.15}$$

З рівняння, яке називають рівнянням Лондонів, ми бачимо, що надпровідний струм визначається не електричним, а магнітним полем.

Повернемося знову до першого рівняння Максвелла з урахуванням рівняння Лондона й візьмемо від цього рівняння  $rot$ :

$$rot\ rot\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t}(rot\ \vec{E}) + \sigma_n rot\ \vec{E} - \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{B},$$

або з урахуванням другого рівняння Максвелла

$$rot\ rot\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = -\varepsilon_a \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \sigma_n \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{B}.$$

Беручи до уваги, що  $rot\ rot\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = grad\ div\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) - \nabla^2\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right)$ , і враховуючи властивість соленоїдальності магнітного поля, отримаємо:

$$\nabla^2\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = \varepsilon_a \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \sigma_n \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{B}.$$

На нульовій частоті, коли  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ , одержимо

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}. \quad (3.16)$$

Слід зазначити, що в рівняння (3.16) не входить питома провідність середовища  $\sigma_n$ , зумовлена нормальними носіями заряду. Тому постійний струм створюється лише за рахунок руху надпровідних носіїв і цей струм тече в надпровіднику без опору. Магнітне поле витісняється із товщини надпровідника на його поверхню та існує в шарі лондонівської довжини  $\lambda_L$ . Щоб довести це, запишемо рівняння (3.16) для одномірного випадку:

$$\frac{d^2 \vec{B}}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}.$$

Розв'язком цього рівняння буде функція

$$B(x) = B(0) \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right),$$

де  $B(0)$  – магнітна індукція на межі розділу повітря – надпровідник.

Отже, лондонівська довжина  $\lambda_L$  є мірою чи оцінкою проникнення постійного магнітного поля (постійного струму) у надпровідник. Це ніби явище скін-ефекту надпровідника.

У теорії Лондонів вважається, що носіями струму, які відповідають за явище надпровідності, є електрони. При цьому повністю ігнорується питання про те, чому один електрон нормальний, а другий – надпровідний. Якщо прийняти  $q_s = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ ,  $m_s = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$  і  $N_s = 10^{29} \text{ м}^{-3}$  (концентрація електронів у металі), то  $\lambda_L = 16 \text{ нм}$ . Саме на такій глибині магнітна індукція зменшується в  $e$  раз у порівнянні з початковим значенням. Тому можна вважати, що всередині надпровідника магнітне поле відсутнє.

Явище виштовхування магнітного поля з товщини надпровідника було вперше відкрито в 1933 р. В. Мейсснером як ефект Мейсснера.

Якщо частота електромагнітного поля  $\omega \neq 0$ , то немає підстав стверджувати, що  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ , і тому починає суттєво впливати провідність, зумовлена нормальними електронами, що веде до теплових утрат у надпровіднику.

Розглянемо електромагнітний процес, який змінюється в часі за гармонічним законом з частотою  $\omega$ . Тоді можна записати комплексні амплітуди надпровідної компоненти струму й напруженості електричного поля, пов'язані співвідношенням  $\dot{j}_s = -\frac{j}{\omega \mu_0 \lambda_L^2} \dot{E}$ .

Оскільки нормальної складової компоненти струму аналогічний зв'язок має вигляд  $\dot{j}_n = \sigma_n \dot{E}$ , а струмом зміщення в добре провідному середовищі можна знехтувати, то отримаємо закон Ома для надпровідника в змінному електромагнітному полі:

$$\dot{j}_n = (\sigma_n - j \sigma_s) \dot{E}, \quad (3.17)$$

де  $\sigma_s = \frac{1}{\omega \mu_0 \lambda_L^2}$ , причому  $\sigma_s \gg \sigma_n$ .

Таким чином, надпровідне середовище характеризується комплексною питомою провідністю  $\vec{\sigma} = \sigma_n - j \sigma_s$ , де дійсна частина зумовлена нормальними, а уявна – надпровідними носіями. Тут можна визначити й принципову різницю між надпровідним та

ідеальним провідниками: питома провідність надпровідника, наближаючись за модулем до нескінченності є практично уявною величиною, тоді як в ідеального провідника вона описується нескінченно великим дійсним числом. Уявний характер провідності пов'язаний з тим, що між струмом та електричним полем згідно з (3.13') відбувається фазовий зсув на  $\pi/2$ .

У ролі величини, яка характеризує густину потоку потужності теплових утрат, зручно використовувати дійсну частину характеристичного опору надпровідного середовища:

$$\operatorname{Re} Z_c = \operatorname{Re} \sqrt{\frac{j \omega \mu_0}{\sigma_n - j \sigma_s}} = \operatorname{Re} \left[ j \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{\sigma_s + j \sigma_n}} \right].$$

Якщо врахувати, що нормальна частина питомої провідності набагато менша від надпровідної ( $\sigma_s \gg \sigma_n$ ), то цей вираз спроститься до виду:

$$\operatorname{Re} Z_c \cong \operatorname{Re} \left[ j \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{\varepsilon_s} \left( 1 - j \frac{\sigma_n}{2 \sigma_s} \right)} \right] = \frac{\sigma_n \sqrt{\omega \mu_0}}{2 \sigma_s^{3/2}}.$$

Строгу квантово-механічну теорію надпровідності створили в 1957 р. американські вчені Д. Бардін, Л. Купер і Д. Шріффер (теорія БКШ). Згідно із цією теорією виявилось, що електрони в металі, крім сил кулонівського відштовхування, зазнають особливих сил притягання. Якщо температура речовини стає меншою за критичну, то сили притягання починають переважати, і частина електронів попарно об'єднується в так звані куперівські пари, які здатні рухатися між вузлами ґратки подібно до надтекучої рідини (без опору). Великий інтерес становить ефект Джозефсона – протікання тунельного струму через дуже тонкий ( $\sim 1 \text{ нм}$ ) шар діелектрика, який розділяє дві надпровідні області. Саме за таких температур можна формувати елементи надпровідної електроніки.

### Контрольні запитання

1. Дайте визначення частотної дисперсії електромагнітних хвиль.
2. Визначте параметри електромагнітної хвилі в добре провідному середовищі.
3. Дайте визначення плазми та її параметрів. Охарактеризуйте електромагнітні хвилі в безспівударній плазмі та в плазмі з урахуванням співударів.
4. Дайте визначення групової швидкості електромагнітних хвиль.

5. Запишіть рівняння Лондонів для електромагнітних хвиль у надпровідниках.

### **Рекомендована література**

1. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме / В. Л. Гинзбург. – М. : Наука, 1967. – 683 с.

2. Жмудський О. О. Основи електродинаміки. Ч. 1 : Поширення хвиль у провідному середовищі, плазмі та надпровіднику / О. О. Жмудський. – К. : Вид-во КАУ ім. Пивченка, 2000. – 214 с.

3. Черенков В. С. Технічна електродинаміка : конспект лекцій / В. С. Черенков. – Одеса : ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2004. – 156 с.

4. Чернишов П. М. Технічна електродинаміка / П. М. Чернишов, В. П. Соколов. – Харків : Прапор, 2006. – 296 с.

5. Бредов М. М. Классическая электродинамика / М. М. Бредов, В. В. Румянцев, И. Н. Топтыгин. – М. : Наука, 1985. – 401 с.

6. Диденко А. Н. Сверхпроводящие волноводы и резонаторы / А. Н. Диденко. – М. : Советское радио, 1973. – 256 с.



## РОЗДІЛ 4. ПАДІННЯ ПЛОСКИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА МЕЖУ ДВОХ СЕРЕДОВИЩ

### 4.1 Нормальне падіння плоскої електромагнітної хвилі на ідеально провідну поверхню

Нехай на нескінченну ідеальну провідну поверхню за напрямом нормалі падає плоска електромагнітна хвиля, яка поширюється вздовж осі  $z$  декартової системи координат (рис. 4.1). З рисунка видно, що присутність на поверхні лише поля падаючої хвилі з вектором напруженості електричного поля  $\vec{E}_{паd}$  не може забезпечити виконання граничної (крайової) умови  $E_r = 0$ . Для виконання цієї умови необхідно, щоб у напівпросторі  $z < 0$  існувала відбита хвиля з амплітудою, рівною амплітуді падаючої хвилі. При  $z = 0$  повинна виконуватись умова:

$$\vec{E}_{паd} + \vec{E}_{вiд} = 0. \quad (4.1)$$

Щоб визначити сумарне магнітне поле на поверхні ідеального провідника, необхідно врахувати, що вектор Пойтінга відбитої хвилі  $\vec{H}_{вiд}$  орієнтований уздовж від'ємного напрямку  $z$ . Оскільки модулі векторів  $\vec{H}_{паd}$  і  $\vec{H}_{вiд}$  рівні, то в площині  $z = 0$  модуль сумарного вектора напруженості магнітного поля буде рівний

$$\vec{H}_\Sigma = \vec{H}_{паd} + \vec{H}_{вiд} \quad (4.2)$$

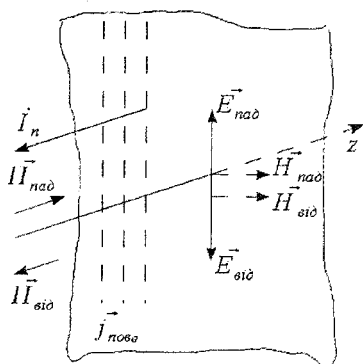


Рис. 4.1. Вектори електромагнітного поля при нормальному падінні плоскої хвилі на ідеально провідну поверхню

і у два рази більший модуля кожної складової. Таким чином, ми отримали суттєвий результат – на поверхні ідеального провідника напруженість сумарного магнітного поля у два рази перевищує напруженість магнітного поля падаючої електромагнітної хвилі:  $\vec{H}_\Sigma = 2\vec{H}_{паd}$ . Тоді, знаючи модуль та орієнтацію вектора сумарної напруженості магнітного поля, можна визначити вектор густини поверхневого електричного струму за формулою  $\vec{j}_{пов c} = [\vec{i}_k \times \vec{H}_\Sigma]$ . З рис. 4.1 видно, що поверхневий струм проті-

кає в напрямі вектора  $\vec{E}$  падаючої хвилі, а його амплітуда рівна подвоєній амплітуді напруженості магнітного поля цієї хвилі. Тут також стає зрозуміло, що ідеально провідна площина повністю екранує один напівпростір від іншого. Тому при  $z > 0$  всі складові векторів електромагнітного поля вже рівні нулю.

## 4.2 Нормальне падіння плоскої електромагнітної хвилі на діелектричну площину

Припустимо, що напівпростір  $z < 0$  прямокутної декартової системи координат (рис. 4.2, область 1) являє собою вакуум ( $\varepsilon_a = \varepsilon_0$ ,  $\mu_a = \mu_0$ ,  $\sigma = 0$ ), тоді як напівпростір  $z > 0$  – це довільний магнітодіелектрик з параметрами  $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$ ,  $\sigma$  (рис. 4.2, область 2).

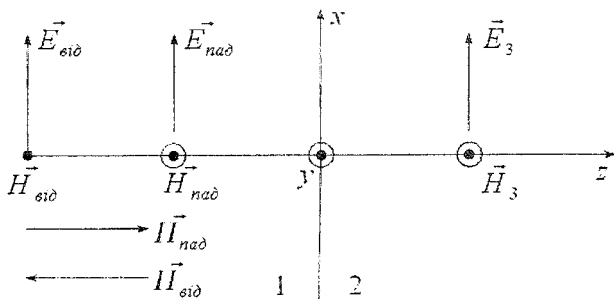


Рис. 4.2. Вектори електромагнітного поля за нормального падіння плоскої хвилі на діелектричну півплощину

Нехай в області 1 уздовж позитивного напрямку осі  $z$  поширюється плоска гармонічна хвиля, яка називається падаючою. Для такої хвилі відомі комплексні амплітуди векторів  $\dot{E}_{na \delta}$ ,  $\dot{H}_{na \delta}$ , орієнтовані в просторі так, як показано на рис. 4.2:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{na \delta} &= \dot{E}_{x na \delta} e^{-j\beta_z z} \vec{i}_x, \\ \dot{H}_{na \delta} &= \frac{\dot{E}_{x na \delta}}{Z_0} e^{-j\beta_z z} \vec{i}_y, \end{aligned} \quad (4.3)$$

де  $\beta_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  – коефіцієнт фази плоскої хвилі із заданою частотою у вакуумі,  $Z_0 = 377 = 120\pi$  (Ом) – характеристичний опір вакууму.

У нашій електродинамічній системі, крім плоскої хвилі, існує ще дві – відбита й заломлена. Для цих хвиль комплексні амплітуди векторів поля мають вигляд:

- для відбитої хвилі

$$\begin{aligned}\dot{E}_{\text{від}} &= \dot{E}_{x\text{від}} e^{-j\beta_1 z} \vec{i}_x, \\ \dot{H}_{\text{від}} &= -\frac{\dot{E}_{x\text{від}}}{Z_0} e^{-j\beta_1 z} \vec{i}_y.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Знак вектора  $\dot{H}_{\text{від}}$  зумовлений тим, що вектор Пойтінга відбитої хвилі  $\vec{P}_{\text{від}}$  направлений у бік зменшення координати  $z$  ( $z < 0$ ).

- для заломленої (прохідної) хвилі

$$\begin{aligned}\dot{E}_3 &= \dot{E}_{x3} e^{-j\beta_2 z} \vec{i}_x, \\ \dot{H}_3 &= \frac{\dot{E}_{x3}}{Z_{c2}} e^{-j\beta_2 z} \vec{i}_y,\end{aligned}\quad (4.5)$$

де  $\beta_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ ,  $Z_{c2} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}$  – відповідно коефіцієнт фази і характеристичний (хвильовий) опір плоскої електромагнітної хвилі в середовищі 2.

Записуючи рівняння (4.5), припустимо, що область 2 поширюється необмежено вздовж півосі  $z > 0$ . Крім того, вважається, що електромагнітні хвилі, які поширюються в області 2, мають повне затухання, що дає підстави вважати, що в цій області відсутня відбита хвиля, яка поширюється в напрямі від'ємної осі  $z$  ( $z < 0$ ).

Поставимо тепер задачу про знаходження співвідношення між комплексними амплітудами векторів електромагнітного поля падаючої, відбитої і заломленої хвиль. Для цього використаємо той факт, що на межі розділу, тобто в площині  $z = 0$ , повинні виконуватися крайові умови – дотичні складові сумарних векторів напруженості електричного й магнітного полів повинні бути неперервними:

$$\dot{E}_{1r} = \dot{E}_{2r}, \quad \dot{H}_{1r} = \dot{H}_{2r}.$$

Тоді, використовуючи співвідношення (4.3), (4.4) і (4.5), можна записати:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{x\text{пад}} + \dot{E}_{x\text{від}} &= \dot{E}_{x z} - \text{для електричної складової,} \\ \frac{\dot{E}_{x\text{пад}}}{Z_0} - \frac{\dot{E}_{x\text{від}}}{Z_0} &= \frac{\dot{E}_{x z}}{Z_{c2}} - \text{для магнітної складової.} \end{aligned}$$

Уведемо коефіцієнт відбивання за електричним полем  $R$  і коефіцієнт проходження (заломлення) за електричним полем  $T$ , визначивши дані величини як відношення комплексних амплітуд відповідних електричних полів до комплексної амплітуди напруженості електричного поля падаючої хвилі на межі розділу:

$$R = \frac{\dot{E}_{x\text{від}}}{\dot{E}_{x\text{пад}}}, \quad T = \frac{\dot{E}_{x z}}{\dot{E}_{x\text{пад}}}.$$

Якщо дані співвідношення поділити на величину  $\dot{E}_{x\text{пад}}$ , то можна прийти до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $R$  і  $T$ :

$$\begin{aligned} 1 + R &= T, \\ \frac{1}{Z_0} - \frac{R}{Z_0} &= \frac{T}{Z_{c1}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

звідки визначимо коефіцієнти  $R$  і  $T$ :

$$\begin{aligned} R &= \frac{Z_{c2} - Z_0}{Z_{c2} + Z_0}, \\ T &= \frac{2Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_0}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Таким чином, коефіцієнти відбивання й заломлення електромагнітної хвилі за нормального падіння на діелектричний напівпростір повністю визначаються хвильовими опорами середовищ. Якщо діелектрик немагнітний ( $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$ ), то

$$R = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}}, \quad T = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon}}.$$

### 4.3 Нормальне падіння плоскої електромагнітної хвилі на діелектричний шар певної товщини

Цікаво відмітити, що формули (4.7) зустрічаються в теорії радіокілі під час розв'язання задачі про відбивання хвиль від стику двох ліній передачі з хвильовими опорами  $Z_0$  і  $Z_{c2}$  в умовах, коли друга лінія навантажена на свій хвильовий опір і тому знаходиться в узгодженні.

Як наслідок, впливає можливість розрахувати коефіцієнт відбивання плоскої електромагнітної хвилі від діелектричного шару товщиною  $l$  при нормальному падінні (рис. 4.3, а).

Моделлю такої електродинамічної системи є з'єднання напівнескінченної лінії передачі з хвильовим опором  $Z_0$  із відрізком лінії довжиною  $l$  з хвильовим опором  $Z_{c2}$  (рис. 4.3, б). Даний відрізок навантажений на опір  $Z_0$ , який ураховує вплив напівнескінченного опору правіше діелектричного шару.

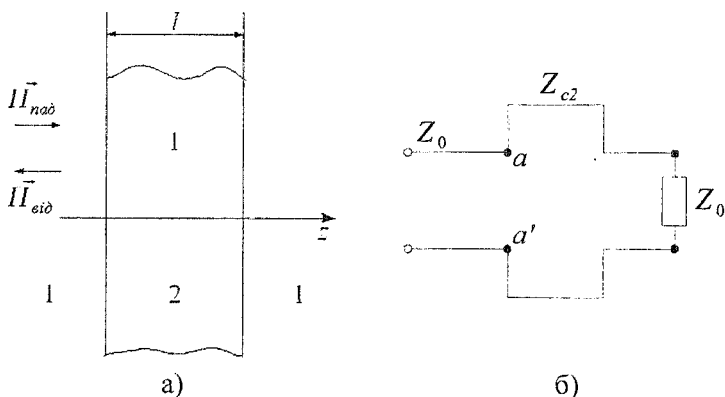


Рис. 4.3. Нормальне падіння плоскої електромагнітної хвилі на діелектричний шар (а) і модель такої електродинамічної системи (б)

Будемо вважати, що шар виконаний із діелектрика без утрат із заданою діелектричною проникністю  $\varepsilon$ . Використаємо вираз для визначення вхідного опору довгої лінії з основ радіоелектроніки для перерізу  $a - a'$  для хвилі, що поширюється зліва направо:

$$Z_{ax} = \frac{Z_0 + jZ_{c2} \operatorname{tg} \theta}{1 + j \frac{Z_0}{Z_{c2}} \operatorname{tg} \theta} = Z_0 \frac{1 + j \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{\varepsilon}}}{1 + j \sqrt{\varepsilon} \operatorname{tg} \theta}, \quad (4.8)$$

де  $\theta = \beta_2 l = \frac{2\pi l}{\lambda_1}$  – електрична товщина шару на частоті в радіанах.

Тоді, використовуючи формулу  $R = \frac{Z_{ax} - Z_0}{Z_{ax} + Z_0}$ , після нескладних перетворень отримаємо вираз для коефіцієнта відбивання від пластини:

$$R = \frac{j(1-\varepsilon)\operatorname{tg} \theta}{2\sqrt{\varepsilon} + j(1+\varepsilon)\operatorname{tg} \theta},$$

$$|R| = \frac{(\varepsilon-1)|\operatorname{tg} \theta|}{\sqrt{4\varepsilon + (1+\varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \theta}}. \quad (4.9)$$

Цю залежність подано на рис. 4.4 для різних значень  $\varepsilon$  (2,56 і 3,8) діелектричного шару. Саме тут слід звернути увагу на те, що коефіцієнт відбивання плоских електромагнітних хвиль є частотно-залежним. Цей факт необхідно враховувати під час створення прозорих діелектричних шарів для захисту антенних систем.

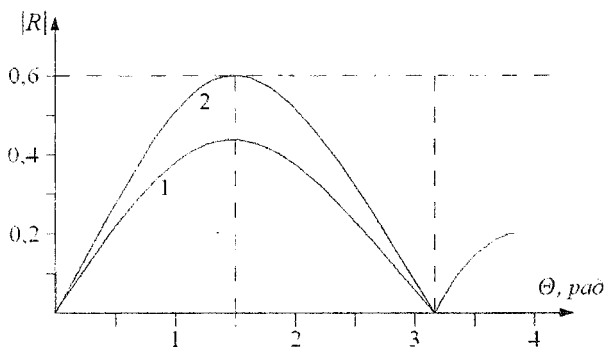


Рис. 4.4. Залежність модуля коефіцієнта відбивання  $|R|$  від електричної товщини діелектричного шару ( $1 - \varepsilon = 2,56$ ;  $2 - \varepsilon = 3,8$ )

#### 4.4 Падіння плоскої електромагнітної хвилі на діелектричну півплощину під довільним кутом. Закони Снелліуса та формули Френеля

Розглянемо загальний випадок, коли плоска електромагнітна хвиля, поширюючись у середовищі 1, падає на межу розділу із середовищем 2 під деяким кутом  $\varphi$ , який лежить у межах  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Геометрія даної задачі та орієнтація осей подані на рис. 4.5.

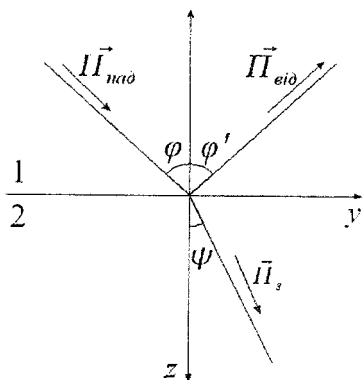


Рис. 4.5. Падіння плоскої електромагнітної хвилі на стик двох середовищ під певним кутом

Аналізуючи електромагнітне поле в даній системі, введемо три хвилі: падаючу, відбиту й заломлену. Вектори Пойтінга цих хвиль знаходяться в одній площині, яка називається площиною падіння. З рис. 4.5 випливає, що вектор  $\vec{\Pi}_{nad}$  утворює з позитивними напрямками осей  $x$  та

$y$  кут  $\frac{\pi}{2} - \varphi$  і  $\varphi$  відповідно.

Оскільки  $\cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$ , то комплексна амплітуда вектора напруженості електричного поля падаючої хвилі може бути подана як:

$$\dot{E}_{nad}(y, z) = \dot{E}_{m nad} e^{-j\beta_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)},$$

де  $\dot{E}_{m nad}$  – комплекс амплітуди падаючої хвилі.

Якщо через  $\varphi'$  і  $\psi$  позначити кути відбивання й заломлення відповідно (рис. 4.5), то комплекси амплітуд будь-яких складових вектора  $\vec{E}$  відбитої й заломленої хвиль можна записати:

$$\dot{E}_{vid}(y, z) = \dot{E}_{m vid} e^{-j\beta_1(y \sin \varphi' - z \cos \varphi')},$$

$$\dot{E}_z(y, z) = \dot{E}_{m z} e^{-j\beta_2(y \sin \psi + z \cos \psi)}.$$

На межі розділу, тобто в площині  $z = 0$ , як відомо, повинні виконуватись умови неперервності дотичних (тангенціальних) складових векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ :  $\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}$ ,  $\dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau}$ .

Узявши тангенціальні складові від комплексів падаючої, відбитої і заломленої хвиль, матимемо:

$$\dot{E}_{\tau_{пад}} e^{-j\beta_1 y \sin \varphi} + \dot{E}_{\tau_{від}} e^{-j\beta_1 y \sin \varphi'} = \dot{E}_{\tau_3} e^{-j\beta_2 y \sin \psi} \quad (4.10)$$

Для виконання цього співвідношення необхідно, щоб

$$\begin{aligned} 1) \quad & \varphi = \varphi', \\ 2) \quad & \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{\beta_1}{\beta_2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Вирази (4.11) – це відомі нам з фізики закони Снелліуса, які формулюються так:

- 1) кут падіння рівний куту відбивання плоскої електромагнітної хвилі;
- 2) відношення синусів кута падіння й заломлення рівне відношенню їх фазових коефіцієнтів.

Оскільки  $\beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ , то, враховуючи, що коефіцієнт заломлення середовища  $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ , другий закон Снелліуса можна записати:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Повернемося тепер до поляризації електромагнітних хвиль, оскільки вони змінюють значення коефіцієнтів відбивання й заломлення під час падіння електромагнітних хвиль на межу двох середовищ.

*Перпендикулярна (горизонтальна) поляризація.* Характерна тим, що площина поляризації, яка містить напрям вектора  $\vec{E}$ , є перпендикулярною площині падіння, а вектор  $\vec{H}$  знаходиться в цій площині (рис. 4.6).

Перпендикулярна (горизонтальна) поляризація. Характерна тим, що площина поляризації, яка містить напрям вектора  $\vec{E}$ , є перпендикулярною площині падіння, а вектор  $\vec{H}$  знаходиться в цій площині (рис. 4.6).

Нехай  $\dot{E}_{пад}$ ,  $\dot{E}_{від}$ ,  $\dot{E}_3$  – комплексні амплітуди векторів електричного поля падаючої, відбитої й заломленої хвиль відповідно в площині  $z=0$  при довільній координаті  $y$ .

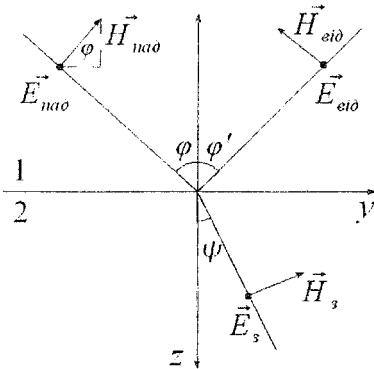


Рис. 4.6. Падіння плоскої електромагнітної перпендикулярно поляризованої хвилі на стик двох середовищ



Крайові умови відносно електричних векторів будуть такими:

$$\dot{E}_{nao} + \dot{E}_{aio} = \dot{E}_z. \quad (4.12)$$

Записуючи крайові умови відносно векторів напруженості магнітного поля, необхідно врахувати, що їх тангенціальні складові отримують шляхом множення модулів вектора  $\vec{H}$  на косинуси відповідних кутів (рис. 4.6). Крім цього, зручніше виразити вектори  $\vec{H}$  через вектори  $\vec{E}$ , використовуючи поняття хвильового опору середовища. Таким чином, умова неперервності дотичних складових векторів напруженості магнітного поля в площині  $z = 0$  набуде вигляду:

$$\frac{\cos \varphi}{Z_{c1}} (\dot{E}_{nao} - \dot{E}_{aio}) = \frac{\dot{E}_z}{Z_{c2}} \cos \psi. \quad (4.13)$$

Для випадку перпендикулярної поляризації введемо коефіцієнт відбивання  $R_{\perp}$  і коефіцієнт заломлення  $T_{\perp}$  по електричному полю:

$$R_{\perp} = \frac{\dot{E}_{aio}}{\dot{E}_{nao}}, \quad T_{\perp} = \frac{\dot{E}_z}{\dot{E}_{nao}}.$$

Тоді рівняння (4.13) можна виразити через коефіцієнти  $R_{\perp}$  і  $T_{\perp}$ :

$$\begin{cases} 1 + R_{\perp} = T_{\perp}, \\ \frac{\cos \varphi}{Z_{c1}} (1 - R_{\perp}) = \frac{T_{\perp}}{Z_{c2}} \cos \psi. \end{cases} \quad (4.14)$$

У результаті розв'язку даної системи одержимо значення коефіцієнтів  $R_{\perp}$  і  $T_{\perp}$ , які називають формулами Френеля:

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= \frac{Z_{c2} \cos \varphi - Z_{c1} \cos \psi}{Z_{c2} \cos \varphi + Z_{c1} \cos \psi}, \\ T_{\perp} &= \frac{2 Z_{c2} \cos \varphi}{Z_{c2} \cos \varphi + Z_{c1} \cos \psi}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

На практиці часто доводиться обчислювати коефіцієнти відбивання й заломлення плоских електромагнітних хвиль для випадку, коли середовище 1 є вакуумом або повітрям ( $\varepsilon = 1$ ,  $n = 1$ ), а середовище 2 – немагнітним діелектриком ( $\mu = 1$ ) без утрат з відносною діелектричною проникністю  $\varepsilon$ . Для такого середовища, використовуючи закони Снелліуса, отримаємо:

$$R_{\perp} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}, \quad T_{\perp} = \frac{2 \cos \varphi}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}.$$

Графіки залежностей  $R_{\perp}(\varphi)$  і  $T_{\perp}(\varphi)$  для конкретного значення  $\varepsilon = 2,56$  подані на рис. 4.7. Необхідно звернути увагу, що при  $\varphi \rightarrow \pi/2$  величина  $T_{\perp}$  монотонно наближається до нуля, тоді як коефіцієнт відбивання (від'ємний за будь-якого значення кута падіння) наближається до значення  $-1$ .

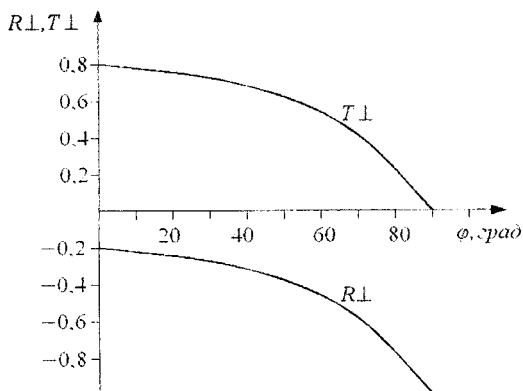


Рис. 4.7. Залежність коефіцієнтів  $R_{\perp}$  і  $T_{\perp}$  від кута падіння для  $\varepsilon = 2,56$

*Паралельна (вертикальна) поляризація.* Характеризується тим, що вектори  $\vec{E}$  всіх трьох хвиль – падаючої, відбитої й заломленої – паралельні площині падіння (рис. 4.8).

За аналогією з випадком перпендикулярної поляризації можна записати крайові умови неперервності дотичних складових векторів електромагнітного поля. Такі умови мають вигляд:

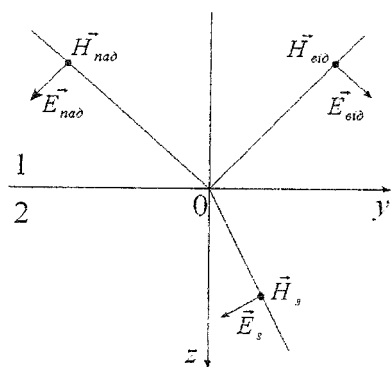


Рис. 4.8. Падіння плоскої електромагнітної паралельно поляризованої хвилі на стик двох середовищ

$$\begin{aligned} (\dot{E}_{nao} + \dot{E}_{eio}) \cos \varphi &= \dot{E}_s \cos \psi, \\ \frac{(\dot{E}_{nao} - \dot{E}_{eio})}{Z_{c1}} &= \frac{\dot{E}_s}{Z_{c2}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Уведемо коефіцієнт відбивання  $R_{\parallel}$  і коефіцієнт заломлення  $T_{\parallel}$  за електричним полем:

$$R_{\parallel} = \frac{\dot{E}_{eio}}{\dot{E}_{nao}}, \quad T_{\parallel} = \frac{\dot{E}_s}{\dot{E}_{nao}}.$$

Розділивши рівняння (4.16) на комплексну амплітуду  $\dot{E}_{nao}$ , отримаємо систему рівнянь відносно  $R_{\parallel}$  і  $T_{\parallel}$ , які називаються формулами Френеля для паралельної (вертикальної) поляризації:

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= \frac{Z_{c2} \cos \psi - Z_{c1} \cos \varphi}{Z_{c2} \cos \psi + Z_{c1} \cos \varphi}, \\ T_{\parallel} &= \frac{2 Z_{c2} \cos \varphi}{Z_{c2} \cos \psi + Z_{c1} \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Якщо середовище 2 є немагнітним діелектриком з відносною діелектричною проникністю  $\varepsilon$ , то формули Френеля набудуть вигляду (ураховуючи закони Снелліуса):

$$R_{\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} - \varepsilon \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cos \varphi}, \quad T_{\parallel} = \frac{2 \sqrt{\varepsilon} \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Конкретні значення залежностей  $R_{\parallel}(\varphi)$  і  $T_{\parallel}(\varphi)$  для  $\varepsilon = 2,56$  подані на рис. 4.9. Порівнюючи їх з аналогічними залежностями для  $R_{\perp}(\varphi)$  і  $T_{\perp}(\varphi)$ , бачимо, що характер цих залежностей однаковий. Проте криві  $R_{\parallel}(\varphi)$  і  $R_{\perp}(\varphi)$  принципово різні – монотонно зростаюча функція  $R_{\parallel}(\varphi)$  за деякого значення кута  $\varphi$  набуває нульового значення, що вказує на відсутність відбитих хвиль.

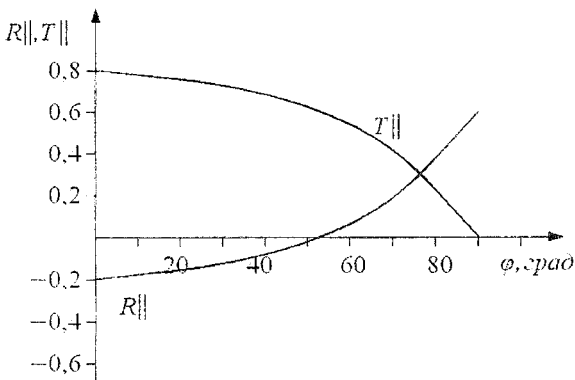


Рис. 4.9. Залежність коефіцієнтів  $R_{||}$  і  $T_{||}$  від кута падіння плоскої електромагнітної хвилі паралельної поляризації при  $\varepsilon = 2,56$

#### 4.5 Кут Брюстера. Повне внутрішнє відбивання

Так прийнято називати кут падіння, за якого падаюча хвиля повністю, без відбивання, переходить через межу розділу двох матеріальних середовищ. Із виразів (4.15) і (4.17) випливає, що кут Брюстера задовольняє одне з двох рівнянь:

$$\begin{aligned} Z_{c2} \cos \varphi_B - Z_{c1} \cos \psi_B &= 0 - \text{для перпендикулярної поляризації,} \\ Z_{c2} \cos \psi_B - Z_{c1} \cos \varphi_B &= 0 - \text{для паралельної поляризації.} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Тут під кутом  $\psi_B$  розуміється кут заломлення, що відповідає куту падіння  $\varphi_B$ .

Розглянемо типовий випадок, коли обидва граничні середовища є немагнітними діелектриками ( $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ), причому  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ . Тоді  $Z_{c1} > Z_{c2}$ , і в силу законів Снелліуса  $\varphi > \psi$ , тобто  $\cos \varphi < \cos \psi$ . Тоді, повертаючись до рівнянь (4.18), бачимо, що перше рівняння немає змісту. Тобто явище Брюстера під час падіння плоскої електромагнітної хвилі на немагнітний діелектрик може спостерігатися тільки для паралельної поляризації падаючої плоскої електромагнітної хвилі. Отже, кут Брюстера для таких середовищ з паралельною поляризацією буде рівний

$$\varepsilon \cos \varphi_B = \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi_B},$$

звідки знаходимо

$$\varphi_B = \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon},$$

тобто визначається діелектричною проникністю діелектрика.

Повернемося до закону Снелліуса  $\left( \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{n_2}{n_1} \right)$  і з'ясуємо, що

можуть бути два цікаві випадки:

1. Оптична густина середовища 2 переважає оптичну густина середовища 1, тобто  $n_2 > n_1$ . При цьому завжди  $\psi < \varphi$ , а оскільки кут падіння  $\varphi$  лежить в інтервалі  $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ , то заломлена хвиля існує за будь-якого кута падіння.

2. Середовище 2 оптично менш густе в порівнянні із середовищем 1, тобто  $n_2 < n_1$ . У цьому випадку завжди  $\psi > \varphi$  і тому може знайтися такий кут падіння, за якого заломлена хвиля буде поширюватися паралельно межі розділу під кутом  $\psi = 90^\circ$ . Таке критичне значення кута падіння називають кутом повного внутрішнього відбивання:

$$\varphi_{\text{пов}} = \arcsin \left( \frac{n_2}{n_1} \right).$$

При кутах падіння  $\varphi > \varphi_{\text{пов}}$  заломленої хвилі у звичайному сенсі не існує, енергія падаючої хвилі повністю відбивається всередині середовища з великою оптичною густиною. Це явище широко використовують у техніці НВЧ на частотах, більших від 50 ГГц.

Розглянемо тепер крайові умови Леонтовича, які визначають падіння плоскої електромагнітної хвилі з повітря (середовище 1) під кутом  $\varphi$  на межу розділу з немагнітним ( $\mu = 1$ ) добре провідним середовищем, яке характеризується питомою провідністю  $\sigma$ . Таке матеріальне середовище 2 має комплексний характер показника заломлення:

$$n_2 = \sqrt{\frac{-j\sigma}{\omega\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}} (1-j).$$

Тут використано співвідношення  $\sqrt{-j} = e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{1-j}{\sqrt{2}}$ .

Використовуючи закон Снелліуса  $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega \varepsilon_0}}(1-j)$ , бачи-

мо, що в добре провідному середовищі заломлена хвиля поширюється під комплексним кутом і тому вже є неоднорідною плоскою хвилею, для якої  $\psi = 90^\circ + j\alpha$ . У цьому випадку запишемо другий закон Снелліуса як

$$\sin \psi = \sqrt{\frac{\omega \varepsilon_0}{2\sigma}} \sin \varphi (1+j)$$

і візьмемо до уваги, що  $\frac{\omega \varepsilon_0}{\sigma} \ll 1$ . Тоді синус у лівій частині цього виразу можна замінити аргументом і вважати при цьому, що кут заломлення визначається як

$$\psi = \sqrt{\frac{\omega \varepsilon_0}{2\sigma}} \sin \varphi (1+j).$$

У граничному наближенні при  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $\psi \rightarrow 0$ , а значить і  $\sin \psi \rightarrow 0$ ,  $\cos \psi \rightarrow 1$  вже незалежно від кута падіння.

Тоді комплексну амплітуду вектора напруженості електричного поля в середовищі 2 можна подати як

$$\dot{E}_{np} = \dot{E}_3 = \dot{E}_{m3} e^{-\gamma_2(y \sin \psi + z \cos \psi)},$$

де  $\gamma_2$  – комплексний коефіцієнт поширення плоскої електромагнітної хвилі в середовищі з утратами. Ураховуючи граничні значення кута заломлення  $\psi$ , можемо записати:

$$\dot{E}_3 = \dot{E}_{m3} e^{-\gamma_2 z}.$$

Відповідно до цієї формули заломлена хвиля проникає всередину середовища 2 практично за напрямом нормалі до межі розділу (по осі  $z$ ) за будь-якого кута падіння. У цьому і полягає визначення граничних умов Леонтовича.

## 4.6 Сигнальні графи. Перехід від системи до сигнального графа. Еквівалентні перетворення в сигнальних графах. Формула Мезона

Направленим (лінійним або сигнальним) графом називають сукупність вузлів і віток, що їх зв'язують, стрілки на яких указують напрям передачі сигналу від одного вузла до іншого.

Вузлами в направлених графах зазвичай є струми або потенціали вузлів досліджуваних електричних (електромагнітних) кіл, а не вузлові точки цих кіл. Кожна вітка графа характеризується величиною передачі. Під передачею вітки розуміють відношення вихідної величини до вхідної. Наприклад, вихідна величина  $x_2$  вітки (рис. 4.10, а) рівна добутку вхідної величини (вхідного сигналу)  $x_1$  на передачу  $a$ :  $x_2 = ax_1$ . Передача вітки може мати розмірність провідності, опору або нульову розмірність. До того чи іншого вузла графа, крім вхідного й вихідного, у загальному випадку може підходити або відходити декілька віток.

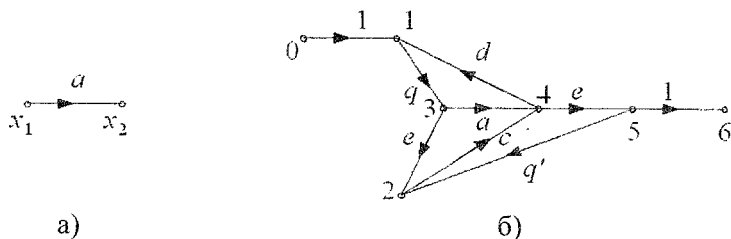


Рис. 4.10. Направлені (сигнальні) графи: а) передача вітки; б) вузловий граф

На рис. 4.10, б як приклад зображено сигнальний граф з вузлами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Передачу віток цього графа позначено буквами  $a, b, c, d, e, q, q', 1$ . Напрямок передачі показаний стрілками. Під  $x_1$  будемо розуміти вузловий сигнал першого вузла, під  $x_2$  – вузловий сигнал другого вузла і т. д. Вузловий сигнал  $k$ -го вузла рівний сумі сигналів, що підходять до  $k$ -го вузла. Під час складання вузлового сигналу  $k$ -го вузла вихідні з  $k$ -го вузла сигнали не враховуються, вони враховуються при складанні вузлових сигналів тих вузлів, до яких ці сигнали підходять. Зокрема, вузловий сигнал

першого вузла графа на рис. 4.10, б буде рівний  $x_1 = 1 \cdot x_0 + d \cdot x_4$ , другого –  $x_2 = b \cdot x_3 + q' \cdot x_5$ , третього –  $x_3 = q \cdot x_1$ , четвертого –  $x_4 = a \cdot x_3 + c \cdot x_2$ .

Вузол графа, який являє собою величину, прийняту в даній системі за вхідну, зображують зліва, а вузол графа, що відповідає вихідній величині, – справа. Прийнято так зображувати граф, щоб від вхідного вузла відходила тільки одна вітка, а віток, які б підходили, не було. Аналогічно, до вихідного вузла повинна підходити тільки одна вітка (тобто віток, які б підходили до вихідного вузла, більше однієї не було). Це завжди можна зробити, вводячи у граф додаткові вузли й вітки, передача яких рівна одиниці. Так, у графі на рис. 4.10, б додатковими вузлами є вузли 1 і 5. Між вхідним вузлом 0 і додатковим 1 є вітка з передачею 1. Аналогічно додатковий вузол 5 з'єднаний з вихідним вузлом 6 віткою з передачею 1.

Для того, щоб від даної системи, наприклад якої-небудь електричної схеми, перейти до відповідного їй сигнального графа, застосовують різні методи залежно від того, яким чином записують рівняння для цих кіл: на основі законів Кірхгофа, використовуючи метод вузлових потенціалів чи контурних струмів.

Направлений граф містить ту ж інформацію, що й система рівнянь, тільки така інформація подається графічно у вигляді графа. Якщо за основу взяти рівняння, складені на основі законів Кірхгофа, то вузлами графа є струми віток і напруги на елементах схеми. Коли за основу взяті рівняння вузлових потенціалів, то вузли графа будуть виражати вузлові точки схеми й шукані струми.

Розглянемо спочатку впорядкований перехід від заданої електричної схеми до сигнального графа, минаючи етап складання рівнянь, поклавши в основу метод контурних струмів (рис. 4.11, а).

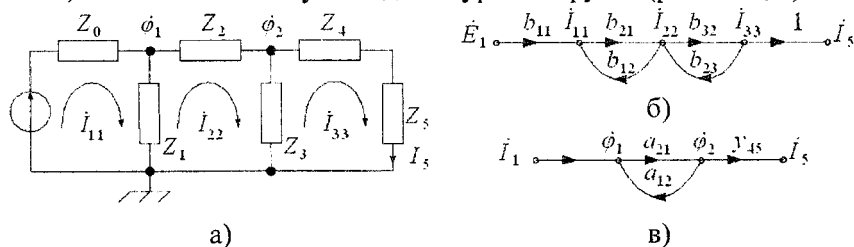


Рис. 4.11. Електрична схема кола (а) та її графи на основі контурних струмів (б) і вузлових потенціалів (в)



Напрямок контурних струмів у всіх контурах вибираємо однаковий, наприклад, за годинниковою стрілкою. Число вузлів у графі рівне числу контурів плюс число нерівних нулю контурних е.р.с., плюс вихідна величина. Кожному контурному струму, кожній контурній е.р.с. і вихідній величині відповідає свій вузол. Так, у нашому випадку на рис. 4.11, а є три контурні струми, одна контурна е.р.с. та одна вихідна величина – струм  $I_s$ . Цій схемі відповідає граф на рис. 4.11, б, у якому є п'ять вузлів.

Вузли  $I_{kk}$  розміщуємо всередині відповідних контурів, а вузли  $E_{kk}$  і вузол вихідної величини виносимо на периферію зліва й справа відповідно. З'єднуємо дані вузли вітками, вказуємо на них стрілками й записуємо значення передач віток. Кожний вузол  $I_{kk}$  з'єднаний з вузлом  $E_{kk}$  віткою з передачею  $b_{kk} = \frac{1}{Z_{kk}}$ , де  $Z_{kk}$  – власний опір  $k$ -го контуру. Стрілка на цій вітці направлена до вузла  $I_{kk}$ . Числове значення  $E_{kk}$  може бути і додатним, і від'ємним (додатне, якщо сумарна е.р.с.  $k$ -го контуру направлена за напрямом контурного струму  $I_{kk}$ ). Крім того, кожний вузол  $I_{kk}$  з'єднаний з яким-небудь іншим вузлом  $I_{pp}$  (якщо між контуром  $k$  і  $p$  на схемі є загальна (сумісна) вітка) двома вітками. Одна вітка має стрілку, направлену до вузла  $I_{kk}$ , і передачу  $b_{kp} = \frac{Z_{kp}}{Z_{kk}}$ , де  $Z_{kp}$  – опір суміжної вітки між  $k$ - і  $p$ -контурами. На другій вітці стрілка направлена до вузла  $I_{pp}$ . Її передача рівна  $b_{pk} = \frac{Z_{kp}}{Z_{pp}}$ , де  $Z_{pp}$  – власний опір  $p$ -контуру. При синфазному (узгодженому) напрямі всіх контурних струмів передачі всіх віток між вузлами  $k$  і  $p$  додатні.

За методом вузлових потенціалів граф будують так само, як за методом контурних струмів, тільки вузлами графа вже є потенціали вузлів схеми, вузлові струми та вихідна величина (рис. 4.11, в).

Якщо в електричній схемі вузли  $k$  і  $p$  з'єднані віткою з провідністю  $Y_{kp}$ , а сумарна провідність віток, які сходяться у вузлах  $k$  і  $p$ , позначена відповідно як  $Y_{kk}$  і  $Y_{pp}$ , то на графі між вузлами  $\phi_k$  і

$\dot{\phi}_p$  буде дві вітки. На одній з них стрілка направлена до вузла  $\dot{\phi}_k$ , а її передача  $a_{kk} = \frac{Y_{kp}}{Y_{kk}}$ . На другій стрілка направлена вже до вузла  $\dot{\phi}_p$ , а її передача  $a_{pk} = \frac{Y_{kp}}{Y_{pp}}$ .

Тут слід звернути увагу на те, що перший індекс в  $a$  вказує вузол, до якого направлена стрілка, другий – від якого направлена стрілка. Якщо вузли  $k$  і  $p$  на схемі не з'єднані віткою з провідністю  $Y_{kp}$ , то на графі вузли  $\dot{\phi}_k$  і  $\dot{\phi}_p$  не з'єднані вітками. Вузол  $\dot{\phi}_k$  з'єднаний з вузлом вузлового струму  $\dot{I}_{kk}$  віткою з передачею  $a_{kk} = \frac{1}{Y_{kk}}$  і направлений до вузла  $\dot{\phi}_k$ . Шуканому струму  $\dot{I}_{kp}$  у вітці з провідністю  $Y_{kp}$  на графі буде відповідати вузол вихідної величини  $\dot{I}_{kp}$ .

Відповідно до закону Ома для ділянки кола до вузла графа  $\dot{I}_{kp}$  повинні підходити дві вітки, стрілки на яких направлені до вузла  $\dot{I}_{kp}$ . Передача від вузла  $\dot{\phi}_k$  рівна  $Y_{kp}$ , а передача від вузла  $\dot{\phi}_p$  рівна  $Y_{kp}$ . Якщо один із цих вузлів заземлений, то цей вузол і передача від нього будуть відсутні.

Якщо граф складають для кола постійного струму, то комплексні опори  $Z$  необхідно замінити на активні опори  $R$ , комплексну провідність  $Y$  – на активну провідність  $G$ , а точки над  $\phi$ ,  $E$ ,  $I$ , які характеризують гармонічність зміни цих величин, не ставлять.

А тепер, як і в електричних колах, повернемося до еквівалентних перетворень у сигнальних графах з метою їх спрощення. Вони полягають у такому:

1. Передача послідовно з'єднаних віток (рис. 4.12, а).
2. Передача двох паралельно з'єднаних віток (рис. 4.12, б).

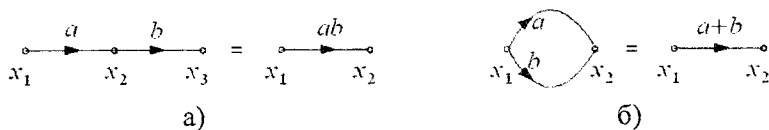


Рис. 4.12. Передача послідовно (а) і паралельно з'єднаних (б) віток

3. Розвужлення простої вузлової точки (рис. 4.13).

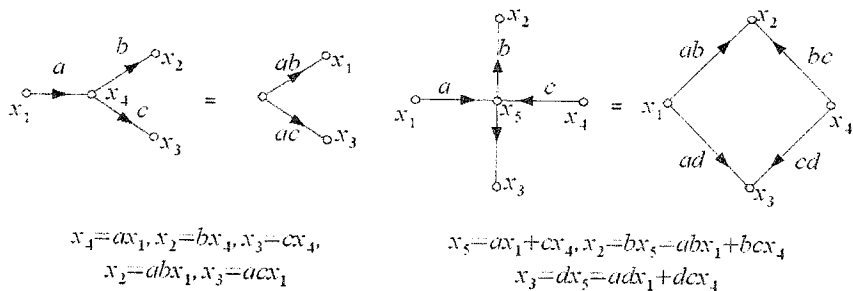


Рис. 4.13. Розвужлення вузлових точок сигнального графа

4. Включення контуру на шляху (рис. 4.14, а) і виключення петлі (рис. 4.14, б).

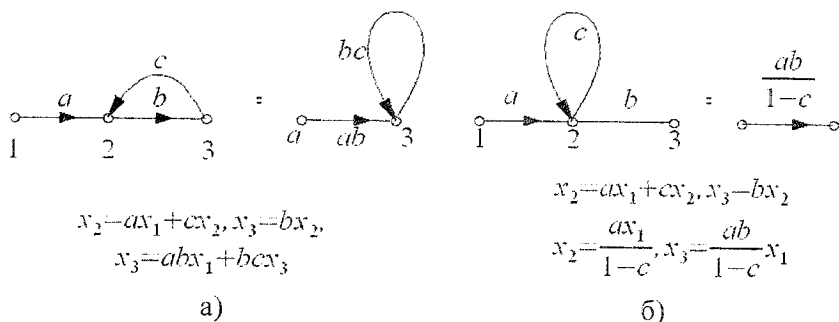


Рис. 4.14. Виключення контуру (а) і петлі (б)

5. Заміна двох і більше петель однією (рис. 4.15).

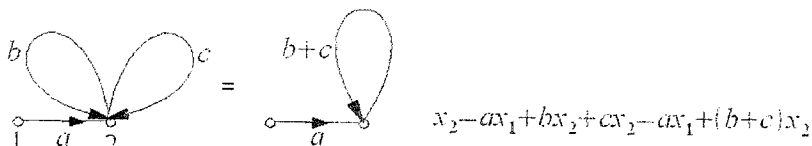


Рис. 4.15. Сумування петель на шляху

6. Розтяг (подовження) вузла (рис. 4.16).

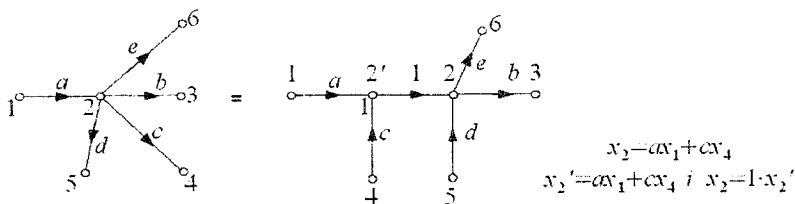


Рис. 4.16. Подовження вузла сигнального графа

А тепер повернемося до визначення передачі графа за допомогою формули Мезона, яка дозволяє визначити не тільки передачу в електронних схемах, а й коефіцієнти відбивання й заломлення електромагнітних хвиль під час їх падіння на стик різних середовищ.

У 1956 р. Мезон запропонував загальну формулу для визначення передачі графа. На цій формулі базуються розрахунки сигнальних графів. Дамо визначення певним термінам сигнальних графів.

Прямий шлях  $P$  – це шлях уздовж стрілок від виток до стоку, проходячи який жоден із вузлів не зустрічається більше одного разу. Передача прямого шляху визначається добутком передач віток цього шляху. Між витком і стоком сигнального графа може бути декілька прямих віток.

Петля оберненого зв'язку являє собою замкнений шлях, уздовж якого (по кругу) кожний вузол може зустрічатися один раз. Передачу петлі оберненого зв'язку часто позначають  $T$  з індексом. Передача петлі оберненого зв'язку рівна добутку передач віток, які утворюють цю петлю.

Тоді загальна формула для визначення передачі графа записується у вигляді:

$$G = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + \dots + P_n \Delta_n}{\Delta}, \quad (4.19)$$

де  $P_k$  – передача  $k$ -го прямого шляху від виток до стоку,  $n$  – число прямих шляхів.

Визначник  $\Delta_k$  рівний одиниці мінус сума взятих поодинокі передачі петель оберненого зв'язку, що не торкаються  $k$ -го прямого шляху (але петлі можуть торкатись одна одної), плюс сума попарних добутків передач петель оберненого зв'язку, що не торкаються

одна одної, і  $k$ -го прямого шляху, мінус сума потрійних добутоків передач петель оберненого зв'язку, які не торкаються одна одної, і  $k$ -го прямого шляху, плюс і т. д.

Визначник  $\Delta$  рівний одиниці мінус сума взятих поодинокі передач петель оберненого зв'язку (які торкаються і які не торкаються одна одної), плюс сума попарних добутоків передач петель оберненого зв'язку, що не торкаються одна одної, мінус сума потрійних добутоків передач петель оберненого зв'язку, які не торкаються одна одної, плюс і т. д.

Для закріплення матеріалу під час визначення передачі графа використаємо сигнальний граф, поданий на рис. 4.17. Для першого прямого шляху з передачею  $P_1 = ab$  визначник  $\Delta_1$  рівний одиниці мінус сума передач петель оберненого зв'язку, взятих поодинокі і які не торкаються цього прямого шляху ( $T_1 + T_2$ ), плюс попарний добуток передач петель оберненого зв'язку, які не торкаються одна одної, і вибраного прямого шляху.

У нашому графі (рис. 4.17) відсутні петлі, які б не торкались одна одної й не торкались першого прямого шляху. Тому доданки з попарними добутками петель оберненого зв'язку, як і взяті по три (і більше), у виразі для  $\Delta_1$  відсутні.

Отже, маємо  $\Delta_1 = 1 - (T_1 + T_2)$ , де  $T_1 = h$ ,  $T_2 = fg$ .

Для другого прямого шляху  $P_2 = ceb$ , а  $\Delta_2 = 1 - T_1$ .

Знаменник  $\Delta = 1 - (T_1 + T_2 + T_3) + T_1 T_3$ , де  $T_3 = ed$  ( $T_1$  і  $T_3$  – петлі, які не торкаються одна одної).

Тоді

$$G = \frac{ab(1 - T_1 - T_2) + ceb(1 - T_1)}{1 - (T_1 + T_2 + T_3) + T_1 T_3} = \frac{ab(1 - h - fg) + ceb(1 - h)}{1 - (h + fg + ed) + hed}.$$

Тепер розглянемо визначення коефіцієнтів відбивання й заломлення під час падіння плоскої електромагнітної хвилі на стик середовищ. Розглянемо саме особливості побудови графа з використанням формули Мезона для такої задачі.

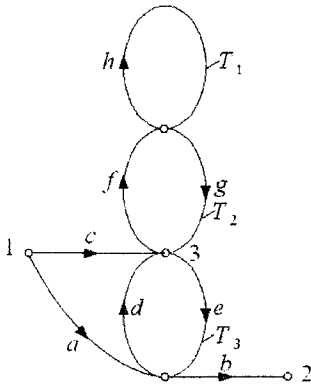


Рис. 4.17. До визначення передачі сигнального графа

Плоска електромагнітна хвиля (рис. 4.18) падає нормально на пластину ідеального діелектрика  $\epsilon_{r2}$ , який з обох боків обмежений повітряним середовищем ( $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r3} = 1$ ). Користуючись методом направлених графів, визначити коефіцієнт радіопрозорості  $T$  і коефіцієнт відбивання  $R$ . Під коефіцієнтом радіопрозорості  $T$  розуміється відношення напруженості поля заломленої через пластину хвилі до напруженості поля падаючої хвилі:  $T = \frac{\dot{E}_3}{\dot{E}_{nad}}$ . Під кое-

фіцієнтом відбивання пластини розуміється відношення напруженості поля відбитої хвилі до напруженості поля падаючої хвилі:  $R = \frac{\dot{E}_{ad}}{\dot{E}_{nad}}$ .

Коефіцієнт радіопрозорості  $T = G_{71} = \frac{\dot{E}_3}{\dot{E}_{nad}}$ , де  $G_{71}$  – передача графа від вузла 1 до вузла 7, яку знаходимо, використовуючи формулу Мезона:

$$G = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \Delta_k}{\Delta}$$

У нашому випадку  $n=1$ ,  $P_1 = T_{21} T_{32} e^{-\gamma d}$ ,  $\Delta_1 = 1$ ,  $\Delta = 1 - R_{21} R_{23} e^{-2\gamma d}$ . Тоді передача рівна

$$T = \frac{T_{21} T_{32} e^{-\gamma d}}{1 - R_{21} R_{23} e^{-2\gamma d}}$$

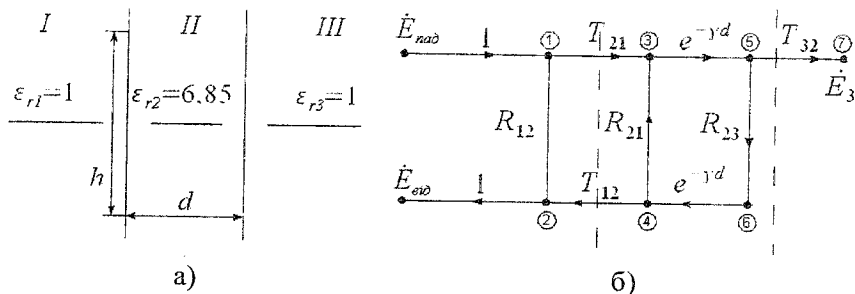


Рис. 4.18. Стик середовищ (а) і його сигнальний граф за нормального падіння плоскої електромагнітної хвилі (б) (вузли відмічено кружками)

Коефіцієнт відбивання пластини  $R = G_{21} = \frac{\dot{E}_{oi0}}{\dot{E}_{nad}}$ , де  $G_{21}$  – передача графа від вузла 1 до вузла 2. Ураховуючи, що в даному випадку  $n=2$ ,  $P_1 = R_{12}$ ,  $\Delta_1 = 1 - R_{21} R_{23} e^{-2\gamma d}$ ,  $P_2 = T_{21} T_{12} R_{23} e^{-2\gamma d}$ ,  $\Delta_2 = 1$ ,  $\Delta = 1 - R_{21} R_{23} e^{-2\gamma d}$ , на основі формули Мезона отримаємо:

$$R = \frac{R_{12} (1 - R_{21} R_{23} e^{-2\gamma d}) + T_{21} T_{12} R_{23} e^{-2\gamma d}}{1 - R_{21} R_{23} e^{-2\gamma d}}$$

Оскільки  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r3} = 1$ , то  $-R_{12} = R_{21} = R_{23}$  і коефіцієнт прозорості  $T$  буде рівний:

$$T = \frac{T_{21} T_{12} e^{-\gamma d}}{1 - R_{21}^2 e^{-2\gamma d}}$$

а коефіцієнт відбивання

$$R = R_{12} + T R_{21} e^{-\gamma d}$$

Обчислимо передачі віток графа через хвильові опори:

$$T_{12} = \frac{2\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r2}} + 1} = 1,26; \quad T_{21} = \frac{2}{\sqrt{\epsilon_{r2}} + 1} = 0,73;$$

$$R_{21} = -R_{12} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} - 1}{\sqrt{\epsilon_{r2}} + 1} = 0,268.$$

Тоді коефіцієнт поширення хвилі в діелектрику

$$\gamma = j \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\varepsilon_{r2}}$$

при  $f = 25 \text{ ГГц}$  і  $\varepsilon_{r2} = 6,85$   $\gamma = j1,36 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$ ,  $T = 0,92 e^{-j3070}$ ,  
 $R = 0,4 e^{j143^\circ}$  для  $d = 10 \text{ мм}$ .

Як бачимо, сигнальні графі є сильним аналітичним інструментом для моделювання проходження електромагнітних хвиль на стику різних середовищ, що є важливим для хвилеводів і шаруватих структур.

#### 4.7 Структура електромагнітного поля $E$ -, $H$ -, $T$ - і $EH$ -типів

Важливими компонентами радіотехнічних і телекомунікаційних систем НВЧ є хвилеводи – пристрої для передачі електромагнітних коливань від генератора до навантаження. Будь-який хвилевід незалежно від особливостей його конструкції повинен забезпечувати локалізацію області, у якій поширюється електромагнітна хвиля. Тому простішою конструкцією, яка дає можливість обмежити просторову область існування поля, є нескінченна металева площина. За допомогою неї можна екранувати (відокремити) один півпростір від іншого.

У цьому розділі ми також розглянемо явища, що відбуваються під час падіння під кутом однорідної плоскої електромагнітної хвилі на ідеально провідну площину, коли електромагнітна хвиля поляризована.

##### 4.7.1 Падіння плоскої електромагнітної хвилі з паралельною (вертикальною) поляризацією на ідеально провідну поверхню

Нехай на ідеально провідну площину під деяким кутом  $\varphi$  падає однорідна плоска електромагнітна хвиля (рис. 4.19), електричний вектор якої лежить у площині  $xOz$  (вертикальна або паралельна поляризація). При цьому вважається, що напівпростір  $x > 0$  має електродинамічні параметри  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$ , тобто є вакуумом, а падаюча хвиля гармонічно змінюється з частотою  $\omega$ . Коефіцієнт фази цієї

хвилі  $\beta_0 = \frac{\omega}{c}$ .



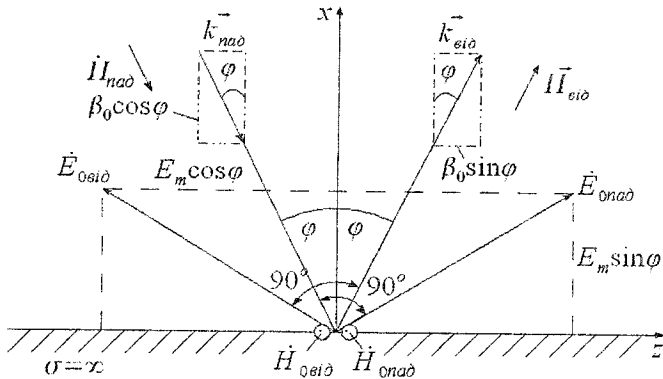


Рис. 4.19. Падіння плоскої електромагнітної хвилі з паралельною (вертикальною) поляризацією

Введемо хвильовий вектор падаючої хвилі  $\vec{k}_{nao}$ , який має модуль  $\beta_0$  і збігається з вектором Пойтінга падаючої хвилі  $\vec{\Pi}_{nao}$ . На рис. 4.19 видно, що цей хвильовий вектор утворює кут  $180^\circ - \varphi$  з віссю  $x$ ,  $90^\circ - \varphi$  з віссю  $z$  і  $90^\circ$  з віссю  $y$  (позитивні напрямки). Оскільки  $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$ ,  $\cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$ , то хвильовий вектор падаючої хвилі має таке координатне представлення:

$$\vec{k}_{nao} = \beta_0 (-\cos \varphi \vec{i}_x + \sin \varphi \vec{i}_z).$$

Тоді комплексна амплітуда вектора напруженості електричного поля падаючої хвилі буде

$$\dot{E}_{nao} = \dot{E}_{0nao} e^{-j\vec{k}_{nao}\vec{r}} = \dot{E}_{0nao} e^{-j\beta_0(-x \cos \varphi + z \sin \varphi)}, \quad (4.20)$$

де векторний амплітудний коефіцієнт  $\dot{E}_{0nao}$  пов'язаний з фізичною амплітудою електричного вектора  $E_m$  таким чином:

$$\vec{E}_{0nao} = E_m \sin \varphi \vec{i}_x + E_m \cos \varphi \vec{i}_z.$$

Під час падіння плоскої електромагнітної хвилі на ідеально провідну поверхню виникає однорідна плоска відбита хвиля вже з хвильовим вектором

$$\vec{R}_{eio} = \beta_0 (\cos \varphi \vec{i}_x + \sin \varphi \vec{i}_z),$$

який відповідно до законів відбивання напрямлений під кутом  $\varphi$  до позитивного напрямку осі  $x$ . Тоді комплексна амплітуда електричного вектора відбитої хвилі буде рівна

$$\dot{\vec{E}}_{\text{a}i\text{d}} = \vec{E}_{0\text{a}i\text{d}} e^{-j\vec{k}_{\text{a}i\text{d}}\vec{r}} = \vec{E}_{0\text{a}i\text{d}} e^{-j\beta_0(x \cos \varphi + z \sin \varphi)} \quad (4.21)$$

і повинна мати такий векторний амплітудний коефіцієнт  $\vec{E}_{0\text{a}i\text{d}}$ , щоб сумарне електромагнітне поле на межі розділу при  $x=0$  задовольняло крайову умову:  $z$ -ва проекція вектора напруженості електричного поля повинна бути рівна нулеві. Тобто відбита хвиля повинна компенсувати тангенціальну складову електричного вектора поля падаючої хвилі на межі розділу. Тому

$$\vec{E}_{0\text{a}i\text{d}} = E_m \sin \varphi \vec{i}_x - E_m \cos \varphi \vec{i}_z.$$

Тепер можна визначити структури електричного й магнітного полів над ідеально провідною поверхнею для  $x > 0$ .

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_{\Sigma} &= \dot{\vec{E}}_{\text{n}a\text{o}} + \dot{\vec{E}}_{\text{a}i\text{d}} = E_m \sin \varphi \left[ e^{-j\beta_0(-x \cos \varphi + z \sin \varphi)} + e^{-j\beta_0(x \cos \varphi + z \sin \varphi)} \right] \vec{i}_x + \\ &+ E_m \cos \varphi \left[ e^{-j\beta_0(-x \cos \varphi + z \sin \varphi)} - e^{-j\beta_0(x \cos \varphi + z \sin \varphi)} \right] \vec{i}_z = \\ &= E_m \sin \varphi e^{-j\beta_0 z \sin \varphi} \left( e^{j\beta_0 x \cos \varphi} + e^{-j\beta_0 x \cos \varphi} \right) \vec{i}_x + \\ &+ E_m \cos \varphi e^{-j\beta_0 z \sin \varphi} \left( e^{j\beta_0 x \cos \varphi} - e^{-j\beta_0 x \cos \varphi} \right) \vec{i}_z = \\ &= 2 E_m \sin \varphi \cos(\beta_0 x \cos \varphi) e^{-j\beta_0 z \sin \varphi} \vec{i}_x + \\ &+ j 2 E_m \cos \varphi \sin(\beta_0 x \cos \varphi) e^{-j\beta_0 z \sin \varphi} \vec{i}_z. \end{aligned} \quad (4.22)$$

За будь-яких значень кута падіння в інтервалі  $0 < \varphi < 90^\circ$  результуюче поле являє собою хвилю, яка поширюється в додатному напрямі  $z$ , про що говорить фазовий множник  $\exp(-j\beta_0 z \sin \varphi)$ , — це біжуча хвиля. На відміну від раніше розглянутих однорідних плоских хвиль, у даному випадку амплітуди складових векторів електричного поля вже не постійні, а залежать від поперечної координати  $x$  за законом  $\cos(\beta_0 x \cos \varphi)$  або  $\sin(\beta_0 x \cos \varphi)$ . Такі процеси вже називають неоднорідними плоскими хвилями. З фізичної точки зору в поперечній площині за рахунок інтерференції падаючої і відбитої хвиль виникає стояча хвиля.

Розглянемо тепер, як проявляє себе вектор напруженості магнітного поля для вертикальної поляризації. Якщо вектор напруженості електричного поля падаючої хвилі лежить у площині  $xOz$ , то перпендикулярний йому вектор напруженості магнітного поля має тільки єдину складову, яка орієнтована вздовж осі  $y$  (це видно з рис. 4.19). Комплексна амплітуда  $y$ -ї проекції магнітного вектора

падаючої хвилі повинна залежати від просторових координат  $x$  і  $z$  таким чином, як і амплітуда електричного вектора

$$\dot{H}_{nao} = \frac{E_m}{Z_0} e^{-j\beta_0(-x\cos\varphi + z\sin\varphi)} \vec{i}_y,$$

де  $Z_0 = 120\pi = 377 \text{ Ом}$  – хвильовий опір вакууму.

Оскільки вектор Пойтінга відбитої хвилі направлений уздовж вектора  $\vec{R}_{oio}$ , то необхідно, щоб магнітний вектор відбитої хвилі  $\vec{H}_{oio}$  на межі розділу був направлений у той самий бік, що і вектор  $\vec{H}_{nao}$ . Тоді відповідна комплексна амплітуда магнітного вектора відбитої хвилі рівна

$$\dot{H}_{oio} = \frac{E_m}{Z_0} e^{-j\beta_0(x\cos\varphi + z\sin\varphi)} \vec{i}_y.$$

Сумуючи ці вирази, отримаємо просторову залежність комплексної амплітуди магнітного вектора у вигляді

$$\dot{H}_z = \dot{H}_{nao} + \dot{H}_{oio} = \frac{2E_m}{Z_0} \cos(\beta_0 x \cos\varphi) e^{-j\beta_0 z \sin\varphi} \vec{i}_y. \quad (4.23)$$

Таким чином, магнітний вектор є чисто поперечним, тоді як електричний вектор має як поперечну  $E_x$ , так і поздовжню складову  $E_z$ . Неоднорідні плоскі хвилі такої структури прийнято називати  $E$ -хвилями. У літературі їх подають також як  $TM$ -хвилі (*Transverse Magnetic Waves* – поперечні магнітні хвилі). Для таких хвиль  $E_x, E_z \neq 0, H_y \neq 0, H_z = 0$ .

Можливий варіант, коли  $\varphi = 90^\circ$ , тобто коли падаюча хвиля поширюється паралельно до межі розділу, так що відбита хвиля вже відсутня. Поле в півпросторі для  $x > 0$  є при цьому однорідною плоскою хвилею, але вектори електромагнітного поля  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  не мають складових у напрямі осі  $z$  ( $E_z = 0, H_z = 0$ ). Такі електромагнітні хвилі називають  $T$ -хвилями (*Transverse Waves* – поперечні хвилі), або  $TEM$ -хвилями.

#### 4.7.2 Падіння плоскої електромагнітної хвилі з перпендикулярною (горизонтальною) поляризацією

Схему променів, які пояснюють орієнтацію векторів поля для даної поляризації, подано на рис. 4.20. Використавши попередні

вкладки, запишемо комплексну амплітуду вектора напруженості електричного поля падаючої хвилі у вигляді:

$$\dot{E}_{nad} = E_m e^{-j\beta_0(-x \cos\varphi + z \sin\varphi)} \vec{i}_y,$$

де  $E_m$  – амплітудне значення напруженості електричного поля в точці  $x=0$ .

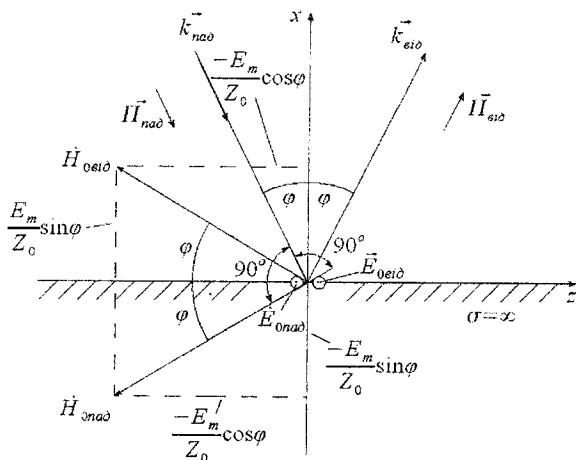


Рис. 4.20. Padіння плоскої електромагнітної хвилі з перпендикулярною (горизонтальною) поляризацією

Для того, щоб виконувалася крайова умова  $E_r = 0$  при  $x=0$ , необхідно, щоб у півпросторі  $x > 0$  існувала плоска відбита хвиля з комплексною амплітудою електричного вектора

$$\dot{E}_{aid} = -E_m e^{-j\beta_0(x \cos\varphi + z \sin\varphi)} \vec{i}_y$$

(проекція  $E_m$  з від'ємним знаком та проекція її на вісь  $x$  зі знаком, протилежним падаючій хвилі).

У цьому випадку результуюче електромагнітне поле у верхній півплощині має комплексну амплітуду вектора напруженості електричного поля

$$\begin{aligned} \dot{E}_\Sigma &= \dot{E}_{nad} + \dot{E}_{aid} = E_m (e^{j\beta_0 x \cos\varphi} - e^{-j\beta_0 x \cos\varphi}) e^{-j\beta_0 z \sin\varphi} \vec{i}_y = \\ &= j 2 E_m \sin(\beta_0 x \cos\varphi) e^{-j\beta_0 z \sin\varphi} \vec{i}_y. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Щоб з'ясувати просторову залежність магнітного вектора, звернемо увагу на рис. 4.20, де вектори Пойтінга  $\vec{P}_{nad}$  і  $\vec{P}_{aid}$  направ-

лені вздовж хвильових векторів  $\vec{k}_{nad}$  і  $\vec{k}_{oid}$ , якщо амплітудні коефіцієнти векторів напруженості магнітного поля є такими:

$$\vec{H}_{0nad} = -\frac{E_m}{Z_0} \sin \varphi \vec{i}_x - \frac{E_m}{Z_0} \cos \varphi \vec{i}_z,$$

$$\vec{H}_{0oid} = \frac{E_m}{Z_0} \sin \varphi \vec{i}_x - \frac{E_m}{Z_0} \cos \varphi \vec{i}_z.$$

Тоді комплексна амплітуда сумарного магнітного вектора буде рівна:

$$\begin{aligned} \dot{H}_z = \dot{H}_{nad} + \dot{H}_{oid} = & -\frac{j2E_m}{Z_0} \sin \varphi \sin(\beta_0 x \cos \varphi) e^{-j\beta_0 z \sin \varphi} \vec{i}_x - \\ & -\frac{2E_m}{Z_0} \cos \varphi \cos(\beta_0 x \cos \varphi) e^{-j\beta_0 z \sin \varphi} \vec{i}_z. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Проаналізувавши формули (4.24) і (4.25), можна зробити висновки для випадку перпендикулярної (горизонтальної) поляризації: розглянутий електромагнітний процес являє собою також неоднорідну плоску хвилю, яка поширюється в бік збільшення координати  $z$  (тобто вздовж межі розділу) і є біжучою хвилею. У поперечному напрямі поле має характер стоячої хвилі.

Принципова відмінність перпендикулярної поляризації від паралельної полягає в тому, що тут електричне поле має єдину відмінну від нуля проекцію  $E_y$  і є чисто поперечним у вигляді стоячої хвилі. Вектор напруженості магнітного поля, навпаки, крім поперечної складової  $H_x$ , має і поздовжню проекцію  $H_z$ . Такі направляючі хвилі називають  $H$ -хвилями, або  $TE$ -хвилями (*Transverse Electric Waves* – поперечні електричні хвилі).

Тут також слід зауважити, що під час падіння плоскої хвилі з перпендикулярною поляризацією на межу розділу з ідеальним провідником чисто поперечних  $T$ -хвиль (як при паралельній поляризації) отримати не можна. Дійсно, якщо  $H_z = 0$  лише при  $\varphi = 90^\circ$  ( $\cos \varphi = 0$ ), то і при  $\cos \varphi = 0$   $\sin(\beta_0 x \cos \varphi) = 0$ , тобто  $E_y = 0$ , а електромагнітна хвиля без електричного вектора існувати не може.

### 4.7.3 Структура електромагнітного поля $E$ -, $H$ -, $T$ -хвиль

Оскільки аналітична форма представлення векторів поля через просторові залежності відповідних проекцій часто немає наочності, тому корисно також побудувати картину розподілу в просторі силових ліній електричного й магнітного полів для паралельної і перпендикулярної поляризацій.

Як уже зазначалось у висновках попередніх підрозділів, характер залежностей проекцій векторів електромагнітного поля хвиль  $E$  і  $H$ -типів уздовж поздовжньої координати  $z$  і поперечної координати  $x$  є різним: по осі  $z$  устанавлюється біжуча хвиля, а по осі  $x$  – стояча хвиля, тобто енергія передається по осі  $z$ , а по осі  $x$  вона лише коливається, перетворюючись з одного виду в інший. Для того щоб цю особливість хвильового процесу збагнути краще, введемо два параметри:

- поздовжнє хвильове число  $h = \beta_0 \sin \varphi$ ;
- поперечне хвильове число  $g = \beta_0 \cos \varphi$ ,

такі, що  $h^2 + g^2 = \beta_0^2$  за будь-якого кута падіння.

Вищеподані вирази дозволяють значно спростити вирази для проекцій векторів поля (індекс  $\Sigma$  опускається), бо розглядаємо лише сумарне поле.

Для  $E$ -хвиль ( $TM$ ) ці вирази будуть такими:

$$\begin{cases} \dot{E} = 2E_m \sin \varphi \cos gx e^{-jhz} \vec{i}_x + j2E_m \cos \varphi \sin gx e^{-jhz} \vec{i}_z, \\ \dot{H} = \frac{2E_m}{Z_0} \cos gx e^{-jhz} \vec{i}_y. \end{cases} \quad (4.26)$$

Для  $H$ -хвиль ( $TE$ ) ці вирази мають вигляд:

$$\begin{cases} \dot{E} = j2E_m \sin \varphi \sin gx e^{-jhz} \vec{i}_y, \\ \dot{H} = -j \frac{2E_m}{Z_0} \sin \varphi \sin gx e^{-jhz} \vec{i}_x - \frac{2E_m}{Z_0} \cos \varphi \cos gx e^{-jhz} \vec{i}_z. \end{cases} \quad (4.27)$$

Характерний вигляд залежностей функцій  $\dot{E}$  і  $\dot{H}$ , що визначений формулами (4.26) і (4.27), від координати  $z$  указує на те, що поздовжнє хвильове число  $h$  відіграє роль коефіцієнта фази направляючих хвиль над провідною поверхнею. Тоді, за визначенням, фазова швидкість хвильового процесу матиме такий вигляд:

$$v_\phi = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{\beta_0 \sin \varphi} = \frac{\omega / \beta_0}{\sin \varphi} = \frac{c}{\sin \varphi}.$$

Тобто за будь-якого кута падіння  $\varphi$ , відмінного від  $90^\circ$ , має місце нерівність  $v_\phi > c$ . Тому хвилі  $E$ - і  $H$ -типів ще називають швидкими. При  $\varphi = 0$  фазова швидкість хвильового процесу вздовж осі  $z$  ( $\sin \varphi = 0$ ) буде прямувати до нескінченності.

Незважаючи на суттєві відмінності, структури електромагнітного поля  $E$ - і  $H$ -типів мають загальну рису: проекція векторів поля описується періодичними функціями як поздовжньої координати  $z$ , так і поперечної координати  $x$ . Тому просторовий період поля  $\Lambda_{\text{позд}}$  уздовж осі поширення біжучої хвилі  $z$  будемо називати поздовжньою довжиною хвилі:

$$\Lambda_{\text{позд}} = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{\beta_0 \sin \varphi} = \frac{2\pi / \beta_0}{\sin \varphi} = \frac{\lambda_0}{\sin \varphi}.$$

Згідно з викладеним вище,  $\Lambda_{\text{позд}} \geq \lambda_0$  і  $v_\phi \geq c$ .

Аналогічно просторовий період стоячої хвилі вздовж поперечної осі  $x$  буде називатися поперечною довжиною хвилі:

$$\Lambda_{\text{поп}} = \frac{2\pi}{g} = \frac{2\pi}{\beta_0 \cos \varphi} = \frac{2\pi / \beta_0}{\cos \varphi} = \frac{\lambda_0}{\cos \varphi}.$$

Параметри  $\lambda_0$ ,  $\Lambda_{\text{позд}}$  і  $\Lambda_{\text{поп}}$  пов'язані співвідношенням

$$\Lambda_{\text{позд}}^2 \sin^2 \varphi + \Lambda_{\text{поп}}^2 \cos^2 \varphi = 2\lambda_0^2,$$

бо  $h^2 + g^2 = \beta_0^2$ .

Для того щоб наочно уявити собі електромагнітний процес, який виникає під час падіння плоскої електромагнітної хвилі на ідеально провідну площину, доцільно побудувати силові лінії електричного й магнітного полів. Виконаємо таку побудову на основі вирізів (4.26) і (4.27).

Розглянемо спочатку таку задачу в загальному вигляді. Нехай крива  $MN$  (рис. 4.21) є деякою силовою лінією поля  $\vec{E}$ , що спостерігається у фіксований момент часу  $t_0$ . Вектор  $\vec{E}$ , який визначений у точці  $A$  і який має відповідні проекції на осі  $E_x$  і  $E_z$ , зображено

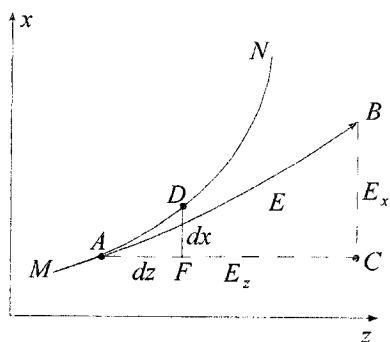


Рис. 4.21. До виведення рівняння силових ліній електромагнітного поля

на рисунку відповідно відрізком  $AB$ . Згідно з визначенням, цей відрізок направлений по дотичній до силової лінії в точці  $A$ .

Якщо координата  $z$  у точці  $A$  отримає приріст  $dz$ , то, рухаючись уздовж силової лінії, ми з точки  $A$  перейдемо в точку  $D$ . При цьому координата  $x$  отримає приріст  $dx$ . З рівності (подібності) трикутників  $ADF$  і  $ABC$  можна записати:

$$\frac{dx}{E_x(x, z, t_0)} = \frac{dz}{E_z(x, z, t_0)}$$

або

$$\frac{dx}{dz} = \frac{E_x(x, z, t_0)}{E_z(x, z, t_0)}$$

Ця рівність являє собою диференціальне рівняння силової лінії поля.

Крім рівняння необхідно також задати початкові умови, вказавши деяку точку простору з координатами  $(x_0, z_0)$ , через яку повинна проходити ця силова лінія. З теорії диференціальних рівнянь відомо, що якщо в околі вибраної точки права частина рівняння силової лінії має неперервну похідну за аргументом  $x$ , то така точка є неособливою й через неї проходить єдина силова лінія як інтегральна крива.

Продемонструємо тепер описану методику на прикладі побудови силових ліній поля електричного вектора для  $E$ -хвилі (формула 4.26). Для цього перейдемо від комплексних амплітуд до миттєвих значень:

$$E(x, z, t) = 2 E_m \sin \varphi \cos gx \cos(\omega t - hz) \vec{i}_x - 2 E_m \cos \varphi \sin gx \sin(\omega t - hz) \vec{i}_z$$

Слід зауважити, що  $z$ -ова проекція випереджає за фазою  $x$ -ву проекцію на  $\pi/2$ , і тому  $\cos(\omega t - hz + \pi/2) = -\sin(\omega t - hz)$ .



Побудуємо силові лінії поля в момент часу  $t = 0$ . Тоді рівняння силових ліній запишеться:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\sin \varphi \cos gx \cos hz}{\cos \varphi \sin gx \sin hz} = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} gx \operatorname{ctg} hz. \quad (4.28)$$

Аналізуючи дане рівняння силових ліній, доходимо таких висновків:

1. На межі розділу при  $x = 0$  похідна  $dx/dz$  необмежено велика. Значить, силові лінії поля  $\vec{E}$  повністю відповідають крайовим умовам і підходять до поверхні ідеального провідника по нормалі.

2. Картина силових ліній поля є періодичною з періодами  $\Lambda_{\text{позд}}$  і  $\Lambda_{\text{пот}}$  по осях  $z$  і  $x$  відповідно. Тому силові лінії електричного вектора  $\vec{E}$  являють собою замкнуті криві, які лежать у площині  $xOz$ . Виняток становлять лише ті лінії, які входять в ідеальний провідник або виходять із нього.

На рис. 4.22 зображено групу кривих, побудованих шляхом чисельного інтегрування на комп'ютері для випадку  $\varphi = 45^\circ$ , коли хвильові числа  $h$  і  $g$  збігаються. З метою зручності побудови ліній по координатних осях відкладені безрозмірні аргументи  $hx$  і  $gz$ . Криві побудовані в межах квадрата, внутрішні точки якого задовольняють нерівності  $\pi/2 < hz < \pi$  і  $0 < gx < \pi/2$ .

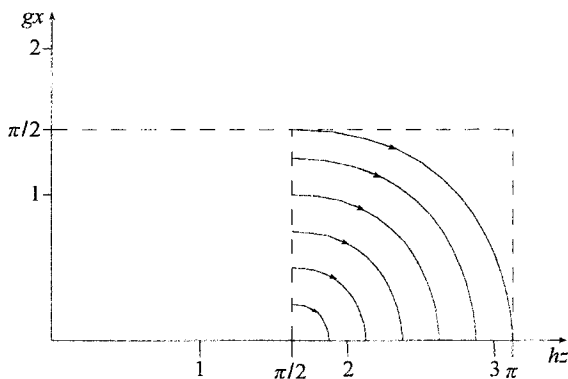


Рис. 4.22. Результат чисельного інтегрування диференціального рівняння силових ліній електричного вектора  $\vec{E}$

Вимоги до точності графічної побудови картини поля не є високими. Тому ми використали простий чисельний спосіб розв'язку диференціального рівняння – метод Ейлера першого порядку, згідно з яким диференціальне рівняння замінюється наближеним рівнянням у кінцевих різницях:

$$\Delta x = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} g x \operatorname{ctg} h z \Delta z.$$

Криві на рис. 4.22 побудовані для шести точок, у яких координата  $h z_0 = \pi/2$  одна й та ж, а координата  $g x_0$  набуває значень: 0,25; 0,5; 0,75; 1,0; 1,25; 1,5.

Тож тепер не складно зобразити повну картину силових ліній електричного вектора (рис. 4.23). Для цього достатньо повторити картину, зображену на рис. 4.22, певну кількість раз відповідно до довжин  $\Lambda_{\text{позд}}$  і  $\Lambda_{\text{позп}}$ . Тут необхідно стежити за тим, щоб напрям стрілки на силових лініях чергувався в силу просторової періодичності поля. На цьому ж рисунку побудовані силові лінії магнітного вектора  $E$ -хвилі. З формули (4.26) отримуємо залежність напруженості магнітного поля від просторових координат при  $t = 0$ :

$$H(x, z, 0) = \frac{2 E_m}{Z_0} \cos g x \cos h z \vec{i}_y.$$

Силові лінії такого поля являють собою нитки, паралельні осі  $y$ . Напрямок вектора  $\vec{H}$  періодично змінюється в просторі. Вектор, орієнтований від спостерігача до площини рисунка, позначений суцільним кружком; вектор протилежного напрямку (до спостерігача) позначений кружком з точкою.

Як прийнято в технічній електродинаміці, силові лінії проведені частіше там, де напруженість поля більша. Тут потрібно зауважити, що магнітне поле  $E$ -хвилі, будучи поперечним, концентрується в тих областях, де велика поперечна проекція  $E_x$  напруженості електричного поля. І навпаки, там, де позовжня проекція  $E_z$  досягає максимуму, проекція  $H_y$  стає нульовою.

Розглянемо тепер структуру поля  $T$ -типу. Поперечні електромагнітні хвилі ( $T$ - або  $TEM$ -хвилі) існують у півпросторі  $x > 0$  над ідеально провідною площиною у випадку, коли кут падіння плоскої хвилі з паралельною (вертикальною) поляризацією рівний  $\varphi = \pi/2$ . При цьому поперечне хвильове число  $g = 0$ , а позовжне хвильове

число  $h = \beta_0$ , бо  $h = \beta_0 \sin \varphi$ , а  $g = \beta_0 \cos \varphi$ . Тоді формули (4.26) запишуться у вигляді:

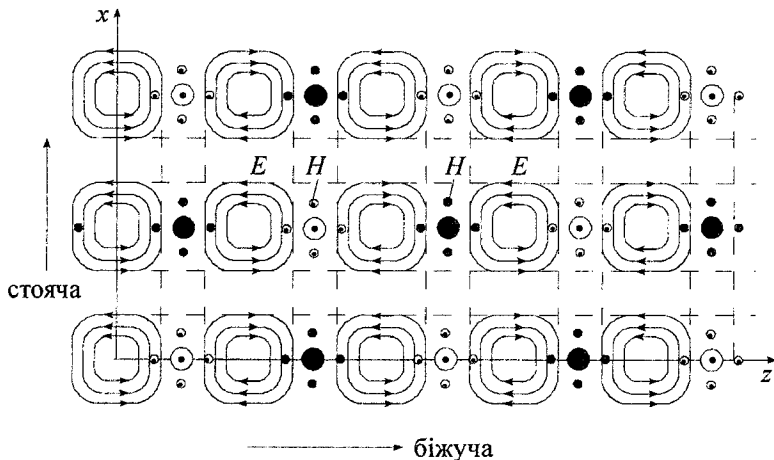


Рис. 4.23. Структура силових ліній хвилі  $\vec{E}$ -типу над ідеальною провідною пластинною

$$\begin{aligned} \dot{E} &= E_m e^{-j\beta_0 z} \vec{i}_x, \\ \dot{H} &= \frac{E_m}{Z_0} e^{-j\beta_0 z} \vec{i}_y. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Звідси миттєві значення векторів будуть уже функціями:

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= E_m \cos(\omega t - \beta_0 z) \vec{i}_x, \\ \vec{H}(z, t) &= \frac{E_m}{Z_0} \cos(\omega t - \beta_0 z) \vec{i}_y. \end{aligned}$$

У момент часу  $t = 0$  вони будуть рівні

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, 0) &= E_m \cos \beta_0 z \vec{i}_x, \\ \vec{H}(z, 0) &= \frac{E_m}{Z_0} \cos \beta_0 z \vec{i}_y, \end{aligned}$$

і мають структуру поля однорідної плоскої хвилі (рис. 4.24).

Повернемося тепер до структури поля для  $H$ -хвилі. Дослідження просторової структури силових ліній електромагнітного поля хвилі  $H$ -типу, яка виникає над ідеально провідною поверхнею ( $\sigma = \infty$ ), можна побудувати за аналогією  $E$ -хвилі. Тому запишемо

на основі формул (4.27) вирази для миттєвих значень векторів поля хвилі  $H$ -типу в момент часу  $t = 0$ :

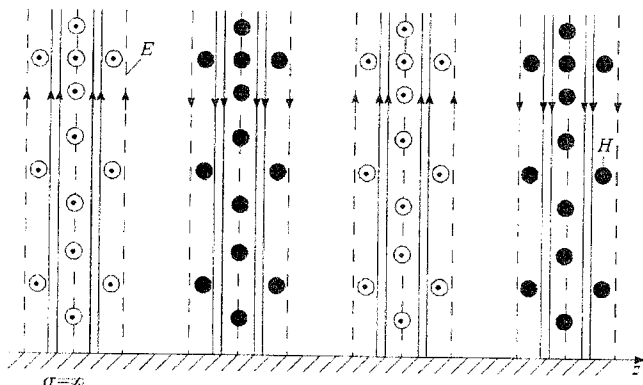


Рис. 4.24. Структура силових ліній  $T$ -хвилі

$$\vec{E}(x, z, 0) = 2 E_m \sin gx \sin hz \vec{i}_y,$$

$$\vec{H}(x, z, 0) = -\frac{2 E_m}{Z_0} \sin \varphi \sin gx \sin hz \vec{i}_x - \frac{2 E_m}{Z_0} \cos \varphi \cos gx \cos hz \vec{i}_z.$$

Диференціюючи рівняння силових ліній магнітного вектора відповідно з його виразом, отримуємо:

$$\frac{dx}{dz} = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} gx \operatorname{tg} hz. \quad (4.30)$$

Картина силових ліній вектора  $\vec{H}$ , побудованого шляхом чисельного інтегрування цього рівняння для випадку  $\varphi = 45^\circ$ , приведена на рис. 4.25. Тут також зображено просторовий розподіл силових ліній вектора  $\vec{E}$  для  $y$ -ї складової. Тобто тут вектори поля  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  міняються місцями в порівнянні з  $E$ -хвилею.

#### 4.7.4 Характеристики електромагнітного поля $E$ - і $H$ -типів

Повертаючись до виразів (4.26) для хвиль  $\vec{E}$ -типу, запишемо вирази для комплексного вектора Пойтінга, визначеного в кожній точці півпростору  $x > 0$ :

$$\vec{P} = \frac{1}{2} [\dot{E} \times \overset{*}{H}] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \dot{E}_x & 0 & \dot{E}_z \\ 0 & \overset{*}{H}_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (\dot{E}_z \overset{*}{H}_y) \vec{i}_x + \frac{1}{2} (\dot{E}_x \overset{*}{H}_y) \vec{i}_z.$$

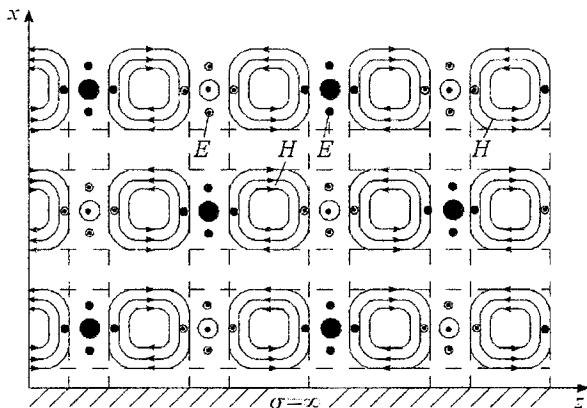


Рис. 4.25. Структура силових ліній хвилі  $T$ -типу над ідеальною провідною площиною

Як бачимо, доданки в правій частині рівності є принципово різними. Легко зауважити, що добуток  $\dot{E}_x \overset{*}{H}_y$ , який утворений поперечними проекціями векторів поля, є чисто дійсним числом, тоді як добуток  $\dot{E}_z \overset{*}{H}_y$ , є вже чисто уявним. Тому вектор Пойтінга, усереднений за період коливань, орієнтований уздовж напрямку  $z$  (поширення біжучої хвилі):

$$\vec{\Pi}_{\text{сеп}} = \frac{1}{2} (\dot{E}_x \overset{*}{H}_y) \vec{i}_z = \frac{2E_m^2}{Z_0} \sin \varphi \cos^2 gx \vec{i}_z.$$

А уявну складову комплексного вектора Пойтінга, яка орієнтована вздовж поперечної координати  $x$  і фізично пов'язана з виникненням у просторі стоячої хвилі, називають реактивною складовою

$$\vec{\Pi}_p = \frac{E_m^2}{Z_0} \cos \varphi \sin(2gx) \vec{i}_x,$$

яка представляє коливну енергію стоячих хвиль.

Зрозуміло, що у хвилі  $T$ -типу, коли  $\varphi = 90^\circ$ , реактивна складова вектора Пойтінга відсутня, бо  $\cos 90^\circ = 0$ .

Також аналогічно для виразів (4.27) визначимо вектор Пойтінга для хвилі  $H$ -типу:

$$\vec{\Pi}_{\text{сеп}} = -\frac{1}{2} \left( \dot{E}_y \dot{H}_x^* \right) \vec{i}_z = \frac{2E_m^2}{Z_0} \sin \varphi \sin^2 gx \vec{i}_z,$$

$$\vec{\Pi}_p = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \dot{E}_y \dot{H}_z^* \right) \vec{i}_x = -\frac{E_m^2}{Z_0} \cos \varphi \sin(2gx) \vec{i}_x.$$

Як бачимо, у хвилях  $E$ - і  $H$ -типу обидві складові комплексного вектора Пойтінга розподілені вздовж поперечної координати  $x$  нерівномірно за законами гармонічних функцій.

Визначимо тепер розподіл струму на ідеально провідній площині для  $E$ -хвилі:

$$\dot{j}_{\text{пове}} = \left[ \vec{i}_x \times \dot{H} \right]_{x=0} = \frac{2E_m}{Z_0} e^{-jhz} \vec{i}_y.$$

Значить, густина поверхневого струму зображає також біжучу хвилю, яка поширюється в напрямі  $z$  і має лише одну складову – горизонтальну ( $z$ ).

Зовсім по-іншому виглядає структура поверхневого струму  $H$ -хвилі:

$$\dot{j}_{\text{пове}} = \dot{H}_z \left[ \vec{i}_x \times \vec{i}_z \right] = -\dot{H}_z \vec{i}_y = \frac{2E_m}{Z_0} \cos \varphi e^{-jhz} \vec{i}_y,$$

бо  $\dot{H}_z = -\frac{2E_m}{Z_0} \cos \varphi e^{-jhz}$  і має вертикальну складову ( $y$ ).

Тепер можна зобразити такі розподіли на рис. 4.26.

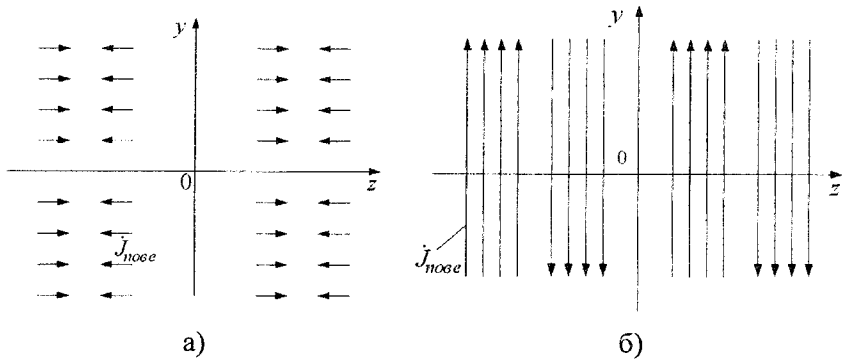


Рис. 4.26. Розподіл вектора густини поверхневого струму на ідеально провідній поверхні для хвиль  $E$ - (а) і  $H$ - типів (б)

Із вищесказаного випливає важливий для антенної техніки висновок про те, що за визначеної поляризації падаючих електромагнітних хвиль суцільний металевий відбивач можна замінити системою паралельних провідних стержнів, пластин. Такі провідники повинні розміщуватися достатньо густо із кроком  $< \frac{\lambda}{10}$  і бути орієнтованими вздовж ліній поверхневого струму.

З вектором Пойтінга пов'язана й потужність утрат, оскільки реальна поверхня, на яку падає хвиля, виготовлена з металу з високою, але скінченною електричною провідністю. Тоді відповідно до граничних (крайових) умов Леонтовича на поверхні металу буде виникати тангенціальна складова вектора  $\vec{E}$ , комплексна амплітуда якої  $\dot{E}_{\tau, m} = Z_{c, m} \dot{H}_{\tau, m}$ . Причому вектор тангенціальної складової  $\dot{E}_{\tau, m}$  повинен бути орієнтований так, щоб разом з величиною вектора  $\dot{H}_{\tau, m}$  породжувати вектор Пойтінга, який направлений у глибину металу. Тоді середнє значення цього вектора, яке характеризує потужність утрат, буде рівне:

$$\vec{P}_{сep} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \dot{E}_{\tau, m} \times \dot{H}_{\tau, m}^* \right].$$

Для хвиль  $E$ -типу

$$\dot{H}_{\tau, m} = \dot{H} \Big|_{x=0} = \frac{2 E_m}{Z_0} e^{-jhz} \bar{i}_y.$$

Тоді

$$\dot{E}_{\tau.m} = \frac{2Z_{c.m} E_m}{Z_0} e^{-jhz} \vec{i}_z,$$

звідки

$$\ddot{P}_{\text{сер втр}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \dot{E}_{\tau.m} \times H_{\tau.m}^* \right] = \frac{2E_m^2}{Z_0} \operatorname{Re} Z_{c.m} \left[ \vec{i}_z \times \vec{i}_y \right] = -\frac{E_m^2}{Z_0} \sqrt{\frac{2\omega\mu_0}{\sigma}} \vec{i}_x.$$

Від'ємний знак у цій формулі вказує на те, що потік енергії втрачаний у глибину металевої поверхні.

Для хвиль  $H$ -типу

$$\dot{H}_{\tau.m} = \dot{H} \Big|_{x=0} = -\frac{2E_m}{Z_0} \cos\varphi e^{-jhz} \vec{i}_z.$$

Тоді

$$\dot{E}_{\tau.m} = \frac{2Z_{c.m} E_m}{Z_0} \cos\varphi e^{-jhz} \vec{i}_y,$$

звідки

$$\ddot{P}_{\text{сер втр}} = -\frac{E_m^2}{Z_0} \sqrt{\frac{2\omega\mu_0}{\sigma}} \cos\varphi \vec{i}_x.$$

Порівнюючи ці вирази для  $E$ - і  $H$ -хвиль, бачимо, що втрати в металі для  $E$ -хвиль не залежать від кута падіння  $\varphi$ , тоді як для  $H$ -хвиль ці втрати наближаються до нуля, якщо  $\varphi \rightarrow \pi/2$ . Тобто для  $H$ -хвиль такі втрати можна звести до нуля при  $\varphi = 90^\circ$ .

#### 4.7.5 Зв'язок між поздовжніми й поперечними складовими векторів направлених хвиль $EH$ - або $HE$ -типів

Розглянуті в даному розділі  $E$ - і  $H$ -хвилі, які виникають у півпросторі над ідеально провідною поверхнею, є гранично ідеалізованими моделями направляючих електромагнітних хвиль. Проте на основі рівнянь Максвелла можна вивести ряд суттєвих властивостей хвиль, які відносяться до будь-яких направляючих систем і мають у своєму складі як поздовжні, так і поперечні хвилі. Їх називають ще гібридними, або  $EH$ - чи  $HE$ -хвилями.

Зазначена можливість зумовлена тим, що будь-яка направляюча плоска хвиля, яка поширюється вздовж осі  $z$ , являє собою неоднорідну хвилю особливого виду: комплексна амплітуда кожної із шести проєкцій векторів  $\vec{E}(x, y, z)$  і  $\vec{H}(x, y, z)$  такої хвилі залежить від просторових координат за законом:



$$\frac{\partial \dot{V}(x, y, z)}{\partial z} = -j h \dot{V}(x, y, z).$$

Початкову фазу хвилі можна підібрати так, щоб амплітудна функція  $V_0(x, y)$  була дійсною. Тоді похідні по  $z$  від проекцій векторів поля обчислюються досить просто:

$$\dot{V}(x, y, z) = V_0(x, y) e^{-j h z}.$$

Такий процес дозволяє виразити поздовжні складові поля через їх поперечні складові.

Нехай електромагнітний процес у деякій області простору, вільній від джерел ( $\text{div } \vec{D} = 0$ ,  $\text{div } \vec{B} = 0$ ), описується рівняннями Максвелла:

$$\text{rot } \dot{H} = j \omega \varepsilon_a \dot{E}, \quad \text{rot } \dot{E} = -j \omega \mu_a \dot{H}.$$

У розгорнутій координатній формі ці рівняння мають такий вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = j \omega \varepsilon_a \dot{E}_x \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = j \omega \varepsilon_a \dot{E}_y \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = j \omega \varepsilon_a \dot{E}_z \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -j \omega \mu_a \dot{H}_x \\ \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -j \omega \mu_a \dot{H}_y \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -j \omega \mu_a \dot{H}_z \end{array} \right.$$

Якщо тепер похідні по  $z$  у відповідності з  $\frac{\partial \dot{V}}{\partial z} = -j h \dot{V}$ , то системи рівнянь для поздовжніх і поперечних складових дещо спростяться:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + j h \dot{H}_y = j \omega \varepsilon_a \dot{E}_x \\ -j h \dot{H}_x - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = j \omega \varepsilon_a \dot{E}_y \quad (*) \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = j \omega \varepsilon_a \dot{E}_z \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + j h \dot{E}_y = -j \omega \mu_a \dot{H}_x \\ -j h \dot{E}_x - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -j \omega \mu_a \dot{H}_y \quad (**) \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -j \omega \mu_a \dot{H}_z \end{array} \right.$$

Безумовно, принципово важливим є те, що в цих системах рівнянь поперечні складові  $\dot{E}_x$ ,  $\dot{E}_y$  і  $\dot{H}_x$ ,  $\dot{H}_y$  подані у вигляді лінійних

комбінацій із похідних від поздовжніх проекцій  $\dot{E}_z$  і  $\dot{H}_z$  по поперечних координатах  $x$  і  $y$ . Дійсно, розглядаючи перше рівняння системи (\*) і друге рівняння системи (\*\*), отримуємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $\dot{E}_x$  і  $\dot{H}_y$ , причому в правій частині цієї системи вже будуть похідні  $\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}$ .

Аналогічно будується система відносно невідомих  $\dot{E}_y$  і  $\dot{H}_x$  (перше рівняння системи (\*\*)) і друге рівняння системи (\*).

Розв'язуючи ці дві системи рівнянь, приходимо до такої системи:

$$\begin{cases} \dot{E}_x = -\frac{j}{g^2} \left( h \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + \omega \mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right) & \dot{H}_x = \frac{j}{g^2} \left( \omega \varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - h \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right) \\ \dot{E}_y = -\frac{j}{g^2} \left( h \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \omega \mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right) & \dot{H}_y = \frac{-j}{g^2} \left( \omega \varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + h \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right) \end{cases},$$

де  $g$  – поперечне хвильове число, яке виражається як

$$g = \sqrt{\beta^2 - h^2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a - h^2}.$$

Задача полягає у визначенні поздовжніх складових  $\dot{E}_z(x, y)$  і  $\dot{H}_z(x, y)$ , а решта поперечних складових визначається простим диференціюванням. Це вже особливості *EH*-хвиль.

### Контрольні запитання

1. Дайте визначення процесу нормального падіння плоскої електромагнітної хвилі на ідеально провідну поверхню, діелектрик, діелектричний шар певної товщини та діелектричний півпростір під довільним кутом.

2. Наведіть формули Френеля для перпендикулярно і паралельно поляризованої електромагнітної хвилі.

3. Що являє собою кут Брюстера? Поясніть явище повного внутрішнього відбивання.

4. Дайте визначення неоднорідних плоских і направлених електромагнітних хвиль.

5. Що виражають наближені граничні умови Леонтовича?

6. Подайте структуру електричного й магнітного полів під час падіння плоскої електромагнітної хвилі *E*- і *H*-типів з паралельною й перпендикулярною поляризацією на ідеально провідну поверхню.

7. Дайте визначення електромагнітних хвиль  $T$ -типу й подайте їх структуру.

### **Рекомендована література**

1. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – М. : Радио и связь, 1988. – 440 с.
2. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 4 : Оптика / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1985. – 752 с.
3. Гауэр Дж. Оптические системы связи / Дж. Гауэр. – М. : Радио и связь, 1989. – 502 с.
4. Калитеевский Н. И. Волновая оптика / Н. И. Калитеевский. – М. : Наука, 1971. – 384 с.
5. Интегральная оптика / под ред. Т. Тамира. – М. : Мир, 1978. – 344 с.
6. Борн М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф ; пер. с англ. ; под ред. Г. П. Мотулевич. – М. : Наука, 1970. – 856 с.
7. Кравцов Ю. Л. Геометрическая оптика неоднородных сред / Ю. Л. Кравцов, Б. И. Орлов. – М. : Наука, 1980. – 304 с.
8. Спайлер А. Теория оптических волноводов / А. Спайлер. – М. : Радио и связь, 1987. – 386 с.
9. Каценеленбаум Б. З. Высокочастотная электродинамика : Основы математического аппарата / Б. З. Каценеленбаум. – М. : Наука, 1966. – 240 с.

## РОЗДІЛ 5. НАПРАВЛЯЮЧІ СИСТЕМИ – ХВИЛЕВОДИ

### 5.1 Прямокутний металевий хвилевід

У цьому підрозділі розглянемо порожній металевий хвилевід прямокутного перерізу як лінію передачі, яка сьогодні найширше використовується в антенно-фідерних пристроях НВЧ. Тому задача про електромагнітні хвилі в трубі з добре провідними стінками складає великий самостійний інтерес для студентів і вимагає високих знань математичних методів розв'язування крайових задач у порівнянні з тими, які ми використовували під час вивчення хвиль над провідною поверхнею.

Повернемося до постановки задачі. Проаналізуємо лінію передачі з поперечним перерізом прямокутної форми (рис. 5.1). Уважатимемо, що стінки труби виконані з ідеального провідника ( $\sigma = \infty$ ). Розмір перерізу вздовж широкої стінки позначимо через  $a$ , а вздовж вузької – через  $b$ . Такий хвилевід прив'язаний до декартової системи

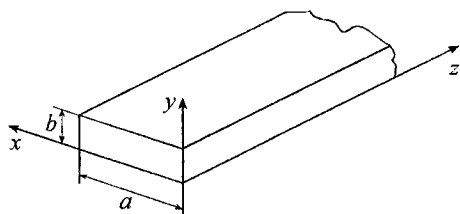


Рис. 5.1. Прямокутний металевий хвилевід

ми координат  $x, y, z$ . Хвилевід необмежено простягається вздовж осі  $z$ , як осі поширення електромагнітної хвилі. Будемо також вважати, що всередині хвилеводу знаходиться повітря, або вакуум, тобто середовище з електромагнітними параметрами  $\varepsilon_a = \varepsilon_0, \mu_a = \mu_0$ .

А тепер сформулюємо задачу: знайти всю сукупність електромагнітних хвиль, які описані системою рівнянь Максвелла й можуть існувати всередині хвилеводу на всій довжині чи осі хвилеводу. Питання збудження у хвилеводі коливань розглядати не будемо.

#### 5.1.1 Хвилі $E$ -типу в прямокутному хвилеводі (ТМ)

Ми вже знаємо, що хвилі  $E$ -типу відрізняються наявністю позовжньої складової вектора напруженості електричного поля, тоді

як магнітне поле цих хвиль є чисто поперечним, тобто  $\dot{E}_z \neq 0$ ,  $\dot{H}_z = 0$ .

Такий особливий характер проекції  $\dot{E}_z$  дозволяє за поперечними координатами  $x$  та  $y$  виразити всі проекції векторів електромагнітного поля. Оскільки  $\dot{H}_z = 0$ , то формули переходу, що висвітлені в попередньому розділі, набувають досить простого вигляду:

$$\begin{cases} \dot{E}_x = -\frac{j h}{g^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}, & \dot{H}_x = \frac{j \omega \varepsilon_0}{g^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}, \\ \dot{E}_y = -\frac{j h}{g^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}, & \dot{H}_y = -\frac{j \omega \varepsilon_0}{g^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Для того щоб отримати функцію  $\dot{E}_z(x, y, z)$ , використаємо рівняння Гельмгольца, яке задовольняє будь-яка проекція поля, у тому числі й  $\dot{E}_z$ , за деякого фіксованого значення частоти:

$$\nabla^2 \dot{E}_z + \beta^2 \dot{E}_z = 0. \quad (5.2)$$

Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді

$$\dot{E}_z(x, y, z) = \dot{E}_z(x, y) e^{-jhz},$$

де  $\dot{E}_z(x, y)$  – дійсна функція, яка визначає поздовжню складову електричного поля в поперечному перерізі хвилеводу. Зміну фази коливань уздовж осі  $z$  ураховує експоненціальний множник виду  $\exp(-jhz)$ . Знак показника експоненти вказує, що хвиля біжуча. Поздовжнє число  $h$  можна знайти з геометричних розмірів хвилеводу  $a$  і  $b$  та довжини хвилі збуджуючого генератора  $\lambda_0$ . Підставивши розв'язок у рівняння (5.2), отримаємо:

$$\nabla_{\perp}^2 E_z + g^2 E_z = 0, \quad (5.3)$$

де  $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $g^2 = \beta^2 - h^2$  – поперечне хвильове число.

Це рівняння будемо розв'язувати за таких крайових умов: при  $x=0$ ,  $y=0$  та  $x=a$ ,  $y=b$   $E_z = 0$ . Проекція  $E_x$ , яка визначає  $x$ -ву складову електричного вектора, повинна бути рівна нулю на широкіх стінках хвилеводу, паралельних осі  $x$ :  $E_x = 0$  при  $y=0$ ,  $y=b$ .

А на вузьких стінках хвилеводу необхідно, щоб  $E_y = 0$  при  $x = 0$ ,  $x = a$ .

Усі крайові умови можуть бути записані через проекцію  $E_z$  та її похідну за поперечними координатами:

$$1) \left. \begin{array}{l} x=0, x=a \\ y=0, y=b \end{array} \right\} E_z = 0; \quad 2) \quad y=0, y=b \quad \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = 0;$$

$$3) \quad x=0, x=a \quad \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} = 0.$$

Цікаво відмітити, що ця електродинамічна задача допускає механічну аналогію. Така крайова задача виникає під час вивчення коливань однорідної жорсткої мембрани прямокутної форми зі сторонами  $a$  і  $b$ . Шукана функція описує зміщення точки мембрани відносно положення рівноваги в напрямі, перпендикулярному її поверхні. Нульові крайові умови вказують на те, що краї мембрани жорстко закріплені (зафіксовані).

Серед відомих у математиці способів розв'язку диференціальних рівнянь у частинних похідних одне із центральних місць займає метод розділення змінних (або метод Фур'є). Тобто нашу крайову задачу вирішуємо, коли  $E_z(x, y) = X(x)Y(y)$ . Підставляючи цю функцію в рівняння Гельмгольца (5.3), отримаємо:

$$X''Y + XY'' + g^2 XY = 0 \quad \text{або} \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -g^2.$$

Для того, щоб вищенаведена умова виконувалася, необхідне виконання таких умов:

$$\frac{X''}{X} = -g_x^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -g_y^2, \quad g_x^2 + g_y^2 = g^2.$$

Тоді ці два рівняння запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} X'' + g_x^2 X &= 0, \\ Y'' + g_y^2 Y &= 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Загальний розв'язок рівнянь (5.4) виражається через гармонічні функції просторових координат і містить чотири довільні амплітудні коефіцієнти  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$ .

$$X(x) = A \sin g_x x + B \cos g_x x,$$

$$Y(y) = C \sin g_y y + D \cos g_y y,$$

$$E(x, y) = (A \sin g_x x + B \cos g_x x)(C \sin g_y y + D \cos g_y y).$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння Гельмгольца, що входить у дану крайову задачу, отримано. Коефіцієнти  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$ ,  $g_x$ ,  $g_y$  визначаються із крайових умов. З умов  $E_z = 0$  при  $x = 0$  і  $y = 0$  випливає, що  $B = D = 0$ . Тоді добуток решти двох амплітудних коефіцієнтів можна позначити через  $E_0$  і записати:

$$E_z(x, y) = E_0 \sin g_x x \sin g_y y.$$

Із граничних умов  $E_z = 0$  при  $x = a$  отримуємо  $\sin g_x x = 0$ . Аналогічно з умови  $E_z = 0$  при  $y = b$  отримуємо  $\sin g_y y = 0$ . Звідси

$$g_x = \frac{m\pi}{a}, \quad g_y = \frac{n\pi}{b},$$

де  $m$ ,  $n$  – будь-які цілі додатні числа.

Таким чином, вираз

$$E_z(x, y) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (5.5)$$

є розв'язком нашої крайової задачі для прямокутного хвилеводу  $E$ -хвилі.

Проведений аналіз даного розв'язку дозволяє зробити висновок: наша крайова задача має розв'язок за таких значень параметра  $g$ , який пов'язаний з геометричними розмірами стінок хвилеводу співвідношенням:

$$g = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (5.6)$$

Величину  $g$ , якій відповідає пара чисел  $m$  і  $n$ , називають власним значенням даної крайової задачі для рівняння Гельмгольца. Кожному власному значенню відповідає функція виду

$$E_z(x, y) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right),$$

яка називається власною функцією крайової задачі. Така власна функція описує одне з нескінченної кількості розв'язків рівнянь Максвелла, які для даного рівняння називають уже хвилею  $E_{mn}$ -типу. Числа  $m$  і  $n$  називають індексами хвилі такого типу. Фізично ці числа визначають кількість стоячих хвиль, що виникають усередині прямокутного хвилеводу вздовж координатних осей  $x$  і  $y$  відпо-

відно. Оскільки індекси можуть бути будь-якими, то у хвилеводі можливе існування нескінченної кількості хвиль  $E_{mn}$ -типу. Тут слід відзначити, що хвиль типу  $E_{0n}$  і  $E_{m0}$  не існує, оскільки  $E_z(x, y) = 0$ , а отже, і всі поперечні складові рівні нулю.

Знаючи значення поздовжньої складової вектора напруженості електричного поля  $E_z$ , через формули (5.1) можна визначити всі інші проекції векторів електромагнітного поля в прямокутному хвилеводі, а структура поля виглядає так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_x = -j \frac{hm\pi}{g^2 a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_y = -j \frac{hn\pi}{g^2 b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_x = j\omega\varepsilon_0 \frac{n\pi}{g^2 b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_y = -j\omega\varepsilon_0 \frac{m\pi}{g^2 a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_z = 0. \end{array} \right.$$

Система цих формул містить повну інформацію про структуру поля електромагнітних хвиль типу  $E_{mn}$  у прямокутному хвилеводі. Проте наочно представити просторову структуру такого поля за формулами не можна. Для цієї цілі в прикладній технічній електродинаміці прийнято будувати картини силових ліній електричного й магнітного полів. На цій процедурі ми зупинялися в попередньому розділі. На рис. 5.2 подається картина розподілу силових ліній векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  для хвиль типу  $E_{11}$  і  $E_{22}$ .



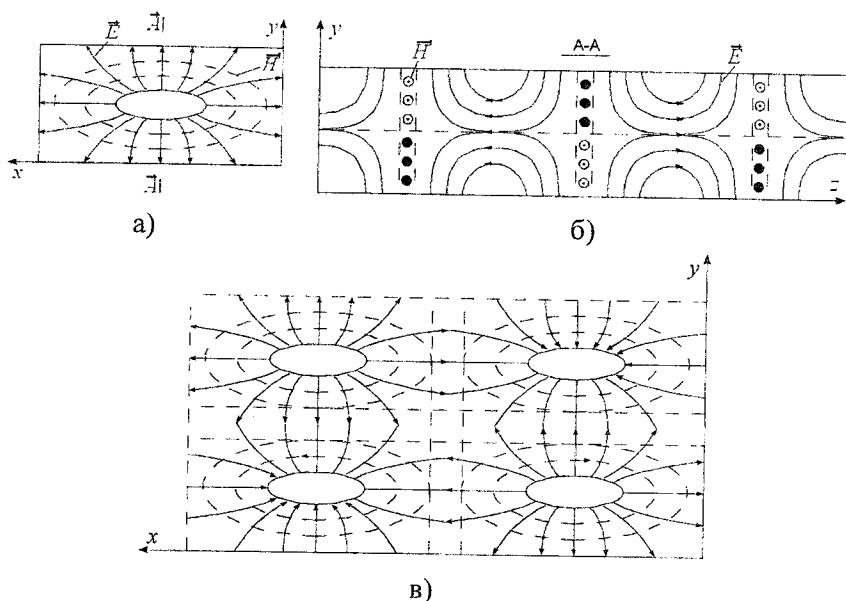


Рис. 5.2. Структура силових ліній електромагнітного поля для хвилі типу  $E_{11}$  (а, б) і  $E_{22}$  (в) у прямокутному металевому хвилеводі

### 5.1.2 Дисперсійна характеристика хвилеводу

Знайдемо тепер зв'язок між поздовжнім хвильовим числом  $h$ , геометричними параметрами хвилеводу (розмірами  $a$  і  $b$ ), а також довжиною хвилі  $\lambda_0$ , генератора, який збуджує хвилю.

Як нам відомо з попереднього підрозділу, поздовжнє хвильове число пов'язане з коефіцієнтом фази  $\beta$  плоскої хвилі у вільному просторі та з поперечним хвильовим числом співвідношенням  $h = \sqrt{\beta^2 - g^2}$ . У свою чергу, поперечне хвильове число, яке визначається за формулою (5.6), залежить від розмірів поперечного перерізу й від індексів вибраного типу хвилі, але ніяк не пов'язане з частотою.

Формула для поздовжнього хвильового числа  $h$  визначає важливу особливість роботи хвилеводу як лінії передачі електромагнітних коливань. Якщо робоча довжина хвилі  $\lambda_0$  мала настільки, що  $\beta > g$ , то поздовжнє хвильове число  $h$  є дійсним числом, а це озна-

час поширення коливань у вигляді біжучих хвиль постійної амплітуди.

Якщо ж довжина хвилі генератора  $\lambda_0$  буде збільшена настільки, що  $\beta < g$ , то замість біжучих хвиль у хвилеводі можуть існувати лише коливання, які не можуть поширюватися. Амплітуда цих коливань експоненціально зменшується вздовж координати  $z$ , а фаза у всіх поперечних перерізах є постійною. Про це свідчить уявний характер поздовжнього хвильового числа ( $h < 0$ ). Тоді говорять, що при цьому хвилевід з розглянутим типом хвилі працює в режимі відсічки.

Якщо  $\beta = g$ , то  $h = 0$  і, як наслідок, довжина хвилі у хвилеводі  $\lambda_x = \infty$ . Тоді хвилевід з вибраним типом хвилі знаходиться в критичному режимі. Довжину хвилі генератора, яка відповідає рівності  $\beta = g$ , називають критичною довжиною даного типу хвиль  $\lambda_{кр}$ .

Тому в критичному режимі коефіцієнт фази  $\beta_{кр} = \frac{2\pi}{\lambda_{кр}} = g$ . Звідси

отримуємо формулу для визначення критичної довжини хвилі:

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{g} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \quad (5.7)$$

Поряд із критичною довжиною хвилі є і критична частота, яка визначається як

$$f_{кр} = \frac{c}{\lambda_{кр}} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (5.8)$$

Ці співвідношення дають можливість установити зв'язок між параметрами  $h$ ,  $\beta$  і  $g$  через відповідні довжини хвиль:

$$\frac{1}{\lambda_x} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_{кр}^2}}. \quad (5.9)$$

Остання рівність показує, за зміни довжини хвилі генератора  $\lambda_0$ , довжина хвилі у хвилеводі  $\lambda_x$  змінюється не пропорційно. Закон зміни довжини хвилі у хвилеводі від довжини хвилі у вільному просторі називають дисперсійною характеристикою хвилеводу:

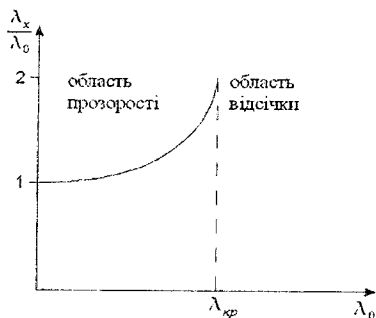


Рис. 5.3. Дисперсійна характеристика прямокутного металевого хвилеводу

$$\lambda_x = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{кр})^2}},$$

яка подана на рис. 5.3. Уся область довжин хвиль  $\lambda_0 < \lambda_{кр}$  є областю прозорості й при  $\lambda_0 \ll \lambda_{кр}$  довжина хвилі у хвилеводі наближається до довжини хвилі у вільному просторі. Якщо  $\lambda_0 \rightarrow \lambda_{кр}$ , то довжина хвилі у хвилеводі наближається до нескінченності, а при  $\lambda_0 > \lambda_{кр}$  у хвилеводі замість біжучих хвиль наявні експоненціально затухаючі вздовж осі  $z$

хвилі. Ця область називається областю відсічки.

При  $f_0 > f_{кр}$  довжина хвилі у хвилеводі більша від довжини хвилі у вільному середовищі, і хвилі у хвилеводі поширюються з фазовими швидкостями, більшими від швидкості світла, що видно зі співвідношення:

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}. \quad (5.10)$$

Оскільки хвилевід є дисперсійною системою, то групова швидкість  $v_{gp}$  у ньому не є рівною фазовій швидкості, а визначається як:

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dn} = \frac{1}{(dn/d\lambda_0) \cdot (d\lambda_0/d\omega)} = c \sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{кр})^2}. \quad (5.11)$$

З даної формули видно, що групова швидкість є завжди меншою за фазову швидкість і швидкість світла, а між ними існує таке співвідношення  $v_\phi \cdot v_{gp} = c^2$  на будь-якій частоті.

### 5.1.3 Хвилі $H$ -типу в прямокутному хвилеводі (TE)

У цьому підрозділі розглянемо ще один тип хвиль у прямокутному хвилеводі. Ці хвилі називаються хвилями  $H$ -типу й характеризуються тим, що в них магнітний вектор має поздовжню складову з проекцією  $\dot{H}_z$ , тоді як електричне поле є поперечним, бо  $\dot{E}_z = 0$ .

Будемо вважати, що геометричні та фізичні параметри хвилеводу ті ж самі, що й під час розгляду хвиль  $E$ -типу. Комплексні амплітуди всіх проекцій векторів електромагнітного поля можна виразити через поздовжню складову функцію  $\dot{H}_z$  за формулами переходу, що розглядалися нами в попередньому розділі:

$$\begin{cases} \dot{E}_x = -\frac{j\omega\mu_0}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}, & \dot{H}_x = -\frac{jh}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}, \\ \dot{E}_y = -\frac{j\omega\mu_0}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}, & \dot{H}_y = -\frac{jh}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}. \end{cases} \quad (5.12)$$

Функція  $\dot{H}_z$  є розв'язком рівняння Гельмгольца й шукається у вигляді

$$\dot{H}_z(x, y, z) = \dot{H}_z(x, y) e^{-jh z},$$

при цьому амплітудна функція  $H_z(x, y)$  задовольняє двомірне рівняння Гельмгольца

$$\nabla_{\perp}^2 H_z + g^2 H_z = 0, \quad (5.13)$$

де  $g = \sqrt{\beta^2 - h^2}$  і являє собою поперечне хвильове число.

Рівняння (5.13) повинно задовольняти крайові умови, які забезпечують перетворення в нуль дотичних складових електричного вектора на ідеально провідних стінках хвилеводу:

- $E_x = 0$  при  $y = 0, y = b$ ;
- $E_y = 0$  при  $x = 0, x = a$ .

Тоді з формул переходу (5.12) ці умови можна записати через функцію  $\dot{H}_z$  (її похідну), а саме:

- $\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} = 0$  при  $y = 0, y = b$ ;
- $\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = 0$  при  $x = 0, x = a$ .

Таким чином, дослідження поперечних хвиль  $H$ -типу в прямокутному металевому хвилеводі зводиться до розв'язання, як і в попередньому підрозділі, крайової задачі для поперечного рівняння Гельмгольца.

Тільки дана крайова задача відрізняється від попередньої для хвиль  $E$ -типу тим, що тут на межі розділу повітря–метал нульового значення набуває не сама невідома функція, а її похідна по нормалі.

У математичній фізиці такі крайові задачі називають однорідними крайовими задачами Неймана. І дана задача є еквівалентною під час дослідження пружної мембрани прямокутної форми з вільними краями. Рівність нулю нормальної похідної на краях означає відсутність внутрішніх напруг у крайових точках мембрани.

Наша крайова задача вирішується методом розділення змінних, і аналогічно, як і для хвилі  $E$ -типу, отримаємо:

$$H_z = (A \sin g_x x + B \cos g_x x)(C \sin g_y y + D \cos g_y y). \quad (5.14)$$

Крайові умови при  $x = 0$ ,  $y = 0$  будуть виконуватися лише в тому випадку, коли  $A = C = 0$ . Позначивши  $B \cdot D = H_0$ , отримаємо, що двовірна амплітуда

$$H_z(x, y) = H_0 \cos g_x x \cos g_y y, \quad (5.15)$$

у якому поперечні числа  $g_x$  і  $g_y$  визначаються із крайових умов при  $x = a$ ,  $y = b$ , а саме:

$$g_x = \frac{m\pi}{a}, \quad g_y = \frac{n\pi}{b}, \quad g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

Кожній парі індексів  $m$  і  $n$  відповідає хвиля  $H$ -типу, яку позначають як моду  $H_{mn}$ . Критична довжина хвилі у хвилеводі знаходиться за формулою, коли  $h = 0$ :

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}, \quad (5.16)$$

а довжина хвилі у хвилеводі та її фазова швидкість рівні:

$$\lambda_x = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}, \quad v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}.$$

Установимо тепер, які типи хвиль у прямокутному хвилеводі є нижчими, тобто мають найбільшу критичну довжину хвилі. Відповідно до формули (5.16) нижчими типами хвиль є хвилі з найменшими індексами. Так, для хвиль  $H$ -типу, коли

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right),$$

у даному випадку один з індексів (але не обидва разом) може бути рівний нулю. Саме найнижчий (основний) тип хвилі в прямокутному хвилеводі належить до класу

хвиль  $H$ -типу. Із двох мод  $H_{10}$  і  $H_{01}$  найбільшу критичну довжину хвилі буде мати хвиля типу  $H_{10}$ , у якій вздовж широкої стінки (по  $x$ ) вкладається одна стояча півхвиля, а вздовж вузької стінки поле є незмінним.

Просторові залежності комплексних амплітуд проекцій векторів електромагнітного поля  $H$ -типу такі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_x = j \omega \mu_0 \frac{n\pi}{g^2 b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_y = -j \omega \mu_0 \frac{m\pi}{g^2 a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_z = 0, \\ \dot{H}_x = j \frac{hm\pi}{g^2 a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_y = j \frac{hn\pi}{g^2 b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}. \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Більш детально вивчимо структуру основної хвилі  $H_{10}$  ( $m=1$ ,  $n=0$ ). Це означає, що  $ga = \pi$  при  $x=a$ , а  $E_x = 0 \Big|_{a=\frac{\pi-\lambda_{ном}}{g}}$ . Важливо відмітити, що характер поля не залежить від вибору відстані  $b$  між перегородками. Саме при  $m=1$ ,  $n=0$   $\lambda_{кр H_{10}} = 2a$ . Звідси, хвиля типу  $H_{10}$  у прямокутному хвилеводі є основною й довжина хвилі не перевищує подвоєного розміру широкої стінки хвилеводу.

Приведемо тепер формули, які виражають просторову залежність комплексних амплітуд декартових проекцій векторів електромагнітного поля для хвилі  $H_{10}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_x = 0, \\ \dot{E}_y = -j \frac{\omega \mu_0 a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_z = 0, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \dot{H}_x = j \frac{ha}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_y = 0, \\ \dot{H}_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}. \end{array} \right. \quad (5.18)$$

Інколи більш зручною є система рівнянь, у якій комплексні амплітуди виражаються через  $E_{\max}$  – максимальну амплітуду напруженості електричного поля, що спостерігається в центрі широкої стінки хвилеводу (стілки  $a$ ):

$$\begin{cases} \dot{E}_x = 0, \\ \dot{E}_y = E_{\max} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{H}_x = -\frac{ha}{\omega\mu_0} E_{\max} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_y = 0, \\ \dot{H}_z = j\frac{\pi}{\omega\mu_0 a} E_{\max} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}, \end{cases}$$

де  $E_{\max} = -j\frac{\omega\mu_0 a}{\pi} H_0$ .

Структуру силових ліній векторів електромагнітного поля хвиль типу  $H_{10}$  подано на рис. 5.4.

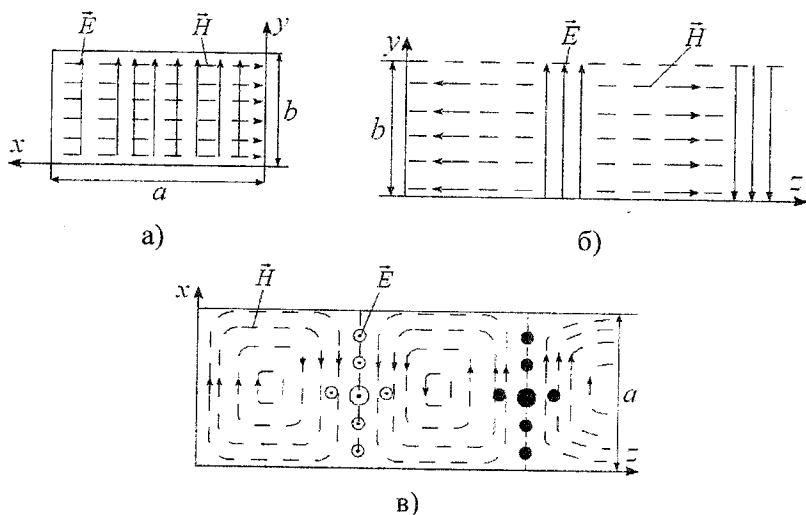


Рис. 5.4. Структура силових ліній векторів електромагнітного поля хвилі  $H_{10}$  у прямокутному хвилеводі: а) у площині  $x y$ ; б) у площині  $y z$ ; в) у площині  $x z$

Як видно із формул (5.18), поперечні проекції векторів  $\dot{E}_y$  та  $-\dot{H}_x$  змінюються синфазно. Якщо тепер утворити комплексний век-

тор Пойтінга  $\dot{P}$  із  $\dot{E}_y$  і  $\dot{H}_x$ , то цей вектор буде направлений уздовж осі  $z$  і буде чисто дійсним:

$$\dot{P}_1 = \frac{1}{2} [\dot{E}_y \vec{i}_y \times \dot{H}_x \vec{i}_x] = \frac{\omega \mu_0 h a^2}{2\pi^2} H_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{i}_z.$$

Звідси видно, що густина потоку потужності вздовж осі поширення  $z$  буде максимальною в центрі поперечного перерізу хвилеводу ( $x = \frac{1}{2}a$ , тоді  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ).

Якщо ж утворити вектор Пойтінга  $\dot{P}_2$  із проєкцій  $\dot{E}_y$  і  $\dot{H}_z$ , то цей вектор вже буде направлений уздовж осі  $x$  і буде уявним:

$$\dot{P}_1 = \frac{1}{2} [\dot{E}_y \vec{i}_y \times \dot{H}_z \vec{i}_z] = -j \frac{\omega \mu_0 a}{4\pi} H_0^2 \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \vec{i}_x.$$

Тому потужність електромагнітного поля у хвилеводі з хвилею  $H_{10}$  складається із двох частин: активної потужності, яка переноситься вздовж осі  $z$ , і реактивної (коливної) потужності, яка пов'язана з утворенням стоячих хвиль уздовж поперечної осі  $x$ .

Розглянемо тепер технологічні прийоми збудження електромагнітних хвиль у хвилеводі та відбір їх потужності. Повернемося до хвилеводу й згадаємо, що лінії повного струму розглядаються як сукупність струмів зміщення й провідності і завжди повинні бути замкненими. Тому у хвилеводі струми провідності на стінках хвилеводу залишаються струмами зміщення, які існують усередині хвилеводу, будучи орієнтованими вздовж осі  $y$ . Густина струму зміщення пов'язана з напруженістю електричного поля співвідношенням  $\vec{j}_{zm} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . Оскільки в біжучій хвилі вектор напруженості електричного поля

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y) \cos(\omega t - h z),$$

то

$$\vec{j}_{zm}(x, y, z, t) = -\omega \varepsilon_0 \vec{E}(x, y) \sin(\omega t - h z).$$

Як бачимо, струм зміщення максимальний не там, де напруженість електричного поля досягає максимуму, а в точках, зміщених на чверть просторового періоду, тобто  $\lambda_x/4$ .



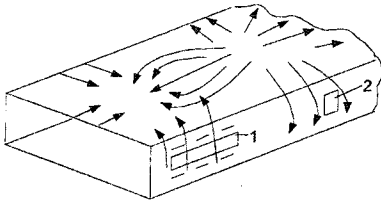


Рис. 5.5. Випромінююча (1) і невипромінююча (2) щілини на стінках прямокутного хвильоводу з хвилею  $H_{10}$ -типу

Таким чином, знаючи розподіл поверхневих струмів на стінках хвильоводу із хвилею типу  $H_{10}$ , можна на якісному рівні розв'язувати практичну задачу про зв'язок хвильоводу з навколишнім простором через щілину, яку прорізують у його стінках (рис. 5.5). Отже, можна сформулювати дуже важливий практичний принцип: щілина у стінці хвильоводу буде ефективно випромінювати електромагнітну енергію в тому випадку, якщо вона максимально перерізає лінії поверхневого струму. Саме такі випромінюючі щілини широко використовують під час побудови так званих щілинних антен у діапазоні сантиметрових хвиль.

Щілина 2 на рис. 5.5 є невипромінюючою і її можна використовувати для вимірювання структури поля всередині хвильоводу за допомогою ВЧ-генератора.

#### 5.1.4 Характеристичний опір прямокутного хвильоводу. Хвильовідно-коаксіальні переходи та діаграми типів хвиль у прямокутному хвильоводі

За фізичним змістом характеристичний опір лінії передачі – це відношення деякої електричної характеристики хвильового процесу до його магнітної характеристики. Так, з теорії радіотехнічних кіл відомо, що для довгих ліній передачі вводиться хвильовий опір лінії

$Z_x = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$ , де  $\dot{U}$ ,  $\dot{I}$  – комплексні амплітуди напруги й струму в біжущій хвилі. Ми вже вводили характеристичний опір середовища для

однорідної плоскої електромагнітної хвилі як  $Z_c = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$ . У

теорії хвильоводів також доцільно використати поняття характеристичного опору, визначивши його як відношення модулів поперечних складових  $\dot{E}$  і  $\dot{H}$ :

$$Z_c = \sqrt{\frac{\dot{E}_x^* E_x^* + \dot{E}_y^* E_y^*}{\dot{H}_x^* H_x^* + \dot{H}_y^* H_y^*}}. \quad (5.19)$$

Розглянемо тепер окремо характеристичний опір для  $E$ - і  $H$ -хвиль у прямокутному хвилеводі.

*Хвилі типу  $E_{mn}$ .* Якщо  $\dot{E}_x = \frac{h}{\omega \varepsilon_0} \dot{H}_y$  і  $\dot{E}_y = -\frac{h}{\omega \varepsilon_0} \dot{H}_x$ , тоді

$Z_{cE} = \frac{h}{\omega \varepsilon_0}$ . Дану формулу дещо перетворимо, використавши те, що

$h = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{1 - (\lambda_0 / \lambda_{kp})^2}$ . Тоді  $Z_{cE} = Z_0 \sqrt{1 - (\lambda_0 / \lambda_{kp})^2}$ , де

$Z_0 = 120\pi = 377$  (Ом) – характеристичний опір вакууму. При  $\lambda_0 = \lambda_{kp}$   $Z_{cE} = 0$ , і якщо  $\lambda_0 \rightarrow 0$ , то  $Z_{cE} \rightarrow Z_0$ .

*Хвилі типу  $H_{mn}$ .* Тут  $Z_{cH} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0 / \lambda_{kp})^2}}$ . Це дає можливість

оцінювати коефіцієнти відбивання від відкритого кінця хвилеводу:

$$\rho = \frac{Z_0 - Z_{cH}}{Z_0 + Z_{cH}}.$$

Порожні металеві хвилеводи використовуються в діапазоні робочих довжин хвиль від 50 см до 1 мм. Частіше всього хвилеводні тракти будують на основі прямокутних металевих хвилеводів, по яких поширюється хвиля нижчого типу  $H_{10}$ . Причини цього такі:

- 1) поперечні габарити хвилеводу є при цьому мінімальними;
- 2) структура поля нижчого рівня стійка по відношенню до введення всередину хвилеводу яких-небудь неоднорідностей.

При цьому хвилеводи використовують у двох режимах – багатохвильовому та однохвильовому. У більшості випадків на практиці використовують прямокутні хвилеводи, які працюють в однохвильовому режимі, оскільки такий режим забезпечує високу стійкість з'єднань. Як приклад розглянемо кінцевий пристрій – хвилеводно-коаксіальний перехід, який служить для з'єднання прямокутного хвилеводу з коаксіальним кабелем (рис. 5.6).

Недоліком багатохвильових хвильоводів є інтерференція хвиль різних типів з різними фазовими швидкостями, що дуже міняє амплітудно-частотну характеристику.

Вибираючи геометричні розміри перерізу хвильоводу, виходять з того, що для хвиль як  $E$ -, так і  $H$ -типів критична довжина хвилі визначається однією й тією ж формулою:  $\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}$ , причому  $\lambda_{кр}$  тим менше, чим більші індекси  $m$  і  $n$ .

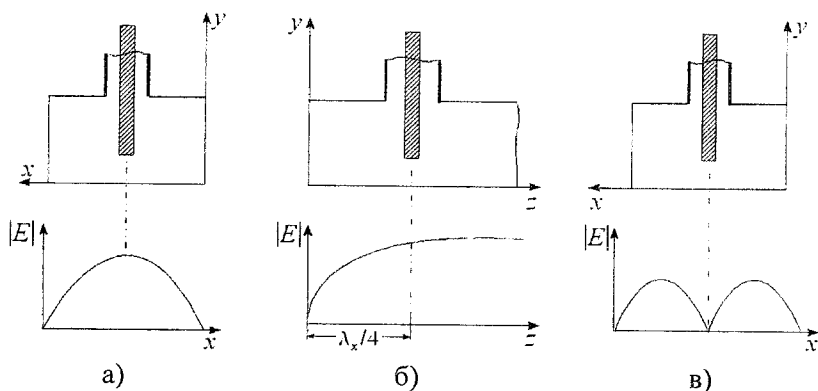


Рис. 5.6. Хвильоводно-коаксальний перехід з високою ефективністю зв'язку для хвилі  $H_{10}$  (а, б) і з низькою ефективністю зв'язку для хвилі  $H_{20}$  (в)

Розглянемо сукупність типів хвиль з найбільшими значеннями  $\lambda_{кр}$ . Безпосередні обчислення дають:  $\lambda_{кр}(H_{10}) = 2a$ ,  $\lambda_{кр}(H_{01}) = 2b$ ,  $\lambda_{кр}(H_{20}) = a$ ,  $\lambda_{кр}(H_{11}) = \lambda_{кр}(E_{11}) = \frac{2}{\sqrt{(1/a)^2 + (1/b)^2}}$ . Прийнемо для розрахунку  $b = a/2$ , що часто використовують у практичних задачах. Тоді  $\lambda_{кр}(H_{10}) = 2a$ ,  $\lambda_{кр}(H_{01}) = 2b$ ,  $\lambda_{кр}(H_{20}) = a$ ,  $\lambda_{кр}(H_{11}) = \lambda_{кр}(E_{11}) = \frac{2a}{\sqrt{5}}$ . На основі цих розрахунків будемо діаграму типів хвиль прямокутного хвильоводу, що зображена на рис. 5.7. На цій діаграмі можна виділити три області:

- область відсічки при  $\lambda_0 > 2a$ , у межах якої ніяких типів хвиль, які поширюються в хвилеводі, не існує;
- область однохвильовості при  $a \leq \lambda_0 \leq 2a$ , у межах якої поширюється одна хвиля типу  $H_{10}$ ;
- область багатохвильовості при  $\lambda_0 < a$ , у якій крім основної хвилі по хвилеводу можуть поширюватися хвилі вищого порядку.

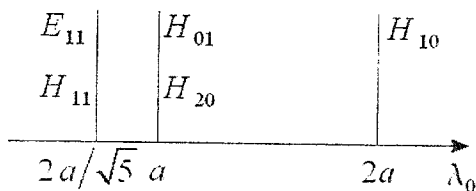


Рис. 5.7. Діаграма типів хвиль у прямокутному металевому хвилеводі при відношенні  $b/a = 1/2$

Для забезпечення однохвильового збудження електромагнітних хвиль у хвилеводі використовують селективні збуджувачі у вигляді штирових антен, як показано на рис. 5.8.



Рис. 5.8. Селективне збудження різних типів хвиль у прямокутному хвилеводі: а) хвилі  $H_{10}$ ; б) хвилі  $H_{01}$

## 5.2 Круглий металевий хвилевід

### 5.2.1 Постановка задачі й рівняння Максвелла в циліндричних координатах

Круглий металевий хвилевід являє собою трубу з внутрішнім радіусом  $a$  (рис. 5.9). Для постановки задачі вважатимемо, що провідність стінок хвилеводу є нескінченно великою, хвилевід необмежено протяжний та однорідний уздовж осі  $z$ , а внутрішнім середовищем є повітря або вакуум. Проаналізуємо, як це ми робили для прямокутного хвилеводу, всю сукупність хвиль  $E$ - і  $H$ -типів у

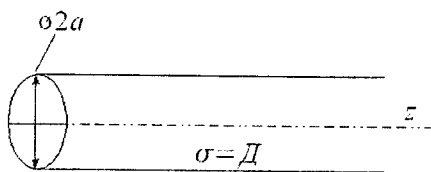


Рис. 5.9. Круглий металевий хвилевід

такій направляючій системі. Картину поля в круглому хвилеводі будемо, виходячи з того, що силові лінії електричного вектора завжди підходять до металевих стінок по нормалі, якщо стінка круглого хвилеводу збігається з координатною поверхнею  $z = a$  циліндричної системи координат  $(r, \varphi, z)$ . Саме

ця система координат є дуже зручною для розв'язку поставленої задачі для круглого хвилеводу. Використаємо значення градієнта, дивергенції й ротора в циліндричній системі координат, які ми розглядали в 1 розділі.

Перші два рівняння Максвелла –

$$1) \operatorname{rot} \dot{H} = j \omega \varepsilon_0 \dot{E}, \quad 2) \operatorname{rot} \dot{E} = -j \omega \mu_0 \dot{H}$$

у циліндричній системі координат набудуть вигляду:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \dot{H}_\varphi}{\partial z} = j \omega \varepsilon_0 \dot{E}_r, & \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \dot{E}_\varphi}{\partial z} = -j \omega \mu_0 \dot{H}_r, \\ \frac{\partial \dot{H}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} = j \omega \varepsilon_0 \dot{E}_\varphi, & \frac{\partial \dot{E}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} = -j \omega \mu_0 \dot{H}_\varphi, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{H}_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_r}{\partial \varphi} = j \omega \varepsilon_0 \dot{E}_z, & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{E}_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_r}{\partial \varphi} = -j \omega \mu_0 \dot{H}_z. \end{cases} \quad (5.20)$$

Серед усіх можливих розв'язків системи рівнянь (5.20) особливо розглянемо, як і у випадку прямокутного хвилеводу, направляючі хвилі, що поширюються вздовж осі  $z$ . При цьому комплексні амплітуди векторів напруженості електричного й магнітного полів направляючих хвиль запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{E}(r, \varphi, z) &= \dot{E}(r, \varphi) e^{-jhz}, \\ \dot{H}(r, \varphi, z) &= \dot{H}(r, \varphi) e^{-jhz}. \end{aligned} \quad (5.20.a)$$

Такий тип залежностей дозволяє, як і для прямокутного хвилеводу, виразити поперечні проекції векторів  $\dot{E}$  і  $\dot{H}$  через частинні похідні від поздовжніх проекцій  $\dot{E}_z$  і  $\dot{H}_z$  за координатами  $r$  і  $\varphi$ . У результаті отримаємо таку систему рівнянь зв'язків:

$$\begin{cases} \dot{E}_r = -\frac{j}{g^2} \left( h \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{\omega \mu_0}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi} \right), & \dot{H}_r = \frac{j}{g^2} \left( \frac{\omega \varepsilon_0}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} - h \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} \right), \\ \dot{E}_\varphi = -\frac{j}{g^2} \left( \frac{h}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} - \omega \mu_0 \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} \right), & \dot{H}_\varphi = -\frac{j}{g^2} \left( \omega \varepsilon_0 \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{h}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi} \right). \end{cases} \quad (5.21)$$

Із цих формул для поперечних складових випливає можливість існування в круглому металевому хвилеводі хвиль  $E$ - і  $H$ - типів. Щоб дослідити ці хвилі, необхідно розв'язати рівняння Гельмгольца відносно поздовжніх складових проекцій  $\dot{E}_z$  і  $\dot{H}_z$  векторів  $\dot{E}$  і  $\dot{H}$ :

$$\begin{aligned} 1) \nabla^2 \dot{E}_z + \beta^2 \dot{E}_z &= 0, \\ 2) \nabla^2 \dot{H}_z + \beta^2 \dot{H}_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Використаємо вираз для оператора Лапласа ( $\Delta = \nabla^2$ ) у циліндричній системі координат (див. розділ 1). Тоді рівняння (5.22) запишуться в розгорнутій формі:

$$\begin{aligned} 1) \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{E}_z &= 0, \\ 2) \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{H}_z &= 0. \end{aligned}$$

Специфічний вид залежностей комплексних амплітуд  $\dot{E}$  і  $\dot{H}$  від поздовжньої координати  $z$ , які виражені формулами (5.20.а), дає можливість відійти від частинних похідних по  $z$ , увівши поперечне хвильове число  $g^2 = \beta^2 - h^2$ . У результаті приходимо до поперечних рівнянь Гельмгольца в циліндричній системі координат:

$$\begin{aligned} 1) \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2} + g^2 \dot{E}_z &= 0, \\ 2) \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial \varphi^2} + g^2 \dot{H}_z &= 0. \end{aligned}$$

Для їх розв'язку необхідно використати крайові умови, які в сукупності й складають крайову задачу.

### 5.2.2 Хвилі $E$ -типу в круглому хвилеводі

Задача про хвилі електричного типу в круглому металевому хвилеводі зводиться до розв'язання поперечного першого рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2} + g^2 \dot{E}_z = 0 \quad (5.23)$$

при крайових умовах, згідно з якими дотична складова електричного вектора на стінці хвилеводу перетворюється в нуль. Очевидно, що із трьох можливих проєкцій комплексної амплітуди  $\dot{E}$ , а саме  $\dot{E}_r$ ,  $\dot{E}_\varphi$ ,  $\dot{E}_z$ , дотичними складовими до стінок можуть бути лише проєкції  $\dot{E}_z$  і  $\dot{E}_\varphi$ . Тому крайові умови записуються

$$\dot{E}_z = 0 \text{ при } r = a \quad \text{і} \quad \dot{E}_\varphi = 0 \text{ при } r = a.$$

Ці дві умови не є незалежними. Тому використаємо першу.

Будемо розв'язувати нашу задачу методом розділення змінних (методом Фур'є), який ми використовували й для прямокутного хвилеводу.

$$\text{Нехай} \quad E_z(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi), \quad (5.24)$$

тобто одна з функцій залежить від  $r$ , а друга – тільки від  $\varphi$ . Підставивши ці вирази в рівняння (5.23), отримаємо:

$$\Phi R'' + \frac{1}{r} \Phi R' + \frac{1}{r^2} R \Phi'' + g^2 R \Phi = 0.$$

Після розділення змінних маємо:

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + g^2 r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi}. \quad (5.23.a)$$

Щоб це рівняння задовольнялося при всіх значеннях  $r$  і  $\varphi$ , ліва й права частини його повинні бути постійним числом, тобто  $-\frac{\Phi''}{\Phi} = m^2$ . Це рівняння є диференціальним з постійними коефіцієнтами, і його розв'язком буде функція:

$$\Phi(\varphi) = C_0 \frac{\sin}{\cos}(m\varphi). \quad (5.25)$$

Будемо вважати, що  $\Phi(\varphi) = C_0 \cos(m\varphi)$ . Для того щоб виконувалась умова періодичності функції (бо  $\varphi = 2\pi$ ), параметр  $m$  повинен бути додатним цілим числом або нулем. Саме число  $m$  є одним з індексів хвилі  $E$ -типу в круглому хвилеводі.

Розглянемо тепер ліву частину рівняння (5.23.a), яка описує розподіл поля вздовж радіальної координати  $r$ . Таким чином, друге рівняння лівої частини

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( g^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (5.26)$$

Дещо перетворимо дане рівняння, ввівши безрозмірну змінну  $x = gr$ . Тоді рівняння (5.26) перетвориться у відоме нам з математичної фізики рівняння Бесселя:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left( 1 - \frac{m^2}{x^2} \right) R = 0. \quad (5.26.a)$$

Розв'язком цього рівняння є так звані циліндричні функції. До них належать:  $J_m(x)$  – функція Бесселя або циліндрична функція першого роду  $m$ -го порядку,  $N_m(x)$  – функція Неймана або циліндрична функція другого роду  $m$ -го порядку.

Аналітично функції Бесселя й Неймана виражаються за допомогою нескінченно збіжних рядів досить складної структури. Для  $m$  як цілого додатного числа (або нуля) маємо:

$$J_m(x) = \left( \frac{x}{2} \right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k},$$

$$N_m(x) = \frac{2}{\pi} J_m(x) \ln \frac{Cx}{2} - \frac{1}{\pi} \left( \frac{x}{2} \right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k} \times$$

$$\times \left( \sum_{l=1}^k \frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{k+m} \frac{1}{l} \right) - \frac{1}{\pi} \left( \frac{x}{2} \right)^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-k-1)!}{k!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k},$$

де  $C = 0,5772$  – постійна Ейлера.

Функції Бесселя і Неймана лінійно незалежні, тому загальний розв'язок рівняння (5.26.a) буде мати вигляд:

$$R(x) = A_1 J_m(x) + A_2 N_m(x),$$

де  $A_1$  і  $A_2$  – деякі довільні коефіцієнти.

У циліндричній системі координат функції Бесселя й Неймана відіграють таку ж роль, як і гармонічні функції синуса й косинуса в декартовій системі координат. Типові графіки циліндричних функцій показані на рис. 5.10. Ці функції мають певні відмінності від гармонічних функцій:

– циліндричні функції, на відміну від гармонічних, не є періодичними;

– амплітуда циліндричних функцій не є постійною величиною, а зменшується із ростом аргументу;



– при малих значеннях аргументу функції Неймана необмежено зростають.

У математиці виведено такі співвідношення між циліндричними функціями:

$$J_1(x) = -\frac{dJ_0}{dx}, \quad J_m'(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J_{m+1}(x).$$

Відповідні графіки цих простих функцій Бесселя подані на рис. 5.11.

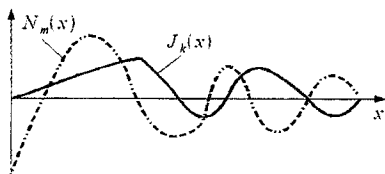


Рис. 5.10. Циліндричні функції Бесселя і Неймана

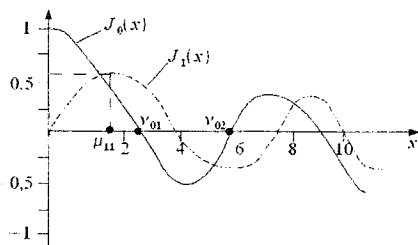


Рис. 5.11. Графіки функцій Бесселя  $J_0(x)$  і  $J_1(x)$

Для циліндричного хвилеводу особливий інтерес представляють ті значення аргументу, за яких або сама функція перетворюється в нуль, або її похідні. Введемо такі позначення:  $v_{mn}$  –  $n$ -й корінь рівняння  $J_m(x) = 0$ ,  $\mu_{mn}$  –  $n$ -й корінь рівняння  $J_m'(x) = 0$ . Із графіків на рис. 5.11 видно, що функція  $J_0(x)$  перший раз перетинає вісь абсцис у точці з координатою, рівною  $x = 2,4$ . Позначимо її символом  $v_{01}$ . Аналогічно, перший максимум функції  $J_1(x)$  у точці з координатою  $x = 1,8$ . Позначимо його як  $\mu_{11}$ . У нижчеподаних таблицях приведені значення функції Бесселя та її похідної.

Таблиця 5.1

Корені  $v_{mn}$  функцій Бесселя

| $n$ | $m=0$ | $m=1$  | $m=2$  |
|-----|-------|--------|--------|
| 1   | 2,405 | 3,832  | 5,135  |
| 2   | 5,520 | 7,016  | 8,417  |
| 3   | 8,654 | 10,714 | 11,620 |

Таблиця 5.2

Корені  $\mu_{mn}$  функцій Бесселя

| $n$ | $m=0$  | $m=1$ | $m=2$ |
|-----|--------|-------|-------|
| 1   | 3,832  | 1,841 | 3,052 |
| 2   | 7,016  | 5,335 | 6,705 |
| 3   | 10,174 | 8,536 | 9,965 |

На основі методу розділення змінних запишемо амплітуду по-  
здовжньої проекції вектора напруженості електричного поля у  
вигляді:

$$E_z = E_0 J_m(g r) \cos m \varphi. \quad (5.27)$$

Поперечне число  $g$  визначаємо із крайової умови  $E_z = 0$  при  
 $r = a$ . Це виконується лише в тому випадку, коли аргумент ци-  
ліндричної функції у формулі (5.27) при  $r = a$  буде рівним одному з  
коренів  $v_{mn}$  функції Бесселя. Отже, поперечне хвильове число  $g$   
повинно задовольняти умову  $g_{mn} a = v_{mn}$ , звідки  $g_{mn} = v_{mn}/a$ .

Фізичний зміст індексів  $m$  і  $n$  є простим і наочним:  $m$  означає  
число варіацій поля по кутовій координаті  $\varphi$ , а  $n$  – число варіацій  
поля по радіальній координаті  $r$ . У випадку, коли  $m = 0$ , амплітуда  
векторів електромагнітного поля не залежить від кутової коорди-  
нати. Такі хвилі в круглому хвилеводі називають симетричними.

Критичні довжини хвиль  $E$ -типу в круглому хвилеводі знахо-  
дять на основі того ж принципу, що і у випадку прямокутного хви-  
лєводу:

$$\lambda_{кр E_{mn}} = \frac{2\pi}{g_{mn}} = \frac{2\pi a}{v_{mn}}. \quad (5.28)$$

Формули для визначення довжини хвилі у хвилеводі та фазової  
швидкості аналогічні формулам, отриманим для прямокутного хви-  
лєводу:

$$\lambda_x = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}, \quad v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}.$$

Аналізуючи формулу (5.28), переконуємося, що в круглому  
хвилеводі серед хвиль  $E$ -типу найбільшу критичну довжину має

хвиля  $E_{01}$ :  $\lambda_{кр E_{01}} = \frac{2\pi a}{2,405} = 2,61a$ , бо корінь  $v_{01}$  є найменшим з усіх

коренів функцій Бесселя будь-якого порядку.

Визначимо тепер структуру, поля хвилі типу  $E_{mn}$  у круглому  
хвилеводі. Амплітуду поздовжньої проекції електричного вектора  
хвилі типу  $E_{mn}$  у круглому хвилеводі визначимо на основі формули  
(5.27) і поперечного числа  $g_{mn} = v_{mn}/a$ :

$$E_z = E_0 J_m(g r) \cos m \varphi = E_0 J_m\left(\frac{v_{mn} r}{a}\right) \cos m \varphi.$$

Тоді, використовуючи формули (5.21), у яких, за визначенням,  $\dot{H}_z = 0$ , легко знаходимо вирази, які визначають просторові залежності проєкцій векторів електромагнітного поля типу  $E_{mn}$ :

$$\begin{cases} \dot{E}_r = -j h E_0 \left[ \frac{m a^2}{v_{mn}^2 r} J_m\left(\frac{v_{mn} r}{a}\right) - \frac{a}{v_{mn}} J_{m+1}\left(\frac{v_{mn} r}{a}\right) \right] \cos m \varphi e^{-j h z}, \\ \dot{E}_\varphi = j h E_0 \frac{m a^2}{v_{mn}^2 r} J_m\left(\frac{v_{mn} r}{a}\right) \sin m \varphi e^{-j h z}, \\ \dot{E}_z = E_0 J_m\left(\frac{v_{mn} r}{a}\right) \cos m \varphi e^{-j h z}, \end{cases} \quad (5.29)$$

$$\begin{cases} \dot{H}_r = -\frac{\omega \varepsilon_0}{h} \dot{E}_\varphi, \\ \dot{H}_\varphi = \frac{\omega \varepsilon_0}{h} \dot{E}_r, \\ \dot{H}_z = 0. \end{cases}$$

Аналогічно, як і для прямокутного хвилеводу, визначимо хвильовий опір круглого хвилеводу:

$$Z_{cE} = \sqrt{\frac{\dot{E}_r^* \dot{E}_r + \dot{E}_\varphi^* \dot{E}_\varphi}{\dot{H}_r^* \dot{H}_r + \dot{H}_\varphi^* \dot{H}_\varphi}} = 120 \pi \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{kp}}\right)^2}.$$

Формули (5.29) дозволяють розрахувати й побудувати картину миттєвого розподілу силових ліній електромагнітного поля хвилі типу  $E_{mn}$  у круглому хвилеводі. Як приклад, на рис. 5.12, а зображено структуру поля симетричної хвилі типу  $E_{01}$ . Неважко помітити, що такий розподіл є результатом неперервної деформації картини силових ліній хвилі типу  $E_{11}$  у прямокутному хвилеводі. Складнішою виглядає структура поля у круглому хвилеводі, коли  $m \neq 0$ , наприклад, для хвилі типу  $E_{11}$  (рис. 5.12, б).

Визначимо середню потужність  $P_{\text{сеп}}$ , яка переноситься по круглому хвилеводі електромагнітною хвилею  $E_{01}$ . Для цього спочатку обчислимо в кожній точці  $z$ -ву проекцію усередненого

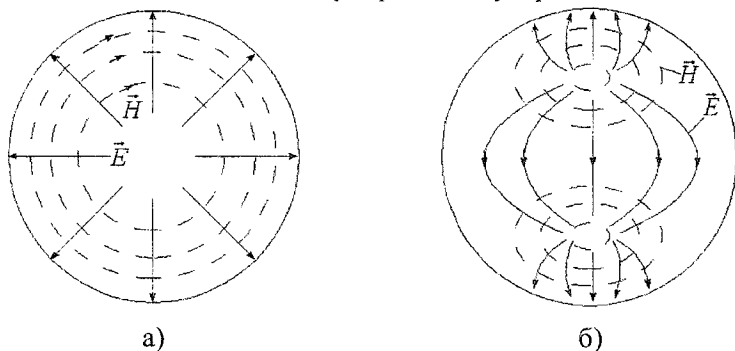


Рис. 5.12. Поперечний розподіл силових ліній електромагнітного поля в круглому хвилеводі для хвилі  $E_{01}$ -типу (а) і  $E_{11}$ -типу (б)

вектора Пойтінга  $\Pi_{\text{сеп } z}$ , а потім проведемо інтегрування по поперечному перерізу хвилеводу:

$$P_{\text{сеп}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \Pi_{\text{сеп } z}(r, \varphi) dr.$$

Для хвилі  $E_{01}$  поперечні складові рівні й синфазні:

$$\dot{E}_r = j \frac{h a}{v_{01}} E_0 J_1 \left( \frac{v_{01} r}{a} \right) e^{-j h z}, \quad \dot{H}_\varphi = \frac{\omega \varepsilon_0}{h} \dot{E}_r.$$

Усереднений вектор Пойтінга направлений уздовж осі  $z$  і має проекцію:

$$\Pi_{\text{сеп } z} = \frac{1}{2} \dot{E}_r \dot{H}_\varphi = \frac{\omega \varepsilon_0 a^2 h}{2 v_{01}^2} E_0^2 J_1^2 \left( \frac{v_{01} r}{a} \right).$$

Тоді потужність, яка переноситься цією хвилею, рівна

$$P_{\text{сеп}} = \frac{\pi \omega \varepsilon_0 a^2 h}{v_{01}^2} E_0^2 \int_0^a J_1^2 \left( \frac{v_{01} r}{a} \right) r dr.$$

Обчислений інтеграл Ломмеля з курсу математичної фізики складає

$$\int_0^a J_1^2 \left( \frac{v_{01} r}{a} \right) r dr = \frac{a^2}{2} J_1^2(v_{01}).$$

Таким чином, середня потужність, яка переноситься електромагнітною хвилею типу  $E_{01}$ , у круглому хвилеводі буде рівна

$$P_{\text{сеп}} = \frac{\pi \omega \varepsilon_0 a^4 h}{2v_{01}^2} E_0^2 J_1^2(v_{01}).$$

### 5.2.3 Хвилі $H$ -типу в круглому хвилеводі

Досліджуючи хвилі  $H$ -типу в круглому хвилеводі, будемо виходити з рівняння Гельмгольца відносно проекції  $\dot{H}_z$  у циліндричній системі координат:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{H}_z = 0. \quad (5.30)$$

Шукаючи розв'язок цього рівняння у вигляді  $\dot{H}_z(r, \varphi, z) = \dot{H}_z(r, \varphi) e^{-jhz}$  і вводячи поперечне хвильове число  $g^2 = \beta^2 - h^2$ , приходимо до рівняння:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial \varphi^2} + g^2 \dot{H}_z = 0. \quad (5.31)$$

У випадку хвиль  $H$ -типу електричний вектор може мати лише поперечні складові з комплексними амплітудами проекцій  $\dot{E}_r$  і  $\dot{E}_\varphi$ , бо  $\dot{E}_z = 0$ . При цьому тільки азимутальна складова з проекцією  $\dot{E}_\varphi$  є дотичною до стінок хвилеводу. Оскільки для хвиль  $H$ -типу  $\dot{E}_\varphi = \frac{j\omega\mu_0}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r}$ , крайова умова матиме вигляд  $\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} = 0$  при  $r = a$ .

Саме ця крайова умова й саме рівняння Гельмгольца (5.31) утворюють крайову задачу для хвиль  $H$ -типу.

Дану задачу, як і попередні, будемо розв'язувати методом розділення змінних. Частинний розв'язок із  $m$ -варіаціями по азимутальній координаті  $\varphi$  запишемо у вигляді  $\dot{H}_z(r, \varphi) = H_0 J_m(g r) \cos m \varphi$ .

Щоб знайти невідоме поперечне хвильове число  $g$ , обчислимо похідну

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} = H_0 g \frac{dJ_m(z)}{dx} \cos m \varphi,$$

де  $x = gr$  – безрозмірна величина, використавши при цьому крайову умову  $\frac{\partial J_m}{\partial x} = 0$  при  $x = ga$ . Це рівняння для функції Бесселя має необмежене число коренів  $\mu_{mn}$  ( $g_{mn} a = \mu_{mn}$ ). Тому поперечне число  $g_{mn} = \mu_{mn}/a$ . Це дозволяє визначити  $z$ -ову проекцію напруженості магнітного поля у хвилі  $H$ -типу:

$$\dot{H}_z(r, \varphi) = H_0 J_m \left( \frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \cos m\varphi. \quad (5.32)$$

Це дає можливість, у свою чергу, на основі рівнянь (5.21) визначити всю сукупність комплексних амплітуд проекцій векторів електромагнітного поля, де  $\dot{E}_z = 0$ :

$$\begin{cases} \dot{E}_r = j \frac{\omega \mu_0 m a^2}{\mu_{mn}^2 r} H_0 J_m \left( \frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \sin m\varphi e^{-jhz}, \\ \dot{E}_\varphi = j \omega \mu_0 H_0 \left[ \frac{m a^2}{\mu_{mn}^2 r} J_m \left( \frac{\mu_{mn} r}{a} \right) - \frac{a}{\mu_{mn}} J_{m+1} \left( \frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \right] \cos m\varphi e^{-jhz}, \\ \dot{E}_z = 0, \end{cases} \quad (5.33)$$

$$\begin{cases} \dot{H}_r = -\frac{h}{\omega \varepsilon_0} \dot{E}_\varphi, \\ \dot{H}_\varphi = \frac{h}{\omega \varepsilon_0} \dot{E}_r, \\ \dot{H}_z = H_0 J_m \left( \frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \cos m\varphi e^{-jhz}. \end{cases}$$

Основні розрахункові формули для критичної довжини хвилі, довжини хвилі у хвилеводі та фазової швидкості залишаються такими ж, як і для прямокутного хвилеводу:

$$\lambda_{кр H_{mn}} = \frac{2\pi a}{\mu_{mn}}, \quad \lambda_x = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}, \quad v_\psi = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}.$$

Серед можливих  $H$ -хвиль круглого хвилеводу найбільше практичне застосування знайшла хвиля типу  $H_{11}$ , у якої:

$$\begin{cases} \dot{E}_r = j \frac{\omega \mu_0 m a^2}{\mu_{11}^2 r} H_0 J_1 \left( \frac{\mu_{11} r}{a} \right) \sin \varphi e^{-jhz}, \\ \dot{E}_\varphi = j \omega \mu_0 H_0 \left[ \frac{m a^2}{\mu_{11}^2 r} J_1 \left( \frac{\mu_{11} r}{a} \right) - \frac{a}{\mu_{11}} J_2 \left( \frac{\mu_{11} r}{a} \right) \right] \cos \varphi e^{-jhz}, \\ \dot{E}_z = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{H}_r = -\frac{h}{\omega \varepsilon_0} \dot{E}_\varphi, \\ \dot{H}_\varphi = \frac{h}{\omega \varepsilon_0} \dot{E}_r, \\ \dot{H}_z = H_0 J_1 \left( \frac{\mu_{11} r}{a} \right) \cos \varphi e^{-jhz}. \end{cases}$$

Картина силових ліній, побудована для цього поля згідно з розробленою комп'ютерною методикою, для хвилі типу  $H_{11}$  виглядає так (рис. 5.13):

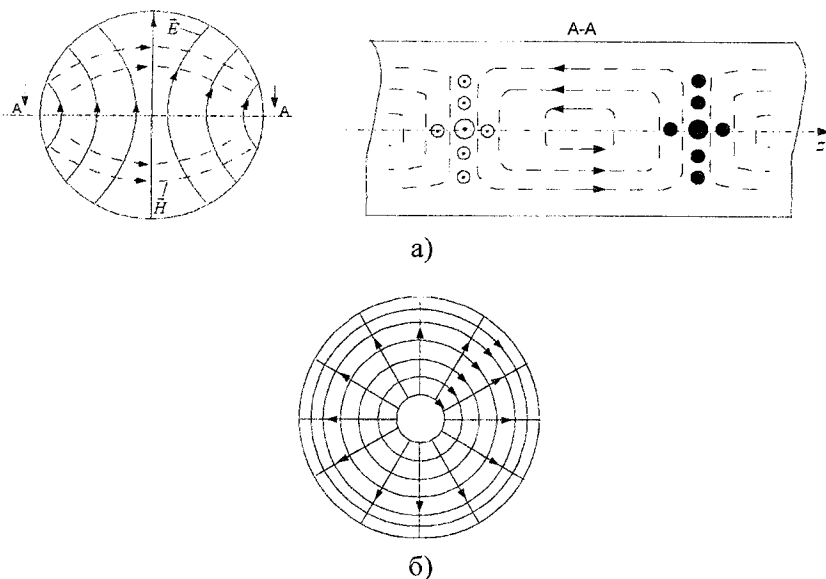


Рис. 5.13. Силові лінії хвилі типу  $H_{11}$  (а) і  $H_{01}$  (б) у круглому хвилеводі

Цікавий вигляд має також хвиля типу  $H_{01}$  – проста симетрична хвиля в круглому хвилеводі. Її проекції векторів мають такі комплексні амплітуди:

$$\begin{cases} \dot{E}_r = 0, & \dot{E}_\varphi = -j \frac{\omega \mu_0 a}{\mu_{01}} J_1 \left( \frac{\mu_{01} r}{a} \right) e^{-jhz}, & \dot{E}_z = 0, \\ \dot{H}_r = -\frac{h}{\omega \varepsilon_0} \dot{E}_\varphi, & \dot{H}_\varphi = 0, & \dot{H}_z = H_0 J_0 \left( \frac{\mu_{01} r}{a} \right) e^{-jhz}. \end{cases}$$

Повернемося до табл. 5.1 і 5.2, де визначено корені функції Бесселя та її похідної. Найменшим з усіх коренів є перший корінь похідної функції Бесселя 1-го порядку  $\mu_{11} = 1,841$ , якому відповідає хвиля  $H_{11}$ . Тоді критична довжина хвилі  $H_{11}$  рівна:

$$\lambda_{кр H_{11}} = \frac{2\pi a}{1,841} = 3,41a.$$

Таким чином, як й очікувалося, хвиля типу  $H_{11}$  є хвилею нижчого типу в круглому хвилеводі. Далше послідовно знаходимо:

$$\lambda_{кр E_{01}} = \frac{2\pi a}{2,405} = 2,61a; \quad \lambda_{кр H_{21}} = \frac{2\pi a}{3,054} = 2,06a;$$

$$\lambda_{кр H_{01}} = \lambda_{кр E_{11}} = \frac{2\pi a}{3,832} = 1,64a.$$

Тепер можна побудувати діаграму типів хвиль (рис. 5.14) за аналогією як для прямокутного хвилеводу. У круглому хвилеводі не

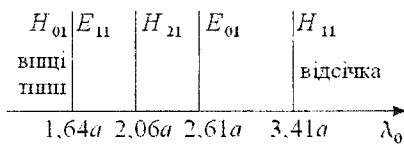


Рис. 5.14. Діаграма типів хвиль у круглому хвилеводі

можуть поширюватися хвилі з довжиною хвилі  $\lambda_0 > 3,41a$  – область відсічки. В інтервалі довжин хвиль  $2,61a < \lambda_0 < 3,41a$  круглий хвилевід працює в однохвильовому режимі. При  $\lambda_0 < 2,61a$  у хвилеводі спостерігається багатохвильовий режим.

Незважаючи на очевидні конструкторські й технологічні переваги, круглі хвилеводи використовуються рідше, ніж прямокутні. Це зумовлено так званою поляризаційною нестійкістю основної



хвилі типу  $H_{11}$  у круглому хвилеводі, у результаті чого при передачі хвилі  $H_{11}$  площина поляризації змінює свій кут.

Насамкінець зупинимося на унікальній властивості круглого хвилеводу під час поширення симетричної хвилі типу  $H_{01}$ . Затухання таких хвиль як у круглому, так і в прямокутному хвилеводі зі збільшенням частоти зменшується, на відміну від хвиль інших типів, у яких із ростом частоти затухання збільшується. Це дає можливість конструювати великої довжини хвилеводи на базі круглого хвилеводу з хвилею  $H_{01}$ -типу.

#### 5.2.4 Хвилеводи з хвилями $T$ -типу

Як нам уже відомо, хвилі  $T$ - або  $TEM$ -типу характеризуються тим, що в них відсутні поздовжні складові:  $E_z = 0$  і  $H_z = 0$ . Розглянемо спочатку загальні властивості хвиль  $T$ -типу.

Нехай гармонічна електромагнітна хвиля  $T$ -типу поширюється в просторі, заповненому однорідним середовищем з постійними, які не залежать від частоти, електродинамічними параметрами  $\varepsilon_a$  і  $\mu_a$ . Хвиля поширюється вздовж осі  $z$  прямокутної декартової системи координат. Оскільки  $\dot{E}_z = \dot{H}_z = 0$ , то перші два рівняння Максвелла набувають вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = -j\omega\varepsilon_a \dot{E}_x, \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} = j\omega\varepsilon_a \dot{E}_y, \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -j\omega\mu_a \dot{H}_x, \\ \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = -j\omega\mu_a \dot{H}_y, \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (5.34)$$

Виведемо диференціальне рівняння, яке повинна задовольняти кожна із проєкцій векторів такого електромагнітного поля в силу рівнянь (5.34). Для цього візьмемо, наприклад, друге рівняння із системи 2-го рівняння Максвелла і продиференціюємо його по  $z$ , а потім підставимо в нього величину  $\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}$  з першого рівняння системи 1-го рівняння Максвелла. У результаті отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} = -j \omega \mu_a \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = j^2 \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \dot{E}_x.$$

Можемо сказати, що  $x$ -ва проекція комплексної амплітуди  $\dot{E}(x, y, z)$  задовольняє рівняння Гельмгольца  $\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{E}_x = 0$ , у якому  $\beta = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$  – коефіцієнт фази однорідної плоскої хвилі з частотою  $\omega$ , яка поширюється в середовищі з параметрами  $\varepsilon_a$  і  $\mu_a$ . Такі ж рівняння можна сформуувати й для інших проекцій –  $\dot{E}_y$ ,  $\dot{H}_x$ ,  $\dot{H}_y$ .

Розв'язком такого рівняння є функція  $\dot{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z) e^{\pm j \beta z}$ , яка описує хвильовий процес і поширюється вздовж додатного напрямку осі  $z$  з постійною фазовою швидкістю  $v_\phi = \omega / \beta = 1 / \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ , рівною швидкості світла в заповненому середовищі.

Таким чином, бачимо, що хвиля  $T$ -типу, на відміну від розглянутих вище хвиль  $E$ - і  $H$ -типів, не має частотної дисперсії фазової швидкості. Для хвиль  $T$ -типу поздовжнє хвильове число  $h = \beta$ , оскільки  $g^2 = \beta^2 - h^2 = 0$ . Звідси безпосередньо випливає, що критична довжина  $T$ -хвиль  $\lambda_{крT} = 2\pi / g = \infty$ , тобто хвилевід із хвилею  $T$ -типу однаковою мірою пропускає коливання будь-яких частот, починаючи з постійного струму, для якого  $\omega = 0$ .

Задача про електромагнітне поле  $T$ -хвилі буде повністю розв'язана, якщо ми знайдемо функції  $E_x(x, y)$ ,  $E_y(x, y)$  та аналогічні функції  $H_x(x, y)$ ,  $H_y(x, y)$ . Звернемося до третього рівняння системи (5.34), яке може виконуватися, якщо  $\vec{E}(x, y) = -\text{grad } \varphi_e(x, y)$ , де  $\varphi_e(x, y)$  називають скалярним електричним потенціалом. Складові вектора  $\vec{E}$  рівні  $E_x = -\frac{\partial \varphi_e}{\partial x}$  і  $E_y = -\frac{\partial \varphi_e}{\partial y}$ , тому  $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$ . Тепер нам відомо, що якщо відсутні заряди в середовищі, то  $\text{div } \vec{E} = 0$ . У декартовій системі координат останнє рівняння записується так:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0.$$

Підставивши значення  $E_x$  і  $E_y$  через градієнт скалярного електричного поля, отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial y^2} = 0. \quad (5.35)$$

Рівняння (5.34) у математичній фізиці називають рівнянням Лапласа. У цілому, для будь-якої системи координат його можна записати в більш загальній формі:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_e = \nabla_{\perp}^2 \varphi_e = 0, \quad (5.35.a)$$

де  $\nabla_{\perp}^2 = \Delta_{\perp}$  – оператор Лапласа для поперечних координат.

Рівняння Лапласа описує всі можливі стани рівноваги в просторових структурах. Зокрема, рівняння Лапласа є основним рівнянням електростатики. Дійсно, будь-яке електростатичне поле незмінне в часі й тому в силу рівнянь Максвелла задовольняє систему рівнянь  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ ,  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ . Як відомо, якщо  $\operatorname{rot}$  і  $\operatorname{div}$  вектора рівні нулю, то поле називають лапласівським або гармонічним, про що йшла мова у розділі 1. Від'ємний знак у визначенні скалярного електричного потенціалу, а саме  $\vec{E}(x, y) = -\operatorname{grad} \varphi_e(x, y)$ , пов'язаний з тим, що вектор  $\vec{E}$  направлений у бік зменшення електричного потенціалу. Тобто силові лінії вектора  $\vec{E}$  починаються на провідниках, які несуть додатні заряди.

Таким чином, картина силових ліній електричного вектора в поперечній площині регулярного хвилеводу з  $T$ -хвилею цілком збігається з картиною силових вектора  $\vec{E}$  в зарядженому циліндричному конденсаторі, конфігурація обкладинок якого така ж, як і струмонесучих поверхонь хвилеводу (рис. 5.15). Статичний характер поперечного розподілу електричного поля у хвилеводі з  $T$ -хвилями дозволяє ввести ще одну характеристику електромагнітного процесу – різницю потенціалів між провідниками:

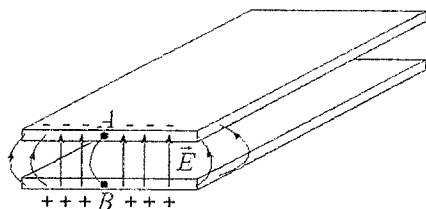


Рис. 5.15. Хвилевід із  $T$ -хвилею

Рис. 5.15. Хвилевід із  $T$ -хвилею

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = \varphi_A - \varphi_B.$$

Проте відомо, що в металевому хвилеводі із замкнутою однозв'язною формою поперечного перерізу хвиля  $T$ -типу існувати не може, оскільки скалярний електричний потенціал  $\varphi_e = const$ , а тоді електричне поле не існує, бо  $\vec{E} = 0$ .

Таким чином, хвилі  $T$ -типу можуть поширюватися тільки в таких хвилеводах, де є хоча б два ізольованих один від одного провідники, між якими встановлюється різниця потенціалів. Такими хвилеводами може бути двопровідна лінія, коаксіальний і смужковий хвилеводи.

### 5.2.5 Коаксіальний і смужковий хвилеводи

Коаксіальний хвилевід найбільш широко використовується в радіотехнічних пристроях і являє собою два співвісні металеві циліндри з радіусами  $a$  і  $b$ , які розділені діелектриком (рис. 5.16). Для аналізу структури електромагнітного поля в такому хвилеводі доцільно використати циліндричну систему координат  $r, \varphi, z$ , поздовжня вісь якої збігається з віссю провідних циліндрів.

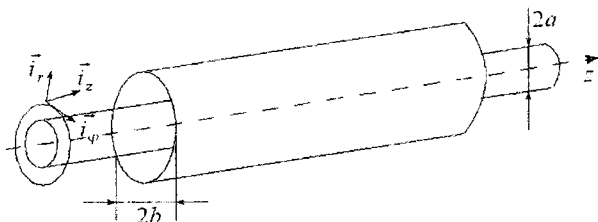


Рис. 5.16. Коаксіальний хвилевід

Унаслідок симетрії поперечного перерізу такого хвилеводу функції, які описують просторові залежності векторів електромагнітного поля, очевидно, не залежать від кутової координати, тобто  $\partial/\partial\varphi = 0$ . Для розв'язання цієї задачі використаємо для області  $a \leq r \leq b$  рівняння Лапласа  $\nabla_{\perp}^2 \varphi_e(r) = \Delta_{\perp} \varphi_e(r) = 0$  за таких крайових умов:  $\varphi_e(a) = U$ ,  $\varphi_e(b) = 0$ . Тоді двомірне рівняння Лапласа в полярній системі координат з урахуванням симетрії за кутом  $\varphi$  матиме вигляд:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi_e}{dr} \right) = 0, \quad (5.36)$$

або

$$r \frac{d\varphi_e}{dr} = A = \text{const.}$$

Загальний розв'язок цього рівняння:

$$\varphi_e(r) = A \ln r + B.$$

Постійні  $A$  і  $B$  визначаються із крайових умов:

$$A \ln a + B = U, \quad A \ln b + B = 0,$$

звідки

$$A = \frac{U}{\ln a - \ln b}, \quad B = \frac{-U \ln b}{\ln a - \ln b}.$$

Тоді закон розподілу скалярного електричного потенціалу у внутрішній області коаксіального хвилеводу матиме вигляд:

$$\varphi_e(r) = U \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)}. \quad (5.37)$$

Отримана формула встановлює той факт, що у разі збільшення радіальної координати від  $a$  до  $b$  потенціал зменшується за логарифмічним законом. Тоді амплітуда вектора напруженості електричного поля в поперечній площині рівна

$$\vec{E}(r) = -\text{grad } \varphi_e(r) = -\frac{\partial \varphi_e}{\partial r} \vec{i}_r = \frac{U}{\ln(b/a)} \frac{\vec{i}_r}{r}$$

і зменшуватиметься обернено пропорційно координаті точки спостереження й матиме єдину проекцію вздовж одиничного вектора  $\vec{i}_r$ .

Якщо простір між провідними циліндрами заповнений середовищем без утрат ( $\sigma = 0$ ) з електродинамічними параметрами  $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$ , то комплексна амплітуда вектора  $\vec{E}$ -хвилі  $T$ -типу, яка поширюється в бік координати  $z$ , буде визначатись як

$$\vec{E}(r, z) = \frac{U}{\ln(b/a)} \frac{1}{r} e^{-j\beta z} \vec{i}_r.$$

Для того щоб знайти комплексну амплітуду  $\vec{H}(r, z)$  магнітного вектора, треба використати перше рівняння Максвелла  $\text{rot } \vec{E} = -j\omega \mu_a \vec{H}$ . Звідси

$$\dot{H}(r, z) = \frac{j}{\omega \mu_a} \text{rot } \dot{E} = \frac{j}{\omega \mu_a} \frac{\partial \dot{E}_r}{\partial z} \vec{i}_\varphi = \frac{\sqrt{\varepsilon_a / \mu_a} U}{\ln(b/a) r} e^{-j\beta z} \vec{i}_\varphi.$$

Як бачимо, вектор  $\dot{H}(r, z)$  має єдину азимутальну проекцію. Силкові лінії цього векторного поля утворюють собою концентричні кола, які охоплюють внутрішній провідник хвилеводу.

Розподіл силкових ліній векторів електромагнітного поля  $T$ -хвилі в коаксіальному хвилеводі, що відповідає вищевизначеним формулам для  $\dot{E}(r, z)$  і  $\dot{H}(r, z)$ , зображено на рис. 5.17. Для такого хвилеводу характеристичний опір рівний:

$$Z_c = \frac{\dot{E}_r}{\dot{H}_\varphi} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}.$$

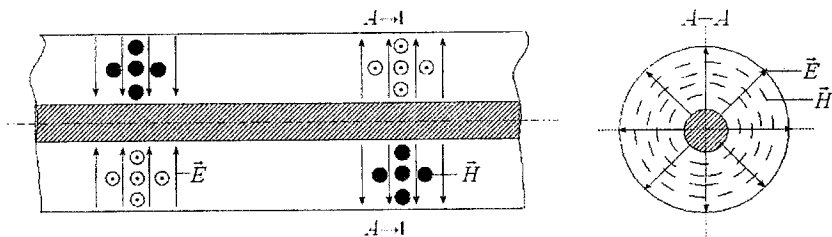


Рис. 5.17. Структура силкових ліній електромагнітного поля  $T$ -хвилі в коаксіальному хвилеводі

Як нам уже відомо, магнітний вектор  $T$ -хвилі направлений уздовж одиничного вектора  $\vec{i}_\varphi$ , який є дотичним до струмопровідних поверхонь, на яких виникають поверхневі електричні струми з густинами:

$$\vec{j}_{\text{пов.е}}(a) = [\vec{i}_r \times \vec{H}(a)], \quad \vec{j}_{\text{пов.е}}(b) = -[\vec{i}_r \times \vec{H}(b)].$$

Можна зробити висновки, що вздовж провідників коаксіального хвилеводу поширюються біжучі хвилі з густини поверхневого струму:

$$\vec{j}_{\text{пов.е}}(a, z) = \frac{\sqrt{\varepsilon_a / \mu_a} U}{\ln(b/a) a} e^{-j\beta z} \vec{i}_z,$$

$$\vec{j}_{\text{пов.е}}(b, z) = -\frac{\sqrt{\varepsilon_a / \mu_a} U}{\ln(b/a) b} e^{-j\beta z} \vec{i}_z.$$

Амплітуду сумарного струму  $I$  на провідниках знайдемо, помноживши амплітуди густин поверхневого струму на величини  $2\pi a$  і  $2\pi b$ , відповідно як довжини контурів внутрішнього й зовнішнього провідників. Тоді

$$I(a) = -I(b) = \frac{2\pi\sqrt{\epsilon_a/\mu_a}}{\ln(b/a)} U.$$

Як бачимо, струми рівні за модулем і протилежні за напрямом. Це вказує на те, що по одному провіднику струм від генератора поступає в навантаження, а по другому знову повертається в генератор.

Тепер можна визначити хвильовий опір лінії передачі коаксіального хвилеводу для хвилі  $T$ -типу:

$$Z_x = \frac{U}{I} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sqrt{\epsilon_a/\mu_a}} = 60\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln(b/a).$$

У сучасній НВЧ-техніці використовують коаксіальні хвилеводи із хвильовими опорами 50, 75, 100, 150 і 200 Ом.

Знаючи комплексні амплітуди напруженостей електричного та магнітного полів у коаксіальному хвилеводі, можна обчислити потужність електромагнітного поля, яка переноситься вздовж осі  $z$  біжучою хвилею:

$$P = \frac{1}{2} \int_s \operatorname{Re} [\dot{E} \times \dot{H}^*] d\vec{S} = \frac{U^2 \sqrt{\epsilon/\mu}}{120 \ln(b/a)}.$$

В останні роки у техніці НВЧ почали використовувати особливий клас ліній передачі з хвилями  $T$ -типу – смужкові хвилеводи. У таких хвилеводах струмонесучі провідники являють собою тонкі смужки металу, між якими знаходиться підкладка – плоский шар діелектрика з малими втратами. Смужкові хвилеводи бувають симетричні й несиметричні. Їх структура й силові лінії векторів електромагнітного поля зображені на рис. 5.18.

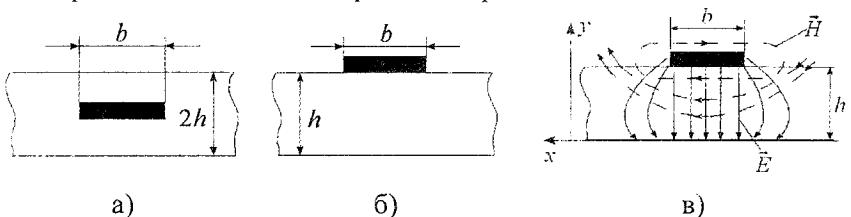


Рис. 5.18. Смужкові хвилеводи: а) симетричний; б) несиметричний; в) силові лінії електромагнітного поля в мікросмужковому хвилеводі

Для того щоб забезпечити високі електричні та механічні характеристики хвилеводів, як матеріали для підкладки часто використовують тверді діелектрики на основі оксиду алюмінію ( $Al_2O_3$ ) – полікору з  $\varepsilon = 9,6$  і корунду-лейкосапфіру з  $\varepsilon = 11,4$ . Висока діелектрична проникність цих матеріалів дозволяє суттєво зменшити поперечні габарити хвилеводів. Такі несиметричні смужкові хвилеводи для сантиметрового й міліметрового діапазонів називають мікросмужковими хвилеводами НВЧ.

Строгий електродинамічний аналіз полів у несиметричному смужковому хвилеводі є досить складною задачею й проводиться в основному чисельними методами. Це пов'язано з тим, що на відміну від коаксіального хвилеводу тут параметри середовища, що заповнює простір між смужками, є неоднорідні по перерізу. Як наслідок, вектори електромагнітного поля в такому хвилеводі мають усі шість декартових проекцій  $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$  і тому, строго кажучи, хвиль  $T$ -типу в ньому не існує. Проте на практиці застосовують смужкові хвилеводи, у яких товщина підкладки  $h$  суттєво менша за ширину верхнього провідника  $b$ . Тому електричне поле в поперечному перерізі хвилеводу розподіляється приблизно так само, як й електростатичне в плоскому конденсаторі. Достатньо високе значення діелектричної проникності підкладки знижує роль крайових ефектів, так що поле у внутрішній області стає майже (квазі) однорідним.

Таким чином, при  $h/b \ll 1$  і  $\varepsilon \gg 1$  можна обґрунтовано знехтувати порівняно малими поздовжніми проекціями  $E_z$  і  $H_z$ . Нижчий тип хвиль у такому мікросмужковому хвилеводі, які мають нульові значення критичної частоти, називають квазі  $T$ -хвилями.

Строгий аналіз показує, що фазова швидкість квазі  $T$ -хвилі залежить від частоти. Дисперсійні явища виражені тим різкіше, чим вища діелектрична проникність матеріалу підкладки.

Розглянемо тепер картину силових ліній векторів електромагнітного поля в мікросмужковому хвилеводі, подану на рис. 5.15, в. Якщо між верхнім провідником і металевою основою є гармонічна в часі різниця потенціалів  $\dot{U}$ , то амплітуда  $y$ -ї проекції вектора напруженості електричного поля буде визначатися за формулою плоского конденсатора:  $\dot{E}_y = \dot{U}/h$ . Вектор напруженості магнітного поля буде мати поперечну  $x$ -ву проекцію, яка в кожній точці пов'язана з



$\dot{E}_y$  з допомогою характеристичного рівняння середовища, що заповнює:

$$\dot{H}_x = \frac{\dot{E}_y}{Z_e} = \frac{\dot{U}}{120\pi h \sqrt{\mu/\varepsilon}}.$$

Проекція вектора густини поверхневого електричного струму на вісь  $z$  чисельно збігається з поперечною проекцією магнітного вектора. Тоді амплітуда струму в лінії буде прямо пропорційною ширині смужки:

$$I = \frac{\dot{U} b}{120\pi h \sqrt{\mu/\varepsilon}},$$

звідки знаходимо хвильовий опір мікросмужкового хвилеводу:

$$Z_x = \frac{\dot{U}}{I} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{h}{b}.$$

Більш точна формула для  $h/b < 1$  і  $\mu = 1$ , що визначає хвильовий опір, має вигляд

$$Z_x = \frac{188,5}{\sqrt{\varepsilon}} \left\{ \frac{b}{2h} + 0,441 + 0,082 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon + 1}{2\pi\varepsilon} \left[ 1,451 + \ln \left( \frac{b}{2h} + 0,94 \right) \right] \right\}^{-1}.$$

Мікросмужкові лінії передачі, які сьогодні застосовуються в сучасних інтегральних пристроях НВЧ, мають хвильовий опір у межах від 10 до 100 Ом і формуються на арсенід галієвій ( $GaAs$ ) технології.

### 5.2.6 Довга лінія з $T$ -хвилею як чотириполосник

У теорії електронних кіл для опису чотириполосників використовують апарат матричного аналізу. Розробником цієї теорії є д.т.н, професор Ю.Т. Величко. Будемо характеризувати розподілений чотириполосник на базі довгої лінії його матрицею передачі ( $A$ -матрицею). При цьому незалежними змінними є вихідні напруга  $U_2$  і струм  $I_2$ , які пов'язані з напругою  $U_1$  і струмом  $I_1$  на виході (рис. 5.19) двома рівняннями:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11} \dot{U}_2 + A_{12} \dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= A_{21} \dot{U}_2 + A_{22} \dot{I}_2. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Знаючи матрицю передачі  $[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ , можна знайти будь-

які зовнішні характеристики 4-полюсника. Наприклад, якщо до вхідних затискачів підключений лінійний двополюсник навантаження  $Z_n$ , так що  $\dot{U}_2/\dot{I}_2 = Z_n$ , то вхідний опір 4-полюсника буде визначатися рівністю:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A_{11}Z_n + A_{12}}{A_{21}Z_n + A_{22}}.$$



Рис. 5.19. Схематичне зображення довгої лінії як чотириполюсника

Аналогічно знаходимо комплексний коефіцієнт передачі напруги:

$$K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z_n}{A_{11}Z_n + A_{12}}.$$

Тепер поставимо собі задачу визначити елементи  $A$ -матриці відрізка регулярного хвилеводу (так називатимемо довгу лінію) з  $T$ -хвилею. Скористаємося тим, що розв'язок загального рівняння Гельмгольца, який записаний відносно комплексних амплітуд напруги й струму, має вигляд суми двох падаючої й відбитої біжучих у протилежних напрямках хвиль:

$$\begin{cases} \dot{U}(z) = C_1 e^{-j\beta z} + C_2 e^{j\beta z}, \\ \dot{I}(z) = \frac{C_1}{Z_x} e^{-j\beta z} - \frac{C_2}{Z_x} e^{j\beta z}. \end{cases} \quad (5.39)$$

Тут  $C_1$  і  $C_2$  — коефіцієнти, які відносяться до падаючої і відбитої хвиль відповідно. Від'ємний знак у другому рівнянні пов'язаний з тим, що відбита хвиля переносить потужність у бік зменшення координати  $z$ .

Виразимо ці коефіцієнти через вихідні комплексні амплітуди  $U_2$  і  $I_2$ , які отримаємо з рівнянь (5.39) при  $z = l$ :

$$\begin{cases} C_1 e^{-j\beta l} + C_2 e^{j\beta l} = \dot{U}_2, \\ C_1 e^{-j\beta l} - C_2 e^{j\beta l} = \dot{I}_2 Z_x. \end{cases} \quad (5.40)$$

Розв'язок даної системи рівнянь дає вирази

$$C_1 = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_x}{2} e^{j\beta l}, \quad C_2 = \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_x}{2} e^{-j\beta l}.$$

Таким чином, комплексні амплітуди напруги й струму в довільному перерізі виражаються через величини  $\dot{U}_2$  та  $\dot{I}_2$ :

$$\begin{cases} \dot{U}(z) = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_x}{2} e^{j\beta(l-z)} + \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_x}{2} e^{-j\beta(l-z)}, \\ \dot{I}(z) = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_x}{2 Z_x} e^{j\beta(l-z)} - \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_x}{2 Z_x} e^{-j\beta(l-z)}. \end{cases}$$

Вхідні напругу і струм визначаємо, поклавши  $z = 0$ :

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_x}{2} e^{j\beta l} + \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_x}{2} e^{-j\beta l}, \\ \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_x}{2} e^{j\beta l} - \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_x}{2} e^{-j\beta l}, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cos \beta l + j \dot{I}_2 Z_x \sin \beta l, \\ \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \frac{j}{Z_x} \sin \beta l + \dot{I}_2 \cos \beta l \end{cases}$$

з рівнянь довгої лінії.

Порівнюючи ці дві системи рівнянь, бачимо, що матриця передачі регулярного хвилеводу з хвилею  $T$ -типу виражається як:

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos \beta l & j Z_x \sin \beta l \\ \frac{j}{Z_x} \sin \beta l & \cos \beta l \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

Тоді можна визначити вхідний опір лінії:

$$Z_{ax} = \frac{Z_n \cos \beta l + j Z_x \sin \beta l}{j \frac{Z_n}{Z_x} \sin \beta l + \cos \beta l} = \frac{Z_n + j Z_x \operatorname{tg} \beta l}{1 + j \frac{Z_n}{Z_x} \operatorname{tg} \beta l}. \quad (5.42)$$

Якщо ввести безрозмірне нормування опору:  $Z'_{ax} = Z_{ax} / Z_x$ ,  $Z'_n = Z_n / Z_x$ , то остання формула запишеться у вигляді:

$$Z'_{\text{ex}} = \frac{Z'_n + j \operatorname{tg} \beta l}{1 + j Z'_n \operatorname{tg} \beta l}. \quad (5.42.a)$$

На основі цієї формули можна стверджувати, що в загальному випадку вхідний опір такого хвилеводу, до вхідних затискачів якого підключений двополосник навантаження, не збігається з комплексним опором цього двополосника. Тому такий хвилевід виконує роль трансформатора опору. Це широко використовують у сучасній схемотехніці телекомунікаційних систем.

Потрібно відмітити, що в режимі узгодження (при  $Z'_n = 1$ ) вхідний опір будь-якого відрізка лінії рівний хвильовому опору лінії передачі незалежно від його довжини й частоти.

Якщо відрізок на виході закорочений, так що  $Z'_n = 0$ , то  $Z'_{\text{ex}} = j \operatorname{tg} \beta l$ . При холостому ході на виході  $Z'_n = \infty$ , і тому нормований вхідний опір відрізка лінії рівний  $Z'_{\text{ex}} = -j \operatorname{ctg} \beta l$ .

Відповідно до останніх формул для  $Z'_{\text{ex}}$  вхідний опір подібних відрізків хвилеводів завжди є чисто реактивним і є періодичною функцією безрозмірного параметра. Наприклад, відрізок короткозамкненої лінії довжиною  $l < \lambda/4$  має індуктивний опір, модуль якого необмежено зростає з наближенням відрізка до  $\lambda/4$ . В інтервалі  $\lambda/4 < l < \lambda/2$  вхідний опір має вже ємнісний характер.

Короткозамкнений відрізок передачі часто використовують у техніці НВЧ. Знаючи його довжину, за допомогою короткозамикача (поршня) можна здійснювати налаштування й регулювання елементів хвилеводного тракту.

### 5.2.7 Затухання хвиль у хвилеводах. Коефіцієнт затухання хвиль

Як відомо, комплексні амплітуди векторів електромагнітного поля, які поширюються у хвилеводі в бік  $z > 0$ , під час роботи на деякому типі хвилі записуються так:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &= \vec{E}(x, y) e^{-jh z}, \\ \vec{H}(x, y, z) &= \vec{H}(x, y) e^{-jh z}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

де  $\vec{E}(x, y)$  і  $\vec{H}(x, y)$  – векторні функції поперечних координат, які залежать від вибраного типу хвилі,  $h$  – позовжнє хвильове число.

Відрізок регулярного хвилеводу можна завжди подати у вигляді каскадного з'єднання відрізків меншої довжини. Якщо кожному відрізку характерне деяке затухання, то загальне затухання повинно бути експоненціальною функцією сумарної довжини. Можна вважати, що у хвилеводі з утратами поздовжнє хвильове число є комплексною величиною:  $h = h' - jh''$ . Тоді комплексні амплітуди векторів поля у хвилеводі будуть визначатись як:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &= \vec{E}(x, y) e^{-h'z} e^{-jh''z}, \\ \vec{H}(x, y, z) &= \vec{H}(x, y) e^{-h'z} e^{-jh''z}. \end{aligned} \quad (5.43.a)$$

Із цих співвідношень видно, що  $h'$  є коефіцієнтом фази, тоді як  $h''$  – коефіцієнт затухання. Числове значення затухання  $h'' = \ln(E_{ax}/E_{aux})$  і величина  $h''$  є погонним затуханням лінії передачі (вимірюється в  $[Hn/м]$ ). У радіотехнічних пристроях погонне затухання виражають у  $дБ/м$  відповідно до формули  $\Delta_{noz} = 20 \lg(E_{ax}/E_{aux})$ , де  $\Delta_{noz} = 8,686 h''$ .

У техніці НВЧ для проведення вимірювань використовують не напруженості полів, а потужності. Якщо  $P_{ax}$ ,  $P_{aux}$  – потужності біжучої хвилі на вході та виході відрізка регулярного хвилеводу з утратами, то  $\Delta_{noz} = 10 \lg(P_{ax}/P_{aux})$ , оскільки потужність, яка переноситься хвилею, пропорційна квадрату напруженості поля.

Для будь-якого фіксованого перерізу хвилеводу можна записати, що  $P(z) = P_0 e^{-2h''z}$ , де  $P_0$  – середня потужність у перерізі  $z = 0$ .

Тоді  $\frac{dP}{dz} = -2h''P$ , звідки  $h'' = -\frac{dP/dz}{2P}$ . Величина  $dP$  із точністю до

знака визначає середню потужність утрат в елементарному відрізку хвилеводу  $dz$ . Густина середньої потужності втрат характеризується вектором Пойтінга  $\vec{\Pi}_{сер\ ст}$ , який завжди перпендикулярний до стінок хвилеводу. Тому

$$dP = -dz \int_L |\vec{\Pi}_{сер\ ст}| dl,$$

де  $L$  – контур поперечного перерізу лінії передачі.

З іншого боку, потужність  $P$ , яка переноситься через повний переріз  $S$  хвилеводу, буде визначатись інтегруванням середнього значення вектора Пойтінга  $\vec{\Pi}_{сер}$  по перерізу  $S$ :

$$P = \int_S \vec{\Pi}_{\text{cep}} d\vec{S}.$$

Тоді

$$h'' = -\frac{dP/dz}{2P} = \frac{\int_L |\vec{\Pi}_{\text{cep om}}| dl}{2 \int_S \vec{\Pi}_{\text{cep}} d\vec{S}}.$$

Як відомо,  $\vec{\Pi}_{\text{cep om}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \dot{E}_{\tau, m} \times H_{\tau, m}^* \right]$ , де  $\dot{E}_{\tau, m}$  і  $\dot{H}_{\tau, m}$  – комплексні амплітуди електричного й магнітного векторів, дотичних до поверхні металу;  $|\dot{E}_{\tau, m}| = Z_{c, m} |\dot{H}_{\tau, m}|$  і  $Z_{c, m} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} (\sigma + 1)$ . Якщо врахувати, що  $\dot{H}_{\tau, m} \perp \dot{E}_{\tau, m}$ , то

$$\int_L |\vec{\Pi}_{\text{cep om}}| dl = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} \int_L |\dot{H}_{\tau, m}|^2 dl,$$

а формула для коефіцієнта затухання у хвилеводі матиме вигляд:

$$h'' = \frac{\sqrt{\frac{\omega \mu_0}{8\sigma}} \int_L |\dot{H}_{\tau, m}|^2 dl}{\text{Re} \int_S \left[ \dot{E}_{\tau, m} \times H_{\tau, m}^* \right] d\vec{S}}. \quad (5.44)$$

Для того щоб обчислити погонне затухання у хвилеводі, необхідно знати робочу частоту  $\omega$ , питому провідність  $\sigma$  матеріалу стінок і структуру поля.

А тепер визначимо затухання для конкретних хвилеводів.

1. *Коаксіальний хвилевід.* Будемо вважати, що діелектрик немагнітний ( $\mu = 1$ ). Тоді комплексні амплітуди проекцій векторів електромагнітного поля  $T$ -хвилі в коаксіальному хвилеводі без утрат мають вигляд:

$$\dot{E}_r = \frac{A}{r} e^{-j\beta z}, \quad \dot{H}_\varphi = \frac{\sqrt{\varepsilon} A}{120 \pi r} e^{-j\beta z},$$

де  $A = \text{const}$ ,  $\beta = \omega \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu_0}$  – коефіцієнт фази (поздовжнє хвильове число).

Тоді потужність, яка переноситься вздовж осі  $z$  у кільцевій області хвилеводу, рівна:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S [\dot{E} \times H^*] d\vec{S} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b \dot{E}_r H_\varphi^* r dr = \frac{\sqrt{\varepsilon} A^2}{120} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Якщо прийняти  $z = 0$ , то

$$\int_L |\dot{H}_{r,m}|^2 dl = 2\pi [a H_\varphi^2(a) + b H_\varphi^2(b)] = \frac{2\varepsilon A^2}{120^2 \sigma} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Тоді коефіцієнт затухання в коаксіальному хвилеводі рівний

$$h'' = \frac{\sqrt{\frac{\omega \mu_0}{8\sigma} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \sqrt{\varepsilon}}{120\pi \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (\text{нм/м})$$

або погонне затухання

$$\Delta_{\text{пос}} = \frac{\sqrt{\frac{\omega \mu_0}{8\sigma} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \sqrt{\varepsilon}}{13,4 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (\text{дБ/м}).$$

2. *Прямокутний металевий хвилевід.* Обчислимо в цьому випадку погонне затухання хвилі типу  $H_{10}$ , яка дуже часто застосовується на практиці. Знаменник формули (5.44) чисельно рівний подвоєному значенню потужності, яка переноситься біжучою хвилею типу  $H_{10}$ . Його величина рівна

$$\operatorname{Re} \int_S [\dot{E} \times H^*] d\vec{S} = \frac{E_{\text{max}}^2 ab}{240\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}.$$

Щоб обчислити чисельник за формулою (5.44), треба врахувати обидві складові напруженості магнітного поля з комплексними амплітудами проекцій:

$$\dot{H}_x = -\frac{h}{\omega \mu_0} E_{\text{max}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}, \quad \dot{H}_z = -j \frac{\pi}{\omega \mu_0 a} E_{\text{max}} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz},$$

які є дотичні до стінок хвилеводу. На вузьких стінках при  $x = 0$  і  $x = a$  проекція  $\dot{H}_x$  стає рівною нулю. Тому

$$\int_L |\dot{H}_{\tau, \text{м}}|^2 dl = 2 \int_0^a (\dot{H}_x \dot{H}_x^* + \dot{H}_z \dot{H}_z^*) dx + b \dot{H}_z^*(0) \dot{H}_z^*(0) + b \dot{H}_z^*(a) \dot{H}_z^*(a) =$$

$$= E_{\text{max}}^2 \left( \frac{h}{\omega \mu_0} \right)^2 \left\{ a \left[ 1 + \left( \frac{\pi}{ha} \right)^2 \right] + 2b \left( \frac{\pi}{ha} \right)^2 \right\}.$$

Таким чином, коефіцієнт затухання в прямокутному металевому хвилеводі буде рівний

$$h'' = \frac{\sqrt{\frac{\omega \mu_0}{8\sigma}} \int_L |\dot{H}_{\tau, \text{м}}|^2 dl}{\operatorname{Re} \int_S [\dot{E} \times \dot{H}] d\vec{S}} = \frac{\sqrt{\frac{\omega \mu_0}{8\sigma}} E_{\text{max}}^2 \left( \frac{h}{\omega \mu_0} \right)^2 \left\{ a \left[ 1 + \left( \frac{\pi}{ha} \right)^2 \right] + 2b \left( \frac{\pi}{ha} \right)^2 \right\}}{\frac{E_{\text{max}}^2 ab}{240\pi} \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda_0}{2a} \right)^2}}$$

$$= \frac{240\pi \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{8\sigma}} \left( \frac{h}{\omega \mu_0} \right)^2 \left\{ a \left[ 1 + \left( \frac{\pi}{ha} \right)^2 \right] + 2b \left( \frac{\pi}{ha} \right)^2 \right\}}{ab \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda_0}{2a} \right)^2}}.$$

Формула для розрахунку погонного затухання після деякого спрощення набуде такого вигляду:

$$\Delta_{\text{пог}} = 8,686 h'' = \frac{0,793 \left[ 1 + \frac{2b}{a} \left( \frac{\lambda_0}{2a} \right)^2 \right]}{\sqrt{\lambda_0} \sigma b \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda_0}{2a} \right)^2}} \quad (\text{дБ/м}).$$

Графік залежності погонного затухання від робочої довжини хвилі  $\lambda_0$  для прямокутного хвилеводу з перерізом  $72 \times 34 \text{ мм}^2$ , виконаного з міді ( $\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ См} \cdot \text{м}$ ), подано на рис. 5.20. Як бачимо з графіка, мінімальне затухання спостерігається для хвилеводів із відношенням сторін 2:1 для довжини хвилі  $\lambda_0 \approx (1-1,1)a \approx 80 \text{ мм}$ .



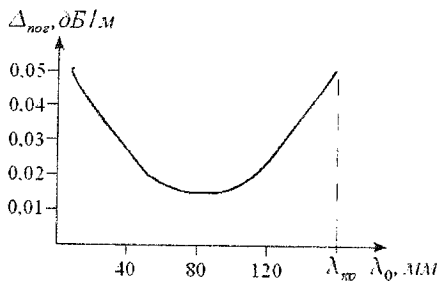


Рис. 5.20. Залежність погонного затухання коливань  $H_{10}$  у прямокутному хвилеводі від робочої довжини хвилі

3. *Круглий металевий хвилевід.* Виведемо формулу для розрахунку погонного затухання хвилі типу  $E_{01}$  в круглому металевому хвилеводі з радіусом  $a$ . Вирази для знаменника й чисельника формули (5.44) набувають вигляду:

$$\operatorname{Re} \int_S [\dot{E} \times H^*] d\vec{S} = \frac{\pi \omega \varepsilon_0 a^4 h}{\nu_{01}^2} E_0^2 J_1^2(\nu_{01}),$$

$$\int_L |\dot{H}_{\tau, m}|^2 dl = 2\pi a |\dot{H}_\varphi|^2 = \frac{2\pi a^3 (\omega \varepsilon_0)^2}{\nu_{01}^2} E_0^2 J_1^2(\nu_{01}).$$

Отже, коефіцієнт затухання для круглого металевого хвилеводу рівний

$$h'' = \frac{\sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma} \omega \varepsilon_0}}{ah}.$$

Після нескладних перетворень знайдемо остаточний вираз, який пов'язує погонне затухання  $\Delta_{noz}$  у  $\text{дБ/м}$  для хвилі типу  $E_{01}$  в круглому металевому хвилеводі з робочою довжиною хвилі  $\lambda_0$ :

$$\Delta_{noz} = \frac{0,793}{a \sqrt{\lambda_0} \sigma \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2,61a}\right)^2}}.$$

А для хвилі  $H_{01}$ -типу ця формула набуде вигляду:

$$\Delta_{noz} = \frac{0,793 \left( \frac{\lambda_0}{1,64a} \right)^2}{a \sqrt{\lambda_0} \sigma \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda_0}{1,64a} \right)^2}}.$$

Така залежність погонного згасання  $\Delta_{noz}$  від робочої частоти для  $H_{01}$ -хвилі подана на рис. 5.21. Як бачимо, для такого хвильоводу і  $H_{01}$ -хвилі характерним є необмежене зменшення погонних утрат із ростом частоти чи зменшенням робочої довжини хвилі.

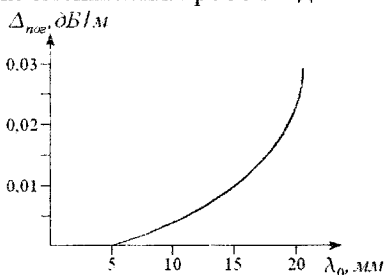


Рис. 5.21. Залежність погонного згасання коливань  $H_{01}$  у круглому хвильоводі радіусом  $a = 60$  мм з міді ( $\sigma = 5,7 \cdot 10^7$  СМ/М)

### 5.3. Кругова діаграма Вольперта – Смітта для ліній передачі

#### 5.3.1 Кругова діаграма повних опорів і провідності передавальних ліній у полярній системі координат

Під час розрахунків ліній передачі НВЧ часто доводиться визначати вхідний опір лінії, навантаженої на відомий опір, або здійснювати інші подібні обчислення. У принципі, для таких обчислень можна використовувати формулу (5.42). Проте розрахунки можуть бути значно спрощені, якщо скористатися спеціальним типом кругових діаграм (номограм). Одним із перших подібну діаграму запропонував наш учений, інженер-винахідник А.Р. Вольперт. Створення

кругових діаграм спеціально для передавальних ліній НВЧ пов'язують з іменем англійського вченого Р. Сміта. Тому будемо називати її діаграмою Вольперта – Сміта.

Для обґрунтування принципів побудови кругової діаграми розглянемо векторну діаграму струмів і напруг у передавальній лінії без утрат. Така діаграма побудована з додатковими поясненнями на рис. 5.22.

У межах площини великого круга цієї діаграми з одиничним радіусом укладаються всі фізично можливі режими роботи довгої лінії при пасивному навантаженні. Кожній точці відповідає цілком певне визначене значення вхідного опору в даному перерізі лінії. Розглянемо найхарактерніші точки й геометричні місця точок на площині вказаного круга.

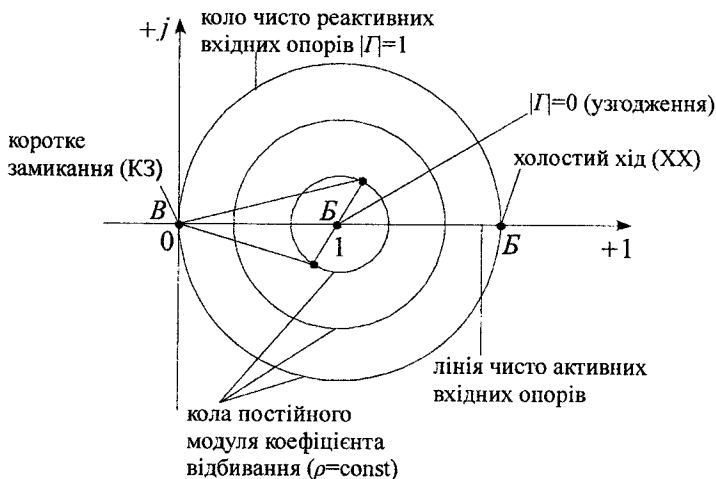


Рис. 5.22. Векторна діаграма напруг і струмів для лінії передачі без утрат

Точка  $A$ , що має координати  $(1, +j0)$ , відповідає  $|\Gamma|=0$ , тобто режиму узгодження, коли  $\rho=1$ . Точка  $B$  з координатами  $(2, +j0)$  характеризується синфазним додаванням падаючої й відбитої хвиль напруги при  $|\Gamma|=1$ . Струм у відповідному перерізі лінії рівний нулю. Отже, точка  $B$  відповідає режиму холостого ходу ( $XX$ ) або нескінченно великому вхідному опору. Нарешті, у точці  $B$ , яка зна-

ходиться в початку координат, вектори напруги падаючої й відбитої хвиль знаходяться в протифазі при  $|Γ|=1$ . Це відповідає режиму короткого замикання ( $KЗ$ ) у даному перерізі лінії.

Пряма  $BB$ , яка сполучає точки холостого ходу й короткого замикання, є геометричним місцем точок, де струм і напруга є синфазними. Отже, пряма  $BB$  є геометричним місцем чисто активних вхідних опорів, які змінюються від нуля (точка  $B$ ) до нескінченності (точка  $B$ ).

Відповідно до властивостей стоячих хвиль, на відрізьку  $AB$  розташовуються вхідні опори в мінімумах стоячої хвилі напруги, а на відрізьку  $AB$  – вхідні опори у максимумах стоячої хвилі. Величина опорів у максимумах і мінімумах стоячої хвилі напруги знаходиться з таких виразів:

$$R_{\min} = \frac{|\dot{U}|_{\min}}{|\dot{I}|_{\max}}, \quad R_{\max} = \frac{|\dot{U}|_{\max}}{|\dot{I}|_{\min}}. \quad (5.45)$$

Ураховуючи, що

$$\begin{aligned} |\dot{U}|_{\min} &= |\dot{U}_{nao}| - |\dot{U}_{oid}|, & i_{\min} &= \frac{|\dot{U}_{nao}|}{Z_c} - \frac{|\dot{U}_{oid}|}{Z_c}, \\ |\dot{U}|_{\max} &= |\dot{U}_{nao}| + |\dot{U}_{oid}|, & i_{\max} &= \frac{|\dot{U}_{nao}|}{Z_c} + \frac{|\dot{U}_{oid}|}{Z_c}, \end{aligned}$$

отримаємо:

$$R_{\min} = \frac{Z_c}{\rho}, \quad R_{\max} = Z_c \rho.$$

Велике коло одиничного радіуса із центром у точці  $A$  на рис. 5.22 відповідає випадку  $|Γ|=1$ . Теоретично рівність одиниці модуля коефіцієнта відбивання можлива або при короткому замиканні, або при холостому ході лінії, або при чисто реактивному навантаженні. Оскільки точки холостого ходу й короткого замикання знайдені, можна зробити висновок, що це коло є геометричним місцем чисто реактивних вхідних опорів лінії. Верхня півплощина на рис. 5.22 відповідає додатним, тобто індуктивним опорам, нижня – від’ємним (ємнісним) опорам.

Кола із центром у точці  $A$  є лініями постійного модуля коефіцієнта відбивання  $|Γ|$  або, що те ж саме, лініями постійного коефіцієнта стоячої хвилі ( $KСХ$ ). Для цього пригадаємо з основ радіо-

електроніки, що коефіцієнт відбивання в лінії визначають як відношення комплексних амплітуд відбитої й падаючої хвиль:

$$\dot{\Gamma} = |\Gamma| e^{j\varphi} = \frac{\dot{U}^-}{\dot{U}^+}.$$

Коефіцієнт стоячої хвилі напруги визначається формулою:

$$КСХН = \rho = \frac{|\dot{U}^+| + |\dot{U}^-|}{|\dot{U}^+| - |\dot{U}^-|} = \frac{1 + |\dot{\Gamma}|}{1 - |\dot{\Gamma}|}.$$

Величина радіуса чисельно рівна  $|\Gamma|$ . Переміщення вздовж осі передавальної лінії на рівні відрізки відповідає переміщенню на діаграмі по колу постійного КСХ на рівні кути. Повний оберт на діаграмі здійснюється при переміщенні вздовж лінії на  $\lambda_x/2$  або, у випадку лінії без дисперсії, на  $\lambda/2$ .

Нанесемо тепер на комплексній площині великого круга сітку кривих постійних активних вхідних опорів  $R = const$  і постійних реактивних вхідних опорів  $X = const$ . Ця сітка являє собою два сімейства взаємно ортогональних кіл, як показано на рис. 5.23. Кола  $R = const$  мають одну загальну дотичну в точці з координатами за напругою  $(2, +j0)$ , де вхідний опір передавальної лінії прямує до нескінченності. Центри кіл  $R = const$  розташовані на дійсній осі, тоді як центри кіл  $X = const$  знаходяться на прямій, яка паралельна уявній осі  $+j$  і також проходить через точку холостого ходу лінії.

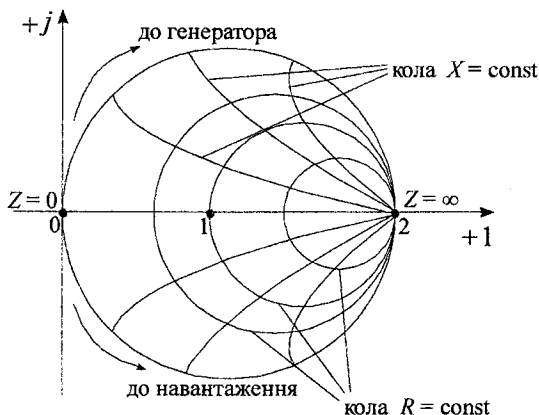


Рис. 5.23. Кола постійних активних і реактивних опорів на круговій діаграмі

Після того, як сітка ліній  $R = const$  і  $X = const$  нанесена на комплексну площину векторної діаграми, величини напруг і струмів можна з розгляду виключити й проводити аналіз цілком у термінах повних опорів. Для більш глибокого розуміння кіл  $R = const$  і  $X = const$  розглянемо знову вираз для комплексного коефіцієнта відбивання  $\dot{\Gamma}$ . Будемо виражати всі опори, у тому числі й опір навантаження  $Z_n$  у відносних одиницях по відношенню до характеристичного опору  $Z_c$ :

$$Z_n = R_n + jX_n, \quad \frac{Z_n}{Z_c} = \frac{R_n}{Z_c} + j \frac{X_n}{Z_c}.$$

Характеристичний опір лінії передачі у відносних одиницях беремо  $Z_c = 1$ . Опір навантаження у відносних одиницях будемо записувати без індексів  $Z = R + jX$ . Тоді вираз для коефіцієнта відбивання буде мати вигляд:

$$\dot{\Gamma} = \frac{Z-1}{Z+1} = \Gamma' + j\Gamma'',$$

звідки визначимо дійсну й уявну частини:

$$\Gamma' = \frac{R^2 - 1 + X^2}{(R+1)^2 + X^2}, \quad \Gamma'' = \frac{2X}{(R+1)^2 + X^2}.$$

Виключивши із цих виразів спочатку  $R$ , а потім  $X$ , отримаємо:

$$\begin{cases} \left(\Gamma' - \frac{R}{R+1}\right)^2 + (\Gamma'')^2 = \frac{1}{(R+1)^2}, \\ (\Gamma' - 1)^2 + \left(\Gamma'' - \frac{1}{X}\right)^2 = \frac{1}{X^2}. \end{cases} \quad (5.46)$$

Вирази (5.46) є рівняннями кіл на комплексній площині  $\dot{\Gamma} = \Gamma' + j\Gamma''$ . Параметром у першому рівнянні є активний опір  $R$ , а в другому – реактивний опір  $X$ . Цим ми показали, що лініями постійних  $R = const$ ,  $X = const$  є кола.

Координати центрів кіл  $R = const$  згідно з виразом (5.46) будуть:

$$\Gamma' = \frac{R}{R+1}, \quad \Gamma'' = 0$$

з радіусом, рівним  $\frac{1}{R+1}$ .

Координати центрів кіл  $X = const$  згідно з виразом (5.46) рівні

$$\Gamma' = 1, \quad \Gamma'' = \frac{1}{X}$$

з радіусом  $\frac{1}{X}$ .

Сітку кіл  $\rho = const$  на круговій діаграмі або зовсім не проводять, або наносять у вигляді пунктиру. Відповідно до співвідношень (5.45) кола  $\rho = const$  перетинають дійсну вісь у точках, через які проходять кола  $R = const$ , причому у відносних одиницях  $R = \rho$  або  $R = 1/\rho$ . Таким чином, для знаходження кола заданого  $KCX$  необхідно знайти відповідне коло  $R = const$ , після чого провести із центра діаграми коло, дотичне до кола постійного активного опору.

За початок відліку кутів звичайно беруть точку  $R = X = 0$ , тобто мінімум стоячої хвилі напруги. Шкалу кутів наносять ззовні великого кола. Кути виражають не в градусах, а у вигляді відношення довжини лінії  $l$  до довжини хвилі в даній лінії  $\lambda_x$ , тобто в одиницях  $l/\lambda_x$  або, відповідно,  $l/\lambda$ .

Збільшенню відстані розглядуваного перерізу від навантаження відповідає рух по колу  $\rho = const$  у напрямку за годинниковою стрілкою. Тому на діаграмі повних опорів звичайно роблять написи “до генератора” і “до навантаження”, які відповідають від’ємному й додатному напрямкам відліку кутів. Щоб уникнути помилок при використанні цих написів, слід завжди пам’ятати фізичне значення руху по колу  $\rho = const$ , пов’язуючи його з вихідною векторною діаграмою струмів і напруг у передавальній лінії.

Оскільки струми й напруги з безпосереднього розгляду випадають, осі прямокутних координат, показані на рис. 5.22 і 5.23, опускають. Відлік здійснюють у полярній системі координат  $|\dot{\Gamma}|$  і  $l/\lambda_x$ . У зв’язку із цим така діаграма повних опорів має назву кругової діаграми в полярній системі координат.

В остаточному вигляді полярна діаграма повних опорів передавальних ліній показана на рис. 5.24. Ця діаграма є універсальною й може бути використана для розрахунків будь-яких передавальних ліній у межах застосовності поняття характеристичного опору, якщо лінія збуджена на хвилі одного типу. Для зручності роботи з діаграмою остання іноді забезпечується прозорим повзунком, що

обертається відносно центра діаграми.

Координатна сітка діаграми, показана на рис. 5.24, може бути застосована для зображення не тільки повних опорів лінії, але й повних провідностей у відносних одиницях:

$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB,$$

де  $G = \frac{R}{R^2 + X^2}$ ,  $B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$ .

Під час використання полярної діаграми в термінах провідностей залишаються в силі всі без винятку числові позначення, що є на діаграмі опорів. Змінюється тільки фізичний зміст характерних точок. Точка  $B$  на рис. 5.22 означає не режим холостого ходу, а режим короткого замикання. Навпаки, точка  $B$  відповідає тепер холостому ходу ( $Y=0$ ). Мінімумам стоячої хвилі напруг відповідає відрізок  $AB$ . Верхня півплощина на рис. 5.22 відповідає додатній реактивності, але вже не індуктивності, а ємності.

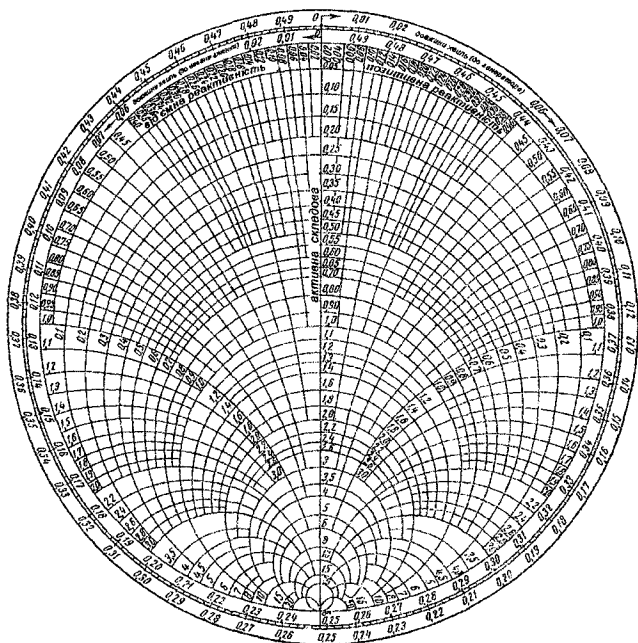


Рис. 5.24. Кругова діаграма повних опорів і провідностей у полярній системі координат



Крім кругової діаграми в полярній системі координат, існують також інші типи діаграм повних опорів і провідностей ліній передачі. Частіше за інші з їх числа застосовується діаграма в прямокутній системі координат, що є відображенням полярної діаграми на комплексну площину  $R + jX$  або  $G + jB$ .

Принцип побудови такої діаграми в термінах опорів показаний на рис. 5.25. Координати активних і реактивних опорів  $R$  і  $X$  відкладені відповідно по осях абсцис й ординат. Лінії постійних значень  $KCX$  ( $\rho$ ) і постійної фази  $l/\lambda_x$  являють собою два взаємно ортогональних сімейства кіл.

Радіус  $R_0$  кіл постійних  $KCX$  визначається у відносних одиницях з отриманих раніше умов (5.45):

$$R_0 = \frac{\rho^2 - 1}{2\rho}.$$

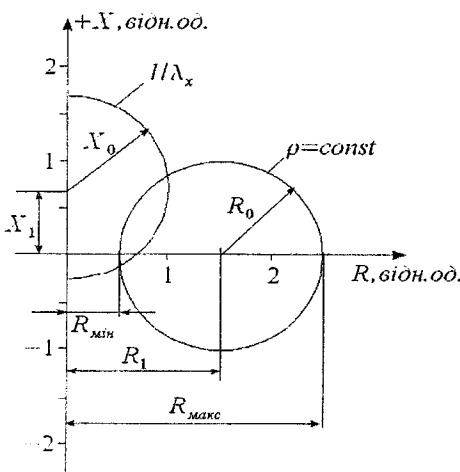


Рис. 5.25. Діаграма повних опорів у декартовій системі координат

Центри кіл  $\rho = const$  знаходяться на дійсній осі в точках з координатою  $R_1$ , рівною:

$$R_1 = \frac{1}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) = \frac{\rho^2 + 1}{2\rho}.$$

Центри кіл постійної фази лежать на уявній осі в точках з координатою  $X_1$ , рівною:

$$X_1 = -ctg \frac{4\pi l}{\lambda_x},$$

де  $l$  – відстань від навантаження до даного перерізу лінії.

Радіус  $X_0$  кіл  $l/\lambda_x = const$  рівний

$$X_0 = \left| \csc \frac{4\pi l}{\lambda_x} \right|.$$

Лінії  $R = const$  і  $X = const$  на діаграмі в декартовій системі координат мають вигляд паралельних горизонтальних і вертика-

льних прямих. Така сітка прямих постійних активних і реактивних опорів на площину діаграми не наноситься.

Діаграма повних опорів у декартовій системі координат, побудована відповідно до описаної вище методики, показана на рис. 5.26. Подібно до діаграми в полярній системі координат ця кругова діаграма в декартовій системі координат може з однаковим успіхом застосовуватися в термінах провідностей. По осі абсцис у такому випадку повинна відкладатись активна провідність  $G$ , а по осі ординат – реактивна провідність  $jB$  у відносних одиницях.

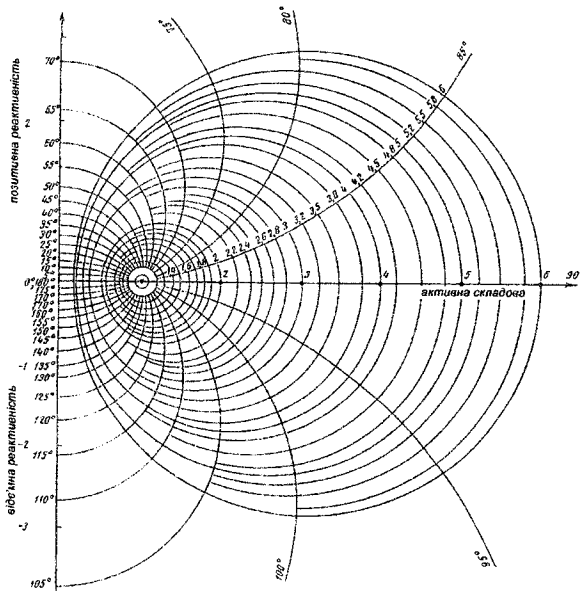


Рис. 5.26. Кругова діаграма повних опорів і провідностей у декартовій системі координат

### 5.3.2 Основні застосування кругової діаграми в розрахунках ліній передачі НВЧ

У цьому підрозділі розглянемо ряд розрахунків із використанням кругової діаграми в полярній системі координат для розв'язання задач у лініях передачі НВЧ.

*А. Відображення заданого опору на площині кругової діаграми та знаходження КСХ.*

Простою маніпуляцією з круговою діаграмою є знаходження на діаграмі точки, яка б відповідала заданому навантаженню.

Нехай опір навантаження складає  $Z_n = 50 + j30 \text{ Ом}$ , яке включене на кінці коаксіальної лінії з хвильовим опором  $Z_c = 75 \text{ Ом}$ .

Оскільки діаграма побудована у відносних одиницях, то необхідно поділити опір навантаження на хвильовий опір лінії:

$$Z_n = \frac{50}{75} + j\frac{30}{75} = 0,67 + j0,40 \text{ (відн. од.)}.$$

Знаходимо на полярній діаграмі коло активного опору зі значенням 0,67 на вертикальній лінії  $X=0$  (за необхідності можна використати інтерполяцію). Потім знаходимо коло реактивного опору зі значенням 0,4, яке знаходиться в додатній півплощині діаграми. Точка перетину знайдених кіл  $R = const$  і  $X = const$  відповідає відображенню заданого навантаження  $Z_n$  на круговій діаграмі.

Одночасно визначається величина  $KCX$  у лінії при даному навантаженні. Для знаходження величини  $KCX$  у лінії достатньо провести із центра діаграми (точка 1) через отриману точку навантаження коло до його перетину з прямою  $X=0$ . Перетин цього кола з вертикальною лінією  $X=0$  дає дві точки: коефіцієнт біжучої хвилі ( $KBX$ ) (верхня точка) і  $KCX$  (нижня точка). У даному випадку  $KCX \rho = 1,86$ , а  $KBX = 0,54$ , що показано на рис. 5.27.

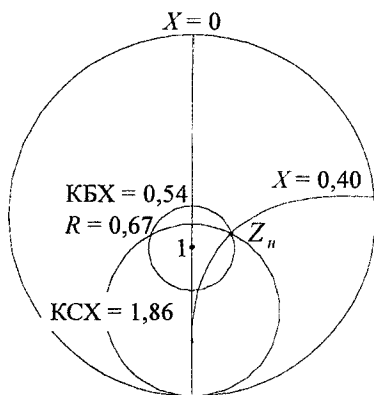


Рис. 5.27. Знаходження на круговій діаграмі точки  $Z_n = 50 + j30 \text{ Ом}$  при  $Z_c = 75 \text{ Ом}$

Б. Визначення вхідного опору лінії без утрат, яка навантажена на заданий опір.

Однією з розповсюджених задач, які просто розв'язуються з допомогою кругової діаграми, є знаходження вхідного опору лінії заданої довжини  $l$ , навантаженої на відомий опір  $Z_n$  (рис. 5.28, а), при заданій частоті й характеристичному опорі лінії  $Z_c$ .

Визначення вхідного опору зводиться до знаходження кола з постійним  $KCX$ , яке проходить через точку, що відповідає даному навантаженню і яка повернута на кут  $l/\lambda_x$  або  $l/\lambda$  за годинниковою стрілкою (у бік генератора). Отримана точка буде відображати вхідний опір лінії. Його величину можна визначити, як показано на рис. 5.28, б, знаходячи кола  $R$  і  $X$ , які проходять через знайдену точку. Вхідний опір в омах, якщо це необхідно, отримується множенням одержаного результату на величину хвильового опору.

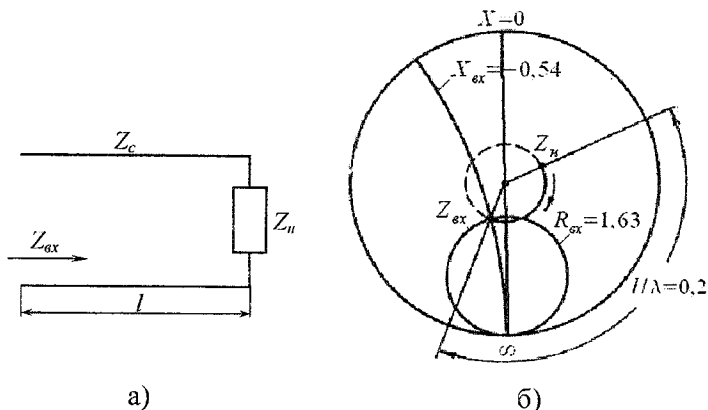


Рис. 5.28. Знаходження вхідного опору відрізка лінії, навантаженої на відомий опір

Якщо  $Z_c = 75 \text{ Ом}$ ,  $l = 6 \text{ см}$ , а опір навантаження складає  $Z_n = 50 + j30 \text{ Ом}$  при робочій довжині хвилі  $\lambda = 30 \text{ см}$ , то знаходження вхідного опору проводиться в такій послідовності. Кут повороту по колу  $\rho = const$  становить  $l/\lambda = 0,2$ . Спочатку знаходиться точка  $Z_n$  (аналогічно до прикладу А) при заданих  $R_n$  і  $X_n$ , і через цю точку проводиться коло із центром у точці 1. Потім повер-

таємо точку  $Z_n$  за годинниковою стрілкою (вниз) на відстань  $l/\lambda = 0,2$  і з центра кола опору навантаження проводимо радіус до перетину з хордою  $l/\lambda = 0,2$ . Отримана точка на колі  $Z_n$  дає нам величину відносного вхідного опору:  $Z_{ex} = 1,63 - j0,54$  ( $R = 1,63$  – коло для активної складової,  $X = -j0,54$  – коло для реактивної складової). Після його помноження на величину  $Z_c = 75 \text{ Ом}$  отримаємо, що вхідний опір ліній буде рівний  $Z_{ex} = (1,63 - j0,54) \cdot 75 = 122,5 - j40,5 \text{ Ом}$ .

*В. Застосування кругової діаграми під час вимірювання опору навантаження в довгій лінії.*

Інший тип задач, які розв'язуються за допомогою кругової діаграми, зводиться до знаходження опору навантаження в кінці лінії передачі. Якщо б при цьому були задані довжина хвилі  $\lambda$  та її вхідний опір, то задача стала б оберненою до попередньої і розв'язувалася б тривіально.

Проте на практиці доводиться користуватись іншими вхідними даними. Досяжними для вимірювань є величина  $KCX$  і фаза стоячої хвилі по відношенню до навантаження, яка визначається за відстанню мінімуму стоячої хвилі напруги від навантаження, як показано на рис. 5.29. Тому розглянемо, яким чином можна визначати опір навантаження, якщо задані ці величини.

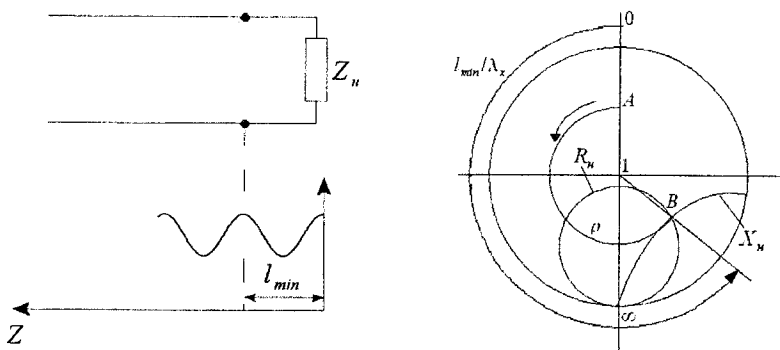


Рис. 5.29. Визначення опору навантаження за вимірними величинами  $\rho$  і  $l_{min}/\lambda$

Для розв'язання цього класу задач необхідно згадати, що геометричним місцем мінімуму напруги на полярній діаграмі у термінах опорів є радіус, проведений через точку короткого замикання ( $Z = 0$ ). Величина КСХ визначає коло, що перетинає лінію мінімуму напруги в точці  $A$  (рис. 5.29). Таким чином, точка  $A$  відображає вхідний опір лінії передачі в мінімумі напруги.

Відстань мінімуму напруги від навантаження  $l_{\min}$  відома. Тому подальше розв'язання задачі не складає труднощів: задача зводиться до знаходження опору навантаження за відомим вхідним опором. Достатньо здійснити поворот проти годинникової стрілки (до навантаження) по колу  $\rho = \text{const}$  із точки  $A$  на кут  $l_{\min}/\lambda$ , щоб у точці  $B$  відрахувати опір навантаження.

Таким чином, вимірювання опору легко здійснюється шляхом вимірювання двох параметрів, які характеризують стоячу хвилю в лінії: КСХ  $\rho$  і  $l_{\min}/\lambda$ . Цим пояснюється значне поширення вимірювань стоячих хвиль за допомогою вимірювальних ліній з рухливим зондом.

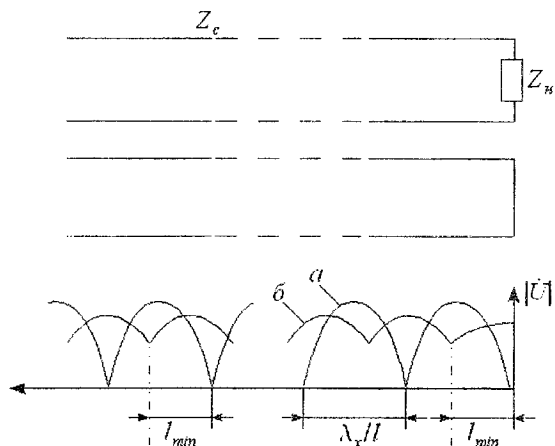


Рис. 5.30. Коротке замикання навантаження лінії передачі для визначення  $l_{\min}$ :

- а – стояча хвиля напруги при закороченому навантаженні;
- б – стояча хвиля напруги при включеному навантаженні

Під час роботи з вимірювальними лініями не завжди буває зручно безпосередньо вимірювати відстань від навантаження до найближчого мінімуму напруги. Така незручність виключається за допомогою досліду короткого замикання навантаження, що пояснює рис. 5.30. При короткому замиканні навантаження фіксується положення одного з мінімуму напруги, який знаходиться в межах робочої області вимірювальної лінії. Відлік тут проводиться по відношенню до будь-якого довільно вибраного початку координат. Потім навантаження підключається до лінії й вимірюється напруга з боку генератора. Відстань між двома знайденими положеннями мінімуму рівна відстані  $l_{\min}$  від навантаження до найближчого мінімуму напруги, необхідного для подальшого розрахунку.

Величина  $\lambda_x$  визначається безпосередньо з досліду короткого замикання навантаження як подвоєна відстань між двома сусідніми мінімумами стоячої хвилі. З точки  $B$  опускається перпендикуляр до лінії  $A_{\infty}$ , що визначає радіус кола  $R_n$ . Через цю ж точку проводиться інше реактивне коло, що визначає величину  $X_n$  (у відносних одиницях). Тоді опір навантаження визначають множенням відносних величин на хвильовий опір лінії  $Z_n = (R_n + jX_n)Z_c$ .

### Контрольні запитання

1. Назвіть особливості хвилі  $E$ -типу в прямокутному хвилеводі.
2. Що називається критичною довжиною хвилі? Який вигляд має дисперсійна характеристика прямокутного хвилеводу?
3. Укажіть особливості хвилі  $H$ -типу в прямокутному хвилеводі.
4. Дайте визначення характеристичного опору прямокутного хвилеводу. Укажіть властивості застосування прямокутного хвилеводу. Представте діаграму типів хвиль у прямокутному хвилеводі.
5. Запишіть рівняння Максвелла в циліндричних координатах для круглого металевого хвилеводу. Подайте структуру електромагнітних хвиль  $E$ - і  $H$ -типів у круглому хвилеводі. Представте діаграму типів хвиль у круглому хвилеводі.
6. Дайте характеристику хвилеводів, у яких поширюються електромагнітні хвилі  $T$ -типу.
7. Подайте просторовий розподіл векторів поля в коаксіальному хвилеводі. Визначте особливості квазі- $T$ -хвиль у смужковому хвилеводі. Укажіть особливості  $T$ -хвиль у довгій лінії передачі як 4-полюснику.

8. Укажіть особливості побудови кругової діаграми Вольперта – Смітта. Назвіть особливості роботи з круговою діаграмою. Для визначення яких параметрів ліній передачі вона використовується?

### **Рекомендована література**

1. Альтман Дж. Л. Устройства сверхвысоких частот / Дж. Л. Альтман. – М. : Мир, 1968. – 488 с.
2. Лебедев И. В. Техника и приборы СВЧ / И. В. Лебедев. – М. : Высшая школа, 1972. – Т. 1. – 389 с. ; Т. 2. – 375 с.
3. Бушминский И. П. Изготовление элементов конструкций СВЧ: Волноводы и волноводные устройства / И. П. Бушминский. – М. : Высшая школа, 1974. – 304 с.
4. Ефимов И. Е. Волноводные линии передач / И. Е. Ефимов, Г. А. Шермина. – М. : Связь, 1979. – 232 с.
5. Гроднев И. И. Линии связи / И. И. Гроднев, С. М. Верник. – М. : Радио и связь, 1988. – 544 с.
6. Нефедов Е. И. Полосковые линии передачи / Е. И. Нефедов, А. Г. Фиолковский. – М. : Наука, 1980. – 312 с.
7. Григорьев А. Д. Резонаторы и открытые волноводы / А. Д. Григорьев, В. Б. Янкевич. – М. : Радио и связь, 1984. – 248 с.
8. Левин Л. Теория волноводов: Методы решения волноводных задач / Л. Левин. – М. : Радио и связь, 1998. – 312 с.
9. Унгер Х. Г. Планарные и волоконные оптические волноводы / Х. Г. Унгер. – М. : Мир, 1980. – 656 с.
10. Гупта К. Машинное проектирование СВЧ устройств / К. Гупта, Р. Гардж, Р. Чадха. – М. : Радио и связь, 1987. – 432 с.
11. Смитт Ф. Круговые диаграммы в радиоэлектронике / Ф. Смитт. – М. : Связь, 1976. – 142 с.



## РОЗДІЛ 6. КОЛИВАЛЬНІ СИСТЕМИ НВЧ. ВІБРАТОРИ

### 6.1 Об'ємні резонатори

У радіотехнічних пристроях, які працюють на помірно високих частотах (до декількох сотень мегагерц), здебільшого використовують коливальні контури, утворені зосередженими конденсаторами й котушками індуктивності. Загальною рисою подібних контурів є те, що їх геометричні розміри є значно меншими за робочу довжину хвилі. Електродинамічні системи, для яких виконується ця умова, у радіофізиці називають квазістаціонарними колами.

На практиці було помічено, що добротність коливальних систем з резонансними частотами в сотні мегагерц сильно зменшується в порівнянні з добротністю низькочастотних кіл. Причина цього явища полягає в такому. Як відомо, для підвищення резонансної частоти доводиться зменшувати індуктивність та ємність елементів коливального контуру. У границі лише дві пластини утворюють конденсатор, а індуктивність створює котушка в один виток, які разом утворюють коливальну систему. При цьому суттєво зменшується енергія, яка може бути запасена в контурі. Крім цього, зростає відносна частка активних утрат, пов'язаних із ростом омичного опору провідників на високих частотах через скін-ефект. Додатковим фактором, який приводить до зменшення добротності коливальної системи, є також випромінювання електромагнітної енергії відкритими провідниками.

Мірою, яка дозволяє знизити втрати та підвищити добротність коливальної системи й смуги пропускання, може бути те, що індуктивний виток замінюють суцільною металевою поверхнею. Електромагнітні коливання системи, які являють собою повністю або частково замкнуті об'єми із провідними стінками, називають об'ємними резонаторами. До них, наприклад, належить тороїдальний резонатор, який використовують у ролі коливальної системи в електровакуумних приладах НВЧ типу відбивних клістронів.

Принципово іншим, більш ефективним є створення коливальних систем НВЧ на базі резонансних відрізків розподілених систем передачі з малими втратами.

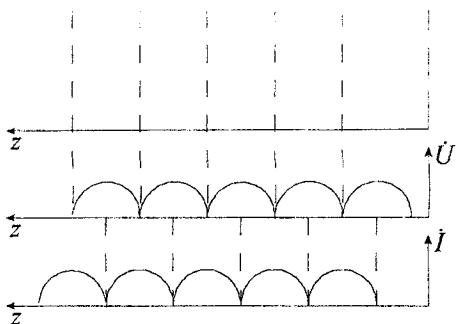


Рис. 6.1. Розподіл напруги й струму в короткозамкненій лінії передачі

Розглянемо напівнескінченну двопровідну лінію передачі, на кінці коротко замкнуту (рис. 6.1), у якій тим чи іншим чином збуджені гармонічні коливання. Як нам відомо з попереднього матеріалу, у такій лінії встановлюється стояча хвиля, що являє собою суму падаючої та відбитої хвиль. Комплексна амплітуда стоячої хвилі  $\dot{U}$  повинна задовольняти крайову умову в точці короткого

замикання:  $\dot{U} = \dot{U}_{\text{над}} + \dot{U}_{\text{від}} = 0$  при  $z = 0$ .

Якщо  $\lambda_0$  – довжина хвилі в лінії, то комплексна амплітуда напруги залежить від поздовжньої координати:

$$\dot{U}(z) = U_{\text{max}} \sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda_0}\right). \quad (6.1)$$

Звідси видно, що гранична (крайова) умова виконується в багатьох точках осі  $z$ , які задовольняють умову  $z = p\lambda_0/2$ , де  $p = 1, 2, 3 \dots$  – ціле число.

Таким чином, якщо взяти замкнутий з обох сторін відрізок лінії довжиною  $l = p\lambda_0/2$ , то отримаємо електромагнітну систему, коливання в якій за відсутності втрат можуть існувати необмежено довго без якого-небудь впливу з боку зовнішніх джерел. У курсі теорії кіл також показано, що частотна характеристика такої системи поблизу резонансної частоти в точності відповідає характеристиці звичайного коливального контуру із зосередженими параметрами (рис. 6.2).

З виразу (6.1) випливає, що замкнений з обох сторін відрізок лінії передачі, на відміну від звичайного коливального контуру, має нескінченну множину резонансних довжин хвиль:

$$\lambda_{0\text{рез}} = \frac{2l}{p}.$$

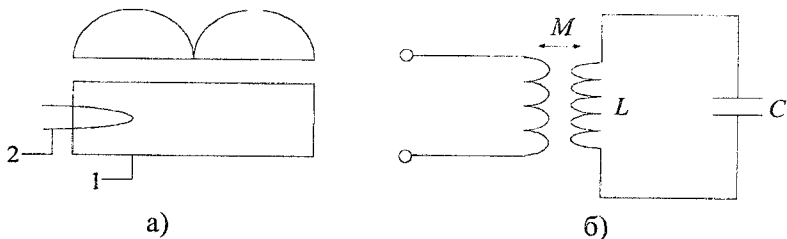


Рис. 6.2. Коливальна система, створена на відрізку лінії передачі (а) та її еквівалентна схема (б)

Фізично це означає, що вздовж такого відрізка лінії можуть укладатись одна, дві, три і т. д. стоячі півхвилі. Тому, користуючись таким принципом, можна створювати об'ємні резонатори у вигляді відрізків прямокутного чи круглого металевого хвилеводу з короткозамкненими стінками з обох сторін. Явища в таких резонаторах є складнішими, ніж у короткозамкненій довгій лінії, оскільки стоячі хвилі можуть устанавлюватися по всіх трьох координатних осях.

### 6.1.1 Прямокутний об'ємний резонатор

У цьому підрозділі буде розглянуто метод, який дозволяє розрахувати резонансну довжину хвилі й структуру електромагнітного поля в об'ємному резонаторі на основі відрізка прямокутного хвилеводу.

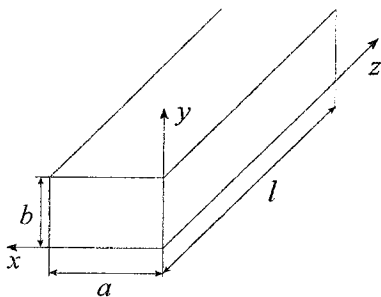


Рис. 6.3. Об'ємний резонатор на основі відрізка прямокутного металевого хвилеводу

Для цього розглянемо відрізок прямокутного хвилеводу перерізом  $a \times b$ , який обмежений двома металевими торцевими поверхнями, розміщеними в перерізах  $z=0$  і  $z=l$  (рис. 6.3). Така замкнена металева порожнина і являє собою прямокутний об'ємний резонатор, у якому проведено дослідження на виникнення коливань і структури електромагнітного поля.

Нехай по необмежено протяжному прямокутному хвилеводі поширюється основна хвиля типу  $H_{10}$ , яку умовно назвемо падаючою. Ця хвиля рухається в бік

збільшення координати  $z$  і характеризується єдиною  $y$ -ю складовою вектора напруженості електричного поля з комплексною амплітудою  $\dot{E}_{y\text{ нао}} = E_{\text{max}} \sin(\pi x/a) e^{-jhz}$ . Наявність торцевих площин приводить до виникнення відбитої хвилі, для якої  $\dot{E}_{y\text{ від}} = A E_m \sin(\pi x/a) e^{-jhz}$ , де  $A = \text{const}$ .

Якщо врахувати, що при  $z = 0$  сумарне електричне поле з проекцією  $\dot{E}_y = \dot{E}_{y\text{ нао}} + \dot{E}_{y\text{ від}}$  повинно перетворитися в нуль через крайові умови на ідеальному провіднику, то  $A = \text{const} = -1$ . Звідси, використовуючи формулу Ейлера для суми двох експоненціальних функцій з уявними показниками, матимемо:

$$\dot{E}_y = -2j E_{\text{max}} \sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda_0}\right) \sin hz. \quad (6.2)$$

Згідно з даним виразом, електромагнітний процес буде являти собою двомірну стоячу хвилю, яка існує як по осі  $x$ , так і по осі  $z$ ; уздовж координати  $y$  напруженість електричного поля є постійною. Із крайової умови на торцевій поверхні  $z = l$ , коли  $\dot{E}_y = 0$ , отримаємо  $hl = p\pi$ , де  $p$  – ціле додатне число.

Значення поздовжнього хвильового числа визначимо як  $h_{\text{рез}} = p\pi/l$ . Від нього можна перейти до резонансного значення довжини хвилі у хвилеводі:  $\lambda_{x\text{рез}} = 2\pi/h_{\text{рез}} = 2l/p$ . Використовуючи дисперсійне співвідношення для хвилі типу  $H_{10}$  у прямокутному хвилеводі, отримаємо:

$$\frac{1}{\lambda_x^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{(4a)^2}.$$

Звідси резонансне значення довжини хвилі генератора буде рівним:

$$\lambda_{0\text{рез}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \quad (6.3)$$

На основі викладеного можна зробити такі висновки:

- Для прямокутної порожнини з ідеально провідними стінками розв'язок рівняння Гельмгольца у вигляді (6.2) існує не за будь-якого значення довжини хвилі збуджуючого генератора, а лише за таких довжин хвиль, які задовольняють умову (6.3).

• Кожному допустимому значенню цілочисельного індексу  $p$  відповідає своя резонансна довжина хвилі й своя характерна структура просторового розподілу векторів електромагнітного поля, що являє собою визначений тип коливань у прямокутному об'ємному резонаторі, які називають модами.

• Типи коливань у прямокутному об'ємному резонаторі можна класифікувати як, наприклад,  $H_{10p}$ . Така символіка показує, що поле в об'ємному резонаторі породжується хвилею типу  $H_{10}$ , а вздовж осі  $z$  вкладається  $p$  стоячих півхвиль.

Зручніше за все прослідкувати структуру поля в прямокутному резонаторі на прикладі простої моди  $H_{101}$ . Як бачимо, тут просторовий розподіл напруженості електричного поля описується формулою

$$\dot{E}_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \quad (6.4)$$

де  $E_0$  – амплітудний множник.

Магнітне поле в резонаторі знаходимо безпосередньо на основі 2-го рівняння Максвелла:  $\text{rot } \dot{E} = -j\omega\mu_0 \dot{H}$ , з якого після підстановки отримуємо такі формули для проекцій вектора  $\dot{H}$ :

$$\begin{aligned} \dot{H}_x &= -\frac{jE_0\pi}{\omega\mu_0 l} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right), \quad \dot{H}_y = 0, \\ \dot{H}_z &= \frac{jE_0\pi}{\omega\mu_0 a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right). \end{aligned}$$

Тут необхідно звернути увагу на таке: комплексні амплітуди обох проекцій магнітного вектора містять уявні одиниці, тоді як комплексна амплітуда вектора напруженості електричного поля є чисто дійсною. Це говорить про те, що між миттєвими значеннями напруженостей електричного й магнітного поля в резонаторі існує зсув фаз за часом на кут  $\pi/2$ . Тому в об'ємному резонаторі, як і в іншій коливальній системі, проходить неперервний обмін енергією між електричним і магнітним полями. Два рази за період власних коливань уся енергія електричного поля переходить в енергію магнітного поля і навпаки. Усе це ілюструється картинами розподілу силових ліній електромагнітного поля в об'ємному прямокут-

ному резонаторі з типом коливань  $H_{101}$  (рис. 6.4). Енергія, запасена в такому резонаторі, є реактивною.

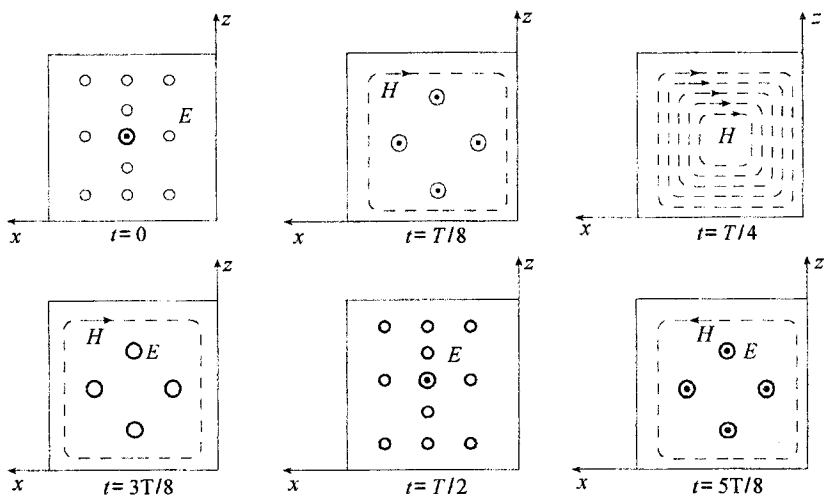


Рис. 6.4. Структура електромагнітного поля для хвилі типу  $H_{101}$  у послідовні моменти часу через період коливань

Розглянемо всю сукупність власних коливань різних типів у замкненій порожнині прямокутної форми з ідеально провідними стінками. Для цього повернемося до рис. 6.3 і вважатимемо, що вісь  $z$  є віссю стоячої хвилі, а в поперечній площині  $xOy$  встановлюється розподіл поля, який відповідає хвилі типу  $E_{mn}$  прямокутного хвилеводу. Як уже йшлося вище, резонансне значення довжини хвилі у хвилеводі залежить від параметра  $p$  – числа стоячих півхвиль уздовж поздовжньої осі  $z$ :  $\lambda_{x\text{рез}} = 2l/p$ . З іншого боку, величина  $\lambda_{x\text{рез}}$  і  $\lambda_{0\text{рез}}$  пов'язані між собою дисперсійним співвідношенням:

$$\frac{1}{\lambda_{0\text{рез}}^2} = \frac{1}{\lambda_{x\text{рез}}^2} + \frac{1}{\lambda_{кр}^2}.$$

Оскільки хвиля  $E_{mn}$  має критичну довжину  $\lambda_{кр} = 2/\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}$ , то, урахувавши це, отримаємо формулу

для розрахунку резонансної довжини хвилі типу  $E_{mn p}$  у прямокутному об'ємному резонаторі:

$$\lambda_{0\text{рез}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}} \quad (6.5)$$

або резонансну частоту

$$f_{\text{рез}} = \frac{c}{\lambda_{0\text{рез}}} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}.$$

Таким чином, класифікація типів коливань у прямокутному резонаторі включає в себе такі етапи:

- одна з осей приймається за позовжню вісь регулярного прямокутного хвилеводу (як правило, це вісь  $z$ );
- установлюється, який тип коливань хвилі ( $H_{mn}$  чи  $E_{mn}$ ) здійснюється в такому хвилеводі;
- визначається значення індексу  $p$  – числа стоячих півхвиль, які вкладаються між торцевими стінками;
- визначається можливість існування мод, наприклад,  $E_{mnv}$  може існувати, а  $H_{mn0}$  не існує, оскільки необхідною умовою існування є виконання крайових умов на торцях хвилеводу.

На практиці зазвичай намагаються, щоб на заданій резонансній частоті геометричні розміри коливальної системи були мінімальними. Цього вдається досягти, збудивши в резонаторів коливання основного типу, який ще називають нижчим типом. Так прийнято називати моду з найбільшою довжиною хвилі при фіксованих розмірах резонансної порожнини.

Індекси  $m$ ,  $n$  і  $p$  для основного типу коливань повинні підбиратися так, щоб зменшити знаменник у формулі (6.5). Зрозуміло, що один з індексів повинен бути рівним нулю, а два інші – одиниці. Нульовий індекс відповідає тій декартовій осі, вздовж якої орієнтовано ребро з найменшою довжиною.

Тут також слід підкреслити, що в об'ємних резонаторах можуть існувати вироджені моди, у яких резонансні довжини хвиль збігаються, незважаючи на те, що структури поля є різними. Прикладом можуть бути коливання типів  $E_{351}$  і  $H_{125}$  у резонаторі кубічної форми.

Строгий підхід до проблеми власних коливань електромагнітного поля в замкненій порожнині прямокутної форми з ідеально провідними стінками базується на пошуку комплексного значення функції  $\dot{E}(x, y, z)$ , яка б задовольняла однорідне рівняння Гельмгольца  $\nabla^2 \dot{E} + \beta_0^2 \dot{E} = 0$  у всіх точках резонатора. Це векторне рівняння є скороченим записом скалярних рівнянь відносно декартових проєкцій  $\dot{E}_\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ):

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_\alpha}{\partial z^2} + \beta_0^2 \dot{E}_\alpha = 0. \quad (6.6)$$

Проведені раніше дослідження хвилеводу наводять на думку, що серед усіх можливих розв'язків рівнянь (6.6) повинні бути особливо виділені функції виду тримірних стоячих хвиль

$$\dot{E}_\alpha \sim \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right)}{\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right)}$$

з усіма можливими комбінаціями трьох гармонічних співмножників.

Рівняння Гельмгольца для резонатора має розв'язок вже при конкретному значенні коефіцієнта фази  $\beta_0^2$ :

$$\beta_0^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_{0\text{рез}}}\right)^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2. \quad (6.7)$$

Урахуємо тепер, що на ідеально провідних стінках резонатора дотичні складові електричного вектора повинні бути рівними нулю. Це означає, що крайові умови будуть такі:

$$\dot{E}_x = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, y = b, z = 0, z = l;$$

$$\dot{E}_y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = a, z = 0, z = l;$$

$$\dot{E}_z = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = a, y = 0, y = b.$$

Тоді складові компонентів напруженості електричного поля визначаються як:

$$\dot{E}_x = A \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right);$$

$$\dot{E}_y = B \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right);$$



$$\dot{E}_x = C \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right),$$

де  $m, n, p$  – цілі додатні числа, які не дорівнюють нулеві одночасно, а  $A, B, C$  – постійні.

Дальше слід урахувати, що проекції електричного вектора повинні задовольняти не тільки рівняння Гельмгольца, але й відповідати векторному полю без джерел, тобто властивості соленоїдальності, коли  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ :

$$\operatorname{div} \dot{E} = \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z} = 0.$$

Це означає, що між коефіцієнтами  $A, B, C$  повинна існувати лінійна залежність:

$$A \frac{m}{a} + B \frac{n}{b} + C \frac{p}{l} = 0.$$

Якщо розглядати коливання типу  $E_{mnp}$ , для якого  $\dot{H}_z = 0$ , то відповідно до 2-го рівняння Максвелла матимемо, що

$$\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = 0.$$

Звідси отримуємо ще одне рівняння зв'язку:

$$B \frac{m}{a} - A \frac{n}{b} = 0.$$

Розв'язуючи систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $A$  і  $B$ , отримаємо:

$$A = -C \frac{pm}{al \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]}, \quad A = -C \frac{pn}{bl \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]}.$$

Тоді комплексні амплітуди проекцій вектора напруженості електричного поля для коливань типу  $E_{mnp}$  у прямокутному резонаторі набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= -C \frac{pm}{al \left[ (m/a)^2 + (n/b)^2 \right]} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{E}_y &= -C \frac{pn}{bl \left[ (m/a)^2 + (n/b)^2 \right]} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{E}_z &= C \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \quad C = \text{const.} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Комплексні амплітуди декартових проєкцій магнітного вектора будуть відповідно рівні

$$\begin{aligned} \dot{H}_x &= jC \frac{n \omega_{\text{рез}} \varepsilon_0}{b \pi} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{H}_y &= -jC \frac{m \omega_{\text{рез}} \varepsilon_0}{a \pi} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{H}_z &= 0. \end{aligned} \quad (6.8.a)$$

Проекції векторів електромагнітного поля для резонаторних мод типу  $H_{mnp}$  знаходять аналогічним чином.

### 6.1.2 Круглий об'ємний резонатор

Розглянемо циліндричний об'єм, утворений відрізком круглої металевої труби радіусом  $a$  з довжиною  $l$ , який обмежений провідними торцевими стінками з обох боків. Така система являє собою круглий об'ємний резонатор (рис. 6.5). Аналогічно, як і для прямокутного резонатора, поставимо задачу знайти повну сукупність резонансних частот цієї коливальної системи.

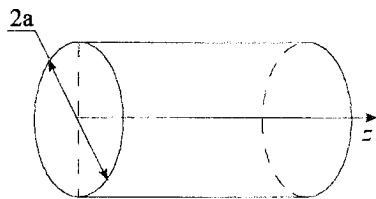


Рис. 6.5. Круглий об'ємний резонатор

Як нам відомо, усередині регулярного круглого хвилеводу можуть поширюватися хвилі типу  $E_{mn}$  і  $H_{mn}$ . Довжина хвилі у резонаторі  $\lambda_x$  пов'язана з довжиною хвилі у вільному просторі  $\lambda_0$  з допомогою дисперсійного рівняння

$$\frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_{\text{кр}}^2},$$

яке справедливе для хвиль будь-якого типу. Також нам відомо з попереднього матеріалу, що критичні довжини хвиль пов'язані з радіусом хвилеводу та з коренями рівняння Бесселя або їх похідними такими співвідношеннями:

$$\lambda_{крE_{mn}} = \frac{2\pi a}{v_{mn}}, \quad \lambda_{крH_{mn}} = \frac{2\pi a}{\mu_{mn}}.$$

На кожній резонансній частоті вздовж осі коливальної системи повинно вкладатися ціле число стоячих півхвиль, тобто повинна виконуватись умова  $\lambda_{рез} = 2l/p$ , де  $p = 1, 2, 3 \dots$  – ціле додатне число. Тоді з дисперсійного рівняння отримуємо формули для розрахунку резонансних довжин у круглому резонаторі:

- коливання  $E_{mn p}$  типу

$$\lambda_{0рез} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{v_{mn}}{2\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}}; \quad (6.9)$$

- коливання  $H_{mn p}$  типу

$$\lambda_{0рез} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{2\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \quad (6.9.a)$$

Відповідь на можливість існування мод з нульовим значенням індексу  $p$  впливає з крайових умов, аналогічно, як і для прямокутного резонатора: типи коливань  $E_{mn 0}$  можливі, а  $H_{mn 0}$  – ні.

Із формул (6.9) і (6.9.a) видно, що резонансна довжина хвилі тим більша, чим менший корінь  $v_{mn}$  чи  $\mu_{mn}$  та індекс  $p$ . Тому основним (найнижчим) типом коливань або модою в круглому об'ємному резонаторі можуть бути такі типи коливань:  $H_{111}$  ( $\mu_{11} = 1,844$ ,  $p = 1$ ) або  $E_{010}$  ( $v_{01} = 2,405$ ,  $p = 0$ ). Резонансні довжини хвиль указаних типів коливань стають однаковими при довжині  $l$ , яка є коренем рівняння

$$\left(\frac{v_{01}}{2\pi a}\right)^2 = \left(\frac{\mu_{11}}{2\pi a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2l}\right)^2,$$

тобто при  $l = 2,03a$ . Отже, у більш довгих резонаторах основною модою буде хвиля  $H_{111}$ -типу, а для більш коротких –  $E_{010}$ .

Для того, щоб визначити просторовий розподіл векторів поля всередині круглого резонатора, необхідно розв'язати крайову задачу (рівняння Гельмгольца з крайовими умовами):  $\nabla^2 \dot{E} + \beta_0^2 \dot{E} = 0$ ,  $\dot{E}_r = 0$  і  $\text{div} \dot{E} = 0$ .

Як і у випадку прямокутного резонатора, ця крайова задача має ненульові розв'язки тільки за таких значень  $\beta_0$ , які впливають із формул (6.9) і (6.9.а), а саме:

$$\beta_0^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda_{0\text{рез}}} \right)^2 = \left( \frac{\nu_{mn}}{2\pi a} \right)^2 + \left( \frac{p}{2l} \right)^2 - \text{для } E_{mnp},$$

або

$$\beta_0^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda_{0\text{рез}}} \right)^2 = \left( \frac{\mu_{mn}}{2\pi a} \right)^2 + \left( \frac{p}{2l} \right)^2 - \text{для } H_{mnp}.$$

Остаточні формули, за якими розраховують просторовий розподіл комплексних амплітуд проєкцій векторів поля, мають такий вигляд:

- коливання типу  $E_{mnp}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_r = -C \frac{\nu_{mn}}{a} \frac{p\pi}{l} J'_m \left( \frac{\nu_{mn} r}{a} \right) \cos m\varphi \sin \left( \frac{p\pi}{l} z \right), \\ \dot{E}_\varphi = C \frac{m p \pi}{r l} J_m \left( \frac{\nu_{mn} r}{a} \right) \sin m\varphi \sin \left( \frac{p\pi}{l} z \right), \\ \dot{E}_z = C \left( \frac{\nu_{mn}}{a} \right)^2 J_m \left( \frac{\nu_{mn} r}{a} \right) \cos m\varphi \cos \left( \frac{p\pi}{l} z \right), \end{array} \right. \quad (6.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{H}_r = -m C \frac{j \omega_{\text{рез}} \varepsilon_0}{r} J_m \left( \frac{\nu_{mn} r}{a} \right) \sin m\varphi \cos \left( \frac{p\pi}{l} z \right), \\ \dot{H}_\varphi = -j \omega_{\text{рез}} C \varepsilon_0 \frac{\nu_{mn}}{a} J'_m \left( \frac{\nu_{mn} r}{a} \right) \cos m\varphi \cos \left( \frac{p\pi}{l} z \right), \\ \dot{H}_z = 0. \end{array} \right.$$

- коливання типу  $H_{mnp}$ :

$$\begin{cases} \dot{E}_r = m C \frac{j \omega_{pez} \mu_0}{r} J_m \left( \frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \sin m \varphi \sin \left( \frac{p \pi}{l} z \right), \\ \dot{E}_\varphi = j \omega_{pez} C \mu_0 \frac{\mu_{mn}}{a} J'_m \left( \frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \cos m \varphi \sin \left( \frac{p \pi}{l} z \right), \\ \dot{E}_z = 0, \end{cases} \quad (6.10.a)$$

$$\begin{cases} \dot{H}_r = C \frac{\mu_{mn}}{a} \frac{p \pi}{l} J'_m \left( \frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \cos m \varphi \cos \left( \frac{p \pi}{l} z \right), \\ \dot{H}_\varphi = -C \frac{m p \pi}{r l} J_m \left( \frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \sin m \varphi \cos \left( \frac{p \pi}{l} z \right), \\ \dot{H}_z = C \left( \frac{\mu_{mn}}{a} \right)^2 J_m \left( \frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \cos m \varphi \sin \left( \frac{p \pi}{l} z \right). \end{cases} \quad (6.10.a)$$

На рис. 6.6 зображені картини силових ліній векторів поля в моді  $E_{010}$ , яка має вигляд пучка з максимумом інтенсивності на осі  $z$  для вектора  $\vec{E}$ , а силові лінії вектора  $\vec{H}$  мають вид концентричних кіл.

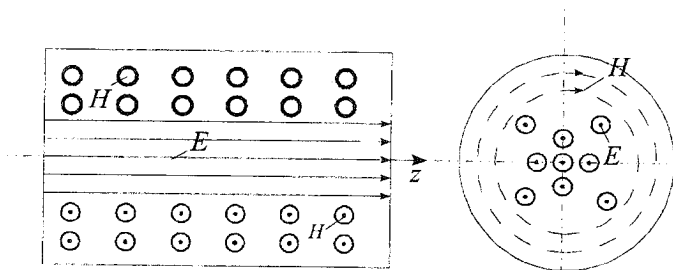


Рис. 6.6. Структура електромагнітного поля для хвилі  $E_{010}$  типу

### 6.1.3 Способи збудження і включення об'ємних резонаторів

Об'ємний резонатор на практиці завжди повинен бути тим чи іншим способом пов'язаний із зовнішніми пристроями. При цьому особливі конструктивні елементи зв'язку здійснюють збудження са-

мого резонатора. Серед найбільш розповсюджених способів збудження виділимо три:

- за допомогою штиря (рис. 6.7, а);
- за допомогою петлі (рис. 6.7, б);
- за допомогою щілини (рис. 6.7, в).

*Збудження за допомогою штиря.* При даному способі збудження всередині резонатора через отвір у стінці вводять мініштирову антену, довжина якої суттєво менша від робочої довжини хвилі. Такою антеною може бути відрізок коаксіального кабелю. Для ефективного збудження резонатора необхідно, знаючи структуру електромагнітного поля збуджуючої моди, розмістити штир так, щоб він був паралельний силовим лініям вектора напруженості електричного поля. Підбираючи місце розміщення штиря та його орієнтацію, треба домогтися максимуму скалярного добутку  $\vec{j}_{cm e} \vec{E}$ , де  $\vec{j}_{cm e}$  – густина стороннього електричного струму в штиривій антені. При цьому потік потужності від зовнішнього джерела буде максимальним.

*Збудження за допомогою петлі.* Амплітуда коливань, які збуджуються в резонаторі, буде максимальною в тому випадку, коли площа петлі максимально пронизується магнітним потоком поля резонатора. Збуджуючу петлю необхідно розмішувати там, де силові лінії вектора напруженості магнітного поля мають найбільшу густину.

*Збудження за допомогою щілини.* Якщо в стінці резонатора прорізати вузьку щілину, яка прорізає лінії поверхневого струму, то така щілина випромінює електромагнітне поле. Вона може служити елементом зв'язку між об'ємним резонатором і зовнішніми пристроями, наприклад, хвилеводами. На рис. 6.7, в зображена щілина, яка прорізана у стінці для збудження коливань типу  $E_{010}$ .

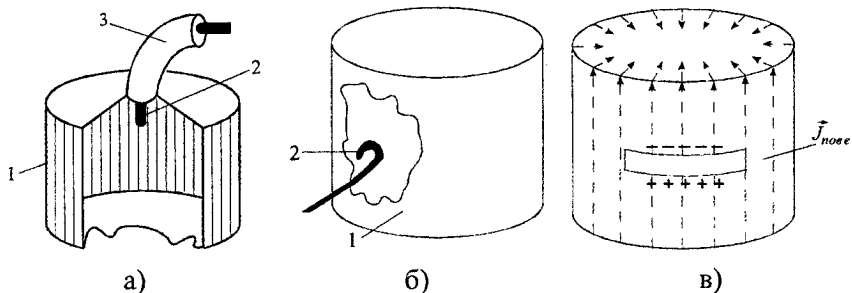
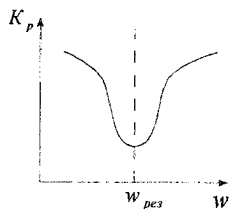
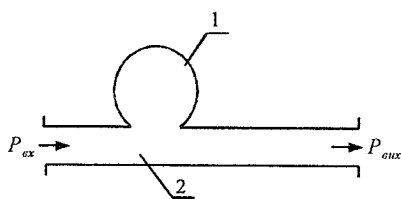
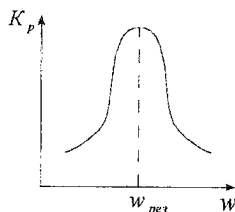
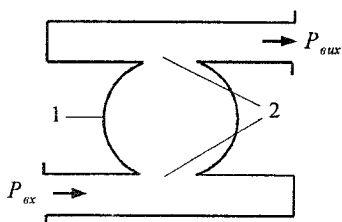


Рис. 6.7. Методи збудження об'ємного резонатора за допомогою штиря (а), петлі (б) і щілини (в): 1 – резонатор; 2 – штир (петля); 3 – кабель

Крім способів збудження, необхідно й правильно включити у хвилеводний тракт об'ємний резонатор. Виділимо два основні способи включення із зовнішніми НВЧ-колами (рис. 6.8). При першому, який називають адсорбційним способом, в околі резонансної частоти відбувається інтенсивний відбір потужності з тієї лінії передачі, до якої підключений резонатор як двополюсник. Як наслідок, на резонансній частоті коефіцієнт передачі  $K_p = P_{\text{вих}}/P_{\text{вх}}$  має яскраво виражений мінімум (рис. 6.8, а).



а)



б)

Рис. 6.8. Способи ввімкнення об'ємного резонатора у хвилеподібний тракт:

а) адсорбційний; б) прохідний (1 – резонатор; 2 – отвір зв'язку)

Другий спосіб включення об'ємного резонатора називають прохідним (рис. 6.8, б). Тут резонатор має два елементи зв'язку із зовнішнім колом і використовується вже як чотириполюсник. На резонансній частоті використовуваного типу коливань коефіцієнт передачі потужності прохідного резонатора є максимальним. У радіотехнічних пристроях резонатор, включений за прохідною схемою, виконує роль смугового частотного фільтра.

#### 6.1.4 Добротність об'ємних резонаторів

Частотна селекція сигналів – одна з найважливіших технічних функцій об'ємного резонатора. Якість частотно-вибіркових систем, які з точки зору форми амплітудно-частотної характеристики (АЧХ)

в околі резонансної частоти є подібні до простого коливального контуру, який, як нам відомо з основ радіоелектроніки, характеризується особливим параметром – добротністю:

$$Q = \frac{\Psi_{рез}}{\Pi_{0,707}},$$

де  $\Pi_{0,707}$  – смуга пропускання на рівні  $0,707 = 1/\sqrt{2}$  від максимального значення АЧХ, що спостерігається на резонансній частоті.

Виведемо загальну формулу для розрахунку добротності об'ємного резонатора, який працює на деякому заданому типі коливань. Будемо виходити з того, що в момент часу  $t=0$  збуджуюче джерело вимикається, а амплітуда власних коливань у резонаторі буде зменшуватись у часі за експоненціальним законом, наприклад,  $E(t) = E_0 e^{-t/\tau} \cos \omega_{рез} t$ , де  $E(t)$  – будь-яка із трьох декартових проєкцій вектора напруженості електричного поля,  $E_0$  – амплітуда коливань у початковий момент часу  $t=0$ ,  $\tau$  – постійна часу коливальної системи.

Використаємо співвідношення між  $\tau$  і  $\omega_{рез}$ , а саме  $\tau = 2Q/\omega_{рез}$ . Нехай  $W_{зан}$  – початковий запас енергії в резонаторі при  $t=0$ . Через один період власних коливань, тобто при  $t = 2\pi/\omega_{рез}$ ,

$$E_0 e^{-\frac{2\pi}{\omega_{рез}\tau}} = E_0 e^{-\frac{\pi}{Q}}.$$

Оскільки запасена енергія пропорційна квадрату амплітуд векторів поля, то внаслідок утрат за один період власних коливань у резонаторі буде запасено енергію

$$W_{вт} = W_{зан} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{Q}\right) \right].$$

Цю формулу можна дещо спростити, оскільки резонатори, які використовують у НВЧ-радіотехніці, є високодобротними, для яких  $Q \gg 1$  і можна замінити експоненту рядом, тобто  $e^{-\frac{2\pi}{Q}} \cong 1 - 2\pi/Q$ . Тоді з досить великою точністю можна вважати, що

$$W_{вт} = \frac{2\pi w_{зан}}{Q}.$$

Тепер енергію втрат за один період коливань зручно пов'язати із середньою потужністю втрат



$$W_{\text{ном } T} = T P_{\text{сеп вт}} = \frac{2\pi P_{\text{сеп вт}}}{\omega_{\text{рез}}}.$$

Звідси можна визначити добротність

$$Q = \frac{\omega_{\text{рез}} W_{\text{зан}}}{P_{\text{сеп вт}}}.$$

Енергію, запасену в резонаторі, можна знайти, проінтегрувавши за об'ємом квадрати амплітудних значень електричного чи магнітного векторів:

$$W_{\text{зан}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV = \frac{\mu_0}{2} \int_V H^2 dV.$$

Проте з попереднього розділу відомо, що питома потужність утрат

$$|P_{\text{сеп вт}}| = \frac{1}{2} \operatorname{Re} Z_{\text{с.м}} |\dot{H}_{\tau, \text{м}}|^2 = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{8\sigma}} |\dot{H}_{\tau, \text{м}}|^2,$$

звідки

$$P_{\text{сеп вт}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{8\sigma}} \int_S |\dot{H}_{\tau, \text{м}}|^2 dS$$

визначається інтегруванням по замкненій поверхні  $S$  металевих стінок резонатора питомої потужності втрат. Таким чином, добротність об'ємного резонатора буде визначатися формулою:

$$Q = \frac{\sqrt{2\omega_{\text{рез}} \mu_0 \sigma} \int_V H^2 dV}{\int_S |\dot{H}_{\tau, \text{м}}|^2 dS}. \quad (6.11)$$

Тепер виведемо формулу для розрахунку добротності коливань типу  $E_{010}$  в круглому об'ємному резонаторі, який має радіус  $a$  та осьову довжину  $l$ . Будемо виходити з того, що в даному випадку магнітний вектор має тільки азимутальну складову з комплексною амплітудою, що визначається рівністю (6.10) при  $m = 0$ ,  $p = 0$ :

$$\dot{H}_\varphi(r) = H_0 J_1\left(\frac{v_{01} r}{a}\right),$$

де  $H_0$  – постійний множник.

Тоді

$$\int_V H^2 dV = 2\pi l H_0^2 \int_0^a J_1^2\left(\frac{v_{01} r}{a}\right) r dr = \pi l a^2 H_0^2 J_1^2(v_{01}),$$

$$\int_S |H_{\tau, \mu}|^2 dS = 2\pi a l H_0^2 J_1^2(v_{01}) + 2\pi a^2 H_0^2 J_1^2(v_{01}) = 2\pi a(l+a) H_0^2 J_1^2(v_{01}).$$

Підставивши ці значення у формулу для добротності  $Q$ , отримаємо:

$$Q_{E_{010}} = \frac{\sqrt{\omega_{\text{рез}} \mu_0 \sigma l a}}{\sqrt{2}(l+a)}.$$

Якщо прийняти, що для моди  $E_{010}$  круглого резонатора

$$\lambda_{0 \text{ рез}} = 2,6/a, \text{ а } \omega_{\text{рез}} = 2\pi c/\lambda_{0 \text{ рез}} = 2,405c/a, \text{ тоді } Q_{E_{010}} = 21,3\sqrt{\sigma} \frac{\sqrt{a}}{l+a}$$

(усі розміри в [м]).

Без виведення подамо формулу для визначення добротності прямокутного резонатора для мод  $H_{101}$  або  $E_{110}$ :

$$Q_{E_{110}} = \pi \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega_{\text{рез}} \varepsilon_0}} \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^2}\right)^{3/2}}{\frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{a}\right) + \frac{1}{l^2} \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{l}\right)}.$$

Найкраще співвідношення між об'ємом і поверхнею, а значить і найбільшу добротність можна отримати у сферичному об'ємному резонаторі. Така коливальна система являє собою металеву сферу, радіус якої близький до резонансної довжини хвилі. Але такі резонатори важко переналаштовувати.

Цікавим також є коаксіальний об'ємний резонатор, що являє собою закорочений з обох кінців відрізок коаксіального хвилеводу. Такий резонатор, як правило, працює на хвилях типу  $T$ , і тому його поперечні розміри можуть бути будь-якими, незалежно від значення резонансної частоти. Це ефективно застосовується під час використання коаксіальних об'ємних резонаторів на хвилях дециметрового діапазону, де аналогічні прямокутні чи круглі резонатори мали б недопустимо великі розміри.

## 6.2 Неоднорідні рівняння Максвелла. Елементарні випромінювачі

До сих пір ми розглядали так звані однорідні задачі електродинаміки, у рамках яких джерела електромагнітного поля розміщувалися досить далеко від тієї просторової області, у якій необхідно

знайти вектори електромагнітного поля. Проте на практиці, наприклад, під час розрахунку антен, потрібно знайти безпосередній зв'язок сторонніх електричних струмів, які є джерелами електромагнітного поля, з векторами  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  у всіх точках простору. Такі ж задачі доводиться також розв'язувати, використовуючи збудження хвилеводів або об'ємних резонаторів за допомогою штиря, петлі, щілини, модульованого за часом електронного потоку.

### 6.2.1 Постановка крайової задачі. Векторний і скалярний потенціали електромагнітного поля. Функція Гріна

З математичної точки зору розв'язання всіх вищезгаданих задач пов'язано з неоднорідною системою рівнянь Максвелла, які записуються так:

$$\begin{aligned}
 1. \quad \operatorname{rot} \dot{H} - j\omega \vec{\epsilon}_a \dot{E} &= \dot{j}_{cm}, \\
 2. \quad \operatorname{rot} \dot{E} - j\omega \mu_a \dot{H} &= 0, \\
 3. \quad \operatorname{div} \dot{B} &= 0, \\
 4. \quad \operatorname{div} \dot{D} &= \rho.
 \end{aligned}
 \tag{6.12}$$

Для спрощення задач будемо вважати, що у всіх точках простору об'ємна густина електричних зарядів рівна нулю ( $\rho = 0$ ).

У правій частині першого рівняння Максвелла фігурує густина стороннього електричного струму  $\dot{j}_{cm}$ , яка є заданою функцією просторових координат. У цьому сенсі існує пряма аналогія між неоднорідною задачею електромагнітного поля й більш простою задачею про струми й напруги в електричному полі, які збуджуються вже відомими сторонніми джерелами е.р.с. Під час запису системи (6.12) передбачалось, що миттєві значення фізичних величин змінюються в часі за гармонічним законом з постійною кутовою швидкістю.

Безпосередньо розв'язати систему неоднорідних рівнянь Максвелла (6.12), як правило, досить важко хоча б тому, що потрібно визначити одразу всі шість незалежних проекцій векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ . Тому необхідно знайти деякі допоміжні функції, які пов'язані з векторами напруженостей електричного й магнітного полів і які мають таку властивість, що перехід до них дозволив би спростити процедуру розв'язання саме неоднорідних рівнянь Максвелла. Такі допоміжні функції в технічній електродинаміці називають потенціалами електромагнітного поля.

Властивість соленоїдальності магнітного поля  $\operatorname{div} \dot{B} = 0$  автоматично задовольнила векторне поле  $\dot{B}$ , яке визначається за формулою  $\dot{B} = \operatorname{rot} \vec{A}_e$  (з розділу 1), де  $\dot{A}_e$  – деяка векторна функція просторових координат, яку називають електричним векторним потенціалом. Оскільки  $\dot{B} = \mu_a \dot{H}$ , то  $\dot{H} = \frac{1}{\mu_a} \dot{B} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \dot{A}_e$ . Єдиною умовою до векторної функції  $\vec{A}_e$  є її диференційованість, що забезпечує існування ротора цього векторного поля. Більше того, приведені рівності зберігають силу, якщо до поля  $\vec{A}_e$  додати ще одне векторне поле  $F = \operatorname{grad} U(r)$ , де  $U(r)$  – довільна гладка функція радіус-вектора, бо  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U(r) = 0$ . Тоді перше рівняння Максвелла запишеться

$$\operatorname{rot} \dot{E} + j \omega \operatorname{rot} \dot{A}_e = 0 \quad \text{або} \quad \operatorname{rot} (\dot{E} + j \omega \dot{A}_e) = 0. \quad (6.13)$$

Тоді

$$\dot{E} + j \omega \dot{A}_e = -\operatorname{grad} \dot{\phi}_e,$$

де  $\dot{\phi}_e$  – деяка функція координат, яка називається скалярним електричним потенціалом. З останнього виразу  $\dot{E} = -\operatorname{grad} \dot{\phi}_e - j \omega \dot{A}_e$ .

Таким чином, ми знайшли спосіб виразити напруженості електричного й магнітного полів через векторний і скалярний потенціали:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -\operatorname{grad} \dot{\phi}_e - j \omega \dot{A}_e, \\ \dot{H} &= \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \dot{A}_e. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Задача дещо спрощується, бо замість двох векторних функцій достатньо мати одну векторну й одну скалярну.

Підставимо співвідношення (6.14) у перше рівняння Максвелла системи (6.13):

$$\frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{A}_e + j \omega \vec{\varepsilon}_a \operatorname{grad} \dot{\phi}_e + j \omega \vec{\varepsilon}_a j \omega \dot{A}_e = \dot{j}_{cm}.$$

Розкриваючи векторну операцію  $\operatorname{rot} \cdot \operatorname{rot}$ , отримаємо:

$$\operatorname{grad} (\operatorname{div} \dot{A}_e + j \omega \vec{\varepsilon}_a \mu_a \dot{\phi}_e) - \nabla^2 \dot{A}_e + \gamma^2 \dot{A}_e = \mu_a \dot{j}_{cm}, \quad (6.15)$$

де  $\gamma = j\omega\sqrt{\tilde{\epsilon}_a\mu_a}$  – комплексний коефіцієнт поширення однорідної плоскої електромагнітної хвилі.

Тепер накладемо умову на обидва потенціали поля –  $\text{div}\dot{A}_e + j\omega\tilde{\epsilon}_a\mu_a\dot{\phi}_e = 0$ . Її називають умовою калібрування, або умовою Лорентца. Тоді рівняння (6.15) суттєво спроститься й набуде вигляду:

$$\nabla^2\dot{A}_e - \gamma^2\dot{A}_e = -\mu_a\dot{j}_{cm}. \quad (6.16)$$

Отримане рівняння являє собою неоднорідне рівняння Гельмгольца відносно векторного електричного потенціалу  $\dot{A}_e$ . Якщо з умови Лорентца визначити

$$\dot{\phi}_e = -\frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a\mu_a}\text{div}\dot{A}_e,$$

то напруженість електричного й магнітного полів буде рівна

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -\text{grad}\dot{\phi}_e - j\omega\dot{A}_e = \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a\mu_a}\left(\text{grad}\text{div}\dot{A}_e - \gamma^2\dot{A}_e\right), \\ \dot{H} &= \frac{1}{\mu_a}\text{rot}\dot{A}_e. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Таким чином, якщо розв'язок неоднорідного рівняння Гельмгольца отримано у вигляді (6.17), то знаходження векторів електромагнітного поля, збудженого системою сторонніх джерел, зводиться до простих диференціальних операцій  $\text{grad}\text{div}$  і  $\text{rot}$  від векторного електричного потенціалу. Якщо функція  $\dot{A}_e$  не є гармонічною функцією, то неоднорідне рівняння Гельмгольца перетворюється в неоднорідне рівняння Д'Аламбера.

Пристаюючи до пошуку строгого розв'язку задачі про збудження необмеженого однорідного простору системою сторонніх джерел, обмежимося важливим частинним випадком, коли втрати в середовищі відсутні. Тоді коефіцієнт поширення  $\gamma = j\beta$  і неоднорідне рівняння Гельмгольца набуває вигляду:

$$\nabla^2\dot{A}_e + \beta^2\dot{A}_e = -\mu_a\dot{j}_{cm}. \quad (6.18)$$

Таке неоднорідне векторне диференціальне рівняння розпадається на три незалежні рівняння відносно проєкцій шуканої функції  $\dot{A}_e(x, y, z)$  на осі декартової системи координат:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \dot{A}_{ex} + \beta^2 \dot{A}_{ex} &= -\mu_a \dot{j}_{cmx}, \\
\nabla^2 \dot{A}_{ey} + \beta^2 \dot{A}_{ey} &= -\mu_a \dot{j}_{cmy}, \\
\nabla^2 \dot{A}_{ez} + \beta^2 \dot{A}_{ez} &= -\mu_a \dot{j}_{cmz}.
\end{aligned}
\tag{6.18.a}$$

Усі три рівняння із системи (6.18.a) ідентичні, тому задачу про збудження електромагнітних хвиль у вільному просторі без утрат можна звести до розв'язання неоднорідного, але вже скалярного рівняння Гельмгольца виду

$$\nabla^2 \dot{U} + \beta^2 \dot{U} = \dot{F},$$

де  $\dot{U}(r)$  – невідома функція при заданій функції  $\dot{F}(r)$ . Спосіб розв'язання цього рівняння суттєвим чином спирається на те, що це рівняння є лінійним, а значить, підпорядковується принципу суперпозиції.

Розглянемо деяку точку простору  $Q$ , що має радіус-вектор  $\vec{r}_0$ . Нехай  $\dot{F}(\vec{r}_0)$  – значення правої частини цього рівняння в цій точці. Оточимо точку  $Q$  фізично малим околom з об'ємом  $\Delta V$  і назвемо величину  $\dot{F}(\vec{r}_0)\Delta V$  інтенсивністю джерела в даній точці.

Якщо функція  $\dot{F}(\vec{r}_0)$  всюди приймає лише кінцеве значення, то ця інтенсивність наближається до нуля при  $\Delta V \rightarrow 0$ . Тоді говорять, що джерела розподілені в просторі неперервно. Проте може бути й інший варіант, коли в точці  $Q$  розміщене джерело скінченої інтенсивності, яка залишається незмінною при дуже малих значеннях  $\Delta V$ . Тоді зазначають, що в точці простору з радіус-вектором  $\vec{r}_0$  розміщене вже дискретне джерело. Якщо інтенсивність джерела рівна одиниці, то праву частину рівняння можна записати так:

$$\dot{F}(\vec{r}_0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0),$$

де  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$  – тримірна дельта-функція, яку можна подати у вигляді добутку трьох однорідних дельта-функцій:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0).$$

Однак з курсу радіоелектроніки нам відомі властивості дельта-функцій. Зокрема, знаємо умову її нормування, яка записується: якщо  $\vec{r} \neq \vec{r}_0$ , то  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$  і

$$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = \iiint \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) dx dy dz = \\ = \iiint \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) dx_0 dy_0 dz_0 = 1$$

при інтегруванні за будь-яким об'ємом, що містить точку  $Q$ , де  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – координати точки спостереження, а  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  – координати точки джерела.

За визначенням, функцією Гріна  $\dot{G}(\vec{r}, \vec{r}_0)$  рівняння Гельмгольца називають розв'язок неоднорідного рівняння

$$\nabla^2 \dot{G}(\vec{r}, \vec{r}_0) + \beta^2 \dot{G}(\vec{r}, \vec{r}_0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (6.19)$$

яке описує гармонічний хвильовий процес, що поширюється у всі напрями з точки знаходження джерела.

Покажемо, що, знаючи функцію Гріна, можна до кінця розв'язати задачу про збудження вільного простору довільною сукупністю сторонніх джерел, як неперервних, так і дискретних, причому на основі принципу суперпозиції процедура розв'язання зводиться до обчислення деякого інтеграла. Для цього спочатку помножимо обидві частини рівняння (6.19) на невідому функцію  $\dot{U}$ , а потім обидві частини рівності  $\nabla^2 \dot{U} + \beta^2 \dot{U} = \dot{F}$  – на функцію  $\dot{G}$ . Віднімаючи отримані рівняння почленно, отримаємо:

$$\dot{U} \nabla^2 \dot{G} - \dot{G} \nabla^2 \dot{U} = \dot{U} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) - \dot{G} \dot{F}.$$

Візьмемо тепер деякий достатньо великий об'єм  $V$  з поверхнею  $S$ , що містить точку  $Q$ , і проінтегруємо по ньому обидві частини отриманого рівняння. При цьому об'ємний інтеграл від лівої частини можна замінити поверхневим інтегралом, якщо використати з векторного аналізу формулу Гріна:

$$\int_V (\dot{U} \nabla^2 \dot{G} - \dot{G} \nabla^2 \dot{U}) dV = \oint_S (\dot{U} \text{grad} \dot{G} - \dot{G} \text{grad} \dot{U}) dS = \int_V [\dot{U} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) - \dot{G} \dot{F}] dV.$$

Фізично зрозуміло, що для достатньо віддалених точок поверхні  $S$  від точки розміщення джерела  $Q$  значення функцій  $\dot{U}$  і  $\dot{G}$  на поверхні  $S$  можуть бути дуже малими, так що поверхневий інтеграл може бути рівний нулю. Звідси приходимо до цікавого співвідношення, яке повинен задовольняти шуканий розв'язок  $\dot{U}(\vec{r})$ :

$$\int_V \dot{U} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = \int_V \dot{G} \dot{F} dV.$$

Тут обидві функції  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$  і  $\dot{G}(\vec{r}, \vec{r}_0)$  симетричні відносно своїх аргументів, тобто

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}), \quad \dot{G}(\vec{r}, \vec{r}_0) = \dot{G}(\vec{r}_0, \vec{r}).$$

Виходячи із цього, інтегрування за об'ємом можна проводити як за координатними точками спостереження, так і за координатами точок джерела. Інтегруючи за координатами точок джерела  $x_0, y_0, z_0$  і використовуючи фільтруючу властивість дельта-функції, отримаємо загальний розв'язок неоднорідного скалярного рівняння Гельмгольца  $\nabla^2 \dot{U} + \beta^2 \dot{U} = \dot{F}$  з довільною правою частиною:

$$\dot{U}(\vec{r}) = \int_V \dot{G}(\vec{r}, \vec{r}_0) \dot{F}(\vec{r}_0) dx_0 dy_0 dz_0. \quad (6.20)$$

Фізичний зміст цього розв'язку є простим і наочним – результуюче збудження, яке спостерігається в точці з радіус-вектором  $\vec{r}$ , є зваженою сумою елементарних збуджень від усіх джерел; роль вагової функції тут відіграє функція Гріна.

Тепер подивимось, як буде виглядати функція Гріна для неоднорідного рівняння Гельмгольца. Однорідний тримірний простір є ізотропним, оскільки характеристики хвиль ніяк не пов'язані з напрямом їх поширення. Тому можна стверджувати, що функція Гріна  $\dot{G}(\vec{r}, \vec{r}_0)$  фактично залежить тільки від одного аргументу  $R = |\vec{r} - \vec{r}_0|$  – довжини радіус-вектора, проведеного з точки розміщення джерела в точку спостереження. Очевидно, що для всіх  $R \neq 0$  функція Гріна  $\dot{G}(R)$  є розв'язком однорідного рівняння Гельмгольца:

$$\nabla^2 \dot{G}(R) + \beta^2 \dot{G}(R) = 0$$

або, розкриваючи оператор Набла (чи Лапласа, бо  $\nabla^2 = \Delta$ ) у сферично симетричному випадку ( $\partial/\partial\theta = \partial/\partial\varphi = 0$ ), отримаємо

$$\frac{d^2 \dot{G}}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d\dot{G}}{dR} + \beta^2 \dot{G} = 0. \quad (6.21)$$

Із цього рівняння можна виключити доданок з першою похідною, якщо використати заміну  $\dot{\Psi} = R\dot{G}$ . Тоді, як ми й переконалися, відносно нової змінної функції  $\dot{\Psi}$  отримуємо рівняння

$$\frac{d^2 \dot{\Psi}}{dR^2} + \beta^2 \dot{\Psi} = 0,$$

яке має, як уже відомо, два розв'язки:



$$\dot{\Psi}_{1,2}(R) = \exp(\pm j \beta R).$$

Кожний такий розв'язок описує комплексну амплітуду біжучої гармонічної хвилі, яка поширюється вздовж радіальної координати. Одна із цих хвиль рухається в напрямі з нескінченості до джерела, а друга – від джерела в нескінченість. Оскільки фізичний зміст може мати тільки остання зі згаданих хвиль, то розв'язком рівняння (6.21) буде функція

$$\dot{\Psi}(R) = \exp(-j \beta R),$$

яка дає такий вираз для функції Гріна

$$\dot{G}(R) = \frac{A e^{-j \beta R}}{R},$$

де  $A = \text{const}$ .

У математичній фізиці прийнято говорити, що дана функція Гріна описує однорідну сферичну хвилю. Амплітуда цієї хвилі зменшується обернено пропорційно до першої степені радіус-вектора  $R$ . Для того, щоб знайти чисельне значення постійної  $A$ , доцільно звернутися до рівняння (6.19), записавши його у вигляді

$$\nabla^2 \dot{G}(R) + \beta^2 \dot{G}(R) = \delta(R). \quad (6.22)$$

Опишемо навколо точки розміщення джерела кулю  $\mathcal{D}$  з радіусом  $\xi$ . Нехай  $\Gamma$  – поверхня цієї кулі. Проінтегрувавши обидві частини рівняння (6.22) за об'ємом  $\mathcal{D}$ , отримаємо:

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla^2 \dot{G}(R) d\mathcal{D} + \beta^2 \int_{\mathcal{D}} \dot{G}(R) d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \delta(R) d\mathcal{D} = 1.$$

Оскільки другий доданок набагато менший від першого, то рівняння дещо спрощується:

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla^2 \dot{G}(R) d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \text{div grad } \dot{G} d\mathcal{D} = \int_{\Gamma} \text{grad } \dot{G} d\Gamma = 1$$

(якщо  $\delta(R) = \text{div grad } \dot{G}$  і  $\text{grad } \dot{G} = \frac{d\dot{G}}{dR} \vec{i}_r$ ). Тоді останнє нормуюче

рівняння можемо записати:

$$\left. \frac{d\dot{G}}{dR} \right|_{R=\xi} \cdot 4\pi \xi^2 = 1 \quad \text{або} \quad \left. \frac{d\dot{G}}{dR} \right|_{R=\xi} = \frac{1}{4\pi \xi^2}.$$

Звідси  $\dot{G}(R) = -\frac{1}{4\pi R}$  і значить  $A = -\frac{1}{4\pi}$ . Тому кінцевий вигляд функції Гріна буде таким:

$$\dot{G}(R) = -\frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} \quad \text{або} \quad \dot{G}(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\frac{e^{-j\beta|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|}.$$

Вираз отриманої таким чином функції Гріна дозволяє записати розв'язок неоднорідного рівняння Гельмгольца у вигляді скалярного потенціалу:

$$\dot{U}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\nu} \int \dot{F}(\vec{r}_0) \frac{e^{-j\beta|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} dx_0 dy_0 dz_0. \quad (6.23)$$

Або для векторного рівняння (6.18) отримаємо значення векторного потенціалу

$$\dot{A}_c(\vec{r}) = \frac{\mu_a}{4\pi\nu} \int \dot{j}_{cm}(\vec{r}_0) \frac{e^{-j\beta|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} dx_0 dy_0 dz_0, \quad (6.23.a)$$

який ми згадували в першому розділі.

### 6.2.2 Елементарний електричний випромінювач – диполь Герца. Структура його поля

Елементарним електричним випромінювачем (вібратором) називають ідеалізовану випромінюючу систему, у якій змінний електричний струм протікає вздовж відрізка прямої лінії за надзвичайно малої площі поперечного перерізу. При цьому вважається, що довжина випромінюючої області  $l$  є значно меншою від довжини електромагнітної хвилі  $\lambda$  у навколишньому середовищі.

Опишемо нижче фізичну картину протікання струму по елементарному електричному випромінювачу. Нехай, наприклад, у розрив випромінюючого відрізка провідника увімкнене джерело гармонічної е.р.с. Тоді струм провідності проходить по одному плечу випромінювача, створюючи в просторі струм зміщення, і через друге плече повертається в джерело (рис. 6.9).

Мала довжина випромінювача в порівнянні з довжиною хвилі ( $l \ll \lambda$ ) дозволяє розглядати його як точковий випромінювач електромагнітних хвиль. Саме елементарний електричний вібратор є математичною моделлю диполя Герца, який являє собою дві металеві кулі діаметром  $d$ , з'єднані тонким провідником, а до перерізу провідника за допомогою двопровідної лінії підключене джерело е.р.с.

Дійсно, у довільним чином розміщену точку спостереження  $P$  приходять сферичні хвилі, які збуджуються всією областю випромінюючого провідника. Найбільша геометрична різниця ходу (рис. 6.9, в) для двох хвиль із радіус-векторами  $r_1$  і  $r_2$  складає

$\Delta = l \sin \alpha$ , звідки різниця фаз збуджених коливань, виражена в радіанах, рівна  $\delta\varphi = \beta \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} l \sin \alpha$ . Згідно із цією формулою при  $l/\lambda \ll 1$  система випромінює ніби одну сферичну хвилю і в цьому сенсі може вважатися точковим джерелом електромагнітних хвиль.

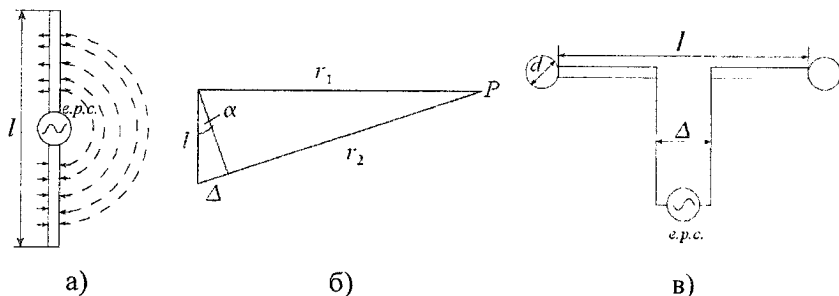


Рис. 6.9. Елементарний електричний випромінювач (а), різниця ходу хвиль від двох крайніх точок випромінювача (б) і диполь Герца (в)

Будемо вважати, що елементарний випромінювач розташований у початковій точці сферичної системи координат  $(r, \theta, \varphi)$ , причому

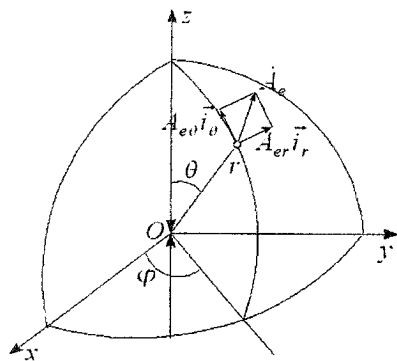


Рис. 6.10. Визначення сферичних поверхонь векторного потенціалу

для визначеності випромінювач орієнтований паралельно до полярної осі  $z$  (рис. 6.10). Завдяки малості геометричних розмірів випромінювача в порівнянні з довжиною хвилі формулу (6.23.а) можна дещо спростити, виносячи за знак інтеграла ті співмножники, від яких визначається характером функції Гріна; при цьому вважаємо, що  $r_0 = 0$  і  $\mu_a = \mu_0$  (середовище – вакуум або повітря):

$$\vec{A}_e(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \int_V \vec{j}_{cm} dx_0 dy_0 dz_0.$$

Комплексна амплітуда вектора густини стороннього електричного струму виражається як

$$\dot{j}_{cm} = \dot{I} \delta(x_0) \delta(y_0) \vec{i}_z.$$

Використовуючи фільтруючу дію дельта-функції, знаходимо

$$\int_V \dot{j}_{cm} dx_0 dy_0 dz_0 = \dot{j}_{cm} = \vec{i}_z \int_0^l dz \int_{-\infty}^{+\infty} [\dot{I} \delta(x_0) \delta(y_0) dx_0 dy_0] = \dot{I} l \vec{i}_z.$$

Тоді векторний потенціал буде рівний

$$\dot{A}_e(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \dot{I} l e^{-j\beta r}}{4\pi r} \vec{i}_z. \quad (6.24)$$

Із цього виразу випливає, що векторний електричний потенціал електромагнітного поля, яке збуджується елементарним вібратором, описується функцією однорідної сферичної хвилі, що поширюється вздовж радіальної координати  $r$  зі швидкістю світла.

Якщо розкласти векторний потенціал  $\dot{A}_e$  на його складові  $\dot{A}_{er}$ ,  $\dot{A}_{e\theta}$ ,  $\dot{A}_{e\varphi}$ , то отримаємо:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{er} &= \dot{A}_e \cos \theta = \frac{\mu_0 \dot{I} l e^{-j\beta r}}{4\pi r} \cos \theta, \\ \dot{A}_{e\theta} &= -\dot{A}_e \sin \theta = -\frac{\mu_0 \dot{I} l e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sin \theta, \\ \dot{A}_{e\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Азимутальна складова  $\dot{A}_{e\varphi} = 0$  тому, що в кожній точці простору вектор  $\dot{A}_{e\varphi}$  орієнтований уздовж полярної осі  $\vec{r}$  сферичної системи координат.

Таким чином, елементарний електричний випромінювач являє собою просту антену, що збуджує в навколишньому просторі електромагнітні коливання.

Вивчимо тепер закони зміни просторового розподілу напруженостей електричного й магнітного полів, які збуджуються таким випромінювачем. Використаємо формулу  $\dot{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \dot{A}_e$ , яка пов'язує

магнітний вектор поля з електричним потенціалом. Тому доцільно обчислити ротор у сферичній системі координат, використовуючи проекції  $\dot{A}_{er}$ ,  $\dot{A}_{e\theta}$ ,  $\dot{A}_{e\varphi}$ . Оскільки  $\dot{A}_{e\varphi} = 0$ , то  $\partial/\partial\varphi = 0$ . Тоді проекції для напруженості магнітного поля будуть рівні:

$$\dot{H}_r = \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \dot{A}_{e\varphi}) - \frac{\partial \dot{A}_{e\theta}}{\partial \varphi} \right) \right] = 0,$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \dot{A}_{er}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{A}_{e\varphi}) \right) \right] = 0,$$

$$\dot{H}_\varphi = \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{A}_{e\theta}) \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{A}_{er}}{\partial \varphi} \right] = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{A}_{e\theta}) = \frac{jI}{4\pi r^2} (1 + j\beta r) \sin \theta e^{-j\beta r}.$$

Як правило, на практиці цікавляться полями на відстані  $r$  від випромінюючого джерела значно більшої довжини хвилі  $\lambda$  ( $r \gg \lambda$ ). При цьому безрозмірний параметр  $\beta r \gg 1$  і точка спостереження знаходиться в так званій далекій зоні випромінювача. Тому азимутальну складову  $\dot{H}_\varphi$  можна наближено записати:

$$\dot{H}_\varphi = \frac{jI\beta}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}. \quad (6.25)$$

Електричний вектор поля, яке збуджується випромінювачем, можна знайти, використовуючи перше рівняння Максвелла –

$$\dot{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \text{rot } \dot{H},$$

у праву частину якого потрібно підставити вже

знайдену проекцію магнітного поля  $\dot{H}_\varphi$ . Тоді проекції електричного вектора в далекій зоні будуть рівні:

$$\dot{E}_r = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \dot{H}_\varphi) \right] = \frac{jI\beta}{2\pi\omega\epsilon_0 r^2} \cos \theta e^{-j\beta r},$$

$$\dot{E}_\theta = -\frac{1}{j\omega\epsilon_0 r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{H}_\varphi) = \frac{jI\beta^2}{4\pi\omega\epsilon_0} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r},$$

$$\dot{E}_\varphi = 0.$$

Оскільки модуль проекції  $\dot{E}_r$  зменшується зі збільшенням радіуса пропорційно множнику  $1/r^2$ , а в той же час проекція  $\dot{E}_\theta$  спадає за законом  $1/r$ , тобто повільніше, то в далекій зоні проекцією  $\dot{E}_r$  можна знехтувати і єдиною відмінною від нуля буде лише проекція

$$\dot{E}_\theta = \frac{jI\beta^2}{4\pi\omega\epsilon_0} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r} = \frac{jI\beta}{4\pi} Z_0 \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}, \quad (6.25.a)$$

де  $Z_0 = 120\pi = 377 \text{ Ом}$  – характеристичний (хвильовий) опір вакууму.

Розглядаючи формули (6.25) і (6.25.а) для визначення проєкцій векторів поля для елементарного електричного випромінювача, можна дійти таких висновків:

– електромагнітне поле, що збуджується в просторі елементарним електричним випромінювачем, являє собою сферичну хвилю, яка виражається функцією Гріна;

– у кожній точці простору відношення комплексних амплітуд  $\dot{E}_\theta / \dot{H}_\phi = Z_0$ , що є характерним для однорідної плоскої хвилі в необмеженому вільному просторі;

– сферична хвиля, яка при цьому збуджується, є неоднорідною, оскільки амплітуди полів залежать від полярного кута  $\theta$ ;

– вектор Пойтінга в далекій зоні направлений уздовж одиничного вектора  $\vec{i}_r$ , тобто хвиля переносить потужність лише в радіальному напрямі.

На рис. 6.11 подано структуру миттєвого розподілу силових ліній електричного вектора елементарного випромінювача, на яку вказував ще Герц.

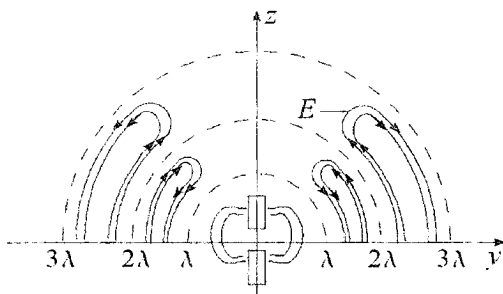


Рис. 6.11. Структура силових ліній вектора напруженості електричного поля поблизу елементарного випромінювача

### 6.2.3 Діаграма направленості, опір випромінювання елементарного випромінювача

У теорії антен дуже важливу роль відіграє функція, що описує залежність комплексних амплітуд полів, які збуджуються в просторі

деякою випромінюючою системою, від кутів спостереження  $\theta$  та  $\varphi$ . Таку функцію називають діаграмою направленості антени.

У випадку нашого електричного випромінювача (вібратора) кутова залежність амплітуди випромінюючого поля має вид  $\sin \theta$  (від азимутального кута  $\varphi$  амплітуда поля не залежить). Початкові фази проекцій векторів поля, як це видно з формул проекцій, узагалі не пов'язані з кутовими координатами, тобто хвильові фронти (поверхні рівних фаз) утворюють сімейство концентрованих сфер. Максимум випромінювання спостерігається при куті  $\theta = \pi/2$  ( $\sin \pi/2 = 1$ ), тобто в екваторіальній площині сферичної системи координат; уздовж осі вібратора при  $\theta = 0$  або  $\theta = \pi$  випромінювання відсутнє.

На практиці зазвичай використовують нормовані діаграми направленості. При цьому по осі ординат відкладають модуль напруженості поля при заданому куті спостереження, віднесений до максимального значення напруженості поля. Нормована діаграма направленості елементарного електричного випромінювача (рис. 6.12, а) являє собою синусоїдальну функцію, побудовану на відрізку значень аргументу  $\theta$  від 0 до  $\pi$ .

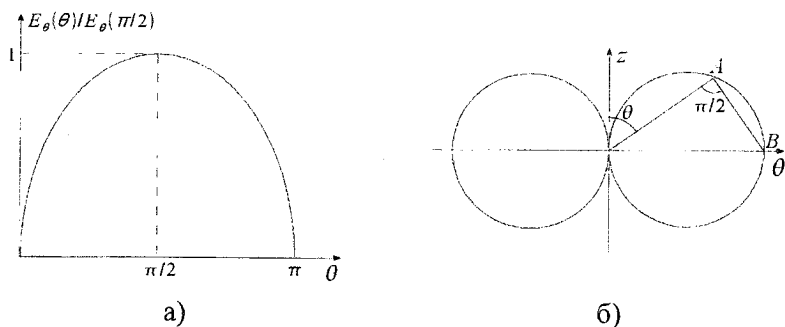


Рис. 6.12. Нормована (а) і полярна (б) діаграми направленості елементарного електричного випромінювача

Для наочності нормовану діаграму направленості часто подають у полярній системі координат (рис. 6.12, б). Принцип побудови такої діаграми полягає в тому, що на кожному промені, проведеному з початку координат від куту спостереження  $\theta$ , відкладають нормоване значення модуля напруженості поля; масштаб рисунка може бути будь-яким. Неважко переконатися, що геомет-

ричним місцем точок діаграми направленості елементарного електричного випромінювача буде коло, оскільки  $OA = OB \sin \theta$ .

Незважаючи на те, що фактичною областю зміни кута спостереження є відрізок  $[0, \pi]$ , діаграму направленості часто зображають в обох півплощинах, підкреслюючи цим, що вібратор рівномірно (ізотропно) випромінює за всіма кутами  $\theta$ .

Обчислимо тепер потужність, яка випромінюється елементарним вібратором у середньому за один період коливань. Для цього уявно оточимо випромінювач замкненою поверхнею  $S$  довільної форми. Значення випромінюваної потужності  $P_{\Sigma}$  знайдемо, проінтегрувавши середнє значення вектора Пойтінга  $\vec{P}_{\text{сеп}}$  по поверхні  $S$ :  $P_{\Sigma} = \int_S \vec{P}_{\text{сеп}} d\vec{S}$ . Якщо поверхню  $S$  вибрати у вигляді сфери радіусом  $r$  так, що  $\beta r \gg 1$  і точки сфери розміщувалися в далекій зоні випромінювання, знаходимо радіальну проекцію середнього вектора Пойтінга в далекій зоні, яка при синфазності величин  $\dot{E}_0$  і  $\dot{H}_\varphi$  є чисто дійсною величиною:

$$\vec{P}_{\text{сеп} r} = \frac{1}{2} \dot{E}_0 \dot{H}_\varphi^* = \frac{\dot{I}_m^2 l^2 \beta^2 Z_0}{32 \pi^2 r^2} \sin^2 \theta.$$

При інтегруванні по поверхні сфери радіусом  $r$  урахуємо, що диференціал площі  $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ . Тому отримаємо:

$$P_{\Sigma} = \frac{\dot{I}_m^2 l^2 \beta^2 Z_0}{32 \pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta.$$

Ураховуючи те, що  $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$ , то  $P_{\Sigma} = \frac{\dot{I}_m^2 l^2 \beta^2 Z_0}{12 \pi^2}$ .

Згідно з даною формулою, потужність випромінювання пропорційна квадрату амплітуди струму, який протікає по вібратору. У цьому є певна аналогія між виразом для  $P_{\Sigma}$  і формулою з теорії кіл, яка виражає потужність змінного струму в деякому резистивному двополюснику:  $P_{\Sigma} = I_m^2 R_{\Sigma} / 2$ .

Отже,

$$R_{\Sigma} = \frac{1}{6\pi} Z_0 (l\beta)^2 = 20(l\beta)^2 = 80\pi^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right) (Om), \quad (6.26)$$

бо  $Z_0 = 120 \pi$ .



Ми отримали вираз для опору випромінювання елементарного електричного випромінювача. Ця величина характеризує випромінюючу здатність антени.

Максимальне значення модуля вектора Пойтінга має місце при  $\theta = \pi/2$  і складає

$$P_{\text{сер max}} = \frac{\dot{I}_M^2 l^2 \beta^2 Z_0}{32 \pi^2 r^2}.$$

Якщо потужність випромінюється за всіма напрямками ізотропно, то густина потоку потужності на відстані  $r$  від джерела буде рівна

$$P_{\text{сер рівн}} = \frac{P_{\Sigma}}{4 \pi r^2} = \frac{\dot{I}_M^2 l^2 \beta^2 Z_0}{48 \pi^2 r^2}.$$

Для характеристики антен вводять числову характеристику  $D = \frac{P_{\text{сер max}}}{P_{\text{сер рівн}}}$ , яку називають коефіцієнтом направленої дії (КНД). У нашому випадку  $D = 1,5$ , що вказує на те, що елементарний вібратор погано концентрує випромінювання в просторі.

#### **6.2.4 Елементарний випромінювач у режимі приймання. Елементарний щілинний і рамковий випромінювачі**

Будь-яка антена може з однаковим успіхом працювати як на передавання, так і на приймання коливань (сигналів). Вивчимо для цього закономірності приймальних антен на прикладі електричного випромінювача (вібратора) довжиною  $l$ , що опромінюється плоскою електромагнітною хвилею, у якій вектор  $\vec{E}$  паралельний осі випромінювача.

Якщо затискачі антени розімкнені, то під дією поля на них виникає змінна комплексна напруга  $\dot{U} = \dot{E}l$  або наведена е.р.с. Для того

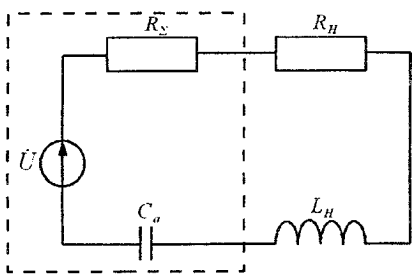


Рис. 6.13. Еквівалентна схема елементарного випромінювача в режимі приймання

щоб узяти певну потужність з вібратора, його необхідно навантажити на деякий комплексний опір  $Z_n$ . Зазвичай таким двополюсником навантаження є вхідний опір приймача. При цьому в замкненому колі буде виникати наведений струм й антена буде перевипромінювати (розсіювати) падаюче поле. Ця обставина є принциповою – будь-яка антена розсіює частину потужності в навколишнє середовище. На рис. 6.13 зображено еквівалентну схему елементарного випромінювача, який працює в режимі приймання. Через наявність ефекту перевипромінювання внутрішній опір еквівалентного генератора містить дійсну (активну) частину, чисельно рівну опорі випромінювання  $R_z$ . Крім того, така антена подібна до конденсатора, який дає реактивний опір, урахування якого на еквівалентній схемі подане елементом  $C_a$ .

Потужність, яка передається з антени в навантаження, буде максимальною в режимі узгодження, за якого абсолютне значення реактивних опорів елементів  $C_a$  і  $L_n$  на робочій частоті є однаковими. Це означає, як нам відомо з основ радіоелектроніки, що коло антени повинно бути налаштоване в резонанс, а отже,  $R_n = R_z$ . При цьому струм в антені буде мати комплексну амплітуду  $\dot{I} = \dot{U} / (2R_z)$ , а потужність, виділена в навантаженні, набуде максимального значення:

$$P_{n \max} = \frac{1}{2} I_m^2 R_z = \frac{U_m^2}{8R_z}.$$

Нехай  $\dot{U} = \dot{E}l$ , а  $R_z = 20(\beta l)^2$ , то

$$P_{n \max} = \frac{E_m^2 \lambda^2}{640\pi^2}$$

і не залежить від довжини антени  $l$ .

Якщо тепер урахувати, що середнє значення вектора Пойтінга падаючої хвилі в точці розміщення антени  $\Pi_{сер} = E_m^2 / (240\pi)$ , то максимальне значення потужності в навантаженні  $P_{н\max} = \Pi_{сер} A_{эф}$ , де  $A_{эф} = 3\lambda^2 / 8\pi = 0,119\lambda^2$  і являє собою так звану ефективну площу елементарного випромінювача в режимі приймання.

Таким чином, елементарний електричний випромінювач здатний виділити з падаючої плоскої електромагнітної хвилі й передати в узгоджене навантаження всю потужність, яка переноситься в межах хвильового фронту площею  $0,119\lambda^2$ .

Для надійного та високоякісного приймання необхідно, щоб потужність сигналу в навантаженні антени  $P_{н}$  у 5–10 разів перевищувала потужність власних шумів приймача  $P_{ш}$ , яка визначається за формулою  $P_{ш} = RT_{ш} \Delta f$ .

Розглянемо тепер інші випромінювачі – щілинний і рамковий.

Така випромінююча система являє собою нескінченну ідеально провідну поверхню (площину), у якій прорізано щілину довжиною  $l$  і шириною  $\Delta$  (рис. 6.14). Якщо впоперек щілини створити змінне електричне поле, то, як відомо, така щілина стає елементом, по якому пробігає уявний магнітний струм у напрямі, паралельному кромкам щілини. Згідно із принципом дуальності щілинний випромінювач є дуальним по відношенню до розглянутого раніше елементарного електричного випромінювача й тому може називатися також магнітним випромінювачем.

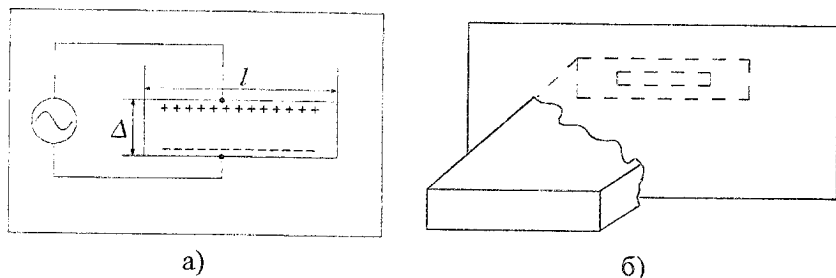


Рис. 6.14. Елементарний щілинний випромінювач із двостороннім (а) та одностороннім (б) випромінюванням

Збудження щілини здійснюється різними способами. Можна, наприклад, до довгих кромek щілини безпосередньо підключити

джерело електромагнітної високочастотної напруги (рис. 6.14, а). При цьому виникає двостороннє збудження щілини, тому що енергія електромагнітного поля випромінюється в обидва півпростори. Але частіше за все використовують одностороннє збудження щілинного випромінювача, наприклад, за допомогою прямокутного хвилеводу з хвилею типу  $H_{10}$  (рис. 6.14, б). Тут змінні в часі електричні заряди на кромках щілини наводяться за рахунок протікання поверхневих струмів по тій області металевої поверхні, яка закорочує хвилевід.

Для того, щоб дана щілина могла вважатися елементарним випромінювачем, необхідно вимагати виконання нерівності  $l \ll \lambda$ ; при цьому щілина є дуже вузькою, тобто  $\Delta \ll l$ . Тут розглянемо двосторонній випромінювач. При цьому немає необхідності розв'язувати нову електродинамічну задачу, оскільки достатньо застосувати розглянутий нами принцип перестановочної дуальності до раніше визначених проекцій векторів поля елементарного електричного випромінювача. Запишемо формули, які будуть описувати поля обох випромінювачів у дальній зоні:

- електричний випромінювач (вібратор):

$$\dot{H}_\varphi = \frac{j \dot{I}_e l \beta}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}, \quad \dot{E}_\theta = \frac{j \dot{I}_e l \beta}{4\pi} Z_0 \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r};$$

- щілинний випромінювач:

$$\dot{E}_\varphi = -\frac{j \dot{I}_m l \beta}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}, \quad \dot{H}_\theta = \frac{j \dot{I}_m l \beta}{4\pi Z_0} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}.$$

При переході від вібратора до щілинного випромінювача виконана заміна  $Z_0 \leftrightarrow 1/Z_0$ ,  $\dot{H}_\varphi \leftrightarrow \dot{E}_\varphi$ ,  $\dot{E}_\theta \leftrightarrow \dot{E}_\theta$ . Замість стороннього магнітного струму  $\dot{I}_m$  зручніше використовувати комплексну амплітуду напруги  $\dot{U}_m$  у щілині, яка визначається як

$$\dot{H}_\tau = \dot{I}_e / (2\Delta), \quad \dot{E}_\tau = \dot{U}_m / \Delta.$$

Застосувавши в силу дії принципу перестановочної дуальності, що електричний і магнітний вектори взаємозамінні, останню формулу для  $\dot{E}_\tau$  можна записати  $\dot{E}_\tau = \dot{I}_m / (2\Delta)$ , звідки  $\dot{I}_m = 2\dot{U}_m$ .

Таким чином, комплексна амплітуда стороннього магнітного струму, який протікає по щілинному випромінювачу, буде чисельно рівна подвоєній комплексній амплітуді напруги в щілині. Тоді

остаточні формули для розрахунку проєкцій векторів електромагнітного поля в далекій зоні щілинного випромінювача запишуться:

$$\begin{aligned} \dot{E}_\varphi &= -\frac{j\dot{U}_m l \beta}{2\pi} \sin\theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}, \\ \dot{H}_\theta &= \frac{j\dot{U}_m l \beta}{2\pi Z_0} \sin\theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Визначимо тепер опір щілинного випромінювача. Для цього, використовуючи формули (6.27), визначимо середній за період коливань вектор Пойтінга, який має єдину складову, направлену вздовж орта радіального напрямку:

$$P_{\text{ср } r} = -\frac{1}{2} \dot{E}_\varphi^* \dot{H}_\theta = \frac{\dot{U}_{m.m}^2 (l\beta)^2}{8\pi^2 Z_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\dot{U}_{m.m}^2 (l\beta)^2}{3\pi Z_0}.$$

Оскільки потужність випромінювання пропорційна квадрату напруги в щіліні, можна записати

$$P_\Sigma = \frac{\dot{U}_{m.m}^2}{2R_{\Sigma_{\text{ш}}}}.$$

Порівнюючи ці два вирази, визначимо опір щілинного вібратора:

$$R_{\Sigma_{\text{ш}}} = \frac{3\pi Z_0}{2(l\beta)^2} = 45 \left( \frac{\lambda}{l} \right)^2. \quad (6.28)$$

Тобто чим менша довжина хвилі в порівнянні з робочою довжиною хвилі, тим більший опір випромінювання й тим менша випромінювана потужність.

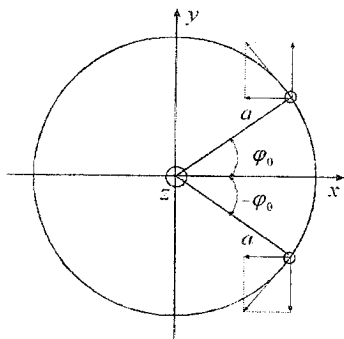


Рис. 6.15. Елементарний рамковий випромінювач

Розглянемо тепер особливості рамкового випромінювача. Так прийнято називати круговий виток із провідника радіусом  $a \ll \lambda$ , по якому протікає змінний електричний струм з комплексною амплітудою  $\dot{I}_e$ , однаковою у всіх точках провідної рамки.

Зафіксуємо, що рамка розміщується в екваторіальній площині сферичної системи координат; початок відліку збігається із центром

випромінюючого елемента (рис. 6.15). Розглянемо два елементи струму величиною  $\dot{I}_e d\varphi_0$ , які розміщені симетрично по відношенню до осі  $x$  у точках з координатами  $\pm\varphi_0$ . Кожний такий елемент поводить себе подібно до елементарного електричного випромінювача й на основі принципу суперпозиції може бути поданий у вигляді двох складових по осях  $x$  і  $y$ . При цьому, як можна зауважити,  $x$ -ві складові взаємно компенсуються, а  $y$ -ві складові подвоюються. Значить, кожна пара таких елементів струму створює в просторі електричний векторний потенціал з єдиною проекцією вздовж азимутальної координати  $\varphi$ .

Будемо вважати, що точка спостереження  $P$  лежить у площині  $xOy$  і має полярну координату  $\theta$  і розміщена в дальній зоні, тобто на відстані не лише декількох довжин хвиль від випромінюючої рамки. Як бачимо з рис. 6.15, геометрична різниця ходу до точки спостереження від центра рамки та з віддалених елементів рівна  $a \sin \theta \cos \varphi_0$ . Цю величину необхідно врахувати у швидкоосцилюючому експоненціальному множителю, який входить у формулу

векторного потенціалу  $\dot{A}_e(r) = \frac{\mu_0 \dot{I} l e^{-j\beta r}}{4\pi r} \vec{i}_z$ . У той же час довжина

радіус-вектора, що фігурує в цій формулі, є однаковою й рівною  $r$  для всіх точок випромінюючої рамки. Тому можна записати, що векторний потенціал у даному випадку визначається як:

$$\dot{A}_{e\varphi} = \frac{\mu_0 a \dot{I}_e e^{-j\beta r} \pi}{2\pi r} \int_0^\pi \cos \varphi_0 e^{j\beta a \sin \theta \cos \varphi_0} d\varphi_0.$$

Оскільки розмір рамки є набагато меншим за довжину хвилі, тобто  $\beta a \ll 1$ , то експоненціальну функцію розкладаємо в ряд Тейлора:

$$e^{j\beta a \sin \theta \cos \varphi_0} \cong 1 + j\beta a \sin \theta \cos \varphi_0.$$

Тоді

$$\dot{A}_{e\varphi} = \frac{\mu_0 a \dot{I}_e e^{-j\beta r} \pi}{2\pi r} \int_0^\pi (1 + j\beta a \sin \theta \cos \varphi_0) \cos \varphi_0 d\varphi_0 \cong \frac{j\mu_0 \dot{I}_e S_p \sin \theta e^{-j\beta r}}{2\lambda r},$$

де  $S_p = \pi a^2$  – площа рамки. З останньої рівності відповідно до

формули  $\dot{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \dot{A}_e$  знаходимо проекції вектора напруженості

магнітного поля, яке збуджується в просторі елементарним випромінювачем:

$$\dot{H}_r = \frac{1}{\mu_0 r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \dot{A}_{e\varphi}) = \frac{j I_e S_p}{\lambda} \cos \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}, \quad (6.29)$$

$$\dot{H}_\theta = -\frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{A}_{e\varphi}) = -\frac{I_e S_p \beta}{2\lambda} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}.$$

Слід звернути увагу на те, що амплітуда проекції  $\dot{H}_r$  зменшується зі збільшенням радіуса рамки за законом  $1/r^2$ , тобто швидше, ніж амплітуда проекції  $\dot{H}_\theta$ . Тому можна обґрунтовано вважати, що в далекій зоні магнітний вектор має лише одну проекцію  $\dot{H}_\theta$ .

Електромагнітне поле, що створюється рамковим випромінювачем, являє собою в далекій зоні сферичну хвилю, яка переносить потужність у радіальному напрямі й на основі формули (6.29) має єдину, відмінну від нуля, проекцію електричного вектора:

$$\dot{H}_\varphi = -Z_0 \dot{H}_\theta = \frac{Z_0 I_e S_p \beta}{2\lambda} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}. \quad (6.29.a)$$

Порівнюючи ці формули з формулами для щільного випромінювача, можемо сказати, що рамка, яка є малою в порівнянні з довжиною хвилі, може розглядатись як елементарний магнітний випромінювач, у якого магнітний потік протікає перпендикулярно до площини рамки. Діаграма направленості рамкового випромінювача описується функцією  $\sin \theta$  і тому такий елемент не випромінює й не приймає хвиль в осьовому напрямі, а опір випромінювання визначається формулою:

$$R_\Sigma = \frac{2P_\Sigma}{I_{pm}^2} = \frac{320\pi^4 S_p^2}{\lambda^4}. \quad (6.30)$$

Рамкові антени часто використовуються в радіоприймальній техніці, наприклад, у радіокомпасах для пеленгації кута проходження хвилі. У портативних приймачах повсюдно використовують багатовиткові рамкові антени, які намотані на феритові стержні й мають дуже малі габарити.

### Контрольні запитання

1. Дайте характеристику прямокутного об'ємного резонатора. Опишіть структуру електромагнітного поля в прямокутному резонаторі. Наведіть формулу дисперсійного співвідношення в прямокутному резонаторі.

2. Дайте характеристику круглого об'ємного резонатора. Приведіть структуру електромагнітного поля в круглому резонаторі.

3. Укажіть способи збудження і включення об'ємних резонаторів.

4. Дайте характеристику тороїдального об'ємного резонатора.

5. Запишіть неоднорідні рівняння Максвелла. Дайте визначення векторного й скалярного потенціалу електромагнітного поля.

6. Виведіть з першого рівняння Максвелла неоднорідне рівняння Гельмгольца з використанням умови калібрування Лорентца.

7. Визначте функцію Гріна як розв'язок неоднорідного рівняння Гельмгольца.

8. Запишіть вирази для скалярного й векторного потенціалів через функцію Гріна.

9. Що являє собою елементарний електричний випромінювач (вібратор)?

### **Рекомендована література**

1. Григорьев А. Д. Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ / А. Д. Григорьев, В. Б. Янкевич. – М. : Радио и связь, 1984. – 248 с.

2. Диэлектрические резонаторы / под ред. М. Е. Ильченко. – М. : Радио и связь, 1989. – 328 с.

3. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы / Л. А. Вайнштейн. – М. : Советское радио, 1966. – 476 с.

4. Радиотехнические системы / под ред. Ю. М. Казаринова. – М. : Высшая школа, 1990. – 496 с.

5. Горелик Г. С. Колебания о волны / Г. С. Горелик. – М. : Гостехиздат, 1950. – 551 с.

6. Веселов Г. И. Микроэлектронные устройства СВЧ / Г. И. Веселов. – М. : Высшая школа, 1988. – 280 с.

7. Голант М. Б. Изготовление резонаторов и замедляющих систем электронных приборов / М. Б. Голант, А. А. Маклаков, М. Б. Шур; под ред. Н. Д. Девяткова. – М. : Советское радио, 1969. – 408 с.

8. Лебедев И. В. Техника и приборы СВЧ / И. В. Лебедев. – М. : Высшая школа, 1972. – Т. 1. – 389 с.; Т. 2. – 375 с.



## РОЗДІЛ 7. ПАСИВНІ МІКРОЕЛЕКТРОННІ ПРИСТРОЇ НВЧ. БАГАТОПОЛЮСНИКИ ТА ЇХ ПАРАМЕТРИ

До пасивних елементів пристроїв НВЧ належать: лінії передачі, індуктивні, ємнісні, резистивні неоднорідності, резонатори й фільтри. Розглянемо фізико-технологічні особливості їх формування та розрахунку.

### 7.1 Лінії передачі інтегральних схем НВЧ. Індуктивні елементи ІС НВЧ

Частіше за все в ІС НВЧ використовують мікросмугові (МСЛ), щілинні (ЩЛ) і компланарні (КЛ) лінії передачі (рис. 7.1).

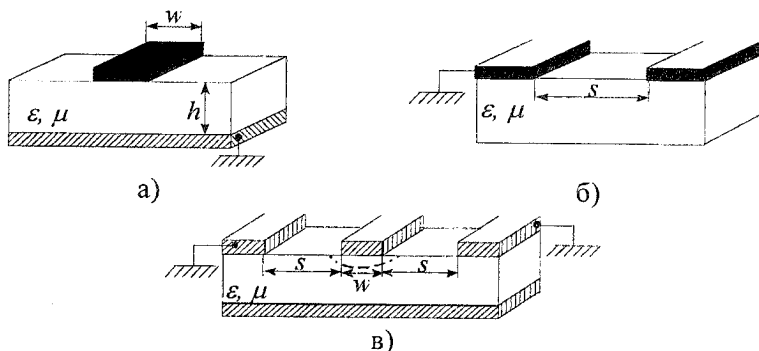


Рис. 7.1. Лінії передачі інтегральних схем НВЧ: МСЛ (а), ЩЛ (б) і КЛ (в)

Як правило, під час аналізу МСЛ використовують наближення  $T$ -хвилі (ТЕМ), а під час аналізу ЩЛ і КЛ –  $H$ -хвилі, розглянуті нами в попередніх розділах. Крім того, для ліній передачі використовується поняття ефективної діелектричної проникності  $\epsilon_{ef}$ , бо діелектрик заповнює лінію не повністю.

При цьому хвильовий опір, фазову швидкість і фазову постійну визначають за формулами:

$$Z_x' = \frac{Z_x}{\sqrt{\epsilon_{ef}}}, \quad v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{ef}}}, \quad \beta = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_{ef}}}{c}. \quad (7.1)$$

Крім того, у металі й діелектрику необхідно враховувати втрати на випромінювання, оскільки розглянуті нами лінії являють собою

відкриті хвилеводи:  $\alpha = \alpha_m + \alpha_o + \alpha_i$ . На практиці, якщо  $\varepsilon \geq 10$ ,  $\alpha$ , можна знехтувати. Якщо підкладка напівпровідникова, що має місце в монолітних інтегральних схемах (МІС), то втрати в підкладці стають значними.

Проводячи порівняльний аналіз ліній, необхідно відзначити, що ЩЛ і КЛ зручні для підключення активних елементів й утворення невзаємних пристроїв і, на відміну від МСЛ, мають великий хвильовий опір  $Z_x$ . У ЩЛ і КЛ дисперсійні властивості виражені тим сильніше, чим більша  $\varepsilon$  підкладки. У МСЛ земляна шина знаходиться на тильній стороні ІС, що утруднює (технологічно) заземлення елементів та активних пристроїв. Проте відсутність у ЩЛ і КЛ на тильній стороні металізації значно погіршує відвід тепла (у потужних ІС переважаючим є використання МСЛ). У ЩЛ і КЛ пластина заземлення знаходиться на верхній поверхні ІС (рис. 7.1, б, в), що значно збільшує площу й погіршує теплопередачу на корпус.

До переваг смугових ліній необхідно віднести широку смугу, яка може займати інтервал частот  $0 < \omega < \infty$  при малій масі й габаритах, а також можливість застосування друкованого монтажу, що дозволяє автоматизувати технологічний процес їх виготовлення.

Лінії передачі на напівпровідникових підкладках (*Si*, *GaAs*) технологічно вигідні для виготовлення МІС. Незважаючи на те, що затухання й дисперсія в таких лініях більші, вони, однак, мають більш широкі функціональні можливості, наприклад, трансформацію хвильового опору або використання в ролі атенюатора з електронним регулюванням.

МСЛ передачі на напівпровідниковій підкладці й сигнальна металева пластина утворюють з підкладкою бар'єр Шотткі, що приводить до виникнення області збіднення, як показано на рис. 7.1, в. При подачі на сигнальну шину від'ємного потенціалу можна змінювати розміри області просторового заряду. Це, звичайно, дозволяє реалізовувати елементи з електронним регулюванням.

Схемотехнічний аналіз ліній передачі ІС НВЧ полягає в оцінці коефіцієнтів  $\alpha_m$ ,  $\alpha_o$ ,  $\alpha_i$  за параметрами  $\varepsilon_r$ ,  $\sigma$ ,  $\mu$ ,  $\text{tg}\delta$ ,  $\beta$  і розрахунку погонних параметрів та постійного поширення хвилі  $\gamma$ . Потім розраховується хвильовий опір і  $[A]$ -матриця лінії передачі:

$$[A] = \begin{bmatrix} -ch\gamma l & Z_x sh\gamma l \\ sh\gamma l / Z_x & ch\gamma l \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

Якщо підкладка діелектрична і можна прийняти наближення до “нульової” товщини металевої смужки, то параметри МСЛ можна розрахувати за формулами:

- для  $w/h < 1$

$$Z_x = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_{\text{эф}}}} \ln \left( \frac{8h}{w} + \frac{w}{4h} \right),$$

$$\text{де } \varepsilon_{\text{эф}} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{12h}{w} \right)^{-1/2} + 0,04 \left( 1 - \frac{w}{h} \right)^2 \right]; \quad (7.3)$$

- для  $w/h \geq 1$

$$Z_x = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_{\text{эф}}}} \frac{1}{w/h + 1,4 + 0,7 \ln(w/h + 1,4)},$$

$$\text{де } \varepsilon_{\text{эф}} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \left( 1 + \frac{12h}{w} \right)^{-1/2}.$$

Розглянемо тепер індуктивні елементи ІС НВЧ. Найпростіший індуктивний елемент може бути представлений як короткозамкнений відрізок лінії передачі. Вхідний опір такого відрізка визначається уже відомим нам співвідношенням

$$Z_{\text{вх}} = Z_x \gamma l = (R_0 + j\omega L_0) l \quad (7.4)$$

і має або резистивний, або індуктивний характер залежно від співвідношення його складових, причому друга складова переважає на НВЧ.

На відміну від відрізків ліній передачі значення підкладки для зосереджених елементів полягає у фізичній реалізації та ізоляції індуктивного елемента. Найбільш типові послідовні індуктивні елементи можуть бути представлені такими конструкціями:

1. *Балочний (послідовний) індуктивний елемент* (рис. 7.2), коли  $Z_1 \gg Z_x$ ,  $l < \lambda_x/8$ , тоді  $L \cong Z_1 l \sqrt{\varepsilon_{\text{эф}}} / c$ ,  $Z_1 = (1 + j) \sqrt{\pi f \mu / \sigma}$ . Звуження сигнальної смужки МСЛ передачі приводить до росту індуктивної складової комплексного опору. Такий елемент легко реалізується методом літографії. Електрофізичні параметри металевої смужки визначаються типом плівки й технологією її формування. Для зміни  $\varepsilon_{\text{эф}}$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  такі плівки можна легувати багатозарядною імплантацією.

2. Кільцевий індуктивний елемент (рис. 7.3). Значення індуктивності в приведених нижче конструкціях визначається геометричними розмірами, а також параметрами металізації та підкладки. При зменшенні довжини кола індуктивність збільшується, а зі збільшенням ширини кільця й товщини шару металізації – зменшується.

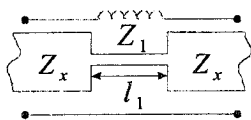


Рис. 7.2. Балунний індуктивний елемент

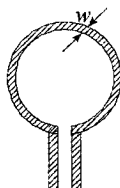
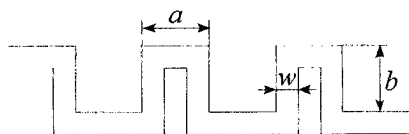
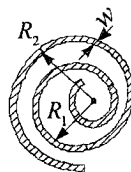


Рис. 7.3. Кільцевий індуктивний елемент

3. Меандровий і спіральний індуктивні елементи (рис. 7.4). Збільшення розмірів  $a$  і  $b$ , а також кількості секцій приводить до збільшення індуктивності. Чим ширша смужка металізації меандру, тим менша індуктивність.



а)



б)

Рис. 7.4. Меандровий (а) і спіральний (б) індуктивні елементи

У спіральному круглому індуктивному елементі значення індуктивності визначається радіусами внутрішньої й зовнішньої спіралі, а також кількістю витків.

4. Спіральний квадратний індуктивний елемент (рис. 7.5). Зменшення зазору між витками спіралі дозволяє створити більш компакту структуру в складі ІС і збільшити кількість витків на тій же площі, проте це призводить до паразитної міжвиткової ємності.

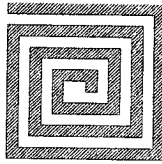


Рис. 7.5. Спіральний квадратний індуктивний елемент

Слід зауважити, що всі геометричні розміри зосереджених індуктивних елементів повинні бути набагато меншими за  $\lambda_x$ .

Розглянуті нами конструкції індуктивних елементів для схематичного аналізу ІС можуть бути представлені такими схемними моделями:

а) балочні, кільцеві меандрові елементи – схемною моделлю, зображеною на рис. 7.6, а;

б) спіральний елемент – схемною моделлю, зображеною на рис. 7.6, б.

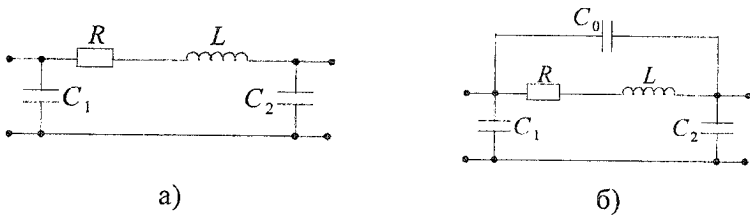


Рис. 7.6. Схемні моделі індуктивностей для балочних, кільцевих меандрових (а) і спіральних (б) індуктивних елементів

Тут паралельні ємності  $C_1$  і  $C_2$  пов'язані з контактами елементів з лініями передачі на вході й на виході;  $R$  – з опором металізації;  $C_0$  – сумарною міжвитковою ємністю. Великі значення індуктивностей дозволяють отримувати спіральні елементи, проте вони мають суттєвий технологічний недолік, пов'язаний з підключенням до лінії внутрішнього контакту спіралі – треба виконувати так звані піднири або напиляти додатковий шар ізолятора.

Паралельний індуктивний елемент може бути реалізований у вигляді короткозамкненого шлейфа (рис. 7.7), при цьому його довжина не повинна перевищувати  $\lambda_x/4$ . Тоді матриця провідності паралельного короткозамкненого шлейфа (без утрат) запишеться:

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j \operatorname{tg} \beta l / 2 & 1 \end{pmatrix}.$$



Рис. 7.7. Паралельний індуктивний елемент на базі короткозамкнутого шлейфа


Неперевершеним індуктивним елементом для інтегральної електроніки НВЧ є гіратор, який виконується на основі активних елементів.

## 7.2 Ємнісні та резистивні елементи ІС НВЧ

Паралельний ємнісний елемент може бути реалізований у вигляді відрізка лінії. Оскільки вхідний опір розімкнутої лінії передачі

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_x \operatorname{ch} \gamma l}{\operatorname{sh} \gamma l} = Z_x \operatorname{cth} \gamma l,$$

а для короткої розімкнутої лінії передачі, коли  $\gamma l \ll 1$ , то справедлива формула:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_x}{\gamma l} = \frac{1}{l(G_0 + j\omega C_0)} = \frac{1}{l} \frac{G_0 - j\omega C_0}{G_0^2 + \omega^2 C_0^2} \quad (7.5)$$


На НВЧ другий доданок суттєво перевищує омичний опір і вхідний опір являє собою чисто ємнісний опір:

$$X_C = \frac{\omega C_0}{l(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)}.$$

Послідовні ємнісні елементи можуть бути представлені такими конструкціями.

1. Розрив МСЛ передачі і його схемна модель (паразитний резистивний елемент пов'язаний з неідеальністю діелектрика підкладки) (рис. 7.8). Тут ємності  $C_1$  і  $C_2$  пов'язані з контактними схемними елементами з лінією передачі, а індуктивність  $L$  резистора описує відповідно реактивні та омичні властивості шарів.

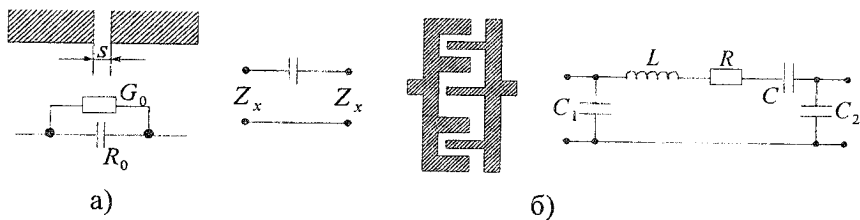


Рис. 7.8. Послідовний ємнісний елемент: а) у вигляді розриву лінії та його схемна модель; б) на зустрічних штирях та його схемна модель

2. Паралельний ємнісний елемент також може бути сформований на зустрічних штирях, як показано на рис. 7.9.

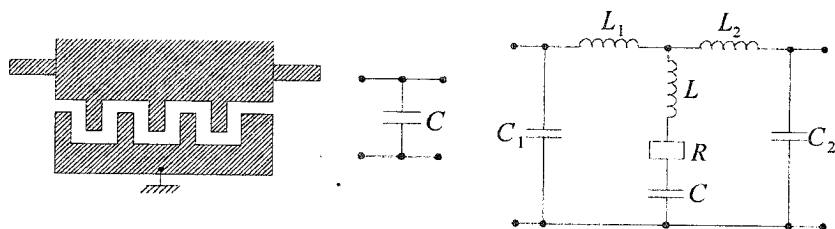


Рис. 7.9. Паралельний конденсатор на зустрічних штирях та його схемна модель

Паразитні індуктивності  $L_1$  і  $L_2$  пов'язані з контактами на вході й виході лінії, а  $L$  і  $R$  відповідно визначають індуктивність та опір зустрічних штирів.

3. Плоский (планарний) послідовний ємнісний елемент може бути поданий конструкцією на тонких шарах (рис. 7.10). Його схемна модель відповідає послідовному ємнісному елементу на зустрічних штирях.

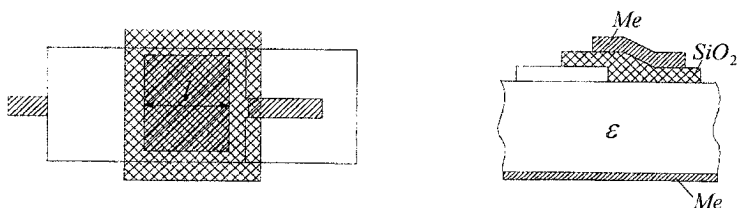


Рис. 7.10. Плоский планарний конденсатор, сформований тонкоплівковою технологією

4. Велику перспективу для ємнісних елементів ІС мають варикапи, які можуть бути реалізовані на обернено зміщених діодах Шотткі, структура яких також може бути зустрічно-штировою.

До основних параметрів ємнісних елементів відносять: температурний коефіцієнт ємності (ТКЄ) і точність їх формування.

Плівкові резистори використовують у ролі навантаження, подільників, кіл керування та живлення. До основних параметрів резистивних елементів відносять: поверхневий опір, температурний коефіцієнт опору (ТКО), тепловий опір, максимально допустиму розсіювану потужність. Як матеріали для їх формування використовують метали, напівпровідники й кермети. Для виготовлення напівпровідникових резисторів використовують той же шар, що і для каналів ПТШ (так звані пінч-резистори). Проте такі резистори мають і суттєві недоліки: нелінійні ВАХ, додатний ТКО, велику термопольову нестабільність.

Опір плівкових резистивних елементів, крім електрофізичних параметрів, залежить від коефіцієнта форми  $n = l/w$  як відношення його довжини до ширини. У ролі плівкових резисторів може бути використана така конструкція (рис. 7.11).

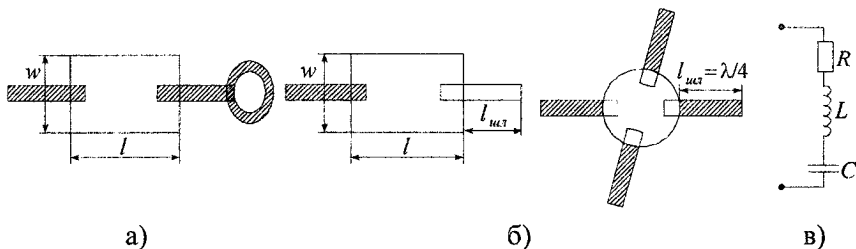


Рис. 7.11. Резистори з короткозамкненим (а) і розімкненим (б) шлейфами та схемна модель резистора з розімкненим шлейфом (в)

Вищеподані структури використовуються як узгоджені навантаження на одній (рис. 7.11, а) або декількох (рис. 7.11, б) частотах. При цьому довжина шлейфа, поданого на рис. 7.11, складає  $l_{\text{отк}} = \lambda_z/4$ .

При великих рівнях потужності використовують розподілені резистори у вигляді меандрових чи спіральних структур, подібних до індуктивних елементів, проте замість шару металізації використовують матеріали плівкових резисторів. Слід звернути увагу на



те, що плівкові резистори й резистори в розподілених структурах формують з високою точністю та заданим значенням ТКО з використанням технології підгонки їх багатозарядною імплантацією.

У НВЧ техніці необхідно враховувати неоднорідності в ІС, до найбільш типових із яких можна віднести згини ліній передачі, стрибки хвильового опору, розімкнені лінії, замкнені лінії,  $T$ -подібні з'єднання, перетини ліній, зазори в лінії.

Прямокутний згин лінії може бути поданий у відповідних перерізах схемною моделлю (рис. 7.12). Тут паралельна ємність  $C$  зумовлена накопиченням електричного заряду, а індуктивність  $L$  – спотворенням магнітного поля в згині. Зменшити вплив неоднорідності можна, заокруглюючи згин лінії.

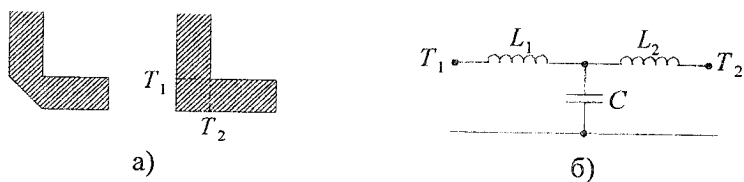


Рис. 7.12. Згин лінії (а) і його схемна модель (б)

Стрибок хвильового опору, наприклад, при з'єднанні двох ліній з різною шириною сигнальної смужки та його схемну модель подано на рис. 7.13, які являють собою  $T$ -подібний фільтр нижніх частот. Відповідно такий стрибок негативно впливатиме на передачу НВЧ-сигналів.

Розімкнені МСЛ і ЩЛ можуть бути представлені разом зі схемною моделлю, як показано на рис. 7.14. Тут резистивний елемент  $R$  пов'язаний з неідеальністю діелектрика підкладки, а ємнісний  $C$  – з паралельною ємністю, утвореною сигнальним провідником і заземленою шиною.

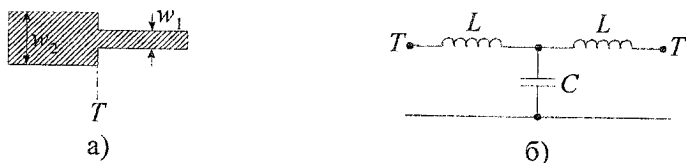


Рис. 7.13. Стрибок хвильового опору (а) і його схемна модель (б)

Короткозамкнені МСЛ і ЩЛ разом зі своєю схемною моделлю показані на рис. 7.15. Такі неоднорідності призводять до спотворен-

ня сигналу під час його передачі в ІС і їх відносять до паразитних ефектів топологічного формування.

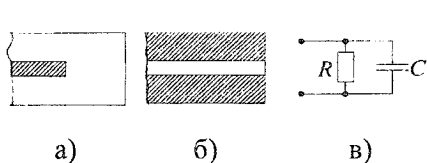


Рис. 7.14. Розімкнені МСЛ (а) і ЩЛ (б) лінії та їх схемна модель (в)

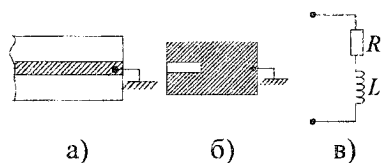


Рис. 7.15. Короткозамкнені МСЛ (а) і ЩЛ (б) лінії та їх схемна модель (в)

Дуже цікавими є приклади використання ємнісних та індуктивних елементів для формування паралельного чи послідовного коливального контурів (рис. 7.16). Для їх формування використовують так звані гребінкові ємнісні структури з кільцевими індуктивними елементами.

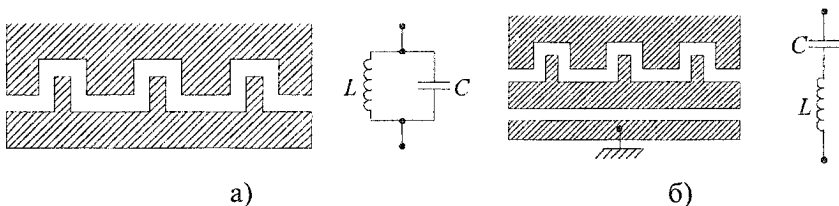


Рис. 7.16. Паралельний (а) і послідовний (б) коливальний контури та їх схемні моделі

### 7.3 Резонатори і фільтрові схеми НВЧ

В ІС НВЧ використовують інтегральні та об'ємні резонатори. Найбільш широко резонатори виконують у вигляді відрізків МСЛ довжиною  $\lambda_x/4$ ,  $\lambda_x/2$ ,  $\lambda_x$  (рис. 7.17).

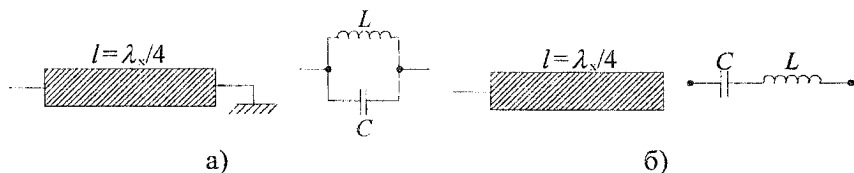


Рис. 7.17. Резонатор у вигляді чвертьхвильового короткозамкнутого (а) і розімкнутого (б) відрізків лінії та їх схемні моделі

Резонатор з короткозамкненим шлейфом має більш високу добротність і менше випромінювання в порівнянні з розімкненим. Технологічним недоліком короткозамкнених резонаторів є необхідність застосування спеціальних короткозамикачів.

У ролі резонатора може бути використане підключення до лінії послідовної або паралельної  $RC$ -ланки на зосереджених елементах (рис. 7.18).

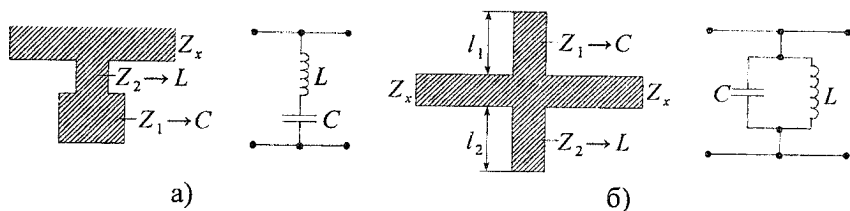


Рис. 7.18. Резонатори у вигляді послідовного й паралельного коливального контурів

Як інтегральні резонатори використовуються так звані кільцеві резонатори (рис. 7.19) з ємнісним зв'язком (розрив лінії) з лінією передачі на вході й виході резонатора.

У таких резонаторах у вигляді кільця чи квадрата практично відсутні крайові ефекти. Резонансна частота пов'язана з геометричними розмірами структур такими співвідношеннями:

$$l_0 = n\lambda_x, \quad l_0 = 2(a+b) = n\lambda_x,$$

де  $\lambda_{\text{рез}} = \pi d_{\text{сер}} \sqrt{\varepsilon_{\text{эф}}} / v_{\text{мн}}$ ;  $\lambda_{\text{рез}} = l \sqrt{\varepsilon_{\text{эф}}} / n$  при  $a \gg w$ ,  $b \gg w$ ,  $v_{\text{мн}}$  – корінь похідної функції Бесселя.

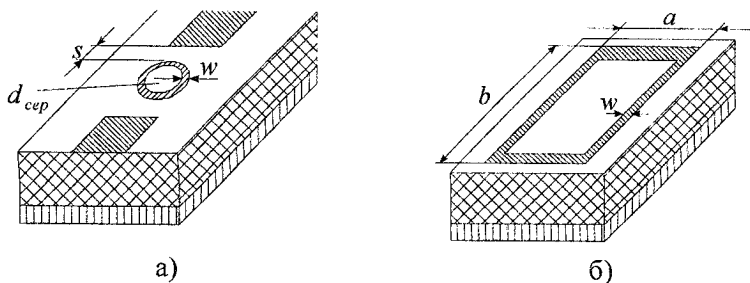


Рис. 7.19. Резонатори у вигляді кільця (а) і квадрата (прямокутника) (б)

Чим ширше кільце, тим більш високі типи коливань можуть виникати під час резонансу. При ширині кільця, більшій  $\lambda_x/2$ , у резонаторі виникають типи коливань  $E_{mn0}$  ( $n > 1$ ).

У лінію резонатори можуть включатися по-різному. Найбільше поширення отримали способи включення резонаторів за схемою двополюсника (рис. 7.20). Розмір зазору вибирається із заданого коефіцієнта зв'язку.

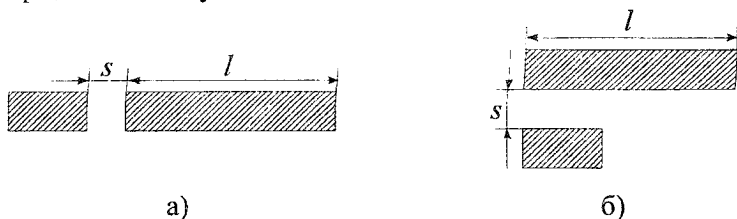


Рис. 7.20. Варіанти включення резонатора в лінію за схемою двополюсника: а) горизонтальної структури; б) вертикальної структури

Можливі такі способи включення резонаторів за схемою чотириполюсника (рис. 7.21).

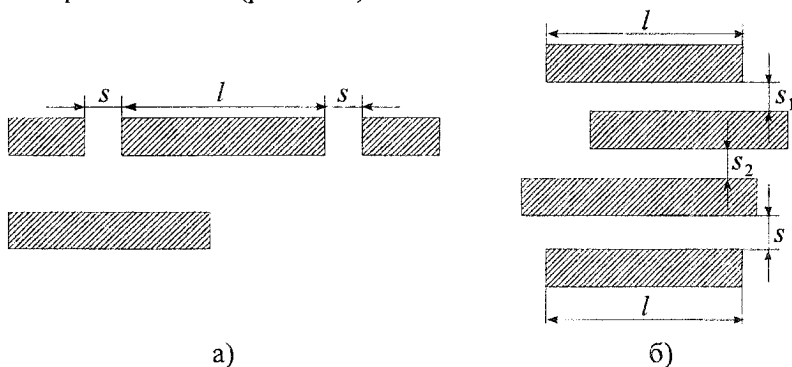


Рис. 7.21. Варіанти включення резонатора в лінію за схемою чотириполюсника: а) горизонтальна топологія; б) вертикальна топологія

У сучасних мікроелектронних пристроях НВЧ широко знаходять застосування такі типи резонаторів, топологію яких подано на рис. 7.22.

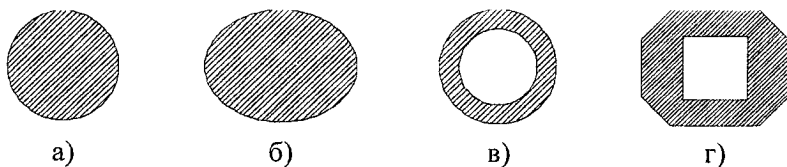


Рис. 7.22. Варіанти топології інтегральних резонаторів: а) круглий; б) еліптичний; в) кільцевий; г) прямокутний (квадратний)

На щільній лінії передачі можливі свої варіанти резонаторів (рис. 7.23).

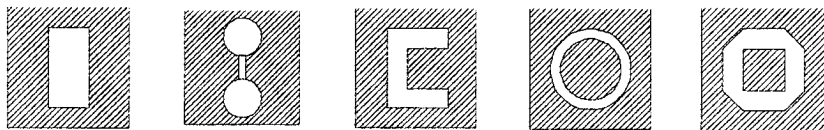


Рис. 7.23. Варіанти топології резонаторів на щільній лінії передачі

Передача сигналів НВЧ не може обійтися без фільтрових схем, які теж формуються в інтегральному виконанні. Тому як базові елементи у фільтрових схемах використовують відрізки МСЛ, які, на відміну від прямокутного хвилеводу, не мають нижньої частоти відсічки. Розглянемо основні з них.

Фільтри нижніх частот (ФНЧ) використовують у схемах детекторів, змішувачів, а також у колах живлення. Надвисокочастотні ФНЧ можуть бути реалізовані на розподілених компонентах – відрізках ліній (рис. 7.24). Тут відрізки ліній з великим хвильовим опором  $Z_{x1}$  еквівалентні послідовним індуктивностям  $L$ , а розімкнені відрізки з низьким опором  $Z_{x2}$  являють собою паралельні ємності.

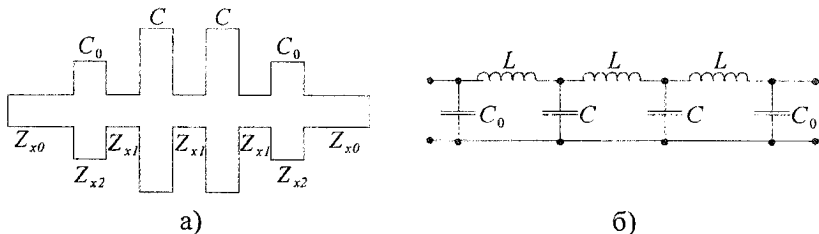


Рис. 7.24. Фільтр нижніх частот (а) і його електрична модель (б)

ФНЧ на зосереджених компонентах може бути сформований з використанням штирової та кільцевої топологій (рис. 7.25).

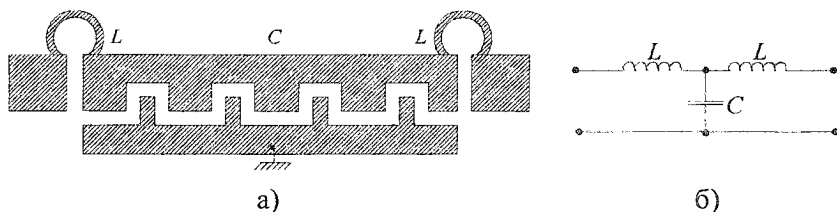


Рис. 7.25. Фільтр нижніх частот на зосереджених компонентах лінії (кільцево-штирової топології) (а) і його електрична модель (б)

Аналогічно можуть бути сформовані НВЧ фільтри верхніх частот на індуктивних елементах у вигляді короткозамкнених відрізків ліній і смісних елементів як розривів ліній (рис. 7.26).

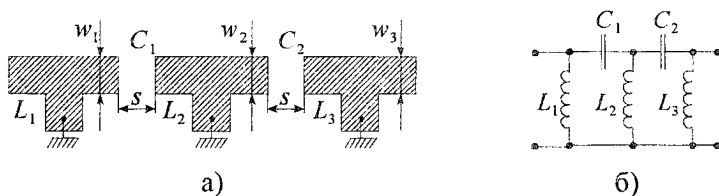


Рис. 7.26. Фільтр верхніх частот (а) і його електрична модель (б)

Без труднощів можна сформувати й смуговий фільтр (СФ) НВЧ, в основі якого є півхвильові розімкнені відрізки (рис. 7.27). Така конструкція надвисокочастотних СФ являє собою мікросмугові резонатори з ємнісним зв'язком. Відстань між центрами зазорів складає  $\lambda_x/2$ , а величина зазору визначає смугу пропускання фільтра (чим менший зазор, тим сильніше резонатори зв'язані між собою  $q$  тим ширша смуга пропускання). Саме тут мають місце високі вимоги щодо роздільної здатності літографічного процесу формування топології. Кожний із таких резонаторів має свою резонансну частоту, а результуюча АЧХ формується в результаті перекриття АЧХ окремих резонаторів. Резонансні частоти зв'язаних резонаторів вибирають так, щоб забезпечити задані значення смуги пропускання СФ НВЧ і нерівномірність АЧХ. Збільшення кількості резонаторів

розширює смугу. Такі прецизійні зазори повинні формуватися лише плазмохімічним анізотропним травленням.

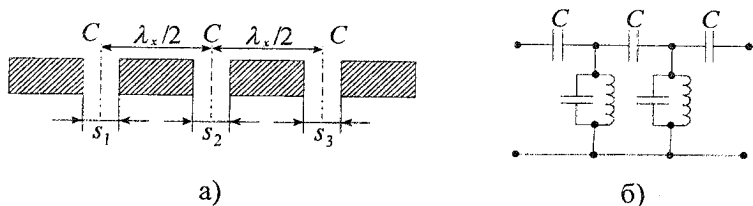


Рис. 7.27. Смуговий фільтр НВЧ на півхвильових відрізках розімкнутої лінії (а) і його електрична модель (б)

Більш компактну конструкцію і топологію СФ зі зв'язком півхвильових резонаторів через бокові поверхні показано на рис. 7.28.

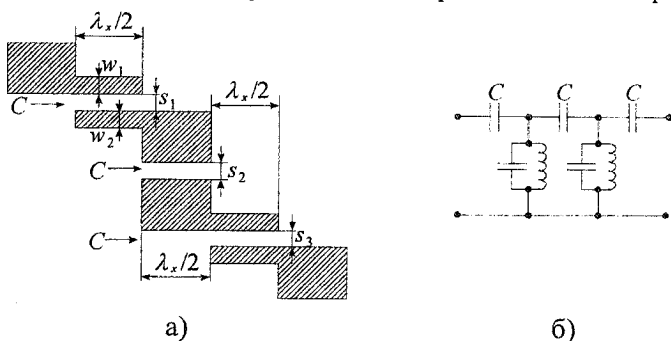


Рис. 7.28. Смуговий фільтр на півхвильових відрізках (а) і його електрична модель (б)

Загальним недоліком СФ на півхвильових відрізках є чутливість до допусків на геометричні розміри ( $h$ ,  $s$ ,  $w$ ) і, як наслідок, відхід центральної частоти й смуги пропускання. Сьогодні ця проблема ефективно вирішується субмікронною технологією з використанням проекційної літографії та анізотропного плазмохімічного травлення.

Затухання фільтра у смузі пропускання буде тим меншим, чим вища власна добротність резонатора і чим менше число ланок (тобто резонаторів).

Ще більш компактна топологія СФ НВЧ може бути реалізована на зустрічних короткозамкнених шлейфах (чвертьхвильових резонаторах), топологію яких показано на рис. 7.29.

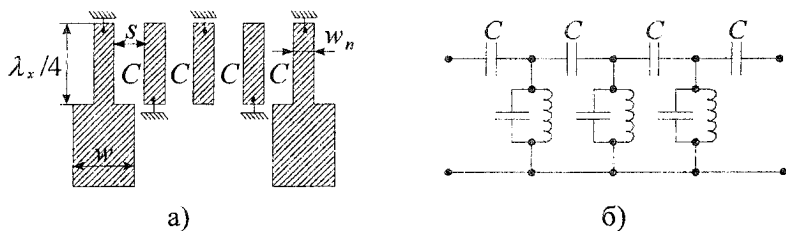


Рис. 7.29. Смуговий фільтр НВЧ на короткозамкнутих шлейфах ( $\lambda_x/4$ ) (а) і його електрична модель (б)

Такі структури характеризуються топологією з мінімальною площею, досить широкою смугою пропускання (до 60 %) і малими втратами на випромінювання.

#### 7.4 Діафрагми, резонансні вікна і трансформатори повних опорів

Повернемося до неоднорідностей у прямокутному хвилеводі, які мають вигляд ідеально провідної перегородки, що частково перекриває переріз хвилеводу й розміщена перпендикулярно до його осі. Розглянемо два прості типи таких перегородок – діафрагм, які показані на рис. 7.30. Уведемо певне допущення, що товщина діафрагм  $d$  є набагато меншою за довжину хвилі у хвилеводі, але набагато більшою за глибину проникнення поля в метал. Тоді по хвилеводі може поширюватися тільки хвиля нижчого типу  $H_{10}$ .

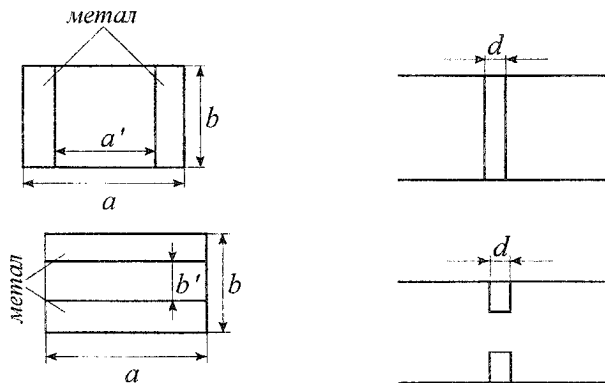


Рис. 7.30. Прості симетричні діафрагми в прямокутному хвилеводі



Очевидно, що в безпосередній близькості до діафрагми можуть існувати поля вищих типів хвиль, які затухають у міру віддалення від неоднорідності, оскільки розміри перерізу хвилеводу задовольняють умови:

$$\lambda > a > \lambda/2, \quad \lambda/2 > b > 0.$$

Розглянемо спочатку діафрагми з якісної точки зору, використовуючи концепцію еквівалентного опору. Тут діафрагму будемо розглядати як короткий відрізок хвилеводу, розміри перерізу якого відрізняються від розмірів основного хвилеводу. Тоді хвилевід із діафрагмою можна подати у вигляді еквівалентної схеми, показаної на рис. 7.31. Ця схема складається із трьох ділянок довгої лінії (рис. 7.31, а) з еквівалентними опорами  $Z_e$  і  $Z'_e$ . У даному випадку поля діафрагм не можуть бути повністю враховані еквівалентними опорами, оскільки це поняття можна застосувати до однорідних хвилеводів при хвилі типу  $H_{10}$ . Тому тут не можна отримати точної формули для розрахунку діафрагми.

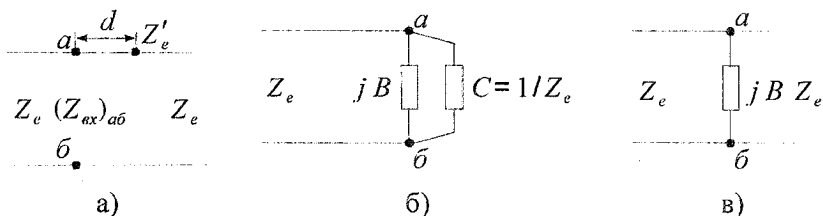


Рис. 7.31. Перетворення еквівалентної схеми тонкої діафрагми у хвилеводі

Еквівалентний опір для основного хвилеводу з повітряним заповненням, як відомо, визначається формулою:

$$Z_e = \frac{b}{a} \frac{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}}{\sqrt{1 - \lambda^2/(4a^2)}}.$$

При звуженні широкого розміру перерізу хвилеводу (рис. 7.30) маємо такі співвідношення розмірів:  $a' < a$ ,  $Z'_e > Z_e$  (для першого варіанта) і  $b' < b$ ,  $Z'_e < Z_e$  (для другого варіанта).

Постараємося звести отриману еквівалентну схему діафрагми до схеми із зосередженими параметрами. Для цього проведемо послідовні перетворення, користуючись методами, які розглядалися в

теорії довгих хвиль. Вхідний опір у точках  $ab$  (рис. 7.31, б) за рівнянням вхідного опору визначається рівністю

$$(Z_{ax})_{ab} = Z'_e \frac{Z_e + j Z'_e \operatorname{tg} \beta' d}{Z'_e + j Z_e \operatorname{tg} \beta' d}, \quad (7.6)$$

де через  $\beta'$  позначена фазова постійна в лінії, що відповідає діафрагмі. При малій товщині діафрагми можна записати:  $\beta' d \ll 1$ ,  $\operatorname{tg} \beta' d \cong \beta' d$ . Тоді вхідна провідність у точках  $ab$  буде визначатися таким співвідношенням:

$$(Y_{ax})_{ab} = \frac{1}{(Z_{ax})_{ab}} = \frac{1}{Z'_e} \frac{Z_e Z'_e - j (Z'_e)^2 \beta' d + Z_e Z' (\beta' d)^2}{Z_e^2 + (Z'_e \beta' d)^2}.$$

Членами, які містять  $(\beta' d)^2$ , можна знехтувати через дію умови  $\beta' d \ll 1$ . Тоді отримаємо:

$$(Y_{ax})_{ab} = \frac{1}{Z_e} + j \frac{\beta' d}{Z'_e} \left[ 1 - \left( \frac{Z'_e}{Z_e} \right)^2 \right] = G + j B, \quad (7.6.a)$$

$$\text{де } G = \frac{1}{Z_e}, \quad B = \frac{\beta' d}{Z'_e} \left[ 1 - \left( \frac{Z'_e}{Z_e} \right)^2 \right].$$

Таким чином, отриману раніше еквівалентну схему можна переводити до виду, як показано на рис. 7.31, б. Тут замість двох відрізків ліній фігурують зосереджені паралельно увімкнені активна  $G$  і реактивна  $jB$  провідності. Проте активну провідність  $G = 1/Z_e$  можна замінити нескінченною довгою лінією з еквівалентним опором  $Z_e$  (рис. 7.31, в). Отже, у точках  $ab$  залишається реактивна провідність  $jB$ , яка підключена в однорідну довгу лінію з постійним опором  $Z_e$ .

Повернемося до виразу (7.6.a). У випадку діафрагми першого варіанта отримаємо  $Z'_e > Z_e$ . У результаті реактивна провідність діафрагми має від'ємний знак, що вказує на індуктивний характер провідності. Діафрагма другого варіанта має вже позитивну, тобто ємнісну реактивну провідність, бо тут  $Z'_e < Z_e$ .

Такі діафрагми називають відповідно індуктивною або ємнісною, коли відповідно виконуються умови  $Z'_e > Z_e$  і  $Z'_e < Z_e$ . Виразити реактивну провідність  $B$  в абсолютних одиницях ( $1/\text{Ом}$ ) недо-

цілно. Зазвичай її вказують у відносних одиницях у вигляді відношення реактивної провідності до характеристичної провідності самого хвилеводу  $Y_0$ .

Теорія, яка враховує вищі типи хвиль, приводить до більш точного визначення реактивної провідності тонкої симетричної індуктивної діафрагми:

$$B = -\frac{\lambda_x}{a} ctg^2 \left( \frac{\pi a'}{2a} \right) \text{ (відн. од.)} \rightarrow \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \bullet \end{array} L_e$$

У випадку тонкої симетричної ємнісної діафрагми можна користуватися формулою:

$$B = \frac{4b}{\lambda_x} \ln \left[ \csc \left( \frac{\pi b'}{2b} \right) \right] \text{ (відн. од.)} \rightarrow \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \bullet \end{array} C_e$$

Одне з головних призначень діафрагм – трансформатори повних опорів у хвилеводних лініях НВЧ. Таке застосування індуктивних та ємнісних діафрагм у погодженні хвильових опорів є важливим елементом не тільки радіотехнічних пристроїв, а й у ряді типів електронних і газорозрядних приладів НВЧ.

У хвилеводних пристроях, головним чином в електровакуумних приладах НВЧ, часто необхідна тонка перегородка у хвилеводі, яка дозволяє розділити його на дві частини – вакуумну і невакуумну. Тут перегородка зазвичай має вигляд тонкої діелектричної пластини – вікна, впаяного в металеву рамку, яка, у свою чергу, спаюється з корпусом хвилеводу. Форма вікна може бути різною (рис. 7.32) і визначається передовсім призначенням.

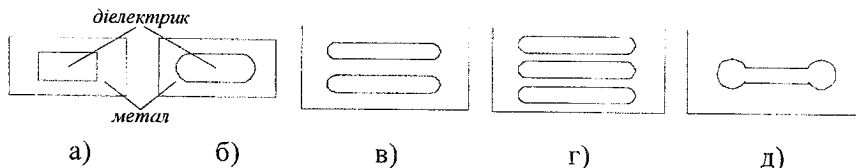


Рис. 7.32. Резонансні вікна в прямокутному хвилеводі

Розглянемо вікно, розміщене в прямокутному хвилеводі, розміри якого мають певне обмеження:  $\lambda > a > \lambda/2$ ,  $\lambda/2 > b > 0$ . Для спрощення розрахунків розглянемо спочатку отвір прямокутної форми, що не містить діелектрика (рис. 7.32, а). Розрахунок такого

вікна можна здійснювати за допомогою поняття еквівалентного опору хвилеводу (рис. 7.33). Представимо вікно у вигляді короткого відрізка хвилеводу, який вмонтований в основний хвилевід, як показано на рис. 7.33, б. Умовою відсутності відбивання від вікна при заданій довжині хвилі  $\lambda$  згідно з еквівалентною схемою є рівність еквівалентних опорів хвилеводу і вікна, тобто  $Z'_e = Z_e$ . Цю рівність можна записати через геометричні розміри:

$$\frac{b}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 / (4a^2)}} = \frac{b'}{a'} \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 / (4a'^2)}}. \quad (7.7)$$

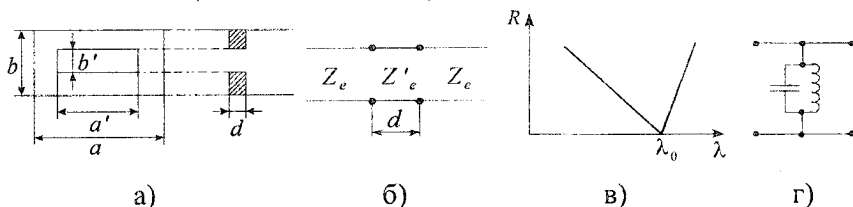


Рис. 7.33. Прямокутне вікно без діелектрика та його еквівалентна схема

Величина  $\lambda_0$ , яка забезпечує проходження хвилі через вікно без відбивання, буде визначатись як

$$\lambda_0 = 2a' \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{b'a}{a'b}\right)^2}{1 - \left(\frac{b'}{b}\right)^2}}. \quad (7.8)$$

Залежність коефіцієнта відбивання хвилі від довжини хвилі подано на рис. 7.33, в. Саме цю хвилю  $\lambda_0$ , за якої існує мінімум коефіцієнта відбивання, називають резонансною хвилею вікна. А відповідне вікно, що забезпечує  $R_{\min}$ , називають резонансним вікном.

Така залежність (рис. 7.33, в) збігається зі зміною коефіцієнта відбивання у двопровідній лінії, яка містить паралельно ввімкнений резонансний контур (рис. 7.33, г). При  $\lambda > \lambda_0$  і  $\lambda < \lambda_0$  паралельний коливальний контур характеризується відповідно індуктивною та ємнісною провідністю, а відбивання зростає по обидва боки від  $\lambda_0$ .

Досвід показує, що резонанс забезпечує не тільки вікно прямокутної форми, але й вікна більш складної форми.

Якщо тепер вікно заповнюється діелектриком, то картина резонансу дещо ускладнюється. Наявність діелектрика в першому наближенні можна врахувати у виразі еквівалентного опору хвилеводу, що відповідає даному вікну. Для нашого випадку це погодження еквівалентних опорів дає таке співвідношення:

$$\frac{b}{a} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2/(4a^2)}} = \frac{b'}{a'} \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{1-\lambda^2/(4a'^2 \varepsilon \mu)}}, \quad (7.9)$$

де  $\varepsilon$  і  $\mu$  – відносні діелектрична й магнітна проникності діелектричного вікна.

На основі цього виразу можна зробити висновок, що мінімальний розмір вікна  $a'$ , який задовольняє узгодження на згаданій довжині хвилі  $\lambda$ , рівний  $a'_{\min} = \lambda / (2\sqrt{\varepsilon \mu})$ . При  $\mu = 1$   $a'_{\min} = \lambda / (2\sqrt{\varepsilon})$ , а при повітряному заповненні ( $\varepsilon = 1$ )  $a'_{\min} = \lambda/2$  і товщина вікна не впливає на його параметри.

Для практичних цілей (задач) резонансному вікну надається спеціальної форми, зручної з точки зору отримання вакуумно-щільних спаїв. Скло, яке використовують для запайки вікон, повинно мати мінімальні втрати на НВЧ. У нашій промисловості для цього використовували скло ЗС-9, а в ролі рамки – ковар Н29 К18. Замість скла застосовують також шлюду або кераміку (полікор).

А тепер повернемося до трансформаторів повних опорів, які використовують для узгодження хвильових опорів у хвилеводах. При цьому розглянемо найбільш поширені типи трансформаторів повних опорів.

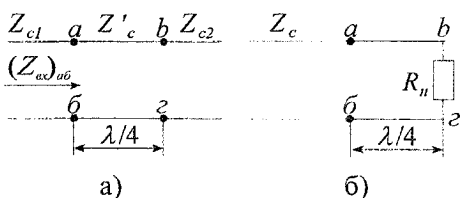


Рис. 7.34. Чвертьхвильовий трансформатор для узгодження хвильових опорів ліній

А. Чвертьхвильовий трансформатор.

Властивості відрізка лінії довжиною у чверть хвилі розглядалися нами в розділі направляючих систем. Там зазначалося, що вхідний опір лінії довжиною  $\lambda_x/4$  рівний  $Z_{\text{вх}} = Z_c^2/Z_n$ .

Якщо опір навантаження  $Z_n$  має чисто активний характер, то при дійсному значенні  $Z_c$ , тобто за відсутності втрат, вхідний опір  $Z_{ex}$  також стає чисто активним. Ця властивість чвертьхвильового відрізка може бути використана для узгодження двох ліній з різними хвильовими (характеристичними) опорами  $Z_{c1}$  і  $Z_{c2}$  (рис. 7.34). Відповідно умовою узгодження є відома рівність  $(Z_{ex})_{a\bar{b}} = Z_{c1}$ . Згідно з рівнянням чвертьхвильового трансформатора (рис. 7.34, а) маємо:

$$(Z_{ex})_{a\bar{b}} = \frac{(Z'_c)^2}{Z_{c2}},$$

де  $Z'_c$  – хвильовий опір чвертьхвильового відрізка лінії. Тоді на основі цих співвідношень отримаємо:  $Z'_c = \sqrt{Z_{c1} Z_{c2}}$ . А для схеми на рис. 7.34, б умова узгодження матиме вигляд  $Z'_c = \sqrt{R_n Z_c}$ .

Приклади чвертьхвильового трансформатора в жорсткій коаксіальній лінії без діелектричного наповнення й у хвилеводі прямокутного перерізу наведені на рис. 7.35. Трансформуюча секція в коаксіальній лінії може мати незмінний діаметр зовнішнього провідника, рівний  $D$ . Тоді діаметр внутрішнього провідника  $d'$  визначиться із залежності

$$\lg \frac{D}{d'} = \sqrt{\lg \frac{D}{d_1} \lg \frac{D}{d_2}}.$$

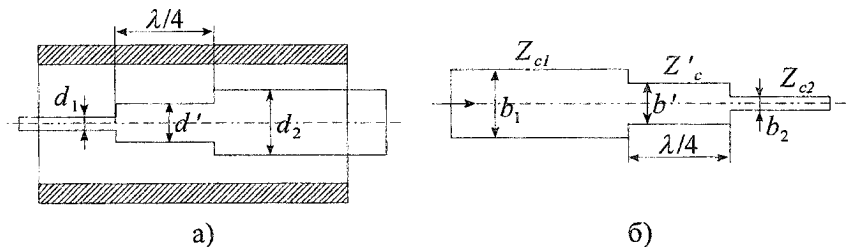


Рис. 7.35. Застосування чвертьхвильових трансформаторів у коаксіальному (а) і прямокутному (б) хвилеводах для узгодження хвильових опорів

Для трансформатора у прямокутному хвилеводі з хвилею  $H_{10}$  при незмінному широкому розмірі  $a$  розмір  $b'$  (рис. 7.35, б) може бути визначено з таких співвідношень:

$$Z'_c = \sqrt{Z_{c1} Z_{c2}}, \quad b' = \sqrt{b_1 b_2}.$$

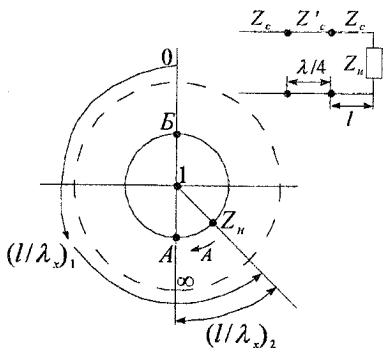


Рис. 7.36. Діаграма Смітта для визначення узгодженого комплексного навантаження  $Z_n$

Чвертьхвильовий трансформатор можна також використати для узгодження не тільки чисто активних, а й комплексних опорів. Для цього необхідно включати трансформатор на такій відстані від навантаження, де вхідний опір є чисто активним. Таке узгодження комплексного навантаження розглянемо на круговій діаграмі Смітта (рис. 7.36), де комплексний опір навантаження зображено точкою  $Z_n$ . Рух уздовж лінії до генератора відповідає руху по колу  $\rho = const$  за годинниковою стрілкою. Точки  $A$  і  $B$  відповідають максимуму й мінімуму, а вхідний опір у цих точках є чисто активним і визначається як  $(Z_{ex})_A = Z_c \rho$ ,  $(Z_{ex})_B = Z_c / \rho$ . Відповідно в точці  $A$  чи  $B$  можна підключити до лінії чвертьхвильовий трансформатор із хвильовим опором  $(Z'_c)_A = Z_c \sqrt{\rho}$  і  $(Z'_c)_B = Z_c / \sqrt{\rho}$ . Таким чином, можливі два варіанти чвертьхвильового трансформатора, які відрізняються величиною хвильового опору узгоджуючої трансформаторної секції і відстанню  $l$  від трансформатора до навантаження. Для коаксіальної лінії зручніше використовувати другий варіант, оскільки узгоджуюча трансформаторна секція легко виконується у вигляді рухомої металевої чи діелектричної втулки, яка забезпечує  $Z'_c < Z_c$ .

*Б. Трансформатор типу одинокої рухомої реактивної провідності.*

Якщо узгоджене навантаження змінюється в широких межах, то може також бути використаний трансформатор спеціальної конструкції (рис. 3.37). У цьому випадку по лінії передачі переміщується чисто реактивний елемент зі змінною провідністю  $jB$ , яка

шунтує цю лінію. У ролі такого елемента може бути використаний короткозамкнений шлейф, довжина якого змінюється за допомогою рухомого моста чи поршня. У хвилеводних лініях із цією метою застосовують рухомий реактивний штир, у якого регулюється глибина занурення.

Такі трансформатори з одинокою рухомою реактивною провідністю отримали назву одношлейфових трансформаторів. Пояснення дії одношлейфового трансформатора можна дати за допомогою кругової полярної діаграми Смітта. У зв'язку з тим, що узгоджувачий елемент увімкнений в основну лінію паралельно, то зручно користуватися діаграмою Смітта в термінах провідностей, що й демонструє рис. 7.37. Точкою  $Y_{н}$  на діаграмі позначено провідність навантаження у відносних одиницях. Зміна відстані  $L$  від навантаження до точок підключення шлейфа відповідає переміщенню по колу  $\rho = const$  ( $\rho$  – КСХ). У даному випадку роль узгоджувачого елемента зводиться до зміни реактивної провідності. Активна провідність лінії шлейфа не може бути змінною. Оскільки для узгодження вимагається одинична активна вхідна провідність, то очевидно, що узгоджувачий реактивний елемент повинен бути увімкнений у лінію в перерізі, де активна складова вхідної провідності рівна одиниці. На круговій діаграмі (рис. 7.37, в) є дві точки  $A$  і  $B$ ,

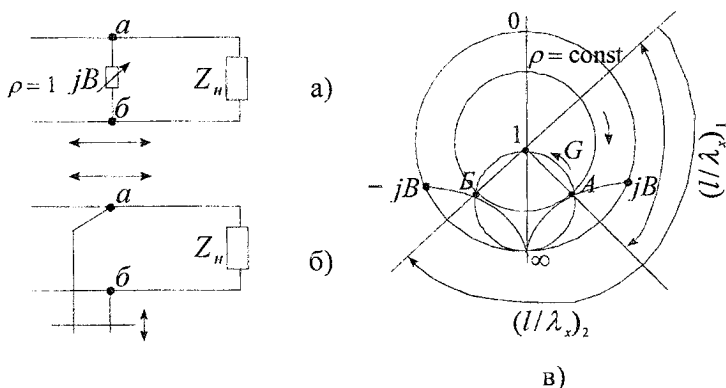


Рис. 7.37. Одношлейфовий трансформатор (а, б) і його пояснення на круговій діаграмі Смітта

яким відповідає перетин кола  $\rho = const$  з колом  $G = 1$ . Звідти визначається відстань від навантаження до шлейфа або штиря, що відпо-



відає фазовим кутам  $(l/\lambda_x)_1$  і  $(l/\lambda_x)_2$ . Після того, як шлейф (штир) встановлено в одному із вказаних положень, необхідно змінити величину його реактивної провідності таким чином, щоб сумарна реактивна провідність стала рівною нулю. Цьому відповідає рух по колу  $G=1$  у напрямі до центра кругової діаграми. Із рисунка видно, що узгодження за допомогою одношлейфового трансформатора можливе за будь-яких значень КСХ ( $\rho$ ).

Величина реактивної провідності діафрагми  $jB$ , необхідна для узгодження, також визначається за точкою перетину кіл  $\rho = const$  і  $G = const = 1$ . Як видно з діаграми Смітта, діафрагма, яка відповідає точці  $A$ , повинна мати індуктивний характер, тому що вхідна реактивна провідність у точці  $A$  є ємнісною (повинна бути компенсація). Навпаки, у режимі, якому відповідає точка  $B$ , треба використовувати ємнісну діафрагму, бо вхідна реактивна провідність у точці  $B$  є вже індуктивною. Розміри діафрагм визначаються за величиною  $jB$  і відповідними графіками.

#### *В. Двошлейфовий і тришлейфовий трансформатори.*

Розглянемо тепер узгодження за допомогою двох нерухомих шунтуючих реактивних провідностей, наприклад шлейфів, увімкнених у лінію на відстані  $L \neq \lambda/2$ . Реактивна провідність шлейфів змінюється шляхом переміщення короткозамкнених поршнів.

Аналіз дії трансформаторів почнемо з точок  $ab$  на рис. 7.38, а. У цих точках за наявності узгодження повна вхідна провідність у відносних одиницях  $(Y_{ex})_{ab}$  повинна бути рівною  $(Y_{ex})_{ab} = 1 + j0$ .

У процесі узгодження шлейф не може змінювати активної складової провідності у вказаних точках. Тому повна вхідна провідність лінії без шлейфа  $Y_{a\delta}$  правіше точки  $ab$  (рис. 7.38, б) повинна лежати на колі  $G=1$  діаграми Смітта (рис. 7.38, в).

Повна вхідна провідність лінії разом із другим шлейфом у точках  $\epsilon\zeta$   $(Y_{ex})_{\epsilon\zeta}$  відрізняється від провідності  $Y_{a\delta}$  поворотом на діаграмі на фазовий кут  $L/\lambda_x$ . Тому геометричним місцем точок, на якому повинна знаходитися провідність  $(Y_{ex})_{\epsilon\zeta}$ , є коло  $G=1$ , повернуте проти годинникової стрілки на вказаний кут. На рис. 7.38, д довжину  $L$  вибрано рівною  $\lambda_x/8$ .

Шлейф, включений у точках  $\epsilon\zeta$ , також не може змінювати активної провідності. Для того щоб потрапити на коло  $(Y_{ex})_{\epsilon\zeta}$  і потім забезпечити узгодження за допомогою двох шлейфів, необхідно,

щоб провідність  $Y$  правіше точок  $вг$  лежала за межами заштрихованого круга на рис. 7.38, д. Цей круг, обмежений колом  $G = const$ , є дотичним до кола  $(Y_{ax})_{вг}$ .

Проведені дослідження показують, що двошлейфовий трансформатор має деяку недосяжну зону провідностей навантаження на круговій діаграмі. Чим ближча відстань  $L$  до  $\lambda_x/4$ , тим ця зона є більшою. Для кожного фіксованого значення  $L$  існує гранична величина КСХ  $\rho$  навантаження, коли узгодження можливе за будь-якої фази стоячої хвилі. За більш високих значень КСХ двошлейфовий трансформатор забезпечує узгодження лише за певних значень фази, коли провідність навантаження в перерізі найближчого до нього шлейфа не потрапляє у заштрихований круг.

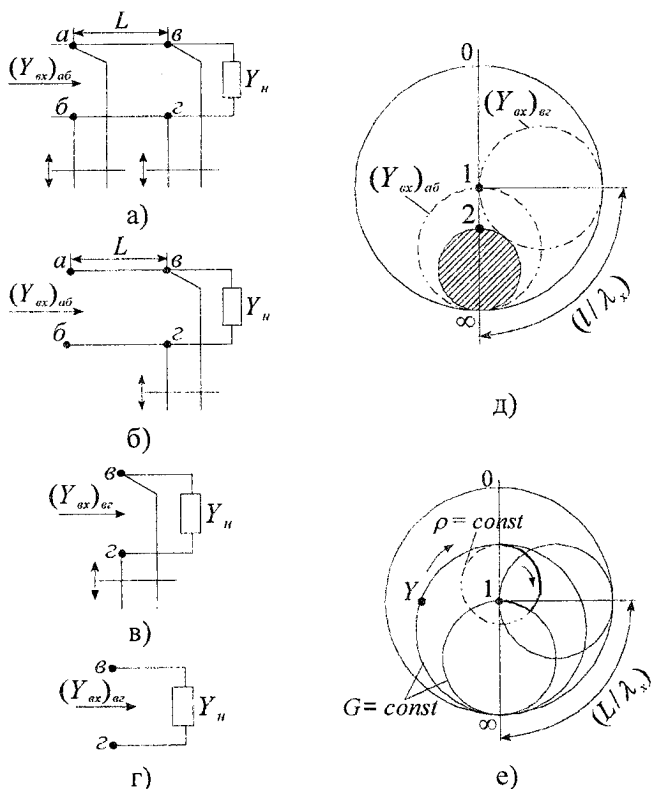


Рис. 7.38. Двошлейфовий трансформатор повних опорів і його кругова діаграма Смітта

У випадку  $\lambda_x/8$  (рис. 7.38, е) гранична величина КСХ рівна двом. На цьому ж рисунку для наочності показано процес узгодження навантаження з провідністю, яка позначена на діаграмі точкою  $Y$ .

Для узгодження навантаження, яке характеризується будь-якими значеннями КСХ, застосовують тришлейфовий трансформатор (рис. 7.39). Він являє собою комбінацію двох двошлейфових трансформаторів. Відстань між шлейфами вибирають  $\lambda_x/4$ . У випадку, коли провідність у точках  $de$  стає меншою за одиницю, для узгодження достатньо використати лише пару шлейфів, які найближчі до навантаження.

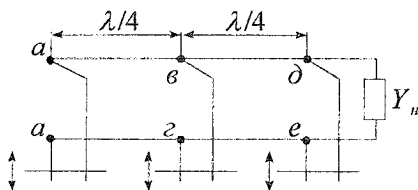


Рис. 7.39. Тришлейфовий трансформатор

## 7.5 Багатополюсники на НВЧ та їх параметри

Аналізуючи розподілені кола, зручно використовувати декомпозицію кола на підсхеми. При цьому окремі елементи кола, що з'єднані довільним чином, можуть являти собою багатополюсники, описані в різних системах параметрів.

Залежно від особливостей кола й частотного діапазону, широко використовуються системи параметрів класичної теорії, у якій під сигналами розуміють струми й напруги, і хвильової теорії, де під сигналами вже мають на увазі хвилі струмів і напруг. Між параметрами цих теорій існують однозначні зв'язки.

У загальному випадку розподілені кола описують рівняннями Максвелла. Проте на практиці такі задачі розв'язувати достатньо складно – це ми переконалися на прикладі хвилеводів, резонаторів і випромінювачів. Тому використовують такі допущення, які дозволяють застосувати методи теорії електричних кіл – представлення елементів у вигляді багатополюсників. Таким чином, розподілені

кола в цьому випадку можна розрахувати за допомогою матричного апарату теорії кіл у припущенні, що матриці, які описують елементи кіл, залишаються незмінними за будь-якого складного з'єднання елементів. При цьому передбачається, що зона збудженого поля поблизу неоднорідностей локалізована в безпосередній близькості від елемента (лінійне наближення). Крім того, визначається, що взаємодія елементів між собою здійснюється на основному типі хвилі.

Розглянемо найбільш типові з'єднання 4-полюсників і відповідні їм параметри класичної теорії кіл. Паралельне з'єднання 4-полюсників зручно описувати матрицею провідності; при цьому результуючу матрицю знаходять як суму матриць  $k$  з'єднаних паралельно 4-полюсників (рис. 7.40):

$$[Y] = \sum_{i=1}^k [Y_i],$$

$$\begin{cases} i_{ex} = Y_{11} U_{ex} + Y_{12} U_{вих}, \\ i_{вих} = Y_{21} U_{ex} + Y_{22} U_{вих}. \end{cases}$$

Послідовне з'єднання 4-полюсників зручно описувати матрицею опорів, за якого результуючу матрицю знаходять як суму матриць  $k$  з'єднаних послідовно 4-полюсників (рис. 7.41):

$$[Z] = \sum_{i=1}^k [Z_i],$$

$$\begin{cases} U_{ex} = Z_{11} i_{ex} + Z_{12} i_{вих}, \\ U_{вих} = Z_{21} i_{ex} + Z_{22} i_{вих}. \end{cases}$$

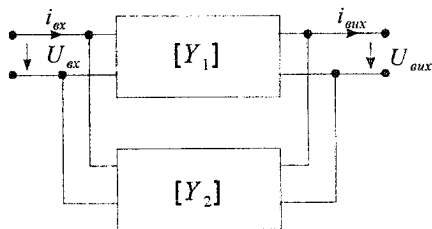


Рис. 7.40. Паралельне з'єднання 4-полюсників

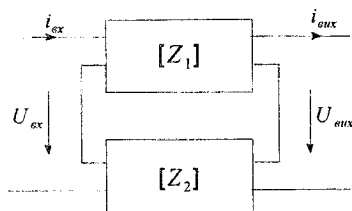


Рис. 7.41. Послідовне з'єднання 4-полюсників

При каскадному з'єднанні 4-полюсників результуючу матрицю знаходять шляхом перемноження  $k$  з'єднаних каскадно 4-полюсників (рис. 7.42):

$$[a] = \prod_{i=1}^k [a_i],$$

$$\begin{cases} U_{ax} = a_{11} U_{вих} + a_{12} i_{вих}, \\ i_{ax} = a_{21} U_{вих} + a_{22} i_{вих}. \end{cases}$$



Рис. 7.42. Каскадне з'єднання 4-полюсників

Визначимо тепер хвильові параметри 4-полюсників. Вони визначаються хвильовою матрицею розсіювання. Перевага опису багатополюсників у вигляді хвильової матриці розсіювання ( $S$ -параметри) може бути пов'язана з нижчеподаними факторами.

По-перше, з можливістю безпосереднього вимірювання, що не є здійсненим для параметрів класичної теорії, тому що, наприклад, при вимірюванні  $Y$ -параметрів необхідно здійснювати режими холостого ходу та короткого замикання, що в практичній роботі реалізувати досить складно.

По-друге, параметри розсіювання вимірюють на основі хвиль, які поширюються, що дозволяє проводити вимірювання на деякій відстані від фізично розміщеного об'єкта. Остання обставина є актуальною й на мікрооб'єктах чи елементах інтегральних схем НВЧ.

Обмежившись розглядом 4-полюсників, виберемо в ролі залежних змінних хвилі, які відходять від 4-полюсника, тобто розсіяні хвилі (рис. 7.43). Тоді система рівнянь для хвиль, які сходяться й розходяться від 4-полюсника, з коефіцієнтами у вигляді параметрів розсіювання може бути подана як:

$$\begin{cases} \dot{U}_1^- = S_{11} \dot{U}_1^+ + S_{12} \dot{U}_2^- \\ \dot{U}_2^+ = S_{21} \dot{U}_1^+ + S_{22} \dot{U}_2^- \end{cases}, \quad (7.10)$$

де  $S_{ii}$  – коефіцієнти відбивання від входу та виходу 4-полюсника,  $S_{ik}$  – коефіцієнти передачі з плеча  $k$  в плече  $i$ .

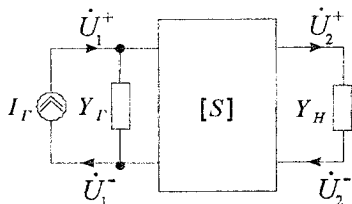


Рис. 7.43. 4-полюсник і параметри розсіювання

У даному випадку падаючі й відбиті хвилі нормуються таким чином, щоб їх квадрат давав відповідну потужність. У матричній формі рівняння (7.10) можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1^- \\ \dot{U}_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1^+ \\ \dot{U}_2^- \end{bmatrix}. \quad (7.10.a)$$

Знаючи параметри матриці розсіювання, можна успішно розраховувати схемні функції 4-полюсника. Наприклад, однонаправлений коефіцієнт передачі потужності можна отримати з формули  $K_p = |S_{21}|^2$ . Параметри матриці розсіювання можуть бути розраховані за відомою матрицею провідності 4-полюсника:

$$[S] = ([1] - [Y]) \cdot ([1] + [Y])^{-1},$$

де  $[1]$  – одинична матриця.

Тут необхідно відмітити важливу особливість параметрів матриці розсіювання, пов'язану з напрямом проходження сигналів. При зміні напрямку передачі змінюються лише індекси в параметрах розсіювання ( $S_{12}$  на  $S_{21}$ ,  $S_{11}$  на  $S_{22}$ ), знаки ж величин, які входять у рівняння (7.10), залишаються незмінними.

Установимо зв'язок між параметрами хвильової теорії ( $S$ -матриця) і параметрами класичної теорії ( $Y$ -матриця). Для цього розглянемо 4-полюсники з напрямками падаючих і відбитих хвиль, а також струмів і напруг, як показано на рис. 7.44, і відповідні даним системам параметрів рівняння:

$$\begin{cases} \dot{U}_1^- = S_{11} \dot{U}_1^+ + S_{12} \dot{U}_2^-, \\ \dot{U}_2^+ = S_{21} \dot{U}_1^+ + S_{22} \dot{U}_2^-, \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 = Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2. \end{cases}$$

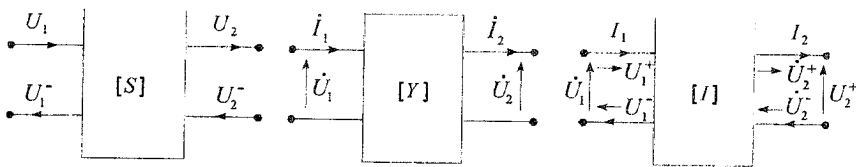


Рис. 7.44. 4-полюсники в системі хвильової та класичної теорій

Урахуємо введені нами позначення для падаючої і відбитої хвиль

$$\begin{cases} \dot{U}_1^+ = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_x), & \dot{U}_2^+ = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_x), \\ \dot{U}_1^- = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_x), & \dot{U}_2^- = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_x), \end{cases}$$

а також візьмемо із цих рівнянь вирази для струмів і напруг

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_1^+ + \dot{U}_1^-, & \dot{U}_2 = \dot{U}_2^+ + \dot{U}_2^-, \\ \dot{I}_1 = \frac{1}{Z_x}(\dot{U}_1^+ - \dot{U}_1^-), & \dot{I}_2 = \frac{1}{Z_x}[-(\dot{U}_2^+ - \dot{U}_2^-)], \end{cases}$$

де “-” у струмі  $\dot{I}_2$  вказує, що він направлений від 4-полюсника.

Тоді, підставляючи ці вирази для рівнянь 4-полюсника у [Y]-формі, отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{1}{Z_x}(\dot{U}_1^+ - \dot{U}_1^-) = Y_{11}(\dot{U}_1^+ + \dot{U}_1^-) + Y_{12}(\dot{U}_2^+ + \dot{U}_2^-), \\ \frac{1}{Z_x}(\dot{U}_2^+ + \dot{U}_2^-) = Y_{21}(\dot{U}_1^+ + \dot{U}_1^-) + Y_{22}(\dot{U}_2^+ + \dot{U}_2^-), \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \dot{U}_1^+ - \dot{U}_1^- = Z_x Y_{11} \dot{U}_1^+ + Z_x Y_{11} \dot{U}_1^- + Z_x Y_{12} \dot{U}_2^+ + Z_x Y_{12} \dot{U}_2^-, \\ \dot{U}_2^+ + \dot{U}_2^- = Z_x Y_{21} \dot{U}_1^+ + Z_x Y_{21} \dot{U}_1^- + Z_x Y_{22} \dot{U}_2^+ + Z_x Y_{22} \dot{U}_2^-. \end{cases}$$

Перегрупувавши доданки

$$\begin{cases} -(\dot{U}_1^- + Z_x Y_{11} \dot{U}_1^-) = \dot{U}_1^+ (Z_x Y_{11} - 1) + \dot{U}_2^+ Z_x Y_{12} + \dot{U}_2^- Z_x Y_{12}, \\ -\dot{U}_2^+ + Z_x Y_{22} \dot{U}_2^+ = \dot{U}_1^+ Z_x Y_{21} + \dot{U}_1^- Z_x Y_{21} + \dot{U}_2^- (Z_x Y_{22} + 1), \end{cases}$$

отримаємо вирази для падаючої й відбитої хвиль:

$$\begin{cases} \dot{U}_1^- = \frac{\dot{U}_1^+ (Z_x Y_{11} - 1) + \dot{U}_2^+ Z_x Y_{12} + \dot{U}_2^- Z_x Y_{12}}{1 + Z_x Y_{11}}, \\ \dot{U}_2^+ = \frac{\dot{U}_1^+ Z_x Y_{21} + \dot{U}_1^- Z_x Y_{21} + \dot{U}_2^- (Z_x Y_{22} + 1)}{1 - Z_x Y_{22}}. \end{cases}$$

Ураховуючи нормування через значення хвильового опору через  $[Y]$ -параметри, матимемо:

$$\begin{cases} \dot{U}_1^- = \frac{\dot{U}_1^+ [(Y_{11} - 1)(Y_{22} - 1) - Y_{12} Y_{21}] + \dot{U}_2^- [-2Y_{12}]}{(Y_{11} + 1)(Y_{22} - 1) - Y_{12} Y_{21}}, \\ \dot{U}_2^+ = \frac{-[\dot{U}_1^+ 2Y_{21} + \dot{U}_2^- [(1 + Y_{22})(1 + Y_{11}) + Y_{12} Y_{21}]]}{(-Y_{22} + 1)(Y_{11} + 1) + Y_{12} Y_{21}}. \end{cases}$$

Тоді матриця коефіцієнтів  $[S]$ -системи через  $[Y]$ -параметри має вигляд:

$$[S] = \begin{bmatrix} (Y_{11} - 1)(Y_{22} - 1) - Y_{12} Y_{21} & -2Y_{12} \\ -2Y_{21} & (1 + Y_{22})(1 + Y_{11}) + Y_{12} Y_{21} \end{bmatrix} \times \frac{1}{(1 + Y_{11})(1 - Y_{22}) - Y_{12} Y_{21}}. \quad (7.11)$$

Повернемося до хвильової матриці передачі. Вона формується, якщо в ролі залежних змінних вибрати хвилі на виході 4-полюсника (хвилю, яка падає на вхід, і хвилю, яка відбивається від входу), а в ролі незалежних змінних – хвилі на виході 4-полюсника (хвилі, які поширюються до навантаження, і відбиті від нього хвилі) (рис. 7.45). Тоді система рівнянь, коефіцієнтами в якій будуть параметри хвильової матриці передачі, може бути записана у вигляді:

$$\begin{cases} \dot{U}_1^+ = \dot{U}_2^+ T_{11} + \dot{U}_2^- T_{12}, \\ \dot{U}_1^- = \dot{U}_2^+ T_{21} + \dot{U}_2^- T_{22}, \end{cases} \quad [T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}.$$

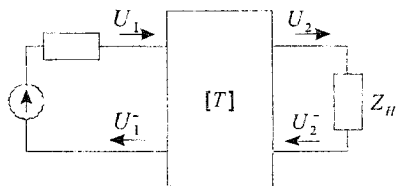


Рис. 7.45. Опис 4-полюсника через хвильову матрицю передачі



Опис 4-полюсників у вигляді хвильової матриці передачі є зручним при їх каскадному включенні. Результуючу матрицю передачі в цьому випадку визначаємо за співвідношенням  $[T] = \prod_{i=1}^k [T]_i$ , де  $k$  – число каскадно з'єднаних 4-полюсників. Як і в попередньому випадку, можна показати, що для взаємних 4-полюсників справедливе таке співвідношення  $T_{11}T_{22} - T_{21}T_{12} = 1$ , а для симетричних  $T_{21} = -T_{12}$ . Тоді між хвильовою матрицею й матрицею класичної теорії кіл  $[Y]$  справедливі співвідношення:

$$[T] = \frac{1}{2Y_{21}} \begin{bmatrix} (1+Y_{11})(1-Y_{22}) + Y_{12}Y_{21} & -(1+Y_{11})(1+Y_{22}) + Y_{12}Y_{21} \\ (1-Y_{11})(1-Y_{22}) - Y_{12}Y_{21} & -(1-Y_{11})(1+Y_{22}) - Y_{12}Y_{21} \end{bmatrix}. \quad (7.12)$$

А тепер проведемо розрахунок схемних функцій за матрицею передачі  $[T]$ , матрицею розсіювання  $[S]$  та класичною матрицею  $[A]$ . Спочатку розрахуємо вхідний і вихідний імпеданси 4-полюсника, а також коефіцієнт передачі напруги при довільних навантаженнях на вході й на виході за  $[A]$ -матрицею (або  $[ABCD]$ -матрицею) відповідно до прийнятих на рис. 7.46 позначень:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2. \end{aligned}$$

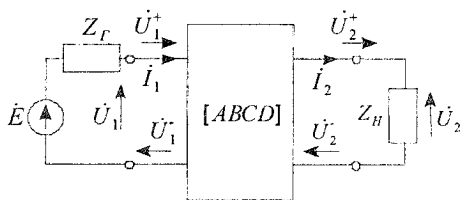


Рис. 7.46 Опис 4-полюсника через  $[A]$ -матрицю

Визначимо опір навантаження і генератора:

$$Z_n = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}, \quad Z_r = \frac{\dot{E} - \dot{U}_1}{\dot{I}_1}.$$

Тоді вхідний опір визначимо через рівняння 4-полюсника у  $[A]$ -формі:

$$Z_{ex} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2} = \frac{AZ_n + B}{CZ_r + D}.$$

Визначимо тепер фізичний зміст параметрів  $[A]$ -матриці передачі:

$$A = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{1}{K_U} \text{ — обернений коефіцієнт передачі напруги;}$$

$$B = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{1}{Y_{nep}} = Z_{nep}^{ob} \text{ — опір передачі;}$$

$$C = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} = Y_{nep}^{ob} \text{ — провідність передачі;}$$

$$D = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{1}{K_I} \text{ — обернений коефіцієнт передачі струму.}$$

Коефіцієнт передачі за напругою від джерела до навантаження знайдемо, підставляючи вирази для  $Z_n$  і  $Z_r$ :

$$K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{E}} = \frac{Z_n}{AZ_n B + CZ_r Z_n + DZ_r}.$$

Для виведення виразу для схемної функції  $Z_{вих}$  розглянемо 4-полюсник із незалежним джерелом напруги на виході як обернене включення 4-полюсника. Тоді

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} = -AZ_{вих} + B, \quad \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = -CZ_{вих} + D.$$

З першого рівняння  $\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{-AZ_{вих} + B}$ . Підставляючи в друге рівняння, отримаємо:

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{I}_1(-AZ_{вих} + B)}{\dot{U}_1} = -\frac{1}{Z_r}(-AZ_{вих} + B) = -CZ_{вих} + D$$

або

$$-AZ_{вих} + B = CZ_{вих}Z_r - DZ_r$$

і

$$Z_{вих} = \frac{DZ_r + B}{CZ_r + A}.$$

Коефіцієнти відбивання на вході й виході 4-полюсника представимо у вигляді:

$$\Gamma_{ex} = \frac{Z_{ex} - Z_{\Gamma}}{Z_{ex} + Z_{\Gamma}}, \quad \Gamma_{oux} = \frac{Z_{oux} - Z_{\Pi}}{Z_{oux} + Z_{\Pi}}.$$

А тепер, як висновок, установимо зв'язок між системами хвильових параметрів  $[T]$  і  $[S]$ -матриць:

$$[T] = \frac{1}{S_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -S_{22} \\ S_{11} & -|S| \end{bmatrix}, \quad [S] = \frac{1}{T_{21}} \begin{bmatrix} T_{21} & |T| \\ 1 & T_{12} \end{bmatrix},$$

$$|T| = T_{11} T_{22} - T_{12} T_{21} = \frac{S_{12}}{S_{21}} = |a|, \quad |S| = S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21} = -\frac{T_{22}}{T_{11}}.$$

Ці матриці існують, коли  $S_{21} \neq 0$  і  $T_{11} \neq 0$ .

Відповідно зв'язки між матрицями хвильової та класичної теорії матимуть вигляд:

$$[T] = \frac{1}{2Y_{21}} \begin{bmatrix} (1+Y_{11})(1-Y_{22}) + Y_{12} Y_{21} & -(1+Y_{11})(1+Y_{22}) + Y_{12} Y_{21} \\ (1-Y_{11})(1-Y_{22}) - Y_{12} Y_{21} & -(1-Y_{11})(1+Y_{22}) - Y_{12} Y_{21} \end{bmatrix},$$

$$[T] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_{11} + A_{21} + A_{12} + A_{22} & A_{11} + A_{21} - A_{12} - A_{22} \\ A_{11} - A_{21} + A_{12} - A_{22} & A_{11} - A_{21} - A_{12} + A_{22} \end{bmatrix}, \quad (7.13)$$

$$[A] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T_{11} + T_{21} + T_{12} + T_{22} & T_{11} + T_{21} - T_{12} - T_{22} \\ T_{11} - T_{21} + T_{12} - T_{22} & T_{11} - T_{21} + T_{12} + T_{22} \end{bmatrix}.$$

Для розрахунків у схемах НВЧ зручно використовувати вже нормовані хвильові матриці. Нормування рівнянь 4-полюсника, навантаженого за входом і виходом на відрізки ліній із заданими хвильовими опорами, яке пов'язане з отриманням під час опису розподілених кіл однозначних величин, тут потребує уточнення понять струму й напруги.

Величиною, яка однозначно визначена в будь-яких колах і на будь-яких частотах, є потужність на сторонах відрізка лінії або 4-полюсника (рис. 7.47). Нехай хвильовий опір лінії на вході буде  $R_{x1}$ , а на виході —  $R_{x2}$  і є чисто активними. Тоді потужність можна визначити як  $U^2/R_x$  або  $I^2 R_x$ . Для того щоб урахувати фазові властивості системи, необхідно під потужністю розуміти добуток комплексного струму на комплекс напруги. Тоді нормовані хвилі на вході й виході 4-полюсника можна записати так:

$$\tilde{U}_1^+ = \frac{\dot{U}_1^+}{\sqrt{R_{x1}}}, \quad \tilde{U}_1^- = \frac{\dot{U}_1^-}{\sqrt{R_{x1}}}, \quad \tilde{U}_2^+ = \frac{\dot{U}_2^+}{\sqrt{R_{x2}}}, \quad \tilde{U}_2^- = \frac{\dot{U}_2^-}{\sqrt{R_{x2}}}.$$

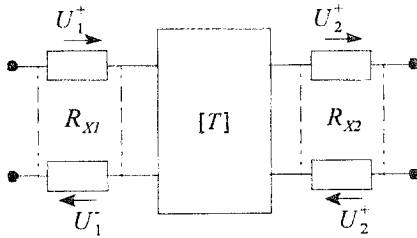


Рис. 7.47. Подання 4-полюсника для  $[A]$ -параметрів

Отож нормовані рівняння для хвильових параметрів передачі будуть визначені так:

$$\begin{cases} \frac{\dot{U}_1^+}{\sqrt{R_{x1}}} = \left( T_{11} \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} \right) \frac{\dot{U}_2^+}{\sqrt{R_{x2}}} + \left( T_{12} \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} \right) \frac{\dot{U}_2^-}{\sqrt{R_{x2}}}, \\ \frac{\dot{U}_1^-}{\sqrt{R_{x1}}} = \left( T_{21} \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} \right) \frac{\dot{U}_2^+}{\sqrt{R_{x2}}} + \left( T_{22} \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} \right) \frac{\dot{U}_2^-}{\sqrt{R_{x2}}}. \end{cases} \quad (7.14)$$

Нормовані таким чином хвилі являють собою корені з потужності, яка переноситься падаючою й відбитою хвилями, тобто це вже не хвилі струму чи напруги, а деякі нові змінні, які мають розмірність кореня з потужності, яка переноситься цими хвилями у відповідних лініях передачі, під'єднаних до входу й виходу 4-полюсника:

$$[\hat{T}] = \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}.$$

Аналогічні умови нормування для  $[S]$ -матриці можна також записати:

$$\begin{cases} \frac{\dot{U}_1^+}{\sqrt{R_{x1}}} = \frac{\dot{U}_1^+}{\sqrt{R_{x1}}} S_{11} + \frac{\dot{U}_2^-}{\sqrt{R_{x2}}} \left( S_{12} \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} \right), \\ \frac{\dot{U}_2^-}{\sqrt{R_{x1}}} = \frac{\dot{U}_1^+}{\sqrt{R_{x1}}} \left( S_{21} \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} \right) + \frac{\dot{U}_2^-}{\sqrt{R_{x2}}} S_{22}, \end{cases} \quad [\tilde{S}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} \\ S_{21} \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} & S_{22} \end{bmatrix}.$$

Нормування класичної матриці передачі  $[A]$  пов'язане з такими нормованими змінними:

$$\tilde{U}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\sqrt{R_{x1}}}, \quad \tilde{U}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\sqrt{R_{x2}}}, \quad \tilde{I}_1 = \dot{I}_1 \sqrt{R_{x1}}, \quad \tilde{I}_2 = \dot{I}_2 \sqrt{R_{x2}}.$$

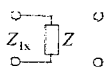
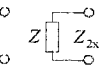
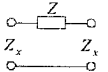
Тоді нормована матриця передачі  $[\tilde{A}]$  матиме вигляд:

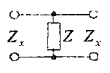
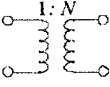
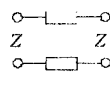
$$[\tilde{A}] = \begin{bmatrix} A_{11} \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} & \frac{A_{12}}{\sqrt{R_{x1} R_{x2}}} \\ A_{21} \sqrt{R_{x1} R_{x2}} & A_{22} \sqrt{\frac{R_{x1}}{R_{x2}}} \end{bmatrix}.$$

Хвильові нормовані матриці для типових пасивних елементів можуть бути представлені у вигляді таких  $n$ -полосників (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

### Хвильові нормовані матриці пасивних елементів НВЧ-кіл

| № п/п | Тип $n$ -полосника             | Схема   | Формула  |
|-------|--------------------------------|---|--|
| 1     | Двополосник біля лівого плеча  |   | $[S] = \begin{bmatrix} \frac{1-Y}{1+Y} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y = \frac{1}{Z} = \frac{Z_{x1}}{Z}$                  |
| 2     | Двополосник біля правого плеча |  | $[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1-Y}{1+Y} \end{bmatrix} \quad Y = \frac{1}{Z} = \frac{Z_{x2}}{Z}$                  |
| 3     | Послідовний опір               |  | $[S] = \begin{bmatrix} \frac{Z}{2+Z} & \frac{2}{2+Z} \\ \frac{2}{2+Z} & \frac{Z}{2+Z} \end{bmatrix} \quad Z = \frac{Z}{Z_x}$ |

|   |  |   |  |                                   |
|---|--|---|--|-----------------------------------|
| 4 | Паралельний опір   |  | $[S] = \begin{bmatrix} -Y & 2 \\ 2+Y & 2+Y \\ 2 & -Y \\ 2+Y & 2+Y \end{bmatrix}$                         | $Y = \frac{1}{Z} = \frac{Z_x}{Z}$ |
| 5 | Ідеальний трансформатор  |  | $[S] = \begin{bmatrix} 1-N^2 & \pm 2N \\ 1+N^2 & 1+N^2 \\ \pm 2N & 1-N^2 \\ 1+N^2 & 1+N^2 \end{bmatrix}$ | $N = \frac{w_1}{w_2}$             |
| 6 | Відрізок однорідної лінії передачі без втрат довжиною $l$ і хвильовим опором $Z_x$ |  | $[S] = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix}$                               | $\theta = \frac{2\pi l}{\lambda}$ |

## 7.6 Пристрої НВЧ: направлені відводи і мости, подільники, суматори, фазообертачі

### 7.6.1 Основні параметри направлених відводів і мостів та їх зв'язок із матрицею розсіювання

Направлений відвід (НВ) є восьмиполосним пристроєм, який здійснює направлене відведення енергії. У таких пристроях розрізняють первинну (основну) і вторинну (допоміжну) лінії. При збудженні одного із плечей первинної лінії частина потужності передається у друге плече цієї лінії, а частина – в одне із плечей вторинної лінії. При цьому в друге плече вторинної лінії потужність не передається і воно є розв'язаним відносно збудженого плеча первинної лінії.

Різновидністю НВ є гібридні з'єднання, які являють собою НВ, що здійснюють рівний поділ потужності між зв'язаними плечима. Таке гібридне з'єднання, напруга у вихідних плечах якого має постійний фазовий зсув у заданій смузі частот, називають мостом. Різновидності НВ показані на рис. 7.48. В ідеальному випадку НВ являє собою чисто реактивний (без втрат) взаємний восьмиполосник, який може бути описаний матрицею розсіювання:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix}$$

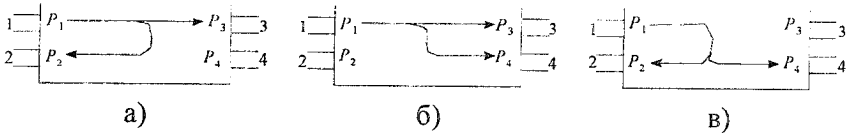


Рис. 7.48. Різновидності направлених відводів

Характеристики НВ можуть бути визначені через елементи матриці розсіювання. Основними характеристиками НВ є:

- робоче затухання ( $\delta\beta$ ), яке визначається як відношення потужностей на вході й виході первинної лінії:

$$C_{13} = 10 \lg \left( \frac{P_1}{P_3} \right) = 10 \lg \left( \frac{1}{|S_{13}|^2} \right);$$

- перехідне затухання, яке визначається як відношення потужностей на вході первинної лінії і на зв'язаному з ним виході вторинної лінії:

$$C_{12} = 10 \lg \left( \frac{P_1}{P_2} \right) = 10 \lg \left( \frac{1}{|S_{12}|^2} \right);$$

- розв'язка, яка визначається як відношення потужностей на вході первинної лінії й на розв'язаному виході вторинної лінії:

$$C_{14} = 10 \lg \left( \frac{P_1}{P_4} \right) = 10 \lg \left( \frac{1}{|S_{14}|^2} \right);$$

- направленість НВ:

$$C_{24} = 10 \lg \left( \frac{P_2}{P_4} \right) = 10 \lg \left( \frac{|S_{12}|^2}{|S_{14}|^2} \right);$$

- нерівномірність ділення, яке являє собою різницю між перехідним затуханням і затуханням у первинній лінії:

$$\Delta C = C_{12} - C_{13};$$

КСХ в  $i$ -му плечі:

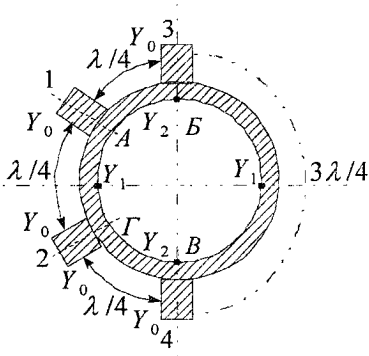


Рис. 7.49. Кільцевий направлений відвід

Топологія кільцевого НВ на МСЛІ показана на рис. 7.49. При збудженні плеча 1 вхідний сигнал ділиться на дві частини і поширюється по двох каналах. Сигнали складаються синфазно (пучність напруг) у точках *Б* і *Г* кільця і протифазно в точці *В* (вузол напруг). При рівності амплітуд цих сигналів напруга в точці *В* рівна нулю й потужність у плече 4 не передається. Таким чином, сигнал, який поступає в плече 1, ділиться між плечима 2 і 3, які є суміжними стосовно плеча 1.

Умова ідеального узгодження в термінах, нормованих відносно  $Y_0$  хвильових провідностей ( $y_1 = Y_1/Y_0$ ,  $y_2 = Y_2/Y_0$ ), набуде вигляду:  $y_1^2 + y_2^2 = 1$ . Матриця розсіювання кільцевого НВ на середній частоті робочого діапазону визначається як:

$$[S] = -1 \begin{bmatrix} 0 & y_1 & y_2 & 0 \\ y_1 & 0 & 0 & y_2 \\ y_2 & 0 & 0 & -y_1 \\ 0 & y_2 & -y_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що  $\arg(S_{21}/S_{31}) = 0$ ,  $\arg(S_{24}/S_{34}) = \pi$ , тобто кільцевий НВ є синфазно-протифазним. Коефіцієнт поділу потужності  $m = |S_{31}|^2 / |S_{21}|^2 = y_2^2 / y_1^2$ , а відносні хвильові провідності рівні

$$K_{cm U_i} = \frac{1 + |S_{ii}|}{1 - |S_{ii}|};$$

- коефіцієнт ділення за напругою  $M = S_{13}/S_{12}$  та коефіцієнт ділення за потужністю  $m = |M|^2 = |S_{13}|^2 / |S_{12}|^2$ ;

- фазові співвідношення НВ, які характеризують абсолютні значення фаз напруг у плечах або відносну різницю фаз напруг вихідних плечей.

За типом зв'язку розрізняють кільцеві й шлейфові НВ.



$y_1 = \sqrt{1/(1+m)}$ ,  $y_2 = \sqrt{m/(1+m)}$ . Для гібридного кільця (моста)  $m=1$ ,  $Y_1 = Y_2 = Y_0/\sqrt{2}$ .

Шлейфовий НВ являє собою два відрізки лінії передачі, які з'єднані між собою двома або більшим числом шлейфів, довжина яких рівна  $\lambda/4$  (рис. 7.50). Шлейфи включаються в лінію на відстані  $\lambda/4$ . Тут умова ідеального погодження вже визначається як  $y_1^2 = y_2^2 - 1$ , де  $y_1 = Y_1/Y_0$ ,  $y_2 = Y_2/Y_0$  – нормовані хвильові провідності відрізків лінії передачі.

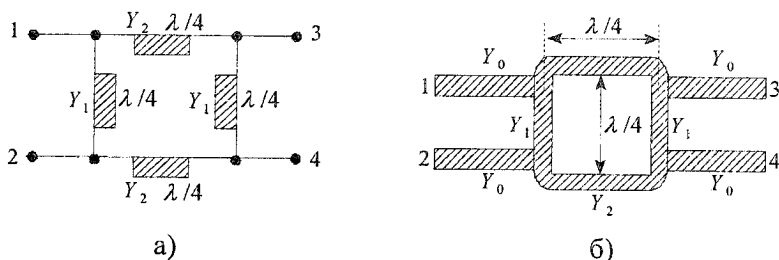


Рис. 7.50. Електрична схема і топологія двошлейфового НВ

При ідеальному погодженні матриця розсіювання двошлейфового НВ має вигляд

$$[S] = -\frac{1}{y_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & j & y_1 \\ 0 & 0 & y_1 & j \\ j & y_1 & 0 & 0 \\ y_1 & j & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Робоче затухання в первинній лінії визначається як  $C_{13} = 10 \lg y_2^2$ , а перехідне затухання  $C_{14} = 10 \lg (y_2^2/y_1^2)$ . Коефіцієнт поділу потужності  $m = |S_{31}|^2 / |S_{41}|^2 = 1/y_1^2 = 1/(y_2^2 - 1)$  або  $y_1 = \sqrt{1/m}$ ,  $y_2 = \sqrt{(m+1)/m}$ .

### 7.6.2 Подільники і суматори потужності НВЧ. Фазообертачі

Під час розробки пристроїв НВЧ різного призначення широке застосування знаходять подільники і суматори потужності. Подільники потужності поділяють потужність, яка поступає на вхід, між

вихідними каналами (аналогічно як резистивні подільники в електричних колах). Суматори забезпечують додавання потужностей, які поступають по вхідних каналах, до загального навантаження. Подільники й суматори є взаємними пристроями, тобто можуть виконувати як ділення, так і сумування потужностей. Залежно від призначення подільники потужності здійснюють рівний або нерівний поділ на два і більше число каналів.

Подільники можуть бути виконані на основі послідовних або паралельних схем. Вибір того чи іншого схемного рішення проводиться, виходячи з технічних вимог до пристрою і технології його формування.

Подільник потужності послідовного типу є одним із найбільш поширених і простих подільників на гладких переходах (рис. 7.51). Умовно погодження такого подільника має вигляд  $Y_i = Y_{i+1} + Y_{i+2}$ , де  $Y_i$  – хвильовий опір відповідних ліній. Розподіл потужності залежить від співвідношення хвильових провідностей вихідних ліній передачі. При рівномірному розподілі потужності  $Y_2 = Y_4 = Y_6 = Y_8 = Y_{10}$  ( $Y_0 = Y_9$ ).

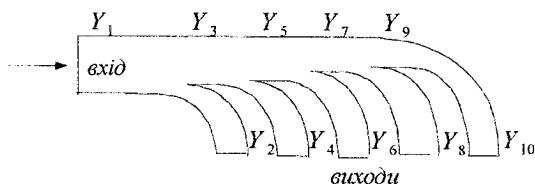


Рис. 7.51. Топологія подільника потужності послідовного типу

Простою схемою паралельного типу є суматор потужності, який виконаний у вигляді багатопроменевої зірки. На рис. 7.52 подано схему суматора потужності, вхідні й вихідні плечі якого мають однакові хвильові опори  $Z_0$ . Їх узгодження здійснюється за допомогою чвертьхвильового відрізка лінії передачі, хвильовий опір якої рівний  $Z_1 = Z_0 \sqrt{N}$ , де  $N$  – число вхідних плечей. Розв'язка генераторів у  $dB$  визначається числом вхідних плечей:

$$C = 10 \lg \left( \frac{1 - N^2}{2N - 1} \right).$$

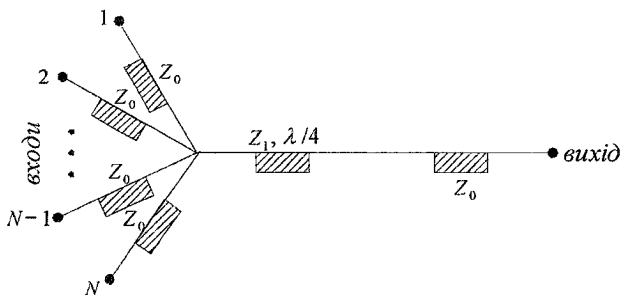


Рис. 7.52. Електрична схема суматора потужності у вигляді багатопроменевої зірки

Особливої уваги заслуговують кільцеві подільники потужності (рис. 7.53). Узгодження входу й виходів у них досягається підбором хвильових опорів чвертьхвильових відрізків МСЛ, у яких при рівному поділі потужності  $Z_1 = Z_0 \sqrt{2}$ . Під час збудження подільника із входу 3 внаслідок його електричної симетрії точки  $B$  і  $C$  є еквіпотенціальними. Тому струм через резистор  $R_\sigma$  не протікає і потужність на ньому не витрачається. Уся потужність ділиться порівну й передається у навантаження до вихідних плечей 1 і 2. При збудженні подільника з боку одного з вихідних плечей (нехай 1), сигнал у точку  $C$  приходить двома шляхами: через чвертьхвильовий відрізок – шлях  $B-A-C$  і через резистор  $R_\sigma$  – шлях  $B-C$ . Різниця фаз сигналів, які пройшли ці шляхи, складає  $\pi$ . Баластний опір  $R_\sigma = 2Z_0$  забезпечує рівність амплітуд протифазних сигналів. Тоді напруга в точці  $C$  рівна нулю, а потужність сигналу, який поступає на вихід 1, частково гаситься на опорі  $R_\sigma$  і частково поступає в плече 3. Це ніби фільтр протифазних сигналів.

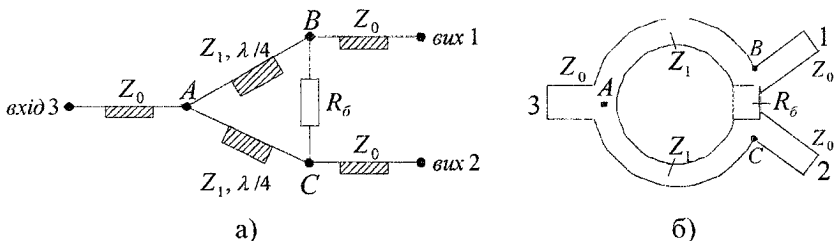


Рис. 7.53. Електрична схема (а) і топологія (б) одноступеневого кільцевого подільника потужності

Кільцеві подільники можуть здійснювати також і нерівний поділ потужності. Тоді чвертьхвильові відрізки мають різні хвильові опори як на вході, так і на виходах подільника потужності. Якщо  $n^2 = P_2/P_1$ , то опори на вході  $Z_1 = Z_0 \sqrt[4]{n(1+n^2)}$ ,  $Z_2 = Z_0 \sqrt[4]{n^3(1+n^2)}$ ,  $Z_3 = Z_0 \sqrt[4]{(1+n^2)/n^5}$ , а опори на виході  $Z_4 = Z_0 \sqrt{n}$ ,  $Z_5 = Z_0/\sqrt{n}$ , і  $R_\epsilon = Z_0(1+n^2)/n$ . Саме такі суматори легко формуються за рахунок інтегральної технології.

Застосування НВ та мостів у схемах суматорів потужності має свої особливості, які визначаються необхідністю синхронізації збуджених генераторів.

Керування фазою сигналу в тракці НВЧ здійснює за допомогою дво- або чотириполосних пристроїв зі змінними параметрами, які змінюються під дією електричного чи магнітного поля. Такі пристрої називаються фазообертачами й широко використовуються у фазованих антенних ґратках, радіопередавальних і радіоприймальних пристроях НВЧ.

Сьогодні широке розповсюдження отримали фазообертачі на напівпровідникових діодних структурах ( $p-n$ ,  $p-i-n$ ,  $n-i-p-i-n$ ). Робота  $p-i-n$ -діода базується на зміні активної складової опору  $i$ -області при позитивному зміщенні, коли через діод протікає струм. За відсутності позитивного зміщення опір діода складає одиниці кОм. При позитивному зміщенні ( $\sim 1B$ ) опір падає до одиниць Ом і залежить від величини струму.

Фазообертачі на напівпровідникових діодах можуть бути як прохідними (тоді їх розглядають як 4-полосники), так і відбивними (як двополосники). На рис. 7.54 показано принципову електричну схему дискретного прохідного фазообертача на  $p-i-n$ -діодах з використанням  $3\text{дб}$ -направленого відводу. Сама схема являє собою восьмиполосник, два плеча якого використовуються як вхід (плече 1) і вихід (плече 2), і два плеча (3 і 4), які навантажені ідентичними відбивними комірками.

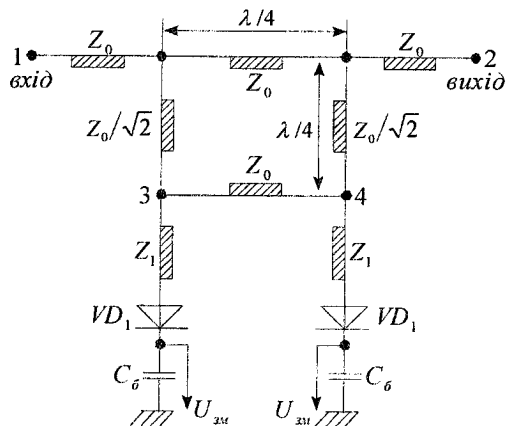


Рис. 7.54. Прохідний фазообертач

Вхідний сигнал подається в плече 1 і ділиться на два сигнали рівної амплітуди, які поступають у плечі 3 і 4. Фази цих сигналів відрізняються на  $90^\circ$ . Сигнали, які поступили в плечі 3 і 4, відбиваються, причому фази відбитих сигналів визначаються вхідним опором відбивача, відповідно, наявністю або відсутністю позитивного зміщення на  $p-i-n$ -діодах, а відбиті сигнали складаються синфазно в плече 2 і поступають у навантаження.

### 7.7 Автоматизоване проектування пасивних пристроїв НВЧ. Метод декомпозиції

Однією з тенденцій у розвитку техніки НВЧ на сучасному етапі є все більша її мініатюризація та інтеграція, тобто створення таких конструкцій, які об'єднують десятки елементів і пристроїв без проміжних розмикачів. Під час розробки ІС НВЧ найбільш повно розкриваються переваги автоматизованого проектування. Найширше застосування в ІС знайшли МСЛ та елементи на їх основі, які формуються технологією мікроелектроніки. Поряд із цим досліджується можливість використання для створення ІС НВЧ ліній передачі на основі діелектричних хвилеводів.

Необхідність автоматизації проектування ІС НВЧ зумовлена тим, що практично неможливе налаштування й регулювання параметрів мікросмугових і діелектричних структур, які складають

основу схем. Крім цього, велике число елементів ІС утруднює можливість експериментального підбору необхідних параметрів і режимів роботи схеми. Усе це вимагає строгого електродинамічного підходу під час розробки математичного забезпечення систем автоматизованого проектування (САПР) пристроїв НВЧ. Тут також потрібний особливий підхід до створення бази даних елементів та їх тестового контролю в процесі їх формування.

До розробки будь-яких алгоритмів завжди слідує так звана формалізація задачі. Це питання в САПРі називається постановкою задачі. У ній виділяють дуже важливі два етапи:

- 1) перехід від реального об'єкта до фізичної моделі;
- 2) математична формалізація прийнятої фізичної моделі або, іншими словами, математичне моделювання.

Ці етапи повинні закінчуватися верифікацією, тобто перевіркою правильності прийнятих фізичних і математичних моделей.

Математична модель – це звичайна система лінійних алгебраїчних рівнянь, до розв'язання якої зводиться задача аналізу електродинамічної структури. Результатом розв'язання такої системи є спектр власних функцій і власних значень (якщо мова йде про регулярний відрізок направляючої системи) або матриця розсіювання (у випадку аналізу неоднорідностей полів). Очевидно, що будь-який пасивний пристрій НВЧ можна подати у вигляді набору відрізків регулярних ліній передачі і різних неоднорідностей, на які можуть бути спроектовані свої тестові елементи й структури. Результати їх аналізу дозволяють отримати матрицю розсіювання пристрою в цілому і за правилами об'єднання матриць окремих елементів. Тоді задача параметричного синтезу зводиться, у свою чергу, до оптимізації відповідних елементів матриці розсіювання шляхом підбору електричних параметрів і геометричних розмірів структури, що синтезується. Це вже так званий етап тестового аналізу електрофізичних параметрів елементів.

Розглянемо властивості матриці розсіювання пасивного багатополюсника. Повернемося до його визначення. Багатополюсним з'єднанням, або багатополюсником, називається електричне коло, що має  $2n$  затискачів, які попарно утворюють  $n$  входів. У загальному випадку число входів визначається не тільки числом розгалужень, але й числом типів хвиль, які існують у даному пристрої в певному частотному діапазоні. У цьому випадку число входів багатополюсника визначається реальним числом входів даного пристрою.

Матриця розсіювання багатополюсника будується за тим же принципом, що й матриця 4-полюсника. Запишемо для пасивного багатополюсника, зображеного на рис. 7.55, вирази, які пов'язують амплітуди напруги падаючих і відбитих від багатополюсника хвиль:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{1\text{ від}} &= S_{11} \dot{U}_{1\text{ на}} + S_{12} \dot{U}_{2\text{ на}} + \dots + S_{1n} \dot{U}_{n\text{ на}}, \\ \dot{U}_{2\text{ від}} &= S_{21} \dot{U}_{1\text{ на}} + S_{22} \dot{U}_{2\text{ на}} + \dots + S_{2n} \dot{U}_{n\text{ на}}, \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{U}_{n\text{ від}} &= S_{n1} \dot{U}_{1\text{ на}} + S_{n2} \dot{U}_{2\text{ на}} + \dots + S_{nn} \dot{U}_{n\text{ на}}.\end{aligned}$$

Ці співвідношення можуть бути подані в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1\text{ від}} \\ \dot{U}_{2\text{ від}} \\ \dots \\ \dot{U}_{n\text{ від}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{1\text{ на}} \\ \dot{U}_{2\text{ на}} \\ \dots \\ \dot{U}_{n\text{ на}} \end{bmatrix} \quad \text{або} \quad [\dot{U}_{\text{від}}] = [S][\dot{U}_{\text{на}}],$$

де  $[S]$  – матриця розсіювання,  $\dot{U}_{\text{на}}$  і  $\dot{U}_{\text{від}}$  – вектор-стовпець падаючих і відбитих хвиль напруг відповідно, а елементи матриці

$$S_{\sigma\nu} = \left. \frac{U_{\text{від}\sigma}}{U_{\text{на}\nu}} \right|_{U_{\text{на}\lambda=0}}$$

мають зміст коефіцієнта передачі за напругою із

плеча  $\nu$  у плече  $\sigma$ .

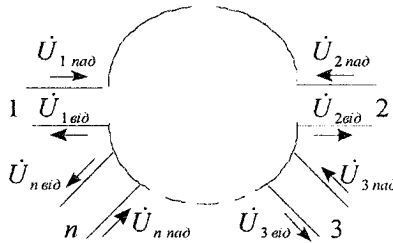


Рис. 7.55. Пасивний багатополюсник, який описує розгалуження (неоднорідність)  $n$  ліній передачі

Якщо втрати в багатополюснику відсутні, то сумарна потужність відбитих хвиль рівна сумарній потужності падаючих хвиль, що відповідає унітарності матриці розсіювання:

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_{k\sigma} S_{kv}^* = \begin{cases} 1, & \sigma = \nu \\ 0, & \sigma \neq \nu \end{cases}.$$

Елементи матриці розсіювання  $S_{\nu\nu}$  визначають коефіцієнти відбивання при подачі сигналу у  $\nu$ -плече, якщо до решти входів підключені узгоджені навантаження.

Загалом, як було визначено раніше, число входів, а відповідно, і число рядків і стовпців у матриці розсіювання визначаються не тільки числом розгалужень у багатополіуснику, але й числом типів хвиль, які є в пристрої на робочій частоті. Тоді матриця, яка описує електромагнітний процес у досліджуваному багатополіуснику, складається із  $n^2$  блоків, де  $n$  – число ліній передачі (хвильових каналів), які підходять до багатополіусника. Число рядків і стовпців у кожному блоці визначається числом типів хвиль, які існують у каналах, що відповідають даному блоку.

Нехай до визначеного числа входів (каналів) досліджуваного пристрою приходить сигнал у вигляді набору власних хвиль. У цьому випадку в кожному каналі поширюються й відбиті хвилі, які є відкликами пристрою на падаючі прямі хвилі. Поле в кожному каналі можна подати у вигляді суперпозиції падаючих і відбитих обернених хвиль:

$$\begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix}_{i\text{ над}} + \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix}_{i\text{ від}}, \quad i = 1 \dots n.$$

Відбиті хвилі в кожному каналі є результатом дії на даний пристрій падаючих хвиль у всіх каналах. Введемо вектори комплексних амплітуд в  $i$ -му каналі хвиль  $\vec{U}_{k\text{ над}}^i$  і вектори комплексних амплітуд у тому ж каналі  $\vec{U}_{k\text{ від}}^i$ . Тут  $k$  – номер хвилі в даному каналі. У загальному випадку вони будуть нескінченно мірними, оскільки число типів хвиль у кожному каналі є нескінченним. Тоді залежність між цими векторами можна записати у вигляді матричного рівняння:



$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1\epsilon i\delta}^1 \\ \dot{U}_{2\epsilon i\delta}^1 \\ \dots \\ \dot{U}_{1\epsilon i\delta}^2 \\ \dot{U}_{2\epsilon i\delta}^2 \\ \dots \\ \dot{U}_{1\epsilon i\delta}^n \\ \dot{U}_{2\epsilon i\delta}^n \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{11} & S_{12}^{11} & S_{13}^{11} & \dots & S_{11}^{12} & S_{12}^{12} & S_{13}^{12} & \dots & S_{11}^{1n} & S_{12}^{1n} & S_{13}^{1n} & \dots \\ S_{21}^{11} & S_{22}^{11} & S_{23}^{11} & \dots & S_{21}^{12} & S_{22}^{12} & S_{23}^{12} & \dots & S_{21}^{1n} & S_{22}^{1n} & S_{23}^{1n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{11}^{21} & S_{12}^{21} & S_{13}^{21} & \dots & S_{11}^{22} & S_{12}^{22} & S_{13}^{22} & \dots & S_{11}^{2n} & S_{12}^{2n} & S_{13}^{2n} & \dots \\ S_{21}^{21} & S_{22}^{21} & S_{23}^{21} & \dots & S_{21}^{22} & S_{22}^{22} & S_{23}^{22} & \dots & S_{21}^{2n} & S_{22}^{2n} & S_{23}^{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{11}^{n1} & S_{12}^{n1} & S_{13}^{n1} & \dots & S_{11}^{n2} & S_{12}^{n2} & S_{13}^{n2} & \dots & S_{11}^{nn} & S_{12}^{nn} & S_{13}^{nn} & \dots \\ S_{21}^{n1} & S_{22}^{n1} & S_{23}^{n1} & \dots & S_{21}^{n2} & S_{22}^{n2} & S_{23}^{n2} & \dots & S_{21}^{nn} & S_{22}^{nn} & S_{23}^{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{1\pi a\delta}^1 \\ \dot{U}_{2\pi a\delta}^1 \\ \dots \\ \dot{U}_{1\pi a\delta}^2 \\ \dot{U}_{2\pi a\delta}^2 \\ \dots \\ \dot{U}_{1\pi a\delta}^n \\ \dot{U}_{2\pi a\delta}^n \\ \dots \end{bmatrix},$$

де  $n$  – число каналів.

На практиці в кожному каналі враховується лише кінцеве число типів хвиль. Тоді блок  $S^{ij}$  матриці розсіювання, який характеризує передачу з  $j$ -го каналу в  $i$ -й, складається з  $k_i$  рядків та  $l_j$  стовпців, де  $k_i$  – число типів хвиль, які враховані в  $i$ -му каналі,  $l_j$  – число типів хвиль, які враховані в  $j$ -му каналі.

Саме матриця розсіювання  $[S]$  описує будь-які можливі режими в конкретному багатополіуснику. Відповідно, якщо відомі всі її компоненти, то можна повністю дослідити електромагнітний процес, який відбувається в багатополіуснику, без урахування його внутрішньої структури.

Хвильові матриці розсіювання  $[S]$  дуже широко використовують під час аналізу кіл НВЧ. Основним засобом їх обчислення є електродинамічна теорія. Для дослідження будь-якого складного пристрою НВЧ необхідно розв'язати ряд так званих ключових задач. Під ключовою задачею тут розуміється крайова задача електродинаміки, розв'язавши яку можна отримати інформацію про матрицю розсіювання пристрою.

Для визначення елементів матриці розсіювання  $[S]$  ключову задачу розв'язують у режимі дифракції хвиль усіх врахованих типів у всіх каналах. При цьому розв'язуються однорідні рівняння Максвелла за умови, що в одному з каналів багатополіусника, що відповідає даному пристрою, існує пряма хвиля заданого типу, а у всіх інших каналах прямі хвилі відсутні.

Визначаючи елементи матриці повних опорів  $[Z]$ , ключові задачі розв'язують у режимі холостого ходу. Елементи матриці  $[Y]$  повних провідностей визначають у режимі короткого замикання. У першому випадку на один із входів подається  $H_r \neq 0$ , а на решту входів  $H_r = 0$ , де  $H_r$  – дотична до площини входу складова напруженості магнітного поля. У другому випадку на один із входів подається  $E_r \neq 0$ , а на решту входів  $E_r = 0$ , де  $E_r$  – аналогічна дотична складова напруженості електричного поля.

Застосовувані на практиці пристрої НВЧ є досить складними й можуть мати розміри, які значно перевищують довжину хвилі. Це призводить, як правило, до великих і часто нездоланих труднощів під час розв'язання задач для пристрою в цілому. Тоді доцільно будь-який пристрій подати у вигляді сукупності елементів, для кожного з яких незалежно від інших можна розв'язати просту електродинамічну задачу. Такий метод дослідження пристроїв НВЧ називають методом декомпозиції, а окремі елементи, на які розбивається пристрій, – автономними блоками. Тоді загальна матриця  $[S]$  буде визначатися із блочних матриць  $[S_i]$ .

### Контрольні запитання

1. Які структури відносяться до пасивних елементів пристроїв НВЧ?
2. Які види ліній передач частіше за все використовують в ІС НВЧ? Які наближення використовуються під час їх аналізу?
3. Якими конструкціями можуть бути подані найбільш типові послідовні індуктивні елементи ІС НВЧ? Якими схемними моделями для схемотехнічного аналізу ІС можуть бути представлені ці конструкції?
4. Які конструкції використовуються для представлення ємнісних елементів ІС НВЧ? Що відноситься до основних параметрів ємнісних елементів?
5. Які функції виконують плівкові резистори в ІС НВЧ? Назвіть їх основні параметри.
6. Яке призначення резонаторів і фільтрів у схемах НВЧ? Які особливості їх топології і схемних моделей?
7. Які функції виконують діафрагми, резонансні вікна й трансформатори повних опорів у схемах НВЧ? Назвіть найбільш поширені типи трансформаторів повних опорів, які використовують для узгодження хвильових опорів у хвилеводах.

8. Назвіть основні способи з'єднання 4-полосників. Який математичний апарат використовується для опису хвильових параметрів 4-полосників?

9. Назвіть основні параметри направлених відводів і мостів та їх зв'язок із матрицею розсіювання.

10. Яке призначення подільників і суматорів потужності НВЧ? Які схеми й топології використовуються для їх реалізації? Для чого призначені фазообертачі в схемах НВЧ, які структури лежать в їх основі?

### **Рекомендована література**

1. Веселов Г. И. Микроэлектронные устройства СВЧ / Г. И. Веселов. – М. : Высшая школа, 1988. – 280 с.

2. Твердотельные устройства СВЧ в технике связи / Л. Г. Гассанов, А. А. Липатов, В. В. Марков, М. А. Мобильченко. – М. : Радио и связь, 1988. – 288 с.

3. Фуско В. СВЧ-цепи. Анализ и автоматизированное проектирование / В. Фуско. – М. : Радио и связь, 1990. – 288 с.

4. Гупта К. Машинное проектирование СВЧ-устройств / К. Гупта, Р. Гардж, Р. Чадха. – М. : Радио и связь, 1987. – 432 с.

5. Качанов З. Г. Электрические цепи с распределенными параметрами и цепные схемы / З. Г. Качанов. – М. : Энергоатомиздат, 1990. – 218 с.

6. Фельдштейн А. Л. Синтез четырехполосников и восьмиполосников на СВЧ / А. Л. Фельдштейн, Л. Р. Явиг. – М. : Связь, 1971. – 388 с.

7. Гайдук В. И. Физические основы электроники СВЧ / В. И. Гайдук, К. И. Палатов, Д. И. Петров. – М. : Советское радио, 1971. – 601 с.

8. Лебедев И. В. Техника и приборы СВЧ / И. В. Лебедев. – М. : Высшая школа, 1972. – Т. 1. – 389 с.; Т. 2. – 375 с.

9. Величко Ю. Т. Чотириполосники / Ю. Т. Величко. – Львів : Політехніка, 1972. – 620 с.

10. Шматько О. О. Електроніка надвисоких частот : Основи теорії і лабораторний практикум / О. О. Шматько, Є. М. Одарено. – Х. : Факт, 2003. – 245 с.

11. Тимофеев В. И. Электронные цепи СВЧ / В. И. Тимофеев. – К. : КПИ, 2006. – 170 с.

## РОЗДІЛ 8. АКТИВНІ МІКРОЕЛЕКТРОННІ ПРИСТРОЇ НВЧ

Мікроелектронні пристрої, у яких використовуються активні елементи (АЕ) (діоди, транзистори, тиристори, гіратори), називають активними. В основі активних елементів знаходиться  $p-n$ -перехід. Відповідно, активні елементи можуть бути у вигляді дво-, три- і чотириполюсника. До активних мікроелектронних пристроїв відносять автогенератори й підсилювачі, які складають основу радіопередавальних і радіоприймальних пристроїв.

### 8.1 Особливості проектування автогенераторів

Автогенератор (АГ) – це генератор із самозбудженням коливань, властивості яких визначаються параметрами схеми та режимом його роботи. На відміну від генераторів із зовнішнім збудженням АГ не вимагають самого збуджувача, як це має місце в синтезаторах, що забезпечує коливання на вході. Такі коливання формуються за рахунок позитивного оберненого зв'язку (ОЗ) та активних елементів з від'ємним диференціальним опором.

У будь-якому АГ можна виділити основний елемент – коливальну систему (КС) із добротністю  $Q \gg 1$ , коливання в якій підтримуються за рахунок надходження енергії від джерела живлення. Звичайно, керує таким процесом АЕ, виконаний у вигляді двополюсника (тунельний або лавино-пролітний діод, діод Ганна,  $\lambda$ -діод), або у вигляді триполюсника (біполярний або польовий транзистор), або у вигляді чотириполюсника (тиристор, гіратор), на які діють коливання, що поступають із КС.

Функціональна схема АГ наведена на рис. 8.1. Проста КС (резонатор) – це коливальний контур. У ньому при  $Q \gg 1$  після введення енергії від джерела виникають затухаючі гармонічні коливання через наявність утрат у контурі. Таким чином, для створення АГ гармонічних коливань необхідно використати резонатор з високою добротністю й компенсувати втрати в ньому вже за рахунок АЕ і джерела живлення з уведенням позитивного ОЗ. ОЗ у схемі АГ потрібний для синхронізації роботи АГ коливаннями резонатора.

У деяких типах радіопередавачів (діапазону НВЧ) АГ можуть бути вихідними каскадами. Вимоги до таких генераторів аналогічні

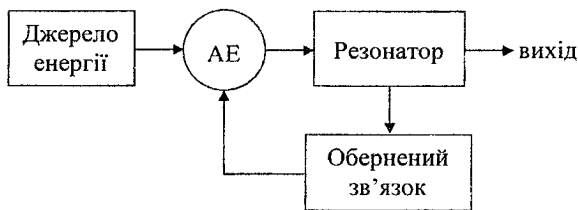


Рис. 8.1. Функціональна схема автогенератора

вимогам до підсилувачів потужності – забезпечення високої вихідної потужності та ККД.

Механізм роботи АГ такий. При підключенні джерела енергії в резонаторі виникає пере-

хідний затухаючий процес, який діє на АГ. Останній перетворює енергію джерела в енергію коливань і передає її в резонатор. Якщо потужність, яка віддається АЕ, перевищує потужність, яка споживається резонатором і навантаженням, тобто виконується так звана умова самозбудження, то амплітуда коливань збільшується. За деякого її значення ріст цієї потужності внаслідок нелінійності АЕ припиняється і вона стає рівною споживаній потужності. Якщо такий енергетичний процес-баланс стає стійким, то в АГ установлюється стаціонарний режим коливань.

АГ суттєво відрізняється від інших каскадів радіопередавальних пристроїв тим, що частота й амплітуда коливань визначаються не зовнішнім джерелом, а параметрами власної КС та АЕ.

Залежно від типу АЕ розрізняють транзисторні й діодні АГ.

У транзисторних АГ створюється такий режим роботи АЕ, як і в підсилувачі потужності, при цьому на вхід подаються коливання не від зовнішнього джерела, а від власного резонатора через коло ОЗ. Варіант такої схеми АГ подано на рис. 8.2. Резонатор у коливальному колі АЕ утворений елементами  $L$ ,  $C$ ,  $R$  і підключений так, що за допомогою трансформаторного ОЗ частина енергії поступає на керуючий електрод АЕ. Еквівалентна схема АГ (рис. 8.2, б) отримана шляхом заміни АЕ з елементами кола ОЗ генератором струму, який керується напругою на резонаторі.

У діодних АГ на динамічних ВАХ генераторного діода в режимі встановлених коливань, як і в транзистора, формується область (ділянка) від'ємної диференціальної провідності чи опору. Тут необхідно зазначити, що така область від'ємної крутизни генераторних діодів спостерігається не тільки на динамічних, а й на статичних ВАХ. Схему діодного АГ подано на рис. 8.2, в.

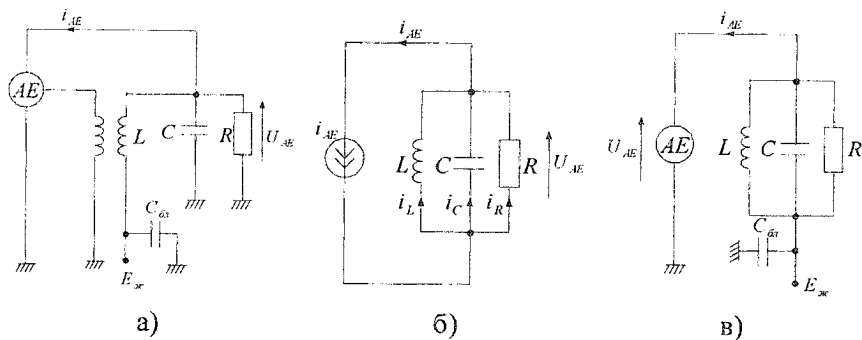


Рис. 8.2. Електричні схеми автогенераторів:  
а, б – транзисторного; в – діодного

На ділянці динамічної ВАХ, де є від'ємна диференціальна провідність, коливання перших гармонік  $i_{AE}(t)$  і  $U_{AE}(t)$  стають протифазними ( $\varphi_{AE} = \pi$ ). Генераторний діод може бути замінений комплексною провідністю  $Y_o = G_o + jB_o$ , де  $G_o$  і  $B_o$  – активна й реактивна складові провідності діода. Існують АЕ з динамічними ВАХ  $N$ - і  $S$ -типів (рис. 8.3). ВАХ  $N$ -типу мають тунельні діоди, лавино-пролітні діоди й діоди Ганна. Характеристику  $S$ -типу мають тиристри, транзисторні еквіваленти  $p-n-p$ -типів.

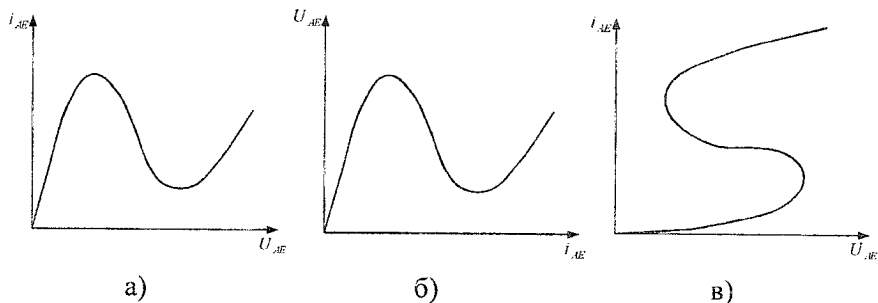


Рис. 8.3. Динамічні ВАХ активних елементів  $N$ - (а) і  $S$ -типів (б, в)

### 8.1.1 Квazілінійна теорія автогенераторів

Автогенератори НВЧ повинні задовольняти такі умови:

- генерувати на частоті  $\omega_0$  потужність, не меншу за задану вихідну потужність  $P_{вих}$ ;

- мати ККД, близький до максимального;
- забезпечувати задану стабільність частоти  $\Delta\omega/\omega_0$  і вихідної потужності  $\Delta P_{вих}/P_{вих}$ ;
- мати низький рівень шумів;
- стаціонарний режим коливань повинен бути стійким у діапазоні кліматичних механічних і фонових зовнішніх впливів;
- не повинні виникати паразитні коливання;
- можливість механічного, електричного або магнітного переналаштування частоти;
- можливість стабілізації частоти високочастотним резонатором або синхронізації частоти від зовнішнього високостабільного джерела.

Розглянемо умови стаціонарності коливань. Стаціонарним режимом називають усталений режим, тобто режим, у якому амплітуда й частота автоколивань не змінюється в часі. Еквівалентну схему АГ подано на рис. 8.4. За першим законом Кірхгофа для еквівалентної схеми АГ справедлива рівність  $U_{AE1} Y_{AE} + U_{AE1} Y_K = 0$  або  $Y_K = -Y_{AE}$ . Отримане співвідношення може бути записане у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{aligned} G_K(\omega) &= -G_{AE}(U_{AE1}), \\ B_K(\omega) &= -B_{AE}(U_{AE1}), \end{aligned} \quad (8.1)$$

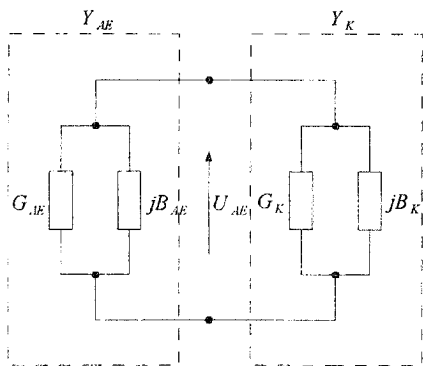


Рис. 8.4. Еквівалентна схема АГ

розв'язок якої дозволить визначити  $\omega_p$  і напругу стабілізації коливань  $U_{cm}$ . Система рівнянь (8.1) визначає умову стаціонарності режиму автоколивань. Фізичний зміст цих умов опишемо нижче.

1. Вихідна потужність АЕ  $P_- = 0,5 U_{AE1}^2 G_{AE}$  (бо  $G_{AE} < 0$ , то і  $P_- < 0$ ), а потужність споживання резонатором рівна  $P = 0,5 U_{AE1}^2 G_K$ . Тоді  $P_- = -P$  і рівність  $G_K(\omega) = -G_{AE}(U_{AE1})$

виражає умову балансу потужностей.

2. Умова (8.1) може бути записана у вигляді  $B_K + B_{AE} = 0$ . Це і є умова резонансу в повній коливальній системі АГ, яка утворена резонатором і АЕ. Коливання в АГ проходять на резонансній частоті сумарного резонатора.

Умови (8.1) є необхідними, але недостатніми для існування стаціонарного режиму автоколивань. На можливість існування стаціонарного режиму коливань указує умова  $Y_K = -Y_{AE}$ . Чи встановиться ця умова, реально залежить від стійкості електричної схеми до малих електричних збурень. Припустимо, що амплітуда коливань змінилася на величину  $\Delta U$ , тобто  $U' = U_{cm} + \Delta U$ , і, як наслідок, порушилися умови (8.1) існування стаціонарного коливання – при цьому виникає перехідний процес. Під час подальшого протікання процесу можливе таке:

а) амплітуда коливань буде продовжувати змінюватися в тому ж напрямі;

б) амплітуда залишиться рівною  $U'$ ;

в) амплітуда почне змінюватися за іншим законом і повернеться до попереднього значення  $U_{cm}$ .

Перехідний процес, що виник під час відхилення амплітуди від стаціонарного значення, може бути описаний виразом

$U_{AE}(t) = U' e^{\gamma t} \cos \omega t$ , де  $\gamma = \frac{dU(t)}{dt} \frac{1}{U(t)}$  – відносна швидкість зміни

амплітуди;  $\gamma = \gamma(t)$ ,  $\omega = \omega(t)$ ,  $U(t) = U' e^{\gamma t}$ . Із цього виразу випливає, що у випадку  $\Delta U > 0$  режим стійкий при  $\gamma < 0$ , а у випадку  $\Delta U < 0$  режим уже стійкий при  $\gamma > 0$ .

Тому умовами стійкості стаціонарних режимів є виконання таких двох нерівностей:

$$\begin{aligned} 1) \frac{d|G_{AE}|}{dU_{AE1}} < 0, \quad \frac{dB_K}{d\omega} > 0, \\ 2) \frac{d|G_{AE}|}{dU_{AE1}} > 0, \quad \frac{dB_K}{d\omega} < 0, \end{aligned} \tag{8.2}$$

де похідні визначаються в точці стаціонарності режиму, тобто коли  $U_{AE1} = U_{cm}$ ,  $\omega = \omega_p$ . Загальна умова стаціонарного режиму АГ запишеться у вигляді:



$$\frac{d|G_{AE}|}{dU_{AE1}} \cdot \frac{dB_K}{d\omega} < 0.$$

А тепер повернемося до умов самозбудження АГ. Коливання в АГ збуджуються самовільно при включенні напруги живлення. Умову самозбудження визначимо, порівнюючи потужність, яку віддає АЕ, з потужністю, яка споживається резонатором.

Оскільки коливання починаються з малих амплітуд, то для отримання умови самозбудження знехтуємо нелінійністю АЕ й замінимо його лінійною провідністю  $Y_0 = G_0 + jB_0$ , де  $B_0 = B_{AE}|_{U_{AE1} \rightarrow 0}$ ,  $G_0 = G_{AE}|_{U_{AE1} \rightarrow 0}$ . При цьому потужність АЕ  $P_- = 0,5 U_{AE1}^2 G_0$  споживається резонатором і записується у виді  $P_+ = 0,5 U_{AE1}^2 G_K$ . Амплітуда наростає, коли  $P_- > P_+$ , тобто коли виконується умова, яку називають умовою збудження:

$$G_0 < 0, \quad |G_0| > G_K,$$

де  $G_0$  – дійсна частина вихідної провідності АЕ в режимі малого сигналу,  $G_K$  – дійсна частина провідності КС у точках підключення вихідних електродів АЕ.

Існує два режими збудження коливань: м'який і жорсткий. М'який режим виникає самовільно при підключенні живлення. У АГ з м'яким збудженням стан спокою (тобто стан, коли  $U_{AE1} = 0$ ) є нестійким, а значить, не існує. Особливості АГ з будь-яким режимом збудження вивчають, використовуючи навантажувальні характеристики АЕ, тобто залежності  $U_{AE1} = U_{AE1}(R'_K)$ , де  $R'_K = 1/G_K$ . Для побудови навантажувальної характеристики АЕ в м'якому режимі збудження АГ для спрощення допускають, що  $B_{AE} = 0$ , і залежність  $U_{AE1}(R'_K)$  отримують, розв'язуючи рівняння  $G_K(\omega) = -G_{AE}(U_{AE1})$  за різних значень  $G_K$ . На рис. 8.5 наведено залежності  $G_{AE} = f(U_{AE1})$  і  $U_{AE1} = f(R'_K)$  для м'якого й жорсткого режимів збудження АГ.

До особливостей м'якого режиму збудження коливань можна віднести:

- плавний вигляд навантажувальної характеристики, відсутність стрибків амплітуд;
- однозначний зв'язок між  $U_{AE1}$  і  $R'_K$ ;

– можливість отримання коливань малих амплітуд.

Жорсткий режим збудження коливань – це режим, у якому генерація виникає тільки за наявності зовнішнього впливу, який створює коливання з амплітудою, більшою за деяке порогове значення (рис. 8.5, в, г).

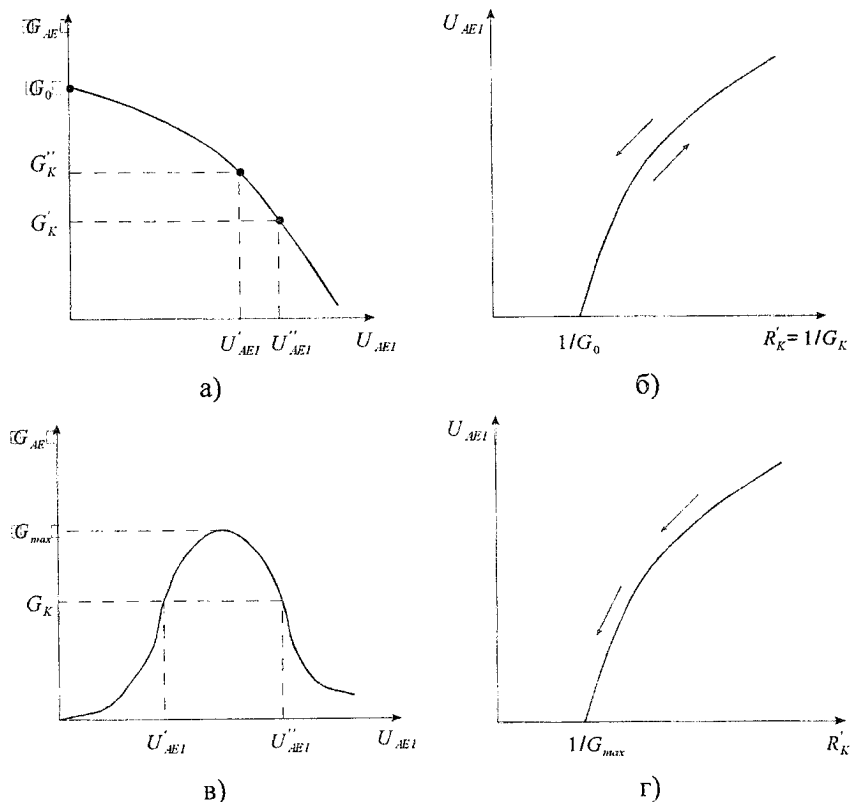


Рис. 8.5. Залежності  $G_{AE}(U_{AE1})$  і  $U_{AE1}(R'_K)$  для м'якого (а, б) і жорсткого (в, г) режимів збудження АГ

Особливостями жорсткого режиму є:

- стрибкоподібний характер збудження та зриву коливань;
- наявність діапазону значень  $R'_K$  від  $1/G_{max}$  до  $1/G_0$ , де коливання або існують, або їх немає;
- неможливість отримання коливань малих амплітуд.

Вищевикладене стосується до АГ на АЕ з характеристиками  $N$ -типу. Виведення основних залежностей для АЕ з ВАХ  $S$ -типу базується на таких положеннях:

– без урахування інерційності АЕ залежності для АЕ з ВАХ  $N$ -типу будуть справедливі для АЕ з ВАХ  $S$ -типу, якщо в отриманих співвідношеннях поміняти місцями струм і напругу;

– оскільки інерційність в АЕ з ВАХ  $N$ -типу приводить до появи ємнісної складової вихідної провідності АЕ, то в АЕ з ВАХ  $S$ -типу уявна складова вже має індуктивний характер і є основою для побудови генераторних схем.

Таким чином, АЕ з динамічною ВАХ  $N$ - і  $S$ -типів є дуальними, тобто рівняння відносно струму для одного з них аналогічні рівнянням відносно напруги для іншого.

Тому, замінивши провідності  $Y$  опорами  $R$ , а амплітуду вихідної напруги  $U_{AE1}$  амплітудою вихідного струму  $I_{AE1}$ , отримаємо умови збудження та існування стійких коливань в АГ на АЕ з динамічними ВАХ уже  $S$ -типу:

- 1)  $R_{AE} < 0, R_0 < 0, |R_0| > R_K, R_0 = R_{\max};$
- 2)  $Z_K = -Z_{AE}$  або  $R_K = -R_{AE}, X_K = -X_{AE};$
- 3)  $\frac{d|R_{AE}|}{dI_{AE1}} \frac{dX_K/d\omega}{\omega_p} < 0.$

Тут АЕ і КС представлені комплексними опорами  $Z_{AE} = R_{AE} + jX_{AE}, Z_K = R_K + jX_K$ , причому  $R_{AE}$  і  $X_{AE}$  – функції амплітуди першої гармоніки вихідного струму  $I_{AE1}$ ,  $R_K$  і  $X_K$  – функції частоти  $\omega$ ;  $R_0 = R_{AE}$  при  $I_{AE1} \rightarrow 0$ .

Найбільш суттєва вимога до АГ – це стабільність частоти, яка повинна визначатися властивостями КС. Тому для покращення стабільності частоти застосовують КС, власні частоти яких слабо залежать від зовнішніх умов. До таких КС відносять:

- високочастотні коливальні контури зі стабільними параметрами  $L$  і  $C$ ;
- кварцові резонатори;
- лінії затримки й резонатори на поверхневих акустичних хвилях;
- порожні металеві й діелектричні резонатори (МР, ДР);
- резонатори на надпровідних матеріалах;

- резонансні лінії поглинання.

А тепер повернемося до особливостей схемотехнічного проектування транзисторних та діодних АГ.

### 8.1.2 Транзисторні автогенератори

Схеми транзисторних АГ розрізняють за способами здійснення зовнішнього позитивного ОЗ:

- схеми із трансформаторним ОЗ;
- схеми з ємнісним ОЗ (рис. 8.6, а), де напруга ОЗ знімається з ємності  $C_1$ ;
- схеми з індуктивним ОЗ (рис. 8.6, б), де напруга ОЗ знімається з індуктивності  $L_1$ .

Для отримання високостабільних коливань переважною є схема з ємнісним ОЗ. Вихідна й керуюча напруги  $U_{AE}$  і  $U_y$  знімаються з ємностей, що приводить до зменшення рівня вищих гармонік, оскільки ємнісний опір падає з ростом частоти. Для зниження рівня гармонік у схемі АГ з індуктивним ОЗ індуктивності зазвичай шунтуються додатковими ємностями.

Аналіз транзисторних АГ проведемо з використанням певної методики розрахунку, умовою виникнення й здійснення стаціонарних режимів, наведених у попередньому підрозділі.

1. Фазовий кут  $\varphi_{AE}$  між коливаннями перших гармонік струму  $i_{AE}(t)$  і напруги  $U_{AE}(t)$  залежить від фазових зсувів в АЕ та колі ОЗ. Якщо  $\pi/2 < \varphi_{AE} < 3\pi/2$ , то потужність  $P_- = 0,5 I_{AE} U_{AE} \cos \varphi_{AE}$  від'ємна, і вважають, що АЕ віддає потужність у резонатор.

2. Ураховуючи, що амплітуда першої гармоніки струму  $I_{AE1} = I'_{AE1} + I''_{AE1}$  – величина комплексна, то, поділивши її складові на загальну напругу  $U_{AE1}$ , отримаємо вираз для визначення комплексної вихідної провідності:

$$Y_{AE} = \frac{\dot{I}_{AE1}}{\dot{U}_{AE1}} = G_{AE} + j B_{AE}, \quad (8.3)$$

де  $G_{AE} = (\dot{I}_{AE1} / \dot{U}_{AE1}) \cos \varphi_{AE}$ ,  $B_{AE} = (\dot{I}_{AE1} / \dot{U}_{AE1}) \sin \varphi_{AE}$ .

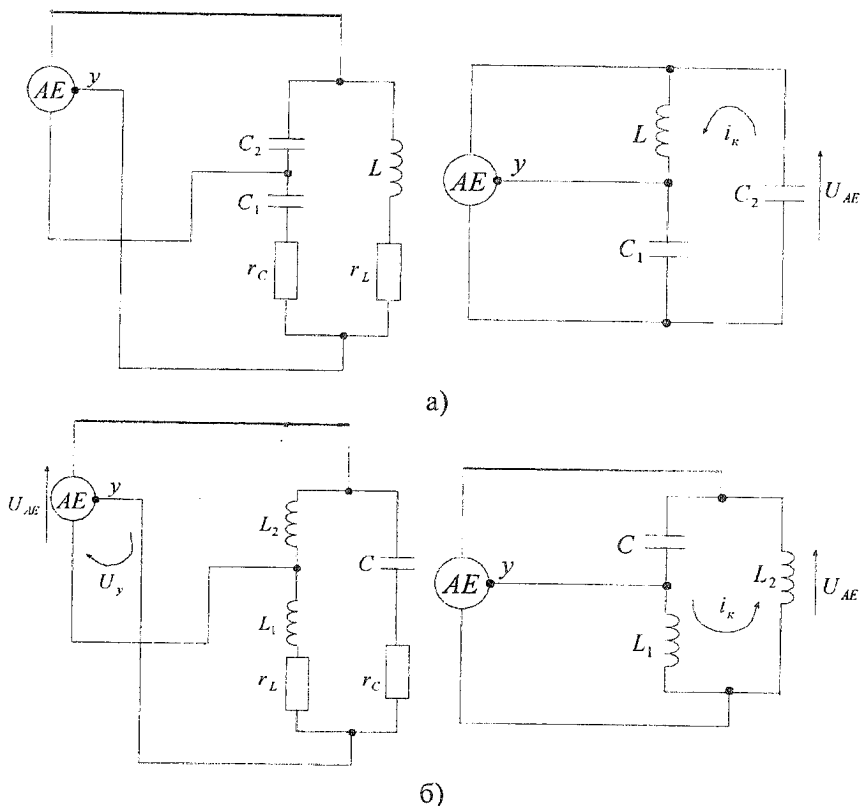


Рис. 8.6. Схема АГ з ємнісним (а) та індуктивним (б) ОЗ

Активний елемент віддає в резонатор максимальну потужність  $P_1 = P_- = 0,5 U_{AE1}^2 G_{AE1}$  (за заданої амплітуди першої гармоніки  $U_{AE1}$ ), якщо  $G_{AE} < 0$ , тобто при  $\varphi_{AE} = \pi$ . У цьому випадку коливання перших гармонік струму  $i_{AE}(t)$  і напруги  $U_{AE}(t)$  протифазні і  $B_{AE} = 0$ .

3. Динамічна вихідна ВАХ АЕ автогенератора така ж, як і ВАХ підсилювача потужності. При  $\varphi_{AE} = \pi$  така ВАХ має ділянку від'ємної крутизни. Таким чином, правильно вибраний від'ємний ОЗ приводить до появи ділянки від'ємної диференціальної провідності  $Y_{AE} = di/dU$  на динамічній вихідній ВАХ АЕ.

Для розрахунків АГ з використанням транзисторних АЕ необхідно використовувати такі параметри:

1. Усереднена за першою гармонікою перехідна крутизна АЕ  $S_1 = \dot{I}_{AE1} / \dot{U}_{y1}$ , де  $\dot{I}_{AE1}$  і  $\dot{U}_{y1}$  – комплексні амплітуди перших гармонік вихідних струмів і керуючої напруги.

2. Коефіцієнт ОЗ  $K_{O3} = \dot{U}_{y1} / \dot{U}_{AE1}$ , де  $\dot{U}_{y1}$  і  $\dot{U}_{AE1}$  – комплексні амплітуди перших гармонік керуючої та вихідної напруги АЕ. Під час розрахунків шунтуючим впливом АЕ на коливальний контур нехтуємо. Тоді основні співвідношення для розрахунку електричних схем мають вигляд:

а) для АГ з ємнісним ОЗ:

$$\dot{U}_{y1} = \frac{\dot{I}_{\text{конт}}}{j\omega C_1}, \quad \dot{U}_{\kappa 1} = -\frac{\dot{I}_{\text{конт}}}{j\omega C_2}, \quad K_{O3} = -|K_{O3}|, \quad |K_{O3}| = \frac{C_2}{C_1};$$

б) для АГ з індуктивним ОЗ:

$$\dot{U}_{y1} = \dot{I}_{y1} \cdot j\omega L_1, \quad K_{O3} = \frac{L}{L_2}.$$

3. Вихідна провідність АЕ  $Y_{AE} = \dot{I}_{AE1} / \dot{U}_{AE1}$ . Ураховуючи, що  $\dot{I}_{AE1} = \dot{U}_{y1} S_1$  і  $\dot{U}_{AE1} = \dot{U}_{y1} / K_{O3}$ , отримуємо  $Y_{AE} = S_1 K_{O3}$ .

Ураховуючи вирази для приведеної крутизни АЕ й коефіцієнта ОЗ та умову існування стаціонарного режиму АГ  $Y_{\kappa} = -Y_{AE}$ , отримаємо співвідношення:

$$\dot{S}_1 \dot{K}_{O3} Z_{\kappa} = -1, \quad (8.4)$$

де  $Z_{\kappa} = 1/Y_{\kappa}$  – опір коливального контуру в точках (затискачах) підключення АЕ. Якщо  $\dot{S}_1 = S_1 e^{j\varphi_s}$ ,  $\dot{K}_{O3} = K_{O3} e^{j\varphi_{O3}}$ ,  $Z_{\kappa} = |Z_{\kappa}| e^{j\varphi_{\kappa}}$ , то зі співвідношення (8.4) отримуємо:

– рівняння балансу амплітуд  $S_1 K_{O3} Z_{\kappa} = 1$ ;

– рівняння балансу фаз  $\varphi_s + \varphi_{O3} + \varphi_{\kappa} = \pi(2m - 1)$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$

Для збільшення стабільності частоти АГ доцільно використати режим АЕ, за якого уявна частина вихідної провідності  $Y_{AE}$  рівна нулю. При цьому генерація проходить на резонансній частоті резонатора  $\omega = \omega_p$ , коли  $\varphi_{\kappa} = 0$ . Тоді умова балансу фаз набуде вигляду:  $\varphi_s + \varphi_{O3} = \pi(2m - 1)$ .

Найбільш просто такий баланс досягається, коли  $i_{\kappa}(t)$  і  $U_y(t)$  синфазні, тобто  $\varphi_s = 0$ , а  $U_y(t)$  і  $U_{AE}(t)$  є протифазними, тобто  $\varphi_{O3} = \pi$ . Тоді  $Y_{AE} = G_{AE}$ ,  $B_{AE} = 0$ ,  $G_{AF} = -S_1 K_{O3}$ .

Стойкість стаціонарного режиму забезпечується виконанням умови:

$$\frac{d|G_{AE}|}{dU_{AE1}} \cdot \frac{dB_K}{d\omega} < 0.$$

Для збудження АГ необхідне виконання умов:  $G_0 < 0$ ,  $|G_0| > G_K$ , де  $G_0$  – дійсна частина вихідної провідності АЕ в режимі малого сигналу,  $G_K$  – дійсна частина провідності КС у точках підключення АЕ.

За малих амплітуд для транзисторного АГ маємо  $G_0 = G_{AE}$ ,  $|G_0| = K_{O3} \lim_{U_y \rightarrow 0} \frac{I_{AE1}}{dU_y} = K_{O3} \frac{di_{AE}}{dU_y} = S K_{O3}$ . Оскільки  $S > 0$ , то умова  $G_0 < 0$  виконується при правильному виборі фази коефіцієнта ОЗ, тобто при  $\varphi_{O3} = \pi$  (ОЗ позитивний). Умова  $|G_0| > G_K$  набуде вигляду  $S K_{O3} > G_K$ . Для надійного збудження коливань необхідно, щоб ця нерівність забезпечувалась із запасом, тобто  $S K_{O3} > (3 \div 5) G_K$ .

### 8.1.3 Діодні автогенератори на тунельних діодах, діодах Ганна і лавино-пролітних діодах

Діоди також відносять до активних елементів, які мають свої особливості під час конструювання АГ. Розглянемо кожний із них.

**1. Тунельний діод (ТД)** – це малопотужний генераторний діод з дуже вузьким  $p-n$ -переходом ( $p$ - і  $n$ -області сильно леговані), активні властивості якого проявляються в широкому діапазоні частот – від постійного струму до НВЧ. Такі властивості ТД дозволяють будувати АГ у широкому діапазоні частот з вихідною потужністю до 100 мкВт. Крім того, діод має важливу особливість – зберігає свої властивості як АЕ в умовах радіаційного опромінення. Еквівалентна схема ТД, його статична ВАХ і схема живлення подані на рис. 8.7.

Еквівалентна схема ТД містить генератор струму  $i_{AE}(U_{AE})$ , бар'єрну ємність  $p-n$ -переходу  $C_b(U_{AE})$ , опір утрат у напівпровіднику й контактах  $r_s$ , індуктивність виводів  $L_s$ . Типова ВАХ показана на рис. 8.7, б, де штриховою лінією приведена ВАХ для звичайного діода.

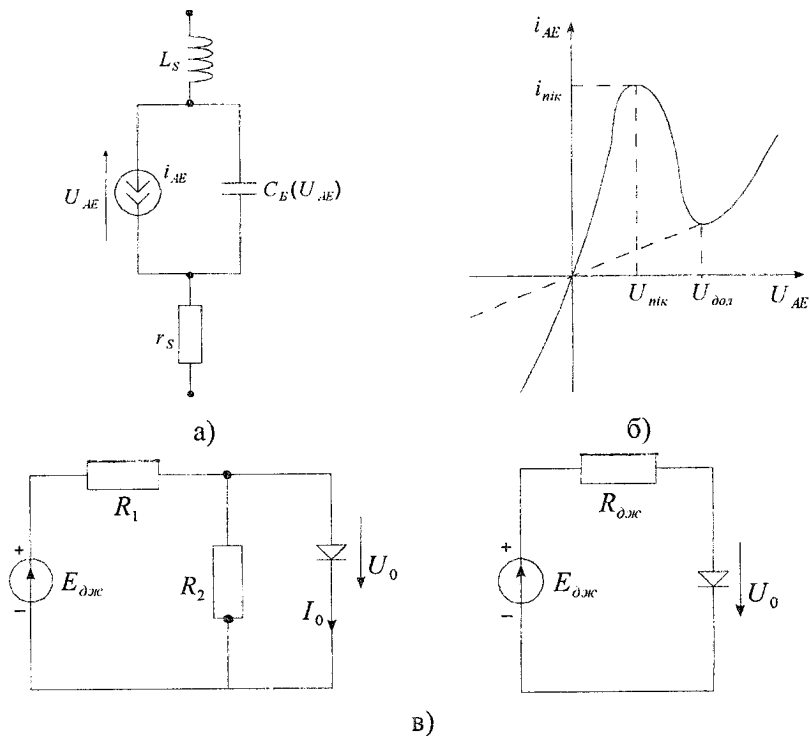


Рис. 8.7. Еквівалентна схема ТД (а), статична ВАХ генератора струму (б) і схема живлення (в)

Нижче подано особливості АГ на ТД :

1. Тунельний діод – це АЕ з ВАХ  $N$ -типу, тому КС (з урахуванням  $L_s$  і  $C_6$ ) у точках підключення генератора струму  $i_{AE}(U_{AE})$  повинна мати на заданій частоті паралельний резонанс (або резонанс струмів).

2. Область від'ємної крутизни існує за дуже малих  $U_{AE}$ . Напруга  $U_0$  повинна бути в межах  $U_{ник} < U_0 < U_{дол}$  ( $0,1 < U_0 < 0,6 B$ ). При  $E_{жс} = 1,5 B$  для захисту ТД у схемі АГ необхідно передбачити подільник напруги.

3. Існування області від'ємної крутизни не тільки на динамічній характеристиці (як у всіх АЕ), але й на статичній ВАХ вимагає забезпечення стійкості робочої точки за постійним струмом.



4. Наявність області від'ємної крутизни в ТД у широкому діапазоні частот може привести до самозбудження паразитних коливань. Тому в схему живлення включають антипаразитні резистори.

Режим роботи ТД за постійним струмом визначається схемою живлення, наведеною на рис. 8.7, в. Постійна напруга на ТД рівна  $U_0 = E'_{жс} - I_0 R_{джс}$ , де  $E'_{жс} = E_{жс} R_2 / (R_1 + R_2)$ ,  $R_{джс} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ .

Типова схема АГ на ТД подана на рис. 8.8, де:  $R_1 - R_2$  – подільник напруги;  $C_{бл}$ ,  $L_{бл}$  – елементи, які блокують джерело  $E'_{жс}$  від струмів високої частоти;  $C_1, C_2, L$  – елементи резонатора;  $C$  – елемент зв'язку. Для забезпечення високої стабільності частоти у схемі використане негативне підключення резонатора до діода через ємнісний подільник  $C_1 - C_2$ .

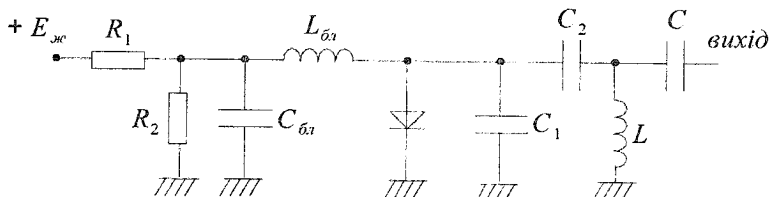


Рис. 8.8. Схема автогенератора на тунельному діоді

**2. Діодні автогенератори НВЧ.** У міліметровому і в короткохвильовій частині сантиметрового діапазону основними типами напівпровідникових активних елементів є діоди Ганна (ДГ) і лавино-пролітні діоди (ЛПД). Створені транзисторні пристрої на цих частотах поки що програють діодним за потужністю, надійністю й простотою технічної реалізації. На частотах більше  $10 \text{ ГГц}$  домінують діодні АГ, на частотах нижче  $10 \text{ ГГц}$  діодні АГ уже витісняються АГ на біполярних транзисторах, а в діапазоні  $10 \div 40 \text{ ГГц}$  – АГ на польових транзисторах.

Оскільки ККД діодних АГ не перевищує 5–20% при ЛПД та 5–7% при ДГ, то майже вся споживана від джерела живлення потужність (1–5 Вт) переходить у теплову, яку необхідно відвести від діода. При цьому температура кристала не повинна перевищувати  $150\text{--}200^\circ\text{C}$ , а значить, відведення тепла є важливою проблемою для таких АЕ.

Порівняльну характеристику в досягнутій потужності АГ на ДГ і ЛПД показано на рис. 8.9, а. На рис. 8.9, б наведено імпедансну характеристику ЛПД, яка визначає його високочастотні властивості.

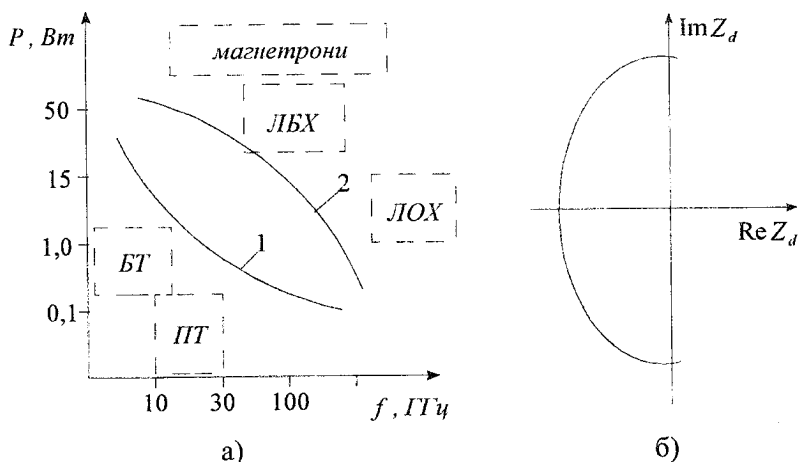


Рис. 8.9. Досягнуті значення потужності АГ у неперервному режимі (а): 1 – для ДГ; 2 – для ЛПД (для порівняння показані області при використанні як АЕ магнетронів ламп біжучої та оберненої хвиль, біполярних і польових транзисторів) та імпедансна характеристика ЛПД (б)

Високочастотні властивості АЕ визначаються за допомогою імпедансних характеристик – залежності від частоти дійсної та уявної частини повного опору:

$$Z_o(A_o, f, U) = -R_o + jX_o, \quad Y_o(A_o, f, U) = -G_o + jB_o,$$

де  $A_o = I_o$  для ЛПД,  $A_o = U_o$  для ДГ.

Зупинимося на особливостях АГ на діодах Ганна. Тут цікавим є те, що ДГ генерують коливання НВЧ за відсутності КС. Його ВАХ подана на рис. 8.10. Коли постійна напруга  $U_o$  на діоді перевищує порогову напругу  $U_{пор} = E_{пор} l$ , де  $E_{пор}$  – напруженість поля, яка рівна  $3-3,5 \text{ кВ/см}$  і відповідає максимуму ВАХ,  $l$  – довжина активної частини діода –  $n$ -шару. Частота коливання рівна величині, оберненій часу прольоту електронів через  $n$ -область:  $f_{np} = 1/t_{np} = v_{np}/l$  ( $v_{np}$  – дрейфова швидкість електронів). Для  $GaAs$   $v_{np} = 10 \text{ см/с}$ , а  $f_{np} = 100/l$ , де частота виражена в ГГц, а довжина в мкм.

На практиці в схему ДГ установлюють резонатор і частота коливань вже не рівна  $f_{np}$ , а рівна резонансній частоті резонатора. Застосування резонатора в схемі ДГ дозволяє:

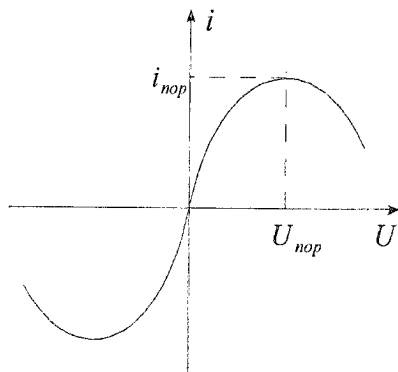


Рис. 8.10. ВАХ діода Ганна

- збільшити вихідну потужність і ККД АГ;
- налаштувати АГ на потрібну частоту й вести певне переналаштування;
- зменшити рівень вищих гармонік у навантаженні;
- зменшити ймовірність збудження паразитних коливань.

Сьогодні існує безліч конструкцій АГ на ДГ із хвилеводними чи порожніми резонаторами та МСЛ. Саме в генераторах на ДГ можливе існування різних

режимів генерації та підсилення НВЧ-коливань. На їх формування важливий вплив мають три часові параметри:  $\tau_o$  – час утворення домену в діоді,  $t_o$  – час переносу домену у зразку довжиною  $l$  від катода до анода,  $T_o$  – період підсиленних та згенерованих коливань. Параметри  $\tau_o$  і  $t_o$  залежать тільки від властивостей ДГ і визначаються як:

$$t_o = l/v_{op}, \quad \tau_o = k_o/n_o,$$

де  $n_o$  – концентрація носіїв в  $1 \text{ см}^3$ ,  $k_o$  – коефіцієнт, який визначає чистоту матеріалу. Період згенерованих коливань визначається здебільшого резонансною частотою зовнішнього електричного кола, підключеного до ДГ. Вибір режимів роботи генератора визначається відношеннями цих часових параметрів ( $t_o/\tau_o$ ,  $T_o/\tau_o$ ,  $t_o/T_o$ ).

Отже, дамо коротку характеристику режимам роботи ДГ.

1. Режим усталеного від'ємного опору:  $t_o/\tau_o < 1$ ,  $t_o/T_o = n$ , де  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Теоретично й експериментально встановлено, що ДГ з однорідним і стаціонарним розподілом електричного поля мають стійкий від'ємний опір на частотах, близьких до пролітної частоти або її гармонік, за умови, що диференціальна рухливість електронів від'ємна ( $f = 1/T_o$ ,  $f_{np} = 1/t_o$ ). Особливістю такого режиму є відсут-

ність статичного домену сильного поля. Цей режим використовують у генераторах НВЧ.

2. Режим біжучої хвилі:  $t_o/\tau_o < 1$ ,  $t_o/T_o = 1$ . У режимі біжучої хвилі за допомогою ВЧ-пристрою зв'язку, який розміщений поблизу катода ДГ з усталеним розподілом електричного поля, збуджується хвиля об'ємного заряду, яка експоненціально зростає в міру руху через діод і збуджує у вихідному ВЧ-пристрої зв'язку підсилені коливання. ДГ у такому режимі роботи використовують під час розробки підсилювачів НВЧ біжучої хвилі.

3. Доменний режим:  $t_o/\tau_o > 1$ ,  $T_o/t_o > 1$ . Такий режим характеризується тим, що в ДГ є наявні повністю сформовані домени, які рухаються від катода до анода. Такий режим роботи використовують у високостабільних генераторах НВЧ. Змінюючи опір навантаження, можна отримати три різні доменні режими – пролітний, із затримкою домену, з гасінням домену.

4. Пролітний режим ( $t_o/T_o \approx 1$ ) характеризується тим, що ДГ працює в низькодобротному контурі. Тут період власних коливань контуру рівний періоду проходження домену. Такий режим використовують рідко й лише в дослідних цілях.

5. У режимах із затримкою ( $t_o/T_o < 1$ ) і гасінням домену ДГ уже працюють у високдобротному контурі, й амплітуда ВЧ-коливань наближається до напруги живлення. Частота коливань визначається частотою НВЧ-контуру й характеризується високою стабільністю та високим ККД (> 10%).

6. Режим обмеженого накопичення об'ємного заряду:  $t_o/\tau_o > 1$ ,  $T_o/t_o < 1$ ,  $t_o/T_o > 1$ . У такому режимі утворення доменів подавлюється НВЧ-напругою, амплітуда якої є досить високою. У цьому режимі частота коливань не залежить від часу прольоту домену й визначається схемою резонатора, у якій працює ДГ. Тут ККД високий і складає > 20%. Такий режим ДГ використовують для отримання великої потужності АГ в імпульсному режимі.

7. Гібридні режими:  $t_o/\tau_o > 1$ ,  $T_o/t_o \approx 1$ ,  $t_o/T_o > 1$ . Цей режим займає проміжне значення між доменним режимом і режимом обмеженого накопичення об'ємного заряду. У такому режимі АГ не є чутливим до навантаження і має також високий ККД. Цей режим використовується як у неперервному, так і в імпульсному генеруванні НВЧ-коливань.

Проектування генераторів на ДГ включає в себе три етапи: вибір діода, формування топології, розрахунок елементів схеми.

Вибір діода проводять за частотою і вихідною потужністю.

Максимальна вихідна потужність, або ККД, АГ на заданій частоті досягається тоді, коли діод навантажений на деяку оптимальну провідність  $Y_K$ . Еквівалентна схема ДГ визначається тим, що наявність у ДГ збагачених шарів біполярних доменів робить його еквівалентним генератору струму  $i_r$ , паралельно якому увімкнено динамічну ємність  $C_o$  (рис. 8.11). Для забезпечення резонансу на частоті  $\omega_p$  провідність  $Y_K$  повинна мати уявну складову індуктивного характеру (для резонансу струмів):  $B_n = -1/(\omega_p L_n)$ . Індуктивність можна задавати й гіратором. Резонанс у схемі визначається частотою  $\omega_p = 1/(C_o L_n)$ .

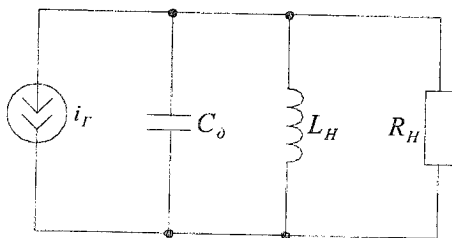


Рис. 8.11. Еквівалентна схема АГ на ДГ

А тепер для порівняння визначимо особливості АГ на ЛПД.

Лавино-пролітний діод – це напівпровідниковий діод, який працює в режимі лавинного помноження носіїв заряду при оберненому зміщенні електронно-діркового переходу й призначений для генерації НВЧ-коливань частотою 1–150 ГГц. Вихідна потужність АГ на ЛПД складає сотні міліват у міліметровому діапазоні й одиниці ват у сантиметровому. ККД великий і становить більше 10%.

ЛПД є також приладом з від'ємним диференціальним опором при електричному пробі й дрейфі носіїв заряду в напівпровіднику. Коли до діода прикладено високу напругу, то при напруженості поля  $E > 100 \text{ кВ/см}$  у напівпровіднику виникає ударна лавинна іонізація і струм різко зростає. ЛПД має ВАХ  $N$ -типу й тому для отримання гармонічних коливань необхідний паралельний резонанс

у точках підключення генератора струму, а для отримання стабільних коливань повинна виконуватись умова  $d|G|/dU < 0$ .

Умову генерації розглянемо на основі еквівалентної схеми АГ на ЛПД (рис. 8.12) і його динамічної ВАХ. Згідно із першим законом Кірхгофа цю еквівалентну схему можна описати співвідношенням:

$$\dot{I}_{Y_o} + \dot{I}_{Y_n} = 0, \quad Y_o = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}, \quad (8.5)$$

де  $\dot{I}_1$  і  $\dot{U}_1$  – комплексні амплітуди струму й напруги першої гармоніки на ЛПД.

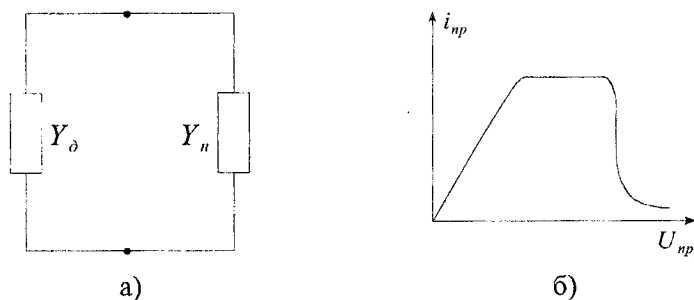


Рис. 8.12. Еквівалентна схема АГ на ЛПД (а) і його динамічна ВАХ (б)

Баланс потужностей запишеться у вигляді  $|U_1|^2 Y_o + |U_1|^2 Y_n = 0$ . Активна потужність на навантаженні є додатною:  $P_n = |U_1|^2 \operatorname{Re}|Y_n|$ . Звідси випливає, що  $|U_1|^2 \operatorname{Re}|Y_n| = -P_n$ , тобто провідність  $Y_o$  ЛПД повинна мати від'ємну дійсну частину при існуванні в системі НВЧ-коливань. Наявність від'ємної провідності характеризує трансформацію енергії – напівпровідниковий діод споживає енергію постійного струму і є джерелом НВЧ-коливань.

Еквівалентні схеми АГ на ЛПД подані на рис. 8.13. Тут пролітна область представлена усередненою на першій гармоніці від'ємною провідністю  $G_{AE} = \dot{I}_{np1} / \dot{U}_{np1}$ , де  $\dot{I}_{np1}$  і  $\dot{U}_{np1}$  – комплексні амплітуди першої гармоніки струму й напруги пролітної області, яка включена паралельно ємності пролітної області  $C_{np}$ . Сама ла-

винна область представлена реактивним опором  $jX_n$ . На схемі втрачені індуктивність виводів діода  $L_0$  і ємність корпусу  $C_{кор}$ . Резонатор зображено у вигляді комплексної провідності  $Y_p$ , який увімкнено в навантаження генератора.

На частоті генерації еквівалентна схема АГ на ЛПД має вигляд, поданий на рис. 8.13, б. Тут  $R_n$  – еквівалентний опір навантаження ЛПД,  $L_n$  – еквівалентна індуктивність коливальної системи,  $C_{np}$  – ємність пролітної області ЛПД.

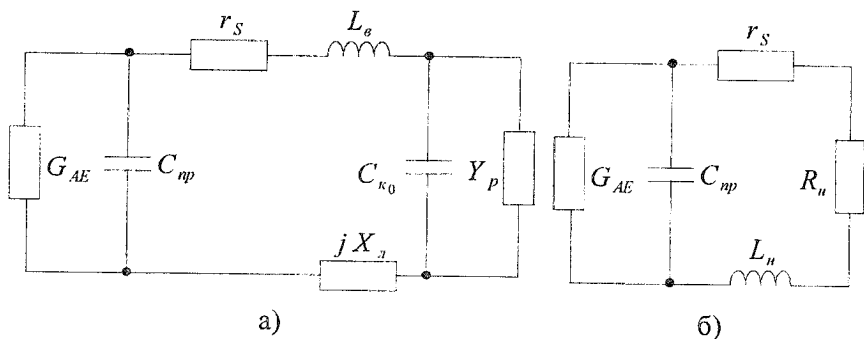


Рис. 8.13. Еквівалентні схеми АГ на ЛПД

Генератори на ЛПД проектується таким чином, щоб отримати максимальну потужність у навантаженні  $R_n$ :  $P_n = 0,5 I_{n1}^2 R_n$ , де  $I_{n1}$  – амплітуда струму першої гармоніки, який протікає через навантаження. Оскільки коливальна потужність першої гармоніки  $P_1 = 0,5 I_{n1}^2 (R_n + r_s)$ , то  $I_{n1}^2 = P_1 / [0,5 (R_n + r_s)]$  і  $P_n = P_1 R_n / (R_n + r_s)$ . У той же час коливальна потужність  $P_1$  визначається через  $|G_{AE}|$ :

$$P_1 = 0,5 I_{np1}^2 / |G_{AE}| = 0,5 U_{np1}^2 |G_{AE}|,$$

де  $G_{AE}$  – провідність ЛПД,  $G_{AE} = G_0 = \frac{I_{np1}}{U_{np1}} \Big|_{U_{np1} \rightarrow 0} = \frac{I_0}{U'_{zp}} = G_{kmin} \frac{I_0}{I_{AEmin}}$ .

Схема АГ працює в одному із трьох режимів: малих амплітуд (I), великих амплітуд (II), перенапруженому режимі (III). Коливальна характеристика ЛПД подана на рис. 8.14. Кожному режиму відповідає своє значення максимальної коливальної потужності  $P_1$

ЛПД за оптимального опору навантаження  $R_n = \frac{I_0}{\omega_{np}^2 C_{np}^2 U_{zp}''}$ ,

$$G_{\kappa \min} = \omega_{zp}^2 C_{np}^2 r_s :$$

- для режиму малих амплітуд

$$P_{n \max}^I = \frac{1}{2} \frac{I_{0 \min} (I_0 - I_{0 \min})}{G_{\kappa \min}};$$

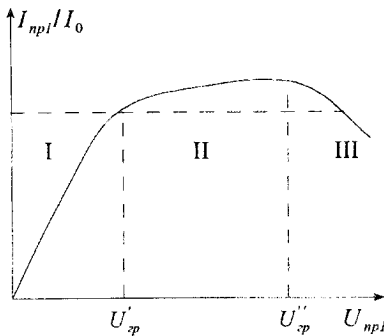
- для режиму великих амплітуд

$$P_{n \max}^{II} = \frac{1}{2} \frac{I_0^2 R_n}{\omega_{np}^2 C_{np}^2 (R_n + r_s)^2};$$

- для перенапруженого режиму

$$P_{n \max}^{III} = \frac{1}{2} U_{zp}^2 |G_{AE}| \frac{R_n}{R_n + r_s} = \frac{1}{2} (U_{zp}'')^2 \omega_{np}^2 C_{np}^2 R_n.$$

Для 2-го і 3-го режимів оптимальний опір визначається співвідношенням:



$$R_n = r_s \left( \frac{I_0}{I_{0 \min}} - 1 \right).$$

У виразах для  $P_{n \max}$

прийняті такі позначення:  
 $I_{np1}$ ,  $U_{np1}$  – комплексні амплітуди першої гармоніки струму й напруги пролітної області;  $I_0$  – постійна складова струму ЛПД;  $I_{0 \min}$  – мінімальний постійний струм ЛПД;

Рис. 8.14. Коливальна характеристика ЛПД

$G_{\kappa \min}$  – дійсна частина провідності КС у точках підключення від'ємної провідності  $G_{AE}$ ;  $r_s$  – опір утрат ЛПД;  $U_{zp}'$ ,  $U_{zp}''$  – амплітуди напруги  $U_{np1}$ , що відповідають першій і другій точкам коливальної характеристики ЛПД (рис. 8.14).



## 8.2 Особливості проектування підсилювачів потужності НВЧ

Підсилювач потужності (ПП) – один з основних каскадів радіопередавальних пристроїв, який призначений для підсилення потужності височастотних електромагнітних коливань, створених зовнішнім пристроєм збудження, шляхом перетворення енергії постійного електричного поля в енергію електромагнітних коливань. Елементи, які перетворюють енергію постійного електричного поля в енергію електромагнітних коливань, називають, як і у випадку АГ, активними елементами (АЕ).

Схема підсилювача потужності (рис. 8.15) включає: АЕ, узгоджуючі кола (входу й виходу), кола живлення та зміщення. На вхід ПП поступає електромагнітне коливання частоти  $f$  від попереднього каскаду, який називають збуджувачем. Навантаженням ПП є вхідний опір наступного каскаду або лінії (антенно-фідерного пристрою), що веде до антени.

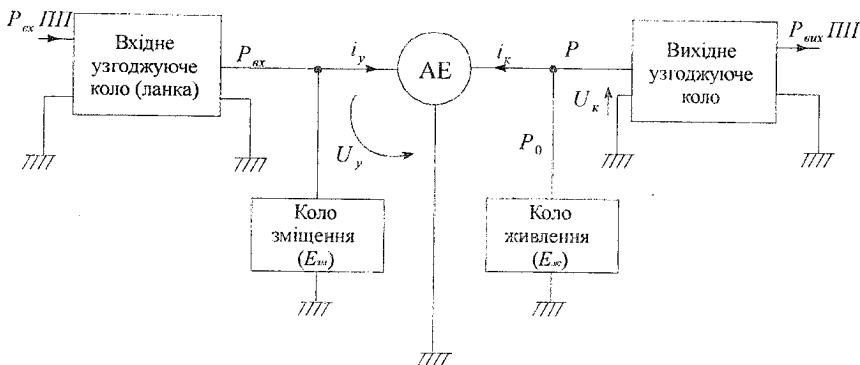


Рис. 8.15. Функціональна схема підсилювача потужності

Узгоджуючі кола (ланки) виконують дві основні функції:

1) узгодження: перетворення опору для найбільш повної передачі вхідної потужності до АЕ і вихідної потужності від АЕ до навантаження. При цьому вхідна ланка чи коло перетворюють вхідний опір, рівний внутрішньому опору збуджувача, а вихідна ланка чи коло – опір навантаження в деяку величину опору, необхідного для отримання оптимального режиму роботи АЕ;

2) фільтрації: забезпечення разом з колами живлення й зміщення коливання струму й напруги на електродах АЕ форми, що відповідає його оптимальному режиму.

Коло живлення містить у собі джерело постійної напруги  $E_{ж}$  і блокуючі елементи, які розділяють кола постійного й змінного струмів.

Коло зміщення складається із джерела фіксованого постійного струму (напруги)  $E_{зм}$  або ланки автоматичного зміщення робочої точки АЕ та блокуючих елементів.

Крім того, у склад ПП можуть входити ланки корекції, антипаразитні ланки, що запобігають збудженню паразитних коливань, елементи захисту від перевантаження.

Для характеристики ПП застосовують такі основні параметри:

- вихідна потужність у навантаженні  $P_{вих III}$ ;
- вхідна потужність  $P_{вх III}$ ;
- вхідна потужність, яка підводиться до АЕ  $P_{вх}$ ;
- коефіцієнт підсилення потужності  $K_p = P_{вих III} / P_{вх III}$ ;
- діапазон робочих частот  $f_{min} \div f_{max}$ ;
- відносна робоча смуга частот  $\frac{\Delta f}{f_{сеп}} = 2 \frac{f_{max} - f_{min}}{f_{max} + f_{min}}$ ;
- потужність постійного струму, що споживається АЕ від джерела живлення  $P_0$ ;
- повний ККД ПП  $\eta = P_{вих III} / (P_0 + P_{вх III})$  або  $\eta = (P_{вих III} - P_{вх III}) / P_0$ , бо  $P_{вх III} \ll P_0$ , тому  $\eta \approx P_{вих III} / P_0$ ;
- коливальна потужність (потужність, яка віддається АЕ в зовнішнє коло)  $P_\kappa = \sum P_n$ , де  $P_n$  – потужність  $n$ -ої гармоніки;
- електронний ККД  $\eta_e = P_\kappa / (P_0 + P_{вх III})$  або  $\eta_e \approx P_\kappa / P_0$ ;
- ККД першої гармоніки  $\eta_1 = P_1 / P_0$ ;
- коефіцієнт передачі вхідної узгоджуючої ланки  $k_{вх} = P_{вх} / P_{вх III}$ ;
- коефіцієнт передачі вихідної узгоджуючої ланки  $k_{вих} = P_{вих III} / P_1$ ;
- коефіцієнт підсилення АЕ  $K_p = P_1 / P_{вх}$ ;

- потужність, що розсіюється на АЕ,  $P_{роз} = P_0 - P_k$ ;
- відносний рівень побічних коливань  $k_{ноб} = 10 \lg \left( \frac{1}{P_{вих\ ПП} \sum P_i} \right)$ ;
- потужність  $i$ -го коливання (гармоніки) зовні  $\Delta f_{роб} - P_i$ .

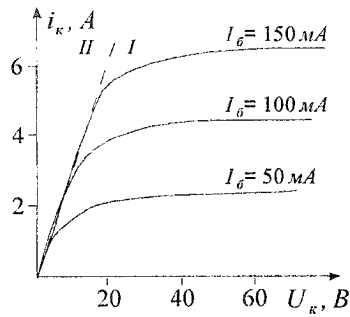
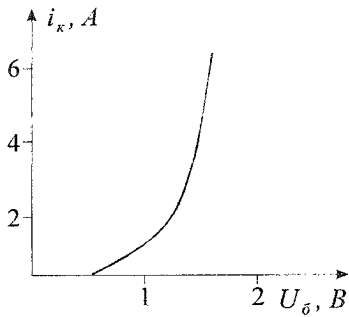
Звичайно, найбільш важливими параметрами ПП є: вихідна потужність, електронний ККД (указує на покращення теплового режиму АЕ) і коефіцієнт підсилення (важливий для НВЧ-діапазону).

Крім енергетичних і частотних параметрів, робота ПП характеризується рядом інших показників: надійністю, стійкістю до зміни зовнішніх умов, технологічністю конструкції.

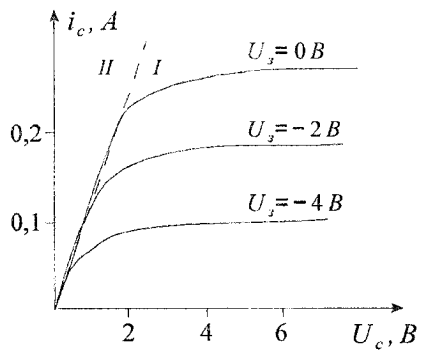
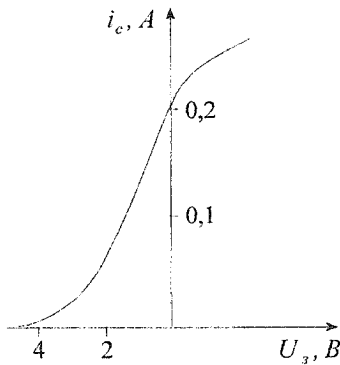
Перераховані вище параметри ПП визначаються АЕ. Тому вибір АЕ залежить від значення робочої частоти (смуги), потужності й від призначення ПП (радіопередавальних чи радіоприймальних пристроїв). Найбільш часто в ПП використовують біполярні транзистори (БТ) і польові транзистори (ПТ), в особливих випадках – активні діоди. Під час розгляду матеріалу вважатимемо, що БТ включається за схемою із загальним емітером (ЗЕ), а польовий – із загальним витоком (ЗВ). Тому доцільно знати й уміти використовувати статичні ВАХ для БТ і ПТ (рис. 8.16).

Залежності  $I_{ax}(U_{ax}, U_{вих})$  при постійній напрузі  $U_{вих}$  називають перехідними характеристиками. Для ПТ з керуючим  $p-n$ -переходом типовими є так звані ліві характеристики. Це означає, що основна робоча область перехідної характеристики розміщена зліва від осі  $U_{ax} = 0$ . Для нормальної підсилювальної роботи АЕ на його вхід слід подати запірну напругу.

Характеристики БТ і МДН (метал-діелектрик-напідпровідник) транзисторів є вже правими. Вони починаються при  $U_{ax} > 0$ , тобто справа від точки  $U_{ax} = 0$ . У робочому режимі на вхід таких АЕ вже потрібно подавати відпираючу напругу.



а)



б)

Рис. 8.16. Статичні перехідна та вихідні ВАХ для біполярного (а) і польового (б) транзисторів

Площини перехідних характеристик можна розділити на дві області:

- область I – вихідна напруга  $U_{вих}$  впливає на  $i_{вих}$  значно слабше, ніж  $U_{вх}$ ;
- область II – вплив  $U_{вх}$  на  $i_{вих}$  такий же, як і  $U_{вх}$ .

Особливістю перехідних характеристик є існування деякої напруги (струму) на керуючому електроді, нижче за яку вихідний струм рівний нулю. Така напруга називається напругою відсічки  $U_{відс}$  вихідного струму.

Залежності  $i_{\text{вих}}(U_{\text{вих}})$  при постійній напрузі  $U_{\text{вх}}$  називають вихідними статичними характеристиками. На вихідних характеристиках теж є яскраво виражені дві області:

- область I – недонапружена, коли  $U_{\text{вих}}$  слабо впливає на вихідний струм;
- область II – перенапружена, коли спостерігається сильний зв'язок вихідної напруги зі струмом.

Обидві області умовно розділені лінією граничних режимів, проведеною через точки перегину характеристик. В області II, яку називають областю насичення, відкривається колекторний перехід, що приводить до різкого збільшення струму бази.

З аналізу статичних характеристик (рис. 8.16) випливає, що ВАХ різних АЕ приблизно однакові; різниці в їх характеристиках є лише кількісною. Така подібність ВАХ дозволяє використати єдину форму їх апроксимації й застосувати єдину методику аналізу та розрахунку електричного режиму для всіх видів АЕ. Прийнятий варіант апроксимації ВАХ називається полігональним або кусково-лінійним і забезпечує досить високу точність розрахунку.

Вибір АЕ залежить від робочих частот, потужності передавальних пристроїв. Радіопередавачі малої й середньої потужності будуються на транзисторах, використовуючи мостові схеми додавання потужностей (до  $10 \text{ кВт}$ ) і додавання потужностей у просторі. Зокрема, фазована антенна ґратка РЛС (радіолокаційна станція), яка працює на частоті  $450 \text{ МГц}$ , віддає імпульсну потужність  $600 \text{ кВт}$ , використовуючи 25-ватні БТ.

ПТ мають певні переваги перед біполярними. У БТ існує механізм додатного ОЗ: ріст температури веде до збільшення струму транзистора, що викликає додатний розігрів для теплового пробою. На відміну від БТ, температурний коефіцієнт струму ПТ є вже від'ємним. Це полегшує задачу створення більш потужних ПТ, їх паралельне включення, застосування в ширококутових підсилювачах та застосування їх у режимі класу А, найбільш небезпечному для потужних НВЧ БТ.

Друга важлива перевага ПТ – це відсутність процесів накопичення та розсмоктування зарядів, що підвищує швидкодію ПТ у порівнянні з БТ. Тому граничні робочі частоти ПТ у декілька разів вищі.

Дамо тепер визначення безінерційності АЕ. Безінерційний АЕ – це триелектродний прилад, у якому зв'язок між миттєвими значеннями струмів і напруг на електродах визначається його статичними ВАХ.

Використовуючи полігональну апроксимацію статичних характеристик АЕ (безінерційних), отримуємо такі вирази для перехідної і вихідної характеристик.

*Перехідна характеристика:*

- для недонапруженої області  $i_k = S(U_y - U_{\text{відс}})$ , де  $S = di_k/dU_y$ ,
- крутизна статичної ВАХ;
- для перенапруженої області (насичення)  $i_k \neq i_k(U_y)$ .

*Вихідна характеристика:*

- для перенапруженої області  $i_k = S_{zp} U_k$ , де  $S_{zp} = di_k/dU_k$  – крутизна лінії граничних режимів;
- для недонапруженої області (насичення)  $i_k \neq i_k(U_k)$ .

Розглянемо тепер режим роботи АЕ в ПП. Електричні режими роботи АЕ відрізняються формою коливань струмів і напруг на вхідному й вихідному електродах і числовими значеннями електричних величин. Оптимальним вважається режим, який відповідає максимальному значенню вихідної потужності й електронного ККД, а в діапазоні НВЧ – ще й максимальному коефіцієнту підсилення потужності.

Корисний результат ПП полягає в тому, щоб у навантаження передавалася максимальна для даного АЕ потужність першої гармоніки. Вихідна потужність АЕ рівна:

$$P_{\text{вих}} = 0,5 U_{k1} I_{k1} \cos \varphi_k, \quad (8.6)$$

де  $U_{k1}$ ,  $I_{k1}$  – амплітуди перших гармонік колекторної напруги і струму,  $\varphi_k$  – фазовий зсув між коливаннями перших гармонік  $U_k$  та  $i_k$ .

Для передачі потужності в навантаження необхідно, щоб  $\pi/2 < \varphi_k < 3\pi/2$ . Потужність, що передається в навантаження, буде максимальною, коли  $\varphi_k = \pi$  ( $\cos \varphi_k = 1$ ), тобто коливання перших гармонік струму й напруги будуть протифазними. У цьому випадку  $P_{\text{вих}} = P_- = -P_1$ , де  $P_1 = 0,5 U_{k1} I_{k1}$  – потужність першої гармоніки.

Потужність  $P_1$  можна збільшити двома шляхами:

1. Збільшення амплітуд  $U_{k1}$  і  $I_{k1}$ . Таке збільшення є можливим, коли амплітуди  $U_{k1}$  і  $I_{k1}$  змінюються в допустимих межах. Так, для кожного АЕ існують допустимі значення напруги й струму, амплітуди яких мають допустимі значення  $0 \div U_{k\text{доп}}$  і  $0 \div i_{k\text{доп}}$ . Крім того,  $P_i = \eta_1 P_0$ , де  $P_0$  – потужність джерела живлення, а  $\eta_1$  – ККД першої гармоніки. Тоді, вводячи поняття “пік-факторів струму і напруги”  $p_i = i_{k\text{макс}} / I_{k0}$ ,  $p_u = U_{k\text{макс}} / E_{ж}$ , отримаємо, що  $P_{i\text{макс}} = \eta_1 U_{k\text{доп}} i_{k\text{доп}} / p_u p_i$ . Таким чином, потужність першої гармоніки може бути збільшена за рахунок збільшених допустимих значень  $U_{k\text{доп}}$ ,  $i_{k\text{доп}}$ ,  $\eta_1$ , а  $p_u$ ,  $p_i$  – малі.

2. Збільшення електронного ККД і ККД першої гармоніки. Електронний ККД  $\eta_e = 1 - P_{\text{роз}} / P_0$ , де  $P_{\text{роз}} = \frac{1}{T} \int U_k(t) i_k(t) dt$  – середня потужність, яка розсіюється на колекторі АЕ ( $\eta_e \rightarrow 1$ , коли  $P_{\text{роз}} \rightarrow 0$ ). Потужність, що розсіюється, рівна нулю, коли в кожний момент часу напруга або струм рівні нулю. У цьому випадку вся потужність  $P_0$  джерела живлення перетворюється в потужність коливачів і  $\eta_e \rightarrow 1$ .

Теоретично  $\eta_e < 1$ , бо потужність передається в навантаження і на вищих гармоніках частоти  $f_p$ . Тоді постає задача створення режимів, за яких залежності  $U_k(t)$  та  $i_k(t)$  є протифазними й забезпечують  $P_{\text{роз}} = 0$ , а пік-фактори струму й напруги є мінімальними. Такі умови виконуються тільки в ключових режимах роботи АЕ, у яких одна частина періоду коливачів АЕ знаходиться у відкритому стані ( $i_k \neq 0$ ,  $U_k \approx 0$  – насичення), а друга – у закритому ( $i_k = 0$ ,  $U_k = \text{макс}$  – відсічка). Цей режим забезпечує  $P_{\text{роз}} \cong 0$ , тобто електронний ККД  $\eta_e = 1$ .

Для практичної реалізації ключового режиму й отримання протифазних залежностей  $U_k(t)$  і  $i_k(t)$  на вхід АЕ подають напругу у формі меандру й забезпечують постійне резистивне навантаження ПП на першій гармоніці. У цьому випадку миттєве значення напруги на колекторі  $U_k(t) = E_{ж} - i_k(t) R_k$  повторює форму струму  $i_k(t)$ , а

перша гармоніка напруги зсунута на  $\pi$  по відношенню до першої гармоніки струму.

У високочастотних ПП на напівпровідникових АЕ, де не вдається отримати меандрові форми коливань, найбільше поширення отримали режими роботи з гармонічною вихідною напругою:  $U_{\kappa}(t) = E_{\text{жс}} - U_{\kappa 1} \cos \omega t$  (рис. 8.17). У такому режимі  $\eta_c = \eta_1$ .

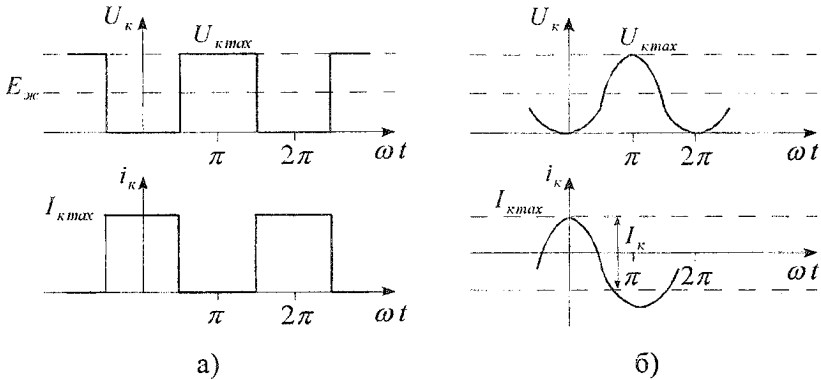


Рис. 8.17. Залежності  $U_{\kappa}(t)$  та  $i_{\kappa}(t)$  для ключового режиму роботи АЕ (а) і режиму з гармонічною напругою й відсіркою вихідного струму (б)

Розглянемо більш детально реалізацію режиму з відсіркою вихідного струму. Залежності  $U_{\kappa}(\omega t)$  та  $i_{\kappa}(\omega t)$ , які зображені на рис. 8.17, б, отримують завдяки існуванню напруги відсічки на перехідній ВАХ АЕ. Для цього необхідно:

1) збудити АЕ гармонічною напругою  $U_y = E_{\text{зм}} + U_{y1} \cos \omega t$ , де  $U_y$  – миттєве значення напруги на керуючому електроді,  $E_{\text{зм}}$  – постійна напруга зміщення,  $U_{y1}$  – амплітуда першої гармоніки напруги на керуючому електроді;

2) вибрати таке значення  $E_{\text{зм}}$ , щоб вихідний струм існував тільки в частині додатної половини періоду керуючої напруги ( $E_{\text{зм}} \leq U_{\text{відс}}$ );

3) застосувати вихідну узгоджуючу ланку, яка фільтрує вищі гармоніки на її виході.



Отримання косинусоїдальних імпульсів вихідного струму демонструє рис. 8.18. Проаналізуємо отримані результати. Струм колектора  $i_k = S U_{y1}$ . Кут відсічки колекторного струму  $\theta$  визначається параметрами  $E_{зм}$ ,  $U_{y1}$ ,  $U_{відс}$ . Оскільки  $i_k = S(U_y - U_{відс})$ , а  $U_y = E_{зм} + U_{y1} \cos \omega t$ , то  $i_k = S(E_{зм} + U_{y1} \cos \omega t - U_{відс})$ . Ураховуючи, що при  $\omega t = \theta$   $i_k = 0$ , а при  $\omega t = 0$   $i_k = i_{k \max}$ , отримуємо, що  $\cos \theta = (U_{відс} - E_{зм}) / U_{y1}$ ,  $I_{k \max} = S U_{y1} (1 - \cos \theta)$ .

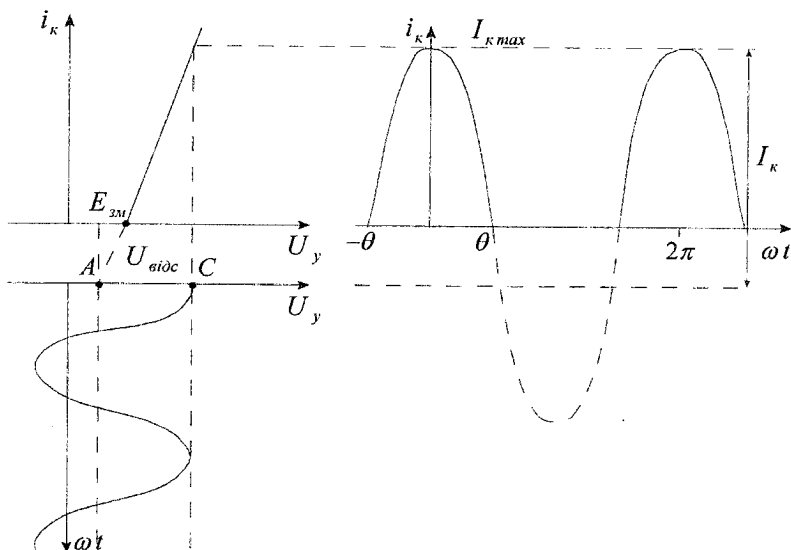


Рис. 8.18. Формування косинусоїдальних імпульсів колекторного струму БТ

Таким чином, послідовність процесів у ПП можна подати в такому порядку:

- вхідна узгоджуюча ланка фільтрує коливання збуджувача, перетворюючи їх у гармонічну форму;
- на керуючий вхід АЕ подається напруга  $E_{зм}$ , яка забезпечує режим роботи з відсічкою колекторного струму (клас АВ:  $\theta \leq 180^\circ$ ; клас В:  $\theta = 90^\circ$ ; клас С:  $\theta = 60 \div 90^\circ$ );

– імпульси косинусоїдальної форми, проходячи через фільтруючу вихідну узгоджуючу ланку, створюють напругу на її опорі навантаження.

Коливання колекторного струму  $i_k$  є протифазні коливанням напруги  $U_k$ . Перша гармоніка  $I_{k1}$  теж протифазна  $U_{k1}$ . Фазовий кут між  $i_k$  і  $U_k$   $\varphi_k = \pi$ , якщо вхідний опір вихідної ланки  $R_{k1}$  є активним. Це означає, що АЕ віддає у зовнішнє коло найбільшу потужність першої гармоніки і  $U_{k1} = I_{k1} R_{k1}$ .

Як було зазначено раніше, на вихідних статичних ВАХ АЕ можна виділити дві області: недонапружену I і перенапружену II. При періодичних змінах напруги  $U_{ox}$  і  $U_{вх}$  робоча точка АЕ переміщується в площині  $i_k - U_k$  і формує динамічну ВАХ. Залежно від того, у якій області ВАХ знаходиться робоча точка, розрізняють такі режими: недонапружений, критичний і перенапружений.

Для класифікації режимів роботи АЕ за ступенем впливу вихідної напруги на закон зміни вихідного струму використаємо динамічну характеристику, яка пов'язує миттєві значення вихідного струму  $i_k$  та вихідної напруги  $U_k$ . Для безінерційного АЕ динамічна вихідна ВАХ записується так:

– у недонапруженому режимі

$$i_k = \begin{cases} -S_{\text{ом}} (U_k - U'_k) & \text{при } U_k > U'_k, \\ 0 & \text{при } U_k < U'_k, \end{cases}$$

де  $S_{\text{ом}} = 1 / [\gamma_1(\theta) R_k]$  – крутизна динамічної характеристики,  $U'_k = E_{\text{жк}} + S \gamma_1(\theta) R_k (E_{\text{зм}} - U_{\text{відс}})$ ,  $\gamma_1(\theta)$  – коефіцієнт Фур'є для першої гармоніки (відношення  $i_{k1} / i_k$ );

– у перенапруженому режимі

$$i_k = S_{\text{сп}} U_k.$$

Апроксимована динамічна ВАХ показана на рис. 8.19, а. Ділянки I відповідає недонапружений режим, ділянки II – перенапружений режим, точка А відповідає граничному (критичному) режиму. Як бачимо, на динамічній характеристиці є область від'ємної крутизни. Це означає, що для вихідного кола підсилювача АЕ являє собою від'ємну провідність, тобто він здатний віддавати потужність у

зовнішнє коло. Форми коливань для всіх режимів динамічної ВАХ подані на рис. 8.19, б.

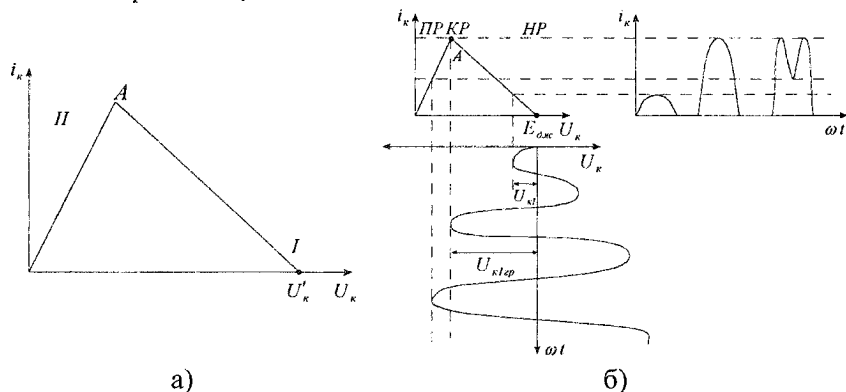


Рис. 8.19. Апроксимована динамічна вихідна ВАХ АЕ (а) і форми вихідного струму АЕ для різних режимів роботи АЕ (б)

### 8.2.1 Польові транзистори в підсилювачах потужності

У діапазоні високих частот (до  $2\text{ ГГц}$ ) у ролі АЕ застосовують потужні польові МОН-транзистори, у діапазоні НВЧ (до  $50\text{ ГГц}$ ) – ПТ із затвором Шотткі (ПШТ). ПТ включають за аналогією з БТ за схемою із загальним витоком, що дозволяє отримувати максимальний коефіцієнт підсилення потужності. Режим роботи ПТ вибирають таким чином.

До затвору підводять:

- постійну напругу зміщення  $E_{зм}$  (“+” або “-”), за якої забезпечується робота з відсічкою струму стоку;

- напругу збудження  $U_z(t)$ , причому струм стоку існує тільки протягом тієї частини періоду коливань, коли миттєва напруга на затворі перевищує напругу відсічки  $U_{відс}$ .

На стік подається постійна додатна напруга  $E_{жк}$ , яка викликає протікання струму основних носіїв заряду – електронів по каналу  $n$ -типу. На рис. 8.20 подано структури комірок ПТ та їх еквівалентну схему. В еквівалентній схемі прийняті такі позначення:  $L_3$ ,  $L_C$ ,  $L_B$  – індуктивності виводів затвору, стоку й витоку відповідно;  $r_3$  – опір утрат у металі затвору;  $r_B$ ,  $r_C$  – опір утрат контактів з боку

витоку й стоку;  $R_{\text{кан}}$  – опір каналу між областями витоку й стоку;  $C_{\text{CB}}$  – ємність між контактами витік-стік.

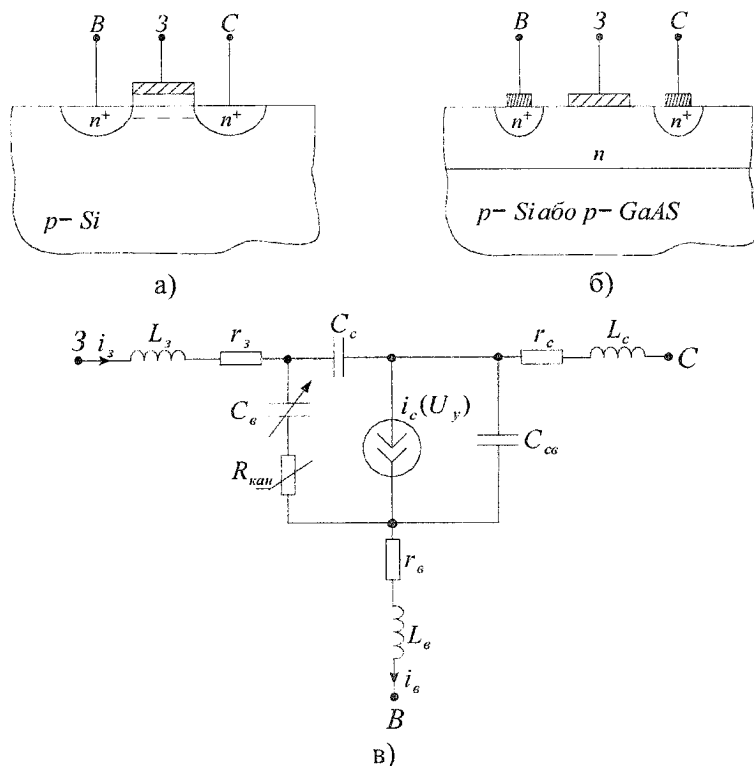


Рис. 8.20. Структури МДН- (а) і ПТШ- транзисторів (б) та їх еквівалентна схема (в)

МДН-транзистор виготовляється на  $Si$  і являє собою паралельне об'єднання певного числа однотипних комірок. Постійний струм електронів у каналі, який виникає під час подачі додатного зміщення на стік, може бути промодульований завдяки дії поперечного електричного поля, що змінює концентрацію електронів у каналі  $n$ -типу. ПТШ виготовляють із  $GaAs$ , рідше із  $InP$ . Такі напівпровідникові матеріали в порівнянні із  $Si$  мають більш високі значення рухливості носіїв заряду, що дозволяє зменшити пролітний час і підвищити швидкодію та максимальну робочу частоту. Недоліком

*GaAs* у порівнянні із *Si* є менша у 2–3 рази теплопровідність, що утруднює створення потужних приладів та ІС. *InP* переважає *GaAs* за рухливістю носіїв заряду й теплопровідності, проте поступається йому за пробивною напругою й має більші значення струмів утрат.

Поперечне електричне поле в ПТШ, яке модулює густину потоку електронів у каналі, утворюється при оберненому зміщенні бар'єра Шотткі. У цьому випадку під затвором виникає область, збіднена електронами. Тоді, змінюючи напругу на затворі, можна змінювати глибину збідненої області, тобто висоту каналу, а відповідно струм стоку. На ПТ НВЧ вдається отримувати такі ж потужності, як і на БТ, але на частотах приблизно в 3–5 разів вищих.

Розглянемо тепер особливості еквівалентної схеми ПТ.

Найбільш важливим елементом еквівалентної схеми МДН-транзистора є генератор, струм якого  $i_c$  залежить від керуючої напруги  $U_y$  на ємності  $C_B$ .

Тут справедливе таке співвідношення:

$$i_c = \begin{cases} S(U_y - U_{відс}) & \text{при } U_y > U_{відс}, \\ 0 & \text{при } U_y < U_{відс} \end{cases} \quad (\text{канал повністю збіднений електронами}).$$

Решту елементів еквівалентної схеми можна вважати лінійними.

Струм генератора в еквівалентній схемі ПТШ може бути поданий аналогічним виразом, як і для МДН-транзистора. Ємність збідненого шару з боку витоку визначається як диференціальна величина з ВАХ:

$$C_B(U_y) = C_B(U_{y0}) \left( \frac{\varphi_B - U_{y0}}{\varphi_B + U_{y0}} \right)^{1/3} = \frac{dq_B}{dU_y},$$

де  $dq_B$  і  $U_y$  – заряд і керуюча напруга на ємності  $C_B$ ;  $\varphi_B$  – потенціал бар'єра Шотткі ( $\varphi_B = 0,6 \div 0,75 \text{ В}$ );  $C_B(U_{y0})$  – ємність при постійному зміщенні  $U_{y0}$ .

Конструкції субмікронних ПТШ, які застосовуються в маломощових підсилювачах, як правило, являють собою симетричні дво-секційні структури. Сьогодні існує багато конструкцій ПТШ, проте як базові структури використовують варіанти, подані на рис. 8.21.

Застосування тієї чи іншої конструкції пов'язано з вибором узгоджувачих елементів. Це можуть бути кола із зосередженими компонентами, а також відрізки ліній передач. Конкретний тип конструкції транзистора пов'язаний з типом підсилювача – це можуть бути малопотужні підсилювачі або ПП. У потужних колах використовуються багатосекційні транзисторні структури й узгоджувачі ланки на відрізках ліній передач. Під час розрахунку багатосекційних ПТШ і результуючої матриці провідності необхідно сумувати  $Y$ -матриці окремих секцій, тому що в такій секційній структурі транзистори включені паралельно, а збільшення потужності досягається за рахунок сумування струмів за відносно невеликих напруг.

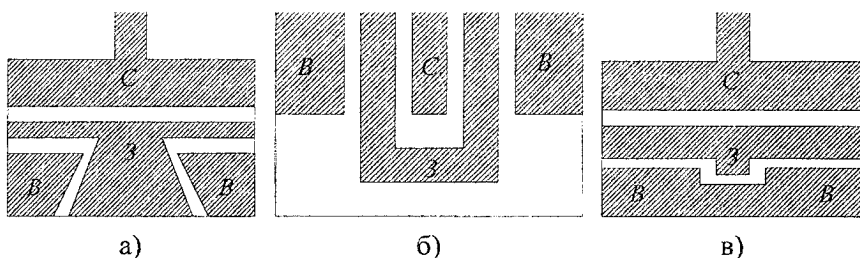


Рис. 8.21. Варіанти топологій малокутових ПТШ-транзисторів:  
а) Hewlett Packard (США); б) Iremens (ФРН); в) NEC (Японія)

У наведеній потужній структурі ПТШ (рис. 8.22) показано шар діелектрика ( $SiO_2$ ), який розділяє затвор і витік зовні активної області.

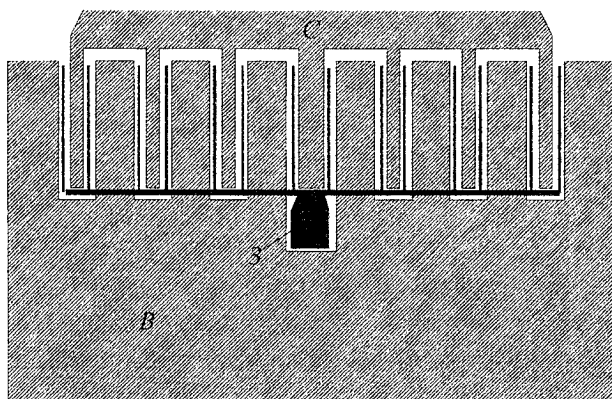


Рис. 8.22. Топологія потужного ПТШ

### 8.2.2 Узгоджуючі ланки вузькосмугових підсилювачів потужності. Сумування потужностей у підсилювачі потужності

Вузькосмуговими вважаються ПП, для яких відносна робоча смуга частот складає одиниці відсотків (тобто відношення максимального значення частоти до його мінімального значення не перевищує 1,3–1,5).

Вхідна узгоджуюча ланка забезпечує:

– необхідний опір навантаження збуджувача  $R_{зб}$ , тобто перетворення вхідного опору  $Z_{вх}$  АЕ в опір  $R_{зб}$ , за якого від збуджувача передається вже максимальна потужність;

– гармонічні форми  $U$  та  $I$  на вході АЕ, тобто виконує роль фільтра.

Вихідна узгоджуюча ланка забезпечує:

– перетворення опору навантаження ПП в опір  $R_k$  на вихідних електродах АЕ, які необхідні для оптимального режиму;

– фільтрацію колекторної напруги АЕ.

Міжкаскадні узгоджуючі ланки виконують роль:

– перетворення вхідного опору АЕ наступного каскаду в оптимальний опір  $R_k$  на вихідних електродах АЕ попереднього каскаду;

– забезпечення гармонічної форми напруги на вході каскаду й гармонічної форми напруги чи струму на його виході.

Таким чином, узгоджуючі ланки виконують двояку роль: вони перетворюють опір і фільтрують напругу чи струм. При цьому вони повинні забезпечити необхідну смугу пропускання, необхідні форми АЧХ і ФЧХ ПП.

Як прості узгоджуючі ланки широко використовують Г-, П- і Т-подібні реактивні 4-полосники або відрізки ліній. Розглянемо їх роботу на прикладі Г-подібного 4-полосника (рис. 8.23, а), функції реактивних елементів якого тут чітко визначені:

1) елемент  $jX_2$  здійснює трансформацію опору  $R_2$  у необхідний опір  $R_1$ ;

2) елемент  $jX_1$  компенсує реактивну складову, яка при цьому виникла.

Широкосмугові узгоджуючі ланки виготовляють трьох видів:

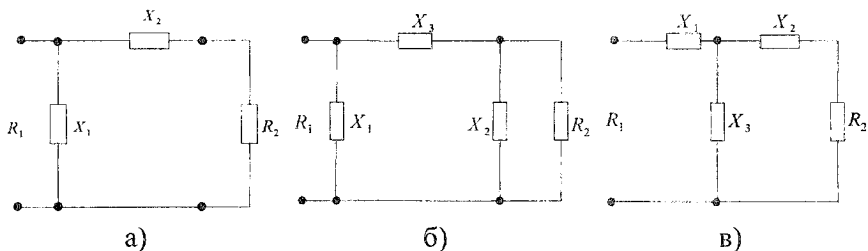


Рис. 8.23. Узагальнені схеми ланок зв'язку у вигляді Г- (а), П- (б) і Т-подібних (в) реактивних 4-полосників

1. Узгоджуючі ланки на основі ФНЧ (фільтр низької частоти), коли  $f_{\max}/f_{\min}$  не перевищує  $3 \div 5$ . У цьому випадку узгоджуюча ланка являє собою послідовно з'єднані Г-подібні ланки, які виступають як  $m$ -фільтри.

2. Узгоджуючі ланки на основі трансформаторів з магнітним зв'язком, які виконують одну функцію – перетворення опору при  $f_{\max}/f_{\min} < 50$  на частотах до  $100 \text{ МГц}$ .

3. Узгоджуючі ланки на основі пристрою “трансформатор–лінія”, що являє собою тороїдальний або стержневий феритовий сердечник з двома обмотками, які утворюють двопровідну лінію, по якій поширюється біжуча хвиля від джерела коливань до навантаження. Оскільки струми в обмотках рівні й направлені протилежно, то практично не створюють магнітного потоку в сердечнику, що й мінімізує втрати.

У багатьох випадках необхідна вихідна потужність радіопередавального пристрою перевищує потужність, яку може віддати один АЕ. Для збільшення вихідної потужності сумують потужності окремих АЕ такими способами: паралельним, двотактним, мостовим включенням АЕ і складанням потужності в просторі.

Метод паралельного включення АЕ використовують головним чином для підвищення одиничної потужності АЕ в багатомітерних НВЧ-транзисторах, а також у транзисторних підсилювачах з вихідною потужністю до  $1 \text{ Вт}$ . Збільшення вихідної потужності проходить за рахунок того, що сумарний вихідний струм рівний сумі вихідних струмів окремих АЕ. Обмеження числа паралельно включених АЕ зумовлено (рис. 8.24):



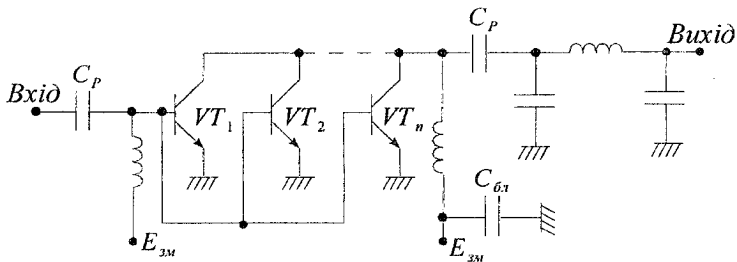


Рис. 8.24. Схема ПП із паралельним включенням АЕ (біполярних транзисторів)

– зменшенням  $\text{Re}Z_{\text{ex}}$  й оптимального значення опору АЕ, що утруднює побудову узгоджувачих ланок;

– нерівномірністю розподілу струму й напруги по елементах структур, у результаті чого ефективність сумування знижується.

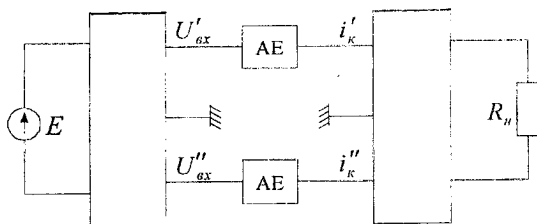
Очевидно, що при паралельному включенні  $n$ , ідентичних АЕ, навантажених на опір  $R_H = R_k/n$ , коефіцієнт передачі за напругою, струмом і потужністю, а також ККД залишаються такими ж, як і в одного АЕ, навантаженого на опір  $R_k$ .

Двотактна схема ПП містить уже два ідентичні АЕ, й аналогічно схемі з паралельним включенням АЕ віддає подвоєну потужність у навантаження від джерела живлення й вимагає подвоєної потужності збудження в порівнянні з одним АЕ (рис. 8.25).

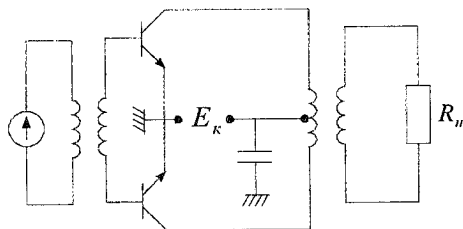
Недолік двотактних схем ПП полягає в необхідності підбору АЕ з однаковими параметрами та регулюванні симетрії режимів АЕ.

Усунути недоліки, характерні для паралельного та двотактного включення АЕ, можна, виключивши взаємний зв'язок між ними. Для цього використовують мостові ПП, які будуються за мостовою схемою. Відповідно мостовим пристроєм називають багатополусник, за допомогою якого здійснюється сумісна та взаємозалежна робота двох або більше АЕ на одне навантаження (рис. 8.26).

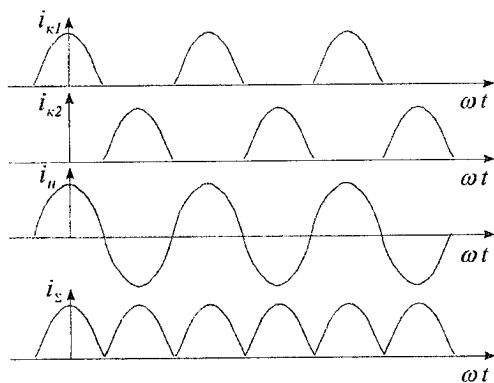
У номінальному режимі мостових ПП АЕ мають ідентичні параметри й працюють в однакових режимах. Міст-подільник (МП) розподіляє потужності порівну між АЕ, а міст-суматор (МС) сумує ці однакові потужності АЕ на загальне навантаження. Відповідно, ділення й сумування потужностей проводиться без утрат.



а)



б)



в)

Рис. 8.25. Функціональна схема ПП із двотактним включенням АЕ (а), варіант її реалізації (б) і часові залежності струмів при  $\theta = 90^\circ$  (в)

У номінальному режимі основні властивості мостів – взаємна незалежність (розв'язка АЕ) ніяк не проявляється. При відхиленні від номінального режиму розв'язка полягає в тому, що МП підтримує постійну напругу збудження АЕ<sub>1</sub>, а МС – опір навантаження АЕ<sub>1</sub> за будь-яких змін режимів АЕ<sub>2</sub>, і навпаки.

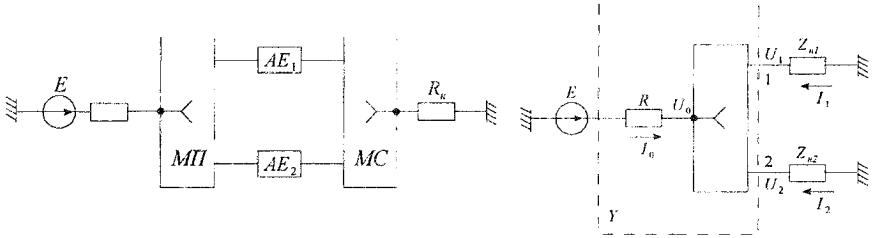


Рис. 8.26. Функціональна схема мостового ПП

МП має властивість моста, якщо взаємна провідність між виходами моста  $Y_{21} = 0$ . Це накладає ряд умов на шестиполосник-міст. Він повинен мати активний опір, який реалізується включенням між виходами МП балансового опору  $2R_{\text{бал.о}} = 1/\xi_{21}$ , де  $\xi_{21}$  – балансовий опір подільника. Тут слід зауважити, що в номінальному режимі потужність на  $R_{\text{бал.о}}$  не розсіюється, оскільки він включений між еквіпотенціальними точками схеми. Мости можуть бути:

- синфазними й протифазними із широкосмуговими фазообертачами; при цьому забезпечується сумування потужності, достатня міжкаскадна розв’язка й постійний коефіцієнт трансформації у всій смузі частот;
- квадратурними (для малощумових підсилювачів); при цьому сильно послаблюються зв’язки між каскадами й підвищується стійкість підсилювача.

Мостові пристрої виконують на трансформаторах (трансформаторах-лініях),  $LC$ -ланках, лініях із розподіленими параметрами (рис. 8.27). Заземлені баластні опори здатні розсіювати більшу потужність завдяки контакту з тепловідводом.

Сумування потужностей можна здійснювати і в просторі під час випромінювання та прийому сигналів за допомогою фазованих антенних ґраток (ФАҐ), які сьогодні знаходять все ширше застосування в радіолокаційній техніці. Завдяки використанню електронно-керуючих фазообертачів і перемикачів у РЛС із ФАҐ можна швидко і з високою точністю змінювати форму й положення діаграми направленості, вибирати й супроводжувати одночасно декілька цілей на екрані РЛС.

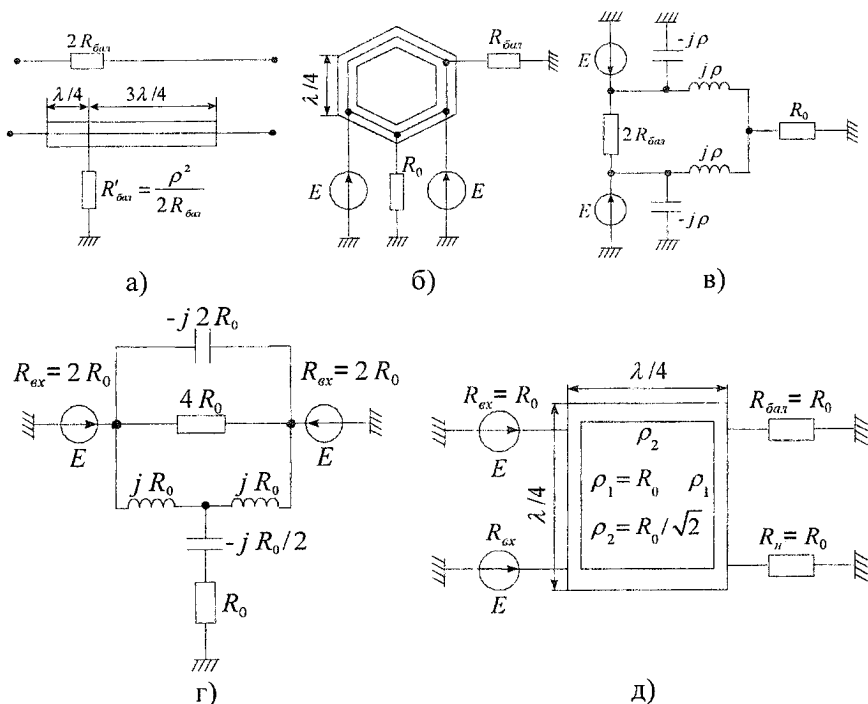


Рис. 8.27. Схеми мостів для підсилювачів потужності: а) синфазний міст з незаземленим баластним опором; б) синфазний міст із заземленим баластним опором (гібридне кільце); в) синфазний міст на зосереджених елементах; г) Т-подібний міст на зосереджених параметрах; д) квадратурний міст на лініях

За допомогою ФАГ відбувається ефективне сумування в просторі потужностей від багатьох генераторів високої частоти. Число випромінюючих елементів і каналів, які входять у ФАГ, може досягати десятків тисяч. А це дозволяє в заданому напрямі випромінювати велику потужність, яка є практично недосяжною в одноканальних радіопередавачах.

ФАГ являють собою певну сукупність розподілених на поверхні антени випромінюючих елементів, сигнали яких узгоджені за фазою таким чином, щоб у даному напрямі потужності додавалися.

### 8.2.3 Параметричні підсилювачі – основні характеристики і параметри

Радіоприймальні пристрої НВЧ дуже широко використовують у радіолокації, космічному зв'язку, радіоастрономії, системах супутникового телебачення. У порівнянні з приймачами довгих, середніх, ультракоротких хвиль радіоприймальні пристрої НВЧ мають ряд особливостей. Так, у діапазоні НВЧ рівень зовнішніх завад дуже малий, а основну роль відіграють внутрішні шуми радіоприймального пристрою, які й обмежують його чутливість. У зв'язку із цим у радіопередавальних пристроях НВЧ велика увага приділяється зменшенню рівня шумів усіх елементів: частотно-вибіркових систем, підсилювачів, перетворювачів частоти. Саме створення малошумових підсилювачів НВЧ – одна з особливих проблем сучасної радіоприймальної техніки.

Напівпровідникові параметричні підсилювачі (НПП) є найменш шумовими із напівпровідникових підсилювачів. Їхня шумова температура знаходиться в інтервалі від десятків до сотень градусів Кельвіна.

До переваг НПП у порівнянні з підсилювачами на тунельних діодах і транзисторах НВЧ, крім кращих шумових властивостей, слід віднести здатність працювати в діапазоні більш високих частот, велике підсилення, можливість переналаштування частоти, малі габарити й можливість їх використання у ФАГ.

У НПП, як і в підсилювачах на ТД чи ЛПД, використовується принцип регенеративного підсилення й тому вони називаються регенеративними резонансними підсилювачами (РРП). У всіх РРП є резонатор, до якого підключається елемент з від'ємним опором, що компенсує втрати в резонаторі та лініях передачі. Підсилення за потужністю відбувається за рахунок енергії, затраченої на створення від'ємного опору. Фізична природа утворення від'ємного опору різна: у НПП – за рахунок параметричної зміни (накачки) нелінійної ємності  $p-n$ -переходу, а в підсилювачів на ТД чи ЛПД – через наявність спадної ділянки ВАХ.

РРП поділяються на прохідні (рис. 8.28, а) і відбивні (рис. 8.28, б).

Прохідні підсилювачі, незважаючи на простоту конструкції, сьогодні вже практично не використовуються, оскільки мають великий коефіцієнт шуму, меншу смугу пропускання, ніж відбивні підсилювачі.

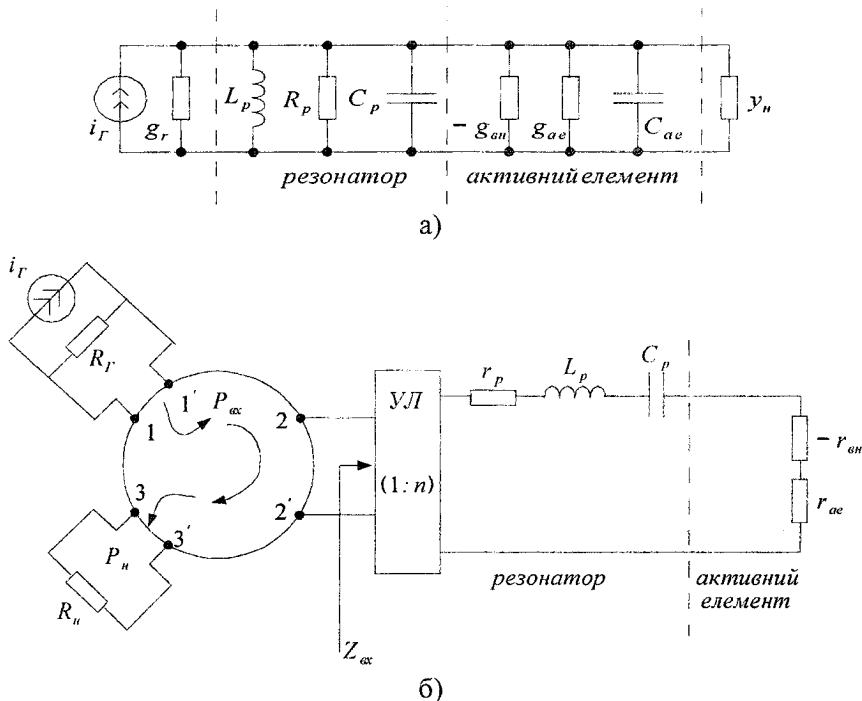


Рис. 8.28. Еквівалентні схеми регенеративних резонансних підсилювачів прохідного (а) і відбивного (б) типів

Розглянемо спочатку характеристики відбивних резонансних підсилювачів, еквівалентну схему яких подано на рис. 8.28, б. До триплечового циркулятора (фільтр, що розподіляє потужність) підключені генератор сигналу, резонатор і навантаження. Резонатор підключений до циркулятора через узгоджуючу ланку, що здійснює трансформацію опорів: вихідний опір узгоджуючої ланки  $r_{\text{вн}} = n^2 Z_0$ , де  $Z_0$  – хвильовий опір циркулятора,  $n$  – коефіцієнт трансформації. АЕ вносить у резонатор від’ємний опір  $r_{\text{аи}}$ ,  $r_{\text{ае}}$  – опір утрат АЕ.

Енергія генератора сигналу, яка підводиться до плеча 1 циркулятора, направляєється в плече 2, до якого через узгоджуючу ланку підключено резонатор та АЕ. При цьому потужність, яка відбивається від плеча 2, перевищує падаючу потужність і направляєється в плече 3, до якого підключене навантаження. За узгодження навантаження із циркулятором ( $R_n = Z_0$ ) коефіцієнт передачі потужності

відбивного РПП рівний відношенню потужності, відбитої від плеча 2, до вхідної потужності, тобто рівний квадрату модуля коефіцієнта відбивання від плеча 2:

$$K_p = \frac{P_u}{P_{ax}} = |\Gamma_2|^2,$$

де  $\Gamma_2 = (Z_{ax} - Z_0)/(Z_{ax} + Z_0)$  – коефіцієнт відбивання від плеча 2,  $Z_{ax}$  – вхідний опір плеча 2. Завдяки тому, що активна складова  $Z_{ax}$  є від'ємною, то модуль коефіцієнта відбивання  $|\Gamma_2| > 1$ . На резонансній частоті  $Z_{ax} = (r_p + r_{ae} - r_{en})/n^2$  і тоді резонансний коефіцієнт передачі потужності рівний

$$K_{p0} = \left( \frac{r_p + r_{ae} - r_{en} - r_{yl}}{r_p + r_{ae} - r_{en} + r_{yl}} \right)^2 = \left( \frac{\beta + \gamma}{\beta - \gamma} \right), \quad (8.7)$$

де  $\gamma = r_{en}/(r_{yl} + r_p + r_{ae})$  – коефіцієнт регенерації,  $\beta = (r_{yl} - r_p - r_{ae})/(r_{yl} + r_p + r_{ae})$  – коефіцієнт, який ураховує втрати в резонаторі (при  $r_p + r_{ae} \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 1$ ).

Розглянемо, як залежить коефіцієнт передачі потужності (8.7) від значення внесеного опору:

1) при  $r_{yl} = r_p + r_{ae} - r_{en}$  у плечі 2 має місце узгодження, тоді коефіцієнт відбивання  $\Gamma_2 = 0$ , а  $K_{p0} = 0$ .

2) при  $r_{en} = r_p + r_{ae}$  у плечі 2 скомпенсовані втрати в резонаторі, вся потужність сигналу відбивається від плеча 2 без утрат і  $K_{p0} = 1$ .

3) при  $r_{en} = r_p + r_{ae} + r_{yl}$  у плечі 2 скомпенсовані всі втрати і в підсилювачі виникають автоколивання, що відповідає  $K_{p0} \rightarrow \infty$ .

Таким чином, коефіцієнт передачі потужності знаходиться в межах  $1 < K_{p0} < \infty$  при виконанні умов  $r_p + r_{ae} < r_{en} < r_p + r_{ae} + r_{yl}$ . Коефіцієнт передачі потужності  $K_{p0}$  змінюється шляхом підбору від'ємного вносимого опору  $r_{en}$  або вихідного опору узгоджуючої ланки  $r_{yl} = n^2 Z_0$ . З виразу (8.7) випливає, що необхідне значення

$$K_{p0} \text{ забезпечується при вихідному опорі } r_{yl} = \frac{\sqrt{K_{p0}} + 1}{\sqrt{K_{p0}} - 1} (r_{en} - r_p - r_{ae}).$$

Визначаємо звідси коефіцієнт трансформації  $n = \sqrt{r_{yt}/Z_0}$ . Наявність циркулятора у відбивному підсилювачі послаблює зв'язки між вхідними й вихідними колами, що підвищує його стійкість і стабільність характеристик у порівнянні з підсилювачами прохідного типу. Частотна характеристика відбивного підсилювача визначається в основному резонансною системою. Якщо резонатор подати послідовним коливальним контуром, як показано на рис. 8.28, б, то вираз для коефіцієнта передачі потужності від частоти набуде вигляду:

$$K_p(j\omega) = \frac{\beta + \gamma - j\xi}{\beta - \gamma - j\xi} \quad (8.8)$$

де  $\xi = \frac{2(\omega - \omega_0)}{(r_{yt} + r_p + r_{ae})\omega_0^2 C_p}$  – узагальнене розлаштування,  $\omega_0 = 1/\sqrt{L_p C_p}$  – резонансна частота.

Тепер можемо визначити смугу пропускання відбивного РПП за рівнем зменшення коефіцієнта передачі потужності у 2 рази:

$$\Pi = \frac{(\beta + \gamma) |r_{yt} + r_p + r_{ae}|}{2\pi L_p \sqrt{K_{p0} - 2}} \quad (8.9)$$

Звідси випливає, що чим більший коефіцієнт передачі  $K_{p0}$ , тим менша смуга пропускання.

Характеристики параметричних підсилювачів в основному визначаються властивостями параметричного діода (ПД) (як АЕ) – діода з керуючою ємністю (варикапа). Еквівалентна схема ПД показана на рис. 8.29, де  $C(U) = dq/dU$  – бар'єрна диференціальна ємність  $p$ - $n$ -переходу,  $q$  – заряд на ємності,  $r_n$  – послідовний опір утрат діода,  $C_{кор}$  – ємність корпусу,  $L_s$  – ємність виводів.

ПД використовується при запірному  $p$ - $n$ -переході, коли на нього подане зворотне зміщення. Тоді бар'єрна ємність залежить від прикладеної напруги на переході нелінійно згідно з таким виразом:

$$C(U) = C(0) \sqrt{\varphi_k / (\varphi_k - U)}, \quad (8.10)$$

де  $C(0)$  – бар'єрна ємність при  $U = 0$ ,  $\varphi_k$  – контактна різниця потенціалів ( $\varphi_k = 0,7B$  для  $Si$  і  $1,2B$  для  $GaAs$ ),  $n$  – параметр, що



визначає тип переходу ( $n = 3$  для діодів з плавним  $p-n$ -переходом,  $n = 2$  для діодів із різким переходом і діодів Шотткі).

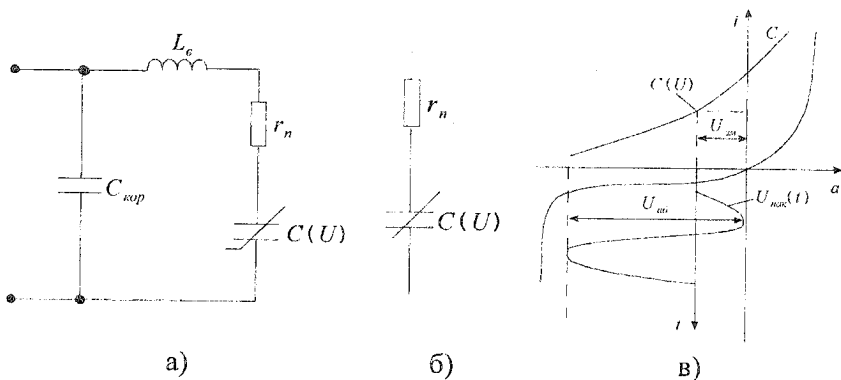


Рис. 8.29. Повна (а) і спрощена (б) еквівалентні схеми варикапа та його ВАХ і вольт-фарадна характеристики (в)

Для спрощення конструкції параметричних підсилювачів резонансний контур реалізують на власних реактивностях ПД, частоти послідовного й паралельного резонансів якого визначаються виразами:

$$f_{\text{посл}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_e C_0}}, \quad f_{\text{пар}} = \frac{\sqrt{1 + C_0/C_{\text{коп}}}}{2\pi\sqrt{L_e C_0}}, \quad (8.11)$$

де  $C_0$  – ємність варикапа (переходу) при  $U = U_{\text{зм}}$ .

Для аналізу нелінійної схеми НПП необхідно апроксимувати вольт-фарадну характеристику  $p-n$ -переходу  $C(U)$ , визначити форму напруги накачки на переході  $U_{\text{нак}}(t)$  і струму накачки  $i_{\text{нак}}(t)$ , а потім визначити закон зміни в часі параметричної ємності  $C(t)$ . Залежно від співвідношення опорів діода й резонатора в колі накачки є синусоїдальна напруга на переході або струм накачки через  $p-n$ -перехід. У більшості ПД домінує режим накачки синусоїдальним струмом  $i_{\text{нак}}(t)$ , який забезпечує велику глибину модуляції ємності. Для забезпечення накачки синусоїдальним струмом опір резонатора в полі накачки повинен бути великим для всіх гармонік частоти накачки. При накачці синусоїдальним струмом зручніше

користуватися не ємністю  $C(t)$ , а оберненою величиною  $S(t) = 1/C(t)$ , яка називається еластансом або електричною жорсткістю  $p-n$ -переходу.

Як відомо, напруга  $U(t)$  на ємності  $p-n$ -переходу й струм через нього пов'язані співвідношенням

$$U(t) = \int \frac{i(t)}{C(t)} dt = \int S(t) i(t) dt = f[g(t)].$$

Подімо напругу на переході у вигляді  $U(t) = U_{\text{нак}}(t) + \Delta U(t)$ . Розкладемо функцію  $f[g(t)]$  у ряд Тейлора в околі точки  $q_{\text{нак}}(t)$ :

$$f[g(t)] \cong f(g_{\text{нак}}) + \left. \frac{df}{dq} \right|_{q_{\text{нак}}} \Delta q,$$

де приймаємо, що  $f(g_{\text{нак}}) = U_{\text{нак}}(t)$ , а  $\left. \frac{df}{dq} \right|_{q_{\text{нак}}} = S_-(t)$  – змінний ела-

танс переходу, на який діє напруга накачки. Тоді отримаємо, що  $\Delta U(t) = S_-(t) \int \Delta i(t) dt$ .

Розкладемо періодичну функцію  $S_-(t)$  у ряд Фур'є і для першої гармоніки частоти накачки отримаємо:

$$S_-(t) = S_0 [1 + M \cos \omega_{\text{нак}} t] = S_0 \left[ 1 + \frac{M}{2} (e^{j\omega_{\text{нак}} t} + e^{-j\omega_{\text{нак}} t}) \right],$$

де  $M$  – коефіцієнт модуляції еластансу.

Розрахунок дає такі значення  $U_{\text{зм}}$  та  $M$ :

$$U_{\text{зм}} = \begin{cases} 0,75U_{\text{ооб}} + 0,25\varphi_{\kappa} \left( \sqrt{1 + U_{\text{ооб}}/\varphi_{\kappa}} - 1 \right) & \text{при } n = 2, \\ 0,75U_{\text{ооб}} & \text{при } n = 3, \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + U_{\text{ооб}}/\varphi_{\kappa}} - 1}{\sqrt{1 + U_{\text{ооб}}/\varphi_{\kappa}} + 1} & \text{при } n = 2, \\ 0,4(1 + 2\varphi_{\kappa}/U_{\text{ооб}})^{-1} & \text{при } n = 3. \end{cases}$$

На практиці максимальна глибина модуляції еластансу  $M = 0,3 \pm 0,4$ .

Потужність накачки, що розсіюється на опорі  $r_r$ . ПД і необхідна для забезпечення необхідного коефіцієнта модуляції  $M$ , рівна

$$P_{\text{нак } \partial} = \frac{1}{2} \pi^2 f_{\text{нак}}^2 C_0^2 r_{\Gamma} U_{\text{об}}^2. \quad (8.12)$$

Потужність накачки, що відбирається від генератора накачки, відрізняється від потужності накачки варикапа (діода) на величину втрат, що враховує коефіцієнт накачки  $k_{\text{нак}}$ :

$$P_{\text{нак}} = k_{\text{нак}} P_{\text{нак } \partial},$$

де

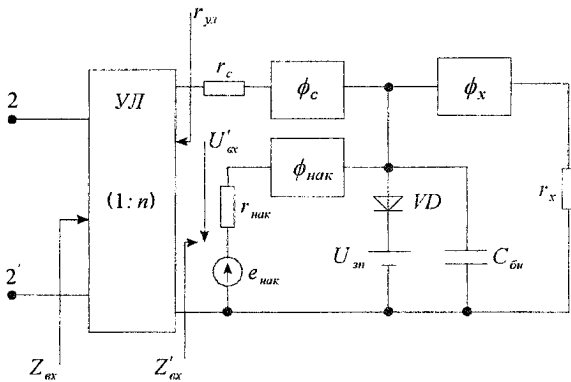
$$k_{\text{нак}} = \begin{cases} 1,5 & \text{при } f_{\text{нак}} < 10 \text{ ГГц}; \\ 1,5 + (f_{\text{нак}} - 10)/40 & \text{при } 10 < f_{\text{нак}} \leq 50 \text{ ГГц}; \\ 2,5 & \text{при } f_{\text{нак}} > 50 \text{ ГГц}. \end{cases}$$

Важливим параметром ПД, який відповідно характеризує його частотні властивості в параметричному підсиленні, є критична частота, яка визначається як  $f_{\text{кр}} = M/(4\pi r_{\Gamma} C_0)$ .

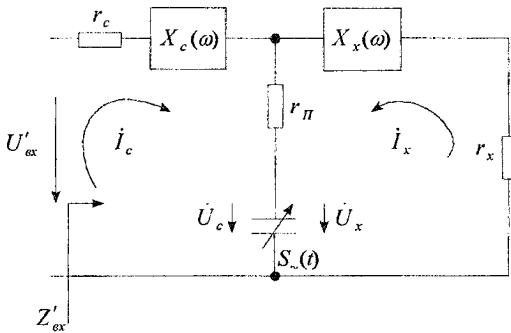
#### 8.2.4 Дво- та одноконтурні напівпровідникові параметричні підсилювачі потужності

У вхідних пристроях радіолокаційних приймачів зазвичай застосовують двоконтурні напівпровідникові підсилювачі відбивного типу. Структурну схему відбивного НПП подано на рис. 8.30, де введено такі позначення:  $VD$  – варикап;  $\phi_c$ ,  $\phi_{\text{нак}}$ ,  $\phi_x$  – резонатори, які налаштовані на частоту сигналу  $\omega_c = \omega_1$ , накачки  $\omega_{\text{нак}} = \omega_2$  і холоста частота  $\omega_x = \omega_3$  відповідно;  $r_c$ ,  $r_{\text{нак}}$ ,  $r_x$  – опори втрат відповідних резонаторів;  $e_{\text{нак}}(t)$  – е.р.с. генератора накачки;  $U_{\text{зм}}$  – напруга зміщення. Резонатори  $\phi_c$ ,  $\phi_{\text{нак}}$ ,  $\phi_x$  – реактивні двополюсники, які мають нескінченно малий опір для частот  $\omega_c$ ,  $\omega_{\text{нак}}$  і  $\omega_x$  відповідно й нескінченно великий опір для інших частот. На основі рис. 8.30, а складемо еквівалентну схему НПП (рис. 8.30, б), у якому параметричний діод ( $VD$ ) замінений еквівалентною  $RC$ -ланкою. Вважатимемо, що накачка проводиться синусоїдальним струмом, елестанс якого  $S_-(t)$ . Через  $X_c(\omega)$  і  $X_x(\omega)$  позначимо реактивні опори резонаторів  $\phi_c$  і  $\phi_x$ .

З попереднього підрозділу відомо, що НПП належить до класу регенеративних підсилювачів, основними параметрами якого є:



а)



б)

Рис. 8.30. Структурна (а) й еквівалентна (б) схеми двоконтурного параметричного підсилювача

- коефіцієнт передачі потужності  $K_p$ ;
- смуга пропускання  $\Pi$ ;
- коефіцієнт шуму  $K_{ш}$ .

Для їх визначення необхідно знайти вносимий від'ємний опір –  $r_{вн}$ .

Приймемо, що холоста частота  $\omega_x = \omega_{нак} - \omega_c$ .

Відповідно до еквівалентної схеми (рис. 8.30, б) струм, який протікає через еластанс  $S_-(t)$ , буде рівний сумі струмів з частотами  $\omega_c$  і  $\omega_x$ :

$$\begin{aligned}\Delta i(t) &= i_c(t) + i_x(t) = I_c \cos(\omega_c t + \varphi_c) + I_x \cos(\omega_x t + \varphi_x) = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{I}_c e^{j\omega_c t} + \dot{I}_c^* e^{-j\omega_c t} + \dot{I}_x e^{j\omega_x t} + \dot{I}_x^* e^{-j\omega_x t}).\end{aligned}$$

Аналогічно напруга на переході варикапа  $\Delta U(t)$  буде визначатися подібним виразом:

$$\begin{aligned}\Delta U(t) &= U_c \cos(\omega_c t + \theta_c) + U_x \cos(\omega_x t + \theta_x) = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{U}_c e^{j\omega_c t} + \dot{U}_c^* e^{-j\omega_c t} + \dot{U}_x e^{j\omega_x t} + \dot{U}_x^* e^{-j\omega_x t}).\end{aligned}$$

Ураховуючи, що  $\Delta U(t) = S_-(t) \int \Delta i(t) dt$  і прирівнюючи комплекси  $\dot{U}_c$  і  $\dot{U}_x^*$  як рівняння 4-полюсника, отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{U}_c = Z_{11} \dot{I}_c + Z_{12} \dot{I}_x^* & (\text{для частоти } \omega_c), \\ \dot{U}_x^* = Z_{21} \dot{I}_c + Z_{22} \dot{I}_x^* & (\text{для частоти } \omega_x). \end{cases}$$

$$\text{Значення коефіцієнтів } Z_{11} = \frac{1}{j\omega_c C_0}, \quad Z_{12} = -\frac{M}{2j\omega_x C_0}, \quad Z_{21} = \frac{M}{2j\omega_c C_0},$$

$$Z_{22} = -\frac{1}{j\omega_x C_0}.$$

Складемо тепер контурні рівняння для сигнального й холостого контурів, залишаючи в них складові лише з частотами  $\omega_c$  і  $\omega_x$  відповідно:

$$\begin{cases} U'_{\text{ex}} = (r_c + r_n + jX_c + Z_{11}) \dot{I}_c + Z_{12} \dot{I}_x^*, \\ 0 = Z_{21} \dot{I}_c + (r_n + r_x + jX_x + Z_{22}) \dot{I}_x^*. \end{cases}$$

Розв'язавши систему цих рівнянь, визначимо вхідний опір сигнального контуру:

$$Z'_{\text{ex}} = \frac{U'_{\text{ex}}}{\dot{I}_c} = r_c + r_n + jX_c + Z_{11} - Z_{\text{en}}, \quad (8.13)$$

$$\text{де } Z_{\text{en}} = \frac{Z_{12} Z_{21}}{r_n + r_x - jX_x + Z_{22}} = \frac{M^2}{4\omega_c \omega_x C_0^2 (r_n + r_x - jX_x + Z_{22})} -$$

комплексний опір, який вноситься в сигнальний контур з боку холостого контуру.

На резонансній частоті  $\omega_c$  вхідний опір стає активним і рівним:

$$r'_{\text{ex}} = r_c + r_n - r_{\text{en}},$$

де  $r_{en} = \frac{M^2}{4\omega_c \omega_x C_0^2 (r_n + r_x)}$  – модуль від’ємного вносимого опору,

який з урахуванням критичної частоти буде рівний:

$$r_{en} = \frac{f_{кр}^2 r_n^2}{f_c f_x (r_n + r_x)}.$$

Звідси випливає, що  $f_{кр} > \sqrt{f_c f_x}$ .

Резонансний коефіцієнт передачі потужності відбивного НПП буде визначатися через коефіцієнти регенерації  $\gamma$  та коефіцієнт утрат  $\beta$ , які в нашому випадку рівні:

$$\gamma = \frac{r_{en}}{r_{yn} + r_n + r_c}, \quad \beta = \frac{r_{yn} - r_c - r_n}{r_{yn} + r_n + r_c}.$$

Смуга пропускання такого НПП відбивного двоконтурного типу буде визначатися співвідношенням:

$$\left( \Pi \sqrt{K_{p0}} \right)_{\max} = M f_c \frac{A^2 (m^2 - A)}{m (m + A^{3k})^2},$$

де  $m = f_{кр} / f_c$ ,  $A = f_x / f_c$ .

Із цього виразу випливає, що при  $f_{кр} = \sqrt{f_c f_x}$ ,  $\Pi = 0$ . Зі збільшенням параметра  $m$  смуга пропускання розширюється. Тому завжди вибирають, щоб  $f_{кр} \gg f_c$  ( $f_{кр} \geq (8 \div 10) f_c$ ).

Залежність смуги пропускання від параметра  $A$  має максимум, який досягається при  $f_x = 1,25 m^{0,73} f_c$ . Тоді максимальна смуга пропускання

$$\Pi_{\max} = \frac{0,198 M m^{0,434} f_c}{\sqrt{K_{p0}}}.$$

Однак головна мета застосування НПП полягає в досягненні мінімального коефіцієнта шуму, який визначається виразом:

$$K_{ш} = 1 + \frac{T}{T_0} \left( 1 - \frac{1}{K_{p0}} \right) \frac{m^2 + A}{A(m^2 - A)}.$$

Звідси випливає, що коефіцієнт шуму НПП значною мірою залежить від параметра  $A$ , тобто від вибору холостої частоти  $f_x$ . Міні-

мальний коефіцієнт шуму досягається при  $f_x = (\sqrt{m^2 + 1} - 1)f_c$  і складає:

$$K_{ш \min} = 1 + \frac{2T}{T_0} \left( 1 - \frac{1}{K_{p0}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + m^2} - 1}.$$

Визначимо тепер відмінності в параметрах одноконтурного НПП, який ще називають виродженим, тому що частота сигналу  $f_c$  і холоста частота  $f_x = f_{\max} - f_c$  близькі одна до одної й можна прийняти, що  $f_{\max} = 2f_c$ . Тоді для обох коливань з частотами  $f_c$  і  $f_x$  створюється лише один резонатор  $\phi_1$ , який налаштований на половину частоти накачки. АЧХ такого резонатора показана на рис. 8.31. Структурна схема одноконтурного НПП витікає зі структурної схеми двоконтурного НПП (рис. 8.30), у якому відсутній холостий контур. Основна перевага одноконтурного НПП у порівнянні з двоконтурним полягає в спрощенні конструкції та зниженні частоти накачки. Такий одноконтурний НПП може працювати у двох режимах: синхронному та асинхронному.

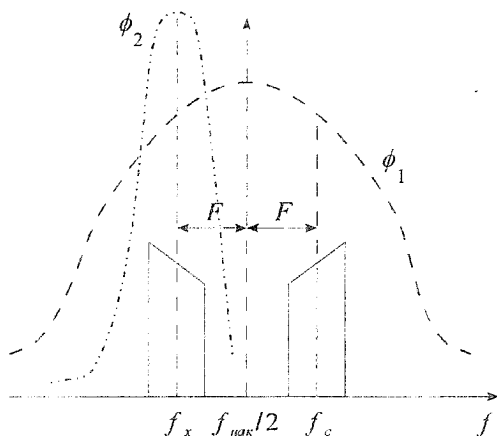


Рис. 8.31. Спектри коливань в одноконтурному НПП

Синхронний режим відповідає рівності  $f_{\max} = 2f_c$  або  $f_x = f_c$ . Максимальне підсилення досягається, коли  $\varphi_{\max} = 2\varphi_c + \pi/2$ , а при

$\varphi_{\text{нак}} = 2\varphi_c - \pi/2$  у контур вноситься не від'ємний опір, а додатний, що збільшує втрати. У цьому плані синхронний одноконтурний НПП можна розглядати як фазовий детектор.

Асинхронний режим накачки відповідає наближеній рівності частот  $f_{\text{нак}} \approx 2f_c$ . Позначимо  $|2f_c - f_{\text{нак}}| = 2F$ , тоді рознесення частоти сигналу й холостої частоти також складає  $|f_c - f_x| = 2F$  (рис. 8.31). Тут розрізняють дві різновидності асинхронного режиму – одно- й двосмуговий.

При односмуговому прийманні рознесення частот  $2F$  перевищує ширину спектра сигналу, що дозволяє відфільтрувати одне з підсилених коливань за допомогою вузькосмугового фільтра. Це видно з рис. 8.31, де за допомогою вузькосмугового каскаду  $\phi_2$  виділено лише одну смугу –  $f_c$ . Коливання холостої частоти може бути також виключене за допомогою балансової схеми, яка містить два варикапи, увімкнених зустрічно-паралельно.

При двосмуговому прийманні фільтрація коливань холостої частоти не проводиться, а підсилюється, і потім детектується з відніманням сигналу й холостої частоти.

### 8.3 Діодні перетворювачі частоти

У супергетеродинних приймачах (рис. 8.32) сигнал від антени поступає на малощумовий підсилювач високої частоти ПВЧ. Потім за допомогою перетворювача частоти ПЧ спектр сигналу переноситься на більш низьку проміжну частоту  $\omega_{пч} = \omega_c - \omega_r$ . Основне підсилення в приймачі здійснюється на проміжній частоті.

Чутливість приймача такого типу досягає  $10^{-17} \div 10^{-18} \text{ Вт}$ , тоді як чутливість приймачів прямого підсилення не перевищує  $10^{-12} \text{ Вт}$ . Для супергетеродинного приймача НВЧ-діапазону характерні проміжні частоти  $20 \div 300 \text{ МГц}$ , проте в окремих сучасних приймачах високого класу використовується дво- або трикратне перетворення частоти, і перша проміжна частота може досягати  $> 1 \text{ ГГц}$  (у приймачах діапазону міліметрових хвиль).

Перетворювач частоти складається зі змішувача  $Z_m$  та гетеродину  $G$ , у ролі яких найбільш часто використовуються малопотужні генератори на діодах Ганна. Потужність коливань гетероди-



ну, які поступають у змішувач, є малою ( $0,2 \div 10 \text{ мВт}$ ), але набагато більшою від потужності сигналу. Перетворення частоти сигналу проходить за рахунок нелінійності ВАХ змішувального діода.

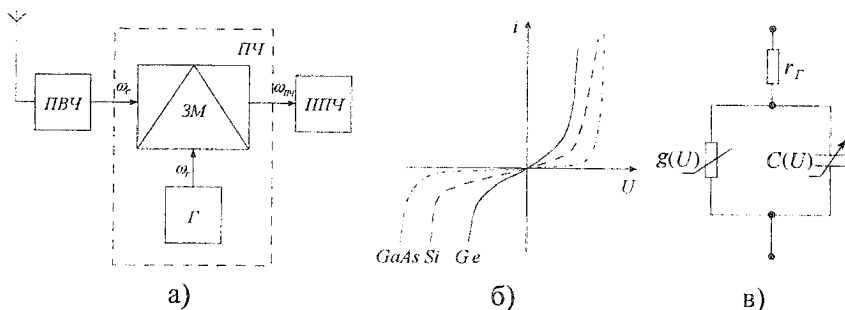


Рис. 8.32. Структурна схема супергетеродинного приймача (а), ВАХ змішувальних діодів (б) та еквівалентна схема змішувального діода (в)

У змішувачах можна використовувати обернені тунельні діоди, варикапи, точкові діоди й діоди з бар'єром Шотткі. Сьогодні найбільше застосування в змішувачах сантиметрового й міліметрового діапазонів довжин хвиль отримали точкові діоди та діоди з бар'єром Шотткі. У дециметровому діапазоні застосовуються обернені тунельні діоди, у яких використовується обернена вітка ВАХ. На рис. 8.32, б наведені ВАХ діодів трьох типів з  $Ge$ ,  $Si$  і  $GaAs$ . Діод з бар'єром Шотткі вимагає великої потужності гетеродину ( $2 \div 10 \text{ мВт}$ ) для діодів з  $GaAs$  та  $0,5 \div 1 \text{ мВт}$  для  $Si$  діодів. Основними параметрами змішувальних діодів є: опір утрат діода  $r_r$ , нелінійна ємність  $C(U)$  і нелінійна провідність бар'єрного (запільного) шару  $g(U)$ . Тому часто змішувальні діоди називають варисторами.

### 8.3.1 Електричні характеристики змішувача

На відміну від транзисторних змішувачів, для яких найбільш суттєвим є ефект прямого перетворення частоти, у діодних змішувачах спостерігається ефект оберненого перетворення частоти. Дійсно, напруга проміжної частоти  $\omega_{нч} = \omega_c - \omega_s$ , що є на виході змішувача в результаті взаємодії напруг сигналу й гетеродину, знову взаємодіє з напругою гетеродину, що приводить до отримання на вході змішувача напруги з частотою сигналу  $\omega_c = \omega_s + \omega_{нч}$ . Таким

чином, ефект оберненого перетворення частоти зумовлений наявністю сильного оберненого зв'язку в діодному змішувачі, оскільки останній каналізує енергію в обох напрямках, тобто такі діоди являють собою взаємні пристрої.

Крім цього, у діодних змішувачах існує ефект вторинного оберненого перетворення частоти. У випадку дії на виході змішувача напруги проміжної частоти на вході змішувача можлива поява так званої дзеркальної частоти  $\omega_d = \omega_c - \omega_{пч}$  (названа через дзеркальне розміщення по відношенню до частоти сигналу відносно частоти гетеродину) (рис. 8.33).

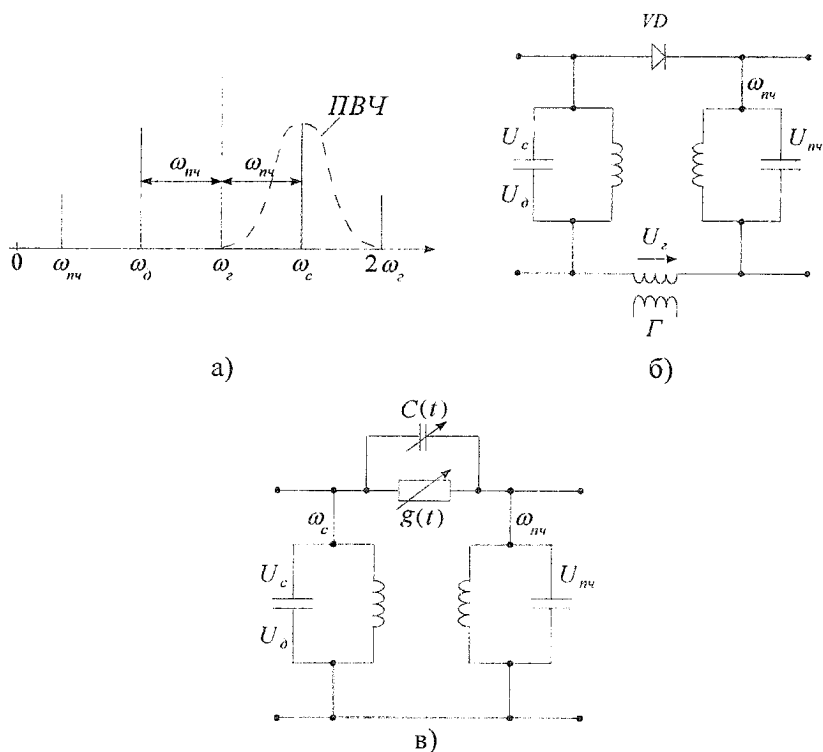


Рис. 8.33. Спектр коливань у перетворювачі частоти (а), принципова (б) та еквівалентна (в) схеми одноконтурного змішувача

Виникнення коливань дзеркальної частоти можливе також у результаті взаємодії напруги сигналу й другої гармоніки гетеродину, бо  $\omega_0 = 2\omega_s - \omega_c$ .

Переважно змішувач узгоджений із входом ППЧ (підсилювач проміжної частоти), тому вся потужність на частоті  $\omega_{nc}$  передається в ППЧ. Коливання дзеркальної частоти, які утворилися в результаті перетворення частоти сигналу, можуть поширюватися у вхідне коло приймача. Тому якщо на вході змішувача помістити відповідні фільтри, то коливання дзеркальної частоти будуть відбиватися назад у змішувач для перетворення в коливання проміжної частоти  $\omega_{nc} = \omega_c - \omega_s$ . Тоді отримаємо додаткову вихідну потужність, унаслідок чого збільшується коефіцієнт передачі перетворювача. При додаванні струмів у протифазі, навпаки, виникають додаткові втрати. Таким чином, взаємодія між коливаннями сигнальної й дзеркальної частот дуже суттєво впливає на параметри діючого перетворювача частоти.

Перейдемо тепер до аналізу роботи простого одноктного змішувача, поданого на рис. 8.33, б, в. У діапазоні довжин хвиль менших за 2–3 см можна знехтувати впливом нелінійної частоти  $C(U)$  та опором утрат  $r_e$ . У результаті змішувальний діод постає у вигляді нелінійної провідності  $g(t)$  і ємності  $C(t)$  під дією напруги гетеродину. Провідність  $g(t)$  являє собою періодичну функцію, яка змінюється з частотою  $\omega_s$ . Тому розкладемо її в ряд Фур'є:

$$g(t) = g_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos n \omega_s t, \quad (8.14)$$

де  $g_n = \frac{1}{T_T} \int_0^{T_T} g(t) \cos n \omega_s t dt$  – амплітуда  $n$ -гармоніки провідності на частоті  $n \omega_s$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $T_T = 2\pi / \omega_s$ .

Вигляд провідності  $g(t)$  визначається ВАХ змішувального діода. Зокрема, ВАХ діода з бар'єром Шотткі описується експоненціальною залежністю:

$$i(U) = i_s \left[ \exp \left( \frac{U}{m \phi_T} \right) - 1 \right], \quad (8.15)$$

де  $i_s$  – струм насичення бар'єра Шотткі,  $\varphi_T = kT/e$  – температурний потенціал переходу,  $m = 1,1 \div 1,6$  – діодний коефіцієнт, який визначає генераційно-рекомбінаційні процеси в переході чи контакті.

За відсутності сигналу до переходу прикладається напруга:

$$U = U_{зм} + U_r \cos \omega_c t, \quad (8.16)$$

де  $U_{зм}$  – напруга зміщення,  $U_r$  – амплітуда гетеродину.

Оскільки диференціальна провідність  $g = di/dU$ , то для слабкого сигналу можна записати

$$\begin{cases} g(t) = \frac{i_s}{m\varphi_T} \exp\left(\frac{U_{зм}}{m\varphi_T}\right) \exp\left(\frac{U_r}{m\varphi_T} \cos \omega_c t\right) \\ g_n(t) = \frac{i_s}{m\varphi_T} \exp\left(\frac{U_{зм}}{m\varphi_T}\right) I_n\left(\frac{U_r}{m\varphi_T}\right) \end{cases}, \quad (8.17)$$

де  $I_n$  – функція Бесселя першого роду  $n$ -го порядку.

Якщо обмежитися розглядом коливань тільки на трьох частотах (частоті сигналу, проміжній і дзеркальній), то перетворювач частоти можна подати у вигляді лінійного шестиполосника з постійними параметрами (рис. 8.34). Кожна пара полюсів шестиполосника відповідає певній частоті. Шестиполосник описується системою рівнянь в  $Y$ -параметрах:

$$\begin{cases} \dot{I}_c = y_{11} \dot{U}_c + y_{12} \dot{U}_{nc} + y_{13} \dot{U}_{ds} \\ \dot{I}_{nc} = y_{21} \dot{U}_c + y_{22} \dot{U}_{nc} + y_{23} \dot{U}_{ds} \\ \dot{I}_{ds} = y_{31} \dot{U}_c + y_{32} \dot{U}_{nc} + y_{33} \dot{U}_{ds} \end{cases}, \quad (8.18)$$

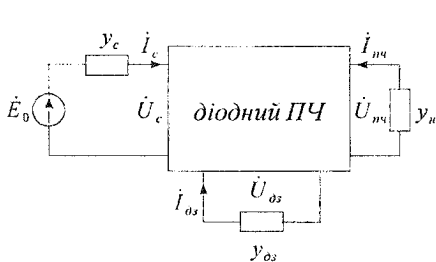


Рис. 8.34. Діодний перетворювач частоти як шестиполосник

де  $\dot{I}_c$ ,  $\dot{U}_c$ ,  $\dot{I}_{nc}$ ,  $\dot{U}_{nc}$ ,  $\dot{I}_{ds}$ ,  $\dot{U}_{ds}$  – комплексні амплітуди струмів і напруг частоти сигналу, проміжної та дзеркальної частот на відповідних затискачах шестиполосника.

Конкретизуємо  $Y$ -параметри шестиполосника  $[y_{ij}]$ , уточнивши фізичні властивості змішувача. Через те, що

$\omega_c \approx \omega_r \gg \omega_{nc}$ , то можна прийняти, що  $y_{32} = y_{12}$ ,  $y_{31} = y_{13}$ ,  $y_{23} = y_{21}$ ,

$y_{23} = y_{11}$ . Прийmemo також, що  $Y$ -параметри є дійсними величинами, оскільки знехтували впливом нелінійної ємності, а взяли до уваги нелінійну провідність. У результаті зроблених припущень параметри в системі рівнянь (8.18) матимуть вигляд:

$$y_{11} = y_{22} = y_{33} = g_0, \quad y_{12} = y_{23} = y_{21} = y_{32} = g_1, \quad y_{31} = y_{13} = g_2.$$

Тут параметр  $g_0$  характеризує вхідну провідність змішувача на частоті сигналу  $\omega_c$ , параметр  $g_1$  – перетворення сигналу на проміжну частоту  $\omega_{nc} = \omega_c - \omega_2$ , а параметр  $g_2$  – перетворення сигналу на дзеркальну частоту  $\omega_{ds} = 2\omega_2 - \omega_c$  за допомогою другої гармоніки гетеродину.

Спростимо рівняння (8.18), виключивши струм і напругу дзеркальної частоти. Позначивши провідність вхідного кола змішувача на дзеркальній частоті через  $y_{ds}$ , отримаємо співвідношення  $\dot{I}_{ds} = -y_{ds} \dot{U}_{ds}$ . Тоді з третього рівняння системи (8.18) знаходимо  $\dot{U}_{ds} = - (g_2 \dot{U}_c + g_1 \dot{U}_{nc}) / (g_0 + y_{ds})$ .

Підставивши вирази  $\dot{I}_{ds}$  та  $\dot{U}_{ds}$  у перші два рівняння системи (8.18), отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{I}_c = y_{11}^{np} \dot{U}_c + y_{12}^{np} \dot{U}_{nc} \\ \dot{I}_{nc} = y_{21}^{np} \dot{U}_c + y_{22}^{np} \dot{U}_{nc} \end{cases}, \quad (8.19)$$

де  $y_{11}^{np} = g_0 - g_2^2 / (g_0 + y_{ds})$ ,  $y_{12}^{np} = y_{21}^{np} = g_1 - g_1 g_2 / (g_0 + y_{ds})$ ,  $y_{22}^{np} = g_0 - g_1^2 / (g_0 + y_{ds})$  є  $Y$ -параметрами вже перетворювача частоти. Звідси випливає, що властивості перетворювача частоти визначаються не тільки параметрами змішувального діода й потужності гетеродину, але й характером провідності вхідного кола змішувача на дзеркальній частоті.

Розрізняють два режими роботи змішувача залежно від характеру провідності дзеркальної частоти  $y_{ds}$ :

1) коли вхідні кола змішувачів широкосмугові (їх смуга  $> 2\omega_{nc}$ ), тоді можна прийняти, що  $y_{ds} = g_c$ , де  $g_c$  – вихідна провідність сигнального контуру, що подається на вхід змішувача;

2) коли на вході змішувача включений вузькосмуговий пресе-лктор, так що його провідність на дзеркальній частоті є чисто уяв-

ною, тобто  $y_{\partial z} = j b_{\partial z}$ , у результаті чого потужність не поглинається на дзеркальній частоті й збільшується коефіцієнт передачі потужності перетворювача.

Величина  $b_{\partial z}$  залежить від відстані між змішувальним діодом і преселектором (фільтром). На практиці використовують крайні випадки, коли  $b_{\partial z} = 0$  (режим холостого ходу на дзеркальній частоті), і коли  $b_{\partial z} \rightarrow \infty$  (режим короткого замикання). Другий випадок простіший і часто використовується на практиці.

*Вузькосмуговий змішувач при короткозамкненому колі на дзеркальній частоті.*

При  $b_{\partial z} \rightarrow \infty$   $Y$ -параметри в режимі перетворення набувають значень  $y_{11}^{np} = y_{22}^{np} = g_0$  і  $y_{12}^{np} = y_{21}^{np} = g_1$ . На основі загальної теорії 4-полосників з постійними параметрами знайдемо основні характеристики перетворювача частоти. Урахуємо, що частота сигналу еквівалентна провідності сигнального контуру, яка є дійсною й рівною  $g_c$  і яка на проміжній частоті еквівалентна провідності контуру проміжної частоти, що рівна  $g_n$ . Тоді основними характеристиками змішувача є:

- вхідна провідність  $g_{вх} = g_0 - g_1^2 / (g_0 + g_n)$ ;
- вихідна провідність  $g_{вих} = g_0 - g_1^2 / (g_0 + g_c)$ ;
- коефіцієнт передачі номінальної потужності

$$K_{p\text{ ном}} = \frac{P_{\text{вих ном}}}{P_{\text{втр ном}}} = \frac{g_1^2 g_c}{g_0 (g_0 + g_c)^2 - g_1^2 (g_0 + g_c)}$$

Коефіцієнт передачі номінальної потужності набуде максимального значення за двостороннього узгодження на вході й виході, тобто при  $g_{c\text{ опт}} = g_{n\text{ опт}} = g_0 \sqrt{1 - \mu_c^2}$ , де  $\mu_c = g_1 / g_0$ .

У зв'язку з тим, що в діодних перетворювачах частоти  $K_{p\text{ ном}} < 1$ , то замість коефіцієнта передачі потужності частіше використовують інший параметр, який називають утратами перетворення  $L_\partial = 1 / K_{p\text{ ном}}$ , який для змішувачів складає  $4 \div 10$  дБ.

Коефіцієнт шуму перетворювача визначається формулою:

$$K_{ш\text{ пр}} = \frac{P_{ш\text{ вих ном}}}{k T_0 \Pi_{ППЧ} K_{р\text{ ном}}}$$

Загальний коефіцієнт шуму перетворювача частоти й ППЧ розраховується за формулою:

$$K_{ш\text{ з}} = K_{ш\text{ пр}} + \frac{K_{ш\text{ ППЧ}} - 1}{K_{р\text{ ном}}}$$

Великий вклад у шуми вносить гетеродин. Для їх зменшення треба підвищувати добротність резонансної системи гетеродину.

### 8.3.2 Балансові та двобалансові змішувачі

Для зменшення впливу шумів гетеродину застосовуються балансові змішувачі (рис. 8.35). Змішувач містить два діоди, які включені так, що їх струми  $i_{\delta 1}$  та  $i_{\delta 2}$  протікають у первинній обмотці вихідного трансформатора  $WT_2$  у зустрічному напрямі. При цьому синфазні складові магнітного потоку взаємно компенсуються, а протифазні додаються. Переконаємося спочатку в здатності такої схеми виконувати функції перетворювача частоти. Напруга гетеродину подається на діоди синфазно, а напруга сигналу – протифазно. Відповідно, струми перетвореного коливання проміжної частоти в обох діодах також протифазні й тому створювані ними магнітні потоки сумуються й наводять у вторинній обмотці трансформатора  $WT_2$  напругу проміжної частоти.

Перейдемо тепер до кількісної характеристики балансного змішувача. Для цього апроксимуємо ВАХ діодів рядом Тейлора:

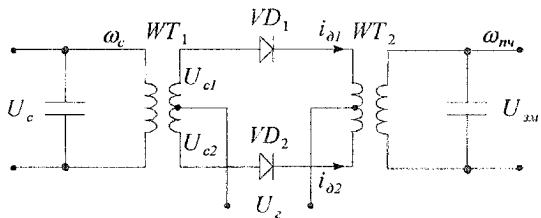
$$i_{\delta} = I_0 + aU_{\delta} + bU_{\delta}^2 + \dots$$

До першого змішувального діода  $VD_1$  прикладається сума напруг  $U_{\delta 1}(t) = U_z(t) + U_c(t)$ , а до другого – різниця  $U_{\delta 2}(t) = U_z(t) - U_c(t)$ . Якщо  $U_c(t) = U_c \cos \omega_c t$  – напруга сигналу, а  $U_z(t) = U_z \cos \omega_z t$  – напруга гетеродину, то результируючий струм у первинній обмотці трансформатора  $WT_2$  буде рівний:

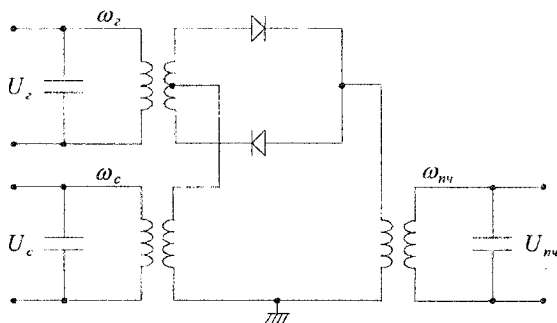
$$i_z = i_{\delta 1} - i_{\delta 2} \cong 2a U_c \cos \omega_c t + 2b U_z U_c \cos [(\omega_c - \omega_z)t] + \dots$$

У цьому випадку другий доданок указує на перетворення частоти.

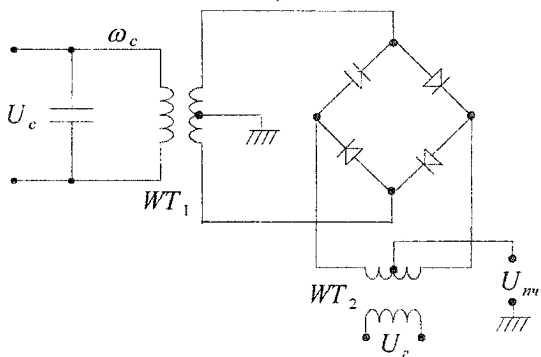
Через те, що складові струму з частотою гетеродину  $\omega_z$  взаємно компенсуються, то шуми гетеродину не попадають на вихід змішувача й відносна шумова температура гетеродину  $T_z = 0$ .



а)



б)



в)

Рис. 8.35. Принципові електричні схеми балансних змішувачів

Більш поширеною є друга схема (рис. 8.35, б). Різниця полягає в тому, що в ній відсутній вихідний трансформатор, напруга гетеродину подається на діоди в протифазі, а напруга сигналу – у фазі. Проте через зустрічне увімкнення у цій, як і в попередній схемі, зберігаються ті ж фазові співвідношення й ті ж властивості, що і в балансному змішувачі.



Існує третій варіант змішувача – двобалансний змішувач за кільцевою схемою (рис. 8.35, в). Його перевага – більш висока вибірковість за каналом прямого проходження. Завдяки симетрії трансформаторів  $WT_1$  і  $WT_2$  і діодів забезпечується внутрішня розв'язка входів сигналу, гетеродину й виходу змішувача. У цьому легко переконатися, визначивши результуючий струм первинної обмотки трансформатора  $WT_2$ :

$$i_{\Sigma} = i_{o1} - i_{o2} \cong 4bU_c U_c \cos[(\omega_c - \omega_s)t] + \dots$$

Тут, як бачимо, відсутня також складова з частотою сигналу  $\omega_c$ . Його шумові характеристики є кращими за попередні.

### 8.3.3 Перетворювачі частоти з подавленням дзеркального каналу

Характеристики перетворювачів частоти помітно покращуються під час подавлення сигналів дзеркальної частоти  $\omega_{ds} = \omega_c - \omega_{nc}$ . До числа таких сигналів відносяться як зовнішні сигнали з частотою  $\omega_{ds}$ , так і їх комбінаційні частоти, які утворилися в процесі перетворення частоти. Подавлення же комбінаційних складових зменшує втрати перетворювача й понижує рівень паразитного випромінювання гетеродину.

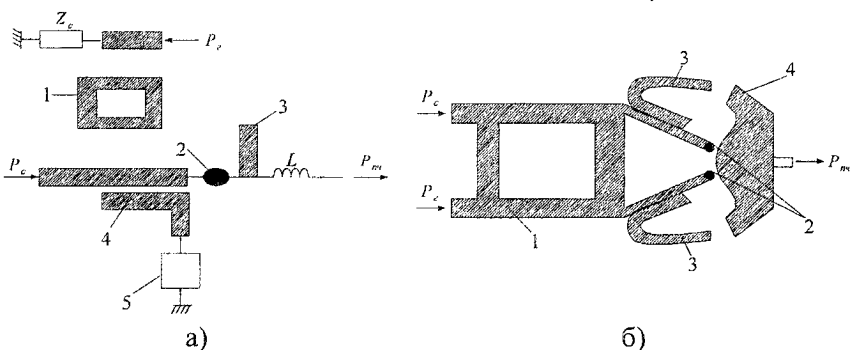


Рис. 8.36. Топологічні схеми змішувачів з подавленням дзеркального сигналу: а) однотактний вузькосмуговий змішувач (1 – фільтр зв'язку з гетеродином, 2 – діод, 3 – чвертьхвильовий шлейф, 4 – фільтр дзеркального каналу, 5 – навантаження на дзеркальній частоті); б) балансний змішувач із реселектором (1 – направлений відвід, 2 – діоди, 3 – фільтр дзеркального каналу, 4 – фільтр короткого замикання на частоті  $\omega_c$ )

Сьогодні існує два основні способи подавлення сигналу дзеркальної частоти. Перший спосіб полягає у використанні вузькосмугового преселектора. Приклад топологічної схеми вузькосмугового одноконтурного змішувача з подавленням дзеркального каналу за допомогою селективної ланки наведений на рис. 8.36, а. Більш дієвим є другий спосіб – з використанням схем із фазовим подавленням сигналу дзеркальної частоти, наприклад, з використанням балансових змішувачів на діодах Шотткі (рис. 8.36, б), у якому реалізовано режим холостого ходу й короткого замикання на дзеркальній частоті. Коефіцієнт шуму в таких змішувачах сьогодні доведений до рівня  $2 \div 3$  дБ. Недоліком таких змішувачів є їх вузька смуга частот.

### Контрольні запитання

1. Які мікроелектронні пристрої називаються активними? Що знаходиться в їх основі? Що відноситься до активних мікроелектронних пристроїв?
2. Який пристрій називається автогенератором? Що є основним елементом автогенератора? Як виглядає функціональна схема автогенератора?
3. Які є види автогенераторів, чим вони відрізняються один від одного?
4. Яким умовам повинні задовольняти автогенератори НВЧ? Назвіть режими збудження коливань в автогенераторі. Якою є найбільш суттєва вимога до автогенераторів?
5. Укажіть, які існують схеми транзисторних автогенераторів за способами здійснення зовнішнього позитивного оберненого зв'язку? Який вигляд має схема таких автогенераторів?
6. Укажіть особливості побудови автогенераторів на тунельних діодах, діодах Ганна й лавино-пролітних діодах. Назвіть принципи роботи й основні параметри та характеристики цих діодів.
7. Який пристрій називається підсилювачем потужності? Яка його функціональна схема? Які функції виконують узгоджуючі кола? Які параметри використовуються для характеристики підсилювача потужності?
8. Назвіть особливості проектування підсилювачів потужності на базі польових транзисторів. Які функції виконують узгоджуючі ланки у вузькосмугових підсилювачах потужності?
9. Назвіть основні характеристики й параметри параметричних підсилювачів. Що являють собою дво- й одноконтурні параметричні підсилювачі потужності?

10. Яке призначення діодних перетворювачів частоти? Назвіть основні електричні характеристики змішувача. Які функції виконують балансові змішувачі, які схеми використовуються для їх реалізації? Назвіть основні способи подавлення сигналу дзеркальної частоти та основні топологічні схеми змішувачів.

### Рекомендована література

1. Веселов Г. И. Микроэлектронные устройства СВЧ / Г. И. Веселов. – М. : Высшая школа, 1988. – 280 с.
2. Бова Н. Т. Микроэлектронные устройства СВЧ / Н. Т. Бова, Ю. Г. Ефремов, В. В. Конин. – К. : Техника, 1984. – 184 с.
3. Москалюк В. О. Фізика електронних процесів : Динамічні процеси / В. О. Москалюк. – К. : Політехніка, 2004. – 180 с.
4. Левитский С. М. Вакуумная и твердотельная электроника СВЧ / С. М. Левитский, С. В. Кошечая. – К. : Высшая школа, 1986. – 272 с.
5. Тараненко В. П. Електронні та квантові прилади НВЧ / В. П. Тараненко. – К. : Вища школа, 1974. – 248 с.
6. Федоров Н. Д. Электронные приборы СВЧ и квантовые приборы / Н. Д. Федоров. – М. : Атомиздат, 1979. – 288 с.
7. Шварц Н. З. Усилители СВЧ на полевых транзисторах / Н. З. Шварц. – М. : Радио и связь, 1987. – 920 с.
8. Шварц Н. З. Линейные транзисторные усилители СВЧ / Н. З. Шварц. – М. : Советское радио, 1980. – 368 с.
9. Шварц Н. З. Транзисторные СВЧ усилители / Н. З. Шварц. – М. : Радио и связь, 1976. – 368 с.
10. Шумилин М. С. Проектирование транзисторных каскадов передатчиков / М. С. Шумилин, В. Б. Козырев, В. А. Власов. – М. : Радио и связь, 1997. 420 с.
11. Проектирование радиопередающих устройств СВЧ : учеб. пособ. для вузов / Г. М. Уткин, М. В. Благовещенский, В. П. Жуховицкая [и др.] ; под ред. Г. М. Уткина. – М. : Советское радио, 1979. – 320 с.
12. Карсон Р. Высокочастотные усилители / Р. Карсон. – М. : Радио и связь, 1981. – 216 с.
13. Давыдов Н. С. Диодные генераторы и усилители СВЧ / Н. С. Давыдов, Ю. З. Данюшевский. – М. : Радио и связь, 1986. – 345 с.
14. Проектирование радиопередающих устройств с применением ЭВМ / под ред. О. А. Алексеева. – М. : Радио и связь, 1987. – 428 с.
15. Артюнов Л. М. Модули СВЧ / Л. М. Артюнов, И. П. Блудов, В. Д. Давыдов. – М. : Радио и связь, 1987. – 172 с.

## РОЗДІЛ 9. АНТЕНИ НВЧ В ІНТЕГРОВАНОМУ ВИКОНАННІ

Антені є обов'язковим елементом будь-якої системи радіозв'язку, радіомовлення, телебачення, а також інших радіотехнічних систем, які використовують для передачі інформації вільне поширення електромагнітних хвиль. Вільним простором при цьому вважається атмосфера, Земля, космічний простір.

Функції антен у вказаних системах зводяться до вивчення передавання та приймання електромагнітних хвиль. Розрізняють передавальні й приймальні антени, які відповідно підключаються до передавача або приймача. Таке підключення здійснюється за допомогою ліній передачі енергії, які називаються фідерами.

Передавальна антена перетворює енергію хвиль, що поступили по фідеру від передавача до антени, в енергію вільних коливань, які поширюються в навколишньому просторі. Приймальна антена, навпаки, уловлює енергію вільних коливань і перетворює її в енергію хвиль, яка поступає по фідеру на вхід приймача.

Передавальна антена повинна не тільки випромінювати електромагнітні хвилі, але й забезпечувати найбільш раціональний розподіл випромінюваної енергії в просторі. Відповідно до цього однією з основних характеристик передавальних антен є діаграма направленості – залежність випромінюючого поля від положення точки спостереження; при цьому точка спостереження повинна знаходитися на великій відстані від антени (у дальній зоні). Висока направленість антени досягається тоді, коли її розміри суттєво перевищують довжину хвилі коливань.

Для приймальних антен діаграма направленості – це вже залежність струму в навантаженні антени, тобто в кінцевому рахунку в приймачі, або е.р.с., що наводиться на вході приймача, від напрямку приходу електромагнітної хвилі, яка опромінює антену. Наявність направлених властивостей у приймальних антен дозволяє не тільки збільшити потужність, що виділяється струмом у навантаженні, але й суттєво послабити приймання різного роду завад, тобто підвищує якість приймання сигналу.

Важливу роль у роботі антенних пристроїв відіграють лінії живлення (фідери), які передають енергію від генератора до антен (у передавальному режимі) або від антен до приймача (у режимі приймання). Основні вимоги до фідера зводяться до його електро-

герметичності (відсутності випромінювання з фідера) і малими тепловими втратами. У передавальному режимі хвильовий опір фідера повинен узгоджуватись із вхідним опором антени (що зумовлює у фідері режим біжучої хвилі), і з виходом передавача (для максимальної віддачі потужності). У приймальному режимі узгодження входу приймача з хвильовим опором фідера забезпечує в останньому режим біжучої хвилі, а узгодження хвильового опору фідера з опором навантаження – умову максимальної віддачі потужності в навантаження приймача.

## 9.1 Розрахунок поля випромінювання антен. Основні електричні параметри передавальних антен

Як уже зазначалося, властивості антени наразі прийнято вивчати здебільшого в передавальному режимі, оскільки характеристики антен у приймальному режимі найпростіше можна визначити через характеристики цих же пристроїв у передавальному режимі за допомогою принципу взаємності.

Завдяки лінійності рівнянь Максвелла до них можна застосувати принцип суперпозиції й будь-яку антену довжиною  $L$  можна розбити на елементарні ділянки  $d\xi$ , кожна з яких за малої товщини дроту являє собою елементарний електричний вібратор (ЕЕВ), а потім знайти результуюче поле шляхом сумування всіх елементарних полів з урахуванням їх поляризацій, амплітуд і фаз. У будь-якій сферичній системі координат  $r'\theta'\varphi'$ , пов'язаній з елементом  $d\xi$  і декартовою системою координат  $x'y'z'$ , вісь  $z'$  збігається з віссю елементарного вібратора (рис. 9.1). У цій системі комплексна амплітуда напруженості електричного поля набуває значення:

$$d\vec{E} = \vec{\theta}_0 i \frac{Z_c^0 \dot{I}(\xi) d\xi}{2r\lambda} \sin\theta' \exp(-ikr'), \quad (9.1)$$

де  $\xi$  – лінійна координата, яка відраховується вздовж дроту й характеризує положення розміщеного елемента;  $\dot{I}(\xi)$  – комплексна амплітуда струму у виділеному елементі;  $d\xi$  – довжина ЕЕВ;  $k = 2\pi/\lambda$  – хвильове число;  $\lambda$  – довжина хвилі у вільному просторі;  $Z_c^0 = \sqrt{\mu_a/\epsilon_a}$  – хвильовий опір середовища;  $\vec{\theta}_0$  – орт сферичної системи координат.

Цей вираз справедливий для далекої зони виділеного елемента, тобто за умови  $r' \gg \lambda$ . Напруженість магнітного поля в далекій зоні ЕЕВ пов'язана з напруженістю електричного поля виразом

$$d\dot{H} = \frac{1}{Z_c^0} [r'_0 \times d\dot{E}],$$

де  $r'_0$  – орт сферичної системи координат. Тоді результуюче поле буде визначатися шляхом геометричного сумування (інтегрування) полів усіх елементарних вібраторів:

$$\dot{E} = \int_L d\dot{E}, \quad \dot{H} = \int_L d\dot{H}.$$

Найбільший практичний інтерес у процесі вивчення антен викликає електромагнітне поле, яке створюється на великій відстані від неї (далека зона, або зона Фраунгофера). Сформулювати суть спрощень, які допускаються під час розрахунку поля на великих відстанях, а також оцінити таку відстань можна таким чином.

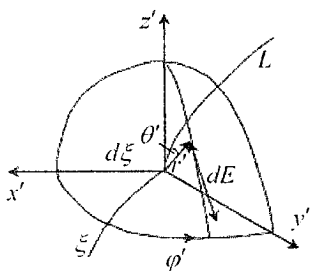


Рис. 9.1. Елементарний електричний вібратор у сферичній системі координат

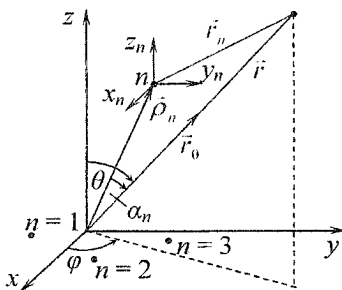


Рис. 9.2. Система дискретних випромінювачів, однаково орієнтованих у просторі

Розглянемо систему з дискретних випромінювачів, однаково орієнтованих у просторі, а саме так, що будь-який випромінюючий елемент може бути суміщений з іншим тільки шляхом паралельного переміщення в просторі без обертання. Уведемо загальну прямокутну систему координат  $x, y, z$ , центр якої знаходиться всередині випромінюючої системи. Виділимо довільний елемент з номером  $n$  (рис. 9.2), що знаходиться на відстані  $\rho_n$  від початку загальної системи координат. Осі локальної системи координат  $x_n, y_n, z_n$

орієнтуємо паралельно осям координат  $x, y, z$ . Тепер уведемо загальну сферичну систему координат  $r\theta\varphi$ . У системі координат  $r_n\theta_n\varphi_n$  кожна компонента поля випромінювання розглядуваного елемента має вигляд:

$$\dot{E}_n = a \dot{I}_n \tilde{f}_0(\theta_n, \varphi_n) \exp(-ikr_n)/r_n. \quad (9.2)$$

Принцип суперпозиції може бути застосований і для знаходження поля системи довільних ідентичних випромінювачів, розміщених у просторі за певним законом, якщо відоме поле випромінювання одного елемента, який входить у цю систему. У сферичній системі координат  $r_n\theta_n\varphi_n$ , ідентично зв'язаною з кожним випромінювачем-елементом з індексом  $n$ , електричне поле в дальній зоні цього елемента має загалом компоненти  $\dot{E}_{\theta_n}$  і  $\dot{E}_{\varphi_n}$ , тобто

$$\dot{E}_n = \tilde{\theta}_{0n} \dot{E}_{\theta_n} + \tilde{\varphi}_{0n} \dot{E}_{\varphi_n}, \quad (9.3)$$

причому кожна компонента незалежно від фізичної природи випромінювачів може бути подана у вигляді сферичних функцій:

$$\begin{cases} \dot{E}_{\theta_n} = a_{\theta} \dot{I}_n \tilde{f}_0^{(\theta)}(\theta_n, \varphi_n) \exp(-ikr_n)/r_n \\ \dot{E}_{\varphi_n} = a_{\varphi} \dot{I}_n \tilde{f}_0^{(\varphi)}(\theta_n, \varphi_n) \exp(-ikr_n)/r_n \end{cases}, \quad (9.4)$$

де  $a_{\theta}, a_{\varphi}$  – амплітудні множники, які визначаються типом випромінювача;  $\dot{I}_n$  – струм у  $n$ -му випромінювачі;  $\tilde{f}_0^{(\theta)}(\theta_n, \varphi_n)$  і  $\tilde{f}_0^{(\varphi)}(\theta_n, \varphi_n)$  – ДН по відповідній компоненті поля. У цілому, ДН визначає кутову залежність не тільки амплітуди, але й фази випромінюваного поля, тому у виразах (9.4) фігурують компоненти ДН  $\tilde{f}(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) \exp[i\psi(\theta, \varphi)]$ , де  $f(\theta, \varphi)$  – амплітудна ДН, а  $\psi(\theta, \varphi)$  – фазова ДН. Якщо закон розподілу струму по випромінюючих елементах відомий, а ефект взаємного зв'язку не спотворює структуру поля кожного з випромінювачів, то результуюче поле  $\dot{E} = \sum_{n=1}^N \dot{E}_n$ , де  $N$  – число випромінювачів у системі.

Описані таким чином випромінюючі системи з ідентичних елементів мають назву антенних ґраток (АГ) і широко застосовуються в антенній техніці для збільшення направленості випромінювання. Тому можна записати  $\tilde{f}(\theta, \varphi) = \tilde{f}_0(\theta, \varphi) \tilde{f}_c(\theta, \varphi)$ , де  $\tilde{f}_0(\theta, \varphi)$  – комплексна ДН випромінюючого елемента, а множник  $\tilde{f}_c(\theta, \varphi)$

називається множителем ґратки. Таким чином, можна підкреслити, що множник системи для будь-якої антенної ґратки з елементів, ідентично розміщених у просторі, визначається трьома факторами: амплітудою струмів в елементах, фазами струмів в елементах і фазовим зсувом між полями, зумовленими різницею ходу променів від кожного елемента в порівнянні з променем, проведеним у точку спостереження з початку загальної системи координат. Отже, в АГ використовується система множення ДН одного елемента на ДН такої ж системи, яка складається з ізотропних випромінювачів з тим самим співвідношенням амплітуд і фаз збуджуючих струмів. АГ ми розглянемо дещо нижче.

З викладеного матеріалу можна зробити такі висновки. Антенною називають пристрій, призначений для випромінювання та приймання електромагнітних хвиль. Антени мають властивість зворотності. Принципово будь-яка антена може бути як приймальною, так і передавальною. Залежно від призначення антени поділяються на приймальні, передавальні й приймально-передавальні.

На основі принципу взаємності доводиться той факт, що параметри антени, яка працює на приймання, не відрізняється від параметрів антен, які працюють на передачу. Цей факт взаємності спостерігається на радіолокаційних системах.

Ізотропною називають антену без утрат, яка випромінює електромагнітні хвилі рівномірно в усі сторони. Реальні антени не є ізотропними, оскільки в різних напрямках випромінюють по-різному. Залежність напруженості поля, що випромінюється антенною й виміряна на достатньо великій відстані (однаковій) від антени, від кута спостереження в просторі  $\varphi$  називають характеристикою направленості. А графічне подання цієї характеристики  $F(\varphi)$  називають діаграмою направленості.

Просторова ДН є поверхнею об'єму й може мати декілька максимумів. У стаціонарних системах антен ДН розглядають у вертикальній і горизонтальній площинах. ДН зображають нормованими в полярній (рис. 9.3, а) або в прямокутній (рис. 9.3, б) системах координат. Для нормованого зображення ДН будують залежність  $F_n(\varphi) = F(\varphi)/F(\varphi)_{\max}$  за модулем.



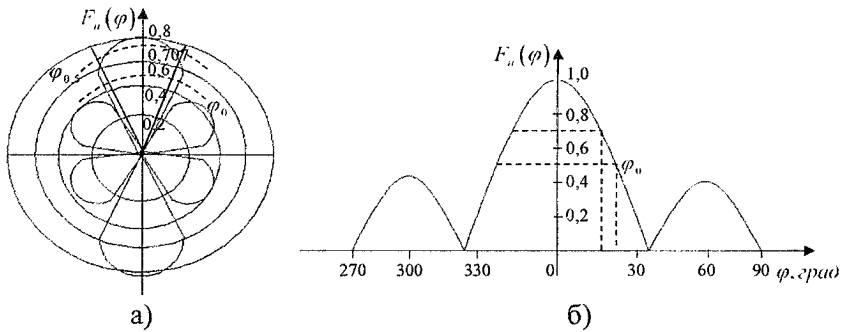


Рис. 9.3. Визначення ширини діаграми направленості антени в полярній (а) і декартовій (прямокутній) (б) системах координат

Частину ДН, яка знаходиться всередині області, обмеженої двома сусідніми напрямками мінімального випромінювання, називають пелюсткою ДН. Пелюстку ДН, у межах якої антена має максимальне випромінювання, називають головною. А пелюстку, напрям якої по відношенню до головної складає кут, рівний або близький до  $180^\circ$ , називають задньою. Усі пелюстки, крім головної і задньої, називають бічними. Кут між двома напрямками пелюстки, у межах якого напруженість поля падає до певного значення, називають шириною пелюстки ДН антени. Рис. 9.3 містить дані для визначення ширини пелюстки за нульовим випромінюванням  $2\varphi_0$  і рівною 0,5 максимальній густині потоку потужності  $\varphi_{0,5}$ , що відповідає рівню 0,707 напруженості поля.

Коефіцієнтом направленої дії (КНД)  $D$  у даному напрямі називають відношення квадрата напруженості поля  $E_0^2$ , яке створене антеною в даному напрямі, до середнього значення квадрата напруженості поля за всіма напрямками  $E_{cp}^2$ , тобто  $D = E_0^2 / E_{cp}^2$ . Числове значення КНД показує, у скільки разів необхідно зменшити потужність випромінювання, замінюючи ненаправлену антену направленою за збереження попередньої напруженості поля в головному напрямі.

Приймальна антена, яка знаходиться в полі електромагнітної хвилі, поглинає частину енергії її за допомогою фідера передає її в приймач, який є навантаженням для антени. Ефективною площею приймальної антени називають еквівалентну площу, з якої може

бути віддана максимальна потужність хвилі в узгоджене навантаження.

Ефективна площа антени  $S_{\text{еф}}$  пов'язана з КНД і довжиною хвилі співвідношенням:

$$S_{\text{еф}} = \frac{D \lambda^2}{4 \pi}. \quad (9.5)$$

Діючою довжиною передавальної антени  $L_D$  називають довжину випромінювання з рівномірним розподілом струму, який у головному напрямі створює таку ж напруженість поля, як і реальна антена за однакових струмів. Діючою довжиною приймальної антени називають відношення е.р.с.  $E$  в антені, наведеної хвилею, яка проходить у напрямі головної пелюстки ДН  $\varepsilon_a$ , до напруженості поля в місці приймання:  $L_D = E/\varepsilon_a$ .

Потужність  $P_a$ , яка підводиться до антени, частково випромінюється ( $P_\Sigma$ ) і частково губиться в нескінченності на нагрівання провідників та ізоляторів антени в Землі та інших навколишніх об'єктах. Потужність утрат в антені  $P_n = I^2 R_n$ , де  $R_n$  – еквівалентний опір утрат, який віднесений до струму  $I$ . Аналогічно можна записати вираз для потужності випромінювання  $P_\Sigma = I^2 R_\Sigma$ . Тут опором випромінювання антени  $R_\Sigma$  називають відношення потужності випромінювання до квадрата ефективного значення струму в антені:  $R_\Sigma = P_\Sigma / I_{\text{еф}}^2$ .

Випромінювана антеною потужність є корисною потужністю, відповідно, її опір випромінюванню є корисним активним опором антени, на відміну від опору втрат, який повинен мати мінімальне значення.

Параметром, що враховує направлені властивості й втрати в антені, є також коефіцієнт підсилення. Коефіцієнтом підсилення антени  $G$  називають відношення густини потоку потужності або квадрата напруженості поля  $E_0^2$ , створеної антеною в даному напрямі, до потоку або квадрата напруженості поля  $E_{0c}^2$ , створеного ета-

лонною антеною в головного напрямі при рівності підведеної до антени потужності:  $G = E_0^2 / E_{0e}^2$ .

Коефіцієнт підсилення є одним із визначальних параметрів передавальних антен. Він показує, у скільки разів треба зменшити потужність, яка підводиться до направленої антени, у порівнянні з еталонною, щоб напруженості поля в головному напрямі були однаковими.

Хвильовий опір антени (вібратора)  $W_x$  або  $Z_x$  визначають відношенням напруги  $U_{na0}$  до струму  $I_{na0}$  біжучої (падаючої) хвилі, він може бути виражений через її параметри:  $W_x = \sqrt{L_1 / C_1}$ , де  $L_1$  і  $C_1$  – відповідно погонні індуктивність  $[\Gamma\text{н}/\text{м}]$  і ємність  $[\Phi/\text{м}]$  антени.

Вхідним опором антени називають відношення напруги до струму на вході антени. Узагалі цей опір є комплексним, який називають імпедансом  $Z_a = R_a + jX_a$  і визначається відносною довжиною  $l/\lambda$  антени.

ККД антени  $\eta_a$  називають відношення випромінюваної потужності  $P_\Sigma$  до потужності, яка підводиться до антени  $P_a$ :

$$\eta_a = \frac{P_\Sigma}{P_a} = \frac{P_\Sigma}{P_\Sigma + P_n} = \frac{R_\Sigma}{R_\Sigma + R_n}. \quad (9.6)$$

## 9.2 Особливості роботи симетричного вібратора як основного елемента антени. Сучасна реалізація конструкцій антен

Симетричний вібратор у ролі випромінювача входить у склад багатьох антен. У принципі, симетричний вібратор можна уявити як довгу лінію, розімкнуту на кінці, дроти якої розгорнуто на  $180^\circ$ . Кожний елемент довгої лінії має певні погонні індуктивність та ємність між провідниками (рис. 9.4).

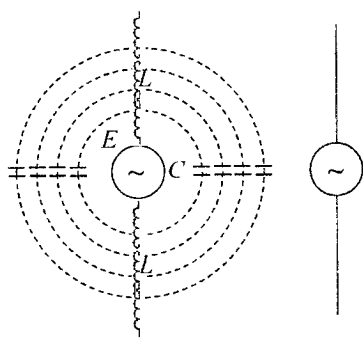


Рис. 9.4. Симетричний вібратор і його еквівалентна схема

Розглянемо процес вільних електричних коливань у симетричному вібраторі. Для цього підключимо обидві половини до затискачів джерела е.р.с. (рис. 9.5, а). Після того, як розподілені ємності провідників вібратора зарядяться і між його половинами виникне різниця потенціалів, відключимо джерело живлення й замкнемо обидві половини вібратора перемичкою (рис. 9.5, б). При цьому розподілені ємності почнуть

розряджатися через перемичку. Очевидно, що через відрізки провідника вібратора, розміщеного посередині, протікає невеликий електричний заряд, і тому розрядний струм має найбільше значення, а до кінців провідників струм зменшується до нуля.

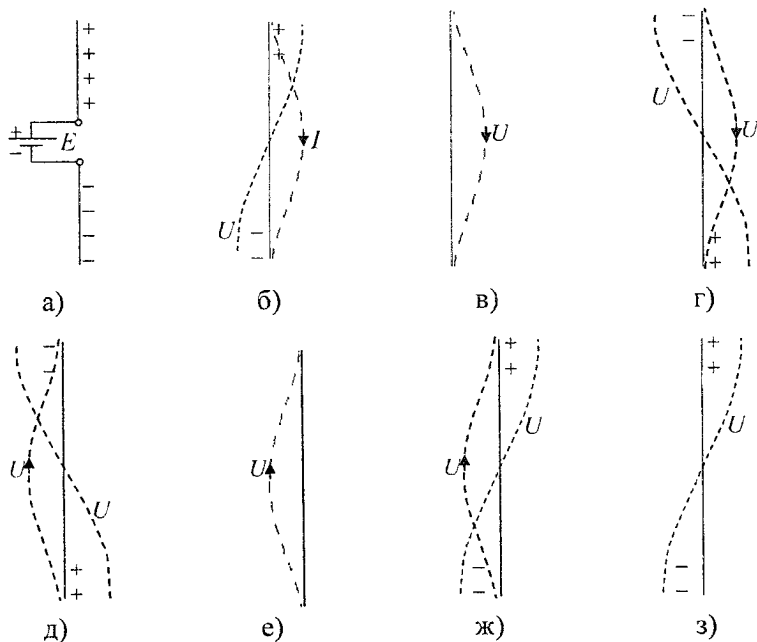


Рис. 9.5. Вільні коливання в симетричному вібраторі

Струм у провіднику наростає поступово, оскільки в розподілених індуктивностях виникає е.р.с. самоіндукції. Різниця потенціалів між точками, рівновіддаленими від середини вібратора тим більша, чим більше ці точки віддалені від середини, оскільки більша частина розподіленої індуктивності провідника бере участь у його створенні (рис. 9.5, б). Знак потенціалу відносно середньої точки по обидва боки від неї є різним, оскільки в одній половині вібратора струм тече до неї, а в іншій – від неї.

У міру розрядження розподіленої ємності струм у провіднику наростає і досягає максимального значення, коли вона повністю розрядиться. При цьому вся енергія електричного поля, яка накопичена в ємності, перейде в енергію магнітного поля розподіленої індуктивності (рис. 9.5, в). Якщо спочатку індуктивність провідників вібратора перешкоджала наростанню струму, то тепер вона перешкоджає його зменшенню. Тому струм зменшується поступово, зберігаючи попередній напрям (рис. 9.5, г). За рахунок цього проходить перезарядження розподіленої ємності, і коли струм спадає до нуля, ємності вже будуть перезаряджені (рис. 9.5, д). Після цього процес протікає у зворотному напрямі (рис. 9.5, д–з). Таким чином, у вібраторі виникають вільні коливання електричних зарядів. При цьому в ньому встановлюються стоячі хвилі струму й напруги і вздовж його довжини укладається половина стоячої хвилі струму та напруги. Відповідно, довжина хвилі  $\lambda_0$  власних коливань симетричного вібратора є вдвоє більшою від його довжини, тобто  $\lambda = 2l$ . Тому симетричний вібратор ще називають півхвильовим диполем, доводячи, що він удвоє коротший за довжину хвилі вільних коливань.

Якщо півхвильовий вібратор розмістити вертикально, то його розмір можна зменшити вдвічі завдяки провідним властивостям Землі. При вертикальному розміщенні нижній кінець антени підключається до одного із затискачів генератора електромагнітних хвиль (коливань), а інший затискач генератора при цьому заземлюється (рис. 9.6, а).

Якщо припустити, що Земля є ідеальним провідником, то в ній наводиться е.р.с., яка діє як дзеркальне зображення основного вібратора (рис. 9.6, б). Така антена називається вертикальною несиметричною антеною, її висота приблизно рівна  $\lambda/4$ . Усе вищезазначене справедливе тільки в тому випадку, коли Земля являє собою ідеаль-

ний провідник. Якщо ж Земля має погані провідні властивості, характер розподілу струму в земній поверхні змінюється. Особливо важливе значення має опір Землі поблизу основи антени. Для покращення провідності цієї ділянки застосовують металізацію – закупають у землю металеві листи чи дроти, покращують хімічний склад ґрунту, вводячи різноманітні солі.

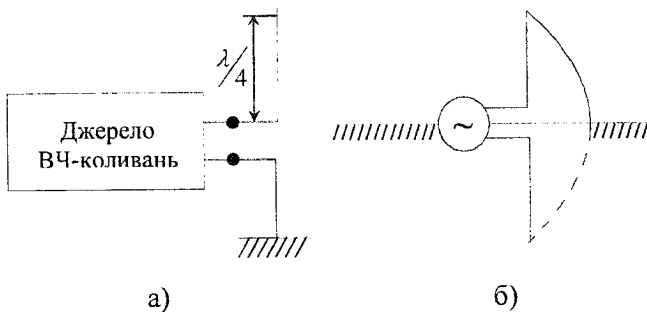


Рис. 9.6. Конструкція чвертьхвильового вібратора

Часто заземлення заміняють системою провідників, не заритих, а піднятих над землею, які називаються протывагою. Остання повинна достатньо добре екранувати антенний провідник від землі, відіграючи роль добре провідної поверхні. Вона, звичайно, дає гірші результати, але на рухомих радіостанціях є єдиним виходом з існуючого положення. Тут зазвичай у ролі протываги використовується корпус автомобіля, на якому розміщена радіостанція. Так само чинять за необхідності встановлення радіостанції на кам'янистому ґрунті.

Розглянемо тепер особливості конструювання антен для різної довжини хвиль.

#### *А. Антени кілометрових і гектометрових хвиль.*

Це довгі й середні, які використовують для радіозв'язку, радіомовлення та навігації. На довгих (ДХ) і середніх (СХ) хвилях земна поверхня має дуже добру провідність. Біля поверхні дуже доброго провідника електричне поле може бути спрямоване перпендикулярно до його поверхні. Тому як передавальні, так і приймальні антени для цих хвиль повинні мати розвинену вертикальну частину. Для того щоб антена була резонансною й мала достатньо великий опір випромінювання і ККД, її розміри повинні наближатися при-

наймні до  $\lambda/4$ , тобто на довгих хвилях її висота повинна дорівнювати декільком сотням метрів. Практично вдається побудувати антени (щогли) висотою не більше 200 ÷ 300 м. Тому на хвилях довжиною більше 1000 м, як правило, доводиться працювати з антенами довжиною, меншою від резонансної. Це приводить до того, що вхідний опір антени має реактивну складову ємнісного характеру, для компенсації якого послідовно з антеною використовують котушку індуктивності (рис. 9.7, а). Такі котушки називають подовжувальними ( $L_n$ ).

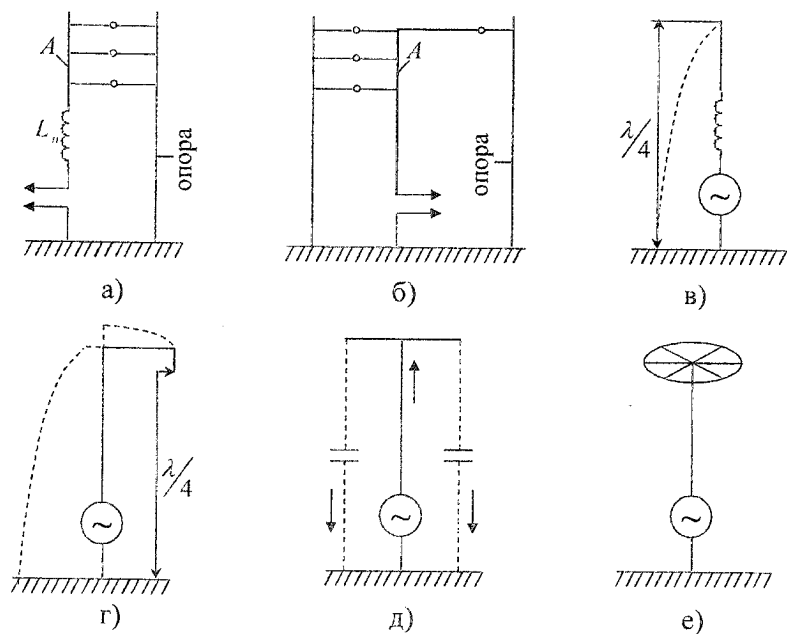


Рис. 9.7. Конструкції антен довгих і середніх хвиль: а) заземлений вібратор з подовженою котушкою; б) Г-подібна антена; в) розподіл струму в антені з котушкою; г) розподіл струму в Г-подібній антені; д) Г-подібна антена; е) антена типу парасольки

Опір випромінювання в антен з малою електричною довжиною дуже малий. Водночас активний опір погоджувальних котушок є значним. Тому опір утрат у колі антен стає більшим або того ж порядку, що й опір випромінювання; ККД антен є досить низьким.

На середніх хвилях (від 100 м до 1 км ) під час роботи антен у широкому діапазоні частот може статися, що частоти коливань, які підводяться до неї, є менші від резонансної. У цьому випадку реактивна складова її вхідного опору має індуктивний характер. Тоді для налаштування антен необхідно застосовувати конденсатор, який прийнято називати укорочуючим. Тобто, щоб налаштувати антену для різних діапазонів частот, вона повинна мати як індуктивність, так і ємність.

Застосування елементів налаштування не змінює опір випромінювання антени, який визначається тільки її електричною довжиною. Тому під час роботи з короткими антенами опір випромінювання завжди є невеликим. Для отримання великої потужності випромінювання в таких антенах доводиться збуджувати великі струми. Малий опір випромінювання приводить також до того, що резонансна характеристика антен стає дуже гострою, внаслідок чого антена дуже критична до налаштування, зокрема до заземлення нижнього кінця, що знижує її ККД.

Для збільшення ККД замість котушки індуктивності часто збільшують довжину антени до резонансної, згинаючи її на висоті щогли під прямим кутом. Така  $\Gamma$ -подібна антена випромінює краще, ніж пряма антена з подовжуючою котушкою, але вона вимагає вже встановлення другої щогли (рис. 9.7, б). Якщо висота підвіски  $\Gamma$ -подібної антени є невеликою, то її горизонтальна частина практично не випромінює, тому що вона утворює зі своїм дзеркальним зображенням двопровідну лінію. Однак при цьому розподіл струму у випромінюючій вертикальній частині суттєво покращується. У ній вкладається частина стоячої хвилі струму, близької до пучності, а пучність розміщується ближче до верхнього кінця, який знаходиться в більш вигідних для випромінювання умовах (рис. 9.7, г).

Збільшити також амплітуду струму на кінці антени можна, створивши додаткову горизонтальну частину у вигляді двох горизонтальних променів (рис. 9.7, д) або у вигляді багатопроменевої парасольки (рис. 9.7, е). У всіх випадках горизонтальні елементи утворюють із землею деяку ємність, завдяки якій амплітуда струму на кінці вертикальної частини антени вже не рівна нулю, а розподіл струму вздовж неї стає більш рівномірним. Площа антени і, відповідно, діюча висота антени збільшуються.

Дуже часто антени ДХ і СХ виконують у вигляді встановлених на ізоляторі сталених вільно стоячих антен-башт й антен-щогл



(рис. 9.8, а, б). На СХ на відстанях  $100 \div 300$  км поля поверхневої і просторових хвиль можуть стати співмірними за амплітудою і випадковими за фазою. Тут спостерігається так зване замирання сигналу (федінги) селективного характеру. У робочій смузі окремі частоти замирають по-різному, викликаючи при цьому спотворення передавального сигналу. Для того щоб відсунути подальше від передавальної станції зону замирання, необхідно на передачу застосовувати антени зі спеціальною формою ДН у вертикальній площині. Такі антени повинні мати максимум випромінювання під кутом  $55^\circ$ . Антени з подібною ДН називають антифедінговими. Такими, наприклад, є несиметричні вертикальні вібратори висотою  $(0,5 \div 0,6) \lambda$ .

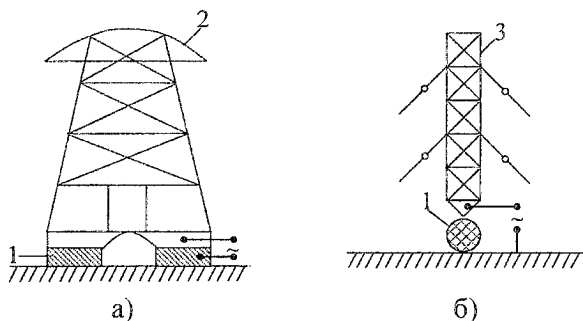


Рис. 9.8. Конструкції антен-башт (а) та антен-щогл:  
1 – опорний ізолятор; 2 – смісна шапка; 3 – щогла

Для радіомовлення приймальні антени не налаштовуються на частоту приймальних радіостанцій і тому можна з успіхом використовувати  $G$ - і  $T$ -подібні антени та антени типу парасольки.

#### *Б. Антени декаметрових хвиль (ВЧ або КХ від 100 до 10 м).*

Чим коротша хвиля, тим більше може бути різновидів антен. Для коротких хвиль (КХ) провідність ґрунту погіршується, унаслідок чого виникають великі втрати в заземленні. Тому на цих хвилях зазвичай уникають використання заземлених вібраторів. Тільки біля великих водних поверхонь або при розміщенні радіостанції на сухих ґрунтах заземлені вібратори дають непогані результати.

У діапазоні декаметрових (коротких) хвиль ( $10 \div 100$  м) відношення довжини антени до довжини хвилі може бути досить вели-

ким. Тому забезпечення високого опору випромінювання та високого ККД не викликає труднощів. Більш актуальним під час побудови короткохвильових антен є питання про ДН, до якої висуваються такі вимоги:

1. Вона повинна бути по змозі незмінною у всіх діапазонах хвиль, у яких підтримується зв'язок протягом тривалого часу. Такі антени, які мають незмінну ДН у широкому діапазоні частот, називають діапазонними, на відміну від налаштованих.

2. Напрямок максимального випромінювання та приймання повинен бути таким, щоб число відбитих від іоносфери й Землі хвиль було мінімальним, оскільки кожен стрибок хвилі супроводжується втратами енергії. Тому кут променя необхідно зменшувати в міру подовження лінії зв'язку. Наприклад, для ліній до 600 км рекомендується вибирати кут 30–45°, а для ліній довжиною 3000 км – лише 10–20°.

3. Через нестійкий стан іоносфери направлена дія антени не повинна бути великою для запобігання того, що випромінювана хвиля опиниться поза сферою дії приймальної антени. Тому ширину кута ДН короткохвильової антени у вертикальній та горизонтальній площинах доцільно вибирати в межах 10–30°.

4. Для послаблення дії промислових завод на радіоприймання максимум ДН приймальної антени повинен бути дуже близьким до земної поверхні. Із цієї точки зору в короткохвильових антенах доцільно застосовувати горизонтальні вібратори, а не вертикальні. Проте симетричний горизонтальний вібратор не розрахований на роботу в широкому діапазоні частот, оскільки його вхідний опір сильно залежить від частоти, що приводить до погіршення узгодження з живильним фідером.

Вхідний опір вібратора може змінюватися в менших межах, якщо зменшити його хвильовий опір. Це може бути реалізовано за рахунок збільшення діаметра випромінюючих провідників. У диполі С.І. Надененка (вібратор горизонтальний діапазонний ВГД) плечі вібратора утворені системою із 6–12 провідників, розміщених по твірній циліндра діаметром  $1 \div 2,5$  м (рис. 9.9).

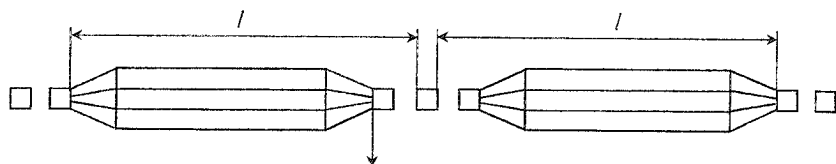


Рис. 9.9. Горизонтальний діапазонний диполь (вібратор)  
С.І. Надененко

Зі зміною частоти вхідний опір такого вібратора в невеликих межах та узгодження з фідером забезпечується в більш широкому діапазоні частот. Робочий діапазон диполя Надененка складає  $(1,7 \div 3,3)\lambda$ . Така антена застосовується на передавальних і приймальних станціях сьогодення.

Симетричні вібратори широко використовуються як елемент більш складних антен, які складаються із декількох вібраторів (ТВ-антени, антени РЛС). Такі багатовібраторні антени забезпечують гостронаправлене випромінювання та приймання. Така антенна система складається із горизонтальних півхвильових вібраторів, розміщених рядками в декілька поверхів. Відстань між поверхами складає  $\lambda/2$ , а між вібраторами –  $\lambda$ . Якщо у всіх таких вібраторах струми збуджуються синфазно, то таку антенну називають синфазною.

На рис. 9.10 зображено синфазну горизонтальну багатовібраторну антену. Розглянемо, чим буде визначатися ДН такої антени у вертикальній і горизонтальній площинах.

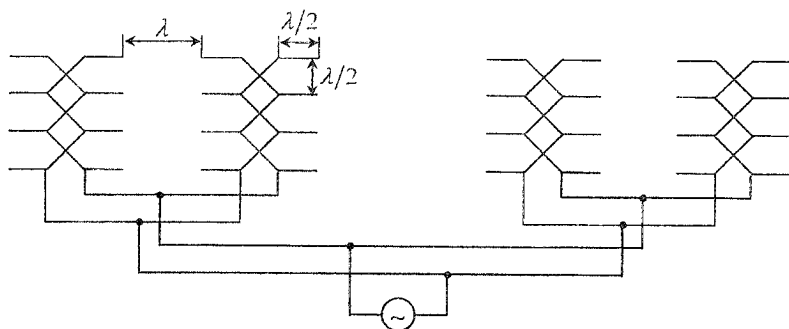


Рис. 9.10. Синфазна горизонтальна багатовібраторна антена

Нехай така антена використовується як приймальна. ДН кожного вібратора у вертикальній площині являє собою коло. На рис. 9.11

показані горизонтальні півхвильові вібратори, розміщені у два поверхи на відстані  $\lambda/2$ .

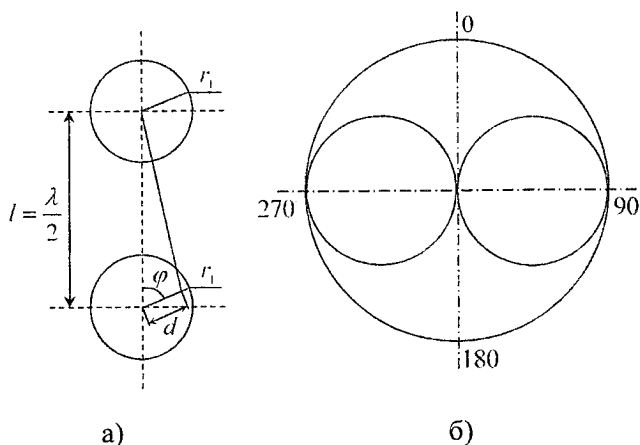


Рис. 9.11. До пояснення впливу числа вібраторів на діаграму направленості синфазної горизонтальної антени у вертикальній площині

У разі достатнього віддалення джерела приймання хвиль лінії  $r_1$  і  $r_2$ , які з'єднують вібратори із цим джерелом, можна вважати паралельними. Тому струми від вібраторів будуть додаватися в загальній лінії, під'єднаній до них. Якщо кут приходу  $\varphi = 90^\circ$ , то  $r_1$  і  $r_2$  рівні й струми складуються в однаковій фазі. При  $\varphi \neq 90^\circ$  проявляється різниця відстаней  $r_1$  і  $r_2$  (на рис. 9.11 це відрізок  $d$ ). Якщо  $d = \lambda/2$ , то струми у вібраторах вже будуть у протифазі, а сумарний струм буде рівний нулю, і приймання сигналів із цього напрямку вже не буде.

Таким чином, система із двох горизонтальних вібраторів, розміщених на різних поверхах (висотах) відносно Землі, дає ДН у вертикальній площині, як зображено на рис. 9.11 суцільною лінією. Чим більше поверхів, тим вужчою стає ДН.

Для магістрального зв'язку як приймальні і передавальні антени застосовуються антени з вузькими ДН в обох площинах, які містять 32 і більше вібраторів. Коефіцієнт підсилення таких антен є більшим від 150. Зі зміною довжини хвилі відстань між поверхами буде

відрізнитися вже від значення  $\lambda/2$ . У результаті вібратори різних поверхів будуть живитися струмами різних амплітуд і фаз. Усе це створює ДН. Тому такі антени можуть застосовуватись у вузькому діапазоні хвиль ( $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 1,35$  для двоповерхової і  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 1,15$  для чотириповерхової).

Для того, щоб отримати гостронаправлену діапазонну антену, необхідно забезпечити без переналаштування елементів антенно-фідерної системи постійність і стабільність напрямку максимального випромінювання, а по можливості й усю ДН при зміні довжини хвилі. Це можна успішно вирішити, якщо у всій антенній системі створити режим біжучої хвилі. До такого типу антен відноситься ромбічна антена, зображена на рис. 9.12. Вона складається із чотирьох горизонтальних провідників 1–4, які утворюють сторони ромба. Генератор підключається до провідників 1–3 за допомогою фідера, хвильовий опір якого рівний хвильовому опору антени. Кінці провідників 2 і 4 замкнуті на активний опір  $R$ , який теж рівний хвильовому опору  $\rho$ . Таким чином, у всіх ланках антенної ромбічної системи створюється режим біжучої хвилі.

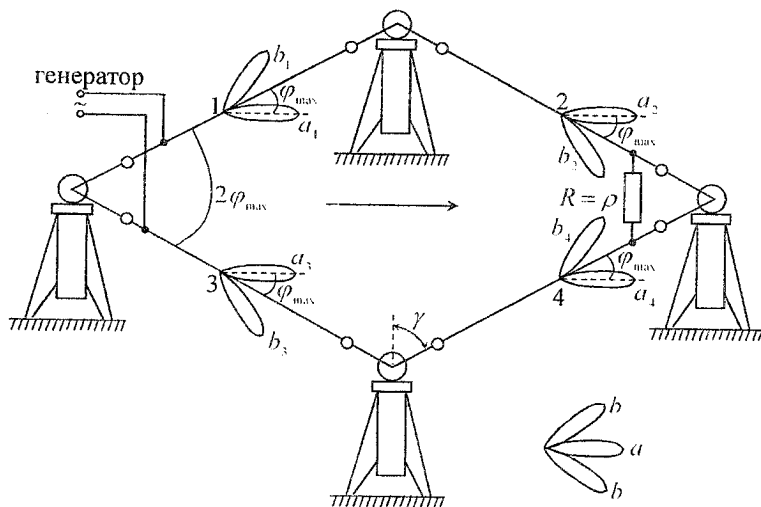


Рис. 9.12. Будова ромбічної антени

Кожний провідник антени створює випромінювання, максимум якого направлений під кутом  $\varphi_{\max}$  до провідника. Якщо гострий кут ромба рівний  $2\varphi_{\max}$ , то основні пелюстки ДН ( $a_1, a_2, a_3, a_4$ ) всіх чотирьох провідників збігаються з напрямом великої діагоналі ромба.

За достатньо великої довжини провідника ( $l > 4\lambda$ ) зміна довжини суттєво не змінює кут  $\varphi_{\max}$ , відповідно, напрям максимального випромінювання ромбічної антени зберігається постійним у широкому діапазоні хвиль. Робочий діапазон хвиль ромбічної антени складає  $(0,8 \div 2,5)\lambda$ . Для покриття всього діапазону коротких хвиль достатньо мати дві ромбічні антени.

Недоліком ромбічної антени є доволі низький ККД, зумовлений тим, що частина енергії, яка поступає від передавача, поглинається в опорі навантаження й не витрачається на випромінювання, а ДН характеризується достатньо великими боковими пелюстками  $b_1, b_2, b_3, b_4$ . Дещо зменшує цей недолік двійна ромбічна антена. У цьому випадку антена складається із двох полотен ромбічних антен, які зміщені по горизонталі в напрямі малої діагоналі й з'єднані паралельно у вершинах гострих кутів. Висота підвісу ромбів відрізняється на 2–3 м, що виключає можливість замикання між провідниками антени. Це дозволяє зменшити інтенсивність бокових пелюсток і значно збільшити коефіцієнт підсилення антени ( $> 200$ ).

Особливу увагу заслуговує антена, яка складається із двох вібраторів (рис. 9.13). Розглянемо її особливі конструкції. Для отримання ДН з одним головним напрямом випромінювання або приймання розглянемо систему, яка складається із двох вібраторів (1 і 2), віддалених один від одного на відстань  $d = \lambda/4$ . Струми в цих вібраторах рівні за амплітудою, а фази зсунуті одна відносно одної на  $90^\circ$  так, що струм вібратора 2 випереджає струм вібратора 1 (рис. 9.13, а). Відповідно, у будь-який момент біля вібратора 2 формується поле  $E_2$ , яке випереджає за фазою на  $90^\circ$  поле  $E_1$ , випромінене вібратором 1. За час проходження полем  $E_2$  відстані  $\lambda/4$  (між вібраторами 1 і 2) пройде відставання за фазою на кут  $90^\circ$ . Це випередження за фазою буде вже скомпенсованим, і біля вібратора 1 поля  $E_1$  і  $E_2$  обох випромінювачів будуть вже мати однакові фази.

Таким чином, у напрямі вібратора 1 буде поширюватися хвиля з подвоюною напруженістю поля (ліва векторна діаграма – рис. 9.13, а).

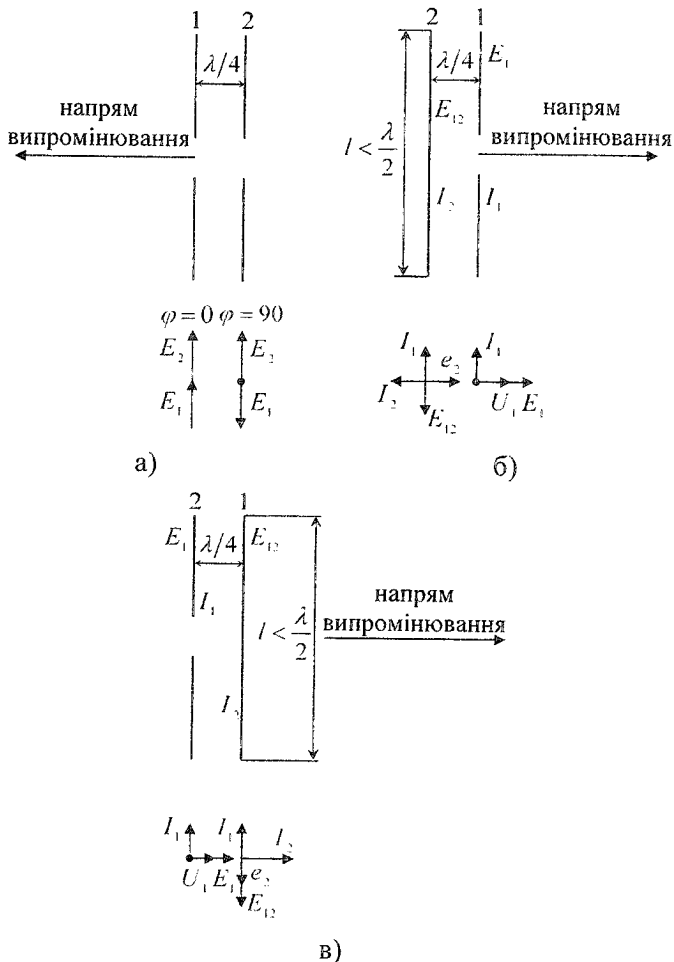


Рис. 9.13. Антени, які складаються із двох вібраторів: а) вібратор з активним рефлектором; б) вібратор з пасивним рефлектором; в) вібратор з пасивним директором

При поширенні в напрямі вібратора 2 поле  $E_1$  вібратора 1 пройде шлях  $\lambda/4$  до вібратора 2 й отримає відставання за фазою на кут  $90^\circ$ , що буде вже в протифазі до поля  $E_2$  вібратора 2 ( $\varphi_1 = -90^\circ$ ,  $\varphi_2 = +90^\circ$ ). Тут поля взаємно компенсуються і випромінювання в цьому напрямі не буде (права векторна діаграма – рис. 9.13, а). У розглянутій системі вібратор 2 є відбивним і його називають рефлектором, або дзеркалом. Рефлектор, який живиться безпосередньо від генератора, називають активним рефлектором.

Для спрощення конструкції антени вібратор 2 часто виконують пасивним – до нього не підводять живлення. Пасивний вібратор збуджується в цьому випадку полем активного вібратора 1. Розглянемо саме таку систему, яка складається з активного вібратора 1 й пасивного вібратора 2 і показана на рис. 9.13, б. Припустимо, що у вібраторі 1 генератором збуджується струм  $I_1$ . У вібраторі, як і в розімкненій на кінці лінії з малими втратами, встановлюється стояча хвиля; при цьому напруга  $U_1$  відстає від струму  $I_1$  на кут, близький до  $90^\circ$  (векторна діаграма – рис. 9.13, б). Напруга  $U_1$  створює біля вібратора 1 поле  $E_1$ , яке збігається з нею за фазою. При поширенні поля  $E_1$  до пасивного вібратора 2 пройде затримка фази поля на кут  $90^\circ$  і поле у вібратора 2  $E_{12}$  буде вже відставати за фазою від струму  $I_1$  на  $180^\circ$ . Полем  $E_{12}$  у вібраторі 2 наводиться е.р.с.  $e_2$ , яка збігається за фазою з полем  $E_{12}$ .

Пасивний вібратор 2 повинен мати плече  $l > \lambda/4$ , тобто загальну довжину  $l > \lambda/2$ . Реактивний опір такого вібратора має вже індуктивний характер і струм  $I_2$ , зумовлений е.р.с.  $e_2$ , буде також відставати від неї на кут  $\approx 90^\circ$ . У результаті струм  $I_2$  пасивного вібратора 2 відстає від струму  $I_1$  активного вібратора 1 на кут, близький до  $270^\circ$ , що еквівалентно випереджанню на  $90^\circ$ . Такий пасивний вібратор з довжиною  $l_2 > 0,5\lambda$  у такій системі поводить себе як пасивний рефлектор (рис. 9.13, б).

Якщо пасивний вібратор узяти дещо коротшим, ніж  $\lambda/2$  (рис. 9.13, в), то його реактивний опір буде вже мати ємнісний характер. Тепер струм  $I_2$  буде випереджати струм  $I_1$  на кут  $\approx 90^\circ$ .



Максимум випромінювання буде направлений у бік пасивного вібратора 2. За активним вібратором 2 поле буде послаблене. Такий пасивний вібратор з  $l_1 < \lambda/2$  називають директором.

Слід зауважити, що описаний вище принцип роботи двовібраторної антени широко використовують у діапазоні метрових хвиль, зокрема для телебачення.

### *В. Конструкції антен метрових, дециметрових і сантиметрових хвиль (НВЧ-хвилі).*

У діапазоні УКХ використовують переважно антени, які мають направлену дію хоча б в одній площині. За малої довжини каналу такі антени є досить компактними, що дає можливість виготовляти їх обертаючими. Завдяки цьому з'являється можливість, отримуючи великий виграш у потужності й зменшуючи взаємні завади радіостанцій, здійснювати зв'язок за будь-яким напрямом.

Антени вказаних діапазонів можна розділити на дві групи: вібраторні та поверхневі. У діапазоні метрових хвиль найчастіше використовуються симетричні й несиметричні вібратори.

Розглянемо для цього випадку приклади деяких типів телевізійних антен. Найпростішою телевізійною приймальною антеною є дипольний вібратор (лінійний півхвильовий вібратор) (рис. 9.14, а), а найбільш зручним у конструктивному сенсі – петлевий вібратор Пістолькорса (рис. 9.14, б).

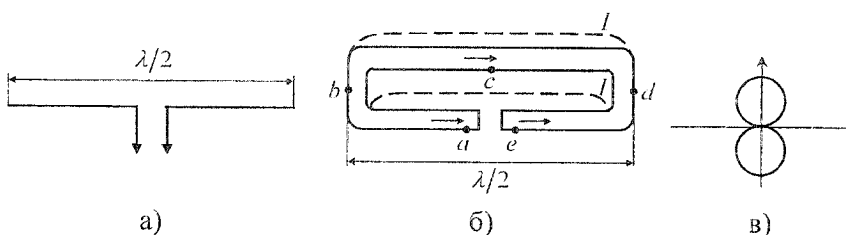


Рис. 9.14. Дипольний (а) і петлевий (б) вібратори та їх діаграма направленості (в)

Цей петлевий вібратор можна розглядати як два півхвильові синфазні вібратори, розміщені на невеликій відстані один від одного. У точці  $c$  вібратора використовується пучність струму та вузол напруги, що відповідає режиму короткого замикання. У точках  $b$  і

$d$ , які розміщені від точки  $c$  на відстані  $\lambda/4$ , утворюється вузол струму й пучність напруги. На затискачах  $a$  та  $e$  антени виникає пучність струму. Наявність вузла напруги в точці  $c$  дозволяє кріпити вібратор у цій точці до стріли чи щогли безпосередньо без ізоляторів.

Описані антени можуть забезпечити якісне приймання телевізійних передач на невеликих відстанях від телецентру, оскільки вони є слабонаправленими (рис. 9.14, в). Для приймання сигналу на великих відстанях і при незадовільних умовах приймання на малі відстані застосовуються більш складні антени, які мають кращу направленість.

У діапазоні метрових хвиль (МХ) у ролі направлених антен значне поширення отримали антени типу “хвильовий канал”. Антена “хвильовий канал” (рис. 9.15, а) складається з активного вібратора  $A$ , рефлектора  $P$  і декількох директорів  $D_1, D_2, D_3$ . З наведеної на рис. 9.15, б ДН видно, що коефіцієнт підсилення цієї антени досить високий і вона не буде реагувати на завади від інших напрямків.

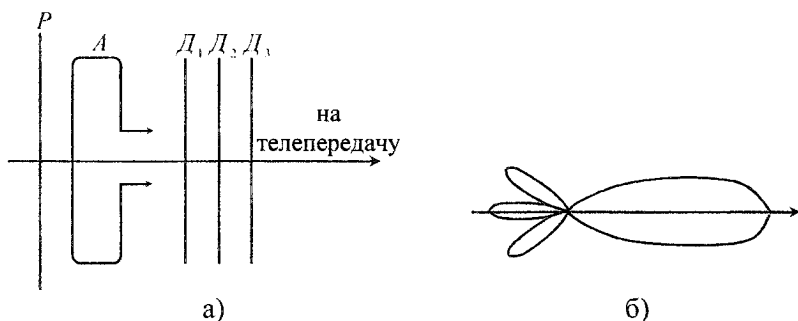


Рис. 9.15. Антена типу “хвильовий канал” (а) та її діаграма направленості (б)

Антена типу “хвильовий канал” може працювати і як передавальна антена. Активний вібратор  $A$  у цьому випадку випромінює електромагнітне поле як у напрямі рефлектора  $P$ , так і в напрямі директорів  $D$ . Під дією цього поля у рефлекторі наводиться струм, який створює вторинне поле – поле випромінювання рефлектора. Якщо довжину рефлектора вибрати рівною  $(0,51 \div 0,53)\lambda$ , а

відстань між рефлектором і вібратором –  $(0,15 \div 0,25)\lambda$ , то вторинне поле, створене рефлектором, буде випереджати за фазою поле активного вібратора на кут  $\approx 90^\circ$ . Результуюче поле за рефлектором буде рівне різниці напруженостей полів, створених активним вібратором і рефлектором. У головному напрямі – напрямі детекторів  $D$  і даліше – поля від активного вібратора й рефлектора будуть сумуватися в одній фазі. І як наслідок – результуюче поле збільшується. У реальній антені випередження фази струму у рефлекторі дещо відрізняється від  $90^\circ$ , а амплітуда струму у рефлекторі дещо менша, ніж в активному вібраторі. Тому деяка частина енергії випромінюється за рефлектор.

Директори антени  $D_1, D_2, D_3$  збуджуються результуючим полем активного вібратора й рефлектора. Для того щоб вторинне поле директорів підвищувало напруженість поля в головному напрямі, наведені в них струми повинні відставати за фазою від струму активного вібратора. Це досягається відповідним вибором довжин директорів та їх взаємним розміщенням. Довжина директорів вибирається рівною  $(0,41 \div 0,45)\lambda$ , а відстань між директорами та першим директором й активним вібратором вибирають у межах  $(0,10 \div 0,34)\lambda$ . Зі зменшенням відстані між активним і пасивним вібраторами струм у пасивних вібраторах збільшується, але сильно зменшується вхідний опір активного вібратора. Тому для узгодження антени з фідером активний вібратор часто виконують петлевим.

На телевізійних станціях переважно застосовують так звані антени Брауде, які являють собою вібратор плоскої конструкції, у якому випромінюючі пластини для зменшення вібрового навантаження замінені провідниками (рис. 9.16, а).

Якщо вертикальний розмір такої антени вибрати  $\lambda/4$ , то цю антену можна розглядати як звичайний симетричний вібратор, суміщений з короткозамкненим шунтом (рис. 9.16, б). У ньому, як і в петлевому вібраторі, точки  $a - a$  мають нульовий потенціал, й антену в цих точках можна кріпити до щогли без ізоляторів. Це спрощує грозозахист. Ізолятори встановлюють лише в точках живлення вібратора.

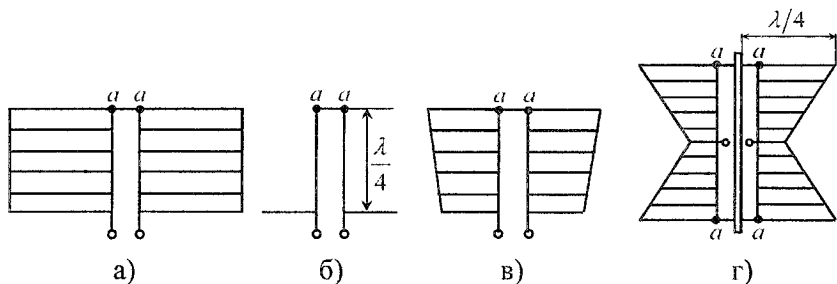


Рис. 9.16. Будова передавальної антени Брауде

Недоліком вібратора Брауде є те, що горизонтальні провідники в ньому збуджуються струмами різних амплітуд. Пояснюється це тим, що у міру руху по шунту напруга від максимального значення в точках відключення живлення падає до нуля в точках короткого замикання  $a - a$ . Струми в провідниках можна вирівняти, виконавши плечі вібратора у вигляді трапеції (рис. 9.16, в).

Велике розповсюдження отримали Ж-подібні вібратори Брауде, які суміщають у собі два плоскі трапецевидні вібратори (рис. 9.16, г). Живлення підводиться до середини вібратора в тому місці, де розміщені найкоротші горизонтальні провідники. Для отримання ненаправленого випромінювання в горизонтальній площині дві Ж-подібні антени розміщуються під кутом  $90^\circ$  одна до одної і живляться із зсувом фаз у  $90^\circ$ , утворюючи так звану турнікетну антену. Для концентрації випромінювання у вертикальній площині декілька турнікетних антен розміщуються поверхами одна під одною і збуджуються в однакових фазах. Зсув за фазою у взаємно перпендикулярних вібраторах здійснюють за рахунок збільшення довжини одного з фідерів на  $\lambda/4$ . Однакові фази на всіх поверхах отримуються вже автоматично, бо відстань між поверхами складає  $\lambda$ .

У діапазоні дециметрових і сантиметрових хвиль широко використовується антена у вигляді рупора. Найпростішою рупорною антеною є відкритий кінець металеві труби прямокутного або круглого перерізу, так званого хвилеводу. Випромінююча частина антени називається розкритом антени. Отвір хвилеводу можна розглядати як багатовібраторну антену, утворену великим числом елемен-

тарних випромінювачів. Проте антена має свої недоліки. Зміна умов поширення на відкритому кінці призводить до значного відбивання. Для зменшення відбивань і покращення направлених властивостей хвилеводу його виконують у вигляді рупора (рис. 9.17, а). Як самостійні антени рупори використовуються рідко, але їх часто застосовують у ролі РЛС та в космічному зв'язку. Тоді роль рефлектора (відбивача) виконує металеве дзеркало, яке має вигляд параболоїда обертання (рис. 9.17, б). Коефіцієнт направленої дії таких антен дуже високий і може досягати величини  $10^4$ . Різновидністю таких антен є рупорно-параболічна (рис. 9.17, в), яка виключає попадання відбитих хвиль назад у рупор. Тут величина  $\alpha = 30 \div 40^\circ$ ,  $l = 50\lambda$ . При площі розкриття  $S = 6 \div 8 \text{ м}^2$  коефіцієнт підсилення складає  $10^4$ , а направленість рівна  $2^\circ$  як у горизонтальній, так і у вертикальній площині.

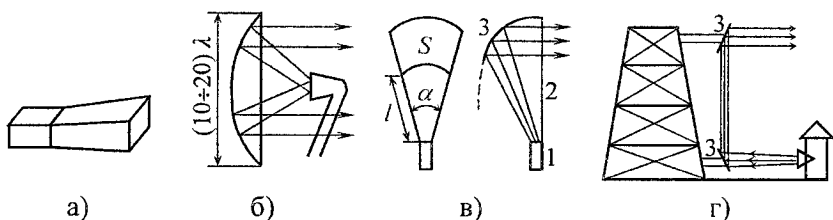


Рис. 9.17. Конструкції децисантиметрових хвиль: а) рупорна; б) дзеркально-параболічна; в) рупорно-параболічна; г) перископічна

Різновидністю дзеркальних антен є перископічна антена (рис. 9.17, г), яка дозволяє за допомогою металевих дзеркал передавати ВЧ-енергію на вершину щогли без фідера.

### 9.3 Антени НВЧ в інтегральному виконанні. Основні типи випромінювачів та їх розрахунки

До сучасних антенних пристроїв ставлять досить жорсткі вимоги за електродинамічними характеристиками, а також габаритами, масою, вартістю, технологічністю. Через необхідність створення невисупаючих антен для літальних апаратів, а також простих і технологічних антен більш широкого призначення виник значний інтерес до мікросмугових і друкованих антен НВЧ. Використання

планарної технології мікроелектроніки забезпечує високу відтворюваність розмірів антен, технологічність, малі габарити й масу. Методами планарної технології можуть бути виконані не тільки випромінювачі, але й лінії передач, узгоджуючи елементи, фазообертачі, перемикачі і т. п.

Під планарними антенами НВЧ розуміють як одинарні мікро-смугові й друковані випромінювачі, так й утворені на них антенні ґратки. Антени НВЧ можуть випромінювати хвилі лінійної, кругової та еліптичної поляризації і забезпечувати роботу в багаточастотному режимі.

Елементи випромінюючих структур можуть мати найрізноманітнішу геометричну форму: прямокутну, круглу, трикутну, еліптичну, кільцеву. Такі структури можуть працювати як у резонансному, так і в нерезонансному режимах і збуджуватися смуговою лінією, коаксіальним кабелем за рахунок електромагнітного зв'язку.

Недоліками планарних антен відповідно є: вузькосмуговитість, малі гранично-допустимі потужності, труднощі у конструюванні переналаштовуваних пристроїв та зміна параметрів друкованих елементів.

Однією з перших була розроблена друкована антена резонансного типу, подана на рис. 9.18. Конструктивно випромінювач складається зі стрічкового провідника 1, розміщеного на тонкому діелектричному шарі основи 2 з провідним екраном 3. Товщина діелектрика вибирається зазвичай меншою за  $0,1\lambda$ . Сам випромінювач частіше всього збуджується смужковою лінією передачі 4, для якої ця система є плоским, заповненим діелектриком, резонатором з утратами, зумовленими випромінюваннями. Краї резонатора утворюють дві випромінюючі щілини I і II, відстань між якими  $l$  приблизно рівна  $\lambda/2$ , де  $\lambda$  – довжина хвилі в діелектрику.

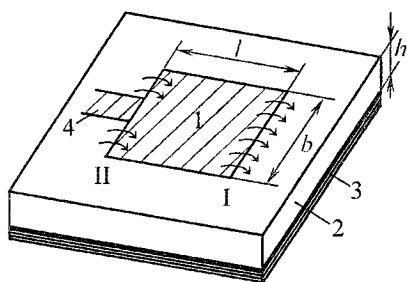


Рис. 9.18. Друкований випромінювач резонансного типу

Лінійно поляризоване випромінювання, направлене по нормалі до площини антени, створюється складовими електричного поля, паралельними провідній пло-

щині. Розмір  $b$  вибирають рівним  $b \approx \lambda/2$ , що забезпечує вхідний опір антени в декілька сотень ом. Випромінювач прямокутної форми при резонансі забезпечує коефіцієнт підсилення більше 6дб за відносної діелектричної проникності підкладки  $\varepsilon_2 = 2,35$  і  $tg \delta \leq 10^{-3}$ . Проте ширина робочої смуги частот резонансних антен не перевищує 2–3% на рівні  $K_{cmU} = 2$ . Застосовуючи різноманітні схеми живлення випромінювачів, можна створити антену, яка працює на декількох близьких частотах. Деякого розширення робочої смуги можна досягти в конструкції, поданій на рис. 9.19. Особливо цікавими є резонансні антени трикутної, ромбічної та еліптичної форм. Дослідження показують, що найкращими діапазонними властивостями володіє еліптичний випромінювач з ексцентриситетом 0,8.

Найбільш достатньо наразі досліджені прямокутні випромінювачі.

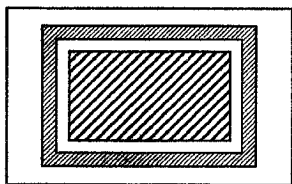


Рис. 9.19. Друкований резонансний випромінювач з розширеною смугою частот

Тут запропоновано ряд способів їх живлення, узгодження та режимів роботи. Наприклад, для отримання поля обертаючої поляризації необхідно мати дві пари випромінюючих щілин, які розміщені перпендикулярно одна до одної й збуджують сигнали з фазовим зсувом  $\pi/2$ . Для цього ви-

бирають квадратний випромінювач, який збуджується у двох точках сусідніх сторін квадрата.

Можливий також варіант збудження друкованого випромінювача 1 і за допомогою коаксіального кабеля 2, під'єданого перпендикулярно до провідної площини (рис. 9.20, а). Викликає цікавість живлення випромінювача через елемент зв'язку 2 (рис. 9.20, б). Живлення до смужки підводиться за допомогою коаксіального кабелю з боку екрана. Узгодження визначається довжиною елемента зв'язку і зазором  $\Delta$  між випромінювачем і смужкою. Збудження друкованих випромінювачів за допомогою коаксіальних ліній становить значний інтерес у низькочастотній частині НВЧ-діапазону. Збуджувати випромінювач МСЛ бажано в точці, де його вхідний опір є близьким до хвильового опору МСЛ. Це до-

сягається за допомогою вузького вирізу (відрізка компланарної лінії), паралельного осі випромінювача (рис. 9.20, в). Під час використання дискового випромінювача (рис. 9.20, г) центр випромінювача з'єднаний перемичкою з екраном, а збуджуючий зонд знаходиться на певній відстані від центра й живиться коаксіальною лінією через отвори в екрані. Такий диск на діелектрику з  $\varepsilon_2 = 2,47$  на частоті  $f = 2,9 \text{ ГГц}$  має діаметр усього  $3,78 \text{ см}$ . Смуга робочих частот такого випромінювача залежить від смуги пропускання प्रतिфазного подільника потужності (двовходового). Збуджуючи елемент з одного входу й навантажуючи на другий, можна здійснювати його узгодження та змінювати ДН.

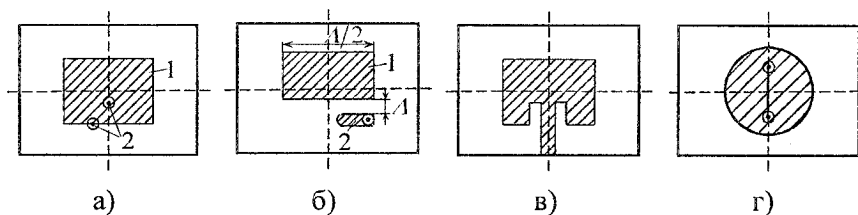


Рис. 9.20. Способи живлення резонансних випромінювачів

При коловій поляризації випромінюючої хвилі використовують чотири точки збудження з визначеними фазами (рис. 9.21, а). Колову поляризацію можна отримати, використовуючи п'ятикутний випромінювач (рис. 9.21, б). Слід зауважити, що суттєве значення має місце підключення лінії живлення 1 до п'ятикутного випромінювача. Використовуючи еліптичний випромінювач (рис. 9.21, в), мала вісь якого рівна  $\lambda/4$ , а ексцентриситет  $0,65$ , можна також отримати хвилю колової поляризації. Вид поляризації такого випромінювача залежить і визначається місцем включення МСЛ.

Для аналізу й розрахунку характеристик мікросмугових і друкованих випромінювачів (антен) широко використовують модель резонатора довільної геометричної форми (рис. 9.22). Метод розрахунку за такою моделлю називають резонаторним. Уведення моделі базується на таких припущеннях:



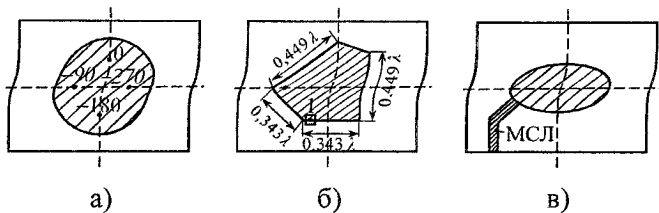


Рис. 9.21. Друковані резонансні випромінювачі з круговою поляризацією хвиль

1) унаслідок того, що  $h \ll \lambda$  в області, обмеженій верхнім провідником (поверхня, обмежена контуром  $c$ ) й екраном, існують тільки компоненти  $E_z$  електричного поля та компоненти  $H_x$  і  $H_y$  магнітного поля;

2) поле в цій області не залежить від координат  $x$  і  $y$  для поля всіх частот;

3) електричний струм на верхньому провіднику не повинен мати нормальних до краю компонентів у будь-якій точці на краю, а поле може мати незначну тангенціальну складову вздовж краю.

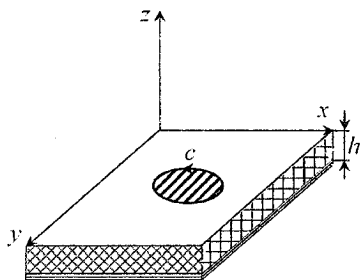


Рис. 9.22. Модель резонаторного друкованого випромінювача (антени)

Таким чином, область між верхнім провідником й екраном (знизу) можна подати як резонатор з магнітними стінками вздовж краю та електричними стінками зверху й знизу. Очевидно, що такий закритий резонатор не буде випромінювати електромагнітну енергію й буде мати чисто уявний вхідний опір, рівний або нулю, або нескінченності при резонансі, тобто відповідатиме послідовному чи паралельному резонансу.

Далі припускається, що розподіл поля на верхньому провіднику приймається таким, як і в резонаторі. Знаючи розподіл поля у випромінювачі, можна розрахувати його ДН, випромінюючу потужність і вхідний опір.

Для резонаторної моделі такої планарної антени справедливі такі вирази для компонентів поля:

$$E_{mn} = \psi_{mn} \mathbf{E}_z, \quad H_{mn} = \mathbf{E}_z \times \nabla_t \psi_{mn} / (i\omega \mu), \quad (9.7)$$

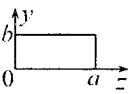
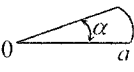
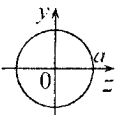

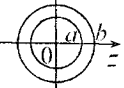
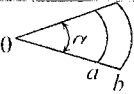
$$(\nabla_t^2 + k_{mn}^2)\psi_{mn} = 0,$$

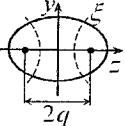
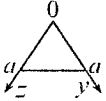
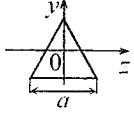
де  $\nabla_t$  – оператор Набла поперечних координат  $x, y$ ;  $k_{mn}$  – хвильове число;  $m, n = 1, 2, 3 \dots$  – тип хвилі;  $\partial\psi_{mn}/\partial\nu = 0$  на магнітних стінках резонатора.

У табл. 9.1 наведено вирази для функції  $\psi_{mn}$  для різних конфігурацій антен. У таблиці введено позначення:  $J, J', N, N'$  – функції Бесселя й Неймана та їх похідні відповідно;  $Re, Se$  – функції Мат'є.

Таблиця 9.1

**Значення власної функції  $\psi_{mn}$  для різних конфігурацій випромінювачів**

| № п/п | Конфігурація антени   | Власна функція $\psi_{mn}$  | Примітка |
|-------|---|---|----------|
| 1     |    | $\psi_{mn} = \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right),$ $k_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$ |          |
| 2     |    | $\psi_{m\nu} = J_\nu(k_{mn}\rho)\cos(\nu\phi), \nu = \frac{\pi n}{\alpha},$ $J'_\nu(k_{mn}a) = 0$   |          |
| 3     |   | $\psi_{mn} = J_\nu(k_{mn}\rho)e^{i\nu\phi}, J'_\nu(k_{mn}a) = 0$  |          |
| 4     |  | $\psi_{mn} = J_{\nu/2}(k_{mn}\rho)\cos(n\phi/2), J'_{\nu/2}(k_{mn}a) = 0,$ $\alpha = 2\pi, \nu = n/2$   |          |
| 5     |  | $\psi_{mn} = [N'_n(k_{mn}a)J_n(k_{mn}\rho) - J'_n(k_{mn}a)N_n(k_{mn}\rho)]e^{i\nu\phi}$   |          |
| 6     |  | $\psi_{mn} = [N'_\nu(k_{mn}a)J_\nu(k_{mn}\rho) - J'_\nu(k_{mn}a)N_\nu(k_{mn}\rho)] \times \cos(\nu\phi)$  |          |

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| 7 |   | $\psi_{mn} = R_{l_m}(\xi, \chi_{l_m}) S_{l_m}(\eta, \chi_{l_m}), R_{l_n}(\xi, \chi_{l_n}) = 0$  |  |
| 8 |  | $\psi_m = \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), k_m = \sqrt{2} \frac{m\pi}{a}$   |  |
| 9 |  | $\begin{aligned} \psi_{mn} = & \cos\left[\frac{2\pi}{3b}\left(\frac{U}{2} + b\right)\right] \cos\left[\frac{\pi(m+n)(v-\omega)}{9b}\right] + \\ & + \cos\left[\frac{2\pi m}{3b}\left(\frac{U}{2} + b\right)\right] \cos\left[\frac{\pi(n+L)(v-\omega)}{9b}\right] + \\ & + \cos\left[\frac{2\pi n}{3b}\left(\frac{U}{2} + b\right)\right] \cos\left[\frac{\pi(L-m)(v-\omega)}{9b}\right], \\ L = & -(m+n), U = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, v-\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y, \\ b = & \frac{\sqrt{3}a}{2}, k_{mn}^2 = \left(\frac{4\pi}{3a}\right)^2 (m^2 + n^2 + mn) \end{aligned}$ |  |

Для резонатора можна записати такі хвильові рівняння:

$$(\nabla^2 + k^2) \dot{E}_z = j\mu\eta \dot{E}_z, \quad (9.8)$$

розв'язок якого дає значення електричної компоненти поля  $E_z$ , через яку визначаються компоненти магнітного поля  $H_x$  і  $H_y$ . Знаючи компоненти електромагнітного поля, за допомогою ЕОМ визначаються інші параметри антени: ДН, потужність випромінювання, вхідний опір і частотний діапазон.

Поряд з одиночними випромінювачами широке застосування сьогодні отримали друковані антенні ґратки.

### 9.3.1 Друковані антенні ґратки

Друковані антенні ґратки відрізняються одна від одної в основному типом використаних випромінювачів, а також способом їх збудження. Розглянемо деякі види простих друкованих ґраток. На рис. 9.23 показано друковану антенну ґратку на основі випромі-

нювачів 1 резонаторного типу. Чотирьохелементна антенна ґратка має коефіцієнт підсилення на рівні 12–13дб. Ширина смуги пропускання складає 1,8% на рівні коефіцієнта підсилення  $K_{enU} = 2$ . Рівень бокових пелюсток складає 10–12дб, а ширина ДН рівна 20 і 68° для  $E$ - і  $H$ -площин.

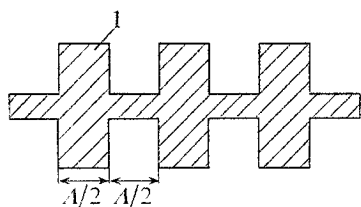


Рис. 9.23. Лінійна антенна ґратка з випромінювачів резонаторного типу

Особливої уваги заслуговують друковані вібраторні антенні ґратки (рис. 9.24). Ґратка, яка складається із півхвильових друкованих вібраторів (рис. 9.24, а), живиться через фазуючі півхвильові лінії затримки. Зміна форми, взаємного розміщення й способу живлення вібраторів від несиметричної смужкової лінії дозволяє міняти характеристики антен. Такі ґратки є вузькосмуговими. Технологічна реалізація цих антенних ґраток здійснюється проекційною літографією та плазмохімічним травленням топологічних елементів. Важливим є вибір діелектричної підкладки із заданою діелектричною сталою та металу для формування резонатора й екрана.

реалізація цих антенних ґраток здійснюється проекційною літографією та плазмохімічним травленням топологічних елементів. Важливим є вибір діелектричної підкладки із заданою діелектричною сталою та металу для формування резонатора й екрана.

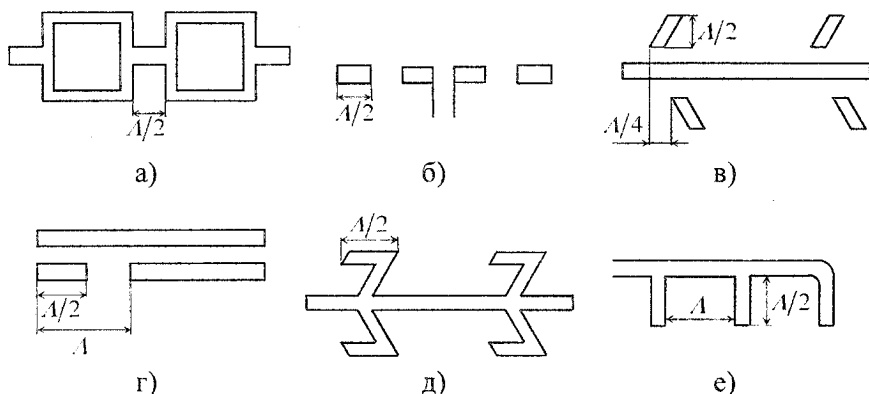


Рис. 9.24. Варіанти топології сучасних друкованих вібраторних ґраток

Аналіз антенних ґраток можна проводити, використовуючи метод наведених е.р.с. Суть цього методу полягає в тому, що струм в

окремому випромінювачі подається у вигляді лінійної комбінації просторових гармонік:

$$\eta = \sum_{\nu=-M}^M I_{n\nu} \psi_{\nu}, \quad (9.9)$$

де  $\psi_{\nu}$  – просторові векторні гармоніки, що визначають систему лінійних незалежних функцій;  $I_{n\nu}$  – комплексні амплітуди просторових гармонік, які є невідомими величинами.

Підставивши розклад (9.9) у систему інтегральних рівнянь для поверхневих струмів, помноживши кожне рівняння на  $\psi_{\mu}$  і проінтегрувавши по поверхні кожного випромінювача, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{n=-N}^N \sum_{\nu=-M}^M I_{n\nu} Z_{n\nu,m\mu} = U_{m\mu}, \quad (9.10)$$

де  $-N \leq m \leq N$ ,  $-M \leq \mu \leq M$ ,  $U_{m\mu} = \int_{S_m} F_m^{cm} \psi_{\mu} dS_m$  – коефіцієнти розкладу стороннього поля за системою просторових векторних гармонік  $\{\psi_{\mu}\}$ .

Коефіцієнти матриці  $[Z]$  з виразу (9.10) називають взаємними опорами. Тоді загальний вираз для взаємного опору між  $\nu$ -ю гармонікою струму в  $n$ -му випромінювачі і  $\mu$ -ю гармонікою струму в  $m$ -му випромінювачі матиме вигляд:

$$Z_{n\nu,m\mu} = -\frac{1}{I_{n\mu} I_{m\mu} S_m} \int E_t \{I_{n\nu} \psi_{\nu}\} I_{m\mu} \psi_{\mu} dS_m, \quad (9.11)$$

де  $E_t \{I_{n\nu} \psi_{\nu}\}$  – лінійний оператор, який дозволяє визначити тангенціальну складову електричного поля, що створюється струмом у  $\nu$ -ому випромінювачі на поверхні  $n$ -ого випромінювача. Як видно з формули (9.11), взаємні опори залежать тільки від розміщення пари випромінювачів і від номерів просторових гармонік струмів і не залежать від числа й розміщення решти випромінювачів ґратки.

Як бачимо, такі розрахунки є складними і їх необхідно проводити з використанням ЕОМ. Для знаходження невідомих струмів у ґратці необхідно знати взаємні опори між парою смужкових випромінювачів згідно з (9.11).

### 9.3.2 Активні фазовані антенні ґратки (АФАГ)

Активною антенною ґраткою називають таку багатоелементну антену, у тракт кожного випромінювача якої залежно від призначення антени увімкнений активний елемент: генератор, підсилювач, перетворювач або помножувач частоти. Активні елементи розміщуються недалеко від випромінювача або вмонтовуються безпосередньо у випромінювач. У ролі коливальної системи активного приладу можливе використання випромінювача або будь-яких його елементів. У цьому випадку антену можна розглядати як проінтегральний пристрій.

В активному варіанті можуть бути спроектовані передавальні або приймальні ФАГ, а також перевипромінюючі системи. Загальною перевагою як передавальних, так і приймальних АФАГ є спрощення розводки високочастотного сигналу, що зменшує втрати й фазові помилки, які вносяться високочастотним трактом. Приймальні АФАГ мають менший рівень шумів, ніж звичайні ФАГ. Перевагою передавальних АФАГ є відсутність загального тракту, по якому передається сумарна потужність; додавання потужностей усіх передавачів здійснюється в одному просторовому промені, що знімає повністю проблеми, пов'язані з електричним пробоем тракту. Для забезпечення когерентності коливань у всіх передавачах вони повинні бути синхронізовані за допомогою єдиного збуджувача. Енергія від збуджувача підводиться до модулів АФАГ (під модулем розуміється випромінювач, активний елемент та елементи керування) за схемою фідерного або оптичного типу. Керування фазою в передавальних АФАГ поводиться за допомогою фазообертачів, включених на вході генератора або в попередніх каскадах підсилення, тобто в місцях малого рівня потужності. При цьому знижуються втрати, які вносяться фазообертачами. Аналогічним чином у випадку приймальної АФАГ фазообертачі можуть бути розміщені не на вході приймача, а на виході високочастотного підсилення або, що зручніше, – у тракті проміжної частоти.

Застосування АФАГ дозволяє реалізувати розподіл амплітуд в елементах антени зміною потужності окремих передавачів (передавальна АФАГ) або регулюванням підсилення приймача (приймальна АФАГ).

Під скануванням в антенній техніці розуміють процес переміщення основної пелюстки ДН у просторі. Таке сканування може здійснюватися механічним, електромеханічним й електричним способами. Перший спосіб реалізується шляхом повороту всієї антени.

При другому способі здійснюється механічне керування окремим елементом антени, у результаті чого змінюється положення ДН усієї антени (наприклад, при зміщенні випромінювача відносно фокуса в параболічних антенах). Такі способи характеризуються дуже високою інерційністю, оскільки пов'язані з механічним переміщенням самої антени або її частини. Найбільшою швидкістю відрізняється третій спосіб сканування, за якого антена є нерухомою в просторі, а переміщується ДН за рахунок зміни амплітудно-фазового розподілу в розкритті антени електричним шляхом. Тут швидкодія визначається тільки швидкістю електричної схеми керування. Таке електричне сканування здійснюється зазвичай на основі використання багатоелементних антенних ґраток.

У простому випадку для лінійних антенних ґраток положення максимуму основної пелюстки ДН відносно нормалі до осі ґратки визначається співвідношенням:

$$\theta_{o.n.} = \arcsin\left(\frac{\psi}{kd}\right) = \arcsin\left(\frac{\psi \lambda}{2\pi d}\right). \quad (9.12)$$

Із цієї формули видно, що керувати положенням максимуму ДН електричним шляхом можна, змінюючи або зсув фаз між струмами в сусідніх випромінювачах (фазовий спосіб), або змінюючи довжину хвилі  $\lambda$  (частоту  $f$ ) коливань (частотний спосіб). Крім фазового й частотного способу ще використовують амплітудний спосіб електричного сканування, який здійснюється шляхом зміни амплітуд (комутації) на входах багатопроменевої антенної системи.

Фазовий спосіб електричного сканування реалізується в антенах, які отримали назву ФАГ. Найбільш поширені ФАГ на основі лінійних і плоских ґраток. Принцип роботи ФАГ пов'язаний зі зміною фази коливань, що відводиться до окремих випромінювачів за допомогою фазообертачів таким чином, щоб забезпечити синфазне сумування полів окремих випромінювачів у потрібному напрямі, тобто формування головної пелюстки ДН.

Як випромінюючі елементи ФАГ найбільш широко використовуються вібратори, випромінювачі у вигляді кінців хвилеводів, рупори, спіральні антени.

Схеми збудження ФАГ призначені для підведення енергії, що виробляється генератором, до випромінювачів (у передавальному режимі) і підведення енергії, що приймається окремими елементами до входу приймача (у приймальному режимі) та реалізації необ-

хідного амплітудного розподілу. Тут використовують схеми збудження як фідерного (за допомогою ліній передачі), так й оптичного типу, за якого енергія від випромінювача до окремих елементів поширюється у вільному просторі. У схемах фідерного типу ділення потужності здійснюється або послідовним, або паралельним способом.

В оптичних системах фазовий розподіл має нелінійний характер, що ускладнює реалізацію схеми керування фазообертачами. У даному випадку вирівнювання початкових фаз здійснюють за допомогою спеціальних ліній затримки.

Існує два способи фазування: неперервний, або аналоговий, спосіб, за якого зміна фази в кожному фазообертачі здійснюється плавно. За дискретного способу фазування зміна фази  $\psi$  здійснюється стрибком на величину  $\Delta$  (дискрет фази), який реалізується за допомогою комутації. Фазообертачі сучасних ФАГ виконуються або на *pin*-діодах, або на феритах.

### **Контрольні запитання**

1. Що називається антеною? Які функції виконує антена? Що таке фідер, які вимоги ставляться до нього? Що називається діаграмою направленості?

2. Яким чином здійснюється розрахунок поля випромінювання антен? Назвіть основні електричні параметри передавальних антен.

3. Назвіть особливості роботи симетричного вібратора. Опишіть процес здійснення вільних електричних коливань у симетричному вібраторі.

4. Укажіть особливості конструювання антен для випадку хвиль різної довжини. Назвіть основні відмінності в їх будові.

5. Назвіть основні переваги використання планарної технології мікроелектроніки під час виготовлення антен НВЧ. Що розуміють під планарними антенами НВЧ? Назвіть їх переваги та недоліки.

6. Укажіть основні способи живлення резонансних випромінювачів. Які моделі використовують для аналізу й розрахунку характеристик мікросмугових і друкованих випромінювачів (антен)? На яких припущеннях базуються ці моделі?

7. Яке призначення антенних друкованих ґраток? Назвіть варіанти топології сучасних друкованих вібраторних ґраток. Який метод використовується для аналізу антенних ґраток, у чому він полягає?

8. Яка антена називається активною фазованою антенною ґраткою? Які її переваги?



9. Який процес називається скануванням в антенній техніці? Яким способом він може здійснюватися?

### **Рекомендована література**

1. Веселов Г. И. Микроэлектронные устройства СВЧ / Г. И. Веселов. – М. : Высшая школа, 1988. – 280 с.
2. Айзенберг Г. З. Антенны УКВ. Ч. 1, 2 / Г. З. Айзенберг, В. Г. Ямпольский, О. Н. Терешин. – М. : Связь, 1977. – 667 с.
3. Антенны и устройства СВЧ / под ред. Д. И. Воскресенского. – М. : Радио и связь, 1972. – 320 с.
4. Антенны и устройства СВЧ, проектирование фазированных антенных решеток / под ред. Д. И. Воскресенского. – М. : Радио и связь, 1994. – 592 с.
5. Кочержевский Г. Н. Антенно-фидерные устройства / Г. Н. Кочержевский, Г. А. Ерохин, Н. Д. Козырев. – М. : Радио и связь, 1989. – 352 с.
6. Сазонов Д. М. Антенны и устройства СВЧ / Д. М. Сазонов. – М. : Высшая школа, 1988. – 462 с.
7. Дабкин А. Л. Антенно-фидерные устройства / А. Л. Дабкин, В. Л. Зузенко, А. Г. Кислов. – М. : Советское радио, 1974. – 536 с.
8. Антенно-фидерные устройства и распространение радиоволн / Г. А. Ерохин, О. В. Чернышев, Н. Д. Козырев, В. Г. Кочержевский. – М. : Горячая линия-Телеком, 2004. – 491 с.
9. Курбанский И. Н. Антенна / И. Н. Курбанский. – М. : Энергия, 1973. – 336 с.
10. Марков Т. Т. Антенна / Т. Т. Марков, Д. М. Сазанов. – М. : Энергия, 1975. – 528 с.
11. Проблемы антенной техники / под ред. Л. Д. Бахраха, Д. И. Воскресенского. – М. : Радио и связь, 1989. – 368 с.
12. Фрадин А. З. Антенно-фидерные устройства / А. З. Фрадин. – М. : Связь, 1977. – 440 с.

## РОЗДІЛ 10. ВАКУУМНА ЕЛЕКТРОНІКА НВЧ

### 10.1 Вакуум і його характеристики

У приладах і пристроях вакуум є континуальним середовищем. Поняття “континуум” у перекладі з латинської означає “неперервний” і являє собою сукупність усіх точок простору з однаковими властивостями.

Властивості газів за низьких тисків вивчаються у фізиці вакууму – розділі молекулярно-кінетичної теорії газів. В основі фізики вакууму є такі постулати:

- газ складається з окремих молекул, що рухаються;
- існує постійний розподіл молекул за швидкостями;
- при русі молекул газу немає переважаючих напрямків, простір газових молекул є ізотропним;
- температура газу – величина, яка є пропорційною середній кінетичній енергії його молекул;
- при взаємодії з поверхнею твердого тіла молекула газу адсорбується.

Отож дамо визначення вакууму як стану газу, за якого його тиск є нижчим за атмосферний. При взаємодії молекули газу з поверхнею твердого тіла нормальна складова зміни кількості руху молекули рівна  $m v \cos \theta$ , де  $\theta$  – кут між нормаллю до поверхні та вектором швидкості;  $m$  і  $v$  – маса й швидкість молекули.

Коли між поверхнею і газовим середовищем існує енергетична й адсорбційна рівновага, то кожній адсорбованій молекулі відповідає одна десорбована молекула з протилежним напрямом швидкості. Таким чином, сумарна зміна кількості руху  $\Delta K$  адсорбованої та десорбованої молекул рівна  $\Delta K = 2 m v \cos \theta$ .

Під тиском газу розуміють середній імпульс  $\Delta K$  кількості руху, що передається молекулами газу одиниці площі стінки посудини  $\Delta A$  за одиницю часу  $\Delta t$ . Згідно із другим законом Ньютона, тиск молекули на поверхню твердого тіла рівний

$$p = \frac{\Delta K}{\Delta A \cdot \Delta t} = \frac{2 m v \cos \theta}{\Delta A \cdot \Delta t}. \quad (10.1)$$

Число молекул  $dN$  в елементарному об’ємі  $dV$ , що рухаються в напрямі площі  $\Delta A$ , буде визначатись як

$$dN = n \frac{d\omega}{4\pi} dV, \quad (10.2)$$

де тілесний кут  $\omega$  визначається зі співвідношення  $d\omega = \cos\theta \Delta A/r^2$  ( $r$  – відстань між поверхнею та виділеним об'ємом).

У полярній системі координат елемент об'єму  $dV$  визначається як

$$dV = r \sin\theta d\varphi d\theta dr. \quad (10.3)$$

Тиск газу на поверхню твердого тіла знайдемо інтегруванням за об'ємом півсфери, з якої молекули досягають поверхні за час  $\Delta t$ , з радіусом  $R = v \Delta t$ . Тоді

$$p = \int \frac{2mv \cos\theta}{v \Delta A \cdot \Delta t} dN = \frac{nmv}{2\pi \Delta t} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^R dr = \frac{nmv^2}{3}. \quad (10.4)$$

У розподілі молекул за швидкостями введемо середньоквадратичну швидкість молекули:

$$v_{\text{кн}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^2.$$

У такому випадку тиск газу буде визначатись як  $p = nmv_{\text{кн}}^2/3$ . Увівши значення для густини газу  $\rho = nm$ , отримаємо вираз для тиску газу в такому вигляді:

$$p = \frac{\rho v_{\text{кн}}^2}{3}. \quad (10.5)$$

Тиск газу визначається величиною  $p = nkT$ . Це рівняння відоме як рівняння стану й може бути записане у формі рівняння Менделєєва – Клапейрона:

$$pV = \frac{N}{N_A} RT, \quad (10.6)$$

де  $V$  – об'єм газу,  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup> – число Авогадро (кількість молекул в 1 молі),  $R = k N_A = 8,31$  Дж/(К · моль) – універсальна газова стала.

Одиницею вимірювання тиску в СІ є паскаль [Па], який рівний  $1 \text{ Н/м}^2$ . Найбільш поширеною одиницею тиску є *мм рт. ст.* (тор). Тиск газу в 1 *мм рт. ст.* рівний тиску, який створює стовпчик ртуті висотою 1 мм за умови, що густина ртуті рівна  $13\,595,1 \text{ кг/м}^3$ , а прискорення вільного падіння відповідає нормальному

9,80665 м/с<sup>2</sup> на широті 45°. Тиск стовпчика рідини  $p = \rho gh$ , що дає 1 мм.рт.ст. рівний, 1 мм.рт.ст. = 133,32239 Н/м<sup>2</sup> (Па). У метеорології як одиницю тиску використовують 1 бар = 10<sup>5</sup> Па. Співвідношення між різними одиницями тиску подані в табл. 10.1.

Таблиця 10.1

Співвідношення між одиницями тиску

| № п/п | Одиниця тиску         | 1 Па                 | 1 мм.рт.ст.           | 1 дин/см <sup>2</sup> | 1 фіз. ат.            | 1 кгс/см <sup>2</sup> | 1 кал/м <sup>3</sup>  |
|-------|-----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1     | 1 Па                  | 1                    | 7,5·10 <sup>-3</sup>  | 10                    | 9,87·10 <sup>-6</sup> | 1,02·10 <sup>-5</sup> | 2,39·10 <sup>-1</sup> |
| 2     | 1 мм.рт.ст.           | 1,33·10 <sup>2</sup> | 1                     | 1,33·10 <sup>3</sup>  | 1,32·10 <sup>-3</sup> | 1,36·10 <sup>-3</sup> | 3,18·10 <sup>2</sup>  |
| 3     | 1 дин/см <sup>2</sup> | 1·10 <sup>-1</sup>   | 7,5·10 <sup>-4</sup>  | 1                     | 9,87·10 <sup>-7</sup> | 1,02·10 <sup>-6</sup> | 2,39·10 <sup>-2</sup> |
| 4     | 1 фіз. ат.            | 1,01·10 <sup>5</sup> | 7,6·10 <sup>2</sup>   | 1,01·10 <sup>6</sup>  | 1                     | 1,03·10 <sup>0</sup>  | 2,39·10 <sup>4</sup>  |
| 5     | 1 кгс/см <sup>2</sup> | 9,81·10 <sup>4</sup> | 7,36·10 <sup>2</sup>  | 9,81·10 <sup>5</sup>  | 9,68·10 <sup>-1</sup> | 1                     | 2,34·10 <sup>4</sup>  |
| 6     | 1 кал/м <sup>3</sup>  | 4,19·10 <sup>0</sup> | 3,14·10 <sup>-2</sup> | 4,19·10 <sup>1</sup>  | 4,13·10 <sup>-5</sup> | 4,27·10 <sup>5</sup>  | 1                     |

Під час співударів між собою або зі стінками вакуумної камери молекули газу змінюють свої швидкості як за величиною, так і за напрямом. Ураховуючи, що середньоквадратична швидкість молекул  $v_{\text{кв}} = \sqrt{3kT/m}$ , Максвелл отримав функцію розподілу молекул за швидкостями, який названий його іменем:

$$dn_v = 4n\pi v^2 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left( -\frac{mv^2}{2kT} \right) dv. \quad (10.7)$$

Направлений молекулярний потік, що містить у початковий момент часу  $N_0$  молекул газу, за рахунок співударів з хаотичними рухомими молекулами з частотою  $\kappa$  за час  $dt$  зменшується на величину  $dN = -\kappa N dt$ . Проінтегрувавши цей вираз, отримаємо:

$$N = N_0 e^{-\kappa t} = N_0 e^{-l/L},$$

де  $L = v/\kappa$  – середня довжина вільного пробігу молекули газу, яка визначається відношенням швидкості молекули до числа співударів за одиницю часу;  $l = vt$  – довжина пробігу молекули за час  $t$ . Тому можна визначити середню довжину пробігу молекули як відстань, під час проходження якої частинка в середньому співударяється з однією молекулою газу. Якщо при швидкості  $v$  молекули з концентрацією  $n$  за 1 с молекула опише об'єм  $V = \pi d_{\text{м}}^2 v$  та отримає

$\kappa = \pi n d_m^2 v$  співударів, то тоді середня довжина вільного пробігу буде рівною  $L = 1/(\pi n d_m^2)$ .

Визначимо тепер критерій Кнудсена, через який визначається вакуум. Для цього спочатку визначимо частоту співударів між молекулами газу:  $\kappa_m = v_{op}/L$ . З другого боку, визначимо частоту співударів молекули зі стінками камери:  $\kappa_c = v_{op}/d_{ef}$ , де  $d_{ef}$  – ефективний розмір камери.

Критерій Кнудсена визначається як відношення частоти співударів молекул зі стінками камери до частоти співударів між молекулами:

$$\kappa_n = \frac{\kappa_c}{\kappa_m} = \frac{L}{d_{ef}}. \quad (10.8)$$

Залежно від значення критерію Кнудсена розрізняють вакуум низький, середній і високий.

**Низький вакуум** – це стан газу, за якого взаємні співудари між молекулами переважають над співударами молекул газу зі стінками вакуумної камери, тобто за критерієм Кнудсена  $\kappa_n \ll 1$ . При цьому довжина вільного пробігу молекули є значно меншою за розміри вакуумної камери, або вважається, що  $\kappa_n \leq 5 \cdot 10^{-3}$ .

**Середній вакуум** – це стан газу, коли частота співударів молекул газу зі стінками камери та одна з одною є однаковою. Критерій Кнудсена для такого випадку має вигляд  $\kappa_n \approx 1$ .

**Високий вакуум** – це стан газу, за якого співудари молекул газу зі стінками вакуумної камери переважають над частотою співударів між собою:  $\kappa_n > 1$ .

Тоді умову існування середнього вакууму можна записати так:

$$5 \cdot 10^{-3} < \kappa_n < 1,5.$$

У практичній роботі у виробництві електривакуумних приладів ступінь вакууму визначається значеннями тисків (табл. 10.2).

Таблиця 10.2

Характеристика вакууму через тиск

| Ступінь вакууму |            | Низький | Середній           | Високий                | Надвисокий  |
|-----------------|------------|---------|--------------------|------------------------|-------------|
| Область тисків  | Па         | > 100   | $100 \div 10^{-1}$ | $10^{-1} \div 10^{-3}$ | $< 10^{-3}$ |
|                 | мм рт. ст. | > 1     | $1 \div 10^{-3}$   | $10^{-3} \div 10^{-7}$ | $< 10^{-7}$ |

### 10.1.1 Методи створення й вимірювання вакууму

Отримання, вимірювання й підтримання вакууму – це процеси вакуумної техніки, які визначають технологію вакуумної електроніки. В основу процесів отримання вакууму покладено два принципи:

- видалення газу з відкачаного об'єму;
- зв'язування газів за рахунок їх конденсації за низької температури або за рахунок зв'язування на стінках об'єму спеціальними матеріалами.

На першому принципі базується робота традиційних вакуумних механічних насосів, які належать до насосів об'ємного типу. Механічні насоси з масляним ущільненням дозволяють захоплювати порцію газу з робочого об'єму й перенести її в бік випуску та викинути в атмосферу через спеціальний клапан. Це насоси обертаючого типу, які класифікуються на: пластинчасто-роторні, пластинчато-статорні, золотникові та плунжерні. В усіх цих типах зазори між деталями, що труться між собою, ущільнює масло, яке запобігає поступленню в камеру атмосферного повітря. Разом з тим, масло містить розчинені гази, які виділяються у відкачаному об'ємі й визначають залишковий тиск. Такі механічні насоси з масляним ущільненням використовують для отримання вакууму в області тисків від 760 до  $10^{-3}$  мм рт. ст.

У цьому діапазоні тисків працюють двомоторні вакуумні насоси, які є більш економічними. Конструкція таких насосів передбачає два фігурні ротори, профіль яких нагадує правильні вісімки. Ротори синхронно обертаються в загальному корпусі назустріч один одному, відкачуючи порцію газу з відкачаного об'єму.

До механічних насосів належать і турбомолекулярні насоси, принцип дії яких базується на наданні молекулам газу направленої додаткової швидкості швидко переміщувальної поверхні. Газ захоплюється лопатями насоса в напрямі обертання ротора і їм надається механічного імпульсу. Основне призначення таких насосів – це отримання вакууму в межах  $10^{-3} \div 10^{-4}$  мм. рт. ст. Турбомолекулярні насоси відкачують краще важчі гази, ніж легші.

До насосів газопереміщувального типу належать і струменеві насоси. Вони поділяються на рідинно-струменеві, газоструменеві та пароструменеві.

Найбільше поширення отримали пароструменеві насоси. Їхньою конструкцією передбачено нагрівання рідини (масла або ртуті) до пароподібного стану. Пари поступають у сопло, з якого з великою швидкістю витікають у робочу камеру у вигляді струменя. Відкачаний газ захоплюється цим струменем і викидається до насоса попереднього розрідження (механічні насоси). Залежно від механізму захоплення газу струменем розрізняють бустерні та дифузійні високовакуумні насоси.

У бустерних насосах захоплення газу струменем здійснюється за рахунок в'язкого тертя між паром і газом, а також за рахунок дифузії газу в струмінь.

У дифузійних насосах захоплення газу струменем здійснюється цілком за рахунок процесу дифузії молекул газу в струмінь (як правило, багатоступенево). Високовакуумні пароструменеві насоси дозволяють проводити відкачку в межах  $10^{-4} \div 10^{-6}$  мм. рт. ст. Тут слід відмітити, що використання паромасляних насосів не дозволяє отримувати вакуум без радикалів. Застосування парортутних дифузійних насосів дозволяє отримати чистий вакуум без радикалів органічних сполук.

Для отримання вакууму в межах  $10^{-6} \div 10^{-10}$  мм. рт. ст. застосовують так звані низькотемпературні пастки.

До другого типу засобів відкачування відносяться насоси, в основі роботи яких – фізико-хімічні методи отримання вакууму. Зокрема, хемосорбційна відкачка здійснюється поглинанням газів поверхнею металів: *Ti, Zr, Ta, Ba, Mo, W, Hf*.

У сорбційному насосі, дія якого базується на поглинанні відкачаного газу поверхнею поглинача або сорбентом газів, як поглиначі використовують пористі речовини із сильно розвинутою поверхнею (активоване вугілля, цеоліт, силікагель). Такий безмасляний спосіб відкачки базується на здатності сорбенту поглинати значну кількість газу при його охолодженні до наднизьких (азотних) температур. Насичені газом пористі сорбенти після нагрівання практично повністю відновлюються. Цеолітові насоси дозволяють отримувати вакуум у межах  $10^{-2} \div 10^{-4}$  мм. рт. ст.

В іншому типі сорбційних насосів поглинаючу поверхню створюють напиленням хімічно активного металу, який активно реагує з великою кількістю газу. За способом поглинання плівкою металу розрізняють гетерні іонні насоси (ГІН) і магніторозрядні.

Робота ГН базується на суміщенні в одній конструкції двох процесів, які відбуваються паралельно. Це процес поглинання газів періодично або неперервно нанесеною плівкою активної речовини та процес відкачки, який відбувається за рахунок іонізації та вловлювання позитивних іонів від'ємнозарядженими пастками насоса. У ролі поглинаючої плівки газів використовують  $Ti$ , нанесений на внутрішню стінку насоса. Іонізація відкачаного газу здійснюється електронами, які випускаються катодом і направляються до анода, а колектором іонів є вже корпус насоса. Цим методом досягають вакууму  $10^{-10}$  мм. рт. ст.

Більш високий вакуум досягається за допомогою насосів орбітронного типу. Такі насоси є продовженням удосконалення конструкції ГН. Тут електроди рухаються по еліптичних спіральних орбітах. Це дозволяє підвищити ефективність іонізації залишкових газів і збільшити швидкість відкачки, що дає вже граничний вакуум  $10^{-13}$  мм. рт. ст.

До цього ж типу належать й магніторозрядні насоси, робота яких базується на процесах поглинання газу титаном, що розпилюється високочастотним розрядом у магнітному полі. Конструктивно основою магніторозрядних насосів є комірка Пеннінга, яка складається із двох паралельних пластин-катодів та циліндричного анода. Вісь анода розміщена перпендикулярно до катодів і паралельно до вектора індукції магнітного поля, яке створюється оксидно-барієвими постійними магнітами з напруженістю  $1500 \text{ Ерстед}$ . Під час прикладання напруги між катодом та анодом виникає розряд. Електрони рухаються по спіралі, іонізуючи газ. Позитивні іони бомбардують катод і розпилюють  $Ti$ , який і поглинає газ. Такі насоси забезпечують високий і надвисокий вакуум до  $10^{-10}$  мм. рт. ст.

Кріонасоси працюють під час використання процесів виморозування залишкових газів за температури стінок, близьких до гелієвої ( $4,2 \text{ K}$ ). Вони також забезпечують надвисокий вакуум  $10^{-10} \div 10^{-10}$  мм. рт. ст.

Дуже важливим у вакуумній електроніці є вимірювання самого вакууму. Зупинимося на основних методах цього вимірювання. Методи вимірювання вакууму є самостійним розділом вакуумної електроніки, тому що необхідно вимірювати тиск у діапазоні нижче атмосферного від  $760$  до  $10^{-13}$  мм. рт. ст. ( $10^5 \div 10^{-11} \text{ Па}$ ). Універ-



сального методу вимірювання, що охоплює цей діапазон тисків, не існує. Тому досліджуються різні фізичні явища й ефекти, на основі яких і розробляються методи вимірювання вакууму.

Гідростатичні  $U$ -подібні вакуумметри відносяться до абсолютних манометрів, які дозволяють безпосередньо вимірювати тиск. Конструкція рідинних манометрів являє собою  $U$ -подібну трубку з колінами, які заповнюються ртуттю або вакуумним маслом із низьким значенням пружності пари. Сам процес вимірювання тиску зводиться до вимірювання різниці рівнів в обох колінах, одне з яких з'єднане з вимірюваним об'ємом. Ним можна вимірювати тиски в межах  $760 \pm 10^{-2}$  мм. рт. ст.

У деформаційному вакуумметрі тиск вимірюється за деформацією пружного датчика (сенсора) типу мембрани чи силфона. Опірним тиском є атмосферний тиск. Прикладом є відомі пульсоманометри.

До абсолютних вакуумметрів належать компресійні вимірювачі тиску, наприклад, манометр Мак-Леода, у якому використовується закон Бойля – Маріотта ( $pV = const$ ). Усі інші типи вакуумметрів – це відносні манометри, у яких вимірюються фізичні параметри залежно від тиску й градууються за абсолютними взірцевими вакуумметрами.

Принцип дії теплових перетворювачів базується на залежності теплопровідності розрідженого газу від тиску. Передача тепла відбувається від нагрітої електричним струмом металевої нитки до балона, який знаходиться за кімнатної температури:

$$I_n^2 R = E_k + E_m + E_g + E_s,$$

де  $I_n$  – струм через нитку розжарювання;  $E_k$ ,  $E_m$ ,  $E_g$ ,  $E_s$  – значення втрат тепла за рахунок конвекції, теплопровідності газу, випромінювання нитки, теплопровідності матеріалу нитки. Конвекційним теплообміном в області середнього й високого вакууму можна знехтувати ( $E_k = 0$ ). Утрати тепла за рахунок теплопровідності пропорційні теплопровідності газу  $E_m \approx \lambda_0 (T_n - T_g) A$ . В області високого вакууму  $\lambda_0 = K_T p$ . Утрати тепла випромінюванням і конвективним теплообміном становлять  $E_g = K_g (T_n^4 + T_g^4) A$ , де  $A$  – площа нитки,  $K_g$  – коефіцієнт випромінювання. Теплові втрати нитки розжарювання за рахунок теплопередачі по матеріалу

нитки й електродах, що з'єднують нитку з корпусом перетворювача, рівні  $E_m = \lambda(T_n - T_\sigma)A$ . Тоді рівняння для вимірювання теплового перетворення можна записати так:

$$P = \frac{I_n^2 R - (E_\sigma + E_m)}{K_m (T_n - T_\sigma)}. \quad (10.9)$$

Більш точного вимірювання тиску можна досягнути за умови, коли  $E_m$  складатиме значну частку від  $E_\sigma + E_m$  ( $E_\sigma + E_m \ll I_n^2 R$ ). З рівняння (10.9) видно, що тиск є функцією двох змінних: струму розжарювання нитки  $I_n$  й температури нитки.

Існує два методи роботи теплових манометрів: у режимі постійної температури нитки й постійного струму розжарювання. Градувальні криві теплового манометра показані на рис. 10.1.

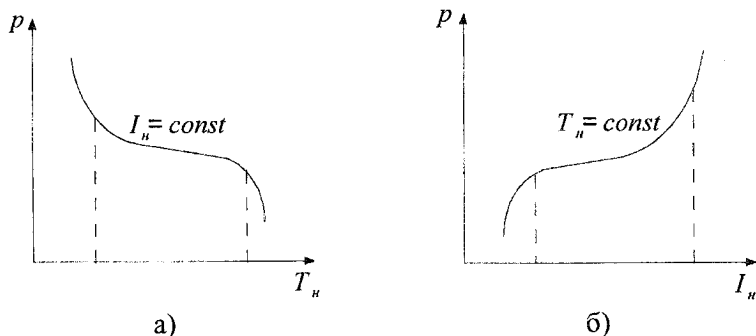


Рис. 10.1. Градувальні криві теплового перетворювача: а) за постійного струму на нитці розжарювання; б) за постійної температури нитки розжарювання

Теплові перетворювачі залежно від способу вимірювання температури діляться на термопарні та перетворювачі опору.

У термопарному перетворювачі (рис. 10.2, а) температура нитки 1 вимірюється термопарою 2. Електроди розміщені в скляному чи металевому балоні 3, який має патрубок для підключення до вакуумної системи. Термо-е.р.с. термопару вимірюється мілівольтметром, а струм розжарювання нитки регулюється реостатом і вимірюється міліамперметром.

У перетворювачі опору для вимірювання температури використовується залежність опору нитки від температури. Він включаєть-

ся в мостову схему (рис. 10.2, б). Струм розжарювання нитки вимірюється міліамперметром, включеним у це ж плече моста, що й перетворювач опорів, а температура нитки – по струму гальванометра, який знаходиться у вимірювальній діагоналі моста. Струм розжарювання також регулюється реостатом.

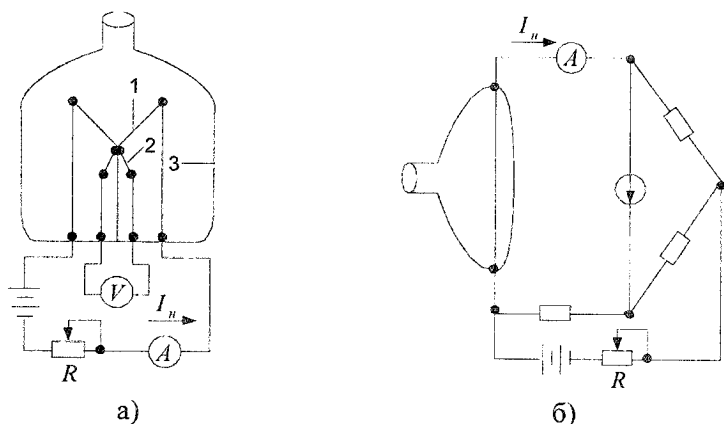


Рис. 10.2. Схеми теплових перетворювачів: а) термопарного; б) перетворювача опорів (1 – нитка розжарювання; 2 – термопара; 3 – балон)

Обидва перетворювачі можуть працювати як у режимі постійного струму, так і в режимі постійної температури нитки розжарювання.

Теплові перетворювачі, як прилади для вимірювання відносних тисків, градууються за компресійним манометром. Діапазон вимірювальних робочих тисків знаходяться в межах  $10^2 \div 10^{-3}$  мм. рт. ст. ( $5 \cdot 10^3 \div 10^{-1}$  Па).

Принцип дії електронних іонізаційних вакуумметрів базується на залежності між тиском залишкових газів та іонним струмом, який утворюється в результаті іонізації молекул газу термоелектронами.

Існує дві схеми електронного перетворення: з внутрішнім і зовнішнім колектором, які реалізовані на основі електровакуумних тріодів. Схема з внутрішнім колектором (рис. 10.3, а) аналогічна звичайному тріоду. Тут колектором іонів є сітка, на яку відносно катода подається від'ємне зміщення. Електрони від катода до анода

(струм  $I_e$ ) співударяються з молекулами залишкових газів та іонізують їх. Утворені в результаті іонізації іони створюють іонний струм  $I_i$ , який вимірюється гальванометром.

У схемі із зовнішнім колектором (рис. 10.3, б) потенціали сітки й анода міняються місцями, а колектором уже стає анод. Електрони, які летять від катода до анода, здійснюють біля сітки ряд коливань і збільшують довжину траєкторії електронів, що підвищує іонізацію молекул залишкових газів. Ця схема є більш чутлива, ніж попередня.

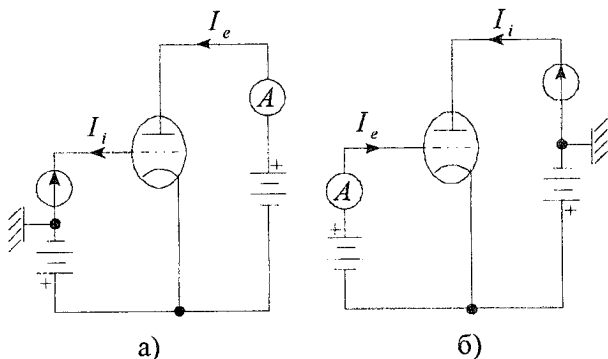


Рис. 10.3. Схеми електронних перетворювачів: з внутрішнім (а) і зовнішнім (б) колектором

Для електронного перетворювача справедливе рівняння  $dN = n p \varepsilon dr$ , де  $dN$  – число позитивних іонів,  $n$  – число електронів,  $dr$  – довжина траєкторії електронів,  $\varepsilon$  – ефективність іонізації. Якщо ввести електронний струм  $I_e = n/t$ , то отримаємо  $dN/t = I_e p \varepsilon dr$ . Проінтегрувавши це рівняння по всій довжині траєкторій електронів, отримаємо вираз для іонного струму:

$$I_i = I_e p \int_{r_1}^{r_2} \varepsilon dr,$$

який набуде вигляду:

$$I_i = K_i I_e p,$$

де  $K_i = \int_{r_1}^{r_2} \varepsilon dr$  – чутливість електронного вакуумметра. Цей вираз називають рівнянням електронного перетворювача. Якщо  $K_i I_e = const$ , то  $I_i = const p$ , тобто іонний струм буде пропорційний тиску, а величина  $A = K_i I_e = const$  рівна тангенсу кута нахилу градуовальної кривої  $I_i(p)$  до осі тиску.

Принцип дії магнітних перетворювачів для вимірювання вакууму базується на залежності струму самостійного газового розряду в схрещених магнітному й електричному полях від тиску. Є декілька видів електродних систем, які забезпечують підтримку самостійного газового розряду при високому й надвисокому вакуумі (рис. 10.4). Комірка Пеннінга складається з двох дискових катодів 1 і циліндричного анода 2. У магнетронному перетворювачі, на відміну від комірки Пеннінга, катоди з'єднані між собою центральним стержнем, в інверсно-магнетронному перетворювачі центральний стержень виконує роль анода, а зовнішній циліндр стає катодом.

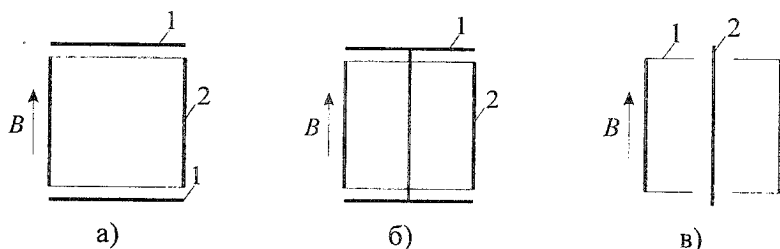


Рис. 10.4. Електродні системи магнітних перетворювачів: комірка Пеннінга (а); магнетронна (б); інверсно-магнетронна (в)

У комірці Пеннінга електрони рухаються по спіральних траєкторіях між катодними пластинами. У конструкціях (рис. 10.4, а, б) емітовані електрони рухаються в схрещених електричному й магнітному полях. Траєкторія їх руху описується рівнянням циклоїди, утвореної колом діаметром  $D = 2m|E|/(qB)^2$ , що котиться по колу радіусом  $r$  з кутовою частотою обертання  $\omega = qB/m$  і тангенціальною швидкістю  $v_t = E/B$ , де  $E$  – напруженість електричного поля,  $B$  – магнітна індукція,  $m$  і  $q$  – маса й заряд електрона.

Магнітну індукцію  $B$  вибирають більш критичного значення, що відповідає рівності діаметра електрода й діаметра кола, по якому рухається електрон. Під час співудару з молекулою залишкового газу електрон утрачає частину енергії на її іонізацію й переміщується в радіальному напрямі до анода. У зв'язку з тим, що радіальна швидкість електронів є значно меншою, ніж тангенціальна, за низьких тисків у розрядному проміжку утворюється від'ємний об'ємний заряд.

Додатні іони, утворені в результаті співударів з електронами, рухаються до катода. Оскільки їх маса є значно більшою за масу електрона, то магнітне поле майже не впливає на траєкторію руху іонів. Співудари додатних іонів з катодом приводять до появи вторинних електронів, струм яких пропорційний іонному струму.

Таким чином, розрядний струм магнітного перетворювача рівний:

$$I_p = I_\phi + I_i + I_e,$$

де  $I_\phi$  – фоновий струм автоелектронної емісії,  $I_i$  – іонний струм,  $I_e$  – струм вторинної електронної емісії.

Струм автоелектронної емісії не залежить від тиску й тому також може вважатися фоновим струмом. Тоді іонний струм і струм вторинної електронної емісії залежать від тиску:

$$I_i + I_e = a p^n,$$

де  $a = 10^{-2} - 10^{-1} \text{ A}/\pi e$ ,  $n = 1 \div 1,4$ . Ураховуючи цю залежність і нехтуючи фоновим струмом, отримуємо вимірювальне рівняння магнітного перетворювача:

$$I_p = K_i P, \tag{10.10}$$

де  $K_i = a p^{n-1}$  – чутливість перетворювача.

Діапазон магнітних перетворювачів є дещо ширшим за електронні й складає  $5 \cdot 10^{-1} \div 5 \cdot 10^{-13} \text{ мм. рт. ст.}$  ( $5 \cdot 10^1 \div 5 \cdot 10^{-11} \text{ Па}$ ).

## 10.2 Фізичні основи роботи вакуумних електронних приладів НВЧ

В основі принципу роботи всіх електронних приладів НВЧ знаходиться перетворення енергії постійного струму в енергію високочастотного електромагнітного поля за допомогою електронних

пучків. Незважаючи на універсальність цього принципу, фізичні явища, які використовують для його реалізації, є різнорідними й багатогранними. Тому, перш ніж приступити до їх роботи, необхідно вивчити найбільш суттєві процеси, на яких базується функціонування електронних пристроїв НВЧ, тобто розглянути методи формування й керування потоком електронних пучків, властивостей електромагнітних коливань і хвиль, а також особливості взаємодії електронних потоків із НВЧ-полями.

### *10.2.1 Електронні пучки. Особливості руху електронів у високочастотних полях*

Основним засобом вакуумної електроніки НВЧ, який служить для перетворення енергії джерела постійного струму в енергію електромагнітного поля НВЧ коливань, є електронні пучки – протяжні електронні потоки, обмежені в поперечному перерізі.

Електронні пучки створюються за допомогою спеціальних електронно-оптичних пристроїв – так званих електронних гармат, які емітують прискорені електрони, траєкторія яких є майже паралельною до осі гармати. Потужність таких пучків (добуток струму  $I_0$ , що переноситься ними, на напругу  $U_0$ , якою були прискорені електрони) визначають потужність приладів НВЧ, а ступінь монокінетичності пучка електронів, співвісність їх траєкторій і незмінність перерізу – якість їх роботи.

Особливістю електронних пучків, які застосовуються в електронних приладах НВЧ (на відміну від електронних пучків, які використовуються в осцилографічних трубках, кінескопах), є велика абсолютна величина струму. Це приводить до необхідності врахування електростатичної (кулонівської) сили взаємодії електронів. Дійсно, під дією цих сил відштовхування електрони намагаються відійти від осі, у результаті чого поперечний переріз пучка збільшується.

Для формування електронних пучків, керування їх рухом і запобігання розбухання часто застосовують постійне магнітне поле. У вакуумних приладах із протяжними електронними пучками, де високочастотне електричне поле паралельне постійному магнітному полю (прилади типу  $O$ ), це магнітне поле відіграє допоміжну роль і служить лише для утримання електронного пучка від його розбухання.

У приладах, де магнітне поле перпендикулярне до постійного й високочастотного електричного поля (у приладах зі схрещеними полями або типу  $M$ ), магнітне поле вже впливає на формування

траєкторій електронів і спричиняє тим самим визначальну дію на принцип роботи цих приладів.

Тому вивчимо характер руху заряджених частинок у постійному магнітному полі, що є основою роботи більшості вакуумних електронних приладів НВЧ.

Відомо, що електрон, який має заряд  $e$  і масу  $m$  і рухається в однорідному постійному магнітному полі з індукцією  $B_0$  зі швидкістю  $v_0$ , направленою перпендикулярно до магнітних силових ліній, описує траєкторію у вигляді кола з радіусом  $R = \frac{mv_0}{eB_0}$ . Цей

радіус може бути визначений шляхом прирівнювання відцентрової сили  $mv_0^2/R$  до сили Лоренца  $e v_0 B_0$ , яка діє на електрон. Частота обертання електрона по колу (електронно-циклотронна частота, або гірочастота) рівна  $\omega_{\text{н}} = e B_0 / m$ .

Якщо електрон має швидкість  $v_0$ , яка направлена під деяким кутом  $\alpha$  до магнітного поля, то її можна розкласти на паралельну й перпендикулярну складові:  $v_{\parallel} = v_0 \cos \alpha$ ,  $v_{\perp} = v_0 \sin \alpha$ . За рахунок першої компоненти електрон зазнає переносу вздовж силових ліній магнітного поля, а за рахунок другої – обертання навколо них. У результаті така траєкторія електрона набуде вигляду спіралі, співвісної з напрямком магнітного поля. Для параксіальних електронів (у яких кут  $\alpha$  малий) можна вважати, що  $v_{\parallel} \cong v_0$ . Оскільки період обертання всіх електронів  $T_{\text{н}} = 2\pi / \omega_{\text{н}}$  однаковий, то електрони параксіального пучка, які виходять із пучка  $A$  (рис. 10.5), будуть знову повертатися на вісь пучка в точці  $B$ , віддаленій від точки  $A$  на відстань  $L = 2\pi v_0 / \omega_{\text{н}}$ , однакову для всіх електронів. Це саме буде повторюватись і в точці  $C$ .

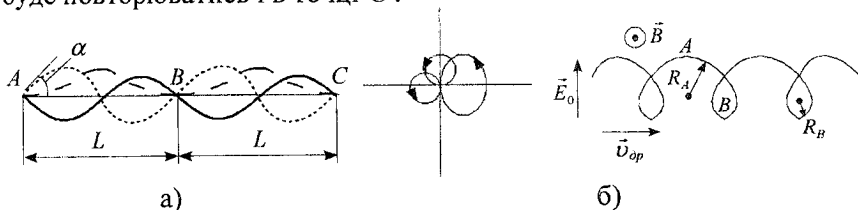


Рис. 10.5. Рух параксіального електрона в поздовжньому магнітному полі (а) і рух зарядженої частинки (електрона) у схрещених електричному й магнітному полях (б)



Таким чином, магнітне поле, направлене вздовж осі паралельного пучка, забезпечує повернення електронів на вісь пучка й тим самим запобігає явищу розбухання пучка.

Складнішою є картина у випадку, коли перпендикулярно до магнітного поля направлене постійне електричне поле  $E_0$  (рис. 10.5, б). У цьому випадку протягом півперіоду обертання електрона в магнітному полі, коли він рухається вгору (у напрямі прискорення його електричним полем), швидкість електрона збільшується, а коли він рухається вниз – зменшується. Тому швидкість електрона в нижній точці траєкторії  $B$  буде меншою, ніж у верхній точці  $A$ . Відповідно радіус кривизни  $R_A$  буде більшим, ніж  $R_B$ . У результаті, здійснивши повний оберт, заряджена частинка вже не повернеться у вихідну точку, а буде зміщена вправо. Таке переміщення зарядженої частинки має назву дрейфу в магнітному полі й здійснюється зі швидкістю  $v_{op}$ , перпендикулярною як до електричного, так і до магнітного полів.

Окрім того, до питання про рух зарядженої частинки в схрещених полях можна підійти шляхом розв'язання рівняння її руху:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e \vec{E} + e [\vec{v} \times \vec{B}_0]. \quad (10.11)$$

При повороті системи координат так, щоб  $E_0 \parallel O_x$ , а  $B_0 \parallel O_y$ , проекція рівняння (10.11) на осі координат матиме вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = e \ddot{E} - e B_0 \frac{dz}{dt}, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = e B_0 \frac{dx}{dt}. \quad (10.12)$$

Для початкових умов  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $v_x = 0$ ,  $v_z = v_0$  розв'язок цієї системи набуде вигляду:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r \left( 1 - \frac{v_0}{v_{op}} \right) (1 - \cos \omega_n t), \\ z &= r \omega_n t - r \left( 1 - \frac{v_0}{v_{op}} \right) \sin \omega_n t, \end{aligned} \quad (10.13)$$

$$\text{де } r = \frac{m E_0}{e B_0}, \quad v_{op} = \frac{E_0}{B_0}.$$

Вирази (10.13) описують петлеподібну криву, яка зображена на рис. 10.5, б, називається трохойдою й лежить у площині  $y = 0$ . Здійснюючи циклічний рух по трохойді, заряд одночасно переміщується вздовж осі  $z$  із середньою дрейфовою швидкістю  $v_{op} = r \omega_n$ .

Особливо важливе значення для техніки НВЧ має випадок, що відповідає початковим умовам  $x_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ , коли заряджена частинка вводиться в систему з поверхні від'ємного електрода й має при цьому нульову початкову швидкість. Тоді вираз спрощується і має вигляд:

$$x = r(1 - \cos \omega_n t), \quad y = 0, \quad z = r(\omega_n t - \sin \omega_n t). \quad (10.14)$$

Така крива називається циклоїдою (рис. 10.6, а). Подібного роду траєкторії реалізуються в системах, де джерелом електронів (катодом) є від'ємний електрод. Виходячи з нього, електрони рухаються в перший момент прямо до анода. Але в міру того, як вони набирають швидкість, магнітне поле викривляє їх траєкторії, завертає вниз і знову повертає на катод. У точці  $x = 0$  електрони, що повернулися, вже мають нульову швидкість і знову починають описувати петлю циклоїди.

Такою буде картина, якщо відстань від катода до анода є досить великою, так що  $x_{\max} = 2r < d$ . В іншому випадку електрони будуть попадати на анод.

Граничним є випадок, коли  $x_{\max} = d$  й електрон у верхній частині траєкторії дотикається анода. Цьому випадку відповідає так званий критичний режим, за якого магнітне поле

$$B_{кр} = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{2mU_0}{e}},$$

де  $U_0 = E_0 d$  – напруга між катодом та анодом.

При  $B_0 < B_{кр}$  усі електрони, емітовані з катода, попадають на анод, а при  $B_0 > B_{кр}$  проходження струму між анодом і катодом вже відсутнє. Аналогічно відбуваються всі процеси в системі, де катод та анод являють собою коаксіальні циліндри.

Дуже важливий випадок реалізується, коли початкова швидкість заряду  $v_0$ , з якою він вводиться в систему схрещених полів, за величиною й напрямом є рівною  $v_{op}$ . У цьому випадку множник

$(1 - v_0/v_{op}) = 0$  і траєкторія заряду буде:  $x = x_0$ ,  $y = 0$ ,  $z = v_{op} t$ , тобто заряд рухається рівномірно й прямолінійно паралельно до поверхні електродів зі швидкістю  $v_{op}$ . Це має місце через те, що при  $v_0 = v_{op}$  сили, які діють на заряд з боку електричного й магнітного полів, взаємно врівноважуються і заряди можуть рухатися прямолінійно з тією ж швидкістю, з якою вони увійшли в систему.

Якщо система має аксіальну симетрію й електричне поле направлене по радіусу, то розв'язком рівнянь (10.12) буде так звана епітрохоїда – петлеподібна крива (10.6, б). У цьому випадку дрейф проходить в азимутальному напрямі й електрони будуть періодично то наближатися до осі, то віддалятися від неї. Проте, незважаючи на наявність радіальної електричної сили, їхня середня відстань від осі буде залишатися незмінною.

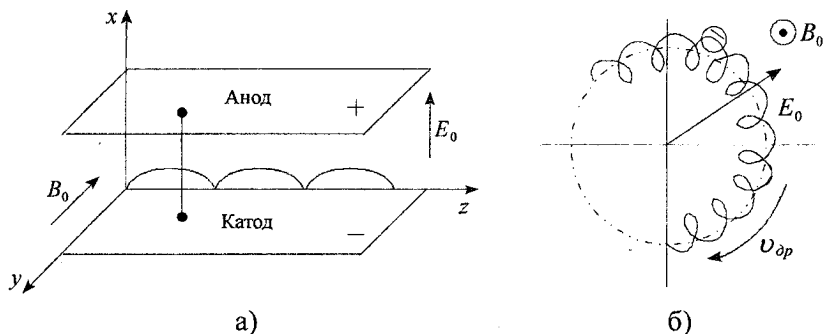


Рис. 10.6. Циклоїдальний рух електрона в схрещених полях при нульовій початковій швидкості (а) та при радіальному напрямі електричного поля (б)

Електронні пучки формуються за допомогою спеціальних електронно-оптичних пристроїв – електронних гармат. Однак, щоб сформований пучок можна було успішно використовувати в електронних пристроях НВЧ, необхідно, зберігаючи належну форму, провести його всі простори (об'єми) взаємодії з високочастотними полями.

Для боротьби з розбуханням пучків переважно застосовують постійне магнітне поле, паралельне осі пучка. Дія такого поля ефективна навіть за відсутності кулонівських сил, оскільки воно повертає до осі параксіальні електрони, виправляючи недоліки пушки,

яка дає слабкий пучок, що розходитьься. Якщо кулонівські сили суттєві, то вони викликають у магнітному полі азимутальний дрейф заряджених частинок, що приводить до повернення зарядів до осі та їх обертання навколо неї. Таким способом забезпечується утримання пучка від розбухання.

Варіантом магнітного утримання є бріллуенівське утримання, коли електронному пучку, який входить у магнітне поле, надається обертовий рух навколо його осі. Сила Лоренца, яка виникає при цьому, направлена до осі пучка й підбирається такою, щоб урівноважити кулонівську й відцентрову сили, у результаті чого радіус пучка зберігається незмінним на всій його довжині.

Крім магнітного утримання існує ще один спосіб боротьби з розбуханням пучків, який полягає в тому, що в об'єм електронного пучка вводиться деяка кількість додатно заряджених іонів, які своїм просторовим зарядом компенсують від'ємний просторовий заряд електронів. Просторовий заряд електронів при цьому компенсується й пучок не розбухає. Описане явище називають ще іонним фокусуванням (іонним утриманням), воно спостерігається при вакуумах, більших від  $10^{-6}$  мм. рт. ст.

Усе вищевикладене стосується до  $O$ -приладів, у яких електронний пучок рухається вздовж напрямку магнітного поля.

У  $M$ -приладах, де електрони рухаються в схрещених електричному й магнітному полях, пучок може бути створений при введенні електронів перпендикулярно до  $E_0$  і  $B_0$  полем зі швидкістю  $v_0 = E_0/B_0$ . При цьому електрична й магнітна сили, які діють на

заряди, є вже скомпенсованими й пучок рухається прямолінійно зі швидкістю, рівною початковій. Для такої інжекції електронів може бути використаний простий пристрій (рис. 10.7), який називають гарматою  $M$ -типу. Тут емісія електронів здійснюється у вузькій смужці катода  $K$ , витягнутої вздовж напрямку магнітного поля, перпендикулярно напрямку до площини рисунка. У формуючій частині пушки  $I$  траєкторії електронів мають вигляд циклоїди.

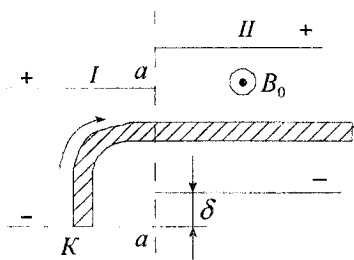


Рис. 10.7. Електронна гармата ( $M$ -типу) у схрещених полях

Розміри цієї частини та режим у ній вибираються такими, щоб відстань від катода до кінця формуючої області (переріз  $a - a$ ) складала половину довжини періоду циклоїди. Тоді вершина циклоїди буде припадати на переріз  $a - a$ , й електрони будуть перетинати цей переріз, маючи тільки горизонтально направлену складову швидкості, рівну подвоєному значенню дрейфової швидкості в області  $I$ . Щоб в області  $II$  електрони продовжували рухатися прямолінійно й паралельно електродам, необхідно, щоб виконувалась умова  $2v_{др I} = v_{др II}$  або інакше  $E_{0 II} = 2E_{0 I}$ .

Необхідна відстань від пучка до нижнього електрода  $x_0$  установлюється відповідним зсувом частини  $II$  відносно частини  $I$  у вертикальному напрямі на величину  $\delta$  (рис. 10.7). Отриманий пучок має в поперечному перерізі вигляд витягнутого прямокутника й називається смужковим.

Однією з важливих переваг таких електронних гармат, що застосовуються в  $M$ -приладах, у порівнянні з  $O$ -приладами, є те, що перші значно краще захищені від бомбування катода позитивними іонами, які утворюються при проходженні пучка електронів у недосконалому вакуумі, а це веде до збільшення надійності  $M$ -гармати.

Хоча фізичні закони, що знаходяться в основі принципів роботи всіх електронних приладів, є однаковими, проте робота НВЧ-приладів суттєво відрізняється від роботи низькочастотних електровакуумних приладів.

Причиною такої специфіки є співрозмірність часу прольоту електронів з періодом зміни високочастотного поля. Тому проведемо також дослідження особливості руху електронів, які мають кінцевий (визначений) час прольоту, і співрозмірністю його з періодом діючого на електрони високочастотного електричного поля. Зупинимось на таких категоріях, як швидкість, час прольоту, кут прольоту електронів у високочастотному полі та умовах формування наведеного струму.

В електричному полі рух електрона описується рівнянням:

$$m \frac{dv}{dt} = e E(t),$$

де  $E(t)$  – напруженість поля,  $v$ ,  $e$ ,  $m$  – швидкість, заряд і маса електрона відповідно. Інтегрування цього рівняння дає швидкість:

$$v = \frac{e}{m} \int_t^{t+\tau} E(t) dt + v_0,$$

де  $t$  – момент входження електрона в поле,  $\tau$  – час його перебування в полі,  $v_0$  – початкова швидкість електрона.

Якщо  $v_0 = 0$ , а поле не встигає суттєво змінитися за час прольоту, то кінцева швидкість електрона до часу  $t + \tau$  складає  $v \cong \frac{e}{m} E \tau$ .

При цьому можна вважати, що електрон проходить у полі шлях  $d$  під дією сили  $eE$  й тому рухається рівномірно прискорено протягом часу  $\tau = 2d/v$  зі швидкістю  $v = \frac{eE}{m} \frac{2d}{v}$  або  $v^2 = \frac{2e}{m} Ed$ . В однорічному полі  $U = Ed$  являє собою різницю потенціалів, яку пройшов електрон. Звідси отримуємо відомий вираз, який визначає швидкість заряду через пройдену ним різницю потенціалів (напругу)  $U$ :

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m} U}.$$

Якщо ж поле  $E$  встигає помітно помінятися протягом часу прольоту електрона  $\tau$ , то ця формула вже втрачає зміст і для визначення швидкості необхідно використовувати формулу, яка для плоскої системи електродів може бути подана у вигляді:

$$v = \frac{e}{md} \int_t^{t+\tau} U(t) dt + v_0.$$

Сам по собі час прольоту  $\tau$  ще не визначає характеру руху зарядженої частинки у високочастотному полі. Важливою характеристикою такого руху є відношення часу прольоту  $\tau$  до періоду високочастотних коливань  $T$  або пропорційна йому величина  $\theta = \omega \tau$ , де  $\omega = 2\pi/T$  – колова частота поля. Ця величина виражається в кутовій мірі (радіанах чи градусах), називається кутом прольоту  $\theta$  і є більш зручним параметром, ніж час прольоту  $\tau$ .

Повернемося тепер до енергетичних особливостей руху електрона у високочастотному полі. Запишемо для цього рух електрона у векторній формі:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e \vec{E} = -e \text{grad } \varphi = -e \left( \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right). \quad (10.15)$$

Помножимо його скалярно на  $d\vec{r}/dt$ :

$$m \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 = -e \left( \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right).$$

Ліва частина цього рівняння являє собою похідну за часом від кінетичної енергії  $W_k$ , а кругла дужка в правій частині – повну похідну від потенціалу  $\varphi - d\varphi/dt$  для випадку, коли  $\varphi$  не залежить від часу:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Додавши до правої частини й віднявши від неї величину  $e \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , отримаємо:

$$\frac{d}{dt} (W_k + W_n) = e \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (10.16)$$

Із цього виразу випливає, що в змінному електричному полі повна енергія зарядженої частинки не залишається незмінною, а приріст повної енергії визначається приростом потенціалу в цій точці.

З'ясуємо тепер умови існування наведеного струму. Розглянемо для цього діод і те, яким чином у ньому проходить струм (рис. 10.8). Для правильного розуміння струмопроходження слід урахувати ті заряди, які наводяться за рахунок електростатичної індукції на поверхні електродів  $K$  і  $A$ . Зрозуміло, що густина поверхневого заряду буде більша на тому електроді, до якого ближче на даний момент знаходиться заряд  $q$ , що летить. Тому на початку прольоту основний поверхневий заряд буде наведений на катоді  $K$ . Проте в міру наближення заряду  $q$  до анода  $A$  наведені заряди будуть перетікати вже з катода  $K$  на анод  $A$  по провіднику, що їх з'єднує (рис. 10.8, а). Коли весь заряд  $q$  перейде до самого анода, то весь наведений струм буде зосереджений на аноді. Доторкнувшись до анода, заряд, що наводить, нейтралізує вже наведений і струмопроходження завершиться. Розглянемо тепер цей процес кількісно на моделі, зображеній на рис. 10.8, б. Між плоскими електродами  $K$  і  $A$  знаходиться тонкий плоский шар об'ємного заряду з поверхневою густиною  $\sigma$ . Цей шар рухається по напрямку до анода  $A$  зі швидкістю  $v$ . Електроди  $K$  і  $A$  замкнуті провідником.

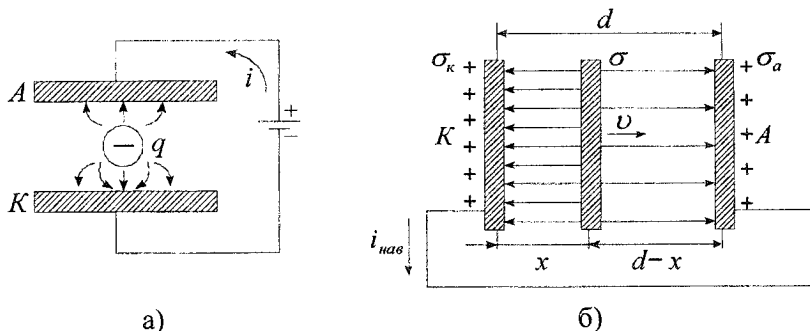


Рис. 10.8. Поверхневий заряд і наведений струм під час руху заряду в системі електродів  $K - A$  (а) і розрахунок такого наведеного струму (б)

Якщо система нейтральна, то наведений заряд рівний заряду, що наводить:

$$\sigma_a + \sigma_k + \sigma = 0.$$

Між наведеним і тим, що наводить, зарядами існує поле, яке за теоремою Гауса визначається  $E_a = \sigma_a / \epsilon_0$ ,  $E_k = \sigma_k / \epsilon_0$ . Оскільки електроди екіпотенціальні, то  $E_x x = E_a (d - x)$ . Розв'язуючи цю систему рівнянь, одержимо:  $\sigma_a = \sigma x / d$ . Диференціюючи цей вираз за часом, отримаємо густину наведеного на анод струму:

$$j_{навед} = \frac{d\sigma_a}{dt} = \frac{\sigma}{d} \frac{dx}{dt} = \frac{\sigma}{d} v. \quad (10.17)$$

Якщо такий шар буде нескінченно тонким, то на ньому буде заряд  $d\sigma$ , який і утворить наведений струм:

$$dj_{навед} = \frac{d\sigma}{dx} \cdot \frac{\sigma}{d} dx = \rho \frac{v}{d} dx = \frac{\rho v}{d} dx = j_k \frac{dx}{d}, \quad (10.18)$$

де  $\rho = d\sigma/dx$  – об'ємна густина просторового заряду,  $j_k = \rho v$  – густина конвекційного струму в шарі.

Якщо тепер перейти до випадку, коли весь простір між електродами заповнений просторовим зарядом  $\rho(x)$ , що має швидкість  $v(x)$ , то загальний струм, який створений зарядом, буде отриманий інтегруванням через елементарні шари  $dx$ :



$$j_{нас} = \frac{1}{d} \int_0^d \rho(x) v(x) dx = \frac{1}{d} \int_0^d j_{\kappa}(x) dx,$$

тобто наведений струм визначається як усереднений на всьому проміжку конвекційний струм.

Якщо розглянути рис. 10.8, б, то може здатися, що в колі струму утворюються розриви, у яких струм не протікає, наприклад, між шаром  $\sigma$  й анодом. Насправді, на цій ланці струм протікає вже у формі струму зміщення:

$$j_{зм} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = \frac{d\sigma_a}{dt} = j_{нас}.$$

Таким чином, повний струм, що протікає по колу, є величиною незмінною. Тільки в провіднику, що з'єднує обидва електроди ( $A$  і  $K$ ), він має вигляд наведеного струму, в області між шаром  $\sigma$  й обома електродами – у вигляді струмів зміщення, а всередині самого шару – як сума конвекційного струму й струму зміщення.

### ***10.2.2 Динамічне керування електронним потоком. Взаємодія електронних потоків з електромагнітними полями***

В основі роботи всіх НВЧ електронних приладів знаходиться енергообмін потоку електронів з електромагнітними полями. При цьому частина кінетичної енергії електронів передається полю й перетворюється в його енергію. Тому принципи роботи електронних приладів НВЧ потрібно розглядати з урахуванням закономірностей, які описують взаємодію електронних потоків з електромагнітними полями. Ці закономірності ми розглянемо нижче.

Для того щоб електронний потік міг створювати наведений струм, він повинен бути неоднорідним за густиною. Тому одним з основних процесів, які протікають в електронних приладах, є перетворення однорідного електронного потоку в пульсуючий, тобто створення в ньому змінної складової конвекційного струму. Це й утворює згідно з виразом (10.18) наведений струм.

У найпростішому випадку подібна модуляція електронного потоку за густиною – розбиття його на згустки – може бути здійснена за допомогою сітки, яка розміщена на шляху потоку. Подаючи на сітку змінно-позитивне та негативне зміщення, можна відповідно пропускати електрони або їх затримувати. Такий статичний спосіб керування електронним потоком відбувається на низьких частотах у звичайних електронних лампах.

Проте при проходженні потоку через проміжок катод–сітка відбувається не тільки модуляція потоку за густиною. Через коливання потенціалу сітки швидкість електронів, які перетинають її поверхню, є різною: у моменти, коли миттєвий потенціал на сітці найбільш додатний, швидкість електронів стає найбільшою, а через півперіоду – швидкість найменша. Через таку різницю швидкостей при подальшому русі електронів проходить їх переміщення один відносно одного – більш швидкі електрони вириваються вперед, а більш повільні – відстають від них. У результаті величина струму визначається не тільки статичним керуванням дії сітки, але й подальшим перерозподілом густини електронів при їх подальшому русі. Для сходження всіх електронів в одній точці фазового фокусу необхідна напруга, яка змінюється за певним законом, як правило, періодичним. Тому, прикладаючи до сітки періодичні імпульси, можна отримати на деякій відстані від сіток періодичну зміну густини електронного потоку. Такого роду керування потоком називають динамічним. Воно і є основою електронних приладів НВЧ.

Для розв'язання задач електроніки НВЧ використовуються рівняння електродинаміки, які описують взаємозв'язок змінних електричних і магнітних полів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  з конвекційним струмом  $j_k$  та просторовим зарядом  $\rho$ , що створюються потоком електронів:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}_k + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Потік можна характеризувати неперервною в просторі величиною – масовою густиною  $\rho_m = en\vec{v} = \rho\vec{v}$ . Таке наближене подання потоку дискретних частинок як потоку деякого неперервного середовища застосовують у гідродинаміці й називають гідродинамічним наближенням. Тоді рух такого ідеалізованого електрично зарядженого середовища описується рівняннями:

$$\rho_m \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{E} + [\vec{j}_k \times \vec{B}]. \quad (10.20)$$

Скорочуючи всі члени рівняння на  $n$ , знову приходимо до рівняння руху індивідуального електрона (рівняння Лоренца):

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e \vec{E} + e [\vec{v} \times \vec{B}].$$

Наведені рівняння доцільно доповнити рівнянням неперервності, яке пов'язує густину заряду з їх переміщенням:

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{j}_k = 0. \quad (10.21)$$

При взаємодії електронного потоку з електричним полем в елементі об'єму  $dV$  у момент часу  $t$  виділяється миттєва потужність:

$$dP = \vec{j}_k(x, y, z, t) \cdot \vec{E}(x, y, z, t) dV.$$

У всьому об'ємі взаємодії  $V$  миттєва потужність буде рівна:

$$P(t) = \int_V \vec{j}_k(x, y, z, t) \cdot \vec{E}(x, y, z, t) dV. \quad (10.22)$$

Усереднена в часі за період коливань  $T$  потужність буде рівна:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \int_V \vec{j}_k(x, y, z, t) \cdot \vec{E}(x, y, z, t) dV dt. \quad (10.23)$$

На основі аналізу виразів (10.22) і (10.23) можна вказати шляхи, направлені на збільшення потужності взаємодії електронного потоку з полем:

- для отримання найбільшого значення інтеграла (10.22) величина  $\vec{j}_k$  повинна бути найбільшою в тій області простору, де поле  $\vec{E}$  максимальне;

- оскільки підінтегральна функція (10.22) і (10.23) являє собою скалярний добуток двох векторів, то вона буде максимальною, якщо вектори  $\vec{j}_k$  і  $\vec{E}$  паралельні;

- усе електричне поле необхідно концентрувати в якомога меншому об'ємі й через цей об'єм паралельно направлено електричного поля пропускати якомога більш щільний потік електронів.

Якщо тепер повернутися до системи плоскопаралельних електродів, які розміщені на відстані  $d$ , і вважати, що напруга між ними змінюється за гармонічним законом із частотою  $\omega$  й амплітудою  $U_m$ , а густина конвекційного струму не залежить від координат  $y$  і  $z$ , то отримаємо:

$$E = \frac{U_m e^{j\omega t}}{d}, \quad \int_V j_k(x, y, z, t) dV = \int_0^d i_k(x, t) dx, \quad (10.24)$$

$$\langle P \rangle = \frac{U_m}{T} \int_0^T dt \frac{e^{j\omega t}}{d} \int_0^d i_k(x, t) dx = \frac{U_m}{T} \int_0^T i_{\text{конв}}(t) e^{j\omega t} dt.$$

Таким чином, із цього виразу можна зробити висновки, що для забезпечення ефективної взаємодії електронного потоку з полем не-

обхідна наявність у наведеному струмі (і в конвекційному) змінної компоненти з тією ж частотою, що й напруга між електродами.

У ролі коливальних систем в електроніці НВЧ використовують порожні резонатори. Відомо, що будь-який замкнений об'єм, обмежений добре провідними стінками, володіє резонансними властивостями для нескінченного ряду дискретних частот. Ці частоти відповідають власним коливанням резонатора й називають його власними частотами. Кожній моді (типу) власних коливань відповідає своя конфігурація електричних і магнітних полів у резонаторі й своя власна частота.

Власні коливання добре вивчені для резонаторів простих геометричних форм: прямокутних, циліндричних, сферичних і частинно-еліптичних резонаторів. У таких резонаторах електричні й магнітні поля розподілені у всьому об'ємі резонатора. У них важко вказати область, де була б зосереджена основна частина електричних або магнітних силових ліній.

На відміну від таких резонаторів, для резонаторів електронних приладів НВЧ електричне поле повинно бути зосереджене в якомога меншому об'ємі, де напруженість поля була б максимальною. Саме через цю область об'єму необхідно пропускати електронний потік так, щоб напрям руху електронів збігався з напрямом електричних силових ліній. Протяжність області взаємодії повинна бути достатньо малою, щоб час прольоту електронів у ній був набагато меншим за період коливань. Цим вимогам здебільшого відповідають тороїдальні порожні резонатори (рис. 10.9). Такі резонатори, які називають тороїдальними, являють собою циліндричну порожнину із сильно вдавненою центральною частиною. На найнижчій моді власних коливань електричне поле цього резонатора зосереджене між його зближеними днищами, тоді як магнітні силові лінії проходять в основному в його горизонтальній частині у вигляді концентричних кіл. Тоді електронний потік пропускається в середній частині вздовж осі резонатора й дно резонатора в межах радіуса  $a$  робиться у вигляді сітки. Співвідношення розмірів у такому резонаторі можуть бути різними: при  $b > h$  (рис. 10.9, б) резонатор розглядається як радіальна лінія, а при  $b < h$  (рис. 10.9, в) – як коротко замкнена на кінці коаксіальна лінія. Оскільки основна частина електричних силових ліній зосереджена в зазорі між днищами, то цей об'єм можна розглядати як деяку ємність  $C$ , а торої-

дальну частину – як зосереджену індуктивність  $L$ :  $C = \epsilon_0 \frac{\pi a^2}{d}$ ,

$L = \mu_0 \frac{h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ . Добротність таких резонаторів визначається як

$Q = \omega_0 \frac{W}{P}$ , де  $W$  – енергія, запасена в резонаторі,  $P$  – потужність утрат.

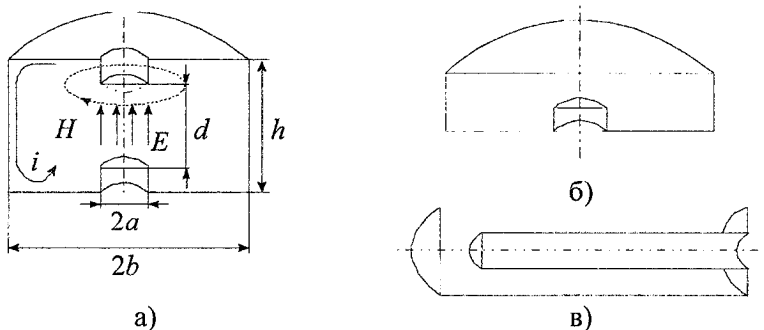


Рис. 10.9. Тороїдальний порожній резонатор (а) та його модифікації (б, в)

### 10.3 Повільні електромагнітні хвилі. Сповільнюючі системи

Для ефективної взаємодії електронного потоку з біжучою електромагнітною хвилею ця хвиля повинна задовольняти такі вимоги:

- фазова швидкість хвилі повинна бути близькою до швидкості електронів;
- хвиля повинна мати поздовжню компоненту електричного поля, тобто компоненту, яка збігається з напрямом руху потоку заряджених частинок.

Лише в цьому випадку діюча з боку електричного поля на заряд сила збігається з напрямом його швидкості, і потужність взаємодії не дорівнює нулю.

З таких умов випливає, що ні звичайна електромагнітна хвиля, яка поширюється у вільному просторі, ні хвилі, які поширюються вздовж двопровідної або коаксіальної лінії, не забезпечують взаємодії з електронним потоком, оскільки фазова швидкість цих хвиль

рівна швидкості світла, а вектор електричного поля перпендикулярний напрямку поширення хвилі.

У техніці НВЧ для отримання сповільнених хвиль з викладеними вище властивостями використовують спеціальний клас ліній передачі, які називають сповільнюючими системами. Прикладом такої системи може бути спіраль.

Розглянемо тепер поширення електромагнітних хвиль уздовж провідника, згорнутого в спіраль (рис. 10.10). У першому наближенні можна вважати, що електромагнітна хвиля поширюється вздовж провідника так, ніби струми, які протікають у сусідніх витках, не впливають на проходження струму в розглянутій ланці провідника; швидкість хвилі вздовж провідника при цьому рівна  $c$ .

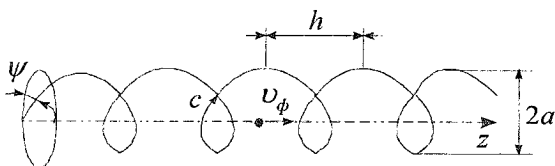


Рис. 10.10. Спіраль як сповільнююча система електромагнітної хвилі

Переміщаючись на один виток спіралі, хвиля буде проходити шлях  $s = \sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}$ , де  $s$  – довжина провідника одного витка. При цьому вздовж осі  $z$  переміщується хвиля на відстань  $h$ , де  $h$  – крок спіралі. Відповідно, швидкість переміщення вздовж осі спіралі буде в  $s/h$  разів меншою за швидкість поширення її вздовж провідника спіралі. Звідси фазова швидкість хвилі вздовж осі  $z$  буде рівна  $v_\phi = ch/s$ . Відповідне сповільнення хвилі буде визначатися формулою:

$$\beta = \frac{c}{v_\phi} = \frac{s}{h} = \frac{\sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}}{h} = \frac{1}{\sin \psi}, \quad (10.25)$$

де  $\psi$  – кут формування спіралі.

Якщо  $h \ll 2\pi a$ , то можна вважати, що  $\beta \cong \frac{2\pi a}{h} = \text{ctg} \psi$ . Приблизна конфігурація електричного поля в спіралі зображена на рис. 10.11. Силкові лінії електричного поля тягнуться від поверхні

ланки спіралі, що має на даний момент додатний потенціал до ланок, де потенціал від'ємний. Утворене таким чином електричне поле має поздовжню складову  $E_z$ , з якою може взаємодіяти електронний пучок, що рухається вздовж осі спіралі. Довжина хвилі в спіралі  $\Lambda = 2\pi/\gamma = \lambda_0/\beta$ , де  $\lambda_0$  – довжина хвилі у вільному просторі.

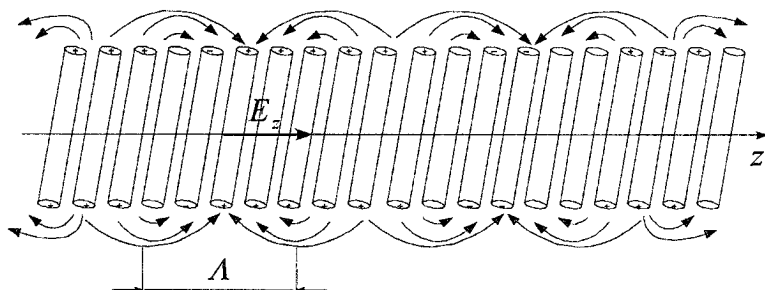


Рис. 10.11. Конфігурація електричного поля в спіралі

Електричні силові лінії завжди проходять якомога коротшим шляхом. Тому найбільша густина силових ліній (напруженість поля максимальна) буде біля самої поверхні спіралі. При віддаленні від поверхні спіралі всередину чи назовні напруженість поля зменшується. Електромагнітні хвилі, які поширюються вздовж поверхні розділу (поверхні спіралі) і напруженість поля яких зростає в міру наближення до цієї поверхні, називають поверхневими хвилями. Тобто хвилі в спіралі є саме такими хвилями.

Чим менше  $\Lambda$ , тим швидше буде зменшуватися напруженість поля  $E$  в міру віддалення від поверхні спіралі й тим більш поверхневою буде ця хвиля. Це зрозуміло, оскільки зменшення довжини хвилі, яке може бути зумовлене підвищенням частоти сигналу й збільшенням сповільнення  $\beta$ , повинно приводити до відповідного скорочення картини поля як у поздовжньому, так і в поперечному напрямках. У результаті цього силові лінії будуть проходити ближче до поверхні спіралі, а напруженість поля буде зменшуватися швидше.

Для кількісної характеристики ступеня зв'язку поля спіралі з електронним пучком вводять спеціальну величину, яка називається опором зв'язку:

$$R_{\text{зв}} = \frac{E_m^2}{2\gamma^2 P},$$

де  $E_m$  – амплітуда поздовжньої компоненти напруженості поля в області простору, де формується пучок;  $P$  – потужність, яка переноситься хвилею вздовж спіралі.

Для ефективної взаємодії електронного пучка з полем сповільненої хвилі завжди бажано, щоб опір зв'язку був якомога більшим. Проте досягти цього досить важко, оскільки електричне поле досягає найбільшої напруженості біля самої поверхні спіралі. Щоб не допустити попадання електронів пучка на спіраль, пучок доводиться пропускати на досить великій відстані від її поверхні. Зазвичай його пропускають по осі спіралі, де напруженість поля мінімальна.

Точний вираз для опору зв'язку на осі спіралі має достатньо складний вигляд. Однак для випадку, коли  $\gamma a$  є досить великим, то він визначається виразом:

$$R_{\text{зв}} = 60\pi\beta e^{-2\gamma a}.$$

Більш загальним є метод визначення опору зв'язку, у якому спіраль розглядається як деяка передавальна лінія. Тоді поширення сигналу описується в такому випадку системою телеграфних рівнянь:

$$\frac{\partial \dot{U}}{\partial z} = -L_1 \frac{\partial \dot{I}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \dot{I}}{\partial z} = -C_1 \frac{\partial \dot{U}}{\partial t}, \quad (10.26)$$

де  $L_1$  і  $C_1$  – погонні індуктивність і ємність спіралі,  $\dot{I}$ ,  $\dot{U}$  – комплекси струму й напруги в ній.

Розв'язок цих рівнянь має вигляд

$$I = I_m e^{j(\omega t - \gamma z)}, \quad U = U_m e^{j(\omega t - \gamma z)},$$

з якого випливає, що фазова швидкість хвилі  $v_\phi = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ .

Передавальна лінія характеризується також хвильовим опором  $Z_x$ , який рівний відношенню напруги й струму в лінії:  $U_m/I_m = Z_x = \sqrt{L_1/C_1}$ . Тоді потужність, яка передається по цій

лінії, буде рівною:  $P = \frac{U_m I_m}{2} = \frac{U_m^2}{2Z_x}$ . Оскільки  $E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = j\gamma U$ , то

$U_m = E_{zm}/\gamma$  і вираз для  $Z_x = \frac{E_{zm}^2}{2\gamma^2 P}$ . Таким чином, опір спіралі й

опір зв'язку – це одне й те ж.

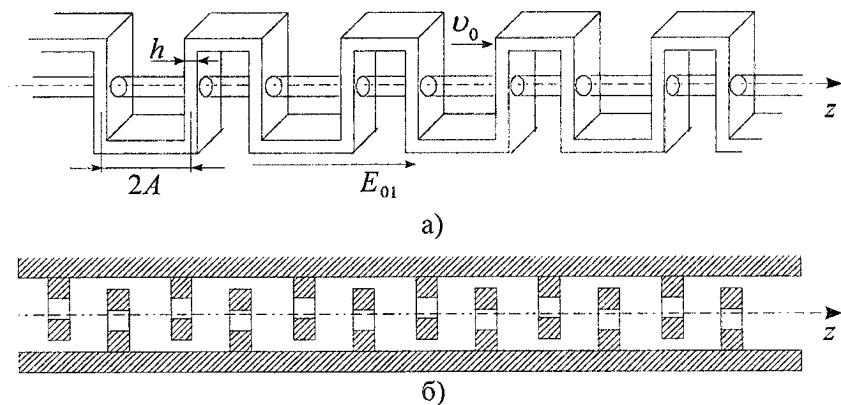


Сповільнююча система може бути створена й на основі хвилеводу. Проте фазова швидкість хвилі у хвилеводі завжди перевищує швидкість світла. Але якщо хвилевід зігнути відповідним чином, то можна створити систему, яка матиме досить велике сповільнення.

Один із можливих варіантів перетворення хвилеводу у сповільнюючу систему подано на рис. 10.12, а. Прямокутний металевий хвилевід, у якому збуджується хвиля типу  $H_{01}$ , згинається у формі меандру з довжиною коліна  $2A$ ; посередині в широкій стінці зроблені наскрізні отвори для пропускання електронного потоку. Щоб пройти вперед уздовж осі  $z$  на відстань  $h$ , електромагнітній хвилі доводиться проходити шлях уздовж хвилеводу на відстань  $2A$ , тоді як електрони пучка проходять лише шлях  $h$ . Зрозуміло, що зробивши довжину коліна  $A$  досить великою, можна досягти значного сповільнення електромагнітної хвилі й зрівняти швидкість її поширення вздовж осі  $z$  зі швидкістю електронів.

У цій же системі виконується й друга умова взаємодії електронів з біжучою електромагнітною хвилею: електрична компонента поля  $H_{01}$ -хвилі у хвилеводі є паралельною напрямку швидкості електронів.

Варіанти виконання сповільнюючих систем подано на рис. 10.12, б–г. Це може бути прямокутна труба, у яку впаяні поперечні перегородки з отворами для пропускання електронного пучка (рис. 10.12, б). Зігнутий хвилевід може бути також утворений



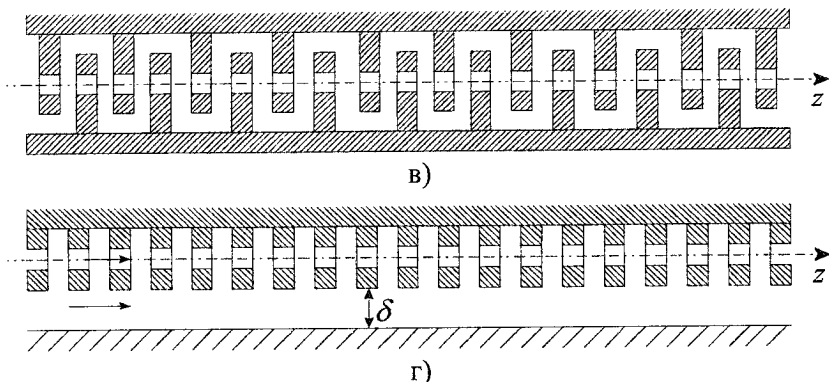


Рис. 10.12. Перетворення хвилеводу в сповільнюючу систему (а) та різновиди сповільнюючих систем (б–г)

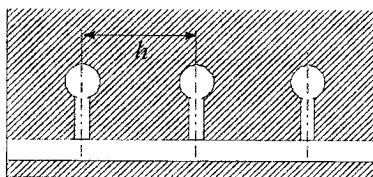
двома зігнутими металевими рейками, вставленими одна в одну (рис. 10.12, в). Зуби на рейках можуть бути неоднакової висоти, навіть таким чином, що одна з рейок робиться просто гладкою, а друга залишається зубчатою (рис. 10.12, г). У цьому випадку для проходження електронного пучка необов'язково свердлити в зубах поздовжні отвори – пучок можна пропускати й у проміжку між зубами та гладкою поверхнею. При цьому електрони будуть взаємодіяти з електричним полем, яке зависає над щілинами за рахунок крайових ефектів. Така система називається гребінковою й широко використовується в техніці НВЧ. Вона являє собою послідовну ланку зв'язаних резонаторів, уздовж яких може поширюватися сповільнена електромагнітна хвиля. Між зубами й гладкою поверхнею хвиля є поверхневою і її поле швидко послаблюється в міру віддалення від гребінки, тобто регулюється відстанню  $\delta$ . Такі сповільнюючі системи можна замінити еквівалентною схемою на основі  $LC$ -фільтрів.

Так, сповільнююча система, схожа на гребінку (рис. 10.12, г), може бути зведена до еквівалентної схеми фільтра нижніх частот (рис. 10.13), де повний опір  $Z_1$  являє собою еквівалентний опір окремого резонатора, що утворюється індуктивністю  $L_1$  та ємністю  $C_1$ , а опір зв'язку резонаторів  $Z_2$  – ємнісним опором між зубом гребінки й гладкою пластиною:

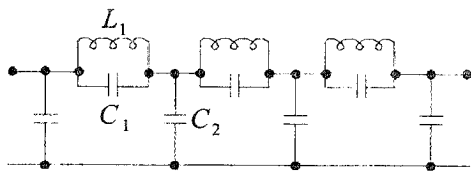
$$Z_1 = j\omega L \left( \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega^2} \right), \quad Z_2 = -j \frac{1}{\omega C_2}, \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}. \quad (10.27)$$

Якщо вздовж сповільнюючої системи може поширюватися незатухаюча хвиля, то струми в сусідніх комірках мають однакову амплітуду й відрізняються лише за фазою. Наприклад, якщо в  $k$ -й комірці протікає струм  $I_k$ , то в сусідніх комірках струми будуть рівними:

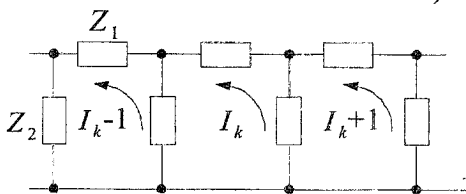
$$\dot{I}_{k-1} = \dot{I}_k e^{-j\varphi}, \quad \dot{I}_{k+1} = \dot{I}_k e^{j\varphi}.$$



а)



б)



в)

Рис. 10.13. Подання сповільнюючої системи типу гребінки (а) у вигляді еквівалентної схеми фільтрів нижніх частот (б, в)

Рівняння Кірхгофа для  $k$ -ї комірки матиме вигляд:

$$\dot{I}_k Z_1 + (\dot{I}_k - \dot{I}_{k-1}) Z_2 + (\dot{I}_k - \dot{I}_{k+1}) Z_2 = 0.$$

Підставляючи значення струмів, отримаємо:

$$\dot{I}_k Z_1 + 2\dot{I}_k Z_2 \left( 1 - \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \right) = 0, \quad (10.28)$$

$$Z_1 = -2Z_2(1 - \cos \varphi).$$

Це рівняння визначає зсув фаз у сусідніх комірках  $\varphi = \arccos\left(1 + \frac{Z_1}{ZZ_2}\right)$  і дає можливість знайти фазову швидкість поширення хвилі вздовж системи:

$$v_\varphi = \frac{\omega h}{\varphi},$$

де  $h$  – просторовий період сповільнюючої системи.

Рівняння (10.28) і визначає межі смуги пропускання сповільнюючої системи. У такій гребінці можливе поширення хвиль з частотами від  $\omega_0 = 0$  до  $\omega_\pi$ , де  $\omega_\pi = \omega_1 / \sqrt{C_2 / (4C_1) - 1}$ . Зсув фази  $\varphi$  на частоті  $\varphi_0$  рівний нулю, а на частоті  $\omega_\pi$  рівний  $\pi$ . Метод еквівалентних схем дозволяє також визначити значення хвильового опору  $Z_x$ , яке і є опором зв'язку:  $Z_x = \sqrt{Z_1 Z_2}$ .

Ще одним типом сповільнюючої системи, який знаходить широке застосування в електроніці НВЧ, є ланка зв'язаних резонаторів, утворених, проте, шляхом перегородження круглого хвилеводу рядом періодично розміщених діафрагм з отворами зв'язку (рис. 10.14 а). Еквівалентну схему такого пристрою подано на рис. 10.14, б. Тут контур  $L_1 C_1$  відповідає резонатору, а контур  $L_2 C_2$  відображає резонансні властивості отвору діафрагми.

Діафрагмовий хвилевід є смуговим фільтром і має, як відомо, дві граничні частоти, які відповідають  $\varphi = 0$  і  $\varphi = \pi$ . Так, якщо  $\omega_1 > \omega_2$ , то

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}, \quad \omega_\pi = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \varphi \frac{L_2}{L_1}}{1 + \varphi \frac{C_1}{C_2}}}.$$

У такому діафрагмовому хвилеводі вдається отримати опір зв'язку значно більшим, ніж в інших сповільнюючих системах, але при цьому збільшується дисперсія.

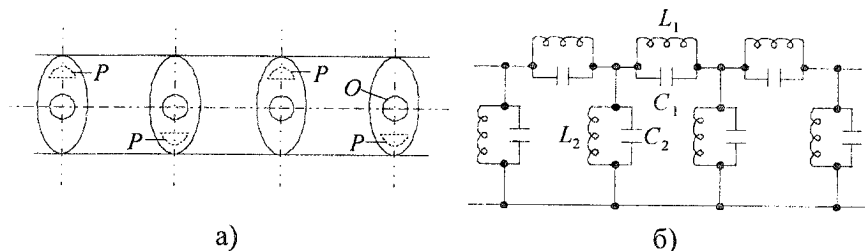


Рис. 10.14. Сповільнююча система типу діафрагмового круглого хвилеводу (а) та її еквівалентна схема (б)

Дисперсія й опір зв'язку діафрагмового хвилеводу може регулюватися зміною зв'язку між резонаторами. Зв'язок може здійснюватися не тільки через осьові отвори  $O$ , які служать і для проходження електронного пучка, але й через допоміжні отвори зв'язку, які прорізані в діафрагмах (рис. 10.14, а), нанесених пунктиром і позначених буквою  $P$ , а також за допомогою спеціальних петель чи штирів зв'язку, розглянутих нами раніше.

#### 10.4 Дисперсійні властивості сповільнюючих систем. Просторові гармоніки

В основі роботи електронних приладів НВЧ з розподіленою взаємодією знаходиться принцип синхронізму електронів з полем біжучої хвилі. Тому частотні властивості цих приладів пов'язані з дисперсією повільних електромагнітних хвиль, тобто із залежністю фазової швидкості цих хвиль від частоти. Дійсно, якщо фазова швидкість сильно змінюється з частотою, синхронізм для електронів, які мають задану швидкість, можливий лише у дуже вузькій смузі частот, і такий прилад не може бути вузькосмуговим. І, навпаки, мала дисперсія є необхідною умовою для здійснення взаємодії в широкій смузі частот.

Прикладом для цього може бути спіраль з великим сповільненням, дисперсія якої, як відмічалось вище, може зберігатися малою й за значних змін частоти.

За видом залежності  $v_{\phi}(\omega)$  сповільнюючі системи можуть поділятися на системи з нормальною й аномальною дисперсіями.

Ознакою нормальної дисперсії є зменшення фазової швидкості з підвищенням частоти. Таку дисперсію мають сповільнюючі системи у вигляді спіралі, гребінки та діафрагмового хвилеводу.

Аномальна дисперсія відповідає зростанню фазової швидкості з ростом частоти. До сповільнюючих систем з аномальною дисперсією належить сповільнююча система з зустрічними гребінками, розглянута нами вище.

Під час вивчення поширення хвиль у сповільнюючих системах основну увагу приділено питанню фазової швидкості, оскільки вона відповідає за синхронізм хвиль з електронним пучком. Проте, крім фазової швидкості, хвиля може характеризуватися й груповою швидкістю, яка визначає швидкість переносу енергії хвилею. Зрозуміло, що групову швидкість  $v_{gp} = d\omega/d\gamma$  можна легко знайти, якщо задана залежність  $\omega(\gamma)$ . Якщо задана залежність  $v_\phi(\omega)$ , то групова швидкість може бути визначена як

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{d\gamma} = \frac{d\omega}{dv_\phi} \cdot \frac{dv_\phi}{d\gamma},$$

де  $\frac{dv_\phi}{d\gamma} = \frac{d}{d\gamma} \left( \frac{\omega}{\gamma} \right) = \frac{1}{\gamma} \frac{d\omega}{d\gamma} - \frac{\omega}{\gamma^2} = \frac{v_\phi}{\gamma} v_{gp} - \frac{v_\phi^2}{\omega}$ . Тоді після певних перетворень отримаємо:

$$v_{gp} = v_\phi \frac{\frac{d\omega}{dv_\phi} \cdot \frac{v_\phi}{\omega}}{\frac{d\omega}{dv_\phi} \cdot \frac{v_\phi}{\omega} - 1} = v_\phi \frac{\frac{d\omega}{dv_\phi}}{\frac{d\omega}{dv_\phi} - \frac{\omega}{v_\phi}}. \quad (10.29)$$

Вираз (10.29) дозволяє дійти важливого висновку щодо групової та фазових швидкостей для різних видів дисперсій. Так, наприклад, для системи, яка характеризується нормальною дисперсією, залежність  $\omega(v_\phi)$  завжди буде мати вигляд спадної кривої (рис. 10.15, а). Додатному нахилу  $\omega/v_\phi$  у цьому випадку буде відповідати від'ємний нахил дотичної  $d\omega/dv_\phi$ . Тут чисельник і знаменник формули (10.29) мають один знак (у даному випадку від'ємний), а знак групової швидкості відповідає знаку фазової. Це вказує

на те, що напрям поширення енергії повинен збігатись із напрямом переміщення фази.

За аномальної дисперсії крива  $\omega(v_\phi)$  є висхідною (рис. 10.15, б, в), так що  $\omega/v_\phi$  і дотична мають нахил одного знака. При цьому можуть спостерігатися два випадки:

1. Нахил дотичної є більшим за нахил кривої перетину (рис. 10.15, б) –  $d\omega/dv_\phi > \omega/v_\phi$ . У цьому випадку чисельник і знаменник у виразі (10.29) однакові за знаком, проте чисельник є більшим від знаменника. Це означає, що напрями групової й фазової швидкості збігаються, але групова швидкість більша за фазову.

2. Нахил дотичної є меншим за нахил кривої перетину (рис. 10.15, в) –  $d\omega/dv_\phi < \omega/v_\phi$ . У такому випадку знаки чисельника й знаменника різні. Це означає, що напрям групової швидкості повинен бути протилежним до напрямку фазової швидкості. Така дисперсія називається від'ємною (на відміну від додатної, коли напрями  $v_\phi$  і  $v_{gr}$  збігаються). Абсолютне значення  $|v_{gr}|$  може бути як більшим, так і меншим  $|v_\phi|$ , тобто аномальна дисперсія може бути як додатною, так і від'ємною.

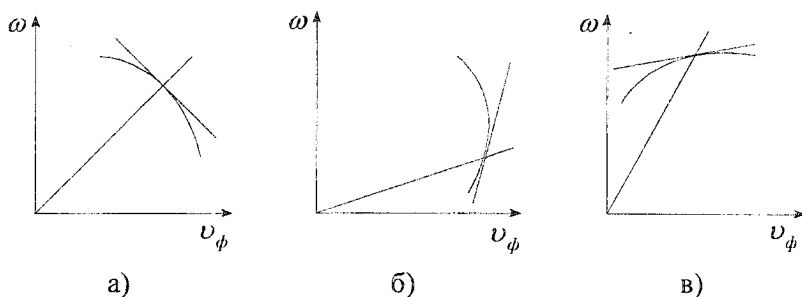


Рис. 10.15. Залежність частоти від фазової швидкості для різних видів дисперсії: а – нормальної, б – аномальної, в – аномальної від'ємної

Прикладом сповільнюючої системи з від'ємною дисперсією може бути діафрагмовий хвилевід із щілинами  $P$ , повернутими на кут  $\pi$ , сповільнюючі системи штирових гребінок. У них групова й фазова швидкості зустрічні.

При поширенні електромагнітної хвилі у сповільнюючій системі просторовий період  $h$ , який співрозмірний з довжиною сповільненої хвилі  $\lambda$ , закони розподілу потенціалу  $U(z)$  і напруженості електричного поля  $E(z)$  вже не можна вважати чисто синусоїдальними. Тому слід очікувати, що просторовий період сповільнюючої системи повинен впливати на конфігурацію поля хвилі. У випадку спіралі таким просторовим періодом є її крок, а у випадку гребінки – відстань між сусідніми штирями.

Так, розглядаючи розподіл потенціалу вздовж осі каналу, просвердленого в зубах гребінки, по якому пропускається електронний пучок (рис. 10.12), можна з достатньою точністю сказати, що на електрон, який знаходиться в каналі всередині зубця, електричне поле не діє, і вважати потенціал простору всередині зубця постійним. Увесь градієнт потенціалу вже є зосередженим у щілинах між зубцями. Тому залежність  $U(z)$  має вигляд ступеневої кривої, яка лише наближено відтворює синусоїду. Чим менший період структури сповільнюючої системи, тим ближче ця крива відтворює синусоїду. В однорідних сповільнюючих системах, для яких  $h \ll \lambda$ , цією ступеневою функцією можна знехтувати. Але в неоднорідних сповільнюючих системах, де  $h \approx \lambda$ , необхідно враховувати несинусоїдальний розподіл поля, оскільки така система може приводити до ряду нових ефектів за взаємодії хвилі з електронним потоком.

Кількісно степінь дії електричного поля сповільнюючої системи на електрони може бути визначений через деяку функцію дії  $A(x, y, z)$ . В області, яка знаходиться всередині зубця, де електрони практично повністю екрановані від дії електричного поля хвилі, ця функція рівна нулю. Коли ж електрон виходить із зубця і попадає в щілину, де він сповна зазнає дії поля, величину  $A$  можна вважати рівною одиниці. За рахунок крайових ефектів між цими двома крайніми точками функція дії згладжується й залежність  $A(z)$  набуває вигляду, поданого на рис. 10.16.

Для того щоб підрахувати реальне поле, яке діє на електрон, необхідно помножити поле біжучої електромагнітної хвилі, яка поширюється вздовж осі  $z$  сповільненої системи, на функцію дії  $A(x, y, z)$ :

$$E(x, y, z, t) = E_m e^{j(\omega t - \gamma z)} A(x, y, z).$$



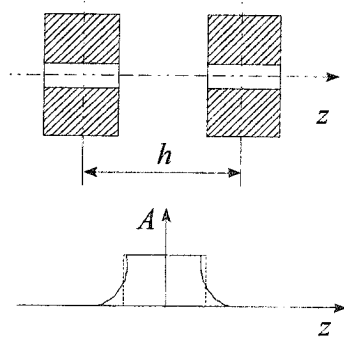


Рис. 10.16. Функція дії (спотворення)  $A(z)$  для сповільнюючої системи, поданої на рис. 10.12

Сама залежність  $A(z)$  є періодичною функцією, період якої рівний кроку зубця гребінки:

$$A(x, y, z + nh) = A(x, y, z),$$

де  $n$  може мати значення додатних і від'ємних цілих чисел.

Тому функцію  $A(x, y, z)$  можна розкласти в ряд Фур'є:

$$A(x, y, z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(x, y) e^{-j \frac{2\pi}{h} k z}.$$

Тоді вираз для електричного поля набуває вигляду:

$$E(x, y, z, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E_{m_k}(x, y) \exp \left\{ j \left[ \omega t - \left( \gamma + \frac{2\pi}{h} k \right) z \right] \right\}. \quad (10.30)$$

У даному випадку електричне поле, яке діє на електрон, можна подати як суму просторових гармонік, що мають однакову частоту  $\omega$  і відрізняються між собою коефіцієнтами поширення  $\gamma_k = \gamma_0 + \frac{2\pi}{h} k$ , де  $\gamma_0 = \gamma(\omega)$  – коефіцієнт поширення вихідної основної гармоніки;  $E_{m_k} = E_m a_k$  – амплітуда гармонік. Кожній такій гармоніці буде відповідати своя фазова швидкість:

$$v_{\phi k} = \frac{\omega}{\gamma_k} = \frac{\omega}{\gamma_0(\omega) + \frac{2\pi}{h} k}. \quad (10.31)$$

Але групова швидкість усіх гармонік є однаковою й рівною груповій швидкості вихідної хвилі:

$$v_{\varphi k} = \frac{d\omega}{d\gamma_k} = \frac{d\omega}{d\gamma_0} = v_{\varphi 0}. \quad (10.32)$$

Для додатних значень  $k$  фазова швидкість монотонно зменшується зі збільшенням номера гармоніки. Це дозволяє дійти висновку, що в даній сповільнюючій системі синхронізм може бути досягнутий не тільки за швидкості електронів, яка рівна фазовій швидкості основної хвилі  $v_{\varphi 0}$ , а й за інших швидкостей  $v_{\varphi k}$ , які є меншими за  $v_{\varphi 0}$  і відповідають вищим просторовим гармонікам.

Такий висновок відкриває можливість практичного використання сповільнюючих систем, які на основній хвилі мають досить мале сповільнення, але можуть бути використані в режимі синхронізму з вищими просторовими гармоніками.

### Контрольні запитання

1. Що називається вакуумом, які його властивості й параметри? На яких принципах базуються методи створення вакууму? Назвіть основні способи вимірювання вакууму.
2. Дайте визначення вакуумної електроніки. Наведіть схематичну модель приладу вакуумної електроніки.
3. Як рухається електрон в однорідному й схрещеному електричному та магнітному полях? Які пристрої використовують для керування електронним пучком?
4. Що являють собою резонансні й нерезонансні методи швидкісної модуляції електронів?
5. Як утворюється наведений струм і від яких параметрів він залежить?
6. Які вимоги повинна задовольняти електромагнітна хвиля для ефективної взаємодії з електронним потоком?
7. Що називають сповільнюючими системами, яке їх призначення?
8. Якою є конфігурація електричного поля в спіралі? Який принцип дії спіралі як сповільнюючої системи електромагнітної хвилі? Що таке опір зв'язку й чому він рівний на осі спіралі?
9. Назвіть різновиди сповільнюючих систем. Якими є їх еквівалентні схеми?
10. Що знаходиться в основі роботи електронних приладів НВЧ з розподіленою взаємодією? З чим пов'язані частотні властивості таких приладів?

11. Назвіть класифікацію сповільнюючих систем за видом залежності  $v_{\phi}(\omega)$ . Які сповільнюючі системи характеризуються нормальною й аномальною дисперсіями?

### Рекомендована література

1. Левитский С. М. Вакуумная и твердотельная электроника СВЧ / С. М. Левитский, С. В. Кошечая. – К. : Вища школа, 1986. – 272 с.
2. Гвоздовер С. Д. Теория электронных приборов сверхвысоких частот СВЧ / С. Д. Гвоздовер. – М. : Гостехиздат, 1976. – 527 с.
3. Стельмахов В. С. Основы электроники сверхвысокочастотных приборов со скрещенными полями / В. С. Стельмахов. – М. : Советское радио, 1963. – 366 с.
4. Цейтлин М. Б. Лампа с бегущей волной / М. Б. Цейтлин, А. М. Кац. – М. : Советское радио, 1964. – 311 с.
5. Дулин В. Н. Электронные и квантовые приборы СВЧ / В. Н. Дулин. – М. : Энергия, 1972. – 224 с.
6. Лебедев И. В. Техника и приборы СВЧ / И. В. Лебедев. – М. : Высшая школа, 1972. – Т. 1. – 389 с.; Т. 2. – 375 с.
7. Силин Р. А. Замедляющие системы / Р. А. Силин, В. П. Сазонов. – М. : Советское радио, 1966. – 632 с.
8. Федоров Н. Д. Электронные приборы СВЧ и квантовые генераторы / Н. Д. Федоров. – М. : Атомиздат, 1979. – 288 с.

## РОЗДІЛ 11. ПРИЛАДИ, ЯКІ ВИКОРИСТОВУЮТЬ ВЗАЄМОДІЮ ЕЛЕКТРОННИХ ПОТОКІВ ІЗ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМИ ПОЛЯМИ ТА ХВИЛЯМИ

Проведений у розділі 10 аналіз показує, що для досягнення максимальної ефективної взаємодії електронного потоку з електричним полем останнє необхідно концентрувати в якомога меншому об'ємі й пропускати промодульований за густиною електронний потік уздовж напрямку силових ліній даного поля. Довжина простору взаємодії повинна бути при цьому достатньо короткою. Для компенсації короткотривалості взаємодії заряду з полем напруженість його необхідно (по змозі) збільшувати, що досягається звичайним застосуванням резонаторів із зосередженими полями.

Виконання таких рекомендацій привело до створення цілого класу приладів із зосередженими полями – клістронів, тріодів, діодів діапазону НВЧ, які знайшли широке застосування в багатьох радіоелектронних пристроях для підсилення й генерування НВЧ сигналів.

**Клістрон** – це перший НВЧ-прилад, у якому використовується принцип фазового фокусування. У клістріні всі характерні для НВЧ-приладів процеси – модуляція електронного потоку за швидкістю, групування та відбір енергії високочастотним полем від згрупованого електронного пучка – здійснюються окремо й можуть бути розглянуті в найбільш чистому й неускладненому вигляді. Цим визначається те, що вивчення роботи клістрона зазвичай проводиться скоріше за інші прилади НВЧ. Усі клістриони поділяються на пролітні й відбивні.

### 11.1 Пролітний клістрон. Його характеристики й параметри

Будова пролітного клістрона подана на рис. 11.1, а. Електронний потік формується електронною гарматою 1, у якій електрони прискорюються потенціалом  $U_0$ , досягаючи швидкості  $v_0 = \sqrt{2eU_0/m}$ . Потім електронний потік проходить через сітку першого резонатора 2, який називають резонатором-групувачем. Сигнал, який уводиться в резонатор 2 за допомогою петлі-зв'язку, збуджує в ньому високочастотну напругу, яка модулює електронний пучок, що проходить через нього, певною швидкістю. На ви-

ході з резонатора-групувача 2 електронний потік попадає в еквіпотенціальний простір дрейфу 3, у якому він рухається за інерцією й групується. Там, де групування є оптимальним, ставиться другий резонатор 4, який називають уловлювачем. Утворені в результаті групування електронні згустки, пролітаючи через резонатор 4, збуджують його й віддають йому свою енергію, яка виводиться також петлею-зв'язком. На виході клістрона з резонатора 4 електронний потік виводиться на колектор 5.

На модуляцію електронного пучка за швидкістю в першому резонаторі потужність майже не затрачається, оскільки число прискорених електронів рівне числу сповільнених. Енергія, у свою чергу, виділяється в другому резонаторі (причому значна), що дозволяє використовувати пролітний клістрон як підсилювач.

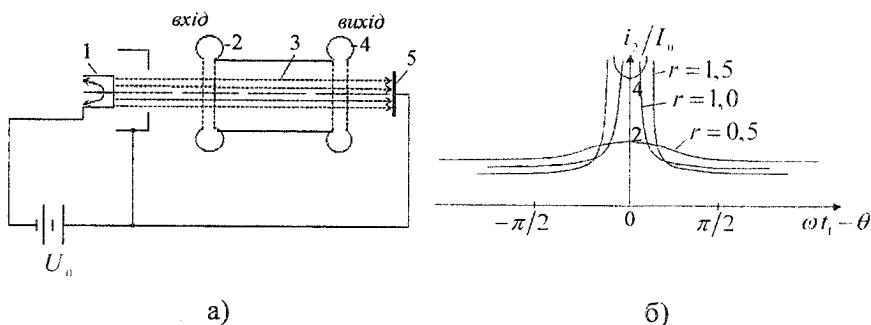


Рис. 11.1. Будова пролітного клістрона (а) і часова залежність конвекційного струму  $i_2(t_1)$  на різних відстанях від резонатора-групувача (б)

Кількісний аналіз процесів, які відбуваються в пролітному клістріні, необхідно починати з розгляду процесу групування. Додаткова швидкість, яка досягається електронами при проходженні першого резонатора, може бути знайдена на основі відомого виразу:

$$v = v_0 + \frac{e}{m\delta_1} \int_t^{t+\tau_1} U(t) dt, \quad (11.1)$$

де  $t$  – момент входження електрона в резонатор;  $U(t) = U_m \sin \omega t$  – напруга між сітками першого резонатора;  $\tau_1 = \delta_1/v_0$  – час прольоту

електрона між сітками першого резонатора;  $\delta_1$  – відстань між сітками резонатора-групувача.

У результаті інтегрування отримаємо:

$$v = v_0 \left[ 1 + M \beta_1 \sin \left( \omega t + \frac{\theta_1}{2} \right) \right], \quad (11.2)$$

де  $M = U_m / (2U_0)$  – коефіцієнт модуляції за швидкістю,  $\theta_1 = \omega \tau_1$  – кут прольоту електрона між сітками,  $\beta_1 = \sin(\theta_1/2) / (\theta_1/2)$ .

При  $\theta_1 \rightarrow 0$ ,  $\beta_1 \rightarrow 1$ . Тому в нашому аналізі приймемо  $\theta_1 \approx 0$ ,  $\beta_1 \rightarrow 1$ . Позначимо координату другої сітки резонатора-групувача через  $x_1$ , а координату довільного перерізу в просторі дрейфу – через  $x_2$ . Момент прольоту електрона через переріз, що відповідає цим координатам, позначимо через  $t_1$  і  $t_2$ :

$$t_2 = t_1 + \frac{x_2 - x_1}{v} = t_1 + \frac{l}{v} = t_1 + \frac{l}{v_0 (1 + M \sin \omega t_1)}.$$

Якщо  $M$  – мале, то можемо записати, що

$$t_2 \cong t_1 + \frac{l}{v_0} (1 - M \sin \omega t_1) = t_1 + \tau_0 - \tau_0 M \sin \omega t_1, \quad (11.3)$$

де  $\tau_0 = l/v_0$  – час прольоту без збурення.

Для розрахунку потоку електронів через переріз  $x_2$  попередньо виведемо вираз, що впливає із закону збереження заряду. Нехай деякий елемент заряду  $dq$  проходить послідовно два перерізи  $x_1$  і  $x_2$  у моменти часу  $t_1$  і  $t_2$ . Площину  $x_1$  він перетинає за час  $dt_1$  у вигляді струму  $i_1$ , а площину  $x_2$  за час  $dt_2$  у вигляді струму  $i_2$ . Оскільки в обох випадках справа іде про один і той самий заряд  $dq$ , то очевидно, що  $dq = i_1 dt_1 = i_2 dt_2$ . Або це співвідношення можна записати як  $i_2 = i_1 \frac{dt_1}{dt_2}$ . Дане співвідношення пов'язує конвекційний

струм в обох перерізах. Фізично це означає: якщо потік електронів розтягується, підходячи до  $x_2$ , то і струм  $i_2$  буде меншим уже в перерізі  $x_2$  у порівнянні зі струмом  $i_1$  у площині  $x_1$  і, навпаки, якщо

потік електронів стискується, то струм  $i_2$  буде збільшуватися. У безпосередній близькості від першого резонатора можна вважати, що модуляція за густиною ще не розвилась, і в перерізі  $x_1$  конвекційний струм  $i_1 = i_2$ . Тоді з виразу  $i_2 = i_1 \frac{dt_1}{dt_2}$  і (11.3) отримаємо:

$$\frac{dt_2}{dt_1} = 1 - \tau_0 M \omega \cos \omega t_1, \quad (11.4)$$

де  $\omega \tau_0 M = \theta_0 M = r$  визначає параметр групування,  $\theta_0 = \omega \tau_0$  – кут прольоту до збурення електронного потоку. Тоді можемо записати:

$$t_2 = \frac{I_0}{1 - r \cos \omega t_1}. \quad (11.5)$$

Із цього виразу випливає, що струм  $i_2$  залежить від часу періодично, але не гармонічно (синусоїдально). Графіки конвекційного струму  $i_2(t_1)$  у згрупованому пучку для різних відстаней від резонатора-групувача подані на рис. 11.1, б. Як видно із графіків, навіть за малого  $M$  можна досягти високого групування (великих значень  $r$ ) за рахунок збільшення шляху дрейфу електронів.

Розглянемо тепер, як конвекційний струм згрупованого пучка збуджує другий резонатор клістрона. Конвекційний струм  $i_2(t_2)$  у перерізі  $x_2$  може бути поданий як сума гармонік частоти  $\omega$ , якою здійснювалася модуляція пучка в першому резонаторі:

$$i_2(t_2) = I_0 + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_m e^{j m \omega t_2}.$$

Амплітуда  $m$ -ї гармоніки при цьому буде визначатися через інтеграл Фур'є:

$$I_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i_2(\omega t_2) e^{-j m \omega t_2} d(\omega t_2).$$

Тоді, підставляючи сюди значення  $i_2$  з виразу (11.4) і зробивши заміну  $t_2$  на  $t_1$ , отримаємо:

$$I_m = \frac{I_0}{2\pi} e^{-j m \theta_0} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j m \omega t_1} e^{j m r \sin \omega t_1} d(\omega t_1),$$

що представляє інтегральну функцію Бесселя:

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jm x} e^{jz \sin x} dx.$$

Тому вираз для амплітуди  $m$ -ї гармоніки набуде вигляду  $I_m = I_0 e^{-jm\theta_0} J_m(mr)$ . Переходячи до тригонометричного запису, можна представити струм  $i_2$  через ряд Фур'є як

$$i_2 = I_0 \left[ 1 + 2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(mr) \cos m(\omega t_2 - \theta_0) \right]. \quad (11.6)$$

Для першої гармоніки отримаємо  $i_{21} = 2 I_0 J_1(r) \cos(\omega t_2 - \theta_0)$ , де  $2 I_0 J_1(r) = I_{m_1}$  – амплітуда першої гармоніки. Із табульованих графіків функції Бесселя визначаємо значення  $I_{m_1}$ , що проходить через максимум при  $r = 1,84$ , для якого  $J_1(r) \approx 0,58$ . Таким чином, найбільше значення першої гармоніки в конвекційному струмі буде мати місце там, де  $r = 1,84$ , і складатиме  $I_{m_1} = 2 I_0 J_1(r) = 1,16 I_0$ . Тоді згрупований електронний потік, який пролітає через другий резонатор, буде вже збуджувати в резонаторі наведений струм

$$i_{нав} = \frac{1}{\delta_2} \int_0^{\delta_2} i_{конв}(x) dx,$$

де  $\delta_2$  – відстань між сітками другого резонатора. У нашому випадку конвекційний струм  $m$ -ї гармоніки електронного потоку  $i_{2m} = 2 J_m(mr) \cos m(\omega t_2 - \theta_0)$  створить у другому резонаторі наведений струм

$$i_{нав m} = 2 J_m(mr) \beta_2 \cos m \left( \omega t_2 - \theta_0 - \frac{\theta_2}{2} \right), \quad (11.7)$$

де  $\theta_2 = \omega \tau_2$ ,  $\tau_2 = \delta_2 / v_0$  – кут і час прольоту електронів у другому резонаторі відповідно,  $\beta_2 = \sin \left( \frac{m \theta_2}{2} \right) / \left( \frac{m \theta_2}{2} \right)$  – коефіцієнт зв'язку електронного потоку з полем другого резонатора. Вважатимемо, що  $m = 1$  і  $\beta_2 \approx 1$ .

Якщо резонатор-вловлювач налаштований на частоту якої-небудь гармоніки з гармонік згрупованого електронного пучка, то між сітками резонатора буде виникати напруга відповідної частоти. Так, у випадку налаштування першого резонатора на гармоніку



$U_{m_1} = I_{m_1} Z_{екв1}$ , де  $Z_{екв1}$  – еквівалентний опір резонатора для першої гармоніки.

Напруга, яка виникла в другому резонаторі, буде такою, що вона буде гальмувати згусток електронів, який входить у резонатор. У резонаторі при цьому буде виділятися потужність:

$$P = \frac{U_{m_1} I_{m_1}}{2} = \frac{I_{m_1}^2 Z_{екв1}}{2} = \frac{U_{m_1}^2}{2Z_{екв1}}.$$

ККД клістрона буде визначатись як відношення потужності, яка виділяється на другому резонаторі, до потужності, затраченої на утворення електронного пучка:

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{U_{m_1} I_{m_1}}{2U_0 I_0}.$$

Величина  $U_{m_1}$  не може бути більшою за  $U_0$ , оскільки, в протилежному випадку, у момент, коли напруга на резонаторі-вловлювачі буде досягати максимального гальмівного значення, електрони будуть викидатися нею назад, що порушить роботу клістрона. Тому завжди  $U_{m_1} < U_0$ . Таким чином, максимальний ККД пролітного клістрона буде рівний:

$$\eta = \frac{1 \cdot 2 \cdot 0,58}{2} = 0,58.$$

Застосування пролітних клістронів для підсилення модульованих коливань сигналів є недоцільним, оскільки амплітуда вихідної напруги  $U_{m_1}$  пов'язана з амплітудою вхідної напруги  $U_m$  через функцію Бесселя. Відсутність пропорційності між  $U_{m_1}$  і  $U_m$  приводить до суттєвих нелінійних спотворень огинаючої. Крім того, через необхідність застосування високогабаритних резонаторів у пролітного клістрона є вузькою смуга підсилювальних частот.

Тому пролітні клістриони в більшості випадків використовують як підсилювачі потужності за незмінної амплітуди й частоти сигналу на вході, що і усуває цю нелінійність, а високий ККД дозволяє створювати прилади дуже високої потужності. Їх також використовують у задаючих генераторах.

Пролітні підсилювальні клістриони є одними з найпотужніших і високоефективних приладів НВЧ і сьогодні. Імпульсні підсилювальні клістриони застосовують у РЛС різних призначень і для живлення

лінійних прискорювачів елементарних частинок. А підсилювальні клістри неперервного типу застосовують у сучасних передавачах телестанцій і в супутниковому зв'язку.

Пролітний клістрон-підсилювач можна легко перетворити в генератор, якщо здійснити обернений зв'язок між входом і виходом. Таким шляхом вдається створювати генераторні клістри, які працюють до міліметрового діапазону довжин хвиль.

## 11.2 Відбивний клістрон. Його характеристики й параметри

Відбивний клістрон складається з електронної гармати 1, резонатора 2 та електрода-відбивача 3, який має від'ємний потенціал відносно катода (рис. 11.2, а).

Електрони, які вилетіли з катода, прискорюються гарматою й проходять резонатор, де модулюються за швидкістю. Вийшовши з резонатора, вони попадають у постійне гальмуюче електричне поле, утворене між резонатором і відбивачем. У гальмівному просторі електрони втрачають швидкість, зупиняються й потім знову повертаються в резонатор уже згрупованими. Таким чином, резонатор виконує спочатку роль групувача, а потім уловлювача електронів. Оскільки електрони повертаються назад, то здійснюється обернений зв'язок, що приводить до генерації. Траєкторією кожного електрона в області гальмування в  $x, t$ -координатах є парабола, висота якої залежить від початкової швидкості електрона й напруженості гальмівного електричного поля (рис. 11.2, б).

Електрони, які пройшли резонатор протягом півперіоду НВЧ прискорюючого поля, збільшують швидкість, глибше проникають у простір гальмування й знаходяться там довше за інші електрони. Електрони, які пройшли через резонатор е півперіод гальмівного поля, втрачають частину енергії й виходять з резонатора зі швидкістю, меншою, ніж при вході у резонатор. Ці електрони не проникають глибоко в гальмівну область і раніше за інших повертаються назад у резонатор, як показано на рис. 11.2, б.

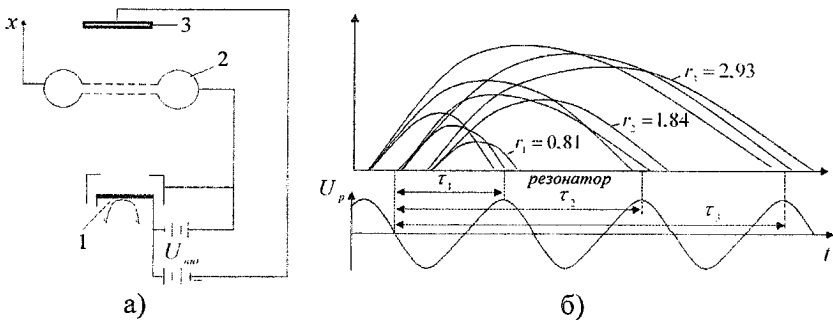


Рис. 11.2. Схема відбивного клістрона (а) і траєкторії електронів у ньому (б)

У результаті цього бачимо, що пізні повільні електрони повертаються в резонатор у той момент, що й ранні швидкі. Згустки утворюються навколо тих електронів, які пролітають резонатор у момент нульового значення напруги, що знаходяться на низхідній вітці синусоїди. Якщо на відбивачі від'ємна напруга дуже велика, то повне групування не встигає повністю завершитись і створюється недогрупований згусток; якщо ж від'ємна напруга на відбивачі є невеликою, тоді може відбутись обгін електронів і згустки будуть перегруповуватися. Тому у відбивних клістронах важливим є вибір оптимальної напруги на відбивачі, яка б забезпечила повне групування електронів у згустки.

Повернемося тепер до аналітичного опису групування електронів. Розглянемо кількісно рух електронів у гальмівній області. Нехай у момент часу  $t_1$  електрони виходять з резонатора, а  $t_2$  – момент часу, коли електрони повертаються знову в переріз  $x = 0$ . Очевидно, що  $t_2 = t_1 + \tau$ , де  $\tau$  – час прольоту електронів в області гальмівного поля. Його можна легко розрахувати на основі виразу для траєкторії електрона:  $x = vt - at^2/2$ , де  $v$  – швидкість, з якою електрон виходить з резонатора;  $a = \frac{e U_0 - U_{від}}{m d} = \frac{e U_0 + |U_{від}|}{m d}$  – прискорення електрона в гальмівному полі;  $|U_{від}|$  – абсолютне значення напруги на відбивачі;  $U_0$  – напруга на резонаторі. При  $x = 0$   $\tau = 2v/a$ .

Швидкість електронів, які пройшли резонатор, буде, як і в пролітному клістріні, промодульована за величиною НВЧ-складової:

$$v = v_0 \left[ 1 + M \beta \sin \left( \omega t_1 + \frac{\theta_1}{2} \right) \right] \cong v_0 (1 + M \sin \omega t_1).$$

Вираз для  $t_2$  можна записати у вигляді:

$$t_2 = t_1 + \frac{2v}{a} = t_1 + \frac{2v_0}{a} + \frac{2v_0}{a} M \sin \omega t_1 = t_1 + \tau_0 + \tau_0 M \sin \omega t_1.$$

Тут  $\tau_0 = 2v_0/a$  – час прольоту в незбуреному режимі.

Розрахуємо тепер конвекційний струм електронів, які повертаються в резонатор. Для цього використаємо вираз для пролітного клістрона:

$$i_2 = \frac{I_0}{dt_2/dt_1} = \frac{I_0}{1 + r \cos \omega t_1} = \frac{I_0}{1 - r \cos(\omega t_1 - \pi)}.$$

Це вказує на те, що форма кривої  $i_2(t)$ , оптимальний режим і гармоніки такі ж, як у пролітному клістріні, але зсунуті в часі на півперіод  $\pi$ :

$$\begin{aligned} I_{m_1} &= 2I_0 J_1(r), \\ i_1 &= -2 I_0 J_1(r) \cos(\omega t_1 - \theta_0 - \pi). \end{aligned} \quad (11.8)$$

Зміст знака “–”, що стоїть перед виразом для струму  $i_1$ , полягає в тому, що згруповані електрони збуджують у резонаторі конвекційний струм, рухаючись в оберненому напрямку.

Згруповані електрони, повертаючись у резонатор, створюють у ньому наведений струм, який у випадку малої відстані між сітками ( $\delta \ll v_0 T$ ) можна вважати рівним конвекційному, і перша гармоніка

наведеного струму визначається виразом  $i_{нас} = 2I_0 J_1(r) e^{j(\omega t_1 - \theta_0)}$ .

Тут гармонічний процес записаний у показниковій формі. Відповідно, напруга між сітками резонатора, записана у вигляді

$U_m \sin \omega t_1$ , може бути подана як  $U_m e^{j(\omega t_1 - \pi/2)}$ . Відношення наведеного

струму до напруги дає провідність, яка вноситься в резонатор електронним пучком:

$$\dot{y}_e = \frac{i_{нас}(t)}{U(t)} = \frac{2I_0 J_1(r)}{U_m} e^{j(\frac{\pi}{2} - \theta_0)} = g_0 \theta_0 \frac{J_1(r)}{r} e^{j(\frac{\pi}{2} - \theta_0)}, \quad (11.9)$$

де  $g_0 = I_0/U_0$ .

За відсутності електронного пучка еквівалентна схема резонатора являє собою паралельне з'єднання індуктивності  $L$ , ємності  $C$  й активної провідності  $g_p$ . За наявності електронного пучка паралельно до цих провідностей ще підключена провідність  $y_e$ , яка вноситься пучком і яка складається з активної та реактивної частин:

$$g_e = g_0 \theta_0 \frac{J_1(r)}{r} \sin \theta_0, \quad b_e = g_0 \theta_0 \frac{J_1(r)}{r} \cos \theta_0. \quad (11.10)$$

Для збудження коливань у відбивному клістріні повинні виконуватися дві умови:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ баланс амплітуд} \quad g_p + g_e &= 0, \\ \bullet \text{ баланс фаз} \quad b_p + b_e &= 0, \end{aligned} \quad (11.11)$$

де  $g_p$ ,  $b_p$  – активна й реактивна провідності резонатора відповідно.

Як видно з умов (11.11), амплітудна умова краще за все виконується при  $\theta_0 = 2\pi(n-1/4)$ , коли  $\sin \theta_0 = -1$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$  – число періодів з моменту першого прольоту електронів через резонатор). Кут прольоту визначається як:

$$\theta_0 = \omega \tau_0 = \omega \frac{2v_0}{a} = \frac{2 \left( 2 \frac{e}{m} U_0 \right)^{1/2} m \omega d}{e(U_0 + |U_{\text{від}}|)}.$$

Зіставляючи ці два вирази для кута прольоту  $\theta_0$ , отримаємо в результаті рівняння, яке визначає амплітудну умову (баланс амплітуд):

$$2\pi \left( n - \frac{1}{4} \right) = \frac{2 \left( 2 \frac{e}{m} U_0 \right)^{1/2} m \omega d}{e(U_0 + |U_{\text{від}}|)}. \quad (11.12)$$

Проаналізуємо цей вираз. Нехай  $U_0 = \text{const}$ , тоді умова (11.12) виконується тільки при дискретних значеннях  $|U_{\text{від}1}|, |U_{\text{від}2}|, |U_{\text{від}3}|, \dots$ , які відповідають значенням  $n = 1, 2, 3 \dots$ . Це означає, що клістрон може генерувати не за будь-яких значень напруги на відбивачі, а тільки за строго визначених. Тому залежність потужності генерації від напруги на відбивачі буде являти собою ряд послідовних зон. Ці зони мають ширину порядку десятків вольт, а їх висота залежить від ступеня групування електронного пучка. Найбільша потужність

генерації відповідає перерахованим вище дискретним значенням  $|U_{\text{від } n}|$ .

Для перших зон ( $n = 1, 2, 3$ ), що відповідають досить високим від'ємним значенням напруги на відбивачі, електронний пучок є дещо недогрупованим. Тому зони із цими номерами є дещо меншими від наступних. Часто зони із цими номерами взагалі не збуджуються.

У зонах з малими значеннями від'ємної напруги на відбивачі електронний пучок є перегрупованим. Степінь перегруповання збільшується з номером зони. Тому висота цих зон зменшується зі збільшенням їх порядкового номера. Питання про реальну генерацію в тій чи іншій зоні вирішується на основі аналізу амплітудної умови:

$$g_p = -g_0 \theta_0 \frac{J_1(r)}{r} \sin \theta_0. \quad (11.13)$$

На порозі виникнення генерації амплітуда коливань є малою й параметр групування  $r$  є також малим. Проте при цьому  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{J_1(r)}{r} = \frac{1}{2}$ , бо  $J_1(r) = r/2$ . Якщо тепер покласти  $\theta_0 = 2\pi(n-1/4)$ , що відповідає центру зони генерації, то можна визначити граничний режим генерації в цій зоні:  $g_p = g_0 \theta_0 / 2$ . Звідси можна визначити так званий пусковий струм, тобто мінімальний струм пучка, з якого починається генерація і який рівний

$$I_{0 \text{ пуск}} = \frac{g_p U_0}{\pi(n-1/4)}. \quad (11.14)$$

Як видно з цього виразу, зони з малими номерами мають високі пускові струми. Якщо струм пучка є менший від пускового, то коливання у відповідній зоні збуджуватися не будуть.

Потужність коливань, які збуджуються в резонаторі, може бути розрахована шляхом множення виразу (11.13) на величину  $U_m^2/2$ :

$$P = g_p \frac{U_m^2}{2} = -g_0 \theta_0 \frac{J_1(r)}{r} \frac{U_m^2}{2} \sin \theta_0.$$

Позначаючи  $r = \theta_0 M$ ,  $M = U_m / (2U_0)$ ,  $P_0 = I_0 U_0 = g_0 U_0^2$ , вираз для потужності коливань можна привести до вигляду:

$$P = -\frac{2P_0}{\theta_0} r J_1(r) \sin \theta_0. \quad (11.15)$$

У центрі зон, у яких генеруються коливання,  $\theta_0 = 2\pi(n-1/4)$ . Тоді потужність коливань

$$P = \frac{P_0}{\pi(n-1/4)} r J_1(r).$$

Дослідження на екстремум показує, що  $r J_1(r)$  досягає свого максимального значення близько 1,25 при  $r = 2,4$ . Тоді максимальний ККД відбивного клістрона буде становити  $\eta_{\max} = \frac{0,4}{n-1/4}$  і

визначається номером зони. Практично найбільший ККД відбивного клістрона не перевищує 6–7%. Цим відбивний клістрон суттєво відрізняється від пролітного, у якого ККД є більшим за 50%. Така велика різниця пояснюється тим, що в пролітного клістрона функції резонаторів розділені. Задача першого резонатора полягає в групуванні електронів, і напруга на ньому підбирається таким чином, щоб конвекційний струм в області другого резонатора (уловлювача) мав максимальну першу гармоніку. У резонаторі-уловлювачі напруга повинна бути більшою для збільшення ефективності взаємодії поля з електронним потоком і щоб від нього відбиралася максимальна потужність.

У відбивного клістрона ці дві функції виконує один резонатор. Тому існуючої в резонаторі напруги недостатньо для ефективного гальмування електронів, але збільшити цю напругу вже не можна, оскільки пучок при цьому перегрупований і вміст першої гармоніки в ній різко зменшується.

Кількісно зміну частоти збуджуючих коливань можна визначити з умови балансу фаз:

$$b_p + b_e = 0,$$

де  $b_e = g_0 \theta_0 \frac{J_1(r)}{r} \cos \theta_0$ ,  $b_p = \omega C - \frac{1}{\omega L}$  ( $L$  і  $C$  – індуктивність та

ємність резонатора клістрона відповідно). Ураховуючи, що для активної провідності  $b_e = g_p \operatorname{ctg} \theta_0$ , де

$\operatorname{ctg} \theta_0 = \operatorname{ctg}(\theta_{0_n} + \Delta\theta) = -\operatorname{tg} \Delta\theta$  і на основі амплітудної умови, коли

$g_e = -g_p$ , отримаємо  $b_e = g_p \operatorname{tg} \Delta\theta_0$ . Після деяких перетворень отримаємо

$$b_p = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\omega_0 L},$$

де  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ,  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ ,  $\Delta\omega \ll \omega_0$ . Підставляючи цей вираз у фазову умову, матимемо:

$$\Delta\omega = -\frac{\omega_0}{2Q} \operatorname{tg} \Delta\theta, \quad (11.16)$$

де  $Q = (g_p \omega_0 L)^{-1}$  – добротність резонатора.

Величину  $\Delta\theta$  можна пов'язати з режимом клістрона. Як зазначалося вище:

$$\theta_0 = \frac{k}{U_0 + |U_{\text{сід}}|}, \quad k = 2 \left( 2 \frac{e}{m} U_0 \right)^{1/2} \frac{m \omega d}{e}.$$

Позначаючи  $\Delta|U_{\text{сід}}| = |U_{\text{сід}}| - |U_{\text{сід}n}|$  як відхилення від центра зони, отримаємо:

$$\Delta\theta = -\frac{\theta_{0n}^2}{k} \Delta|U_{\text{сід}}|.$$

Тоді зміна частоти відбивного клістрона становить

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q} \operatorname{tg} \left( \frac{\theta_{0n}^2 \Delta|U_{\text{сід}}|}{k} \right). \quad (11.17)$$

Діапазон електронного переналаштування частоти у відбивного клістрона є невеликим і складає 0,1–1 %.

### 11.3 Особливості роботи електровакуумних діодів і тріодів у діапазоні НВЧ

Для достатньо низьких частот, коли час прольоту електрона є значно меншим за період коливань, діод можна розглядати як прилад зі статичним керуванням. При цьому фаза змінної складової анодного струму відповідає фазі змінної анодної напруги. Якщо ж час прольоту й період коливань співмірні, то конвекційний струм у діоді є різним для різних відстаней від катода. Лише в безпосередній близькості біля катода фаза конвекційного струму збігається з



фазою змінної анодної напруги  $U_m$ , оскільки тільки миттєва густина струму, яка виходить з катода, однозначно визначається миттєвою напруженістю електричного поля в діоді. У всіх інших перерізах діода буде протікати конвекційний струм  $i_x$ , який виходить з катода деякий час тому і відповідно відстає за фазою від напруги на аноді.

Наведений струм  $i_{нав}$  у колі анода є геометричною сумою конвекційних струмів  $i_x$ . Такий процес утворення наведеного струму ілюструє векторна діаграма (рис. 11.3), з якої видно, що наведений струм відстає від анодної напруги, а амплітуда наведеного струму є меншою від амплітуди конвекційного струму та рівною сумі всіх струмів  $i_x$  (пряма менша за ламану).

Проте, розглядаючи роботу діода, було б неправильно обмежитися лише ефектами, зумовленими кінцевим часом прольоту електронів. Тут також суттєву роль відіграє групування електронів у процесі їх руху від катода до анода.

Дійсно, під дією змінного електричного поля  $E(t)$  електрони за час руху  $\tau$  набирають додаткової швидкості  $\Delta v(t) = \frac{e}{m} \int_t^{t+\tau} E(t) dt$ .

Тому в деякий момент часу в різних частинах електронного потоку можуть існувати електрони з різними значеннями  $\Delta v$ . Наявність такої модуляції за швидкістю може приводити до появи додаткової компоненти наведеного струму, який і може вплинути на енергетичний баланс діода.

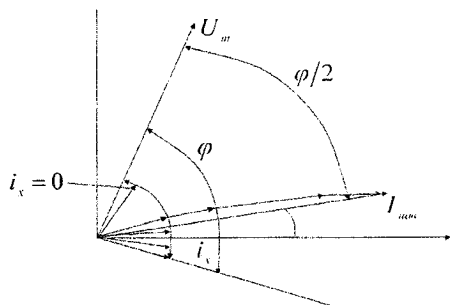


Рис. 11.3. Векторна діаграма струмів в діоді на НВЧ

Взаємодія поля з електронним потоком у діоді є складнішою, ніж у розглянутих нами клістронах. У пролітному клістріоні формування електронного потоку, модуляція за швидкістю, групування та збудження наведеного струму проходять у різних, спеціально виділених частинах приладу. У діоді всі ці процеси проходять в одному й

тому ж просторі. Для того щоб виділити й вивчити в чистому вигляді всі ефекти, зумовлені групуванням електронного потоку в приладі діодного типу, є сенс зробити певні припущення:

- електронний потік, який входить у міжелектродний простір, вважати рівномірним і незалежним від миттєвої напруги на аноді, виключаючи тим самим з розгляду ефекти, зумовлені пульсаціями струму емісії катода;

- за відсутності змінного поля рух електронів вважається рівномірним і прямолінійним, що значно спрощує розрахунок.

Обидва ці припущення добре реалізуються в приладі, який називають монотроном і який ми розглянемо нижче. Монотроном називають НВЧ-прилад, у якому електронний потік однократно пролітає через резонатор (рис. 11.4, а). Монотрон складається з електронної гармати 1, яка формує потік електронів, резонатора 2 із сітками, у якому електрони потоку взаємодіють з полем НВЧ, колектора 3, який збирає електрони після їх проходження через резонатор. Колектор, резонатор й анод гармати знаходиться під потенціалом  $U_0$ , який визначає постійну складову швидкості електронів, які пролітають через монотрон.

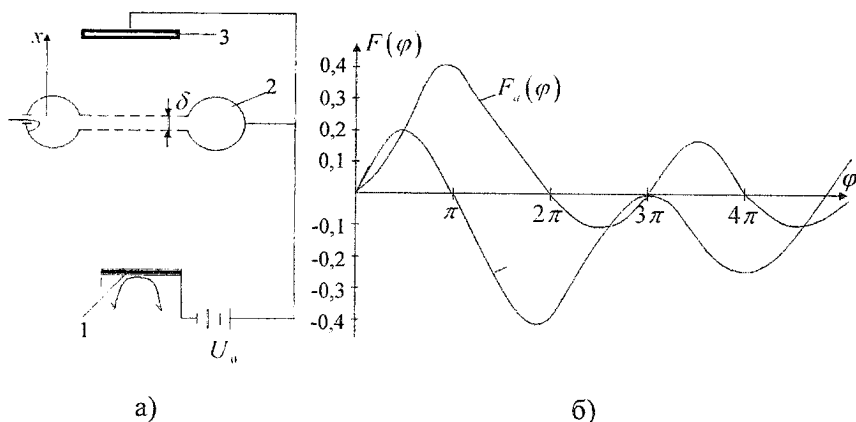


Рис. 11.4. Схема монотрона (а) і вид функцій  $F_a(\varphi)$  і  $F_r(\varphi)$  (б) для розрахунку вносимої електронної провідності в монотроні

Дві сітки, паралельні одна одній, можна розглядати як елементарний діод. Тоді рівняння руху електрона під дією електричного поля набуде вигляду:

$$m \ddot{x} = e E(t) = e E_m e^{j\omega t},$$

де  $E_m = U_m / \delta$  – змінне поле між сітками. Таке рівняння будемо розв'язувати за таких початкових умов:

$$x = 0 \Big|_{t=t_1}, \quad v_0 = \dot{x} = \sqrt{\frac{2e}{m} U_0}.$$

У результаті інтегрування даного рівняння отримаємо:

$$v = v_0 \left[ 1 - j \mu \left( e^{j\omega t} - e^{j\omega t_1} \right) \right],$$

$$\text{де } \mu = \frac{e E_m}{m \omega v_0}.$$

Повторне інтегрування дає координату цього електрона:

$$x = v_0 (t - t_0) - \frac{\mu v_0}{\omega} \left[ e^{j\omega t} - e^{j\omega t_1} - j(\omega t - \omega t_1) e^{j\omega t_1} \right].$$

Приведемо його до безрозмірного вигляду, помноживши на  $\omega/v_0$ :

$$\frac{\omega}{v_0} x = (\omega t - \omega t_1) - \mu \left[ e^{j\omega t} - e^{j\omega t_1} - j(\omega t - \omega t_1) e^{j\omega t_1} \right].$$

Введемо позначення  $x/v_0 = \tau_0$ ,  $\omega \tau_0 = \theta_0$  – відповідно час і кут прольоту ще незбуреного електрона від координати  $x=0$  до  $x$ ;  $(\omega t - \omega t_1) = \theta$  – кут прольоту електрона від перерізу  $x=0$  до  $x$  при дії вже на електрон НВЧ-поля. Тоді рівняння набуде вигляду:

$$\theta = \theta_0 + \mu \left( e^{j\theta_0} - 1 - j\theta_0 \right) e^{j\omega t_1}. \quad (11.18)$$

Ураховуючи, що  $\theta = \omega t - \omega t_1$ , цей вираз можна привести до вигляду:

$$\omega t = \omega t_1 + \theta_0 + \mu \left( e^{j\theta_0} - 1 - j\theta_0 \right) e^{j\omega t_1}.$$

На основі цієї залежності знаходимо конвекційний струм у перерізі  $x$ :

$$i(x) = \frac{i_1}{dt/dt_1} = \frac{I_0}{1 + j \mu \left( 1 - e^{-j\theta_0} - j\theta_0 e^{-j\theta_0} \right) e^{j\omega t_1}}.$$

Ураховуючи, що  $\mu$  – величина мала, то, розкладаючи цей вираз у ряд, отримаємо:

$$i(x) \cong I_0 \left[ 1 - j\mu \left( 1 - e^{-j\theta_0} - j\theta_0 e^{-j\theta_0} \right) e^{j\omega t} \right]. \quad (11.19)$$

Таким чином, отримали вираз для конвекційного струму, який гармонічно залежить від часу і який має амплітуду:

$$I_m = -j I_0 \mu \left( 1 - e^{-j\theta_0} - j\theta_0 e^{-j\theta_0} \right).$$

Наступним етапом розв'язання цієї задачі буде розрахунок тієї потужності, яка виділяється чи поглинається в результаті взаємодії електронного потоку з полем НВЧ-резонатора, а також розрахунок провідності, яка вноситься електронним потоком у резонатор.

У виразі (11.19) координата  $x$  прихована у вигляді  $\theta_0 = \frac{x}{v_0} \omega$ .

Тому, проводячи заміну змінної  $x$  на  $\theta_0$ , отримаємо:

$$I_{m \text{ нас}} = -j \frac{I_0 \mu v_0}{\omega \delta} \int_0^\varphi \left( 1 - e^{-j\theta_0} - j\theta_0 e^{-j\theta_0} \right) d\theta_0,$$

де  $\varphi = \omega \delta / v_0$  – кут прольоту електрона між сітками резонатора. У результаті інтегрування отримаємо:

$$I_{m \text{ нас}} = I_0 \frac{\mu v_0}{\omega \delta} \left( -j\varphi + 2e^{-j\varphi} - j\varphi e^{-j\varphi} + 2 \right).$$

Потужність, яка вноситься електронним потоком у резонатор, буде рівна:

$$\langle P \rangle = \frac{I_{m \text{ нас}} U_m}{2} = I_0 U_m \frac{\mu v_0}{2\omega \delta} \left( -j\varphi + 2e^{-j\varphi} - j\varphi e^{-j\varphi} + 2 \right).$$

Якщо тепер провести заміну  $e^{j\varphi} = \cos \varphi - j \sin \varphi$  (формула Ейлера) і розділити дійсну та уявну частини, то усереднена потужність

$$\langle P \rangle = P_a + j P_r,$$

де

$$\begin{aligned} P_a &= \frac{P_0 M^2}{\varphi^2} \left[ 2(1 - \cos \varphi) - \varphi \sin \varphi \right] = P_0 M^2 F_a(\varphi), \\ P_r &= \frac{P_0 M^2}{\varphi^2} \left[ 2 \sin \varphi - \varphi(1 + \cos \varphi) \right] = P_0 M^2 F_r(\varphi), \end{aligned} \quad (11.20)$$

де  $M = U_m / (2U_0)$ ,  $P_0 = I_0 U_0$ .

З виразу (11.20) можна легко перейти до виразів для електронної провідності, яка вноситься в резонатор:

$$g_e = \frac{2P_a}{U_m^2} = \frac{g_0}{2} F_a(\varphi), \quad b_e = \frac{2P_r}{U_m^2} = \frac{g_0}{2} F_r(\varphi).$$

Вид функцій  $F_a(\varphi)$  і  $F_r(\varphi)$  поданий на рис. 11.4, б. Як бачимо з рисунка, при кутах прольоту  $\varphi = 0 \div 2\pi$  електронний потік відбирає енергію від НВЧ-поля, оскільки  $P_a > 0$ . При кутах  $\varphi = 2\pi \div 3\pi$  електронний потік уже віддає енергію коливанням резонатора, оскільки  $P_a < 0$ . За подальшого зростання функції  $\varphi$  як кута прольоту, функція  $F_a(\varphi)$  буде мати затухаючий вигляд. Найбільших абсолютних значень функція  $F_a(\varphi)$  досягне лише на перших максимумах, коли  $\varphi = \pi$ , а  $F_a(\varphi) = 0,42$ , і при  $\varphi = 2,5\pi$ , коли  $F_a(\varphi) \approx -0,1$ . Значення, за яких спостерігаються від'ємні екстремуми, можна записати як  $\varphi = 2\pi(n + 1/4)$ , де  $n = 1, 2, 3 \dots$ . Від'ємні значення  $P_a$  і  $g_e$  указують на принципову можливість самозбудження резонатора, тобто перетворення його в автогенератор. Критерій цього самозбудження можна визначити з балансу амплітуд і фаз. Якщо  $g_p$  і  $b_p$  – активна й реактивна провідності резонатора, то амплітудна умова визначає, що самозбудження настає, коли  $g_p < \frac{g_0}{2} F_a(\varphi)$ , а в точці екстремального від'ємного значення  $F_a(\varphi)$  ця умова має вигляд:  $g_p \leq 0,05 g_0$ .

Фазова умова вказує, наскільки частота згенерованих коливань буде відрізнятися від власної частоти резонатора й визначатиметься кутом прольоту  $\varphi$ , тобто режимом роботи.

ККД монотрона рівний  $\eta = P_a/P_0 = M^2 F_a(\varphi)$ . Оскільки  $U_m$  не може перевищувати  $U_0$ , а  $M^2 \leq 0,25$ , то  $\eta_{\max} = 2,5\%$  і тому монотрони не мають широкого використання.

Розглянемо тепер на основі монотрона діод з постійним електричним полем. Якщо сітка монотрона знаходиться під різними постійними потенціалами, то електрони, крім дії НВЧ-поля, зазнають ще й дії постійного електричного поля:

$$E_0 = \frac{U_{02} - U_{01}}{\delta},$$

де  $U_{01}$ ,  $U_{02}$  – постійні потенціали нижньої та верхньої сіток. Тоді рівняння руху електрона в цьому випадку описується рівнянням:

$$m \ddot{x} = e E_m e^{j\omega t} + e E_0.$$

Розв'язуючи це рівняння й проводячи розрахунки як для монотрона, отримаємо вирази для активної й реактивної потужності, яка вноситься електронним потоком у резонатор. Залежно від потенціалів сіток маємо декілька цікавих розв'язків. Якщо  $U_{01} > 0$ ,  $U_{02} > 0$ , то потужність, яка вноситься, буде рівна:

$$P_{a,r}(\varphi) = \frac{4 P_0 M^2}{1 + \sqrt{(U_{01}/U_{02})^2}} F_{a,r}(\varphi),$$

де  $P_0 = I_0 U_0$ ,  $M = U_m / (2U_{02})$ .

У випадку, коли  $U_{01} = 0$ , така система монотрона являє собою діод, одним з електродів якого є катод, який емітує електрони, а другим – анод. Такий діод, суміщений з резонатором, може в певних режимах генерувати коливання НВЧ. Схему подібного (інверсного) діода подано на рис. 11.5. Плоский діод з катодом розжарювання 1 конструктивно об'єднаний з високодобротним коаксіальним резонатором 2, від якого катод відокремлений за постійною напругою ізолюючими прокладками 3. Міжелектродна відстань  $\delta = 0,2$  см. При анодній напрузі  $250 \div 300$  В діод генерує на частоті  $3$  ГГц потужність  $350$  мВт.

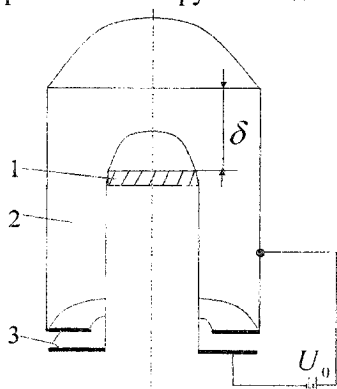


Рис. 11.5. Схема інверсного діода

При  $U_{01} > 0$ ,  $U_{02} < 0$ , коли перша сітка монотрона заряджена позитивно, а друга – негативно, електрони, дійшовши до деякого перерізу  $x$ , де потенціал рівний нулю, відбиваються й повертаються назад на першу сітку. У цьому випадку кут прольоту  $\varphi$  визначається як:

$$\varphi = \frac{4\omega\delta}{\sqrt{\frac{2e}{m}U_0\left(1 + \frac{|U_{01}|}{|U_{02}|}\right)}}$$

а активна й реактивна потужності, які вносяться електронним пучком, визначаються як:

$$P_{a,r} = \frac{16P_0M^2}{\left(1 + \sqrt{|U_{02}|/|U_{01}|}\right)^2} F_{a,r}(\varphi),$$

де  $P_0 = I_0 U_0$ ,  $M = U_m / (2U_{01})$  відповідно зростають у 4 рази.

Розглянута вище система, у якій  $U_{01} > 0$ , а  $U_{02} < 0$ , може бути легко реалізована в тріоді, сітка якого заряджена позитивно, а анод – негативно. При цьому міжелектродний проміжок сітка–анод повинен бути складовою частиною порожнього резонатора або іншого резонансного контуру, у якому збуджуються коливання. Якщо режим підібраний таким чином, щоб забезпечувалась умова  $F_a(\varphi) < 0$ , то, влетівши в проміжок сітка–катод, електрони будуть віддавати свою енергію полю НВЧ і зможуть збуджувати коливання в резонаторі. Найбільших абсолютних від’ємних значень величина  $F_a(\varphi)$  досягає при  $\varphi = 2\pi(n + 1/4)$ . Тому для оптимального режиму фазова умова самозбудження коливань набуде вигляду:

$$\frac{4\omega\delta}{\sqrt{\frac{2e}{m}U_{e0}\left(1 + \frac{U_{a0}}{U_{e0}}\right)}} = 2\pi\left(n + \frac{1}{4}\right). \quad (11.21)$$

До клістрона це був один з основних малопотужних приладів НВЧ для генерації хвиль дециметрового діапазону. Сьогодні їх також використовують у НВЧ-схемотехніці.

Крім режиму, за якого сітка тріода додатна, а анод від’ємний, у техніці НВЧ застосовується й звичайний режим роботи тріода, за якого анод заряджений позитивно, а сітка – негативно.

Робота тріода в такому режимі на НВЧ не має особливих принципів відмінностей від роботи тріода в області низьких частот.

Особливості роботи тріода на НВЧ зводяться до:

- появи наведеної активної вхідної провідності;
- від’ємного струму тріода (комплексна крутизна);

– збільшення ролі міжелектродних ємностей та індуктивностей.

#### **11.4 Прилади, які використовують взаємодію електронних потоків з біжучими хвилями**

У приладах, розглянутих у попередньому підрозділі, використовувалася взаємодія електронів із зосередженими електричними полями. Мала протяжність і короткочасність такої взаємодії зумовили необхідність збільшення напруженості полів, що досягалося застосуванням високодобротних резонаторів. Проте це приводило до звуження смуги частот, у якій взаємодія електронів з полем залишалася досить сильною.

Розширити смугу частот, не гублячи разом із тим ефективної взаємодії, можна, використовуючи повільні біжучі хвилі, фазова швидкість яких близька до швидкості електронного пучка (синхронна взаємодія). Розміщуючи електронні згустки в області найбільш сильного гальмівного поля такої хвилі, можна забезпечити досить тривалу взаємодію електронів з біжучою хвилею. Широка смуга частот у цьому випадку може бути забезпечена, якщо зробити дисперсію повільних хвиль невеликою, для того щоб синхронізм зберігався в досить широкій смузі частот.

В основі роботи електронних приладів НВЧ, які використовують принцип синхронної взаємодії, знаходиться фундаментальне фізичне явище – випромінювання Вавилова – Черенкова, яке полягає в тому, що під час руху заряджених частинок у деякому середовищі зі швидкістю, яка перевищує швидкість електромагнітних хвиль у цьому середовищі, відбувається випромінювання таких хвиль. У нашому випадку таким середовищем є сповільнююча система. Якщо швидкість електронів близька до фазової швидкості хвилі у сповільнюючій системі або дещо перевищує її, то енергія електронів передається хвилі.

Прилади, які працюють на зазначеному принципі та явищі, належать до класу приладів НВЧ, які використовують взаємодію електронних потоків з біжучими хвилями. До них відносяться лампи біжучої хвилі (ЛБХ), лампи оберненої хвилі (ЛОХ) та електронно-хвильові прилади (ЕХП). Розглянемо їх особливості функціонування, параметри й характеристики.



### 11.4.1 Лампа біжучої хвилі та її дискретне рівняння

У лампі біжучої хвилі сформований електронний пучок взаємодіє з прямою повільною електромагнітною хвилею, фазова швидкість якої близька до швидкості електронів у пучку або дещо менша від неї. Такі повільні хвилі створюються в спеціальних сповільнюючих системах, які були розглянуті в попередньому розділі. Велика широкосмуговість і малий рівень внутрішніх шумів дозволяє використати ЛБХ для підсилення дуже слабких сигналів НВЧ, а велика смуга підсилювальних частот і порівняно високий ККД роблять ЛБХ також зручними для їх використання як підсилювачів сигналів середньої й великої потужності.

Перш ніж приступити до детального кількісного опису роботи ЛБХ шляхом аналізу властивостей хвиль, які в ній поширюються (хвилі описуються відповідним дисперсійним рівнянням), необхідно розглянути принцип роботи ЛБХ якісно на основі руху зарядів у поздовжньому електричному полі повільної електромагнітної хвилі.

Будемо вважати, що фазова швидкість хвилі рівна швидкості електронів  $v_0$ . Простежимо за групою електронів, які вилетіли з електронної гармати протягом одного періоду коливань і потрапили на ділянку хвилі  $abc$ , яка зображена на рис. 11.6. Координата  $z$  пов'язана з хвилею й рухається відносно спостерігача зі швидкістю  $v_0$ . Електрони на ділянці хвилі  $ab$  знаходяться в прискорюючому електричному полі хвилі, яке збільшує їх швидкість і підганяє рух. Електрони на ділянці  $bc$  уже гальмуються електричним полем і переміщуються назад відносно хвилі. У результаті цього всі електрони з ділянки  $abc$  зсуваються до точки  $bi$ , як наслідок, в її околі формується електронний згусток. Найкраще групування досягається, очевидно, на деякій відстані від виходу гармати. Потім відбувається перегрупування електронного потоку, яке супроводжується розмиттям утвореного згустку.

Таким чином, поле сповільненої електромагнітної хвилі здатне здійснювати групування електронів подібно до того, як це відбувається в просторі дрейфу пролітного клістрона. Різниця полягає в тому, що в клістріні сила, яка викликає модуляцію за швидкістю, діє на електрони імпульсно тільки в момент прольоту через резонатор, тоді як у ЛБХ електрична сила діє неперервно протягом усього часу прольоту електронів. Проте, на відміну від резонатора, тут сповільнююча система має суттєву перевагу – вона може бути дуже

широкосмуговою. Для успішного групування електронного потоку достатньо лише, щоб фазова швидкість хвилі була рівна швидкості електрона. Ця умова для ряду сповільнюючих систем (наприклад, спіраль) дуже добре виконується в широкому діапазоні частот.

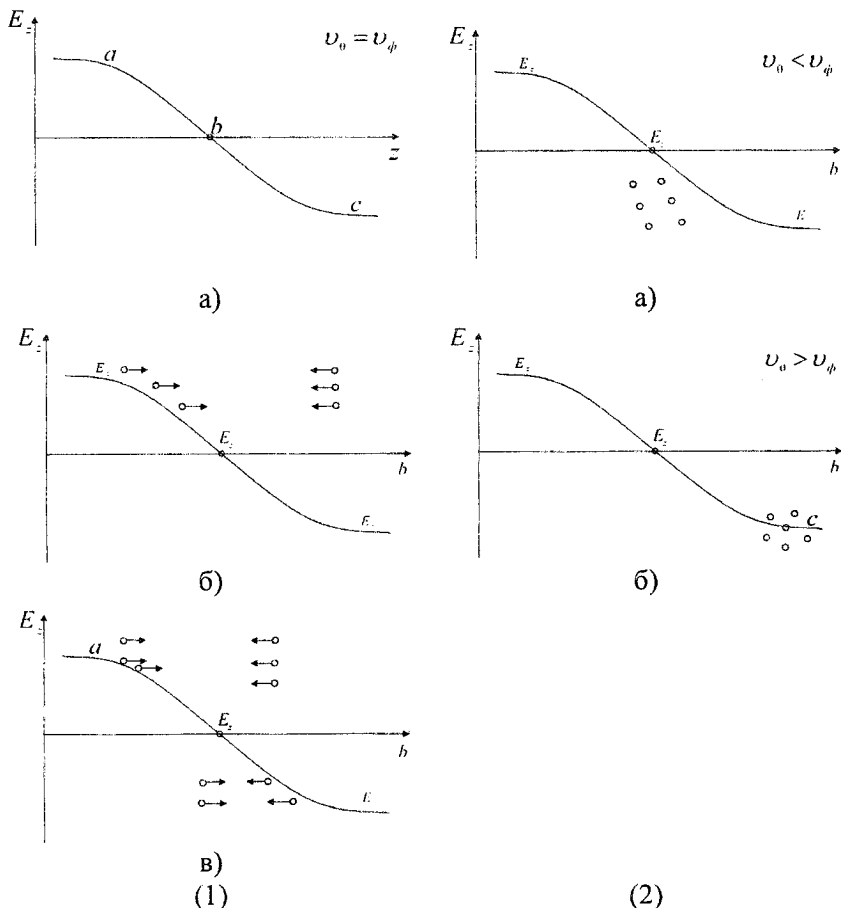


Рис. 11.6. Групування електронів у полі біжучої хвилі при  $v_0 = v_\phi$  (1) і при  $v_0 \neq v_\phi$  (2)

Розглянемо тепер, як можна здійснити відбір енергії від згрупованого описаними вище способами електронного пучка. Найпростіше це можна зробити, поставивши в місце, де електронний пучок

оптимально згрупований, резонатор-уловлювач, так само, як у пролітному клістріні. Прилади НВЧ із таким пристроєм називають твістронами. Проте в них відсутня та головна перевага, яку мають сповільнюючі системи, – це широкосмуговість. Тому, природно, виникає питання – чи можна в цьому випадку використати сповільнюючу систему вже як уловлювач електронів.

Якщо  $v_\phi = v_0$ , то електрони збираються в згусток в області, де електричне поле хвилі є близьким до нуля. Кількість прискорених і сповільнених електронів однакова, а їх загальна енергія залишається незмінною.

Інша картина спостерігається, якщо  $v_\phi \neq v_0$ . Нехай, наприклад,  $v_\phi < v_0$ . Процес групування в загальних рисах буде відбуватися так, як і при  $v_\phi = v_0$ , проте утворений згусток почне дещо відставати від хвилі (рис. 11.6, 2 а). Унаслідок цього центр згустку переміститься в область, де електричне поле є прискорюючим. Електрони в основній масі будуть тепер прискорюватись і відбирати енергію від хвилі. Амплітуда поля хвилі повинна при цьому зменшуватися. Прискорення електронів буде продовжуватися до тих пір, поки їх швидкість не зрівняється зі швидкістю хвилі.

Якщо ж  $v_\phi > v_0$ , то утворений згусток електронів, навпаки, переміщається вже вперед в область, де поле хвилі є гальмівним (рис. 11.6, 2 б). Основна маса електронів буде зазнавати дії імпульсу сили, направленою назустріч їх руху. Вони будуть гальмуватися, втрачати швидкість, та їх кінетична енергія стане переходити в енергію хвилі, амплітуда якої повинна відповідно зростати.

Інформацію про групування електронів, викладену для випадку  $v_0 \cong v_\phi$ , можна застосувати для випадку  $v_\phi \neq v_0$  тільки тоді, коли різниця у швидкості є не достатньо великою. Інакше електрони на ділянці взаємодії можуть обганяти хвилю або відставати від неї на декілька періодів. При цьому на електрони діє перемінно то прискорююча, то сповільнююча сила й групування електронів не може реалізуватися.

Перекачування енергії від електронів до хвилі супроводжується збільшенням її поля. У свою чергу, збільшення поля приводить до підсилення групування електронів. У результаті такого процесу ріст амплітуди хвилі й ступеня групування електронів повинен проходи-

ти паралельно, експоненціально наростаючи в міру руху електронів уздовж сповільнюючої системи.

ЛБХ зображена на рис. 11.7. Електронний потік 1 формується електронною гарматою 2 і направляється вздовж осі сповільнюючої системи 3. У даному випадку сповільнююча система виконана у вигляді спіралі, хоча можуть застосовуватися й інші види сповільнюючих систем, розглянутих нами раніше. На вході й виході ЛБХ передбачені узгоджуючі пристрої, які забезпечують малий коефіцієнт відбивання сигналу в широкій смузі частот. Для запобігання розбухання електронного пучка й попадання електронів у сповільнюючу систему вся лампа розміщена в сильному поздовжньому магнітному полі  $B_0$ , яке створюється соленоїдом або системою постійних магнітів 5. Прилади з подібною конфігурацією магнітного поля називаються приладами типу  $O$ . На виході зі сповільнюючої системи електронний пучок падає на колектор 4. Сигнал уводиться в спіраль з боку гармати й виводиться в підсиленому вигляді з боку колектора. Другий анод гармати, сповільнююча система й колектор знаходяться під одним і тим самим потенціалом  $U_0$ , величина якого вибирається таким чином, щоб забезпечити синхронізм електрона з хвилею.

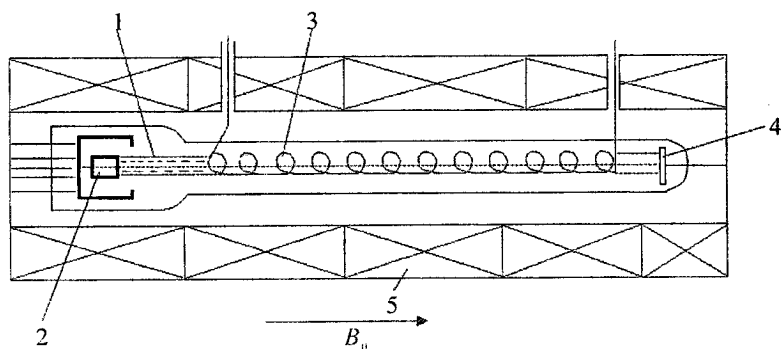


Рис. 11.7. Конструкція лампи біжучої хвилі

Для кількісного вивчення процесів, які відбуваються при взаємодії пучка електронів з біжучою електромагнітною хвилею, розглянемо ЛБХ, схему якої подано на рис. 11.7. Тут тонкий нитковид-

ний пучок радіуса  $a$  проходить уздовж осі циліндричної сповільнюючої системи радіуса  $b$  (наприклад, спіралі). Будемо при цьому вважати, що  $a, b \ll \lambda$ , де  $\lambda$  – довжина хвилі, яка поширюється в даній системі.

Якщо знехтувати дією сповільнюючої системи на пучок, то рух зарядів буде описуватися вже складеною раніше системою рівнянь для нитковидного пучка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{c}{m} \frac{\partial U_n}{\partial z}, \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= -\frac{\partial i}{\partial z}, \\ i &= g_0 v + g v_0, \\ U_n &= \frac{q}{C'}, \end{aligned} \quad (11.22)$$

де в цій лінеаризованій системі рівнянь  $q$  – заряд на одиницю довжини пучка,  $i$  – конвекційний струм пучка,  $U_n$  – поперечна різниця потенціалів (тобто зумовлена просторовим зарядом різниця потенціалів між пучком і поверхнею сповільнюючої системи),  $C'$  – ємність на одиницю довжини між пучком і сповільнюючою системою. На основі розв'язання цієї системи був зроблений висновок про те, що в нитковидному пучку можуть поширюватися хвилі просторового заряду (ХПЗ), що описуються дисперсійним рівнянням і які виведемо дещо нижче.

Якщо знехтувати дією пучка на сповільнюючу систему, то електромагнітні хвилі, які поширюються в ній, описуються системою телеграфних рівнянь:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -L_1 \frac{\partial I}{\partial t}, \quad \frac{\partial I}{\partial z} = -C_1 \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (11.23)$$

де  $V$ ,  $I$  – напруга і струм у сповільнюючій системі;  $L_1$ ,  $C_1$  – еквівалентні індуктивність та ємність на одиницю довжини.

Розглянемо збурення, яке вноситься пучком у поширення хвиль у сповільнюючій системі. При виконанні умов  $a, b \ll \lambda$  електричні силові лінії, які формуються об'ємним зарядом пучка, закінчуються на стінках каналу, наводячи там за рахунок електростатичної індукції поверхневий заряд дзеркального зображення. Такий дзеркальний заряд рівний за величиною наведеному об'ємному заряду, але протилежний йому за знаком. Переміщення такого наведеного заряду

веде за собою таке ж переміщення наведеного, так що конвекційний струм пучка і повинен формувати дзеркальний наведений струм  $i_{нав}$ , який рівний за величиною і протилежний за знаком конвекційному:  $i_{нав} - i$ .

Наведений дзеркальний струм протікає по стінках каналу і разом зі струмом  $I$  створює там спад напруги. Тому телеграфні рівняння (11.23) з урахуванням електростатичного зв'язку між пучком і сповільнюючою системою мають вигляд:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -L_1 \frac{\partial}{\partial t} (I + i_{нав}) = -L_1 \frac{\partial}{\partial t} (I - i). \quad (11.24)$$

Розглянемо тепер дію поля хвилі на рух зарядів пучка. Сила, яка діє на заряд, буде визначатися не тільки поздовжнім електричним полем просторового заряду  $E_{z_n} = -\partial U_n / \partial z$ , а й полем електромагнітної хвилі  $E_{z_n} = -\partial V / \partial z$ , зумовленим поздовжньою нееквіпотенціальністю сповільнюючої системи. Тоді рівняння руху зарядів матимуть вигляд:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial z} (U_n + V). \quad (11.25)$$

Сукупність рівнянь, викладених вище (11.22)–(11.25), утворює систему, яка описує поведінку хвиль у ЛБХ. Для цієї системи рівнянь необхідно знайти розв'язок, який потрібно підставити у вихідне рівняння руху (11.25) з метою отримання дисперсійного рівняння.

Розв'язок системи рівнянь шукатимемо у вигляді хвилі  $A = A_m e^{j(\omega t - \gamma z)}$ . Підставляючи його в рівняння (11.22)–(11.25), отримуємо:

$$j\omega v - j\gamma v_0 v = j\gamma \frac{e}{m} U_n + j\gamma \frac{e}{m} V; \quad (11.25a)$$

$$j\omega q = -j\gamma i, \quad i = g_0 v + v_0 g, \quad U_n = \frac{q}{C'}; \quad (11.22a)$$

$$-j\gamma V = -j\omega L_1 I + j\omega L_1 i; \quad (11.24a)$$

$$-j\gamma I = -j\omega C_1 V. \quad (11.23a)$$

Виключивши струм  $I$  з рівнянь (11.24 а) і (11.23 а), отримуємо рівняння, яке пов'язує величини  $V$  та  $i$ :

$$V = \frac{\gamma_0 \gamma^w}{\gamma_0^2 - \gamma^2} i, *$$

де  $\gamma_0^2 = \omega^2 L_1 C_1$  – коефіцієнт поширення хвилі в “холодній” сповільнюючій системі (без пучка),  $W = \sqrt{L_1/C_1}$  – хвильовий опір сповільнюючої системи, який рівний опору зв’язку  $R_{zs}$ .

Виключивши  $v$ ,  $q$ ,  $U$  з рівнянь (11.25 а), (11.22 а), (11.24 а) і (11.23 а), отримаємо також рівняння, яке пов’язує  $V$  та  $i$ :

$$i \left[ (\omega - \gamma v_0)^2 - \gamma^2 \frac{e q_0}{m C'} \right] = \omega \gamma \frac{e}{m} q_0 V. *$$

Останні два рівняння, позначені \*, дають нам дисперсійне рівняння, яке пов’язує поширення хвиль у ЛБХ, а саме взаємодію електронного пучка зі сповільнюючою системою:

$$(\omega - \gamma v_0)^2 - \gamma^2 \frac{e q_0}{m C'} = \omega \gamma \frac{e}{m} q_0 \frac{\gamma_0 \gamma^w}{\gamma_0^2 - \gamma^2}. \quad (11.26)$$

Введемо такі позначення:

$$\gamma_e = \frac{\omega}{v_0}, \quad i_0 = q_0 v_0, \quad U_0 = \frac{m v_0^2}{2e}, \quad C = \left( \frac{i_0 w}{4U_0} \right)^{1/3}, \quad Q = \frac{\gamma_e}{2\omega C' w}$$

і приведемо дисперсійне рівняння (11.26) до вигляду:

$$(\gamma_0^2 - \gamma^2) \left[ (\gamma_e - \gamma)^2 - 4\gamma^2 Q C^3 \right] = 2\gamma_0 \gamma^2 \gamma_e C^3. \quad (11.26a)$$

Це рівняння 4-го степеня відносно коефіцієнта поширення хвилі  $\gamma$ , кількість коренів якого повинна відповідати кількості хвиль, що можуть поширюватися в даній сповільнюючій системі: двом хвилям просторового заряду (повільної й швидкої ХПЗ) і двом електромагнітним хвилям сповільнюючої системи (прямой й зустрічної). Розглянемо ці хвилі після розв’язання дисперсійного рівняння (11.26 а).

Для спрощення розв’язання рівняння такого типу введемо деякі нові позначення й припущення. Взаємозв’язок між  $\gamma_0$  і  $\gamma_e$  запишемо у вигляді:

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + cb),$$

де  $b = \frac{1}{c} \frac{v_0 - v_{\phi 0}}{v_{\phi 0}}$  пропорційна різниці швидкостей електронів у пучку  $v_0$  і фазовій швидкості  $v_{\phi 0}$  хвилі в холодній сповільнюючій системі (системі без пучка).

Під час подальшого аналізу будемо вважати, що  $v_0 - v_{\phi 0} \ll v_{\phi 0}$ , що дає  $cb \ll 1$ . Таке припущення обмежує розгляд тільки таким режимом, який дуже близький до синхронізму. Але це є недостатнім для нашого аналізу, оскільки такий режим є найбільш цікавим. Розв'язок дисперсійного рівняння шукатимемо у вигляді  $\gamma = \gamma_e (1 + C\delta)$ , де  $\gamma_e \cong \omega/v_0$  – коефіцієнт поширення ХПЗ;  $\gamma_e C\delta$  – поправочний член, який ураховує густину пучка та його взаємодію з хвилею сповільнюючої системи.

У подальшому будемо вважати, що пучок електронів є досить слабким і слабо пов'язаний зі сповільнюючою системою, так що другий член у виразі для  $\gamma = \gamma_e (1 + C\delta)$  можна вважати малим ( $C\delta \ll 1$ ). Підставляючи  $\gamma_0$  і  $\gamma$  в дисперсійне рівняння й використовуючи приведені допущення щодо малості членів  $C\delta$  і  $Cb$ , приводимо канонічне рівняння до канонічного вигляду:

$$\delta^2 = 4QC + \frac{1}{b - \delta}. \quad (11.27)$$

Це рівняння є рівнянням третього степеня відносно  $\delta$ , тобто на одиницю менше, ніж дисперсійне (11.26 а). А поскільки було зроблено припущення  $Cb \ll 1$ , то буде виключено з розгляду електромагнітну хвилю, яка поширюється назустріч пучку (зустрічна хвиля), бо зустрічна хвиля участі у взаємодії з пучком не бере.

Незважаючи на ряд зроблених допущень, розв'язання рівняння (11.27) є досить складною задачею. Для цього обмежимося частинним випадком, коли  $b = 0$  і  $Q = 0$ . Суть першого припущення зрозуміла: це умова точного синхронізму, коли  $v_0 = v_{\phi 0}$ . Друга умова є менш зрозумілою, бо  $Q \rightarrow 0$  за умови, коли погонна ємність  $C' \rightarrow \infty$ , тобто  $U_n \rightarrow 0$ . За таких припущень дисперсійне рівняння ЛБХ матиме дуже простий вигляд:  $\delta^3 = -1$ . Розв'язання цього рівняння дають такі корені:

$$\delta_1 = -1, \quad \delta_2 = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \delta_3 = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Цим значенням  $\delta$  відповідають такі значення  $\gamma$ :

$$\gamma_1 = \gamma_e (1 + C \delta_1) = \gamma_e (1 - C),$$

$$\gamma_2 = \gamma_e (1 + C \delta_2) = \gamma_e \left( 1 + \frac{C}{2} \right) + j \gamma_e C \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\gamma_3 = \gamma_e (1 + C \delta_3) = \gamma_e \left( 1 + \frac{C}{2} \right) - j \gamma_e C \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Кожному із цих коефіцієнтів  $\gamma$  буде відповідати своя хвиля. Розглянемо властивості кожної зокрема. Перша хвиля  $A_1 = A_1(0) \exp\{j[\omega t - \gamma_e(1-C)z]\}$ , де  $A_1(0)$  – амплітуда хвилі на початку системи ( $z = 0$ ). Тому перша хвиля поширюється із незмінною амплітудою, а її фазова швидкість рівна  $v_{\phi 1} = \frac{v_0}{1-C} \cong v_0(1+C)$  і перевищує постійну складову швидкості електронів пучка  $v_0$ .

$$\text{Друга хвиля } A_2 = A_2(0) \exp\left\{j\left[\omega t - \gamma_e\left(1 + \frac{C}{2}\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_e C z\right]\right\}$$

уже має фазову швидкість  $v_{\phi 2} = \frac{v_0}{1+C/2} \cong v_0\left(1 + \frac{C}{2}\right)$ , тобто є меншою за швидкість пучка. Амплітуда другої хвилі експоненціально наростає вздовж осі поширення  $z$ . Це і є підсилююча хвиля.

$$\text{Третя хвиля } A_3 = A_3(0) \exp\left\{j\left[\omega t - \gamma_e\left(1 + \frac{C}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_e C z\right]\right\}$$

має трифазову швидкість, як і друга, але її амплітуда експоненціально спадає вздовж осі  $z$ . Знаючи напругу на початку лінії  $V_2(0)$ , – маємо напругу на початку сповільнюючої системи

$$V_2(L) = V_2(0) \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_e C L\right),$$

де  $L$  – довжина сповільнюючої системи. Таким чином, коефіцієнт підсилення для другої хвилі в  $\text{дБ}$  буде рівний

$$G_2 = 20 \lg \frac{V_2(L)}{V_2(0)} = 7,55 \gamma_e C L.$$

Більш точна формула дає вираз  $G = 7,55\gamma_e CL - 9,54$ , де останній член ураховує розподіл хвилі між трьома складовими.

У ролі підсилювача слабких сигналів ЛБХ функціонує завжди в лінійному режимі. Як уже зазначалося вище, однією з головних причин, які обмежують наростання коливань, є явище гальмування електронного згустку та їх вихід зі стану синхронізму. Тому, природно, необхідно підвищувати потужність і ККД ЛБХ шляхом вимушеного підтримання синхронізму по всій довжині сповільнюючої системи. Це можна здійснювати двома шляхами:

1) шляхом зниження фазової швидкості хвилі у такому ж темпі, у якому електрони втрачають свою швидкість. Досягти цього можна плавною або стрибкоподібною зміною сповільнення системи, що досягається використанням спіралі зі змінним кроком;

2) шляхом достатнього прискорення електронів уздовж сповільнюючої системи. Для цього потенціал системи повинен зростати в міру віддалення від входу.

ЛБХ, у кінцевій стадії яких синхронізм підтримується такими способами, називаються ізохронними. Сучасні ЛБХ мають ККД 20–30% при коефіцієнті підсилення  $40 \div 60$  дБ (підсилення  $10^2$ – $10^3$  разу). Зараз випускаються дворежимні ЛБХ, які здатні працювати як у неперервному, так і в імпульсному режимах і мають смугу у дві-три октави.

#### ***11.4.2 Лампа оберненої хвилі. Принцип дії та умова генерації***

Прилади, у яких реалізується принцип взаємодії електронного пучка з хвилею, що має від'ємну дисперсію (обернену хвилю), називають лампами оберненої хвилі (ЛОХ). Такі ЛОХ використовують як генератори коливань НВЧ і вони мають здатність до електронного переналаштування частоти в широкому діапазоні частот (до октави й більше).

Схема ЛОХ подана на рис. 11.8. Електронний пучок 1, який формується електронною гарматою 2, рухається зі швидкістю  $v_0$  уздовж сповільнюючої системи 3, що має від'ємну дисперсію. Фазова швидкість хвилі  $v_\phi$ , що поширюється в даній сповільнюючій системі, направлена в той же бік, куди й пучок електронів, але її групова швидкість  $v_{gp}$  (швидкість поширення енергії) має обернений напрям.

Якщо в системі спостерігається синхронізм ( $v_\phi = v_0$ ), то взаємодія поля хвилі на пучок відбувається так само, як і в ЛБХ. Тоді можна вважати, що в деякому перерізі  $a$  поле хвилі здійснює модуляцію електронів пучка за швидкостями; далі в процесі руху електрони групуються в перерізі  $b$  з утворенням електронних згустків, які віддають енергію поля хвилі. Проте, на відміну від ЛБХ, у ЛОХ енергія, яка передана від електронів хвилі, буде переноситися не вперед у напрямі електронного пучка, а назад до перерізу  $a$ , де й буде проходити заново групування електронів пучка.

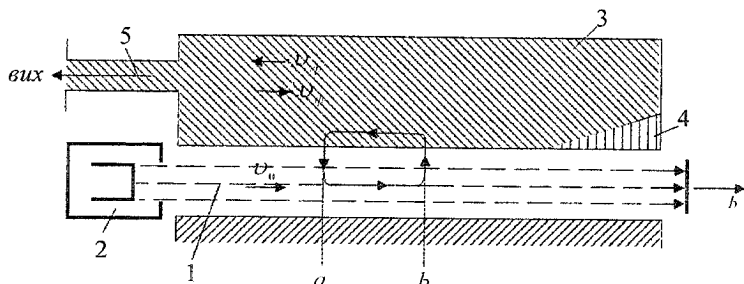


Рис. 11.8. Конструкція лампи оберненої хвилі

Таким чином утворюється кільце оберненого зв'язку, у якому сигнал переноситься зліва направо електронами пучка, а справа наліво — хвилею сповільнюючої системи. Набіг фази від перерізу  $a$  до  $b$  (нижня частота петлі) рівний  $\frac{\omega}{v_0} l_{ab}$ , а від перерізу  $b$  до  $a$  (верхня частина петлі) рівний  $-\frac{\omega}{v_\phi} l_{ab}$ . Тут  $v_\phi$  — фазова швидкість хвилі в сповільнюючій системі, а знак “-” прийнятий тому, що рахунок набігу фази ведеться назустріч фазовій швидкості. При синхронізмі, коли  $v_0 = v_\phi$ , загальний набіг у кільці оберненого зв'язку буде рівний нулю. Це означає, що обернений зв'язок є додатним. Він існує між будь-якою парою перерізів. Його називають розподіленим, підкреслюючи, що він не пов'язаний з відбиванням хвилі від кінця сповільнюючої системи. Такий обернений зв'язок є принципово неусуненим.

Зняття згенерованого сигналу проводиться з лівого кінця сповільнюючої системи 5, де концентрується вся енергія, яка передається від електронного пучка хвилі сповільнюючої системи.

У ролі сповільнюючої системи ЛОХ застосовують системи, основна просторова гармоніка яких має від'ємну дисперсію (наприклад, зустрічні гребінки, зустрічні штирі, діафрагмовий хвилевід із щілинами зв'язку, які чергуються). Можуть також застосовуватися системи із від'ємними просторовими гармоніками, у яких основна хвиля є прямою (спіралі, гребінки).

Різниця в роботі ЛОХ і ЛБХ найбільш зрозуміло проявляється під час порівняння поздовжнього розподілу високочастотного потенціалу  $V$  хвилі в сповільнюючій системі та змінної складової конвекційного струму пучка  $i$  в цих приладах НВЧ (рис. 11.9). У ЛБХ обидві ці величини нарастають уздовж простору взаємодії від гармати до колектора приблизно за експоненціальним законом, причому  $V$  нарастає від деякого початкового рівня  $V(0)$ , що відповідає вхідній напрузі підсилювального сигналу, а конвекційний струм  $i$  нарастає з нуля, оскільки пучок входить у сповільнюючу систему непромодульованим.

Для ЛОХ величина  $V$  нарастає вже від колектора до гармати, тому що групова швидкість оберненої хвилі переносить усю енергію, забрану від пучка, зліва направо. Наростання проходить від нульового рівня, оскільки біля колектора розміщений поглинач. Змінна складова струму пучка  $i$  рівна нулю біля гармати й нарастає до колектора в міру групування пучка. Слід відмітити, що темп наростання струму  $i$  зменшується до кінця лампи, де  $V$  – мала; аналогічно темп наростання напруги  $V$  у міру наближення до гармати також зменшується, бо степінь групування електронів тут є ще малим.

Фазову умову генерації для ЛОХ можна скласти на основі фазової умови самозбудження ЛБХ, сумуючи набіги фаз сигналу по кільцю внутрішнього оберненого зв'язку й прирівнюючи цю суму до цілого числа  $2\pi$ . При цьому слід брати найбільше кільце оберненого зв'язку, яке простягається від початку до кінця сповільнюючої системи, оскільки саме воно буде давати основний вклад у становлення генерації:

$$\frac{\omega L}{v_0} - \frac{\omega L}{|v_\phi|} - \phi = 2\pi n. \quad (11.28)$$

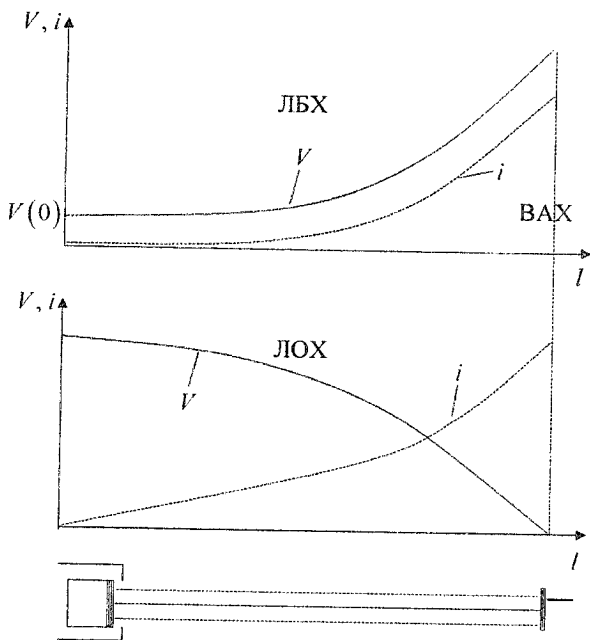


Рис. 11.9. Розподіл амплітуди ВЧ-напруги і змінної складової конвекційного струму пучка в ЛБХ і ЛОХ

Перші два члени лівої частини цього виразу описують набіги фаз. Перший описує набіг фази сигналу, який переноситься ХПЗ пучка (вважається, що фазова швидкість ХПЗ рівна  $v_0$ ), на довжині взаємодії. Другий член описує набіг фази сигналу при його поверненні до початку сповільнюючої системи. Рахунок набігу фаз ведеться назустріч фазовій швидкості, так що цей член має від'ємний знак. Величина  $\phi$  відповідає фазовому зсуву центра згустку електронів відносно хвилі в процесі його взаємодії із цією хвилею.

Для того щоб віддати енергію хвилі, електрони повинні мати швидкість дещо більшу за  $v_\phi$ . У процесі взаємодії із хвилею згусток переміщується відносно хвилі вперед (направо) і проходить через гальмівний півперіод  $E_z$ . Найбільш повно енергія електронів буде використана, якщо до кінця простору взаємодії згусток пройде весь гальмівний півперіод і величина  $\phi$  буде рівна  $-\pi$ . Тоді вираз (11.28) запишеться:

$$\frac{\omega L}{\nu_0} - \frac{\omega L}{|\nu_\phi|} = (2n-1)\pi. \quad (11.29)$$

Звідси можна знайти величину  $\nu_0$ , яка задовольняє умову самозбудження ЛОХ на заданій частоті:

$$\frac{1}{\nu_0} = \frac{1}{|\nu_\phi|} + \frac{(2n-1)\pi}{\omega L}. \quad (11.30)$$

Із цього рівняння випливає, що ЛОХ має декілька порядків генерації, які визначаються номерами  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Найменшому порядку  $n = 0$  відповідає мінімальна прискорююча напруга. Саме цей порядок збуджується легше за всіх інших і забезпечує найбільшу вихідну потужність ЛОХ. Порядки  $n > 0$  практичного значення не мають. Тому умова самозбудження ЛОХ записується:

$$\frac{1}{\nu_0} = \frac{1}{|\nu_\phi|} - \frac{\pi}{\omega L}. \quad (11.31)$$

Це рівняння показує, що в режимі генерації швидкість електронів  $\nu_0$  повинна бути дещо більшою від фазової швидкості хвилі  $\nu_\phi$ . Проте при  $\nu_0 \ll c$  і  $\lambda \ll L$  другим членом у правій частині можна знехтувати й рівняння зводиться до умови синхронізму  $\nu_0 \cong \nu_\phi(\omega)$ . Таким чином, генерація буде проходити на тій частоті, для якої виконується умова синхронізму. Змінюючи швидкість електронів у пучку  $\nu_0$ , можна відповідно до закону дисперсії сповільнюючої системи проводити переналаштування генератора за частотою. Діапазон довжин хвиль, у яких використовується ЛОХ, складає від дециметрів до часток міліметрів. Головна перевага таких генераторів – швидка зміна частоти.

### 11.5 Електронно-хвильові прилади: резистивний і плазмовий підсилювачі

Властивості ХПЗ можуть бути також використані для створення так званих електронно-хвильових приладів (ЕХП), які використовують для підсилення НВЧ-сигналів. У таких приладах промодульований пучок електронів проходить через певне середовище, яке не спричиняє опору руху електронів і в якому за рахунок взаємодії пучка зі збудженою ним поляризацією середовища амплітуда ХПЗ

наростає. Середовище або система, у яких такий ефект може спостерігатися, є різними. Проте у всіх випадках ефект підсилення може бути зведений до одного й того ж енергетичного принципу: від електронного пучка середовищем відбирається енергія, яка стимулює ріст повільної ХПЗ, яка, як нам відомо, має від'ємну енергію.

Конкретно механізм підсилення можна пояснити таким чином. Періодично рухаючись, електронні згустки, які називають ХПЗ, створюють у середовищі, у якому вони рухаються, біжучі разом з ним хвилі поляризації. У результаті взаємодії із цими хвилями й відбувається підсилення ХПЗ. Проте на відміну від ЛБХ, де хвилі в сповільнюючій системі можуть існувати і за відсутності пучка (власні хвилі), хвилі поляризації є ніби дзеркальним відбиттям ХПЗ у середовищі і за відсутності модульованого пучка існувати самостійно не можуть. Такі хвилі називають вимушеними й вони мають ту ж довжину й фазову швидкість, що і ХПЗ, проте зсунуті відносно них за фазою. Саме такий фазовий зсув і забезпечує ефективне групування електронного пучка.

### ***11.5.1 Резистивний підсилювач***

Простим прикладом підсилювача, у якому підсилення досягається шляхом поглинання енергії хвилі, може бути резистивний підсилювач, у якому промодульований електронний пучок пропускається через середовище, що має активну провідність  $\sigma$ , причому саме середовище не перешкоджає прольоту самих електронів пучка. При проходженні через таке середовище електронного потоку, який несе на собі ХПЗ, в одиниці об'єму поглинається й перетворюється в теплоту потужність  $P = \sigma E_m^2 / 2$ , де  $E_m$  – амплітуда змінного електричного поля хвилі. Таким шляхом можна здійснити відбір енергії від повільної ХПЗ. А відбір повинен супроводжуватися збільшенням глибини модуляції електронного потоку цією хвилею. Відбір же енергії у швидкої хвилі буде супроводжуватися її затуханням.

Середовище, яке має активні втрати, описується комплексною відносною діелектричною проникністю  $\varepsilon = \varepsilon_r + j\varepsilon_i$ , у якої уявна частина пов'язана з активною провідністю відомим співвідношенням  $\varepsilon_i = -\sigma / (\varepsilon_0 \omega)$ . З урахуванням того, що  $\varepsilon \neq 1$ , дисперсійне рівняння для ХПЗ набуде вигляду:

$$(\omega - \gamma \nu_0)^2 = \frac{\omega_B^2}{\varepsilon}. \quad (11.32)$$

Коренями цього рівняння є  $\gamma = \frac{\omega}{\nu_0} \pm \frac{\omega_B}{\nu_0 \sqrt{\varepsilon}}$ . Оскільки алгебраїчні операції з комплексними числами приводять до комплексних чисел, то можна записати  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \left( \varepsilon_r - j \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right)^{-1/2} = a + jb$ , де  $a$  і  $b$  обчислюються за формулою Муавра. Для додатних значень  $\varepsilon_r$  і  $\sigma$  обидва ці числа завжди будуть більші від нуля. У результаті  $\gamma$  стає комплексним числом:

$$\gamma = \gamma' + j\gamma'',$$

$$\text{де } \gamma' = \frac{\omega}{\nu_0} \pm \frac{a\omega_B}{\nu_0}, \quad \gamma'' = \pm \frac{b\omega_B}{\nu_0}.$$

Тоді ХПЗ будуть мати вигляд:

$$\rho_{1,2} = \rho_{m1,2} e^{j(\omega t - \gamma_{1,2} z)} \exp\left(\pm \frac{b\omega_B}{\nu_0} z\right), \quad (11.33)$$

де верхній індекс 1 відповідає повільній хвилі, а нижній знак 2 — швидкій. Аналогічним чином можуть бути записані вирази для компонент  $\nu$ ,  $E$  і  $j$  ХПЗ.

Як бачимо, у результаті проходження промодульованого електронного потоку через провідне середовище фазова швидкість ХПЗ дещо змінюється, а у виразі для амплітуди множник експоненціально залежить від координати поширення  $z$ . Для швидкої хвилі вздовж осі  $z$  амплітуда експоненціально падає, а для повільної — зростає. На довжині  $L$  амплітуда будь-якої з компонент повільної хвилі зростає в  $k$  раз, тобто

$$k = \frac{\nu_1(L)}{\nu_1(0)} = \frac{\rho_1(L)}{\rho_1(0)} = \frac{E_1(L)}{E_1(0)} = \exp\left(\frac{b\omega_B}{\nu_0} L\right).$$

Реально резистивний підсилювач може бути реалізований у пристрої, який показаний на рис. 11.10. У ньому промодульований електронний потік пропускається через канал з речовиною, яка має активну провідність. Із цією речовиною зщеплюється електричне поле й на виході з каналу отримуємо згрупований електронний по-



тік, що входить у резонатор-уловлювач, у якому ХПЗ перетворюються в електромагнітні коливання. Він дещо нагадує пролітний клістрон. Проте, на відміну від клістрона, де промодульовані за швидкостями електрони рухаються в просторі дрейфу за інерцією без дії сторонніх сил (пасивний дрейф), у резистивному підсилювачі промодульовані електрони рухаються через активний дрейф, тобто електрони пучка рухаються під дією електричних полів поляризації речовини, що посилює їх групування й ущільнення в згустки сильніше, ніж у клістроні.

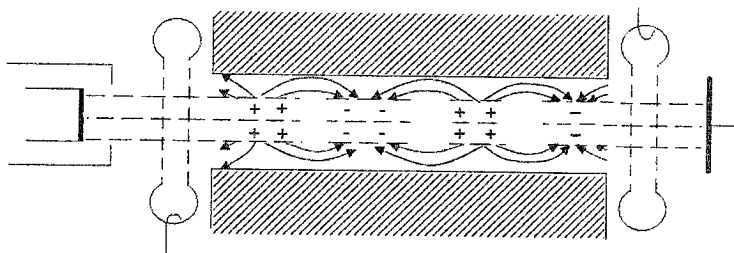


Рис. 11.10. Схематичне зображення резистивного підсилювача

### 11.5.2 Плазмовий підсилювач

Ефективне підсилення ХПЗ може бути досягнуте шляхом пропускання електронного пучка через середовище, яке має також індуктивну провідність. У цьому випадку діелектрична проникність середовища з індуктивною провідністю є дійсною, але від'ємною, тобто  $\varepsilon < 0$ ,  $-\varepsilon = \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . Тоді розв'язок дисперсійного рівняння набуде вигляду:

$$\gamma = \frac{\omega}{v_0} \pm j \frac{\omega_B}{v_0 \sqrt{\varepsilon}}. \quad (11.34)$$

Коефіцієнти поширення для повільної й швидкої хвиль є тепер комплексно спряженими величинами, а самі вирази для компонент хвиль мають вигляд:

$$A_{1,2} = A_{m1,2} e^{j\left(\omega t - \frac{\omega}{v_0} z\right)} \exp\left(\pm \frac{\omega_B}{v_0 \sqrt{\varepsilon}} z\right). \quad (11.35)$$

Підсилення зростає зі збільшенням густини пучка, зменшенням його швидкості  $v_0$  та абсолютної величини  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  підсилення наближається до  $\infty$ .

Середовищем, яке має індуктивну провідність, може бути плазма. Дійсно, при  $\omega_p > \omega$  діелектрична проникність плазми стає індуктивною. Крім цього, плазма практично дозволяє електронному потоку вільно проходити через неї. Дисперсійне рівняння для такої системи має вигляд:

$$\frac{\omega_B^2}{(\omega - \gamma \nu_0)^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (11.36)$$

Найбільше підсилення отримується на частоті  $\omega \leq \omega_p$ , де діелектрична проникність плазми є від'ємною, але близькою до нуля.

Фізичну природу такого підсилення можна пояснити, використовуючи закон Кулона, згідно з яким у середовищі з  $\varepsilon > 0$  одноіменні заряди  $q_1$  і  $q_2$  відштовхуються, а різноіменні притягуються. Проте в середовищі з  $\varepsilon < 0$  картина буде вже протилежною. Тому одноіменні заряди, які утворюють згусток, повинні взаємно притягуватися, у результаті чого згусток усе більше буде ущільнюватися. Як звідси випливає, сила такої взаємодії повинна бути невеликою, тоді  $\varepsilon < 0$  і буде наближатися до нуля.

Агентом, який відбирає енергію від електронного пучка (згустків) і який спричиняє ріст повільної ХПЗ, будуть електрони плазми. Під дією електричних полів згустків, які пролітають, вони приходять у коливальний рух, на що затрачається повна енергія. Особливо цей ефект підсилюється поблизу плазмового резонансу, де підсилення стає максимальним. Цей ефект широко використовують у НВЧ-резонаторах плазмохімічного травлення й осадження нанощарів.

## 11.6 Електронні прилади НВЧ у схрещених полях (типу $M$ )

Особливе місце в електроніці НВЧ займає клас приладів, у яких електричне поле (його постійна й високочастотна складова) направлене перпендикулярно до постійного магнітного поля. За назвою першого з приладів подібного типу – магнетрона – весь клас таких приладів називають приладами магнетронного типу, або приладами  $M$ -типу. На відміну від розглянутих вище приладів, у яких постійне магнітне поле направлене паралельно до основної компоненти високочастотного електричного поля (прилади типу  $O$ ), де магнітне поле відіграє допоміжну роль для утримання електронного пучка

від розбухання і загалом може бути відсутнє, у приладах типу  $M$  магнітне поле визначає вже характер руху електронів у високо-частотному полі і є необхідним елементом для їх функціонування.

Особливістю приладів магнетронного типу відносно всіх приладів НВЧ є їх високий електронний ККД, який може досягати 70–90%. Цей параметр і визначає області застосування таких приладів, коли необхідно забезпечити високу потужність й ефективність, наприклад у РЛС.

### *11.6.1 Електроніка приладів типу $M$*

Як було показано вище, у схрещених електричному й магнітному полях  $E_0$  і  $B_0$  заряди здійснюють дрейфовий рух зі швидкістю  $v_{dp} = E_0/B_0$ , перпендикулярною до напрямів  $E_0$  і  $B_0$  (формула Лорентца). Якщо в таку систему полів ввести яким-небудь чином електрони, то вони утворюють направлений потік, який може бути використаний для взаємодії із сповільнюючою системою, якщо дрейфова швидкість зарядів у потоці буде направлена вздовж сповільнюючої системи і буде близькою до фазової швидкості сповільненої хвилі (синхронізм).

Подібного роду пристрій можна створити, замінивши додатний електрод у правій частині схеми на рис. 10.7 (правіше лінії  $aa$ ) плоскою сповільнюючою системою (типу гребінки). У результаті отримаємо новий прилад, який працює за принципом синхронної взаємодії електронів з повільною електромагнітною хвилею, який подібний до ЛБХ, але відрізняється способом формування електронного пучка.

Прилади НВЧ  $M$ -типу мають ряд специфічних особливостей, які відносяться до принципу групування зарядів, способів відбору енергії від електронного пучка конструктивним оформленням.

Тому спершу розглянемо принцип групування електронів у системах зі схрещеними полями. Для цього розглянемо плоску систему електродів, у якій верхній електрод має позитивний потенціал по відношенню до нижнього й створює в міжелектродному проміжку постійне електричне поле  $E_0$ . Перпендикулярно до площини зображення прикладене постійне магнітне поле  $B_0$ . Зліва направо паралельно до поверхні електродів рухається смужковий електронний пучок товщиною  $\delta$ , заряди якого мають швидкість

$v_0 = v_{\partial p} = E_0/B_0$ . Такий пучок створюється відповідно електронною гарматою. Нехай верхній електрод являє собою поверхню сповільнюючої системи (гребінки), уздовж якої з фазовою швидкістю  $v_\phi$  біжить сповільнена електромагнітна хвиля.

Рух електронного пучка розглянемо в системі координат  $x'y'z'$ , яка рухається зліва направо зі швидкістю, рівною фазовій швидкості хвилі. У такій системі високочастотне поле стане ніби застиглим, що залежить від координат  $x'y'z'$  і не залежить від часу. Конфігурація електричного поля хвилі схематично зображена на рис. 11.11 силовими лініями зі стрілками.

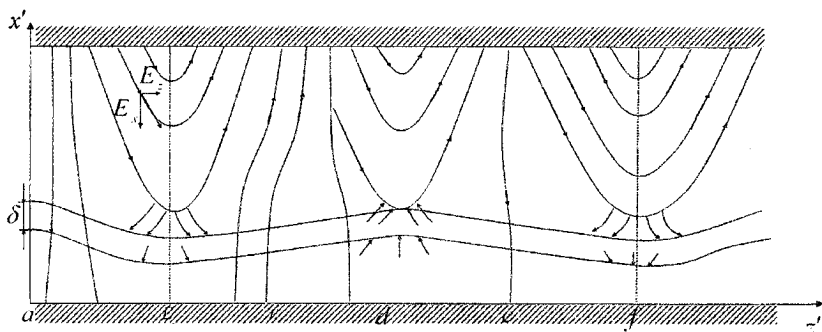


Рис. 11.11. Взаємодія електронного пучка з високочастотним електричним полем у приладі НВЧ  $M$ -типу

Якщо тепер прийняти, що дрейфова швидкість електронів пучка рівна фазовій швидкості хвилі, то електрони будуть рухатися разом із хвилею, і для аналізу їх руху в системі координат  $x'y'z'$  можна використати поняття дрейфу зарядів у стаціонарних схрещених полях.

Дрейфовий рух електронів повинен проходити перпендикулярно до напрямку силових ліній електричного поля хвилі. При цьому поздовжня компонента електричного поля  $E_x$  зумовлює поперечне переміщення електронів у напрямі  $x'$ , а поперечна компонента  $E_z$  – у напрямі  $z'$ . Швидкість дрейфу й переміщення електронів показані на рис. 11.11 короткими стрілками.

У результаті таких поздовжніх і поперечних переміщень електронний пучок товщиною  $\delta$  дещо деформується. З рисунка видно, як

крайні елементи пучка розтягуються в напрямі  $z$  і стискаються в напрямі  $x$ , переміщуючись униз чи ввверх.

У результаті за рахунок такого поперечного групування велика частина зарядів пучка накопичується в області, де поздовжнє гальмівне поле є максимальним. Окрім того, у цих областях пучок вигинається до сповільненої системи. Таким чином проходить групування електронів.

Електронний пучок, розділений за рахунок поперечного групування й фазової селекції на окремі згустки, які зібрані в області максимального гальмування, буде вже віддавати свою енергію полю хвилі. Зростаючи за амплітудою, це поле буде ще сильніше групувати пучок, що приводить до ще сильнішої віддачі енергії електронів полю. Це продовжується до тих пір, поки нелінійні елементи й ефекти не зупинять цей процес.

А тепер проведемо розрахунок взаємодії електронного пучка з хвилею сповільнюючої системи в приладі НВЧ зі схрещеними полями. У лінійному наближенні цей розрахунок буде складатися з двох частин:

- аналізу руху зарядів у схрещених полях, знаходження деформації електронного пучка й групування електронів;
- розрахунок взаємодії згрупованого електронного пучка на хвилю сповільнюючої системи.

У результаті такого розрахунку отримаємо дисперсійне рівняння, за допомогою якого можна визначити параметри приладу НВЧ: коефіцієнт підсилення, частотний діапазон та ін.

Рівняння руху зарядів у схрещених полях на основі формули Лорентца можуть бути записані у вигляді:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e}{m} E_x - \omega_H v_z, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{e}{m} E_z + \omega_H v_x, \quad (11.37)$$

де  $\omega_H = eB_0/m$ ;  $E_x$ ,  $E_z$  – поперечна й поздовжня складові електричного поля. Поперечне поле складається з постійної компоненти  $E_0$  і високочастотної компоненти  $E_x$ .

Якщо сповільнююча система має достатньо велике сповільнення, то компоненти її поля можуть бути записані у вигляді:

$$E_x = j E(x) e^{j(\omega t - \gamma_0 z)}, \quad E_z = E(x) e^{j(\omega t - \gamma_0 z)}, \quad (11.38)$$

де  $E(x) = E_m e^{\gamma_0 x}$ .

Будемо вважати, що наявність електронного пучка структури поля не змінює. Це справедливо, якщо густина струму в пучку є досить малою. Тоді залишається справедливим співвідношення  $E_x = j E_z$ , а змінюється тільки поздовжній коефіцієнт поширення  $\gamma$ .

Поздовжня швидкість руху зарядів має постійну й змінну компоненти, тоді як поперечна – тільки змінну:  $v_z = v_0 + v_z$ ,  $v_x = v_x$ .

Отже, можемо записати  $v_0 = v_{0p} = E_0/B_0$ ,  $\frac{dv_x}{dt} = \frac{e}{m} E_x - \omega_H v_z$ ,

$\frac{dv_z}{dt} = \frac{e}{m} E_z - \omega_H v_x$ . Розв'язок рівнянь такого типу будемо шукати у вигляді  $A(z, t) = A_m e^{j(\omega t - \gamma z)}$ .

У лінеаризованому вигляді компоненти повної похідної від швидкості можна записати:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Тоді  $\frac{dv_x}{dt} = j v_x v_0 \Gamma$ , а  $\frac{dv_z}{dt} = j v_z v_0 \Gamma$ , де  $\Gamma = \frac{\omega}{v_0} - \gamma = \frac{\omega}{v_0} \left( \frac{v_\phi - v_0}{v_\phi} \right)$

– параметр, який пов'язує швидкості  $v_0$  і  $v_\phi = \omega/\gamma$ .

Аналогічно можна пов'язати змінні компоненти переміщень електронного пучка по  $x$  і  $z$  відповідно до їх швидкостей:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = j x v_0 \Gamma, \quad \frac{dz}{dt} = v_z = j z v_0 \Gamma.$$

Тоді рівняння руху електронів можна описати системою:

$$\begin{aligned} -v_0^2 \Gamma x &= \frac{e}{m} E_x - j v_0 \Gamma \omega_H z, \\ -v_0^2 \Gamma^2 z &= \frac{e}{m} E_z + j v_0 \Gamma \omega_H x. \end{aligned} \quad (11.39)$$

Із цих рівнянь отримаємо шукані переміщення  $x$  і  $z$  у явному вигляді:

$$\begin{aligned} x &= \frac{e}{m} \frac{E_x}{(\omega_H^2 - v_0^2 \Gamma^2)} + j \frac{\omega_H}{v_0 \Gamma} \frac{e}{m} \frac{E_z}{(\omega_H^2 - v_0^2 \Gamma^2)}, \\ z &= \frac{e}{m} \frac{E_z}{(\omega_H^2 - v_0^2 \Gamma^2)} - j \frac{\omega_H}{v_0 \Gamma} \frac{e}{m} \frac{E_x}{(\omega_H^2 - v_0^2 \Gamma^2)}. \end{aligned}$$

Як відомо, умова синхронізму вимагає, щоб фазова швидкість хвилі була близькою до швидкості електронів  $v_0$ . Тому  $v_0 \Gamma / \omega_H \ll 1$  і є умовою синхронізму. Тоді першими членами для переміщень  $x$  і  $z$  можна знехтувати в порівнянні з іншими:

$$x = -\frac{E_z}{j\Gamma v_0 B_0}, \quad z = \frac{E_x}{j\Gamma v_0 B_0}. \quad (11.40)$$

Ці вирази описують викривлення електронного пучка (рис. 11.11) і перерозподіл його густини. Отже, у цілому переміщення зарядів уздовж осі  $z$  може бути описане виразом

$$z = v_0(t - t_1) + \frac{E(x)}{\Gamma E_0} e^{j(\omega t - \gamma z)}, \text{ де } t_1 - \text{момент входження заряду в про-$$

стір взаємодії.

Знайдемо тепер конвекційний струм пучка, використавши відоме співвідношення  $i(z, t) = i(0, t_1) \frac{dt_1}{dt}$ . Тоді, диференціюючи вираз для переміщення  $z$ , отримаємо:

$$\frac{dt_1}{dt} = 1 + j\omega \frac{E(x)}{\Gamma v_0 E_0} e^{j(\omega t - \gamma z)}.$$

Таким чином, конвекційний струм пучка в місці його входження в простір взаємодії є постійним у часі й рівним  $i(0, t_1) = I_0$ . Отже, отримуємо, що конвекційний струм пучка

$$i(z, t) = I_0 \left( 1 + j \frac{\omega}{\Gamma v_0} \frac{E_z}{E_0} \right), \text{ а змінна його складова } i = j \frac{\omega}{\Gamma v_0} \frac{E_z}{E_0} I_0$$

описує поздовжню складову конвекційного струму електронного пучка. Ураховуючи, що конвекційний струм пучка  $i$  та потенціал  $V$  хвилі пов'язані в сповільнюючій системі співвідношенням

$$V = \frac{\gamma_0 \gamma w}{\gamma_0^2 - \gamma^2} i, \text{ а поле } E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = j\gamma V, \text{ із цих співвідношень отри-}$$

муємо шукане дисперсійне рівняння:

$$\gamma_0^2 - \gamma^2 = \gamma_0 \gamma^2 \frac{w I_0}{E_0} \frac{\omega}{\omega - \gamma v_0}. \quad (11.41)$$

Увівши позначення  $\gamma_0 = \omega/v_0$  і  $C_m^2 = \frac{I_0 w}{2E_0} \gamma_e$ , рівняння (11.41)

приведемо до вигляду:

$$(\gamma^2 - \gamma_0^2)(\gamma_e - \gamma) = 2C_m^2 \gamma^2 \gamma_0. \quad (11.42)$$

Таким чином, отримали дисперсійне рівняння третього степеня відносно  $\gamma$ . Проте степінь цього рівняння можна зменшити, якщо розглянути  $\gamma$  поблизу точки синхронізму. Якщо  $\gamma_0 = \gamma_e(1 + C_m b)$  і

$\gamma = \gamma_e(1 + C_m \delta)$  як для ЛБХ, де  $b = \frac{1}{C_m} \frac{v_0 - v_{\phi 0}}{v_{\phi 0}}$  – параметр холодної

сповільнюючої системи, то дисперсійне рівняння спрощується.

Якщо  $C_m b \ll 1$  і  $C_m \delta \ll 1$  і виражають умову синхронізму та випадок слабкого пучка, то дисперсійне рівняння матиме вигляд:

$$\delta^2 - b\delta + 1 = 0. \quad (11.43)$$

Розв'язок цього рівняння має такі корені:

$$\delta_{1,2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - 1}.$$

Це вказує на те, що в системі можливі дві хвилі, які мають різні коефіцієнти поширення. Для  $|b| > 2$  обидва корені є дійсними й підсилення немає. Підсилення проявляється при  $|b| < 2$  і визнача-

ється уявною частиною  $\text{Im} \delta_{1,2} = \pm \sqrt{1 - \frac{b^2}{4}}$ . Максимальна величина

досягається при  $|b| = 0$ , тобто при точному синхронізмі. Тоді максимальне погонне підсилення хвилі (у  $\delta b$  на одиницю довжини) рівне  $G = 8,68 C_m \gamma_e$ .

### 11.6.2 Види приладів типу М

Усі прилади НВЧ типу М є пристроями з розподіленою взаємодією, особливості якої були розглянуті в попередньому підрозділі. Різниця конкретних видів цих приладів зводиться в основному до різниці в способах створення електронних потоків та характері оберненого зв'язку, який керує їх роботою.

До першої групи відносяться ЛБХ М і ЛОХ М, принцип дії яких у загальних рисах подібний до принципу дії аналогічних приладів типу О. ЛБХ М і ЛОХ М можуть виготовлятися в лінійному



конструктивному (рис. 11.12, а) або в кільцевому (рис. 11.12, б) оформленні. В останньому випадку сповільнююча система, електронний потік та елементи приладу звернуті в кільце. На практиці такий варіант має перевагу, оскільки забезпечує менші габаритні розміри лампи й більш зручну конструкцію магніту.

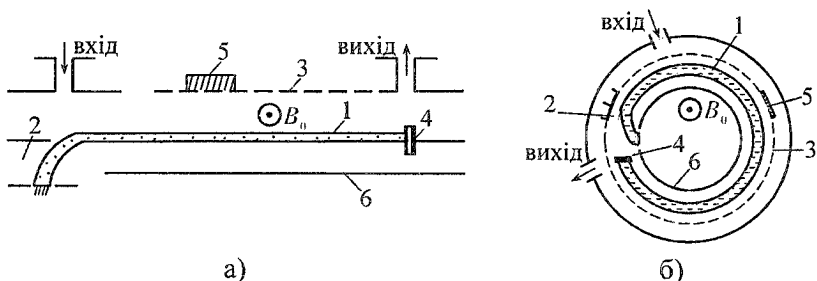


Рис. 11.12. Схема лампи біжучої хвилі: а) лінійне оформлення; б) кільцеве оформлення

Електронний пучок у ЛБХ  $M$  і ЛОХ  $M$  створюється гарматою типу  $M$  і закінчується на спеціальному колекторі. Траєкторія електронів проходить уздовж сповільнюючої системи. У приладах із замкнутим електронним потоком (платинатронах, магнетронах) немає спеціального колектора, на якому б закінчувався електронний потік, а відпрацьовані електрони видаляються прямо на сповільнюючу систему. У процесі руху вони можуть декілька раз обійти вздовж сповільнюючої системи. При цьому з'являється обернений зв'язок по електронному потоку, що й обмежує їх частотні властивості. Джерелом електронів у приладах із замкненим потоком є циліндричний катод, уся бічна поверхня якого є емітуючою. Це дозволяє отримати великі струми емісії й потужності у порівнянні із приладами з незамкненим потоком.

У платинатроні сповільнююча система є розімкненою (тут є вхід і вихід), а в магнетроні – замкнутою. Таким чином, у магнетроні реалізується 100%-й обернений зв'язок по сповільнюючій системі, що й полегшує самозбудження коливальних й отримання генерації на декількох дискретних частотах.

ЛБХ типу  $M$  (ЛБХ  $M$ ) подана на рис. 11.12, а. Електронний смужковий пучок 1 формується гарматою 2 і проходить уздовж сповільнюючої системи 3. Магнітне поле направлено перпендикулярно

до площини рисунка. Пучок закінчується на колекторі 4. Для подавлення оберненого зв'язку, який може виникнути за рахунок відставання хвиль від кінців сповільнюючої системи, у середній його частині ставлять поглинач 5.

Тут умовою синхронізму є рівність фазової швидкості хвиль у сповільнюючій системі та дрейфової швидкості електронів

$$v_{\phi} = \frac{E_0}{B_0} = \frac{U_0}{B_0 d},$$

де  $U_0$  – напруга на сповільнюючій системі,  $d$  – міжелектродна відстань. Практично більш зручним є кільцевий варіант ЛБХ  $M$ , який зображений на рис. 11.12, б. Він містить усі ці елементи, що й лінійний, і відрізняється від нього тільки тим, що вся сповільнююча система звернута в кільце. Такі лампи працюють як в імпульсному, так і в неперервному режимах.

Лампа оберненої хвилі типу  $M$  (ЛОХ  $M$ ), яку називають карсинатроном, у кільцевому варіанті є подібною на ЛБХ  $M$  з різницею, яка полягає в тому, що вона немає входу, а тільки вихід, розміщений на кінці гармати сповільнюючої системи. Поглинач у ЛОХ  $M$  ставиться на колекторному кінці сповільнюючої системи й служить для усунення оберненого зв'язку, який виникає за рахунок відбивання сигналу в кінці системи. У ролі сповільнюючої системи частіше всього використовується система із зустрічними штирями, у якій використовується основна від'ємна просторова гармоніка. Специфіка ЛОХ типу  $M$  або  $O$  полягає в тому, що опору зв'язку для оберненої хвилі необхідно приписувати від'ємний знак, який ураховує обернений напрям потоку потужності у сповільнюючій системі. У такому випадку параметр підсилення  $G_r$  стає уявною величиною  $jD$ , де  $D = \sqrt{\frac{1}{2} |R_{ss}| \frac{I_0}{E_0} \gamma}$ . Поздовжній розподіл амплітуди

поля хвилі має вигляд

$$E(z) = \frac{E(0)}{2} (e^{jD\gamma_e z} + e^{-jD\gamma_e z}) = E(0) \cos(D\gamma_e z).$$

Ураховуючи, що в кінці сповільнюючої системи, де знаходиться поглинач, поле  $E(L)$  є рівним нулю. Звідси отримуємо умову існування коливань:

$$D\gamma_e z = \frac{\pi}{2}(2n-1),$$

де  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Частота коливань визначається умовою синхронізму  $\nu_\phi(\omega) = \nu_{op}$ . Основна її перевага полягає в широкому електронному переналаштуванні частоти в діапазоні  $0,5 \div 17 \text{ ГГц}$ .

Багаторезонаторний магнетрон є одним із перших приладів типу  $M$ . Він має замкнений електронний потік і замкнуту сповільнюючу систему, за рахунок чого забезпечується 100%-й обернений зв'язок. Магнетрон використовується як потужний генератор НВЧ-коливань.

Магнетрон зображений на рис. 11.13. Джерелом електронів є бічна поверхня циліндричного катода 1. Анодний блок магнетрона 2 являє собою замкнуту на себе сповільнюючу систему типу гребінки з резонатором. Зазвичай в анодному блоці є завжди парне число резонаторів. В один із резонаторів уводиться петля зв'язку 3, яка служить для зв'язку магнетрона з навантаженням. Полюси сповільнюючої системи з'єднуються через один короткими провідниками 4-зв'язками, які корегують дисперсійні властивості сповільнюючої системи. Постійне магнітне поле направлено вздовж осі системи, перпендикулярно до площини зображення. Живлення магнетрона здійснюється постійною або імпульсною напругою, яка прикладається між анодом і катодом.

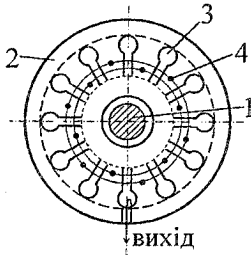


Рис. 11.13. Схема багаторезонаторного магнетрона

Основна відмінність багаторезонаторного магнетрона, який відрізняється від інших приладів НВЧ типу  $M$ , полягає в замкнутості його сповільнюючої системи. З всього спектра хвиль, які можуть поширюватися в подібній сповільнюючій системі, тут можуть існувати тільки ті, для яких уздовж периметра сповільнюючої системи вкладається ціле число хвиль. Цю умову можна записати у вигляді:

$$\Delta\varphi_n \cdot N = 2\pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

де  $\Delta\varphi_n = \gamma_n h$  – набіг фази хвилі на одне полюсне відділення сповільнюючої системи (або інакше зсув фази між сусідніми резонаторами),  $N$  – число резонаторів,  $n$  – число хвиль, які вкла-

даються на периметрі анодного блоку,  $h$  – період сповільнюючої системи.

Кожному числу  $n$  відповідає свій тип коливань, що має свою картину поля й характеризується своїм коефіцієнтом поширення хвилі  $\gamma_n = \Delta\varphi_n/n = n/R_a$  ( $R_a$  – радіус анода магнетрона) і власною частотою  $\omega_n$ , яка пов'язана з коефіцієнтом поширення  $\gamma_n$  законом дисперсії сповільнюючої системи.

Фазову швидкість, з якою хвиля біжить по колу, можна характеризувати як фазовою коловою швидкістю  $v_{\phi n}$ , так і кутовою швидкістю:

$$\Omega_n = \frac{v_{\phi n}}{R_a} = \frac{\omega_n}{n}.$$

Із цього матеріалу випливає, що в анодному блоці магнетрона існує нескінченна кількість типів власних коливань, що відповідають різним значенням  $n$ . У дійсності типи коливань для  $n > N/2$  починають вироджуватися, тобто повторюють властивості коливань з  $n < N/2$ , і тому існують тільки  $N/2 + 1$  різних типів коливань.

При  $n = N/2$  коливання в сусідніх резонаторах здійснюються із зсувом за фазою на  $180^\circ$ . Відповідно, фази потенціалу на суміжних полюсах сповільнюючої системи будуть відрізнятися на  $\pi$ .

Уздовж анодного блоку встановлюється стояча хвиля з частотою  $\omega_\pi$  і довжиною хвилі, рівною двом полюсним областям.

Саме цей тип коливань – протифазних ( $\pi$ -тип) – часто використовують у магнетронах.

Зі збільшенням номера коливань від 0 до  $N/2$  відносна різниця між сусідніми значеннями  $\gamma_{n+1}$  і  $\gamma_n$  зменшується. Відповідно зменшується й відносна різниця між  $\omega_n$  і  $v_{\phi n}$  для  $(n+1)$ -ого і  $n$ -ого типів. Це зрозуміло з рис. 11.14, де крива 1 зображає залежність безрозмір-

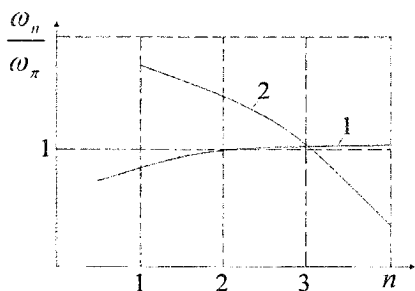


Рис. 11.14. Власні частоти для різних типів коливань у багато-резонаторному магнетроні: 1 – без зв'язки; 2 – зі зв'язками

ної частоти  $\omega_n/\omega_\pi$  від номера типу хвилі, яка є фактично побудованою в безрозмірних координатах дисперсійною залежністю системи, оскільки  $n = \gamma_n R_a$ . Із графіків видно, як з ростом  $n$  значення  $\omega_n$  зближуються.

При використанні для роботи магнетрона коливань  $\pi$ -типу таке положення є дуже незручним, бо поряд з  $\pi$ -типом коливань можуть збуджуватися й інші типи. Щоб подавити збудження цих небажаних коливань необхідно вжити заходів щодо розділення частот. Це можна зробити, змінивши дисперсійні властивості сповільнюючої системи. Саме із цією метою використовують зв'язки. Для коливань  $\pi$ -типу зв'язки з'єднують еквіпотенціальні полюси, тому струми, які зрівноважуються, по зв'язках не протікають. Вони лише збільшують ємність між сусідніми полюсами, зменшуючи власну частоту резонаторів і частоту коливань  $\pi$ -типу. Як наслідок, розподілення за частотою між  $\pi$ -типом і найближчим до нього нижчим типом помітно зростають, що дозволяє збуджувати  $\pi$ -тип коливань практично в чистому вигляді. З графіків також видно, що зв'язки змінюють вид дисперсії. Так, для кривої 1 дисперсія додатна, а для кривої 2 – від'ємна.

У магнетроні завжди виконується умова  $R_a - R_\kappa < R_a$  і тому умова синхронізму записується

$$\langle v_{\phi n} \rangle = \langle v_{op} \rangle = \Omega_n \frac{R_a + R_\kappa}{2} = \frac{U_0}{B_0 (R_a - R_\kappa)},$$

де  $R_a$  і  $R_\kappa$  – радіуси анодного блоку й катода. Тоді анодна напруга, яка необхідна для забезпечення синхронізму, для хвилі  $\pi$ -типу буде мати вигляд:

$$U_{\phi n} = \frac{\omega_n}{2n} B_0 (R_a^2 - R_\kappa^2).$$

Рухаючись у схрещених постійних полях  $E_0$  і  $B_0$  та високочастотному електричному полі сповільнюючої системи, електрони будуть групуватися в згустки подібно до того, як це було описано вище й показано на рис. 11.11, й у міру віддачі ними енергії полю НВЧ наблизяться до анода.

Проте, на відміну від приладів  $M$ -типу з незамкнутим електронним потоком (ЛБХ  $M$  і ЛОХ  $M$ ), де в процесі руху згустки виникають, ущільнюються й виплескуються на електроди, у магнетроні утворюються вже стаціонарні області, які розміщені там, де поздовжнє поле високої частоти є гальмівним. У таких областях утворюються немовби русла, по яких течуть електрони в радіальному напрямі від катода на анод.

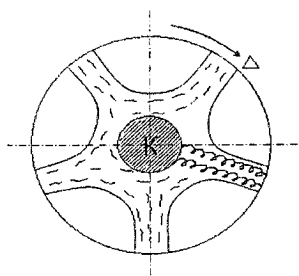


Рис. 11.15. Форма електронного потоку в багаторезонаторному магнетроні ( $N = 10$ )

Такі русла обертаються навколо катода з такою ж швидкістю, як і поле хвилі. Картина розподілу заряду в області між катодом та анодом сповільнюючої системи нагадує колесо, спиці якого утворюють такі русла (рис. 11.15). Тому синхронізм у магнетроні підтримується вже автоматично.

До недоліків магнетрона слід віднести невисоку стабільність частоти коливань, які ним генеруються.

## 11.7 Прилади, які використовують вимушене випромінювання вільних електронів

У всіх розглянутих вище приладах НВЧ, які використовують взаємодію електронних потоків як із зосередженими електромагнітними полями, так і з біжучими хвилями, обов'язковим елементом є електродинамічні пристрої (резонатори або сповільнюючі системи), розміри або структура яких є меншою від довжини хвилі.

Щоб обійтися без сповільнюючих систем і резонаторів, можна використати випромінювання прискореного заряду, наприклад електрона, який коливається в спеціально створеному статичному електричному чи магнітному полях. Такий електрон є немовби елементарним осцилятором, який випромінює електромагнітні хвилі з частотою своїх коливань. Однак для того, щоб це випромінювання було достатньо потужним, необхідно виконати дві умови.

1. Потужність випромінювання коливального заряду буде зростати, якщо він буде здійснювати коливання в полі досить сильної електромагнітної хвилі, частота й напрям електричного поля якої збігаються з коливаннями заряду, а фаза забезпечує його гальмуван-

ня. Енергія заряду при цьому буде передаватись електромагнітній хвилі й збільшувати її амплітуду. Таким чином, рух заряду повинен здійснюватись у зовнішньому електромагнітному полі. Подібне випромінювання, на відміну від власного випромінювання вільноколивального заряду, має назву вимушеного або індукованого.

2. У реальних пристроях має місце випромінювання не одинокого заряду, а великої їх сукупності. Але в цьому випадку фаза їх повинна бути такою, щоб усі вони зазнавали гальмування, рухаючись проти сил, які діють на них з боку електричного поля електромагнітної хвилі. Коливання зарядів повинні бути такими, щоб вони були узгоджені одне з одним та з полем хвилі, тобто всі вони повинні бути когерентними.

Якщо в системі, де виконуються ці умови, розглядати кожний коливальний електрон як елементарний збуджений осцилятор, то така система подібна до квантового генератора – мазера або лазера. Тільки тут як робоче тіло використовується сукупність осцилюючих електронів. Тому такі подібні пристрої часто називають мазерами або лазерами на вільних електронах.

### ***11.7.1 Способи фазування електронів***

Вимоги когерентності електронних коливань довільно важко виконати, оскільки в реальному потоці електронів, які рівномірно влітають у статичне електричне чи магнітне поле, фази коливань електронів є рівноймовірнісними, і число електронів, що зазнає прискорення, є рівним числу електронів, які сповільнилися, так що в середньому ефективність вимушеного випромінювання стає рівною нулю.

Тому найбільш складною задачею є створення відповідного фазування коливань усієї сукупності електронів або, якщо мова йде про взаємодію їх з біжучою хвилею, групування електронів у згустки, які рухаються весь час у гальмівному полі цієї хвилі.

Сьогодні існує один універсальний механізм, який забезпечує вільне фазування коливальних електронів: достатньо лише, щоб ці коливання були неізохронними, тобто щоб їх частота залежала від амплітуди коливань. Оскільки для будь-яких коливань достатньо великої амплітуди неізохронність виконується, то такий механізм буде діяти в цих електронних приладах.

Тоді нехай у деякому об'ємі існує певна сукупність електронів, які здійснюють осциляції з частотою  $\Omega$ , а фаза одиничного елект-

рона буде визначатися рівністю  $\varphi = \Omega t + \varphi_0$ , де  $\varphi_0$  – початкова фаза коливань, що має довільне значення.

На рис. 11.16 у координатах  $\varphi = \varphi(t)$  залежність  $\varphi = \Omega t + \varphi_0$  подана у вигляді прямих ліній, нахил яких відповідає частоті  $\Omega$ . Нехай у цьому об'ємі також існує електричне поле  $E(t) = E_m \sin \omega t$ , для якого  $\omega = \Omega$ . Хід фази цього поля може бути зображений на цьому рисунку лінією  $AA'$  такого ж нахилу. Для тих електронів, у яких  $\varphi_0 > 0$  ( $0 < \varphi_0 < \pi$ ), поле буде прискорюючим і вони будуть набирати енергію. Ті електрони, у яких  $\varphi_0 < 0$  ( $-\pi < \varphi_0 < 0$ ), будуть гальмуватися.

Якщо коливання електронів неізохронні, то зміна їх енергії (амплітуди коливань) повинна змінити частоту  $\Omega$ . Нехай ізохронність така, що при збільшенні амплітуди коливань вона зменшується. Тоді зображені в лівій частині рис. 11.16 траєкторії прискорених електронів будуть розміщені більш полого, а сповільнених – більш круто. У результаті цього утворюється фазовий фокус  $\phi$  навколо електронів з  $\varphi_0 = 0$  (нульових електронів). Усі електрони будуть намагатися сформувати таку фазу, у якій вони б не прискорювались і не сповільнювались електричним полем. Таке фокусування буде проходити навколо нульового електрона (точка  $P$ ), який знаходиться на низхідній вітці кривої  $E(t)$ . Якщо частота поля  $\omega$  є дещо більшою  $\Omega$ , то хід фази поля зобразиться вже прямою  $AB$ . При цьому утворений фазовий фокус розміститься дещо нижче цієї прямої, тобто фазовий згусток електрона буде мати фазу, яка відповідатиме сповільненню.

При зворотній ситуації, коли зі збільшенням енергії електронів частота їх коливань буде зростати (права частина рис. 11.16), фокус уже буде утворюватися навколо нульового електрона (точка  $P'$ , яка знаходиться на висхідній вітці кривої  $E(t)$ ). Розмістити фазовий згусток у фазу гальмівного поля можна, прийнявши  $\omega < \Omega$ .

Під час самозбудження коливань збуджується і встановлюється поле, у якого частота відповідає оптимальному співвідношенню між  $\omega$  і  $\Omega$  за якого віддача енергії від електронів полю буде найбільшою.

Таким чином, достатньо будь-якої неізохронності осцилюючих електронів, щоб вони могли фокусуватися в згустки та віддавати



свою енергію зовнішньому електричному полю. У цьому полягає суть ізохронного фазування.

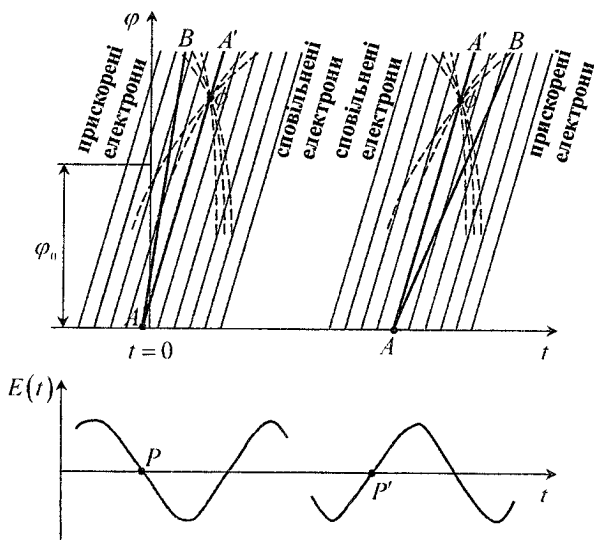


Рис. 11.16. Фазове фокусування неізохронних осциляторів

### 11.7.2 Електронні прилади, у яких використовуються коливання вільних електронів. Гіротрон

Використання вільних електронів для генерування НВЧ-коливань отримало широке поширення зовсім недавно. Проте цей принцип генерації застосовувався в електровакуумному тріоді з позитивною сіткою ще до появи клістронів.

У тріоді з позитивною сіткою електрони, емітовані катодом, стікають у потенціальну яму в області сітки й здійснюють у ній коливання, частота яких визначається потенціалом сітки, геометрією електродів та від'ємним потенціалом анода. За певних умов електронний потік створює в міжелектродному проміжку сітка-анод наведену електронну провідність від'ємного знака й віддає свою енергію збудженим коливанням НВЧ. Зрозуміло, що такий ефект є можливим лише за відповідного групування електронів, але механізм групування електронів саме забезпечується ізохронним фазуванням, тобто за групування електродів відповідальною є неізохронність коливань електронів навколо сітки.

Відбір енергії від електронів можна багатократно підсилити, якщо включити між електродами сітка–анод коливальний контур (резонатор), власна частота якого б збігалася з частотою коливань електронів у потенціальній ямі. Групуванню електронів може певною мірою допомагати фазова селекція, за якої електрони, які відбирають енергію від поля високої частоти, будуть викидатися на анод і катод лампи, тоді як електрони, які віддають свою енергію полю, залишаються довгий час у просторі взаємодії сітка–анод.

Сама ідея використання коливань електронів в електростатичній потенціальній ямі отримала свій розвиток у приладі НВЧ, який називають строфотроном (рис. 11.17). У ньому електрони, які випускаються катодом 1, здійснюють коливання в полі позитивного електрода 2, змінно відбиваючись від двох від'ємних електродів 3. У процесі коливань електрони переміщуються вздовж електродної системи і в кінцевому рахунку попадають на колектор. Сам резонатор розміщується між відбивачами 3. Неізохронність коливань електронів у потенціальній ямі, утвореній позитивним електродом, забезпечує групування електронів з появою змінної складової наведеного струму в колі від'ємних відбивачів 3. Частота таких коливань

визначається потенціалом позитивного електрода 2 і, як у тріода з позитивною сіткою, вона є пропорційною  $U_c^{1/2}$ . Такі прилади НВЧ використовують для генерування коливань у дециметровому діапазоні.

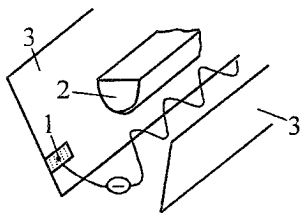


Рис. 11.17. Схема строфотрона

Розглянемо тепер електронно-циклотронний резонанс і його використання в гіротроні. Обертальний рух, якого електрони набувають у постійному магнітному полі, є прискореним рухом і може також бути використаний для отримання електромагнітного випромінювання. Його реалізацію подано на рис. 11.18. Нехай у постійному магнітному полі  $B_0$  під кутом  $\alpha$  до його силових ліній влітає потік електронів. Траєкторії електронів будуть мати вид спіралей, витягнутих уздовж магнітного поля. Поздовжня й поперечна швидкості електронів є рівними:

$$v_{\parallel} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{\perp} = v_0 \sin \alpha,$$

де  $v_0 = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}$  – повна швидкість електрона. Частота обертання електрона в магнітному полі  $\omega_H = eB_0/m$ . Перпендикулярно до магнітного поля прикладене високочастотне електричне поле  $E(t) = E_m e^{j\omega t}$ , яке направлене вздовж осі  $x$ . Відповідна компонента швидкості обертаючого електрона  $v_x(t) = v_{\perp} e^{j(\omega_H t + \varphi_0)}$ , де  $\varphi_0$  – початкова фаза обертання, з якою електрон входить в електричне поле.

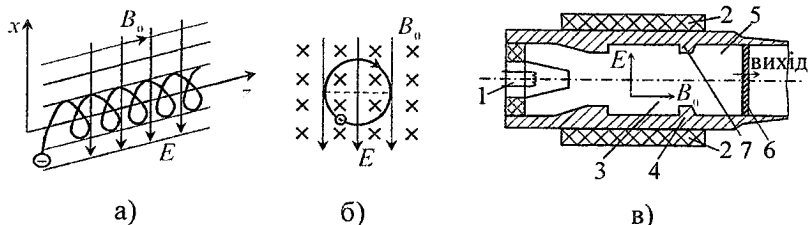


Рис. 11.18. Взаємодія електрона, що обертається в постійному магнітному полі, з високочастотним електричним полем (а, б) і схема гіротрона (в)

Миттєва потужність взаємодії електрона з електричним ВЧ-полем є нічим іншим, як потужністю вимушеного випромінювання, яка рівна:

$$P(t) = eE(t)v_x(t) = eE_m v_{\perp} e^{j(\omega t - \omega_H t - \varphi_0)} = eE_m v_{\perp} e^{j\Delta\varphi},$$

де  $\Delta\varphi$  – різниця фаз між електричним ВЧ-полем і коливальним рухом електрона вздовж осі  $x$ .

Якщо  $\omega = \omega_H$ , тобто має місце електронно-циклотронний резонанс між частотою поля й частотою обертання електрона, й електронний потік рівномірний у часі, то всі фази  $\varphi_0$  рівномірні й середня потужність взаємодії рівна нулю. Для того щоб досягти переважаної віддачі енергії від електронів полю, необхідно перебудувати рух електронів так, щоб для більшості з них швидкість руху уздовж осі  $x$  була направлена проти сил електричного поля. Для такого групування електронів було б достатньо неізохронності обертання електронів у магнітному полі, тобто достатньо залежності періоду обертання електронів від їх швидкості  $v_0$ . Ця неізохрон-

ність існує в такому потоці електронів і її причиною є релятивістська залежність маси електрона від його швидкості. Це, у свою чергу, впливає на частоту обертання електрона в магнітному полі:

$$\omega_H = \frac{eB_0}{m} = \frac{eB_0}{m_0} \sqrt{1 - \beta^2} \cong \frac{eB_0}{m_0} \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right),$$

де  $m_0$  – маса спокою електрона,  $\beta = v_0/c$  – релятивістський параметр швидкості електрона.

Із цього виразу випливає, що зі зростанням повної швидкості електрона частота його обертання зменшується й веде до зміни фаз електронів. Такий набіг фази може стати додатним, щоб привести до накопичення електронів у гальмівній фазі електричного поля.

Реальний прилад, у якому використовується такий ефект, називають гіротроном (рис. 11.18, в). Електронний пучок формується спеціальною гарматою 1, катод якого має форму зрізаного конуса. У такій гарматі електрони отримують імпульс як у поздовжньому, так і у поперечному напрямі і, попавши в однорідне магнітне поле  $B_0$ , яке створюється соленоїдом 2, рухаються по гвинтових траєкторіях. Сформований таким чином електронний пучок попадає в резонатор 3, де електрони взаємодіють з одним із його  $TE$ -типів власних коливань, що мають поперечну компоненту електричного поля. Після проходження резонатора електронний пучок виводиться в колектор 4. Енергія НВЧ коливань виводиться назовні через хвилевід 5, у якому міститься герметизуюча перегородка 6. У хвилевід коливання просочуються з резонатора 3 і звуження 7 (як елемент зв'язку) і передаються у вихідний хвилевід. Гіротрон називають ще мазером на циклотронному резонансі.

### Контрольні запитання

1. Який пристрій називається клістроном? Які існують види клістронов? Опишіть будову пролітного та відбивного клістронов. Назвіть їх основні характеристики й параметри.
2. Який прилад називається монотроном, яка його будова й принцип дії? Укажіть особливості роботи електровакуумних діодів і тріодів у НВЧ-діапазоні.
3. У яких приладах використовується взаємодія електронних пучків з біжучими хвилями? Яке фундаментальне фізичне явище знаходиться в основі роботи цих приладів?

4. Який принцип роботи лампи біжучої хвилі? Яка її конструкція? Запишіть дисперсійне рівняння, яке пов'язує поширення хвиль у лампі біжучої хвилі.

5. Які прилади називаються лампами оберненої хвилі? Якою є їх конструкція? Яка відмінність у роботі ламп біжучої й оберненої хвилі? Запишіть умову самозбудження лампи оберненої хвилі. Який її зміст?

6. Яке призначення електронно-хвильових приладів? Назвіть основні види електронно-хвильових приладів. Яка їх будова та принципи дії? Запишіть дисперсійні рівняння для таких приладів.

7. Які прилади НВЧ називаються магнетронними? Який їх принцип дії та особливості? Опишіть, які види взаємодій електронного пучка з високочастотним електричним полем спостерігаються в приладі НВЧ *M*-типу? Якими рівняннями вони описуються? Назвіть види приладів *M*-типу. Які функції вони виконують?

8. У яких приладах використовують вимушене випромінювання вільних електронів? Назвіть способи фазування електронів. Який принцип дії строботрона й гіротрона?

### Рекомендована література

1. Стальмахов В. С. Основы электроники сверхвысокочастотных приборов со скрещенными полями / В. С. Стальмахов. – М. : Советское радио, 1963. – 366 с.

2. Шука А. А. Электроника / А. А. Шука. – С. Пб. : БХВ-Петербург, 2006. – 800 с.

3. Цейтлин М. Б. Лампа с бегущей волной / М. Б. Цейтлин, А. М. Кац. – М. : Советское радио, 1966. – 632 с.

4. Электронная лампа с обратной волной / под ред. В. Н. Шевчина, Д. И. Трубецкого. – Саратов : Университет, 1975. – 195 с.

5. Андрушко Л. М. Электронные и квантовые приборы СВЧ / Л. М. Андрушко, В. М. Бурмистенко. – М. : Связь, 1974. – 192 с.

6. Тараненко В. П. Електронні та квантові прилади / В. П. Тараненко. – К. : Вища школа, 1974. – 248 с.

7. Веселов Г. И. Микроэлектронные устройства СВЧ / Г. И. Веселов. – М. : Высшая школа, 1988. – 280 с.

8. Зи С. Физика полупроводниковых приборов / С. Зи. – М. : Мир, 1984. – Т. 1, т. 2. – 906 с.

## ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

### До розділу 1

1.1. Маючи вектори  $\vec{A}$  і  $\vec{B}$ , побудувати вектори:  $\vec{A} + \vec{B}$ ,  $\vec{B} - \vec{A}$ ,  $-\vec{A} - \vec{B}$ ,  $2\vec{A} + \vec{B}/2$ .

1.2. Вектори  $\vec{A}$  і  $\vec{B}$  взаємно перпендикулярні, причому  $|\vec{A}| = 3$ ,  $|\vec{B}| = 4$ .  
Визначити  $|\vec{A} + \vec{B}|$  і  $|\vec{A} - \vec{B}|$ .

1.3. Кут між векторами  $\vec{A}$  і  $\vec{B}$  дорівнює  $60^\circ$ . Визначити  $|\vec{A} + \vec{B}|$  і  $|\vec{A} - \vec{B}|$ , якщо  $|\vec{A}| = 2$ ,  $|\vec{B}| = 1$ .

1.4. Задано вектори  $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$  і  $\vec{B} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ . Визначити скалярний і векторний добуток векторів.

1.5. Знайти кут між векторами  $\vec{A} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  та  $\vec{B} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ .

1.6. Задано вектори  $\vec{A} = \{-1; 1; 2\}$ ,  $\vec{B} = \{3; -2; 2\}$ ,  $\vec{C} = \{4; 1; 2\}$ . Обчислити  $(\vec{B}[\vec{A} \times \vec{C}])$ .

1.7. Визначити, що буде являти собою поверхня рівня скалярного поля, утвореного функцією  $f(x, y, z) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$ .

1.8. Знайти градієнт поля в точці  $M(1; -3)$ , яке визначається функцією  $f(x, y) = x^2 - 5xy + 3y - 4$ .

1.9. Довести, що  $grad U(\varphi(x, y, z)) = \frac{\partial U}{\partial \varphi} grad \varphi$ .

1.10. Знайти похідну функції  $f(x, y, z) = x y^2 z$  у точці  $M(5; 1, 2)$  за напрямком від точки  $M$  до точки  $M'(9; 4, 14)$ .

1.11. Знайти похідну функції  $U(x, y, z)$  за напрямком градієнта функції  $V(x, y, z)$ . За якої умови похідна рівна нулю?

1.12. Знайти невизначений інтеграл від векторної функції  $\vec{A}(t)$  скалярного аргументу  $t$ :  $\vec{A}(t) = e^t \vec{i} + \sin t \vec{j} + \vec{k}$ .

1.13. Знайти  $div(\varphi \vec{a})$ , де  $\varphi$  – деяка диференціальна функція,  $\vec{a}$  – вектор.

1.14. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{A}(x, y, z) = x^2 y z \vec{i} + x y^2 z \vec{j} + x y z^2 \vec{k}$ .

1.15. Обчислити  $rot \frac{\vec{n}}{r^2}$ , де  $\vec{n}$  – одиничний вектор.

1.16. Обчислити  $rot(grad \varphi)$ .

1.17. Обчислити ротор векторного поля  $\vec{A}(x, y, z) = x^2 y z \vec{i} + x y^2 z \vec{j} + x y z^2 \vec{k}$ .

## До розділу 2

2.1. Подати основні закони електромагнетизму, на яких базується теорія електромагнітного поля Максвелла.

2.2. Представити графічно картини силових ліній таких векторних полів:  
а)  $\vec{A} = (y + 10)\vec{i}_x$ ; б)  $\vec{B} = 3z^2\vec{i}_y$ .

2.3. Знайти ротор і дивергенцію векторних полів, які задані в декартовій системі координат: а)  $\vec{A} = 2\cos ax\vec{i}_x + 3\sin^2 bz\vec{i}_y$ ; б)  $\vec{B} = 6z^2\vec{i}_x + 5z\vec{i}_y + 10y^3\vec{i}_z$ .

2.4. Вектор поля  $\vec{H}$  змінюється за гармонічним законом з частотою  $f = 2\text{ГГц}$  і має в деякій фіксованій точці простору комплексну амплітуду  $\vec{H} = 120e^{j30^\circ}\vec{i}_x + 50e^{j45^\circ}\vec{i}_y + 75e^{-j60^\circ}\vec{i}_z$ . Знайти миттєве значення цього вектора як функцію часу.

2.5. Представити рівняння Максвелла в диференціальній та інтегральній формах запису. Подати їх фізичний зміст.

2.6. У деякій точці простору задані комплексні амплітуди полів:  $\vec{E} = 5\vec{i}_x - j8\vec{i}_y + 12e^{j30^\circ}\vec{i}_z \text{ В/м}$ ,  $\vec{H} = 0,4e^{j45^\circ}\vec{i}_x + 1,6e^{-j45^\circ}\vec{i}_y - 0,75e^{-j60^\circ}\vec{i}_z \text{ А/м}$ . Знайти комплексний вектор Пойтінга  $\vec{P}$  та його дійсну частину  $P_{\text{ср}}$  у даній точці.

2.7. Записати рівняння Максвелла в комплексній формі. Подати хвильовий характер змінного електромагнітного поля через рівняння Гельмгольца.

2.8. Середнє значення густини потоку потужності плоскої електромагнітної хвилі у вакуумі складає  $5 \text{ Вт/м}^2$ . Визначити амплітудне значення  $x$ -ої проекції вектора напруженості електричного поля та  $y$ -ої проекції вектора напруженості магнітного поля.

2.9. Знайти коефіцієнт фази  $\beta$ , довжину хвилі  $\lambda$  та погонне затухання  $\Delta_{\text{пог}}$  однорідної плоскої електромагнітної хвилі з частотою  $f = 40\text{ ГГц}$ , яка поширюється в полістиролі з параметрами  $\varepsilon = 2,56$  і  $\text{tg } \delta = 3 \cdot 10^{-4}$ .

2.10. Знайти коефіцієнт фази  $\beta$  і коефіцієнт затухання  $\alpha$  плоскої електромагнітної хвилі в середовищі з параметрами  $\varepsilon = 2$ ,  $\mu = 3$ ,  $\sigma = 2 \cdot 10^{-5} \text{ См/м}$  на частоті  $\omega = 10^6 \text{ с}^{-1}$ .

## До розділу 3

3.1. Нехай задана плоска межа розділу двох середовищ з відносними діелектричними проникностями  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$ . У першому середовищі силові лінії вектора  $\vec{E}$  утворюють кут  $\theta$  з напрямком нормалі. Знайти орієнтації силових ліній поля  $\vec{E}$  у другому середовищі.

3.2. Знайти фазову швидкість і довжину хвилі в міді на частоті  $180\text{ МГц}$ , якщо  $\sigma_{\text{Cu}} = 5,7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ ,  $\mu_{\text{Cu}} = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ .

3.3. Обчислити затухання електромагнітної хвилі у плазмовій оболонці товщиною  $d = 0,03 \text{ м}$  при концентрації електронів  $N_e = 10^{18} \text{ м}^{-3}$  на частоті  $f = 15 \text{ МГц}$ .

3.4. Концентрація електронів у безспівударній плазмі рівна  $N_e = 2 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}$ . Знайти частоту  $f$  електромагнітного поля, за якої характеристичний опір даної плазми становить  $600 \text{ Ом}$ .

3.5. Тиск газу складає  $10^3 \text{ Па}$  за температури  $2 \cdot 10^3 \text{ К}$ . Під дією зовнішніх факторів проходить іонізація частини молекул і концентрація вільних електронів становить  $3 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$ . Знайти коефіцієнт затухання  $\alpha$  і коефіцієнт фази  $\beta$  плоскої електромагнітної хвилі з частотою  $\omega = 10^9 \text{ с}^{-1}$ .

3.6. У безспівударній плазмі (іоносфері) з електронною концентрацією  $N_e = 2 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3}$  одну й ту ж трасу довжиною  $L = 150 \text{ км}$  проходять два прямокутні радіоімпульси однакової тривалості  $\tau_i = 100 \text{ мкс}$ . Несучі частоти в даних радіоімпульсах становлять  $f_{01} = 15 \text{ МГц}$  і  $f_{02} = 28 \text{ МГц}$  відповідно. Визначити величину  $\Delta t$  як різницю часу проходження цієї траси даними імпульсами.

3.7. У безспівударній плазмі з параметрами  $f_m = 65 \text{ МГц}$  поширюється радіоімпульс, який має несучу частоту  $f_0 = 32 \text{ МГц}$  та ефективну ширину спектра  $\Delta f = 1,6 \text{ МГц}$ . Порівняйте дисперсійні спотворення даного коливання, які спостерігаються на довжинах траси  $L = 1 \text{ км}$  і  $L = 100 \text{ км}$ .

3.8. Знайти фазову швидкість плоскої електромагнітної хвилі, яка поширюється в однорідному іонізованому середовищі з параметрами  $N_e = 5 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$ ,  $\nu = 5 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ , а частота коливань поля становить  $f = 22 \text{ ГГц}$ .

3.9. Електронна концентрація безспівударної плазми  $N_e = 2 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$ . Визначити частоту  $f$  електромагнітного поля, за якої фазова швидкість плоскої хвилі в 10 разів перевищує групову швидкість.

3.10. Показати, що на частотах, які значно перевищують плазмову, групову швидкість електромагнітних хвиль у плазмі можна з певним наближенням обчислити за формулою 
$$v_{gr} = c \left( 1 - \frac{1480 N_e}{\omega^2} \right).$$

#### До розділу 4

4.1. Амплітудне значення напруженості електричного поля падаючої хвилі  $E_{\text{вход}} = 250 \text{ В/м}$ . Відносна діелектрична проникність матеріалу  $\epsilon = 3,2$ . Знайти модулі середніх значень векторів Пойтінга падаючої та відбитої електромагнітних хвиль.



4.2. Подати формулу коефіцієнта відбивання й заломлення плоскої електромагнітної хвилі, яка падає нормально на діелектрик. За якої умови коефіцієнт відбивання  $R = 0$ ?

4.3. Сформулювати закон Снелліуса при падінні плоскої електромагнітної хвилі на діелектричний півпростір під довільним кутом.

4.4. Плоска електромагнітна хвиля з перпендикулярною поляризацією падає з повітря під кутом  $\varphi = 60^\circ$  на межу розділу з діелектриком, параметри якого  $\varepsilon = 3,8$ ,  $\mu = 1$ . Амплітуда вектора напруженості електричного поля падаючої хвилі  $E_{\text{падаюча}} = 0,4 \text{ В/м}$ . Визначити амплітуду векторів напруженості магнітного поля відбитої і заломленої хвиль.

4.5. Подати формули Френеля, які визначають коефіцієнт відбивання й заломлення падаючої і заломленої плоскої електромагнітної хвилі з перпендикулярною й паралельною поляризацією.

4.6. У якому випадку спостерігається явище Брюстера? Навести формулу для визначення кута Брюстера.

4.7. За яких умов настає повне внутрішнє відбивання плоскої електромагнітної хвилі?

4.8. Знайти фазову швидкість і глибину проникнення неоднорідної плоскої хвилі, яка виникає при її падінні із середовища 1 з параметрами  $\varepsilon_1 = 3,4$ ,  $\mu_1 = 1$  на межу розділу із середовищем 2 з параметрами  $\varepsilon_2 = 1$ ,  $\mu_2 = 1$ . Кут падіння  $\varphi = 45^\circ$ , частота поля  $f = 35 \text{ ГГц}$ .

4.9. Плоска електромагнітна хвиля з частотою  $f = 2 \text{ ГГц}$  має амплітуду електромагнітного поля  $E_{\text{падаюча}} = 350 \text{ В/м}$  і падає з повітря по нормалі на межу розділу з металом, який має параметри  $\mu = 1$  і  $\sigma = 2 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ . Знайти амплітуду дотичної проєкції електричного вектора на межі розділу, а також середнє значення вектора Пойтінга заломленої хвилі.

4.10. Плоска електромагнітна хвиля падає нормально на пластину ідеального діелектрика з  $\varepsilon_{r,2}$ , яка оточена повітрям ( $\varepsilon_{r,1} = \varepsilon_{r,3} = 1$ ). Користуючись методом направлених графів Мезона, визначити коефіцієнт радіопрозорості  $T$  і коефіцієнт відбивання  $R$ .

### До розділу 5

5.1. Дати характеристику плоских електромагнітних хвиль:  $E$ -( $TM$ )-типу;  $H$ -( $TE$ )-типу;  $T$ -( $TEM$ )-типу;  $EH$ - і  $HE$ -типу.

5.2. Подати формули для визначення векторів напруженості електричного й магнітного полів плоскої електромагнітної хвилі з паралельною поляризацією при її падінні на ідеально провідне середовище під кутом  $\varphi$ .

5.3. Подати формули для визначення векторів напруженості електричного й магнітного полів плоскої електромагнітної хвилі з перпендикулярною поляризацією при її падінні на ідеально провідне середовище під кутом  $\varphi$ .

5.4. У якому випадку при падінні плоскої електромагнітної хвилі під кутом  $\varphi$  на ідеально провідне середовище електромагнітна хвиля стає більше поперечною?

5.5. У якому випадку  $E$ - і  $H$ -хвилі називають швидкими?

5.6. Плоска електромагнітна хвиля з паралельною поляризацією з частотою  $f = 5 \text{ ГГц}$  падає з вакууму від кутом  $\varphi = 45^\circ$  на межу розділу з ідеальним провідником, утворюючи у верхньому півпросторі хвилю  $E$ -типу. Знайти позовжнє хвильове число  $n$ , поперечне хвильове число  $g$ , фазову швидкість  $v_\phi$   $E$ -хвилі та довжини хвиль  $\Lambda_{\text{повд}}$  і  $\Lambda_{\text{попер}}$ .

5.7. У заповненому повітрям прямокутному хвилеводі з розмірами стінок  $a = 50 \text{ мм}$  і  $b = 25 \text{ мм}$  збуджена хвиля  $E_{11}$ . Вектор напруженості електричного поля в центрі хвилеводу при  $x = a/2$  та  $y = b/2$  має амплітуду  $E_0 = 200 \text{ В/м}$ . Визначити комплексну амплітуду вектора  $\vec{H}$  уздовж прямої лінії, яка є паралельною осі  $z$  і перетинає поперечний переріз у точці з координатами  $x = 15 \text{ мм}$ ,  $y = 10 \text{ мм}$ . Довжина хвилі збуджуючого генератора  $\lambda_0 = 35 \text{ мм}$ .

5.8. Прямокутний хвилевід із розмірами поперечного перерізу  $a = 60 \text{ мм}$  і  $b = 35 \text{ мм}$  працює на хвилі  $E_{12}$ -типу. Визначити коефіцієнт затухання в даному хвилеводі, якщо частота генератора  $f_0 = 0,8 f_{\text{кр}}$ .

5.9. Круглий металевий хвилевід діаметром  $d = 50,8 \text{ мм}$  збуджується генератором із частотою  $f_0 = 14 \text{ ГГц}$  ( $\lambda_0 = 21,4 \text{ мм}$ ). Перевірити можливість поширення хвилі  $E_{12}$ -типу. Визначити довжину хвилі та її фазову швидкість.

5.10. Визначити гранично допустиму потужність, яка переноситься хвилею  $E_{01}$ -типу в круглому хвилеводі радіусом  $a = 25 \text{ мм}$ , який збуджується генератором із довжиною хвилі  $\lambda_0 = 40 \text{ мм}$ . Максимально допустима напруженість електричного поля на осі хвилеводу  $E_0 = 8 \cdot 10^6 \text{ В/м}$ .

5.11. Коаксіальний кабель марки РК-50-3-13 має поліетиленову ізоляцію ( $\varepsilon = 2,25$ ) і такі розміри в поперечному перерізі:  $a = 0,45 \text{ мм}$ ,  $b = 1,5 \text{ мм}$ . Знайти погонне затухання  $T$ -хвилі в даному кабелі при частоті сигналу  $f = 750 \text{ МГц}$ , ураховуючи, що  $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-7} \text{ См/м}$ .

5.12. Знайти на круговій діаграмі точку, яка відповідає заданому навантаженню  $Z_n$  і хвильовому опору  $Z_c$ , а також КБХ і КСХ:

- а)  $Z_n = (60 + j30) \text{ Ом}$ ,  $Z_c = 200 \text{ Ом}$ ; б)  $Z_n = (70 + j40) \text{ Ом}$ ,  $Z_c = 180 \text{ Ом}$ ;  
в)  $Z_n = (200 + j80) \text{ Ом}$ ,  $Z_c = 120 \text{ Ом}$ ; г)  $Z_n = (350 + j150) \text{ Ом}$ ,  $Z_c = 150 \text{ Ом}$ .

5.13. Знайти КСХ лінії з індуктивним навантаженням, одним розімкнутим кінцем й одним кінцем з погодженим навантаженням:

- а)  $B = -3 \text{ відн.од.}$ ,  $G = 0,1 \text{ відн.од.}$ ; б)  $B = -4 \text{ відн.од.}$ ,  $G = 0,5 \text{ відн.од.}$ ;  
в)  $B = -6 \text{ відн.од.}$ ,  $G = 2 \text{ відн.од.}$ ; г)  $B = -10 \text{ відн.од.}$ ,  $G = 20 \text{ відн.од.}$

5.14. Визначити вхідний опір  $Z_{ex}$  лінії без утрат довжиною  $l$  і характеристичним опором  $Z_c$ , що навантажена на заданий опір  $Z_n$ , якщо робоча довжина хвилі рівна  $\lambda$ :

а)  $Z_n = (60 + j30) \text{ Ом}$ ,  $Z_c = 200 \text{ Ом}$ ,  $l = 5 \text{ см}$ ,  $\lambda = 25 \text{ см}$ ;

б)  $Z_n = (70 + j40) \text{ Ом}$ ,  $Z_c = 180 \text{ Ом}$ ,  $l = 6 \text{ см}$ ,  $\lambda = 30 \text{ см}$ ;

в)  $Z_n = (200 + j80) \text{ Ом}$ ,  $Z_c = 120 \text{ Ом}$ ,  $l = 10 \text{ см}$ ,  $\lambda = 50 \text{ см}$ ;

г)  $Z_n = (350 + j150) \text{ Ом}$ ,  $Z_c = 150 \text{ Ом}$ ,  $l = 7 \text{ см}$ ,  $\lambda = 35 \text{ см}$ .

### До розділу 6

6.1. Дати визначення об'ємних резонаторів. На яких елементах їх можна конструювати?

6.2. Прямокутний об'ємний резонатор, який заповнений повітрям, має такі розміри:  $a = 36 \text{ мм}$ ,  $b = 22 \text{ мм}$ ,  $l = 65 \text{ мм}$ . Визначити резонансну частоту хвилі для коливань  $E_{112}$ -типу.

6.3. Навести способи збудження і включення об'ємних резонаторів.

6.4. Круглий резонатор з коливаннями  $E_{010}$ -типу, виконаний з міді й заповнений повітрям, має розміри  $a = 38,4 \text{ мм}$ ,  $l = 40 \text{ мм}$ . Обчислити ширину смуги пропускання за рівнем 0,707 від максимального значення АЧХ.

6.5. Знайти резонансну частоту тороїдального резонатора з розмірами  $a = 5 \text{ мм}$ ,  $b = 15 \text{ мм}$ ,  $d = 1 \text{ мм}$ ,  $h = 10 \text{ мм}$ . Резонатор заповнений повітрям.

6.6. Дати визначення векторного й скалярного потенціалів електромагнітного поля, привести умову Лорентца та записати неоднорідне рівняння Гельмгольца.

6.7. Записати функцію Гріна для рівняння Гельмгольца. Подати сферичну хвилю та вирази для векторного й скалярного потенціалів через функцію Гріна.

6.8. Електричний випромінювач має довжину  $l = 0,2 \text{ м}$  і збуджується від джерела з частотою  $f = 15 \text{ МГц}$ . Амплітуда струму у випромінювачі  $I_m = 4 \text{ А}$ . Знайти амплітудні значення проекцій  $H_{4m}$  і  $E_{0m}$  на відстані  $r = 5 \text{ км}$  від даного вібратора, приймаючи, що радіус-вектор, який проведений у точку спостереження, утворює кут  $\theta = 60^\circ$  з віссю випромінювача. Середовищем поширення хвилі є вакуум.

6.9. Деяка антена як випромінювач має коефіцієнт направленої дії, рівний 500. Потужність випромінювача становить  $30 \text{ кВт}$ . Знайти значення  $P_{\text{сер. макс}}$  у напрямі максимуму випромінювання на відстані  $80 \text{ км}$  від антени.

6.10. Елементарний вібратор довжиною  $l = 0,5 \text{ м}$  орієнтований паралельно електричному вектору плоскої електромагнітної хвилі з напруженістю  $E_m = 5 \text{ мкВ/м}$ . Довжина хвилі  $\lambda = 6 \text{ м}$  (частота  $f = 50 \text{ МГц}$ ). Обчислити потужність  $P_{i, \text{ макс}}$  у навантаженні, узгодженому з антеною, а також потужність

$P_i$  у навантаженні з активним опором  $R_n = 600 \text{ Ом}$  (реактивні опори антени й навантаження взаємно скомпенсовані). Для другого випадку визначити відношення  $q = P_n/P_{in}$ , якщо  $T_{in} = 300 \text{ К}$ ,  $\Delta f = 100 \text{ кГц}$  ( $P_{in} = kT_{in} \Delta f$ ).

### *До розділу 7*

7.1. Хвильові параметри 4-полюсника на НВЧ: матриця розсіювання  $[S]$  і матриця передачі  $[T]$ .

7.2. Зв'язок між системами хвильових параметрів матриці розсіювання й матриці передачі.

7.3. Дати характеристику ліній передачі в інтегральних схемах НВЧ: мікросмугових, щільних і компланарних. Записати їх  $[A]$ -матрицю.

7.4. Конструктивне виконання індуктивних елементів інтегральних схем НВЧ: балочного, кільцевого, меандрового, спірального та їх схемна модель. Гіратор як інтегральний елемент індуктивності, його схемотехнічна реалізація.

7.5. Конструктивне виконання ємнісних елементів інтегральних схем НВЧ: паралельний, послідовний, штировий, тонкоплівковий, на основі  $p-n$ -переходу, на основі МОН-структури. Параметри й характеристики ємнісного елемента.

7.6. Особливості конструктивного виконання резистивних елементів інтегральних схем НВЧ: плівкового, паралельного із короткозамкненим шлейфом, із розімкненим шлейфом, пінч-резистори. Їх параметри.

7.7. Неоднорідності інтегральних схем НВЧ: згин лінії, стрибок хвильового опору, мікросмугова й щільна лінії, паралельний і послідовний коливальний контури, резонатори. Їх схемна реалізація та параметри.

7.8. Фільтри інтегральних схем НВЧ: ФНЧ, ФВЧ, СФ, РФ та їх схемна реалізація. Фільтри на зв'язаних дискових резонаторах. Фільтри на поверхневих акустичних хвилях.

7.9. Особливості конструкції інтегральних польових малошумових транзисторів Шоттки. Схемний опис субмікронних ПТШ.

7.10. Тепловий, дробовий і флікер-шум. Методи зниження шумових характеристик елементів.

7.11. Основні параметри направлених відводів і мостів та їх зв'язок із матрицею розсіювання.

### *До розділу 8*

8.1. Конструкторсько-технологічні особливості структур діодів НВЧ, які використовують при проектуванні автогенераторів.

8.2. Конструкторсько-технологічні особливості структур біполярних і польових НВЧ-транзисторів, які використовують при проектуванні автогенераторів.

8.3. Параметри діодів і транзисторів на НВЧ.

8.4. Привести функціональну схему транзисторного й діодного автогенераторів. Проаналізувати динамічні ВАХ елементів  $N$ - і  $S$ -типів.

8.5. Визначити типи схем транзисторних автогенераторів за способом здійснення зовнішнього позитивного оберненого зв'язку.

8.6. Сформулювати особливості проектування діодних автогенераторів НВЧ: на тунельних діодах, лавино-пролітних діодах, діодах Ганна.

8.7. Привести схеми транзисторних автогенераторів із кварцовою стабілізацією частоти.

8.8. Привести класифікацію підсилювачів високої частоти на біполярних і польових транзисторах.

8.9. Сформулювати основні принципи побудови високоефективних підсилювачів високої частоти класів  $D$ ,  $G$ ,  $E$ ,  $F$ .

8.10. Привести варіанти підсилювачів класу  $E$  і класу  $F$ .

8.11. Параметричні підсилювачі. Основні характеристики й параметри.

8.12. Діодні й транзисторні перетворювачі частоти, особливості їх схемної реалізації.

### *До розділу 9*

9.1. Пояснити сутність принципу суперпозиції стосовно розрахунку антенних пристроїв.

9.2. Визначити й дати характеристику основних електричних параметрів передавальних антен: діаграми направленості, поляризації, коефіцієнта корисної дії, коефіцієнта направленої дії, коефіцієнта підсилення, вхідного опору антени.

9.3. Пояснити, чому в першому наближенні можна вважати, що розподіл струму в симетричному електричному вібраторі підпорядковується гармонічному (синусоїдальному) закону.

9.4. Дати визначення антенної ґратки і пояснити, чим визначається їх поділ на лінійні, поверхневі та об'ємні.

9.5. Якими факторами визначається ширина діаграми направленості синфазної антенної ґратки з ізотропних елементів?

9.6. Чому для синфазних рівноамплітудних розподілів величина коефіцієнта направленої дії залежить від конкретної конфігурації розкриву антени й визначається її площею?

9.7. Що розуміється під діаграмою направленості антени в приймальному режимі роботи?

9.8. Який зв'язок діаграми направленості антени в приймальному режимі з діаграмою направленості тієї ж антени в передавальному режимі роботи? Коли ці діаграми повністю збігаються?

9.9. Для якого діапазону частот використовують антени в друкованому виконанні резонансного типу?

9.10. Назвати типи рупорних антен, зобразити структуру поля в рупорній антені й пояснити, чим відрізняється структура поля в рупорі та хвилеводі, що його живить.

9.11. Які переваги електронного способу сканування перед механічним для зміни основної пелюстки діаграми направленості в просторі?

9.12. Які причини обмежують крок ґратки у фазованих антенних ґратках? Які переваги й що конструктивно являють собою АФАГ?

### *До розділу 10*

10.1. Дати визначення вакууму, його параметрів та методів формування.

10.2. Назвати методи вимірювання низького, середнього й високого вакууму.

10.3. Електровакуумні та газорозрядні прилади, їх будова й принцип дії.

10.4. Особливості руху електронів в електричному, магнітному та схрещених електричному й магнітному полях. Моделі руху електронів.

10.5. Дати визначення динамічного керування електронним пучком. Електронна гармата та її конструктивна будова. Умови забезпечення стабільного вакууму.

10.6. Описати взаємодію електронного потоку з електромагнітним полем. Вказати умову створення наведеного струму.

10.7. Указати різницю між резонаторами й коливальними контурами. Їх параметри й характеристики.

10.8. Тліючий розряд та його характеристика. Основні відмінності між електровакуумними й газорозрядними приладами. Плазма.

10.9. Методи формування повільних електромагнітних хвиль  $E$ -,  $H$ - і  $T$ -типів. Сповільнюючі системи та їх характеристики.

10.10. Дисперсія сповільнюючих систем. Методи формування просторових гармонік.

### *До розділу 11*

11.1. Пояснити принцип дії пролітних і відбивних клістронів та принцип модуляції електронного пучка. Назвати основні елементи конструкції.

11.2. Енергетичні характеристики підсилювачів потужності та помножувачів частоти на пролітних клістронах.

11.3. Указати особливості конструювання автогенераторів на відбивному клістріні. Подати його енергетичні характеристики та діапазон частотного переналаштування.

11.4. Принцип взаємодії електронного пучка з електромагнітним полем та побудова на ньому лампи біжучої хвилі.

11.5. Особливості конструювання підсилювачів на ЛБХ типу  $O$ . Характеристики підсилювачів на ЛБХ- $O$ .

11.6. Назвати умови генерації коливань на ЛБХ- $O$  й особливості побудови на цій основі автогенераторів НВЧ.

11.7. Принципи взаємодії електронів з електромагнітним полем оберненої просторової гармоніки й побудова на цій основі лампи оберненої хвилі типу  $O$  (ЛОХ- $O$ ).

11.8. Подати схему автогенератора НВЧ на ЛОХ і визначити умову генерації коливань та їх частоту. Особливості конструювання підсилювачів НВЧ.

11.9. Принцип модуляції електронів у схрещених електричному й магнітному полях. Особливості конструкції магнетрона. Траекторія руху електрона.

11.10. Принцип дії магнетрона, його параметри й характеристики.

11.11. Особливості конструкцій електронних приладів типу  $M$  : платинових, лампи біжучої й оберненої хвиль, карсинатрона та мітрона. Їх відмінності й переваги.

11.12. Подати функціональну схему волоконно-оптичної лінії зв'язку. Високостабільні квантові генератори – лазери. Їх будова й параметри. Особливості модуляції коливань лазера.

## АЛФАВІТНО-ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

### А

- Автогенератор 300
  - діодний 301, 313
  - транзисторний 301, 308
- Активний елемент 300, 321
  - безінерційний 326
- Антенна:
  - антена-башта 377
  - антифедінгова 377
  - антена-щогла 377
  - Брауде 387
  - вертикальна несиметрична 373
  - діапазонна 378
  - ізотропна 398
  - передавальна 364
  - перископічна 389
  - планарна 390
  - приймальна 364
  - ромбічна 381
  - рупорна 388
  - синфазна 379
  - типу “хвильовий канал” 386
- Антенна ґратка 367
  - активна 397
  - друкована 396
  - фазована 339

### Б

- Багатополюсник 275, 294
- Баланс:
  - амплітуд 453
  - фаз 453
- Бар’єр Шоттки 249

### В

- Вакуум 402
  - високий 405
  - низький 405
  - середній 405
- Вакуумметр:
  - гідростатичний  $U$ -подібний 409

- деформаційний 409
- електронний іонізаційний 411
- Вакуумний насос 406
- гетерний іонний 408
- дифузійний 407
- магніторозрядний 408
- механічний 406
- орбітронний 408
- сорбційний 407

### Вектор:

- Пойтінга 65, 66, 67
- поляризованості 54
- хвильовий 128
- Векторна лінія поля 13, 42, 135
- Векторне поле 13
  - лапласівське (гармонічне) 24
  - потенціальне 22
  - соленоїдальне 23, 48

### Величина:

- векторна 8
- скалярна 8
- Випромінювання Вавилова – Черенкова 464
- Випромінювач (вібратор):
  - елементарний електричний 233, 365
- Відносна робоча смуга частот 322
- Відносний рівень побічних коливань 323
- Власне значення 150
- Вузол сигнального графа 118
- Вхідний імпеданс антени 371
- Вхідний опір 4-полюсника 185
- Вібратор:
  - з активним рефлектором 384
  - з пасивним директором 385
  - з пасивним рефлектором 384
  - петлевий Пістолькорса 385
  - рамковий 244
  - симетричний 371
  - щілинний 244

### Г

- Гіротрон 499
- Градiєнт 8, 11, 35
- Густина:



масова 426  
циркуляції 25

## Д

Дельта-функція 229  
Дивергенція 13, 14, 36  
Диполь:  
Герца 233  
Надененка 378  
півхвильовий 373  
Дипольний момент 54  
Дисперсія:  
аномальна 438  
нормальна 438  
частотна 89  
Диференціал 8  
Діаграма:  
Вольперта – Смітта 193, 270, 272, 273  
направленості 238, 364  
направленості нормована 238  
Діамагнетик 57  
Діапазон робочих частот 322  
Діафрагма 264  
індуктивна 266  
ємнісна 266  
Діелектрик 53  
неполярний 53  
полярний 54  
Діелектрична проникність:  
абсолютна 56  
відносна 56  
ефективна 248  
комплексна 64  
Діелектричний шар 109  
Діод:  
Ганна 314  
лавино-пролітний 317  
параметричний 344  
тунельний 311  
Діюча довжина:  
передавальної антени 369  
приймальної антени 370  
Добротність 223  
круглого резонатора 225  
об'ємного резонатора 224

прямокутного резонатора 225  
Довжина хвилі 73  
критична 153  
поздовжня 134  
поперечна 134  
резонансна 209, 211, 214, 218  
Дрейф 417

## Е

Еластанс 346  
Електрод-відбивач 450  
Електронна гармата 415  
Електронна концентрація 92  
Електронний пучок 415  
Електронно-хвильові прилади 478  
Епітрохоїда 419  
Ефект:  
вторинного перетворення частоти 354  
Джозефсона 103  
Мейсснера 102  
Ефективна площа:  
антени 370  
елементарного випромінювача 241

## Є

Ємнісний елемент:  
паралельний 253  
послідовний 253

## З

Завихрення поля 19, 20  
Закон:  
Біо – Савара – Лапласа 24  
Гаусса 47  
електромагнітної індукції (Фарадея) 51  
збереження електричного заряду 46  
нерозривності магнітних ліній 48  
Ньютона 92  
Ома 45, 102  
Ома диференціальний 45  
Снелліуса 112  
повного струму (Ампера) 48, 49  
Затухання:  
перехідне 287

погонне 75  
робоче 286  
Згин лінії передачі 256  
З'єднання 4-полосників:  
каскадне 276  
паралельне 276  
послідовне 276  
Змішувач 353  
балансовий 359  
двобалансний 361  
однотактний 355  
Зона Фраунгофера 366

## I

Індуктивний елемент 250  
балочний 250  
кільцевий 251  
меандровий 251  
паралельний 253  
спіральний 251  
спіральний квадратний 251  
Індукція:  
електричного поля 43, 56  
магнітного поля 43, 57  
Інтегральні формули теорії поля 26  
Іонне фокусування 420

## K

Карсинатрон 491  
Квазінейтральність 92  
Квазістаціонарне коло 208  
Клістрон 444  
відбивний 450  
пролітний 444  
Коефіцієнт:  
відбивання 108, 125, 195  
ділення за напругою 287  
ділення за потужністю 287  
діодний 356  
затухання 75, 188, 190, 192  
Ляме 33  
модуляції еластансу 346  
накачки 347  
направленої дії 369

передачі вихідної ланки 323  
передачі вхідної ланки 323  
передачі напруги комплексний 185  
передачі потужності 278  
підсилення антени 370  
підсилення потужності 322  
поширення 76  
проходження (заломлення) 108, 125  
стоячої хвилі 195, 287  
трансформації 344  
фази плоскої хвилі 73  
форми 255  
шуму 350, 359

Коефіцієнт корисної дії:  
антени 371  
відбивного клістрона 455  
електронний 322  
монотрона 461  
першої гармоніки 323  
повний 322  
пролітного клістрона 449  
Комірка Пеннінга 408, 413  
Крайові умови Леонтовича 117  
Критерій:  
Кнудсена 405  
потенціальності поля 23  
соленоїдальності поля 23  
Критична температура 99  
Кріонасос 408  
Кут:  
Брюстера 115  
прольоту 422  
фазового запізнення 93

## L

Лампа:  
біжучої хвилі 465  
оберненої хвилі 474  
Лема Лорентца 71  
Лінія передачі:  
двопровідна 68  
компланарна 248  
короткозамкнена 257  
мікросмугова 248  
розімкнена 256

щілинна 248  
Лондонівська довжина 100

## М

Магнетик 56  
Магнетрон 404  
Магнітна проникність 44  
абсолютна 57  
відносна 57  
Магнітний потік 51  
Манометр:  
Мак-Леода 409  
тепловий 410  
Матриця:  
опорів 276  
передачі 184, 280  
провідності 276  
розсіювання 277  
Метод:  
декомпозиції 297  
контурних струмів 119  
наведених е.р.с. 396  
резонаторний 392  
Міст 286  
Модуляція електронного потоку 425  
Монотрон 378

## Н

Надпровідність 99  
Направлений відвід 286  
кільцевий 287  
шлейфовий 288  
Направленість 287  
Напруженість:  
електричного поля 43  
магнітного поля 44  
Нерівномірність ділення 287

## О

Обернений зв'язок:  
ємнісний 308  
індуктивний 308  
позитивний 300  
трансформаторний 308

Об'ємна густина 37  
Область:  
багатохвильовості 163  
відсічки 154, 162  
однохвильовості 162  
прозорості 154  
Оператор:  
Лапласа 16, 37  
Набла 12  
Опір:  
активний вхідний 196  
випромінювання антени 371  
ємнісний 195  
зв'язку 432  
індуктивний 195  
реактивний вхідний 196  
Оптична густина середовища 116

## П

Парамагнетик 57  
Пелюстка діаграми направленості 369  
бічна 369  
головна 369  
здня 369  
Передача вітки графа 118  
Перетворювач частоти 361  
Петля-зв'язок 367  
Петля оберненого зв'язку 123  
Підсилювач:  
відбивний 341  
вузькосмуговий 335  
мостовий 337  
параметричний 341  
плазмовий 481  
потужності 321  
прохідний 341  
регенеративний резонансний 341  
резистивний 479  
Плазма 91  
безспівударна 93  
докритична 94  
закритична 94  
Платинатрон 489  
Площина падіння 111  
Поверхня рівня скалярного поля 9

- Повне внутрішнє відбивання 116  
 Погоджувальна котушка 375  
 Погонне затухання 188, 190, 191, 192  
 Подільник потужності 289  
   кільцевий 290  
   послідовного типу 289  
 Поле 42  
   вихрове 52  
   електричне 43  
   електромагнітне 42  
   магнітне 43  
   намагніченості 57  
 Поляризація 53  
   вертикальна 81, 114  
   горизонтальна 81, 112  
   електрична 53  
   еліптична 80  
   колова 81  
   лінійна 79  
 Постійна Ейлера 167  
 Потенціал:  
   електромагнітного поля 227  
   скалярний електричний 177  
 Потік векторного поля 14  
 Потужність:  
   вихідна у навантаженні 322  
   власних шумів приймача 242  
   вхідна 322  
   вхідна, яка підводиться до АЕ 322  
   коливальна 322  
   накачки 347  
   хвилі середня 171  
 Принцип:  
   суперпозиції поля 61  
   перестановки дуальності 70  
   фазового фокусування 444  
 Противага 374  
 Прямий шлях 123
- Р**
- Режим:  
   біжучої хвилі 316  
   великих амплітуд 320  
   відсічки 153, 328  
   гібридний 317  
   доменний 316  
   збудження жорсткий 306  
   збудження м'який 305  
   із затримкою і гасінням домену 316  
   ключовий 327  
   короткого замикання 194  
   критичний 153, 330, 418  
   малих амплітуд 320  
   недонапружений 330  
   обмеженого накопичення заряду 316  
   перенапружений 320, 330  
   пролітний 316  
   стаціонарний 303  
   узгодження 187, 194  
   усталеного від'ємного опору 316  
   холостого ходу 187, 194  
 Резонансне вікно 267, 268  
 Резонатор:  
   інтегральний 258  
   коаксіальний 225  
   круглий 217  
   об'ємний 208  
   прямокутний 210  
   сферичний 225  
   тороїдальний 428  
 Резонатор-групувач 444  
 Рівняння:  
   Гельмгольца 76, 228  
   Д'Аламбера 228  
   електронного перетворювача 412  
   Лапласа 177  
   Лондона 101  
   Максвелла 60, 61, 64, 70, 71, 100  
   Менделєєва – Клапейрона 403  
   неперервності 46  
   силової лінії 135  
   телеграфне 432, 469  
 Різниця потенціалів 178  
 Розв'язка 287  
 Розподіл Максвелла 404  
 Ротор векторного поля 17, 20, 38
- С**
- Селективні збуджувачі 163  
 Середня довжина вільного пробігу 404  
 Сигнальний граф 118

Сила Лоренца 43, 416  
Система:  
    коливальна 300  
    сповільнююча 430  
Система координат 9  
    декартова 17, 28  
    криволінійна 28, 32  
    полярна 28  
    сферична 31  
    циліндрична 30  
Скалярне поле 8  
Скалярний потенціал векторного поля 22  
Сканування:  
    електричне 398  
    електромеханічне 398  
    механічне 398  
Скін-ефект 91  
Спіраль 430  
Сприйнятливість:  
    діелектрична 56  
    магнітна 57  
Стрибок хвильового опору 256  
Строфотрон 498  
Струм:  
    внутрішній (вільний) 59  
    зміщення 49  
    магнітний 69  
    поляризаційний 58  
    провідності 44  
    сторонній 59  
Суматор потужності 289  
Супергетеродинний приймач 352

## Т

Тангенс кута втрат 64  
Твістрон 467  
Температурний коефіцієнт:  
    ємності 255  
    опору 255  
Температурний потенціал переходу 356  
Тензор:  
    абсолютної діелектричної проникності 58  
    абсолютної магнітної проникності 58  
Теорема:  
    Остроградського – Гаусса 16

Стокса 22  
Теорія Бардіна – Купера – Шріффера 103  
Тепловий перетворювач:  
    магнітний 414  
    опору 410  
    термопарний 410  
Тиск газу 402  
Транзистор:  
    біполярний 323  
    польовий 323, 331  
Трансформатор:  
    двошлейфовий 273  
    одношлейфовий 271  
    опору 187, 267  
    тришлейфовий 275  
    чвертьхвильовий 269  
Трохоїда 418

## У

Узгоджуюча ланка 335  
    вихідна 335  
    вхідна 335  
    міжкаскадна 335  
    широкосмугова 335  
Уловлювач 445  
Умова:  
    балансу потужностей 304  
    калібрування (Лорентца) 228  
    резонансу 304  
    самозбудження 305

## Ф

Фазові співвідношення НВ 287  
Фазообертач 291  
Фазування електронів 495  
Федінг 377  
Феромагнетик 57  
Фідер 364  
Фільтр:  
    верхніх частот 261  
    нижніх частот 261  
    смуговий 262  
Формула:  
    Мезона 125

Муавра 480  
Френеля 113, 114  
Функція:  
Бесселя 167, 394, 448  
власна 150  
Гріна 230  
Матґе 394  
Неймана 167, 394  
поля 9

**Х**

Характеристика:  
амплітудно-частотна 222, 262  
вихідна 325  
вольт-амперна *N*-типу 302  
вольт-амперна *S*-типу 302  
вольт-фарадна 345  
дисперсійна хвилеводу 153  
направленості 368  
перехідна 323  
статична 323

Характеристичний (хвильовий) опір  
78, 90  
антени 371  
коаксіального хвилеводу 181  
круглого хвилеводу 170  
лінії передачі 160, 197  
мікросмушкового хвилеводу 184  
прямокутного хвилеводу 161  
рамкового вібратора 246  
щільного вібратора 244

Хвилевід 127  
коаксіальний 179  
круглий металевий 163  
прямокутний металевий 147  
смушковий 182

Хвилеводно-коаксіальний перехід 161

Хвильове число:  
поздовжнє 133, 152  
поперечне 133, 152

Хвильовий фронт (площина рівних фаз) 74

Хвиля 72  
біжуча 129  
відбита 105  
гібридна 143

заломлена (прохідна) 107  
квазі *T*-типу 183  
неоднорідна плоска 129  
однорідна плоска 73  
поздовжня 72  
поперечна 72  
просторового заряду 469  
резонансна вікна 268  
симетрична 169  
стояча 132  
*E*- (*TM*-) типу 130  
*H*- (*TE*-) типу 132  
*T*- (*TEM*-) типу 130

## Ц

Циклоїда 418  
Циркуляція вектора 18

## Ч

Частота:  
дзеркальна 354  
електронно-циклотронна 416  
критична 153, 347  
Ленгмюрівська 94  
резонансна 214  
холоста 350

Чотириполюсник 184  
Чутливість електронного вакуумметра 412

## Ш

Швидкість:  
групова 154  
середньоквадратична 403  
фазова 74, 75, 89

Ширина пелюстки ДН 369

## Щ

Щілина:  
випромінююча 160  
невипромінююча 160

## Я

Якобіан 29, 31, 32, 32

# ЗМІСТ

|   |    |
|---|----|
| <b>Передмова</b> .....  | 3  |
| <b>Вступ</b> .....  | 5  |
| <b>Розділ 1. Основні елементи теорії поля</b> .....   | 7  |
| 1.1 Градієнт скалярного поля.....   | 7  |
| 1.1.1 Градієнт і диференціал.....   | 7  |
| 1.1.2 Оператор Набла ( $\nabla$ ). Похідна скалярного поля за даним напрямом.....                   | 11 |
| 1.2 Векторне поле. Дивергенція векторного поля.....   | 12 |
| 1.2.1 Дивергенція і потік.....  | 12 |
| 1.3 Ротор векторного поля.....  | 16 |
| 1.4 Типи векторних полів.....   | 21 |
| 1.5 Інтегральні формули теорії поля та операції другого порядку.....                                | 25 |
| 1.6 Криволінійні координати. Градієнт, дивергенція і ротор у криволінійних координатах.....         | 27 |
| 1.6.1 Полярні координати ( $r, \varphi$ ).....  | 27 |
| 1.6.2 Циліндричні координати ( $r, \varphi, z$ ).....   | 29 |
| 1.6.3 Сферичні координати ( $r, \theta, \varphi$ ).....   | 30 |
| 1.6.4 Довільні криволінійні координати.....   | 31 |
| 1.7 Градієнт, дивергенція, лапласіан і ротор у криволінійних координатах.....                       | 34 |
| 1.7.1 Градієнт.....   | 34 |
| 1.7.2 Дивергенція.....  | 35 |
| 1.7.3 Лапласіан скалярної функції.....  | 36 |
| 1.7.4 Ротор у криволінійних координатах.....  | 37 |
| Контрольні запитання.....   | 39 |
| Рекомендована література.....   | 40 |
| <b>Розділ 2. Основні положення теорії електромагнетизму – рівняння Максвелла</b> .....              | 41 |
| 2.1 Електромагнітне поле і його математичні моделі.....   | 41 |
| 2.2 Диференціальна форма закону Ома.....  | 43 |
| 2.3 Закон збереження заряду і закон Гаусса.....   | 44 |
| 2.4 Закон нерозривності магнітних силових ліній і властивість соленоїдальності магнітного поля..... | 46 |
| 2.5 Закон повного струму (Ампера) і струм зміщення.....   | 47 |
| 2.6 Закон електромагнітної індукції Фарадея.....  | 49 |
| 2.7 Матеріальні рівняння електромагнітного поля.....  | 52 |
| 2.8 Рівняння Максвелла для електромагнітного поля.....  | 59 |

|  |            |
|--|------------|
| 2.9 Енергетичне співвідношення в електромагнітному полі.<br>Вектор Пойтінга.....   | 64         |
| 2.10 Магнітний струм та принцип дуальності. Лема Лорентца....  | 68         |
| 2.11 Плоскі електромагнітні хвилі.....   | 71         |
| 2.12 Рівняння Гельмгольца.....   | 74         |
| 2.13 Поляризація електромагнітних хвиль та її види.....  | 78         |
| 2.14 Граничні умови для векторів електромагнітного поля.....   | 81         |
| Контрольні запитання.....  | 86         |
| Рекомендована література.....  | 86         |
| <b>Розділ 3. Електромагнітні хвилі в середовищі із частотною дисперсією: хвилі у провідному середовищі, плазмі та надпровіднику.....</b> | <b>88</b>  |
| 3.1 Хвилі в добре провідному середовищі.....   | 88         |
| 3.2 Плазма та її електродинамічні параметри.....   | 90         |
| 3.3 Електромагнітні хвилі в надпровідниках.....  | 97         |
| Контрольні запитання.....  | 102        |
| Рекомендована література.....  | 103        |
| <b>Розділ 4. Падіння плоских електромагнітних хвиль на межу двох середовищ.....</b>  | <b>104</b> |
| 4.1 Нормальне падіння плоскої електромагнітної хвилі на ідеально провідну поверхню.....  | 104        |
| 4.2 Нормальне падіння плоскої електромагнітної хвилі на діелектричну площину.....  | 105        |
| 4.3 Нормальне падіння плоскої електромагнітної хвилі на діелектричний шар певної товщини.....  | 108        |
| 4.4 Падіння плоскої електромагнітної хвилі на діелектричну півплощину під довільним кутом. Закони Снелліуса та формули Френеля.....      | 110        |
| 4.5 Кут Брюстера. Повне внутрішнє відбивання.....  | 115        |
| 4.6 Сигнальні графи. Перехід від системи до сигнального графа. Еквівалентні перетворення в сигнальних графах. Формула Мезона.....        | 118        |
| 4.7 Структура електромагнітного поля $E$ -, $H$ -, $T$ - і $EH$ -типів....   | 127        |
| 4.7.1 Падіння плоскої електромагнітної хвилі з паралельною (вертикальною) поляризацією на ідеально провідну поверхню.....                | 127        |
| 4.7.2 Падіння плоскої електромагнітної хвилі з перпендикулярною (горизонтальною) поляризацією.....                                       | 130        |
| 4.7.3 Структура електромагнітного поля $E$ -, $H$ -, $T$ -хвиль....  | 133        |
| 4.7.4 Характеристики електромагнітного поля $E$ - і $H$ -типів....   | 139        |



|   |            |
|---|------------|
| 4.7.5 Зв'язок між поздовжніми й поперечними складовими векторів направлених хвиль $EH$ - або $HE$ -типів.....                             | 143        |
| Контрольні запитання.....   | 145        |
| Рекомендована література.....   | 146        |
| <b>Розділ 5. Направляючі системи – хвилеводи.....</b>   | <b>147</b> |
| 5.1 Прямокутний металевий хвилевід.....   | 147        |
| 5.1.1 Хвилі $E$ -типу в прямокутному хвилеводі ( $TM$ ).....  | 147        |
| 5.1.2 Дисперсійна характеристика хвилеводу.....   | 152        |
| 5.1.3 Хвилі $H$ -типу в прямокутному хвилеводі ( $TE$ ).....  | 154        |
| 5.1.4 Характеристичний опір прямокутного хвилеводу. Хвилевідно-коаксіальні переходи та діаграми типів хвиль у прямокутному хвилеводі..... | 160        |
| 5.2 Круглий металевий хвилевід.....   | 163        |
| 5.2.1 Постановка задачі й рівняння Максвелла в циліндричних координатах.....  | 163        |
| 5.2.2 Хвилі $E$ -типу в круглому хвилеводі.....   | 165        |
| 5.2.3 Хвилі $H$ -типу в круглому хвилеводі.....   | 172        |
| 5.2.4 Хвилеводи з хвилями $T$ -типу.....  | 176        |
| 5.2.5 Коаксіальний і смужковий хвилеводи.....   | 179        |
| 5.2.6 Довга лінія з $T$ -хвилею як чотириполюсник.....  | 184        |
| 5.2.7 Затухання хвиль у хвилеводах. Коефіцієнт затухання хвиль.....   | 187        |
| 5.3 Кругова діаграма Вольперта – Смітта для ліній передачі.....   | 193        |
| 5.3.1 Кругова діаграма повних опорів і провідності передавальних ліній у полярній системі координат.....                                  | 193        |
| 5.3.2 Основні застосування кругової діаграми в розрахунках ліній передачі НВЧ.....  | 201        |
| Контрольні запитання.....   | 206        |
| Рекомендована література.....   | 207        |
| <b>Розділ 6. Коливальні системи НВЧ. Вібратори.....</b>   | <b>208</b> |
| 6.1 Об'ємні резонатори.....   | 208        |
| 6.1.1 Прямокутний об'ємний резонатор.....   | 210        |
| 6.1.2 Круглий об'ємний резонатор.....   | 217        |
| 6.1.3 Способи збудження і включення об'ємних резонаторів.....   | 220        |
| 6.1.4 Добротність об'ємних резонаторів.....   | 222        |
| 6.2 Неоднорідні рівняння Максвелла. Елементарні випромінювачі.....  | 225        |
| 6.2.1 Постановка крайової задачі. Векторний і скалярний потенціали електромагнітного поля. Функція Гріна.....                             | 226        |
| 6.2.2 Елементарний електричний випромінювач – диполь Герца. Структура його поля.....  | 233        |

|       |  |            |
|-------|--|------------|
| 6.2.3 | Діаграма направленості, опір випромінювання елементарного випромінювача.....                                 | 237        |
| 6.2.4 | Елементарний випромінювач у режимі приймання. Елементарний щільний і рамковий випромінювачі...               | 240        |
|       | Контрольні запитання.....  | 246        |
|       | Рекомендована література.....  | 247        |
|       | <b>Розділ 7. Пасивні мікроелектронні пристрої НВЧ. Багатополюсники та їх параметри.....</b>                  | <b>248</b> |
| 7.1   | Лінії передачі інтегральних схем НВЧ. Індуктивні елементи ІС НВЧ.....  | 248        |
| 7.2   | Ємнісні та резистивні елементи ІС НВЧ.....   | 253        |
| 7.3   | Резонатори і фільтрові схеми НВЧ.....  | 257        |
| 7.4   | Діафрагми, резонансні вікна і трансформатори повних опорів.....  | 263        |
| 7.5   | Багатополюсники на НВЧ та їх параметри.....  | 274        |
| 7.6   | Пристрої НВЧ: направлені відводи і мости, подільники, суматори, фазообертачі.....                            | 285        |
| 7.6.1 | Основні параметри направлених відводів і мостів та їх зв'язок із матрицею розсіювання.....                   | 285        |
| 7.6.2 | Подільники і суматори потужності НВЧ. Фазообертачі...  | 288        |
| 7.7   | Автоматизоване проектування пасивних пристроїв НВЧ. Метод декомпозиції.....                                  | 292        |
|       | Контрольні запитання.....  | 297        |
|       | Рекомендована література.....  | 298        |
|       | <b>Розділ 8. Активні мікроелектронні пристрої НВЧ.....</b>   | <b>299</b> |
| 8.1   | Особливості проектування автогенераторів.....  | 299        |
| 8.1.1 | Квазілінійна теорія автогенераторів.....   | 301        |
| 8.1.2 | Транзисторні автогенератори.....   | 307        |
| 8.1.3 | Діодні автогенератори на тунельних діодах, діодах Ганна і лавино-пролітних діодах.....                       | 310        |
| 8.2   | Особливості проектування підсилювачів потужності НВЧ...  | 320        |
| 8.2.1 | Польові транзистори в підсилювачах потужності.....   | 330        |
| 8.2.2 | Узгоджуючі ланки вузькосмугових підсилювачів потужності. Сумування потужностей у підсилювачі потужності..... | 334        |
| 8.2.3 | Параметричні підсилювачі – основні характеристики і параметри.....   | 340        |
| 8.2.4 | Дво- та одноконтурні напівпровідникові параметричні підсилювачі потужності.....                              | 346        |
| 8.3   | Діодні перетворювачі частоти.....  | 351        |
| 8.3.1 | Електричні характеристики змішувача.....   | 352        |

|   |   |            |
|---|---|------------|
| 8.3.2   | Балансові та двобалансові змішувачі.....  | 358        |
| 8.3.3   | Перетворювачі частоти з подавленням дзеркального каналу.....  | 360        |
|   | Контрольні запитання.....   | 361        |
|   | Рекомендована література.....   | 362        |
| <b>Розділ 9. Антени НВЧ в інтегрованому виконанні.....</b>  |   | <b>363</b> |
| 9.1   | Розрахунок поля випромінювання антен. Основні електричні параметри передавальних антен.....                     | 364        |
| 9.2   | Особливості роботи симетричного вібратора як основного елемента антени. Сучасна реалізація конструкцій антен... | 370        |
| 9.3   | Антени НВЧ в інтегральному виконанні. Основні типи випромінювачів та їх розрахунки.....                         | 388        |
| 9.3.1   | Друковані антенні ґратки.....   | 394        |
| 9.3.2   | Активні фазовані антенні ґратки (АФАГ).....   | 396        |
|   | Контрольні запитання.....   | 399        |
|   | Рекомендована література.....   | 400        |
| <b>Розділ 10. Вакуумна електроніка НВЧ.....</b>   |   | <b>401</b> |
| 10.1  | Вакуум і його характеристики.....   | 401        |
| 10.1.1  | Методи створення й вимірювання вакууму.....   | 405        |
| 10.2  | Фізичні основи роботи вакуумних електронних приладів НВЧ.....   | 413        |
| 10.2.1  | Електронні пучки. Особливості руху електронів у високочастотних полях.....                                      | 414        |
| 10.2.2  | Динамічне керування електронним потоком. Взаємодія електронних потоків з електромагнітними полями.....          | 424        |
| 10.3  | Повільні електромагнітні хвилі. Сповільнюючі системи.....   | 428        |
| 10.4  | Дисперсійні властивості сповільнюючих систем. Просторові гармоніки.....   | 436        |
|   | Контрольні запитання.....   | 441        |
|   | Рекомендована література.....   | 442        |
| <b>Розділ 11. Прилади, які використовують взаємодію електронних потоків із зосередженими електромагнітними полями та хвилями.....</b> |   | <b>443</b> |
| 11.1  | Пролітний клістрон. Його характеристики й параметри.....  | 443        |
| 11.2  | Відбивний клістрон. Його характеристики й параметри.....  | 449        |
| 11.3  | Особливості роботи електровакуумних діодів і тріодів у діапазоні НВЧ.....                                       | 455        |
| 11.4  | Прилади, які використовують взаємодію електронних потоків з біжучими хвилями.....                               | 463        |
| 11.4.1  | Лампа біжучої хвилі та її дискретне рівняння.....   | 464        |

|  |            |
|--|------------|
| 11.4.2 Лампа оберненої хвилі. Принцип дії та умова генерації..                                 | 473        |
| 11.5 Електронно-хвильові прилади: резистивний і плазмовий підсилювачі.....                     | 477        |
| 11.5.1 Резистивний підсилювач.....   | 478        |
| 11.5.2 Плазмовий підсилювач.....   | 480        |
| 11.6 Електронні прилади НВЧ у схрещених полях (типу <i>M</i> ).....                            | 481        |
| 11.6.1 Електроніка приладів типу <i>M</i> .....  | 482        |
| 11.6.2 Види приладів типу <i>M</i> .....   | 487        |
| 11.7 Прилади, які використовують вимушене випромінювання вільних електронів.....               | 493        |
| 11.7.1 Способи фазування електронів.....   | 494        |
| 11.7.2 Електронні прилади, у яких використовуються коливання вільних електронів. Гіротрон..... | 496        |
| Контрольні запитання.....  | 499        |
| Рекомендована література.....  | 500        |
| <b>Практичні завдання для самостійної роботи.....</b>  | <b>501</b> |
| <b>Алфавітно-предметний покажчик.....</b>  | <b>511</b> |

Навчальне видання

НОВОСЯДЛИЙ Степан Петрович  
МАНДЗЮК Володимир Ігорович

## ТЕХНІКА І ЕЛЕКТРОНІКА НВЧ

Навчальний посібник

Головний редактор *Василь ГОЛОВЧАК*  
Літературна редакція *Руслана БОДНАР*  
Коректор *Надія ВЕБЕР*  
Комп'ютерна верстка *Лідія КУРІВЧАК*

Підп. до друку 2013. Формат 60x84/16.  
Папір офсет. Гарнітура "Times New Roman".  
Ум. друк. арк. 30,9. Зам. № 7. Наклад 300 пр.  
Віддруковано на ризографі.

**ISBN 978-966-640-379-0**

Видавець і виготовлювач  
Видавництво Прикарпатського національного університету  
імені Василя Стефаника  
76025, м. Івано-Франківськ,  
вул. С.Бандери, 1, тел.: 71-56-22.  
E-mail: [vdvcit@pu.if.ua](mailto:vdvcit@pu.if.ua).

*Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2718 від 12.12.2006*